REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTER DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Frères Mentouri -Constantine-

Faculté des sciences exactes
Département des Mathématiques

N°d'ordre:./.../.
Série:../.../..

THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Option: Analyse Fonctionnelle

Par

Toualbia Abdelatif

Intitulée

Propriétés des opérateurs de dérivation et théorème de fugled-putnam

Soutenue le:04/07/2016

Devant le jury

- Mr. S. Djezzar	*Professeur,*	*Université Frères Mentouri , Constantine*	Président.
- Mr.S. Mecheri	*Professeur,*	*Université de Tayba,El-madinaalmounawara*	Rapporteur.
- Mr.M.Abdelli	*Professeur,*	*Université Frères Mentouri , Constantine*	Examinateur.
- Mr A.Ayadi	*Professeur,*	*Université Larbi Ben M'hidi, Oum El Bouaghi*	Examinateur.
- Mr.L.Chorfi	*Professeur,*	*Université Badji Mokhtar, Annaba*	Examinateur.

Table des matières

Introduction

Soit H un espace de Hilbert complexe, séparable de dimension infini et soit $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur H. Pour A, B, C et $D \in \mathcal{L}(H)$, nous définissons la dérivation δ_A, la dérivation généralisée $\delta_{A,B}$ et les opérateurs de dérivation élémentaires $R_{(A,C),(B,D)}$, $\Delta_{A,B}$ comme suit :

$$\begin{aligned}
\delta_A(X) &= AX - XA, \\
\delta_{A,B}(X) &= AX - XB, \\
R_{(A,C),(B,D)}(X) &= AXB - CXD, \\
\Delta_{A,B}(X) &= AXB - X,
\end{aligned}$$

pour tout $X \in \mathcal{L}(H)$. Ces opérateurs ont plusieurs applications dans la théorie des opérateurs, ils sont utilisés en mécanique quantique pour représenter des grandeurs physiques, les observables,... ; par exemple si l'opérateur commutateur $AB - BA = \mp ih$ on dit que les grandeurs physiques sont complémentaires, comme cela est exprimé dans le principe d'incertitude d'Heisenberg. Les propriétés de ces opérateurs, leur spectre (voir [10 ; 11 ; 12]), norme [33] et image (voir [2 ; 13 ; 32]) ont été examinés minutieusement ces dernières années, et plusieurs problèmes restent encore sans réponses (voir [18, 24]) ; S. Mecheri[23], J.P. Wiliams [35], L.A. Fialkov [11, 12] et autres ont donné plusieurs propriétés de ces opérateurs et leurs caracérisations (image de dérivation $\delta_{A,B}$, opérateur commutateur, ...).
Ce travail est une contribution à l'étude des opérateurs de dérivation, notre contribution principale dans cette étude consiste à :
1. La construction de la forme de Jordan d'une dérivation généralisée $\delta_{A,B}$ puis d'un opérateur de dérivation élémentaire $R_{(A,C),(B,D)}$;
2. De donner une application du théorème de Fugled-Putnam aux opérateurs de dérivation $\delta_{A,B}$ et aux opérateurs de dérivation élémentaires $\Delta_{A,B}$;
3. Etudier l'orthogonalité de l'image au noyau d'une dérivation puis caractériser les opérateurs finis.

Au premier chapitre (Rappels et Préliminaires) : nous exposerons les notions fondamentales en vues de les utiliser dans les chapitres suivants. On insistera, en particulier, sur quelques définitions et propriétés d'analyse fonctionnelle, sur l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ et les propriétés associées et on terminera par quelques rappels sur la forme de Jordan.

Au chapitre 2 :(Forme de Jordan des opérateurs $\delta_{A,B}$ et $R_{(A,C),(B,D)}$) : nous aborderons en détail la forme de Jordan pour l'opérateur de dérivation $\delta_{A,B}(X) = AX - XB$ et l'opérateur $R_{(A,C),(B,D)}(X) = AXB - CXD$, nous y établisserons quelques lemmes et propriétés fondamentales.

Au chapitre 3 :(Opérateurs P- symétriques) : Après avoir introduit quelques propriétés des opétateurs normaux , nous donnerons et démontrons le théorème de Fugled-Putnam, ce théorème est la base de ce chapitre et nous amène à donner la notion de l'opérateur P-symétrique. Dans la deuxième section nous considérons les paires d'opérateurs (A, B) telles que $AT = TB$ implique $A^*T = TB^*$ pour tout $T \in \mathcal{C}_1(H)$, i.e les paires qui vérifient le théorème de Fugled-Putnam dans $\mathcal{C}_1(H)$ ($\mathcal{C}_1(H)$ est un idéal de $\mathcal{L}(H)$), nous appellerons ces paires d'opérateurs P-symétriques généralisées. Nous donnerons quelques propriétés de base concernant cette classe.
Dans la Section suivante, nous introduiserons dans le premier paragraphe la notion de paires d'opérateurs P-symétriques élémentaires ((A, B) est P-symétrique élémentaire si $BTA = T \Longrightarrow A^*TB^* = T$). Au deuxième paragraphe, une extension du théorème 3.2 de S. Mecheri [23] nous a permis de montrer que : si A et B sont deux opérateurs P-symétriques élémentaires, alors $B^* \operatorname{Im}(\Delta_{A,B}) + \operatorname{Im}(\Delta_{A,B})A^* \subset \overline{\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})}^{w^*}$ $(\overline{\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})}^{w^*}$ la fermeture de $\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})$ pour la topologie ultra-faible des opérateurs), nous donnerons aussi quelques propriétés concernant cette classe.
Au dérnier paragraphe, nous introduiserons les ensembles suivants :

$$\tau_0(A, B) = \left\{(C, D) \in \mathcal{L}(H) \times \mathcal{L}(H) : C\mathcal{L}(H)D + \mathcal{L}(H) \subset \overline{\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})}^{w^*}\right\}$$

$$\sigma_0(A, B) = \left\{(C, D) \in \mathcal{L}(H) \times \mathcal{L}(H) : C \operatorname{Im}(\Delta_{A,B})D + \operatorname{Im}(\Delta_{A,B}) \subset \overline{\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})}^{w^*}\right\}$$

et

$$\mathcal{B}_0(A, B) = \left\{(C, D) \in \mathcal{L}(H) \times \mathcal{L}(H) : \operatorname{Im}(\Delta_{C,D}) \subset \overline{\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})}^{w^*}\right\}$$

qui généralisent ceux introduits par J. P. Williams dans [34]. Nous donnerons des propriétés et une description de ces ensembles.
Au chapitre 4 :(Orthogonalité de l'image-noyau et les opérateurs finis) Considérons H un espace de Hilbert, $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre des opérateurs linéaire bornés sur H, nous définisserons la

dérivation intérieure induite par A comme suit $\delta_A(X) = AX - XA$, $X \in \mathcal{L}(H)$. Ce chapitre s'occupera principalement du problèmes de :
1. L'orthogonalité de $\mathrm{Im}(\delta_A)$ au $\ker(\delta_A)$;
2. Les opérateurs finis.
On s'intéressera ici à savoir pour quels opérateurs A les propriétés 1 et 2 restent vraies. Après avoir donné une courte définition de l'orthogonalité, les opérateurs de classe y et les opérateurs spectraloïd et quelques résultats obtenus par S. Mecheri [18], [22] , J. P. Wiliams [35], nous montrerons que si A un opérateur de classe y (res. spectraloïd), alors $\mathrm{Im}(\delta_A)$ est orthogonale à $\ker(\delta_A)$, et aussi nous montrerons que A est fini (A est fini si $\|I - \delta_A(X)\| \geq 1, \forall X \in \mathcal{L}(H)$).
Les opérateurs finis ont été étudier par . J. P. Williams [35], A. Fialkow[10] et S. Mecheri [18,22].

Chapitre 1

Rappels et préliminaires

Le premier chapitre de cette thése est consacré à des sujets qui sont supposés être connus. Nous donnons un bref résumé des théorèmes et définitions que nous allons utiliser dans les autres chapitres.
Dans le premier paragraphe, nous parlons d'espace de Hilbert (définitions, dualité, bases orthonormales). Dans le deuxième paragraphe, nous donnons quelques propriétés de l'espace $\mathcal{L}(E, F)$, la forme de Jordan d'une matrice est traitée dans le paragraphe 3.
Nous remarquons que la connaisance de la construction de la forme de Jordan est indispensable.

1.1 Espaces de Hilbert

1.1.1 Définitions, propriétés générales

Dans ce paragraphe, nous introduisons l'espace de Hilbert avec ses propriétés élémentaires. S'il n'y a pas de spécification le corps K est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1 *Soit E un espace linéaire sur le corps K. Un **produit scalaire** sur E est une application $\varphi : E \times E \longrightarrow K$ telle que pour tous vecteurs x, x_1 et y, de E et $\lambda \in K$, on a :*

1. $\varphi(x,x) \geq 0$ et $\varphi(x,x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

2. $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$

3. $\varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)$

4. $\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x,y)$.

Pour désigner un produit scalaire on rencontre d'habitude les notations (x,y), $(x\,|y)$, $\langle x,y\rangle$. Nous utiliserons la notation (x,y).
Un espace linéaire muni d'un produit scalaire est appelé un **espace préhilbertien.**

Remarque 1.1 *a) Les propriétés suivantes d'un produit scalaire se vérifient aisément par les propriétés 1) à 4) ci-dessus :*

i) $(0,x) = (x,0) = 0$, pour tout $x \in E$;

ii) $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j y_j\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_i \overline{\mu_j}(x_i, y_j)$,

pour tout $x_i, y_j \in E$, λ_i, $\mu_j \in K$, $i = 1, \cdots, n$; $j = 1, \cdots, m$.
b) Si $K = \mathbb{R}$, alors la propriété 2 de 1.1 revient à $(x,y) = (y,x)$ pour tout $x, y \in E$. C'est une propriété de symétrie. Si dans le cas $K = \mathbb{C}$, on maintient $(x,y) = (y,x)$, on trouvera pour $x \neq 0$:

$$(ix, ix) = i^2(x,x) = -(x,x),$$

ce qui contredit la propriété 1 de 1.1

Théorème 1.1 *Dans un espace préhilbertien E, l'application $\|\|\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$, donnée par*

$$\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}}, \text{ pour tout } x \in E,$$

est une norme pour E.

Définition 1.2 *Un espace vectoriel normé dans lequel toute suite de Cauchy converge est appelé **espace vectoriel normé complet** ou **espace de Banach.***

Définition 1.3 *Un **espace de Hilbert** est un espace complet par rapport à la norme induite par un produit scalaire. En d'autre terme, un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme est induite par un produit scalaire.*

1.1.2 Dualité et produit scalaire

L$'$espace des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{L}(E,\mathbb{R}) = E'$ est appelé le dual topologique de E.
Si $f \in E'$ la valeur de f en l'élément x de E se note souvent $\langle f, x\rangle$. On définit aussi le **bidual de** E comme le dual de E' : à $x \in E$ on associe la forme linéaire
x° définie sur E' $x^\circ : f \longrightarrow x^\circ(f) = f(x)$
Alors x° est continue sur E' :

$$|x^\circ(f)| = |f(x)| \leq \|f\|_{E'} \|x\|_E$$

et sa norme dans E'' est :

$$\|x^\circ\| = \sup |x^\circ(f)| = \sup_{\|f\|\leq 1} |f(x)| \leq \|x\| .$$

1.1.3 Bases orthonormales d'un espace de Hilbert

Définition 1.4 *On appelle **famille orthogonale** dans un espace de Hilbert E toute famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de E vérifiant $(e_i, e_j) = 0$ pour tout $i \neq j$.*

*On appelle **famille orthonormale** une famille orthogonale tel que pour tout i, $\|e_i\| = 1$. D'une autre façon, une famille $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ est dite orthonormale si :*

$$(e_j, e_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & (j = k), \\ 0 & (j \neq k). \end{cases}$$

Proposition 1.1 *Toute famille orthogonale est libre.*

Preuve. Soit J un sous-ensemble fini de I. Si $\sum_{i\in J} \lambda_i a_i = 0$ alors :

$$0 = \left(\sum_{i\in J} \lambda_i a_i, a_k\right) \qquad \text{pour tout } k \in I.$$

Comme $(a_i, a_k) = 0$ sauf pour $k = i$ l'égalité précédente entraine $\lambda_k = 0$ ■

Définition 1.5 *On appelle base orthonormale dans un espace de Hilbert $H \neq \{0\}$, un système orthonormal maximal,(i.e. on ne peut plus ajouter un vecteur non nul qui est orthogonal à une base orthonormale).*
Autrement dit, un système orthonormal $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ d'un espace de Hilbert est une base orthonormale si et seulement si on a : $\{(x, e_i) = 0$ pout tout $i \in \{1, 2, \cdots, n\}\} \Longrightarrow x = 0$.

Définition 1.6 *Soit (a_i) une famille orthonormale de E , l'espace préhilbertien et soit x un élément de E. Alors (a_i, x) est appelé le* ***n****^{ième}* ***coefficient*** *de x par rapport à la famille (a_i).*

Si E est de dimension finie et si les a_i forment une base, les coefficients $c_i = (a_i, x)$ sont les composantes de x dans cette base.

1.1.4 Introduction à la théorie des opérateurs bornés

Notons tout d'abord qu'il s'agit essentiellement d'applications linéaires. Leurs ensembles de départ et d'arrivée seront des espaces normés en général, et de Hilbert en particulier. Si E et F sont deux -Kespaces normés, nous désignons par le terme "opérateur", toute application linéaire de E dans F.
Autrement dit, un opérateur linéaire de E dans F est tout élément u de $\mathcal{L}(E, F)$.

Définition 1.7 *Soient E et F deux K-espaces de Banach et u une application linéaire de E dans F. On dit que u est* ***inversible,*** *si elle est* ***bijective*** *et son inverse est* ***continue****.*

Définition 1.8 *Soit E un espace de Hilbert et soit A un opérateur de $\mathcal{L}(E)$, alors il existe un et un seul opérateur de $\mathcal{L}(E)$ noté A^* tel que :*

$$\forall x \in E, \forall y \in E, (Ax, y) = (x, A^*y).$$

Proposition 1.2 *Soit E un espace de Hilbert. Pour tout A, B de $\mathcal{L}(E)$ et tout λ de $\Bbbk$, on a*

1. $(A + B)^* = A^* + B^*$
2. $(\lambda A)^* = \lambda^* A^*$
3. $(AB)^* = B^* A^*$
4. $A^{**} = A$
5. $\|A^*\| = \|A\|$.

Définition 1.9 *soit A un opérateur linéaire continu sur un espace de Hilbert, on appelle spectre de A et on note $\sigma(A)$ l'ensemble des nombres complexes λ tels que l'opérateur $A - \lambda I$ n'est pas inversible.*

Le complement de $\sigma(A)$ est noté $\Omega(A)$ et s'appelle l'ensemble résolvant de A.

L'application de $\Omega(A)$ dans $\mathcal{L}(E)$ qui à λ associe $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ s'appelle la résolvante.

Le réel positif $r(A) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\}$ s'appelle le rayon spectral de l'opérateur A

1.2 $\mathcal{L}$(E,F), base privilégiée.

1.2.1 Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$

Définition 1.10 *Soit E un espace vectoriel sur K. Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans K. $\mathcal{L}(E, K)$ s'appelle le dual de E et se note E'.*

Notation 1.1 *Soient $f \in E'$ et $x \in E$, le scalaire $f(x)$ est noté aussi $\langle f, x\rangle$.*

Définition 1.11 *E, F deux espaces vectoriels de dimensions respectives n et p. Soient $\{e_i,\ i = 1, ..., n\}$ une base de E , $\{f_j,\ j = 1, ..., p\}$, une base de F.*

On utilise la base $\{e^i,\ i = 1, ..., n\}$ de E' , dual de E , définie par :

$$\left\langle e^j, e_k \right\rangle = \delta_{jk}\,(\delta_{jk} \text{ est égal à } 1 \text{ lorsque } j = k, \text{à } 0 \text{ lorsque } j \neq k)\,,$$

c'est la base duale de la base $\{e_i\}$.

Théorème 1.2 *Soient E et F deux k-espaces vectoriels de dimensions finies. Alors l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ est aussi de dimension finie et on a*

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E\ .\ \dim F$$

Définition 1.12 *Si y' est un vecteur donné de E' et x un vecteur donné de F, le **produit tensoriel** $x \otimes y'$ est l'élément de $\mathcal{L}(E, F)$ donné par*

$$\left(x \otimes y'\right)(z) = \left\langle y', z \right\rangle x\ , \forall z \in E.$$

1.2.2 Propriétés

Lemme 1.1 *$\mathcal{L}(E, F)$ admet pour base $\{f_i \otimes e^j\ , j = 1, ..., n; i = 1, .., p\}$*

Preuve. *$f_i \otimes e^j$ est un élément de $\mathcal{L}(E,F)$ puisque e^j agit linéairement sur E.*
Soit (a_{ij}) un système de $p \times n$ nombres complexes, $i = 1,...,p$; $j = 1,...,n$.Pour ℓ fixé, $\ell \in \{1,...,n\}$:

$$\left(\sum_{i,j} a_{ij} f_i \otimes e^j\right) e_\ell = \sum_{i,j} a_{ij} f_i.$$

Notons $A = \sum_{i,j} a_{ij} f_i \otimes e^j$; nous avons écrit l'expression de Ae_ℓ par ses composantes sur la base $\{f_i\}$ de F. C'est la donnée usuelle d'un élément A de $\mathcal{L}(E,F)$. En particulier $[A = 0] \Leftrightarrow [\forall i, \ell; a_{i\ell} = 0]$, ce qui contrôle l'indépendance des $f_i \otimes e^j$, donc leur rôle de base dans $\mathcal{L}(E,F)$ de dimension $p \times n$. On a $a_{i\ell} = \langle f^i, Ae_\ell\rangle$ ■

Remarque 1.2 *Dans l'écriture habituelle de la matrice (A) de A relativement aux bases $\{e_i\}$ de E et $\{f_j\}$ de F , le terme a_{ij} , i^e ligne, j^e colonne, est le coefficient de $(f_i \otimes e^j)$ donc on a l'écriture de (A) relativement à cette base $(f_i \otimes e^j)$ avec la place indiquée ci-dessus pour les indices*

Lemme 1.2 *1. $(f_i \otimes e^j)^* = e^j \otimes f_i$*
2. $\forall\ A \in \mathcal{L}(F,G), \forall\ B \in \mathcal{L}(H,E)$,

$$A\left(f_i \otimes e^j\right) B = (Af_i) \otimes \left(B^* e^j\right) \quad \text{où} \quad B^* \text{ est l'adjoint de } B.$$

3. Si $E = F$, $(e_i \otimes e^j)\left(e_k \otimes e^l\right) = \delta_{jk} e_i \otimes e^l$; $(e_i \otimes e^i)^2 = (e_i \otimes e^i)$

Preuve. *Calcul direct de l'action sur un vecteur arbitraire*
1. $x\left\langle y', (f_i \otimes e^j)\, x\right\rangle = \langle e^j, x\rangle \left\langle y', f_i\right\rangle = \left\langle \left\langle y', f_i\right\rangle e^j, x\right\rangle = \left\langle (e^j \otimes f_i)\, y', x\right\rangle.$
2. $A\,(f_i \otimes e^j)\, Bx = \langle e^j, Bx\rangle\, Af_i = \left\langle B' e^j, x\right\rangle Af_i$
3. $(e_i \otimes e^j)\left(e_k \otimes e^l\right) = e_i \otimes \left\{\left(e^l \otimes e_k\right) e^j\right\} =_{jk} e_i \otimes e^l$ ■

Définition 1.13 *Si E est muni d'une base $\{e_j\}$, $\{e^j\}$ étant la base duale de $\{e_j\}$, la **trace** de A, notée trA, est donnée par :*

$$trA = \sum_{j=1}^{n} \left\langle e^j, Ae_j\right\rangle$$

Lemme 1.3 *1. $tr(x \otimes y') = \left\langle y', x\right\rangle, \quad (y' \in E', x \in E)$*
2. $tr(A)$ a une valeur indépendante de la base choisie dans E, c'est la somme des valeurs propres de A, avec leur ordre de multiplicité algébrique (dans le polynôme caractéristique de A)

Preuve.
1. Soit $x = \sum_j x^j e_j$ où $\langle e^j, x\rangle = x^j$,
$(x \otimes y')e_j = \left\langle y', e^j\right\rangle X$, donc $tr(x \otimes y') = \left\langle e^j, (x \otimes y')e_j\right\rangle = \langle e^j, x\rangle \left\langle y', e_j\right\rangle = \left\langle y', \langle e^j, x\rangle\, e_j\right\rangle = \left\langle y', x\right\rangle$

2. La valeur trouvée pour $tr(x \otimes y^{'})$ est indépendante de la base choisie.
Il est évident que $A \rightarrow trA$ est linéaire. L'indépendance de "tr" relativement à la base, est alors valable pour tout élément de $\mathcal{L}(E)$.
La trace de A est par définition la somme des éléments diagonaux de la matrice (A) de A dans la base (e_j); ainsi si elle a la forme de Jordan dans cette base c'est la somme des valeurs propres, compte tenu de leur multiplicité algébrique. ■

1.3 Réduction de Jordan.

1.3.1 Introduction

- - Une matrice carrée à coefficients complexes n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$ quand il existe au moins une valeur propre λ pour laquelle la dimension du sous-espace propre associé est strictement inférieure à l'ordre de multiplicité (en tant que racine du polynôme caractéristique) de cette valeur propre .
- - Il y a deux raisons potentielles pour qu'une matrice carrée réelle ne soit pas diagonalisable sur R :

- Le polynôme caractéristique de A admet des racines complexes.
-Toutes les racines du polynôme caractéristique sont réelles, mais il existe une valeur propre pour laquelle la dimension du sous-espace propre associé est strictement inférieure à l'ordre de multiplicité (en tant que racine du polynôme caractéristique) de cette valeur propre.

- - Un endomorphisme f d'un espace vectoriel E sur $\Bbbk$ est trigonalisable quand il existe une base de E sur laquelle la matrice de f est triangulaire (supérieure ou inférieure)

Pour que l'endomorphisme f du $\Bbbk$-espace vectoriel E soit trigonalisable, il faut et il suffit que le polynôme caractéristique de f ait toutes ses racines dans $\Bbbk$.

1.3.2 Réduction des endomorphismes nilpotents

Soit φ un endomorphisme nilpotent d'un k espace vectoriel E de dimension n . Désignons par n l'indice de nilpotence de φ c'est-à-dire l'entier naturel caractérisé par $\varphi^n = 0$ et $\varphi^{n-1} \neq 0$.

Théorème 1.3 *Soit φ un endomorphisme nilpotent d'un k espace vectoriel E de dimension n. Il existe une base $\{\varphi^{n-1}(x), ..., \varphi(x), x\}$ de E pour laquelle la matrice de φ dans cette base s'écrit sous* *la forme :*

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice J_n est dite bloc de Jordan d'ordre n

Preuve. Les n vecteurs $\varphi^{n-1}(x), ..., \varphi(x), x$ sont linéairement indépendants. En effet, supposons qu'il existe des scalaires $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ non tous nuls tels que

$$a_0 x + a_1\varphi(x) + a_2\varphi^2(x) + ...a_{n-1}\varphi^{n-1}(x) = 0$$

Si par exemple a_i est le premier coefficient non nul, en prenant l'image de $\varphi^i(x)$ par $\varphi^{n-i-1}(x)$, on obtient

$$a_i\varphi^{n-i-1}\varphi^i(x) = a_i\varphi^{n-1}(x) = 0.$$

Or $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$, alors $a_i = 0$ ce qui contredit l'hypothèse, il en resulte que $\{\varphi^{n-1}(x), ..., \varphi(x), x\}$ est une base de E dans laquelle la matrice de φ a la forme J_n ci-dessus. ■

Théorème 1.4 *Soit φ un endomorphisme d'un k espace vectoriel E de dimension n. Il existe des entiers $\beta_1 \geq \beta_2 \geq ... \geq \beta_s$ de somme n et une base de E pour laquelle la matrice M de φ s'écrit sous la forme :*

$$M_\varphi = \begin{bmatrix} [J_1] & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & [J_2] & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & [J_S] \end{bmatrix}$$

Chaque bloc J_i est un bloc de Jordan d'ordre β_i

Preuve. Voir [17] ■

1.3.3 Réduction de Jordan d'une matrice

Définition 1.14 *On appelle matrice de Jordan (supérieur) toute matrice carrée J de la forme :*

$$T = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Exemple 1.1 $(\lambda), \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Théorème 1.5 *Soit φ un endomorphisme d'un k espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{C}$ dont les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ sont de multiplicité $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_s$. Il existe une base de E où la matrice M de φ a la forme diagonale par bloc suivante :*

$$M_\varphi = \begin{bmatrix} [T_1] & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & [T_2] & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & [T_S] \end{bmatrix}$$

Chaque bloc T_k est de la forme :

$$T_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}, \; k = 1, ..., s.$$

Dans cette écriture, le nombre de blocs est égal au nombre de valeurs propres distinctes. Chaque blocs T_k est une matrice carrée d'ordre de la multiplicité μ_k de la valeur propre λ_k.

Preuve. *On a la décomposition de E en somme directe :*

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_s.$$

Chaque E_k est stable par φ. La restriction φ_k de φ à E_k est telle que l'endomorphisme $\varphi_k - \lambda_k Id_{E_k}$ soit nilpotent, il suffit alors d'appliquer les résultats des théorèmes précédents à chaque endomorphisme $\varphi_k - \lambda_k Id_{E_k}$ pour obtenir le théorème. ■

La forme obtenue dans ce théorème s'appelle la forme réduite de Jordan de l'endomorphisme.

Chapitre 2

Forme de Jordan des opérateurs $\delta_{A,B}, R_{(A,C),(B,D)}$

Considérons E et F deux espaces vectoriels, A un élément de $\mathcal{L}(F)$, B un élément de $\mathcal{L}(E)$. Ce chapitre s'occupe principalement du problème de la construction de la forme de Jordan de l'opérateur :

$$\begin{aligned} \delta_{A,B} : \mathcal{L}(E,F) &\longrightarrow \mathcal{L}(E,F) \\ X &\longrightarrow AX - XB, \end{aligned}$$

Nous donnons d'abord dans le premier paragraphe, les définitions et les propriétés d'une dérivation et dérivation généralisée. Dans le deuxième paragraphe, nous nous interessons à donner et à prouver une lemme centrale. Celle-ci est la base de la première partie et nous amène à donner la forme de Jordan de l'opèrateur $\delta_{A,B}$ qu'on rencontre souvent dans la mécanique quantique et que nous allons voir au troisième paragraphe. La deuxième partie de ce chapitre sera consacrée à l'opétateur $R_{(A,C),(B,D)}(X) = AXB - CXD$. Après avoir introduit deux lemmes fondamentaux, nous construisons la forme de Jordan pour ce type d'opérateurs.

2.1 Forme de Jordan d'une dérivation généralisée $\delta_{A,B}$

2.1.1 Dérivations et dérivations généralisées :

Définition 2.1 *Soit $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés*

1. une **dérivation** δ est une application linéaire de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$ qui satisfait :

$$\forall X, Y \in \mathcal{L}(E),\ \delta(XY) = \delta(X)Y + X\delta(Y)$$

2. la **dérivation interne** δ_A associée à l'élément A de $\mathcal{L}(E)$ est définie par :

$$\forall X \in \mathcal{L}(E), \delta_A(X) = AX - XA$$

3. C est **un commutateur** s'il existe $X, Y \in \mathcal{L}(E)$ tels que :

$$C = XY - YX$$

Lemme 2.1 *Soit $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés, δ_A etant la dérivation interne de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$. δ_A vérifie :*
1. δ_A est linéaire, continue pour la norme.
2.$\forall X, Y \in \mathcal{L}(E), \delta_A(XY) = \delta_A(X)Y + X\delta_A(Y)$.
3. δ_A est linéaire, continue et $\|\delta_A(X)\| = 2\inf\{\|A - \lambda I\| : \lambda \in C\}$
4. L'identité n'est pas un commutateur.

Preuve.

1. On a

$$\begin{aligned}\forall X, Y &\in \mathcal{L}(E), \delta_A(X+Y) = A(X+Y) - (X+Y)A \\ &= AX + AY - XA - YA \\ &= AX - XA + AY - YA \\ &= \delta_A(X) + \delta_A(Y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall X &\in \mathcal{L}(E), \forall\alpha \in K, \delta_A(\alpha X) = A\alpha X - \alpha XA \\ &= \alpha\delta_A(X)\end{aligned}$$

d'où δ_A est linéaire.

On a

$$\|\delta_A(X)\| = \|AX - XA\| \leq 2\|A\|\|X\|,$$

Donc il existe $M = 2\|A\|$ telle que $\|\delta_A(X)\| \leq M\|X\|$,d'où δ_A est bornée donc continue pour la norme

1. Prouvons que $\delta_A(XY) = \delta_A(X)Y + X\delta_A(Y)$.

$$\begin{aligned}
\delta_A(XY) &= AXY - XYA \\
&= AXY - XYA + XAY - XAY \\
&= (AX - XA)Y + X(AY - YA) \\
&= \delta_A(X)Y + X\delta_A(Y)
\end{aligned}$$

2. Prouvons que $\delta_A = \delta_{A-\lambda I}$

$$\begin{aligned}
\delta_{A-\lambda I}(X) &= (A - \lambda I)X - X(A - \lambda I) \\
&= AX - XA \\
&= \delta_A(X)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\delta_A(X)\| &= \|\delta_{A-\lambda I}(X)\| \\
&= \|(A - \lambda I)X - X(A - \lambda I)\| \\
&\leq 2\|X\|\|(A - \lambda I)\|
\end{aligned}$$

donc

$$\|\delta_A\| \leq 2\inf\|(A - \lambda I) : \lambda \in C\|$$

3. Supposons que I est un commutateur , alors $\exists X, Y \in \mathcal{L}(E) : \quad I = XY - YX$.

$$I = XY - YX \tag{1}$$

multiplions (1) par X à droite et à gauche

$$\begin{aligned}
X &= X^2Y - XYX \\
X &= XYX - YX^2
\end{aligned}$$

en additionnant les relations précédentes on trouve :

$$2X = X^2Y - YX^2$$

et en suivant la même méthode on trouvera :

$$nX^{n-1} = X^nY - YX^n \tag{2}$$

Supposons que (2) est vraie pour $k \in N$ et prouvons la pour $k+1$, on a

$$\begin{aligned} X^{k+1}Y - YX^{k+1} &= X\left(X^kY - YX^k\right) + (XY - YX)\,X^k, \text{ tel que } I = XY - YX \\ &= X\left(X^kY - YX^k\right) + X^k \\ &= (k+1)X^k \end{aligned}$$

donc

$$\forall n \in N : nX^{n-1} = X^nY - YX^n$$

$$\begin{aligned} \left\|nX^{n-1}\right\| &= \left\|X^nY - YX^n\right\| \\ &\leq 2\left\|Y\right\|\left\|X^n\right\| \end{aligned}$$

$$n \leq 2\left\|Y\right\|\left\|X\right\|,$$

d'où I n'est pas un commutateur ∎

Définition 2.2 *Soient E et F deux espaces vectoriels, A un élément de $\mathcal{L}(F)$, B un élément de $\mathcal{L}(E)$, on leur associe* ***la dérivtion généralisée*** $\delta_{A,B}$:

$$\delta_{A,B} : \mathcal{L}(E,F) \longrightarrow \mathcal{L}(E,F) \text{ telle que } X \longrightarrow AX - XB$$

Remarque 2.1 *$\delta_{A,B}$ est linéaire , mais d'après la définition 2.1, elle ne peut être une dérivation que si $A = B$. On note alors $\delta_{A,B} = \delta_A$.*

Lemme 2.2 *Aux décompositions de A et B en somme directes*

$$\begin{cases} A = A_1 \oplus A_2, B = B_1 \oplus B_2, \\ F = F_1 \oplus F_2, E = E_1 \oplus E_2 \end{cases}$$

est associée une décomposition de $\delta_{A,B}$ en somme directe : (i,j=1,2)

$$\begin{cases} \delta_{A,B} = \underset{i,j}{\oplus}\delta_{A_i,B_j} \\ \mathcal{L}(E,F) = \underset{i,j}{\oplus}\mathcal{L}(E_i,F_j) \end{cases}$$

Preuve. $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{21} \\ X_{12} & X_{22} \end{pmatrix}$ où $X_{ij} \in \mathcal{L}(E_i,F_j)$.

On identifie $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ X_{12} & 0 \end{pmatrix}$ avec X_{12}, idem pour tous (i,j), alors $\mathcal{L}(E,F) = \underset{i,j}{\oplus}\mathcal{L}(E_i,F_j)$.

$$\delta_{A,B}(X) = \begin{pmatrix} \delta_{A_1,B_1}X_{11} & \delta_{A_1,B_2}(X_{21}) \\ \delta_{A_2,B_1}X_{12} & \delta_{A_2,B_2}X_{11} \end{pmatrix} \blacksquare$$

2.1.2 Lemme fondamental

Lemme 2.3 *Soient* $A \in \mathcal{L}(F)$, $B \in \mathcal{L}(E)$. *Soient* $\{f_\alpha,\ \alpha = 1, ..., p\}, \{e^i,\ i = 1, ..., n\}$ *des bases de* $F; E'$ *respectivement telles que* $Af_\alpha = \varepsilon_\alpha f_{\alpha-1}$ *;* $\varepsilon_1 = 0$ *,* $\varepsilon_\alpha = 1$ *si* $\alpha \neq 1$; $B'e^i = \eta^i e^{i-1}$ *, où* $\eta^1 = 0$, *et* $\eta^i = 1$*si* $i \neq 1$. *Soit*

$$G_q = vect\left\{f_\alpha \otimes e^i,\ \alpha + i = q\right\}; \forall q = 2, ..., n+p,\ r = \min(n,p),\ s = \max(n,p)$$

alors on a

1. $\mathcal{L}(E,F) = \overset{n+p}{\underset{q=2}{\oplus}} G_q$

2. $\delta_{A,B}\mid_{G_q} \subset G_{q-1}$.

3. $Ker\delta_{A,B} = \overset{n+p}{\underset{q=2}{\oplus}} Ker(\delta_{A,B}\mid_{G_q}) = \overset{r+1}{\underset{q=2}{\oplus}} vect\left\{\sum f_\alpha \otimes e^i,\ \alpha + i = q\right\}$.

4. pour $q > s+1, \operatorname{Im}(\delta_{A,B}\mid_{G_q}) = \left\{\sum a_j z^j, z^j = f_\alpha \otimes e^i,\ \alpha + i = q\right\}$*, où* $r = \min(n,p), s = \max(n,p)$

Preuve.

1. $\mathcal{L}(E,F) = \overset{n+p}{\underset{q=2}{\oplus}} G_q$.

On sait que $\dim \mathcal{L}(E,F) = n.p$, et $\{f_\alpha \otimes e^i,\ i = 1, ..., n\ \ \alpha = 1, ..., p\}$ est une base de $\mathcal{L}(E,F)$, les vecteurs qui engendrent G_q , $q = 2, ..., n+p$ forment une partition de la base de $\mathcal{L}(E,F)$, donc $\mathcal{L}(E,F) = \overset{n+p}{\underset{q=2}{\oplus}} G_q$

2. $\delta_{A,B}\mid_{G_q} \subset G_{q-1}$.

$\delta_{A,B}\mid_{G_q}$: signifie la restriction de $\delta_{A,B}$ sur G_q,

$G_{q-1} = vect\left\{f_\alpha \otimes e^i,\ \alpha + i = q-1\right\}$.

Soit $f_\alpha \otimes e^i \in G_q$, alors

$$\begin{aligned}
\delta_{A,B}(f_\alpha \otimes e^i) &= A(f_\alpha \otimes e^i) - (f_\alpha \otimes e^i)B \\
&= (Af_\alpha) \otimes e^i - f_\alpha \otimes \left(B^* e^i\right) \\
&= f_{\alpha-1} \otimes b_i e^i - C_\alpha f_\alpha \otimes e^{i-1}
\end{aligned}$$

en utilisant le lemme 1.2, on obtient :

$$\begin{aligned}
\delta_{A,B}(f_\alpha \otimes e^i) &= (Af_\alpha) \otimes e^i - f_\alpha \otimes \left(B^* e^i\right) \\
&= \varepsilon_\alpha f_{\alpha-1} \otimes e^i - \eta^i f_\alpha \otimes e^{i-1},
\end{aligned}$$

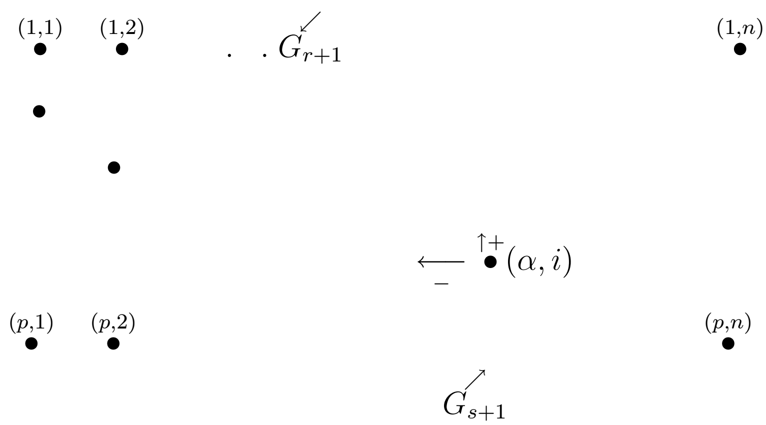
d'où

$$\delta_{A,B}(f_\alpha \otimes e^i) \in G_{q-1},$$

alors

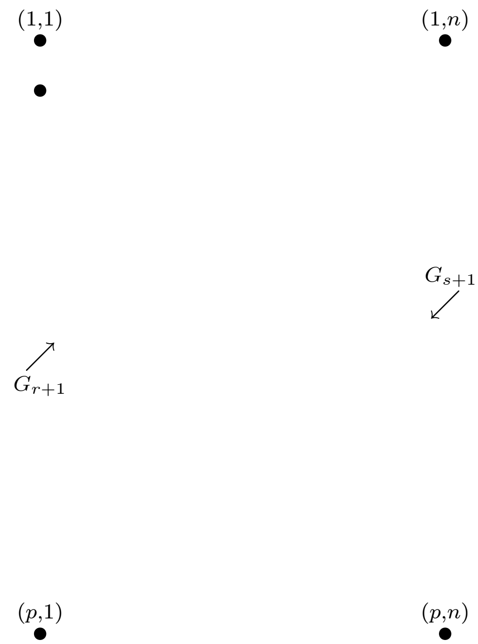
$$\delta_{A,B}\,|_{G_q} \subset G_{q-1}$$

3. Schématisons $\{f_\alpha \otimes e^i\}$ par les points (α, i) dans R^2. G_q est alors une diagonale droite à l'interieur du rectangle limité par les valeurs maximales de α et i



$$p \leq n \qquad (p = 4, n = 7)$$

Schéma $(1)_1$



$$p \quad \geq \quad n(p = 7, n = 4)$$

Schéma (1)$_2$

Sur le schéma (1) nous notons $\delta_{A,B}\,(f_\alpha \otimes e^i)$: c'est la somme des éléments x avec les coefficients $+$ et $-$ marqués au dessus des flèches. Un des termes n'existe pas, si (α, i) est sur l'un des deux bords du rectangle issus de $(1,1)$.

En utilisant la décomposition de X en somme directe, $X = \sum X_q$, $X_q \in \quad G_q$, on obtient : $[\delta_{A,B} X = 0] \Longleftrightarrow [\forall q,\ \delta_{A,B} X_q = 0]$.

Sur le **schéma** $(\mathbf{2})$ on représente un élément de G_q par ses coefficients : $a_1, ..., a_m$ dans la base $\{f_\alpha \otimes e^i\}$; son image par $\delta_{A,B}$ a les coefficients notés sur G_{q-1}.

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & & & & & \overset{G_{q-1}}{\swarrow} \\
 & & & & & & & & \boxed{a_m = a_4} & \overset{G_q}{\swarrow} \\
 & & & & & & & & \uparrow & \\
 & & & & & & a_{m-1} - a_4 & \longleftarrow & a_4 = a_m & \\
 & & & & & & \uparrow & & & \\
 & & & & a_2 - a_3 & \longleftarrow & a_3 & & & \\
 & & & & \uparrow & & & & & \\
 & & a_1 - a_2 & \longleftarrow & a_2 & & & & & \\
 & & \uparrow & & & & & & & \\
\boxed{-a_1} & \longleftarrow & a_1 & & & & & & &
\end{array}$$

<u>*Schema* (2)</u>

Les termes encadrés peuvent ne pas exister.

-**Si** $q > r+1$, l'un des termes au moins existe, il en résulte que

$$[\delta_{A,B}(a_1, ..., a_m) = 0] \Longleftrightarrow [a_j = 0 \quad \text{pour tout } \ j]$$

(dans l'écriture, le vecteur de G_q est identifié à ses composantes, donc $\delta_{A,B} \mid G_q$ est injectif.

-**Si** $q \leq r+1$, les relations sont $-a_{j-1} + a_j = 0, \ \ j = 2, ..., m$, donc tous les a_j sont égaux, $\delta_{A,B} \mid G_q$ a un noyau de dimension 1 qui est $Vect(\sum \{f_\alpha \otimes e^i \ , \ \alpha + i = q\}$.

$Ker \ \delta_{A,B}$ a alors la forme annoncée.

4. Si $q \in \{2, ..., s+1\}$, $\delta_{A,B} \mid G_q$ est surjectif, sur G_{q-1}.

Si $q > s+1$, $dimG_{q-1} = dimG_q + 1$; d'après le **schéma 2** les éléments de $R(\delta_{A,B} \mid G_{q+1})$ sont caractérisés par la somme des composantes nulles.

$R(\delta_{A,B})$ a alors la forme annoncée.

■

2.1.3 Application du lemme fondamental : forme de Jordan

A partir des résultats précédents nous allons construire la forme de Jordan de $\delta_{A,B}$ par le procédé classique.
On note , pour éclaircir l'écriture $D = \delta_{A,B}$ dans ce qui suit.
On dispose d'une base du noyau. Pour chaque vecteur X_q de cette base on cherche l'exposant K le plus grand, soit $K(q)$, tel qu'il existe Y_q dans $G_{q+K(q)}$ satisfaisant à $D^{K(q)}Y_q = X_q$.
$Vect\left\{D^{K(q)}Y_q, D^{K(q)-1}Y_q, ..., Y_q\right\}$ est invariant par D et les D^iY_q sont indépendants car une relation linéaire non triviale entre les D^iY_q donnera en multipliant par une puissance convenable de D une relation non triviale entre les Y_q ; la matrice de D dans ce sous espace muni de cette base est un bloc de Jordan.

Commençons par un résultat qui est véritablement la clé du problème de la jordanisation :

Lemme 2.4 *:Soit* $X_q = \sum \{f_\alpha \otimes e^i\ ,\ \alpha + i = q\}$, $2 \leq q \leq r+1$; *alors il existe* Y_q , $Y_q \in G_{n+p+2-q}$, *tel que* $D^{n+p+2-2q}Y_q = X_q$.
Preuve. *Les flèches sur le schéma (3) correspondent au schéma* $(1)_2$ *(image par* $\delta_{A,B}$).
Sur le schéma (3) on représente un élément de G_{q-1} *par ses coefficients* $b_1, ..., b_m$ *dans la base* $\{f_\alpha \otimes e^i\}$; *les coefficients d'un élément de* G_q *dont il est l'image par* D *sont notés sur* G_q.
Les termes encadrés peuvent ne pas exister dans G_{q-1} .

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & & & & & G_{q-1} \\
 & & & & & & & & & \swarrow \\
 & & & & & & & & \boxed{b_1} & G_q \\
 & & & & & & & & \uparrow & \swarrow \\
 & & & & & & b_2 & \overset{-}{\longleftarrow} & b_1 & \\
 & & & & & & \uparrow + & & & \\
 & & & & b_3 & \longleftarrow & b_1+b_2 & & & \\
 & & & & \uparrow & & & & & \\
 & & b_4 & \longleftarrow & b_1+b_2+b_3 & & & & & \\
 & & \uparrow + & & & & & & & \\
\boxed{b_5} & \overset{-}{\longleftarrow} & b_1+b_2+b_3+b_4 & & & & & & &
\end{array}
$$

Schéma(3)

(i) Si $q \leq r+1$, les deux termes n'existent pas, dim$(G_q) = q-1$ et ker$\left(\delta_{A,B}\,|_{G_q}\right) = Vect\,\{x_q\} \neq 0$; il existe dans G_{q+1} un vecteur préimage par D du vecteur noté $(b_2, b_3..., b_{q-1})$ de G_{q-1} ; il est défini à λx_q près.
On note $(b_2, b_3..., b_{q-1}) = D(c_1, ..., c_{q-1}) + \lambda x_q$, où l'on choisit $c_1 = 0$;
alors $c_1 = b_2 + b_3... + b_j$, $j = 2, ..., q-1$.
Le schéma ci-dessous est celui de $q = 5$, $b_2 = b_3 = b_4 = 1$, c'est-à-dire le vecteur x_4 de G_{q-1} ; sur G_5 .
On a marqué les c_i ; puis sur G_5 pris pour G_{q-1} on part des valeurs "c" utilisées maintenant comme valeurs "b" et on fait le même choix.

$$\begin{array}{cccccc}
\overset{(1,1)}{\bullet} & & \overset{.1}{\bullet} & 0 & 0 & \longrightarrow i \\
 & 1 & 1 & 0 & & \\
 & \uparrow & \nearrow & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
3 & 3 & & & & \\
6 & & & & & \\
\overset{\alpha}{\downarrow} & & & & &
\end{array}$$

Schéma (4)

Nous avons donc réalisé la construction suivante des préimages de x_{q-1} :
(supposons $p > n$), $x_q \in \ker \delta_{A,B} \mid G_q$, $q < r+1$. $x_q = (1, 1, ..., 1)$ a $(q-1)$ composantes.
$x_q = D\left\{x_q^{(1)} + \lambda_1 x_{q-1}\right\}$ où l'on choisit la première composante de $x_q^{(1)}$ égale à 0, puis si $q+2 \geq r+1$, $x_q = D^2\left\{x_q^{(2)} + \lambda_1 x_{q-1}^{(1)} + \lambda_2 x_{q-2}\right\}$ jusqu'à

$$x_q = D^{r+1-q}\left\{x_q^{(r+1-q)} + \lambda_1 x_{q-1}^{(r-q)} + ... + \lambda_{r-q+1} x_{r+1}\right\} \qquad (*)$$

avec la même règle de remontée pour tous les x_j rencontrés que celle expliquée dans le schéma. Chaque vecteur x_j (sans indice supérieur) est le vecteur de base du noyau de D dans G_j, selon la notation de l'énoncé.
Les composantes des vecteurs $x_j^{(i)}$ sont construites par la règle de récurrence du triangle de Pascal (pour retrouver les dispositions usuelles on "redresse" les diagonales du schéma (4) fait pour $q = 3$, ainsi pour $q = 2$ est la somme des termes fléchés 1et 1 , selon le schéma (4))

(ii) Si $q \in \{r+1,...,s\}$, seulement un des termes encadrés du schéma (3) existe, alors D de G_{q+1} dans G_q est bijective. Il existe un unique vecteur de G_{q+1} dont l'image par D est un vecteur donné de G_q. On obtient alors, pour le vecteur entre $\{\ \}$ dans [*] , une écriture unique sous la forme :

$$D^{s-r}\left\{x_q^{(x+1-q)}+...\right\},\ \text{soit}$$

$$x_q = D^{(s+1-q)}\left\{x_q^{(s+1-q)}+\lambda_1 x_q^{(s-q)}+...+\lambda_{r-q+1}x_{r+1}^{(s-r)}\right\} \qquad (**)$$

Les nouveaux $x_0^{(.)}$ sont déterminés de manière unique selon le schéma ci-dessous ; un vecteur de G_{q-1} de composantes b_i a pour préimage par D le vecteur de composantes c_j

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & G_{q-1} \\
 & & & & & & \swarrow \\
 & & & & b_1 & & G_q \\
 & & & & & & \swarrow \\
 & & & & \uparrow + & & \\
 & & & b_2 & \underset{-}{\longleftarrow} & c_1 & \\
 & & & \uparrow & & & \\
 & & b_3 & \longleftarrow & c_2 & & \\
 & & \uparrow & & & & \\
 b_4 & \longleftarrow & c_3 & & & & \\
 \uparrow & & & & & & \\
 c_4 \doteq c_m & & & & & &
\end{array}$$

$(5)_1\ (p>n)$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & G_{q-1} \\
 & & & & & & \swarrow \\
 & & & & & & G_q \\
 & & & & & & \swarrow \\
 & & & b_1 & & \underset{-}{\longleftarrow} c_1 & \\
 & & & \uparrow + & & & \\
 & & b_2 & & \longleftarrow c_2 & & \\
 & & \uparrow & & & & \\
 & b_3 & & \longleftarrow c_3 & & & \\
 & \uparrow & & & & & \\
b_4 & \longleftarrow c_4 \doteq c_m & & & & &
\end{array}
$$

$(5)_2 \;\; (p < n)$

.

Si $p > n$ *(schéma* $(5)_1$*),* $c_j = b_j + ... + b_1$, $j = 1, ..., m$.

Si $p < n$ *(schéma* $(5)_2$*),* $c_j = -b_m - ... - b_j$, $j = 1, ..., m$.

(iii) Si $q > s + 1$*, les termes encadrés existent,* $\delta_{A,B} \mid_{G_{q+1}}$ *ne recouvre pas* G_q *, on a vu , lemme 2.3 , que les éléments de* $\mathrm{Im}\left(\delta_{A,B} \mid_{G_{q+1}}\right)$ *ont la somme de leurs coefficients nuls.*

Le vecteur entre $\{\}$ *dans [**] est dans* G_{s+1}*; pour qu'il soit l'image par* D *d'un vecteur de* G_{s+2} *(celui-ci est alors unique) il convient d'exprimer sa condition d'appartenance à* $\mathrm{Im}\left(\delta_{A,B} \mid_{G_{s+2}}\right)$ *; c'est une relation linéaire entre* $\lambda_1, ..., \lambda_{r-q+1}$ *(somme des composantes nulles du vecteur* $\{\}$ *sur la base mise en évidence pour* G_{s+1} *).*

Ceci peut être itéré tant qu'il reste des λ *arbitraires, donc ceci est possible* $(r - q + 1)$ *fois ; on a alors atteint* $G_{s+1+r-q+1} = G_{s+r+2-q}$*. On obtient ainsi :*

$$x_q = D^{s+1-q+(r-q+1)} y_{r+s+2-q}$$

donc

$$x_q = D^{n+p+2-2q} y_{n+p+2-2q}$$

(iv) On a atteint l'écriture annoncée dans le lemme 2.4 ; il reste à s'assurer que l'on a obtenu une base de Jordan . Comptons les termes obtenus : notons $N = n + p + 2$,

$$\begin{aligned}\sum_{q=2}^{r+1}(N-2q+1) &= \sum_{r+1}^{q=2}\left[(N-1)-2\,(q-1)\right] = r\,(N-1) - 2\frac{r(r+1)}{2} \\ &= r(r+s+1) - r(r+1) = rs.\end{aligned}$$

On a $rs = np$ *termes. Ceci est la dimension de* $\pounds(E,F)$ ■

Lemme 2.5 *Pour* (A,B) *satisfaisant les* ***données*** *précisées au début du paragraphe précedent (lemme 2.3),* $\delta_{A,B}$ *est nilpotent d'ordre* $(n+p-1)$ *; sa forme de Jordan est constituée de* r *blocs de Jordan d'ordres* $n+p+1-2j$, $j = 1, ..., r$.

Preuve. Elle résulte des lemmes précédents : le plus grand bloc de Jordan provient de x_2 qui est l'image de $f_p \otimes e^n$ par D^{n+p-1}.
Les blocs de Jordan sont des blocs nilpotents ■

Lemme 2.6 *(forme de Jordan)*
i) Le spectre de $\delta_{A,B}$ *est*

$$\sigma(\delta_{A,B}) = \sigma(A) - \sigma(B) = \{\lambda - \mu, \lambda \in \sigma(A), \mu \in \sigma(B)\}$$

Si $Af = Xf$ *et* $B^{'}e^{'} = \mu e^{'}$ *alors*

$$\delta_{A,B}(f \otimes e^{'}) = (\lambda\mu) f \otimes e^{'}.$$

ii) Si $A = \bigoplus_{k=1}^{h_1} A_K$*, où* $\sigma(A_k) = \lambda_k$ *, et où* $(A_k - \lambda_k)$ *est d'ordre* p_k *et* $B = \bigoplus_{\varrho}^{\varrho_1} B_\varrho$ *où* $\sigma(B_\varrho) = \mu_\varrho$ *, et où* $(B_\varrho - \mu_\varrho)$ *est d'ordre* n_ϱ*, alors* $\delta_{A,B} = \bigoplus_{\ell,k} \delta_{A_k,B_k}$.

La forme de Jordan de $\delta_{A,B}$ est obtenue en considérant tous les blocs associés à une valeur propre $\nu = \lambda_k - \mu_k$ intervenant dans les $\delta_{A,B}$ concernés.
Preuve. C'est le Lemme 1.2 et le lemme 1.3.
Il suffit en effet de remarquer que $\delta_{A_k,B_l} = (\lambda_k - \mu_k) + \delta_{A_k - \lambda_k, B_l - \mu_l}$;
on est alors ramené au Lemme 1.3 ■

2.2 Forme de Jordan de l'opérateur $R_{(A,C),(B,D)}$.

2.2.1 Lemmes fondamentaux

Lemme 2.7 *Soient* $A, C \in \mathcal{L}(F)$; $B, D \in \mathcal{L}(E)$*. Soient* $\{f_\alpha,\ \alpha = 1, ..., p\}$, $\{e^i,\ i = 1, ..., n\}$ *des bases de* F; $E^{'}$ *respectivement telles que*

1. $Af_\alpha = \varepsilon_\alpha f_{\alpha-1}$*;*$\varepsilon_1 = 0$ *,* $\varepsilon_\alpha = 1$ *si* $\alpha \neq 1$.

2. $Cf_\alpha = c_\alpha f_\alpha$, c_α *est une constante réelle*

3. $D'e^i = \eta^i e^{i-1}$ *, où* $\eta^1 = 0$, *et si* $i \neq 1$, $\eta^i = 1$.

4. $\forall q = 2, ..., n+p$, $G_q = vect\{f_\alpha \otimes e^i,\ \alpha + i = q\}$; $r = \min(n,p)$, $s = \max(n,p)$,

alors on a

1. $\mathcal{L}(E,F) = \overset{n+p}{\underset{q=2}{\oplus}} G_q$

2. $R_{(A,C),(B,D)} \mid_{G_q} \subset G_{q-1}$.

3. $KerR_{(A,C),(B,D)} = \overset{n+p}{\underset{q=2}{\oplus}} Ker(R_{(A,C),(B,D)} \mid_{G_q}) = \overset{r+1}{\underset{q=2}{\oplus}} vect\left\{\sum \frac{c_1....c_{\alpha-1}}{b_1....b_{\alpha-1}} f_\alpha \otimes e^i,\ \alpha + i = q\right\}$

Remarque 2.2 *:**1.** si* $B = Id_E$ *,* $C = Id_F$ *, on trouve* $R_{(A,C),(B,D)}(x) = \delta_{A,B} = AX - XB$

2. On note , pour éclaircir l'écriture $\Phi = R_{(A,C),(B,D)}$ *dans ce qui suit.*

Preuve. 1. $\dim \mathcal{L}(E,F) = n.p.$ $\{f_\alpha \otimes e^i,\ i = 1, ..., n\ \ \alpha = 1, ..., p\}$ est une base de $\mathcal{L}(E,F)$, les vecteurs qui engendrent G_q forment une partition de la base de $\mathcal{L}(E,F)$, donc $\mathcal{L}(E,F) = \overset{n+p}{\underset{q=2}{\oplus}} G_q$.

2. $\Phi \mid_{G_q} \subset G_{q-1}$.

$G_{q-1} = vect\{f_\alpha \otimes e^i,\ \alpha + i = q-1\}$

$\Phi \mid_{G_q}$: signifie la restriction de Φ sur G_q .

Soit $f_\alpha \otimes e^i \in G_q$, alors

$$\begin{aligned}
\Phi(f_\alpha \otimes e^i) &= A(f_\alpha \otimes e^i)B - C(f_\alpha \otimes e^i)D \\
&= (Af_\alpha) \otimes Be^i - (Cf_\alpha) \otimes \left(De^i\right) \\
&= f_{\alpha-1} \otimes b_i e^i - C_\alpha f_\alpha \otimes e^{i-1}
\end{aligned}$$

donc

$$\Phi(f_\alpha \otimes e^i) \in G_{q-1}.$$

alors

$$\Phi \mid G_q \subset G_{q-1}$$

3. $Ker\Phi = \overset{n+p}{\underset{q=2}{\oplus}} Ker(\Phi \mid_{G_q}) = \overset{r+1}{\underset{q=2}{\oplus}} vect\left\{\sum \dfrac{c_1....c_{\alpha-1}}{b_1....b_{\alpha-1}} f_\alpha \otimes e^i,\ \alpha + i = q\right\}$

Pour bien comprendre prenons : $\dim E = n = 4$, $\dim F = p = 5$, donc $\dim \mathcal{L}(E,F) = 5.4 = 20$ et $\{f_\alpha \otimes e^i,\ \alpha = 1, .., 5\ \ ;\ \ i = 1, ..., 4\}$ forme une base.

Schématisons $\{f_\alpha \otimes e^i,\ \alpha = 1, .., 5\ \ ;\ \ i = 1, ..., 4\}$ par les points $(\alpha\ ,\ i)$ dans R^2

$\xrightarrow{i}$ G_5 $n = 4$, $p = 5$

$j\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \swarrow \qquad\qquad r=\min(n,p)=4$

$$\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) \\ (5,1) & (5,1) & (5,1) & (5,1) \end{matrix}$$

$Ker\Phi = \{X \in \mathcal{L}(E,F) : \Phi(X)=0\}$
$X \in \mathcal{L}(E,F) \Longleftrightarrow X=\sum X_q \qquad \backslash \quad X_q \in G_q$
$\Phi(X)=0 \Longleftrightarrow \Phi(X_q)=0 \qquad ,\forall q=2,...,9$
Si $\quad q>5$
Soit $X_6 \in G_6 \Longrightarrow X_6 = a_1(2,4)+a_2(3,3)+a_3(4,2)+a_4(5,1).$

$$\begin{aligned} \Phi(X_6) &= a_1\Phi(2,4)+a_2\Phi(3,3)+a_3\Phi(4,2)+a_4\Phi(5,1) \\ &= a_1\left[b_4(1,4)-c_2(2,3)\right]+a_2\left[b_3(2,3)-c_3(3,2)\right] \\ &\quad +a_3\left[b_2(3,2)-c_4(4,1)\right]+a_4\left[b_1(4,1)\right] \\ &= a_1b_4(1,4)+\left(a_2b_3-a_1c_2\right)(2,3)+\left(a_3b_2-a_2c_3\right)(3,2)+\left(a_4b_1-a_3c_4\right)(4,1) \end{aligned}$$

Notre but est de chercher $Ker(\Phi\mid_{G_q})$, donc

$$\Phi(X_6)\ =0 \Longrightarrow \begin{matrix} a_1b_4=0 \\ a_2b_3-a_1c_2=0 \\ a_3b_2-a_2c_3=0 \\ a_4b_1-a_3c_4=0 \end{matrix} \Longrightarrow a_1=a_2=a_3=a_4=0$$

alors $X_6=0.$
la même chose pour $X_7\in G_7$, $X_8 \in G_8$, $X_9\in G_9$, alors : $\forall q>5$, $Ker(\Phi\mid_{G_q})=0.$
Etudions maintenant le cas $q\leq 5$
la recherche du noyau de G_5 veut dire la recherche de $X_5\in G_5$ pour le quelle $\Phi(X_5)=0.$
$X_5=a_1(4,1)+a_2(3,2)+a_3(2,3)+a_4(1,4).$

$$\begin{aligned} \Phi(X_5) &= a_1\Phi(4,1)+a_2\Phi(3,2)+a_3\Phi(2,3)+a_4\Phi(1,4) \\ &= a_1b_1(3,1)+a_2\left[b_2(2,2)-c_3(3,1)\right]+a_3\left[b_3(1,3)-c_2(2,2)\right]+a_4\left[-c_1(1,3)\right] \\ &= \left(a_3b_3-a_4c_1\right)(1,3)+\left(a_2b_2-a_3c_2\right)(2,2)+\left(a_1b_1-a_2c_3\right)(3,1) \end{aligned}$$

$$\Phi(X_5) \; = 0 \Longrightarrow \begin{matrix} a_3b_3 - a_4c_1 = 0 \\ a_2b_2 - a_3c_2 = 0 \\ a_1b_1 - a_2c_3 = 0 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} a_2 = a_1\dfrac{b_1}{c_3} \\ a_3 = a_2\dfrac{b_2}{c_2} \\ a_4 = a_3\dfrac{b_3}{c_1} \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} a_2 = a_1\dfrac{b_1}{c_3} \\ a_3 = a_1\dfrac{b_1}{c_3}\dfrac{b_2}{c_2} \\ a_4 = a_1\dfrac{b_1}{c_3}\dfrac{b_2}{c_2}\dfrac{b_3}{c_1} \end{matrix}$$

donc :
$\Phi(X_5) = 0 \Longrightarrow X_5 = a_1\left[(4,1) + \dfrac{b_1}{c_3}(3,2) + \dfrac{b_1}{c_3}\dfrac{b_2}{c_2}(2,3) + \dfrac{b_1}{c_3}\dfrac{b_2}{c_2}\dfrac{b_3}{c_1}(1,4)\right]$
le vecteur $(4,1) + \dfrac{b_1}{c_3}(3,2) + \dfrac{b_1}{c_3}\dfrac{b_2}{c_2}(2,3) + \dfrac{b_1}{c_3}\dfrac{b_2}{c_2}\dfrac{b_3}{c_1}(1,4)$ est la base de $Ker(\Phi \mid G_5)$, donc $\dim Ker(\Phi \mid G_5) = 1$.
La même étude pour $q = 4, q = 3, q = 2$, alors : $\forall q \leq 5 : \dim Ker(\Phi \mid G_q) = 1$ et $\left\{\sum \dfrac{b_1b_2...b_{i-1}}{c_1c_2...c_{i-1}} f_\alpha \otimes e^i, \;\alpha +\right.$
est la base du noyau pour chaque q ■

Lemme 2.8 *Pour chaque vecteur X_q du noyau de G_q , il existe $y_t \in G_{n+p+2-q}$ tel que :*

$$\Phi^{n+p+2-2q} y_t = X_q, \quad 2 \leq q \leq r+1$$

2.2.2 Forme de Jordan de l'opérateur $R_{(A,C),(B,D)}$.

A partir de ces conclusions nous allons construire la forme de Jordan de l'opérateur Φ.
On dispose d'une base du noyau de Φ, pour chaque vecteur X_q $(q = 2, ..., r+1)$ de cette base on trouve l'exposant k le plus grand, tel qu'il existe $y_t \in G_{q+k}$ satisfaisant $\Phi^k y_t = X_q$
$\{y_t, \Phi y_t, \Phi^2 y_t, ..., \Phi^k y_t\}$forme une base, la matrice associée dans cette base est un bloc jordan

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & 0 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & 0 & 1 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 0 \end{matrix}$$

bloc de Jordan

d'après le lemme 2, il existe $y_t \in G_{n+p+2-q}$ tel que :

$$\Phi^{n+p+2-2q} y_t = X_q \quad / \quad X_q \in G_q \;\; , 2 \leq q \leq r+1$$

donc pour chaque vecteur X_q, $\beta_q = \{y_t, \Phi y_t, ..., \Phi^{n+p+2-2q} y_t\}$, $2 \leq q \leq r+1$ forment des bases pour lesquelles la matrices associée de Φ est sous forme de blocs de Jordan

Lemme 2.9 *pour* A, B, C, D *satisfaisant les données 1,2,3 et 4, l'opérateur* Φ *est nilpotent d'ordre*$(n+p+1)$ *, sa forme de Jordan est constituée de* r *blocs de Jordan d'ordre :* $n+p+1-2j \quad : j = 1, ..., r$

Preuve. *Elle résulte des lemmes précédents : le plus grand bloc de Jordan provient de* X_2 *qui est l'image de* $f_p \otimes e^n$ *par* D^{n+p-1}.
Les blocs de Jordan sont des blocs nilpotents. ■

Chapitre 3

Opérateurs P-symétriques

Dans ce chapitre , on rappel des résultats sur l'image d'une dérivation généralisée, le théorème de Fugled-Putnam et les opérateurs P-symétriques. Des nombreux travaux ont été effectués sur les opérateurs de dérivation généralisés $\delta_{A,B}$, J. Andersan, J. Bunce, J.A. Deddence et J.P.Wiliams [1] ont démontré que si A est **D-symétrique (**i.e $\mathrm{Im}(\delta_A) = \overline{\mathrm{Im}(\delta_{A^*})}$, $\overline{\mathrm{Im}(\delta_A)}$ est la fermeture de $\mathrm{Im}(\delta_A)$), alors $TA = AT$ implique $A^*T = TA^*$, S. Mecheri [23], Wiliams [35] ont démontré que si (A, B) est **P-symétrique généralisé,** alors $B^* \mathrm{Im}(\delta_{A,B}) + \mathrm{Im}(\delta_{A,B})A^* \subset \overline{\mathrm{Im}(\delta_{A,B})}^{w^*}$ ($\overline{\mathrm{Im}(\delta_{A,B})}^{w^*}$ est la fermeture de $\mathrm{Im}(\delta_{A,B})$ pour la topologie ultra-faible des opérateurs) ; Il est donc naturel de poser le problème pour d'autres classes d'opérateurs, nous donnons une extension de ces résultats pour l'opérateur élémentaire $\Delta_{A,B}$ et completons les études de S. Mecheri [23], Wiliams [35] .

.

3.1 Théorème de Fugled-Putnam

3.1.1 Propriétés des opérateurs normaux

Définition 3.1 *Un opérateur A est dit normal si $AA^* - A^*A = 0$.*

Proposition 3.1 *Soit $A \in \pounds(E)$, si A est un opérateur normal, alors*

1. $A - \lambda$ est normal.
2. $\|A\| = r(A)$.

Preuve. 1. On a

$$\begin{aligned}(A-\lambda)^*(A-\lambda) - (A-\lambda)(A-\lambda)^* &= (A^*-\lambda)(A-\lambda) - (A-\lambda)(A^*-\lambda) \\ &= A^*A - AA^*\end{aligned}$$

Comme A est normal, il en resulte que

$$(A-\lambda)^*(A-\lambda) - (A-\lambda)(A-\lambda)^* = 0,$$

donc $A - \lambda$ est normal
2. A normal$\Longrightarrow \|A\| = r(A)$
On a $r(A) = \lim \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$, alors pour prouver que $\|A\| = r(A)$ on doit prouver que pour tout n on a $\|A^n\| = \|A\|^n$
pour $n = 2$: montrons que $\|A^2\| = \|A\|^2$
comme $\|AA^*\| = \|A\|^2$, alors

$$\begin{aligned}\|A^2\|^2 &= \|(A^2)^*(A^2)\| \\ &= \|A^*(A^*A)A\| \\ &= \|A^*A(A^*A)\| \\ &= \|A^*AAA^*\| \\ &= \|(AA^*)^*(AA^*)\| = \|AA^*\|^2 = \left(\|A\|^2\right)^2\end{aligned}$$

donc

$$\|A^2\| = \|A\|^2$$

prouvons maintenant que $\|A^n\| = \|A\|^n$

comme $\|A^n\| \leq \|A\|^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, il suffit de prouver que $\|A^n\| \geq \|A\|^n$
on a

$$\begin{aligned} \left\|A^k x\right\|^2 &= \left\langle A^k x, A^k x\right\rangle \\ &= \left\langle A^* A^k x, A^{k-1} x\right\rangle, \end{aligned}$$

d'où

$$\left\|A^k x\right\|^2 \leq \left\|A^{k+1} x\right\| \left\|A^{k-1} x\right\|$$

donc

$$\left\|A^k\right\|^2 \leq \left\|A^{k+1}\right\| \left\|A^{k-1}\right\| \leq \left\|A^{k+1}\right\| \|A\|^{k-1}$$

supposons que $\|A^n\| \geq \|A\|^n$ est vraie pour $n \leq k$, alors

$$\left\|A^k\right\|^2 \geq \|A\|^{2k}$$

et puisque

$$\left\|A^{k+1}\right\| \|A\|^{k-1} \geq \left\|A^k\right\|^2 \geq \|A\|^{2k},$$

d'où

$$\|A\|^{k+1} \leq \left\|A^{k+1}\right\|$$

donc pour $n = k+1 > k$ la relation est vraie.
D'où

$$\|A^n\| = \|A\|^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

■

Définition 3.2 $A \in \pounds(E)$

1. A auto-adjoint : $A = A^*$, (ou $\forall x, (Ax, x) \in \mathbb{R}$)
2. A positif : $\forall x, (Ax, x) \geq 0$ (il est alors auto-adjoint).
3. A unitaire ou isometrique : $AA^* = A^*A = I$.

3.1.2 Enonce du théorème

Théorème 3.1 *Soient A, B deux opérateurs normaux. Si $AX = XB$ alors $A^*X = XB^*$*

Preuve. On sait que

$$e^{iS} \text{ est un opérateur unitaire,}$$

et comme

$$AX = XB \Longrightarrow A^n X = XB^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

il en resulte que

$$e^{i\bar{\lambda}A}X = Xe^{i\bar{\lambda}B} \qquad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{C}$$

Définissons

$$f(\lambda) = e^{i\lambda A^*}Xe^{-i\lambda B^*}$$

On peut écrire cette fonction sous la forme

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= e^{i\lambda A^*}Xe^{-i\lambda B^*} \\ &= e^{i\lambda A^*}e^{-i\bar{\lambda}A}Xe^{i\bar{\lambda}B}e^{-i\lambda B^*} \end{aligned}$$

car

$$X = e^{-i\bar{\lambda}A}Xe^{i\bar{\lambda}B}$$

donc

$$f(\lambda) = \left[e^{i(\lambda A^* - \bar{\lambda}A)}X\right]\left[e^{i\bar{\lambda}B - i\lambda B^*)}\right]$$

notons :

$$U(\lambda) = e^{i(\lambda A^* - \bar{\lambda}A)},$$

et

$$V(\lambda) = e^{i(\bar{\lambda}B - \lambda B^*)}$$

et puisque $(\lambda A^* + \bar{\lambda}A)$ et $-i(\bar{\lambda}B + \lambda B^*)$ sont deux opérateurs auto-adjoint, et $e^{i(\lambda A^* + \bar{\lambda}A)}$, $e^{-i(\bar{\lambda}B + \lambda B^*)}$ deux opérateurs unitaires, donc

$$\|f(\lambda)\| \leq \|X\| \qquad \forall \lambda$$

alors $f(\lambda) = e^{i\lambda A^*}Xe^{-i\lambda B^*}$ est une fonction analytique, bornée pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, donc constante sur tout $\mathbb{C}$ et sa dérivée égale à $f'(\lambda) = 0$

$$f'(\lambda) = A^*e^{i\lambda A^*}Xe^{-i\lambda B^*} + e^{i\lambda A^*}X(-B^*)e^{-i\lambda B^*}$$

pour $\lambda = 0$, $f'(0) = 0$,
donc

$$A^*X = XB^*$$

■

3.2 Opérateurs P-symétriques généralisés

3.2.1 Définitions et résultats

Définition 3.3 *Soient A, B deux opérateurs de $\mathcal{L}(H)$, on dit que la paire (A, B) vérifie la condition $(FP)_{\mathcal{L}(H)}$ (condition du Fugled -Putnam) si $AX = XB$ implique $A^*X = XB^*$, pour $X \in \mathcal{L}(H)$.*

Théorème 3.2 *[19] Soient A, B deux opérateurs de $\mathcal{L}(H)$ telle que la paire (A, B) vérifie la condition $(FP)_{\mathcal{L}(H)}$, si pour tout opérateur positif N dans $\{A\}^{'}$*

$$\|N + AX - XB\| \geqslant \|N\|,$$

alors

$$\|C + AX - XB\| \geqslant \|C\|,$$

pour tout opérateur $C \in \ker(\delta_{A,B})$, et pour tout $X \in \mathcal{L}(H)$.

Preuve. Comme (A, B) vérifie la condition $(FP)_{\mathcal{L}(H)}$ i.e

$$\begin{aligned} AC &= CB \Longrightarrow A^*C = CB^* \\ &\Longrightarrow C^*A = BC^* \\ &\Longrightarrow CC^*A = (CB)\,C^* = ACC^*, \end{aligned}$$

d'où

$$CC^* \in \{A\}^{'}$$

Comme CC^* est un opérateur positif, alors

$$\|CC^* + AX_n - X_nA\| \geqslant \|CC^*\|,$$

pour $X_n = Y_nC^*$:

$$\|CC^* + AY_nC^* - Y_nC^*A\| \geqslant \|CC^*\|,$$

$$\|CC^* + AY_nC^* - Y_nC^*A\| = \|C + AY_n - Y_nB\| \, \|C^*\| \geqslant \|CC^*\| = \|C\|^2$$

d'où

$$\|C + AY_n - Y_nB\| \geqslant \|C\|$$

■

Corollaire 3.1 *Soient A, B deux opérateurs normaux, $C \in \ker(\delta_{A,B})$, alors*

$$\|C + AX_n - X_nA\| \geqslant \|C\|,$$

Preuve. On sait que si A, B des opérateurs normaux, alors la paire (A, B) vérifie la condition $(FP)_{\mathcal{L}(H)}$, pour A un opérateur normal on a

$$\|T + AX_n - X_nA\| \geqslant \|T\|, \ \forall T \in \{A\}'$$

il suffit d'appliquer le théorème précédent ∎

Théorème 3.3 *Soient A, B deux opérateurs de $\mathcal{L}(H)$ telle que la paire (A, B) vérifie la condition $(FP)_{\mathcal{L}(H)}$, alors*

$$\ker \delta_{A,B} = \ker \delta_{A^*,B^*}$$

Preuve. On a $\delta_{A,B}(X) = AX - XB$, $\delta_{A^*,B^*}(X) = A^*X - XB^*$,

$$\ker \delta_{A,B} = \{X \in \mathcal{L}(H) : AX = XB\}$$

et comme (A, B) vérifie la condition $(FP)_{\mathcal{L}(H)}$, alors

$$\ker \delta_{A,B} = \ker \delta_{A^*,B^*}$$

∎

Théorème 3.4 *Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$, si A est un opérateur co-isométrique de $\mathcal{L}(H)$, B isométrique, alors*

$$\overline{\mathrm{Im}(\delta_{A,B})} \cap \ker \delta_{A^*,B^*} = \{0\}.$$

$\overline{\mathrm{Im}(\delta_{A,B})}$ *est la fermeture de* $\mathrm{Im}(\delta_{A,B}))$ *pour la topologie de la norme (ou uniforme)*

Preuve. Soit $T^* \in \overline{\mathrm{Im}(\delta_{A,B})} \cap \ker \delta_{A^*,B^*}$ (i.e) il existe une suite $\{X_n\}$ de $\mathcal{L}(H)$ telle que

$$AX_n - X_nB \to T^* \tag{1}$$

et

$$A^*T^* = T^*B^* \tag{2}$$

de (2), il vient $TA = BT$
Multiplions (1) à gauche par T on obtient

$$TAX_n - TX_nB \to TT^*,$$

alors

$$B(TX_n) - (TX_n)B \to TT^*,$$

d'où

$$TT^* \in \overline{\mathrm{Im}(\delta_B)}$$

On a

$$A^*T^* = T^*B^* \Longrightarrow (AA^*)\, T^*B = AT^*\, (B^*B) \Longrightarrow T^*B = AT^* \Longrightarrow (TT^*)\, B = TAT^* = B\, (TT^*) \tag{3.1}$$

d'où

$$TT^* \in \overline{\mathrm{Im}(\delta_B)} \cap \ker \delta_B,$$

comme B est isométrique, alors $TT^* = 0$, donc $T^* = 0$. ∎

Définition 3.4 *Un opérateur A est dit **D-symétrique** s'il satisfait la condition suivante :*

$$\overline{\mathrm{Im}(\delta_A)} = \overline{\mathrm{Im}(\delta_{A^*})},$$

($\overline{\mathrm{Im}(\delta_A)}$ est la fermeture de $\mathrm{Im}(\delta_A)$) pour la topologie de la norme).

Remarque 3.1 *Ce concept de **D-symétrique** de l'opérateur A a été introduit par JH Anderson, JW Bunce, J. A. Deddens [1]*

Définition 3.5 *Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$, on dit que la paire (A, B) vérifie la condition*

$$\overline{\mathrm{Im}(\delta_{A,B})} = \overline{\mathrm{Im}(\delta_{B^*,A^*})}$$

*est **D-symétrique généralisé***

Définition 3.6 *On dit qu'un opérateur A est **P-symétrique**, s'il satisfait la condition suivante :*

$$AT = TA \Longrightarrow A^*T = TA^*$$

Définition 3.7 *On dit que la paire (A, B) est **P-symétrique généralisé**, s'il satisfait la condition suivante :*

$$TA = BT \Longrightarrow A^*T = TB^*$$

On notera par $\mathcal{GF}_0(H)$ l'ensemble de tous les paires (A, B) P-symétriques généralisés.

Définition 3.8 *Soit $\mathfrak{B}$ un espace de Banach et S un sous-espace de $\mathfrak{B}$, l'ensemble $Ann(S)$ est défini par*

$$Ann(S) = \{f \in \mathcal{L}(\mathfrak{B}) : f(s) = 0,\ \forall s \in S\}$$

Lemme 3.1 *[23] Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$, alors*

$$Ann\left(\mathrm{Im}(\delta_{A,B})\right) = Ann\left(\mathrm{Im}(\delta_{A,B})\right) \cap Ann(K(H)) \oplus \ker(\delta_{A,B}) \cap C_1(H)$$

où $K(H)$, $C_1(H)$ désignent respectivement, l'ensemble des opérateurs compacts sur H et l'ensemble des opérateurs de classe trace

Théorème 3.5 *[23] Soient* $A, B \in \mathcal{L}(H)$*, alors*

$$(A, B) \in \mathcal{GF}_0(H) \Longleftrightarrow \overline{\operatorname{Im}(\delta_{A,B})}^{w^*} = \overline{\operatorname{Im}(\delta_{B^*,A^*})}^{w^*}$$

($\overline{\operatorname{Im}(\delta_{A,B})}^{w^*}$ *la fermeture de* $\operatorname{Im}(\delta_{A,B})$ *pour la topologie ultra-faible)*

Théorème 3.6 *[23] Soient* $A, B \in \mathcal{L}(H)$*. Si* (A, B) *est* ***P-symétrique généralisé****, alors*

$$B^* \operatorname{Im}(\delta_{A,B}) + \operatorname{Im}(\delta_{A,B})A^* \subset \overline{\operatorname{Im}(\delta_{A,B})}^{w^*}$$

3.3 Opérateurs P-symétriques élémentaires.

3.3.1 Définitions et propriétés

Définition 3.9 *L'opérateur élémentaire de base induite par les opérateurs* $A, B \in \mathcal{L}(H)$ *est l'opérateur* $\tau_{A,B}$ *défini par* $\tau_{A,B}(X) = AXB$, $X \in \mathcal{L}(H)$

Définition 3.10 *L'opérateur* $R_{(A_1,A_2),(B_1,B_2)}$ *est défini par* $R_{(A_1,A_2),(B_1,B_2)} = A_1XB_1 - A_2XB_2$*. (Si* $A_2 = B_2 = I$*, l'opérateur élémentaire est noté par* $\Delta_{A_1,B_1}(X) = \tau_{A_1,B_1}(X) - X = A_1XB_1 - X$*).*

Lemme 3.2 *[24] Soient* $A, B \in \mathcal{L}(H)$*, alors*

$$Ann\left(\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})\right) = Ann\left(\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})\right) \cap Ann(K(H)) \oplus \ker(\Delta_{A,B}) \cap C_1(H)$$

(où $\operatorname{Im}(\Delta_{A,B}), K(H), \ker(\Delta_{A,B})$ *et* $C_1(H)$ *désignent respectivement, l'image de* $\Delta_{A,B}$*, le noyau de* $\Delta_{A,B}$*, l'ensemble des opérateurs compacts sur* H *et l'ensemble des opérateurs de classe trace)*

Théorème 3.7 *[6] Soient* A, B *deux opérateurs de* $\mathcal{L}(H)$*. Soient* f, g *deux fonctions analytiques sur* U, V *contiennent* $\sigma(A), \sigma(B)$ *respectivement, si* $f(0) = g(0) = 0$ *alors* $\operatorname{Im}(\ \tau_{f(A),f(B)}) \subset \operatorname{Im}(\ \tau_{A,B})$

Définition 3.11 *Soient* $A, B \in \mathcal{L}(H)$*, on dit que la paire* (A, B) *vérifie la condition*

$$\overline{\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})} = \overline{\operatorname{Im}(\Delta_{B^*,A^*})}$$

est ***quasi-adjoint généralisée***
On dit que la paire (A, B) *est* ***P-symétrique élémentaire****, si elle satisfait la condition suivante :*

$$BTA = T \Longrightarrow A^*TB^* = T$$

On notera par $\mathcal{QG}(H)$ l'ensemble de toutes les paires (A, B) quasi-adjoint généralisées et par $\mathcal{PE}(H)$ l'ensemble de toutes les paires (A, B) P-symétriques élémentaires.

Théorème 3.8 *Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$. Alors*

$$(A,B) \in \mathcal{PE}(H) \Longleftrightarrow \overline{\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})}^{w^*} \text{ est auto -adjoint}$$

Preuve. $[\Longrightarrow]$: la topologie w^* est engendrée par tous f_T avec $T \in C_1$ et ainsi $\overline{\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})}^{w^*}$ est l'intersection

$$\cap \left\{ \ker f_T : f_T(\sum_{i=1}^{n} A_i X B_i - X) = 0, \forall X \in \mathcal{L}(H) \right\}$$

comme

$$f_T(\sum_{i=1}^{n} A_i X B_i - X) = tr(T(\sum_{i=1}^{n} A_i X B_i - X) = tr((\sum_{i=1}^{n} A_i T B_i - T)X$$

l'intersection est

$$\ker \Delta_{B,A} \cap C_1(H).$$

Si $(A,B) \in \mathcal{PE}(H)$, alors

$$\ker \Delta_{B,A} \cap C_1(H) = \ker \Delta_{A^*,B^*} \cap C_1(H)$$

et ainsi la fermeture ultra-faible de

$$(\operatorname{Im}(\Delta_{B^*,A^*})) = (\operatorname{Im}(\Delta_{A,B}))^*$$

$[\Longleftarrow]$: si $\overline{\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})}^{w^*}$ est auto-adjoint. L'ensemble de $T \in C_1(H)$ pour laquelle f_T disparaît sur $\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})$ doit être auto-adjoint ($Y \in \operatorname{Im}(\Delta_{A,B})$) implique $0 = f_T(Y^*) = \overline{tr(T^*Y)}$. D'où

$$\ker \Delta_{B,A} \cap C_1(H) = \ker \Delta_{A^*,B^*} \cap C_1(H)$$

et $(A,B) \in \mathcal{PE}(H)$ ■

Théorème 3.9 *Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$. Si (A,B) est **P-symétrique élémentaire,** alors*

$$B^* \operatorname{Im}(\Delta_{A,B}) + \operatorname{Im}(\Delta_{A,B})A^* \subset \overline{\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})}^{w^*}$$

Preuve. supposons que (A,B) est **P-symétrique élémentaire,** alors, d'après théorème 3.8, il en découle :

$$\overline{\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})}^{w^*} = \overline{\operatorname{Im}(\Delta_{B^*,A^*})}^{w^*},$$

mais puisque

$$B^* \Delta_{B^*,A^*}(X) = \Delta_{B^*,A^*}(B^* X)$$

et

$$\Delta_{B^*,A^*}(X)A^* = \Delta_{B^*,A^*}(XA^*)$$

on déduit que

$$B^* \operatorname{Im}(\Delta_{A,B}) \subset B^*\overline{\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})}^{w^*} = B^*\overline{\operatorname{Im}(\Delta_{B^*,A^*})}^{w^*} \subseteq \overline{\operatorname{Im}(\Delta_{B^*,A^*})}^{w^*} = \overline{\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})}^{w^*}.$$

par les mêmes arguments ci-dessus :
puisque

$$\Delta_{B^*,A^*}(X)A^* = \Delta_{B^*,A^*}(XA^*)$$

on déduit que

$$\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})A^* \subset \overline{\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})}^{w^*}A^* = \overline{\operatorname{Im}(\Delta_{B^*,A^*})}^{w^*}A^* \subseteq \overline{\operatorname{Im}(\Delta_{B^*,A^*})}^{w^*} = \overline{\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})}^{w^*}.$$

Ceci termine la démonstration. ■

3.3.2 Propriétés et Descriptions de $\tau_0(A,B)$, $\sigma_0(A,B)$ et $B_0(A,B)$

Considèrons maintenant les ensembles

$$\tau_0(A,B) = \left\{(C,D) \in \mathcal{L}(H) \times \mathcal{L}(H) : C\mathcal{L}(H)D + \mathcal{L}(H) \subset \overline{\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})}^{w^*}\right\}$$

$$\sigma_0(A,B) = \left\{(C,D) \in \mathcal{L}(H) \times \mathcal{L}(H) : C\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})D + \operatorname{Im}(\Delta_{A,B}) \subset \overline{\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})}^{w^*}\right\}$$

$$\mathcal{B}_0(A,B) = \left\{(C,D) \in \mathcal{L}(H) \times \mathcal{L}(H) : \operatorname{Im}(\Delta_{C,D}) \subset \overline{\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})}^{w^*}\right\}$$

Théorème 3.10 *Soient A, B deux opérateurs de $\mathcal{L}(H)$. Si la paire (A,B) est **P-symétrique généralisée,** alors*
*i) $\tau_0(A,B)$, $\sigma_0(A,B)$ et $\mathcal{B}_0(A,B)$ sont **C***-Algèbre*
ii) $\tau_0(A,B)$ est un idéal de $\sigma_0(A,B)$
ii)$\operatorname{Im}(\Delta_{C,D}) \subset \overline{\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})}^{w^*}$ *pour tout $C, D \in C^*(A,B)$, $C^*(A,B)$ est le C^*algèbre engendré par la paire $(A,B) \in \mathcal{PE}(H)$.*

Preuve. i)
Soit $(C,D) \in \tau_0(A,B)$, cela implique

$$C\mathcal{L}(H)D - \mathcal{L}(H) \in \overline{\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})}^{w^*}$$

donc

$$CXD - Y \in \overline{\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})}^{w^*}, \forall X, Y \in \mathcal{L}(H)$$

si $X = 0$, il s'ensuit que $Y \in \overline{\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})}^{w^*}, \forall Y \in \mathcal{L}(H)$.Par conséquent C^* et D^* sont dans $\overline{\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})}^{w^*}$.

De plus, $(A, B) \in \mathcal{PE}(H)$, $(D^*, C^*) \in \tau_0$, on conclut que

$$C^* \left(D^* X C^*\right) D^* - D^* X C^* \in \overline{\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})}^{w^*}$$

D'où

$$(D, C) \in \tau_0$$

donc $(C^*, D^*) = (D, C)^* \in \tau_0(A, B)$.
Aussi de la même façon, on peut montrer que $\sigma_0(A, B)$ est aussi **C***-Algèbre. Il suffit de noter que si $(C, D) \in \sigma_0(A, B)$, alors

$$CXD - Y \in \overline{\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})}^{w^*}, \forall X, Y \in \operatorname{Im}(\Delta_{A,B}) \subseteq \mathcal{L}(H),$$

i.e., $(C, D) \in \tau_0$. Ce qui donne $(C^*, D^*) \in \tau_0 \subseteq \sigma_0$.
Finalement, $\mathcal{B}_0$ est **C***-Algèbre, car $\operatorname{Im}(\Delta_{C,D}) \subseteq \operatorname{Im}(\Delta_{A,B})$ et $\operatorname{Im}(\Delta_{C,D}) \subseteq \sigma_0$. Ainsi $(C^*, D^*) \in \mathcal{B}_0$.

ii)
Soit $(C, D) \in \iota(A, B)$ et $(E, F) \in \tau_0$, donc C, D, E et $F \in \overline{\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})}^{w^*}$, alors pour tout $X \in \operatorname{Im}(\Delta_{A,B})$ on a CEX et XDF sont dans $\overline{\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})}^{w^*}$. D'où $(CEXDF - X) \in \overline{\operatorname{Im}(\Delta_{A,B})}^{w^*}$, ce qui montre que $\tau_0(A, B)$ est un idéal à droite.
Comme $\tau_0(A, B)$ est **C***-Algèbre, il vient que $\tau_0(A, B)$ est un idéal bilatéral de $\sigma_0(A, B)$.

iii)
Supposons que $(C, D) \in \mathcal{B}_0(A, B)$. Comme $\mathcal{B}_0(A, B)$ est **C***-Algèbre contient la paire (A, B) et (I, I), il contient **C**$^*(A, B)$ ■

Chapitre 4

Orthogonalité de l'image au noyau, les opérateurs finis

Soit $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert H. Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est appelé fini si $\|AX - XA - I\| \geq 1$ pour tout $X \in \mathcal{L}(H)$ $i.e$ $\mathrm{Im}\,(\delta_A)$ est orthogonale à l'opérateur identité I au sens de Birkhof, si $\|T - (AX - XA)\| \geq \|T\|$ pour $T \in \ker(\delta_A)$ on dit $\ker(\delta_A)$ est orthogonal à $\mathrm{Im}(\delta_A)$. La question qui se pose est : pour quels opérateurs A la propriété $\mathrm{Im}(\delta_A) \perp \ker(\delta_A)$ reste vraie. Après avoir introduit quelques résultats de l'orthogonalité de l'image au noyau, nous donnons une extension de ces résultats et nous démontrons que si A est un opérateur de classe y (res. spectraloïd), alors $\mathrm{Im}(\delta_A)$ est orthogonale au $\ker(\delta_A)$ [26].
Dans la deuxième partie de ce chapitre, on s'intéresse à l'étude des nouvelles classes des opérateurs finis, on a prouvé que : si A est un opérateur de classe y (resp spectraloïd, absolument -(p-r) paranormale), alors A est fini [26].
Il est prouvé par S.Mecheri[20,22], J.P. Wiliams [35], que si A est un opérateur normal, hyponormal, M-hyponormal, normaloïd ou de classe R_1($R_1 = \{A \in \mathcal{L}(H) : \sigma_{ar} \neq \varnothing\}$), alors A est fini.

4.1 Orthogonalité de l'image au noyau

4.1.1 Orthogonalité de l'image au noyau d'une dérivation

Définition 4.1 *1. Soit E un espace de Banach et $(a,b) \in E^2$. Nous dirons que a est orthogonal à b au sens de Birkhof, si et seulement si*

$$\|a+\lambda b\| \geq \|a\|\,,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Théorème 4.1 *Soit S un opérateur isométrique dans $\mathcal{L}(H)$, alors* $\mathrm{Im}(\delta_S) \perp \ker(\delta_S)$

Preuve. D'après [14], on a

$$S^nX - xS^n = \sum_{i=0}^{n-1} S^{n-i-1}(SX-XS)S^i \quad , X \in \mathcal{L}(H)$$

Pour $T \in \ker(\delta_S)$, on a $TS = ST$, d'où

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} S^{n-i-1}(SX-XS-T)S^i &= \sum_{i=0}^{n-1} S^{n-i-1}(SX-XS)S^i - \sum_{i=0}^{n-1} S^{n-1}T \\ &= S^nX - XS^n - nS^{n-1}T = \sum_{i=0}^{n-1} S^{n-i-1}(SX-XS-T)S^i\end{aligned}$$

d'où $nS^{n-1}T = S^nX - XS^n - \sum_{i=0}^{n-1} S^{n-i-1}(SX-XS-T)S^i$,

alors

$$n\left\|S^{n-1}T\right\| \leq \|S^nX - XS^n\| + \sum_{i=0}^{n-1}\left\|S^{n-i-1}(SX-XS-T)S^i\right\|,\quad \|S(T)\| = \|T\|$$

$$n\left\|S^{n-1}T\right\| \leq \|S^nX - XS^n\| + \sum_{i=0}^{n-1}\|(SX-XS-T)\|$$

donc

$$n\|T\| \leq \|S^nX - XS^n\| + n\|(SX-XS-T)\|$$

d'où

$$\|T\| \leq \frac{1}{n}\|S^nX - XS^n\| + \|(SX-XS-T)\|\,,$$

pour $n \to \infty$, $\|T\| \leq \|(SX-XS-T)\| = \|\delta_S(X) - T\|$, donc $\mathrm{Im}(\delta_S) \perp \ker(\delta_S)$. ■

Théorème 4.2 *Soit A un opérateur auto-adjoint de $\mathcal{L}(H)$, alors* $\mathrm{Im}(\delta_A) \perp \ker(\delta_A)$

Preuve. Soit A un opérateur auto-adjoint $\mathcal{L}(H)$, l'opérateur $U = (A - i)(A + i)^{-1}$ est la transformation de Cayley de l'opérateur A

$$U = (A - i)(A + i)^{-1} \Rightarrow U^* = (A^* - i)^{-1}(A^* + i)$$

$$U^{-1} = (A + i)(A - i)^{-1}$$

donc $U^* = U^{-1}$ (i.e) U est unitaire
commme

$$U = (A - i)(A + i)^{-1} \Rightarrow U(A + i) = (A - i) \tag{1}$$

d'où

$$A = i(I + U)(I - U)^{-1}$$

$$\delta_A(X) = \delta_{A-i}(X) = (A - i)X - X(A - i)$$

en appliquant (1), on obtient

$$\begin{aligned}
\delta_A(X) &= U(A+i)X - XU(A+i) \\
&= U[(A+i)X] - [(A+i)X]U + (A+i)(XU) - (XU)(A+i) \\
&= \delta_U([(A+i)X]) + \delta_{A+I}(XU) \\
&= \delta_U([(A+i)X]) + \delta_A(XU) \\
&= \delta_U(AX) + i\delta_U(X) + \delta_A(XU)
\end{aligned}$$

$$\delta_A(X) - \delta_A(XU) = \delta_U(AX) + i\delta_U(X),$$

donc

$$\delta_A(X(I - U)) = \delta_U([(A + i)X])$$

d'où

$$\mathrm{Im}(\delta_A) = \mathrm{Im}(\delta_U)$$

pour $T \in \ker(\delta_A)$ i.e $TA = AT$; d'où $TU = UT$, donc d'après (Théorème 4.1) $\mathrm{Im}(\delta_A) \perp \ker(\delta_A)$ ■

Théorème 4.3 *Soit N un opérateur normal dans $\mathcal{L}(H)$, alors* $\mathrm{Im}(\delta_N) \perp \ker(\delta_N)$

Preuve. voir[20] ■

4.1.2 Orthogonalité de l'image au noyau pour une classe d'opérateur y

Définition 4.2 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, on dit que A est un opérateur de classe d'opérateurs y_α pour $\alpha \geq 1$ (ou $A \in y_\alpha$) s'il existe un nombre positif k_α tel que*

$$|AA^* - A^*A|^\alpha \leq k_\alpha^2 (A - \lambda I)^*(A - \lambda I), \quad \textit{pour tout } \lambda \in \mathbb{C} \tag{*}$$

Définition 4.3 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, A est dit un opérateur de classe y si $y = \bigcup\limits_{1 \leq \alpha} y_\alpha$ et vérifie (*)*

Définition 4.4 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$*
- A est appelé M-hyponormal s'il existe un nombre réel M positif tel que

$$(A - \lambda I)(A - \lambda I)^* \leq M^2 (A - \lambda I)^*(A - \lambda I), \quad \textit{pour tout } \lambda \in \mathbb{C}$$

- On dit que A est dominant s'il existe un nombre réel positif M_λ tel que $M_\lambda \leq M$
- A est appelé spectraloïd si $\omega(A) = r(A)$ où $\omega(A)$ (resp. $r(A)$) le rayon numérique de A(resp. le rayon spectral)
- A est appelé un opérateur absolument (p-r) paranormale si $\| |A|^p |A^*|^r x \|^r \geq \| |A^*|^r x \|^{p+r}$ pour tout $x \in H$ et tout nombre réel $r, p > 0$

Remarque 4.1 *Pour plus de détails concernant la relation entre ces opérateurs voir [36]*

Remarque 4.2 *Tout opérateur de classe y_1 est un opérateur M-hyponormal, et tout opérateur M-hyponormal est un opérateur de classe y_2 (voir [33])*

Lemme 4.1 *Soient $A, T \in \mathcal{L}(H)$, si A est de classe y (res. spectraloïd) et T normal tel que $AT = TA$, alors pour tout $\lambda \in \sigma_p(T)$(Le spectre ponctuel de A)*

$$\|T - (AX - XA)\| \geq |\lambda|, \textit{ pour tout } X \in \mathcal{L}(H)$$

Preuve. Soit $\lambda \in \sigma_p(T)$ et M_λ l'espace propre à λ. Comme $AT = TA$, on a d'après le théorème de Fugled-Putnam $AT^* = T^*A$. D'où M_λ soit réduisant pour A et pour T. Selon la décomposition $H = M_\lambda \oplus M_\lambda^\perp$ on peut écrire A, T et X comme suit

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \text{ et } X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix},$$

avec A est de classe y (res. spectraloïd) [25,32]

$$\begin{aligned}
\|T-(AX-XA)\| &= \left[\left[\begin{array}{cc} \lambda-(A_1X_1-X_1A_1) & * \\ * & * \end{array}\right]\right] \\
&\geq \|\lambda-(A_1X_1-X_1A_1)\| \\
&\geq |\lambda|\left\|I-\left(A_1\left(\frac{X_1}{\lambda}\right)-\left(\frac{X_1}{\lambda}\right)A_1\right)\right\| \\
&\geq |\lambda|
\end{aligned}$$

■

Proposition 4.1 *[Technique de Berberian]. Soit H un espace de Hilbert complexe, alors il existe un espace de Hilbert $\widetilde{H} \supset H$ et un isomorphisme *-isométrique $\varphi : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H)(A \to \widetilde{A}$ tel que : pour tout $A, B \in \mathcal{L}(H)$ et tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$*
1.$\widetilde{A^*} = \left(\widetilde{A}\right)^*$, $\widetilde{I}$ est l'identité de $\widetilde{H}$, $\alpha\widetilde{A+\beta B} = \alpha\widetilde{A}+\beta\widetilde{B}$, $\widetilde{AB} = \widetilde{A}+\widetilde{B}$, $\left\|\widetilde{A}\right\| = \|A\|$
2.$\sigma(A) = \sigma(\widetilde{A})$, $\sigma_a(A) = \sigma_a(\widetilde{A}) = \sigma_p(\widetilde{A})$ où $\sigma_a(A), \sigma_p(A)$ sont respectivement le spectre approché et le spectre ponctuel de A

Théorème 4.4 *Soit A un opérateur de classe y (res. spectraloïd), alors pour tout opérateur normal T tel que $AT = TA$, on a*

$$\|T-(AX-XA)\| \geq \|T\|, \textit{ pour tout } X \in \mathcal{L}(H)$$

Autrement dit $\operatorname{Im}(\delta_A)$ est orthogonale au $\ker(\delta_A)$ pour A un opérateur de classe d'opérateurs y (res. spectraloïd).
Preuve. Soit $\lambda \in \sigma(T) = \sigma_a(T)$ [14], alors d'après la proposition précédente $\widetilde{T}$ est normal, $\widetilde{A}$ est de classe y (res spectraloïd), $\widetilde{T}\widetilde{A} = \widetilde{A}\widetilde{T}$ et $\lambda \in \sigma_p(\widetilde{T})$.
Par application du lemme 4.1 on obtient

$$|\lambda| \leq \left\|\widetilde{T}-(\widetilde{AX}-\widetilde{XA})\right\| = \|T-(AX-XA)\|.$$

Comme $\|T\| = \sup\limits_{\lambda\in\sigma_p(\widetilde{T})}|\lambda|$ (voir Proposition 3.1) ; alors

$$\|T\| = \left\|\widetilde{T}\right\| = \sup_{\lambda\in\sigma_p(\widetilde{T})}|\lambda| \leq \|T-(AX-XA)\|, \text{ pour tout } X \in \mathcal{L}(H)$$

■

4.2 Classes des opérateurs finis

Cette section est une étude de classe des opérateurs finis, elle est obtenue par l'orthogonalité de l'image d'une dérivation et l'opérateur identité, et elle est définie par

$$\mathrm{F(H)} = \{A \in \mathcal{L}(H); \|I - \delta_A(X)\| \geq 1, \forall X \in \mathcal{L}(H)\}$$

J.P. Wiliams [34] a démontré que la classe F(H) contient les opérateurs normaux, hyponormaux, compacts et les opérateurs normaloïdes et que $R_1 \subset$F(H) où

$$R_1 = \{A \in \mathcal{L}(H) : \sigma_{ar} \neq \varnothing\})$$

Dans [18] S.Mecheri généralise les résultats de J.P. Wiliams pour des classes d'opérateurs (M-hyponormal, paranormal) qui sont plus générale que les opérateurs normaux et hyponormaux. Nous généralisons les résultats principals de J.P. Wiliams et S.Mecheri et on montrera que si A un opérateur de classe y (resp spectraloïd, absolument -(p-r) paranormale), alors A est fini.

4.2.1 Définitions

Définition 4.5 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$*
1. L'image numérique de A est définie par :

$$W(A) = \{(Ax, x); \|x\| = 1, x \in H\}$$

2. Le rayon numérique de A est défini par :

$$\omega(A) = \sup\{|z|\,; z \in W(A)\}$$

Définition 4.6 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, on appelle spectre approché de A et on note par $\sigma_a(A)$ l'ensemble des complexes λ tel qu'il existe une suite $(x_n) : \|x_n\| = 1$ pour laquelle $\lim\limits_{n} (A - \lambda)\, x_n = 0$*

Définition 4.7 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, on appelle spectre approché réduisant de A et on note par $\sigma_{ar}(A)$ l'ensemble des complexes λ tel qu'il existe une suite $(x_n) : \|x_n\| = 1$ pour laquelle $\lim\limits_{n} (A - \lambda)\, x_n = 0$ et $\lim\limits_{n} (A - \lambda)^* x_n = 0$*

Lemme 4.2 *Si S est un opérateur de classe y, alors $\sigma_{ar}(S) \neq \emptyset$*

Preuve. Il est connu que $\sigma_{ar}(S) \subset \sigma_a(S)$. Comme $\sigma_a(S) \neq \emptyset$, il suffit de montrer que $\sigma_a(S) \subset \sigma_{ar}(S)$

Soit $S \in y$, alors il existe $\alpha \geq 1$ et $k_\alpha > 0$ tel que ; pour tout $x \in H, \lambda \in \mathbb{C}$

$$\left\| (SS^* - S^*S)^{\frac{\alpha}{2}} x \right\| \leq k_\alpha \left\| (S - \lambda I) x \right\| .$$

Puisque .

$$(S - \mu I)(S - \mu I)^* = SS^* - S^*S + (S - \mu I)^*(S - \mu I), \text{ pour tout } \mu \in \mathbb{C}$$

alors

$$\left| \langle (SS^* - S^*S) x, x \rangle \right| \leq \left\| |SS^* - S^*S|^{\frac{1}{2}} x \right\|^2$$

En effet, considérons la décomposition polaire de l'opérateur $SS^* - S^*S = VD$, où $D = |SS^* - S^*S|$. Alors V est une isométrie partielle hermitienne qui commute avec D car $SS^* - S^*S$ est hermitien. D'où pour tout $x \in H$ tel que $\|x\| = 1$

$$\begin{aligned} \left| \langle (SS^* - S^*S) x, x \rangle \right| &\leq \left| \left\langle |SS^* - S^*S|^{\frac{1}{2}} x, |SS^* - S^*S|^{\frac{1}{2}} V^*x \right\rangle \right| \\ &\leq \left\| |SS^* - S^*S|^{\frac{1}{2}} x \right\| \left\| |SS^* - S^*S|^{\frac{1}{2}} V^*x \right\| \\ &= \left\| |SS^* - S^*S|^{\frac{1}{2}} x \right\| \left\| V^* |SS^* - S^*S|^{\frac{1}{2}} x \right\| \leq \left\| |SS^* - S^*S|^{\frac{1}{2}} x \right\|^2 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\left\| (S - \mu I)^* x \right\|^2 \leq \left\| (S - \mu I) x \right\|^2 + \left\| |SS^* - S^*S|^{\frac{1}{2}} x \right\|^2 \qquad (2)$$

Soit $\lambda \in \sigma_a(S)$, alors il existe une suite orthonormale $(x_n)_{n \in N^*}$ telle que $\|(S - \lambda I)x_n\| \longrightarrow 0$. par conséquent, pour $\lambda = \mu$, $x_n = x$ on a

$$\begin{aligned} \left\| |SS^* - S^*S|^{\frac{1}{2}} x_n \right\|^{2\alpha} &\leq \left\| |SS^* - S^*S|^{\frac{\alpha}{2}} x_n \right\|^2 \|x_n\|^{2(\alpha-1)} \\ &\leq k_\alpha^2 \left\| (S - \mu I) x_n \right\|^2 \|x_n\|^{2(\alpha-1)} \end{aligned} \qquad (3)$$

Par application (2), (3), il en resulte que

$$\left\| (S - \mu I)^* x \right\|^2 \leq \left\| (S - \mu I) x \right\|^2 + k_\alpha^{\frac{\alpha}{2}} \left\| (S - \mu I) x \right\|^{\frac{\alpha}{2}}$$

d'où $\|(S - \mu I)^* x\| \longrightarrow 0$ et $\lambda \in \sigma_{ar}(S)$, i.e $\sigma_{ar}(S) \neq \varnothing$ ■

Lemme 4.3 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, alors*

$$\{\lambda \in \sigma_a(A); \operatorname{Re}(A - \lambda) \geq 0\} \subset \sigma_{ar}(A)$$

Preuve. Soit $\lambda \in \sigma_a(A)$, alors il existe une suite orthonormale $(x_n)_{n \in N^*}$ dans H telle que $\lim_n (A - \lambda) x_n = 0$. Alors l'opérateur

$$B = \operatorname{Re}(A - \lambda) = \frac{1}{2} \left[(A - \lambda) + (A - \lambda)^* \right]$$

satisfait

$$\lim_n (Bx_n, x_n) = 0.$$

Comme $B \geq 0$, alors $\lim_n Bx_n = 0$, i.e

$$\lim_n \left(\frac{1}{2} [(A-\lambda)x_n + (A-\lambda)^* x_n] \right) = 0$$

et comme

$$\lim_n (A-\lambda)x_n = 0,$$

alors

$$\lim_n (A-\lambda)^* x_n = 0.$$

D'où

$$\lambda \in \sigma_{ar}(A)$$

■

Lemme 4.4 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, alors $\partial W(A) \cap \sigma(A) \subset \sigma_{ar}(A)$ /$\partial W(A)$ est la frontière de $W(A)$.*

Preuve. Par la transformation $A \to \alpha A + \beta, (\alpha \in \mathbb{C}^*, \beta \in \mathbb{C})$ l'hypothèse $\lambda \in \partial W \cap \sigma(A)$ peut être remplacée par $0 \in \partial W \cap \sigma(A)$ avec $\mathrm{Re}(A) \geq 0$.

Comme

$$0 \in \partial W \cap \sigma(A)$$

il en résulte d'après le lemme précédent que

$$0 \in \sigma_{ar}(A),$$

donc

$$\partial W \cap \sigma(A) \subset \sigma_{ar}(A)$$

Et comme

$$\partial W \cap \sigma(A) \neq \varnothing$$

alors

$$\sigma_{ar}(A) \neq \varnothing$$

■

4.2.2 Représentation de nouvelles classes d'opérateurs finis

Théorème 4.5 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur de classe y, alors A est fini*

Preuve. Il est bien connu [18] que si $\sigma_{ar}(A) \neq \varnothing$, alors A est fini. D'où il suffit d'appliquer le lemme 4.2. ■

Théorème 4.6 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur spectraloïd, alors A est fini*

Preuve. On a $\omega(A) = r(A)$, alors il existe $\lambda \in \sigma(A) \subset \overline{W(A)}$ tel que $|\lambda| = \omega(A)$, d'où $\lambda \in \partial W(A)$,

i.e $\partial W \cap \sigma(A) \neq \varnothing$, d'où $\sigma_{ar}(A) \neq \varnothing$ (voir Lemme 4.4), il en résulte que A est fini ■

Théorème 4.7 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Si A est un opérateur absolument (p-r) paranormale, alors A est fini*

Preuve. Comme tout opérateur (p-r) paranormale est un opérateur normaloïd [26], donc A est spectraloïd et comme un opérateur spectraloïd est fini (Théorème4.6) alors A est fini. ■

Théorème 4.8 *Soit a un élement de classe y (resp. absolument -(p-r) paranormale) de la C*-algèbre* A, *alors A est fini*

Preuve. D'après [16, page 97], il existe un isomorphisme *-isométrique φ : A $\rightarrow \mathcal{L}(H)$. Comme a $\in$A un élement de classe y (resp. absolument -(p-r) paranormale), $\varphi(a)$ est de classe y (resp. absolument -(p-r) paranormale), il en résulte du théorème 4.4 que a est fini ■

Corollaire 4.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur de classe y (resp. absolument -(p-r) paranormale), alors $T = A + K$ est fini, où K est un opérateur compact*

Preuve. Comme l'algèbre de Calkin $C(H) = \mathcal{L}(H) / \mathcal{K}(H) = \{[A], A \in \mathcal{L}(H)\}$ où $[A] = \{A + K, K \in \mathtt{K}(H)$ et $\mathtt{K}(H)$ est l'idéal des opérateurs compacts de $\mathcal{L}(H)$ est une C*-algèbre , alors si A est de classe y (resp. absolument -(p-r) paranormale), $[A] \in \Im(H)$ est de classe y (resp. absolument -(p-r) paranormale).
Il en résult que $[A]$ est fini, et on a

$$\begin{aligned} \|[A][X] - [X][A] - [I]\| &\geq 1 \Longleftrightarrow \|[T][X] - [X][T] - [I]\| \geq 1 \\ &\Longleftrightarrow \|TX - XT - I\| \geq 1 \\ &\Longleftrightarrow \|TX - XT - I\| \geq 1. \end{aligned}$$

Alors T est fini. ■

Conclusion

Soit H un espace de Hilbert complexe, séparable de dimension infini et soit $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur H. Pour A, B, C et $D \in \mathcal{L}(H)$, nous définissons les opérateurs $\delta_{A,B}$, $\Delta_{A,B}$ et $R_{(A,C),(B,D)}$ comme suit : $\delta_{A,B}(X) = AX - XB$, $\Delta_{A,B}(X) = AXB - X$, $R_{(A,C),(B,D)}(X) = AXB - CXD$.
S. Mecheri[18], J.P. Wiliams [35] ont donné plusieurs propriétés de l'image de l'opérateur $\delta_{A,B}$. Dans [20,21], S. Mecheri a montré que si A hyponormal, M-hyponormal ou normaloïd, alors pour tout $T \in \ker(\delta_A)$,

$$\|T - (AX - XA)\| \geq \|T\| \tag{(1)}$$

Ceci signifie que $\operatorname{Im}(\delta_A)$ est orthogonale au $\ker(\delta_A)$ au sens de Birkoff, si $\|I - (AX - XA)\| \geq 1$ pour tout $X \in \mathcal{L}(H)$ on dit que A est fini.

Dans ce travail nous généralisons les résultats de S. Mecheri, J.P. Wiliams pour l'opérateur de dérivation élémentaire $\Delta_{A,B}$. Nous donnons aussi une très large classe d'opérateurs A satisfaisant l'inégalité (1).
Par ailleurs nous généralisons d'autres résultats de [20,21,35], en donnant une très large classe d'opérateurs fini et aussi nous construisons la forme de Jordan pour $\delta_{A,B}, R_{(A,C),(B,D)}$.

Liste des symboles

A^*	Opérateur adjoint de A.
$\|A\|$	Norme de A.
$[A]$	La classe de l'opérateur A dans l'algèbre de Calkin $C(H) = \mathcal{L}(H)\,/\mathcal{K}(H)$
$E_1 \oplus E_2$	Somme directe de E_1 et E_2.
$\sigma\,(A)$	Spectre de A.
$r\,(A)$	Rayon spectrale de A.
$\sigma_a(A)$	Spectre approximatif de A.
$\sigma_{ar}(A)$	Spectre approximatif réduisant de A.
$tr\,(A)$	Trace de A.
$\lvert A\rvert$	Racine carrée positive de l'opérateur A^*A.
$\mathcal{C}_1$	Ensemble des opérateurs de classe trace.
$\mathcal{K}(H)$	Ensemble des opérateurs compacts.
$M^\perp$	Complémentaire orthogonale de M.
$\mathrm{Im}(\delta_A)$.(res. $\ker(\delta_A)$	Image de δ_A.(res. Noyau de δ_A)
$E^{'}$	Espace dual topologique de E
$\delta_{A,B}$	Dérivation généralisée induite par A, B.
$\overline{\mathrm{Im}\,\delta_{A,B}}$	La fermeture de $\mathrm{Im}\,\delta_{A,B}$ pour la topologie uniforme.
$\overline{\mathrm{Im}(\delta_{A,B})}^{w^*}$	La fermeture de $\mathrm{Im}(\delta_{A,B})$ pour la topologie Ultra-faible des opérateurs.
$\delta_{A,B}\mid_{G_q}$	Restriction de $\delta_{A,B}$ sur G_q.
$Vect\,\{e_{1,\ldots,}e_m\}$	Sous espace vectoriel engendré par $\{e_{1,\ldots,}e_m\}$
$\{A\}^{'}$	Commutant de A.
$W(A)$	Image numérique de A. $W(A) = \{(Ax, x); \|x\| = 1, x \in H\}$
$w(A)$	Le rayon numérique de A. $w(A) = \sup\{\lvert z\rvert\,; z \in W(A)\}$.
	.

A est Unitaire	si $A^*A = AA^* = I$
A est Auto-adjoint	si $A = A^*$
A est Isométrie	si $A^*A = I$
A est Normaloïd	si $r(A) = \|A\|$.
A est Normal	si $A^*A - AA^* = 0$
A est Hyponormal	si $A^*A - AA^* \geq 0$
A est Paranormal	si $\|Ax\|^2 \leq \|A^2x\| \|x\|$ pour tout $x \in H$.
A est P-hyponormal	si $(A^*A)^p \geq (AA^*)^p$, $p > 0$
A est nilpotent d'ordre n	si $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$, $n > 1$
A est de rang fini	si $\mathrm{Im}(A)$ est de dimension finie
A est Compact	si $(Ax_n, x_n) \to 0$, pour toute suite orthonormée (x_n) de H

Bibliographie

[1] J. H. Anderson, J. W. Bunce, J. A. Deddens and J. P. Williams , C*-algebras and derivation ranges, Acta Sci. Math. (Szeged), 40(1978), 211-227.

[2] C. Apostol and L. Fialkov, Structural properties of elementary operators, Canadian Journal of Mathematics, 38 (1986), 1485-524.

[3] A. Bachir, Generalized Derivation, SUT Journal of Mathematics, Vol. 40, No. 2 (2004), 111-116.

[4] S. Bouali, et J. Charles, Extension de la notion d'opérateurs d-symétriques I, Acta Sci. Math. (Szeged), 58(1993), 517-525.

[5] S. Bouali, et J. Charles , Extension de la notion d'opérateurs D-symétriques II, Linear Algebra And Its Applications, 225(1995), 175-185.

[6] S. Bouali, M. Ech-chad, Generalized D-Symmetric Operators I, Serdica Math. J. 34 (2008), 557-562

[7] F. Chatelin, Th. Braconnier, About the qualitative computation of Jordan forms. Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik,v74,n2,1994, p105-113. http

[8] Y. Y. Chen, A Motivation for the Jordan canonical form, Chinese Journal of physics-Taipei-, 2003, p 253-285, Ingenta.

[9] B. P. Duggal, A remark on generalised Putnam-Fuglede theorems, Proc. Amer. Math. Soc, 129 (2000), 83-87.

[10] L. A. Fialkow And R. Lobel, Elementary mapping into ideals operators, Illinois J. Math.,28 (1984).

[11] L. A. Fialkow, Spectral properties of elementary operators, Acta Scien - tiarum Mathematica - rum (Szeged) 46 (1983), 269-82.

[12] L. A. Fialkow, Spectral properties of elementary operators II, Journal of the American Mathematical Society 290 (1985), 415-29.

[13] Z. Genkai, On the operator $\delta_{A,B} : X \to AX - XB$ and $\tau : X \to AXB - X$,Journal of Fudan University 23 (1989), 148-56.

[14] P.Halmos, A Hilbert space probleme book, van Nostrand prinston n 5 probleme 185

[15] M. Hazy, Introduction aux espaces normé, O.P.U . 1994.

[16] D.A.Herrero, Approximation of Hilbert spaceoperator I, Pitman Advanced publishing program, Boston, London-Melbourn (1982).

[17] A. Hitta, cours d'algèbre, O.P.U. 1988

[18] S. Mecheri Finite operators, Demonstratio Math, 35 (2002),355-366.

[19] S. Mecheri, Non-normal derivation and orthogonality , Proc.Amer . Math.Soc, 133 (2005), 759-762.

[20] S. Mecheri, S.Bouznada, Similarity orbits and finite operators, Jour.Pure. Math, Vol 22, 2005, pp.67-73.

[21] S. Mecheri, K. Tanahashi, and A. Uchyama, Fuglede-Putnam theorem for p-hyponormal or class y operators, Bull. Korean Math. Soc.43(2006), No.4,pp.747-753.

[22] S. Mecheri Finite operators and orthogonality, Nihonkai Math. J, 19 (2008),53-60.

[23] S. Mecheri, Generalized derivation and C -Algebras, An. St. Univ. Ovidus Constanta, vol.17 (2), 2009,123-130.

[24] S. Mecheri, A. Toualbia,Elementary operator and new C*-Algebras.Int. J. Open Problems Compt. Math., Vol. 7, No. 3, September, 2014

[25] S. Mecheri, Fuglede Putnam theorem for a class A operators, colloquium Math, 138(2015) 183-191

[26] S. Mecheri, A. Toualbia, Range Kernel Orthogonality and Finite Operators, KYUNGPOOK Math. J. 55(2015), 63-71

[27] 24M.H. Mortad, An Application of the Putnam-Fuglede Theorem to Normal Products of Selfadjoint Operators, Proc. Amer. Math. Soc., 131/10 (2003), 3135–3141

[28] 25E. J. Putzer, Avoiding the Jordan Canoical Form in the discusion of linear Systems with constant coe cients Maa Notes, 2002, no.59, pp. 243-248.

[29] F. Riesz and B. Sz.-Nagy, Leçons d'analyse Fonctionnelle, Gauthier-Villars, 1972.

[30] A. Seddik et J. Charles, Sur I'lmage et le Noyau d'une Dérivation Généralisée, Linear Algebra And Its Applications 274 :77-83(1998)

[31] J. G. Stampfli, On self-adjoint derivation ranges, Pacific J. Math., 82 (1979), 257-77.

[32] J. G. Stampfli, The norm of a derivation, Paci c J. Math., 33 (1970), 737-47.

[33] A. Uchiyama and K. Tanahashi, Fuglede-Putnam's theorem for p-hyponormal or log-hyponormal operators, Glasgow Math. J. 44 (2002), 397-410.

[34] J. P. Wiliams, Derivation ranges : open problems, Topics in modern operator theory, Birkhauser-Verlag, 1981, 319-28.

[35] J. P. Wiliams, Finite operators, Proc.Amer.Math.Soc,26(1970),129-135.

[36] T.Yamazaki, M.Yanagida, A further generalization of paranormal operators, Sci. Math, 2000 ;3 : 23-31.

Abstract The first chapter will examine a summary of theorems and definitions that are to be used in following chapters.

The second chapter deals with the Jordan form of the generalized derivation operator's $\delta_{A,B}$ (X)=AX-XB and the elementary derivation operator $R_{(A,C),(B,D)}$ (X)=AXB-CXD.

In the third chapter we consider the pairs of operators (A,B) such as AT=TB implies A^*T=TB^* for any T∈C_1(H), i.e the pairs that satisfy Fugled –Putnam's theorem in C_1(H) (C_1(H) is an ideal of $\mathcal{L}$(H)), that we call generalized P-symmetric. We give some basic properties for this class, and we focus, as well, in this chapter on the study of the pairs' class of elementary P-symmetric operators ((A,B) is elementary P-symmetric if BTA=T⇒A^*TB^*=T.

In the last chapter we present a global study on the orthogonality of the image to the kernel of the intern derivation δ_A(X)=AX-XA and of the finite operators.

Keywords generalized derivation operator, elementary derivation operator, Fugled -Putnam theorem, orthogonality of the image to the kernel, finite operator.

Résumé Un résumé pour les théorèmes et les définitions que nous allons utiliser dans les autres chapitres fait l'objet du premier chapitre.

Au second chapitre, on donne la forme de Jordan pour l'opérateur de dérivation généralisé $\delta_{A,B}$(X)=AX-XB et l'opérateur de dérivation élémentaire $R_{(A,C),(B,D)}$(X)=AXB-CXD.

Au troisième chapitre on considère les paires d'opérateurs (A, B) telles que AT=TB implique A^*T=TB^* pour tout T∈C_1(H), i.e les paires qui vérifient le théorème de Fugled-Putnam dans C_1(H) (C_1(H) est un idéal de $\mathcal{L}$(H)), on appelle ces paires P-symétriques généralisées. On donne quelques propriétés de base concernant cette classe, aussi dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude de la classe des paires d'opérateurs P-symétriques élémentaires ((A, B) est P-symétrique élémentaire si BTA=T⇒A^*TB^*=T).

Au dernier chapitre on présente une étude globale sur l'orthogonalité de l'image au noyau de la dérivation interne δ_A(X)=AX-XA et des opérateurs finis.

Mots-clés Opérateur de dérivation généralisé, Opérateur de dérivation élémentaire, théorème de Fugled-Putnam, orthogonalité de l'image au noyau, opérateurs fini.

2010 Mathematics Subject Classification 47B47, 47A30, 47B10