

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**MINISTÈRE DE L' ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA**

**RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITÉ MENTOURI CONSTANTINE**

**Faculté des Sciences**

**Département des Mathématiques**

N° d'ordre : .....

Série : .....

**Thèse**

Présentée pour obtention le diplôme du Doctorat en Sciences Mathématiques

**Thème :**

# Contribution à l'étude et à la classification du chaos dans les systèmes dynamiques

**Option : Mathématiques appliquées**

**Présenté et soutenue par**

**Mr. Okba Zehrour**

**Membres du jury :**

Président	Denche Mohammed	Prof	Université de Constantine
Rapporteur	Dr.Elhadj Zeraoulia	M.C.A	Univercité de Tebessa
Examineur	Nasr Eddine Hamri	Prof	Centre universitaire de Mila
Examineur	Kamel Haouam	M.C.A	Univercité de Tebessa

**Année universitaire 2012/2013**

# Remerciements

Je tiens à présenter mes remerciement à tous ceux qui ont contribné à ma réussite et plus particulièrement :

- Au professeur M<sup>er</sup> Elhadj Zeraoulia pour son aide et ces conseils pour ce travail.
- Aux membres du jury M<sup>er</sup> Denche Mohammed, M<sup>er</sup> Nasr Eddine Hamri, M<sup>er</sup> Kamel Haouam m'ont fait l'honneur de participer à ce jury
- A tous mes amis qui m'ont ménagé aucun effort en particulier Bragdi Mabrouk et Mezdour Ridha.
- Je remerci veriment M<sup>er</sup> Chibat Mohammed, M<sup>er</sup> Bouzit Mohammed et M<sup>me</sup> Missaci Fatiha pour ces corrictions.

Enfinement je remercie mon épouse Oum Mohmed, qui m'a supporté par son affection et sa patience et à qui j'adresse mes remerciements.

# Table des matières

# Introduction générale

Les systèmes chaotiques Bornés et l'estimation de leurs bornes sont importants dans le contrôle du chaos, la synchronisation du chaos et leurs applications.

L'estimation de la borne supérieure d'un système chaotique est assez difficile à réaliser techniquement. La finitude des systèmes dynamiques à temps continu, en particulier des systèmes quadratiques 3-D, a été l'objet de nombreux travaux. En fait, la finitude du système de Lorenz et le caractère borné de système de Chen ont l'objet de plusieurs études. Récemment, une meilleure borne supérieure pour le Système de Lorenz pour toutes les valeurs positives de des paramètres a été établies et c'est donné de bons résultats dans la littérature actuelle, du fait que l'estimation surmonte quelques problèmes liés à l'existence de singularités découlant de la valeur de la borne supérieure.

Le but de la thèse est la généralisation de tous les résultats existants dans la littérature actuelle pour la borne supérieure d'un système 3-D quadratique général en temps continu. En particulier, les grandes régions dans l'espace des paramètres de bifurcation de ce système où il est borné ont été déterminés en utilisant une analyse rigoureuse fonction multi variable. Dans ce travail, nous présentons les conditions suffisantes pour un système dynamique 3-D général pour être inclus dans un ensemble ellipsoïdal. Dans le cas ou ce système affiche un attracteur chaotique, nous l'appelons Chaos ellipsoïdale car il est inclus dans un ellipsoïde.

Nous prouvons également que l'ensemble du ellipsoïdale chaos n'est pas vide car le système de Lorenz et les systèmes quadratiques étudiés appartiennent à cette classe.

# Chapitre 1

## La notion du chaos et ses applications

**Définition 1.1** *En mathématiques, en physique, et en ingénierie un système dynamique est un système "classique" qui évolue au cours du temps de façon à la fois :*

- *causale (c.à.d que son avenir ne dépend que des phénomènes du passé ou du présent).*
- *déterministe (c.à.d qu'à une "condition initiale" donnée à l'instant présent va correspondre à chaque instant ultérieur "un et un seul état futur" possible).*

*On définit un système dynamique par un triplet  $(X, T, f)$  constitué de l'espace d'état  $X$ , du domaine temporel  $T$  et d'une application de transition d'état  $f : X \times T \rightarrow X$  qui permet de définir à partir d'un vecteur de conditions initiales l'état du système à tout instant.*

### 1.0.1 Représentations mathématiques des systèmes dynamiques

La théorie des systèmes dynamiques est une branche classique des mathématiques introduite par Newton vers 1665. Elle fournit des modèles mathématiques, pour des systèmes évoluant dans le temps et suivant des règles, généralement exprimés sous forme analytique comme un système d'équations différentielles ordinaires. Ces modèles sont

appelés systèmes dynamiques continus ou flots car les points du système évoluent en "flottant" sur des courbes continues.

Un système dynamique décrit par une fonction mathématique présente deux types de variables : variable dynamiques et variable statistiques. Les variables dynamiques sont les quantités fondamentales qui changent avec le temps, et les variables statistiques, encore appelés paramètres du système, sont fixes.

- Dans le cas où la composante "temps" est continue le système dynamique est présenté par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, p) \text{ où } x \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^r \quad (1.1)$$

- Dans le cas où le temps est discret, le système dynamique est présenté par une application itérative de la forme :

$$x_{k+1} = f(x_k, p), x \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^r, k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.2)$$

où  $p$  est un paramètre et  $t \in T$ .

Lorsque le temps  $t$  ou l'indice  $k$  apparaissent explicitement dans les relations (1.1) et (1.2), le système est dit non-autonome. En général, c'est un inconvénient majeur pour la résolution numérique et il est donc préférable de s'en affranchir.

Par un changement de variables, on peut transformer un système non-autonome avec  $X \in \mathbb{R}^n$  en un système autonome avec  $X \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

## 1.0.2 L'espace des phases

Dès que la dimension  $n$  du système dépasse l'unité, il devient assez difficile de se représenter "mentalement" la façon dont le système évolue. L'outil de base pour y palier est l'espace de phases.

L'espace des phases est fondamental, on le retrouve au coeur de la formulation de la mécanique quantique et de mécanique statistique.

Cet espace a été introduit, initialement dans les problèmes de mécanique céleste, pour décrire de manière unifiée les équations de la mécanique des points matériels dans un potentiel et dans les trajectoires des rayons lumineux dans des milieux non homogènes d'indices variables.

Shrodinger en fera l'usage pour construire la mécanique ondulatoire. De même, Poincaré utilisera cet espace pour introduire des raisonnements géométriques en mécanique céleste et pour étudier le problème des trois corps. Ses travaux seront à la base de la théorie du chaos.

Ainsi, pour décrire l'évolution d'un système dynamique il est souvent commode d'en faire une représentation géométrique. A chaque état du système dynamique est associé un vecteur  $\vec{x}$ . Suivre la dynamique du système correspond à observer l'évolution du vecteur  $\vec{x}$  dans un espace vectoriel  $E$  appelé espace des phases. Cette évolution est décrite par  $n$  équations différentielles munies de conditions initiales. L'évolution suivant  $t$  du système se traduit alors par un déplacement du point représentatif dans l'espace de phase, traçant ainsi une trajectoire de phase.

### 1.0.3 Les systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs

En physique, un système conservatif est un système qui conserve l'énergie totale et possède une intégrale première (ou constante) du mouvement, par contre un système dissipatif est un système qui dissipe de l'énergie et possède au moins un terme dépendant de la vitesse .

Les systèmes considérés sont des systèmes déterministes et pour préciser cette définition, on dit qu'un système déterministe est conservatif si et seulement si la dynamique du système associée à chaque condition initiale  $x_0$  a un et un seul état final  $x(t)$ , pour cela, il existe une application bijective de l'espace des phases telle que :

$$\begin{aligned}\phi & : I \times \mathbb{R} \rightarrow I \\ (x, t) & \rightarrow \phi_t(x) = \phi(x, t)\end{aligned}$$

qu'on appelle flot et possédant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\phi_t(x_0) & = x_0 \\ \phi_{t+s}(x_0) & = \phi_t(\phi_s(x_0)) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Si le système est dissipatif, le flot n'est pas bijectif et il existe en général un (ou plusieurs) attracteurs dans l'espace des phases du système.

## 1.1 Les systèmes dynamiques continus

### 1.1.1 Points fixes

Un point fixe (appelé aussi point critique, singulier ou point stationnaire) de l'équation  $x' = F(x)$  est un point  $\bar{x}$  de l'espace des phases vérifiant  $F(\bar{x}) = 0$ .

Par le changement de variable  $z = x - \bar{x}$  on peut ramener le point à l'origine 0.

### 1.1.2 Points limites

Un point  $\alpha \in I$  est un point  $\omega$ -limite d'une trajectoire  $x(x_0, t)$ , s'il existe une suite  $t_n \rightarrow +\infty$  telle que :

$$\lim \varphi_{t_n} = \alpha$$



où  $\varphi_t$  est le flot du système  $\frac{dx}{dt} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^k(I)$ ,  $I \subset \mathbb{R}^n$  et  $x(x_0, t)$  est une solution de ce système vérifiant  $x(0) = x_0$ .

Un point  $b \in I$  est un point  $\alpha$ -limite d'une trajectoire  $x(x_0, t)$  s'il existe une suite  $t_n \rightarrow +\infty$  telle que :

$$\lim \varphi_{t_n} = b$$

L'ensemble des points  $\alpha$ -limite (resp.  $\omega$ -limite) est désigné par  $\alpha(x)$  (resp.  $\omega(x)$ ) et on définit l'ensemble limite de  $x(x_0; t)$  par l'ensemble :

$$\alpha(x) \cup \omega(x)$$

### 1.1.3 Attracteurs et bassin d'attraction

#### Ensemble invariant

**Définition :** Un ensemble  $M \subset I$  est dit invariant par un champ de vecteur si toute solution  $x(t)$  du système différentiel associée au champ de vecteurs issu de  $M$  vérifie  $x(t) \subset M$  pour tout  $t$  pour lequel cette solution est définie.

#### Attracteurs

**Définition :** Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases, c'est à dire une situation (ou un ensemble d'états) vers lesquels évolue un système, quelles que soient ses conditions initiales.

Mathématiquement, l'ensemble  $A$  est un attracteur si :

- Pour tout voisinage  $U$  de  $A$ , il existe un voisinage  $V$  de  $A$  tel que toute solution  $x(x_0, t) = \varphi_t(x_0)$  reste dans  $U$  si  $x_0 \in V$
- $\cap \varphi_t = A, \forall t \geq 0$ .
- Il existe une orbite dense dans  $A$ .

**Propriétés :** Un attracteur possède les propriétés suivantes :

1) Un sous ensemble borné  $A$  de l'espace est de volume nul invariant par le flot. Autrement dit, tout point de l'espace d'états qui appartient à un attracteur demeure à l'intérieur de cet attracteur pour tout  $t$ .

2) Il existe un ensemble  $B$  ( $A \subset B$ ), tel que pour un voisinage de  $A$ , la trajectoire qui prend son origine dans  $B$  se trouve au bout d'un temps fini dans ce voisinage. Cette "zone d'influence" est le bassin d'attraction, c'est l'ensemble :

$$W = \cup_{t < 0} \varphi_t(V)$$

3) Un attracteur est indécomposable, c'est-à-dire que la réunion de deux attracteurs n'est pas un attracteur.

## Les différents types d'attracteurs

Il existe deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

### 1) Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution des systèmes non chaotiques, qui peuvent être de trois sortes :

- **Le point fixe** : C'est le plus simple attracteur, car le système évolue vers un état de repos (point).

- **Le cycle limite périodique** : Il peut arriver que la trajectoire de phase se referme sur elle-même. L'évolution temporelle est alors cyclique, le système présentant des oscillations permanentes. Dans un système physique dissipatif, cela exige la présence d'un terme de forçage dans les équations qui vient compenser en moyenne les pertes par dissipation.

- **Le cycle limite pseudo-périodique** : C'est presque un cas particulier du précédent. La trajectoire de phase ne se referme pas sur elle-même, mais s'enroule sur une variété de dimension deux (par exemple un tore).

### 2) Attracteurs étranges

il s'agit d'ensembles dans l'espace des phases compacts et fermés dans lesquels on re-

trouve des trajectoires chaotiques, dont l'une des caractéristiques essentielles est la **SCI**. (les trajectoires issues des conditions initiales proches s'écartent exponentiellement). La coexistence de l'attraction, qui implique le resserrement des trajectoires, avec la **SCI**, qui implique leur écartement, s'explique par le concept d'hyperbolicité de l'attracteur : l'attraction s'opère dans une direction, et la divergence dans une autre. La surface contenant les trajectoires divergentes est appelée variété instable, alors que celle contenant les trajectoires convergentes est appelée variété stable. Leur dimension est non entière et leur structure est fractale. Par exemple, l'attracteur de Rossler, l'attracteur de Lorenz, l'attracteur de Chen, et l'attracteur de Chua.

### 1.1.4 Etude qualitative des systèmes dynamiques

L'étude qualitative d'une équation différentielle permet de s'affranchir de la détermination explicite de la solution et consiste à analyser le comportement des solutions particulièrement au voisinage de points d'équilibre.

#### Linéarisation des systèmes dynamiques

Considérons le système dynamique non linéaire défini par :

$$x' = F(x), x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

et soit  $x_0$  un point fixe (d'équilibre) de ce système.

Supposons qu'une petite perturbation  $\epsilon(t)$  soit appliquée au voisinage du point fixe. La fonction  $F$  peut être développée en série de Taylor au voisinage de  $x_0$  comme suit :

$$\epsilon'(t) + x'_0 = F(x'_0 + \epsilon'(t)) \simeq F(x_0) + J_F(x_0)\epsilon(t) \quad (1.4)$$

ou  $J_F(x_0)$  est la matrice Jacobienne de la fonction  $F$  définie par :

$$J_F(x_0) = \left( \begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right)_{x=x_0} \quad (1.5)$$

Comme  $F(x_0) = x_0$ , alors l'équation (1.4) s'écrit :

$$\epsilon'(t) = J_F(x_0)\epsilon(t) \quad (1.6)$$

L'écriture (1.6) signifie que le système (1.3) est linéarisé.

### **Théorème de Hatmann-Grobman**

Considérons le système dynamique (1.3) et soient  $x_0$  un point d'équilibre du système (1.3) et  $J_F(x_0)$  la matrice Jacobienne au point  $x_0$ , alors on a le théorème suivant :

Si  $J_F(x_0)$  admet des valeurs propres non nulles ou imaginaires pures, alors il existe un homéomorphisme qui transforme les orbites du flot non linéaire vers celles du flot linéaire dans certain voisinage  $U$  de  $x_0$ .

Ce théorème va nous permettre de lier la dynamique du système non linéaire (1.3) à la dynamique du système linéarisé (1.6).

### **Classification des points fixes**

Il s'agit de distinguer ces points fixes par la nature des valeurs propres de la matrice jacobienne (1.5) du système linéarisé (1.6) associée au système différentiel initial (1.3) en ce point. Pour cette raison on va supposer que les valeurs propres de la matrice (1.5) sont définies par :

$$\lambda_i = \omega_i + j\sigma_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

- Lorsque  $\omega_i = 0$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$  le point fixe est dit hyperbolique. La solution  $\epsilon(t)$  du système linéarisé s'écrit à partir d'une base des fonctions indépendantes comme suit :

$$\epsilon(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} V^i$$

où  $V^i$  représente le vecteur propre associé à  $\lambda_i$  et  $C_i \in \mathbb{R}$ , dépendent des conditions initiales. Les valeurs propres  $\lambda_i$  définissent donc l'état de stabilité. dans ce qui suit, nous citons les natures de ces points fixes en étudiant la nature des  $\lambda_i$ .

1- Si  $\omega_i < 0$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ , le point fixe est asymptotiquement stable :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ . On dit que le point est un "puits" (foyer) si  $\sigma_i \neq 0$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ , un "noeud" si  $\sigma_i = 0$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .

2- Si  $\omega_i > 0$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ , le point fixe est instable. On dit que le point est une "source" si  $\sigma_i \neq 0$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ , et un "noeud" si  $\sigma_i = 0$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .

3- Si  $\omega_j > 0$  pour  $j = 1, 2, \dots, p$ , avec  $p < n$  et  $\omega_j < 0$  pour  $i \neq j$ , la solution est instable et le point est un "col".

- S'il n'y a pas de valeur propre nulle, on a un point "selle".

## 1.1.5 Etude de la stabilité

### Stabilité au sens de Lyapunov

Soit le système dynamique suivant :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \tag{1.7}$$

où  $f$  est une fonction non linéaire.

Le point d'équilibre  $x_0$  du système (1.7) est :

- Stable si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x(t_0)) - x_0\| < \epsilon, \forall t \geq t_0 \tag{1.8}$$

- Asymptotiquement stable si :

$$\forall \delta > 0 : \|x(t_0) - x\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t, x(t_0)) - x_0\| = 0$$

- Exponentiellement stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x(t_0)) - x_0\| < \alpha \|x(t_0) - x\| \exp(-bt), \forall t \geq t_0$$

- Instable si l'équation (1.8) n'est pas satisfaite.

### **Première méthode de Lyapunov (méthode indirecte)**

La première méthode de Lyapunov est basée sur l'examen de la linéarisation autour du point d'équilibre  $x_0$  du système (1.7). Plus précisément, on examine les valeurs propres de la matrice jacobienne évaluée au point d'équilibre. Selon cette méthode, les propriétés de stabilité de  $x_0$  s'expriment comme suit :

- Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne ont une partie réelle strictement négative,  $x_0$  est dit exponentiellement stable.

- Si la matrice jacobienne possède au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive,  $x_0$  est dit instable.

### **Seconde méthode de Lyapunov (méthode directe)**

La seconde méthode est plus difficile à mettre en oeuvre mais, en contrepartie, elle est d'une portée beaucoup plus générale. Elle est basée sur la définition d'une fonction particulière, notée  $V(x)$  et appelée fonction de Lyapunov, qui est décroissante le long des trajectoires du système à l'intérieur du bassin d'attraction.

Le point d'équilibre  $x_0$  du système (1.7) est stable s'il existe une fonction  $V(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$  continuellement différentiable ayant les propriétés suivantes :

- 1)  $D$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $x_0 \in D$ .
- 2)  $V(x) > V(x_0), \forall x \neq x_0$  dans  $D$ .
- 3)  $V(x) \leq 0, \forall x \neq x_0$  dans  $D$ .

Il n'y a aucune méthode pour trouver une fonction de Lyapunov, mais en mécanique

et pour les systèmes électriques on peut souvent utiliser l'énergie totale comme fonction de Lyapunov.

### **Théorème de la variété centrale**

Soit le système dynamique non linéaire

$$\frac{dx}{dt} = f(x, c) \quad (1.9)$$

où  $x_0$  est son point d'équilibre qu'on peut ramener à l'origine par le changement de variable :

$$\xi = x - x_0$$

et soit  $J$  la matrice jacobienne d'ordre  $n$  associée au système (1.9) après sa linéarisation au voisinage du point fixe (après avoir considéré une petite perturbation au voisinage de point fixe).

$$\frac{d\xi}{dt} = J\xi$$

et soient :

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  les valeurs propres de la matrice jacobienne  $J$  dont la partie réelle est négative.

$u_1, u_2, \dots, u_i$  les valeurs propres de la matrice  $J$  dont la partie réelle est positive.

$s_1, s_2, \dots, s_c$  les valeurs propres dont la partie réelle est nulle, avec  $s + i + c = n$ .

Et soient :

$E^s$  le sous espace vectoriel de dimension  $s$  engendré par  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$ .

$E^i$  le sous espace vectoriel de dimension  $i$  engendré par  $\{u_1, u_2, \dots, u_i\}$ .

$E^c$  le sous espace vectoriel de dimension  $c$  engendré par  $\{s_1, s_2, \dots, s_c\}$ .

avec

$$E^s \oplus E^i \oplus E^c = E^n$$

On a le théorème suivant :

**Théorème 1.1** *Ils existent des variétés de classe  $C^r$  : stables  $W^s$ , instables  $W^i$ , et centrales  $W^c$  tangentes respectivement à  $E^s$ ,  $E^i$  et  $E^c$  en  $x_0$ . Ces variétés sont invariantes, par rapport au flot de système (1.9).*

### Variété centrale dépendant d'un paramètre

En appliquant une petite perturbation sur le système (1.9), on obtient un système dynamique dépendant d'un paramètre. Supposons que par une certaine transformation on peut ramener le système (1.9) à un système de la forme :

$$\begin{cases} x' = A_1x + f(x, y, z, \varepsilon) \\ y' = A_2y + g(x, y, z, \varepsilon) \\ z' = A_3 + m(x, y, z, \varepsilon) \\ \varepsilon' = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

la variété centrale au voisinage de  $(0, 0, 0, 0)$  est alors donnée par :

$$y = h_1(x, \varepsilon), z = h_2(x, \varepsilon)$$

Après un simple calcul, et après avoir appliqué le développement de Taylor sur  $h_1$  et  $h_2$ , on peut alors écrire le système (1.10) sous la forme :

$$\begin{cases} x' = A_1x + f(x, h_1(x, \varepsilon), h_2(x, \varepsilon), \varepsilon) \\ \varepsilon = 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

Le théorème suivant permet de lier la dynamique du système (1.11) à celle du système (1.10).

**Théorème :**



Si l'origine  $x_0 = 0$ , du système (1.11) est asymptotiquement stable (resp, instable), alors l'origine du système (1.10) est aussi asymptotiquement stable (resp, instable).

### 1.1.6 Bifurcations

Les changements qualitatifs du portrait des phases d'un système dynamique dépendant des paramètres sont appelés bifurcations. Pour les systèmes continus dérivant d'un potentiel, le mathématicien René Thom emploie, au lieu de bifurcation, le terme catastrophe, terme qui a une importance. Pour les valeurs des paramètres auxquelles de tels changements qualitatifs apparaissent, valeurs dites de bifurcation, et la construction du portrait de phases nécessite des outils adaptés. L'étude des bifurcations dites locales, c'est à dire relatives à un point d'équilibre d'un système continu ou à un point fixe d'un système discret repose sur la théorie de Landau et, en s'appuyant sur le diagramme de bifurcation, sur la méthode de la sous-variété centrale qui permet d'isoler la partie non hyperbolique, dite centrale, du système, et sur la méthode des formes normales de Poincaré où ne subsistent que les vraies non linéarités, c'est à dire celles que l'on ne peut pas faire disparaître par changement régulier de coordonnées.

Soit le système non linéaire :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu) \quad (1.12)$$

où  $x \in I \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^k$ ,  $f \in C^r$ .

Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution  $x_0$  du système (1.12) lorsqu'on modifie  $\mu$ , une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions. La codimension d'une bifurcation est la plus petite dimension de l'espace des paramètres telle que la bifurcation soit persistante.

Les bifurcations de codimension sont de quatre types qui correspondent toutes à des comportements génériques.

#### Bifurcation noeud-col

Une fonction linéaire ne change pas le nombre de racines. Le polynôme le plus simple qui change de nombre de racines en fonction du paramètre est le polynôme quadratique  $f(x) = \mu - x^2$ .

Considérons le système (1.12), et prenons pour  $f$  la fonction :

$$f(x) = \mu - x^2 \tag{1.13}$$

nous appelons la fonction (1.13) la forme normale de la bifurcation noeud-col. Etudions le comportement de l'équation (1.13), les points fixes de cette dernière sont :

$$\tilde{x}_{\pm} = \pm\mu$$

qui existent seulement pour  $\mu > 0$ , leur stabilité est déterminée par :

$$f'(\tilde{x}_{\pm}) = -2\tilde{x}_{\pm} = -2(\pm\mu) = \pm\mu$$

selon les signes de  $f'(\tilde{x})$ , on voit que  $\bar{x}_+ = \sqrt{\mu}$  est stable, tandis que  $\bar{x}_- = -\sqrt{\mu}$  est instable.

### **Bifurcation fourche**

Si on peut réduire  $f(x, \mu)$  à un polynôme cubique a ces quatre cas :

$$\begin{aligned} f(x, \mu) &= \mu x - x^3 \\ f(x, \mu) &= \mu x + x^3 \\ f(x, \mu) &= -\mu x + x^3 \\ f(x, \mu) &= -\mu x - x^3 \end{aligned} \tag{1.14}$$

L'équation (1.14) s'appelle la forme normale d'une bifurcation fourche supercritique.

Ses points fixes sont :

$$\bar{x}(\mu - \bar{x}^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = 0 \text{ pour tout } \mu \\ \bar{x} = \pm\mu \text{ pour } \mu > 0 \end{cases}$$

Stabilité de ces points fixes :

$$f'(\bar{x}) = \mu - 3\bar{x}^2 = \begin{cases} \mu & \text{pour } \bar{x} = 0 \\ \mu - 3\mu = -2\mu & \text{pour } \bar{x} = \pm\mu \end{cases} \quad (1.15)$$

Le point fixe  $\bar{x} = 0$  est donc stable pour  $\mu < 0$  et devient instable à  $\mu = 0$ , quand les branches des nouveaux points fixes  $\bar{x} = \pm\mu$  sont créées. Ces nouveaux points fixes sont toujours stables quand ils existent.

Le point fixe  $\bar{x} = 0$  est donc stable pour  $\mu < 0$  et devient instable à  $\mu = 0$ , quand les branches de nouveaux points fixes  $\bar{x} = \pm\mu$  sont créées. Ces nouveaux points fixes sont toujours stables quand ils existent.

Pour (1.15) qui est la forme normale d'une bifurcation fourche souscritique, le même calcul conduit à :

$$\bar{x}(\mu - 3\bar{x}^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = 0 & \text{pour tout } \mu \\ \bar{x} = \pm\sqrt{-\mu} & \text{pour } \mu < 0 \end{cases}$$

$$f'(\bar{x}) = \mu + 3\bar{x}^2 = \begin{cases} \mu & \text{pour } \bar{x} = 0 \\ \mu + 3(-\mu) = -2\mu & \text{pour } \bar{x} = \pm\sqrt{-\mu} \end{cases}$$

Comme pour le cas supercritique, le point fixe  $\bar{x} = 0$  est stable pour  $\mu < 0$  et devient instable à  $\mu = 0$ . contrairement au cas supercritique, les autres points fixes  $\pm\mu$  existent dans la région où  $\bar{x} = 0$  est stable, et sont toujours instables.

### **Bifurcation transcritique**

Si  $f$  est contrainte à ne pas avoir de terme constant, le développement limité mène à la forme normale d'une bifurcation transcritique.

$$x' = \mu x - x^2$$

L'analyse usuelle donne :

$$\bar{x}(\mu - \bar{x}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = 0 \\ \bar{x} = \mu \end{cases}$$

$$f'(\bar{x}) = \mu - 2\bar{x} = \begin{cases} \mu \text{ pour } \bar{x} = 0 \\ -\mu \text{ pour } \bar{x} = \mu \end{cases}$$

Donc  $\bar{x} = 0$  est stable pour  $\mu < 0$ , instable pour  $\mu > 0$  et tandis que  $\bar{x} = \mu$  fait le contraire ces points fixes échangent simplement leur stabilité.

### Bifurcation de Hopf

Contrairement aux bifurcations précédentes qui conduisent à des solutions stationnaires, la bifurcation de Hopf donne naissance à des solutions oscillantes; l'espace des phases a maintenant deux composantes et s'écrit dans le plan complexe.

$$\frac{dZ}{dt} = \mu Z - |Z|^2 Z$$

En posant  $\mu = \mu_r + i\mu_I$  et  $Z = X e^{i\theta}$ , on obtient alors :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \mu_r X - X^3 \\ \frac{d\theta}{dt} = \mu_I \end{cases}$$

Nous obtenons donc une bifurcation fourche pour l'amplitude tandis que la phase tourne à la vitesse I. La solution est donc périodique et les trajectoires décrivent une spirale attirée vers une courbe asymptotique nommée cycle limite. Naturellement la bifurcation de Hopf peut être également sous critique si le coefficient du terme  $|Z|^2 Z$  est de signe positif, il faut alors un terme négatif en  $|Z|^4 Z$  afin obtenir une saturation non-linéaire.

Selon Landau la bifurcation d'un comportement stationnaire (point fixe) vers un comportement périodique (cycle limite) puis bipériodique (un tore) constitue les premières étapes de la transition vers la turbulence, et le chaos qui est depuis longtemps synonyme de désordre et de confusion qui s'oppose à l'ordre. De nombreux chercheurs en sciences

se sont intéressés aux mouvements dits chaotiques et ont confirmé que, contrairement à ce que la pensée déterministe, martèle depuis des lustres, il se pourrait qu'il y ait de l'équilibre dans le déséquilibre et de l'organisation dans la désorganisation.

## 1.2 Les systèmes dynamiques discrets

### 1.2.1 Systèmes dynamiques discrets

Soit  $f : D \rightarrow D$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  une application continue (ou une transformation),  $f^k$  désigne la  $k^{\text{ième}}$  itérée de  $f$ , c'est-à-dire :

$$f^0(x) = x, f^1(x) = f(x), f^2(x) = f(f(x)), \dots, f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$$

Dans la pratique  $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), \dots$  représentent les valeurs d'une certaine quantité au temps  $0, 1, 2, \dots$

Ainsi la valeur de la quantité au temps  $k + 1$  est fonction de sa valeur au temps  $k$ .

L'application  $f$  est appelée un système dynamique discret.

### 1.2.2 Orbites ou trajectoires

#### Définitions :

L'orbite positive de  $x$  par le système dynamique  $f$  est définie par :

$$O_f^+ = \{f^k(x), k \in \mathbb{N}\}$$

Si  $f$  est bijectif, on définit l'orbite de  $x$  par :

$$O_f = \{f^k(x), k \in \mathbb{Z}\}$$

Ainsi que l'orbite négative :

$$O_f^- = \{f^{-k}(x), k \in \mathbb{N}\}$$

### 1.2.3 Points fixes

**Définitions :**

Un point  $x \in D$  est un point fixe de  $f$  si :

$$f^k(x) = x, k = 1, 2, 3, \dots$$

Si, de plus, la matrice jacobienne  $Df(x)$  n'a pas de valeurs propres dont le module soit égal à un,  $x$  est un point fixe hyperbolique. Si tous les modules des valeurs propres de  $Df(x)$  sont égaux à un,  $x$  est point fixe elliptique.

### 1.2.4 Points périodiques et p-cycles

**Définitions :**

S'il existe  $n \geq 1$ , tel que  $f^n(x) = x$ , on dit que  $x$  est un point périodique. La période d'un point périodique  $x$  est le plus petit entier  $n \geq 1$  tel que :

$$f^n(x) = x$$

Un ensemble  $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$  forme un cycle d'ordre  $p$  (ou une orbite périodique d'ordre  $p$ , ou encore un  $p$ -cycle), si :

$$f(x_i) = x_{i+1} \text{ pour } i = 1, 2, \dots, p-1, \text{ et } f(x_{p-1}) = x_0$$

Autrement dit, chaque point d'un cycle d'ordre  $p$  est un point fixe pour  $f^p$ , où  $f^p(x_i) = x_i$  pour  $i = 0, 1, 2, \dots, p-1$ , n'est pas un point fixe pour  $f^k$  si  $k < p$ .

### 1.2.5 Etude de la stabilité

L'étude du comportement d'un système dynamique discret, correspond à l'étude de stabilité des points fixes et des points périodiques.

Les deux théorèmes suivants donnent respectivement l'existence et l'unicité des points fixes.

**Théorème 1.2 (de Brouwer)** *Toute application continue  $f : \overline{B}^n \rightarrow \overline{B}^n$  avec  $\overline{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| \leq 1\}$ , admet un point fixe c'est-à-dire l'équation  $f(x) = x$  admet une solution dans  $\overline{B}^n$ .*

**Théorème 1.3 (de contraction de Banach)** *Soit  $f : \overline{B}^2 \rightarrow \overline{B}^2$  une application continue, où  $\overline{B}^2$  est le disque unitaire fermé;  $\overline{B}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\| \leq 1\}$ . Supposons que :*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \lambda |x_1 - x_2|$$

pour tout vecteur  $x_{i,j} \in \overline{B}^2$  et un certain  $0 < \lambda < 1$ , alors il existe un point fixe unique  $\bar{x} \in \overline{B}^2$ .

De plus on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = \bar{x} \text{ pour tout } x \in \overline{B}^2$$

#### Stabilité du point fixe

- Un sous ensemble  $A$  de  $D$  est invariant par  $f$  si  $f(A) = A$ .
- Un sous ensemble compact fermé  $A$  de  $D$  est un attractif ou est attracteur si  $A$  est invariant par  $f$ , et s'il existe un voisinage  $V$  de  $A$  tel que pour  $x_0 \in V$ , l'orbite de  $x_0$  est une suite qui converge vers  $A$ . Le voisinage  $V$  est appelé bassin d'attraction de  $A$  et on a :

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^k(V)$$

- Le sous ensemble  $A$  est répulsif ou instable s'il existe un voisinage  $V$  de  $A$  tel que pour tout  $x_0 \in V$ , l'orbite de  $x_0$  s'éloigne de  $A$  (ou de façon équivalente : si  $A$  est un attracteur pour  $f^{-1}$ ).

- Un attracteur  $A$  est fractal (ou un attracteur étrange) si l'orbite de  $x$  est dense dans  $A$  pour tout  $x \in A$  et est sensible aux conditions initiales.

L'attracteur le plus simple est le point fixe, il peut être attractif ou répulsif.

**Définition 1.2** *Un point fixe  $\bar{x} \in D$  est stable, si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x_0 - \bar{x}| < \delta \Rightarrow \forall k \geq 0, |x_k - \bar{x}| < \varepsilon$$

*En dimension un,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est la pente  $m = f'(\bar{x})$  de la tangente au point fixe  $\bar{x}$  qui détermine le type de point fixe.*

*Pour  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  le point fixe est :*

- 1) attractif (ou stable) si  $|m| < 1$ .*
- 2) répulsif (ou instable) si  $|m| > 1$ .*
- 3) indifférent si  $|m| = 1$ .*
- 4) super attractif (ou super stable) si  $m = 1$ .*

*$m$  s'appelle le multiplicateur de  $f$  au point  $\bar{x}$ .*

*En dimension  $n$ , pour décider si un point fixe  $\bar{x}$  est attractif ou non, il faut calculer les valeurs propres de la matrice jacobéenne  $Df(x) = J(x)$  .*

*Si toutes les valeurs propres de  $Df(x) = J(x)$  sont à l'intérieur du disque unité,  $x$  est stable. Si une de ces valeurs propres a un module plus grand que un,  $x$  est instable.*

### **Stabilité des points périodiques**

Une orbite périodique est un attracteur si chacun de ses points est un attracteur. Comme les points périodiques d'ordre  $p$  sont des points fixes de  $f^p$ , alors le théorème suivant :

**Théorème :**



Soit  $x$  le point périodique d'un cycle d'ordre  $p$ . Si le spectre de la matrice  $Df^p(x)$  est contenu à l'intérieur du cercle unité, le cycle est stable et si une des valeurs propres a un module plus grand que 1, alors le cycle est instable.

### 1.2.6 Bifurcations

Ce type de système dynamique possède trois types de bifurcations à un paramètre (selon le théorème (6)) : doublement de période, noeud-col, et Neimark-Sacker.

1- lorsqu' une valeur propre réelle de  $Df(x)$  quitte (ou rentre) dans le cercle unité à  $-1$ , on a alors une bifurcation fourche (ou doublement de période, ou flip).

2- lorsqu' une valeur propre réelle de  $Df(x)$  quitte (ou rentre) dans le cercle unité à  $+1$ , on a alors une bifurcation noeud-col (ou tangente, ou pli).

3- lorsque deux valeurs propres complexes conjuguées de  $Df(x)$  quittent (ou rentrent dans) le cercle unité simultanément à  $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\theta}$ , on a alors une bifurcation de Neimark-Sacker.

## 1.3 La section de Poincaré

La section de Poincaré est un outil très fréquemment utilisé pour étudier les systèmes dynamiques et notamment les trajectoires périodiques.

Considérons le système autonome d'ordre  $n$  :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), x \in \mathbb{R}^n \quad (1.16)$$

Soit une trajectoire représentant la solution du système (1.16) muni de la condition initiale  $x(0) = x_0$ .

Le système (1.16) n'ayant généralement pas de solution analytique, on doit étudier chaque solution en considérant sa trajectoire dans l'espace des phases que l'on peut obtenir par une intégration numérique, mais la dimension élevée de l'espace complique,

cette étude. C'est pour cela que la section de Poincaré est intéressante, car elle transforme un système continu en un système discret.

La méthode de Poincaré permet simultanément de discrétiser le système et de réduire sa dimension en conservant les mêmes propriétés topologiques, plus précisément elle remplace l'analyse des trajectoires d'un système dynamique dont l'espace des phases est de dimension  $n$  par celle de la suite des points d'intersections successives  $p_0, p_1, \dots$  d'une trajectoire  $\phi(t, x_0)$  avec un hyperplan  $\Sigma_p$  de dimension  $(n - 1)$ . Ce dernier peut être quelconque, mais un bon choix permet d'obtenir les sections aisément exploitables. L'hyperplan  $\Sigma_p$  est appelé la section de Poincaré.

On note par  $\pi$  la transformation qui conduit un point au point suivant sur la section,  $\pi$  est une application continue de  $\Sigma_p$  dans lui-même.

On a pour une trajectoire quelconque, la relation de récurrence suivante :

$$p_k = \pi(p_{k-1}), k > 0$$

Pour une solution périodique  $x(t, x_0, t_0) = \phi_t(x_0)$  de période  $T$  :

$$\phi_{t+T}(x_0) = \phi(x_0)$$

Du système (1.16) la transformation est équivalente à l'identité puisque la trajectoire se renferme sur elle-même.  $p^*$  est alors un point fixe de l'application  $\pi$ .

Soit :

$$p_0^* = \pi(p_0^*) = \pi(\pi(p_0^*)) = \dots$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned} \pi : \Sigma_p &\rightarrow \Sigma_p \\ x &\rightarrow \pi(x) = \phi_T(x) \end{aligned}$$

où la période  $T$  représente le temps nécessaire pour atteindre la section. L'application

$\pi$  est appelée l'application de Poincaré.

## 1.4 Théorie du chaos

### 1.4.1 Caractéristiques du chaos

#### 1- Sensibilité aux conditions initiales

Pour un système chaotique, une très petite erreur sur la connaissance de l'état initial  $x_0$  dans l'espace des phases va se trouver (presque toujours) rapidement amplifiée. D'un point de vue mathématique on dit que  $f : I \rightarrow I$  montre une dépendance sensible aux conditions initiales lorsque :

$$\exists \delta > 0, \forall x_0 \in I, \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, y_0 \in I : |x_0 - y_0| < \delta \Rightarrow |f^n(x_0) - f^n(y_0)| > \varepsilon$$

#### 2- L'attracteur étrange

Un système chaotique dissipatif possède (au moins) un attracteur d'un type particulier appelé attracteur étrange. Géométriquement, un tel attracteur peut être décrit comme le résultat d'opérations d'étirement et de repliement d'un cycle de l'espace des phases, répétés un nombre infini de fois. La "longueur" de l'attracteur est infinie, bien qu'il soit contenu dans un espace fini. Alors on peut donner cette définition.

#### Définition :

Un sous-ensemble borné  $A$  de l'espace des phases est un attracteur étrange ou chaotique pour une transformation  $T$  de l'espace s'il existe un voisinage  $R$  de  $A$ , c'est à dire que pour tout point de  $A$ , il existe une boule contenant ce point et inclus dans  $R$  vérifiant les propriétés suivantes :

- Attraction :  $R$  est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par  $T$  dont le point initial est dans  $R$ , est entièrement contenue dans  $R$ . De plus, toute orbite de ce type devient et reste aussi proche que l'on veut de  $A$ .

- Il est inclus dans un espace fini, avec un volume nul. Sa dimension est fractale (non entière).

- Presque toute trajectoire sur l'attracteur a la propriété de ne jamais passer deux fois par le même point : chaque trajectoire est presque sûrement aperiodique.

- Deux trajectoires proches à l'instant  $t$  voient localement leur distance augmenter à une vitesse exponentielle (sensibilité aux conditions initiales).

### **3- Spectre de puissance**

Une façon simple de caractériser le chaos consiste à calculer le spectre de Fourier de l'évolution temporelle d'une des variables du système. Lorsque le système est dit intégrable s'il est possible de déterminer complètement ses trajectoires dans son espace de phases. Les trajectoires étant la composition de mouvements d'oscillation ayant chacun une pulsation  $w_i$ .

L'évolution temporelle d'un système dynamique est souvent représentée par la valeur d'une de ses variables à intervalles réguliers.

## **1.4.2 Routes vers le chaos**

Un système dynamique possède en général un ou plusieurs paramètres dit "de contrôle", qui agissent sur les caractéristiques de la fonction de transition. Selon la valeur du paramètre de contrôle, les mêmes conditions initiales mènent à des trajectoires correspondant à des régimes dynamiques qualitativement différents. La modification continue du paramètre de contrôle conduit dans bien des cas à une complexification progressive du régime dynamique développé par le système.

Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marquée par des changements discontinus qu'on appelle "bifurcations". Une bifurcation marque le passage soudain d'un régime dynamique à un autre, qualitativement différent. On peut citer trois scénarios de transition vers le chaos :

**1- L'intermittence vers le chaos :** un mouvement périodique stable est entrecoupé

par des bouffées de turbulence. Lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle, les bouffées de turbulence deviennent de plus en plus fréquentes, et finalement, la turbulence domine.

**2- Le doublement de période** : il est caractérisé par une succession de bifurcations fourches. A mesure que la contrainte augmente, la période d'un système forcé est multipliée par deux, puis par quatre, puis par huit, ..., etc ; ces doublements de période sont de plus en plus rapprochés ; lorsque la période est infinie, le système devient chaotique. La turbulence dans les fluides peut apparaître suivant ce scénario.

**3- La quasi-périodicité** : elle intervient quand un deuxième système perturbe un système initialement périodique. Si le rapport des périodes des deux systèmes en présence n'est pas rationnel, alors le système est dit quasipériodique.

# Chapitre 2

## Le chaos hyperbolique et ses propriétés

En mathématiques la donnée d'un système dynamique est la donnée d'un ensemble et d'une transformation de cet ensemble. Suivant les propriétés de l'ensemble et de la transformation on parle de dynamique mesurée, topologique, holomorphe, hyperbolique et discrète,...

### 2.1 Rappels

#### **Théorème de Schauder-Tychonoff**

Soient  $E$  un espace de Banach,  $K \subset E$  un convexe fermé et  $\phi : K \rightarrow K$  une application continue et compacte, alors  $\phi$  admet un point fixe  $x \in K$ .

#### **Difféomorphismes**

Rappelons qu'un homéomorphisme  $f : U \rightarrow V$  entre deux ouverts  $U \subset E$  et  $V \subset F$  est une application continue de  $U$  dans  $F$  qui établit une bijection entre  $U$  et  $V$  et telle que son inverse  $f^{-1} : V \rightarrow U$  sont continue.

Nous dirons qu'un homéomorphisme  $f : U \rightarrow V$  entre deux ouverts  $U \subset E$  et  $V \subset F$  est un  $C^k$ -difféomorphisme si  $f : U \rightarrow V$  et  $f^{-1} : V \rightarrow U$  sont de classe  $C^k$ .

Avec les notations précédentes un homéomorphisme  $f : U \rightarrow V$  est un  $C^k$ -difféomorphisme si et seulement si  $f$  est de classe  $C^k$  et si pour tout  $x \in U, Df(x) \in L_c(E; F)$  est une application linéaire continue inversible (dont l'inverse est continu). On a alors,

$$\forall y \in V, Df^{-1}(y) = [Df(f^{-1}(y))].$$

### Variétés

Soit  $M$  une espace topologique. Etant donné  $U$  un ouvert de  $M$  et  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$  un homéomorphisme, on dit que  $(U, \varphi)$  est une application locale.

#### Définition 2.1 :

Une variété de classe  $C^k$  est un espace topologique  $M$  muni d'une famille  $A$  d'applications telle que :

- a) les  $U$  (pour lesquels  $(U, \varphi) \in A$ ) forment un recouvrement de  $M$ ,
- b) pour toutes applications  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$  de  $A$  l'application  $\varphi \circ \psi^{-1} : \varphi(U) \cap \psi(V) \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un difféomorphisme local.

### Champs de vecteurs et flots sur $\mathbb{R}^n$

Rappelons qu'une équation de la forme  $y_0'(t) = f(t; y(t))$  est dite autonome si  $f$  est indépendante de  $t$ . Si, en outre,  $\Omega$  est de la forme  $\mathbb{R} \times U$ , où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , on dit que  $f$  définit un champ de vecteurs sur  $U$ . Leur intérêt réside dans la proposition suivante :

#### Proposition 2.1 :

Si  $f$  est autonome (indépendante de  $t$ ), on a  $\phi_{t_1+T, t_0+T}(\cdot) = \phi_{t_1, t_0}(\cdot)$  pour tous  $t; t_0, T$ . On posera dans ce cas  $\phi_{t_1-t_0, 0}(\cdot) = \phi_{t_1, t_0}(\cdot)$ . Si en outre le champ de vecteurs défini par  $f$  est complet, on peut définir pour  $t \in \mathbb{R}$  et  $x \in E$  l'application  $\phi^t(\cdot) = \phi_{t, 0}(\cdot)$  qui est la valeur en  $t$  de la solution de  $y'(s) = f(y(s)), y(0) = x$ . Pour tout  $t$  l'application  $x \rightarrow \phi^t(x)$  est un difféomorphisme de  $E$ . On a alors pour tous  $t : t' \in \mathbb{R}, \phi^{t+t'} = \phi^t \circ \phi^{t'}$ . L'action  $C^k$  de  $\mathbb{R}$  ainsi définie sur  $E$  est appelée le flot du champ de vecteurs  $f$ .

### Conjugaisons

Soient  $M$  une variété et  $f_i : M \rightarrow M, i = 1, 2$  des difféomorphismes de  $M$  de classe

$C^k$ . On dit que  $f_1$  et  $f_2$  sont conjugués s'il existe un difféomorphisme  $h : M \rightarrow M$  tel que  $f_2 = h \circ f_1 \circ h^{-1}$ .

On dit que deux champs de vecteurs  $F$  et  $G$  définis sur des ouverts  $U$  et  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  sont  $C^0$  (resp.  $C^k$ )-équivalents s'il existe un homéomorphisme (resp. un  $C^k$ -difféomorphisme)  $\psi : U \rightarrow V$  tel que pour tout

$x_0 \in U, I_F(x_0) = I_G(\psi(x_0))$  et pour tout  $t \in I_F(y_0), (y_0 = \psi(x_0))$  :

$$\phi_G^t(y_0) = (\psi \circ \phi_F^t \circ \psi^{-1})(y_0)$$

## 2.2 Les systèmes dynamiques hyperboliques

Une question importante de la théorie des systèmes différentiels est la question de la stabilité structurelle. Un système est dit structurellement stable si lorsqu'on le perturbe légèrement on obtient un système conjugué. Il apparaît que les systèmes structurellement stables sont les systèmes hyperboliques.

## 2.3 Point fixe hyperbolique d'un difféomorphisme

Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace de Banach et  $A : E \rightarrow E$  un opérateur linéaire continu et inversible (son inverse est donc continu). On dit que  $A$  est hyperbolique s'il existe une décomposition  $E^s \oplus E^u$  et des constantes positives  $C, \rho_s, \rho_u$  telles que pour tout  $v_s \in E^s$  (resp.  $v_u \in E^u$ ) et tout  $n \in \mathbb{N}$  on a

$$\|A^n v_s\| \leq C e^{-\rho_s n} \|v_s\| \quad (\text{resp. } \|A^n v_u\| \leq C e^{-\rho_u n} \|v_u\|)$$

Quand  $E = \mathbb{R}^n$  est de dimension finie et  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ , on peut démontrer que  $A$  est hyperbolique si et seulement si le spectre de  $A$  (l'ensemble de ses valeurs propres noté  $\sigma(A)$ ) a une intersection vide avec le cercle unité  $\{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ . Dans ce cas,



$$E^s = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A): |\lambda| < 1} \Gamma_\lambda, E^u = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A): |\lambda| > 1} \Gamma_\lambda$$

et on peut choisir

$$\rho_s < \min_{\lambda \in \sigma(A): |\lambda| < 1} (-\log |\lambda|) \text{ et } \rho_u < \min_{\lambda \in \sigma(A): |\lambda| > 1} (\log |\lambda|).$$

C'est une conséquence du théorème de décomposition de Jordan. Comme les valeurs propres d'une matrice dépendent, de façon continue, de cette matrice on déduit facilement le résultat suivant.

L'ensemble des  $A \in GL(n, \mathbb{R})$  qui sont hyperboliques est un ouvert (le même résultat est vrai dans les espaces de Banach).

Si  $A$  est hyperbolique, on dit qu'une norme est adaptée à  $A$  si pour tout  $v_s \in E^s$  (resp.  $v_u \in E^u$ ) on a  $\|Av_s\| \leq e^{-\rho_s n} \|v\|$  (resp.  $\|A^{-1}v_u\| \leq e^{-\rho_u n} \|v\|_u$ ).

Si  $A$  est hyperbolique, il existe une norme  $A$ -adaptée (quitte à diminuer les valeurs de  $\rho_s, \rho_u$ ).

Soit  $f$  un difféomorphisme local de  $(\mathbb{R}^n, x_0)$  (on peut également travailler dans les espaces de Banach). On dit que  $x_0$  est un point fixe hyperbolique de  $f$  si  $f(x_0) = x_0$  et si  $Df(x_0)$  est hyperbolique.

Soit  $A \in GL(n, \mathbb{R})$  et  $\varepsilon > 0$ , alors il existe une constante  $\delta > 0$  pour laquelle on a :  
si  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une application de classe  $C^1$  telle que

$$\|F\|_1 \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \max(\|F(x)\|, \|DF(x)\|) < \delta,$$

alors, l'application  $f = A + F$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  et  $(A + F)^{-1}$  est de la forme  $A^{-1} + G$  où  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est  $\varepsilon$ -lipschitzienne, c'est à dire pour tous  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$

$$\|G(x_1) - G(x_2)\| \leq \varepsilon \|x_1 - x_2\|$$

### **Théorème (Hartman-Grobman)**

Si  $A$  est linéaire et hyperbolique, alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour toute application  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  telle que  $\|F\|_1 \leq \varepsilon$  il existe un homéomorphisme  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de la forme  $h(x) = x + H(x)$  avec  $\|H\|_0 < \infty$  tel que

$$A + F = h \circ A \circ h^{-1}$$

En outre, un tel  $h$  est unique s'il est calculé sous la forme  $id + K$  avec  $\|K\|_0 < \infty$ .

Si  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \circlearrowleft$  est un difféomorphisme local de classe  $C^1$  tel que  $A = Df(0)$  est hyperbolique, alors il existe un homéomorphisme local  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \circlearrowleft$  tel que sur un voisinage de 0 et on a

$$f = h \circ Df(0) \circ h^{-1}$$

## 2.4 Le cas des flots

Les résultats de la section précédente se généralisent au cas des flots. Soient  $U \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice et  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application.

Soient  $X : (\mathbb{R}^n, 0) \circlearrowleft$  un champ de vecteur local de classe  $C^1$  tel que  $A = \exp(DX(0))$  est hyperbolique et  $\phi_X^t$  le flot (local) de  $X$ , alors il existe un homéomorphisme local  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \circlearrowleft$  tel que sur un voisinage de 0

$$\phi_X^t = h \circ \exp(DX(0)) \circ h^{-1}$$

a chaque fois où cela a un sens.

### Classifications topologiques des champs linéaires hyperboliques

Deux champs de vecteurs linéaires hyperboliques  $A$  et  $A_1$ , d'espaces stables  $E^s, E_1^s$  et d'espaces instables  $E^u, E_1^u$  sont topologiquement équivalents si et seulement  $\dim E^s = \dim E_1^s$  et  $\dim E^u = \dim E_1^u$ . Il est équivalent de dire que le nombre de valeurs propres de parties imaginaires positives (resp. négatives) de  $A$  et de  $A_1$  coïncident.

## 2.5 Variétés stables et instables

Nous supposons dans la suite que  $A \in GL(n, \mathbb{R})$  est une matrice hyperbolique et nous noterons  $E^s$  et  $E^u$  ses espaces stables et instables et  $s$  et  $u$  les exposants associés.

Soient  $A : \mathbb{R}^n \circlearrowleft$  une matrice hyperbolique et  $k \geq 1$ . Il existe  $\varepsilon$  tel que pour toute application  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$  telle que  $\|F\|_{C^k(\mathbb{R}^n)}, F(0) = 0, DF(0) = 0$ , l'ensemble  $W^s$  des points de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(x), 0) = 0$  (où  $f = A + F$ ) est le graphe d'une fonction  $S : E^s \rightarrow E^u$  de classe  $C^k$  telle que  $S(0) = 0$  et  $DS(0) \setminus E^s = 0$ , c'est-à-dire que  $W^s$  coïncide avec  $\{x_s + S(x_s) : x_s\}$ . En outre, pour tout  $x \in W^s$  on a

pour tout  $0 \leq \alpha < \rho$

$$d(f^n(x), 0) \leq C_x e^{-n\alpha}.$$

**Corollaire 2.1 :**

Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une application de classe  $C^k$  telle que  $(f(0) = 0)$   $Df(0)$  est hyperbolique, alors ils existent des voisinages de 0,  $V \subset \mathbb{R}^n, V^s \subset E^s$  et  $V^u \subset E^u$  et des applications  $S_s : V^s \rightarrow E^u, S_u : V^u \rightarrow E^s$ , telles que  $S_{s,u}(0) = 0$  et  $DS_{s,u}(0) = 0$  et

$$\begin{aligned} \left\{ (x_s, x_u) \in V, \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = 0 \right\} &= \{x_s, S_s(x_s), x_s \in V^s\} \\ \left\{ (x_s, x_u) \in V, \lim_{n \rightarrow -\infty} f^n(x) = 0 \right\} &= \{(S_u(x_u), x_u), x_u \in V^u\}. \end{aligned}$$

En outre, pour tout  $\alpha < \rho$ , et tout  $x \in W_{loc}^s$  (resp.  $x \in W_{loc}^u$ )  $\|f^n(x)\| \leq C_x e^{-n\alpha}$  pour tout  $n \geq 0$  (resp.  $n \leq 0$ ).

Si on considère des perturbations  $f_\lambda$  de classe  $C^k$  du difféomorphisme précédent telles qu'en topologie  $C^k, \lambda \mapsto f$  soit continue, alors, il existe au voisinage de 0 un unique point fixe  $x_\lambda$  hyperbolique pour  $f_\lambda$  et les variétés stables et instables associées à  $x_\lambda$  dépendent continûment de  $\lambda$  en topologie  $C^k$ .

### 2.5.1 Le cas des flots

Le théorème de la variété stable est également vrai dans le cas des flots.

**Théorème 2.1 (de la variété stable)** *Soit  $X_0 = 0$  un point fixe hyperbolique d'un champ de vecteurs  $F$  de classe  $C^k$  tel que  $E^s \neq \{0\}$  (resp.  $E^u \neq \{0\}$ ), alors :*

– *i) Ils existent  $\delta > 0$  et une application  $w_s$  (resp.  $w_u$ ) de classe  $C^k$  d'un voisinage  $V^s$  (resp.  $V^u$ ) de  $0 \in E^s$  (resp.  $E^u$ ) dans un voisinage de  $0 \in E^u$  (resp. de  $0 \in E^s$ ) tels que  $W_\delta^s(0)$  (resp.  $W_\delta^u(0)$ ) est le graphe de l'application  $w_s$  (resp.  $w_u$ ) :*

$$W_\delta^s(0) = \{(X_s, w_s(X_s)), X_s \in V^s\}.$$

(resp.

$$W_\delta^u(0) = \{(X_u, w_u(X_u)), X_u \in V^u\}.$$

– *ii) Pour tout  $X \in W^s(0)$  et tout  $0 \leq \rho < \tilde{\rho}$  on a*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\rho t} \|\phi_F^t(X)\| = 0.$$

## 2.6 Perturbations des systèmes hyperboliques

Le cas qui nous intéresse à présent est le suivant :  $A$  est une matrice de  $M_n(K)$  (constante) et  $F(\cdot) \in C^k(\mathbb{R}, M_n(K))$  est  $T$ -périodique de norme  $C^0$  petite. Que peut-on dire de la résolvante de  $A + F(\cdot)$  ?

D'après le théorème relatif aux perturbations des systèmes linéaires on a,

$$\|R_{A+F(\cdot)}(T, 0) - R_A(T, 0)\| \leq C e^{T\|A\|} \cdot \|F\|_C^0. \quad (2.1)$$

Supposons que  $R_A(T, 0) = \exp(TA)$  soit hyperbolique c'est-à-dire qu'il existe  $\delta > 0$  pour lequel toutes les valeurs propres de  $R_{A_0}(T, 0)$  sont à distance au moins  $\delta$  du cercle unité.

Comme les valeurs propres d'une matrice varient continuellement avec la matrice, il est clair

d'après (2.1) qu'il existe un  $\epsilon > 0$  tel que pour tout  $F(\cdot) \in C^k(\mathbb{R}, M_n(K))$ ,  $T$ -périodique vérifiant,

$$\|F\|_C^0 < \epsilon,$$

toutes les valeurs propres de  $R_{A+F(\cdot)}(T, 0)$  seront à distance au moins  $\delta/2 > 0$  du cercle unité.

Soit  $T > 0$ . Si les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  de  $A \in M_n(K)$  sont toutes de partie réelle non nulle, alors il existe un réel positif  $\epsilon$  (qui dépend de  $T$  et de  $A$ ) tel que pour tout  $F \in C^0(\mathbb{R}, M_n(K))$ ,  $T$ -périodique et vérifiant,

$$\|F\|_{C^0} = \max_{t \in [0, T]} \|F(t)\| \leq \epsilon$$

et le système  $A + F(\cdot)$  est hyperbolique.

Le même théorème est valable pour les perturbations de systèmes hyperboliques périodiques non constants. L'ensemble des tels systèmes est donc ouvert pour la  $C^0$  topologie.

### **Le cas des systèmes à valeurs dans $sl(2, \mathbb{R})$**

Le fait que l'ensemble des systèmes hyperboliques périodiques non constants est un ouvert pour la  $C^0$  topologie et en fait le reflet du fait que dans  $GL(n; K)$  l'ensemble des matrices hyperboliques est un ouvert. Ce résultat concerne uniquement les matrices hyperboliques. En général ce résultat n'est pas valable pour les matrices dont le comportement est elliptique (c'est-à-dire dont les valeurs propres sont sur le cercle unité) mais il est valable pour les matrices elliptiques de  $SL(2, R)$  (à condition de faire les perturbations dans  $SL(2, R)$ ).

Soient  $A \in sl(2, R)$  et  $T$  est un réel. Supposons que  $\exp(TA)$  est une matrice elliptique (resp. hyperbolique), alors il existe  $\epsilon > 0$  tel que pour tout  $F \in C^k(\mathbb{R}, M_n(K))$ ,  $T$ -périodique vérifiant,

$$\|F\|_{C^0} \leq \epsilon$$

et le système  $X'(t) = (A + F(t))X(t)$  est elliptique (resp. hyperbolique).

## 2.7 Méthodes perturbatives

Considérons la situation suivante :  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est une matrice,  $F \in C^k(\mathbb{R}, M_n(K))$  et  $\epsilon$  est un paramètre réel (petit). Nous allons obtenir et justifier un développement limité en puissance de  $\epsilon$  de la résolvante  $R_{A+\epsilon F}(t; 0)$  du système

$$X'(t) = (A + \epsilon F(t))X(t).$$

Soient  $Y_1(), \dots, Y_N()$   $N$  fonctions dans  $C^k(\mathbb{R}, M_n(K))$  et soit  $H_N(., \epsilon)$  une fonction telle que

$$R_{A+\epsilon F}(t; 0) = (Id + \epsilon Y_1(t) + \dots + \epsilon^N Y_N(t) + H_N(t, \epsilon))R_A(t; 0)$$

en dérivant l'expression précédente, en utilisant les égalités,

$$\begin{aligned} R'_{A+\epsilon F}(t; 0) &= (A + \epsilon F(t))R_{A+\epsilon F}(t; 0) \\ R'_A(t; 0) &= AR_A(t; 0) \end{aligned}$$

et en simplifiant par  $R_A(t; 0)$ , l'identité,

$$\begin{aligned} &(\epsilon Y'_1(t) + \dots + \epsilon^N Y'_N(t) + H'_N(t; \epsilon)) + (Id + \epsilon Y_1(t) + \dots + \epsilon^N Y_N(t) + H_N(t; \epsilon)).A \\ &= (A + F(t))(Id + \epsilon Y_1(t) + \dots + \epsilon^N Y_N(t) + H_N(t; \epsilon)), \end{aligned}$$

c'est-à-dire en regroupant en puissances de  $\epsilon$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \epsilon(Y'_1 - [A, Y_1] - F) + \epsilon^2(Y'_2 - [A, Y_2] - FY_1) + \dots + \epsilon^N(Y'_N - [A, Y_N] - FY_{N-1}) + H'_N(t; \epsilon) + \\ &H_N(t; \epsilon)A - (A + \epsilon F(t))H_N(t; \epsilon) - \epsilon^{N+1}F(t)Y_N(t), \end{aligned}$$

où on a noté  $[A, Y] = AY - YA$ . Définissons alors récursivement les  $Y_i()$  par le système différentiel suivant :

$$\begin{aligned}
Y_1'(t) &= [A, Y_1(t)] + F(t), & Y_1(0) &= 0 \\
Y_2'(t) &= [A, Y_2(t)] + Y_1(t)F(t), & Y_2(0) &= 0 \\
&\dots \\
Y_N'(t) &= [A, Y_N(t)] + Y_{N-1}(t)F(t), & Y_N(0) &= 0
\end{aligned}$$

ce qui est toujours possible. On aura, par exemple d'après la formule de variation de la constante,

$$Y_1(t) = \int_0^t e^{(t-s)adA} \cdot F(s) ds,$$

où on note  $ad(A)$  l'endomorphisme de  $M_n(\mathbb{R})$ ,  $ad(A).U = [A, U] = AU - UA$ .

Notons pour  $B \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $G_B, D_B$  les endomorphismes de  $M_n(\mathbb{R})$  définis par  $G_B U = BU$  et  $D_B U = UB$ . On a donc,

$$H_N'(t; \epsilon) = (G_{A+\epsilon F(t)} - D_A)H_N(t; \epsilon) + \epsilon^{N+1}F(t)Y_N(t),$$

et puisqu'il résulte de la définition des  $Y_i$  que  $H_N(0, \epsilon) = 0$ , la formule de variation de la constante montre que,

$$H_N(t; \epsilon) = \int_0^t R_\epsilon(t, s) \cdot (\epsilon^{N+1}F(t)Y_N(t)) ds \quad (2.2)$$

où  $R_\epsilon(t, 0)$  est la résolvante de l'équation linéaire dans  $M_n(\mathbb{R})$  :

$$U'(t) = (G_{A+\epsilon F(t)} - D_A)U(t)$$

D'après le théorème de dépendance continue par rapport aux perturbations on sait que l'application,

$$\begin{aligned} [-M, M] \times [-T, T] &\rightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ (\epsilon, t) &\rightarrow R_\epsilon(t, 0) \end{aligned}$$

est continue et  $[-M, M] \times [-T, T]$  étant compact il existe une constante  $\tilde{C} > 0$  telle que,

$$\max_{t \in [-T, T], |\epsilon| \leq M} \|R_\epsilon(t, 0)\| \leq \tilde{C}$$

La formule (2.2) donné : pour tout  $T > 0$  il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $|\epsilon| \leq 1$  (par exemple),

$$\max_{t \in [-T, T]} \|H_n(t, \epsilon)\| \leq C\epsilon^{N+1}$$

Ceci justifie l'écriture,

$$R_{A+\epsilon F(t)} = [Id + \epsilon Y_1(t) + \dots + \epsilon^N Y_N(t) + O(\epsilon^{N+1})] . e^{tA}.$$

Appliquons ce qui précède au cas où  $A \in sl(2, R)$ ,  $F \in C^k(\mathbb{R}, sl(2, R))$ , et  $F$   $T$ -périodique on obtient

$$tr(R_{A+\epsilon F(t)}(t, 0)) = tr(e^{tA}) + \epsilon tr(Y_1(t)e^{tA}) + \dots + \epsilon^N tr(Y_N(t)e^{tA}) + O(\epsilon^{N+1}),$$

en théorie, pourvu qu'un des  $tr(Y_i(t)e^{tA})$  est non nul permet de déterminer la résonance du type de bifurcation possible (elliptique, hyperbolique) pour les petites valeurs de  $\epsilon$ .



# Chapitre 3

## Le chaos de Lorenz et ses propriétés

### 3.1 Les types de systèmes de Lorenz

Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats récents sur les types de systèmes de Lorenz. Un exemple célèbre de type des systèmes de Lorenz aux dilatations et contraction des attracteurs de Lorenz a été présenté. En particulier, nous discutons de la nature des attracteurs étranges et leurs propriétés dynamiques.

Un autre exemple (l'application de Lozi) de type d'attracteur de Lorenz a été réalisé dans les applications en dimensions 2 avec quelques propriétés.

#### 3.1.1 Les types d'attracteurs de Lorenz

Les attracteurs de type de Lorenz ne sont pratiquement pas structurellement stable, bien que leurs orbites homoclines et hétéroclines sont structurellement stable (hyperbolique), et aucune des orbites périodiques stables apparaissent sous variations de petit paramètre.

Un attracteur de Lorenz-like est un attracteur ayant les caractéristiques suivantes :

**Définition 3.1 :**

- (1) Robuste, attracteur transitive qui n'est pas hyperbolique.

(2) L'origine  $(0, 0, 0)$  est accumulé par des orbites périodiques hyperboliques.

(3) L'attracteur est sensible aux conditions initiales (ou chaotique).

Soit  $C^1(M)$  désigne l'ensemble des  $C^1$  champs de vecteurs sur  $M$  doté d'une topologie de  $C^1$ . Nous présentons quelques résultats récents sur la dynamique des attracteurs de Lorenz-like.

1. Il existe un feuilletage invariant dont les feuilles sont des énoncés contractés par le flux.

2. Il existe un exposant de Lyapunov positif à chaque orbite.

3. Il sont vastes et sensible par rapport aux données initiales.

4. Il ont un volume zéro si le débit est  $C^2$ .

5. Il s'agit d'une mesure physique unique dont le support est l'attracteur ensemble qui est l'état d'équilibre en ce qui concerne le centre-instable

### 3.1.2 Le système de Lorenz

Le système donnée par Lorenz [Lorenz (1963)] est l'exemple le plus simple de type Lorenz :

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = rx - y - xz \\ z' = -bz + xy \end{cases} \quad (3.1)$$

qui présente le premier cas connu d'un attracteur étrange qui n'est pas hyperbolique [Lorenz (1963)]. Pour toutes les variations suffisamment petites du paramètre  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$  et  $r = 28$  où le système (3.1) a un attracteur chaotique, dans laquelle les orbites périodiques et homoclines sont partout denses et structurellement instables.

Généralement, pour  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$ , le système de Lorenz affiche les attracteurs suivantes :

Pour  $r \in [-\infty, 1]$ , le point  $(0, 0, 0)$  est un équilibre.

Pour  $r \in [1, 13.93]$  les deux autres équilibres sont symétriques et l'origine est instable.

Pour  $r \in [13.93, 24.06]$  il y a un passage au chaos, c'est à dire il y a des orbites

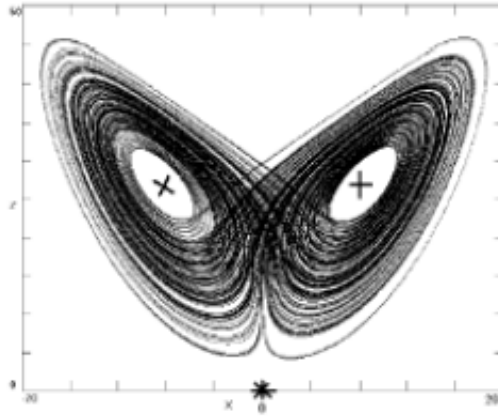


FIG. 3-1 – attracteur chaotique de Lorenz obtenu à partir de (3.1) pour  $\sigma = 10, r = 28, b = \frac{3}{8}$ . L'origine  $P_0 = (0, 0, 0)$  représenté sur cette figure en utilisant des symboles \*, l'autre equilibre indiquées au moyen de symboles  $\times$  et  $+$

chaotiques, mais pas d'attracteurs chaotiques.

Pour  $r \in [24.06, 24.74]$  il existe un attracteur chaotique attirant les deux équilibres symétriques.

Pour  $r \in [24.74, ?]$  il existe un attracteur chaotique, mais les deux équilibres symétriques ne sont plus attirant. Les équations (3.1) se sont révélées être très résistantes à l'analyse rigoureuse et aussi des obstacles à l'étude numérique

### 3.1.3 Existence d'attracteurs de type Lorenz

Dans cette section, nous présentons deux méthodes pour prouver rigoureusement l'existence de l'attracteur de Lorenz. La première méthode est celle de Shilnikov pour enquêter sur les cas où le système dynamique permet d'afficher un attracteur de type Lorenz. La seconde méthode de Mischaikow et Mrozek traite du chaos dans le système de Lorenz (3.1) avec  $(\sigma, r, b) = (45, 54, 10)$ . Pour la clareté de la présentation, nous allons introduire les concepts suivants au sujet des variétés stables fortes et variétés instables fortes.

En effet, soit  $M$  désigne un 3-variété fermé et  $f$  un flux  $C^r$  dans  $M$ ,  $r \geq 1$ . Si  $d(.,.)$  est la metrique dans  $M$  et  $\delta > 0$ , nous notons

$$B_\delta(A) = \{x \in M : d(x, A) < \delta\} \quad (3.2)$$

Compte tenu de  $p \in M$  et  $\epsilon > 0$ , nous définissons

$$\left\{ \begin{array}{l} W_f^{ss}(p) = \{x : d(f_t(x), f_t(p)) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty\} \\ W_f^{uu}(p) = \{x : d(f_t(x), f_t(p)) \rightarrow 0, t \rightarrow -\infty\} \\ W_f^{ss}(p, \epsilon) = \{x : d(f_t(x), f_t(p)) \leq \epsilon, \forall t \geq 0\} \\ W_f^{uu}(p, \epsilon) = \{x : d(f_t(x), f_t(p)) \leq \epsilon, \forall t \leq 0\} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Ensuite, on a les définitions suivantes :

**Définitions 3.2 :**

- (a) L'ensemble  $W_f^{ss}(p)$  est appelé l'ensemble stable de  $p$
- (b) L'ensemble  $W_f^{uu}(p)$  est appelé l'ensemble instable de  $p$
- (c) L'ensemble  $W_f^{ss}(p, \epsilon)$  est appelé l'ensemble local stable de  $p$
- (d) L'ensemble  $W_f^{uu}(p, \epsilon)$  est appelé l'ensemble local instable de  $p$

Nous définissons également

$$\left\{ \begin{array}{l} W_f^s(p) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W_f^{ss}(f_t(p)) \\ W_f^u(p) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W_f^{uu}(f_t(p)) \end{array} \right. \quad (3.4)$$

dans ce cas, en utilisant le théorème de la variété stable donnée dans [Hirsch, and al. (1977)], les rendements que si  $H$  est un ensemble hyperbolique de  $f$  et  $p \in H$  alors les ensembles  $W_f^{ss}(p)$ ,  $W_f^s(p)$ ,  $W_f^{uu}(p)$ ,  $W_f^u(p)$ ,  $W_f^{ss}(p, \epsilon)$  et  $W_f^{uu}(p, \epsilon)$  sont  $C^r$ -sous-variétés de  $M$ , et  $\dim(W_f^{ss}(p)) = \dim(E^s)$  et  $\dim(W_f^{uu}(p)) = \dim(E^p)$ .

Dans ce cas, nous avons la définition suivante :

**Définition 3.3 :**

Les ensembles  $W_f^{ss}(p)$  et  $W_f^{uu}(p)$  sont appelées respectivement solide et stable, et le

collecteur de forte instabilité de  $p$ .

Maintenant, considérons une famille à des paramètres finis avec des champs de vecteurs défini par le système d'équations différentielles

$$x' = f(x, \mu) \quad (3.5)$$

où  $(x, \mu) \in (\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^m)$ , et  $f(x, \mu)$  est une des fonctions  $C^r$ -lisse de  $x$  et  $\mu$ .

Ensuite, on a le résultat suivant démontré dans [Shilnikov (1981)] :

**Théorème 3.1** : Supposons que deux conditions suivantes sont vérifiées

(a) le système (3.5) a un état d'équilibre  $O(0, 0)$  du type de selle. Les valeurs propres de la jacobienne à  $O(0, 0)$  satisfont  $\text{Re } \lambda_n < \dots < \text{Re } \lambda_2 < \lambda_1 < 0 < \lambda_0$ .

(b) Les séparatrices  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  de la selle  $O(0, 0)$  sont envoyées à l'origine quant  $t \rightarrow +\infty$ . Ensuite, pour  $\mu > 0$ , il existe un ouvert  $V$ , dont la frontière contient l'origine, de telle sorte que dans  $V$  le système (3.5) possède l'attracteur de Lorenz dans les trois cas suivants :

**Cas n ° 1.**

(a)  $\Gamma_1$  et  $\Gamma$  retour à l'origine tangentiellement suivant la direction dominante correspondant à la valeur propre  $\lambda_1$ ,

(b) si

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} < \gamma < 1, \\ v_i = \frac{-\text{Re } \lambda_i}{\lambda_0} > 1, \\ \gamma = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0}. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

**Cas n ° 2.**

(a)  $\Gamma_1$  et  $\Gamma$  appartiennent à la non-collecteur avant  $W_f^{ss}(0, 0) \in W_f^s(0, 0)$  et entrent la selle le long de la eigen-direction correspondant au vecteur propre réel  $\lambda_2$ .

(b) Condition (3.6)

**Cas n ° 3**

(a)  $\Gamma_{1,2} \in W_f^{ss}(0, 0)$ ,

(b)  $\gamma = 1$ ,

(c)  $\lambda_{1,2} \neq 0$ , and  $|\lambda_{1,2}| < 2$ .

Dans ce cas  $m = 3, \mu_3 = \gamma - 1$ .

Le classement des attracteurs étranges de type Lorenz est donné comme suit :

**Proposition 3.1 :**

Les attracteurs étranges de type Lorenz ont un invariant topologique complète. Géométriquement, deux attracteurs de Lorenz-like sont topologiquement équivalents si les variétés instables de deux selles se comportent semblablement.

La méthode d'analyse est basée sur le fait que l'application de Poincaré correspondante pour le système (3.1) est réduite à la forme suivante avec à la droite continue, en dehors de la ligne de discontinuité  $y = 0$ , et  $G$  est monotone par morceaux.

$$\begin{cases} \bar{x} = F(x, y) \\ \bar{y} = G(y) \end{cases} \quad (3.7)$$

en raison de l'existence d'un feuilletage. En utilisant la technique du spectre inverse, l'application (3.7) peut être réduite à un unidimensionnel  $\bar{y} = G(y)$ , et il est montré dans [Guckenheimer et Williams (1979)], que les invariants sont un invariant topologiques complets pour les applications associées à deux dimensions si

$$\inf |G'| > 1. \quad (3.8)$$

La preuve de Mischaikow et Mrozek donnée dans [Mischaikow et Mrozek (1995-1998)] utilise la technique donnée dans [Hastings et Troy (1992)]. Les avantages de cette technique peuvent être résumés comme suit :

1. Cette technique est applicable au béton équations différentiel comme le système de Lorenz (3.1).
2. En termes de semi conjugaisons, cette technique fournit une description relativement forte de la dynamique globale des équations différentielles.
3. Les calculs nécessaires assistés par ordinateur de cette technique sont assez petits pour être exécutés sur tous les ordinateurs.

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un homéomorphisme. Pour une bonne description de cette méthode, nous avons besoin des définitions suivantes :

**Définitions 3.4 :**

(a) Pour  $N \subset \mathbb{R}^n$ , l'invariant maximal ensemble de  $N$  est définie par

$$Inv(N, f) = \{x \in N : f^n(x) \in N, \forall n \in \mathbb{Z}\} \quad (3.9)$$

(b) Un ensemble compact  $N$  est appelé un quartier d'isolement si  $Inv(N, f) \subset intN$ .

(c) Un ensemble invariant  $S$  de  $f$  est dit isolé s'il ya un quartier d'isolement  $N$  telle que  $Inv(N, f) = S$ .

Pour déterminer l'indice de Conley d'un invariant isolé fixé pour une application, on commence avec une paire d'index  $(N, L)$ , où  $N$  est un quartier d'isolement,  $L$  est son ensemble de sortié, l'application  $f$  induit un homomorphisme appelé l'application-index sur la cohomologie de la paire indice, soit  $I_f^* : H^*(N, L) \rightarrow H^*(N, L)$ .

**Définition 3.5 :**

L'indice de Conley cohomologique d'un quartier d'isolement en vertu de  $f$  est donnée par

$$Con^*(Inv(N, f)) = (CH^*(Inv(N, f)), X^*(Inv(N, f))) \quad (3.10)$$

où  $CH^*(Inv(N, f))$  est le module gradué obtenus par quotient  $H^*(N, f)$  par le noyau généralisé de  $I_f^*$  et  $X^*(Inv(N, f))$  est l'automorphisme induit classés module sur  $CH^*(Inv(N, f))$ .

Si  $P(\mathbb{R}^n)$  est l'ensemble des parties de  $\mathbb{R}^n$ , introduisons les définitions suivantes :

**Définitions 3.6 :**

(a) Une application à plusieurs valeurs de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  est une fonction  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow P(\mathbb{R}^n) - \{\emptyset\}$

(b) Une fonction continue  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un sélecteur pour  $F$  si  $f(x) \in F(x)$  pour tous les  $x \in \mathbb{R}^n$ .

(c) Une fonction à valeurs multiples  $F$  est une extension d'une fonction continue

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  si  $f(x) \in F(x)$  pour tous les  $x \in \mathbb{R}^n$ .

(d) Soit  $F$  une fonction à plusieurs valeurs de  $\mathbb{R}^n$ . Pour  $A \subset \mathbb{R}^n$  soit  $F(A) = \cup_{x \in A} F(x)$  et définissons, de manière récursive,  $F^{n+1}(A) = F(F^n(A))$ . De cette façon  $F$  définit un système discret à valeurs multiples semidynamiques sur  $\mathbb{R}^n$ .

Pour définir la théorie de l'indice Conley pour de tels systèmes nous considérons un ensemble  $B \subset \mathbb{R}^n$ , son image inverse est donnée par  $F^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) \subset B\}$  et son image inverse faible est donnée par  $F^{*-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) \cap B \neq \emptyset\}$  Compte tenu de fait que  $N \subset \mathbb{R}^n$ , alors on a les définitions suivantes :

**Définitions 3.7 :**

(a) L'ensemble invariant de  $N$  est donné par

$$Inv(N, f) = \{\exists \gamma_x : \mathbb{Z} \rightarrow N : \gamma_x(0) = 0, \gamma_x(n+1) \in F(\gamma_x(n))\} \quad (3.11)$$

pour  $x \in N$

(b) Le diamètre de  $F$  plus de  $N$  est le nombre

$$diam_N F = \sup_{x \in N} \{\|z - y\| : z, y \in F(x)\} \quad (3.12)$$

(c)  $N$  est appelé un quartier d'isolement en vertu de  $F$  si

$$B(Inv(N, f), diam_N F) \subset int(N) \quad (3.13)$$

Notez que certaines conditions (recevabilité) doivent être respectées afin de définir l'indice de Conley pour  $F$  dans  $N$ , dans ce cas il est suffisant de voir que les applications convexe sont évalués avec sélecteurs continue sont recevables.

En raison de calculs techniques, il est pratique d'utiliser le formulaire ci-dessous réservé à un quartier d'isolement.

**Définition 3.8 :**

Le ensemble  $N$  est un bloc isolant pour  $F$  si



$$B(F^{*-1}(N) \cap N \cap F(N), \text{diam}_N F) \subset \text{int}(N) \quad (3.14)$$

Dans ce cas, la notion d'un bloc d'isolant utilise seulement un nombre fini d'itérations de  $F$  (un avant et un arrière) contraire à la notion d'un quartier d'isolement.

Le théorème principal qui prouve que le système de Lorenz (3.1) contient la dynamique chaotique est donnée par [Mischaikow et Mrozek (1992)] :

**Théorème 3.2** : Soit

$$P = \{f(x, y, z), z = 53\} \quad (3.15)$$

Pour toutes les valeurs des paramètres dans une zone assez petite de  $(\sigma, r, b) = (45, 54, 10)$ , il existe une section de Poincaré  $N \subset P$  de telle sorte que l'application de Poincaré  $g$  induite par (3.1) est de Lipschitz et bien définie. En outre, il existe un  $d \in N$  et une surjection continue  $\rho : \text{Inv}(N, g) \rightarrow \Sigma_2$  telle que

$$\rho \circ g^d = \sigma \circ \rho \quad (3.16)$$

où  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  est la dynamique pleine campagne sur deux symboles.

Par conséquent, on a le résultat suivant démontré dans [Mischaikow et Mrozek (1995-1998)] :

**Théorème 3.3** : Supposons que

$$\text{Con}^n(S_k) = \begin{cases} (Q, id) \text{ if } n = 1, \\ 0 \text{ si non} \end{cases} \quad (3.17)$$

et que  $X^*(S_{lk})$  n'est pas conjugué à  $X^*(S_k) \oplus X^*(S_l)$ . Alors il existe  $d \in N$  et une surjection continue  $\rho : \text{Inv}(N, f) \rightarrow \Sigma_2$  tels que

$$\rho \circ f^d = \sigma \circ \rho \quad (3.18)$$

où  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  est la dynamique pleine campagne sur deux symboles.

La deuxième étape de la preuve est préoccupé par l'extension des invariants algébriques des applications multiples, afin d'obtenir la théorie de l'indice pour les applications à valeurs multiples suivante :

**Théorème 3.4 :**

Soit  $F$  est un'application recevable à valeurs multiples et  $f$  un sélecteur de  $F$ . Si  $N$  est une zone d'isolement pour  $F$ , alors elle est une zone d'isolement pour  $f$ . En outre

$$Con^*(Inv(N, f)) \approx Con^*(Inv(N, F)) \quad (3.19)$$

Les resultats précédent impliquent que si l'application de Poincaré  $g$  donnée par les équations de Lorenz (3.1) est remplacée par une extension sur un plan à plusieurs valeurs  $G$  telles que  $g(x) \in G(x)$  et  $N$  est une zone d'isolement pour  $G$ , alors toute information sur les indices obtenus pour  $G$  sont valables pour  $g$ . Le théorème de convergence que nous allons voir est typique de cette étape, les états de toute information sont des indices de  $g$  pouvant être déterminée par l'application à valeurs multiples suffisamment petite d'extension  $G$ .

**Théorème 3.5 :**

Soit  $N$  une zone d'isolement pour  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , est une fonction continue de Lipschitz. Soit  $\{F_n\}$  une famille d'extensions de  $f$  telle que  $F_n \rightarrow f$ . Alors, pour  $n$  suffisamment grand,  $N$  est une zone d'isolement pour  $F$ .

La troisième étape de la preuve a besoin de la combinaison des invariants algébriques d'une théorie des application à valeurs multiples finis représentables, est de combler le fossé entre la dynamique continue des équations de Lorenz (3.1) et la dynamique finie de l'ordinateur. Par conséquent, ils sont plus facilement accessibles que les approximations simpliciales. Pour obtenir des informations cohomologiques générées par l'application continue  $g$  il est nécessaire d'utiliser un computer pour garantir que  $g$  est de Lipschitz par le théorème d'approximation simplicial, mais les calculs doivent être effectués où les approximations simpliciales s'appliquent à toutes les applications à proximité, y compris

les applications  $g$  originales.

Dans la preuve de l'aspect theorem.3.2 techniques suivantes ont été choisies afin de faciliter et de simplifier les calculs :

1. L'ensemble des nombres réels représentables est donnée par le point de coordonnées standard flottant représentable.

2. Les ensembles représentables dans  $\mathbb{R}^3$  ont été choisis par la sélection d'un ensemble compact  $M \subset \mathbb{R}^3$  dans lequel la dynamique du système de Lorenz (3.1) se produit, et un ensemble de vecteurs  $D$  représentable, et un nombre représentable ont été utilisés pour couvrir les ensemble  $M$  est la collection de cubes de billes  $B(d, \eta), d \in D$ , et dans ce cas un ensemble représentable est une union d'une sous-collection de ces cubes.

3. L'arithmétique à double précision et la norme de quatrième ordre Runge-Kutta avec  $\frac{100}{20^{20}}$  taille de pas ont été utilisées pour intégrer le système de Lorenz (3.1). Cela s'est traduit par la croissance facteur pour l'équation (3,1) et dans la fonction  $G$  décrite dans (3.1) étant d'environ  $10^6$  du nombre de points de la grille initiale

Afin de prouver l'existence d'une suite de  $F_N$  finie de l'extensions représentable  $f$  nous introduisons la définition suivante :

**Définition 3.9 :**

Soit  $M_0 \subset M$ . Un application à plusieurs valeurs représentables sur  $M_0$  et un application à plusieurs valeurs  $F : M_0 \rightarrow P(M)$  de telle sorte que l'ensemble  $\{F(x) : x \in M_0\}$  est une collection finie d'ensembles représentables.

Soit  $f : M_0 \rightarrow M$  une fonction continue de Lipschitz avec Lipschitz constant  $L$ . Supposons que pour tout vecteur représentable  $d$  on peut calculer un vecteur représentable  $f_0(d)$  tel que  $\|f(d) - f_0(d)\| < \delta$ , où  $\delta$  est un nombre donné représentable. Définissons  $F(X)$  comme le plus petit ensemble convexe qui contient représentable  $B(f_0(x), \delta + L\eta)$ , on obtient une application à plusieurs valeurs  $F : M_0 \rightarrow M$  tels que  $f(x) \in F(x)$  pour tous les  $x \in B(d, \eta)$ .

Ensuite,

$$F^u(x) = \cup_{\|d-x\| \leq \eta} F(d), \text{ and } F^l(x) = \cap_{\|d-x\| \leq \eta} F(d) \quad (3.20)$$

$F^l$  est convexe apprécié parce qu'il est facile de voir que  $F^u(x)$  et  $F^l(x)$  sont finis, représentable, et respectivement supérieure et inférieure des semi-extensions  $f$ . soit  $\delta \rightarrow 0$  résultats en la proposition suivante démontrée dans [Mischaikow et Mrozek (1995-1998)].

**Proposition 3.2 :**

Soit  $M_0 \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble compact, et soit  $f : M_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue de Lipschitz. Alors il existe une suite finie de  $F_n$  extensions représentable  $f$  telle que  $F_n \rightarrow f$  quant  $n \rightarrow +\infty$ .

La quatrième étape de la preuve se compose de calculs numériques de l'application finie à valeurs multiples. Un application de rappel qui suggère fortement l'existence de la dynamique de fer à cheval dans le système de Lorenz (3.1) a été obtenue pour  $(\sigma, r, b) = (45, 54, 10)$ .

L'existence d'un ensemble invariant qui est conjugué à la dynamique pleine campagne sur deux symboles est garantie, car il est possible de remarques que deux rectangles  $R_0$  et  $R_1$  dans le plan  $P$  qui semblent se croisent, où la preuve de la semi-conjugaison décrit dans le theorem.3.2 a été obtenue par le calcul d'une extension à plusieurs valeurs représentables  $G$  recevable, les  $g$  Poincaré telle que  $N = N_0 \cup N_1$  est une zone d'isolement en vertu de  $G$ .

Idéalement, l'extension à plusieurs valeurs  $G$  doit calculée à partir du centre de chaque cube dans la grille des ensembles représentables en utilisant une intégration numérique des équations de Lorenz (3.1) et intégrant toutes les erreurs dans la taille de la valeur attribuée. Dans ce cas, des difficultés techniques surgissent en raison de la croissance exponentielle de ces erreurs causées par les quatre sources :

- (i) Le calcul approché de la machine,
- (ii) La procédure numérique utilisée pour intégrer les équations,
- (iii) Extension de la valeur du centre d'un cube à l'ensemble des cube par le biais des estimations constante de Lipschitz. Dans ce cas, les estimations d'erreur ont été fondées

par l'inégalité de Gronwall, les constantes de Lipschitz locale, et les normes logarithmique.

(iv) L'estimation du point d'intersection de la trajectoire avec la section transversale de deux étapes consécutives de la méthode numérique. Dans ce cas, les erreurs ont été estimées en utilisant l'expansion second ordre de Taylor de la solution.

La cinquième étape de la preuve est basée sur le calcul de la combinatoire des calculs de l'indice de Conley pour l'application  $G$  à valeurs multiples. Pour ce faire, il faut d'abord trouver une paire d'index  $(N, L)$  qui peut être déterminée par l'inspection, parce que le groupe de cohomologie que d'intérêt est  $H_1(N, L)$ , et ensuite à déterminer l'application-index :

$$I_G^* : H^*(N, L) \rightarrow H^*(N, L). \quad (3.21)$$

Pour des problèmes plus généraux de l'application  $G$  est un application à plusieurs valeurs simpliciales, parce que  $D$  peut être considérée comme l'ensemble des sommets d'une décomposition simpliciale de  $P$ .

## 3.2 Les modèles géométriques de l'équation de Lorenz

L'exemple d'un singulier Axiom Un champ de vecteurs sans cycles et avec un équivalent du singulier ensemble de base à l'attracteur de Lorenz introduit dans [Guckenheimer (1976)] appartiennent à l'intérieur de l'ensemble  $C^r(M)$  des champs vecteur  $C^r$  dans  $M$  dont éléments essentiels sont hyperboliques. Cet exemple se compose d'un champ de vecteurs sur une variété compacte qui ne réside pas dans la fermeture de  $\Omega$  - stable ou Axiom Un champs de vecteurs. L'importance de cet exemple est qu'il possède des propriétés d'instabilité supplémentaire, non topologiquement  $\Omega$ -stable et la violation de l'axiome ne se différencient que dans les exemples qui ont précédent singularités non isolées dans les parties non-attractif de l'ensemble de non-déviations [Abraham et Marsden

(1967), Abraham (1972)]. En outre, il confirme que ce n'est pas vrai que les singularités d'un champ de vecteurs sont isolées dans son ensemble de non-déviations. Cet exemple est basé sur des études numériques du système de Lorenz (3.1) avec les valeurs de bifurcation classique, c'est à dire  $\sigma = 10, r = 28, b = \frac{8}{3}$ . L'approche de la construction d'un tel exemple est donné par les étapes suivantes :

1. Définir  $C^\infty$  un champ de vecteur  $f$  en utilisant les coordonnées  $(x, y, z)$  dans  $\mathbb{R}^3$  dans une région délimitée. L'intérieur de cette région est  $A$ , un invariant ensemble compact 2-D qui est une attractor.

2. Supposons que  $f$  champ de vecteurs a les propriétés suivantes :

(a) Le champ de vecteurs  $f$  a trois points singuliers :

$$p = (0, 0, 0), q_{\pm} = (\pm 1, \pm \frac{1}{2}, 1), \quad (3.21)$$

$p$  est une selle avec un à deux dimensions stables  $W^s(p)$  et  $q_{\pm}$  multiples sont des points selle avec une dimension variétés stables  $W^s(q_{\pm})$ . Les valeurs propres négatives de  $f$  à  $q_{\pm}$  ont de grandes valeurs absolues et que le reste des valeurs sont complexes avec des espaces propres engendré par  $\frac{\partial}{\partial y}$  et  $\frac{\partial}{\partial z}$ . Les parties réelles de ces valeurs propres sont de petite taille.

(b) Le rectangle

$$\{(x, y, z) : x = 0, -1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\} \quad (3.22)$$

est contenu dans  $W^s(p)$ .

(c) Les vecteurs propres stables de  $f$  à  $p$  sont  $\frac{\partial}{\partial y}$  avec une valeur propre grande en valeur absolue et  $\frac{\partial}{\partial z}$  et une valeur propre faible en valeur absolue.

(d) La variété instable  $W^u(p)$  contient le segment de  $(-1, 0, 0)$  à  $(1, 0, 0)$  et a une valeur propre de valeur absolue intermédiaires. Les segments de  $(\pm 1, -1, 1)$  à  $(\pm 1, 1, 1)$  sont contenues dans  $W^s(q_{\pm})$ .

3. Considérant le carré

$$R = \{(x, y, z) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, z = 1\} \quad (3.23)$$

et  $\theta$  son Poincaré carte de retour. Dans ce cas, la carte  $\theta$  n'est pas définie lorsque  $f$  est de  $\pm 1$  ou  $0$ , puisque ces points sont situés dans la variété stable de l'un des points singuliers et les orbites dans  $R$  pour  $f = \pm 1$  ne jamais laisser  $R$  tandis que celles pour  $f = 0$  ne jamais revenir. A tous les autres points de  $R$ ,  $\theta$  est définie.

4. Soit

$$\begin{cases} R_+ = R \cap \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1\} \\ R_- = R \cap \{(x, y, z) : -1 \leq x \leq 0\} \end{cases} \quad (3.24)$$

Définir  $\theta_{\pm}$  à la restriction de  $\theta$  à  $R_{\pm}$ . Supposons que

(a) Il y a des fonctions  $f_{\pm}, g_{\pm}$  et un certain nombre  $\alpha > 1$  avec les propriétés

$$\begin{cases} \theta_{\pm}(x, y) = (f_{\pm}(x), g_{\pm}(x, y)) \\ 0 < \frac{\partial g_{\pm}}{\partial y} < \frac{1}{2} \\ \frac{\partial f_{\pm}}{\partial x} > \alpha. \end{cases} \quad (3.25)$$

(b) Les nombres  $\rho_{\pm} = \lim_{x \rightarrow 0} f_{\pm}(x)$  ont les propriétés :

$$\begin{cases} \rho_+ < 0, \\ \rho_- > 0, \\ \theta_-(\rho_+) < 0, \\ \theta_+(\rho_-) > 0. \end{cases} \quad (3.26)$$

(c) Les premières intersections de  $W^u(p)$  avec  $R$  se produisent au niveau des points avec  $x = \rho_{\pm}$ .

(d) Les images de  $g_{\pm}$  sont contenues dans les intervalles de  $[\frac{\pm 1}{4}, \frac{\pm 3}{4}]$ .

Par la résolution d'un système d'équations différentielle linéaires près du point selle  $p$ , il est facile de montrer que, à un point  $p$  on a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial g_{\pm}(x, y)}{\partial y} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial f_{\pm}(x, y)}{\partial x} = \infty$ . Depuis les trajectoires de  $R_{\pm}$  sont arbitrairement proches de  $p$ , puis les applications retour

$\theta_{\pm}$  ont des singularités comme une puissance de  $f$ .

Si l'on suppose que le champ de vecteurs  $f$  est étendue à un champ de vecteurs sur une  $M$  compacte 3-variété, alors on a les résultats suivants qui ont été démontrés dans [Guckenheimer (1976)] :

**Théorème 3.6 :**

(a) Il existe un voisinage  $U$  de  $f$  dans l'espace des champs vectoriels  $C^r$  sur  $M$  ( $r > 1$ ) et un ensemble  $V$  de la deuxième catégorie dans  $U$  tel que, si  $g \in V$ , puis  $g$  a un point singulier qui n'est pas isolé dans son ensemble non-dévié.

(b) Le champ de vecteurs  $f$  a un voisinage  $U$  dans l'espace des champs vectoriels  $C^r$  sur  $M$  ( $r > 1$ ) avec la propriété que si  $V \subset U$  est un ensemble ouvert dans l'espace des champs vectoriels  $C^r$ , alors il y a champs de vecteurs de  $V$  dont les ensembles non-dévié ne sont pas homéomorphes.

**Chaoticité de l'attracteur de Lorenz géométriques.** La chaoticité de l'attracteur de Lorenz géométriques décrites ci-dessus peut être considéré dans le calcul de la dimension de Hausdorff dans [Lizana et Mora (2008)], où la limite inférieure de cette dimension a été estimée pour la géométriques Lorenz attracteur  $\Lambda$  (avec flot  $L$ ) en termes de valeurs propres de la singularité et la dynamique symbolique associé à la répartition géométrique avec l'attracteur dans le cas homocline, c'est à dire, lorsque les deux branches de la variété instable de la singularité unique  $O$  répondent à ses multiples stable. En effet, soit  $F(x, y) = (f(x), g(x, y))$  et soit l'application retour Poincaré  $F$  induite par le flot de  $L$  pour certains surface, et soit  $\Lambda_F$  l'attracteur hyperbolique de  $F$ . Le résultat suivant a été démontré dans [Lizana et Mora (2008)]

**Théorème 3.1** *Pour le cas homocline, il existe  $0 < \gamma < 1$  tel que*

$$\dim_H(\Lambda_F) \geq 1 + \frac{\ln \rho(A)}{\ln(\frac{1}{\gamma})} > 1, \tag{3.27}$$

où  $\rho(A)$  est le rayon spectral de la matrice  $A$ , un  $(0?1)$ -matrice qui décrit la répartition géométrique des  $F$  dans le  $y$ -direction.



Un corollaire a été aussi donnée en [Lizana et Mora (2008)]

**Corollaire 3.1 :**

Pour le cas homocline, la dimension de Hausdorff de l'attracteur de Lorenz géométrique  $\Lambda$  satisfait la borne suivante

$$\dim_H(\Lambda) \geq 2 + \frac{\ln \rho(A)}{\ln(\frac{1}{\gamma})} > 2 \quad (3.28)$$

**Transitivité de l'attracteur de Lorenz.** En fait, il a été prouvé dans [Tucker (1996 (b))] que certaines des applications unidimensionnelles de Poincaré du modèle géométrique Lorenz ne sont pas de bons modèles de la circulation réelle. La méthode d'analyse est la construction d'une famille du boulanger fatigué et la preuve que l'expansion uniforme n'est pas une condition suffisante pour la transitivité topologique. En effet, l'application de boulanger  $B : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  est donnée par

$$B(x) = \sin(x)(2|x| - 1) \quad (3.29)$$

dans lequel l'intervalle  $I = [-1, 1]$  devrait être considéré comme un morceau de pâte à pain dans la moitié des réductions  $I$  il tend alors les deux moitiés d'un facteur et met enfin l'une des pièces résultant sur le dessus de l'autre. L'application (3.29) permet de définir une pâte complètement mélangée, à savoir l'application  $B$  est topologiquement transitive sur  $I$ .

**Définition 3.10 :**

Considérons un application  $f : I \rightarrow I$  où  $I$  est tout intervalle compact.  $f$  est topologiquement transitive sur  $I$  si, pour quelque deux ensembles ouverts  $U, V \subset I$  existe  $n > 0$  tel que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ .

L'application Fatigué de Baker (TBMs)  $(B_s)_{1 < s < 2}$  définie dans [Tucker (1996 (b))] ont été obtenus en supposant que boulanger est un peu fatigué étirer la pâte toute la journée, c'est-à-dire écartant les deux moitiés par un facteur  $s \in (1, 2]$ , au lieu d'un facteur 2. Ainsi, l'application du boulanger fatigué (TBM) est définie par

$$B(x) = \sin(x)(s|x| - 1) \quad (3.30)$$

Dans ce cas, l'application  $B_s$  est topologiquement transitive sur  $I$  pour certaines valeurs de  $s$  et il est en expansion uniforme sur  $I$  si  $s > 1$ .

On peut obtenir le résultat suivant démontré dans [Tucker (1996 (b))]

**Théorème 3.7 :**  $B_s$  est topologiquement transitif sur  $I$  si et seulement si  $s \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ .

Comme invariance et de l'expansion sont remplies trivialement le corollaire suivant

**Corollaire 3.2 :**  $B_s$  est chaotique sur  $I$  si et seulement si  $s \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ .

Plusieurs hypothèses simplificatrices ont été faites sur des applications à une dimension de Poincaré du modèle géométrique Lorenz décrit dans le début de cette section. Dans [Tucker (1996 (b))] un moyen de surmonter ces simplifications se fait le long des conditions plus véridique sur les application de Poincaré. En effet, le modèle géométrique Lorenz exigent à peu près les conditions suivantes de la classe des applications

$$f_a : [-a, a] \rightarrow [-a, a]$$

$$f_a(x) = \sin(x)(f(|x|) - a) \quad (3.31)$$

quand  $a > c$  et  $(\sigma, b, r) = (10, \frac{8}{3}, 28)$  où, pour toutes  $x > 0$ ,  $f$  satisfait :

- (1)  $f(x) = kx^v + O(x^v)$  , où  $k > 0$  et  $v \in (0, 1)$ ,
- (2)  $f''(x) < 0$ ,
- (3)  $f(c) = 2c$  pour certains  $c > 0$ ,
- (4)  $f'(x) > \sqrt{2}$

Dans ce cas, pour les valeurs des paramètres usuels, condition (4) ne tient pas. Une version plus souple de (4) est donnée par  $(\tilde{4}) (f^2)'(x) > \sqrt{2}, s < \sqrt{2}$ , et dans ce cas, on a une des applications de Poincaré  $C^0$ -proche de TBM définie par (3.30). Ces applications sont des modèles Poincaré très pauvres de l'écoulement Lorenz. En outre, l'utilisation de garantir des conditions plus douces transitivity topologique sont présentés

dans [Robinson (1984), Tucker (1996 (a))] donne moins de description de la dynamique réelle de l'équation de Lorenz (3,1) si elles ne sont pas uniformément en pleine expansion. Dans [Tucker (1996 (b))] d'une manière totalement nouvelle de traiter ce problème a été résolu en considérant toute série de différents paramètres  $(\sigma, b, r) = (10, \frac{8}{3}, 24.06)$  que celui classique où l'ensemble invariant du système de Lorenz géométrique passe d'un fer à cheval instable pour être un attracteur stable.

Notez que pour une certaine petite zone  $(\sigma, b, r) = (10, \frac{8}{3}, 24.06)$ , les conditions (1) et (4) peut être supprimé presque entièrement sans aucune perte de transitivité topologique comme indiqué dans [Tucker (1996 (a))]. Ainsi, le problème ci-dessus a été résolu en considérant les conditions suivantes sur l'application (3.30)

- ( $\tilde{1}$ )  $f(0) = 0$  et  $f'(0^+) > 0$ ,
- ( $\tilde{2}$ )  $f''(x) < 0$ , pour tous les  $x > 0$ ,
- ( $\tilde{3}$ )  $f(c) = 2c$  pour certains  $c > 0$ ,
- ( $\tilde{4}$ )  $f'(c) \geq 1$ .

Ainsi, pour devenir plus grand que  $c$ , le modèle unidimensionnel avec conditions ( $\tilde{1}$ ) – (4) présente un fer à cheval, ce qui confirme les résultats de Mischaikow et Mrozek. En outre, il a été montré dans [Tucker (1996 (a))] que par un argument de perturbation, l'application (3.30) peut être transformée en un application en deux dimensions et si  $R_{a,b}$  correspondant à une application de Poincaré d'un flux en trois dimensions, alors l'application **2-D** induit une attirer ensemble  $A$  dans la zone ouvert des paramètres  $(a, b)$  dans lequel  $R_{a,b}$  est topologiquement transitif sur  $A$  et a des effets positifs les exposants de Lyapounov pour tous  $x \in A$ .

**Familles Lorenz-like avec des points critiques.** Dans [Luzzatto et Viana (2000)] une étude sur l'interaction entre le comportement singulier de comportement (correspondant à près de trajectoires équilibres) et critique (près des régions de pliage) a été donné à l'aide d'un application dimentional d'une familles dite-Lorenz comme avec criticités comme des modèles de la dynamique non lisse riche en dimension un.

Notez que les familles Lorenz-like avec criticités  $\varphi_a$  définies ci-dessous en (3.32) est

inspiré par les propriétés de l'écoulement d'origine Lorenz (3.1). En particulier, l'étude de la bifurcation qui se produit en tant que paramètre traverse la valeur  $a = c$ , et la persistance de l'attracteur de Lorenz pour tous les  $a < c$ . En effet, soit  $\{\varphi_a\}$  est une famille d'applications réels de la forme

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} \varphi(x) - a & \text{si } x > 0 \\ -\varphi(-x) + a & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

où  $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  est lisse et vérifie les propriétés suivantes qui le rend en expansion uniforme pour tous les paramètres jusqu'à  $c$  à l'aide de la mesure persistance théorique des exposants de Lyapunov positifs prouvés par Jakobson dans [Jakobson (1981)] pour la famille des applications quadratiques  $f_a(x) = 1 - ax^2$  à proximité des valeurs de paramètres  $\bar{a}$  satisfaisant aux conditions de [Misiurewicz (1981)].

*L1* :  $\varphi(x) = \psi(x^\lambda)$  pour tous les  $x > 0$ , où  $0 < \lambda < \frac{1}{2}$  et  $\psi$  est un application lisse définie sur  $\mathbb{R}$  avec  $\psi(0) \neq 0$  et  $\psi'(0) \neq 0$ ;

*L2* : Il existe certains  $c > 0$  tel que  $\varphi'(c) = 0$ ;

*L3* :  $\varphi''(x) < 0$  pour tout  $x > 0$ .

*L4* : Soit  $x_{\sqrt{2}}$  désigne le point unique  $(0, c)$  tels que  $\varphi'(x_{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$ , nous supposons

$$0 < \varphi_a(x_{\sqrt{2}}) < \varphi_a(x_a) < x_{\sqrt{2}} \quad (3.33)$$

pour tous les  $a \in (a_2, c]$ .

*L5* :  $|(\varphi_c^2)'(x)| > 2$  pour tous les  $x \in [-c, c] \setminus \{0\}$  tels que  $|\varphi_c(x)| \in [x_{\sqrt{2}}, c]$

Par conséquent, les résultats suivants ont été démontré dans [[Luzzatto et Viana (2000)]]

**Proposition 3.3** : pour tout  $a \in [a_1, c]$ , alors on a

1. L'intervalle  $[-a, a]$  est invariant en avant une  $\varphi|_{[-a, a]}$  est transitive.
2. Nous avons

$$|(\varphi_a^n)'(x)| \geq \min \left\{ \sqrt{2}, \left| \varphi_a'(x) \right| \right\} (\sqrt{2})^{n-1} \quad (3.34)$$

pour tous les  $x \in [-a, a]$  tel que  $\varphi_a^j(x) \neq 0$  pour chaque  $j = 0, 1, \dots, n-1$ .

**Théorème 3.8 :**

Soit  $\{\varphi_a\}$  une famille de Lorenz-Link satisfaisant les conditions  $L1 - L5$ . Ensuite, il ya  $\sigma > 0$  et  $A^+ \subset \mathbb{R}$  telle que

$$|(\varphi_a^j)'(c_1(a))| \geq e^{\sigma j} \quad (3.35)$$

pour tous les  $a \in A^+$  et  $j \geq 1$  et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{m(A \cap [e, e + \varepsilon])}{\varepsilon} = 1 \quad (3.36)$$

( $m =$  mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ ).

En outre, il est y  $\sigma_1 > 0$  tel que si  $a \in A^+$  alors pour  $m$  - presque tous  $x \in [-a, a]$ , nous avons

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\log(\varphi_a^n)'(x)| \geq \sigma_1 \quad (3.37)$$

### 3.3 Structure de l'attracteur de Lorenz

Soit  $B$  désigner l'espace de Banach de  $C^r$ -systèmes dynamiques lisses  $X(r \geq 1)$  avec le  $C^r$ -topologie, sur une surface  $M$  lisse en trois dimensions. Soit  $W^s = W^s(X)$  désigne la variété stable à deux dimensions de la selle. Soit  $W^u = W^u(X)$  désigne la variété instable de  $O$  et deux trajectoires  $\Gamma_{1,2} = \Gamma_{1,2}(X)$  émanant d'elle. Supposons que dans le domaine  $U \subset B$  chaque  $X$  système a un état d'équilibre  $O$ , du type de selle, c'est-à-dire  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3$  cale pour les racines  $\lambda_i = \lambda_i(X)$ ,  $i = 1, 2, 3$  de l'équation caractéristique à  $O$ , et la valeur de selle  $\sigma(X) = \lambda_2 + \lambda_3 > 0$ . Ici, il est supposé que, dans une certains application locale  $V = \{(x_1, x_2, x_3)\}$ , contenant  $O$ ,  $X$  peut être écrit sous la forme

$$x_i = \lambda_i x_i + P_i(x_1, x_2, x_3), i = 1, 2, 3 \quad (3.38)$$

car dans ce cas, il est connu que les deux  $W^s$  et  $W^u$  dépendent en douceur sur  $X$  sur chaque sous-ensemble compact.

Supposons que le système  $X_0 \subset U$  satisfait aux conditions suivantes :

1.  $\Gamma_i(X_0) \subset W^s(X_0)$ ,  $i = 1, 2$ , c'est-à-dire  $\Gamma_i(X_0)$  est doublement asymptotique à  $O$ .
2.  $\Gamma_1(X_0)$  et  $\Gamma_2(X_0)$  approchent à  $O$  tangentiellement.

Par conséquent, on obtient le lemme suivant :

**Lemme 3.1 :**

(a) Si  $\lambda_1 < \lambda_2$  puis le non-collecteur avant  $W_{\mathcal{O}}^{ss}$  de  $W_{\mathcal{O}}^s$ , composé de  $O$  et les deux trajectoires tangentes à l'axe  $x_1$  à la point  $O$ , divisant  $W_{\mathcal{O}}^s$  en deux domaines ouverts :  $W_+^s$  et  $W_-^s$ .

(b) Si  $\Gamma_i(X_0) \subset W_+^s(X_0)$ , puis  $\Gamma_i$  est tangent au demi-axe positif  $x_2$ .

(c) Si  $v_1$  et  $v_2$  soit suffisamment petits zones de la séparatrice papillon  $\bar{\Gamma} = \overline{\Gamma_1 \cup O \cup \Gamma_2}$ , et  $M$  est la composante de connexe de l'intersection de  $W_+^s(X_0)$  avec  $v_i$ , qui contient  $\Gamma_i(X_0)$ . Puis  $M_i$  est un en deux dimensions  $C^0$ -lisse éther collecteur homéomorphe à un cylindre ou à une bande de Mobius.

Supposons que les valeurs séparatrice  $A_1(X_0)$  et  $A_2(X_0)$ , ne sont pas égales à zéro. Ensuite, il résulte de ces hypothèses, les résultats suivants

**Lemme 3.2 :**

Le système  $X_0$  appartient à l'ensemble de bifurcation  $B_1^2$  de codimension deux, et  $B_1^2$  est l'intersection de deux surfaces de bifurcation  $B_1^1$  et  $B_2^1$  de chaque codimension un, où  $B_i^1$  correspond à la boucle séparatrice  $\bar{\Gamma}_i = \overline{O \cup \Gamma_i}$ .

Prenons une famille à deux paramètres des systèmes dynamiques  $X(\mu)$ ,  $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ ,  $|\mu| < \mu_0$ ,  $X(0) = X_0$ , tel que  $X(\mu)$  croise  $B_1^2$  seulement le long  $X_0$  et seulement pour  $\mu = 0$ . Supposons également que la famille  $X(\mu)$  est transversale à  $B_1^2$ , autrement dit, par transversalité pour dire que le système  $X(\mu)$  boucle  $\Gamma_1(X(\mu))$ , dévie de  $W_+^s(X(\mu))$  d'une valeur de l'ordre de  $\mu_1$ , et la boucle  $\Gamma_2(X(\mu))$  s'écarte de  $W_+^s(X(\mu))$  d'une valeur de l'ordre de  $\mu_2$ . Dans [Shilnikov (1970)] les hypothèses ci-dessus impliquent que, dans la transition vers un système proche de  $X_0$ .

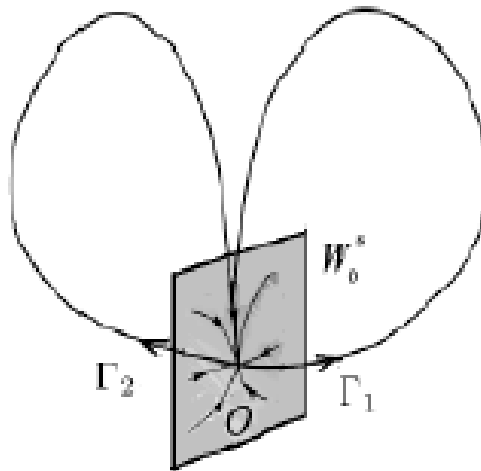


FIG. 3-2 – Illustration de homocline papillon

la boucle séparatrice ne peut que générer une orbite périodique qui est du type de selle. En outre, supposons que la boucle  $\Gamma_1(X_0) \cup O$  génère une orbite périodique  $L_1$  pour  $\mu_1 > 0$  et  $\Gamma_2(X_0) \cup O$  génère l'orbite périodique  $L_2$  pour  $\mu_2 > 0$ . Soit  $U_0$  le domaine correspondant à  $U$ , qui est l'intersection des régions de stabilité pour  $L_1$  et  $L_2$ , à savoir, le domaine dans lequel les orbites périodiques  $L_1$  et  $L_2$  sont structurellement stable. Soit  $W_i^s$  une variété stable de  $L_i$  pour le système  $X \subset U_0$  et celui instable par  $W_i^u$ . on a le lemme suivant :

**Lemme 3.3 :**

- (a) Si  $A_i(X_0) > 0$ , alors  $W_i^u$  est un cylindre.
- (b) si  $A_i(X_0) < 0$ , alors  $W_i^u$  est un ruban de Mobius.
- (c) Si  $M$  est un collecteur orientable, puis  $W_i^s$  est un cylindre si  $A_i(X_0) > 0$ . Sinon  $W_i^s$  est un ruban de Mobius.

L'étude des signes des valeurs de la séparatrice donne trois cas principaux qui sont :

**Cas A** (orientable)  $A_1(X_0) > 0, A_2(X_0) > 0$ ,

**Cas B** (semiorientable)  $A_1(X_0) > 0, A_2(X_0) < 0$ ,

**Cas C** (non orientable)  $A_1(X_0) < 0, A_2(X_0) < 0$ .

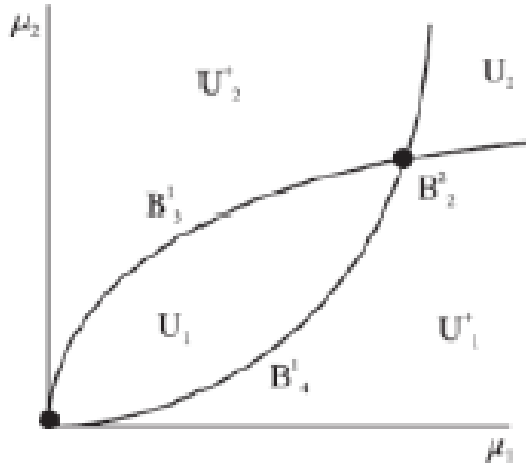


FIG. 3-3 – Schématisation de diagramme de bifurcation de l'attracteur de Lorenz (3.1) dans le plan  $(\mu_1, \mu_2)$

Le domaine  $U_0$  contient deux surfaces de bifurcation  $B_3^1$  et  $B_4^1$  dans chacun des trois cas ci-dessus :

**Lemme 3.4 :**

(a) Dans le cas **A**,  $B_3^1$  correspond à l'inclusion  $\Gamma_1 \subset W_2^s$  et  $B_4^1$  correspond à l'inclusion  $\Gamma_2 \subset W_1^s$ ,

(b) Dans le cas **B**,  $B_3^1$  correspond à l'inclusion  $\Gamma_1 \subset W_1^s$  et  $B_4^1$  correspond à l'inclusion  $\Gamma_2 \subset W_1^s$ ;

(c) dans le cas **C**,

(c-1) Les orbites générées  $L_1$  et  $L_2$ , se posent.

(c-2) Il se pose aussi une orbite périodique selle  $L_3$  qui fait un tour le long  $\Gamma_1(X_0)$  et  $\Gamma_2(X_0)$ ,

(c-3) Si les deux  $W_i^u$  sont des bandes de Mobius,  $i = 1, 2$ , et la variété instable  $W_3^u$  de l'orbite périodique  $L_3$  est un cylindre, et dans ce cas les inclusions  $\Gamma_1 \subset W_2^s$  et  $\Gamma_2 \subset W_3^s$  correspondent à des surfaces  $B_3^1$  et  $B_4^1$ , respectivement.

Maintenant, supposons que  $B_3^1$  et  $B_4^1$  se coupent transversalement sur l'ensemble de



bifurcation  $B_2^2$ , c'est-à-dire les courbes  $B_3^1$  et  $B_4^1$  se croisent en un point  $\mu_1 = (\mu_{11}, \mu_{12})$ . Soit  $U_1$ , le domaine compris entre  $B_3^1$  et  $B_4^1$ . Supposons que, pour chaque  $X \in U$  il existe une transversale  $D$  ayant des propriétés suivantes :

1. Les coordonnées euclidiennes  $(x, y)$  peuvent être introduits sur  $D$  tel que

$$D = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| < 2\} \quad (3.39)$$

2. L'équation  $y = 0$  décrit une composante connexe  $S$  de l'intersection  $W_O^s \cap D$  telle qu'aucune  $\omega$ -semitrajectoire qui commence sur  $S$  possède un point d'intersection avec  $D$  pour  $t > 0$ .

3. La cartographie  $T_1(x) : D_1 \rightarrow D$  et  $T_2(x) : D_2 \rightarrow D$  est définie le long des trajectoires de système  $X$ ,

$$\begin{cases} D_1 = \{(x, y) : |x| \leq 1, 0 < y \leq 1\}, \\ D_2 = \{(x, y) : |x| \leq 1, -1 \geq y < 1\}, \end{cases} \quad (3.40)$$

et  $T_i(x)$  s'écrit sous la forme,

$$\begin{cases} \bar{x} = f_i(x, y) \\ \bar{y} = g_i(x, y) \end{cases} \quad (3.40)$$

où  $f_i, g_i \in C^r, i = 1, 2$ .

4.  $f_i$  et  $g_i$  admettent des extensions continue sur  $S$ , et on a

$$\begin{cases} \lim_{y \rightarrow 0} f_i(x, y) = x_i^{**} \\ \lim_{y \rightarrow 0} g_i(x, y) = y_i^{**} \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (3.41)$$

- 5.

$$\begin{cases} T_1 D_1 \in P_{i_1} = \{(x, y) : \frac{1}{2} \leq x \leq 1, |y| < 2\}, \\ T_2 D_2 \in P_{i_2} = \{(x, y) : -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}, |y| < 2\}. \end{cases} \quad (3.42)$$

6. Si  $\|\cdot\| = \sup_{(x,y) \in D \setminus S}$ , soit  $T(X) \equiv T_i(X) \setminus D_i, (f, g) \equiv (f_i, g_i), i = 1, 2$ . on impose les restrictions suivantes sur  $T(X)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|f_x\| < 1, \\ 1 - \|(g_y)^{-1}\| \cdot \|f_x\| > 2\sqrt{\|(g_y)^{-1}\| \|g_x\| \|(g_y)^{-1} \cdot f_y\|} \\ \|(g_y)^{-1}\| < 1, \\ \|(g_y)^{-1} \cdot f_y\| \|g_x\| < (1 - \|f_x\|)(1 - \|(g_y)^{-1}\|) \end{array} \right. \quad (3.43)$$

Par conséquent, on a le résultat suivant :

**Lemme 3.5 :**

Dans une petite zone de  $S$  la représentation suivante du comportement des trajectoires près  $W_O^s$  est valable

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = x_1^{**} + \varphi_1(x, y)y^\alpha, \\ g_1 = y_1^{**} + \psi_1(x, y)y^\alpha, \\ f_2 = x_2^{**} + \varphi_2(x, y)(-y)^\alpha, \\ g_2 = y_2^{**} + \psi_2(x, y)(-y)^\alpha, \end{array} \right. \quad (3.44)$$

où  $\varphi_1, \dots, \psi_2$  sont lisses à l'égard de  $x, y$  pour  $y \neq 0$ , et  $T_i(x)$  satisfait (3.43) pour  $y$  suffisamment petit.

Soit  $A_1(X)$  est la limite de  $\varphi_1$  et  $A_2(X)$  est l'un de  $\psi_2$ . En analogie avec  $A_1(X_0)$  et  $A_2(X_0)$  présenté ci-dessus, on obtient la définition suivante :

**Définition 3.11 :** Les fonctionnelles  $A_1(X_0)$  et  $A_2(X_0)$  sont appelés les valeurs séparatrices.

Ainsi, on obtient le résultat suivant :

**Lemme 3.6 :**

(a) Pour un système situé dans une petite zone du système  $X$  toutes les conditions 1-6 sont réunies près de  $S$ , et la notion de cas orientable, et non orientable semiorientable peut être étendue à tout système de  $X \in U$ .

(b) Le point  $P_i$  de coordonnées  $(x_i^{**}, y_i^{**})$  est le premier point d'intersection de  $\Gamma_i(X)$  avec  $D$ .

Prenons la constante  $q$  définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} q = \frac{1 + \|f_x\| \|(g_y)^{-1}\| + S_{x,y}}{2 \|(g_y)^{-1}\|} \\ S_{x,y} = \sqrt{1 - \|(g_y)^{-1}\|^2 \|f_x\| - 4 \|g_x\| \|(g_y)^{-1}\| \|(g_y)^{-1} \cdot f_y\|} \end{array} \right. \quad (3.45)$$

Par conséquent, on a le résultat suivant

**Lemme 3.7 :**

Si (3.45) est satisfaite, puis  $q > 1$  alors tous les points périodiques sont de type selle.

Si  $\Sigma$  désigne la fermeture de l'ensemble des points de toutes les trajectoires de la cartographie  $T(X)$ , qui sont entièrement contenue dans  $D$  L'ensemble  $\Sigma$  est décrit plus simplement dans le domaine  $U_1$ . D'où les résultats suivants [Afraimovich, and al. (1977)]

**Théorème 3.9 :**

(a) Si  $X \in U_1$  puis  $T(X) |_{\Sigma}$  est topologiquement conjugué avec le régime de Bernoulli  $(\sigma, \Omega_2)$  avec deux symboles.

(b) Le système  $X \in U_2$ , a un ensemble  $\Omega$  à deux dimensions mis en limitant, qui remplit les conditions suivantes :

1. L'ensemble  $\Omega$  est structurellement instable.
2.  $[\Gamma_1, \Gamma_2, O] \subset \Omega$
3. Structurellement stable orbites périodiques sont partout denses dans  $\Omega$ .
4. En vertu de perturbations de  $X$ , orbites périodiques dans  $\Omega$  disparaissant sous l'effet de l'appariement à la boucle de selle séparatrice  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

Afin de reformuler les propriétés de  $\Omega$  en termes d'applications, on considère un domaine  $\tilde{D} \subset D$  défini par : Pour le **cas A**,

$$\tilde{D} = \{(x, y) \in D_1 \cup D_2 : y_2(x) < y < y_1(x)\} \quad (3.46)$$

et dans le **cas B**, par :

$$\tilde{D} = \{(x, y) \in D_1 \cup D_2 : y_{12}(x) < y < y_1(x)\} \quad (3.47)$$

où  $y = y_{12}(x), |x| \leq 1$ , désigne une courbe  $D$  dont l'image se trouve sur la courbe

$y = y_1(x)$ , et enfin dans le **cas C**, soit  $\tilde{\Sigma}$  la fermeture des points de toutes les trajectoires de la cartographie  $T(X)$ , qui sont entièrement contenues dans  $D$ . Ainsi, on a [Afraimovich, and al. (1977)].

**Théorème 3.10** : Si  $X \in U_2$ . Alors

(a)  $\tilde{\Sigma}$  est compact, à une dimension et se compose de deux éléments de connexion dans les **cas A** et **C**, et d'un nombre fini de composants de connexion dans le **cas B**.

(b)  $\tilde{D}$  est feuilletée par une foliation continue stable  $H^+$  dans les feuilles, satisfaisant aux conditions de Lipschitz, le long de laquelle un point est attiré vers  $\tilde{\Sigma}$ ; les images inverses de la ligne de discontinuité  $S : y = 0$  (par rapport à la cartographie  $T^k, k = 1, 2, \dots$ ) sont partout denses dans  $\tilde{D}$ .

(c) Il existe une suite de  $T(X)$ -invariant les ensembles de dimension nulle  $\Delta_k, k \in \mathbb{Z}_+$ , tels que  $T(X)|_{\Delta_k}$  est topologiquement conjugué à une chaîne de Markov topologique finie avec une entropie non nulle, la condition  $\Delta_k \in \Delta_{k+1}$  étant satisfaite, et  $\Delta_k \rightarrow \tilde{\Sigma}$  quand  $k \rightarrow \infty$ .

(d) Le non-errant ensemble  $\Sigma_1 \in \tilde{\Sigma}$  est une fermeture périodiques des points selle de  $T(X)$  et soit  $\Sigma_1 \in \tilde{\Sigma}$  ou  $\Sigma_1 = \Sigma^+ \cup \Sigma^-$ , où :

(d-1) L'ensemble  $\Sigma^-$  est de dimension nulle et est une image de l'espace  $\Omega^-$  d'un certain **TMC**  $(G^-, \Omega^-, \sigma)$  en vertu de l'homéomorphisme  $\beta : \Sigma^- \rightarrow \Sigma^-$  qui conjugue  $\sigma|_{\Omega^-}$  et  $T(X)|_{\Sigma^-}$ ;  $\Sigma^- = \bigcup_{m=1}^{l(X)} \Sigma_m^-, l(X) < \infty$  où  $T(X)(\Sigma_m^-) = \Sigma_m^-, \Sigma_{m_1}^- \cap \Sigma_{m_2}^- = \emptyset$  pour  $m_1 \neq m_2$  et  $T(X)|_{\Sigma_m^-}$  est transitive;

(d-2) L'ensemble  $\Sigma^+$  est compact, unidimensionnel,

(d-3) Si  $\Sigma^+ \cap \Sigma^- = \emptyset$ , alors  $\Sigma^+$  est une attraction dans une certaine zone,

(d-4) Si  $\Sigma^+ \cap \Sigma^- \neq \emptyset$ , alors  $\Sigma^+ \cap \Sigma^- = \Sigma_m^+ \cap \Sigma_m^-$  pour un certain  $m$ , et cette intersection se compose de points périodiques de pas plus de deux orbites périodiques,

(d-4-1) Si  $\Sigma_m^-$  est finie,  $\Sigma^+$  est  $\omega$ -limite pour toutes les trajectoires dans une zone déterminé

(d-4-2) Si  $\Sigma_m^-$  est infini,  $\Sigma^+$  n'est pas localement maximale, mais il est  $\omega$ -limite pour toutes les trajectoires dans  $\tilde{D}$ , l'exclusion de ceux asymptotiques à  $\Sigma^- \setminus \Sigma^+$ .

A la fin de cette section, nous discutons d'un résultat récent de l'existence d'orbites périodiques dans le système de Lorenz (3.1).

**Existence d'une courtes orbites périodiques pour le système de Lorenz.** En appliquant la méthode décrite dans, [Galias et Tucker (2008)] qui prouve rigoureusement l'existence d'orbites périodiques courtes pour le système de Lorenz (3.1) avec  $(\sigma, r, b) = (10, 28, \frac{8}{3})$  sous forme diagonale du système de Lorenz donnée par

$$\begin{cases} x'_1 = \lambda_1 x_1 - k_1(x_1 + x_2)x_3 \\ x'_2 = \lambda_2 x_2 - k_1(x_1 + x_2)x_3 \\ x'_3 = \lambda_3 x_3 + (x_1 + x_2)(k_2 x_1 + k_3 x_2) \end{cases} \quad (3.48)$$

L'équation (3.48) peut être obtenu en utilisant un changement linéaire de variables du système (3.1). L'avantage de cette formule est que les variétés invariantes de l'origine  $P_0 = (0, 0, 0)$  sont tangentes aux axes de coordonnées  $x'_1, x'_2, x'_3$ . Les constantes dans le système (3.48) sont données par

$$\begin{cases} u = \sqrt{(s+1)^2 + 4s(r-1)}, \\ k_1 = \frac{s}{u} \approx 0.2886, \\ k_2 = \frac{(s-1+u)}{2s} \approx 2.1882, \\ k_3 = \frac{(s-1-u)}{2s} \approx -1.2828, \\ \lambda_1 = \frac{(-s-1+u)}{2} \approx 11.8277, \\ \lambda_2 = \frac{(-s-1-u)}{2} \approx -22.8277, \\ \lambda_3 = -q \approx -2.6667. \end{cases} \quad (3.49)$$

Une trajectoire de système de Lorenz est représentée sur la Fig. 3.1. Pour  $(\sigma, r, b) = (10, 28, \frac{8}{3})$ , le système de Lorenz a trois équilibres : L'origine  $P_0 = (0, 0, 0)^T$ , montre à la Fig. 3.1 utilisons le symbole \* a une valeur propre positive  $\lambda_1$  et deux valeurs propres négatives  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  définies dans (3.48), les d'autres équilibres sont présentés dans Fig.3.1 l'utilisation de symboles  $\times$  et  $+$

$$P_{\pm} = \left( \pm \frac{\lambda_2 \sqrt{q(r-1)}}{u}, \pm \frac{\lambda_1 \sqrt{q(r-1)}}{u}, r-1 \right) \quad (3.50)$$

numériquement, les équilibres  $P_{\pm} = (\pm 5.589, \pm 2.896, 27)$  ont une paire de valeurs propres complexes avec des parties réelles positives  $\mu_{1,2} \approx 0.094 \pm j10.19$ , et une valeur propre réelle négative  $\mu_3 = -13.854$ . Afin de trouver une zone de piégeage et de délai de retour moyen pour le système (3.48), l'application de Poincaré  $P$  a été définie par la section

$$\Sigma = \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_3 = 27, x_3' < 0\}. \quad (3.51)$$

### 3.4 Dilatation et de contraction des attracteurs de Lorenz

Dans cette section, nous discutons la dilatation et la contraction des attracteurs de systèmes de Lorenz. En temps continu, ces attracteurs sont des exemples de type Lorenz qui réalisent les systèmes **3-D**.

Soit  $f_{\eta}$  est une famille de champs vecteur  $C^r$ ,  $r \geq 1$  sur  $\mathbb{R}^3$  et soit  $Q_{\eta}$  une singularité hyperbolique,  $W^u(Q_{\eta}, \eta)$  est une variété instable à une dimension tangente au vecteur propre  $v^u$ ,  $W^s(Q_{\eta}, \eta)$  est une variété stable à deux dimensions tangente au vecteur propre  $v^s$ ,  $W^{ss}(Q_{\eta}, \eta)$  est une variété forte stable à une dimension tangente au vecteur propre  $v^{ss}$ ,  $W^{cu}(Q_{\eta}, \eta)$  est une extension variété stable à deux dimensions tangente aux vecteurs propres  $v^s$  et  $v^u$  et  $\Gamma^{\pm}$  deux branches de

$$\Gamma = W^u(Q_{\eta_0}, \eta_0) \subset \{Q_{\eta_0}\} \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^- \quad (3.52)$$

Soit  $q^{\pm}(t)$  une paramétrisation de la solution le long  $\Gamma^{\pm}$  et  $\text{div}_2(q^{\pm}(t))$  la jacobienne de  $f_{\eta_0}$  à  $t$  réservé aux  $T_{\Gamma^{\pm}} W^{cu}$ . Définit le changement de zone à l'intérieur du plan

$$P(q) = T_q W^u(Q_{\eta_0}, \eta_0) \text{ pour } q \in \Gamma \quad (3.53)$$

le long de la longueur entière de  $\Gamma^\pm$  ainsi la quantité  $C_{\eta_0}^\pm$  est donnée par

$$C_{\eta_0}^\pm = \exp \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \text{div}_2(q^\pm(t)) dt \right) \quad (3.54)$$

Supposons que la famille  $f_\eta$  satisfait les conditions suivantes :

(A1) Pour chaque  $\eta$ ,  $f_\eta$  a une singularité hyperbolique  $Q_\eta$  de telle sorte que les valeurs propres de  $Df_\eta(Q_\eta)$  sont réelles avec

$$\lambda_{ss}(\eta) < \lambda_s(\eta) < 0 < \lambda_u(\eta) \quad (3.55)$$

et avec les valeurs propres de  $v^{ss}$ ,  $v^s$  et  $v^u$ , respectivement

(A2) Pour la valeur de bifurcation  $\eta_0$ , il ya une connexion homocline double avec la variété instable de  $Q_{\eta_0}$  contenues dans la variété stable, mais à l'extérieur du collecteur solide et stable, c'est-à-dire  $\Gamma$  donnée par (3.52).

(A3) Pour  $\eta_0$ , le collecteur central  $W^{cu}(Q_{\eta_0}, \eta_0)$  est transversal à la collecteur stable  $W^s(Q_{\eta_0}, \eta_0)$  le long  $\Gamma$ .

(A4) Nous supposons que

$$\begin{cases} \lambda_{ss}(\eta_0) - \lambda_s(\eta_0) + \lambda_u(\eta_0), \\ \lambda_{ss}(\eta_0) < 2\lambda_s(\eta_0) \end{cases} \quad (3.56)$$

(A5) et que

$$B = \frac{C_{\eta_0}^+ + C_{\eta_0}^-}{C_{\eta_0}^+ C_{\eta_0}^-} > 1 \quad (3.57)$$

(A6) Il y a une résonance bijective entre les valeurs propres instables et stables faibles pour  $\eta_0$  :

$$\lambda_u(\eta_0) + \lambda_s(\eta_0) = 0 \quad (3.58)$$

(A7) Soit  $N \subset C^1(\mathbb{R})$  le 3-sous-variété définie par les conditions (A1) - (A6). Nous supposons que la famille  $\{f_\eta\}$  est transversale à  $N$  à  $\eta_0$ .

Ensuite, le résultat suivant a été démontré dans [Morales, et al. (2005)].

**Théorème 3.11 :**

Soit  $\{f_\eta\}$  une famille  $C^k$ -paramétrée de  $C^r$  - champs de vecteurs ( $r, k \geq 3$ ) satisfaisant (A1) - (A7). Ensuite, il ya un ensemble ouvert  $O$  dans l'espace des paramètres avec  $\eta_0 \in Cl(O)$  de telle sorte que  $f_\eta$  a un attracteur de Lorenz pour l'expansion pour tout  $\eta \in O$ .

### 3.5 Attracteurs étranges et sauvages pseudo-hyperbolicité

Dans cette section, nous présentons une classe de systèmes dynamiques avec des attracteurs étranges présentés dans [Turaev et Shilnikov (1996)]. Ces attracteurs sont presque stables, il contiennent un ensemble hyperbolique sauvage :

**Définition 3.12 :**

Un ensemble hyperbolique est appelé sauvage, si le système possède une zone d'absorption embrassant la base d'ensemble hyperbolique dans lequel les sous-ensembles stables et instables peuvent se toucher.

En d'autres termes, un ensemble transitif hyperbolique est dit sauvage si ses variétés stables et instables ont une tangence qui ne peut être éliminé par une petite perturbation. En particulier, si la cartographie Poincaré correspondant à des systèmes continus admet un feuilletage invariante absolument continue de contraction et de la cartographie quotient correspondant augmentent le volume et sont injective, alors l'attracteur chaîne transitive  $A$  est unique et coïncide avec l'ensemble des points accessibles à partir d'un ensemble  $L$  . Dans ce cas, l'attracteur  $A$  est sauvages, si le système appartient à un domaine Newhouse, soit un'ensemble  $C^r$  - ouvert de systèmes pour lesquels  $L$  est contenue



dans un ensemble hyperbolique sauvages. [Palis et Viana (1994)]. Dans ce cas, on a les résultats suivants :

1. Si le système lui-même ou un proche ont une orbite périodique selle avec la trajectoire homocline non transversale le long de laquelle les variétés stables et instables du cycle alors ils ont en général la tangence quadratique.

2. Si la valeur de selle  $|\lambda\gamma|$  est inférieur à 1, où  $\lambda$  et  $\gamma$  sont les multiplicateurs de l'orbite périodique selle. Cette condition est toujours vraie lorsque la divergence du champ de vecteurs est négative dans la zone d'absorption. Ainsi, à proximité du système donné, il existera la soi-disant Newhouse regions [Newhouse (1979)] dans l'espace du système dynamique, c'est à dire les régions de l'instabilité structurelle dense.

3. En raison du fait que les systèmes avec l'ensemble dénombrable d'orbites périodiques de l'arbitraire des degrés élevés de dégénérescences sont denses dans les régions Newhouse [Gonchenko, and al. (1993 (a-b))], puis si la divergence du champ de vecteurs à un signe en alternance dans la zone d'absorption, où la dynamique devient exotique et nécessite un nombre infini continu invariant moduli topologique, nécessaires à la bonne description du système dans les régions Newhouse .

Maintenant, soit  $X$  est un flot lisse ( $C^r, r \geq 4$ ) dans  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 4$ ) présentant un'état d'équilibre  $O$  d'un type de selle de discussion avec les exposants caractéristiques  $\gamma, -\lambda \pm i\omega, -\alpha_1, \dots, -\alpha_{n-3}$ , où  $\gamma > 0, 0 < \lambda < \text{Re } \alpha_j, \omega = 0$ .

Supposons que

$$\gamma > 2\lambda \tag{3.59}$$

Ensuite, on a le résultat suivant :

**Théorème 3.12 :**

Si  $X$  a une boucle homocline, c'est à dire de la séparatrice des rendements  $O$  retourne à  $O$  que  $t \rightarrow \infty$  alors aucune orbite périodique stable pourraient apparaître.

Prenons les coordonnées  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-3}$  et les hypothèses suivantes :

1. L'état d'équilibre est à l'origine.

2. Le collecteur à une dimension instable de  $O$  est tangente à l'axe  $x$  et le collecteur stable  $(n - 1)$  dimensions est tangent à  $\{x = 0\}$ .

3. Les coordonnées  $y_{1,2}$  correspondent aux principaux représentants  $\lambda \pm i\omega$  et les coordonnées  $z$  correspondent à l'exposants non-direction  $\alpha$ .

4. Le flot  $X$  possède une section transversale, de la forme :

$$\Pi = \{\|y\| = 1, \|z\| \leq 1, |x| \leq 1\}. \quad (3.60)$$

5. Le collecteur stable  $W^s$  est tangent à  $\{x = 0\}$  à  $O$ . Ainsi, il est localement donnée par une équation de la forme  $x = h^s(y, z)$  où  $h^s$  est une fonction lisse  $h^s(0, 0) = 0$ ,  $(h^s)'(0, 0) = 0$  au moins lorsque  $(\|y\| = 1, \|z\| \leq 1)$  et que  $|h^s| < 1$ .

Ensuite, on a :

**Lemme 3.8 :**

La surface  $\Pi$  est une section pour  $W_{loc}^s$  et l'intersection de  $W_{loc}^s$  avec  $\Pi$  a la forme  $\Pi_0 : x = h(\varphi, y)$  où  $\varphi$  est la coordonnée angulaire :  $y_1 = \|y\| \cos \varphi, y_2 = \|y\| \sin \varphi$ , et  $h_0$  est une fonction lisse  $-1 < h < 1$ . On peut faire  $h_0 \equiv 0$  par une transformation de coordonnées et nous supposons que cela est fait.

Si nous supposons que toutes les orbites à partir de  $\Pi \setminus \Pi_0$  retour à  $\Pi$ , puis l'application de Poincaré est définie par :  $T_+ : \Pi^+ \rightarrow \Pi, T_- : \Pi^- \rightarrow \Pi$ , où

$$\begin{cases} \Pi^+ = \Pi \cap \{x > 0\} \\ \Pi^- = \Pi \cap \{x < 0\} \end{cases} \quad (3.61)$$

Dans ce cas, il est évident que

**Lemme 3.9 :**

Si  $P$  est un point sur  $\Pi$  avec des coordonnées  $(x, \varphi, z)$ , alors  $\lim_{x \rightarrow -0} T_-(P) = P_-^1, \lim_{x \rightarrow -0} T_+(P) = P_+^1$  où  $P_-^1$  et  $P_+^1$  sont les points d'intersection de la première séparatrices unidimensionnelle de  $O$  avec  $\Pi$ .

Par conséquent, les applications  $T_+$  et  $T_-$  sont définies comme suit :

$$T_-(\Pi_0) = P_-^1, T_+(\Pi_0) = P_+^1 \quad (3.62)$$

De toute évidence, on a le résultat suivant :

**Lemme 3.10 :**

la région de cylindre

$$D = \{\|y\| \leq 1, \|z\| \leq 1, |x| \leq 1\} \quad (3.63)$$

avec deux manches collés autour de la séparatrices remplis par les orbites à partir de  $\Pi$  (plus le point  $O$  et a séparatrices) est un domaine d'absorption de système  $X$ , c'est à dire que les orbites à partir de  $\partial D$  entrent  $D$  et y restent pour toutes les valeurs positives du temps  $t$ .

Il est nécessaire de supposer que le semi-débit est pseudohyperbolic dans  $D$ . Ici, on donne les définitions en raison de Shilnikov [Shilnikov (2002)] et il est plus fort que cela se fait habituellement dans [Hirsh, and al. (1977)], car elle empêche l'apparition de la stabilité des orbites périodiques.

**Définition 3.13 :** Un semi-flot est appelé pseudohyperbolic si les deux conditions suivantes sont remplies :

**A.** A chaque point de l'espace des phases, l'espace tangent est décomposé de façon unique (et cette décomposition est invariante par rapport à le semi-flot linéarisé) en une somme directe de deux sous-espaces  $N_1$  et  $N_2$  (continu en fonction du point) tels que l'exposant maximum de Lyapunov dans  $N_1$  est strictement inférieur à l'exposant minime de Lyapunov dans  $N_2$  : à chaque point  $M$ , pour tous les vecteurs  $u \in N_1(M)$  et  $v \in N_2(M)$  :

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|u_t\|}{\|u\|} < \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|v_t\|}{\|v\|}, \quad (3.64)$$

où  $u_t$  et  $v_t$  désignent le déplacement des vecteurs  $u$  et  $v$  par le semi-flot linéarisé le long de l'orbite du point  $M$  ;

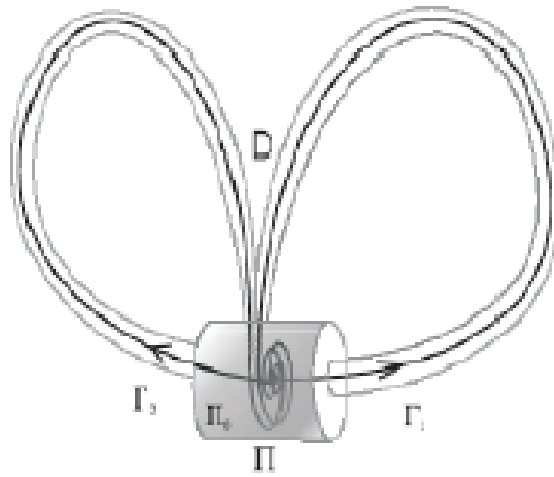


FIG. 3-4 – Illustration schématique de la construction de l'attracteur étrange sauvage

**B.** Le flux linéarisé restreint sur  $N_2$  est le volume en expansion :  $V_t \geq \text{const.}e^{\sigma t}V_0$  avec certains  $\sigma > 0$  ; ici,  $V_0$  est le volume de toutes les régions  $N_2$  et  $V_t$  est le volume de l'évolution de cette région par le semi-flot linéarisé.

# Chapitre 4

## Le chaos du type quasi-attracteurs

Dans ce chapitre, nous discutons des résultats pertinents et les propriétés des quasi-attracteurs comme le troisième type dans la classification des attracteurs étranges des systèmes dynamiques.

### 4.1 Quasi-attracteurs, les concepts et les propriétés

Rappelons que les quasi-attracteurs sont les limites fixes des orbites périodiques et des différents types topologique (par exemple stable et selle orbites périodiques) et des orbites structurellement instable. Ces attracteurs ont les propriétés importantes suivantes :

1. Ils bouclent les séparatrices de la selle, se concentrent ou orbites homoclines des cycles de selle dans le moment de tangence de leur stabilité et variétés instables, car ils renferment des trajectoires singulière non robustes qui sont dangereuses.

2. Une application de fer à cheval de Smale-type, apparaissent dans le voisinage de leurs trajectoires. Cette application contient deux sous-ensemble non négligeables de trajectoires hyperboliques et un sous-ensemble dénombrable d'orbites périodiques stables (voir théorème de Shilnikov) [Shilnikov (1963), et Gavrilov Shilnikov (1972-1973)] d'où le théorème de Newhouse [Newhouse (1980)].

3. Le quasi attractor est la limite ensemble unifié de l'ensemble attirant l'ensemble

de trajectoires, y compris un sous-ensemble à la fois chaotique et stable trajectoires périodiques qui ont de longues périodes et ayant des bassins d'attraction étroits et des régions de stabilité. Il s'agit d'un résultat de l'effet que cet attracteur est percé par un ensemble de bassins d'attraction des différentes orbites périodiques.

4. Les bassins d'attraction des cycles stables sont très étroits.

5. Certaines orbites ne se livrent pas ordinairement en simulations numérique l'exception de quelques fenêtres stabilité assez grande où qu'ils soient clairement visibles.

Les propriétés ci-dessus impliquent que le quasi attracteur a une structure très complexe de bassins d'attraction intégré en terme de conditions initiales et un ensemble de paramètres de bifurcation de mesure non nulle.

Dans ce chapitre, nous présentons quelques exemples de quasi attracteurs, y compris l'application de Hénon, le Anishchenko-Astakhov l'oscillateur, l'application Strelkova-Anishchenko et le circuit de Chua. Pour chaque exemple, nous indiquons le plus important résultats concernant leur nature, en particulier, les différentes méthodes utilisées pour prouver que ces systèmes sont des quasi attracteurs, et donc il n'ya pas de chaos dans les solides.

## 4.2 L'application de Hénon

Dans cette section, nous discutons des résultats sur l'homocline tangence de l'application de Hénon [Hénon (1976)] donnée par

$$h(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - ax^2 + y \\ bx \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

L'application de Hénon (4.1) est un quasi-attracteur.

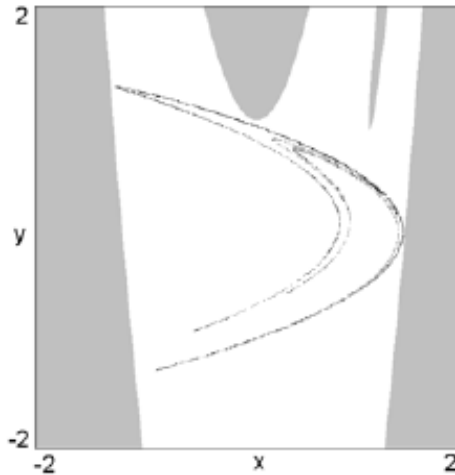


FIG. 4-1 – L’attracteur de Hénon avec son bassin d’attraction (en gris) obtenues pour  $a = 1.4$ ,  $b = 0.3$ .

Pour l’application (4.1) en utilisant une affinité ou transformation linéaires. L’attracteur de Hénon avec son bassin d’attraction (en gris) obtenues pour  $a = 1.4$ ,  $b = 0.3$  est présenté dans Fig. 4.1.

L’application de Hénon (4.1) a les propriétés suivantes :

1. Il a deux points fixes, il est inversible, et il est conjugué à son inverse et son inverse est également une application quadratique. Le paramètre  $b$  est une mesure du taux de contraction zone (dissipation).

2. Il est en général une application 2-D du second degré à la propriété que la contraction est indépendante de variables  $x$  et  $y$ .

3. Il se réduit à la carte du second degré lorsque  $b = 0$ , ce qui est conjugué à la carte logistique.

4. Il a des solutions bornées sur une plage des valeurs  $a$  et  $b$ , et une partie de cette gamme (environ 6%), on obtient des solutions chaotiques.

5. Pour  $a = 1.4$  et  $b = 0.3$ , l’application de Hénon (4.1) a un attracteur chaotique montre Fig. 4.1 qui a un exposant de corrélation  $1.25 \pm 0.02$  et une dimension de l’ordre de  $1.261 \pm 0.003$ . Un algorithme numérique pour estimer les dimensions généralisées pour

les valeurs négatives  $q$  de l'application de Hénon (4.1) a été donnée dans [Pastor-Satorras et Riedi (1996)], parce que la norme de taille fixe et l'algorithme boîte de comptage sont inefficaces pour le calcul généralisé de dimensions fractales de l'ordre  $q < 0$ .

Les résultats presque sur le thème de l'image complète de la dynamique des comportements pour l'application de Hénon (4.1) sont réalisés numériquement. Voir le nouveau livre [Zeraoulia et Sprott (2010)] pour plus de détails.

### 4.2.1 Hyperbolicité uniforme de l'application de Hénon

Dans cette section, nous discutons de la notion d'hyperbolicité uniforme de l'application de Hénon. En effet,

Premièrement, nous avons besoin des définitions et des concepts suivants :

Soit un difféomorphisme  $f$  sur le collecteur  $M$  et ensemble invariant compact  $\Lambda$  qui admet une décomposition dominée en terme de  $E_{1x}$  et  $E_{2x}$

**Définition 4.1 :**

(a) Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  un sous-espace approprié, c-a-d,  $0 < \dim E < n$ . Soit  $F$  est un sous-espace complémentaire, c-a-d,  $\mathbb{R}^n = E \oplus F$ . Alors, le cône unité standard déterminé par les sous-espaces  $E$  et  $F$  est l'ensemble

$$K_1(E, F) = \{(v_1, v_2) : v_1 \in E, v_2 \in F, \text{ et } |v_1| \leq |v_2|\} \quad (4.2)$$

(b) Un cône de  $\mathbb{R}^n$  avec  $E$  de base, notée  $C(E)$ , est l'image  $T(K_1(E, F))$  où  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un automorphisme linéaire tel que  $T(E) = E$ . En particulier, dans  $\mathbb{R}^n$  une cône  $C$  est un ensemble  $C(E)$  pour certains sous-espace propre  $E$  de  $\mathbb{R}^n$ .

(c) Un champ cône  $C_x$  sur  $\Lambda$  est une collection de cônes  $C_x \subset T_x M$  pour  $x \in M$ .

(d) Le champ cône  $C = \{C_x\}$  a constante dimension essentielle orbite le  $\Lambda$  si  $\dim E_x = \dim E_{f(x)}$  pour tous les  $x \in \Lambda$  où  $E_x, E_{f(x)}$  sont les noyaux de  $C_x, C_{f(x)}$ , respectivement.

Or, étant donné un tel champ cône  $C = \{C_x\}_{x \in M}$ , et soit



$$\begin{cases} m_{C,x} = m_{C,x}(f) = \inf_{v \in C_x \setminus \{0\}} \frac{|Df_x(v)|}{|v|} \\ m'_{C,x} = m'_{C,x}(f) = \inf_{v \notin C_{f(x)}} \frac{|Df_{f(x)}^{-1}(v)|}{|v|} \end{cases} \quad (4.3)$$

Ensuite, on a la définition suivante :

**Définition 4.2 :**

(a) Le réel  $m_{C,x}$  est appelé le développement minimum de  $f$  sur  $C_x$  ou de  $Df$  sur  $C_x$ .

(b) Le réel  $m'_{C,x}$  est appelé le co-développement minimum de  $f$  sur  $C_x$  ou de  $Df$  sur  $C_x$ .

(c) Le coefficient de domination de  $f$  sur  $C$  est donnée par

$$m_d(C) = m_d(C, f) = \inf_{x \in \Lambda} m_{C,x} \cdot m'_{C,x} \quad (4.4)$$

d) L'application  $f$  est dominante sur  $C$  plus  $\Lambda$  (ou  $C$  est un domaine dominant de cône sur  $\Lambda$ ) si  $C$  a constante dimension essentielle orbite et

$$m_d(C) > 1 \quad (4.5)$$

(e) L'application  $f$  est fortement dominante sur  $C$  plus  $\Lambda$  si  $C$  a constante dimension essentielle orbite et

$$\left( \inf_{x \in \Lambda} m_{C,x} \right) \left( \inf_{x \in \Lambda} m'_{C,x} \right) > 1 \quad (4.6)$$

Ainsi, les résultats suivants ont été démontrés dans [Newhouse (2004)]

**Théorème 4.1 :**

(a) Supposons que  $f$  est dominante sur  $C$  plus  $\Lambda$ . Ensuite, il existe un unique  $Df$ -invariant fractionnement  $T_\Lambda M = E_1 \oplus E_2$  tel que pour tout  $X \in \Lambda$ , nous avons  $E_{1x} \subset C_x$  et  $E_{2x} \subset T_x M \setminus C_x$ .

En outre, si  $f$  est fortement dominante sur  $C$  plus  $\Lambda$ , alors les fonctions  $x \rightarrow E_{1x}, x \rightarrow E_{2x}$  sont continues en  $x$ .

(b) Une condition nécessaire et suffisante pour  $\Lambda$  est uniformément ensemble hyperbolique pour  $f$ , c'est qu'il y a un nombre entier  $N > 0$  et un champ cône  $C$  avec la dimension constante sur l'orbite de base telle que  $f^N$  est à la fois développée et co-développée sur  $C$ .

**Proposition 4.1 :**

(a) Supposons que  $f$  est dominante sur  $C$  plus  $\Lambda$ . Alors,  $C$  est un champ cône  $f$ -invariant. C'est, pour  $x \in \Lambda$ , nous avons

$$Df_x(C_x) \subset C_{f(x)} \quad (4.7)$$

(b) la condition suffisante pour  $f$  d'avoir une décomposition dominée sur  $\Lambda$ , c'est qu'il y a un nombre entier  $n_0 > 0$  tel que  $f^{n_0}$  a une forte dominée  $C$  champ cône sur  $\Lambda$ .

Les résultats précédents ont été appliquée à la application de Hénon (4.1) réel et complexe, c'est à dire, en ce qui concerne la localisation des paramètres  $a$  et  $b$  soit en  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Ainsi, le résultat suivant a été prouvé aussi dans [Newhouse (2004)].

**Théorème 4.2 :**

Considérons la famille réelle ou complexe de Hénon

$$H_{a,b} = \begin{pmatrix} a + by - x^2 \\ x \end{pmatrix}$$

avec  $0 < |b| \leq 1$ . Soit  $\Lambda_{a,b}$  désigne l'ensemble de points dont les orbites bornées. Supposons que

$$\begin{cases} |a| > \frac{(5+2\sqrt{2})(1+|b|^2)}{4} \\ 0 < |b| \leq 1 \end{cases} \quad (4.8)$$

Dans le cas complexe ou le cas réel avec  $a > 0$ , nous avons que  $\Lambda_{a,b}$  est un invariant non vide compact fixé uniformément hyperbolique. Dans le cas réel avec  $a < 0$ , l'ensemble  $\Lambda_{a,b}$  est vide.

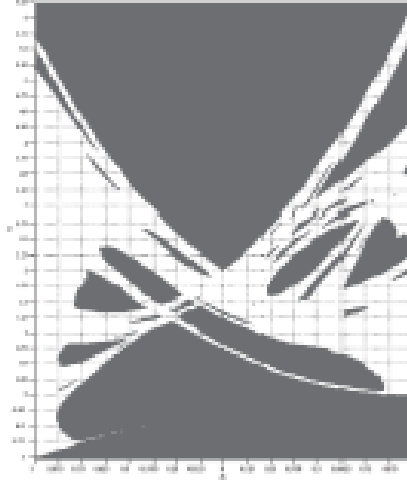


FIG. 4-2 – Plateaux uniformément hyperbolique de la carte de Hénon  $H_{a,b}$ . Ce chiffre est fourni par Z. Arai.

Une autre preuve de l'hyperbolicité uniforme, à savoir l'existence de nombreuses régions de paramètres hyperboliques dans le plan des paramètres, est fait pour les applications de Hénon  $H_{a,b}(x, y)$  à l'aide de rigoureuses méthodes de calcul pour les essais hyperbolicité uniforme. Dans cette section, cette méthode est appliquée à l'ensemble de la chaîne récurrente  $\mathfrak{R}(H_{a,b}) = \frac{1+|b|+\sqrt{(1+|b|^2)+4a}}{2}$  de la famille Hénon, où la connaissance de la taille de  $\mathfrak{R}(H_{a,b})$  est nécessaire. En effet, la dynamique limitée à  $\mathfrak{R}(H_{a,b})$  est récurrents de la chaîne. La chaîne récurrente ensemble  $\mathfrak{R}(H_{a,b})$  est contenue dans

$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq \mathfrak{R}(a, b), |y| \leq \mathfrak{R}(a, b)\}$  et  $H_{a,b}$  réservé aux  $\mathfrak{R}(H_{a,b})$  est récurrente de la chaîne.

Ensuite, les résultats de [Arai (2007 (a))] sont donnés par

**Théorème 4.3 :**

Il existe un ensemble  $P \subset \mathbb{R}^2$ , qui est l'union de 8943 rectangles fermés, de telle sorte que si  $(a, b) \in P$  alors  $\mathfrak{R}(H_{a,b})$  est uniformément hyperboliques.

**Théorème 4.4 :**

Si  $a$  est dans l'un des intervalles fermées suivants,

$[4.5383300781250, 4.5385742187500]$ ,  $[4.5388183593750, 4.5429687500000]$ ,  
 $[4.5623779296875, 4.5931396484375]$ ,  $[4.6188964843750, 4.6457519531250]$ ,  
 $[4.6694335937500, 4.6881103515625]$ ,  $[4.7681884765625, 4.7993164062500]$ ,  
 $[4.8530273437500, 4.8603515625000]$ ,  $[4.9665527343750, 4.9692382812500]$ ,  
 $[5.1469726562500, 5.1496582031250]$ ,  $[5.1904296875000, 5.5366210937500]$ ,  
 $[5.5659179687500, 5.6077880859375]$ ,  $[5.6342773437500, 5.6768798828125]$ ,  
 $[5.6821289062500, 5.6857910156250]$ ,  $[5.6859130859375, 5.6860351562500]$ ,  
 $[5.6916503906250, 5.6951904296875]$ ,  $[5.6999511718750, \infty)$ .

alors  $\mathfrak{R}(H_{a,-1})$  est uniformément hyperbolique.

A cette fin, nous notons qu'il a été montré dans [Cao, et al. (2008)] que l'application de Hénon est non-hyperbolique (a une tangence) si le paramètre est situé sur la limite de l'ensemble du plateau en fer à cheval .

D'après les résultats ci-dessus, que  $H_{a,-1}$  ont une tangence lorsque  $a$  est proche de 5.699951171875.

Par conséquent, le resultat suivant a été démontré dans [Arai (2007 (a))] à l'aide de la méthode rigoureuse de calcul développée dans [Arai et Mischaikow (2006)].

**Proposition 4.2 :**

Il existe  $a \in [5.6993102, 5.6993113]$  tel que  $H_{a,-1}$  a une tangence homocline à l'égard du point de selle fixée sur le troisième quadrant. Quand on baisse  $a \in \mathbb{R}$  de la zone de préservation la famille Hénon  $H_{a,-1}$ , la tangence se produit dans  $[5.6993102, 5.6999)$ .

## 4.2.2 Hyperbolicité des applications Hénon-like

Hoensch dans [Hoensch (2008)] établit les conditions dans lesquelles certains  $C^2$  diffeomorphisms ensembles présentent un invariant hyperbolique. Ce résultat peut être de-

mander une classe abstraite qui contient des applications de la famille Hénon

$$H(x, y) = (ax(1 - x) - by, x) \quad (4.9)$$

Le résultat de Hoensch qui fonctionnent pour une classe abstraite de difféomorphismes, pour lesquels les applications Hénon-like fournissent un exemple de classe, différent des autres données dans [Bedford et Smillie (2006)] par les points suivants

1. Les méthodes utilisées dans [Bedford et Smillie (2006)] ne s'appliquent de par leurs natures à des perturbations des applications Hénon.

2. La méthode de [Cao, et al. (2008)] n'est pas une uvre priori avec perturbations de applications Hénon. Ainsi, les principaux résultats pour les applications de Hénon-like est prouvés dans [Hoensch (2008)].

### 4.2.3 Attracteur de Hénon est un quasi attracteur

De l'analyse ci-dessus dans les Sections .4.1 et 4.2 et la preuve théorique donnée par [Newhouse (1980)] qui confirme que l'attracteur de Hénon est un exemple d'un quasi attracteur, ce résultat est à la base d'une preuve numérique telle que l'application de Hénon donnée par

$$\begin{cases} x_{n+1} = a - x_n^2 + y_n \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases} \quad (4.10)$$

est un quasi attracteur. En effet, la Fig.4.3 montre le comportement de les variétés stable et instables de cycle de période-1 obtenu à partir de l'application de Hénon (4.10) pour  $a = 1.3$  et  $b = 0.3$ . Cette fonctionnalité est qualitativement la même pour les variétés de cycles de selle pour d'autres périodes. Pour le cas d'application 2-D, des collecteurs de selles sont des courbes 1-D et attracteurs chaotiques sont situés le long de la variétés instables des cycles de selle répètent leur forme. Pour le cas d'une application 2-D dissipatives, les collecteurs instables de selles et de l'attracteur chaotique doivent être emballés dans une région délimitée du plan de phase. Le calcul des quantités suivantes

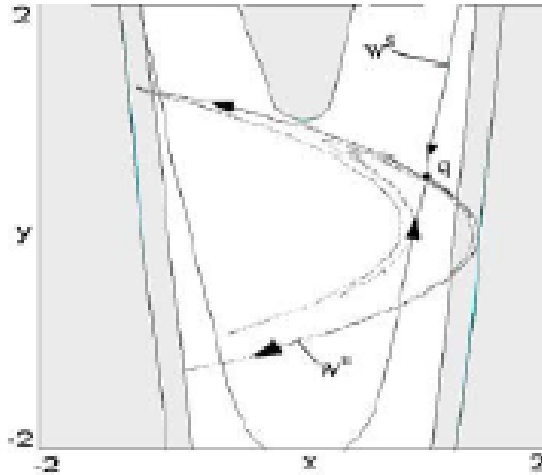


FIG. 4-3 – Variétés stables et instables de points de selle dans l’application de Hénon (4.10) pour  $a = 1,3$  and  $b = 0,3$ .

est une condition suffisante à cet effet :

1. Calculer les angles  $\phi$  entre les collecteurs  $W^s$  et  $W^u$  d’un orbite chaotique pour les différents points de l’attracteur et l’analyse de leurs statistiques.

2. Calculer la distribution des probabilités de l’angle entre les collecteurs d’une trajectoire chaotique  $P(\phi)$  sur le quasiattracteur.

3. Calculer la probabilité de la  $P^{\delta\varphi}$  que L’angle  $\varphi$  se situe dans un petit voisinage de zéro ( $\delta\varphi = 1^0$ ) en fonction du paramètre de contrôle  $a$ . Ceci indique que les attracteurs hyperboliques ne sont pas caractéristiques de l’application (4.10). Le principe d’un tel algorithme est que si, à une valeur de certains paramètres  $a$  de la trajectoire n’a pas la variété instable, puis  $P^{\delta\varphi} = 0$ .

4. Calculer les dépendances d’exposants de Lyapunov du chaos orbites sur les paramètres de contrôle.

Par conséquent, les résultats sont les suivants :

1. De la Figure. 4.4 (a) il est clair que dans le voisinage de zéro, la probabilité  $P(\phi)$  de l’ angle  $\phi$  est fini. Cette impliquent la présence de points de tangence de collecteurs, et donc une non robuste courbes homoclines des cycles de selle existe le long de laquelle

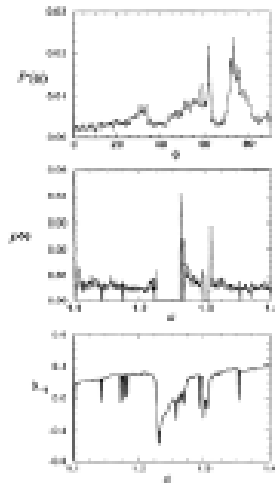


FIG. 4-4 – Les résultats des calculs des caractéristiques de l’attracteur de Hénon donnée par (4.10)

collecteurs des cycles de l’approche de l’autre tangentiellement.

2. la Figure. 4.4 (b) montrent la dépendance de la probabilité  $P^{\delta\varphi}$  en terme de  $a$ . Ainsi, à l’exception d’un ensemble de  $a$  correspondant à  $P^{\delta\varphi}(a) \neq 0$  de tomber dans le voisinage de zéro, il n’y a un ensemble dénombrable des valeurs  $a$  pour lesquelles  $P^{\delta\varphi}(a) = 0$  qui correspond à des fenêtres de la stabilité des orbites périodiques.

3. la Figure. 4.4 (c) l’affichage de la dépendance du plus grand exposant de Lyapunov du système (4.10) sur la variable  $a$  et montrent une série de sauts de la régions des valeurs négatives, qui correspondent aux fenêtres périodiques. Cette propriété est typique pour quasi attracteurs.

### 4.3 Circuit de Chua

La circuit de Chua est l’un des fameux système dynamique **3-D**, ce circuit peut afficher plus de 890 d’attracteurs chaotiques y compris les systèmes de Chua lisses, et l’existence de plusieurs d’entre eux peut être prouvée numériquement, et analytiquement par deux

méthodes indépendantes [Chua, et al. (1986), Matsumoto, et al. (1988)] et expérimentalement [Matsumoto, et al. (1985), Komuro, et al. (1991)]. Cependant, la complexité du circuit de Chua est la découverte d'une grande famille des circuits équivalents [Chua et Ying (1989), Chua et Lin (1990), Lin (1991), Altman (1993), Bohme et Schwarz (1993), Chua, et al. (1993a-b), Pospisil, et al. (1995), Chua, et al. (1995), Wu et Chua (1996), Pospisil et Pospisil Brzobohat (1996), et al. (1999-2000)].

Le système décrit par trois équations différentielles autonomes, en particulier, nous choisirons la forme donnée par (4.11) - (4.12) ci-dessous de [Matsumoto, et al. (1985)] :

$$\begin{cases} x' = \alpha(y - h(x)) \\ y' = x - y + z \\ z' = -\beta y \end{cases} \quad (4.11)$$

$$h(x) = m_1x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|) \quad (4.12)$$

L'équation (4.12) est la partie linéaire canonique décrivant une courbe impaire symétrique à trois segments linéaires par morceaux ayant un point d'arrêt à  $x = \pm 1$ , une pente égale à  $m_0 = a + 1 < 0$  un segment intérieur, et  $m_1 = b + l > 0$ , au segment externe, respectivement, à savoir

$$h(x) = \begin{cases} m_1x + m_0 - m_1, x \geq 1 \\ m_0x, |x| \leq 1 \\ m_1x - m_0 + m_1, x \leq -1 \end{cases} \quad (4.13)$$

Cette dernière équation ayant un attracteur chaotique [Chua, and al. (1986)] pour  $\alpha = 9.35, \beta = 14.79, m_0 = -\frac{1}{7}, m_1 = \frac{2}{7}$  comme indiqué dans Fig. 4.5.

Le système des équations de Chua, ou plus précisément la fonction  $h$  donnée par (4.13) peut être modifié pour prendre une autre formes de fonctions lisses ou non lisses, cette opération est appelée la généralisations du circuit de Chua, par exemple, l'original linéaire par morceaux est remplacé par une fonction discontinue, et par une polynomiale



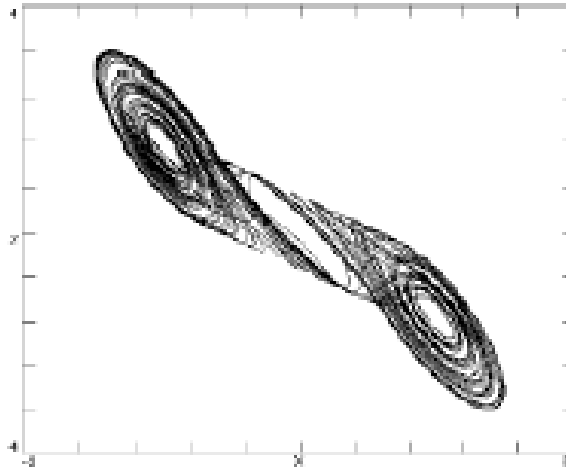


FIG. 4-5 – Le classique attracteur à double défilement obtenu à partir de (4.11) - (4.12) pour  $\alpha = 9.35, \beta = 14.79, m_0 = -\frac{1}{7}, m_1 = \frac{2}{7}$ .

cubique  $h(x) = c_0x^3 + c_1x$ , et par une fonction  $x|x|$ .

Ces généralisations conservent certaines propriétés des systèmes d'origine et affichent d'autres phénomènes nouveaux. Le nombre de points d'équilibre peut être étendu pour générer des attracteurs chaotiques avec plusieurs rouleaux. Pour la démonstration rigoureuse de chaos dans le système (4.11) - (4.12) voir [Zeraouia et Sprott (2007)], où l'application de Poincaré a été calculée rigoureusement à prouver l'existence de chaos dans le double défilement famille dans les mathématiques sens rigoureux. Deuxièmement, certaines propriétés géométriques d'un champs de vecteurs  $\xi$  de la famille généralisée  $L$  sont ainsi résumées :

**Lemme 4.1 :**

Tout membre  $\xi$  de la famille  $L$  remplit les propriétés suivantes :

(P.0)  $\xi$  est continue comme champ de vecteurs linéaire par morceaux.

(P.1)  $\xi$  est symétrique par rapport à l'origine, i.e.,  $\xi(-x, -y, -z) = -\xi(x, y, z)$ , pour tous  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

(P.2) Il y a deux plans  $U_1, U_{-1}$ , qui sont symétriques par rapport à l'origine, et ils

forment une partition de  $\mathbb{R}^3$  en trois régions fermées  $D_1, D_0$ , et  $D_{-1}$ .

(P.3) Dans chaque région  $D_i, i = -1, 0, 1$ , le champ de vecteurs  $\xi$  est a attraction, i.e.,  $D \xi(x, y, z) + M_i$  pour tous  $(x, y, z) \in D_i$  où  $D \xi$  désigne le matrice jacobienne de  $\xi$  et  $M_i$  désigne un  $3 \times 3$ relmatriceconstante.

(P.4)  $\xi$  a trois points d'équilibre,  $P^- \in D_{-1}, O \in D_0, P^+ \in D_1$ , avec  $O = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ .

(P.5) Chaque matrice  $M_i$  a une paire de valeurs propres complexes conjuguées, et une valeur propre réelle notées respectivement par  $\tilde{\sigma}_0 + j\tilde{\omega}_0$  et  $\tilde{\gamma}_0$  pour  $M_0$  et  $\tilde{\sigma}_1 + j\tilde{\omega}_1$  et  $\tilde{\gamma}_1$  pour  $M_{-1}$  et  $M_1$  où  $\tilde{\omega}_0 > 0, \tilde{\omega}_1 > 0, \tilde{\gamma}_1 \neq 0, i = 0, 1$  où  $j^2 = -1$ .

(P.6) Le sous-espace propre associé à l'une ou l'autre la valeur propre réelle ou complexe à chaque point d'équilibre n'est pas parallèle à  $U_1$  ou  $U_{-1}$ .

Pour le double défiler l'équation (4.11) - (4.12) il ya plusieurs type d'attracteurs chaotiques qui comprennent ceux cités précédemment dans [Matsumoto (1984), Matsumoto, et al. (1986), Parker et Chua (1987), Bartissol et Chua (1988), Silva (1991)], et types doublement de période et les types de fenêtres périodiques. Le premier type d'attracteur chaotique est un attracteur de Rossler vis-type sandwich entre l'espace propre à travers  $P^+$  et l'espace propre à 0, parce qu'il a une structure en forme de vis la première fois par Rossler. Une image bizarre symétrique de cet attracteur a également été observée entre les espaces propres par le biais  $P^-$  et  $O$ , comme prévu. Ces deux Rossler attracteurs du type à vis sont séparées par l'espace propre à travers. Le deuxième type de chaos attracteur est le double de défilement, qui a déjà été largement rapportés [Matsumoto (1984), Matsumoto, et al. (1986)] et qui s'étend sur les trois régions  $D_{-1}, D_0$ , et  $D_1$ .

D'autres types des attracteurs chaotiques intéressant sont discutés ici. En effet, une autre sous-famille de  $L_0$  a été étudié exactement avec le même méthode que pour le double de défilement en prolongeant d'une manière plus générale la mode que ce qui est fait dans [Chua, et al. (1986)] de Poincaré demi-carte technique permettant de détecter et homocline heteroclinic orbites et de localiser la région dans l'espace des paramètres pour lesquels stable ensembles attirer existent. En outre, les frontières entre le retour / transfert / évacuation des régions et un cycle de période une limite ont été prédites en

utilisant ces applications.

Cette famille, est appelée la famille de double défilement, d'où, la définition suivante

**Définition 4.3 :**

la famille de double défilement est le sous-ensemble de  $L_0$  qui satisfait les propriétés  $(P - i)_{i=0,6}$  et qui ont  $\tilde{\gamma}_0 < 0$ , et  $\tilde{\gamma}_1 > 0$ .

**Définition 4.4 :**

La famille de double-crochet de  $\mathcal{F}_s$ , est défini comme un sous ensemble de  $L_0$  tel que :

$$\eta_0 < 0, \mu_0 > 0, \nu_0 > 0, \tilde{\sigma}_1 > 0 \text{ et } \tilde{\gamma}_1 < 0. \quad (4.14)$$

Changer les conditions (4.14) on obtenir la définition suivante :

**Définition 4.5 :**

La famille de double-crochet de  $\mathcal{F}_s^*$ , est la sous-famille de  $L_0$  défini par la condition :

$$\eta_0 > 0, \mu_0 > 0, \nu_0 < 0, \tilde{\sigma}_1 < 0 \text{ et } \tilde{\gamma}_1 > 0. \quad (4.15)$$

Dans ce cas, les stabilités des différentes eigenlines et eigenplanes associés à l'équilibre  $O$  et  $P^\pm$  est inversé. Ainsi, par quelque signe et changements mineurs inversion du flux, les résultats de  $\mathcal{F}_s^*$  se trouvent de l'analyse de sous-famille  $\mathcal{F}_s$ . Les champs de vecteurs restant dans  $L_0$ , en dehors de  $\mathcal{F}_s \cup \mathcal{F}_s^*$ , ne peut pas montrer le chaos de fer à cheval à travers le mécanisme Sil'nikov parce que les points d'équilibre  $P^\pm$  ne sont plus des foyers de selle.

### 4.3.1 Homocline et des orbites hétéroclines

Il a été montré dans [Chua, et al. (1986)] que la famille (4.11) - (4.12) est chaotique dans le sens du théorème de Shilnikov.

**Théorème 4.1 (Chaos dans le double scroll)** *Le système (4.11) - (4.12) est chaotique dans le sens du théorème de Shil'nikov pour certains paramètres  $m_0, m_1, \alpha$  et  $\beta$ .*

En particulier, si  $m_0 = \frac{-1}{7}, m_1 = \frac{2}{7}$ , et  $\alpha = 7$ , alors il existe certains  $\beta$  dans le rang  $6.5 \leq \beta \leq 10.5$  tels que les hypothèses du théorème Shilnikov sont satisfaites.

La recherche d'un hétéroclines dans le circuit de Chua (4.11) - (4.12) se fait par procédé similaire à celui utilisé pour les orbites homoclines qui ont été introduites dans [Mees et Chapman (1987)]. Une telle démonstration a été donnée dans [Mees et Chapman (1985)], où un trou de remplissage calculé par l'ordinateur orbite hétéroclines est obtenu pour  $(\alpha, \beta, m_0, m_1) = (9.439, 13.987, -0.614, -1.256)$ . les conditions supplémentaires pour l'apparition de l'attracteur de double défilement sont données dans [Kahlert et Chua (1987)]. Dans [Matsumoto, et al. (1988)] de trois inégalités clés ont été étudiés en donnant erreur vérifiables limites des quantités en cause dans les inégalités avec une aide d'un ordinateur. Cela donne une autre preuve rigoureuse que le double de défilement est chaotique dans le sens de Shil'nikov.

En particulier, il existe un nombre infini de solutions périodiques et des orbites homoclines à des solutions périodiques.

Considérons l'équation

$$x' = f(x), x \in \mathbb{R}^3, f \in C^k (k \geq 3) \quad (4.16)$$

Supposons qu'il existe deux points d'équilibre hyperbolique isolés,  $P_i, i = 1, 2$ . du type de noeud de selle, soit le spectre  $\sigma(L_i) = \{\lambda_i, \rho_i \pm i\omega_i\}$  de la partie linéaire  $L_i = Df(P_i), i = 1, 2$ . Ensuite, on a les résultats suivants démontrés dans [Blazquez et Tuma (1993d)] :

**Théorème 4.5 :**

Supposons que

$$(1) \quad \begin{cases} \rho_i < 0, \lambda_i > 0, \omega_i \neq 0, i = 1, 2, \\ \rho_1\omega_2 + \lambda_2\omega_1 > 0, \rho_2\omega_1 + \lambda_1\omega_2 > 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

(2) Il existe deux connexions  $\Gamma_i = \{p_i(t), t \in \mathbb{R}\}, i = 1, 2$  tel que

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow -\infty} p_1(t) = P_1, \lim_{t \rightarrow \infty} p_1(t) = P_2, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} p_2(t) = P_2, \lim_{t \rightarrow \infty} p_2(t) = P_1 \end{cases} \quad (4.18)$$

Alors, il existe un sous-système de solutions dans une à une correspondance avec l'ensemble

$$\Omega_a = \{(\dots, j_n, \dots) : j_n \in \mathbb{N}^*, j_{n+1} < aj_n\} \quad (4.19)$$

pour certains réelles  $a$ , telles que

$$1 < a < \min \left\{ -\frac{\lambda_1 \omega_2}{\rho_2 \omega_1}, -\frac{\lambda_2 \omega_1}{\rho_1 \omega_2} \right\} \quad (4.20)$$

En d'autres termes, on peut trouver une sous-famille des solutions de (4.16) en général, et dans le circuit de Chua (4.11) - (4.12), en particulier, de telle sorte que pour chaque séquence donnée de nombres naturels, il existe une orbite de la famille tels que le "nombre de tours" autour des points d'équilibre est donné par la séquence de chaque tour. En particulier, il existe un nombre infini de solutions périodiques et des orbites homoclines à des solutions périodiques.

**Théorème 4.6 :**

Supposons que

$$(1) \quad \begin{cases} \rho_i < 0, \lambda_i > 0, \omega_i > 0, i = 1, 2, \\ \rho_1 \omega_2 + \lambda_2 \omega_1 > 0, \rho_2 \omega_1 + \lambda_1 \omega_2 > 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

(2) Il existe deux connexions  $\Gamma_i = \{p_i(t), t \in \mathbb{R}\}, i = 1, 2$  tel que

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow -\infty} p_1(t) = P_1, \lim_{t \rightarrow \infty} p_1(t) = P_2, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} p_2(t) = P_2, \lim_{t \rightarrow \infty} p_2(t) = P_1 \end{cases} \quad (4.22)$$

Alors pour tout  $m \in \mathbb{Z}$ , il existe un sous-système de solutions dans une à une correspondance avec l'ensemble

$$\Omega_a^m = \{(\dots, j_m) : j_n \in \mathbb{N}^*, j_{n+1} < aj_n, n < m\} \quad (4.23)$$

ce qui représente orbites asymptotique à  $P_1$  si  $m = 1 \bmod(2)$  et à  $P_2$  si  $m = 0 \bmod(2)$ .

En d'autres termes, pour chaque séquence donnée infinie, il existe une solution avec le comportement décrit précédemment, mais, dans un moment, il touche une variété stable et il a tendance à être un point d'équilibre.

**Théorème 4.7 :**

Supposons que

$$(1) \quad \begin{cases} \rho_i < 0, \lambda_i > 0, \omega_i > 0, i = 1, 2, \\ \lambda_1 \lambda_2 - \rho_1 \rho_2 > 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

(2) Il existe deux connexions  $\Gamma_i = \{p_i(t), t \in \mathbb{R}\}, i = 1, 2$  tel que

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow -\infty} p_1(t) = P_1, \lim_{t \rightarrow \infty} p_1(t) = P_2, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} p_2(t) = P_2, \lim_{t \rightarrow \infty} p_2(t) = P_1 \end{cases} \quad (4.25)$$

Alors il existe un sous-système de solutions dans une à une correspondance avec  $\Omega_a$  pour certains réel  $a$  tel que

$$1 < a < \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\rho_1 \rho_2} \quad (4.26)$$

Les deux résultats peuvent être généralisés à un espace de Banach comme suit :

**Définition 4.6 :**

Un opérateur linéaire  $A$  sur un espace de Banach  $X$  est dite sectorielle si  $A$  est fermée, l'opérateur densément défini, de telle sorte que, pour certains  $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$  et certains  $\mu > 1$  et un nombre réel  $a$ , l'secteur

$$S_{a,\phi} = \{\lambda : \phi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\} \quad (4.27)$$

est dans l'ensemble résolvant de  $A$  et

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{\mu}{|\lambda - a|}, \text{ pour tout } \lambda \in S_{a,\phi} \quad (4.28)$$

Maintenant, considérons l'équation de la forme du système de Chua

$$z' + Az = f(z) \quad (4.29)$$

où  $A$  est un opérateur sectorielle dans un espace de Banach  $X$  et  $f \in C^k(X^\alpha, X)$ ,  $0 \leq \alpha < 1$  tel qu'il existe deux points d'équilibre  $P_1$  et  $P_2$  et si nous linéarisons sur  $P_i$ ,  $i = 1, 2$ , nous avons l'opérateur  $L_i = A - Df(P_i)$ ,  $i = 1, 2$ .

Ensuite, on a [Blazquez et Tuma (1993d)]

**Théorème 4.8 :**

Supposons que

(1) Il existe  $\mu_1^i, \mu_2^i, \dots, \mu_n^i$  valeurs propres de  $L_i$  avec des parties réelles négatives,  $\mu_1^i, \mu_2^i$  conjugués complexes et  $\text{Re}(\mu_j^i) < \rho_i < \text{Re}(\mu_1^i) < 0$ ,  $i = 1, 2, j = 3, 4, \dots, n$ .

(2) Le reste du spectre est à partie réelle positif et il existe une valeur propre simple  $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\text{Re}(\mu) > \lambda_i > 0$  pour  $\mu \in \sigma(L) - \{\mu_j^i, \lambda_i\}$ .

(3)

$$\begin{cases} \rho_1 \omega_2 + \lambda_2 \omega_1 > 0 \\ \rho_2 \omega_1 + \lambda_i \omega_2 > 0. \end{cases} \quad (4.30)$$

(4) Il existe deux points hétéroclines  $\Gamma^i$ ,  $i = 1, 2$ .  $\Gamma^1$  connecte  $P_1$  avec  $P_2$  et  $\Gamma^2$  connecte  $P_2$  avec  $P_1$  tel que  $\dim(W_{c_i}^+, W_{c_i}^-) = 1$  où  $W_{c_i}^+$  et  $W_{c_i}^-$  sont les espaces tangents à  $c_i \in X$  à l'variétés stables et instables.

Alors il existe un sous-système de solutions dans une-à-une correspondance avec l'ensemble

$$\Omega_a = \{(\dots, j_n, \dots) : j_n \in \mathbb{N}^*, j_{n+1} < a j_n\} \quad (4.31)$$

pour certains réels  $a$ , telle que

$$1 < a < \min \left\{ -\frac{\lambda_1 \omega_2}{\rho_2 \omega_1}, -\frac{\lambda_2 \omega_1}{\rho_1 \omega_2} \right\} \quad (4.32)$$

Une généralisation de ces résultats de espace de Banach de dimension infinie donne les mêmes résultats que ci-dessus en vue de l'existence de sous-systèmes de solutions dans une à une pondance avec les ensembles  $\Omega_a$  et  $\Omega_a^+$  [Blazquez et Tuma, 1993a)].

## 4.4 Le modèle géométrique

Ici, nous discutons de trois types d'attracteurs étranges, et nous continuons de manière plus spécifique la présentation de modèle géométrique définie pour l'équation de Chua (4.11) - (4.12). Ainsi, à partir des résultats ci-dessus mentionnés dans ce chapitre, il est facile de voir que le circuit de Chua est très intéressant du point de vue de l'analyse mathématique [Shil'nikov (1993 (b))]:

1. Circuit de Chua est un problème universel, car il présente un nombre de voies distinctes au chaos : bifurcations de doublement période, panne d'un tore invariant, route de l'intermittence chaos ... etc

2. Le double-scroll attracteur Chua est formé d'une paire de spirales non symétriques Chua attracteurs avec trois états d'équilibre d'un type de selle-focus sont visibles sur cette attraction, qui indique que cet attracteur est multistructural qui sont différents des autres attracteurs existantes des systèmes **3-D**.

3. Equations de Chua (4.11) - (4.12) sont proches en ce sens que le portraits de bifurcation des équations définissant une **3-D** normale forme des bifurcations d'un point d'équilibre avec trois zéro exposants caractéristiques pour le cas de symétrie supplémentaire et celle d'une orbite périodique avec trois multiplicateurs égaux à  $-1$ .

4. Les résultats présentés dans [Ovsyannikov et Shil'nikov (1991), Gonchenko, et al. (1993)] impliquent que les attracteurs qui se produisent dans le circuit de Chua (4.11) - (4.12) sont nouveaux et essentiellement objets plus compliquée dans leur nature mathématique qu'il n'y paraît avant la complication. Cette complication est due à la présence



d'une structure instable d'orbites homoclines de Poincaré soit dans l'attracteur lui-même, ou un attracteur d'un système de proximité.

Par conséquent, une description complète de la dynamique et des bifurcations dans les équations de Chua est impossible, car [Gonchenko, et al. (1993)] ont montrés que les systèmes ayant un nombre infini d'orbites structurellement instable périodiques d'un degré de dégénérescence sont denses dans les régions des attracteurs. Ce problème complexe est le résultat de l'existence des orbites homoclines instable de Poincaré à l'attracteur lui-même, ou à un attracteur d'un système de proximité.

# Chapitre 5

## Le chaos ellipsoïdal

### 5.1 Introduction

Les systèmes chaotiques bornés et l'estimation de leurs bornes sont importante dans la theorie du contrôle du chaos, la synchronisation du chaos, et leurs applications.

L'estimation de la borne supérieure d'un système chaotique est assez difficile à réaliser techniquement. La finitude des systèmes dynamiques à temps continu, en particulier des systèmes quadratique 3-D a été l'objet de nombreux travaux. En effet, la finitude du système de Lorenz, et le caractère borné de système de Chen fait l'objet de plusieurs études. Récemment, une meilleure borne supérieure pour le Système de Lorenz pour toutes les valeurs positives de ses paramètres a été établies, et a le meilleur résultat dans la littérature actuelle, car l'estimation surmonte quelques problèmes liés à l'existence de singularités découlant de la valeur de la borne supérieure.

Le sujet de la présente thèse, est une généralisation de tous les résultats existants dans la littérature actuelle pour la borne supérieure d'un système quadratique 3-D général en temps continu a été donné. En particulier, les grandes régions dans l'espace des paramètres de bifurcation de ce système où il est borné ont été déterminée en utilisant une analyse rigoureuse fonction multi variable. Dans cette thèse, nous présentons les conditions suffisantes pour un système dynamique 3-D général pour être inclus dans un

ensemble ellipsoïdal. Si ce système affiche un attracteur chaotique, nous l'appelons Chaos ellipsoïdal car il est inclus dans un ellipsoïde.

Nous prouvons également que l'ensemble du chaos ellipsoïdal n'est pas vide car le système de Lorenz et les systèmes quadratiques étudiés dans [Z.Elhadj, J.C.Sprott (2009) ] appartiennent à cette classe.

Prenons le système dynamique à temps continu autonome suivant

$$\begin{cases} x' = f(x, y, z, \delta) \\ y' = g(x, y, z, \delta) \\ z' = h(x, y, z, \delta) \end{cases} \quad (5.1)$$

ou  $f, g$  et  $h$  sont des fonctions réelles et  $\delta \in R$  est le paramètre de bifurcation.

## 5.2 L'évaluation des bornes de système général

**Théorème 5.1** *Supposon que*

- (1) *Le système (5.1) a un attracteur chaotique.*
  - (2) *Les conditions (5.9), (5.10), (5.11) ou (5.9), (5.10), (5.11), et (5.17) ou (5.9), (5.10), (5.11), et (5.19), ou (5.9), (5.10), (5.11), et (5.21) son verifies.*
- Alors le système (5.1) est inclus dans l'ellipsoïdale.*

**Proof.** Pour estimer les bornes de système (5.1) nous considérons la fonction  $V(x, y, z)$

définies par

$$V(x, y, z) = \frac{(x - \alpha(x, y, z))^2 + (y - \beta(x, y, z))^2 + (z - \gamma(x, y, z))^2}{2} \quad (5.2)$$

telles que  $(\alpha(x, y, z), \beta(x, y, z), \gamma(x, y, z)) \in R^3$ , sont des fonctions réelles pour lesquelles la dérivée de (5.2) a tout le temps la solution du système (5.1) est donnée par :

$$\frac{dV}{dt} = (x - \alpha)(x' - \alpha') + (y - \beta)(y' - \beta') + (z - \gamma)(z' - \gamma') \quad (5.3)$$

$$\begin{cases} \alpha' = \frac{\partial \alpha}{\partial x} x' + \frac{\partial \alpha}{\partial y} y' + \frac{\partial \alpha}{\partial z} z' = \theta_1 f + \theta_2 g + \theta_3 h \\ \beta' = \frac{\partial \beta}{\partial x} x' + \frac{\partial \beta}{\partial y} y' + \frac{\partial \beta}{\partial z} z' = \mu_1 f + \mu_2 g + \mu_3 h \\ \gamma' = \frac{\partial \gamma}{\partial x} x' + \frac{\partial \gamma}{\partial y} y' + \frac{\partial \gamma}{\partial z} z' = \zeta_1 f + \zeta_2 g + \zeta_3 h \end{cases} \quad (5.4)$$

Ainsi, nous avons

$$\frac{dV}{dt} = c_1(x, y, z)x - \omega x^2 + c_2(x, y, z)y - \varphi y^2 + c_3(x, y, z)z - \phi z^2 + c_4(x, y, z) \quad (5.5)$$

où

$$\begin{cases} c_1(x, y, z) = f - \theta_1 f - \theta_2 g - \theta_3 h + \omega x \\ c_2(x, y, z) = g - \mu_1 f - \mu_2 g - \mu_3 h + \varphi y \\ c_3(x, y, z) = h - \zeta_1 f - \zeta_2 g - \zeta_3 h + \phi z \\ c_4(x, y, z) = c_5(x, y, z) + c_6(x, y, z) \\ c_5(x, y, z) = \alpha(\theta_1 f + \theta_2 g + \theta_3 h) - g\beta - h\gamma - f\alpha \\ c_6(x, y, z) = \beta(\mu_1 f + \mu_2 g + \mu_3 h) + \gamma(\zeta_1 f + \zeta_2 g + \zeta_3 h) \end{cases} \quad (5.6)$$

Supposons que l'équation (5.5) est de forme

$$\frac{dV}{dt} = -\omega(x - \alpha_1)^2 - \varphi(y - \beta_1)^2 - \phi(z - \gamma_1)^2 + d \quad (5.7)$$

où  $\omega, \varphi, \phi$  et  $d$  sont des constantes strictements positives. les constantes  $\alpha_1, \beta_1$  et  $\gamma_1$  sont des inconnues et pour déterminer nous utilisons la comparaison avec l'équation  $\frac{dV}{dt} = 0$

L'équation (5.7) devient

$$\frac{dV}{dt} = -\omega x^2 + 2\omega\alpha_1 x - \varphi y^2 + 2\varphi\beta_1 y - \phi z^2 + 2\phi\gamma_1 z + (-\omega\alpha_1^2 - \varphi\beta_1^2 - \phi\gamma_1^2 + d) \quad (5.8)$$

en comparant (5.8) avec (5.5) nous aurons

$$\left\{ \begin{array}{l} d = c_4(x, y, z) - (-\omega\alpha_1^2 - \varphi\beta_1^2 - \phi\gamma_1^2) \\ \alpha_1 = \frac{c_1(x, y, z)}{2\omega} \\ \beta_1 = \frac{c_2(x, y, z)}{2\varphi} \\ \gamma_1 = \frac{c_3(x, y, z)}{2\phi} \end{array} \right. \quad (5.9)$$

Ainsi supposons que dans les equations (5.9), les paramètres  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  et  $d$  sont des constants réelles, donc les fonctions  $\{c_i(x, y, z)\}_{1 \leq i \leq 4}$  sont constantes, c'est à dire que l'ensemble  $\{c_i(x, y, z)\}_{1 \leq i \leq 4} \subset R$ ,

Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial c_i(x, y, z)}{\partial x} = 0, i = 1, 2, 3, 4. \\ \frac{\partial c_i(x, y, z)}{\partial y} = 0, i = 1, 2, 3, 4. \\ \frac{\partial c_i(x, y, z)}{\partial z} = 0, i = 1, 2, 3, 4. \end{array} \right. \quad (5.10)$$

Pour prouver que le système (5.1) est borné, nous supposons qu'il est borné et nous trouvant sa borne, alors nous supposons que  $\omega, \varphi, \phi$  et  $d$  strictement positifs, c'est à dire

$$\left\{ \begin{array}{l} c_4(x, y, z) - (-\omega\alpha_1^2 - \varphi\beta_1^2 - \phi\gamma_1^2) > 0 \\ \omega > 0, \varphi > 0, \phi > 0 \end{array} \right. \quad (5.11)$$

Alors si le système (5.1) est borné, la fonction (5.8) admet une valeur maximum, et le point maximum  $(x_0, y_0, z_0)$  satisfait

$$\frac{(x_0 - \alpha_1)^2}{\frac{d}{\omega}} + \frac{(y_0 - \beta_1)^2}{\frac{d}{\varphi}} + \frac{(z_0 - \gamma_1)^2}{\frac{d}{\phi}} = 1 \quad (5.12)$$

Maintenant considérons l'ellipsoïde

$$\Gamma = \left\{ (x, y, z) \in R^3 : \frac{(x - \alpha_1)^2}{\frac{d}{\omega}} + \frac{(y - \beta_1)^2}{\frac{d}{\varphi}} + \frac{(z - \gamma_1)^2}{\frac{d}{\phi}} = 1, \omega, \varphi, \phi, d > 0 \right\}, \quad (5.13)$$

et définissons la fonction

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x, y, z) = G(x, y, z) + \lambda H(x, y, z) \\ G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \\ H(x, y, z) = \frac{(x-\alpha_1)^2}{\omega} + \frac{(y-\beta_1)^2}{\varphi} + \frac{(z-\gamma_1)^2}{\phi} - 1 \end{array} \right. \quad (5.14)$$

où  $\lambda \in R$  est un parametre fini.

Alors on a  $\max_{(x,y,z) \in \Gamma} G = \max_{(x,y,z) \in \Gamma} F$  et

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x} &= -2d^{-1}(\omega\lambda\alpha_1 - (\omega\lambda + d)x) \\ \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y} &= -2d^{-1}(\varphi\lambda\beta_1 - (\varphi\lambda + d)y) \\ \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} &= -2d^{-1}(\phi\lambda\gamma_1 - (\phi\lambda + d)z) \end{aligned} \quad (5.15)$$

et les cas suivants sont obtenus selon la valeur de  $\lambda$  avec respecter les valeurs  $-\frac{d}{\omega}$ ,  $-\frac{d}{\varphi}$  et  $-\frac{d}{\phi}$ .

(i) Si  $\lambda \neq -\frac{d}{\omega}$ ,  $\lambda \neq -\frac{d}{\varphi}$  et  $\lambda \neq -\frac{d}{\phi}$ , alors  $(x_0, y_0, z_0) = (\frac{\omega\lambda\alpha_1}{\omega\lambda+d}, \frac{\varphi\lambda\beta_1}{\varphi\lambda+d}, \frac{\phi\lambda\gamma_1}{\phi\lambda+d})$  et

$$\max_{(x,y,z) \in \Gamma} G = \xi_1 = \frac{\omega^2\lambda^2\alpha_1^2}{(\omega\lambda + d)^2} + \frac{\varphi^2\lambda^2\beta_1^2}{(\varphi\lambda + d)^2} + \frac{\phi^2\lambda^2\gamma_1^2}{(\phi\lambda + d)^2} \quad (5.16)$$

dans ce cas les bornes de système (5.1) sont données par (5.16)

(ii) Si  $\lambda = -\frac{d}{\omega}$ , ( $\omega \neq \varphi, \omega \neq \phi$ ),  $\lambda \neq -\frac{d}{\varphi}$  et  $\lambda \neq -\frac{d}{\phi}$ , alors

$$(x_0, y_0, z_0) = (\pm \sqrt{\frac{d}{\omega} \left(1 - \frac{\xi_2}{\xi_3}\right)} + \alpha_1, \frac{-\beta_1\varphi}{\omega - \varphi}, \frac{-\gamma_1\phi}{\omega - \phi}),$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_2 = \frac{(\varphi\beta_1^2 + \phi\gamma_1^2)(\omega - \varphi)^2 d^3}{\omega^2} \\ \xi_3 = \frac{(\phi - \omega)^2 (\omega - \varphi)^2 d^4}{\omega^4} \\ \xi_3 \geq \xi_2 \end{array} \right. \quad (5.17)$$

La dernière condition de (5.17) confirme que la valeur  $x_0$  est définie. Dans ce cas, on a

$$\max_{(x,y,z) \in \Gamma} G = \left( \sqrt{\frac{d}{\omega} \left(1 - \frac{\xi_2}{\xi_3}\right)} + \alpha_1 \right)^2 + \frac{\beta_1^2 \varphi^2}{(\omega - \varphi)^2} + \frac{\gamma_1^2 \phi^2}{(\omega - \phi)^2}. \quad (5.18)$$

(iii) Si  $\lambda \neq -\frac{d}{\omega}$ ,  $\lambda = -\frac{d}{\varphi}$ , ( $\varphi \neq \omega$ ,  $\varphi \neq \phi$ ),  $\lambda \neq -\frac{d}{\phi}$ , alors

$$(x_0, y_0, z_0) = \left( -\frac{\alpha_1 \omega}{\varphi - \omega}, \pm \sqrt{\frac{d}{\varphi} \left(1 - \frac{\xi_4}{\xi_5}\right)} + \beta_1, \frac{\gamma_1 \phi}{\phi - \varphi} \right),$$

avec

$$\begin{cases} \xi_4 = (2\omega\varphi\phi\alpha_1^2 - 2\omega\varphi\phi\gamma_1^2 - \omega\varphi^2\alpha_1^2 - \omega\phi^2\alpha_1^2 + \omega^2\phi\gamma_1^2 + \varphi^2\phi\gamma_1^2)\varphi^2 \\ \xi_5 = (\phi - \varphi)^2(\varphi - \omega)^2 d \\ \xi_5 \geq \xi_4 \end{cases}, \quad (5.19)$$

La dernière condition de (5.19) confirme que la valeur  $y_0$  est définie. Dans ce cas, on a

$$\max_{(x,y,z) \in \Gamma} G = \left( \sqrt{\frac{d}{\varphi} \left(1 - \frac{\xi_4}{\xi_5}\right)} + \beta_1 \right)^2 + \frac{\alpha_1^2 \omega^2}{(\varphi - \omega)^2} + \frac{\gamma_1^2 \phi^2}{(\phi - \varphi)^2}. \quad (5.20)$$

(iv) Si  $\lambda \neq -\frac{d}{\omega}$ ,  $\lambda \neq -\frac{d}{\varphi}$ ,  $\lambda = -\frac{d}{\phi}$ , ( $\phi \neq \omega$ ,  $\phi \neq \varphi$ ), alors

$$(x_0, y_0, z_0) = \left( -\frac{\alpha_1 \omega}{\phi - \omega}, \frac{-\beta_1 \varphi}{\phi - \varphi}, \pm \sqrt{\frac{d}{\phi} \left(1 - \frac{\xi_6}{\xi_7}\right)} + \gamma_1 \right),$$

avec

$$\begin{cases} \xi_6 = (\omega\varphi^2\alpha_1^2 - 2\omega\varphi\phi\beta_1^2 - 2\omega\varphi\phi\alpha_1^2 + \omega\phi^2\alpha_1^2 + \omega^2\varphi\beta_1^2 + \varphi\phi^2\beta_1^2)\phi^2 \\ \xi_7 = (\phi - \varphi)^2(\varphi - \omega)^2 d \\ \xi_7 \geq \xi_6 \end{cases} \quad (5.21)$$

La dernière condition de (5.21) confirme que la valeur  $z_0$  est définie. d'autres cas possibles sont traités de la même façon. ■

### 5.3 Exemple

Nous montrons ici, que l'ensemble des systèmes qui vérifie les conditions du Théorème 5.1 n'est pas vide. En effet, considérons le système de Lorenz donné par

$$\begin{cases} x' = a(y - x) \\ y' = cx - y - xz \\ z' = xy - bz \end{cases} \quad (5.22)$$

Nous avons  $f(x, y, z) = a(y - x)$ ,  $g(x, y, z) = cx - y - xz$ ,  $h(x, y, z) = xy - bz$ . Nous choisissons  $\alpha = \beta = 0$  et  $\gamma = c + a$ .

Ainsi  $V(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + (z - \frac{a+c}{2})^2}{2}$  et  $d = b(\frac{a+c}{2})^2$ ,  $\omega = a > 0$ ,  $\varphi = 1 > 0$ ,  $\phi = b > 0$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_1 = 0$  et  $\gamma_1 = \frac{a+c}{2}$ . Alors on a  $\frac{dV}{dt} = -ax^2 - y^2 - b(z - \frac{a+c}{2})^2 + b(\frac{a+c}{2})^2$ .

Donc il est facile de vérifier toutes les conditions du théorème. 5.1 sont satisfaites pour ce cas. l'ellipsoïde  $\Gamma$  est donné par :

$$\Gamma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{\frac{b}{a}(\frac{a+c}{2})^2} + \frac{y^2}{a(\frac{a+c}{2})^2} + \frac{(z - \frac{a+c}{2})^2}{(\frac{a+c}{2})^2} = 1, a, b, c > 0 \right\}$$

qui est également le même que dans [Li, and al., (2005)]. Enfin, nous avons le résultat démontré dans [Li and al., (2005)] qui confirme que si  $a > 0$ ,  $b > 0$ , et  $c > 0$ , alors le système de Lorenz [Lorenz, (1963)] est inclus dans la sphère

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + (z - a - c)^2 = R^2\}$$

avec

$$R^2 = \begin{cases} \frac{(a+c)^2 b^2}{4(b-1)}, \text{ if } a \geq 1, b \geq 2 \\ (a+c)^2, \text{ if } a > \frac{b}{2}, b < 2 \\ \frac{(a+c)^2 b^2}{4a(b-a)}, \text{ if } a < 1, b \geq 2a \end{cases} \quad (5.23)$$

Maintenant, il est bien connu que le système de Lorenz (5.1) affiche un attracteur chaotique dans la région  $a > 0$ ,  $b > 0$ , et  $c > 0$ , ce qui confirme que le système (5.1) remplit



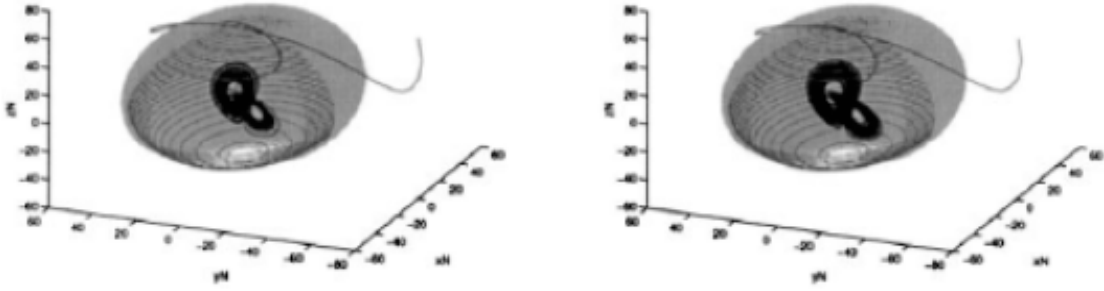


FIG. 5-1 – l'estimation uniforme de l'attracteur de Lorenz . conditions Initiales  $(x_0, y_0, z_0) = (20, -70, 40)$ . (a)  $(x(t), y(t), z(t)), (a, b, c) = (9.5, 26.6, 2.53)$ , (b)  $(x(t), y(t), z(t)), (a, b, c) = (10.5, 29.4, 2.8)$  .

toutes les conditions de théorème 5.1, alors l'ensemble du chaos ellipsoïdale n'est pas vide. En utilisant la même méthode, on peut vérifier aussi que les systèmes quadratiques étudiées dans [Zeraoulia et Sprott, (2009)] satisfont toutes les conditions du théorème 5.1 pour certaines valeurs des paramètres de bifurcation. Un exemple pratique de l'analyse ci-dessus peut être trouvée dans [Rodrigues, et al, (2001).] Pour la condition initiale :  $(x_0, y_0, z_0) = (20, -70, 40)$  et  $(a, b, c) = (9.5, 26.6, 2.53)$  comme le montre la figure. 5.1. (a) et pour  $(a, b, c) = (10.5, 29.4, 2.8)$  comme le montre la figure. 5.1.(b). Il est clair que l'attracteur chaotique de Lorenz est inclus dans un ensemble ellipsoïdale pour les deux cas. Pour le premier cas, nous avons  $R^2 = \frac{(9.5+2.53)^2(26.6)^2}{4(26.6-1)} = 999.99$ , par conséquent,  $R = 31.623$  et pour le second cas, nous avons  $R^2 = 1345.9$ , par conséquent,  $R = 36.687$ . Ce résultat est meilleur que celui donné dans [Rodrigues, and al., (2001)], car l'estimation (5.23) est la plus connue dans la littérature comme il est montré dans [Li and al., (2005)].

**Conclusion 5.2** *L'utilisation de l'analyse de la fonction multi-variables, donne la conclusion des conditions suffisantes pour un système dynamique 3-D général à être inclus dans un ensemble ellipsoïdale, qui est appelé Chaos ellipsoïdale car l'attracteur chaotique inclus dans cet ellipsoïde. Nous avons prouvé également que l'ensemble du chaos ellipsoïdale*

*n'est pas vide, car le système de Lorenz appartient à cette classe.*

# Bibliographie

- [1] Abraham, R. and Robbin, J., *Transversal Mappings and Flows*. Benjamin (1967).
- [2] Abraham, R., *Introduction to Morphology*. Publ. Dept. Math. Lyon. (1972) 38–114.
- [3] Afraimovich, V. S., Bykov, V. V., and Shilnikov, L. P., On the appearance and structure of Lorenz attractor. DAN SSSR **234** (1977) 336–339.
- [4] Afraimovich, V. S. and Shilnikov, L. P., Strange attractors and quasiattractors in *Nonlinear Dynamics and Turbulence* (G. I. Barenblatt, G. Iooss, and D. D. Joseph, eds.) Pitman, New York (1983) 1–28.
- [5] Afraimovich, V. S., Bykov, V. V., and Shilnikov, L. P., On the appearance and structure of Lorenz attractor. DAN SSSR **234** (1977) 336–339.
- [6] Arai, Z., On hyperbolic plateaus of the Hénon map. Experiment. Math. **16**(2) (2007a) 181–188.
- [7] Arai, Z., On loops in the hyperbolic locus of the complex Hénon map. Preprint (2007b).
- [8] Arai, Z. and Mischaikow, K., Rigorous Computations of Homoclinic Tangencies. SIAM J. Appl. Dyn. Syst. **5** (2006) 280–292.
- [9] Bedford, E. and Smillie, J., The Hénon family – The complex horseshoe locus and real parameter values. Contemp. Math. **396** (2006a) 21–36.
- [10] Bedford, E. and Smillie, J., Real Polynomial diffeomorphisms with maximal entropy : Tangencies. Ergod. Theor. Dyn. Syst. **26**(5) (2006b) 1259–1283.

- [11] Bedford, E. and Smillie, J., Real polynomial diffeomorphisms with maximal entropy II – Small Jacobian. *Ergod. Theor. Dyn. Syst.* **26**(5) (2006c) 1259–1283.
- [12] Campbell, D. K., Galeeva, R., Tresser, C., and Uherka, D. J., Piecewise linear models for the quasiperiodic transition to chaos. *Chaos* **6**(2) (1996) 121–154.
- [13] Celikovskiy, S. G. Chen, On a generalized Lorenz canonical form of chaotic systems, *Int. J. Bifur. Chaos* 12 (2002), 1789–1812.
- [14] Chen, G. T. Ueta, Yet another chaotic attractor, *Int. J. Bifur. Chaos* 9 (1999) 1465–1466.
- [15] Chen, G, *Controlling Chaos and Bifurcations in Engineering Systems*, CRC Press, Boca Raton, FL (1999).
- [16] Chua, L. O., Komuro, M., and Matsumoto, T., The double scroll family. *IEEE Trans. Circ. Syst.* **CAS-33**(11) (1986) 1073–1118.
- [17] Chua, L. O. and Lin, G., Canonical realization of Chua’s circuit family. *IEEE Trans. Circ. Syst.* **37**(7) (1990) 885–902.
- [18] Chua, L. O., Global unfolding of Chua’s circuit. *IEICE Trans. Fund. Electronics Comm. Comput. Sci.* **E76-A**(5) (1993) 704–734.
- [19] Elhadj, Z. Analysis of a new chaotic system with three quadratic nonlinearities, *Dynamics of Continuous, Discrete, and Impulsive Systems B* 14 (2007) 603–613.
- [20] Elhadj, Z. Dynamical analysis of a 3-D chaotic system with only two quadratic nonlinearities, *J. Systems Science and Complexity* 21 (2008) 67–75.
- [21] Elhadj, Z. J.C.Sprott, About the boundedness of 3D continuous-time quadratic systems, to appear in *Nonlinear Oscillations*, 2009.
- [22] Gambaudo, J. M. and Tresser, C., Dynamique régulière ou chaotique – Applications du cercle ou l’intervalle ayant une discontinuité. *C. R. Acad. Soc. Paris, Sér. I* **300**(10) (1985) 311–313.
- [23] Galeeva, R., Martens, M., and Tresser, C., Inducing, slopes and conjugacy classes. *Israel J. Math.* **99** (1997) 123–147.

- [24] Galias, Z. and Tucker, W., Rigorous study of short periodic orbits for the Lorenz system. *IEEE International Symposium on Circuits and Systems* **18-21** (2008) 764–767.
- [25] Gonchenko, S. V., Shilnikov, L. P., and Turaev, D. V., On models with nonrough Poincaré homoclinic curves. *Physica D* **62** (1993) 1–14.
- [26] Gavrilov, N. K. and Shilnikov, L. P., On three dimensional dynamical system close to systems with a structurally stable homoclinic curve. *Math. USSR Sbornik* **19** (1973) 139–156.
- [27] Gonchenko, S. V., Turaev, D. V., and Shilnikov, L. P., Dynamical phenomena in multi-dimensional systems with a structurally unstable homoclinic Poincaré curve. *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.* **47**(3) (1993) 410–415.
- [28] Guckenheimer, J., Sensitive dependence to initial conditions for one dimensional maps. *Comm. Math. Phys.* **70** (1979) 133–160.
- [29] Guckenheimer, J., A strange strange attractor. In *The Hopf Bifurcation and its Applications* (J. E. Marsden and M. McCracken, eds.) *Applied Mathematical Series* **19** Springer, Berlin (1976) 368–381.
- [30] Hoensch, U. A., Some hyperbolicity results for Hénon-like diffeomorphisms. *Nonlinearity* **21** (2008) 587–611.
- [31] Hénon, M., A two dimensional mapping with a strange attractor. *Comm. Math. Phys.* **50** (1976) 69–77.
- [32] Hirsch, M., *On Invariant Subsets of Hyperbolic Sets. Essays on Topology and Related Topics*. Mémoires dédiés à Georges de Rham (1970) 126–135.
- [33] Hirsch, M. W., *Differential Topology*. Number **33** in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York (1976).
- [34] Hasting, S. P. and Troy, W. C., A Shooting Approach to the Lorenz equations. *Bull. Amer. Math. Soc.* **27** (1992) 298–303.

- [35] Hoover, W. G. Remark on Some simple chaotic flows, *Phys. Rev. E* **51** (1995) 759–760.
- [36] Jakobson, M. V., Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps. *Comm. Math. Phys.* **81** (1981) 39–88.
- [37] Klinshpont, N. E., Sataev, E. A., and Plykin, R. V., Geometrical and dynamical properties of Lorenz type system. *Journal of Physics Conference Series* **23** (2005) 96–104.
- [38] Klinshpont, N. E., On the problem of topological classification of Lorenz-type attractors. *Math. Sbornik* **197**(4) (2006) 75–122.
- [39] Labarca, R. and Pacifico, M. J., Stability of singular horseshoes. *Topology* **25**(3) (1986) 337–352
- [40] Labarca, R. and Moreira, C. G., Bifurcations of the essential dynamics of Lorenz maps and the application to Lorenz like flows – Contributions to the study of the expanding case. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society* **32**(2) (2001) 107–144.
- [41] Labarca, R. and Moreira, C. G., Bifurcations of the essential dynamics of Lorenz maps and the application to Lorenz like flows – Contributions to the study of the contracting case. Preprint (2003).
- [42] Labarca, R. and Moreira, C. G., Essential dynamics for Lorenz maps on the real line and the Lexicographical World. *Ann. Inst. H. Poincaré – AN* **23** (2006) 683–694.
- [43] Lorenz, E. N. Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmos. Sci.* **20** (1963) 130–141.
- [44] Leonov, G. A. Bunin, N. Kokschi, Attractor localization of the Lorenz system, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* **67** (1987) 649–656.
- [45] Linz, S. J. J. C. Sprott, Elementary chaotic flow. *Phys. Lett. A* **259** (1999) 240–245.
- [46] Liu, W. B. G. Chen, A new chaotic system and its generation, *Int. J. Bifur. Chaos* **13** (2003) 261–267.

- [47] Li, D. J. A. Lu, X. Wu, G. Chen, Estimating the bounds for the Lorenz family of chaotic systems, *Chaos, Solitons and Fractals* **23** (2005) 529–534.
- [48] Lizana, C. and Mora, L., Lower bounds for the Hausdorff dimension of the geometric Lorenz attractor – The homoclinic case. *Discrete and Continuous Dynamical Systems* **22**(3) (2008) 699–709.
- [49] Lu, J. H. G. Chen, A new chaotic attractor coined, *Int. J. Bifur. Chaos* **12** (2002) 659–661.
- [50] Lu, J. H. G. Chen, D. Cheng, S. Celikovsky, Bridge the gap between the Lorenz system and the Chen system, *Int. J. Bifur. Chaos* **12** (2002) 2917–2926.
- [51] Luzzatto, S. and Viana, M., Positive Lyapunov exponents for Lorenz-like families with criticalities. *Astérisque* **261** (2000) 201–237.
- [52] Matsumoto, T., A chaotic attractor from Chua’s circuit. *IEEE Trans. Circ. Syst.* **CAS-31** (1984) 1055–1058.
- [53] Matsumoto, T., Chua, L. O., and Tokumasu, K., Double scroll via a two-transistor circuit. *IEEE Trans. Circ. Syst.* **CAS-33** (1986) 828–835.
- [54] Mischaikow, K. and Mrozek, M., Chaos in the Lorenz equations : A computer-assisted proof. *Bull. Amer. Math. Soc.* **32** (1995) 66–72.
- [55] Mischaikow, K. and Mrozek, M., Chaos in the Lorenz equations : A computer assisted proof. Part II, Detail. *Math. Comp.* **67**(223) (1998) 1023–1046.
- [56] Misiurewicz, M., Absolutely continuous measures for certain maps of an interval. *Publ. Math. IHES* **53** (1981) 17–51.
- [57] Morales, C. and Pujals, E., Singular strange attractors on the boundary of Morse–Smale systems. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **30** (1997) 693–717.
- [58] Morales, C. A., Pacifico, M. J., and San Martin, B., Expanding Lorenz attractors through resonant double homoclinic loops. *SIAM J. Math. Anal.* **36**(6) (2005) 1836–1861.

- [59] Newhouse, S., The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms. *Publ. Math. IHES* **50** (1979) 101–51.
- [60] Newhouse, S., New phenomena associated with homoclinic tangencies. *Ergod. Theor. Dyn. Syst.* **24**(5) (2004a) 1725–1738.
- [61] Newhouse, S., Cone-fields, domination, and hyperbolicity. In *Modern Dynamical Systems and Applications*. Cambridge University Press (2004b) 419–432.
- [62] Ovsyannikov, I. M. and Shilnikov, L. P., On systems with a saddle-focus homoclinic curve, *Mat. Sbornik* **58** (1986) 557–574; English translation : *Math. USSR Sbornik* **58** (1987) 557–574.
- [63] Ovsyannikov, I. M. and Shilnikov, L. P., Systems with a homoclinic curve of multidimensional saddle-focus type, and spiral chaos. *Mat. Sbornik* **182** (1991) 1043–1073; English translation : *Math. USSR Sbornik* **73** (1992) 415–443.
- [64] Pastor-Satorras, R. and Riedi, R. H., Numerical estimates of the generalized dimensions of the Hénon attractor for negative  $q$ . *J. Physics A* **29**(15) (1996) L391–L398.
- [65] Pogromsky, A. Y. G. Santoboni, H. Nijmeijer, An ultimate bound on the trajectories of the Lorenz systems and its applications, *Nonlinearity* **16** (2003) 1597–1605.
- [66] Palis, J. and Viana, M., High dimension diffeomorphisms displaying infinitely many sinks. *Annals Math.* **140** (1994) 1–71.
- [67] Posch, H. A. W. G. Hoover, F. J. Vesely, Canonical dynamics of the Nose oscillator : Stability, order, and chaos, *Phys. Rev. A* **33** (6) (1986) 4253–4265.
- [68] Qi, G. G. Chen, S. Du, Analysis of a new chaotic system, *Physica A* **352** (2005) 295–308.
- [69] Robinson, C., Transitivity and invariant measures for the geometric model of the Lorenz attractor. *Ergod. Theor. Dyn. Syst.* **4** (1984) 605–611.
- [70] Rossler, O. E. An equation for continuous chaos, *Phys. Lett. A* **57** (1976) 397–398.
- [71] Shilnikov, L. P., The bifurcation theory and quasi-hyperbolic attractors. *Uspehi Mat. Nauk.* **36** (1981) 240–241.



- [72] Shilnikov, L. P., A contribution of the problem of the structure of an extended neighborhood of rough equilibrium state of saddle-focus type. *Math. USSR Shornik* **10** (1970) 91–102 (translated by F. A. Cezus).
- [73] Shilnikov, L. P., Bifurcations and strange attractors, *ICM III* (2002) 1–3.
- [74] Sparrow, C., *The Lorenz Equations : Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*. Springer-Verlag, New York (1982).
- [75] Sprott, J. C. Some simple chaotic flows, *Phys. Rev. E* **50** (1994) 647–650.
- [76] Sprott, J. C. Automatic generation of strange attractors, *Comput. & Graphics* **17** (1993) 325–332.
- [77] Sprott, J. C. S. J. Linz, Algebraically simple chaotic flows, *J. Chaos Theory App.* **5** (2000) 3–22.
- [78] Sprott, J. C. Simplest dissipative chaotic flow. *Phys. Lett. A* **228** (1997) 271–274.
- [79] Turaev, D. V. and Shilnikov, L. P., An example of a wild strange attractor. *Math. Sbornik* **189**(2) (1996) 291–314.
- [80] Tucker, W., Rigorous models for the Lorenz equations. UUDM Report 26, ISSN (1996a) 1101–3591.
- [81] Tucker, W., Transitivity of Lorenz-like maps and the tired baker’s map. Preprint (1996b).
- [82] Williams, R. F., The Structure of Lorenz attractors. *Publ. Math. IHES* **50** (1979) 321–347.
- [83] Yang, Q. G. Chen, T. Zhou, A unified Lorenz-type system and its canonical form, *Int. J. Bifur. Chaos* **16** (2006) 2855–2871.
- [84] Zeraoulia E. and Sprott, J. C., *2-D Quadratic Maps and 3-D ODE Systems : A Rigorous Approach*. World Scientific Series on Nonlinear Science Series A **73** (2010).
- [85] Zeraoulia, E., Analysis of a new chaotic system with three quadratic nonlinearities. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems* **14**(b) (2007) 603–613.

- [86] Zeraoulia, E. and Hamri, N. E., A generalized model of some Lorenz-type and quasi-attractors type strange attractors in three-dimensional dynamical systems. *International Journal of Pure & Applied Mathematical Sciences* **2**(1) (2005) 67–76.
- [87] Zeraoulia, E. and Sprott, J. C., A two-dimensional discrete mapping with  $C^\infty$ -multifold chaotic attractors. *Electronic Journal of Theoretical Physics* **5**(17) (2008a) 111–124.
- [88] Zeraoulia, E. and Sprott, J. C., A minimal 2-D quadratic map with quasi-periodic route to chaos. *Int. J. Bifurcation and Chaos* **18**(5) (2008b) 1567–1577.
- [89] Zeraoulia, E. and Sprott, J. C., On the robustness of chaos in dynamical systems : Theories and applications. *Front. Phys. China* **3** (2008c) 195–204.
- [90] Zeraoulia, E. and Sprott, J. C., The effect of modulating a parameter in the logistic map. *Chaos* **18** (2008d) 023119-1–023119-7.
- [91] Zhou, T. Y. Tang, G. Chen, Complex dynamical behaviors of the chaotic Chen’s system, *Int. J. Bifur. Chaos* 9 (2003) 2561–2574.
- [92] Zhou, T. G. Chen, Q. Yang, Constructing a new chaotic system based on the Sh’ilnikov criterion, *Chaos, Solitons and Fractals* 19 (2004) 985–993.
- [93] Zhou, T. G. Chen, Classification of chaos in 3-D autonomous quadratic systems-I. Basic framework and methods, *Int. J. Bifur. Chaos* 16 (2006) 2459–2479.
- [94] Zhou, T., Chen, G. & Yang, Q. ”Constructing a new chaotic system based on the Sh’ilnikov criterion,” *Chaos, Solitons and Fractals* 19, (2004) 985–993.
- [95] Zhou, T. & Chen, G., [2005] ”Classification of chaos in 3-D autonomous quadratic systems-I. Basic framework and methods,” *Int. J. Bifur. Chaos* 16, 2459–2479.