République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des frères Mentouri, Constantine
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Numero d'ordre :..........
Numero de série :..........

THÈSE

Pour l'obtention du diplôme de
Doctorat en Sciences

Thème

Sur le problème de Cauchy pour l'équation de Kac homogène sans troncature angulaire (cas de Maxwell)

Option : E.D.P

Par

Nadia Lekrine

Devant le Jury :

Président	:	M. Deghdak,	Prof,	Université des frères Mentouri, Constantine
Rapporteur	:	A. Bouziani,	Prof,	Université d'Oum El Bouaghi
Examinateurs	:	M. Nadir,	Prof,	Université de M'sila
	:	S.E. Rebiai,	Prof,	Université de Batna
	:	A. Mokrane,	M.C.A,	Université de Batna
	:	A. Hameida,	M.C.A,	Université des frères Mentouri, Constantine
Invités	:	Chao-Jiang-Xu,	Prof,	Université de Rouen

Soutenue le 19 mai 2016

Remerciements

Je voudrais adresser un remerciement spécial à mon directeur de thèse, Mr Le Professeur Chao-Jiang Xu et lui exprimer toute ma reconnaissance d'avoir accepté de m'encadrer au cours de cette thèse, en me donnant ainsi, l'occasion de finir ma thèse doctorale. Je le remercie également pour ses conseils avisés, et sa rigueur scientifique.
Je remercie sincèrement mon encadreur Mr le Professeur A.Bouziani, en lui souhaitant une guérison rapide.
Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à Mer le Professeur M.Deghdak, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider ce jury.
Je remercie chaleureusement Mer le Professeur M.Nadir de M'sila, Mers les Professeurs S.E. Rebiai, A Mokrane et Mer le Professeur A.Hameida pour leur modestie d'avoir accepté de juger ce travail et d'être présents à ma soutenance. Je les remercie aussi pour leurs remarques et leurs suggestions et qu'ils trouvent ici ma profonde gratitude.

En particulier, je remercie vivement mon encadrant de magister Mr le Professeur S.Mesloub et mon enseignant Mr le Professeur N.Kechkar, qu'ils trouvent toujours toute ma reconaissance et toute ma gratitude.

Je tiens également à remercier Mr le Professeur Paul Raynaud de Fitte pour sa sympathie, sa disponibilité permanante et pour ses conseils précieux durant mon séjour à LMRS.
Je tiens à remercier Mr le directeur du laboratoire Thierry de la Rue pour sa disponibilité, Mr Gérard Grancher, les secrétaires Marguerite Losada, la bibliothécaire Isabelle Lamitte et Vlad Stefan Barbu pour leur sympathie.
Je ne saurais jamais oublié tous ceux qui m'ont fait profiter de leurs aide de et leurs soutien moral : mon enseignant M. Bouzit, mes amies Amel Kourta, Alima Chibani, Nouria et Aicha Bereche, ma soeur et sa fille Selsabile. Je tiens à remercier mes collègues et amis doctorants à LMRS : Ali Righi, Islam, Ouerdia, Bedine et Houda, qui ont été toujours disponibles pour me rendre service.

À la mémoire de mon très cher père

Je dédie chaleureusement ce travail à l'âme de mon très cher père, celui qui m'a permis de poursuivre mes études.
Je dédie cette thèse à ma très chère mère.
À mes deux très chers enfants : Aymen et Amina.
À toute ma famille.

Table des matières

Notations

Dans cette thèse on utilise les notations suivantes :

- Pour $l \in \mathbb{R}$, et $i = 1.2$, on désigne par

$$L^i_\ell(\mathbb{R}) = \left\{ f; \|f\|_{L^i_\ell} = \int_{\mathbb{R}} \langle v \rangle^{i\ell} |f(v)|^i dv)^{1/i} < \infty \right\},$$

(respectivement par

$$\dot{L}^i_\ell(\mathbb{R}) = \left\{ f; \|f\|_{\dot{L}^i_\ell} = (\int_{\mathbb{R}} |v|^{i\ell} |f(v)|^i dv)^{1/i} < \infty \right\}.)$$

l'espace L^i à poids l (respectivement l'espace L^i homogène à poids l) Où $\langle v \rangle = (1 + |v|^2)^{1/2},\ i = 1.2$.

- Pour $k, \ell \in \mathbb{R}$ on désigne par

$$H^k_\ell(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}); \langle v \rangle^l \langle D_v \rangle^k f \in L^2(\mathbb{R}) \right\},$$

(respectivement par

$$\dot{H}^k_\ell(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}); |v|^l |D_v|^k f \in L^2(\mathbb{R}) \right\}.$$

l'espace de Sobolev à poids ℓ (respectivement l'espace de Sobolev homogène à poids l), muni de la norme

$$\|f\|_{H^k_\ell} = \|\langle v \rangle^l \langle D_v \rangle^k f\|_{L^2} \equiv \|\langle D_v \rangle^k \langle v \rangle^l f\|_{L^2},$$

(respectivement muni de la norme

$$\|f\|_{\dot{H}^k_\ell} = \||v|^l |D_v|^k f\|_{L^2} \equiv \||D_v|^k |v|^l f\|_{L^2}.)$$

• $L\log L$ est l'espace défini par

$$L\log L(\mathbb{R}) = \Big\{ f;\ \|f\|_{L\log L} = \int_{\mathbb{R}} |f(v)| \log(1+|f(v)|) dv < +\infty \Big\}.$$

• On désigne par $\mathcal{S}$ l'espace de Schwartz.
-$Op(\mathcal{S}^m)$ désigne l'ensemble des opérateurs pseudo-différentiels sur $\mathcal{S}$.
-$\mathcal{S}^m$ est l'espace des symboles d'ordre m associe à $Op(\mathcal{S}^m)$.
-On pose en outre $\mathcal{S}^{-\infty} = \bigcap \mathcal{S}^m$, $\mathcal{S}^{\infty} = \bigcup \mathcal{S}^m$.
-On note par l'OΨD l'opérateur pseudo-différentiel.
-$O_s[p]$ désigne l'intégrale oscillante associe au symbol$p(\xi, x)$.
• Pour $s \geq 1$, $G^s(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions de Gevrey avec indice s.
Cet espace contient les deux espaces suivants :
-$G^1(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions analytiques usuelles.
-Pour $0 < s < 1$, $G^s(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions ultra-analytiques.

• Dans tout le document on note $\frac{1}{2\pi} d_\xi$ par d_ξ.

Introduction

L'équation de *Boltzmann* (1872) est une équation intégro-différentielle de la théorie cinétique qui décrit l'évolution d'un gaz peu dense. Elle modélise les collisions entre deux particules dans des gaz raréfiés. Il s'agit d'une équation probabiliste d'évolution non linéaire décrivant l'état d'un système bénaire dans l'espace des phases (des positions $x \in \mathbb{R}^n$ et des vitesses $v \in \mathbb{R}^n$). La quantité positive $f = f(t, x, v)$ représente, pour un temps $t \geq 0$, la densité de propbabilité de trouver les particules dans l'élément $dxdv$ centré en (x, v). Pour déduire cette équation, on considère que les particules ont un mouvement de translation rectiligne et uniforme jusqu'au moment où chacune d'elles est brutalement déviée du fait d'une collision *élastique* avec une autre particule du gaz . On obtient

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f, f),$$

où $Q(f, f)$ est l'opérateur de collision, qui décrit la variation de la densité due aux intéractions et collisions qui agit uniquement sur la variable v.

A partir de la fonction de densité de particules $f(t, x, v)$ on peut définir les quantités macroscopiques intéressentes dans les considérations de la mécanique des fluides. Il s'agit de la *densité locale* $\varrho = \varrho(t, x)$, de la *vitesse locale* $u = u(t, x)$, et de la *température locale* $T = T(t, x)$ définies par :

$$\varrho = \int_{\mathbb{R}^n_v} f(t, x, v) dv \text{ (masse)},$$

$$\varrho u = \int_{\mathbb{R}^n_v} v f(t, x, v) dv \text{ (moment d'ordre 1,)}$$

$$\varrho |u|^2 + nT\varrho = \int_{\mathbb{R}^n_v} v^2 f(t, x, v) dv \text{ (l'energie)},$$

où n est la dimension de l'espace $\mathbb{R}^n_v$ (voir par exemple [15]).

L'équation de Boltzmann, a attiré l'attention, dépuis dixaines d'années, de nombreux chercheurs. La singularité du noyau rend de cette équation, malgré sa simplicité, un problème ouvert très important et d'actualité.
Concernant l'étude mathématiques de cette équation, la première solution analytique complète a été obtenue dans le cas des interactions de type "sphères dures" par S. Ukai dans les années 1970, mais seulement pour des solutions proches de l'équilibre. La plus grande avancée reste la théorie des solutions renormalisées de R. DiPerna et P.-L. Lions qui fournit l'existence des solutions, même loin de l'équilibre. Leur régularité et unicité reste un problème ouvert très important. Donc, la première étude mathématique des propriétés de régularité de l'opérateur Q a été effectuée par P.-L. Lions en 1994. Lorsque le noyau Q est régulier (dans le sens de troncature de Grad), la partie positive Q^+ de cet opérateur envoie l'espace L^2 des fonctions de carré intégrable dans l'espace de Sobolev H^1 (ce résultat est vrai localement et en dimension 3 d'espace). La démonstration originale, basée sur les propriétées des opérateurs de Fourier intégraux, a ensuite été simplifié par B. Wennberg, qui a proposé une démonstration en utilisant la transformée de Radon, puis par F. Bouchut et L. Desvilletes, en 1998. Dans ce dernier travail, on s'est aperçu que Q^+ se comportait bien vis-à-vis de la transformée de Fourier (notée $\mathcal{F}$) : les opérateurs $\mathcal{F}(Q^+)$ et $\mathcal{F}(Q^-)$ ont une forme (relativement) simple. Ceci permet d'obtenir une version optimisée des résultats de P.-L. Lions. Les liens entre Q et la transformée de Fourier avaient été explorés (en particulier dans le but d'obtenir des solutions explicites) par A. Bobylev dés les années 70. Vers le milieu des années 90, Desvillettes s'est intéressé aux propriétés de régularité de Q lorsque cet opérateur est singulier (sans troncature angulaire de Grad). En effet cette forme de l'opérateur correspond à la situation réaliste dans laquelle les potentiels d'interaction entre les molécules se comportent à l'infini comme des puissances négatives de la distance. L'aspect de l'opérateur ne permettait pas d'extraire la partie positive Q^+.
En 1995, Desvillettes a réussi à montrer que Q^+ envoie L^2 dans C^∞ dans un cas particulier (pour des fonctions à symétrie radiale et pour une section efficace particulièrement simple). Le cas général demande de nombreuses améliorations de la méthode de la démonstration, qui ont été apportées progressivement par R. Alexandre, C. Villani, Wennberg et Desvillettes. Ensuite L. Boudin et Desvillettes ont obtenu la propagation de la régularité et des singularités de l'équation de Boltzmann comme conséquence de l'étude de

l'interaction entre les variables d'espace x et celles de vitesse v. Une propriété essentielle de l'équation de Boltzmann (et des autres équations cinétiques à noyau de collision) est leur dissipativité.

Autour des années 2000, l'étude de la régularité due aux collisions, grâce à la production d'entropie, a été developpée par Alexandre, Lions, Villani et d'autres. Quelques formulations élégantes ont été obtenues dans le travail d'Alexandre-Desvillettes-Villani-Wennberg et un problème homogène a été résolu de manière satisfaisante.

Dés l'année 2008, dans une série de travaux collaboratifs, Alexandre, Y. Morimoto, C.-J. Xu, S. Ukai et T. Yang, en utilisant l'anlyse de Fourier, nous ont fournis par des résultats qui optimisent un résultat dû à Desvillettes, dans le cas d'une section efficace sans troncature angulaire mais pour des problèmes linéaires.

Dans cette approche, on va aborder dans notre travail plusieurs problèmes pour un modèle simplifié qui est *l'équation de Kac homogène sans troncature angulaire* avec *une condition minimale* sur la *donnée initiale* et une *singularité très forte*. Aprés avoir donner un bref rappel sur les espaces et l'analyse utilisée dans le premier chapitre. Notre contribution, s'est résumée et répartie en cinq chapitres essentiels :

Le second chapitre est dédie à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution faible. On donne {egalement quelques résultats concernant l'analyse de Fourier pour l'opérateur de collision de Kac et l'opérateur de collision de Boltzmann radialement symétrique.

Le troisième chapitre est destiné à l'étude de la production des moments d'ordre infini dans L^1 et dans L^2.

Dans le quatrième chapitre, on aborde l'étude concernant l'effet de régularisation au sens de Sobolev et celle de Gevrey avec un poids d'ordre un.

Le cinquième chapitre est réservé à l'étude de l'effet de régularisation au sens de Sobolev avec poids d'ordre infini, où on donne un résultat plus précis et plus général que celui de la réference [47].

Dans le dernier chapitre, on montre l'effet de régularisation au sens de Gevrey avec poids d'ordre infini. Ces deux derniers chapitres produisent la généralisation des résultats obtenus dans le quatrième chapitre.

Dans le but d'établir ces résultats nous devons démontrer une estimation à priori cible

$$\|f\|_H \leq C\|f_0\|_{L^1}, \tag{0.0.1}$$

où f la solution de l'équation, f_0 la donnée initiale et H un espace de Sobolev se diffère selon le résultat voulu à établir.
Nous appelons C la constante cible.

Chapitre 1

Espaces de Sobolev et Opérateurs Pseudo-différentiels

Dans ce chapitre sont présentés, sans détails, les principaux résultats concernant les espaces de Sobolev. Ainsi qu'une approche à la théorie des opérateurs pseudo-différentiels qui seront utilisés fréquement dans les démonstrations.

1.1 Transformée de Fourier

La transformée de Fourier est définie pour les fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ par

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx \qquad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

On définit aussi, si $\hat{f} \in L^1$ la transformée de Fourier inverse par

$$f(x) = \overline{\mathcal{F}}(\hat{f}(\xi))(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi)d\xi \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Si $f \in L^1 \cap L^2$ L'opérateur $\mathcal{F}$ est bejective dont l'inverse est $\mathcal{F}^{-1}$, et on a $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$.

Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^n)$

Nous rappelons d'abord les propriétés fondamentales de la transformée de Fourier dans L^1.

L'application $\mathcal{F}:\ L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ est continue. En effet on a

$$\|\mathcal{F}f\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$$

Pour $s=(s_1,\cdots,s_n)\in\mathbb{N}^n$ et $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, nous posons

$$|s| = \sum_{i=1}^n s_i, \qquad |x|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2,$$

$$x^s = x_1^{s_1}\cdots x_n^{s_n}, \quad \partial_x^s = \partial_{x_1}^{s_1}\cdots\partial_{x_n}^{s_n}, \quad D_x^s = (\frac{1}{i}\partial_{x_1})^{s_1}\ldots(\frac{1}{i}\partial_{x_n})^{s_n}.$$

On note formelement par $x_i f$ la fonction $x\mapsto x_i f$. Si $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ avec $x_i f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $\partial_{\xi_i}\hat{f}$ est bien définie, continue et bornée et on a

$$\mathcal{F}(-ix_i f)(\xi) = \partial_{\xi_i}\hat{f}(\xi), \quad \|\partial_{\xi_i}\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|x_i f\|_{L^1}.$$

Plus généralement, si $x^s f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $\partial_\xi^s\hat{f}$ est bien définie, continue et bornée et on a

$$\partial_\xi^s\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[(-ix)^s f](\xi), \quad \|\partial_\xi^s\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|x^s f\|_{L^1}.$$

D'autre part, si $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ avec $\partial_{x_i}f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors on a

$$\mathcal{F}(\partial_{x_i}f)(\xi) = \xi_i\hat{f}(\xi), \quad \|\xi_i\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|\partial_{x_i}f\|_{L^1}.$$

Plus généralement, si $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ avec $\partial_x^s f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors on a

$$\mathcal{F}(\partial_x^s f)(\xi) = (i\xi)^s\hat{f}(\xi), \quad \|(\xi)^s\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|\partial_x^s f\|_{L^1};$$

si de plus $(i\xi)^s\hat{f}\in L^1(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\partial_x^s f(x) = \overline{\mathcal{F}}((i\xi)^s\hat{f})(x), \quad \|\partial_x^s f\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-n}\|(\xi)^s\hat{f}\|_{L^1}.$$

On a en outre, pour tout $(x,\xi)\in(\mathbb{R}^n)^2$ et $k>0$

$$\begin{aligned} e^{-ix.\xi} &= (1+|\xi|^2)^{-k}(I-\Delta_x)^k e^{-ix.\xi} \\ &= (1+|x|^2)^{-k}(I-\Delta_\xi)^k e^{-ix.\xi} \\ &= (1+|\xi|^2)^{-k}(I-\Delta_x)^k(1+|x|^2)^{-l}(I-\Delta_\xi)^l e^{-ix.\xi} \qquad (1.1.1) \end{aligned}$$

$$(1+|\xi|^2)^k\partial_\xi^s\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-ix.\xi}(I-\Delta_x)^k(-ix)^sf(x)dx.$$

La transformée de Fourier est symétrique au sens suivant : soient $f,g\in L^1\cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Si on applique le théorème de Fubini à l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}}e^{-ix.\xi}f(x)\overline{g(\xi)}dxd\xi,$$

on obtient la relation

$$\langle f,\hat{g}\rangle=\langle\hat{f},g\rangle,$$

où

$$\langle u(x),v(x)\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}u(x)\bar{v}(x)dx,$$

est le produit scalaire dans L^2.

Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}$ et dans L^2

Soit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'espace de Schawrtz avec la semi norme

$$\|f\|_{k,S}=\sup_{|s|\leq S}(1+|x|)^k|\partial_x^sf(x)|,\ \forall S,k\in\mathbb{N}^n.$$

Théorème 1.1.1 *La transformée de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la transformée de Fourier possède la proriété suivante

$$\|\phi\|_{L^2}=(2\pi)^{-n}\|\hat{\phi}\|_{L^2}\ \textit{(l'égalité de Parseval-Plancherel).}$$

• On rappelle que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.
On a le théorème de Plancherel suivant :

Théorème 1.1.2 *Si $f,\hat{f}\in L^1$, on a $f(x)=(2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}\hat{f}}(x)$.*
L'opérateur $(2\pi)^{\frac{-n}{2}}\mathcal{F}$ peut être prolongé de $L^1\cap L^2$ en un opérateur unitaire sur L^2, son inverse est $(2\pi)^{\frac{-n}{2}}\bar{\mathcal{F}}$.
C'est-à-dire il existe une transformation unique de L^2 dans L^2 qui coincide avec la transformée de Fourier dans $L^1\cap L^2$. Cette transformation est un isomorphisme isométrique d'espace de Hibert. Dans ce cas on a donc la relation suivante $\|\phi\|_{L^2}=\|\hat{\phi}\|_{L^2},\forall\phi\in L^2(\mathbb{R}^n)$.

La transformée de Fourier est un isomorphisme de l'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

1.2 Définition et proriétés élémentaires des espaces de Sobolev

Définition des espaces de Sobolev

Définition 1.2.1 *Soit $s \in \mathbb{R}$. L'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ est :*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n);\ \hat{f} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n);\ (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{H^s} = \|(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}\|_{L^2}.$$

L'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble :

$$\dot{H}^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n);\ \hat{f} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n);\ |\xi|^s\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{\dot{H}^s} = \||\xi|^s\hat{f}\|_{L^2}.$$

On remarque que la transformée de Fourier est un isomorphisme de $H^s(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R}; (1+|\xi|^2)^s d\xi)$. et que $H^s(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire.

$$(u,v)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s \hat{u}\bar{\hat{v}} d\xi.$$

Proposition 1.2.2 *Quel que soit $s \in \mathbb{R}$ $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans H^s.*

Propriétés élémentaires des espaces de Sobolev

On donne ici quelques propriétés élémentaires des espacesÂ^2*deSobolevdéduitesimmédiat*

- $L^1 \subset H^s$ pour tout $s < -n/2$.
- Si $s_1 < s_2$, $s = (1-t)s_1 + ts_2$, $t \in]0,1[$ et $u \in H^{s_2}$, alors l'inégalité

$$\|u\|_{H^s} \le \|u\|^{1-t}_{H^{s_1}} \|u\|^t_{H^{s_2}},$$

Cette inégalité se déduit de l'inégalité de Hölder ([13]).
• On a aussi l'inégalité d'interpolation

$$\|u\|_{H^s}^2 \leq \epsilon\|u\|_{H^{s_2}}^2 + \epsilon^{\frac{-t}{1-t}}\|u\|_{H^{s_1}}^2.$$

Cette dernière inégalité implique le théorème de Rellich

Théorème 1.2.3 *Soit K un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. On pose*

$$H_K^s = \{f \in H^s; suppf \subset K\}$$

Si $s' < s$, l'injection de H_K^s dans $H_K^{s'}$ est linéaire et compacte.

1.3 Calcul Pseudo-différentiel

1.3.1 Définition des opérateurs pseudo-différentiels

Nous rappelons quelques relations élémentaires de la théorie des opérateurs pseudo-différentiels. Nous en renvoyons les détails à [40, 16, 17, 41, 57, 59, 61, 52]. Considérons l'opérateur différentiel,

$$P(x, D) = \sum_{|s|\leq m} a_s(x) D_x^s.$$

les coefficients a_s sont de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$P(x, D_x)u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi} P(x, \xi)\hat{u}(\xi) d\xi,$$

où

$$P(x, \xi) = \sum_{|s|\leq m} a_s(x)\xi^s.$$

On prolonge cette formule pour des fonctions plus générales $P(x, \xi)$.

Définition 1.3.1 *Soit $m \in \mathbb{R}$. On désigne par $\mathcal{S}^m$ l'ensemble des fonctions $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ telles que pour tous $s, \beta \in \mathbb{N}^n$, il existe une constante $C_{s,\beta} > 0$ telle que :*

$$|\partial_\xi^s \partial_x^\beta a(x, \xi)| \leq C_{s,\beta}(1 + |\xi|)^{m-s}, \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (1.3.1)$$

$\mathcal{S}^m$ est dit l'espace des symboles d'ordre m. On pose en outre $\mathcal{S}^{-\infty} = \bigcap \mathcal{S}^m$, $\mathcal{S}^\infty = \bigcup \mathcal{S}^m$.

Il est clair que :

$$a \in \mathcal{S}^m \Rightarrow \partial_\xi^s \partial_x^\beta a(x,\xi) \in \mathcal{S}^{m-s},$$

et

$$a \in \mathcal{S}^{m_1}, b \in \mathcal{S}^{m_2} \Rightarrow ab \in \mathcal{S}^{m_1+m_2}.$$

Théorème 1.3.2 *Si $a \in \mathcal{S}^m$ et $u \in \mathcal{S}$, alors*

$$a(x,D_x)u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi,$$

définit une fonction $a(x,D_x)u \in \mathcal{S}$.
Les commutations $[a(x,D_x),D_j]$, et $[a(x,D_x),x_j]$ sont données par :

$$[a(x,D_x),D_j] = i(\partial_{x_j}a)(x,D), \quad [a(x,D_x),x_j] = -i(\partial_{\xi_j}a)(x,D).$$

On appelle $a(x,D_x)$ un opérateur pseudo-différentiel d'ordre m, on le note par $a(x,D_x) \in Op(\mathcal{S}^m)$, où $Op(\mathcal{S}^m)$ désigne l'ensemble les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre m sur $\mathcal{S}$.

Si on remplace $\hat{u}$ par sa définition dans (1.3.2), on obtient que le noyau de Schwartz de $a(x,D_x)$

$$K(x,x-y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y).\xi} a(x,\xi)d\xi, \tag{1.3.2}$$

est donné par

$$a(x,D_x)u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,x-y)u(y)dy.$$

Le noyau de Schwartz $K(x,x-y)$ existe comme une intégrale oscillante. On peut l'interpréter comme
$(2\pi)^{-n}\hat{a}(x,x-y)$, où $\hat{a}$ est la transformée de Fourier de $a(x,\xi)$ par rapport à la variable ξ. Par la formule inverse de Fourier on a

$$a(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,x-y)e^{-iy\xi}dy,$$

Remarque 1.3.3 *Ici, la transformée de Fourier et la formule inverse sont dans l'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'$. Le théorème du noyau de Schwartz dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$, définit une application continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$. Mais, pour la classe des symboles $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$, on a une application continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$.*

1.3.2 Algèbre des opérateurs Pseudo-différentiels

On étudie d'abord l'adjoint de $a(x, D_x)$ par rapport au produit scalaire

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\bar{v}(x)dx.$$

On définit l'opérateur pseudo-différentiel $e^{iD_x.D_\xi}$ dans $\mathcal{S}$ par

$$e^{iD_x.D_\xi}(\cdot) = \sum_{|s|} \frac{1}{s!}\partial_\xi^s D_x^s(\cdot).$$

On définit l'adjoint $a^*(x, D_x)$ par

$$(a(x, D_x)u, v) = (u, a^*(x, D_x)v), \quad \forall u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Théorème 1.3.4 *Si $a \in \mathcal{S}^m$, alors $a^*(x, D_x)$ est aussi un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole $a^*(x, \xi)$ est donné par*

$$a^*(x, \xi) = e^{iD_x.D_\xi}\bar{a}(x, \xi) \in \mathcal{S}^m,$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$a^*(x, \xi) - \sum_{|s|<k} \frac{1}{s!}\partial_\xi^s D_x^s \bar{a}(x, \xi) \in \mathcal{S}^{m-k}. \tag{1.3.3}$$

On vertu du théorme 1.3.4, $a(x, D_x)$ peut être prolongé à une application continue de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$, comme étant l'adjoint de $a^*(x, D_x)$. Pour la relation (1.3.3), on dit aussi que $a^*(x, D_x)$ a un développement asymptotique. On écrit

$$a^*(x, \xi) \sim \sum_{|s|\geq 0} \frac{1}{s!}\partial_\xi^s D_x^s \bar{a}(x, \xi). \tag{1.3.4}$$

Maintenant, on va considérer la composition des opérateurs.

Théorème 1.3.5 *Si $a_1 \in \mathcal{S}^{m_1}$ et $a_2 \in \mathcal{S}^{m_2}$ comme opérateur dans $\mathcal{S}$ ou dans $\mathcal{S}'$ (distributions tempérées)*

$$a_1(x, D_x)a_2(x, D_x) = b(x, d); \quad d(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(\cdot)}{\partial_{x_i}} d_{x_i}.$$

est un opérateur pseudo-différentiel avec symbole

$$b(x,\xi) = a_1a_2(x,\xi) = e^{iD_y.D_\eta}a_1(x,\eta)a_2(y,\xi)|_{y=x,\eta=\xi} \in \mathcal{S}^{m_1+m_2},$$

a_1a_2 *est à considérer comme opérateur composé de* a_1 *et de* a_2*. On a en outre*

$$b(x,\xi) - \sum_{|s|<k} \frac{1}{s!}(\partial_\xi^s a_1)(x,\xi)(D_x^s a_2)(x,\xi) \in \mathcal{S}^{m_1+m_2-k}. \tag{1.3.5}$$

On peut écrire aussi

$$b(x,\xi) \sim \sum_{|s|} \frac{1}{s!}(\partial_\xi^s a_1)(x,\xi)(D_x^s a_2)(x,\xi). \tag{1.3.6}$$

D'après ce résultat on a le

Théorème 1.3.6 *Si* $a_1 \in \mathcal{S}^{m_1}, a_2 \in \mathcal{S}^{m_2}$*, alors*

$$[a_1(x,D_x), a_2(x,D_x)] = a_1(x,D_x)a_2(x,D_x) - a_2(x,D_x)a_1(x,D_x) = b(x,D_x)$$

est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $m_1 + m_2 - 1$ *avec symbole*

$$b(x,\xi) \sim \sum_{|s|} \frac{1}{s!}[(\partial_\xi^s a_1)(x,\xi)(D_x^s a_2)(x,\xi) - (\partial_\xi^s a_2)(x,\xi)(D_x^s a_1)(x,\xi) \tag{1.3.7}$$

Où $s! = s_1! \cdots s_n!$.

Généralement, on a :

Théorème 1.3.7 *Si* $a_i \in \mathcal{S}^0$, $i = 1 \cdots .k$ *et* $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^k)$*, alors on a* $F(a_1, \cdots, a_k) \in \mathcal{S}^0$.

Définition 1.3.8 *Pour* $a \in \mathcal{S}^m$*, on dit que* $a(x,D_x)$ *est un opérateur pseudo-différentiel elliptique d'ordre* m*, s'ils existent deux constantes* $c > 0$ *et* $C \geq 0$ *telles que*

$$|a(x,\xi)| \geq c|\xi|^m, \ \forall |\xi| \geq C.$$

Théorème 1.3.9 *Soit* $a(x,D_x) \in Op(\mathcal{S}^m)$ *elliptique. Alors, il existe* $b \in \mathcal{S}^{-m}$ *tel quel*

$$ab(x,\xi) - 1 \in \mathcal{S}^{-\infty}. \ \text{et} \quad ba(x,\xi) - 1 \in \mathcal{S}^{-\infty}.$$

1.3.3 Continuité dans les espaces de Sobolev

Théorème 1.3.10 *Soit* $a \in \mathcal{S}^0$. *Alors* $a(x, D_x)$ *est borné dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Pour le démontrer on a besoin du lemme de Schur :

Lemme 1.3.11 *Soit* $K \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{2n})$, *on supose* K *satisfait à ; s'il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\sup_y \int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)|dx \leq C, \text{ et } \sup_x \int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)|dy \leq C$$

alors l'opérateur intgrale avec le noyau K *défini par :*

$$Ku(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)u(y)dy$$

est borné dans L^2.

D'après l'inégalité de Schwartz et le théorème de Fubini on a

$$\begin{aligned} \|Ku\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)u(y)dy|^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \big(\int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)||u(y)|^2 dy. \int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)|dy \big) dx \\ &= C \int_{\mathbb{R}^n} \big(\int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)|dx \big) |u(y)|^2 dy \leq C^2 \|u\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Théorème 1.3.12 *Soit* $a(x,\xi)$ *une fonction mesurable, et* $n+1$ *fois continuement dérivable par rapport à* x *pour* ξ *fixée quelquonque. S'il existe* $M > 0$ *telle que*

$$sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \sum_{|s| \leq n+1} \int_{\mathbb{R}^n} |(\partial_x^s a)(x,\xi)|dx \leq M < \infty,$$

alors $a(x, D_x)$ *est borné dans* L^2 *avec une norme* $\leq M$.

En effet, on a

$$\mathcal{F}\big(a(x,D)u(x)\big)(\eta) = \int_{\mathbb{R}^n} A(\eta - \xi, \xi)\hat{u}(\xi)d\xi,$$

où

$$A(\eta,\xi) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\eta} a(x,\xi)dx.$$

Par hypothèse
$$(1+|\eta|)^{n+1}|A(\eta,\xi)| \leq M,$$
ce qui implique
$$\int_{\mathbb{R}^n} |A(\eta-\xi,\xi)|d\eta \leq M, \ \int_{\mathbb{R}^n} |A(\eta-\xi,\xi)|d\xi \leq M.$$
Lemme 1.3.11 implique que
$$\|\mathcal{F}\big(a(x,D)u(x)\big)(\cdot)\|_{L^2} \leq M\|\hat{u}\|_{L^2},$$
ce qui achève la démonstration.

Théorème 1.3.13 *Soit $a \in \mathcal{S}^m$. Alors $a(x,D)$ est un opérateur continu de H^s dans H^{s-m} pour tout s. Si, de plus, $a(x,D)$ est elliptique d'ordre m, alors $a(x,D): \ H^s(\mathbb{R}^n) \to H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$, est un isomorphisme.*

Posons $\Lambda_x^s = (1+|D_x|^2)^{s/2}$. Cette continuité signifie qu'il existe une constante $c > 0$ telle que
$$\|a(x,D)u\|_{H^{s-m}} \leq C\|u\|_{H^s}. \quad ,\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$
Or $a(x,D)u \in H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ équivaut à $\Lambda_x^{s-m}a(x,D)\Lambda_x^{-s}\Lambda_x^s u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
En posant $\tilde{a}(x,D) = \Lambda_x^{s-m}a(x,D)\Lambda_x^{-s}$, on a $\tilde{a}(x,D) \in \mathcal{S}^0$ et d'après 1.3.10, on a
$$\|\tilde{a}(x,D)v\|_{L^2} \leq C\|v\|_{L^2}, \ \forall v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$
et $u \in H^s$ est équivalent à $\Lambda_x^s u \in L^2$. On achève la démonstration par la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans L^2. Si $a(x,D)$ est elliptique d'ordre m, on a
$$\|u\|_{H^{s+m}} \leq C\|a(x,D)u\|_{H^s}, \ \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

1.4 Partition de l'unité

Dans le but d'améliorer la constante cible de l'estimation a priori et optimiser la condition sur la donnée initiale, on a besion de la combinaison de la décomposition de Littlewood-Paley et de la partition de l'unité par rapport à la variable v.
Dans ce but, on donne un petit rappel de décompositions considérées, et de

leurs combinaisons :
Dans ce sous-paragraphe on représente des propriétés des fonctions dont la transformée de Fourier est supportée dans la boule

$$C_0 = B(0, K) = \{\xi \in \mathbb{R} : |\xi| \leq K\} : K > 1(K = 2 \quad \text{par exemple}),$$

ou dans la couronne

$$C_k = \left\{\xi \in \mathbb{R} : \quad K^{-1}2^k \leq |\xi| \leq K2^{k+1}\right\} : \, k \in \mathbb{N}.$$

1- Décomposition dyadique de l'unité
On considère la décomposition dyadique. Pour $k \in \mathbb{N}$ on pose :
C_0 et C_k définis ci-dessus.

Alors, $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement de $\mathbb{R}$.

Lemme 1.4.1 *Il existe* $0 \leq \psi_0, 0 \leq \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ *tels que* $\operatorname{supp} \psi_0 \subset C_0$, $\operatorname{supp} \psi \subset C_1$, *et* $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(\xi) = 1$.

Pour la constructions de cette famille des fonctions on se renvoie à ([16, 53, 54] par exemple). Alors on associe à $(\psi_k(\xi))_k$ une famille des opérateurs pseudo-differentiels, notée $(\psi_k(D_v))_k$ qu'on définit par :

$$\psi_k(D_v)u(v) = \mathcal{F}^{-1}(\psi_k(\xi)\hat{u}).$$

On a la définition suivante.

Définition 1.4.2 *Pour tout* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, *on définit sa décomposition de Littelewood-Paley (dyadique)* $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \, : \, k \in \mathbb{N}$. *Il est evident que* $f_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \, \forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *et* $\operatorname{supp} f_k \subset C_k$.

Théorème 1.4.3 *Pour tout* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *et tout* $s > 0$, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i)-$f \in H^s(\mathbb{R})$,
(ii)-$f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$; $\operatorname{supp} f_k \subset C_k, \exists c_k > 0;\ 2^{ks}\|f_k\|_{L^2} \leq c_k : \ \sum_k c_k^2 < \infty$
(iii)-$f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$; $\operatorname{supp} f_k \subset 2^k B \, \exists c_k > 0 \, 2^{ks}\|f_k\|_{L^2} \leq c_k \, : \, c_k \in \ell^2$
(iv)-$f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$; $f_k \in \mathcal{C}_0^\infty \, \forall s \in \mathbb{N}, \exists c_{k,s} > 0 : \|D^s f_k\|_{L^2} \leq c_{k,s} \, : \, c_{k,s} \in \ell^2$.

Proposition 1.4.4 *Pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, ou $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a les propriétés suivantes :*
a-$\sum_{k=0}^{\infty} \phi_k^2 \leq 1 \leq 2\sum_{k=0}^{\infty} \phi_k^2$
b-$f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$
c-$\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \leq \sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{L^2}$
d-$\nabla f_k \approx 2^k f_k, k \geq 1$
e-$\|\nabla f_k\| \approx 2^k \|f_k\|, k \geq 1$
f-$\|f\|_{L^2} \approx \sum_{k=0,\infty} \|f_k\|_{L^2}$
g-$\|f\|_{H^s}^2 = \|(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}\|_{L^2}^2 \approx \sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+2^{2ks})\|f_k\|_{L^2}^2$
h-$\|f\|_{\dot{H}^s}^2 = \||\xi|^s\hat{f}\|_{L^2}^2 \approx \sum_{k\in\mathbb{Z}}(2^{2ks}+2^{-2ks})\|f_k\|_{L^2}^2 - \|f_0\|_{L^2}^2$, $\forall s \in \mathbb{R}$.

Les inégalités de Bernstein

Lemme 1.4.5 *Soient :*
$B(0,R) = \{\xi \in \mathbb{R}^n; |\xi| \leq R\}$, *et* $C = \{\xi; R^{-1} \leq |\xi| \leq 2R\}, R > 1$.
Pour $1 \leq a \leq b \leq +\infty$, il existe une constante $C = C(a,b,R) > 0$, telle que pour tout $R > 0$:
1-Si $f \in L^a(\mathbb{R}), \operatorname{supp} \hat{f} \subset B(0,R)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\sup_{s=k} \|D^s f\|_{L^b} \leq C^{k+1} R^{k+n(a^{-1}-b^{-1})} \|f\|_{L^a}. \tag{1.4.1}$$

2-Si $f \in L^a(\mathbb{R}), \operatorname{supp} \hat{f} \subset B(0,R)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$C^{-(k+1)} R^k \|f\|_{L^a} \leq \sup_{s=k} \|D^s f\|_{L^a} \leq C^{k+1} R^k \|f\|_{L^a}. \tag{1.4.2}$$

En particulier, si $f \in H^s(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \hat{f} \subset B(0,R)$, alors pour tout $0 < t < s$

$$\|f\|_{H^t} \leq C R^{s-t} \|f\|_{H^s}.$$

Pour plus de détails, voir par exemple [16, 2, 53, 54, 50, 55, 51, 56].

2- Partition de l'unité par rapport à la variable v

Pour ça, on pose :

$$\begin{aligned} C_0 &= \{v \in \mathbb{R} : |v| \leq 2 :\}, \\ C_j &= \left\{v \in \mathbb{R} :\ 2^{j-1} \leq |v| \leq 2^{j+1}, j \geq 1\right\}, \end{aligned}$$

De même, il existe $\phi_0 \geq 0, \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telles que $\operatorname{supp} \phi_0 \subset C_0$, $\operatorname{supp} \phi \subset C_1$, $\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j(v) = 1$.
Remarque : $\phi_j(v) \in \mathcal{C}_c^\infty$ (respectivement $\psi_k(\xi)$) forment un recouvrement localment fini de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1.4.6 *Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a les propriétés suivantes :*
a-$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \|\psi_j f\|^2_{L^2} \leq \|f\|^2_{L^2} \leq 2\sum_{j\in\mathbb{Z}} \|\psi_j f\|^2_{L^2}$,
b-$\|f\|^2_{L^2} \approx \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|\psi_j f\|^2_{L^2}$,
c-$\|f\|^2_{L^2_k} \approx \sum_{j\in\mathbb{Z}}(1+2^{2kj})\|\psi_j f\|^2_{L^2}$
d-$\|f\|^2_{\dot{L}^2_k} \approx \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2kj}\|\psi_j f\|^2_{L^2}$.

Alors, la combinaison de la partition de l'unité et la décomposition dyadique de l'unité donne :
Pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ on a $f = \sum_{k,j\in\mathbb{Z}}^{\infty} f_{kj}$ dans le sens de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Proposition 1.4.7 *Pour tous $f \in H^s_\ell(\mathbb{R})$, $(s,l) \in \mathbb{R}$, en posant $f_{kj} = \psi_k\phi_j f$, on a les propriétés suivantes :*
(i)-$\|f\|^2_{H^s_\ell} \approx \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}(1+2^{2ks})(1+2^{2lj})\|\psi_j\phi_k f\|^2_{L^2}$.
(ii)-$\|f\|^2_{\dot{H}^s_\ell} \approx \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2ks}2^{2lj}\|\psi_j\phi_k f\|^2_{L^2}$.
(iii)- Si $p_{kj} = \psi_k\phi_j$, on a :

$$p_{kj} = \psi_k\phi_j \equiv Cp_{jk} = \phi_j\psi_k,$$

i.e. $\forall f \in L^i(\mathbb{R})$, $i = 1.2$ il existe c_1, c_2 positives telles que :

$$c_1\|p_{kj}f\|_{L^i} \leq \|p_{jk}f\|_{L^i} \leq c_2\|p_{kj}f\|_{L^i}.$$

nous avons besion de la

Définition 1.4.8 *([39]) Pour $p(\xi,x)$ on définit l'intégrale oscillante $O_s[p]$ par*

$$O_s[p] := O_s - \int\int e^{-ix\xi}p(x,\xi)dxd\xi = \lim_{\epsilon\mapsto 0}\int\int e^{-ix.\xi}\chi_\epsilon(x,\xi)p(x,\xi)dxd\xi. \tag{1.4.3}$$

où : $x.\xi = \sum_{i=1,n} x_i\xi_i$, $\chi_\epsilon(x,\xi) = \chi(\epsilon|x|,\epsilon\,|\xi|)$, $0 \leq \epsilon \leq 1$, et$\chi(x,\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi})$. Tel que $\chi(0,0)=1$.

Démonstration. (de la Proposition 1.4.7) Pour (iii), on a

$$[\phi_j,\psi_k] = \sum_{1\leq|s|<N}\frac{1}{s!}((\psi_k)_{(s)})(D_v)(\phi_j^{(s)})(v) + R_{N=2}(v,D_v),$$

où :
$(\phi_j)_{(s)}(v) = D^s_v\phi_j(v)$, $(\psi_k)^{(s)}(\xi) = \partial^{|s|}_\xi\psi_k(\xi)$,

$R_{N=2}(v,\xi) = N\sum_{|s|=N}\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{N-1}}{s!} r_{N,\tau,s}(v,\xi)d\tau$où
$r_{N,\tau,s}(v,\xi) = O_s[(\partial_\xi^{|s|}\psi_k)(\partial_v^{|s|}\phi_j)]$.
où, "O_s" signifie l'intégrale oscillante [40].
$\forall f \in L^i(\mathbb{R}) : i = 1.2$, on a :
$\psi_k\phi_j f(.) = \phi_j\psi_k f(.) - (\partial_v\phi_j)(\partial_\xi\psi_k)f(.) - R_2(v,\xi)f(.)$, où en notant ϕ_j par ϕ, et ψ_k par ψ. D'aprés (1.1.1) on a

$$\begin{aligned}
R_2(v,\xi) &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^1\int_{\mathbb{R}_y}\int_{\mathbb{R}_\eta}\frac{(1-\tau)}{2}e^{-iy.\eta}\chi_\epsilon(y,\eta)(\phi_{(2)})(v+y)(\psi^{(2)})(\xi+\tau\eta)d\eta dy d\tau\\
&= -i\lim_{\epsilon\to 0}\int_{y=0}^{\infty}\int_{\eta=0}^{\infty}\int_0^1\frac{1-\tau}{2}\chi_\epsilon(y,\eta)e^{-iy.\eta}\partial_y\phi(v+y)(\partial_\tau\partial_\xi\psi)(\xi+\tau\eta)d...\\
&- i\lim_{\epsilon\to 0}\int_{y=0}^{\infty}\int_{\eta=0}^{\infty}\int_0^1\frac{1-\tau}{2}\chi_\epsilon(y,\eta)e^{-iy.\eta}(\partial_y\phi)(v+y)(\partial_\tau\partial_\xi\psi)(\xi-\tau\eta)d...\\
&- i\lim_{\epsilon\to 0}\int_{y=0}^{\infty}\int_{\eta=0}^{\infty}\int_0^1\frac{1-\tau}{2}\chi_\epsilon(y,\eta)e^{iy.\eta}(\partial_y\phi)(v-y)(\partial_\tau\partial_\xi\psi)(\xi+\tau\eta)d...\\
&- i\lim_{\epsilon\to 0}\int_{y=0}^{\infty}\int_{\eta=0}^{\infty}\int_0^1\frac{1-\tau}{2}\chi_\epsilon(y,\eta)e^{iy.\eta}(\partial_y\phi)(v-y)(\partial_\tau\partial_\xi\psi)(\xi-\tau\eta)d...\\
&\leq \lim_{\epsilon\to 0}\int_{y=0}^{\infty}\int_{\eta=0}^{\infty}\frac{1}{\tau_0}\chi_\epsilon(y,\eta)(\partial_y\phi)(v+y)(\partial_\eta\psi)(\xi+\tau_0\eta)d\eta dy\\
&+ \lim_{\epsilon\to 0}\int_{y=0}^{\infty}\int_{\eta=0}^{\infty}\frac{1}{\tau_0}\chi_\epsilon(y,\eta)(\partial_y\phi)(v+y)(\partial_\eta\psi)(\xi-\tau\eta)d\eta dy\\
&+ \lim_{\epsilon\to 0}\int_{y=0}^{\infty}\int_{\eta=0}^{\infty}\frac{1}{\tau_0}\chi_\epsilon(y,\eta)|(\partial_y\phi)(v-y)(\partial_\eta\psi)(\xi+\tau_0\eta)|d\eta dy\\
&+ \lim_{\epsilon\to 0}\int_{y=0}^{\infty}\int_{\eta=0}^{\infty}\frac{1}{\tau_0}\chi_\epsilon(y,\eta)|(\partial_y\phi)(v-y)(\partial_\eta\psi)(\xi-\tau\eta)|d\eta dy\\
&\leq \int_{y=0}^{\infty}[(\partial_y\phi)(v+y)+(\partial_y\phi)(v-y)]dy.\times\\
&\quad \int_{\eta=0}^{\infty}\frac{1}{\tau_0}[(\partial_\eta\psi)(\xi+\tau_0\eta)+(\partial_\eta\psi)(\xi-\tau_0\eta)]d\eta\\
&= \frac{4}{\tau_0}|\phi(v)\psi(\xi)|.
\end{aligned}$$

Donc

$$|\psi_k\phi_j f(v)| \equiv |\phi_j\psi_k f(v)|.$$

Chapitre 2

Existence, Unicité de la solution faible et Analyse de l'opérateur collisionel

2.1 Introduction de L'équation

Équation de Boltzmann homogène
On considere l'équation de Boltzmann suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = Q(f,\ f), \quad v \in \mathbb{R}^3,\ t > 0, \\ f|_{f_1 t=0} = f_0\,. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

où f est la fonction inconnue. Elle représente la (probabilité) densité de trouver des particules à l'instant $t \geq 0$ avec une vitesse equivalente à v, donc $f(t,v) \geq 0$. Le membre droit, dit opérateur de collision de Boltzmann ; est un opérateur bilinéaire qui agit seulement sur la variable v. Il est défini par

$$Q(f,g)(v) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{S}^2} \beta(|v - v_*|, \sigma)\,\{f(v'_*)g(v') - f(v_*)g\}\, d\sigma dv_*. \tag{2.1.2}$$

Physiquement, il représente le taux de variation de la densité f due aux interactions et collisions des molécules. $\beta(|v - v_*|, \sigma)$ est une fonction donnée qui dépend seulement de la loi d'interaction entre les particules.
Ce choix correspond au modèle dit des sphères dures (les molécules sont alors consiédérés comme des sphères en temps en collision de manière parfaitement

élastique).
On utilise une σ-répresentation pour décrire les vitesses post- et pré-collisionnelles, $v^{'}, v^{'}_{*}$ i.e. $\sigma \in \mathbb{S}^2$.

$$\begin{cases} v' = \frac{v+v_*}{2} + \frac{|v-v_*|\sigma}{2}, v \in \mathbb{R}^3, \\ v'_* = \frac{v+v_*}{2} - \frac{|v-v_*|\sigma}{2}, . \end{cases} \tag{2.1.3}$$

ou

$$\begin{cases} v' = \frac{v+v_*}{2} + R_\theta(\frac{v-v_*}{2}), \quad v \in \mathbb{R}^3, \\ v'_* = \frac{v+v_*}{2} - R_\theta(\frac{v-v_*}{2}). \end{cases}$$

La fonction positive $\beta(z,\sigma)$ est dite section efficace (cross-section) et qui dépend seulement de z et de $\langle \frac{z}{|z|}, \sigma \rangle$.

Section efficace (Cross section)

En général, la collision β ne peut pas être représentée explicitement. Il est possible (presque partout) de calculer explicitement la section efficace quand la force interparticule est proportionnelle à r^{-s} (avec r notant la distance interparticules et $s > 2$). Dans ce cas (en dimension 3), β peut être supposée de la forme.

$$\begin{cases} \beta(|v-v_*|, \cos\theta) = \Phi(|v-v_*|)b(\cos\theta), \\ \cos(\theta) = \langle \frac{v-v_*}{|v-v_*|}, \sigma \rangle \ , 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ \Phi(|v-v_*|) = |v-v_*|^{\frac{s-5}{s-1}}; (\sin\theta)^{n-2}b(\cos\theta) \approx K\theta^{-1-2\alpha}, \text{quand}, \theta \longrightarrow 0, \\ (or, (\sin\theta)^{n-2}b(\cos\theta) \approx K\theta^{-1}(\log\theta^{-1})^m, m > 0); \text{ quand}, \theta \longrightarrow 0, \end{cases} \tag{2.1.4}$$

avec $0 < \alpha = \frac{1}{s-1} < 1$ et

$$\begin{cases} 0 < \alpha = \frac{1}{s-1} < 1, \\ \cos(\theta) = \frac{v-v_*}{|v-v_*|}.\sigma. \end{cases}$$

avec β une fonction régulière à l'exception au point 1 ($\theta = 0$) et

$$(\sin\theta)^{n-2}b(\cos\theta) \approx K\theta^{-1-2s}, \text{quand}, \theta \longrightarrow 0 \tag{2.1.5}$$

Comme $-1-2s < -1$ la singularité dans la variables d'angle θ est toujours non intégrable. A cause des difficultés occasionnées par cette singularité, Grad [34] a proposé d'introduire un angle (cutoff) prés de $\theta = 0$. Il signifie qu'on remplace β par un nouveau (cross section)

$$\tilde{\beta}(|v-v_*|, \cos\theta) = |v-v_*|^{\frac{s-5}{s-1}=\gamma}\tilde{b}(\cos\theta),$$

avec $\tilde{\beta}$ intégrable, ou au moins $\theta \mapsto (\sin\theta)^{n-2}\tilde{b}(\cos\theta)$ est intégrable au voisinage de $\theta = 0$.
Dans la suite, on signifie par section evec troncature angulaire (cutoff cross section, or cutoff potentials) quand β est localement intégrable, et par section sans troncature angulaire (non cutoff cross section, or non-cutoff potentials) quand β a une singularité comme dans (2.1.5).
On note que la décomposition de $Q = Q^+ - Q^-$, avec

$$Q^+(f,g) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{S}^2} \beta(|v-v_*|,\sigma) f(v'_*)g(v')d\sigma dv_*, \tag{2.1.6}$$

$$Q^-(f,g) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{S}^2} \beta(|v-v_*|,\sigma) f(v_*)g(v)d\sigma dv_*, \tag{2.1.7}$$

se tient seulement quand β est intégrable.
On a les terminologies suivantes :
-Potentiels durs (Hard potentials) quand $\beta \to \infty$ lorsque sa première variable tend vers l'infini.
-Potentiels mous (soft potentials) quand $\beta \to 0$ lorsque sa première variable tend vers l'infini.
-Molécules de Maxwell quand β ne dépend pas de première variable i.e. correspond à $s = 5$,i.e.$\gamma = 0$.

Propriétés élémentaires du noyau de Boltzmann

Dans la suite, on va utiliser ce qui dit pré-, post-collisionnel changemant de variables changement des variables $(v, v_*, \theta) \longrightarrow (v', v'_*, \theta)$, et aussi le changement des variables $(v, v_*, \theta) \longrightarrow (v_*, v, \theta)$, Ce qui assure que pour toute fonction $f(v, v_*, v', v'_*, \theta)$ on a (formellement) :

$$\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{S}^2} f(v, v_*, v', v'_*, \theta)dv_* d\sigma dv = \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{S}^2} f(v', v'_*, v, v_*, \theta)dv^* d\sigma dv$$

$$\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{S}^2} f(v, v_*, \theta)dv_* d\sigma dv = \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{S}^2} f(v_*, v, \theta)dv_* d\sigma dv$$

Comme conséquence de ces deux formules, la formulation faible de l'opérateur de collision de Boltzmann est :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} Q^+(f,g)\varphi(v)dv &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{S}^2} \beta(\theta) f(v'_*)g(v')\varphi(v)d\sigma dv_* dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{S}^2} \beta(\theta)\left\{f^* g\right\}\varphi(v')d\sigma dv_* dv.\end{aligned}$$

Alors,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Q} &= \int_{\mathbb{R}} Q(f,g)\varphi(v)dv = \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{S}^2} \beta(\theta) f^* g \left\{\varphi(v') - \varphi(v)\right\} dv_* d\sigma dv \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{S}^2} \beta(\theta) f^* g \left\{\varphi(v') + \varphi(v'_*) - \varphi(v) - \varphi(v_*)\right\} dv_* d\sigma dv \\
&= \frac{-1}{4}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{S}^2} \beta(\theta)(f(v'_*)g(v') - f^* g) \left\{\varphi(v') - \varphi(v)\right\}. \qquad (2.1.8)
\end{aligned}
$$

On remplace $\varphi(v) = 1, v_i, \frac{|v|^2}{2}$ dans la première formule de (2.1.8). On obtient : la conservation de la masse, du moment, et de l'énergie.
La conservation de la masse :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t,v)dv = \int_{\mathbb{R}} f_0(v)dv, \quad \forall t > 0, \qquad (2.1.9)$$

La conservation de l'énergie :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t,v)|v|^2 dv = \int_{\mathbb{R}} f_0(v)|v|^2 dv, \quad \forall t > 0, \qquad (2.1.10)$$

et l'inégalité de l'entropie :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t,v)\log f(t,v)dv \leq \int_{\mathbb{R}} f_0(v)\log f_0(v)dv, \quad \forall t > 0, \qquad (2.1.11)$$

Dans notre travail on s'intéresse à un modèle simplifié qui est l'équation de Kac homogène dans le cas de maxwell avec une condition minimale sur la donnée initiale et une singularité très forte (à l'exception du celle du chapitre quatre).

_Equation de Kac homogène (cas de maxwell)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = K(f,f)(t,v), & t > 0,\, v \in \mathbb{R}, \\ f|_{t=0} = f_0(v) \end{cases} \qquad (2.1.12)$$

Le membre droit de (2.1.12) est donné par l'opérateur quadratique collisionnel de Kac.

$$K(f,g) = \int_{\mathbb{R}}\int_{-\pi}^{\pi} \beta(\theta)\left\{f(v'_*)g(v') - f(v_*)g\right\} d\theta dv_*\,,$$

où
$$v' = v\,\cos\theta - v_*\,\sin\theta, \qquad v'_* = v\,\sin\theta + v_*\,\cos\theta. \tag{2.1.13}$$

On rapelle que le modèle original de l'équation de Kac est utilisé pour la déscription d'un gaz homogène en dimension 3 dont la densité $f(t, v)$ est radialement symétrique. On conserve pour ce modèle les mêmes terminolgies sur la section efficace qu'on a adaptées pour l'équation de Boltzmann. On suppose que

$$\beta(\theta) = K|\sin\theta|^{-1-2l-2s},\ K > 0,\ -\pi \leq \theta \leq\ \pi,\ 0 \leq l \,\text{et}\ 0 < s < 1. \tag{2.1.14}$$

ou,
$$\beta(\theta) \approx K|\theta^{-2}(\log|\theta^{-1}|)^m|, m > 0);\ \text{quand}, \theta \longrightarrow 0. \tag{2.1.15}$$

Alors
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \beta(\theta)d\theta = +\infty,$$

et
$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \beta(\theta)\,|\theta|\,d\theta = C_s < +\infty, \quad 0 < s < 1/2, \\ \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \beta(\theta)\,\theta^2\,d\theta = C_s < +\infty, \quad 0 < s < 1. \end{cases} \tag{2.1.16}$$

On suppose que la donnée initiale $f_0 \not\equiv 0$ satisfait seulement la limite de la masse
$$f_0 \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} f_0(v)dv < +\infty. \tag{2.1.17}$$

Remarque 2.1.1 *1-D'après* (2.1.13) *on a*

$$\begin{aligned} v' &= \cos(\theta/2)(v\cos(\theta/2) - v_*\sin(\theta/2)) - \sin(\theta/2)(v_*\cos(\theta/2) + v\sin(\theta/2)), \\ v'_* &= \cos(\theta/2)(v_*\cos(\theta/2) + v\sin(\theta/2)) + \sin(\theta/2)(v\cos(\theta/2) - v_*\sin(\theta/2)). \end{aligned}$$

Posons

$$\overline{v} = v\cos(\theta/2) - v_*\sin(\theta/2) = v, \qquad \overline{v}_* = v_*\cos(\theta/2) + v\sin(\theta/2) = v_*.$$

Donc, dans tout le document, au lieu de (2.1.13), *on considère :*

$$v' = v\,\cos(\theta/2) - v_*\,\sin(\theta/2), \qquad v'_* = v\,\sin(\theta/2) + v_*\cos(\theta/2). \tag{2.1.18}$$

2-Dans la première formule de la relation (2.1.8)*, on fait le changement de variables*
$(v', v, \theta) \mapsto (\overline{v}, v', -\theta)$*, donc* $\overline{v}$ *devient* v*, ce qui implique que ce dernier changement de variables est équivalent au changement de variables* $(v', v) \mapsto (v, v')$*, et on aboutit à :*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} K(f,g)\varphi dv &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta(\theta) f^* g[\varphi(v') - \varphi(v)] d\theta dv_* dv \\
&= -\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta(\theta) f^* g(v')[\varphi(v') - \varphi(v)] d\theta dv_* dv \\
&= \frac{-1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta f^*[g' - g][\varphi' - \varphi], \qquad (2.1.19)
\end{aligned}$$

qu'on va utiliser fréquement ultérieurement. De même on a :

$$\int_{\mathbb{R}} K(f,g)\varphi(v) dv = \frac{-1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta(\theta) f[g(v'_*) - g(v_*)][\varphi(v'_*) - \varphi(v_*)] d\theta dv_* dv. \qquad (2.1.20)$$

Rappellons que la masse, mais pas le moment, est conservée pour cet opérateur.
Rappel de définition d'une solution faible

Définition 2.1.2 *Soit* $f_0(v) \geqslant 0$*, une fonction définie en* $\mathbb{R}$*, avec la masse, l'énergie, et l'entropie finies.* $f(t,v)$ *est dite solution faible du problème de Chauchy si elle satisfait les conditions suivantes :*

$$\begin{aligned}
1 \quad &- \quad 0 \leq f(t,v) \in C(\mathbb{R}^+; D'(\mathbb{R})) \cap L^1([0,T]; L^1_2(\mathbb{R})), \quad f(0,v) = f_0(v), \\
2 \quad &- \quad \int_{\mathbb{R}} f(t,v)\psi(v) dv = \int_{\mathbb{R}} f_0(v)\psi(v) dv, \quad \textit{pour} \quad \psi(v) = 1, |v|^2 \\
3 \quad &- \quad f(t,v) \in L\log L(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} f(t,v)\log(f(t,v)) dv \leq \int_{\mathbb{R}} f_0 \log f_0(v) dv, \forall\, t \geq 0 \\
4 \quad &- \quad \int_{\mathbb{R}} f\psi(t,v) dv - \int_{\mathbb{R}} f_0\psi(0,v) dv - \int_0^t dt \int_{\mathbb{R}} f\partial\tau\psi(\tau,v) dv \\
&= \quad \int_0^t \int_{\mathbb{R}} K(f,f)\psi(\tau,v) dv d\tau.
\end{aligned}$$

D'où

$$\psi \in C^1(\mathbb{R}^+; C_0^\infty(\mathbb{R}))).$$

Ici, le membre droit de la dernière intégrale donnée ci-dessus est defini par

$$K(f,g) = \int_{\mathbb{R}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \beta(\theta) \left\{ f(v'_*) g(v') - f(v_*) g \right\} d\theta dv_*.$$

Donc, cette intégrale est bien définie pour toute fonction test :

$$\psi \in L^\infty([0,\infty[; W^{2,\infty}(\mathbb{R})).$$

2.2 Existence et Stabilité de la solution faible

2.2.1 Existence de la solution faible

Dans ce paragraphe, on prouve le théorème suivant :

Théorème 2.2.1 *Soit* $0 \leq f_0 \in L^1$*, et soit* β *la section efficace satisfait l'hypothèse* (2.1.14) *ou l'hypothèse* (2.1.15)*. Alors, il existe une solution faible non négative* $f \in L^\infty([0,\infty[_t; L^1(\mathbb{R}_v))$ *pour le problème* (2.1.12)-(2.1.14) *pour toute* $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$*. On a la conservation de la masse, de l'énergie, mais le moment se varie, et l'entropie est décroissante.*

Rappelons des résultats sur l'existence des solutions faibles. Pour l'équation de Boltzmann, sachant que l'étude des propriétés mathématiques a été, en premier temps, faite dans le cas avec troncature angulaire de Grad (plus abordable car le noyau est régulier). Si la condition initiale a une masse et une énergie finies, il y a existence et unicité de la solution. Si de plus l'entropie est finie ces solutions convergent vers l'équilibre (solutions Gaussiennes), (voir les travaux de Carlemann [14], Povzner [49]). Il y a eu par la suite de nombreux travaux dans le cas avec troncature angulaire ([9, 29, 20, 37, 65, 46]).

L'étude dans le cas sans troncature angulaire nécéssite d'autres méthodes à cause de la singularité du noyau.

Arkeryd a montré l'existence des solutions faibles dans [11] respectivement dans [12] pour les potentiels mous respectivement pour les potentiels durs. Villani [63] a, par la suite, montré l'existence des solutions faibles dans des nombreux cas.

En 2008-2009, dans une série collaborative, R.Alexandre, Y. Morimoto, S.Ukai, C.-J. Xu et T. Yang [7, 8] ont montré l'existence locale, respectivement globale de la solution classique pour l'équation de Boltzmann linéaire dans des espaces de Sobolev à poids en plus des hypothèses suplémentaires trop lourdes que la solution et la donnée initiale doivent vérifier.

Notons que, pour l'équation de Kac homogène, L. Desvillettes [19] a prouvé l'existence des solutions faibles du problème de Cauchy en utilisant la méthode de compacité avec temps limité $T > 0$ mais pour une fonction test $\varphi \in W^{2,\infty}(R_v)$. Ainsi C.Graham et S.Méléard dans [35], ont montré, en utilisant des calculs stochastiques, l'existence locale des solutions et qu'elles vérifient :

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}} f(t,v)\big(1+|v|^2+\log\big(1+f(t,v)\big)\big)dv < +\infty, \tag{2.2.1}$$

Dans ce sous-paragraphe, nous démontrons le théorème précédent en utilisant la méthode de compacité avec temps limité $T > 0$ pour toute fonction test $\varphi \in L^p :\ 1 \leq p < \infty$.
On a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.2.2 *Pour toute fonction test $\varphi \in L^p :\ 1 \leq p < \infty$, Il existe une constante $C = C(\beta) > 0$, et une suite $C(n,\beta)$ qui converge vers 0 telles que les estimations suivantes sont vérifiées*

$$\begin{aligned} |K^{\varphi}(v,v_*)| &\leq C(\beta)\|\varphi\|_{L^p}, \\ |[K^{\varphi} - K^{\varphi}_n](v,v_*)| &\leq C(n,\beta)\|\varphi\|_{L^p}. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Démonstration. Tout d'abord nous rappelons quelques résultats :

Définition 2.2.3 *On appelle suite régularisante toute suite $(\rho_n)_{n\geq 1}$ de fonctions telles que*

$$0 \leq \rho_n \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^N),\ Supp\rho_n \subset B(0,\frac{1}{n}),\ \int_{\mathbb{R}^n} \rho_n = 1.$$

[13] page 70.

Théorème 2.2.4 *(voir Théorème IV.22 [13])*
Pour tout $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^N)$; $1 \leq p < \infty$, *on a*

$$\rho_n * \varphi \to \varphi \text{ dans } L^p,$$

où ρ_n *est une suite régularisante.*

Théorème 2.2.5 *(Théorème IV.20 [13])*
Soit f *une fonction dans* $\mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^N)$, *et* $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, *(*$k$ *entier). Alors*

$$f * g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^N) \text{ et } D^k(f * g) = (D^k f * g).$$

En particulier si $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, *alors* $f * g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Théorème 2.2.6 *(Théorème IV.9 [13])*
Soit f_n *une suite des fonctions dans* $L^p(\mathbb{R}^N)$, *telles que* $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$. *Alors, il existe une suite extraite* f_{n_k} *notée* f_n *telle que :*
(a) $f_{n_k}(v) \to f(v)$ *p.p dans* $\mathbb{R}^N$.
(b) $|f_{n_k}(v)| \leq h(v)$ *p.p dans* $\mathbb{R}^N$ *avec* $h \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

Revenons à la preuve du Lemme.
Pour la première formule de (2.2.2), on considère la fonction $\varphi_n = \rho_n * \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(R)$, en posant,

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}^* &= \int_{\mathbb{R}^2} f^* f K^{\varphi}(v, v_*) = \int_{\mathbb{R}^2} f^* f \lim_{n\to\infty} K^{\varphi_n}(v, v_*) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathcal{K}_n^* ?
\end{aligned}$$

On note que

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_n^* &= \int_{\mathbb{R}^2} f^* f K^{\varphi_n}(v, v_*) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} f^* f \int_{I_\pi} \beta(\theta)(\varphi_n(v') - \varphi_n(v) + \varphi_n(v'_*) - \varphi_n(v_*)) d\theta dv_* dv \\
&= \frac{-1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} f^* f \int_{I_\pi}\int_0^1 \beta(vc(\theta) + v_* \sin(\theta/2))\varphi_n^{'}(v + s(v' - v)) ds d\theta dv_* dv \\
&- \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} f^* f \int_{I_\pi}\int_0^1 \beta(v_* c(\theta) - v\sin(\theta/2))\varphi'_n(v_* + s(v'_* - v_*)), \qquad (2.2.3)
\end{aligned}$$

où $c(\theta) = 1-\cos(\theta/2)$. On considère le changement de variables $(v, v_*, v', v'_*) \mapsto (v_*, v, v'_*, v')$, dans la dernière formule de $K^{\varphi_n}(v, v_*)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_n^* &= \frac{-1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} f^* f \int_{I_\pi}\int_0^1 \beta(vc(\theta) - v_*\sin(\theta/2))\varphi_n^{'}(v + s(v'-v))dsd\theta \\
&- \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} f^* f \int_{I_\pi}\int_0^1 \beta(v_*c(\theta) + v\sin(\theta/2))\varphi_n'(v_* + s(v'_* - v_*)). \quad (2.2.4)
\end{aligned}$$

La somme de (2.2.3) et (2.2.4) donne

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_n^* &= \frac{-1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} f^* f \int_{I_\pi}\int_0^1 \beta c(\theta) v\varphi_n^{'}(v + s(v'-v))dsd\theta \\
&+ \frac{-1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} f^* f \int_{I_\pi}\int_0^1 \beta c(\theta) v_*\varphi_n'(v_* + s(v'_* - v_*))dsd\theta. \quad (2.2.5)
\end{aligned}$$

De plus, si on prend le changement de variables
$(v, v_*, v', v'_*, \theta, s) \mapsto (v', v'_*, v, v_*, -\theta, 1-s)$ dans (2.2.11), il vient

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_n^* &= \int_{\mathbb{R}^2} f^{'*} f' K_n^{\varphi}(v', v'_*) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} f^{'*} f' \int_{I_\pi}\int_0^1 \beta[\varphi(v) + \varphi(v_*) - \varphi(v') - \varphi(v'_*)]dsd\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} f^{'*} f' \int_{I_\pi}\int_0^1 \beta c(\theta) v\varphi_n'(v + (1-s)(v'-v)) \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} f^{'*} f' \int_{I_\pi}\int_0^1 \beta c(\theta) v_*\varphi_n'(v_* + (1-s)(v'_* - v_*)) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} f^{'*} f' \int_{I_\pi}\int_0^1 \beta c(\theta) v\varphi_n^{'}(v' + s(v'-v))ds\theta \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} f^{'*} f' \int_{I_\pi}\int_0^1 \beta c(\theta) v_*\varphi_n'(v'_* + s(v'_* - v_*)). \quad (2.2.6)
\end{aligned}$$

Prenons en considération la formule (2.2.5) et le changement de variables $(v, v_*, v', v'_*) \mapsto (v', v'_*, v, v_*)$ dans (2.2.6). On obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_n^* &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} f^* f \int_{I_\pi}\int_0^1 \beta(\theta) c(\theta) v'\varphi_n^{'}(v + s(v'-v)) \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} f^* f \int_{I_\pi}\int_0^1 \beta(\theta) c(\theta) v'_*\varphi_n'(v_* + s(v'_* - v_*))d\theta\,.
\end{aligned}$$

On prend la somme de (2.2.5) et (2.2.6), il vient

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_n^* &= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} f^* f \int_{I_\pi}\int_0^1 \beta c(\theta)(v'-v)\varphi_n'(v+s(v'-v))d\theta \\
&+ \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} f^* f \int_{I_\pi}\int_0^1 \beta c(\theta)(v_*'-v_*)\varphi_n'(v_*+s(v_*'-v_*))d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} f^* f \int_{I_\pi} \beta c(\theta)(\varphi_n(v')-\varphi_n(v)+\varphi_n(v_*')-\varphi_n(v_*))d\theta \quad (2.2.7)
\end{aligned}$$

Donc, on aboutit à la relation utile

$$K^\varphi(v,v_*) = \frac{1}{4}\int_{I_\pi} \tilde{\beta}[\varphi(v')-\varphi(v)+\varphi(v_*')-\varphi(v_*)]d\theta, \text{ p.p} \qquad (2.2.8)$$

qui est déduite de l'equivalence de l'équation (2.1.12) (voir Lemme IV.2 [13])et la suivante

$$\partial_t f = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{I_\pi} \tilde{\beta}[f'^* f' - f^* f]d\theta dv_*, \qquad (2.2.9)$$

où

$$\tilde{\beta} = \beta c(\theta).$$

On a :

$$|K^\varphi(v,v_*)| \le \int_{I_\pi} \tilde{\beta} \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n\|_{L^\infty} \le C_\beta \|\varphi\|_{L^p} : \ 0 \le p < \infty,$$

où :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n\|_{L^\infty} &\le \lim_{n\to\infty} \|\rho_n\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{L^1} \le \|\varphi\|_{L^1}, \text{ ou} \\
&\le \lim_{n\to\infty} \|\rho_n\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2}, \text{ ou} \\
&\le \lim_{n\to\infty} \|\rho_n\|_{L^q}\|\varphi\|_{L^p} : \ \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.
\end{aligned}$$

La première (respectivement les deux suivantes inégalités) s'obtiennent du Théorème IV.15,(respectivement de l'inégalité de Young)([13]).
Pour obtenir (2.2.2)(2 relation) on utilise la même démonstration de (2.2.2) (1 relation) en remplaçant $K^\varphi(v,v_*)$ par $K^\varphi(v,v_*) - K_n^\varphi(v,v_*)$. Dans la suite on choisit $\varphi \in L^i(\mathbb{R}) : \ i = 1 \vee 2$.

Démonstration du Théorème 2.2.1. Par formulation variationnelle en utilisant les changements de variables pré- et post-collisionnelles, on obtient

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}} f(t,v)\varphi(v)dv = \int_{\mathbb{R}} K^{\varphi}(v,v_*)f(t,v_*)f(t,v)(v)dv, \tag{2.2.10}$$

d'où

$$K^{\varphi}(v,v_*) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \beta(\theta)\left\{\varphi(v') + \varphi(v'_*) - \varphi(v) - \varphi(v_*)\right\} d\theta. \tag{2.2.11}$$

On introduit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite de troncature

$$\beta_n = inf(\beta(\theta), n). \tag{2.2.12}$$

Posons

$$K_n^{\varphi}(v,v_*) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \beta_n(\theta)\left\{\varphi(v') + \varphi(v'_*) - \varphi(v) - \varphi(v_*)\right\} d\theta. \tag{2.2.13}$$

Il est clair que si $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, on a :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\beta(\theta) - \beta_n(\theta)|\theta^2 d\theta \longrightarrow_{n\to\infty} 0. \tag{2.2.14}$$

Alors, on considère la solution unique non négative $f_n(t,v)$ de l'équation classique de Kac

$$\frac{\partial f_n}{\partial t}(t,v) = K_{\beta_n}(f_n,f_n)(t,v), \tag{2.2.15}$$

avec l'état initial f_0.
(L'existence et l'unicité de (2.2.15)**, sont établies dans l'Annexe).**
Il est classique que

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(t,v)dv = \int_{\mathbb{R}} f_0(v)dv < C_0, \tag{2.2.16}$$

Grâce au théorème de Dunford-Pettis (Voir [13]) et l'estimation (2.2.16), on peut extraire de $(f_n)_n$ une sous suite notée par $(f_n)_n$ convergente vers une fonction f dans $L^\infty([0,\infty[_t, L^1(\mathbb{R}))$ faible*.
De plus pour tous $q \in L^1([0,\infty[$ et $\psi \in L^\infty_{\text{loc}}([0,\infty[_t \times \mathbb{R}_v)$,

$$\int_0^\infty q(t)\int_{\mathbb{R}} f_n(t,v)\psi(t,v)dvdt \to \int_0^\infty q(t)\int_{\mathbb{R}} f(t,v)\psi(t,v)dvdt. \tag{2.2.17}$$

Notons pour tout $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$

$$K^{\varphi}(v, v_*) = \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tilde{\beta}(\theta)\left\{\varphi(v') + \varphi(v'_*) - \varphi(v) - \varphi(v_*)\right\} d\theta, \qquad (2.2.18)$$

Il est clair qu'en utilisant le changement de variables $(v, v_*) \mapsto (v', v'_*)$, puis le changement de variables $(v, v_*, \theta) \mapsto (v_*, v, -\theta)$ dans (2.2.15), on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}^2} f_n(t, v)\varphi(v)dv = \int_{\mathbb{R}^2} K_n^{\varphi}(v, v_*) f_n(t, v) f_n(t, v_*) dv_* dv. \qquad (2.2.19)$$

On suppose maintenant que $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, Il est possible de passer à la limite dans l'équation (2.2.19) en utilisant le lemme 2.2.2, on obtient l'équation (2.1.12).
Supposons que $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, et $q \in L^1([0, \infty[\ v \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
&|\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}} (K_n^{\varphi}(v, v_*) f_n^* - K^{\varphi}(v, v_*) f^*) q(t) dv_* dt| \\
&\leq \int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}} |K_n^{\varphi} - K^{\varphi}| f_n^*(t, v) q(t) dv_* dt \\
&+ \int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}} |K^{\varphi}(f_n^*(t, v) - f^*(t, v)) q(t)| dv_* dt,
\end{aligned}$$

et grâce au Lemme 2.2.2, on a

$$\begin{aligned}
&|\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}} (K_n^{\varphi}(v, v_*) f_n^* - K^{\varphi}(v, v_*) f^*) q(t) dv_* dt| \\
\leq\ & C(n, \beta)\|q\|_{L^1([0,\infty[)}\|\varphi\|_{L^{\infty}}\int_{\mathbb{R}} f_n^*(t, v_*) dv_* \\
+\ & \int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}} |K^{\varphi}(f_n^*(t, v) - f^*(t, v)) q(t)| dv_* dt. \qquad (2.2.20)
\end{aligned}$$

Le premier terme de l'équation (2.2.20) tend vers zéro d'aprés l'estimation (2.2.16). Donc l'estimation (2.2.17) implique que l'inégalité (2.2.20) tend aussi vers zéro.
Finalement, on obtient pour tous $\varphi \in L^i(\mathbb{R}) : i = 1 \vee 2$ et $v \in \mathbb{R}$, la convergence dans $L^{\infty}([0, \infty[_t)$ faible* de

$$L_n^{\varphi}(t, v) = \int_{\mathbb{R}} K_n^{\varphi}(v, v_*) f_n(t, v_*) dv_* \qquad (2.2.21)$$

vers

$$L^{\varphi}(t,v) = \int_{\mathbb{R}} K^{\varphi}(v,v_*) f(t,v_*) dv_*. \tag{2.2.22}$$

Pour tout $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} |\partial_t L_n^{\varphi}| &= |\partial_t \int_{\mathbb{R}_{v_*}} K_n^{\varphi} f_n(t,v_*) dv_*| \\ &= |\int_{\mathbb{R}^2} K_n^{K_n^{\varphi}}(w,v_*) f_n(t,w) f_n(t,v_*) dw dv_*| \\ &\leq C_\beta \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}_v)}, \ \forall v \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

en remarquant que

$$K^{\varphi}(v,v_*) \equiv \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tilde{\beta}(\theta) \left\{ \varphi(v') - \varphi(v) \right\} d\theta. \tag{2.2.23}$$

Donc

$$\begin{aligned} |K_n^{K_n^{\varphi}}(v_*,w)| &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tilde{\beta}(\theta) [K_n^{\varphi}(v'_*,w) - K_n^{\varphi}(v_*,w)] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{I_\pi} \tilde{\beta}(\theta) \left\{ \int_{I_\pi} \tilde{\beta}(\theta) [\varphi(v_*) - \varphi(v'_*)] d\theta \right\} d\theta \\ &\leq C_\beta^2 \|\varphi\|_{L^p} : \ 0 \leq p < \infty. \end{aligned}$$

Où, on utilise les mêmes techniques faites pour K^{φ} ci-dessus. Il est clair que

$$\begin{aligned} |L_n^{\varphi}(t,v)| &\leq C_\beta | \int_{v_* \int_{\mathbb{R}}} f_n(t,v_*) dv_* | \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq C_\beta \|f\|_{L^1} \|\varphi\|_{L^p} : \ 0 \leq p < \infty. \end{aligned} \tag{2.2.24}$$

Donc, pour tout $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ (et presque par tout $(t,v) \in [0,T] \times \mathbb{R}$), la suite $L_n^{\varphi}(.,v)$ est bornée dans $W^{1,\infty}([0,+T]_t)$. On utilise maintenant la convergence faible de $L_n^{\varphi}(.,v)$ vers $L^{\varphi}(.,v)$ et le théorème de Rellich [13]. Il est clair que pour tout $\varphi \in L^p(\mathbb{R}_v)$ et p.p $(t,v) \in [0,T]_t \times \mathbb{R}$, la suite L_n^{φ} converge vers L^{φ}. Alors, pour tout $q \in L^1([0,\infty[)$ et tout $0 < T < \infty$ tels que $\operatorname{supp} q \subset [0,T]$, on a :

$$
\begin{aligned}
& |\int_0^\infty (\int_{\mathbb{R}^2} [K_n^\varphi(v,v_*) f_n(t,v) f_n(t,v_*) - K^\varphi(v,v_*) f(t,v) f(t,v_*)] dv_* dv) q(t) dt| \\
= & \ |\int_0^\infty [\int_{\mathbb{R}} L_n^\varphi(t,v) f_n(t,v) - L^\varphi(t,v) f(t,v) dv_* dv] q(t) dt| \\
\leq & \ \sup_{t\in[0,T]} (|\int_{\mathbb{R}} [L_n^\varphi - L^\varphi](t,v) f_n(t,v)|) \|q\|_{L^1([0,\infty[_t)} \\
+ & \ |\int_0^\infty (|\int_{\mathbb{R}} L^\varphi(t,v)(f_n - f)(t,v) dv|) q(t) dt|. \qquad (2.2.25)
\end{aligned}
$$

Donc, l'estimation (2.2.17), assure que le second membre de (2.2.25) tend vers zero. On utilise le théorème d'Egorov, l'estimation (2.2.25), l'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_n$ obtenue par (2.2.16) et la convergence (presque partout pour $v \in \mathbb{R}$) de $L_n^\varphi(t,v)$ vers L^φ, de telle sorte qu'on obtient la convergence du premier terme de (2.2.25) vers 0. On peut passer à la limite dans l'équation (2.2.19). Pour obtenir la première partie du Théorème 2.2.1.

Remarque : la condition $f_0, f \in L\log L(\mathbb{R}_v)$, que Desvillettes dans [19] a supposé que la solution et la donnée initiale doivent satisfaire, n'est pas nécéssaire dans notre démonstration car l'équi-intégrabilité est déduite de la convergence uniforme (théorème de la convergence dominée) qui est est assurée de de $f_0, f \in L^1(\mathbb{R}_v)$.

2.2.2 Stabilité de la solution faible

Le but de ce sous-paragraphe est de montrer la stabilité de la solution faible pour l'équation de Kac homogène dans le cas des molécules Maxwellien sans troncature angulaire dans l'espace $L^\infty\big(]0,\infty[; L\log L(\mathbb{R})\cap L^1_\ell(\mathbb{R})\big);\ \ell > 0$ en utilisant le lemme de Gronwall.

Notons que cette stabilité a été prouvée pour l'équation de Boltzmann spacialement homogène dans le cas des molécules de Maxwell avec troncature angulaire (T.A), (resp S.T.A) on a celui de Arkeryd [9] dans L^1 avec poids, (resp [10] dans L^1). Dans [25], Desvillettes l'a montré dans l'espace $W^{1.1}$ avec poids ℓ et [21] en utilisant une norme faible dûe à Toskani [60]. Un récent travail de Fournier [31] montre, avec des outils de probabilité, que cette stabilité est fournie dans le cas de (S.T.A) (without cut-off) pour les sections cinétiques qui ne sont pas des molécules de type Maxwellien mais elles sont

bornées et régulières.
Un autre résultat a été prouvé par E.Gabetta [33] et par Toskani [60] pour l'équation de Kac comme un cas particulier de l'équation de Boltzmann en dimension 3 pour des vraies molécules Maxwelliennes.

On considère f_1 (respectivement f_2) une solution du problème de Cauchy (2.1.12) avec la condition initiale f_0^1 (respectivement f_0^2).

Théorème 2.2.7 *On suppose que le noyau de collision β satisfait l'hypothèse* (2.1.14) *ou l'hypothèse* (2.1.15)*, et soit $f_1, f_2 \in L^\infty([0,T]; L^1 \cap L\log L(\mathbb{R}))$ deux solutions de l'équation de Kac* (2.1.12)*, on a les deux estimations à periori suivantes :*

$$\|f_1 - f_2\|_{L^1_\ell} \leq e^{C_0 t}\|f_0^1 - f_0^2\|_{L^1_\ell} \tag{2.2.26}$$

et

$$\|f_1 - f_2\|_{L\log L} \leq e^{C_1 t}\|f_0^1 - f_0^2\|_{L\log L}, \tag{2.2.27}$$

où $C_0 = c[\|f_0^1\|_{L^1} + \|f_0^2\|_{L^1}]$, $C_1 = c[\|f_0^1\|_{L\log L} + \|f_0^2\|_{L\log L}]$, et c est indépendant de ℓ.

Tout d'abord on établit un lemme qu'on utilise d'une façon constante dans ce document.

Lemme 2.2.8 *On suppose que le noyau de collision β satisfait l'hypothèse* (2.1.14)*, et $N_* > 0$ assez-grand peut tendre vers $+\infty$. Alors il existe une constante $0 < C_* < \infty$ indépendant de N_* telle que*

$$N_*\|\beta \sin^2(\theta/2)\|_{L^1([\frac{-\pi}{2}, \frac{+\pi}{2}]} \leq C_*. \tag{2.2.28}$$

Démonstration. Si N_* est assez-grand, on subdivise I_π en $\Omega \cup \Omega^c$:
$\Omega = \left\{\theta \in I_\pi : \theta \leq \theta_0 = N^{\frac{-1}{(1-s)}}\right\}$, $\Omega^c = \{\theta \in I_\pi : \theta > \theta_0\}$.
On choisit $N = N_*^{\frac{2}{1-s}}$, on a donc :
sur Ω,

$$\int_\Omega \beta(\theta) N_* \sin^2(\theta/2) \leq N_*^{\frac{-3-s}{(1-s)^2}} \leq 1. \tag{2.2.29}$$

Sur Ω^c, on peut faire le changement de variables $\theta \mapsto \frac{\theta}{C_0}$ de tel sorte qu'on peut appliquer $\cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$, et $\sin(\theta) \approx \theta$. On utilise le fait que :

$$\Theta : \theta \mapsto \Theta(\theta) = |\sin^{-s}(\theta)|(1 - \cos^N(\theta/2)) : N = N_*^{\frac{2}{1-s}}$$

atteint son maximun en $|\theta_*| \approx \frac{2\sqrt{2-s}}{\sqrt{N}} = \alpha N_*^{\frac{-1}{1-s}}$; $N^{\frac{-1}{(1-s)}} < |\theta_*| < \frac{\pi}{2}$.
par conséquent,

$$\int_{\Omega^c} N_*\beta(\theta)|\sin^s(\theta)||\sin^{-s}(\theta_*)|(1-\cos^N(\theta_*/2)) \leq C_*, \tag{2.2.30}$$

car, on a

$$\lim_{N\to\infty} \cos(\theta_*)\cos(\theta_0-\theta_*) = 1,$$

$$\cos(\theta_*) = \cos(\theta_0)\cos(\theta_*-\theta_0) - \sin(\theta_0)\sin(\theta_*-\theta_0),$$

et

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall N > n_0, 1-\cos(\theta_0)\cos(\theta_*-\theta_0) \leq 1+\epsilon = \sin(\theta_0)\sin(\theta_*-\theta_0),$$

alors on obtient

$$\begin{aligned} 1-\cos^N(\theta_*) &= 1-(\cos(\theta_0)\cos(\theta_*-\theta_0)-\sin(\theta_0)\sin(\theta_*-\theta_0))^N \\ &\leq 1-(1-2\sin(\theta_0)\sin(\theta_*-\theta_0))^N \leq 2N^{\frac{-s}{(1-s)}}N^{\frac{-1}{2}}(\alpha-N^{\frac{-(1+s)}{1-s}}), \end{aligned}$$

par suite,

$$\int_{\Omega^c} \beta(\theta)N_*(1-\cos^N(\theta/2))d\theta \leq C_0\frac{\pi}{4s}(2\sqrt{2-s})^{(1-s)} = C_*.$$

De telle sorte, on obtient

$$N^*\|\beta\sin^2(\theta/2)\|_{L^1([\frac{-\pi}{2},\frac{+\pi}{2}]} \leq C_*.$$

On pose $g = (f_1 - f_2) > 0$.

• **Stabilité de la solution dans l'espace L^1_ℓ**

Prenons $\varphi(t,v) = \langle v\rangle^l signg$ comme fonction test. On applique la boucle ((2.2.3)-(2.2.7)), il vient

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}} \partial_t|f_1-f_2|(t,v)\psi(t,v)dv = \int_{\mathbb{R}}[K(f_1,\, f_1)-K(f_2,\, f_2)]\varphi(v)dv \\ &= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \tilde{\beta}[f_1^*f_1-f_2^*f_2](\varphi'+\varphi'_*-\varphi-\varphi_*)d\theta dv_*dv \\ &\leq \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \tilde{\beta}[f_1^*g+f_2g^*](2\langle v\rangle^l\langle v_*\rangle^\ell+\langle v\rangle^l+\langle v_*\rangle^\ell)d\theta dv_*dv, \end{aligned}$$

En vertu de (2.2.28) en prenant $N_* = \langle v_* \rangle^\ell$ une foit puis $N_* = \langle v \rangle^l$ une autre fois. Grâce au lemme de Gronwall on aboutit à

$$\|g\|_{L^1_\ell} \leq e^{C_1 t}\|g_0\|_{L^1_\ell};\ C_1 = (3C_* + 1)[\|f_0^1\|_{L^1} + \|f_0^2\|_{L^1}].$$

Ce qui prouve la stabilité locale (l'unicité) dans L^1_ℓ.
Remarque : Pour bien illustrer l'utilité de la boucle de changement de variables et le lemme 2.2.8 on se renvoie, par exemple, à [25], pour comparer notre résultat avec cel de L.Desvillettes et C. Mouhot.
• **Stabilité de la solution dans l'espace** $L\log L$
On utilise le changement de variables $(v, v_*, v', v'_*) \mapsto (v', v'_*, v, v_*)$.
Alors, $\forall \varphi(t,v) = sign g\psi(t,v) \in L^i : i = 1 \vee 2$, on obtient d'aprés l'equivalence de l'équation (2.1.12) et (2.2.9),

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\mathbb{R}}[\int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(f_1'^{*}g' + f_2'g'^{*} - f_1^{*}g)d\theta dv_*]\varphi(t,v)dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta[(f_1^{*}g + f_2 g^{*})\varphi'(t,v) - f_1^{*}g\varphi(t,v)]d\theta dv_* \\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta f_1^{*}g(\varphi' - \varphi)d\theta dv_* dv \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta f_2' g'^{*}\varphi(t,v)d\theta dv_* dv.
\end{aligned}$$

En prenant en considération la conservation de la masse, on a :

$$2I = \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(S^{*}g + Sg^{*})(\varphi' - \varphi)d\theta dv_* dv \tag{2.2.31}$$

où $S = f_1 + f_2$.
Comme $f_i, f_0 \in L\log L(\mathbb{R}_v), i = \overline{1.2}$, on a $\varphi(t,v) = sign g \log(1+|g|) \in L^1(\mathbb{R}_v)$, pour avoir $\int_{\mathbb{R}} K(f_i, f_i) sign g \log(1+|g|)dv < \infty$ car :
Comme $|g| > 0 \Rightarrow \exists n < \infty : \frac{1}{|g|} < n$, alors en posant : $h = \sup\{f_1, f_2\}$, on obtient

$$sign g \log(1+|g|) \leq n|g|\log(1+|g|) \leq n[\sum_{i=1}^{2} f_i \log(1+f_i) + 2h\log(1+h)] \in L^1(\mathbb{R}_v).$$

Où par un calcul direct, en utilisant l'inégalité

$$\forall x, y >, x \log x + y \geq y \log x, \tag{2.2.32}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} K(f_i, f_i)\varphi(t,v)dv &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \tilde{\beta} f^* f[\log(1+|g'|) + \log(1+|g|)] \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \tilde{\beta}[f_i^*|g'|\log(1+|g'| + f_i^* f_i + f_i^* f_i \log(1+|g|) \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Pour I_1 on fait le changement de variables $v' \mapsto v$, il vient

$$I_1 + I_2 \leq C_\beta \|f_i\|_{L^1}[\sum_{i=1}^{2} \|f_i\|_{L\log L} + \|f_i\|_{L^1} + 4\|h\|_{L\log L}] < \infty.$$

Pour celà on peut prendre $\varphi(t,v) = signg \log(1+|g|)$ comme fonction test. On a

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}} \big((1+g)\log(1+g)\big)dv = \int_{\mathbb{R}} (\partial_t g)\log(1+|g|)dv + \int_{\mathbb{R}} \partial_t g dv.$$

D'où $\int_{\mathbb{R}} \partial_t g = \int_{\mathbb{R}} K(g,g)1dv = 0$. Alors en utilisant (2.2.31),

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \tilde{\beta}(S^*g + Sg^*)(\varphi' - \varphi)d\theta dv_* dv \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \tilde{\beta}(S^*g' + S'g^*)(\varphi' - \varphi)d\theta dv_* dv \\
&= \frac{-1}{4}\int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \tilde{\beta}\big(S^*(g'-g) + (S'-S)g^*\big)(\varphi' - \varphi)d\theta dv_* dv \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Pour I_1, on utilise le changement de variables $(v, v') \mapsto (v', v)$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{-1}{4}\int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \tilde{\beta} S^*(g'-g)(\varphi' - \varphi)d\theta dv_* dv \\
&\leq \frac{-1}{4}\int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \tilde{\beta} S^*(|g'| - |g|)(\log(1+|g'|) - \log(1+|g|))d\theta dv_* dv.
\end{aligned}$$

On a pour tous $x \geq 0, y \geq 0$ avec $x - y \neq 0$, on a :

$$(x-y)\log(\frac{1+x}{1+y}) \geq 0. \tag{2.2.33}$$

Donc,

$$I_1 \leq 0.$$

Pour I_2 on utilise $\|g^*\|_{L^1} = 0$,

$$\begin{aligned} I_2 \quad &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \tilde{\beta} S g^*(\varphi' - \varphi) d\theta dv_* dv \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \tilde{\beta} S |g^*| \log(1+|g'|) d\theta dv_* dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \tilde{\beta} \frac{1}{\log(1+|g^*|)}[S\log(1+|g'|)|g^*|\log(1+|g^*|)]. \end{aligned}$$

On remarque que : si $x = |g^*| \geq e-1$ le problème ne se pose pas.
Si $0 < x = |g^*| < e-1$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$: $|g^*| > \frac{1}{n}$.
La fonction $0 \leq x \mapsto \frac{x}{\log(1+x)} - nx$, est négative pour $x \geq x_n = e^{\frac{1}{n}} - 1$. Donc, en posant $x = |g^*| > \frac{1}{n} > 0$, on a :

$$\begin{aligned} I_2 \quad &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \tilde{\beta}[\frac{1}{\log(1+|g^*|)} - n][S\log(1+|g'|)|g^*|\log(1+|g^*|)] \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \tilde{\beta}[nS\log(1+|g'|)|g^*|\log(1+|g^*|)] d\theta dv_* dv \\ &= I_{2.1} + I_{2.2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{2.1} \quad &= \quad \int_{\mathbb{R}^2 : x \geq x_n}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \tilde{\beta}[\frac{1}{\log(1+|g^*|)} - n][S\log(1+|g'|)|g^*|\log(1+|g^*|)] \\ &+ \quad \int_{\mathbb{R}^2 : \frac{1}{n} < x \leq x_n}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \tilde{\beta}[\frac{1}{\log(1+|g^*|)} - n][S\log(1+|g'|)|g^*|\log(1+|g^*|)] \\ &= \quad I_{2.1}^1 + I_{2.1}^2. \end{aligned}$$

On déduit que $I_{2.1}^1 \leq 0$.
Pour $I_{2.1}^2$ on a :

$$\frac{1 - n\log(1+|g^*|)}{\log(1+|g^*|)} \leq \frac{1 - n\log(1+\frac{1}{n})}{\log(1+\frac{1}{n})} \leq \frac{1 - n(1/n - 1/2n^2)}{1/n - 1/2n^2} \leq 1.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
I_2 &\le \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \tilde\beta(n+1)S\log(1+|g'|)|g^*|\log(1+|g^*|)d\theta dv_* dv \\
&\le \frac{-1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} (n+1)\tilde\beta(S'-S)(\log(1+S')-\log(1+S))|g^*|\log(1+|g^*|) \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} (n+1)\tilde\beta S'\log(1+S')|g^*|\log(1+|g^*|)d\theta dv_* dv \\
&= I_{2.2}^1 + I_{2.2}^2.
\end{aligned}$$

Pour $I_{2.2}^1$, en utilisant (2.2.33). On obtient $I_{2.2}^1 \le 0$.
Pour $I_{2.2}^2$, en utilisant le fait que $\|f_i\|_{L\log L} \le \|f_0^i\|_{L\log L}$, $i=\overline{1.2}$ pour avoir :

$$I_{2.2}^2 \le C_\beta[\|f_0^1\|_{L\log L} + \|f_0^2\|_{L\log L}]\|g\|_{L\log L}.$$

Finalement, on obtient

$$\partial_t\||g|\log(1+|g|)\|_{L^1} \le 2(n+1)C_\beta[\|f_0^1\|_{L\log L}+\|f_0^2\|_{L\log L}]\||g|\|_{L\log L}, \quad (2.2.34)$$

D'après le lemme de Gronwall on aboutit à l'unicité dans $L\log L(\mathbb{R}_v)$, pour tout $t<\infty$.
Remarque : Cette solution est aussi forte, il suffit de montrer qu'elle est dans $C^1\big(]0,\infty[;L^1(\mathbb{R}_v)\big)$ (évident) ; en utilisant le théorème de Hille Yosida qu'elle est une solution intégrale i.e.

$$f(t,\cdot) = e^{-ht}f_0 + \int_0^t (e^{-h(t-s)}K\big(f(s,\cdot),f(s,\cdot)\big) + hf(s,\cdot))ds.$$

De plus elle est de classe $\mathcal{C}^\infty\big(]0,\infty[\times\mathbb{R}_v\big)$ (pour le détails voir [44])

2.3 Analyse des opérateurs de collision

Dans ce paragraphe, on considère la transformation de Fourier des opérateurs de collision de Kac $K(f,g)$ et des opérateurs de collision de Boltzmann $Q(f,g)$ radialement symétriques par rapport à la variable v, la variable t étant considérée comme paramètre. On montre la formule de Bobylev qui permet de donner une expression directe en fonction de la transformée de Fourier de f et de g.

2.3.1 Analyse de Fourier des opérateurs de collision

Transformation de Fourier des opérateurs de collision de Kac

Dans le cas avec troncature angulaire, i.e. β est intégrable, on peut décomposer $K(.,.)$à $K^+(.,.)$ et $K^-(.,.)$, avec

$$K^+(f,g)(v) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \beta(\theta) f(v'_*) g(v') d\theta dv_*,$$

et

$$K^-(f,g)(v) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \beta(\theta) f(v_*) g d\theta dv_*.$$

On a la proposition suivante

Proposition 2.3.1 *Supposons que la section efficace de Kac $B = \beta(\theta)$. Alors, les formules suivantes sont vérifiées :*

$$\hat{K}^+(f,g)(\xi) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \beta(\theta) \hat{f}(\xi \sin\theta/2) \hat{g}(\xi \cos\theta/2) d\theta, \tag{2.3.1}$$

$$\hat{K}^-(f,g)(\xi) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \beta(\theta) \hat{f}(0) \hat{g}(\xi) d\theta, \tag{2.3.2}$$

et

$$\hat{K}(f,g)(\xi) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \beta(\theta) \left\{ \hat{f}(\xi \sin\theta/2) \hat{g}(\xi \cos\theta/2) - \hat{f}(0)\hat{g}(\xi) \right\} d\theta. \tag{2.3.3}$$

Démonstration. On utilise ce qui dit le changement de variables pré-, post-collisionnel et aussi le changement de variables $(v, v_*, \theta) \mapsto (v_*, v, \theta)$, ce qui assure que pour toute fonction $f(v, v_*, v', v'_*, \theta)$ on ait formellement (i.e. si les deux membres de la formule suivante ont un sens).

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(v, v_*, v', v'_*, \theta) d\theta dv_* dv = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(v', v'_*, v, v_*, \theta) d\theta dv_* dv,$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(v, v_*, \theta) d\theta dv_* dv = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(v_*, v, \theta) d\theta dv_* dv.$$

Comme conséquence de ces formules on obtient la formulation faible pour l'opérateur de collision de Kac :

$$\int_{\mathbb{R}} K(f,g)(v) dv = \int_{\mathbb{R}} \int_0^{2\pi} \beta(\theta) f^* g(v) \{\varphi(v') - \varphi(v)\} d\theta dv_* dv.$$

Remarque 2.3.2 *Dans plusieurs passages on est obligé de faire le changement de variables $v \mapsto v'$, on a $dv = \frac{1}{\cos(\theta)} dv'$, qui produit une singulières au point $\theta = \pi/2$. Mais on peut annuler cette singularité, on montre que la dernière intégrale prend la forme*

$$\int_{\mathbb{R}} K(f,g)(v)dv = \int_{\mathbb{R}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) f^* g(v) \left\{ \varphi(v') - \varphi(v) \right\} d\theta dv_* dv. \tag{2.3.4}$$

Pour ça on prend le changement de variables suivant :

$$(v, v_*, \theta) \longrightarrow (v', v'_*, 2\theta).$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} K(f,g)\varphi dv &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{-2\pi}^{2\pi} \beta(\theta) f^* g \left\{ \varphi(v') - \varphi(v) \right\} d\theta dv_* dv \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{-\pi}^{\pi} \beta(\theta) f^* g \left\{ \varphi(v') - \varphi(v) \right\} d\theta dv_* dv \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{-2\pi}^{-\pi} \beta(\theta) f^* g \left\{ \varphi(v') - \varphi(v) \right\} d\theta dv_* dv \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\pi}^{2\pi} \beta(\theta) f^* g \left\{ \varphi(v') - \varphi(v) \right\} d\theta dv_* dv.
\end{aligned}$$

On prend le changement de variables $(\theta \mapsto \theta + 2\pi)$ pour la seconde intégrale et $(\theta \mapsto \theta - 2\pi)$ pour la troisième. On a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} K(f,g)\varphi(v) dv &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{-\pi}^{\pi} \beta(\theta) f^* g \left\{ \varphi(v') - \varphi(v) \right\} d\theta dv_* dv \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{0}^{\pi} \beta(\theta) f^* g \left\{ \varphi(v') - \varphi(v) \right\} d\theta dv_* dv \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{-\pi}^{0} \beta(\theta) f^* g \left\{ \varphi(v') - \varphi(v) \right\} d\theta dv_* dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{-\pi}^{\pi} \beta(\theta) f^* g \left\{ \varphi(v') - \varphi(v) \right\} d\theta dv_* dv. \quad (2.3.5)
\end{aligned}$$

D'où, prenons en considération (2.1.18), donc

$$\int_{\mathbb{R}} K(f,g)\varphi(v) dv = K_0 + K_1 + K_2,$$

où

$$\begin{aligned} K_0 &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\beta(\theta)f^*g\left\{\varphi(v')-\varphi(v)\right\}d\theta dv_* dv,\\ K_1 &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{-\pi}^{-\pi/2}\beta(\theta)f^*g\left\{\varphi(v')-\varphi(v)\right\}d\theta dv_* dv,\\ K_2 &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\pi/2}^{\pi}\beta(\theta)f^*g\left\{\varphi(v')-\varphi(v)\right\}d\theta dv_* dv. \end{aligned}$$

Pour K_1, on prend le changement de variables $(v, v_*, \theta) \mapsto (v, v_*, \pi+\theta)$. Alors,

$$K_1 = \int_{\mathbb{R}^2}\int_{0}^{\pi/2}\beta(\theta)f^*g\left\{\varphi(v'_*)-\varphi(v)\right\}d\theta dv_* dv.$$

Avec

$$v' \mapsto v'_* = v_*\cos(\theta/2) + v\sin(\theta/2),\ v'_* \mapsto -v' = v_*\sin(\theta/2) - v\cos(\theta/2). \tag{2.3.6}$$

on obtient,

$$K_1 = \int_{\mathbb{R}^2}\int_{0}^{\pi/2}\beta(\theta)\left\{f(-v')g(v'_*)-f^*g\right\}\varphi(v)d\theta dv_* dv.$$

Utilisons le changement de variables $v \mapsto -v$, et $(v, v_*, v', v'_*, \theta) \mapsto (v', v'_*, v, v_*, \theta)$. Alors,

$$K_1 = \int_{\mathbb{R}^2}\int_{0}^{\pi/2}\beta(\theta)\left\{f(v')g(v'_*)-f^*g\right\}\varphi(v)d\theta dv'_* dv',$$

Pour K_2, on fait le changement de variables $(.,.,\theta) \mapsto (.,.,\theta-\pi)$. Donc,

$$K_2 = \int_{\mathbb{R}^2}\int_{-\pi/2}^{0}\beta(\theta)f^*g\left\{\varphi(-v'_*)-\varphi(v)\right\}d\theta dv_* dv.$$

Le changement de variables $(.,.,\theta) \mapsto (.,.,-\theta)$, donne :

$$K_2 = \int_{\mathbb{R}^2}\int_{0}^{\pi/2}\beta(\theta)f^*g\left\{\varphi(v''_*)-\varphi(v)\right\}d\theta dv_* dv,$$

avec

$$v' \mapsto v''_* = -v_*\cos(\theta/2) + v\sin(\theta/2),\ \ v'_* \mapsto v'' = v_*\sin(\theta/2) + v\cos(\theta/2) \tag{2.3.7}$$

Alors,

$$K_2 = \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^{\pi/2} \beta(\theta) \left\{ f(v'')g(v''_*) - f^* g \right\} \varphi(v) d\theta dv_* dv.$$

On considère les changements des variables $(v, v_*, v', v'_*, \theta) \mapsto (v', v'_*, v, v_*, \theta)$.
Donc

$$K_2 = \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^{\pi/2} \beta(\theta) \left\{ f(v'')g(v''_*) - f^* g \right\} \varphi(v) d\theta dv''_* dv''.$$

D'où

$$\frac{D(v''_*, v'')}{D(v, v_*)} = -1 : \; v = v'' \cos(\theta/2) + v''_* \sin(\theta/2), \; v_* = v'' \sin(\theta/2) - v''_* \cos(\theta/2) \tag{2.3.8}$$

Par substitition de (2.1.18) dans (2.3.7), on a

$$v''_* = -v'_* \cos(\theta/2) + v' \sin(\theta/2), \; v'' = v'_* \sin(\theta/2) + v' \cos(\theta/2).$$

On utilise le changement de variables
$(v, v_*, v'', v''_*, \theta) \mapsto (v, v_*, v', v'_*, \theta)$; $\frac{D(v''_*, v'')}{D(v', v'_*)} = -1$, alors

$$K_2 = -\int_{\mathbb{R}^2} \int_0^{\pi/2} \beta(\theta) \left\{ f(v')g(v'_*) - f^* g \right\} \varphi(v) d\theta dv'_* dv'.$$

On constate que $K_1 + K_2 = 0$.
Donc, on obtient la formule (2.3.4).
Pour la formule (2.3.1), posons $\varphi(v') = e^{-iv'.\xi}$. On a :

$$\hat{K^+}(f, g)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \beta(\theta) f^* g e^{-iv'.\xi} d\theta dv_* dv.$$

D'où, v' est donnée par (2.1.18) On prend le changement de variables $(\theta \mapsto -\theta)$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \hat{K^+}(f, g)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \beta(\theta) f^* e^{-iv_* \sin(\theta/2).\xi} g e^{-iv \cos(\theta/2).\xi} d\theta dv_* dv \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \beta(\theta) \hat{f}(\xi \sin(\theta/2)) \hat{g}(\xi \cos(\theta/2)) d\theta. \end{aligned}$$

Pour la formule (2.3.2), on fait le changement de variables $\varphi(v) = e^{-iv.\xi}$. Il vient :

$$\begin{aligned}\hat{K^-}(f,g)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \beta(\theta) f^* g e^{-iv.\xi} d\theta dv_* dv \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \beta(\theta)\hat{f}(0)\hat{g}(\xi) d\theta.\end{aligned}$$

On obtient la formule (2.3.1)

$$\hat{K}(f,g)(\xi) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \beta(\theta)\left\{\hat{f}(\xi\,\sin(\theta/2))\hat{g}(\xi\,\cos(\theta/2)) - \hat{f}(0)\hat{g}(\xi)\right\} d\theta.$$

Transformation de Fourier des opérateurs de collision de Boltzmann radialement symétriques

On donne maintenant l'identité de Bobylev de l'opérateur de collision de Boltzmann radialement symétrique.

Proposition 2.3.3 . *On suppose le noyau collisionnel de Boltzmann* $\beta = \beta(\cos\theta)$. *Alors, les formules suivantes sont satisfaites :*

$$\hat{Q^+}(f,g)(\xi) = |\mathbb{S}^{n-2}|\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin\theta)^{n-2} b(\cos\theta)\left\{\hat{f}(\xi^-)\hat{g}(\xi^+)\right\} d\theta, \tag{2.3.9}$$

$$\hat{Q^-}(f,g)(\xi) = |\mathbb{S}^{n-2}|\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin\theta)^{n-2} b(\cos\theta)\left\{\hat{f}(0)\hat{g}(\xi)\right\} d\theta, \tag{2.3.10}$$

$$\hat{Q}(f,g)(\xi) = |\mathbb{S}^{n-2}|\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin\theta)^{n-2} b(\cos\theta)\left\{\hat{f}(\xi^-)\hat{g}(\xi^+) - \hat{f}(0)\hat{g}(\xi)\right\} d\theta, \tag{2.3.11}$$

où

$$\xi^+ = \frac{\xi + |\xi|\sigma}{2},\ \xi^- = \frac{\xi - |\xi|\sigma}{2}, |\xi^+| = |\xi\,\cos\theta/2|,\ et\, |\xi^-| = |\xi\,\sin\theta/2|.$$

Remarque : L'identité de Bobylev est vraie seulement dans le cas Maxwellien. Les formules (2.3.9) et (2.3.10) ont un sens pour la section efficace avec une troncature angulaire (T.A). Mais la formule (2.3.11) a un sens pour la section efficace sans troncature angulaire aussi, si les fonctions f et g sont suffisamment régulières (voir [19]).

2.3.2 Estimations inférieures et supérieures de l'opérateur de Kac

Estimation supérieure

Lemme 2.3.4 *On suppose que le noyau de collision β satisfait l'hypothèse* (2.1.14) *ou* (2.1.15) *et que h est une fonction non négative avec $0 \neq h \in L^1$. Alors, il existe une constante positive C_β, dépendant seulement de β, telle que pour toute fonction convenable $g \in L^1$ on a :*

$$-N_*\big(K(h,\ g_{kj}),\ g_{kj}\big) \leq C_\beta \|h\|_{L^1} \|g_{kj}\|^2_{L^2}, \tag{2.3.12}$$

où $g_{kj} = \psi_k \phi_j g$, telle que ψ_k, et ϕ_j sont définis dans le paragraphe 1.6.

Démonstration. On utilise le théorème de Plancherel et l'identité de Bobylev pour avoir :

$$\begin{aligned}
I &= N_*\big(-K(h,\ g_{kj}),\ g_{kj}\big) = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta h_* \left\{g_{kj}(v) - g_{kj}(v')\right\} g d\theta dv_* dv \\
&= N_* \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta[\hat{h}(0)\hat{g_{kj}}(\xi) - \hat{h}(\xi^-)\hat{g_{kj}}(\xi^+)]\bar{\hat{g_{kj}}}(\xi) d\theta dv_* dv \\
&= N_* \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta[\hat{h}(0) - \hat{h}(\xi^-)]\hat{g_{kj}}(\xi) + \hat{h}(\xi^-)[\hat{g_{kj}}(\xi) - \hat{g_{kj}}(\xi^+)]\bar{\hat{g_{kj}}}(\xi) d\theta d\xi \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Pour I_2, on utilise le lemme 2.2.8, on aboutit à

$$I_2 \leq C_{\beta,\epsilon} \|h\|^2_{L^1} \|g_{kj}\|^2_{L^2} + \epsilon \|g_{kj}\|^2_{\dot{H}^1_1}.$$

Pour I_3 on utilise les mêmes manipulations appliquées dans I_2, on aboutit à :

$$I_3 \leq C_\beta \|h\|_{L^1} \|g_{kj}\|^2_{L^2}.$$

Pour I_1, on a :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2} N_* \int_{\mathbb{R}^2} \int_{I_\pi} \beta[\hat{h}(0) - \hat{h}(\xi^-) - \hat{h}(-\xi^-)]\hat{g_{kj}}(\xi)\bar{\hat{g_{kj}}}(\xi) d\theta d\xi \\
&= \frac{1}{2} N_* \int_{\mathbb{R}^2} \int_{I_\pi} \beta \sin^2(\theta/2)|\xi|^2 (\partial^2_\xi \hat{h})(s\xi^-)|\hat{g_{kj}}(\xi)|^2 d\theta d\xi \\
&\leq C_\beta \|h\|_{L^1} \|g_{kj}\|^2_{L^2},
\end{aligned}$$

où

$$|\xi|^2(\partial_\xi^2\hat{h})(s\xi^-) \approx \sum_{j,k=0}^{+\infty}(2^{2k}+2^{-2k})(2^{2j}+2^{-2j})\hat{h})(s\xi^-),$$

donc, on subdivise I_π en $\Omega \cup \Omega^c$:
$\Omega = \sum_{k,j}\Omega_{kj} = \left\{\theta \in I_\pi : \theta \leq \theta_0 = N^{\frac{-1}{1-s}}\right\}$, $\Omega^c = \{\theta \in I_\pi : \theta > \theta_0\}$.
Sur $\Omega_{kj} = \Omega \cap C_{kj}$, on a

$$\int_\Omega \beta \sin^2(\theta/4) N_* 2^{2(k+j)} d\theta \leq C.$$

Sur $\Omega_{kj}^c = \Omega^c \cap C_{kj}$, on utilise les mêmes techniques dans I_2 sur Ω^c en remplacant N_* par $N_* 2^{2(k+j)}$, donc

$$\int_{\Omega_{kj}^c} \beta N_* 2^{2(k+j)}(1-\cos^N(\theta/2)) \leq C.$$

Donc, on obtient la relation (2.3.12).

Estimations inférieures (Estimations coercivités)

Ces estimations sont la clef essentielle dans nos démonstrations.
Estimation de la coercivité sous elliptique (forme 1)

Proposition 2.3.5 *On suppose que la section efficace est sans troncature angulaire,(i.e. satisfait l'hypothèse* (2.1.14)*) et* $0 \neq f,\ g \in L^1_2 \cap L\log L$. *Alors, il existe une constante* $C_f > 0$, *dépendant seulement de* $\|\beta\|_{L^1}$, $\|f\|_{L^1_2}$, *et* $\|f\|_{L\log L}$ *telle que*

$$-\big(K(f,g),g\big) \geq C_f\|\Lambda_v^s g\|_{L^2}^2 - C\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^2}^2, \tag{2.3.13}$$

pour toute fonction $g \in L^1_2 \cap L\log L(\mathbb{R}_v)$. *où* $\Lambda = (1+|D_v|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Démonstration. Pour toute fonction $g \in L^1_2 \cap L\log L(\mathbb{R}_v)$, on a,

$$\begin{aligned}
\big(-K(f,g),g\big)_{L^2} &= -\int_{\mathbb{R}^2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\beta(\theta)f^*g\left\{g(v')-g(v)\right\}d\theta dv dv_* \\
&= 1/2\int_{\mathbb{R}^2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\beta(\theta)f^*\left\{[g(v')-g(v)]^2\right\}d\theta dv_* dv \\
&- 1/2\int_{\mathbb{R}^2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\beta(\theta)f^*\left\{g(v')^2-g(v)^2\right\} \\
&= I_1+I_2.
\end{aligned}$$

Pour I_2, on a besoin du changement de variables

$$v \mapsto v' = v\cos\theta/2 - v_*\sin\theta/2.$$

Pour v_* et θ, fixées, on a

$$|\frac{dv'}{dv}| = \cos(\theta/2)\ ,0 \le \theta \le \pi/2.$$

$$\begin{aligned}
|I_2| &= 1/2\int_{\mathbb{R}^2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\beta(\theta)f^*g^2\left\{\frac{1}{\cos(\theta/2)}-1\right\}d\theta dv_* dv \\
&\le C\|f\|_{L^2}\|g\|^2_{L^2}.
\end{aligned}$$

Pour I_1 on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.3.6 *Il existe une constante $C_f > 0$, qui dépend seulement de β, $\|f\|_{L^1_1}$, telle que*

$$\|\Lambda^s g\|^2_{L^2} \le C_f\left\{\int_{\mathbb{R}^2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\beta(\theta)f^*[g(v')-g]^2 d\theta dv dv_* + \|g\|^2_{L^2}\right\}. \quad (2.3.14)$$

Démonstration. du Lemme 2.3.6
Avec l'utilisation de la transformation de Fourier de l'opérateur de collision de Kac et l'application de l'identité de Bobylev, on a

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbb{R}}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\beta(\theta)\left\{\hat{f}(0)[|\hat{g}(\xi)|^2+|\hat{g}(\xi\cos\theta/2))|^2]\right\}d\theta d\xi \\
&- 2\int_{\mathbb{R}}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\beta(\theta)\hat{f}(0)Re\hat{f}(\xi\sin\theta/2))\hat{g}(\xi\cos\theta/2))\bar{\hat{g}}(\xi)d\theta d\xi \\
&\ge c\int_{\mathbb{R}}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\beta(\theta)[\hat{f}(0)-\hat{f}(\xi\sin\theta/2)]|\hat{g}(\xi)|^2 d\theta d\xi.
\end{aligned}$$

Pour compléter cette preuve, on fait appel au lemme suivant :

Lemme 2.3.7 *On suppose que β satisfait l'hypothèse* (2.1.14). *Alors, il existe une constante positive C_f qui qui dépend seulement de $\|f\|_{L^1_1}$, et $\|f\|_{L^1}$, telle que*

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \beta(\theta)[\hat{f}(0) - \hat{f}(\xi \sin\theta/2)]d\theta \geq C_f|\xi|^{2s}, \ \forall|\xi| \geq 1. \tag{2.3.15}$$

Ce lemme est lui-même une conséquence des deux lemmes suivants.

Lemme 2.3.8 *Il existe une constante positive C^1_f, dépendant seulement de $\|f\|_{L^1_1}$, et $\|f\|_{L\log L}$, telle que*

$$\hat{f}(0) - |\hat{f}(\xi)| \geq C^1_f(|\xi|^2\Lambda 1), \tag{2.3.16}$$

pour toute $\xi \in \mathbb{R}$, où $|\xi|^2\Lambda 1 = Min(|\xi|^2, 1)$.

Lemme 2.3.9 *Si β satisfait l'hypothèse* (2.1.14). *Alors, il existe une constante positive C_0 dépendante seulement de β, telle que*

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \beta(\theta)|\xi\sin\theta/2|^2\Lambda 1 d\theta \geq C_0 \left\{ \begin{array}{ll} |\xi|^{2s}, & si \ \ |\xi| \geq 1, \\ |\xi|^2, & si \ \ |\xi| \leq 1, \end{array} \right. \tag{2.3.17}$$

Preuve du Lemme 2.3.8
Comme $f \in L^1, f > 0$, on a pour $\xi \in \mathbb{R}$ fixée, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\hat{f}(0) - |\hat{f}(\xi)| \geq 0,$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}(0) - |\hat{f}(\xi)| &= \int_{\mathbb{R}} f(v)(1-\cos(v.\xi+\theta))dv \\
&= 2\int_{\mathbb{R}} f(v)\sin^2((v.\xi+\theta)/2)dv \\
&\geq 2\sin^2\epsilon \left\{ \int_{|v|\leq r, \forall p\in\mathbb{Z}, |v.\xi+\theta-2\pi|\geq 2\epsilon} f(v)dv - \int_{|v|>r} f(v)dv \right\} \\
&\geq 2\sin^2\epsilon \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(v) - \int_{\Omega} f(v)dv - \int_{\mathbb{R}} \frac{(1+|v|)}{r} f(v)dv \right\} \\
&\geq 2\sin^2\epsilon \left\{ \|f\|_{L^1} - \frac{\|f\|_{L^1_1}}{r} - \sup_{|A|\leq(1+\frac{r|\xi|}{\pi})\frac{4\epsilon}{|\xi|}} \int_A f(v)dv \right\},
\end{aligned}$$

où $\Omega = |v| \leq r, \exists p \in \mathbb{Z}, \frac{|v.\xi+\theta-2\pi|}{|\xi|} < \frac{2\epsilon}{|\xi|}$.
$*$ Si $[\xi| \geq 1$, $|A| \leq (1+\frac{r}{\pi})4\epsilon$, on obtient l'inégalité (2.3.16),avec

$$C_f^1 = 2\sin^2\epsilon \left\{ \|f\|_{L^1} - \frac{\|f\|_{L^1_1}}{r} - \sup_{|A|\leq(1+\frac{r}{\pi})4\epsilon} \int_A f(v)dv \right\},$$

où $\epsilon > 0, r > 0$, sont choisis de telle sorte que cette quantité soit positive. on choisit r_0 sufisament grande telle que $\|f\|_{L^1} - \frac{\|f\|_{L^1_1}}{r_0} \geq \frac{1}{2}\|f\|_{L^1}$. Comme $f \in \log L$ implique que f est uniformément intégrable, à savoir il existe un $\lambda_0 > 0$, tel que $\sup_{|A|\leq\lambda_0} \int_A f(v)dv \leq \frac{1}{4}\|f\|_{L^1}$.
Finalement, on choisit $\epsilon_0 > 0$, assez petit tel que $(1+\frac{r}{\pi})4\epsilon_0 \leq \lambda_0 > 0$. On obtient $C_f^1 = \frac{1}{2}\sin^2\epsilon\|f\|_{L^1} > 0$.
$*$ Si $|\xi| \leq 1$, on pose $\epsilon = \mu|\xi|$, et

$$\hat{f}(0) - |\hat{f}(\xi)| \geq 2|\mu|^2|\xi|^2 \inf_{|\xi|\leq 1} |\frac{|\sin^2(\mu\epsilon}{\mu^2|\xi|^2}|[\|f\|_{L^1} - \frac{\|f\|_{L^1_1}}{r} - \sup_{|A|\leq(1+\frac{r}{\pi})4\mu} \int_A f(v)dv.]$$

D'où, $\mu > 0$, $r > 0$, sont choisis de telle sorte que cette quantité soit positive. Finalement, on choisit

$$C_f^2 = 2|\mu|^2| \inf_{|\xi|\leq 1} |\frac{|\sin^2(\mu\epsilon}{\mu^2|\xi|^2}|[\|f\|_{L^1} - \frac{\|f\|_{L^1_1}}{r} - \sup_{|A|\leq(1+\frac{r}{\pi})4\mu} \int_A f(v)dv].$$

Preuve du Lemme 2.3.9
Notons que

$$\begin{aligned} K &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} b(\theta)(|\xi\sin\theta/2|^2\Lambda 1)d\theta \\ &\geq C\int_0^{\theta_0} b(\theta)(\frac{|\xi\theta|^2}{4}\Lambda 1)d\theta \\ &\geq C|\xi|^{2s}\int_0^{\theta_0|\xi|} b(\theta)(\frac{|\theta|^2}{4}\Lambda 1)d\theta \end{aligned}$$

Si $|\xi| \geq 1$, on a

$$K \geq C|\xi|^{2s}\int_0^{\theta_0} b(\theta)(\frac{|\theta|^2}{4}\Lambda 1)d\theta,$$

on obtient (2.3.17), avec

$$C_0 = \int_0^{\theta_0} b(\theta)\theta^2 d\theta\,.$$

Si $|\xi| \leq 1$, on a

$$\int_0^{\theta_0} b(\theta)(\frac{|\theta\xi|^2}{4}\Lambda 1)d\theta \geq |\xi|^2 \int_0^{\theta_0} b(\theta)\frac{|\theta|^2}{4}d\theta,$$

avec, $C_0 = \int_0^{\theta_0} b(\theta)\theta^2 d\theta$.
Ce qui achève la démonstration du Lemme 2.3.7.
Retournons à la proposition 2.3.5. On obtient

$$\begin{aligned}\big(-K(f,g),g\big)_{L_2} &\geq C\int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2s}|\hat{g}|^2 d\xi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \theta^2 b(\theta)d\theta \\ &- C\int_{\mathbb{R}} |\hat{g}|^2 d\xi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \theta^2 b(\theta)d\theta \\ &\geq C\|\Lambda^s g\|_{L^2}^2 - C\|g\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve de l'estimation de la coercivité.
On va donner une estimation de la coercivité sous elliptique (forme 2). On considère maintenant la combinaison de la décomposition de Littlewood-Paley et la partition de l'unité par rapport à la variable v dans le paragraphe 1.9.

Lemme 2.3.10 *On suppose que le noyau de collision β satisfait l'hypothèse* (2.1.14) *et que h est une fonction non négative avec $0 \neq h \in \dot{L}^1_2$. Alors, il existe une constante positive C_β, dépendant seulement de β, telle que pour toute fonction convenable $g \in H^1$ on a :*

$$\begin{aligned}&-N_*\big(K(h,\ g_{kj}),\ g_{kj}\big) \geq N_* C_\beta \|h\|_{L^1}\|\sqrt{\log(\langle D_v\rangle)}g_{kj}\|_{L^2}^2 \\ &+C_\beta\|h\|_{L^1}[N_*\|\sqrt{\log(\langle v\rangle)}g_{kj}\|_{L^2}^2 - \|g_{kj}\|_{L^2}^2],\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

où $\langle\cdot\rangle = (1+|\cdot|^2)^{\frac{1}{2}}$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}J^* &= -N_*\big(K(h,\ g),\ g\big) = -N_*\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta h_*\left\{g(v') - g(v)\right\} g d\theta dv_* dv \\ &= N_*\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta h_*\left\{g(v') - g(v)\right\}^2 d\theta dv_* dv \\ &- N_*\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta h_*\left\{g^2(v') - g^2(v)\right\} d\theta dv_* dv \\ &= J_1^* + J_2^*.\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} J_1^* &= N_* \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} c_s \beta \sin^2(\theta/4) h_* \left\{(v'-v)^2 \partial_{v_s} g^2(v_s\right\} d\theta dv_* dv_s, \\ J_2^* &= -N_* \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta h_* (\frac{1}{\cos(\theta/2)} - 1) g^2(v) d\theta dv_* dv, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} v_s &= v + s(v'-v) = c_s v - s\sin(\theta/2) v_*, \\ c_s &= (1 - 2s\sin^2(\theta/4)),\ 1 \geq c_s \geq \cos(\frac{\theta}{2}) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{2.3.19}$$

Donc,

$$\begin{aligned} (v'-v)^2 &= [\frac{c(\theta)}{c_s} v_s + (\frac{sc(\theta)}{c_s} + 1)\sin(\theta/2) v_*]^2 \\ &= C_1(\theta) v_s^2 + C_2(\theta) v_*^2 + C_3(\theta)\sin(\theta/2) v_s v_*, \end{aligned} \tag{2.3.20}$$

avec $C_i(\theta) = C_i(-\theta),\ \forall i = \overline{1,3}$,

$$\begin{aligned} J_1^* &= \int_{\mathbb{R}} \int_{I_\pi} BC_1(\theta) h_* v^2 (\partial_v g)^2(v) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \int_{I_\pi} BC_2(\theta) v_*^2 h_* (\partial_v g)^2(v) d\theta dv_* dv \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \int_{I_\pi} BC_3(\theta) \sin(\theta/2) v v_* h_* (\partial_v g)^2(v) d\theta dv_* dv \\ &= J_{1.1}^* + J_{1.2}^* + J_{1.3}^*. \end{aligned}$$

Pour $J_{1.3}^*$, on utilise le changement de variables $\theta \mapsto -\theta$ pour obtenir

$$\begin{aligned} J_{1.3}^* &= \int_{\mathbb{R}} \int_{I_\pi} BC_3(\theta) \sin(\theta/2) v v_* h_* [(\partial_v g(v)]^2 d\theta dv_* dv \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \int_{I_\pi} BC_3(\theta) \sin(\theta/2) v v_* h_* [(\partial_v g)(v)]^2 d\theta dv_* dv, \end{aligned}$$

Donc $J_{1.3}^* = 0$. Pour $J_{1.2}^*$ et $J_{1.1}^*$ on utilise le théorème de Plancherel et le fait que :
$x \geq \log(1+x),\ \forall x \geq 0$. (une fois $x = |\xi|^2$, et une autre fois $x = v^2$ et ainsi

$\partial_v f_{kj} \approx 2^k f_{kj}$).
Ainsi d'aprés le principe d'uncertitude qui annonce qu'une fonction ψ est particulièrement concentrée dans $|v - v_0| < r_v$, ne peut avoir sa transformée de Fourier $\hat{\psi}$ particulièrement concentrée dans $|\xi - \xi_0| < r_\xi$, aumoins que $r_v . r_\xi \geq 1$.(voir [30]). On a, alors

$$\begin{aligned} J_{1.2}^* &= C_B^1 \int_{\mathbb{R}} v_*^2 h_* dv_* \int_{\mathbb{R}} [(\partial_v g_{kj}(v)]^2 dv \\ &= C_B^1 \|h\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 |\hat{g_{kj}}(\xi)|^2 \\ &\geq C_B^1 \|h\|_{L^1} \|\sqrt{\log(\langle D_v \rangle)} g_{kj}\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Pour $J_{1.1}^*$ on aboutit à :

$$\begin{aligned} J_{1.1}^* \quad &= C_\beta \|h\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}} v^2 [(\partial_v g_{kj}(v)]^2 dv \\ &\geq C_\beta \|h\|_{L^1} \|\sqrt{\log\langle v \rangle} g_{kj}\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Pour $-J_2^*$, on utilise les mêmes manipulmations effectuées dans I_2, (l'Estimation supérieure ci-dessus), pour obtenir

$$J_2^* \geq -C_\beta \|h\|_{L^1} \|g_{kj}\|_{L^2}^2.$$

On obtient, donc, la relation (2.3.18).
On va donner maintenant une etimation logarithmique

Proposition 2.3.11 *([17]) On suppose que le noyau collisionnel β satisfait l'hypothèse* (2.1.15)*, et $g > 0$, $g \in L_2^1 \cap L \log L$. Il existe une constante $C_g > 0$, qui dépend seulement de β, $\|g\|_{L_1}$, et de $\|g\|_{L \log L}$, telle que pour toute fonction $f \in H^1(\mathbb{R})$, on a :*

$$\|(\log \Lambda)^{\frac{m+1}{2}} f\|_{L_2}^2 \leq -C_g\big(K(g,f), f\big) + \|f\|_{L_2}^2, \tag{2.3.21}$$

où $\Lambda = (e + |D_v|^2)^{\frac{1}{2}}$, $m \geq 0$.

Démonstration. En utilisant la transformation de Fourier de l'opérateur de collision de Kac et appliquant l'identité de Bobylev, on a

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \beta(\theta) \left\{ \hat{f}(0)[|\hat{g}(\xi)|^2 + |\hat{g}(\xi \cos\theta/2))|^2]\bar{\hat{g}}(\xi) \right\} d\theta d\xi \\ &- \int_{\mathbb{R}} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \beta(\theta) \left\{ \hat{f}(0) 2 Re \hat{f}(\xi \sin\theta/2))\hat{g}(\xi \cos\theta/2))\bar{\hat{g}}(\xi) \right\} d\theta d\xi \\ &\geq c \int_{\mathbb{R}} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \beta(\theta)[\hat{f}(0) - \hat{f}(\xi \sin\theta/2)]|\hat{g}(\xi)|^2 d\theta d\xi. \end{aligned}$$

Donc pour compléter cette démonstration, on utilise le lemme suivant :

Lemme 2.3.12 *Supposons que β satifait l'hypothèse* (2.1.15). *Alors, il existe une constante positive C_g qui dépend seulement de $\|g\|_{L^1_1}$,$\|g\|_{L^1}$, et de $\|g\|_{L\log L}$, telle que :*

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \beta(\theta)[\hat{g}(0) - \hat{g}(\xi \sin\theta/2)]d\theta \geq C_g (\log\langle\xi\rangle)^{m+1}, \ \forall |\xi| \geq R_0. \qquad (2.3.22)$$

Ce lemme est lui-même une conséquence du lemme suivant :

Lemme 2.3.13 *On suppose que β satifait l'hypothèse* (2.1.15). *Alors, il existe une constante R_0 et C_0, dépendant seulement de β, telle que*

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \beta(\theta)|\xi \sin\theta/2|^2 \Lambda 1 d\theta \geq C_0 \left\{ \begin{array}{ll} (\log\langle\xi\rangle)^{m+1}, & si \quad |\xi| \geq R_0, \\ |\xi|^2, & si \quad |\xi| \leq R_0, \end{array} \right. \qquad (2.3.23)$$

où $|\xi|\Lambda 1 = Min(|\xi|, 1)$

Chapitre 3

Production des moments d'ordre infini dans L^1 et L^2 pour la solution

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on montre la production des moments de tout ordre, même d'ordre infini, dans les espaces L^1 et L^2.
Notons qu'il n'existe pas d'étude concernant la production des moments, à l'exception de celles qui traitent sa propagation : Dans L^1, elle est prouvée par Ikenberry [42] dans le cas des molécules de Maxwell pour des sections avec troncatures angulaire, et [20] Desvillettes a prouvé que tous les moments polynomiaux sont crées dés qu'un parmi eux ayant un moment d'ordre strictement supérieure à deux, existe initialement. La propagation des momments dans L^p est obtenue pour la première fois par Gustaffson [36, 37] grâce à des techniques d'interpolation.
On considère les fonctions $w(v) = \langle v \rangle$, et $w_r^\ell = w_r^\ell = w^\ell I_r$ où $\langle v \rangle = (1+|v|^2)^{\frac{1}{2}}$ et $I_r \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ définie par

$$I_r(v) = \begin{cases} 1, & \text{si } v \in \mathbb{R}, : |v| \leq r, r > 0 \quad t > 0 \\ 0, & \text{si } |v| > r+1 \end{cases} \tag{3.1.1}$$

On a le lemme suivant :

Lemme 3.1.1 *Pour tout $0 < T < \infty$, et $l \in [2, \infty]$, on a les propriétés suivantes :*

Si f est une solution faible, alors

$$w_r^{tl} f \in \mathcal{C}\big(]0,T]_t; L^2(\mathbb{R}_v)\big),$$
$$w_r^{2tl} f \in L^\infty\big(]0,T]; L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}_v)\big),$$

où : $w_r := I_r \langle v\rangle^{tl}$.

La démonstration de ce lemme sera donnée dans l'Annexe.
Dans un but de simplification on dénote w_r par w.

3.2 Production des moments dans L^1

Dans ce paragraphe, on prouve la production des moment de tous ordres dans L^1 pour la solution de l'équation de Kac homogène.
Dans le but de simplification, on dénote $\|\cdot\|_{L^1}$ par $\|\cdot\|$ s'il n'y a pas de confusion.

Théorème 3.2.1 *On suppose que la donnée initiale est dans L^1, et que la section efficace satisfait* (2.1.14)*, avec $\gamma = 0$. Alors la solution du problème de Cauchy* (2.1.12)*, est dans $L^\infty\big(]0,T_0]; L^1_\infty(\mathbb{R}_v)\big)$ pour tout $0 < T_0 < \infty$.*

Théorème 3.2.2 *Le résultat du Théorème 3.2.1 est aussi vrai si on suppose que le noyau de collision est du type de Debye-Yukawa, i.e. β satisfait* (2.1.15)*.*

3.2.1 Analyse de l'opérateur de Kac

Pour la démonstration de ces théorèmes, nous avons besoin des deux Propositions suivantes.
Estimation de la coercivité

Proposition 3.2.3 *On suppose que le noyau collisionnel B satisfait l'hypothèse* (2.1.14)*, et que f, g sont deux fonctions non négatives. Alors, il existe des constantes positives $C_{g,i}$ dépendant seulement de β, et de $\|g\|_{L^1}$, telles que :*

$$\begin{aligned} & C_{g,1}\|(w^\ell f)^{1/2}\|^2_{\dot H_1^{1+s}} + C_{g,2}\|(w^\ell f)^{1/2}\|^2_{\dot H_1^1} + C_{g,3}\|(w^\ell f)^{1/2}\|^2_{H^1} \\ \leq\ & \big(-K(g,\ w^\ell f),\ 1\big) + C_{g,4}\|w^\ell f\|_{L^1} \end{aligned}$$

pour tout $0 < t < \infty$, $l \in [2,\infty]$ et $f \in L^\infty([0,\infty[_t;\ H^1(\mathbb{R}_v))$.

Démonstration. Notons $f(v_*), f(v), f'(v), w(v)$, respectivement $w(v')$ par f^*, f, f', w, w' dans plusieures places. On a :

$$I = \big(-K(g, w_r^\ell f), 1\big)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta(\theta) g^* \left\{ -w'^\ell f' + w^\ell f \right\} d\theta dv_* dv$$

En utilisant le changement de variables $v'_* \mapsto v_*$, il vient :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta(\theta) g^* \left\{ [w^\ell f^{1/2}]^2 - [w'^\ell f'^{1/2}]^2 \right\} d\theta dv_* dv \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta(\theta) g^* [w^\ell f^{1/2} - w'^\ell f'^{1/2}]^2 d\theta dv_* dv \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta(\theta) g^* [(w^\ell f^{1/2})(w'^\ell f'^{1/2}) - w'^\ell f'] d\theta dv_* dv \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Pour le premier terme du I_1, en utilisant le changement de variables $v' \mapsto v$, on a :

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta(\theta) g^* \left\{ [w_r'^l f'^{1/2}]^2 - [w^\ell f^{1/2}]^2 \right\} d\theta dv_* dv \\ &= -C\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \beta g^* [\frac{1}{\cos(\theta/2)} - 1][w^\ell f^{1/2}]^2 d\theta dv_* dv \\ &= -C\|g\| \|w^\ell f\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Pour I_3, et I_2, pour simplification posons $B = B(\theta) = \beta$, et $F = w^\ell f^{1/2}$. En utilisant le lemme de cancellation et $\cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2)) = 1$ on a :

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Bg^*[F(v)F(v') - F^2(v')] d\theta dv_* dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Bg^*[F(v)F(v') - \frac{1}{\cos(\theta/2)} F^2(v)] d\theta dv_* dv \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} Bg^*[2FF' - F'^2 - \cos(\theta/2)F^2 - \frac{\sin^2(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} F^2] \\ &\geq \frac{-1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} Bg^* \cos(\theta/2)(F - F')^2 d\theta dv_* dv \\ &- \int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} Bg^* \cos(\theta/2)\tan^2(\theta/2) F^2 d\theta dv_* dv \\ &= I_{3.1} + I_{3.2}, \end{aligned}$$

où

$$I_{3.2} = -C_\beta \|g\|_{L^1} \|w^\ell f\|_{L^1}.$$

Pour $I_2^* = I_2 + I_{3.1}$, on a :

$$\begin{aligned} I_2^* &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{I_\pi} B) \sin^2(\theta/4) g^* [F(v') - F(v)]^2 d\theta dv_* dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{I_\pi} B g^* (v' - v)^2 [(\partial_v F)(v_s)]^2, d\theta dv_* dv, \end{aligned}$$

prenons en considération (2.3.20). D'où

$$\begin{aligned} I_2^* &= \int_{\mathbb{R}} \int_{I_\pi} B c_s^{-1} C_1(\theta) g^* [v_s (\partial_{v_s} F)(v)]^2 d\theta dv_* dv_s \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \int_{I_\pi} B c_s^{-1} C_2(\theta) v_*^2 g^* [(\partial_{v_s} F)(v_s)]^2 d\theta dv_* dv_s \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \int_{I_\pi} B c_s^{-1} C_3(\theta) \sin(\theta/2) v_s v_* g^* [(\partial_{v_s} F)(v_s)]^2 d\theta dv_* dv_s \\ &= I_{2.1}^* + I_{2.2}^* + I_{2.3}^*. \end{aligned}$$

Pour $I_{2.3}^*$ en utilisant le changement de variables $v_s \mapsto v$, puis le changement de variables $\theta \mapsto -\theta$, on a :

$$\begin{aligned} I_{2.3}^* &= \int_{\mathbb{R}} \int_{I_\pi} B C_3(\theta) \sin(\theta/2) v v_* g^* [(\partial_v F)(v)]^2 d\theta dv_* dv \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \int_{I_\pi} B C_3(\theta) \sin(\theta/2) v v_* g^* [(\partial_v F)(v)]^2 d\theta dv_* dv, \end{aligned}$$

et donc $I_{2.3}^* = 0$.
Pour $I_{2.2}^*$, on a :

$$I_{2.2}^* = C_\beta^1 \int_{\mathbb{R}} v_*^2 g^* dv_* \int_{\mathbb{R}} [(\partial_v F)(v)]^2 dv = C_\beta^1 \|g\|_{\dot{L}_2^1} [\|F\|_{H^1}^2 - \|F\|_{L^2}^2]$$

Pour $I_{2.1}^*$, on aboutit à :

$$\begin{aligned} I_{2.1}^* &= C_\beta \|g\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}} [v (\partial_v F)(v)]^2 \\ &\geq C_\beta \|g\|_{L^1} \|F\|_{\dot{H}_1^1}^2. \end{aligned}$$

Donc,

$$I^* \geq C^1_\beta \|g\|_{L^1} \|(w^\ell f)^{1/2}\|^2_{\dot{H}^1_1} + C^2_\beta \|g\|_{\dot{L}^1_2} \|(w^\ell f)^{1/2}\|^2_{H^1} - C^3_\beta \|g\|_{L^1} \|w^\ell f\|_{L^1},$$

où C^i_β dépendent en β mais pas de ℓ .
Par substitution $I_i,\ i = 1, 2, 3$ dans I, on aboutit pour tout $l > 2$ à :

$$C^1_{\beta,g} \|(w^\ell f)^{1/2}\|^2_{\dot{H}^1_1} + C^2_{\beta,g} \|(w^\ell f)^{1/2}\|^2_{H^1} \leq \big(- K(g,\, w^\ell f),\, 1 \big)_{L^2} + C^3_{\beta,g} \|w^\ell f\|_{L^1}.$$

D'un autre côté, on a

$$J = \big(- K(h,\ w^\ell f),\ 1 \big) = - \int_{\mathbb{R}} K(h,\ w^\ell f) 1 dv,$$

Posons $(w^\ell f)^{1/2} = g$. En utilisant le théorème de Plancherel et l'identité de Bobylev, on aboutit à :

$$\begin{aligned} J &= 0 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta) \left\{ [\hat{h}(0) - |\hat{h}(\xi^-)|] |\hat{g}(\xi) - \hat{g}(\xi^+)|^2 \right\} d\theta d\xi \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta) \left\{ [|\hat{h}(\xi^-)| - \hat{h}(0)] |\hat{g}(\xi) - \hat{g}(\xi^+)|^2 \right\} d\theta d\xi \\ &= J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Pour J_1, on utilise le lemme 2.2.2 pour obtenir

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta) \left\{ [\hat{h}(0) - |\hat{h}(\xi^-)|] |\hat{g}(\xi) - \hat{g}(\xi^+)|^2 \right\} d\theta d\xi \\ &\geq C_\beta \int_{\mathbb{R}} C_h |\xi|^{2+2s} |\partial_\xi \hat{g}(\xi)|^2 d\xi \\ &\geq C_\beta \|h\|_{L^1} \|(w^\ell f)^{1/2}\|^2_{\dot{H}^{1+s}_1}. \end{aligned}$$

Pour J_2, on a :

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta) \left\{ [\hat{h}(0) - |\hat{h}(\xi^-)|] |\hat{g}(\xi) - \hat{g}(\xi^+)|^2 \right\} d\theta d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{I_\pi} \beta(\theta) \left\{ |\hat{h}(0)| + |\hat{h}(\xi^-)| |\hat{g}(\xi) - \hat{g}(\xi^+)| |\hat{g}(\xi) + \hat{g}(\xi^+)| \right\} d\theta d\xi \\ &= \epsilon \|\sqrt{w^\ell f}\|_{\dot{H}^1_1} + (c_\beta \|h\|_{L^1})^2 C_\epsilon \|w^\ell f\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Par substitution $J_i,\ i=\overline{1.4}$, dans J, on aboutit à :

$$\begin{aligned}&C^1_{\beta,g}\|g\|_{L^1}\|(w^\ell f)^{1/2}\|^2_{\dot{H}^{1+s}_1}+C^2_{\beta,g}\|(w^\ell f)^{1/2}\|^2_{\dot{H}^1_1}+C^3_{\beta,g}\|(w^\ell f)^{1/2}\|^2_{H^1}\\&\leq \big(-K(h,\ w^\ell f),\,1\big)+C^4_{\beta,g}\|(w^\ell f)^{1/2}\|^2.\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition (3.2.3).

Estimation du commutateur (forme 1)

Proposition 3.2.4 *On suppose que le noyau collisionnel B satisfait l'hypothèse* (2.1.14)*, ou* (2.1.15) *et que f,g deux sont fonctions non négatives avecs $0\neq g\in L^1$. Alors, il existe une constante positive C_g qui dépend seulement de B et de $\|g\|_{L^1}$, telle que :*

$$\Big(w^\ell K(g,\,f)-K(g,\,w^\ell f),\,1\big)\leq C_B\|g\|\|w^\ell f\|, \tag{3.2.1}$$

pour tous $0<t<T$ et $l\in[2,\infty]$, où $w=\langle v\rangle$.

Démonstration. On suppose que $l>2$, en utilisant le changement de variables $v'_*\mapsto v_*$ pour le premier terme on aboutit à :

$$\begin{aligned}J &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi}Bg(v_*)(w'^{l}_r-w^\ell_r)f(v)d\theta dv_*dv\\&\leq \int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi}Bg(v_*)\frac{|w'^{l}_r-w^\ell_r|}{w^\ell_r}w^\ell_r f(v)d\theta dv_*dv,\end{aligned}$$

on subdivise $I_\pi=[\frac{-\pi}{2},\frac{+\pi}{2}]$ en $\Omega\cup\Omega^c$:
$\Omega=\Big\{\theta\in I_\pi:\theta\leq\theta_0=N^{\frac{-1}{(1-s)}}\Big\}$, $\Omega^c=\{\theta:\theta>\theta_0\}$.
Où : $N=N_*^{\frac{2}{1-s}}$: $N_*=l^2\langle v_*\rangle^\ell$.
On a :

$$\begin{aligned}J^* &= w'^{\ell}-w^\ell=[(\cos(\theta/2)-1)v-\sin(\theta/2)v_*](\partial_v\langle\cdot\rangle^l)(v_s)\\&= -l[(1-\cos(\theta/2))(\frac{1}{c_s}(v_s+s\sin(\theta/2)v_*)+\sin(\theta/2)v_*]v_s\langle v_s\rangle^{l-2}\\&= l[(1-\cos(\theta/2))\frac{1}{c_s}(v_s^2+s\sin(\theta/2)v_*v_s)+\sin(\theta/2)v_sv_*]\langle v_s\rangle^{l-2}\\&\leq lC_1(\theta)(v_s^2+v_*^2)\langle v_s\rangle^{l-2}+l\sin(\theta/2)v_*v_s\langle v_s\rangle^{l-2}\\&= J_1^*+J_2^*.\end{aligned}$$

Donc,

$$\int_\Omega \beta(\theta) J_1^* d\theta \leq N^{\frac{-3-s}{(1-s)^2}}{}_*.$$

Pour J_2^*, on utilise le changement de variables $\theta \mapsto -\theta$

$$\begin{aligned}
J_2^{**} &= \int_\Omega \beta(\theta) J_2^* = l \int_\Omega \beta(\theta)\sin(\theta/2) v_* v_s \langle v_s\rangle^{l-2} d\theta \\
&= l \int_\Omega \beta(\theta)\sin(\theta/2) v_*[v_s - v_s'] \langle v_s\rangle^{l-2} d\theta \\
&+ l \int_\Omega \beta(\theta)\sin(\theta/2) v_* v_s'[\langle v_s\rangle^{l-2} - \langle v_s'\rangle^{l-2}] d\theta \\
&= J_{2.1}^{**} + J_{2.2}^{**},
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
J_{2.1}^{**} &= l \int_\Omega \beta(\theta)\sin(\theta/2) v_*[v_s - v_s'] \langle v_s\rangle^{l-2} d\theta \\
&= -2l \int_\Omega \beta(\theta)\sin^2(\theta/2) v_*^2 \langle v_s\rangle^{l-2} d\theta \\
&\leq 2l^{-2} l \langle v_*\rangle^{-2l} \langle v_*\rangle^{\ell} \langle v\rangle^{l-2} \leq 2\langle v\rangle^l,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
J_{2.2}^{**} &= l \int_\Omega \beta(\theta)\sin(\theta/2) v_* v_s'[\langle v_s\rangle^{l-2} - \langle v_s'\rangle^{l-2}] d\theta \\
&= l \int_\Omega \beta(\theta \sin(\theta/2) v_* v_s'[(\langle v_s\rangle^{l-2} - \langle c_s v\rangle^{l-2}) - (\langle v_s'\rangle^{l-2} - \langle c_s v\rangle^{l-2})] d\theta \\
&= -\frac{l(l-2)}{2} \int_\Omega \beta(\theta)\sin^2(\theta/2) v_*^2 v_s'[v_{s,\tau}\langle v_{s,\tau}\rangle^{l-4} + 2v_{s,\tau}'\langle v_{s,\tau}'\rangle^{l-4}] d\theta \\
&= -\frac{3}{2} s l(l-2) \int_\Omega \beta(\theta)\sin^2(\theta/2) v_s' v_*[\langle v_{s,\tau}\rangle^{l-4} d\theta \\
&\leq l^{-2} l^2 \langle v_*\rangle^{-l} \langle v_*\rangle^{\ell-2} \langle v\rangle^{l-2} \leq C_\beta \langle v\rangle^l,
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
v_s &= c_s v - s\sin(\theta/2) v_*\,, v_s' = c_s v + s\sin(\theta/2) v_*, \\
v_{s,\tau} &= (1-s)v + s\cos(\theta/)v - s\tau\sin(\theta/2) v_*, \\
c_s &= 1 - 2s\sin^2(\theta/4) \leq 1,\ 0 < s < 1,\ 0 < \tau < 1,
\end{aligned}$$

donc
$$\langle v_s\rangle^l \leq \langle v_*\rangle^\ell \langle v\rangle^l, \text{et } \langle v_{s,\tau}\rangle^l \leq \langle v_*\rangle^\ell \langle v\rangle^l.$$
Alors
$$\begin{aligned} I \quad & \leq \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\Omega} \beta N_* \sin^2(\theta/2) g(v_*) w^\ell f d\theta dv_* dv \\ & + \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\Omega^c} \beta N_* (1-\cos^N(\theta/2) g(v_*)[w'^\ell - w^\ell] f(v) d\theta dv_* dv. \\ & = J_1 + J_2. \end{aligned}$$
D'où, en utilisant le lemme 2.2.8 ; avec $N_* = l^2\langle v_*\rangle^\ell$, on a
$$\int_\Omega N_*\beta(\theta)\sin^2(\theta/2) \leq N_*^{\frac{-3-s}{(1-s)^2}} < 1, \tag{3.2.2}$$
et
$$\int_\Omega N_*\beta(\theta)(1-\cos^N(\theta/2) d\theta \leq \frac{\pi}{4s}(4\sqrt{2-s})^{(1-s)} \leq C. \tag{3.2.3}$$
On obtient :
$$J \leq C_\beta \|g\|_{L^1}\|w^\ell f\|_{L^1},$$
où C_β est indépendant de ℓ.
Donc
$$|\big(K(f,\, f)w^\ell - K(f,\, w^\ell f),\, 1\big)| \leq C_\beta(\|f\|_{L^1}\|w^\ell f\|_{L^1}.$$
Ce qui achève la démonstration de la proposition 3.2.4.

Estimation du commutateur (forme 2)

Lemme 3.2.5 *On suppose que le noyau collisionnel B satisfait l'hypothèse* (2.1.14)*, ou* (2.1.15) *et que f, g sont deux fonctions non négatives. Alors il existe une constante positive $C_{B,\epsilon,g}$ qui dépend seulement de B et de $\|g\|_{L^1}$ telle que*
$$\big(p_{kj}w^\ell K(g,\, f) - K(g,\, p_{kj}w^\ell f),\, 1\big) \leq C_{B,\epsilon,g}\|g\|\|p_{kj}w^\ell f\|_{L^1} + \epsilon\|\sqrt{|p_{kj}w^\ell f|}\|_{H^1},$$
pour tous $0 < t < \infty$, $l \in [0,\infty]$ et tout $f \in L^\infty([0,\infty[; H^1(\mathbb{R}_v))$. où :
$$w = \langle v\rangle, \text{ et } p_{kj} = \psi_k(D_v)\phi_j(v),$$
sont définies dans le paragraphe 1.5.

Démonstration. Posons $I = \int_{\mathbb{R}} Sigp_{kj}w^{\ell}K(g\,,f)dv$, et $p_{kj}f = f_{kj}$. On a donc

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\pi}\beta(\theta)g_*(Sig'p'_{kj}w'^{\ell}_r - Sigp_{kj}w^{\ell}_r)f(v)d\theta dv_* dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\pi}\beta(\theta)g_*(\psi_k(D_{v^+}) - \psi_k(D_v))Sig\phi_j w^{\ell}_r f d\theta dv_* dv + \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\pi}\beta(\theta)g_*\psi'_k(\phi'_j - \phi_j)Sigw^{\ell}_r f d\theta dv_* dv + \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\pi}\beta(\theta)g_*\psi'_k\phi'_j(Sig'w'^{\ell}_r - Sigw^{\ell}_r)f d\theta dv_* dv \\
&= I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

Pour I_1, posons $g = w^{\ell}_r f$, $g_j = \phi_j w^{\ell}_r f$ et $g_{kj} = \psi_k\phi_j w^{\ell}_r f$, on a

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\pi}\beta(\theta)g_* e^{iv\xi}(\psi_k(\xi) - \psi_k(\xi^+))Sig\hat{g}_j d\xi d\theta dv_* dv \\
&= -\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\pi}\beta(\theta)g_* e^{iv\xi}(1 - \frac{\psi_k(\xi^+)}{\psi_k(\xi)})|\hat{g_{kj}}|d\xi d\theta dv_* dv,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\frac{\psi_k(\xi) - \psi_k(\xi^+)}{\psi_k(\xi)} &\leq 2\sin^2(\theta/4)|\xi\frac{\partial_\xi\psi_k(\xi_s)}{\psi_k(\xi)}| \\
&\equiv C\sin^2(\theta/4)|\frac{(\partial_\xi\psi)(\xi_s)}{\psi_k(\xi)}|.
\end{aligned}$$

Dénotons par $\Psi^1_k(D_v)$ l'oΨD dont le symbole est $\left(\frac{|(\partial_\xi\psi)(\xi_s)|}{\psi_k(\xi)}\right)^{\frac{1}{2}} \leq C$, donc, on obtient

$$I_1 \leq \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\pi}\beta(\theta)g_*|\big(\Psi^1_k(D_v)|g_{kj}(v)|^{1/2}\big)^2|d\xi d\theta dv_* dv \leq C_\beta\|g\|_{L^1}\|(w^{\ell}_r f)_{kj}\|_{L^1}.$$

Pour I_2 d'aprés la proposition 1.4.7

$$\begin{aligned}
I_2 &= C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\pi}\beta(\theta)g_*\frac{(\phi'_j - \phi_j)}{\phi_j}.\psi'_k Sigg_j d\theta dv_* dv \\
&= C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\pi}\beta(\theta)g_*\frac{(\phi'_j - \phi_j)}{\phi_j}.\int_{\mathbb{R}} e^{iv\xi}\psi_k(\xi^+)\psi_k^{-1}(\xi)|\psi_k(\xi)\hat{g}_j(\xi)|d\xi d\theta \\
&= C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\pi}\beta(\theta)g_*\frac{(\phi'_j - \phi_j)}{\phi_j}|\Psi^2_{kj}(D_v)|g_{kj}(v)|^{1/2}\big)^2 d\theta dv_* dv,
\end{aligned}$$

où, dénotons par $\Psi_k^2(D_v)$ l'oΨD dont le symbole est $\big(\psi_k(\xi^+)\psi_k^{-1}(\xi)\big)^{\frac{1}{2}} \leq C$. D'un autre coté, on

$$\frac{(\phi_j' - \phi_j)}{\phi_j} = -[(1-\cos(\theta/2))v + \sin(\theta/2)v_*]\frac{\partial_v \phi_j(v_s)}{\phi_j},$$

$$v \in C_j, \text{ donc, } |v| \sim 2^j, \ \partial_v \phi_j(v_s) = 2^{-j}\partial_v \phi(v_s) \leq C,$$

Alors,

$$\begin{aligned} I_2 &\approx -\int_{\mathbb{R}^2}\int_\pi \beta(\theta) g_*(1-\cos(\theta/2))\frac{\partial_v \phi(v_s)}{\phi_j}\big(\Psi_k^2 |g_{kj}|^{1/2}\big)^2 d\theta dv_* dv \\ &- \int_{\mathbb{R}^2}\int_\pi \beta(\theta) g_* \sin(\theta/2) v_* \frac{\partial_v \phi_j(v_s)}{\phi_j}\big(\Psi_k^2 |g_{kj}|^{1/2}\big)^2 d\theta dv_* dv \\ &= I_{2.1} + I_{2.2}. \end{aligned}$$

il en résulte

$$I_{2.1} \leq C_\beta \|g\|_{L^1} \|(w_r^\ell f)_{kj}\|_{L^1}.$$

Pour $I_{2.2}$, on applique le changement de variables $\theta \mapsto -\theta$

$$\begin{aligned} I_{2.2} &= \frac{s}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_\pi \beta(\theta)\sin^2(\theta/2) g_* v_*^2 \frac{\partial_v^2 \phi_j(v_{s\tau})}{\phi_j}\big(\Psi_k^2 |g_{kj}|^{1/2}\big)^2 d\theta dv_* dv \\ &\leq C_{\beta \|g\|_{L^1}} \|(w_r^\ell f)_{kj}\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Pour I_3

$$\begin{aligned} I_3 &= C\int_{\mathbb{R}^2}\int_\pi \beta(\theta) g_*\Big(\frac{Sig' w_r'^\ell}{Sig w_r^\ell} - 1\Big)\big(\Psi_k^2 |g_{kj}|^{1/2}\big)^2 d\theta dv_* dv \\ &- C\int_{\mathbb{R}^2}\int_\pi \beta(\theta) g_*\Big(\frac{Sig' w_r'^\ell}{Sig w_r^\ell} - 1\Big)_{(1)} Sig \psi_k'^{(1)} g_j \\ &- C\int_{\mathbb{R}^2}\int_\pi \beta(\theta) g_* Sig R_2(v,\xi) g_j d\theta dv_* dv \\ &= I_{3.1} + I_{3.2} + I_{3.3}, \end{aligned}$$

où :
Pour $I_{3.1}$, nous faisons les mêmes manipulations utilisées pour J (estimation du commutateur), en remarquant que Ψ_k^2 est borné dans L^2, et

$$\Big(\frac{Sig' w_r'^\ell}{Sig w_r^\ell} - 1\Big) \leq \Big|\frac{w'^\ell}{w^\ell} - 1\Big|,$$

on aboutit à

$$I_{3.1} \leq C_\beta \|g\|_{L^1} \|(w_r^\ell f)_{kj}\|_{L^1}.$$

Pour $I_{3.2}$, on a

$$I_{3.2} = C \int_{\mathbb{R}^2} \int_\pi \beta(\theta) g_* (\frac{w_r'^\ell}{w_r^\ell} - 1)_{(1)} . \int_{\mathbb{R}} e^{iv\xi} \cos(\theta/2)(\cos(\theta/2)\partial_\xi \psi_k)(\xi^+)\psi_k^{-1}(\xi) Sig\hat{g_{kj}} d\theta dv_*$$

où $\Psi_k^3(D_v)$ est l'OΨD (borné dans L^2) dont le symbole est donné par $|\partial_\xi \psi_k)(\xi^+)\psi_k^{-1}(\xi)|^{1/2} \leq C$, donc

$$\begin{aligned} P &= |(\frac{w'^l}{w^\ell} - 1)_{(1)}| = \\ &= l \frac{(\cos^2(\theta/2) - 1) v \langle v' \rangle^{l-2} - v(\langle v' \rangle^{l-2} - \langle v \rangle^{l-2}) - v_* \sin(\theta/2) \langle v' \rangle^{l-2}}{\langle v \rangle^l} \\ &= P_1 + P_2 + P_3 \leq (1 - \cos(\theta/2))[(l + 2l^2)\langle v_* \rangle^{\ell-2} + P_2 + C(1 - \cos^2(\theta/2))\langle v_* \rangle^\ell, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} P_1 &= l(1 - \cos(\theta/2))[\langle v_* \rangle^{\ell-2} \frac{v}{1+v^2} + (l-2)\langle v_* \rangle^{l-4} v^2 \frac{c_s v - s \sin(\theta/2) v_*}{(1+v^2)^2}], \\ P_3 &= \frac{sl(l-2)\langle v_* \rangle^{l-4} v v_*^2 \sin^2(\theta/2)}{(1+v^2)^2}, \text{and} \\ P_2 &= -l(l-2)c_s \frac{v^2 v_* \langle v_s \rangle^{l-4} \sin(\theta/2)}{\langle v \rangle^l}. \end{aligned}$$

Pour P_2, on utilise le changement de variables $\theta \mapsto -\theta$

$$P_2 \leq 2l^3 \langle v_* \rangle^{l-4} \sin^2(\theta/2),$$

puis on subdivise I_π en $\Omega \cup \Omega^c$:

$$\Omega = \left\{ \theta \in I_\pi : \theta \leq \theta_0 = L^{\frac{-1}{1-s}} \right\}, \, \Omega^c = \{\theta \in I_\pi : \theta > \theta_0\} : L = L_0^{\frac{2}{1-s}}, L_0 = (l^2 + l^3)\langle v_* \rangle^{\ell-2},$$

Nous avons donc,

$$\begin{aligned} I_{3.2} \leq I_{3.2}^* &= C \int_{\mathbb{R}^2} \int_\Omega (1 - \cos\theta/2) L_0 \big(\Psi_k^2 |g_{kj}|^{\frac{1}{2}}\big)^2 d\theta dv_* dv \\ &+ C \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\Omega^c} (1 - \cos^L(\theta/2) L_0 \big(\Psi_k^2 |g_{kj}|^{\frac{1}{2}}\big)^2 d\theta dv_* dv. \end{aligned}$$

Donc pour $I^*_{3.2}$, nous faisons les mêmes manipulations utilisées dans le lemme 2.2.8, on aboutit à

$$I_{3.2} \leq C_\beta \|g\|^2_{L^1} \|(w^\ell_r f)_{kj}\|_{L^1}.$$

Pour $I_{3.3}$, on a

$$I_{3.3} = \int_{\mathbb{R}^2} \int_\pi \beta(\theta) g_* R_2(v,\xi) Sigg_j d\theta dv_* dv,$$

D'après [39] (Lemme 1.3), (voir aussi [40]), on voit que pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$R_{N=2}(v,\xi) = \int_0^1 \frac{(1-\tau)}{2!} r_{N=2,\tau}(v,\xi) d\tau = \sum_{i=1}^{2} R^i_2(v,\xi),$$

on pose

$$F(v) = (\frac{Sig' w'^l_r}{Sig w^\ell_r} - 1),\ \Psi_k(\xi) = \psi_k(\xi^+),$$

et

$$\chi_\epsilon(v,\xi) = \chi(\epsilon v, \epsilon\, \xi) = e^{-\epsilon|v|.\epsilon\,|\xi|}.$$

D'après [52] (theorem 3.1) et [57] (theorem 5.3), par integration, on peut obtenir :

$$\begin{aligned}
R_2(v,\xi) &= \lim_{\epsilon\to 0} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}_y} \int_{\mathbb{R}_\eta} \frac{(1-\tau)}{2} e^{-iy.\eta} \chi_\epsilon(v,\xi) (F_{(2)})(v+y) (\Psi_k)^{(2)})(\xi+\tau\eta) d\eta dy d\tau \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}_y} \int_{\mathbb{R}_\eta} \frac{(1-\tau)}{2} e^{-iy.\eta} \eta^2 \chi_\epsilon(v,\xi) F(v+y) (\partial^2_\xi \Psi_k)(\xi+\tau\eta) d\eta dy d\tau \\
&+ 2\lim_{\epsilon\to 0} \int_{y=0}^\infty \int_{\eta=0}^\infty \int_0^1 \frac{1-\tau}{2} \sin(y\eta) \chi_\epsilon(v,\xi) (\partial_y F)(v+y) (\partial_\tau \partial_\xi \Psi_k)(\xi-\tau\eta),
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
R_2(v,\xi) &\leq 2\lim_{\epsilon\to 0} \int_{y=0}^\infty \int_{\eta=0}^\infty \frac{1}{\tau_0} \sin(y\eta) \chi_\epsilon(v,\xi) (\partial_y F)(v+y) (\partial_\eta \Psi_k)(\xi+\tau_0\eta) d\eta dy \\
&+ 2\lim_{\epsilon\to 0} \int_{y=0}^\infty \int_{\eta=0}^\infty \frac{1}{\tau_0} \sin(y\eta) \chi_\epsilon(v,\xi) (\partial_y F)(v+y) (\partial_\eta \Psi_k)(\xi-\tau\eta) d\eta dy \\
&\leq 2\int_{y=0}^\infty (\partial_y F)(v+y) dy. \int_{\eta=0}^\infty \frac{1}{\tau_0} (\partial_\eta \Psi_k)(\xi+\tau_0\eta) d\eta \\
&+ 2\int_{y=0}^\infty (\partial_y F)(v+y) dy. \int_{\eta=0}^\infty \frac{1}{\tau_0} (\partial_\eta \Psi_k)(\xi-\tau_0\eta) d\eta = R^*,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} R^* &= C\cos^2(\theta/2)\frac{4}{\tau_0}|[((\frac{1+|v'|^2}{1+|v|^2})^l-1)+(1-\cos^l(\theta/2))]||\psi_k(\xi^+)| \\ &\leq (R_{2.1}+R_{2.2})|\psi_k(\xi^+)|. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} I_{3.3} &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\pi}\beta g_*[R_{2.1}+R_{2.2}]\int_{\mathbb{R}}[e^{iv.\xi}(\psi_k(\xi^+)\psi_k^{-1}(\xi)|\hat{g_{kj}}|)d\xi]d\theta dv_* dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\pi}\beta g_*[R_{2.1}+R_{2.2}](\Psi_k^3.|g_{kj}|^{1/2})^2 d\theta dv_* dv, \end{aligned}$$

où Ψ_k^3 est l'OΨD (borné dans L^2) dont le symbole est $(\psi_k(\xi^+)\psi_k^{-1}(\xi))^{1/2}$.
Pour $\int_\pi \beta R_{2.1}$ on utilise les mêmes manipulations faites dans pour I dans l'estimation du commutateur ci-dessus .
Pour $\int_\pi \beta R_{2.2}$, on subdivise I_π en $\Omega\cup\Omega^c$:

$$\Omega = \left\{\theta\in I_\pi : \theta\leq\theta_0 = l^{\frac{-1}{1-s}}\right\},\ \Omega^c = \{\theta\in I_\pi : \theta>\theta_0\},$$

on utilise les mêmes manipulations de $I_{3.2}^*$ ci-dessus avec ℓ ne dépend pas de $L_0=1$. Donc

$$\int_{I_\pi}\beta d\theta[R_{2.1}+R_{2.2}]\leq C(l^{-1}+l^{\frac{-(1-s)}{2}}),$$

alors

$$I_{3.3}\leq C_\beta\|g\|_{L^1}\|(w_r^\ell f)_{kj}\|_{L^1}.$$

Finallement on obtient

$$\left(p_{kj}w_r^\ell K(g,\,f)-K(g,\,p_{kj}w_r^\ell f),\,1\right)\leq C_\beta\|g\|\|p_{kj}w_r^\ell f\|_{L^1}.$$

Ce qui achève la démonstration du Lemme 3.2.5.

3.2.2 Fin de la démonstration du Théorème 3.2.1

Maintenant, nous sommes prêts à terminer la démonstration du théorème 3.2.1.
Considérons la combinaison de la décomposition de Littleood-Paley (partition de $\mathbb{R}_\xi$) et la partition de l'unité (partition de $\mathbb{R}_v$).
Prenons la fonction $Sigp_{kj}w_r^{t\ell+2}\in(L^1\vee L^2)(\mathbb{R}_v)$ comme fonction test, et

dénotons par f_{kj} pour $p_{kj}f$ avec

$$p_{kj} = \psi_k(D_v)\phi_j(v),\ \ Sig = sign(p_{kj}w_r^{t\ell+2}f).$$

Alors,

$$Sigp_{kj}w_r^{t\ell+2}\partial_t f = Sigp_{kj}w_r^{t\ell+2}K(f,f),$$

on a, donc,

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^t\int_{\mathbb{R}} Sig(\partial_s p_{kj}w_r^{s\ell+2})f(s,v)dvds\\
&= \|(w_r^{t\ell+2}f)_{kj}(t)\|_{L^1} - \|(w_r^2 f_{kj})(0)\|_{L^1} - \int_0^t\int_{\mathbb{R}} Sigp_{kj}w_r^{s\ell+2}K(f\,,f)dsdv,
\end{aligned}$$

d'autre part,

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^t\int_{\mathbb{R}} Sig\lim_{h\to 0}\frac{[w_r^{(s+h)l+2} - w_r^{s\ell+2}][f(s+h)+f(s)]}{2h}\\
&= \frac{1}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\lim_{h\to 0}\frac{[p_{kj}w_r^{(s+h)l+2}f(s+h) - p_{kj}w_r^{s\ell+2}f(s)]}{h}\\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}} Sig\lim_{h\to 0}\frac{p_{kj}[w_r^{(s+h)l+2} - w_r^{s\ell+2}]f(s) - p_{kj}w_r^{s\ell+2}[f(s+h)-f(s)]}{h}\\
&= \frac{1}{2}\|(w_r^{t\ell+2}f)_{kj}(t)\| - \|(p_{kj}w^2 f)(0)\| - \int_0^t\int_{\mathbb{R}} Sigp_{kj}w_r^{s\ell+2}(\partial_s f)(s)\\
&+ l\int_0^t\int_{\mathbb{R}} Sigp_{kj}\log(w)w_r^{s\ell+2}f,
\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|p_{kj}w_r^{t\ell+2}f(t)\| &= \int_{\mathbb{R}} Sigp_{kj}w_r^{t\ell+2}K(f\,,f)dv + l\int_{\mathbb{R}} Sigp_{kj}\log(w)w_r^{t\ell+2}fdv\\
&= I + J.
\end{aligned}$$

Pour I, on utilise le lemme 3.2.5, on obtient

$$\big(Sigp_{kj}w_r^{\ell}K(g,\,f) - K(g,\,|p_{kj}w_r^{\ell}f|),\,1\big) \leq C_\beta\|g\|_{L^1}\|p_{kj}w_r^{\ell}f\|_{L^1} + \epsilon_2\|\big(w_r^{\ell}f)_{kj}\big)^{\frac{1}{2}}\|_{H^1}^2.$$

Pour J

$$\begin{aligned} J &= l\int_{\mathbb{R}} \big(\log(w)\psi_k - [\log w, \psi_k]\big) Sig(w_r^{s\ell+2} f)_j dv \\ &= l\int_{\mathbb{R}} \log(w)(w_r^{t\ell+2}f)_{kj}dv - l\int_{\mathbb{R}} (\log(w))_{(1)}\psi_k^{(1)} Sig(w_r^{t\ell+2} f)_j dv \\ &- l\int_{\mathbb{R}} R_2 Sig(w_r^{t\ell+2} f)_j dv \\ &= J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned}$$

Pour J_2, on utilise que :

$$\psi_k^{(1)}(\xi) := (2^{-k}\partial_\xi \psi)(\xi) \leq C,$$

et la fonction suivante est décroissante

$$K : 0 \leq x \mapsto \frac{x}{1+x^2} - \log(1+x^2) \leq 0,$$

donc,

$$J_2 \leq C_2 l \int_{\mathbb{R}} \log(\langle w \rangle)|p_{kj} w_r^{t\ell+2} f| dv.$$

Pour J_3, où nous utilisons les mêmes manipulations faites juste au-dessus de $I_{3.3}$, pour obtenir

$$J_3 \leq C_3 l \int_{\mathbb{R}} \log(\langle w \rangle)|p_{kj} w_r^{t\ell+2} f| dv.$$

Donc, pour J, on applique les lemmes 2.3.10 et 2.3.4 en remplaçant g_{kj} par $|p_{kj}w_r^{t\ell+2}f|^{\frac{1}{2}}$, alors on obtient

$$J \leq C_\beta \|p_{kj} w_r^{t\ell+2} f\|_{L^1} + \epsilon \||p_{kj} w_r^{t\ell+2} f|^{\frac{1}{2}}\|_{\dot{H}_1^1}.$$

Maintenant, nous utilisons l'estimation coercive (qui ne change pas) et Lemme 3.2.5, on obtient

$$c_{kj}\|(w_r^{t\ell+2}f)_{kj}\|_{L^1} + \frac{d}{dt}\|(w_r^{t\ell+2}f)_{kj}\|_{L^1} \leq C_0 \|(w_r^{t\ell+2}f)_{kj}\|_{L^1},$$

où :

$$c_{kj} = C^2(2^{2(j+k)} + 2^{-2(j+k)}) + C^3 2^{2k} + C^1(2^{2(1+s)k+2j} + 2^{-2(1+s)k-2j})$$

donc,

$$\frac{d}{dt}(e^{C_{kj}t}\|(w_r^{t\ell+2}f)_{kj}\|_{L^1}) \leq 0,$$

Grâce au lemme de Gronwall, il découle

$$\sum_{k,j=0}^{\infty}\|(w_r^{t\ell+2}f)_{kj}\|_{L^1} \leq \sum_{k,j=0}^{\infty} e^{-C_{kj}t}\|(w_r^2 f_0)_{kj}\|_{L^1},$$

où :

$$C_{k,j} = c_{kj} - C_0.$$

Comme $f_0 \in L^1_2(\mathbb{R})$, en perenant $r \to \infty$, on obtient

$$\sum_{k,j=0}^{\infty}\|(w_r^{t\ell+2}f)_{kj}(t)\| \leq \sum_{k,j=0}^{\infty} e^{-C_{kj}t}\|(w^2 f_0)_{kj}\|_{L^1}, \tag{3.2.4}$$

où :
$\lim_{(k(\text{resp})j))\to\infty} \frac{e^{-C_{k+1,j+1}t}}{e^{-C_{k,j}t}} = 0, \forall j \in \mathbb{N}, (\text{resp } k \in \mathbb{N}),\ \forall l \leq \infty,\ \ \forall t > 0,$ et
$\lim_{(k,j)\to(\infty,\infty)} \frac{e^{-C_{k+1,j+1}t}}{e^{-C_{k,j}t}} = 0, \forall l \leq \infty,\ t > 0.$
donc, la série dans la droite de (3.2.4) est convergente. Par conséquent, celle dans sa gauche est aussi convergente, i.e..

$$\|w_r^{t\ell+2}f\| \leq e^{-C_{0,0}t}\|f_0\|_{L^1_2} \leq \frac{e^{C_0 t}}{e^{2(C^1+C^2)t+C^3t}}\|f_0\|_{L^1_2}, \tag{3.2.5}$$

où C^i, C_0 sont independantes de ℓ.
(3.2.5) signifie que f se trouve dans $L^\infty\big(]0,T_*];\ L^1_{tl+2}(\mathbb{R})\big),\ \forall l \leq +\infty$ et $T_* < +\infty$.
Ce qui achève la preuve du Théorème 3.2.1.

3.3 Production des moments dans L^2

Dans ce paragraphe, on prouve l'estimation sur le gain des moments d'ordre infini dans L^2 pour la solution de l'équation de Kac homogène. On utilise une famille des régularisantes composées des opérateurs pseudo-différentiels.
Dans la suite, on dénote $(\cdot\,,\,\cdot)_{L^2(\mathbb{R}_v)}$, (respectivement $\|\cdot\|_{L^2}$) par $(\cdot\,,\,\cdot)$, (respectivement par $\|\cdot\|$) pour simplifier les notations.

Théorème 3.3.1 *On suppose que la donnée initiale est dans L^1 et que la section efficace satisfait* (2.1.14) *avec $\gamma = 0$. Alors la solution faible du problème de Cauchy* (2.1.12) *est dans $L^\infty\big(]0, T_0]; L^2_\infty(\mathbb{R}_v)\big)$,$\forall t:\ 0 < t < T_0$.*

Théorème 3.3.2 *Le résultat du Théorème 3.3.1 est aussi vrai si on suppose que le noyau de collision est de type de Debye-Yukawa, i.e. β satisfait* (2.1.15).

On a besoin de l'analyse de l'opérateur de Kac.

3.3.1 Analyse de l'opérateur de Kac

Estimation de la Coercivité

Proposition 3.3.3 *On suppose que le noyau collisionnel B satisfait l'hypothèse* (2.1.14), *et que h est une fonction non négative avec $0 \neq h \in L^1$. Alors, il existe des constantes positives $C_{h.i}\, i = \overline{1,5}$ dépendant seulement de B, $\|h\|_{L^1}$, $\|h\|_{L^1_2}$ et $\|h\|_{\dot{L}^1_2}$, telles que*

$$\begin{aligned} & C_{h,1}\|w_r^\ell f\|^2_{\dot{H}_1^{1+s}} + C_{h,2}\|w_r^\ell f\|^2_{\dot{H}_1^1} + C_{h,3}\|w_r^\ell f\|^2_{H^1} + C_{h,4}\|w_r^\ell f\|^2_{H^s} \\ \leq\ & \big(- K(h,\ w_r^\ell f),\ w_r^\ell f\big) + C_{h,5}\|w_r^\ell f\|^2, \end{aligned}$$

pour tous $t \in [0, T], l \in [2, \infty]$, et $f \in L^\infty([0, \infty[; L^1(\mathbb{R}_v))$.

Démonstration. Posons

$$J = \big(- K(h,\ w_r^\ell f),\ w_r^\ell f\big) = - \int_{\mathbb{R}} K(h,\ w_r^\ell f) w_r^\ell f dv,$$

et $w_r^\ell f = g$.
En utilisant le théorèreme de Plancherel et l'identité de Bobylev, on aboutit

à :

$$
\begin{aligned}
J &= -\int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta)\left\{\hat{h}(\xi^-)\hat{g}(\xi^+)-\hat{h}(0)\hat{g}(\xi)\right\}\bar{\hat{g}}(\xi)d\theta d\xi \\
&\geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta)\left\{[\hat{h}(0)-|\hat{h}(\xi^-)|]|\hat{g}(\xi)-\hat{g}(\xi^+)|^2\right\}d\theta d\xi \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta)\left\{[|\hat{h}(\xi^-)|-\hat{h}(0)]|\hat{g}(\xi)-\hat{g}(\xi^+)|^2\right\}d\theta d\xi \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta)\left\{\hat{h}(0)[\hat{g}^2(\xi)-\hat{g}^2(\xi^+)]\right\}d\theta d\xi \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta)\left\{[\hat{h}(0)-|\hat{h}(\xi^-)|]|\hat{g}^2(\xi)+\hat{g}^2(\xi^+)|\right\}d\theta d\xi \\
&= J_1+J_2+J_3+J_4.
\end{aligned}
$$

Pour J_1, en utilisant le lemme 2.2.2, on a :

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta)\left\{[\hat{h}(0)-|\hat{h}(\xi^-)|]|\hat{g}(\xi)-\hat{g}(\xi^+)|^2\right\}d\theta d\xi \\
&\geq C_\beta\int_{\mathbb{R}} C_h|\xi|^{2+2s}|\partial_\xi\hat{g}(\xi)|^2d\xi \\
&= C_{\beta,h}\|w_r^\ell f\|^2_{\dot{H}_1^{1+s}}.
\end{aligned}
$$

Pour J_2, on a :

$$
\begin{aligned}
-J_2 &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta)\left\{[\hat{h}(0)-|\hat{h}(\xi^-)|]|\hat{g}(\xi)-\hat{g}(\xi^+)|^2\right\}d\theta d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}}\int_{I_\pi} \beta(\theta)(\hat{h}(0)+|\hat{h}(\xi^-)|)|\hat{g}(\xi)-\hat{g}(\xi^+)|^2d\theta d\xi \\
&\leq c\int_{\mathbb{R}}\int_{I_\pi} \beta(\theta)\sin^2(\theta/4)(\hat{h}(0)+|\hat{h}(\xi^-)|)|\xi_s\partial_{\xi_s}\hat{g}(\xi_s)|[|\hat{g}(\xi)|+|\hat{g}(\xi^+)|]d\theta d\xi \\
&\leq C_{\epsilon,\beta}\|h\|^2_{L^1}\|w_r^\ell f\|^2_{L^2}+\epsilon\|w_r^\ell f\|^2_{\dot{H}_1^1}.
\end{aligned}
$$

Pour J_3, on a

$$\begin{aligned}
J_3 &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta)\hat{h}(0)[\hat{g}^2(\xi)-\hat{g}^2(\xi^+)]d\theta d\xi \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta)\hat{h}(0)\hat{g}^2(\xi)d\theta d\xi \\
&- \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta)\frac{1}{\cos(\theta/2)}|\hat{g}(\xi^+)|d\theta d\xi^+ \\
&= -C_\beta\|h\|_{L^1}\|w_r^\ell f\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Pour J_4, en utilisant le lemme 2.2.2, on a :

$$\begin{aligned}
J_4 &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta)\left\{[\hat{h}(0)-|\hat{h}(\xi^-)|]|\hat{g}^2(\xi)+\hat{g}^2(\xi^+)|\right\}d\theta d\xi \\
&\geq C_h\int_{\mathbb{R}}|\xi^{2s}||\hat{g}(\xi)+\hat{g}(\xi^+)|d\xi \\
&\geq C_h\left\{\|w_r^\ell f\|_{H^s}^2-\|w_r^\ell f\|_{L^2}^2\right\}.
\end{aligned}$$

Par substitution $J_i,\ i=\overline{1.4}$, dans J, on aboutit à :

$$\begin{aligned}
&C_\beta\|h\|_{L^1}\|w_r^\ell f\|_{\dot{H}_1^{1+s}}^2+C_{f,1}\|\Lambda^s w_r^\ell f\|^2 \\
&\leq \big(-K(h,\ w_r^\ell f),\ w_r^\ell f\big)+C_{h,3}\|w_r^\ell f\|^2+\epsilon\|w_r^\ell f\|_{\dot{H}_1^1}^2.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
I = &\ \Big(-K(h,w_r^\ell f),\ w_r^\ell f\Big) \\
= -&\int_{\mathbb{R}}\int_{I_\pi} B(\theta)h(v_*)w_r^\ell f(v)\left\{w_r'^l f(v')-w_r^\ell f(v)\right\}d\theta dv_* dv \\
= -&\ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{I_\pi} B(\theta)h(v_*)\left\{[w_r'^l f(v')]^2-[w_r^\ell f(v)]^2\right\}d\theta dv_* dv \\
+ &\ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{I_\pi} B(\theta)h(v_*)[w_r^\ell f(v)-w_r'^l f(v')]^2 d\theta dv_* dv \\
= &\ I_1+I_2.
\end{aligned}$$

On a

$$I_1=-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{I_\pi} B(\theta)h(v_*)\left\{[w_r'^l f(v')]^2-[w_r^\ell f(v)]^2\right\}d\theta dv_* dv,$$

et par un changement de variables (lemme de Cancellation i.e.Corollaire 2 [2] dans le cas non Maxwellien seulement) donne :

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{I_\pi} B(\theta)h(v_*)\left\{[w_r'^l f(v')]^2 - [w_r^\ell f(v)]^2\right\} d\theta dv_* dv \\ &= -C_g\|w_r^\ell f\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Pour I_2, posons $g = w_r^\ell f$, alors

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\mathbb{R}}\int_{I_\pi} B)\cos^2(\theta/4)h^*[g(v') - g]^2 d\theta dv_* dv \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{I_\pi} Bh^*(v'-v)^2[(d_v g)(v_s)]^2 d\theta dv_* dv, \end{aligned}$$

prenons en compte,(2.3.19) et (2.3.20). Donc

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\mathbb{R}}\int_{I_\pi} BC_1(\theta)h^*[v(d_v g)(v)]^2 \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} BC_2(\theta)v_*^2 h^*[(d_v g)(v)]^2 d\theta dv_* dv \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} BC_3(\theta)\sin(\theta/2)vv_* h^*[(d_v g)(v)]^2 d\theta dv_* dv \\ &= I_{2.1} + I_{2.2} + I_{2.3}. \end{aligned}$$

Pour $I_{2.3}$, en utilisant le changement de variables $\theta \to -\theta$, on obtient

$$\begin{aligned} I_{2.3} &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} BC_3(\theta)\sin(\theta/2)vv_* h^*[(d_v g)(v)]^2 d\theta dv_* dv \\ &= -\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} BC_3(\theta)\sin(\theta/2)vv_* h^*[(d_v g)(v)]^2 d\theta dv_* dv, \end{aligned}$$

de sorte que $I_{2.3} = 0$.
Pour $I_{2.2}$, on a :

$$\begin{aligned} I_{2.2} &= C_B^1 \int_{\mathbb{R}} v_*^2 h^* dv_* \int_{\mathbb{R}} [(d_v g)(v)]^2 dv \\ &\geq C_B^1\|g\|_{\dot{L}_2^1}\|\Lambda g\|_{L^2}^2 - C_B^1\|g\|_{\dot{L}_2^1}\|g\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Pour $I_{2.1}$, on a :

$$I_{2.1} \geq \frac{1}{2}C_B^1\|h\|_{L^1}\|g\|_{\dot{H}_1^1}^2 - C_B^1\|h\|_{L^1}\|g\|_{L^2}^2,$$

par conséquent

$$I \geq C_B^1 \|h\|_{L^1} \|g\|^2_{\dot{H}^1_1} + C_B^2 \|h\|_{L^1} \|g\|^2_{H^1} - C_B^3 \|h\|_{L^1} \|w_r^\ell f\|_{L^1},$$

où C_B^i sont indépendantes de ℓ.
Sommons $J + I$ on aboutit pour tout $l > 2$ à :

$$\begin{aligned} & C_{h,1} \|w_r^\ell f\|^2_{\dot{H}_1^{1+s}} + C_{h,2} \|w_r^\ell f\|^2_{\dot{H}^1_1} + C_{h,3} \|w_r^\ell f\|^2_{H^1} + C_{h,4} \|w_r^\ell f\|^2_{H^s} \\ & \leq \big(- K(h,\ w_r^\ell f),\ w_r^\ell f \big) + C_{h,5} \|w_r^\ell f\|^2. \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition 3.3.3.

Estimation du commutateur (forme 1)

Proposition 3.3.4 *On suppose que le noyau collisionnel B satisfait l'hypothèse* (2.1.14) *où* (2.1.15) *et que f, h deux sont fonctions non négatives avec $0 \neq h \in L^1$. Alors, il existe une constante C_β qui dépend seulement de β, telle que :*

$$\Big(K(h,\ f) w_r^\ell - K(h,\ w_r^\ell f),\ w_r^\ell f \Big) \leq C_\beta \|h\|_{L^1} \|w_r^\ell f\|^2,$$

pour toute function $w_r^\ell f \in H^1(\mathbb{R}_v)$, tous $0 < t < \infty$ et $l > 2$.
Où $w_r^\ell(v) = \langle v \rangle^l$ et C_β est indépendante de ℓ.

Démonstration. On utilise le changement de variables $(v'_*, \theta) \mapsto (v_*, \frac{\theta}{2})$, on obtient

$$\begin{aligned} J &= \big(K(h,\ f) w_r^\ell - K(h,\ w_r^\ell f),\ w_r^\ell f \big) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{I_\pi} \beta h_* [(w_r'^\ell - w_r^\ell) f w_r'^\ell f' d\theta dv_* dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\Omega^c} \beta h_* (\frac{w_r'^\ell}{w_r^\ell} - 1) w_r^\ell f w_r'^\ell f' d\theta dv_* dv \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\Omega} \beta h_* (\frac{w_r'^\ell}{w_r^\ell} - 1) w_r^\ell f w_r'^\ell f' d\theta dv_* dv, \end{aligned}$$

nous utilisons les mêmes manipulations effectuées dans J sur Ω et sur Ω^c dans le parapraphe précédent, on aboutit à

$$J \leq C_\beta \|h\|_{L^1} \|w_r^\ell f\|^2_{L^2}.$$

Ce qui achève la preuve de la proposition 3.3.4.

Estimation du commutateur (forme 2) On considère maintenant la combinaison de la décomposition de Littlewood-Paley et la partition de l'unité par rapport à la variable v.

Lemme 3.3.5 *On suppose que le noyau de collision β satisfait l'hypothèse* (2.1.14) *ou* (2.1.15) *et que f, h sont deux fonctions non négatives avec : $0 \neq h \in L^1$. Alors, il existe une constante positive $C_{\beta,\epsilon,h}$, dépendant seulement de $\|h\|_{L^1}$, $\|h\|_{L^1_1}$ et $\|h\|_{\dot{L}^1_2}$, telle que pour toute fonction $w_r^\ell f \in L^\infty([0,\infty[_t; H^1(\mathbb{R}_v))$ et $l \in [0,\infty]$, on a*

$$\begin{aligned} \big((w_r^\ell)_{kj} K(h,\, f) - K(h,\, (w_r^\ell f)_{kj}),\ (w_r^\ell f)_{kj}\big)_{L^2} &\leq C_{\beta,\epsilon,h}\|h\|_{L^1}\|(w_r^\ell f)_{kj}\|^2 \\ &+ \epsilon\|(w_r^\ell f)_{kj}\|^2_{H^1}, \end{aligned}$$

où $C_{\beta,\epsilon,h}$ est indépendante de ℓ.

Démonstration. Posons $H_j = (w_r^\ell f)_j$ et $H_{kj} = (w_r^\ell f)_{kj}$, on a

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta h_*[(w_r'^\ell)_{kj} - (w_r^\ell)_{kj}] f.H'_{kj} d\theta dv_* dv \\ &= -\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta h_*[(\psi_k - \psi'_k) w_j^\ell + \psi'_k(\phi_j - \phi'_j) w_r^\ell] f H'_{kj} d\theta dv_* dv \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta h_*[\psi'_k \phi'_j (w_r'^\ell - w_r^\ell) f H'_{kj} d\theta dv_* dv \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Pour I_1, on a

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta h_*(\psi'_k - \psi_k) w_j^\ell f H'_{kj} d\theta dv_* dv \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{I_\pi} \beta \hat{h}(\xi^-)(\psi_k(\xi^{++}) - \psi_k(\xi^+))\psi_k^{-1}(\xi^+)\hat{H}_{kj}(\xi^+)\bar{\hat{H}}_{kj} d\theta d\xi \\ &\leq C_\beta \|h\|_{L^1}\|(w_r^\ell f)_{kj}\|^2_{L^2}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} |\Psi_k^+| &= |(\frac{\psi_k(\xi^{++})}{\psi_k(\xi^+)} - 1)| \\ &= c(\theta)\cos(\theta/2)|\xi|(\partial_\xi \psi_k)(\xi_s^+))\psi_k^{-1}(\xi^+)| \leq Cc(\theta). \end{aligned}$$

Pour I_2, on a

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta h_* \psi_k'(\phi_j' - \phi_j) w_r^\ell f.H_{kj}' d\theta dv_* dv \\
&= C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta h_*(\phi_j' - \phi_j)\phi_j^{-1}\psi_k' H_j.H_{kj}' d\theta dv_* dv \\
&= -C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta h_*[vc(\theta)) + v_*\sin(\theta/2)](\partial_v\phi_j)(v_s)\phi_j^{-1}\Psi_k H_{kj} f.H_{kj}' \\
&= I_{2.1} + I_{2.2},
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
&c(\theta) = (1-\cos(\theta/2)), \\
&v(\partial_v\phi_j)(v_s)\phi_j^{-1} \approx c_s 2^{-j}2^j(\partial_v\phi)(v_s)\phi_j^{-1} \le C, \text{ et} \\
&(\partial_v^2\phi_j)(v_s)\phi_j^{-1} \le C.
\end{aligned}$$

Pour $I_{2.2}$, on utilise le changement de variables $\theta \mapsto -\theta$, de tel sorte

$$\begin{aligned}
v_s &= c_s v - s v_* \sin(\theta/2), \text{ devient } v_s', \ v' \text{ devient } v'', \\
&\text{et} \quad \dot{v}_s' = v' + 2v_*\sin(\theta/2),
\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}
I_{2.2} &= 2\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} c_s\beta\sin^2(\theta/2)v_*^2 h_*(\partial_v^2\phi_j)(v_s)\phi_j^{-1}\psi_k' H_j.H_{kj}' d\theta dv_* dv \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta\sin^2(\theta/2)v_*^2 h_*(\partial_v\phi_j)(v_s')\phi_j^{-1}\Psi_k H_{kj}.(\partial_v H_{kj}')(\dot{v}_s'),
\end{aligned}$$

où d'aprés le théorème de Plancherel et l'identité de Bobylev on a l'OΨD Ψ_k dont le symbole est $\psi_k(\xi^{++})\psi_k^{-1}(\xi^+) \le C$ est borné dans L^2. On obtient

$$I_2 \le \epsilon\|w_r^\ell f\|_{H^1}^2 + (C_\epsilon\|h\|_{L^1_2}^2 + C_\beta\|h\|_{L^1})\|(w_r^\ell f)_{kj}\|_{L^2}^2.$$

Pour I_3, on utilise $\psi_k \phi_j^{-1} \equiv C\phi_j^{-1}\psi_k$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta h_* \psi'_k \phi'_j (w_r'^{\ell} - w_r^{\ell}) f.H'_{kj} d\theta dv_* dv \\
&= C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta h_* (w_r'^{\ell} w_r^{-\ell} - 1)\phi'_j \phi_j^{-1} \Psi_k^2 H_{kj}.H'_{kj} d\theta dv_* dv \\
&- C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta h_* (w_r'^{\ell} w_r^{-\ell} - 1)_{(1)}\phi'_j \phi_j^{-1} \psi_k'^{(1)} H_j.H'_{kj} d\theta dv_* dv \\
&- C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta h_* R_2 \phi_j^{-1} H_j.H'_{kj} d\theta dv_* dv \\
&= I_{3.1} + I_{3.2} + I_{3.3}.
\end{aligned}$$

Pour $I_{3.1}$, on a nous faisons les mêmes techniques utilisées pour J (estimation du commutateur (form 1)), pour $(w_r'^{\ell} w_r^{-\ell} - 1)$

$$\int_{I_\pi} (w_r'^{\ell} w_r^{-\ell} - 1) d\theta \leq C_\beta,$$

donc, on remarque que $\phi'_j \phi_j^{-1} \leq C$ et que, d'aprés le théorème de Plancherel et l'identité de Bobylev, l'operateur $\Psi_k^2(D_v)$, dont le symbol est $\psi_k(\xi^{++})\psi_k(\xi^+)$, est borné dans L^2, alors

$$I_{3.1} \leq C_\beta \|h\|_{L^1} \|(w_r^\ell f)_{kj}\|_{L^2}^2.$$

Pour $I_{3.2}$, par integration, on a

$$\begin{aligned}
I_{3.2} &= C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta h_* (w_r'^{\ell} w_r^{-\ell} - 1)\partial_v(\phi'_j \phi_j^{-1}) \Psi_k^3 H_{kj}.H'_{kj} d\theta dv_* dv \\
&+ C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta h_* (w_r'^{\ell} w_r^{-\ell} - 1)(\phi'_j \phi_j^{-1}) \Psi_k^3 \partial_v H_{kj}.H'_{kj} d\theta dv_* dv \\
&+ C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta h_* (w_r'^{\ell} w_r^{-\ell} - 1)(\phi'_j \phi_j^{-1}) \Psi_k^3 H_{kj}.\cos(\theta/2)\partial_v H'_{kj} d\theta dv_* dv,
\end{aligned}$$

nous utilisons les mêmes manipulations effectuées dans J (l'estimtion du commutateur form 1) pour $(w_r'^{\ell} w_r^{-\ell} - 1)$, où, on remarque que

$$\partial_v(\phi'_j \phi_j^{-1}) \equiv 2^{-j}[\cos(\theta/2)(\partial_v\phi)(v')\phi_j^{-1} - \phi'_j(\partial_v\phi)(v)\phi_j^{-2}] \leq C,$$

et que, d'aprés le théorème de Plancherel et l'identité de Bobylev, l'OΨD $\Psi_k^3(D_v)$ dont le symbol est $(\partial_\xi \psi_k)(\xi^{++})\psi_k^{-1}(\xi^+)$ est borné dans L^2, donc,

$$I_{3.2} \leq C_{\beta,\epsilon} \|h\|_{L^1}^2 \|(w_r^\ell f)_{kj}\|_{L^2}^2 + \epsilon \|(w_r^\ell f)_{kj}\|_{H^1}^2.$$

Pour $I_{3.3}$, on applique les mêmes manipulations utilisées pour $I_{3.3}$ dans le s-paragraphe de la production de L^1_∞ :

$$\begin{aligned}
I_{3.3} &= C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi}\beta h_* R_2(v,\xi)\phi'_j\phi_j^{-1}H_j.H'_{kj}d\theta dv_* dv\\
&= C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi}\beta h_*(w_r'^l w_r^{-\ell}-\cos^l(\theta/2))\phi'_j\phi_j^{-1}\psi'_k H_j.H'_{kj}d\theta dv_* dv\\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi}\beta h_*[(\frac{w_r'^l}{w_r^\ell}-1)+(1-\cos^l(\theta/2))]\phi'_j\phi_j^{-1}\psi'_k H_j.H'_{kj}d\theta dv_* dv\\
&= I_{3.3.1}+I_{3.3.2},
\end{aligned}$$

Pour $I_{3.3.1}$, on utilise les mêmes manipulations faites pour $I_{3.1}$ ci-dessus.
Pour $I_{3.3.2}$, on utilise les mêmes manipulations appliquées pour I_2 dans la preuve de (2.3.12) du Lemme 2.3.4. On obtient,

$$I_{3.3}\le C_{\beta,\epsilon}\|h\|^2_{L^1}\|(w_r^\ell lf)_{kj}\|^2_{L^2}+\epsilon\|(w_r^\ell f)_{kj}\|^2_{H^1}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\big((w_r^\ell)_{kj}K(h,\,f)-K\big(h,\,(w_r^\ell f)_{kj}\big),\,(w_r^\ell f)_{kj}\big)_{L^2}\\
&\le\epsilon\|(w_r^\ell f)_{kj}(t)\|^2_{H^1}+C_{\epsilon,\beta,h}\|(w_r^\ell f)_{kj}(t)\|^2_{L^2}.
\end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve du Lemme 3.3.5.
Maintenant, nous sommes prêts pour prouver Théorème 3.3.1.

3.3.2 Fin de la démonstration du Théorème 3.3.1

Considérons maintenant la combinaison de la décomposition de Littlewood-Paley (partition de $\mathbb{R}_\xi$) et la partition de l'unité (partition de $\mathbb{R}_v$).
Prenons la fonction $\Psi(t,v)=w_r^{t\ell+2}\phi_j\psi_k^2\phi_j w_r^{t\ell+2}f\in L^i(\mathbb{R});\,1\le p<\infty$ comme fonction test, et on dénote $p_{kj}f$ par f_{kj} où on pose :

$$p_{kj}(v,D_v)=\psi_k(D_v)\phi_j(v),\ p_{jk}(v,D_v)=\phi_j(v)\psi_k(D_v)$$

définies dans le paragraphe 1.9. on a :

$$\big(p_{kj}w_r^{t\ell+2}\partial_t f(t,v),\,w_r^{t\ell+2}f)_{kj}\big)_{L^2}=\int_{\mathbb{R}}p_{kj}w_r^{t\ell+2}K(f\,,f)(w_r^{t\ell+2}f)_{kj}dv.$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|(w_r^{t\ell+2}f)_{kj}(t)\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}} p_{kj}w_r^{t\ell+2}K(f\,,f)(w_r^{t\ell+2}f)_{kj}dv\\ &+\ 2l\int_{\mathbb{R}} p_{kj}\log(w)w_r^{t\ell+2}f(w_r^{t\ell+2}f)_{kj}dv = I+J.\end{aligned}$$

Pour la seconde intégrale J, on a :

$$\begin{aligned} J &= l\int_{\mathbb{R}}\log(w)(p_{kj}w_r^{t\ell+2}f).(w_r^{t\ell+2}f)_{kj}dv\\ &- l\int_{\mathbb{R}}(\log(w))_{(1)}(\psi_k^{(1)}\phi_j w_r^{t\ell+2}f).(w_r^{t\ell+2}f)_{kj}dv\\ &- l\int_{\mathbb{R}}R_2\phi_j w_r^{t\ell+2}f)(w_r^{t\ell+2}f)_{kj}dv.\end{aligned}$$

On utilise les mêmes manipulations faites pour J dans le paragraphe précédant où on remplace $\sqrt{|(w_r^{t\ell+2}f)_{kj}|}$ par $(w_r^{t\ell+2}f)_{kj}$, et g_{kj} par $(w_r^{t\ell+2}f)_{kj}$ dans les lemmes 2.3.10 et 2.3.4. On obtient

$$J\le C\|(w_r^{t\ell+2}f)_{kj}\|_{L^2}^2+\epsilon\|(w_r^{t\ell+2}f)_{kj}\|_{\dot H_1^1}^2.$$

Alors,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|(w_r^{t\ell+2}f)_{kj}(t)\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}} p_{kj}w_r^{t\ell+2}K(f\,,f)p_{kj}w^{(tl+2)}f dv + C\|(w_r^{t\ell+2}f)_{kj}\|_{L^2}^2\\ &= I + C\|(w_r^{t\ell+2}f)_{kj}\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Pour I on fait appel à l'estimation du Commutateur (forme 2), i.e.

$$\big(p_{kj}w_r^{\ell}K(g,\ f)-K(g,\ p_{kj}w_r^{\ell}f),\ p_{kj}w_r^{\ell}f\big)_{L^2}\le C_{\beta,g}\|g\|\|p_{kj}w_r^{\ell}f\|_{L^2}^2+\epsilon\|(w_r^{\ell}f)_{kj}\|_{H^1}^2.$$

En utilisant l'estimation de la coercivité (qui ne change pas en remplaçant $w_r^{t\ell+2}f$ par $(w_r^{t\ell+2}f)_{kj}$) la proposition 1.4.7. On obtient

$$\begin{aligned}&c_{kj}\|(w_r^{t\ell+2}f)_{kj}\|_{L^2}^2+\frac{d}{dt}\|(w_r^{t\ell+2}f)_{kj}\|_{L^2},\\ &\le C_0\|(w_r^{t\ell+2}f)_{kj}\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

avec

$$c_{kj}=C^1(2^{2(j+k(1+s))}+2^{-2(j+k(1+s))})+C^3 2^{2k}+C^2(2^{2(k+j)}+2^{-2(k+j)})+C^4 2^{2sk}.$$

Donc,

$$E \equiv \frac{d}{dt}(e^{C_{kj}t}\|(w_r^{t\ell+2}f)_{kj}\|_{L^2}^2) \leq 0,$$

Par le lemme de Gronwall et l'inégalité de Bernstein, on aboutit à :

$$E \equiv \|(w_r^{t\ell+2}f)_{k,j}\|^2 \leq e^{-C_{kj}t}2^{\frac{1}{2}j}\|(f_0)_{k,j}\|_{L^1}^2$$

En prenant la somme sur k, j, il vient :

$$E \equiv \sum_{k,j=0}^{\infty} \|(w_r^{t\ell+2}f)_{kj}\|_{L^2}^2 \leq \sum_{k,j=0}^{\infty} e^{-C_{kj}t}\|(w^2 f_0)_{kj}\|_{L^2}^2,$$

où :
$\|I_r w^2 f_0\|_{L^1} \leq \|w^2 f_0\|_{L^1}$.
Comme $f_0 \in L_2^1(\mathbb{R})$, en prenant $r \to \infty$, on obtient :

$$\sum_{k,j=0}^{\infty} \|(w_r^{t\ell+2}f)_{kj}(t)\|_{L^2}^2 \leq (\sum_{k,j=0}^{\infty} e^{-C_{kj}t}2^{j/2})(\sum_{k,j=0}^{\infty} \|(w^2 f_0)_{kj}\|_{L^1}^2), \qquad (3.3.1)$$

où :

$$\lim_{(k(\mathrm{resp}\, j))\to\infty} \frac{e^{-C_{k+1,j+1}}2^{j+1}}{e^{-C_{k,j}t}2^j} = 0, \forall (j,k) \in \mathbb{N}^2, \quad \forall l \leq \infty, \text{ et } t > 0,$$

$$\lim_{(k,j)\to(\infty,\infty)} \frac{e^{-C_{k+1,j+1}t}2^{j+1}}{e^{-C_{k,j}t}2^j} = 0, \forall l \leq \infty, \ t > 0.$$

Donc la série dans la droite de (3.3.1) est convergente donc celle dans sa gauche est aussi convergente, i.e.

$$\|(w_r^{t\ell+2}f)_{kj}\| \leq e^{-C_{0,0}t}2\|f_0\|_{L_2^1}^2 \leq 2\frac{e^{C_0 t}}{e^{2(C^1+C^2)t+(C^3+C_4)t}}\|f_0\|_{L_2^1}^2, \qquad (3.3.2)$$

où C^i, C_0 sont indépendantes de ℓ.
*Si $2(C^1+C^2)+(C^3+C_4) > C_0$ (le cas usuel) (3.3.2) signifie que f est dans $L^\infty\big(]0,T_*[;\, L_\ell^2(\mathbb{R})\big)$, $\forall l \leq +\infty$ et $T_* < +\infty$.
Ce qui achève la preuve du Théorème 3.3.1.

Chapitre 4

Effet de régularisation au sens de Gevrey sans poids

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on considère la régularité de Gevrey pour les solutions du problème de Cauchy (2.1.12). Plus précisément on étudie la propagation et l'effet de régularisation au sens de Gevrey. On commence par un rappel de la definition de la classe des fonctions de Gevrey.

Définition 4.1.1 *Pour $s \geq 1$, u est dans l'epace des fonctions de Gevrey $G^s(\mathbb{R}^n)$ avec indice s, s'il existe $C > 0$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$*

$$\|D^k u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C^{k+1}(k!)^s,$$

ou de manière equivalente, s'il existe $c_0 > 0$ telle que $e^{c_0 \langle D \rangle^{1/s}} u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, où

$$\langle D \rangle = (1 + |D_v|^2)^{1/2}, \quad \|D^k u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\beta|=k} \|D^\beta u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Rappelons qu'ici on donne l'espace des fonctions dans tout l'espace $\mathbb{R}^n$. Ainsi on peut utiliser la transformation de Fourier et donner une définition équivalente par le multiplicateur de Fourier $e^{c_0 \langle D \rangle^{1/s}}$. Cependant, en général, l'espace des fonctions de la classe de Gevrey G^s est défini localement dans un domaine ouvert de $\mathbb{R}^n$. On peut remplacer la norme de L^2 par la norme de L^p pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.

L'étude de la régularité de Gevrey (propagation et effet de régularisation) avait occupé l'attention de plusieurs auteurs dépuis dixaines années.
On note que pour l'équation de Boltzmann la propagation de la régularité de Gevrey était construite pour les solutions locales par S.Ukai [62]. La propagation de la régularité de Gevrey pour les solutions de l'équation de Kac, est étudiée dans [24] par Desvillettes, en supposant, comme hypothèse suplémentaire, que la donnée initiale est paire.
Le resultat donné ici concerne la propagation et l'effet de la régularisation de Gevrey sans poids, où aucune supposition suplémentaire n'est faite sur la donnée initiale. La propriété de l'effet de régularisation des solutions du problème de Cauchy est supérieure que celle du résultat de [47] où l'équation de Boltzmann linéairisée est prise en considérration. Dans [23] on aboutit à un effet de régularisation d'ultra-analytique pour les équations du problème de Cauchy dans $G^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$: pour l'équation de Landau homogène linéarisée autour de la distrubution Maxwellienne et celle de Fokker-Plank linéarisée.

Le résultat de la régularité de Gevrey peut être énoncé comme suit :

Théorème 4.1.2 *(Lekrine-Xu [43]) On suppose que la donnée initiale* $f_0 \in L^1_{2+2s} \cap L\log L(\mathbb{R})$, *et la section efficace* β *satisfait* (2.1.14) *avec* $0 < s < \frac{1}{2}$. *Si* $f \in L^\infty(]0, +\infty[; L^1_{2+2s} \cap L\log L(\mathbb{R}))$ *est une solution faible non négative du problème de Cauchy* (2.1.12), *alors*

$$f(t, \cdot) \in G^{\frac{1}{2s'}}(\mathbb{R})$$

pour tout $t > 0$, *et tout* $0 < s' < s$.

Théorème 4.1.3 *(Lekrine-Xu [43]) On suppose que la donnée initiale* $g_0 \in L^1_{2+2s} \cap L\log L(\mathbb{R})$ *est radialement symétrique. Soit* $\Phi \equiv 1$ *et* β *satisfait* (2.1.4) *avec* $0 < s < \frac{1}{2}$. *Si* g *est une solution faible, non négative du problème de Cauchy radialement symétrique* (2.1.1) *avec* $g \in L^\infty(]0, +\infty[; L^1_{2+2s} \cap L\log L(\mathbb{R}))$, *alors*

$$g(t, \cdot) \in G^{\frac{1}{2s'}}(\mathbb{R}_v),$$

pour tous $t > 0$ *et* $0 < s' < s$.

On remarque que pour l'équation de Boltzmann spatialement homogène avec une section efficace (S.T.A), on a l'effet de H^∞-régularisation pour les solutions faibles (voir [27, 38, 47]). Si f est une solution faible du Problème de

Cauchy (2.1.1) et la section efficace β satisfait (2.1.4), alors on a $f(t,\cdot) \in H^{+\infty}(\mathbb{R})$ pour tout $0 < t$.
Pour l'étude de la régularité de Gevrey pour les solutions faibles, comme [47, 23], on considère la régularisante de type exponentiel.
Pour $0 < \delta < 1$, $c_0 > 0$ et $0 < s' < s$, on pose

$$G_\delta(t,\, \xi) = \frac{e^{c_0\, t\, \langle \xi \rangle^{2s'}}}{1 + \delta e^{c_0\, t\, \langle \xi \rangle^{2s'}}}$$

D'où

$$\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}, \;\; \xi \in \mathbb{R}.$$

Alors, pour tout $0 < \delta < 1$,

$$G_\delta(t,\, \xi) \in L^\infty(]0, T[\times\mathbb{R}), \tag{4.1.1}$$

et

$$\lim_{\delta \to 0} G_\delta(t,\, \xi) = e^{c_0\, t\, \langle \xi \rangle^{2s'}}. \tag{4.1.2}$$

On dénote par $G_\delta(t,\, D_v)$, le multiplicateur de Fourier dont le symbole est $G_\delta(t,\, \xi)$, tel que :

$$G_\delta\, g(t,\, v) = G_\delta(t,\, D_v) g(t,\, v) = \mathcal{F}_\xi^{-1} \left(G_\delta(t,\, \xi) \hat{g}(t, \xi) \right).$$

Notre but est de prouver la bornéture uniforme (par rapport à $0 < \delta < 1$) du terme $\|G_\delta(t,\, D_v) f(t,\, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}$ pour la solution faible du problème de Cauchy (2.1.12).
Dans la suite, on va utiliser les même notations pour G_δ pour l'opérateur pseudo-differentiel $G_\delta(t, D_v)$ et aussi pour son symbole $G_\delta(t, \xi)$.

Lemme 4.1.4 *Pour tous $0 < \delta < 1, 0 < T < \infty$, et $c_0 > 0$, on a les propriétés suivantes :*
(i) Si f est une solution faible, alors

$$M_\delta f (ou G_\delta f) \in \mathcal{C}\big(]0, T]_t; L^2(\mathbb{R}_v)\big),$$

$$M_\delta^2 f (ou G_\delta^2 f) \in L^\infty\big(]0, T]; H^1\big),$$

(ii) Si $f \in L^\infty\big([0, \infty[; L^1_2\big)$, alors

$$M_\delta^i f (ou \tilde{G}_\delta^i f) \in L^\infty\big(]0, T]; H^1\big),\; i = 1.2$$

où :
$G_\delta(\xi) = \langle \xi \rangle^{-1} G_\delta \;\, w := w(v) = \langle v \rangle^l, l \in \mathbb{R}^+,$ *et* $T < \infty$

La démonstration de ce Lemme est donnée dans l'Annexe.

Lemme 4.1.5 *Soit* $T > 0, c_0 > 0$*, Pour tous* $0 < \delta < 1$, $0 \le t \le T$ *et* $\xi \in \mathbb{R}$*, on a :*

$$|\partial_t G_\delta(t,\xi)| \le c_0 \langle \xi \rangle^{2s'} G_\delta(t,\xi),$$
$$|\partial_\xi G_\delta(t,\xi)| \le 2s'\, c_0\, t\, \langle \xi \rangle^{2s'-1} G_\delta(t,\xi)$$

et

$$\left|\partial_\xi^2 G_\delta(t,\xi)\right| \le C \langle \xi \rangle^{2(2s'-1)} G_\delta(t,\xi)$$

avec $C > 0$*, indépendant de* δ*.*

En effet, on a les foumules suivantes

$$\partial_t G_\delta(t,\xi) = c_0 \langle \xi \rangle^{2s'} G_\delta(t,\xi) \frac{1}{1+\delta e^{c_0 t \langle \xi \rangle^{2s'}}}, \tag{4.1.3}$$

$$\partial_\xi G_\delta(t,\xi) = 2s'\, c_0\, t\, (1+|\xi|^2)^{s'-1} \xi \,\frac{G_\delta(t,\xi)}{1+\delta e^{c_0 t \langle \xi \rangle^{2s'}}}, \tag{4.1.4}$$

et

$$\begin{aligned} \partial_\xi^2 G_\delta(t,\xi) = &\left(2s'\, c_0\, t\, (1+|\xi|^2)^{s'-1} \xi\right)^2 G_\delta(t,\xi)\, \frac{1-\delta e^{c_0 t \langle \xi \rangle^{2s'}}}{\left(1+\delta e^{c_0 t \langle \xi \rangle^{2s'}}\right)^2} \\ &+ [2s'\, c_0\, t \big((1+|\xi|^2)^{s'-1} + 2(s'-1)\xi^2 (1+|\xi|^2)^{s'-2}\big)] \frac{G_\delta(t,\xi)}{1+\delta e^{c_0 t \langle \xi \rangle^{2s'}}}\,. \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Lemme 4.1.6 *Il existe une Constante* $C > 0$ *telle que pour tous* $0 < \delta < 1$ *et* $\xi \in \mathbb{R}$*, on a*

$$|G_\delta(\xi) - G_\delta(\xi \cos\theta)| \le C \sin^2(\theta/2) \langle \xi \rangle^{2s'} G_\delta(\xi\cos\theta)\, G_\delta(\xi \sin\theta), \tag{4.1.6}$$

et

$$\left|\big(\partial_\xi G_\delta\big)(\xi) - \big(\partial_\xi G_\delta\big)(\xi\cos\theta)\right| \le C \sin^2(\theta/2) \langle \xi \rangle^{(4s'-1)^+} G_\delta(\xi\cos\theta) G_\delta(\xi\sin\theta), \tag{4.1.7}$$

où $(4s'-1)^+ = \max\{4s'-1, 0\}$*.*

Démonstration. Pour l'estimation (4.1.6), par la formule de Taylor

$$G_\delta(\xi) - G_\delta(\xi\cos\theta) = \big(\xi - \xi\cos\theta\big) \int_0^1 \big(\partial_\xi G_\delta\big)(\xi\cos\theta + \tau(\xi - \xi\cos\theta)) d\tau$$

D'où $\xi_\tau = \xi\cos\theta + \tau(\xi - \xi\cos\theta)$.
Alors (4.1.4) implique

$$|G_{t,\,\delta}(\xi) - G_\delta(t,\,\xi\cos\theta)| \leq 4s'\,c_0\,t\,|\xi|\,\sin^2(\theta/2)\int_0^1 G_\delta(t,\,\xi_\tau)\langle\xi_\tau\rangle^{2s'-1}d\tau\,.$$

Pour $0 \leq \tau \leq 1$ et $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$,

$$\frac{\sqrt{2}}{2}|\xi| \leq |\xi_\tau| = |\xi\cos\theta + \tau(\xi - \xi\cos\theta)| \leq |\xi|,$$

Ceci implique, pour $0 < 2s' < 1$, qu'il existe $C_{s'} > 0$ telle que

$$\langle\xi_\tau\rangle^{2s'} \leq \langle\xi\rangle^{2s'}, \qquad \langle\xi_\tau\rangle^{2s'-1} \leq C_s\langle\xi\rangle^{2s'-1}.$$

D'autre part, $G_\delta(t,\xi) = G_\delta(t,|\xi|)$ est croissante par rapport à $|\xi|$, étant donné que $\xi > 0$, $\partial_\xi G_\delta(t,\xi) > 0$. Alors,

$$G_\delta(t,\,\xi_\tau) \leq G_\delta(t,\,\xi).$$

En utilisant

$$|\xi|^2 = |\xi\cos\theta|^2 + |\xi\sin\theta|^2,$$

et

$$(1+a+b)^{2s'} \leq (1+a)^{2s'} + (1+b)^{2s'}, \quad (1+\delta e^s)(1+\delta e^\beta) \leq 3(1+\delta e^{s+\beta}),$$

on obtient

$$G_\delta(\xi) \leq 3G_\delta(\xi\,\cos\theta)G_\delta(\xi\,\sin\theta). \tag{4.1.8}$$

Donc,

$$|G_\delta(\xi) - G_\delta(\xi\,\cos\theta)| \leq C\sin^2(\theta/2)\langle\xi\rangle^{2s'}G_\delta(\xi\,\cos\theta)G_\delta(\xi\sin\theta).$$

On a prouvé l'estimation (4.1.6) quand $|\theta| \leq \pi/4$. Si $\pi/4 \leq |\theta| \leq \pi/2$, on a

$$\begin{aligned} &|G_\delta(\xi) - G_\delta(\xi\,\cos\theta)| \leq |G_\delta(\xi)| + |G_\delta(\xi\,\cos\theta)| \leq 2|G_\delta(\xi)| \\ \leq\;\; & 6\;G_\delta(\xi\,\cos\theta)G_\delta(\xi\sin\theta) \leq C\sin^2(\theta/2)\,G_\delta(\xi\,\cos\theta)G_\delta(\xi\sin\theta). \end{aligned}$$

Pour l'estimation (4.1.7), en utilisant(4.1.5), on a si $|\theta| \leq \pi/4$,

$$\begin{aligned} \left|\big(\partial_\xi G_\delta\big)(\xi) - \big(\partial_\xi G_\delta\big)(\xi\cos\theta)\right| &= \left|(\xi - \xi\,\cos\theta)\int_0^1 \big(\partial_\xi^2 G_\delta\big)(\xi_\tau)d\tau\right| \\ &\leq C|\xi|\,\sin^2(\theta/2)\,\langle\xi\rangle^{2(2s'-1)}\int_0^1 G_\delta(\xi_\tau)d\tau \\ &\leq C\,\sin^2(\theta/2)\,\langle\xi\rangle^{4s'-1}G_\delta(\xi\sin\theta)G_\delta(t,\xi\cos\theta). \end{aligned}$$

Le cas $\pi/4 \leq |\theta| \leq \pi/2$ est similaire à (4.1.6). Donc, on a prouvé le lemme 4.1.5.

4.2 Propagation de la régularité de Gevrey

Dans ce paragraphe, on montre la propagation de la régularité de Gevrey en utilisant la méthode de [47].

Théorème 4.2.1 *On suppose que* $f_0 \in L^1_2 \cap L\log L(\mathbb{R})$, *et que la section efficace* β *satisfait* (2.1.14) *avec* $0 < s < 1$. *Si* $f_0 \in G^{\frac{1}{s}}(\mathbb{R})$ *et* $f \in L^\infty(]0,+\infty[; L^1_2 \cap L\log L(\mathbb{R}))$ *est une solution faible du problème de Cauchy* (2.1.12), *donc*

$$f(t,\cdot) \in G^{\frac{1}{s}}(\mathbb{R})$$

pour tous $t > 0$, $0 < s < 1$,

Remarque 4.2.2 *Ce résultat est démontré [24], avec l'hypothèse que* f_0 *est paire donc* f *est aussi (comme* f *est radialement symétrique) .*

Théorème 4.2.3 *[24] On suppose que* f_0 *est une fonction non négative paire qui satisfait*

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left(|\hat{f}_0(\xi)| e^{c_1\langle\xi\rangle^{1/s}}\right) < +\infty,$$

pour tout $c_1 > 0$ *et que la section efficace* β *satisfait* (2.1.14) *avec* $0 < s < 1$. *Alors, la solution du problème de Cauchy* (2.1.14) *satisfait* $f(t,\cdot) \in G^s(\mathbb{R})$ *pour tout* $t \geq 0$.

Pour montrer ce résultat en utilisant la méthode de régularisantes [47], on considère la suite des opérateurs régularisantes suivantes :

$$G_\delta(\xi) = \frac{e^{c_0\langle\xi\rangle^s}}{1+\delta e^{c_0\langle\xi\rangle^s}}.$$

L'estimation de la coercivité

Proposition 4.2.4 *On suppose que le noyau de collision* β *satisfait l'hypothèse* (2.1.14) *et que* h *est une fonction non négative avec* $0 \neq h \in L^1_2 \cap L\log L$. *Alors, il existe des constantes positives* $C_{h.i}$ $i = \overline{0,3}$ *dépendant seulement de* β, $\|h\|_{L^1}$, $\|h\|_{L^1_1}$, $\|h\|_{\dot{L}^1_2}$ *et* $\|h\|_{L\log L}$, *telles que pour toute fonction convenable* $f \in L^1_2 \cap L\log L$ *on a :*

$$\begin{aligned} & C^1_\beta\|h\|_{L^1}\|G_\delta f\|^2_{\dot{H}^1_1} + C_{h,2}\|\Lambda^s G_\delta f\|^2 + C^3_\beta\|h\|_{\dot{L}^1_2}\|G_\delta f\|^2_{H^1} \\ \leq & \left(-K(h,\ G_\delta f),\, G_\delta f\right) + C_{h,4}\|G_\delta f\|^2, \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

où $\Lambda = (1+|D_v|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Démonstration. Posons

$$J = \big(-K(h,\,G_\delta f),\,G_\delta\big) = -\int_{\mathbb{R}} K(h,\,G_\delta f) G_\delta w_r^\ell f dv.$$

On utilise le théorème de Plancherel et l'identité de Bobylev, en posant $G_\delta \hat{f}(\xi) = F(\xi)$, on aboutit à :

$$\begin{aligned}
J &= -\int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta)\left\{\hat{h}(\xi^-)(G_\delta\hat{f})(\xi^+) - \hat{h}(0)(G_\delta\hat{f})(\xi)\right\}\bar{F}(\xi)d\theta d\xi \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta)\left\{\hat{h}(0)|F(\xi)-F(\xi^+)|^2\right\}d\theta d\xi \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta)\hat{h}(0)[|F(\xi)|^2 - |F(\xi^+)|^2]d\theta d\xi \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta)[\hat{h}(0)-\hat{h}(\xi^-)]F(\xi^+)\bar{F}(\xi)d\theta d\xi \\
&= J_1 + J_2 + J_3.
\end{aligned}$$

Pour J_1, on a :

$$\begin{aligned}
J_1 &\geq C_\beta \frac{1}{C_\tau^2}\int_{\mathbb{R}} C_h|\xi|^2|\partial_\xi F(\xi)|^2 d\xi \\
&= C_\beta\|h\|_{L^1}\|G_\delta f\|^2_{\dot{H}^1_1}.
\end{aligned}$$

Pour J_2, un changement de variables $\xi^+ \mapsto \xi$, donne

$$\begin{aligned}
J_2 &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta)(1-\frac{1}{\cos(\theta/2)}\hat{h}(0)|F(\xi)|^2 d\theta d\xi \\
&\geq -C_\beta\|h\|_{L^1}\int_{\mathbb{R}}|F(\xi)|^2 d\xi \\
&= -C_\beta\|h\|_{L^1}\|G_\delta f\|^2_{L^2}.
\end{aligned}$$

Pour J_3, on a

$$
\begin{aligned}
J_3 &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta)\hat{h}(0) - \hat{h}(\xi^-)]|F(\xi)|^2 d\theta d\xi \\
&- \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta)[\hat{h}(0) - \hat{h}(\xi^-)][F(\xi) - F(\xi^+]\bar{F}(\xi) d\theta d\xi \\
&= J_{3.1} + J_{3.2}.
\end{aligned}
$$

Pour $J_{3.1}$, on utilise le lemme 2.3.7 pour obtenir :

$$
J_{3.1} \geq C_h \|G_\delta f\|^2_{H^s} - C_h \|G_\delta f\|^2_{L^2}.
$$

De même, on a :

$$
\begin{aligned}
J_{3.2} &\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta)[\hat{h}(0) + |\hat{h}(\xi^-)|][F(\xi) - F(\xi^+]\bar{F}(\xi) d\theta d\xi \\
&\leq C_{\beta,\epsilon}\|h\|^2_{L^1}\|G_\delta f\|^2_{L^2} + \epsilon\|G_\delta f\|^2_{\dot{H}^1_1}.
\end{aligned}
$$

D'autre part, on a

$$
\begin{aligned}
I &= -\big(K(h, G_\delta f),\, G_\delta f\big) = -\int_{\mathbb{R}^2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \beta(\theta) h_* [G'_\delta f' - G_\delta f] G_\delta f d\theta dv_* dv \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \beta(\theta) h_* (v' - v)^2 [\partial_{v_s} G_\delta f(v_s)]^2 d\theta dv_* dv_s \\
&- \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \beta(\theta) h_* [(G_\delta f(v'))^2 - (G_\delta f(v))^2] d\theta dv_* dv,
\end{aligned}
$$

où, prenons en considération (2.3.19) et (2.3.20). On fait le changement de variables $v_s \mapsto v$, pour avoir :

$$
\begin{aligned}
I &= C_{1,\beta}\|h\|_{L^1}\int_{\mathbb{R}} (v d_v G_\delta f)^2 dv + C_{2,\beta}\int_{\mathbb{R}} h_* v_*^2 (d_v G_\delta f)^2 dv \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \beta(\theta) C_{3,s}(\theta)\sin(\theta/2) h_* v v_* [\partial_v G_\delta f(v)]^2 d\theta dv_* dv \\
&- \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \beta(\theta) h_* [(G_\delta f(v'))^2 - (G_\delta f(v))^2] d\theta dv_* dv \\
&= I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}
$$

On fait le changement de variables $\theta \mapsto -\theta$ dans I_2 pour obtenir $I_2 = 0$. D'où

$$\begin{aligned} I &= C_{1,\beta}\|h\|_{L^1}\|G_\delta f\|^2_{\dot H^1_1} + C_{2,\beta}\|h\|_{\dot L^1_2}\|G_\delta f\|^2_{H^1} \\ &- C_{2,\beta}(\|h\|_{\dot L^1_2} + \|h\|_{L^1})\|G_\delta f\|^2_{L^2}. \end{aligned}$$

Par substitution $J_i,\ i = \overline{1.3}$ (respectivement I_1) dans J (respectivement dans I), on aboutit à :

$$\begin{aligned} & C^1_\beta\|h\|_{L^1}\|G_\delta f\|^2_{\dot H^1_1} + C_{h,2}\|\Lambda^s G_\delta f\|^2 + C^3_\beta\|h\|_{\dot L^1_2}\|G_\delta f\|^2_{H^1} \\ & \leq \big(-K(h,\ G_\delta f),\ G_\delta f\big) + C_{h,4}\|G_\delta f\|^2, \end{aligned}$$

où $C_{h.i}, i = \overline{1.4}$ dépendent de $\|h\|_{L^1_2}$, $\|h\|_{L^1}$ et β, mais pas de δ. Ceci achève la démonstration de la proposition 4.2.4.

L'estimation du commutateur

Proposition 4.2.5 *On suppose que le noyau de collision β satisfait* (2.1.14) *ou* (2.1.15) *et que h est une fonction non négative avec $0 \neq h \in L^1_2 \cap L\log L$. Alors, il existe une constante positive $C_{\epsilon,\beta}$ qui dépend seulement de β, $\|h\|_{L^1}$, $\|h\|_{L^1_2}$ et $\|h\|_{L\log L}$ telle que :*

$$\big(G_\delta K(h,f) - K(h, G_\delta f),\ G_\delta f\big) \leq \epsilon'\|G_\delta f\|^2_{H^s} + C_{\epsilon',\beta,h}\|G_\delta f\|^2,$$

pour toute $f \in L^\infty([0,\infty[_t; L^1(\mathbb{R}_v))$.

Démonstration. Remarquons que :
$v' = v\cos(\theta/2) - v_*\sin(\theta/2)$, on a $|D_{v'}| = |\cos(\theta/2)||D_v|$.
Posons
$I = \big(G_\delta K(h,\ f) - K(h,\ G_\delta f),\ G_\delta f\big)$.
Dénotons $G_\delta(v)$ (respectivement $G_\delta(v'), f(v), f(v'), f^*, f(v'_*)$) par G_δ (respectivement $G'_\delta, f, f', f_*, f'_*$). on utilise le changement de variables $(v, v_*, v', v'_*) \mapsto (v', v'_*, v, v_*)$, en posant $G^+_\delta(D_v) = G_\delta(\cos(\theta/2)D_v)$, on a :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta)[G'^{+}_\delta h'_* f' - h'_* G'_\delta f']G_\delta f(v)d\theta dv_* dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta)h_*(G^+_\delta - G_\delta)fG'_\delta f' d\theta dv_* dv. \end{aligned}$$

On a :

$$|G_\delta(\xi^+) - G_\delta(\xi)| \leq c_0 s(1-\cos(\theta/2))\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\langle\xi\rangle^s G_\delta(\xi).$$

Utilisons le théorème de Plancherel et l'indentité de Bobylev, en dénotant par ξ^+, (respectivement $\xi^{++}, \xi^-, \xi_+,\ \xi_+^-, v^+$) pour $\xi\cos(\theta/2)$, (respectivement $\xi(\cos(\theta/2))^2,\ \xi\sin(\theta/2), \frac{\xi}{\cos(\theta/2)}, \xi\frac{\sin(\theta/2)}{(\cos(\theta/2)}, v\cos(\theta/2))$. Il vient :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi}\beta(\theta)h_*[G_\delta(D_{v^+}) - G_\delta(D_v)]fG'_\delta f(v')d\theta dv_* dv \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{I_\pi}\beta(\theta)h(\xi^-)[G_\delta(\xi^{++}) - G_\delta(\xi^+)]\hat{f}(\xi^+)G_\delta\bar{\hat{f}}(\xi)d\theta d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{I_\pi}\beta(\theta)h(\xi_+^-)[G_\delta(\xi^+) - G_\delta(\xi)]\hat{f}(\xi)[G_\delta\bar{\hat{f}}(\xi_+)]\frac{1}{\cos(\theta/2)}d\theta d\xi_+ \\ &\leq C_{\beta,\epsilon}\|h\|_{L^1}^2\|G_\delta f(v)\|_{L^2}^2 + \epsilon\|\Lambda^s G_\delta f(v)\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Donc,

$$\big(G_\delta K(h,f) - K(h,G_\delta f),\ G_\delta f\big) \leq \epsilon\|w^\ell G_\delta f\|_{H^s}^2 + C_{\epsilon,\beta,h}\|G_\delta f\|^2.$$

où $C_{\epsilon,\beta,h}$ dépend de $\|h\|_{L^1}$ et de β, mais pas de δ.
Ce qui achève la démonstration de la proposition 4.2.5.

Fin de la démonstration du Théorème 4.2.1

Considérons la suite régularisante $\Psi(t,v,D_v) = G_\delta^2(D_v)(f(t,v)$, comme fonction test, il vient :

$$\partial_t\|G_\delta f(t,v)\|_{L^2}^2 = 2\int G_\delta K(f,f)G_\delta f(t,v)dv,$$

et donc,

$$\begin{aligned} 2\int G_\delta K(f,f)G_\delta f(t,v)dv &= \partial_t\|G_\delta f(t,v)\|_{L^2}^2 - 2\int K(f,G_\delta f)G_\delta f(t,v)dv \\ = \ 2\int [G_\delta K(f,f)G_\delta f(t,v) &- K(f,G_\delta f)G_\delta f(t,v)dv. \end{aligned}$$

On utilise l'estimation de la coercivité et celle du commutateur, on obtient :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}C_{h,1}\|G_\delta f\|_{\dot{H}_1^1}^2 + C_{h,2}\|G_\delta f\|_{H^1}^2 + C_{h,3}\|G_\delta f\|_{H^s}^2 + \\ &+\partial_t\|G_\delta f(t,v)\|_{L^2}^2 \leq C_0\|G_\delta f\|^2 :\ C_{\epsilon,\beta,h} + C_{h,4} = C_0. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme de Gronwall, on aboutit à :

$$\|G_\delta f(t)\|^2 \leq e^{C_0 t}\|G_\delta f_0\|^2,$$

on fait $\delta \to 0$, on obtient

$$\|exp(c_0\langle\xi\rangle^s)f\|^2_{L^2} \leq e^{C_0 t}\|exp(c_0\langle\xi\rangle^s)f_0\|^2_{L^2},$$

où C est indépendante de δ.
Ce qui termine la preuve du théorème 4.2.1).

4.3 Effet de régularisation

4.3.1 Analyse de Fourier de l'opérateur de Kac

On s'intéresse maintenant à l'étude de l'analyse de Fourier de l'opérateur collisionnel de Kac. C'est l'étape clef pour l'analyse de la régularité des solutions faibles.

L'estimation coercivité

Proposition 4.3.1 *On suppose que la section efficace est sans troncature angulaire, et satisfait l'hypothèse* (2.1.14). *Soit* $f \geq 0, f \neq 0, f \in L^1_2(\mathbb{R}) \cap L\log L(\mathbb{R})$. *Alors, il existe une constante* $c_f > 0$, *qui dépend seulement de* $\beta, \|f\|_{L^1_2}$, *et* $\|f\|_{L\log L}$, *telle que*

$$-\big(K(f,\, g),\ g\big) \geq c_f\|g\|^2_{H^s(\mathbb{R}_v)} - C\|f\|_{L^1}\|g\|^2_{L^2}, \tag{4.3.1}$$

pour toute fonction $g \in L^1_2(\mathbb{R}) \cap L\log L(\mathbb{R})$.

On rappelle la formule faible des opérateurs de collision suivante :

$$\big(K(f,\, g),\ h\big) = \iint_{\mathbb{R}^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta)f(v_*)g\big(h(v') - h(v)\big)d\theta dv_* dv,$$

pour des fonctions convenables f, g, h avec valeurs réelles. Alors

$$\begin{aligned}\big(-K(f,\, g),\ g\big) &= \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta)f(v_*)\big(g(v') - g(v)\big)^2 d\theta dv_* dv \\ &\quad -\frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta)f(v_*)\big(g(v')^2 - g^2(v)\big)d\theta dv_* dv\,.\end{aligned}$$

Le second terme dans le membre droit peut être estimé en utilisant le lemme de Cancellation de [1]. Mais, dans le cas Maxwellien, (il suffit par un changement de variables approprié,) on a,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\iint_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\beta(\theta)f(v_*)\big(g(v')^2-g^2\big)d\theta dv_* dv\right| \\
=&\ \left|\frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\beta(\theta)f(v_*)g^2\big(\frac{1}{\cos\theta}-1\big)d\theta dv_* dv\right| \\
\leq&\ C\iint_{\mathbb{R}^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\big|\sin(\theta)\big|^{-1-2s}\Big|\sin\big(\frac{\theta}{2}\big)\Big|^2|f(v_*)|g^2 d\theta dv_* dv \\
\leq&\ C\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^2}^2 .
\end{aligned}$$

Le terme coercif dans H^s est déduit du terme positif suivant

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\beta(\theta)f(v_*)\big(g(v')-g(v)\big)^2 d\theta dv_* dv.$$

Ici, on a besoin de la formule de Bobylev, i.e. la transformation de Fourier de l'opérateur de collision :

$$\mathcal{F}\big(K(f,\,g)\big)(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\beta(\theta)\left\{\hat{f}(\xi\,\sin\theta)\hat{g}(\xi\,\cos\theta)-\hat{f}(0)\hat{g}(\xi)\right\}d\theta\,, \tag{4.3.2}$$

pour des fonctions convenables f et g. (voir [1, 3, 47]). D'après cette formule, on peut obtenir aussi l'estimation de la bornéture supérieure (voir [38, 47]). Pour $m,\ell\in\mathbb{R}$, et pour des fonctions convenables f, g, on a

$$\|K(f,\,g)\|_{H^m_\ell(\mathbb{R}_v)}\leq C\|f\|_{L^1_{\ell^++2s}(\mathbb{R}_v)}\|g\|_{H^{m+2s}_{(\ell+2s)^+}(\mathbb{R}_v)}\,, \tag{4.3.3}$$

où $s^+=\max\{s,0\}$.

L'estimation du commutateur

Proposition 4.3.2 *On suppose que* $0<s'<1/2$*, Soient* $f,g\in L^2_1(\mathbb{R}_v)$ *et* $h\in H^1(\mathbb{R}_v)$*. On a :*

$$\begin{aligned}
&\big|\big(G_\delta\,K(f,\,g),\ h\big)-\big(K(f,\,G_\delta\,g),\ h\big)\big| \\
&\leq C\,\|G_\delta\,f\|_{L^2_1(\mathbb{R})}\,\|G_\delta\,g\|_{H^{s'}(\mathbb{R})}\|h\|_{H^{s'}(\mathbb{R})},
\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

et

$$
\begin{aligned}
&\Big|\big((v\,G_\delta)\,K(f,\,g),\ h\big)-\big(K(f,\,(v\,G_\delta)\,g),\ h\big)\Big|\\
&\le C\,\Big(\|f\|_{L^1_1(\mathbb{R})}+\|G_\delta\,f\|_{L^2_1(\mathbb{R})}\Big)\,\|G_\delta\,g\|_{H^{s'}_1(\mathbb{R})}\|h\|_{H^{s'}(\mathbb{R})}.
\end{aligned}
\tag{4.3.5}
$$

Démonstration. Par définition, on a pour une fonction convenable F.

$$
\mathcal{F}(G_\delta\,F)(\xi)=G_\delta(t,\xi)\hat{F}(\xi), \tag{4.3.6}
$$

et

$$
\mathcal{F}((v\,G_\delta)\,F)(\xi)=i\partial_\xi\big(G_\delta\,\hat{F}\big)(\xi)=i(\partial_\xi G_\delta)(\xi)\,\hat{F}(\xi)+iG_\delta(\xi)\,(\partial_\xi\hat{F})(\xi). \tag{4.3.7}
$$

En utilisant la formule de Bobylev et le théorème de Plancherel, on obtient

$$
\begin{aligned}
&(2\pi)^{1/2}\left\{\big(G_\delta\,K(f,\,g),\ h\big)-\big(K(f,\,G_\delta\,g),\ h\big)\right\}\\
&=\int_{\mathbb{R}_\xi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\beta(\theta)G_\delta(\xi)\Big\{\hat{f}(\xi^-)\hat{g}(\xi^+)-\hat{f}(0)\hat{g}(\xi)\Big\}d\theta\,\bar{\hat{h}}(\xi)d\xi\\
&-\int_{\mathbb{R}_\xi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\beta(\theta)\Big\{\hat{f}(\xi^-)\,\big(\mathcal{F}(G_\delta\,g)\big)(\xi^+)-\hat{f}(0)\big(\mathcal{F}(G_\delta\,g)\big)(\xi)\Big\}d\theta\,\bar{\hat{h}}(\xi)d\xi\\
&=\int_{\mathbb{R}_\xi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\beta(\theta)\hat{f}(\xi\,\sin\theta)\Big\{G_\delta(\xi)-G_\delta(\xi^+)\Big\}\hat{g}(\xi^+)\,\bar{\hat{h}}(\xi)\,d\theta\,d\xi\,.
\end{aligned}
$$

Cette formule peut être justifiée par l'approximation de la troncature angulaire du noyau collisionnel, $\beta(\theta)$. Alors, (4.1.6), et (2.1.16) impliquent

$$
\begin{aligned}
&\Big|\big(G_\delta\,K(f,\,g),\ h\big)-\big(K(f,\,G_\delta\,g),\ h\big)\Big|\\
&\le C\int_{\mathbb{R}_\xi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\beta(\theta)\sin^2(\theta/2)|G_\delta(\xi\,\sin\theta)\,\hat{f}(\xi\,\sin\theta)|\\
&\quad\times|G_\delta(\xi\,\cos\theta)\,\hat{g}(\xi\,\cos\theta)|\,\langle\xi\rangle^{2s'}\,|\hat{h}(\xi)|\,d\theta\,d\xi\\
&\le C\||G_\delta\,\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_\xi)}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\beta(\theta)\sin^2(\theta/2)\\
&\quad\times\left(\int_{\mathbb{R}_\xi}\langle\xi\rangle^{2s'}\,|G_\delta(\xi\,\cos\theta)\hat{g}(\xi\,\cos\theta)|^2\,d\xi\right)^{1/2}\|h\|_{H^{s'}(\mathbb{R})}\,d\theta\\
&\le C\||G_\delta\,f\|_{L^1(\mathbb{R}_v)}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\beta(\theta)\frac{\sin^2(\theta/2)}{|\cos\theta|^{1/2}}d\,\theta\,\|\,\langle\,\cdot\,\rangle^{s'}\,G_\delta\hat{g}\|_{L^2(\mathbb{R}_\xi)}\,\|h\|_{H^{s'}(\mathbb{R})}\\
&\le C\||G_\delta\,f\|_{L^2_1(\mathbb{R}_v)}\|G_\delta\,g\|_{H^{s'}(\mathbb{R})}\,\|h\|_{H^{s'}(\mathbb{R})}\,,
\end{aligned}
$$

où on a utilisé l'immersion continue suivante :

$$L^2_s(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}), \quad s > 1/2.$$

On a prouvé (4.3.2).
Pour traiter (4.3.5), en utilisant (4.1.7), par similarité, on a

$$
\begin{aligned}
&(2\pi)^{1/2}\left\{\big((v\,G_\delta)\,K(f,\,g),\ h\big) - \big(K(f,\,(v\,G_\delta)\,g),\ h\big)\right\} = \\
&= \int_{\mathbb{R}_\xi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta)\Big\{ i\partial_\xi\Big(G_\delta(\xi)\hat f(\xi\,\sin\theta)\hat g(\xi\,\cos\theta)\Big) \\
&- \hat f(\xi\,\sin\theta)\mathcal{F}\big((v\,G_\delta)\,g\big)(\xi\,\cos\theta)\Big\}\ \overline{\hat h(\xi)}\ d\xi\,d\theta \\
&= i\int_{\mathbb{R}_\xi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta)\,\sin\theta\,(\partial_\xi\hat f)(\xi\,\sin\theta)G_\delta(\xi)\hat g(\xi\,\cos\theta)\ \overline{\hat h(\xi)}\ d\xi\,d\theta \\
&+ i\int_{\mathbb{R}_\xi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta)\hat f(\xi\,\sin\theta)\Big\{\partial_\xi\big(G_\delta(\xi)\hat g(\xi\,\cos\theta)\big) - \big(\partial_\xi\,(G_\delta\,\hat g)(\xi\,\cos\theta)\Big\}\ \overline{\hat h(\xi)}\ d\xi\,d\theta \\
&=\ (I) + (II).
\end{aligned}
$$

Pour le terme (I), on a

$$
\begin{aligned}
|(I)| \le& \int_{\mathbb{R}_\xi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta)\,|\sin\theta|\,|(\partial_\xi\hat f)(\xi\,\sin\theta)|\ \big|G_\delta(\xi\,\cos\theta)\hat g(\xi\,\cos\theta)\big|\ \big|\overline{\hat h(\xi)}\big|\ d\xi\,d\theta \\
+& \int_{\mathbb{R}_\xi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta)\,|\sin\theta|\,|(\partial_\xi\hat f)(\xi\,\sin\theta)|\ \Big|G_\delta(\xi) - G_\delta(\xi\,\cos\theta)\Big||\hat g(\xi\,\cos\theta)|\ \big|\overline{\hat h(\xi)}\big|\ d\xi\,d\theta \\
\le&\ I_1 + I_2.
\end{aligned}
$$

D'abord, (2.1.16) avec l'hypothèse $0 < s < 1/2$ implique que :

$$
\begin{aligned}
I_1 &\le \|\partial_\xi\hat f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_\xi)}\int_{\mathbb{R}_\xi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta)|\sin\theta|\ \big|G_\delta(\xi\,\cos\theta)\,\hat g(\xi\,\cos\theta)\big|\ \big|\hat h(\xi)\big|\ d\xi\,d\theta \\
&\le C\|f\|_{L^1_1(\mathbb{R}_v)}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta)\frac{|\sin\theta|}{|\cos\theta|^{1/2}}\,d\theta\ \ \|\hat h\|_{L^2(\mathbb{R}_\xi)} \\
&\qquad\qquad \times\Big(\int_{\mathbb{R}_\xi}\big|G_\delta(\xi\,\cos\theta)\,\hat g(\xi\,\cos\theta)\big|^2 d(\xi\,\cos\theta)\Big)^{1/2} \\
&\le C\|f\|_{L^1_1(\mathbb{R}_v)}\|G_\delta\,g\|_{L^2(\mathbb{R}_v)}\,\|h\|_{L^2(\mathbb{R}_v)}\,.
\end{aligned}
$$

pour I_2, en utilisant (4.1.6) on a les estimations suivantes : aussi vraies Pour $0 < s < 1$:

$$
\begin{aligned}
I_2 \leq & \int_{\mathbb{R}_\xi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) |\sin\theta| \, \sin^2(\theta/2) \, |G_\delta(\xi \, \sin\theta)(\partial_\xi \hat{f})(\xi \, \sin\theta)| \\
& \times \, \left| G_\delta(\xi \, \cos\theta) \, \hat{g}(\xi \, \cos\theta) \right| \, \langle\xi\rangle^{2s'} \left| \hat{h}(\xi) \right| \, d\xi \, d\theta \\
& \leq C \| \langle \cdot \rangle^{s'} G_\delta \, \hat{g} \|_{L^\infty(\mathbb{R}_\xi)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \frac{|\sin\theta| \, \sin^2(\theta/2)}{|\sin\theta|^{1/2}} \, d\theta \, \|h\|_{H^{s'}(\mathbb{R}_v)} \\
& \times \Big(\int_{\mathbb{R}_\xi} \left| G_\delta(\xi \, \sin\theta) \, (\partial_\xi \hat{f})(\xi \, \sin\theta) \right|^2 d(\xi \, \sin\theta) \Big)^{1/2} \\
& \leq C \| \langle D_v \rangle^{s'} G_\delta \, g \|_{L^1(\mathbb{R}_v)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \frac{|\sin\theta| \, \sin^2(\theta/2)}{|\sin\theta|^{1/2}} \, d\theta \, \|h\|_{H^{s'}(\mathbb{R}_v)} \\
& \times \Big(\int_{\mathbb{R}_\xi} \left| G_\delta(\xi \, \sin\theta) \, (\partial_\xi \hat{f})(\xi \, \sin\theta) \right|^2 d(\xi \, \sin\theta) \Big)^{1/2} \\
& \leq C \| G_\delta \, g \|_{H_1^{s'}(\mathbb{R}_v)} \| G_\delta \, (v \, f) \|_{L^2(\mathbb{R}_v)} \, \|h\|_{H^{s'}(\mathbb{R}_v)} \, .
\end{aligned}
$$

De plus, pour une fonction convenable F, on a

$$
G_\delta \, (v \, F) = v \, G_\delta \, F + [G_\delta, \; v] \, F,
$$

et

$$
\mathcal{F}\big([G_\delta, \; v] \, F\big)(\xi) = i(\partial_\xi G_\delta)(\xi) \hat{F}(\xi).
$$

Alors (4.1.4) implique que, Pour $0 < 2s' < 1$, on a

$$
\| G_\delta \, (v \, F) \|_{H^s(\mathbb{R}_v)} \leq C \| G_\delta \, F \|_{H_1^s(\mathbb{R}_v)} \tag{4.3.8}
$$

pour tout $s \geq 0$. Alors,

$$
|(I)| \leq C \left\{ \|f\|_{L_1^1(\mathbb{R}_v)} + \|G_\delta \, f\|_{L_1^2(\mathbb{R}_v)} \right\} \|G_\delta \, g\|_{H_1^{s'}(\mathbb{R}_v)} \, \|h\|_{H^{s'}(\mathbb{R}_v)} \tag{4.3.9}
$$

D'autre part, pour (II), on a

$$
\begin{aligned}
& \partial_\xi \big(G_\delta(\xi) \hat{g}(\xi \, \cos\theta) \big) - \big(\partial_\xi \, (G_\delta \, \hat{g}) (\xi \, \cos\theta) = \\
& = \big\{ G_\delta(\xi) - G_\delta(\xi \, \cos\theta) \big\} \big(\partial_\xi \hat{g} \big) (\xi \, \cos\theta) \\
& + G_\delta(\xi) \big(\cos\theta - 1 \big) (\partial_\xi \hat{g}(\xi \, \cos\theta) + \\
& + \big\{ (\partial_\xi G_\delta)(\xi) - (\partial_\xi G_\delta)(\xi \, \cos\theta) \big\} \; \hat{g}(\xi \, \cos\theta) \\
& = A_1 + A_2 + A_3.
\end{aligned}
$$

et donc,

$$|(II)| \leq C \int_{\mathbb{R}_\xi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) |\hat{f}(\xi \sin\theta)| \big| A_1 + A_2 + A_3 \big| \, \big|\hat{h}(\xi)\big| \, d\xi \, d\theta \,.$$

On étudie maintenant les trois termes ci-dessus dans le membre droit. En utilisant (4.1.6), il vient :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_\xi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) |\hat{f}(\xi \sin\theta)| \, |A_1| \, \big|\hat{h}(\xi)\big| \, d\xi \, d\theta \\
&\leq \int_{\mathbb{R}_\xi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \, \sin^2(\theta/2) \, |G_\delta(\xi \sin\theta) \hat{f}(\xi \sin\theta)| \\
&\qquad\qquad \times \, \big| G_\delta(\xi \cos\theta) \, (\partial_\xi \hat{g}(\xi \cos\theta) \big| \, \langle\xi\rangle^{2s'} \big|\hat{h}(\xi)\big| \, d\xi \, d\theta \\
&\leq C \|G_\delta \, f\|_{L^1(\mathbb{R}_v)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \frac{\sin^2(\theta/2)}{|\cos\theta|^{1/2}} \, d\theta \, \|G_\delta \, (v \, g)\|_{H^{s'}(\mathbb{R}_v)} \, \|h\|_{H^{s'}(\mathbb{R}_v)} \\
&\leq C \|G_\delta \, f\|_{L^2_1(\mathbb{R}_v)} \|G_\delta \, (v \, g)\|_{H^{s'}(\mathbb{R}_v)} \, \|h\|_{H^{s'}(\mathbb{R}_v)} \,.
\end{aligned}$$

L'estimation (4.1.8) et $\cos\theta - 1 = -2\sin^2(\theta/2)$ impliquent

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_\xi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) |\hat{f}(\xi \sin\theta)| \, |A_2| \, \big|\hat{h}(\xi)\big| \, d\xi \, d\theta \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}_\xi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \, \sin^2(\theta/2) \, |G_\delta(\xi \sin\theta) \hat{f}(\xi \sin\theta)| \\
&\qquad\qquad \times \, \big| G_\delta(\xi \cos\theta) \, (\partial_\xi \hat{g}(\xi \cos\theta) \big| \, \big|\hat{h}(\xi)\big| \, d\xi \, d\theta \\
&\leq C \|G_\delta \, f\|_{L^2_1(\mathbb{R}_v)} \|G_\delta \, (v \, g)\|_{L^2(\mathbb{R}_v)} \, \|h\|_{L^2(\mathbb{R}_v)} \,.
\end{aligned}$$

Finalement, l'hypothèse $0 < s < 1/2$ implique $(4s' - 1)^+ < 2s'$. Alors (4.1.7) donne,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_\xi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) |\hat{f}(\xi \sin\theta)| \, |A_3| \, \big|\hat{h}(\xi)\big| \, d\xi \, d\theta \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}_\xi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \, \sin^2(\theta/2) \, |G_\delta(\xi \sin\theta) \hat{f}(\xi \sin\theta)| \\
&\qquad\qquad \times \, \langle\xi\rangle^{2s'} \, \big| G_\delta(\xi \cos\theta) \, \hat{g}(\xi \cos\theta) \big| \, \big|\hat{h}\big| \, d\xi \, d\theta \\
&\leq C \|G_\delta \, f\|_{L^2_1(\mathbb{R}_v)} \|G_\delta \, g\|_{H^{s'}(\mathbb{R}_v)} \, \|h\|_{H^{s'}(\mathbb{R}_v)} \,.
\end{aligned}$$

En sommant les trois dernières estimations, (4.3.8) implique que

$$|(II)| \leq C\|G_\delta f\|_{L^2_1(\mathbb{R}_v)}\|G_\delta g\|_{H^{s'}_1(\mathbb{R}_v)}\,\|h\|_{H^{s'}(\mathbb{R}_v)}\,. \tag{4.3.10}$$

La preuve de la proposition 4.3.1 est établie

Remarque 4.3.3 *Dans la preuve de l'estimation du terme I_1 et le dernier terme de (II), nous avons utilisé l'hypothèse cruciale restreinte* $0 < s < 1/2$.

4.3.2 Effet de régularisation au sens de Sobolev

En premier lieu on donne le résultat de $H^{+\infty}$-effet de régularisation pour la solution de l'équation de Kac homogène.
Le théorème suivant est plus précis que le théorème 1.1 de [47], où l'équation de Boltzmann homogène est étudiée avec des molécules Maxwelliens.

Théorème 4.3.4 *(Lekrine-Xu [43]) On suppose que la donnée initiale $f_0 \in L^1_{2+2s} \cap L\log L(\mathbb{R})$, et la section efficace β satisfait* (2.1.14) *avec* $0 < s < 1$. *Si $f \in L^\infty(]0, +\infty[; L^1_{2+2s} \cap L\log L(\mathbb{R}))$ est une solution faible non négative du problème de Cauchy* (2.1.12). *Alors $f(t,\cdot) \in H^{+\infty}_2(\mathbb{R})$ pour tout $t > 0$.*

Remarque 4.3.5 *C'est un résultat de $H^{+\infty}$-effet de régularisation pour la solution du problème de Cauchy, qui est différent de celui de [19, 35] où tous les moments de la donnée initiale sont supposés bornés. En utilisant l'immersion continue*

$$f_0 \in L^1_\ell(\mathbb{R}) \subset H^{-1}_\ell(\mathbb{R}).$$

Le résultat du Théorème 4.3.4 est aussi vrai si on suppose que le noyau de collision est de type de Debye-Yukawa, i.e.

$$\beta(\theta) = C_0\frac{|\cos\theta|}{|\sin\theta|}\big(\log|\theta|^{-1}\big)^m, \qquad 0 < m. \tag{4.3.11}$$

L'idée de la preuve du Théorème 4.3.4 est d'utiliser la régularisante de type polynomial

$$M_\delta(t,\,\xi) = \langle\xi\rangle^{tN-1}(1+\delta|\xi|^2)^{-N_0},$$

Pour $0 < \delta < 1$, $t \in [0, T_0]$ et $2N_0 = T_0N + 3$. On a des estimations similaires à (4.1.6) et (4.1.7), mais sans le terme $M_\delta(t,\,\xi\,\sin\theta)$. Alors, on peut prendre

$$\langle v\rangle^2 M_\delta(t, D_v)f \in L^\infty([0, T_0]; H^1_{2s}(\mathbb{R}))$$

comme fonction test.(qui est clairement dans $H^1(\mathbb{R}_v)$).

Le théorème 4.3.4 implique que la solution faible du problème de Cauchy (2.1.12) satisfait $f \in L^\infty([t_0,\, T_0[; H^1_2(\mathbb{R}))$ pour tout $t_0 > 0$. Alors, f est une solution pour le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = K(f, f), & v \in \mathbb{R},\ t > t_0, \\ f|_{t=t_0} = f(t_0,\,\cdot\,) \in H^1_2(\mathbb{R}). \end{cases}$$

4.3.3 Effet de régularisation de Gevrey local

Nous étudions maintenant l'effet de régularisation local au sens de Gevrey de la solution du problème de Cauchy en supposant que la donnée initiale $f_0 \in H^1_2 \cap L^1_2(\mathbb{R})$. On établit ce résultat dans le :

Théorème 4.3.6 *(Lekrine-Xu [43]) On suppose que la donnée initiale* $f_0 \in H^1_2 \cap L^1_2(\mathbb{R})$*, et que la section efficace* β *satisfait* (2.1.14) *avec* $0 < s < \frac{1}{2}$*. Pour* $T_0 > 0$*, si* $f \in L^\infty([0, T_0]; H^1_2 \cap L^1_2(\mathbb{R}))$ *est une solution faible du problème de Cauchy 2.1.12). Alors, il existe* $0 < T_* \leq T_0$ *tel que* $f(t, \cdot) \in G^{\frac{1}{2s'}}(\mathbb{R})$ *pour tous* $0 < t \leq T_*$ *et* $0 < s' < s$*. Plus précisément,*

$$e^{t\langle D_v\rangle^{2s'}} f \in L^\infty([0, T_*];\ L^2(\mathbb{R})).$$

Nous prouvons le théorème ci-dessus par la construction d'une estimation à priori pour la solution faible régularisée.
Prenons $f \in L^\infty(]0, T_0[; H^1_2 \cap L^1_2(\mathbb{R}))$ comme une solution faible du problème de Cauchy (2.1.12). Alors, (4.3.3) avec $m = \ell = 0$ implique que, (l'hypothèse $0 < s < 1/2$)

$$K(f,\ f) \in L^\infty(]0, T_0[; L^2(\mathbb{R}_v)).$$

Alors, nous devons choisir une fonction test $\varphi \in C^1([0, T_0];\ L^2(\mathbb{R}_v))$ de donner un sens à

$$\big(K(f,\ f),\ \varphi\big)_{L^2(\mathbb{R}_v)}.$$

La bonne façon est de choisir une régularisante de la solution faible f. Nous avons d'abord :

$$\tilde{f}(t,\,\cdot\,) = \big(G_\delta(t, D_v)\langle v\rangle^2\, G_\delta(t, D_v) f\big)(t,\,\cdot\,) \in L^\infty(]0, T_0[;\ H^1(\mathbb{R})).$$

En utilisant des manipulations similaires comme [47], nous pouvons obtenir la régularité par rapport à t, cela signifie que nous pouvons supposer que

$\tilde{f} \in C^1([0,T_0];\, H^1(\mathbb{R}_v))$, et étudier l'équation (2.1.12) dans la formulation faible suivante :

$$\big(\partial_t f(t,\,\cdot\,),\ \tilde{f}(t,\,\cdot\,)\big)_{L^2(\mathbb{R}_v)} = \big(K(f\,,\ f),\ \tilde{f}\big)_{L^2(\mathbb{R}_v)}. \tag{4.3.12}$$

Tout d'abord, le terme du côté gauche est

$$\begin{aligned}\big(\partial_t f(t,\,\cdot\,),\, \tilde{f}(t,\,\cdot\,)\big)_{L^2(\mathbb{R}_v)} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|G_\delta f(t)\|^2_{L^2_1(\mathbb{R}_v)}\\ &\quad - \Big(\big(\partial_t G_\delta\big)(t,D_v)f(t,\,\cdot\,),\ G_\delta(t,D_v)f(t,\,\cdot\,)\Big)_{L^2(\mathbb{R}_v)}\\ &\quad - \Big(v\,\big(\partial_t G_\delta\big)(t,D_v)f(t,\,\cdot\,),\ v\,G_\delta(t,D_v)f(t,\,\cdot\,)\Big)_{L^2(\mathbb{R}_v)}.\end{aligned}$$

Alors, nous estimons que les deux termes de droite en utilisant le lemme suivant :

Lemme 4.3.7 *il existe $C>0$ telle que*

$$\Big|\Big(\big(\partial_t G_\delta\big)(t,D_v)f(t,\,\cdot\,),\ G_\delta(t,D_v)f(t,\,\cdot\,)\Big)_{L^2(\mathbb{R}_v)}\Big| \le C\|G_\delta\, f\|^2_{H^{s'}(\mathbb{R}_v)}, \tag{4.3.13}$$

et

$$\Big|\Big(v\,\big(\partial_t G_\delta\big)(t,D_v)f(t,\,\cdot\,),\ v\,G_\delta(t,D_v)f(t,\,\cdot\,)\Big)_{L^2(\mathbb{R}_v)}\Big| \le C\|G_\delta\, f\|^2_{H^{s'}_1(\mathbb{R}_v)}. \tag{4.3.14}$$

Démonstration. (4.3.13) peut être déduite directement de (4.1.3) en utilisant la formule de Plancherel. Pour (4.3.14), on a

$$\begin{aligned}&\Big|\Big(v\,\big(\partial_t G_\delta\big)(t,D_v)f(t,\,\cdot\,),\ v\,G_\delta(t,D_v)f(t,\,\cdot\,)\Big)_{L^2(\mathbb{R}_v)}\Big|\\ &= C\left|\int_{\mathbb{R}}\left(\partial_\xi\big(c_0\langle\xi\rangle^{2s'}G_\delta(t,\xi)\frac{1}{1+\delta e^{c_0 t\langle\xi\rangle^{2s'}}}\hat{f}(t,\xi)\big)\right)\overline{\mathcal{F}\big(v\,G_\delta f\big)(t,\,\xi\,)}d\xi\right|\\ &\le C\int_{\mathbb{R}}\langle\xi\rangle^{2s'}\Big|\partial_\xi\big(G_\delta(t,\xi)\hat{f}(t,\xi)\big)\Big|\ \big|\mathcal{F}\big(v\,G_\delta f\big)(t,\,\xi\,)\big|\,d\xi\\ &\quad + C\int_{\mathbb{R}}\left|\partial_\xi\big(\langle\xi\rangle^{2s'}\frac{1}{1+\delta e^{c_0 t\langle\xi\rangle^{2s'}}}\big)\right|\ \big|G_\delta(t,\xi)\hat{f}(t,\xi)\big|\ \big|\mathcal{F}\big(v\,G_\delta f\big)(t,\,\xi\,)\big|\,d\xi\\ &\le C\|G_\delta\, f\|^2_{H^{s'}_1(\mathbb{R}_v)},\end{aligned}$$

où on utilise le fait que

$$\left|\partial_\xi\big(\langle\xi\rangle^{2s'}\frac{1}{1+\delta e^{c_0 t\langle\xi\rangle^{2s'}}}\big)\right| \le C\langle\xi\rangle^{2s'}.$$

Alors, le lemme 4.3.7 est prouvé.
la relation (4.3.12) et Lemme 4.1.5) donnent

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|G_\delta f(t)\|^2_{L^2_1(\mathbb{R}_v)} - \big(K(f\,,\ f),\ \tilde{f}\big)_{L^2(\mathbb{R}_v)} \leq C\|G_\delta\, f\|^2_{H^{s'}_1(\mathbb{R}_v)}. \tag{4.3.15}$$

D'un autre part, on a

$$\begin{aligned}
&\big(K(f,\ f\,),\ \tilde{f}\big)_{L^2(\mathbb{R}_v)} = \big(G_\delta K(f,\ f\,),\ (1+v^2)\, G_\delta f\,\big)_{L^2(\mathbb{R}_v)}\\
=&\big(K(f,\ G_\delta f\,),\, G_\delta f\,\big)_{L^2(\mathbb{R}_v)} + \big(K(f,\ v\, G_\delta f\,),\, v\, G_\delta f\,\big)_{L^2(\mathbb{R}_v)}\\
&+\big(G_\delta\, K(f,\ f\,) - K(f,\ G_\delta f\,),\, G_\delta f\,\big)_{L^2(\mathbb{R}_v)}\\
&+\big(v\, G_\delta\, K(f,\ f\,) - K(f,\ v\, G_\delta f\,),\, v\, G_\delta f\,\big)_{L^2(\mathbb{R}_v)}\\
&=\sum_{i=1}^4 I_i.
\end{aligned}$$

Alors, Proposition 4.3.2 implique

$$\Big|\big(G_\delta\, K(f,\ f\,) - K(f,\ G_\delta f\,),\, G_\delta f\,\big)_{L^2(\mathbb{R}_v)}\Big| \leq C\|G_\delta f\|_{L^2_1(\mathbb{R}_v)}\|G_\delta f\|^2_{H^{s'}(\mathbb{R}_v)}$$

et

$$\begin{aligned}
&\Big|\big(v\, G_\delta\, K(f,\ f\,) - K(f,\ v\, G_\delta f\,),\, v\, G_\delta f\,\big)_{L^2(\mathbb{R}_v)}\Big|\\
&\qquad\qquad \leq C\, \Big(\|f\|_{L^1_1(\mathbb{R})} + \|G_\delta\, f\|_{L^2_1(\mathbb{R})}\Big)\, \|G_\delta\, f\|^2_{H^{s'}_1(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

de même Proposition 4.3.1 implique :

$$-\big(K(f,\, G_\delta f), G_\delta f\big) \geq c_{f_0}\|G_\delta f\|^2_{H^s(\mathbb{R}_v)} - C\|f\|_{L^1(\mathbb{R}_v)}\|G_\delta f\|^2_{L^2(\mathbb{R}_v)},$$

$$-\big(K(f,\, v\, G_\delta f),\ v\, G_\delta f\big) \geq c_{f_0}\|v\, G_\delta f\|^2_{H^s(\mathbb{R}_v)} - C\|f\|_{L^1(\mathbb{R}_v)}\|v\, G_\delta f\|^2_{L^2(\mathbb{R}_v)}.$$

Comme

$$\|G_\delta f\|^2_{H^s_1(\mathbb{R}_v)} \leq \|G_\delta f\|^2_{H^s(\mathbb{R}_v)} + \|v\, G_\delta f\|^2_{H^s(\mathbb{R}_v)} + C\|G_\delta f\|^2_{L^2_1(\mathbb{R}_v)},$$

en sommant tous les termes $I_i;`, i = \overline{1.4}$ et (4.3.15). On obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|G_\delta f(t)\|^2_{L^2_1(\mathbb{R}_v)} + c_{f_0}\|G_\delta f(t)\|^2_{H^s_1(\mathbb{R}_v)}\\
&\leq C\|G_\delta f(t)\|^2_{H^{s'}_1(\mathbb{R}_v)} + C\|f(t)\|_{L^1(\mathbb{R}_v)}\|G_\delta f(t)\|^2_{L^2_1(\mathbb{R}_v)}\ .\\
&+C\, \Big(\|f(t)\|_{L^1_1(\mathbb{R})} + \|G_\delta\, f(t)\|_{L^2_1(\mathbb{R})}\Big)\, \|G_\delta\, f(t)\|^2_{H^{s'}_1(\mathbb{R})}.
\end{aligned} \tag{4.3.16}$$

Fin de la preuve du Théorème 4.1.2
En utilisant (2.1.3) et (2.1.10), on a

$$\|f(t)\|_{L^1(\mathbb{R}_v)} + \|f(t)\|_{L^1_2(\mathbb{R}_v)} \leq C\|f_0\|_{L^1_2(\mathbb{R}_v)}, \quad c_{f(t)} \geq c_{f_0} > 0.$$

Alors, (4.3.16) produit

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\|G_\delta f(t)\|^2_{L^2_1(\mathbb{R}_v)} + c_{f_0}\|G_\delta f(t)\|^2_{H^s_1(\mathbb{R}_v)} \\ &\leq C_{f_0}\|G_\delta f(t)\|^2_{H^{s'}_1(\mathbb{R}_v)} + C\,\|G_\delta\, f(t)\|_{L^2_1(\mathbb{R})}\,\|G_\delta\, f(t)\|^2_{H^{s'}_1(\mathbb{R})}. \end{aligned} \tag{4.3.17}$$

Nous avons besoin, maintenant, de l'inégalité d'interpolation suivante, pour $0 < s' < s$ et tout $\lambda > 0$,

$$\|u\|^2_{H^{s'}} \leq \lambda\|u\|^2_{H^s} + \lambda^{-\frac{s'}{s-s'}}\|u\|^2_{L^2}. \tag{4.3.18}$$

Alors, pour tout petit $\varepsilon > 0$, on a

$$C_{f_0}\|G_\delta f(t)\|^2_{H^{s'}_1(\mathbb{R}_v)} \leq \varepsilon\|G_\delta f(t)\|^2_{H^s_1(\mathbb{R}_v)} + C_{\varepsilon,f_0}\|G_\delta f(t)\|^2_{L^2_1(\mathbb{R}_v)}$$

et

$$C\,\|G_\delta\, f(t)\|_{L^2_1(\mathbb{R})}\|G_\delta f(t)\|^2_{H^{s'}_1(\mathbb{R}_v)} \leq \varepsilon\|G_\delta f(t)\|^2_{H^s_1(\mathbb{R}_v)} + C_\varepsilon\|G_\delta\, f(t)\|^{\frac{s'}{s-s'}+2}_{L^2_1(\mathbb{R})}.$$

Finalement, on obtient de (4.3.17), que pour tous $0 < \varepsilon$ et $0 < s' < s$, il existe $C_\varepsilon > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|G_\delta f(t)\|^2_{L^2_1(\mathbb{R}_v)} &+ (c_{f_0} - 2\varepsilon)\|G_\delta f\|^2_{H^s_1(\mathbb{R}_v)} \\ &\leq C_{\varepsilon,f_0}\|G_\delta f(t)\|^2_{L^2_1(\mathbb{R}_v)} + C_\varepsilon\|G_\delta\, f(t)\|^{\frac{s'}{s-s'}+2}_{L^2_1(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

on choisit $0 < 2\varepsilon \leq c_{f_0}$, de sorte que :

$$\frac{d}{dt}\|G_\delta f(t)\|_{L^2_1(\mathbb{R}_v)} \leq C_1\|G_\delta f(t)\|_{L^2_1(\mathbb{R}_v)} + C_2\|G_\delta\, f(t)\|^{\frac{s'}{s-s'}+1}_{L^2_1(\mathbb{R})}, \quad t \in [0, T_0], \tag{4.3.19}$$

avec $C_1, C_2 > 0$ indépendantes de $\delta > 0$. Alors

$$\frac{d}{dt}\big(e^{-C_1 t}\|G_\delta f(t)\|_{L^2_1(\mathbb{R}_v)}\big) \leq C_2 e^{\widetilde{C}_1 t}\big(e^{-C_1 t}\|G_\delta f(t)\|_{L^2_1(\mathbb{R}_v)}\big)^{\frac{s'}{s-s'}+1}$$

où $\widetilde{C}_1 = \frac{s' C_1}{s-s'}$.
Ainsi, Pour $t \in]0, T_0]$

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}\big(e^{-C_1\tau}\|G_\delta f(\tau)\|_{L^2_1(\mathbb{R}_v)}\big)^{-\frac{s'}{s-s'}} d\tau \geq \frac{C_2}{C_1}\big(1 - e^{\widetilde{C}_1 t}\big),$$

de sorte que, Pour $0 < \delta < 1$,

$$\|G_\delta f(t)\|_{L^2_1(\mathbb{R}_v)} \leq \frac{\widetilde{\widetilde{C}}_1\, e^{C_1 t}\|f_0\|_{L^2_1(\mathbb{R}_v)}}{\Big(C_1 + C_2\big(1 - e^{\widetilde{C}_1 t}\big)\|f_0\|^{\frac{s'}{s-s'}}_{L^2_1(\mathbb{R}_v)}\Big)^{\frac{s-s'}{s'}}}.$$

Nous choisissons maintenant $0 < T_* \leq T_0$ suffisamment petit pour que

$$\Big(C_1 + C_2\big(1 - e^{\widetilde{C}_1 t}\big)\|f_0\|^{\frac{s'}{s-s'}}_{L^2_1(\mathbb{R}_v)}\Big)^{\frac{s-s'}{s'}} \geq C_3 > 0, \quad t \in [0, T_*],$$

Alors, en prenant la limite $\delta \to 0$, on a Pour $t \in [0, T_*]$:

$$\|e^{c_0 t\langle D_v\rangle^{2s'}} f\|^2_{L^\infty(]0,T_*[;\, L^2_1(\mathbb{R}_v))} \leq e^{C_1 T_*}\frac{\widetilde{\widetilde{C}}_1}{C_3}\|f_0\|^2_{L^2_1(\mathbb{R}_v)}. \tag{4.3.20}$$

Nous avons donc prouvé Théorème 4.3.6

Pour terminer la démonstration du Théorème 4.1.2, on prend $0 < t_0 < t_1 \leq T_*$, et on considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = K(f,\, f), & v \in \mathbb{R},\ t > t_1, \\ f|_{t=t_1} = f(t_1,\, v). \end{cases} \tag{4.3.21}$$

Alors, (2.1.3),(2.1.10) et (2.1.11) impliquent

$$f(t_1,\, \cdot) \in L^1_2 \cap L\log L(\mathbb{R}).$$

L'immersion de Sobolev $H^1(\mathbb{R}_\xi) \subset L^\infty(\mathbb{R}_\xi)$ et (4.3.20) impliquent que :

$$\begin{aligned} \|e^{c_0 t_1\langle\,\cdot\,\rangle^{2s'}}\hat{f}(t_1,\,\cdot\,)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_\xi)} &\leq C\|e^{c_0 t_1\langle\,\cdot\,\rangle^{2s'}}\hat{f}(t_1,\,\cdot\,)\|_{H^1(\mathbb{R}_\xi)} \\ &\leq C\|e^{c_0 t_1\langle D_v\rangle^{2s'}} f(t_1,\,\cdot\,)\|_{L^2_1(\mathbb{R}_v))} \leq C\|f_0\|_{L^2_1(\mathbb{R}_v)}. \end{aligned} \tag{4.3.22}$$

Maintenant, nous pouvons terminer la preuve du théorème 4.1.2 en utilisant le résultat précédent de propagation de la régularité de Gevrey.

4.4 Équations de Boltzmann radialement symétriques

On considère maintenant l'opérateur de collision de Boltzmann dans le cas Maxwellien. La formule Bobylev est de la forme

$$\mathcal{F}\big(Q(g,\, f)\big)(\xi) = \int_{\mathbb{S}^2} b\left(\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma\right)\left\{\hat{g}(\xi^-)\hat{f}(\xi^+) - \hat{g}(0)\hat{f}(\xi)\right\} d\sigma \qquad (4.4.1)$$

où $\xi \in \mathbb{R}^3$,

$$\xi^+ = \frac{\xi + |\xi|\sigma}{2}, \quad \xi^- = \frac{\xi - |\xi|\sigma}{2}.$$

D'autre part

$$|\xi^+|^2 = |\xi|^2\frac{1+\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma}{2}, \quad |\xi^-|^2 = |\xi|^2\frac{1-\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma}{2},$$

donc, si on définit θ par

$$\cos\theta = \frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma,$$

on obtient

$$|\xi^+|^2 = |\xi|^2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad |\xi^-|^2 = |\xi|^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Considérons maintenant la fonction radialement symétrique par rapport à $v \in \mathbb{R}^3$, i.e satifait la propreité

$$h(v) = h(Av), \quad v \in \mathbb{R}^3,$$

pour toute matrice A 3×3 orthogonale, on a $h(Av) = h(0,0,|v|)$.

D'abord rapellons que :
-Une matrice orthogonale satisfait $A.A^t = A^t.A = I$: A^t transposée de A et $det(A) = |A| = \pm 1$.
-Si A est un automorphisme dans $\mathbb{R}^3$ on a :$\mathcal{F}(f\circ A) = \frac{1}{|A|}\mathcal{F}(f)\circ\mathcal{F}((A^t)^{-1})$.
Dénotons par $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^3}$ la transformation de Fourier dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^1}$ la transformation de Fourier dans $\mathbb{R}^1$. Alors $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^3}(h)(\xi)$ est aussi radialement symétrique par rapport à $\xi \in \mathbb{R}^3$, et elle est de la forme

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}^3}(h)(\xi) = \mathcal{F}_{\mathbb{R}^3}(h)(0,0,|\xi|) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i|\xi|v_3}\left(\int_{\mathbb{R}^2} h(v_1,v_2,v_3)dv_1dv_2\right)dv_3.$$

De telle sorte que

$$\mathcal{F}^{-1}_{\mathbb{R}^1}\big(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^3}(h)(0,0,\cdot)\big)(u)=\int_{\mathbb{R}^2}h(v_1,v_2,u)dv_1dv_2 \tag{4.4.2}$$

est une fonction paire dans $\mathbb{R}$, et on a

Lemme 4.4.1 *On suppose que $h\in L^1_k(\mathbb{R}^3), h\geq 0$ est radialement symétrique pour certain $k\geq 0$, et uniformement intégrable dans $\mathbb{R}^3$, alors*

$$\mathcal{F}^{-1}_{\mathbb{R}^1}\big(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^3}(h)(0,0,\cdot)\big)\in L^1_k(\mathbb{R})$$

est une fonction positive, paire et uniformement intégrable dans $\mathbb{R}$.

En utilisant (4.4.2), il est evident que $h\in L^1_k(\mathbb{R}^3)$ implique $\mathcal{F}^{-1}_{\mathbb{R}^1}\big(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^3}(h)(0,0,\cdot)\big)\in L^1_k(\mathbb{R})$, et $h\geq 0$ implique $\mathcal{F}^{-1}_{\mathbb{R}^1}\big(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^3}(h)(0,0,\cdot)\big)\geq 0$. Par conséquent, nous devons seulement vérifier l'intégrabilité uniforme de $\mathcal{F}^{-1}_{\mathbb{R}^1}\big(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^3}(h)(0,0,\cdot)\big)$ in $\mathbb{R}$. Comme $h\in L^1(\mathbb{R}^3)$, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $R_0>0$ tel que

$$\int_{\{v\in\mathbb{R}^3;\ |v|\geq R_0\}}|h(v_1,v_2,v_3)|dv_1dv_2dv_3<\frac{\varepsilon}{2}.$$

L'intégrabilité uniforme de h dans $\mathbb{R}^3$ implique qu'il existe $\delta_1>$ tel que

$$\int_B|h(v_1,v_2,v_3)|dv_1dv_2dv_3<\frac{\varepsilon}{2},$$

pour tout $B\subset\mathbb{R}^3$ avec $|B|\leq\delta_1$. On choisit $\delta_0=\delta_1(R_0^2)^{-1}$, donc pour tout $A\subset\mathbb{R}$, si $|A|\leq\delta_0$, on a

$$\int_A|\mathcal{F}^{-1}_{\mathbb{R}^1}\big(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^3}(h)(0,0,\cdot)\big)(u)|du\leq\int_{\mathbb{R}^2\times A}|h(v_1,v_2,v_3)|dv_1dv_2dv_3$$

$$\leq\int_{\{(v_1,v_2,v_3)\in\mathbb{R}^3;\ |v_1|\leq R_0,|v_2|\leq R_0,v_3\in A\}}|h(v_1,v_2,v_3)|dv_1dv_2dv_3+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

car

$$|\{(v_1,v_2,v_3)\in\mathbb{R}^3;\ |v_1|\leq R_0,|v_2|\leq R_0,v_3\in A\}|\leq R_0^2|A|\leq\delta_1.$$

Fin de la démonstration du Théorème 4.2.3 On suppose maintenant que $g\in L^\infty(]0,+\infty[;L^1_{2+2s}\cap L\log L(\mathbb{R}^3))$ est une solution faible, non negative et radialement symétrique du problème de Cauchy (2.1.1). Posons, pour $t \geq 0, u \in \mathbb{R}$,

$$f(t,u) = \mathcal{F}^{-1}_{\mathbb{R}^1}\big(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^3}(g)(t,0,0,\cdot)\big)(u) = \int_{\mathbb{R}^2} g(t,v_1,v_2,u)dv_1dv_2\,, \qquad (4.4.3)$$

dans la suite, la variable t est toujours considérée comme paramt̀re pour la transformation de Fourier, donc $f(t,u)$ est une fonction paire par rapport à $u \in \mathbb{R}$, et

$$\hat{f}(t,\tau) = \mathcal{F}_{\mathbb{R}^1}\big(f(t,\cdot)\big)(\tau) = \mathcal{F}_{\mathbb{R}^3}(g)(t,0,0,\tau).$$

Alors la formule de Bobylev donne, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}^3}\big(Q(g,g)\big)(\xi) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(|\theta|)\left\{\hat{f}(t,|\xi|\sin(\theta/2))\hat{f}(t,|\xi|\cos(\theta/2)) - \hat{f}(t,0)\hat{f}(t,|\xi|)\right\}d\theta, \qquad (4.4.4)$$

où

$$\beta(|\theta|) = \frac{1}{2}|\sin\theta|b(\cos\theta).$$

Donc le côté droit de (4.4.4) est une transformation de Fourier de l'opérateur de Kac $K(f,f)$. On a prouvé que si $g(t,v)$ est une solution faible, non negative et radialement symétrique du problème de Cauchy (2.1.1), alors $f(t,u)$ est une solution faible du problème du Cauchy de l'équation de Kac :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial t}(t,u) = K(f,f)(t,u), \\ f(0,u) = f_0(u) = \int_{\mathbb{R}^2} g_0(v_1,v_2,u)dv_1dv_2\,, \end{array}\right. \qquad (4.4.5)$$

Ou de façon équivalente dans la variable de Fourier :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t,\tau) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(|\theta|)\left\{\hat{f}(t,\tau\sin(\theta/2))\hat{f}(t,\tau\cos(\theta/2)) - \hat{f}(t,0)\hat{f}(t,\tau)\right\}d\theta, \\ \hat{f}(0,\tau) = \hat{f}_0(\tau) = \hat{g}_0(0,0,\tau). \end{array}\right.$$

Dans l'hypothèse du théorème 4.2.3 pour $g(t,v)$, le lemme 4.4.1 implique que $f(t,u)$ satisfait l'hypothèse du Théorème 4.1.2 à l'expetion de f appartiennent à $L\log L$ qui substitué par l' intégrabilité uniforme de f dans $mathbbR$. Cette propriété est suffisante pour assurer la coercivité (2.3.13). Alors on applique le théorème 4.1.2 au problème de Cauchy (4.4.5), donc il existe $T_* > 0$ tel que pour $0 < t \leq T_*$,

$$e^{c_0 t\langle|\tau|\rangle^{2s'}}\hat{f}(t,\tau) = e^{c_0 t\langle|\tau|\rangle^{2s'}}\mathcal{F}_{\mathbb{R}^3}(g)(t,0,0,\tau) \in H^1(\mathbb{R}_\tau).$$

Il reste à prouver l'effet de régularisation de Gevrey dans l'intervalle du temps global. L'équation de Kac homogène dans le cas de molécules de Maxwell partage la théorie de l'existence et l'unicité de la solution avec l'équation de Boltzmann homogène pour le problème de Cauchy, voir [60] pour l'unicité de solution faible de l'équation de Boltzmann saans troncature angulaire. On prend $0 < t_0 < t_1 \leq T_*$, et on considère le problème de Cauchy (6.1.1)avec l'état initial $\hat{f}(t_1, \tau)$. l'immersion de Sobolev $H^1(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$ implique que

$$\begin{aligned} \|e^{c_0 t_1 \langle \cdot \rangle^{2s'}} \hat{f}(t_1, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq C\|e^{c_0 t_1 \langle \cdot \rangle^{2s'}} \hat{f}(t_1, \cdot)\|_{H^1(\mathbb{R})} \\ &\leq C\|e^{c_0 t_1 \langle |D_u| \rangle^{2s'}} f(t_1, \cdot)\|_{L^2_1(\mathbb{R})} < +\infty \end{aligned}$$

Maintenant le résultat de la propagation de la régularité de Gevrey déduit l'effet de régularisation de Gevrey dans l'intervalle du temps global.
En conclusion, si $g \in L^\infty(]0, +\infty[; L^1_{2+2s} \cap L \log L(\mathbb{R}^3))$ est une solution faible, non negative et radialement symétrique du problème de Cauchy (2.1.1), donc sous l'hypothèse du théorème 4.2.3, nous avons prouvé que pour tout fixe $0 < t < +\infty$, il existe $c_0 > 0$ tel que

$$e^{c_0 \langle |D_u| \rangle^{2s'}} f(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}),$$

où f est une fonction définie par (4.4.3). On peut finir la preuve par les estimations suivantes, pour $t > 0$ fixe,

$$\begin{aligned} \|e^{\frac{c_0}{2} \langle |D_v| \rangle^{2s'}} g(t, \cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} &= \int_{\mathbb{R}^3} \left| e^{\frac{c_0}{2} \langle |\xi| \rangle^{2s'}} \mathcal{F}_{\mathbb{R}^3}(g)(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \right|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left| e^{\frac{c_0}{2} \langle |\xi| \rangle^{2s'}} \mathcal{F}_{\mathbb{R}^3}(g)(t, 0, 0, |\xi|) \right|^2 d\xi \\ &= C \int_0^\infty \left| e^{\frac{c_0}{2} \langle \tau \rangle^{2s'}} \hat{f}(t, \tau) \right|^2 \tau^2 d\tau \\ &\leq C \int_0^\infty \left| e^{c_0 \langle \tau \rangle^{2s'}} \hat{f}(t, \tau) \right|^2 d\tau \\ &\leq C\|e^{c_0 \langle |D_u| \rangle^{2s'}} f(t, \cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} < +\infty. \end{aligned}$$

Nous avons terminé la preuve du théorème 4.2.3.

Chapitre 5

Effet de régularisation au sens de Sobolev avec poids

5.1 Introduction

L'étude de la régularité de la solution dans l'espace H_ℓ^k, en utilisant la méthode de régularisantes [47], montre que l'ingredient principal pour la preuve de nos résultats est de bien choisir les régularisantes composées des opérateurs pseudo-differentiels et l'estimation du commutateur de l'opérateur de collision et des opérateurs pseudo-differentiels des régularisantes.
L'idée principal est d'introduire une famille des régularisantes composées des opérateurs pseudo-differentiels qui permettent d'utiliser la solution faible régularisée comme une fonction test dans la formule faible du problème de Cauchy (2.1.12). On fait appel à l'estimation de la coercivité induite de la singularité de la section efficace pour obtenir queleques estimations uniformes avec des normes de Sobolev pour la solution faible. Pour utiliser cette méthode, on considère une suite des régularisantes de type polynomial.
Pour $0 < \delta < 1, (N, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} > 0$, on pose

$$M_\delta(t,\xi) = \frac{\langle \xi \rangle^{tN+k}}{\langle \delta\xi \rangle^{TN+k+1}} \tag{5.1.1}$$

où $\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}},\ \xi \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $0 < \delta < 1$, on a :

$$M_\delta(t,\xi) \in L^\infty(]0,T] \times \mathbb{R}), \tag{5.1.2}$$

$$\lim_{\delta \mapsto 0} M_\delta(t,\xi) = \langle \xi \rangle^{tN+k} \tag{5.1.3}$$

On dénote $M_\delta(t, D_v)$ le multiplicateur de Fourier dont le symbole est $M_\delta(t,\xi)$.

$$M_\delta f(t,v) = M_\delta(t,D_v)f = \mathcal{F}^{-1}(M_\delta(t,\xi)\hat{f}(t,\xi)).$$

L'objective est de prouver la bornéture uniforme (par rapport à $0 < \delta < 1$,) du terme $\|M_\delta f(t,\cdot)\|_{L^2}$ pour la soluion faible du problème de Cauchy (2.1.1)). Dans ce but, nous avons besoin des résultats suivants.

Lemme 5.1.1 *Pour tout* $0 < \delta < 1, 0 < T < \infty$, *et* $(N,k) \in \mathbb{N}^2$, *on a les propriétés suivantes :*
(i) Si f est une solution faible, alors

$$M_\delta w^\ell f \in \mathcal{C}\big(]0,T]_t; L^2(\mathbb{R}_v)\big), \tag{5.1.4}$$

$$w M_\delta^2 w^\ell f \in L^\infty\big(]0,T]; L^2\big). \tag{5.1.5}$$

(ii) Si $f \in L^1\big([0,T]; L^1_2\big)$, *alors*

$$w M_\delta^2 w^\ell f \in L^\infty\big(]0,T]; L^2\big), \tag{5.1.6}$$

et

$$M_\delta w^\ell f \in L^\infty\big(]0,T]; L^2\big), \tag{5.1.7}$$

où $w := w(v) = \langle v\rangle^\ell, \ell + 2 \in \mathbb{R}^+$, *et* $T < \infty$.

La démonstration de ce lemme est donnée dans l'Annexe.
La H_∞^∞-régularité est établie dans le :

Théorème 5.1.2 *On suppose que la section efficace satisfait* (2.1.14), *et f une solution faible du problème de Cauchy* (2.1.12) *dont la donnée initiale est $f_0 > 0$, alors on a les résultats suivantes :*
Si f_0, alors $f \in L^\infty\big(]0,T]; H_{tl}^{tN+k}(\mathbb{R})\big)$ *pour tous* $0 < t < T < \infty$, $l \in \mathbb{R}$ *et* $N \in \mathbb{N}$.
En général si $f_0 \in H^k(\mathbb{R})$; $k \in \mathbb{R}$, *alors pour tous* $0 < t < T < \infty$, $l \in \mathbb{R}$ *et* $N \in \mathbb{N}$, *on a* $f \in L^\infty\big(]0,T]; H_{tl}^{tN+k}(\mathbb{R})\big)$.
Où N et ℓ peuvent tendre à l'infini.

Théorème 5.1.3 *Le résultat du Théorème 5.1.2 est aussi vrai si on suppose que le noyau de collision est de type de Debye-Yukawa, i.e. β satisfait* (2.1.15).

Remarque : Ce résultat est l'effet de régularisation de la solution du problème de Cauchy. On ne fait aucune supposition suplémentaire concernant la régularité de la donnée initiale.
Rappelons aussi que ce genre de régularité a été étudié par de nombreux auteurs. Alexandre et Elsafadi [2] ont prouvé H^k-régularité pour tous $k \in \mathbb{R}$ pour l'équation de Boltzmann homogène en utilisant la décomposition Littlewood-Paley, tandis que dans [47] les auteurs ont montré le gain de H^{tN}-régularité pour la même équation en utilisant une suite de régularisantes composées des opérateurs pseudo-differentiels. Puis, les auteurs dans [19], respectivement dans [38], ont supposé que la solution réside dans L^1_ℓ pour tout $l \in \mathbb{N}$ pour prouver la H^∞-régularité de la solution l'équation de Kac , respectivement, pour étudier la H^k_ℓ-régularité de celle de l'équation de Boltzmann dans le cas non Maxwellien.
La motivation de cette étude est, de démontrer, sans aucune hypothèse suplémentaire, la H^∞_∞-régularité des solutions de l'équation de Kac sans troncature angulaire.
La preuve est basée sur l'utilisation de la méthode des régularisantes composées des opérateurs pseudo-différentiels et les estimations du commutateur de l'opérateur du noyau collisionel de Kac et les régularisantes utilisées.

5.2 Analyse de l'opérateur de Kac

Estimation de la coercivité

Elle est meilleure que celle était utilisée dans tous les travaux précédents utilisant cette méthode ([43, 23, 38, 47, 17]) et des autres.

Proposition 5.2.1 *On suppose que le noyau de collision β satisfait l'hypothèse* (2.1.14) *et que f, h sont deux fonctions non négatives avec : $0 \neq h \in L^1$. Alors, il existe des constantes positives $C_{h.i}$ $i = \overline{1,5}$, dépendant seulement de β, $\|h\|_{L^1}$, et $\|h\|_{L^1_2}$, telles que pour toute fonction $f \in L^\infty([0,\infty]_t; L^1_2 \cap L\log L(\mathbb{R}_v))$ on a :*

$$\begin{aligned} &C_{h,1}\|M_\delta w^\ell f\|^2_{\dot H_1^{1+s}} + C_{h,2}\|M_\delta w^\ell f\|^2_{\dot H_1^1} + C_{h,3}\|M_\delta w^\ell f\|^2_{H^1} + \\ &+C_{h,4}\|\Lambda^s M_\delta w^\ell f\|^2 \leq \big(-K(h,\ M_\delta w^\ell f),\ M_\delta w^\ell f\big) + C_{h,5}\|M_\delta w^\ell f\|^2, \end{aligned}$$

Cette estimation est aussi vraie si on remplace $M_\delta w^\ell f$ par $w^\ell M_\delta f$.

Démonstration. Posons

$$J = \big(- K(h,\ M_\delta w^\ell f),\ M_\delta w^\ell f \big) = - \int_{\mathbb{R}} K(h,\ M_\delta w^\ell f) M_\delta w^\ell f dv,$$

$w^\ell f = g$, et $M_\delta \hat{g} = F$.
En utilisant le théorème de Plancherel et l'identité de Bobylev, on aboutit à :

$$\begin{aligned}
J &= -\int_{\mathbb{R}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta) \left\{ \hat{h}(\xi^-)(M_\delta \hat{g}(\xi^+) - \hat{h}(0)(M_\delta \hat{g}(\xi) \right\} (M_\delta \bar{\hat{g}})(\xi) d\theta d\xi \\
&\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta) \left\{ [\hat{h}(0) - |\hat{h}(\xi^-)|] |F(\xi) - F(\xi^+)|^2 \right\} d\theta d\xi \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta) \left\{ [|\hat{h}(\xi^-)| - \hat{h}(0)] |F(\xi) - F(\xi^+)|^2 \right\} d\theta d\xi \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta) \left\{ \hat{h}(0)[F^2(\xi) - F^2(\xi^+)] \right\} d\theta d\xi \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta) \left\{ [\hat{h}(0) - |\hat{h}(\xi^-)|] |F^2(\xi) + F^2(\xi^+)| \right\} d\theta d\xi \\
&= J_1 + J_2 + J_3 + J_4.
\end{aligned}$$

Pour J_1, en utilisant le lemme 2.3.7, on a :

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta) \left\{ [\hat{h}(0) - |\hat{h}(\xi^-)|] |F(\xi) - F(\xi^+)|^2 \right\} d\theta d\xi \\
&\geq C_\beta \frac{1}{C_\tau^2} \int_{\mathbb{R}} C_h |\xi|^{2+2s} |\partial_\xi F(\xi)|^2 d\xi \\
&= C_\beta \|h\|_{L^1} \|M_\delta w^\ell f\|^2_{\dot{H}^{1+s}_1}.
\end{aligned}$$

Pour J_2, on subdivise I_π en $\Omega \cup \Omega^c$:
$\Omega = \left\{ \theta \in I_\pi : \theta \leq \theta_0 = |\xi|^{\frac{-1}{(1-s)}} \right\}$, $\Omega^c = \{\theta \in I_\pi : \theta > \theta_0\}$,
où on a

$$\int_\Omega \beta(\theta) \sin^2(\theta/2) \leq |\xi|^{-2}, \tag{5.2.1}$$

$$\int_{\Omega^c} \beta(\theta) \sin^2(\theta) < \theta_0^{-\epsilon} < C, \forall \epsilon > 0, \text{soit } \epsilon = \frac{1}{|\xi|} \to 0, \text{qd } |\xi| \to \infty. \tag{5.2.2}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
-J_2 &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta)\left\{[\hat{h}(0)-|\hat{h}(\xi^-)|]|F(\xi)-F(\xi^+)|^2\right\} d\theta d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}}\int_{\Omega} \beta(\theta)\left\{|\hat{h}(0)-\hat{h}(\xi^-)||F(\xi)-F(\xi^+)|^2\right\} d\theta d\xi \\
&+ \int_{\mathbb{R}}\int_{\Omega^c} \beta(\theta)\left\{|\hat{h}(0)-\hat{h}(\xi^-)||F(\xi)-F(\xi^+)|^2\right\} d\theta d\xi \\
&= J_{2.1}+J_{2.2}.
\end{aligned}$$

Pour $J_{2.1}$, (5.2.1) donne :

$$\begin{aligned}
J_{2.1} &\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\Omega} \beta(\theta)\left\{|\hat{h}(0)-\hat{h}(\xi^-)-\hat{h}(-\xi^-)||F(\xi)-F(\xi^+)|^2\right\} d\theta d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}}\int_{\Omega} \beta(\theta)\sin^2(\theta/2)|\xi|^2\left\{|\partial_\xi^2\hat{h}(\xi_\tau^-)|(|F(\xi)|+|F(\xi^+)|)^2\right\} d\theta d\xi \\
&\leq C_\beta\|h\|_{L^1_2}\|F\|_{L^2},
\end{aligned}$$

où $c(\theta)=(1-\cos(\theta/2))$.
Pour $J_{2.2}$, on utilise (5.2.2), pour obtenir :

$$\begin{aligned}
J_{2.2} &\leq \int_{\mathbb{R}}\int_{\Omega^c} \beta(\theta)\left\{[|\hat{h}(\xi^-)|+\hat{h}(0)]|F(\xi)-F(\xi^+)|^2\right\} d\theta d\xi \\
&= C_\beta\|h\|_{L^1}\frac{1}{c_s^2}\int_{\mathbb{R}}|\xi_s||(\partial_\xi F)(\xi_s)||F(\xi)|d\xi \\
&\leq \epsilon_2\|M_\delta w^\ell f\|_{H^1_1}+C_{\epsilon_2,\beta,\|h\|_{L^1}}\|M_\delta w^\ell f\|^2_{L^2}.
\end{aligned}$$

Pour J_3 d'aprés le lemme de Cancellation, on a

$$\begin{aligned}
J_3 &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta)\left\{\hat{h}(0)[F^2(\xi)-F^2(\xi^+)]\right\} d\theta d\xi \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta)(\frac{1}{\cos(\theta/2)}-1)|F^2(\xi)|d\theta d\xi \\
&= -C_\beta\|h\|_{L^1}\|M_\delta w^\ell f\|^2_{L^2}.
\end{aligned}$$

Pour J_4, on utilise Lemme 2.3.7, il vient :

$$\begin{aligned} J_4 &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta)\left\{[\hat{h}(0)-|\hat{h}(\xi^-)|]|F^2(\xi)+F^2(\xi^+)|\right\}d\theta d\xi \\ &\geq C_h\int_{\mathbb{R}}|\xi^{2s}||F^2(\xi)+F^2(\xi^+)|d\xi \\ &\geq C_h\left\{\|M_\delta w^\ell f\|^2_{H^s}-\|M_\delta w^\ell f\|^2_{L^2}\right\}. \end{aligned}$$

Par substitution de $J_i,\ i=\overline{1.4}$ dans J, on aboutit à :

$$\begin{aligned} &C_\beta\|h\|_{L^1}\|M_\delta w^\ell f\|^2_{\dot{H}_1^{1+s}}+C_{f,1}\|\Lambda^s M_\delta w^\ell f\|^2 \\ &\leq \big(-K(h,\ M_\delta w^\ell f),\ M_\delta w^\ell f\big)+C_{h,3}\|M_\delta w^\ell f\|^2, \end{aligned}$$

pour ϵ_i bien choisi.
D'autre part, on a

$$J^*=-\big(K(h,\,M_\delta w^\ell f),\,M_\delta w^\ell f\big),$$

En utilisant le changement de variables $(v,v')\mapsto(v',v)$, on a :

$$\begin{aligned} J^* &= -\big(K(h,\,M_\delta w^\ell f),\,M_\delta w^\ell f\big) \\ &= -\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} h_*\left\{(M_\delta w^\ell f)(v')-(M_\delta w^\ell f)(v)\right\}(M_\delta w^\ell f)(v)d\theta dv_*dv \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} h_*\left\{(M_\delta w^\ell f)(v')-(M_\delta w^\ell f)(v)\right\}^2 d\theta dv_*dv \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \sin^2(\theta/2)h_*\left\{(v'-v)^2\partial_v(M_\delta w^\ell f)^2(v_s\right\}d\theta dv_*dv_s \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \sin^2(\theta/2)h_*\left\{(v'-v)^2(\partial_{v_s}M_\delta w^\ell f)^2(v_s\right\}d\theta dv_*dv_s, \end{aligned}$$

où, prenons en considération (2.3.19) et (2.3.20). Alors, le changement de variables $v\mapsto v_s$ donne :

$$J^*=\int_{\mathbb{R}}\int_{I_\pi}\frac{\cos^2(\theta/4)}{c_s}Bh_*((1-\cos(\theta/2)v_s+s\sin(\theta/2)v_*)^2[(\partial_v M_\delta w^\ell f)(v)]^2,d\theta dv_*dv,$$

où

$$((1-\cos(\theta/2)v_s + s\sin(\theta/2)v_*)^2 = C_1(\theta)v^2 + C_2(\theta)v_*^2 - C_3(\theta)\sin(\theta)vv_*,$$

avec $C_i(\theta) = C_i(-\theta),\ \forall i = \overline{1,3}$, Donc,

$$\begin{aligned} J^* &= \int_{\mathbb{R}}\int_{I_\pi} BC_1(\theta)h_*[v(\partial_v M_\delta w^\ell f)(v)]^2 \\ &+ \int_{\mathbb{R}}\int_{I_\pi} BC_2(\theta)v_*^2 h_*[(\partial_v M_\delta w^\ell f)(v)]^2 d\theta dv_* dv \\ &+ \int_{\mathbb{R}}\int_{I_\pi} BC_3(\theta)\sin(\theta/2)vv_*h_*[(\partial_v M_\delta w^\ell f)(v)]^2 d\theta dv_* dv \\ & J_1^* + J_2^* + J_3^*. \end{aligned}$$

Pour J_3^* en utilisant le changement de variables $\theta \to -\theta$, on obtient $J_3^* = 0$
Pour J_2^*, on a

$$\begin{aligned} J_2^* &= C_B^1 \int_{\mathbb{R}} v_*^2 h_* dv_* \int_{\mathbb{R}} [(\partial_v M_\delta w^\ell f(v)]^2 dv \\ &= C_B^1 \|h\|_{\dot{L}_2^1} \|M_\delta w^\ell f\|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

Pour J_1^*, on aboutit à :

$$\begin{aligned} J_1^* \quad &= C_\beta \|g\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}} [v(\partial_v M_\delta w^\ell f(v)]^2 dv \\ &\geq \frac{1}{2}\|g\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}} \left\{ [\partial_v(vM_\delta w^\ell f)(v)]^2 - 2[M_\delta w^\ell f(v)]^2 \right\} dv \\ &= \frac{C_\beta^2}{2}\|g\|_{L^1}\|M_\delta w^\ell f\|_{\dot{H}_1^1}^2 - C_\beta^2 \|g\|_{L^1}\|M_\delta w^\ell f(v)\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

où C_β^i sont indépendantes de ℓ, N, k, T, et δ.
On aboutit finalement à :

$$\begin{aligned} & C_{h,1}\|M_\delta w^\ell f\|_{\dot{H}_1^{1+s}}^2 + C_{h,2}\|M_\delta w^\ell f\|_{\dot{H}_1^1}^2 + C_{h,3}\|M_\delta w^\ell f\|_{H^1}^2 \\ & + C_{h,4}\|\Lambda^s M_\delta w^\ell f\|^2 \leq \big(-K(h,\ M_\delta w^\ell f),\ M_\delta w^\ell f\big) + C_{h,5}\|M_\delta w^\ell f\|^2), \end{aligned}$$

où $C_{h.i}$, $i = \overline{1.5}$ dépendent seulement de $\|h\|_{\dot{L}_2^1}$, $\|h\|_{L^1}$ et de β.
Ce qui achève la démonstration de la proposition 5.2.1).

Estimation du commutateur (forme 1)

Elle est meilleure que celle était utilisée dans tous les travaux utilisant cette méthode ([43, 47, 66], et des autres.

Proposition 5.2.2 *On suppose que le noyau de collision β satisfait la supposition* (2.1.14) *ou* (2.1.15) *et que g est une fonction non négative avec $0 \neq g \in L^1$. Alors, il existe une constante positive $C_{\epsilon,\beta,h}$ qui dépend seulement de β, et $\|h\|_{L^1}$, telle que :*

$$\begin{aligned}&\big(w^\ell M_\delta K(h,f) - K(h, w^\ell M_\delta f),\, w^\ell M_\delta f\big)\\ &\leq \epsilon\|w^\ell M_\delta f\|^2_{H^1} + C_{\epsilon,\beta,h}\|w^\ell M_\delta f\|^2.\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

et

$$\begin{aligned}&\big(M_\delta w^\ell K(h,f) - K(h, M_\delta w^\ell f),\, M_\delta w^\ell f\big)\\ &\leq \epsilon\|M_\delta w^\ell f\|^2_{H^1} + C_{\epsilon,\beta,h}\|M_\delta w^\ell f\|^2.\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Démonstration. Pour (5.2.3). Notons $M_\delta(v)$ (respectivement $M_\delta(v')$, $w(v), w(v'), f(v), f(v'), f(v_*), f(v'_*)$) par M_δ (respectivement $M'_\delta, w, w', f, f', f_*, f'_*$). Posons :

$$I = \big(w^\ell M_\delta K(h,\ f) - K(h,\ w^\ell M_\delta f),\ w^\ell M_\delta f\big).$$

En utilisant le changement de variables $v'_* \mapsto v_*$, en posant $H = w^\ell M_\delta f$ et $M^+_\delta(D_v) := M_\delta(D_v\cos(\theta/2)) = M_\delta(D_{v^+})$, il vient :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta)[w^\ell M'^+_\delta(h'_* f' - h'_* w'^\ell M'_\delta f']H d\theta dv_* dv\\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta) h_*[(w'^\ell - w^\ell)M^+_\delta f + w^\ell(M^+_\delta - M_\delta)f]H' d\theta dv_* dv\\ &= I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Pour I_2, si $tN + k = N_0$ **est assez grand.** (car le problème se pose quand $N_0 \to \infty$) on subdivise I_π en $\Omega \cup \Omega^c$:
$\Omega = \left\{\theta \in I_\pi : \theta \leq \theta_* = N_0^{\frac{-1}{(1-s)}}\right\}$, $\Omega^c = \{\theta \in I_\pi : \theta > \theta_*\}$, où on a :
Sur Ω

$$\int_\Omega \beta(\theta)\sin^2(\theta/2) \leq C\theta_*^{-2}, \tag{5.2.5}$$

et $M_\delta(D_v) - M_\delta(D_{v^+})$ dont le symbol satisfait

$$[M_\delta(\xi) - M_\delta(\xi^+)] \leq N_0\sin^2(\theta/2)M_\delta(a\xi) \leq N_0\sin^2(\theta/2)M_\delta(\xi) :\ \cos(\theta/2) < a < 1, \tag{5.2.6}$$

on a

$$M_\delta(a\xi)M_\delta^{-1}(\xi) \leq 1.$$

Sur Ω^c :
On utilise le fait que :

$$\begin{aligned}|M_\delta(\xi^+) - M_\delta(\xi)| &\leq |1 - (\frac{1+|\xi^+|^2}{1+|\xi|^2})^{\frac{N_0}{2}}|M_\delta(\xi) \\ &\leq |1-\cos^{N_0}(\theta/2)|M_\delta(\xi). \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

Mais : $\theta \mapsto |\sin^{-s}(\theta)|(1-\cos^{N_0}(\theta/2))$ sur Ω^c, atteint son maximum en $|\theta_0| \approx \frac{2\sqrt{(2-s)}}{\sqrt{N_0}}$. En remarquant que si N_0 est assez-grand, on a :

$$|\sin^{-s}(\theta_0)|(1-\cos^{N_0}(\theta_0/2)) \leq \frac{1}{4}N_0^{\frac{-(1-s)}{2}}N_0^{\frac{-s}{(1-s)}}.$$

Alors,

$$\int_{\Omega^c}\beta(\theta)|\sin^s(\theta)||\sin^{-s}(\theta_0)|(1-\cos^{N_0}(\theta_0/2))d\theta \leq \frac{1}{4s}(4(2-s))^{\frac{1-s}{2}}N_0^{\frac{-(1-s)}{2}}.$$

D'où

$$\int_{\Omega^c}\beta(\theta)[M_\delta(\xi)-M_\delta(\xi^+)]M_\delta^{-1}(\xi) \leq C,$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi}\beta(\theta)h_*w^\ell[M_\delta(D_{v^+})-M_\delta(D_v)]fH'd\theta dv_*dv \\ &\leq C_\beta\|h\|_{L^1}\|w^\ell M_\delta f(v)\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Pour I_1, **si ℓ est assez grand.**(car le problème se pose quand $\ell \to \infty$), on subdivise I_π en $\Omega\cup\Omega^c$:
$\Omega = \left\{\theta \in I_\pi : \theta \leq \theta_0 = N^{\frac{-1}{(1-s)}}\right\}$, $\Omega^c = \{\theta \in I_\pi : \theta > \theta_0\}$,
où $N_* = l(l+1)w_*^{l+1}$, $N = N_*^{\frac{2}{1-s}}$, on a donc, en utilisant les mêmes techniques appliquées dans I_2 (Estimation supérieure),

$$\int_\Omega \beta(\theta)\sin^2(\theta/2) \leq C, \tag{5.2.8}$$

et

$$\int_{\Omega^c}\beta(\theta)(1-\cos^N(\theta/2) \leq C, \tag{5.2.9}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\Omega} \beta(\theta) h_*(w'^{\ell} - w^{\ell}) M'_\delta f H' d\theta dv_* dv \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\Omega^c} \beta(\theta) h_*(w'^{\ell} - w^{\ell}) M'_\delta f H' d\theta dv_* dv \\ &= I_{1.1} + I_{1.2}. \end{aligned}$$

Pour $I_{1.1}$, on pose $v'' = \cos(\theta/2)v + \sin(\theta/2)v_*$.
On a :

$$\begin{aligned} J^* &= (w'^{\ell} - w^{\ell}) = (\cos(\theta/2) - 1)v(\partial_v\langle\cdot\rangle^l)(v_s) \\ &= -l[(1-\cos(\theta/2))(\frac{1}{c_s}v_s + s\sin(\theta/2)v_* + \sin(\theta/2)v_*]v_s\langle v_s\rangle^{l-2} \\ &= l[(1-\cos(\theta/2))\frac{1}{c_s}v_s^2 + (s\sin(\theta/2)v_*)v_s + s\sin(\theta/2)v_s v_*]\langle v_s\rangle^{l-2} \\ &\leq lC_1(\theta)(1+\langle v_*\rangle)\langle v_s\rangle^l + l\sin(\theta/2)v_* v_s\langle v_s\rangle^{l-2}, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} I_{1.1} &\leq l\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\Omega} \beta(\theta)(1-\cos(\theta/2))h_*(1+\langle v_*\rangle)\langle v_s\rangle^l M_\delta f H' d\theta dv_* dv \\ &+ l\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\Omega} \beta(\theta)\sin(\theta/2)v_* v_s\langle v_s\rangle^{l-2} M_\delta f H' d\theta dv_* dv \\ &= I^1_{1.1} + I^2_{1.1}. \end{aligned}$$

Pour $I^2_{1.1}$, en prenant le changement de variables $\theta \mapsto -\theta$, il vient :

$$\begin{aligned} I^2_{1.1} &= l\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta(\theta)\sin(\theta/2)v_* v_s\langle v_s\rangle^{l-2} M_\delta f H' d\theta dv_* dv \\ &= l\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta(\theta)\sin(\theta/2)v_*[v_s\langle v_s\rangle^{l-2} - v'_s\langle v'_s\rangle^{l-2}] M_\delta f H' d\theta dv_* dv \\ &+ l\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta(\theta)\sin(\theta/2)v_* v'_s\langle v'_s\rangle^{l-2} M_\delta f [H' - H''] d\theta dv_* dv \\ &= I^{2.1}_{1.1} + I^{2.2}_{1.1}. \end{aligned}$$

Pour $I^{2.1}_{1.1}$, on pose

$$\begin{aligned} J_1^* &= l\sin(\theta/2)v_*[v_s\langle v_s\rangle^{l-2} - v'_s\langle v'_s\rangle^{l-2}] \\ &= l\sin(\theta/2)v_*[(v_s - v'_s)\langle v_s\rangle^{l-2}) + v'_s[(\langle v_s\rangle^{l-2} - \langle c_s v\rangle^{l-2}) - (\langle v'_s\rangle^{l-2} - \langle c_s v\rangle^{l-2})]] \\ &= -sl\sin^2(\theta/2)v_*^2[2\langle v_s\rangle^{l-2} + v'_s[(l-2)v_{s,\tau}(\langle v_{s,\tau}\rangle^{l-4} - (l-2)v'_{s,\tau}(\langle v'_{s,\tau}\rangle^{l-4}] \\ &= -2sl\sin^2(\theta/2)v_*^2[\langle v_s\rangle^{l-2} + v'_s[(l-2)v_{s,\tau}(\langle v_{s,\tau}\rangle^{l-4}], \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} v_s &= c_s v - s\sin(\theta/2)v_*,\ v'_s = c_s v + s\sin(\theta/2)v_* \ :\ c_s = 1-2s\sin^2(\theta/4),\ 0<s<1 \\ v_{s,\tau} &= (1-s)v + s\cos(\theta/)v - s\tau\sin(\theta/2)v_*,\ 0<\tau<1, \end{aligned}$$

et donc

$$\langle v_s\rangle^l \le \langle v_*\rangle^\ell\langle v\rangle^l, \mathrm{et}\langle v_{s,\tau}\rangle^l \le \langle v_*\rangle^\ell\langle v\rangle^l.$$

D'où

$$J^* \ \le\ C(s)c(\theta)\langle v\rangle^l[\langle v_*\rangle^\ell + \langle v_*\rangle^{l+1} + \langle v_*\rangle^{l+2}].$$

Alors

$$I_{1.1}^{2.1} + I_{1.1}^{1} \le C_\beta\|h\|_{L^1}\|w^\ell M_\delta f\|_{L^2}^2.$$

Pour $I_{1.1}^{2.2}$, on pose

$$\begin{aligned} K^* &= l\sin(\theta/2)v_*v'_s\langle v'_s\rangle^{l-2}M_\delta f(H'-H'') \\ &= lc_\tau\sin^2(\theta/2)v_*^2v'_s\langle v'_s\rangle^{l-2}G'_\delta f(\partial_{v'_\tau}H)(c_\tau v' + 2c_\tau) \\ &\le ls^{\frac{l}{2}}C^2(\theta)\langle v_*\rangle^{l+1}\langle v\rangle^l \\ &\le C^2(\theta)\langle v_*\rangle^{l+1}\langle v\rangle^l M_\delta f\partial_{v'_\tau}H(v'_\tau), \end{aligned}$$

où : $\cos(\theta/2) < c_\tau < 1$.
Donc

$$\begin{aligned} I_{1.1}^{2.2} &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_\Omega \beta(\theta)h_*(l\sin(\theta/2)v_*v'_s\langle v'_s\rangle^{l-2})M_\delta f(H'-H'')d\theta dv_* dv \\ &\le C_\beta^2\|h\|_{L^1}^2C_\epsilon\|w^\ell M_\delta f\|_{L^2}^2 + \epsilon\|w^\ell M_\delta f\|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

De sorte que :

$$I_{1.1} \le \epsilon_1\|w^\ell M_\delta f\|_{H^1}^2 + C_{h,\epsilon,\beta}\|w^\ell M_\delta f(v)\|_{L^2}^2.$$

Pour $I_{1.2}$, on a :

$$\begin{aligned} I_{1.2} &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\Omega^c}\beta(\theta)h_*(\frac{w'^\ell - w^\ell}{w^\ell})w^\ell M_\delta^+ f w'^\ell M'_\delta f' d\theta dv_* dv \\ &\le C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\Omega^c}\beta(\theta)N_*(1-\cos^N(\theta/2))h_*w^\ell M_\delta^+ f w'^\ell M'_\delta f' d\theta dv_* dv, \end{aligned}$$

avec les mêmes tecniques dans le lemme 2.2.8 ; on a

$$I_{1.2} \leq C^1_\beta \|h\|_{L^1} \|w^\ell M_\delta f\|^2_{L^2}.$$

Alors

$$I \leq C_{\beta,\epsilon,\|h\|_{L^1}} \|w^\ell M_\delta f\|^2_{L^2} + \epsilon \|w^\ell M_\delta f\|^2_{H^1}.$$

où C_β et C_ϵ sont indépendantes de δ, T, N, k et ℓ.
Ceci achève la démonstration de (5.2.3).
Pour (5.2.4), on utilise le changement de variables $v'_* \mapsto v_*$,

$$\begin{aligned}
I &= \big(M_\delta w^\ell K(h,\ f) - K(h,\ M_\delta w^\ell f),\ M_\delta w^\ell f\big)_{L^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta) h_* [M'^+_\delta w - M'_\delta w'^\ell] f' M_\delta w^\ell f(v) d\theta dv_* dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta) h_* [M^+_\delta - M_\delta] w^\ell f H(v') d\theta dv_* dv \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta) w^\ell_* h_* \frac{w'^\ell - w^\ell}{(w_* w)^\ell} M^+_\delta w^\ell f H(v') d\theta dv_* dv \\
&- \int_{\mathbb{R}^2} \int_{I_\pi} \beta(\theta) w^\ell_* h_* [\frac{w'^\ell - w^\ell}{(w_* w)^\ell},\ M_\delta(D_{v^+}) M^{-1}_\delta] M_\delta w^\ell f) H' \\
&= I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

Pour I_1, en utilisant le théorème de Plancherel et l'identité de Bobylev et en remarquant que : $M^+_\delta = M_\delta(D_{v^+})$. Le changement de variables $\xi \mapsto \xi_+ = \cos^{-1}(\theta/2)\xi$ donne :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{I_\pi} \beta \hat{h}(\xi^-) [M_\delta(\xi^{++}) - M_\delta(\xi^+)] \hat{g}(\xi^+) (M_\delta \bar{\hat{g}})(\xi) d\theta d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{I_\pi} \beta \cos(\theta/2) \hat{h}(\xi^-_+) [M_\delta(\xi^+) - M_\delta(\xi)] \hat{g}(\xi) (M_\delta \bar{\hat{g}})(\xi_+) d\theta d\xi_+.
\end{aligned}$$

On subdivise I_π en : $\Omega^c = \left\{\theta \in I_\pi ; |\theta| > \theta_* = N_0^{\frac{-1}{1-s}}\right\} \cup \Omega = \{\theta \in I_\pi ; |\theta| \leq \theta_*\}$.
on a :

$$\int_\Omega \beta(\theta) \theta^2 \approx C \theta_*^{2-2s} \leq C N_0^{-2}, \tag{5.2.10}$$

$$\int_{\Omega^c} \beta(\theta) |\sin^s(\theta/2)| d\theta \leq C_0 \frac{1}{s} (1 - (\pi/2)^{-s} N^{\frac{-s}{1-s}}) N_0^{\frac{s}{1-s}}, \tag{5.2.11}$$

donc

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \int_{\mathbb{R}}\int_{\Omega} \beta(\theta)(1-\cos(\theta/2))|\hat{h}(\xi_+^-)|N_0|\frac{M(\xi_s)}{M(\xi)}||(M\hat{g}(\xi)M_\delta\bar{\hat{g}}(\xi_+)|d\theta d\xi_+\\
&+ \int_{\mathbb{R}}\int_{\Omega^c} \beta\hat{h}(\xi_+^-)[M_\delta(\xi^+)-M_\delta(\xi)]\hat{g}(\xi)(M_\delta\bar{\hat{g}})(\xi_+)d\theta d\xi_+.
\end{aligned}$$

Sur Ω, on a

$$\int_{\Omega}\beta(\theta)(1-\cos(\theta/2))N_0 \leq C\theta_*^{2-2s}N_0 \leq CN_0N_0^{-1} \leq C.$$

Sur Ω^c on utilise les mêmes manipulations faites dans le lemme 2.2.8 ; pour obtenir

$$\int_{\Omega^c}\beta(\theta)(1-\cos^{N_0}(\theta/2))d\theta \leq \frac{C_0}{s}(1-(\pi/2)N_0^{\frac{-1}{(1-s)}})N_0^{\frac{-(1-s)}{2}}.$$

D'où

$$I_1 \leq C_\beta\|h\|_{L^1}\|M_\delta w^\ell f(v)\|_{L^2}^2.$$

Pour I_2, on utilise les mêmes manipulations faites pour I_1 dans la preuve de (5.2.3). Alors ,

$$I_2 \leq C^1_{\beta,\|h\|_{L^1},\epsilon}\|w^\ell M_\delta f\|_{L^2}^2 + \epsilon_1\|w^\ell M_\delta f\|_{H^1}^2.$$

Pour I_3, posons $M_\delta w^\ell f(v) = H(v) = H$, $v^+ = v\cos(\theta/2)$, on a :

$$\begin{aligned}
I_3 &= -\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi}\beta(\theta)h_*[\frac{w'^\ell - w^\ell}{w^\ell}, M_\delta(D_{v^+})M_\delta^{-1}(D_v)]HH'd\theta dv_* dv\\
&= -\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi}\beta(\theta)h_*\big(\frac{w'^\ell - w^\ell}{w^\ell}\big)_{(1)}\big(\tilde{M}_\delta(D_v)\big)^{(1)}HH'\\
&+ -\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi}\beta(\theta)w_*^\ell h_* R_2(v,\xi)H(v)H(v')d\theta dv_* dv\\
&= I_{3.1}+I_{3.2}.
\end{aligned}$$

Pour $I_{3.1}$, on subdivise I en :
$\Omega^c = \left\{\theta \in I_\pi; |\theta| > (\theta_0 = N^{\frac{-1}{1-s}}\right\}$ et $\Omega = \{\theta \in I_\pi; |\theta| < \theta_*\}$,
où $N_* = lN_0\langle v_*\rangle^\ell$: $N = N_*^{\frac{2}{1-s}}$, On a :

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{w'^\ell - w^\ell}{w^\ell}\Big)_{(1)} &= \Big(\frac{w'^\ell}{w^\ell}-1\Big)_{(1)}\\
&\leq l\langle v_*\rangle^\ell[\sin^2(\theta/2)+|\sin(\theta/2)|],
\end{aligned}$$

et $\tilde{M_\delta}^{(1)}$ dont le symbole $\mathcal{F}(\tilde{M_\delta}^{(1)})$, satisfaisant

$$|\mathcal{F}(\tilde{M_\delta}^{(1)})| = |\big(\frac{M_\delta(\xi^+)}{M_\delta(\xi)}\big)^{(1)}| \leq N_0 \sin^2(\theta/2)\frac{|\xi|}{(1+|\xi|^2)(1+|\xi^+|^2)}\Big(\frac{\langle\xi^+\rangle}{\langle\xi\rangle}\Big)^{tN+k}.$$

Sur Ω, on a

$$\int_\Omega N_*\beta(\theta)\sin^2(\theta/2) \leq C,$$

et sur Ω^c, on a

$$C_0\int_{\theta_0/C_0}^{\pi/2C_0} N_*\beta(\theta)(1-\cos^N(\theta/2))d\theta \leq C_0,$$

par suite

$$I_{3.1} \quad \leq \quad \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\Omega^c} \beta N_* h_*(1-\cos^N(\theta/2))|\big(M_\delta(D_{v^+})M_\delta^{-1}(D_v)\big)^{(1)}H||H'|d\theta dv_* dv.$$

Pour $\frac{{w'}^\ell - w^\ell}{(w_*w)^\ell}$ on fait les mêmes manipulations utilisées pour $\frac{{w'}^\ell - w^\ell}{(w_*w)^\ell}$ dans $I_{1.2}$ dans la preuve de (5.2.3), on aboutit à :

$$I_{3.1} \leq C_\beta \|h\|_{L^1}\|w^\ell M_\delta f\|^2_{L^2}.$$

De la même façon que dans I_2 (Estimation supérieure), pour obtenir

$$I_{3.1} \leq C_\beta \|h\|_{L^1}\|w^\ell M_\delta f\|^2_{L^2}.$$

$$I_{3.2} = \int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta(\theta)h_* R_N(v,\xi)H(v)H(v')d\theta dv_* dv,$$

d'aprés [39] (voir aussi [40]), pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a :

$$R_2 = R_{N=2}(v,\xi) = \int_0^1 \frac{(1-\tau)}{2!} r_{N=2,\tau}(v,\xi)d\tau,$$

en posant :

$$F(v) = \frac{{w'}^\ell - w^\ell}{(w_*w)^\ell}, \text{ et } \psi(\xi) = \frac{M_\delta(\xi^+)}{M_\delta(\xi)},$$

il vient :

$$\begin{aligned} r_{N=2,\tau}(v,\xi) &= O_s - \int\int e^{-iy.\eta}(F(v+y))_2\psi^{(2)}(\xi+\tau\eta)d\eta dy \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} O_s - \int\int e^{-iy.\eta}\chi_\epsilon(y,\eta)(F(v+y))_2\psi^{(2)}(\xi+\tau\eta)d\eta dy, \end{aligned}$$

et

$$\chi_\epsilon(y,\eta) = \chi(\epsilon y, \epsilon\,\eta),\ 0 \le \epsilon \le 1,\ \chi(y,\eta) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2_{y,\eta}),\ \text{ avec } \chi(0,0) = 1.$$

On prend $\chi(\epsilon y, \epsilon\,\eta) = e^{-\epsilon|y|.\epsilon\,|\eta|}$. Donc

$$\begin{aligned}
R_2 &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^1\int_{\mathbb{R}_y}\int_{\mathbb{R}_\eta}\frac{(1-\tau)}{2}e^{-iy.\eta}\chi_\epsilon(y,\eta)(F_{(2)})(v+y)(\psi^{(2)})(\xi+\tau\eta)d\eta dy d\tau\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^1\int_{\mathbb{R}_y}\int_{\mathbb{R}_\eta}\frac{(1-\tau)}{2}e^{-iy.\eta}\eta^2\chi_\epsilon(y,\eta)F(v+y)(\partial_\xi^2\psi)(\xi+\tau\eta)d\eta dy d\tau
\end{aligned}$$

D'après [52] et [57], par integration (par rapport à τ) on peut obtenir

$$\begin{aligned}
R_2 &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^1\int_{\mathbb{R}_y}\int_{\mathbb{R}_\eta}\frac{(1-\tau)}{2}e^{-iy.\eta}\eta\chi_\epsilon(y,\eta)(\partial_y F)(v+y)(\partial_\xi^2\psi)(\xi+\tau\eta)d...\\
&= -2\lim_{\epsilon\to 0}\int_{y=0}^{\infty}\int_{\eta=0}^{\infty}\int_0^1\frac{1-\tau}{2}\sin(y\eta)\chi_\epsilon(y,\eta)(\partial_y F)(v+y)(\partial_\tau\partial_\xi\psi)(\xi+\tau\eta)d...\\
&+ 2\lim_{\epsilon\to 0}\int_{y=0}^{\infty}\int_{\eta=0}^{\infty}\int_0^1\frac{1-\tau}{2}\sin(y\eta)\chi_\epsilon(y,\eta)(\partial_y F)(v+y)(\partial_\tau\partial_\xi\psi)(\xi-\tau\eta)d...,
\end{aligned}$$

et donc on a :

$$\begin{aligned}
R_2 &\le 2\lim_{\epsilon\to 0}\int_{y=0}^{\infty}\int_{\eta=0}^{\infty}\frac{1}{\tau_0}\sin(y\eta)\chi_\epsilon(y,\eta)(\partial_y F)(v+y)(\partial_\eta\psi)(\xi+\tau_0\eta)d\eta dy\\
&+ 2\lim_{\epsilon\to 0}\int_{y=0}^{\infty}\int_{\eta=0}^{\infty}\frac{1}{\tau_0}\sin(y\eta)\chi_\epsilon(y,\eta)(\partial_y F)(v+y)(\partial_\eta\psi)(\xi-\tau\eta)d\eta dy\\
&\le 2\int_{y=0}^{\infty}(\partial_y F)(v+y)dy.\int_{\eta=0}^{\infty}\frac{1}{\tau_0}(\partial_\eta\psi)(\xi+\tau_0\eta)d\eta\\
&+ 2\int_{y=0}^{\infty}(\partial_y F)(v+y)dy.\int_{\eta=0}^{\infty}\frac{1}{\tau_0}(\partial_\eta\psi)(\xi-\tau_0\eta)d\eta\\
&\le \frac{4}{\tau_0}[|((\frac{1+|v'|^2}{1+|v|^2})^l-1)|+(1-\cos^l(\theta/2))][(\cos^{N_0}(\theta/2)-1)+(1-(\frac{1+|\xi^+|^2}{1+|\xi|^2})^{\frac{N_0}{2}})]\\
&\le \frac{4}{\tau_0}[((\frac{1+|v'|^2}{1+|v|^2})^l-1)+(1-\cos^l(\theta/2))][(1-\cos^{N_0}(\theta/2))+(1-(\frac{1+|\xi^+|^2}{1+|\xi|^2})^{\frac{N_0}{2}})].
\end{aligned}$$

On utilise les mêmes manipulations utilisées pour $I_{1.1}$ dansla démonstrationde (5.2.4) pour avoir

$$\int_{I_\pi}\beta R_2(v,\xi)d\theta \le C,$$

et donc

$$I_{3.2} \leq C_{\beta,\epsilon,\|h\|_{L^1}} \|M_\delta w^\ell f(v)\|^2_{L^2} + \epsilon \|w^\ell M_\delta f\|^2_{H^1}.$$

Finalement, on aboutit à :

$$I \leq C_{\epsilon,\beta,\|h\|_{L^1}} \|w^\ell M_\delta f\|^2_{L^2} + \epsilon \|w^\ell M_\delta f\|^2_{H^1},$$

où C^i_β sont indépendantes de δ, ℓ, N, T et k.
Ce qui achève la démonstration de la proposition 5.2.2.
Remarque : Dans les démonstrations ci-dessus on n'utilise pas $f \in L^1_\ell$.

Estimation du commutateur (forme 2)
On considère la combinaison de la décomposition de Littleood-Paley (partition de $\mathbb{R}_\xi$) et la partition de l'unité par rapport à v (partition de $\mathbb{R}_v$).

Lemme 5.2.3 *On suppose que le noyau de collision β satisfait l'hypothèse* (2.1.14) *ou* (2.1.15) *et que f, h sont deux fonctions non négatives avec : $0 \neq h \in L^1(\mathbb{R}_v)$. Alors, il existe des constantes positives $C_{h.i}\, i = \overline{1,5}$, dépendant seulement de β, $\|h\|_{L^1}$, telle que pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}_v)$ on a :*

$$\begin{aligned}&\big((w^\ell M_\delta)_{kj} K(h,\, (w^\ell M_\delta f)_{kj}) - K(h,\, (w^\ell M_\delta f)_{kj}),\; (w^\ell M_\delta f)_{kj}\big)_{L^2} \\ &\leq C_{\beta,h,\epsilon} \|h\|_{L^1} \|(w^\ell M_\delta f)_{kj}\|^2_{L^2} + \epsilon \|(w^\ell M_\delta f)_{kj}\|^2_{H^1}. \end{aligned} \tag{5.2.12}$$

(5.2.12) *est aussi vraie si on remplace $w^\ell M_\delta f$ par $M_\delta w^\ell f$.*
Où $C_{\beta,h,\epsilon}$ est independante de ℓ, N, k, T, et δ.

Démonstration. Posons $H_{kj} = (w^\ell M_\delta f)_{kj}$ and $H_j = (w^\ell M_\delta f)_j$, on a :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta h_* [(w'^\ell M^+_\delta)_{kj} - (w^\ell M_\delta)_{kj}] f . H'_{kj} d\theta dv_* dv \\ &= -\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta h_* [(\psi_k - \psi'_k) w^\ell_j M_\delta + \psi'_k (\phi^l_j - \phi'_j) w^\ell M_\delta f] H'_{kj} d\theta dv_* dv \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta h_* [\psi'_k \phi'_j (w'^\ell - w^\ell) M_\delta - \psi'_k w'^\ell_j (M_\delta - M^+_\delta) f] H'_{kj} d\theta dv_* dv \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Pour I_1, on a :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta h_*(\psi_k' - \psi_k)H_j H_{kj}' d\theta dv_* dv \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{I_\pi} \beta \hat{h}(\xi^-)(\frac{\psi_k(\xi^{++})}{\psi_k(\xi^+)} - 1)\hat{H}_{kj}(\xi^+)\bar{\hat{H}}_{kj}(\xi) d\theta d\xi \\
&\leq C_\beta \|h\|_{L^1}\|(w^\ell M_\delta f)_{kj}\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

où, on utilise que l'OΨD, $\Psi_k^1(D_v)$ (dont le symbole est $\Psi_k^1(\xi)$ est donné dans la suite) est borné dans L^2 ;

$$\begin{aligned}
|\Psi_k^1(\xi)| &= |(\frac{\psi_k(\xi^{++})}{\psi_k(\xi^+)} - 1) = (1-\cos(\theta/2))|\xi|\frac{(\partial_\xi\psi_k)(\xi_s^{++}))}{\psi_k(\xi^+)}| \\
&\leq C(1-\cos(\theta/2).
\end{aligned}$$

Pour I_2, d'aprés Proposition 1.4.7

$$\begin{aligned}
I_2 &= C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta h_*(\phi_j^{'} - \phi_j)\phi_j^{-1}\psi_k' H_j.H_{kj}' d\theta dv_* dv \\
&= C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta h_*(\phi_j' - \phi_j)\phi_j^{-1}\psi_k' H_j.H_{kj}' d\theta dv_* dv \\
&= -\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta h_*[v(1-\cos(\theta/2)) + v_*\sin(\theta/2)](\partial_v\phi_j)(v_s)\phi_j^{-1}\psi_k' H_j.H_{kj}' \\
&= I_{2.1} + I_{2.2},
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
&v(\partial_v\phi_j)(v_s)\phi_j^{-1} \approx c_s 2^{-j}2^j(\partial_v\phi)(v_s)\phi_j^{-1} \leq C \\
&(\partial_v^2\phi_j)(v_s)\phi_j^{-1} \leq C,
\end{aligned}$$

pour $I_{2.2}$, on utilise $\theta \mapsto -\theta$ tel que :
$v_s = c_s v - s v_*\sin(\theta/2)$, devient v_s', v' devient v'', et $\dot{v}_s' = v' + 2v_*\sin(\theta/2)$.
Puis on subdivise I_π en $\Omega \cup \Omega^c$:
$\Omega^c = \left\{\theta \in I_\pi; |\theta| > \theta_* = N^{\frac{-1}{1-s}}\right\}$ et $\Omega = \{\theta \in I_\pi; |\theta| < \theta_*\}$, On utilise les mêmes techniques dans I_2 (Estimation supérieure), en remplaçant N_* par

$\langle v_*\rangle^2$, tel que $N_* = N^{\frac{1-s}{2}}$, donc on obtient

$$\begin{aligned}
I_{2.2} &= 2c_s\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi}\beta\sin^2(\theta/2)v_*^2h_*(\partial_v^2\phi_j)(v_s)\phi_j^{-1}\psi_k' H_j.H_{kj}' d\theta dv_* dv\\
&+ \int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi}\beta\sin^2(\theta/2)v_*^2h_*(\partial_v\phi_j)(v_s')\phi_j^{-1}\psi_k' H_j.(\partial_v H_{kj}')(\dot{v}_s')d\theta dv_* dv\\
&\leq \epsilon\|(w^\ell M_\delta f)_{kj}\|^2_{H^1} + C_{\epsilon,\|h\|_{L^1},\beta}\|(w^\ell M_\delta f)_{kj}\|^2_{L^2}.
\end{aligned}$$

où on utilise d'abord $(\partial_v^2\phi_j)(v_s)\phi_j^{-1}\leq C$, puis en utilisant le théorème de Plancherel et l'identité de Bobylev et le fait que l'OΨD, Ψ_k^2 dont le symbole est $\psi_k(\xi^{++})\psi_k^{-1}(\xi^+)$: $\xi^+ = \cos(\theta/2)\xi$, est borné dans L^2.
Pour I_3 d'aprés Proposition 1.4.7, on a

$$\begin{aligned}
I_3 &= C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi}\beta h_*\psi_k'\phi_j'(\frac{w'^\ell}{w^\ell}-1)M_\delta f.H_{kj}' d\theta dv_* dv\\
&= C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi}\beta h_*(\frac{w'^\ell}{w^\ell}-1)\phi_j'\phi_j^{-1}\psi_k' H_j.H_{kj}' d\theta dv_* dv\\
&- C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi}\beta h_*(\frac{w'^\ell}{w^\ell}-1)_{(1)}\phi_j'\phi_j^{-1}\psi_k'^{(1)} H_j.H_{kj}' d\theta dv_* dv\\
&- C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi}\beta h_*\phi_j'\phi_j^{-1}R_2 H_j.H_{kj}' d\theta dv_* dv\\
&= I_{3.1}+I_{3.2}+I_{3.3}.
\end{aligned}$$

Pour $I_{3.1}$, on prend le changement de variables $\theta\mapsto\frac{\theta}{2}$ puis on subdivise $I_\pi = [\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ en $\Omega\cup\Omega^c$:
$\Omega = \left\{\theta : \theta\leq\theta_0 = L^{\frac{-1}{(1-s)}}\right\}$, $\Omega^c = \{\theta > \theta_0\}$, où $L_0 = \ell\langle v\rangle^2\langle v_*\rangle^\ell$, $L = L_0^{\frac{2}{1-s}}$

$$\int_\Omega \beta(\theta)\sin^2(\theta/2)\leq L_0^{\frac{-3-s}{(1-s)^2}}, \tag{5.2.13}$$

$$\int_{\Omega^c}\beta(\theta)\sin^2(\theta/2) < C_0\frac{1}{4s}(4(2-s))^{\frac{1-s}{2}}. \tag{5.2.14}$$

On remarque que :

$$\frac{w'^\ell}{w^\ell}-1\leq w_*^\ell - 1 = \frac{l}{2}|v_*|^2\langle sv_*\rangle^{l-2},\ \phi_j'\phi_j^{-1}\leq c,$$

puis en utilisant le théorème de Plancherel et l'identité de Bobylev et le fait que l'OΨD dont le symbole est $\psi_k(\xi^{++})\psi_k^{-1}(\xi^+)$: $\xi^+ = \cos(\theta/2)\xi$, est borné dans L^2. Puis d'aprés la transformation de Fourier inverse, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_{3.1} &= \int_{\mathbb{R}^1}\int_{I_\pi} \beta\frac{l}{2}\sin^2(\theta/2)|D_\xi|^2\langle|D_\xi|\rangle^{l-2}\hat{h}(\xi^-)\frac{\psi_k(\xi^{++})}{\psi_k(\xi^+)}\hat{H}_{kj}(\xi^+).\bar{\hat{H}}_{kj}(\xi)d\theta d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta\frac{l}{2}\sin^2(\theta/2)|v'|^2\langle v_*\rangle^{\ell-2}h_*|\Psi_k^2 H_{kj}|.|H'_{kj}|d\theta dv_* dv \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\Omega} \beta\frac{l}{2}\sin^2(\theta/2)\langle v\rangle^2\langle v_*\rangle^{\ell}h_*|\Psi_k^2 H_{kj}|.|H'_{kj}|d\theta dv_* dv \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\Omega^c} \beta\frac{l}{2}(1-\cos^L(\theta/2))\langle v\rangle^2\langle v_*\rangle^{\ell}h_* h_*|\Psi_k^2 H_{kj}|.|H'_{kj}|d\theta dv_* dv,
\end{aligned}$$

où sur Ω^c, on applique les mêmes manipulations utilisées dans le lemme 2.2.8 sur Ω^c, en remplaçant N_* par $L_0 = \ell\langle v\rangle^2\langle v_*\rangle^\ell$ et N par L, pour obtenir

$$\int_{\Omega^c}\beta L_0(1-\cos^L(\theta/2)) \leq C.$$

Donc, on aboutit à

$$I_{3.1} \leq C_\beta\|h\|_{L^1}\|(w^\ell M_\delta f)_{kj}\|^2_{L^2}.$$

Pour $I_{3.2}$, l'integration, done

$$\begin{aligned}
I_{3.2} &= -C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi}\beta h_*(\frac{w'^\ell}{w^\ell}-1)_{(1)}\phi'_j\phi_j^{-1}\psi_k^{'(1)}H_j.H'_{kj}d\theta dv_* dv \\
&= C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi}\beta h_*(\frac{w'^\ell}{w^\ell}-1)_{(1)}(\partial_v\phi'_j\phi_j^{-1})\psi_k^{'(1)}H_j.H'_{kj}d\theta dv_* dv \\
&+ C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi}\beta h_*(\frac{w'^\ell}{w^\ell}-1)\phi'_j\phi_j^{-1}(\partial_v\psi_k^{'(1)}H_j).H'_{kj}d\theta dv_* dv \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi}\beta h_*(\frac{w'^\ell}{w^\ell}-1)\phi'_j\phi_j^{-1}\psi_k^{'(1)}H_j.(\partial_v H'_{kj})d\theta dv_* dv.
\end{aligned}$$

Puis on utilise les mêmes manipulations effectuées pour $I_{3.1}$ juste ci-dessus, donc

$$I_{3.2} \leq C_{\beta,\epsilon}\|h\|^2_{L^1}\|(w^\ell M_\delta f)_{kj}\|^2_{L^2} + \epsilon\|(w^\ell M_\delta f)_{kj}\|^2_{H^1}.$$

Pour $I_{3.3}$, on effectue les mêmes manipulations faites pour $I^2_{1.4}$ dans la preuve de (5.2.3), en remplaçant :

$\frac{M_\delta(\xi^+)}{M_\delta(\xi)}$ par $\psi_k(\xi^{++})$, avec consevation du terme $\frac{w'^\ell}{w^\ell}-1$, où

$$\begin{aligned}
I_{3.3} &= -\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi}\beta h_* R_2(v,\xi)\phi_j^{-1}H_{kj}.\phi'_j\psi'^*_k H'_{kj}d\theta dv_* dv\\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi}\beta h_*(\frac{w'^\ell}{w^\ell}-\cos^l(\theta/2))\phi'_j\phi_j^{-1}\Psi_k^2 H_{kj}.H'_{kj}d\theta dv_* dv\\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi}\beta h_*[(\frac{w'^\ell}{w^\ell}-1)+(1-\cos^l(\theta/2))]\Psi_{kj}^2 H_{kj}.H'_{kj}d\theta dv_* dv\\
&= I_{3.3.1}+I_{3.3.2}.
\end{aligned}$$

Pour $I_{3.3.1}$, on fait les mêmes manipulations utilisées pour $I_{3.1}$ juste ci-dessus, et pour $I_{3.3.2}$, on utilise les mêmes manipulations effectuées pour I_1 dans la preuve de l'estimation supérieure, on obtient,

$$I_{3.3}\le C_\beta\|h\|_{L^1}\|(w^\ell M_\delta f)_{kj}\|^2_{L^2}.$$

Pour I_4, dans le cas N_0 est assez grand, on subdivise I_π en $\Omega\cup\Omega^c$:
$\Omega=\left\{\theta\in I_\pi:\theta\le\theta_0=N^{\frac{-1}{1-s}}\right\}\cup\Omega^c=\{\theta\in I_\pi:\theta>\theta_0\}$,
$N=(N_*=w_*^\ell(N_0+c))^{\frac{2}{1-s}}$.
Donc, en utilisant le lemme 2.2.8 ; on obtient

$$\int_\Omega\beta\sin^2(\theta/2)N_*\le C,$$

$$\int_{\Omega^c}\beta N_*(1-\cos^N(\theta/2))\le C_0.$$

Posons, $H_j=w_j^\ell M_\delta f(v)$ et $H_{kj}=\psi_k w_j^\ell M_\delta f(v)$,

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi}\beta h_* w'^\ell_j(M'_\delta-M_\delta)f.H'_{kj}d\theta dv_* dv\\
&= C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi}\beta h_* w'^\ell_j w_j^{-\ell}(\tilde{M}_\delta-I)\psi'_k H_j.H'_{kj}d\theta dv_* dv\\
&- C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi}\beta h_* w'^\ell_j (w_j^{-\ell})_{(1)}\big((\tilde{M}_\delta-I)\psi'_k\big)^{(1)}H_j.H'_{kj}d\theta dv_* dv\\
&- \int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi}\beta h_* w'^\ell_j R_2(v,\xi)H_j.H'_{kj}d\theta dv_* dv.\\
&= I_{4.1}+I_{4.2}+I_{4.3},
\end{aligned}$$

où $\tilde{M}_\delta(D_v) - I$ est l'OΨD (borné dans L^2) dont le symbole est $\frac{M_\delta(\xi^+)}{M_\delta(\xi)} - 1$, de telle sorte que nous prenons en considération (5.2.6), et (5.2.7).
Pour $I_{4.3}$, on fait les mêmes manipulations utilisées dans $I_{3.3}$ juste ci-dessus, en remarquant que :

$$w_j'^{\ell} w_j^{-\ell} \leq C w_*^{\ell}, \text{ et} \Psi_k^2(\xi) = \frac{\psi_k(\xi^{++})}{\psi_k(\xi^+)} \leq C,$$

Donc,

$$I_{4.3} = \leq C_\beta \|h\|_{L^1} \|(w^\ell M_\delta f)_{kj}\|_{L^2}^2.$$

Pour $I_{4.2}$, on utilise le théorème de Plancherel, l'identité de Bobylev et à l'aide du changement de variables $\xi \mapsto \xi_+ = \xi \cos^{-1}(\theta/2)$, on a :

$$\begin{aligned} I_{4.2} &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \int_{I_\pi} \beta w_*^\ell h_* \big((\tilde{M}_\delta(D_v) - I)\psi_k(D_{v^+}) \big)^{(1)} H_j . H'_{kj} d\theta dv_* dv \\ &\leq \ | \int_{\mathbb{R}^1} \int_{I_\pi} \beta \langle D_{\xi_+^-} \rangle^l \hat{h}(\xi_+^-) [\partial_\xi \big(e^{iv.\xi} (\frac{M_\delta(\xi^+)}{M_\delta(\xi)} - 1) \psi_k(\xi^+) \big)] \psi_k^{-1}(\xi) \hat{H}_{kj}(\xi) \bar{\hat{H}}(\xi_+) |, \end{aligned}$$

où $\tilde{M}_\delta(D_v) - I)\psi_k(D_{v^+}$ est l'OΨD, (est borné dans L^2) dont le symbole est est donné par :

$$\begin{aligned} |\big(e^{iD_\eta D_y} (\frac{M_\delta(v, \xi^+)}{M_\delta(v, \xi)} - 1) \psi_k(y, \eta^+) |_{\eta = \xi, v = y} \big)| = &\quad |\big(\sum_{i \geq 0} \partial_\xi^i (\frac{M_\delta(v, \xi^+)}{M_\delta(v, \xi)} - 1) \partial_v^i \psi_k(v, \xi^+) \big)| \\ = &\quad |(\frac{M_\delta(\xi^+)}{M_\delta(\xi)} - 1) \psi_k(\xi^+)|, \end{aligned}$$

donc, $\Psi_k(D_v) =$ est l'OΨD, borné dans L^2 dont le symbole est donné par

$$|\partial_\xi \big((\frac{M_\delta(v, \xi^+)}{M_\delta(\xi)} - 1) \psi_k(\xi^+) \big) \psi_k^{-1}(\xi)| \leq C(N_0 + c)(1 - \cos(\theta/2)),$$

Posons $N_* = w_*^\ell (N_0 + c)$, donc, on a

$$\begin{aligned} I_{4.2} &\leq C \int_{\mathbb{R}^2} \int_\Omega \beta N_* (1 - \cos^2(\theta/2)) h_* H_{kj} . H'_{kj} d\theta dv_* dv \\ &+ C \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\Omega^c} \big(\beta N_* (1 - \cos^N(\theta/2)) \big) h_* H_{kj} . H'_{kj} d\theta dv_* dv \\ &= C \int_{\mathbb{R}^2} \int_\Omega (\beta N_* (1 - \cos(\theta/2)) h_* H_{kj} . H'_{kj} d\theta dv_* dv \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\Omega^c} \big(\beta N_* (1 - \cos^N(\theta/2)) \big) h_* H_{kj} . H'_{kj} d\theta dv_* dv \\ &\leq C_\beta \|h\|_{L^1} \|(w^\ell M_\delta f)_{kj}\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Pour $I_{4.1}$, on fait les mêmes techniques utilisées ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_{4.1} &\leq C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi}\beta h_* w_j'^{\ell} w_j^{-\ell}(\tilde{M}_\delta - I)\psi_k' H_j.H_{kj}' d\theta dv_* dv \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\Omega}(\beta N_*(1-\cos(\theta/2))h_*(\tilde{M}_\delta - I)\psi_k' H_j.H_{kj}' d\theta dv_* dv \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\Omega^c}\big(\beta N_*(1-\cos^N(\theta/2))\big)h_*(\tilde{M}_\delta - I)\psi_k' H_j.H_{kj}' d\theta dv_* dv \\
&\leq C_\beta \|h\|_{L^1}\|(w^\ell M_\delta f)_{kj}\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Alors, finalement on obtient la relation(5.2.12), ce qui termine la preuve du Lemme 5.2.3.

5.3 Fin de la démonstration du Théorème 5.1.2

Maintenant, nous somme prêts à terminer la démonstration du Théorème 5.1.2.
Prenons comme fonction test dans la définition de la solution faible, la fonction

$$\varphi_1(t,v) = M_\delta w_r^{t\ell+2}\phi_j\psi_k^2\phi_j w_r^{t\ell+2}M_\delta f(t,v)$$

ou

$$\varphi_2(t,v) = w_r^{t\ell+2}M_\delta\phi_j\psi_k^2\phi_j M_\delta w_r^{t\ell+2} f(t,v),$$

où $(\phi_j)_j$ est la décomposition de l'unité par rapport à la variable v, et $(\psi_k)_k$ la décomposition de l'unité (la décomposition de Littlewood-Paley) par rapport à la variable ξ.
En posant $\psi_k\phi_j f = f_{kj}$, $\psi_k\phi_j = p_{kj}$, et $M_\delta w_r^{t\ell+2} f = H_{kj}$, on ad onc : donc, posons $\psi_k\phi_j(\cdot) = (\cdot)_{kj}$, $\psi_k\phi_j = p_{kj}$, et $(M_\delta w_r^{t\ell+2} f)_{kj} = H_{kj}$. on suppose que $\varphi(t,v) \in C^1\big([0,T];\, L^i(\mathbb{R}_v)\big)\ :\ 1 \leq p < \infty$. On la substitue dans la formule faible, on obtient :

$$\begin{aligned}
I^0 &= \big(p_{kj}M_\delta w_r^{t\ell+2}\partial_t f.H_{kj}\big)_{L^2} \\
&= \frac{1}{2}\partial_t\|(M_\delta w_r^{t\ell+2}f(t))_{kj}\| - \Big(M_\delta(\partial_t w_r^{t\ell+2})f)_{kj}.H_{kj}\Big)_{L^2} \\
&- \big(((\partial_t M_\delta)w_r^{t\ell+2}f)_{kj}.H_{kj}\big)_{L^2}.
\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} I^0 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(M_\delta w_r^{t\ell+2} f(t))_{kj}\| - l\int_{\mathbb{R}} p_{kj} M_\delta \log(w) w_r^{t\ell+2} f.H_{kj} dvds \\ &- N\int_{\mathbb{R}} p_{kj}\log(\langle D_v\rangle) M_\delta w_r^{t\ell+2} f.H_{kj} dvds. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \partial_t\|H_{kj}\|^2 &= 2N\int_{\mathbb{R}} p_{kj}\log(\langle D_v\rangle) M_\delta w_r^{t\ell+2} f.H_{kj} dv + \\ &+ 2l\int_{\mathbb{R}} p_{kj} M_\delta \log(w) w_r^{t\ell+2} f.H_{kj} dv + \int_{\mathbb{R}} p_{kj} M_\delta w_r^{t\ell+2} K(f,f).H_{kj} dv \\ &= I_1^0 + I_2^0 + I_3^0. \end{aligned}$$

Pour I_1^0, comme on a $\psi_k\phi_j \equiv C\phi_j\psi_k$,

$$\begin{aligned} I_1^0 &= 2N\int_{\mathbb{R}} \log(\langle D_v\rangle).H_{kj}^2 dv - 2CN\int_{\mathbb{R}} (\log(\langle D_v\rangle))^{(1)}(\phi_j)_{(1)}\phi_j^{-1} H_{kj}.H_{kj} dv \\ &- 2CN\int_{\mathbb{R}} R_2(v,\xi)\phi_j^{-1} H_{kj}.H_{kj} dv \\ &= I_{1.1}^0 + I_{1.2}^0 + I_{1.3}^0, \end{aligned}$$

où

$$R_2(v,\xi) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1-\tau}{2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-iy\eta}\chi_\epsilon(y,\eta)(\log(\langle D_v\rangle))^{(2)}(\phi_j)_{(2)}(v+y)dyd\eta d\tau,$$

et

$$(\phi_j)_{(1)}\phi_j^{-1} \le c,$$

$$f_{(i)}(v) = \partial_v^i f,\ \ g^{(i)}(D_v) := g^{(i)}(\xi) = \partial_\xi^i g(\xi).$$

Pour $I_{1.2}^0$, on utilise que la fonction suivante est décroissante

$$K : 0 \le x \mapsto \frac{x}{1+x^2} - \log(1+x^2) \le 0.$$

Alors, $I_{1.2}^0$,

$$I_{1.2}^0 \le CN\int_{\mathbb{R}} \log(\langle\xi\rangle)\hat{H}_{kj}.\bar{\hat{H}}_{kj} d\xi.$$

Pour $I^0_{1.3}$, on a :

$$I^0_{1.3} = 2CN \int_{\mathbb{R}} R_2(v,\xi)\phi_j^{-1} H_{kj}.H_{kj}dv.$$

On utilise les mêmes manipulations effectuées pour $R_2(v,\xi)$ dans la preuve de $I^2_{1.4}$ dans l'estimation de (5.2.4), en remplaçant $\psi(\xi)$ par $\log(\langle\xi\rangle)$, et $F(v)$ par ϕ_j. On aboutit à :

$$I^0_{1.3} \leq \frac{8CN}{\tau_0} \int_{\mathbb{R}} \log(\langle D_v\rangle) H_{kj}.H_{kj}dv,$$

donc,

$$I^0_1 \leq CN \int_{\mathbb{R}} H_{kj}.\log(\langle D_v\rangle) H_{kj}dv.$$

pour I^0_2, on a

$$\begin{aligned}
I^0_2 &= 2lC \int_{\mathbb{R}} p_k M_\delta \log(w)(w_r^{t\ell+2}f).\phi_j H_{kj}dv \\
&= 2lC \int_{\mathbb{R}} \log(w)\phi_j H_k.H_{kj}dv - 2lC \int_{\mathbb{R}} (\log(w))_{(1)}(\psi_k M_\delta)^{(1)}(w_r^{t\ell+2}f).\phi_j H_{kj} \\
&- 2lC \int_{\mathbb{R}} R_2(v,\xi)(w_r^{t\ell+2}f).\phi_j H_{kj} \\
&= I^0_{2.1} + I^0_{2.2} + I^0_{2.3},
\end{aligned}$$

où, on applique les mêmes manipulations utilisées dans $R_2(v,\xi)$ ci-dessus, il découle que

$$I^0_{2.1} + I^0_{2.3} \leq lC \int_{\mathbb{R}} \log(w) H_k.\phi_j H_{kj}dv = lC \int_{\mathbb{R}} \log(w) H_{kj}.H_{kj}dv,$$

et

$$I^0_{2.2} = 2lC_2(N+c) \int_{\mathbb{R}} (\log(w))_{(1)}\phi_j\psi_k M_\delta(w_r^{t\ell+2}f).H_{kj},$$

puis, on utilise les manipulations effectuées dans $I^0_{1.2}$ en remplaçant $\log(\langle\xi\rangle)$ par $\log(\langle v\rangle)$ et ϕ_j par $\psi_k M_\delta$, on obtient :

$$I^0_2 \leq C(N+c)l \int_{\mathbb{R}} H_{kj}.\log(w) H_{kj}dv.$$

Maintenant, pour traiter les deux intégrales suivantes, (i.e.I_1^{0*} et I_2^{0*}) on a besoin des lemmes, 2.3.10 et 2.3.4

$$I_1^0 \leq I_1^{0*} = CN \int_{\mathbb{R}} H_{kj}. \log(\langle D_v \rangle) H_{kj} dv,$$

et

$$I_2^0 \leq I_2^{0*} = (c+N)l \int_{\mathbb{R}} H_{kj}. \log(\langle v \rangle) H_{kj} dv,$$

en remplaçant $N_* C_\beta \|h\|_{L^1}$ dans les deux lemmes par CN, puis par $C(c+N_0)l$. Ainsi on obtient :

$$I_1^0 + I_2^0 \leq C_{\beta,h} \|(w_r^{t\ell+2} M_\delta f)_{kj}\|_{L^2}^2,$$

où $C_{\beta,\epsilon,h}$ est independante ℓ, N, k, T et δ.
Pour I_3^0, on a besoin du Lemme 5.2.3, en utilisant l'estimation de la coercivité (qui ne change pas en remplaçant $w_r^{t\ell+2} M_\delta f$ par $(w_r^{t\ell+2} M_\delta f)_{kj}$) et l'estimation du commutateur 5.2.3 pour

$$\begin{aligned} J &= -\int_{\mathbb{R}} K(f,\, (w_r^{t\ell+2} M_\delta f)_{kj}).(w_r^{t\ell+2} M_\delta f)_{kj} dv + \frac{d}{dt} \|(w_r^{t\ell+2} M_\delta f)_{kj}(t)\|^2 \\ &\leq \Big((w_r^{t\ell+2} M_\delta f)_{kj} K(f, (w_r^{t\ell+2} M_\delta f)_{kj}) - K\big(f, (w_r^{t\ell+2} M_\delta f)_{kj}\big),\, (w_r^{t\ell+2} M_\delta f)_{kj} \Big)_{L^2} \\ &+ \epsilon \|(w_r^{t\ell+2} M_\delta f)_{kj}(t)\|_{H^1}^2 + C_{\epsilon,\beta,f_0} \|(w_r^{t\ell+2} M_\delta f)_{kj}(t)\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} & C_1 \|(w_r^{t\ell+2} M_\delta f)_{kj}\|_{\dot{H}_1^{1+s}}^2 + C_2 \|(w_r^{t\ell+2} M_\delta f)_{kj}\|_{\dot{H}_1^1}^2 + C_3 \|(w_r^{t\ell+2} M_\delta f)_{kj}\|_{H^1}^2 + \\ & + C_4 \|\Lambda^s (w_r^{t\ell+2} M_\delta f)_{kj}\|^2 + \frac{d}{dt} \|(w_r^{t\ell+2} M_\delta f)_{kj}\|^2 \leq C_0 \|(w_r^{t\ell+2} M_\delta f)_{kj}\|_{L^2}^2 \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

On utilise les propositions 1.4.6, 1.4.7, et le lemme de Gronwall, on aboutit à :

$$\begin{aligned} (6.3.1) &\equiv C_{kj} \|(w_r^{t\ell+2} M_\delta f)_{kj}\|^2 + \frac{d}{dt} \|(w_r^{t\ell+2} M_\delta f)_{kj}\|^2 \leq C_0 \|(w_r^{t\ell+2} M_\delta f)_{kj}\|^2 \\ (6.3.1) &\equiv \frac{d}{dt} [e^{C_{k,j} t} \|(w_r^{t\ell+2} M_\delta f)_{kj}\|^2] \leq 0. \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Bernstein, on obtient

$$(6.3.1) \equiv \|(w_r^{t\ell+2} M_\delta f)_{kj}\|^2 \leq e^{-(C_{k,j} - C_0)t} 2 2^{2(k'+j)} \|(f_0)_{kj}\|_{L^1}^2,$$

où

$$C_{k,j}=(C^1(2^{2(s+1)k+j)}+2^{-2(sk+j)})+C^2(2^{2(j+k)}+2^{-2(j+k)})+C^3(2^{2k})+C^4(2^{2sk})-C_0.$$

La somme sur k, j, donne

$$\sum_{k,j=0}^{\infty}\|(\langle D_v\rangle^{tN+k'}w_r^{t\ell+2}f)_{k,j}\|^2\le\sum_{k,j=0}^{\infty}e^{-(C_{k,j}-C_0)t}2^{2(k'+j)}2\|(f_0)_{k,j}\|^2_{L^1},\quad(5.3.2)$$

où $C_{k,j}$ sont independantes de ℓ, N, k', T, ret δ. Puis prenons $(\delta, r)\to(0,\infty)$, de plus, on a : $\lim_{(k(\text{resp})j))\to\infty}\frac{e^{-C_{k+1,j+1}}}{e^{-C_{k,j}t}}2^{2(k'+j)+1}=0<1, \forall j\in\mathbb{N}$, (resp $(k,k')\in\mathbb{R}^2$), $\forall l\le\infty$, et $\forall t\in]0,\infty[$.
Aussi $\lim_{(k,j)\to(\infty,\infty)}\frac{e^{-C_{k+1,j+1}t}}{e^{-C_{k,j}t}}2^{2(k'+j)+1}=0, \forall l\le+\infty$, et $(t,k')\in]0,\infty[\times\mathbb{R}$.
Donc la série dans la droite de (5.3.2) est convergente par conséquent celle dans sa gauche est aussi convergente, i.e

$$\|\langle D_v\rangle^{tN+k}w_r^{t\ell+2}f\|^2_{L^2}\le C^*(t)\|f_0\|^2_{L^1},\qquad(5.3.3)$$

où $C^*(t)=Ce^{-C_{0,0}t}$ est independante de ℓ, N, k, T et δ.

$$\lim_{(k(\text{resp})j))\to\infty}\frac{e^{-C_{k+1,j+1}}}{e^{-C_{k,j}t}}=0<1,\forall j\in\mathbb{N},(\text{resp }k\in\mathbb{N}),\ \forall l\le\infty,\ \text{ et }\forall t\in]0,\infty[,\ ,$$

et,

$$\lim_{(k,j)\to(\infty,\infty)}\frac{e^{-C_{k+1,j+1}t}}{e^{-C_{k,j}t}}=0<1,\forall l\le\infty,\ t\in]0,\infty[,$$

Corollaire 5.3.1 *Si f est une solution de l'équation de Kac, alors, pour tous $(\ell,k)\in\mathbb{R}^2$, et $N\in\mathbb{N}$ (peuvant tendre vers l'infini) on a :*

$$\|\langle D_v\rangle^{tN+k}w_r^{t\ell+2}f\|^2_{L^2}\equiv\|\langle D_v\rangle^{tN+k}w_r^{t\ell+2}f\|^2_{L^2}.$$

Discussion
1-Cas où $f_0\in L^1$
C'est le cas traité ci-dessus. On obtient

$$f\in H^{tN+k'}_{tl+2}(\mathbb{R}),$$

Alors, pour $(N, l) \to (\infty, \infty)$ on obtient que $f \in H^{\infty}_{\infty}(\mathbb{R})$.
2-Cas où $f_0 \in H^k : k \in \mathbb{R}$,
2-1-Cas où $f_0 \in H^k : k \geq 0$,
On se trouve dans le cas précédent, par suite on obtient le même résultat car :
$f_0 \in H^k \subset L^2 \subset L\log L$, nous fournit d'une part : $f \in L^2 \subset L\log L$ d'aprés l'équivalence de (2.1.12) et (2.2.9) (pour plus de détails voir[44]). D'autre part elle implique que la solution $f \in L^1$ (avec conservation de la masse i.e $f_0 \in L^1$) d'aprés le lemme suivant :

Lemme 5.3.2 *Si la donnée initiale* $f_0 \in L\log L$ *du problème* (2.1.12), *alors la solution* $f \in L^1$ *et par suite* $f_0 \in L^1$.

On considere la formule (2.1.19). En utilisant le changement des variables $(v', v, \theta) \mapsto (v, v', -\theta)$, on a

$$\begin{aligned}
\big(K(f,\, f), \phi\big) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{I_\pi} B(\theta) f(v_*) f(v) \left\{\phi(v') - \phi(v)\right\} d\theta dv_* dv \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \int_{I_\pi} B(\theta) f(v_*) f(v') \left\{\phi(v') - \phi(v)\right\} d\theta dv_* dv \\
&= \frac{-1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{I_\pi} B(\theta) f(v_*) (v' - v)^2 (\partial_v f)(v_s) (\partial_v \phi)(v_\tau) d\theta dv_* dv.
\end{aligned}$$

On prend $\phi(v) = \beta'(f)$.
$\beta(t) = (1+t)\log(1+t)$, implique que $\beta''(f) = \frac{\partial_v f(v)}{1+f(v)}$,
on a :

$$\begin{aligned}
\phi(v') - \phi(v) &= \frac{(\log(1+f)(v') - \log(1+f)(v))}{(f(v') - f(v))} \frac{(f(v') - f(v))}{(v' - v)} (v' - v), \\
&= \frac{1}{1 + f(v_s)} f'(v_s) = \frac{f'(v_\tau)}{1 + f(v_\tau)} (v' - v),
\end{aligned}$$

et donc

$$\big(K(f,\, f), \phi\big) = \frac{-1}{4} \int_{\mathbb{R}} \int_{I_\pi} B(\theta) f(v_*) (v' - v)^2 \partial_v f(v_s) \frac{\partial_v f}{1 + f}(v_s) d\theta dv_* dv.$$

où, prenons en considération (2.3.20), et donc on peut écrire,

$$\big(K(f,\, f), \phi\big) = I_1 + I_2 + I_3$$

En utilisant le changement des variables $v_s \mapsto v$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{-1}{4}\int_{\mathbb{R}}\int_{I_\pi} B(\theta)f(v_*)c_sC_1(\theta)v^2(\frac{\partial_v f}{\sqrt{1+f}}(v))^2 d\theta dv_* dv,\\
I_2 &= \frac{-1}{4}\int_{\mathbb{R}}\int_{I_\pi} B(\theta)f(v_*)c_sC_2(\theta)\sin(\theta/2)vv_*(\frac{\partial_v f}{\sqrt{1+f}}(v))^2 d\theta dv_* dv,\\
I_3 &= \frac{-1}{4}\int_{\mathbb{R}}\int_{I_\pi} B(\theta)f(v_*)c_sC_3(\theta)v_*^2(\frac{\partial_v f}{\sqrt{1+f}}(v))^2 d\theta dv_* dv,
\end{aligned}
$$

où :

$$
\begin{aligned}
C_1(\theta) &= \frac{(1-\cos(\theta/2))^2}{c_s^2},\\
C_2(\theta) &= (1-\cos(\theta/2))\frac{-2s(1-\cos(\theta/2))+c_s}{c_s^2}\sin(\theta/2),\\
C_3(\theta) &= (1-\cos(\theta/2))\frac{s^2(1-\cos(\theta/2))+c_s^2}{c_s^2}\sin^2(\theta/2).
\end{aligned}
$$

Pour I_2, prenant le changement des variables $\theta \mapsto -\theta$, ainsi

$$I_2 = 0.$$

Alors,

$$
\begin{aligned}
\big(K(f,\ f),\phi\big) &= \int_{\mathbb{R}}[f(t,v)\log(1+f(t,v)) - f_0(v)\log(1+f_0(v))]\\
&= \frac{-1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{I_\pi} C(\theta)\sin^2(\theta/2)(v^2+v_*^2f(v_*))(\partial_v\sqrt{(1+f)(v)}^2 d\theta dv_* dv
\end{aligned}
$$

grâce à $f_0 \in L\log L$, en posant $g = 1+f$, on a donc

$$
\begin{aligned}
L^* &= \int_{\mathbb{R}} \partial_t(f(t,v)\log(1+f(t,v)))dv \qquad (5.3.4)\\
&= \int_{\mathbb{R}} K(f,f)[\log(1+f(t,v)) - \frac{1}{1+f(t,v))}]dv\\
&= \frac{-1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{I_\pi} C(\theta)\sin^2(\theta/2)(v^2+v_*^2)f(v_*)(\partial_v\sqrt{(1+f)(v)})^2 d\theta dv_* dv\\
&- \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{I_\pi} C(\theta)f(v_*)\frac{(f'-f)^2}{g'g}d\theta dv_* dv \qquad (5.3.5)
\end{aligned}
$$

Ce qui donne $f \in L^1_2(\mathbb{R})$, par suite $f_0 \in L^1_2(\mathbb{R})$ (conservation (automatique) de la masse et de l'energie). Donc on se trouve dans le cas précédent.

2-2-Cas où $f_0 \in H^{-k}: \ k > 0$

On utilise le fait que H^{-k} est le dual de H^k (qui est un espace de Hilbert). Alors, d'aprés le théorème de Reisz-Fréchet (voir [13]), il existe $g_0 \in H^k$ telle que :

$$\langle f_0, h\rangle = (g_0, h)_{L^2}, \forall h \in H^k,$$

et donc, d'aprés le second cas, le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial_t}(t,v) = K(g,g)(t,v), & t>0,\, v \in \mathbb{R}, \\ g|_{t=0} = g_0(v) \in H^k. \end{cases} \tag{5.3.6}$$

a une solution unique dans $H^{tN+k}_{t\ell}$.

Posons $\hat{g'} = \langle \xi \rangle^{-2k}\hat{g}$. On considère le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{g'}}{\partial t} = \langle \xi \rangle^{-2k}\hat{K}(g,\, g)(t,\xi), & t>0,\, \xi \in \mathbb{R}, \\ g'|_{t=0} = \hat{g'}_0(\xi) = \langle \xi \rangle^{-2k}\hat{g}_0(\xi). \end{cases} \tag{5.3.7}$$

Ce problème a une solution unique comme le problème (5.3.6). Ainsi

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} = \hat{K}(g',\, g')(t,\xi), & t>0,\, \xi \in \mathbb{R}, \\ \hat{h}|_{t=0} = \hat{g'}_0(\xi) = \langle \xi \rangle^{-2k}\hat{g}_0(\xi). \end{cases} \tag{5.3.8}$$

a aussi une seule solution.

On prouve que le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{g'}}{\partial t} = \hat{K}(g',\, g')(t,\xi), & t>0,\, \xi \in \mathbb{R}, \\ \hat{g'}|_{t=0} = \hat{g'}_0(\xi) = \langle \xi \rangle^{-2k}\hat{g}_0(\xi). \end{cases} \tag{5.3.9}$$

a aussi une solution unique dans H^{tN-k}_{ℓ}, telle que $g'_0 \equiv f_0$.

Comme $g' \in H^{tN+k}$ pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\hat{K}(g', g')(t,\xi)$ est bien défini. Alors le problème linéaire (5.3.8) a une solution unique classique (forte)non négative solution.

g' **est-elle une solution de** (5.3.9) **?**

soient g_1 une solution de (5.3.7) et g_2 une solution de (5.3.9) avec l'hypothèse que $\hat{g'} = \langle\xi\rangle^{-2k}\hat{g}$. D'apés l'identité de Bobylev, on a :

$$\partial_t \|(\hat{g}_1 - \hat{g}_2)(t,\xi)\|_{L^1} \leq |C(t)| \|(\hat{g}_1 - \hat{g}_2)\|_{L^1},$$

où :

$$C(t) = \sup_\xi \frac{\int_{I_\pi} \beta[\langle\xi\rangle^{-2k} - \langle\xi^-\rangle^{-2k}\langle\xi^+\rangle^{-2k}]|\hat{g}(\xi^-)\hat{g}(\xi^+)|}{\int_0^t |\int_{I_\pi} \beta[\langle\xi\rangle^{-2k} - \langle\xi^-\rangle^{-2k}\langle\xi^+\rangle^{-2k}]\hat{g}(\xi^-)\hat{g}(\xi^+)|},$$

est bien définie. Donc,

$$\partial_t[\|(\hat{g_1} - \hat{g_2})(t,\xi)\|_{L^1} e^{-\int_T^t C(t)}] \leq 0,$$

par suite, comme $\hat{g_1}(0,\xi) = \hat{g_2}(0,\xi) = \langle\xi\rangle^{-2k}\hat{g}(0,\xi)$, on obtient que $\hat{g_1} \equiv \hat{g_2}$. Alors il découle l'existence et l'unicité de g' solution du problème de Cauchy avec donnée initiale $g'_0 \in H^{-k}$.

$g'_0 \equiv f_0$ **?**

D'après le théorème de Riesz, $g'(t) \in H^{tN-k}$ implique qu'il existe $h(t) \in H^{-tN+k}$ telle que :

$$\langle\, g'(t),\, T' \,\rangle = (h,\, T')_{L^2},\ \forall T' \in H^{-tN+k},\ t \in [0,T], T < \infty \tag{5.3.10}$$

la fonction h est une solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} = \hat{K}(h,\, h)(t,\xi), & t > 0,\ \xi \in \mathbb{R}, \\ \hat{h}|_{t=0} = \langle\, \xi \,\rangle^{-tN+2k}\hat{g}'(0,\xi) = \hat{g}_0(\xi). \end{cases} \tag{5.3.11}$$

où $\hat{h}(t,\xi) = \langle\, \xi \,\rangle^{-tN+2k}\hat{g}'(t,\xi)$. En particulier on a (5.3.10) pour $t = 0$

$$\begin{aligned} &\langle\, g'(0),\, T' \,\rangle = (h(0),\, T')_{L^2},\ \forall T' \in H^k \\ &\langle\, g'(0),\, T' \,\rangle = (g_0,\, T')_{L^2},\ \forall T' \in H^k \end{aligned} \tag{5.3.12}$$

D'autre part, on a

$$\langle\, f_0,\, E \,\rangle = (g_0,\, E)_{L^2},\ \forall E \in H^{+k}, \tag{5.3.13}$$

posons $T' = E \in H^k$. Alors

$$\begin{aligned} &\langle\, g'(0),\, T' \,\rangle = (h(0),\, T')_{L^2},\ \forall T' \in H^k \\ &\langle\, g'(0),\, T' \,\rangle = (g_0,\, T')_{L^2},\ \forall T' \in H^k \\ &(g_0,\, T')_{L^2} = \langle\, f_0, T' \,\rangle,\ \forall T' \in H^{+k.} \end{aligned} \tag{5.3.14}$$

Ce qui donne :

$$\langle\, g'(0),\, T' \,\rangle = \langle\, f_0, T' \,\rangle \forall T' \in H^{+k},$$

de sorte que :

$$f_0 \equiv g_0'.$$

Ceci prouve que pour tout $f_0 \in H^{-k}$, $k > 0$, il existe une solution faible unique non négative du problème de Cauchy (5.3.9) $g' \in H_\ell^{tN-k}$, telle que $g'(0,v) = f_0(v) \in H^{-k}$, $\forall v \in \mathbb{R}$.
Finalement laissons $(N,l) \to (\infty,\infty)$ pour obtenir :

$$f \in H_\infty^\infty(\mathbb{R}).$$

Ceci termine la démonstration du théorème 5.1.2.

Chapitre 6

Effet de régularisation au sens de Gevrey avec poids

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, on considère une régularité d'ordre supérieure. C'est la régularité au sens de Gevrey pour les solutions du problème de Cauchy (2.1.12) dans l'espace L^2_∞. Cette propriété de l'effet de régularisation du problème de Cauchy est supérieure à celles des résultas de [47, 43] où l'équation de Boltzmann linéairisée, respectivement celle nonlinéaire de Kac sont considérées. Dans [23], on aboutit à l'effet de régularisation ultra-analyticque pour les équations, de landau linéairisée autour de la distribution Maxwellienne et de Fokker-Plank linéairisée, du problème de Cauchy. ($G^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ pour l'équation homogène de Landau).
Ce résultat est établi dans le :

Théorème 6.1.1 *On suppose que la donnée initiale $f_0 \in L^1$, que le section efficace β satisfait* (2.1.14) *et f la solution faible du problème de Cauchy.* (2.1.12)*. Alors*

$$\langle \cdot \rangle f(t, \cdot) \in G^{\frac{1}{s}}(\mathbb{R}),$$

pour tous $t > 0$ et $\ell \in [0, \infty]$

Théorème 6.1.2 *Le résultat du Théorème 6.1.1 est aussi vrai si on suppose que le noyau de collision est de type de Debye-Yukawa, i.e. β satisfait* (2.1.15)*.*

Remarque : Ce résultat est une propriété de l'effet de régularisation dans la classe des fonctions de Gevrey pour le problème de Cauchy. Nous ne faisons aucune hypothèse sur la régularité et les moments contrôlés d'ordre élevé pour la donnée initiale.

L'étude de l'effet de la régularisation de Gevrey pour les solutions, en appliquant la méthode de régularisantes utilisée dans [47], est basée sur le bon choix des régularisantes composées des opérateurs pseudo-differentiels et l'estimation précise du commutateur. L'idée principal est d'introduire une famille des régularisantes composées des opérateurs pseudo-differentiels qui permettent d'utiliser la solution faible régularisée comme une fonction test dans la formulation faible du problème de Cauchy (2.1.12), et l'estimation coercivité induite de la singularité de la section efficace pour obtenir une estimation uniforme sur des normes des espaces de Sobolev pour la solution faible. Pour substituer cette méthode, on considère la suite des régularisantes de type exponentiel suivant.
Pour $0 < \delta < 1, c_0 > 0$, on pose

$$G_\delta(\xi) = exp(\frac{c_0 t\langle\xi\rangle^s}{\langle\delta\xi\rangle^s}) \tag{6.1.1}$$

où $\langle\xi\rangle = (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}},\ \xi \in \mathbb{R}$.
Alors, pour tout $0 < \delta < 1$, on a :

$$G_\delta(\xi) \in L^\infty(]0, T_0] \times \mathbb{R}), \tag{6.1.2}$$

$$\lim_{\delta\to 0} G_\delta(\xi) = exp(c_0 t\langle\xi\rangle^s) \tag{6.1.3}$$

On note par $G_\delta(t, D_v)$ le multiplicateur de Fourier dont le symbole $G_\delta(\xi)$.

$$G_\delta f(t, v) = G_\delta(t, D_v)f = \mathcal{F}(G_\delta(\xi)\hat{f}(t, \xi)).$$

L'objectif est de prouver la bornéture uniforme (par rapport $0 < \delta < 1$,) du terme $\|G_\delta f(t, .)\|_{L^2}$ pour la soluion faible du problème de Cauchy ((2.1.12)). Pour ça, nous avons besoin des résultats suivants.

Lemme 6.1.3 *Pour tout* $0 < \delta < 1, 0 < T < \infty$, *et* $c_0 > 0$. *On a les propriétés suivantes :*
(i) Si f *est une solution faible, alors*

$$w_r^{t\ell+2} G_\delta f \in \mathcal{C}\big(]0, T]; L^2\big), \tag{6.1.4}$$

et

$$G_\delta w_r^{2(tl+2)} G_\delta f \in L^\infty\big(]0,T];L^2\big), \tag{6.1.5}$$

(ii) Si $f \in L^1\big([0,T];L^1\big)$*, alors*

$$G_\delta w_r^{2(tl+2)} G_\delta f \in L^\infty\big(]0,T];L^2\big), \tag{6.1.6}$$

et

$$w_r^{t\ell+2} G_\delta f \in L^\infty\big(]0,T];L^2\big). \tag{6.1.7}$$

où $w_r^{t\ell+2}(v) = \langle v_r\rangle^{tl+2}, l \in \mathbb{R}^+$.

La preuve de ce lemme sera donnée dans l'Annexe.
Tout d'abord, montrons que

$$|G_\delta(\xi) - G_\delta(t,\xi^+)| \le C_0 \sin^2(\theta/4)\langle\, \xi\, \rangle^s G_\delta(\xi_\tau), \tag{6.1.8}$$

où :

$$\xi^+ = \xi\cos(\theta/2),\ \ \xi^- = \xi\sin(\theta/2),\ \ \xi_\tau = \xi^+ + \tau(\xi - \xi^+).$$

Rappelons que le noyau de collision est supporté dans $|\theta| \le \frac{\pi}{2}$. Notons que

$$\begin{aligned} \partial_\xi G_\delta(t,\xi) &= [c_0 ts\frac{(1-\delta)\xi}{\langle\delta\xi\rangle^{s+2}}\langle\xi\rangle^{s-2}G_\delta(t,\xi) \\ &\le C_0\langle\xi\rangle^s)\xi\langle\xi\rangle^{-2}G_\delta(t,\xi), \end{aligned}$$

donc

$$|G_\delta(\xi) - G_\delta(t,\xi^+)| \le C \sin^2(\theta/4)\langle\, \xi\, \rangle^s G_\delta(t,\xi_\tau).$$

6.2 Analyse de l'opérateur de Kac

Estimation de la coercivité

Proposition 6.2.1 *On suppose que le noyau de collision* β *satisfait l'hypothèse* (2.1.14) *et que* f*,* h *sont deux fonctions non négatives avec :* $0 \ne h \in L^1$*. Alors, il existe des constantes positives* $C_{h.i}$ $i = \overline{1,5}$ *dépendantes seulement de* β*,* $\|h\|_{L^1}$*,* $\|h\|_{L^1_1}$*,* $\|h\|_{\dot{L}^1_2}$ *et* $\|h\|_{L\log L}$*, telles que pour toute fonction* $f \in L^1$ *on a :*

$$\begin{aligned} &C_{h,1}\|G_\delta w^\ell f\|^2_{\dot{H}^{1+s}_1} + C_{h,2}\|G_\delta w^\ell f\|^2_{\dot{H}^1_1} + C_{h,3}\|G_\delta w^\ell f\|^2_{H^1} + \\ &+C_{h,4}\|\Lambda^s G_\delta w^\ell f\|^2 \le \big(-K(h,\ G_\delta w^\ell f),\ G_\delta w^\ell f\big) + C_{h,5}\|G_\delta w^\ell f\|^2. \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

(6.2.1) *est aussi vraie si on remplace* $G_\delta w^\ell f$ *par* $w^\ell G_\delta f$*.*

Démonstration. Posons

$$J = \big(- K(h,\, G_\delta w^\ell f),\, G_\delta w^\ell f\big) = - \int_{\mathbb{R}} K(h,\ G_\delta w^\ell f) G_\delta w^\ell f dv,$$

$w^\ell f = g$, et $G_\delta \hat{g} = F$.
En utilisant le théorème de Plancherel et l'identité de Bobylev, on aboutit à :

$$\begin{aligned}
J &= -\int_{\mathbb{R}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta) \Big\{ \hat{h}(\xi^-)(G_\delta \hat{g}(\xi^+) - \hat{h}(0)(G_\delta \hat{g}(\xi) \Big\} (G_\delta \bar{\hat{g}})(\xi) d\theta d\xi \\
&\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta) \Big\{ [\hat{h}(0) - |\hat{h}(\xi^-)|] |F(\xi) - F(\xi^+)|^2 \Big\} d\theta d\xi \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta) \Big\{ [|\hat{h}(\xi^-)| - \hat{h}(0)] |F(\xi) - F(\xi^+)|^2 \Big\} d\theta d\xi \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta) \Big\{ \hat{h}(0) [F^2(\xi) - F^2(\xi^+)] \Big\} d\theta d\xi \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta) \Big\{ [\hat{h}(0) - |\hat{h}(\xi^-)|] |F^2(\xi) + F^2(\xi^+)| \Big\} d\theta d\xi \\
&= J_1 + J_2 + J_3 + J_4.
\end{aligned}$$

Pour J_1, on utilise Lemme 2.3.7, on a :

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta) \Big\{ [\hat{h}(0) - |\hat{h}(\xi^-)|] |F(\xi) - F(\xi^+)|^2 \Big\} d\theta d\xi \\
&\geq C_\beta \frac{1}{C_\tau^2} \int_{\mathbb{R}} C_h |\xi|^{2+2s} |\partial_\xi F(\xi)|^2 d\xi \\
&= C_\beta \|h\|_{L^1} \|G_\delta w^\ell f\|^2_{\dot{H}_1^{1+s}}.
\end{aligned}$$

Pour J_2, on a

$$\begin{aligned}
J_2 &\leq \frac{1}{C_s} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} \beta(\theta) \sin^2(\theta/2) [\hat{h}(0) - |\hat{h}(\xi^-)|] | |\xi_s| (\partial_{\xi_s} F)(\xi_s) | (|F(\xi)| + |F(\xi^+)) d\theta d\xi_s \\
&\leq \epsilon \|G_\delta w^\ell f\|^2_{\dot{H}_1^1} + C_\epsilon [C_\beta \|h\|_{L_1^1}]^2 \|G_\delta w^\ell f\|^2_{L^2}.
\end{aligned}$$

Pour J_3 d'aprés le lemme de Cancellation, on a

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta)\hat{h}(0)[F^2(\xi)-F^2(\xi^+)]d\theta d\xi \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta)(\frac{1}{\cos(\theta/2)}-1)|F^2(\xi)|d\theta d\xi \\ &= -C_\beta\|h\|_{L^1}\|G_\delta w^\ell f\|^2_{L^2}. \end{aligned}$$

Pour J_4, on utilise 2.3.7pour avoir

$$\begin{aligned} J_4 &\geq C_h\int_{\mathbb{R}}|\xi^{2s}||F^2(\xi)+F^2(\xi^+)|d\xi \\ &\geq C_h\big(\|G_\delta w^\ell f\|^2_{H^s}-\|G_\delta w^\ell f\|^2_{L^2}\big). \end{aligned}$$

par substitution de $J_i,\ i=\overline{1.4}$ in J, on aboutit à :

$$\begin{aligned} &C_\beta\|h\|_{L^1}\|G_\delta w^\ell f\|^2_{\dot{H}_1^{1+s}}+C_{f,1}\|\Lambda^s G_\delta w^\ell f\|^2 \\ &\leq \big(-K(h,\ G_\delta w^\ell f),\ G_\delta w^\ell f\big)+C_{h,3}\|G_\delta w^\ell f\|^2. \end{aligned}$$

D'autre part, on pose

$$J=-\big(K(h,\,G_\delta w^\ell f),\,G_\delta w^\ell f\big),$$

et en utilisant le changement de variables $(v,v')\mapsto(v',v)$, il vient :

$$\begin{aligned} J &= -\big(K(h,\,G_\delta w^\ell f),\,G_\delta w^\ell f\big) \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} h_*[(G_\delta w^\ell f)^2(v')-(G_\delta w^\ell f)^2(v)]d\theta dv_* dv \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} h_*[(G_\delta w^\ell f)(v')-(G_\delta w^\ell f)(v)]^2 d\theta dv_* dv \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \sin^2(\theta/2)h_*[(v'-v)^2\partial_v(G_\delta w^\ell f)^2(v_s)]d\theta dv_* dv_s \\ &- C_\beta\|h\|_{L^1}\|G_\delta w^\ell f\|^2_{L^2}=J^*+T, \end{aligned}$$

où, prenons en considération (2.3.19) et (2.3.20). Alors le changement de variables $v\mapsto v_s$ donne :

$$J^*=\int_{\mathbb{R}}\int_{I_\pi}\frac{1}{c_s}B\cos^2(\theta/4)h_*c(\theta)v_s+s\sin(\theta/2)v_*)^2\big((\partial_v G_\delta w^\ell f)(v)\big)^2 d\theta dv_* dv,$$

où

$$((1-\cos(\theta/2)v_s + s\sin(\theta/2)v_*)^2 = C_1(\theta)v^2 + C_2(\theta)v_*^2 - C_3(\theta)\sin(\theta)vv_*,$$

avec $C_i(\theta) = C_i(-\theta),\ \forall i = \overline{1,2}$, et $C_3(-\theta) = -C_3(\theta)$, Ainsi,

$$\begin{aligned} J^* &= \int_{\mathbb{R}}\int_{I_\pi} BC_1(\theta)h_*[v(\partial_v G_\delta w^\ell f)(v)]^2 \\ &+ \int_{\mathbb{R}}\int_{I_\pi} BC_2(\theta)v_*^2 h_*[(\partial_v G_\delta w^\ell f)(v)]^2 d\theta dv_* dv \\ &+ \int_{\mathbb{R}}\int_{I_\pi} BC_3(\theta)\sin(\theta/2)vv_* h_*[(\partial_v G_\delta w^\ell f)(v)]^2 d\theta dv_* dv \\ &= J_1^* + J_2^* + J_3^*. \end{aligned}$$

Pour J_3^*, en utilisant le changement de variables $\theta \to -\theta$, on obtient $J_3^* = 0$. Donc

$$J^* = C_B^1 \|h\|_{\dot{L}_2^1} \|G_\delta w^\ell f\|_{H^1}^2 + C_\beta^2 \|h\|_{L^1} \|G_\delta w^\ell f\|_{\dot{H}_1^1}^2.$$

On aboutit finalement à la (6.2.1) :

$$\begin{aligned} &C_{h,1}\|G_\delta w^\ell f\|^2_{\dot{H}_1^{1+s}} + C_{h,2}\|G_\delta w^\ell f\|^2_{\dot{H}_1^1} + C_{h,3}\|G_\delta w^\ell f\|^2_{H^1} \\ &+ C_{h,4}\|\Lambda^s G_\delta w^\ell f\|^2 \leq \big(-K(h,\ G_\delta w^\ell f),\ G_\delta w^\ell f\big) + C_{h,5}\|G_\delta w^\ell f\|^2), \end{aligned}$$

où $C_{h.i}$, $i = \overline{1.5}$ dépendent de $\|h\|_{L^1}$ et de β, mais pas de ℓ, T et δ.
Ceci achève la démonstration de Proposition 6.2.1.

Estimation du commutateur (forme 1)

Proposition 6.2.2 *On suppose que le noyau de collision β satisfait la supposition* (2.1.14) *ou* (2.1.15) *et que f, h sont deux fonctions non négatives avec $0 \neq h \in L^1$.*
Alors, il existe des constantes positives $C_{\epsilon,\beta,h}$ qui dépend seulement de β, et $\|h\|_{L^1}$; telles que :

$$\big(w^\ell G_\delta K(h,f) - K(h, w^\ell G_\delta f),\ w^\ell G_\delta f\big) \leq \epsilon\|w^\ell G_\delta f\|^2_{H^1} + C_{\epsilon,\beta,h}\|w^\ell G_\delta f\|^2. \tag{6.2.2}$$

et

$$\big(G_\delta w^\ell K(h,f) - K(h, G_\delta w^\ell f),\ G_\delta w^\ell f\big) \leq \epsilon\|G_\delta w^\ell f\|^2_{H^1} + C_{\epsilon,\beta,h}\|G_\delta w^\ell f\|^2, \tag{6.2.3}$$

pour tout $\delta \in [0,1]$, $l \in [0,\infty]$, et toute $f \in L^\infty\big([0,\infty[_t;\ L^1(\mathbb{R}_v)\big)$.

Démonstration. Pour (6.2.2).
Notons $G_\delta(v)$ (respectivement $G_\delta(v'), w(v), w(v'), f(v), f(v'), f(v_*), f(v'_*)$) par G_δ (respectivement $G'_\delta, w, w', f, f', f_*, f'_*$). Posons :
$I = \big(w^\ell G_\delta K(h,\ f) - K(h,\ w^\ell G_\delta f),\ w^\ell G_\delta f\big)$.
En utilisant le changement de variables $v'_* \mapsto v_*$, on a :

$$\begin{aligned}
I \quad &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta)[w^\ell G'^{+}_\delta h'_* f' - h'_* w'^\ell G'_\delta f'] w^\ell G_\delta f(v) d\theta dv_* dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta) h_*[(w'^\ell - w^\ell)G'_\delta f + w^\ell(G^+_\delta - G_\delta)f] w'^\ell G'_\delta f' d\theta dv_* dv \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Pour I_2, si $C_0 = c_0 st$ est assez grand, on subdivise I_π en $\Omega^c \cup \Omega$:
$\Omega = \left\{\theta \in I_\pi : \theta \leq \theta_* = (\langle\xi_\tau\rangle^s C_0)^{\frac{-1}{2(1-s)}}\right\}$, $\Omega^c = \{\theta \in I_\pi : \theta > \theta_*\}$.
Sur Ω, on a :

$$\int_\Omega \beta(\theta)\sin^2(\theta/2) \leq C\theta_*^{2(1-s)}, \tag{6.2.4}$$

où $G_\delta(D_{v^+}) - G_\delta(D_v)$ dont le symbol satisfait :

$$|G_\delta(\xi^+) - G_\delta(\xi)| \leq C_0 \sin^2(\theta/2)\langle\xi_\tau\rangle^s G_\delta(\xi) :\ |\xi^+| < |\xi_\tau| < |\xi|. \tag{6.2.5}$$

Alors

$$\int_\Omega \beta(\theta)\sin^2(\theta/2)|G_\delta(\xi^+) - G_\delta(\xi)|G_\delta^{-1}(\xi) \leq C,$$

Sur Ω^c on utilise le fait que :

$$|G_\delta(\xi^+) - G_\delta(\xi)| \leq |e^{-C_0\sin^2(\theta/2)\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\langle\xi_\tau\rangle^s} - 1||G_\delta(\xi)|, \tag{6.2.6}$$

où $|\xi_\tau| = |\xi^+ + \tau(\xi - \xi^+)| \leq |\xi|$.
D'autre part on a

$$\begin{aligned}
|e^{-C_0\sin^2(\theta_*/2)\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\langle\xi_\tau\rangle^s} - 1| \quad &= \quad \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}(-C_0\sin^2(\theta_*/2)\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\langle\xi_\tau\rangle^s)^i \\
&\approx \quad \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}\frac{1}{(-2)^{2i}}\langle\xi\rangle^{is}\langle\xi_\tau\rangle^{\frac{-is}{1-s}}C_0^i C_0^{\frac{-i}{1-s}}(\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2})^i \\
&\approx \quad \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}\frac{(-1)^i}{2^{2i}}\langle\xi_\tau\rangle^{\frac{-is^2}{1-s}}C_0^{\frac{-is}{1-s}}(\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2})^i.
\end{aligned}$$

On fait le changement de variables $\theta \mapsto \frac{\theta}{2}$, pour obtenir

$$\int_{\Omega^c} \beta(\theta) d\theta = 2\int_{\theta_*}^{\pi/4} \beta(\theta) d\theta \le \frac{\pi}{2}\theta_*^{-2s},$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^c} \beta |e^{-C_0 \sin^2(\theta_*/2)\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\langle \xi_\tau\rangle^s} - 1| d\theta &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!}\frac{(-1)^i}{2^{2i}} \langle \xi_\tau\rangle^{\frac{-(i-s)s}{1-s}} C_0^{\frac{-(i-s)}{1-s}} (\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2})^i \\
&\le (\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!}\frac{(-1)^i}{2^{2i}} (\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2})^i)(\sum_{i=1}^{\infty} (\langle \xi_\tau\rangle^s C_0)^{\frac{-(i-1)s}{1-s}} \\
&\le \frac{\pi}{2} e^{\frac{-|\xi|^2}{4(1+|\xi|^2)}} \frac{(\langle \xi_\tau\rangle^s C_0)^{\frac{-1+s}{1-s}}}{1-(\langle \xi_\tau\rangle^s C_0)^{\frac{-1}{1-s}}} \le C\frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

où, pour C_0 assez-grand $\frac{(\langle \xi_\tau\rangle^s C_0)^{\frac{-1+s}{1-s}}}{1-(\langle \xi_\tau\rangle^s C_0)^{\frac{-s}{1-s}}} \sim 0$. Donc,

$$\int_{\Omega^c} \beta(\theta)[G_\delta(\xi^+) - G_\delta(\xi)]\tilde{G_\delta^{-1}}(\xi) \le C.$$

D'où

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta(\theta) h_* [G_\delta(D_{v^+}) - G_\delta(D_v)] f G_\delta(D_{v'}) f' d\theta dv_* dv \\
&\le C_\beta \|h\|_{L^1} \|G_\delta f(v)\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Pour I_1, si ℓ est assez grand, on subdivise $I = [\frac{-\pi}{2}, \frac{+\pi}{2}]$ en $\Omega \cup \Omega^c$:
$\Omega = \left\{\theta \in I_\pi : \theta \le \theta_0 = L^{\frac{-1}{(1-s)}}\right\}$, $\Omega^c = \{\theta \in I_\pi : \theta > \theta_0\}$ où : $L = (L_* = l(l+1)w_*^{l+1})^{\frac{2}{1-s}}$.
On a :

$$\int_\Omega \beta(\theta)\sin^2(\theta/2) \le C L_*^{\frac{-3-s}{1-s}}, \tag{6.2.7}$$

et

$$\int_{\Omega^c} \beta(\theta)(1-\cos^L(\theta/2) \le C(s) < \infty, \tag{6.2.8}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\Omega} \beta(\theta) h_* ({w'}^\ell - w^\ell) G_\delta^+ f {w'}^\ell G'_\delta f' d\theta dv_* dv \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\Omega^c} \beta(\theta) h_* ({w'}^\ell - w^\ell) G_\delta^+ f {w'}^\ell G'_\delta f' d\theta dv_* dv \\
&= I_{1.1} + I_{1.2},
\end{aligned}$$

on applique les mêmes manipulations effectuées dans I_1 (Estimation du commutateur du chapitre 5), où, prenons en considérations (2.3.19), (2.3.20) et

$$G_\delta(\xi^+) \leq G_\delta(\xi),$$

on aboutit, donc, à :

$$I_1 \leq \epsilon_1 \|w^\ell G_\delta f\|_{H^1}^2 + C_{h,\epsilon_1} \|w^\ell G_\delta f(v)\|_{L^2}^2.$$

Par conséquent

$$I \leq C_{\epsilon,\beta,\|h\|_{L^1}} \|w^\ell G_\delta f\|_{L^2}^2 + \epsilon \|w^\ell G_\delta f\|_{H^1}^2.$$

où $C_{\epsilon,\beta,h}$ est indépendante de δ, T, et ℓ .
Ceci achève la démonstration de (6.2.2).
Pour (6.2.3), on utilise le changement de variables $v'_* \mapsto v_*$, en posant $w^\ell f = g$, et $G_\delta w^\ell f(v) = H(v)$ on a :

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta)[h_* G_\delta^+ w'^\ell f - H]H' d\theta dv_* dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta) h_* [G_\delta^+ - G_\delta] w^\ell f H(v') d\theta dv_* dv \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \beta(\theta) w_*^\ell h_* [\frac{w'^\ell - w^\ell}{(w_* w)^\ell}] \tilde{G_\delta} H H(v') d\theta dv_* dv \\
&- \int_{\mathbb{R}^2} \int_{I_\pi} \beta(\theta) w_*^\ell h_* [\frac{w'^\ell - w^\ell}{(w_* w)^\ell}, \tilde{G_\delta}] H H' d\theta dv_* dv \\
&= I_1 + I_2 + I_3,
\end{aligned}$$

où $\tilde{G_\delta} = G_\delta(D_{v^+}) G_\delta^{-1}(D_v)$.
Pour I_1, on utilise le théorème de Plancherel et l'identité de Bobylev, en remarquant que : $G_\delta^+ = G_\delta(D_{v^+})$.
Ainsi le changement de variables $\xi \mapsto \xi_+ = \cos^{-1}(\theta/2)\xi$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{I_\pi} \beta \hat{h}(\xi^-) [G_\delta(\xi^{++}) - G_\delta(\xi^+)] \hat{g}(\xi^+) (G_\delta \bar{\hat{g}})(\xi) d\theta d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{I_\pi} \beta \cos(\theta/2) \hat{h}(\xi_+^-) [G_\delta(\xi^+) - G_\delta(\xi)] \hat{g}(\xi) (G_\delta \bar{\hat{g}})(\xi_+) d\theta d\xi_+.
\end{aligned}$$

On dénote $\cos^2(\theta/2)\xi$ (respectivement $\cos^{-1}(\theta/2)\xi$) par ξ^{++} (respectivement ξ_+).

Pour $C_0 = c_0 st$ **assez grand**. On divise $I = [\frac{-\pi}{2}, \frac{+\pi}{2}]$ en $\Omega^c \cup \Omega$:

$\Omega^c = \left\{\theta \in I_\pi; |\theta| > \theta_* = C_0^{\frac{-1}{2(1-s)}}\right\}, \Omega = \{\theta \in I_\pi; |\theta| \leq \theta_*\}$.

On fait le changement de variables $\theta \mapsto \frac{\theta}{2}$, pour avoir :

$$\int_\Omega \beta(\theta)\theta^2 \leq C\theta_*^{2-2s} \leq CC_0^{-1}. \tag{6.2.9}$$

D'où

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_{\mathbb{R}}\int_\Omega \beta(\theta)(1-\cos(\theta/2))|\hat{h}(\xi^-)|C_0|\frac{G_\delta(\xi_s)}{G_\delta(\xi)}||(G_\delta\hat{g}(\xi)G_\delta\bar{\hat{g}}(\xi_+)|d\theta d\xi_+ \\ &+ \int_{\mathbb{R}}\int_{\Omega^c} \beta\hat{h}(\xi_+^-)[G_\delta(\xi^+) - G_\delta(\xi)]\hat{g}(\xi)(G_\delta\bar{\hat{g}})(\xi_+)d\theta d\xi_+ \\ &= I_{1.1} + I_{1.2}. \end{aligned}$$

Sur Ω, on a

$$\int_\Omega \beta(\theta)(1-\cos(\theta/2))C_0 \approx CC_0C_0^{-1} \leq C.$$

Sur Ω^c on utilise les mêmes manipulations dans I_2 dans la preuve de (6.2.2). Alors,

$$I_1 \leq C_\beta\|h\|_{L^1}\|G_\delta w^\ell f(v)\|_{L^2}^2,$$

où C_β est indépendante de δ, l et T.

Pour I_2, on utilise les mêmes manipulations faites pour I_1 dans la preuve de (6.2.2).

Alors,

$$I_2 \leq C_{\beta,\epsilon,\|h\|_{L^1}}\|w^\ell G_\delta f\|_{L^2}^2 + \epsilon\|w^\ell G_\delta f\|_{H^1}^2.$$

où C^i, $i = 1.2$ sont indépendantes de δ, l et T.

Pour I_3, posons $G_\delta w^\ell f(v) = H(v)$. On a :

$$\begin{aligned} I_3 &= -\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta(\theta)w_*^\ell h_*[\frac{w'^\ell - w^\ell}{(w_*w)^\ell}, \tilde{G}_\delta(D_v)]H(v)H(v')d\theta dv_* dv \\ &= -\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta(\theta)w_*^\ell h_*\big(\frac{w'^\ell - w^\ell}{(w_*w)^\ell}\big)_{(1)}\big(\tilde{G}_\delta(D_v)\big)^{(1)}H(v)H(v') \\ &+ -\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi} \beta(\theta)w_*^\ell h_* R_2(v,\xi)H(v)H(v')d\theta dv_* dv \\ &= I_{3.1} + I_{3.2}. \end{aligned}$$

Pour $I_{3.1}$, on subdivise I_π en $\Omega^c \cup \Omega$:
$\Omega^c = \left\{\theta \in I_\pi ; |\theta| > \theta_* = C^{\frac{-1}{(1-s)}}\right\}, \Omega = \{|\theta| < \theta_*\} : C^{\frac{1-s}{2}} = C_* = l\langle v_*\rangle^\ell C_0.$
Notons que

$$(\frac{w'^\ell - w^\ell}{w^\ell})_{(1)} \leq (2l\langle v_*\rangle^\ell),$$

et $(G_\delta^+ . G_\delta^{-1})^{(1)}$ avec son symbole satisfaisant

$$(\frac{G_\delta(\xi^+)}{G_\delta(\xi)})^{(1)} \leq C_0 \sin^2(\theta/2)(1+\sqrt{2})e^{c_0 t(\langle\xi^+\rangle^s - \langle\xi\rangle^s)},$$

En effet,

$$\begin{aligned}
(\tilde{G}_\delta(\xi))^{(1)} &= (\frac{G_\delta(\xi^+)}{G_\delta(\xi)})^{(1)} \\
&= C_0(\frac{\xi\cos^2(\theta/2)}{1+|\xi^+|^2}\langle\xi^+\rangle^s - \frac{\xi}{1+|\xi|^2}\langle\xi\rangle^s)e^{c_0 t(\langle\xi^+\rangle^s - \langle\xi\rangle^s)} \\
&\leq C_0 \sin^2(\theta/2)(1+\sqrt{2})e^{c_0 t(\langle\xi^+\rangle^s - \langle\xi\rangle^s)},
\end{aligned}$$

où

$$\xi_s = \xi^+ + s(\xi - \xi^+) = c_s \xi : \frac{1}{\sqrt{2}} \leq c_s = (1-s)\cos(\theta/2) + s \leq < 1,$$

Donc, on utilise les mêmes techniques faites dans I_2 (Estimation supérieure), en obtenant :
Sur Ω,

$$\int_\Omega C_* \beta(\theta)\theta^2 \approx \theta^{2-2s}|_{\theta=0}^{\theta=\theta_*} \leq C_*^{\frac{-3-s}{(1-s)^2}},$$

Sur Ω^c,

$$2\int_{\theta_*}^{\pi/4} \beta(\theta)(1-\cos^C(\theta/2) \leq C(s) < \infty,$$

alors

$$I_{3.1} \leq C_{\beta,\epsilon,\|h\|_{L^1}} \|w^\ell G_\delta f\|_{L^2}^2 + \epsilon \|w^\ell G_\delta f\|_{H^1}^2.$$

Pour $I_{3.2}$, on a, d'aprés [39] (voir aussi [40]), on voit que pour tout $N \in \mathbb{N}$.

$$R_2 = R_{N=2}(v,\xi) = \int_0^1 \frac{(1-\tau)}{2!} r_{N=2,\tau}(v,\xi)d\tau,$$

En posant

$$F(v) = \frac{w'^{\ell} - w^{\ell}}{(w_* w)^{\ell}}, \text{ et } \psi(\xi) = \frac{G_\delta(\xi^+)}{G_\delta(\xi)}$$

on a :

$$\begin{aligned} r_{N=2,\tau}(v,\xi) &= O_s - \int\int e^{-iy.\eta}(F(v+y))_2\psi^{(2)}(\xi+\tau\eta)d\eta dy \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} O_s - \int\int e^{-iy.\eta}\chi_\epsilon(y,\eta)(F(v+y))_2\psi^{(2)}(\xi+\tau\eta)d\eta dy, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\chi_\epsilon(y,\eta) = \chi(\epsilon y, \epsilon\,\eta),\ 0 \leq \epsilon 1 \\ &\chi(y,\eta) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2_{y,\eta}), \text{tel que}\, \chi(0,0) = 1, \end{aligned}$$

On prend

$$\chi(\epsilon v, \epsilon\,\eta) = e^{-\epsilon|y|.\epsilon\,|\eta|}.$$

D'après [52] et [57], on a

$$\begin{aligned} R_2 &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^1\int_{\mathbb{R}_y}\int_{\mathbb{R}_\eta}\frac{(1-t)}{2}e^{-iy.\eta}\chi_\epsilon(y,\eta)(F_{(2)})(v+y)(\psi^{(2)})(\xi+\tau\eta)d\eta dy d\tau \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^1\int_{\mathbb{R}_y}\int_{\mathbb{R}_\eta}\frac{(1-t)}{2}e^{-iy.\eta}\eta^2\chi_\epsilon(y,\eta)F(v+y)(\partial_\xi^2\psi)(\xi+\tau\eta)d\eta dy d\tau \end{aligned}$$

par integration par rapprt à τ, on peut aboutir à, en utilisant les mêmes calcul dans R_2 (chapitre précédent),

$$\begin{aligned} R_2 &\leq \frac{4}{\tau_0}\big((\frac{\langle v'\rangle}{\langle v\rangle})^l - \cos^l(\theta/2)\big)\big(1 - (\frac{e^{c_0 t\langle\xi^{++}\rangle^s}}{e^{c_0 t\langle\xi^{+}\rangle^s}})\big) \\ &= \frac{4}{\tau_0}\big(((\frac{\langle v'\rangle}{\langle v\rangle})^l - 1) + (1-\cos^l(\theta/2))\big)\big(1 - (\frac{e^{c_0 t\langle\xi^{+}\rangle^s}}{e^{c_0 t\langle\xi\rangle^s}})\big). \end{aligned}$$

On applique les même manipulations utilisées dans I_2 dans la preuve de (6.2.2), il vient :

$$\int_{I_\pi}\beta R_2(v,\xi)d\theta \leq C.$$

D'où

$$I_{3.2} \leq C_\beta \|h\|_{L^1}\|G_\delta w^\ell f(v)\|^2_{L^2},$$

Finalement, on aboutit à :

$$I \leq C_{\beta,\epsilon,\|h\|_{L^1}} \|w^\ell G_\delta f\|_{L^2}^2 + \epsilon \|w^\ell G_\delta f\|_{H^1}^2.$$

où C_β est indépendant de δ, l, et $C_0 = c_0 st$.
Ceci achève la démonstration de Proposition 5.2.2.

Estimation du commutateur (forme 2)

Lemme 6.2.3 *On suppose que le noyau de collision β satisfait l'hypothèse* (2.1.14) *et que h est une fonction non négative avec $0 \neq h \in L^1$. Alors, il existe une constante positive $C_{\beta,\epsilon,h}$ dépendant seulement de β, $\|h\|_{L^1}$, telle que pour toute fonction convenable $f \in L^1$ on a :*

$$\begin{aligned}&\big((w_r^{t\ell+2} G_\delta)_{kj} K(h,\, f)_{kj}) - K(h,\, (w_r^{t\ell+2} G_\delta f)_{kj}),\ (w_r^{t\ell+2} G_\delta f)_{kj}\big)_{L^2}\\ &\leq C_{\beta,\epsilon,\|h\|_{L^1}} [\|(w_r^{t\ell+2} G_\delta f)_{kj}\|^2 + \epsilon \|(w_r^{t\ell+2} G_\delta f)_{kj}\|_{H^1}^2.\end{aligned}$$

où C_β est indépendante de ℓ, et δ.

Démonstration. Pour la démonstration, on renvoie à la démontration du Lemme 5.2.3 dans le chapitre précédant où on remplace $H_{kj} = (w_r^{t\ell+2} M_\delta f)_{kj}$ par $H_{kj} = (w_r^{t\ell+2} G_\delta f)_{kj}$, N_* par $C_* = l w_*^\ell C_0 :\ C_0 = c_0 sT$.

6.3 Fin de la démonstration du Théorème 6.1.1

Maintenant, nous sommes prêts à établir la démonstration du Théorème 6.1.1.
Prenons comme fonction test dans la définition de la solution faible, la fonction

$$\varphi_1(t,v) = G_\delta w_r^{t\ell+2} \phi_j \psi_k^2 \phi_j w_r^{t\ell+2} G_\delta f(t,v),$$

ou

$$\varphi_2 = w_r^{t\ell+2} G_\delta \phi_j \psi_k^2 \phi_j G_\delta w_r^{t\ell+2} f(t,v),$$

où $(\phi_j)_j$ (respectivement $(\psi_k)_k$) est la décomposition de l'unité par rapprt à v, (respectivement par rapprt à ξ). Dénoton $\psi_k\phi_j = p_{kj}(\cdot) = (\cdot)_{kj}$, $H_j = (G_\delta w_r^{t\ell+2} f)_j$ et $H_{kj} = (G_\delta w_r^{t\ell+2} f)_{kj}$,

$$\begin{aligned}\big(p_{kj} G_\delta w_r^{s\ell+2} \partial_t f.H_{kj}\big)_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}} \partial_t p_{kj} G_\delta w_r^{s\ell+2} K(f,f) H_{kj} dv\\ &= \frac{1}{2}\partial_t \|(G_\delta w_r^{t\ell+2} f(t))_{kj}\| - \int_{\mathbb{R}} (\partial_t p_{kj} G_\delta w_r^{s\ell+2}) f H_{kj} dv,\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}\partial_t\|H_{kj}\|^2_{L^2} &= 2c_0\int_{\mathbb{R}} p_{kj}\langle D_v\rangle^s G_\delta w_r^{t\ell+2} f.H_{kj}dv+\\ &+ 2l\int_{\mathbb{R}} p_{kj}G_\delta \log(w) w_r^{t\ell+2} f.H_{kj}dv+\int_{\mathbb{R}} p_{kj}G_\delta w_r^{t\ell+2}K(f,f)H_{kj}dv\\ &= I_1^0+I_2^0+I_3^0.\end{aligned}$$

Pour I_1^0, on a

$$\begin{aligned}I_1^0 &= 2c_0\int_{\mathbb{R}}\langle D_v\rangle^s H_{kj}.H_{kj}dv\\ &= 2c_0C\int_{\mathbb{R}}(\langle D_v\rangle^s)^{(1)}(\phi_j)_{(1)}\phi_j^{-1}H_{kj}.H_{kj}dv+\\ &- 2c_0\int_{\mathbb{R}} R_2H_k.H_{kj}dv+\\ &= I_{1.1}^0+I_{1.2}^0+I_{1.3}^0,\end{aligned}$$

où

$$R_2^1(v,\xi)=\int_0^1\frac{1-\tau}{2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-iy\eta}(\phi_j)_{(2)}(v+y)(\langle D_v\rangle^s)^{(2)}dyd\eta d\tau,$$

tel que $(\langle D_v\rangle^s)^{(1)}(\phi_j)_{(1)}\phi_j^{-1}$ est borné dans L^2, car

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\sum_{i\geq 0}\int_{\mathbb{R}}\partial_v[\partial_\xi\langle\xi\rangle^s((\phi_j)_{(1)}\phi_j^{-1}(v))]\leq M,$$

Pour $I_{1.3}^0$,

$$I_{1.3}^0=2c_0\int_{\mathbb{R}} H_{kj}.\psi_k^{-1}\phi_j^{-1}w_r^{t\ell+2})^{-1}R_2(v,\xi)\psi_k H_{kj}dv,$$

On utilise les mêmes manipulations effectuées pour $R_2(v,\xi)$ dans le preuve de $I_{1.4}^2$ de l'estimation (6.2.3), en remplaçant $\psi(\xi)$ par $\langle\xi\rangle^s$, et $F(v)$ par $w_j=\phi_j w$, on obtient :

$$I_{1.3}^0=\frac{8c_0}{\tau_0}\int_{\mathbb{R}} H_{kj}.\langle D_v\rangle^s H_{kj}dv,$$

donc

$$I_{1.1}^0+I_{1.3}^0\leq 12c_0\int_{\mathbb{R}}\langle D_v\rangle^s H_{kj}.H_{kj}dv+CMc_0\int_{\mathbb{R}} H_{kj}^2dv\leq\epsilon\|H_{kj}\|^2_{H^s}+C(\epsilon)\|H_{kj}\|^2_{L^2}.$$

Pour $I^0_{1.2}$, on utilise l'effet que la fonction :

$$K : 0 \leq x \mapsto \frac{2x}{1+x^2} - \log(1+x^2) \leq 0$$

$$\begin{aligned}
I^0_{1.2} &= 2l \int_{\mathbb{R}} \psi_k G_\delta \log(w) w_r^{t\ell+2} f.\phi_j H_{kj} dv \\
&= lC[\int_{\mathbb{R}} \log(w) H_{kj}.H_{kj} dv - \int_{\mathbb{R}} (\log(w))_{(1)} (\psi_k G_\delta)^{(1)} w_r^{t\ell+2} f.\phi_j H_{kj} dv] \\
&- Cl \int_{\mathbb{R}} [R_2(v,\xi) w_r^{t\ell+2} f.\phi_j H_{kj} dv],
\end{aligned}$$

où

$$R_2(v,\xi) = \int_0^1 \frac{1-\tau}{2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-iy\eta} (\log(w))_{(2)}(v+y)(\psi_k G_\delta)^{(2)} dy d\eta d\tau,$$

tel que :

$$(\log(w))_{(1)} = \frac{2|v|}{1+|v|^2} \leq \log(w),$$

et $(\psi_k G_\delta)^{(1)}(v, D_v)$ dont le symbole est donné par

$$\partial_\xi (e^{iD_y D_\eta} \psi_k(v,\eta) G_\delta(y,\xi)|_{y=v,\eta=\xi}) = \partial_\xi(\psi_k(\xi) G_\delta(\xi)),$$

satisfait

$$\begin{aligned}
|(\psi_k G_\delta)^{(1)}(\xi)| &= |\big((\partial_\xi \psi_k)(\xi) \psi_k^{-1}(\xi) + c_0 \xi \langle \xi \rangle^{s-2}\big) \psi_k G_\delta(\xi)| \\
&\leq (C_0 + c) \psi_k(\xi) G_\delta(\xi),
\end{aligned}$$

de telle sorte que

$$I^0_{1.2} \leq Cl(C_0+c) \int_{\mathbb{R}} \log(w) H_k.\phi_j H_{kj} dv = Cl(C_0+c) \int_{\mathbb{R}} \log(w) H^2_{kj} dv.$$

Maintenant, on a besoin de deux lemmes 2.3.10 et 2.3.4 où on remplace g_{kj} par H_{kj} et $N_* C_\beta \|h\|_{L^1}$ dans les lemmes par $Cl(C_0+c)$.
Donc, on obtient :

$$I^0_1 + I^0_2 \leq C_{\beta,\epsilon_1,\epsilon_2,h} \|(w^\ell G_\delta f)_{kj}\|^2_{L^2} + \epsilon_1 \|(w^\ell G_\delta f)_{kj}\|^2_{\dot{H}^1} + \epsilon_2 \|(w^\ell G_\delta f)_{kj}\|^2_{H^s}$$

Pour I_3^0 on abesion de 6.2.3, puis en utilisant, l'estimation de coercivité (qui ne change pas) et celle du commutateur forme 2 6.2.3 pour avoir :

$$\begin{aligned} J &= -\int_{\mathbb{R}} K(f,\,(w_r^{t\ell+2}G_\delta f)_{kj}).(w_r^{t\ell+2}G_\delta f)_{kj}dv + \frac{d}{dt}\|(w_r^{t\ell+2}G_\delta f)_{kj}(t)\|^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left\{(w_r^{t\ell+2}G_\delta f)_{kj}K(f,\,(w_r^{t\ell+2}G_\delta f)_{kj}) - K\big(f,\ (w_r^{t\ell+2}G_\delta f)_{kj}\big)\right\}(w_r^{t\ell+2}G_\delta f)_{kj} \\ &+ \epsilon_1\|(w_r^{t\ell+2}G_\delta f)_{kj}(t)\|^2_{\dot{H}_1^1} + \epsilon_2\|(w_r^{t\ell+2}G_\delta f)_{kj}(t)\|^2_{H^1} + C_{\epsilon_1,\epsilon_2}\|(w_r^{t\ell+2}G_\delta f)_{kj}(t)\|^2_{L^2}, \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} &C_1\|(w_r^{t\ell+2}G_\delta f)_{kj}\|^2_{\dot{H}_1^{1+s}} + C_2\|(w_r^{t\ell+2}G_\delta f)_{kj}\|^2_{\dot{H}_1^1} + C_3\|(w_r^{t\ell+2}G_\delta f)_{kj}\|^2_{H^1} + \\ &+C_4\|\Lambda^s(w_r^{t\ell+2}G_\delta f)_{kj}\|^2 + \frac{d}{dt}\|(w_r^{t\ell+2}G_\delta f)_{kj}\|^2 \leq C_0\|(w_r^{t\ell+2}G_\delta f)_{kj}\|^2_{L^2}, \end{aligned}$$

utilisons Proposition 1.4.7, on obtient :

$$C_{kj}\|(w_r^{t\ell+2}G_\delta f)_{kj}\|^2 + \frac{d}{dt}\|(w_r^{t\ell+2}G_\delta f)_{kj}\|^2 \leq C_0\|(w_r^{t\ell+2}G_\delta f)_{kj}\|^2, \quad (6.3.1)$$

elle est équivalente à

$$\frac{d}{dt}[e^{C_{k,j}t}\|(w_r^{t\ell+2}G_\delta f)_{kj}\|^2] \leq 0, \quad (6.3.2)$$

où

$$C_{k,j} = (C^1(2^{2(s+1)k+j)}+2^{-2(sk+j)})+C^2(2^{2(j+k)}+2^{-2(j+k)})+C^3(2^{2k})+C^4(2^{2sk})-C_0.$$

D'après le lemme de Gronnwall, on aboutit à :

$$\|(w_r^{t\ell+2}G_\delta f)_{kj}\|^2 \leq e^{-(C_{k,j}-C_0)t}\|(w^2 f_0)_{kj}\|^2_{L^2}, \quad (6.3.3)$$

prenons la somme sur k, j et faisons $\delta \to \infty$, on obtient

$$\sum_{k,j=0}^{\infty}\|(e^{c_0 t\langle D_v\rangle^s}w_r^{t\ell+2}f)_{k,j}\|^2 \leq \sum_{k,j=0}^{\infty} e^{-(C_{k,j}-C_0)t}\|(w^2 f_0)_{k,j}\|^2_{L^2} \quad (6.3.4)$$

où $C_{k,j}$ sont independentes de l, T et δ,
et

$$\lim_{(k(\text{resp})j))\to\infty} \frac{e^{-C_{k+1,j+1}}}{e^{-C_{k,j}t}}2 = 0 < 1, \forall j \in \mathbb{N}, (\text{resp } k \in \mathbb{N}),\ \forall l \leq \infty,\ \text{et } \forall t \in]0,\infty[,$$

$\lim_{(k,j)\to(\infty,\infty)} \frac{e^{-C_{k+1,j+1}t}}{e^{-C_{k,j}t}} 2 = 0 < 1, \forall l \leq \infty,\ t \in]0,\infty[$,
donc, la série dans la droite de (6.3.4) est convergente par suite celle dans sa gauche est aussi convergente, i.e.

$$\|w_r^{t\ell+2} e^{c_0 t\langle D_v\rangle^s} f\|_{L^2}^2 \leq \left(\frac{e^{C_0 t}}{e^{2(C_1+C_2)t+(C_3+C_4)t}} = e^{C^* t}\right)\|f_0\|_{L_2^2}^2, \qquad (6.3.5)$$

où C^* est independant de ℓ et δ.

Corollaire 6.3.1 *Si f est une solution de l'équation de Kac. Alors pour tout $l \in \mathbb{R}$ (il peut tendre vers $+\infty$) on a :*

$$\|w_r^{t\ell+2} e^{c_0 t\langle D_v\rangle^s} f\|_{L^2}^2 \equiv \|e^{c_0 t\langle D_v\rangle^s} w_r^{t\ell+2} f\|_{L^2}^2.$$

Puis on utilise l'inégalité de Bernstein, on obtient

$$\|e^{c_0 t\langle D_v\rangle^s} w_r^{t\ell+2} f\|^2 \leq C e^{-(C_{0,0}-C_0)t}\|(w^2 f_0)\|_{L^1}^2,$$

Ce qui signifie que

$$e^{c_0 t\langle D_v\rangle^s} w_r^{t\ell+2} f, w_r^{t\ell+2} e^{c_0 t\langle D_v\rangle^s} f \in L^2(\mathbb{R}_v).$$

Prenons $l \to \infty$, on obtient le gain de la régularité de Gevrey dans $L^2_\infty(\mathbb{R})$, i.e. $f \in G_\infty^{\frac{1}{s}}(\mathbb{R})$.
Ce qui termine la preuve du Théorème 6.1.1.

Annexe A

A.1 Existence et unicité de f_n dans (2.2.15)

1- Existence

• Soit $\mathcal{X}$ un espace de Banach partiellement ordonné (la relation d'ordre est continue) qui a la proriété de Levi i.e. pour toute suite $(f_n \in L^1)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\sup_n \|f_n\|_{L^1} < \infty$ et $f_1 \leq f_2 \ldots f_1 \leq f_{n+1} \ldots, n \geq 1$. (bornée, positive, et monotone) a une limite f positive.
On suppose qu'on a un semi-groupe des opérateurs contractants positifes et monotones $Z(t), t \geq 0$ sur X avec le générateur infinitésimal $-\hbar$, et une application nonlineaire positive monotone T de $\mathcal{D}(\hbar)$ dans $\mathcal{X}$.
On considère le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \hbar f = Tf, & t > 0,\, v \in \mathbb{R}, \\ f|_{t=0} = f_0(v) > 0. \end{cases} \tag{A.1.1}$$

On définit une suite d'appproximations successives en posant

$$\begin{cases} f_1 = 0, & t > 0, \\ f_{n+1} = Z(t)f_0 + \int_0^t Z(t-s)Tf_n(s)ds,\, n \geq 1, \end{cases} \tag{A.1.2}$$

Alors, $(f_n(t_0))_n$ est positive, monotone pour tout t_0 et elle converge vers une limite $f(t_0)$ grâce à la propriété de Levi, si elle est bornée. De plus, f est une solution de (A.1.1) sous des conditions convenables sur T (Lipschitsien par exemple [58]).
Si $g \geq 0$ satisfait à $g(t) = Z(t)f_0 + \int_0^t Z(t-s)Tg(s)ds$, alors $g \geq f$ par (A.1.2).
On suppose un autre problème de même type

$$\begin{cases} \frac{\partial f'}{\partial t} + \hbar' f' = T'f', & t > 0, \\ f'|_{t=0} = f'_0(v) > 0, \end{cases} \tag{A.1.3}$$

tel que :

$$Tg - Tg' \geq 0, \text{ et } Z(t)g - Z(t)g' \geq 0.$$

Si g est dans le domaine de $\hbar$ et $f \geq 0$, alors le paire (A.1.1),(A.1.3) est dite paire monotone si de plus $f_0' \leq f_0$.
Par induction, les approximations successives f_n (respectivement f_n') de (A.1.1) (respectivement de (A.1.3)) donnée par (A.1.2) satisfait à $0 \leq f_n'(t) \leq f_n(t),\ t > 0$. On a alors, $0 \leq f'(t) \leq f(t),\ t > 0$.
• On applique maintenant, ces considérations à l'équation (2.2.15) : en prenant $\mathcal{X} = L^1(\mathbb{R}_v)$.
On écrit (2.2.15) sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial t} + hf = K'f,\ t > 0,\ v, v_* \in \mathbb{R}, \\ K'f(v) = K(f,f)(v) + Cf(v) \int_{\mathbb{R}} f_0^* dv_*, \\ h = C \int_{\mathbb{R}} f_0(v_*) dv_*, \end{array} \right. \tag{A.1.4}$$

Alors, il est clair que K' est positive, monotone si on choisit C suffisament grand. Alors (A.1.4) est une équation de type (A.1.1) avec

$$T = K',\ \hbar = h, \text{ et } Z(t) = e^{-ht}.$$

Les approximations successives correspondants f_n de (A.1.2) sont non négatives (positives) et satisfont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_n}{\partial t} + hf_n = K'f_{n-1},\ t > 0,\ v, v_* \in \mathbb{R}, \\ K'f(v) = K(f,f)(v) + Cf(v) \int_{\mathbb{R}} f_0^* dv_*, \\ h = C \int_{\mathbb{R}} f_0(v_*) dv_*, \end{array} \right.$$

qui est equivalent à

$$g_n(t) = e^{-ht} f_0 + \int_0^t (e^{-h(t-s)} K' g_{n-1} - hg_n)(s) ds,\ n \geq 2.$$

voir [9].
• **L'équation linéarisée**
On considère un nouveau type d'approximations

$$\left\{ \begin{array}{l} f_n(t) = f_0 + \int_0^t (K'f_{n-1} - hf_n)(s) ds,\ n \geq 1 \\ f_0(t,v) = f_0(v), \end{array} \right. \tag{A.1.5}$$

On remarque que $f_n \geq g_n \geq 0$, et on montre que f_n est une suite positive, convergente vers la solution de (2.2.15).
Retournons à démontrer l'existence et l'unicité de la suite f_n annoncée dans (2.2.15). Pour ça on établit la proposition suivante :

Proposition A.1.1 *Soit f_0, l'état initial tel que :*

$$\int_{\mathbb{R}} f_0(v)dv < +\infty.$$

Alors, il existe une solution unique non négative $f(t,v)$ du problème (2.2.15) *dans $L^\infty([0,\infty[_t, L^1(\mathbb{R}))$ avec l'état initial f_0, dés que β est dans $L^\infty([-\pi/2,\pi/2])$. Cette solution satisfait la conservation de la masse, de l'énergie, mais le moment varie et l'entropie est décroissante.*

Démonstration. Considérons les notations suivantes :
$f_n(t,v)$, (resp $f_n(t,v_*)$, $f_n(t,v')$), pour $f_n(t,v'_*)$ (respectivement Pour f_n, f_n^*, f'_n, et $f_n'^*$).
Nous avons besoin du lemme de Gronwall (forme intégrale) suivant :

Lemme A.1.2 *Si f_i, $i=\overline{1,3}$ sont des fonctions positives, sur $[0,T]$, avec f_3 nondécroissante. Alors de l'inégalité*

$$\int_0^t f_1(s)ds + f_2(s) \le c_1 \int_0^t f_2(s)ds + c_2 f_3(t)$$

découle l'inégalité

$$\int_0^t f_1(s)ds + f_2(s) \le e^{c_1 t} c_2 f_3(t).$$

Posons

$$u_{n+1} = \int_{\mathbb{R}} |(f_{n+1}-f_n)|dv,$$

d'aprés l'inégalité de Jensen et la symétrie de l'équation par rapport à θ, on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \int_{\mathbb{R}} |\int_0^t -h(f_{n+1}-f_n)(s,v)|dv \\
&+ \int_{\mathbb{R}} |\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{I_\pi} \beta[f_n f_n^* - f_{n-1}^* f_{n-1}]2d\theta dv_*|dv \\
&\le C\|f_0\|_{L^1} \int_0^t u_{n+1}(s,v) + \\
&+ C_\beta \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^t [f_n|f_n^* - f_{n-1}^*| + f_{n-1}^*|f_n - f_{n-1}|]2dv_*dv \\
&\le C_1 \int_0^t u_n + C_2 \int_0^t u_{n+1},
\end{aligned}$$

On peut prouver que $u_1 \leq e^{C\|f_0\|_{L^1}t} \leq e^{C_*T}$ donc, par le lemme de Gronwall on obtient

$$u_n(t) \leq C_1 e^{C_2 T} \int_0^t u_n,$$

Par réccurence, on aboutit à :

$$u_n(t) \leq C_1 e_{C_2T} e^{C_*T} \big(C_1 e_{C_2T}\big)^{n-2} \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}$$

D'où, $\lim_{n\mapsto\infty} u_n = 0$, $\forall t < \infty$, ce qui équivalent à ce que f_n satisfait la propriété de Cauchy pour la convergence des suites réelles.

• **Unicité de la solution de l'équation** (A.1.5)
on considère deux solutions f_n^1, f_n^2 : $g_n = f_n^1 - f_n^2$,alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |g_{n+1}|\phi(v)dv \quad &\leq \quad \int_{\mathbb{R}^2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \beta_n(\theta)[f_n^{1*}|g_n| + f_n^2|g_n^*|][\phi(v') - \phi(v)] \\ &+ \quad \int_{\mathbb{R}} h|g_{n+1}\phi|dv \end{aligned} \tag{A.1.6}$$

Unicité de la solution dans $L^1(\mathbb{R})$
si on pose $\phi = 1$ dans (A.1.6). On obtient

$$\|g_{n+1}\|_{L^1} \leq \int_0^t h\|g_{n+1}\|_{L^1},$$

grâce au Lemme de Gronwall on obtient l'unicité de la solution dans L^1.
Unicité de la solution dans $L_2^1(\mathbb{R})$
Posons $\phi = \langle v\rangle^2$ in (A.1.6). On obtient

$$\begin{aligned} \|g_{n+1}\|_{L_2^1} \quad &\leq \quad h\int_0^t \|g_{n+1}\|_{L_2^1} + C\int_0^t \|g_n\|_{L_2^1} \\ &\leq \quad C^n(1 + hTe^{hT})^n \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}|g_0|, \end{aligned}$$

comme $g_0 = 0$. On obtient l'unicité de la solution dans $L_2^1(\mathbb{R})$.
Unicité de la solution dans $L\log L(\mathbb{R})$
on a

$$\forall x, y \geq 0, \text{ on a } : x\log x + y \geq x\log y \tag{A.1.7}$$

On pose $\phi = \log|g_{n+1}|$ in (A.1.6), en utilisant (A.1.7), on aboutit à :

$$\begin{aligned}
\|g_{n+1}\|_{L\log L} &\leq \int_{\mathbb{R}^2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\beta_n[f_n^{1*}|g_n| + f_n^2|g_n^*|][\phi(v') + \phi(v)]d\theta dv_* dv \\
&+ \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} h|g_{n+1}\phi|dv \\
\|g_{n+1}\|_{L\log L} &\leq \int_{\mathbb{R}} C_{\beta_n}[\|f_n^1\|_{L^1} + \|f_n^1\|_{L^1}][2|g_n|\log|g_n| + 2|g_{n+1}|]dv \\
&+ \int_{\mathbb{R}} h|g_{n+1}|\log|g_{n+1}|dv \\
&\leq C\int_0^t \|g_n\|_{L\log L} + h\int_0^t \|g_{n+1}\|_{L\log L}
\end{aligned}$$

par réccurence,

$$\begin{aligned}
\|g_{n+1}\|_{L\log L} &\leq h\int_0^t \|g_{n+1}\|_{L\log L} + C\int_0^t \|g_n\|_{L^1_2} \\
&\leq C^n(1 + hTe^{hT})^n \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\|g_0\|_{L\log L}
\end{aligned}$$

comme $g_0 = 0$. On obtient l'unicité de la solution dans $L\log L(\mathbb{R})$.

3- Conservation de la mass, de l'energie et la dćroissance de l'entropie pour la solution de (2.2.15)
3-a- Conservation de la masse et de l'energie
considérons la fonction $\varphi = 1, v^2$, comme fonction test

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f\varphi dv &= \int_{\mathbb{R}} f_0\varphi dv + \int_0^t\int_{\mathbb{R}} K(f,f)\varphi dvds \\
&= \int_{\mathbb{R}} f_0\varphi dv + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}\int_{I_\pi}\beta_n(\theta)f^*f[\varphi' - \varphi]dvds
\end{aligned}$$

Pour la masse,

$$\int_{\mathbb{R}} K(f,f)\varphi dv = 0, \text{ où } \varphi = 1 \text{ claire,}$$

Pour le moment,

$$\int_{\mathbb{R}} K(f,f)\varphi dv \neq 0, \text{ pour } \varphi = v \text{ claire.}$$

pour l'energie, posons $\varphi = |v|^2$, notant par f, (respectivement $(f^*, c(\theta), s(\theta))$ Pour $f(v)$, (respectivement $f(v_*), \cos(\theta/2), \sin(\theta/2)$) et en utilisant le changement de variables $(v, v_*, \theta) \mapsto (v_*, v, -\theta)$ puis le changement de variables $(v, v_*) \mapsto (v_*, v)$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} K(f,f)\varphi dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \beta_n(\theta) f^* f[|v'|^2 - |v|^2] d\theta dv_* dv = I_1 - I_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \beta_n(\theta) f^* f[v^2 c^2(\theta) + v_*^2 s^2(\theta) - 2vv_* c(\theta)s(\theta)] d\theta dv_* dv - I_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \beta_n(\theta) f^* f[v_*^2 c^2(\theta) + v^2 s^2(\theta) + 2vv_* c(\theta)s(\theta)] d\theta dv_* dv - I_2 \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \beta_n(\theta) f^* f[v_*^2 + v^2] d\theta dv_* dv - I_2 \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \beta_n(\theta) f^* f 2v^2 d\theta dv_* dv - I_2 \\
&= I_2 - I_2 = 0.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve la conservation de la masse et de l'energie.

3-b- Décroissance de l'entropie

Pour ça on utilise :

pour tout x et tout y positives on a

$$(x-y)\log\frac{x}{y} \geq 0, \forall x, y > 0, \tag{A.1.8}$$

donc,

$$\begin{aligned}
D &= \int_{\mathbb{R}} \partial_t (f(t,v)\log f(t,v)) dv = \int_{\mathbb{R}} K(f,f)\log f(t,v) + \int_{\mathbb{R}} \partial_t f \\
&= -\frac{1}{2}\frac{C_\beta}{2}\int_{\mathbb{R}} f^*(f' - f)(\log f'(t,v) - \log f(t,v)) + 0 \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve la décroissance de l'entropie.

Par passage à la limite on obtient aussi la consevation de la masse, de l'energie et la décroissance de l'entropie pour la solution de l'équation (2.1.12).

A.2 Indications

1. Sur la preuve des théorèmes précédents sous le potentiel de Debye-Yukawa
On considère maintenant la section efficace est de Maxwell avec un potentiel de type Debye-Yukawa :

$$\beta(\theta) = K|\sin(\theta)^{-1}|\big(\log(|\theta|^{-1})\big)^m, \;\; m > 0, \;\; K > 0.$$

On va utiliser

Remarque A.2.1 *On a :*

$$1 - \lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{t^\alpha} = 0 \;\Rightarrow \lim_{\theta\to 0}(\log|\theta|^{-1})^m \leq |\theta|^{-2s}, 0 < s < 1, \alpha = 2s$$

$$2 - 0 \leq \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta)\sin^2(\theta)d\theta < \infty$$

Pour l'etimation coercivité on va remplacer l'etimation sous elliptique dans leee lemme 2.3.6 par l'etimation logarithmique dans le lemme 2.3.7 pour obtenir

$$C_{h,1}\|\log(\Lambda)^{\frac{m+1}{2}}F_i\|^2_{\dot{H}^1_1} + C_{h,2}\|F_i\|^2_{\dot{H}^1_1} + C_{h,3}\|F_i\|^2_{H^1} +$$
$$+ C_{h,4}\|\log(\Lambda)^{\frac{m+1}{2}}\|^2 \leq \big(-K(h,\;F_i),\;F\big) + C_{h,5}\|F_i\|^2;\; m < \infty.$$

où : $\Lambda = (e + |D_v|^2)^{\frac{1}{2}}$, $m \geq 0$, et F_i prend la forme :
(1) $F_1 = \sqrt{w^\ell f}$, pour l'estimation de la coercivité pour la production de L^1_∞.

(2) $F_2 = w^\ell f$, pour l'estimation de la coercivité pour la production de L^2_∞.

(3) $F_3 = M_\delta w^\ell f \; (w^\ell M_\delta f)$, pour l'estimation de la coercivité pour la régularité dans H^∞_∞.
(4) $F_4 = G_\delta w^\ell f \; (w^\ell G_\delta f)$, pour l'estimation de la coercivité pour la régularité dans l'espace de Gevrey avec poids (ou sans poids).

Pour les etimations du commutateur, elles restent telles qu'elle sont d'aprés la remarque A.2.1.

2. Sur la preuve des lemmes : 4.1.4, 5.1.1 et 6.1.3

Pour la $w_r^\ell f, M_\delta w_r^\ell f \in \mathcal{C}\big([0,T];L^2(\mathbb{R})\big)$ et $G_\delta w_r^\ell f \in \mathcal{C}\big([0,T];L^2(\mathbb{R})\big)$, on retourne à sa preuve dans [17] page 45.
Pour les autres relations on donne les deux propositions.

Proposition A.2.2 *Soit $a(x,\xi)$ une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^{2n}$, qui est n fois continûement différentiable par rapport à x, pour ξ fixé. Si*

$$\sum_{|s|\leq n}\int_{\mathbb{R}^n}|D_x^s a(x,t)|dx \leq M,\;\; \xi\in\mathbb{R}^n, \tag{A.2.1}$$

pour tout $M<\infty$, alors $a(x,D)$ est borné dans $L^2(\mathbb{R}^n$ avec la norme $\leq CM$.

Démonstration. Si $\hat{u}\in\mathcal{D}(.)=\mathcal{C}_0^\infty(.)$. La transformation de Fourier de $a(x,D)u$ est $\eta\mapsto\int A(\eta-\xi,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi\quad(\mathcal{F}(fg)=\hat{f}*\hat{g}:\;*$ la convolution,) où $A(\eta,\xi)$ est la transformation de Fourier de $a(x,\xi)$

$$A(x,\xi)=\int a(x,\xi)e^{-i\xi x}dx$$

Par hypothèse on a :$(1+|\eta|)^n|A(\eta,\xi)|d\eta\leq C'M$, qui implique que

$$\sup_\xi\int|A(\eta-\xi,\xi)|d\eta\leq CM,\;\sup_\eta\int|A(\eta-\xi,\xi)|d\xi\leq CM,$$

il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\int|a(x,D)u|^2dx &\leq \int|A(\eta-\xi,\xi)|^2|\hat{u}|^2d\xi d\eta\\ &\leq \int|A(\eta-\xi,\xi)||\hat{u}(\xi)|^2d\xi d\eta\sup_\xi\int|A(\eta-\xi,\xi)|d\eta\\ &\leq \sup_\eta\int|A(\eta-\xi,\xi)||\hat{u}(\xi)|^2d\xi d\eta\sup_\xi\int|A(\eta-\xi,\xi)|d\eta\\ &\leq (CM)^2\|u\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Si on suppose $E_s(D)$ l'OΨD, dont le symbole est $\hat{E}_s=(1+|\xi|^2)^{s/2}$. Alors $E_s\in Op(\mathcal{S}^s)$ et $u\in H^s\Leftrightarrow E_su\in L^2$, telle que $E_s(D)u=E_s(\xi)\hat{u}(\xi)$.

Proposition A.2.3 *Si $a(x,D)\in Op(\mathcal{S}^0)$, alors*
(i) $a(x,D)$ est borné dans L^2.
(ii) $u\mapsto a(x,D)u$, est continue de H^s dans H^s.

Démonstration.

$$a \in \mathcal{S}^0 \Leftrightarrow a \in \mathcal{C}^\infty, \text{ telle que } \forall\, (s, \beta)\, \in \mathbb{N}^{2n},$$

il existe :

$$C_{s,\beta} > 0 \text{ telle que } |\partial_\xi^s \partial_x^\beta a(x,\xi)| \leq C_{s,\beta}(1+|\xi|)^{-s}$$

Pour (i), d'aprés la proposition A.2.2), on a $a : L^2 \longrightarrow L^2$, est borné.
Pour (ii), $u \in H^s \equiv E_s u \in L^2$.
On pose $v = E_s u$. Alors,

$$E_s a u = E_s a E_{-s} v \in L^2, \text{car}, E_s a E_{-s} \in Op(\mathcal{S}^0),$$

et on a

$$\begin{aligned} \int |E_s a u|^2 dx &\leq \int |E_s a E_{-S}|^2 ||E_s \hat{u})(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq C\|u\|^2_{H^s}, \end{aligned}$$

Ce qui donne que $u \mapsto a(x,D)u(x)$ est continue de H^s dans H^s.

Bibliographie

[1] R. Alexandre, L. Desvillettes, C. Villani and B. Wennberg, Entropy dissipation and long-range interactions, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **152** (2000) 327-355.

[2] R. Alexandre, Elsafadi. M, Littlewood Paley decomposition and regularity issues in Boltzmann homogeneous equations. I. Non cut-off and Maxwell cases, *Math.Methods, Modellings Appl. Sci.* (2005) 8-15.

[3] R.Alexandre, L Desvillettes, C. Villani, and B. Wennberg, Entropy dissipation and lang range interactions, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **152**, 327–355 (2000)

[4] R.Alexandre and C. Villani, On the Boltzmann equation for long-range interaction, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **55** (2002) 30–70.

[5] R.Alexandre, Y.Morimoto, S.Ukai, C.-J.Xu, T.Yang, Uncertainty principle and kinetic equations, *J. Funct. Anal.*, **255** (2008) 2013-2066.

[6] R.Alexandre, Y.Morimoto, S.Ukai, C.-J.Xu and T.Yang, Regularity of solutions for Boltzmann equation without angular cut-off, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*

[7] R.Alexandre, Y.Morimoto, S.Ukai, C.-J.Xu and T.Yang, Regularizing effect and local existence for non-cut-off Boltzmann equation, *to apear in Arch. Rat. Mech. An.* http ://hal.archives-ouvertes.fr, [hal-00349854/en/.]

[8] R.Alexandre, Y.Morimoto, S.Ukai, C.J.Xu and T.Yang, Gobal existence and full regularity of the Boltzmann equation without angular cut-off, *Preprint.*[hal-00439227 version 2-27 Dec 2009].

[9] L.Arkeryd, On the Boltzmann equation, I and II.*Arch. Rat. Mech. Anal.*, **45**, 1–34 (1972)

[10] L.Arkeryd., Stability in L^1 for the spatially homogeneous Boltzmann equation . *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **77**, 11– 21 (1981)

[11] L.Arkeryd, Intermolecular forces of infinate range and the Boltzmann equation with infinite range forces., *Comm.Math : Phys,* **86** (1982),475-480.

[12] L.Arkeryd, Asymptotic behavior of the the Boltzmann equation, I and II.

[13] Brezis, Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications, Masson Paris, 1983.

[14] T. Carlemann, Probl'emes mathèmatiques dans la théorie cinétique des gaz, Almqvist Wiksell, 1957.

[15] C. Cercignani, The Boltzmann Equation and it's Application, Applied Mathematical Sciences V., 67, Springers-Verlags, 1988.

[16] C.-J. Xu, Partial Differential Equations, basic Lecture for the 12th Chinise National Summer School in Mathematics for Graduate Students, Wuhan University and Université de Rouen (France), 2007 July-August, Wuhan University .

[17] C.-J. Xu, Lecture Notes, Fourier Analysis of Boltzmann Equations, Université de Rouen , France, March 2008.

[18] H. Chen, w.-X. Li and C.J. Xu, Propagation of Gevrey regularity for solutions of Landau equations. *Kinetic and Related Models*, **1** (2008) 355–368.

[19] L.Desvillettes, About the regularization properties of the non cut-off Kac equation, *Comm. Math. Phys.*, **168** (1995)417–440.

[20] L.Desvillettes, Some applications of method of moments for the homogeneous Boltzmann and Kac equations,*Arch.Rat.Mech.Anal.*, **123** (1993),387-404.

[21] L. Desvillettes, About the use of the Fourier transform for the Boltzmann equation. Riv. Mat. Univ. Parma (7), 2 (2003), pp. 1â99.

[22] S. Ukai, Local solutions in Gevrey classes to the nonlinear Boltzmann equation without cut-off, *Japan J. Appl. Math.*, **1-1** (1984) 141–156.

[23] Y. Morimoto and C.-J. Xu, Ultra-analytic effect of Cauchy problem for a class of kinetic equations, *to appear inn "Journ. Diff.Equ."*

[24] L.Desvillettes, G. Furioli and E. Terraneo, Propagation of Gevrey regularity for solutions of Boltzmann equation for Maxwellian molecules, *Trans. Amer. Math. Soc.* **361** (2009) 1731-1747.

[25] L.Desvillettes, C. Mouhot, Stability and uniqueness for the spatially homogeneous Boltzmann equation with long-range interactions, *Archives for Rat Mech and Analysis.*, **193** (2009) 227-253.[hal-0079713-version 1]

[26] L.Desvillettes, C. Mouhot, About L^p estimates for the spatially homogeneous Boltzmann equation, *Ann. Inst.H.Poincaré Anal.Non linaire.*, **22** (2005) 127-142.

[27] L. Desvillettes and B. Wennberg, Smoothness of the solution of the spatially homogeneous Boltzmann equation without cut-off. *Comm. Partial Differential Equations*, **29-1-2** (2004) 133–155.

[28] R.J.Diperna,P.L.Lions, On the Cauchy problem for Boltzmann equations, Global existence and weak stability,*Ann.Math*, **130** (1989),321-366.

[29] T.Elmroth, Global boundedness of moments of solutions of the Boltzmann equation for forces of infinite range, *Arch.Rat.Mech.Anal.*, **82** (1983),1-12.

[30] C, Fefferman The uncertaity principle, Bull. Amer.Soc., 9 (1983), 129-206.

[31] Fournier N., Uniqueness for a class of spatially homogeneous Boltzmann equations without cut-off for pseudo-Maxwellian molecules. Preprint in n 12/2005 of Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques appliquées , univesité de Paris 12.

[32] Fournier N., Existence and regularity study for two-dimensional Kac equation without cut-off by a probabilistic approach. *Ann. Appl. Proba.* **10** (2000), 434-462.

[33] E., Gabetta, pareschi,L. :About the non-cut-off Kac : uniqueness and asymptotic behavior., *Comm.Appl.Nonlinear Anal.* **4** (1997) 1-20.

[34] H.Grad, Principles of kinetic theory of gases, Flügge's Hand-buch der physik,12,(1958),205-249.

[35] C. Graham and S. Méléard, Existence and regularity of a solution of a Kac equation without cut-off by using the stochastic calculus of variations, *Comm. Math. Phys.* **205** (1999) 551-569.

[36] Gustaffson,T : L^p- estimates for the non lineair spatially homogeneous Boltzmann equation, *Arch.Rat.Mech.Anal.*, **92** (1986),23-57.

[37] Gustaffson,T : Global L^p- properties for the spatially homogeneous Boltzmann equation, *Arch.Rat.Mech.Anal.*, **92** (1986),1-38.

[38] Z. H. Huo, Y.Morimoto, S.Ukai and T.Yang, Regularity of solutions for spatially homogeneous Boltzmann equation without angular cut-off. *Kinetic and Related Models*, **1** (2008) 453-489.

[39] Hitoshi Kumano-Go, Kazuo Taniguchi, Oscillatory integrals of symboles of Pseudo-differential operators on $\mathbb{R}^n$ and operator of Fredholm type, *Proc. Japan Acad.*, **49** (1973).

[40] Hitoshi Kumano-Go, "Pseudo-Differential Operators" MIT Press, (1982).

[41] Hormander L., The Analysis of lineair partial differential Operators IV. Springer-Verlag, New York ,1985. , de la méthode considérée

[42] Ikenberry,E.Truesdell,C : On the pressures and the flux of energy in gas according Maxwells Kinitic theory, *I Arch.Rat.Mech.Anal.*, **5** (1956),1-54.

[43] N.Lekrine, C-J.Xu, Gevrey regularizing effect of the Cauchy problem for non-cut-off homogeneous Kac's equation,*Kinetic and Related Models*,**1** (2009),447-666.

[44] N.Lekrine, Existence, globale stability and full regularizing effect of the strong solution of the Cauchy problem for non-cut-off homogeneous Kac's equation, submitted,

[45] Lions,P.L. Compacteness on Boltzmannś equation via Fourier intégral operators and applications I,II, III , *J.Math. Kyoto univ*, **34** (1994) 539–584.

[46] S.Mischler, B.Wennberg, On the spatially homogeneous Boltzmann equation, Annales de l'institut Henri Poincaré,analyse non linéaire **16**(4) (1999) 497-501.

[47] Y.Morimoto, S.Ukai, C.-J.Xu and T.Yang, Regularity of solutions to the spatially homogeneous Boltzmann equation without Angular cut-off. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A* **24** (2009) 187-212.

[48] Mouhot,C.Villani : Regularity theory for spatially homogeneous boltzmann equation with angular cut-off, *Arch.Rat.Mech.Anal.*, **173-2** (2004),169-212.

[49] A. Povzner, The Boltzmann equation in the kinetic theory of gazes, Amr. Math. soc.trans. 47(2), 1965 193-214

[50] P.G.Lemarié, Recent developments in the Navier-Stokes problem. Research Notes in Mathematics 431 Chapman and Hall/CRC, New-York, 2002.

[51] E.M.Stein Harmonic Analysis. Real variable methods, orthogonality and oscillatory in-tegrals. Princeton Univ. Press, Princeton, 1993.

[52] M.A Shubin, Pseudo-differential Operators and Spectral Theory Second edition. Springer-Verlag, New York , 1987.

[53] T. Tao, Littelwood-Paley decomposition. Lectures Notes 2 For254A (page : https ://www.math.Ucla.edu/tao/254a).

[54] T. Tao, Littelwood-Paley decomposition. Lectures Notes 8 (page : https ://yannis parissis. Word press.com).

[55] T.Runst, W.Sickel Sobolev spaces of fractional order, Nemytskij operators and Non linear PdE. De Gruyter, New York, 1996.

[56] H.Triebel Theory of function spaces. Birkhauser Verlag, Basel and al., 1983.

[57] Michel E. Taylor, Partial differential equations II. Springer-Verlag, New York , 1996.

[58] F.Derdalhon,F.Verga, Le théorème de Hille-Yosida et ses applications aux problèmes d'évolution semi-linéaires. Mémoire encadré par F. Hulbert, 7 juin 2006., de la méthode considérée

[59] Taylor, M.,E, Pseudo-differential operators.Princeton Univ.Press, Princeton, 1981.

[60] Toskani, G.,C. Villani, Probability metrics and uniqueness of the solution to the Boltzmann equation for Maxwell gas. *J. Stat. Phys.*, **94 (3-4)** (1999) 619-637.

[61] Treves F.,Introduction to Pseudo-differential and Fourier intgral operators . Plenum, New York, 1980.

[62] S. Ukai, Local solutions in Gevrey classes to the nonlinear Boltzmann equation without cut-off, *Japan J. Appl. Math.*, **1-1** (1984) 141–156. , de la méthode considérée

[63] C. Villani, *On a new class of weak solutions to the spatially homogeneous Boltzmann and Landau equations*, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **143**, 273– 307 (1998).

[64] C. Villani, *A review of mathematical topics in collisional kinetic theory.* Handbook of Fluid Mechanics. Ed. S. Friedlander, D.Serre, 2002.

[65] Wennberg,B. Ukai, On moments and uniqueness for solutions to the space homogeneous Boltzmann equation , *Transport theory. Statist.Phys*, **23** (1994) 533–539.

[66] Chao-Jiang-Xu, Fourier Analysis of Boltzmanns equtions, Rouen, France, *Transport theory. Statist.Phys*, **23** (1994) 533–539.

Conclusion

Nos techniques de démonstration, dans notre travail, nous ont aboutis à des nouveaux résultats optimisés, malgré qu'ells sont très simples. Parmi lesquelles la boucle des changement de variables et le lemme 2.2.8 nous ont permis d'otenir des résultats optimisés concernant tous les problèmes soulevés dans la thèse sous une condition minimale sur la donnée initiale avec une singularité très forte. De telle sorte l'équation de Kac devient une équation classique abordable et très simple.

Notre façon d'établir la coercivité de l'opérateur de collision de Kac (respectivement d'introduire la décomposition de Littelwood-Paley) est appliquable dans le cas de non Maxwell, par contre celle de C-.J.Xu [16](respectivement celle de ElSafadi [2] et de Desvillettes [19]) n'est appliquable que dans le cas de Maxwell.

Il est très évident que notre méthode des régularisantes, composées des opŕateurs pseudo-différentiels, en faisant introduire la combinaison de la décomposition de Littlewood-Paley et la partition de l'unité par rapport à variable v, est la moins coûteuse et la plus efficace. En Plus elles améliorent d'une façon très idéale la constante cible de l'estimation a priori. .

Résumé

La Thèse aborde plusieurs problèmes.
On montre en premier temps l'existence et la stabilité de la solution faible Où la condition sur la fonction test et sur la donnée initiale a été affaiblie et devient optimale, Grâce à une boucle des changements de variables qui nous a permis aussi de traiter la singularité du noyau de tout ordre. Ainsi, on prouve quelques propriétés de l'opérateur de collision de Kac.
Ensuite, on établit la production des moments de tout ordre et même d'ordre infini dans L^1 et dans L^2, sachant qu'il n'existe pas des études préalables, à l'exception de celle qui étudie leurs propagation en plus des hypothèses trop lourdes.
Puis on s'intéresse à l'étude de l'effet de régularisation au sens de Sobolev et celle de Gevrey avec un poids d'ordre un, où on a le but d'améliorer le résultat de Desvillettes [19].
Enfin, on généralise ces deux derniers résultats avec un poids d'ordre infini, où l'effet de régularisation au sens de Sobolev est fait d'une façon peu proche de celle [47] sans aucune hypothèse supplémentaire concernant les moments sur la solution et sa donnée initiale. C'est un résultat plus précis que celle de ce dernier réference. C'està dire la solution appartient à H^{tN+k}_{tl+2} où N et l peuvent tendrent vers $+\infty$, dés que la donnée initiale est dans L^1, et même si elle est dans H^{-k}, où $k > 0$. Dans toutes les démonstrations de ses résultats on utilise la méthode des régularisantes, on fait la combinaison de la décomposition de Littlewood-Paley et la partition de l'unité par rapport à la variable v qui nous permis d'optimiser la condition sur la donnée initiale.

Abstract

The thesis addresses several problems.
It shows, in first time the existence and stability of the weak solution. Where the condition on the test function and on the initial datum was weaken and becomes optimal, thanks to a buckle of changes of variables this also allowed us to treat the singularities of the kernel of all kinds. Thus, we prove some properties of Kac's collision operator.
Then we establish the moment's production of all kinds and even of infinite order in L^1 and in L^2, knowing that there are no preliminary studies, to except that studying their propagation with heavy assumptions.
Then we focus on the study of regularizingn effect in the sense of Sobolev and of Gevrey with a weight of order one, which has as an object to improve the result of Desvillettes [19].
Finally, we generalize these last two results with a weight of infinite order, where the Sobolev smoothing effect is done in a manner somewhat similar to that of [47] without any additional assumption about the moments on the solution and on its initial datum. This is a more accurate result than that of latter Reference. That is, the solution is in H^{tN+k}_{tl+2}, where N and l can reach $+\infty$, as soon as the initial data is in L^1, and even if it is in H^{-k}, where $k > 0$. In all proofs of these results we use the regularizing method with the combination of the Littlewood-Paley decomposition and the partition of unity with respect to the variable v which optimized the condition on the initial datum.