REPUBLIQUE ALGERIENNE ĐEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE ĐE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

ET ĐE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DE CONSTANTINE 1

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Numéro D'ORĐRE: 43/df/2013

Numéro DE SÉRIE: 09/mat/2013

THÈSE

Présentée Pour L'obtention Du Diplôme De :

DOCTORAT EN SCIENCES

Thème

ETUDE DES SYSTEMES HYPERBOLIQUES A DONNEES MANQUANTES

Option

EQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Par :

AMEL BERHAIL

ĐEVANT LE JURY

Mr M. DENECHE	Prof à l'université de Constantine 1	Président
Mr A. AYAĐI	Prof à l'université Larbi Ben M'Hidi, Oum el Bouaghi	Rapporteur
Mr B. MAROUANI	Prof à l'université Ferhet Abbes, Sétif	Examinateur
Mr S. DJEZZAR	Prof à l'université de Constantine 1	Examinateur
Mr A. MARHOUNE	Prof à l'université de Constantine 1	Examinateur
Mr M. BOUZIT	M.C à l'université Larbi Ben M'Hidi, Oum el Bouaghi	Examinateur

Soutenue le 25/06 /2013

Table des matières

ABSTRACT

Identification problems are consisting to find the causes of a phenomenon from an observation, the resolution of this problem is doing by an experimental measurement. We suggest -in this these- to study a class of problems governed by hyperbolic equations with incomplete data. For this purpose we use the concept of sentinel introduced by J. L. Lions which is the best strategy to get answered about the causes from a weighted average of the observation. So we prove the existence of the sentinel function by solving a problem of null-controllability with constraints on the control. Then we are concerned with the identification of the terms of pollution present on the boundary of a system Petrowsky with a missing data.

Keywords: Hyperbolic system, Null-controllability, Petrowsky system, Pollution term, Sentinel method.

RESUME

Les problèmes d'identification consistent à retrouver les causes d'un phénomène à partir d'une observation de celui-ci, la résolution de ce type de problème se fait à l'aide d'une mesure expérimentale. Nous proposons - dans ce travail- d'étudier une classe de problème gouvernée par des équations hyperboliques avec des données incomplètes. Pour cet objectif nous utilisons la notion de sentinelles introduits par J. L. Lions qui soit la stratégie la plus répondus consiste à obtenir des informations sur les causes à partir d'une moyenne pondérée de l'observation. Alors nous prouvons l'existence de la fonction de sentinelle en résolvant un problème de la contrôlabilité à zéro avec des contraintes sur le contrôle. Puis nous sommes concernées par l'identification des termes de pollution présents sur le bord d'un système de Petrowsky à données manquantes.

Mots clés: Contrôlabilité à zéro, méthode des sentinelles, système hyperbolique, système de Petrowsky, terme de pollution.

الملخـــــــــــــص

تحديد الوسائل الرياضية يرتكز على إيجاد أسباب الظاهرة انطلاقا من مراقبة هذه الأخيرة وحل هذه المشكلة يعتمد على استخدام القياس التجريبي. نقدم – في هذا البحث – دراسة فئة من المعادلات التي تحكمها معادلات القطع الزائد مع معطيات غير مكتملة. لهذا الغرض نستخدم مفهوم الحارس الذي وضعه جاك لويس ليونس و الذي هو أفضل استراتيجية للحصول على معلومات حول أسباب الظاهرة انطلاقا من المتوسط المربع للملاحظة. و عليه نثبت وجود دالة الحارس من خلال حل مشكلة المراقبة الصفرية مع القيود المفروضة على العنصر المراقب. اخيرا نركز اهتمامنا حول تحديد و معرفة معامل التلوث الذي يظهر مع الشروط الحدية لنظام بيتروسكي ذو البيانات الناقصة.

Remerciements

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse le professeur AYADI Abdelhamid, pour leur investissement inestimable, pour les thématiques de recherche très intéressantes qu'il m'a proposées, pour ses conseils, sa disponibilité et son écoute. Il a su me faire profiter de sa grande culture mathématique et de son expérience.

Je tiens vivement à remercier Professeur M. DENCHE de m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

Mes sincères remerciements vont à Professeur A. L. MARHOUNE, professeur A. MAROUANI, Professeur S.DJEZZAR et Professeur M. BOUZIT qui ont accepté de participer à mon jury et d'voir examiné cette présente thèse.

Je voudrais aussi remercier le professeur A. HITTA qui m'a aidé de relire ma thèse et corriger des erreurs grammaticales ou mathématiques avec des grandes patiences.

Je tiens à remercier chaleureusement toutes les personnes qui m'apportent leur aide, leur soutien, et leurs encouragements.

Enfin, je souhaite remercier ma famille pour leur soutien et leur encouragement.

0.1 Introduction

Les questions relatives à l'écologie, à l'environnement et au climat sont aujourd'hui au centre des préoccupations de bon nombre des scientifiques, des citoyens, des parties politiques, des entreprises et des états. Le climat joue un rôle primordial à tous les niveaux, surtout sa profonde modification " réchauffement global". Il est bien connu que l'air et l'eau constituent de véritables sources de la vie de la flore, de la faune et de l'homme. Ainsi, dés lors que leurs natures sont corrompues par des attaques environnements, ils deviennent des dangers pour les êtres vivants. Il peut s'agir notamment de troubles végétatifs pour la flore et d'intoxication voire des cas de maladies pour l'homme. Les scientifiques s'activent à déterminer les meilleurs palliatifs pour la protection et l'assainissement des dites ressources naturelles. Ils ne sauraient, en conséquence, réussir leur pari sans une coopération interdisciplinaire. Des données observées par les naturalistes aux modèles d'équations conçus par les mathématiciens, en passant par l'expertise des ingénieurs informatiques, la simulation numérique joue un rôle très important dans la médiation entre les disciplines scientifiques.

La modélisation de ces problèmes conduit à des systèmes mathématiques à données incomplètes. Par données, nous entendons les conditions initiales, le second membre et éventuellement les conditions aux limites. Dans presque tous les problèmes de la météologie ou d'océanographie, on connait jamais les données initiales, on a une grande variété de possibilités quand au choix de l'instant initiale. Même chose pour les problèmes des pollutions dans un lac, une rivière, un estuaire,...

Les conditions aux limites peuvent aussi être inconnues ou seulement partiellement connues sur une partie de la frontière qui peut par exemple être inaccessible aux mesures qu'il s'agisse des situations biomédicales ou des situations correspondantes à des accidents. Il en va de même pour les termes sources qui peuvent être d'accès difficiles, même chose pour la structure du domaine qui peut aussi être imparfaitement connue, comme par exemple dans la gestion de puits de pétrole où une partie de la frontière du domaine est inconnue.

Naturellement ces problèmes sont classiques et l'idée la plus habituelle est celle de "moindres carrée", cette méthode revient à considérer les inconnues comme des variables de contrôles où on cherche à minimiser la fonction de coût qui est l'écart entre l'état mesuré sur une partie du domaine et l'état calculé par la résolution du système considéré. Cela conduit à des problèmes de contrôle optimal pour des systèmes distribués. Dans ce type de méthode les inconnues jouent le même rôle en cherchant à déterminer les uns et les autres, cependant, il y a la possibilité de ne pas pouvoir séparer ces rôles.

Sans négliger cette méthode fondamentale, qui demeure de loin la plus importante pour ce type de problèmes, il peut être utile de tenter celle dite " La méthode des sentinelles".

Une sentinelle est une forme linéaire agissant sur les observations qui doit vérifier des conditions de sensibilité à certains paramètres du système et d'insensibilité à d'autres. Donc l'idée des sentinelles semble un peu différente. On imagine alors qu'avec un ensemble convenable de sentinelle on pourra identifier les inconnues intéressantes et s'affranchir les autres. Supposons par exemple que l'équation du système décrive la cinétique d'un polluant dans une rivière ou un lac et que la source soit des pollueurs éventuels, ce qui est intéressant dans ce cas est évidement de connaitre ce que les pollueurs ont déversé dans la rivière et non l'état du lac à l'instant initial.

La méthode des sentinelles nous permettra donc de reconstituer un paramètre ou une approximation de ce dernier indépendamment des autres données qu'on ne veut pas identifier, les sentinelles sont donc "une méthode d'identification de paramètres". Les problèmes d'identification possèdent de nombreuses motivations liées à des problèmes physiques importants, le champs applicatif des méthodes d'identification des paramètres est donc extrêmement vaste et la littérature sur le sujet est abondante.

Les sentinelles ont été introduites par J. L .Lions dans des notes aux CRAS [43]. Il a par la suite, publié un livre sur ce sujet [40]. De nombreux types de systèmes sont abordés et l'auteur étudie l'existence des sentinelles insensibles aux perturbations sans contraintes de sensibilité aux données intéressantes. L'étude de leur existence conduit à la résolution du problème de contrôlabilité de systèmes distribués.

De nombreux résultats théoriques et numériques existent ainsi que des nombreuses applications à des problèmes physiques réels motivées par les chercheurs et les industrielles, on peut citer à titre d'exemple les travaux de G. Chavent [25]. Il est également l'auteur d'un travail sur les sentinelles traitant notamment la relation entre sentinelle et moindre carrés. Aussi les travaux de O. Nakoulima [60, 61, 62]. On peut se référer également aux travaux de l'équipe de J. P. Kernevez [4, 5, 6, 7, 15, 16, 17, 31] pour le traitement numérique de problèmes d'identification de pollutions dans les systèmes distribués, la détection de pollution dans un aquifère [15], la détermination des paramètres manquantes dans un lac et la recherche de pollution dans une rivière [5]. Depuis lors, plusieurs auteurs se sont intéressés à l'aspect numérique de cette méthode. On peut se référer aux travaux de A. Traore [70, 71, 72], dans lequel il présente des sentinelles adaptées à la détermination de pollution en environnement avec un étude numérique sur la diffusion des polluants dans un milieu fluide. La thèse de B. E. Ainseba [4] comporte un chapitre sur l'identification de sources de pollution dans une rivière à partir d'une observation. Les sources sont décomposées sous la forme d'une amplitude inconnue multipliée par une fonction connue de $L^2(0, T)$.

Une sentinelle devra encore être insensible aux perturbations, mais aussi insensible à tous les paramètres devant être identifier sauf un. Pour ce dernier on impose au contraire une contrainte de sensibilité, on est alors conduit à résoudre des problèmes de contrôlabilité.

L'objectif de notre travail est l'étude des systèmes Hyperboliques à données incomplètes où on cherche à identifier le terme de pollution. Alors, ce travail est organisé de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, nous donnons quelques définitions et propriétés du système contrôlable qui soit la base de la théorie des sentinelles. Pour cela on expose les notions de contrôlabilité exacte, faible et régionale avec quelques théorèmes nécessaires. Le chapitre 2, introduit la problématique des systèmes distribués à données manquantes et la mise sous forme de problème de contrôlabilité à zéro. Nous rappelons le principe de la méthode des sentinelles par un exemple sur la détection de pollution dans un milieu fluide puis on étudie l'existence et la construction de la sentinelle et on parle des différents type de la sentinelle: régionale, discrète et faible. Le troisième chapitre est basé sur les systèmes Hyperbolique à données incomplètes où on cherche à estimer le terme de pollution qui exerce sur un partie du bord, et on applique la méthode de sentinelle sur une équation d'onde a données manquantes définie sur un domaine monodimensionel. Enfin, un cas particulier du système à données incomplètes a été étudié dans le dernier chapitre, qui est le système de Petrowsky où les conditions sont partiellement connues.

" *Ce que j'aime dans les mathématiques appliqués, c'est qu'elle ont pour ambition de donner du monde des systèmes une représentation qui permette de comprendre et d'agir, et de toute la représentation mathématique, lorsqu'elle est possible est la plus souple et la meilleure du coup ce qui m'interesse, c'est de savoir jusqu'au on peut aller, c'est d'atteindre les limites*"

Jacques- Louis Lions.

" *Un mathématicien est une personne qui peut trouver des analogies entre les théorèmes, un meilleur mathématicien est celui qui peut voir des analogies entre les démonstrations. Les trés bons mathématiciens sont ceux qui peuvent déceler des analogies entre les théories. Mais on peut supposer que le meilleur des mathématiciens, est celui qui peut voir des analogies entre les analogies.*

Stefan Banach

" Dans les mathématiques vous ne comprenez pas des choses. Vous habituez juste à elles"

John Von Neumann

" Celui qui ne marche que par beau temps risque bien de ne jamais arriver au terme de son voyage"

" *Ce qui important ce sont les notions pas les notations"*

Gaus

" *Notre tête est ronde pour permettre à la pensée de changer de direction"*

Francis Picabia

Chapitre 1

CONTRÔLABILITE DES SYSTEMES DISTRIBUES

Le problème de la contrôlabilité consiste en la possibilité de transférer l'état d'un système en un temps fini, d'un état initial vers un état désiré choisi à priori. Nous nous intéressons dans ce chapitre à introduire les idées principales du problème de la contrôlabilité et de la méthode générale de la résolution.

1.1 Description du système

Soit Ω un domaine de R^n de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière. Pour $T > 0$ fixé, on défini $Q = \Omega \times [0, T]$, $\sum = \partial\Omega \times]0, T[$. On considère le système décrit par l' équation d'état :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t}(x,t) = Ay(x,t) + Bu(t) & Q, \\ y(\zeta, t) = 0 & \sum, \\ y(x,0) = y_0(x) & \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

où B est un opérateur de $\mathcal{L}(R^n,\ X = H^1(\Omega))$ et la fonction u dite "*contrôle*" appartient à l'espace $U = L^2(0, T, R^n)$. On suppose que l'opérateur A génère un semi groupe $S(t)$ fortement continu, et admet un système orthonormé des fonctions propres (ω_{ij}) associées aux valeurs propres (λ_{ij}). Alors la solution de ce système est donnée par

$$y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds.$$

On suppose ensuite que le système (1.1) est augmenté de la sortie :

$$z(t) = Cy(t), \tag{1.2}$$

où C est un opérateur de $\mathcal{L}(H^1(\Omega), O)$ tel que O est l'espace d'observation.

1.2 Contrôlabilité exacte et faible

Dans le but d'explicité la dépendance de la solution $y = y(x,t)$ du problème par rapport au contrôle u, on note $y_u(t) = y(x,t,u)$.
La formulation du problème de la contrôlabilité du système (1.1) est la suivante :
Etant donné un temps $T > 0$ et une condition initiale y_0 convenable, existe-il un contrôle u tel que la solution $y = y_u(t)$ vérifié la condition

$$y_u(T) = y^d \textit{ dans } \Omega,$$

où y^d est un état désiré choisi à priori.
Autrement dit : Etudier l'existence d'un contrôle u qui ramène le système à l'état y^d au temps $T > 0$.
Introduisons, maintenant, quelques notions de contrôlabilité exacte et faible.

Définition 1.1 *Le système (1.1) est dit exactement contrôlable dans $H^1(\Omega)$ sur $[0,T]$ si*

$$\forall y^d \in H^1(\Omega), \exists\, u \in U \textit{ tel que : } \; y_u(T) = y^d. \tag{1.3}$$

De la définition résulte la caractérisation suivante :

Proposition 1.1 *Le système (1.1) est dit exactement contrôlable sur $[0,T]$ ssi*

$$\exists c > 0, \;\; \|y^*\|_{X^*} \leq c\,\|B^*S^*(.)y^*\|_{L^2(0,T,U^*)} \qquad \forall y^* \in X^*. \tag{1.4}$$

L'adjoint A^* de A engendre le semi groupe $(S^*(t))_{t\geq 0}$ adjoint de $(S(t))$ qui est également fortement continu sur le dual X^* de X, l'opérateur B^* est l'adjoint de B.

La notion d'exacte contrôlabilité n'est pas adaptée et reste très peu réalisable même pour une source exercée sur tout le domaine Ω, c'est pourquoi nous sommes conduit à définir la notion de faible contrôlabilité.

Définition 1.2 *Le système (1.1) est dit faiblement contrôlable dans $H^1(\Omega)$ sur $[0,T]$ si :*

$$\forall\ y^d \in H^1(\Omega),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\ u \in U \text{ tel que} : \left\|\ y_u(T) - y^d \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \varepsilon. \tag{1.5}$$

Remarque 1.1 *Dans les applications, rares les systèmes dynamiques qui sont contrôlables sur tout le domaine, d'où la nécessité d'étudier ce concept uniquement sur une partie du domaine. Pour cela, on définit la notion de la contrôlabilité régionale.*

1.3 Contrôlabilité régionale

Pour la contrôlabilité régionale, on veut que l'état du système à l'instant T vérifie une propriété désirée sur une partie du domaine.
Soit $y^d \in H^1(\omega)$ un état désiré donné où ω est une partie de Ω. On définit l'opérateur : $\chi_\omega : H^1(\Omega) \longrightarrow H^1(\omega)$, et son adjoint donné par

$$(\chi_\omega^* y) = \begin{cases} y(x) & x \in \omega, \\ 0 & x \in \Omega/\omega, \end{cases}$$

La contrôlabilité régionale est définie comme suit :

Définition 1.3 *Le système (1.1) est dit exactement régionalement contrôlable sur ω si*

$$\forall\ y^d \in H^1(\omega),\ \exists\ u \in U \text{ tel que} : \chi_\omega y_u(T) = y^d. \tag{1.6}$$

Définition 1.4 *Le système (1.1) est dit faiblement régionalement contrôlable sur ω si*

$$\forall\ y^d \in H^1(\omega),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\ u \in U \text{ tel que} : \left\|\chi_\omega y_u(T) - y^d\right\|_{H^1(\omega)} \leq \varepsilon. \tag{1.7}$$

Remarque 1.2 *1- Les définitions ci-dessus signifient que l'on ne s'intéresse qu'à l'état atteint sur la région ω.*

2- Le système sera dit aussi $\omega-$exactement (resp. $\omega-$faiblement) contrôlable.

On considère $H_t : L^2(0,T,R^n) \longrightarrow H^1(\omega)$, l'opérateur définit par :

$$H_t(u) = \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds, \tag{1.8}$$

H désigne l'opérateur H_T. La contrôlabilité régionale peut être caractérisée par :

Proposition 1.2 *:*

1- Le système (1.1) est $\omega-$exactement régionalement contrôlable si et seulement

$$\operatorname{Im} \chi_\omega H = H^1(\omega).$$

2- Le système (1.1) est $\omega-$faiblement régionalement contrôlable si et seulement

$$\overline{\operatorname{Im} \chi_\omega H} = H^1(\omega) \Longleftrightarrow \ker H^* \chi_\omega^* = \{0\}.$$

Remarque 1.3 *:*

- *Un système qui est exactement (resp.faiblement) contrôlable est exactement (resp. faiblement) régionalement contrôlable.*
- *Un système qui est exactement (resp.faiblement) régionalement contrôlable sur ω_1 est exactement (resp. faiblement) régionalement contrôlable sur ω_2 pour tout $\omega_2 \subset \omega_1$.*

1.4 Observabilité

La détermination de l'état d'un système à paramètres répartis à partir des mesures est d'une grande importance quand on cherche à appliquer une commande en boucle fermé sur un tel système. Les mesures obtenues s'expriment par la fonction de la sortie

$$z(t) = CS(t)y_0 + CH_t u.$$

Cette sortie est la somme d'un régime libre avec y_0 à déterminer et du régime contrôlé avec état initial nul. Le système étant linéaire, on peut alors étudier l'observation de y_0 en supposant $u = 0$. Il s'agit donc de déterminer y_0, solution de l'équation

$$z(t) = CS(t)y_0 = Ky_0 \qquad t \in [0,T], \tag{1.9}$$

K est un opérateur linéaire borné, l'opérateur adjoint est donné par

$$K^*z = \int_0^T S^*(t)C^*z(t)dt.$$

Définition 1.5 *Le système (1.1) augmenté de la sortie (1.2) est dit exactement observable sur* $[0,T]$ *si* $X^* \subset \operatorname{Im} K^*$.

Définition 1.6 *Le système (1.1) augmenté de la sortie (1.2) est dit faiblement observable sur* $[0,T]$ *si* $\ker K = \{0\}$.

Définition 1.7 *Le système (1.1) augmenté de la sortie (1.2) est dit* $\omega-$*faiblement observable sur* $[0,T]$ *si* $\ker K\chi_\omega^* = \{0\}$.

1.5 Contrôle optimal

Dans cette partie, nous allons déterminer le contrôle optimal permettant d'atteindre une cible donnée. Dans le cas où le système (1.1) est contrôlable, il y aura généralement une infinité des contrôles qui répondent à la question.

• Parmi ces contrôles existe-il un, qui soit de norme minimale?

• Peut-on déterminer explicitement ce contrôle en fonction des divers paramètres du problème ?

L'optimisation sert à trouver le contrôle qui donne la contrôlabilité avec un coût minimale donné par une fonction

$$J(u) = \int_0^T \|u(t)\|^2 \, \mathbf{dt}$$

défini sur l'espace des contrôles U.

Soit $y^d \in H^1(\Omega)$ un état désiré. On pose le problème de transférer, à moindre coût, le système (1.1) de y_0 vers y^d à l'instant T. Ainsi la question devient :

Existe-il un contrôle à énergie minimale $u \in U$ tel que $y(T) = y^d$?

Le problème du contrôle optimal peut être formulé ainsi :

$$\begin{cases} \min\limits_{u\in\mathbf{U}_{ad}} \mathbf{J}(\mathbf{u}) = \min\limits_{u\in\mathbf{U}_{ad}} \int_0^T \|u(t)\|^2 \, \mathbf{dt}, \\ \mathbf{U}_{ad} = \left\{u \in U \;/ y(T) = y^d\right\}. \end{cases} \tag{1.10}$$

Les objectifs de cette théorie sont les suivants :

1) Etudier l'existence de $u \in \mathbf{U}_{ad}$ qui réalise le minimum dans (1.10), on dit alors que u est le contrôle optimal.

2) Donner les conditions nécessaires et suffisantes pour que u soit contrôle optimal.

3) Obtenir les propriétés du contrôle (s) optimal (aux) à partir de (2).

Posons

$$G = \{g \in H^1(\Omega),\ \textit{tel que}\ g = 0 \text{ sur } \omega\}.$$

$$\overline{G} = \{g \in H^1(\Omega), \textit{tel que}\ g = 0\ \textit{sur}\ \Omega/\omega\}. \tag{1.11}$$

On considère le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t}(x,t) = Ay(x,t) + Bu(t) & Q, \\ y(\zeta,t) = 0 & \sum, \\ y(x,0) = y_0(x) & \Omega. \end{cases} \tag{1.12}$$

La méthode de la construction est basée sur les trois étapes suivantes :

Etape 1 :

Pour $\varphi_0 \in \overline{G}$, on considère le système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t) = -A^*\varphi(x,t) & Q, \\ \varphi(\zeta,t) = 0 & \sum, \\ \varphi(x,T) = \varphi_0(x) & \Omega, \end{cases} \tag{1.13}$$

qui admet une solution unique $\varphi \in L^2(0,T,H^1(\Omega)) \cap C^0(0,T,L^2(\Omega))$.

Etape 2 :

Considèrons le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial t}(x,t) = A\psi(x,t) + BB^*\varphi(x,t) & Q, \\ \psi(\zeta,t) = 0 & \sum, \\ \psi(x,0) = y_0(x) & \Omega. \end{cases} \tag{1.14}$$

Pour $\varphi_0 \in \overline{G}$, l'équation (1.13) fournit φ puis l'équation (1.14) donne $\psi(T)$.

Ensuite, on définit l'opérateur M par

$$M\varphi_0 = P(\psi(T)) \quad \text{où} \quad P = \chi_\omega^* \, \chi_\omega,$$

M est un opérateur affine qui se décompose comme

$$M\varphi_0 = P(\psi_1(T) + \psi_2(T)),$$

où ψ_1 et ψ_2 sont solutions des systèmes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial t}(x,t) = A\, \psi_1(x,t) & Q, \\ \psi_1(\zeta, t) = 0 & \sum, \\ \psi_1(x,0) = y_0(x) & \Omega, \end{cases} \tag{1.15}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_2}{\partial t}(x,t) = A\psi_2(x,t) + BB^*\varphi(x,t) & Q, \\ \psi_2(\zeta, t) = 0 & \sum, \\ \psi_2(x,0) = 0 & \Omega. \end{cases} \tag{1.16}$$

Etape 3 :

On définit l'opérateur linéaire, borné et symétrique $\Lambda : \overline{G} \longrightarrow \overline{G}^*$ par

$$\forall \ \varphi_0 \in \overline{G}, \ \Lambda\varphi_0 = P\psi_2(T).$$

Avec ces notations, le problème de la contrôlabilité régionale conduit à la résolution de l'équation :

$$\Lambda\varphi_0 = P(y^d - \psi_1(T)). \tag{1.17}$$

En multipliant l'équation (1.17) par φ_0, on obtient

$$\langle \Lambda\varphi_0, \varphi_0 \rangle = \int_0^T \|B^*\varphi(t)\|^2 \, dt. \tag{1.18}$$

Pour assurer l'existence de la solution du l'équation (1.17), on introduit l'application

$$\varphi_0 \in \overline{G} \longrightarrow \int\limits_0^T \|B^*\varphi(t)\|^2 \, dt,$$

qui définit une semi norme sur $\overline{G}$. Nous avons alors le résultat :

Proposition 1.3 *Si le système (1.12) est ω-faiblement contrôlable, l'équation* (1.17) *admet une solution unique $\varphi_0 \in \overline{G}$, le contrôle qui transfert (1.12) dans G à l'instant T est donné par*

$$u^*(t) = B^*\varphi(x,t). \tag{1.19}$$

Preuve.

1) Si le système (1.12) est ω-faiblement contrôlable, alors l'application

$$\varphi_0 \to \|\varphi_0\|^2 = \int\limits_0^T \|B^*\varphi(t)\|^2 \, dt$$

définit une norme sur $\overline{G}$. En effet

$$\|\varphi_0\|_{\overline{G}}^2 = 0 \Rightarrow B^*S^*(T-t)\varphi_0 = 0 \quad \forall\, t \in [0,T]\,.$$

Le système (1.12) est ω-faiblement contrôlable, donc

$$\ker H^*\chi_\omega^* = \{0\}\,.$$

Par conséquent

$$B^*S^*(T-t)\varphi_0 = 0 \implies \varphi_0 = 0$$

il resulte qu'on a une norme sur $\overline{G}$.
L'opérateur Λ est un isomorphisme de $\overline{G}$ dans $\overline{G}^*$avec

$$\langle \Lambda\varphi_0, \varphi_0 \rangle = \int_0^T \|B^*\varphi(x,t)\|^2 \; dt = \|\varphi_0\|_{\overline{G}}^2\,,$$

d'où l'existence de la solution de l'équation (1.17).

2) Montrons que le contrôle u^* donné par (1.17) minimise la fonction coût

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T \|u(t)\|^2 \, dt.$$

Comme la fonction J est quadratique donc elle est strictement convexe, il suffit de vérifie que

$$J^{'}(u^*)(v-u) \geq 0.$$

On a

$$J^{'}(u^*)(v-u^*) = \int_0^T u^*(v-u^*)\, dt = \int_0^T \left(B^*\varphi(x,t)\right)(v-u^*)\, dt \quad \forall v \in U,$$

avec

$$\begin{aligned} \langle B^*\varphi(x,t), v-u^*\rangle &= \langle \varphi(T), y_v(T) - y_{u^*}(T)\rangle - \langle \varphi(0), y_v(0) - y_{u^*}(0)\rangle \\ &\quad - \int_\Sigma \left((y_v - y_{u^*})\frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{A^*}} - \varphi\left(\frac{\partial y_v}{\partial \nu_A} - \frac{\partial y_{u^*}}{\partial \nu_A}\right)\right) d\Sigma \\ &= \langle \varphi_0, y_v(T) - y_{u^*}(T)\rangle = J^{'}(u^*)(v-u^*), \end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned} \chi_\omega y_v(T) - \chi_\omega y_{u^*}(T) &= \chi_\omega y_v(T) - y_d + y_d - \chi_\omega y_{u^*}(T) = 0 \\ &\Rightarrow \langle \varphi_0, y_v(T) - y_{u^*}(T)\rangle = 0, \end{aligned}$$

par conséquent

$$J^{'}(u^*)(v-u^*) = 0,$$

ce qui établit l'optimalité du contrôle u^*. ■

1.6 Contrôlabilité régionale et pénalisation

On suppose que l'ensemble U_{ad} non vide donc le système (1.12) est exactement régionalement contrôlable sur U_{ad} . On veut résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \min\limits_{u \in \mathbf{U}_{ad}} \mathbf{J}(\mathbf{u}) = \min\limits_{u \in \mathbf{U}_{ad}} \int_0^T \|u(t)\|^2 \, \mathbf{dt} \\ \mathbf{U}_{ad} = \left\{ u \in U, \quad y(T) - y^d \in G \right\}. \end{cases} \tag{1.20}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, considérons le problème de Pénalisation

$$\begin{cases} \min\limits_{(u,y) \in C} \mathbf{J}_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{y}), \\ \mathbf{J}_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \left(\int_0^T \|u(t)\|^2 \, \mathbf{dt} + \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^T \|y'(t) - Ay(t) - Bu(t)\|^2 \, \mathbf{dt} \right), \end{cases} \tag{1.21}$$

où C est l'ensemble des couples (u, y) vérifiant

$$\begin{cases} y'(t) - Ay(t) - Bu(t) \in L^2(0, T, X), \\ y(0) = y_0 \qquad u \in U, \\ y(T) - y^d \in G. \end{cases} \tag{1.22}$$

Alors, nous avons le résultat suivant :

Proposition 1.4 *Pour tout $\varepsilon > 0$, le problème (1.21) admet une solution unique qu'on note $(u_\varepsilon, y_\varepsilon)$. La suite $((u_\varepsilon, y_\varepsilon))_\varepsilon$ converge faiblement vers (u^*, y^*) quand ε tend vers zéro. De plus u^* est la solution du problème (1.20) donnée par*

$$u^*(t) = B^* p(t),$$

où $p(t)$ et $y^*(t)$ sont solutions du système d'optimalité

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t) & sur\ [0, T], \\ y(0) = y_0 & \\ p'(t) + A^* p(t) = 0 & sur\ [0, T]. \\ p(T) \in G^*. & \end{cases} \tag{1.23}$$

Pour la démonstration voir [75] .

1.7 Théorèmes de prolongement unique

La méthode de H.U.M ou Hilbert Uniqueness Method, a été introduite par J. L. lions [38], pour l'étude de la contrôlabilité de l'équation des ondes. Elle a ensuite été appliquée à un large éventuel problèmes où on construit l'espace des états atteignable, cette construction est basée sur un théorème de prolongement (ou continuation) unique : Holmgren pour les ondes, Mizohata ou Saut-Scheurer pour la chaleur. Ces théorèmes sont à la base de la plupart des méthodes de résolution de problèmes de contrôle et d'identification.
Nous allons d'abord présenter le théorème d'unicité de Cauchy pour l'équation de la chaleur linéaire.

Considérons la solution de l'équation parabolique

$$\frac{\partial y}{\partial t} + Ay = 0 \qquad \text{dans } Q, \tag{1.24}$$

où A est un opérateur elliptique d'ordre 2 sur lesquels les conditions seront précisées pour chaque théorème. Dans tous les cas, l'ouvert Ω doit être connexe et $Q = \Omega \times]0, T[$.

Théorème 1.1 *(Unicité de Cauchy)*

Soit $\Gamma_0 \subset \Gamma$ une partie non vide du bord, on note $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0, T[$, soit $y(x,t)$ vérifiant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay = 0 & \textit{dans } Q, \\ y = 0 & \textit{sur } \Sigma_0, \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu} = 0 & \textit{sur } \Sigma_0, \end{cases} \tag{1.25}$$

alors y est identiquement nulle dans Q.[Voir 67]

Les deux théorèmes qui suivent intervient la notion de la composante horizontale dans un ouvert d'espace-temps.

Définition 1.8 *(Composante horizontale)*

Soit O un ouvert inclus dans Q, on dit qu'un point $p \in Q$ appartient à la composante horizontale de O s'il existe une courbe horizontale joignant p à O c'est-à-dire à une ligne dont les points ont tous la même coordonnée en temps.

Nous pouvons à présent énoncer le théorème de S. Mizohata suivant

Théorème 1.2 *(S. Mizohata)*

Soient Ω un ouvert connexe de R^p et A un opérateur elliptique du second ordre dont les coefficients appartiennent à $C^\infty(Q)$. Soit y la solution de (1.25) *pour l'opérateur A et O un ouvert inclus dans Q. Toute solution de (1.25) qui s'annule dans O s'annule dans la composante horizontale de O.*

La preuve de S. Mizohata [voir 58] ne conduit pas de façon évidente à un affaiblissement de la régularité des coefficients de l'opérateur. Or il est important de point de vue pratique de travailler avec des coefficients irréguliers. Les auteurs donnent l'exemple où l'équation parabolique est obtenue par linéarisation d'un opérateur non-linéaire autour d'une solution qui n'est pas nécessairement régulière. Le résultat principal est le suivant :

Théorème 1.3 *(J. C. Saut et B. Scheurer)*

Soient Ω un ouvert connexe de R^p, A un opérateur elliptique du second ordre défini par

$$Au = \sum_{i,j=1}^{p} a_{ij}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}.\frac{\partial}{\partial x_j}u + \sum_{i=1}^{p} b_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}u + c(x,t)u,$$

où les coefficients de A vérifient

$$\begin{array}{rcll} a_{ij} & \in & C^1(Q) & 1 \leq i,j \leq p, \\ b_i & \in & L^\infty_{loc}(Q) & 1 \leq i \leq p, \\ c & \in & L^\infty(0,T;L^1_{loc}(\Omega)). & \end{array}$$

Supposons que la solution de (1.25) *vérifie $y \in L^2(0,T;H^2_{loc}(\Omega))$ et qu'elle s'annule dans un ouvert $O \subset Q$. Alors y s'annule dans la composante horizontale de O.[voir 68]*

1.8 Théorème de Holmgren et ses conséquences

Soit l'équation hyperbolique suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \Delta y = f & \text{dans } \; Q = \Omega \times \left]0, T\right[\,, \\ y(0) = y_0 & \text{dans } \; \Sigma = \Gamma \times \left]0, T\right[\;, \\ y'(0) = y_1 & \text{dans } \; \Sigma = \Gamma \times \left]0, T\right[\;, \\ y = 0 & \text{sur } \; \Sigma. \end{cases} \tag{1.26}$$

On a le résultat suivant :

Lemme 1.5 *Soit Ω un domaine borné de R^n à frontière lipchitzienne. Pour tout*

$$f \in L^1(0, T, L^2(\Omega)),\; y_0 \in H_0^1(\Omega) \;\text{ et }\; y_1 \in L^2(\Omega),$$

le système (1.26) admet une solution unique

$$y \in C(0, T, H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0, T, L^2(\Omega)).$$

De plus, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|y\|_{L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))} + \|y'\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \leq c \left(|\nabla y_0| + |y_1| + \|f\|_{L^1(0,T,L^2(\Omega))} \right).$$

Théorème 1.4 *(L. Hormander* [37]*)*

Soient O_1, O_2 deux ouverts convexes de R^n tels que $O_1 \subset O_2$ et $P(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants tel que tout plan π caractéristique par rapport à $P(D)$ et vérifiant $\pi \cap O_2 \neq \phi$ satisfait aussi $\pi \cap O_1 \neq \phi$. Alors toute solution $u \in \mathcal{D}'(O_2)$ de l'équation $P(D)u = 0$ telle que

$$u = 0 \text{ dans } O_1 \text{ vérifie } u = 0 \text{ dans } O_2. \tag{1.27}$$

On se donne z_1, $z_2 \in R^n$ quelconque et des constantes $\delta, \tau > 0$ telle que $\tau > 2\,|z_1 - z_2|$, on construit les convexes :

$$O_1 = B(z_1, \delta) \times \left]0, \tau\right[\,,$$

$$O_2 = \underset{\lambda \in [0,1]}{\cup} \left(B((1-\lambda)z_1 + \lambda z_2, \delta) \times \left]\lambda\,|z_1 - z_2|\,, \tau - \lambda\,|z_1 - z_2|\right[\right)$$

On a d'après le théorème précédente le critère d'unicité suivant :

Lemme 1.6 *Soit $y \in \mathcal{D}'(O_2)$ une solution de*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \Delta y = 0 & \textit{dans} \;\; \mathcal{D}'(O_2) \\ \quad y = 0 & \textit{dans} \quad O_1. \end{cases}$$

Alors on a $y = 0$ dans O_2.[voir 38]

On considère un ouvert borné convexe $\Omega \subset R^n$ de frontière Γ. Soit un point $z \in \Gamma$ et $\eta > 0$, on définit $\Gamma_0 = \Gamma \cap B(z, \eta)$ et on introduit :

$$d(\Omega, \Gamma_0) = \sup_{x \in \overline{\Omega}} d(x, \Gamma_0) = \sup_{x \in \overline{\Omega}} \left(\inf_{y \in \Gamma_0} |x - y| \right),$$

c-à-d la plus grande distance entre un point $x \in \Omega$ et la partie de frontière Γ_0, on a le théorème d'unicité suivant :

Théorème 1.5 *Soit $T > 2\ d(\Omega, \Gamma_0)$, y est la solution faible du problème*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \Delta y = 0 & \textit{dans} \;\; Q = \Omega \times]0, T[\,, \\ \quad y = 0 & \textit{dans} \;\; \Sigma = \Gamma \times]0, T[\;\;, \end{cases}$$

telle que

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} = 0 \quad \textit{dans} \;\; \Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0, T[\;\; .$$

Alors

$$y \equiv 0.$$

Pour la démonstartion voir [38].

Remarque 1.4 *On a $d(\Omega, \Gamma_0) <$ diamètre de Ω, $\forall\ \Gamma_0 \subset \Gamma$, et donc on particulier; un résultat d'unicité pour $\Gamma_0 \subset \Gamma$ quelconque avec $T \geq 2$.diamètre de Ω.*

Chapitre 2

SYSTEMES DISTRIBUES A DONNEES MANQUANTES

Les systèmes distribués considérés dans ce chapitre sont des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles d'évolution définie dans un domaine Ω *de* R^n $(n = 1, 2, 3$ *dans les applications) et pour le temps* t *dans un intervalle* $(0, T)$, *on doit ajouter des conditions initiales et des conditions aux limites. On s'intéresse à des phénomènes qui sont régis par des équations d'évolution à données manquantes. Le modèle dont on dispose est incomplet, dans le sens où l'on connait mal les données initiales où certaines données frontières.*

2.1 Problème de détection de pollution

Nous nous intéressons dans cette section à la détection de pollution en milieu fluide (Lac, Rivière). Nous supposerons que la pollution est due à la présence de composés chimiques (Nitrate, Plomb,...) provenant des décharges externes ou sédimentaires. Les sources de pollution diffusent au cours du temps des déjections toxiques dans l'eau et le domaine d'étude comportent des obstacles (ilots de terre, arbres,...).

La modélisation mathématique de transport d'une substance chimique de concentration $y(x, t)$ dissoute dans un fluide conduit à une équation de type convection-diffusion-réaction [72]. En tenant compte des principales propriétés physico-chimiques liées aux fluides, la modélisation du transport d'un composé chimique conduit à la considération des termes suivants

• Un terme de diffusion

$$k\,\mathrm{div}(a(x)\nabla y(x,t)),$$

où k est la constante de diffusion. C'est une propriété fondamentale des fluides qui consiste à disperser les molécules de manière aléatoire dans tout le domaine. C'est cette capacité qui permet à l'eau d'uniformiser une coloration dans une bassine et à l'air de maintenir une odeur dans une salle close. Le terme $a(x)$ désigne la transmissivité dans le milieu (dans un milieu homogène (l'eau, l'air,..) $a(x)$ est une constante). Dans le cas d'un Lac, la diffusion est donnée par :

$$k.\triangle y(x,t)$$

et dans celle d'une rivière elle est équivalent à

$$D_1\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)+D_2\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}(x,t),\quad k,\ D_1,D_2 \text{ sont des constantes.}$$

• Un terme de transport ou convection $u.\nabla y(x,t)$
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{\nabla}y(x,t)$, où $\overrightarrow{u}$ désigne le champ de vitesse du fluide.

• Un terme de réaction R qui traduit les interactions chimiques et biochimiques dans le liquide.

• La source de pollution est décrite par une fonction $f(x,t)$, elle donne naissance aux substances polluantes déversées dans le fluide. A ce niveau, deux considérations sur les sources de pollution méritent d'être faites pour une meilleure prise en compte des espèces polluants : il s'agit des termes sources distribués que nous noterons par $\xi(x,t)$ et les termes sources ponctuels au point i de cordonnée x_i que nous désignerons par $\lambda_i\widehat{\xi}_i(t).\delta(x-x_i)$ où $\delta(x-x_i)$ est la fonction de Dirac associée au point x_i. La formulation générale de la source est donnée par :

$$f(x,t)=\xi(x,t)+\sum_i\lambda_i\widehat{\xi}_i(t).\delta(x-x_i)$$

On suppose que les eaux polluées contiennent une grande variété de bactérien pathogénétiques ou des virus. Après qu'une décharge soit deversée dans l'eau, la concentration des bactéries ou des virus peut décroire trés rapidement à cause de certaines conditions (manque de nutriments, baisse de température, les rayons solaires,...). On désigne alors par y_i la concentration d'une espèce i. Le terme de réaction R_i est donné par

$$R_i = -k_i y_i(x,t),$$

où k_i est une constante cinétique. D'autre part, le terme source peut être exprimé sous la forme

$$f_i(x,t) = \sum_j \lambda_j \widehat{\xi}_i(t).\delta(x - P_i),$$

où j est le nombre de sources internes de pollution (détritus, métaux et autres déposés au fond des rivières et des Lacs), λ_j est le taux de pollution de la j ième source, $\widehat{\xi}_i(t)$ est la densité partielle des espèces i pour la j ième source, $\delta(x - P_i)$ désigne la mesure de Dirac au point P_i. On se ramène alors à la résolution d'un système d'équation de la forme :

$$\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial t} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{\nabla} y_i(x,t) - K.\triangle y_i(x,t) = -k_i y_i(x,t) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \widehat{\xi}_i(t).\delta(x - P_i), \quad i = 1,2,3,...$$

Dans l'analyse de la concentration y, on est confronté à deux types de conditions au bord. Pour illustrer ces conditions, subdivisons le bord du domaine d'étude en deux parties disjointes, $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ tel que

$$\begin{aligned} y|_{\Gamma_1} &= g(x,t), \\ \left.\frac{\partial y}{\partial n}\right|_{\Gamma_2} &= h(x,t), \end{aligned}$$

le bord Γ_1 est supposé diffuser de manière continue une décharge de pollution dans le fluide, c'est le cas d'une usine qui déverse ses résidus dans un Lac situé aux alentours par le biais d'un canal d'ouverture Γ_1. Le bord Γ_1 peut à son tour se subdiviser en plusieurs parties selon le nombre de source de pollution externe.

La condition de Neumann caractérise l'échange de concentration entre le fluide et l'extérieur. Cette condition est liée à la porosité de la terre. Dans l'étude d'eau de surface (Lac, rivière) on peut supposer comme approximation, dans ce cas, pour $h = 0$, cela sous-entend qu'aucune concentration ne traverse le bord Γ_2, la terre est à ce niveau imperméable. On a besoin d'un condition initiale

$$y(x,0) = y_0(x).$$

Cette condition évalue la quantité de concentration présente au début de l'expérience. Elle est importante dans la résolution des problèmes de type évolutifs.

Nous résumons la dispersion d'une substance polluante dans un fluide par une équation parabolique de la forme :

$$(P)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial y(x,t)}{\partial t} + k\,\mathrm{div}(a(x)\nabla y(x,t)) + F(y,\nabla y) = f(x,t) & (x,t) \in \Omega \times \left]0,T\right], \\ \hfill y|_{\Gamma_1} = g(x,t) & (x,t) \in \Gamma_1 \times \left]0,T\right], \\ \hfill \left.\dfrac{\partial y}{\partial n}\right|_{\Gamma_2} = h(x,t) & (x,t) \in \Gamma_2 \times \left]0,T\right], \\ \hfill y(x,0) = y_0(x) & x \in \Omega, \end{cases}$$

où

- $\Omega \in R^n, n = 2$ ou 3 représente le domaine d'étude,
- $]0,T[$ est l'intervalle de temps d'étude $T > 0$,
- F est une forme non linéaire donnée par

$$F(y,\nabla y) = \overrightarrow{u}.\nabla y(x,t) - \lambda y(x,t) + \mu\,|y|^p\,(x,t),$$

où λ, μ et p sont des constantes réelles et $\overrightarrow{u}$ la vitesse d'écoulement de l'eau.

Nous nous plaçons ici dans le cas des systèmes à données incomplètes, c'est-à-dire que l'une des informations suivantes :

- le coefficient k de diffusion,
- la fonction source $f(x,t)$,
- la condition initiale $y_0(x)$,
- les conditions aux bords $g(t)$ et $h(t)$,

est inconnue ou contient dans sa structure des paramètres inconnus. Nous supposerons que les structures des fonctions f et y_0 sont inconnues et données sous la forme

$$\begin{aligned} f(t,x) &= \sum_j \lambda_j \widehat{\xi}_i(t), \\ y_0(t,x) &= \sum_j \tau_j g_i(t). \end{aligned}$$

Les paramètres λ_j, τ_j sont inconnus et représentent les taux de pollution. Les fonction $\widehat{\xi}_i$ et g_i sont connues et désignent respectivement les fonctions densité de production à la source et à l'instant initial.

La recherche de ces informations nous conduit naturellement à un problème de type inverse. Dans la résolution de ces problèmes, il est nécessaire de disposer des données mesurées de l'état y. Nous noterons dans la suite y_{obs} ces données expérimentales et ensuite évaluerons l'état y en fonction des paramètres recherchés.

2.2 Espace des observations

Nous supposerons que les mesures prélevées y_{obs} sont opérées dans un intervalle de temps $[0, T]$, tout comme les calculs de l'état $y(\lambda, \tau)$ est dans un domaine d'observation $O \subset \Omega$. Une formulation habituelle est de considérer connue l'action sur l'état $y(x, t)$ d'un opérateur linéaire à valeurs dans un espace convenable H c'est-à-dire définit un opérateur d'observation B permettant d'associer les paramètres recherchés aux mesures observées $B : U \to H$. Alors on observe l'état sur un domaine supposé O appelé observatoire, et dans un intervalle de temps $(0, T)$. L'observatoire O peut être interne distribué ($O \subset \Omega$), ou frontière ($O \subset \Gamma$).

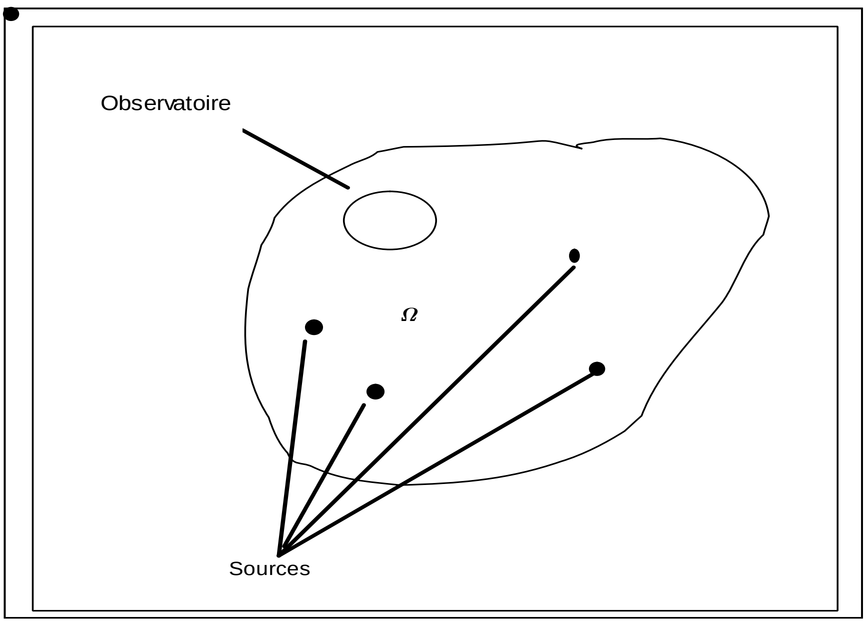

Figure 1: *Domaine* Ω, *observatoire et sources*

Une fois les données observées obtenues, le problème auquel nous nous intéressons dans ce travail est le suivant :

$$(Q)\left\{\begin{array}{c}\textit{A partir des mesures expérimentales de l'état } y \textit{ du système précédent est il possible} \\ \textit{d'identifier la fonction source et /ou la fonction initiale avec prise en compte} \\ \textit{des erreurs sur les mesures ?}\end{array}\right. .$$

Nous allons commencer de répondre à cette question dans le cas général.

2.3 Position du problème

Pour illustrer notre approche, nous supposons que l'état du système est décrit par y. La structure générale de l'équation aux dérivées partielles qui gouverne l'état y du problème étudié est supposée connue sous la forme :

$$(S)\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{\partial y}{\partial t} + F(y) = terme\ source & \Omega\times]0,T[\,, \\ y(t=0) = y^0 & \Omega,\end{array}\right. \tag{2.1}$$

où F est une fonction non-linéaire et y_0 l'état initiale.

Pour que l'état y du système considéré puisse être entièrement défini, il faut connaitre:

- les coefficients du l'opérateur F, et la structure de non linéarité éventuelle,
- les termes sources,
- la condition initiale,
- les conditions aux limites, et
- le domaine d'étude Ω.

Ce qui n'est généralement pas le cas.

Si l'une au moins des informations ci-dessus est inconnues ou partiellement connue on dit que le système (S) est *à données incomplètes*. On rencontre ce type de problèmes dans de nombreuses situations, en sciences biomédicales, en météorologie, en océanographie, ..., où les conditions initiales ne sont pas complètement connues.

2.4 Termes manquants et termes de pollutions

Soit F un opérateur elliptique du deuxième ordre. On suppose que la première équation du système (S) s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial y}{\partial t} + F(y) = \zeta + \lambda\widehat{\zeta} \qquad \Omega \times]0, T[\,,$$

avec ζ est donné dans un espace convenable Y et $\widehat{\zeta}$ demeure dans la boule unité de Y et λ est un petit paramètre réel avec $\lambda\widehat{\zeta}$ n'est pas connu. On suppose que les ceofficients de F et l'ouvert Ω sont connus mais les données initiales sont incomplètes. Si l'on désigne par $y(0)$ la condition initiale s'exprime sous la forme

$$y(0) = y^0 + \tau\widehat{y}^0,$$

où y^0 est donné et $\widehat{y}^0$ demeure dans la boule unité d'un espace de Hilbert ou de Banach avec τ réel petit, et on suppose que les conditions aux limites sont connues.

Notre objectif est de donner une méthode permettant d'obtenir des informations sur $\lambda\widehat{\zeta}$ qui ne soient pas affectées par les variations de la donnée initiale autour de y^0. On établit ainsi une distinction entre le terme $\lambda\widehat{\zeta}$ qui est dit "*de pollution*" et le terme $\tau\widehat{y}^0$ qui est dit "*manquant*" que l'on ne cherche pas à identifier. Pour espérer pouvoir obtenir quelques informations, il faut observer y. Donc, le problème consiste à observer l'état y sur une partie accessible du domaine et de disposer des mesures expérimentales pour estimer les données manquantes.

2.5 Observation du système

Dans un système à données partiellement connues tel que celui qu'on considère en (S), il est naturel de vouloir reconstituer le tout ou une partie des données inconnues, cela est bien évidemment impossible si on observe rien du système étudie. Soit H l'espace de données observées, nous citons deux types d'observations :

1/ L'ouvert O peut consister en plusieurs composantes donc les observations se font aux points O_i, $i = 1, 2, 3, ...$, et les sources de pollution sont générées aux points S_i (figure 2), un tel cas a été étudié dans [31].

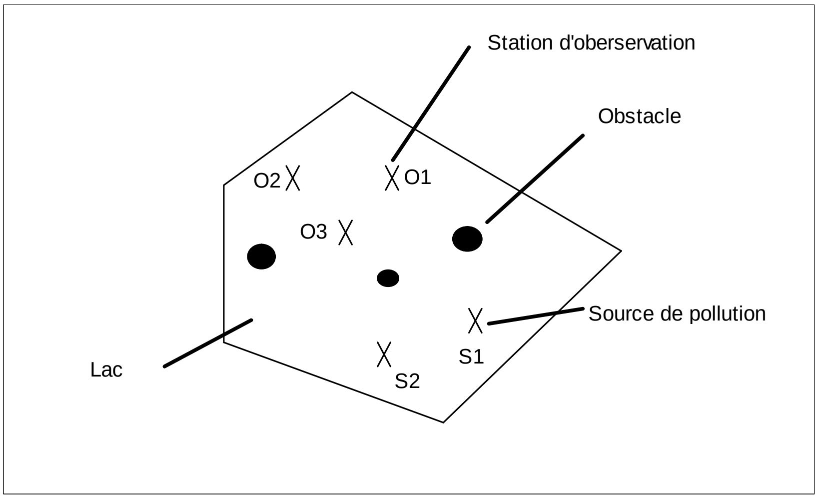

Figure 2 : *Modèle d'un fluide soumis à deux sources de pollution* $\{S_1, S_2\}$ *dont l'observation est faite au points* $\{O_1, O_2, O_3\}$.

2/ On peut considérer d'un observatoire $O \subset \Omega$ (figure 3). Les données observées sont continues par rapport au temps et à l'espace. De telles observations peuvent être faites au moyen d'un navire, c'est par exemple le cas d'un bateau observatoire et Ω étant un océan ou un lac,....

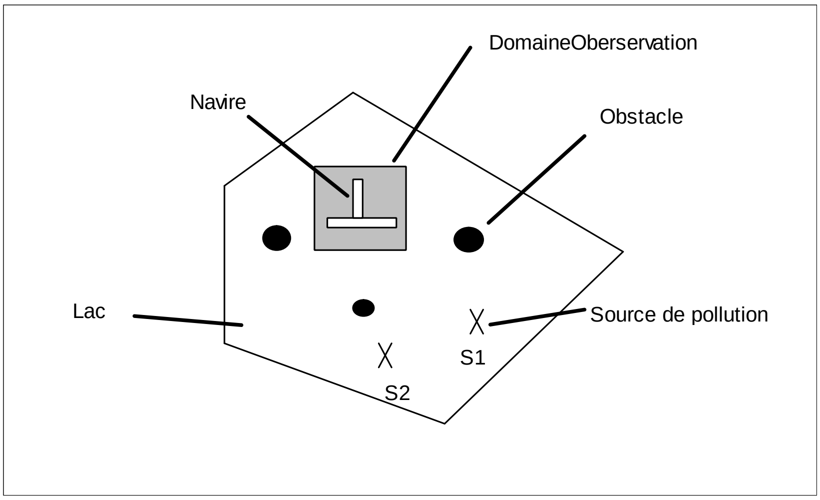

Figure 3 : *Modèle d'un fluide soumis à deux sources de pollution* $\{S_1, S_2\}$ *dont l'observation est faite dans un sous domaine.*

En outre, on peut avoir des observations discontinues en temps.

On observe l'état du système "y" sur O pendant l'intervalle de temps $[0,T]$, donc théoriquement, on va disposer de

$$y(x,t) = y_{obs} \qquad \text{sur } O \times (0,T), \tag{2.2}$$

où y_{obs} est une mesure connue.

Naturellement les mesures expérimentales peuvent être influencées par des perturbations appelées bruits. Les bruits peuvent être dus aux erreurs sur les instruments de mesures ou encore aux erreurs sur l'approximation des équations. Pour prendre en compte ces erreurs; l'opérateur d'observation se définit de la manière suivante :

$$y_{obs} = m_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i m_i, \tag{2.3}$$

où les fonctions $(m_0, m_1, ...m_n)$ sont données et les β_i sont des paramètres inconnus, représentent les termes de bruits.

Remarque 2.1 *:*

1/ Les résultats présentés ici, seront dans le cas d'une observatoire interne.

2/ Pour les systèmes dissipatifs, l'ouvert O peut être, au moins théoriquement, être arbitrairement petit.

Le problème d'identification de la reconstitution de certaines paramètres inconnus de notre système conduit naturellement à la notion " d'idenfiabilité" que nous allons définir de la façon la plus générale possible.

Définition 2.1 *On considère un système dont l'état noté y dépend d'un vecteur de paramètres v. Soit C un opérateur d'observation agissant sur y. On définit l'opérateur $B : E \to F$ tel que E est l'espace des données et F est l'espace de mesure. On dit que B est identifiable à partir de l'observation $z = Cy$ si l'application B est injective.*

Pour résoudre un problème d'identification, une technique trés répondue est la méthode de " moindres carrés". Par ailleurs, à la fin des années quatre-vingt, une nouvelle méthode a vu le jour : "la méthode des sentinelles". Nous commençons par une présentation de la première méthode.

2.6 Méthode de moindres carrés

Elle fût introduite en 1795 par Gauss et Legendre pour la résolution de problèmes inverses. Dés 1805, Legendre présenta son article " *nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes"* basé sur la méthode des moindres carrés. Depuis lors, cette méthode est restée la plus populaire des techniques d'identification de paramètres aussi bien pour les équations différentielles ordinaires (EDO) que pour les équations aux dérivées partielles (EDP).

Supposons que v représente le vecteur des paramètres recherchés. La technique des moindres carrés consiste à minimiser la distance au carré entre les valeurs observées y_{obs} et les valeurs calculées $y(v)$ pour les v parcourant l'espace des paramètres U. Ainsi, le problème d'identification revient à la résolution du problème d'optimisation

$$\min_{v \in U} \|y(v) - y_{obs}\|^2 , \tag{2.4}$$

où $y(v)$ est la solution du système (S).

Dans la méthode de moindres carrés, tous les paramètres inconnus jouent le même rôle. On ne fait pas de différence entre les paramètres (aux termes sources et aux termes initiaux). Il y a donc des risques de ne pas pouvoir séparer nettement les rôles des uns et des autres. De plus, les données disponibles y_{obs} peuvent être insuffisantes par rapport au nombre des paramètres recherchés, ce qui conduit à une infinité de solutions possibles. On a, dans ce cas, un problème d'unicité de la solution, aussi pour un jeu de données prélevées dans le même domaine, la résolution peut conduire à une forte perturbation de la solution, il s'agit d'un problème de stabilité. Face à toutes ces éventualités, on dit de manière générale que le problème de moindres carrés est mal posé, il faut, dans ce cas, introduire des termes régularisant ou stabilisateurs qui réduisent des erreurs d'approximation supplémentaires.

2.7 Méthode des sentinelles

Elle répondait d'une part aux préoccupations citées dans (Q) et d'autre part à l'élaboration d'un algorithme rapide dans le calcul des paramètres inconnus. Cette théorie a été par ailleurs développée dans des applications en environnement par son auteur durant quatre années à travers des articles et des conférences pour enfin résumer le tout dans son livre publié en 1992, " Sentinelles pour les systèmes distribuées à données incomplètes" [40]. Du point de vue numérique on s'accorde à dire que la méthode de sentinelle est quasiment équivalente à la méthode des moindres carrés classiques.

En 2004, O. Nakoulima [voir 61] vue de pallier aux préoccupations (Q) et d'utiliser l'inégalité de carleman pour démontrer l'existence du sentinelle.

Nous distinguons deux types de sentinelles, continue et discrète.

2.8 Sentinelle continue

On considère un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, $(n = 1, 2, 3$ dans les applications), borné de frontière $\partial\Omega = \Gamma$ assez régulière (de classe C^2 afin de ne pas rencontrer de problème de régularité). Soit A un opérateur elliptique de seconde ordre. Pour $T > 0$ fixé, on définit $Q = \Omega \times [0, T]$ et $\sum = \Gamma \times]0, T[$, on considère la solution $y(x, t)$ du système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay + f(y) = \zeta + \lambda\widehat{\zeta} & dans \ \ Q, \\ y(0) = y^0 + \tau\widehat{y}^0 & dans \ \ \Omega, \\ y = 0 & sur \ \ \sum. \end{cases} \tag{2.5}$$

Ce système est à données incomplète où

• Les fonctions ζ et y^0 sont données respectivement dans $L^2(Q)$ et $L^2(\Omega)$.

• Le terme de pollution $\lambda\widehat{\zeta}$ et le terme manquant $\tau\widehat{y}^0$ sont inconnues respectivement dans $L^2(Q)$ et $L^2(\Omega)$.

• Les réels λ et τ sont arbitrairement petits.

• Les coefficients de l'opérarteur A vérifiant les conditions du théorème de Saut et Sheurer.

• L'opérateur $y \to f(y)$ est une fonction non linéaire de classe C^1, (on peut supposer que f est fonction de y et ∇y).

L'équation (2.5) admet une unique solution faible dans $L^2(Q)$ que l'on note

$$y(x, t, \lambda, \tau) = y(\lambda, \tau).$$

La question qui se pose est :

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Comment peut-on calculer le terme de pollution } \lambda\widehat{\zeta} \textit{ (ou d'obtenir des informations)} \\ \textit{qui soit indépendant des variations de la donnée initiales auteur de } y_0? \end{array} \right.$$

Donc nous nous intéressons à l'estimation du terme de pollution sans toutefois manifester un intérêt pour le terme manquant.

Plaçons nous dans le cas où les données observées y_{obs} ne sont pas bruitées. L'idée fondamentale pour répondre à la question précédente est de prendre une valeur moyenne, pour savoir si quelques chose se passe. Soit donc h une fonction donnée sur $(0,T)\times O$. On considère alors la moyenne

$$\mathfrak{M}(\lambda,\tau) = \int_0^T \int_O h.y(x,t,\lambda,\tau)dxdt,$$

et on cherche à déterminer le terme de pollution indépendamment du terme en τ, au premier ordre par exemple. Mais, il n'y a en général aucune raison pour que, au premier ordre, $\mathfrak{M}(\lambda,\tau)$ soit indépendante de τ. Autrement dit, il n'y a aucune raison pour que

$$\frac{\partial \mathfrak{M}(\lambda,\tau)}{\partial \tau}(0,0) = \int_0^T \int_O h.\frac{\partial y}{\partial \tau}(0,0)dxdt = 0.$$

On introduit une fonction w, et on donne la définition d'une fonctionnelle dite "*sentinelle*" qui soit la moyenne de l'état y sur un petit domaine, donnée par l'expression suivante :

$$S(\lambda,\tau) = \int_0^T \int_O (h+w).y(x,t,\lambda,\tau)dxdt, \tag{2.6}$$

pour les fonctions h et $w \in L^2(]0,T[\times O)$.

Définition 2.2 *On dit que S est une sentinelle de Lions définie par h, s'il existe un contrôle w tel que le couple (w,S) vérifie*

$$\left.\frac{\partial S}{\partial \tau}(\lambda,\tau)\right|_{\lambda=\tau=0} = 0, \quad \forall \widehat{y}^0 \in L^2(\Omega), \tag{2.7}$$

et

$$\|w\|_{L^2(]0,T[\times O)} = \min \tag{2.8}$$

Remarque 2.2 *La condition (2.7) exprime l'insensibilité de la sentinelle par rapport au terme manquant au premier ordre et la condition (2.8) exprime que l'on s'éloigne le moins possible de la moyenne, elle sélectionne une unique sentinelle.*

Remarque 2.3 *Le choix $w = -h$ donne lieu à (2.7). Par conséquent, sous des hypothèses très générales, le problème (2.7)-(2.8) admet une solution unique. Mais il faudra s'assurer que sous des conditions convenables, $w \neq -h$, la fonctionnelle $S(\lambda, \tau) = 0$ n'étant pas susceptible de nous apporter beaucoup d'informations.*

2.8.1 Informations fournies par les sentinelles

L'existence et l'unicité de la fonction w sont montrées dans [42]. Il a été montré que le problème (2.7)-(2.8) est équivalent à un problème de contrôlabilité exacte à zéro à partir duquel la méthode HUM, abréviation de "Hilbert Uniquenss Method " [38], a été utilisée pour établir l'existence et l'unicité de la fonction du contrôle w. La fonction sentinelle, une fois construite, la détermination du terme de pollution se déduit par le développement de Taylor à l'ordre 1 de S et en considèrent (2.6)-(2.7) on a :

$$\begin{aligned} S(\lambda, \tau) &= S(0,0) + \lambda \frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0) + \tau \frac{\partial S}{\partial \tau}(0,0) + o(\|(\lambda, \tau)\|) \\ &= S(0,0) + \lambda \frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0) + o(\|(\lambda, \tau)\|), \end{aligned} \tag{2.9}$$

puisque par définition $\left.\frac{\partial S}{\partial \tau}(\lambda, \tau)\right|_{\lambda=\tau=0} = 0$, on peut déduire

$$\lambda \times \beta \approx (S(\lambda, \tau) - S(0,0)), \quad \beta = \frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0), \tag{2.10}$$

en remplaçant $S(\lambda, \tau)$ par S_{obs} la solution observée

$$S_{obs} = \int_O \int_0^T (h + w).y_{obs}\ dxdt. \tag{2.11}$$

On a l'estimation

$$\lambda \times \beta \approx (S_{obs} - S(0,0)). \tag{2.12}$$

On va maintenant montrer comment, avec h donné, on peut construire l'unique fonction w telle que l'on ait (2.7)-(2.8).

2.8.2 Méthode variationnelle

La condition "d'insensibilité" de la sentinelle par rapport aux termes manquants est équivalente à

$$\int_0^T \int_O (h+w).y_\tau \; dxdt = 0, \tag{2.13}$$

où

$$y_\tau = \frac{\partial y}{\partial \tau}(0,0) = \lim_{\tau \to 0}\left(\frac{y(0,\tau) - y(0,0)}{\tau}\right),$$

alors y_τ la solution du système d'équation

$$\left\{ \begin{array}{rl} \dfrac{\partial y_\tau}{\partial t} + Ay_\tau + f'(y_0)y_\tau = 0 & dans \;\; Q, \\ y_\tau(0) = \widehat{y}^0 & dans \;\; \Omega, \\ y_\tau = 0 & sur \;\; \Sigma, \end{array} \right. \tag{2.14}$$

avec $f'(y_0)$ désignant la dérivée de f au point $y_0 = y(0,0)$. En effet, $y(0,\tau)$ est solution du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rl} \dfrac{\partial y(0,\tau)}{\partial t} + Ay(0,\tau) + f(y(0,\tau)) = \zeta & dans \;\; Q, \\ y_\tau(0,\tau)(0) = y_0 + \tau\widehat{y}^0 & dans \;\; \Omega, \\ y_\tau(0,\tau) = 0 & sur \;\; \Sigma, \end{array} \right. \tag{2.15}$$

et y_0 est solution du système

$$\left\{ \begin{array}{rl} \dfrac{\partial y_0}{\partial t} + Ay_0 + f(y_0) = 0 & dans \;\; Q, \\ y_0(0) = y^0 & dans \;\; \Omega, \\ y_0 = 0 & sur \;\; \Sigma, \end{array} \right. \tag{2.16}$$

En retranchant (2.16) de (2.15) et en multipliant par $\dfrac{1}{\tau}$, on trouve :

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{y(0,\tau)-y_0}{\tau}\right)+A\left(\dfrac{y(0,\tau)-y_0}{\tau}\right)+\dfrac{f(y(0,\tau))-f(y_0)}{\tau}=0 & dans \;\; Q, \\ \dfrac{y(0,\tau)(0)-y_0(0)}{\tau}=\widehat{y}^0 & dans \;\; \Omega, \\ \left(\dfrac{y(0,\tau)-y_0}{\tau}\right)=0 & sur \;\; \Sigma. \end{array}\right. \tag{2.17}$$

Par passage a la limite quand $\tau \to 0$ dans (2.17), on obtient (2.14).

2.8.3 Equivalence à un problème de contrôlabilité

Soit maintenant $q = q(x,t)$ l'état adjoint qui est la solution du problème rétrograde suivant:

$$\left\{\begin{array}{ll} -\dfrac{\partial q}{\partial t}+A^*q+f'(y_0)q=(h+w)\chi_O & dans \;\; Q, \\ q(T)=0 & dans \;\; \Omega, \\ q=0 & sur \;\; \sum. \end{array}\right. \tag{2.18}$$

Le problème (2.18) admet une solution unique sous des hypothèses trés générales sur $f'(y_0)$. Cette solution dépend de w qu'on veut déterminer.

Lemme 2.1 *On suppose que q est solution du problème (2.18). Alors le problème d'existence d'une sentinelle insensible aux termes manquants est équivalent à un problème de contrôlabilité à zéro, c'est-à-dire $q(0) = 0$.*

Preuve. Si on multiplie la première équation du système (2.18) par y_τ et on intègre ensuite par partie, on obtient

$$\int_0^T \int_O (h+w).y_\tau \; dxdt = \int_O q(0).\widehat{y}_0 \; dx.$$

Par conséquent, la condition (2.13) équivaut à

$$q(0) = 0. \tag{2.19}$$

Ceci est un problème de contrôlabilité à zéro. Donc, le problème de trouver une sentinelle S telle que (2.18) ait lieu, est équivalent au problème de contrôlabilité à zéro suivant :
$\{Trouver\ w \in L^2(]0,T[\times O) tel\ que\ l'on\ ait$ (2.18) et (2.19). ∎

En résumé, le problème d'existence d'une unique sentinelle revient à résoudre le problème d'optimisation suivant

$$(P)\ \left\{ \min_{w\in A} \|w\|_{L^2(]0,T[\times O)}\ , \right\}$$

où

$$A = \left\{ w \text{ tel que } \left| \begin{array}{cr} -\dfrac{\partial q}{\partial t} + A^* q + f'(y_0) q = (h+w)\chi_O & dans\ \ Q, \\ q(T) = q(0) = 0 & dans\ \ \Omega, \\ q = 0 & sur\ \ \sum, \end{array} \right. \right\}$$

Le domaine des contraintes du problème (P) est non vide car $w = -h$ donne $q \equiv 0$, par conséquent le problème (P) admet toujours une solution et une seule que l'on note $\widehat{w}$. Il reste donc deux problèmes à résoudre

1- Calculer $\widehat{w}$,

2- S'assurer que $\widehat{w} \neq -h$.

Une méthode classique pour obtenir le système d'optimalité pour le problème (P) est la méthode de pénalisation.

2.8.4 Pénalisation

Soit $\varepsilon > 0$, on introduit la fonction suivante :

$$J_\varepsilon(w,z) = \frac{1}{2}\|w\|^2_{L^2(O\times(0,T))} + \frac{1}{2\varepsilon}\left\| -\frac{\partial z}{\partial t} + A^* z + f'(y_0) z - (h+w)\chi_O \right\|^2_{L^2(Q)},$$

et on considère le problème (P_ε) suivant

$$(P_\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} \min J_\varepsilon(w,z) \\ (w,z) \in A^\varepsilon \end{array} \right. ,$$

avec

$$A^\varepsilon = \left\{ (w,z) \text{ tel que } \left| \begin{array}{cr} -\dfrac{\partial z}{\partial t} + A^* z + f'(y_0) z - (h+w)\chi_O \in L^2(Q), & \\ z(T) = z(0) = 0 & dans\ \ \Omega, \\ z = 0 & sur\ \ \sum, \end{array} \right. \right\}$$

le problème (P_ε) admet une solution unique qu'on notera $(w_\varepsilon, z_\varepsilon)$.
Le système d'optimalité donne l'existence d'une fonction ρ_ε solution du système

$$\begin{cases} L\rho_\varepsilon = 0 & \text{dans } Q, \\ \rho_\varepsilon = 0 & \text{sur } \sum, \end{cases} \tag{2.20}$$

et caractérise le contrôle optimal comme suit :

$$w_\varepsilon = \rho_\varepsilon \chi_O, \tag{2.21}$$

où

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + A + f'(y_0) I_d,$$

et par passage a la limite on obtient une fonction ρ solution d'un système d'optimalité du problème initial (P). Finalement le contrôle est

$$\overline{w} = \rho \chi_O \in F,$$

où F est l'espace de Hilbert complété de $L^2(Q)$ pour la norme

$$\|\rho\|_F = \|\rho\|_{L^2((0,T)\times O)} \,.$$

Dans ce cas, on doit supposer que $h \notin F$ pour obtenir une sentinelle non identiquement nulle.

Ici la notion de sentinelle de Lions où le contrôle et l'observation sont dans le même domaine, devient un cas particulier. On propose pour la définition précédente une généralisation de la notion de sentinelle au cas d'une observation et d'un contrôle ayant leurs supports dans deux ouverts différents.

2.9 Sentinelle régionale

On considère ici $h \in L^2((0,T) \times O)$ et ω un ouvert non vide de Ω, tel que $\omega \neq O$. Plus précisément pour une fonction contrôle

$$w \in L^2((0,T) \times \omega).$$

On pose

$$\begin{aligned} S(\lambda, \tau) &= \int_0^T \int_O h.y(x,t,\lambda,\tau)dxdt + \int_0^T \int_\omega w.y(x,t,\lambda,\tau)dxdt \\ &= \int_0^T \int_\Omega (h\chi_O + w\chi_\omega).y(x,t,\lambda,\tau)dxdt, \end{aligned} \tag{2.22}$$

où χ_O et χ_ω sont les fonctions caractéristiques de O et ω respectivement.
On considère le problème (2.5) avec $A = \Delta$ (pour simplifier les calcules) et on divise le bords en deux Γ_1 et Γ_2 tel que $\overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_2 = \phi$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + f(y) = \zeta + \lambda\widehat{\zeta} & dans \;\; Q, \\ y(0) = y^0 + \tau\widehat{y}^0 & dans \;\; \Omega, \\ y = 0 & sur \; \sum_1, \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu} = 0 & sur \; \sum_2 . \end{cases} \tag{2.23}$$

Définition 2.3 *On dit que S est une sentinelle définie par h, s'il existe un contrôle w tel que le couple (w, S) vérifie :*

$$\left.\frac{\partial S}{\partial \tau}(\lambda, \tau)\right|_{\lambda=\tau=0} = 0,$$

et

$$\|w\|_{L^2(]0,T[\times\omega)} = \min .$$

Le problème d'existence d'une sentinelle est équivalent à un problème de contrôlabilité à zéro :

trouver le contrôle optimal $w \in L^2(]0,T[\times\omega)$ tel que $q(0)=0$ où q est la solution du système

$$\left\{\begin{array}{lr} -\dfrac{\partial q}{\partial t}-\Delta q+f'(y_0)q=h\chi_O+w\chi_\omega & dans\ \ Q, \\ q(T)=q(0)=0 & dans\ \ \Omega, \\ q=0 & sur\ \ \sum_1, \\ \dfrac{\partial q}{\partial \nu}=0 & sur\ \ \sum_2. \end{array}\right.$$

Pour cela, il faut résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$(P')\ \left\{\begin{array}{c} \min \|w\|_{L^2(]0,T[\times\omega)} \\ w\in B \end{array}\right. ,$$

où

$$B=\left\{ w \text{ tel que } \left| \begin{array}{lr} -\dfrac{\partial q}{\partial t}-\Delta q+f'(y_0)q=h\chi_O+w\chi_\omega & dans\ \ Q, \\ q(T)=q(0)=0 & dans\ \ \Omega, \\ q=0 & sur\ \ \sum_1, \\ \dfrac{\partial q}{\partial \nu}=0 & sur\ \ \sum_2. \end{array}\right. \right\}$$

2.9.1 Informations fournie par la sentinelle

L'information fournie par la sentinelle S, d'aprés (2.12), est donnée par

$$\lambda\int_0^T\int_\Omega (h\chi_O+w\chi_\omega).y_\lambda dxdt=\int_0^T\int_\Omega (h\chi_O+w\chi_\omega).(y_{obs}-y_0)dxdt,$$

où $y_\lambda=\dfrac{\partial y}{\partial\lambda}(0,0)$ est solution du problème

$$\left\{\begin{array}{lr} \dfrac{\partial y_\lambda}{\partial t}-\Delta y_\lambda+f'(y_0)y_\lambda=\widehat{\zeta} & dans\ Q, \\ y_\lambda(0)=0 & dans\ \Omega, \\ y_\lambda=0 & sur\sum_1, \\ \dfrac{\partial y_\lambda}{\partial \nu}=0 & sur\sum_2. \end{array}\right. \tag{2.24}$$

En multipliant la première équation par q et en intègrant par parties, on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega qLy_\lambda dxdt &= \int_0^T\int_\Omega y_\lambda L^*qdxdt + \int_\Omega q(T)y_\tau(T)dx - \int_\Omega q(0)y_\tau(0)dx \\ &\quad - \int_0^T\int_\Gamma q.\frac{\partial y_\lambda}{\partial \nu}d\Gamma dt + \int_0^T\int_\Gamma y_\lambda.\frac{\partial q}{\partial \nu}d\Gamma dt.\end{aligned} \tag{2.25}$$

Comme q et y_λ sont solutions de (2.18) et (2.24) respectivement, (2.25) devient

$$\int_0^T\int_\Omega (h\chi_O + w\chi_\omega).y_\lambda dxdt = \int_0^T\int_\Omega q.\widehat{\zeta}dxdt.$$

Finalement, on obtient

$$\int_0^T\int_\Omega (h\chi_O + w\chi_\omega).(m_0 - y_0)dxdt = \int_0^T\int_\Omega q.\lambda\widehat{\zeta}dxdt. \tag{2.26}$$

Donc, la connaissance du contrôle optimal w fournie des informations sur le terme de pollution $\lambda\widehat{\zeta}$.

2.9.2 Construction d'une sentinelle

On a montré que l'existence d'une sentinelle est équivalente a un problème de contrôlabilité à zéro, l'outil essentiel pour résoudre le problème d'existence est une inégalité d'observabilité de type Carleman. Pour ce faire, on introduit l'espace

$$V = \left\{ v \in C^\infty(\overline{Q}),\ v = \frac{\partial v}{\partial t} = 0\ sur\ \Sigma_1 \text{ et } \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0\ sur\ \Sigma_2 \right\}.$$

Alors le théorème suivant donne une inégalité de Carlemen.(Pour la démonstration voir [56]).

Théorème 2.1 *Il existe une constante positive $C = C(\Omega, \omega, O, T, f'(y_0))$ telle que*

$$\int_0^T\int_\Omega \frac{1}{\theta^2}|u|^2 dxdt \leq C\left[\int_0^T\int_\Omega |Lu|^2 dxdt + \int_0^T\int_\omega |u|^2 dxdt\right]\ \forall u \in V, \tag{2.27}$$

où $\theta \in C^2(Q)$ positive avec $\frac{1}{\theta}$ bornée et "L" est un opérateur différentiable défini par

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + A + f'(y_0)I_d.$$

Remarque 2.4 *si* $Lu = 0$, *l'inégalité obtenue est appelé " Inégalité d'observabilité" car si* $u = 0$ *sur* $\omega \times (0,T)$ *implique que* $u = 0$ *sur* $\Omega \times (0,T)$ *tout entier.*

On définit une forme bilinéaire symétrique de $V \times V$ dans R par

$$a(u,v) = \int_0^T \int_\Omega Lu.Lv\ dxdt + \int_0^T \int_\omega u.v\ dxdt, \tag{2.28}$$

on déduit le lemme suivant :

Lemme 2.2 *La forme bilinéaire* $a(.,.)$ *est un produit scalaire.*

Preuve.

On a $a(.,.)$ une forme bilinéaire, symétrique et positive

$$a(u,u) = \int_0^T \int_\Omega |Lu|^2\, dxdt + \int_0^T \int_\omega |u|^2\, dxdt \geq 0\ \forall u \in V.$$

Il reste à montrer que

$$a(u,u) = 0 \Rightarrow u = 0,$$

On a

$$a(u,u) = 0 \Rightarrow \int_0^T \int_\Omega |Lu|^2\, dxdt = 0 \text{ et } \int_0^T \int_\omega |u|^2\, dxdt = 0,$$

d'aprés (2.27) on déduit

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{1}{\theta^2} |u|^2\, dxdt = 0 \Rightarrow u = 0\ dans\ Q.$$

donc, $a(.,.)$ est un produit scalaire ■

Soit W l'epace complété de V pour la norme $\|.\|_V$ définie par :

$$\|u\|_W = \sqrt{a(u,u)}. \tag{2.29}$$

Alors W est un espace de Hilbert et de plus V est dense dans W. On peut préciser la structure des éléments de W. En effet, soit $H_\theta(Q)$ l'espace de Hilbert à poids défini par :

$$H_\theta(Q) = \left\{ v \in L^2(Q) \text{ tel que } \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{\theta^2} |v|^2\, dxdt < \infty \right\}, \tag{2.30}$$

muni de la norme

$$\|v\|_\theta = \left(\int_0^T \int_\Omega \frac{1}{\theta^2} |v|^2 \, dxdt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Alors, par l'application de l'inégalité de Carleman (2.27) on obtient

$$\|v\|_\theta \leq C \|v\|_W .$$

Ce qui montre que W s'injecte continûment dans $H_\theta(Q)$.

On considère, maintenant, l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{lll} l & : & W \to R \\ v & \to & l(v) = \displaystyle\int_0^T \int_\Omega h\chi_O v \, dxdt, \end{array}$$

où la valeur de h est donnée dans $L^2(Q)$.

Lemme 2.3 *On suppose que*

$$h \in L^2(Q) \text{ et que } (\theta h) \in L^2(Q). \tag{2.31}$$

Alors l est continue.

Preuve. On a

$$|l(v)| \leq \left(\int_0^T \int_\Omega |\theta h \ \chi_O|^2 \, dxdt\right)^{1/2} \left(\int_0^T \int_\Omega \frac{1}{\theta^2} |v|^2 \, dxdt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.32}$$

D'aprés l'inégalité de Cauchy Schwartz. Comme $\theta h \in L^2(Q)$, on obtient

$$\left(\int_0^T \int_\Omega |\theta h\chi_O|^2 \, dxdt\right)^{1/2} \leq C_1 \text{ constante,} \tag{2.33}$$

de plus

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{1}{\theta^2} |v|^2 \, dxdt \leq C\left(\int_0^T \int_\Omega |Lv|^2 \, dxdt + \int_0^T \int_\omega |v|^2 \, dxdt\right) = C \|v\|_W^2 .$$

Ainsi

$$|l(v)| \leq C_1\sqrt{C} \|v\|_W .$$

donc l est continue sur W. ■

En conséquence de ce qui précède on a la proposition suivante :

Proposition 2.4 *On suppose que l'hypothèse (2.31) est satisfaite. Alors il existe un unique élément* $\overline{u} \in W$ *solution du problème*

$$a(\overline{u}, v) = \int_0^T \int_\Omega h\chi_O v dxdt \quad \forall v \in W. \tag{2.34}$$

Preuve. L'application l est linéaire et continue sur W et comme la forme bilinéaire, symétrique $a(.,.)$ est continue, coercive, alors d'aprés le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique élément $\overline{u} \in W$ solution de (2.34). ■

Nous allons monter maintenant que l'ensemble des solutions qui satisfait (2.18)-(2.19) est non vide.

Proposition 2.5 *Sous l'hypothèse (2.31), soit* $\overline{u} \in W$ *l'unique solution de (2.34), on pose*

$$\begin{cases} w = -\overline{u}\chi_\omega, \\ q = L\overline{u}. \end{cases} \tag{2.35}$$

Alors

1) (w, q) *est une solution du système (2.18)-(2.19) c-à-d qu'il existe une unique sentinelle insensible aux termes manquants.*

2) On a

$$\begin{aligned} \|\overline{u}\|_W &\leq C \|\theta h \ \chi_O\|_{L^2(Q)} \qquad C \text{ est une constante,} \\ \|w\|_{L^2(\omega\times(0,T))} &\leq C \|\theta h \ \chi_O\|_{L^2(Q)}, \\ \|q\|_{L^2(Q)} &\leq C \|\theta h \ \chi_O\|_{L^2(Q)}. \end{aligned}$$

Preuve. 1) Comme $\overline{u}$ est solution de (2.34) alors

$$\int_0^T \int_\Omega L\overline{u}.Lv \ dxdt + \int_0^T \int_\omega \overline{u}.v \ dxdt = \int_0^T \int_\Omega h\chi_O v \ dxdt \quad \forall v \in W, \tag{2.36}$$

mais (w, q) satisfait (2.35), alors (2.36) s'écrit

$$\int_0^T \int_\Omega q.Lv \; dxdt - \int_0^T \int_\omega w.v \; dxdt = \int_0^T \int_\Omega h\chi_O v \; dxdt \quad \forall v \in W, \tag{2.37}$$

donc

$$\int_0^T \int_\Omega q.Lv \; dxdt = \int_0^T \int_\Omega (h\chi_O + w\chi_\omega)\, v \; dxdt \quad \forall v \in W. \tag{2.38}$$

Il s'agit de montrer que q est solution du système (2.18)-(2.19). L'équation (2.38) est vraie en particulier pour $v \in \mathfrak{D}(Q) \subset V \subset W$, c'est-à-dire

$$\langle q, Lv \rangle_{L^2(Q)} = \langle h\; \chi_O + w\chi_\omega, v \rangle_{L^2(Q)} \;\; \forall v \in \mathfrak{D}(Q),$$

d'où au sens de $\mathfrak{D}(Q)$, on a

$$\begin{aligned} L^*q &= h\; \chi_O + w\chi_\omega \\ &\Rightarrow \;\; L^*q \in L^2(Q). \end{aligned} \tag{2.39}$$

De plus, on a $q \in L^2(Q)$ et par application du théorème de Lions-Magnenes [51], les fonctions traces q en $t = 0$, $t = T$ et q sur Σ exitent.
On multiplie (2.39) par $\rho \in C^\infty(\overline{Q})$ et on intègre par partie sur Q, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \rho.L^*q \; dxdt &= \int_0^T \int_\Omega q.L\rho \; dxdt - \int_\Omega q(T)\rho(T)dx + \int_\Omega q(0)\rho(0)dx \\ &\quad - \int_0^T \int_\Gamma \frac{\partial q}{\partial \nu}.\rho \; d\Gamma dt + \int_0^T \int_\Gamma \frac{\partial \rho}{\partial \nu}.q \; d\Gamma dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega (h\chi_O + w\chi_\omega)\, \rho \; dxdt. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Utilisant maintenant l'équation (2.39)

$$-\int_\Omega q(T)\rho(T)dx + \int_\Omega q(0)\rho(0)dx - \int_0^T \int_\Gamma \frac{\partial q}{\partial \nu}.\rho \; d\Gamma dt + \int_0^T \int_\Gamma \frac{\partial \rho}{\partial \nu}.q \; d\Gamma dt = 0, \quad \forall \rho \in C^\infty(\overline{Q}),$$

On prend $\rho \in W$, on obtient

$$-\int_\Omega q(T)\rho(T)dx + \int_\Omega q(0)\rho(0)dx - \int_0^T \int_{\Gamma_2} \frac{\partial q}{\partial \nu}.\rho \; d\Gamma_2 dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \rho}{\partial \nu}.q \; d\Gamma_1 dt = 0, \tag{2.41}$$

pour $\rho \in V$, tel que $\rho(0) = \rho(T) = 0$ et $\rho|_{\Sigma_2} = 0$. Alors il vient

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \rho}{\partial \nu}.q \; d\Gamma_1 dt = 0 \Rightarrow q = 0 \text{ sur } \Sigma_1.$$

On reprend (2.41) avec en particulier pour $\rho \in V$, tel que $\rho(0) = \rho(T) = 0$ donc

$$\int_0^T \int_{\Gamma_2} \frac{\partial q}{\partial \nu}.\rho \; d\Gamma_2 dt = 0 \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Sigma_2.$$

Il en est de même pour $\rho \in W$, tel que $\rho(0) = 0$, donc

$$\int_\Omega q(T)\rho(T)dx = 0 \Rightarrow q(T) = 0 \text{ dans } \Omega.$$

Enfin, on a

$$\int_\Omega q(0)\rho(0)dx = 0 \Rightarrow q(0) = 0 \text{ dans } \Omega.$$

Ainsi le couple (w, q) est solution du problème (2.18)-(2.19).

2) On prouve maintenant les estimations.

On pose $v = \overline{u}$ dans l'équation (2.34). Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il vient que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega |L\overline{u}|^2 \, dxdt + \int_0^T \int_\omega |\overline{u}|^2 \, dxdt &= \int_0^T \int_\Omega h\chi_O \overline{u} \; dxdt \\ &\leq \|\theta h \chi_O\|_{L^2(Q)} \left\| \frac{1}{\theta}\overline{u} \right\|_{L^2(Q)}, \end{aligned}$$

de plus, l'inégalité de Carleman donne

$$\left\| \frac{1}{\theta}\overline{u} \right\|_{L^2(Q)} \leq \sqrt{C} \, \|\overline{u}\|_W \,, \tag{2.42}$$

Utilisant l'inégalité (2.42), on trouve

$$\|\overline{u}\|_W^2 = \int_0^T \int_\Omega |L\overline{u}|^2 \, dxdt + \int_0^T \int_\omega |\overline{u}|^2 \, dxdt \leq \sqrt{C} \, \|\theta h \chi_O\|_{L^2(Q)} \|\overline{u}\|_W \,. \tag{2.43}$$

Ainsi

$$\|\overline{u}\|_W \leq \sqrt{C} \, \|\theta h \chi_O\|_{L^2(Q)} \,. \tag{2.44}$$

Donc la première estimation de la proposition est réalisée.

De plus, comme (w, q) satisfait (2.35), alors l'équation (2.43) s'écrit

$$\|q\|^2_{L^2(Q)} + \|w\|^2_{L^2(\omega\times(0,T))} \leq \sqrt{C}\,\|\theta h\chi_O\|_{L^2(Q)}\,\|\overline{u}\|_W \,. \tag{2.45}$$

De (2.44) et (2.45), il vient

$$\|q\|^2_{L^2(Q)} + \|w\|^2_{L^2(\omega\times(0,T))} \leq C\,\|\theta h\chi_O\|^2_{L^2(Q)} \tag{2.46}$$

On déduit alors la deuxième et la troixième estimations de la proposition. ■

Le théorème suivant donne l'existence de solution pour le problème (P')

Théorème 2.2 *Sous les hypothèses de la proposition précédente, il existe un couple unique $(\widehat{w}, \widehat{q})$ solution du problème (P'), tel que*

$$\widehat{w} = -\widehat{\rho}\chi_\omega,$$

où $\widehat{\rho}$ est la solution du système

$$\begin{cases} L\widehat{\rho} = 0 & \textit{dans } Q, \\ \widehat{\rho} = 0 & \textit{sur } \sum_1, \\ \dfrac{\partial\widehat{\rho}}{\partial\nu} = 0 & \textit{sur } \sum_2 \end{cases}$$

Preuve. Les hypothèses de la proposition (2.5) étant satisfaites, le domaine B est alors non vide. De plus, il est fermé. L'application $w \longrightarrow \|w\|_{L^2(\omega\times(0,T))}$ est continue, coercive et strictement convexe. Alors, on déduit qu'il existe une unique solution pour le problème (P') qu'on note $(\widehat{w}, \widehat{q}) \in B$ qui vérifie

$$\|\widehat{w}\|_{L^2(\omega\times(0,T))} \leq \|w\|_{L^2(\omega\times(0,T))} \qquad \forall w \in B.$$

On utilise la méthode de pénalisation pour obtenir le système d'optimalité pour $(\widehat{w}, \widehat{q})$.

Soit $\varepsilon > 0$, on introduit la fonction suivante :

$$J_\varepsilon(w, z) = \frac{1}{2}\,\|w\|^2_{L^2(\omega\times(0,T))} + \frac{1}{2\varepsilon}\,\|L^*z - h\chi_O - w\chi_\omega\|^2_{L^2(Q)}\,,$$

et on considère le problème (P_ε) suivant

$$(P_\varepsilon)\begin{cases} \min J_\varepsilon(w,z) \\ (w,z) \in B^\varepsilon \end{cases},$$

avec

$$B^\varepsilon = \left\{ (w,z) \text{ tel que } \left| \begin{array}{ll} L^*z - h\chi_O - w\chi_\omega \in L^2(Q), & \\ z(T) = z(0) = 0 & dans \;\; \Omega, \\ z = 0 & sur \;\; \sum, \end{array} \right. \right\}$$

le problème (P_ε) admet une solution unique qu'on notera $(w_\varepsilon, z_\varepsilon)$ tel que

$$\begin{cases} w_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\rightharpoonup} \widehat{w} \;\; faiblement \; dans \; L^2(\omega \times (0,T)), \\ z_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\rightharpoonup} \widehat{q} \;\; faiblement \; dans \; W \end{cases}$$

Alors, $(\widehat{w}, \widehat{q})$ est l'unique solution du problème (P) si et seulement s'il existe une fonction $\widehat{\rho}$ telle que $\{\widehat{w}, \widehat{q}, \widehat{\rho}\}$ est solution du système d'optimalité suivant

$$\begin{cases} L^*\widehat{q} = h\chi_O + \widehat{w}\chi_\omega & dans \; Q, \\ \widehat{q}(T) = \widehat{q}(0) = 0 & dans \;\; \Omega, \\ \widehat{q} = 0 & sur \;\; \sum_1, \\ \dfrac{\partial \widehat{q}}{\partial \nu} = 0 & sur \;\; \sum_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} L\widehat{\rho} = 0 & dans \; Q, \\ \widehat{\rho} = 0 & sur \;\; \sum_1, \\ \dfrac{\partial \widehat{\rho}}{\partial \nu} = 0 & sur \;\; \sum_2 \end{cases}$$

avec $$\widehat{w} = -\widehat{\rho}\chi_\omega, \quad \widehat{\rho} \in W \;\; \blacksquare$$

2.10 Sentinelle discrète

Jean Pierre Kernevez et son équipe ont été les premiers à avoir proposé des résultats numériques sur les sentinelles dans les applications liées a la pollution de l'environnement dans les années 90 [voir 4, 5 ,6, 7, 15, 16, 17]. Ces auteurs s'accordent à définir la source de pollution comme étant une fonction continue par rapport au temps en une position ponctuelle de l'espace. Nous nous plaçons dans le cas de problème (2.5), qui peut s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay + f(y) = \zeta + \sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i \widehat{\zeta}_i \delta(x - a_i) & dans \;\; Q, \\ y(0) = y^0 + \sum\limits_{j=1}^{M} \tau_j \widehat{y}_j^0 & dans \;\; \Omega, \\ y = 0 & sur \;\; \sum . \end{cases} \tag{2.47}$$

où

- Les a_i sont les points d'observation,
- $\delta(x - a_i)$ est la fonction de Dirac au point a_i.
- Les fonctions sources $\lambda_i \widehat{\zeta}_i$ qu'on suppose dans $L^2(0, T)$.

Maintenant, le problème peut être formulé comme suit :

Trouver (λ_i , $i = 1, ..., N$) représentant au mieux le débit qui a produit la mesure y_{obs}. On définit une fonction $w_i \in L^2(O)$ spécifique à la $i^{ème}$ composante de λ doit être construite telle que :

$$(w_i, y_{obs})_{L^2(O)} = \lambda_i, \tag{2.48}$$

où y_{obs} est la fonction d'état mesurée. Si une telle fonction w_i existe, son unicité est assurée en choisissant la fonction de norme minimale.

La fonction w_i désigne la sentinelle permettant de déterminer le paramètre λ_i, donc pour estimer tout les λ_i, nous devons calculer toute la famille de fonctions $(w_i)_{i=1,N}$.

On a

$$y(\lambda, \tau) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i y_i + \sum_{j=1}^{M} \tau_j y_{\tau_j}, \tag{2.49}$$

où $(y_i)_{i=1,N}$ et $(y_{\tau_j})_{j=1,M}$ sont respectivement les solutions des équations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_i}{\partial t} + Ay_i + f'(y_0)y_i = \widehat{\zeta}_i \delta(x - a_i) & dans \;\; Q, \\ y_i(0) = 0 & dans \;\; \Omega, \\ y_i = 0 & sur \;\; \sum . \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_{\tau_j}}{\partial t} + Ay_{\tau_j} + f'(y_0)y_{\tau_j} = 0 & dans \;\; Q, \\ y_{\tau_j}(0) = \widehat{y}_j^0 & dans \;\; \Omega, \\ y_{\tau_j} = 0 & sur \;\; \sum . \end{cases}$$

Alors, le produit scalaire de w_i avec $y(\lambda,\tau)$ devient

$$(w_i, y(\lambda,\tau))_{L^2(O)} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i (w_i, y_{i})_{L^2(O)} + \sum_{j=1}^{M} \tau_j (w_i, y_{\tau_j})_{L^2(O)},$$

Par conséquent, la formule (2.48) est équivalente à :

$$\begin{cases} (w_i, y_k)_{L^2(O)} = 1 \quad si\ i = k, \\ (w_i, y_k)_{L^2(O)} = 0 \quad \forall k = 1, ..., N, \quad k \neq i, \\ (w_i, y_{\tau_j})_{L^2(O)} = 0. \end{cases}$$

Ensuite, nous utilisons l'état adjoint noté q_i solution du système rétrograde, en multipliant q_i par y_i (resp.y_{τ_j}) et en intégrant par partie en espace et en temps, les égalités précédentes deviennent :

$$\begin{aligned} \int_0^T \widehat{\xi}_i(t) q_i(a_i, t) dt &= 1, \qquad 1 \leq i \leq N, \\ \int_\Omega y_0(x) q_i(x, 0) dx &= 0. \end{aligned}$$

Ce résultat est fondamental pour le calcul des sentinelles. En effet, il résume le fait que la sentinelle est sensible à λ_i et insensible à tous les autres paramètres de l'équation (2.47). Il permet aussi d'interpréter les égalités précédentes comme un problème de contrôle optimal. Cette méthode discrète a été exploitée dans la détermination des pollutions dans un aquifère [26], dans un Lac [42] et dans une rivière [5].

2.11 Sentinelle discriminante

On considère le problème (2.23), les données observées peuvent être affectées d'erreurs sur les mesures ou des effets de "bruits", donc

$$y_{obs} = m_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i m_i,$$

où les fonctions $m_0, m_1, ..., m_n$ sont connues dans $L^2(O \times (0,T))$ mais les $\beta_i \neq 0$ ne sont pas connus, on dit que les β_i sont les termes de bruit. Le problème maintenant est :

Peut-on obtenir des informations sur $\lambda\widehat{\zeta}$ qui ne soient pas affectées par les variations de $y(0)$ autour de y^0, et qui ne soient pas affectées par les bruits $\beta_i m_i$, $i = 1, ...n$?

Dans une telle situation, en plus des hypothèses (2.7)-(2.8) il faudrait associer *une condition d'insensibilité* de la sentinelle aux effets des bruits

$$\int_0^T \int_O (h+w).m_i \; dxdt = 0 \quad 1 \leq i \leq n. \tag{2.50}$$

Une telle sentinelle est dite *"discriminante" [40, 62, 72].*

Remarque 2.5 *:*

1) La sentinelle discriminante n'est pas sensible aux termes manquants (en τ), elle n'est pas non plus sensible aux bruits (en β), elle peut donc différentier ce qui provient des termes en λ de ce qui provient des termes en β (propriétés de discrimination).

2) Si $\omega \neq O \subset \Omega$, la condition (2.50) devient

$$\int_0^T \int_O h.m_i \; dxdt + \int_0^T \int_\omega w.m_i \; dxdt = 0 \qquad 1 \leq i \leq n. \tag{2.51}$$

3) On suppose que $\omega \subset O \subset \Omega$, car les m_i sont à support dans $O \times (0,T)$.

Définition 2.4 *On dit que S est une sentinelle discriminante (ou sentinelle pour une observation avec bruit) définie par h s'il existe un contrôle w tel que :*

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{\partial S}{\partial \tau}(0,0) = 0, \quad \forall \widehat{y}^0 \in L^2(\Omega), \\ 2 - \int_0^T \int_O h.m_i \; dxdt + \int_0^T \int_\omega w.m_i \; dxdt = 0, \; 1 \leq i \leq n. \\ 3 - \|w\|_{L^2(\omega \times (0,T))} = \min \end{cases}$$

On va maintenant montrer que l'existence d'une sentinelle discriminante insensible aux termes de bruit et aux termes manquants est équivalente à un problème de contrôlabilité à zéro avec contraintes sur le contrôle.Soit K le sous espace vectoriel de $L^2(\omega \times (0,T))$ engendré par les $\left(m_i \chi_\omega, \; 1 \leq i \leq n\right)$, que l'on suppose linéairement indépendants. Alors, on a le lemme suivant :

Lemme 2.6 *L'application*

$$\begin{array}{rcl} f & : & K \to R^n \\ k & \to & f(k) = \left(\displaystyle\int_0^T \int_\omega k.m_1 \; dxdt, \int_0^T \int_\omega k.m_2 \; dxdt, ..., \int_0^T \int_\omega k.m_n \; dxdt \right) \end{array}$$

est un isomorphisme. Deplus, la condition d'insensibilité aux termes de bruits est équivalente à

$$\exists k_0 \in K \; \text{ tel que } w = k_0 + k \; \text{ avec } k \in K^{\perp}. \tag{2.52}$$

Preuve.L'application f est linéaire et bijective, car

$$\begin{array}{rcl} \ker f & = & \{k \in K, \; f(k) = 0\}, \\ & = & \left\{ k \in K, \; \displaystyle\int_0^T \int_\omega k.m_i \; dxdt = 0, \quad \forall i = 1, ..., N \right\}, \\ & = & \left\{ k = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i m_i, \; \displaystyle\int_0^T \int_\omega k \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i m_i \; dxdt = 0 \right\}, \\ & = & \left\{ k \in K \; , \; \|k\|^2_{L^2(\omega \times (0,T))} = 0 \right\} = \{0\}, \end{array}$$

d'où f est injective et par suite elle est isomorphisme. Par conséquent, on a

$$\forall \alpha \in R^n, \; \exists! k_0 \in K \text{ tel que } f(k_0) = \alpha,$$

ce qui équivalent à

$$\forall \alpha_i \in R, \; \exists! k_0 \in K \text{ tel que } \int_0^T \int_\omega k_0.m_i \; dxdt = \alpha_i, \quad i = 1, ..., n.$$

De la condition d'insensibilité, il vient

$$-\int_0^T \int_O h.m_i \; dxdt = \int_0^T \int_\omega w.m_i \; dxdt, \quad \forall i = 1, ..., n$$

pour

$$\alpha_i = -\int_0^T \int_O h.m_i \; dxdt,$$

on déduit que

$$\int_0^T \int_\omega k_0.m_i \; dxdt = \int_0^T \int_\omega w.m_i \; dxdt,$$

par suite, on conclut

$$w - k_0 \in K^{\perp}.$$

Ainsi $\qquad w - k_0 = k \quad avec \quad k \in K^{\perp} \quad et \;\; k_0 \in K.$ ■

Le problème d'existence d'une sentinelle discriminante est alors équivalent au problème suivant

$$(P_2)\begin{cases} \min \|k\|_{L^2(]0,T[\times\omega)} \\ k \in A_2 \end{cases},$$

où

$$A_2 = \left\{ k \text{ tel que } \left| \begin{array}{ll} -\dfrac{\partial q}{\partial t} - \Delta q + f'(y_0)q = h^*\chi_{_O} + k\chi_\omega & dans \;\; Q, \\ q(T) = q(0) = 0 & dans \;\; \Omega, \\ q = 0 & sur \;\; \sum_1, \\ \dfrac{\partial q}{\partial \nu} = 0 & sur \;\; \sum_2 . \end{array} \right. \right\} \tag{2.53}$$

où $h^* = h\chi_{_O} + k_0\chi_\omega$. On définit une forme bilinéaire symétrique de $V \times V$ dans R par

$$a(u,v) = \int_0^T \int_\Omega Lu.Lv \; dxdt + \int_0^T \int_\omega (u - Pu) \, . \, (v - Pv) \, dxdt,$$

P est la projection orthogonale de $L^2\left(\omega \times (0,T)\right)$ sur K, et V est un espace donné par (2.27).

Pour que le domaine des contraintes soit non vide, on utilise une inégalité de Carleman adaptée à notre problème. La proposition suivante montre bien que le domaine A_2 est non vide.

Proposition 2.7 *Soit $\overline{u} \in W$ l'unique solution de*

$$a(\overline{u}, v) = \int_0^T \int_\Omega h\chi_O v dxdt \quad \forall v \in W. \tag{2.54}$$

On suppose que

i) $\left\{ \nexists k \in K, \; k \neq 0 \;\; \textit{tel que: } \dfrac{\partial k}{\partial t} - \Delta k + f'(y_0)k = 0 \;\; \textit{dans} \;\; \omega \times (0,T) \right.,$

ii) $h \in L^2(Q)$ *et que* $\theta h \in L^2(Q)$*, avec*

$$\begin{cases} \overline{k} = -(\overline{u} - P\overline{u})\chi_\omega, \\ \overline{q} = L\overline{u}. \end{cases} \tag{2.55}$$

Alors $(\overline{k},\overline{q})$ est solution du système

$$\left|\begin{array}{lr} -\dfrac{\partial q}{\partial t}-\Delta q+f'(y_0)q=h\chi_{_O}+k_0\chi_\omega+w\chi_\omega & dans \;\; Q, \\ q(T)=q(0)=0 & dans \;\; \Omega, \\ q=0 & sur \;\; \sum_1 . \\ \dfrac{\partial q}{\partial \nu}=0 & sur \;\; \sum_2, \end{array}\right. . \tag{2.56}$$

c-à-d il existe une sentinelle discriminante. De plus, on a

$$\begin{aligned} \|\overline{u}\|_W &\leq C\left\|\theta\left(h\chi_{_O}+k_0\chi_\omega\right)\right\|_{L^2(Q)}, \qquad (2.57)\\ \left\|\overline{k}\right\|_{L^2(\omega\times(0,T))} &\leq C\left\|\theta(h\chi_{_O}+k_0\chi_\omega)\right\|_{L^2(Q)}, \\ \|\overline{q}\| &\leq C\left\|\theta(h\chi_{_O}+k_0\chi_\omega)\right\|_{L^2(Q)}, \end{aligned}$$

où C est une constante positive, qui n'est pas la même à chaque fois.

Ce problème est équivaut à un problème de contrôlabilité à zéro avec des contraintes sur le contrôle ($k\in K^\perp$) non trivial.

Théorème 2.3 *Sous les hypothèses de la proposition précédente, il existe un couple unique $(\widehat{k},\widehat{q})$ solution du problème (P_2).*

Preuve. Les hypothèses de la proposition précédente sont réalisées, d'où le domaine A_2 est non vide, de plus il est fermé. D'autre part, l'application $k\rightarrow\|k\|_{L^2(\omega\times(0,T))}$ est continue, coercive et strictement convexe, donc il existe une et une seule solution pour (P_2) qu'on note $(\widehat{k},\widehat{q})\in A_2$ et qui vérifie

$$\left\|\widehat{k}\right\|_{L^2(\omega\times(0,T))}\leq\|k\|_{L^2(\omega\times(0,T))},\forall(k,q)\in A_2. \blacksquare$$

2.12 Sentinelle faible

Dans cette section, on utilise une notion appelée " sentinelle faible" ([2],[14]) pour étudier l'estimation du terme de pollution du systèmes distribués faiblement contrôlable indépendament du terme manquant. Soit le système (2.5) avec

$$\|\widehat{y}_0\|_{L^2(\Omega)}\leq 1,\left\|\widehat{\zeta}\right\|_{L^2(Q)}\leq 1$$

et $\omega = O$. on a la définition suivante :

Définition 2.5 *On dit que la fontionnelle S définie par*

$$S(\lambda, \tau) = \int_O \int_0^T (h + w).y(x, t, \lambda, \tau)dxdt,$$

est une sentinelle faible (ou sentinelle approchée) s'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un contrôle w_ε tel que

$$\left.\frac{\partial S}{\partial \tau}(\tau, \lambda)\right|_{\tau=0,\lambda=0,} \leq \varepsilon, \quad \forall \widehat{y}^0 \in L^2(\Omega), \tag{2.58}$$

et

$$\|w_\varepsilon\|_{L^2(O\times(0,T))} = \min. \tag{2.59}$$

Pour construire la sentinelle faible, on doit déterminer w_ε qui assure les conditions (2.58) et (2.59). Le problème d'existence d'une sentinelle faible est alors équivalent au problème suivant :

$$(P_3)\begin{cases} \min \|w_\varepsilon\|_{L^2(O\times]0,T[)} \\ w_\varepsilon \in A_3 \end{cases}$$

où

$$A_3 = \left\{ w_\varepsilon \text{ tel que } \left| \begin{array}{ll} -\dfrac{\partial q}{\partial t} - \Delta q + f'(y_0)q = (h + w_\varepsilon)\chi_O & dans \;\; Q, \\ q(T) = 0 & dans \;\; \Omega, \\ q = 0 & sur \;\; \Sigma\,. \end{array} \right. \right\} \tag{2.60}$$

Remarque 2.6 *L'approche par la méthode des sentinelles faible est équivaut à un problème de contrôlabilité faible.*

Théorème 2.4 *Si le système dans (2.60) est faiblement contrôlable, alors pour tout ε positif, il existe une fonction $w_\varepsilon \in L^2(O \times (0, T))$ qui vérifie les conditions (2.58) et (2.59).*

Preuve.

Si le système dans (2.60) est faiblement contrôlable, alors pour $q(0) \in L^2(\Omega)$ et pour tout ε positif, il existe une fonction $w_\varepsilon \in L^2(O \times (0, T))$ tel que

$$\begin{aligned} \int_\Omega q(0).\widehat{y}^0 dx &\leq \varepsilon, \\ \|q(0)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \varepsilon, \end{aligned} \tag{2.60}$$

et donc

$$\frac{\partial S(\lambda,\tau)}{\partial \tau} = \int_0^T \int_O (h + w_\varepsilon).y_\tau(x,t,\lambda,\tau)dxdt,$$

où y_τ est la solution du (2.14), donc

$$\frac{\partial S(\lambda,\tau)}{\partial \tau} = \int_\Omega q(0).\widehat{y}^0 dx \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve (2.58) et (2.59). ■

La contrainte (2.60) peuve donc théoriquement être approchée avec une précision arbitraire. On peut donc, utiliser des algorithmes de contrôlabilité approchée.

Chapitre 3

SYSTEME HYPERBOLIQUE A DONNEES MANQUANTES

Nous allons voir que certains résultats obtenus aux chapitre précédent peuvent s'appliquer au cas des systèmes hyperboliques à données manquantes. On va chercher des méthodes permettant d'obtenir des informations sur les termes de pollution qui ne soient pas affectées par les variations du terme manquant.
L'équation hyperbolique modélise la propagation des ondes ou des vibrations. Par exemple :

1- *la propagation au cours du temps du déplacement vertical d'une membrane élastique,*

2- *l'amplitude d'un champ électrique de direction constante,*

3- *un problème de transport où on connaisse l'emplacement d'une nappe de pétrole due au dégazement intempestif d'un supertanker au large des côtes et qu'on cherche à prévoir son déplacements dans les heures à venir pour la mise en oeuvre efficace de barrage.*

On va d'abord, appliquer la méthode de sentinelle sur une équation d'onde a données manquantes définie sur un domaine monodimensionnel.

3.1 Contrôle insensible pour un équation d'onde 1-D

On va étudie la propriété de la contrôlabilité insensibilisant d'un équation des ondes unidimensionnel, observée dans un ouvert $O \subset \Omega$, où le contrôle agit dans une région interne. Dans ce cas, si le temps T est suffisamment grand, la contrôlabilité ε-insensibilisant atteint.

3.1.1 Position du problème

Considérons l'équation d'onde, contrôlée, avec des conditions initiales partiellement connus suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \triangle y = \zeta + u\chi_\omega & \text{dans } R \times (0,1), \\ y(0,x) = y_0 + \tau_0 \widehat{y}_0 & \text{dans } (0,1), \\ y'(0,x) = y_1 + \tau_1 \widehat{y}_1 & \text{dans } (0,1), \\ y = 0 & \text{sur } R \times \{0,1\}, \end{cases} \tag{3.1}$$

La fonction $y(x,t)$ n'est que partiellement définie dans le sens suivant :
$y_0 \in H_0^1(0,1)$, $y_1 \in L^2(0,1)$, $\zeta \in L^2(R \times (0,1))$ et $u \in L^2(R \times \omega)$ est la fonction du contrôle qui agit sur un domaine ω de $[0,1]$. Les termes inconnues $(\tau_0 \widehat{y}_0, \tau_1 \widehat{y}_1)$ sont des petites perturbations sur les données initiales où les réels (τ_0, τ_1) sont arbitrairement petits et $\widehat{y}_0, \widehat{y}_1$ vérifient :

$$\|\widehat{y}_0\|_{H_0^1(0,1)} = \|\widehat{y}_1\|_{L^2(0,1)} = 1, \tag{3.2}$$

alors le système (3.1) admet une solution unique d'énergie finie, pour tout $T > 0$

$$y \in C(0,T,H_0^1(0,1)) \cap C^1(0,T,L^2(0,1)).$$

Soit Φ une fonctionnelle différentiable définie comme suit :

$$\Phi(y) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_O y^2(x,t)dxdt, \tag{3.3}$$

où y est la solution du système contrôlée (3.1), $T > 0$ et O est un ensemble ouvert de $[0,1]$. Notons que Φ correspond à l'observation des solutions apportées dans l'intervalle O pendant un intervalle de temps de longueur T.

La notion du *contrôle insensibilisant* a été introduit par J. L. Lions lors d'un cours au collège de France puis dans [42]. Plus tard, Bodart et Fabre dans [14, 18] ont proposé la notion du contrôle ε-insensibilisant.

Définition 3.1 *Étant donné un Contrôle u, nous disons que u est insensibilise $\Phi(y)$ si pour chaque couple $(\widehat{y}_0, \widehat{y}_1)$ vérifient (3.2) correspond à la solution de (3.1), on a*

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau_0}\,\Phi(y)|_{\tau_0=\tau_1=0} &= 0, \\ \frac{d}{d\tau_1}\,\Phi(y)|_{\tau_0=\tau_1=0} &= 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Cette définition signifie qu'on cherche à rendre la fonctionnelle Φ localement insensible aux perturbations $(\tau_0\widehat{y}_0, \tau_1\widehat{y}_1)$. Beaucoup de choix de fonctionnelle sont possible, mais les conditions (3.4) sont inutilisables à moins d'être reformulées en un problème de contrôlabilité. C'est pourquoi, il semble raisonable que Φ soit le carré de la norme d'une partie de l'état. Ce cas (3.4) conduit à un problème de contrôlabilité exacte qui est trés difficile à résoudre. Il semble donc utile d'introduire la notion de contrôle approximativement insensibilisant ou ε-insensibilisant :

Définition 3.2 *Étant donné $\varepsilon > 0$, le contrôle u est dite ε-insensibilise $\Phi(y)$ si pour chaque couple $(\widehat{y}_0, \widehat{y}_1)$ vérifient (3.2) correspond à la solution de (3.1), on a*

$$\begin{aligned} \left|\frac{d}{d\tau_0}\,\Phi(y)|_{\tau_0=\tau_1=0}\right| &\leq \varepsilon, \\ \left|\frac{d}{d\tau_1}\,\Phi(y)|_{\tau_0=\tau_1=0}\right| &\leq \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.5}$$

c'est-à-dire un contrôle qui rendent l'observation quasi-insensible aux perturbations des conditions initiales.

Nous allons étudier l'existence du contrôle ε-insensibilisant pour le système (3.1), pour cela on va utiliser la technique proposée par J. L. Lions.

3.1.2 Problème de prolongement unique

La principale technique pour prouver l'existence des contrôles qui rendent Φ ε-insensible aux perturbations initiales est de trouver des contrôles conduits à un problème de contrôlabilité approchée pour un système en cascade c'est-à-dire un problème d'observabilité indirecte. En Particulier, l'existence d'un contrôle ε-insensibilisant prouve à partir d'une propriété de prolongement unique pour le système adjoint.

Première étape :

Elle consiste à réduire notre problème (3.1) à un problème de contrôlabilité approchée. Considérons le système - contrôlée - des équations des ondes suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \overline{y}}{\partial t^2} - \triangle \overline{y} = \zeta + u\chi_\omega & \text{dans } R \times (0,1), \\ \overline{y}(0,x) = y_0 & \text{dans } (0,1), \\ \overline{y}'(0,x) = y_1 & \text{dans } (0,1), \\ \overline{y} = 0 & \text{sur } R \times \{0,1\}, \end{cases} \tag{3.6}$$

où $\overline{y}$ est la solution du système (3.1) avec $\tau_0 = \tau_1 = 0$, son système adjoint est donné par

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \triangle q = \overline{y}\chi_O & \text{dans } R \times (0,1), \\ q(T,x) = 0 & \text{dans } (0,1), \\ q'(T,x) = 0 & \text{dans } (0,1), \\ q = 0 & \text{sur } R \times \{0,1\}. \end{cases} \tag{3.7}$$

Pour $\overline{y}\chi_O \in L^2(R \times (0,1))$, le système (3.7) admet une solution unique

$$q \in C(0,T,H_0^1(0,1)) \cap C^1(0,T,L^2(0,1)).$$

Proposition 3.1 *Etant donné $y_0 \in H_0^1(0,1)$, $y_1 \in L^2(0,1)$ et $\zeta \in L^2(R\times(0,1))$. Le contrôle u est $\varepsilon-$insesibilisant Φ si est seulement si la solution $(\overline{y},q)$ du système (3.6)-(3.7) vérifie :*

$$\|q(0,x)\|_{L^2(0,1)} < \varepsilon, \quad \|q'(0,x)\|_{H^{-1}(0,1)} < \varepsilon. \tag{3.8}$$

Preuve.

La dérivée de Φ par rapport à τ_0 en $\tau_0 = \tau_1 = 0$ est

$$\frac{d}{d\tau_0}\,\Phi(y)|_{\tau_0=\tau_1=0} = \int_0^T \int_O \overline{y}.y_{\tau_0} dxdt, \tag{3.9}$$

où $y_{\tau_0} = \dfrac{dy}{d\tau_0}$ est la solution du système

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 y_{\tau_0}}{\partial t^2} - \triangle y_{\tau_0} = 0 & \text{dans } R \times (0,1), \\ y_{\tau_0} = 0 & \text{sur } R \times \{0,1\}, \\ y_{\tau_0}(0,x) = \widehat{y}_0 & \text{dans } (0,1), \\ y'_{\tau_0}(0,x) = 0 & \text{dans } (0,1), \end{array} \right. \tag{3.10}$$

en miltipliant (3.10) par q puis en intégrant par parties, on obtient :

$$\int_0^T \int_O \overline{y}.y_{\tau_0} dxdt = \int_0^T \int_0^1 \overline{y}\chi_O.y_{\tau_0} dxdt = \int_0^T \int_0^1 (q_{tt} - q_{xx}) y_{\tau_0} dxdt = -\int_0^1 q'(0,x)\widehat{y}_0 dx,$$

l'expression (3.9) devient

$$\frac{d}{d\tau_0} \Phi(y)|_{\tau_0=\tau_1=0} = -\int_0^1 q'(0,x).\widehat{y}_0 dx. \tag{3.11}$$

De la même manière, on peut montrer que

$$\frac{d}{d\tau_1} \Phi(y)|_{\tau_0=\tau_1=0} = \int_0^1 q(0,x).\widehat{y}_1 dx. \tag{3.12}$$

En utilisant (3.2), on obtient

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{d\tau_0} \Phi(y)|_{\tau_0=\tau_1=0} \right| &= \left| \int_0^1 q'(0,x).\widehat{y}_0 dx \right| \leq \int_0^1 \left| q'(0,x).\widehat{y}_0 \right| dx \\ &\leq \left(\int_0^1 \left| q'(0,x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 \left| \widehat{y}_0 \right|^2 dx \right)^{1/2}. \\ &\leq \left\| q'(0,x) \right\|_{H^{-1}(0,1)} < \varepsilon, \end{aligned}$$

et avec la même manière

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{d\tau_1} \Phi(y)|_{\tau_0=\tau_1=0} \right| &= \left| \int_0^1 q(0,x).\widehat{y}_1 dx \right| \leq \int_0^1 \left| q(0,x).\widehat{y}_1 \right| dx \\ &\leq \left(\int_0^1 \left| q(0,x) \right|^2 dx \right)^{1/2} . \left(\int_0^1 \left| \widehat{y}_1 \right|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\qquad \left\| q(0,x) \right\|_{L^2(0,1)} < \varepsilon.$ ■

Nous avons donc à prouver la contrôlabilité approchée du couple $(\overline{y}, q)$ au sens de (3.8) c'est-à-dire que le contrôle u agit sur $\overline{y}$ qui détermine q et on désire contrôler approximativement $q(.,0)$ et $q'(.,0)$.

Deuxième étape :

On cherche à caractériser la propriété de la contrôlabilité approchée (3.8) en terme de système adjoint à (3.6)-(3.7). Soit (p,z) les solutions du systèmes suivants :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \triangle p = 0 & \text{dans } R \times (0,1), \\ p(0,x) = p_0 & \text{dans } (0,1), \\ p'(0,x) = p_1 & \text{dans } (0,1), \\ p = 0 & \text{sur } R \times \{0,1\}, \end{cases} \tag{3.13}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \triangle z = p\chi_O & \text{dans } R \times (0,1), \\ z(T,x) = 0 & \text{dans } (0,1), \\ z'(T,x) = 0 & \text{dans } (0,1), \\ z = 0 & \text{sur } R \times \{0,1\}, \end{cases} \tag{3.14}$$

avec $(p_0,p_1) \in H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$, alors les systèmes (3.13)-(3.14) admet une solution unique

$$(p,z) \in C([0,T], H_0^1(0,1)) \cap C^1([0,T], L^2(0,1)),$$

en particulier $z \in L^2([0,T] \times (0,1))$. On a le résultat suivant :

Proposition 3.2 *Soient $\overline{y}$, q, p, z les solutions de (3.6)-(3.7), (3.13)-(3.14). On a pour tout $u \in L^2(R \times (0,1))$ et $(y_0,y_1), (p_0,p_1) \in H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$*

$$\begin{aligned} & \int_{(0,T)\times\omega} u.zdxdt + \int_{(0,T)\times(0,1)} \zeta.zdxdt \\ = & \int_0^1 (y_0.z'(0,x) - y_1.z(0,x))\,dx + \int_0^1 (p_0.q'(0,x) - p_1.q(0,x))\,dx. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Preuve. En miltipliant (3.6) par z puis en intégrant par parties, on obtient

$$\int_{(0,T)\times\omega} u.zdxdt + \int_{(0,T)\times(0,1)} \zeta.zdxdt = \int_0^1 (y_0.z'(0,x) - y_1.z(0,x))\,dx + \int_{(0,T)\times O} p.\overline{y}dxdt$$

puis, en miltipliant (3.13) par q et en intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^1 (p_0.q'(0,x) - p_1.q(0,x))\,dx = \int_{(0,T)\times(0,1)} p.(q_{tt} - q_{xx})dxdt = \int_{(0,T)\times O} p.\overline{y}dxdt$$

d'où le résultat. ■

Proposition 3.3 *Si l'ensemble* $B = \{(q(0,.), q'(0,.)),\ u \in L^2(R \times (0,1)\}$ *est dense dans* $L^2(0,1) \times H^{-1}(0,1)$*, alors la propriété de contrôlabilité approchée (3.8) est vraie si et seulement si la propriété du prolongement unique suivante :*

$$z \equiv 0 \quad dans\ [0,T] \times \omega \implies z \equiv p \equiv 0 \quad dans\ [0,T] \times (0,1)\,, \tag{3.16}$$

est vraie pour tout $(p_0, p_1) \in H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$.

Preuve.

$\Leftarrow$) Soient $(p_0, p_1) \in H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$ tels que :

$$\int_0^1 (p_0.q'(0,x) - p_1.q(0,x))\,dx = 0,$$

pour tout $u \in L^2(R \times (0,1))$ et $(y_0, y_1) \in H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$. Ensuite, de l'expression (3.15), on a

$$\int_{(0,T)\times\omega} u.zdxdt = -\int_{(0,T)\times(0,1)} \zeta.zdxdt + \int_0^1 (y_0.z'(0,x) - y_1.z(0,x))\,dx.$$

Comme le terme de droite de cette égalité ne dépend pas de u, afin de choisir $u = 0$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_{(0,T)\times\omega} u.zdxdt &= 0 \qquad \text{pour tout } u \in L^2(R \times (0,1)), \\ &\implies z = 0 \text{ dans } (0,T) \times \omega. \end{aligned}$$

La propriété du prolongement unique, donne

$$p \equiv 0 \text{ dans } [0,T] \times (0,1) \implies p_0 = p_1 = 0,$$

et d'aprés le théorème de Hahn-Banach, il s'ensuit que B est dense dans $L^2(0,1) \times H^{-1}(0,1)$.

$\Longrightarrow$) On suppose qu'il existe un couple $(p_0, p_1) \neq (0,0)$ tel que $z \equiv 0$ dans $[0,T] \times \omega$. Soit (y_0, y_1) tel que

$$\int_{(0,T)\times(0,1)} \zeta.zdxdt = \int_0^1 (y_0.z'(0,x) - y_1.z(0,x))\, dx,$$

De (3.15), on a

$$\int_0^1 (p_0.q'(0,x) - p_1.q(0,x))\, dx = 0,$$

donc B n'est pas dense dans $L^2(0,1) \times H^{-1}(0,1)$. ■

D'après les propositions (3.2)-(3.3), on obtient le résultat suivant :

Proposition 3.4 *Si les solutions des systèmes (3.13)-(3.14) vérifient la propriété du prolongement unique (3.16) alors*

$$\forall \varepsilon > 0, \zeta \in L^2(R \times (0,1)) \text{ et } (y_0, y_1) \in H_0^1(0,1) \times L^2(0,1),$$

il existe un contrôle $u^\varepsilon \in L^2(R \times (0,1))$ asssocie a la solution y^ε du système (3.1) *tel que la fonctionelle Φ verifie (3.5).*

Dans le cas $\omega \cap O \neq \phi$, la propriété du prolongement unique (3.16) est réduite à la propriété du prolongement unique usuel des équations des ondes. En effet,

$$z \equiv 0 \text{ dans } [0,T] \times (\omega \cap O),$$

est donc la fonction p compte tenu de (3.14). Par conséquent, si $[0,T] \times (\omega \cap O)$ est une région liée a la propriété du prolongement unique pour l'équation des ondes (c'est à dire, si la solution inclut dans $[0,T] \times (\omega \cap O)$, donc elle est inclut dans $[0,T] \times (0,1)$), alors

$$p \equiv 0 \text{ dans } [0,T] \times (0,1) \Longrightarrow z \equiv 0 \text{ dans } [0,T] \times (0,1).$$

Remarque 3.1 *:*

1- Pour l'équation des ondes dans R^n la propriété du prolongement unique à partir d'une région $[0,T] \times U$ dépend à la fois de T et de la géométrie de U.

2- Pour l'équation des ondes monodimensionnel considéré ici, la prolongement unique d'une région $[t_1, t_2] \times (0,1)$ vérifie chaque fois que $(t_2 - t_1) \geq 2$ (c'est-à-dire deux fois la longueur de l'intervalle $(0,1)$).

2- Quand $\omega \cap O = \phi$, ces arguments ne peuvent pas être appliqués, et le problème devient plus difficile, mais on peut appliquer la méthode de A. El Jai et E. Zerrik où on cherche à obtenir le domaine d'oservation O qui assure la contrôlabilité approchée [33,75,76].

3.1.3 Résultats de prolongement unique

Dans ce paragraphe, nous montrons que la propriété de prolongement unique (3.16) est vraie pour T suffisamment grand et pour ω et O choisie arbitrairement, indépendamment de savoir si leur intersection est vide ou non. Comme conséquence des propositions (3.3) et (3.4), nous obtenons l'existence du contrôle $\varepsilon-$insensiblisant.

Proposition 3.5 *Soient ω, O des ensembles non vides de $[0,1]$ et $T \geq 4$. La propriété de prolongement unique (3.16) est valable pour les solutions du système (3.13)-(3.14).*

En conséquence, on a le résultat suivant :

Théorème 3.1 *Soient ω, O deux ensembles non vides de $[0,1]$ et $T \geq 4$.*

Alors, pour tout $\varepsilon > 0, \zeta \in L^2(R \times (0,1))$ et $(y_0, y_1) \in H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$, il existe un contrôle $u^\varepsilon \in L^2(R \times (0,1))$ qui est $\varepsilon-$insensiblisant la fonctionnelle Φ le long de la solution du système (3.1).

La condition ($T \geq 4$) est naturelle pour l'équation d'onde due à la vitesse finie de propagation de ses solutions. En effet, il est possible de prouver que, pour tout $T < 2$, on peut choisir une région d'observation O de telle sorte que la solution non triviale de (3.17) satisfait à

$$p = 0 \textit{ dans } [0,T] \times O,$$

donc

$$z = 0 \textit{ dans } [0,T] \times (0,1).$$

Cela signifie que la propriété de la prolongement unique n'est pas vérifiée.
Pour $2 < T < 4$, nous ne sais pas si la propriété est vraie ou non...
Néanmoins, l'état $T \geq 4$ (deux fois la somme de longueur d'intervalle) semble être naturel dans le contexte de l'équation des ondes. Plusieurs exemples de cette situation sont donnés dans [38].

Notez cependant que pour chaque choix particulier de l'intervalle d'observation O, le temps d'observation minimale pour garantir la propriété de prolongement unique est strictement inferieure à 4.

Proposition 3.6 *Soient ω, O des ensembles non vide de $[0,1]$ et $T \geq 4$. Alors, il existe une constante positive C tel que pour toute solution de (3.13)-(3.14) on a*

$$C \left\| (p_0, p_1) \right\|_{1,0}^2 \int_0^T \int_\omega z^2 dx dt \geq \left\| (p_0, p_1) \right\|_{0,-1}^4 ,$$

où $\|.\|_{1,0} = \left(\|.\|_{H_0^1(0,1)}^2 + \|.\|_{L^2(0,1)}^2 \right)^{1/2}, \quad \|.\|_{0,-1} = \left(\|.\|_{L^2(0,1)}^2 + \|.\|_{H^{-1}(0,1)}^2 \right)^{1/2}.$

Rappelons quelques résultats connus qui seront utilisés dans la preuve.
Nous utilisons, essentiellement, le fait que la première équation de (3.13) est un équation linéaire homogène d'onde 1-D

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \triangle p = 0 & \text{dans } R \times (0,1), \\ p(0,x) = p_0 & \text{dans } (0,1), \\ p'(0,x) = p_1 & \text{dans } (0,1), \\ p = 0 & \text{sur } R \times \{0,1\}. \end{cases} \tag{3.17}$$

Les solutions de (3.17) sont périodiques dans le temps avec une période égale à 2, ce qui peut être facilement obtenu, par exemple, du fait que la solution est de la forme

$$p(t,x) = g(t+x) - g(t-x), \tag{3.18}$$

où g est une fonction 2-periodique. Notons que les dérivées p_x et p_t ont la même propriété du périodicité. En outre, d'après la formule de représentation (3.18), on peut montrer la propriété du prolongement unique pour les solutions de (3.17) si $(t_2 - t_1) \geq 2$, alors chacune des égalités $p = 0$ dans $[t_1, t_2] \times U$ avec $p(t,1) = 0$ dans $[t_1, t_2]$ et $p_x(t,1) = 0$ dans $[t_1, t_2]$ implique $p = 0$ dans $[t_1, t_2] \times (0,1)$. Il existe des constantes positives C_1, C_2 telle que pour tout p solution de (3.17)

$$C_1 \int_{t_1}^{t_2} \int_\omega p^2 dx dt \geq \left\| (p_0, p_1) \right\|_{0,-1}^2 , \tag{3.19}$$

$$C_2 \int_{t_1}^{t_2} p_x^2(t,1)dt \geq \|(p_0,p_1)\|_{1,0}^2 \,. \tag{3.20}$$

En outre, les lois de conservation suivantes sont vraies pour la solution de (3.17)

$$\|(p(\mu,.),p_t(\mu,.)\|_{1,0} = \|(p_0,p_1)\|_{1,0}\,, \tag{3.21}$$

$$\|(p(\mu,.),p_t(\mu,.)\|_{0,-1} = \|(p_0,p_1)\|_{0,-1}\,, \tag{3.22}$$

pour tout $\mu \in R$.

Preuve.

Soit T_0 le plus petit nombre positif tel que $(T - T_0) \in 2\mathbb{Z}$. L'inégalité indiquée dans la proposition est obtenue à partir des deux inégalités suivantes :

$$C_1 \int_{t_1}^{t_2} \int_\omega z^2 dxdt \geq \|(z(T_0),z'(T_0))\|_{0,-1}^2\,, \tag{3.23}$$

$$C_2 \|(z(T_0),z'(T_0))\|_{0,-1} \times \|(p_0,p_1)\|_{1,0} \geq \|(p_0,p_1)\|_{0,-1}^2\,, \tag{3.24}$$

pour chaque solution (p,z) de (3.13)-(3.14) avec des constantes positives C_1, C_2 indépendantes de (p,z).

Afin de prouver l'inégalité (3.23), nous définissons l'opérateur "L" linéaire agissant sur une fonction $v(t)$ par :

$$(Lv)(t) = v(t-1) - v(t+1).$$

Notez que L est continue de $L^2(\alpha,\beta)$ sur $L^2(\alpha-1,\beta+1)$ pour tout α,β avec $\beta \geq \alpha - 2$.

En outre, pour la solution z de (3.14), on note

$$\psi(t,x) = (Lz)(t,x) = z(t+1,x) - z(t-1,x).$$

La continuité de L imlique

$$C \int_0^T \int_\omega z^2 dxdt \geq \int_1^{T-1} \int_\omega \psi^2 dxdt, \tag{3.25}$$

pour un constant positive C independent de z.

D'autre part, la périodicité en temps de la solution p donne que ψ est une solution de l'équation :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \triangle\psi = 0 & \text{dans } R\times(0,1), \\ \psi = 0 & \text{sur } R\times\{0,1\}, \end{cases}$$

puisque $(T-1)-1 = T-2 \geq 2$, l'inégalité (3.19) et (3.22) implique

$$C\int_1^{T-1}\int_\omega \psi^2 dxdt \geq \|(\psi(\mu,.),\psi_t(\mu,.))\|_{0,-1}^2 \quad \text{pour tout } \mu\in R. \tag{3.26}$$

Posons $n = (T-T_0)/2$. On observe alors que

$$\begin{aligned} \|z(T)-z(T_0)\|^2 &= \left\|\sum_{k=0}^{n-1} z(T-2k) - z(T-2k-2)\right\|^2 \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} \|z(T-2k)-z(T-2k-2)\|\right)^2 \\ &\leq n\sum_{k=0}^{n-1} \|z(T-2k)-z(T-2k-2)\|^2 \\ &= n\sum_{k=0}^{n-1} \|\psi(T-2k-1)\|^2. \end{aligned}$$

Ainsi, à partir de l'inégalité (3.26), nous obtenons :

$$\|z(T)-z(T_0)\|_0^2 \leq n^2C\int_1^{T-1}\int_\omega \psi^2 dxdt,$$

et avec la même méthode, on obtient

$$\|z'(T)-z'(T_0)\|_{-1}^2 \leq n^2C\int_1^{T-1}\int_\omega \psi^2 dxdt.$$

Des deux dernières inégalités, le fait que $z(t,x) = z'(t,x) = 0$ et de (3.25), on obtient l'inégalité (3.23).

Pour prouver l'inégalité (3.24), nous multiplions (3.14) par p et intégrons sur $[T_0,T]\times(0,1)$

$$\int_{T_0}^T\int_O p^2 dxdt = \int_0^1 (z'(T_0)p(T_0) - z(T_0)p'(T_0))dx. \tag{3.27}$$

Maintenant, observons que, d'une part

$$\int_0^1 (z'(T_0)p(T_0) - z(T_0)p'(T_0))dx \leq \|(z(T_0),z'(T_0))\|_{0,-1} \times \|(p(T_0),p'(T_0))\|_{1,0}.$$

D'autre part, de l'inégalité (3.19), on arrive a

$$\int_{T_0}^{T}\int_{O} p^2 dxdt \geq C \left\|(p_0,p_1)\right\|_{0,-1}^2 .$$

Par conséquent, l'inégalité est satisfaite. ■

Remarque 3.2 *: Bien que l'inégalité d'observabilité fournie par la proposition* (3.6) *assure la propriété de prolongement unique approprié, puis la contrôlabilité approchée du système* (3.6)-(3.7)*, mais pas assez bon pour garantir la contrôlabilité exacte de ce système, car il ne nous permet pas d'estimer une norme de* (p_0, p_1) *en fonction de la quantité observée*

$$\int_0^T\int_\omega z^2 dxdt.$$

3.2 Système Hyperbolique a données manquantes

Soit Ω un ouvert borné de R^N de frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma$, ω est un sous ensemble non vide de Ω. Pour $T > 0$, posons $Q = \Omega \times]0,T[$, $\Sigma = \Gamma \times]0,T[$, $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0,T[$ avec $\Gamma_0 \subset \Gamma$. On considère le système décrit par l'équation hyperbolique suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \triangle y + f(y) = 0 & \text{dans } Q, \\ y(0) = y_0 + \tau_0 \widehat{y}_0 & \text{dans } \Omega, \\ y'(0) = y_1 + \tau_1 \widehat{y}_1 & \text{dans } \Omega, \\ y = g_0 + \lambda \widehat{g}_0 & \text{sur } \Sigma_0, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma/\Sigma_0, \end{cases} \tag{3.28}$$

où • y_0, y_1 et g_0 sont des fonctions donnée assez régulières ($y_0 \in H^1(\Omega)$, $y_1 \in L^2(\Omega)$),

• Les termes $\tau_0\widehat{y}_0, \tau_1\widehat{y}_1$ et $\lambda\widehat{g}_0$ sont des fonctions inconnues.

• Les réels λ et $\tau = (\tau_0, \tau_1)$ sont arbitrairement petits.

• La fonction $f \in C^1(R)$ non linéaire, continue et bornée. On peut prendre, plus généralement $f(y, \nabla y)$ au lieu de $f(y)$.

Remarque 3.3 *On peut remplacer* $(-\Delta y)$ *par*

$$Ay = \; -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial y}{\partial x_j}\right) + a_i(x,t)\frac{\partial y}{\partial x_i} + a_0(x,t)y,$$

où
$$a_{ij} = a_{ji}, \;\; a_{ij}(x,t)\zeta_i\zeta_j \geq \alpha.\zeta_i\zeta_i, \qquad \alpha > 0,$$
les coefficients a_{ij}, a_i et a_0 sont assez réguliers.

Le couple $(\tau_0\widehat{y}_0, \tau_1\widehat{y}_1)$ désigne le terme manquant et $\lambda\widehat{g}_0$ est le terme de pollution. On utilise la notation $y^0 \in L^2(\Omega)$ pour la solution du problème (3.28) où $\lambda = 0$ et $\tau = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y^0}{\partial t^2} - \triangle y^0 + f(y^0) = 0 & \text{dans } Q, \\ y^0(0) = y_0 & \text{dans } \Omega, \\ y^{0\prime}(0) = y_1 & \text{dans } \Omega, \\ \quad y^0 = g_0 & \text{sur } \Sigma_0, \\ \quad y^0 = 0 & \text{sur } \Sigma/\Sigma_0 \end{cases} \tag{3.29}$$

Si (y_0, y_1,$g_0, \tau_0\widehat{y}_0, \tau_1\widehat{y}_1$ et $\lambda\widehat{g}_0$) sont donnés, le problème (3.28) admet une solution unique que l'on note $y(x,t;\lambda,\tau_0,\tau_1)$. Le problème auquel nous nous intéressons dans ce travail est le suivant :

Existe-il des méthodes qui permettent d'otenir des informations sur la condition aux limites $\lambda\widehat{g}_0$ qui soient insensible au variation du terme manquant $(\tau_0\widehat{y}_0, \tau_1\widehat{y}_1)$?

Les sentinelles seront utilisés pour donner des éléments de réponse à cette question. Dans la résolution de ces problèmes, il est nécessaire de disposer des données mesurées de l'état y. Nous noterons dans la suite y_{obs} ces données expérimentales et ensuite évaluerons l'état y en fonction des paramètres recherchés.

3.2.1 Définition d'une sentinelle

La sentinelle de Lions est une fonction linéaire sensible a certaines paramètres qui on cherche à estimer mais insensible pour les autres, elle liée a trois considérations :

- Une équation d'état représente par (3.28) où sa solution est donnée par :

$$y(\lambda,\tau) = y(x,t;\lambda,\tau) = y(x,t;\lambda,\tau_0,\tau_1),$$

dépend de deux paramèters λ et $\tau = (\tau_0, \tau_1)$.

- Un observation

$$y(x,t;\lambda,\tau) = y_{obs}, \quad \forall (x,t) \in O \times \left]0,T\right[. \tag{3.30}$$

Nous supposerons que les mesures prélevées y_{obs} sont opérées dans un intervalle de temps $]0,T[$ et dans un domaine non vide O de Ω appelé *observatoire*.

- Une fonctionnelle S est associée à deux fonctions h et u tel que :

$$h \in L^2(O \times]0,T[), \tag{3.31}$$

et

$$u \in L^2(\omega \times]0,T[), \tag{3.32}$$

où S est définie comme suit :

$$S(\lambda,\tau) = \int_0^T \int_O hy(x,t,\lambda,\tau)dxdt + \int_0^T \int_\omega uy(x,t,\lambda,\tau)dxdt, \tag{3.33}$$

$$\Rightarrow S(\lambda,\tau) = \int_0^T \int_\Omega (h\chi_{_O} + u\chi_\omega)y(\lambda,\tau)dxdt, \tag{3.34}$$

où $\chi_{_O}$ et χ_ω sont les fonctions caractéristiques de O et ω respectivement tel que $O\cap\, \omega \neq \phi$.

Définition 3.3 *Soit S la fonction réelle (3.34) qui dépend a deux paramètres λ et τ. On dit que S est une sentinelle definie par h si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1) *La fonctionnelle S soit insesible par rapport à τ*

$$\left.\frac{\partial S}{\partial \tau}(\lambda,\tau)\right|_{\lambda=0,\tau=0} = 0, \tag{3.35}$$

$$i.e \quad \left.\frac{\partial S}{\partial \tau_0}(\lambda,\tau_0,\tau_1)\right|_{\lambda=0,\tau_0=\tau_1=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial S}{\partial \tau_1}(\lambda,\tau_0,\tau_1)\right|_{\lambda=0,\tau_0=\tau_1=0} = 0,$$

2) *Il existe un contrôle $u \in L^2(\omega \times]0,T[)$ tel que*

$$\|u\|_{L^2(\omega\times]0,T[)} = \min_{w\in U} \|w\|, \tag{3.36}$$

où $U = \left\{ w \in L^2(\omega \times]0,T[) \ tq \ \left.\frac{\partial S}{\partial \tau}(\lambda,\tau)\right|_{\lambda=0,\tau=0} = 0 \right\}.$

Remarque 3.4 *:*

1- Le cas $\omega = O$ correspond à la notion de sentinelle de Lions pour une observation et un contrôle ayant leurs supports dans un même ouvert.

2- L'existence d'une sentinelle est en fait une forme de problème d'observabilité, c'est-à-dire qu'on cherche à détecter des paramètres du système à partir d'une observation partielle de l'état.

3- Les conditions (3.35)-(3.36) imposées dans la définition pourront ne pas être vérifiables sauf de façons approchée, et on parlera alors d'une sentinelle approchée ou faible.

Dans le chapitre précédent, on pouvait prendre O et T arbitrairement petits. La situation ici est différente; il faudra prendre T assez grand dont la longueur dépendra de la taille de O. Ceci est tout à fait intuitif, une pollution s'exerçant sur Γ_0 ne saurait être décelée par une observation faite sur O avant que son influence n'ait été propagée jusqu'à O. De même a la fin de l'observation, les pollutions s'exerçant sur un intervalle de temps $(T-\alpha, T)$ n'ont plus d'influence sur l'observation, pour α assez petit, (on peut prendre $T > deux\ fois\ diamètre\ de$ Ω [théorème 1.5]).
Autrement dit, si T est trop petit à cause de la vitesse finie de propagation des ondes, aucune action sur la frontière latérale n'est perçue dans les points de Ω qui sont loin de Γ.

3.2.2 Problème de contrôlabilité

L'existence de la sentinelle (3.34) est liée à l'existence du contrôle u, pour cela, nous allons chercher la fonction u assurant les conditions (3.35)-(3.36). On écrit la dérivée de y par rapport à τ au point $(0,0)$ par

$$y_\tau = \frac{\partial}{\partial \tau} y((\lambda, \tau)_{\lambda=0,\tau=0} \quad avec \quad \tau = (\tau_0, \tau_1), \tag{3.37}$$

alors y_{τ_0} est solution du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y_{\tau_0}}{\partial t^2} - \triangle y_{\tau_0} + f'(y^0) y_{\tau_0} = 0 & dans\ Q, \\ y_{\tau_0}(0) = \widehat{y}_0 & dans\ \Omega, \\ y'_{\tau_0}(0) = 0 & dans\ \Omega, \\ \quad y_{\tau_0} = 0 & sur\ \sum. \end{cases} \tag{3.38}$$

et y_{τ_1} est la solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y_{\tau_1}}{\partial t^2} - \triangle y_{\tau_1} + f'(y^0) y_{\tau_1} = 0 & \textit{dans } Q, \\ y_{\tau_1}(0) = 0 & \textit{dans } \Omega, \\ y'_{\tau_1}(0) = \widehat{y}_1 & \textit{dans } \Omega, \\ \quad y_{\tau_1} = 0 & \textit{sur } \sum, \end{cases} \tag{3.39}$$

Ecrivons dans un premier temps la condition (3.35) sous une forme plus explicite en fonction des dérivées de l'état par rapport aux paramètres τ_0 et τ_1

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \tau_0}(\tau_0, \tau_1)\Big|_{\tau_0=\tau_1=0,\lambda=0} &= \int_0^T \int_\Omega (h\chi_{_O} + u\chi_{_\omega}) y_{\tau_0} dx dt, \\ \frac{\partial S}{\partial \tau_1}(\tau_0, \tau_1)\Big|_{\tau_0=\tau_1=0,\lambda=0} &= \int_0^T \int_\Omega (h\chi_{_O} + u\chi_{_\omega}) y_{\tau_1} dx dt, \end{aligned} \tag{3.40}$$

Dans le but de transformer l'équation (3.40), on introduit l'état adjoint.

Théorème 3.2 *Soit $q(x,t)$ la solution du problème rétrograde suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \triangle q + f'(y^0) q = (h\chi_{_O} + u\chi_{_\omega}) & \textit{dans } Q, \\ q(T) = q'(T) = 0 & \textit{dans } \Omega, \\ \quad q = 0 & \textit{sur } \sum. \end{cases} \tag{3.41}$$

Alors le problème d'existence d'une sentinelle insensible aux termes manquants est équivalent à un problème de contrôlabilité à zéro suivant

$$q'(0) = 0\ , \quad q(0) = 0 \qquad\qquad \textit{dans } \Omega. \tag{3.42}$$

Preuve.

On multiplie la première équation du système (3.41) par y_{τ_0} et on intègre ensuite par parties sur Q, on trouve

$$\begin{aligned} \int_Q \left(\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \triangle q + f'(y^0) q \right) .y_{\tau_0} dx dt &= \int_Q (h\chi_{_O} + u\chi_{_\omega}).y_{\tau_0} dx dt\ , \\ \int_Q \left(\frac{\partial^2 y_{\tau_0}}{\partial t^2} - \triangle y_{\tau_0} + f'(y^0) y_{\tau_0} \right) .q dx dt + \int_Q q'(x,0) y_{\tau_0}(x,0) dx &= \int_Q (h\chi_{_O} + u\chi_{_\omega}).y_{\tau_0} dx dt, \end{aligned}$$

et la nullité de cette expression pour tout $\widehat{y}_0 \in L^2(\Omega)$ donne immédiatement la première partie de la condition (3.42).

Procédant de même pour la dérivée y_{τ_1}, on obtient

$$\begin{aligned}\int_Q \left(\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \triangle q + f'(y_0)q\right).y_{\tau_1} dxdt &= \int_Q (h\chi_{_O} + u\chi_{_\omega}).y_{\tau_1} dxdt \ , \\ &\Rightarrow \ (q(0), \widehat{y}_1) = 0 \qquad \forall \widehat{y}_1,\end{aligned}$$

d'où la condition (3.42). ■

La condition (3.42) est une condition de contrôlabilité exacte sur la solution q de (3.41). Ce problème est néamoins particulier puisqu'il porte à la fois sur la donnée finale $q(0)$ et la dérivée finale $q'(0)$, l'état à atteindre $(0, 0)$ se trouve dans l'espace $(H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$.

L'existence d'une sentinelle insensitive au terme manquant est équivalente à un problème de contrôlabilité à zéro. Alors, nous allons étudier la possibilité de trouver un contrôle w permettant d'atteindre l'état $(0, 0)$, c-à-d de façon que la solution $q = q(w)$ de (3.41) verifie la condition (3.36). Par conséquent, le problème d'existence d'une unique sentinelle revient à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$(P) \ \left\{ \min_{u \in M} \|u\|_{L^2(\omega)} \ \ où \ M = \{u \ tel \ que \ on \ a \ (3.41) \ et \ (3.42)\} \right\}. \tag{3.43}$$

Lemme 3.7 *Le problème* (P) *admet une solution unique.*

Preuve.

Le domaine de contraintes du problème (P) est un ensemble fermé, non vide car $w = -h$ donne $q \equiv 0$. L'application $w \to \|w\|_{L^2(\omega)}$ est continue, convexe et coercive, par conséquent le problème (P) admet une solution et une seule que l'on note u. ■

Il reste à calculer u. Pour cela, on écrit le système d'optimalité du problème (P).

3.2.3 Système d'optimalité

On introduit une fonction p par

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \triangle p + f'(y^0)p = h\chi_{_O} & \quad \text{dans } \ Q, \\ p(T) = p'(T) = 0 & \quad \text{dans } \Omega \ , \\ p = 0 & \quad \ \ \text{sur } \Sigma, \end{aligned} \right. \tag{3.44}$$

et on définie par $z = z(u)$ la solution du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \triangle z + f'(y^0)z = u\chi_{_\omega} & \text{dans } Q, \\ z(T) = z'(T) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ z = 0 & \text{sur } \Sigma, \end{cases} \tag{3.45}$$

donc

$$q = p + z = p + z(u).$$

On cherche à déterminer u tel que

$$\begin{cases} z(0; u) = -p(0), \\ z'(0; u) = -p'(0). \end{cases} \tag{3.46}$$

On définie ρ comme une solution du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \triangle \rho + f'(y^0)\rho = 0 & \text{dans } Q, \\ \rho(0) = \rho^0, \ \rho'(0) = \rho^1 & \text{dans } \Omega, \\ \rho = 0 & \text{sur } \sum . \end{cases} \tag{3.47}$$

où le couple (ρ^0, ρ^1) est inconnu. Soit z la solution du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \triangle z + f'(y^0)z = \rho\chi_{_\omega} & \text{dans } Q, \\ z(T) = \quad z'(T) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ z = 0 & \text{sur } \sum . \end{cases}$$

On définit maintenant deux opérateurs Λ et Ψ par

$$\Lambda\left(\rho^0, \rho^1\right) = \left(-z'(0), \ z(0)\right), \tag{3.48}$$

$$\Psi h = \left(-p'(0), \ p(0)\right),$$

Alors (3.46) s'écrit sous la forme :

$$\Lambda\left(\rho^0, \rho^1\right) = -\Psi h. \tag{3.49}$$

En multipliant (3.48) par (ρ^0, ρ^1), on obtient

$$\left\langle \Lambda\left(\rho^0,\rho^1\right),\left(\rho^0,\rho^1\right)\right\rangle = \int_0^T \int_\omega \rho^2 dxdt. \tag{3.50}$$

On introduit maintenant

$$\left\|\left(\rho^0,\rho^1\right)\right\|_F = \left(\int_0^T \int_\omega \rho^2 dxdt\right)^{1/2}, \tag{3.51}$$

cette expresion définit une norme dans les conditions du théorème d'unicité de Holmgren, où l'espace de Hilbert F est le complément de $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ pour la norme (3.51) et $O\times(0,T)$ a la propriété de contrôle géométrique. Plus précisément, pour $T>2$ diamètre de Ω. Alors, ρ solution de (3.47) et $\rho=0$ sur $O\times(0,T)$ implique $\rho\equiv 0$ sur Q. Soit F' le dual de F, donc, on a l'isomorphisme suivant :

$$\Lambda : F \longrightarrow F',$$

et

$$\left\langle \Psi h, \left(\rho^0,\rho^1\right)\right\rangle = \int_0^T \int_\Omega h.\rho dxdt. \tag{3.52}$$

Cette équation admet une solution unique donnée par :

$$\left(\rho^0,\rho^1\right) = -\Lambda^{-1}\Psi h, \tag{3.53}$$

par conséquent, la fonction du contôle sera donnée par :

$$u = \rho\chi_\omega = \Psi^*\Lambda^{-1}\Psi h, \tag{3.54}$$

où Ψ^* est l'opérateur adjoint de Ψ. La sentinelle correpondante est donnée par :

$$S(\lambda,\tau) = \int_0^T \int_{(O\cap\omega)} (h-\Psi^*\Lambda^{-1}\Psi h) y(x,t,\lambda,\tau) dxdt.$$

Remarque 3.5 *:*

Le problème de contrôlabilité à zéro (3.41)-(3.42) a une solution évidente : étant donné

$h \in L^2(O \cap \omega)$, le contrôle $u \in L^2(\omega)$ est donné par

$$u = \begin{cases} -h & \text{dans} \quad O \cap \omega, \\ 0 & \text{dans} \quad \omega \backslash O \cap \omega. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions M est donc non vide.

3.2.4 Identification de la condition aux limites

On s'intérèsse maintenant à estimer le terme de pollution, pour cela, on considère y_{obs} l'état mesuré du système sur l'observatoire O pendant l'intervalle $[0, T]$, alors la sentinelle observée associée a l'état y_{obs} est donnée par :

$$S_{obs}(\lambda, \tau) = \int_0^T \int_\Omega (h\chi_O + u\chi_\omega) y_{obs}(x, t, \lambda, \tau) dxdt. \tag{3.55}$$

La fonction sentinelle, une fois construite, la détermination du terme de pollution se déduit par le théorème suivant :

Théorème 3.3 *Le terme de pollution est définie comme suit*

$$\lambda \int_{\Sigma_0} \frac{\partial q}{\partial \nu}(u).\widehat{g}_0 d\Sigma_0 = S_{obs}(\lambda, \tau) - S(0, 0). \tag{3.56}$$

où $S_{obs}(\lambda, \tau)$ est la sentinelle observée (3.55).

Preuve.

On peut effectuer un développement de Taylor à l'ordre 1 de S au voisinage du point $(\tau_0 = \tau_1 = 0, \lambda = 0)$, on a :

$$S_{obs}(\lambda, \tau) = S(0, 0) + \lambda \frac{\partial S}{\partial \lambda}(\lambda, \tau)\bigg|_{\lambda=0,\tau=0} + \tau \frac{\partial S}{\partial \tau}(\lambda, \tau)\bigg|_{\lambda=0,\tau=0} + o(\lambda, \tau), \tag{3.57}$$

$$S_{obs}(\lambda, \tau) = S(0, 0) + \lambda \frac{\partial S}{\partial \lambda}(\lambda, \tau)\bigg|_{\lambda=0,\tau=0} + o(\lambda, \tau),$$

avec

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda}(\lambda, \tau) = \int_0^T \int_\Omega (h\chi_O + u\chi_\omega) y_\lambda dxdt, \tag{3.58}$$

où

$$y_\lambda = \frac{\partial y}{\partial \lambda}(0,0)\bigg|_{\lambda=\tau=0}, \tag{3.59}$$

est la solution du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y_\lambda}{\partial t^2} - \triangle y_\lambda + f'(y_0) y_\lambda = 0 & \text{dans } Q, \\ y_\lambda(0) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ y'_\lambda(0) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \quad y_\lambda = \widehat{g}_0 & \text{sur } \Sigma_0, \\ \quad y_\lambda = 0 & \text{sur } \Sigma/\Sigma_0, \end{cases} \tag{3.60}$$

donc

$$\lambda \frac{\partial S}{\partial \lambda}(\lambda, \tau)\bigg|_{\lambda=0,\tau=0} = S_{obs}(\lambda,\tau) - S(0,0), \tag{3.61}$$

En multipliant la première équation du (3.60) par q et en intègrant par partie, on trouve

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda}(\lambda, \tau)\bigg|_{\lambda=0,\tau=0} = \int_{\Sigma_0} \frac{\partial q}{\partial \nu}(u) \widehat{g}_0 d\Sigma_0. \tag{3.62}$$

Finalement, on obtient

$$\int_{\Sigma_0} \frac{\partial q}{\partial \nu}(u)\left(\lambda \widehat{g}_0\right) d\Sigma_0 = S_{obs}(\lambda,\tau) - S(0,0). \tag{3.63}$$

Donc la connaissance du contrôle optimal u fournie des informations sur le terme de pollution que l'on cherche. ■

3.3 Sentinelle discriminante d'un système Hyperbolique

Dans cette section, on propose d'étudier l'existence et la construction d'une sentinelle pour une observation avec bruit pour les systèmes hyperboliques.

3.3.1 Observation bruitée

On considère notre problème à données manquantes (3.28). Les données observées peuvent être affectées des erreurs sur les mesures

$$y_{obs} = m_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i m_i,$$

où les fonctions $(m_i, i = 0, ..., n)$ sont connues dans $L^2(O \times (0,T))$, mais les termes de bruit $\beta_i \in R^*$ ne sont pas connus. La question qui se pose est :

Peut-on obtenir des informations sur $\lambda \widehat{g}_0$ qui ne soient pas affectées par les variations de $y(0)$ et qui ne soient pas affectée par les bruits $\beta_i m_i, \ \ i = 1, ..., n$?

Soit $h \in L^2(O \times (0,T))$ et $\omega \subset O$. Pour $u \in L^2(\omega \times (0,T))$, on pose

$$S(\lambda, \tau) = \int_0^T \int_O hy(x,t,\lambda,\tau)dxdt + \int_0^T \int_\omega uy(x,t,\lambda,\tau)dxdt,$$

$$\Rightarrow S(\lambda, \tau) = \int_0^T \int_\Omega (h\chi_O + u\chi_\omega) y(\lambda,\tau)dxdt. \tag{3.64}$$

Définition 3.4 *On dit que S est une sentinelle discriminante definie par $(h, O$ et $\omega)$, s'il existe un contrôle $u \in L^2(\omega \times (0,T))$ tel que le couple (u, S) vérifie les trois conditions suivantes :*

$$\left.\frac{\partial S}{\partial \tau}(\lambda, \tau)\right|_{\lambda=0,\tau=0} = 0, \tag{3.65}$$

$$\int_0^T \int_O h.m_i \ dxdt + \int_0^T \int_\omega u.m_i \ dxdt = 0, \ 1 \leq i \leq n. \tag{3.66}$$

$$\|u\|_{L^2(\omega \times (0,T))} = \min, \tag{3.67}$$

Remarque 3.6 *:*

1. La condition (3.66) s'appelle condition d'insensibilité de la sentinelle par rapport aux termes de bruit.

2. La condition (3.65) est équivalente à

$$\int_0^T \int_\Omega (h\chi_O + u\chi_\omega) y_\tau \ dxdt = 0,$$

3. Dans cette section, on suppose que l'ouvert $\omega \subset O \subset \Omega$, car les $(m_i, i = 1, ..., n)$ sont à support dans $O \times (0,T)$.

3.3.2 Equivalence à un problème de contrôlabilité

Soit K le sous espace vectoriel de $L^2(\omega \times (0,T))$ engendré par les $m_i \chi_\omega, 1 \leq i \leq n$, que l'on suppose linéairement indépendants. Alors la condition d'insensibilité aux termes de bruits est équivalente à

$$\exists k_0 \in K \text{ tel que } u = k_0 + k \text{ avec } k \in K^{\perp}. \tag{3.68}$$

On a le lemme suivante :

Lemme 3.8 *L'existence d'une sentinelle discriminante insensible aux termes manquants et aux termes de bruit est équivalante à une contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle c'est-à-dire l'existence d'un couple (k, q) tel que*

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \Delta q + f'(y_0)q = h^*\chi_{_O} + k\chi_\omega & \textit{dans} \;\; Q, \\ q(T) = q'(T) = 0 & \textit{dans} \;\; \Omega, \\ q(0) = q'(0) = 0 & \textit{dans} \;\; \Omega, \\ q = 0 & \textit{sur} \;\; \Sigma, \end{array}\right. \tag{3.69}$$

avec $h^* = h\chi_{_O} + k_0\chi_\omega$.

Preuve. Voir la démontration de la proposition (2.7). ■

3.4 Sentinelle instantanée

On cherche à obtenir des informations instantanées ($t = T$ fixé) sur les termes de pollution pour les systèmes hyperboliques à données manquantes. On considère le système défini par (3.28). L'observation est donnée sur un observatoire $O \subset \Omega$ à l'instant T. Soient $h \in L^2(O)$ et $\omega \subset \Omega$ tel que $\omega \cap O \neq \phi$. Pour $u \in L^2(\omega)$, on définit par S la sentinelle instantanée comme suit :

$$\begin{aligned} S(\lambda, \tau) &= \int_O hy(x, T, \lambda, \tau)dx + \int_\omega uy(x, T, \lambda, \tau)dx, \qquad (3.70) \\ &= \int_\Omega (h\chi_{_{O\cap\omega}} + u\chi_\omega)y(x, T, \lambda, \tau)dx. \end{aligned}$$

On cherche u tel que S soit insensible au terme manquant

$$\frac{\partial S}{\partial \tau_0}(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \tau_1}(0,0) = 0, \tag{3.71}$$

et

$$\|u\|_{L^2(\omega)} = \min$$

Les sentinelles instantanées ne peuvent pas exister que moyennant des informations sur les données manquantes. Pour cela, on va supposer que :

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0 + \sum_{i=1}^{n} \tau_{0i} \widehat{y}_{0i} && \text{dans } \Omega, \\ y'(0) &= y_1 + \sum_{i=1}^{n} \tau_{1i} \widehat{y}_{1i} && \text{dans } \Omega, \end{aligned} \tag{3.72}$$

où les fonctions $\widehat{y}_{0i}$ et $\widehat{y}_{i1}$ sont des données dans l'espace $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Alors, la condition d'insensibilité s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \tau_{0i}}(0,0) &= 0 \Longrightarrow \int_\Omega (h\chi_{O\cap\omega} + u\chi_\omega) y_{\tau_{0i}}(x,T,\lambda,\tau)\ dx = 0 \quad 1 \le i \le n, \\ \frac{\partial S}{\partial \tau_{1i}}(0,0) &= 0 \Longrightarrow \int_\Omega (h\chi_{O\cap\omega} + u\chi_\omega) y_{\tau_{1i}}(x,T,\lambda,\tau)\ dx = 0 \quad 1 \le i \le n. \end{aligned} \tag{3.73}$$

C'est conditions équivalent à

$$\int_\Omega q(0), \widehat{y}_{1i} dx = 0 \ , \quad \int_\Omega q'(0), \widehat{y}_{0i} dx = 0 \qquad 1 \le i \le n. \tag{3.74}$$

C'est un problème de type contrôlabilité où q est la solution du système rétrograde suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \triangle q + f'(y_0) q = 0 & \textit{dans } Q, \\ q(T) = 0 & \textit{dans } \Omega, \\ q'(T) = (h\chi_{O\cap\omega} + u\chi_\omega) & \textit{dans } \Omega, \\ \quad q = 0 & \textit{sur } \sum. \end{cases} \tag{3.75}$$

Remarque 3.7 *:*

Le problème de contrôlabilité à zéro (3.74)-(3.75) a une solution évidente : étant donné $h \in L^2(O \cap \omega)$, le contrôle $u \in L^2(\omega)$ est donné par

$$u = \begin{cases} -h & \textit{dans} \quad O \cap \omega, \\ \ \ 0 & \textit{dans} \quad \omega \backslash O \cap \omega. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions tel qu'on ait (3.74) et (3.75) est donc non vide.

La résolution du problème de contrôlabilité est basé sur le système d'optimalité donné comme suit :

On définie ρ la solution du système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \triangle \rho + f'(y^0)\rho = 0 & \text{dans } Q, \\ \rho(0) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \widehat{y}_{0i} & \text{dans } \Omega, \\ \rho'(0) = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \widehat{y}_{1i} & \text{dans } \Omega, \\ \rho = 0 & \text{sur } \sum . \end{cases} \tag{3.76}$$

où $\alpha = (\alpha_i)$, $\beta = (\beta_i)$, $1 \leq i \leq n$, à déterminer. On introduit deux fonctions p et z par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \triangle p + f'(y^0)p = 0 & \text{dans } Q, \\ p(T) = 0 & \text{dans } \Omega \ , \\ p'(T) = h\chi_{_O} & \text{dans } \Omega \ , \\ p = 0 & \text{sur } \Sigma, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \triangle z + f'(y^0)z = 0 & \text{dans } Q, \\ z(T) = 0, \ z'(T) = -\rho(T)\chi_\omega & \text{dans } \Omega, \\ z = 0 & \text{sur } \Sigma, \end{cases} \tag{3.77}$$

On cherche à résoudre l'équation

$$\Lambda(\alpha, \beta) = -\Psi h. \tag{3.78}$$

avec

$$\begin{aligned} \Lambda(\alpha, \beta) &= ((-z'(0), \widehat{y}_{0i}), (z(0), \widehat{y}_{1i})), \\ \Psi h &= ((-p'(0), \widehat{y}_{0i}), (p(0), \widehat{y}_{1i})), \end{aligned}$$

L'opérateur Λ est un isomorphisme, donc l'équation (3.78) admet une solution unique, par conséquent le contrôle u sera donné par

$$u = -\rho(T)\chi_{_\omega}. \tag{3.79}$$

Chapitre 4

SYSTEME DE PETROWSKY A DONNEES MANQUANTES

Dans ce chapitre, notre objective est l'étude du système de Petrowsky à données manquantes dans le sens où l'on connait mal les données initiales et certaines données frontières. On va appliquer la méthode des sentinelles pour obtenir des informations sur les termes de pollution qui ne soient pas affectées par les variations du terme manquant autour de la donnée initiale.

4.1 Position du problème

Soit Ω un ouvert borné de R^N de frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma$. Pour $T > 0$, nous utiliserons les notations $Q = \Omega \times]0, T[$, $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$, $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0, T[$, $\Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, T[$ où Γ_0 et Γ_1 $\subset \Gamma$ tel que $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \phi$.

On considère ici le problème de petrowsky où la condition initiale et la condition aux limites ne sont pas déterminer ou partiellement déterminer (les conditions aux limites sont connues sauf sur un partie de la frontière). On peut formuler ce problème comme suit :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \triangle^2 y + f(y) = 0 \qquad \text{dans } Q, \tag{4.1}$$

avec f est une fonction nonlinéaire de classe C^1, continue et bornée.

On associe à (4.1) la condition initiale :

$$\begin{cases} y(0) = y_0 + \tau_0 \widehat{y}_0 & \text{dans } \Omega, \\ y'(0) = y_1 + \tau_1 \widehat{y}_1 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.2}$$

où $(y_0, y_1) \in H^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et les conditions aux limites :

$$y = \begin{cases} g_0 + \lambda \widehat{g}_0 & \text{sur } \Sigma_0, \\ g_1 + \tau_2 \widehat{g}_1 & \text{sur } \Sigma_1, \\ 0 & \text{sur } \Sigma / (\Sigma_0 \cup \Sigma_1), \end{cases} \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} = \begin{cases} g_2 & \text{sur } \Sigma_0 \cup \Sigma_1, \\ 0 & \text{sur } \Sigma / (\Sigma_0 \cup \Sigma_1), \end{cases} \tag{4.4}$$

où $y_0, y_1,\ g_0, g_1$ et g_2 représentent les données initiales et les données aux bords qui sont assez régulière, les termes $\tau_0 \widehat{y}_0, \tau_1 \widehat{y}_1,\ \tau_2 \widehat{g}_1$ et $\lambda \widehat{g}_0$ sont des fonctions inconnues. Les réels λ et $\tau = (\tau_0, \tau_1, \tau_2)$ sont arbitrairement petits. L'état $y(x,t)$ est différentiable par rapport aux paramètres $(\tau_0, \tau_1, \tau_2, \lambda)$.

Remarque 4.1 *On peut commuter la situation, en supposant que*

$$\begin{cases} y(0) = y_0 + \lambda \widehat{y}_0 & \textit{dans } \Omega, \\ y'(0) = y_1 + \tau_1 \widehat{y}_1 & \textit{dans } \Omega, \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} g_0 + \tau_0 \widehat{g}_0 & \textit{sur } \Sigma_0, \\ g_1 + \tau_2 \widehat{g}_1 & \textit{sur } \Sigma_1, \\ 0 & \textit{sur } \Sigma / (\Sigma_0 \cup \Sigma_1), \end{cases}$$

On cherche alors à obtenir des informations sur la donnée initiale $\lambda \widehat{y}_0$ qui soient indépendantes des variations du terme manquant $(\tau_0 \widehat{g}_0, \tau_1 \widehat{y}_1, \tau_2 \widehat{g}_1)$.

On utilise la notation y^0 pour la solution du système (4.1)-(4.3) où $\lambda = 0$ et $\tau = 0$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 y^0}{\partial t^2} + \triangle^2 y^0 + f(y^0) = 0 & \text{dans } Q, \\
y^0(0) = y_0 & \text{dans } \Omega, \\
y^{0\prime}(0) = y_1 & \text{dans } \Omega, \\
y^0 = g_0 & \text{sur } \Sigma_0, \\
y^0 = g_1 & \text{sur } \Sigma_1, \\
y^0 = 0 & \text{sur } \Sigma/(\Sigma_0 \cup \Sigma_1). \\
\dfrac{\partial y^0}{\partial \nu} = g_2 & \text{sur } \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \\
\dfrac{\partial y^0}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Sigma/(\Sigma_0 \cup \Sigma_1).
\end{cases}
$$

Supposons que f, les conditions initiales et les conditions aux limites sont assez régulière pour que le problème (4.1)-(4.3) admet une solution unique

$$y \in L^2(0, T, H^2(\Omega)) \ \text{ et } \ y' \in L^2(0, T, L^2(\Omega)),$$

que l'on note

$$y(\lambda, \tau) = y(x, t; \lambda, \tau_0, \tau_1, \tau_2)$$

Notre but est d'obtenir des informations sur le terme $\lambda\widehat{g}_0$ qu'on appellera terme de pollution qui soit indépendent des variations du terme $(\tau_0\widehat{y}_0, \tau_1\widehat{y}_1, \tau_2\widehat{g}_1)$ qu'on appellera terme manquant et que l'on cherche pas à identifier.

4.2 Formulation de la sentinelle

Lidée de Lions est d'obtenir des informations sur le terme de pollution, indépendamment du terme en $\tau = (\tau_0, \tau_1, \tau_2)$. L'identification de paramètres inconnus necéssite une observation de l'état y. Donc, on observe la solution $y(\lambda, \tau)$ sur un observatoire $O \subset \Omega$ pendant l'intervalle de temps $]0, T[$. Nous supposons que les données observées y_{obs} ne sont pas bruitées :

$$y(\lambda, \tau) = y_{obs} \quad \text{dans } \ O \times]0, T[\,, \tag{4.5}$$

où y_{obs} est une mesure connue. Soit h une fonction arbitrairement donnée tel que :

$$h \in L^2(O \times]0, T[), \tag{4.6}$$

et une fonction du contrôle u à déterminer

$$u \in L^2(\omega \times]0,T[), \tag{4.7}$$

L'idée fondamentale de la méthode de sentinelle réside dans la définition d'une fonctionnelle S qui soit la moyenne de l'état y donnée par l'expression :

$$S(\lambda,\tau) = \int_0^T \int_O hy(x,t,\lambda,\tau)dxdt + \int_0^T \int_\omega uy(x,t,\lambda,\tau)dxdt, \tag{4.8}$$

où ω est un sous ensemble non vide de Ω. On peut écrire :

$$S(\lambda,\tau) = \int_0^T \int_\Omega (h\chi_O + u\chi_\omega)y(\lambda,\tau)dxdt, \tag{4.9}$$

où χ_O et χ_ω sont les fonctions caractéristique pour les ensemble O et ω respectivement tel que $O\cap\ \omega \neq \phi$.

Définition 4.1 *Soit S la fonction réelle donnée par (4.9) où $y(\lambda,\tau)$ est la solution du système (4.1)-(4.3). On dit que S est une sentinelle si :*

$$\left.\frac{\partial S}{\partial \tau}(\lambda,\tau)\right|_{\lambda=0,\tau=0} = 0, \tag{4.10}$$

qui exprime l'insensibilité de la sentinelle par rapport au terme manquant au premier ordre c-à-d

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial S}{\partial \tau_0}(\lambda,\tau_0,\tau_1,\tau_2)\right|_{\lambda=0,\tau_0=\tau_1=\tau_2=0} &= 0, \\ \left.\frac{\partial S}{\partial \tau_1}(\lambda,\tau_0,\tau_1,\tau_2)\right|_{\lambda=0,\tau_0=\tau_1=\tau_2=0} &= 0, \\ \left.\frac{\partial S}{\partial \tau_2}(\lambda,\tau_0,\tau_1,\tau_2)\right|_{\lambda=0,\tau_0=\tau_1=\tau_2=0} &= 0, \end{aligned}$$

$$\|u\|_{L^2(\omega\times]0,T[)} = \min \tag{4.11}$$

Remarque 4.2 *:*

1- L'existence et l'unicité de la sentinelle $S(\lambda,\tau)$ *définie par* (4.9)-(4.11) *est liée à l'existence et l'unicité de la fonction du contrôle u.*

2- Le choix $u = -h$ donne lieu à (4.10).

Il s'agit d'abord de calculer u, puis, dans une deuxième étape, de voir quelles informations la sentinelle ainsi construite permet d'atteindre sur la pollution $\lambda\widehat{y_0}$.

4.3 Sentinelle et contrôlabilité à zéro

Le problème de trouver une sentinelle S est équivalent à prouver l'existence et l'unicité de la fonction du contrôle u. Précisément, nous allons montré que le problème (4.10)-(4.11) est équivalent à un problème de contrôlabilité à zéro à partir duquel la méthode HUM a été utilisée pour établir l'existence et l'unicité de la fonction contrôle u.
Il est important d'observer que si la fonction f est assez régulière, la condition d'insensibilité de la sentinelle par rapport aux termes manquants (4.10) est équivalente à :

$$\int_0^T \int_\Omega (h\chi_{_O} + u\chi_{_\omega}) y_\tau dxdt = 0. \tag{4.12}$$

où $y_\tau = \dfrac{\partial y}{\partial \tau}(0,0)$ est la dérivée de y au point $(0,0)$:

$$y_{\tau_i} = \frac{\partial}{\partial \tau_i} y((\lambda,\tau)_{\lambda=0,\tau=0} \quad \text{avec } \tau = (\tau_0, \tau_1, \tau_2) \quad i = 0,1,2. \tag{4.13}$$

avec y_{τ_0} est la solution du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y_{\tau_0}}{\partial t^2} + \triangle^2 y_{\tau_0} + f'(y^0) y_{\tau_0} = 0 & \textit{dans } Q, \\ y_{\tau_0}(0) = \widehat{y_0} & \textit{dans } \Omega, \\ y'_{\tau_0}(0) = 0 & \textit{dans } \Omega, \\ \quad y_{\tau_0} = 0 & \textit{sur } \Sigma. \\ \quad \dfrac{\partial y_{\tau_0}}{\partial \nu} = 0 & \textit{sur } \Sigma. \end{cases}$$

y_{τ_1} est solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y_{\tau_1}}{\partial t^2} + \triangle^2 y_{\tau_1} + f'(y^0) y_{\tau_1} = 0 & dans\ Q, \\ y_{\tau_1}(0) = 0 & dans\ \Omega, \\ y'_{\tau_1}(0) = \ \widehat{y}_1 & dans\ \Omega, \\ \quad y_{\tau_1} = 0 & sur\ \Sigma, \\ \quad \dfrac{\partial y_{\tau_1}}{\partial \nu} = 0 & sur\ \Sigma. \end{cases} \tag{4.14}$$

et y_{τ_2} est la solution du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y_{\tau_2}}{\partial t^2} + \triangle^2 y_{\tau_2} + f'(y^0) y_{\tau_2} = 0 & dans\ Q, \\ y_{\tau_2}(0) = 0 & dans\ \Omega, \\ y'_{\tau_2}(0) = 0 & dans\ \Omega, \\ \quad y_{\tau_2} = \widehat{g}_1 & sur\quad \Sigma_1, \\ \quad y_{\tau_2} = 0 & sur\quad \Sigma/\Sigma_1, \\ \quad \dfrac{\partial y_{\tau_2}}{\partial \nu} = 0 & sur\ \Sigma. \end{cases} \tag{4.15}$$

Nous allons, maintenant, reformuler le problème d'existence d'une fonction u assurant les conditions (4.10)-(4.11) en un problème équivalent, pour cela, on introduit l'état adjoint.

Théorème 4.1 *Soit $q(x,t)$ la solution du problème rétrograde suivant*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \triangle^2 q + f'(y_0) q = \ (h\chi_{_O} + u\chi_{_\omega}) & dans\ Q, \\ q(T) = q'(T) = 0 & dans\ \Omega, \\ \quad q = \dfrac{\partial q}{\partial \nu} = 0 & sur\ \Sigma. \end{cases} \tag{4.17}$$

Alors le problème d'existence d'une sentinelle insensible aux termes manquant est équivalent à un problème de contrôlabilité à zéro avec

$$\begin{cases} q'(0) = 0 & dans\ \Omega \\ q(0) = 0 & dans\ \Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial \nu}(\Delta q) = 0 & sur\quad \Sigma_1. \end{cases} \tag{4.18}$$

.

.

Preuve. On multiplie la première équation du système (4.17) par y_{τ_0} et on intègre ensuite par parties sur Q, on trouve :

$$\begin{aligned}
\int_Q \left(\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \triangle^2 q + f'(y_0) q \right) .y_{\tau_0} dxdt &= \int_Q (h\chi_{_O} + u\chi_{_\omega}).y_{\tau_0} dxdt \ , \\
(q'(0), y(0)) &= \int_Q (h\chi_{_O} + u\chi_{_\omega}).y_{\tau_0} dxdt, \\
&\Rightarrow \ (q'(0), \widehat{y}^0) = 0, \quad \forall \widehat{y}^0, \\
&\Rightarrow \ q'(0) = 0 \qquad\qquad dans \ \Omega,
\end{aligned}$$

avec la même manière (utilisons τ_1), on trouve :

$$\begin{aligned}
\int_Q \left(\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \triangle^2 q + f'(y_0) q \right) .y_{\tau_1} dxdt &= \int_Q (h\chi_{_O} + u\chi_{_\omega}).y_{\tau_1} dxdt \ , \\
(q(0), y'(0)) &= \int_Q (h\chi_{_O} + u\chi_{_\omega}).y_{\tau_1} dxdt, \\
&\Rightarrow \ (q(0), \widehat{y}^1) = 0, \quad \forall \widehat{y}^1, \\
&\Rightarrow \ q(0) = 0 \qquad\qquad dans \ \Omega.
\end{aligned}$$

Procédent de même pour la dérivée y_{τ_2}, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_Q \left(\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \triangle^2 q + f'(y_0) q \right) .y_{\tau_2} dxdt &= \int_Q (h\chi_{_O} + u\chi_{_\omega}).y_{\tau_2} dxdt \ , \\
&= \int_{\Sigma_1} \frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta q).\widehat{g}_1 d\Sigma_1 = 0, \quad \forall \widehat{g}_1 \\
&\Rightarrow \ \frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta q) = 0 \qquad \text{sur } \Sigma_1.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la condition (4.10) vérifie si et seulement si, on a (4.18). ■

4.4 Caractérisation du contrôle optimal

Le problème d'existence d'une sentinelle revient à minimiser le contrôle sur un ensemble des contraintes M comme suit :

$$\min_{w \in M} \|w\|_{L^2(\omega)} \ , \ \text{avec } M = \{w \ tel \ que \ on \ a \ (4.17) \ et \ (4.18)\}. \tag{4.19}$$

On a besoin d'un système d'optimalité pour caractériser le contrôle w. Pour cela, on introduit la fonction p par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \triangle^2 p + f'(y^0)p = h\chi_{\mathcal{O}} & dans \;\; Q, \\ p(T) = p'(T) = 0 & dans \;\; \Omega \;, \\ p = \dfrac{\partial p}{\partial \nu} = 0 & sur \;\; \sum, \end{cases} \tag{4.20}$$

on définit $z = z(u)$ la solution du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \triangle^2 z + f'(y^0)z = u\chi_{\omega} & dans \;\; Q, \\ z(T) = z'(T) = 0 & dans \;\; \Omega, \\ z = \dfrac{\partial z}{\partial \nu} = 0 & sur \;\; \sum, \end{cases} \tag{4.21}$$

Alors

$$q = p + z = p + z(u).$$

On cherche à trouver u tel que (4.18) soit vérifie, donc

$$\begin{cases} z(0;u) = -p(0), \\ z'(0;u) = -p'(0), \\ \dfrac{\partial}{\partial \nu}(\Delta z) = -\dfrac{\partial}{\partial \nu}(\Delta p) \qquad sur \;\; \Sigma_1. \end{cases} \tag{4.22}$$

On définit ρ comme suit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \triangle^2 \rho + f'(y^0)\rho = 0 & dans \;\; Q, \\ \rho(0) = \rho^0 \;, \quad \rho'(0) = \; \rho^1 & dans \;\; \Omega \;, \\ \rho = \dfrac{\partial \rho}{\partial \nu} = 0 & sur \;\; \sum, \end{cases} \tag{4.23}$$

où $\{\rho^0, \rho^1\}$ n'est pas déterminé. Soit z la solution du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \triangle^2 z + f'(y^0)z = \rho\chi_{\omega} & dans \;\; Q, \\ z(T) = \;\; z'(T) = 0 & dans \;\; \Omega, \\ z = \dfrac{\partial z}{\partial \nu} = 0 & sur \;\; \sum. \end{cases} \tag{4.24}$$

On introduit les opérateurs linéaires Λ et Ψ par :

$$\Lambda(\rho^0, \rho^1) = (-z'(0),\ z(0)), \tag{4.25}$$

$$\Psi h = (-p'(0),\ p(0)),$$

On obtient :

$$\Lambda(\rho^0, \rho^1) = -\Psi h. \tag{4.26}$$

Multipliant (4.24) par (ρ^0, ρ^1) et intergrant par partie, on obtient

$$\left\langle \Lambda(\rho^0, \rho^1), (\rho^0, \rho^1) \right\rangle = \int_0^T \int_\omega \rho^2 dx dt. \tag{4.27}$$

Soit maintenant

$$\left\| (\rho^0, \rho^1) \right\|_F = \left(\int_0^T \int_\omega \rho^2 dx dt \right)^{1/2}. \tag{4.28}$$

On définit donc une norme sur l'espace des fonctions $(\rho^0, \rho^1) \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. En effet, si $\|(\rho^0, \rho^1)\|_F = 0$ alors $\rho = 0$ sur $O \times (0, T)$ donc, $\rho \equiv 0$ si $f'(y^0)$ est analytique. L'espace de Hilbert F est le complété de $H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ pour la norme (4.28). Alors si F' est le duale de F, on a (4.28).

$$\Lambda : F \longrightarrow F' \text{ est un isomorphisme,}$$

et

$$\left\langle \Psi h, (\rho^0, \rho^1) \right\rangle = \int_0^T \int_O h.\rho dx dt, \quad \Psi h \in F', \tag{4.29}$$

donc l'équation (4.26) admet une solution unique :

$$(\rho^0, \rho^1) = -\Lambda^{-1} \Psi h, \tag{4.30}$$

par conséquent, la fonction du contrôle u est donnée par :

$$u = \rho \chi_\omega = \Psi^* \Lambda^{-1} \Psi h, \tag{4.31}$$

La sentinelle correpondante est donnée par

$$S(\lambda,\tau)=\int_0^T\int_{(O\cap\omega)}(h-\Psi^*\Lambda^{-1}\Psi h)y(x,t,\lambda,\tau)dxdt$$

avec $O\cap\omega\neq\phi$.

4.5 Estimation du terme de pollution

On s'interesse maintenant à estimer le terme de polllution, pour cela, on considère y_{obs} l'état mesurer du système sur l'observatoire O pendant l'intervalle $[0,T]$, alors la sentinelle observer associé a l'état y_{obs} est donnée par :

$$S_{obs}(\lambda,\tau)=\int_0^T\int_\Omega(h\chi_O+u\chi_\omega)y_{obs}(x,t,\lambda,\tau)dxdt \tag{4.32}$$

Théorème 4.2 *Le terme de pollution est défini comme suit*

$$\int_{\Sigma_0}\frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta q)(w)\lambda\widehat{g}_0d\Sigma_0=S_{obs}(\lambda,\tau)-S(0,0). \tag{4.33}$$

Preuve.

Si l'on suppose que l'état $y(\lambda,\tau)$ dépend différentialement de λ et τ, on peut écrire formellement :

$$S_{obs}(\lambda,\tau)=S(0,0)+\lambda\frac{\partial S}{\partial\lambda}(\lambda,\tau_i)\Big|_{\lambda=0,\tau_i=0}+o(\lambda,\tau_i);\qquad 0\leq i\leq 2 \tag{4.34}$$

car, par définition $\frac{\partial S}{\partial\tau}(\lambda,\tau)\Big|_{\lambda=0,\tau=0}=0$, et on a

$$\frac{\partial S}{\partial\lambda}(\lambda,\tau)=\int_0^t\int_\Omega(h_{\chi_O}+w_{\chi_\omega})y_\lambda dxdt, \tag{4.35}$$

où y_λ désigne la dérivée de l'état y par rapport à λ.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y_\lambda}{\partial t^2} + \triangle^2 y_\lambda + f'(y^0) y_\lambda = 0 & dans\ Q, \\ y_\lambda(0) = 0 & dans\ \Omega, \\ y'_\lambda(0) = 0 & dans\ \Omega, \\ \quad y_\lambda = \widehat{g}_0 & sur\ \Sigma_0, \\ \quad y_\lambda = 0 & sur\ \Sigma/\Sigma_0, \\ \dfrac{\partial y_\lambda}{\partial \nu} = 0 & sur\ \Sigma. \end{cases} \tag{4.36}$$

La dérivée y_λ ne dépend plus que de quantités connues et de $\widehat{g}_0$:

$$\lambda \frac{\partial S}{\partial \lambda}(\lambda,\tau)\bigg|_{\lambda=0,\tau=0} = S_{obs}(\lambda,\tau) - S(0,0). \tag{4.37}$$

Soit q la solution du (4.17), multipliant (4.15) par q, on obtient

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0) = \int_{\Sigma_0} \frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta q)(u)\widehat{g}_0 d\Sigma_0, \tag{4.38}$$

donc

$$\lambda \int_{\Sigma_0} \frac{\partial q}{\partial \nu}(u)\widehat{g}_0 d\Sigma_0 = S_{obs}(\lambda,\tau) - S(0,0).$$

Par conséquent, l'estimation (4.37) contient des informations sur $\lambda\widehat{g}_0$ et cela justifie la technologie" sentinelle". ■

Conclusion et Perspectives

Cette thèse est consacrée à des problèmes hyperboliques et celle de petrowsky dont les données sans manquantes (inconnues ou partiellement connues), où on a traité l'identification du terme de pollution qui soit indépendant des variations du terme manquant .

Dans la première partie, nous avons présenté la méthode des sentinelles qui soit la stratégie la plus répondus consiste à obtenir des informations sur les termes manquants à partir d'une moyenne pondérée de l'observation. La recherche de ces informations nous conduit naturellement à un problème de type inverse.

Dans la seconde partie, nous avons réalisé une étude des systèmes hyperboliques à données incomplètes sur le bord et dans la donnée initiale où nous sommes utilisés la méthode des sentinelles de J. L. Lions pour répondre a la question.
Celle-ci a montré qu'on peut estimer le terme de pollution indépendamment des autres données qu'on ne veut pas identifier. Cette méthode consiste à transposer un problème d'identification ou d'estimation d'une donnée incomplète en un problème de contrôlabilité exacte ou faible avec des contraintes sur le contrôle. Dans la résolution de ces problèmes, il est nécessaire de disposer des données mesurées de l'état, pour cela nous avons traité les deux cas d'observation, avec et sans bruit.

Dans la troisième partie, notre but était l'estimation du terme de pollution d'un système de petrowsky où la condition initiale et la condition aux limites sont partiellement connues. Avec la même méthode de sentinelle nous avons répondre a la question.

Ces résultats ouvrent des perspectives numériques de cette méthode. Les outils de simulation numériques disponible sont encore perfectibles pour répondre aux nombreux problèmes environnementaux actuels. Aujourd'hui, nous ansons espérer que l'élaboration de nouvelles techniques permettra une meilleure estimation des paramètres inconnus dans des systèmes pollués.

Cependant, beaucoup reste à faire théoriquement, telles que la recherche d'un observatoire qui nous ramène à un contrôle optimal et donc à l'estimation du terme de pollution au lieu de le fixe au début du travail, et le lien reste à faire avec d'autres approches: le contrôle sans regret et à moindre regret et surtout le contrôle robuste.

Bibliography

[1] A.AYADI, M.DJEBARNI, Pollution terms estimations in parabolic system with incomplete data, Far East, J. Math, Sci17(3), pp. 317-328, 2005.

[2] A.AYADI, M.DJEBARNI, Sentinelle faible, Sciences & Technologie A- N 24, pp. 7-10, 2006.

[3] A. AYADI, The use of sentinel in the study of the parabolic system with incomplete data, Revue Sci.Tech et Develop, N 4, 2008.

[4] B. E. AINSEBA, Contrôlabilité exacte, identification, sentinelles, Thèse de Doctorat, Université de Technologie de compiègne, 1992.

[5] B. E. AINSEBA, J. P. KERNEVEZ, R. LUCE, Application des sentinelles à l'identification de pollution dans les rivières, RAIRO, vol. 28, N 3, pp. 297-312, 1994.

[6] B. E. AINSEBA, J. P. KERNEVEZ, R. LUCE, Identification de paramètre dans des problèmes nonlinéaires à données incomplètes, RAIRO, vol. 28, N 3, pp. 313-328, 1994.

[7] D. ACHELI, J. P. KERNEVEZ, F. OUKASI, The sentinel method used in idendification of the position and trajectory of a source of pollution, Applicable Analysis, vol. 70 (3-4), pp. 303-319, 1999.

[8] A. E. BADIA, T. Ha-DUONG, A. HAMIDI, Identification of a point source in linear advection-dispersion-reaction equation: application to a pollution source problem, Inverse problem 21, pp. 1121-1136, 2005.

[9] L. BADRAOUI, T. I. SEIDMAN, Some regional controllability issue for the heat equation, DRAFT, 1999.

[10] A. V. BALAKRISHNAN, Applied Functional Analysis, Springer, 1976.

[11] S. BARNETT, R. G. CAMERON, Introduction to Mathematical control theory, Second Edition Calendon Press, OXFORD, 1985.

[12] A. BERHAIL, AYADI, Système parabolique F-contrôlable et les actionneurs frontières, Sciences & Technologie A- N 22, pp. 13-16, 2004.

[13] A. BERHAIL, AYADI, Estimation of Pollution term in Petrowsky system with incomplete data, Int. J. Open Problems Comp, Math., Vol 3, N 4, pp. 27-36, 2010.

[14] O. BODART, Applications de la méthode des sentinelles à l'identification des sources de pollution dans un système distribué. Contrôles insensibilisants, Thèse de Doctorat, Université de Technologie de compiègne, 1993.

[15] O. BODART, J. P. KERNEVEZ, T. MANNIKKO, Numerical method to compute sentinels for distributed system. In Proccedings of the 16th IFIP, TC7 conference in system modelling and optimisation, Springer Verlag, Paris, 1994.

[16] O. BODART, P. DEMESTERE, Sentinels for the identification of unknow boundary, M3AS, pp. 871-885, 1997.

[17] O. BODART, P. DEMESTERE, Contrôle frontière de l'explosion en temps fini de la solution d'une équation de combustion, C. R. Acad. Sci., t. 325, Série I, pp. 841-845, 1997.

[18] O. BODART, C. FABRE. Contrôle insensibilisant la norme de la solution d'une équation de la chaleur semi-linéaire. C.R. Acad. Sci., Série I, 316(8), pp. 789-794, 1993.

[19] A. BOUTOULOUT, A El. JAI, E. ZERRIK, Actuators and Regional Boundary Controlability of Parabolic Systems, 1989.

[20] H. BREZIS, Analyse Fonctionnelle, Théorie et application, Masson, 1983.

[21] M. BURGER. Parameter identification, Lecture Note, Winter School Inverse Problèmes, 2005.

[22] A. G. BUTKOVSKII, A. I. EGOROV, K. A. LURIES, Optimal control of distributed systems, SIAM. J. Cont. Vol 6, N 3, 1968.

[23] G. CHAVENT, Analyse Fonctionnelle et identification de coefficients repartis dans les équations aux dérivées partielles, Thèse Doctorat, Paris, 1971.

[24] G. CHAVENT, Estimation de paramètres distribués dans les équations aux dérivées partielles, pp 361-390 in " computing method in Applied Sciences and Enginneering", part 2, Lecture notes in Computer Sciences 11, Springer- Verlag, New york, 1974.

[25] G. CHAVENT, Generalized sentinels defined via least squares, INRIA, N 1932, 1993.

[26] N. CINDEA, Problèmes inverses et contrôlabilité avec applications en élasticité et IRM, Thèse d'octorat, Université de Nancy, 2010.

[27] M. CLERC, P. L. TALLEC, M. MALLET, Contrôle optimale de Navier-Stokes Parabolisé, Rapport de recherche, N 2653, 1995.

[28] M. DALAH, Etude des problèmes paraboliques à données manquantes, Thèse de doctorat, Université de mentouri, Constantine, 2008.

[29] R. DAGER, Insensitizing controls for the 1-D wave equation, SIAM J. Control. Optim, Vol 45, N 5, pp. 1758-1768, 2006.

[30] B. DEHMAN, A. OMRANE, On the controllability under contraints on the control for hyperbolic equations, App. Math. E-NOTES, N 10, pp. 36-39, 2010.

[31] P. DEMEESTERE, Méthode des sentinelles : Etude comparative et application à l'identification d'une frontière; contrôle du temps d'explosion d'une équation de combution. Thèse de Doctorat, Université de Thechnologie de Compiègne, 1997.

[32] A. El JAI, M. C. SIMON, E. ZERRIK, A. J. PRITCHARD, Regional Controlability of Distributed Parameter Systems. Int J Control, Vol 62, No 6, pp. 1351-1365, 1995.

[33] A. El JAI, E. ZERRIK, K. ZTOT, Systèmes dynamiques, Analyse et contrôle des systèmes localisés. Presses Universitaires de Perpignan, 2008.

[34] E. F. F. CARA, E. ZUAZUA, On the null controllability of the one-dimensional heat equation with non-smooth coefficients, 1996.

[35] B. FORNET, Problèmes hyperboliques a coefficient discontinus et pénalisation de problèmes hyperboliques, Thèse de doctorat, Université de Provence, 2007.

[36] J. P. KERNEVEZ, The sentinel method and its aplications to environmental pollution problems, Methematical modeling series, CRC. Press, Boca Raton, 1997.

[37] J. KLAMKA, Controlability of dynamical systems, Kluwer, Academic Publishers, 1990.

[38] J. L. LIONS, Contrôlabilité exacte, stabilisation et perturbation des systèmes distribuès, Vol 1. Masson, 1988.

[39] J. L. LIONS, Controllability, penalty and stiffness, Anal, Scie, Nor, Serie 4, Tome 25, N 3-4, pp. 597-610, 1997.

[40] J .L. LIONS, Sentinelle pour les systèmes distribués à données incomplètes. Vol 21, Masson, RMA, Paris, 1992.

[41] J. L. LIONS, Remarks on systems with incompletely given initial data and incompletely given part of boundary, pp. 239-250, 1990.

[42] J. L. LIONS, Distributed systems with incomplete data and problems environment. Some remaks, Collège de France, pp. 58-101, 1988.

[43] J. L. LIONS, Sur les sentinells des systèmes distribués. Le cas des conditions initiales incompletes, C. R. Acad. Sci., t. 307, Série I, pp. 819-823, 1988.

[44] J. L. LIONS, Earth system models and mathematical remarks, Computer methods in applied mechanics and engineeering 89, pp. 1-9, 1990.

[45] J. L. LIONS, Sur la théorie du contrôle, Canadian Mathematical Congress, 1975.

[46] J. L. LIONS, Sentinel for periodic distributed systems, Chin. Ann. of Math. Vol 10, Seri. B, 1989.

[47] J. L. LIONS, Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, Dunod. Paris, 1968.

[48] J. L. LIONS, Furtivité et sentinelles pour les systèmes distribués à données incomplètes, C. R. Acad. Sci., t. 311, Série I, pp. 691-695, 1990.

[49] J. L. LIONS, Boundary control of hyperbolic systems and homogenization theory, contr. Appl. Nonlin. Progr. Optim. Capri, Italy, 1985.

[50] J. L. LIONS, Quelques notions dans l'analyse et le contrôle de systèmes à données incomplètes, in Proceeding of the 11 th Congress on Differential Equations and Applications, Univ Màlaga, Spain, pp. 43-54, 1990.

[51] J. L. LIONS, E. MAGENES, Problèmes Aux Limites Non Homogène et Application.Vol.1. Dunod. Paris, 1968.

[52] Y. LIU, Analyse et contrôle de quelques problèmes d'interaction. Fluide-Structures, Thèse de Doctorat, Université Henri Poincaré, Nancy I, 2011.

[53] G. MASSENGO, O. NAKOULIMA, Sentinels with given sensitivity. Euro. Jnl of Appl.Math, Vol.19, pp. 21-40, 2008.

[54] G. MASSENGO, J. P. PUEL, Boundary sentinels with given sensitivity. Rev. Mat. Complut. Vol 22, N 1, pp.165-185, 2009.

[55] G. MOPHOU, J.VELIN, A null controllability problem with constraint on the control deriving from boundary discriminating sentinels, J. Nolinear Analysis, No 71, pp. e910-e924, 2009.

[56] Y. MILOUDI, O. NAKOULIMA, A. OMRANE, A method for detecting pollution in dissipative systems with incomplete data, ESAIM, Procceding, Vol. 17, pp. 67-79, 2007.

[57] Y. MILOUDI, O. NAKOULIMA, A. OMRANE, On the instantaneous sentinels in pollution problems of incomplete data. Inverse problems in science and enginnering, pp. 1-9, 2008.

[58] Z. MIZOHATA, Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques, Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto, Série A, Vol 31, pp 219-239, 1958.

[59] R. MOSE, M. E. STOECKEL, C. POULARD, P. ACKERER, F. LEHMANN, Transport paremeters identification: application of the sentinel method, Computational Geosciences 4, pp. 251-273, 2000.

[60] O. NAKOULIMA, Controlabilité à zéro avec contraintes sur le contrôle. C. R. Acad. Sci. Serie. I, 339, pp. 405-410, 2004.

[61] O. NAKOULIMA, A revision of J.L.Lions notion of sentinels, Portugal. Math. (N.S). Vol. 65, Fasc.1, pp. 1-22, 2008.

[62] O. NAKOULIMA, Optimal control for distributed systems subject to null-controllability. Application to discriminating sentinels, ESAIM, COCV, Vol. 13, N 4, pp. 623-638, 2007.

[63] J. P. PUEL. Contrôlabilité approchée et contrôlabilité exacte, Notes de cours de D.E.A., Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2001.

[64] J. S. PAULIN, M. VANNINATHAN, Sentinelles et pollutions frontières dans des domaines minces, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 325, Série I, pp. 1299-1304, 1997.

[65] J. S. PAULIN, J. VANNITHAN, Boundary pollution and sentinels in thin domain, C. R. Acad. Sci. Serie. I, Vol 326, pp. 1299-1304, 2000.

[66] I. PRANOTO, Partial internal control recovery on 1-D Klein-Girdon systems ITB J. Sci. Vol. 42 A, No. 1, pp. 11-22, 2010.

[67] L. ROBBIANO, Uniqueness theorem adapted to the control of solutions of hyperbolic problems, J. Equ. Dériv. Part, pp. 1-4, 1991.

[68] J. S. SAUT, B. SCHEURER, Unique continuation for some evolution equations, J. Deff. Equa. Vol 66, pp. 118-139, 1987.

[69] R.TEMAM, Navier-stokes Equations. Theory and numerical analysis, Stud. Math. Appl., North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1984.

[70] A. TRAORE, B. MAMPASSI, B. SALEY, A numerical approach of the sentinel method for distributed parameter systems, C. Euro. J. Mathe, Vol 5, N 4, pp. 751-763, 2007.

[71] A. TRAORE, B. MAMPASSI, L. SOME, A least square spectral collocation fomulation for solving PDEs on complex geometry domains, Int. J. Appl. Math. Comp, Vol 2 (4), pp. 9-22, 2011.

[72] A. TRAORE, Contribution à la résolution numérique de problèmes de détection de pollution en milieu fluide à structure géométrique complexe, Thèse Doctorat, Université de Cheikh Anta Diop, Sénégal, 2008.

[73] J.VELIN, Discriminating distributed sentinel involving a navier stokes problem and parameter identification, Esaim, Proseedings, pp. 143-166, 2007.

[74] P. K. C. WANG, Control of distributed parameter systems. Advances in control systems. Academic press. Vol 11, 1964.

[75] E. ZERRIK, Analyse Régionale des systèmes distribués. Thèse doctorat. Université Mohamed.V. Rabat, Maroc, 1993.

[76] E. ZERRIK, A. AFIFI, A. El JAI, Systèmes dynamiques, Analyse régionale des systèmes linéaires distribués. Tome 2, Presses Universitaires de Perpignan, 2008.