République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Constantine–I
Faculté des Sciences Exactes
- DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES-

No. d'ordre : 33/DS/2013
No. de série : 05/MAT/2013

THÈSE PRESENTÉE POUR L'OBTENTION
DU
DIPLOME DE DOCTORAT
EN
MATHEMATIQUES

Sur L'étude de quelques propriétés Fonctionnelles des espaces de Sobolev à poids et Application à des EDP de type elliptique

par

Amel KOURTA

Option

Equations aux dérivées partielles

devant le Jury :

Président :	**F. MESSACI**	Université Constantine
Directeur de thèse :	**T. Z. BOULMEZAOUD**	Université de Versailles
Examinateur :	**M. S. MOULAY**	Université U.S.T.H.B. Alger.
Examinateur :	**A. BENAISSA**	Université Sidi Bel abbes
Examinateur :	**S. BENHADID**	Université Constantine
Examinateur :	**B.TENIOU**	Université Constantine

Soutenue le : ....

Remerciments

Je tiens d'abord à exprimer ma reconnaissance et toute ma gratitude, envers mon directeur de thèse Monsieur **Tahar.Z Boulmezaoud**, Professeur à l'université de versailles, qui m'a soutenue tout au long de ces années en me manifestant sa confiance et en m'encourageant dans mon travail. Je le remercie infiniment pour avoir su se rendre toujours disponible, pour sa patience, son sens de la pédagogie.

Je voudrais aussi présenter mes remerciements trés sincères au président du jury Madame **Fatiha Messaci**, Professeur à l'université de Constantine qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

J'adresse également un grand remerciment à Monsieur **Mohamed.S Moulay**, professeur à l'université de U.S.T.H.B.Alger, **Abes.Benaissa** Maître de conférences à l'universié de Sidi Bel abbes, **Boujamaa. Teniou**, Professeur à l'université de Constantine et **Benhadid Samir**, Maitre de Conférence à l'université de Constantine d'accepter de lire mon travail et de faire partie du jury de cette thèse.

J'adresse mes remerciements à toutes celles et à tous ceux que j'ai côtoyés, durant ces dernières annés et qui m'ont aidé de prés ou de loin à l'élaboration de cette thèse.

Table des matières

INTRODUCTION

Les espaces de Sobolev avec poids forment un cadre fonctionnel adéquat pour l'étude des équations aux dérivés partielles dans les domaines non bornés, c'est-à-dire ayant une extension allant à l'infini. On peut citer comme exemple de ces domaines l'espace tout entier, les extérieurs de domaines bornés, les cylindres et les demi-espaces. L'idée principale de ces espaces est l'utilisation de poids dans les conditions intégrales imposées à leurs fonctions. Le choix de ces poids est souvent dicté d'une part par le comportement requis à grandes distances, et d'autre part par des contraintes fonctionnelles.

Dans cette thèse, il y a un triple objectif. D'une part, on voudrait révéler quelques propriétés supplémentaires des espaces à poids. Ensuite, on s'intéresse au système de Navier-Stokes comportant un terme de rotation et pour lequel on aimerait étudier l'existence des solutions. Enfin, on voudrait employer des fonctions rationnelles d'un type particulier, découvertes récemment par Arar et Boulmezaoud, dans la résolution de problèmes elliptiques de la forme

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x) \text{ dans } \mathbb{R}^n.$$

Les trois objectifs de la thèse sont donc indépendants. Néanmoins, ils ont en commun l'utilisation d'une famille particulière d'espaces à poids. Cette famille a été étudiée par de nombreux auteurs, et dans diverses géométries. On peut citer les travaux de Hanouzet, de Giroire, de Kufner, de Amrouche et co-auteurs et de Boulmezaoud. Ces espaces ont été employés comme cadre fonctionnel pour l'étude de nombreux équations et systèmes ; équations de Laplace et de Poisson, équations de Stokes, de Navier-Stokes et de Oseen dans le domaine extérieur et le demi espace (voir [8],[11],[13], [20], [21]).

La contribution principale de cette thèse est répartie dans trois chapitres :

Le premier chapitre est divisé en deux sections. Dans la première, on montre une identité entre deux familles d'espaces. Ce résultat est généralisé ensuite dans la deuxième section.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des équations de Navier-Stokes en présence d'un obstacle tournant dans l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier. En se basant sur des résultats obtenus par Abada et Boulmezaoud (voir [4]) dans le cas linéaire, et en utilisant une technique de point fixe, on a obtenu des résultats d'existence et d'unicité au problème non linéaire pour de petites données.

Dans le troisième chapitre, on propose la résolution numérique de la solution dans l'espace tout entier de l'équation elliptique ci-dessus. Inspirée de résultats de Arar et Boulmezaoud (voir [5]), la discrétisation est faite en utilisant une base particulière, composée des fonctions propres d'un laplacien pondéré.

Chapitre 1

Certaines identités concernant les espaces de Sobolev à poids

(Article paru dans *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series S.*)**.**

Chapitre 1

Certaines identités concernant les espaces de Sobolev à poids

Le but de ce chapitre est de comparer quelques familles d'espaces de Sobolev à poids. On montrera en particulier quelques identités qui sont utiles dans l'étude de quelques équations aux dérivées partielles posés en domaines non bornés.

1.1 Notations et définitions

Dans toute la suite n sera un entier naturel non nul. Pour tout point $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout multi-indice $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{N}^n$, on note

$$|\lambda| = \lambda_1 + ... + \lambda_n, \ |x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}, \ \partial^\lambda = \frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial x_1^{\lambda_1} ... \partial x_n^{\lambda_n}}$$

On note $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiable à support compact dans $\mathbb{R}^n$, et $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ l'espace des distributions. Pour $1 < p < \infty$ on note $L^p(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions mesurable telles que

$$\int_\Omega |u|^p dx < \infty.$$

Cet espace est doté de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega |u|^p dx)^{1/p}.$$

Dans toute la suite, $\langle x \rangle$ désigne la fonction poids de base, définie par

$$\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}.$$

Soient α un réel et $m \geq 0$ un entier. On introduit l'espace à poids $H_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ composé de toutes les fonctions $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ dont les dérivées aux sens des distributions satisfont

$$\forall |\mu| \leq m, \langle x \rangle^{\alpha+|\mu|} \partial^\mu u \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Cet espace est doté de la norme

$$\|u\|_{H_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)} = (\sum_{|\mu|\leq m} \|\langle x \rangle^{\alpha+|\mu|} \partial^\mu u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)})^{1/p}.$$

On considère maintenant $m > 0$ et un autre réel $\epsilon \geq 0$, on définit l'espace $U_{\alpha,\epsilon}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ comme celui de toutes les fonctions $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ vérifiant

$$\forall 0 \leq |\mu| \leq m-1, \langle x \rangle^{\alpha+|\mu|-\epsilon} \partial^\mu u \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

et

$$\forall |\mu| = m,\ \langle x \rangle^{\alpha+m} \partial^\mu u \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Cet espace est muni de la norme

$$\|u\|_{U_{\alpha,\epsilon}^{m,p}(\mathbb{R}^n)} = (\sum_{0\leq|\mu|\leq m-1} \|\langle x \rangle^{\alpha+|\mu|-\epsilon} \partial^\mu u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\mu|=m} \|\langle x \rangle^{\alpha+m} \partial^\mu u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)})^{1/p}.$$

Les deux espaces $H_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ et $U_{\alpha,\epsilon}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ sont des espaces de Banach (voir par exemple [23]). On observe que l'injection suivante est vraie pour tout $\epsilon \geq 0$

$$H_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow U_{\alpha,\epsilon}^{m,p}(\mathbb{R}^n),$$

avec égalité si $\epsilon = 0$.

On introduit maintenant la boule ouverte de rayon 1

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$$

et on pose $B^\star = B \backslash \{0\}$. On définit l'espace

$$G_\alpha^{m,p}(B^\star) = \{u \in \mathscr{D}'(B^\star),\ \forall |\mu| \leq m;\ |x|^{\alpha+|\mu|} \partial^\mu u \in L^p(B^\star)\}$$

et

$$\begin{aligned} V_{\alpha,\epsilon}^{m,p}(B^\star) \ = \ & \{u \in \mathscr{D}'(B^\star),\ \forall |\mu| \leq m-1;\ |x|^{\alpha+|\mu|-\epsilon} \partial^\mu u \in L^p(B^\star) \\ & \textit{et}\ \forall |\mu| = m,\ |x|^{\alpha+m} \partial^\mu u \in L^p(B^\star)\}. \end{aligned}$$

Dans les paragraphes suivants, on projette de comparer les espaces $U_{\alpha,\epsilon}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ et $H_\alpha^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ d'abord pour $m = 1$, ensuite pour $m \geq 1$ quelconque. Une généralisation des résultats obtenus sera exposée dans le dernier paragraphe.

1.2 Comparaison des espaces $U^{1,p}_{\alpha,\epsilon}(\mathbb{R}^n)$ et $H^{1,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$

Notre premier résultat principal est le suivant

Théorème 1. *Soient α et ϵ deux nombres réels avec $\epsilon > 0$ et soit*

$$\delta = \alpha + \frac{n}{p}.$$

On a

- *Si $\delta < 0$ ou si $\delta > \epsilon$, alors l'identité suivante est vérifiée topologiquement et algébriquement*

$$U^{1,p}_{\alpha,\epsilon}(\mathbb{R}^n) = H^{1,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n).$$

- *Si $0 < \delta < \epsilon$, alors*

$$U^{1,p}_{\alpha,\epsilon}(\mathbb{R}^n) = H^{1,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n) \oplus \mathbb{R}.$$

Pour la démonstration, on va procéder par étapes. Commençons par introduire la famille des applications $(T_s)_{s>1}$ définie comme suit.

Définition 1. *Soit $s > 1$, on définit l'application T_s, définie sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, par*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},\ T_s(x) = \frac{x}{|x|^s}.$$

Lemme 1. *L'application T_s possède les propiétés suivantes :*

- *T_s est bijective de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ dans $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et de $\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}$ dans $B^\star$*
- *L' inverse de T_s est $T_{s'}$ où $\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = 1$.*

En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, l'équation

$$y = T_s(x),\ x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},$$

donne $|y| = |x|^{1-s} = |x|^{-s/s'}$ et

$$x = |x|^s y = \frac{y}{|y|^{s'}} = T_{s'}(y).$$

Lemme 2. *Soit $s > 1$. Alors ; le jacobien de T_s est donné par*

$$\det(\nabla_x T_s) = |x|^{-ns} \det((\delta_{ij} - s x_i x_j |x|^{-2})_{1 \leq i,j \leq n}) = (1-s)|x|^{-ns}. \qquad (1.1)$$

Démonstration. Calcul du jacobien

$$\det(\nabla_x T_s) = \frac{1}{|x|^{ns}} \begin{vmatrix} (1 - s\frac{x_1^2}{|x|^2}) & -s\frac{x_1x_2}{|x|^2} & \cdots & -s\frac{x_1x_n}{|x|^2} \\ -s\frac{x_2x_1}{|x|^2} & (1 - s\frac{x_2^2}{|x|^2}) & \cdots & -s\frac{x_2x_n}{|x|^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -s\frac{x_nx_1}{|x|^2} & -s\frac{x_nx_2}{|x|^2} & \cdots & (1 - s\frac{x_n^2}{|x|^2}) \end{vmatrix}.$$

On pose

$$J_n = \begin{vmatrix} (1 - s\frac{x_1^2}{|x|^2}) & -s\frac{x_1x_2}{|x|^2} & \cdots & -s\frac{x_1x_n}{|x|^2} \\ -s\frac{x_2x_1}{|x|^2} & (1 - s\frac{x_2^2}{|x|^2}) & \cdots & -s\frac{x_2x_n}{|x|^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -s\frac{x_nx_1}{|x|^2} & -s\frac{x_nx_2}{|x|^2} & \cdots & (1 - s\frac{x_n^2}{|x|^2}) \end{vmatrix},$$

en développant le détérminant par rapport à la niéme colonne, on obtient

$$J_n = (1 - s\frac{x_n^2}{|x|^2})J_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+n}(s^2\frac{x_nx_k^2}{|x|^2})\tilde{J}_k,$$

où

$$\tilde{J}_k = \begin{vmatrix} (1 - s\frac{x_1^2}{|x|^2}) & \cdots & -s\frac{x_1x_{k-1}}{|x|^2} & \frac{x_1}{|x|^2} & -s\frac{x_1x_{k+1}}{|x|^2} & \cdots & -s\frac{x_1x_{n-1}}{|x|^2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -s\frac{x_{k-1}x_1}{|x|^2} & \cdots & (1 - s\frac{x_{k-1}^2}{|x|^2}) & \frac{x_{k-1}}{|x|^2} & -s\frac{x_{k-1}x_{k+1}}{|x|^2} & \cdots & -s\frac{x_{k-1}x_{n-1}}{|x|^2} \\ -s\frac{x_{k+1}x_1}{|x|^2} & \cdots & -s\frac{x_{k+1}x_{k-1}}{|x|^2} & \frac{x_{k+1}}{|x|^2} & (1 - s\frac{x_{k+1}^2}{|x|^2}) & \cdots & -s\frac{x_{k+1}x_{n-1}}{|x|^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -s\frac{x_{n-1}x_1}{|x|^2} & \cdots & -s\frac{x_{n-1}x_{k-1}}{|x|^2} & \frac{x_{n-1}}{|x|^2} & -s\frac{x_{n-1}x_{k+1}}{|x|^2} & \cdots & (1 - s\frac{x_{n-1}^2}{|x|^2}) \\ -s\frac{x_nx_1}{|x|^2} & \cdots & -s\frac{x_nx_{k-1}}{|x|^2} & \frac{x_n}{|x|^2} & -s\frac{x_nx_{k+1}}{|x|^2} & \cdots & -s\frac{x_nx_{n-1}}{|x|^2} \end{vmatrix}.$$

On change la colonne v_j par $v_j - sx_jv_k$

$$\tilde{J}_k = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 & \frac{x_1}{|x|^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \frac{x_{k-1}}{|x|^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{x_{k+1}}{|x|^2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{x_{n-1}}{|x|^2} & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{x_n}{|x|^2} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

et on développe par rapport à la nième ligne on obtient

$$\tilde{J}_k = (-1)^{(n+k-1)} \frac{x_n}{|x|^2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

Ainsi

$$\tilde{J}_k = (-1)^{(n+k-1)} \frac{x_n}{|x|^2}$$

$$J_n = (1 - s\frac{x_n^2}{|x|^2})J_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} (s^2 \frac{x_n^2 x_k^2}{|x|^2}).$$

Alors si

$$J_1 = (1 - s\frac{x_n^2}{|x|^2}),$$

on a

$$\begin{aligned} J_2 &= (1 - s\frac{x_n^2}{|x|^2})J_1 - (s^2 \frac{x_n^2 x_1^2}{|x|^2}) \\ &= (1 - s\frac{x_1^2}{|x|^2} - s\frac{x_2^2}{|x|^2}) \\ &= (1 - s). \end{aligned}$$

Par récurrence on déduit que

$$\begin{aligned} J_n &= (1 - s\frac{x_n^2}{|x|^2})J_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} (s^2 \frac{x_n^2 x_k^2}{|x|^2}) \\ &= (1 - s\frac{x_n^2}{|x|^2})(\sum_{k=1}^{n-1} s\frac{x_k^2}{|x|^2}) - \sum_{k=1}^{n-1} (s^2 \frac{x_n^2 x_k^2}{|x|^2}) \\ &= (1 - \sum_{k=1}^{n} s\frac{x_k^2}{|x|^2}) \\ &= (1 - s). \end{aligned}$$

□

Maintenant, pour tout fonction u définie sur $\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}$, on désigne $u_s^\star$ la fonction définie sur $B^\star$ par

$$\forall x \in B^\star,\ u_s^\star(x) = u(T_s^{-1}(x)) = u(T_{s'}(x)).$$

Lemme 3. *Soient $s > 1$ et β deux nombres réels et u une fonction mesurable définie sur $\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}$. On pose*

$$\beta^\star = -\frac{s'}{s}\beta - s'\frac{n}{p}.$$

Alors ; l'application $u \mapsto u_s^\star$ est un isomorphisme entre

1. *$H_\beta^{0,p}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B})$ et $G_{\beta^\star}^{0,p}(B^\star)$.*
2. *$H_\beta^{1,p}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B})$ et $G_{\beta^\star}^{1,p}(B^\star)$.*
3. *$U_{\beta,\epsilon}^{1,p}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B})$ et $V_{\beta^\star,-\frac{s'}{s}\epsilon}^{1,p}(B^\star)$.*

Démonstration. – Soit $u \in H_\beta^{0,p}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B})$ par un changement de variable $y = T_s(x)$ et grâce à (1.1) on trouve :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}} |x|^{\beta p} |u(x)|^p dx &= \int_{B^\star} (|y|^{1-s'})^{\beta p} |u_s^\star(y)|^p |1-s'||y|^{-ns'} dy \\
&= \int_{B^\star} |y|^{(1-s')\beta - \frac{n}{p}s'} |u_s^\star(y)|^p |1-s'| dy \\
&= \int_{B^\star} |y|^{\beta^\star} |u_s^\star(y)|^p |1-s'| dy,
\end{aligned}$$

avec $\beta^\star = (1-s')\beta - \frac{n}{p}s'$.

– La preuve de (2) découle des inégalités suivantes ;

$$|x|^s |\nabla_x u(x)| \leq c_1 |\nabla_y u_s^\star(y)|, \; |y|^{s'} |\nabla_y u_s^\star(y)| \leq c_2 |\nabla_x u(x)|, \tag{1.2}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\partial_i u &= \sum_{j=1}^n \partial_j u_s^\star \partial_i y_j \\
&= \sum_{j=1}^n \partial_j u_s^\star (\delta_{ij} - s x_i x_j |x|^2) |x|^{-s}.
\end{aligned}$$

On conclut donc que

$$|x|^s |\nabla_x u| = \left[\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\delta_{ij} - s x_i x_j |x|^{-2}) \partial_j u_s^\star \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

D'autre part, d'après l'équivalence des normes dans les espaces de dimensions finies, il existe une constante $c_1 > 0$ telle que

$$\begin{aligned}
|x|^s|\nabla_x u| &\leq c_1\sum_{i=1}^n|\sum_{j=1}^n(\delta_{ij}-sx_ix_j|x|^{-2})\partial_j u_s^\star| \\
&\leq c_1\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n(1+s)|\partial_j u_s^\star| \\
&\leq (1+s)c_1\sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^n|\partial_j u_s^\star|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{j=1}^n 1)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c_2|\nabla_y u_s^\star|.
\end{aligned}$$

De plus, soit $u \in H^{1,p}_\beta(\mathbb{R}^n\backslash\overline{B})$ alors ;

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H^{0,p}_\beta(\mathbb{R}^n\backslash\overline{B}) \\ w(x) = \nabla_x u \in H^{0,p}_{\beta+1}(\mathbb{R}^n\backslash\overline{B}) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u_s^\star \in H^{0,p}_{\beta^\star}(B^\star) \\ w^\star \in H^{0,p}_{(\beta+1)^\star}(B^\star) \end{array}\right.$$

de (1.2) on déduit que

$$\left\{\begin{array}{l} u_s^\star \in H^{0,p}_{\beta^\star}(B^\star) \\ \nabla_y u_s^\star \in H^{0,p}_{(\beta+1)^\star+s}(B^\star) \end{array}\right.$$

et par un calcule simple on trouve

$$(\beta+1)^\star + s = \beta^\star + 1,$$

d'où

$$u_s^\star \in H^{1,p}_{\beta^\star}(B^\star).$$

Réciproquement, si $u_s^\star \in H^{1,p}_{\beta^\star}(B^\star)$, grâce à (1.2), $u \in H^{1,p}_\beta(\mathbb{R}^n\backslash\overline{B})$

– Finalement, si $u \in U^{1,p}_{\beta,\epsilon}(\mathbb{R}^n\backslash\overline{B})$ alors,

$$\left\{\begin{array}{l} w = \nabla u \in H^{0,p}_{\beta+1}(\mathbb{R}^n\backslash\overline{B}) \\ u \in H^{0,p}_{\beta-\epsilon}(\mathbb{R}^n\backslash\overline{B}) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} w^\star \in G^{0,p}_{(\beta+1)^\star}(B^\star) \\ u_s^\star \in G^{0,p}_{(\beta-\epsilon)^\star}(B^\star) \end{array}\right. .$$

Utilisant (1.2), on déduit que

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla u_s^\star \in G^{0,p}_{\beta^\star+1}(B^\star) \\ u_s^\star \in G^{0,p}_{(\beta-\epsilon)^\star}(B^\star) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \nabla u_s^\star \in G^{0,p}_{\beta^\star+1}(B^\star) \\ u_s^\star \in G^{0,p}_{(\beta^\star-\epsilon\frac{s'}{s})}(B^\star) \end{array}\right. ,$$

d'où $u_s^\star \in V^{1,p}_{\beta^\star,-\frac{s'}{s}\epsilon}(B^\star)$.

$\square$

La fin de la démonstration du théoréme 1 nécessite le lemme suivant (voir [29]).

Lemme 4. ***(Maz'ya et Plameneveskii.)*** *Soit γ un réel et on pose*

$$\theta = \gamma + 1 + \frac{n}{p}$$

1. *Si $\theta < 0$ ou si $\theta > 1$, alors les espaces $V^{1,p}_{\gamma,-1}(B^\star)$ et $G^{1,p}_{\gamma}(B^\star)$ coincident algébriquement et topologiquement.*
2. *Si $0 < \theta < 1$, alors $V^{1,p}_{\gamma,-1}(B^\star) = G^{1,p}_{\gamma}(B^\star) \oplus \mathbb{R}$.*

Revenant à la démonstration du Théoréme 1. Choisissant $s = \epsilon + 1$ et $\gamma = \alpha^\star$ dans le lemme 3, il en résulte que l'application $u \mapsto u^\star_s$ est un isomorphisme entre

– $U^{1,p}_{\alpha,\epsilon}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B})$ et $V^{1,p}_{\alpha^\star,-\frac{s'}{s}\epsilon}(B^\star) = V^{1,p}_{\alpha^\star,-1}(B^\star)$.

– $H^{1,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B})$ et $G^{1,p}_{\alpha^\star}(B^\star)$.

Par une application directe du lemme 4 avec

$$\theta = \alpha^\star + 1 + \frac{n}{p} = 1 - \frac{\delta}{\epsilon}$$

on conclut que

$$U^{1,p}_{\alpha,\epsilon}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}) = H^{1,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}) \text{ si } \theta < 0 \text{ ou } \theta > 1$$

et

$$U^{1,p}_{\alpha,\epsilon}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}) = H^{1,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}) \oplus \mathbb{R} \text{ si } 0 < \theta < 1.$$

1.2.1 Comparaison des espaces $U^{m,p}_{\alpha,\epsilon}(\mathbb{R}^n)$ et $H^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$

Théorème 2. *Soit $m \geq 1$ un entier, α et ϵ deux nombres réels tels que $\epsilon > 0$. on suppose que $\{-\delta, \epsilon - \delta\} \cap \{0, ..., m-1\} = \emptyset$, où $\delta = \alpha + \frac{n}{p}$. On définit les nombres entiers ℓ, r et l'ensemble A comme suit*

$$\ell = -E(\delta),\ r = E(\epsilon - \delta),\ A = \{k \in [\![0, m-1]\!] \mid \ell \leq k \leq r\}.$$

Alors ; l'identité suivante est vérifiée algébriquement et topologiquement

$$U^{m,p}_{\alpha,\epsilon}(\mathbb{R}^n) = H^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n) \oplus_{k \in A} \mathbb{H}_k, \tag{1.3}$$

où pour chaque $k \geq 0$, $\mathbb{H}_k$ désigne l'espace des polynômes homogènes de degré k.

Remarque 1. *L'identité (1.3) reste valable lorsqu'on remplace* $U^{m,p}_{\alpha,\epsilon}(\mathbb{R}^n)$ *et* $H^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *par* $U^{m,p}_{\alpha,\epsilon}(\Omega)$ *et* $H^{m,p}_{\alpha}(\Omega)$ *respectivement, avec* Ω *l'extérieur d'un domaine borné ou le demi-espace.*

Remarque 2. *Donnons quelques précisions sur l'identité (1.3). On peut distinguer trois cas :*

- *Si* $\delta < -(m-1)$ *ou* $\delta > \epsilon$ *ou* $\ell > r$*, alors,* $A = \emptyset$ *et*

$$U^{m,p}_{\alpha,\epsilon}(\mathbb{R}^n) = H^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n).$$

- *Si* $-(m-1) < \delta < \epsilon - (m-1)$*, alors* $A = \{\max(\ell, 0), ..., m-1\}$ *et*

$$U^{m,p}_{\alpha,\epsilon}(\mathbb{R}^n) = H^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n) \oplus \mathbb{H}_{\max(\ell,0)} \oplus ... \oplus \mathbb{H}_{m-1}.$$

- *Si* $\epsilon - (m-1) < \delta < \epsilon$ *et* $\ell \leq r$*, alors* $A = \{\ell, ..., r\}$ *et*

$$U^{m,p}_{\alpha,\epsilon}(\mathbb{R}^n) = H^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n) \oplus \mathbb{H}_{\ell} \oplus ... \oplus \mathbb{H}_{r}.$$

Démonstration. On distingue les trois cas

cas 1 : $\delta < -(m-1)$ ou $\delta > \epsilon$

Soit $u \in U^{m,p}_{\alpha,\epsilon}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B})$. On montre par récurrence que

$$|x|^{\alpha+|\mu|}\partial^{\mu} u \in L^p(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}), \forall |\mu| \leq m-1.$$

Puisque $u \in U^{m,p}_{\alpha,\epsilon}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B})$, on a

$$\begin{aligned}
|x|^{\alpha+|\mu|-\epsilon}\partial^{\mu} u &\in L^p(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}),\ \forall |\mu| \leq m-2, &(1.4)\\
|x|^{\alpha+|\mu|-\epsilon}\partial^{\mu} u &\in L^p(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}),\ \forall |\mu| = m-1, &(1.5)\\
|x|^{\alpha+|\mu|}\partial^{\mu} u &\in L^p(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}),\ \forall |\mu| = m, &(1.6)
\end{aligned}$$

Posons $v_\mu = \partial^\mu u$ pour chaque μ tel que $|\mu| = m-1$. On a

$$v_\mu \in U^{1,p}_{\alpha+m-1,\epsilon}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}).$$

D'après le Théorème 1 on déduit que

$$v_\mu \in H^{1,p}_{\alpha+m-1}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}),$$

c'est-à-dire,

$$|x|^{\alpha+|\mu|}\partial^{\mu} u \in L^p(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}),\ \forall |\mu| = m-1 \tag{1.7}$$

. Prenons maintenant $v_\mu = \partial^\mu u$ pour μ tel que $|\mu| = m-2$. D'après (1.7) et (1.4) on a

$$\left\{\begin{array}{l} |x|^{\alpha+m-2-\epsilon} v_\mu \in L^p(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}) \\ et \\ |x|^{\alpha+m-1} \partial_i v_\mu \in L^p(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}) \; \forall i \leq n \end{array}\right. .$$

Ce qui implique $v_\mu = \partial^\mu u \in U^{1,p}_{\alpha+m-2,\epsilon}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B})$. Tenant compte du Théorème 1, on obtient
$v_\mu = \partial^\mu u \in H^{1,p}_{\alpha+m-2}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B})$ on trouve

$$|x|^{\alpha+|\mu|} \partial^\mu u \in L^p(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}), \; \forall |\mu| = m-2. \tag{1.8}$$

Ensuite, par récurrence sur $|\mu|$ on montre que $v_\mu \in H^{1,p}_{\alpha+|\mu|}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B})$ pour chaque μ tel que $0 \leq |\mu| \leq m-1$. Ainsi, $u \in H^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B})$. La continuité de l'inclusion $U^{m,p}_{\alpha,\epsilon}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}) \hookrightarrow H^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B})$ découle de la démonstration
.

cas 2 : $-(m-1) < \delta < \epsilon - (m-1)$
Soit $u \in U^{m,p}_{\alpha,\epsilon}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B})$ et soit
$v_\mu = \partial^\mu u$ pour chaque μ tel que $|\mu| = m-1$. On a

$$v_\mu \in U^{1,p}_{\alpha+m-1,\epsilon}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}).$$

Puisque

$$0 < \delta + (m-1) < \epsilon,$$

il existe, d'après le Théorème 1, une fonction $w_\mu \in H^{1,p}_{\alpha+m-1}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B})$ et une constante $c_\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$v_\mu = w_\mu + c_\mu. \tag{1.9}$$

Sachant que les polynômes de degré i tel que $i \leq \epsilon - \delta$ appartiennent à l'espace $U^{m,p}_{\alpha,\epsilon}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B})$ on conclut qu'il existe un polynôme $p^{(m-1)} \in \mathbb{H}_{m-1}$ tel que $\partial^\mu p^{(m-1)} = c_\mu$. On pose $u^{(m-1)} = u - p^{(m-1)}$, on peut conclure de (1.9) que

$$\partial^\mu u^{(m-1)} = w_\mu \in H^{1,p}_{\alpha+m-1}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}), \; \forall |\mu| = m-1,$$

c'est à dire,

$$|x|^{\alpha+m-1} \partial^\mu u^{(m-1)} \in L^p(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}), \tag{1.10}$$
$$|x|^{\alpha+m} \partial_i \partial^\mu u^{(m-1)} \in L^p(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}), \; \forall i \leq n \tag{1.11}$$

Ainsi
$$\partial^\mu u^{(m-1)} \in H^{0,p}_{\alpha+m}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}),\ \forall |\mu| = m$$
et de (1.4) et (1.10) on a
$$u^{(m-1)} \in U^{m-1,p}_{\alpha,\epsilon}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}). \tag{1.12}$$
Maintenant, si η est un multi-indice tel que $|\eta| = m-2$, on peut déduire que
$$\partial^\eta u^{(m-1)} = \partial^\eta u - \partial^\eta p^{(m-1)} \in U^{1,p}_{\alpha+m-2,\epsilon}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}),$$
et de (1.10) pour chaque $i \leq n$,
$$\partial_i \partial^\eta u^{(m-1)} \in H^{0,p}_{\alpha+m-1}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}).$$
En outre d'après (1.11),
$$\partial_i \partial_j \partial^\eta u^{(m-1)} = \partial_i \partial_j \partial^\eta u \in H^{0,p}_{\alpha+m}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}),$$
Appliquant le Théorème 1 avec $-1 \leq \delta + m - 2 \leq \epsilon - 1 \leq \epsilon$ $(0 \leq \delta + m - 2 \leq \epsilon - 1 \leq \epsilon \ ou\ \delta + m - 2 \leq 0)$, on déduit qu'il existe une constante $c_\eta \in \mathbb{R}$ et une fonction $w_\eta \in H^{1,p}_{\alpha+m-2}$ tels que
$$\partial^\eta u^{(m-1)} = w_\eta + c_\eta.$$
Soit $p^{(m-2)} \in \mathbb{H}_{m-2}$ tel que $\partial^\eta p^{(m-2)} = c_\eta$ pour tout $|\eta| = m-2$.
Pour $u^{(m-2)} = u^{(m-1)} - p^{(m-2)}$ alors
$$u^{(m-2)} \in U^{m-2,p}_{\alpha,\epsilon}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}),$$
et
$$\partial^\mu u^{(m-2)} \in H^{1,p}_{\alpha+m-1}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}),\ \forall |\mu| = m-1.$$
De même si $\eta = m-k$ on peut montrer que
$$\begin{aligned} u^{(m-k)} &= u^{(m-k-1)} - p^{(m-k)} \\ u^{(m-k)} &\in U^{m-k,p}_{\alpha,\epsilon}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}) \\ \partial^\mu u^{(m-k)} &\in H^{k,p}_{\alpha+m-k}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}),\ \forall |\mu| = m-k. \end{aligned}$$
Par réccurence, on prouve qu'il existe une famille des fonctions polynomiales $(p^{(i)})_{0 \leq i \leq m-1}$ telles que
– Pour $i \leq m-1$, $p^{(i)} \in \mathbb{H}_i$,
– $u^{(0)} = u - \sum_{i=0}^{m-1} p^{(i)} \in H^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B})$.
Notant que les polynômes $p^{(i)}$ de degré i satisfaisants $i < -\alpha - \frac{n}{p} = -\delta$ appartiennent à $H^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B})$.

Cas 3 : $\epsilon - (m-1) < \delta < \epsilon$

D'une façon similaire au cas précédent, on peut avoir que $-k < \epsilon + m - k$ c'est à dire on distingue les cas $0 < \delta + m - k < \epsilon$ ou $\delta + m - k > \epsilon$ ou $\delta + m - k \leq 0$. Ainsi, c_μ est nul si $|\mu| > r$ ou $|\mu| < \ell$.

□

1.3 Généralisation. Espaces $H^{m,p}(a;\mathbb{R}^n)$ et $H^{m,p}(a^\star;\mathbb{R}^n)$

Maintenant, on va généraliser le théoréme 2. Soit un entier $m \geq 0$, on désigne par $\mathscr{A}_m$ l'ensemble de toutes les applications de $\{0,...,m\}$ dans $\mathbb{R}$. Pour chaque élément $a \in \mathscr{A}_m$ on peut associer l'espace $H^{m,p}(a;\mathbb{R}^n)$ composé de toutes les distributions u définies sur $\mathbb{R}^n$ et satisfaisant

$$\forall |\mu| \leq m,\ \langle x\rangle^{a(|\mu|)}\partial^\mu u \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

On associe à chaque application $a \in \mathscr{A}_m$ une autre application $a^\star \in \mathscr{A}_m$ définie par

$$\forall i \leq m,\ a^\star(i) = i + \max_{i\leq j\leq m} a(j) - j. \tag{1.13}$$

On a les propriétés suivantes

- $a^\star(m) = a(m)$,
- Pour $i < m$,
$$a^\star(i) = \max(a(i), a^\star(i+1) - 1). \tag{1.14}$$

Donc, $a^\star$ satisfait l'inégalité suivante

$$\forall i < m,\ a^\star(i) \geq a^\star(i+1) - 1. \tag{1.15}$$

En effet , si

$$\max_{i\leq j\leq m} a(j) - j = a(i) - i \text{ alors } a^\star(i) = a(i),$$

sinon

$$\begin{aligned} \max_{i\leq j\leq m} a(j) - j &= \max_{i+1\leq j\leq m} a(j) - j \\ &= a^\star(i+1) - (i+1). \end{aligned}$$

Substituant dans (1.13)

$$a^\star(i) = a^\star(i+1) - 1$$

– $a \leq a^\star$.
il en résulte que
$$H^{m,p}(a^\star;\mathbb{R}^n)\hookrightarrow H^{m,p}(a;\mathbb{R}^n). \tag{1.16}$$
Le tableau 1.1 comporte un exemple de a et $a^\star$.

$\lvert\mu\rvert$	0	1	2	3	4
$a(\lvert\mu\rvert)$	0	3	1	1	4
$a^\star(\lvert\mu\rvert)$	2	3	2	3	4

TABLE 1.1 – Exemple de a et $a^\star$.

Notre but maintenant est de comparer les deux espaces $H^{m,p}(a^\star;\mathbb{R}^n)$ et $H^{m,p}(a;\mathbb{R}^n)$.
Tout d'abord, on va comparer a et $a^\star$.

Lemme 5. *Soit $m \geq 1$ un entier et $a \in \mathscr{A}_m$. Alors, $a^\star = a$ si et seulement si*
$$\forall i < m,\ a(i) \geq a(i+1) - 1. \tag{1.17}$$
Démonstration. Supposons que $a^\star = a$ alors $a^\star(i) = a(i),\ \forall i < m$ d'après (1.15)
$$\forall i < m,\ a(i) \geq a(i+1) - 1.$$

Si $\forall i < m,\ a(i) \geq a(i+1) - 1$ alors $\forall i < m,\ a(i) - i \geq a(i+1) - (i+1)$ cela implique que
$$a(i) - i \geq \max_{i+1\leq j\leq m} a(j) - j \ \Rightarrow\ a(i) \geq [(i+1) + \max_{i+1\leq j\leq m} a(j) - j] - 1,$$
d'après (1.14) , $a^\star(i) = a(i)$.

□

1.3.1 Théorème de comparaison entre $H^{m,p}(a;\mathbb{R}^n)$ et $H^{m,p}(a^\star;\mathbb{R}^n)$.

Théorème 3. *Soit $m \geq 0$ un entier et supposons que*
$$\forall 0 \leq i \leq m-1,\ a(i) + \frac{n}{p} > 0.$$
Alors ; l'identité suivante est vérifiée algébriquement et topologiquement
$$H^{m,p}(a;\mathbb{R}^n) = H^{m,p}(a^\star;\mathbb{R}^n). \tag{1.18}$$

Avant de démontrer le théoréme, on va voir un exemple pour expliquer que le théoréme 2 est une généralisation du théoréme 1

Exemple 1. *Considérons l'espace des distributions u qui satisfait aux conditions*

$$u \in L^p(\mathbb{R}^n),\ \langle x\rangle^3 \nabla u \in L^p(\mathbb{R}^n)^n, \tag{1.19}$$

et

$$\langle x\rangle \partial^\mu u \in L^p(\mathbb{R}^n)\ \forall |\mu| = 2 \ \textit{ou}\ 3,\ \langle x\rangle^4 \partial^\mu u \in L^p(\mathbb{R}^n)\ \forall |\mu| = 4. \tag{1.20}$$

Cet espace est exactement $H^{4,p}(a;\mathbb{R}^n)$ où a est l'application donnée dans le tableau 1.1. Le même tableau contient $a^\star$. Il signifie que chaque fonction u satisfaisant les coonditions (1.19) et (1.20) vérifie

$$\langle x\rangle^2 \partial^\mu u \in L^p(\mathbb{R}^n)\ \forall |\mu| = 0 \ \textit{ou}\ 2, \langle x\rangle^3 \partial^\mu u \in L^p(\mathbb{R}^n)\ \forall |\mu| = 3.$$

Démonstration. La première étape consiste à introduire la notation suivante : pour deux applications $b,\ c \in \mathscr{A}_m$, on pose

$$\partial(b,c) = \max\{i \leq m \mid b(i) \neq c(i)\}$$

(par convention $\max \emptyset = -\infty$).

Soit $a \in \mathscr{A}_m$. Considérons la suite $a_0, a_1, ...$ de $\mathscr{A}_m$ définie comme suit : $a_0 = a$ et

$$\begin{aligned} \forall k \geq 0,\ \forall i \leq m,\ a_{k+1}(i) &= \begin{cases} a_k(i) \text{ si } i < \partial(a_k^\star, a_k) \\ a_k^\star(i) \text{ sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} a_k(i) \text{ si } i \neq \partial(a_k^\star, a_k), \\ a_k^\star(i) \text{ si } i = \partial(a_k^\star, a_k). \end{cases} \end{aligned}$$

On pose

$$t_k = \partial(a_k^\star, a_k) < m.$$

On a les propriétés suivantes :

- Pour tout $k \geq 0$, $a_k(m) = a(m)$.
  Cela découle directement de la propriété $a^\star(m) = a(m)$ donc $\forall k \leq m$, $\partial(a_k^\star, a_k) \neq m$.
- $\forall k \geq 0$, $a_{k+1}^\star = a_k^\star = a^\star$.

  On démontre cela par récurrence. Soit $k \geq 0$. On a $a_{k+1}^\star(m) = a_k^\star(m) = a(m)$. Supposons que $a_{k+1}^\star(i) = a_k^\star(i)$ pour $i \leq m$. Alors, on utilise

(1.14) et (1.15) :

$$\begin{array}{rcl}
a^\star_{k+1}(i-1) & = & \max(a_{k+1}(i-1),\ a^\star_{k+1}(i)-1) \\
& = & \left\{\begin{array}{l} \max(a_k(i-1), a^\star_{k+1}(i)-1) \text{ si } i-1 \neq \partial(a^\star_k, a_k) \\ \max(a^\star_k(i-1), a^\star_k(i)-1) \text{ sinon} \end{array}\right. \\
& = & \left\{\begin{array}{l} \max(a_k(i-1), a^\star_k(i)-1) \text{ si } i-1 \neq \partial(a^\star_k, a_k) \\ \max(a^\star_k(i-1), a^\star_k(i)-1) \text{ sinon} \end{array}\right. \\
& = & a^\star_k(i-1).
\end{array}$$

d'où, $a^\star_{k+1} = a^\star_k$.

– La suite finie $(t_k)_{0\leq k\leq k_0}$ est strictement décroissante dans $\mathbb{N}\cup\{-\infty\}$.

  Cela est directe, d'après la définition de a_{k+1} et $a^\star_{k+1} = a^\star_k$ on conclut que $\partial(a^\star_{k+1}, a_{k+1}) < \partial(a^\star_k, a_k)$.

– Il existe un entier $k_0 \geq 0$ tel que $t_k = -\infty$ pour $k \geq k_0$ (ainsi $a_{k_0} = a^\star$) et $t_k \geq 0$ si $0 \leq k < k_0$.

  Puisque la suite finie $(t_k)_{0\leq k\leq k_0}$ est décroissante, on peut écrire

$$\forall k \geq 0,\ \forall i \leq m,\ a_{k+1}(i) \quad = \quad \left\{\begin{array}{l} a^\star(i) = a(i) \text{ si } i > t_0, \\ a^\star(i) \text{ si } t_k \leq i \leq t_0, \\ a_k(i) \text{ si } 0 \leq i t_k \end{array}\right.$$

– Si $k < k_0$, alors $t_k = \partial(a_k, a^\star_k) = \partial(a_k, a^\star) \geq 0$ et

$$\begin{array}{rcl}
a_{k+1}(t_k) = a^\star_k(t_k) & = & \max(a_k(t_k), a^\star_k(t_k+1)-1) \\
& = & a^\star_k(t_k+1)-1 \\
& = & a^\star(t_k+1)-1 \\
& = & a_k(t_k+1)-1.
\end{array} \tag{1.21}$$

Soit $\ell \geq 0$ le plus petit entier tel que $a_k = a^\star$ pour tout $k \geq \ell$. Un tel entier existe puisque $\partial(a^\star, a_{k+1}) < \partial(a^\star, a_k)$ si $\partial(a^\star, a_k) \geq 0$.

Maintenant, soit u un élément de $H^{m,p}(a;\mathbb{R}^n) = H^{m,p}(a_0;\mathbb{R}^n)$. Alors ;

$$|x|^{a(|\mu|)}\partial^\mu u \in L^p(\mathbb{R}^n\backslash\overline{B}),\ \forall|\mu| \leq m$$

et en particulier si $a^\star_0 \neq a_0$ (i. e. $t_0 \geq 0$) on a

$$\begin{array}{rcl}
|x|^{a(t_0)}\partial^\mu u & \in & L^p(\mathbb{R}^n\backslash\overline{B}), \forall|\mu| = t_0 \\
|x|^{a(t_0+1)}\partial^\mu u & \in & L^p(\mathbb{R}^n\backslash\overline{B}),\ \forall|\mu| = t_0+1.
\end{array}$$

On pose $\epsilon = a_1(t_0) - a_0(t_0) = a_0^\star(t_0) - a_0(t_0)$, d'après (1.21) on a

$$\begin{array}{rcl} |x|^{a_1(t_0)-\epsilon}\partial^\mu u & \in & L^p(\mathbb{R}^n\backslash\overline{B}), \forall|\mu| = t_0 \\ |x|^{a_1(t_0)+1}\partial^\mu u & \in & L^p(\mathbb{R}^n\backslash\overline{B}),\ \forall|\mu| = t_0 + 1, \end{array}$$

donc $\partial^\mu u \in U^{1,p}_{a_1(t_0),\epsilon}(\mathbb{R}^n)$ et d'après le théorème 1 on trouve

$$\partial^\mu u \in H^{1,p}_{a_1(t_0)}(\mathbb{R}^n).$$

D'où $u \in H^{m,p}(a_1;\ \mathbb{R}^n)$ (cela d'après la définition de a_1).

Par récurrence, On déduit que $u \in H^{m,p}(a_k;\ \mathbb{R}^n)$ pour tout $k \geq 0$. $\square$

Les conséquences de ce théorème seront explorées dans un article en préparation par T. Boulmezaoud.

Chapitre 2

Equations de Navier-Stokes en présence d'un obstacle tournant

Article *soumis.*

Chapitre 2

Equations de Navier-Stokes en présence d'un obstacle tournant

On s'intéresse dans ce chapitre à un problème d'existence de solutions à une équation de Navier-Stokes stationnaire en présence d'un terme de rotation. Le cadre fonctionnel utilisé est celui des espaces à poids.

2.1 Introduction

On propose dans ce chapitre l'étude de l'équation de Navies-Stokes dans l'éspace $\mathbb{R}^3$ tout entier donné par

$$\begin{array}{rcl} -\nu\Delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}.\nabla \boldsymbol{u}. + \boldsymbol{v}_\infty.\nabla u + (\omega \times x).\nabla \boldsymbol{u} - \omega \times \boldsymbol{u} + \nabla \pi & = & \boldsymbol{f} \text{ dans } \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} & = & 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3, \end{array} \tag{2.1}$$

où $\boldsymbol{u}$, π désignent respectivement la vitesse et la pression, $\boldsymbol{v}_\infty$ est la vitesse prescrite de translation et ω désigne la vitesse angulaire.
Le produit $\omega \times a$ est le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$

L'une des difficultés dans l'étude du système (2.1) est la description du comportement asymptotique de la solution à l'infini.
Parmis les approches proposées pour surmonter cette difficulté, on peut citer l'utilisation des espaces de Sobolev à poids. Cette approche consiste à chercher des solutions vérifiant les conditions de la forme

$$\int_{\mathbb{R}^3} (|x|^2+1)^k |\boldsymbol{u}(x)|^2 < +\infty, \int_{\mathbb{R}^3} (|x|^2+1)^{k+1} |\nabla \boldsymbol{u}(x)|^2 < +\infty, \tag{2.2}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^3} (|x|^2+1)^{k+1}|\pi(x)|^2 < +\infty. \tag{2.3}$$

Elle a été appliquée avec succcés aux équations de Stokes (pour $\boldsymbol{v}_\infty = 0$, $\omega = 0$) dans tout l'espace (voir, e. g., [12], [21], [1], [2]), et dans des domaines extérieurs (voir, e. g., [22], [1], [2], [15]) ausssi dans le demi-espace (see e. g., [6], [7] et [8]).
Cependant, peu de résultats sont disponibles concernant le système (2.1) lorsque le corps est en rotation ($\omega \neq 0$). Dans [16, 18], les auteurs ont démontré l'existence d'une solution faible $(\boldsymbol{u}, \pi) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)^3 \times L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant

$$\|\varrho\nabla^2\boldsymbol{u}\|_{L^q(\mathbb{R}^3)^3} + \|\varrho\nabla\pi\|_{L^q(\mathbb{R}^3)^3} < +\infty, \tag{2.4}$$

pour certaines fonctions poids appropriées .
Hishida [24] a cherché une solution qui satisfait l'inégalité

$$\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^q(\mathbb{R}^3)^n} + \|\pi\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} < +\infty. \tag{2.5}$$

Ce résultat est généralisé dans Farwig et Hichida [16] qui ont prouvé l'existence de la solution dans les espaces de Lorentz . On peut aussi mentionner le travail de Galdi [19] dans lequel la solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$ existe et satisfait

$$\langle x\rangle|\boldsymbol{u}(x)| + \langle x\rangle^2(|\nabla\boldsymbol{u}(x)| + |\pi(x)|) + \langle x\rangle^3|\nabla\pi(x)| \leq C, \text{ m . p. p}$$

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème d'existence de solutions au problème (2.1) vérifiant des conditions de la forme (2.2)+(2.3). On s'appuira sur les résultats obtenus par Abada et Boulmezaoud [4] pour le système linéaire associé. Ces résultats seront rappelés ultérieurement. Nous commençons ici par un rappel concernant les espaces utilisés.

2.2 Cadre fonctionnel. Rappels sur les espaces à poids.

On conserve quelques notations du chapitre précédent. Ainsi, n sera un entier naturel non nul. Pour tout point $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note

$$|x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2},\ \langle x\rangle = (1+|x|^2)^{1/2}.$$

$L^p(\mathbb{R}^n)$ désignera l'espace usuel des fonctions mesurable telles que

$$\int_\Omega |u|^p dx < \infty.$$

et doté de sa norme habituelle.

Définition 2 (voir [23]). *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$ avec $1 < p < \infty$, $m \in \mathbb{N}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ l'espace de Sobolev à poids défini par*

$$W_\alpha^{m,p}(\Omega) = \{u \in \mathscr{D}'(\Omega)/\langle x\rangle^{\alpha-m+\lambda}\partial^\lambda u \in L^p(\Omega);\ |\lambda| \leq m\}.$$

et doté de la norme

$$\|u\|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)} = (\sum_{\lambda\leq m} \|\langle x\rangle^{\alpha-m+|\lambda|}\partial^\lambda u\|^p_{L^P(\mathbb{R}^n)})^{1/p}.$$

Cette définition n'a d'intêret par rapport à celle des espaces de Sobolev usuels que si l'ouvert Ω est non borné. Sinon l'espace $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ coincide algébriquement et topologiquement avec $W^{m,p}(\Omega)$, l'espace de Sobolev habituel. En conséquence, on observe que quand Ω est non borné, toutes les propriétés des fonctions appartenant à $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ coincident localement avec les propriétés des fonctions appartenant à $W^{m,p}(\Omega)$.

On donne maintenant quelques propriétés des espaces $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$

1. $W_0^{0,p}(\Omega) = L^P(\Omega)$.
2. $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme ci-dessus.
3. $W_\alpha^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W_{\alpha-1}^{m-1,p}(\Omega) \hookrightarrow W_{\alpha-2}^{m-2,p}(\Omega) \hookrightarrow ..... \hookrightarrow W_{\alpha-m}^{0,p}(\Omega)$
   ($\hookrightarrow$ signifie inclusion avec injection continue).
4. Pour $\varphi \in \mathscr{D}(\overline{\Omega})$ (φ restriction à Ω d'une fonction de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$) l'application. $u \to \varphi u$ est linéaire et continue de $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.

5. Dans le cas $p = 2$, $W_\alpha^{m,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire.
   $$(u, v)_{W_\alpha^m(\Omega)} = \sum_{\lambda\leq m} \int_\Omega \langle x\rangle^{2(\alpha-m+\lambda)}\partial^\lambda u\overline{\partial^\lambda v}dx$$
   On note simplement $W_\alpha^m(\Omega)$ l'espace $W_\alpha^{m,2}(\Omega)$ (p, égal 2 ici, est enlevé).

6. Pour $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$ l'application
   $$\begin{array}{rcl} W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n) & \to & W_{\alpha-\beta}^{m,p}(\mathbb{R}^n) \\ u & \to & \langle x\rangle^\beta u \end{array}$$
   est un isomorphisme.
7. Pour $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$ l'application
   $$\begin{array}{rcl} W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n) & \to & W_{\alpha-\beta}^{m-|\lambda|,p}(\mathbb{R}^n) \\ u & \to & \langle x\rangle^\beta \partial^\lambda u \end{array}$$
   est linéaire continue.

8. En notant $\mathscr{P}_k$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à k (avec la convention $\mathscr{P}_k = \{0\}$ pour $k < 0$), on montrer si $\dfrac{n}{p} + \alpha \notin \{i \in \mathbb{Z}; i \leq m\}$ alors $\mathscr{P}_{[m-n/p-\alpha]}$ est l'espace de tous les polynômes inclus dans $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$.

On a le résultat de densité suivant

Théorème 4. *([23]) $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$.*

Le dual de l'espace $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ sera noté $W^{-m,p'}_{-\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Ainsi,

$$W^{-m,p'}_{-\alpha}(\mathbb{R}^n) = (W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n))', \quad \text{où } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Dans la suite, pour $m \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$ et $\alpha,\ p \in \mathbb{R}$ on considérera la semi-norme définie sur $W^{m,p}_{\alpha}(\Omega)$ par

$$|u|_{W^{m,p}_{\alpha}(\Omega)} = (\sum_{|\lambda|=m} \|\langle x\rangle^{\alpha} D^{\lambda} u\|^p)^{1/p}.$$

On considérera aussi la norme de l'espace quotient $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{P}_{[m-n/p-\alpha]}$ donnée par

$$[u]_{W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)} = \inf_{Q\in\mathscr{P}_{[m-n/p-\alpha]}} \|u+Q\|_{W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)}.$$

Le théorème suivant joue un rôle fondamental dans l'étude de problèmes associés au Laplacien. Il s'agit d'une extension des inégalités de Poincaré quand $\alpha = 0$.

Théorème 5. *([3]) Soit un entier $m \geq 1$ et un réel $p \in]1, \infty[$ tel que $\dfrac{n}{p} \notin \{1, ..., m\}$. Alors, il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de m, n et p telle que*

$$\forall u \in W^{m,p}_0(\mathbb{R}^n),\ [u]_{W^{m,p}_0(\mathbb{R}^n)} \leq C|u|_{W^{m,p}_0(\mathbb{R}^n)}$$

Corollaire 1. *Soit un entier $m \geq 1$ et un réel $p \in]1, \infty[$ tel que $\dfrac{n}{p} \notin \{1, ..., m\}$. Les deux normes $[\boldsymbol{u}]_{W^{m,p}_0(\mathbb{R}^n)}$ et $|\boldsymbol{u}|_{W^{m,p}_0(\mathbb{R}^n)}$ sont équivalentes dans $W^{m,p}_0(\mathbb{R}^n)$.*

Maintenant on va rappeler quelques résultats concernant les opérateurs différentiels ∇, div et Δ dans les espaces non bornés.
On renvoie aux travaux de Hanouzet [23], Giroire [20] et Amrouche et *al.* [3] pour plus de détails.

– Soit $n \geq 3$, l'opérateur

$$A = \sum_{|\lambda| \leq 2} \langle x \rangle^{|\lambda|} a_\lambda \partial^\lambda,$$

tel que

$$a_\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$\exists \delta \text{ tel que },\ \forall \xi \in C^n,\ \forall x \in \mathbb{R}^n :\ Re(\sum_{|i|=|j|=1} a_{ij}\xi_i\xi_j) \geq \delta|\xi|^2$$

et

$$\forall \mu \in \mathbb{N}\ ,\ \exists C > 0\ ;\ |\partial^\mu a_\lambda| \leq C\langle x \rangle^{-|\mu|}.$$

Alors A est un isomorphisme de $W_k^k(\mathbb{R}^n)$ sur $W_{k-2}^{k-2}(\mathbb{R}^n)$, $\forall k \geq 1$.

– Si $\frac{n}{p} \neq 1$, les opérateurs

$$\nabla : W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{P}_{[1-n/p]} \longrightarrow \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n) \perp H_{p'}$$

et

$$\text{div} : \mathbf{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)/H_{p'} \longrightarrow W_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{P}_{[1-n/p]}$$

sont des isomorphismes ; où $H_p = \{v \in \mathbf{L}^p ; \text{div} v = 0\}$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

– Soient $m \in \mathbb{Z}$ et p un nombre réel appartenant à $[1, \infty[$

1. Pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{n}{p} \notin \{1, ..., l+1\}$, les opérateurs

$$\Delta : W_{-l+m}^{1+m,p}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{P}^\Delta_{[l+1-n/p]} \longrightarrow W_{-l+m}^{-1+m,p}(\mathbb{R}^n),$$

$$\Delta : W_{l+m}^{1+m,p'}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow W_{l+m}^{-1+m,p'}(\mathbb{R}^n) \perp \mathscr{P}^\Delta_{[l+1-n/p]}$$

sont des isomorphismes.

2. Si $\frac{n}{p} \neq 1$ et $\frac{n}{p'} \neq 1$, Alors l'opérateur

$$\Delta : W_m^{1+m,p}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{P}_{[1-n/p]} \longrightarrow W_m^{-1+m,p} \perp \mathscr{P}_{[1-n/p']}$$

est un isomorphisme.

– Soit $l \geq 0$ un entier tel que $\frac{n}{p'} \notin \{1, ..., l\}$, les opérateurs de Laplace

$$\Delta : W_l^{2,p}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{P}_{[2-l-n/p]} \longrightarrow W_l^{0,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathscr{P}^\Delta_{[l-n/p']},$$

$$\Delta : W_l^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{P}_{[1-l-n/p]} \longrightarrow W_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathscr{P}^\Delta_{[1+l-n/p']},$$

$$\Delta : W_{-l}^{2,p'}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{P}^\Delta_{[2-l-n/p']} \longrightarrow W_{-l}^{0,p'}(\mathbb{R}^n) \perp \mathscr{P}^\Delta_{[1-n/p']}$$

sont des isomorphismes.

Dans ces résultats concernant le Laplacien, les cas où les conditions du type
$$\frac{n}{p} \notin \{1, ..., l+1\}$$
ne sont pas réalisées (c'est-à-dire quand par exemple $\frac{n}{p} \in \{1, ..., l+1\}$), sont considérés comme des cas critiques. Les résultats ci-dessus peuvent être étendus à ces cas, pourvu que les espaces soient légérement modifiés en y injectant des poids logarithmiques. Bien que cette extension ne soit pas utile dans le présent chapitre, elle le sera partiellement dans le dernier chapitre . Sans trop détailler, cela peut se faire de la maniére qui suit (voir [3]).

Soit la fonction poids
$$lg(|x|) = ln(2 + |x|^2)$$
et soient α, β et p des nombres réels avec $p \in]1, \infty[$. On définit l'espace de Sobolev à poids $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$
$$\begin{array}{rcl} W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n) & = & \{\boldsymbol{u} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n); \\ & & \forall\, 0 \leq |\lambda| \leq k,\ \langle x\rangle^{\alpha-m+|\lambda|}(lg|x|)^{\beta-1}\partial^\lambda u \in L^p(\mathbb{R}^n) \\ & & \forall k+1 \leq |\lambda| \leq k,\ \langle x\rangle^{\alpha-m+|\lambda|}(lg|x|)^{\beta}\partial^\lambda u \in L^p(\mathbb{R}^n)\}, \end{array}$$
tel que
$$k = k(m, n, p, \alpha) = \begin{cases} -1 & \text{si } \frac{n}{p} + \alpha \notin \{1, ..., m\} \\ m - \frac{n}{p} - \alpha & \text{si } \frac{n}{p} + \alpha \in \{1, ..., m\} \end{cases}.$$
On note sa norme par
$$\begin{array}{rcl} \|u\|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} = & & \Big(\sum_{0\leq|\lambda|\leq k} \|\langle x\rangle^{\alpha-m+|\lambda|}(lg|x|)^{\beta-1}\partial^\lambda u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ & & \sum_{k+1\leq|\lambda|\leq m} \|\langle x\rangle^{\alpha-m+|\lambda|}(lg|x|)^{\beta}\partial^\lambda u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/p}. \end{array}$$
Cet espace est un espace de Banach réflexif. Toutes les propriétés de l'espace $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ coincident localement avec les propiétés de l'espace $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 3. *Si $\dfrac{n}{p} + \alpha \notin \{1, 2, ..., m\}$ et $\beta = 0$ l'espace $W^{m,p}_{\alpha,0}(\mathbb{R}^n)$ coincide avec l'espace $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$; autrement dit la définition de l'espace $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ est une généralisation de la définition de $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$.*

Donnons dans la suite quelques propriétés de cet espace

- Si $\dfrac{n}{p}+\alpha \notin \{1,2,...,m\}$ on a

$$W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{m-1,p}_{\alpha-1,\beta}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{m-2,p}_{\alpha-2,\beta}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow ..... \hookrightarrow W^{0,p}_{\alpha-m,\beta}(\mathbb{R}^n)$$

- Si $\dfrac{n}{p}+\alpha = i \in \{1,2,...,m\}$ on a

$$W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow ... \hookrightarrow W^{m-i+1,p}_{\alpha-i+1,\beta}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{m-i,p}_{\alpha-i,\beta-1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow ..... \hookrightarrow W^{0,p}_{\alpha-m,\beta-1}(\mathbb{R}^n)$$

- $\forall \boldsymbol{u} \in W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ et $\lambda \in \mathbb{N}^n$ avec $|\lambda| \geq 0,\ D^\lambda \boldsymbol{u} \in W^{m-|\lambda|,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$
- L'espace $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.
- Pour $\alpha,\ \beta$ et δ dans $\mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$ l'application

$$\begin{array}{ccc} W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & W^{m,p}_{\alpha,\beta-\delta}(\mathbb{R}^n) \\ u & \longrightarrow & (lg|x|)^\delta u \end{array}$$

  est un isomorphisme.
- Si $\dfrac{n}{p}+\alpha \notin \{1,...,m\}$, pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{n}{p}+\alpha-\gamma \notin \{1,...,m\}$ l'application

$$\begin{array}{ccc} W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & W^{m,p}_{\alpha-\gamma,\beta}(\mathbb{R}^n) \\ u & \longrightarrow & \langle x \rangle^\gamma u \end{array}$$

  est un isomorphisme.

L'espace dual de $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ est un espace de distributions noté par

$$W^{-m,p'}_{-\alpha,-\beta}(\mathbb{R}^n) = (W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n))',\ \text{où}\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

Soit maintenant q un nombre défini comme suit

$$q = \begin{cases} m-\left(\frac{n}{p}+\alpha\right)-1, & \text{si} \begin{cases} \frac{n}{p}+\alpha \in \{1,...,m\} \ \text{et}\ (\beta-1)p \geq -1 \\ \text{ou} \\ \frac{n}{p}+\alpha \in \{i \in \mathbb{Z},\ i \leq 0\} \ \text{et}\ \beta p \geq -1 \end{cases} \\ \left[m-\left(\frac{n}{p}+\alpha\right)\right], & \text{sinon} \end{cases}$$

$\mathscr{P}_q$ est l'ensemble de touts Les polynômes appartenant à $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$.

On définit la semi norme de $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$

$$|u|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} = (\sum_{|\lambda|=m} \|\langle x \rangle^\alpha (lg|x|)^\beta D^\lambda u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)})^{1/p}.$$

Théorème 6. *Soient α et β deux nombres réels et $m \geq 1$ un entier ne satisfaisant pas simultanement*

$$\frac{n}{p} + \alpha \in \{1, ..., m\} \quad et \quad (\beta - 1)p = -1.$$

Soit $q' = inf(q, m-1)$. Alors ; il existe une constante C tel que

$$\forall u \in W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{P}'_q, \; [u]_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{P}'_q} \leq C|u|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)}.$$

2.3 Le système linéaire associé

Dans [4], les auteurs ont traité le système de Navier-Stokes linéarisé en dimensions 2 et 3 respectivement :

$$\begin{aligned} -\nu\Delta \boldsymbol{u} - (\omega \times x).\nabla \boldsymbol{u} + \omega \times \boldsymbol{u} + \nabla p &= \boldsymbol{f} \text{ dans } \mathbb{R}^n, \\ \mathrm{div}\boldsymbol{u} &= 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{2.6}$$

où $n = 2$ ou $n = 3$. Quand $n = 2$, le produit $\omega \times \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, doit être considéré au sens suivant

$$\omega \times \boldsymbol{a} = |\omega|(-a_2, a_1)^T.$$

Il s'agit de trouver des solutions vérifiant des conditions de la forme

$$\langle x \rangle^{k-2}\boldsymbol{u} \in L^q(\mathbb{R}^n)^n, \; \langle x \rangle^{k-1}\nabla \boldsymbol{u} \in L^q(\mathbb{R}^n)^{n^2},$$

$$\langle x \rangle^{k}\nabla^2 \boldsymbol{u} \in L^q(\mathbb{R}^n)^{n^3}, \langle x \rangle^{k-1}p \in L^q(\mathbb{R}^n),$$

où k est un entier prenant quelques valeurs. Les deux auteurs étudient au même moment l'équation vectorielle sans pression

$$-\Delta \boldsymbol{v} - (\omega \times x).\nabla \boldsymbol{v} + \omega \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{f} \text{ dans } \mathbb{R}^n, \tag{2.7}$$

et l'équation scalaire

$$\Delta\phi + (\omega \times x).\nabla\phi = h \text{ dans } \mathbb{R}^n. \tag{2.8}$$

Ces deux équations sont en effet directement liées au système (2.6).

Avant d'énoncer les résultats principaux obtenus dans [4] concernant le système linéaire (2.6), rappelons quelques définitions et propriétés des opérateurs intervenant dans les deux systèmes (2.1) et (2.6).

Considérons les opérateurs définis formellement par

$$D_\theta\phi = (\widehat{\omega} \times x).\nabla\phi, \ \mathscr{L}_\pm = \Delta \pm |\omega| D_\theta,$$

pour tout fonction scalaire ϕ. Ici $\widehat{\omega} = \frac{\omega}{|\omega|}$. On peut aussi écrire

$$D_\theta\phi = \partial_\theta\phi,$$

où (r,θ) (resp. (r,θ,x_3)) désignent les coordonnées polaires (resp. cylindriques) en dimension 2 (resp. 3).
Notons aussi

$$\vec{\mathscr{R}}\boldsymbol{v} = -\widehat{\omega} \times \boldsymbol{v} + (\widehat{\omega} \times x).\nabla\boldsymbol{v}, \ \vec{\mathscr{L}_\pm} = \Delta \pm |\omega|\vec{\mathscr{R}},$$

pour tout champ de vecteur $\boldsymbol{v}$, on définit l'espace à poids pour $m, k \in \mathbb{Z}$ et $1 \leq q \leq \infty$ par

$$V_k^{m,q}(\mathbb{R}^3) = \{\boldsymbol{v} \in W_k^{m,q}(\mathbb{R}^3)^3 \mid \mathscr{R}\boldsymbol{v} \in W_k^{m-2,q}(\mathbb{R}^3)^3\},$$

cet espace est muni de la norme

$$\|\boldsymbol{v}\|_{V_k^{m,q}(\mathbb{R}^3)} = \left\{\|\boldsymbol{v}\|^q_{W_k^{m,q}(\mathbb{R}^3)^3} + \|\mathscr{R}v\|^q_{W_k^{m-2,q}(\mathbb{R}^3)^3}\right\}^{1/q}.$$

.
On a quand $n = 3$

$$\vec{\mathscr{R}}v = O(\theta)D_\theta(O(\theta)^t v) \text{ avec } O(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Quand $n = 3$, on a les identités

$$\mathrm{curl}\,[(\widehat{\omega} \times x) \times v] = -(\widehat{\omega} \times x).\nabla v + \widehat{\omega} \times v + (\mathrm{div} v)(\widehat{\omega} \times x) \tag{2.10}$$

$$\mathrm{div}(\vec{\mathscr{R}}v) = D_\theta(\mathrm{div} v), \ (\vec{\mathscr{R}}v).\widehat{\omega} = D_\theta(v.\widehat{\omega}) \tag{2.11}$$

Si ϕ est une fonction scalaire, alors

$$\vec{\mathscr{R}}\nabla\phi = \nabla[D_\theta\phi], \ \vec{\mathscr{R}}(\phi v) = \phi\vec{\mathscr{R}}v + (D_\theta\phi)v. \tag{2.12}$$

$$\mathrm{div}(\vec{\mathscr{L}_\pm}v) = \mathscr{L}_\pm \mathrm{div} v, \ \nabla(\mathscr{L}_\pm\phi) = \vec{\mathscr{L}_\pm}\nabla\phi, \ \vec{\mathscr{L}_\pm}(\phi\omega) = (\mathscr{L}_\pm\phi)\omega. \tag{2.13}$$

On a aussi les propriétés de commutativité :

$$[\Delta, D_\theta] = 0,\ [\mathscr{F}, D_\theta] = 0,\ [\Delta, \vec{\mathscr{R}}] = 0,\ [\mathscr{F}, \vec{\mathscr{R}}] = 0,\ [\mathrm{curl}\,, \vec{\mathscr{R}}] = 0. \tag{2.14}$$

où $\mathscr{F}$ désigne la transformation de Fourier.

Bien évidemment, l'étude des équations linéaires (2.6), (2.7) ou (2.8) nécessite l'étude des solutions des systèmes homogènes associés. Nous n'allons pas exposer ici la charactérisation obtenue de ces solutions, car nous n'avons besoin que d'un cas particulier du résultat général obtenu dans [4]. On renvoie donc à cette même référence pour la version la plus complète. Voici le résultat partiel concernant le système (2.6) dont on aura besoin par la suite

Proposition 1. *Soit $p > 1$ un réel tel que $p \notin \{\frac{3}{2}, 3\}$ et ℓ un entier satisfait*

$$1 - \frac{3}{p} < \ell < \frac{3}{p'}.$$

Soit $\boldsymbol{h} \in W_\ell^{-1,p}(\mathbb{R}^3)^3$ telle que

$$\langle h_i, 1\rangle = 0 \text{ pour } 1 \le i \le 3, \tag{2.15}$$

Alors, le systéme

$$\begin{aligned} -\Delta \boldsymbol{v} + \mathscr{R}\boldsymbol{v} + \nabla r &= \boldsymbol{h} \text{ dans } \mathbb{R}^3, \\ \mathrm{div}\boldsymbol{v} &= 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3, \end{aligned} \tag{2.16}$$

a une solution unique

$$(\boldsymbol{v}, r) \in V_\ell^{1,p}(\mathbb{R}^3) \times W_\ell^{0,p}(\mathbb{R}^3)$$

et

$$\|\boldsymbol{v}\|_{W_\ell^{1,p}(\mathbb{R}^3)^3} + \|\mathscr{R}\boldsymbol{v}\|_{W_\ell^{-1,p}(\mathbb{R}^3)^3} + \|r\|_{W_\ell^{0,p}(\mathbb{R}^3)} \lesssim \|\boldsymbol{h}\|_{W_\ell^{-1,p}(\mathbb{R}^3)^3}. \tag{2.17}$$

De plus, si

$$\boldsymbol{h} \in W_{\ell+1}^{0,p}(\mathbb{R}^3)^3,$$

alors

$$(\boldsymbol{v}, r) \in V_{\ell+1}^{2,p}(\mathbb{R}^3) \times W_{\ell+1}^{1,p}(\mathbb{R}^3).$$

2.4 Existence, unicité et régularité. Résultat principal

On s'intéresse désormais à la question d'existence de solution au probléme non linéaire stationnaire (2.1). Par un changement d'échelle, on peut se ramener au système normalisé

$$\begin{array}{rcl} -\Delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}.\nabla \boldsymbol{u} - (\widehat{\omega} \times x)\, \nabla \boldsymbol{u} + \widehat{\omega} \times \boldsymbol{u} + \nabla \pi & = & \boldsymbol{f}(x), \quad \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} & = & 0, \end{array} \tag{2.18}$$

où

$$\widehat{\omega} = \frac{\omega}{|\omega|}.$$

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant

Théorème 7. *Soit $p > 3/2$, $p \neq 3$, et on pose $k = [\frac{3}{p'}]$. Alors, il existe deux constantes $\kappa > 0$ et $c > 0$ tels que pour $\boldsymbol{f} \in W_k^{-1,p}(\mathbb{R}^3)^3$ satisfaisant*

$$\forall i \leq 3, \ \langle f_i, 1 \rangle = 0 \tag{2.19}$$

et

$$\|\boldsymbol{f}\|_{W_k^{-1,p}(\mathbb{R}^3)^3} \lesssim \kappa, \tag{2.20}$$

il existe une unique solution faible $(\boldsymbol{u}, \pi) \in V_k^{1,p}(\mathbb{R}^3) \times W_k^{0,p}(\mathbb{R}^3)$ de (2.18) satisfaisant

$$\|\boldsymbol{u}\|_{W_k^{1,p}(\mathbb{R}^3)^3} + \|\mathscr{R}\boldsymbol{u}\|_{W_k^{-1,p}(\mathbb{R}^3)^3} + \|\pi\|_{W_k^{0,p}(\mathbb{R}^3)^3} \leq c\|\boldsymbol{f}\|_{W_k^{-1,p}(\mathbb{R}^3)^3}. \tag{2.21}$$

En outre, si

$$\boldsymbol{f} \in W_{k+1}^{0,p}(\mathbb{R}^3)^3,$$

et

$$p > 3,$$

alors

$$(\boldsymbol{u}, \pi) \in V_{k+1}^{2,p}(\mathbb{R}^3) \times W_{k+1}^{1,p}(\mathbb{R}^3).$$

Corollaire 1. *Soit $p > 3$, sous les même hypothèses du théorème 7, la solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$ satisfait la proriété asymptotique suivante*

$$\begin{array}{l} \lim\limits_{|x| \to +\infty} |x|^{2-\epsilon} \|\boldsymbol{u}(|x|, .)\|_{L^p(\mathbb{S}^2)} = 0, \\ \lim\limits_{|x| \to +\infty} |x|^{3-\epsilon} \|\pi(|x|, .)\|_{L^p(\mathbb{S}^2)} = 0, \end{array} \tag{2.22}$$

où $\mathbb{S}^2$ désigne la sphére unité de $\mathbb{R}^3$ et $\epsilon = [\frac{k}{p'}] - \frac{k}{p}$ $(0 < \epsilon < 1)$.

Démonstration. Les propriétés asymptotiques (2.22) peuvent être obtenues facilement à partir de l'inégalité suivante, il existe une constante $c > 0$ telle que pour toute $u \in W_\alpha^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ et $R > 0$,

$$|x|^{(\alpha-1)p+3} \int_{S^2} |u(|x|,.)|^p d\sigma \leq c \int_{|x|>R} \langle x \rangle^{\alpha p} |\nabla u|^p dx.$$

□

La démonstration du théorérme 7 nécessite quelques étapes. La première étape consiste en quelques résultats concernant les espaces de Sobolev à poids.

2.4.1 Quelques résultats préliminaires

L'objectif de cette section est de prouver, pour une utilisation ultérieure, des résultats sur les espaces de Sobolev à poids.
Nous supposons tout au long de la section que la dimension $n \geq 1$ est arbitraire et n'est pas nécessairement égal à 3.

Lemme 6. *Soient $r > 1$ et $s > 1$, α et β des réels. soient $u \in W_\alpha^{0,r}(\mathbb{R}^n)$ et $v \in W_\beta^{0,s}(\mathbb{R}^n)$. Alors, $uv \in W_{\alpha+\beta}^{0,p}(\mathbb{R}^n)$ avec*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{s} + \frac{1}{r}.$$

Démonstration. Soit $u \in W_\alpha^{0,r}(\mathbb{R}^n)$ et $v \in W_\alpha^{0,s}(\mathbb{R}^n)$, en utilisant l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x \rangle^{\alpha+\beta} uv|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |\langle x \rangle^{\alpha p} u^p||\langle x \rangle^{\beta p} v^p| dx \\ &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x \rangle^{\alpha} u|^r\right]^{\frac{p}{r}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x \rangle^{\beta} v|^s\right]^{\frac{p}{s}},\end{aligned}$$

d'où $uv \in W_{\alpha+\beta}^{0,p}(\mathbb{R}^n)$. □

Dans la suite si $1 < p < n$, on note par $p^\star$ un réel tel que

$$\frac{1}{p^\star} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.$$

Lemme 7. *Soit $1 < p < \infty$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors ;*
- *Si $p < n$, $W_\alpha^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_\alpha^{0,p^\star}(\mathbb{R}^n)$,*
- *Si $p > n$, $W_\alpha^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_{\alpha+n/p-1}^{0,\infty}(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. – Supposons que $p < n$. On rappelle L'inégalité de Sobolev, il existe une constante telle que

$$\|\phi\|_{L^{p^\star}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|\nabla\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \ \forall\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n). \tag{2.23}$$

Par densité de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, cette inégalité reste valable pour $\phi \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Soit $u \in W_\alpha^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ et posons $v = \langle x\rangle^\alpha u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. L'inégalité (2.23) appliqué à v donne

$$\|\langle x\rangle^\alpha u\|_{L^{p^\star}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|\nabla(\langle x\rangle^\alpha u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u\|_{W_\alpha^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

d'où $u \in W_\alpha^{0,p^\star}(\mathbb{R}^n)$.

– Maintenant, supposons que $p > n$. On a les injections suivantes

$$W_\alpha^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_{loc}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_{loc}^0(\mathbb{R}^n). \tag{2.24}$$

L'inégalité de Morrey dit que pour tout $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq Cr^{1-n/p}\|\nabla\varphi\|_{L^p(B(x,2r)},$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ telle que $|x - y| = r \geq 0$, où

$$B(x, 2r) = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \mid |x - \boldsymbol{z}| = 2r\}$$

et C est une constante ne dépendant que de p et n et d'après (2.24) l'inégalité reste valable lorsque $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.
Soit χ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ satisfaisant

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases}$$

Considérons une fonction $v \in W_\alpha^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. On peut écrire $v = v_1 + v_2$ avec $v_1 = \chi v$ et $v_2 = (1 - \chi)v$.
L'inégalité de Morrey appliquée à $\langle x\rangle^\alpha v_2 \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, avec $y = 0$, donne

$$\begin{aligned} |\langle x\rangle^\alpha v_2(x)| &\leq C_1|x|^{1-n/p}\|\nabla(\langle x\rangle^\alpha v_2)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C_2|x|^{1-n/p}\|v_2\|_{W_\alpha^{1,p}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

On déduit que

$$|\langle x\rangle^{\alpha-1+n/p} v_2(x)| \leq C_2\|v_2\|_{W_\alpha^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \tag{2.25}$$

où C_1, C_2 sont des constantes ne dépendant que de q et n.

D'autre part, on a toujours d'après (2.24)

$$|v_1(x)| \leq C\|v_1\|_{W^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)}$$

et puisque $v_1(x) = 0$ pour x tel que $|x| \geq 2$; alors

$$|\langle x\rangle^{\alpha-1+n/p} v_1(x)| \leq C\|v_1\|_{W^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.26}$$

$$(|v_1(x)| \leq C_3\|v_1\|_{W^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)}, \text{ pour } |x| \leq 2).$$

De (2.25) et (2.26) on a

$$|\langle x\rangle^{\alpha-1+n/p} v(x)| \leq C\|v\|_{W^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)}.$$

□

Corollaire 2. *Soit $p > 1$ et $q > 1$ tel que*

$$0 \leq \frac{n}{q} - \frac{n}{p} + 1 < \alpha - \beta. \tag{2.27}$$

Alors ; $W^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{0,q}_\beta(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Trois cas sont distingués

– Cas 1 : Si $p > n$. D'après le lemme 7 on a

$$W^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{0,\infty}_{\alpha+n/p-1}(\mathbb{R}^n).$$

Supposons que $u \in W^{0,\infty}_{\alpha+n/p-1}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x\rangle^{\beta q} u^q| dx\right)^{1/q} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x\rangle^{(\alpha+n/p-1)q} u^q \langle x\rangle^{\beta q-(\alpha+n/p-1)q} dx\right)^{1/q} \\ &\leq |\langle x\rangle^{(\alpha+n/p-1)} u| \left(\int_{\mathbb{R}^n} \langle x\rangle^{\beta q-(\alpha+n/p-1)q} dx\right)^{1/q}\end{aligned}$$

et de la condition (2.27) , on déduit que

$$-n/q - \beta + (\alpha + n/p - 1) > 0,$$

d'où

$$W^{0,\infty}_{\alpha+n/p-1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{0,q}_\beta(\mathbb{R}^n)$$

résulte que

$$W^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{0,q}_\beta(\mathbb{R}^n)$$

– Cas 2 : Si $p < n$. D'après le Lemme 7 on a

$$W_\alpha^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_\alpha^{0,p^\star}(\mathbb{R}^n). \tag{2.28}$$

Soit $u \in W_\alpha^{0,p^\star}(\mathbb{R}^n)$, en utilisant l'inégalité de Holder pour $p_1 = \dfrac{p^\star}{q}$ et $p_1' = \dfrac{p^\star}{(p^\star - q)}$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x\rangle^{\beta q} u^q| dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |\langle x\rangle^{\alpha q} u^q \langle x\rangle^{\beta q - \alpha q}| dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x\rangle^{\alpha q} u^q|^{\frac{p^\star}{q}} dx\right)^{q/p^\star} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \langle x\rangle^{(\beta q - \alpha q)(p^\star/(p^\star - q))}\right)^{(p^\star - q)/p^\star},\end{aligned}$$

d'aprés (2.27)

$$-\frac{n(p* - q)}{p*} - (\beta q - \alpha q) > 0$$

d'où

$$0 \leq \frac{n}{q} - \frac{n}{p^\star} < \alpha - \beta.$$

On déduit que $q \leq p^\star$ et donc

$$W_\alpha^{0,p^\star}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_\beta^{0,q}(\mathbb{R}^n), \tag{2.29}$$

de (2.28) et (2.29) on a

$$W_\alpha^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_\beta^{0,q}(\mathbb{R}^n).$$

– Cas 3 : $p = n$. On pose $p_\epsilon = p - \epsilon$ et

$$\alpha_\epsilon = \alpha + \frac{n}{p} - \frac{n}{p_\epsilon} - \epsilon,$$

avec $\epsilon > 0$ suffisament petit de sorte que

$$p_\epsilon > 1 \text{ et } \frac{n}{q} + 1 > \frac{n}{p_\epsilon} > \frac{n}{p} = 1.$$

Avec $\epsilon > 0$ suffisament petit encore, on aura

$$\beta + \frac{n}{q} + 1 < \alpha_\epsilon + \frac{n}{p_\epsilon} < \alpha + \frac{n}{p}.$$

Ainsi,

$$W_\alpha^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_{\alpha_\epsilon}^{1,p_\epsilon}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_\beta^{0,q}(\mathbb{R}^n). \tag{2.30}$$

$\square$

Corollaire 3. *Soient α, β, $s > 1$ et $q > 1$ quatre réels et $m \geq 1$ un entier. On suppose que*

$$\alpha - \beta > \frac{n}{q} - \frac{n}{s} + m > 0. \tag{2.31}$$

Alors, l'injection suivante est vraie

$$W^{m,s}_{\alpha}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{0,q}_{\beta}(\mathbb{R}^n). \tag{2.32}$$

Démonstration. On considère les suites finies $(\theta_j)_{0\leq j\leq m}$, $(s_j)_{0\leq j\leq m}$ et $(\alpha_j)_{0\leq j\leq m}$ définies par

$$\theta_j = \frac{n}{q} + j(1-\epsilon_1),\ s_j = \frac{n}{\theta_j},\ \alpha_j = \beta + j\epsilon_2, \quad \text{pour } 0 \leq j \leq m.$$

avec

$$\epsilon_1 = \frac{1}{m}\left(\frac{n}{q} - \frac{n}{s} + m\right) > 0,\ \epsilon_2 = \frac{\alpha - \beta}{m} > 0.$$

On a $\theta_m = n/s$, $\alpha_m = \alpha$, $\epsilon_2 > \epsilon_1 > 0$, grâce à la condition (2.31), et pour tout $1 \leq j \leq m$ $s_j \neq n$, et

$$0 < \frac{n}{s_{j-1}} - \frac{n}{s_j} + 1 = \theta_{j-1} - \theta_j + 1 = \epsilon_1 < \alpha_j - \alpha_{j-1} = \epsilon_2.$$

On a aussi $1 < s_0 = q < ... < s_m = s$ ou $1 < s_m = s < ... < s_q = s$. D'où $W^{j,s_j}_{\alpha_j}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{j-1,s_{j-1}}_{\alpha_{j-1}}(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leq j \leq m$. $\square$

Lemme 8. *Supposons $1 < p < +\infty$ et $p \neq n$ et considérons deux éléments v et z de $W^{1,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$.*

- *Si $p > n$ et $\theta \leq 2\alpha + n/p - 1$. Alors,*

$$v.\nabla z \in W^{0,p}_{\theta}(\mathbb{R}^n).$$

  En particulier

$$v.\nabla z \in W^{0,p}_{\alpha+1}(\mathbb{R}^n)\ (\hookrightarrow W^{-1,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n))\ \textit{si } \alpha > 2 - n/p$$

  .

- *Si $n/2 < p < n$ et $\alpha > 2 - n/p$, alors*

$$\boldsymbol{v}.\nabla z \in W^{-1,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n).$$

Dans les deux cas, on a

$$\|v.\nabla z\|_{W^{-1,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|v\|_{W^{1,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)} \|z\|_{W^{1,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.33}$$

Démonstration. – Supposons $p > n$. Si $v \in W^{1,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ Alors, $v \in W^{0,\infty}_{\alpha+n/p-1}(\mathbb{R}^n)$, grâce à lemme 7.

Ainsi, avec $\lambda = \alpha + n/p - 1$, on a

$$\|\langle x\rangle^{\lambda} v\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < c,$$

d'autre part si $z \in W^{1,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ alors, $\nabla z \in W^{0,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)^n$ ce qui implique que $\nabla z \in W^{0,p}_{\theta-\lambda}(\mathbb{R}^n)^n$ ($\theta < 2\alpha + \frac{n}{p} - 1 < \alpha + \lambda \Rightarrow \theta - \lambda < \alpha$) d'où

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x\rangle^{\theta p} |v.\nabla z|^p dx \leq \|\langle x\rangle^{\lambda} v\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} \langle x\rangle^{(\theta-\lambda)p} |\nabla z|^p.$$

– Supposons maintenant que $n/2 < p < n$ et $\alpha > 2 - n/p$. d'après le lemme 7 on a $\boldsymbol{v} \in W^{0,p^\star}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$. En utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x\rangle^{2\alpha} v.\nabla z|^s dx \leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x\rangle^{\alpha} v|^{p^\star} dx\right]^{\frac{s}{p^\star}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x\rangle^{\alpha} \nabla z|^p dx\right]^{\frac{s}{p}}$$

résulte que $v.\nabla z \in W^{0,s}_{2\alpha}(\mathbb{R}^n)$ où

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^\star} = \frac{2}{p} - \frac{1}{n}.$$

D'autre part, $W^{1,p'}_{-\alpha}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{0,s'}_{-2\alpha}(\mathbb{R}^n)$, grâce au Corolaire 2. et par dualité $W^{0,s}_{2\alpha}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{-1,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ d'où

$$v.\nabla z \in W^{-1,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n).$$

□

2.4.2 Démonstration du résultat principal

La démonstration sera réalisée au moyen du théorème du point fixe.

– *Existence et unicité.* Considérons les espaces suivants

$$\begin{aligned} V &= \{\boldsymbol{h} \in W^{-1,p}_{k}(\mathbb{R}^3)^3 \mid \langle h_i, 1\rangle = 0 \ \text{ pour } 1 \leq i \leq 3, \}, \\ H &= \{\boldsymbol{v} \in W^{1,p}_{k}(\mathbb{R}^3)^3 \mid \mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0\}. \end{aligned}$$

La proposition 1, nous permet de définir l'opérateur linéaire T comme suit

$$\begin{aligned} T \ : \ V &\to H, \\ \boldsymbol{h} &\mapsto U \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{h}$ est la fonction du second membre de l'équation linéarisée et $\boldsymbol{u}$ est la solution de cette équation associée à $\boldsymbol{h}$.
On déduit de la proposition 1 que l'opérateur T vérifie l'inégalité suivante

$$\forall \boldsymbol{h} \in V,\ \|T(\boldsymbol{h})\|_{W_k^{1,p}(\mathbb{R}^3)^3} \leq c_1 \|\boldsymbol{h}\|_{W_k^{-1,p}(\mathbb{R}^3)^3}. \tag{2.34}$$

Maintenant soit l'application $K\ :\ H \to H$ definie comme suit

$$\forall \boldsymbol{v} \in H,\ K\boldsymbol{v} = T(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{v}.\nabla \boldsymbol{v}).$$

L'application K est bien définie en effet,
on a $k = [\frac{3}{p'}]$ donc

$$k > \frac{3}{p'} - 1 \Rightarrow k > 3(1 - \frac{1}{p}) - 1 = 2 - \frac{3}{p}$$

alors ; d'après le lemme 8 $\boldsymbol{v}.\nabla \boldsymbol{v} \in W_k^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ et

$$\forall \boldsymbol{v} \in H,\ \|\boldsymbol{v}.\nabla \boldsymbol{z}\|_{W_k^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} \leq c_2 \|\boldsymbol{v}\|_{W_k^{1,p}(\mathbb{R}^3)}.\|\boldsymbol{z}\|_{W_k^{1,p}(\mathbb{R}^3)}, \tag{2.35}$$

et en particulier

$$\forall \boldsymbol{v} \in H,\ \|\boldsymbol{v}.\nabla \boldsymbol{v}\|_{W_k^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} \leq c_2 \|\boldsymbol{v}\|^2_{W_k^{1,p}(\mathbb{R}^3)}, \tag{2.36}$$

en outre, par l'inégalité de Green

$$\int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{v}.\nabla z_i dx = -\int_{\mathbb{R}^n} (\mathrm{div}\boldsymbol{v}) z_i dx = 0.$$

En d'autre termes , $\boldsymbol{v}.\nabla \boldsymbol{z} \in V$ pour $\boldsymbol{v} \in H$ et $\boldsymbol{z} \in H$, en particulier $\boldsymbol{v}.\nabla \boldsymbol{v} \in V$.

Le problème (2.18) consiste à trouver un point fixe de l'opérateur K.

Lemme 9. *L'estimation suivante est vraie pour tout $v,\ w \in H$*

$$\begin{aligned} \|K(\boldsymbol{v})\|_{W_k^{1,p}(\mathbb{R}^n)^3} &\leq c_1 \{\|f\|_{W_k^{-1,p}(\mathbb{R}^n)^3} + c_2 \|\boldsymbol{v}\|^2_{W_k^{1,p}(\mathbb{R}^n)^3}\} \\ \|K(\boldsymbol{v}) - K(\boldsymbol{w})\|_{W_k^{1,p}(\mathbb{R}^3)^3} &\leq c_1 c_2 (\|\boldsymbol{v}\|_{W_k^{1,p}(\mathbb{R}^3)^3} + \|\boldsymbol{w}\|_{W_k^{1,p}(\mathbb{R}^3)^3}) \|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}\|_{W_k^{1,p}(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

où $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ sont des constantes dans (2.34) et (2.35).

Démonstration. Soient $\boldsymbol{u}_1 = K(\boldsymbol{v}),\ \boldsymbol{u}_2 = K(\boldsymbol{w})$, et π_1, π_2 les pressions correspondant. La paire $(\boldsymbol{z}, e) = (\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1, \pi_2 - \pi_1) \in H \times W_k^{0,p}(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant

$$-\Delta \boldsymbol{z} - (\hat{\omega} \times x).\nabla \boldsymbol{z} + \hat{\omega} \times \boldsymbol{z} + \nabla e = \boldsymbol{v}\nabla \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\nabla \boldsymbol{w}. \tag{2.37}$$

Ainsi,
$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{z}\|_{W^{1,p}_k(\mathbb{R}^3)} &\leq c_1\|\boldsymbol{w}.\nabla \boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}.\nabla \boldsymbol{v}\|_{W^{-1,p}_k(\mathbb{R}^3)^3}\\ &\leq 2c_1\|\boldsymbol{\varphi}.\nabla\theta+\theta.\nabla\boldsymbol{\varphi}\|_{W^{-1,p}_k(\mathbb{R}^3)^3}\end{aligned}$$
où nous avons mis
$$\boldsymbol{\varphi}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}),\ \theta=\frac{1}{2}(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}),$$
il s'ensuit que
$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{z}\|_{W^{1,p}_k(\mathbb{R}^3)^3} &\leq 2c_1\{\|\boldsymbol{\varphi}.\nabla\theta\|_{W^{-1,p}_k(\mathbb{R}^3)^3}+\|\theta.\nabla\boldsymbol{\varphi}\|_{W^{-1,p}_k(\mathbb{R}^3)^3}\}\\ &\leq 4c_1c_2\|\boldsymbol{\varphi}\|_{W^{1,p}_k(\mathbb{R}^3)^3}\|\theta\|_{W^{1,p}_k(\mathbb{R}^3)^3}.\end{aligned}$$
□

Supposons ensuite
$$\|\boldsymbol{f}\|_{W^{-1,p}_k(\mathbb{R}^n)^3}<\frac{1}{4c_1^2c_2},$$
et considérons l'ensemble
$$\mathscr{B}=\{\boldsymbol{v}\in H\mid \|\boldsymbol{v}\|_{W^{1,p}_k(\mathbb{R}^3)^3}\leq\rho\},$$
où
$$\rho=2c_1\|\boldsymbol{f}\|_{W^{-1,p}_k(\mathbb{R}^3)}.$$
Alors, pour tout $\boldsymbol{v}\in\mathscr{B}$
$$\begin{aligned}\|K\boldsymbol{v}\|_{W^{1,p}_k(\mathbb{R}^3)^3} &\leq c_1\|\boldsymbol{f}\|_{W^{-1,p}_k(\mathbb{R}^3)^3}+c_1c_2\rho^2\\ &\leq c_1\|\boldsymbol{f}\|_{W^{-1,p}_k(\mathbb{R}^3)^3}(1+4c_1^2c_2\|\boldsymbol{f}\|_{W^{-1,p}_k(\mathbb{R}^3)^3})\\ &\leq \rho.\end{aligned}$$
En outre, pour tout $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}\in\mathscr{B}$
$$\|K(\boldsymbol{v})-K(\boldsymbol{w})\|_{W^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^3)^3}\leq 2c_1c_2\rho\|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}\|_{W^{1,p}_k(\mathbb{R}^n)^3}.$$
Il s'ensuit que K est contractante depuis
$$2c_1c_2\rho=4c_1^2c_2\|\boldsymbol{f}\|_{W^{-1,p}_k(\mathbb{R}^3)^3}<1.$$
On applique le théorème du point fixe de Banach, on en deduit qu'il existe un unique couple $(U,\Pi)\in H\times W^{0,p}_k(\mathbb{R}^3)$ solution de (2.18) et satisfaisant l'estimation
$$\|U\|_{W^{1,p}_k(\mathbb{R}^3)^3}\leq 2c_1\|\boldsymbol{f}\|_{W^{-1,p}_k(\mathbb{R}^3)},\ \|\Pi\|_{W^{0,p}_k(\mathbb{R}^3)^3}\leq c_3\|\boldsymbol{f}\|_{W^{-1,p}_k(\mathbb{R}^3)}.$$

– *Régularité*. Concernant la régularité. Soit

$$\boldsymbol{f} \in W^{0,p}_{k+1}(\mathbb{R}^3)^3.$$

D'après le lemme 8, si $p > 3$ alors

$$\boldsymbol{u}.\nabla \boldsymbol{u} \in W^{0,p}_{k+1}(\mathbb{R}^3)^3.$$

D'où

$$\boldsymbol{f} - \boldsymbol{u}.\nabla \boldsymbol{u} \in W^{0,p}_{k+1}(\mathbb{R}^3)^3.$$

et d'après la proposition 1

$$\boldsymbol{u} = T(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{u}.\nabla \boldsymbol{u}) \in W^{2,p}_{k+1}(\mathbb{R}^3)^3.$$

Chapitre 3

Approximation rationnelle d'un problème elliptique dans tout l'espace

Article *en cours de préparation. En collaboration avec N. Arar* .

Chapitre 3

Aproximation rationnelle d'un problème elliptique dans tout l'espace

Le but de ce chapitre est de présenter une méthode spectrale pour résoudre des équations elliptiques en domaines non bornés. La méthode repose sur l'utilisation d'une famille de fonctions rationnelles. Le choix d'une base appropriée est facilité par l'emploi de fonctions découvertes par Arar et Boulmezaoud dans un article récent.

3.1 Introduction. Problème type.

Les méthodes spectrales, basées sur l'utilisation des fonctions rationnelles pour l'aproximation des fonctions, sont de plus en plus utilisées pour la résolution des équations aux dérivées partielles dans les espaces non bornés.

Le principal avantage des fonctions rationnelles est la possibilité de prendre en compte la décroissances des fonctions à des grandes distances et cela de façon meilleure que les polynômes, qui croissent eux à l'infini.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la résolution des équations elliptiques de la forme

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x) \text{ dans } \mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

Sous certaines hypothèses sur les coefficients nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution faible dans un espace de soblev à poids. Nous approchons ensuite le problème variationnel par un problème discret dans un sous espace de dimension finie. Cet espace de dimension finie est composé de fonctions rationnelles bien choisies. On utilisera comme base des fonctions propres d'un laplacien pondéré. Nous calculons ensuite les coefficients de la matrice de rigidité associés aux problème approché pour $b = 0,\ c = 0$ en s'appuyant sur la projection stéreographique, qui transforme l'espace tout entier $\mathbb{R}^n$ en la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Nous allons présenter le cadre fonctionnel.

Dans la suite, étant donné une fonction arbitraire mesurable et positive ρ, $L^\infty_\rho(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des fonctions mesurables $\boldsymbol{v}$ satisfaisant $\rho v \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, cet espace est muni de la norme

$$\|v\|_{L^\infty_\rho(\mathbb{R}^n)} = \|\rho v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Considérons la fonction poids

$$w(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^2+1} & \text{si} \quad n \neq 2, \\ \dfrac{1}{(|x|^2+1)(\log(2+|x|^2))^2} & \text{si} \quad n = 2, \end{cases}$$

où $|x| = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$.
On définit l'espace $W^1_w(\mathbb{R}^n)$ composé de toutes les distributions v satisfaisant

$$\int_{\mathbb{R}^n} w(x)|v|^2 dx < \infty, \ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx < \infty,$$

et muni de la norme

$$\|v\|^2_{W^1_w(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} w(x)|v|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \boldsymbol{v}|^2 dx.$$

On remarque que $W^1_w(\mathbb{R}^n)$ contient des fonctions constantes si et seulement si $n \leq 2$.
En effet, si $n = 1$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{c}{1+x^2} dx &= c[\arctan x]^{+\infty}_{-\infty} \\ &= c\pi \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Si $n = 2$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \frac{c}{(|x|^2+2)(\log(2+|x|^2))^2}dx &= \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} \frac{c}{(r^2+2)(\log(2+r^2))^2} r dr d\theta \\
&= \pi[\frac{-1}{\log(r^2+1}))]_0^{+\infty} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

ainsi, par le théorème de comparaison des intégrales impropres on conclut que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{c}{(|x|^2+1)(\log(2+|x|^2))^2}dx < \infty.$$

On note $W_w^{-1}(\mathbb{R}^n)$ le dual de $W_w^1(\mathbb{R}^n)$.

Lorsque $n \geq 3$ la semi norme

$$|v|_{W_w^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \boldsymbol{v}|^2 dx$$

est une norme sur $W_w^1(\mathbb{R}^n)$, c'est à dire qu'il existe une constante $\pi_0 > 0$ telle que

$$\forall v \in W_w^1(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} w(x)|\boldsymbol{v}(x)|^2 dx \leq \pi_0 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \boldsymbol{v}|^2 dx. \tag{3.2}$$

Lorsque $n \in \{1, 2\}$, l'inégalité (3.2) n'est plus valable parce que les constantes appartiennent à $W_w^1(\mathbb{R}^n)$. Plus précisément, si $n \in \{1, 2\}$, il existe une constante encore notée π_0, $\pi_0 > 0$, telle que

$$v \in W_w^1(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} w(x)|\boldsymbol{v}(x)|^2 dx \leq \pi_0 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \boldsymbol{v}|^2 dx + \frac{1}{\overline{w}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} w(x)v(x)dx \right)^2.$$

En effet, quand $n = 1$, par exemple, si on considère $v \in W_w^1(\mathbb{R})$ et on pose $y(x) = v(x) - v(0)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} w(x)|y(x)|^2 dx \leq \pi_0 \int_{\mathbb{R}} |\nabla y|^2. \tag{3.3}$$

On remarque que $\nabla y = \nabla v$, donc d'après (3.3)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |\nabla \boldsymbol{v}|^2 &\geq \pi_0^{-1} \int_{\mathbb{R}} w(x)|v(x) - v(0)|^2 dx \\
&\geq \pi_0^{-1} \inf_{k \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} w(x)|v(x) - k|^2 dx
\end{aligned}$$

Plus généralement, on a l'inégalité suivante en dimensions $n = 1,\ 2$:

$$\forall v \in W^1_w(\mathbb{R}^n),\ \inf_{k\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} w(x)|\boldsymbol{v}(x)-k|^2dx \leq \pi_0 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \boldsymbol{v}|^2dx. \tag{3.4}$$

Regardons maintenant le choix de la meilleure constante dans (3.4). On a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} w(x)(v(x)-k)^2dx &= \int_{\mathbb{R}^n} w(x)(v(x)^2-2kv(x)+k^2)dx \\
&= k^2\int_{\mathbb{R}^n} w(x)dx - 2k\int_{\mathbb{R}^n} w(x)v(x)dx + \int_{\mathbb{R}^n} w(x)v(x)^2dx \\
&= \overline{w}\left(k-\tfrac{1}{\overline{w}}\int_{\mathbb{R}^n} w(x)v(x)dx\right)^2 - \tfrac{1}{\overline{w}}(\int_{\mathbb{R}^n} w(x)v(x)dx)^2 + \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^n} w(x)v(x)^2dx.
\end{aligned}$$

L'infimum

$$\inf_{k\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} w(x)|v(x)-k|^2dx$$

est atteint donc en la valeur moyenne pondérée de v, donnée par

$$k = \frac{1}{\overline{w}}\int_{\mathbb{R}^n} w(x)v(x)dx,\ \text{avec } \overline{w} = \int_{\mathbb{R}^n} w(x)dx$$

c-à-d lorsque $(k - \frac{1}{\overline{w}}\int_{\mathbb{R}} w(x)v(x)dx)^2 = 0)$.
Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \boldsymbol{v}|^2 \geq \pi_0^{-1}\int_{\mathbb{R}^n} w(x)v(x)^2dx - \frac{1}{\overline{w}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} w(x)v(x)dx\right)^2 \tag{3.5}$$

ce qui implique

$$\forall v \in W^1_w(\mathbb{R}^n),\ \int_{\mathbb{R}^n} w(x)|\boldsymbol{v}(x)|^2dx \leq \pi_0\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \boldsymbol{v}|^2dx + \frac{1}{\overline{w}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} w(x)v(x)dx\right)^2. \tag{3.6}$$

3.2 Formulation faible du problème

Le but ici est d'écrire une formulation faible de l'équation (3.1) dans le cadre d'espaces à poids. On s'intéressera ensuite à la bonne position du problème.
Ici et par la suite, nous supposons

($\mathscr{H}_1$) f appartient à $W_w^{-1}(\mathbb{R}^n)$; cette hypothèse est vraie (en particulier) quand
$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^2}{w(x)} dx < +\infty.$$

($\mathscr{H}_2$) $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)^{n\times n}$ et il existe une constante $\alpha > 0$ telle que
$$\forall \xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2, \text{m. p. p dans } \mathbb{R}^n. \quad (3.7)$$

($\mathscr{H}_3$) $\boldsymbol{b} = (b_1, ..., b_n) \in L^\infty_{w^{-1/2}}(\mathbb{R}^n)^n$, $\operatorname{div}\boldsymbol{b} \in L^\infty_{w^{-1}}(\mathbb{R}^n)$ et $c \in L^\infty_{w^{-1}}(\mathbb{R}^n)$, de plus il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que
$$|\boldsymbol{b}(x)|^2 + |\operatorname{div}\boldsymbol{b}(x)| + |c(x)| \leq Cw(x). \text{ m. p. p dans } \mathbb{R}^n. \quad (3.8)$$

($\mathscr{H}_4$) Il existe une constante ϵ telle que
$$\epsilon > -\alpha\pi_0^{-1} \text{ si } n \geq 3,\ \ \epsilon > 0 \text{ si } n \in \{1, 2\}.$$
et
$$c(x) - \frac{1}{2}\operatorname{div}\boldsymbol{b}(x) \geq \epsilon w(x) \text{ m. p. p dans } \mathbb{R}^n. \quad (3.9)$$

Les hypothèse ($\mathscr{H}_3$) et ($\mathscr{H}_4$) sont automatiquement réalisées si $\boldsymbol{b} = 0$ et $c = 0$.

Lemme 10. *Le problème (3.1) et le problème faible suivant : trouver $u \in W_w^1(\mathbb{R}^n)$ telle que*
$$\forall v \in W_w^1(\mathbb{R}^n),\ a(u, v) = \langle f, v\rangle, \quad (3.10)$$
sont équivalents, avec a la forme bilinéaire
$$\begin{aligned} a(u, v) \;\; = \;\; & \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)v(x)dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^n} c(x)u(x)v(x)dx. \end{aligned}$$

Proposition 2. *Supposons que les hypothèses ($\mathscr{H}_1$),($\mathscr{H}_2$), ($\mathscr{H}_3$) et ($\mathscr{H}_4$) vrais, $b \neq 0$, $c \neq 0$ si $n \in \{1, 2\}$. Alors, le probléme (3.10) admet une et une seule solution $u \in W_w^1(\mathbb{R}^n)$ et*
$$\|\boldsymbol{u}\|_{W_w^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{W_w^{-1}(\mathbb{R}^n)} \quad (3.11)$$

Démonstration. Pour montrer l'existance et l'unicité de la solution faible on applique le théorème de Lax-Milgram.

– La continuité de $a(u,v)$

$$
\begin{aligned}
|\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx| &\leq \sum_{i,j=1}^{n}|a_{i,j}|\int_{\mathbb{R}^n}|\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}|dx\\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n}|a_{i,j}|\left(\int_{\mathbb{R}^n}(\frac{\partial u}{\partial x_i})^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^n}(\frac{\partial v}{\partial x_j}dx)^2\right)^{1/2}\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}(\frac{\partial u}{\partial x_i})^2dx\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|^2\right)^{1/2}\\
&\quad\left(\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}(\frac{\partial v}{\partial x_j}dx)^2\right)^{1/2}\\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}(\frac{\partial u}{\partial x_i})^2dx\right)^{1/2}\\
&\quad\left(\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}(\frac{\partial v}{\partial x_j}dx)^2\right)^{1/2}\\
&\leq c\|u\|_{W^1_w(\mathbb{R}^n)}\|v\|_{W^1_w(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}
$$

D'autre part

$$
\begin{aligned}
|\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)v(x)dx| &= |\int_{\mathbb{R}^n} b(x)\nabla u(x)\ v(x)dx|\\
&= |\int_{\mathbb{R}^n}\nabla u\ b(x)v(x)dx|\\
&= |-\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{div}b(x)u(x)v(x)dx-\int_{\mathbb{R}^n}u(x)b(x)\nabla v(x)dx|\\
&= |-\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\mathrm{div}b(x)}{w}(u(x)w^{1/2})(v(x)w^{1/2})dx\\
&\quad -\int_{\mathbb{R}^n}(u(x)w^{1/2})\frac{b(x)}{w^{1/2}}\nabla v(x)dx|\\
&\leq |\frac{\mathrm{div}b(x)}{w}|\|u\|_{W^1_w(\mathbb{R}^n)}\|v\|_{W^1_w(\mathbb{R}^n)}\\
&\quad +|\frac{b(x)}{w^{1/2}}|\|u\|_{W^1_w(\mathbb{R}^n)}\|\nabla v\|_{W^1_w(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}
$$

Finalement

$$\begin{aligned}
|\int_{\mathbb{R}^n} c(x)u(x)v(x)dx| &= |\int_{\mathbb{R}^n} \frac{c(x)}{w}(u(x)w^{1/2})(v(x)w^{1/2})dx| \\
&\leq |\frac{c(x)}{w}|\|u\|_{W^1_w(\mathbb{R}^n)}\|v\|_{W^1_w(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

De ce qui précéde on conclut que

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|_{W^1_w(\mathbb{R}^n)}\|v\|_{W^1_w(\mathbb{R}^n)}$$

– La coércivité, d'après l'hypothèse $(\mathscr{H}_2)$ et l'inégalité de Hardy

$$\begin{aligned}
|\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} a_{i,j}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx &\geq \alpha\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}|\frac{\partial v}{\partial x_i}|^2dx \\
&\geq \alpha\pi_0^{-1}\|v\|_{W^1_w(\mathbb{R}^n)} \quad \text{si} \quad n \geq 3.
\end{aligned}$$

et d'après l'hypothèse $(\mathscr{H}_4)$ on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} b_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)v(x)dx + \int_{\mathbb{R}^n} c(x)(v(x))^2dx &= \sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{2}b_i(x)\frac{\partial(v^2)}{\partial x_j}(x)dx + \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^n} c(x)(v(x))^2dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{div}b(x)v(x)^2dx + \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^n} c(x)(v(x))^2dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\frac{c(x)-\frac{1}{2}\mathrm{div}b(x)}{w}(wv^2(x))dx \\
&\geq \epsilon\|wv\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

si $b \neq 0$ et $c \neq 0$

$$a(v,v) \geq C\|v\|^2_{W^1_w(\mathbb{R}^n)}.$$

et si $b = c = 0$ et $n \geq 3$ et d'après l'inègalitè de hardy (3.2)

$$a(v,v) \geq \alpha\pi_0^{-1}\|v\|^2_{W^1_w(\mathbb{R}^n)}$$

□

Dans le cas $n \in \{1,2\}$ et $b = c = 0$, l'hypothèse $(\mathscr{H}_4)$ n'est pas vérifiée, et l'unicité est perdue (les fonctions constantes appartiennent à $W^1_w(\mathbb{R}^n)$). Afin de prendre en compte ce cas, nous complétons l'équation (3.1) avec la condition suivante lorsque $b = c = 0$ et $n \in \{1, 2\}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} w(x)u(x)dx = 0. \tag{3.12}$$

En plus on remarque que $a(u, 1) = 0$ donc on va rajouter une condition de compatibilité

$$\langle f, 1\rangle = 0. \tag{3.13}$$

Lemme 11. *Si $n = 1$ ou $n= 2$ et $b = c = 0$, alors le problème (3.1)+(3.12) est équivalent au problème suivant*

$$\forall v \in W^1_w(\mathbb{R}^n),\ a_\star(u, v) = \langle f, v\rangle, \tag{3.14}$$

avec

$$a_\star(u, v) = a(u, v) + \kappa \left(\int_{\mathbb{R}^n} w(x)u(x)dx\right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} w(x)v(x)dx\right),$$

où $\kappa > 0$ est une constante.

Démonstration. Soit u une solution du problème (3.1)+(3.12), $u \in W^1_w(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x_j} \in W^0_w(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(a_{i,j}\dfrac{\partial u}{\partial x_j}) \in W^{-1}_w(\mathbb{R}^n)$ et comme $W^{-1}_w(\mathbb{R}^n)$ est le dual de $W^1_w(\mathbb{R}^n)$ alors

$$\langle -\frac{\partial u}{\partial x_i}(a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}), v\rangle = \langle f, v\rangle,\ \forall v \in W^1_w(\mathbb{R}^n).$$

Par dualité

$$\langle a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\rangle = \langle f, v\rangle,\ \forall v \in W^1_w(\mathbb{R}^n)$$

compte tenu de la condition (3.12) on conclut que u est solution de (3.14).

Réciproquement, soit u solution du problème faible (3.14) le problème est vérifié pour tout $v \in W^1_w(\mathbb{R}^n)$ et en particulier pour $v = 1$ on a

$$\kappa \left(\int_{\mathbb{R}^n} w(x)u(x)dx\right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} w(x)dx\right) = \langle f, 1\rangle.$$

Comme $\langle f, 1\rangle = 0$ et $\left(\int_{\mathbb{R}^n} w(x)dx\right) = cst$ il s'ensuit que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} w(x)u(x)dx\right) = 0.$$

Maintenant pour $v \in W_w^1(\mathbb{R}^n)$ et u solution du problème (3.14) on a

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) = \langle f, v \rangle$$

une intégration par parties (ou par dualité toujours) on déduit que

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) v(x) = \langle f, v \rangle,$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = f.$$

$\square$

Proposition 3. *On suppose que $n \leq 2$, $b = c = 0$ et que les hypothèses $(\mathscr{H}_1)$, $(\mathscr{H}_2)$ sont vrais . Alors, le problème (3.14)+(3.12) a une solution $u \in W_w^1(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si f vérifie (3.13). Dans ce cas, u est unique et vérifie*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{W_w^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{W_w^{-1}(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.15}$$

Démonstration. La démonstration se fait d'une façon simillaire à la proposition 2

- La continuité
  Par l'inégalité de holder et d'aprés l'hypothése $(\mathscr{H}_2)$ on a

$$\begin{aligned} |a_\star(u,v)| &= |a(u,v) + \kappa \left(\int_{\mathbb{R}^n} w(x)u(x)dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} w(x)v(x)dx \right) | \\ &\leq c\|u\|_{W_w^1(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{W_w^1(\mathbb{R}^n)} + \kappa \left(\int_{\mathbb{R}^n} w(x)dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} w(x)u(x)^2 dx \right)^{1/2} \\ &\quad \left(\int_{\mathbb{R}^n} w(x)v(x)^2 dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

  D'où

$$|a_\star(u,v)| \leq c\|u\|_{W_w^1(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{W_w^1(\mathbb{R}^n)}$$

- La coércivté est directe d'aprés l'hypothèse $(\mathscr{H}_2)$ et l'inégalité (3.6).

$\square$

3.3 Discrétisation

faisant rappel de quelques définitions

Définition 3. *Soit la sphère unité de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *;* $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| = 1\}$ *on appelle les polynômes harmoniques sphériques de degré* m *la réstriction des polynômes harmoniques homogènes de degré* m *sur la sphère* $\mathbb{S}^n$*, on le note par* $\mathbb{H}_m$*, cette espace est de dimension* d_m *tel que* $d_0 = 1,\ d_1 = n+1$*, et*

$$d_m = \begin{pmatrix} n+m \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n+m-2 \\ n \end{pmatrix} \quad si \ \ n \geq 2.$$

Définition 4. *Soit* $\mathbb{S}^n_\star = \mathbb{S}^n - \{(0, 0..., 1)\}$*, la projection stéréographique* π *est une application bijective définie par*

$$\begin{array}{rcl} \pi \ : \ \mathbb{S}^n_\star & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \xi & \longmapsto & (\dfrac{\xi_1}{1-\xi_{n+1}}, \dfrac{\xi_2}{1-\xi_{n+1}}, ..., \dfrac{\xi_n}{1-\xi_{n+1}}), \end{array}$$

où l'inverse π^{-1} *est donné par*

$$\begin{array}{rcl} \pi^{-1} \ : \ \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{S}^n_\star \\ x & \longmapsto & \left(\dfrac{2x_1}{|x|^2+1} \cdots, \dfrac{2x_n}{|x|^2+1}, \dfrac{|x|^2-1}{|x|^2+1} \right). \end{array}$$

Maintenant, on introduit une famille des espaces de dimension finie $(H^n_k)_{k\geq 0}$ comme suit

- Si $n = 1$, l'espace H^n_k, $k \geq 0$ est composé des fonctions rationnelles de la forme
$$v(x) = \sum_{m=0}^{k} \frac{p_m(x)}{(x^2+1)^{m/2}},\ x \in \mathbb{R}, \tag{3.16}$$
où, pour chaque $m \leq k$, p_m est un polynôme de degré inférieur ou égal à m et ayant le même parité que m.
- Si $n \geq 2$, l'espace H^n_k, $k \geq 0$ est composé de fonctions rationnelles de la forme
$$v(x) = \sum_{m=0}^{k} \frac{p_m(x)}{(|x|^2+1)^{m+(n-2)/2}},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.17}$$
où pour chaque $m \leq k$, p_m est un polynôme de degré inférieur ou égal à m.

il est evident que

$$H_0^n \subset H_1^n \subset H_2^n \subset \cdots \subset H_k^n \subset \cdots \quad \text{et} \quad H_k^n \subset W_\omega^1$$

Notez que H_k^n est un sous-espace de l'espace V_k^n des fonctions rationnelles v de la forme

$$v(x) = \frac{P(x)}{(|x|^2+1)^{(2k+n-2)/2}}, \ x \in \mathbb{R}^n,$$

où P est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $2k$. Cependant, $H_k^n \neq V_k^n$. Ceci est une conséquence du lemme suivant (dû à Arar et Boulmezaoud).

Lemme 12. *Pour tout $k \geq 0$,*

$$\dim H_k^n = \begin{cases} k+1 & si \quad n=1, \\ \begin{pmatrix} n+k \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n+k-1 \\ n \end{pmatrix} & si \quad n \geq 2. \end{cases} \tag{3.18}$$

Lorsque $n \geq 2$

$$\dim H_k^n \sim \frac{2}{n!} k^n. \tag{3.19}$$

Démonstration. Si $n=1$, on a

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{(x^2+1)^l} &= \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^l} \\ &= \frac{1}{(x^2+1)^{l-1}} - \frac{1}{(x^2+1)^l} \end{aligned}$$

donc chaque $v \in H_k^1$ peut être décomposé de façon unique sous la forme

$$v(x) = \sum_{\ell=0}^{[k/2]} \frac{a_\ell}{(x^2+1)^\ell} + \sum_{\ell=0}^{[(k-1)/2]} \frac{b_\ell x}{(x^2+1)^{\ell+1/2}},$$

où a_ℓ et $\boldsymbol{b}_\ell$, $0 \leq \ell \leq k$, sont des nombres réels avec $b_0 = 0$. Ainsi

$$\dim H_k^1 = k+1. \tag{3.20}$$

Lorsque $n \geq 2$,

$$p_m(x) = \sum_{\ell=0}^{[m/2]} c(x')_{m,\ell} x_n^{2\ell} + \sum_{\ell=0}^{[(m-1)/2]} d(x')_{m,\ell} x_n^{2\ell+1},$$

où $x' = (x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ et $c_{m,\ell}$, $d_{m,\ell}$ sont des polynômes de la variable x de dgré $m - 2\ell$ et $m - 2\ell - 1$.
D'autre part

$$\begin{aligned} \frac{x_n^2}{(|x|^2+1)^j} &= \frac{(|x|^2+1) - (|x'|^2+1)}{(|x|^2+1)^j} \\ &= \frac{1}{(|x|^2+1)^{j-1}} - \frac{(|x'|^2+1)}{(|x|^2+1)^j}, \end{aligned}$$

on déduit donc que chaque $v \in H_k^n$ peut être décomposé en somme

$$v(x) = \frac{a_0(x')}{(|x|^2+1)^{(n-2)/2}} + \sum_{m=1}^{k} \frac{a_m(x') + b_m(x')x_n}{(|x|^2+1)^{m+(n-2)/2}}, \tag{3.21}$$

où, pour tout $m \leq k$, a_m et b_m sont deux fonctions polynomiales de degré inférieur ou égale à m et $m-1$ respectivement ; cette décomposition est unique. Il en résulte que $\dim H_0^n = 1$ et

$$\begin{aligned} \dim H_k^n &= 1 + \sum_{m=1}^{K} (\dim \mathbb{R}_m[X_1, ..., X_{n-1}] + \dim \mathbb{R}_{m-1}[X_1, ..., X_{n-1}]), \\ &= \sum_{m=0}^{K} d_m \\ &= 2 + n + \sum_{m=2}^{k} \left\{ \begin{pmatrix} n+m \\ n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n+m-2 \\ n \end{pmatrix} \right\}, \\ &= \begin{pmatrix} n+k \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n+k-1 \\ n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\square$

Le problème discrétisé correspond au problème variationnel (3.10) est trouver $u_N \in H_N^n$ tel que

$$a(u_N, v_N) = \langle f, v_N \rangle, \quad \forall v_N \in H_N^n, \tag{3.22}$$

où $N \geq 1$ désigne un nombre entier destiné d'aller à l'infini.
Si $b = c = 0$ et $n \leq 2$ le problème discrétisé correspond au prablème (3.14) est trouvé $u_N \in H_N^n$ tel que

$$a_\star(u_N, v_N) = \langle f, v_N \rangle, \quad \forall v_N \in H_N^n. \tag{3.23}$$

Le choix d'une base de H_N^n joue un rôle important dans le calcul du système linéaire résultant du problème (3.22) ou (3.23) .

On va utiliser une famille de fonctions découvertes par Arar et Boulmezaoud [5] définie comme suit :

Définition 5. *Soient les nombres entiers $m \geq 0$ et $\ell \geq 0$ et $1 \leq \ell \leq d_m$, on note par $\mathscr{W}_{m,\ell}$ la fonction définie par*

$$\mathscr{W}_{m,\ell}(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{2}{|x|^2+1}\right)^{\frac{n-2}{2}} \mathscr{Y}_{m,\ell}(\pi^{-1}(x)) & \text{si } n \neq 1, \\ (x^2+1)^{1/2}\cos((m+1)\arctan(x) + m\pi/2) & \text{si } n = 1, \end{cases} \tag{3.24}$$

où $(\mathscr{Y}_{m,\ell})$ sont les harmoniques sphériques habituelles sur la sphère unité de $\mathbb{S}^n$ de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Remarque 4. *Dans le cas unidimensionnel ($n = 1$), on peut écrire*

$$\mathscr{W}_{m,1} = \begin{cases} \sqrt{1+x^2}\,T_{m+1}(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}) & \text{si } m \text{ est pair,} \\ xC_m(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}) & \text{si } m \text{ est impair,} \end{cases} \tag{3.25}$$

où T_m et C_m, $m \geq 0$, sont les polynômes de Tchebychev de premiére et deuxiémes espèce.

Maintenant, on va rappeler quelques propriétés des fonctions $\mathscr{W}_{m,\ell}$.

- $\mathscr{W}_{m,\ell} \in H^n_k$, $\forall \ell$ *tel que* $1 \leq \ell \leq d_m$ et $0 \leq m \leq k$
- Pour $m \geq 0$ et $1 \leq l \leq d_m$, $-\Delta \mathscr{W}_{m,\ell} = \lambda_m(|x|^2+1)^{-2}\mathscr{W}_{m,\ell}$ où

$$\lambda_m = \begin{cases} 4m(m+n-1) + n(n-2) & \text{si } n \neq 1, \\ m(m+2) & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

- $0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 ... \lambda_m \leq ..$ avec $\lambda_m \to +\infty$ si $m \to +\infty$
- $(\mathscr{W}_{m,\ell})_{m\geq 0, 1\leq \ell \leq d_m}$ est une base orthogonale de $W^0_{-2}(\mathbb{R}^n)$ satisfaisant

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathscr{W}_{m',\ell}(x)\overline{\mathscr{W}_{m,j}(x)}}{(|x|^2+1)^2}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \mathscr{W}_{k,\ell}(x).\overline{\nabla \mathscr{W}_{m,j}(x)}dx = 0 \text{ si } (m',\ell) \neq (m,j).$$

et on a

Lemme 13 (voir [5])**.** *$(\mathscr{W}_{m,\ell})_{0\leq m \leq k,\, 1\leq \ell \leq d_m}$ est une base de H^n_k.*

Remarque 5. *Une conséquence directe de ces propriétés est que l'espace H^n_k est stable sous l'action Laplace pondéré $(|.|^2+1)^2\Delta$.*

Revenons maintenant au problème discrétisé et commençant par l'éstimation d'erreur

Théorème 8. *Supposons que les hypothèses $(\mathscr{H}_1)$, $(\mathscr{H}_2)$, $(\mathscr{H}_3)$, $(\mathscr{H}_4)$ sont vraies. Soit $u \in W^1_w(\mathbb{R}^n)$ (resp. $u_N \in H^n_N$) l'unique solution de (3.10) (resp. (3.22). Supposons que $u \in W^2_2(\mathbb{R}^n)$. Alors, les estimations d'erreur suivantes sont aussi satisfaites*

$$\|u - u_N\|_{W^1_w(\mathbb{R}^n)} \lesssim N^{-1}\|u\|_{W^2_2(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.26}$$

de même dans le cas $n \leq 2$ et $b = c = 0$

Théorème 9. *Supposons que $n \leq 2$, $b = c = 0$ et que les hypothèses $(\mathscr{H}_1)$, $(\mathscr{H}_2)$, sont vraies. Soit $u \in W^1_w(\mathbb{R}^n)$ (resp. $u_N \in H^n_N$) l'unique solution de (3.14) (resp. (3.23). Supposons que $u \in W^2_2(\mathbb{R}^n)$. Alors, les estimations d'erreur suivantes sont aussi satisfaites*

$$\|u - u_N\|_{W^1_w(\mathbb{R}^n)} \lesssim N^{-1}\|u\|_{W^2_2(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.27}$$

Démonstration. Dans la suite, on note par π_N la projection orthogonale de $W^0_{-2}(\mathbb{R}^n)$ sur H^n_N.

Lemme 14. *Soit $u \in W^2_2(\mathbb{R}^n)$. Alors,*

$$\|\nabla(u - \pi_N u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim N^{-1}\|u\|_{W^2_2(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.28}$$

$$\|\langle x\rangle^2(u - \pi_N u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim N^{-2}\|u\|_{W^2_2(\mathbb{R}^n)} \tag{3.29}$$

Démonstration. Soit $(u_{m,\ell})_{m\geq 0, 1\leq \ell \leq d_m}$ les coefficients de la décomposition de u dans la base $(\mathscr{W}_{m,\ell})$, c'est-à-dire

$$u = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{\ell=1}^{d_m} u_{m,\ell}\mathscr{W}_{m,\ell},$$

il s'ensuit que

$$\pi_N u = \sum_{m=0}^{N}\sum_{\ell=1}^{d_m} u_{m,\ell}\mathscr{W}_{m,\ell}.$$

Ainsi, avec $\langle x\rangle = \sqrt{|x|^2 + 1}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\nabla(u - \pi_N u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \sum_{m=N+1}^{+\infty}\sum_{\ell=1}^{d_m} |u_{m,\ell}|^2\|\nabla\mathscr{W}_{m,\ell}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \\
&= \sum_{m=N+1}^{+\infty}\sum_{\ell=1}^{d_m} \lambda_m|u_{m,\ell}|^2\|\langle x\rangle^{-2}\mathscr{W}_{m,\ell}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

et

$$\|\langle x\rangle^{-2}(u-\pi_N u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \sum_{m=N+1}^{+\infty}\sum_{\ell=1}^{d_m}|u_{m,\ell}|^2\|\langle x\rangle^{-2}\mathscr{W}_{m,\ell}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

D'autre part, on pose $v=-\langle x\rangle^4\Delta u$. Puisque, $u\in W^2_2(\mathbb{R}^n)$, ce qui implique que $v\in W^0_{-2}(\mathbb{R}^n)$ et

$$v=\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{\ell=1}^{d_m}\lambda_m u_{m,\ell}\mathscr{W}_{m,\ell}, \quad \|\langle x\rangle^2\Delta u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = |\langle x\rangle^{-2}v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

on a

$$\begin{aligned}\|\langle x\rangle^{-2}(v-\pi_N v)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \sum_{m=N+1}^{+\infty}\sum_{\ell=1}^{d_m}\lambda^2_m|u_{m\ell}|^2\|\langle x\rangle^{-2}\mathscr{W}_{m,\ell}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.\\ &\geq \lambda_{N+1}\|\nabla(u-\pi_N u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},\\ &\geq \lambda^2_{N+1}\|\langle x\rangle^{-2}(u-\pi_N u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

soit

$$u^\star_N=\begin{cases}\Pi_N u & \text{si} \quad n\geq 3\\ \Pi_N u - c_n & \text{si} \quad n\leq 2\end{cases}$$

oû c_N est une constante telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} w(x)(u-u^\star_N)dx=0$$

D'après le lemme de Céa, on a

$$\|u-u_N\|_{W^1_w(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|u-u^\star_N\|_{W^1_w(\mathbb{R}^n)}.$$

utilisant les inégalités (3.6),(3.2) on déduit que

$$\begin{aligned}\|u-u_N\|_{W^1_w(\mathbb{R}^n)} &\lesssim \|\nabla(u-u^\star_N)\|_{W^1_w(\mathbb{R}^n)} = \|\nabla(u-\Pi u_N)\|_{W^1_w(\mathbb{R}^n)}\\ &\lesssim N^{-1}\|u\|_{W^2_2(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

□

□

3.4 La matrice de rigidité

Ecrivons

$$u_N=\sum_{m=0}^{N}\sum_{l=1}^{d_m}\alpha_{m,l}\mathscr{W}_{m,l}(x),$$

avec $d_m = \dim H_m^n$, cela conduit au système linéaire

$$KU = B,$$

où $U = (\alpha_{0,1}, \alpha_{1,1} \cdots, \alpha_{1,n+1}, \cdots, \alpha_{N,1}, \cdots, \alpha_{N,d_N})^T$ et K est une matrice carré dont les coefficient sont de la forme

$$a(\mathscr{W}_{m,\ell}, \mathscr{W}_{m',s}),$$

La partie droite est donnée par

$$\langle f, \mathscr{W}_{m',s} \rangle.$$

Maintenant, on va donner quelques détails concernant le calcul des intégrales intervenants dans le calcul de la matrice K. pour simplifier nous supposons que $\boldsymbol{b} = 0$ et $c = 0$.
substituons le changement de variable $x = \pi(\xi)$ où π c'est la projection stéréographique.

Dans ce qui suit, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$, on note formellement $\hat{f}$ la fonction définie sur $\mathbb{S}_\star^n$ par

$$\hat{f}(\xi) = f(\pi(\xi)), \quad \text{pour } \xi \in \mathbb{S}_\star^n. \tag{3.30}$$

on va démontrer quelques égalités qui seront utilisées après, pour $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\frac{2}{1+|y|^2} \right)^n dy = \int_{\mathbb{S}^n} \hat{f}(\xi) d\xi, \tag{3.31}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy = \int_{\mathbb{S}^n} \frac{\hat{f}(\xi)}{(1-\xi_{n+1})^n} d\xi. \tag{3.32}$$

D'une autre part la relation entre le gradient ∇f, et le gradient tangentiel de $\hat{f}$, notée $\nabla_\xi \hat{f}$, est la suivante :

$$\widehat{\nabla_x f(\xi)} = M(\xi) \nabla_\xi \widehat{f}(\xi), \tag{3.33}$$

Ici $M(\xi) = (m_{i,j}(\xi))_{1 \le i \le n,\, 1 \le j \le n+1}$ est un $n \times (n+1)$ matrice donnée par

$$\begin{aligned} m_{i,j}(\xi) &= (1-\xi_{n+1})\delta_{i,j} - \xi_i \xi_j \text{ if } 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n, \\ m_{i,n+1} &= (1-\xi_{n+1})\xi_i. \end{aligned}$$

En effet, pour la démonstration on va définir la fonction $\widehat{F}$(extention homogène de degré zéro de la fonction f à $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ pour $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$) par

$$\forall x \in B_1^{\star\star},\ \widehat{F}(x) = \hat{f}(\frac{x}{|x|})$$

où

$B_1^{\star\star} = B_1 - \{(0,...,0,t),\ 0 \leq t < 1\}$, et B_1 est la boule unité de $\mathbb{R}^{n+1}$. Alors,

$$\int_{\mathbb{S}^1} \hat{f}(\xi) d\xi = (n+1) \int_{B_1^{\star\star}} \widehat{F}(x) dx,$$

On considére l'application bijective

$$\begin{array}{rcl} \varphi \ : \ B_1^{\star\star} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \times]0,1[\\ x & \longmapsto & (y,r) = (\pi(\xi), r) \text{ où } \xi = \dfrac{x}{|x|},\ r = |x|, \pi(\xi) = y. \end{array}$$

Soit $h \ : \ \mathbb{R}^n \times]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$h(y,r) = \widehat{F}(\varphi^{-1}(y,r)) = \widehat{F}(r\pi^{-1}(y)) = \widehat{f}(\pi^{-1}(y)) = f(y),\ y \in \mathbb{R}^n.$$

On a

$$\int_{B_1^{\star\star}} \widehat{F}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n \times]0,1[} h(y,r) |J_\varphi(y,r)|^{-1} dy dr,$$

où $J_\varphi(y,r)$ est le Jacobien de changement de variable donné par

$$J_\varphi(x) = |\frac{\partial y_i}{\partial x_j}|_{i=\overline{1,n+1}, j=\overline{1,n+1}}$$

(je pose $y_{n+1} = r$) par un calcul simple, on a

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \begin{cases} M\delta_{i,j} - rM^2 \xi_i \xi_j & \text{si } j = \overline{1,n} \text{ et } i = \overline{1,n} \\ M\xi_i & \text{si } i = \overline{1,n} \text{ et } j = n+1 \\ \xi_j & \text{si } j = \overline{1,n} \text{ et } i = n+1 \end{cases},$$

où $M = \dfrac{1}{(r - x_{n+1})}$; alors le jacobien est

$$J_\varphi(x) = \frac{1}{(r - x_{n+1})^n} \begin{vmatrix} 1 - r\xi_1^2 M & -r\xi_1\xi_2 M & \cdots & -r\xi_1\xi_n M & \xi_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -r\xi_n\xi_1 M & -r\xi_n\xi_2 M & \cdots & 1 - r\xi_n^2 M & \xi_n \\ \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n & \xi_{n+1} \end{vmatrix}.$$

On pose

$$J_\varphi(x) = \frac{1}{(r - x_{n+1})^n} J$$

et d'après la définition des y_i, on a

$$\begin{aligned}
|y[^2 &= \frac{1}{(r-x_{n+1})^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\\
&= \frac{1}{(r-x_{n+1})^2}(\sum_{i=1}^{(n+1)} x_i^2 - x_{n+1}^2)\\
&= \frac{r^2-x_{n+1}^2}{(r-x_{n+1})^2}\\
&= \frac{r+x_{n+1}}{(r-x_{n+1})}\\
&= \frac{2r-(r-x_{n+1})}{(r-x_{n+1})}\\
&= \frac{2r}{(r-x_{n+1})}-1,
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{|y[^2+1}{2r} = \frac{1}{r-x_{n+1}}.$$

On revient maintenant au calcul du détérminant J, en multipliant la derniére colonne par $rM\xi_i$ et en additionnant avec la ième colonne, on obtien

$$J = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \xi_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & \xi_n\\ rM\xi_1\xi_{n+1}+\xi_1 & rM\xi_2\xi_{n+1}+\xi_2 & \cdots & rM\xi_n\xi_{n+1}+\xi_n & \xi_{n+1} \end{vmatrix}.$$

On dévelope par rapport à la dérnière ligne on obtient

$$J = \xi_{n+1} + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+i}(r\xi_i\xi_{n+1}+\xi_i)\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \xi_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \xi_{i-1}\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \xi_i\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \xi_{i+1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \xi_{n+1}, \end{vmatrix}$$

on dévelope par rapport à la ième ligne on obtient

$$\begin{aligned}
J &= \xi_{n+1} - \sum_{i=1}^{n}(rM\xi_{n+1}\xi_i^2 + \xi_i^2) \\
&= \xi_{n+1} - \sum_{i=1}^{n}\xi_i^2(rM\xi_{n+1} + 1) \\
&= \xi_{n+1} - \sum_{i=1}^{n}\xi_i^2(\frac{\xi_{n+1}}{1-\xi_{n+1}} + 1) \\
&= \xi_{n+1} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\xi_i^2}{1-\xi_{n+1}} \\
&= \xi_{n+1} - \frac{\sum_{i=1}^{n+1}\xi_i^2 - \xi_{n+1}^2}{1-\xi_{n+1}} \\
&= \xi_{n+1} - \frac{1-\xi_{n+1}^2}{1-\xi_{n+1}} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

On déduit que

$$J_\varphi(x) = -\left(\frac{|y|^2+1}{2r}\right)^n,$$

donc, d'une part on a

$$\int_{\mathbb{S}^1} \hat{f}(\xi)d\xi = (n+1)\int_{B_1^{\star\star}} \widehat{F}(x)dx,$$

et d'autre par définition de la fonction $\widehat{F}(x)$ donne

$$\begin{aligned}
\int_{B_1^{\star\star}} \widehat{F}(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n\times]0,1[} \widehat{F}(\varphi(y,r)|J_{\varphi(y,r)}|^{-1}dydr \\
&= \int_{\mathbb{R}^n\times]0,1[} f(y)\left(\frac{|y|^2+1}{2r}\right)^{-n} dydr \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\left(\frac{2}{|y|^2+1}\right)^n dy \int_{]0,1[} r^n dr \\
&= \frac{1}{n+1}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\left(\frac{2}{|y|^2+1}\right)^n dy.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\left(\frac{2}{|y|^2+1}\right)^n dy = \int_{\mathbb{S}^1} \hat{f}(\xi)d\xi.$$

Pour la démonstration de la formule (3.33), on a

$$f(y)=\widehat{f}(\pi^{-1}(y)) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y_i}(y) = \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{|y|^2-1}{|y|^2+1}\right)\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_{n+1}}(\xi) + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{2y_j}{|y|^2+1}\right)\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_j}(\xi)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y_i}(y) = \frac{4y_i}{(|y|^2+1)^2}\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_{n+1}}(\xi) + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{2\delta_{ij}(1+|y|^2)-4y_jy_i}{(|y|^2+1)^2}\right)\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_j}(\xi).$$

En remplaçant y par $\pi(\xi)$, on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial y_i}(\pi(\xi)) = \widehat{\frac{\partial f}{\partial y_i}}(\xi) = (1-\xi_{n+1})\xi_i + \sum_{i=1}^{n}\delta_{ij}(1-\xi_{n+1}) - \xi_i\xi_j\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_j}(\xi)$$

d'où
$$\widehat{\nabla f}(\xi) = M(\xi)\nabla\widehat{f}(\xi). \tag{3.34}$$
on a aussi les propriétés suivantes

$$M(\xi)M(\xi)^t = (1-\xi_{n+1})^2 I_n,\ M(\xi)^t M(\xi) = (1-\xi_{n+1})^2(I_{n+1}-\xi\xi^t),\ \text{pour } \xi\in\mathbb{S} \tag{3.35}$$
il s'ensuit que
$$\nabla_\xi \widehat{f}(\xi) = (1-\xi_{n+1})^{-2}M(\xi)^t\widehat{\nabla_x f}(\xi). \tag{3.36}$$
Pour tout vecteur $z=(z_1,...,z_n,z_{n+1})^t$ satisfaisant $\xi^t.z=0$;

$$M(\xi)z = (1-\xi_{n+1})z_* + z_{n+1}\xi_*,\ \xi_*^t M(\xi)z = (1-\xi_{n+1})z_{n+1}, \tag{3.37}$$

où $z_\star=(z_1,z_2,...,z_n)^t$ et $\xi_\star=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$. Dans ce cas on peut reécrire la formule 3.34 come suit :

$$\widehat{\nabla f}(\xi) = H(\xi)\nabla\widehat{f}(\xi), \tag{3.38}$$

avec
$$h_{i,j} = (1-\xi_{n+1})\delta_{ij},\ \text{ si } 1\le i\le n,\ 1\le j\le n$$
$$h_{i,n+1} = \xi_i$$

En effet, pour la formule (3.37) il suffit d'utiliser la formule $\xi_{n+1}^2 = 1-\sum_{i=1}^n \xi_i^2$

pour la formule (3.35) soit γ_{ij} un élément de la ligne i et la colonne j de la matrice $M(\xi)M(\xi)^t$, alors;

$$\begin{aligned}
\gamma_{ij} &= \left(\sum_{k=1}^{n}\left((1-\xi_{n+1})\delta_{ik}-\xi_i\xi_k\right)\left((1-\xi_{n+1})\delta_{kj}-\xi_k\xi_j\right)\right)+(1-\xi_{n+1})^2\xi_i\xi_j \\
&= (1-\xi_{n+1})^2\xi_i\xi_j+\sum_{k=1}^{n}\left((1-\xi_{n+1})^2\delta_{ik}\delta_{kj}\right)-\sum_{k=1}^{n}\left((1-\xi_{n+1})\delta_{ik}\xi_k\xi_j\right) \\
&\quad -\sum_{k=1}^{n}\left((1-\xi_{n+1})\delta_{kj}\xi_i\xi_k\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k^2\xi_i\xi_j\right).
\end{aligned}$$

Puisque $|\xi|^2=1$ on peut écrire $\xi_{n+1}^2=1-\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$ avec $\delta_{ij}=1$ si $i=j$ et $\delta_{ij}=0$ si $i\neq j$ on obtient

$$\gamma_{ij}=\begin{cases}(1-\xi_{n+1})^2 \text{ si } i=j\\ 0 \text{ si } i\neq j\end{cases}$$

Soit b_{ij} un élement de la ligne i et la colonne j de la matrice $M(\xi)^tM(\xi)$.

– Si $i=\overline{1,n}$ et $j=\overline{1,n}$

$$\begin{aligned}
b_{ij} &= \left(\sum_{k=1}^{n}\left((1-\xi_{n+1})\delta_{ik}-\xi_i\xi_k\right)\left((1-\xi_{n+1})\delta_{kj}-\xi_k\xi_j\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left((1-\xi_{n+1})^2\delta_{ik}\delta_{kj}\right)-\sum_{k=1}^{n}\left((1-\xi_{n+1})\delta_{ik}\xi_k\xi_j\right) \\
&\quad -\sum_{k=1}^{n}\left((1-\xi_{n+1})\delta_{kj}\xi_i\xi_k\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k^2\xi_i\xi_j\right),
\end{aligned}$$

donc

$$b_{ij}=\begin{cases}(1-\xi_{n+1})^2(1-\xi_i^2) & \text{si } i=j\\ -\xi_i\xi_j(1-\xi_{n+1})^2 & \text{si } i\neq j\end{cases}$$

– Si $i=n+1$ et $j\neq n+1$

$$\begin{aligned}
b_{(n+1)j} &= \left(\sum_{k=1}^{n}(1-\xi_{n+1})\xi_k\left((1-\xi_{n+1})\delta_{kj}-\xi_k\xi_j\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(1-\xi_{n+1})^2\xi_k\delta_{kj}-\sum_{k=1}^{n}(1-\xi_{n+1})\xi_j\xi_k^2 \\
&= (1-\xi_{n+1})^2\xi_j-(1-\xi_{n+1})\xi_j(1-\xi_{n+1}^2) \\
&= -(1-\xi_{n+1})^2\xi_j\xi_{n+1}
\end{aligned}$$

– Si $j = n+1$ et $i \neq n+1$,

$$\begin{aligned} b_i(n+1) &= \left(\sum_{k=1}^{n} \left((1-\xi_{n+1})\delta_{ik} - \xi_i\xi_k\right)(1-\xi_{n+1})\xi_k \right) \\ &= -(1-\xi_{n+1})^2 \xi_i \xi_{n+1}. \end{aligned}$$

– si $j = n+1$ et $i = n+1$,

$$\begin{aligned} b_i(n+1) &= \left(\sum_{k=1}^{n} (1-\xi_{n+1})^2 \xi_k^2 \right) \\ &= (1-\xi_{n+1})^2(1-\xi_{n+1}^2). \end{aligned}$$

Soit $n \geq 2$, pour deux fonctions u et v dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, la formulation variationnelle (3.10) peut s'écrire sous la forme (avec $b = c = 0$)

$$a(u,v) = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u^t A \nabla v dx,$$

où $A = (a_{ij})$ est la matrice carrée $n \times n$, on pose

$$U(x) = \frac{u(x)}{\rho(x)},\ V(x) = \frac{v(x)}{\rho(x)} \text{ avec } \rho(x) = \left(\frac{2}{|x|^2+1}\right)^{\frac{n-2}{2}}.$$

en utlisant la projection stéréographique, on obtient

$$\begin{aligned} \widehat{\rho}(\xi) &= \rho(\pi(\xi) \\ &= \left(\frac{2}{1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i^2}{(1-\xi_{n+1})^2}} \right)^{\frac{n-2}{2}} \\ &= \left(\frac{2}{1 + \frac{1-\xi_{n+1}^2}{(1-\xi_{n+1})^2}} \right)^{\frac{n-2}{2}} \\ &= (1-\xi_{n+1})^{\frac{n-2}{2}}. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_i}(x) = -\frac{n-2}{2}\left(\frac{2}{|x|^2+1}\right)^{\frac{n-2}{2}+1} x_i.$$

En remplaçant x par $\pi(\xi)$

$$\widehat{\frac{\partial \rho}{\partial x_i}}(\xi) = -\frac{n-2}{2}\left(1-\xi_{n+1}\right)^{\frac{n-2}{2}} \xi_i$$

d'où $\widehat{\nabla\rho}(\xi) = -\alpha(1-\xi_{n+1})^{\alpha}\xi_*$, avec $\alpha = (n-2)/2$ et $\xi_* = (\xi_1, ..., \xi_n)^T$.

finalement d'après (3.38) on peut déduire une formule pour $\widehat{\nabla u}$

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla u} &= \widehat{\rho}\widehat{\nabla U} + \widehat{U}\widehat{\nabla\rho} \\ &= (1-\xi_{n+1})^{\alpha} H(\xi)\nabla_\xi \widehat{U} - \alpha(1-\xi_{n+1})^{\alpha}\widehat{U}(\xi)\xi_*]. \end{aligned}$$

d'où

$$\widehat{\nabla u} = (1-\xi_{n+1})^{\alpha}[H(\xi)\nabla_\xi \widehat{U} - \alpha\widehat{U}(\xi)\xi_*]. \tag{3.39}$$

De (3.32) l'intégrale $a(u,v)$ s'écrit

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_{\mathbb{S}^n_\star} \frac{(1-\xi_{n+1})^{2\alpha}[H(\xi)\nabla_\xi\widehat{U}(\xi) - \alpha\widehat{U}(\xi)\xi_*]^t\widehat{A}(\xi)[H(\xi)\nabla_\xi\widehat{V}(\xi) - \alpha\widehat{V}(\xi)\xi_*]}{(1-\xi_{n+1})^{2\alpha+2}} d\xi, \\ &= \int_{\mathbb{S}^n_\star} \frac{[\nabla_\xi\widehat{U}(\xi)^t H(\xi)^t - \alpha\widehat{U}(\xi)\xi_*^t]\widehat{A}(\xi)[H(\xi)\nabla_\xi\widehat{V}(\xi) - \alpha\widehat{V}(\xi)\xi_*]}{(1-\xi_{n+1})^2} d\xi. \end{aligned}$$

Cette formule reste valable lorsque u et v appartiennent à $W^1_w(\mathbb{R}^n)$. Dans ce cas $\widehat{U} \in H^1(\mathbb{S}^1_\star)$ et $V \in H^1(\mathbb{S}^1_\star)$. La dérnière intégrale est absolument convergente et peut être calculée directement quand A est une forme simple, ou en utilisant une formule de quadrature sur la sphére.

3.4.1 Calcul de la matrice pour l'équation de Laplace

Dans le cas particulier $A(\xi) = I$ c'est-à-dire pour une équation de Laplace et $\xi \cdot \nabla\widehat{V}(\xi) = 0$.

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_{\mathbb{S}^n_\star} \frac{\nabla_\xi\widehat{U}(\xi)^t M(\xi)^t M(\xi)\nabla_\xi\widehat{V}(\xi)}{(1-\xi_{n+1})^2} d\xi + \alpha^2\int_{\mathbb{S}^n_\star} \frac{|\xi_*|^2\widehat{U}(\xi)\widehat{V}(\xi)}{(1-\xi_{n+1})^2} d\xi \\ &\quad -\alpha\int_{\mathbb{S}^n_\star} \frac{\xi_*^t M(\xi)\nabla_\xi(\widehat{U}\widehat{\overline{V}})(\xi)}{(1-\xi_{n+1})^2} d\xi. \end{aligned}$$

D'après (3.37)

$$M(\xi)\nabla_\xi\widehat{V} = (1-\xi_{n+1})(\nabla_\xi\widehat{V})_\star + \frac{\partial\widehat{V}}{\partial\xi_{n+1}}\xi_\star$$

et

$$\xi_\star^t \xi_\star = (1-\xi_{n+1}^2),$$

$$(\nabla \widehat{V})_\star^t \xi_\star = -\xi_{n+1} \frac{\partial \widehat{V}}{\partial \xi_{n+1}}$$

$$\nabla_\xi \widehat{U}(\xi)^t M(\xi)^t M(\xi) \nabla_\xi \widehat{V}(\xi) \;=\; (1-\xi_{n+1})^2 \nabla_\xi \widehat{U}(\xi)^t . \nabla_\xi \widehat{V}(\xi).$$

Ainsi

$$a(u,v) = \int_{\mathbb{S}^1} \nabla_\xi \widehat{U}(\xi)^t . \overline{\nabla_\xi \widehat{V}(\xi)} + \alpha^2 \int_{\mathbb{S}^1} \frac{(1+\xi_{n+1})\widehat{U}(\xi)\widehat{V}(\xi)}{1-\xi_{n+1}} d\xi - \alpha \int_{\mathbb{S}^1} \frac{\xi_*^t M(\xi) \nabla_\xi (\widehat{U}\overline{\widehat{V}})(\xi)}{(1-\xi_{n+1})^2} d\xi \tag{3.40}$$

En utilisant la formule suivante

$$\int_{\mathbb{S}^1} \widehat{u}(\xi) e_{n+1} . \nabla_\xi \widehat{v}(\xi) d\xi = -\int_{\mathbb{S}^1} \widehat{v}(\xi) e_{n+1} . \nabla_\xi \widehat{u}(\xi) d\xi + n \int_{\mathbb{S}^1} \xi_{n+1} \widehat{u}(\xi) \widehat{v}(\xi) d\xi \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_{\mathbb{S}^1} \widehat{u}(\xi) e_{n+1} . \nabla_\xi \widehat{v}(\xi) d\xi &= \int_{\mathbb{S}^1} \widehat{u}(\xi) e_{n+1} \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i}{1-\xi_{n+1}} \widehat{\frac{\partial v}{\partial xi}} d\xi \\
&= -\sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} u(x) x_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^n dx \\
&= -\sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} v(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u(x) x_i \left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^n \right) dx \\
&= -\sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} v(x) x_i \left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx \\
&\quad -\sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} u(x) v(x) x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\frac{2}{1-|x|^2}\right)^n \right) dx \\
&\quad -\sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} v(x) \left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^n u(x) dx \\
&= -\sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} v(x) x_i \left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} n u(x) v(x) \left(\frac{2}{1-|x|^2}\right)^n \left(\frac{2|x|^2}{1+|x|^2} - 1\right) dx \\
&= -\sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} v(x) x_i \left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} n u(x) v(x) \left(\frac{2}{1-|x|^2}\right)^n \left(\frac{|x|^2-1}{1+|x|^2}\right) dx \\
&= -\int_{\mathbb{S}^1} \widehat{v}(\xi) e_{n+1} . \nabla_\xi \widehat{u}(\xi) d\xi + n \int_{\mathbb{S}^1} \xi_{n+1} \widehat{v}\widehat{u} d\xi
\end{aligned}$$

et d'après la relation (3.37) on a $\xi_*^t M(\xi)\nabla_\xi(\widehat{U}\widehat{V}) = (1-\xi_{n+1})\dfrac{\partial(\widehat{U}\widehat{V})}{\partial\xi_{n+1}}$ alors

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^1} \frac{\xi_*^t M(\xi)\nabla_\xi(\widehat{U}\widehat{V})(\xi)}{(1-\xi_{n+1})^2} d\xi &= \int_{\mathbb{S}^1} \frac{e_{n+1}.\nabla_\xi(\widehat{U}\widehat{V})(\xi)}{1-\xi_{n+1}} d\xi \\
&= -\int_{\mathbb{S}^1} (\widehat{U}\widehat{V}) e_{n+1}.\nabla_\xi(\frac{1}{1-\xi_{n+1}}) d\xi \\
&\quad + n\int_{\mathbb{S}^1} \widehat{U}(\xi)\widehat{V}(\xi)\frac{\xi_{n+1}}{1-\xi_{n+1}} d\xi \\
&= -\int_{\mathbb{S}^1} \widehat{U}(\xi)\widehat{V}(\xi)\frac{e_{n+1}.\nabla_\xi \xi_{n+1}}{(1-\xi_{n+1})^2} d\xi \\
&\quad + n\int_{\mathbb{S}^1} \widehat{U}(\xi)\widehat{V}(\xi)\frac{\xi_{n+1}}{1-\xi_{n+1}} d\xi \\
&= \int_{\sim^1} \widehat{U}(\xi)\widehat{V}(\xi)\frac{(n-1)\xi_{n+1}-1}{(1-\xi_{n+1})} d\xi,
\end{aligned}$$

en remplaçant dans (3.40)

$$a(u,v) = \int_{\mathbb{S}^1} \nabla_\xi \widehat{U}(\xi)^t.\nabla_\xi \widehat{V}(\xi) + \frac{n\alpha}{2}\int_{\mathbb{S}^1} \widehat{U}(\xi)\widehat{V}(\xi) d\xi.^- \tag{3.42}$$

Pour $u = \mathscr{W}_{m,\ell}$ et $v = \mathscr{W}_{m',s}$ on a

$$a(\mathscr{W}_{N,\ell}, \mathscr{W}_{N,s}) = \int_{\mathbb{S}^1} \nabla_\xi \mathscr{Y}_{m,\ell}^t(\xi).\nabla_\xi \mathscr{Y}_{N,s}(\xi) d(\xi) + \frac{n\alpha}{2}\int_{\mathbb{S}^1} \mathscr{Y}_{N,\ell}^t.\mathscr{Y}_{N,s}(\xi) d(\xi).$$

Ainsi,

$$a(\mathscr{W}_{m,\ell}, \mathscr{W}_{m',s}) = \left(m(m+n-1) + \frac{n(n-2)}{4}\right)\delta_{m,\ell}\delta_{m',s}. \tag{3.43}$$

Lemme 15. *La solution du problème pour $n \geq 3$ est donnée par*

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{d_m} \frac{4}{4m(m+n-1)+n(n-2)}\langle f, \mathscr{W}_{m,\ell}\rangle \mathscr{W}_{m,\ell}(x). \tag{3.44}$$

Pour $n = 2$, la solution approchée verifie $\int_{\mathbb{R}^2} w(x)u_N(x)dx = 0$, donc la matrice de rigidité est aussi diagonal c'est à dire la solution dans ce cas est

$$u = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{d_m} \frac{1}{m(m+1)}\langle f, \mathscr{W}_{m,l}\rangle \mathscr{W}_{m,l}$$

3.4.2 Le cas unidimensionnel

Dans le cas unidimensionnel ($n=1$), la matrice

$$M(\xi) = ((1-\xi_2) - \xi_1^2, (1-\xi_2)\xi_2)$$

et dans ce cas $(\xi_1, \xi_2) = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in]\pi/2, 5\pi/2[$, donc
$\theta = \arccos(\xi_1)$,($\theta = \arcsin(\xi_2)$).

$$\begin{aligned}
M(\xi)\nabla_\xi \widehat{U}(\xi) &= [(1-\xi_1^2) - \xi_2]\frac{\partial\theta}{\partial\xi_1}\frac{\partial\widehat{U}}{\partial\theta} + [(1-\xi_2)\xi_1]\frac{\partial\theta}{\partial\xi_2}\frac{\partial\widehat{U}}{\partial\theta} \\
&= [(1-\xi_1^2) - \xi_2]\frac{-1}{\sqrt{1-\xi_1^2}}\frac{\partial\widehat{U}}{\partial\theta} + [(1-\xi_2)\xi_1]\frac{1}{\sqrt{1-\xi_2^2}}\frac{\partial\widehat{U}}{\partial\theta} \\
&= [(1-\xi_2)\xi_2]\frac{1}{\sqrt{1-\xi_1^2}}\frac{\partial\widehat{U}}{\partial\theta} + (1-\xi_2)\xi_1\frac{1}{\sqrt{1-\xi_2^2}}\frac{\partial\widehat{U}}{\partial\theta} \\
&= (1-\xi_2)\xi_2\frac{\partial\widehat{U}}{\partial\theta} + (1-\xi_2)\frac{\partial\widehat{U}}{\partial\theta},
\end{aligned}$$

d'où

$$M(\xi)\nabla_\xi \widehat{U}(\xi) = 2(1-\xi_2)\frac{\partial\widehat{U}}{\partial\theta},$$

$$\begin{aligned}
a(u,v) &= \int_{\pi/2}^{5\pi/2} \widehat{a}(\xi)[(1-\xi_2)^2\frac{\partial\widehat{U}}{\partial\theta}\frac{\partial\widehat{V}}{\partial\theta} + \alpha^2\widehat{U}(\theta)\widehat{V}(\theta)\xi_1^2 - \alpha(1-\xi_2)\xi_1\widehat{U}(\theta)\frac{\partial\widehat{V}}{\partial\theta} \\
&\quad -\alpha\xi_1(1-\xi_2)\widehat{V}(\theta)\frac{\partial\widehat{U}}{\partial\theta}](1-\xi_2)^{-2}d\theta \\
&= \int_{\pi/2}^{5\pi/2} \{\frac{\partial\widehat{U}}{\partial\theta}(\theta)\frac{\partial\widehat{V}}{\partial\theta}(\theta) + \alpha^2\frac{\cos\theta^2}{(1-\sin\theta)^2}\widehat{U}(\theta).\widehat{V}(\theta) \\
&\quad -\alpha\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\widehat{U}\widehat{V})(\theta)\}\widehat{a}(\theta)d\theta. \\
&= \int_{\pi/2}^{5\pi/2} \{\frac{\partial\widehat{U}}{\partial\theta}(\theta)\frac{\partial\widehat{V}}{\partial\theta}(\theta) + \frac{1}{4}\frac{1+\sin\theta}{(1-\sin\theta)}\widehat{U}(\theta).\widehat{V}(\theta) + \\
&\quad \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\widehat{U}\widehat{V}) - (\widehat{U}\widehat{V})\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta})\widehat{a}(\theta))d\theta. \\
&= \int_{\pi/2}^{5\pi/2} \{\frac{\partial\widehat{U}}{\partial\theta}(\theta)\frac{\partial\widehat{V}}{\partial\theta}(\theta) - \frac{1}{4}\widehat{U}(\theta).\widehat{V}(\theta) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\widehat{U}\widehat{V})(\theta)\}\widehat{a}(\theta)d\theta.
\end{aligned}$$

on fait le changement de variable $\theta = 2\varphi + \dfrac{3\pi}{2}$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} &= \frac{\sin(\pi/2-\theta)}{\sin(\pi/2)-\sin\theta} \\
&= \frac{\cos(\theta/2-\pi/4)}{\cos(\pi/4+\theta/2)} \\
&= \frac{\cos(\theta/2-3\pi/4+\pi/2)}{\cos(\theta/2-3\pi/4+\pi)} \\
&= \frac{\sin(\theta/2-3\pi/4)}{\cos(\theta/2-3\pi/4)} \\
&= \tan(\varphi)
\end{aligned}$$

On pose

$$\widehat{U}^\star(\varphi) = \widehat{U}(\theta)$$

a(u,v) s'écrit

$$\begin{aligned}
a(u,v) &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\{\frac{\partial \widehat{U}^\star(\varphi)}{\partial\varphi}(\varphi)\frac{\partial \widehat{V}^\star(\varphi)}{\partial\varphi}(\varphi) - \widehat{U}^\star(\varphi)(\varphi).\widehat{V}^\star(\varphi)(\varphi) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial\varphi}(\tan(\varphi)\widehat{U}^\star(\varphi)\widehat{V}^\star(\varphi))(\varphi)\}\widehat{a}^\star(\varphi)d\varphi.
\end{aligned}$$

Pour

$$\widehat{\mathscr{W}}^\star_{m,1}(\varphi) = \sqrt{2}\cos((m+1)\varphi + m\pi/2),$$

et

$$\begin{aligned}
a(\mathscr{W}_{m,1},\mathscr{W}_{m',1}) &= \tfrac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\{\widehat{a}^\star(\varphi)\frac{\partial\widehat{\mathscr{W}}^\star_{m,1}}{\partial\varphi}(\varphi)\frac{\partial\widehat{\mathscr{W}}^\star_{m',1}}{\partial\varphi}(\varphi)d\varphi - \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\widehat{a}^\star\widehat{\mathscr{W}}^\star_{m,1}.\widehat{\mathscr{W}}^\star_{m',1}(\varphi)d\varphi \\
&\quad + [(\widehat{a}^\star(\varphi)\tan\varphi\widehat{\mathscr{W}}^\star_{m,1}.\widehat{\mathscr{W}}^\star_{m',1}(\varphi)]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \tfrac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{d\widehat{a}^\star}{d\varphi})\tan(\varphi)\widehat{\mathscr{W}}^\star_{m,1}.\widehat{\mathscr{W}}^\star_{m',1}(\varphi)d\varphi \\
&= \tfrac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\{\widehat{a}^\star(\varphi)\frac{\partial\widehat{\mathscr{W}}^\star_{m,1}}{\partial\varphi}(\varphi)\frac{\partial\widehat{\mathscr{W}}^\star_{m',1}}{\partial\varphi}(\varphi) - (\widehat{a}^\star(\varphi) + \tan\varphi\frac{d\widehat{a}^\star}{d\varphi})\widehat{\mathscr{W}}^\star_{m,1}.\widehat{\mathscr{W}}^\star_{m',1}(\varphi)\}d\varphi.
\end{aligned}$$

Si a est une constante, alors d'après les propriétés de la base

$$a(\mathscr{W}_{m,1},\mathscr{W}_{m',1}) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\{\widehat{a}^\star\frac{\widehat{\mathscr{W}}^\star_{m,1}}{\partial\varphi}(\varphi)\frac{\partial\widehat{\mathscr{W}}^\star_{m',1}}{\partial\varphi}(\varphi) - \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\widehat{a}^\star\widehat{\mathscr{W}}^\star_{k,l}.\widehat{\mathscr{W}}^\star_{k,l}(\varphi)\}d\varphi = 0 \text{ si } (m,1) \neq (m',1).$$

et

$$
\begin{aligned}
a(\mathscr{W}_{m,1},\mathscr{W}_{m,1}) &= \tfrac{a}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2(m+1)^2\sin^2((m+1)\varphi+\frac{m\pi}{2})d\varphi - \frac{a}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2((m+1)\varphi+\frac{m\pi}{2})d \\
&= \tfrac{a}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2(m+1)^2 d\varphi - \frac{a}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2((m+1)^2+1)\frac{1}{2}(\cos(2(m+1)\varphi+m\pi)+1)d\varphi \\
&= \frac{(m+1)^2-1}{2}a\pi \\
&= \frac{m(m+2)}{2}a\pi
\end{aligned}
$$

$$a(\mathscr{W}_{m,1},\mathscr{W}_{m,1}) = 0 \text{ si } m \neq m',$$

et

$$a(\mathscr{W}_{m,1},\mathscr{W}_{m',1}) = \frac{m(m+2)}{2}a\pi.$$

de la condition (3.12), nous concluons que la matrice de rigidité est une matrice diagonal et la solution donnée par

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{m(m+2)a\pi}\langle f,\mathscr{W}_{m,1}\rangle\mathscr{W}_{m,1}$$

Dans le cas où les coeficients de l'equation ne sont pas des constantes, nous calculons les coefficients de la matrice de rigidité en se basant sur les propriétés des polynômes de tchebychev et la formule quadrature de Tchebychev-Gauss

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{-1/2}g(t)dt = \sum_{i=1}^{N^\star}\varrho_i g(cos(\theta_i))$$

où

$$\theta_i = \frac{2i-1}{2N^\star}\pi,\ \varrho_i = \frac{\pi}{N^\star},\ 1\leq i\leq N^\star$$

Rappelons que dans le cas unidimensionnel les éléments de la base $\mathscr{W}_{m,1}$ s'écrit ;

$$
\begin{aligned}
\mathscr{W}_{m,1}(x) &= \sqrt{1+x^2}cos((m+1)\arctan(x)+m\tfrac{\pi}{2}) \\
&= \sqrt{1+x^2}\sin\left((m+1)\left(\arctan(x)+\tfrac{\pi}{2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

en utilisant les identités suivantes,

$$\sin((m{+}1)\theta) = \sin(\theta)C_m(\cos\theta),\quad \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\quad \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

on peut écrire $\mathscr{W}_{m,1}$ sous la forme

$$\mathscr{W}_{m,1} = (-1)^m C_m(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})$$

Maintenant, faisons le changement de variable suivant

$$h(x) = (x^2+1)f(x),\ x \in \mathbb{R},\ \tilde{b}(x) = \sqrt{(x^2+1)}b(x),\ \tilde{c}(x) = (x^2+1)c(x),$$

les coefficients de la matrice seront donnée par

$$\begin{aligned} a(\mathscr{W}_{m,1}, \mathscr{W}_{m',1}) &= (-1)^{m+m'}[\int_{-1}^{1} a(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}})C'_m(t)C'_{m'}(t)(1-t^2)^{3/2}dt \\ &+ \int_{-1}^{1} \tilde{b}(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}})C_m(t)C'_m(t)(1-t^2)^{1/2}dt \\ &+ \int_{-1}^{1} \tilde{c}(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}})C_m(t)C'_m(t)dt]. \end{aligned}$$

3.4.3 Résultat numérique

Dans cette section, nous donnons quelques résultats numérique concernant la methode pour resoudre l'équation

$$-(a(.)u')'(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{3.45}$$

dans le cas unidimensionnel

Exemple 1. :On prend l'équation (3.46) avec $a = 1$, $b = c = 0$

$$-u''(x) = f(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{3.46}$$

on considère la solution exacte

$$u(x) = \frac{x\log(x^2+1)}{x^2+1}.$$

qui vérifie la condition

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{u(x)}{x^2+1}dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{u_N(x)}{x^2+1}dx = 0.$$

La figure 3.1, représente la courbe de la solution exacte qui se superpose avec celle de l'approximation pour $N = 150$. Dans la figure 3.2, on constate la décroissance des erreurs relatives respectivement

$$\frac{\|u-u_N\|_{W^0_{-1}(\mathbb{R})}}{\|u\|_{W^0_{-1}(\mathbb{R})}},\ \frac{\|\nabla(u-u_N)\|_{L^2(\mathbb{R})}}{\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R})}}$$

en fonction du paramètre de discrétisation N qui est de l'ordre $N^{-1.16}$.

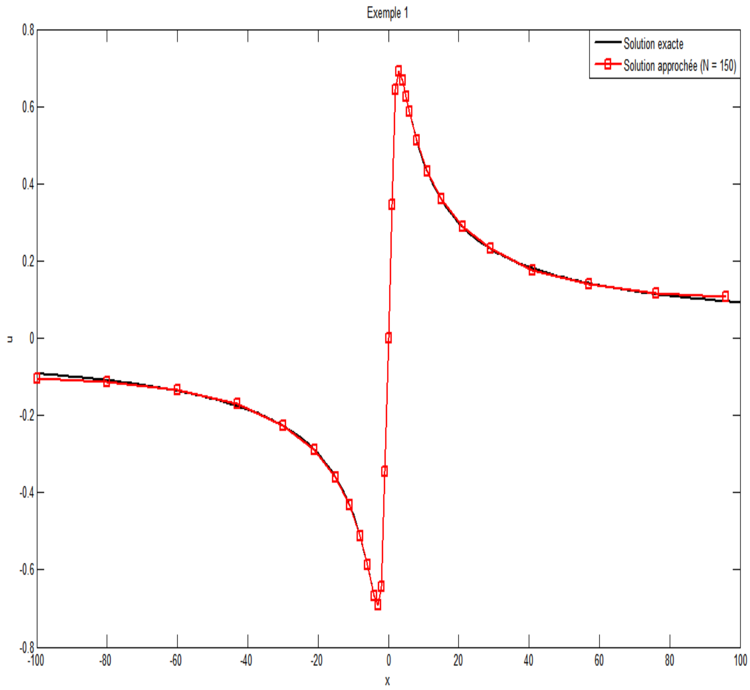

FIGURE 3.1 – La solution exacte et numérique du premier exemple. La solution numérique est calculé avec $N = 100$.

Exemple 2. On consdère (3.46) avec

$$a(x) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2x).$$

$f(x)$ étant choisi de telle sorte que la solution exacte soit

$$u(x) = \frac{\sin(x)}{(x^2+1)^{3/2}}.$$

Ici aussi l'approximation de la solution se superpose avec la solution exacte, voir la figure 3.4. La figure 3.2 montre la décroissance de l'erreur relative de

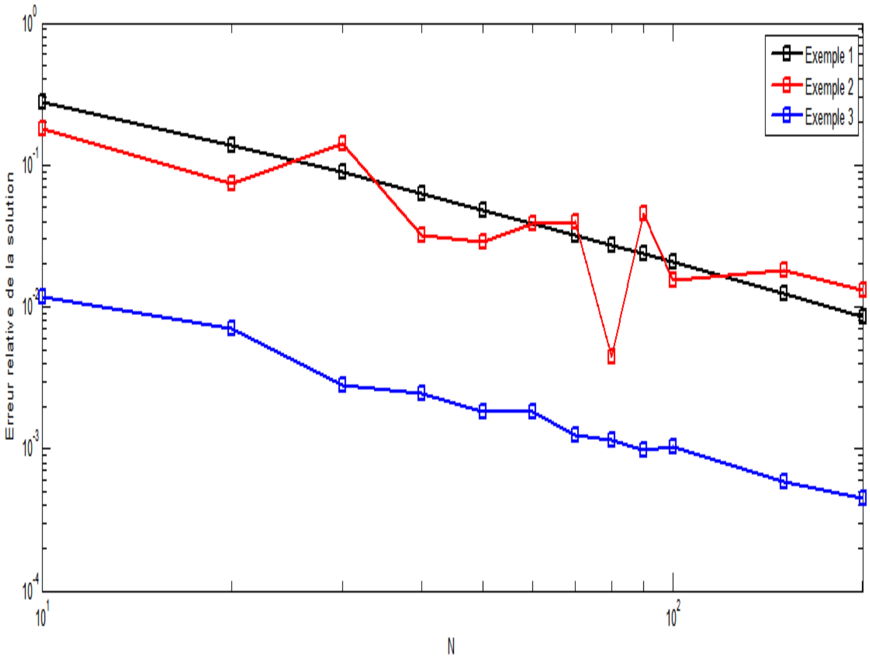

FIGURE 3.2 – Erreur relative de la solution, pour les exemple 1, 2 et 3 en fonction de N (dans une échelle logarithmique) .

la solution dans l'espace pondéré L^2 et la figure 3.3 montre la décroissance du gradient dans L^2. Notons qu'elles sont toutes les deux de l'ordre de N^{-1}.

Exemple 3. Dans cet exemple , on consdère l'équation (3.46), où $a(x)$ est discontinue

$$a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1, \\ a_0 & \text{si } |x| > 1, \end{cases}$$

où a_0 est une constante. Le second membre est donné par

$$f(x) = 3\frac{x}{(1+x^2)^{5/2}}.$$

La solution de (3.46) est

$$u(x) = a(x)^{-1}u_0(x) + w(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R},\ |x| \neq 1,$$

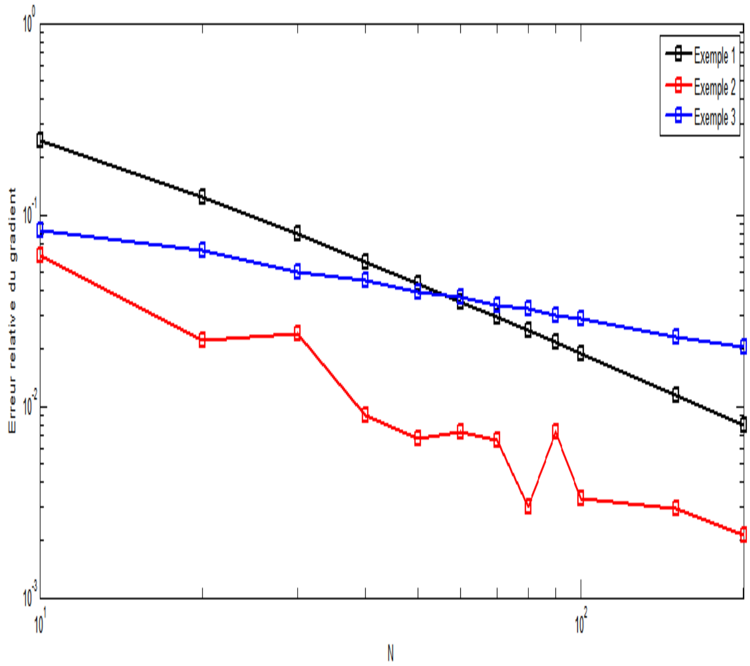

FIGURE 3.3 – Erreur Relative du gradient pour les trois exemples en fonction de N (dans une échelle logarithmique).

où

$$u_0(x) = \frac{x}{(x^2+1)^{1/2}}.$$

avec w est une fonction linéaire continu par morceaux choisie de tel sorte que $u \in W_0^1(\mathbb{R})$ et satifaisant l'équation (3.46).
Puisque u et au' doivent être continues aux points $x \pm 1$ on montre que

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq 1, \\ k_0 & \text{si } x > 1, \\ -k_0 & \text{si } x < -1, \end{cases}$$

avec $k_0 = (1 - a_0^{-1})u_0(1)$.

La figure 3.5, montre aussi l'efficacité de notre calcul approximatif pour cet exemple, avec $a_0 = 10$ et $N = 100$. On note que l'erreur relative de

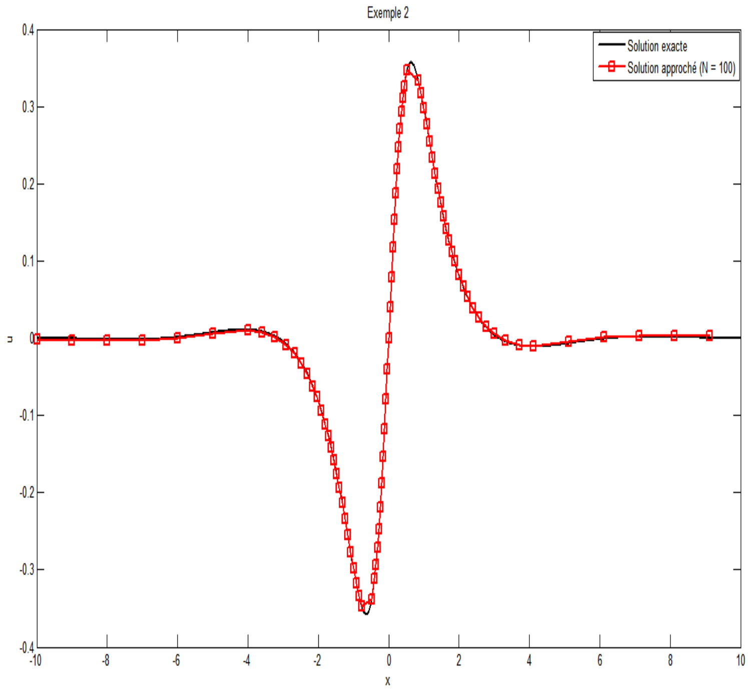

FIGURE 3.4 – La solution exacte et la solution approchè du deuxième exemple

la solution dans l'espace pondéré est de l'ordre $N^{-1.15}$. Alors que l'erreur relative du gradient est de l'ordre de $\sqrt{N}$. Ce fait n'est pas inconsistant avec le résultat du théorème 9 puisque la solution n'est pas suffisamment régulière.

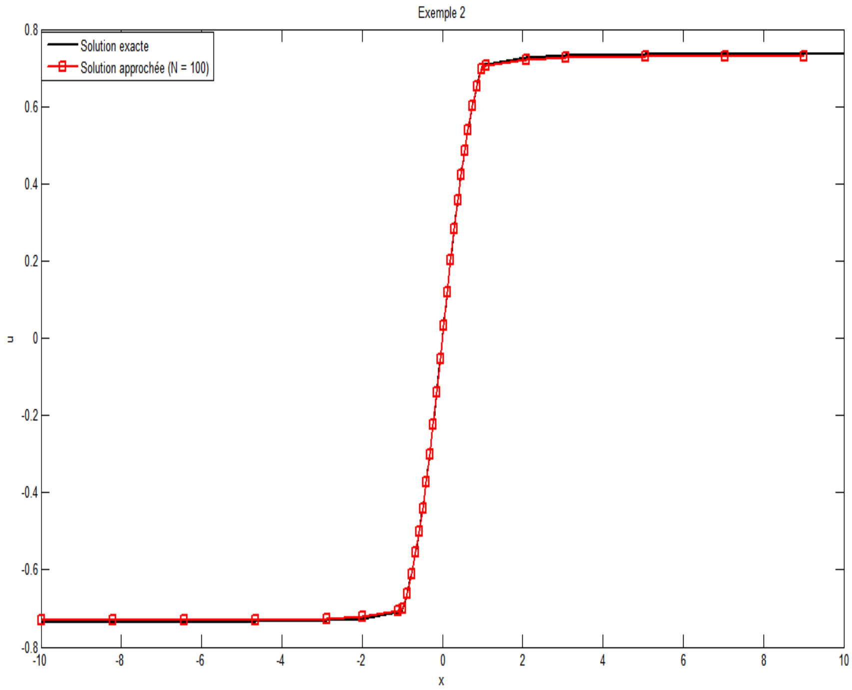

Figure 3.5 – Solution exacte et solution approché du 3 exemple

Bibliographie.

Bibliographie

[1] F.Alliot, *Etude des équations stationnaires de Stokes et Navier-Stokes dans des domaines extérieurs,*PHD. Thesis, Ecole Nationale des ponts et chaussées, frances 1998

[2] F. Alliot, C. Amrouche, *The Stokes problem in* $\mathbf{R}^n$ *:an aproch in weighted Sobolev spaces,* Math. Models Methods Appl. Sci, **9** (1999), 723-754.

[3] C. Amrouche, V. Girault and J. Giroire, *Weighted Sobolev spaces for Laplace's equation in* $\mathbf{R}^n$, J. Math. Pures Appl. (9), **73** (1994), 579–606.

[4] N.Abada, T.Boulmezaoud, *The Stokes flow around a rotating body in an unbounded region,* Journal of the mathematical Society of the Japan.

[5] N. Arar,T.Z Boulmezaoud *Eigenfunction of a weighted Laplace operator in the whole space* , Journal of Mathematical Analysis and applications

[6] T. Z. Boulmezaoud, *On the Stokes system and on the biharmonic equation in the half-space : an approach via weighted Sobolev spaces,* Math. Methods Appl.Sci, **25**(2002) 373-398

[7] T. Z. Boulmezaoud, M. Mejden, *Weighted* L^p *theory of the Stokes and the bilaplacian operators in the half-space,* J. Math. Anal. Appl, **342**(2008), 220-245.

[8] T. Z. Boulmezaoud and M. Medjden, *Vorticity-vector potential formulations of the Stokes equations in the half-space*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, **28** (2005), 903–915.

[9] T. Z. Boulmezaoud, *Espaces de Sobolev avec poids pour l'équation de Laplace dans le demi-espace*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Série I Mathématiques, **328** (1999), 221–226.

[10] T. Z. Boulmezaoud, *On the Laplace operator and on the vector potential problems in the half-space : An approach using weighted spaces*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, **26** (2003), 633–669.

[11] T. Z. Boulmezaoud and U. Razafison, *On the steady Oseen problem in the whole space*, Hiroshima Mathematical Journal, **35** (2005), 371–401.

[12] L. cattabriga. *Su un problema al contromo relativo al sistema di equazioni di stokes.Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **31**(1961), 308-340.

[13] R. Farwig and H. Sohr, *An approach to resolvent estimates for the Stokes equations in L^q-spaces, In "The Navier-Stokes Equations II– Theory and Numerical Methods" (Oberwolfach, 1991)*, Lecture Notes in Math., **1530**, Springer, Berlin, (1992), 97–110.

[14] R. Farwig *On the stationary Oseen equations withthe nonvanishing divergence in exterior domains of $\mathbf{R}^3$,*In Developments in partial differential equations and applications to mathematical phisics (ferrara, 1991), Plenum, New York (1992), 231-233.

[15] R. Farwig, *The stationary exterior 3D-problem of Oseen and Navier-Stokes equations in anisotropically weitghed Sobolev spaces,* Math. Z,**211**(1992), 409-447.

[16] R. Farwig, T. Hishida, *Stationary Navier-Stokesflow around a rotating obstcle,* Funkcial. Ekvac, **50**(2007), 371-403.

[17] R. Farwig, T. Hishida, D. Muller, *L^q-theory of a singular "winding" integral operator arising from fluid dynamics,* Pacific J. Math, **215**(2004), 297-312.

[18] R. Farwig, M. Krbec, vS. Nevcasova, *A weighted L^q-approach to Stokes flow around a rotating body,* Ann. Univ. FerraraSez VII Sci. Mat, **54**(2008), 61-84.

[19] G. P. Galdi, *Steady flow of a Navier-Stokes fluid around a rotating obstacle,* J. Elasticity, **71**(2003),1-31.

[20] J. Giroire, "Etude de Quelques Problèmes aux Limites Extérieurs et Résolution par Équations Intégrales," Thèse de Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1987.

[21] V. Girault, *The gradient, divergence, curl and Stokes operators in weighted Sobolev spaces of $\mathbf{R}^3$,* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., **39** (1992), 279–307.

[22] V. Girault, A Sequeria, *A well-posed problem for the exterior Stokes equations in two and three dimensions,* Arch. Rational Mech. Anal, **114**(1991), 313-333.

[23] B. Hanouzet, *Espaces de Sobolev avec poids application au problème de Dirichlet dans un demi espace*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **46** (1971), 227–272.

[24] T. Hishida, *L^q estimates of weak solutions to the stationary Stokes equations around a rotating body,* J. Math. Soc. Japan, **58**(2006), 743-767.

[25] J. G. Heywood, *Classical solutions of the Navier-Stokes equations*, In "Approximation Methods for Navier-Stokes Problems" (Proc. Sympos., Univ. Paderborn, Paderborn, 1979), Lecture Notes in Math., **771**, Springer, Berlin-New York, (1980), 235–248.

[26] V. A. Kondrat'ev, *Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points*, Trudy Moskov. Mat. Ob$\boldsymbol{v}$s$\boldsymbol{v}$c., **16** (1967), 209–292.

[27] Stanislav Kravcmar, Antonin Novotny, Milan Pokorny, *Estimates of oseen kernels in weighted L^q spaces,* J. Math. Soc. Japan, **53**(2001), 59-111.

[28] A. Kufner, "Weighted Sobolev Spaces," A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1985.

[29] V. G. Maz'ya and B. A. Plamenevskii, *Weighted spaces with inhomogeneous norms, and boundary value problems in domains with conical points*, In "Elliptische Differentialgleichungen" (Meeting, Rostock, 1977), 161–190, Wilhelm-Pieck-Univ., Rostock, 1978.

Summary

The objective of this thesis are mutliple. The first objective is to prove some functional properties of a family of weighted Sobolev spaces. In particular, we prove some useful identities concerning these spaces and we compare some of them. The second objective is to study a system of Navier-Stokes equations which describe the motion of a fluid around a rotating obstacle. And finally, we propose a new spectral method for solving elliptic problems in the whole space. The method is based on the use of an appropriate family of rational functions.

Key words : unbounded domains, Weighted Sobolev spaces, Navier-Stokes equations

Résumé

Les objectifs de cette thèse sont mutliples. On s'intéresse dans un premier temps à quelques propriétés fonctionnelles d'une famille d'espaces de Sobolev à poids et on montre en particulier une série d'identités comparant ces espaces. Ensuite, on s'intéresse à un système d'équations aux dérivées partielles de type Navier-Stokes. Ce système est issu de la description du mouvement d'un fluide autour d'un obstacle tournant. Enfin, nous proposons une méthode numérique basée sur l'utilisation de fonctions rationnelles pour approcher les solutions d'équations aux dérivées partielles elliptique dans tout l'espace.

Mots clés : Domaine non borné, Espaces de Sobolev à poids, Equations de Navier-Stokes.

تلخيص

الأهداف في هذه الأطروحة متعدّدة. صببنا اهتمامنا في بادئ الأمر بدراسة بعض الخواص الدّاليّة لعائلة من فضآت سوبولاف بثقل حيث توصّلنا إلى إثبات مساواة بين هذه الفضآت. تركّز الهدف الثّاني على دراسة جملة من المعادلات التّفاضليّة الجزئية من شكل نافيي ـ ستوكس والتي تصف حركة سائل أو غاز في وجود حاجز بحالة دوران. أخيرا قمنا باقتراح طريقة عددية تعتمد على استعمال الدّوال الكسريّة لتقريب حلول معادلات تفاضليّة جزئيّة اهليجيّة معرّفة على الفضاء كله.

.

كلمات البحث: ميادين غير محدودة، فضاءات سوبولاف بثقل ، معادلات نافي ـ ستوكس.