

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la recherche Scientifique
Université de Constantine -1-
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

THÈSE

pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

de l'Université de Constantine - 1-



Mention : MATHÉMATIQUE

Présentée et soutenue par

Tayeb HAMAIZIA

Systemes Dynamiques et Chaos

"Application à l'optimisation a l'aide d'algorithme
chaotique"

soutenue le 25/04/2013

Jury :

<i>Directeur :</i>	Mr. N.HAMRI	- Prof à centre universitaire de Mila.
<i>Président :</i>	Mr. M. DENCHE	- Prof à l'université de Constantine 1.
<i>Examineurs :</i>	Mr. M.DEGHEDAK	- Prof à l'université de Constantine 1.
	Mr. E. ZERAOULIA	- Prof à l'université de Tébessa.
	Mr. K. HAOUAM	- M.C à l'université de Tébessa.
<i>Invité :</i>	Mr. R. LOZI	- Prof à l'université de Sophia Antipolis-France.

Remerciements

Au terme de cette thèse, j'adresse mes sincères remerciements à toute personne dont l'intervention a favorisé son aboutissement .

Mes remerciements les plus sincères vont à mon directeur de thèse Mr le professeur N. Hamri pour sa disponibilité et son soutien tout au long de mes années de thèse .

Je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude pour m'avoir accepté en thèse.

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur René Lozi qui m'a accueilli dans son équipe "systèmes Dynamiques et Interfaces" du laboratoire J.A. Dieudonné. J'apprécie surtout sa rigueur, son sens du détail et son esprit de synthèse, ainsi que ses conseils avisés.

Je tiens également à citer mes copains du bureau, Aparna Das, Raphaël Clément, Amine Ilmane, pour leur soutien amical dont j'aurais toujours de beaux souvenirs. J'exprime ici ma profonde gratitude à Messieurs les professeur M. Deghdak, E. Zeraouia et K. Haouam qui m'ont honoré d'accepter de faire partie du Jury. Ma reconnaissance va aussi à Mr le professeur M. Denche pour avoir accepté de présider le Jury.

Je tiens à remercier le Ministère de l'Enseignement Supérieur Algérienne d'avoir financé la préparation de ma thèse par une bourse PNE.

Mes remerciements les plus profonds vont à ma mère, ma femme et à ma princesse Malak pour leur patience et leur soutien.

Merci à tous.

Table des figures

1.1	Portrait de phase d'un modèle prédateur / proie	10
1.2	L'application de Poincaré	13
1.3	Diagramme de Bifurcation noeud-col	16
2.1	Cascade de doublements de période	20
2.2	Attracteurs étranges Chua, Hénon	22
2.3	Sensibilité aux conditions initiales de l'application logistique	23
3.1	Attracteur de Lorenz $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$	30
3.2	Séries temporelles $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ du système de Lorenz $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$	31
3.3	Les Exposants de Lyapunov du système de Lorenz $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$	32
3.4	Attracteur de Lorenz (a) l'espace(x-z) , (b) l'espace (y-x) ,(c) l'espace(y-z)	33
3.5	Diagramme de bifurcation de Hénon	38
3.6	Attracteur de Hénon pour $a = 1.4$, $b = 0.3$	39
3.7	Illustration de la permanence de la structure de l'attracteur de Hénon à différentes échelles.	40
3.8	Les exposants de Lyapunov en fonction du temps pour l'application de Hénon.	41
3.9	Attracteur de Lozi pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$	42
3.10	Diagramme de bifurcation de Lozi	43
3.11	Les exposants de Lyapunov en fonction du temps pour l'application de Lozi	44
4.1	Minima locaux et minima globaux d'une fonction multimodale	48
4.2	Une fonction multimodale à deux variables	49
4.3	Illustration des faux optima locaux introduits par la pénalisation	50
4.4	Schéma des méthodes de tunnel	51
4.5	Algorithme de recherche aléatoire où $(x^* = x_n; f^* = y_n)$	56
5.1	Attracteur de Lozi pour $a = 1.7$, $b = 0.5$	61
5.2	Attracteur de Hénon pour $a = 1.4$, $b = 0.3$	63
5.3	Attracteur étrange pour $a = 4$, $b = 0.9$	66
6.1	Heuristique de la stratégie globale localement moyennée.	69

7.1	Représentation de la fonction de test F_1 utilisé dans cette étude sur $10 \leq x_i \leq 10, i = 1; 2$	76
7.2	Représentation de la fonction de test Easom F_2 utilisé dans cette étude sur $100 \leq x_i \leq 100, i = 1; 2$	77
7.3	Représentation de la fonction de test Rastrigin F_3 utilisé dans cette étude sur $5.12 \leq x_i \leq 5.12, i = 1; 2$	78
7.4	Représentation de la fonction de test Rosenbrock F_4 utilisé dans cette étude.	79
7.5	Représentation de la fonction de test Griewank F_5 utilisé dans cette étude.	80

Table des matières

I	SYSTEMES DYNAMIQUES ET CHAOS	6
1	Systèmes dynamiques	7
1	Introduction	7
2	Systèmes dynamiques	8
2.1	Groupe à un paramètre	8
2.2	Flot ou système dynamique	8
2.3	Trajectoire et Orbite	8
2.4	Espace des phases, variables d'état et portrait de phases	9
2.5	Déterminisme du flot	9
2.6	Systèmes dynamiques particuliers	9
2.7	Formulation de systèmes dynamiques	10
2.7.1	Systèmes dynamiques continus	11
2.7.1.a	Résultats généraux sur les systèmes différentiels	11
2.7.1.b	Solutions des systèmes différentiels : système dynamique continu	11
2.7.2	Systèmes dynamiques discrets et section de Poincaré	12
2.7.2.a	Section de Poincaré	13
2.7.2.b	Systèmes dynamiques discrets	13
2.7.2.c	Intérêt de la méthode	14
2.8	Attracteur	14
2.9	Bifurcation	15
2.9.1	Différents types de bifurcations	15
2.9.1.a	Bifurcations flip ou doublement de période	15
2.9.1.b	Bifurcation fold ou noeud-col.	16
2.9.1.c	Bifurcation de Neimark.	16
2	Chaos déterministe	17
1	Sémantique de la théorie du chaos	17
2	Chaos déterministe	17
3	Routes vers le chaos	18
3.1	Par doublement de période	19
3.2	Par Intermittences	19
3.3	Quasi-périodicité	19
4	Caractérisation numérique et graphique du chaos	20
4.1	Attracteur étrange	21
4.2	Sensibilité aux conditions initiales	21

4.3	Exposants de Lyapunov	22
4.3.1	Caractérisation d'un attracteur par le signe des exposants de Lyapunov	25
4.4	Dimension fractale	25
4.4.1	Dimension de Lyapunov	26
4.4.2	Dimension de Hausdorff	27
4.4.3	Dimension de Kolmogorov ou de capacité	27
4.4.4	Dimension de corrélation	28
3	Exemples de Systèmes dynamiques chaotiques	29
1	Modèle de Lorenz	29
1.1	Calcul des points d'équilibres	29
1.2	Stabilité des points d'équilibres	31
2	Le modèle de Hénon et le modèle de Lozi	35
2.1	Attracteur de Hénon	36
2.2	Attracteur de Lozi	38
II	OPTIMISATION et CHAOS	45
4	Etat de l'art sur les algorithmes chaotiques.	46
1	Introduction	46
2	Aperçu sur les Methodes d'Optimisation.	46
2.1	Définitions	47
2.2	Méthodes d'Optimisation Globale (Non-Deterministe).	49
2.2.1	Méthodes de descente généralisées	49
2.2.2	Recherches aléatoires	51
2.2.3	Méthode de multi-départ	52
2.2.4	Méthodes de regroupement (Clustering)	52
2.2.5	Méthodes évolutionnaires	52
2.2.6	Généralités sur les méthodes d'optimisation globale	54
2.3	Cooperation entre les recherches locales et globales.	54
2.4	Compromis, Exploration et Exploitation.	54
2.5	Les Algorithmes de Recherche Chaotiques.	55
2.5.1	La Recherche Chaotique de l'optimum	55
5	Efficacité des algorithmes de recherche chaotique.	57
1	Introduction.	57
2	Principe et étapes du COA basée sur 2-D modèle.	58
3	Application de l'algorithme basée sur le modèle chaotique 2-D	60
3.1	La méthode COLM).	60

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>		5
3.2	la méthode (COHM).	63
3.3	La méthode COMM.	66
6	Proposition d'une nouvelle approche pour les algorithmes d'optimisation chaotiques.	68
7	Application de l'approche proposée sur des fonctions tests.	72
1	Fonctions tests	72
1.1	Fonction test F_1	72
1.2	Fonction test F_2	73
1.3	Fonction test F_3	73
1.4	Fonction test F_4	74
1.5	Fonction test F_5	74

Introduction générale

L'optimisation est l'une des branches les plus importantes des mathématiques appliquées modernes, et de nombreuses recherches, à la fois pratiques et théoriques, lui sont consacrées.

Nous cherchons à élaborer notre emploi du temps, à optimiser nos espaces de rangement, ou encore le trajet que nous aurons à parcourir pour nous rendre quelque part, etc. Nous faisons de l'optimisation. En fait, l'optimisation cherche à améliorer une performance en se rapprochant d'un point optimum. Comme nous le rappelle l'adage populaire selon lequel : "les mathématiques permettent de mettre le monde en équation", il peut être tracé un parallèle entre l'optimisation quotidienne et celle, plus technique que l'on retrouve en science. En mathématique, la meilleure solution se recherche au sein d'un domaine initial. Cette solution est souvent soumise à des contraintes qui correspondent à des obligations ou des souhaits à respecter. Le critère permettant de distinguer qu'une solution est la meilleure s'appelle la fonction objectif. L'optimisation mathématique consiste à chercher dans le domaine initial une solution qui maximise ou minimise une fonction objectif tout en respectant des contraintes. Pour un domaine continu, on distingue classiquement deux types d'optimisation :

- **L'optimisation locale** est la recherche d'une solution qui est meilleure localement (dans un voisinage de cette solution). Cette solution est appelée un optimum local.
- **L'optimisation globale** est la recherche de la meilleure solution sur tout le domaine ; c'est-à-dire que dans tout le domaine il n'existe aucune solution qui lui soit meilleure tout en respectant les contraintes. Cette solution est appelée l'optimum global.

Par définition, l'optimum global est aussi une solution locale. En revanche, il est bien plus épineux de trouver l'optimum global, car lorsque l'on pense avoir trouver cet optimum, sa démonstration se révèle bien souvent particulièrement ardue.

L'intérêt de l'optimisation globale par rapport à l'optimisation locale est patent. Elle garantit en effet que personne ne peut avoir une solution meilleure que celle trouvée. Or, pour une entreprise, cette information a son importance, car la différence entre la solution globale et une solution locale est bien souvent significative.

Mais l'intérêt n'est pas compétitif. Dans de nombreux problèmes, l'optimum global est la seule solution mathématique correspondant à une réalité physique. C'est ce qu'illustre par exemple la recherche de la quantité de chaque élément présent dans un mélange chimique à l'équilibre.

De nos jours, afin de résoudre des problèmes d'optimisation globale, de nombreuses stratégies algorithmiques s'avèrent disponibles. Selon la nature du processus de recherche mis en oeuvre, les méthodes utilisées pour l'optimisation globale peuvent être classées en deux catégories : les méthodes déterministes et les méthodes stochastiques.

Les méthodes déterministes requièrent des hypothèses restrictives sur la fonction à optimiser, telles que la continuité, la dérivabilité ou les conditions de Lipchitz. De plus, ces méthodes ne sont applicables que pour des problèmes de faible dimension. Pour les autres problèmes, seules les méthodes stochastiques peuvent être utilisées. Les méthodes stochastiques, contrairement aux méthodes déterministes, sont basées sur une approche en partie ou entièrement guidée par un processus stochastique. Les algorithmes que nous allons étudier font partie des méthodes stochastiques globales permettant de résoudre des problèmes généraux d'optimisation. Par ailleurs, ils permettent de fournir le plus haut degré de certitude concernant l'optimalité globale des solutions trouvées. Ces algorithmes s'appellent :

Algorithmes d'Optimisation Chaotiques (COA).

Durant ces dernières décennies, la théorie des systèmes non linéaires a été appliquée à l'optimisation afin d'augmenter le degré de convergence. Notamment, après le travail de Caponetto et al.[71, 69], des applications du chaos ont attiré beaucoup d'attention. Grâce aux propriétés naturelles des systèmes chaotiques, telles que leur sensibilité aux conditions initiales et leur évolution dans une large bande de fréquence, les systèmes chaotiques sont de bons candidats pour l'optimisation.

Cette thèse est divisée en deux parties et est composée de sept chapitres. La deuxième partie a fait l'objet de deux Publications :

"Fast chaotic optimization algorithm based on locally averaged strategy and multifold chaotic attractor "

et

"An improved chaotic optimization algorithm using a new global locally averaged strategy"

♦ *La première partie* est une revue de la bibliographie sur la théorie des systèmes dynamiques non linéaires et le chaos. L'objectif de cette partie est de donner les éléments principaux de ces concepts de la façon la plus simple et de proposer une synthèse de ces matières pour mieux comprendre l'application de ces concepts dans le domaine qui nous concerne

Elle est présentée à travers trois chapitres :

Le 1^{er} chapitre est constitué de rappels sur les systèmes dynamiques non linéaires avec un accent particulier porté sur les systèmes à temps continu et discret.

Le 2^{ème} chapitre retrace un bref historique de la théorie du chaos déterministe. Dans ce chapitre nous balayerons les différents outils mathématiques qui nous servent à caractériser le comportement Chaotique, tels que les attracteurs étranges, les exposants de Lyapunov et la dimension fractale.

Le 3^{ème} chapitre est une illustration concrète de toutes les notions précédentes par des exemples célèbres tels que le modèle de Lorenz et les modèles de Hénon et Lozi qui nous servira dans la suite de la thèse.

♦ *La seconde partie* de cette thèse est consacrée à l'application de la théorie du Chaos à l'optimisation. Son objective est une contribution au développement d'une méthode originale d'optimisation globale basée sur les systèmes chaotiques.

Elle est présentée à travers quatre chapitres

Le 4^{eme} chapitre brosse un état de l'art sur certaines techniques d'optimisation. Deux grandes classes de méthodes sont présentées : les méthodes déterministes et les méthodes non déterministes (stochastiques), ainsi que les caractéristiques principales de chaque classe.

Le 5^{eme} chapitre Nous présentons un algorithme d'optimisation chaotique efficace basé sur le modèle de Lozi. Cet algorithme appelé COLM, utilise une approche en deux phases, de manière à explorer l'espace de recherche d'une façon chaotique. La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à l'étude comparative des COAs qui sont basés sur différents modèles chaotiques. En fin nous donnons des applications de l'approche proposée pour plusieurs problèmes.

Le 6^{eme} chapitre nous emmène au cœur du travail réalisé. Elle est consacrée à la description de l'approche que nous avons développée. Elle sera désignée par ICOLM. Elle utilise le principe de l'approche étudiée dans le chapitre 5 avec une amélioration en optimisant localement la recherche globale.

Dans **Le 7^{eme} chapitre** notre nouvelle méthode est testée sur une batterie de fonctions de test. Cet algorithme permet de trouver avec certitude un proche voisinage l'optimum global.

Première partie

**SYSTEMES DYNAMIQUES ET
CHAOS**

Systemes dynamiques

1 Introduction

La notion de temps dans l'étude des modèles physiques et mathématiques remonte à Galilée, qui le premier introduisit cette notion dans l'étude de la chute des corps et le mouvement de la terre autour du soleil. Cette introduction du temps dans les équations est ce qui s'appellera l'étude des systèmes dynamiques. Au XVIII^e siècle, Isaac Newton a défini l'équivalence masse-énergie et trouve de manière explicite la cause de certains mouvements apparemment désordonnés. Il parle de déterminisme. Selon cette vision, tout semblait aussi être parfaitement prédictible et causal. Le futur devenait prévisible : il suffisait de traduire le mouvement en équations différentielles et de les résoudre. La mécanique newtonienne n'est pas fautive, mais considère l'homme debout immobile contre la pesanteur [1].

Dès le début du siècle, le mathématicien Henri Poincaré [2] montra dans son étude du système solaire qu'il existait des orbites stables et des orbites instables et que, quelquefois, une très faible perturbation dans le système pouvait induire un changement d'état d'une orbite. Il s'aperçut que des causes identiques pouvaient ne pas conduire aux mêmes effets. Le système étudié était déterministe, mais le principe de causalité était violé. Et aussi il se rend compte que l'espace euclidien à 3 dimensions ne rend pas compte de tous les phénomènes. Benoît Mandelbrot précise qu'un point n'est pas toujours dans un espace à 3 dimensions, il peut se situer, par exemple, dans un espace à 3,3897 dimensions. La valeur décimale indique comment varie l'intensité de la déformation selon chacune des directions de l'espace. C'est la dimension fractale. En 1963 le titre de la communication d'Edward Lorenz, la plus citée dans la bibliographie spécialisée, pose bien le problème : "Est-ce qu'un battement d'ailes de papillon au Brésil peut provoquer une tornade au Texas?". Il y décrit le comportement d'un système dynamique non-linéaire inspiré d'un modèle de l'atmosphère terrestre. Selon la valeur de certains paramètres, un comportement dynamique nouveau était mis en évidence. Les trois variables d'état du système, permettant de déterminer l'évolution des masses d'air, manifestaient une activité erratique, imprévisible. Edward Lorenz mit en évidence que, dans les systèmes non linéaires, d'infimes différences dans les conditions initiales engendraient à long terme des systèmes totalement différents. Pour mieux faire comprendre l'importance de cette sensibilité aux conditions initiales, il eut recours à une image qui contribua au succès médiatique de la théorie du chaos : celle de l'effet papillon. Cette

métaphore insistait sur la disproportion entre la cause et l'effet soulignant au passage l'imprédictibilité à long terme de l'évolution de tels systèmes [3].

2 Systèmes dynamiques

En général, un système dynamique décrit des phénomènes qui évoluent au cours du temps. Le terme " système " fait référence à un ensemble de variables d'état (dont la valeur évolue au cours du temps) et aux interactions entre ces variables. L'ensemble des variables d'état d'un système permet de construire un espace mathématique appelé " espace des phases ".

Nous introduisons la notion des systèmes dynamiques de façon formelle via le concept de groupe à un paramètre [4, 5].

2.1 Groupe à un paramètre

Soit M un ensemble quelconque et G un groupe additif (\mathbb{R} ou \mathbb{Z}). Une famille $\{\varphi^t\}$ d'application M dans M indexée par le groupe $G, (t \in G)$ est appelée groupe à un paramètre de M si :

$$\forall t, s \in G, \varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s \text{ et } \varphi^0 = I_M$$

Nous définissons, à présent, précisément les systèmes dynamiques et précisons le vocabulaire utilisé pour la description de leurs comportements.

2.2 Flot ou système dynamique

Soit M un ensemble quelconque et G un groupe additif (\mathbb{R} ou \mathbb{Z}). Considérons $\{\varphi^t\}_{t \in G}$ un groupe à un paramètre d'applications M dans M indexées par le groupe G . On appelle flot ou système dynamique le couple $(M, \{\varphi^t\}_{t \in G})$.

L'ensemble M précédent constitue l'*espace des phases* du flot. Tout point x de cet espace représente un *état* du système dynamique.

2.3 Trajectoire et Orbite

Soient $(M, \{\varphi^t\}_{t \in G})$ un système dynamique et x un état de l'espace des phases. On appelle *trajectoire* d'un point x de M l'application définie sur G et à valeurs dans M par :

$$\begin{aligned} \phi: \quad G &\longrightarrow M & (1.1) \\ t &\longmapsto \varphi^t(x) \end{aligned}$$

On appelle *orbite* d'un point x l'image de la trajectoire issue de x c'est à dire le sous ensemble $\gamma(x)$ de l'espace des phases défini par :

$$\gamma(x) = \varphi^t(x), t \in G$$

2.4 Espace des phases, variables d'état et portrait de phases

De manière simplifiée, l'espace des phases permet de traduire des séries de nombre en une représentation spatiale, de dégager l'essentiel de l'information d'un système en mouvement et de dresser la carte routière de toutes ses possibilités. L'espace des phases est un espace mathématique souvent multi-dimensionnel. Chaque axe de coordonnées de cet espace correspond une variable d'état du système dynamique étudié et chaque variable d'état caractérise le système à un instant donné. Pour chaque instant donné, le système est donc caractérisé par un point de cet espace. A l'instant suivant, il sera caractérisé par un autre point et ainsi de suite. Si l'espace des phases est représenté en trois dimensions, cette suite de points peut montrer graphiquement l'évolution du système dans le temps. L'ensemble des trajectoires possibles constitue le portrait de phases. Celui-ci peut aider à percevoir l'attracteur du système.

Considérons la relation suivante entre deux points x et y de M :

$$x \approx y \Leftrightarrow x, y \text{ appartiennent à la même orbite}$$

2.5 Déterminisme du flot

Le flot tel que nous venons de le définir est un processus déterministe. En effet, la structure de groupe à paramètre implique que à chaque application φ^t est biunivoque. De ce fait, les états passés ou futurs sont uniquement déterminés par l'état présent : le flot est donc déterministe.

2.6 Systèmes dynamiques particuliers

D'après la définition des flots, l'ensemble G indexant le groupe à un paramètre est l'ensemble $(\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z})$. D'après ce critère, les systèmes dynamiques sont classés selon :

- les systèmes dynamiques à temps continu $(M, \{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{R}})$
- les systèmes dynamiques à temps discret $(M, \{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{Z}})$

En outre, suivant la structure de l'espace des phases M et les propriétés des applications φ^t , plusieurs types de systèmes dynamiques sont distingués. En particulier, pour les systèmes à temps continu, se dégagent trois grandes catégories :

- M est un espace mesurable, φ^t sont des applications mesurables alors le système dynamique associé est dit mesurable également.
- M est un espace topologique et les applications φ^t sont continues alors le système dynamique considéré est continu.

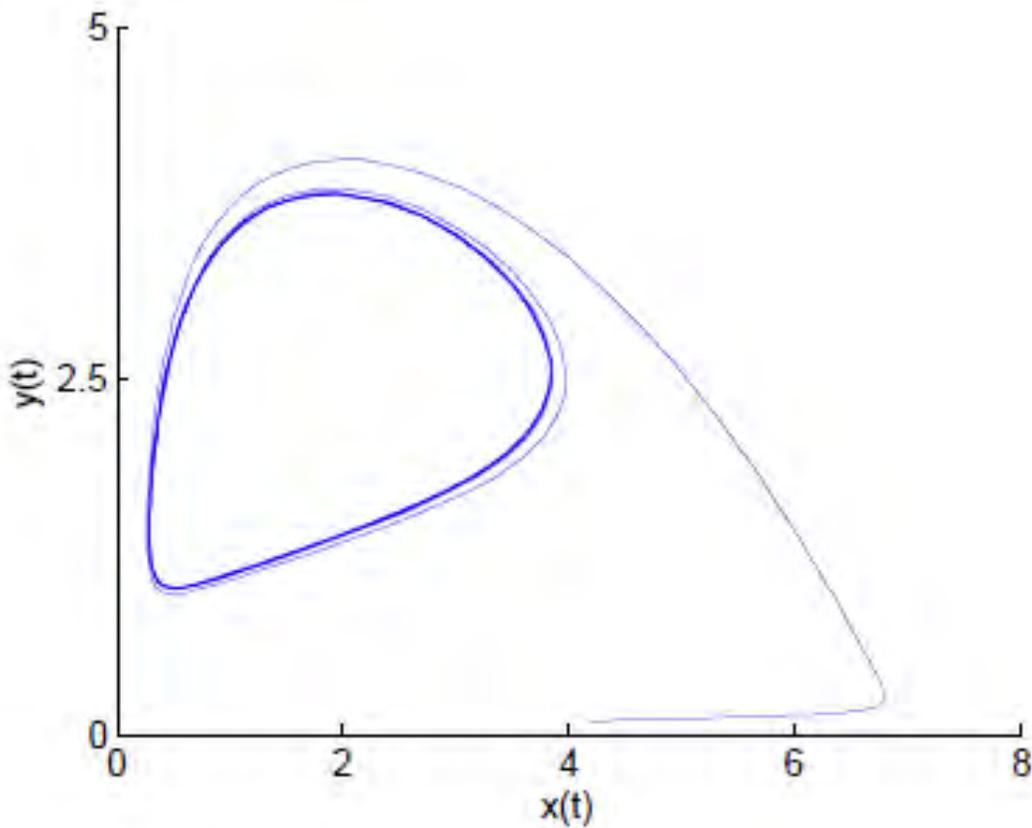


Figure 1.1 – Portrait de phase d'un modèle prédateur / proie

- M est un ouvert de l'espace affine réel de dimension finie d , les applications φ^t sont de classe C^d sur M alors le système est quantifié de différentiable.

2.7 Formulation de systèmes dynamiques

En plus de l'espace d'état, On peut le représenter mathématiquement par un ensemble d'équations différentielles ou aux différences [4, 5]. Si la fonction f est non linéaire, le système ne l'est pas non plus. Alors, si le temps est exprimé explicitement dans la fonction f , le système est dit "non autonome".

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y) \quad \forall t \in U \\ t_0 \in \mathbb{R}, \quad y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (1.2)$$

La notion de déterminisme provient du fait que le système considéré est complètement caractérisé par son état initial et sa dynamique.

C-à-d soit U l'ensemble des conditions initiales et $x_0 \in U$, si pour tout x_0 , alors $x(t, x_0)$ existe et est unique. Le système est dit déterministe.

Les systèmes dynamiques sont classés en deux catégories :

2.7.1 Systèmes dynamiques continus

Dans cette section, nous montrons que les solutions des systèmes différentiels sont des systèmes dynamiques.

2.7.1.a Résultats généraux sur les systèmes différentiels

Ce paragraphe est consacré à des rappels sur les systèmes différentiels, rappels préalables à la démonstration du lien entre les systèmes différentiels et les systèmes dynamiques continus [5, 6].

Définition 1 (Problème de Cauchy) Soient d un entier naturel positif, U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et f une application de U dans \mathbb{R}^d au moins continue.

Soit l'application différentielle : $y' = f(t, y)$ pour tout couple appartenant à U .

Les conditions initiales sont fixées : $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^d$.

Un problème de Cauchy consiste à déterminer un couple (I, y) où I est un intervalle de \mathbb{R} tel que $t_0 \in I$ et y une fonction de I dans \mathbb{R}^d vérifiant :

$$t \in I, y'(t) = f(t, y(t)) \text{ et } y(t_0) = y_0$$

Plusieurs théorèmes [7, 8] démontrent des résultats d'unicité et d'existence locale et globale des solutions du problème de Cauchy. Parmi ceux-ci, nous avons choisi d'énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz) Soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) & \forall t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Si f est continue sur $I \times \mathbb{R}^d$ dans \mathbb{R}^d et est localement lipschitzienne en y alors le problème de Cauchy admet une solution unique sur I .

2.7.1.b Solutions des systèmes différentiels : système dynamique continu

Soient d un entier naturel positif, U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et f une application de U dans \mathbb{R}^d de classe C^∞ . Considérons l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y) & \forall t \in U \\ t_0 \in \mathbb{R}, y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (1.4)$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz et puisque la fonction f est $C^\infty((\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d), \mathbb{R}^d)$, il y a une existence et unicité de la solution sur un intervalle maximal, que nous supposons être \mathbb{R} . La solution $y(t)$, ayant pour conditions initiales (t_0, y_0) , est notée :

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ t &\longmapsto y(t) = \phi(t, t_0, y_0) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Elle vérifie donc les deux relations : $\dot{\phi}(t, t_0, y_0) = f(\phi(t, t_0, y_0))$ et $\phi(t_0, t_0, y_0) = y_0$. De ce fait, la solution ϕ est la courbe intégrale du système passant par le point (t_0, y_0) . L'ensemble de toutes les courbes intégrales du système (1.2) constitue un groupe à un paramètre $t \in \mathbb{R}$. Le flot associé, noté φ^t , est engendré par la famille de fonctions définies et à valeurs dans l'espace des phases telle que $\varphi^t(y_0)$ représente l'état atteint au bout d'un temps t à partir de l'état initial (t_0, y_0) .

Ainsi, l'ensemble des solutions d'un système différentiel constitue un système dynamique. En d'autres termes, la fonction f , appelée champ de vecteurs, définit d'une part le système différentiel mais détermine également un système dynamique continu.

Dans la suite, les systèmes dynamiques étudiés sont engendrés par des systèmes différentiels dont nous précisons à présent la forme du champ de vecteurs.

* Le champ de vecteurs f est non linéaire.

* La fonction f ne dépend pas explicitement du temps ; le champ de vecteur est alors dit autonome.

* Les systèmes étudiés sont dissipatifs : la divergence du champ de vecteurs est constante négative ou elle est en moyenne négative sur les orbites considérées.

Par exemple, le système de Lorenz de 1963 [3], un des systèmes différentiels les plus connus et étudiés, vérifie ces trois propriétés. A la lecture des équations (1.4), le caractère non linéaire et autonome se constate aisément. Sa divergence s'exprime en fonction de ces paramètres qui sont positifs $-\sigma - 1 - b$ et s'avère constante et négative.

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad \sigma = 10, r = 28 \text{ et } b = \frac{8}{3} \quad (1.6)$$

2.7.2 Systèmes dynamiques discrets et section de Poincaré

Nous présentons, dans cette section, la méthode des sections de Poincaré [2] qui permet de construire des systèmes dynamiques discrets à partir des systèmes différentiels.

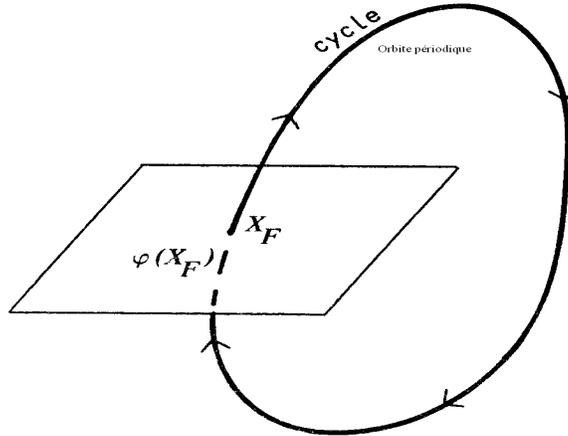


Figure 1.2 – L'application de Poincaré

2.7.2.a Section de Poincaré

La technique dite des sections de Poincaré facilite l'étude des systèmes dynamiques considérés en ramenant l'analyse d'un système différentiel (temps continu) à celle d'une application (temps discret). Par le biais de cette méthode, la dimension d du problème initial sous forme de système différentiel est réduite d'une unité avec l'application en dimension $d - 1$.

Soit $(\mathbb{R}^d, \varphi_{t \in \mathbb{R}})$ un système dynamique créé par un champ de vecteurs f . Il s'agit de déterminer les intersections successives des orbites avec un hyperplan H transverse au flot dans l'espace des phases. La séquence des points ordonnés suivant le temps constitue la section de Poincaré S :

$$S = \{H \cap \varphi^t(x), t \in \mathbb{R}, x \in M\}$$

2.7.2.b Systèmes dynamiques discrets

Définissons par récurrence la suite des fonctions $\{g^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de S et à valeurs dans S selon les formules :

$$g^0 = I_S, g^{n+1} = g^n \circ g^1 \text{ et } g^{n-1} = g^n \circ g^{-1}$$

où les deux fonctions g^1 et g^{-1} à la base de récurrence sont déterminées par :

$$\begin{aligned} g^1 : S &\longrightarrow S \\ x &\longmapsto y = \varphi^\tau(x) / \tau = \min(t > 0, \varphi^t(x) \in S) \end{aligned} \tag{1.7}$$

et

$$\begin{aligned} g^{-1} : S &\longrightarrow S \\ x &\longmapsto y = \varphi^\tau(x)/\tau = \max(t < 0, \varphi^t(x) \in S) \end{aligned} \quad (1.8)$$

L'ensemble des fonctions $\{g^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ constitue un groupe à un paramètre. En effet, les trajectoires et la section de Poincaré sont héritées d'un flot déterministe issu d'un système différentiel ; les fonctions $\{g^n\}$ sont donc automatiquement biunivoques. Nous disposons, dans ces conditions, d'un système dynamique discret $(\mathbb{R}^{d-1}, \{g^n\}_{n \in \mathbb{Z}})$.

2.7.2.c Intérêt de la méthode

La technique des section de Poincaré offre deux avantages :

- * d'une part, la recherche des attracteurs autres que les points fixes est possible et leur étude est simplifiée via les applications.
- * par ailleurs, la représentation des résultats est simplifiée. La description et l'interprétation de la dynamique est notamment plus simple dans le plan que dans l'espace pour des systèmes de dimension trois.

Nous venons donc de montrer que les systèmes différentiels donnent lieu à une double vision des systèmes dynamiques. Leurs solutions constituent, d'une part, des systèmes continus. En outre, leur étude, au moins partiellement, est simplifiée par la technique des sections de Poincaré qui permet de se ramener à l'analyse d'un système discret.

2.8 Attracteur

La région de l'espace de phases vers laquelle convergent les trajectoires d'un système dynamique dissipatif s'appelle "attracteur". Les attracteurs sont des formes géométriques qui caractérisent l'évolution à long terme des systèmes dynamiques. Il en existe quatre types distincts : un point, un cycle limite, un tore ou avoir une structure encore plus complexe de type fractale.[9].

1. L'attracteur "point fixe" est un point de l'espace de phase vers lequel tendent les trajectoires, c'est donc une solution stationnaire constante.
2. L'attracteur "cycle limite" est une trajectoire fermée dans l'espace des phases vers laquelle tendent les trajectoires. C'est donc une solution périodique du système.
3. L'attracteur "tore" représente les mouvements résultant de deux ou plusieurs oscillations indépendantes que l'on appelle parfois "mouvements quasi périodiques".
4. Les attracteurs étranges sont bien plus complexes que les autres, ils seront définis ultérieurement, on parle d'attracteur étrange lorsque la dimension fractale n'est pas entière.

Définition 2 (Attracteur) Soit $(\mathbb{R}^d, \{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{R}})$ un système dynamique. Un attracteur A de ce système vérifie les quatre conditions suivantes :

1. A est invariant sous l'action du flot : $\varphi^t(A) = A$.
2. A est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.
3. Il existe une orbite dense sur A .
4. A ne peut pas être décomposé en deux sous-ensembles non triviaux qui soient séparément invariants.

Le bassin d'attraction $B(A)$ de l'attracteur A est alors constitué par l'ensemble des points de l'espace des phases pour lesquels A représente la limite asymptotique :

$$B(A) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi^t(x) \in A\}$$

A l'inverse du cas linéaire, pour un système dynamique non linéaire, plusieurs attracteurs peuvent coexister. En effet, deux choix de conditions initiales dans deux bassins d'attraction distincts conduisent à deux états asymptotiques différents. La connaissance des conditions initiales des systèmes différentiels non linéaires est donc essentielle.

2.9 Bifurcation

Un autre ensemble de concepts utile à l'analyse des systèmes dynamiques est la théorie de la "bifurcation". Ce concept renvoie à l'étude des changements de comportement d'un système lorsque les paramètres de ce dernier changent. La bifurcation signifie un changement qualitatif de la dynamique du système, qui résulte du changement d'un des paramètres du système. Par exemple, déstabilisation d'un équilibre stable, apparition ou disparition d'un cycle ou d'un attracteur, ...

La valeur pour laquelle la bifurcation se produit est nommée le point de bifurcation.

2.9.1 Différents types de bifurcations

Dans cette section, on considère trois types de bifurcations locales : la bifurcation de doublement de période, la bifurcation de Neimark et la bifurcation point selle (ou col)/noeud. Ces bifurcations sont locales car elles peuvent être analysées par la linéarisation du système au voisinage d'un point dynamique contemporain avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica.

Tous les types de bifurcations étudiés correspondent toujours à $|\lambda_i| = 1$. de nombreux types de bifurcation sont inventoriés dans [10, 11, 12]

2.9.1.a Bifurcations flip ou doublement de période

Cette bifurcation a lieu lorsqu'une des deux valeurs propres est égales à -1 . Un cycle d'ordre k qui subit cette bifurcation va changer de nature et crée un cycle d'ordre

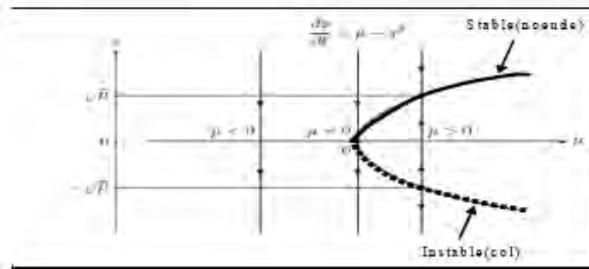


Figure 1.3 – Diagramme de Bifurcation noeud-col

$2k$ de la même nature. C'est-à-dire, un point fixe stable d'ordre 1, par exemple, devient instable en même temps que l'apparition d'un cycle d'ordre 2 stable. Cette situation peut être représentée par :

$$\text{Cycle attractif d'ordre } k \leftrightarrow \text{cycle répulsif d'ordre } k + \text{cycle attractif d'ordre } 2k$$

2.9.1.b Bifurcation fold ou noeud-col.

La bifurcation $\lambda = +1$ correspond à la situation où l'une des deux valeurs propres est égale à +1. Ce type de bifurcation donne naissance à deux cycles d'ordre k en même temps, l'un est attractif et l'autre est instable. Cette situation peut être représentée par :

$$\emptyset \leftrightarrow \text{cycle attractif} + \text{cycle répulsif}$$

Où \emptyset signifie absence de cycle.

2.9.1.c Bifurcation de Neimark.

Cette bifurcation se produit lorsque la matrice Jacobienne possède deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ et de plus $|\lambda_{i=1,2}| = 1$. Elle se traduit par :

$$\text{Foyer attractif d'ordre } k \leftrightarrow \text{foyer répulsif d'ordre } k + \text{une courbe invariante attractive.}$$

Chaos déterministe

1 Sémantique de la théorie du chaos

Le mot chaos n'a pas ici le même sens que l'usage dans la vie courante [13].

On retrouve trace de ce mot du grec *Khaos* dans les écrits de Christine de Pisan (Chemin de long estude) qui définit le chaos comme un

" état de confusion des éléments ayant précédé l'organisation du monde "

Au XVIème siècle Desportes, le décrit dans ses Elegies comme

" Toute sorte de confusion, de désordre "

Le chaos, dans son sens familier aujourd'hui, c'est le désordre et la violence, mais aussi l'inintelligibilité.

Loin de ces considérations historiques et mythologiques, Chaos : un terme souvent utilisé comme métaphore du désordre. Et la théorie du Chaos a vu le jour dans les travaux d'Henri Poincaré à la fin du XIXe siècle et c'est dans les années soixante qu'elle fut redécouverte après la publication d'un article qui allait révolutionner le monde des sciences [3]. Le chaos est devenu un champ d'exploration de la science,

2 Chaos déterministe

Le chaos est défini par un comportement lié à l'instabilité et à la non-linéarité dans des systèmes dynamiques déterministes. La relation entre l'instabilité et la chaoticité est alors que le système manifeste une très haute sensibilité aux changements de conditions est ce qu'affirmait Poincaré dans le chapitre sur le Hasard de son ouvrage intitulé Science et Méthode[14] :

«Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. (...). Il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux. Une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit».

Le phénomène de croissance rapide des erreurs de prédiction est ce que l'on appelle chaos. Ce phénomène introduit donc du hasard dans la description d'un système physique, même si ce système correspond à des équations d'évolution parfaitement déterministes comme celles de la dynamique du mouvement des astres. La théorie du chaos étudie en détail comment une petite incertitude sur l'état initial d'une évolution temporelle déterministe peut donner lieu à une incertitude des prédictions qui croît rapidement avec le temps. On dit qu'il y a dépendance sensitive des conditions initiales. La propriété de sensibilité aux conditions initiales se traduit par le fait que, dans l'espace des phases, la distance entre deux trajectoires tend à augmenter de manière exponentielle au cours du temps, pouvant atteindre une distance limite qui est de l'ordre du diamètre de l'attracteur. La sensibilité aux conditions initiales caractérise un système chaotique.

La théorie du chaos selon Keller [15] est « l'étude qualitative du comportement apériodique instable d'un système dynamique déterministe ». qui admet le manque d'une définition générale d'un système dynamique chaotique considère qu'un tel système possède trois propriétés essentielles. Premièrement, il est radicalement sensible aux conditions initiales. Deuxièmement, il peut faire preuve d'un comportement hautement désordonné et troisièmement, malgré cette dernière caractéristique de désordre, un système dynamique chaotique est déterministe c'est-à-dire qu'il obéit à des lois qui décrivent complètement son mouvement.

3 Routes vers le chaos

On ne sait pas à l'heure actuelle dans quelles conditions un système va devenir chaotique. Cependant il existe plusieurs types d'évolution possibles d'un système dynamique régulier vers le chaos. Supposons que la dynamique étudiée dépende d'un paramètre de contrôle.[11, 16, 17]

Lorsqu'on varie ce paramètre, le système peut passer d'un état stationnaire à un état périodique, puis au-delà d'un certain seuil, suivre un scénario de transition et devenir chaotique. Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos. D'une manière générale, l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive mais marquée par des changements discontinus appelés bifurcations. Une bifurcation marque le passage soudain d'un régime dynamique à un autre, qualitativement différent. Tous ces scénarios ont été prédits par la théorie et observés dans de nombreuses expériences. En physique, c'est notamment la convection thermique de Rayleigh-Bénard, dans laquelle une couche de fluide située entre deux plaques horizontales est soumise à un gradient de température vertical, qui a servi à l'origine de système modèle pour l'étude du chaos. Depuis, le chaos a été mis en évidence dans bien d'autres domaines. Nous allons en exposer brièvement trois types d'évolution possibles.

3.1 Par doublement de période

Ce scénario de transition vers le chaos est sans doute le plus connu. Par augmentation du paramètre de contrôle de l'expérience, la fréquence du régime périodique double, puis est multipliée par 4, par 8, par 16 < etc. Les doublements étant de plus en plus rapprochés, on tend vers un point d'accumulation auquel on obtiendrait hypothétiquement une fréquence infinie. C'est à ce moment que le système devient chaotique. Il a été étudié en particulier en dynamique de populations par R. May sur l'application logistique, $x_{n+1} = r.x_n(1 - x_n)$. Selon la valeur du paramètre a , la suite converge soit vers un point fixe nul ou pas. Dès que a est plus grand que 3 le système bifurque, c'est à dire qu'il oscille entre 2 valeurs autour du point fixe. On parle de cycle attracteur de période 2. En continuant à augmenter a , ces 2 attracteurs s'écartent du point fixe jusqu'à ce qu'une nouvelle bifurcation ait lieu. Chaque point se dédouble et on obtient un cycle attracteur de période 4. On dit qu'il y a doublement de période. C'est à partir de cet exemple que Feigenbaum pressentit l'existence d'une forme d'universalité dans cette transition vers le chaos sous forme de cascade de doublement de période.

3.2 Par Intermittences

Ce scénario via les intermittences se caractérise par l'apparition erratique de bouffées chaotiques dans un système qui oscille de manière régulière. Le système conserve pendant un certain laps de temps un régime périodique ou pratiquement périodique, c'est à dire une certaine "régularité", et il se déstabilise, brutalement, pour donner lieu à une sorte d'explosion chaotique. Il se stabilise de nouveau ensuite, pour donner lieu à une nouvelle "bouffée" plus tard. On a constaté que la fréquence et la durée des phases chaotiques avaient tendance à s'accroître plus on s'éloignait de la valeur critique de la contrainte ayant conduit à leur apparition. L'intermittence suppose en particulier que le cycle limite (correspondant à l'état périodique d'où est issu ce phénomène de transition) bifurque de façon sous-critique et qu'il n'y ait pas d'attracteur à proximité. C'est ce que l'on observe dans le système de Rössler.

3.3 Quasi-périodicité

Le scénario via la quasi-périodicité a été mis en évidence par les travaux théoriques de Ruelle et Takens (1971) illustré par exemple sur le modèle de Lorenz (1963). Ce scénario a été confirmé par de nombreuses expériences dont les plus célèbres se trouvent en thermo-hydrodynamique - convection de Rayleigh-Bénard dans une petite boîte - et en chimie - réaction de Bélousov-Zabotinsky - entre autres. cette route vers le chaos résulte de la "concurrence" de différentes fréquences dans le système dynamique. Dans un système à comportement périodique à une seule fréquence, si nous changeons un paramètre alors il apparaît une deuxième fréquence. Si le rapport entre les deux fréquences

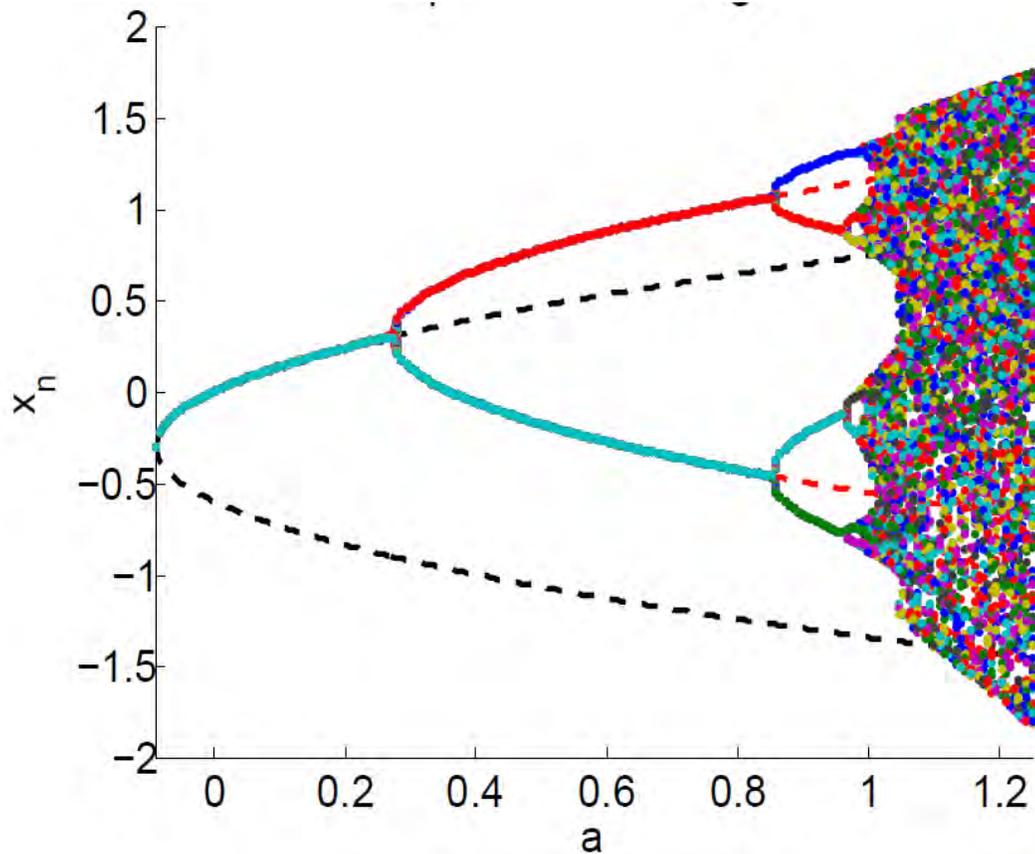


Figure 2.1 – Cascade de doublements de période

est rationnelle comportement est périodique. Mais, si le rapport est irrationnel, le comportement est quasi périodique. Dans ce cas, les trajectoires couvrent la surface d'un tore. Alors, on change de nouveau le paramètre et il apparaît une troisième fréquence, et ainsi de suite jusqu'au chaos. Il existe aussi des systèmes qui passent directement de deux fréquences au chaos.

4 Caractérisation numérique et graphique du chaos

Ce chapitre offre des outils mathématiques permettant de caractériser les systèmes dynamiques chaotiques. Ceux-ci étant définis par un attracteur étrange. Plusieurs propriétés permettent cette caractérisation. L'une des propriétés géométriques la plus remarquable d'un attracteur étrange est qu'un "zoom" répété indéfiniment sur l'une de ses parties reproduit toujours le même motif feuilleté. Un attracteur étrange possède en fait une structure fractale dont la dimension, qui traduit sa complexité, peut

être estimée par le calcul de la dimension de corrélation. L'autre propriété majeure est la sensibilité aux conditions initiales. Le degré de sensibilité aux conditions initiales quantifie le caractère chaotique du système. Il est évalué par les valeurs numériques des exposants de Lyapunov. De la sensibilité aux conditions initiales dépendent les possibilités de prévision de l'état du système. Possibles à court terme du fait de la nature déterministe des systèmes chaotiques, elles deviennent impossibles à long terme. Le degré de prédictibilité des systèmes chaotiques peut être estimé par l'entropie de Kolmogorov-Sinaï.[18, 19].

4.1 Attracteur étrange

Il est contenu dans un espace fini. Son volume est nul. Sa dimension est fractale et non entière ; sa trajectoire est complexe ; presque toutes les trajectoires sur l'attracteur ont la propriété de ne jamais passer deux fois par le même point. En d'autres termes, chaque trajectoire est apériodique ; deux trajectoires proches à un instant " t " voient localement leur distance augmenter à une vitesse exponentielle. Ce phénomène traduit la sensibilité aux conditions initiales ; toute condition initiale appartenant au bassin d'attraction, c'est-à-dire à la région de l'espace des phases dans laquelle tout phénomène dynamique sera " attiré " vers l'attracteur, produit une trajectoire qui tend à parcourir de façon spécifique et unique cet attracteur[9].

Une " définition " d'un attracteur étrange peut être formulée :

Un sous-ensemble borné A de l'espace des phases est un attracteur étrange pour une transformation T de l'espace s'il existe un voisinage U de A ; c'est à dire que pour tout point de A il existe une boule contenant ce point et contenue dans \mathbb{R} vérifiant les propriétés suivantes :

◆ **Attraction** : U est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par T dont le point initial est dans U ; est entièrement contenue dans U : De plus, toute orbite de ce type devient et reste aussi proche de A que l'on veut.

◆ **Sensibilité** : les orbites dont le point initial est dans \mathbb{R} sont extrêmement sensibles aux conditions initiales.

◆ **Fractal** : A est un objet fractal.

◆ **Mélange** : Pour tout point de A , il existe des orbites démarrées dans \mathbb{R} qui passent aussi près que l'on veut de ce point.

4.2 Sensibilité aux conditions initiales

Cette propriété a été observée pour la première fois par E. Lorenz sur son modèle météorologique. Elle est connue sous le nom populaire d'effet papillon. La sensibilité des trajectoires chaotiques aux conditions initiales est une autre caractéristique permettant de reconnaître un comportement chaotique, puisque La plupart des systèmes chaotiques exhibent la sensibilité aux conditions initiales ; pour deux conditions initiales arbitraires

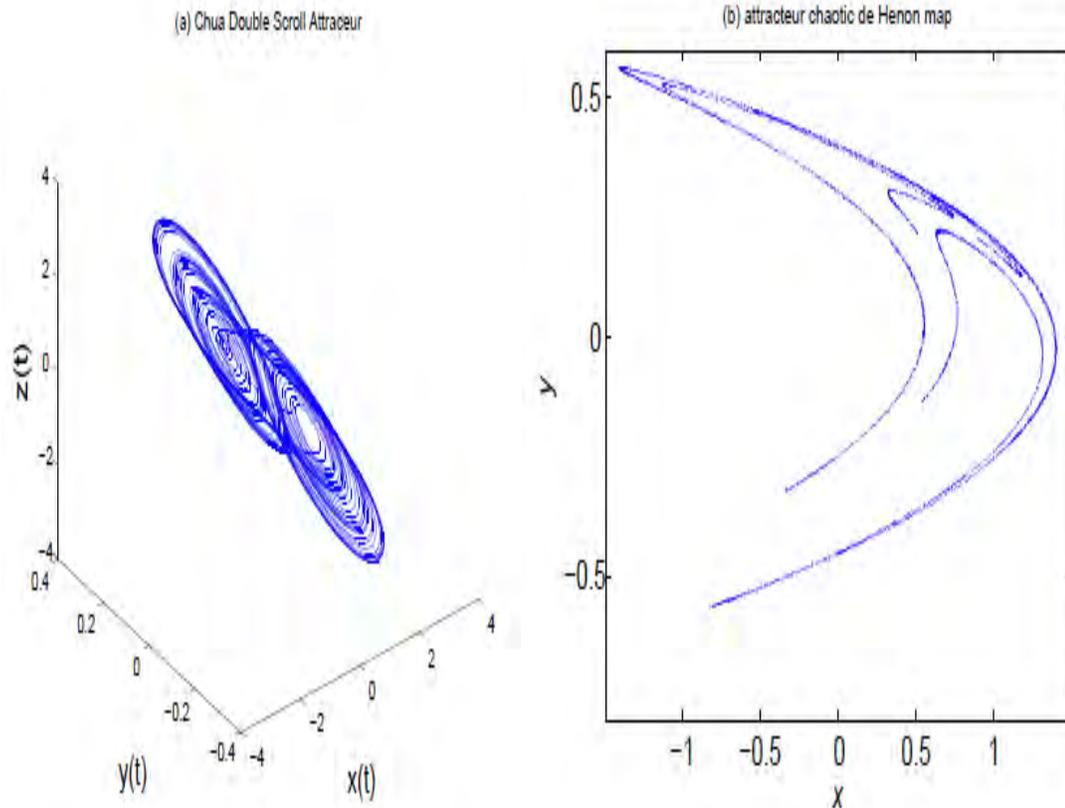


Figure 2.2 – Attracteurs étranges Chua, Hénon

très voisines initialement ; les deux trajectoires correspondantes à ces données initiales divergent exponentiellement, par suite les deux trajectoires sont incomparables [20, 21].

4.3 Exposants de Lyapunov

L'évolution d'un flot chaotique est difficile à appréhender, parce que la divergence des trajectoires sur l'attracteur est rapide, C'est pourquoi on essaye d'estimer ou même de mesurer la vitesse de divergence ou convergence, Cette vitesse s'appelle l'exposant lyapunov.

L'exposant de Lyapunov sert à mesurer le degré de stabilité d'un système et permet de quantifier la sensibilité aux conditions initiales d'un système chaotique. Le nombre d'exposants de Lyapunov est égal à la dimension de l'espace des phases et ils sont

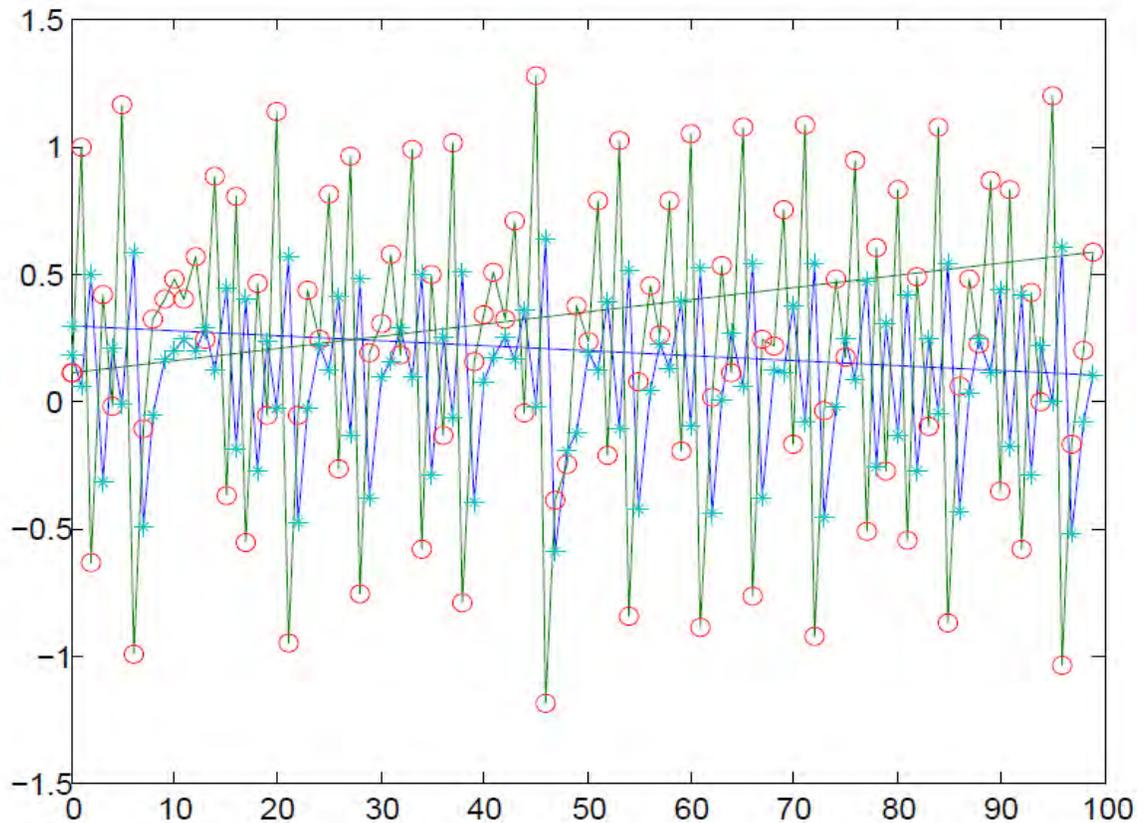


Figure 2.3 – Sensibilité aux conditions initiales de l'application logistique

généralement indexés du plus grand au plus petit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$. L'apparition du chaos exige que les exposants de Lyapunov doivent remplir trois conditions [22, 23] :

- Au moins l'un d'eux est positif pour expliquer la divergence des trajectoires.
- Au moins l'un d'eux est négatif pour justifier le repliement des trajectoires.
- La somme de tous les exposants est négative pour expliquer qu'un système chaotique est dissipatif, c'est-à-dire qu'il perd de l'énergie.

La valeur du plus grand exposant de Lyapunov quantifie le degré de chaos du système, mais le fait que les trois conditions énoncées ci-dessus soient réunies ne suffit pas à conclure qu'un système est chaotique. Il demeure indispensable de confronter les résultats du calcul des exposants de Lyapunov avec ceux fournis par d'autres outils d'analyse non-linéaire. Une méthode d'approximation des exposants de Lyapunov est

l'algorithme de Wolf [24]. Cet algorithme permet de calculer les exposants de Lyapunov à partir du calcul effectif de la divergence de deux trajectoires après t pas de temps par rapport à la perturbation introduite parallèlement, et ce au sein d'un attracteur, les étapes de l'algorithme sont :

1. Changement du paramètre de contrôle.
2. Choix aléatoire d'une condition initiale.
3. Création d'une nouvelle trajectoire à partir de la trajectoire courante à laquelle on ajoute une petite perturbation.
4. Evolution dans l'attracteur de ces deux trajectoires voisines et calcul de la moyenne de la divergence renormalisée entre ces deux trajectoires.
5. Réajustement de l'écart, permettant ainsi à chaque pas de temps de l'évolution du point précédent le calcul d'une moyenne de la divergence.
6. Retour au point (5) effectué selon un nombre donné.
7. Retour au point (1).
8. Représentation du plus grand exposant de Lyapunov en fonction du paramètre de contrôle donné.

Une méthode perturbative sur le long de la trajectoire chaotique peut souvent s'appliquer :

Considérons une itération à 1D

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

avec une condition initiale x_0 sur un attracteur chaotique, une petite perturbation δx évolue alors en δx_1 tel que

$$x_1 + \delta x_1 = f(x_0 + \delta x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\delta x_0$$

où f' est la dérivée de f par rapport à x . La déviation est donc donnée par $\delta x_1 = f'(x_0)\delta x_0$. Après une seconde itération, nous obtenons une nouvelle déviation :

$$\delta x_2 = f'(x_1)\delta x_1 = f'(x_1)f'(x_0)\delta x_0$$

et à l'étape n

$$\delta x_n = \left(\prod_{m=0}^{n-1} f'(x_m) \right) \delta x_0 \quad (2.1)$$

L'évolution de la perturbation au départ donne un écart δx_n par rapport à l'évolution sans perturbation. En supposant $|\delta x_n| \approx (\gamma)^n |\delta x_0|$, l'évolution est obtenue par un taux

Type d'Attracteur	Signe des exposants de Lyapunov
Point fixe	-, -, -
Cycle limite périodique	0, -, -
Cycle limite quasi-périodique	0, 0, -
Attracteur étrange	+, 0, -

Tableau 2.1 – Caractérisation des attracteurs.

effectif γ par pas d'itération, qui est exprimé par l'équation (2.5) à l'aide de l'équation (2.4).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left| \frac{\delta x_n}{\delta x_0} \right| \right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{m=0}^{n-1} |f'(x_m)| \right)^{1/n} \quad (2.2)$$

En prenant le logarithme, nous obtenons l'exposant de l'évolution. C'est *l'exposant de lyapunov*.

$$\lambda = \log(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log(|f'(x_i)|) \quad (2.3)$$

4.3.1 Caractérisation d'un attracteur par le signe des exposants de Lyapunov

Un exposant de Lyapunov positif indique que selon la direction qu'il représente la divergence entre deux trajectoires voisines augmente exponentiellement avec le temps [20, 25, 26]

Il s'agit donc bien là d'une caractérisation d'un attracteur étrange. Pour une application bidimensionnelle, on peut dès lors résumer la correspondance entre le type de l'attracteur et le signe des exposants de Lyapunov (ici ils sont deux) dans le Tableau :

4.4 Dimension fractale

Dans l'antiquité, lorsqu'on parlait d'une dimension, on pensait soit à la hauteur, soit à la longueur, soit à la largeur d'une chose. Au XVIIème siècle, Descartes en donna une définition plus générale. Pour lui, une dimension est une coordonnée que l'on mesure dans un repère d'axes. Usuellement, on dit que ce sont les coordonnées de l'espace

euclidien. Cette définition se montra spécialement utile pour décrire le mouvement d'un point dans l'espace, et a été exploitée au mieux par la mécanique de Newton. Au milieu du XIX^{ème} siècle, le mathématicien Riemann donna une interprétation encore plus générale de la notion de dimension. Puisqu'un phénomène évolue sous l'influence de divers paramètres, Riemann suggéra que l'on attribue une coordonnée distincte à chacun de ces paramètres. De nos jours on appelle ces paramètres des "degrés de liberté". L'importante nouveauté de cette conception est que rien ne nous empêche de donner à chaque point plus que trois coordonnées.

Ces dernières années, cette définition des dimensions comme "coordonnées d'un point" ne fut pas remise en question, mais elle commence à poser un problème. Elle pose un problème depuis que Benoit Mandelbrot a montré la pertinence qu'il y a bien souvent à utiliser des dimensions d'espace fractionnaires. Une dimension fractionnaire (on dit "fractale"), c'est par exemple une dimension 1,3897. Parler d'un point dans un espace à 6 ou 10 dimensions, on peut le concevoir comme une simple extension de ce que l'on conçoit dans un espace à 3 dimensions.

Plusieurs définition de dimension fractale ont été proposées depuis le début de ce siècle. Certaines ont un intérêt purement théorique, pour une étude de ces définitions nous renvoyons à [27, 28, 29].

Définition 3 *Il existe plusieurs définitions pour la dimension fractale :*

- *Ceux, qui définissent la dimension d'un ensemble. Cet ensemble peut être un sous-ensemble d'un espace métrique quelconque, un attracteur ou non. Nous présentons la dimension de Hausdorff [30] et la dimension de capacité.*
- *Ceux qui tiennent compte de la dynamique d'un système. Ce sont la dimension d'information et la dimension de corrélation. Habituellement on dit qu'on définit la dimension fractale d'un attracteur.*

Il existe plusieurs type de dimensions pour les attracteurs chaotiques, parmi celle-ci on peut citer :

4.4.1 Dimension de Lyapunov

Paramètre permettant de mesurer la dimension du chaos. Suivant le type de chaos généré, la dimension de Lyapunov est plus ou moins grande : pour des systèmes non retardés (dimension finie) tels que les systèmes de Lorenz ou Rössler, la dimension de Lyapunov est au maximum égale au nombre de variables du système (dimension faible), alors que pour les systèmes à retard (dimension infinie) la dimension de Lyapunov tend vers de grandes valeurs. Plus la dimension sera grande, plus la complexité du chaos sera élevée[31].

Classant les exposants de Lyapunov $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$.

La dimension de Lyapunov D_L est définie par :

$$D_L = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{\lambda_{j+1}} \quad (2.4)$$

Où j est le plus grand entier qui satisfait :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_j \geq 0.$$

4.4.2 Dimension de Hausdorff

La définition d'une dimension non entière la plus connue et la plus utilisée théoriquement est la dimension de Hausdorff. Nous la présentons succinctement en renvoyant à Kahane et Salem, pour une étude plus complète [28].

Soit M un ensemble de \mathbb{R}^n recouvert par des ensembles A_i de petits diamètres c'est-à-dire :

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad 0 < |A_i| \leq \varepsilon.$$

On définit la mesure de Hausdorff d -dimensionnelle par :

$$\mu_d(M) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|^d \right\}, \quad |A_i| \leq \varepsilon. \quad (2.5)$$

La dimension de Hausdorff de l'ensemble M est le réel d_H tq :

$$\mu_d(M) = \begin{cases} 0 & \text{si } d > d_H \\ +\infty & \text{si } d < d_H \end{cases} \quad (2.6)$$

Définition 4 On définit la dimension de Hausdorff par :

$$d_H(M) = \sup \{d / \mu_d(M) = +\infty\} = \inf \{d / \mu_d(M) = 0\} \quad (2.7)$$

La dimension de Hausdorff existe toujours. C'est une propriété qui la différencie des autres dimensions fractales. Le calcul numérique de d_H est délicat, parce qu'il est difficile de trouver le recouvrement minimal. Pour une méthode de calcul voir Chorin[32].

4.4.3 Dimension de Kolmogorov ou de capacité

Soit un ensemble de points situés dans un espace à n dimensions. Cherchons à recouvrir cet ensemble par des (hyper) cubes de côtés ε . Soit $N(\varepsilon)$ le nombre minimal de cubes nécessaires à cette opération. Par définition [11], la dimension de Kolmogorov ou de capacité d_C est la limite si elle existe :

$$d_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N(\varepsilon))}{\log(1/\varepsilon)} \quad (2.8)$$

quand l'arête ε des hypercubes tend vers zéro. Par exemple, la dimension de Kolmogorov de l'ensemble triadique de Cantor obtenu est $d_C \approx 0.6309$. Celle du triangle de Sierpinski est $d_C \approx 1.5849$. La dimension de Kolmogorov est plus facile à déterminer que la dimension de Hausdorff-Besicovitch. Cependant, dans beaucoup de cas, d'après le théorème d'Hutchinson, elle est égale à la dimension de Kolmogorov.

La dimension fractale définie ci-dessus ne caractérise que la géométrie de l'attracteur. Or, les expériences font apparaître le besoin de rendre compte également de la dynamique sur l'attracteur, en particulier des aspects statistiques. En effet, dans un régime chaotique (correspondant à un attracteur étrange) les positions de deux points d'une même courbe trajectoire éloignés dans le temps sont sans corrélation entre elles (à cause de la S.C.I.), et ceci par définition d'un tel régime. En revanche, tous les points étant situés sur l'attracteur, il existe entre eux une certaine corrélation spatiale que l'on peut chercher à l'aide d'une fonction appropriée.

4.4.4 Dimension de corrélation

La dimension de corrélation est une grandeur permettant d'estimer le degré de complexité de l'attracteur du système. En fait, elle estime la dimension fractale de l'attracteur du système dynamique. Si le système est chaotique et s'inscrit donc dans un attracteur étrange de structure fractale, [33, 34, 35]. Dans cette méthode, la propriété d'auto similarité d'un attracteur est sondée par le cadrage du comportement de l'intégrale de corrélation :

$$C_M(\varepsilon) = \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N H(\varepsilon - \|X_M(i) - X_M(j)\|) \quad (2.9)$$

Où $H(\cdot)$ est la fonction de Heaviside est égal à 1 pour des arguments positifs et égal à 0 pour des arguments négatifs. C_M est le nombre (normalisé) de points de l'espace de phases reconstruit appartenant à une sphère de rayon ε . l'algorithme de la dimension de corrélation a l'avantage d'être calculable très efficacement. La dimension de corrélation découle ainsi directement de l'intégrale de corrélation et s'exprime selon la formule :

Définition 5 *On définit la dimension de corrélation par :*

$$D_c(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(C_M(\varepsilon))}{\log(\varepsilon)} \quad (2.10)$$

Exemples de Systèmes dynamiques chaotiques

1 Modèle de Lorenz

Edward Lorenz fut un météorologue qui, le premier, mit en évidence le caractère chaotique de la météorologie. Le couplage de l'atmosphère avec l'océan est décrit par le système d'équations aux dérivées partielles couplées de Navier-Stokes de la mécanique des fluides. En 1963, Lorenz eut l'idée de chercher un modèle d'équations pour étudier l'instabilité de Rayleigh-Bénard [37, 3].

Ce modèle a joué un rôle historique important puisque son évolution temporelle fait apparaître un comportement chaotique. De plus, il constitua le premier et le célèbre système différentiel dissipatif permettant d'observer un attracteur étrange pour certaines valeurs des paramètres.

Dans sa version exprimée en paramètres et variables réduits, le système de trois équations différentielles couplées s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz \end{cases} \quad (3.1)$$

σ ou Pr désigne le nombre de Prandtl (égal à 10 dans les simulations) , $b = 8/3$ et r est le nombre de Rayleigh réduit.

Nous allons étudier le comportement et les différents portraits de phases obtenus pour différentes valeurs du paramètres de contrôle.

1.1 Calcul des points d'équilibres

Les points fixes sont par définition tel que $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$. Un premier point fixe trivial est $P_0 : x = y = z = 0, \forall r \geq 0$

$$\begin{cases} \sigma(y - x) = 0 \Leftrightarrow x = y & (1) \\ rx - y - xz = 0 & (2) \\ xy - bz = 0 \Leftrightarrow z = \frac{b}{xy} & (3) \end{cases}$$

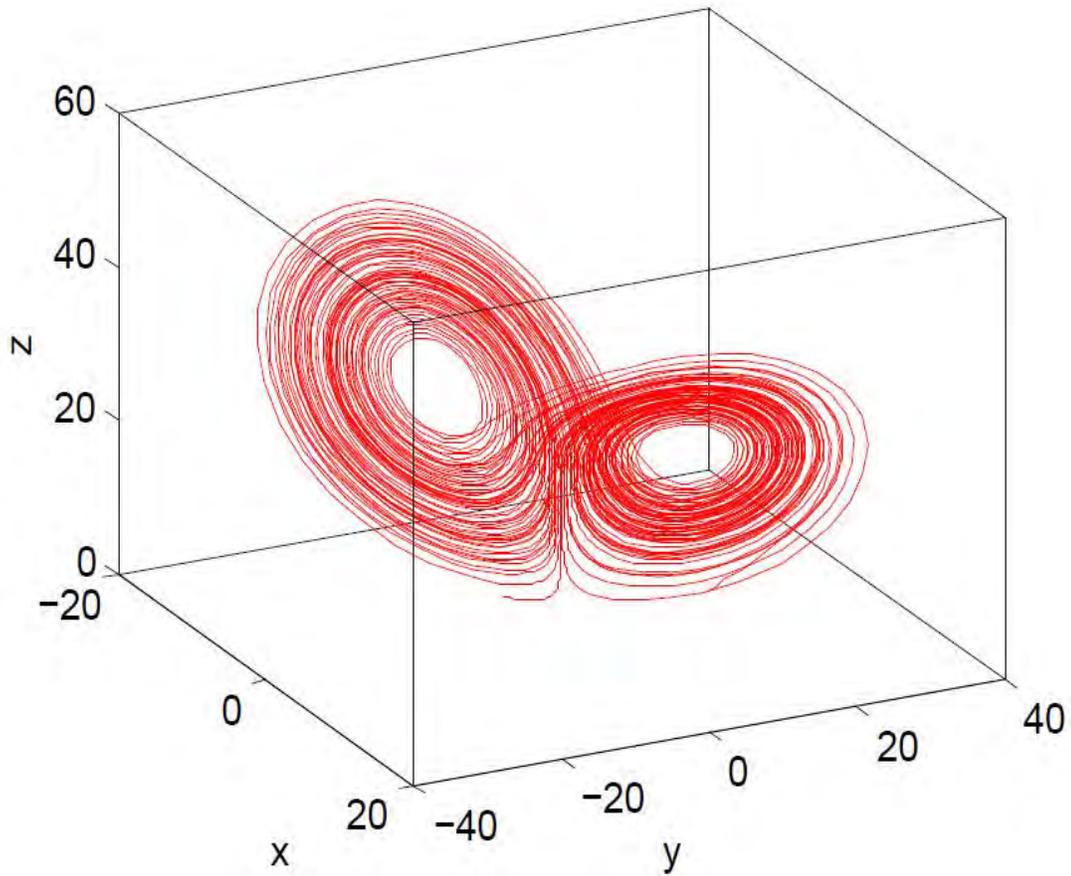


Figure 3.1 – Attracteur de Lorenz $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$

(1) dans (3) donne $x^2 = bz \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{z}$

(1) dans (2) donne $-xz + rz - z = 0 \Leftrightarrow z = r-1$

les points fixes P_1 et P_2 sont donc

$$P_1 = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1) \text{ et } P_2 = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1) \quad (3.2)$$

Pour $r = 1$, $P_0 = P_1 = P_2$ donc pour $r \in [0; 1]$, il n'y a qu'un seul point fixe P_0 et pour $r > 1$, il y a 3 points fixes P_0, P_1 et P_2 .

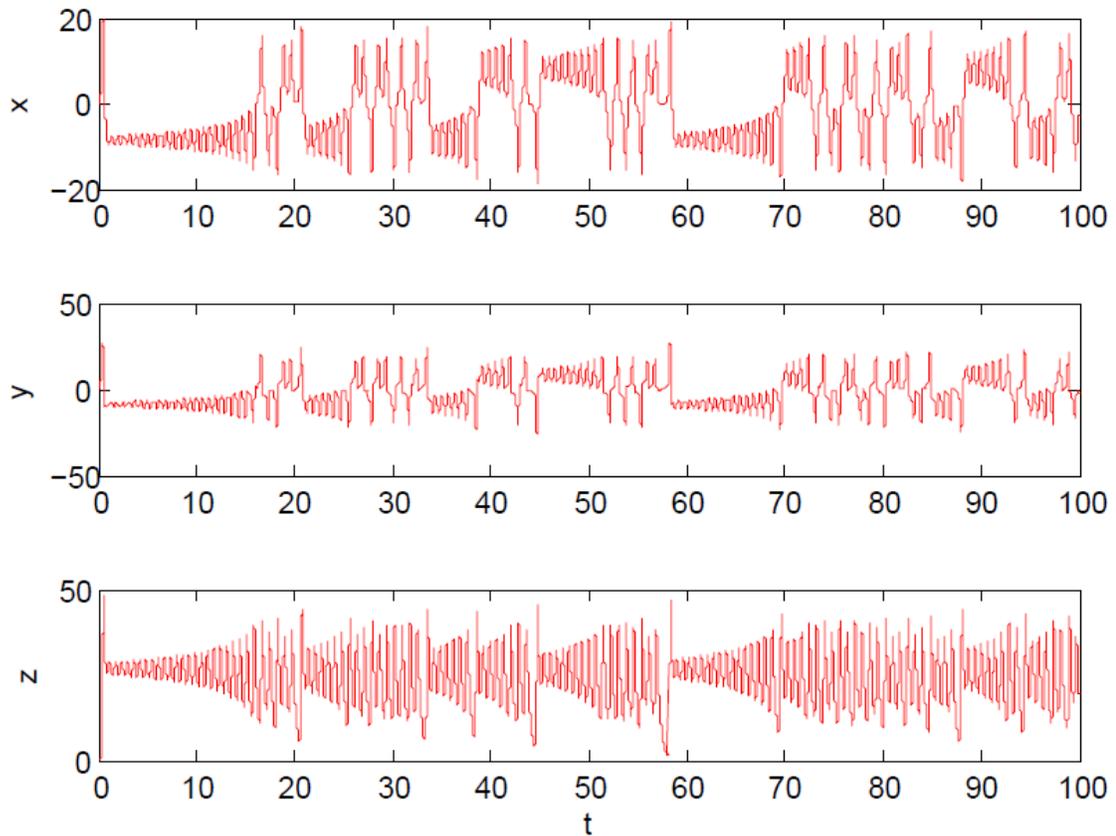


Figure 3.2 – Séries temporelles $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ du système de Lorenz $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$

1.2 Stabilité des points d'équilibres

Nous allons maintenant étudier la stabilité linéaire des points fixes pour le cas $|r - 1| \lll 1$

La stabilité des points d'équilibres est déterminée en linéarisant le flot au voisinage de ces points et en calculant les valeurs propres, notées λ_i , de la matrice jacobienne en ces points. La matrice jacobienne s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

– Pour P_0

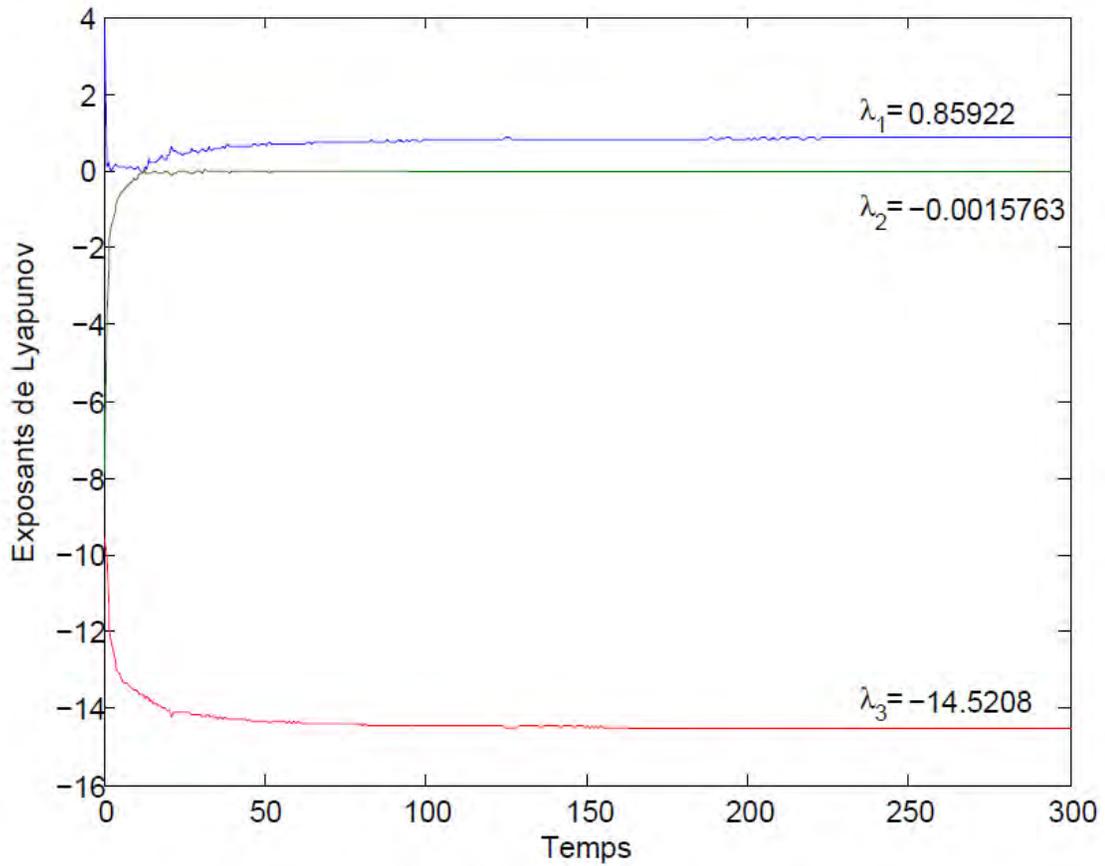


Figure 3.3 – Les Exposants de Lyapunov du système de Lorenz $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$

L'origine est un point fixe pour toutes les valeurs de paramètre b , σ et r . La matrice jacobienne est :

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

et comme $\det(J - \lambda I) = 0$, nous avons l'équation caractéristique, suivante :

$$(\lambda + b) [\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)] = 0 \quad (3.5)$$

a pour racines :

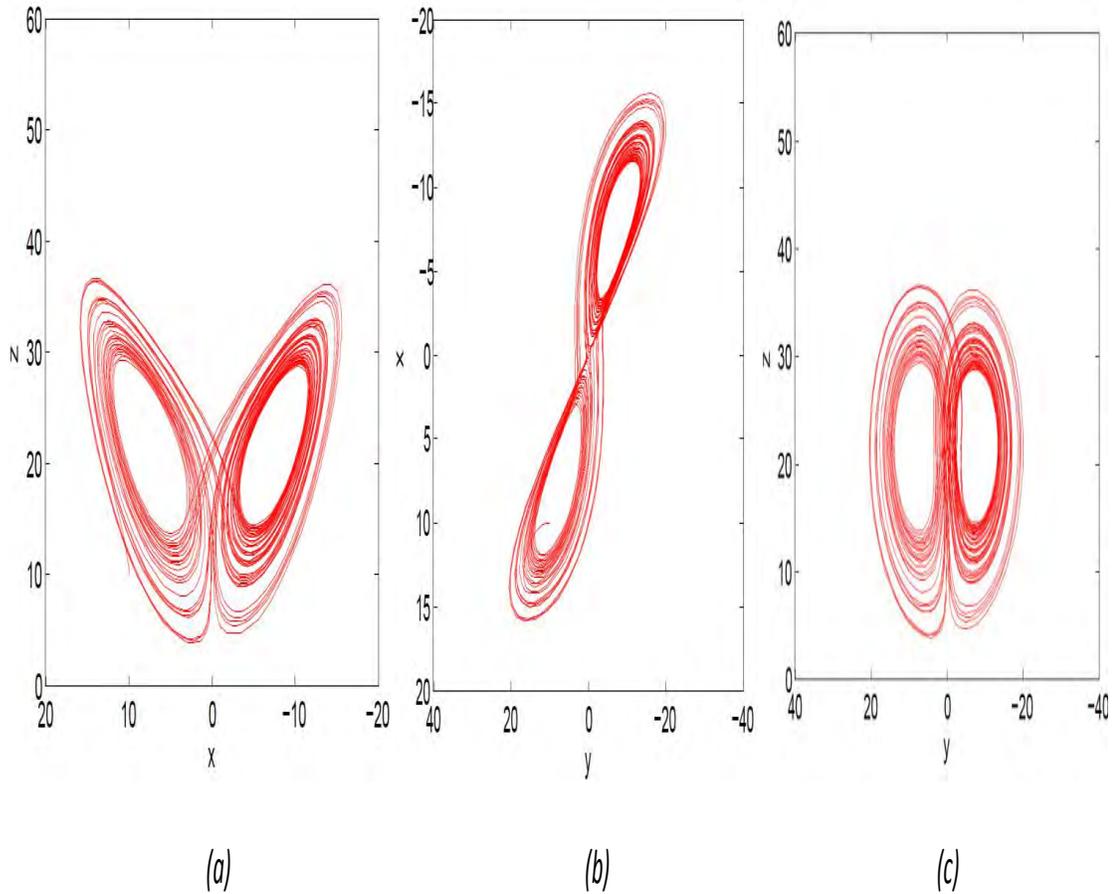


Figure 3.4 – Attracteur de Lorenz (a) l'espace(x-z) , (b) l'espace (y-x) ,(c) l'espace(y-z)

$$\lambda_1 = \frac{-\sigma - 1 + \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4r\sigma}}{2} \quad (3.6)$$

$$\lambda_2 = \frac{-\sigma - 1 - \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4r\sigma}}{2} \quad (3.7)$$

$$\lambda_3 = -b \quad (3.8)$$

– Pour P_1 et P_2 :

La matrice jacobienne correspond à ces points s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\det(J - \lambda I) = P(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r-1) \quad (3.10)$$

Le polynôme est d'ordre trois, on peut le résoudre par les formules de **Cardan** et déterminer le signe des racines par les condition de Routh-Hurwitz.

Et selon les valeurs du paramètre r , ce polynome peut avoir trois racines réelles négatives ou bien une une racine réelle et deux racines complexes conjuguées.

On peut simplifier ce calcul en utilisant le fait qu'il existe une valeur propre $\lambda_1 = 0$ si $r = 1$ donc on peut supposer que $|\lambda_1| \ll 1$ si $|r - 1| \ll 1$ on peut donc négliger λ_1^2 et λ_1^3 de l'équation

$$\lambda_1 \cong -\frac{2\sigma b(r-1)}{+br} < 0 \text{ pour } r > 1 \quad (3.11)$$

Les autres valeurs propres λ_2, λ_3 ne dépendent pas de r .

$$-\lambda^2 - \lambda(\sigma + 1 + b) - (\sigma b + b) = 0 \quad (3.12)$$

On résout donc :

$$\Delta = (\sigma + 1 + b)^2 - 4b(\sigma + 1)$$

Les valeurs propres sont donc :

$$\lambda_1 = -\frac{(\sigma + 1 + b) - \sqrt{(\sigma + 1 + b)^2 + 4b4b(\sigma + 1)}}{2} < 0 \quad (3.13)$$

$$\lambda_2 = \frac{-(\sigma + 1 + b) + \sqrt{(\sigma + 1 + b)^2 + 4b4b(\sigma + 1)}}{2} < 0 \quad (3.14)$$

On fait de même avec P_2 et on trouve le même résultat $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$ (noeud stable)

Donc pour les points P_1, P_2 sont stable pour $|r - 1| \ll 1$.

A $r = 1$, on a donc une bifurcation fourche supercritique.

On va maintenant montrer que les points fixes issus de la première bifurcation se destabilisent à leur tour pour une valeur r_c par une bifurcation de Hopf.

Cette deuxième bifurcation est caractérisée par une paire de valeurs propres complexes conjuguées pour lesquelles la partie réelle change de signe à la bifurcation. On sait donc qu'il existe des solutions purement imaginaires $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ quand r assume sa valeur critique r_c .

En prenant les parties réelles et imaginaires de l'équation caractéristique on trouvera deux équations indépendantes permettant de déterminer ω et la valeur de r_c

Reprenons l'équation

$$\begin{aligned} \$P(\lambda) &= \lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - 1) \quad \$ \\ \Leftrightarrow (i\omega)^3 + (\sigma + b + 1)(i\omega)^2 + b(\sigma + r_c)(i\omega) + 2b\sigma(r_c - 1) &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \omega^2(\sigma + 1 + b) + 2\sigma b(1 - r_c) = 0 \\ \omega^3 - \omega(\sigma b + br_c) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega^2 = \frac{2\sigma b(r_c - 1)}{\sigma + 1 + b} \\ \omega^2 = \sigma b + br_c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_c = \frac{\sigma b + \frac{2\sigma b}{\sigma + 1 + b}}{\frac{2\sigma b}{\sigma + 1 + b} - b} \\ \omega = \pm((\sigma b + b)r_c) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_c = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1} \\ \omega = \pm((\sigma b + b)r_c) \end{cases}$$

Application numérique : $r_c = 24.74$ et $\omega = \pm 92.64$.

2 Le modèle de Hénon et le modèle de Lozi

L'astronome Michel Hénon exploitera la suggestion de Pomeau et Ibanez, pour obtenir un système très simple. Celui-ci est présent au séminaire de Nice (sur la turbulence), en janvier 1976 lorsque Pomeau expose l'idée de réaliser des systèmes dynamiques plus simples encore que celui de Lorenz, mais présentant des caractéristiques similaires, et qui permettraient de prouver plus clairement des "évidences" mises en lumière par les calculs numériques. Puisque le raisonnement repose sur la section de Poincaré il propose de produire une application du plan dans lui-même, plutôt qu'une équation différentielle, imitant le comportement de Lorenz et son attracteur étrange[38]. La familiarité de Hénon avec les applications du plan dans lui-même, lui permet de réagir rapidement et de produire un système très simple donnant un attracteur étrange. Il est connu depuis sous le nom de système de Hénon et correspond à l'application (3. 15), un problème très général avec les attracteurs étranges, amené par la proposition de Ruelle et non résolu depuis : il n'existe aucune preuve mathématique de leur existence, seulement des

indications numériques (graphiques), même pour les plus étudiés d'entre eux. Cela signe une certaine "limite" aux expériences numériques dans le domaine. Un seul système (3.21) fait exception, celui construit par René Lozi, mathématicien à l'université de Nice, à partir de l'attracteur de Hénon. Il est un peu plus simple que les autres et le mathématicien Michal Misiurewicz est parvenu à démontrer, grâce aux outils des systèmes dynamiques, l'existence effective de l'attracteur étrange.

2.1 Attracteur de Hénon

L'application de Poincaré correspondante au modèle de Lorenz étant fortement dissipative, donc difficile à calculer précisément. M. Hénon en 1976, dans le but de simplifier le système de trois équations différentielles du modèle de Lorenz, proposa l'application suivante du plan sur lui même :

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (y + 1 - ax^2, bx) \end{aligned} \quad (3.15)$$

a et b étant deux paramètres réels, où la valeur de la constante a contrôle la non-linéarité de l'itération, et celle de b traduit le rôle de la dissipation. Les valeurs habituellement utilisées pour a, b sont $a = 1.4$ et $b = 0.3$.

Partant d'un point du plan de coordonnées (x_0, y_0) on peut calculer les coordonnées (x_1, y_1) du point suivant, et ainsi de suite. L'application de Hénon est inversible ; son inverse est :

$$H^{-1}(x, y) = (b^{-1}y, x - 1 + ab^{-2}y^2). \quad (3.16)$$

La matrice jacobienne ici a pour expression :

$$J = \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Le déterminant de la matrice jacobienne est égale à $|J| = -b$ Considérons l'application de Hénon

$$H(x, y) = (1 + y - ax^2, bx) \quad (3.18)$$

avec $0 < b < 1$.

Cette application a deux points fixes

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b - 1 + \sqrt{(1 - b)^2 + 4a}}{2a}, & y_1 &= bx_1 \\ x_2 &= \frac{b - 1 - \sqrt{(1 - b)^2 + 4a}}{2a}, & y_2 &= bx_2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

trouvés à partir de la relation : $H(x, y) = (1 + y - ax^2, bx) = (x, y)$.

Le déterminant $(b - 1)^2 + 4a$ est négative si $a < a_0 = -\frac{(b-1)^2}{4} = -0.1225$; dans ce cas il n'y a pas des points fixes.

La Stabilité

La matrice jacobienne J a pour valeurs propres, les valeurs données par :

$$\lambda_{1,2} = -ax \pm \sqrt{a^2x^2 + b} \tag{3.20}$$

Si l'on calcule les valeurs absolues des valeurs propres, on constate que la plus petite des valeurs propres est toujours inférieure à 1, tandis que la plus grand est inférieur, égale ou supérieur à 1 suivant que $|x|$ inférieur, égale ou supérieur à $(1 - b)/2a$, on en déduit que le point fixe (x_2, y_2) est un point selle.

L'autre point fixe est stable si $a < 3(1 - b)^2/4 = 0.3675$.

Si $a = 3(1 - b)^2/4$, on a $\lambda_1(x_1, y_1) = b$ et $\lambda_2(x_2, y_2) = -1$.

Diagramme de bifurcation

La construction de diagramme de bifurcation est faite en faisant varier le paramètre a de 0 à 2 avec un pas de 0.0005 ; b est égale à 0.3.

Le diagramme obtenu est représenté par la figure (3. 6).

Ce diagramme est de type de bifurcation de doublement de période, l'attracteur de Hénon contient deux points fixes.

La partie stable se situe dans l'intervalle $[0, 0.3675]$.

Un 2-cycle stable commence à $a = 0.3675$ suivi d'un 4-cycle stable à $a = 0.9$ et ainsi de suite.

La période continue de doubler jusqu'à une valeur déterminée où le trajectoire commence à prendre une forme particulière.

Pour $a = 1.4$, on ne distingue plus les cycle ; le système est chaotique.

L'attracteur de Hénon pour $a = 1.4$, $b = 0.3$ est représenté dans la figure(??).

la structure de l'attracteur se répète identiquement à elle-même aux échelles d'observation successives. Cette structure dont la permanence à différent échelle est caractéristique d'un objet fractale.

Par ailleurs, la dimension de Hausdorff de l'attracteur de Hénon objet intermédiaire entre une ligne et une surface, est $D = 1.26$.

On peut aussi calculer la dimension de l'attracteur de Hénon par la dimension de Lyapunov. On a pour $a = 1.4$, $b = 0.3$, l'application de Hénon a deux exposants de Lyapunov $\lambda_1 = 0.42205$, $\lambda_2 = -1.626$ la dimension de Lyapunov par définition est égale à $D_L = 1.2596$.

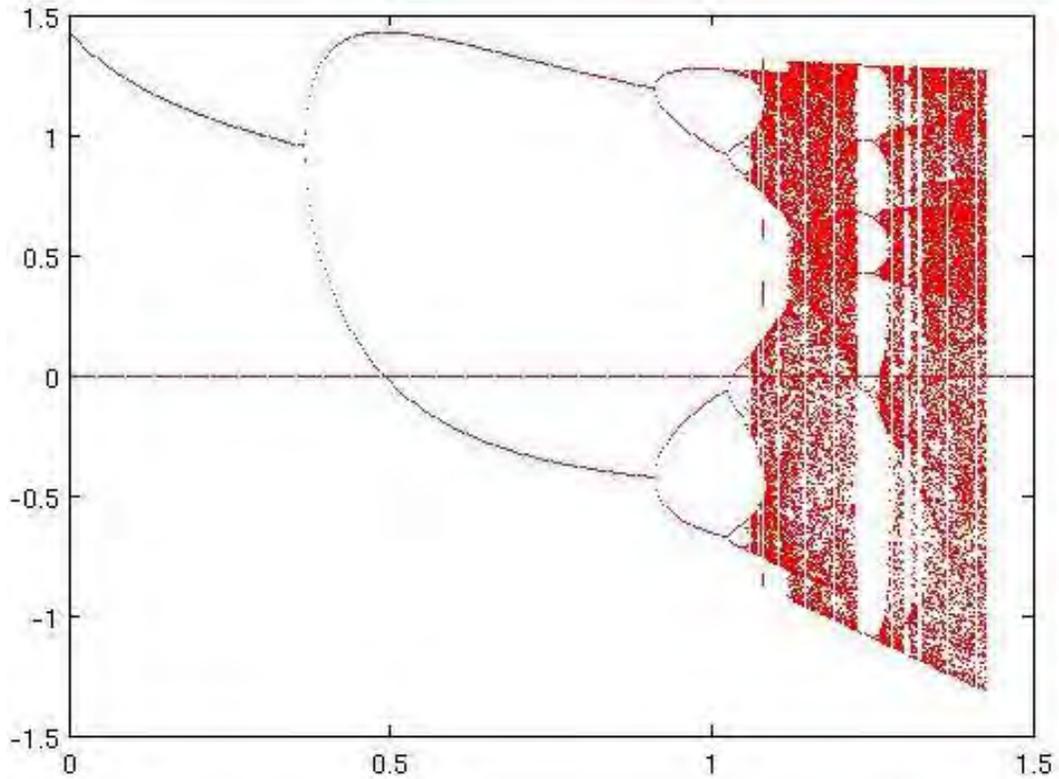


Figure 3.5 – Diagramme de bifurcation de Hénon

2.2 Attracteur de Lozi

Dans le but de simplifier l'attracteur de Hénon, René Lozi[39], propose l'application suivante :

$$\begin{aligned}
 L : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & (3.21) \\
 (x, y) &\longmapsto (y + 1 - a|x|, bx)
 \end{aligned}$$

Propriétés de l'application de Lozi

1. La seule différence entre l'application de Hénon et de Lozi est que le terme non-linéaire x^2 de l'application de Hénon est remplacé par $|x|$ dans l'application de Lozi. Cette modification de l'application de Hénon est linéaire pour $x > 0$, $x < 0$.
2. L'application de Lozi n'est pas différentiable.
3. Si $a = 0$, L'application de Lozi est une application linéaire, donc on pose toujours $a \neq 0$.

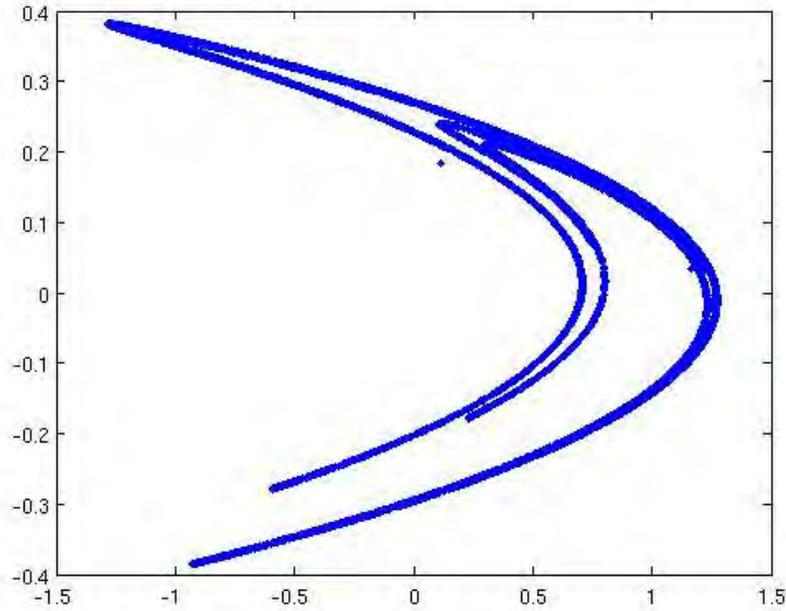


Figure 3.6 – Attracteur de Hénon pour $a = 1.4$, $b = 0.3$

4. L'application de Lozi est inversible ; son inverse est :

$$L^{-1}(x, y) = (b^{-1}y, x - 1 + a/b|y|). \quad (3.22)$$

5. Le déterminant de la matrice jacobienne est égale à $|J| = -b$, alors il y a contraction des aires pour $|b| < 1$

Cette application possède deux points fixes hyperbolique définit par :

$$\begin{cases} P_1 = (\bar{x}_1, \bar{y}_1) = \left(\frac{1}{1+a-b}, \frac{b}{1+a-b}\right), & \text{si } b < a + 1 \\ P_2 = (\bar{x}_2, \bar{y}_2) = \left(\frac{1}{1-a-b}, \frac{b}{1-a-b}\right), & \text{si } b < -a + 1 \end{cases} \quad (3.23)$$

On peut facilement déterminer la stabilité locale de ces points par l'évaluation des valeurs propres de la matrice jacobienne :

$$Df(x) = \begin{pmatrix} -a \frac{\partial |x|}{\partial x} & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

La Stabilité

L'équation caractéristique de la matrice jacobienne est :

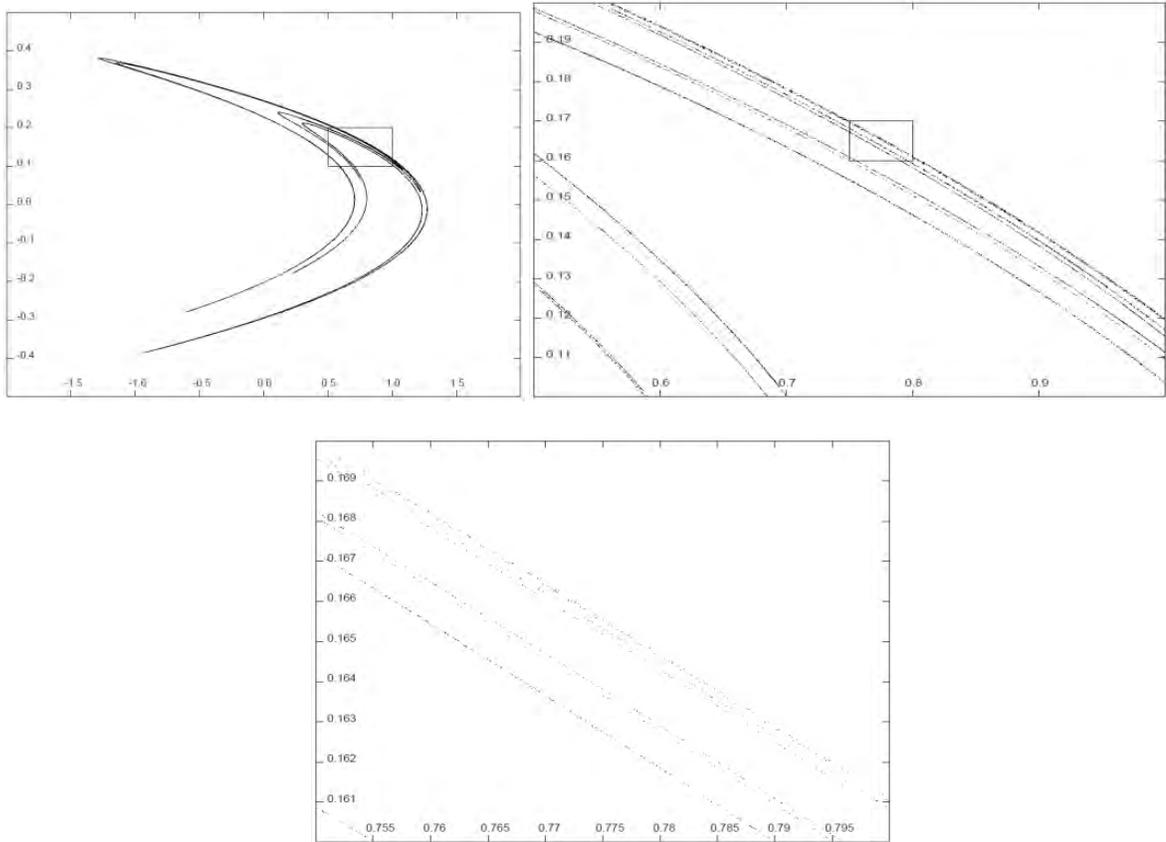


Figure 3.7 – Illustration de la permanence de la structure de l’attracteur de Hénon à différentes échelles.

$$\begin{aligned} \lambda^2 + a\lambda - b & \text{ pour } P_1 \\ \lambda^2 - a\lambda - b & \text{ pour } P_2 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Stabilité de P_1

Pour $b > \frac{-a^2}{4}$, les valeurs propres sont des réelles

Pour $b < \frac{-a^2}{4}$, les valeurs propres sont des complexes.

Elle sont de module inférieur à 1 si :

$b > -1$, $b < a + 1$ et $b < 1 - a$. Et le point fixe P_1 est stable.

Les valeurs propres sont de module supérieur à un si :

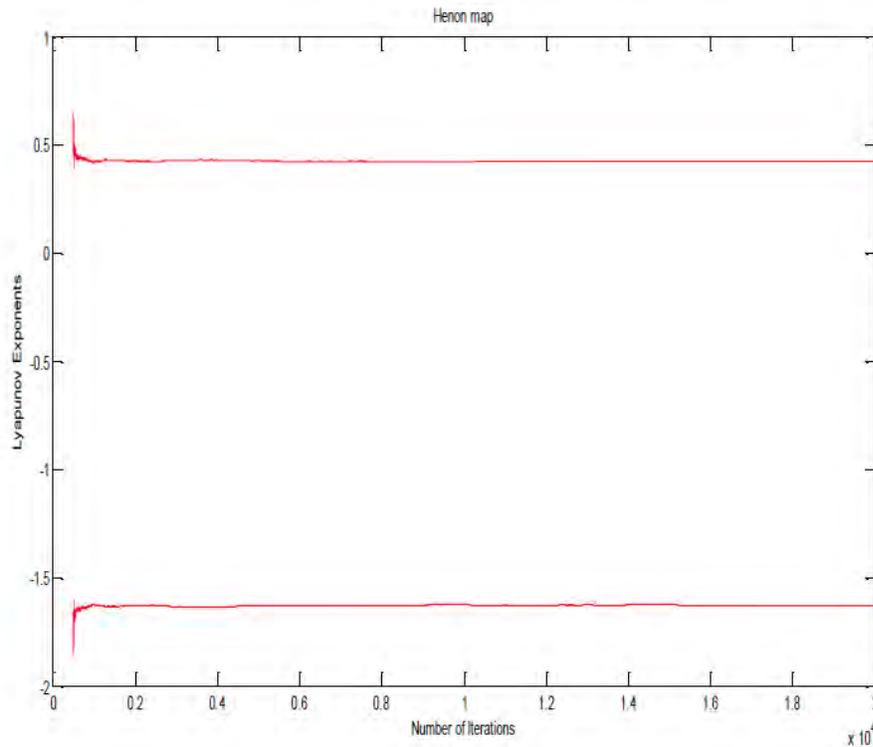


Figure 3.8 – Les exposants de Lyapunov en fonction du temps pour l’application de Hénon.

$b < -1$, $b < a + 1$ et $b < 1 - a$. Et le point fixe P_1 est instable.

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$ si :

$b > a + 1$ et $b > 1 - a$. Et le point fixe P_1 est une point selle ou col.

Stabilité de P_2

L’équation caractéristique pour P_2 est définit par $\lambda^2 - a\lambda - b$

$$\Delta = a^2 + 4b.$$

L’existence de P_2 est pour $b > -a + 1$, alors $\Delta = a^2 + 4b > 0$ et les valeurs propres sont toujours des réelles.

Elle sont de modules supérieurs à un si

$b > -a + 1$, $b > a + 1$. Et le point fixe P_2 est instable.

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$ si :

$b > a + 1$ et $b > 1 - a$. Et le point fixe P_2 est une point selle ou col.

Pour plus de détails voir les références cités à la fin de cette étude, en particulier

Le résumé de la stabilité des points fixes pour l’application de Lozi est donné dans le tableau (3.1)

Stabilité des poins fixes	Stabilité de P_1	Stabilité de P_2
$b < a + 1$ $b < -a + 1$ $b > -1$	Stable	N'existe pas
$b < a + 1$ $b < -a + 1$ $b < -1$	Instable	N'existe pas
$b > a + 1$ $b > -a + 1$	Selle	Selle
$b > -a + 1$ $b > a + 1$	N'existe pas	Instable

Tableau 3.1 – Variation de la stabilité de P_1 , P_2 par rapport à la variation du paramètres a et b

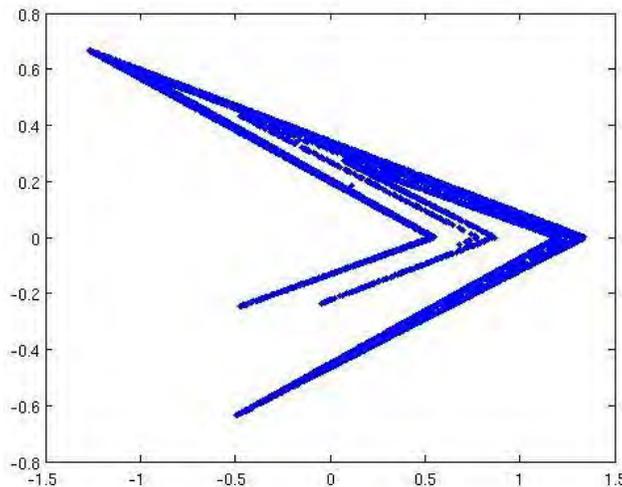


Figure 3.9 – Attracteur de lozi pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$

Misiurewicz dans[39] prouve l’existence d’un attracteur étrange de l’application de Lozi.

Pour les paramètres $a = 1.7$ et $b = 0.5$ la suite de points itérés par l’application de Lozi converge vers un attracteur étrange représenté par la figure (3. 9)

Structure fractal

Pour déterminer la structure de l’attracteur de Lozi, on peut faire un agrandissement d’un région de l’attracteur et on observe que la structure se répète.

Contrairement au cas de l’application de Hénon, le route vers le chaos par l’appli-cation de Lozi n’est pas une bifurcation de doublement de période. Puisque la dérivée de l’application de Lozi n’est pas continue.

Le diagramme obtenu est représenté par la figure (3. 10).

Exposants de Lyapunov pour l’application de Lozi

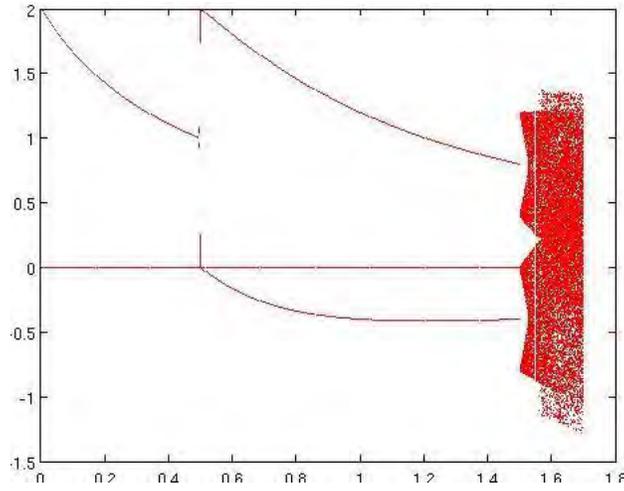


Figure 3.10 – Diagramme de bifurcation de Lozi

Pour $a = 1.7$, $b = 0.5$, l'application de Lozi a deux exposants de Lyapunov $\lambda_1 = 0.69314$ qui est positif, $\lambda_2 = -1.204$. On vérifie bien cependant que la somme de ces exposants est strictement négative.

La figure (3. 11) représente la variation des exposants de Lyapunov en fonction du temps pour l'application de Lozi.

Dimension de l'attracteur de Lozi

On a pour $a = 1.7$, $b = 0.6$, l'application de Lozi a deux exposants de Lyapunov $\lambda_1 = 0.69314$, $\lambda_2 = -1.204$, alors la dimension de Lyapunov est égale à $D_L = 1.5757$.

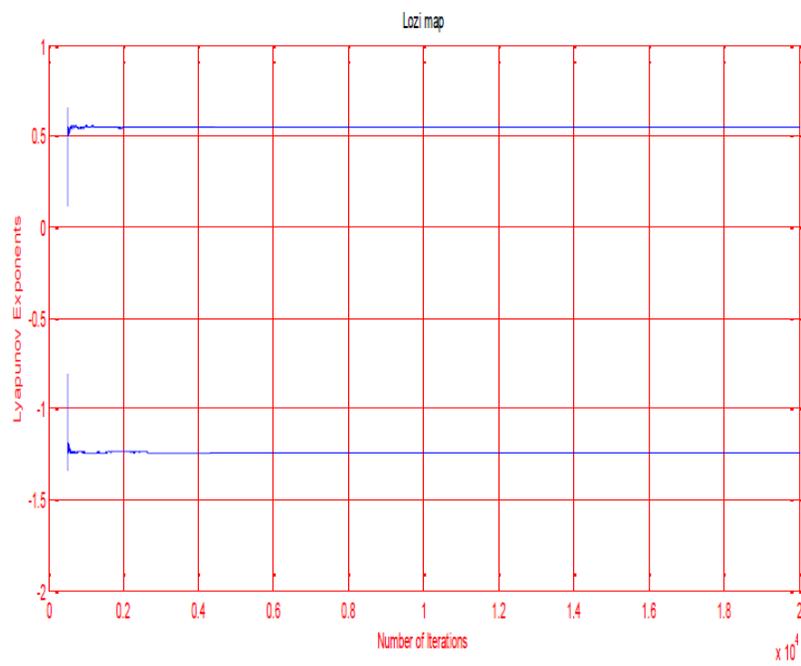


Figure 3.11 – Les exposants de Lyapunov en fonction du temps pour l’application de Lozi

Deuxième partie

OPTIMISATION et CHAOS

Etat de l'art sur les algorithmes chaotiques.

1 Introduction

L'optimisation est l'une des branches les plus importantes des mathématiques appliquées modernes, et de nombreuses recherches, à la fois pratiques et théoriques, lui sont consacrées. dans lequel on définit une fonction cout, que l'on cherche à minimiser par rapport à ses paramètres. Par exemple, dans le célèbre problème du voyageur de commerce, on cherche à minimiser la longueur de la tournée d'un "voyageur de commerce", qui doit visiter un certain nombre de villes, avant de retourner à la ville de départ. La définition du problème d'optimisation est souvent complétée par la donnée de contraintes : tous les paramètres (ou variables de décision) de la solution proposée doivent respecter ces contraintes, faute de quoi la solution n'est pas réalisable.

Du côté algorithmique, un algorithme d'optimisation nécessite généralement la définition d'une fonction rendant compte de la pertinence des solutions potentielles, à partir des grandeurs à optimiser. Cette fonction est appelée fonction d'adaptation f ou fitness function en terminologie anglo-saxonne. L'algorithme convergera vers un optimum de cette fonction, quelle que soit sa définition. La pertinence de la solution dépendra donc de la pertinence de la " question " posée à l'ordinateur. La fonction f doit donc exprimer le plus fidèlement possible le désir de l'utilisateur, sous forme mathématique. Sa définition peut être analytique, ou le résultat du jugement de l'utilisateur[40].

2 Aperçu sur les Methodes d'Optimisation.

La théorie de l'optimisation peut être séparée en deux grandes branches : l'optimisation locale et l'optimisation globale. Si on peut considérer que la première est presque " entièrement connue ", la seconde est encore partiellement méconnue et les recherches y sont à leur apogée, comme le confirment les nombreuses parutions récentes[40]. La tâche principale de l'optimisation globale est la recherche de la solution qui minimisera un critère de coût donné, appelée " optimum global ". L'optimisation globale vise donc à chercher non seulement un minimum local, mais surtout le plus petit de ces minima locaux. Il existe deux grandes approches à l'optimisation globale. L'une est dite déter-

ministe où les algorithmes de recherche utilisent toujours le même cheminement pour arriver à la solution, et on peut donc " déterminer " à l'avance les étapes de la recherche. L'autre est non déterministe ou aléatoire : pour des conditions initiales données, l'algorithme ne suivra pas le même cheminement pour aller vers la solution trouvée, et peut même proposer différentes solutions[41, 42, 43, 44, 45]. C'est par cette seconde branche, la recherche globale aléatoire, que les travaux les plus complexes (temps de calcul important, nombreux optima locaux, fonctions non-dérivables et fonctions fractales') seront souvent traités plus efficacement

2.1 Définitions

Un problème d'optimisation est usuellement formulé comme un problème de minimisation et s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \min_x f(x), \\ \text{telque,} \\ h_j(x) \leq 0; i = 1, \dots, m, \\ g_i(x) \leq 0; j = 1, \dots, p, \\ x \in S, \end{cases} \quad (4.1)$$

Où f est la fonction (scalaire) à minimiser, appelée "fonction coût" ou "fonction objectif", x représente le vecteur des variables d'optimisation, g_i sont les contraintes d'inégalité et h_j les contraintes d'égalité, et S est l'espace des variables (appelé aussi espace de recherche). S indique le type de variables considérées : réelles, entières, mixtes (réelles et entières dans un même problème), discrètes, continues, bornées, etc.

Un point x_A est appelé un point admissible si $x_A \in S$ et si les contraintes d'optimisation sont satisfaites : $g_i(x_A) \leq 0, i = 1, \dots, m$ et $h_j(x_A) = 0, j = 1, \dots, p$. La solution de (IV.1) est l'ensemble des optima x^* .

x^* est un minimum global de f si et seulement si $f(x^*) \leq f(x); \forall x \in S$, et x^* est un minimum local de f si et seulement si $f(x^*) \leq f(x) \forall x \in S / \|x - x^*\| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0$. La Figure (IV.1)(a) présente un exemple d'une fonction à une variable, avec des minima locaux et un minimum global. Parmi les minima locaux, celui qui possède la plus petite valeur de f est le minimum global. Une fonction multimodale présente plusieurs minima (locaux et globaux), et une fonction unimodale n'a qu'un minimum, le minimum global. La Figure (4.1) montre une fonction multimodale à deux variables.

On appelle "méthode (ou algorithme ou recherche) locale" celle qui converge vers un minimum local. Les recherches locales partent usuellement d'un point initial x_0 avec un pas initial ρ_0 . Ces paramètres vont conditionner la descente d'une des vallées de la fonction (cf. schéma en Figure (4.2)). De nombreuses méthodes locales existent. Les plus anciennes et les plus utilisées sont les méthodes où la direction de descente est

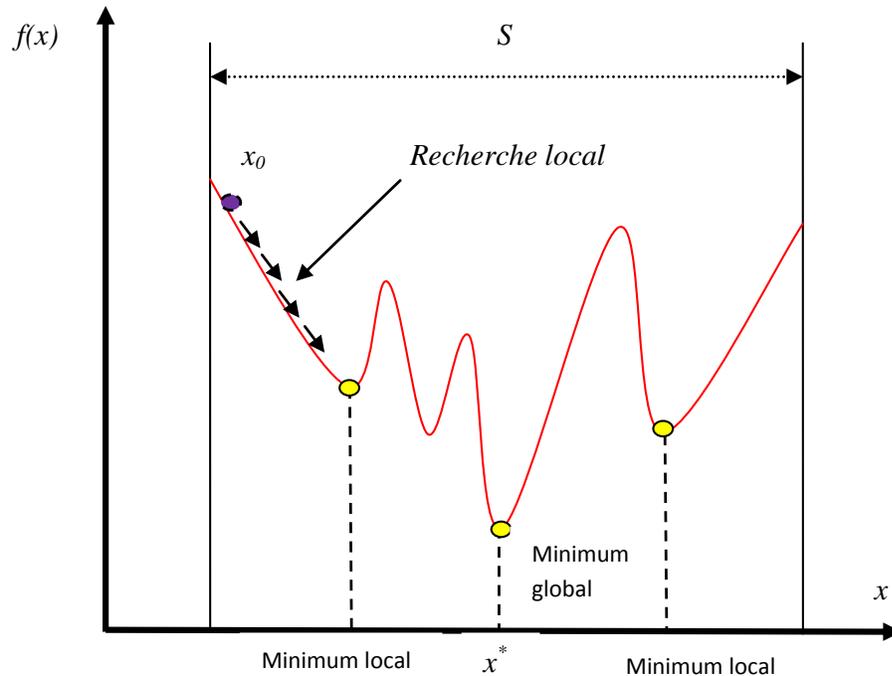


Figure 4.1 – Minima locaux et minima globaux d’une fonction multimodale

déduite des dérivées de la fonction (méthode de la plus forte pente, méthode de Newton, méthode de gradient conjugué et la méthode quasi-Newtoniennes).

Les méthodes globales ont pour objectif d’atteindre un ou plusieurs optima globaux.

Typiquement, le coût machine d’une optimisation est conditionné par le nombre d’évaluations de la fonction objectif. Si l’on veut, par exemple, optimiser un système mécanique modélisé par éléments finis, le temps de calcul sera principalement la somme des temps de simulations utilisées par l’optimiseur.

Il n’existe pas un algorithme optimal pour tous les problèmes [87], et la plupart des méthodes possèdent des paramètres à régler.

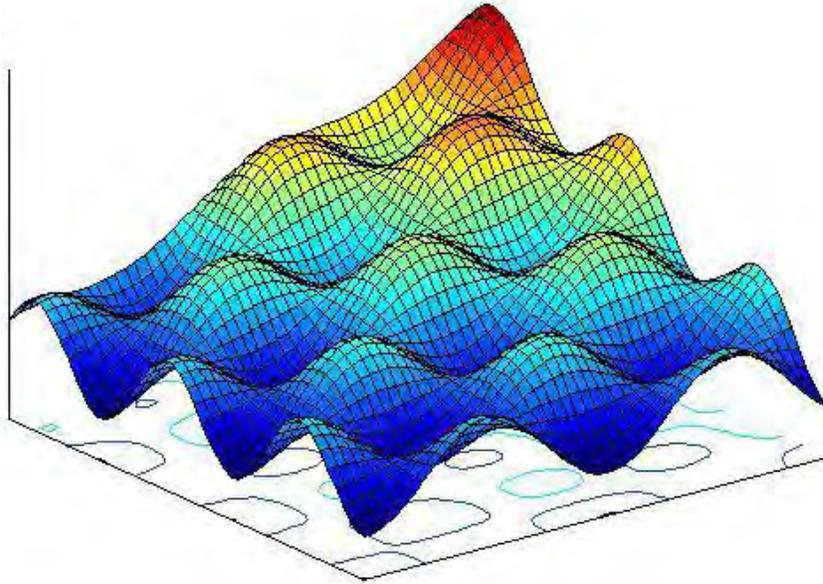


Figure 4.2 – Une fonction multimodale à deux variables

2.2 Méthodes d'Optimisation Globale (Non-Deterministe).

on trouve dans la littérature, différentes classifications des méthodes globales. Une classification, basée sur [46], est présentée dans cette section. Elle n'a pas pour objectif d'être complète, ni de montrer tous les détails des méthodes, mais plutôt de mettre en évidence les caractéristiques de chaque groupe.

2.2.1 Méthodes de descente généralisées

Dans ces méthodes un algorithme d'optimisation local est employé itérativement, et la direction de descente est modifiée de manière à éviter la convergence vers un optimum local déjà trouvé. Une façon de réaliser ceci est de pénaliser la fonction f au fur et à mesure que l'optimiseur s'approche d'un minimum local x_i^* déjà trouvé. Par exemple,

$$f_P = f + P(x_1^*, x_2^*, \dots, x_c^*),$$

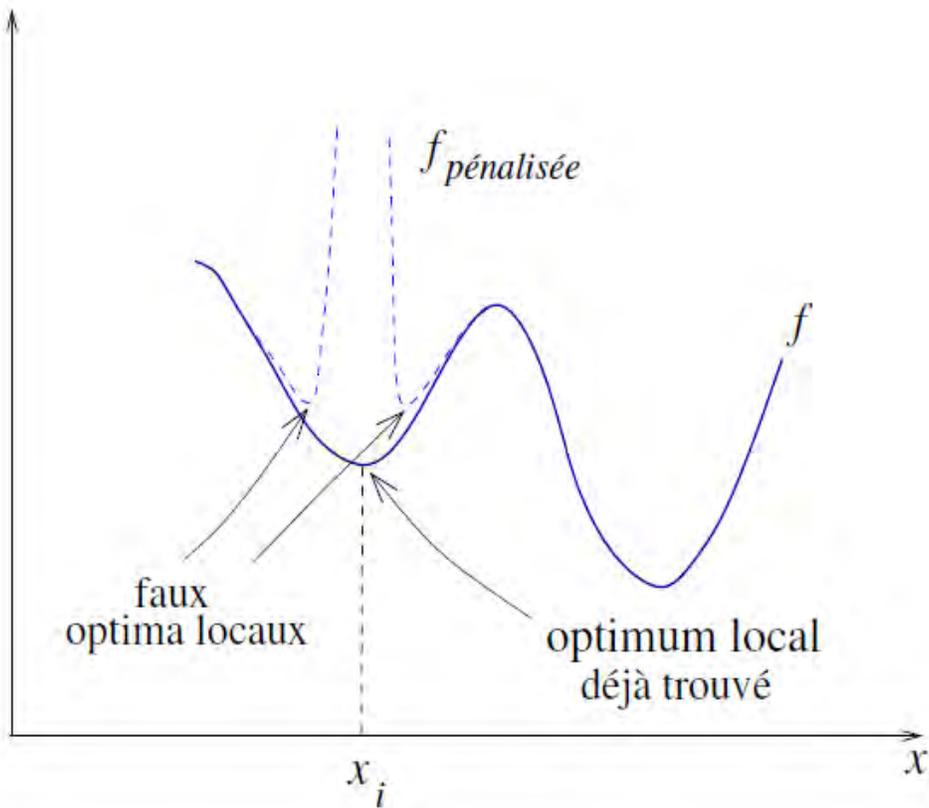


Figure 4.3 – Illustration des faux optima locaux introduits par la pénalisation

où

$$P = \sum_{i=1}^c \frac{K_i}{|x - x_i^*|^\alpha}$$

et c est le nombre de minima locaux trouvés. Un désavantage de la pénalisation directe de f est que l'on peut introduire des optima locaux dans f_P qui n'existent pas dans f (cf. Figure 4.3).

Une autre manière d'explorer d'autres régions après avoir trouvé des minima locaux est d'utiliser les méthodes de tunnel [47]. Elles cherchent des points de départ dans des vallées différentes. Cette méthode présente deux phases qui sont exécutées en alternance. Dans la première phase, une recherche locale est effectuée sur la fonction f , à partir d'un point de départ x_0^i . Elle convergera (on le suppose) vers un minimum (local) x_i^* . Ensuite, la phase de "tunnel" se déroule. Un nouveau point de départ x_0^{i+1} est cherché dans une autre vallée, à l'aide d'une fonction tunnel T . x_0^{i+1} doit vérifier la condition $f(x_0^{i+1}) < f(x_i^*)$ pour garantir qu'il se situera dans une vallée plus basse, donc différente

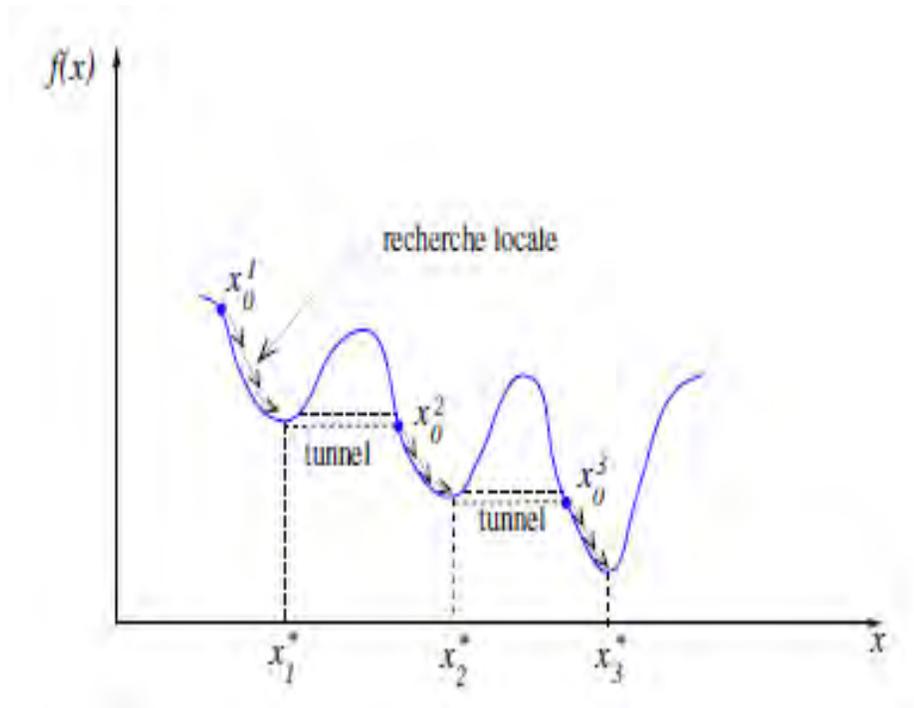


Figure 4.4 – Schéma des méthodes de tunnel

des précédentes. x_0^{i+1} doit satisfaire $T(x_0^{i+1}) < 0$, la fonction tunnel étant, par exemple,

$$T(x) = \frac{f(x) - \min_{t=1,c} f(x_t^*)}{\prod_{i=1}^c \|x - x_i^*\|^{2\alpha_i}}$$

Où α_i est un paramètre qui contrôle "la force" de répulsion autour de x_i^* .

La Figure 4.4 schématise la méthode de tunnel.

Ces méthodes souffrent typiquement de mauvais conditionnements numériques liés à $P(x)$ et $T(x)$.

2.2.2 Recherches aléatoires

Dans ce groupe de méthodes on peut avoir des recherches aléatoires pures, qui consistent à tirer un point, au hasard, à chaque itération. La fonction coût est évaluée en ce point, et s'il y a une amélioration, ce point et la fonction correspondante sont enregistrés, et le processus continue. Les recherches aléatoires peuvent aussi être associées aux recherches locales. Ainsi des points au hasard sont pris pour ré-initialiser des recherches locales. Ces ré-initialisations sont susceptibles de converger plusieurs fois

vers les mêmes minima locaux. De plus, il n'y a pas de discrimination entre régions prometteuses ou non prometteuses [48].

2.2.3 Méthode de multi-départ

La méthode multi-départ diffère simplement de la recherche aléatoire par le fait qu'elle applique une procédure de recherche locale au point initial avant de tester si son image est meilleure[49]. Elle présente donc l'avantage de traiter le point généré, mais par contre le point obtenu sera souvent le même. En effet, l'inconvénient de Multi-départ est que le même minimum local peut s'identifier plusieurs fois menant à une recherche globale inefficace.

2.2.4 Méthodes de regroupement (Clustering)

Les méthodes de groupements peuvent être considérées comme une forme modifiée de l'algorithme standard de multi-départ. Ces méthodes essayent d'éviter l'inefficacité introduite par la méthode de multi-départ en choisissant soigneusement les points auxquels la recherche locale est lancée. Les trois étapes principales des méthodes de groupements sont :

- Echantillonnage du domaine de recherche.
- Transformation des points pour les grouper autour des minima locaux.
- Application d'une technique groupante pour identifier les groupes que représentent les voisinages des minima locaux.

Bien évidemment, la difficulté consiste à regrouper judicieusement les points de manière à ce que tous les points ayant le même groupe. Et si ce procédé identifie avec succès ces groupes ; qui représentent les voisinages des minima locaux ; alors un nombre important des recherches locales peuvent être évité en commençant simplement une recherche locale d'un certain point dans chaque groupe [50, 51]. Deux méthodes existent pour exécuter cette opération de groupement : le groupement de densité et la liaison simple, détaillées dans [52, 53]. Un désavantage de ces méthodes est qu'elles sont peu performantes pour les fonctions ayant de nombreux minima. Dans ces cas, en effet, un grand nombre d'échantillons est nécessaire.

2.2.5 Méthodes évolutionnaires

Les méthodes évolutionnaires sont des méthodes d'optimisation probabilistes qui sont souvent présentées par analogie avec la théorie de la sélection naturelle de Darwin. Les individus les plus performants d'une population ont une plus grande probabilité de survivre et de se reproduire, en donnant des descendants encore mieux adaptés. La correspondance avec la minimisation d'une fonction est la suivante : un "individu"

est un point x , la "population" est un ensemble de points, et "la performance d'un individu" x est évaluée par sa valeur de fonction coût $f(x)$. En partant d'une échantillonnage de l'espace de recherche (une population initiale), ces méthodes réalisent des tirages de nouvelles populations (des générations) à l'aide d'opérations de sélection, croisement et mutation [54, 55, 56, 57].

Les différents algorithmes évolutionnaires se distinguent par la mise en oeuvre de ces opérations. Historiquement, ils ont été développés indépendamment en trois variantes [58, 59, 60, 61] : algorithmes génétiques, stratégies d'évolution et programmation évolutive. Un exemple de structure d'algorithme évolutionnaire est le suivant :

- initialisation de la population $P(t)$, $t = 0$ (au hasard, par exemple) ;
- évaluation de la population courante $P(t)$: calcul de la fonction coût pour tous les points de la population ;
- sélection de certains individus de $P(t)$ en fonction de leur fonction coût f par exemple les meilleurs : les parents $P_0(t)$,
- croisement entre parents et création des "enfants" $\Rightarrow P_1(t)$,
- Mutation perturbation aléatoire des individus de $P_1(t) \Rightarrow P_2(t)$,
- Evaluation de $P_2(t)$,
- Formation de la nouvelle population $P(t + 1)$ à partir des individus de $P(t)$ et de $P_2(t)$, par exemple en choisissant les meilleurs individus appartenant à $P(t)$ et à $P_2(t)$;
- $t \leftarrow t + 1$;
- Si le critère d'arrêt n'est pas satisfait, retour en 3.

Une quatrième famille de méthodes évolutionnaires, plus distante de la métaphore biologique et au formalisme plus rigoureux, est la famille des algorithmes d'optimisation statistique. A partir des individus sélectionnés (étape 3), une densité de probabilité de présence de l'optimum est estimée. Cette densité servira à générer des nouveaux individus (étapes 4 et 5). Ces méthodes peuvent être considérées comme des algorithmes évolutionnaires sans opérateurs.

Les algorithmes évolutionnaires permettent de réaliser des recherches globales, formellement grâce à l'étape 5. Leurs intérêts pratiques réside dans leur applicabilité à une très large gamme de problèmes car ils n'utilisent que la fonction coût (pas de dérivées) et peuvent accommoder des variables mixtes. Cependant, pour trouver un optimum, ils ont besoin d'un grand nombre d'évaluations de la fonction coût. Ainsi, ils ne sont considérés directement utilisables que pour les problèmes où le calcul de la fonction ne nécessite pas de ressources importantes.

2.2.6 Généralités sur les méthodes d'optimisation globale

De manière synthétique, on notera que les méthodes d'optimisation globales présentent toujours deux composantes. Une composante globale ou exploratrice, qui permet d'explorer l'espace de recherche, et une composante locale ou exploitatrice, qui vise à exploiter les informations (relation entre x et f) recueillies. Les méthodes d'optimisation globales sont, souvent, stochastiques, à travers leur composante exploratrice. Ainsi on ne peut pas les juger à partir d'une seule exécution. Pour les qualifier, il est nécessaire d'effectuer une analyse statistique (moyenne, écart-type, etc.) de plusieurs exécutions.

2.3 Cooperation entre les recherches locales et globales.

L'existence de solutions locales dans les problèmes d'optimisation a engendré d'importants efforts pour le développement de méthodes d'optimisation globales [53, 54]. Le coût numérique élevé des optimiseurs globaux est l'origine d'efforts subséquents pour augmenter la vitesse de la recherche, soit en ajoutant de la connaissance spécifique, soit en combinant des algorithmes locaux (efficaces) avec des algorithmes globaux. Il existe plusieurs manières d'associer les recherches locales et globales. Quelques cas ont été déjà présents en Section précédente : recherches aléatoires combinées avec des recherches locales, méthodes de regroupement et méthodes de descente généralisées. La façon la plus simple de réaliser cette association est d'effectuer les recherches en série, c'est-à-dire qu'une optimisation globale à coût limite est d'abord exécutée, ensuite cette solution est raffinée par une recherche locale. De nombreuses recherches locales-globales en parallèle ont été proposées [53, 60] et analysées. Dans ces cas, les itérations des algorithmes locaux et globaux sont entrelacées. De plus, on peut diviser les algorithmes hybrides parallèles en deux catégories : ceux où la recherche locale converge, et ceux où la recherche locale est arrêtée prématurément. Des algorithmes génétiques mimétiques sont des exemples du premier cas. Les algorithmes du deuxième cas sont, en général, basés sur les méthodes de regroupement dans lesquelles les recherches locales qui arrivent à des régions déjà explorées sont abandonnées.

2.4 Compromis, Exploration et Exploitation.

Les inventeurs des algorithmes génétiques ont introduit les notions d'exploitation et exploration. L'exploitation insiste sur la capacité d'examiner par une méthode des zones de recherche particulières alors que l'exploration met en avant la capacité de découvrir des zones de recherche prometteuses. Ces deux notions complémentaires concernent l'ensemble des méthodes de recherche. Il est donc pertinent d'analyser l'ensemble des méthodes d'optimisation en fonction de ces deux notions. Ces méthodes se différencient également selon, la manière dont elles font varier l'intensité de l'exploration au cours de la recherche. Les méthodes de recherches aléatoires permettent une bonne exploration

puisque tout point a une probabilité identique d'être atteint, même s'il n'y a pas d'exploitation des résultats déjà obtenus. L'efficacité de ces méthodes peut être améliorée en incorporant des techniques supplémentaires dans leurs mécanismes. Plus la méthode utilise des mécanismes spécifiques, plus la méthode dispose de moyens potentiels pour conduire efficacement la recherche de l'optimum global [61, 62].

2.5 Les Algorithmes de Recherche Chaotiques.

On a traité dans la section précédente une classe des approches probabilistes basées sur l'observation. Parmi ces méthodes, l'algorithme de recherche aléatoire est probablement le plus robuste, le plus simple et n'est pas limité par le dimensionnement de l'espace de recherche, ce pendant il est probablement le moins efficace. Les algorithmes de recherche aléatoire peuvent être utilisés d'une manière intelligente, de manière à ce que leur efficacité puisse être améliorée et leurs avantages restent valables en même temps. L'idée principale est de construire des algorithmes de recherche chaotique qui explorent l'espace de recherche d'une manière chaotique. Les algorithmes d'optimisation chaotiques comme une méthode émergente de l'optimisation globale ont attiré beaucoup d'attention dans les applications d'ingénierie. Leurs bonnes performances ont été soulignées. Dans le cadre d'algorithmes évolutionnaires, l'utilisation de séquences chaotiques au lieu de celles aléatoires a été introduite par Caponetto et al. [69].

Depuis leur travail original, la littérature sur l'optimisation chaotique est florissante. Ils sont utilisés dans le cadre de la méthode de réglage pour déterminer les paramètres du PID d'un régulateur de tension automatique, ou également pour l'optimisation de la conception technique et dans beaucoup d'autres problèmes physiques, économiques et biologiques.

2.5.1 La Recherche Chaotique de l'optimum

La méthode de la recherche chaotique est une méthode très simple, non affectée par la dimension du problème d'optimisation. Cette méthode est basée sur l'exploration de l'espace de recherche S d'une manière chaotique afin de trouver un point qui minimise la fonction objective f . Cette méthode consiste à sélectionner à chaque itération une solution au hasard. La fonction objective f est évaluée en ce point. La nouvelle valeur est comparée à la précédente, si elle est meilleure que la précédente, cette valeur est enregistrée, ainsi que la solution correspondante, et le processus continue. Sinon on repart du point précédent et on recommence le procédé, jusqu'à ce que les conditions d'arrêt soient atteintes. La figure (4.5) résume l'algorithme.

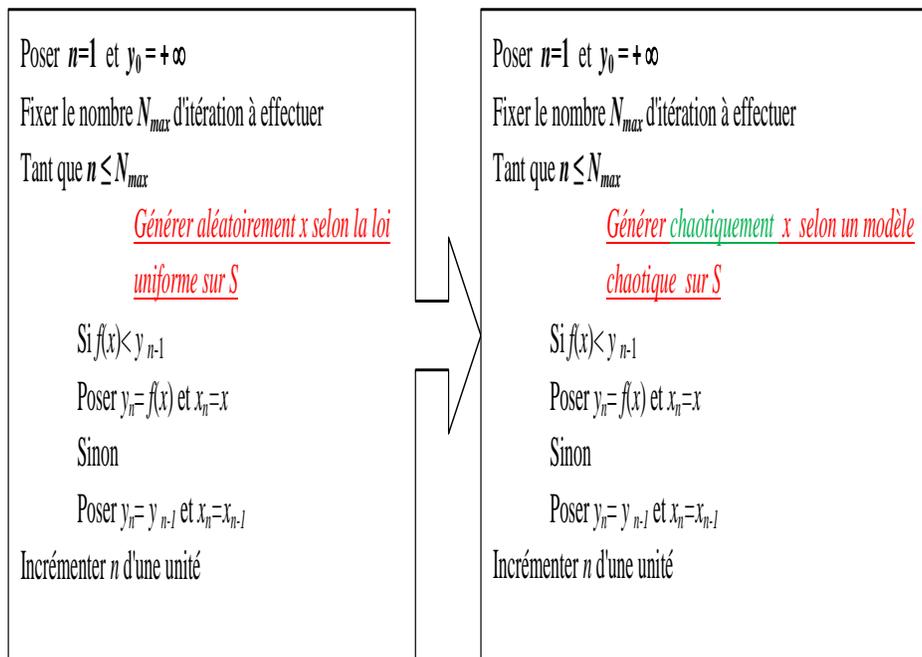


Figure 4.5 – Algorithme de recherche aléatoire où $(x^* = x_n; f^* = y_n)$

Efficacité des algorithmes de recherche chaotique.

1 Introduction.

Le chaos est désormais un concept bien établi et il y a une vaste littérature sur la nature du chaos. Depuis plus de trois décennies, le comportement inhabituel des systèmes chaotiques a attiré l'attention de plusieurs différentes communautés scientifiques. Les comportements chaotiques ont été observés dans différents domaines des sciences, par exemple l'ingénierie, la médecine, l'écologie, la biologie et l'économie.

Le chaos est mathématiquement défini comme un modèle aléatoire généré par des systèmes déterministes simples. En général, le chaos a trois importantes propriétés dynamiques [62, 64, 65, 67] :

- la sensibilité aux conditions initiales.
- la propriété de semi-stochastique.
- la propriété quasi-aléatoire.

L'idée d'utiliser des systèmes chaotiques au lieu des processus aléatoires a été remarqué dans plusieurs domaines. Un de ces champs est la théorie de l'optimisation.

Dans les algorithmes d'optimisation aléatoire le rôle du hasard peut être joué par une dynamique chaotique.

Des études expérimentales ont affirmé que les avantages de l'utilisation des modèles chaotiques au lieu des modèles aléatoires sont souvent évidents mais il n'est pas encore mathématiquement prouvé [68, 69].

A partir de ces propriétés du chaos, certains nouveaux algorithmes de recherche appelés algorithmes d'optimisation chaotique (COAs) sont présentés dans la littérature [70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81].

Les méthodes COA peuvent facilement échapper à des minima locaux contrairement aux algorithmes d'optimisation stochastique.

L'algorithme d'optimisation stochastique s'échappe souvent à des minima locaux en acceptant quelques mauvaises solutions selon une certaine probabilité. Mais les COAs s'échappent à des minima locaux à cause de la régularité des mouvements chaotiques.

Dans la plupart des méthodes de COA, les variables du chaos sont générées par l'application logistique. L'objectif de cette section est d'étudier l'efficacité de quelques

modèles chaotiques de dimension deux en tant que des générateurs de variables chaotiques. A cet égard, nous avons choisi trois applications différentes en remplaçant le générateur de variables chaotique dans l'un des COAs.

2 Principe et étapes du COA basée sur 2-D modèle.

Beaucoup de problèmes d'optimisation sans contrainte avec des variables continues peuvent être formulés comme des problèmes d'optimisation de la manière suivante :

$$\begin{cases} \min_x f(x), \\ \text{telque,} \\ X = [x_1, x_2, \dots, x_n] \\ x_i \in [L_i, U_i], i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (5.1)$$

La f est appelée fonction objectif, X représente le vecteur des variables d'optimisation

la procédure de recherche chaotique basée sur le modèle 2-D (Lozi) peut être illustrée comme suit[82, 83, 84] :

Entrées :

M_g :le nombre maximal d'itérations de la recherche globale chaotiques.

M_l :le nombre maximum d'itérations de la recherche locale chaotiques.

$M_l + M_g$: le critère d'arrêt de la méthode d'optimisation chaotique.

λ : le pas de la recherche locale chaotique.

Sorties :

\bar{X} : la meilleure solution d'exécution en cours de recherche chaotique.

\bar{f} : la meilleure fonction objectif.

Le processus de base de COA comporte généralement deux phases principales

Définir un générateur de séquences chaotiques basées sur une application chaotique (ici 2-D chaotique map).

puis on génère un point candidat x_c dans la région de recherche $[L, U]$; l'optimum \bar{x} , est le point candidat ayant obtenu la plus petite valeur de $f(x_c)$.

Le processus est schématisé par l'algorithme de la page suivante, les points x_c sont générés dans le domaine $[L, U]$ au moyen du vecteur chaotique z .

Dans cet algorithme , nous supposons que les composantes de z sont restreintes à l'intervalle $[0, 1]$.

A chaque itération, un nouveau vecteur de séquences chaotiques est généré en utilisant le modèle chaotique.

Algorithm 1: COLM

1 **-Step 1** : Initialize the number M_g , M_l of chaotic search and initialization of variables and initial conditions Set $k=1$, $y(0)$, $y_1(0)$, $a = 1.7$ and $b = 0.5$ of Lozi map. Set the initial best objective function $\bar{f} = +\infty$

2 **-Step 2 : algorithm of chaotic global search :**

while $k \leq M_g$ **do**

$x_i(k) = L_i + z_i(k) \cdot (U_i - L_i)$

if $f(X(k)) < \bar{f}$ **then**

$\bar{X} = X(k)$; $\bar{f} = f(x(k))$

end if

$k = k + 1$

end while

-Step 3 : algorithm of chaotic local search :

while $k \leq (M_g + M_l)$ **do**

if $r \leq 0.5$ **then**

$x_i(k) = \bar{x}_i + \lambda z_i(k) \cdot |(U_i - L_i)|$

else

$x_i(k) = \bar{x}_i - \lambda z_i(k) \cdot |(U_i - L_i)|$

end if

if $f(X(k)) < \bar{f}$ **then**

$\bar{X} = X(k)$; $\bar{f} = f(x(k))$

end if

$k = k + 1$

end while

On obtient un nouvel optimum local \bar{x} .

L'étape deux de cet algorithme de la recherche chaotique globale est similaire à la technique d'optimisation de Monte-Carlo qui converge lentement et obtient l'optimum global avec une faible probabilité.

La première étape de cet algorithme est utilisée pour obtenir un bon optimum pour l'étape de raffinement où la recherche chaotique locale z est toujours le modèle chaotique et λ est un paramètre scalaire lié au rayon de la recherche autour de \bar{x} .

Les optima locaux sont mis à jour chaque fois qu'un point est trouvé de mieux telle que la procédure se poursuit pour la recherche au voisinage du nouveau point optimal.

3 Application de l'algorithme basée sur le modèle chaotique 2-D .

La conception de notre algorithme basée sur le modèle chaotique 2-D vise à améliorer la convergence de l'optimisation chaotique. Pour tester l'efficacité de cet algorithme, nous l'avons appliqué d'une part à différentes fonctions tests. D'autre part, nous avons étudié l'efficacité de quelques modèles de dimension deux en tant que générateurs de variables chaotiques dans cet algorithme.

Différents types d'équations chaotiques ont été utilisées, l'application logistique et d'autres applications non aléatoires, telles que l'application Tente, l'application de Gauss, l'application de Lozi, le système Mackey-Glass, le système de Lorenz, l'application de Ikeda et d'autres ont été adoptées et ont donnés des résultats très intéressants.

3.1 La méthode COLM).

L'attracteur de Lozi est défini par le système d'équations suivant, ou a et b sont des constantes :

$$\begin{cases} y_1(k) = 1 - a|y_1(k-1)| + by(k-1) \\ y(k) = y_1(k-1) \end{cases} \quad (5.2)$$

où k est le nombre d'itération. Dans ce travail, les valeurs de y sont normalisées dans l'intervalle $[0, 1]$ dans le problème d'optimisation. Cette transformation est donnée par :

$$z(k) = \frac{(y(k) - \alpha)}{\beta - \alpha}. \quad (5.3)$$

Où $y \in [-0,6418, 0,6716]$ et $[a, b] = (-0.6418, 0.6716)$. Les paramètres utilisés dans ce travail sont $a = 1,7$ et $b = 0,5$. Si on programme ces formules avec Matlab, le graphe de l'application (5.1) avec les valeurs suivantes $a = 1.7; b = 0.5$ est donné par la figure (5.1) :

Des tests sur des fonctions connues de la littérature ont été fait. Le but était de vérifier l'efficacité de l'approche proposée (Tableau 5.1).

1- La première fonction est définie par :

$$f_1 = x_1^4 - 7x_1^2 - 3x_1 + x_2^4 - 9x_2^2 - 5x_2 + 11x_1^2x_2^2 + 99\sin(71x_1) + 137\sin(97x_1x_2) + 131\sin(51x_2). \quad (5.4)$$

- Domaine de recherche : $-10 \leq x_i \leq 10, i = 1, 2$.

2- La deuxième fonction F_2 est la fonction de **Easom** à deux variables définie par :

$$F_2 = -\cos(x_1)\cos(x_2)e^{-(x_1-\pi)^2-(x_2-\pi)^2} \quad (5.5)$$

- Domaine de recherche : $-100 \leq x_i \leq 100, i = 1, 2$.

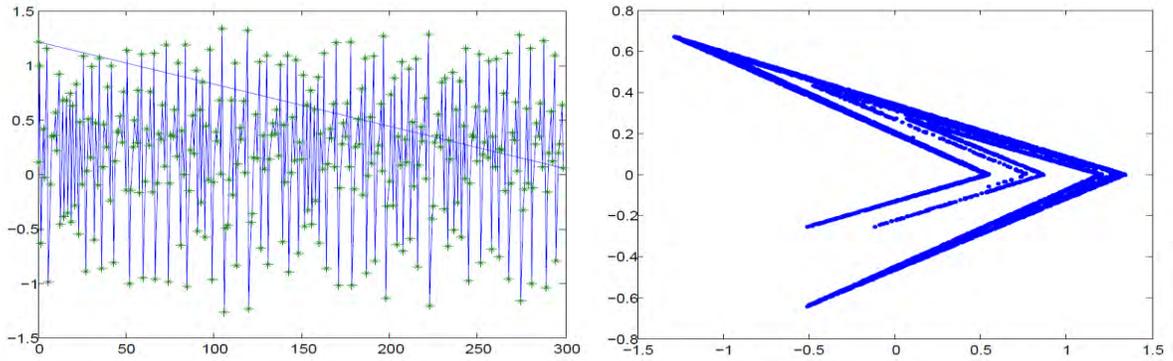


Figure 5.1 – Attracteur de Lozi pour $a = 1.7$, $b = 0.5$

3- La troisième fonction F_3 est la fonction de **Rastrigin** à deux variables définie par :

$$F_3 = 20 + x_1^2 - 10.\cos(2\pi x_1) + x_2^2 - 10.\cos(2\pi x_2). \quad (5.6)$$

- Domaine de recherche : $-5.12 \leq x_i \leq 5.12, i = 1, 2$.

4- La quatrième fonction F_4 est la fonction de **Rosenbrock** tridimensionnelle définie par :

$$F_4 = 100. \sum_{i=1}^3 ((x_{i+1} - x_i^2)^2 + (1 - x_i)^2). \quad (5.7)$$

dans le domaine de recherche : $-2.048 \leq x_i \leq 2.048, i = 1, 2, 3$.

5- La cinquième fonction F_5 est la fonction de **Griewank** en $n = 3$ dimensions définie par :

$$F_5 = 1 + \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{4000} + \prod_{i=1}^3 \cos \frac{x_i}{\sqrt{i}} \quad (5.8)$$

dans le domaine de recherche : $-500 \leq x_i \leq 500, i = 1, 2, 3$.

CHAPITRE 5. EFFICACITÉ DES ALGORITHMES DE RECHERCHE CHAOTIQUE.62

	λ	M_g	M_l	meilleure va- leur	Valeur moyenne	L'écart-type	(x^*, y^*)
F1 :Lozi	0.001	24	50	-371.0150	-368.5212	11.1135	$\begin{pmatrix} 0.3105 \\ 0.2442 \end{pmatrix}$
F ₂ : <i>Easom</i>	0.001	24	50	-0.8476	-0.8476	0.0000	$\begin{pmatrix} 2.9605 \\ 3.5541 \end{pmatrix}$
F ₃ : <i>Rastrigin</i>	0.001	24	50	0.0589	0.0589	0.0000	$\begin{pmatrix} 0.3038 \\ 0.2774 \end{pmatrix}$
F ₄ : <i>Rosenbrok</i>	0.001	24	50	0.0034	0.0060	0.0043	$\begin{pmatrix} 1.0213 \\ 1.0486 \\ 1.1041 \end{pmatrix}$
F ₅ : <i>Griewank</i>	0.001	24	50	0.3775	0.3979	0.0080	$\begin{pmatrix} 0.6106 \\ 0.9361 \\ 0.3953 \end{pmatrix}$
F ₁ : <i>Lozi</i>	0.01	40	50	-367.3930	-358.0622	7.5935	$\begin{pmatrix} -2.6200 \\ 1.5648 \end{pmatrix}$
F ₂ : <i>Easom</i>	0.01	40	50		-0.9565	0.0000	$\begin{pmatrix} 3.2293 \\ 3.7128 \end{pmatrix}$
F ₃ : <i>Rastrigin</i>	0.01	40	50	0.0371	0.0341	0.0030	$\begin{pmatrix} -0.6788 \\ -0.6447 \end{pmatrix}$
F ₄ : <i>Rosenbrok</i>	0.01	40	50	0.0003	0.0065	0.0039	$\begin{pmatrix} 1.0066 \\ 1.0060 \\ 1.0135 \end{pmatrix}$
F ₅ : <i>Griewank</i>	0.01	40	50	0.0000	0.0067	0.0022	$\begin{pmatrix} -0.0060 \\ -0.0018 \\ -0.0091 \end{pmatrix}$
F ₁ : <i>Lozi</i>	0.1	40	50	-379.0027	-371.5180	5.1866	$\begin{pmatrix} -4.6404 \\ -3.0760 \end{pmatrix}$
F ₂ : <i>Easom</i>	0.1	40	50	-0.9774	-0.9599	0.0060	$\begin{pmatrix} 3.2934 \\ 3.4138 \end{pmatrix}$
F ₃ : <i>Rastrigin</i>	0.1	40	50	0.0199	0.0315	0.0082	$\begin{pmatrix} -0.2886 \\ -0.3647 \end{pmatrix}$
F ₄ : <i>Rosenbrok</i>	0.1	40	50	0.0231	0.2153	0.0670	$\begin{pmatrix} 1.0317 \\ 1.0351 \\ 1.1113 \end{pmatrix}$
F ₅ : <i>Griewank</i>	0.1	40	50	0.0008	0.0130	0.0070	$\begin{pmatrix} -0.1705 \\ -0.2763 \\ -0.3607 \end{pmatrix}$
F ₁ : <i>Lozi</i>	0.1	1000	50	-382.7108	-379.7557	1.7817	$\begin{pmatrix} -5.8930 \\ 2.9309 \end{pmatrix}$
F ₂ : <i>Easom</i>	0.1	1000	50	-0.9957	-0.9957	0.0000	$\begin{pmatrix} 3.0659 \\ 2.9234 \end{pmatrix}$
F ₃ : <i>Rastrigin</i>	0.1	1000	50	0.0013	0.0013	0.0000	$\begin{pmatrix} -0.1886 \\ -0.4647 \end{pmatrix}$
F ₄ : <i>Rosenbrok</i>	0.1	1000	50	0.0143	0.1799	0.0884	$\begin{pmatrix} 1.0317 \\ 1.0351 \\ 1.1113 \end{pmatrix}$
F ₅ : <i>Griewank</i>	0.1	1000	50	0.0011	0.0117	0.0070	$\begin{pmatrix} -0.1306 \\ -0.2616 \\ -0.2961 \end{pmatrix}$

Tableau 5.1 – COLM

3.2 la méthode (COHM).

Le modèle de Hénon est un système dynamique à temps discret. C'est l'un des systèmes dynamiques ayant un comportement chaotique les plus étudiés. L'attracteur de Hénon prend tout point du plan (x, y) et lui associe le nouveau point :

$$\begin{cases} y_1(k) = 1 - a.y_1^2(k-1) + by(k-1) \\ y(k) = y_1(k-1) \end{cases} \quad (5.9)$$

où k est le nombre d'itération. Dans ce travail, les valeurs de y sont normalisés dans l'intervalle $[0, 1]$ à chaque variable de décision dans l'espace à n dimensions du problème d'optimisation. Cette transformation est donnée par :

$$z(k) = \frac{(y(k) - \alpha)}{\beta - \alpha}. \quad (5.10)$$

Il dépend de deux paramètres, a et b , qui ont pour valeurs canoniques : $a = 1.4$ et $b = 0.3$. Pour ces valeurs, l'attracteur de Hénon est chaotique. Pour d'autres valeurs de a et b , il peut être chaotique, intermittent ou converger vers une orbite périodique. Un aperçu du comportement de l'attracteur peut être donné par son diagramme orbital. L'attracteur fut introduit par Michel Hénon comme une simplification de la section de Poincaré de l'attracteur de Lorenz. Dans le cas canonique, le point de départ approchera soit un ensemble de points, connu sous le nom d'attracteur étrange de Hénon, soit l'infini. L'attracteur de Hénon est fractal, continu dans une direction, et forme un ensemble de Cantor dans l'autre. Des estimations numériques donnent une dimension de corrélation d'environ 1.25 ± 0.02 et une dimension de Hausdorff de 1.261 ± 0.003 pour l'attracteur canonique. En tant que système dynamique, l'attracteur canonique de Hénon est d'un intérêt particulier car, contrairement à la carte logistique, ses orbites n'ont pas de description simple. Si on programme ces formules avec Matlab on aura le graphe de la figure (5.2) avec les valeurs suivantes $a = 1.4$; $b = 0.3$.

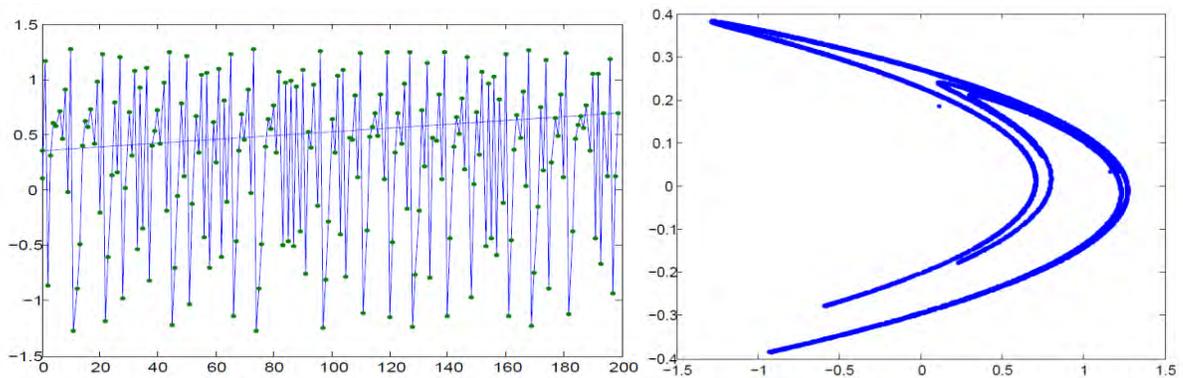


Figure 5.2 – Attracteur de Hénon pour $a = 1.4$, $b = 0.3$

Des test sur des fonctions connues de la littérature présenté dans la sous section précédente (voir la section Fonctions tests) , ont été faits. Le but était de vérifier l'efficacité de l'approche proposée (Tableau 5.2).

	λ	M_g	M_l	Best Value	Mean Value	Std. Dev	(x^*, y^*)
F1 :Lozi	0.001	24	50	-371.0150	-368.5212	11.1135	$\begin{pmatrix} 0.3105 \\ 0.2442 \end{pmatrix}$
F ₂ : <i>Easom</i>	0.001	24	50	-0.8476	-0.8476	0.0000	$\begin{pmatrix} 3.6050 \\ 3.5417 \end{pmatrix}$
F ₃ : <i>Rastrigin</i>	0.001	24	50	0.0589	0.0589	0.0000	$\begin{pmatrix} 0.2338 \\ -0.2774 \end{pmatrix}$
F ₄ : <i>Rosenbrok</i>	0.001	24	50	0.0034	0.0060	0.0043	$\begin{pmatrix} 1.0213 \\ 1.0486 \\ 1.1041 \end{pmatrix}$
F ₅ : <i>Griewank</i>	0.001	24	50	0.3775	0.3979	0.0080	$\begin{pmatrix} 0.6106 \\ 0.9361 \\ 0.3953 \end{pmatrix}$
F ₁ : <i>Lozi</i>	0.01	40	50	-367.3930	-358.0622	7.5935	$\begin{pmatrix} -2.6200 \\ 1.5648 \end{pmatrix}$
F ₂ : <i>Easom</i>	0.01	40	50	-0.9565	-0.9565	0.0000	$\begin{pmatrix} 3.4934 \\ 3.8138 \end{pmatrix}$
F ₃ : <i>Rastrigin</i>	0.01	40	50	0.0371	0.0341	0.0030	$\begin{pmatrix} -0.0017 \\ -0.2318 \end{pmatrix}$
F ₄ : <i>Rosenbrok</i>	0.01	40	50	0.0003	0.0065	0.0039	$\begin{pmatrix} 1.0066 \\ 1.0060 \\ 1.0135 \end{pmatrix}$
F ₅ : <i>Griewank</i>	0.01	40	50	0.0000	0.0067	0.0022	$\begin{pmatrix} -0.0060 \\ -0.0018 \\ -0.0091 \end{pmatrix}$
F ₁ : <i>Lozi</i>	0.1	40	50	-379.0027	-371.5180	5.1866	$\begin{pmatrix} -4.6404 \\ -3.0760 \end{pmatrix}$
F ₂ : <i>Easom</i>	0.1	40	50	-0.9774	-0.9599	0.0060	$\begin{pmatrix} 3.4934 \\ 4.8138 \end{pmatrix}$
F ₃ : <i>Rastrigin</i>	0.1	40	50	0.0199	0.0315	0.0082	$\begin{pmatrix} -0.4886 \\ -0.5047 \end{pmatrix}$
F ₄ : <i>Rosenbrok</i>	0.1	40	50	0.0231	0.2153	0.0670	$\begin{pmatrix} 1.0317 \\ 1.0351 \\ 1.1113 \end{pmatrix}$
F ₅ : <i>Griewank</i>	0.1	40	50	0.0008	0.0130	0.0070	$\begin{pmatrix} -0.1705 \\ -0.2763 \\ -0.3607 \end{pmatrix}$
F ₁ : <i>Lozi</i>	0.1	1000	50	-382.7108	-379.7557	1.7817	$\begin{pmatrix} -5.8930 \\ 2.9309 \end{pmatrix}$
F ₂ : <i>Easom</i>	0.1	1000	50	-0.9957	-0.9957	0.000	$\begin{pmatrix} 3.0659 \\ 3.2234 \end{pmatrix}$
F ₃ : <i>Rastrigin</i>	0.1	1000	50	0.0013	0.0013	0.0000	$\begin{pmatrix} -0.1186 \\ -0.3247 \end{pmatrix}$
F ₄ : <i>Rosenbrok</i>	0.1	1000	50	0.0143	0.1799	0.0884	$\begin{pmatrix} 1.0317 \\ 1.0531 \\ 1.1513 \end{pmatrix}$
F ₅ : <i>Griewank</i>	0.1	1000	50	0.0012	0.0107	0.0070	$\begin{pmatrix} -0.0906 \\ -0.2616 \\ -0.2861 \end{pmatrix}$

Tableau 5.2 – COHM

3.3 La méthode COMM.

L'attracteur est défini par le système d'équations suivant, où a et b sont des constantes :

$$\begin{cases} y_1(k) = 1 - a(\sin y_1(k-1)) + by(k-1) \\ y(k) = y_1(k-1) \end{cases} \quad (5.11)$$

Où k est le nombre d'itération. Dans ce travail, les valeurs de y sont normalisés dans l'intervalle $[0, 1]$ à chaque variable de décision dans l'espace à n dimensions du problème d'optimisation. Cette transformation est donnée par :

$$z(k) = \frac{(y(k) - \alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Où $y \in [-8.588, 27.645]$ et $[\alpha, \beta] = [-8.588, 27.645]$. Les paramètres utilisés dans ce travail sont $a = 4$ et $b = 0.9$. Si on programme ces formules avec Matlab on aura le graphe de la figure avec les valeurs suivantes $a = 4 ; b = 0.9$ on aura ce graphe :

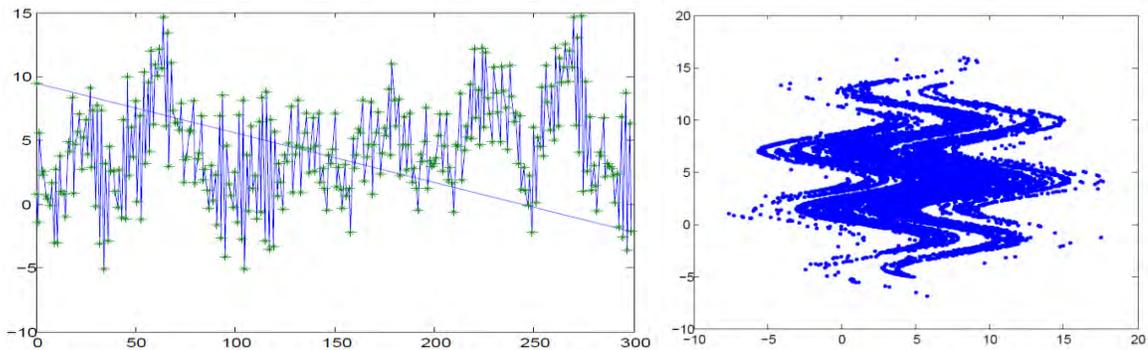


Figure 5.3 – Attracteur étrange pour $a = 4$, $b = 0.9$

Des tests sur des fonctions connues de la littérature (voir la section Fonctions tests) , ont été fait. Le but était de vérifier l'efficacité de l'approche proposée (Tableau 5.3) .

CHAPITRE 5. EFFICACITÉ DES ALGORITHMES DE RECHERCHE CHAOTIQUE.67

	λ	M_g	M_l	Best Value	Mean Value	Std. Dev	(x^*, y^*)
F1 :Lozi	0.001	24	50	-365.5515	-365.5515	0.0057	$\begin{pmatrix} 2.8728 \\ -0.1600 \end{pmatrix}$
F ₂ : <i>Easom</i>	0.001	24	50	-0.8476	-0.8476	0.0000	$\begin{pmatrix} 2.6050 \\ 2.5417 \end{pmatrix}$
F ₃ : <i>Rastrigin</i>	0.001	24	50	0.0589	0.0589	0.0000	$\begin{pmatrix} 0.3338 \\ -0.2774 \end{pmatrix}$
F ₄ : <i>Rosenbrok</i>	0.001	24	50	0.0034	0.0033	0.0001	$\begin{pmatrix} 1.1213 \\ 1.0386 \\ 1.1401 \end{pmatrix}$
F ₅ : <i>Griewank</i>	0.001	24	50	0.3775	0.3775	0.0000	$\begin{pmatrix} 0.7106 \\ 0.8861 \\ 0.4853 \end{pmatrix}$
F ₁ : <i>Lozi</i>	0.01	40	50	-377.5517	-372.5025	3.3956	$\begin{pmatrix} 3.4934 \\ 3.3881 \end{pmatrix}$
F ₂ : <i>Easom</i>	0.01	40	50	-0.9565	-0.9565	0.0000	$\begin{pmatrix} 3.3934 \\ 2.9338 \end{pmatrix}$
F ₃ : <i>Rastrigin</i>	0.01	40	50	0.0371	0.0341	0.0030	$\begin{pmatrix} 0.17886 \\ 0.24647 \end{pmatrix}$
F ₄ : <i>Rosenbrok</i>	0.01	40	50	0.0003	0.0065	0.0039	$\begin{pmatrix} 1.0166 \\ 1.0260 \\ 1.0935 \end{pmatrix}$
F ₅ : <i>Griewank</i>	0.01	40	50	0.0000	0.0067	0.0022	$\begin{pmatrix} -0.0065 \\ -0.0020 \\ -0.0091 \end{pmatrix}$
F ₁ : <i>Lozi</i>	0.1	40	50	-369.8807	-369.4553	0.1898	$\begin{pmatrix} -3.4934 \\ -4.8138 \end{pmatrix}$
F ₂ : <i>Easom</i>	0.1	40	50	-0.9774	-0.9599	0.0060	$\begin{pmatrix} 3.4934 \\ 3.8138 \end{pmatrix}$
F ₃ : <i>Rastrigin</i>	0.1	40	50	0.0199	0.0315	0.0082	$\begin{pmatrix} -0.7886 \\ -0.4647 \end{pmatrix}$
F ₄ : <i>Rosenbrok</i>	0.1	40	50	0.0231	0.2153	0.0670	$\begin{pmatrix} 1.0327 \\ 1.1351 \\ 1.1513 \end{pmatrix}$
F ₅ : <i>Griewank</i>	0.1	40	50	0.0008	0.0130	0.0070	$\begin{pmatrix} -0.0705 \\ -0.2763 \\ -0.2907 \end{pmatrix}$
F ₁ : <i>Lozi</i>	0.1	1000	50	-389.9468	-389.9468	0.0003	$\begin{pmatrix} 1.0659 \\ 2.2234 \end{pmatrix}$
F ₂ : <i>Easom</i>	0.1	1000	50	-0.9957	-0.9957	0.000	$\begin{pmatrix} 3.0659 \\ 2.9234 \end{pmatrix}$
F ₃ : <i>Rastrigin</i>	0.1	1000	50	0.0018	0.0015	0.0022	$\begin{pmatrix} -0.0886 \\ -0.1647 \end{pmatrix}$
F ₄ : <i>Rosenbrok</i>	0.1	1000	50	0.0143	0.1799	0.0884	$\begin{pmatrix} 1.0477 \\ 1.0251 \\ 1.1413 \end{pmatrix}$
F ₅ : <i>Griewank</i>	0.1	1000	50	0.0009	0.0017	0.0070	$\begin{pmatrix} -0.2306 \\ -0.1616 \\ -0.2871 \end{pmatrix}$

Tableau 5.3 – COMM

Proposition d'une nouvelle approche pour les algorithmes d'optimisation chaotiques.

Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle stratégie d'optimisation chaotique qui est une amélioration de la méthode COLM [82, 83, 84] (Chaotic Optimization based on Lozi Map) qui repose sur une recherche globale suivie d'une recherche locale et peut donner des résultats insatisfaisants. Nous avons fait une modification dans la phase globale de la recherche. En a fait quelques étapes de recherches locales chaotiques autour de chaque point obtenu par la série chaotique, c-à-d en optimisant localement pendant quelques itérations le résultat global. Cette nouvelle recherche est appelée ICOLM [85, 86]. Donc ICOLM a améliorée la méthode COLM par une recherche globale localement moyennée.

Heuristique : La stratégie globale localement moyennée du ICOLM conduit à des meilleurs résultats que la méthode COLM comme montre la Fig.6.1. Dans cette figure, on affiche trois résultats de la recherche globale $x_1(k), x_2(k), x_3(k)$ tel que :

$$f(x_2(k)) < f(x_3(k)) < f(x_1(k)). \quad (6.1)$$

La recherche locale qui suit la recherche globale commence à partir du meilleur résultat global $x_2(k)$ (10.1) et donne $x_2(k+1)$. Par contre, la recherche "locale-globale" autour $x_1(k), x_2(k), x_3(k)$ conduit à $x_1(k+1), x_2(k+1), x_3(k+1)$ qui vérifient :

$$f(x_1(k+1)) < f(x_3(k+1)) < f(x_2(k+1)). \quad (6.2)$$

La recherche locale suivant la recherche "locale-globale" commence à partir du meilleur résultat $x_1(k+1)$ (10.2) et conduit à \bar{x} qui vérifient :

$$f(\bar{x}) < f(x_1(k+1)). \quad (6.3)$$

Pendant la recherche locale chaotique, le pas λ est un paramètre important dans le comportement de la convergence de l'optimisation. Ainsi, deux valeurs différentes de λ sont successivement utilisées lors de la recherche locale.

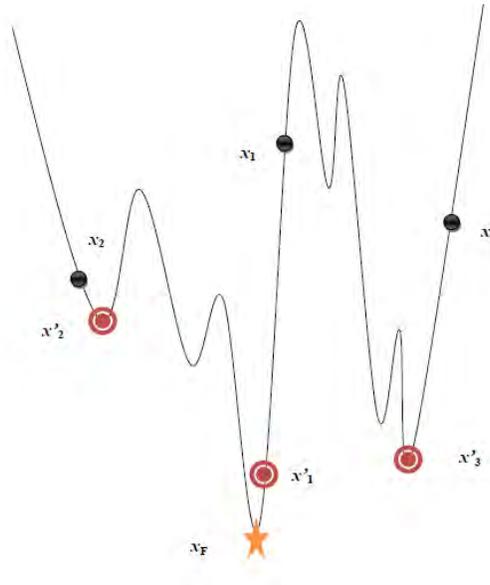


Figure 6.1 – Heuristique de la stratégie globale localement moyennée.

La procédure de la nouvelle recherche chaotique basée sur un modèle 2-D peut être illustrée comme suit :

Entrées :

M_g : le nombre maximal d'itérations de la recherche globale chaotiques

M_l : le nombre maximum d'itérations de la recherche locale chaotiques.

M_{gl1} : le nombre maximal d'itérations de la 1^{er} recherche globale-locale.

M_{gl2} : le nombre maximal d'itérations de la 2^{eme} recherche globale-locale.

$M_g \cdot (M_{gl1} + M_{gl2}) + M_l$: le critère d'arrêt de la méthode d'optimisation chaotique.

λ : le pas dans la recherche locale chaotique.

λ_{gl1} : le pas dans la première recherche globale-locale .

λ_{gl2} : le pas dans la deuxième recherche globale-locale.

Sorties :

\bar{X} : la meilleure solution d'exécution en cours de recherche chaotiques

\bar{f} : la meilleure fonction objectif.

Dans la suite, nous affichons quelques résultats que nous avons obtenu, ces résultats montrent une meilleure optimisation par cette nouvelle méthode.

A chaque étude, 48 cas ont été faites et exécutés indépendamment pour chacune des deux méthodes COLM et ICOLM impliquant 48 essais de différentes conditions initiales $y_1(0)$, $y(0)$ (paramètres de l'application de Lozi).

Pour tous les cas étudiés, les quatre configurations, numérotés de ICOLM1 à

Algorithm 2: ICOLM

1 **Step 1** :Initialize the number $M_g, M_{gl1}, M_{gl2}, M_l$ of chaotic search and initialization of variables and initial conditions Set $k=1, y(0), y_1(0), a = 1.7$ and $b = 0.5$ of Lozi map. Set the initial best objective function $\bar{f} = +\infty$

2 **Step 2 : algorithm of chaotic global search :**

while $k \leq M_g$ **do**

$$x_i(k) = L_i + z_i(k) \cdot (U_i - L_i)$$

if $f(X(k)) < \bar{f}$ **then**

$$\bar{X} = X(k); \bar{f} = f(x(k))$$

end if

-Step 2-1 : sub algorithm of chaotic local search :

while $j \leq M_{gl1}$ **do**

for $i = 0$ to n **do**

if $r \leq 0.5$ **then**

$$x_i(j) = \bar{x}_i + \lambda_{gl1} z_i(j) \cdot |(U_i - L_i)|$$

else

$$x_i(j) = \bar{x}_i - \lambda_{gl1} z_i(j) \cdot |(U_i - L_i)|$$

end if

end for

if $f(X(j)) < \bar{f}$ **then**

$$\bar{X} = X(j); \bar{f} = f(x(j))$$

end if

$j = j + 1$

end while

-Step 2-2 : sub algorithm of chaotic local search :

while $s \leq M_{gl2}$ **do**

for $i = 0$ to n **do**

if $r \leq 0.5$ **then**

$$x_i(s) = \bar{x}_i + \lambda_{gl2} z_i(s) \cdot |(U_i - L_i)|$$

else

$$x_i(s) = \bar{x}_i - \lambda_{gl2} z_i(s) \cdot |(U_i - L_i)|$$

end if

end for

if $f(X(s)) < \bar{f}$ **then**

$$\bar{X} = X(s); \bar{f} = f(x(s))$$

end if

$s = s + 1$

end while

$k = k + 1$

end while

3 **Step 3 : algorithm of chaotic local search :**

while $k \leq M_g \times (M_{gl1} + M_{gl2}) + M_l$ **do**

for $i = 0$ to n **do**

if $r \leq 0.5$ **then**

$$x_i(k) = \bar{x}_i + \lambda z_i(k) \cdot |(U_i - L_i)|$$

else

$$x_i(k) = \bar{x}_i - \lambda z_i(k) \cdot |(U_i - L_i)|$$

end if

end for

if $f(X(k)) < \bar{f}$ **then**

$$\bar{X} = X(k); \bar{f} = f(x(k))$$

end if

$k = k + 1$

end while

CHAPITRE 6. PROPOSITION D'UNE NOUVELLE APPROCHE POUR LES ALGORITHMES D'OPTI

	λ	$\lambda_{M_{gl1}}$	$\lambda_{M_{gl2}}$	M_g	M_l	M_{gl1}	M_{gl2}
IC1	0.001	0.04	0.01	6	50	2	2
IC2	0.01	0.04	0.01	10	50	2	2
IC3	0.1	0.04	0.01	10	50	2	2
IC4	0.1	0.04	0.01	100	50	5	5
C1	0.001			24	50		
C2	0.01			40	50		
C3	0.1			40	50		
C4	0.1			1000	50		

Tableau 6.1 – L'ensemble des valeurs des paramètres de l'algorithme pour chaque itération

ICOLM4 et COLM1 à COLM4, qui sont utilisés sont présentés dans le Tab.6.1.

Application de l'approche proposée sur des fonctions tests.

La validation de l'efficacité et l'étude du comportement de la nouvelle stratégie proposée sera réalisée par la résolution des problèmes représentés par des fonctions analytiques tests choisies de telle sorte que la recherche du point de minimum soit difficile. N'importe quel algorithme classique d'optimisation bloque sur la première barrière de la fonction qu'il trouve. Des chiffres tels que les valeurs des coordonnées du point de minimum trouvés, la valeur correspondante de la fonction objectif sont très importants pour nous donner la puissance réelle d'une méthode. Néanmoins, des problèmes sont rencontrés car les algorithmes ont des comportements très dépendants de la fonction objectif. Par conséquent, il n'y aura pas de critère unique.

1 Fonctions tests

Cinq problèmes sont résolus. Trois minimisations en dimension 2, la nouvelle fonction (fonction de Lozi), la fonction Easom, la fonction Rastrigin, et deux minimisations en dimension 3, la fonction de Rosenbrock en dimension 3, la fonction de Griewank en dimension 3.

1.1 Fonction test F_1

En premier lieu, on s'intéresse à minimiser une nouvelle fonction (Lozi function) bidimensionnelle :

$$f_1 = x_1^4 - 7x_1^2 - 3x_1 + x_2^4 - 9x_2^2 - 5x_2 + 11x_1^2x_2^2 + 99\sin(71x_1) + 137\sin(97x_1x_2) + 131\sin(51x_2). \quad (7.1)$$

- Le domaine de recherche : $-10 \leq x_i \leq 10, i = 1, 2$.

Elle est très complexe, et possède des centaines de minima locaux. La caractéristique essentielle de cette fonction, c'est que l'emplacement des minima n'est pas symétrique (Fig.11. 1)

algo	Best value	Mean value	Std.Dev	$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$
Lozi Function				
IC1	-382.3917	-355.8410	13.6581	$\begin{pmatrix} -2.7686 \\ -0.4055 \end{pmatrix}$
C1	-371.0150	-368.5212	11.1135	$\begin{pmatrix} 0.3105 \\ 0.2442 \end{pmatrix}$
IC2	-392.5400	-365.7837	14.0615	$\begin{pmatrix} -0.7327 \\ 1.3203 \end{pmatrix}$
C2	-367.3930	-358.0622	7.5935	$\begin{pmatrix} -2.6200 \\ 1.5648 \end{pmatrix}$
IC3	-393.3134	-379.6872	8.8797	$\begin{pmatrix} -1.9677 \\ -1.9982 \end{pmatrix}$
C3	-379.0027	-371.5180	5.1866	$\begin{pmatrix} -4.6404 \\ -3.0760 \end{pmatrix}$
IC4	-395.8441	-387.3368	9.0825	$\begin{pmatrix} -1.6161 \\ -2.2475 \end{pmatrix}$
C4	-382.7108	-379.7557	1.7817	$\begin{pmatrix} -5.8930 \\ 2.9309 \end{pmatrix}$

Tableau 7.1 – Comparison of algorithms COLM and ICOLM for f_1 .

1.2 Fonction test F_2

La fonction F_2 est la fonction Easom à deux variables [2, 5] :

$$F_2 = -\cos(x_1)\cos(x_2)e^{-(x_1-\pi)^2-(x_2-\pi)^2} \quad (7.2)$$

Ses caractéristiques sont les suivantes :

- domaine de recherche : $-100 \leq x_i \leq 100, i = 1, 2$.
- nombre de minima locaux : plusieurs minima locaux.
- un minimum global : $\bar{x} = (\pi, \pi), f(\bar{x}) = -1$.

1.3 Fonction test F_3

La deuxième fonction est la fonction de Rastrigin à deux variables définie par :

$$F_3 = 20 + x_1^2 - 10.\cos(2\pi x_1) + x_2^2 - 10.\cos(2\pi x_2). \quad (7.3)$$

Ses caractéristiques sont :

- domaine de recherche : $-5.12 \leq x_i \leq 5.12, i = 1, 2$.
- nombre de minima locaux : plusieurs minima locaux.
- un minimum global : $\bar{x} = (0, 0), f(\bar{x}) = 1$.

1.4 Fonction test F_4

On s'intéresse à minimiser la fonction de Rosenbrock tridimensionnelle. Nous avons formulé le problème de minimisation comme ci-dessous :

$$F_4 = 100. \sum_{i=1}^3 ((x_{i+1} - x_i^2)^2 + (1 - x_i)^2). \quad (7.4)$$

– le domaine de recherche : $-2.048 \leq x_i \leq 2.048, i = 1, 2, 3.$

algo	Best value	Mean value	Std.Dev	$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$
Rosenbrock's Function				
IC ₁	0.0001	0.0106	0.0114	$\begin{pmatrix} 0.9030 \\ 0.8143 \\ 0.6617 \end{pmatrix}$
C ₁	0.0034	0.0060	0.0043	$\begin{pmatrix} 1.0213 \\ 1.0486 \\ 1.1041 \end{pmatrix}$
IC ₂	0.0000	0.0012	0.0010	$\begin{pmatrix} 0.9700 \\ 0.9413 \\ 0.8840 \end{pmatrix}$
C ₂	0.0003	0.0065	0.0039	$\begin{pmatrix} 1.0066 \\ 1.0060 \\ 1.0135 \end{pmatrix}$
IC ₃	0.0000	0.0032	0.0047	$\begin{pmatrix} 0.9604 \\ 0.9198 \\ 0.8449 \end{pmatrix}$
C ₃	0.0231	0.2153	0.0670	$\begin{pmatrix} 1.0317 \\ 1.0351 \\ 1.1113 \end{pmatrix}$
IC ₄	0.0000	0.0000	0.0000	$\begin{pmatrix} 0.9968 \\ 0.9937 \\ 0.9880 \end{pmatrix}$
C ₄	0.0143	0.1799	0.0884	$\begin{pmatrix} 1.0317 \\ 1.0351 \\ 1.1113 \end{pmatrix}$

Tableau 7.2 – Comparison of algorithms COLM and ICOLM for F_4 .

1.5 Fonction test F_5

Dans ce test, la minimisation de la fonction test de Griewank en $n = 3$ dimensions :

$$F_5 = 1 + \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{4000} + \prod_{i=1}^3 \cos \frac{x_i}{\sqrt{i}} \quad (7.5)$$

- domaine de recherche : $-500 \leq x_i \leq 500, i = 1, 2, 3$.

Cette fonction est multimodale et elle présente plusieurs minima locaux et un seul minimum global, $F = 0$, qui se trouve en $x_i = 0.0, i = 1, 3$.

algo	Best value	Mean value	Std.Dev	$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$
Griewank's Function				
IC ₁	0.0000	0.0072	0.0010	$\begin{pmatrix} -0.0003 \\ 0.0003 \\ -0.0011 \end{pmatrix}$
C ₁	0.3775	0.3979	0.0080	$\begin{pmatrix} 0.6106 \\ 0.9361 \\ 0.3953 \end{pmatrix}$
IC ₂	0.0000	0.0067	0.0022	$\begin{pmatrix} -0.0060 \\ -0.0018 \\ -0.0091 \end{pmatrix}$
C ₂	0.0218	0.0916	0.0402	$\begin{pmatrix} -0.0064 \\ 0.2170 \\ 0.0013 \end{pmatrix}$
IC ₃	0.0074	0.0267	0.0238	$\begin{pmatrix} -0.1318 \\ -0.0213 \\ -0.0107 \end{pmatrix}$
C ₃	0.0008	0.0130	0.0070	$\begin{pmatrix} -0.1705 \\ -0.2763 \\ -0.3607 \end{pmatrix}$
IC ₄	0.0000	0.0000	0.0000	$\begin{pmatrix} -0.0040 \\ -0.0067 \\ -0.0060 \end{pmatrix}$
C ₄	0.0011	0.0117	0.0070	$\begin{pmatrix} -0.1306 \\ -0.2616 \\ -0.2961 \end{pmatrix}$

Tableau 7.3 – Comparison of algorithms COLM and ICOLM for F_5 .

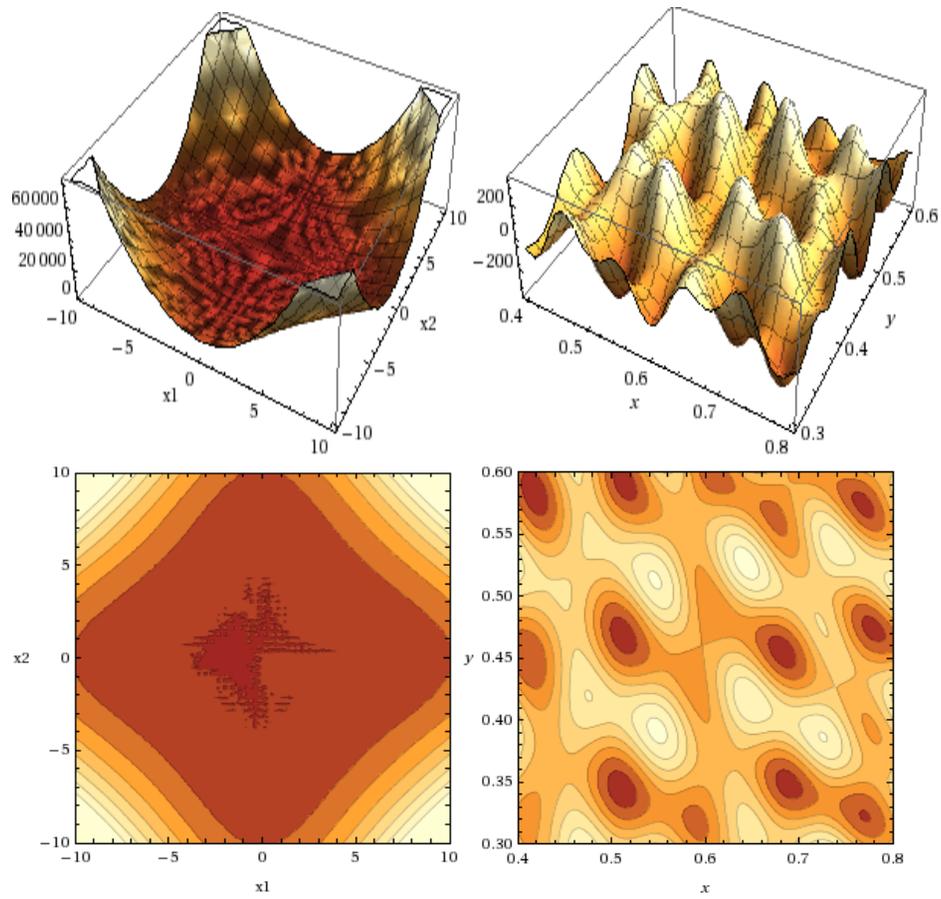


Figure 7.1 – Représentation de la fonction de test F_1 utilisé dans cette étude sur $10 \leq x_i \leq 10, i = 1; 2$.

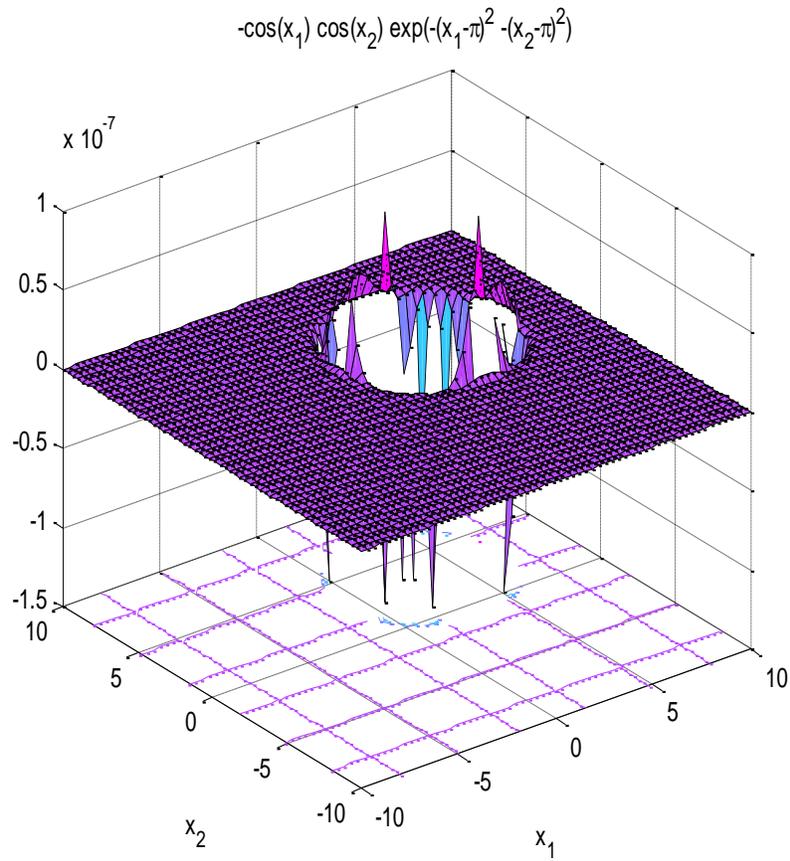


Figure 7.2 – Représentation de la fonction de test Easom F_2 utilisé dans cette étude sur $100 \leq x_i \leq 100, i = 1; 2$.

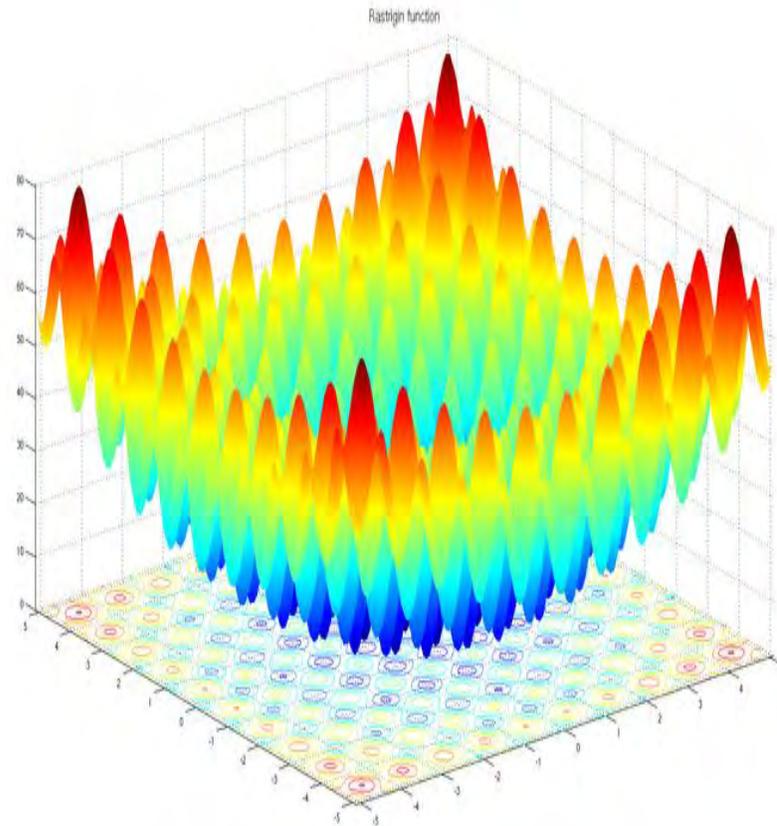


Figure 7.3 – Représentation de la fonction de test Rastrigin F_3 utilisé dans cette étude sur $5.12 \leq x_i \leq 5.12, i = 1; 2$.

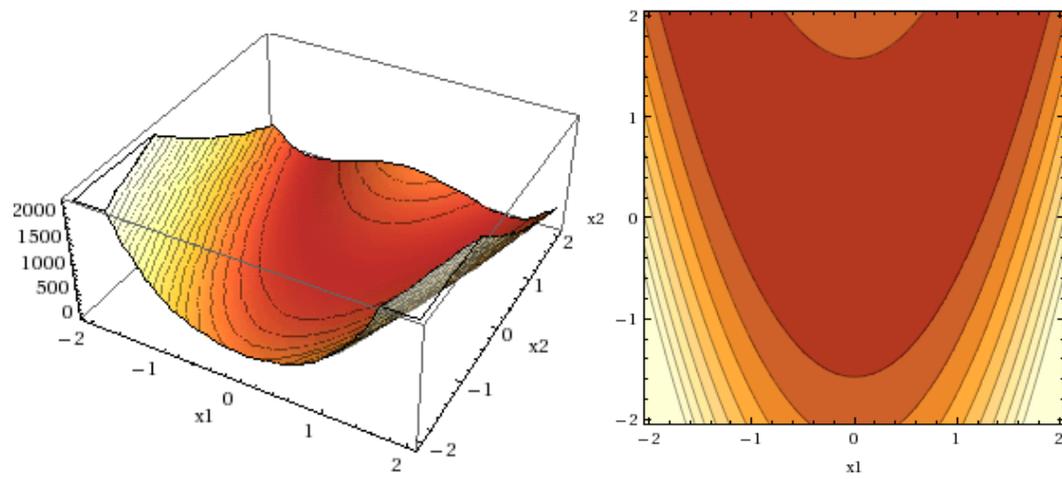


Figure 7.4 – Représentation de la fonction de test Rosenbrock F_4 utilisé dans cette étude.

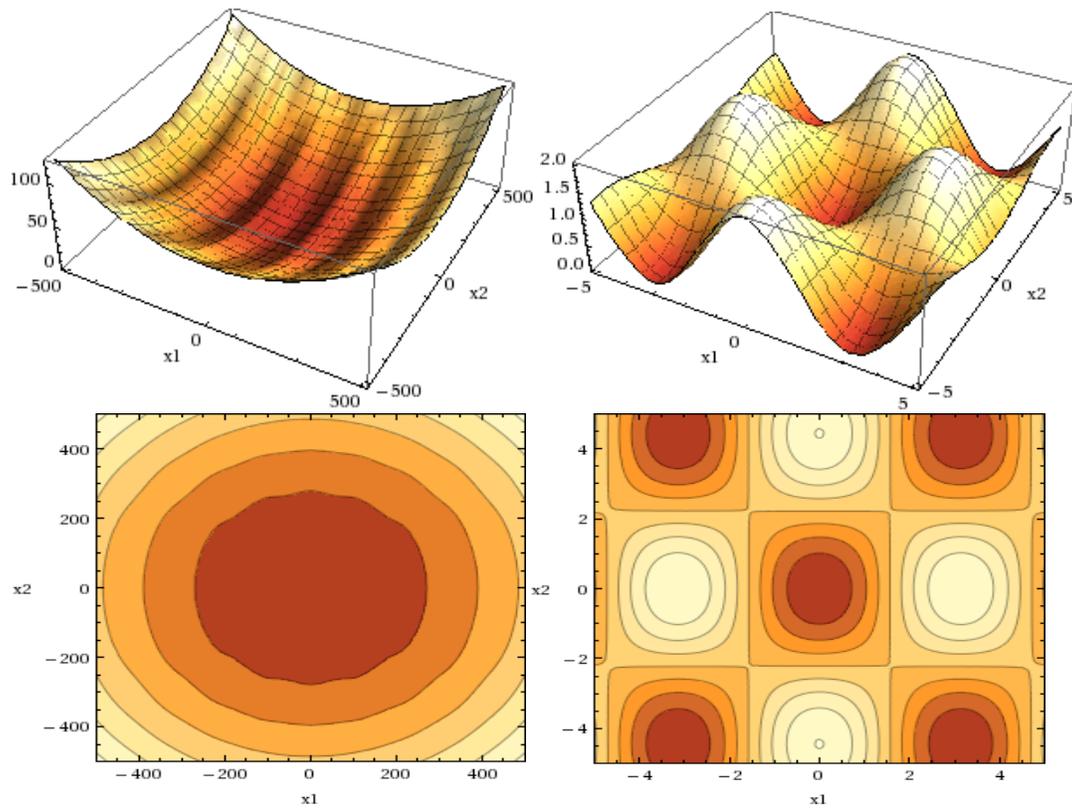


Figure 7.5 – Représentation de la fonction de test Griewank F_5 utilisé dans cette étude.

Conclusion générale

L'optimisation par chaos est un domaine de recherche assez récent constitué, comme nous venons de le présenter, une des applications des dynamiques chaotiques. Ce type de dynamique possède par nature deux aspects essentiels :

- l'évolution dans le temps est très sensible aux conditions initiales et pseudo-aléatoires.
- Mais ces dynamiques possèdent aussi un déterminisme local (loi d'évolution dynamique, équation différentielle d'évolution dans le temps) qui permet une reproduction, du même pseudo-aléatoire.

Le travail de thèse consisté dans un premier temps à maîtriser et à comprendre certaines des propriétés complexes de la dynamique chaotique. Cette compréhension a été accompagnée par une illustration concrète de toutes les notions précédentes par des exemples célèbres tels que le modèle de Lorenz et les modèles de Hénon et Lozi qui nous ont servi dans la thèse.

La vocation de cette dissertation, dans un deuxième temps est de présenter une tentative d'amélioration d'une nouvelle technique d'optimisation basée sur le chaos COA, en particulier un algorithme appelé COLM par L.S.Coelho.

Cet algorithme repose sur (la méthode à deux phases) une recherche globale suivie par une recherche locale. Dans cette méthode, on distingue la phase globale de la phase locale. Pendant la première, on évalue la fonction en plusieurs points chaotiques, alors que dans la seconde, on manipule chacun de ces points de manière locale, comme par exemple en recherchant un minimum local autour d'eux.

La bonne connaissance de la dynamique de nos modèles et la méthode COLM nous a permis de développer une technique d'optimisation chaotique. Dans cette approche nous avons amélioré cet algorithme en optimisant localement pendant quelques itérations le résultat global. Cette recherche globale localement moyennée est appelée ICOLM [Improved COLM].

L'utilisation des algorithmes chaotiques avec l'approche proposée représente une technique d'optimisation globale très efficace.

Les résultats des applications faites ont donné des résultats satisfaisants surtout en ce qui concerne le temps nécessaire pour atteindre un voisinage très étroit de l'optimum global et aussi la qualité de la solution obtenue.

Les tests effectués montrent une grande supériorité des approches proposées, par rapport à l'utilisation d'autres techniques. De plus, les résultats obtenus en appliquant ces algorithmes sur des cas réels sont excellents : une amélioration significative est apportée, comparativement aux meilleurs résultats trouvés par les autres méthodes.

Bibliographie

- [1] STEWART I. Dieu joue-t-il aux dés ? Les mathématiques du chaos. Paris : Nouvelle Bibliothèque Scientifique Flammarion, 1992, 441 p.
- [2] POINCARÉ, H. Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, volume 3 vols. Gauthier-villars Paris édition.
- [3] LORENZ E. Deterministic non periodic flow. J Atm Sci 1963, 20, (130-141) : 386-377
- [4] ARNOLD, V. (1974). Equation différentielles ordinaires. Mir, moscow édition
- [5] MARLE, C.-M. (2003). Systèmes dynamiques : une introduction. C-M. Marle, P.Pilibossian, ellipses édition.
- [6] HUBBARD, J. et WEST, B.(1999) Equations différentielles et systèmes mécaniques. Cassini édition.
- [7] DEMAILLY, J.-P.(1991). Analyse Numérique et équation différentielles. Presses universitaires de grenoble édition.
- [8] ROUCHE, N. et MAWHIN, J (1973a). Equations différentielles ordinaires Tome I : Théorie générale. Masson et cie édition.
- [9] RUELLE, D et TAKENS, F. On the nature of turbulence. Commun Math Phys 1971, 20, 167-192
- [10] BERGE, P. POMEAU, Y. et VIDAL, C. (1988). L'ordre dans le chaos : vers une approche déterministe de la turbulence. Hermann édition
- [11] DANG-VU, H. et DELCARTE, C. Bifurcations et Chaos. Paris : Ellipses, 2000.
- [12] GUCKENHEIMER, J. et HOLMES,P. (1983) Nonlinear Oscillators, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, volume 42 de Applied Mathematical Sciences. Springer verlag édition.
- [13] LETELLIER C. Introduction. Le chaos dans la nature. Paris : Vuibert, 2006, 1-5.
- [14] POINCARÉ H. Science et Méthode. Paris : 1908.
- [15] KELLER S. In the wake of chaos. Chicago and London : The University of Chicago Press, 1993.
- [16] KAPLAN, D. et GLASS, L. Finite-difference equations. Understanding nonlinear dynamics. New-York : Springer-Verlag, 1995, 1-53.
- [17] HILBORN, R. Chaos and Nonlinear Dynamics an Introduction for Scientists and Engineers, Oxford Student Edition, 1994.
- [18] FORTRAT, J.O. YAMAMOTO, Y. et HUGHSON, R.L. Respiratory influences on nonlinear dynamics of heart rate variability in humans. Biol Cybern 1997, 77, 1, 1-10.

- [19] HUGHSON, R.L. YAMAMOTO, Y. et FORTRAT, J.O. Is the pattern of breathing at rest chaotic? A test of the Lyapunov exponent. *Adv Exp Med Biol* 1995, 393, 15-19.
- [20] ALLIGOOD, K.T. SAUER, T.D. et YORKE, J.A. *Chaos : an Introduction to Dynamical Systems*, Springer-Verlag édition (1996).
- [21] MIRA, C. GARDINI, L. BUGOLA, A. et J.-C. CATHALA. « Chaotic dynamics in two-dimensional noninvertible maps. » *World Scientific*, 1996. 10
- [22] HONGRE, L. SAILHAC, P. ALEXANDRESCU, M. et DUBOIS, J. Nonlinear and multifractals approaches of the geomagnetic field. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 1999, 110, 157-190.
- [23] ROSENSTEIN, M. COLLINS, J. et DE LUCA, C. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents for small data sets. *Physica* 1993, D 65, 117-134.
- [24] WOLF, A. SWIFT, J. SWINNEY, H. and VASTANO, J. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica* 1985, 16 D, 285-317.
- [25] QI, G. DU, S. CHEN, G. CHEN, Z. and YUAN, Z. On a four-dimensional chaotic system, *Chaos, Solution and Fractals*, Vol. 23, pp. 1671-1682, 2005.
- [26] PARKER, T.S. CHUA, L.O. : *Practical numerical algorithms for chaotic systems*, Edition Springer-Verlag, (1989).
- [27] MANDELBROT, B.B. F ORME, *Hasard et Dimension*, Flammarion, Paris (1975).
- [28] KAHANE, J.P. et SALEM, R. : *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Hermann, Paris (1963)
- [29] FALCONER : *The geometry of fractal sets*, Cambridge Univ. Press (1985).
- [30] HAUSDORFF, F. : Dimension und außeres Mass, *Math. Annalen* 79(1919) 157
- [31] LI, T-Y. et YORK, J.A. : Period three implies chaos, *Amer. Math. Mon.*, Vol. 82, pp. 985-992, 1975
- [32] CHORIN, A.J. : Estimates of intermittency, Spectra and blow-up in developed turbulence, *Comm. on pure and appl. math.* 4 (1981), 853 The evolution of a turbulent vortex, *Comm. math. phys.* 83 (1982), 517.
- [33] GRASSBERGER, P. et PROCACCIA, I. Characterization of strange attractors. *Physical Review Letters* 1983, 50, 346-349.
- [34] GRASSBERGER, P. Generalised dimension of strange attractors, *Phys Rev Lett.* 97A, (1983), p227
- [35] GRASSBERGER, P. On the fractal dimension of the Henon attractor, *Phys Rev Lett.* 97A, (1983), p224
- [36] YAMAMOTO, Y. Detection of chaos and fractals from experimental time series. *Modern techniques in neuroscience research*. Berlin Heidelberg New-York Tokyo : Springer-Verlag, 1999, 669-687.

- [37] LORENZ E.N., *ATMOS J.Sci.*20, 130-141(1963).
- [38] HÉNON, M. (1976). A Two Dimensional Mapping with a Strange Attractor. *Comm. Math. Phys.* 50,pp.69-76.
- [39] LOZI R., (1978), Un Attracteur étrange (?) du Type Attracteur de Hénon . *Journal de Physique. Colloque C5 ; Supplément au n°8, Tome 39*,pp.9-10.
- [40] Zhigljavsky, A.A. *Theory of Global Random Search. Mathematics and its applications*, Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [41] Dixon, L. C. Szego, G. P. 1er Ed. *Towards Global Optimization 2*. North-Holland Amsterdam, pp. 472. 1978.
- [42] Dixon, L. C. Szego, G.P. *Global Optimization*, Springer Verlag Lecture Notes in Computer Science vol. 350, 1987.
- [43] Nemirovsky, A. Yudin, D. *Problem Complexity and Method Efficiency in Optimization*, John Wiley et Sons, 1983.
- [44] Papadimitriou, C. H. Steiglitz, K. *Combinatorial Optimization : Algorithms and Complexity*, Prentice Hall, 1982.
- [45] Pardalos, P. M. Rosen, J. B. *Constrained Global Optimization : Algorithms and Applications*, Springer-Verlag, 1987.
- [46] Le Riche, R. *Cours : Introduction à l'Optimisation Globale*. Disponible sur <http://www.emse.fr/~leriche> (2004).
- [47] Levy, A.V., Montalvo, A. The tunneling algorithm for the global minimization of functions. *SIAM J. of Sci. and Stat. Comp.*, 1(15), 15-29 (1985).
- [48] Kalos, M.H. et Whitlock, P.A. *Monte Carlo Methods, volume I : Basics*. John Wiley and Sons, 1986.
- [49] Torn, A. A. A Program for Global Optimization, Multistart with Clustering (MSC), *Proceedings of Euro IFIP 79, North-Holland*, pp. 427-434. 1979.
- [50] Becker, R. W. Lago, G. V. A Global Optimization Algorithm, *Proceedings of the 8th Allerton Conference on Circuits and Systems Theory*. 1970.
- [51] Rinnooy Kan, A. H. G. Timmer, G. T. *Stochastic Global Optimization Methods ; Part I : Clustering Methods*, *Mathematical Programming*, vol. 39, pp. 27-56, 1987.
- [52] R. Horst, P. M. Pardalos, *Handbook of Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers, pp. 829-869, 1995.
- [53] Torn, A.A., Zilinskas, A. *Global Optimization*. Springer-Verlag, Berlin (1989).
- [54] Back, T. *Evolutionary Algorithms in Theory and Practice*. Oxford Univ. Press (1996).
- [55] Holland, J. H. Outline for a logical theory of adaptive systems. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 3, pp.297-314, 1962.

- [56] Holland, J. H. Genetic Algorithms and the Optimal Allocation of Trials, SIAM Journal on Computing, vol. 2, p. 88-105. 1973.
- [57] Michalewicz, Z. Genetic algorithms + Data structures = evolution programs. Springer, 1999.
- [58] Back, T. Hammel, U. Schwefel, H.-P. Evolutionary Computation : Comments on the History and Current State. IEEE Transactions on Evolutionary Computations, 1(1), 3-17 (1997).
- [59] Schoenauer, M. Michalewicz, Z. Evolutionary Computation : An Introduction. Control and Cybernetics, Special Issue on Evolutionary Computation, 26 (3), pp. 307-338, 1997.
- [60] J. R. Koza, Genetic Programming. MIT Press. 1992.
- [61] Burgin, G. H. On playing two-person zero-sum games against non-minimax players. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 5(4), pp. 369-370. 1968.
- [62] Ibbitt, R. P. Donnell, T. Designing conceptual catchment models for automatic fitting methods. IAHS Publication n° 101, 462-475, 1971.
- [63] Johnston, P. R. Pilgrim, D. H. Parameter optimization for watershed models. Water Resources Research, 12(3), 477-486. 1976. .
- [64] X.X. Wu, Z. Chen, Introduction of Chaos Theory, Shanghai Science and Technology, Bibliographic Publishing House, 1996.
- [65] Strogatz SH. Nonlinear dynamics and chaos. Massachussets : Perseus Publishing ; 2000.
- [66] Alligood KT, Sauer TD, Yorke JA. Chaos : an introduction to dynamical systems. London, UK : Springer ; 1996.
- [67] Wu, X.X. Chen, Z. Introduction of Chaos Theory, Shanghai Science and Technology, Bibliographic Publishing House, 1996.
- [68] Bucolo, M. Caponetto, R. Fortuna, L. Frasca, M. Rizzo, A. Does chaos work better than noise ? IEEE Circuits and Systems Magazine 2 (3) (2002) 4-19.
- [69] Caponetto, R. Fortuna, L. Fazzino, S. Xibilia, M.G. Chaotic sequences to improve the performance of evolutionary algorithms, IEEE Transactions on Evolutionary Computation 7 (3) (2003) 289-304.
- [70] Chen, L. Aihara, K. Optimization by chaotic simulated annealing, in : Proceedings of the International Conference of Sino-Japanese Young Scientist, 1995, pp. 3-57.
- [71] Li, B. and Jiang, W. "Chaos optimization method and its application". Control Theory and Application, vol. 14, Aug. 1997, pp. 613-615.
- [72] B. Li, W. Jiang, Optimization of complex functions by chaos search, International Journal of Cybernetics and Systems 29 (4) (1998) 409-419.

- [73] Zhang, T. Wang, H. Wang, Z. Mutative scale chaos optimization algorithm and its application, *Control and Decision* 14 (3) (1999) 285-288.
- [74] C. Zhang, X. Li, H. Shaho, Chaos optimization algorithm based on linear search and its application to nonlinear constraint optimization problems, *Control and Decision* 16 (1) (2001) 120-125.
- [75] Xu, H.P. Zhu, H. Zhang, T. Wang, Z.C. Application of mutation scale chaos algorithm in power plant and units economics dispatch, *Journal of Harbin Institute of Technology* 32 (4) (2000) 55-58.
- [76] Hu, Y. Li, Y.C. Yu, J.X. Chao, H.D. Steeped-up chaos optimization algorithm and its application, *Journal of System Engineering* 17 (1) (2002) 41-44.
- [77] Y.D. Li, S.Y. Li, A new generic chaos optimization combination method, *Control Theory and Application* 19 (1) (2002) 143-145.
- [78] Liu, S.S. Hou, Z.J. Weighted gradient direction based chaos optimization algorithm for nonlinear programming problem, in : *Proceedings of the 4th World Congress on Intelligent Control and Automation*, 2002, pp. 1779-1783.
- [79] Li, W. Liang, X.M. A hybrid algorithm based on chaos optimization and steepest decent, *Algorithm, Computing Technology and Automation* 22 (2) (2003) 12-14.
- [80] Xu, L. Zhou, S.O. Zhang, H.M. A hybrid chaos optimization method and its application, *System Engineering and Electronics* 25 (2) (2003) 226-228.
- [81] Yang, J. Zhou, J. Wu, W. Liu, F. Zhu, C. Cao, G. A chaos algorithm based on progressive optimality and Tabu search algorithm, in : *Proceedings of the 4th Conference on Machine Learning and Cybernetics*, 2005, pp. 2977-2981.
- [82] Coelho, L.D.S. : Tuning of PID Controller for an Automatic Regulator Voltage System using Chaotic Optimization Approach. *Chaos, Solitons and Fractals*. 39(4), 1504-1514 (2009)
- [83] Shayeghi, H. Jalilzadeh, S. Shayanfar, H.A. Safari, A. : Robust PSS Design using Chaotic Optimization Algorithm for a Multimachine Power System. *ECTI-CON 2009*, Pattaya, Thailand. 40-43 (2009)
- [84] Shayeghi, H. Shayanfar, H.A. Jalilzade, S. Safari, A. A PSO based Unified Power Flow Controller for Damping of Power System Oscillations. *Energy Conversion and Management*. 50(10), 2583-2592 (2009)
- [85] Hamaizia, T., Lozi, R. :Improving Chaotic Optimization Algorithm using a new global locally averaged strategy. *Proceedings ENPACS*. (2011)
- [86] Hamaizia, T. Lozi, R. Improving Chaotic Optimization Algorithm using a new global locally averaged strategy. *Proceedings ENPACS*. (2011)
- [87] Wolpert, D.H. Macready, W.G. The No Free Lunch Theorems for Optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 1(1), 67-82 (1997).

Résumé : Le chaos, phénomène typique des systèmes non linéaires, est aujourd'hui très largement étudié, en raison de ses propriétés et des nombreuses applications potentielles. En effet, on peut observer du chaos dans de nombreux phénomènes physiques, chimiques, météorologiques, démographiques ou économiques et ses caractéristiques "font qu'on peut envisager de l'utiliser à des fins applicatives". Ces dernières années, les intérêts de plus en plus de l'ingénierie ont stimulé les études de contrôle du chaos, le chaos synchronisation, et l'optimisation du chaos.

Le Chaos est une sorte des caractéristiques des systèmes non linéaires, qui est un comportement dynamique instable borné que "les expositions" sensibles dépendance aux conditions initiales et comprend une infinité de mouvements périodiques instables. Bien qu'il semble être aléatoire, il se produit dans un système déterministe non-linéaire dans des conditions déterministes.

La combinaison de méthodes d'optimisation et les fondements des systèmes chaotiques est une question importante dans les sciences nonlinéaires, a attiré les intérêts de divers domaines ces dernières années et a reçu beaucoup d'attention dans la littérature. L'optimisation Chaotique est un nouveau algorithme d'optimisation stochastique, qui utilise directement les variables chaotiques pour rechercher la solution optimale. La sensibilité aux conditions initiales et la propriété stochastiques du chaos font l'optimisation chaotique pour mieux obtenir la solution optimale globale que d'autres méthodes ayant été adoptée avant. Il peut facilement s'échapper de minima locaux que les autres algorithmes stochastiques. Pour cette these, nous cherchons des contributions originales sur tous les aspects liés aux méthodes d'optimisation avec l'utilisation de concepts de séries temporelles chaotiques, les attracteurs, les exposants de Lyapunov. Ces algorithmes permettent de trouver avec certitude un proche voisinage l'optimum global.

Mots clés : chaos, optimisation

Abstract : Chaos, typical phenomenon of nonlinear systems, is now widely studied, because of its properties and many potential applications. Indeed, there may be chaos in many phenomena physical , chemical, meteorological, demographic or economic and its characteristics are that we can consider using it for application. In recent years, growing interests from engineering have stimulated the studies of chaos control , chaos synchronization , and chaos optimization Chaos is a kind of characteristics of nonlinear systems, which is a bounded unstable dynamic behavior that exhibits sensitive dependence on initial conditions and includes infinite unstable periodic motions. Although it appears to be stochastic, it occurs in a deterministic nonlinear system under deterministic conditions. The combination of optimization methods and fundamentals of chaotic systems are important issues in nonlinear science , has attracted interests from various fields in recent years and has received much attention in the literature. Chaotic optimization is a new stochastic optimization algorithm, which directly utilizes chaotic variables to search the optimal solution. The sensitive dependence on initial conditions and intrinsic stochastic property of chaos make chaotic optimization to obtain the global optimal solution more possible than the method having been adopted before. It can more easily escape from local minima than other stochastic algorithms. For this thesis, we seek original contributions on any aspect related to optimization methods with utilization of concepts of chaotic time series, attractors, Lyapunov exponents. These algorithms permitted to find with certitude a near neighborhood of the global optimum.

Keywords : Chaos, Optimization
