

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Constantine 1  
Faculté des Sciences exactes  
Département de *Mathématiques*

N° d'ordre .....  
N° de série .....

# THÈSE

En vue de l'obtention du diplôme de  
DOCTORAT EN SCIENCES

*Option*  
Équations Différentielles

*Thème*

Résolution de problèmes elliptiques en  
domaines non bornés

Présentée par

**Nouria ARAR**

devant le jury composé de

Présidente :	<b>F. MESSACI</b>	<i>Université Constantine 1.</i>
Directeur de Thèse :	<b>T.Z. BOULMEZAOUD</b>	<i>Université de Versailles, France.</i>
Examineurs :	<b>A. BENAÏSSA</b>	<i>Université Djillali Liabès, S.B.A.</i>
	<b>S. BENHADID</b>	<i>Université Constantine 1.</i>
	<b>B. TENIOU</b>	<i>Université Constantine 1.</i>
	<b>D. TENIOU</b>	<i>Université S.T.H.B., Alger.</i>

**Soutenue le 17/06/2013**

*Louange à Dieu, qui m'a donné la force et la patience, pour accomplir ce modeste travail.*

---

# Dédicace

---

À la mémoire de ma mère.

À mon père.

À mes frères et soeurs.

---

# Remerciements

---

En préambule à ce mémoire, je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui ont contribué de loin ou de près à l'élaboration de cette recherche.

Je tiens d'abord à remercier très chaleureusement mon directeur de recherche, Monsieur **Tahar Zamène BOULMEZAOUD**, sachant que tout ce que je dirais ne sera jamais assez suffisant, pour le remercier comme il se doit, en premier pour la confiance qu'il m'a accordé et accepté de m'encadrer malgré les contraintes de l'encadrement à distance, ensuite pour son aide, sa disponibilité, sa compréhension, ses encouragements, et le temps qu'il a consacré pour faire aboutir ma thèse à sa fin.

Mes vifs remerciements vont également au professeur **Fatiha MESSACI** pour avoir accepté de présider le jury de soutenance, ainsi qu'aux honorables membres du jury, les professeurs, **Abbès BENAÏSSA**, **Samir BENHADID**, **Boudjemmaa TENIOU**, et **Djamel TENIOU**, pour l'intérêt particulier qu'ils ont porté à ma recherche en acceptant d'examiner mon travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Je remercie aussi l'ensemble de mes amies et collègues qui m'ont toujours encouragé et aidé à chaque fois que j'avais besoin d'eux.

Je tiens à remercier toutes les personnes que j'ai rencontré durant tous mes stages à Paris, spécialement **Nadia** et **Salim BOUEDDINE**, qui ont tout fait pour rendre mon séjour facile et agréable.

Je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude et ma plus grande reconnaissance envers ma famille, et surtout mon père pour son soutien, sa patience et ses encouragements à aller le plus loin possible dans mes études.

Merci à tous et à toutes.

---

# Table des matières

---

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Rappels à propos des espaces de Sobolev à poids</b>	<b>5</b>
1.1 Définitions et notations . . . . .	5
1.2 Inégalités de Hardy. Equation de Laplace . . . . .	8
1.3 Une injection compacte . . . . .	9
<b>2 Fonctions propres rationnelles de l'opérateur de Laplace pondéré</b>	<b>14</b>
2.1 Préliminaires . . . . .	14
2.2 Spectre d'un Laplacien pondéré . . . . .	15
2.2.1 Premier résultat principal . . . . .	16
2.3 Projection stéréographique et fonctions propres . . . . .	22
2.4 Propriétés supplémentaires . . . . .	40
2.4.1 Des fonctions propres rationnelles . . . . .	41
2.4.2 Quelques expressions des fonctions propres du Laplacien pondéré . . . . .	43
<b>3 Approximation spectrale de problèmes elliptiques dans des domaines non bornés</b>	<b>47</b>
3.1 Position du problème et hypothèses . . . . .	47
3.2 Formulation variationnelle . . . . .	49
3.3 Discrétisation . . . . .	53
3.4 La matrice de rigidité . . . . .	59
3.4.1 Cas de l'équation de Poisson . . . . .	64
3.4.2 Le cas bidimensionnel . . . . .	67
3.4.3 Le cas unidimensionnel . . . . .	67
3.5 Implémentation du cas unidimensionnel . . . . .	71
3.6 Résultats numériques . . . . .	72

---

<b>4</b>	<b>Méthode des éléments finis inversés pour l'équation de Helmholtz</b>	<b>80</b>
4.1	Deux méthodes numériques existantes en domaines non bornés . . .	81
4.1.1	Méthodes des éléments infinis . . . . .	81
4.1.2	Méthode de la représentation intégrale . . . . .	89
4.2	Méthode des éléments finis inversés (BIFEM) et équation de Helmholtz . . . . .	94
4.2.1	Présentation de la méthode BIFEM . . . . .	94
4.2.2	Résolution de l'équation de Helmholtz à l'extérieur d'un domaine . . . . .	99
4.2.3	Reformulation de l'équation de Helmholtz et méthode BIFEM	101
<b>A</b>	<b>Annexe</b>	<b>112</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>115</b>

## Introduction

---

# Introduction

---

Une grande classe de problèmes rencontrés en ingénierie tels que l'acoustique, l'électromagnétisme, la mécanique des fluides, la chimie quantique et l'astrophysique mènent à des systèmes d'équations aux dérivées partielles dans des domaines non bornés. On entend par domaine non borné un domaine tel que l'espace tout entier  $\mathbb{R}^n$ , un domaine extérieur, (i.e. le complémentaire d'un compact de  $\mathbb{R}^n$ ) ou le demi-espace  $\mathbb{R}_+^n$ . Par conséquent la conception de méthodes numériques convenables est d'une importance cruciale pour la résolution de tels systèmes. La difficulté principale réside dans le comportement des solutions à l'infini. Parmi les méthodes numériques qui ont été conçues pour contourner cette difficulté on cite

- les méthodes utilisant une frontière artificielle placée suffisamment loin avec des conditions aux limites adéquates {[6], [7]}.
- les méthodes qui reposent sur une représentation intégrale de la solution et l'utilisation des éléments finis frontières {[65], [63], [45], [55], [67], [32], [44]}.
- la méthode des éléments finis qui consiste à développer la solution en série convergente sur une base adéquate {[10], [26], [42], [43], [36], [53]}.
- La méthode des éléments finis inversés (BIFEM) [17], qui repose sur la subdivision du domaine en deux sous-domaines, le premier borné où on peut utiliser les éléments finis standards et le second non borné qu'on peut ramener à un domaine borné par une inversion adéquate.

L'avantage de la méthode des éléments finis inversés par rapport aux précédentes est qu'il n'y a aucune frontière artificielle. De plus, la méthode est quasiment indépendante par rapport au problème traité. Elle est aussi applicable à des domaines de type demi-espace, des domaines extérieurs et même tout l'espace.

Une autre classe de méthodes non citées ici est celle des méthodes spectrales, comme celles utilisant les fonctions gaussiennes en chimie quantique.



Les objectifs de cette thèse sont multiples. L'un de ces objectifs est l'utilisation de la méthode des éléments finis inversés (notée BIFEM<sup>1</sup>) pour résoudre une équation de type Helmholtz. Un autre objectif est la proposition d'une nouvelle méthode spectrale reposant sur l'utilisation de fonctions rationnelles multi-dimensionnelles d'un type approprié. Cette méthode utilise des fonctions que nous avons découvert lors de l'étude du spectre d'un laplacien pondéré.

Dans toute la thèse, le cadre fonctionnel choisi repose sur l'utilisation d'espaces de Sobolev à poids pour décrire la décroissance ou la croissance des fonctions à l'infini. Ces espaces ont été très largement utilisés pour l'étude des problèmes elliptiques ou issus de la mécanique des fluides dans des domaines tels que l'espace tout entier, le demi-espace ou les domaines extérieurs.

Ces espaces sont en général composés de fonctions  $u$ , vérifiant des conditions de la forme

$$\int_{\Omega} \langle x \rangle^{(\alpha-m+|\lambda|)p} |\partial^{\lambda} u|^p dx < \infty$$

pour des dérivées d'ordre  $|\lambda| \leq m$ . Ici  $\langle x \rangle$  désigne le poids de base

$$\langle x \rangle = (|x|^2 + 1)^{1/2}.$$

On observe que  $\langle x \rangle \sim |x|$  quand  $|x| \rightarrow +\infty$ . La constante 1 est ajoutée afin que l'espace ne dépende pas du choix de l'origine.

Ces poids sont parfois modifiés dans des cas critiques, notamment en dimension 2 quand  $p = 2$ . On les multiplie à des ordres précis par des puissances supplémentaires du poids logarithmique

$$\langle\langle x \rangle\rangle = \log(|x|^2 + 2).$$

Cette modification est faite dans le but de pallier à certaines difficultés, notamment l'invalidité de l'inégalité dite de Hardy, qui permet d'étendre l'inégalité de Poincaré à des domaines non bornés.

Le premier chapitre est dédié aux notations, définitions et propriétés des espaces de Sobolev à poids utilisés tout au long de cette thèse. La plupart de ces propriétés sont déjà connues dans la littérature. Elles seront énoncées sans démonstration. Néanmoins, on démontre un résultat de compacité qui nous sera utile par la suite.

Dans le second chapitre, on va s'intéresser particulièrement à l'opérateur de Laplace pondéré  $\varrho^{-1}\Delta$  dans l'espace  $\mathbb{R}^n$  tout entier. on décrit son spectre sous certaines conditions sur  $\varrho^{-1}$  et on donne une expression explicite des valeurs propres

---

1. cette abréviation vient de la concaténation de lettre B, comme Boulmezaoud, et de IFEM, comme Inverted Finite Element Method. L'appellation IFEM est déjà employée pour une autre méthode en mécanique des fluides, dite Immersed Finite Element Method.

---

et fonctions propres quand  $\varrho^{-1} = (|x|^2 + 1)^2$  au moyen des harmoniques sphériques, formant ainsi une base orthogonale dans l'espace  $W_{-2}^0(\mathbb{R}^n)$ . Ce chapitre a fait l'objet d'une publication dans "*Journal of Mathematical Analysis and Applications*".

Le troisième chapitre sera consacré à une méthode d'approximation spectrale des problèmes elliptiques du second ordre dans l'espace  $\mathbb{R}^n$  tout entier en utilisant la base de fonctions propres construite dans le chapitre deux. On terminera ce chapitre par des détails d'implémentation de la méthode dans le cas unidimensionnel.

Au quatrième chapitre, on va tout d'abord rappeler quelques méthodes de résolution numérique pour les équations de Laplace et Helmholtz dans un domaine extérieur, avant de décrire brièvement la méthode des éléments finis inversés. On l'adaptera ensuite à l'équation de Helmholtz dans un domaine extérieur.

## Chapitre 1

Rappels à propos des espaces de Sobolev à poids

# Chapitre 1

---

## Rappels à propos des espaces de Sobolev à poids

---

On expose dans ce chapitre la définition ainsi que les propriétés essentielles d'une famille d'espaces à poids que nous utiliserons tout au long de cette thèse. La plupart des démonstrations ne sont pas indiquées, à l'exception du lemme de compacité que nous avons nous même démontré [4].

### 1.1 Définitions et notations

Dans toute la suite,  $\mathbb{R}^n$  désigne l'espace euclidien de dimension  $n$ , avec  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{R}_+^n$  le demi-espace supérieur de  $\mathbb{R}^n$  défini par

$$\mathbb{R}_+^n = \{(x', x_n) = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}.$$

Pour  $s \in \mathbb{R}$ , on note indifféremment  $[s]$  ou  $E(s)$  sa partie entière. Pour tout réel  $p > 1$ , on note  $p'$  son conjugué défini par la relation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

si  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  est un  $n$ -uplet d'entiers naturels et  $x = (x_1, \dots, x_n)$  un point typique de  $\mathbb{R}^n$ , on note  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ,  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ ,  $|x| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$  et

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

On note  $L^p(\Omega)$  l'espace de Lebesgue des (classes de) fonctions mesurables de puissance  $p^{\text{ième}}$  intégrables sur  $\Omega$ , muni de la norme usuelle  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$  (ou  $\|\cdot\|_p$  en l'absence d'ambiguïté), définie par

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Etant donné un espace de Banach  $B$ , de dual  $B'$ , un sous-espace fermé  $Y$  de  $B$  et un sous-espace  $H$  de  $B'$ , la notation  $H \perp Y$  désignera le sous espace de  $B'$  défini par

$$H \perp Y = \{f \in H; \forall v \in Y \langle f, v \rangle = 0\}.$$

Soit  $\ell$  un entier. Dans la suite  $\mathbb{P}_{\ell}$  désigne l'espace des polynômes à variables dans  $\mathbb{R}^n$  de degré total inférieur ou égal à  $\ell$ , avec la convention  $\mathbb{P}_{\ell} = \{0\}$  quand  $\ell$  est strictement négatif. On pose

$$\mathbb{P}_{\ell}^{\Delta} = \{q \in \mathbb{P}_{\ell} | \Delta q = 0\}.$$

La notation  $a(u) \lesssim b(u)$  où  $a(u)$  et  $b(u)$  sont des quantités qui dépendent d'une fonction  $u$ , signifie qu'il existe une constante  $c$ , indépendante de  $u$ , telle que  $a(u) \leq cb(u)$  pour toute fonction  $u$ .

On considère maintenant les poids de base

$$\langle x \rangle = (|x|^2 + 1)^{1/2}, \quad \langle\langle x \rangle\rangle = \log(|x|^2 + 2).$$

Pour tout ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  (typiquement non borné),  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $1 < p < \infty$ ,  $m \in \mathbb{N}$  on définit l'espace de Sobolev à poids  $W_{\alpha}^{m,p}(\Omega)$  par

$$W_{\alpha}^{m,p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega); \forall \lambda \in \mathbb{N}^n, 0 \leq |\lambda| \leq m, \langle x \rangle^{\alpha-m+|\lambda|} D^{\lambda} u \in L^p(\Omega)\}.$$

Cet espace est un Banach doté de la norme

$$\|u\|_{W_{\alpha}^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\lambda| \leq m} \|\langle x \rangle^{\alpha-m+|\lambda|} D^{\lambda} u\|_p^p \right)^{1/p}.$$

C'est un espace de Hilbert quand  $p = 2$ . On écrit  $W_{\alpha}^m(\Omega)$  au lieu de  $W_{\alpha}^{m,2}(\Omega)$  dans ce cas.

Cette définition sera utilisée, ici essentiellement dans les cas où

$$\frac{n}{p} + \alpha \notin \{1, \dots, m\}$$

Dans le cas contraire, c'est à dire quand  $n/p + \alpha \in \{1, \dots, m\}$ , comme par exemple quand  $n = 2$  et  $p = 2$ , on ajoute un poids logarithmique. Afin de ne pas alourdir

l'exposé ici, nous n'allons pas exposer ces cas. Néanmoins, nous introduirons ces modifications quand cela s'avère nécessaire, notamment dans le cas  $n = 2$ .

Dans cette thèse le domaine  $\Omega$  est soit l'espace tout entier  $\mathbb{R}^n$ , soit un domaine extérieur du type  $\mathbb{R}^n \setminus \omega$ , où  $\omega$  est borné, ou un demi-espace. Observons que dans tous les cas, les propriétés locales des fonctions appartenant aux espaces  $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$  coïncident avec celles vivant dans des espaces de Sobolev classiques. Ainsi, dans le cas d'un domaine extérieur ayant une frontière compacte  $\partial\Omega$ , les théorèmes de traces classiques pour les espaces de Sobolev dans un domaine borné [1] resteront valables dans  $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ .

Ces espaces ont été utilisés Hanouzet [49], Kufner [54], Giroire [44], Amrouche, Girault et Giroire [2, 3], ou Boulmezaoud [12, 14, 16, 17].

Enumérons maintenant quelques propriétés fondamentales

1. On a les inclusions continues suivantes

$$W_\alpha^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W_{\alpha-1}^{m-1,p}(\Omega) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow W_{\alpha-m}^{0,p}(\Omega).$$

2. Pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ ; c'est à dire  $\varphi$  restriction à  $\Omega$  d'une fonction de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , l'application  $u \mapsto \varphi u$  est linéaire et continue de  $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$  dans  $W^{m,p}(\Omega)$ .

3.  $\mathbb{P}_\ell \subset W_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)$  quand

$$\ell < m - k - \frac{n}{p}.$$

4.  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ .
5.  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  est dense dans  $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$  quand  $\Omega$  est un demi-espace ou un domaine extérieur lipschitsien.
6. Pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  l'application  $u \mapsto \langle x \rangle^\beta u$ , est un isomorphisme de  $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$  dans  $W_{\alpha-\beta}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ . L'application  $u \mapsto \langle x \rangle^{-\beta} u$  est l'isomorphisme inverse.
7. L'application  $u \mapsto D^\lambda u$  est linéaire et continue de  $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$  dans  $W_\alpha^{m-|\lambda|,p}(\Omega)$  pour tout multi-indice  $\lambda$  avec  $|\lambda| \leq m$ .
8.  $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$  coïncide algébriquement et topologiquement avec l'espace des restrictions à  $\mathbb{R}_+^n$  des fonctions de  $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ .

On note  $\overset{\circ}{W}_\alpha^{m,p}(\Omega)$  l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ , et on note  $W_{-\alpha}^{-m,p}(\Omega)$  son dual. Ainsi puisque  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ , on a  $\overset{\circ}{W}_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ . Dans le cas du demi espace, on dispose du théorème de trace suivant. On renvoie à [49] pour la définition des espaces de Sobolev d'ordre réel.

**Théorème 1.1** *Il existe une application linéaire continue  $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1})$  de  $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$  dans  $\prod_{j=0}^{m-1} W_\alpha^{m-j-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})$  avec les propriétés suivantes*

– Pour  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^n)$ ,

$$\gamma u = (u(x', 0), \frac{\partial u}{\partial y}(x', 0), \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial y^{m-1}}(x', 0))$$

–  $\gamma$  est une application surjective.

–  $\gamma^{-1}(0) = \overset{\circ}{W}_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$ .

**Remarque.** On peut aussi comparer les espaces  $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$  avec les espaces dits homogènes. On renvoie à [49] pour cette comparaison.

## 1.2 Inégalités de Hardy. Equation de Laplace

Les inégalités de Hardy jouent un rôle particulièrement important dans les espaces à poids, notamment pour étendre des inégalités de type Poincaré ou Poincaré-Wirtinger ou encore de Deny-Lions à des domaines non bornés. On cite ici les inégalités suivantes et on renvoie à [44], [2] ou [16] pour la preuve.

**Lemme 1.2** (*Inégalité de Hardy*)

Soit  $f \in \mathcal{D}(]A, \infty[)$ , on a

– si  $\beta \neq -1$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$  et  $A \geq \exp\left(\frac{2|\gamma|}{|\beta+1|}\right)$

$$\int_A^\infty |f(t)|^2 t^\beta (\log t)^\gamma dt \leq \left(\frac{4}{|\beta+1|}\right)^2 \int_A^\infty \left|\frac{df}{dt}\right|^2 t^{\beta+2} (\log t)^\gamma dt$$

– si  $\gamma \neq -1$  et  $A \geq 1$

$$\int_A^\infty |f(t)|^2 \frac{1}{t} (\log t)^\gamma dt \leq \left(\frac{2}{|\gamma+1|}\right)^2 \int_A^\infty \left|\frac{df}{dt}\right|^2 t (\log t)^{\gamma+2} dt$$

– si  $\beta \neq -1$

$$\int_A^\infty |f(t)|^2 t^\beta dt \leq \left(\frac{2}{|\beta+1|}\right)^2 \int_A^\infty \left|\frac{df}{dt}\right|^2 t^{\beta+2} dt$$

Voici une conséquence importante de ces inégalités.

**Corollaire 1.3** Soit  $\Omega = \mathbb{R}_+^n$  ou  $\mathbb{R}^n \setminus \omega$ , où  $\omega$  est un domaine borné non vide et lipschitzien. On suppose que

$$\frac{n}{p} + \alpha \notin \{1, \dots, m\}.$$

Alors, il existe une constante  $C_1 > 0$  telle que

$$\forall u \in \mathring{W}_\alpha^{m,p}(\Omega), \|u\|_{\mathring{W}_\alpha^{m,p}(\Omega)} \leq C_1 |u|_{m,\alpha,\Omega},$$

où

$$|u|_{m,\alpha,\Omega} = \left( \sum_{|\lambda|=m} \|\langle x \rangle^\alpha D^\lambda u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

Le résultat suivant concernant l'équation de Laplace s'obtient en combinant ces inégalités avec des outils d'analyse fonctionnelle. Il est dû à plusieurs auteurs (Cantor [29], McOwen [58, 59], Fortunato [40], et [44]). Une extension au cas non hilbertien  $p \neq 2$  est due à Amrouche, Girault et Giroire [2].

**Théorème 1.4** Soit  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $n/2 \notin \{1, \dots, |k| + 1\}$ . Ainsi,  $\Delta$  est un isomorphisme de  $W_{m+k}^{m+1}(\mathbb{R}^n) / \mathbb{P}_{-[k+n/2]}^\Delta$  dans  $W_{m+k}^{m-1}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{-[-k+n/2]}^\Delta$  pour tout entier  $m \geq 0$ .

Dans ce théorème  $W_{m+k}^{m-1}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{-[-k+n/2]}^\Delta$ , désigne l'espace de toutes les fonctions satisfaisant la condition

$$\forall p \in \mathbb{P}_{-[-k+n/2]}^\Delta, \langle f, p \rangle = 0$$

## 1.3 Une injection compacte

Notre but ici est de prouver le lemme [4] suivant, qui étend le théorème de Rellich aux espaces  $W_\alpha^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ .

**Lemme 1.5** Soient  $\alpha, \eta, p > 1$  et  $q > 1$  quatre réels tels que

$$0 < \frac{n}{p} - \frac{n}{q} + 1 < \alpha - \eta \tag{1.1}$$

Alors, l'injection  $W_\alpha^{1,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_\eta^{0,p}(\mathbb{R}^n)$  est compacte.

**Preuve.** Pour la démonstration de ce lemme distinguons deux cas



**Le cas  $q \neq n$  :** Montrons que la boule unité de  $W_\alpha^{1,q}(\mathbb{R}^n)$  est pré-compacte dans  $W_\eta^{0,p}(\mathbb{R}^n)$  i.e. de toute suite bornée dans  $W_\alpha^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ , on peut extraire une sous suite convergente dans  $W_\eta^{0,p}(\mathbb{R}^n)$ .

Soit alors  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $W_\alpha^{1,q}(\mathbb{R}^n)$  telle que

$$\|f_n\|_{W_\alpha^{1,q}(\mathbb{R}^n)} \leq 1; \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Puisque l'espace  $W_\alpha^{1,q}(\mathbb{R}^n)$  est réflexif, il existe une suite qu'on note encore  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  telle que

$$f_n \rightharpoonup f \text{ dans } W_\alpha^{1,q}(\mathbb{R}^n).$$

La semi-continuité inférieure de la norme donne

$$\|f\|_{W_\alpha^{1,q}(\mathbb{R}^n)} \leq \liminf_n \|f_n\|_{W_\alpha^{1,q}(\mathbb{R}^n)} \leq 1.$$

Soit  $\chi$  une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  fixée et satisfaisant

$$\chi(x) = 1 \text{ pour } |x| \leq 1, \chi(x) = 0 \text{ pour } |x| \geq 2.$$

On se donne un réel fixé  $R > 0$ , on désigne par  $\chi_R$  la fonction définie par

$$\chi_R(x) = \chi\left(\frac{x}{R}\right), x \in \mathbb{R}^n.$$

Constatons que,  $|\chi_R(x)|^q \leq c_1(R)$ .

On peut écrire

$$f_n = \chi_R f_n + (1 - \chi_R) f_n, \text{ pour } n \geq 0.$$

La suite  $\{\chi_R f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans l'espace de Sobolev usuel  $W^{1,q}(B_{2R})$ ;  $B_{2R} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 2R\}$ . En fait, on a

$$\begin{aligned} \|\chi_R f_n\|_{W^{1,q}(B_{2R})}^q &\leq c_1(R) \int_{B_{2R}} |f_n(x)|^q dx \\ &\leq c_1(R) \|f_n\|_{W^{1,q}(B_{2R})}^q \\ &\leq c_2(R) \|f_n\|_{W_\alpha^{1,q}(B_{2R})}^q \end{aligned}$$

On conclut alors,

$$\|\chi_R f_n\|_{W^{1,q}(B_{2R})} \leq c(R),$$

où  $c_1(R) > 0$ ,  $c_2(R) > 0$  et  $c(R) > 0$  sont trois constantes qui ne dépendent que de  $R$  et  $\chi$ .

$\{\chi_R f_n\}$  étant bornée dans  $W^{1,q}(B_{2R})$ , on peut alors extraire une sous suite (notée de la même façon) faiblement convergente dans  $W^{1,q}(B_{2R})$  i.e.

$$\chi_R f_n \rightharpoonup f_R \in W^{1,q}(B_{2R}).$$

Montrons que  $\{f_n\}$  converge dans  $W^{0,p}(B_{2R})$

– **Si  $q > n$** , alors d'après le théorème de Rellich-Kondrachov, l'injection de  $W^{1,q}(B_{2R})$  dans  $W^{0,p}(B_{2R})$  est compacte, donc la suite  $\{\chi_R f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge fortement dans  $W^{0,p}(B_{2R})$  vers  $f_R \in W^{1,q}(B_{2R})$ .

– **Si  $q < n$** , la même conclusion reste valable puisque  $p$  satisfait la condition  $p \in [1, q^*[$  en vertu de l'hypothèse (1.1), avec  $q^*$  donnée par

$$\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}.$$

Observons que sur  $B_R$ ,  $1 - \chi_R = 0$ , donc  $f_R = f$  sur  $B_R$ .

Montrons maintenant que  $f_k \rightarrow f \in W_\eta^{0,p}(\mathbb{R}^n)$ .

Soit  $h_k = f - f_k$ ;  $k \geq 0$ , alors,

$$\|h_k\|_{W_\eta^{0,p}(\mathbb{R}^n)}^p = \int_{B_R} \langle x \rangle^{p\eta} |h_k|^p dx + \int_{\mathbb{R}^n - B_R} \langle x \rangle^{p\eta} |h_k|^p dx.$$

On ne s'intéressera qu'à la deuxième intégrale puisqu'on vient de montrer que  $h_k$  converge fortement vers zéro dans  $W_\eta^{0,p}(B_{2R})$ , et donc dans  $W_\eta^{0,p}(B_R)$ .

– **Quand  $q < n$** . De la condition (1.1) on sait que  $p < q^*$ . L'application de l'inégalité de Hölder à la seconde intégrale donne

$$\int_{\mathbb{R}^n - B_R} \langle x \rangle^{p\eta} |h_k|^p dx \leq \left( \int_{\mathbb{R}^n - B_R} \langle x \rangle^{(\eta-\alpha)s} dx \right)^{\frac{p}{s}} \left( \int_{\mathbb{R}^n - B_R} \langle x \rangle^{\alpha q^*} |h_k|^{q^*} dx \right)^{\frac{p}{q^*}}$$

avec  $s > 1$  choisi tel que

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{q^*} = \frac{1}{p},$$

On a  $(\eta - \alpha)s + n < 0$  grâce à la condition (1.1). Ainsi,

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n - B_R} \langle x \rangle^{(\eta-\alpha)s} dx \right)^{\frac{1}{s}} \leq C_1 R^{\eta-\alpha+\frac{n}{s}} = C_1 R^{\eta-\alpha+\frac{n}{p}-\frac{n}{q}+1}.$$

Maintenant, soit  $\epsilon > 0$ , on peut choisir  $R$  tel que

$$C_1 R^{\eta-\alpha+\frac{n}{p}-\frac{n}{q}+1} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dès que  $R$  est fixé, on peut trouver  $N_\epsilon$  tel que pour  $n \geq N_\epsilon$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n - B_R} \langle x \rangle^{p\eta} |h_n|^p dx < \frac{\epsilon}{2},$$

et puisque

$$\int_{\mathbb{R}^n - B_R} \langle x \rangle^{\alpha q^*} |h_k|^{q^*} dx < +\infty$$

en vertu de  $W_\alpha^{1,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_\alpha^{0,q^*}(\mathbb{R}^n)$  pour  $q < n$  et  $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$ .

On conclut que pour  $n \geq N_\epsilon$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x \rangle^{p\eta} |h_n|^p dx < \epsilon.$$

Ainsi,  $f_n$  converge fortement vers  $f$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

– **Quand  $q > n$ .** On pose  $\tilde{h}_k = (1 - \chi)h_k$ , pour  $k \geq 0$ . Alors, l'inégalité de Morrey appliquée à  $\langle x \rangle^\alpha \tilde{h}_k$  donne pour  $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|\langle x \rangle^\alpha \tilde{h}_k(x) - \langle y \rangle^\alpha \tilde{h}_k(y)| \leq \tilde{c}_1 |x - y|^{1-n/q} \|\nabla(\langle x \rangle^\alpha \tilde{h}_k)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

puisque  $\tilde{h}_k \in W_\alpha^{1,q}(\mathbb{R}^n)$  alors  $(\langle x \rangle^\alpha \tilde{h}_k) \in W_0^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ , de plus

$$\|\langle x \rangle^\alpha \tilde{h}_k\|_{W_0^{1,q}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\tilde{h}_k\|_{W_\alpha^{1,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

D'une autre part,  $(\langle x \rangle^\alpha \tilde{h}_k) \in W_0^{1,q}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \nabla(\langle x \rangle^\alpha \tilde{h}_k) \in W_0^{0,q}(\mathbb{R}^n)$  et

$$\|\nabla(\langle x \rangle^\alpha \tilde{h}_k)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\langle x \rangle^\alpha \tilde{h}_k\|_{W_0^{1,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

On déduit alors

$$|\langle x \rangle^\alpha \tilde{h}_k(x) - \langle y \rangle^\alpha \tilde{h}_k(y)| \leq \tilde{c}_2 |x - y|^{1-n/q} \|\tilde{h}_k\|_{W_\alpha^{1,q}(\mathbb{R}^n)},$$

où  $\tilde{c}_1$  et  $\tilde{c}_2$  sont des constantes qui ne dépendent que de  $q$  et  $n$ . Puisque  $\tilde{h}(0) = 0$ , on obtient

$$|\langle x \rangle^\alpha \tilde{h}_k(x)| \leq \tilde{c}_3 |x|^{1-n/q}$$

Ainsi, pour  $R$  suffisamment grand ( $R \geq 2$ )

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n - B_R} \langle x \rangle^{p\eta} |h_k(x)|^p dx &\leq \tilde{c}_4 \int_{\mathbb{R}^n - B_R} \langle x \rangle^{p(\eta-\alpha)} |x|^{p(1-n/q)} dx \\ &\leq \tilde{c}_5 R^{p(\eta-\alpha+1-n/q)+n}. \end{aligned}$$

puisque, d'après l'hypothèse (1.1)

$$p(\eta - \alpha + 1 - n/q) + n < 0.$$

Et on procède comme pour le cas  $q < n$  pour terminer la démonstration.

**Le cas  $q = n$  :** On a besoin de l'injection suivante, qui peut être facilement prouvée en utilisant l'inégalité de Hölder

$$W_\alpha^{1,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_\theta^{1,s}(\mathbb{R}^n), \quad (1.2)$$

pour tout réel  $s$  et  $\theta$  tel que  $1 < s < q$  et

$$\theta + \frac{n}{s} < \alpha + \frac{n}{q}. \quad (1.3)$$

Pour la preuve de (1.2) il suffit de montrer

$$W_\alpha^{0,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_\theta^{0,s}(\mathbb{R}^n), \quad (1.4)$$

car si  $u \in W_\alpha^{1,q}(\mathbb{R}^n)$  alors  $u \in W_{\alpha-1}^{0,q}(\mathbb{R}^n)$  et  $\nabla u \in W_\alpha^{0,q}(\mathbb{R}^n)$ , de plus

$$\|u\|_{W_\theta^{1,s}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|u\|_{W_\alpha^{1,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

Ainsi l'injection (1.2) est continue.

L'injection (1.4) se déduit de l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (\langle x \rangle^\theta |u|)^s dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle x \rangle^{\theta s - \alpha s + \alpha s} |u|^s dx \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} (\langle x \rangle^{\alpha s} |u|^s)^{\frac{q}{s}} dx \right)^{\frac{s}{q}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} (\langle x \rangle^{(\theta - \alpha)s})^{\frac{q}{q-s}} dx \right)^{\frac{q-s}{q}}, \end{aligned}$$

où la deuxième intégrale est finie grâce à (1.3). On a alors

$$\|u\|_{W_\theta^{0,s}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|u\|_{W_\alpha^{0,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

### **Conclusion**

Quand  $q = n$  il suffit de choisir  $s$  et  $\theta$  tels que

$$1 < \frac{n}{s} < \frac{n}{p} + 1, \quad \eta + \frac{n}{p} + 1 < \theta + \frac{n}{s} < \alpha + \frac{n}{q}.$$

Pour avoir

$$W_\alpha^{1,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_\theta^{1,s}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_\eta^{0,p}(\mathbb{R}^n),$$

où la première injection est continue et la seconde compacte. Ainsi l'injection

$$W_\alpha^{1,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_\eta^{0,p}(\mathbb{R}^n),$$

est compacte.

■

## Chapitre 2

### Fonctions propres rationnelles de l'opérateur de Laplace pondéré

## Chapitre 2

---

# Fonctions propres rationnelles de l'opérateur de Laplace pondéré

---

L'objectif de ce chapitre est l'étude du spectre de l'opérateur de Laplace pondéré  $\varrho^{-1}\Delta$  dans l'espace  $\mathbb{R}^n$  tout entier. On va montrer qu'il est discret sous certaines conditions sur  $\varrho^{-1}$ , et on va dériver une formule explicite des valeurs et fonctions propres quand  $\varrho^{-1} = (|x|^2 + 1)^2$ . On obtiendra ainsi une famille complète de fonctions rationnelles deux à deux orthogonales dans l'espace  $L^2$  pondéré. Il a fait l'objet d'un article paru dans *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 400, Issue 1, p. 161-173 (2013).

Le chapitre est organisé comme suit. La section 2.1 contient des préliminaires. La section 2.2 est consacrée au premier résultat concernant l'existence du spectre discret de l'opérateur  $\varrho^{-1}\Delta$ , sous certaines conditions sur  $\varrho$ . Dans la section 2.3, une expression des valeurs et fonctions propres de l'opérateur  $(|x|^2 + 1)^2\Delta$  est dérivée par le biais de la projection stéréographique. Dans la section 2.4, on donne quelques propriétés importantes des fonctions propres obtenues.

### 2.1 Préliminaires

On considère le problème spectral suivant

$$-\Delta u = \lambda \varrho u \text{ dans } \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

où  $\varrho$  est une fonction donnée et  $\Delta$  est l'opérateur de Laplace. Notre premier objectif est de montrer que le problème (2.1), sous certaines conditions de décroissance de

$\varrho$  à l'infini, possède une famille infinie de fonctions propres satisfaisant

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^2}{|x|^2 + 1} dx < +\infty, \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx < +\infty.$$

Notre seconde attention est concentrée au cas particulier  $\varrho(x) = (|x|^2 + 1)^{-2}$  où on donne une expression explicite des valeurs et fonctions propres. Ces fonctions propres ont tendance à être des fonctions rationnelles.

Les espaces de Sobolev à poids sont utilisés ici comme cadre fonctionnel pour décrire le comportement des fonctions à l'infini.

Dans la suite, à l'exception du cas bi-dimensionnel, on utilisera les espaces  $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ . Dans le cas bidimensionnel ( $n = 2$ ), on a besoin d'utiliser l'espace  $X_0^1(\mathbb{R}^2)$  composé de toutes les distributions  $u$  satisfaisant

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u|^2}{\langle x \rangle^2 \langle \langle x \rangle \rangle^2} dx < +\infty, \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 dx < +\infty.$$

Cet espace est muni de sa norme naturelle.  $X_0^{-1}(\mathbb{R}^2)$  désigne son espace dual. On observe que  $X_0^1(\mathbb{R}^2) \not\subset W_{-1}^0(\mathbb{R}^2)$ . Cependant,

$$X_0^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow W_{-\alpha}^0(\mathbb{R}^2),$$

pour  $\alpha > 1$ . Ainsi, par dualité  $W_\alpha^0(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow X_0^{-1}(\mathbb{R}^2)$ .

## 2.2 Spectre d'un Laplacien pondéré

Dans tout ce qui suit,  $\varrho$  désigne une fonction mesurable et non nulle. Pour tout réel  $s$ , on pose

$$c^*(\varrho; s) = \text{ess sup}_{\mathbb{R}^n} (|x|^2 + 1)^s \varrho(x), \quad c_*(\varrho; s) = \text{ess inf}_{\mathbb{R}^n} (|x|^2 + 1)^s \varrho(x).$$

On suppose qu'il existe un réel  $r > 1$  tel que

$$0 < c_*(\varrho; r) \leq c^*(\varrho; r) < +\infty. \quad (2.2)$$

En d'autres termes, il existe deux constantes  $c_\varrho^1 > 0$  et  $c_\varrho^2 > 0$  telles que

$$\frac{c_\varrho^1}{(|x|^2 + 1)^r} \leq \varrho(x) \leq \frac{c_\varrho^2}{(|x|^2 + 1)^r}, \quad \text{p. p. dans } \mathbb{R}^n.$$

Sous cette condition, la forme bilinéaire

$$(u, v)_\varrho = \int_{\mathbb{R}^n} \varrho u(x) \overline{v(x)} dx,$$

définit sur  $W_{-r}^0(\mathbb{R}^n)$  un nouveau produit scalaire équivalent au produit scalaire usuel, puisque

$$\forall u \in W_{-r}^0(\mathbb{R}^n), c_*(\varrho; r)\|u\|_{W_{-r}^0(\mathbb{R}^n)}^2 \leq (u, u)_\varrho \leq c^*(\varrho; r)\|u\|_{W_{-r}^0(\mathbb{R}^n)}^2. \quad (2.3)$$

où

$$W_{-r}^0(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \mid \frac{u}{\langle x \rangle^r} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

### 2.2.1 Premier résultat principal

On énonce alors le premier résultat

**Théorème 2.1** *Sous l'hypothèse (2.2), il existe une suite croissante de réels positifs  $(\lambda_k)_{k \geq 0}$  et une famille de fonctions  $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$  non nulles appartenant à  $W_0^1(\mathbb{R}^n)$  quand  $n \neq 2$  et à  $X_0^1(\mathbb{R}^n)$  quand  $n = 2$ , telles que*

$$-\Delta w_k = \lambda_k \varrho(x) w_k, \quad \text{pour tout } k \geq 0.$$

De plus,

1.  $\lambda_k \rightarrow +\infty$  quand  $k \rightarrow +\infty$ ,
2.  $\lambda_0 = 0$  si et seulement si  $n \in \{1, 2\}$ ,
3.  $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une base hilbertienne de  $W_{-r}^0(\mathbb{R}^n)$  satisfaisant les relations d'orthogonalité

$$\forall k \neq j, \int_{\mathbb{R}^n} \nabla w_k \cdot \overline{\nabla w_j} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varrho(x) w_k \cdot \overline{w_j} dx = 0.$$

4. Si  $n \geq 3$ , alors  $w_k \in W_1^2(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $k \geq 0$ .

### Preuve

1.) Il s'agit de trouver  $\lambda$  solution de l'équation

$$-\Delta u = \lambda \varrho(x) u, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.4)$$

**Si  $n \neq 2$ .** L'équation (2.4) admet la formulation variationnelle :

Chercher les valeurs  $\lambda$  pour lesquelles il existe une fonction  $u \in W_0^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $u \neq 0$ , telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} \varrho(x) u v dx \quad \text{pour tout } v \in W_0^1(\mathbb{R}^n).$$



En particulier pour  $v = u$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} \varrho(x) |u|^2 dx.$$

En vertu de (2.3) et du lemme 1.5 dans le chapitre précédent, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varrho(x) |u|^2 dx \lesssim \|u\|_{W_{-r}^0(\mathbb{R}^n)}^2 \lesssim \|u\|_{W_0^1(\mathbb{R}^n)}^2 < +\infty.$$

En plus  $\int_{\mathbb{R}^n} \varrho(x) |u|^2 dx \neq 0$  grâce à (2.3) et du fait que  $u \neq 0$ . Ainsi

$$\lambda = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^n} \varrho(x) |u|^2 dx} \geq 0. \quad (2.5)$$

**Si  $n = 2$ .** L'équation (2.4) devient

Chercher les valeurs  $\lambda$  pour lesquelles il existe une fonction  $u \in X_0^1(\mathbb{R}^2)$ ,  $u \neq 0$ , telle que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \nabla v dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^2} \varrho(x) uv dx \quad \text{pour tout } v \in X_0^1(\mathbb{R}^2).$$

Comme  $X_0^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_{-r}^0(\mathbb{R}^n)$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varrho(x) |u|^2 dx < +\infty,$$

et de même que pour le cas  $n \neq 2$ ,  $\lambda$  est donnée par la relation (2.5).

Ainsi, l'équation (2.4) admet une infinité de solutions qui constituent une suite croissante de réels positifs  $(\lambda_k)_{k \geq 0}$ , donnés par la relation (2.5).

**2.)** – Supposons que  $n \in \{1, 2\}$  et montrons que  $\lambda_0 = 0$ .

En effet, quand  $n = 1$  les constantes appartiennent à  $W_0^1(\mathbb{R}^n)$  et quand  $n = 2$  les constantes appartiennent à  $X_0^1(\mathbb{R}^2)$ , donc dans les deux cas  $\nabla u$  s'annule, on conclut alors que  $\lambda = 0$  est solution du problème (2.4).

– Montrons maintenant que si  $\lambda_0 = 0$  est solution du problème (2.4), alors  $n \in \{1, 2\}$ . Il suffit de considérer seulement le cas  $n \neq 2$ .

Si  $\lambda_0 = 0$  est solution du problème (2.4), on obtient

$$\Delta u = 0 \quad \text{avec } u \in W_0^1(\mathbb{R}^n),$$

on déduit que

$$\nabla u = 0 \Rightarrow u = \text{cste} \in W_0^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow 0 < 1 - \frac{n}{2} \Rightarrow n < 2 \Rightarrow n = 1.$$

3.) On commence par introduire l'espace

$$V_r(\mathbb{R}^n) = \{v \in W_{-r}^0(\mathbb{R}^n) \mid \int_{\mathbb{R}^n} \varrho(x)v(x)q(x)dx = 0 \text{ pour tout } q \in \mathbb{P}_{[1-n/2]}\}.$$

Observons d'abord que

**Si  $n > 2$**  alors  $\mathbb{P}_{[1-n/2]} = \{0\}$  ce qui veut dire que  $V_r(\mathbb{R}^n) = W_{-r}^0(\mathbb{R}^n)$ .

**Si  $n \in \{1, 2\}$**  alors,  $\mathbb{P}_{[1-n/2]} = \mathbb{P}_0$  et

$$V_r(\mathbb{R}^n) = \{v \in W_{-r}^0(\mathbb{R}^n) \mid \int_{\mathbb{R}^n} \varrho(x)v(x)dx = 0\}.$$

Pour la démonstration on distingue deux cas ;  $n \neq 2$  et  $n = 2$ .

**1<sup>er</sup> cas :  $n \neq 2$**  Soit une fonction  $v \in V_r(\mathbb{R}^n)$  et considérons le problème

$$-\Delta w(x) = \varrho(x)v(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.6)$$

puisque  $v \in W_{-r}^0(\mathbb{R}^n)$  alors  $\varrho(x)v(x) \in W_r^0(\mathbb{R}^n)$ .

En effet, si  $v \in W_{-r}^0(\mathbb{R}^n)$  alors  $\langle x \rangle^{-r}v \in L^2(\mathbb{R}^n)$  i.e.  $\langle x \rangle^r(\langle x \rangle^{-2r}v) \in L^2(\mathbb{R}^n)$  et puisque il existe une constante  $c_\varrho^2 > 0$ , telle que  $\varrho(x) \leq \langle x \rangle^{-2r}c_\varrho^2$  alors,

$$\langle x \rangle^r(\varrho(x)v(x)) \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

ce qui veut dire que  $\varrho(x)v \in W_r^0(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_1^0(\mathbb{R}^n)$ , on conclut que le terme à droite dans l'équation (2.6) appartient à  $W_1^0(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{[1-n/2]}$ . Ainsi d'après le Théorème 1.4, l'équation (2.6) admet une solution unique  $\bar{w} \in W_0^1(\mathbb{R}^n)/\mathbb{P}_{[1-n/2]}$ , de plus

$$\begin{aligned} \|\bar{w}\|_{W_0^1(\mathbb{R}^n)/\mathbb{P}_{[1-n/2]}} &= \inf_{p \in \mathbb{P}_{[1-n/2]}} \|\bar{w} - p\|_{W_0^1(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \|\langle x \rangle^{-2r}v\|_{W_1^0(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \|\langle x \rangle^{-2r}v\|_{W_r^0(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \|v\|_{W_{-r}^0(\mathbb{R}^n)} = \|v\|_{V_r(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

et puisque  $W_0^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_{-1}^0(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_{-r}^0(\mathbb{R}^n)$  ( $r > 1$ ), on déduit que la solution de l'équation (2.6) peut être choisie telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varrho w p dx = 0 \text{ pour tout } p \in \mathbb{P}_{[1-n/2]}, \quad (2.7)$$

qui veut dire que  $w \in V_r(\mathbb{R}^n)$  (notons que  $\int_{\mathbb{R}^n} \varrho dx \neq 0$ ).

Ainsi, on peut considérer l'opérateur

$$A_r : v \in V_r(\mathbb{R}^n) \mapsto w \in V_r(\mathbb{R}^n),$$

avec  $w \in W_0^1(\mathbb{R}^n)$  l'unique solution de (2.6) satisfaisant (2.7). Observons que  $w$  satisfait

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla w \cdot \overline{\nabla z} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varrho v \cdot \overline{z} dx \quad \text{pour tout } z \in W_0^1(\mathbb{R}^n).$$

L'opérateur  $A_r$  est linéaire et continu. Son image est donnée par

$$\mathcal{R}(A_r) = \left\{ v \in W_0^1(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} \varrho v p dx = 0 \text{ pour tout } p \in \mathbb{P}_{[1-n/2]} \right\}.$$

**Lemme 2.2** *L'opérateur  $A_r : V_r(\mathbb{R}^n) \rightarrow V_r(\mathbb{R}^n)$  est auto-adjoint, positif et compact, par rapport au produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_\varrho$ .*

**Preuve.**

- Soient  $v_i, i = 1, 2$ , deux fonctions dans  $V_r(\mathbb{R}^n)$  et posons  $w_i = A_r v_i \in W_0^1(\mathbb{R}^n); i = 1, 2$ . On a

$$\begin{aligned} (A_r v_1, v_2)_\varrho &= \int_{\mathbb{R}^n} \varrho w_1 \overline{v_2} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} w_1 \overline{(-\Delta w_2)} dx \\ &= -\langle \overline{\Delta w_2}, w_1 \rangle_{W_0^{-1}(\mathbb{R}^n), W_0^1(\mathbb{R}^n)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla w_1 \cdot \overline{\nabla w_2} dx \\ &= (v_1, A_r v_2)_\varrho. \end{aligned}$$

Il suit que l'opérateur  $A_r$  est auto-adjoint. Il est clair qu'il est positif.

- La compacité de  $A_r$  s'ensuit de la compacité de l'injection

$$W_0^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_{-r}^0(\mathbb{R}^n),$$

grâce au lemme 1.5 (voir chapitre 1).

■

De la théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints et compacts (voir [71] ou [24]), on déduit que le spectre  $\sigma(A_r)$  est un ensemble dénombrable et  $\sigma(A_r) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^{*,+}$ . De plus, il existe une famille de fonctions propres  $(w_k)_{k \geq 0}$  qui forment une base hilbertienne de  $V_r(\mathbb{R}^n)$  muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_\varrho$ . La complétion de cette famille par la fonction constante  $w_0 = 1$  quand  $n = 1$  termine la preuve du Théorème 2.1 quand  $n \neq 2$ .

**2<sup>ème</sup> cas :  $n = 2$**  Les mêmes arguments restent valables, avec quelques modifications adéquates. Le lemme suivant est une extension du Théorème 1.4 (quand  $n \neq 2$ ) au cas  $n = 2$  (voir [44] ou [2]).

**Lemme 2.3**  $\Delta$  est un isomorphisme de  $X_0^1(\mathbb{R}^2)/\mathbb{P}_{[1-n/2]}$  dans  $X_0^{-1}(\mathbb{R}^2) \perp \mathbb{P}_{[1-n/2]}$ .

De la même façon que pour le cas  $n \neq 2$ , on peut montrer que l'opérateur  $A_r$  est aussi défini, continu et compact de  $V_r(\mathbb{R}^2)$  dans lui même. En fait, les injections  $X_0^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow W_{-\epsilon}^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow W_{-r}^0(\mathbb{R}^2)$  sont vérifiées pour  $\epsilon > 0$  suffisamment petit. La dernière injection donne la compacité de  $A_r$ , en vertu du lemme 1.5.

4.) Il reste à montrer le dernier point du théorème.

D'après ce qui précède, pour  $n \geq 3$  la solution du problème (2.4),  $w_k \in W_0^1(\mathbb{R}^n)$  i.e.

$$\langle x \rangle^{-1} w_k \in L^2(\mathbb{R}^n), \text{ et } \nabla w_k \in (L^2(\mathbb{R}^n))^n.$$

Il reste à montrer que  $\langle x \rangle \Delta w_k \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . En effet,

$$-\langle x \rangle \Delta w_k = \lambda_k \langle x \rangle \varrho(x) w_k(x).$$

En vertu de (2.2), on obtient

$$\langle x \rangle^2 \varrho(x)^2 |w_k(x)|^2 \lesssim \langle x \rangle^{-4r+2} |w_k(x)|^2 \lesssim \langle x \rangle^{-2} |w_k(x)|^2; \text{ pour } r > 1.$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x \rangle^2 \varrho(x)^2 |w_k(x)|^2 dx \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \langle x \rangle^{-2} |w_k(x)|^2 dx < +\infty \quad \text{c.q.f.d.}$$

**Remarque.** Quand  $n \geq 3$ , on peut utiliser l'inégalité de Hardy

$$\forall u \in W_0^1(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^2}{|x|^2} dx \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx,$$

combinée avec la compacité de cette injection  $W_0^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_{-r}^0(\mathbb{R}^n)$  (voir [25]). Notons que selon Hanouzet [49],  $W_0^1(\mathbb{R}^n)$  peut être considéré comme étant le complété de  $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \|\nabla \cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^n)})$ .

**Corollaire 2.4** Supposons que  $n \geq 3$  et  $\varrho \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $m \geq 0$ . Supposons aussi que pour tout multi-indice  $\mu$ ,  $|\mu| \leq m$ , on a

$$|\partial^\mu \varrho(x)| \leq \frac{c_{\varrho, |\mu|}}{(|x|^2 + 1)^{r+|\mu|/2}}, \quad p. p. \text{ dans } \mathbb{R}^n, \quad (2.8)$$

où  $c_{\varrho, |\mu|}$  est une constante. Alors,  $w_k \in W_{m+1}^{m+2}(\mathbb{R}^n)$  pour  $k \geq 0$ . En particulier, si (2.8) est vérifiée pour tout  $m$ , alors  $w_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  pour  $k \geq 0$ .

**Preuve.** Soit  $w$  une fonction propre de  $A_r$  correspondante à la valeur propre  $\lambda > 0$ . Montrons par récurrence que  $w$  appartient à  $W_{\ell}^{\ell+1}(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $0 \leq \ell \leq m+1$ .

Cette assertion est vraie quand  $\ell = 0$ . Supposons maintenant que  $w \in W_{\ell}^{\ell+1}(\mathbb{R}^n)$  pour  $\ell \leq m$  et montrons que  $w \in W_{\ell+1}^{\ell+2}(\mathbb{R}^n)$ .

Si  $w \in W_{\ell}^{\ell+1}(\mathbb{R}^n)$  alors  $w \in W_{\ell-1}^{\ell}(\mathbb{R}^n)$ , on a d'autre part, pour tout multi-indice  $\mu$ ,  $|\mu| \leq \ell$ ,

$$\partial^{\mu}(\varrho w) = \sum_{\nu \leq \mu} \binom{\mu}{\nu} \partial^{\nu} \varrho \cdot \partial^{\mu-\nu} w.$$

D'après l'inégalité (2.8), on a

$$|\partial^{\nu} \varrho(x)| \leq \frac{c_{\varrho, |\nu|}}{(|x|^2 + 1)^{r+|\nu|/2}},$$

d'autre part,

$w \in W_{\ell-1}^{\ell}(\mathbb{R}^n)$  implique que  $\partial^{\mu-\nu} w \in W_{\ell-1}^{\ell-\mu+\nu}(\mathbb{R}^n)$ . Donc

$$\partial^{\nu} \varrho(x) \cdot \partial^{\mu-\nu} w \in W_{\ell-1+2r+\nu}^{\ell-\mu+\nu}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_{\ell-1+2r}^{\ell-\mu}(\mathbb{R}^n).$$

Ainsi,

$$\varrho(x)w \in W_{\ell+2r-1}^{\ell}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_{\ell+1}^{\ell}(\mathbb{R}^n).$$

Et d'après le Théorème 1.4, il existe une fonction  $\varphi \in W_{\ell+1}^{\ell+2}(\mathbb{R}^n)$  solution de l'équation de Poisson

$$-\Delta \varphi = \lambda^{-1} \varrho(x)w(x), \quad \text{dans } \mathbb{R}^n.$$

Or,  $w$  étant une fonction propre de  $A_r$ , elle vérifie  $A_r w = \lambda w$ , en plus  $A_r w$  est l'unique solution du problème (2.6), i.e.

$$-\Delta(A_r w(x)) = \varrho(x)w(x)$$

donc

$$-\Delta w(x) = \lambda^{-1} \varrho(x)w(x),$$

d'où  $-\Delta(w - \varphi) = 0$  qui veut dire que la fonction  $\phi = w - \varphi$  est harmonique et appartient à  $W_0^1(\mathbb{R}^n)$ . Il s'ensuit qu'elle est une fonction polynômiale de degré inférieur à  $1 - n/2$ . Ainsi,

$$\phi \in W_{\ell+1}^{\ell+2}(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad w = \phi + \varphi \in W_{\ell+1}^{\ell+2}(\mathbb{R}^n).$$

On conclut que  $w$  est  $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$  puisque  $\bigcap_{\ell \geq 0} W_{\ell}^{\ell+1}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ .

■

**Remarque.** Le résultat du corollaire 2.4 reste valable quand  $n = 2$  à condition de remplacer l'espace  $W_m^{m+1}(\mathbb{R}^n)$  par  $X_m^{m+1}(\mathbb{R}^2)$ , où  $X_m^{m+1}(\mathbb{R}^2)$  est composé des distributions  $u$  satisfaisant

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u|^2}{\langle x \rangle^2 \langle \langle x \rangle \rangle^2} dx < +\infty, \int_{\mathbb{R}^2} \langle x \rangle^{|\lambda|-1} |\partial^\lambda u|^2 dx < +\infty, \forall 1 \leq |\lambda| \leq m+1.$$

En particulier,  $w_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  si (2.8) a lieu pour tout  $\mu$ .

## 2.3 Projection stéréographique et fonctions propres

On s'intéresse dans cette section au cas où

$$\varrho(x) = (|x|^2 + 1)^{-2}. \quad (2.9)$$

On va dériver une forme explicite des valeurs propres  $\lambda_k$  et des fonctions propres  $w_k$ , par le biais de la projection stéréographique sur la sphère unité  $\mathbb{S}^n$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Soit  $M_0$  le point  $(0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$  et posons  $\mathbb{S}_*^n = \mathbb{S}^n - \{M_0\}$ . La projection stéréographique  $\pi$  est une bijection de  $\mathbb{S}_*^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  définie par

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{S}_*^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \xi &\longmapsto \left( \frac{\xi_1}{1 - \xi_{n+1}}, \frac{\xi_2}{1 - \xi_{n+1}}, \dots, \frac{\xi_n}{1 - \xi_{n+1}} \right). \end{aligned}$$

Son inverse  $\pi^{-1}$  est donné par

$$\pi^{-1}(y) = \left( \frac{2y_1}{|y|^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{|y|^2 + 1}, \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1} \right). \quad (2.10)$$

On renvoie à [35] pour les propriétés élémentaires de la projection stéréographique. Observons seulement qu'elle possède la propriété remarquable de conserver les angles. Par contre, elle ne conserve pas les distances ; il suffit en effet de remarquer que les distances sont bornées sur la sphère alors qu'elles ne sont pas bornées dans le plan.

Soit  $\xi \in \mathbb{S}_*^n$ , on notera par  $d(\xi)$  la distance au point  $M_0$ , définie par

$$d(\xi)^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 + (\xi_{n+1} - 1)^2.$$

Notons que

$$\forall \xi \in \mathbb{S}_*^n, d(\xi) = 2(1 + |y|^2)^{-1/2} \text{ avec } y = \pi(\xi).$$

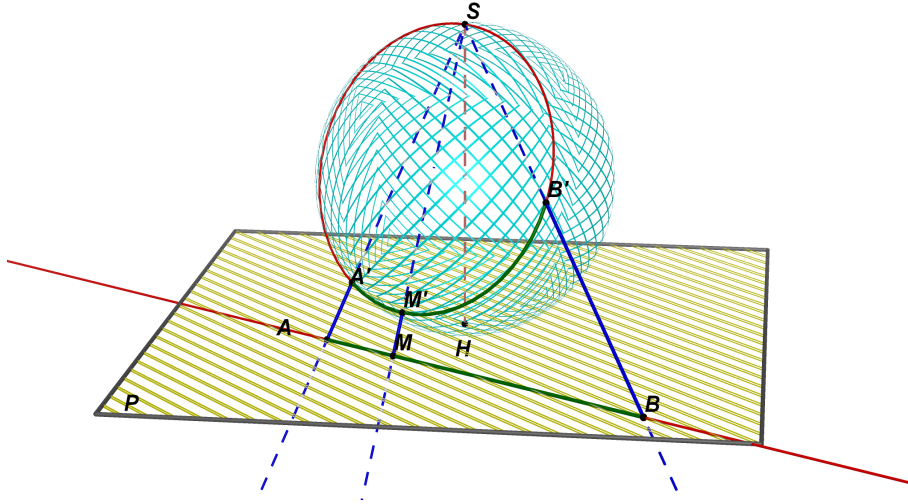


FIGURE 2.1 – Projection stéréographique.

Dans ce qui suit, on notera  $H^1(\mathbb{S}^n)$  l'espace

$$H^1(\mathbb{S}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{S}^n); \nabla_g u \in (L^2(\mathbb{S}^n))^{n+1}\}, \quad (2.11)$$

où  $\nabla_g$  désigne le gradient surfacique. Cet espace est muni du produit hermitien

$$(u, v)_{H^1(\mathbb{S}^n)} = \int_{\mathbb{S}^n} u \bar{v} d\sigma + \int_{\mathbb{S}^n} \nabla_g u \cdot \overline{\nabla_g v} d\sigma, \quad (2.12)$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{S}^n)} = \left( \|u\|_{L^2(\mathbb{S}^n)}^2 + \|\nabla_g u\|_{L^2(\mathbb{S}^n)}^2 \right)^{1/2}.$$

Considérons aussi l'espace à poids  $H_\star^1(\mathbb{S}^n)$  composé de toutes les distributions  $u$  satisfaisant

$$\frac{u}{d(\xi)} \in L^2(\mathbb{S}^n), \quad \nabla_g u \in L^2(\mathbb{S}^n)^{n+1}.$$

Cet espace est muni de la norme

$$\|u\|_{H_\star^1(\mathbb{S}^n)} = \left( \left\| \frac{u}{d(\xi)} \right\|_{L^2(\mathbb{S}^n)}^2 + \|\nabla_g u\|_{L^2(\mathbb{S}^n)}^2 \right)^{1/2}.$$

On sait que (voir Maz'ya et Plamenevskii [57])

- $\mathcal{D}(\mathbb{S}_\star^n)$  est dense dans  $H_\star^1(\mathbb{S}^n)$ .
- $H_\star^1(\mathbb{S}^n) = H^1(\mathbb{S}^n)$  si  $n > 2$ ,

–  $H^1(\mathbb{S}^n) = H_*^1(\mathbb{S}^n) \oplus \mathbb{R}$  si  $n = 1$ . De plus,

$$H_*^1(\mathbb{S}^1) = \{v \in H^1(\mathbb{S}^1) \mid v(M_0) = 0\}.$$

On a

$$\int_{\mathbb{S}^n} \nabla_g u \overline{\nabla_g v} d\sigma = - \int_{\mathbb{S}^n} \Delta_g u \bar{v} d\sigma, \quad (2.13)$$

pour toutes fonctions  $u, v \in H^1(\mathbb{S}^n)$  tel que  $\Delta_g u \in L^2(\mathbb{S}^n)$ . Ici  $\Delta_g$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la sphère  $\mathbb{S}^n$ .

On rappelle que quand  $n = 2$  (la sphère est plongée dans  $\mathbb{R}^3$ ), cet opérateur s'écrit formellement en coordonnées sphériques

$$\Delta_g u = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2},$$

tandis que le gradient surfacique  $\nabla_g$  s'écrit

$$\nabla_g u = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial \theta} \vec{e}_\theta.$$

Revenons au cas d'une dimension quelconque. Pour tout entier  $k \geq 0$ , on note  $\mathbb{H}_k$  l'espace des harmoniques sphériques de degré  $k$  sur  $\mathbb{S}^n$ . On rappelle qu'il est composé des restrictions à  $\mathbb{S}^n$  des polynômes harmoniques homogènes de degré  $k$ . On note  $d_k$  sa dimension. On sait que si  $n = 1$ , alors  $d_0 = 1$  et  $d_k = 2$  pour  $k \geq 1$ . Quand  $n \geq 2$ , on sait que  $d_0 = 1$ ,  $d_1 = n + 1$  et

$$d_k = \binom{n+k}{n} - \binom{n+k-2}{n} = \binom{n+k-1}{k} + \binom{n+k-2}{k-1}, \quad \text{pour } k \geq 2. \quad (2.14)$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

On sait que les sous espaces  $\mathbb{H}_k$  sont deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire de  $L^2(\mathbb{S}^n)$  et que

$$L^2(\mathbb{S}^n) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathbb{H}_k.$$

Pour tout  $k \geq 0$ , on note  $(\mathcal{Y}_{k,m})_{1 \leq m \leq d_k}$  une base orthogonale de  $\mathbb{H}_k$  pour le produit scalaire  $L^2(\mathbb{S}^n)$ . On a la propriété suivante

$$-\Delta_g \mathcal{Y}_{k,m} = k(k+n-1) \mathcal{Y}_{k,m} \quad \text{pour } k \geq 0 \text{ et } 1 \leq m \leq d_k. \quad (2.15)$$

On se donne une fonction  $v$  définie sur  $\mathbb{R}^n$ , et on pose

$$\hat{v}(\xi) = (1 - \xi_{n+1})^{(2-n)/2} v(\pi(\xi)), \quad \forall \xi \in \mathbb{S}_*^n \quad (2.16)$$



ou,

$$v(y) = \left( \frac{2}{1 + |y|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \hat{v}(\pi^{-1}(y)), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.17)$$

**Lemme 2.5** *La fonction  $v$  appartient à  $W_0^1(\mathbb{R}^n)$  si et seulement si  $\hat{v} \in H_*^1(\mathbb{S}^n)$ . De plus,*

$$\int_{\mathbb{S}^n} \frac{|\hat{v}(\xi)|^2}{d(\xi)^2} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v|^2}{|y|^2 + 1} dy, \quad (2.18)$$

$$\int_{\mathbb{S}^n} |\nabla_g \hat{v}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dy + n(2-n) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v|^2}{(|y|^2 + 1)^2} dy. \quad (2.19)$$

**Preuve.** De la densité de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  dans  $W_0^1(\mathbb{R}^n)$  et de  $\mathcal{D}(\mathbb{S}_*^n)$  dans  $H_*^1(\mathbb{S}^n)$ , on peut supposer que  $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Considérons la fonction

$$w(y) = \left( \frac{|y|^2 + 1}{2} \right)^{(n-2)/2} v(y) = \hat{v}(\pi^{-1}(y)). \quad (2.20)$$

Alors par une simple intégration par parties, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{2}{|x|^2 + 1} \right)^{n-2} |\nabla w(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v(x)|^2 + n(2-n) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v|^2}{(1 + |x|^2)^2}.$$

En effet on a,

$$\begin{aligned} \nabla w(x) &= \nabla \left( \left( \frac{1 + |x|^2}{2} \right)^{\frac{n-2}{2}} v(x) \right) \\ &= \frac{n-2}{2} \left( \frac{1 + |x|^2}{2} \right)^{\frac{n-4}{2}} v(x) \cdot \vec{x} + \left( \frac{1 + |x|^2}{2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \nabla v(x), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} |\nabla w(x)|^2 &= \left( \frac{n-2}{2} \right)^2 \left( \frac{1 + |x|^2}{2} \right)^{n-4} |v(x)|^2 \cdot |x|^2 \\ &\quad + \left( \frac{1 + |x|^2}{2} \right)^{n-2} |\nabla v(x)|^2 + (n-2) \left( \frac{1 + |x|^2}{2} \right)^{n-3} v(x) \cdot \vec{x} \cdot \nabla v(x). \end{aligned}$$

On déduit que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{2}{1 + |x|^2} \right)^{n-2} |\nabla w(x)|^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (n-2)^2 \frac{|x|^2}{(1 + |x|^2)^2} |v(x)|^2 + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v(x)|^2 \\ &\quad + (n-2) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2}{1 + |x|^2} v(x) \cdot \vec{x} \cdot \nabla v(x). \end{aligned}$$

On s'intéresse à la dernière intégrale, on pose

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2}{1 + |x|^2} v(x) \cdot \vec{x} \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\vec{x}}{1 + |x|^2} \cdot \nabla |v(x)|^2 dx$$

en faisant une intégration par parties,  $I$  devient

$$I = - \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{n}{1 + |x|^2} - 2 \frac{|x|^2}{(1 + |x|^2)^2} \right) |v(x)|^2 dx,$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{2}{1 + |x|^2} \right)^{n-2} |\nabla w(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{n(2-n)}{(1 + |x|^2)^2} |v(x)|^2 dx.$$

Soit maintenant,  $B_1^* = B_1 - \{0\}$  où  $B_1$  est la boule unité de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Alors,

$$\int_{\mathbb{S}^n} \frac{|\hat{v}(\xi)|^2}{d(\xi)^2} d\xi = (n+1) \int_{B_1^{**}} |V(x)|^2 dx, \quad (2.21)$$

où  $B_1^{**} = B_1^* - \{(0, \dots, 0, t); 0 \leq t < 1\}$ . Et  $V$  est le prolongement, homogène de degré zéro, de la fonction  $d(\xi)^{-1} \hat{v}$  à  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  défini par

$$V(x) = d\left(\frac{x}{|x|}\right)^{-1} \hat{v}\left(\frac{x}{|x|}\right) \quad \text{pour } x \in B_1^{**}.$$

Montrons d'abord la relation (2.21), pour  $\xi = \frac{x}{|x|}$  on pose  $|x| = t$ , alors

$$\begin{aligned} \int_{B_1^{**}} |V(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{S}^n \times ]0, 1[} \frac{|\hat{v}(\xi)|^2}{d(\xi)^2} t^n dt d\xi \\ &= \int_0^1 t^n dt \int_{\mathbb{S}^n} \frac{|\hat{v}(\xi)|^2}{d(\xi)^2} d\xi = \frac{1}{n+1} \int_{\mathbb{S}^n} \frac{|\hat{v}(\xi)|^2}{d(\xi)^2} d\xi. \end{aligned}$$

Considérons maintenant l'application bijective

$$\begin{aligned} \varphi : B_1^{**} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times ]0, 1[ \\ x &\longmapsto (y, t) = (\pi(\xi), |x|) \quad \text{où } \xi = \frac{x}{|x|}. \end{aligned}$$

En d'autres termes,

$$y_i = \frac{x_i}{(t - x_{n+1})}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

On a

$$(|y|^2 + 1)^{1/2}w(y) = 2V(\varphi^{-1}(y, t)), \quad (y, t) \in \mathbb{R}^n \times ]0, 1[.$$

En effet,

tout d'abord  $\varphi$  étant bijective, alors  $\varphi^{-1}$  est définie par

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \times ]0, 1[ &\longrightarrow B_1^{**} \\ (y, t) &\longmapsto x = \varphi^{-1}(y, t), \end{aligned}$$

telle que  $\varphi^{-1}(y, t) = t\pi^{-1}(y)$ , d'autre part

$$V(x) = d\left(\frac{x}{|x|}\right)^{-1} \hat{v}\left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{\hat{v}(\xi)}{d(\xi)}, \quad \text{où } d(\xi) = \frac{2}{(1 + |y|^2)^{1/2}}$$

et

$$\hat{v}(\xi) = (1 - \xi_{n+1})^{\frac{2-n}{2}} v(\pi(\xi)) = \left(\frac{2}{1 + |y|^2}\right)^{\frac{2-n}{2}} v(y).$$

Donc

$$V(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1 + |y|^2}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} v(y),$$

d'où le résultat

$$2V(x) = \sqrt{1 + |y|^2}w(y); \quad x = \varphi^{-1}(y, t).$$

On conclut que

$$\int_{B_1^{**}} |V(x)|^2 dx = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^n \times ]0, 1[} (|y|^2 + 1) |w(y)|^2 |J_\varphi(y, t)|^{-1} dy dt.$$

Où  $J_\varphi(y, t)$  est le jacobien du changement de variable défini par

$$J_\varphi(y, t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \frac{\partial y_1}{\partial x_{n+1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} & \frac{\partial y_n}{\partial x_{n+1}} \\ \frac{\partial t}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial t}{\partial x_n} & \frac{\partial t}{\partial x_{n+1}} \end{vmatrix}$$

Puisque  $t = |x|$  alors,  $\frac{\partial t}{\partial x_j} = \frac{x_j}{t} = \xi_j; \quad 1 \leq j \leq n + 1.$

Calculons  $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$ , pour  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq n+1$ .

On a,  $y_i = \frac{x_i}{t - x_{n+1}}$ , donc

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \frac{1}{t - x_{n+1}} \delta_{i,j} - \frac{x_i x_j}{t(t - x_{n+1})^2} + \frac{x_i}{(t - x_{n+1})^2} \delta_{j,n+1},$$

d'où

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \begin{cases} \frac{1}{t - x_{n+1}} (1 - \kappa \xi_i^2) & 1 \leq i = j \leq n \\ \frac{-\kappa \xi_i \xi_j}{t - x_{n+1}} & 1 \leq i \neq j \leq n \\ \frac{\xi_i}{t - x_{n+1}} & 1 \leq i \leq n, \text{ et } j = n+1 \end{cases}$$

où,  $\kappa = (1 - \xi_{n+1})^{-1}$ .

Ainsi,

$$J_\varphi(x) = \left( \frac{1}{t - x_{n+1}} \right)^n J = \left( \frac{1 + |y|^2}{2t} \right)^n J.$$

avec,

$$J = \begin{vmatrix} 1 - \kappa \xi_1^2 & -\kappa \xi_1 \xi_2 & \cdots & \cdots & -\kappa \xi_1 \xi_n & \xi_1 \\ -\kappa \xi_2 \xi_1 & 1 - \kappa \xi_2^2 & -\kappa \xi_2 \xi_3 & \cdots & -\kappa \xi_2 \xi_n & \xi_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\kappa \xi_{n-1} \xi_n & \vdots \\ -\kappa \xi_n \xi_1 & \cdots & \cdots & -\kappa \xi_n \xi_{n-1} & 1 - \kappa \xi_n^2 & \xi_n \\ \xi_1 & \cdots & \cdots & \xi_{n-1} & \xi_n & \xi_{n+1} \end{vmatrix}.$$

En ajoutant à la  $i$ -ième colonne,  $1 \leq i \leq n$ , la dernière colonne multipliée par  $\kappa \xi_i$ , on obtient

$$J = \kappa \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \xi_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 & \xi_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \xi_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \xi_n \\ \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{n-1} & \xi_n & \frac{\xi_{n+1}}{\kappa} \end{vmatrix}.$$

Ainsi

$$J = \xi_{n+1} - \kappa(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2) = -1, \quad \text{et} \quad J_\varphi(x) = - \left( \frac{1 + |y|^2}{2t} \right)^n.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\int_{B_1^{**}} |V(x)|^2 dx &= \frac{1}{4} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} (|y|^2 + 1) |w(y)|^2 |J_{\varphi^{-1}}(y, t)| dy dt \\
&= \frac{1}{4} \int_0^1 (2t)^n dt \int_{\mathbb{R}^n} |w(y)|^2 \left( \frac{1}{1 + |y|^2} \right)^{n-1} dy \\
&= \frac{1}{2(n+1)} \int_{\mathbb{R}^n} |w(y)|^2 \left( \frac{2}{1 + |y|^2} \right)^{n-1} dy \\
&= \frac{1}{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(y)|^2}{1 + |y|^2} dy.
\end{aligned}$$

On conclut enfin que

$$\int_{\mathbb{S}^n} \frac{|\hat{v}(\xi)|^2}{d(\xi)^2} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(y)|^2}{1 + |y|^2} dy.$$

De même, on peut prouver que

$$\int_{B_1^{**}} |\nabla_g \hat{v}(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{2}{1 + |y|^2} \right)^{n-2} |\nabla w(y)|^2 dy.$$

En effet, posons

$$V(x) = \hat{v}\left(\frac{x}{|x|}\right); \quad x \in \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{x}{|x|}.$$

Alors,

$$\int_{B_1^{**}} |\nabla V(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{S}^n \times [0,1[} |\nabla_g \hat{v}(\xi)|^2 t^n dt d\xi = \frac{1}{n+1} \int_{\mathbb{S}^n} |\nabla_g \hat{v}(\xi)|^2 d\xi.$$

D'une autre part, on a

$$|\nabla V(x)|^2 = |\nabla_g \hat{v}(\xi)|^2 = \frac{1}{(1 - \xi_{n+1})^2} |\nabla w(y)|^2 = \left( \frac{|y|^2 + 1}{2} \right)^2 |\nabla w(y)|^2.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\int_{B_1^{**}} |\nabla V(x)|^2 dx &= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{|y|^2 + 1}{2} \right)^2 |\nabla w(y)|^2 |J_{\varphi^{-1}}(y, t)| dy dt \\
&= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{|y|^2 + 1}{2} \right)^2 |\nabla w(y)|^2 \left( \frac{2t}{1 + |y|^2} \right)^n dy dt \\
&= \frac{1}{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w(y)|^2 \left( \frac{2}{1 + |y|^2} \right)^{n-2} dy.
\end{aligned}$$

D'où

$$\int_{\mathbb{S}^n} |\nabla_g \hat{v}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w(y)|^2 \left( \frac{2}{1 + |y|^2} \right)^{n-2} dy.$$

■

Maintenant, on a

**Lemme 2.6** Soit  $v \in W_1^2(\mathbb{R}^n)$ . Alors, on a

$$\left(\frac{2}{1+|y|^2}\right)^{-\frac{n+2}{2}} \Delta v(y) = \Delta_g \hat{v}(\xi) - \frac{n(n-2)}{4} \hat{v}(\xi), y \in \mathbb{R}^n, \xi = \pi^{-1}(y). \quad (2.22)$$

**Preuve.** On pose à nouveau

$$w(y) = \left(\frac{|y|^2+1}{2}\right)^{(n-2)/2} v(y) = \hat{v}(\xi), \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}^n, \xi = \pi^{-1}(y).$$

$$V(x) = \hat{v}\left(\frac{x}{|x|}\right), x \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Puisque la fonction  $V$  est homogène de degré  $\eta = 0$ , alors d'après le théorème d'Euler, on a

$$x \cdot \nabla V(x) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) = \eta \cdot V(x) = 0,$$

de même,

$$\sum_{i,k=1}^{n+1} x_i x_k \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k}(x) = 0.$$

En effet,

$$\text{si } \sum_{i=1}^{n+1} x_i \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) = 0 \text{ alors } \sum_{i=1}^{n+1} x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( x_i \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) \right) = 0$$

donc

$$\sum_{i,k=1}^{n+1} (\delta_{i,k} x_k \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) + x_i x_k \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k}(x)) = 0$$

d'où le résultat

$$\sum_{i,k=1}^{n+1} x_i x_k \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k}(x) = 0.$$

Montrons que

$$\sum_{k=1}^n y_k \frac{\partial w}{\partial y_k}(y) = \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}}(\xi). \quad (2.23)$$

Puisque  $V$  est homogène de degré zéro, alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y_k}(y) &= \frac{\partial \hat{v}(\xi)}{\partial y_k} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial V}{\partial x_j}(\xi) \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{2}{1+|y|^2} \delta_{j,k} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{4y_j y_k}{(1+|y|^2)^2} + \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}} \frac{4y_k}{(1+|y|^2)^2} \\ &= \frac{\partial V}{\partial x_k}(\xi) \frac{2}{1+|y|^2} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j}(\xi) \frac{4y_j y_k}{(1+|y|^2)^2} + \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}}(\xi) \frac{4y_k}{(1+|y|^2)^2}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n y_k \frac{\partial w}{\partial y_k}(y) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{2y_k}{1+|y|^2} - \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{4y_j y_k^2}{(1+|y|^2)^2} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}} \frac{4y_k^2}{(1+|y|^2)^2} \\
&= \sum_{k=1}^n \xi_k \frac{\partial V}{\partial x_k}(\xi) - \frac{2|y|^2}{1+|y|^2} \sum_{k=1}^n \xi_k \frac{\partial V}{\partial x_k}(\xi) + \frac{4|y|^2}{(1+|y|^2)^2} \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}}(\xi) \\
&= \frac{1-|y|^2}{1+|y|^2} \sum_{k=1}^n \xi_k \frac{\partial V}{\partial x_k}(\xi) + \frac{4|y|^2}{(1+|y|^2)^2} \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}}(\xi).
\end{aligned}$$

Or, toujours puisque  $V$  est homogène de degré zéro, on a

$$\sum_{k=1}^n \xi_k \frac{\partial V}{\partial x_k}(\xi) = -\xi_{n+1} \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}}(\xi) = \frac{1-|y|^2}{1+|y|^2} \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}}(\xi)$$

donc

$$\sum_{k=1}^n y_k \frac{\partial w}{\partial y_k}(y) = \left( \frac{1-|y|^2}{1+|y|^2} \right)^2 \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}}(\xi) + \frac{4|y|^2}{(1+|y|^2)^2} \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}}(\xi) = \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}}(\xi).$$

Calculons maintenant  $\Delta w(y)$ , on a

$$\Delta w(y) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 w}{\partial y_j^2}(y)$$

où

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial y_j^2} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial y_j} \left( \frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial y_j} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial y_j^2} + \sum_{i,k=1}^{n+1} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial \xi_i}{\partial y_j} \frac{\partial \xi_k}{\partial y_j}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\Delta w(y) = \sum_{i=1}^{n+1} \Delta_y \xi_i \frac{\partial V}{\partial x_i}(\xi) + \sum_{i,k=1}^{n+1} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial \xi_i}{\partial y_j} \frac{\partial \xi_k}{\partial y_j} \right) \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k}. \quad (2.24)$$

Pour continuer la démonstration de ce lemme nous montrons d'abord les égalités suivantes

- (i)  $\Delta_y \xi_i = (1 - \xi_{n+1})(2\xi_{n+1} - n)\xi_i$ , pour  $i = 1, \dots, n$ .
- (ii)  $\Delta_y \xi_{n+1} = (1 - \xi_{n+1})^2(-2\xi_{n+1} + n - 2)$ .

$$(iii) \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial \xi_i}{\partial y_j} \frac{\partial \xi_k}{\partial y_j} = (1 - \xi_{n+1})^2 (\delta_{i,k} - \xi_i \xi_k) \quad \text{pour } 0 \leq i, k \leq n+1.$$

(i) Pour la première égalité, on a

$$\Delta_y \xi_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial y_k^2},$$

où

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial y_k} = \frac{2}{1 + |y|^2} \delta_{i,k} - \frac{4y_i y_k}{(1 + |y|^2)^2},$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial y_k^2} &= \frac{\partial}{\partial y_k} \left( \frac{2}{1 + |y|^2} \right) \delta_{i,k} - 4 \frac{\partial}{\partial y_k} \left( \frac{y_i y_k}{(1 + |y|^2)^2} \right) \\ &= -\frac{8y_k}{(1 + |y|^2)^2} \delta_{i,k} - \frac{4y_i}{(1 + |y|^2)^2} + \frac{16y_i y_k^2}{(1 + |y|^2)^3}. \end{aligned}$$

Donc

$$\Delta_y \xi_i = -\frac{8y_i}{(1 + |y|^2)^2} - \frac{4ny_i}{(1 + |y|^2)^2} + \frac{16y_i |y|^2}{(1 + |y|^2)^3}.$$

En terme de  $\xi$

$$\Delta_y \xi_i = (1 - \xi_{n+1})(2\xi_{n+1} - n)\xi_i, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n.$$

(ii) Pour la deuxième égalité, on a

$$\Delta_y \xi_{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \xi_{n+1}}{\partial y_k^2},$$

où

$$\frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial y_k} = \frac{4y_k}{(1 + |y|^2)^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 \xi_{n+1}}{\partial y_k^2} = \frac{\partial}{\partial y_k} \left( \frac{4y_k}{(1 + |y|^2)^2} \right) = \frac{4}{(1 + |y|^2)^2} - \frac{16y_k^2}{(1 + |y|^2)^3}.$$

D'où

$$\Delta_y \xi_{n+1} = \frac{4n}{(1 + |y|^2)^2} - \frac{16|y|^2}{(1 + |y|^2)^3}.$$

Donc,

$$\Delta_y \xi_{n+1} = (1 - \xi_{n+1})^2 (-2\xi_{n+1} + n - 2).$$



(iii) Pour la troisième égalité, on a pour  $1 \leq i, k \leq n$ ,

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial y_j} = \frac{2}{1 + |y|^2} \delta_{i,j} - \frac{4y_i y_j}{(1 + |y|^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \xi_k}{\partial y_j} = \frac{2}{1 + |y|^2} \delta_{k,j} - \frac{4y_k y_j}{(1 + |y|^2)^2}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \xi_i}{\partial y_j} \frac{\partial \xi_k}{\partial y_j} &= \sum_{j=1}^n \left( \frac{2}{1 + |y|^2} \delta_{i,j} - \frac{4y_i y_j}{(1 + |y|^2)^2} \right) \left( \frac{2}{1 + |y|^2} \delta_{k,j} - \frac{4y_k y_j}{(1 + |y|^2)^2} \right) \\ &= \frac{4}{(1 + |y|^2)^2} \delta_{i,k} - \frac{16y_i y_k}{(1 + |y|^2)^4} \\ &= (1 - \xi_{n+1})^2 (\delta_{i,k} - \xi_i \xi_k). \end{aligned}$$

On obtient le même résultat pour  $1 \leq i \leq n$  et  $k = n + 1$  et pour  $i = k = n + 1$  d'où,

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \xi_i}{\partial y_j} \frac{\partial \xi_k}{\partial y_j} = (1 - \xi_{n+1})^2 (\delta_{i,k} - \xi_i \xi_k) \quad \forall 1 \leq i, k \leq n + 1.$$

En substituant les égalités (i)-(iii) dans (2.24), on obtient

$$\begin{aligned} \Delta w(y) &= (1 - \xi_{n+1})(2\xi_{n+1} - n) \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial V}{\partial x_i}(\xi) + (-2\xi_{n+1} + n - 2) \\ &\quad (1 - \xi_{n+1})^2 \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}}(\xi) + (1 - \xi_{n+1})^2 \sum_{i,k=1}^{n+1} (\delta_{i,k} - \xi_i \xi_k) \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k} \\ &= -(1 - \xi_{n+1})(2\xi_{n+1} - n) \xi_{n+1} \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}}(\xi) + (1 - \xi_{n+1})^2 \\ &\quad (-2\xi_{n+1} + n - 2) \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}}(\xi) + (1 - \xi_{n+1})^2 \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\Delta w(y) = \left( \frac{2}{|y|^2 + 1} \right)^2 \Delta V(\xi) + \frac{2(n-2)}{|y|^2 + 1} \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}}(\xi).$$

Pour les fonctions  $\hat{v}$  et  $V$  définies plus haut, on définit  $\nabla_g \hat{v}$  et  $\Delta_g \hat{v}$  sur la sphère  $\mathbb{S}^n$  par

$$\nabla_g \hat{v} = \nabla V \quad \text{et} \quad \Delta_g \hat{v} = \Delta V.$$

On rappelle aussi

$$v(y) = \left( \frac{2}{1 + |y|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} w(y),$$

donc

$$\Delta v(y) = \left( \frac{2}{1+|y|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \Delta w + w \cdot \Delta \left( \frac{2}{1+|y|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} + 2 \nabla \left( \frac{2}{1+|y|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \nabla w,$$

où

$$\nabla \left( \frac{2}{1+|y|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} = -\frac{n-2}{2} \left( \frac{2}{1+|y|^2} \right)^{n/2} \cdot \vec{y}$$

et

$$\Delta \left( \frac{2}{1+|y|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} = n \frac{n-2}{2} \left( \frac{2}{1+|y|^2} \right)^{n/2} \left( \frac{-1}{1+|y|^2} \right).$$

D'où

$$\begin{aligned} \Delta v(y) &= \left( \frac{2}{1+|y|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \Delta w(y) - \frac{n(n-2)}{4} \left( \frac{2}{1+|y|^2} \right)^{\frac{n+1}{2}} w(y) \\ &\quad - 2 \frac{n-2}{2} \left( \frac{2}{1+|y|^2} \right)^{n/2} \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}}(\xi). \end{aligned}$$

En remplaçant  $\Delta w(y)$  et  $w(y)$  par leurs valeurs, on obtient

$$\Delta v(y) = \left( \frac{2}{1+|y|^2} \right)^{\frac{n+2}{2}} \left( \Delta_g \hat{v}(\xi) - \frac{n(n-2)}{4} \hat{v}(\xi) \right).$$

D'où la formule (2.22). ■

**Théorème 2.7** *Pour tous les entiers  $k, \ell \geq 0$ , avec  $1 \leq \ell \leq d_k$  si  $n \neq 1$ , et  $\ell = 1$  si  $n = 1$ , on considère la fonction*

$$\mathcal{W}_{k,\ell}(x) = \begin{cases} \left( \frac{2}{|x|^2+1} \right)^{\frac{n-2}{2}} \mathcal{Y}_{k,\ell}(\pi^{-1}(x)) & \text{si } n \neq 1, \\ (x^2+1)^{1/2} \cos((k+1) \arctan(x) + k\pi/2) & \text{si } n = 1. \end{cases} \quad (2.25)$$

Alors,  $\mathcal{W}_{k,\ell}$  appartient à  $W_0^1(\mathbb{R}^n)$  si  $n \neq 2$  et à  $X_0^1(\mathbb{R}^2)$  si  $n = 2$ , et satisfait

$$-\Delta \mathcal{W}_{k,\ell} = \frac{\lambda_k}{(|x|^2+1)^2} \mathcal{W}_{k,\ell}, \quad (2.26)$$

avec

$$\lambda_k = \begin{cases} 4k(k+n-1) + n(n-2) & \text{si } n \neq 1, \\ k(k+2) & \text{si } n = 1. \end{cases} \quad (2.27)$$

De plus,  $(\mathcal{W}_{k,\ell})_{k,\ell}$  est une base orthogonale de  $W_{-2}^0(\mathbb{R}^n)$  satisfaisant

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathcal{W}_{k,\ell}(x) \overline{\mathcal{W}_{m,j}(x)}}{(|x|^2+1)^2} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \mathcal{W}_{k,\ell}(x) \cdot \overline{\nabla \mathcal{W}_{m,j}(x)} dx = 0 \text{ si } (k,\ell) \neq (m,j).$$

**Preuve.** L'objectif de ce théorème est le calcul des valeurs propres  $(\lambda_k)_{k \geq 0}$  et fonctions propres  $(w_k)_{k \geq 0}$  du théorème 2.1 lorsque

$$\varrho(x) = (|x|^2 + 1)^{-2}.$$

Supposons en premier que  $n \neq 2$ .

D'après le Théorème 2.1, tout couple  $(\lambda_k, w_k)$  est solution du problème

$$w \in W_0^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad -\Delta w = \lambda \langle x \rangle^{-4} w \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

qui peut être réécrit sous la forme

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla w(x) \cdot \overline{\nabla v(x)} dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} \frac{w(x) \overline{v(x)}}{\langle x \rangle^4} dx, \quad \forall v \in W_0^1(\mathbb{R}^n).$$

Du Lemme 2.5, on déduit que la fonction  $\hat{w} \in H_\star^1(\mathbb{S}^n)$  et satisfait

$$\int_{\mathbb{S}^n} \nabla_g \hat{w}(\xi) \cdot \overline{\nabla_g \hat{v}(\xi)} d\sigma(\xi) = \hat{\lambda} \int_{\mathbb{S}^n} \hat{w}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} d\sigma(\xi), \quad \forall \hat{v} \in H_\star^1(\mathbb{S}^n) \quad (2.28)$$

avec

$$\hat{\lambda} = \frac{\lambda - n(n-2)}{4}.$$

En effet, d'après le Lemme 2.5, on a  $v, w \in W_0^1(\mathbb{R}^n)$  si et seulement si  $\hat{v}, \hat{w} \in H_\star^1(\mathbb{S}^n)$ , de plus

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^n} \nabla_g \hat{w}(\xi) \cdot \overline{\nabla_g \hat{v}(\xi)} d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla w \cdot \overline{\nabla v} dx + n(2-n) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{w \overline{v}}{\langle x \rangle^4} dx \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}^n} \frac{w \overline{v}}{\langle x \rangle^4} dx + n(2-n) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{w \overline{v}}{\langle x \rangle^4} dx \\ &= (\lambda + n(2-n)) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{w \overline{v}}{\langle x \rangle^4} dx. \end{aligned}$$

Calculons alors la dernière intégrale obtenue. On a

$$\hat{w}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} = \left( \frac{2}{1 + |y|^2} \right)^{2-n} w(y) \overline{v(y)}.$$

En posant

$$V_1(x) = \hat{w}\left(\frac{x}{|x|}\right), \quad V_2(x) = \hat{v}\left(\frac{x}{|x|}\right); \quad \xi = \frac{x}{|x|}.$$

On obtient, d'une part

$$\int_{B_1^{\star\star}} V_1(x) \overline{V_2(x)} dx = \frac{1}{n+1} \int_{\mathbb{S}^n} \hat{w}(\xi) \cdot \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi.$$

et d'une autre part,

$$\begin{aligned} \int_{B_1^{**}} V_1(x) \overline{V_2(x)} dx &= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{2}{1+|y|^2} \right)^{2-n} w(y) \cdot \overline{v(y)} |J_\varphi(y, t)|^{-1} dt dy, \\ &= \frac{1}{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} w(y) \overline{v(y)} \left( \frac{2}{1+|y|^2} \right)^{2-n} \left( \frac{2}{1+|y|^2} \right)^n dy, \\ &= \frac{4}{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{w(y) \overline{v(y)}}{(1+|y|^2)^2} dy. \end{aligned}$$

D'où

$$\int_{\mathbb{S}^n} \hat{w}(\xi) \cdot \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi = 4 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{w(y) \cdot \overline{v(y)}}{(1+|y|^2)^2} dy, \quad (2.29)$$

et la relation (2.28) s'ensuit.

**Le cas  $n > 2$ .** On a  $H_\star^1(\mathbb{S}^n) = H^1(\mathbb{S}^n)$  et la formulation

$$\int_{\mathbb{S}^n} \nabla_g \hat{w}(\xi) \cdot \overline{\nabla_g \hat{v}(\xi)} d\sigma(\xi) = \hat{\lambda} \int_{\mathbb{S}^n} \hat{w}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} d\sigma(\xi), \text{ pour tout } \hat{v} \in H^1(\mathbb{S}^n),$$

s'écrit encore

$$-\Delta_g \hat{w} = \hat{\lambda} \hat{w}.$$

Ainsi, il existe un entier  $\ell \geq 0$  tel que

$$\hat{\lambda} = \ell(\ell + n - 1); \ell \geq 0,$$

et  $\hat{w} \in \mathbb{H}_\ell$ . Alors pour tout  $k \geq 0$ ,  $\lambda_k = 4k(k + n - 1) + n(n - 2)$  et les fonctions propres  $w_k$  sont solutions de l'équation

$$-\Delta w_k = \frac{\lambda_k}{(1+|x|^2)^2} w_k$$

appartiennent à  $W_0^1(\mathbb{R}^n)$  et forment une base de orthogonale de  $W_{-2}^0(\mathbb{R}^n)$ .  $\hat{w}$  étant les fonctions propres associées aux valeurs propres  $\hat{\lambda}$  de l'opérateur de Laplace-Beltrami, on peut écrire

$$\hat{w}_{k,\ell}(\xi) = \mathcal{Y}_{k,\ell}(\xi) \text{ avec } 1 \leq \ell \leq d_k \text{ et } k \geq 0,$$

c'est à dire

$$\hat{w}_{k,\ell}(\xi) = (1 - \xi_{n+1})^{\frac{2-n}{2}} w_{k,\ell}(y) = \mathcal{Y}_{k,\ell}(\xi).$$

Alors

$$w_{k,\ell}(y) = \left( \frac{2}{1+|y|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \mathcal{Y}_{k,\ell}(\pi^{-1}(y)).$$

De plus

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \frac{w_{k,\ell}(x)\overline{w_{m,j}(x)}}{\langle x \rangle^4} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla w_{k,\ell}(x) \overline{\nabla w_{m,j}(x)} dx \\
&= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}^n} \hat{w}_{k,\ell}(\xi) \overline{\hat{w}_{m,j}(\xi)} d\xi \\
&= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}^n} \mathcal{Y}_{k,\ell}(\xi) \overline{\mathcal{Y}_{m,j}(\xi)} d\xi \\
&= 0 \quad \text{si } (k,\ell) \neq (m,j).
\end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration du Théorème 2.7 pour  $n > 2$ .

**Le cas  $n = 1$ .** Quand  $n = 1$ , on a

$$H_\star^1(\mathbb{S}^1) = \{\hat{v} \in H^1(\mathbb{S}^1) \mid \hat{v}(M_0) = 0\}.$$

On déduit facilement de la formulation (2.28) ce qui suit

$$\begin{cases} -\Delta_g \hat{w} &= \hat{\lambda} \hat{w} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{S}_\star^1), \\ \hat{w}(M_0) &= 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

avec  $\Delta_g = \partial_\theta^2$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami, qui s'écrit encore

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \theta^2} &= \hat{\lambda} \hat{w} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{S}_\star^1), \\ \hat{w}(M_0) &= 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

Pour  $\xi = (\xi_1, \xi_2) = (\cos \theta, \sin \theta)$  tel que  $\theta \in ]\pi/2, 5\pi/2[$ , la solution de l'équation différentielle, dans (2.31), s'écrit

$$C_1 \sin \sqrt{\hat{\lambda}}(\theta - \pi/2) + C_2 \cos \sqrt{\hat{\lambda}}(\theta - \pi/2).$$

Et en vertu de la condition aux limites  $\hat{w}(M_0) = 0$ , qui est vérifiée pour  $\theta = \pi/2$  et  $\theta = 5\pi/2$ , on a  $C_2 = 0$  et  $\hat{\lambda} = \frac{\ell^2}{4}$ .

Ainsi, pour  $\ell \in \mathbb{N}^*$ , on obtient les fonctions propres suivantes

$$\hat{w}(\xi) = \sin\left(\frac{\ell}{2}(\theta - \pi/2)\right); \quad \xi = (\cos \theta, \sin \theta) \text{ et } \theta \in ]\pi/2, 5\pi/2[.$$

Puisque  $n = 1$ , la condition d'orthogonalité (2.7) doit être prise en compte, elle s'écrit

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{w(x)}{(x^2 + 1)^2} dx = 0.$$

D'après l'identité (2.29), on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{w(x)}{\langle x \rangle^4} dx = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}_*^1} (1 - \xi_2)^{1/2} \hat{w}(\xi) d\xi,$$

car, pour  $v(x) = 1$ , on  $\hat{v}(\xi) = (1 - \xi_2)^{1/2}$ . Alors,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{w(x)}{\langle x \rangle^4} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{\pi/2}^{5\pi/2} (1 - \sin \theta)^{1/2} \sin\left(\frac{\ell}{2}(\theta - \pi/2)\right) d\theta.$$

Et l'intégrale à droite s'annule, sauf lorsque  $\ell = 1$ . Finalement, on déduit

$$\hat{\lambda} = \frac{\ell^2}{4}, \quad \lambda = \ell^2 - 1 \text{ pour tout } \ell > 1.$$

Revenons à la projection stéréographique  $\pi$ , on a

$$x = \pi(\xi_1, \xi_2) = \frac{\xi_1}{1 - \xi_2} = \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} = \tan\left(\frac{\theta}{2} - \frac{3\pi}{4}\right), \quad \theta \in ]\pi/2, 5\pi/2[.$$

Son inverse est donné par

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(x) &= \left( \frac{2x}{x^2 + 1}, \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right) \\ &= (\cos(3\pi/2 + \alpha(x)), \sin(3\pi/2 + \alpha(x))), \end{aligned}$$

avec  $\alpha(x) = 2 \arctan(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Ainsi,

$$w_\ell(x) = \left( \frac{2}{x^2 + 1} \right)^{-1/2} \hat{w}_\ell(\xi) = c(x^2 + 1)^{1/2} \sin(\ell \arctan(x) + \frac{\ell}{2}\pi).$$

La famille  $(w_\ell)_{\ell \geq 2}$  contient toutes les fonctions propres de l'opérateur  $A_2$ . La complétion de cette famille par la fonction constante 1, forme une base orthogonale de  $W_{-2}^0(\mathbb{R})$  comme annoncé dans le Théorème 2.1. Ceci termine la preuve du Théorème 2.7 quand  $n = 1$ .

**Le cas  $n = 2$ .** Comme expliqué dans la section 2.2.1, il ya quelques modifications sur les espaces à poids considérés lorsque  $n = 2$ , principalement, parce que les fonctions propres de  $A_2$  appartiennent à l'espace  $X_0^1(\mathbb{R}^2)$ .

L'image de  $X_0^1(\mathbb{R}^2)$  par la transformation (2.16) est l'espace  $M(\mathbb{S}^2)$  composé de toutes les distributions  $u$  satisfaisant

$$\frac{u}{d(\xi)(|\log d(\xi)| + 1)} \in L^2(\mathbb{S}^2), \quad \nabla_g u \in L^2(\mathbb{S}^2)^3.$$

Cet espace n'est autre que  $H(\mathbb{S}^2)$ ; voir les arguments dans [57].  
La condition (2.7) s'écrit

$$\int_{\mathbb{S}^2} v(\xi) d\sigma(\xi) = 0.$$

En effet, si  $n = 2$  on a  $\hat{v}(\xi) = v(\pi(\xi)) = v(x)$ . On rappelle la condition (2.7), quand  $n = 2$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varrho(x) \hat{v}(x) dx = 0, \quad \text{avec } \varrho(x) = (|x|^2 + 1)^{-2}.$$

Or, en vertu de l'identité (2.29)

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varrho(x) v(x) dx = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}^2} \hat{v}(\xi) d\xi,$$

d'où le résultat.

Avec les mêmes arguments du cas  $n > 2$ , on déduit facilement que les valeurs propres sont données par

$$\lambda = 4\ell(\ell + 1), \quad \ell \geq 1.$$

Les fonctions propres correspondantes, sont données par la relation (2.25) pour  $\ell \geq 1$  et forment une base de  $W_{-2}^0(\mathbb{R}^2) \perp \mathbb{R}$ . La complétion de cette famille par la fonction constante 1, termine la preuve du Théorème 2.7 quand  $n = 2$ .

■

**Remarque.** Lorsque  $n \geq 3$ , l'inégalité suivante découle immédiatement de la formule (2.19)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v|^2}{(|y|^2 + 1)^2} dy \leq \frac{1}{n(n-2)} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dy, \quad \forall v \in W_1^2(\mathbb{R}^n). \quad (2.32)$$

La constante apparaissant dans cette inégalité est optimale car l'égalité a lieu quand  $v$  est égal à  $\mathscr{W}_{0,0}$ , à une constante multiplicative près, disons quand

$$v(x) = (|x|^2 + 1)^{1-n/2}.$$

## 2.4 Propriétés supplémentaires

On propose ici d'exposer les propriétés des fonctions  $(\mathscr{W}_{k,\ell})$ . Pour cela on peut considérer les espaces propres

$$E_k = [\{\mathscr{W}_{k,1}, \dots, \mathscr{W}_{k,d_k}\}]; \quad k \geq 0.$$

Du Théorème 2.1, on déduit que  $E_k = \{\pi_* h \mid h \in \mathbb{H}_k\}$ , où  $\pi_* h$  est défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \pi_* h(x) = \left( \frac{2}{|x|^2 + 1} \right)^{(n-2)/2} h(\pi^{-1}(x)). \quad (2.33)$$

En effet, puisque  $(\mathscr{Y}_{k,\ell})_{1 \leq \ell \leq d_k}$  constitue une base de  $\mathbb{H}_k$ , alors il existe une suite  $(\alpha_\ell)_{1 \leq \ell \leq d_k}$  telle que, si  $h \in \mathbb{H}_k$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad h(x) = \sum_{\ell=1}^{d_k} \alpha_\ell \mathscr{Y}_{k,\ell}(x).$$

En définissant  $\pi_* h$  par la relation (2.33), on obtient

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \pi_* h(x) &= \sum_{\ell=1}^{d_k} \alpha_\ell \left( \frac{2}{|x|^2 + 1} \right)^{(n-2)/2} \mathscr{Y}_{k,\ell}(\pi^{-1}(x)) \\ &= \sum_{\ell=1}^{d_k} \alpha_\ell \mathscr{W}_{k,\ell}(x) \quad \text{c.q.f.d.} \end{aligned}$$

Considérons maintenant, pour tout entier  $k \geq 0$ , l'espace  $W_k$  composé de toutes les fonctions rationnelles de la forme

$$R(x) = \sum_{m=0}^k \frac{p_m(x)}{(|x|^2 + 1)^{m+(n-2)/2}}.$$

où, pour tout  $m \leq k$ ,  $p_m$  est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à  $m$ . Evidemment

$$W_0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_k \subset \dots$$

De plus,  $W_k \subset W_0^1(\mathbb{R}^n)$  si  $n \geq 3$  et  $W_k \subset X_0^1(\mathbb{R}^n)$  si  $n = 2$ .

Ces dernières inclusions découlent des propriétés des espaces de Sobolev à poids. On sait que pour  $n \geq 3$

$$p_m(x) \in W_{-\frac{n}{2}}^m(\mathbb{R}^n),$$

$$\text{alors, } \frac{p_m(x)}{(|x|^2 + 1)^{m+(n-2)/2}} = \langle x \rangle^{-2m-n+2} p_m(x) \in W_{\frac{n}{2}+2m-2}^m(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_{\frac{n}{2}+m-1}^1(\mathbb{R}^n).$$

Et comme pour  $n \geq 3$ ,  $m + \frac{n}{2} - 1 > 0$ , on conclut

$$R(x) \in W_{\frac{n}{2}+m-1}^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow R(x) \in W_0^1(\mathbb{R}^n).$$

De la même façon on démontre que  $W_k \subset X_0^1(\mathbb{R}^n)$  quand  $n = 2$ .



### 2.4.1 Des fonctions propres rationnelles

**Théorème 2.8** *Supposons que  $n \geq 2$ . Pour tout  $k \geq 0$ , les propriétés suivantes sont vérifiées*

- $\mathcal{W}_{k,\ell} \in W_k, \forall 1 \leq \ell \leq d_k$ .
- $E_0 \oplus E_1 \oplus \dots \oplus E_k = W_k$ .
- $\dim W_k = \binom{n+k}{n} + \binom{n+k-1}{n}$  si  $k \geq 1$  et  $\dim W_0 = 1$ .
- Si  $n \geq 3$ , l'opérateur  $(|x|^2+1)^2\Delta$  est un isomorphisme de  $W_k$  dans lui même.

**Preuve.**

- Calculons d'abord la dimension de  $W_k$ . Soit  $R$  une fonction dans  $W_k$ , donc on peut l'écrire sous la forme

$$R(x) = \sum_{m=0}^k \frac{p_m(x)}{(|x|^2+1)^{m+(n-2)/2}}. \quad (2.34)$$

On peut décomposer  $p_m, 0 \leq m \leq k$ , sous la forme

$$p_m(x) = \sum_{\ell=0}^{E(m/2)} c_{m,\ell}(x')x_n^{2\ell} + \sum_{\ell=0}^{E((m-1)/2)} d_{m,\ell}(x')x_n^{2\ell+1},$$

où  $c_{m,\ell}$  et  $d_{m,\ell}$  sont des fonctions polynomiales de la variable  $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ , de degré inférieur ou égal à  $m - 2\ell$  et  $m - 2\ell - 1$ , respectivement.

Ecrire  $x_n^2 = \langle x \rangle^2 - \langle x' \rangle^2$ , avec  $\langle x' \rangle^2 = |x'|^2 + 1$ , et remplacer dans (2.34) conduit à la décomposition suivante de  $R(x)$

$$R(x) = \frac{a_0(x')}{(|x|^2+1)^{(n-2)/2}} + \sum_{m=1}^k \frac{a_m(x') + b_m(x')x_n}{(|x|^2+1)^{m+(n-2)/2}}, \quad (2.35)$$

où, pour tout  $m \leq k$ ,  $a_m$  et  $b_m$  sont deux fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à  $m$  et  $m - 1$  respectivement.

De l'unicité de la décomposition de  $R(x)$ , il s'ensuit que  $\dim W_0 = 1$  et

$$\begin{aligned} \dim W_k &= 1 + \sum_{m=1}^k (\dim \mathbb{C}_m[X_1, \dots, X_{n-1}] + \dim \mathbb{C}_{m-1}[X_1, \dots, X_{n-1}]) \\ &= 2 + n + \sum_{m=2}^k \left\{ \binom{n+m-1}{m} + \binom{n+m-2}{m-1} \right\} \\ &= 2 + n + \sum_{m=2}^k \left\{ \binom{n+m}{n} - \binom{n+m-2}{n} \right\} \\ &= \binom{n+k}{n} + \binom{n+k-1}{n}. \end{aligned}$$

– Soit  $w \in E_k$  pour  $k \geq 0$ . Alors,  $w$  s'écrit sous la forme

$$w(x) = \left( \frac{2}{|x|^2 + 1} \right)^{\frac{n-2}{2}} P(\pi^{-1}(x)),$$

où  $P$  est une fonction polynomiale harmonique homogène de degré  $k$ . De l'expression de  $\pi^{-1}$ , on obtient

$$w(x) = \left( \frac{2}{|x|^2 + 1} \right)^{k + \frac{n-2}{2}} P(x_1, \dots, x_n, \frac{|x|^2 - 1}{2}).$$

Ecrire  $P$  sous la forme  $P(x_1, \dots, x_n, t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha t^{k-|\alpha|}$ , donne

$$\begin{aligned} w(x) &= \left( \frac{2}{|x|^2 + 1} \right)^{k + \frac{n-2}{2}} \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{a_\alpha}{2^{k-|\alpha|}} x^\alpha (\langle x \rangle^2 - 2)^{k-|\alpha|} \\ &= \left( \frac{2}{|x|^2 + 1} \right)^{k + \frac{n-2}{2}} \sum_{|\alpha| \leq k} \sum_{\ell=0}^{k-|\alpha|} \binom{k-|\alpha|}{\ell} \frac{a_\alpha}{2^{k-|\alpha|}} (-2)^\ell x^\alpha \langle x \rangle^{2(k-|\alpha|-\ell)}, \\ &= \sum_{m=0}^k \frac{p_m(x)}{\langle x \rangle^{2m+n-2}} \end{aligned}$$

avec  $\langle x \rangle^2 = |x|^2 + 1$  et

$$p_m(x) = 2^{m+(n-2)/2} \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{m-|\alpha|} \binom{k-|\alpha|}{m-|\alpha|} a_\alpha x^\alpha.$$

Par conséquent  $w \in W_k$ . On conclut que  $E_k \subset W_k$ , et

$$E_0 \oplus \dots \oplus E_k \subset W_k.$$

L'égalité découle de l'identité  $\dim W_k = \sum_{m=0}^k d_m = \dim [E_0 \oplus \dots \oplus E_k]$ .

– De la décomposition  $W_k = E_0 \oplus \dots \oplus E_k$ , on déduit facilement que  $W_N$  est invariant sous l'action de l'opérateur  $(|x|^2 + 1)^2 \Delta$ .

En effet, soit  $w \in W_N = E_0 \oplus \dots \oplus E_N$ , alors

$$w = \sum_{j=0}^N \alpha_j w_j \quad \text{où } w_j \in E_j = [\{\mathscr{W}_{j,1}, \dots, \mathscr{W}_{j,d_j}\}],$$

i.e.

$$w = \sum_{j=0}^N \alpha_j \sum_{\ell=1}^{d_j} \beta_\ell \mathscr{W}_{j,\ell}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} (|x|^2 + 1)^2 \Delta w &= \sum_{j=0}^N \sum_{\ell=1}^{d_j} \alpha_j \beta_\ell (|x|^2 + 1)^2 \Delta \mathcal{W}_{j,\ell} \\ &= - \sum_{j=0}^N \sum_{\ell=1}^{d_j} \alpha_j \beta_\ell \lambda_j \mathcal{W}_{j,\ell} \in W_N. \end{aligned}$$

Donc l'image de  $W_N$  par l'opérateur  $(|x|^2 + 1)^2 \Delta$  est  $\widetilde{W}_N$ . De plus, puisque  $\lambda_0 > 0$  quand  $n \geq 3$ , on déduit que  $(|x|^2 + 1)^2 \Delta$  est un automorphisme dans  $W_N$ .

■

**Remarque.** Quand  $n = 2$ , l'opérateur  $(|x|^2 + 1)^2 \Delta$  est un endomorphisme de  $W_N$ , dont l'image est  $E_1 \oplus \dots \oplus E_N$  (l'orthogonal de  $E_0$  dans  $W_N$  par rapport au produit scalaire de  $W_{-2}^0(\mathbb{R}^n)$ ).

Quand  $n = 1$ , on peut montrer facilement que  $E_0 \oplus \dots \oplus E_k = \widetilde{W}_k$ , où l'espace  $\widetilde{W}_k$  est composé de toutes les fonctions rationnelles de la forme

$$R(x) = \sum_{m=0}^k \frac{q_m(x)}{(|x|^2 + 1)^{m/2}},$$

avec, pour tout  $m \leq k$ ,  $q_m$  est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à  $m$ . En adoptant l'écriture  $x^2 = (x^2 + 1) - 1$ , on peut montrer facilement que  $R(x) \in \widetilde{W}_k$  admet la décomposition suivante

$$R(x) = \sum_{m=0}^{[k/2]} \frac{a_m}{(x^2 + 1)^m} + \sum_{m=0}^{[(k-1)/2]} \frac{b_m x}{(x^2 + 1)^{m+1/2}}, \quad (2.36)$$

où,  $a_m$  et  $b_m$ ,  $0 \leq m \leq k$ , sont des réels et  $b_0 = 0$ .

### 2.4.2 Quelques expressions des fonctions propres du Laplacien pondéré

On propose ici de donner une écriture simplifiée des fonctions propres de l'opérateur  $-(|x|^2 + 1)^2 \Delta$  dans les cas  $n = 1$ ,  $n = 2$  et  $n = 3$ .

**Le cas  $n = 1$ .** Dans ce cas, les fonctions propres sont solutions du problème

$$-\Delta_g u = \lambda u$$

où  $\Delta_g$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur le cercle, défini par  $\Delta_g = \partial^2/\partial\theta^2$ . Les valeurs propres de l'opérateur  $-\Delta_g$  sont

$$\lambda_k = k(k+2),$$

et les fonctions propres de l'opérateur  $-(|x|^2 + 1)^2\Delta$  sont données, d'après le Théorème 2.7, par

$$\begin{aligned} w_k(x) &= (x^2 + 1)^{1/2} \cos((k+1) \arctan(x) + k\pi/2) \\ &= (x^2 + 1)^{1/2} \cos((k+1) \arccos(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}) + k\pi/2), \end{aligned}$$

ce qui donne à la fin

$$w_k(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x^2} T_{k+1}(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}) & \text{si } k \text{ est pair,} \\ x C_k(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}) & \text{si } k \text{ est impair,} \end{cases} \quad (2.37)$$

où  $T_k$  et  $C_k$ ,  $k \geq 0$ , sont les polynômes de Tchybechev de première et seconde espèce.

**Le cas  $n = 2$ .** Lorsque  $n = 2$ , la projection stéréographique de  $\mathbb{S}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  s'écrit

$$\pi(\xi) = \left( \frac{\cos \phi \sin \theta}{1 - \cos \theta}, \frac{\sin \phi \sin \theta}{1 - \cos \theta} \right), \quad \xi = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta) \in \mathbb{S}^2.$$

où  $(r, \phi, \theta)$  désigne les coordonnées sphériques.

Les harmoniques sphériques usuelles sur la sphère unité  $\mathbb{S}^2$  de  $\mathbb{R}^3$  sont données par

$$\mathcal{Y}_{\ell,m}(\xi) = a_{\ell,m} e^{im\phi} P_\ell^m(\cos \theta); \quad \ell \geq 0 \quad \text{et} \quad -\ell \leq m \leq \ell,$$

avec  $a_{\ell,m}$ , les constantes de normalisation, et  $P_\ell^m$  sont appelées, les fonctions de Legendre associées, elles sont solutions de l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{d}{dx} P_\ell^m \right) + \ell(\ell+1) P_\ell^m - \frac{m^2}{1-x^2} P_\ell^m = 0.$$

Les fonctions propres  $(w_{\ell,m})$  de l'opérateur  $-(|x|^2 + 1)^2\Delta$  sur  $\mathbb{R}^2$  sont données par

$$w_{\ell,m}(x) = a_{\ell,m} \frac{(x_1 + ix_2)^m}{|x|^m} P_\ell^m \left( \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right); \quad \ell \geq 0 \quad \text{et} \quad -\ell \leq m \leq \ell, \quad (2.38)$$

et satisfont

$$-(|x|^2 + 1)^2 \Delta w_{\ell,m} = 4\ell(\ell+1) w_{\ell,m}; \quad \ell \geq 0 \quad \text{et} \quad -\ell \leq m \leq \ell.$$

En effet, de la définition de la projection stéréographique, on a

$$\cos \theta = \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1}, \quad \sin \theta = \frac{2|x|}{|x|^2 + 1},$$

ainsi

$$\cos \phi = \frac{x_1}{|x|} \quad \text{et} \quad \sin \phi = \frac{x_2}{|x|}.$$

Et les fonctions propres de l'opérateur  $-(|x|^2 + 1)^2 \Delta$  quand  $n = 2$  sont données par

$$w_{\ell,m}(x) = \mathcal{Y}_{\ell,m}(\pi^{-1}(x)).$$

D'où, (2.38).

La fonction  $w_{\ell,m}$ , qui appartient à  $\cup_{k \geq 0} W_k$ , est non singulière à l'origine puisque le terme  $|x|^m$  disparaît après avoir développer (2.38).

En effet, on sait que

$$P_\ell^m(\cos \theta) = (\sin \theta)^m \left( \frac{d}{dx} \right)^m P_\ell(\cos \theta),$$

où  $P_\ell$  sont les polynômes de Legendre. En remplaçant dans la relation (2.38), on obtient

$$w_{\ell,m}(x) = a_{\ell,m}(x_1 + ix_2)^m \frac{2^m}{(|x|^2 + 1)^m} \left( \frac{d}{dx} \right)^m P_\ell \left( \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right).$$

**Le cas  $n = 3$ .** Dans ce cas, on a besoin des harmoniques sphériques sur la sphère unité  $\mathbb{S}^3$  données par

$$\mathcal{Y}_{k,\ell,m}(\xi) = \alpha_{k,\ell,m} Q_k^\ell(\cos \chi) \mathcal{Y}_{\ell,m}(\xi'); \quad \xi \in \mathbb{S}^3, \quad k \geq 0, \quad 0 \leq \ell \leq k, \quad -\ell \leq m \leq \ell,$$

où  $\alpha_{k,\ell,m}$  sont les constantes de normalisation et  $(\phi, \theta, \chi)$  sont les coordonnées sphériques sur  $\mathbb{S}^3$  ramenées à  $\xi$  par la relation

$$\xi = (\cos \phi \sin \theta \sin \chi, \sin \phi \sin \theta \sin \chi, \sin \chi \cos \theta, \cos \chi).$$

Le vecteur  $\xi'$  appartient à  $\mathbb{S}^2$  et il est donné par

$$\xi' = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta).$$

Ici  $Q_k^\ell$ ,  $k \geq 0$  désigne la fonction définie par

$$Q_k^\ell(x) = (1 - x^2)^{\ell/2} \frac{d^\ell C_k}{dx^\ell}(x),$$

avec  $C_k$  le  $k$ -ième polynôme de Tchebychev de seconde espèce (voir, e. g., [51]). Les fonctions propres de l'opérateur  $-(|x|^2 + 1)^2 \Delta$  sont

$$w_{k,\ell,m}(x) = \alpha_{k,\ell,m} \left( \frac{2}{|x|^2 + 1} \right)^{1/2} \frac{(x_1 + ix_2)^m}{(x_1^2 + x_2^2)^{m/2}} Q_k^\ell \left( \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right) P_\ell^m \left( \frac{x_3}{|x|} \right), \quad (2.39)$$

où  $k \geq 0$ ,  $0 \leq \ell \leq k$ ,  $-\ell \leq m \leq \ell$ .

En effet, comme pour le cas  $n = 2$ , en utilisant la définition de la projection stéréographique, on obtient

$$\xi_4 = \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1}, \quad \text{donc} \quad \sin \chi = \frac{2|x|}{|x|^2 + 1}.$$

Et

$$\xi_3 = \frac{2x_3}{|x|^2 + 1} = \sin \chi \cos \theta \quad \text{donc,} \quad \cos \theta = \frac{x_3}{|x|}, \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}}{|x|}.$$

$$\xi_2 = \frac{2x_2}{|x|^2 + 1} = \sin \phi \sin \theta \sin \chi \quad \text{donc,} \quad \sin \phi = \frac{x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}}.$$

$$\xi_1 = \frac{2x_1}{|x|^2 + 1} = \cos \phi \sin \theta \sin \chi \quad \text{donc,} \quad \cos \phi = \frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}}.$$

D'une autre part, les fonctions propres de l'opérateur  $-(|x|^2 + 1)^2 \Delta$  quand  $n = 3$  sont données par

$$\begin{aligned} w_{k,\ell,m}(x) &= \left( \frac{2}{|x|^2 + 1} \right)^{1/2} \mathcal{Y}_{k,\ell,m}(\pi^{-1}(x)) \\ &= \left( \frac{2}{|x|^2 + 1} \right)^{1/2} \alpha_{k,\ell,m} Q_k^\ell(\cos \chi) e^{im\phi} P_\ell^m(\cos \theta). \end{aligned}$$

On déduit alors la relation (2.39).

### Remarque.

Les fonctions rationnelles  $(\mathcal{W}_{k,\ell})_{k \geq 0, 1 \leq \ell \leq d_k}$  peuvent être utilisées, du point de vue numérique, pour résoudre les équations aux dérivées partielles dans l'espace tout entier. c'est le but du chapitre suivant où on va proposer une méthode spectrale simple pour résoudre les problèmes elliptiques du second ordre dans des domaines non bornés.

## Chapitre 3

Approximation spectrale de problèmes elliptiques dans des  
domaines non bornés

## Chapitre 3

---

# Approximation spectrale de problèmes elliptiques dans des domaines non bornés

---

Parmi les méthodes existantes pour résoudre les équations aux dérivées partielles dans les domaines non bornés, on peut souligner l'émergence des méthodes spectrales basées sur l'utilisation de fonctions rationnelles, surtout dans le cas unidimensionnel (voir Boyd [23, 22], Guo, Shen et Wang [47], Guo et Shen [46]). Le principal avantage des fonctions rationnelles est la possibilité de prendre en compte la décroissance des fonctions à l'infini, c'est-à-dire quand  $|x| \rightarrow +\infty$ . En fait, dans la plupart des problèmes pratiques de la physique et l'ingénierie, il est crucial de décrire le comportement de la solution à l'infini.

Inspiré par la forme des fonctions  $(\mathcal{W}_{k,\ell})_{k \geq 0, 1 \leq \ell \leq d_k}$  dans le chapitre précédent, on propose une méthode spectrale simple pour résoudre les problèmes elliptiques du second ordre dans tout l'espace.

Ce chapitre a fait l'objet d'un article soumis à "SIAM Journal on Numerical Analysis" [21].

### 3.1 Position du problème et hypothèses

On s'intéresse ici à la résolution des problèmes elliptiques de la forme

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x) \text{ dans } \mathbb{R}^n. \quad (3.1)$$



On commence tout d'abord par définir certains outils qui seront utilisés tout au long de ce chapitre. Pour une fonction  $\rho$ , positive et mesurable sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $L^\infty_\rho(\mathbb{R}^n)$  désigne l'espace des fonctions mesurables  $v$ , satisfaisant  $\rho v \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  et muni de la norme

$$\|v\|_{L^\infty_\rho(\mathbb{R}^n)} = \|\rho v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Considérons la fonction poids définie par

$$w(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^2 + 1} & \text{si } n \neq 2, \\ \frac{1}{(|x|^2 + 1)(\log(2 + |x|^2))^2} & \text{si } n = 2, \end{cases}$$

où  $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ . Ainsi,  $W_w^1(\mathbb{R}^n)$  est défini comme étant l'espace composé de toutes les distributions  $v$  satisfaisant

$$\int_{\mathbb{R}^n} w(x)|v(x)|^2 dx < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v(x)|^2 dx < \infty,$$

et muni de la norme

$$\|v\|_{W_w^1(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} w(x)|v(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v(x)|^2 dx.$$

$W_w^{-1}(\mathbb{R}^n)$  désigne le dual de  $W_w^1(\mathbb{R}^n)$ . En fait,  $W_w^1(\mathbb{R}^n)$  est l'espace de Sobolev à poids  $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ , défini dans le premier chapitre, avec  $m = 1$ ,  $\alpha = 0$  et  $p = 2$ .

Quand  $n \geq 3$ , on sait que la semi-norme

$$|v|_{W_w^1(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx$$

est une norme sur  $W_w^1(\mathbb{R}^n)$ , alors il existe une constante  $c_0 > 0$  telle que

$$\forall v \in W_w^1(\mathbb{R}^n), \quad \int_{\mathbb{R}^n} w(x)|v(x)|^2 dx \leq c_0 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v(x)|^2 dx. \quad (3.2)$$

Quand  $n \in \{1, 2\}$ , (3.2) n'est plus vraie à cause des fonctions constantes qui appartiennent à  $W_w^1(\mathbb{R}^n)$ . Plus précisément, si  $n \in \{1, 2\}$ , il existe une constante qu'on note encore  $c_0$ ,  $c_0 > 0$ , telle que

$$\forall v \in W_w^1(\mathbb{R}^n), \quad \inf_{k \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} w(x)|v(x) - k|^2 dx \leq c_0 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx. \quad (3.3)$$

Et la meilleure constante dans cette inégalité correspond à la valeur moyenne pondérée de  $v$ , donnée par

$$k = \frac{1}{\bar{w}} \int_{\mathbb{R}^n} w(x)v(x) dx, \quad \text{où } \bar{w} = \int_{\mathbb{R}^n} w(x) dx.$$

Ainsi, on peut réécrire (3.3) sous la forme

$$\forall v \in W_w^1(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} w(x)|v(x)|^2 dx \leq c_0 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{\bar{w}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} wv dx \right)^2. \quad (3.4)$$

Considérons maintenant les hypothèses suivantes

( $\mathcal{H}_1$ )  $f$  appartient à  $W_w^{-1}(\mathbb{R}^n)$ . Cette hypothèse est vérifiée en particulier lorsque

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^2}{w(x)} dx < +\infty.$$

( $\mathcal{H}_2$ )  $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)^{n \times n}$  et il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que pour tout  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\sum_{i, j=1}^n a_{i, j}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2, \text{ p. p. dans } \mathbb{R}^n. \quad (3.5)$$

( $\mathcal{H}_3$ )  $b = (b_1, \dots, b_n) \in L_{w^{-1/2}}^\infty(\mathbb{R}^n)^n$ ,  $\operatorname{div} b \in L_{w^{-1}}^\infty(\mathbb{R}^n)$  et  $c \in L_{w^{-1}}^\infty(\mathbb{R}^n)$ , ce qui veut dire qu'il existe une constante  $C \in \mathbb{R}^+$  telle que

$$|b(x)|^2 + |\operatorname{div} b(x)| + |c(x)| \leq Cw(x). \text{ p. p. dans } \mathbb{R}^n. \quad (3.6)$$

( $\mathcal{H}_4$ ) Il existe une constante  $\epsilon$  telle que

$$\epsilon > -\alpha/c_0 \text{ si } n \geq 3, \quad \epsilon > 0 \text{ si } n \in \{1, 2\},$$

et

$$c(x) - \frac{1}{2} \operatorname{div} b(x) \geq \epsilon w(x) \text{ p. p. dans } \mathbb{R}^n. \quad (3.7)$$

Si  $b = 0$ ,  $c = 0$  et  $n \geq 3$ , les hypothèses ( $\mathcal{H}_3$ ) et ( $\mathcal{H}_4$ ) sont automatiquement satisfaites.

## 3.2 Formulation variationnelle

Revenons maintenant au problème (3.1), en le multipliant par une fonction test  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  et en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{i, j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} a_{i, j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \varphi(x) dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^n} c(x) u(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

De la densité de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  dans  $W_w^1(\mathbb{R}^n)$ , on obtient la formulation faible suivante :  
 Trouver  $u \in W_w^1(\mathbb{R}^n)$  tel que

$$\forall v \in W_w^1(\mathbb{R}^n), a(u, v) = \langle f, v \rangle. \quad (3.8)$$

où  $a(., .)$  est une forme bilinéaire, définie par

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) v(x) dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} c(x) u(x) v(x) dx. \end{aligned}$$

et

$$\forall v \in W_w^1(\mathbb{R}^n), \langle f, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) v(x) dx.$$

**Proposition 3.1** *Supposons que les hypothèses  $(\mathcal{H}_1)$ ,  $(\mathcal{H}_2)$ ,  $(\mathcal{H}_3)$  et  $(\mathcal{H}_4)$  sont vérifiées. Alors, le problème (3.8) admet une solution unique  $u \in W_w^1(\mathbb{R}^n)$ , vérifiant*

$$\|u\|_{W_w^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{W_w^{-1}(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.9)$$

**Preuve.** La démonstration de cette proposition est une conséquence directe du lemme de Lax-Milgram.

Il s'agit de trouver  $u \in W_w^1(\mathbb{R}^n)$  vérifiant

$$\forall v \in W_w^1(\mathbb{R}^n), a(u, v) = L(v).$$

$L$  étant la forme linéaire, définie par  $L(v) = \langle f, v \rangle$ .

**La continuité.** Montrons d'abord la continuité de  $L(.)$ . On a

$$\begin{aligned} L(v) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) v(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)}{w(x)^{1/2}} w(x)^{1/2} v(x) dx \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)^2}{w(x)} dx \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}^n} w(x) v(x)^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq c_1 \|v\|_{L_{w^{1/2}}^2(\mathbb{R}^n)} \quad \text{en vertu de } (\mathcal{H}_1) \\ &\leq c_2 \|v\|_{W_w^1(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Passant maintenant à la continuité de  $a(., .)$ . Une intégration par

parties de  $a(u, v)$ , donne

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx - \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i(x)v(x)) u(x) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} c(x) u(x) v(x) dx. \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\mathbb{R}^n} (c(x) - \operatorname{div} b(x)) u(x) v(x) dx \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} b_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} u(x) dx. \end{aligned}$$

Alors, en utilisant l'hypothèse  $(\mathcal{H}_2)$ , on obtient

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq A \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right| dx + \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|b_i(x)|}{w(x)^{1/2}} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| w(x)^{1/2} |u(x)| dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|c(x)| + |\operatorname{div} b(x)|}{w(x)} w(x) |u(x)| |v(x)| dx. \end{aligned}$$

De l'hypothèse  $(\mathcal{H}_3)$  et de l'inégalité de Hardy, on déduit

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq A_1 \|u\|_{W_w^1(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{W_w^1(\mathbb{R}^n)} + C_2 \|u\|_{L^2_{w^{1/2}(\mathbb{R}^n)}} \|v\|_{L^2_{w^{1/2}(\mathbb{R}^n)}} \\ &\quad + C_1 \|u\|_{L^2_{w^{1/2}(\mathbb{R}^n)}} \|v\|_{W_w^1(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

d'où la continuité.

**La coercivité.** De ce qui précède et des hypothèses  $(\mathcal{H}_2)$  et  $(\mathcal{H}_4)$ , on

a

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} a_{i,j}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\mathbb{R}^n} (c(x) - \frac{1}{2} \operatorname{div} b(x)) |v(x)|^2 dx \\ &\geq \alpha \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx + \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} w(x) |v(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

deux cas sont alors à distinguer,

1<sup>er</sup> cas :  $n \in \{1, 2\}$ , dans ce cas,  $\epsilon > 0$  et  $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} a(v, v) &\geq \min(\alpha, \epsilon) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} w(x) |v(x)|^2 dx \right) \\ &\geq \min(\alpha, \epsilon) \|v\|_{W_w^1(\mathbb{R}^n)}^2, \end{aligned}$$

2<sup>ème</sup> cas :  $n \geq 3$ , en vertu de l'inégalité de Hardy (3.2), on a

$$\|v\|_{W_w^1(\mathbb{R}^n)}^2 \leq c_0 \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$$

donc,

$$\begin{aligned} a(v, v) &\geq \frac{\alpha}{c_0} \|v\|_{W_w^1(\mathbb{R}^n)}^2 + \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} w(x) |v(x)|^2 dx \\ &\geq \min\left(\frac{\alpha}{c_0} + \epsilon, \frac{\alpha}{c_0}\right) \|v\|_{W_w^1(\mathbb{R}^n)}^2. \end{aligned}$$

D'où l'existence et l'unicité de la solution. Quant à l'estimation (3.9), on l'obtient grâce à la continuité de  $L(\cdot)$  et la coercivité de  $a(\cdot, \cdot)$ . En effet, on a

$$c \|u\|_{W_w^1(\mathbb{R}^n)}^2 \leq a(u, u) \leq \|f\|_{W_w^{-1}(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{W_w^1(\mathbb{R}^n)},$$

où  $c$  est une constante strictement positive. On conclut

$$\|u\|_{W_w^1(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{c} \|f\|_{W_w^{-1}(\mathbb{R}^n)}$$

■

**Remarque.** Quand  $n \in \{1, 2\}$ ,  $b = 0$  et  $c = 0$ , l'hypothèse  $(\mathcal{H}_4)$  n'est plus vérifiée et l'unicité de la solution est perdue, à cause des fonctions constantes qui appartiennent à  $W_w^1(\mathbb{R}^n)$ . En plus, de l'existence qui est aussi perdue excepté, quand  $f$  satisfait la condition de compatibilité

$$\langle f, 1 \rangle = 0. \quad (3.10)$$

Cette dernière condition on l'obtient en posant  $v = 1$  dans l'équation (3.8).

Dans le but de prendre en considération cette dernière condition, on complète l'équation (3.8), dans ce cas, par la condition suivante

$$\int_{\mathbb{R}^n} w(x) u(x) dx = 0. \quad (3.11)$$

Alors, le problème (3.8) complété par la condition (3.11) est équivalent au problème :

Trouver  $u \in W_w^1(\mathbb{R}^n)$  tel que

$$\forall v \in W_w^1(\mathbb{R}^n), a_\star(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad (3.12)$$

où

$$a_\star(u, v) = a(u, v) + \kappa \left( \int_{\mathbb{R}^n} w(x) u(x) dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}^n} w(x) v(x) dx \right),$$

et  $\kappa > 0$ , une constante.

Pour montrer l'équivalence entre les deux problèmes (3.8)+(3.11) et (3.12), il suffit de constater que  $a(u, 1) = 0$ , pour tout  $u \in W_w^1(\mathbb{R}^n)$ . On a

**Proposition 3.2** *Supposons que  $n \leq 2$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$  et que les hypothèses  $(\mathcal{H}_1)$  et  $(\mathcal{H}_2)$  sont vérifiées. Alors, le problème (3.12) admet une solution  $u \in W_w^1(\mathbb{R}^n)$  si et seulement si  $f$  satisfait (3.10). Dans ce cas,  $u$  est unique et vérifie*

$$\|u\|_{W_w^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{W_w^{-1}(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.13)$$

**Preuve.** Il suffit de montrer que  $a_\star(\cdot, \cdot)$  est coercive, car toutes les autres conditions de Lax-Milgram restent vérifiées. On a

$$\begin{aligned} a_\star(v, v) &= a(v, v) + \kappa \left( \int_{\mathbb{R}^n} w(x)v(x)dx \right)^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} a_{i,j}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \kappa \left( \int_{\mathbb{R}^n} w(x)v(x)dx \right)^2 \\ &\geq \alpha \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx + \kappa \left( \int_{\mathbb{R}^n} w(x)v(x)dx \right)^2. \end{aligned}$$

D'où la coercivité, en vertu de la relation (3.4). ■

### 3.3 Discrétisation

On introduit une famille d'espaces de dimensions finies  $(H_k^n)_{k \geq 0}$  comme suit

- Quand  $n = 1$ , l'espace  $H_k^n$ ,  $k \geq 0$  est composé des fonctions rationnelles de la forme

$$v(x) = \sum_{m=0}^k \frac{p_m(x)}{(x^2 + 1)^{m/2}}; \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.14)$$

où, pour tout  $m \leq k$ ,  $p_m$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $m$  et possédant la même parité que  $m$ .

- Quand  $n \geq 2$ , l'espace  $H_k^n$ ,  $k \geq 0$  est composé des fonctions rationnelles de la forme

$$v(x) = \sum_{m=0}^k \frac{p_m(x)}{(|x|^2 + 1)^{m+(n-2)/2}}; \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.15)$$

où, pour tout  $m \leq k$ ,  $p_m$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $m$ .

Notons que  $H_k^n$  est un sous espace de l'espace  $V_k^n$  des fonctions rationnelles  $v$  de la forme

$$v(x) = \frac{P(x)}{(|x|^2 + 1)^{(2k+n-2)/2}}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où  $P$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $2k$ . Cependant,  $H_k^n \neq V_k^n$ . C'est une conséquence évidente du lemme suivant (voir le chapitre précédent pour la preuve)

**Lemme 3.3** Pour tout  $k \geq 0$ ,

$$\dim H_k^n = \begin{cases} k+1 & \text{si } n=1, \\ \binom{n+k}{n} + \binom{n+k-1}{n} & \text{si } n \geq 2. \end{cases} \quad (3.16)$$

Compte tenu de ce lemme, quand  $n \geq 2$ , on a

$$\dim H_k^n \sim \frac{2}{n!} k^n. \quad (3.17)$$

Considérons maintenant le problème variationnel (3.8) lorsque les hypothèses  $(\mathcal{H}_1)$ ,  $(\mathcal{H}_2)$ ,  $(\mathcal{H}_3)$  et  $(\mathcal{H}_4)$  sont satisfaites. Le problème discrétisé s'écrit alors :

Trouver  $u_N \in H_N^n$  tel que

$$a(u_N, v_N) = \langle f, v_N \rangle, \quad \forall v_N \in H_N^n, \quad (3.18)$$

où  $N \geq 1$  désigne un entier destiné à tendre vers l'infini. Le problème (3.18) admet une solution unique  $u_N \in H_N^n$ .

Le choix d'une base de l'espace  $H_N^n$  joue un rôle très important dans le calcul du système linéaire provenant du problème (3.18). Inspiré par la décomposition (2.35) et (2.36), dans le chapitre précédent, on peut considérer les fonctions suivantes

**Lorsque  $n \geq 2$** , on pose

$$q_{2m}(x) = \frac{\ell_m(x)}{(|x|^2 + 1)^{m+(n-2)/2}}, \quad 0 \leq m \leq k,$$

$$q_{2m+1}(x) = \frac{\ell_{m-1}(x)x_n}{(|x|^2 + 1)^{m+(n-2)/2}}, \quad 1 \leq m \leq k,$$

où  $(\ell_m)_{0 \leq m \leq k}$  sont  $(k+1)$  polynômes satisfaisant la propriété  $\deg(\ell_m) = m$  pour  $m \leq k$ .

**Lorsque  $n = 1$** , on pose

$$q_m(x) = \frac{x^{m-2[m/2]}}{(x^2 + 1)^{m/2}}, \quad 0 \leq m \leq k.$$

Notons que

$$\dim H_k^n = \sum_{m=0}^k d_m$$

où  $d_m$  est la dimension de l'espace des harmoniques sphériques  $\mathbb{H}_m$  de degré  $m$  sur la sphère unité  $\mathbb{S}^n$ .

On peut aussi utiliser la famille de fonctions  $\mathcal{W}_{k,\ell}(x)$ ,  $k \geq 0$  et  $1 \leq \ell \leq d_k$ , définies précédemment par

$$\mathcal{W}_{k,\ell}(x) = \begin{cases} \left( \frac{2}{|x|^2 + 1} \right)^{\frac{n-2}{2}} \mathcal{Y}_{k,\ell}(\pi^{-1}(x)) & \text{si } n \neq 1, \\ (-1)^k N_k (x^2 + 1)^{1/2} \cos((k+1) \arctan(x) + k\pi/2) & \text{si } n = 1, \end{cases} \quad (3.19)$$

où

$$N_0 = 1 \quad \text{et} \quad N_k = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k(k+2)\pi}} \quad \text{pour } k \geq 1, \quad (3.20)$$

est la constante de normalisation de la base dans le cas  $n = 1$ ,  $(\mathcal{Y}_{k,\ell})$  sont les harmoniques sphériques sur la sphère unité  $\mathbb{S}^n$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , tandis que  $\pi^{-1}$  désigne l'inverse de la projection stéréographique  $\pi$  définie dans le chapitre précédent. Ces fonctions constitue une base dans  $H_k^n$ , pour  $0 \leq m \leq k$ , et  $1 \leq \ell \leq d_m$  et une base orthogonale de  $W_{-2}^0(\mathbb{R}^n)$ , quand  $m \geq 0$  et  $1 \leq \ell \leq d_m$ .

On rappelle que dans le cas uni-dimensionnel ( $n = 1$ ) on peut aussi écrire les  $\mathcal{W}_{k,\ell}(x)$  sous la forme

$$(-1)^k \mathcal{W}_k(x) = \begin{cases} N_k \sqrt{1+x^2} T_{k+1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) & \text{si } k \text{ est pair,} \\ N_k x C_k\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) & \text{si } k \text{ est impair,} \end{cases} \quad (3.21)$$

ou encore

$$\mathcal{W}_k(x) = N_k C_k\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right), \quad (3.22)$$

où  $T_k$  et  $C_k$ ,  $k \geq 0$ , sont les polynômes de Tchebychev de première et seconde espèce, vérifiant

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_k(\cos \theta) = \cos(k\theta), \quad \sin \theta C_k(\cos \theta) = \sin((k+1)\theta).$$

Revenons maintenant à notre problème. On a

**Théorème 3.4** *Supposons que les hypothèses  $(\mathcal{H}_1)$ ,  $(\mathcal{H}_2)$ ,  $(\mathcal{H}_3)$  et  $(\mathcal{H}_4)$  sont vérifiées. Considérons  $u \in W_w^1(\mathbb{R}^n)$  (resp.  $u_N \in H_N^n$ ) l'unique solution de (3.8) (resp. de (3.18)). Si nous supposons que  $u \in W_2^2(\mathbb{R}^n)$ . Alors on a l'estimation suivante*

$$\|u - u_N\|_{W_w^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim N^{-1} \|u\|_{W_2^2(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.23)$$

De plus,  $\lim_{N \rightarrow +\infty} N \|u - u_N\|_{W_w^1(\mathbb{R}^n)} = 0$



**Remarque.** On rappelle que dans le cas  $b = 0$ ,  $c = 0$  et  $n \leq 2$ , le problème (3.8) est complété par la condition (3.11) afin d'assurer l'unicité. La formulation faible du problème est donnée par l'équation (3.12) et l'existence et l'unicité sont garanties à la Proposition 3.2. Le problème discrétisé correspondant est alors :

Trouver  $u_N \in H_N^n$  tel que

$$a_\star(u_N, v_N) = \langle f, v_N \rangle, \quad \forall v_N \in H_N^n. \quad (3.24)$$

On note que dans ce cas que la solution discrète satisfait

$$\int_{\mathbb{R}^n} w(x)u_N(x)dx = 0.$$

En fait, il suffit de prendre  $v = 1$  dans la formulation (3.24).

On a, alors

**Théorème 3.5** *Supposons que  $n \leq 2$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$  et que les hypothèses  $(\mathcal{H}_1)$  et  $(\mathcal{H}_2)$  sont vérifiées. Soit  $u \in W_w^1(\mathbb{R}^n)$  (resp.  $u_N \in H_N^n$ ) l'unique solution de (3.12) (resp. de (3.24)). Supposons que  $u \in W_2^2(\mathbb{R}^n)$ . Alors, le résultat du Théorème 3.4 s'applique.*

**Preuve.** Pour la démonstration des deux derniers théorèmes, 3.4 et 3.5, considérons  $\pi_N$  la projection orthogonale de  $W_{-2}^0(\mathbb{R}^n)$  dans  $H_N^n$  et montrons le lemme suivant

**Lemme 3.6** *Soit  $u \in W_2^2(\mathbb{R}^n)$  et  $n \geq 3$ . Alors,*

$$\|\nabla(u - \pi_N u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim N^{-1}\|u\|_{W_2^2(\mathbb{R}^n)}, \quad (3.25)$$

$$\|\langle x \rangle^{-2}(u - \pi_N u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \lesssim N^{-2}\|u\|_{W_2^2(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.26)$$

**Preuve.** Pour montrer (3.25), il suffit de montrer

$$\|\nabla(u - \pi_N u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim N^{-1}\|\langle x \rangle^2 \Delta u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

puisque, de

$$\|u\|_{W_2^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|\langle x \rangle \nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|\langle x \rangle^2 \Delta u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

On a,

$$\|\langle x \rangle^2 \Delta u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \|u\|_{W_2^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Soit  $(u_{k,m})_{k \geq 0, 1 \leq m \leq d_k}$  les composantes de  $u$  dans la base  $(\mathcal{W}_{k,m})$ , i.e.

$$u = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=1}^{d_k} u_{k,m} \mathcal{W}_{k,m}.$$

Comme  $\pi_N u$  est la projection orthogonale de  $u \in W_{-2}^0(\mathbb{R}^n)$  dans  $H_N^n$ , il s'ensuit que

$$\pi_N u = \sum_{k=0}^N \sum_{m=1}^{d_k} u_{k,m} \mathscr{W}_{k,m}.$$

Ainsi,

$$\|\nabla(u - \pi_N u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{d_k} |u_{k,m}|^2 \|\nabla \mathscr{W}_{k,m}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

En vertu du Théorème 2.7,  $(\mathscr{W}_{k,m})_{k,m}$  sont les fonctions propres de l'opérateur  $-\langle x \rangle^4 \Delta$  correspondantes aux valeurs propres  $\lambda_k$  qui constituent une suite positive et croissante, donc

$$\|\nabla \mathscr{W}_{k,m}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \lambda_k \|\langle x \rangle^{-2} \mathscr{W}_{k,m}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Ainsi

$$\|\nabla(u - \pi_N u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{d_k} \lambda_k |u_{k,m}|^2 \|\langle x \rangle^{-2} \mathscr{W}_{k,m}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

On a aussi

$$\|\langle x \rangle^{-2}(u - \pi_N u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{d_k} |u_{k,m}|^2 \|\langle x \rangle^{-2} \mathscr{W}_{k,m}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2. \quad (3.27)$$

D'autre part, posons  $v = -\langle x \rangle^4 \Delta u$ . Puisque,  $u \in W_{-2}^2(\mathbb{R}^n)$ , alors

$v \in W_{-2}^0(\mathbb{R}^n)$  et

$$v = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=1}^{d_k} \lambda_k u_{k,m} \mathscr{W}_{k,m}.$$

D'après (3.27), on a

$$\begin{aligned} \|\langle x \rangle^{-2}(v - \pi_N v)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \sum_{k=N+1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{d_k} \lambda_k^2 |u_{k,m}|^2 \|\langle x \rangle^{-2} \mathscr{W}_{k,m}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ &\geq \lambda_{N+1} \|\nabla(u - \pi_N u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ &\geq \lambda_{N+1}^2 \|\langle x \rangle^{-2}(u - \pi_N u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la relation (2.27), on obtient

$$\begin{aligned} \|\nabla(u - \pi_N u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &\leq \frac{1}{\lambda_{N+1}} \|\langle x \rangle^{-2}(v - \pi_N v)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ &\lesssim \frac{1}{N^2} \|\langle x \rangle^{-2}(v - \pi_N v)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2. \end{aligned}$$

En remplaçant  $v$  par sa valeur, on a

$$\begin{aligned} \|\nabla(u - \pi_N u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &\lesssim \frac{1}{N^2} \sum_{k=N+1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{d_k} |u_{k,m}|^2 \|\langle x \rangle^2 \Delta \mathcal{W}_{k,m}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ &\lesssim \frac{1}{N^2} \|\langle x \rangle^2 \Delta u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2. \end{aligned}$$

On conclut alors, l'estimation (3.25). D'une autre part, on a

$$\begin{aligned} \|\langle x \rangle^{-2}(u - \pi_N u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &\leq \frac{1}{\lambda_{N+1}^2} \|\langle x \rangle^{-2}(v - \pi_N v)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ &\lesssim \frac{1}{N^4} \|\langle x \rangle^2 \Delta u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2. \end{aligned}$$

D'où la relation (3.26), ce qui termine la démonstration du Lemme 3.6. ■

Maintenant pour terminer la démonstration du Théorème 3.4 et Théorème 3.5, on utilise le lemme de Céa [31],

$$\|u - u_N\|_{W_w^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \inf_{w \in H_N^n} \|u - w\|_{W_w^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Soit

$$u_N^* = \begin{cases} \pi_N u & \text{quand } n \geq 3, \\ \pi_N u - c_N & \text{quand } n \leq 2, \end{cases}$$

où  $c_N$  est une constante choisie telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} w(x)(u - u_N^*) dx = 0.$$

En utilisant l'inégalité (3.2) quand  $n \geq 3$  et (3.3) quand  $n \leq 2$  et le lemme de Céa, on a.

$$\begin{aligned} \|u - u_N\|_{W_w^1(\mathbb{R}^n)} &\lesssim \|u - u_N^*\|_{W_w^1(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \|\nabla(u - u_N^*)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\nabla(u - \pi_N u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim N^{-1} \|u\|_{W_2^2(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve des deux théorèmes. ■

### 3.4 La matrice de rigidité

La décomposition de  $u_N$  suivant la base  $(\mathcal{W}_{k,m})_{0 \leq k \leq N, 1 \leq m \leq d_k}$ , transforme le problème discrétisé (3.18), sous la forme

$$AU = B, \quad (3.28)$$

où  $U \in \mathbb{R}^N$ ,  $A = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$  est la matrice dont les coefficients sont données par une des expressions suivantes

$$m_{i,j} = \begin{cases} a(\mathcal{W}_{i,m}, \mathcal{W}_{j,\ell}), \\ \text{ou} \\ a_*(\mathcal{W}_{i,m}, \mathcal{W}_{j,\ell}). \end{cases}$$

Avec,  $1 \leq m \leq d_i$  et  $1 \leq \ell \leq d_j$ , quant au vecteur  $B$  ses termes sont donnés par

$$b_i = \langle f, \mathcal{W}_{i,m} \rangle, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq N \quad \text{et } 1 \leq m \leq d_i.$$

Afin de simplifier le calcul des intégrales impliquées dans le calcul de la matrice de rigidité  $M$ , on suppose que  $b = 0$  et  $c = 0$ .

Une idée naturelle consiste à considérer un changement de variable, quand  $n \geq 2$ , de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{S}_*^n$  et borner ainsi le domaine d'intégration.

Dans ce qui suit, on se donne une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^n$ , on note par  $\hat{f}$  la fonction définie sur  $\mathbb{S}_*^n$  par

$$\hat{f}(\xi) = f(\pi(\xi)), \quad \text{pour } \xi \in \mathbb{S}_*^n. \quad (3.29)$$

On montre facilement que, pour  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left( \frac{2}{1 + |y|^2} \right)^n dy = \int_{\mathbb{S}^n} \hat{f}(\xi) d\xi, \quad (3.30)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy = \int_{\mathbb{S}^n} \frac{\hat{f}(\xi)}{(1 - \xi_{n+1})^n} d\xi. \quad (3.31)$$

Pour les détails de la démonstration voir le chapitre précédent.

**Lemme 3.7** Soit  $\nabla_\xi \hat{f}$ , le gradient tangentiel de  $\hat{f}$ . On a

$$\widehat{\nabla_x f}(\xi) = M(\xi) \nabla_\xi \hat{f}(\xi), \quad (3.32)$$

où,  $M(\xi) = (m_{i,j}(\xi))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n+1}$  est une  $n \times (n+1)$  matrice donnée par

$$\begin{aligned} m_{i,j}(\xi) &= (1 - \xi_{n+1}) \delta_{i,j} - \xi_i \xi_j \quad \text{si } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, \\ m_{i,n+1}(\xi) &= (1 - \xi_{n+1}) \xi_i. \end{aligned}$$

**Preuve.** On a, par définition  $\widehat{\nabla_x f}(\xi) = \nabla_x f(\pi(\xi))$  et

$$\nabla_x f(\pi(\xi)) = \nabla_x (f \circ \pi)(\xi) = J(x) \nabla_\xi \widehat{f}(\xi)$$

$$\text{où } J(x) = \left( \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n+1}.$$

On rappelle que,  $\xi_j = \frac{2x_j}{1+|x|^2}$  pour  $1 \leq j \leq n$  et  $\xi_{n+1} = \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1}$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} &= (1 - \xi_{n+1}) \delta_{i,j} - \xi_i \xi_j \text{ pour } 1 \leq i, j \leq n, \\ \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial x_i} &= (1 - \xi_{n+1}) \xi_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

En posant  $J(x) = M(\xi)$ , on obtient l'identité voulue. ■

**Lemme 3.8** *On a,*

$$\begin{aligned} M(\xi)M(\xi)^t &= (1 - \xi_{n+1})^2 I_n, \\ M(\xi)^t M(\xi) &= (1 - \xi_{n+1})^2 (I_{n+1} - \xi \xi^t), \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{S}_*^n. \end{aligned}$$

*Il s'ensuit que*

$$\nabla_\xi \widehat{f}(\xi) = (1 - \xi_{n+1})^{-2} M(\xi)^t \widehat{\nabla_x f}(\xi). \quad (3.33)$$

**Preuve.**

$$M(\xi)M(\xi)^t = ((c_{i,j}))_{1 \leq i, j \leq n},$$

où

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= \sum_{k=1}^n m_{i,k} m_{j,k} + m_{i,n+1} m_{j,n+1} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ (1 - \xi_{n+1})^2 & \text{si } i = j, \end{cases} \end{aligned}$$

d'où  $M(\xi)M(\xi)^t = (1 - \xi_{n+1})^2 I_n$ . De même, on a

$$M(\xi)^t M(\xi) = ((c_{i,j}))_{1 \leq i, j \leq n+1},$$

où

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= \sum_{k=1}^n m_{k,i} m_{k,j} \\ &= \begin{cases} -(1 - \xi_{n+1})^2 \xi_i \xi_j & \text{si } i \neq j \\ (1 - \xi_{n+1})^2 - (1 - \xi_{n+1})^2 \xi_i^2 & \text{si } i = j \end{cases} \end{aligned}$$

d'où l'identité

$$M(\xi)^t M(\xi) = (1 - \xi_{n+1})^2 (I_{n+1} - \xi \xi^t).$$

Montrons maintenant la dernière relation. D'après ce qui précède, on a

$$\begin{aligned} M(\xi)^t \widehat{\nabla_x f}(\xi) &= M(\xi)^t M(\xi) \nabla_\xi \widehat{f}(\xi) \\ &= (1 - \xi_{n+1})^2 (I_{n+1} - \xi \xi^t) \nabla_\xi \widehat{f}(\xi) \\ &= (1 - \xi_{n+1})^2 \nabla_\xi \widehat{f}(\xi), \quad \text{car } \xi^t \nabla_\xi \widehat{f}(\xi) = 0 \end{aligned}$$

d'où la relation (3.33). ■

**Lemme 3.9** *Pour tout vecteur  $z = (z_1, \dots, z_n, z_{n+1})^t$  satisfaisant  $\xi^t \cdot z = 0$ , on a*

$$\begin{aligned} M(\xi)z &= (1 - \xi_{n+1})z_* + z_{n+1}\xi_* \\ \xi_*^t M(\xi)z &= (1 - \xi_{n+1})z_{n+1}, \end{aligned}$$

où  $\xi_* = (\xi_1, \dots, \xi_n)^t$ ,  $|\xi|^2 = 1$  et  $z_* = (z_1, \dots, z_n)^t$ . La relation (3.32) devient alors

$$\widehat{\nabla_x f}(\xi) = H(\xi) \nabla_\xi \widehat{f}(\xi), \quad (3.34)$$

où  $H(\xi) = (h_{i,j}(\xi))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n+1}$  est une matrice  $n \times (n+1)$ , donnée par

$$\begin{aligned} h_{i,j}(\xi) &= (1 - \xi_{n+1})\delta_{i,j} \text{ pour } 1 \leq i, j \leq n, \\ h_{i,n+1}(\xi) &= \xi_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

**Preuve.** On a,  $M(\xi)z = (c_i)_{1 \leq i \leq n}$  où

$$\begin{aligned} c_i &= \sum_{k=1}^n m_{i,k} z_k + m_{i,n+1} z_{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n (1 - \xi_{n+1}) \delta_{i,k} z_k - \sum_{k=1}^n \xi_i \xi_k z_k + (1 - \xi_{n+1}) \xi_i z_{n+1} \\ &= (1 - \xi_{n+1}) z_i + z_{n+1} \xi_i. \end{aligned}$$

Donc,  $M(\xi)z = (1 - \xi_{n+1})z_* + z_{n+1}\xi_*$  où,  $z_* = (z_1, \dots, z_n)^t$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \xi_*^t M(\xi)z &= \sum_{k=1}^n \xi_k [(1 - \xi_{n+1})z_k + z_{n+1}\xi_k] \\ &= (1 - \xi_{n+1})z_{n+1}. \end{aligned}$$

Revenons maintenant à la relation (3.32), on a

$$\widehat{\nabla_x f}(\xi) = M(\xi) \nabla_\xi \widehat{f}(\xi)$$

et puisque  $\xi^t \nabla_\xi \widehat{f}(\xi) = 0$ , alors

$$M(\xi) \nabla_\xi \widehat{f}(\xi) = (1 - \xi_{n+1}) (\nabla_\xi \widehat{f}(\xi))_* + \frac{\partial \widehat{f}(\xi)}{\partial \xi_{n+1}} \xi_*$$

où,  $(\nabla_\xi \widehat{f}(\xi))_* = \left( \frac{\partial \widehat{f}(\xi)}{\partial \xi_i} \right)_{1 \leq i \leq n}$  et  $\xi_* = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ , d'où (3.34). ■

Maintenant, on se donne deux fonctions  $u$  et  $v$  dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  et on pose

$$U(x) = \frac{u(x)}{\rho(x)}, \quad V(x) = \frac{v(x)}{\rho(x)} \quad \text{où } \rho(x) = \left( \frac{2}{|x|^2 + 1} \right)^{\frac{n-2}{2}}.$$

**Lemme 3.10** *On a,*

$$\widehat{\rho}(\xi) = (1 - \xi_{n+1})^\alpha \quad \text{et} \quad \widehat{\nabla_x \rho}(\xi) = -\alpha(1 - \xi_{n+1})^\alpha \xi_*$$

avec  $\alpha = (n - 2)/2$  et  $\xi_* = (\xi_1, \dots, \xi_n)^t$ . Il s'ensuit que

$$\widehat{\nabla u} = (1 - \xi_{n+1})^\alpha [H(\xi) \nabla_\xi \widehat{U} - \alpha \widehat{U}(\xi) \xi_*]. \quad (3.35)$$

On peut écrire, aussi

$$\widehat{\nabla u} = (1 - \xi_{n+1})^\alpha [M(\xi) \nabla_\xi \widehat{U} - \alpha \widehat{U}(\xi) \xi_*]. \quad (3.36)$$

**Preuve.** D'après la relation (3.32) on a

$$\widehat{\nabla_x \rho}(\xi) = M(\xi) \nabla_\xi \widehat{\rho}(\xi),$$

où  $\nabla_\xi \widehat{\rho}(\xi) = \left( \frac{\partial \widehat{\rho}(\xi)}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial \widehat{\rho}(\xi)}{\partial \xi_{n+1}} \right)^t$ , avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{\rho}(\xi)}{\partial \xi_j} &= \frac{\partial \widehat{\rho}(\xi)}{\partial \xi_{n+1}} \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial \xi_j} \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n+1 \\ &= -\alpha(1 - \xi_{n+1})^{\alpha-1} \delta_{j,n+1} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq j \leq n, \\ -\alpha(1 - \xi_{n+1})^{\alpha-1} & \text{si } j = n+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc  $M(\xi) \nabla_\xi \widehat{\rho}(\xi) = ((c_i))_{0 \leq i \leq n}$  tel que

$$\begin{aligned} c_i &= \sum_{k=1}^n m_{i,k} \frac{\partial \widehat{\rho}(\xi)}{\partial \xi_k} + m_{i,n+1} \frac{\partial \widehat{\rho}(\xi)}{\partial \xi_{n+1}} \\ &= -\alpha \xi_i (1 - \xi_{n+1})^\alpha. \end{aligned}$$

D'où

$$\widehat{\nabla_x \rho}(\xi) = -\alpha(1 - \xi_{n+1})^\alpha \xi_*,$$

d'autre part, on sait que  $u(x) = \rho(x)U(x)$ . Donc

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla_x u}(\xi) &= \widehat{\nabla_x(\rho U)}(\xi) \\ &= \widehat{\nabla_x \rho}(\xi) \widehat{U}(\xi) + \widehat{\rho}(\xi) \widehat{\nabla_x U}(\xi) \\ &= (1 - \xi_{n+1})^\alpha [M(\xi) \nabla_\xi \widehat{U}(\xi) - \alpha \widehat{U}(\xi) \xi_*]. \end{aligned}$$

On a, aussi en vertu de (3.35),  $\widehat{\nabla_x U}(\xi) = H(\xi) \nabla_\xi \widehat{U}(\xi)$ . Ce qui donne

$$\widehat{\nabla_x u}(\xi) = (1 - \xi_{n+1})^\alpha [H(\xi) \nabla_\xi \widehat{U}(\xi) - \alpha \widehat{U}(\xi) \xi_*].$$

■

**Lemme 3.11** *On a, le résultat suivant*

$$a(u, v) = \int_{\mathbb{S}^n} \frac{[\nabla_\xi \widehat{U}^t H(\xi)^t - \alpha \widehat{U} \xi_*^t] \widehat{\mathcal{A}}(\xi) \overline{[H(\xi) \nabla_\xi \widehat{V} - \alpha \widehat{V} \xi_*]}}{(1 - \xi_{n+1})^2} d\xi. \quad (3.37)$$

où,  $\widehat{U}(\xi) = (1 - \xi_{n+1})^{-\alpha} u(\pi(\xi))$ , pour  $\xi \in \mathbb{S}_*^n$  et  $\alpha = \frac{n-2}{2}$ .

**Preuve.** On rappelle que pour  $b = 0$  et  $c = 0$ ,

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u^t \mathcal{A} \nabla v dx \end{aligned}$$

où  $\mathcal{A} = ((a_{i,j}(x)))_{1 \leq i,j \leq n}$ . En utilisant la relation (3.31), on obtient

$$a(u, v) = \int_{\mathbb{S}^n} \frac{1}{(1 - \xi_{n+1})^n} \widehat{\nabla u}^t \widehat{\mathcal{A}}(\xi) \overline{\widehat{\nabla v}} d\xi.$$

A l'aide de la relation (3.35), on obtient l'identité (3.37).

Puisque,  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $W_w^1(\mathbb{R}^n)$ , la relation (3.37) reste valable quand  $u$  et  $v$  appartiennent à  $W_w^1(\mathbb{R}^n)$ . Dans ce cas  $\widehat{U} \in H^1(\mathbb{S}_*^n)$  et  $\widehat{V} \in H^1(\mathbb{S}_*^n)$  (voir [4]). L'intégrale dans la formule (3.37), est absolument convergente et peut être calculée directement lorsque,  $\mathcal{A}$  possède une forme simple, ou en utilisant les formules de quadrature sur la sphère unité. ■



### 3.4.1 Cas de l'équation de Poisson

Supposons dans cette section que  $\widehat{\mathcal{A}}(\xi) = I$ . Puisqu'on peut remplacer dans la formule (3.37)  $H(\xi)$  par  $M(\xi)$ , alors

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\mathbb{S}^n} \frac{\nabla_\xi \widehat{U}(\xi)^t M(\xi)^t M(\xi) \overline{\nabla_\xi \widehat{V}(\xi)}}{(1 - \xi_{n+1})^2} d\xi + \alpha^2 \int_{\mathbb{S}^n} \frac{|\xi_*|^2 \widehat{U}(\xi) \widehat{V}(\xi)}{(1 - \xi_{n+1})^2} d\xi \\ &\quad - \alpha \int_{\mathbb{S}^n} \frac{\xi_*^t M(\xi) \nabla_\xi (\widehat{U} \widehat{V})(\xi)}{(1 - \xi_{n+1})^2} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{S}^n} \nabla_\xi \widehat{U}(\xi)^t \cdot \overline{\nabla_\xi \widehat{V}(\xi)} + \alpha^2 \int_{\mathbb{S}^n} \frac{(1 + \xi_{n+1}) \widehat{U}(\xi) \widehat{V}(\xi)}{1 - \xi_{n+1}} d\xi \\ &\quad - \alpha \int_{\mathbb{S}^n} \frac{\xi_*^t M(\xi) \nabla_\xi (\widehat{U} \widehat{V})(\xi)}{(1 - \xi_{n+1})^2} d\xi. \end{aligned}$$

**Lemme 3.12** *On a,*

$$\int_{\mathbb{S}^n} \widehat{u}(\xi) e_{n+1} \cdot \nabla_\xi \widehat{v}(\xi) d\xi = - \int_{\mathbb{S}^n} \widehat{v}(\xi) e_{n+1} \cdot \nabla_\xi \widehat{u}(\xi) d\xi + n \int_{\mathbb{S}^n} \xi_{n+1} \widehat{u}(\xi) \widehat{v}(\xi) d\xi. \quad (3.38)$$

**Preuve.** Pour montrer la relation (3.38), il suffit de montrer que

$$\int_{\mathbb{S}^n} e_{n+1} \cdot \nabla_\xi \widehat{u}(\xi) \widehat{v}(\xi) d\xi = n \int_{\mathbb{S}^n} \xi_{n+1} \widehat{u}(\xi) \widehat{v}(\xi) d\xi.$$

D'abord, on a

$$e_{n+1} \cdot \nabla_\xi \widehat{u}(\xi) \widehat{v}(\xi) = (1 - \xi_{n+1})^{-1} \xi_* \cdot \nabla_x uv(\pi(\xi))$$

où  $\xi_* = (\xi_1, \dots, \xi_n)^t$  et  $\pi(\xi) = \vec{x} = \frac{\xi_*}{1 - \xi_{n+1}}$ , donc

$$e_{n+1} \cdot \nabla_\xi \widehat{u}(\xi) \widehat{v}(\xi) = \vec{x} \cdot \nabla_x uv(x),$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^n} e_{n+1} \cdot \nabla_\xi \widehat{u}(\xi) \widehat{v}(\xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{2}{1 + |x|^2} \right)^n \vec{x} \cdot \nabla_x uv(x) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} u(x) v(x) \operatorname{div} \left[ \left( \frac{2}{1 + |x|^2} \right)^n \vec{x} \right] dx. \end{aligned}$$

Or

$$\operatorname{div} \left[ \left( \frac{2}{1 + |x|^2} \right)^n \vec{x} \right] = n \left( \frac{2}{1 + |x|^2} \right)^n \left( \frac{1 - |x|^2}{1 + |x|^2} \right)$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^n} e_{n+1} \cdot \nabla_{\xi} \widehat{u}(\xi) \widehat{v}(\xi) d\xi &= n \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x) \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \left( \frac{2}{1 + |x|^2} \right)^n dx \\ &= n \int_{\mathbb{S}^n} \xi_{n+1} \widehat{u}(\xi) \widehat{v}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

■

**Lemme 3.13** *En utilisant l'identité  $\xi \cdot \nabla \widehat{V}(\xi) = 0$  et la formule (3.38), on montre que*

$$\int_{\mathbb{S}^n} \frac{\xi_*^t M(\xi) \nabla_{\xi} (\widehat{U} \widehat{V})(\xi)}{(1 - \xi_{n+1})^2} d\xi = \int_{\mathbb{S}^n} \widehat{U}(\xi) \widehat{V}(\xi) \frac{(n-1)\xi_{n+1} - 1}{(1 - \xi_{n+1})} d\xi$$

et donc

$$a(u, v) = \int_{\mathbb{S}^n} \nabla_{\xi} \widehat{U}(\xi)^t \cdot \overline{\nabla_{\xi} \widehat{V}(\xi)} + \frac{n\alpha}{2} \int_{\mathbb{S}^n} \widehat{U}(\xi) \widehat{V}(\xi) d\xi. \quad (3.39)$$

**Preuve.** Calculons d'abord  $\xi_*^t M(\xi) \nabla_{\xi} (\widehat{U} \widehat{V})(\xi)$ . Pour cela on pose  $\widehat{U} \widehat{V} = g$ , alors

$$\xi_*^t M(\xi) \nabla_{\xi} (\widehat{U} \widehat{V})(\xi) = \xi_*^t M(\xi) \nabla_{\xi} g(\xi)$$

où  $M(\xi) \nabla_{\xi} g(\xi) = ((c_i))_{1 \leq n}$  et

$$\begin{aligned} c_i &= \sum_{k=1}^n m_{i,k} \frac{\partial g(\xi)}{\partial \xi_k} + m_{i,n+1} \frac{\partial g(\xi)}{\partial \xi_{n+1}} \\ &= (1 - \xi_{n+1}) \frac{\partial g(\xi)}{\partial \xi_i} + \xi_i \frac{\partial g(\xi)}{\partial \xi_{n+1}}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \xi_*^t M(\xi) \nabla_{\xi} (\widehat{U} \widehat{V})(\xi) &= \sum_{k=1}^n \xi_k c_k \\ &= (1 - \xi_{n+1}) \frac{\partial g(\xi)}{\partial \xi_{n+1}} \\ &= (1 - \xi_{n+1}) e_{n+1} \cdot \nabla_{\xi} (\widehat{U} \widehat{V})(\xi), \end{aligned}$$

d'où

$$\int_{\mathbb{S}^n} \frac{\xi_*^t M(\xi) \nabla_{\xi} (\widehat{U} \widehat{V})(\xi)}{(1 - \xi_{n+1})^2} d\xi = \int_{\mathbb{S}^n} \frac{e_{n+1} \cdot \nabla_{\xi} (\widehat{U} \widehat{V})(\xi)}{1 - \xi_{n+1}} d\xi.$$

En utilisant la relation (3.38), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^n} \frac{\xi_*^t M(\xi) \nabla_\xi (\widehat{U} \widehat{V})(\xi)}{(1 - \xi_{n+1})^2} d\xi &= - \int_{\mathbb{S}^n} \widehat{U}(\xi) \overline{\widehat{V}(\xi)} \frac{e_{n+1} \cdot \nabla_\xi \xi_{n+1}}{(1 - \xi_{n+1})^2} d\xi \\ &\quad + n \int_{\mathbb{S}^n} \widehat{U}(\xi) \overline{\widehat{V}(\xi)} \frac{\xi_{n+1}}{1 - \xi_{n+1}} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{S}^n} \widehat{U}(\xi) \overline{\widehat{V}(\xi)} \frac{(n-1)\xi_{n+1} - 1}{(1 - \xi_{n+1})} d\xi. \end{aligned}$$

On passe maintenant, au calcul de  $a(u, v)$ , on a

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\mathbb{S}^n} \frac{\nabla_\xi \widehat{U}(\xi)^t [(1 - \xi_{n+1})^2 (I_{n+1} - \xi \xi^t)] \overline{\nabla_\xi \widehat{V}(\xi)}}{(1 - \xi_{n+1})^2} d\xi \\ &\quad + \alpha^2 \int_{\mathbb{S}^n} \frac{|\xi_*|^2 \widehat{U}(\xi) \overline{\widehat{V}(\xi)}}{(1 - \xi_{n+1})^2} d\xi - \alpha \int_{\mathbb{S}^n} \widehat{U}(\xi) \overline{\widehat{V}(\xi)} \frac{(n-1)\xi_{n+1} - 1}{(1 - \xi_{n+1})} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{S}^n} \nabla_\xi \widehat{U}(\xi)^t \cdot \overline{\nabla_\xi \widehat{V}(\xi)} + \frac{n\alpha}{2} \int_{\mathbb{S}^n} \widehat{U}(\xi) \overline{\widehat{V}(\xi)} d\xi. \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. ■

**Corollaire 3.14** *On a*

$$a(\mathcal{W}_{k,\ell}, \mathcal{W}_{j,m}) = (k(k+n-1) + \frac{n(n-2)}{4}) \delta_{k,j} \delta_{\ell,m}. \quad (3.40)$$

En effet, si on remplace dans l'identité (3.39)  $u$  et  $v$  par  $\mathcal{W}_{k,\ell}$  et  $\mathcal{W}_{j,m}$ , on obtient pour tout  $n \geq 2$

$$\begin{aligned} a(\mathcal{W}_{k,\ell}, \mathcal{W}_{j,m}) &= \int_{\mathbb{S}^n} \nabla_\xi \mathcal{Y}_{k,\ell}(\xi)^t \cdot \overline{\nabla_\xi \mathcal{Y}_{j,m}(\xi)} + \frac{n\alpha}{2} \int_{\mathbb{S}^n} \mathcal{Y}_{k,\ell} \overline{\mathcal{Y}_{j,m}} d\xi \\ &= (\widehat{\lambda} + \frac{n\alpha}{2}) \int_{\mathbb{S}^n} \mathcal{Y}_{k,\ell}(\xi) \overline{\mathcal{Y}_{j,m}(\xi)} d\xi, \end{aligned}$$

où  $\widehat{\lambda}$  est donné par  $\widehat{\lambda} = k(k+n-1)$  et le système (3.28) est alors diagonal.

Soulignons enfin que la solution du problème de Poisson-Dirichlet dans  $W_\omega^1(\mathbb{R}^n)$  est donnée pour  $n \geq 3$  par

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=-d_k}^{d_k} \frac{4}{4k(k+n-1) + n(n-2)} \langle f, \overline{\mathcal{W}_{k,\ell}} \rangle \mathcal{W}_{k,\ell}(x). \quad (3.41)$$

### 3.4.2 Le cas bidimensionnel

Dans le cas bidimensionnel  $n = 2$  et pour  $b(x) = 0$ ,  $c(x) = 0$  et  $\mathcal{A}(x) = I$ , on a le système (3.28) qui devient aussi diagonal en vertu de la condition (3.11). Alors la solution dans ce cas est encore donnée par (3.41).

### 3.4.3 Le cas unidimensionnel

On suppose dans cette section,  $n = 1$ , de même que pour le cas  $n \geq 2$  dans le but de simplifier les calculs on suppose  $b = c = 0$ .

**Lemme 3.15** Soit  $(\xi_1, \xi_2) = (\cos \theta, \sin \theta)$ , avec  $\theta \in ]\pi/2, 5\pi/2[$ . On a,

$$M(\xi) \nabla_{\xi} \widehat{U}(\xi) = (1 - \xi_2) \frac{\partial \widehat{U}}{\partial \theta},$$

Si on pose en plus

$$\widehat{U}^*(\varphi) = \widehat{U}(\theta) \text{ où } \theta = 2\varphi + \frac{3\pi}{2}.$$

Alors,

$$a(u, v) = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \frac{\partial \widehat{U}^*}{\partial \varphi} \frac{\partial \widehat{V}^*}{\partial \varphi} - \widehat{U}^* \cdot \widehat{V}^* + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\tan(\varphi) \widehat{U}^* \widehat{V}^*) \right\} \widehat{a}^*(\varphi) d\varphi.$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} w(x) u(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\widehat{U}^*(\varphi)}{\cos \varphi} d\varphi,$$

où,  $w(x) = 1/(1 + x^2)$ .

**Preuve.** Soit  $\xi_1 = \cos \theta$  et  $\xi_2 = \sin \theta$ , on sait que

$$\nabla_{\xi} \widehat{U}(\xi) = \frac{\partial \widehat{U}}{\partial \theta} \vec{e}_{\theta}$$

où  $\vec{e}_{\theta} = \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial \theta}, \frac{\partial \xi_2}{\partial \theta} \right)^t = (-\xi_2, \xi_1)^t$ , d'autre part

$$M(\xi) = ((1 - \xi_2) - \xi_1^2, (1 - \xi_2)\xi_1),$$

donc

$$M(\xi) \nabla_{\xi} \widehat{U}(\xi) = (1 - \xi_2) \frac{\partial \widehat{U}}{\partial \theta}.$$

Calculons maintenant  $a(u, v)$ . En vertu de la relation (3.37)

$$\begin{aligned}
 a(u, v) &= \int_{\mathbb{S}^1} \frac{[(1 - \xi_2) \frac{\partial \widehat{U}}{\partial \theta} - \alpha \widehat{U}(\xi) \xi_1] \widehat{a}(\xi) [(1 - \xi_2) \frac{\partial \widehat{V}}{\partial \theta} - \alpha \widehat{V}(\xi) \xi_1]}{(1 - \xi_2)^2} d\xi \\
 &= \int_{\pi/2}^{5\pi/2} \left\{ \frac{\partial \widehat{U}}{\partial \theta}(\theta) \frac{\partial \widehat{V}}{\partial \theta}(\theta) + \alpha^2 \frac{\cos^2 \theta}{(1 - \sin \theta)^2} \widehat{U}(\theta) \cdot \widehat{V}(\theta) \right. \\
 &\quad \left. - \alpha \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\widehat{U} \widehat{V})(\theta) \right\} \widehat{a}(\theta) d\theta \\
 &= \int_{\pi/2}^{5\pi/2} \left\{ \frac{\partial \widehat{U}}{\partial \theta} \frac{\partial \widehat{V}}{\partial \theta} - \frac{1}{4} \widehat{U} \cdot \widehat{V}(\theta) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \widehat{U} \widehat{V} \right)(\theta) \right\} \widehat{a}(\theta) d\theta.
 \end{aligned}$$

Effectuant maintenant le changement de variable,

$$\theta = 2\varphi + \frac{3\pi}{2}$$

qui donne

$$\begin{aligned}
 a(u, v) &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \frac{1}{4} \frac{\partial \widehat{U}^*}{\partial \varphi} \frac{\partial \widehat{V}^*}{\partial \varphi} - \frac{1}{4} \widehat{U}^* \widehat{V}^* + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\cos(2\varphi + \frac{3\pi}{2})}{1 - \sin(2\varphi + \frac{3\pi}{2})} \widehat{U}^* \widehat{V}^* \right) \right\} \widehat{a}^* d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \frac{\partial \widehat{U}^*}{\partial \varphi} \frac{\partial \widehat{V}^*}{\partial \varphi} - \widehat{U}^* \widehat{V}^* + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\tan \varphi \cdot \widehat{U}^* \widehat{V}^*)(\varphi) \right\} \widehat{a}^* d\varphi.
 \end{aligned}$$

Et par ailleurs,

$$\int_{\mathbb{R}} w(x) u(x) dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^1} \widehat{U}(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{5\pi/2} (1 - \sin \theta)^{-1/2} \widehat{U}(\theta) d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\widehat{U}^*(\varphi)}{\cos \varphi} d\varphi.$$

■

**Lemme 3.16** Pour  $\mathcal{W}_{k,1}(x) = (x^2 + 1)^{1/2} \cos[(k + 1) \arctan x + \frac{k\pi}{2}]$ , on a

$$\widehat{\mathcal{W}}_{k,1}^*(\varphi) = \sqrt{2} \cos((k + 1)\varphi + k\pi/2),$$

et

$$a(\mathcal{W}_{k,1}, \mathcal{W}_{j,1}) = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \widehat{a}^*(\varphi) \frac{\partial \widehat{\mathcal{W}}_{k,1}^*}{\partial \varphi} \frac{\partial \widehat{\mathcal{W}}_{j,1}^*}{\partial \varphi} - \left( \widehat{a}^*(\varphi) + \tan \varphi \frac{d\widehat{a}^*}{d\varphi} \right) \widehat{\mathcal{W}}_{k,1}^* \cdot \widehat{\mathcal{W}}_{j,1}^* \right\} d\varphi. \quad (3.42)$$

$$\int_{\mathbb{R}} w(x) \mathcal{W}_{k,1}(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{C_k(t)}{\sqrt{1 - t^2}} dt. \quad (3.43)$$

**Preuve.** On sait que  $\widehat{v}(\xi) = (1 - \xi_{n+1})^{(2-n)/2} v(s(\xi))$  pour tout  $\xi \in \mathbb{S}_*^n$  donc

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{W}}_{k,1}(\xi) &= (1 - \xi_2)^{1/2} \mathcal{W}_{k,1}(s(\xi)) \\ &= \sqrt{2} \cos((k+1) \arctan \frac{\xi_1}{1 - \xi_2} + k\pi/2) \\ &= \sqrt{2} \cos((k+1)\varphi + k\pi/2).\end{aligned}$$

D'une autre part, on a

$$\begin{aligned}a(\mathcal{W}_{k,1}, \mathcal{W}_{j,1}) &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \widehat{a}^*(\varphi) \left\{ \frac{\partial \widehat{\mathcal{W}}_{k,1}^*}{\partial \varphi} \frac{\partial \widehat{\mathcal{W}}_{j,1}^*}{\partial \varphi} - \widehat{\mathcal{W}}_{k,1}^* \cdot \widehat{\mathcal{W}}_{j,1}^* \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \varphi} [\tan \varphi \cdot \widehat{\mathcal{W}}_{k,1}^* \widehat{\mathcal{W}}_{j,1}^*] \right\} d\varphi.\end{aligned}$$

Et

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \widehat{a}^*(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} [\tan \varphi \cdot \widehat{\mathcal{W}}_{k,1}^* \widehat{\mathcal{W}}_{j,1}^*] d\varphi = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan \varphi \cdot \widehat{\mathcal{W}}_{k,1}^* \widehat{\mathcal{W}}_{j,1}^* \frac{\partial \widehat{a}^*}{\partial \varphi} d\varphi,$$

d'où l'identité (3.42). De plus,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} w(x) \mathcal{W}_{k,1}(x) dx &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\widehat{\mathcal{W}}_{k,1}^*(\varphi)}{\cos \varphi} d\varphi \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos[(k+1)\varphi + \frac{k\pi}{2}]}{\cos \varphi} d\varphi \\ &= \int_{-1}^1 \frac{C_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.\end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue en effectuant le changement de variable  $t = \cos(\varphi + \pi/2) = -\sin \varphi$ . ■

### Cas particulier

Si on suppose que  $a$  est une constante alors, (3.42) devient

$$a(\mathcal{W}_{k,1}, \mathcal{W}_{j,1}) = \frac{1}{2} a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \frac{\partial \widehat{\mathcal{W}}_{k,1}^*}{\partial \varphi} \frac{\partial \widehat{\mathcal{W}}_{j,1}^*}{\partial \varphi} - \widehat{\mathcal{W}}_{k,1}^* \cdot \widehat{\mathcal{W}}_{j,1}^* \right\} d\varphi.$$

En vertu de l'orthogonalité de la base  $\{(\mathcal{W}_{k,1})_{k \geq 0}\}$ , on a

$$a(\mathcal{W}_{k,1}, \mathcal{W}_{j,1}) = 0 \quad \text{si } k \neq j.$$

Quand  $k = j$  alors

$$\begin{aligned}
a(\mathcal{W}_{k,1}, \mathcal{W}_{k,1}) &= \frac{1}{2}a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \left| \frac{\partial \widehat{\mathcal{W}}_{k,1}^*}{\partial \varphi} \right|^2 - |\widehat{\mathcal{W}}_{k,1}^*|^2 \right\} d\varphi \\
&= a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (k+1)^2 \sin^2\left((k+1)\varphi + \frac{k\pi}{2}\right) d\varphi \\
&\quad - a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\left((k+1)\varphi + \frac{k\pi}{2}\right) d\varphi \\
&= \frac{(k+1)^2 - 1}{2} a\pi.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Et en vertu de la condition (3.11), le système (3.28) est encore diagonal. Dans ce cas la solution du problème de Poisson Dirichlet dans  $W_w^1(\mathbb{R})$ , est donnée par

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{((k+1)^2 - 1)a\pi} \langle f, \mathcal{W}_{k,1} \rangle \mathcal{W}_{k,1}(x). \tag{3.45}$$

### Cas général

Pour calculer les coefficients de la matrice de rigidité du système linéaire (3.28) dans les cas où  $n = 1$  et les fonctions  $a(x)$ ,  $b(x)$  et  $c(x)$  ne sont pas constantes, on considère tout d'abord, les changements de variables suivants

$$h(x) = (x^2 + 1)f(x), \quad \tilde{b}(x) = \sqrt{x^2 + 1}b(x), \quad \tilde{c}(x) = (x^2 + 1)c(x); \quad x \in \mathbb{R}.$$

En vertu de l'hypothèse ( $\mathcal{H}_3$ ), on a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{h(x)^2}{x^2 + 1} dx < +\infty, \quad \tilde{b} \in L^\infty(\mathbb{R}), \quad \tilde{c} \in L^\infty(\mathbb{R}). \tag{3.46}$$

Maintenant, en utilisant l'écriture (3.22) pour les éléments de la base et en considérant le changement de variable

$$t = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

on montre que

$$\begin{aligned}
a(\mathcal{W}_{m,1}, \mathcal{W}_{j,1}) &= N_m N_j \left\{ \int_{-1}^1 a\left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right) C'_m(t) C'_j(t) (1-t^2)^{3/2} dt \right. \\
&\quad + \int_{-1}^1 \tilde{b}\left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right) C'_m(t) C_j(t) (1-t^2)^{1/2} dt \\
&\quad \left. + \int_{-1}^1 \tilde{c}\left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right) C_m(t) C_j(t) (1-t^2)^{-1/2} dt \right\}.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

les coefficients  $a(\mathcal{W}_{m,1}, \mathcal{W}_{j,1})$  sont calculés, en utilisant (3.52), ainsi que les formules

$$\begin{aligned} (\sin \theta)C_m(\cos(\theta)) &= \sin((m+1)\theta), \\ (\sin \theta)^3 C'_m(\cos(\theta)) &= \sin((m+1)\theta) \cos(\theta) - (m+1) \cos((m+1)\theta) \sin \theta. \end{aligned}$$

### 3.5 Implémentation du cas unidimensionnel

On propose de donner ici quelques détails supplémentaires concernant l'implémentation du cas unidimensionnel  $n = 1$ . Il s'agit alors, dans ce cas, de résoudre l'équation différentielle

$$-\frac{d}{dx} \left( a(x) \frac{du}{dx} \right) = f(x), \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}, \quad (3.48)$$

complétée par la condition

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{u(x)}{x^2 + 1} dx = 0. \quad (3.49)$$

Récapitulons les résultats obtenus dans les sections précédentes, pour le cas  $n = 1$ . La formulation faible du problème (3.48) complété par la condition (3.49) dans  $W_w^1(\mathbb{R})$  est

Trouver  $u \in W_w^1(\mathbb{R})$  tel que

$$\forall v \in W_w^1(\mathbb{R}), \quad a_\star(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad (3.50)$$

où

$$a_\star(u, v) = a(u, v) + \kappa \left( \int_{\mathbb{R}} w(x)u(x)dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}} w(x)v(x)dx \right),$$

et  $\kappa > 0$  une constante.

La discrétisation du problème (3.50) est alors

Trouver  $u_N \in H_N$  tel que

$$a_\star(u_N, v_N) = \langle f, v_N \rangle, \quad \forall v_N \in H_N. \quad (3.51)$$

On pose par ailleurs pour  $k \geq 0$

$$\eta_k = \int_{-1}^1 \frac{C_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Ainsi

$$\eta_k = 0 \text{ si } k \text{ est impair}$$

On conclut dans ce cas que

$$a_\star(\mathcal{W}_{k,1}, \mathcal{W}_{j,1}) = \begin{cases} \frac{(k+1)^2 - 1}{2} a\pi + \kappa \eta_k \eta_j & \text{si } k = j, \\ \kappa \eta_k \eta_j & \text{si } k \neq j. \end{cases}$$



Rappelons que, lorsque  $a(x)$  est constante, les coefficients du système linéaire (3.28) sont donnés par la relation (3.44) et lorsque  $a(x)$  n'est pas constante, les coefficients sont donnés par la relation (3.47), en fonction des polynômes de Tchebychev de seconde espèce. et les composantes du vecteur  $B$  du système linéaire (3.28) sont donnés par

$$b_k = \langle f, \mathcal{W}_{k,1} \rangle, \text{ pour } 0 \leq k \leq N.$$

Pour le calcul du vecteur  $B$ , on considérons le changement de variable suivant

$$h(x) = (x^2 + 1)f(x).$$

En utilisant, la formule de quadrature de Gauss Tchebychev

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^{-1/2} g(t) dt \approx \sum_{i=1}^{N^*} \varrho_i g(\cos(\theta_i)), \quad (3.52)$$

où

$$\theta_i = \frac{2i-1}{2N^*} \pi, \quad \varrho_i = \frac{\pi}{N^*}; \quad 1 \leq i \leq N^*. \quad (3.53)$$

On obtient

$$b_k = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathcal{W}_{k,1}(x) dx = N_k \int_{-1}^1 h\left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right) C_k(t) (1-t^2)^{-1/2} dt. \quad (3.54)$$

où  $N_k$  sont les constantes de normalisation des éléments de la base.

## 3.6 Résultats numériques

Dans le but de tester la performance de la méthode spectrale décrite dans ce chapitre, on propose trois exemples dans  $\mathbb{R}$ , où on va résoudre l'équation (3.48) complétée par la condition (3.49), pour différentes formes de  $a(x)$ . La formule de quadrature (3.52) est utilisée pour  $N^* = 10N$ .

*Exemple 1.* On considère l'équation (3.48) pour  $a = 1$  et quand la solution exacte est donnée par

$$u(x) = \frac{x \log(x^2 + 1)}{x^2 + 1}. \quad (3.55)$$

$a$  étant une constante, elle vérifie l'hypothèse ( $\mathcal{H}_2$ ). Le second membre  $f$ , de l'équation (3.48) est dans  $W_w^{-1}(\mathbb{R})$ , puisque la solution  $u \in W_w^1(\mathbb{R})$ . Notons, de plus que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{u(x)}{x^2 + 1} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{u_N(x)}{x^2 + 1} dx = 0.$$

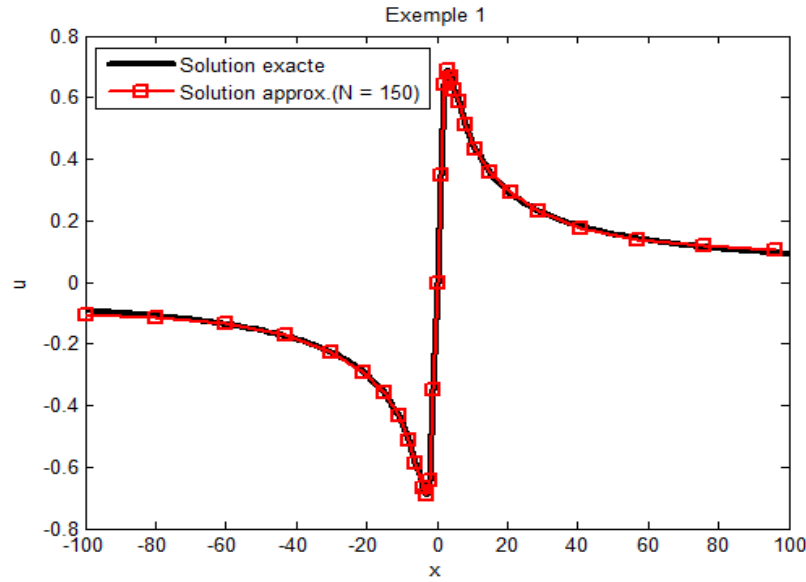


FIGURE 3.1 – Solution exacte et approximative

La figure 3.1, montre que les courbes de la solution exacte et la solution approximative, quand  $N = 150$ , se superposent.

Les figures 3.3 et 3.5, illustrent la décroissance, respectivement des erreurs relatives

$$\frac{\|u - u_N\|_{W_{-1}^0(\mathbb{R})}}{\|u\|_{W_{-1}^0(\mathbb{R})}} \quad \text{et} \quad \frac{\|\nabla(u - u_N)\|_{L^2(\mathbb{R})}}{\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R})}}, \quad (3.56)$$

en fonction du paramètre de discrétisation  $N$ . Si on calcule (dans une échelle logarithmique) les pentes des courbes représentatives des deux erreurs on trouve qu'elles sont approximativement égales à  $-1.16$ . Donc les deux erreurs se comportent de la même façon que  $N^{-1.16}$ , ce qui est en accord avec les estimations prévues par le Théorème 3.4.

*Exemple 2.* On considère maintenant l'équation (3.48) lorsque le coefficient  $a(x)$  oscille, on pose

$$a(x) = 1 + \frac{1}{2} \cos(2x).$$

$a(x)$  ainsi choisit, vérifie l'hypothèse  $(\mathcal{H}_2)$ , en effet

$$\forall x, \xi \in \mathbb{R}, \quad a(x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \quad \text{puisque} \quad |a(x)| \leq \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad a(x)\xi^2 \geq \frac{1}{2}\xi^2.$$

la fonction  $f$  est choisie telle que la solution exacte prend la valeur

$$u(x) = \frac{\sin x}{(x^2 + 1)^{3/2}} \in W_w^1(\mathbb{R}).$$

Donc  $f$  vérifie l'hypothèse  $(\mathcal{H}_1)$  et  $u$  ainsi choisit vérifie la condition (3.49), puisqu'elle est impaire. Dans cet exemple aussi, on constate sur la figure 3.2 l'efficacité de la méthode numérique proposée.

Les figures 3.3 et 3.5, illustrent la décroissance des erreurs relatives (3.56). De la même façon que pour l'exemple précédent on montre aisément que les deux erreurs décroissent comme  $N^{-1}$ .

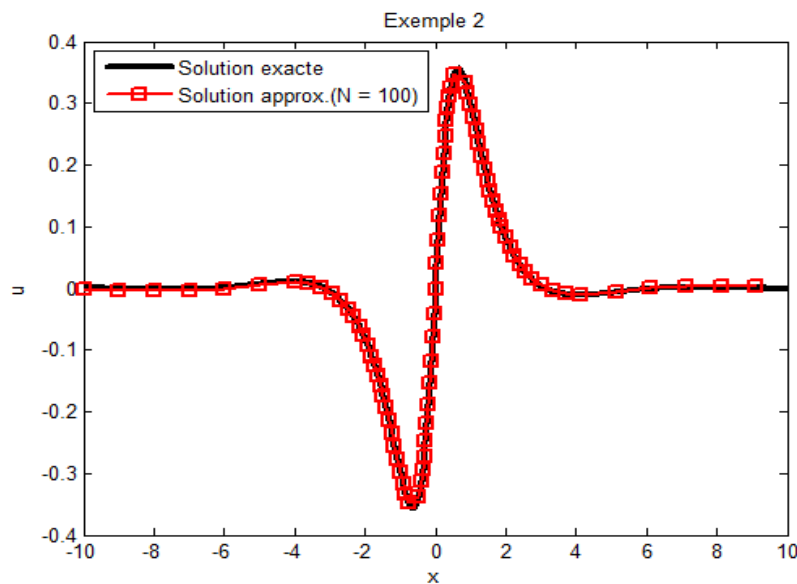


FIGURE 3.2 – Solution exacte et approximative.

*Exemple 3.* On considère dans ce dernier exemple, l'équation (3.48) où le coefficient  $a$  est discontinu et donné par

$$a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1, \\ a_0 & \text{si } |x| > 1, \end{cases}$$

avec  $a_0 > 0$  une constante. Le terme à droite étant donné par

$$f(x) = 3 \frac{x}{(1 + x^2)^{5/2}}.$$

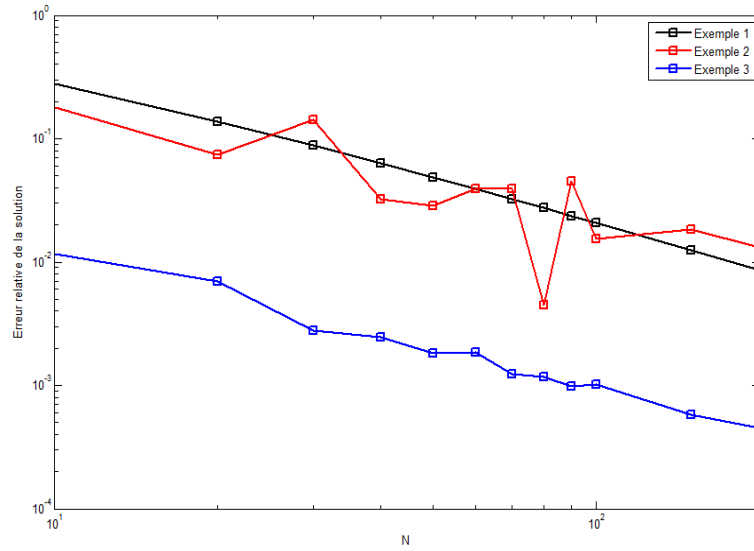


FIGURE 3.3 – Erreur relative logarithmique de la solution, pour les trois exemples en fonction de  $\ln N$ .

De même que pour les exemples précédents, on montre aisément que  $a(x)$  vérifie l'hypothèse  $(\mathcal{H}_2)$  et que  $f$  vérifie  $(\mathcal{H}_1)$ . La solution de l'équation (3.48) complétée par la condition (3.49) est

$$u(x) = a(x)^{-1}u_0(x) + u_1(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}, |x| \neq 1,$$

où

$$a(x)^{-1}u_0(x) = a(x)^{-1} \frac{x}{(x^2 + 1)^{1/2}} \in W_0^1(\mathbb{R}),$$

est une solution de l'équation (3.48), qui vérifie la condition (3.49). Alors que  $u_1$  est la solution de l'équation homogène

$$-\frac{d}{dx}(a(x) \frac{du}{dx}) = 0, \quad (3.57)$$

choisie telle que  $u \in W_0^1(\mathbb{R})$  et satisfait (3.49). Puisque  $u$  et  $au'$  doivent être continues en  $\pm 1$ , on peut montrer que

$$u_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq 1, \\ k_0 & \text{si } x > 1, \\ -k_0 & \text{si } x < -1, \end{cases} \quad (3.58)$$

avec  $k_0 = (1 - a_0^{-1})u_0(1)$ . En effet, puisque  $u_1$  est solution de l'équation (3.57), alors c'est une fonction affine par morceaux. Et du fait que  $u(x)$  et  $a(x)^{-1}u_0(x)$  appartiennent à  $W_0^1(\mathbb{R})$ , alors  $u_1$  aussi est dans  $W_0^1(\mathbb{R})$ . Or les seules fonctions affines dans  $W_0^1(\mathbb{R})$  sont les constantes. On conclut que

$$u_1(x) = \begin{cases} k_1 & \text{si } x < -1, \\ k_2 & \text{si } |x| \leq 1, \\ k_3 & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

D'une autre part, pour que  $u$  vérifie la condition (3.49), il suffit que  $u_1$  la vérifie puisque, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{a(x)^{-1}u_0(x)}{x^2 + 1} dx = 0,$$

on obtient, alors

$$k_1 + k_3 + 2k_2 = 0. \quad (3.59)$$

Comme  $u$  et  $au'$  doivent être continues en  $\pm 1$ , on déduit

$$u_0(1) + k_2 = \frac{u_0(1)}{a_0} + k_3. \quad (3.60)$$

$$-\frac{u_0(1)}{a_0} + k_1 = -u_0(1) + k_2. \quad (3.61)$$

En résolvant le système d'équation (3.59)+(3.60)+(3.61), on obtient (3.58). Notons que  $u$  n'est pas très régulière, puisqu'elle n'appartient pas à  $H_{loc}^2(\mathbb{R})$ .

Sur la figure 3.4, on constate que les courbes de la solution exacte et la solution approximative se superposent pour  $a_0 = 10$  et  $N = 100$ .

Sur la figure 3.3 on a la décroissance de l'erreur relative

$$\frac{\|u - u_N\|_{W_{-1}^0(\mathbb{R})}}{\|u\|_{W_{-1}^0(\mathbb{R})}},$$

qui est équivalente aux variations de  $N^{-1.15}$ .

Et sur la figure 3.5 on a la décroissance de l'erreur relative

$$\frac{\|\nabla(u - u_N)\|_{L^2(\mathbb{R})}}{\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R})}},$$

qui est pareille à celle de  $\sqrt{N}$ .

Ces résultats ne sont pas incompatibles avec les estimations du Théorème 3.4, puisque la solution n'est pas assez régulière.

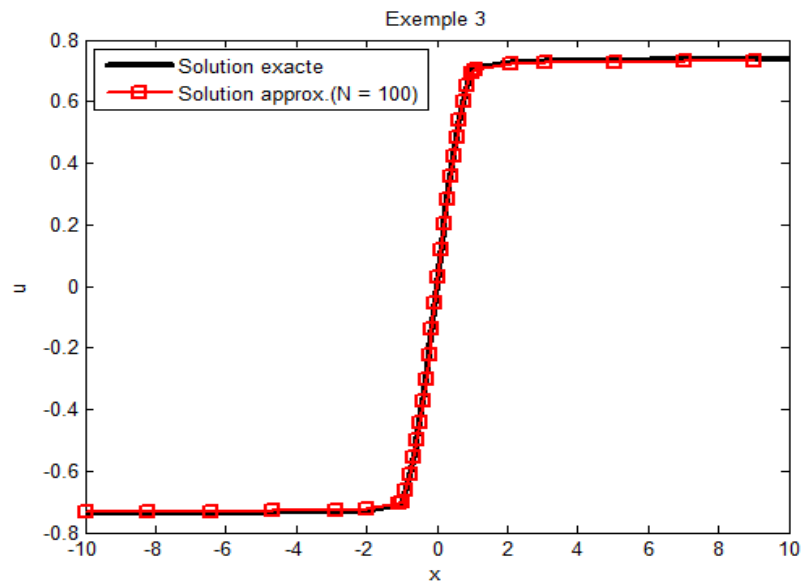
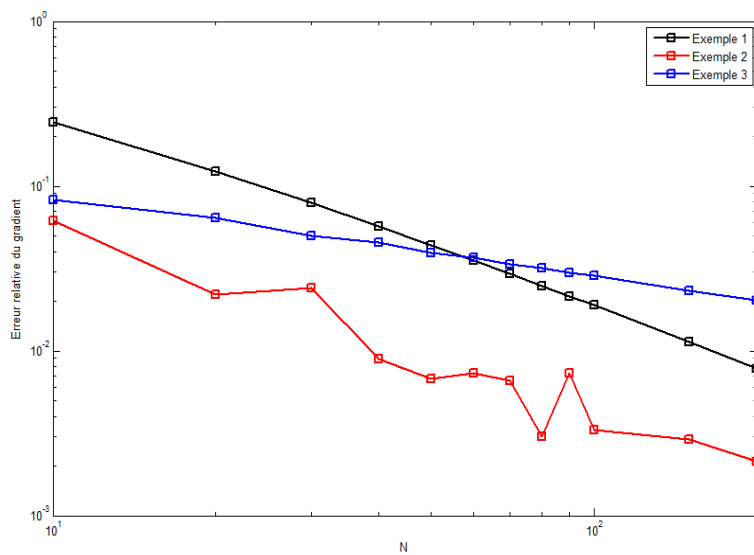


FIGURE 3.4 – Solution exacte et approximative.

FIGURE 3.5 – Erreur relative logarithmique du gradient pour les trois exemples en fonction de  $\ln N$ .

## **Conclusion**

Les résultats numériques, proposés dans cette dernière section, montrent la convergence et l'efficacité de la méthode, et confirment la précision de l'estimation d'erreur établie dans le Théorème 3.4. La méthode spectrale exposée, dans ce chapitre, peut facilement être appliquée à plusieurs types d'équations aux dérivées partielles et en dimensions quelconques. En particulier, elle permet de résoudre des équations à coefficients non constants. Elle permet également d'éviter toute troncature du domaine non borné.

## Chapitre 4

### Méthode des éléments finis inversés pour l'équation de Helmholtz



## Chapitre 4

---

# Méthode des éléments finis inversés pour l'équation de Helmholtz

---

Ce chapitre est consacré à l'approximation de l'équation de Helmholtz en dimension 3 dans le domaine extérieur, avec la condition de radiation de Sommerfeld à l'infini, par la méthode des éléments finis inversés (BIFEM), due à Boulmezaoud dans [17]. On commence par rappeler deux approches existantes pour effectuer une telle approximation. La première repose sur la troncature du domaine extérieur, en un domaine fini obtenu en entourant le domaine borné par une sphère de rayon  $r$  fini, formant ainsi une frontière artificielle au delà de laquelle on utilise des éléments dits infinis; {[42], [43], et [41]}. La seconde approche consiste à utiliser la représentation intégrale pour les équations de Laplace et de Helmholtz [65]. On présente ensuite en détail la méthode des éléments finis inversés (BIFEM), qu'on appliquera pour l'implémentation du problème de Helmholtz après une reformulation adéquate.

## 4.1 Deux méthodes numériques existantes en domaines non bornés

### 4.1.1 Méthodes des éléments finis

#### Cas de l'équation de Laplace

Considérons l'équation de Laplace : Trouver une fonction  $u(x)$  satisfaisant

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0, \quad \text{dans} \quad \Omega^e \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \tilde{g}, \quad |x| = 1 \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) &= 0, \end{aligned}$$

où

$$\Omega^e = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| > 1\}.$$

On multiplie l'équation de Laplace par une fonction test  $v \in \mathcal{V}$  et on intègre par parties sur  $\Omega^e$ , on obtient la formulation : Trouver  $u \in V$  tel que

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V \quad (4.1)$$

$V$  étant le complété de  $\mathcal{V}$  par rapport à la semi-norme  $|\cdot|$ .

$$a(u, v) = \int_{|x|>1} \nabla u \nabla v dx, \quad l(v) = \int_{|x|=1} \tilde{g} v dx$$

et le théorème de Riez assure alors l'existence d'une solution unique pour le problème (4.1), qui dépend continûment de la fonction  $\tilde{g}$ . Puisque le domaine extérieur  $\Omega^e$  est le complété de la sphère unité, il convient d'utiliser les coordonnées sphériques.

Une résolution détaillée de cette équation est présentée dans [41], où la solution est donnée sous la forme

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} u_{\ell,m} \mathcal{Y}_{\ell,m}(\theta, \varphi) \frac{1}{r^{\ell+1}},$$

en fonction de  $\mathcal{Y}_{\ell,m}$ , qui sont les harmoniques sphériques.

La forme de la solution, provenant de la séparation des variables, a motivé la construction de l'élément infini. Pour un triangle curviligne donné sur la sphère, on définit l'élément infini correspondant par : Si

$$\widehat{T} \ni (\xi_1, \xi_2) \longmapsto x(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{S}^n$$

est une fonction qui associe à tout triangle de référence  $\widehat{T}$  le triangle curviligne  $T$  sur la surface, la transformation qui définit l'élément infini est comme suit

$$\widehat{K} = \widehat{T} \times [0, \infty) \ni (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mapsto \xi_3 x(\xi_1, \xi_2) \in \Omega^e.$$

La fonction de base générale est donnée par

$$N_k(\xi_3, \xi_1, \xi_2) = N_{k(i,j)}(\xi_3, \xi_1, \xi_2) = \psi_j(r) \varphi_i(\xi_1, \xi_2) \quad i, j > 1,$$

où,  $\varphi_i(\xi_1, \xi_2)$  est la fonction de base l'élément de référence en  $2D$ ,  $\psi_j(\xi_3) = \psi_j(r)$  la fonction de base en  $1D$  de la coordonnée radiale telle que

$$\psi_j(r) = r^{-j} \quad \text{pour tout } j \geq 1,$$

$j$  correspond au degré de liberté dans la direction radiale et  $i$  correspond au degré de liberté sur la surface du triangle.

Avec le nombre  $N$ , fixé, (en pratique  $< 10$ ), du point de vue calculatoire, le problème (4.1) est équivalent à la résolution d'un système de  $N$  ( $2D$ ) équations sur la sphère et par conséquent les éléments finis standards en  $2D$  peuvent être utilisés.

Pour avoir une estimation de l'erreur d'interpolation, posons la solution exacte sous la forme  $u = u(\xi, r)$  ;

$$u(\xi_1, \xi_2, r) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} g_n(\xi_1, \xi_2),$$

où  $(\xi_1, \xi_2)$  est le système de coordonnées curvilignes sur la sphère,  $r$  la distance à l'origine. Le système de coordonnées curvilignes à l'extérieur de la sphère est défini par

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi_1, \xi_2, r) = rx(\xi_1, \xi_2).$$

Le taux de convergence peut être estimé par la construction d'une suite d'approximations  $\omega_h$  de la solution exacte sous la forme

$$\omega_h = \sum_{n=1}^N r^{-n} g_n^{hp}(\xi_1, \xi_2),$$

où  $g_n^{hp}$  sont des  $hp$ -approximations internes de  $g_n$ .

Il s'ensuit, en utilisant l'inégalité triangulaire que

$$|u - \omega_h|_1 \leq \sum_{n=1}^N \left| r^{-n} (g_n - g_n^{hp}) \right|_1 + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} r^{-n} g_n \right|_1. \quad (4.2)$$

Si on pose  $\varepsilon_n(\xi_1, \xi_2, r) = r^{-n} (g_n - g_n^{hp})(\xi)$  on a

$$|\varepsilon_n|_1^2 = \int_{\Omega^e} |\nabla \varepsilon_n|^2 d\Omega^e = \int_1^{\infty} \int_{\mathbb{S}} |\nabla \varepsilon_n|^2 r^2 dr d\mathbb{S},$$

où

$$|\nabla \varepsilon_n|^2 = r^{-2n-2} \left| \nabla_{\mathbb{S}}(g_n - g_n^{hp}) \right|^2 + n^2 r^{-2n-2} (g_n - g_n^{hp})^2,$$

alors

$$|\varepsilon_n|_1^2 = \frac{1}{2n-1} |g_n - g_n^{hp}|_{1,\mathbb{S}}^2 + \frac{n^2}{2n-1} \|g_n - g_n^{hp}\|_{\mathbb{S}}^2.$$

Ainsi, le premier terme dans l'estimation (4.2) est majoré par

$$\sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{2n-1} |g_n - g_n^{hp}|_{1,\mathbb{S}}^2 + \frac{n^2}{2n-1} \|g_n - g_n^{hp}\|_{\mathbb{S}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si on suppose que  $\Delta_{\mathbb{S}}g \in L^2(\mathbb{S})$  où  $\Delta_{\mathbb{S}}$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la sphère unité, le second terme dans (4.2) est alors estimé par

$$\frac{1}{(N+1)(N+2)} \|\Delta_{\mathbb{S}}g\|_{\mathbb{S}}.$$

### Cas de l'équation de Helmholtz

On rappelle d'abord quelques notations.

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$  désigne le domaine occupé par la dispersion contenu dans la sphère unité.

$\Omega^e = \mathbb{R}^3 - \Omega$ , le domaine extérieur au dispersément.

$\Gamma_{\mathbb{S}} = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| = 1\}$ , la surface de la sphère unité.

$\Omega_{\mathbb{S}}^e = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| > 1\}$ , le domaine extérieur à la sphère unité.

$\Gamma = \partial\Omega$ , la surface de dispersion.

$\Omega_{\mathbb{S}} = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| \leq 1\} - \Omega$ , le domaine entre la sphère unité et la dispersion. On s'intéresse à la résolution du problème : Trouver  $u = u(x)$  tel que

$$\begin{aligned} -\Delta u - k^2 u &= 0, & \text{dans} & \Omega^e \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g, & \text{sur} & \Gamma \\ \left| \frac{\partial u}{\partial n} - iku \right| &= o\left(\frac{1}{r^2}\right) & \text{pour } r & \text{assez grand} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$k$  étant le nombre onde. On introduit d'abord le domaine extérieur tronqué,

$$\Omega_{\gamma}^e = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| < \gamma\} \cap \Omega^e$$

$\Omega_{\gamma}^e$  tend vers  $\Omega^e$  quand  $\gamma$  tend vers l'infini.

Dans le cas d'un domaine extérieur sphérique,  $\Omega_{\gamma}^e$  est réduit à

$$\Omega_{\gamma}^e = \{x \in \mathbb{R}^3; 1 < |x| < \gamma\} \text{ avec } \gamma \text{ assez grand.}$$

En multipliant l'équation de Helmholtz par une fonction test  $v$  ( $\bar{v}$ ) et en substituant la condition de sommerfeld sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial r} = iku + \varphi(x) \text{ avec } \varphi(x) = O\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

après intégration par parties, on obtient

$$\int_{\Omega_\gamma^e} \nabla u \nabla v \, d\Omega_\gamma^e - k^2 \int_{\Omega_\gamma^e} uv \, d\Omega_\gamma^e - ik \int_{\mathbb{S}_\gamma} uv \, d\mathbb{S}_\gamma = \int_{\partial\Omega^e} gv \, d\mathbb{S} + \int_{\mathbb{S}_\gamma} \varphi v \, d\mathbb{S}_\gamma,$$

$$\int_{\Omega_\gamma^e} \nabla u \nabla \bar{v} \, d\Omega_\gamma^e - k^2 \int_{\Omega_\gamma^e} u\bar{v} \, d\Omega_\gamma^e - ik \int_{\mathbb{S}_\gamma} u\bar{v} \, d\mathbb{S}_\gamma = \int_{\partial\Omega^e} g\bar{v} \, d\mathbb{S} + \int_{\mathbb{S}_\gamma} \varphi \bar{v} \, d\mathbb{S}_\gamma.$$

Par passage à la limite quand  $\gamma \rightarrow \infty$ , on trouve

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} \nabla u \nabla v \, d\Omega^e - k^2 \int_{\Omega^e} uv \, d\Omega^e - ik \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{S}_\gamma} uv \, d\mathbb{S}_\gamma \\ &= \int_{\Gamma} gv \, d\mathbb{S} + \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{S}_\gamma} \varphi v \, d\mathbb{S}_\gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} \nabla u \nabla \bar{v} \, d\Omega^e - k^2 \int_{\Omega^e} u\bar{v} \, d\Omega^e - ik \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{S}_\gamma} u\bar{v} \, d\mathbb{S}_\gamma \\ &= \int_{\Gamma} g\bar{v} \, d\mathbb{S} + \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{S}_\gamma} \varphi \bar{v} \, d\mathbb{S}_\gamma. \end{aligned}$$

La théorie générale dans [56] montre que l'ordre le plus bas pour  $u|_{\Omega_\mathbb{S}^e}$  est de la forme

$$u_0(x) \frac{\exp(ikr)}{r}; \quad x \in \Gamma_\mathbb{S},$$

contrairement à l'équation de Laplace qui est de l'ordre  $r^{-1}$ . Par conséquent ni  $u$  ni son gradient  $\nabla u$  ne sont  $L^2$ -intégrable dans le domaine extérieur.

Pour remédier à ce problème deux techniques ont été proposées. La première approche a été proposée par Leis [56] et étudiée dans {[5], [34], [33], [43]}; elle consiste à résoudre l'équation de Helmholtz dans un espace de Sobolev à poids approprié. La seconde approche a été proposée par Burnett [26] et étudiée et comparée à celle de Leis dans [41]; elle consiste à interpréter les intégrales au sens de la valeur principale de Cauchy.

### Méthode de Leis

La méthode de Leis utilise des fonctions test de l'ordre  $O(r^{-3})$  dans  $\Omega_\mathbb{S}^e$ , ce qui rend l'interprétation des intégrales possible, seulement ce choix ne permet pas

de construire la condition de Sommerfeld dans la formulation faible, ce qui nous amène à l'inclure directement dans l'espace nécessaire. Ainsi on définit l'espace de Sobolev à poids

$$H_{\omega}^1(\Omega^e) = \{u; \|u\|_{\omega}^1 < \infty\},$$

où  $\|u\|_{\omega}^1$  est la norme correspondante au produit scalaire

$$(u, v)_{\omega}^1 = \int_{\Omega^e} (\omega u \bar{v} + \omega \nabla u \overline{\nabla v}) d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) \overline{\left( \frac{\partial v}{\partial r} - ikv \right)} d\Omega^e.$$

On s'intéresse à deux choix particuliers de poids

$$\omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } r = |x| \leq 1 \\ \frac{1}{r^2} & \text{pour } r = |x| > 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \omega^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } r = |x| \leq 1 \\ r^2 & \text{pour } r = |x| > 1 \end{cases}$$

et la formulation variationnelle : Trouver  $u \in H_{\omega}^1(\Omega^e)$  tel que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} \nabla u \nabla v d\Omega^e - k^2 \int_{\Omega^e} uv d\Omega^e &= \int_{\partial\Omega^e} gv d\mathcal{S} \quad \forall v \in H_{\omega^*}^1(\Omega^e), \\ \int_{\Omega^e} \nabla u \overline{\nabla v} d\Omega^e - k^2 \int_{\Omega^e} u\bar{v} d\Omega^e &= \int_{\partial\Omega^e} g\bar{v} d\mathcal{S} \quad \forall \bar{v} \in H_{\omega^*}^1(\Omega^e). \end{aligned}$$

L'existence et l'unicité ont été montrées dans [56].

### Méthode de Burnett

Cette méthode est basée sur le fait que la solution  $u$  ainsi que la fonction test  $v$  sont représentées à l'extérieur de la sphère par

$$\begin{aligned} u(r, \theta, \phi) &= \frac{\exp(ikr)}{r} u_0(\theta, \phi) + U(r, \theta, \phi), \\ v(r, \theta, \phi) &= \frac{\exp(ikr)}{r} v_0(\theta, \phi) + V(r, \theta, \phi), \end{aligned} \tag{4.4}$$

où  $(r, \theta, \phi)$  sont les coordonnées sphériques,  $U$  et  $V$  sont dans  $H^1(\Omega_{\mathbb{S}}^e)$ .

La fonction  $u$  sous cette forme satisfait la condition de sommerfeld.

La formulation variationnelle du problème de Helmholtz est alors : Trouver  $U \in H_{\omega}^1(\Omega^e)$  tel que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} \nabla u \nabla v d\Omega^e - k^2 \int_{\Omega^e} uv d\Omega^e - ik \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{S}_{\gamma}} uv d\mathcal{S}_{\gamma} &= \int_{\partial\Omega^e} gv d\mathcal{S} \quad \forall v \in H_{\omega}^1(\Omega^e), \\ \int_{\Omega^e} \nabla u \overline{\nabla v} d\Omega^e - k^2 \int_{\Omega^e} u\bar{v} d\Omega^e - ik \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{S}_{\gamma}} u\bar{v} d\mathcal{S}_{\gamma} &= \int_{\partial\Omega^e} g\bar{v} d\mathcal{S} \quad \forall \bar{v} \in H_{\omega}^1(\Omega^e). \end{aligned}$$

Et la solution de l'équation de Helmholtz se présente sous la forme

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n h_n(kr) P_n^m(\cos \theta) (A_{n,m} \cos(m\phi) + B_{n,m} \sin(m\phi)),$$

où  $P_n^m(\cos \theta)$  sont les polynômes de Legendre et  $h_n(kr)$  sont les fonctions de Hankel de première espèce [61].

En supposant que la condition au bord de Neumann dans (4.3) s'écrit

$$g(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) (\tilde{A}_{n,m} \cos(m\phi) + \tilde{B}_{n,m} \sin(m\phi)).$$

Les coefficients  $A_{n,m}$  et  $B_{n,m}$  sont alors calculés de la même façon que pour le problème de Laplace [43], soient

$$A_{n,m} = -\frac{\tilde{A}_{n,m}}{\frac{\partial h_n(kr)}{\partial r} \Big|_{r=1}} \quad \text{et} \quad B_{n,m} = -\frac{\tilde{B}_{n,m}}{\frac{\partial h_n(kr)}{\partial r} \Big|_{r=1}}.$$

L'élément infini pour la formulation conjuguée est le même que pour la formulation non conjuguée, les seules différences résultent dans l'utilisation du complexe conjugué et différentes puissances dans le dénominateur des fonctions de base radiales.

Les fonctions de base pour l'approximation de la solution  $u$  sont

$$\psi_j(r) = \frac{\exp(ikr)}{r^j} \quad j \geq 1.$$

Pour les fonctions test Leis a proposé

$$\tilde{\psi}_j(r) = \frac{\exp(ikr)}{r^{j+2}} \quad j \geq 1,$$

et Burnett a proposé

$$\tilde{\psi}_j(r) = \frac{\exp(ikr)}{r^j} \quad j \geq 1.$$

La différence entre la version conjuguée et non conjuguée a été étudié dans [69] pour un problème en 2D, et dans [41] pour l'approche proposée par Burnett. Deux questions ont été prises en considération pour l'étude; l'intégrabilité au sens de Lebesgue et l'élimination de l'intégrale rajoutée provenant de la condition de Sommerfeld.

L'intégration des fonctions de base dans la direction radiale donne les intégrales

$$\int_1^{\infty} \frac{\exp(ikr) \exp(-ikr)}{r^j} dr = \frac{1}{j-1} \quad j \geq 2,$$

pour la formulation conjuguée et

$$\int_1^\infty \frac{\exp(ikr) \exp(ikr)}{r^j} dr = \int_1^\infty \frac{\exp(2ikr)}{r^j} dr \quad j \geq 2,$$

pour la formulation non conjuguée.

Pour étudier la convergence de la méthode E.I. pour l'approche de Leis [43], on cherche une approximation de la solution  $u^{(N)}$  sous la forme

$$u^{(N)}(x, r) = \sum_{n=0}^N X_n(r) u_n(x), \quad (4.5)$$

où  $X_n(r)$  désigne la fonction de Hankel de 1<sup>ère</sup> espèce normalisée. Les fonctions test sont approximées par différentes fonctions dans la direction radiale

$$v^N(x, r) = \sum_{n=0}^N \widehat{X}_n(r) v_n(x) = \sum_{n=0}^N \frac{X_n(r)}{r^2} v_n(x) \quad (4.6)$$

avec  $\widehat{X}_n(r) = \frac{X_n(r)}{r^2}$ , afin d'assurer l'intégrabilité au sens de Lebesgue.

L'approche est basée sur la formulation variationnelle dans [41] :

Trouver  $u \in H_\omega^1(\Omega)$  tel que

$$\int_\Omega \nabla u \overline{\nabla v} d\Omega - k^2 \int_\Omega u \bar{v} d\Omega = \int_{\mathbb{S}} g \bar{v} d\mathbb{S} \quad \forall v \in H_{\omega^*}^1(\Omega), \quad (4.7)$$

où  $\omega = \frac{1}{r^2}$  et  $\omega^* = r^2$ ,

$$H_\omega^1(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathcal{C}; \|u\|_\omega < \infty\}$$

avec la norme  $\|u\|_\omega^2 = \int_\Omega \omega(|u|^2 + |\nabla u|^2) d\Omega$ ,

$$H_{\omega^*}^1(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathcal{C}; \|u\|_{\omega^*} < \infty\}$$

avec la norme  $\|u\|_{\omega^*}^2 = \int_\Omega \omega^*(|u|^2 + |\nabla u|^2) d\Omega$ .

Notons que la condition de Sommerfeld n'est pas prise en compte dans l'espace puisqu'elle n'est pas nécessaire pour l'étude de l'erreur d'approximation.

Substituons maintenant (4.5) et (4.6) dans (4.7), on obtient alors :

Trouver  $(u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{H}^1(\mathbb{S}) = H^1(\mathbb{S}) \times \dots \times H^1(\mathbb{S})$ , ( $N$  fois), tel que

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \int_1^\infty \frac{1}{r} X_n \overline{X_m} dr \int_{\mathbb{S}} \nabla_{\mathbb{S}} u_n \overline{\nabla_{\mathbb{S}} v_n} d\mathbb{S} \\ & + \left( \int_1^\infty X_n' \left( \frac{X_m}{r^2} \right)' r^2 dr - k^2 \int_1^\infty X_n \overline{X_m} dr \right) \int_{\mathbb{S}} u_n \bar{v} d\mathbb{S} \\ & = \overline{X_m(1)} \int_{\mathbb{S}} g \bar{v} d\mathbb{S} \quad \forall v \in H^1(\mathbb{S}); m = \overline{0, N}. \end{aligned} \quad (4.8)$$



Pour estimer l'erreur  $\|u_h^{(N)} - u\|$ , on utilise l'inégalité triangulaire

$$\|u_h^{(N)} - u\| \leq \|u_h^{(N)} - u^{(N)}\| + \|u^{(N)} - u\|.$$

### Convergence de $u^{(N)}$ vers $u$

Supposons que dans (4.5) on a

$$u_n(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} u_{n,\ell} \mathcal{Y}_\ell(x) \quad u_{n,\ell} \in \mathcal{C}$$

et posons  $v = \mathcal{Y}_j(x)$  dans (4.8), on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \left\{ j(j+1) \int_1^\infty \frac{1}{r^2} X_n \overline{X_m} dr + \int_1^\infty X_n' \overline{\left(\frac{X_m}{r^2}\right)'} r^2 dr \right. \\ & \left. - k^2 \int_1^\infty X_n \overline{X_m} dr \right\} u_{n,k} = \overline{X_m(1)} \|g^j\|_{L^2(\mathbb{S})}; \quad m = \overline{0, N}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

On a donc,

$$u_j(r) \approx u_j^{(N)}(x) = \sum_{n=0}^N u_{n,j} X_n(r) \quad \text{et} \quad v(r) \approx \sum_{m=0}^N v_{m,j} \frac{X_m(r)}{r^2}.$$

Et

$$\|u - u^{(N)}\|_{1,\omega}^2 = \sum_{j=N+1}^{\infty} \|X_j - X_j^{(N)}\|_{j,E} \|g^j\|_{L^2(\mathbb{S})}^2, \quad (4.10)$$

où  $X_j^{(N)}$  est la solution du système (4.9) avec  $\|g^j\|_{L^2(\mathbb{S})} = 1$  et

$$\|u\|_{j,E}^2 = \int_1^\infty |u'|^2 dr + j(j+1) \int_1^\infty \frac{1}{r^2} |u|^2 dr + \int_1^\infty |u|^2 dr. \quad (4.11)$$

Ainsi l'estimation de  $\|u - u^{(N)}\|$  posée en  $3D$ , devient une estimation en  $1D$  de  $\|X_j - X_j^{(N)}\|$  des fonctions de Hankel de première espèce.

### Convergence de $u_h^{(N)}$ vers $u^{(N)}$

Le problème (4.8) est défini dans l'espace  $\mathbb{H}^1(\mathbb{S})$  où la forme sesquilinéaire peut être décomposée en somme de forme définie positive et une perturbation compacte, par conséquent l'analyse de convergence standard s'applique.

Etudions maintenant la convergence de la méthode E.I. pour l'approche de Burnett.

L'approximation (4.5) est maintenant utilisée pour les deux fonctions  $u$  et  $v$

$$u^{(N)}(x, r) = \sum_{n=0}^N X_n(r) u_n(x), \quad v^{(N)}(x, r) = \sum_{n=0}^N X_n(r) v_n(x). \quad (4.12)$$

L'approche est basée sur la formulation variationnelle dans [26], soit

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \left( \int_{\Omega_\gamma} \nabla u \overline{\nabla v} \, d\Omega_\gamma - k^2 \int_{\Omega_\gamma} u \bar{v} \, d\Omega_\gamma - ik \int_{\mathbb{S}_\gamma} u \bar{v} \, d\mathbb{S}_\gamma \right) \\ = \int_{\mathbb{S}} g \bar{v} \, d\mathbb{S} + \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{S}_\gamma} \varphi \bar{v} \, d\mathbb{S}_\gamma, \end{aligned} \quad (4.13)$$

où  $\Omega_\gamma = \{(x, r); x \in \mathbb{S} \text{ et } 1 < r < \gamma\}$ .

On choisit  $v = X_m(r)v(x)$ , et on remplace (4.12) dans (4.13), on obtient après une intégration par parties et passage à la limite quand  $\gamma$  tend vers l'infini

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \int_1^\infty X_n \overline{X_m} \, dr \int_{\mathbb{S}} \nabla_{\mathbb{S}} u_n \overline{\nabla_{\mathbb{S}} v} \, d\mathbb{S} \\ + \left( -n(n+1) \int_1^\infty X_n \overline{X_m} \, dr + \overline{X_m(1)} \right) \int_{\mathbb{S}} u_n \bar{v} \, d\mathbb{S} \\ = \overline{X_m(1)} \int_{\mathbb{S}} g \bar{v} \, d\mathbb{S} \quad \forall v \in H^1(\mathbb{S}), \quad m = \overline{0, N}. \end{aligned}$$

### Convergence de $u^{(N)}$ vers $u$

Comme pour l'approche de Leis, on écrit  $u_n(x)$  sous la forme

$$u_n(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} u_{n,\ell} \mathcal{Y}_\ell(x) \quad u_{n,\ell} \in \mathcal{C},$$

et on pose  $v = \mathcal{Y}_j(x)$ , pour avoir à la fin

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \left\{ (j(j+1) - n(n+1)) \int_1^\infty X_n \overline{X_m} \, dr + \overline{X_m(1)} \right\} u_{n,j} \\ = \overline{X_m(1)} \|g^j\|_{L^2(\mathbb{S})} \quad m = \overline{0, N}. \end{aligned}$$

En introduisant une approximation de la solution  $X_j^{(N)}$ , on obtient une représentation de la forme (4.10).

### 4.1.2 Méthode de la représentation intégrale

On considère ici uniquement l'équation de Helmholtz, complétée avec une condition de rayonnement, de type Sommerfeld, à l'infini. Soit  $\Gamma$  une surface bornée et régulière, découpant  $\mathbb{R}^3$  en deux ouverts, un ouvert borné noté  $\Omega^i$  et un ouvert non borné noté  $\Omega^e$ , appelé domaine extérieur. On rappelle que la solution élémentaire de l'équation de Helmholtz dans  $\mathbb{R}^3$  associée à la condition d'onde sortante est

$$E(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \quad \text{avec} \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

**Définition 4.1** On appelle potentiel de simple couche, l'expression intégrale suivante

$$u(y) = \int_{\Gamma} E(x-y)q(x) d\gamma(x). \quad (4.14)$$

On appelle potentiel de double couche, l'expression intégrale suivante

$$u(y) = \int_{\Gamma} \frac{\partial E}{\partial n_x}(x-y)\varphi(x) d\gamma(x). \quad (4.15)$$

Ces deux types de potentiels génèrent des fonctions qui satisfont l'équation de Helmholtz dans  $(\Omega^i \cup \Omega^e)$  ainsi que la condition de radiation à l'infini.

**Théorème 4.2** – Le potentiel de simple couche (4.14) est continu en  $y$  à la traversée de la surface  $\Gamma$  et sa valeur est

$$u(y) = \int_{\Gamma} E(x-y)q(x) d\gamma(x); \quad y \in \Gamma, \quad \text{si } q(x) \in \mathcal{C}^0(\Gamma),$$

sa dérivée normale est discontinue à travers  $\Gamma$ , ses valeurs sur  $\Gamma$  sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{int}(y) &= \frac{q(y)}{2} + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y)q(x) d\Gamma(x), \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{ext}(y) &= -\frac{q(y)}{2} + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y)q(x) d\Gamma(x). \end{aligned}$$

– Le potentiel de double couche (4.15) est discontinu à la traversée de la surface  $\Gamma$ . Si  $\varphi \in \mathcal{C}^0(\Gamma)$  ses valeurs sont

$$\begin{aligned} u_{int}(y) &= -\frac{\varphi(y)}{2} + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_x} E(x-y)\varphi(x) d\Gamma(x), \\ u_{ext}(y) &= \frac{\varphi(y)}{2} + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_x} E(x-y)\varphi(x) d\Gamma(x). \end{aligned}$$

La dérivée normale d'un potentiel de double couche est continue, on la note formellement par

$$\frac{\partial u}{\partial n}(y) = \oint_{\Gamma} \frac{\partial^2 E}{\partial n_x \partial n_y}(x-y)\varphi(x) d\Gamma(x).$$

Le noyau associé est singulier en  $1/|x-y|^3$  et est non intégrable. Par conséquent, toute somme de potentiels de simple couche de densité  $q$  et de double couche de densité  $\varphi$  est telle que  $q = \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]$  et  $\varphi = [u]$ .

**Théorème 4.3** (Théorème de représentation)

Soit  $u$  la fonction vérifiant

$$\begin{aligned}\Delta u + k^2 u &= 0 & \text{dans } \Omega^i \\ \Delta u + k^2 u &= 0 & \text{dans } \Omega^e\end{aligned}$$

avec,  $k = 0$  une valeur autorisée,

$$u \in H = \left\{ u; \frac{u}{\sqrt{1+r^2}} \in L^2(\Omega^e), \frac{\nabla u}{\sqrt{1+r^2}} \in L^2(\Omega^e), \frac{\partial u}{\partial r} - ik u \in L^2(\Omega^e) \right\},$$

et les traces  $u_{int}$  et  $u_{ext}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial n} |_{int}$  et  $\frac{\partial u}{\partial n} |_{ext}$  appartiennent à  $\mathcal{C}^0(\Gamma)$ .

On pose

$$[u] = u_{int} - u_{ext}, \quad \text{et} \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] = \frac{\partial u}{\partial n} |_{int} - \frac{\partial u}{\partial n} |_{ext}.$$

Pour  $y \notin \Gamma$ , on a la représentation

$$u(y) = \int_{\Gamma} E(x-y) \left[ \frac{\partial u}{\partial n}(x) \right] d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_x} (E(x-y)) [u(x)] d\Gamma.$$

Pour  $y \in \Gamma$ , on a la représentation

$$\frac{u_{int} + u_{ext}}{2} = \int_{\Gamma} E(x-y) \left[ \frac{\partial u}{\partial n}(x) \right] d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_x} (E(x-y)) [u(x)] d\Gamma.$$

Considérons maintenant, les opérateurs intégraux, définis et à valeurs sur  $\Gamma$ , suivants

$$\begin{aligned}Su &= \int_{\Gamma} E(x-y) u(x) d\Gamma, \\ Du &= \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_x} E(x-y) u(x) d\Gamma, \\ D^*u &= \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y) u(x) d\Gamma, \\ Nu &= \oint_{\Gamma} \frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y} E(x-y) u(x) d\Gamma.\end{aligned}$$

$D$  étant le transposé de  $D^*$ .

Pour résoudre le problème de Dirichlet intérieur et extérieur, il suffit de traduire la condition limite. L'inconnue auxiliaire  $q$  doit satisfaire

$$\int_{\Gamma} E(x-y) q(x) d\Gamma(x) = u_d(y); \quad y \in \Gamma, \quad (4.16)$$

ou encore

$$Sq = u_d.$$

Cette équation puisqu'elle donne la solution du problème intérieur n'est pas inversible lorsque  $-k^2$  est valeur propre, du problème de Dirichlet, pour le laplacien. Elle résout aussi le problème extérieur de Dirichlet qui a toujours une solution unique. L'opérateur est inversible en dehors de ces valeurs critiques.

Pour résoudre les problèmes de Dirichlet intérieur et extérieur il suffit d'exprimer les valeurs de  $u_{int}$  et  $u_{ext}$  par

$$-\frac{\varphi(y)}{2} + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_x} E(x-y)\varphi(x) d\Gamma = u_d(y); \quad y \in \Gamma \quad (\text{pb. int.}) \quad (4.17)$$

$$\frac{\varphi(y)}{2} + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_x} E(x-y)\varphi(x) d\Gamma = u_d(y); \quad y \in \Gamma \quad (\text{pb. ext.}) \quad (4.18)$$

ou encore

$$\left(-\frac{I}{2} + D\right) \varphi = u_d \quad (\text{pb. int.}) \quad (4.19)$$

$$\left(\frac{I}{2} + D\right) \varphi = u_d \quad (\text{pb. ext.}) \quad (4.20)$$

L'équation (4.19) n'est pas inversible si  $-k^2$  est valeur propre, du problème de Dirichlet intérieur, pour le laplacien. L'équation (4.20) n'est pas inversible si  $-k^2$  est valeur propre, du problème de Neumann intérieur, pour le laplacien et il est inversible sinon.

D'après le théorème de représentation, l'opérateur  $N$  résout les deux problèmes intérieur et extérieur de Neumann, l'équation intégrale associée est formellement

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y} E(x-y)\varphi(x) d\Gamma = -u_n(y); \quad y \in \Gamma, \quad (4.21)$$

ou encore

$$N\varphi = -u_n.$$

L'opérateur  $N$  n'est pas inversible si  $-k^2$  est valeur propre du problème de Neumann intérieur. Il est inversible en dehors de ces valeurs.

Pour résoudre le problème de Neumann intérieur et extérieur, on pose

$$\begin{aligned} \frac{q(y)}{2} + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y)q(x) d\Gamma &= u_n(y); \quad y \in \Gamma \quad (\text{pb. int.}) \\ -\frac{q(y)}{2} + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y)q(x) d\Gamma &= u_n(y); \quad y \in \Gamma \quad (\text{pb. ext.}) \end{aligned}$$

ou encore

$$\left(\frac{I}{2} + D^*\right) q = u_n \quad (\text{pb. int.}) \quad (4.22)$$

$$\left(-\frac{I}{2} + D^*\right) q = u_n \quad (\text{pb. ext.}) \quad (4.23)$$

L'équation intégrale (4.23) n'a pas de solution quand  $-k^2$  est valeur propre, du problème de Dirichlet intérieur, pour le laplacien, l'opérateur associé est inversible en dehors de ces valeurs.

L'équation intégrale (4.22) n'est pas inversible lorsque  $-k^2$  est valeur propre, du problème de Neumann intérieur, pour le laplacien, elle est inversible en dehors de ces valeurs.

**Remarque.** Toutes les représentations plus haut mènent à des opérateurs non inversibles pour certaines valeurs de  $k$ , dans le but de remédier à cela, Brakhage et Werner proposent de considérer  $u$  sous forme de somme de potentiels de simple couche et double couche, i.e.

$$u(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[ i\alpha \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right] q(x) d\Gamma.$$

Ce potentiel satisfait, d'après le théorème de représentation,  $\left[ \frac{\partial u}{\partial n} - i\alpha u \right]_{\Gamma} = 0$ .

Le problème intérieur associé est

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u & = 0, \\ \left( \frac{\partial u}{\partial n} - i\alpha u \right)_{\Gamma} & = 0, \end{cases}$$

qui n'admet pas de valeurs propres pour  $\alpha$  réel. Ce potentiel mène à un opérateur inversible quelque soit  $k$ .

### Formulation variationnelle

L'équation intégrale (4.16) résout les problèmes intérieur et extérieur de Dirichlet, elle a pour expression

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} q(x) d\Gamma = u_d; \quad y \in \Gamma. \quad (4.24)$$

**Théorème 4.4** *L'équation (4.24) admet la formulation*

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} q(x) q^t(y) d\Gamma(x) d\Gamma(y) = \int_{\Gamma} u_d(y) q^t(y) d\Gamma(y) \quad \forall q^t \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

L'opérateur  $S$  associé est un isomorphisme de  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  quand  $-k^2$  n'est pas valeur propre, du problème de Dirichlet intérieur, pour le laplacien.

**Théorème 4.5** L'opérateur  $-N$  donné par (4.21) est un isomorphisme de  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , lorsque  $-k^2$  n'est pas valeur propre, pour le problème intérieur de Neumann, pour le laplacien. Il admet la formulation variationnelle suivante

$$\begin{aligned} -N\varphi = & \frac{1}{4\pi} \left[ - \int_{\Gamma} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \Delta_{\Gamma} \varphi(x) d\Gamma \right. \\ & + \int_{\Gamma} \left( \nabla_{\Gamma} \varphi(x) \cdot \nabla_{\Gamma} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right) (1 - (n_x \cdot n_y)) d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_x} \left( \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right) (\nabla_{\Gamma} \varphi(x) \cdot n_y) d\Gamma \\ & \left. - k^2 \int_{\Gamma} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \varphi(x) (n_x \cdot n_y) d\Gamma \right]. \end{aligned}$$

## 4.2 Méthode des éléments finis inversés (BIFEM) et équation de Helmholtz

On propose ici une description de la méthode des éléments finis inversés, (BIFEM). Elle repose sur la subdivision du domaine infini en deux sous-domaines, le premier borné où on peut utiliser les éléments finis standards et le second non borné qu'on peut ramener à un domaine borné par une inversion polygonale adéquate. Les avantages de la BIFEM sont multiples. On cite l'absence de toute frontière artificielle, la quasi-indépendance par rapport au problème traité, les faibles tailles des systèmes linéaires qui en résultent.

### 4.2.1 Présentation de la méthode BIFEM

On considère un problème variationnel type de la forme

$$\text{Trouver } u \in W \text{ tel que } a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in W,$$

où  $W$  est un espace à poids et  $a(.,.)$  une forme bilinéaire sur  $W$  coercive.

La méthode de Galerkin consiste à remplacer le problème continu par un problème approché de la forme

$$\text{Trouver } u_h \in W_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in W_h,$$

où  $W_h \subset W$  est un espace de dimension finie dont les fonctions approchent celles de  $W$ . Puisque la forme bilinéaire  $a(., .)$  est coercive, le lemme de Céa est applicable, et l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée est contrôlée par l'erreur d'interpolation. On a

$$\|u - u_h\|_W \leq c \inf_{v_h \in W_h} \|u - v_h\|_W.$$

Dans ce qui suit  $W$  est l'espace à poids

$$\mathcal{H}_\alpha^{1,p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega); \forall |\lambda| \leq m, \langle x \rangle^{\alpha+|\lambda|} D^\lambda u \in L^p(\Omega)\}. \quad (4.25)$$

### Construction de l'espace $W_h$

La première idée pour construire  $W_h$  est la subdivision de  $\Omega$  en deux sous domaines  $\Omega_0$  borné où la méthode des éléments finis classique est utilisée et  $\Omega_\infty$  non borné qui sera transformé en un domaine borné par le biais d'une application (singulière) dans le but d'assurer l'exacte conformité à l'interface  $\Omega_\infty \cap \Omega_0$ .

**Définition 4.6** Soit  $a_j = (a_{i,j})_{i=0}^n$ ,  $j = 0, \dots, n$  une collection de  $n+1$  points de  $\mathbb{R}^n$  affinement indépendants. On appelle simplexe infini de sommets  $a_0, a_1, \dots, a_n$  l'ensemble

$$T(a_0, a_1, \dots, a_n) = \left\{ x = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i, \lambda_0 \leq 0, \lambda_i \geq 0 \text{ pour } i = \overline{1, n}, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

Le sommet  $a_0$  est appelé le sommet fictif et  $a_1, \dots, a_n$  sont appelés sommets réels, du simplexe  $T$ . Le simplexe fini associé à  $T$  est défini par

$$S_T(a_0, a_1, \dots, a_n) = \left\{ x = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i, 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ pour } i = \overline{0, n}, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

Les simplexes de références infini et fini sont définis par

$$\widehat{T} = \left\{ x = (\widehat{\lambda}_1, \dots, \widehat{\lambda}_n) \in \mathbb{R}^n; \widehat{\lambda}_k \geq 0 \text{ pour } k = \overline{1, n}, \sum_{k=1}^n \widehat{\lambda}_k \geq 1 \right\}.$$

$$\widehat{K} = \widehat{S} = \left\{ x = (\widehat{\lambda}_1, \dots, \widehat{\lambda}_n) \in \mathbb{R}^n; 0 \leq \widehat{\lambda}_k \leq 1 \text{ pour } k = \overline{1, n}, \sum_{k=1}^n \widehat{\lambda}_k \leq 1 \right\}.$$

On appelle vecteur altitude associé à  $T$  le vecteur  $h_T = \overrightarrow{a_0 P_0}$  où  $P_0$  est la projection de  $a_0$  sur l'hyperplan  $P_T$  contenant  $a_1, \dots, a_n$ , et  $|h_T|$  est la distance de  $a_0$  à  $P_0$ .

On suppose que le domaine  $\Omega$  vérifie la propriété géométrique suivante  $\mathcal{H}$  : il existe deux sous domaines  $\Omega_0$  et  $\Omega_\infty$  tels que



- $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_0 \cup \bar{\Omega}_\infty$ .
- $\Omega_0$  est borné.
- Il existe un nombre fini de simplexes infinis  $T_1, \dots, T_M$  vérifiant
  1.  $\bar{\Omega}_\infty = \bigcup_{\ell=1}^M T_\ell$ ,
  2.  $T_1, \dots, T_M$  ont le même sommet fictif ( on supposera, sans perdre de généralité que c'est l'origine).
  3. Pour tous  $\ell, m \leq M$  avec  $\ell \neq m$ , l'intersection de  $T_\ell$  et  $T_m$  est soit vide soit une arête ou une face infinie entière.

De cette manière les simplexes infinis sont fixés, leur nombre  $M$  est fixe, ils forment avec  $\Omega_0$  une décomposition de  $\Omega$  en sous domaines.

Dans toute la suite, on notera  $S_i$ ,  $1 \leq i \leq M$ , les simplexes associés à  $T_1, \dots, T_M$  respectivement et on pose

$$\Omega_* = \overline{\bigcup_{i=1}^M S_i} - \{0\}.$$

Ainsi le domaine  $\Omega_*$  est polygonal et borné.

### Maillage du domaine

Afin de construire l'espace discret de l'approximation par la méthode BIFEM, on maille chacun des deux sous domaines  $\Omega_0$  et  $\Omega_*$  de la façon suivante

- Pour  $\Omega_0$ , on construit une triangulation classique en éléments finis  $\{\mathbf{K}; \mathbf{K} \in \mathcal{T}_h\}$  satisfaisant les hypothèses de régularité usuelles. On note  $h$  le paramètre de discrétisation défini par

$$h = \max_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(\mathbf{K}).$$

- Pour le domaine fictif  $\Omega_*$ , on utilise un maillage *gradué* de chacun de ses sous domaines  $S_i$ ,  $1 \leq i \leq M$ , c'est à dire une triangulation  $\{\mathbf{K}; \mathbf{K} \in \mathfrak{T}_h\}$  vérifiant en plus des hypothèses de régularité locales, les conditions suivantes

1. Pour tout  $\mathbf{K} \in \mathfrak{T}_h^* = \{\mathbf{K} \in \mathfrak{T}_h; 0 \notin \mathbf{K}\}$ , on a

$$\begin{aligned} h_{\mathbf{K}} &\lesssim h d_{\mathbf{K}}^{1-\mu}, \\ h_{\mathbf{K}}^{\frac{1}{\mu}} &\lesssim d_{\mathbf{K}}, \end{aligned}$$

où,  $d_{\mathbf{K}}$  désigne la distance entre l'origine 0 et  $\mathbf{K}$ . Le réel  $\mu > 0$  est le paramètre de *gradation*.

2. Pour tout  $\mathbf{K} \in \mathfrak{T}_h - \mathfrak{T}_h^*$ , on a

$$h_{\mathbf{K}} \lesssim h^{\frac{1}{\mu}}.$$

On supposera que les traces des maillages sur les intersections  $S_i \cap S_j$ ,  $i \neq j$ , sont les mêmes des deux cotés. On supposera aussi que les deux triangulations  $\mathcal{T}_h$  et  $\mathfrak{T}_h$  ont la même trace à l'interface  $\Omega_*$  et  $\Omega_\infty$ .

La raison essentielle de l'introduction des simplexes infinis réside dans la construction de l'inversion polygonale qui transforme  $\Omega_\infty$  en un domaine borné  $\Omega_*$ , elle est définie sur  $G = \overline{\Omega}_* \cup \overline{\Omega}_\infty - \{0\}$  comme suit

$$\forall x \in G, \phi(x) = \frac{x}{r(x)^2},$$

où,  $r(\cdot)$  est le *rayon polygonal* défini de la façon suivante

$$\forall i \in \{1, \dots, M\}, \forall x \in \overline{S_i \cup T_i}, r(x) = \frac{x \cdot h_i}{|h_i|^2}.$$

On peut montrer facilement que  $r(\cdot)$  est continu, que  $r(x) = 1$  pour tout  $x \in \overline{\Omega}_\infty \cap \overline{\Omega}_*$ . De plus

$$\forall x \in G, r(x) \simeq |x|.$$

L'inversion polygonale  $\phi$  transforme l'infini en l'origine. Elle laisse invariants les points d'intersection de  $\overline{\Omega}_\infty$  et  $\overline{\Omega}_*$ .

On considère maintenant l'opérateur  $\Lambda_\gamma$ ,  $\gamma$  étant un paramètre réel, qui à toute fonction  $u$  associe la fonction  $\Lambda_\gamma u$  définie sur  $G$  comme suit

$$(\Lambda_\gamma u)(x) = r(x)^{-\gamma} u(\phi(x)).$$

### Définition de l'espace discret

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on définit l'espace discret qui approche l'espace  $\mathcal{H}_\alpha^{1,p}(\Omega)$  par

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{h,k,\gamma}(\Omega) = & \{u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}); u|_K \in \mathbb{P}_k, \forall K \in \mathcal{T}_h \\ & \Lambda_\gamma u|_K \in \mathbb{P}_k(K), \forall K \in \mathfrak{T}_h^*, \\ & \Lambda_\gamma u|_K \in \overset{\circ}{\mathbb{P}}_k(K), \forall K \in \mathfrak{T}_h - \mathfrak{T}_h^*\}, \end{aligned}$$

où  $h$  joue le rôle du *paramètre de discrétisation* destiné à tendre vers 0, tandis que  $\mu$ ,  $\gamma$ , fixés a priori sont appelés les *paramètres d'ajustement*. Leur choix n'est pas arbitraire, surtout pour  $\mu$  qui détermine la graduation du maillage.

Pour avoir l'inclusion

$$\mathcal{H}_{h,k,\gamma}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{H}_\alpha^{1,p}(\Omega),$$

l'inégalité suivante doit être satisfaite

$$\gamma > \alpha + \frac{n}{p} - 1.$$

Il reste à définir l'opérateur d'interpolation correspondant à l'espace  $\mathcal{H}_{h,k,\gamma}(\Omega)$ . Pour cela, on définit une famille d'opérateurs d'interpolation locale comme suit : Soit  $K$  un élément de  $\mathcal{T}_h$  ou  $\mathfrak{T}_h$ ,  $a_K^0, a_K^1, \dots, a_K^n$  ses sommets,  $\Sigma_K$  l'ensemble des noeuds défini par

$$\Sigma_K = \left\{ x = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_K^i; \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \quad \lambda_i \in \left\{ 0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1 \right\} \right\}.$$

On note  $\Pi_K$  l'opérateur d'interpolation locale de type  $(k)$  défini par : pour tout  $v$  dans  $\mathcal{C}^0(K)$ ,  $\Pi_K v$  est l'unique élément de  $\mathbb{P}_k$  tel que

$$\Pi_K v(a) = v(a) \quad \forall a \in \Sigma_K.$$

Si  $K \in \mathfrak{T}_h - \mathfrak{T}_h^*$  ( $0 \in K$ ), on note  $\overset{\circ}{\Pi}_K$  l'opérateur d'interpolation locale de type  $(k)$  défini par : pour tout  $v$  dans  $\mathcal{C}^0(K - \{0\})$ ,  $\overset{\circ}{\Pi}_K v$  est l'unique élément de  $\overset{\circ}{\mathbb{P}}_k$  tel que

$$\overset{\circ}{\Pi}_K v(a) = v(a) \quad \forall a \in \Sigma_K - \{0\}.$$

Sous ses hypothèses, on peut associer pour toute fonction  $v \in \mathcal{C}_{loc}^0(\overline{\Omega})$  son interpolée globale  $v_h$  définie par

$$\begin{aligned} v_h|_K &= \Pi_K v|_K \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \\ (\Lambda_\gamma v_h)|_K &= \Pi_K [(\Lambda_\gamma v)|_K] \quad \forall K \in \mathfrak{T}_h^*, \\ (\Lambda_\gamma v_h)|_K &= \overset{\circ}{\Pi}_K [(\Lambda_\gamma v)|_K] \quad \forall K \in \mathfrak{K} \in \mathfrak{T}_h - \mathfrak{T}_h^*. \end{aligned}$$

L'opérateur d'interpolation globale  $\Pi_h$  est l'opérateur qui associe à toute fonction  $v$  dans  $\mathcal{C}_{loc}^0(\overline{\Omega})$  son interpolée  $v_h$ .

Notons que L'opérateur d'interpolation  $\Pi_h$  dépend du maillage et des paramètres  $k$  et  $\gamma$ .  $\Pi_h v$  appartient à l'espace  $\mathcal{C}_{h,k,\gamma}(\Omega)$  pour toute fonction  $v \in \mathcal{C}_{loc}^0(\overline{\Omega})$ .

On a alors les estimations suivantes.

**Théorème 4.7** Soient  $p, q > 1, \alpha, \beta$  quatre réels tels que

$$\frac{n}{p} - \frac{n}{q} + 1 > 0 \quad \text{et} \quad \beta + \frac{n}{q} \geq \alpha + \frac{n}{p}$$

$$\beta + \frac{n}{q} - 1 < \gamma < \beta + \frac{n}{q}$$

$$k + 1 > \frac{n}{q}.$$

On pose pour tout  $m \leq k$ ,

$$\mu_m = \frac{\beta - \alpha + n(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})}{k + 1 - m + n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}, \quad \tau_m = \frac{\mu_m}{\mu}.$$

Alors, pour toute fonction  $u \in \mathcal{H}_\beta^{k+1,q}(\Omega)$  on a

$$\|u - \Pi_h u\|_{\mathcal{H}_\alpha^{1,p}(\Omega)} \lesssim h^{[k+n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})] \min(1, \frac{\mu_1}{\mu})} \|u\|_{\mathcal{H}_\beta^{k+1,q}(\Omega_\infty)} + h^{k+n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|u\|_{W^{k+1,q}(\Omega_0)}.$$

De plus, pour tout entier naturel  $m \leq k$ , on a

$$\sum_{K \in \mathfrak{T}_h} \|u - \Pi_h^\alpha u\|_{\mathcal{H}_\alpha^{m,p}(K)} \lesssim h^{[k+1-m+n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})] \min(1, \frac{\mu_m}{\mu})} \|u\|_{\mathcal{H}_\beta^{k+1,q}(\Omega_\infty)},$$

$$\text{et} \quad \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|u - \Pi_h^\alpha u\|_{\mathcal{H}_\alpha^{m,p}(K)} \lesssim h^{k+1-m+n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|u\|_{\mathcal{H}_\beta^{k+1,q}(\Omega_0)}.$$

## 4.2.2 Résolution de l'équation de Helmholtz à l'extérieur d'un domaine

### Cas de l'extérieur de la sphère

On commence cette section par rappeler d'abord la résolution de l'équation de Laplace et l'équation de Helmholtz à l'extérieur de la sphère unité  $B_e = \mathbb{R}^3 - B_1$ , proposée par Nédélec dans [65]. La solution est donnée dans les deux cas sous forme de décomposition suivant les harmoniques sphériques. Afin d'assurer l'existence et l'unicité de la solution les deux problèmes sont résolus dans un espace de sobolev à poids approprié. Le problème de Dirichlet extérieur

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & \text{dans } B_e \\ u &= u_d, & \text{sur } \mathbb{S}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

admet la solution

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} u_{\ell,m} \mathcal{Y}_{\ell,m}(\theta, \varphi) \frac{1}{r^{\ell+1}}, \quad (4.27)$$

où la série ci-dessus est absolument convergente pour  $r > 1$ . La solution est dans  $W^k(B_e)$  si  $u_d$  est dans  $H^{k-\frac{1}{2}}(\mathbb{S})$  où,

$$W^k(B_e) = \left\{ u; \frac{u}{r} \in L^2(B_e), Du \in L^2(B_e), \dots, r^{k-1} D^k u \in L^2(B_e) \right\} \quad (4.28)$$

Considérons maintenant le problème

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u &= 0, & \text{dans } B_e \\ u &= u_d, & \text{sur } \mathbb{S}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

On rajoute des conditions de comportement à l'infini

$$|u| \leq \frac{c}{r}, \quad r \text{ grand}, \quad (4.30)$$

$$|\nabla u| \leq \frac{c}{r}, \quad (4.31)$$

et la condition de Sommerfeld

$$\left| \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right| \leq \frac{c}{r^2}. \quad (4.32)$$

On sait que ce problème admet une unique solution dans l'espace  $H$  défini par

$$H = \left\{ u; \frac{u}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}} \in L^2(B_e), \frac{\nabla u}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}} \in L^2(B_e), \left( \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) \in L^2(B_e) \right\}.$$

La solution est donnée par

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} u_{\ell, m} \frac{h_{\ell}^{(1)}(kr)}{h_{\ell}^{(1)}(k)} \mathcal{Y}_{\ell, m}(\theta, \varphi), \quad (4.33)$$

où

$$u_{\ell, m} = \int_{\mathbb{S}} u_d(\theta, \varphi) \overline{\mathcal{Y}_{\ell, m}(\theta, \varphi)} d\mathbb{S},$$

et  $h_{\ell}^{(1)}(r)$  sont des fonctions de Hankel, solutions de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 h_{\ell}(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dh_{\ell}(r)}{dr} + \left( 1 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) h_{\ell}(r) = 0, \quad r > 0. \quad (4.34)$$

Elles sont données explicitement par la formule

$$h_{\ell}^{(1)}(r) = (-r)^{\ell} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{\ell} \left( \frac{e^{ir}}{r} \right) \quad (4.35)$$

ou encore,

$$h_{\ell}^{(1)}(r) = (-i)^{\ell} \frac{e^{ir}}{r} \left( \beta_0^{\ell} + i\beta_1^{\ell} \frac{1}{r} + \dots + (i)^m \beta_m^{\ell} \left( \frac{1}{r} \right)^m + \dots + (i)^{\ell} \beta_{\ell}^{\ell} \left( \frac{1}{r} \right)^{\ell} \right), \quad (4.36)$$

où

$$\beta_m^{\ell} = \frac{(m+\ell)!}{m!(\ell-m)!2^m}.$$

### 4.2.3 Reformulation de l'équation de Helmholtz et méthode BIFEM

Afin de pouvoir appliquer la méthode des éléments finis inversés exposé auparavant, on va reformuler l'équation de Helmholtz dans un cadre fonctionnel approprié. Cette reformulation tiendra compte de façon intrinsèque de la condition de Sommerfeld.

Posons désormais

$$v = e^{-ikr} u.$$

L'équation

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

devient

$$\Delta v + 2ik \frac{v}{r} + 2ik \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad (4.37)$$

ou encore

$$\Delta v = -2ik \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r}.$$

Ceci nous amène à la résolution du problème

$$\begin{aligned} \Delta v &= -2ik \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} & \text{sur } \Omega_e \\ v &= v_d & \text{sur } \Gamma, \end{aligned} \quad (4.38)$$

où  $v_d = e^{-ikr} u_d$ . Pour la résolution de ce problème on va considérer une suite de problèmes de la forme

$$\begin{aligned} v_0 &= 0 \\ \Delta v_{n+1} &= -2ik \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_n)}{\partial r} & \text{sur } \Omega_e, \\ v_{n+1} &= v_d & \text{sur } \Gamma. \end{aligned} \quad (4.39)$$

On cherche ainsi une solution  $v_n$  appartenant à l'espace

$$W_0^1(\Omega_e) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega_e); \frac{u}{\langle x \rangle} \in L^2(\Omega_e), \nabla u \in (L^2(\Omega_e))^3 \right\}. \quad (4.40)$$

**Proposition 4.8** Si  $\frac{\partial}{\partial r}(rv_n) \in L^2(\Omega_e)$ , alors le problème (4.39) admet une solution unique dans  $W_0^1(\Omega_e)$ .

**Preuve.** On se ramène au cas du problème homogène en posant

$$\tilde{v}_{n+1} = v_{n+1} - \mathcal{R}v_d,$$

où  $\mathcal{R}v_d$  est le relèvement de  $v_d$  dans  $W_0^1(\Omega_e)$ , choisi à support borné. Une formulation variationnelle de ce problème est alors

$$\int_{\Omega_e} \nabla \tilde{v}_{n+1} \overline{\nabla w} dx = \int_{\Omega_e} \left( 2ik \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_n)}{\partial r} \overline{w} - \nabla \mathcal{R}v_d \overline{\nabla w} \right) dx \quad \forall w \in \overset{\circ}{W}_0^1(\Omega_e).$$

D'après l'inégalité de Hardy la forme bilinéaire du premier membre est coercive dans  $\overset{\circ}{W}_0^1(\Omega_e)$  et le théorème de Lax-Milgram nous permet de conclure. ■

Maintenant soit  $R > 0$  tel que  $\Omega \subset B_R$ .

**Proposition 4.9** Soit  $v_{n+1} \in W_0^1(\mathbb{R}^3)$ , la solution du problème (4.39) dans  $B'_R = \mathbb{R}^3 - B_R$  se décompose sous la forme

$$v_n = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left( \sum_{s=0}^{\ell} \frac{v_{\ell,m,s}^{(n)}}{r^{s+1}} \right) \mathcal{Y}_{\ell,m}(\theta, \varphi) \quad \text{pour } r > R \text{ et } n \geq 1$$

avec

$$v_{\ell,m,s}^{(n)} = \begin{cases} \frac{(\ell+s)!(-ik)^{\ell-s}}{s!(\ell-s)!2^s} v_{\ell,m,\ell}^{(n+s-\ell)} & \text{si } 0 \leq s \leq \ell, s > \ell - n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Preuve.** On fait une démonstration par récurrence.

**Pour  $n = 1$ ,** on a  $s = \ell$ , donc

$$v_1 = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{v_{\ell,m,\ell}^{(1)}}{r^{\ell+1}} \mathcal{Y}_{\ell,m}(\theta, \varphi),$$

qui représente bien la décomposition, sur les harmoniques sphériques, de la solution du problème à l'extérieur de la sphère unité

$$\begin{aligned} \Delta v^{(1)} &= 0 & \text{sur } \Omega_e \\ v^{(1)} &= v_d & \text{sur } \Gamma. \end{aligned}$$

**Pour  $n > 1$ ,** on suppose que la décomposition est vraie à l'ordre  $n$  et on montre que pour

$$v_{n+1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left( \sum_{s=0}^{\ell} \frac{v_{\ell,m,s}^{(n+1)}}{r^{s+1}} \right) \mathcal{Y}_{\ell,m}(\theta, \varphi).$$

On a

$$v_{\ell,m,s}^{(n+1)} = \begin{cases} \frac{(\ell+s)!(-ik)^{\ell-s}}{s!(\ell-s)!2^s} v_{\ell,m,\ell}^{(n+s+1-\ell)} & \text{si } 0 \leq s \leq \ell, s > \ell - n - 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet, on a

$$\Delta v_{n+1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left( \sum_{s=0}^{\ell} v_{\ell,m,s}^{(n+1)} \Delta \left( \frac{1}{r^{s+1}} \mathcal{Y}_{\ell,m}(\theta, \varphi) \right) \right),$$

or, si on pose  $v(x_1, x_2, \dots, x_n) = \tilde{v}(r, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$  pour  $1 \leq i \leq n$ , tels que,  $\xi_i = x_i/r$  et  $r = |x|$  on a

$$\Delta v = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{n-1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_g \tilde{v},$$

où  $\Delta_g$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami, donc

$$\Delta \left( \frac{1}{r^{s+1}} \mathcal{Y}_{\ell,m}(\theta, \varphi) \right) = \frac{1}{r^2} \frac{s(s+1)}{r^{s+1}} \mathcal{Y}_{\ell,m}(\theta, \varphi) + \frac{-\ell(\ell+1)}{r^{s+3}} \mathcal{Y}_{\ell,m}(\theta, \varphi).$$

D'où,

$$\Delta v_{n+1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left( \sum_{s=0}^{\ell} \frac{s(s+1) - \ell(\ell+1)}{r^{s+3}} v_{\ell,m,s}^{(n+1)} \right) \mathcal{Y}_{\ell,m}(\theta, \varphi).$$

D'autre part,

$$\frac{\partial(rv_n)}{\partial r} = - \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left( \sum_{s=0}^{\ell} \frac{sv_{\ell,m,s}^{(n)}}{r^{s+1}} \right) \mathcal{Y}_{\ell,m}(\theta, \varphi),$$

donc

$$-2ik \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_n) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left( \sum_{s=0}^{\ell} \frac{2iks v_{\ell,m,s}^{(n)}}{r^{s+2}} \right) \mathcal{Y}_{\ell,m}(\theta, \varphi).$$

Par identification, on obtient

$$\sum_{s=0}^{\ell-1} \frac{s(s+1) - \ell(\ell+1)}{r^{s+3}} v_{\ell,m,s}^{(n+1)} = \sum_{s=1}^{\ell} \frac{2iks v_{\ell,m,s}^{(n)}}{r^{s+2}}.$$

Ce qui donne pour tout  $1 \leq s \leq \ell$

$$v_{\ell,m,s-1}^{(n+1)} = \frac{2iks}{s(s-1) - \ell(\ell+1)} v_{\ell,m,s}^{(n)}.$$

En remplaçant  $v_{\ell,m,s}^{(n)}$  par sa valeur pour,  $1 \leq s \leq \ell$  et  $s > \ell - n$ , on déduit

$$\begin{aligned} v_{\ell,m,s}^{(n+1)} &= \frac{2iks}{(s+\ell)(s-\ell-1)} \frac{(\ell+s)!(-ik)^{\ell-s}}{s!(\ell-s)!2^s} v_{\ell,m,\ell}^{(n+s-\ell)} \\ &= \frac{(\ell+s-1)!(-ik)^{\ell-s+1}}{(s-1)!(\ell-s+1)!2^{s-1}} v_{\ell,m,\ell}^{(n+s-\ell)}. \end{aligned}$$



Ce qui veut dire que

$$v_{\ell,m,s}^{(n+1)} = \begin{cases} \frac{(\ell+s)!(-ik)^{\ell-s}}{s!(\ell-s)!2^s} v_{\ell,m,\ell}^{(n+s+1-\ell)} & \text{si } 0 \leq s \leq \ell, s > \ell - n - 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ceci achève la démonstration. ■

**Lemme 4.10** Pour tout  $n \geq 0$ , on a

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru_{n+1}) \in L^2(\Omega_e).$$

**Preuve.** On sait que

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru_{n+1}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left( \sum_{s=0}^{\ell} \frac{-su_{\ell,m,s}^{(n+1)}}{r^{s+1}} \right) \mathcal{Y}_{\ell,m}(\theta, \varphi).$$

En utilisant les propriétés des harmoniques sphériques on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial r}(ru_{n+1}) \right\|_{L^2(\Omega_e)}^2 &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \int_R^{\infty} r^2 \left( \sum_{s=0}^{\ell} \frac{-su_{\ell,m,s}^{(n+1)}}{r^{s+1}} \right)^2 dr \\ &\leq \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left( \sum_{s=1}^{\ell} s^2 |u_{\ell,m,s}^{(n+1)}|^2 \right) \left( \int_R^{\infty} \frac{1}{r^{2s}} dr \right) \\ &< \infty, \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Ainsi le problème (4.39) admet une solution dans

$$W = \left\{ w \in W_0^1(\Omega_e); \frac{\partial}{\partial r}(rw) \in L^2(\Omega_e) \right\}.$$

Montrons maintenant que la solution de la suite de problème (4.39) converge vers la solution du problème (4.38).

Soit  $v$  la solution du problème (4.38) et posons

$$w_n = v_n - v.$$

On a

$$\begin{aligned} \Delta w_{n+1} &= -2ik \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rw_n)}{\partial r} \right) & \text{sur } \Omega_e \\ w_{n+1} &= 0 & \text{sur } \Gamma. \end{aligned} \tag{4.41}$$

**Lemme 4.11** On a,

$$\left\| \frac{\partial}{\partial r}(rw_{n+1}) \right\|_{L^2(\Omega_e)}^2 \leq c_2 k^\alpha \|w_n\|_{W_0^1(\Omega_e)}^2.$$

**Preuve.** Soit  $R_0$  assez grand de sorte que

$$\frac{\partial}{\partial r}(rw_n) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left( \sum_{s=0}^{\ell} \frac{-sw_{\ell,m,s}^{(n)}}{r^{s+1}} \right) \mathcal{Y}_{\ell,m}(\theta, \varphi).$$

Posons

$$w_{\ell,m}^{(n)}(r) = \sum_{s=0}^{\ell} \frac{w_{\ell,m,s}^{(n)}}{r^{s+1}}, \quad \text{donc} \quad \frac{\partial}{\partial r}(rw_{\ell,m}^{(n)}(r)) = \sum_{s=0}^{\ell} \frac{-sw_{\ell,m,s}^{(n)}}{r^{s+1}}.$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{R_0}^r t^\alpha w_{\ell,m}^{(n)}(t) dt &= \sum_{s=0}^{\ell} w_{\ell,m,s}^{(n)} \int_{R_0}^r t^{\alpha-s-1} dt \\ &= \sum_{s=0}^{\ell} \frac{(r^{\alpha-s} - R_0^{\alpha-s})}{\alpha-s} w_{\ell,m,s}^{(n)} \quad \text{pour } \alpha \notin \{0, \dots, \ell\}. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{r^\alpha} \int_{R_0}^r t^\alpha w_{\ell,m}^{(n)}(t) dt = \frac{\theta_{\ell,m}^{(n)}(R_0)}{r^\alpha} + \sum_{s=0}^{\ell} \frac{1}{\alpha-s} \frac{1}{r^s} w_{\ell,m,s}^{(n)}$$

et

$$\frac{1}{R_0^\alpha} \int_{R_0}^r t^\alpha w_{\ell,m}^{(n)}(t) dt = \sum_{s=0}^{\ell} \frac{1}{\alpha-s} \left( \frac{r^{\alpha-s}}{R_0^\alpha} - \frac{1}{R_0^s} \right) w_{\ell,m,s}^{(n)},$$

où

$$\theta_{\ell,m}^{(n)}(R_0) = - \sum_{s=0}^{\ell} \frac{1}{\alpha-s} R_0^{\alpha-s} w_{\ell,m,s}^{(n)}.$$

Or on a montré que

$$\begin{aligned} w_{\ell,m}^{(n+1)} &= \frac{w_{\ell,m,\ell}^{(n+1)}}{r^{\ell+1}} + \sum_{s=1}^{\ell} \frac{w_{\ell,m,s-1}^{(n+1)}}{r^s} \\ &= \frac{w_{\ell,m,\ell}^{(n+1)}}{r^{\ell+1}} + \sum_{s=1}^{\ell} \frac{2iks}{s(s-1) - \ell(\ell+1)} w_{\ell,m,s}^{(n)} \frac{1}{r^s}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^\beta} \int_r^{+\infty} t^\beta w_{\ell,m}^{(n)}(t) dt &= - \lim_{R_0 \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\theta_{\ell,m}^{(n)}(R_0)}{r^\beta} + \sum_{s=0}^{\ell} \frac{1}{\beta-s} \frac{1}{r^s} w_{\ell,m,s}^{(n)} \right\} \\ &= - \sum_{s=0}^{\ell} \frac{w_{\ell,m,s}^{(n)}}{\beta-s} \frac{1}{r^s} \text{ pour } \beta < 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{r^\alpha} \int_{R_0}^r t^\alpha w_{\ell,m}^{(n)}(t) dt + \frac{1}{r^\beta} \int_r^{+\infty} t^\beta w_{\ell,m}^{(n)}(t) dt = \frac{\theta_{\ell,m}^{(n)}(R_0)}{r^\alpha} + \sum_{s=0}^{\ell} \frac{(\beta-\alpha)}{(\beta-s)(\alpha-s)} \frac{1}{r^s} w_{\ell,m,s}^{(n)}.$$

On choisit  $\beta = -\ell$ ,  $\alpha = \ell + 1$ , pour  $\ell > 0$  et on pose  $c_{\ell,s} = s(s-1) - \ell(\ell+1)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^{\ell+1}} \int_{R_0}^r t^{\ell+1} w_{\ell,m}^{(n)}(t) dt + r^\ell \int_r^{+\infty} \frac{1}{t^\ell} w_{\ell,m}^{(n)}(t) dt &= \sum_{s=0}^{\ell} \frac{(-2\ell-1)}{c_{\ell,s}} \frac{1}{r^s} w_{\ell,m,s}^{(n)} \\ &\quad + \frac{\theta_{\ell,m}^{(n)}(R_0)}{r^{\ell+1}}. \end{aligned}$$

En dérivant des deux cotés par rapport à  $r$ , on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\ell} \frac{s}{c_{\ell,s}} \frac{1}{r^{s+1}} w_{\ell,m,s}^{(n)} &= \frac{1}{2\ell+1} \left[ \frac{\ell+1}{r^{\ell+2}} \theta_{\ell,m}^{(n)}(R_0) - \frac{\ell+1}{r^{\ell+2}} \int_{R_0}^r t^{\ell+1} w_{\ell,m}^{(n)}(t) dt \right] \\ &\quad + \frac{1}{2\ell+1} \left[ \ell r^{\ell-1} \int_r^{+\infty} \frac{1}{t^\ell} w_{\ell,m}^{(n)}(t) dt \right]. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\ell} \frac{2iks}{c_{\ell,s}} \frac{1}{r^s} w_{\ell,m,s}^{(n)} &= \frac{2ik}{2\ell+1} \left[ \frac{\ell+1}{r^{\ell+1}} \theta_{\ell,m}^{(n)}(R_0) - \frac{\ell+1}{r^{\ell+1}} \int_{R_0}^r t^{\ell+1} w_{\ell,m}^{(n)}(t) dt \right] \\ &\quad + \frac{2ik}{2\ell+1} \left[ \ell r^\ell \int_r^{+\infty} \frac{1}{t^\ell} w_{\ell,m}^{(n)}(t) dt \right]. \end{aligned}$$

Ainsi, en remplaçant dans (4.42)

$$\begin{aligned}
 w_{\ell,m}^{(n+1)} &= \frac{w_{\ell,m,\ell}^{(n+1)}}{r^{\ell+1}} + \frac{2ik(\ell+1)}{(2\ell+1)r^{\ell+1}}\theta_{\ell,m}^{(n)}(R_0) + \frac{2ik}{2\ell+1} \left[ \ell r^\ell \int_r^{+\infty} \frac{1}{t^\ell} w_{\ell,m}^{(n)}(t) dt \right] \\
 &\quad + \frac{2ik}{2\ell+1} \left[ -\frac{\ell+1}{r^{\ell+1}} \int_{R_0}^r t^{\ell+1} w_{\ell,m}^{(n)}(t) dt \right] \\
 &= \frac{2ik}{2\ell+1} \left[ -\frac{\ell+1}{r^{\ell+1}} \int_{R_0}^r t^{\ell+1} w_{\ell,m}^{(n)}(t) dt + \ell r^\ell \int_r^{+\infty} \frac{1}{t^\ell} w_{\ell,m}^{(n)}(t) dt \right] \\
 &\quad + \frac{1}{r^{\ell+1}} C_{\ell,m}^{(n+1)},
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 C_{\ell,m}^{(n+1)} &= w_{\ell,m,\ell}^{(n+1)} + \frac{2ik(\ell+1)}{2\ell+1} \theta_{\ell,m}^{(n)}(R_0) \\
 &= R_0^{\ell+1} w_{\ell,m}^{(n+1)}(R_0) - \frac{2ik\ell}{2\ell+1} R_0^{2\ell+1} \int_{R_0}^{+\infty} \frac{1}{t^\ell} w_{\ell,m}^{(n)}(t) dt
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(rw_{\ell,m}^{(n+1)})}{\partial r} &= \frac{2ik\ell(\ell+1)}{2\ell+1} \cdot \left[ \frac{1}{r^{\ell+1}} \int_{R_0}^r t^{\ell+1} w_{\ell,m}^{(n)} dt + r^\ell \int_r^{+\infty} \frac{1}{t^\ell} w_{\ell,m}^{(n)} dt \right] \\
 &\quad - 2ikr w_{\ell,m}^{(n)}(r) - \frac{\ell}{r^{\ell+1}} C_{\ell,m}^{(n+1)}.
 \end{aligned}$$

Calculons les intégrales obtenues, en utilisant une intégration par parties

$$\begin{aligned}
 \int_{R_0}^r t^{\ell+1} w_{\ell,m}^{(n)} dt &= \frac{r^{\ell+2}}{\ell+1} w_{\ell,m}^{(n)} - \frac{R_0^{\ell+2}}{\ell+1} w_{\ell,m}^{(n)} - \int_{R_0}^r \frac{t^{\ell+1}}{\ell+1} \frac{\partial}{\partial t} (t w_{\ell,m}^{(n)}) dt \\
 \int_r^{+\infty} \frac{w_{\ell,m}^{(n)}}{t^\ell} dt &= \int_r^{+\infty} \frac{1}{t^{\ell+1}} t w_{\ell,m}^{(n)} dt = \frac{w_{\ell,m}^{(n)}}{\ell r^{\ell-1}} + \frac{1}{\ell} \int_r^{+\infty} \frac{1}{t^\ell} \frac{\partial}{\partial t} (t w_{\ell,m}^{(n)}) dt,
 \end{aligned}$$

d'où en remplaçant, on a

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial r} (r w_{\ell,m}^{(n+1)}) &= \frac{2ik\ell(\ell+1)}{2\ell+1} \left[ -\frac{1}{(\ell+1)r^{\ell+1}} \int_{R_0}^r t^{\ell+1} \frac{\partial}{\partial t} (t w_{\ell,m}^{(n)}) dt \right] \\
 &\quad + \frac{2ik\ell(\ell+1)}{2\ell+1} \left[ \frac{r^\ell}{\ell} \int_r^{+\infty} \frac{1}{t^\ell} \frac{\partial}{\partial t} (t w_{\ell,m}^{(n)}) dt \right] \\
 &\quad - \frac{\ell}{r^{\ell+1}} C_{\ell,m}^{(n+1)} - \frac{2ik\ell R_0^{\ell+2}}{(2\ell+1)r^{\ell+1}} w_{\ell,m}^{(n)} \\
 &= \frac{A(R_0)}{r^{\ell+1}} + \frac{2ik}{2\ell+1} \left[ r^\ell \omega_1(r) - \frac{1}{r^{\ell+1}} \omega_2(r) \right],
 \end{aligned}$$

où

$$A(R_0) = -\ell \left[ C_{\ell,m}^{(n+1)} + \frac{2ikR_0^{\ell+2}}{2\ell+1} w_{\ell,m}^{(n)}(R_0) \right],$$

$$\omega_1(r) = (\ell+1) \int_r^{+\infty} \frac{1}{t^\ell} \frac{\partial}{\partial t} (tw_{\ell,m}^{(n)}) dt,$$

et

$$\omega_2(r) = \ell \int_{R_0}^r t^{\ell+1} \frac{\partial}{\partial t} (tw_{\ell,m}^{(n)}) dt.$$

■

**Proposition 4.12** *On a*

$$\|w_{n+1}\|_{W_0^1(\Omega_e)}^2 \leq c_1 k^2 \left\| \frac{\partial}{\partial r} (rw_n) \right\|_{L^2(\Omega_e)}^2. \quad (4.43)$$

**Preuve.** En multipliant l'équation (4.41) par  $\bar{w}$  et en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} |\nabla w_{n+1}|^2 dx &= \int_{\Omega_e} \frac{2ik}{r} \frac{\partial(rw_n)}{\partial r} \bar{w}_{n+1} dx \\ &\leq 2|k| \left( \int_{\Omega_e} \left| \frac{\partial(rw_n)}{\partial r} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega_e} \frac{|\bar{w}_{n+1}|^2}{r^2} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2|k|c(\Omega) \left( \int_{\Omega_e} \left| \frac{\partial(rw_n)}{\partial r} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega_e} |\nabla w_{n+1}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

D'où

$$\int_{\Omega_e} |\nabla w_{n+1}|^2 dx \leq 4|k|^2 c^2(\Omega) \int_{\Omega_e} \left| \frac{\partial(rw_n)}{\partial r} \right|^2 dx.$$

En utilisant encore une fois l'inégalité de Hardy on obtient l'estimation (4.43). ■

**Théorème 4.13** *Pour  $|k^{\alpha+2}c_1c_2| < 1$  on a*

$$\|w_n\|_{W_0^1(\Omega_e)}^2 \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

**Preuve.** On a montré plus haut que

$$\mathcal{V}_{n+1} \leq \mathcal{M}\mathcal{V}_n \text{ pour tout } n \geq 1, \quad (4.44)$$

où

$$\mathcal{V}_n = \begin{pmatrix} \|w_n\|_{W_0^1(\Omega_e)}^2 \\ \left\| \frac{\partial}{\partial r}(rw_n) \right\|_{L^2(\Omega_e)}^2 \end{pmatrix},$$

et

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 k^2 \\ c_2 k^\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Si  $|k^{\alpha+2}c_1c_2| < 1$  alors  $\mathcal{M}^n$  tend vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$  car  $\rho(\mathcal{M}) < 1$ , d'où le résultat. ■

Il reste désormais la mise en œuvre de la méthode. Cela est en cours actuellement.

## Conclusion

---

# Conclusion

---

Dans cette thèse, nous avons présenté quelques méthodes de résolution numérique des problèmes elliptiques dans des domaines non bornés.

Le caractère non borné du domaine nous a amené à considérer des espaces de Sobolev à poids afin de contrôler le comportement des solutions à l'infini.

Les principaux points abordés sont les suivants :

(a) Nous avons tout d'abord montré, grâce à la théorie des opérateurs auto-adjoints compacts, l'existence d'une famille de fonctions propres de l'opérateur de Laplace pondéré. Cette famille forme une base hilbertienne de l'espace de Sobolev à poids  $W_{-r}^0(\mathbb{R}^n)$ .

Ensuite, pour un cas particulier du poids, on a dérivé une expression explicite de ces fonctions propres et les valeurs propres correspondantes, donnant ainsi naissance à une nouvelle famille de fonctions, qu'on a utilisé pour approcher des problèmes elliptiques du second ordre dans l'espace  $\mathbb{R}^n$  tout entier.

(b) L'utilisation de la projection stéréographique nous a permis la représentation des intégrales définies sur  $\mathbb{R}^n$  comme intégrales sur la sphère unité, et faciliter ainsi le calcul.

(c) La méthode spectrale qui résulte de la découverte de ces fonctions s'est avéré très performante et très prometteuse. Cela est confirmé par une analyse numérique rigoureuse de la méthode, et par les codes de calcul qu'on a écrit.

(d) Dans la dernière partie du travail, nous avons tenté de résoudre l'équation de Helmholtz dans un domaine extérieur, en utilisant la méthode des éléments finis inversés. Cette méthode se distingue des autres méthodes déjà élaborées pour les domaines non bornés par :

- Le fait d'être applicable à toute sorte de géométries non bornées.
- L'absence de toute frontière artificielle.
- Les faibles tailles des systèmes linéaires qui en résultent.

L'implémentation de la méthode des éléments finis inversés pour le problème de Helmholtz et pour d'autres systèmes d'équations aux dérivées partielles dans les domaines non bornés est l'une des perspectives de ce travail.



## Annexe

# Chapitre A

---

## Annexe

---

### Formules utiles d'analyse vectoriel

Toutes les formules indiquées dans la suite sont formelles, c'est à dire sans préciser le cadre fonctionnel exact de leur validité. Elles sont néanmoins toutes vraies pour des fonctions assez régulières.

Soit  $u$  une fonction scalaire et  $\vec{v}$  une fonction vectorielle. Soit maintenant  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ .

#### Coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned}\nabla u &= \frac{\partial u}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{e}_z. \\ \operatorname{div} \vec{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \\ \operatorname{rot} \vec{v} &= \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z. \\ \nabla \vec{v} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}. \\ \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

$$\Delta \vec{v} = \Delta v_x \vec{e}_x + \Delta v_y \vec{e}_y + \Delta v_z \vec{e}_z.$$

## Coordonnées sphériques

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi.$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{v} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\varphi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\varphi) \right) \vec{e}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi. \end{aligned}$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

$$\Delta_g u = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

$$\Delta \vec{v} = \nabla \operatorname{div} \vec{v} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v}.$$

$$\nabla \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - v_\varphi \cos \theta \right) \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta \right) \end{pmatrix}.$$

## Identités vectorielles

$$\operatorname{div} \nabla u = \Delta u.$$

$$\operatorname{rot} \nabla u = \vec{0}.$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} = 0.$$

$$\nabla (u_1 u_2) = u_1 \nabla u_2 + u_2 \nabla u_1.$$

$$\operatorname{div} (u \vec{v}) = u \operatorname{div} \vec{v} + \nabla u \cdot \vec{v}.$$

$$\operatorname{rot} (u \vec{v}) = u \operatorname{rot} \vec{v} + \nabla u \wedge \vec{v}.$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} v(x) dx = \int_{\partial \Omega} v(x) \cdot n(x) dS_x,$$

où  $n(x)$  est le vecteur normal unité extérieur à  $\Omega$  en  $x \in \partial\Omega$ .

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u(x) n_i(x) dS_x, \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_1}{\partial x_i}(x) u_2(x) dx = \int_{\partial\Omega} u_1(x) u_2(x) n_i(x) dS_x - \int_{\Omega} u_1(x) \frac{\partial u_2}{\partial x_i}(x) dx.$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u_1(x) u_2(x) dx &= \int_{\partial\Omega} \frac{du_1}{dn}(x) u_2(x) dS_x - \int_{\Omega} \nabla u_1(x) \nabla u_2(x) dx. \\ \int_{\Omega} \Delta u_1(x) u_2(x) dx &= \int_{\Omega} u_1(x) \Delta u_2(x) dx + \int_{\partial\Omega} \left( \frac{du_1}{dn} u_2(x) - u_1(x) \frac{dv}{dn} \right) dS_x. \end{aligned}$$

## Bibliographie

---

# Bibliographie

---

- [1] R. A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975.
- [2] C. Amrouche, V. Girault, and J. Giroire. Weighted Sobolev spaces for Laplace's equation in  $\mathbf{R}^n$ . *J. Math. Pures Appl. (9)*, 73(6) :579–606, 1994.
- [3] C. Amrouche, V. Girault, and J. Giroire. Dirichlet and Neumann exterior problems for the  $n$ -dimensional Laplace operator : an approach in weighted Sobolev spaces. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 76(1) :55–81, 1997.
- [4] N. Arar and T. Z. Boulmezaoud. Eigenfunctions of a weighted laplace operator in the whole space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 400(1) :161–173, 2013.
- [5] R.J. Astley, G.J. Macaulay, and J.P. Coyette. Mapped wave envelope elements for acoustical radiation and scattering. *J. Sound Vib.*, 170(1) :97–118, 1994.
- [6] J.-P. Bérenger. A perfectly matched layer for absorption of electromagnetics waves. *J. Comput. Physics*, 114 :185–200, 1994.
- [7] J.-P. Bérenger. Perfectly matched layer for the fdtd solution of wave-structure interaction problems. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 44 :110–117, 1996.
- [8] J.-P. Berenger. Three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comput. Phys.*, 127(2) :363–379, 1996.
- [9] Ch. Bernardi and Y. Maday. *Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques*, volume 10 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Paris, 1992.
- [10] P. Bettess and O. C. Zienkiewicz. Diffraction and refraction of surface waves using finite and infinite elements. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 11(8) :1271–1290, 1977.
- [11] A. Blanchet, M. Bonforte, J. Dolbeault, G. Grillo, and J.-L. Vázquez. Hardy-Poincaré inequalities and applications to nonlinear diffusions. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 344(7) :431–436, 2007.

- 
- [12] T. Z. Boulmezaoud. Espaces de Sobolev avec poids pour l'équation de Laplace dans le demi-espace. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématiques*, 328(3) :221–226, 1999.
- [13] T. Z. Boulmezaoud. *Étude des champs de Beltrami dans des domaines de  $\mathbb{R}^3$  bornés et non-bornés et applications en astrophysique*. Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), 1999.
- [14] T. Z. Boulmezaoud. Vector potentials in the half-space of  $\mathbb{R}^3$ . *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématiques*, 332(8) :711–716, 2001.
- [15] T. Z. Boulmezaoud. On the Stokes system and on the biharmonic equation in the half-space : an approach via weighted Sobolev spaces. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 25(5) :373–398, 2002.
- [16] T. Z. Boulmezaoud. On the Laplace operator and on the vector potential problems in the half-space : an approach using weighted spaces. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 26(8) :633–669, 2003.
- [17] T. Z. Boulmezaoud. Inverted finite elements : a new method for solving elliptic problems in unbounded domains. *M2AN. Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 39(1) :109–145, 2005.
- [18] T. Z. Boulmezaoud and M. Medjden. Vorticity-vector potential formulations of the Stokes equations in the half-space. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 28(8) :903–915, 2005.
- [19] T. Z. Boulmezaoud and U. Razafison. On the steady Oseen problem in the whole space. *Hiroshima Mathematical Journal*, 35(3) :371–401, 2005.
- [20] T. Z. Boulmezaoud and J. M. Urquiza. On the eigenvalues of the spectral second order differentiation operator. application to the boundary observability of the wave equation. *Journal of Scientific Computing*, 31(3) :307–345, 2007.
- [21] T.Z. Boulmezaoud, N. Kerdid, N. Arar, and A. Kourta. Approximation by rational functions of multi-dimensional elliptic problems in the whole space. *soumis à "SIAM Journal on Numerical Analysis"*, 2013.
- [22] J. P. Boyd. Orthogonal rational functions on a semi-infinite interval. *J. Comput. Phys.*, 70(1) :63–88, 1987.
- [23] J. P. Boyd. Spectral methods using rational basis functions on an infinite interval. *J. Comput. Phys.*, 69(1) :112–142, 1987.
- [24] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.
- [25] K. J. Brown, D. Daners, and J. López-Gómez. Change of stability for Schrödinger semigroups. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 125(4) :827–846, 1995.

- 
- [26] D. S. Burnett. A three-dimensional acoustic infinite element based on a prolate spheroidal multipole expansion. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 96(5, part 1) :2798–2816, 1994.
- [27] A.-P. Calderón. Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions. In *Proc. Sympos. Pure Math., Vol. IV*, pages 33–49. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1961.
- [28] E. Cancès, C. Lebris, and Y. Maday. *Méthodes mathématiques en chimie quantique*. Springer, 2006.
- [29] M. Cantor. Spaces of functions with asymptotic conditions on  $R^n$ . *Indiana Univ. Math. J.*, 24 :897–902, 1974/75.
- [30] C. Canuto, S. I. Hariharan, and L. Lustman. Spectral methods for exterior elliptic problems. *Numer. Math.*, 46(4) :505–520, 1985.
- [31] Ph.-G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978.
- [32] D. L. Colton and R. Kress. *Integral equation methods in scattering theory*. Pure and Applied Mathematics. John Wiley & Sons Inc., New York, 1983.
- [33] K. R. Fyfe Cremers. On the use of variable order infinite wave envelope elements for acoustic radiation and scattering. *J. acoustic. Am.*, 97(4) :2028–2040, 1995.
- [34] K. R. Fyfe Cremers and J.P. Coyette. A variable order infinite acoustic wave envelope element. *J. Sound Vib.*, 171(4) :483–508, 1994.
- [35] I.R.E.M. de grenoble. Projection stéréographique. <http://www-irem.ujf-grenoble.fr/irem/nonEuclid/sphere/>, Mis en ligne le 11 Mai 2012.
- [36] L. Demkowicz and F. Ihlenburg. Analysis of a coupled finite-infinite element method for exterior Helmholtz problems. *Numer. Math.*, 88(1) :43–73, 2001.
- [37] L. Demkowicz, A. Karafiat, and J.T. Oden. Solution of elastic scattering problems in linear acoustics using hp boundary element method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 101 :251–282, 1992.
- [38] J. Deny and J. L. Lions. Les espaces du type de Beppo Levi. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 5 :305–370 (1955), 1953–54.
- [39] R. Farwig. A variational approach in weighted Sobolev spaces to the operator  $-\Delta + \partial/\partial x_1$  in exterior domains of  $\mathbf{R}^3$ . *Math. Z.*, 210(3) :449–464, 1992.
- [40] D. Fortunato. On the index of elliptic partial differential operators in  $\mathbf{R}^n$ . *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 119 :317–331, 1979.
- [41] K. Gerdes. The conjugated v.s. the unconjugated infinite element method for the helmholtz equation in exterior domains. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 152 :125–145, 1998.



- 
- [42] K. Gerdes. A summary of infinite element formulations for exterior Helmholtz problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 164(1-2) :95–105, 1998.
- [43] K. Gerdes and L. Demkowicz. Solution of 3D-Laplace and Helmholtz equations in exterior domains using *hp*-infinite elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 137(3-4) :239–273, 1996.
- [44] J. Giroire. *Etude de quelques problèmes aux limites extérieurs et résolution par équations intégrales*. Thèse de Doctorat d’Etat. Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1987.
- [45] J. Giroire and J.-C. Nédélec. Numerical solution of an exterior Neumann problem using a double layer potential. *Math. Comp.*, 32(144) :973–990, 1978.
- [46] B.-Y. Guo and J. Shen. On spectral approximations using modified Legendre rational functions : application to the Korteweg-de Vries equation on the half line. *Indiana Univ. Math. J.*, 50(Special Issue) :181–204, 2001. Dedicated to Professors Ciprian Foias and Roger Temam (Bloomington, IN, 2000).
- [47] B.-Y. Guo, J. Shen, and Z.-Q. Wang. A rational approximation and its applications to differential equations on the half line. *J. Sci. Comput.*, 15(2) :117–147, 2000.
- [48] B. Hanouzet. Espaces de Sobolev avec poids et interpolation. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 271 :A26–A29, 1970.
- [49] B. Hanouzet. Espaces de Sobolev avec poids application au problème de Dirichlet dans un demi espace. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 46 :227–272, 1971.
- [50] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [51] H. Hochstadt. *The functions of mathematical physics*. Dover Publications Inc., New York, second edition, 1986. With a foreword by Wilhelm Magnus.
- [52] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I-IV*. Classics in Mathematics. Springer, Berlin, 1994. Fourier integral operators.
- [53] F. Ihlenburg. *Finite element analysis of acoustic scattering*, volume 132 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [54] A. Kufner. *Weighted Sobolev spaces*. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons Inc., New York, 1985.
- [55] M. N. Le Roux. Méthode d’éléments finis pour la résolution numérique de problèmes extérieurs en dimension 2. *RAIRO Anal. Numér.*, 11(1) :27–60, 112, 1977.
- [56] R. Leis. *Initial Boundary Value Problems in Mathematical Physics*. Jhon Wiley and Sons, 1986.

- 
- [57] V. G. Maz'ya and B. A. Plamenevskii. Weighted spaces with inhomogeneous norms, and boundary value problems in domains with conical points. In *Elliptische Differentialgleichungen (Meeting, Rostock, 1977)*, pages 161–190. Wilhelm-Pieck-Univ. Rostock, 1978.
- [58] R. C. McOwen. The behavior of the Laplacian on weighted Sobolev spaces. *Comm. Pure Appl. Math.*, 32(6) :783–795, 1979.
- [59] R. C. McOwen. Boundary value problems for the Laplacian in an exterior domain. *Comm. Partial Differential Equations*, 6(7) :783–798, 1981.
- [60] P.M. Morse and J. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics.*, volume 1 and 2. McGraw-Hill, New York, 1953.
- [61] P.M. Morse and J. Feshbach. *Methods Physics.*, volume 1 and 2. McGraw-Hill, New York, 1953.
- [62] C. Müller. *Spherical harmonics*, volume 17 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [63] J.-C. Nédélec. Curved finite element methods for the solution of singular integral equations on surfaces in  $R^3$ . *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 8(1) :61–80, 1976.
- [64] J.-C. Nédélec. Mixed finite elements in  $\mathbf{R}^3$ . *Numer. Math.*, 35(3) :315–341, 1980.
- [65] J.-C. Nédélec. *Acoustic and electromagnetic equations : Integral representations for harmonic problems*, volume 144. Springer-verlag, New York, 2000.
- [66] J.-C. Nédélec and J. Planchard. Une méthode variationnelle d'éléments finis pour la résolution numérique d'un problème extérieur dans  $R^3$ . *Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér. Rouge*, 7(R-3) :105–129, 1973.
- [67] V. Rokhlin. Solution of acoustic scattering problems by means of second kind integral equations. *Wave Motion*, 5(3) :257–272, 1983.
- [68] R. T. Seeley. Spherical harmonics. *Amer. Math. Monthly*, 73(4, part II) :115–121, 1966.
- [69] J.J. Shirron. *Solution of exterior Helmholtz problems using finite and infinite elements*. PhD- Dissertation(supervisor :I. Babuvska), University of Maryland, 1995.
- [70] H. Triebel. A remark on : “Embeddings of Sobolev spaces with weights of power type” [Z. Anal. Anwendungen 4 (1985), no. 1, 25–34 ; M 86m :46032a] by D. E. Edmunds, A. Kufner and J. Rákosník. *Z. Anal. Anwendungen*, 4(1) :35–38, 1985.
- [71] K. Yosida. *Functional analysis*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the sixth (1980) edition.

## Résumés

---

# Résolution de problèmes elliptiques en domaines non bornés

---

## Résumé

L'étude de nombreux problèmes rencontrés en ingénierie tels que l'acoustique, l'électromagnétisme, la mécanique des fluides, et la chimie quantique mènent à des équations aux dérivées partielles en domaines non bornés. Par conséquent la conception de méthodes numériques convenables pour la résolution de tels systèmes est d'une grande importance. On propose, de résoudre ces équations dans des espaces de Sobolev à poids appropriés afin de prendre en compte le comportement des solutions à l'infini. On commence par, l'étude de l'opérateur de Laplace pondéré  $\varrho^{-1}\Delta$  pour lequel on décrit le spectre et on calcule les valeurs et fonctions propres dans le cas particulier où  $\varrho^{-1} = (|x|^2 + 1)^2$  qui seront des fractions rationnelles orthogonales, écrites au moyen des harmoniques sphériques. Ensuite ces fonctions propres sont utilisées pour la conception d'une approximation spectrale de problèmes elliptiques du second ordre dans tout l'espace  $\mathbb{R}^n$ , avec une application dans le cas unidimensionnel. Et on termine par l'étude de l'équation d'Helmholtz modifiée dans le domaine extérieur, suivi par une implémentation en utilisant la méthode des éléments finis inversés (BIFEM).

## Mots-clefs

Equations aux dérivées partielles, domaines non bornés, espaces de Sobolev à poids, opérateur de Laplace, équation d'Helmholtz, harmoniques sphériques, fractions rationnelles, projection stéréographique, méthode des éléments finis inversés.

---

# Solving elliptic problems in unbounded domains

---

## Abstract

The study of many engineering problems such as acoustics, electromagnetic, fluid mechanics, and quantum chemistry lead to partial differential equations in unbounded domains. Therefore, the design of numerical methods suitable for solving such systems is of great importance. We suggest, to solve these equations in appropriate weighted Sobolev space to take into account the behavior of solutions at infinity. First we deal with weighted Laplacian  $\varrho^{-1}\Delta$  in the whole space  $\mathbb{R}^n$  for which we describe the spectrum and calculate the eigenvalues and eigenfunctions in the special case where  $\varrho^{-1} = (|x|^2 + 1)^2$  which will be orthogonal rational functions, written by means of spherical harmonics. Then, these eigenfunctions are used for the design of a spectral approximation of elliptical problems of second order in the whole space  $\mathbb{R}^n$ , with an application in the one-dimensional case. In the end we study the equation of Helmholtz, modified in the external domain, followed by an implementation in using the (BIFEM).

## Keywords

Partial differential equations, unbounded domains, weighted Sobolev spaces, Laplace operator, Helmholtz equation, spherical harmonics, rational functions, stereographic projection, inverted finite elements method.

---

## حل مسائل قطع ناقص في ميادين غير محدودة

---

### تلخيص

تؤدي دراسة العديد من المسائل في مجال الهندسة مثل الصوتيات الكهرومغناطيسية، و ميكانيك السوائل و كيمياء الكم، الى معادلات تفاضلية جزئية في ميادين غير محدودة، و لذلك فان تصميم المناهج العددية كحل مناسب لمثل هذه المعادلات له أهمية كبيرة ، نقترح حل هذه المعادلات في فضاءات سوبولوف مناسبة من أجل أخذ سلوك الحل في ما لانهاية بعين الاعتبار.

نبدأ بدراسة مؤثر لابلاس المرجح  $\rho^{-1}\Delta$  الذي من أجله نصف الطيف و نقوم بحساب القيم و الأشعة الذاتية في الحالة الخاصة أين

$$\rho^{-1} = (|x|^2 + 1)^2$$

حيث نتحصل على أشعة ذاتية عبارة عن دالة ناطقة متعامدة نعبّر عنها بدلالة التوافقيات الكروية، ثم نستعمل هذه الدوال الذاتية من أجل انشاء تقريبات طيفية لدراسة مسائل قطع ناقص مع تقديم تطبيق في الحاتة ذات البعد الواحد و نختم بدراسة معادلة هلمهولتز المعدلة في الميدان الخارجي.

### الكلمات المفتاحية

المعادلات التفاضلية الجزئية، الميادين غير المحدودة، فضاءات سوبولوف المرجحة، مؤثر لابلاس، معادلة هلمهولتز، التوافقيات الكروية، الدوال الناطقة، الاسقاط المجسامي