

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Frères Mentouri Constantine

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques



## THÈSE

En vue de l'obtention du :

**Docteur en Sciences**

de l'Université de Constantine -1

**Mention : MATHÉMATIQUE**

Présentée et soutenue par

**Mohammed Mammeri**

**Titre de la thèse :**

**Sur les Applications Discrètes en Dimension  $N$ ,  $N > 1$**

Soutenue publiquement le 14/12/2017

**Composition du Jury :**

|    |              |       |                             |            |
|----|--------------|-------|-----------------------------|------------|
| Mr | A. Hameida   | M.C.A | Université de Constantine 1 | Président  |
| Mr | E. Zeraoulia | Prof  | Université de Tébessa       | Rapporteur |
| Mr | N. Hamri     | Prof  | C.U. de Mila                | Examineur  |
| Mr | K. Saoudi    | M.C.A | Université de Khenchela     | Examineur  |
| Mr | A. Berkane   | M.C.A | Université de Constantine 1 | Examineur  |

# Remerciements

Avant tout, je remercie Dieu, mon Seigneur, pour nous avoir donné le potentiel de comprendre les lois de notre univers et de les exploiter pour notre bien-être, et de m'avoir donné le courage et la volonté de mener à ce terme ce présent travail. Je remercie mon cher professeur **E. Zeraoulia** de m'avoir guidé et soutenu le long de ce travail avec patience et indulgence, et j'espère pouvoir un jour devenir un aussi formidable et intègre maître à mes futures élèves. Je le remercie aussi de m'avoir proposé un sujet de thèse passionnant et très riche et ouvert. Je remercie énormément Mr le professeur **A. Hameida** de m'avoir fait l'honneur de présider ma soutenance et mes remerciements vont également à Messieurs les professeurs examinateurs **N. Hamri**, **K. Saoudi** et **A. Berkane**, de m'avoir fait l'honneur en acceptant d'embellir ce travail avec leurs remarques et conseils. J'adresse des remerciements spéciaux à mon père, à ma femme Nour elhouda et à mes enfants : Ibtihadj, Aymen, Fadel, Oussama, pour leur patience et leur soutien. Finalement, je remercie tous ceux qui ont participé de prêt ou de loin dans l'élaboration de ce travail avec un conseil ou même un mot d'encouragement parmi mes camarades, mes amis, mes étudiants et mes collègues. Merci à tous...

# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Références personnelles</b>   | <b>5</b>  |
| <b>Introduction</b>  | <b>6</b>  |
| <b>1 Applications discrètes en 3-D : Bifurcation et attracteurs chaotiques</b> | <b>9</b>  |
| 1.1 Stabilité locale . . . . .   | 10        |
| 1.1.1 Bifurcation (Route vers le chaos) . . . . .                              | 11        |
| 1.1.2 Différents types de bifurcations régulières . . . . .                    | 12        |
| 1.1.3 Diagramme de bifurcation . . . . .                                       | 13        |
| 1.2 Attracteurs chaotiques . . . . .   | 13        |
| 1.2.1 Attracteur . . . . .   | 14        |
| 1.2.2 Attracteurs chaotiques . . . . .   | 15        |
| 1.3 Exposant de Lyapunov . . . . .   | 16        |
| <b>2 Propriétés d'applications discrètes quadratiques en 3-D</b>               | <b>19</b> |
| 2.1 Classification des orbites . . . . .                                       | 19        |
| 2.1.1 Orbites non bornées . . . . .  | 20        |
| 2.1.2 Orbites bornées . . . . .  | 24        |
| 2.2 Stabilité des points fixes . . . . .                                       | 27        |
| 2.3 Comportement hyperchaotique . . . . .                                      | 30        |
| 2.4 Doublement de période route vers le chaos . . . . .                        | 34        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>3</b> | <b>Applications de Hénon en 3-D</b>  | <b>37</b> |
| 3.1      | Applications de Cremona en 3-D . . . . .   | 37        |
| 3.1.1    | Application réduite . . . . .  | 38        |
| 3.1.2    | Forme normale . . . . .  | 39        |
| 3.2      | Applications de Hénon en 3-D . . . . .   | 40        |
| 3.2.1    | Exemple . . . . .  | 41        |
| 3.2.2    | Nouvelle application de Hénon en 3-D . . . . .   | 42        |
| <b>4</b> | <b>Applications de Hénon modifiées par une fonction affine par morceaux</b>                      | <b>50</b> |
| 4.1      | 1-Application affine par morceaux et crise de frontière . . . . .                                | 51        |
| 4.1.1    | Comportement local . . . . .   | 52        |
| 4.1.2    | Etude numérique . . . . .  | 54        |
| 4.2      | 2-Application affine par morceaux et collision de frontière . . . . .                            | 57        |
| 4.2.1    | Application de Hénon . . . . .   | 57        |
| 4.2.2    | Nouvelle application affine par morceaux et collision de frontière .                             | 61        |
| 4.2.3    | Analyse locale de points fixes . . . . .   | 62        |
| <b>5</b> | <b>Application de Hénon modifiée par une fonction réelle bornée</b>                              | <b>65</b> |
| 5.1      | Application de Hénon modifiée par fonction réelle bornée et grande région<br>chaotique . . . . . | 65        |
| 5.1.1    | Orbites bornées . . . . .  | 66        |
| 5.1.2    | Stabilité asymptotique des orbites . . . . .   | 67        |
| 5.1.3    | Orbites chaotiques . . . . .   | 69        |
| 5.1.4    | Route vers le chaos et observations de grande région chaotique . .                               | 70        |
| 5.2      | Conclusion générale et perspective . . . . .   | 77        |

*page vide*

# Introduction

Un système dynamique discret en 3-D, est justement écrit sous forme générale par :  $X_{n+1} = f(X_n)$  où  $f$  est une application régulière engendrée par l'itération d'une application ou d'un difféomorphisme d'un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  dans lui même. Par exemple dans les sciences de vie, deux animaux mâle et femelle d'un type de "lapin" sont mis dans un endroit lapinière chaque mois qui passe en voit que leur nombre croît et la population (les lapins) est multipliée par un certain paramètre  $\lambda$ , le paramètre  $\lambda$  définissant les conditions de vie de cette population. La loi de croissance de cette population s'écrit sous la forme :  $X_{n+1} = \lambda X_n$  où l'indice  $n$  indique le temps (numéro d'ordre de mois), le temps est discret sera donc noté par une variable  $n$  qui prend les valeurs entières ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Le premier état est  $X_1 = \lambda X_0$ , où  $X_0$  désigne la population initiale ou la condition initiale de l'état de la population, le second état qui suit immédiatement le premier est  $X_2 = \lambda X_1 = \lambda^2 X_0$ , et ainsi de suite de telle sorte que la  $n - ième$  état est donné par :  $X_n = \lambda^n X_0$ . On a donc une croissance exponentielle. Imaginons le nombre de cette population (les lapins) après un an ou deux ans. En mathématiques, une application quadratique en 3-D est un polynôme de degré deux avec un nombre quelconque de variables. Par exemple, le carré de la distance comprise entre deux points dans un espace euclidien en 3-D, donne une application quadratique de six variables qui sont les trois coordonnées des deux points. Les applications polynomiales interviennent dans de nombreux domaines scientifiques : mathématiques financières, géométrie algorithmique, théorie des nombres, théorie des jeux, biologie moléculaire, statistique, etc., les applications en 3-D n'ont pas été aussi largement étudiées comme les applications en 2-D, ces dernières années il y a une augmentation considérable de leurs études [52], [51], [15], [54], [34], [57], [16], [14]. L'une des raisons importantes pour cet état est le fait que les multi-systèmes dynamiques de dimension (la dimension de l'espace des phases est au moins quatre pour les flots et trois pour les applications) présentent des dynamiques encore plus riches et complexes qui sont décidément distinctes du cas de dimensions inférieures. En particulier, ils peuvent

posséder de nouvelles variétés d'attracteur chaotique, appelées “ wild hyperbolic attractors ” dans certaines régions de paramètres [34]. Le premier objectif de notre thèse est d'étudier l'existence des conditions suffisantes dans laquelle, l'application quadratique (2.1) en 3-D possède des orbites bornées ou non bornées, c'est-à-dire nous cherchons les conditions suffisantes qui satisfont les paramètres  $(a_i, b_i, c_i)_{0 \leq i \leq 9} \in \mathbb{R}^{30}$  dans lesquelles les orbites de l'application (2.1) sont bornées ou non bornées car la plupart des orbites chaotiques sont bornées. Le deuxième objectif de notre thèse a pour but d'étudier à la fois analytiquement et numériquement les comportement dynamiques de nouvelles applications qui sont obtenues par des modifications des applications de Hénon en 3-D, les nouvelles applications sont de types affines par morceaux et sinusoïdales, capables de réaliser des attracteurs chaotiques de type Lorenz, de type Multiples-plies, de type Lozi et autres nouveaux attracteurs chaotiques. Notre thèse est organisée à travers cinq chapitres comme suit :

**Dans le premier chapitre :** On rappellera les principales définitions et notions générales et spécifiques aux applications discrètes, utilisées tout au long de ce manuscrit (thèse) concernant, les points fixes et leurs stabilités, bifurcation, attracteurs, attracteurs chaotiques, exposants de Lyapunov.

**Dans le deuxième chapitre :** Nous présentons en détail quelques propriétés de l'application quadratique (2.1) en 3-D concernant, le 1<sup>er</sup> objectif principal de ce travail, c'est l'investigation des régions de paramètres de bifurcations  $(a_i, b_i, c_i)_{0 \leq i \leq 9} \in \mathbb{R}^{30}$  dans lesquelles les orbites de l'application (2.1) sont bornées ou non bornées, aussi nous trouvons les conditions nécessaires et suffisantes de la stabilité asymptotique des points fixes de l'application (2.1), et nous donnons une preuve stricte et rigoureuse de l'hyperchaoticité d'une nouvelle application à temps discret en 3-D. enfin, nous proposons une nouvelle famille d'applications sinusoïdales qui présente un comportement chaotique par la même route vers le chaos.

**Dans le troisième chapitre :** On citera d'abord les travaux de D. A. Miller, G. Grassi, S. V. Gonchenko, I. I. Ovsyannikov, J. D. Meiss, D. Turaev, J. C. Tatjar et autres

sur les difféomorphismes en 2-D et 3-D. Nous parlerons ensuite sur les principales notions et définitions concernant les applications de Cremona en 3-D, les applications réduite, les applications Cremona symplectiques et les formes normales des applications quadratiques en 3-D, et on terminera par une exploration sur les applications de Hénon en 3-D. En fin nous étudierons le comportement dynamique d'une nouvelle application de Hénon en 3-D.

**Dans le quatrième chapitre :** Nous emmène au cœur du 2<sup>ème</sup> objectif principal du travail réalisé, il sera consacré à l'étude des nouvelles applications de Hénon en 3-D modifiées par fonction affine par morceaux, les points fixes et leurs stabilités et les bifurcations sont étudiés en détail, le comportement dynamique de base est décrit brièvement, l'existence d'attracteurs chaotiques de types Multiples-plies et Lozi, est justifiée par méthodes numériques.

**Dans le cinquième chapitre :** Toujours au cœur du 2<sup>ème</sup> objectif principal du travail réalisé, ce chapitre est consacré à l'étude d'une nouvelle application de Hénon en 3-D modifiée par application réelle bornée, cette nouvelle application réalise de nouveaux phénomènes comme l'existence d'une région chaotique. Les points fixes, la stabilité et la bifurcation, les comportements dynamiques sont décrits avec satisfaction, la structure dynamique et l'existence d'attracteurs chaotiques de types Lorenz, et d'autres nouveaux attracteurs chaotiques, sont justifiés par des méthodes numériques.



# Chapitre 1

## Applications discrètes en 3-D : Bifurcation et attracteurs chaotiques

Un système (application à temps discret ou continue dans le temps) est dit chaotique lorsque son évolution dans le temps est tellement sensible aux conditions initiales que l'on ne peut prédire exactement dans quel état il va se trouver si l'on attend trop long temps. C'est à dire, des différences infimes dans les conditions initiales (comme des erreurs d'arrondi dans les calculs numériques) entraînent des résultats totalement différents pour de tels systèmes, rendant en général toute prédiction impossible à long terme. Les applications discrètes sont les plus étudiées à cause de la facilité relative de leurs étude, et la clarté des notions utilisées. En fait, la plupart des méthodes de traitement du chaos sont appliquées et testées sur les applications discrètes avant de passer aux autres. De ce fait, elles sont présentées comme une source de chaos de référence dans beaucoup d'études. Comme exemple les applications quadratiques (application logistique en 1-D, application de Hénon en 2-D et en 3-D) qui sont principalement des applications discrètes dont l'état chaotique dépend d'un ou plusieurs paramètres de bifurcation.

**Définition 1.1** *On appelle application de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  une fonction réelle telle que tout élément  $x$  de  $\mathbb{R}^3$  ait, par cette fonction une image  $y$  de  $\mathbb{R}^3$ .*

Un système dynamique discret  $\langle \mathbb{R}^3, \mathbb{N}, F \rangle$  est complètement déterminé par l'application  $F$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  :

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

où

$$F^n(x) = \underbrace{F \circ F \circ \dots \circ F}_{n \text{ fois}}(x) = f(n, x), \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } F^0 = id.$$

Dans un langage plus prosaïque, l'application  $F$  est appelée récurrence, itération ou transformation ponctuelle. Si le système dynamique discret est inversible, l'égalité précédente reste vraie pour  $n \in \mathbb{Z}$ .

## 1.1 Stabilité locale

De manière générale, la notion de stabilité joue également un rôle en mathématiques et en mécanique, dans les modèles économiques, les algorithmes numériques, la mécanique quantique, la physique nucléaire, etc.

Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  une fonction réelle définie une application discrète, soit  $Df(x_0)$  sa matrice Jacobienne évaluée au point fixe  $x_0$  de l'application  $f$ , pour simplifier les notions de la stabilité locale du point fixe  $x_0$  on introduit la notion de multiplicateur et pour caractériser la nature de ce point fixe nous donnons les définitions :

**Définition 1.2** *Les valeurs propres du jacobien  $Df(x_0)$  sont appelées multiplicateurs caractéristiques de  $f$  en  $x_0$ .*

**Définition 1.3** *Si ses multiplicateurs caractéristiques sont tous de module strictement inférieur à 1, alors le point fixe  $x_0$  de  $f$  est dit asymptotiquement stable.*

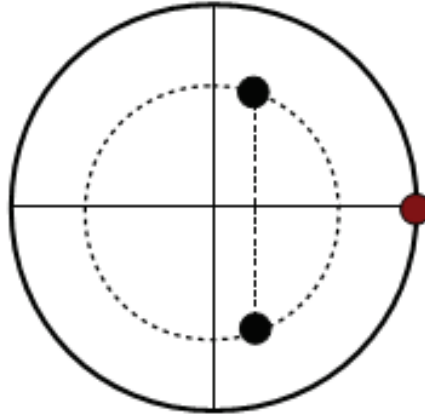


FIG. 1-1 – Exemple : Un point fixe non hyperbolique d’une application discrète en 3-D.

Cette condition de stabilité sur les multiplicateurs caractéristiques n’est pas nécessaire, elle n’est que suffisante. On a aussi la condition suffisante (mais non nécessaire) d’instabilité suivante :

**Définition 1.4** *Si l’un des multiplicateurs caractéristiques et de module strictement supérieur à 1, alors le point fixe  $x_0$  de  $f$  est dit instable.*

**Définition 1.5** *Si ses multiplicateurs sont tous de modules différents de 1, alors le point fixe  $x_0$  de  $f$  est dit hyperbolique. Si certains sont strictement inférieurs et d’autres strictement supérieurs en module que 1, alors le point fixe  $x_0$  de  $f$  est un point selle.*

### 1.1.1 Bifurcation (Route vers le chaos)

La théorie de la bifurcation étudie le changement que subit une application sous la variation d’un paramètre ou plus donc la bifurcation signifie un changement dans le comportement qualitatif d’une application (un système), suite à une variation d’un paramètre de l’application. Ce changement se produit à des points particuliers appelés points de bifurcation. Par exemple déstabilisation d’un point fixe stable, apparition ou

disparition d'un cycle ou d'un attracteur. La valeur pour laquelle la bifurcation se produit est nommée le point de bifurcation. Notons que la transition vers le chaos s'opère selon des bifurcations, il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est progressive, mais marquée des changements discontinus qu'on a déjà appelés bifurcation.

### 1.1.2 Différents types de bifurcations régulières

Dans cette section, on considère trois types de bifurcations locales : La bifurcation de doublement de période, la bifurcation point selle (ou nœud-col) et la bifurcation de Neimark. Ces bifurcations sont locales car elles peuvent être analysées par la linéarisation de l'application au voisinage d'un point fixe ou d'un cycle limite. Tous les types de bifurcations étudiées correspondent toujours à  $|\lambda_i| = 1$  (où  $\lambda_i$  représente les multiplicateurs)

#### **Bifurcation flip ou doublement de période** ( $\lambda = -1$ )

Cette bifurcation a lieu lorsqu'un des multiplicateurs est égales à  $-1$ . Un cycle d'ordre  $k$  qui subie cette bifurcation va changer de nature et créer un cycle d'ordre  $2k$  de la même nature. C'est-à-dire, un point fixe stable d'ordre 1, par exemple, devient instable en même temps que l'apparition d'un cycle d'ordre 2 stable.

#### **Bifurcation fold ou nœud-col** ( $\lambda = +1$ )

La bifurcation  $\lambda = +1$  correspond à la situation où l'un des multiplicateurs est égale à  $+1$ . Ce type de bifurcation donne naissance à deux cycles d'ordre  $k$  en même temps, l'un est attractif et l'autre est instable.

#### **Bifurcation de Neimark** ( $\lambda = e^{\pm i\theta}$ )

Cette bifurcation se produit lorsque la matrice Jacobienne possède deux multiplicateurs complexes conjugués  $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$  et de plus  $|\lambda_{i=1,2}| = 1$ .

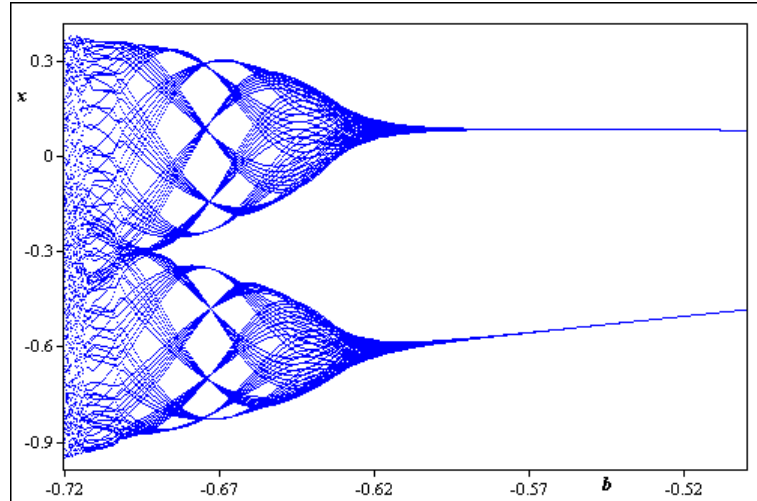


FIG. 1-2 – Exemple : Diagramme de bifurcation de l’application de Hénon (3.8) obtenu pour  $a = 0$ ,  $c = 0.9$  et  $-0.7 \leq b \leq -0.5$ .

### 1.1.3 Diagramme de bifurcation

Le diagramme de bifurcation est un tracé des points de l’état stationnaire du système en fonction du paramètre du contrôle (ou bifurcation). Les graphiques qui explicitent ces bifurcations, sont logiquement appelés diagrammes de bifurcation. Typiquement, on choisit un état variable et on trace la valeur limite de celui-ci en fonction d’un seul paramètre de contrôle. Pour les systèmes discontinus, on trace simplement les valeurs successives d’un état variable. Un diagramme de bifurcation résume l’information sur l’espace d’état et la variation en fonction du paramètre peut être visualisée. La transition d’un état stationnaire vers le chaos peut être observée.

## 1.2 Attracteurs chaotiques

Dans la littérature on trouve plusieurs définitions d’attracteurs. En général, un attracteur est défini comme une sous-partie fermée de l’espace des phases qui "attire" toutes les autres orbites vers elle.

### 1.2.1 Attracteur

**Définition 1.6** [26] Soit  $\langle \mathbb{R}^3, f \rangle$  un système dynamique discret, une sous-partie  $A$  de  $\mathbb{R}^3$  est appelée attracteur si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

1.  $A$  est fermée ;
2.  $A$  est positivement invariante ;
3.  $A$  est attractive, c'est-à-dire, il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $A$  tel que :

(a)  $U$  est positivement invariant ;

(b)  $U$  est attiré par  $A : \forall u \in U, \lim_{t \rightarrow \infty} d(f^t(u), A) = 0$ .

#### Bassin d'attraction

On rappelle que tout voisinage ouvert qui satisfait les conditions 3.a et 3.b dans la définition sous-dessus est appelée voisinage attiré par  $A$ . Il faut remarquer que bien qu'il existe un voisinage attiré  $U$ , on ne peut pas affirmer qu'il est unique : en effet  $A$  peut admettre plusieurs voisinages attirés par lui-même. Le Bassin d'attraction est l'ensemble des points de l'espace des phases qui subissent le phénomène d'attraction. Les trajectoires de ces points évoluent toutes vers l'attracteur.

**Définition 1.7** On appelle bassin d'attraction  $B(A)$  de  $A$  le plus grand des tels voisinages attirés, c'est-à-dire :  $B(A) = \bigcup \{U \in P(\mathbb{R}^3) : U \text{ est un voisinage attiré par } A\}$ .

#### Propriétés d'un bassin d'attraction :

1. Le comportement qualitatif d'un système dynamique dépend fondamentalement du bassin d'attraction.
2. La frontière d'un bassin peut être lisse ou fractale, la fractalité est une conséquence du mouvement chaotique des orbites sur la frontière.
3. Les frontières d'un bassin peuvent être des types qualitativement différents. Par exemple la nature d'un bassin peut changer à partir d'une courbe simple lisse à un autre fractale. Ce phénomène est appelé métamorphose (voir [15]).

## Différents types d'attracteurs

Comment distinguer un phénomène chaotique d'un phénomène aléatoire ? C'est la question que se posent les physiciens lorsqu'ils sont confrontés au comportement chaotique d'un système. Il existe trois types d'attracteurs qui caractérisent l'évolution de systèmes non chaotiques, et ils peuvent être de trois sortes : Les points fixes, les cycles limites (orbites périodiques) et les cycles limites (quasi-périodiques).

### 1.2.2 Attracteurs chaotiques

Jusqu'en 1963 on ne connaissait que trois types d'attracteurs : le point fixe, le cycle limite et le tore. Le tracé représentant l'évolution d'un système chaotique dans l'espace des phases en fonction du temps se comporte de manière «étrange» par rapport aux attracteurs des systèmes simples comme nous l'avons vu plus haut. C'est pourquoi D. Ruelle l'a nommé «attracteur étrange». Un attracteur est dit étrange ou chaotique lorsque les points le constituant génèrent des trajectoires sensibles aux conditions initiales. Un attracteur chaotique est généralement associé à l'existence d'une infinité de trajectoires instables de tous ordres.

**Définition 1.8** *Soit  $A$  est un attracteur de  $\mathbb{R}^3$ , on dit que  $A$  est un attracteur étrange si il est chaotique ( $A$  vérifié la notion de sensibilité aux conditions initiales), un lecteur intéressé pourra consulter [15].*

### Différents types d'attracteurs chaotiques

Nous rapportons une classification des attracteurs chaotiques des systèmes dynamiques non linéaires. En règle générale, à l'heure actuelle, les attracteurs chaotiques peuvent être classés en trois catégories principales [15] :

**Attracteur hyperbolique** Les attracteurs hyperboliques sont des ensembles-limites pour lesquels "l'axiome A" de Smale est satisfait, c'est-à-dire les attracteurs hyperboliques

sont structurellement stables. Les orbites périodiques et les orbites homoclines sont denses et de mêmes types de selles, les variétés stables et instables ont la même dimension et elles se coupent transversalement. Généralement, la plupart des systèmes physiques connus n'appartiennent pas à la classe des systèmes hyperboliques. D'autre part, les attracteurs chaotiques hyperboliques sont robustes (structurellement stable).

**Attracteur de type de Lorenz** les attracteurs de types de Lorenz ne sont pas structurellement stables, mais leurs orbites homoclines et hétéroclines sont structurellement stables (hyperboliques), et aucune orbite périodique stable apparaît sous les petites variations des paramètres de bifurcation, comme par exemple dans le système de Lorenz lui-même [15].

**Quasi-attracteurs** Les quasi-attracteurs sont des ensembles-limites consistent des orbites périodiques des types topologiquement différents, et des orbites structurellement instables. Par exemple, les attracteurs générés par le circuit de Chua [33]. On note que ces types sont plus complexes que les deux attracteurs précédents et donc ne conviennent pas pour certaines applications potentielles comme "la sécurité de la communication". Pour plus d'informations sur ces types d'attracteurs chaotiques, voir [15].

### 1.3 Exposant de Lyapunov

La sensibilité aux conditions initiales généralement appelée "l'effet papillon" a été popularisée par le météorologue Edward Lorenz [12]. Elle se caractérise par le fait que la distance entre deux trajectoires de phase initialement voisines, tend à augmenter de manière exponentielle au cours du temps. Le mathématicien russe Alexander Lyapunov [3] s'est penché sur le phénomène de sensibilité aux conditions initiales et a proposé une grandeur permettant de la quantifier. Cette grandeur est appelée "exposant de Lyapunov". On dit que l'on a la propriété de sensibilité aux conditions initiales, si au moins un des exposants de Lyapunov est strictement positif. En outre, l'exposant de Lyapunov



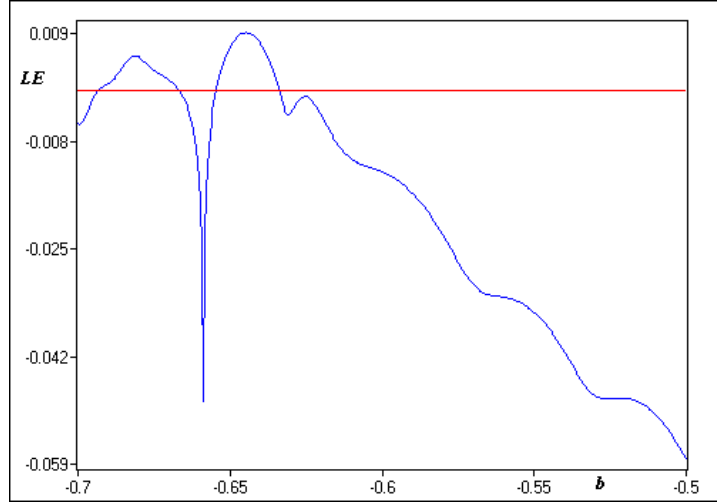


FIG. 1-3 – Exemple : Variation de l'exposant de Lyapunov de l'application de Hénon (3.8) obtenue pour  $a = 0$ ,  $c = 0.9$  et  $-0.7 \leq b \leq -0.5$ .

permet de caractériser quantitativement le caractère chaotique d'un système dynamique. Pour les systèmes discrets, les exposants de Lyapunov sont définis dans [8], [17] comme suit :

On considère le système discret :

$$X_{n+1} = f(X_n), X_n \in \mathbb{R}^3, n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

où la fonction  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , est un champ de vecteurs (ou difféomorphisme) associé du système (1.1). Soient  $J(X_n)$  sa Jacobienne en  $X_n \in \mathbb{R}^3$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  et la matrice :

$$T_N(X_0) = J(X_{N-1}) J(X_{N-2}) \dots J(X_1) J(X_0).$$

D'autre part, soit  $J_i(X_0, N)$  le module de la valeur propre  $i$  ème de la matrice produit  $T_N(X_0)$ , où  $i = 1, 2, 3$ . et  $N = 0, 1, 2, \dots$

D'après ce qui précède nous avons la définition :

**Définition 1.9** *les exposants de Lyapunov du système discret en 3-D de la trajectoire*

issue du point  $X_0$  sont définis s'il existe par :

$$l_i(X_0) = \ln \left( \lim_{N \rightarrow +\infty} J_i(X_0, N)^{\frac{1}{N}} \right), i = 1, 2, 3. \quad (1.2)$$

Dans certaines situations, il est important d'estimer la borne inférieure et la borne supérieure des exposants de Lyapunov d'un système dynamique donné en 3-D. Des résultats intéressants pour les applications discrètes ont été donnés par [8], [17] :

**Théorème 1.1** *Si l'on considère le système  $X_{n+1} = f(X_n)$ ,  $X_n \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  tel que*

$$\|Df(x)\| = \|J\| = \sqrt{\lambda_{\max}(J^T J)} \leq N < +\infty,$$

*et que la plus petite valeur propre de  $J^T J$  satisfait*

$$\lambda_{\min}(J^T J) \geq \theta > 0,$$

*où  $N^2 \geq \theta$ , alors pour tout  $X_0 \in \Omega$ , tous les exposants de Lyapunov au point  $X_0$  sont situés à l'intérieur de l'intervalle  $[\frac{\ln \theta}{2}, \ln N]$ , c'est-à-dire*

$$\frac{\ln \theta}{2} \leq l_i(X_0) \leq \ln N, \quad i = 1, 2, 3.$$

*où  $l_i(X_0)$  sont les exposants de Lyapunov de l'application  $f$ , et  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^3$ .*

## Chapitre 2

# Propriétés d'applications discrètes quadratiques en 3-D

L'application discrète quadratique en 3-D est un couple  $\langle \mathbb{R}^3, f \rangle$ , formé par l'espace  $\mathbb{R}^3$  appelé espace des phases et  $f$  un difféomorphisme en général, appelé application récurrence, dans ce travail nous nous intéressons au cas où la variable temporelle est discrète. Dans ce chapitre on étudiera certaines propriétés très importantes dans l'étude des applications quadratiques (2.1) en 3-D. Le contenu de ce chapitre a fait l'objet de trois publications internationales [42], [43], [41].

### 2.1 Classification des orbites

Dans les domaines mathématiques et physique, les systèmes chaotiques sont des systèmes dynamiques qui, bien qu'étant en principe déterministes, présentent des comportements complexes, extrêmement sensibles aux conditions initiales et paraissant désordonnés. De plus, les trajectoires d'un système chaotique dans l'espace des phases sont bornées et imprévisibles (imprédictibles). Dans cette subsection nous examinons les domaines des paramètres  $(a_i, b_i, c_i)_{0 \leq i \leq 9} \in \mathbb{R}^{30}$  dans lesquelles les orbites de l'application (2.1) sont bornées ou non bornées. Nous utilisons l'idée de la non existence des points

fixes [17]. Notons aussi que le nombre de points fixes dépend principalement de la forme de l'application (2.1) et l'ensemble des coefficients  $(a_i, b_i, c_i)_{0 \leq i \leq 9}$ . L'existence des orbites bornées joue un rôle très important dans l'étude des systèmes dynamiques, car la plupart des orbites périodiques, quasi-périodiques et les orbites chaotiques sont bornées. D'autre part dans plusieurs cas de l'application (2.1), s'il n'y a pas de points fixes donc, il n'y a pas de chaos, et s'il existe des points fixes, alors il existe des domaines qui contiennent les orbites bornées et des domaines contiennent les orbites non-bornées.

La forme générale de l'application quadratique en 3-D est donné par :

$$f(x, y, z) = \begin{cases} f_1(x, y, z) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6z^2 + a_7xy + a_8xz + a_9yz \\ f_2(x, y, z) = b_0 + b_1x + b_2y + b_3z + b_4x^2 + b_5y^2 + b_6z^2 + b_7xy + b_8xz + b_9yz \\ f_3(x, y, z) = c_0 + c_1x + c_2y + c_3z + c_4x^2 + c_5y^2 + c_6z^2 + c_7xy + c_8xz + c_9yz \end{cases} \quad (2.1)$$

tel que  $(a_i, b_i, c_i)_{0 \leq i \leq 9} \in \mathbb{R}^{30}$  sont des paramètres réels, appelés les paramètres de bifurcation.

### 2.1.1 Orbites non bornées

Tout d'abord, un point fixe  $(x, y, z)$  de l'application (2.1) doit satisfaire simultanément les égalités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6z^2 + a_7xy + a_8xz + a_9yz = x \\ b_0 + b_1x + b_2y + b_3z + b_4x^2 + b_5y^2 + b_6z^2 + b_7xy + b_8xz + b_9yz = y \\ c_0 + c_1x + c_2y + c_3z + c_4x^2 + c_5y^2 + c_6z^2 + c_7xy + c_8xz + c_9yz = z \end{array} \right.$$

l'application (2.1) ne possède pas de points fixes si l'une des inégalités est vérifiée,

pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  :

$$a_4x^2 + (a_1 + a_7y + a_8z - 1)x + a_2y + a_3z + a_5y^2 + a_6z^2 + a_9yz + a_0 \neq 0$$

$$b_4x^2 + (b_1 + b_7y + b_8z - 1)x + b_2y + b_3z + b_5y^2 + b_6z^2 + b_9yz + b_0 \neq 0$$

$$c_4x^2 + (c_1 + c_7y + c_8z - 1)x + c_2y + c_3z + c_5y^2 + c_6z^2 + c_9yz + c_0 \neq 0$$

d'où

$$a_4x^2 + (a_1 + a_7y + a_8z - 1)x + a_2y + a_3z + a_5y^2 + a_6z^2 + a_9yz + a_0 > 0 \dots (1)$$

$$a_4x^2 + (a_1 + a_7y + a_8z - 1)x + a_2y + a_3z + a_5y^2 + a_6z^2 + a_9yz + a_0 < 0 \dots (2)$$

$$b_4x^2 + (b_1 + b_7y + b_8z - 1)x + b_2y + b_3z + b_5y^2 + b_6z^2 + b_9yz + b_0 < 0 \dots (3)$$

$$b_4x^2 + (b_1 + b_7y + b_8z - 1)x + b_2y + b_3z + b_5y^2 + b_6z^2 + b_9yz + b_0 > 0 \dots (4)$$

$$c_4x^2 + (c_1 + c_7y + c_8z - 1)x + c_2y + c_3z + c_5y^2 + c_6z^2 + c_9yz + c_0 < 0 \dots (5)$$

$$c_4x^2 + (c_1 + c_7y + c_8z - 1)x + c_2y + c_3z + c_5y^2 + c_6z^2 + c_9yz + c_0 > 0 \dots (6)$$

Nous cherchons les conditions suffisantes de l'existence des orbites non bornées, supposons nous comme exemple l'inégalité (1)  $f_1(x, y, z) > x$ , soit  $x_0 \geq 0$  alors on a pour tout entier  $k$ ,  $f_1(x_k, y_k, z_k) > x_k$  c'est-à-dire  $x_{k+1} > x_k > x_{k-1} > \dots x_0 \geq 0$ . Considérons la distance euclidienne  $d(x_k, 0) = \|x_k\| = x_k$  représente la mesure de la distance entre le premier composant  $x_k$  de l'application (2.1) et l'origine  $O$  de la droite réelle. D'où on a  $d(x_{k+1}, 0) > d(x_k, 0) > d(x_{k-1}, 0) > \dots d(x_0, 0) \geq 0$ , alors il existe un nombre réel  $\delta$  strictement positif, tel que  $d(x_k, 0) = d(x_{k-1}, 0) + \delta$  ce qui implique  $d(x_k, 0) = d(x_0, 0) + (k + 1)\delta$ . Alors on a  $\lim_{k \rightarrow +\infty} d(x_k, 0) = +\infty$ . Si  $x_0 < 0$  on utilise la même méthode.

Le discriminant  $\Delta_1$  de (1) est :

$$\Delta_1 = (a_1 + a_7y + a_8z - 1)^2 - 4a_4(a_2y + a_3z + a_5y^2 + a_6z^2 + a_9yz + a_0) \quad (2.2)$$

l'inégalité (1) est vérifiée pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  si et seulement si  $\Delta_1 < 0$  et  $a_4 > 0$  pour tout  $(y, z) \in \mathbb{R}^2$ , il vient

$$\begin{cases} a_4 > 0 \\ \mu_1 y^2 + \mu_2 y + \mu_3 < 0 \dots (*) \end{cases} \quad (2.3)$$

où

$$\begin{cases} \mu_1 = a_7^2 - 4a_4a_5 \\ \mu_2 = 2[(a_7a_8 - 2a_4a_9)z + a_7(a_1 - 1) - 2a_2a_4] \\ \mu_3 = (a_8^2 - 4a_4a_6)z^2 + 2(a_1a_8 - 2a_3a_4 - a_8)z + (a_1 - 1)^2 - 4a_0a_4 \end{cases} \quad (2.4)$$

le discriminant  $\Delta_2$  de (\*) est :

$$\Delta_2 = \mu_2^2 - 4\mu_1\mu_3 \quad (2.5)$$

L'inégalité (\*) est vérifiée pour tout  $(y, z) \in \mathbb{R}^2$  si et seulement si  $\Delta_2 < 0$  et  $\mu_1 < 0$  pour tout  $z \in \mathbb{R}$ , il vient

$$\begin{cases} a_7^2 - 4a_4a_5 < 0 \\ \omega_1 z^2 + \omega_2 z + \omega_3 < 0 \dots (**) \end{cases} \quad (2.6)$$

le discriminant  $\Delta_3$  de (\*\*) est :

$$\Delta_3 = \omega_2^2 - 4\omega_1\omega_3$$

l'inégalité (\*\*) est vérifiée pour tout  $z \in \mathbb{R}$  si et seulement si  $\Delta_3 < 0$  et  $\omega_1 < 0$ , il vient

$$\begin{cases} a_6a_7^2 + a_5a_8^2 + a_4a_9^2 - 4a_4a_5a_6 - a_7a_8a_9 < 0 \\ \omega_2^2 - 4\omega_1\omega_3 < 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

On applique la même méthode ci-dessus pour les autres cas. D'après ce qui précède, nous avons prouvé le théorème suivant :

**Théorème 2.1** *Si  $(a_i, b_i, c_i)_{0 \leq i \leq 9} \in \Omega = \cup_{i=1}^6 S_i \subset \mathbb{R}^{30}$ , alors toutes les orbites de l'application (2.1) ne sont pas bornées.*

où  $(S_i)_{1 \leq i \leq 6}$  sont les sous-ensembles suivants :

$$S_1 : \begin{cases} a_4 > 0, a_5 > \frac{a_7^2}{4a_4} \\ a_6a_7^2 + a_5a_8^2 + a_4a_9^2 - 4a_4a_5a_6 - a_7a_8a_9 < 0 \\ \omega_2^2 - 4\omega_1\omega_3 < 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

$$S_2 : \begin{cases} a_4 < 0, a_5 < \frac{a_7^2}{4a_4} \\ a_6a_7^2 + a_5a_8^2 + a_4a_9^2 - 4a_4a_5a_6 - a_7a_8a_9 > 0 \\ \omega_2^2 - 4\omega_1\omega_3 < 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

$$S_3 : \begin{cases} b_4 > 0, b_5 > \frac{b_7^2}{4b_4} \\ b_6b_7^2 + b_5b_8^2 + b_4b_9^2 - 4b_4b_5b_6 - b_7b_8b_9 < 0 \\ \psi_2^2 - 4\psi_1\psi_3 < 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

$$S_4 : \begin{cases} b_4 < 0, b_5 < \frac{b_7^2}{4b_4} \\ b_6b_7^2 + b_5b_8^2 + b_4b_9^2 - 4b_4b_5b_6 - b_7b_8b_9 > 0 \\ \psi_2^2 - 4\psi_1\psi_3 < 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

$$S_5 : \begin{cases} c_4 > 0, c_5 > \frac{c_7^2}{4c_4} \\ c_6c_7^2 + c_5c_8^2 + c_4c_9^2 - 4c_4c_5c_6 - c_7c_8c_9 < 0 \\ \xi_2^2 - 4\xi_1\xi_3 < 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

$$S_6 : \begin{cases} c_4 < 0, c_5 < \frac{c_7^2}{4c_4} \\ c_6c_7^2 + c_5c_8^2 + c_4c_9^2 - 4c_4c_5c_6 - c_7c_8c_9 > 0 \\ \xi_2^2 - 4\xi_1\xi_3 < 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

et

$$\begin{cases} \omega_1 = 16a_4(a_6a_7^2 + a_5a_8^2 + a_4a_9^2 - 4a_4a_5a_6 - a_7a_8a_9) \\ \omega_2 = 16a_4(a_3a_7^2 - 4a_3a_4a_5 + 2a_1a_5a_8 - a_1a_7a_9 + 2a_2a_4a_9 - a_2a_7a_8 - 2a_5a_8 + a_7a_9) \\ \omega_3 = 16a_4(a_0a_7^2 + a_1^2a_5 + a_2^2a_4 - 4a_0a_4a_5 - a_1a_2a_7 - 2a_1a_5 + a_2a_7 + a_5) \end{cases} \quad (2.14)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1 = 16b_4(b_6b_7^2 + b_5b_8^2 + b_4b_9^2 - 4b_4b_5b_6 - b_7b_8b_9) \\ \psi_2 = 16b_4(b_3b_7^2 - 4b_3b_4b_5 + 2b_1b_5b_8 - b_1b_7b_9 + 2b_2b_4b_9 - b_2b_7b_8 - 2b_5b_8 + b_7b_9) \\ \psi_3 = 16b_4(b_0b_7^2 + b_1^2b_5 + b_2^2b_4 - 4b_0b_4b_5 - b_1b_2b_7 - 2b_1b_5 + b_2b_7 + b_5) \end{array} \right. \quad (2.15)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = 16c_4(c_6c_7^2 + c_5c_8^2 + c_4c_9^2 - 4c_4c_5c_6 - c_7c_8c_9) \\ \xi_2 = 16c_4(c_3c_7^2 - 4c_3c_4c_5 + 2c_1c_5c_8 - c_1c_7c_9 + 2c_2c_4c_9 - c_2c_7c_8 - 2c_5c_8 + c_7c_9) \\ \xi_3 = 16c_4(c_0c_7^2 + c_1^2c_5 + c_2^2c_4 - 4c_0c_4c_5 - c_1c_2c_7 - 2c_1c_5 + c_2c_7 + c_5) \end{array} \right. \quad (2.16)$$

### 2.1.2 Orbites bornées

On considère les sous-ensembles de  $\mathbb{R}^{30}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{S}_{11} : a_4 < 0 \\ \overline{S}_{12} : a_5 < \frac{a_7^2}{4a_4} \\ \overline{S}_{13} : a_6a_7^2 + a_5a_8^2 + a_4a_9^2 - 4a_4a_5a_6 - a_7a_8a_9 > 0 \\ \overline{S}_{14} : \omega_2^2 - 4\omega_1\omega_3 > 0 \end{array} \right. \quad (2.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{S}_{21} : a_4 > 0 \\ \overline{S}_{22} : a_5 > \frac{a_7^2}{4a_4} \\ \overline{S}_{23} : a_6a_7^2 + a_5a_8^2 + a_4a_9^2 - 4a_4a_5a_6 - a_7a_8a_9 < 0 \\ \overline{S}_{24} : \omega_2^2 - 4\omega_1\omega_3 > 0 \end{array} \right. \quad (2.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{S}_{31} : b_4 < 0 \\ \overline{S}_{32} : b_5 < \frac{b_7^2}{4b_4} \\ \overline{S}_{33} : b_6b_7^2 + b_5b_8^2 + b_4b_9^2 - 4b_4b_5b_6 - b_7b_8b_9 > 0 \\ \overline{S}_{34} : \psi_2^2 - 4\psi_1\psi_3 > 0 \end{array} \right. \quad (2.19)$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{S_{41}} : b_4 > 0 \\ \overline{S_{42}} : b_5 > \frac{b_7^2}{4b_4} \\ \overline{S_{43}} : b_6b_7^2 + b_5b_8^2 + b_4b_9^2 - 4b_4b_5b_6 - b_7b_8b_9 < 0 \\ \overline{S_{44}} : \psi_2^2 - 4\psi_1\psi_3 > 0 \end{array} \right. \quad (2.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{S_{51}} : c_4 < 0 \\ \overline{S_{52}} : c_5 < \frac{c_7^2}{4c_4} \\ \overline{S_{53}} : c_6c_7^2 + c_5c_8^2 + c_4c_9^2 - 4c_4c_5c_6 - c_7c_8c_9 > 0 \\ \overline{S_{54}} : \xi_2^2 - 4\xi_1\xi_3 > 0 \end{array} \right. \quad (2.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{S_{61}} : c_4 > 0 \\ \overline{S_{62}} : c_5 > \frac{c_7^2}{4c_4} \\ \overline{S_{63}} : c_6c_7^2 + c_5c_8^2 + c_4c_9^2 - 4c_4c_5c_6 - c_7c_8c_9 < 0 \\ \overline{S_{64}} : \xi_2^2 - 4\xi_1\xi_3 > 0 \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Alors on a

$$\overline{S_i} = \cup_{j=1}^{j=4} \overline{S_{ij}} \quad , i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (2.23)$$

tels que, les sous-ensembles  $(\overline{S_i})_{1 \leq i \leq 6}$  sont les complémentaires dans  $\mathbb{R}^{30}$  des sous-ensembles  $(S_i)_{1 \leq i \leq 6}$  donnés par (2.8), (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) et (2.13). D'après ce qui précède, nous avons le théorème suivant :

**Théorème 2.2** *Si  $(a_i, b_i, c_i)_{0 \leq i \leq 9} \in \overline{\Omega} = \cap_{i=1}^{i=6} \cup_{j=1}^{j=4} \overline{S_{ij}} \subset \mathbb{R}^{30}$ , alors il y a une possibilité de l'existence des orbites bornées de l'application (2.1).*

Ici, l'ensemble  $\overline{\Omega}$  est le complémentaire de l'ensemble  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^{30}$ .

**Exemple :** Comme exemple, nous examinons les régions des paramètres de bifurcation  $a, b$  et  $c$  d'une façon que les orbites de l'application (2.24) soient bornées ou non bornées.

L'application de Hénon (2.24) en 3-D [15] est bien définie par :

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ a + bx + cy - z^2 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Nous étudions le nombre de points fixes, un point fixe de l'application (2.24) est la solution réelle de l'équation  $f(x, y, z) = (x, y, z)$  par conséquent on doit résoudre l'équation  $(y, z, a + bx + cy - z^2) = (x, y, z)$ , alors on a l'équation  $-z^2 + (c + b - 1)z + a = 0$ , son discriminant est  $\Delta = (c + b - 1)^2 + 4a$ .

1. Si  $\Delta < 0$  c'est-à-dire  $(c+b-1)^2 + 4a < 0$  on obtient  $a < -\frac{(c+b-1)^2}{4}$ , donc l'application (2.24) ne possède pas de point fixe.
2. Si  $\Delta \geq 0$  c'est-à-dire  $(c+b-1)^2 + 4a \geq 0$  on obtient  $a \geq -\frac{(c+b-1)^2}{4}$ , alors l'application (2.24) admet au moins un point fixe.

Si nous posons  $A_0(b, c) = -\frac{(c+b-1)^2}{4}$ , alors nous nous permettons d'énoncer le théorème suivant :

**Théorème 2.3** a) Si  $a < A_0(b, c)$  alors, toutes les orbites de l'application (2.24) ne sont pas bornées.

b) Si  $a \geq A_0(b, c)$  alors, il y a une possibilité de l'existence des orbites bornées de l'application (2.24).

Nous testons numériquement les résultats analytiques ci-dessus. Les régions des orbites bornées et non bornées sont obtenues de l'application (2.24) pour  $b = 0.7$ , et  $-6 \leq c \leq 6$ , elles sont représentées dans Fig.2-1, où (C) est la courbe d'équation (C) :  $a = -\frac{(c+b-1)^2}{4}$ . D'autre par, s'il existe des points fixes, c'est-à-dire  $a \geq -\frac{(c+b-1)^2}{4}$ , alors, il existe des domaines contenant toutes les orbites bornées, c'est-à-dire il est possible d'existe des attracteurs chaotiques de différents types pour l'application (2.24), car l'existence d'attracteurs chaotiques sans points fixes est rarement le cas.

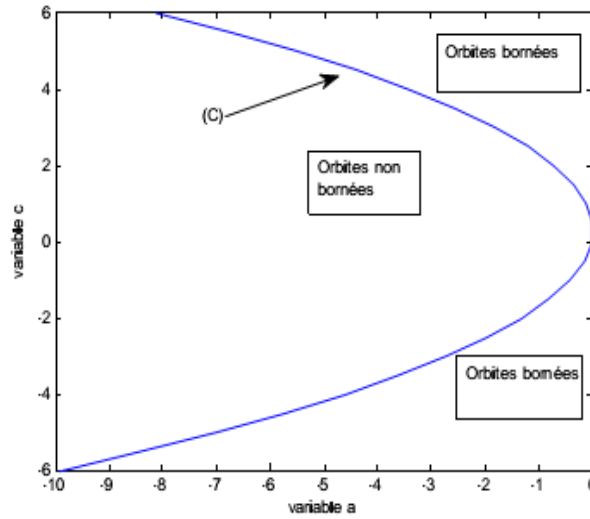


FIG. 2-1 – Les zones des orbites non bornées et bornées dans le plan  $(a; c)$  de l’application de Hénon (2.24).

Choisissons les paramètres  $a = 0$ ,  $c = 0.9$ , et  $b = 0.68$ , l’application (2.24) possède deux points fixes  $P_1(0, 0, 0)$  et  $P_2(0.58, 0.58, 0.58)$ . Les valeurs propres de la matrice Jacobienne au point  $P_1$  sont :  $\lambda_1 = -0.604633 - 0.443558i$ ,  $\lambda_2 = -0.604633 + 0.443558i$ , et  $\lambda_3 = 1.20927$ , alors  $|\lambda_{i(i=1,2)}| < 1$  et  $|\lambda_3| > 1$  dans ce cas le point fixe  $P_1$  est selle, les exposants de Lyapunov correspondants sont :  $L_1 = L_2 = -0.287838$  et  $L_3 = 0.190017$ . Les valeurs propres de l’équation caractéristique de la matrice Jacobienne de l’application (2.24) au point  $P_2$  sont :  $\lambda_1 = -1.45739$ ,  $\lambda_2 = -0.550375$ , et  $\lambda_3 = 0.847764$ , alors  $|\lambda_1| > 1$  et  $|\lambda_{i(i=2,3)}| < 1$ , par conséquent le point fixe  $P_2$  est selle, les exposants de Lyapunov correspondants sont  $L_1 = 0.376647$ ,  $L_2 = -0.597155$  et  $L_3 = -0.165153$ . Deux attracteurs de Hénon en 3-D de l’application (2.24), sont représentés en Fig.2-2.

## 2.2 Stabilité des points fixes

Dans cette section nous présentons le critère qui détermine rigoureusement les domaines des paramètres  $(a_i, b_i, c_i)_{0 \leq i \leq 9} \in \mathbb{R}^{30}$  dans lesquels les points fixes de l’application

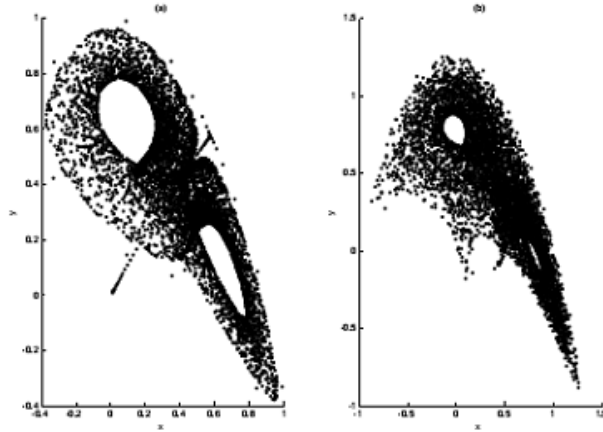


FIG. 2-2 – Attracteurs chaotiques de l’application (2.24) de Hénon en 3-D dans le plan  $x - y$ . (a) pour  $a = 0, b = 0.68$  et  $c = 0.9$ . (b) pour  $a = 0.13, b = 0.85$  et  $c = 0.65$ .

(2.1) soient asymptotiquement stables. En règle générale, le chaos peut apparaître dans l’application (2.1) s’il y a au moins un point fixe qui n’est pas asymptotiquement stable, c’est-à-dire qu’il doit être un point fixe selle ou un point fixe instable. D’autre part les points selle sont un cas composé des valeurs propres de module inférieur et supérieur de l’unité. Ils sont donc à la fois des points stables et instables, cette dualité est la source de comportements plus complexes comme les points homocliniques.

Nous appliquons le critère de Schur-Cohn-Jury [45] pour obtenir les conditions nécessaires et suffisantes satisfaisant par les coefficient  $(a_i, b_i, c_i)_{0 \leq i \leq 9} \in \mathbb{R}^{30}$ , dans lesquelles les solutions du polynôme caractéristique de 3<sup>e</sup> degré (2.26) sont asymptotiquement stables, c’est-à-dire les solutions sont à l’intérieur du cercle d’unité, le critère de Schur-Cohn-Jury est :

**Critère 2.4** *Les zéros du polynôme caractéristique  $P(\lambda) = b_3\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0$  sont à*

*l'intérieur du cercle d'unité si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

$$\left\{ \begin{array}{l} |b_0| < b_3 \\ P(+1) = b_3 + b_2 + b_1 + b_0 > 0 \\ P(-1) = -b_3 + b_2 - b_1 + b_0 < 0 \\ b_0^2 - b_3^2 < b_0 b_2 - b_1 b_3 \end{array} \right.$$

où  $b_0, b_1, b_2$  et  $b_3$  sont des nombres réels et  $b_3 > 0$ .

Utilisons le critère (2.4) pour déterminer le comportement asymptotique des points fixes du système non linéaire discret (2.1). La matrice jacobienne de l'application (2.1)

en un point fixe. est  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ , le polynôme caractéristique de la matrice jacobienne calculé en un point fixe est un cubique et prend la forme :

$$P(\lambda) = \lambda^3 - tr(A)\lambda^2 + mp(A)\lambda - \det(A) \quad (2.25)$$

Dont les coefficients dépendent de la matrice  $A = [a_{ij}]$  : Sa trace  $tr(A)$ , son déterminant  $\det(A)$ , et la deuxième trace  $mp(A)$ .

Posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ c = mp(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} + a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} \\ b = \det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \end{array} \right. \quad (2.26)$$

Pour déterminer les conditions de stabilité des points fixes, nous appliquons le critère [45] (équivalent aux conditions [55]). Notons que le polynôme caractéristique de la matrice Jacobienne maintenant est un cubique qui prend la forme :  $P_3(\lambda) = \lambda^3 - a\lambda^2 + c\lambda - b$ , les valeurs propres de  $P_3$  en un point fixe  $S(x_0, y_0, z_0)$ , sont appelées multiplicateurs caractéristiques de  $P_3$  en  $S(x_0, y_0, z_0)$ . Le critère 2.4 affirme que tous les multiplicateurs

caractéristiques ont un module inférieur à 1 si les conditions suivantes sont vérifiées :

**Critère 2.5** *Le point fixe  $S(x_0, y_0, z_0)$  de l'application (2.1) est asymptotiquement stable si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

$$\left\{ \begin{array}{l} |b| < 1 \\ 1 - a + c - b > 0 \\ 1 + a + c + b > 0 \\ 1 - b^2 > c - ab \end{array} \right. \quad (2.27)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} a = a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ c = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} + a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} \\ b = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \end{array} \right. \quad (2.28)$$

et les fonctions indiquées par  $a_{ij} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sont définies par

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} = a_1 + 2a_4x_0 + a_7y_0 + a_8z_0 \\ a_{12} = a_2 + 2a_5y_0 + a_7x_0 + a_9z_0 \\ a_{13} = a_3 + a_8x_0 + 2a_6z_0 + a_9y_0 \\ a_{21} = b_1 + 2b_4x_0 + b_7y_0 + b_8z_0 \\ a_{22} = b_2 + 2b_5y_0 + b_7x_0 + b_9z_0 \\ a_{23} = b_3 + b_8x_0 + 2b_6z_0 + b_9y_0 \\ a_{31} = c_1 + 2c_4x_0 + c_7y_0 + c_8z_0 \\ a_{32} = c_2 + 2c_5y_0 + c_7x_0 + c_9z_0 \\ a_{33} = c_3 + c_8x_0 + 2c_6z_0 + c_9y_0. \end{array} \right. \quad (2.29)$$

## 2.3 Comportement hyperchaotique

Le terme ‘‘Hyperchaotique’’ a été introduit par Rossler [44], la génération hyperchaotique garantie par deux ou plusieurs exposants de Lyapunov positifs. Pour les systèmes à

temps continu, le comportement hyperchaotique n'existe pas que dans les systèmes autonomes de dimensions  $n$  ( $n \geq 4$ ), et il existe uniquement dans les systèmes à temps discret en dimensions  $n$  ( $n \geq 2$ ) [10],[18],[19]. Le comportement hyperchaotique est un sujet qui attire depuis peu une attention considérable en raison de ses applications théoriques et pratiques dans divers champs comme, les circuits, les communications [31],[46] etc.

Dans cette section, nous donnons une preuve rigoureuse de l'hyperchaoticité d'une nouvelle application à temps discret en 3-D, en utilisant la définition 1.8 de l'exposant de Lyapunov le plus grand celui est le test stricte et le plus usuel du comportement chaotique et hyperchaotique. D'autre part, quelques formules des exposants de Lyapunov des applications quadratiques en 3-D existent dans [16]. Le calcul des exposants de Lyapunov de la forme générale de l'application quadratique (2.1) en 3-D semble ici assez difficile et très compliqué. La matrice jacobienne de l'application (2.1) en point  $(x, y, z)$  est :

$$J(x, y, z) = \begin{pmatrix} a_1 + 2a_4x + a_7y + a_8z & a_2 + 2a_5y + a_7x + a_9z & a_3 + a_8x + 2a_6z + a_9y \\ b_1 + 2b_4x + b_7y + b_8z & b_2 + 2b_5y + b_7x + b_9z & b_3 + b_8x + 2b_6z + b_9y \\ c_1 + 2c_4x + c_7y + c_8z & c_2 + 2c_5y + c_7x + c_9z & c_3 + c_8x + 2c_6z + c_9y. \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Si,  $a_2 = a_4 = a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = 0$ ,  $b_1 = b_3 = b_4 = b_5 = b_7 = b_8 = b_9 = 0$ ,  $c_1 = c_2 = c_4 = c_5 = c_6 = c_7 = c_8 = c_9 = 0$ , il est possible de calculer analytiquement les exposants de Lyapunov de l'application discrète (2.32) en 3-D qui n'est pas étudié auparavant, elle est définie par les équations suivantes :

$$f(x_n, y_n, z_n) = \begin{cases} a_0 + a_1x_n + a_3z_n + a_5y_n^2 \\ b_0 + b_2y_n + b_6z_n^2 \\ c_0 + c_3z_n \end{cases} \quad (2.31)$$

la jacobienne est

$$J(x_n, y_n, z_n) = \begin{pmatrix} a_1 & 2a_5y_n & a_3 \\ 0 & b_2 & 2b_6z_n \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

nous obtenons la matrice  $T_N(X_0)$  :

$$T_N(X_0) = \begin{pmatrix} a_1 & 2a_5 \frac{\partial y_{N-1}}{\partial y} & a_3 \\ 0 & b_2 & 2b_6 \frac{\partial z_{N-1}}{\partial z} \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 2a_5 \frac{\partial y_{N-2}}{\partial y} & a_3 \\ 0 & b_2 & 2b_6 \frac{\partial z_{N-2}}{\partial z} \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_1 & 2a_5 \frac{\partial y_0}{\partial y} & a_3 \\ 0 & b_2 & 2b_6 \frac{\partial z_0}{\partial z} \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Après la simplification nous obtenons :

$$T_N(X_0) = \begin{pmatrix} a_1^N & A & B \\ 0 & b_2^N & C \\ 0 & 0 & c_3^N \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

tels que  $A, B$  et  $C$  sont les éléments de la matrice (2.35), carrée triangulaire supérieure, il n'y a aucune importance de calculer les éléments  $A, B$  et  $C$ , alors les valeurs propres de  $T_N(X_0)$  sont données par :

$$\delta_1 = a_1^N$$

$$\delta_2 = b_2^N$$

$$\delta_3 = c_3^N$$

donc on obtient

$$J_1(X_0, N) = |\delta_1| = |a_1^N|$$

$$J_2(X_0, N) = |\delta_2| = |b_2^N|$$

$$J_3(X_0, N) = |\delta_3| = |c_3^N|$$



Alors, les exposants de Lyapunov  $l_i(X_0)$  sont définis par :

$$\begin{aligned} l_1(X_0) &= \ln \left( \lim_{N \rightarrow +\infty} J_1(X_0, N)^{\frac{1}{N}} \right) = \ln \left( \lim_{N \rightarrow +\infty} |a_1^N|^{\frac{1}{N}} \right) = \ln |a_1| \\ l_2(X_0) &= \ln \left( \lim_{N \rightarrow +\infty} J_2(X_0, N)^{\frac{1}{N}} \right) = \ln \left( \lim_{N \rightarrow +\infty} |b_2^N|^{\frac{1}{N}} \right) = \ln |b_2| \\ l_3(X_0) &= \ln \left( \lim_{N \rightarrow +\infty} J_3(X_0, N)^{\frac{1}{N}} \right) = \ln \left( \lim_{N \rightarrow +\infty} |c_3^N|^{\frac{1}{N}} \right) = \ln |c_3| \end{aligned}$$

Finalement, on a démontré les deux théorèmes suivants :

**Théorème 2.6** *L'application (2.32) est chaotique au sens de l'exposant de Lyapunov le plus grand, si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

$$|a_1| > 1, \quad |b_2| < 1, \quad |c_3| < 1 \quad (2.35)$$

$$|a_1| < 1, \quad |b_2| > 1, \quad |c_3| < 1 \quad (2.36)$$

$$|a_1| < 1, \quad |b_2| < 1, \quad |c_3| > 1 \quad (2.37)$$

**Théorème 2.7** *l'application (2.32) est hyperchaotique au sens de l'exposant de Lyapunov le plus grand, si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

$$|a_1| > 1, \quad |b_2| > 1, \quad |c_3| < 1 \quad (2.38)$$

$$|a_1| > 1, \quad |b_2| < 1, \quad |c_3| > 1 \quad (2.39)$$

$$|a_1| < 1, \quad |b_2| > 1, \quad |c_3| > 1 \quad (2.40)$$

Traitons un exemple de l'étude analytique ci-dessus. En effet, nous choisissons les paramètres :  $a_0 = 0, a_1 = 3, a_3 = 0, a_5 = -1, b_0 = 1, b_2 = 2, b_6 = -1, c_0 = 1/2$  et  $c_3 = -1/2$ . Dans ce cas l'application (2.32) présente un comportement hyperchaotique, car il admet deux exposants de Lyapunov positifs  $L_1 = 1.098, L_2 = 0.693$ , et un seul exposant Lyapunov négatif  $L_3 = -0.693$ . Car, le seul point fixe de l'application (2.32) est

$E = (\frac{32}{81}, \frac{-8}{9}, \frac{1}{3})$  et la matrice jacobienne de l'application (2.32) évaluée au point  $E$  est :

$$J_E = \begin{pmatrix} 3 & \frac{16}{9} & 0 \\ 0 & 2 & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

et son polynôme caractéristique est  $P_E(\lambda) = (3 - \lambda)(2 - \lambda)(-\frac{1}{2} - \lambda)$ . Par conséquent, le point  $E$  est un point fixe selle sous les paramètres sélectionnés.

## 2.4 Doublement de période route vers le chaos

Nous proposons une nouvelle famille d'applications discrètes sinusoïdales en 3-D, de douze paramètres de bifurcation  $a$ ,  $b$  et  $a_{i(0 \leq i \leq 9)}$  cette famille présente des attracteurs chaotiques par le même doublement de période route vers le chaos. Ce phénomène de physique est justifié par méthode numérique.

Nous considérons la nouvelle application sinusoïdale discrète en 3-D, définie par :

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos x \\ b \sin y \\ f(x, y, z) \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

où  $f(x, y, z) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6z^2 + a_7xy + a_8xz + a_9yz$  et  $(a, b, a_i)_{0 \leq i \leq 9} \in \mathbb{R}^{12}$  sont les paramètres de bifurcation et  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  sont les variables d'état. D'autre part l'application associée de la nouvelle application discrète sinusoïdale en 3-D (2.44) est continue et différentiable sur  $\mathbb{R}^3$ . Pour le cas (2.45) l'application (2.44) est bijectif et de classe  $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ .

A ce jour, on a distingué au moins trois routes vers le chaos ou transitions dans lesquelles une application discrète non linéaire peut devenir chaotique si un paramètre du contrôle (bifurcation) externe est varié. Toutes ces routes peuvent être vérifiées expérimentalement et montrent un comportement universel fascinant. Par exemple l'attracteur

chaotique de la fameuse application de Hénon en 2-D [39] est obtenu à partir d'une route de doublement de période vers le chaos, et l'attracteur chaotique de Lozi [33] est obtenu à partir d'une collision de frontière route vers le chaos.

Avec les mêmes conditions initiales  $x_0 = 0.25$ ,  $y_0 = 0.2$ ,  $z_0 = 0.02$  et les paramètres de bifurcation  $a = 2.64$  et  $b = -3.66$  les comportements dynamiques de l'application (2.44) pour tous les cas (2.45) jusqu'à (2.50) sont vérifiés numériquement. Fig.1 montre le diagramme de bifurcation de l'application proposé (2.44) dans les cas (2.45) jusqu'à (2.50), le diagramme de bifurcation dans Fig.1, illustre identique route vers le chaos par doublement de période, pour les valeurs des paramètres de bifurcation sélectionnées  $a$  et  $b$ , c'est-à-dire, les attracteurs chaotiques du 6 cas de l'application (2.44) sont obtenus par la même route de doublement de période vers le chaos. Fig.2 montre le portrait de phases de l'application (2.44) pour les cas (2.45) jusqu'à (2.50).

$$f(x, y, z) = z \tag{2.43}$$

$$f(x, y, z) = y + z \tag{2.44}$$

$$f(x, y, z) = x + y + z \tag{2.45}$$

$$f(x, y, z) = x + y + z + x^2 \tag{2.46}$$

$$f(x, y, z) = x + y + z + y^2 \tag{2.47}$$

$$f(x, y, z) = x + y + z + x^2 + y^2 \tag{2.48}$$

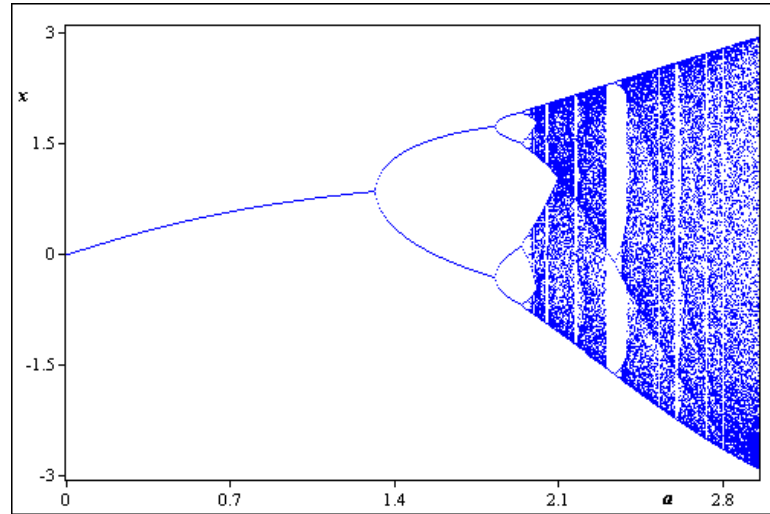


FIG. 2-3 – Diagramme de bifurcation de l'application (2.44) pour les cas (2.45) jusqu'à (2.50) obtenu pour  $b = -3.66$  et  $0 \leq a \leq 2.95$ .

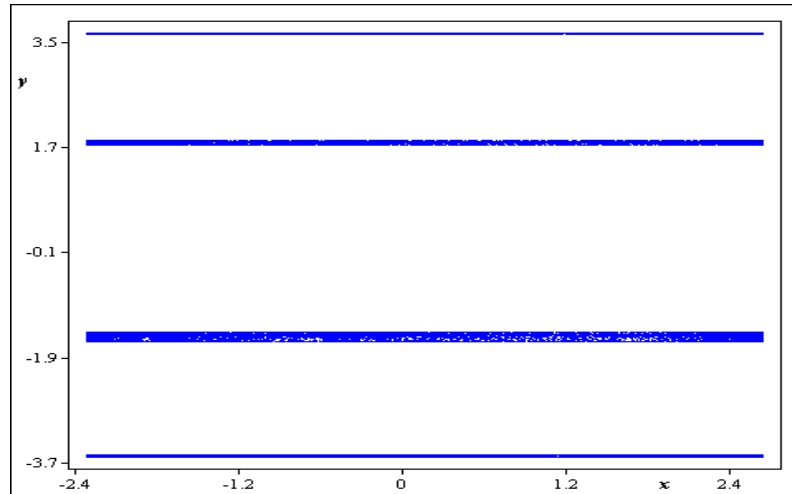


FIG. 2-4 – Portrait de phases de l'application (2.44) pour les cas (2.45) jusqu'à (2.50) obtenu pour  $a = 2.64$  et  $b = -3.66$ .

# Chapitre 3

## Applications de Hénon en 3-D

L'étude de la dynamique des applications polynomiales dans  $\mathbb{R}^n$  fait depuis longtemps l'objet d'une étude systématique, notamment grâce à ses propriétés physiques et ses nombreuses applications potentielles. Elles sont très utilisées dans de nombreux domaines, par exemple, elles sont utilisées dans l'étude des accélérateurs de particules [2].

### 3.1 Applications de Cremona en 3-D

L'étude des applications polynomiales à jacobienne constante, devient un pôle d'intérêt majeur dans plusieurs disciplines telles que les mathématiques et en physiques [22]. On appelle ensemble de Keller, l'ensemble des applications polynômiales du plan dont le Jacobien est constant et non nul. Ces applications s'appellent applications de Keller. Une application de Keller est un difféomorphisme, puisque son Jacobien ne s'annule pas, si son inverse est aussi polynômiale, celle ci est appelée application de Cremona. L'ensemble des applications polynomiales avec inverses polynomiaux est appelé "groupe de Cremona affine". Un problème de mathématiques intéressant c'est l'obtention d'une forme normale d'une application de Cremona de degré arbitraire. Ce problème n'est pas résolu car on ne sait pas dans le cas général quelle application a un inverse polynomiale ? Ce sujet très abordé et très étudié "conjecture jacobienne". La célèbre conjecture Jacobienne affirme

qu'une application polynomiale de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  est bijective si et seulement si son Jacobienne est constante non nulle (le cas  $n = 1$  est clair, mais la conjecture commence par  $n = 2$ ).

**Définition 3.1** Soit  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , on dit que  $f$  est une application de Cremona si  $f$  est un polynôme de Jacobien constant non nul et son inverse est un polynôme.

**Théorème 3.1** Conjecture (O. T. Keller (1939)). Soit  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est une application de Cremona. Alors  $f$  est bijective et son inverse est un polynôme.

### 3.1.1 Application réduite

Certaines formes de difféomorphismes en 3-D du second degré sont bien connues [52], [34], [18], [30] en particulier celles qui ont un inverse quadratique, dans ce cadre il a été montré [53] que tout difféomorphisme quadratique en 3-D à un inverse quadratique et à Jacobien constant peut être écrit sous une forme normale. Cependant, ce résultat ne donne aucune information sur les formes de ce type d'applications. Dans le cas de 2-D, la structure de ce groupe a été développée en 1942 par Jung [22]. Le théorème de Jung dit que les difféomorphismes polynomiaux de 2-D sont réduites c'est-à-dire qu'ils peuvent être écrits comme une composition finie d'applications affines et élémentaires. Remarquons que les automorphismes affines sont de type élémentaire. Plus récemment, un travail remarquable a été déroulé en 1989 par Friedland et Milnor [50], ils ont montré qu'en général les difféomorphismes polynomiaux du plan à Jacobien constant, sont conjugués à des compositions d'applications de Hénon généralisées, aussi ils ont montré que n'importe quelle application dans le groupe de Cremona affine, soit conjuguée à des compositions d'applications de Hénon généralisées ou bien la dynamique de l'application est triviale.

Rappelle, on appelle application de Hénon généralisée en 2- D toute application qui s'écrit sous la forme :

$$H_i(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ p_i(y) - bx \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

où  $p_i(y)$  est un polynôme, et  $b \neq 0$ .

Notons que toute application de Hénon généralisée a un inverse polynômiale :

$$H_i^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{b}(-y + p_i(x)) \\ x \end{pmatrix}$$

D'autre part, nous ne connaissons pas beaucoup du sujet de la structure du groupe de Cremona affine pour les dimensions supérieures. Et en 2004 I. P. Shestakov, et U. U. Umirbaev [23] ils ont prouvé depuis peu que l'application de Cremona en 3-D qui prend la forme :

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - 2y(xz + y^2) - z(xz + y^2)^2 \\ y + z(xz + y^2) \\ z \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

n'est pas réduite. Aussi, ils ont montré que la forme normale du groupe de Cremona affine de 3-D doit être composée de plusieurs applications réduites. Cependant, il est toujours possible que la dynamique des applications non-réduites est triviale, comme dans l'exemple (3.2) ci-dessus. Un autre problème intéressant concerne l'approximation de difféomorphismes lisses par des difféomorphismes polynomiaux. En 2003 un résultat dû à [11] dans cette direction pour la classe de  $C^\infty$ -difféomorphismes symplectique qui peut être approximés par des compositions d'applications de Cremona symplectique :

$$(x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \eta + y \\ -x + \nabla p(y) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

tel que  $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$  et  $\eta$  est une constante de  $\mathbb{R}^n$  et  $p$  est un polynôme de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ .

### 3.1.2 Forme normale

Il a été démontré dans [30], [20] que toute application quadratique en 3-D de jacobien constant, dont l'inverse est aussi quadratique et de dynamique non triviale on peut

transformée cette application par une transformation affine sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ a + bx + cy + dz + q(y, z) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

où  $b$  c'est le jacobien ( $b = 1$ ), et  $q(y, z) = a_0y^2 + a_1yz + a_2z^2$  et  $|a_0 + a_1 + a_2| = 1$ , et l'un des paramètres  $c$  ou  $d$  peut être éliminé par un changement de coordonnées.

S. V. Gonchenko, et autres [53] ont prouvé que la dynamique des applications ci-dessous (3.5) et (3.6) sont triviales :

$$(x, y, z) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\eta + \frac{1}{a}x, \mu - az, \xi + cz + by + q(x, z)\right) \quad (3.5)$$

$$(x, y, z) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\eta + y + ax, \mu - \frac{1}{c}x, \xi + bcz + q(x, y)\right) \quad (3.6)$$

Nous notons qu'il n'est pas difficile de construire un difféomorphisme du second degré en 3-D, ne rentre pas dans cette classification, parce qu'il admet une application inverse de degré supérieur. Par exemple :

$$f(x, y, z) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (1 - x + ay^2, x^2 - bz, y) \quad (3.7)$$

admet une application inverse quadratique  $f^{-1}$  de degré 4 :

$$f^{-1}(x, y, z) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left[1 - x + az^2, z, \frac{1}{b} \left[-y + (1 - x + az^2)^2\right]\right]$$

## 3.2 Applications de Hénon en 3-D

Les applications quadratiques discrètes en 3-D, surtout les applications de Hénon en 3-D, aujourd'hui il y a une augmentation considérable de leurs études, en raison de ses propriétés et ses nombreuses applications potentielles. D'une part, les applications de Hénon en 3-D, sont exactement des éléments du groupe des automorphismes polyno-



miaux. Ces automorphismes fournissent des exemples de systèmes dynamiques ayant un comportement très riche.

**Définition 3.2** [51] *Soit  $f$  est une application (difféomorphisme) de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ . On dit que  $f$  est une application de Hénon en 3-D si :*

- (i) *Le Jacobien de  $f$  est constant ;*
- (ii)  *$f$  et  $f^{-1}$  sont toutes quadratiques ;*
- (iii) *Les coordonnées ne sont pas découplées par l'action de  $f$ .*

**Notation 3.2** *On note que toutes les applications quadratiques à jacobienne constante ne sont pas du type de Hénon, par exemple l'application  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (ax, y + bx^2, z + y^2)$ , où  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  a une application inverse mais n'est pas quadratique. Un autre exemple sur les coordonnées découplées, c'est l'application  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (ay + x, -x, bz + x^2)$  où  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on observe que l'image  $(\bar{x}, \bar{y})$  dépend seulement de  $(x, y)$ , et un autre exemple sur les coordonnées découplées de l'application  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (y + x, -y, z + y^2)$  on remarque que l'image  $\bar{y}$  dépend seulement de  $y$ .*

Comme exemple l'application (3.10) est une application de Hénon selon la définition 3.2.

### 3.2.1 Exemple

On considère les deux applications (3.8) et son inverse (3.9) [15] :

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ a + bx + cy - z^2 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ a + bx + cz - y^2 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

tel que  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $a, b$  et  $c$  les paramètres de bifurcation. D'une part, d'après la définition 3.2, les deux applications (3.8) et (3.9) sont de Hénon.

Les deux applications (3.8) et (3.9) appartiennent à la forme (3.4) et jouent un rôle très important dans la théorie de bifurcation des applications en 3-D. Notez que l'application (3.9) a été présentée dans [56]. Et aussi comme exemple il a été démontré dans [53] qu'on peut écrire l'application Arneodo-Couillet-Tresser [4], [5] sous la forme (3.4). Nous notons en particulier que l'application (3.8) présente très intéressante dynamique chaotique. En plus il a été montré dans [52], [53] que l'application (3.8) a un attracteur appelé "wild Lorenz-like attractor" pour certaines valeurs de ces paramètres de bifurcation voir Fig.3-1. L'existence de ces attracteurs pour l'application (3.9) est un problème toujours ouverte. La notation "wild hyperbolic attractor" a été introduite dans [34], Fig.3-2 présente un attracteur chaotique de l'application (3.9). Un intéressant résultat a été trouvé par [20] montre que si  $b = 1$ , les deux applications de Hénon (3.8) et (3.9) en 3-D, constituent les formes normales des éléments quadratiques du groupe de Cremona affine. Si  $b \neq 1$  l'application (3.9) est une forme normale pour certaine classe d'applications quadratiques [25]. Aussi [15] a généralisé les résultats de [20] et de plus, montre clairement que l'application (3.4) est une forme normale du difféomorphismes quadratiques avec un inverse quadratique si  $b \neq 1$ .

**Théorème 3.3** [3] *Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un difféomorphisme quadratique avec un inverse quadratique et de jacobienne constante  $\det Df(x, y, z) = b$ . Si, après un changement affine de coordonnées, on ne peut écrire  $f$  sous la forme (3.4), alors la dynamique de  $f$  est triviale.*

### 3.2.2 Nouvelle application de Hénon en 3-D

Nous étudions dans cette section le comportement dynamique d'un nouveau exemple d'application de Hénon en 3-D, surtout les points fixes et leur stabilité, les conditions suffisantes de l'existence des orbites bornées et non bornées ainsi l'existence des régions

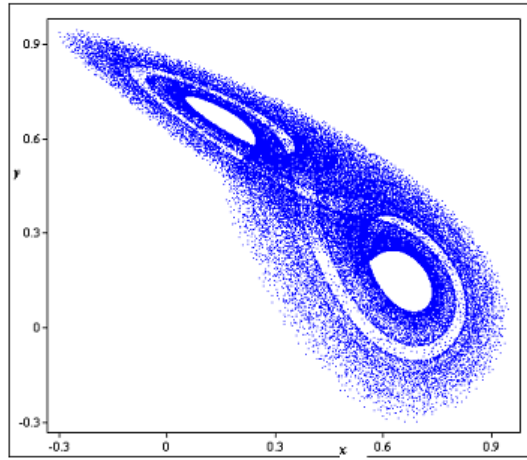


FIG. 3-1 – Attracteur chaotique de l'application de Hénon (3.8) pour  $a = 0.002$ ,  $b = 0.65$  et  $c = 0.87$ .

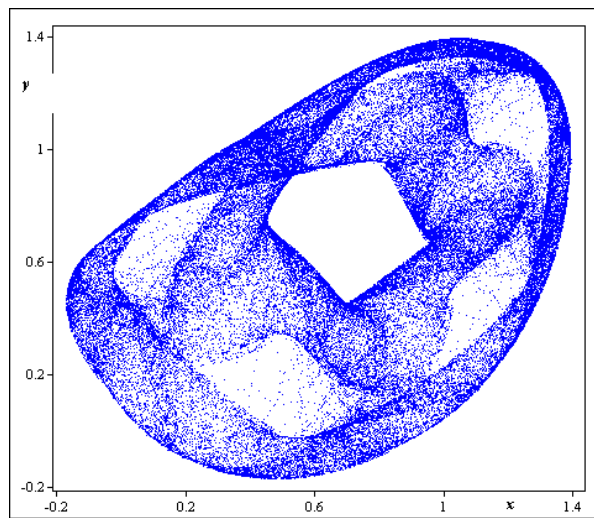


FIG. 3-2 – Attracteur chaotique de l'application de Hénon (3.9) pour  $a = 0$ ,  $b = 0.7$  et  $c = 1.258$ .

chaotiques et attracteurs chaotiques. L'existence d'attracteurs chaotiques est justifiée et représentée par des résultats numériques comme les diagrammes de bifurcation et les variations de L'exposants de Lyapunov.

Considérons l'application discrète  $f$  en 3-D n'a pas été étudiée dans la littérature  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = f(x, y, z)$  :

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + x - ay^2 \\ x - bz \\ y \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

où  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $a$  et  $b \in \mathbb{R}$  sont les deux paramètres de bifurcation. En effet, l'application (3.10) est quadratique, de jacobienne constante, de déterminant égal à  $b$ , et son application réciproque est quadratique ainsi les coordonnées ne sont pas découplées par l'action de l'application  $f$ . Par conséquent, il est évident de l'appeler "application de Hénon en 3-D".

### Points fixes et stabilité

Si  $a > 0$ , les points fixes de l'application de Hénon (3.10) sont  $S_i((1+b)y_i, y_i, y_i)$  avec  $i = 1, 2$ , donc  $y_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}$ ,  $y_2 = -\frac{1}{\sqrt{a}}$ . En outre si  $a < 0$ , toutes les orbites de l'application de Hénon (3.10) ne sont pas bornées, et si  $a > 0$ , alors il y a une possibilité d'existe des orbites bornées et peut-être chaotiques. Fig.3-3 présente les régions de comportements dynamiques de l'application de Hénon (3.10). D'autre part, la matrice jacobienne de l'application de Hénon (3.10) correspondant aux points  $S_i$  ( $i = 1, 2$ ) est écrite sous la forme :

$$J_{S_i} = \begin{pmatrix} 1 & -2ay_i & 0 \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \det J = b \quad (3.11)$$

et leur polynôme caractéristique est donné par  $P_{S_i}(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + (b + 2ay_i)\lambda - b$ . Alors les valeurs propres au point  $S_1$  sont les racines du polynôme caractéristique :

$$P_{S_1}(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + (b + 2\sqrt{a})\lambda - b$$

D'après le critère 2.4 le point  $S_1$  est asymptotiquement stable si et seulement si les coefficients du polynôme caractéristique vérifient les conditions : (i)  $|b| < 1$ , (ii)  $2\sqrt{a} > 0$ , (iii)  $1 + b + \sqrt{a} > 0$  et (iv)  $1 - b^2 > 2\sqrt{a}$ , la condition (ii) donne  $a > 0$  et les conditions (i), (iii) et (iv) donnent  $-\sqrt{1 - 2\sqrt{a}} < b < \sqrt{1 - 2\sqrt{a}}$  avec  $a \leq 1/4$ . Donc on a démontré le théorème suivant :

**Théorème 3.4** *La région  $M$  de stabilité du point fixe  $S_1$  de l'application Hénon (3.10) est*

$$M = \left\{ (a, b) : 0 < a \leq 1/4, -\sqrt{1 - 2\sqrt{a}} < b < \sqrt{1 - 2\sqrt{a}} \right\} \quad (3.12)$$

D'une manière analogue, les valeurs propres au point  $S_2$  sont les racines du polynôme caractéristique :

$$P_{S_2}(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + (b - 2\sqrt{a})\lambda - b$$

le critère 2.4 affirme que le point fixe  $S_2$  n'est pas asymptotiquement stable car une des conditions du critère 2.4, n'est pas vérifiée ( $-2\sqrt{a} > 0$ ).

Fixons les paramètres  $a = 0.01, b = -0.7$ , l'application (3.10) possède deux points fixes  $S_1(3, 10, 10)$  et  $S_2(-3, -10, -10)$ . La matrice jacobienne au point  $S_1$  de l'application (3.10) possède trois valeurs propres distinctes :  $\lambda_1 = -0.782436$ ,  $\lambda_2 = 0.891218 - 0,316816i$ , et  $\lambda_3 = 0.891218 + 0,316816i$ , alors  $|\lambda_{i(1 \leq i \leq 3)}| < 1$ , par conséquent le point fixe  $S_1$  est asymptotiquement stable. Les exposants de Lyapunov correspondants sont  $L_1 = -0.245343$ ,  $L_2 = L_3 = -0.0556659$ , la matrice jacobienne au point  $S_2$  de l'application (3.10) possède trois valeurs propres :  $\lambda_1 = -0.891206$ ,  $\lambda_2 = 0.615888$ , et  $\lambda_3 = 1.27532$ , nous avons  $|\lambda_{i(1 \leq i \leq 2)}| < 1$ , et  $|\lambda_3| > 1$  donc le point fixe  $S_2$  n'est pas asymptotiquement stable ( $S_2$  est un point selle). Les exposants de Lyapunov correspondants sont  $L_1 = -0.11518$ ,  $L_2 = -0.48469$ , et  $L_3 = 0.243195$ .

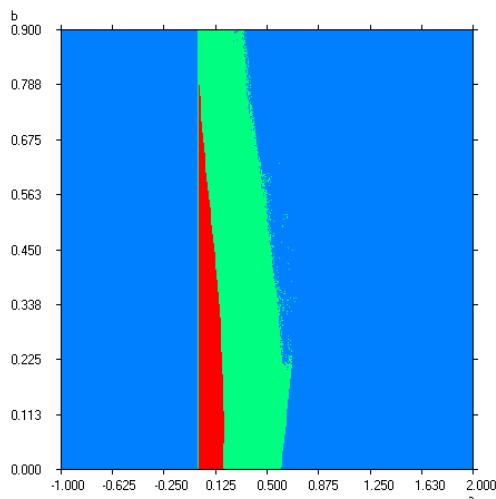


FIG. 3-3 – Les régions du comportement dynamique dans le plan  $a - b$  de l'application de Hénon (3.10), orbites non bornées (couleur bleu), orbites périodiques (couleur rouge), chaos (couleur vert).

### Observation des nouveaux attracteurs chaotiques

D'après l'analyse ci-dessus, il est évident que la stabilité de points fixes de l'application de Hénon (3.10) est modifiée par la modification des paramètres de bifurcation, et le comportement de l'application de Hénon (3.10) sera dans un état différent. Pour déterminer le comportement et les régions chaotiques nous représentons numériquement le diagramme de bifurcation et le diagramme de l'exposant de Lyapunov le plus grand de l'application de Hénon (3.10).

#### Variations du paramètre $a$

Nous fixons le paramètre  $b = 0.3$ , et la condition initiale  $x = y = z = 0.01$ , et nous varions  $a$ . Alors pour  $a \in [0.04, 0.5]$ , l'application de Hénon (3.10) présente les comportements dynamiques suivants comme indiqué sur Fig.3-4-1 : Pour  $0.04 \leq a < 0.2102$  l'application (3.10) converge vers un point fixe, pour les valeurs de  $a$  dans l'intervalle  $0.2102 \leq a < 0.3758$ , l'application de Hénon (3.10) converge vers une orbite périodique, comme a été montré sur Fig.3-4-a, pour  $0.3758 \leq a < 0.4264$  sauf un nombre de fenêtres

périodiques, l'application de Hénon (3.10) converge vers un attracteur quasi-périodique-2, comme indiqué sur Fig.3-4-b, pour  $0.4264 \leq a < 0.5$ , sauf un nombre de fenêtres périodiques, l'application de Hénon (3.10) converge vers un attracteur chaotique similaire à ce qui est dans Fig.3-4-c-d. Fig.3-4-2, représente l'exposant de Lyapunov de l'application de Hénon (3.10).

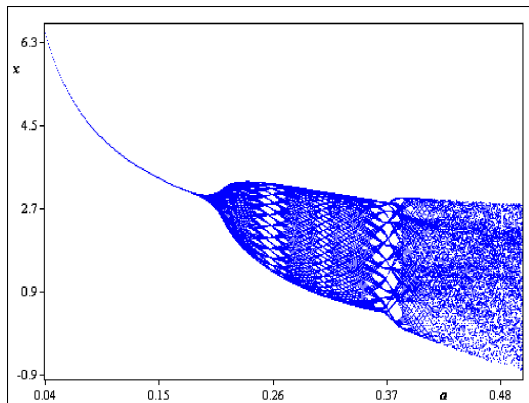


Fig.3-4-1 : Diagramme de bifurcation de l'application (3.10) pour  $b = 0.3$  et  $0.04 \leq a \leq 0.5$ .

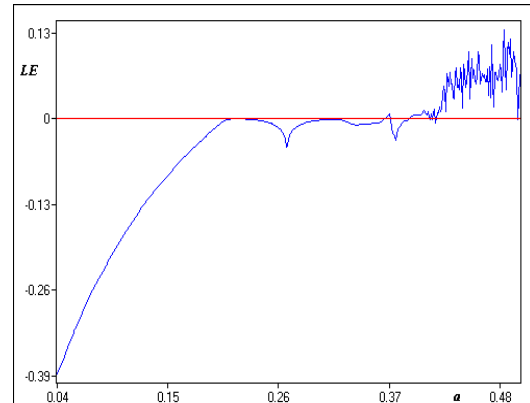


Fig.3-4-2 : Variation de l'exposant de Lyapunov de l'application (3.10) pour  $b = 0.3$  et  $0.04 \leq a \leq 0.5$ .

### Variations du paramètre $b$

Nous fixons le paramètre  $a = 0.4$ , et nous varions  $b$ . Ensuite, pour  $b \in [0.04, 0.5]$ , l'application de Hénon (3.10) présente les comportements dynamiques suivants comme illustré sur Fig.3-5-1 : Pour  $0.04 \leq b < 0.2378$  sauf un nombre de fenêtres périodiques (six), l'application de Hénon (3.10) converge vers un attracteur quasi-périodique, comme a été présenté sur la Fig.3-5-a, pour  $0.2378 \leq b < 0.339$  l'application de Hénon (3.10) converge vers un attracteur quasi-périodique-2, pour  $0.339 \leq b < 0.3574$  l'application de Hénon (3.10) converge vers un attracteur quasi-périodique-4, comme il est illustré sur Fig.3-5-b, pour  $0.3574 \leq b < 0.5$  sauf un nombre de fenêtres périodiques (trois), l'application de Hénon (3.10) converge vers un attracteur chaotique similaire à celui qui

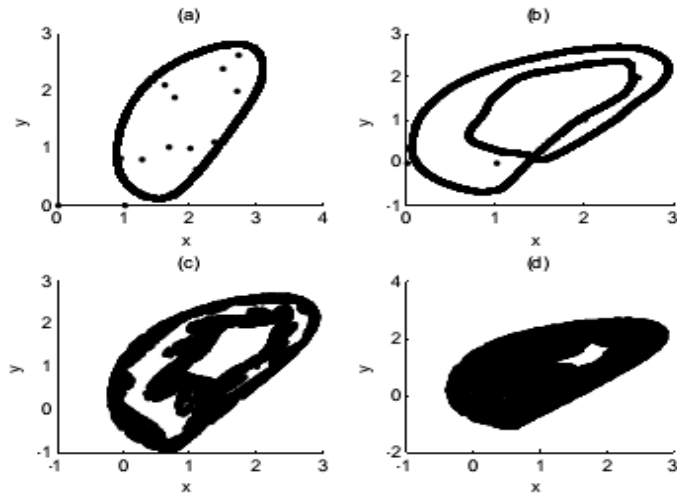


FIG. 3-4 – Evolution des attracteurs obtenus à partir de l'application de Hénon (3.10) avec  $b = 0.3$ , (a) orbite périodique pour  $a = 0.30$ , (b) orbite 2-quasi-périodique, pour  $a = 0.39$ , (c) attracteur chaotique pour  $a = 0.42$ , (d) attracteur chaotique  $a = 0.44$ .

a vu dans Fig.3-5-c-d. Fig.3-5-2 présente l'exposant de Lyapunov de l'application de Hénon (3.10).



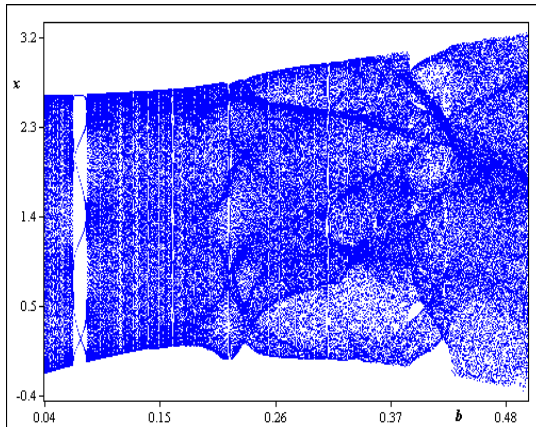


Fig.3-5-1 : Diagramme de bifurcation de l'application (3.10) pour  $a = 0.4$  et  $0.04 \leq b \leq 0.5$ .

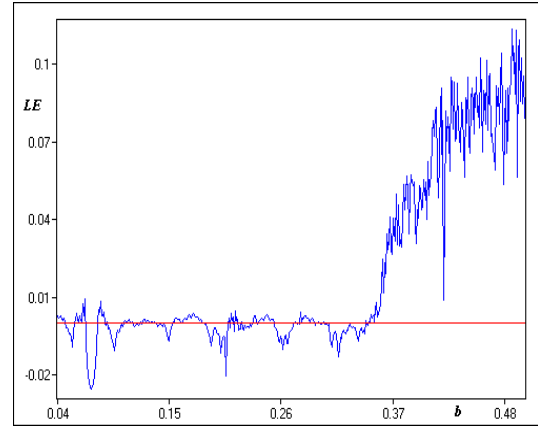


Fig.3-5-2 : Variation de l'exposant de Lyapunov de l'application (3.10) pour  $a = 0.4$  et  $0.04 \leq b \leq 0.5$ .

# Chapitre 4

## Applications de Hénon modifiées par une fonction affine par morceaux

Dans le but de simplifier le système de trois équations différentielles du modèle de Lorenz [12], M. Hénon en 1976 [36] proposa l'application quadratique discrète en 2-D, et dans le but de simplifier l'attracteur de Hénon. René Lozi [48], proposa l'application affine par morceaux, la seule différence entre l'application de Hénon et de Lozi est que le terme non-linéaire  $x^2$  de l'application de Hénon est remplacé par  $|x|$  dans l'application de Lozi. De plus il a été présenté dans [12] un exemple d'attracteur de type Lorenz réalisé par l'application de Lozi. Par ailleurs, les références [1], [27], [28] présentent et étudient des attracteurs chaotiques, caractéristiques d'un nouveau type de système affine par morceaux. Dans cette section, nous présentons des exemples d'attracteurs de type Lorenz et de type multiples-plis sont réalisés par l'application de Hénon modifiée (4.1), et des attracteurs de type Lozi sont réalisés par l'application de Hénon modifiée (4.13) en 3-D. Le contenu de ce chapitre a fait l'objet de deux publications internationales. [39], [40].

L'étude des applications affines par morceaux est une contribution intéressante au développement de la théorie des systèmes dynamiques grâce aux nombreuses applications possibles en science et ingénierie [48], [47], [6], [59]. Un grand nombre de systèmes phy-

siques présentent par des applications affines par morceaux où l'état en temps discret est divisé en deux ou plusieurs comportements avec différentes formes fonctionnelles séparées par des frontières. Dans cette section, nous avons proposé deux applications affines par morceaux en 3-D, la première de six termes et la deuxième de cinq termes. Nos applications proposées présentent des nouveaux types d'attracteurs chaotiques qui n'ont pas encore été étudiées.

## 4.1 1-Application affine par morceaux et crise de frontière

La nouvelle application affine par morceaux (4.1) en 3-D est une simplification de l'application de Hénon (3.8) en 3-D, le terme non linéaire  $z^2$  est remplacé par  $|z|$ . La forme de la nouvelle application affine par morceaux (4.1) en 3-D est définie par :

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ a + bx + cy - |z| \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Notre application (4.1) présente des attracteurs chaotiques, pour certaines valeurs de ses paramètres de bifurcation  $a, b$  et  $c$ .

Soit  $(x_t, y_t, z_t)$ ,  $t = 0, 1, \dots$ , une trajectoire de l'application (4.1), nous supposons  $x = z_{t-2}$ ,  $y = z_{t-1}$ , et  $z = z_t$ , l'application (4.1) exprimée sous la forme comme suit :

$$z_{t+1} = a + bz_{t-2} + cz_{t-1} - |z_t| \quad (4.2)$$

Pour étudier l'application (4.1), on partage l'espace  $\mathbb{R}^3$  en deux zones linéaires définies par :

$$\begin{cases} \Sigma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\}, \\ \Sigma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z < 0\}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Alors, dans les deux zones  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , l'expression affine de l'application (4.1) est définie comme suit :

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \begin{pmatrix} y \\ z \\ a + bx + cy - z \end{pmatrix} & \text{si } z \in \Sigma_1, \\ \begin{pmatrix} y \\ z \\ a + bx + cy + z \end{pmatrix} & \text{si } z \in \Sigma_2. \end{cases} \quad (4.4)$$

### 4.1.1 Comportement local

#### Points fixes

Dans cette section, nous commençons par l'étude d'existence des points fixes de l'application (4.1) et nous étudions leurs stabilités.

**Théorème 4.1** *Si  $b + c - 2 \neq 0$  et  $b + c \neq 0$  alors, la l'application (4.1) admet deux points fixes sont :*

$$S_1 = \frac{-a}{b+c-2}(1, 1, 1), \quad S_2 = \frac{-a}{b+c}(1, 1, 1) \quad (4.5)$$

**Preuve.** Les points fixes de l'application (4.1) sont les solutions réelles du système :

$$y = x, \quad z = y, \quad a + bx + cy - |z| = z \quad (4.6)$$

On a alors l'équation :

$$a + bz + cz - |z| = z \quad (4.7)$$

Pour  $a = 0$ , il y a un point fixe  $(0, 0, 0)$ . Si  $S_1 \in \Sigma_1$ , à partir de (4.7) on a  $(b+c-2)z = -a$ , ce qui implique  $z = \frac{-a}{b+c-2}$  si  $a > 0$  et  $b < 2 - c$ , ou si  $a < 0$  et  $b > 2 - c$ . Si  $S_2 \in \Sigma_2$  à partir de (4.7) on a  $(b+c)z = -a$ , ce qui implique que  $z = \frac{-a}{b+c}$  si  $a > 0$  et  $b > -c$  ou si  $a < 0$  et  $b < -c$ .

**Conclusion 4.2** *Si  $b + c = 2$  et  $b + c = 0$ , toutes les orbites de l'application (4.1) ne*

sont pas bornées. Si  $b + c \neq 2$  ou  $b + c \neq 0$ , alors il y a une possibilité d'existence des orbites bornées de l'application (4.1).

### Stabilité des points fixes

Nous donnons les conditions nécessaires et suffisantes pour voir la stabilité asymptotique des points fixes  $S_1$  et  $S_2$ , nous utilisons le Critère 2.4 pour la démonstration du théorème suivant :

**Théorème 4.3** *Si  $a > 0$  et  $b < 2 - c$ , le point fixe  $S_1$  de l'application (4.1) est asymptotiquement stable si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 < b < 1 \\ c < b < 2 - c \\ 2 - c < 3 - b - b^2 \end{array} \right. \quad (4.8)$$

**Preuve.** Le polynôme caractéristique de la matrice jacobienne de l'application (4.1) calculé au point  $S_1$ , prend la forme :  $P_{S_1}(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - c\lambda - b$ , toujours d'après le Critère 2.4, nous concluons que le point fixe  $S_1$  de l'application (4.1) est asymptotiquement stable si les conditions suivantes sont satisfaites : (i)  $|1 - b| < 1 - c$ , (ii)  $|b| < 1$ , et (iii)  $b - c < 1 - b^2$ . D'après (i) et (ii) nous obtenons  $c < b < 2 - c$  et  $-1 < b < 1$  et d'après (iii) nous obtenons  $2 - c < 3 - b - b^2$ . Finalement, les conditions de stabilité asymptotique du point fixe  $S_1$  sont :  $-1 < b < 1$ ,  $c < b < 2 - c$  et  $2 - c < 3 - b - b^2$ .

Par exemple fixons les paramètres  $a = 0.1$ ,  $b = 0.3$  et  $c = 0.1$ . Avec ces valeurs le point fixe  $S_1(-0.0625, -0.0625, -0.0625)$  est stable, car nous avons les trois valeurs propres suivantes :  $\lambda_1 = -0.7422 - 0.2613i$ ,  $\lambda_2 = -0.7422 + 0.2613i$  et  $\lambda_3 = 0.4845$ , et  $|\lambda_i|_{(1 \leq i \leq 3)} < 1$ .

**Théorème 4.4** *Si  $a < 0$  et  $b < -c$ , le point fixe  $S_2$  de l'application (4.1) est asymptotiquement stable si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 < b < 1 \\ c - 2 < b < -c \\ -c < 1 + b - b^2 \end{array} \right. \quad (4.9)$$

**Preuve.** Le polynôme caractéristique de la matrice jacobienne de l'application (4.1) calculé au point  $S_2$ , prend la forme :  $P_{S_2}(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - c\lambda - b$ , selon le Critère 2.4, nous concluons que le point fixe  $S_2$  de l'application (4.1) est asymptotiquement stable si les conditions suivantes sont satisfaites : (i)  $|1 + b| < 1 - c$ , (ii)  $|b| < 1$ , et (iii)  $-b - c < 1 - b^2$ . D'après (i) et (ii) nous obtenons  $c - 2 < b < -c$  et  $-1 < b < 1$  et d'après (iii) nous obtenons  $-c < 1 + b - b^2$ . Enfin, les conditions de stabilité du point fixe  $S_2$  sont :  $-1 < b < 1$ ,  $c - 2 < b < -c$  et  $-c < 1 + b - b^2$ .

Par exemple, fixons les paramètres  $a = -0.1$ ,  $b = -0.3$  et  $c = -0.1$ . Avec ces valeurs le point fixe  $S_2(-0.25, -0.25, -0.25)$  est stable, car nous avons les trois valeurs propres suivantes :  $\lambda_1 = 0.7125 - 0.4450i$ ,  $\lambda_2 = 0.7125 + 0.4450i$  et  $\lambda_3 = -0.4251$ , et  $|\lambda_i|_{(1 \leq i \leq 3)} < 1$ .

### 4.1.2 Etude numérique

D'après l'analyse ci-dessus, il est visible que la stabilité du point fixe de l'application (4.1) est modifiée avec le changement des paramètres de bifurcation, et l'application (4.1) sera également en état différent. Le comportement dynamique de l'application (4.1) est étudié numériquement, puis nous déterminons le comportement, et les régions chaotiques, et présentons numériquement le diagramme de bifurcation et le diagramme de l'exposant de Lyapunov qui sont obtenus à partir de différentes valeurs du paramètre de bifurcation  $a$ . Nous fixons  $b = -0.29$ ,  $c = -0.9$ , et la condition initiale  $x_0 = y_0 = z_0 = 2.01$ , et varions  $a$ . Ensuite, pour  $a \in [0, 2]$ , l'application (4.1) présente les comportements dynamiques suivants comme illustré sur Fig.4-4.1, pour  $0 \leq a < 1.56$  l'application (4.1) est chaotique avec au moins un exposant de Lyapunov positif, par exemple, avec  $a = 1$ ,  $b = -0.29$  et  $c = -0.9$ , l'application (4.1) admet deux points fixes  $S_1(0.31, 0.31, 0.31)$  et  $S_2(0.84, 0.84, 0.84)$ . La matrice jacobienne de l'application (4.1)

évalué au point  $S_1$  possède les trois valeurs propres suivantes :  $\lambda_1 = 0.6208 + 0.9026i$ ,  $\lambda_2 = 0.6208 - 0.9026i$ , et  $\lambda_3 = -0.2417$ , ainsi  $|\lambda_i|_{1 \leq i \leq 2} > 1$  et  $|\lambda_3| < 1$  dans ce cas  $S_1$  est un point selle, c'est à dire l'application (4.1) est instable au point fixe  $S_1$ . Les exposants de Lyapunov correspondants sont  $L_1 = L_2 = 0.0912$  et  $L_3 = -1.4201$ . Par conséquent, la dimension de Lyapunov de l'application (4.1) est 2.1302, un attracteur chaotique est obtenu et représenté sur Fig.4-5.4. Pour  $1.56 \leq a < 1.66$ , l'application (4.1) est stable, il existe une zone d'orbite périodique (un attracteur chaotique est détruit tout à coup, qui produit une fenêtre périodique en tant que le paramètre de bifurcation  $a$  est varié), pour  $1.66 \leq a < 1.82$  il existe une zone chaotique (un attracteur chaotique est réalisé brusquement, en tant que le paramètre de bifurcation  $a$  est varié), pour  $1.82 \leq a \leq 2$  l'application (4.1) est stable, il existe une zone de orbite périodique. Fig.4-4.2 représente le spectre de l'exposant de Lyapunov le plus grand de l'application (4.1) par rapport au paramètre de bifurcation  $a$ ,  $a \in [0, 2]$ . Les portraits des phases de l'application (4.1) sont représentés par Fig.4-5.1, Fig.4-5.2, Fig.4-5.3 et Fig.4-5.4.

### **Route vers le chaos : Intermittence route vers le chaos**

D'après le diagramme de bifurcation Fig.4-4.1, on en déduit que l'application (4.1) proposée ne présente pas un scénario classique de route vers le chaos pour les valeurs de paramètre sélectionnés. Mais, l'application (4.1) affiche l'existence d'une orbite périodique, existe dans Fig.4-4.1 avec des changements brusques d'attracteurs chaotiques, c'est "intermittence route vers le chaos". Ces changements soudains sont appelés crises et il y a trois types de crises [13]. Le premier type : la crise de frontière, un attracteur chaotique est soudainement détruit (ou crée) en tant que un paramètre passe par une valeur critique, le second type : la crise d'intérieure, la dimension de l'attracteur dans l'espace de phase augmente brusquement, le troisième type : la crise par fusion des attracteurs, deux ou plus attracteurs chaotiques fusionnent pour former un attracteur chaotique unique.

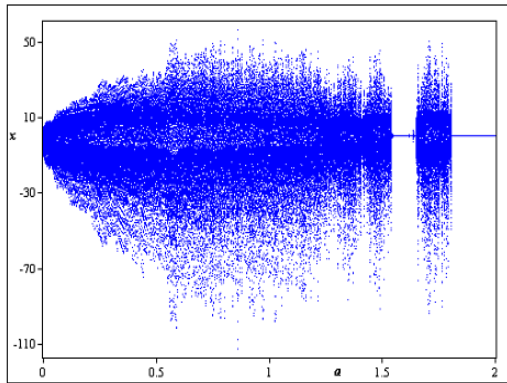


Fig.4-4.1 : Diagramme de bifurcation de l'application (4.1) obtenu pour  $b = -0.29$ ,  $c = -0.9$  et  $0 \leq a \leq 2$ .

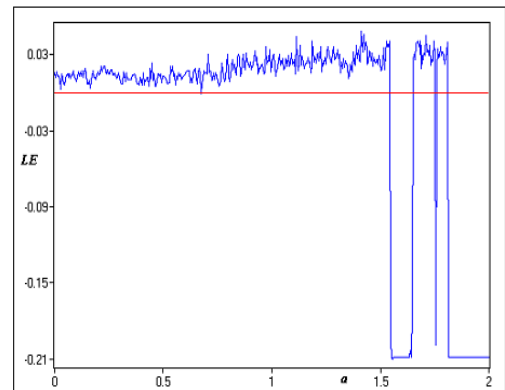


Fig.4-4.2 : Variation de l'exposant de Lyapunov de l'application (4.1) obtenue pour  $b = -0.29$ ,  $c = -0.9$  et  $0 \leq a \leq 2$ .

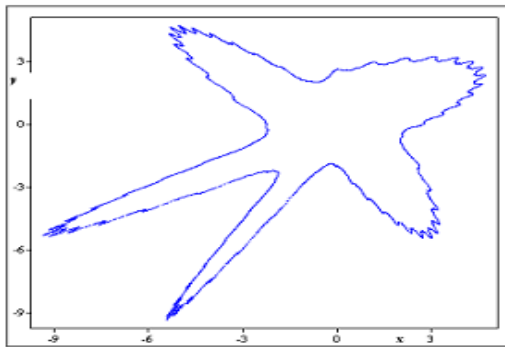


Fig.4-5.1 :  $a = 0$ ,  $b = 0.277$  et  $c = 0.9$ .

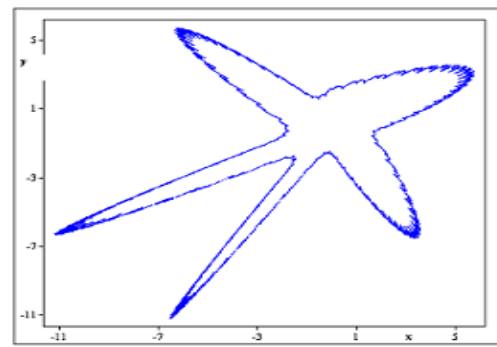


Fig.4-5.2 :  $a = 0.001$  et  $b = c = 0.9$ .



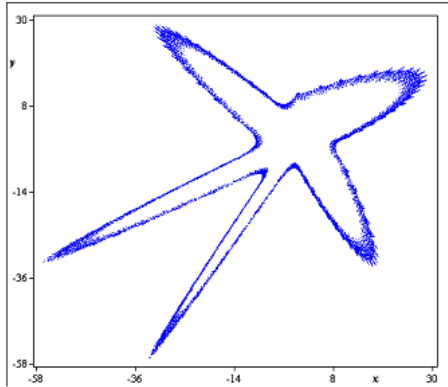


Fig.4-5.3 :  $a = 0.006$ ,  $b = -0.29$  et  $c = -0.9$ .

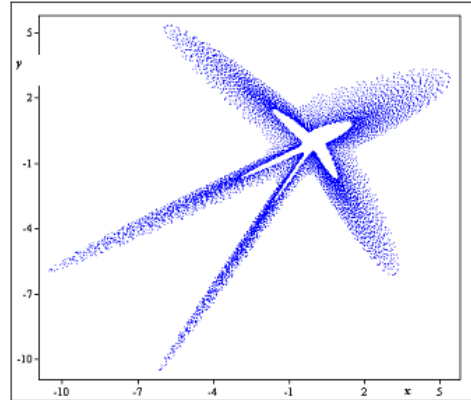


Fig.4-5.4 :  $a = 0$ ,  $b = -0.29$  et  $c = -0.9$ .

## 4.2 2-Application affine par morceaux et collision de frontière

### 4.2.1 Application de Hénon

Dans cette section, nous avons proposé une application affine par morceaux (4.13) en 3-D de Hénon (4.10) de cinq termes capable de générer des attracteurs chaotiques du type multiples-plis pour certaines régions dans l'espace des paramètres de bifurcation. L'application (4.13) proposée en 3-D présente une bifurcation collision de frontière route vers le chaos.

Considérons d'abord l'application de Hénon (4.10) quadratique discrète en 3-D, il a

été étudié dans [18], [24], définie par  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = f(x, y, z)$  :

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + bz + ax^2 \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

tel que  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  et  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  sont les deux paramètres de bifurcation. En outre, l'application (4.10) est l'exemple le plus simple d'une application discrète en 3-D et dissipative avec des orbites chaotiques, quadratique avec un inverse quadratique, et le déterminant de la matrice jacobienne est constante et égal à  $-b$  ( $b \neq 0, |b| < 1$ ). Un attracteur chaotique présenté de l'application de Hénon (4.10) sur Fig.4-1.2, est appelé attracteur chaotique de type multiples-plies, et l'attracteur chaotique présente par Fig.4-1.3 est similaire à le célèbre attracteur de Hénon en 2-D [36], [37], mais n'ont pas les mêmes structures topologiques, et il est possible de modifier les paramètres de l'application de Hénon (4.10) pour obtenir d'autres types d'attracteurs chaotiques. Pour notre application de Hénon (4.10), un inverse de doublement de période route vers le chaos a été observée dans Fig.4-1.4. Fig.4-1.5 présente le spectre de l'exposant de Lyapunov le plus grand de l'application de Hénon (4.10) par rapport au paramètre  $a$ ,  $a \in [-1.65, -1.1]$ .

### Bifurcation locale

Les points fixes de l'application de Hénon (4.10) sont  $S_i(x_i, x_i, x_i)$ ,  $i = 1, 2$ , où  $x_1 = \frac{-(b-1) - \sqrt{(b-1)^2 - 4a}}{2a}$ , et  $x_2 = \frac{-(b-1) + \sqrt{(b-1)^2 - 4a}}{2a}$  existent pour  $(b-1)^2 - 4a \geq 0$ . La matrice Jacobienne de l'application de Hénon (4.10) au point  $S_i$  est

$$J_{S_i} = \begin{pmatrix} 2ax_i & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Le polynôme caractéristique de la matrice jacobienne de l'application (4.10) calculé au point  $S_i$ , prend la forme :

$$P_{S_i}(\lambda) = \lambda^3 - 2ax_i\lambda^2 + b \quad (4.12)$$

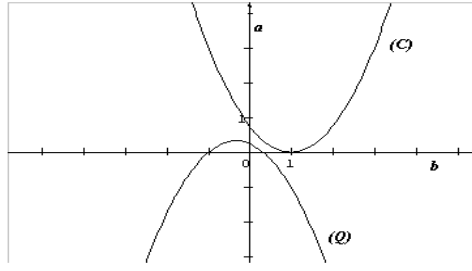


FIG. 4-1 – Courbes de bifurcation  $(C)$  et  $(Q)$  de l'application de Hénon (4.10) dans le plan  $(b, a)$ .

La première bifurcation est la bifurcation de doublement de période a lieu lorsqu'un multiplicateur égal à  $-1$ , c'est-à-dire  $p(-1) = -1 - 2ax_i + b = 0$ , soit  $\pm\sqrt{(b-1)^2 - 4a} = 2(b-1)$ , nous avons la courbe  $(C) : a = \frac{3}{4}(b-1)^2$ . Notez que cette bifurcation se produit pour le point  $S_1$  si  $b < 1$ , et pour le point  $S_2$  si  $b > 1$ .

La deuxième bifurcation est la bifurcation nœud-col a lieu lorsqu'un seul multiplicateur égal à  $1$ , c'est-à-dire  $p(+1) = 1 - 2ax_i + b = 0$ , soit  $\pm\sqrt{(b-1)^2 - 4a} = 2b$ , nous avons  $a = \frac{1}{4}(-3b^2 - 2b + 1)$ . Notez que cette bifurcation se produit pour le point  $S_1$  si  $b < 0$ , et pour le point  $S_2$  si  $b > 0$ . Fig.4-1 présente les courbes de bifurcation  $(C) : a = \frac{3}{4}(b-1)^2$  et  $(Q) : a = \frac{1}{4}(-3b^2 - 2b + 1)$  de l'application de Hénon (4.10).

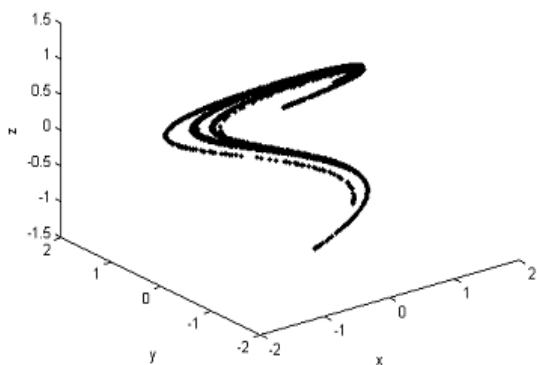


Fig : 4-1.2 : Attracteur chaotique de type multiples-plis de l'application (4.10) obtenu pour  $a = -1.65$  et  $b = 0.1$ .

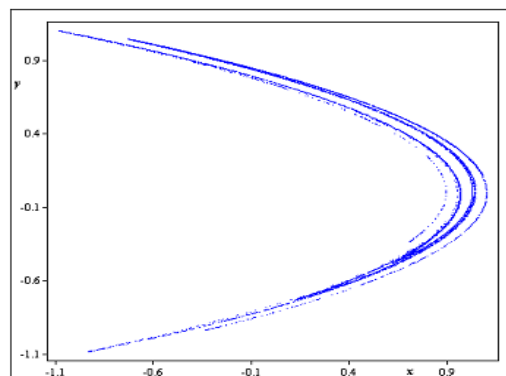


Fig : 4-1.3 : Attracteur chaotique de l'application (4.10) obtenu pour  $a = -1.65$  et  $b = 0.1$ .

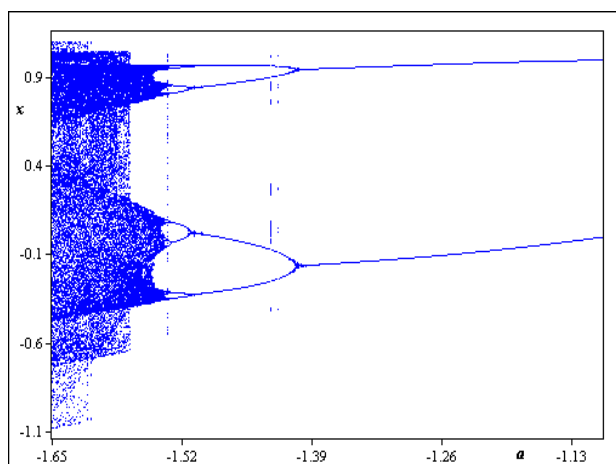


Fig : 4-1.4 : Diagramme de bifurcation de l'application (4.10) obtenu pour  $b = 0.1$  et  $-1.65 \leq a \leq -1.1$ .

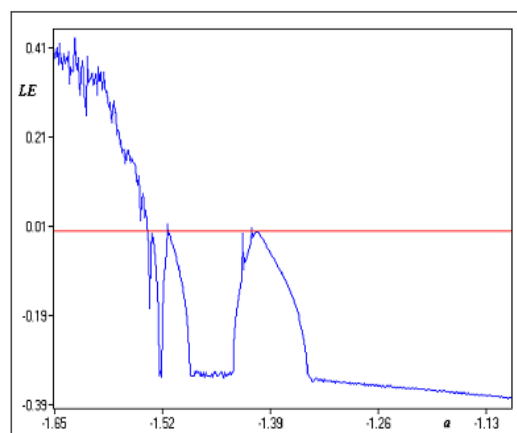


Fig : 4-1.5 : Variation de l'exposant de Lyapunov de l'application (4.10) obtenue pour  $b = 0.1$  et  $-1.65 \leq a \leq -1.1$ .

## 4.2.2 Nouvelle application affine par morceaux et collision de frontière

La nouvelle application affine par morceaux (4.13) est une simplification de l'application de Hénon (4.10), le terme non linéaire quadratique  $x^2(-x^2)$  est remplacé par  $-|x|$ .

La nouvelle application affine par morceaux (4.13) est donnée par :

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 + bz + a|x| \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Les attracteurs chaotiques présentés par l'application (4.13) comme indiqué Fig.4-2.1 et Fig.4-2.3, sont des attracteurs chaotiques du type multiples-plis, et les attracteurs chaotiques dans Fig.4-2.2 et Fig.4-2.4 sont des attracteurs chaotiques très similaires à l'attracteur chaotique de Lozi [46].

### Route vers le chaos : Bifurcation collision de frontière

Ce type de bifurcation se produit dans le cas des systèmes dynamiques (applications discrètes ou continues) affines par morceaux. Quand un paramètre du système traverse la frontière de deux sous-systèmes de différentes structures, cela produit un brusque changement au niveau du comportement du système [9]. Il est bien connu que l'attracteur de l'application de Lozi [48] présente une bifurcation collision de frontière route vers chaos développé à partir d'une orbite périodique stable [1]. Les attracteurs chaotiques de notre application (4.13) sont obtenus à partir d'une inverse bifurcation collision de frontière route vers chaos développé à partir d'une orbite périodique stable donne un comportement chaotique comme le montre Fig.4-2.5. Fig.4-2.6 représente le spectre de l'exposant de Lyapunov le plus grand de l'application (4.13) par rapport au paramètre  $a$ ,  $a \in [-1.65, -1.1]$ .

### 4.2.3 Analyse locale de points fixes

Dans cette section, nous déterminons les conditions réalisées par les paramètres  $(a, b)$  dans lesquelles les orbites de l'application (4.13) sont bornées ou non bornées. En suite nous étudions la stabilité des points fixes de l'application (4.13).

Si  $b < 1 - a$  et  $b > 1 + a$ , les deux points fixes de l'application (4.13) sont  $S_1 = \frac{-1}{b+a-1}(1, 1, 1)$ , et  $S_2 = \frac{-1}{b-a-1}(1, 1, 1)$ . Et si  $b \geq 1 - a$  et  $b \leq 1 + a$ , les orbites de l'application (4.13) ne sont pas toutes bornées, et si  $b < 1 - a$  et  $b > 1 + a$  peut-être existe des orbites bornées.

**Théorème 4.5** *La région de stabilité  $M$  du point fixe  $S_1$  est donnée par*

$$M = \{(b, a) : -1 < b < 1, -1 - b < a < 1 - b\} \quad (4.14)$$

**Preuve.** Le polynôme caractéristique de la matrice jacobienne de l'application (4.13) calculé au point  $S_1$ , prend la forme :  $P_{S_1}(\lambda) = \lambda^3 - a\lambda^2 - b$ , toujours d'après le critère (2.4), nous concluons que le point fixe  $S_1$  de l'application (4.13) est localement stable si les conditions suivantes sont vérifiées : (i)  $|a + b| < 1$ , (ii)  $|b| < 1$ , et (iii)  $-ab < 1 - b^2$ . D'après (i) et (ii) nous obtenons  $-1 - b < a < 1 - b$  et  $-1 < b < 1$ . Enfin, les conditions (i), (ii) et (iii) donnent la région  $M$  de stabilité du point fixe  $S_1$ .

Par exemple, nous fixons le paramètre  $b$  à la valeur  $b = 0.3$ . Avec cette valeur le point fixe  $S_1$  est stable pour  $-1.3 < a < 0.7$ , mais le point fixe  $S_1$  pas localement stable au point  $a = -1.3$ , nous notons que pour  $a = 0.7$  c'est-à-dire ( $a = 1 - b$ ) n'existe pas du point fixe. Pour  $a = -1.3$  nous avons les trois valeurs propres suivantes :  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -0.717891$  et  $\lambda_3 = 0.417891$ , et les exposants de Lyapunov correspondants sont  $L_1 = 0$ ,  $L_2 = -0.331438$  et  $L_3 = -0.872535$ . Le diagramme de bifurcation dans la Fig.4-2.5 donne une description graphique de ce scénario. Par contre, le point fixe  $S_2$  est instable.

#### Zones des orbites chaotiques

On remarque dans certains cas particuliers, le chaos peut se produit dans l'application

(4.13) s'il y a au moins un point fixe qui n'est pas asymptotiquement stable, à savoir qu'il doit être un point fixe selle ou un point fixe instable, alors on a la conclusion suivante :

**Conclusion 4.6** *Si  $-1 < b < 1$  et  $a \leq -1 - b$  il y a une possibilité d'exister des zones d'orbites chaotiques*

**Exemple 4.1** *pour  $b = 0.3$  et  $a = -1.65$  l'application (4.13) a deux points fixes sont  $S_1(0.42, 0.42, 0.42)$  et  $S_2(-0.1, -0.1, -0.1)$ , la matrice jacobienne de l'application (4.13) évaluée au point  $S_1$  a trois valeurs propres :  $\lambda_1 = -1.5202$ ,  $\lambda_2 = -0.5139$  et  $\lambda_3 = 0.3840$ , nous avons  $|\lambda_1| > 1$  et  $|\lambda_{2,3}| < 1$  donc  $S_1$  est un point selle. Les exposants de Lyapunov correspondants sont  $L_1 = 0.4188$ ,  $L_2 = -0.6657$  et  $L_3 = -0.9571$ , et la dimension de Lyapunov de l'attracteur est  $D_L = 1.74203$ . D'autre part si  $|b| < 1$  l'application (4.13) n'est pas hyperchaotique puisque la somme des exposants de Lyapunov  $L_1 + L_2 + L_3 = \log |b| = -1.20397$ . Des attracteurs chaotiques correspondants indiqués dans Fig.(4-2.3) et Fig.(4-2.4).*

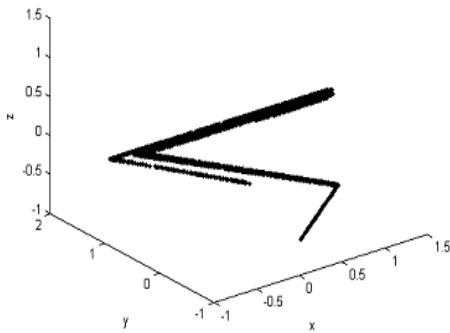


Fig.4-2.1 : Attracteur chaotique de type multiples-plis obtenu par l'application (4.13) pour  $a = -1.65$  et  $b = 0.1$ .

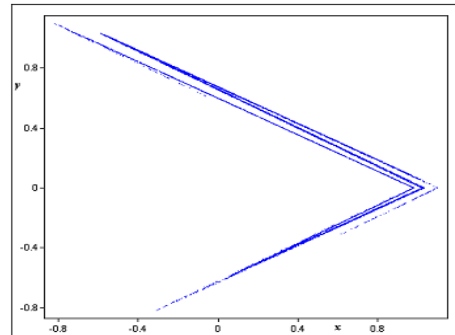


Fig.4-2.2 : Projection dans le plan  $(x, y)$ , attracteur chaotique du type Lozi de l'application (4.13) obtenu pour  $a = -1.65$  et  $b = 0.1$ .

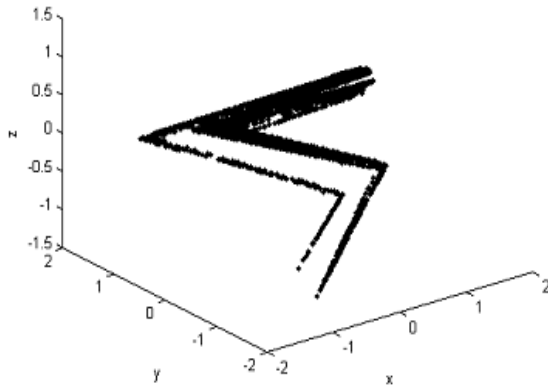


Fig.4-2.3 : Attracteur chaotique de type multiples-plis obtenu par l'application (4.13) pour  $a = -1.65$  et  $b = 0.3$ .

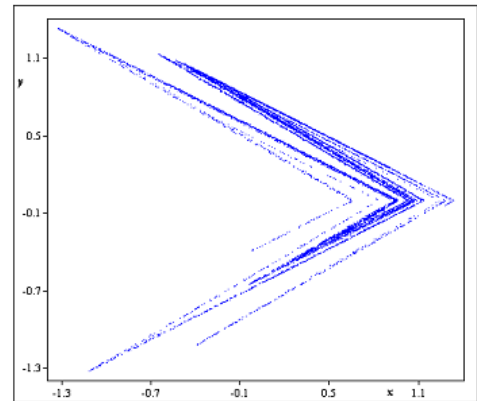


Fig.4-2.4 : Projection dans le plan  $(x, y)$ , d'attracteur chaotique du type Lozi de l'application (4.13) obtenu pour  $a = -1.65$  et  $b = 0.3$ .

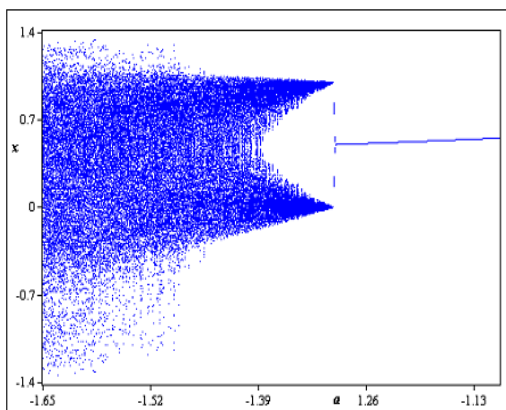


Fig.4-2.5 : Diagramme de bifurcation de l'application (4.13) obtenu pour  $b = 0.3$  et  $-1.65 \leq a \leq -1.1$ .

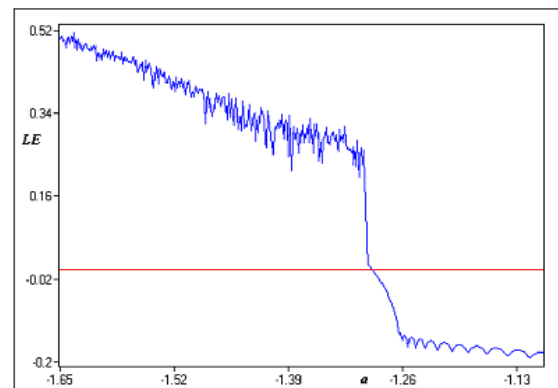


Fig.4-2.6 : Variation de l'exposant de Lyapunov de l'application (4.13) obtenue pour  $b = 0.3$  et  $-1.65 \leq a \leq -1.1$ .



# Chapitre 5

## Application de Hénon modifiée par une fonction réelle bornée

Il est bien connu dans la recherche théorique que la fonction sinusoïdale joue un rôle très important dans les mathématiques, la fonction sinusoïde ou la fonction sinusoïdale est généralement la fonction d'onde sinusoïdale qui est liée aux oscillations, peut décrire de nombreux phénomènes oscillants. Cette fonction est très couramment utilisé dans les mathématiques pures et appliquées [32], [29], en plus de mathématiques, la fonction sinusoïde se trouve dans d'autres domaines d'études tels que la science, physique, électricité, électronique et en ingénierie [49], [7]. Cette fonction existe aussi dans la nature comme on le observe dans les vagues de l'océan, les ondes sonores, les ondes lumineuses et de nombreux autres domaines. Le contenu de ce chapitre à fait l'objet d'une publication internationale[38].

### 5.1 Application de Hénon modifiée par fonction réelle bornée et grande région chaotique

Dans cette section nous étudions l'application (5.1) [38] qui est obtenue par des modifications de l'application de Hénon (3.8), notre application (5.1) possèdent une propriété

très importante dans l'étude des applications discrètes, car leurs orbites sont toutes bornées et possède une région chaotique large. D'autre part l'application (5.1) est capable de réaliser deux types d'attracteurs chaotiques : l'attracteur chaotique de type Lorenz et l'attracteur chaotique de type multiples-plis de différentes routes vers le chaos.

On considère l'application modifiée de Hénon (5.1)  $f$  en 3-D définie par  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = f(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  telle que :

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \sin z \\ a + bx + cy - \sin z^2 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

où le terme linéaire  $z$  dans l'application de Hénon (3.8) est remplacé par le terme non linéaire  $\sin z$ , et le terme non linéaire  $z^2$  est remplacé par le terme non linéaire  $\sin z^2$ . Notre application (5.1) est capable de concrétiser quelques attracteurs chaotiques de type Lorenz, pour certaines valeurs de ses paramètres de bifurcation, D'une part la fonction associée par l'application (5.1) est continue sur  $\mathbb{R}^3$ , le déterminant de la matrice jacobienne de la application (5.1) n'est pas constante et égal  $b \cos z$  ( $b \neq 0$  et  $\cos z \neq 0$ ) les deux applications (3.8) et (5.1) ne sont pas topologiquement équivalentes. L'application (5.1) équivalente à l'équation aux différences de troisième ordre (5.2) :

$$z_{t+1} = a + b \sin z_{t-2} + c \sin z_{t-1} - \sin z_t^2 \quad (5.2)$$

### 5.1.1 Orbites bornées

Dans cette section, nous allons montrer que toutes les orbites de l'application (5.1) sont bornées. D'autre part Il a été montré dans [21] que l'ensemble des orbites bornées de l'application de Hénon en 2-D sont situées à l'intérieur d'un box, et il a été montré dans [20] que l'ensemble des orbites bornées de l'application préservant le volume en 3-D sont situé à l'intérieur d'un cube. De même, nous allons montrer que les toutes les orbites de l'application (5.1) sont situées à l'intérieur dans un cuboïde.

**Théorème 5.1** *Toutes les orbites de l'application (5.1) sont bornées pour tout  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  et  $t > 1$ .*

**Preuve.** Nous utilisons le résultat standard suivant : La suite réelle  $(z_n)_n$  est bornée s'il existe un nombre réel positif  $k$  tel que  $|z_n| \leq k$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Dans notre cas, la suite  $(z_t)_t$  donnée en (5.1) satisfait l'inégalité suivante :  $|z_t| \leq 1 + |a| + |b| + |c|$  car  $|\sin z| \leq 1$  pour tout  $z \in \mathbb{R}$ . Le nombre réel  $1 + |a| + |b| + |c|$  est positif, donc la suite  $(z_t)_t$  est bornée pour tout  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  et  $t > 1$ . Ce qui implique que toutes les orbites de l'application (5.1) sont bornées pour tout  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  et  $t > 1$ .

**Théorème 5.2** *les orbites de l'application (5.1) sont situées à l'intérieur du cuboïde :*

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1 + |a| + |b| + |c|\}.$$

**Preuve.** Il est très facile de prouver ce théorème, puisque l'application (5.1) est équivalente à :

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin z_{t-1} \\ \sin z_t \\ a + b \sin z_{t-2} + c \sin z_{t-1} - \sin z_t^2 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

### 5.1.2 Stabilité asymptotique des orbites

Dans cette section, nous examinons les domaines des paramètres de bifurcation  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  pour que les orbites de l'application (5.1) soient asymptotiquement stables.

**Théorème 5.3** *Le point fixe  $A(x_0, y_0, z_0)$  de l'application (5.1) est asymptotiquement stable pour tout  $a \in \mathbb{R}$  et si seulement si  $(b, c) \in \cup_{i=1}^{i=2} \Omega_i$ , où :*

$$\Omega_1 : \begin{cases} -1 < b < 1 \\ \frac{b \cos z_0 (b \cos z_0 + 2z_0 \cos z_0^2) - 1}{\cos z_0} < c < \frac{1 - |b \cos z_0 - 2z_0 \cos z_0^2|}{\cos z_0} \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\Omega_2 : \begin{cases} -1 < b < 1 \\ \frac{1 - |b \cos z_0 - 2z_0 \cos z_0^2|}{\cos z_0} < c < \frac{b \cos z_0 (b \cos z_0 + 2z_0 \cos z_0^2) - 1}{\cos z_0} \end{cases} \quad (5.5)$$

**Proof.** Le polynôme caractéristique de la matrice jacobienne de l'application (5.1) calculé au point  $A(x_0, y_0, z_0)$ , prend la forme :  $P_A(\lambda) = \lambda^3 + 2z_0 \cos z_0^2 \lambda^2 - c \cos z_0 \lambda - b \cos z_0$ , d'après le Critère 2.4, nous concluons que le point fixe  $A$  de l'application (5.1) est asymptotiquement stable si les conditions suivantes sont satisfaites : (1)  $|b \cos z_0| < 1$ , (2)  $1 + 2z_0 \cos z_0^2 - c \cos z_0 - b \cos z_0 > 0$ , (3)  $1 - 2z_0 \cos z_0^2 - c \cos z_0 + b \cos z_0 > 0$  et (4)  $1 - b^2 \cos^2 z_0 > 2bz_0 \cos z_0 \cos z_0^2 - c \cos z_0$ . D'après (1) on tire (5)  $|b| < 1$ , et d'après (2) et (3) nous avons (6)  $c \cos z_0 < 1 - |b \cos z_0 - 2z_0 \cos z_0^2|$ , et d'après (4) on tire (7)  $c \cos z_0 > b^2 \cos^2 z_0 + 2bz_0 \cos z_0 \cos z_0^2 - 1$ , et d'après (6) et (7) nous obtenons (8)  $b \cos z_0 (b \cos z_0 + 2z_0 \cos z_0^2) - 1 < c \cos z_0 < 1 - |b \cos z_0 - 2z_0 \cos z_0^2|$ . Enfin, les inégalités (1) et (8) donnent les conditions de stabilité asymptotique du point fixe  $A$ . ■

Par exemple, le point fixe de l'application (5.1) est la solution du système :

$$x_0 = y_0, \quad y_0 = \sin z_0, \quad z_0 = a + b \sin z_0 + c \sin z_0 - \sin z_0^2$$

On a donc l'équation :

$$z_0 - (b + c) \sin z_0 + \sin z_0^2 - a = 0$$

Très difficile de calculer les points fixes de l'application (5.1) analytiquement, on remarque si  $a = 0$ , le point  $(0, 0, 0)$  est un point fixe de l'application (5.1) pour toutes les valeurs des paramètres de bifurcation  $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ . Ensuite, nous avons le théorème suivant :

**Théorème 5.4** *Si  $a = 0$ , le point fixe  $(0, 0, 0)$  est asymptotiquement stable si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

$$\begin{cases} -1 < b < 1 \\ b^2 - 1 < c < 1 - |b| \end{cases} \quad (5.6)$$

Si nous choisissons  $a = 0$ ,  $b = 0.8$  et  $c = 0.1$ . Alors, avec ces valeurs, le point fixe  $(0, 0, 0)$  est asymptotiquement stable, et nous avons les trois valeurs propres suivantes :  $\lambda_1 = -0.4821 - 0.7728i$ ,  $\lambda_2 = -0.4821 + 0.7728i$  et  $\lambda_3 = 0.9642$ , avec  $|\lambda_i|_{(1 \leq i \leq 3)} < 1$ .

### 5.1.3 Orbites chaotiques

Les orbites bornées jouent un rôle vital dans les systèmes dynamiques. Car nous savons qu'un système dynamique est chaotique si il est bornée. D'autre part, dans des cas particuliers de l'application (5.1) le chaos peut se produit si elle a admis au moins un point fixe n'est pas asymptotiquement stable (point fixe instable).

Définissons les sous-ensembles suivants de  $\mathbb{R}^2$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\Omega}_{11} : b \leq -1, \overline{\Omega}_{12} : b \geq 1 \\ \overline{\Omega}_{13} : c \leq \frac{b \cos z_0 (b \cos z_0 + 2z_0 \cos z_0^2) - 1}{\cos z_0}, \overline{\Omega}_{14} : c \geq \frac{1 - |b \cos z_0 - 2z \cos z_0^2|}{\cos z_0} \end{array} \right. \quad (5.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\Omega}_{21} : b \leq -1, \overline{\Omega}_{22} : b \geq 1 \\ \overline{\Omega}_{23} : c \leq \frac{1 - |b \cos z_0 - 2z_0 \cos z_0^2|}{\cos z_0}, \overline{\Omega}_{24} : c \geq \frac{b \cos z_0 (b \cos z_0 + 2z_0 \cos z_0^2) - 1}{\cos z_0} \end{array} \right. \quad (5.8)$$

et :

$$\overline{\Omega}_i = \cup_{j=1}^{j=4} \overline{\Omega}_{ij}, \quad i = 1, 2 \quad (5.9)$$

Ici, les sous-ensembles  $(\overline{\Omega}_i)_{1 \leq i \leq 2}$  sont les complémentaires dans  $\mathbb{R}^2$  des sous-ensembles  $(\Omega_i)_{1 \leq i \leq 2}$  donnés par (5.4) et (5.5). Alors on a la conclusion suivante :

**Conclusion 5.5** *Si  $a \in \mathbb{R}$  et  $(b, c) \in \cap_{i=1}^{i=2} \cup_{j=1}^{j=4} \overline{\Omega}_{ij}$ , alors, il y a une possibilité de l'existence des orbites chaotiques de l'application (5.1).*

Comme exemple, pour  $a = 0.003$ ,  $b = 0.8$  et  $c = 0.99$ , en utilisant le Logiciel Maple, l'application (5.1) possède les trois points fixe suivantes :  $(0.631, 0.631, 0.683)$ ,  $(0.978, 0.978, 1.779)$  et  $(-0.0038, -0.0038, -0.0038)$ , la matrice jacobienne de l'application (5.1) évalué au point  $(-0.0038, -0.0038, -0.0038)$  possède les trois valeurs propres suivantes :

$\lambda_1 = -0.6340 - 0.4747i$ ,  $\lambda_2 = -0.6340 + 0.4747i$  et  $\lambda_3 = 1.2755$ , d'où le point fixe est selle donc elle est instable, et les exposants de Lyapunov correspondants sont  $L_1 = L_2 = -0.2332$  et  $L_3 = 0.2433$ . Ce qui montre que la nouvelle l'application (5.1) est un système chaotique car elle admet un exposant de Lyapunov positif  $L_3$ , et la dimension de Lyapunov est 2.0433. Fig.5-2-d, illustre l'attracteur chaotique de type Lorenz correspondant.

#### 5.1.4 Route vers le chaos et observations de grande région chaotique

Il est bien connu que l'attracteur de Hénon est obtenu via une bifurcation doublement de période route vers le chaos [36], aussi l'attracteur de Lozi, est obtenu directement à partir d'une collision de frontière bifurcation route vers le chaos développé à partir d'une orbite périodique stable [48]. D'après le diagramme de bifurcation Fig.5-2.1, on en déduit que notre application (5.1) présente un scénario route vers le chaos très compliqué ce qui en appelé inverse collision de frontière-doublement de période bifurcation route vers le chaos. Dans cette section, nous illustrons certaines observations des attracteurs chaotiques, les comportements dynamiques, les régions périodiques et les régions chaotiques de l'application (5.1) sont étudiées par méthode numérique.

##### Variations du paramètre $a$ :

nous allons illustrer certains attracteurs chaotiques observées, les comportement dynamiques de l'application (5.1) sont étudiés numériquement. Fig.5-2.1 et Fig.5-2.2 représentent le diagramme de bifurcation et le diagramme de variation de l'exposant de Lyapunov de l'application (5.1) par rapport au paramètre  $a$ ,  $a \in [0, 1]$ . A partir du diagramme de bifurcation Fig.5-2.1, on remarque que l'application proposée (5.1) présente une bifurcation inverse de doublement de période route vers le chaos, pour les valeurs sélectionnées du paramètre de bifurcation  $a$ . Fig.5-2 présente quelques attracteurs chaotiques de type de Lorenz.

Nous fixons la condition initiale  $x_0 = y_0 = z_0 = 0.01$  et fixons les valeurs des paramètres  $b = 0.8$ ,  $c = 0.99$  et on fait varier le paramètre  $a$  dans l'intervalle  $[0, 1]$ , l'applica-

tion (5.1) présente les comportements dynamiques suivants comme le montre Fig.5-2.1 et Fig.5-2.2. Pour  $0.68 < a \leq 1$  l'application (5.1) est dans l'état chaotique, Fig.5-2 indique quelques attracteurs chaotiques de l'application (5.1), pour  $0.48 < a \leq 0.68$  l'application (5.1) est stable, car le plus grand exposant de Lyapunov correspondant est négatif, comme le montre Fig.5-2.2. Une bifurcation inverse de doublement de période se produit par l'application (5.1) au point  $a = 0.48$ , et pour  $0.16 < a \leq 0.48$ , l'application (5.1) est dans l'état de doublement de période comme le montre Fig.5-2.2. et pour  $0 \leq a < 0.16$  l'application (5.1) est chaotique avec des fenêtres périodiques dans la bande chaotique. Les portraits de phase de l'application (5.1) sont présentés dans Fig.5-2.

Il est bien connu que l'application Hénon [36] est bornée pour certaines valeurs des paramètres de bifurcation  $a$  et  $b$ , mais toutes les orbites de notre application (5.1) sont bornées et sont situées à l'intérieur dans un cuboïde pour tous les paramètres de bifurcation  $a, b$  et  $c$ . Cette propriété de l'application (5.1) peut être c'est l'une des raisons qui explique l'existence de grande zone chaotique lorsque le paramètre  $a$  varie dans le sens croissant. Passons maintenant à l'investigation numérique, nous choisissons  $b = 0, 8$  et  $c = 0, 9$  et laissons  $a$  varié dans les intervalles  $[1, 5]$ ,  $[5, 10]$ , ...,  $[95, 10^2]$ , ...  $[999995, 10^6]$ . Les diagrammes de bifurcation sont illustrés par Fig.5-2.3 et Fig.5-2.5, ainsi que les diagrammes de variation de l'exposant de Lyapunov sont illustrés par Fig.5-2.4 et Fig.5-2.6, qui sont obtenus aux différentes valeurs de paramètre  $a$  dans les intervalles ci-dessus, sont utilisés pour donner une vision complète du comportement dynamique de l'application (5.1), nous voyons que la l'application (5.1) est dans l'état chaotique, en plus nous observons des grandes régions chaotiques si le paramètre de bifurcation  $a$  varie dans le sens croissant dans les intervalles sélectionnées ci-dessus.

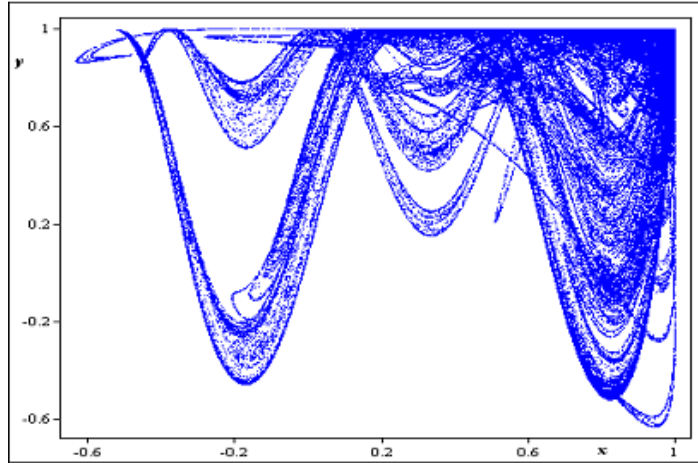


FIG. 5-1 – Attracteur chaotique de l'application (5.1) pour  $a = 0.9, b = 0.8$  et  $c = 0.99$ .

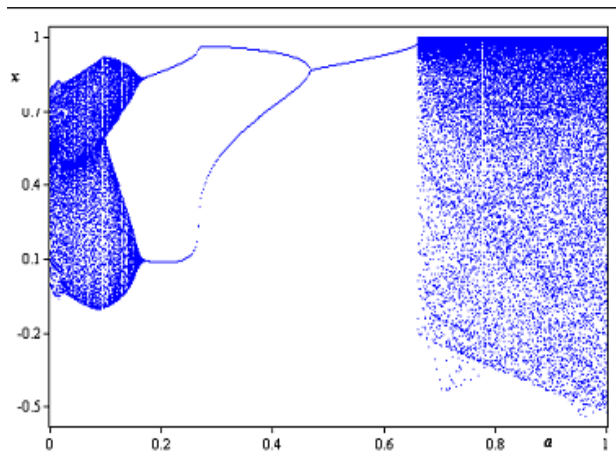


Fig.5-2.1 : Diagramme de bifurcation de l'application (5.1) obtenu pour  $b = 0.8, c = 0.99$  et  $-1 \leq a \leq 1$

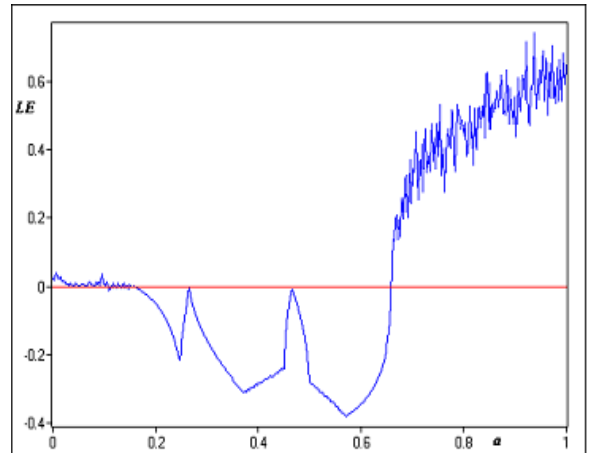


Fig.5-2.2 : Variation de l'exposant de Lyapunov de l'application (5.1) obtenue  $a = 0.8, c = 0.99$  et  $-1 \leq a \leq 1$ .



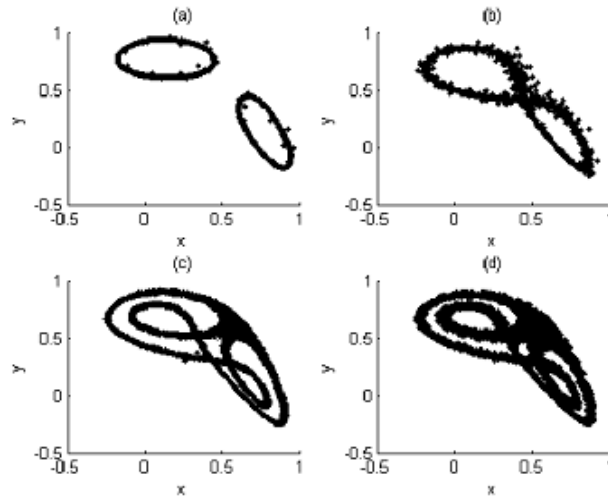


FIG. 5-2 – Portraits des phases de l'application (5.1) avec  $b = 0.8$  et  $c = 0.99$  sont fixés. En (a) orbite 2-période avec  $a = 0.09$ , en (b) attracteur chaotique avec  $a = 0.023$ , en (c) attracteur chaotique de type Lorenz avec  $a = 0.01$ , et en (d) attracteur chaotique du type Lorenz avec  $a = 0.003$ .

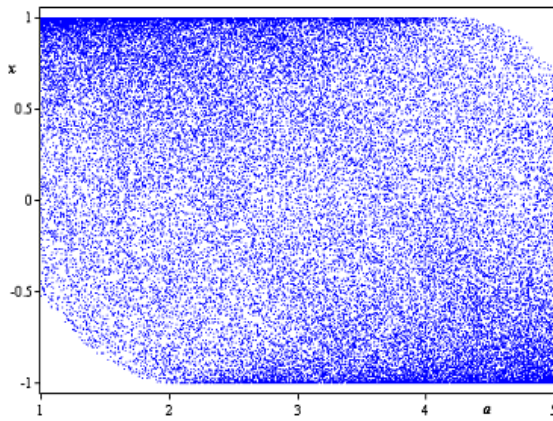


Fig.5-2.3 : Diagramme de bifurcation de l'application (5.1) obtenu pour  $b = 0.8$ ,  $c = 0.9$  et  $a \in [1, 5]$

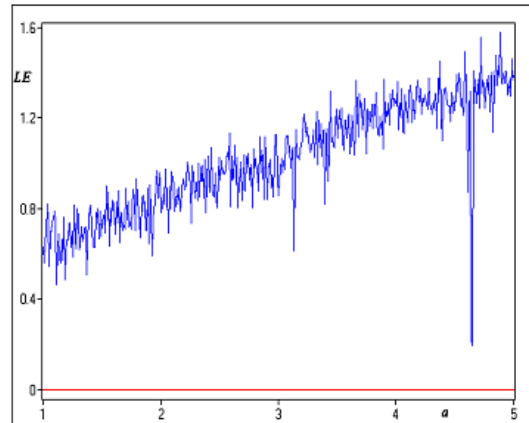


Fig.5-2.4 : Variation de l'exposant de Lyapunov de l'application (5.1) pour  $b = 0.8$ ,  $c = 0.9$  et  $a \in [1, 5]$ .

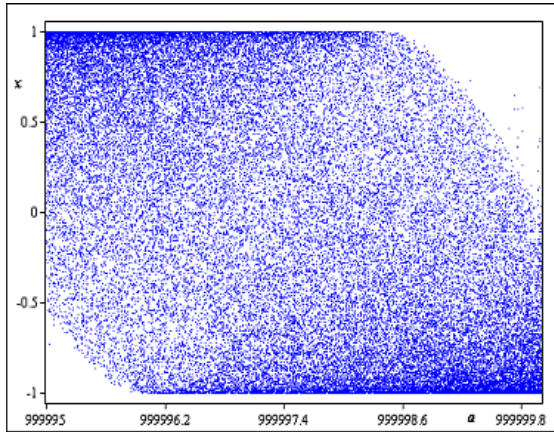


Fig.5-2.5 : Diagramme de bifurcation de l'application (5.1) obtenu pour  $b = 0.8$ ,  $c = 0.9$  et  $a \in [999995, 10^6]$ .

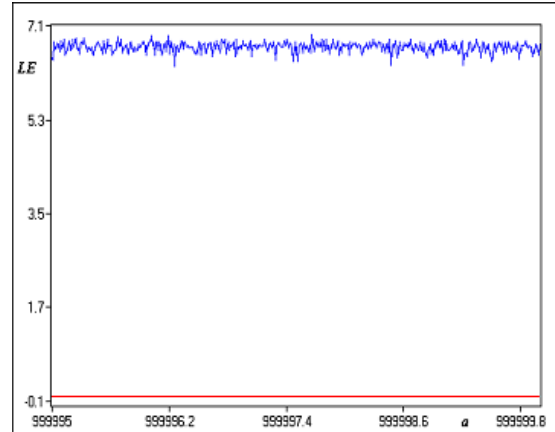


Fig.5-2.6 : Variation de l'exposant de Lyapunov de l'application (5.1) pour  $b = 0.8$ ,  $c = 0.9$  et  $a \in [999995, 10^6]$ .

### Variations du paramètre $b$

Avec la condition initiale  $x = 0.25, y = 0.2, z = 0.02$  nous varions le paramètre  $b$ ,  $b \in [-1, 1]$  et fixons  $a = 4, c = 0.6$ , l'application (5.1) développe des attracteurs chaotiques du type multiples-plis comme indiqué dans Fig.5-3. Par exemple, pour  $a = 4, b = 0.2$  et  $c = 0.6$ , la matrice jacobienne évaluée au point  $(-0.7940, -0.7940, 4.05897)$  possède les trois valeurs propres suivantes :  $\lambda_1 = -0.0757 + 0.4062i$ ,  $\lambda_2 = -0.0757 - 0.4062i$  et  $\lambda_3 = -2.8486$ , les exposants de Lyapunov correspondants sont  $L_1 = L_2 = -0.8838$  et  $L_3 = 1.0468$ . Fig.5-5.1 et Fig.5-5.2 représentent respectivement le digramme de bifurcation et le spectre de l'exposant de Lyapunov le plus grand de l'application (5.1) par rapport au paramètre  $b$ ,  $b \in [-1, 1]$ . Des attracteurs chaotiques de l'application (5.1) sont représentés sur Fig.5-3.

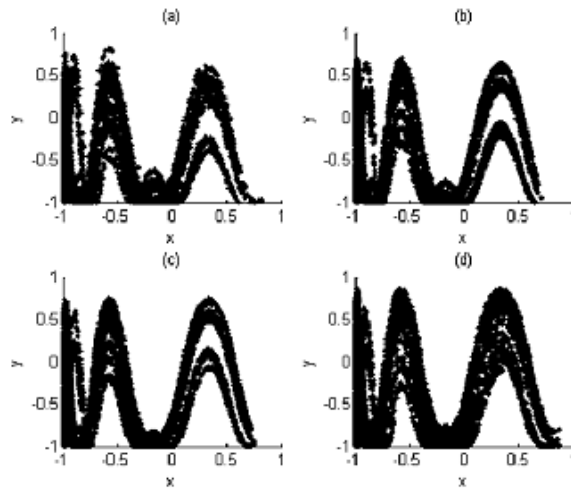


FIG. 5-3 – Projection dans le plan  $x - y$  des attracteurs chaotiques du type multiples-plis de l'application (5.15) avec  $a = 4$  et  $c = 0.6$  sont fixés. En (a) avec  $b = 0.3$ , en (b) avec  $b = 0.1$ , en (c) avec  $b = 0.1$ , et en (d) avec  $b = 0.2$ .

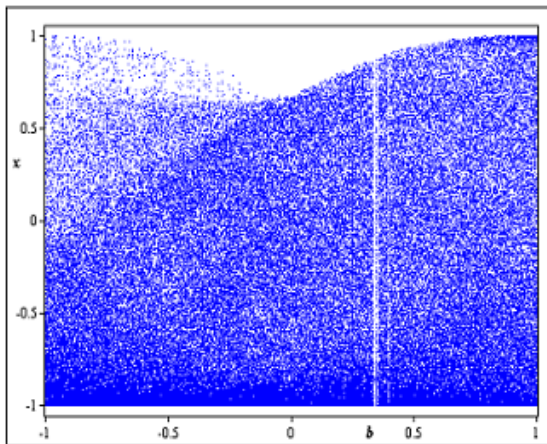


Fig.5-5.1 : Diagramme de bifurcation de l'application (5.1) obtenu pour  $a = 4, c = 0.6$  et  $-1 \leq b \leq 1$

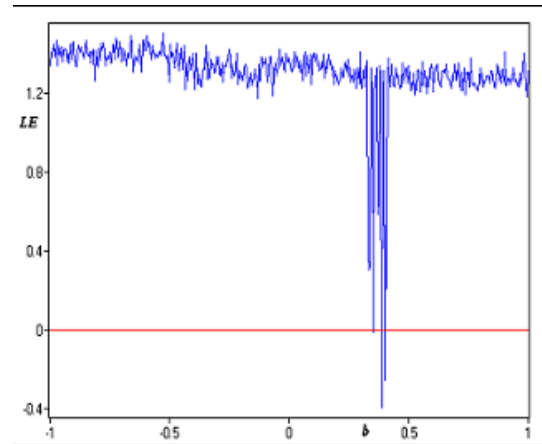


Fig.5-5.2 : Variation de l'exposant de Lyapunov de l'application (5.1) obtenue  $a = 4, c = 0.6$  et  $-1 \leq b \leq 1$ .

### Variations du paramètre $c$

Avec la condition initiale  $x = 0.25, y = 0.2, z = 0.02$  nous varions le paramètre  $c, c \in [-1, 1]$  et nous fixons  $a = 4, b = 0.8$  l'application (5.1) développe des attracteurs chaotiques du type multiples-plis comme indiqué dans Fig.5-4. Par exemple, pour  $a = 4, b = 0.8$  et  $c = 0.2$ , la matrice jacobienne l'application (5.1) évaluée au point  $(-0.3988, -0.3988, 3.5518)$  admet les trois valeurs propres suivantes :  $\lambda_1 = 7.0546, \lambda_2 = -0.3028$  et  $\lambda_3 = 0.3436$ , et les exposants de Lyapunov correspondants sont  $L_1 = 1.9537, L_2 = -1.1947$  et  $L_3 = -1.0683$ . Fig.5-5.3 et Fig.5-5.4 présentent respectivement le digramme de bifurcation et le spectre de l'exposant de Lyapunov le plus grand de l'application (5.1) par rapport au paramètre  $c, c \in [-1, 1]$ . Des attracteurs chaotiques de l'application (5.1) sont représentés sur Fig.5-4.

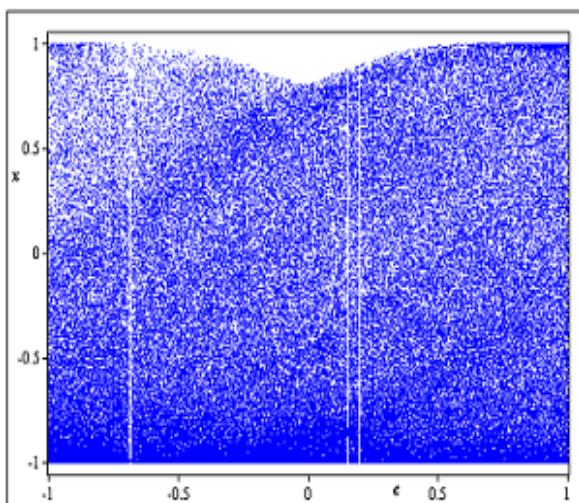


Fig.5-5.3 : Diagramme de bifurcation de l'application (5.1) obtenu pour  $a = 4, c = 0.8$  et  $-1 \leq c \leq 1$ .

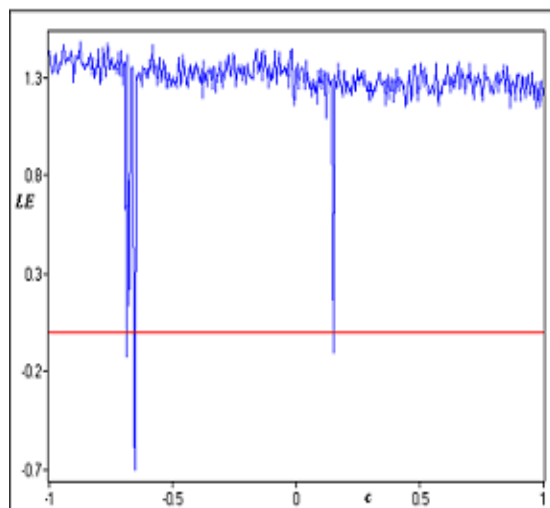


Fig.5-5.4 : Variation de l'exposant de Lyapunov de (5.1) obtenue pour  $a = 4, c = 0.8$  et  $-1 \leq c \leq 1$ .

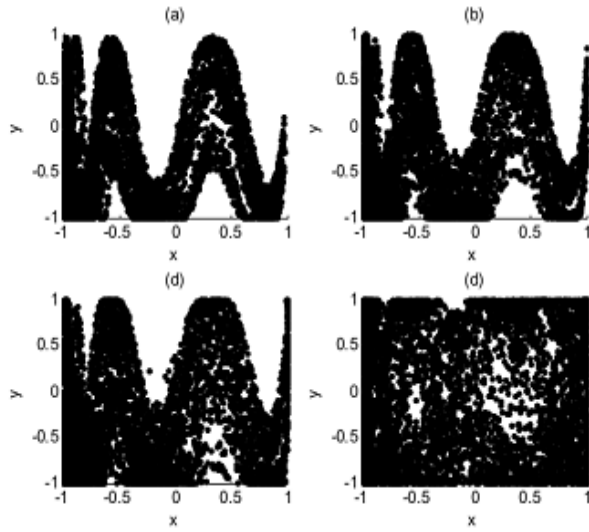


FIG. 5-4 – Projection dans le plan  $x - y$  des attracteurs chaotiques du type multiples-plis de l'application (5.15) avec  $a = 4$  et  $b = 0.8$  sont fixés. En (a) avec  $c = 0.4$ , en (b) avec  $c = 0.7$ , en (c) avec  $c = 0.8$ , et en (d) attracteur chaotique avec  $c = 2$ .

## 5.2 Conclusion générale et perspective

Deux motivations principales de ce mémoire, la première motivation est l'étude du domaines des paramètres  $(a_i, b_i, c_i)_{0 \leq i \leq 9} \in \mathbb{R}^{30}$  dans lesquelles les orbites de l'application quadratique (2.1) en 3-D sont bornées ou non bornées, parce que la plupart des orbites périodiques, quasi périodiques et les orbites chaotique sont bornées. La deuxième motivation, est l'étude du comportement dynamique des nouvelles applications de Hénon modifiées en 3-D : Deux applications modifiées par une fonction affine par morceaux, et une autre application modifiée par une fonction non linéaire bornée. Le travail réalisé dans ce manuscrit propose deux nouveaux applications affines par morceaux en 3-D peut être assurées la simplification de l'attracteur de Hénon (3.8) et de l'attracteur Hénon (4.10) en 3-D. Ces idées constituent des orientations possibles pour des travaux futurs.

# Bibliographie

- [1] A. Alaoui, M. A. C. Robert, and C. Grebogi., Dynamics of a Hénon-Lozi map., *Chaos Solit. Fract.* 12, 2323-2341, 2001.
- [2] A. J. Dragt, and D. T. Abell., Symplectic maps and computation of orbits in particle accelerators. In : *Integration algorithms and classical mechanics* (Toronto, ON, 1993). *Fields Inst. Commun.*, V. 10. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 59-85, 1996.
- [3] A. Lyapunov., *The general problem of the stability of motion*, CRC Press, 1992.
- [4] B. C. Du, M. C. Li, and M. Malkin., *Bifurcation of the ACT Maps*, Preprint of Institute of Mathematics, Academia Sinica (Nankang, Taiwan), MIAS 2004-3, 2004.
- [5] B. C. Du, M. C. Li, and M. Malkin., Topological horseshoes for Arneodo-Coulet-Tresser maps, *Reg. and Chaotic Dyn.*, 11, no.2, 181-190, 2006.
- [6] Banerjee S, and Grebogi C., Border collision bifurcations in two-dimensional piecewise smooth maps," *Phy. Rev E.*, 59 (4), 4052-4061, 1999.
- [7] C. Bi, J. Wang, Z. Lan, et al., Investigation of Bifurcation and Chaos in Forward Converter, in *Proc. International Conference on Mechatronics and Automation.*, 663 – 668, 2007.
- [8] C. Li, and G. Chen., Estimating the Lyapunov exponents of discrete systems, *Chaos.*, 14 (2), 343-346, 2004.
- [9] C.K.Tse., *Complex Behavior of Switching Power Conoerters*. Boca Raton : CRC Press., 12, 13, 53, 2003.

- [10] D. A. Miller, and G. Grassi., A discrete generalized hyperchaotic Hénon map circuit, Circuits and Systems, MWSCAS 2001. Proceedings of the 44<sup>th</sup> IEEE 2001 Midwest Symposium on., 1, 328-331, 2001.
- [11] D. V. Turaev., Polynomial approximations of symplectic dynamics and richness of chaos in nonhyperbolic area-preserving maps. Nonlinearity., 16, 123-135, 2003.
- [12] E. Lorenz., Deterministic nonperiodic flow Journal of the Atmospheric Sciences., 20, 130-141, 1963.
- [13] E. Ott., Chaos in dynamical systems., Cambridge University Press 1993.
- [14] E. Zeraoulia, and J. C. Sprott., Classification of Three-Dimensional Quadratic Diffeomorphisms with constant jacobian, Front. Phys. China, 4, 111-121, 2009.
- [15] E. Zeraoulia, and J. C. Sprott., Robust chaos and its applications, World Scientific Series on Nonlinear Science Series, no 79, A12 :2011. ISBN : 978-981-4374-07-1, 2011.
- [16] E. Zeraoulia, and J. C. Sprott., Some explicit formulas of Lyapunov exponents for 3D quadratic mappings, Front Phys. China, Vol 4, 4, 549-555, 2009.
- [17] E. Zeraoulia, and J.C Sprott., 2-D quadratic maps and 3-D ODE systems : A Rigorous Approach, World Scientific Series on Nonlinear Science Series A., no 73, 2010. ISBN : 978-981-4307-74-1, 981-4307-74-2, 2010.
- [18] G. Baier, and M. Klein., Maximum hyperchaos in generalized Hénon maps, Phys. Lett. A., 151, (6-7), 281-284, 1990.
- [19] G. Grassi, and S. Mascolo., A system theory approach for designing cry-tosystems based on hyperchaos, IEEE Transactions, Circuits & Systems-I : Fundamental theory and applications., 46 (9), 1135-1138, 1999.
- [20] H. E. Lomeli, and J. D. Meiss., Quadratic volume preserving maps. Nonlinearity., 1, 557-574, 1998.
- [21] H. R. Dullin, J. D. Meiss., Generalized Hénon maps : the cubic diffeomorphism of the plane, Bifurcations, patterns and symmetry, Phys. D.,143, 262-289, 2000.

- [22] H. W. E. Jung., Über ganze birationale Transformationen der Ebene. *J. Reine Angew. Math.*, 184, 161-174, 1942.
- [23] I. P. Shestakov, and U. U. Umirbaev., The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables. *J. Amer. Math. Soc.*, 17, 197-227, 2004.
- [24] J. C. Sprott., High-dimensional dynamics in the delayed Hénon map. *Electronic journal of theoretical physics.*, 3, 19, 2006.
- [25] J. C. Tatjer., Three-dimensional dissipative diffeomorphisms with homoclinic tangencies. *Ergodic Theory Dynam. Systems.*, 21, 249-302., 2001.
- [26] J. Guckenheimer, and P. Holmes., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields.* Springer, New York., 1983.
- [27] J. Lu, X. Yu, and G. Chen., Generating chaotic attractors with multiple merged basins of attraction : A switching piecewise-linear control approach. *IEEE Transactions on Circuits and Systems -I : Fundamental Theory and Application*, Vol. 50, no. 2, 198-207, 2003.
- [28] J. Lu, X. Yu, T. Zhou, G. Chen, and X. Yang., Generating chaos with a switching piecewise-linear controller. *Chaos*, Vol. 12, no. 2, 344-349, 2002.
- [29] J.-H. Kim, Y.-S. Chung, S.-Y. Chung., Generalization of characterizations of the trigonometric functions., *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 141, 409-519, 2006.
- [30] K. E. Lenz, H. E. Lomeli, and J. D. Meiss., Quadratic volume preserving maps : an extension of a result of Moser. *Regul. Chaotic Dyn.*, 3, 3, 122-130, 1999.
- [31] L. Chuandong, L. Xiaofeng, and W. Kwok-wo., Lag synchronization of hyperchaos with application to secure communications. *Chaos Solitons Fractals.*, 23, 183-193, 2005.
- [32] L. J. Wallen., One parameter groups and the characterization of the sine function., *Proc. Amer. Math. Soc.*, 102, 59-60, 1988.
- [33] L. O. Chua, M. Komuro, and T. Matsumoto., The double scroll family, Part I and II, *IEEE Transaction in Circuit and System CAS-33.*, 1073-1118, 1986.



- [34] L. P. Shilnikov, and D.V.Turaev., An example of a wild strange attractor. *Mat. Sb.*, 189, 1998, 137-160. Engl. transl : *Sb. Math.*, 189, 291-314, 1998.
- [35] M. A. Aziz-Alaoui and G. Chen., Asymptotic analysis of a new piecewise-linear chaotic system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 12 no. 1, 147-157, 2002.
- [36] M. Hénon., A Two-Dimensional Mapping with a Strange Attractor. *Comm. Math. Phys.*, 50, 69–77, 1976.
- [37] M. Hénon., Numerical study of Quadratic Area-Preserving Mappings. *Q.J,Appl. Math.*, 27, 291-312, 1969.
- [38] M. Mammeri., A Large Chaotic Region in a 3-D Sinusoid Discrete Map. *International Journal of Applied Mathematics and Statistics*. Vol. 55, no. 3, 133-144, 2016.
- [39] M. Mammeri., A novel chaotic attractors in piecewise version of the 3D Hénon map, *Advanced Studies in Theoretical Physics.*, Vol. 9. no.10, 461-473, 2015.
- [40] M. Mammeri., A novel piecewise linear version of the 3D Hénon map, *Far East Journal of Mathematical Sciences.*, Vol. 96.no. 7, 843-853, 2015.
- [41] M. Mammeri., An identical period-doubling route to chaos in a family of 3-D sinusoid discrete maps, *Global Journal of Pure and Applied Mathematics.*, Vol. 12. no.2, 1685 - 1689, 2016.
- [42] M. Mammeri., Existence of bounded orbits in 3-D quadratic map, *Int. Journal of Math. Analysis*, Vol. 8, no. 32, 1581-1589, 2014.
- [43] M. Mammeri., Hyperchaotic Behavior in a New 3-D Discrete-Time Systems, *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences.*, Vol. 25.no. 2, 41-43, 2015.
- [44] O. Rossler., An equation for hyperchaos. *Phys. Lett. A.*, 71, 155-157, 1979.
- [45] Ogata, K., *Discrete-Time Control Systems*, 2nd. Ed. (Prentice Hall, Englewood Cliffs., N.J.), 185-186, 1995.

- [46] Q. Guoyuan, V. W. Michaël Antonie, V. W. Barend Jacobus, and G. Chen., A new hyperchaotic system and its circuit implementation. *Chaos Solitons Fractals.*, 40, 2544-2549, 2009.
- [47] R. L. Devaney., A piecewise linear model for the zones of instability of an area-preserving map, *Physica 10D.*, 387-393, 1984.
- [48] R. Lozi., Un attracteur étrange du type attracteur de Hénon, *Journal de Physique, Colloque C5.*, supplément au no 8, 39, 9-10, 1978.
- [49] S. Banerjee, S. Parui., Delays in PWM control loops imply discontinuity in sampled data models of power electronic circuits., in *Proc. International Symposium on Circuits and Systems.*, vol. 3, 2003.
- [50] S. Friedland and J. Milnor., Dynamical properties of plane polynomial automorphisms. *Ergod. Th. & Dyn. Systems.*, 9, 67-99, 1989.
- [51] S. Gonchenko, and M. Ch. Li., Shilnikov's., Cross-map Method and Hyperbolic Dynamics of Three-dimensional Hénon-Like Maps, *Regul. Chaotic Dyn.*, Vol 15(2-3), 165-184, 2010.
- [52] S. V. Gonchenko, I. I. Ovsyannikov, C. Simó, and D. Turaev., Three-Dimensional Hénon-like Maps and Wild Lorenz-like Attractors, *International Journal of Bifurcation and Chaos.*, 15 (11), 3493–3508, 2005.
- [53] S. V. Gonchenko, J. D. Meiss, and I. I. Ovsyannikov., Chaotic Dynamics of Three-Dimensional Hénon Maps that Originate from a Homoclinic Bifurcation, *Regular and Chaotic Dynamics.*, 11 (2), 191–212, 2006.
- [54] S. V. Gonchenko, V. S. Gonchenko, and J. C. Tatjar., Bifurcation of Three-Dimensional Diffeomorphisms Non-Simple Quadratic Homoclinic Tangencies and Generalized Hénon Maps, *Regul. Chaotic Dyn.*, 12 (3), 233-266, 2007.
- [55] S.N. Elaydi., *An introduction to difference equations.* New York : Springer, 1995.

- [56] S.V. Gonchenko, D.V. Turaev, and L.P. Shilnikov., Dynamical phenomena in multi-dimensional systems with a non-rough Poincare homoclinic curve, Russ. Acad. Sci. Dokl. Math., 47, 410-415, 1993.
- [57] S.V. Gonchenko, L.P. Shilnikov, and D.V. Turaev., "On global bifurcations in three-dimensional diffeomorphisms leading to wild Lorenz-like attractors", Regul Chaotic Dyn., 14 (1), 137-147, 2009.
- [58] W. Engel. and Ganze., Cremona-transformationen von Prinzahlgrad in der Ebene. Math. Ann., 136, 319-325, 1958.
- [59] Y. Cao and Z. Liu., Strange attractors in the orientation-preserving Lozi map, Chaos Solitions & Fractals., 9(11), 1857-1863, 1998.

## التطبيقات المتقطعة في البعد ن حيث ن < 1

لهذه الأطروحة هدفين أساسيين:

الهدف الأول هو تحدد الشروط اللازمة لوجود المدارات المحدودة والغير المحدودة في التطبيق التريبيعي المتقطع في الفضاء الثلاثي الأبعاد.

الهدف الثاني هو دراسة لبعض تطبيقات هينون المعدلة في الفضاء الثلاثي الأبعاد.

كلمات مفتاحيه:

مدارات محدودة، تطبيق هينون ، تطبيق هينون المعدل.

## **On discrete maps in dimension $N$ , $N > 1$**

**This thesis has two main objectives:**

**The first objective is to define sufficient conditions for the existence of bounded or unbounded orbits in the quadratic discrete map in 3-D.**

**The second objective is to study some applications of the modified Hénon map in 3-D.**

**Keywords:**

**Bounded orbits, Hénon map, modified Hénon map.**

## **Sur les Applications discrètes en Dimension $N$ , $N > 1$**

**Cette thèse a deux objectifs principaux:**

**Le premier objectif consiste à définir les conditions suffisantes de l'existence des orbites bornées et non bornées dans l'application quadratique discrète en 3-D.**

**Le second objectif est d'étudier certaines applications de Hénon modifiées en 3-D.**

**Mots-clés :**

**Orbites bornées, application de Hénon, applications de Hénon modifiées.**