REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE CONSTANTINE 1

FACULTE DES SCIENCES EXACTES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre:55 DS 2013
N° série 11 mat 2013

THESE

Présenté pour l'obtention du diplôme de:

DOCTORAT EN SCIENCES

Thème

Etude de Système d'Equations Paraboliques et Hyperboliques Semi-Linéaires Avec des Conditions Non Locales

Option

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Par:

MOHAMED SALAH TEMSI

Devant le jury:

Président:	N.BENKAFADAR	Prof	Univ .Constantine 1
Rapporteur:	A.BOUZIANI	Prof	Univ .Oum.El.Bouaghi
Examinateurs:	N.KECHKAR	MC	Univ.Oum.El.Bouaghi
	S.DJEZZAR	Prof	Univ Constantine 1
	M.YAROU	Prof	Univ.Jijel

Soutenue le: 02-07-13

Table des matières

INTRODUCTION

Introduction

Les équations aux dérivées partielles sont un outil essentiel de modélisation et leur étude occupe les mathematiciens depuis le dix-huitième siecle avec les travaux d'Euler, d'Almbert, Lagrange et de Laplace. Pour un problème non-linéaire, on peut approcher sa solution par celle d'un problème linéaire. Néaumoins, au fil de ces trente dernières années beaucoup de problèmes physiques, mécaniques et biologiques ont été modelés par des équations aux dérivées partielles (EDP), paraboliques ou hyperboliques, mais avec des conditions aux bords intégrales. Ainsi, les EDP avec des conditions aus bords intégrales, ont bénéficies d'une trés grande attention. Sans cesse, nombreux articles ont apparus surtout pour l'équation de la conduction de la Chaleur Voir [1, 2], [5, 6, 7, 8, 10, 11, 15, 18, 20, 21, 25, 26, 27, 28, 32, 42]. Et on peut dire la même chose pour l'équation de Vibration voir [4, 14, 30, 37, 39]. Dans cette Thèse les EDP traités sont semi-linéaires .Géneralement, elles apparaissent dans la finance, l'écoulement des fluides dans un tuyau pore et des phenomènes de vibration d'une corde ou les ondes dans un océan. Comme référence on cite [5, 32, 37]. Les EDP abordées dans cette thèse, naissent de systemes d'équations paraboliques ou hyperboliques non -linéaires. Comme type de système on cite Réaction- diffusion apparaissant dans des domaines variés et un exemple trés connu est celui du modèle mathématique de la formation des motifs comme les tâches de Léopard sous la forme suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \gamma \left(a - u - \frac{\rho uv}{1+u+ku^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + \gamma \left(\alpha \left(a - v \right) - \frac{\rho uv}{1+u+ku^2} \right), \end{cases}$$

où a, b, α, γ et ρ sont des constantes positives et $\alpha > 1$. Les resultats les plus proches des problèmes étudiés peuvent être rencontrés dans [3, 5, 6, 8, 12, 13, 18, 25, 26, 29, 30, 32, 42].

La présente thèse est composé de quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré aux notions préliminaires ainsi qu'aux espaces des fonctions utilisés le long de l'étude. Le deuxième chapitre concerne l'étude d'un système pseudo-parabolique non-linéaire. Dans sa première partie, on procède à la transformation du système à un problème semi-linéaire équivalent, qui consiste à chercher $\theta = \theta\left(x,t\right),$ solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial\theta}{\partial t} - \alpha\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \beta\frac{\partial^3\theta}{\partial t\partial x^2} = f\left(x,t,\theta,\frac{\partial\theta}{\partial t}\right), \\ \theta\left(x,0\right) = \varphi_1\left(x\right), \\ \frac{\partial\theta(l,t)}{\partial x} = 0, \\ \int\limits_0^l \theta\left(x,t\right)dx = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Dans la seconde partie, on approche ce problème semi-linéaire au problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2} = f\left(x,t\right), \\ u\left(x,0\right) = \varphi_2\left(x\right), \\ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \\ \int\limits_0^l u\left(x,t\right)dx = 0. \end{cases} \tag{2}$$

L'éxistence, l'unicité et la dépendance continue par rapport aux données sont prouvées,en utilisant la méthode de séparation des variables, pour la solution forte, et les estimations à priori pour la solution faible. Dans sa troixième parte, on démontre l'éxistence et l'unicité et la dépendance continue par rapport aux données de la soution de l'équation semi-linéaire. Le chapitre trois est voué à l'étude d'un système pseudo-hyperbolique semi-linéaire. La méthode utilisée est celle utilisée dans le chapitre précédent. Idem pour le chapitre quatre qui est déstiné à l'étude d'un système pseudo-para-hyperbolique. les même résultats aéquis dans les chapitres précédent sont établis.

CHAPITRE 1
NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Chapitre 1

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Le présent chapitre est consacréaux rappels de certains concepts de base d'analyse, à usage permanent dans les prochains chapitres. Ces importantes notions sont énoncées sous forme de définitions, théorèmes, corollaires ou lemmes. La quasi-totalité de ces rappels se trouvent de façon abondante dans les ouvrages : [5, 14, 20, 21, 27, 28, 30, 32, 43, 44, 46, 48].

1.1 Notions fondamentales

1.1.1 Equations linéaires et semi-linéaires

Soit L un opérateur différentiel tel que Lu est égal à une somme de quelques dérivées par rapport à x et t. Le domaine de définition de l'opérateur L est dénoté $D(L)$.

Définition 1.1 *L'opérateur L est dit linéaire si son domaine de définition $D(L)$ est un ensemble linéaire et si*

(i) $L(\lambda u) = \lambda L(u)$, *pour tout* $u \in D(L)$, *et tout nombre (réel)* λ,

(ii) $L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2)$, *pour tout* $u_1, u_2 \in D(L)$.

L'équation

$$Lu = f(x,t) \tag{1.1}$$

est dite équation linéaire non homogène. L'élément f est appeléle membre droit, et l'élément inconnu, appartenant à $D(L)$, la solution de cette équation. Si dans (1.1) le membre droit f est nul, l'équation

$$Lu = 0 \tag{1.2}$$

est dite équation linéaire homogène. Si la fonction f dépend de la solution et / ou de ses dérivées, on dit que l'équation

$$Lu = f(x, t, u, \cdots) \tag{1.3}$$

est une équation semi-linéaire ou semi-linéaire.

Chaque solution u de l'équation linéaire non homogène (1.1) (si elle existe) peut être exprimée comme la somme d'une solution particulière ϖ de cette équation et de la solution générale w de l'équation (1.2) :

$$u(x, t) = w(x, t) + \varpi(x, t). \tag{1.4}$$

En effet, si u est une solution arbitraire de l'équation (1.1), c'est-à-dire,

$$Lu = f(x, t)$$

avec $u \in D(L)$ et ϖ est une solution particulière de cette équation, c'est-à-dire,

$$L\varpi = f(x, t)$$

avec $\varpi \in D(L)$, alors compte tenu de la linéaritéde l'opérateur L, la différence $u - \varpi = w \in D(L)$ satisfait l'équation homogène (1.2) :

$$Lw = L(u - \varpi) = Lu - L\varpi = f - f = 0.$$

Ceci prouve la présentation (1.4) de la solution u.

Théorème 1.1 *Si les fonctions u_i $(i = 1, 2, ..., n, ...)$ sont des solutions particulières d'une équation différentielle linéaire homogène $Lu = 0$(différentielle ordinaire ou aux dérivées* *partielles), alors la série*

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i$$

est aussi solution de cette équation si l'on peut calculer les dérivées de u existantes dans l'équation $Lu = 0$ en dérivant la série terme à terme, et ce pour toutes les constantes α_i.

Considérons, à présent, l'équation linéaire homogène

$$Lu = \lambda u \tag{1.5}$$

avec λ un paramètre complexe. Cette équation a une solution triviale pour tout λ.

Définition 1.2 *Les valeurs de λ pour lesquelles l'équation (1.5) possède des solutions non triviales appartenant à $D(L)$ sont appelées les valeurs propres de l'opérateur L et les solutions correspondantes sont les fonctions propres.*

1.1.2 Convergence uniforme des séries de fonctions

La convergence uniforme d'une série de fonctions peut être établie de plusieurs manières. La plus puissante est d'utiliser le

Théorème 1.2 *Soient D un intervalle ferméet bornéde $\mathbb{R}$, et $\sum\limits_n u_n$ une série de fonctions réelles définies sur D. S'il existe une série numérique é termes positifs convergente $\sum\limits_n M_n$ telle que*

$$|u_n(x)| \leq M_n.$$

Pour tout x dans D, alors la série $\sum\limits_n u_n$ est uniformément convergente dans D.

Les trois théorèmes suivants résument quelques propriétés des séries uniformément convergentes :

Théorème 1.3 *Soient D un intervalle ferméet bornéde $\mathbb{R}$ et $\sum\limits_n u_n$ une série de fonctions réelles définies sur D. On suppose que*

(i) *pour chaque entier n, la fonction u_n est continue sur D ;*

(ii) *la série $\sum_n u_n$ converge uniformément sur D.*

Alors la somme

$$u(x) = \sum_n u_n(x)$$

est continue sur D.

Théorème 1.4 *Si la série $\sum_n u_n$ converge au moins en un point $x_0 \in D$, si toutes les fonctions $u_n(x)$ admettent en tout point de D des dérivées continues $\frac{du_n(x)}{dx}$ et si la série $\sum_n \frac{du_n(x)}{dx}$ est uniformément convergente sur D, alors*

(i) *la série $\sum_n u_n$ est uniformément convergente sur D,*

(ii) *la série $\sum_n u_n$ peut être dérivée terme à terme, c'est-à-dire $\frac{d}{dx}\sum_n u_n(x) = \sum_n \frac{du_n(x)}{dx}$.*

Théorème 1.5 *Si une série $\sum_n u_n$ de fonctions réelles d'une variable réelle continues, est uniformément convergente sur un intervalle D et a pour somme la fonction $u(x)$, alors la série $\sum_n U_n$ des fonctions U_n définies par :*

$$U_n(x) = \int_a^x u_n(s)\, ds, \qquad a, x \in D,$$

est uniformément convergente et a pour somme la fonction U définie par :

$$U(x) = \int_a^x u(s)\, ds.$$

Les Théorèmes 1.4 et 1.5 donnent une condition permettant d'intégrer ou de dériver terme à terme une série, c'est-à-dire de permuter l'opération de sommation infinie avec l'opération d'intégration ou l'opération de dérivation.

1.1.3 Séries de Fourier

Définition 1.3 *Soit $u(x)$ une fonction réelle de variable réelle intégrable, périodique de période $2l$. On appelle série de Fourier ou développement de Fourier, de la fonction $u(x)$,* *la série trigonométrique*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{1.6}$$

où a_n *et* b_n *sont donnés par :*

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}u(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \tag{1.7}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}u(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$n=0,1,2,\ldots,$ *on vérifie que la première des ces formules fournit la valeur correcte de* a_0 *:*

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}u(x)dx,$$

qui est la moyenne de $u(x)$ *sur une période.*

Définition 1.4 *Les coefficients* a_n *et* b_n *s'appellent coefficients de Fourier de la fonction* $u(x)$ *sur l'intervalle* $[-l,l]$. *Ces coefficients existent sous la seule condition que* u *soit intégrable.*

Définition 1.5 *On dit qu'une fonction* u *réelle, de variable réelle a une discontinuité de première espèce au point* x_0*, si elle admet en ce point une limite à droite* $u(x_0+0)$ *et une limite à gauche* $u(x_0-0)$.

Définition 1.6 *On dit qu'une fonction* u *réelle, admet au point* x_0 *une dérivée à droite (respect. à gauche) si la fonction définie pour* $h>0$ *par :*

$$h\to\frac{u\left(x_0+h\right)-u\left(x_0+0\right)}{h}\qquad\left(\textit{respect.}\quad h\to\frac{u\left(x_0-0\right)-u\left(x_0-h\right)}{h}\right)$$

a une limite lorsque $h\to 0$.

Théorème 1.6 (Dirichlet) *Soit* u *une fonction réelle d'une variable réelle, périodique satisfaisant aux conditions suivantes (conditions de Dirichlet) :*

D1 : *Les discontinuités de u dans tout intervalle fini sont de première espèce et en nombre fini.*

D2 : *u admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.*

Alors, la série de Fourier de la fonction u est convergente et a pour somme $u(x)$ pour toute valeur x où la fonction est continue et

$$\frac{u(x+0)+u(x-0)}{2}$$

pour toute valeur x où la fonction est discontinue.

Théorème 1.7 *Si une fonction continue périodique $u(x)$ a des dérivées continues jusqu'à l'ordre $(k-1)$ inclus et la dérivée d'ordre k vérifie les conditions de Dirichlet, alors les coefficients de Fourier a_n et b_n de la fonction $f(x)$ sont d'ordre au moins égal à $\frac{1}{n^{k+1}}$, c'est-à-dire qu'ils auront les majorations :*

$$|a_n| \leq \frac{M}{n^{k+1}} \;\; ; \;\; |b_n| \leq \frac{M}{n^{k+1}}, \tag{1.8}$$

où M est un certain nombre positif.

Séries de Fourier en cosinus

On suppose que $u(x)$ est une fonction quelconque dans l'intervalle $[0,l]$. Il existe une fonction paire dans l'intervalle $[-l,l]$, dite extension paire de $u(x)$, qui est égale é $u(x)$ dans l'intervalle $[0,l]$. La série de Fourier de l'extension paire de $u(x)$est une série en cosinus. Elle est appelée série de Fourier en cosinus de $u(x)$ sur l'intervalle $[0,l]$, et est définie par :

$$u(x) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} \tag{1.9}$$

où

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l u(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{1.10}$$

Remarque 1.1 *Si l'on se restreint au développement en série de Fourier en* $\cos\frac{n\pi x}{l}$*, d'une fonction* $u(x)$ *donnée seulement dans l'intervalle* $(0,l)$*, alors les conditions du Théorème 1.7 doivent porter sur la fonction obtenue par extension paire de la fonction* $u(x)$*.En particulier, pour que la fonction* $u'(x)$ *soit continue il faut que*

$$u'(0) = u'(l) = 0,$$

sinon il se produit l'extension paire une discontinuité en $x = 0$ *et* $x = l$*. En général, pour que les dérivées d'ordre impair de la fonction étendue soient continues il faut que les conditions suivantes soient satisfaites :*

$$u^{(k)}(0) = u^{(k)}(l) = 0 \qquad k = 1, 3, 5, ..., 2n+1.$$

et la continuité des dérivées paires est assurée sans aucune condition supplémentaire.

Dérivation et intégration des séries de Fourier

L'intégration et la dérivation des séries de Fourier peuvent être justifiées par application des Théorèmes 1.4 et 1.5, qui sont valables pour toutes séries. Il faut, cependant, insister sur le fait que ces théorèmes conduisent à des conditions suffisantes mais non nécessaires. Le théorème suivant est particulièrement utile dans le cas de l'intégration :

Théorème 1.8 *La série de Fourier correspondant à* $u(x)$ *peut être intégrée terme à terme de* x_0 *à* x*, et la série résultante convergera uniformément vers*

$$\int_{x_0}^{x} u(\xi)\, d\xi,$$

si $u(x)$ *est continue par morceaux dans l'intervalle* $[0,l]$ *et si* x_0 *et* x *appartiennent à cet intervalle.*

Si, en plus, $u(x)$ *a une valeur moyenne nulle* $(a_0 = 0)$*, sa primitive est une fonction* *périodique donnée par :*

$$\int_{x_0}^{x} u(\xi)\,d\xi$$
$$= \frac{\alpha_0}{2} + \left(a_1 \sin\frac{\pi x}{l} + \cdots + \frac{a_n}{n}\sin\frac{n\pi x}{l} + \cdots\right) - \left(b_1 \cos\frac{\pi x}{l} + \cdots + \frac{b_n}{n}\cos\frac{n\pi x}{l} + \cdots\right).$$

Le coefficient $\frac{\alpha_0}{2}$ *est égal à la valeur moyenne de* $\int_{x_0}^{x} u(\xi)\,d\xi$ *sur l'intervalle* $(0,l)$*. On peut aussi le calculer par la formule :*

$$\frac{\alpha_0}{2} + \left(a_1 \sin\frac{\pi x_0}{l} + \cdots + \frac{a_n}{n}\sin\frac{n\pi x_0}{l} + \cdots\right) - \left(b_1 \cos\frac{\pi x_0}{l} + \cdots + \frac{b_n}{n}\cos\frac{n\pi x_0}{l} + \cdots\right) = 0.$$

1.2 Espaces fonctionnels et inégalités élémentaires

On désigne dans tout ce qui suit, par D l'intervalle ouvert borné $(0,l)$ de nombres réels. Commençons par rappeler succinctement un certain nombre de notions sur l'espace $L^2(D)$ des fonctions de carréintégrable dans D.

Définition 1.7 *On dit qu'une fonction réelle* $u(x)$ *est de carré intégrable dans* D *si*

$$\int_D u^2(x)dx < \infty.$$

sont convergentes (i.e., si elles existent au sens de Lebesgue) et sont finies.

Définition 1.8 *Soient* $u(x)$ *et* $v(x)$ *deux fonctions de carré intégrable dans* D*.*

1. *Le produit scalaire de* u *et* v *est le nombre*

$$(u,v) = \int_D u(x)v(x)dx. \tag{1.11}$$

2. *La norme de la fonction* $u(x)$*, est le nombre non négatif*

$$\|u\|_{L^2(D)} = (u,u)^{1/2} = \left(\int_D u^2(x)dx\right)^{1/2}. \tag{1.12}$$

3. La distance entre les deux fonctions $u(x)$ et $v(x)$, est la norme de leur différence

$$\|u-v\|_{L^2(D)} = \left(\int\limits_D (u(x)-v(x))^2\,dx\right)^{1/2}. \tag{1.13}$$

4. L'ensemble des fonctions de carré intégrable dans D, muni du produit scalaire (1.11) est appeléespace des fonctions de carré intégrable dans D. On le note par $L^2(D)$.

On montre, la

Proposition 1.1 *L'espace $L^2(D)$ muni de la norme $\|.\|_{L^2(D)}$ est un espace de Hilbert.*

Définition 1.9 *On dit que la suite de fonctions $u_n \in L^2(D)$ converge dans l'espace $L^2(D)$ vers une fonction $u \in L^2(D)$ si*

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^2(D)} = 0.$$

On écrit

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \text{ dans } L^2(D).$$

La fonction $u(x)$ est appelée la limite (ou la fonction limite) de la suite $\{u_n(x)\}$ dans l'espace $L^2(D)$.

Définition 1.10 *La suite de fonctions $u_n \in L^2(D)$ est dite suite de Cauchy dans l'espace $L^2(D)$ si*

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} \|u_n - u_m\|_{L^2(D)} = 0.$$

Soit M un sous ensemble de $L^2(D)$. On dit que M est dense dans $L^2(D)$ si pour toute fonction $u \in L^2(D)$ il existe une suite $u_n \in M$ ($u_n \neq u$ dans $L^2(D)$) qui converge vers u dans $L^2(D)$.

Notation 1.1 *Notons par $C_0(D)$ l'espace des fonctions continues à support compact dans D.*

On démontre le

Théorème 1.9 *L'espace $C_0(D)$ est dense dans $L^2(D)$.*

Théorème 1.10 (Weierstrass) *Si $u(x)$ est une fonction arbitraire continue sur l'intervalle ferméet borné $\bar{D}$, il existe une suite de polynômes $P_1(x), P_2(x), \ldots$ qui converge uniformément vers $u(x)$sur tout l'intervalle $\bar{D}$.*

Corollaire 1.1 *L'ensemble $IP_n(x)$des polynômes de degré n, $n \in IN$, est dense dans $L^2(D)$. Autrement dit, tout élément de $L^2(D)$ peut être approximé par une suite de polynômes de degré n. De même, l'ensemble $IP_n(t)$ est dense dans $L^2(0,T)$.*

Construisons, à présent, l'espace $B_2^1(D)$, qui a été introduit pour la première fois par Bouziani dans [2, 6].

Etant donné que les fonctions continues à support compact dans D sont intégrables au sens de Lebesgue par rapport à dx, on peut définir sur $C_0(D)$ la forme bilinéaire $((.,.))$ donnée par

$$((u,v)) = \int_D J_x^* u J_x^* v dx \tag{1.14}$$

où

$$J_x^* u = \int_x^l u(\xi,t)\, d\xi.$$

On rappelle que $((.,.))$ est un produit scalaire sur l'espace $C_0(D)$ pour lequel $C_0(D)$ n'est pas complet. On est alors conduit à introduire sa complétion.

Définition 1.11 *On désigne par $B_2^1(D)$ le complétéde $C_0(D)$ pour le produit scalaire (1.14) et auquel on associe la norme,*

$$\|u\|_{B_2^1(D)} = ((u,u))^{1/2} = \|J_x^* u\|_{L^2(D)}. \tag{1.15}$$

Ainsi, on a

Proposition 1.2 *L'espace $\left(B_2^1(D), \|.\|_{B_2^1(D)}\right)$ est un espace de Hilbert.*

Lemme 1.1 *Pour tout $u \in B_2^1(D)$, on a*

$$\|u\|_{B_2^1(D)} \leq \frac{l}{\sqrt{2}} \|u\|_{L^2(D)}. \tag{1.16}$$

Démonstration. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz on obtient pour tout $x \in D$:

$$\begin{aligned} (J_x^* u)^2 &= \left(\int_x^l u(\xi) \, d\xi \right) \leq \left(\int_x^l d\xi \right) \left(\int_x^l u^2(\xi) \, d\xi \right) \\ &\leq (l - x) \int_D u^2(\xi) \, d\xi. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \|u\|_{B_2^1(D)}^2 &\leq \int_D (l - x) \, dx \int_D u^2(x) \, d\xi \\ &\leq \frac{l^2}{2} \|u\|_{L^2(D)}^2. \end{aligned}$$

Corollaire 1.2 *L'ensemble $IP_n(x)$des polynômes, $n \in \mathbb{N}$, est dense dans $B_2^1(D)$.*

Dans tout ce qui suit, H désigne un espace de Hilbert.

Définition 1.12 *On désigne par $L^2(0,T;H)$ l'espace des (classes de) fonctions u mesurables dans l'intervalle $[0,T]$ pour la mesure de Lebesgue, et à valeurs dans H et telles que*

$$\|u\|_{L^2(0,T;H)} = \left(\int_0^T \|u(.,t)\|_H^2 \, dt \right)^{1/2} < \infty, \tag{1.17}$$

où $\|.\|_H$ désigne la norme hilbertienne sur H.

Cette définition étant posée, on démontre la

Proposition 1.3 *L'espace $L^2(0,T;H)$ est un espace de Hilbert.*

Définition 1.13 *On désigne par $C(0,T;H)$ l'espace des fonctions continues sur $[0,T]$ à valeurs dans H muni de la norme de la convergence uniforme sur $[0,T]$*

$$\|u\|_{C(0,T;H)} = \max_{0\leq t\leq T} \|u(.,t)\|_H . \tag{1.18}$$

Ici, on a la

Proposition 1.4 *L'espace $\left(C(0,T;H), \|.\|_{C(0,T;H)}\right)$ est un espace de Banach.*

Définition 1.14 *On définit l'espace $H^1(0,T;H)$ comme étant l'espace des fonctions u appartenant à $L^2(0,T;H)$ telles que $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;H)$.*

Tenant compte des propositions 1.3 et 1.4, on aura :

1. Les espaces $L^2(0,T;L^2(D))$ et $L^2(0,T;B_2^1(D))$ sont des espaces de Hilbert.
2. les espaces $C(0,T;L^2(D))$ et $C(0,T;B_2^1(D))$ sont des espaces de Banach.

Des Corollaires 1.1 et 1.2 découle le

Corollaire 1.3 *L'ensemble $IP_n(x,t)$ des polynômes, $n \in IN$, est dense dans l'espace $L^2(0,T;B_2^1(D))$.*

Du Lemme 1.1, on a le

Corollaire 1.4 *On a les inégalités suivantes :*

$$\|u\|_{L^2\left(0,T;B_2^1(D)\right)} \leq \frac{l}{\sqrt{2}} \|u\|_{L^2(0,T;L^2(D))}, \tag{1.19}$$

et

$$\|u\|_{C\left(0,T;B_2^1(D)\right)} \leq \frac{l}{\sqrt{2}} \|u\|_{C(0,T;L^2(D))}. \tag{1.20}$$

Lemme 1.2 *Pour tout $u \in C(0,T;H)$, on a*

$$\|u\|_{L^2(0,T;H)} \leq \sqrt{T} \|u\|_{C(0,T;H)}. \tag{1.21}$$

Démonstration. Soit u un élément de $C(0,T;H)$, alors

$$\|u\|^2_{L^2(0,T;H)} = \int_0^T \|u(.,t)\|^2_H \, dt \leq \int_0^T \max_{0\leq t\leq T} \|u(.,t)\|^2_H \, dt.$$

D'où

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{L^2(0,T;H)} &\leq \|u\|^2_{C(0,T;H)} \cdot \int_0^T dt \\ &\leq T \cdot \|u\|^2_{C(0,T;H)} \, . \end{aligned}$$

En particulier si $H = L^2(D)$, on a

$$\|u\|^2_{L^2(0,T;L^2(D))} \leq T \|u\|^2_{C(0,T;L^2(D))} \, , \tag{1.22}$$

et si $H = B^1_2(D)$, on a

$$\|u\|_{L^2\left(0,T;B^1_2(D)\right)} \leq \sqrt{T} \|u\|_{C\left(0,T;B^1_2(D)\right)} \, . \tag{1.23}$$

Citons, enfin, un lemme dont l'utilisation est fréquente pour l'obtention des estimations a priori dans les normes des espaces sus-cités :

Lemme 1.3 (Gronwall) *Si*

$$\alpha + y(\tau) \leq A + C \int_0^\tau y(t) \, dt, \tag{1.24}$$

où A, α sont deux constantes strictement positives et C est une constante positive. Alors on a

$$\alpha + y(\tau) \leq A e^{C\tau}. \tag{1.25}$$

CHAPITRE 2

SYSTEME D' EQUATIONS PSEUDO-PARABOLIQUES AVEC DES CONDITIONS NON LOCALES

Chapitre 2

SYSTEME D' EQUATIONS PSEUDO-PARABOLIQUES AVEC DES CONDITIONS NON LOCALES

2.1 Position du problème original

2.1.1 Etude d'un système

Notre objectif essentiel est l'étude d'un système d'équations pseudo-paraboliques (2.1), posé comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta_1 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = f_1(x,t,u,v), \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta 2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = f_2(x,t,u,v), \\ u(x,0) = \varphi_1(x), u(x,0) = \varphi_1(x), \\ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \psi_1(t), \frac{\partial v(l,t)}{\partial x} = \psi_2(t), \\ \int_0^l u(x,t)\,dx = m_1(t), \int_0^l v(x,t)\,dx = m_2(t). \end{cases} \tag{2.1}$$

On commence par le transformer en un problème équivalent déterminé ainsi :

Eposant :

$$f_1 = -f_2, \alpha = \alpha_1 = \alpha_2, \beta = \beta_1 = \beta_2.$$

et en sommant, on obtient le problème (2.2) suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \beta_1 \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} = 0, \\ w(x,0) = \varphi(x) \\ \frac{\partial w(l,t)}{\partial x} = \psi(t),, \\ \int_0^l w(x,t)\, dx = m(t). \end{cases} \tag{2.2}$$

où :

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x),$$

$$\psi(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t),$$

$$m(t) = m_1(t) + m_2(t).$$

La résolution du problème (2.2) entrîne que :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = f_3(x,t,u), \\ u(x,0) = \varphi_2(x), \\ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \psi_2(t) \\ \int_0^l u(x,t)\, dx = m_2(t). \end{cases} \tag{2.3}$$

Où :

$$f_3(x,t,u) = f_1(x,t,u,v) - \beta_1 w(x,t).$$

Ainsi si on prounve l'existence et l'unicité de $u(.,.)$ on obtiendra $v = w - u$. Donc la résolution du système (2.1) revient à la résolution du problème (2.2).

2.2 PROBLEME MIXTE AVEC UNE CONDITION INTEGRALE POUR UNE EQUATION PSEUDO PARABOLIQUE

Un grand nombre de phénomènes physiques conduisent à l'étude d'un problème liée à l'équation pseudo-parabolique

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}-\kappa\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-\eta\frac{\partial^3\theta}{\partial t\partial x^2}=h\left(x,t,\theta\right). \tag{*}$$

Par exemple, il peut être un modèle pour la conduction de la chaleur impliquant une température thermodynamique $\Theta=\theta-\eta\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$ et une température θ conducteur. Il se pose également dans la propagation monodirectionnelle des non-linéaire, dispersif, des ondes longues, alors u est typiquement l'amplitude ou la vitesse, x est proportionnel à la distance dans la direction de propagation, et t est proportionnelle au temps écoulé.

2.2.1 Cas d'une équation linéaire

Position du problème

L'équation du mouvement est

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-\beta\frac{\partial^3\theta}{\partial t\partial x^2}=h\left(x,t\right), \tag{2.4}$$

Soient données à l'instant initial

$$\theta\left(x,0\right)=\Phi\left(x\right), \tag{2.5}$$

A l'extrémité $x=l$, on a

$$\frac{\partial\theta\left(l,t\right)}{\partial x}=\mu\left(t\right), \tag{2.6}$$

Si l'on impose que la moyenne des déplacements est égale à, alors on a

$$\int_0^l\theta\left(x,t\right)dx=m\left(t\right). \tag{2.7}$$

Les fonctions sont supposées connues. Elles vérifient :

$$h \in C\left(\overline{Q}\right), \; \Phi \in C^1\left([0,l]\right), \; \mu \text{ et } m \in C^2\left(0,T\right).$$

et les conditions de compatibilité

$$\Phi'\left(l\right) = \mu\left(0\right), \qquad \int_0^l \Phi\left(x\right) dx = m\left(0\right).$$

Ainsi, le problème (2.4)-(2.7) peut être considéré comme un problème mixte combinant une condition Neumann à une condition intégrale pour une équation parabolique linéaire du second ordre.

Dans cette partie, on montre l'existence, l'unicité et la continuité par rapport aux données de la solution du problème (2.4)-(2.7). A cette fin, il est commode de ramener les conditions aux limites non homogènes à des conditions homogènes, en introduisant une nouvelle fonction inconnue $u = u\left(x,t\right)$ définie par :

$$u\left(x,t\right) = \theta\left(x,t\right) - U\left(x,t\right)$$

avec

$$U\left(x,t\right) = x\mu\left(t\right) + \frac{3\left(x-l\right)^2}{l^3}\left(m\left(t\right) - \frac{l^2}{2}\mu\left(t\right)\right).$$

Il est aisédé vérifier que la fonction construite satisfait aux conditions (2.6) et (2.7). Cette transformation nous permet de ramener le problème (2.4)-(2.7) au problème équivalent suivant :

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = f\left(x,t\right), \tag{2.8}$$

$$\ell u = u\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right), \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial u\left(l,t\right)}{\partial x} = 0, \tag{2.10}$$

$$\int_0^l u\left(x,t\right) dx = 0. \tag{2.11}$$

Où :

$$f(x,t) = h(x,t) - \left[\begin{array}{c} x\mu'(t) + \left(\frac{3(x-l)^2}{l^3} - \beta\frac{6}{l^3}\right)\left(m'(t) - \frac{l^2}{2}\mu'(t)\right) \\ -\alpha\frac{6}{l^3}\left(m(t) - \frac{l^2}{2}\mu(t)\right) \end{array} \right],$$

$$\varphi(x) = \Phi(x) - \left[x\mu(0) + \frac{3(x-l)^2}{l^3}\left(m(0) - \frac{l^2}{2}\mu(0)\right)\right].$$

Solution classique

On se propose de démontrer l'existence, l'unicité et la continuité par rapport aux données de la solution classique du problème (2.8)-(2.11). On commence, d'abord, par donner la définition de la solution classique :

Définition 2.1 *On appelle solution classique du problème (2.8)-(2.11) toute fonction* $u(x,t) \in C^2(\bar{\Omega})$ *vérifiant l'équation (2.8), la condition initiale (2.9) et les conditions aux bord (2.8)-(2.11) et ayaut la dérivée continue de la forme* $\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}$.

Estimation à priori

Dans ce paragraphe, on établit des estimations a priori pour démontrer, dans le paragraphe qui suit, l'unicité et la dépendance continue par rapport aux données de la solution classique. Pour cela, on a besoin du

Lemme 2.1 *Supposons que* $u(x,t)$ *est solution du problème (2.8)-(2.11) et* $f \in C(\bar{\Omega})$, *alors*

$$2\int_0^\tau \|u(.,t)\|^2_{L^2(0,l)}\,dt + S^2(\tau) = S^2(0) + 2\int_0^\tau (f,u)_{B_2^1(0,l)}\,dt,$$

où

$$S^2(\tau) = \|u(.,\tau)\|^2_{B_2^1(0,l)} + \beta\|u(.,\tau)\|^2_{L^2(0,l)}$$

et

$$S^2(0) = \|\varphi\|^2_{B_2^1(0,l)} + \beta\|\varphi\|^2_{L^2(0,l)},$$

et τ *un nombre arbitraire de l'intervalle* $[0,T]$.

Démonstration. On considère le produit scalaire dans $L^2\left(0,\tau;B_2^1\left(0,l\right)\right)$ de l'équation (2.8) et $2u\left(x,t\right)$, il vient

$$\begin{aligned}
&2\int_0^\tau (f,u)_{B_2^1(0,l)}\,dt \\
&= 2\int_0^\tau \left(\frac{\partial u}{\partial t},u\right)_{B_2^1(0,l)} dt - 2\alpha\int_0^\tau \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},u\right)_{B_2^1(0,l)} dt \\
&\quad -2\beta\int_0^\tau \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2},u\right)_{B_2^1(0,l)} dt. \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Intégrons par parties la première intégrale du membre droit de l'égalité ainsi obtenue, il vient

$$\begin{aligned}
2\int_0^\tau \left(\frac{\partial u}{\partial t},u\right)_{B_2^1(0,l)} dt &= \left\|u\left(.,t\right)\right\|^2_{B_2^1(0,l)}\Big|_{t=0}^{t=\tau} \\
&= \left\|u\left(.,\tau\right)\right\|^2_{B_2^1(0,l)} - \left\|\varphi\right\|^2_{B_2^1(0,l)}. \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Quant à la seconde intégrale du membre droit de l'identité (2.12), on a en tenant compte des conditions (2.10) et (2.11) :

$$\begin{aligned}
&-2\alpha\int_0^\tau \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},u\right)_{B_2^1(0,l)} dt \\
&= -2\alpha\int_0^\tau \left(\frac{\partial u\left(l,t\right)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}, J_x^*\left(u\right)\right)_{L^2(0,l)} dt \\
&= 2\alpha\int_0^\tau \left(\frac{\partial u}{\partial x}, J_x^* u\right)_{L^2(0,l)} dt \\
&= 2\alpha\int_0^\tau \left(u, J_x^* u\right)\big|_{x=0}^{x=l} dt + 2\alpha\int_0^\tau (u,u)_{L^2(0,l)}\,dt \\
&= 2\alpha\int_0^\tau \left\|u\left(.,\tau\right)\right\|^2_{L^2(0,l)} dt = 2\alpha\left\|u\right\|^2_{L^2(0,\tau,L^2(0,l))}. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Concernant la troisième intégrale du membre droit de l'identité (2.12), on a, en tenant compte des conditions (2.10) et (2.11) :

$$
\begin{aligned}
& -2\beta \int_0^\tau \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}, u \right)_{B_2^1(0,l)} dt \\
&= -2\beta \int_0^\tau \left(\frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}, J_x^* u \right)_{L^2(0,l)} dt \\
&= 2\beta \int_0^\tau \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}, J_x^* u \right)_{L^2(0,l)} dt \\
&= 2\beta \left\{ \int_0^\tau \frac{\partial u}{\partial t}.J_x^* u \Big|_{x=0}^{x=l} dt + \int_0^\tau \frac{\partial u}{\partial t} u dx dt \right\} \\
&= 2\beta \int_0^l \int_0^\tau \frac{\partial u}{\partial t} u dt dx \\
&= \beta \left(\|u(.,\tau)\|^2_{L^2(0,l)} - \|\varphi\|^2_{L^2(0,l)} \right).
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Insérons (2.13), (2.15) dans l'égalité (2.12), on obtient

$$
\begin{aligned}
& \|u(.,t)\|^2_{B_2^1(0,l)} + 2\alpha \|u\|^2_{L^2(0,\tau,L^2(0,l))} + \beta \|u(.,\tau)\|^2_{L^2(0,l)} \\
&= 2 \int_0^\tau (f,u)_{B_2^1(0,l)} dt + \|\varphi\|^2_{B_2^1(0,l)} + \beta \|\varphi\|^2_{L^2(0,l)} .
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

Posons

$$
S^2(\tau) = \|u(.,t)\|^2_{B_2^1(0,l)} + \beta \|u(.,\tau)\|^2_{L^2(0,l)} ,
$$

$$
S^2(0) = \|\varphi\|^2_{B_2^1(0,l)} + \beta \|\varphi\|^2_{L^2(0,l)} .
$$

On a ainsi démontré le Lemme 2.1.

Donnons maintenant des estimations a priori pour le problème (2.8)-(2.11) :

Proposition 2.1 *La solution classique $u(x,t)$ du problème (2.8)-(2.11) satisfait les estimations a priori suivantes :*

$$
\int_0^\tau \|u(.,t)\|_{L^2(0,l)} dt \leq \frac{1}{\alpha\sqrt{\beta}} \left(S(0) + \int_0^\tau \|f(.,t)\|^2_{B_2^1(0,l)} dt \right), \qquad \tau \geq 0, \tag{2.17}
$$

$$
\|u(.,t)\|^2_{B_2^1(0,l)} \leq S(0) + \int_0^\tau \|f(.,t)\|^2_{B_2^1(0,l)} dt, \qquad \tau \geq 0, \tag{2.18}
$$

et

$$
\|u(.,t)\|_{L^2(0,l)} \leq \frac{1}{\alpha\sqrt{\beta}} \left(S(0) + \int_0^\tau \|f(.,t)\|^2_{B_2^1(0,l)} dt \right), \qquad \tau \geq 0. \tag{2.19}
$$

Démonstration. Dérivons (2.16) par rapport à τ, on obtient

$$2\alpha \left\| u\left(.,\tau\right)\right\|_{L^2(0,l)} + 2S\left(\tau\right) S'\left(\tau\right) = 2\left(f\left(.,\tau\right), u\left(.,\tau\right)\right)_{B_2^1(0,l)} \tag{2.20}$$

L'application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz au membre droit de (2.20) donne

$$\alpha \left\| u\left(.,\tau\right)\right\|_{L^2(0,l)} + 2S\left(\tau\right) S'\left(\tau\right) \leq \left\| f\left(.,\tau\right)\right\|_{B_2^1(0,l)} \left\| u\left(.,\tau\right)\right\|_{B_2^1(0,l)}. \tag{2.21}$$

De la définition de $S^2\left(\tau\right)$, on a

$$\left\| u\left(.,\tau\right)\right\|_{B_2^1(0,l)} \leq S\left(\tau\right) \tag{2.22}$$

et

$$\sqrt{\beta} \left\| u\left(.,\tau\right)\right\|_{L^2(0,l)} \leq S\left(\tau\right). \tag{2.23}$$

Substituons (2.22) dans (2.21), il vient

$$\alpha \left\| u\left(.,\tau\right)\right\|^2_{L^2(0,l)} + 2S\left(\tau\right) S'\left(\tau\right) \leq \left\| f\left(.,\tau\right)\right\|_{B_2^1(0,l)} S\left(\tau\right). \tag{2.24}$$

Pour (2.23), minimisons le membre gauche de cette dernière, il s'ensuit

$$\alpha\sqrt{\beta} \left\| u\left(.,t\right)\right\|_{L^2(0,l)} S\left(\tau\right) + 2S\left(\tau\right) S'\left(\tau\right) \leq \left\| f\left(.,t\right)\right\|_{B_2^1(0,l)} S\left(\tau\right), \tag{2.25}$$

d'où, il vient

$$\alpha\sqrt{\beta} \left\| u\left(.,\tau\right)\right\|_{L^2(0,l)} + 2S'\left(\tau\right) \leq \left\| f\left(.,\tau\right)\right\|_{B_2^1(0,l)} \tag{2.26}$$

Intégrons entre 0 et τ, on obtient

$$\alpha\sqrt{\beta} \int_0^\tau \left\| u\left(.,\tau\right)\right\|_{L^2(0,l)} + \int_0^\tau S'\left(\tau\right) \leq \int_0^\tau \left\| f\left(.,t\right)\right\|_{B_2^1(0,l)} dt, \tag{2.27}$$

Par conséquent

$$\alpha\sqrt{\beta} \int_0^\tau \left\| u\left(.,\tau\right)\right\|_{L^2(0,l)} + S\left(\tau\right) \leq S\left(0\right) + \int_0^\tau \left\| f\left(.,t\right)\right\|_{B_2^1(0,l)} dt. \tag{2.28}$$

En particulier, on a

$$\int_0^\tau \left\| u\left(.,t\right)\right\|_{L^2(0,l)} \leq \frac{1}{\alpha\sqrt{\beta}} \left(S\left(0\right) + \int_0^\tau \left\| f\left(.,t\right)\right\|_{B_2^1(0,l)} dt \right), \qquad \tau \geq 0 \tag{2.29}$$

et

$$S(\tau) \leq S(0) + \int_0^\tau \|f(.,t)\|_{B_2^1(0,l)}\, dt. \tag{2.30}$$

Moyennant (2.22), (2.23) et (2.29) respectivement, on aura

$$\|u(.,\tau)\|_{B_2^1(0,l)} \leq S(0) + \int_0^\tau \|f(.,t)\|_{B_2^1(0,l)}\, dt \tag{2.31}$$

et

$$\sqrt{\beta}\,\|u(.,\tau)\|_{L^2(0,l)} \leq S(0) + \int_0^\tau \|f(.,t)\|_{B_2^1(0,l)}\, dt$$

c'est-à-dire

$$\|u(.,\tau)\|_{L^2(0,l)} \leq \frac{1}{\sqrt{\beta}}\left(S(0) + \int_0^\tau \|f((.,t))\|_{B_2^1(0,l)}\, dt\right). \tag{2.32}$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition.

Unicité et continuité par rapport aux données de la solution

Théorème 2.1 *La solution classique du problème (2.8)-(2.11) est unique et depend continument de φ et f, dans le sens où, si $f \in C\left(\bar{\Omega}\right), f^* \in C\left(\bar{\Omega}\right)$*

$$\|f - f^*\|_{B_2^1(0,l)} \leq \varepsilon, \qquad 0 \leq \tau \leq T, \tag{2.33}$$

et

$$\|\varphi - \varphi^*\|_{B_2^1(0,l)} \leq \varepsilon_0, \tag{2.34}$$

alors, les solutions classiques correspondants u et u^* satisfont les estimations suivantes pour tous les $t \in [0,T]$

$$\|u - u^*\|_{L^2(0,l)} \leq C_1(\varepsilon + \varepsilon_0) \tag{2.35}$$

$$\|u - u^*\|_{B_2^1(0,l)} \leq C_2(\varepsilon + \varepsilon_0) \tag{2.36}$$

$$\int_0^\tau \|u - u^*\|_{L^2(0,l)} \leq C_3(\varepsilon + \varepsilon_0) \tag{2.37}$$

où $C_1,\ C_2,\ C_3$, sont des constantes positives.

Démonstration. Supposons que le problème (2.8)-(2.11) possède deux solutions classiques $u_1 \neq u_2$, leur différence

$$u = u_1 - u_2$$

est alors solution classique du même problème avec

$$\varphi = 0 \text{ et } f = 0.$$

Donc cette solution est justiciable de l'estimation (2.30), (2.31) dans laquelle : $f \equiv 0$ et $S(0) \equiv 0$, alors

$$\|u(.,\tau)\|_{L^2(0,l)} \equiv 0, \qquad \forall t \in [0,T],$$

$$\|u(.,\tau)\|_{B_2^1(0,l)} \equiv 0, \qquad \forall t \in [0,T],$$

d'où $u \equiv 0$ $p.p.$ $(x,t) \in \Omega$ or $u \in C\left(\bar{\Omega}\right)$ il s'ensuit :

$$u(x,t) \equiv 0, \qquad \forall (x,t) \in \Omega,$$

ce qui implique

$$u_1 \equiv u_2, \qquad \forall (x,t) \in \Omega,$$

d'où l'unicité de la solution.

Pour démontrer la continuitépar rapport aux données, on pose

$$z = u - u^*.$$

La fonction z est une solution classique du problème (2.8)-(2.11) avec $f - f^*$ et $\varphi - \varphi^*$ au lieu de f et φ respectivement.

En utilisant (2.32) et (2.33), on estimera la valeur $\tilde{S}^2(0)$ pour z :

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^2(0) &= \|\varphi - \varphi^*\|^2_{B_2^1(0,l)} + \beta \|\varphi - \varphi^*\|^2_{L^2(0,l)} \\
&\leq \frac{l^2}{2}\varepsilon_0^2 + \beta\varepsilon_0^2 \\
&\leq \left(\frac{l^2}{2} + \beta\right)\varepsilon_0^2 \\
&\leq \rho_0^2\varepsilon_0^2,
\end{aligned}$$

où

$$\rho_0 = \left(\frac{l^2}{2} + \beta\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent, on a

$$\tilde{S}(0) \leq \rho_0 \varepsilon_0. \tag{2.38}$$

Appliquons (2.32) à la solution $z(x,t)$, il vient

$$\|z(.,\tau)\|_{L^2(0,l)} \leq \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(\tilde{S}(0) + \int_0^\tau \|f - f^*\|_{B_2^1(0,l)} \, dt\right). \tag{2.39}$$

Des inégalités (2.34), (2.35), (2.32) et (2.33), il vient

$$\begin{aligned} \|z(.,\tau)\|_{L^2(0,l)} &\leq \frac{\sqrt{\beta}}{\beta} (\rho_0 \varepsilon_0 + T\varepsilon) \\ &\leq \max\left(\frac{\sqrt{\beta}}{\beta}\rho_0, \frac{\sqrt{\beta}}{\beta}T\right)(\varepsilon_0 + \varepsilon) \\ &\leq C_1 (\varepsilon + \varepsilon_0), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\|u - u^*\|_{L^2(0,l)} \leq C_1 (\varepsilon + \varepsilon_0), \tag{2.40}$$

où

$$C_1 = \max\left(\frac{\sqrt{\beta}}{\beta}(\rho_0, T)\right).$$

Comme

$$L^2(0,l) \hookrightarrow B_2^1(0,l),$$

i.e.

$$\|u\|_{B_2^1(0,l)} \leq \frac{l}{\sqrt{2}} \|u\|_{L^2(0,l)},$$

De l'inégalité (2.35), l'inégalité (2.40) devient

$$\frac{\sqrt{2}}{l} \|u - u^*\|_{B_2^1(0,l)} \leq C_1 (\varepsilon + \varepsilon_0),$$

ce qui entraine

$$\begin{aligned} \|u - u^*\|_{B_2^1(0,l)} &\leq \frac{l}{\sqrt{2}} C_1 (\varepsilon + \varepsilon_0) \\ &\leq C_2 (\varepsilon + \varepsilon_0). \end{aligned} \tag{2.41}$$

avec

$$C_2 = \frac{l}{\sqrt{2}} C_1.$$

Maintenant intégrons l'inégalité (2.41) entre $0, \tau$, il vient

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \|u - u^*\|_{L^2(0,l)} \, dt &\leq \int_0^\tau C_1 (\varepsilon + \varepsilon_0) \, dt \\ &\leq C_1 T (\varepsilon + \varepsilon_0) \\ &\leq C_3 (\varepsilon + \varepsilon_0) , \end{aligned} \tag{2.42}$$

où

$$C_3 = C_1 T.$$

Ainsi la preuve du théorème est complète.

Existence de la solution classique

Nous allons, dans ce paragraphe, montrer l'existence d'une solution classique et la trouver effectivement. Dans ce but, on utilise la méthode de séparation de variables de Fourier qui consiste à chercher la solution du problème sous forme d'une série. Cela nous amène analytiquement à introduire à la place de $u(x,t)$ deux nouvelles fonctions $\omega(x,t)$ et $\tilde{\omega}(x,t)$ d'après la formule :

$$u = \omega(x,t) + \tilde{\omega}(x,t) \tag{2.43}$$

dans laquelle la fonction $\omega(x,t)$ vérifie :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^3 \omega}{\partial t \partial x^2} = 0, \tag{2.44}$$

$$\omega(x,0) = \varphi(x) , \tag{2.45}$$

$$\frac{\partial \omega(l,t)}{\partial t} = 0, \tag{2.46}$$

$$\int_0^l \omega(x,t) \, dx = 0. \tag{2.47}$$

Tandis que $\tilde{\omega}(x,t)$ vérifie

$$\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2\tilde{\omega}}{\partial x^2}-\beta\frac{\partial^3\tilde{\omega}}{\partial t\partial x^2}=f(x,t)\,, \tag{2.48}$$

$$\tilde{\omega}(x,0)=0, \tag{2.49}$$

$$\frac{\partial\tilde{\omega}(l,t)}{\partial x}=0, \tag{2.50}$$

$$\int_0^l \tilde{\omega}(x,t)\,dx=0. \tag{2.51}$$

On vérifie que $u=\omega+\tilde{\omega}$ satisfait la solution du problème (2.8)-(2.11). Pour la détermination de la solution $\omega(x,t)$ relative au problème (2.44)-(2.47), on cherche des solutions de la forme :

$$\omega(x,t)=X(x)\,T(t)$$

d'où, d'après (2.44), il vient

$$X(x)\,T'(t)-\alpha X''(x)\,T(t)-\beta X''(x)\,T'(t)=0,$$

où

$$X(t)\,T'(t)=X''(x)\left[\alpha T(t)+\beta T'(t)\right],$$

où encore

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{\alpha T(t)+\beta T'(t)}, \tag{2.52}$$

On voit immédiatement que le premier membre de l'identité ainsi obtenue, dépend de t tandis que le second membre est une fonction de x : nécessairement, ils sont indépendants de x et t. Soit $-\lambda^2$ leur valeur commune. On a donc

$$\begin{cases} X''(x)=-\lambda^2 X(x)\,, \\ T'(t)=-\alpha\lambda^2 T(t)-\lambda^2\beta T'(t)\,, \end{cases}$$

ce qui entraine

$$\begin{cases} X''(x)=-\lambda^2 X(x)\,, \\ \dfrac{T'(t)}{T(t)}=\dfrac{-\alpha\lambda^2}{1+\lambda^2\beta}>0, \end{cases} \tag{2.53}$$

(2.54) impliquent que

$$\begin{cases} X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x), \\ T(t) = C\exp\left(\dfrac{-\alpha\lambda^2}{1+\lambda^2\beta}\right)t. \end{cases} \tag{2.54}$$

On supposera que $T(t)$ n'est pas identiquement nul. Les conditions (2.47)-(2.48) ne pourront rester vérifiées quel que soit t que si

$$X'(l) = 0, \tag{2.55}$$

$$\int_0^l X(x) = 0. \tag{2.56}$$

En se servant des conditions (2.55) et (2.56), on aura

$$X'(l) = -A\lambda\sin(\lambda l) + B\lambda\cos(\lambda l) = 0,$$

où encore

$$A\lambda\sin(\lambda l) = B\lambda\cos(\lambda l), \qquad \lambda \neq 0;$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^l X(x) &= \left[\frac{A}{\lambda}\sin(\lambda x) - \frac{B}{\lambda}\cos(\lambda x)\right]_{x=0}^{x=l} = 0, \qquad \lambda \neq 0, \\ &= A\sin(\lambda l) - B\cos(\lambda l) + B = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$A\sin(\lambda l) = B(\cos(\lambda l) - 1),$$

or

$$A\sin(\lambda l) = B\cos(\lambda l),$$

d'où

$$B\cos(\lambda l) = B(\cos(\lambda l) - 1).$$

Ainsi

$$B = 0.$$

Donc

$$A\sin(\lambda l)=0,$$

pour éviter le cas trivial $A\neq 0$, alors

$$\sin(\lambda l)=0$$

où

$$\lambda l=n\pi \implies \lambda=\frac{n\pi}{l},\qquad n\geq 1$$

pour chaque valeur de n on a une valeur de λ :

$$\lambda_n=\frac{n\pi}{l},\qquad n\geq 1, \tag{2.57}$$

Ainsi, la solution (2.53) s'écrit

$$\begin{cases} X_n(x)=A_n\cos(\lambda_n x), \\ T_n(t)=C_n\exp\left(\frac{-\alpha\lambda^2}{1+\lambda^2\beta}\right)t. \end{cases} \tag{2.58}$$

Posons

$$\gamma_n=\frac{\alpha\lambda_n^2}{1+\beta\lambda_n^2}>0,\qquad n=1,2,..., \tag{2.59}$$

ce qui implique

$$\omega_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=K_n\cos(\lambda_n x)e^{-\gamma_n t}. \tag{2.60}$$

Le théorème de superposition des solutions entraine

$$\omega(x,t)=\sum_{n\geq 1}\omega_n(x,t)=\sum_{n\geq 1}K_n\cos(\lambda_n x)e^{-\gamma_n t}. \tag{2.61}$$

La solution (2.60) doit encore satisfaire à la condition initiale (2.45)

$$u(x,0)=\varphi(x)=\sum_{n\geq 1}K_n\cos(\lambda_n x), \tag{2.62}$$

or $\varphi(x)$ est développable en cosinus sous forme d'une série de Fourier

$$\varphi(x)=\sum_{n\geq 1}\varphi_n\cos(\lambda_n x), \tag{2.63}$$

où

$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos(\lambda_n x)\,dx. \tag{2.64}$$

Par identification

$$K_n = \varphi_n, \qquad n \geq 1,$$

ce qui implique

$$\omega(x,t) = \sum_{n\geq 1}\omega_n(x,t) = \sum_{n\geq 1}\varphi_n e^{-\gamma_n t}\cos(\lambda_n x). \tag{2.65}$$

Autrement dit

$$\begin{aligned}\omega(x,t) &= \sum_{n\geq 1}\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\cos(\lambda_n\xi)\cos(\lambda_n x)\,e^{-\gamma_n t}d\xi \\ &= \int_0^l\left(\frac{2}{l}\sum_{n\geq 1}e^{-\gamma_n t}\cos(\lambda_n x)\cos(\gamma_n x)\right)\varphi(\xi)\,d\xi,\end{aligned} \tag{2.66}$$

ce qui implique

$$\omega(x,t) = \int_0^l G(x,\xi,t)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{2.67}$$

où

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\sum_{n\geq 1}e^{-\gamma_n t}\cos(\lambda_n x)\cos(\gamma_n x). \tag{2.68}$$

On cherche maintenant $\tilde{\omega}(x,t)$ sous forme

$$\tilde{\omega}(x,t) = \sum_{n\geq 1}T_n(t)\cos(\lambda_n x), \qquad \lambda_n = \frac{n\pi}{l},\ n\geq 1 \tag{2.69}$$

Seulement $T_n(t)$ sont différents des précédentes :

$\tilde{\omega}$ doit vérifier :

$$\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial x}\,|_{x=l}\ = -\sum_{n\geq 1}\lambda_n T_n(t)\sin(\lambda_n x)\,|_{x=l}\ = 0, \qquad \text{car : } \lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \tag{2.70}$$

et

$$\int_0^l \tilde{\omega}dx = \sum_{n\geq 1}T_n(t)\int_0^l \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \sum_{n\geq 1}T_n(t)\left(\frac{l}{n\pi}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l} = 0. \tag{2.71}$$

Substituons (2.68) dans (2.48), il vient

$$\sum_{n\geq 1}\left(T_n'(t)-\alpha\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t)-\beta T_n'(t)\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)=f(x,t), \qquad n\geq 1, \tag{2.72}$$

or f est développable en cosinus sous forme de Fourier par rapport à x

$$f(x,t)=\sum_{n\geq 1} f_n(t)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{2.73}$$

où

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(z,t)\cos\left(\frac{n\pi z}{l}\right)dz.$$

Ainsi, (2.72) devient

$$\left\{\begin{array}{c} T_n'(t)-\alpha\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t)-\beta T_n'(t)\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2=f_n(t), \\ T_n(0)=0, \end{array}\right.$$

ce qui peut être écrit

$$\left\{\begin{array}{c} T_n'(t)+R_nT_n(t)=f_n(t), \\ T_n(0)=0, \end{array}\right. \tag{2.74}$$

avec

$$R_n=\frac{\alpha\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}{\beta\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2-1}. \tag{2.75}$$

La solution de cette équation différentielle ordinaire est donnée [48] par

$$T_n(t)=\left(\int_0^t f_n(\tau)\,e^{-R_n\tau}d\tau+k\right)e^{R_nt}$$

or

$$T_n(0)=0,$$

implique que

$$k=0.$$

D'où

$$T_n(t)=\left(\int_0^t f_n(\tau)\,e^{-R_n\tau}d\tau\right)e^{R_nt}. \tag{2.76}$$

Ainsi

$$\tilde{\omega}(x,t) = \sum_{n\geq 1}\left(\int_0^t f_n(\tau)\, e^{-R_n\tau}d\tau\right) e^{R_n t}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \sum_{n\geq 1}\int_0^t f_n(\tau)\, e^{-R_n(t-\tau)}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) d\tau. \tag{2.77}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \omega(x,t) + \tilde{\omega}(x,t) \\ &= \sum_{n\geq 1}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left\{\varphi_n e^{-\gamma_n t} + \int_0^t f_n(\tau)\, e^{-R_n(t-\tau)}d\tau\right\}, \qquad 0\leq \tau\leq t\leq T \end{aligned} \tag{2.78}$$

Remarque 2.1 *1.*

$$R_n = \frac{\alpha\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}{\beta\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 - 1} > 0 \Longleftrightarrow \beta\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 - 1 > 0, où n > \frac{l}{\sqrt{\beta}\pi}$$

pour assurer $R_n > 0$, on choisit

$$n > \left[\frac{l}{\sqrt{\beta}\pi}\right] + 1; \qquad n_0 = \left[\frac{l}{\sqrt{\beta}\pi}\right] + 1.$$

2.

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = 1.$$

3.

$$\lim_{n\to+\infty}\gamma_n = -1$$

Théorème 2.2 *On suppose que :*

C1 : $\varphi \in C^2([0,l])$ *et possède une dérivée troisième satisfaisant les conditions de Dirichlet, et telle que :*

$$\int_0^l \varphi(x)\, dx = 0 \qquad et \qquad \varphi'(l) = 0$$

C2 : $f \in C^2\left(\overline{Q}\right)$, *et comme fonction de x, possède une dérivée troisième satisfaisant les conditions de Dirichlet et telle que :*

$$\int_0^l f(x,t)\, dx = 0, \qquad et \qquad f'(l,.) = 0,$$

alors le problème (2.8)-(2.11) a une solution classique $u(x,t)$ qui est la série (2.77).

Démonstration. En vertu des conditions C1 et C2 et du Théorème 1.7 (préliminaires), on a

$\mathbf{M}_1$ $|\varphi_n| \leq \dfrac{k}{n^4}$,

$\mathbf{M}_2$ $|f_n| \leq \dfrac{m}{n^4}$,

où k, m sont des constantes positives.

Tout d'abord, on doit s'assurer de la continuité de la fonction $u(x,t)$ définie par l'expression (2.77). Pour cette fin, il suffit de démontrer la convergence uniforme de la séries exprimant la fonction $u(x,t)$ et cela parce que son terme général est une fonction continue. Ce but sera atteint une fois que l'on observe que les majorations M1 et M2 entrainent

$$\begin{aligned}|u_n(x,t)| &\leq \left|\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right| \left\{|\varphi_n| \left|e^{-\gamma_n t}\right| + \int_0^t |f_n(\tau)| \left|e^{-R_n(t-\tau)}\right| d\tau\right\} \\ &\leq \frac{k}{n^4} + \int_0^t \frac{m}{n^4} \leq \frac{k}{n^4} + \frac{Tm}{n^4}. \end{aligned} \tag{2.79}$$

Maintenant, si l'on note par

$$M_n = \frac{k}{n^4} + \frac{Tm}{n^4}$$

alors, la série numérique majorante $\sum_{n\geq 1} M_n$ est convergente, ce qui implique d'après le Théorème 1.2 la convergente uniforme de la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x,t)$ dans $\overline{Q}$ et par suite la continuitéde sa somme u dans $\overline{Q}$. Il s'ensuit que la fonction $u(x,t)$ converge vers sa valeur initiale quand $t \to 0$,

$$u(x,t) \underset{t\to 0}{\to} \varphi(x),$$

i.e.

$$u(x,0) = \varphi(x). \tag{2.80}$$

Pour la vérification de la condition sur la frontière (2.10), on dérive par rapport à x la fonction $u_n(x,t)$, on aura

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = -\frac{n\pi}{l} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left\{\varphi_n e^{-\gamma_n t} + \int_0^t f_n(\tau)\, e^{-R_n(t-\tau)} d\tau\right\}, \tag{2.81}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right| &\leq \frac{n\pi}{l}\left\{|\varphi_n|\left|e^{-\gamma_n t}\right| + \int_0^{\tau} |f_n(\tau)|\left|e^{-R_n(t-\tau)}\right| d\tau\right\} \\ &\leq \frac{n\pi}{l}\left\{\frac{k}{n^4} + \frac{Tm}{n^4}\right\}.\end{aligned}$$

La convergence de la série numérique majorante de terme général

$$M_n = \frac{\pi}{l}\left\{\frac{k}{n^3} + \frac{Tm}{n^3}\right\},$$

entraîne la convergence uniforme de la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\partial u_n}{\partial x}$ dans $\overline{Q}$. Ainsi,

$$\lim_{x\to l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0. \tag{2.82}$$

Intégrons, maintenant, la fonction $u_n(x,t)$ par rapport à la variable x, il vient

$$\int_0^x u_n(\xi,t)\, d\xi = \frac{l}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right)\Bigg]_{\xi=0}^{\xi=x}\left\{\varphi_n e^{-\gamma_n t} + \int_0^t f_n(\tau)\, e^{-R_n(t-\tau)} d\tau\right\}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x u_n(\xi,t)\, d\xi\right| &\leq \frac{l}{n\pi}\left|\sin\frac{n\pi x}{l}\right|\left\{|\varphi_n|\left|e^{-\gamma_n t}\right| + \int_0^t |f_n(\tau)|\left|e^{-R_n(t-\tau)}\right| d\tau\right\} \\ &\leq \frac{l}{n\pi}\left\{\frac{k}{n^4} + \frac{Tm}{n^4}\right\}.\end{aligned}$$

Le second membre de cette dernière inégalité étant un terme général d'une série numérique convergente, le Théorème 1.2 entraine la convergence de la série de terme général $\int_0^x u_n(\xi,t)\, d\xi$. Ainsi, la fonction $\int_0^l u(x,t)\, dx$ atteint, quand x tend vers l, sa valeur $\int_0^l u(x,t)\, dx = 0$, et la condition (2.11) se trouve vérifiée.

Il reste à démontrer que u est une fois dérivable par rapport t et deux fois dérivables par rapport x et trois fois dérivables (une fois par rapport t et deux fois par rapport x).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left\{-\varphi_n\gamma_n e^{-\gamma_n t} + f_n(t) + R_n\int_0^t f_n(\tau)\, e^{-R_n(t-\tau)} d\tau\right\}, \tag{2.83}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n\geq 1}\left(-\frac{n\pi}{l}\right)^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left\{\varphi_n e^{-\gamma_n t} + \int_0^t f_n(\tau)\, e^{-R_n(t-\tau)} d\tau\right\}, \tag{2.84}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = \sum_{n\geq 1} \left(-\frac{n\pi}{l}\right)^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left\{-\varphi_n \gamma_n e^{-\gamma_n t} + f_n(t) + R_n \int_0^t f_n(\tau) e^{-R_n(t-\tau)} d\tau\right\}, \tag{2.85}$$

car

$$p(t) = \int_0^t f_n(\tau) e^{-R_n(t-\tau)} d\tau, \tag{2.86}$$

et

$$\frac{dp(t)}{dt} = f_n(t) + R_n \int_0^t f_n(\tau) e^{-R_n(t-\tau)} d\tau. \tag{2.87}$$

D'autre part, compte tenu de M1 et M2, il s'ensuit

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| &\leq \sum_n \left|\cos\frac{n\pi x}{l}\right| \left\{|-\varphi_n| |\gamma_n| + |f_n(\tau)| + |R_n| T \frac{m}{n^4}\right\} \\ &\leq \sum_n \left\{\frac{k}{n^4} |\gamma_n| + \frac{m}{n^4} + |R_n| T \frac{m}{n^4}\right\} \end{aligned} \tag{2.88}$$

$$\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| \leq \sum_n \frac{n^2\pi^2}{l^2} \left\{\frac{k}{n^4} + \frac{Tm}{n^4}\right\}. \tag{2.89}$$

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial^3 u_n}{\partial t \partial x^2}\right| &\leq \sum_{n\geq 1} \frac{n^2\pi^2}{l^2} \left\{|\varphi_n| |\gamma_n| \left|e^{-\gamma_n t}\right| + |f_n(t)| + |R_n| T |f_n(\tau)|\right\} \\ &\leq \sum_{n\geq 1} \frac{n^2\pi^2}{l^2} \left\{\frac{k}{n^4} |\gamma_n| + \frac{m}{n^4} + |R_n| T \frac{m}{n^3}\right\}. \end{aligned} \tag{2.90}$$

Puisque les trois membres droits (2.88), (2.89) et (2.90) sont des termes généraux de séries numériques convergentes, alors compte tenu du Théorème 1.2, on conclut que les séries $\sum_{n\geq 1} \frac{\partial u_n}{\partial t}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{\partial^3 u_n}{\partial t \partial x^2}$ convergent uniformément dans $\overline{Q}$. Et ceci prouve que la fonction $u(x,t)$ donnée par (2.77) effectivement solution du problème (2.8)-(2.11).

2.2.2 Solution faible

Dans la section précédente, nous avons établi l'existence et l'unicité d'une solution classique du problème (2.8)-(2.11) mais au prix de conditions assez restrictives. Dans cette section on s'affranchit de ces conditions en considérant des données moins régulières, à savoir, $f \in L^2(0,T,B_2^1(0,l))$, $\varphi \in L^2(0,l)$, $\psi \in B_2^1(0,l)$. La solution cherchée est alors dans un sens faible.

Formulation faible

Commençons, d'abord, par définir une solution faible du problème (2.8)-(2.11). On multiplie scalairement l'équation (2.8) par une fonction test $v(x,t)$ sur $L^2(0,T,B_2^1(0,l))$, on obtient

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right)_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} - \alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, v\right)_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} - \beta\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}, v\right)_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)}$$
$$= (f,v)_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)}. \tag{2.91}$$

Intégrons par parties le premier terme du membre gauche de l'égalité (2.91), en supposant que $v(.,T) = 0$ et en tenant compte de la condition (2.9), il vient

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right)_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} = \int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right)_{B_2^1(0,l)} dt = \int_0^T \int_0^l J_x^*\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) J_x^*(v)\, dxdt$$
$$= -\int_0^l J_x^*(\varphi(x))\, J_x^*(v(x,0)) - \int_0^l \int_0^T J_x^*(u)\, J_x^*\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) dxdt$$
$$= -(\varphi, v(.,0))_{B_2^1(0,l)} - \left(u, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)}. \tag{2.92}$$

Intégrons par parties le second terme du membre gauche de l'égalité (2.90), en supposant que $\int_0^l v(x,t)\, dx = 0$, et en tenant compte de la condition (2.11.), on obtient

$$-\alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, v\right)_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} = -\alpha \int_0^T dt \int_0^l J_x^*\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right) J_x^*(v)\, dx$$
$$= -\alpha \int_0^T dt \int_0^l \left.\frac{\partial u}{\partial \xi}\right|_{\xi=x}^{\xi=l} J_x^*(v)\, dx = \alpha \int_0^T \left[\int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} J_x^*(v)\, dx\right] dt$$
$$= \alpha \int_0^T u J_x^*(v)|_{\xi=0}^{\xi=l} + \alpha \int_0^T \int_0^l uv dxdt = \alpha (u,v)_{L^2(0,Ti,L^2(0,l))}. \tag{2.93}$$

Intégrons par parties le troisième terme du membre gauche de l'égalité (2.90), on aura

$$-\beta\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}, v\right)_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} = -\beta\left.\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}, v\right)_{B_2^1(0,l)}\right|_{t=0}^{t=T} + \beta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)}$$
$$= \beta\left(\varphi''(x), v(x,0)\right)_{B_2^1(0,l)} + \beta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)}. \tag{2.94}$$

or

$$\beta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)}=-\beta\left(u,\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T,L^2)}. \tag{2.95}$$

En manipulant de la même façon pour le terme $-\alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},v\right)_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)}$ et en tenant compte des conditions $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=0$ et $\int_0^l v\,(x,t)\,dx=0$, il vient

$$\begin{aligned}\beta\left(\varphi''(x),v(x,0)\right)_{B_2^1(0,l)}&=\beta\int_0^l J_x^*\left(\varphi''\right)J_x^*\left(v(\xi,0)\right)dx\\&=\beta\int_0^l\left[\varphi'(\xi)\right]_{\xi=x}^{\xi=l}J_x^*\left(v(\xi,0)\right)dx=-\beta\int_0^l\varphi'(x)\,J_x^*v(\xi,0)\,dx\\&=\beta\left(\varphi J_x^*v(\xi,0)\right)\Big]_{x=0}^{x=l}-\beta\int_0^l\varphi v(x,0)\,dx=-\beta\left(\varphi,v(x,0)\right)_{L^2(0,l)}.\end{aligned} \tag{2.96}$$

Ainsi

$$-\beta\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2},v\right)_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)}=-\beta\left(u,\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T,L^2(0,l))}-\beta\left(\varphi,v(x,0)\right)_{L^2(0,l)}. \tag{2.97}$$

Substituons (2.91), (2.92) et (2.97) dans (2.91) on obtient :

$$\begin{aligned}&-\left(u,\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)}+\alpha\left(u,v\right)_{L^2(0,T,L^2(0,l))}-\beta\left(u,\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T,L^2(0,l))}\\&\quad=\left(f,v\right)_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)}+\left(\varphi,v(.,0)\right)_{B_2^1(0,l)}+\beta\left(\varphi,v(.,0)\right)_{L^2(0,l)}.\end{aligned} \tag{2.98}$$

Définition 2.2 *On dit que la fonction $u(x,t)\in H^1\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)$ est solution faibles du problem (2.8)-(2.11) si elle vérifie la condition intégrale (2.11) et l'identité (2.98) pour tout fonction $u(x,t)\in H^1\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)$ tel que :*

$$v(.,T)=0 \quad et \quad \int_0^l v(x,t)\,dx=0.$$

Problème approché

Dans ce paragraphe, on dénotera les somme partielles d'ordre n des séries (2.63) et (2.73) par $\varphi^{(n)}, f^{(n)}$ respectivement, c'est-à-dire :

$$\varphi^{(n)}(x)=\sum_{p=1}^{n}\varphi_p\cos\frac{p\pi x}{l},\qquad f^{(n)}(x,t)=\sum_{p=1}^{n}f_p\cos\frac{p\pi x}{l}.$$

Nous considérons le "problème approché" suivant : étant donné $\varphi^{(n)}, f^{(n)}, n = 1, 2, ...,$ satisfaisant les conditions du Théorème 2.2, telles que :

$$\begin{cases} f^{(n)} \underset{n\to+\infty}{\to} f, \qquad \text{dans } B_2^1(0,l), \qquad \forall t \in [0,T], \\ \varphi^{(n)} \underset{n\to+\infty}{\to} \varphi, \qquad \text{dans } L^2(0,l), \end{cases} \tag{2.99}$$

trouver une fonction $u^n = u^n(x,t)$ solution du problème mixte

$$\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^3 u^{(n)}}{\partial t \partial x^2} = f^{(n)}(x,t), \tag{2.100}$$

$$u^{(n)}(x,0) = \varphi^{(n)}(x), \tag{2.101}$$

$$\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x}|_{x=l} = 0, \tag{2.102}$$

$$\int_0^l u^{(n)}(x,t)\,dx = 0. \tag{2.103}$$

On se propose de prouver que la suite ainsi définie converge vers une certaine fonction $\widetilde{u}(x,t)$ candidat à la solution du problème (2.8)-(2.11). A cette fin, on considère le problème linéaire (2.100)-(2.103) pour $n = k$ et $n = m$, et on prend la différence

$$u^{(k,m)}(x,t) = u^{(k)}(x,t) - u^{(m)}(x,t),$$

il vient

$$\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u^{(k,m)}}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^3 u^{(k,m)}}{\partial t \partial x^2} = f^{(k,m)}, \tag{2.104}$$

$$u^{(k,m)}(x,0) = \varphi^{(k,m)}(x), \tag{2.105}$$

$$\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial x} = 0, \tag{2.106}$$

$$\int_0^l u^{(k,m)}(x,t)\,dx = 0, \tag{2.107}$$

avec

$$f^{(k,m)} = f^{(k)} - f^{(m)},$$

$$\varphi^{(k,m)} = \varphi^{(k)} - \varphi^{(m)}.$$

Estimation à priori

Théorème 2.3 $\forall k,m\in\mathbb{N}^*$, *on a les estimations a priori suivantes :*

$$\left\|u^{(k,m)}\right\|_{C(0,T,L^2(0,l))}\leq C_1\left(\left\|f^{(k,m)}\right\|^2_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)}+\left\|\varphi^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,L^2(0,l))}\right),\tag{2.108}$$

et

$$\left\|\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right\|^2_{L^2\left(0.T,B_2^1(0,l)\right)}\leq C_2\left(\left\|f^{(k,m)}\right\|^2_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)}+\left\|\varphi^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,l)}\right)\tag{2.109}$$

où

$$C_1=\frac{\max\left(1,\frac{l^2}{2}+\beta\right)}{\min\left(1,2\alpha,\beta\right)}\exp\left(\frac{T\max\left(1,\frac{l^2}{2}+\beta\right)}{\min\left(1,2\alpha,\beta\right)}\right),$$

$$C_2=\frac{\max\left(1,\alpha\right)}{\min\left(1+\frac{4\beta}{l^2},\alpha\right)}.$$

Démonstration. Considérons le produit scalaire de $L^2\left(0,\tau,B_2^1\left(0,l\right)\right)$ de l'équation (2.104) et $2u^{(k,m)}$, on obtient

$$2\int_0^\tau\left(\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t},u^{(k,m)}\right)_{B_2^1(0,l)}dt-2\alpha\int_0^\tau\left(\frac{\partial^2u^{(k,m)}}{\partial x^2},u\right)_{B_2^1(0,l)}dt$$
$$-2\beta\int_0^\tau\left(\frac{\partial^3u^{(k,m)}}{\partial t\partial x^2},u^{(k,m)}\right)_{B_2^1(0,l)}dt=2\int_0^\tau\left(f^{(k,m)},u^{(k,m)}\right)_{B_2^1(0,l)}dt.\tag{2.110}$$

Intégrons par parties chaque termes, en tenant compte des conditions (2.105)-(2.106), il vient

$$2\int_0^\tau\left(\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t},u^{(k,m)}\right)_{B_2^1(0,l)}dt=\left\|u^{(k,m)}\left(.,\tau\right)\right\|^2_{B_2^1(0,l)}-\left\|u^{(k,m)}\left(.,0\right)\right\|^2_{B_2^1(0,l)}$$
$$=\left\|u^{(k,m)}\left(.,\tau\right)\right\|^2_{B_2^1(0,l)}-\left\|\varphi^{(k,m)}\right\|^2_{B_2^1(0,l)},\tag{2.111}$$

et,

$$-2\alpha\int_0^\tau\left(\frac{\partial^2u^{(k,m)}}{\partial x^2},u^{(k,m)}\right)_{B_2^1(0,l)}dt=-2\alpha\int_0^\tau\left(J_x^*\left(\frac{\partial^2u^{(k,m)}}{\partial x^2}\right),J_x^*u^{(k,m)}\right)_{L^2(0,l)}$$
$$=-2\alpha\int_0^\tau\left(\left.\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial\xi}\right|_{\xi=x}^{\xi=l},J_x^*u^{(k,m)}\right)_{L^2(0,l)}=2\alpha\int_0^\tau\left(\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial\xi},J_x^*u^{(k,m)}\right)_{L^2(0,l)}dt$$
$$=2\alpha\int_0^\tau\left\{u^{(k,m)}J_x^*u^{(k,m)}\right]_{x=0}^{x=l}+\int_0^lu^2dx\right\}dt=2\alpha\int_0^\tau\int_0^lu^2dxdt=2\alpha\int_0^\tau\left\|u^{(k,m)}\left(.,t\right)\right\|^2_{L^2(0,l)}dt\tag{2.112}$$

$$-2\beta\int_0^\tau\left(\frac{\partial^3u^{(k,m)}}{\partial t\partial x^2},u^{(k,m)}\right)_{B_2^1(0,l)}dt=-2\beta\int_0^\tau\left(\frac{\partial^2u^{(k,m)}(l,t)}{\partial t\partial x}-\frac{\partial^2u^{(k,m)}(x,t)}{\partial t\partial x},J_x^*u^{(k,m)}\right)_{L^2(0,l)}dt$$
$$=2\beta\int_0^\tau\left(\frac{\partial^2u^{(k,m)}}{\partial t\partial x},J_x^*u^{(k,m)}\right)_{L^2(0,l)}dt=2\beta\int_0^\tau\left\{\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}J_x^*\left(u^{(k,m)}\right)\Big]_{x=0}^{x=l}+\int_0^l\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}u^{(k,m)}dx\right\}dt$$
$$=2\beta\int_0^\tau\int_0^l\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}u^{(k,m)}dtdx=\beta\int_0^l\left(u^2(x,l)-u^2(x,0)\right)dx$$
$$=\beta\left(\left\|u^{(k,m)}(x,\tau)\right\|^2_{L^2(0,l)}-\left\|u^{(k,m)}(.,0)\right\|^2_{L^2(0,l)}\right).\tag{2.113}$$

Insérons (2.111), (2.112) et (2.113) dans (2.110), on aura

$$2\alpha\int_0^\tau\left\|u^{(k,m)}(.,t)\right\|^2_{L^2(0,l)}dt+\left\|u^{(k,m)}(.,\tau)\right\|^2_{B_2^1(0,l)}+\beta\left\|u^{(k,m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2(0,l)}$$
$$=2\int_0^\tau\left(f^{(k,m)},u^{(k,m)}\right)_{B_2^1(0,l)}dt+\left\|\varphi^{(k,m)}\right\|^2_{B_2^1(0,l)}+\beta\left\|\varphi^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,l)}.\tag{2.114}$$

Appliquons l'inégalitéde Cauchy-Schwartz, l'inégalité $\|u\|^2_{B_2^1(0,l)}\le\frac{l^2}{2}\|u\|^2_{L^2(0,l)}$, et $L^2(0,l)\hookrightarrow B_2^1(0,l)$, on a

$$2\alpha\int_0^\tau\left\|u^{(k,m)}(.,t)\right\|^2_{L^2(0,l)}dt+\left\|u^{(k,m)}(.,\tau)\right\|^2_{B_2^1(0,l)}+\beta\left\|u^{(k,m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2(0,l)}$$
$$\le\int_0^\tau\left\|f^{(k,m)}(.,t)\right\|^2_{B_2^1(0,l)}dt+\frac{l^2}{2}\int_0^\tau\left\|u^{(k,m)}(.,t)\right\|^2_{L^2(0,l)}dt+\frac{l^2}{2}\left\|\varphi^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,l)}+\beta\left\|\varphi^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,l)}.$$

$$\min(1,2\alpha,\beta)\left\{\int_0^\tau\left\|u^{(k,m)}(.,t)\right\|^2_{L^2(0,l)}dt+\left\|u^{(k,m)}(.,\tau)\right\|^2_{B_2^1(0,l)}+\left\|u^{(k,m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2(0,l)}\right\}$$
$$\le\max\left(1,\frac{l^2}{2},\frac{l^2}{2}+\beta\right)\left\{\int_0^\tau\left\|f^{(k,m)}(.,t)\right\|^2_{B_2^1(0,l)}dt+\int_0^\tau\left\|u^{(k,m)}(.,t)\right\|^2_{L^2(0,l)}dt+\left\|\varphi^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,l)}\right\}.$$

Autrement :

$$\left\|u^{(k,m)}(.,t)\right\|^2_{L^2(0,l;L^2)}+\left\|u^{(k,m)}(.,\tau)\right\|^2_{B_2^1(0,l)}+\left\|u^{(k,m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2(0,l)}$$
$$\le\frac{\max\left(1,\frac{l^2}{2},\frac{l^2}{2}+\beta\right)}{\min(1,2\alpha,\beta)}\left\{\int_0^\tau\left\|f^{(k,m)}(.,t)\right\|^2_{B_2^1(0,l)}dt+\left\|\varphi^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,l)}\right\}$$
$$+\frac{\max\left(1,\frac{l^2}{2},\frac{l^2}{2}+\beta\right)}{\min(1,2\alpha,\beta)}\int_0^\tau\left\|u^{(k,m)}(.,t)\right\|^2_{L^2(0,l)}dt.$$

Le lemme de Gronwall donne,

$$\begin{aligned}&\left\|u^{(k,m)}\left(.,t\right)\right\|^2_{L^2(0,l;L^2)}+\left\|u^{(k,m)}\left(.,\tau\right)\right\|^2_{B_2^1(0,l)}+\left\|u^{(k,m)}\left(.,\tau\right)\right\|^2_{L^2(0,l)}\\ \leq{}& \frac{\max\left(1,\frac{l^2}{2},\frac{l^2}{2}+\beta\right)}{\min\left(1,2\alpha,\beta\right)}\exp\left(T\frac{\max\left(1,\frac{l^2}{2},\frac{l^2}{2}+\beta\right)}{\min\left(1,2\alpha,\beta\right)}\right)\left\{\left\|f^{(k,m)}\left(.,t\right)\right\|^2_{L^2\left(0,l;B_2^1(0,l)\right)}+\left\|\varphi^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,l)}\right\}\end{aligned} \tag{2.115}$$

En particulier :

$$\begin{aligned}\left\|u^{(k,m)}\left(.,\tau\right)\right\|^2_{L^2(0,l)}\leq{}&\frac{\max\left(1,\frac{l^2}{2},\frac{l^2}{2}+\beta\right)}{\min\left(1,2\alpha,\beta\right)}\exp\left(T\frac{\max\left(1,\frac{l^2}{2},\frac{l^2}{2}+\beta\right)}{\min\left(1,2\alpha,\beta\right)}\right)\\&\times\left\{\left\|f^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,T;L^2)}+\left\|\varphi^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,l)}\right\}.\end{aligned}$$

Par passage au suprême dans le membre gauche de cette dernière inégalité sur τ entre 0 et T, on aura :

$$\begin{aligned}\left\|u^{(k,m)}\left(.,\tau\right)\right\|^2_{C(0,T;L^2(0,l))}\leq{}&\frac{\max\left(1,\frac{l^2}{2},\frac{l^2}{2}+\beta\right)}{\min\left(1,2\alpha,\beta\right)}\exp\left(T\frac{\max\left(1,\frac{l^2}{2},\frac{l^2}{2}+\beta\right)}{\min\left(1,2\alpha,\beta\right)}\right)\\&\times\left\{\left\|f^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,T;L^2)}+\left\|\varphi^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,l)}\right\}.\end{aligned} \tag{2.116}$$

c'est-à-dire

$$\left\|u^{(k,m)}\left(.,\tau\right)\right\|^2_{C(0,T;L^2(0,l))}\leq C_1\left\{\left\|f^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,T;L^2)}+\left\|\varphi^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,l)}\right\},$$

avec

$$C_1=\frac{\max\left(1,\frac{l^2}{2},\frac{l^2}{2}+\beta\right)}{\min\left(1,2\alpha,\beta\right)}\exp\left(T\frac{\max\left(1,\frac{l^2}{2},\frac{l^2}{2}+\beta\right)}{\min\left(1,2\alpha,\beta\right)}\right).$$

Remarque 2.2 *Apartir de (2.115) on aura, de la même façon :*

1.

$$\left\|u^{(k,m)}\left(.,\tau\right)\right\|^2_{C\left(0,T;B_2^1\right)}\leq C_1'\left\{\left\|f^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,T;L^2)}+\left\|\varphi^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,l)}\right\}, \tag{2.117}$$

2.

$$\left\|u^{(k,m)}\left(.,\tau\right)\right\|^2_{L^2(0,T;L^2)}\leq C_1''\left\{\left\|f^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,T;L^2)}+\left\|\varphi^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,l)}\right\}. \tag{2.118}$$

Maintenant, on considère le produit scalaire dans $L^2\left(0,\tau,B_2^1\left(0,l\right)\right)$ de l'équation (2.104) et $2\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}$ et intégrons entre 0 et τ, on obtient

$$2\int_0^\tau \left(\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t},\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)} dt - 2\alpha\int_0^\tau \left(\frac{\partial^2 u^{(k,m)}}{\partial x^2},\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)} dt$$
$$-2\beta\int_0^\tau \left(\frac{\partial^3 u^{(k,m)}}{\partial t\partial x^2},\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)} dt = 2\int_0^\tau \left(f^{(k,m)},\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)} dt. \qquad (2.119)$$

Intégrons par parties les termes du membre gauche de (2.119.), en tenant compte des conditions (2.105)-(2.107), il vient

$$2\int_0^\tau \left(\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t},\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)} dt = 2\int_0^\tau \left\|\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)} dt, \qquad (2.120)$$

$$-2\alpha\int_0^\tau \left(\frac{\partial^2 u^{(k,m)}}{\partial x^2},\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)} dt = 2\alpha\int_0^l \left(\int_0^\tau u^{(k,m)}.\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}dt\right)dx$$
$$= \alpha\int_0^l \left(u^{(k,m)}\right)^2\Big|_0^\tau dx = \alpha\left(\left\|u^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,l)} - \left\|\varphi^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,l)}\right). \qquad (2.121)$$

$$-2\beta\int_0^\tau \left(\frac{\partial^3 u^{(k,m)}}{\partial t\partial x^2},\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)} dt = -2\beta\int_0^\tau \left(\frac{\partial^2 u^{(k,m)}}{\partial t\partial \xi^2}\Big|_{\xi=x}^{\xi=l}, J_x^*\left(\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right)\right)_{L^2(0,l)}$$
$$= 2\beta\int_0^\tau \left(\frac{\partial^2 u^{(k,m)}}{\partial t\partial \xi}, J_x^*\left(\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right)\right)_{L^2(0,l)} dt = 2\beta\int_0^\tau \left\{\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}J_x^*\left(\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right)\Big|_{x=0}^{x=l} + \int_0^l \left(\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right)^2 dx\right\} dt$$
$$= 2\beta\int_0^\tau \left\|\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,l)} dt. \qquad (2.122)$$

Insérons (2.120), (2.121), (2.122) dans (2.119), on obtient

$$2\int_0^\tau \left\|\frac{\partial u^{(k,m)}(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)} dt + \alpha\left\|u^{(k,m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2(0,l)} + 2\beta\int_0^\tau \left\|\frac{\partial u^{(k,m)}(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,l)} dt$$
$$= 2\int_0^\tau \left(f^{(k,m)}(.,t), \frac{\partial u^{(k,m)}(.,t)}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)} dt + \alpha\left\|\varphi^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,l)}. \qquad (2.123)$$

Vu l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il vient

$$2\int_0^\tau \left\|\frac{\partial u^{(k,m)}(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)} dt + \alpha\left\|u^{(k,m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2(0,l)} + 2\beta\int_0^\tau \left\|\frac{\partial u^{(k,m)}(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,l)} dt$$
$$\leq \int_0^\tau \left\|f^{(k,m)}(.,t)\right\|^2_{B_2^1(0,l)} dt + \int_0^\tau \left\|\frac{\partial u^{(k,m)}(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)} dt + \alpha\left\|\varphi^{(k,m)}(x)\right\|^2_{L^2(0,l)}.$$

A fortiori, on a

$$\int_0^\tau \left\| \frac{\partial u^{(k,m)}(.,t)}{\partial t} \right\|^2_{B_2^1(0,l)} + \alpha \left\| u^{(k,m)}(.,\tau) \right\|^2_{L^2(0,l)} + 2\beta \int_0^\tau \left\| \frac{\partial u^{(k,m)}(.,t)}{\partial t} \right\|^2_{L^2(0,l)} dt$$
$$\leq \left\| f^{(k,m)} \right\|^2_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} + \alpha \left\| \varphi^{(k,m)} \right\|^2_{L^2(0,l)}. \tag{2.124}$$

Si on utilise $L^2 \hookrightarrow B_2^1$

$$\int_0^\tau \left\| \frac{\partial u^{(k,m)}(.,t)}{\partial t} \right\|^2_{B_2^1(0,l)} + \alpha \left\| u^{(k,m)}(.,\tau) \right\|^2_{L^2(0,l)} + \frac{4\beta}{l^2} \int_0^\tau \left\| \frac{\partial u^{(k,m)}(.,t)}{\partial t} \right\|^2_{B_2^1(0,l)} dt$$
$$\leq \left\| f^{(k,m)} \right\|^2_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} + \alpha \left\| \varphi^{(k,m)} \right\|^2_{L^2(0,l)}. \tag{2.125}$$

A fortiori, on a

$$\int_0^\tau \left\| \frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t} \right\|^2_{B_2^1(0,l)} + \alpha \left\| u^{(k,m)}(.,\tau) \right\|^2_{L^2(0,l)}$$
$$\leq \frac{\max(1,\alpha)}{\min\left(1+\frac{4\beta}{l^2},\alpha\right)} \left(\left\| f^{(k,m)} \right\|^2_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} + \alpha \left\| \varphi^{(k,m)} \right\|^2_{L^2(0,l)} \right). \tag{2.126}$$

En particulier, on a

$$\int_0^\tau \left\| \frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t} \right\|^2_{B_2^1(0,l)} \leq \frac{\max(1,\alpha)}{\min\left(1+\frac{4\beta}{l^2},\alpha\right)} \left(\left\| f^{(k,m)} \right\|^2_{L^2\left(0,\tau,B_2^1(0,l)\right)} + \left\| \varphi^{(k,m)} \right\|^2_{L^2(0,l)} \right).$$

Par passage au supremum sur τ de 0 é T dans le membre gauche :

$$\left\| \frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t} \right\|^2_{L^2\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)} \leq \frac{\max(1,\alpha)}{\min\left(1+\frac{4\beta}{l^2},\alpha\right)} \left(\left\| f^{(k,m)} \right\|^2_{L^2\left(0,\tau,B_2^1(0,l)\right)} + \left\| \varphi^{(k,m)} \right\|^2_{L^2(0,l)} \right). \tag{2.127}$$

En revenant au problème approché (2.100)-(2.103) des estimations (2.108) et (2.109) donnent pour le cas : $u^{(k,m)}$, $f^{(k,m)}$, $\varphi^{(k,m)}$, respectivement les estimations (2.108) et (2.109).

Du Théorème 2.3 découle le corollaire suivant :

Corollaire 2.1 *La suite $(u^n)_n$ converge vers une fonction $\tilde{u}$ pour la norme l'espace $C(0,T;L^2(0,l))$ et $\left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t}\right)_n$ converge vers $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}$ pour la norme de $L^2(0,T;B_2^1(0,l))$, c'est-à-ire :*

$$u^{(n)} \underset{n\to\infty}{\to} \tilde{u} \qquad \textit{dans} \;\; C\left(0,T;L^2(0,l)\right), \tag{2.128}$$

$$\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \qquad \textit{dans} \;\; L^2\left(0,T;B_2^1(0,l)\right). \tag{2.129}$$

Démonstration. L'inégalité (2.108), devient

$$\left\|u^{(k,m)}\right\|^2_{C(0,T;L^2(0,l))} \leq C_1 \left(\left\|f^{(k,m)}\right\|^2_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} + \left\|\varphi^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,l)}\right)$$

ou

$$\left\|u^{(k)} - u^{(m)}\right\|_{C(0,T;L^2(0,l))} \leq C_1 \left(\left\|f^{(k)} - f^{(m)}\right\|_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} + \left\|\varphi^{(k)} - \varphi^{(m)}\right\|_{L^2(0,l)}\right)$$

quand $k \to +\infty$, on aura

$$\left\|\tilde{u} - u^{(m)}\right\|_{C(0,T;L^2(0,l))} \leq C_1 \left(\left\|f - f^{(m)}\right\|_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} + \left\|\varphi - \varphi^{(m)}\right\|_{L^2(0,l)}\right),$$

quand $m \to +\infty$, on aura

$$\left\|\tilde{u} - u^{(m)}\right\|_{C(0,T;L^2(0,l))} \underset{m\to\infty}{\to} 0, \tag{2.130}$$

c'est-à-dire

$$u^{(m)} \underset{m\to+\infty}{\to} \tilde{u} \qquad \text{dans } C\left(0,T;L^2\left(0,l\right)\right).$$

Idem pour :

$$\frac{\partial u^{(m)}}{\partial t} \underset{m\to\infty}{\to} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \qquad \text{dans } L^2\left(0,T;B_2^1\left(0,l\right)\right). \tag{2.131}$$

Existence de la solution faible

Dans le présent paragraphe, on s'intéresse à prouver que la fonction-limite du Corollaire 2.1 est une solution faible du problème (2.8)-(2.11) au sens de la Définition 2.2.

Théorème 2.4 *Le problème (2.8)-(2.11) possède une solution faible.*

Démonstration. De la formulation variationnelle (2.98), on a :

$\forall u^{(n)} \in H^1\left(0,T;B_2^1\left(0,l\right)\right),\ n \geq 1$:

$$-\left(u^{(n)}, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} + \alpha\left(u^{(n)}, v\right)_{L^2(0,T,L^2(0,l))} - \beta\left(u^{(n)}, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T,L^2(0,l))}$$
$$= \left(f^{(n)}, v\right)_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} + \left(\varphi^{(n)}, v\left(.,0\right)\right)_{B_2^1(0,l)} + \beta\left(\varphi^{(n)}, v\left(.,0\right)\right)_{L^2(0,l)}. \tag{2.132}$$

L'identité ainsi obtenue implique, que la suivante est satisfaite

$$\begin{aligned}
&-\left(u^{(n)}-\tilde{u},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)}+\alpha\left(u^{(n)}-\tilde{u},v\right)_{L^2(0,T,L^2(0,l))}\\
&-\beta\left(u^{(n)}-\tilde{u},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T,L^2(0,l))}-\left(\tilde{u},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left(0,\tau,B_2^1(0,l)\right)}\\
&+\alpha\left(\tilde{u},v\right)_{L^2(0,T,L^2(0,l))}-\beta\left(\tilde{u},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T,L^2(0,l))}\\
&=\left(f^{(n)}-f,v\right)_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)}+\left(f,v\right)_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)}\\
&+\left(\varphi^{(n)}-\varphi,v\left(.,0\right)\right)_{B_2^1(0,l)}+\left(\varphi,v\left(.,0\right)\right)_{B_2^1(0,l)}\\
&+\beta\left(\varphi^{(n)}-\varphi,v\left(.,0\right)\right)_{L^2(0,l)}+\beta\left(\varphi^{(n)},v\left(.,0\right)\right)_{L^2(0,l)}. \qquad (2.133)
\end{aligned}$$

Pour conclure que la fonction $\tilde{u}$ vérifie l'identité (2.132), on doit prouver que

$$\lim_{n\to+\infty}-\left(u^{(n)}-\tilde{u},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)}=0, \qquad (2.134)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(u^{(n)}-\tilde{u},v\right)_{L^2(0,T,L^2(0,l))}=0, \qquad (2.135)$$

$$\lim_{n\to+\infty}-\beta\left(u^{(n)}-\tilde{u},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T,L^2(0,l))}=0, \qquad (2.136)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(f^{(n)}-f,v\right)_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)}=0, \qquad (2.137)$$

$$\lim_{n\to+\infty}-\left(\varphi^{(n)}-\varphi,v\left(.,0\right)\right)_{B_2^1(0,l)}=0, \qquad (2.138)$$

$$\lim-\beta\left(\varphi^{(n)}-\varphi,v\left(.,0\right)\right)_{L^2(0,l)}=0. \qquad (2.139)$$

Moyennant l'inégalitéde Cauchy-Schwartz, le premier terme du membre gauche de l'identité (2.132) est majoré comme suit

$$\left|-\left(u^{(n)}-\tilde{u},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)}\right|\leq\left\|u^{(n)}-\tilde{u}\right\|_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)},$$

ce qui donne en vertu de l'inégalité (1.21)

$$\left|-\left(u^{(n)}-\tilde{u},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)}\right|\leq\sqrt{T}\left\|u^{(n)}-\tilde{u}\right\|_{C\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)}\left\|v\right\|_{H^1\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)}, \qquad (2.140)$$

Par passage à la limite pour $n \to +\infty$, on déduit que (2.134) est vérifiée.

D'autre part, en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et (1.21), le second terme du membre gauche de (2.132) est estimé

$$\begin{aligned} &\left|\alpha \left(u^{(n)}-\tilde{u}, v\right)_{L^2(0,T,L^2(0,l))}\right| \\ &\leq \alpha \left\|u^{(n)}-\tilde{u}\right\|_{L^2(0,T,L^2(0,l))} \|v\|_{L^2(0,T,L^2(0,l))} \\ &\leq \alpha\sqrt{T} \left\|u^{(n)}-\tilde{u}\right\|_{C(0,T,L^2(0,l))} \|v\|_{L^2(0,T,L^2(0,l))}, \end{aligned} \tag{2.141}$$

en passant à la limite pour $n \to +\infty$, on en déduit que (2.135) est vérifiée. D'autre part, le troisième terme du membre gauche de l'identité (2.132) est majoré comme suit :

$$\begin{aligned} &\left|-\beta \left(u^{(n)}-\tilde{u}, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T,L^2(0,l))}\right| \\ &\leq \beta \left\|u^{(n)}-\tilde{u}\right\|_{L^2(0,T,L^2(0,l))} \left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T,L^2(0,l))} \\ &\leq \beta\sqrt{T} \left\|u^{(n)}-\tilde{u}\right\|_{C(0,T,L^2(0,l))} \|v\|_{H^1(0,T,L^2(0,l))}, \end{aligned} \tag{2.142}$$

en passant à la limite pour $n \to +\infty$, on en déduit que (2.136) est vérifiée. Par ailleurs, le premier terme du membre droit de l'identité (2.132) est estimé par

$$\left|\left(f^{(n)}-f, v\right)_{L^2\left(0,\tau,B_2^1(0,l)\right)}\right| \leq \left\|f^{(n)}-f\right\|_{L^2\left(0,\tau,B_2^1(0,l)\right)} \|v\|_{L^2\left(0,\tau,B_2^1(0,l)\right)}, \tag{2.143}$$

en passant à la limite pour $n \to +\infty$, on aura (2.137). D'autre part, le troisième terme du membre droit de l'identité (2.132) est majoré comme suit

$$\begin{aligned} \left|-\left(\varphi^{(n)}-\varphi, v(.,0)\right)_{B_2^1(0,l)}\right| &\leq \left\|\varphi^{(n)}-\varphi\right\|_{B_2^1(0,l)} \|v(.,0)\|_{B_2^1(0,l)} \\ &\leq \frac{l^2}{2} \left\|\varphi^{(n)}-\varphi\right\|_{L^2(0,l)} \|v(.,0)\|_{L^2(0,l)}, \end{aligned} \tag{2.144}$$

en passant à la limite pour $n \to +\infty$, on obtient (2.138). Quant au cinquième terme du membre droit de l'identité (2.132), on a

$$\left|-\beta\left(\varphi^{(n)}-\varphi, v(.,0)\right)_{L^2(0,l)}\right| \leq \left\|\varphi^{(n)}-\varphi\right\|_{L^2(0,l)} \|v(.,0)\|_{L^2(0,l)}, \tag{2.145}$$

d'où, par passage à la limite, quand $n \to +\infty$, on obtient (2.139).

Quant à la condition intégrale, l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire

$$\begin{aligned}\left(\int_0^l \left(u^{(n)} - \tilde{u}\right) dx\right)^2 &\leq \int_0^l \left(u^{(n)} - \tilde{u}\right)^2 dx \int_0^l dx \\ &\leq l \left\|u^{(n)} - \tilde{u}\right\|^2_{L^2(0,l)}, \qquad \forall t \in (0,T),\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\left|\int_0^l \left(u^{(n)} - \tilde{u}\right) dx\right| &\leq \sqrt{l} \left\|u^{(n)} - \tilde{u}\right\|_{L^2(0,l)} \\ &\leq \sqrt{l} \max_{0\leq t\leq T} \left\|u^{(n)} - \tilde{u}\right\|_{L^2(0,l)} \\ &\leq \sqrt{l} \left\|u^{(n)} - \tilde{u}\right\|_{C(0,T,L^2(0,l))}. \qquad (2.146)\end{aligned}$$

Par passage à la limite dans la dernière inégalité quand $n \to +\infty$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^l u^{(n)}(x,t)\, dx = \int_0^l \tilde{u}(x,t)\, dx.$$

Or

$$\int_0^l \tilde{u}(x,t)\, dx = 0,$$

alors

$$\int_0^l \tilde{u}(x,t)\, dx = 0.$$

Ainsi la fonction limite $\tilde{u}$ est solution faible du problème (2.8)-(2.11) au sens de la Définition 2.2 ce qui, d'ailleurs, achève la démonstration du Théorème 2.4.

L'existence de la solution faible étant établie, énonçons un résultat d'unicité :

Unicité de la solution

Théorème 2.5 *La solution du problème (2.8)-(2.11) est unique.*

Démonstration. Supposons que le problème (2.8)-(2.11) admet deux solutions distinctes $u_1 \neq u_2$. Le problème étant linéaire, il est aisé d'observer que la différence satisfait l'identité (2.98) avec, $f = 0$ et $\varphi = 0$, c'est-à-dire que la fonction vérifie l'identité :

$$-\left(u, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} + \alpha\,(u,v)_{L^2(0,T,L^2(0,l))}$$
$$-\beta\left(u, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T,L^2(0,l))} = 0, \qquad \forall v \in H^1\left(0,T,B_2^1\left(0,l\right)\right) \tag{2.147}$$

Dans cette dernière identité (2.147), on prend

$$v\left(x,t\right) = \begin{cases} 0 & s \le t \le T, \\ -\int_t^s u\left(x,\tau\right)d\tau; & 0 \le t \le s. \end{cases} \tag{2.148}$$

Dans l'identité (2.147), exprimons $\frac{\partial v}{\partial t} = -u$, il vient

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left(0,s,B_2^1(0,l)\right)} - \alpha\left(\frac{\partial v}{\partial t}, v\right)_{L^2(0,s,L^2(0,l))} + \beta\left(\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,s;L^2(0,l))} = 0.$$

Si l'on intègre par parties cette dernière identité, on obtient

$$\int_t^s \left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)} - \frac{\alpha}{2}\left\|v\left(.,t\right)\right\|^2_{L^2(0,l)}\Big|_{t=0}^{t=s} + \beta\int_t^s \left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,l)} = 0$$

d'où, en remarquant que

$$v|_{t=s} = 0,$$

on obtient

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2\left(0,s,B_2^1(0,l)\right)} + \left\|v\left(.,0\right)\right\|^2_{L^2(0,l)} + \beta\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,s;L^2(0,l))} = 0$$

D'où

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)} = \left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,l)} = \left\|v\left(.,0\right)\right\|^2_{L^2(0,l)} = 0.$$

Revenons à la définition de $v\left(x,t\right)$, on obtient

$$\left\|u\left(.,s\right)\right\|^2_{B_2^1(0,l)} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall s \in [0,T] : u\left(.,s\right) = 0 \qquad \text{dans} \quad B_2^1\left(0,l\right) = 0,$$

ie :

$$u\left(.,t\right) = 0, \qquad \forall t \in \left[0,T\right],$$

d'où :

$$u_1(x,t) \equiv u_2(x,t), \qquad \forall t \in [0,T].$$

D'où l'unicité de la solution faible du problème (2.8)-(2.11).

Continuité par rapport aux données de la solution faible

Comme dans le paragraphe précédent, établissons quelques résultats concernant la dépendance continue de la solution faible par rapport aux données.

Théorème 2.6 *Soient (f,φ) et $(f^*,\varphi^*) \in L^2(0,T,B_2^1(0,l)) \times L^2(0,l)$ et soient u et u^* les solutions faibles correspondants du problème (2.8)-(2.11). Alors :*

$$\begin{aligned} &\|u(.,\tau) - u^*(.,\tau)\|_{L^2(0,l)} \\ &\leq C_3 \left(\int_0^\tau \|f(.,\tau) - f^*(.,\tau)\|_{B_2^1(0,l)} dt + \|\varphi - \varphi^*\|_{L^2(0,l)} \right). \end{aligned} \tag{2.149}$$

Démonstration. On démontre, d'abord, que les estimations (2.17), (2.18) et (2.19) restent vraies pour la solution faible $u(x,t)$ du problème (2.8)-(2.11).

En effet, supposons que les $u^{(n)}(x,t)\,; n = 1,2,....,$ forment une suite de solutions classiques du problème (2.4)-(2.7) qui converge vers la solution faible $u(x,t)$ au sens de la Définition 2.1. Appliquons l'estimation (2.17) à $u^{(n)}(x,t)$, on aura

$$\left\|u^{(n)}(.,t)\right\|_{L^2(0,l)} \leq \frac{\sqrt{\beta}}{\beta} \left[S_n(0) + \int_0^\tau \left\|f^{(n)}(.,t)\right\|_{B_2^1(0,l)} dt \right], \qquad \tau \geq 0 \tag{2.150}$$

où

$$S_n^2(0) = \|\varphi\|^2_{B_2^1(0,l)} + \beta \|\varphi\|^2_{L^2(0,l)} \tag{2.151}$$

Utilisons le fait que la relation (2.99) est remplisse, ie :

$$\begin{cases} \left\|u^{(n)}\right\|_{L^2(0,l)} \underset{m\to\infty}{\to} \|u\|_{L^2(0,l)}, \qquad \forall t \in [0,T], \\ \left\|f^{(n)}\right\|_{B_2^1(0,l)} \to \|f\|_{B_2^1(0,l)}, \\ \left\|\varphi^{(n)}\right\|_{B_2^1(0,l)} \to \|\varphi\|_{B_2^1(0,l)}, \\ \left\|\varphi^{(n)}\right\|_{L^2(0,l)} \to \|\varphi\|_{L^2(0,l)}. \end{cases}$$

On passe à la limite dans (2.150) et (2.151), on voit l'estimation (2.17) satisfaite. De façon analogue, les estimations (2.18) et (2.19) peuvent être établies.

Puisque le problème (2.8)-(2.11) est linéaire, il suffit alors de poser : $\eta = u - u^*$, $\eta_0 = u - u^*$, et $F = f - f^*$ ensuite observer que η est solution faible du problème (2.8)-(2.11), avec η_0 et F au lieu de φ et f, d'où l'obtention de l'inégalité (2.149).

Remarque 2.3 *De façon analogue, on obtient*

$$\begin{aligned} &\int_0^\tau \|u(.,\tau) - u^*(.,\tau)\|_{L^2(0,l)} \, dt \\ &\leq C_4 \left[\int_0^\tau \|f(.,\tau) - f^*(.,\tau)\|_{B_2^1(0,l)} \, dt + \|\varphi - \varphi^*\|_{L^2(0,l)} \right], \end{aligned} \tag{2.152}$$

$$\|u(.,\tau) - u^*(.,\tau)\|_{B_2^1(0,l)} \leq C_5 \left[\int_0^\tau \|f - f^*\|_{B_2^1(0,l)} + \|\varphi - \varphi^*\|_{L^2(0,l)} \right]. \tag{2.153}$$

Corollaire 2.2 *Supposons que les hypothèses du Theorem 2.4 sont remplies. Supposons outre que*

$$\|f - f^*\|_{B_2^1(0,l)} \leq \varepsilon \tag{2.154}$$

et

$$\|\varphi - \varphi^*\|_{L^2(0,l)} \leq \varepsilon_0 \tag{2.155}$$

alors les solutions faibles correspondants u et u^* du problème (2.8)-(2.11) satisfont les estimations suivantes :

$$\|u - u^*\|_{C(0,T,L^2(0,l))} \leq C_6 (\varepsilon + \varepsilon_0) \tag{2.156}$$

Démonstration. De l'inégalité (2.152), il vient

$$\|u - u^*\|_{L^2(0,l)} \leq C_3 \left(\int_0^\tau \|f - f^*\|_{B_2^1(0,l)} \, dt + \|\varphi - \varphi^*\|_{L^2(0,l)} \right)$$

D'après (2.154) et (2.155), on aura :

$$\|u - u^*\|_{L^2(0,l)} \leq C_3 (\varepsilon T + \varepsilon_0) \leq C_3 T (\varepsilon + \varepsilon_0) = C_6 (\varepsilon + \varepsilon_0)$$

ou

$$\max_t \|u - u^*\|_{L^2(0,l)} \leq C_6 (\varepsilon + \varepsilon_0),$$

ou bien

$$\|u-u^{*}\|_{C(0,T,L^{2}(0,l))}\leq C_{6}\left(\varepsilon+\varepsilon_{0}\right). \tag{2.157}$$

La relation (2.157) traduit la dépendance continue par rapport aux données de la solution faible $u\left(x,t\right)$.

Remarque 2.4 *on aurait pu établir la dépendance continue par rapport aux donnés si la solution faible si on avait (2.107) ou (2.103) avec (2.7) et (2.11).*

2.2.3 Cas d'une équation semi-linéaire

Position du problème

Dans cette partie, on s'intéresse à un problème mixte avec conditon de Neumann et une condition intégrale, liée à une équation pseudo-parabolique semi-linéaire du second ordre. Plus précisement, nous considérons le problème suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}-\beta\frac{\partial^{3}u}{\partial t\partial x^{2}}=f\left(x,t,u\right), \tag{2.158}$$

$$u\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right), \tag{2.159}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,|_{x=l}=0\ , \tag{2.160}$$

$$\int_{0}^{l}u\left(x,t\right)dx=0. \tag{2.161}$$

où f satisfait la condition de Lipschitz suivant :

$$\exists L>0;\left\|f\left(x,t,u_{1}\right)-f\left(x,t,u_{2}\right)\right\|\leq L\left\|u_{1}-u_{2}\right\|,(x,t)\in Q \tag{2.162}$$

2.2.4 Solution faible

Procédons itératif

Partont de $u^{(0)}(x,t) = 0, (x,t) \in Q$ on définie $u^{(n)}_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit : Si $u^{(n-1)}$ est connue, alors on résout le problème :

$$\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^3 u^{(n)}}{\partial t \partial x^2} = f^{(n)}(x,t), \tag{2.163}$$

$$u^{(n)}(x,0) = \varphi^{(n)}(x), \tag{2.164}$$

$$\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} |_{x=l} = 0 , \tag{2.165}$$

$$\int_0^l u^{(n)} dx = 0. \tag{2.166}$$

Les Théorèmes 2.4, 2.6 entrainent, $\forall n$ fixé, chacun des problèmes (2.163)-(2.166) possède une solution unique $u^{(n)}(x,t)$ considérons le problème semi-linéaire : pour $n = m$ et $n = m+1$:

$$\frac{\partial z^{(m)}}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 z^{(m)}}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^3 z^{(m)}}{\partial t \partial x^2} = F^{(m-1)}(x,t); \qquad m \geq 1. \tag{2.167}$$

$$z^{(m)}(x,0) = 0 \tag{2.168}$$

$$\frac{\partial z^{(m)}(x,t)}{\partial t} = 0 \tag{2.169}$$

$$\int_0^l z^{(m)} dx = 0 \tag{2.170}$$

où

$$z^{(m)} = u^{(m+1)} - u^{(m)},$$

$$z^{(m)} = u^{(m+1)}(x,0) - u^{(m)}(x,0) = \varphi^{(m+1)}(x) - \varphi^{(m)}(x) = z_0^{(m)}(x),$$

$$F^{(m-1)}(x,t) = f\left(x,t,u^{(m)}\right) - f\left(x,t,u^{(m-1)}\right).$$

Estimation à priori

Théorème 2.7 *Si :* $f(x,t,0) \in L^2(0,T;B_2^1(0,l))$ *et* $f(x,t,u)$ *satisfait la condition Lipschitz (2.162), alors on a les estimations :*

$$\left\|z^{(m)}\right\|_{C\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)} \leq C_7 \left\|z^{(m-1)}\right\|^2_{C\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)}, \qquad m = 1,2,... \tag{2.171}$$

où

$$C_7 = \frac{TL^2}{\min(1,2\alpha,\beta)} \exp \frac{T}{\min(1,2\alpha,\beta)}$$

Démonstration. En multipliant scalairement (2.167) par $\left(2z^{(m)}\right)$ dans l'espace $L^2(0,\tau,B_2^1(0,l))$, avec $0 \leq \tau \leq T$, on obtient :

$$\begin{aligned} &2\int_0^\tau \left(\frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}, z^{(m)}\right)_{B_2^1(0,l)} dt - 2\alpha \int_0^\tau \left(\frac{\partial^2 z^{(m)}}{\partial x^2}, z^{(m)}\right)_{B_2^1(0,l)} \\ &-2\beta \int_0^\tau \left(\frac{\partial^3 z^{(m)}}{\partial t \partial x^2}, z^{(m)}\right) dt = 2\int_0^\tau \left(f^{(m-1)}, z^{(m)}\right)_{B_2^1(0,l)}. \end{aligned} \tag{2.172}$$

$$\begin{aligned} 2\int_0^\tau \left(\frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}, z^{(m)}\right)_{B_2^1(0,l)} dt &= \left\|z^{(m)}(x,\tau)\right\|^2_{B_2^1(0,l)}\Big]_{t=0}^{t=\tau} \\ &= \left\|z^{(m)}(x,\tau)\right\|^2_{B_2^1(0,l)}, \end{aligned} \tag{2.173}$$

$$\begin{aligned} &-2\alpha \int_0^\tau \left(\frac{\partial^2 z^{(m)}}{\partial x^2}, z^{(m)}\right)_{B_2^1(0,l)} dt \\ &= -2\alpha \int_0^\tau \left(J_x^*\left(\frac{\partial^2 z^{(m)}}{\partial x^2}\right), J_x^* z^{(m)}\right)_{L^2(0,l)} dt; \\ &= 2\alpha \int_0^\tau \left(\frac{\partial z^{(m)}}{\partial x}, J_x^* z^{(m)}\right)_{L^2(0,l)} \\ &= 2\alpha \int_0^\tau \left\{ z^{(m)J} z^{(m)}\Big]_{x=0}^{x=l} + \int_0^l u^2 dx \right\} dt \\ &= 2\alpha \int_0^\tau \int_0^l \left(z^{(m)}\right)^2 dx dt = 2\alpha \left\|z^{(m)}(0,t)\right\|^2_{L^2(0,l)} \end{aligned} \tag{2.174}$$

$$
\begin{aligned}
&-2\beta\int_0^\tau\left(\frac{\partial^3 z^{(m)}}{\partial t\partial x^2},z^{(m)}\right)_{B_2^1(0,l)}dt\\
&=-2\beta\int_0^\tau\left(\left.\frac{\partial^2 z^{(m)}}{\partial t\partial \xi}\right]_{\xi=x}^{\xi=l},J_x^*z^{(m)}\right)_{L^2(0,l)}dt\\
&=2\beta\int_0^\tau\left(\frac{\partial^2 z^{(m)}}{\partial t\partial x},J_x^*z^{(m)}\right)_{L^2(0,l)}dt\\
&=2\beta\int_0^\tau\left\{\left.\frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}J_x^*z^{(m)}\right]_{x=0}^{x=l}+\int_0^l\frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}z^{(m)}dx\right\}dt\\
&=2\beta\int_0^l\int_0^\tau\frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}z^{(m)}dtdx\\
&=\beta\left\|z^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2(0,l)}.
\end{aligned}\tag{2.175}
$$

Substituons du (2.172) les identités (2.173)-(2.174) et (2.175), et utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on aura

$$
\begin{aligned}
&\left\|z^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{B_2^1(0,l)}+2\alpha\int_0^\tau\left\|z^{(m)}(.,t)\right\|^2_{L^2(0,l)}dt+\beta\left\|z^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2(0,l)}\\
&\leq\int_0^\tau\left\|F^{(m-1)}(.,t)\right\|^2_{B_2^1(0,l)}dt+\int_0^\tau\left\|z^{(m)}(0,\tau)\right\|^2_{B_2^1(0,l)}dt.
\end{aligned}
$$

Vu : La condition de Lipschitz, il vient

$$
\begin{aligned}
&\left\|z^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{B_2^1(0,l)}+2\alpha\int_0^\tau\left\|z^{(m)}(.,t)\right\|^2_{L^2(0,l)}dt+\beta\left\|z^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2(0,l)}\\
&\leq L^2\int_0^\tau\left\|z^{(m-1)}(.,t)\right\|^2_{B_2^1(0,l)}dt+\int_0^\tau\left\|z^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{B_2^1(0,l)}dt.
\end{aligned}
$$

En particulier

$$
\left\|z^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{B_2^1(0,l)}\leq L^2\int_0^\tau\left\|z^{(m-1)}(.,t)\right\|^2_{B_2^1(0,l)}dt+\int_0^\tau\left\|z^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{B_2^1(0,l)}dt
$$

Vu : Lemme de Gronwall

$$
\begin{aligned}
&\left\|z^{(m)}(0,\tau)\right\|^2_{B_2^1(0,l)}\leq L^2e^T\int_0^\tau\left\|z^{(m-1)}(.,t)\right\|^2_{B_2^1(0,l)}dt\\
&\leq L^2e^T\int_0^\tau\max_{0\leq\tau\leq T}\left\|z^{(m-1)}(.,t)\right\|^2_{B_2^1(0,l)}dt\leq Te^TL^2\left\|z^{(m-1)}\right\|_{C\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)}.
\end{aligned}
$$

Passons au suprême sur τ de 0 é T dans le membre gauche, il vient

$$
\left\|z^{(m)}\right\|^2_{C\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)}\leq C_7\left\|z^{(m-1)}\right\|^2_{C\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)},
$$

où

$$C_7 = Te^T L^2.$$

Remarque 2.5 *de l'intégralité(∗) :*

$$\begin{aligned} &\min(1, 2\alpha, \beta) \left\| z^{(m)}(., \tau) \right\|^2_{B_2^1(0,l)} \\ &\leq L^2 \int_0^\tau \left\| z^{(m-1)}(., t) \right\|^2_{B_2^1(0,l)} dt + \int_0^\tau \left\| z^{(m)}(., \tau) \right\|^2_{B_2^1(0,l)} dt. \end{aligned}$$

Le Lemme de Gronwall :

$$\begin{aligned} &\left\| z^{(m)}(., \tau) \right\|^2_{B_2^1(0,l)} \\ &\leq \frac{L^2}{\min(1, 2\alpha, \beta)} \exp\left(\frac{T}{\min(1, 2\alpha, \beta)} \right) \int_0^\tau \left\| z^{(m-1)}(., t) \right\|^2_{B_2^1(0,l)} dt \\ &\leq \frac{L^2 T}{\min(1, 2\alpha, \beta)} \exp\left(\frac{T}{\min(1, 2\alpha, \beta)} \right) \left\| z^{(m-1)} \right\|^2_{C\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)} \\ &\Longrightarrow \left\| z^{(m)} \right\|^2_{C\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)} \leq C_7 \left\| z^{(m-1)} \right\|^2_{C\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)} \\ &C_7 = \frac{L^2 T}{\min(1, 2\alpha, \beta)} \exp\left(\frac{T}{\min(1, 2\alpha, \beta)} \right) \end{aligned}$$

Existence de la solution

Théorème 2.8 *Si les hypothèses du Théorème 2.7 sont satisfaites : Si, en outre*

$$L < \sqrt{\frac{1}{Te^T}}.$$

Alors, Le problème (2.167)-(2.170) admet une solution faible de $C\left(0, T; B_2^1(0, l)\right)$.

Démonstration. *Règle d'Alembert* $(C_7 < 1)$.

Unicité de la solution

Théorème 2.9 *Supposons le problème (2.167)-(2.170) admet deux solution faible* $z_1 \neq z_2$ *dans* $C\left(0, T; B_2^1(0, l)\right)$. *Posons* $z = z_1 - z_2$, *donc* z *satisfait :*

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^3 z}{\partial t \partial x^2} = F(x, t),$$

$$z(x,0)=0,$$

$$\frac{\partial z(l,t)}{\partial x}=0,$$

$$\int_0^l z(x,t)\,dx=0,$$

avec

$$F(x,t)=f(x,t,z_1)-f(x,t,z_2).$$

Démonstration. Procédant de la même façon que dans le Théorème 2.7, on aura

$$\left\|z^{(m)}\right\|^2_{C\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)}\leq C_7\left\|z^{(m-1)}\right\|^2_{C\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)},$$

$$\Longrightarrow\ (1-C_7)\|z\|_{C\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)}\leq 0.$$

or :

$$1-C_7\geq 0 \qquad \text{car} \qquad C_7\leq 1$$

Alors,

$$\|z\|_{C\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)}=0$$

c'est-à-dire $z_1\equiv z_2$ dans $C\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)$. D'où, l'unicité.

Dépendance continue de la solution par rapport aux données

Théorème 2.10 *Soient f et $f^*\in L^2\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)$ et soient σ et σ^* les solutions faibles correspondant du problème (2.167)-(2.170) et supposons que :*

$$\|f-f^*(.,t)\|_{B_2^1(0,l)}\leq\varepsilon_1,$$

alors

$$\|\sigma-\sigma^*(.,t)\|_{L^2(0,l)}\leq c_8, \tag{2.176}$$

où

$$C_8=\left[\frac{\varepsilon^2T}{\beta}\exp\left(\frac{T\left(l^2+4\alpha\right)}{2\beta}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Démonstration. Posons $s = \sigma - \sigma^*$, alors s satisfait

$$\frac{\partial s}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^3 s}{\partial t \partial x^2} = f(x, t, s) - f(x, t, s^*),$$

$$s(x, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial s(l, t)}{\partial x} = 0,$$

$$\int_0^l s(x, t)\, dx = 0.$$

Considérons la formulation faible de ce problème [qui est le même que (2.97)]

$$-\left(s, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left(0,\tau;B_2^1(0,l)\right)} + \alpha (s, v)_{L^2(0,\tau;L^2(0,l))} - \beta \left(s, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,\tau;L^2(0,l))}$$
$$= (f(x, t, s) - f(x, t, s^*), v)_{L^2\left(0,\tau;B_2^1(0,l)\right)}.$$

Substitutions v par $(-2s)$ on aura :

$$2\left(s, \frac{\partial s}{\partial t}\right)_{L^2\left(0,\tau;B_2^1(0,l)\right)} - 2\alpha (s, s)_{L^2(0,\tau;L^2(0,l))} + 2\beta \left(s, \frac{\partial s}{\partial t}\right)_{L^2(0,\tau;L^2(0,l))}$$
$$= 2(f^* - f, s)_{L^2\left(0,\tau;B_2^1(0,l)\right)}.$$

$$\|s(., \tau)\|^2_{B_2^1(0,l)} - 2\alpha \|s\|_{L^2(0,\tau;L^2(0,l))} + \beta \|s(., \tau)\|^2_{L^2(0,l)}$$
$$= 2(f^* - f, s)_{L^2\left(0,\tau;B_2^1(0,l)\right)}.$$

$$\|s(., \tau)\|^2_{B_2^1(0,l)} + \beta \|s(., \tau)\|^2_{L^2(0,l)}$$
$$= 2(f^* - f, s)_{L^2\left(0,\tau;B_2^1(0,l)\right)} + 2\alpha \|s\|_{L^2(0,\tau;L^2(0,l))}.$$

Vu : Cauchy-Schwartz.

$$\|s(., \tau)\|^2_{B_2^1(0,l)} + \beta \|s(., \tau)\|^2_{L^2(0,l)}$$
$$\leq \int_0^\tau \|f^* - f\|^2_{B_2^1(0,l)}\, dt + \int_0^\tau \|s(., \tau)\|^2_{B_2^1(0,l)} + 2\alpha \|s\|_{L^2(0,\tau;L^2(0,l))}.$$

Vu : $L^2(0,l) \hookrightarrow B_2^1(0,l)$

$$\begin{aligned} &\|s(.,\tau)\|_{B_2^1(0,l)}^2 + \beta \|s(.,\tau)\|_{L^2(0,l)}^2 \\ &\leq \int_0^\tau \|f^* - f\|_{B_2^1(0,l)}^2 dt + \left(\frac{l^2}{2} + 2\alpha\right) \int_0^\tau \|s(.,\tau)\|_{L^2(0,l)}^2 dt. \end{aligned} \tag{2.177}$$

En particulier

$$\beta \|s(.,\tau)\|_{L^2(0,l)}^2 \leq \int_0^\tau \|f^* - f\|_{B_2^1(0,l)}^2 dt + \left(\frac{l^2}{2} + 2\alpha\right) \int_0^\tau \|s(.,\tau)\|_{L^2(0,l)}^2 dt \tag{2.178}$$

Vu : lemme de Gronwall

$$\|s(.,\tau)\|_{L^2(0,l)}^2 \leq \left(\exp\left(\frac{T(l^2+4\alpha)}{2\beta}\right)\right) \left(\frac{1}{\beta} \int_0^\tau \|f^* - f(.,t)\|_{B_2^1(0,l)}^2 dt\right). \tag{2.179}$$

Vu : $\|f - f^*(.,t)\|_{B_2^1(0,l)} \leq \varepsilon$

$$\|s(.,\tau)\|_{L^2(0,l)}^2 \leq \frac{\varepsilon^2 T}{\beta} \exp\left(\frac{T(l^2+4\alpha)}{2\beta}\right)$$

Posons :

$$C_8^2 = \frac{\varepsilon^2 T}{\beta} \exp\left(\frac{T(l^2+u\alpha)}{2\beta}\right)$$

d'où :

$$\|s(.,\tau)\|_{L^2(0,l)} \leq C_8. \tag{2.180}$$

Remarque 2.6 *Vu que* $L^2(0,l) \hookrightarrow B_2^1(0,l)$

$$\begin{aligned} \|s(.,\tau)\|_{L^2(0,l)}^2 &\leq C_8, \\ \frac{l^2}{2} \|s(.,\tau)\|_{L^2(0,l)}^2 &\leq \frac{l^2}{2} C_8, \\ \|s(.,\tau)\|_{B_2^1(0,l)}^2 &\leq C_9, \end{aligned}$$

où

$$C_9 = \frac{l^2}{2} C_8. \tag{2.181}$$

Théorème 2.11 *Supposons que les d'hypothèses du Théorème 2.10 soit remplies. Alors, la solution dépend continument des données.*

Démonstration. Directement de l'estimation (2.176)

$$\|s\,(.,\tau)\|_{L^2(0,l)} \leq C_8,$$

$$\|\sigma - \sigma^*\,(.,\tau)\|_{L^2(0,l)} \leq C_8.$$

Tout cela justifie la dépendance continue par rapport aux données de la solution.

Remarque 2.7 *On pourrait obtenir le même résultat si on avait utiliser l'inégalité (2.176).*

CHAPITRE 3
SYSTEME D' EQUATIONS PSEUDO-HYPERBOLIQUES AVEC DES CONDITIONS NON LOCALES

Chapitre 3

SYSTEME D' EQUATIONS PSEUDO-HYPERBOLIQUES AVEC DES CONDITIONS NON LOCALES

3.1 Transformation du système hyperbolique à un problèeme équivalent

3.1.1 Position du problème

Beaucoup de problèmes physiques sont caractérisés par le couplage de deux fonctions $u(.,.)$ et $v(.,.)$ ou plus. Généralement, ces problèmes sont posés sous forme de systèmes d'équations aux dérivées partielles. Ce chapitre est consacré à l'étude d'un système semi-linéaire d'équations pseudo-hyperboliques, posé comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta_1 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = f_1\left(x, t, u, v, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}\right), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \alpha_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \beta_2 \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial x^2} = f_2\left(x, t, u, v, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}\right), \\ u(x,0) = \varphi_1(x), v(x,0) = \varphi_1(x), \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi_1(x), \frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = \psi_2(x), \\ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \mu_1(t), \frac{\partial v(l,t)}{\partial x} = \mu_2(t), \\ \int_0^l u(x,t)\,dx = m_1(t), \int_0^l v(x,t)\,dx = m_2(t). \end{cases} \tag{3.1}$$

Où : $x \in \Omega = [0, l]$ et $t \in [0, T]$.

3.1.2 Problème équivalent

Nous considérons,un cas particulier du problème (3.1) en posant :

$$f_1 = -f_2, \alpha = \alpha_1 = \alpha_2, \beta = \beta_1 = \beta_2.$$

et en sommant, on obtient le problème linéaire et homogène suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} = 0, \\ w(x,0) = \varphi_3(x) \\ \frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = \psi_3(x), \\ \frac{\partial w(l,t)}{\partial x} = \mu_3(x), \\ \int_0^l w(x,t)\,dx = m_3(t). \end{cases} \tag{3.2}$$

Avec :

$$w(x,t) = u(x,t) + v(x,t),$$

$$\varphi_3(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$$

$$\psi_3(t) = \psi_1(x) + \psi_2(x),$$

$$\mu_3(t) = \mu_1(t) + \mu_2(t),$$

$$m_3(t) = m_1(t) + m_2(t).$$

D'aprés le résultt de [2], ce problème (3.2) admet une solution classique dépendante des données initiales. Maitenant, en posant : $u = w - v$, nous ramène le problème (3.2) en un problème avec second membre semi-linéaire, posé comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \\ u\left(x, 0\right) = \varphi\left(x\right) \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi\left(x\right), \\ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \mu\left(x\right), \\ \int_0^l u\left(x, t\right) dx = m\left(t\right). \end{cases} \tag{3.3}$$

Où :

$$f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = f\left(x, t, u, w - u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) + \beta \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2},$$

$$\varphi\left(x\right) = \varphi_1\left(x\right)$$

$$\psi\left(t\right) = \psi_1\left(x\right),$$

$$\mu\left(t\right) = \mu_1\left(t\right),$$

$$m\left(t\right) = m_1\left(t\right).$$

Donc, si le problème (3.3) admet une solution classique, alors, en posant $v = w - u$, le système (3.1) admettra une solution unique. Ainsi, les chapitres suivant seront consacrés à l'étude du problème (3.3).

3.2 PROBLEME MIXTE AVEC UNE CONDITION INTEGRALE POUR UNE PSEUDO HYPERBOLIQUE

3.2.1 Cas d'une équation linéaire

Position du problème

Beaucoup de processus, qui se déroulent dans des milieux visqueux, sont décrits par des équations contenant une faible viscosité. Ainsi, la propagation des perturbations dans une tige visco élastique, le mouvement unidimensionnel d'un fluide isotrope visqueux compressible, la propagation du son dans un gaz visqueux contenu dans un tube, et d'autres processus de la même nature sont décrits par l'équation modèle sous la forme :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - \alpha\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \beta\frac{\partial^3\theta}{\partial t\partial x^2} = h(x,t), \tag{3.4}$$

où $(x,t) \in \Omega = (0,l)\times(0,T)$, α, β deux constantes positives et $\beta\frac{\partial^3\theta}{\partial t\partial x^2}$ est la faible viscosité.

On considère la fonction $\theta = \theta(x,t)$ qui satisfait l'équation (3.4) dans Ω, les conditions initiales

$$\theta(x,0) = \Phi(x), \quad x \in (0,l)\,, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial\theta(x,0)}{\partial t} = \Psi(x), \quad x \in (0,l)\,, \tag{3.6}$$

la condition au bord de type Neumann

$$\frac{\partial\theta(l,t)}{\partial x} = \mu(t), \quad t \in (0,T)\,, \tag{3.7}$$

et la condition intégrale

$$\int_0^l \theta(x,t)dx = m(t), \quad t \in (0,T)\,. \tag{3.8}$$

où h, Φ, Ψ, μ, m sont des fonctions connues vérifiant :

$$h \in C(\bar{\Omega}), \Phi \text{ et } \Psi \in C^1([0,l])\,,\ \mu \text{ et } m \in C^2([0,T])\,,$$

et les conditions de compatibilité

$$\Phi'(l) = \mu(0), \qquad \int_0^l \Phi(x)dx = m(0),$$

et

$$\Psi'(l) = \mu'(0), \qquad \int_0^l \Psi(x)dx = m'(0).$$

Dans cette partie, on montre l'existence, l'unicitéet la continuitépar rapport aux données, de la solution classique et faible du problème (3.4)-(3.8). On commence par ramener les conditions aux limites non homogènes à des conditions homogènes, en opérant par le changement de fonction

$$u(x,t) = \theta(x,t) - U(x,t), \tag{3.9}$$

où $U(x,t)$ est la même fonction construite dans la première partie du chapitre précédent.

Le nouveau problème à résoudre devient,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega, \tag{3.10}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in (0,l), \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \qquad x \in (0,l), \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \qquad t \in (0,T), \tag{3.13}$$

$$\int_0^l u(x,t)dx = 0, \qquad t \in (0,T), \tag{3.14}$$

où

$$f(x,t) = h(x,t) - \left[x \frac{d^2\mu(t)}{dt^2} \right.$$
$$+ \frac{3(x-l)^2}{l^3} \left(\frac{d^2 m(t)}{dt^2} - \frac{l^2}{2} \frac{d^2\mu(t)}{dt^2} \right) - \frac{6\alpha}{l^3} \left(m(t) - \frac{l^2}{2}\mu(t) \right)$$
$$\left. - \frac{6\beta}{l^3} \left(\frac{dm(t)}{dt} - \frac{l^2}{2} \frac{d\mu(t)}{dt} \right) \right],$$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \Phi(x) - U(x,0)\\ &= \Phi(x) - \left\{x\mu\,(0) + \frac{3(x-l)^2}{l^3}\left(m\,(0) - \frac{l^2}{2}\mu(0)\right)\right\}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \Psi(x) - \frac{\partial U(x,0)}{\partial t}\\ &= \Psi(x) - \left\{x\mu'\,(0) + \frac{3(x-l)^2}{l^3}\left(m'\,(0) - \frac{l^2}{2}\mu'(0)\right)\right\}\end{aligned}$$

On vérifie aisément que les fonctions φ et ψ satisfont les conditions de compatibilité suivantes :

$$\varphi'(l) = 0, \qquad \int_0^l \varphi(x)dx = 0$$

et

$$\psi'(l) = 0, \qquad \int_0^l \psi(x)dx = 0.$$

Ainsi, la solution $u(x,t)$, du nouveau problème à étudier (3.10)-(3.14) sera ajoutée à la fonction auxiliaire $U(x,t)$ pour obtenir la solution $\theta(x,t)$ du problème (3.4)-(3.8).

Solution classique

Commençons, d'abord, par donner la définition de la solution classique :

Définition 3.1 *On appelle solution classique du problème (3.10)-(3.14) toute solution appartenant à $\tilde{C}^2(\bar{\Omega})$, vérifiant l'équation (3.10), les conditions initiales (3.11), (3.12) et les condition aux limites (3.13), (3.14), où $\tilde{C}^2(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $u \in C^2(\Omega)$ ayant la dérivée continue dans Ω de la forme $\partial^3 u/\partial t\partial x^2$.*

Estimation à priori

Afin de démontrer, dans le paragraphe qui suit, l'unicité et la dépendance continue par rapport aux données de la solution classique, nous allons, dans ce paragraphe, établir quelques estimations a priori. Pour cette fin, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1 *Si $u(x,t)$ est la solution classique du problème (3.10)-(3.14) et $f \in C(\bar{\Omega})$,alors on a*

$$2\beta \int_0^\tau \left\| \frac{\partial u(.,t)}{\partial t} \right\|^2_{L^2(0,l)} dt + S^2(\tau)$$
$$= S^2(0) + 2 \int_0^\tau \left(f(.,t), \frac{\partial u(.,t)}{\partial t} \right)_{B_2^1(0,l)} dt, \qquad (3.15)$$

où

$$S^2(\tau) = \alpha \left\| u(.,\tau) \right\|^2_{L^2(0,l)} + \left\| \frac{\partial u(.,\tau)}{\partial t} \right\|^2_{B_2^1(0,l)},$$
$$S^2(0) = \alpha \left\| \varphi \right\|^2_{L^2(0,l)} + \left\| \psi \right\|^2_{B_2^1(0,l)}.$$

Démonstration. Considérons le produit scalaire dans $L^2\left(0,\tau; B_2^1(0,l)\right)$ de l'équation (3.10) et $\frac{\partial u}{\partial t}$, il vient L'intégration par parties du membre gauche de l'identité (3.15) donne

$$2\beta \int_0^\tau \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2_{L^2(0,l)} dt + \left(\alpha \left\| u(.,t) \right\|^2_{L^2(0,l)} + \left\| \frac{\partial u(.,t)}{\partial t} \right\|^2_{B_2^1(0,l)} \right) \Bigg|_{t=0}^{t=\tau}$$
$$= 2 \int_0^\tau \left(f, \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{B_2^1(0,l)} dt,$$

d'où la conclusion du Lemme 3.1.

Grace à ce lemme nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Proposition 3.1 *La solution classique u du problème (3.10)-(3.14) satisfait les estimations à priori suivantes :*

$$\int_0^\tau \left\| \frac{\partial u(.,t)}{\partial t} \right\|^2_{B_2^1(0,l)} dt \leq \frac{l^2}{2\beta} S(0) + \frac{l^2}{2\beta} \int_0^\tau \left\| f(.,t) \right\|_{B_2^1(0,l)} dt, \qquad \tau \geq 0, \qquad (3.16)$$

$$\left\| \frac{\partial u(.,\tau)}{\partial t} \right\|^2_{B_2^1(0,l)} \leq S(0) + \int_0^\tau \left\| f(.,t) \right\|_{B_2^1(0,l)} dt, \qquad \tau \geq 0, \qquad (3.17)$$

et

$$\left\| u(.,\tau) \right\|^2_{L^2(0,l)} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} S(0) + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^\tau \left\| f(.,t) \right\|_{B_2^1(0,l)} dt, \qquad \tau \geq 0. \qquad (3.18)$$

Démonstration. Dérivons (3.15) par rapport à τ, il vient

$$\beta \left\| \frac{\partial u(.,\tau)}{\partial t} \right\|^2_{L^2(0,l)} + S(\tau)S'(\tau)$$
$$= \left(f(.,\tau), \frac{\partial u(.,\tau)}{\partial t} \right)_{B_2^1(0,l)}, \quad \tau \geq 0. \tag{3.19}$$

Par application de l'inégalitéde Schwartz au membre droit de (3.19) donne

$$\beta \left\| \frac{\partial u(.,\tau)}{\partial t} \right\|^2_{L^2(0,l)} + S(\tau)S'(\tau) \tag{3.20}$$
$$\leq \|f(.,\tau)\|_{B_2^1(0,l)} \left\| \frac{\partial u(.,\tau)}{\partial t} \right\|_{B_2^1(0,l)}.$$

De la définition de $S^2(\tau)$, on déduit

$$\left\| \frac{\partial u(.,\tau)}{\partial t} \right\|_{B_2^1(0,l)} \leq S(\tau), \tag{3.21}$$

et

$$\sqrt{\alpha}\, \|u(.,\tau)\|_{L^2(0,l)} \leq S(\tau). \tag{3.22}$$

Compte tenu des inégalités (1.16) et (3.21), minorons le membre gauche de l'inégalité (3.20), il s'ensuit que

$$\frac{2\beta}{l^2} \left\| \frac{\partial u(.,\tau)}{\partial t} \right\|^2_{B_2^1(0,l)} + S'(\tau) \leq \|f(.,\tau)\|^2_{B_2^1(0,l)}, \qquad \tau \geq 0.$$

Par suite, en intégrant entre 0 et τ, on obtient

$$\frac{2\beta}{l^2} \int_0^\tau \left\| \frac{\partial u(.,t)}{\partial t} \right\|^2_{B_2^1(0,l)} dt + S(\tau) \leq S(0) + \int_0^\tau \|f(.,t)\|_{B_2^1(0,l)}\, dt. \tag{3.23}$$

En omettant le second terme du membre gauche de la dernière inégalité, on obtient l'estimation (3.16). Par ailleurs, en omettant le premier terme du membre gauche de l'inégalité (3.23), il vient

$$S(\tau) \leq S(0) + \int_0^\tau \|f(.,t)\|_{B_2^1(0,l)}\, dt, \tag{3.24}$$

par suite, en vertu de l'inégalité (3.21), on établit l'estimation (3.17). D'autre part, en combinant l'inégalité (3.24) avec l'inégalité (3.22), on obtient l'estimation (3.18).

Unicité et continuité par rapport aux données de la solution

Théorème 3.1 *La solution classique du problème (3.10)-(3.14) est unique et dépend continé»ment de φ, ψ etf dans le sens où si $f \in C(\bar{\Omega})$, $f^* \in C(\bar{\Omega})$, et*

$$\begin{cases} \|f - f^*\|^2_{B^1_2(0,l)} \leq \epsilon, & 0 \leq \tau \leq T, \\ \|\varphi - \varphi^*\|^2_{L^2(0,l)} \leq \epsilon_0, \\ \|\psi - \psi^*\|^2_{B^1_2(0,l)} \leq \epsilon_1, \end{cases}$$

alors les solutions classiques correspondantes $u(x,t)$ et $u^*(x,t)$ satisfont les estimations suivantes pour tous les $t \in [0,T]$:

$$\|u - u^*\|^2_{L^2(0,l)} \leq C\left(\epsilon_0 + \epsilon_1 + \epsilon\right), \tag{3.25}$$

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u^*}{\partial t}\right\|^2_{B^1_2(0,l)} \leq C'\left(\epsilon_0 + \epsilon_1 + \epsilon\right), \tag{3.26}$$

$$\int_0^\tau \left\|\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u^*}{\partial t}\right\|^2_{B^1_2(0,l)} dt \leq C''\left(\epsilon_0 + \epsilon_1 + \epsilon\right), \tag{3.27}$$

où C, C'et C'' sont des constantes positives indépendantes de u.

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du Théorème 2.1 dans le Chapitre précédent.

Existence de la solution classique

Commençons, par chercher la solution classique du problème (3.10)-(3.14) sous cette forme :

$$u(x,t) = w(x,t) + \varpi(x,t)$$

où $w(x,t)$ étant la solution du problème :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \alpha\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \beta\frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} = 0, \tag{3.28}$$

$$w(x,0) = \varphi(x), \tag{3.29}$$

$$\frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \tag{3.30}$$

$$\frac{\partial w(l,t)}{\partial x} = 0, \tag{3.31}$$

$$\int_0^l w(x,t)dx = 0, \tag{3.32}$$

et $\varpi(x,t)$ étant la solution du problème :

$$\frac{\partial^2 \varpi}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^3 \varpi}{\partial t \partial x^2} = f(x,t), \tag{3.33}$$

$$\varpi(x,0) = 0, \tag{3.34}$$

$$\frac{\partial \varpi(x,0)}{\partial t} = 0, \tag{3.35}$$

$$\frac{\partial \varpi(l,t)}{\partial x} = 0, \tag{3.36}$$

$$\int_0^l \varpi(x,t)dx = 0. \tag{3.37}$$

Procédons par la méthode de séparation de variables pour résoudre le problème (3.28)-(3.32). Pour cela, posons

$$w(x,t) = X(x)T(t). \tag{3.38}$$

Ainsi, l'équation (3.28) donne :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{\beta T'(t) + \alpha T(t)} = -\lambda,$$

où λ est une constante strictement positive. Il en découle

$$X'' + \lambda X(x) = 0, \tag{3.39}$$

$$T''(t) + (\beta\lambda)T'(t) + (\alpha\lambda)T(t) = 0. \tag{3.40}$$

En vertu, des conditions (3.31) et (3.32), la solution de (3.39) est donnée par

$$X(x) = A\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right), \tag{3.41}$$

avec

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l}, \tag{3.42}$$

L'équation (3.40) étant une équation différentielle à coefficients constants et son équation caractéristique est :

$$s^2 + (\lambda\beta)\, s + (\lambda\alpha) = 0. \tag{3.43}$$

Le discriminant Δ de (3.43) défini par

$$\begin{aligned} \Delta &= (\lambda\beta)^2 - 4\lambda\alpha = \lambda\left(\lambda\beta^2 - 4\alpha\right) \\ &= \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \left[\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \beta^2 - 4\alpha\right], \end{aligned}$$

étant positif pour

$$n \geq n_0 = E\left(\frac{2l\sqrt{\alpha}}{\beta\pi}\right) + 1,$$

alors l'équation (3.43) admet deux racines distinctes :

$$s_1 = \left(-\lambda\beta + \sqrt{\Delta}\right)/2$$

et

$$s_2 = \left(-\lambda\beta - \sqrt{\Delta}\right)/2.$$

D'où

$$T(t) = Ce^{s_1 t} + De^{s_2 t}. \tag{3.44}$$

Remarque 3.1 *Les racines s_1 et s_2 sont négatives. En effet, supposons que s_1 soit positive, c'est-à-dire :*

$$-\lambda\beta + \sqrt{\Delta} \geq 0,$$

où

$$\sqrt{\Delta} \geq \lambda\beta.$$

Ainsi

$$\Delta \geq (\lambda\beta)^2,$$

où encore

$$(\lambda\beta)^2 - 4\lambda\alpha \geq (\lambda\beta)^2\,,$$

ce qui est absurde.

Remplaçons (3.41) et (3.44) dans (3.38), il s'ensuit :

$$\begin{aligned} w(x,t) &= A\cos\frac{n\pi x}{l}\left(Ce^{s_1t} + De^{s_2t}\right), \quad n \geq n_0, \\ &= \cos\frac{n\pi x}{l}\left(ACe^{s_1t} + ADe^{s_2t}\right), \quad n \geq n_0. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Puisque, pour chaque valeur non nulle de l'entier naturel n correspond une constante (AC) et (AD), alors la linéarité de l'équation (3.28), entraîne

$$w(x,t) = \sum_{n\geq n_0} w_n(x,t) = \sum_{n\geq n_0} \cos\frac{n\pi x}{l}\left(C_ne^{s_1t} + D_ne^{s_2t}\right). \tag{3.46}$$

En vertu, des conditions (3.29) et (3.30) et du fait que les fonctions $\varphi(x)$et $\psi(x)$ sont représentables sous forme de séries de Fourier en cosinus, procédons par identification, il vient

$$C_n + D_n = \varphi_n, \tag{3.47}$$

$$s_1C_n + s_2D_n = \psi_n, \tag{3.48}$$

où

$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

et

$$\psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Puisque le déterminant du système (3.47)-(3.48) est non nul

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix} = s_2 - s_1 \neq 0, \text{ puisque } \Delta > 0,$$

alors on obtient une solution unique donnée par

$$C_n = \frac{s_2\varphi_n - \psi_n}{s_2 - s_2},$$

$$D_n = \frac{\psi_n - s_1\varphi_n}{s_2 - s_2}.$$

Ainsi la solution $w(x,t)$ s'écrit :

$$w(x,t) = \sum_n \cos\frac{n\pi x}{l}\left[\frac{s_2\varphi_n - \psi_n}{s_2 - s_1}e^{s_1 t} + \frac{\psi_n - s_1\varphi_n}{s_2 - s_1}e^{s_2 t}\right],$$

c'est-à-dire

$$w(x,t) = \sum_n \cos\frac{n\pi x}{l}\left[\left(\frac{s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}}{s_2 - s_1}\right)\varphi_2 + \left(\frac{e^{s_2 t} - e^{s_1 t}}{s_2 - s_1}\right)\psi_n\right]. \tag{3.49}$$

En procédant comme dans le second paragraphe de la première partie du chapitre précédent, on va chercher la fonction $\varpi(x,t)$ sous la forme :

$$\varpi(x,t) = \sum_n T_n(t)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{3.50}$$

Dans ce but, insérons l'identité (3.50) dans l'équation (3.33) et supposons que la fonction $f(x,t)$ est développable en série de Fourier en cosinus. Il en découle, par identification :

$$T_n''(t) + \beta\lambda T_n'(t) + \alpha\lambda T_n(t) = f_n(t), \tag{3.51}$$

où

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\cos\frac{n\pi x}{l}dx. \tag{3.52}$$

En raison des conditions (3.34) et (3.35), on obtient :

$$T_n(0) = 0, \tag{3.53}$$

$$T_n'(0) = 0. \tag{3.54}$$

Compte tenue des conditions (3.53)-(3.54), la solution de l'équation (3.51) est donnée par ([48, T2])

$$T_n(t) = \frac{e^{s_2 t}}{s_2 - s_1}\int_0^t f_n(\tau)e^{-s_2\tau}d\tau - \frac{e^{s_1 t}}{s_2 - s_1}\int_0^t f_n(\tau)e^{-s_1\tau}d\tau, \quad n \geq n_0, \tag{3.55}$$

où encore

$$T_n(t) = \frac{1}{s_2 - s_1}\int_0^t \left(e^{s_2(t-\tau)} - e^{s_1(t-\tau)}\right)f_n(\tau)d\tau, \quad n \geq n_0. \tag{3.56}$$

Ainsi l'identité (3.50) devient :

$$\varpi_n(x,t) = \sum_n \cos\frac{n\pi x}{l}\frac{1}{s_2 - s_1}\int\limits_0^t \left(e^{s_2(t-\tau)} - e^{s_1(t-\tau)}\right) f_n(\tau)d\tau. \tag{3.57}$$

Par ailleurs, la solution $u(x,t)$ donnée par

$$u(x,t) = w(x,t) + \varpi(x,t)$$

deviendra en vertu de (3.49) et (3.57) :

$$\begin{aligned} u(x,t) = \sum_n u_n(x,t) = \sum_n \cos\frac{n\pi x}{l}\Bigg(&\frac{s_2e^{s_1t} - s_1e^{s_2t}}{s_2 - s_1}\varphi_n + \frac{e^{s_2t} - e^{s_1t}}{s_2 - s_1}\psi_n \\ &+\frac{1}{s_2 - s_1}\int\limits_0^t \left(e^{s_2(t-\tau)} - e^{s_1(t-\tau)}\right) f_n(\tau)d\tau\Bigg). \end{aligned} \tag{3.58}$$

Finalement, la solution $\theta(x,t)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \theta(x,t) = \sum_n \cos\frac{n\pi x}{l}\Bigg(&\frac{s_2e^{s_1t} - s_1e^{s_2t}}{s_2 - s_1}\varphi_n + \frac{e^{s_2t} - e^{s_1t}}{s_2 - s_1}\psi_n \\ &+\frac{1}{s_2 - s_1}\int\limits_0^t \left(e^{s_2(t-\tau)} - e^{s_1(t-\tau)}\right) f_n(\tau)d\tau\Bigg) \\ &+(x-l)\mu(t) + \frac{3(x-l)^2}{l^3}\left(m(t) + \frac{l^2}{2}\mu(t)\right). \end{aligned} \tag{3.59}$$

La solution $u(x,t)$ donnée par (3.58) est formelle. Dans ce qui suit, on démontrera qu'elle est solution effective du problème (3.10)-(3.14).

Théorème 3.2 *On suppose que les fonctions f, φet ψ sont développables en séries de Fourier en cosinus, $\varphi, \psi \in C^2([0,l])$ et $f \in C^2(\bar{\Omega})$, et possèdent des dérivées troisièmes satisfaisant les conditions de Dirichlet. Alors, la série (3.58) converge vers la solution classique du problème (3.10)-(3.14).*

Remarque 3.2 *Les conditions de régularité imposées sur les fonctions φ, ψ et f sont relatives à la méthode de démonstration. Ces conditions peuvent être affaiblies.*

Démonstration. Pour démontrer ce théorème, on procédera de façon analogue à celle du Théorème 2.2. Sous les hypothèses du Théorème 3.1, le Théorème 1.7 permet de considérer les majorations suivantes :

$$
\begin{aligned}
M1: &\quad |\varphi_n| \le \frac{k}{n^4},\\
M2: &\quad |\psi_n| \le \frac{r}{n^4},\\
M3: &\quad |f_n| \le \frac{m}{n^4},
\end{aligned}
$$

où k, r et m sont des constantes positives. En outre, nous citons, vu leur usage permanent, les majorations suivantes :

$$
\begin{aligned}
M4: &\quad \left|e^{s_1 t}\right| < 1,\ \left|e^{s_2 t}\right| < 1,\\
M5: &\quad \frac{|s_1| + |s_2|}{|s_2 - s_1|} \le \frac{\lambda\beta}{\sqrt{\Delta}} + 1,\\
M6: &\quad \frac{1}{|s_2 - s_1|} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \infty \frac{l^2}{n^2\pi^2\beta},\\
M7: &\quad \frac{|s_1 s_2|}{|s_2 - s_1|} = \frac{\lambda\alpha}{\sqrt{\Delta}} \infty \frac{\alpha}{\beta},\\
M8: &\quad \frac{|s_1|^2 + |s_2|^2}{|s_2 - s_1|} = \frac{|s_1 - s_2|^2 + 2|s_1||s_2|}{|s_2 - s_1|} \infty \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \beta + \frac{2\alpha}{\beta}.
\end{aligned}
$$

Les majorations M1, M2, M3, M4, M5 et M6 entrainent

$$
\begin{aligned}
|u_n(x,t)| &\le \left(\frac{|s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}|}{|s_2 - s_1|} |\varphi_n| + \frac{|e^{s_2 t} - e^{s_1 t}|}{|s_2 - s_1|} |\psi_n| \right.\\
&\qquad \left. + \frac{1}{|s_2 - s_1|} \int_0^t \left| e^{s_2(t-\tau)} - e^{s_1(t-\tau)} \right| |f_n(\tau)|\, d\tau \right)\\
&\le \left(\frac{|s_1| + |s_1|}{|s_2 - s_1|} |\varphi_n| + \frac{2}{|s_2 - s_1|} |\psi_n| + \frac{2}{|s_2 - s_1|} \int_0^t |f_n(\tau)|\, d\tau \right)\\
&\le 2\left(k + \frac{l^2 r}{n^2\pi^2\beta} + \frac{l^2 T m}{n^2\pi^2\beta} \right) \frac{1}{n^4}.
\end{aligned}
$$

Puisque la série majorante est convergente, alors le Théorème 1.2 entraîne que la série (3.58) est uniformément convergente dans $\bar{\Omega}$, donc $u(x,t)$ est continue. Ainsi, quand t tend vers 0, la fonction $u(x,t)$ vérifie la condition (3.11).

D'autre part, on a

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_n \cos\frac{n\pi x}{l}\left(\frac{s_1 s_2\left(e^{s_1 t}-e^{s_2 t}\right)}{s_2-s_1}\varphi_n + \frac{s_2 e^{s_2 t}-s_1 e^{s_1 t}}{s_2-s_1}\psi_n \right.$$
$$\left. + \frac{1}{s_2-s_1}\int_0^t \left(s_2 e^{s_2(t-\tau)} - s_1 e^{s_1(t-\tau)}\right) f_n(\tau)d\tau\right). \qquad (3.60)$$

En raison des majorations M1, M2, M3, M4, M5 et M7, il vient

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| \leq \left(\frac{|s_1|\,|s_2|\left(\left|e^{s_1 t}\right|+\left|e^{s_2 t}\right|\right)}{|s_2-s_1|}|\varphi_n| + \frac{|s_2|\left|e^{s_2 t}\right|+|s_1|\left|e^{s_1 t}\right|}{|s_2-s_1|}|\psi_n|\right.$$
$$\left. + \frac{1}{|s_2-s_1|}\int_0^t \left(|s_2|\left|e^{s_2(t-\tau)}\right| + |s_1|\left|e^{s_1(t-\tau)}\right|\right)|f_n(\tau)|\,d\tau\right)$$
$$\leq 2\left(\frac{\alpha k}{\beta}+r+Tm\right)\frac{1}{n^4}.$$

La série du membre droit de l'inégalité ainsi obtenue étant convergente, on déduit la convergence uniforme de la série (3.60) dans $\bar{\Omega}$. Ceci traduit la continuitéde la fonction $\frac{\partial u}{\partial t}$.

Ainsi, par passage à la limite, quand t tend vers 0, la fonction $\frac{\partial u}{\partial t}$ vérifie la condition (3.12).

Dérivons la fonction $u(x,t)$ par rapport à x, il en découle

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -\sum_n \frac{n\pi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\left(\frac{s_2 e^{s_1 t}-s_1 e^{s_2 t}}{s_2-s_1}\varphi_n + \frac{e^{s_2 t}-e^{s_1 t}}{s_2-s_1}\psi_n\right.$$
$$\left. + \frac{1}{s_2-s_1}\int_0^t \left(e^{s_2(t-\tau)} - e^{s_1(t-\tau)}\right) f_n(\tau)d\tau\right). \qquad (3.61)$$

Ainsi, on a

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right| \leq \frac{n\pi}{l}\left(\frac{|s_1|+|s_1|}{|s_2-s_1|}|\varphi_n| + \frac{2}{|s_2-s_1|}|\psi_n| + \frac{2}{|s_2-s_1|}\int_0^t |f_n(\tau)|\,d\tau\right)$$
$$\leq 2\sum_n\left(k+\frac{l^2 r}{\pi^2\beta n^2}+\frac{l^2 Tm}{\pi^2\beta n^2}\right)\frac{1}{n^3}.$$

Ceci prouve la convergence uniforme de la série (3.61) dans $\bar{\Omega}$, ce qui justifie la continuitéde $\frac{\partial u}{\partial x}$. Ainsi, la condition (3.13) est vérifiée.

Intégrons, à présent, la fonction $u(x,t)$ par rapport à x, il vient

$$\int\limits_0^x u_n(\xi,t)d\xi = \int\limits_0^x \cos\frac{n\pi\xi}{l}\left(\frac{s_2e^{s_1t}-s_1e^{s_2t}}{s_2-s_1}\varphi_n + \frac{e^{s_2t}-e^{s_1t}}{s_2-s_1}\psi_n\right.$$

$$\left. + \frac{1}{s_2-s_1}\int\limits_0^t \left(e^{s_2(t-\tau)}-e^{s_1(t-\tau)}\right) f_n(\tau)d\tau\right) d\xi$$

$$= \frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\left(\frac{s_2e^{s_1t}-s_1e^{s_2t}}{s_2-s_1}\varphi_n + \frac{e^{s_2t}-e^{s_1t}}{s_2-s_1}\psi_n\right.$$

$$\left. + \frac{1}{s_2-s_1}\int\limits_0^t \left(e^{s_2(t-\tau)}-e^{s_1(t-\tau)}\right) f_n(\tau)d\tau\right)$$

$$\leq \frac{l}{n\pi}\left(\frac{|s_2|+|s_1|}{|s_2-s_1|}|\varphi_n| + \frac{2}{|s_2-s_1|}|\psi_n| + \frac{2}{|s_2-s_1|}\int\limits_0^t |f_n(\tau)|\,d\tau\right). \quad (3.62)$$

Ce qui donne par utilisations des majorations M1, M2, M3, M4, M5 et M6

$$\left|\int\limits_0^x u_n(\xi,t)d\xi\right| \leq \frac{2l}{\pi}k + \frac{l^2r}{\pi^2\beta n^2} + \frac{l^2Tm}{\pi^2\beta n^2}\frac{1}{n^5}.$$

Cette inégalité exprime que la série (3.62) converge uniformément dans $\bar{\Omega}$. Ce qui entraîne que la fonction

$$\int\limits_0^x u(\xi,t)d\xi$$

atteint, quand x tend vers l, la valeur

$$\int\limits_0^l u(x,t)dx = 0.$$

Il reste à démontrer que, pour $t \geq \epsilon > 0$ (ϵ est un nombre positif arbitraire), les séries

$$\sum_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2},\ \sum_n \frac{\partial^3 u_n}{\partial t\partial x^2} \text{ et } \sum_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2},$$

sont uniformément convergentes. Dans ce but, dérivons terme à terme la série (3.58) pour obtenir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sum_n \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \cos\frac{n\pi x}{l} \left(\frac{s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}}{s_2 - s_1}\varphi_n + \frac{e^{s_2 t} - e^{s_1 t}}{s_2 - s_1}\psi_n \right.$$
$$\left. + \frac{1}{s_2 - s_1}\int\limits_{\epsilon}^{t} \left(e^{s_2(t-\tau)} - e^{s_1(t-\tau)}\right) f_n(\tau) d\tau\right), \tag{3.63}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = -\sum_n \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \cos\frac{n\pi x}{l} \left(\frac{s_1 s_2 \left(e^{s_1 t} - e^{s_2 t}\right)}{s_2 - s_1}\varphi_n + \frac{s_2 e^{s_2 t} - s_1 e^{s_1 t}}{s_2 - s_1}\psi_n \right.$$
$$\left. + \frac{1}{s_2 - s_1}\int\limits_{\epsilon}^{t} \left(s_2 e^{s_2(t-\tau)} - s_1 e^{s_1(t-\tau)}\right) f_n(\tau) d\tau\right), \tag{3.64}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_n \cos\frac{n\pi x}{l} \left(\frac{s_1 s_2 \left(s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}\right)}{s_2 - s_1}\varphi_n + \frac{s_2^2 e^{s_2 t} - s_1^2 e^{s_1 t}}{s_2 - s_1}\psi_n \right.$$
$$\left. + \frac{1}{s_2 - s_1}\int\limits_{\epsilon}^{t} \left(s_2^2 e^{s_2(t-\tau)} - s_1^2 e^{s_1(t-\tau)}\right) f_n(\tau) d\tau + (s_2 - s_1) f_n(t)\right). \tag{3.65}$$

Moyennant les majorations M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7 et M8, les expressions (3.63), (3.64) et (3.65) donnent respectivement

$$\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| \leq \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{|s_2|\left|e^{s_1 t}\right| + |s_1|\left|e^{s_2 t}\right|}{|s_2 - s_1|}|\varphi_n| + \frac{\left|e^{s_2 t}\right| + \left|e^{s_1 t}\right|}{|s_2 - s_1|}|\psi_n| \right.$$
$$\left. + \frac{1}{|s_2 - s_1|}\int\limits_{0}^{t} \left(\left|e^{s_2(t-\tau)}\right| + \left|e^{s_1(t-\tau)}\right|\right)|f_n(\tau)| d\tau\right)$$
$$\leq \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \left(k + \frac{2l^2}{\pi^2\beta}\frac{r}{n^4} + \frac{2l^2}{\pi^2\beta}\frac{Tm}{n^4}\right)\frac{1}{n^2},$$

$$\left|\frac{\partial^3 u_n}{\partial t \partial x^2}\right| \leq \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{|s_1||s_2|\left(\left|e^{s_1 t}\right| + \left|e^{s_2 t}\right|\right)}{|s_2 - s_1|}|\varphi_n| + \frac{|s_2|\left|e^{s_2 t}\right| + |s_1|\left|e^{s_1 t}\right|}{|s_2 - s_1|}|\psi_n| \right.$$
$$\left. + \frac{1}{|s_2 - s_1|}\int\limits_{0}^{t} \left(|s_2|\left|e^{s_2(t-\tau)}\right| + |s_1|\left|e^{s_1(t-\tau)}\right|\right)|f_n(\tau)| d\tau\right)$$
$$\leq 2\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{\alpha k}{\beta} + r + Tm\right)\frac{1}{n^2},$$

et

$$\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}\right| = \left(\frac{|s_1 s_2|\left(|s_1|\left|e^{s_1 t}\right| + |s_2|\left|e^{s_2 t}\right|\right)}{|s_2 - s_1|}\left|\varphi\right|_n + \frac{\left|s_2^2\right|\left|e^{s_2 t}\right| - \left|s_1^2\right|\left|e^{s_1 t}\right|}{|s_2 - s_1|}\left|\psi_n\right|\right.$$

$$\left. + \frac{1}{|s_2 - s_1|}\int\limits_0^t \left(\left|s_2^2\right|\left|e^{s_2(t-\tau)}\right| + \left|s_1^2\right|\left|e^{s_1(t-\tau)}\right|\right)\left|f_n(\tau)\right| d\tau + |s_2 - s_1|\left|f_n(t)\right|\right)$$

$$\leq 2\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{\alpha k}{n^2} + \left[\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \beta + \frac{2\alpha}{\beta}\right]\left(\frac{r}{n^4} + \frac{m(T)}{n^4}\right) + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{\beta m}{n^2}.$$

étant donné que les séries dans les membres droits des trois dernières inégalités sont convergentes, alors en vertu du Théorème 1.2, on déduit que les séries (3.63), (3.64) et (3.65) sont uniformément convergentes $\bar{\Omega}$. Ainsi, la fonction $u(x,t)$ donnée par (3.58) satisfait l'équation (3.10).

3.2.2 Solution faible

Formulation faible

Pour définir une solution faible du problème (3.10)-(3.14), on considérera le produit scalaire dans $L^2(0,T;B_2^1(0,l))$ de l'équation (3.10) et d'une fonction test $v(x,t) \in H^1(0,T;B_2^1(0,l))$, il vient

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v\right)_{L^2(0,T;B_2^1(0,l))} - \alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, v\right)_{L^2(0,T;B_2^1(0,l))} - \beta\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}, v\right)_{L^2(0,T;B_2^1(0,l))}$$
$$= (f, v)_{L^2(0,T;B_2^1(0,l))} \qquad (3.66)$$

Intégrons par parties le premier terme du membre gauche de l'égalité (3.66), en supposant que $v(.,T) = 0$ et en tenant compte de la condition (3.12), il vient :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v\right)_{L^2(0,T;B_2^1(0,l))} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right)_{B_2^1(0,l)} \Big|_{t=0}^{t=T} - \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T;B_2^1(0,l))}$$
$$= (\psi, v(x,0))_{B_2^1(0,l)} - \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T;B_2^1(0,l))}. \qquad (3.67)$$

Intégrons par parties le second terme du membre gauche de l'égalité (3.66), en suppoant $\int_0^l v(x,t)\,dx = 0$, et vu la condition (3.13), on aura

$$\begin{aligned}
-\alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, v\right)_{L^2(0,T;B_2^1(0,l))} &= -\alpha\int_0^T dt\int_0^l J_x^*\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right) J_x^*(v)\,dx = -\alpha\int_0^T dt\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=x}^{\xi=l} J_x^*(v)\,dx \\
&= \alpha\int_0^T\int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} J_x^*(v)\,dx = \alpha\int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial x} J_x^*(v)\right)_{x=0}^{x=l} dx + \alpha\int_0^T\int_0^l uvdxdt \\
&= \alpha\int_0^T\int_0^l uvdxdt = \alpha(u,v)_{L^2(0,T;L^2(0,l))}. \qquad (3.68)
\end{aligned}$$

Intégrons par parties, le troisième terme du membre gauche de (3.66), en tenant compte de la condition $v(.,T)=0$, il vient

$$\begin{aligned}
&-\beta\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}, v\right)_{L^2(0,T;B_2^1(0,l))} \\
&= -\beta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, v\right)_{B_2^1(0,l)}\Bigg|_{t=0}^{t=T} + \beta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T;B_2^1(0,l))} \\
&= \beta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T;B_2^1(0,l))} + \beta\left(\varphi'', v(.,0)\right)_{B_2^1(0,l)}. \qquad (3.69)
\end{aligned}$$

Or, compte tenu des conditions (3.13) et

$$\int_0^l v(x,t)dx = 0,$$

le premier terme du membre droit de l'identité (3.69) s'écrit

$$\begin{aligned}
\beta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T;B_2^1(0,l))} &= \beta\left(J_x^*\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), J_x^*\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\right)_{L^2(0,T;L^2(0,l))} = \beta\left(\int_x^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), J_x^*\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\right)_{L^2(0,T;L^2(0,l)} \\
&= \beta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mid_{x=l} - \frac{\partial u}{\partial x}\mid_{x=x}, J_x^*\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\right)_{L^2(0,T;L^2(0,l))},
\end{aligned}$$

la condition (3.13) donne

$$-\beta\left(\frac{\partial u}{\partial x}, J_x^*\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\right)_{L^2(0,T;L^2(0,l))} = -\beta\int_0^l\int_0^T \frac{\partial u}{\partial x}, J_x^*\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right),$$

l'intégration par parties plus la condition $\int_0^l v(x,t)dx = 0$ donne

$$= -\beta \int_0^T u J_x^* \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) |_0^l + \beta \int_0^T \int_0^l u \frac{\partial v}{\partial t} = -\beta \left(u, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T;L^2(0,l))}.$$

De même, l'intégration par parties du dernier terme du membre droit de (3.69) donne

$$\begin{aligned}
\beta \left(\varphi'', v(.,0)\right)_{B_2^1(0,l)} &= \beta \int_0^l J_x^* \varphi'' \cdot J_x^* v(\xi, 0) dx \\
&= \beta \int_0^l \left[\varphi'(\xi)\right]_{\xi=x}^{\xi=l} \cdot J_x^* v(\xi,0) dx \\
&= -\beta \int_0^l \varphi' \cdot J_x^* v(\xi,0) dx \\
&= -\beta \left(\varphi \cdot J_x^* v(\xi,0)\right)|_{x=0}^{x=l} + \beta \int_0^l \varphi \cdot v(x,0) dx \\
&= -\beta \left(\varphi, v(.,0)\right)_{L^2(0,l)}.
\end{aligned}$$

En insérant les deux dernières égalités dans l'identité (3.69), il s'ensuit

$$-\beta \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}, v\right)_{L^2(0,T;B_2^1(0,l))} = -\beta \left(u, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T;L^2(0,l))} + \beta \left(\varphi, v(.,0)\right)_{L^2(0,l)}. \tag{3.70}$$

Finalement, en substituant (3.67) et (3.68) et (3.70) dans l'identité (3.66), il vient

$$\begin{aligned}
&-\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T;B_2^1(0,l))} + \alpha(u,v)_{L^2(0,T;L^2(0,l))} \\
&\quad - \left(\psi, v(.,0)\right)_{B_2^1(0,l)} - \beta \left(u, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T;L^2(0,l))} \\
&\quad -\beta \left(\varphi, v(.,0)\right)_{L^2(0,l)} = (f,v)_{L^2(0,T;B_2^1(0,l))}.
\end{aligned} \tag{3.71}$$

A présent, nous sommes en mesure de donner la :

Définition 3.2 *On dit que la fonction $u(x,t) \in H^1(0,T;B_2^1(0,l))$ est solution faible du problème (3.10)-(3.14) si elle vérifie la condition intégrale (3.14) et l'identité (3.71) pour toute fonction $v(x,t) \in H^1(0,T;B_2^1(0,l))$, telle que :*

$$v(.,T) = 0 \qquad et \qquad \int_0^l v(x,.)dx = 0. \tag{3.72}$$

Problème approché

On suppose qu'il existe des suites de fonctions $f^{(n)}, \varphi^{(n)}, \psi^{(n)} \in C^2([0,l]), n = 1, 2, \cdots,$ satisfaisant les conditions du Théorème 3.2, telles que

$$\begin{cases} f^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f, \quad \text{dans } B_2^1(0,l), \quad \forall t \in [0,T] \\ \varphi^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi, \quad \text{dans } L^2(0,l), \\ \psi^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \psi, \quad \text{dans } B_2^1(0,l), \end{cases}$$

et pour $n = 1, 2, \cdots$, il existe une solution classique unique $u^{(n)}(x,t)$, au sens de la Définition 3.1, du problème mixte :

$$\frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^3 u^{(n)}}{\partial t \partial x^2} = f^{(n)}(x,t), \tag{3.73}$$

$$u^{(n)}(x,0) = \varphi^{(n)}(x), \tag{3.74}$$

$$\frac{\partial u^{(n)}(x,0)}{\partial t} = \psi^{(n)}(x), \tag{3.75}$$

$$\frac{\partial u^{(n)}(l,t)}{\partial x} = 0, \tag{3.76}$$

$$\int_0^l u^{(n)}(x,t)dx = 0. \tag{3.77}$$

On considère le problème linéaire (3.73)-(3.77) pour $n = k$, et $n = m$, et on prend la différence :

$$u^{(k,m)}(x,t) = u^{(k)}(x,t) - u^{(m)}(x,t),$$

il vient

$$\frac{\partial^2 u^{(k,m)}(x,t)}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 u^{(k,m)}(x,t)}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^3 u^{(k,m)}(x,t)}{\partial t \partial x^2} = f^{(k,m)}(x,t), \tag{3.78}$$

$$u^{(k,m)}(x,0) = \varphi^{(k,m)}(x), \tag{3.79}$$

$$\frac{\partial u^{(k,m)}(x,0)}{\partial t} = \psi^{(k,m)}(x), \tag{3.80}$$

$$\frac{\partial u^{(k,m)}(l,t)}{\partial x} = 0, \tag{3.81}$$

$$\int_0^l u^{(k,m)}(x,t)dx = 0, \tag{3.82}$$

avec

$$f^{(k,m)}(x,t) = f^{(k)}(x,t) - f^{(m)}(x,t),$$

$$\varphi^{(k,m)}(x) = \varphi^{(k)}(x) - \varphi^{(m)}(x),$$

$$\psi^{(k,m)}(x) = \psi^{(k)}(x) - \psi^{(m)}(x).$$

Estimation à priori

Théorème 3.3 *Pour tout $k,\ m \in IN^*$,on a les estimations a priori suivantes :*

$$\left\|u^{(k,m)}\right\|^2_{C(0,T;L^2(0,l))} \le c_3 \left(\left\|f^{(k,m)}\right\|^2_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} + \left\|\varphi^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,l)} + \left\|\psi^{(k,m)}\right\|^2_{B_2^1(0,l)}\right), \tag{3.83}$$

$$\left\|\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right\|^2_{C\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)} \le c_3 \left(\left\|f^{(k,m)}\right\|^2_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} + \left\|\varphi^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,l)} + \left\|\psi^{(k,m)}\right\|^2_{B_2^1(0,l)}\right), \tag{3.84}$$

$$\int_0^\tau \left\|\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,l)} dt \le c_3 \left(\left\|f^{(k,m)}\right\|^2_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} + \left\|\varphi^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,l)} + \left\|\psi^{(k,m)}\right\|^2_{B_2^1(0,l)}\right), \tag{3.85}$$

où

$$c_3 = \frac{\max(1,\alpha)}{\min(1,\alpha,2\beta)} \cdot e^{\frac{T}{\min(1,\alpha,2\beta)}}.$$

Démonstration. Considérons le produit scalaire dans $L^2(0,T;B_2^1(0,l))$de l'équation (3.78) et $2\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}$, on obtient

$$2\int_0^\tau \left(\frac{\partial^2 u^{(k,m)}}{\partial t^2}, \frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)} dt - 2\alpha \int_0^\tau \left(\frac{\partial^2 u^{(k,m)}}{\partial x^2}, \frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)} dt$$
$$-2\beta \int_0^\tau \left(\frac{\partial^3 u^{(k,m)}}{\partial t \partial x^2}, \frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)} dt = 2\int_0^\tau \left(f^{(k,m)}, \frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)} dt. \tag{3.86}$$

Intégrons par parties les termes du membre gauche de (3.86), en tenant compte des conditions (3.78)-(3.82), il vient

$$2\int_0^\tau \left(\frac{\partial^2 u^{(k,m)}}{\partial t^2}, \frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)} dt = \left\|\frac{\partial u^{(k,m)}(.,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)} - \left\|\psi^{(k,m)}\right\|^2_{B_2^1(0,l)}, \tag{3.87}$$

$$-2\alpha\int_0^\tau\left(\frac{\partial^2u^{(k,m)}}{\partial x^2},\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)}dt=\alpha\left(\left\|u^{(k,m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2(0,l)}-\left\|\varphi^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,l)}\right),\quad(3.88)$$

$$\begin{aligned}-2\beta\int_0^\tau\left(\frac{\partial^3u^{(k,m)}}{\partial t\partial x^2},\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)}dt&=-2\beta\int_0^\tau\left(\frac{\partial^2u^{(k,m)}(\xi,t)}{\partial t\partial\xi}\Big|_{\xi=x}^{\xi=l},J_x^*\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right)_{L^2(0,l)}dt\\
=2\beta\int_0^\tau\left(\frac{\partial^2u^{(k,m)}}{\partial t\partial x},J_x^*\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right)_{L^2(0,l)}dt&=2\beta\int_0^\tau\left(\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\cdot J_x^*\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right)\Big|_{x=0}^{x=l}dt\\
+2\beta\int_0^\tau\left\|\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,l)}dt&=2\beta\int_0^\tau\left\|\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,l)}dt.\qquad(3.89)\end{aligned}$$

Insérons (3.87), (3.88) et (3.89) dans l'identité (3.86), il s'ensuit

$$\begin{aligned}&2\beta\int_0^\tau\left\|\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,l)}dt+\left\|\frac{\partial u^{(k,m)}(.,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)}+\alpha\left\|u^{(k,m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2(0,l)}\\
&=2\int_0^\tau\left(f^{(k,m)},\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)}dt+\alpha\left\|\varphi^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,l)}+\left\|\psi^{(k,m)}\right\|^2_{B_2^1(0,l)}.\end{aligned}$$

Utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour estimer le premier terme du membre droit de l'inégalité ainsi obtenue, il vient

$$\begin{aligned}&\int_0^\tau\left\|\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,l)}dt+\left\|\frac{\partial u^{(k,m)}(.,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)}+\left\|u^{(k,m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2(0,l)}\\
&\leq\frac{1}{\min(1,\alpha,2\beta)}\left(\left\|f^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,\tau;B_2^1(0,l))}+\alpha\left\|\varphi^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,l)}+\left\|\psi^{(k,m)}\right\|^2_{B_2^1(0,l)}\right)\\
&\qquad+\frac{1}{\min(1,\alpha,2\beta)}\int_0^\tau\left\|\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)}dt.\end{aligned}$$

A fortiori, on a

$$\begin{aligned}&\int_0^\tau\left\|\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,l)}dt+\left\|\frac{\partial u^{(k,m)}(.,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)}+\left\|u^{(k,m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2(0,l)}\\
&\leq\frac{\max(1,\alpha)}{\min(1,\alpha,2\beta)}\left\|f^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,\tau;B_2^1(0,l))}+\left\|\varphi^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,l)}+\left\|\psi^{(k,m)}\right\|^2_{B_2^1(0,l)}\\
&\qquad+\frac{1}{\min(1,\alpha,2\beta)}\int_0^\tau\left(\left\|\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)}+\left\|u^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,l)}\right)dt.\end{aligned}$$

L'application du lemme de Gronwall à cette dernière inégalité entraine

$$\int_0^\tau \left\|\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,l)} dt + \left\|\frac{\partial u^{(k,m)}(.,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)} + \left\|u^{(k,m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2(0,l)}$$
$$\leq \frac{\max(1,\alpha)}{\min(1,\alpha,2\beta)} \exp\frac{\tau}{\min(1,\alpha,2\beta)} \left\|f^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,\tau;B_2^1(0,l))} + \left\|\varphi^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,l)} + \left\|\psi^{(k,m)}\right\|^2_{B_2^1(0,l)}.$$

En particulier, on a

$$\int_0^\tau \left\|\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,l)} dt + \left(\left\|\frac{\partial u^{(k,m)}(.,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)} + \left\|u^{(k,m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2(0,l)}\right)$$
$$\leq \frac{\max(1,\alpha)}{\min(1,\alpha,2\beta)} \exp\frac{\tau}{\min(1,\alpha,2\beta)} \left\|f^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,T;B_2^1(0,l))}$$
$$+ \left\|\varphi^{(k,m)}\right\|^2_{L^2(0,l)} + \left\|\psi^{(k,m)}\right\|^2_{B_2^1(0,l)}.$$

Par passage au maximum, sur τ de 0 à T dans le membre gauche de l'inégalité ainsi obtenue, on obtient les estimations (3.83)-(3.85).

Corollaire 3.1 *La suite* $\left\{u^{(n)}\right\}_n \left(respect. \left\{\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t}\right\}_n\right)$ *converge vers une fonc tion* $\tilde{u}(x,t)$ $\left(respect. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\right)$ *pour la norme de l'espace* $C\left(0,T;L^2(0,l)\right)$ $\left(respect.\ C\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)\right).$

Démonstration. Directe

Existence de la solution faible

L'objectif de ce paragraphe est de démontrer que la fonction limite $\tilde{u}(x,t)$est solution du problème (3.10)-(3.14).

Théorème 3.4 *Le problème (3.10)-(3.14) admet une solution faible.*

Démonstration. Multiplions scalairement dans l'espace $L^2(0,T;B_2^1(0,l))$ l'équation (3.10) par la fonction test $v(x,t) \in H^1(0,T;B_2^1(0,l))$,et procédons de façon analogue à celle des paragraphes précédents, on obtient

$$-\left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T;B_2^1(0,l))}+\alpha\left(u^{(n)},v\right)_{L^2(0,T;L^2(0,l))}$$
$$-\left(\psi^{(n)},v(.,0)\right)_{B_2^1(0,l)}-\beta\left(u^{(n)},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T;L^2(0,l))}$$
$$-\beta\left(\varphi^{(n)},v(.,0)\right)_{L^2(0,l)}=\left(f^{(n)},v\right)_{L^2(0,T;B_2^1(0,l))}. \tag{3.90}$$

L'identité (3.90) implique, quand $n\to+\infty$, que l'identitésuivante est satisfaite :

$$-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\partial(u^{(n)}-\tilde{u})}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T;B_2^1(0,l))}+\lim_{n\to+\infty}\alpha(u^{(n)}-\tilde{u},v)_{L^2(0,T;L^2(0,l))}$$
$$-\lim_{n\to+\infty}\left(\psi^{(n)}-\psi,v(.,0)\right)_{B_2^1(0,l)}-\lim_{n\to+\infty}\beta\left(u^{(n)}-\tilde{u},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T;L^2(0,l))}$$
$$-\lim_{n\to+\infty}\beta\left(\varphi^{(n)}-\varphi,v(.,0)\right)_{L^2(0,l)}-\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T;B_2^1(0,l))}$$
$$+\alpha(\tilde{u},v)_{L^2(0;,T;L^2(0,l))}-(\psi,v(.,0))_{B_2^1(0,l)}-\beta\left(\tilde{u},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T;L^2(0,l))}$$
$$-\beta\left(\varphi,v(.,0)\right)_{L^2(0,l)}=\lim_{n\to+\infty}\left(f^{(n)}-f,v\right)_{L^2(0,T;B_2^1(0,l))}+(f,v)_{L^2(0,T;B_2^1(0,l))}. \tag{3.91}$$

En combinant les inégalités (1.16), (1.19), (1.20) et celle de Cauchy-Schwartz, les deux premiers termes du membre gauche de l'identité (3.91) sont majorés comme suit :

$$\left|-\left(\frac{\partial(u^{(n)}-\tilde{u})}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T;B_2^1(0,l))}+\alpha\left(u^{(n)}-\tilde{u},v\right)_{L^2(0,T;L^2(0,l))}\right|$$
$$\leq\frac{l\sqrt{T}}{\sqrt{2}}\left\|\frac{\partial(u^{(n)}-\tilde{u})}{\partial t}\right\|_{C(0,T;B_2^1(0,l))}\|v\|_{H^1(0,T;L^2(0,l))}$$
$$+\alpha\sqrt{T}\left\|u^{(n)}-\tilde{u}\right\|_{C(0,T;L^2(0,l))}\|v\|_{H^1(0,T;L^2(0,l))}.$$

Dans cette dernière inégalité, on passe à la limite quand $n\to+\infty$, on aura

$$\lim_{n\to+\infty}\left[-\left(\frac{\partial(u^{(n)}-\tilde{u})}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T;B_2^1(0,l))}+\alpha\left(u^{(n)}-\tilde{u},v\right)_{L^2(0,T;L^2(0,l))}\right]=0. \tag{3.92}$$

En vertu de l'inégalitéde Cauchy-Schwartz, le quatrième terme du membre gauche de l'identité (3.91) est estimé comme suit :

$$\begin{aligned}&\left|-\beta\left(u^{(n)}-\tilde{u},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T;L^2(0,l))}\right|\\&\leq\beta\left\|u^{(n)}-\tilde{u}\right\|_{L^2(0,T;L^2(0,l))}\cdot\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;L^2(0,l))}.\end{aligned}$$

En raison de l'inégalité (1.19), on a

$$\begin{aligned}&\left|-\beta\left(u^{(n)}-\tilde{u},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T;L^2(0,l))}\right|\\&\leq\beta\sqrt{T}\left\|u^{(n)}-\tilde{u}\right\|_{C(0,T;L^2(0,l))}\cdot\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;L^2(0,l))}.\end{aligned}$$

Par passage à la limite, quand $n\to+\infty$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\beta\left(u^{(n)}-\tilde{u},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T,L^2(0,l))}=0. \tag{3.93}$$

D'une façon similaire à celle du chapitre précédent, il s'ensuit que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(f^{(n)}-f,v\right)_{L^2(0,T;B_2^1(0,l))}=0, \tag{3.94}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\psi^{(n)}-\psi,v(.,0)\right)_{L^2(0,l)}=0. \tag{3.95}$$

Quant au cinquième terme du membre gauche de l'identité (3.91), il vient

$$\left|\beta\left(\varphi^{(n)}-\varphi,v(.,0)\right)_{L^2(0,l)}\right|\leq\beta\left\|\varphi^{(n)}-\varphi\right\|_{L^2(0,l)}\left\|v(.,0)\right\|_{L^2(0,l)}\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0, \tag{3.96}$$

En insérant (3.92), (3.93), (3.94), (3.95) et (3.96) dans l'identité (3.91), il vient

$$\begin{aligned}&-\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T;B_2^1(0,l))}+\alpha\left(\tilde{u},v\right)_{L^2(0,T;B_2^1(0,l))}-\left(\psi,v(.,0)\right)_{B_2^1(0,l)}\\&+\beta\left(\tilde{u},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T;L^2(0,l))}-\beta\left(\varphi,v(.,0)\right)_{L^2(0,l)}=\left(f,v\right)_{L^2(0,T;B_2^1(0,l))}.\end{aligned} \tag{3.1.95}$$

D'autre part, la condition

$$\int_0^l\tilde{u}(x,.)dx=0. \tag{3.1.96}$$

s'obtient de façon analogue à celle du chapitre précédent.

Ainsi, on déduit que la fonction limite $\tilde{u}(x,t)$est solution faible du problème (3.10)-(3.14) au sens de la Définition 3.2.

Unicité de la solution

Théorème 3.5 *La solution du problème (3.10)-(3.14) est unique.*

Démonstration. On suppose que le problème (3.10)-(3.14) admet deux solutions distinctes $u_1(x,t)$ et $u_2(x,t)$. Comme l'équation (3.10) est linéaire, la différence

$$u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

satisfait l'identité (3.71), avec

$$f(x,t) = \psi(x) = \varphi(x) = 0, \qquad \forall x \in [0,l] .$$

Ainsi, il vient

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T;B_2^1(0,l))} + \alpha\,(u,v)_{L^2(0,T;l^2(0,l))} + \beta\left(u, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,T;L^2(0,l))} = 0, \tag{3.97}$$

$\forall v(x,t) \in H^1(0,T;B_2^1(0,l))$. Ici aussi, dans l'identité (3.97), on choisit

$$v(x,t) = \begin{cases} 0 \qquad\qquad , & s \leq t \leq T, \\ -\int\limits_t^s u(x,\tau)d\tau, & 0 \leq t \leq s. \end{cases} \tag{3.98}$$

En remplaçant la fonction $v(x,t)$dans l'identité (3.97) pour sa représentation (3.98), en exprimant $u(x,t)$ et $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$en fonction de $v(x,t)$et de ses dérivées, il vient

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,s;B_2^1(0,l))} - \alpha\left(\frac{\partial v}{\partial t}, v\right)_{L^2(0,s;L^2(0,l))} + \beta\left(\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(0,s;L^2(0,l))} = 0. \tag{3.99}$$

En vertu de (3.98) et de la norme sur l'espace $L^2(0,s;L^2(0,l))$ on a :

$$\left\|\frac{\partial v(.,s)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)} + \alpha\,\|v(.,0)\|^2_{L^2(0,l)} + \beta\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,s;L^2(0,l))} = 0. \tag{3.100}$$

Il en découle

$$\left\| \frac{\partial v(.,s)}{\partial t} \right\|^2_{B_2^1(0,l)} = \|v(.,0)\|^2_{L^2(0,l)} = \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L^2(0,s;L^2(0,l))} = 0.$$

Compte tenu de la représentation (3.98) de la fonction $v(x,t)$, on obtient

$$\|u(.,s)\|^2_{B_2^1(0,l)} = 0,$$

c'est-à-dire,

$$u(x,s) \equiv 0 \text{ dans } B_2^1(0,l).$$

La variable s étant arbitraire dans $[0,T]$, on conclut que

$$u(x,t) \equiv 0, \quad \forall t \in [0,T] .$$

Ainsi,

$$u_1(x,t) \equiv u_2(x,t); \quad \forall t \in [0,T] .$$

Finalement l'unicitéde la solution faible du problème (3.10)-(3.14) est prouvée.

Continuité par rapport aux données de la solution

Etablissons, à présent, quelques résultats concernant la continuitéde la solution faible par rapport aux données du problème.

Théorème 3.6 *Soient* (f,φ,ψ) *et* $(f^*,\varphi^*,\psi^*) \in L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right) \times L^2(0,l) \times B_2^1(0,l)$, *et soient* u *et* u^* *les solutions faibles correspondantes du problème (3.10)-(3.14), alors*

$$\|u-u^*\|^2_{C(0,T,L^2(0,l))} \leq \tilde{C} \left(\int_0^\tau \|f-f^*\|^2_{B_2^1(0,l))} dt + \|\varphi-\varphi^*\|^2_{L^2(0,l)} + \|\psi-\psi^*\|^2_{B_2^1(0,l)} \right), \tag{3.101}$$

et

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u^{(*)}}{\partial t} \right\|^2_{C\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} \leq \tilde{C}' \left(\int_0^\tau \|f-f^*\|^2_{B_2^1(0,l))} dt + \|\varphi-\varphi^*\|^2_{L^2(0,l)} + \|\psi-\psi^*\|^2_{B_2^1(0,l)} \right)^{1/2}, \tag{3.102}$$

où $\tilde{C}$ *et* $\tilde{C}'$*sont des constantes positives indépendantes de* u.

Démonstration. La preuve de ce théorème est analogue à celle du Théorème 2.6 du chapitre précédent.

Corollaire 3.2 *Supposons que les hypothèses du Théorème 3.6 sont satisfaites. Supposons, en outre, que*

$$\begin{cases} \|f - f^*\|^2_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} \leq \epsilon, \\ \|\varphi - \varphi^*\|^2_{L^2(0,l)} \leq \epsilon_0, \\ \|\psi - \psi^*\|^2_{B_2^1(0,l)} \leq \epsilon_1, \end{cases}$$

alors les solutions faibles correspondantes $u(x,t)$et $u^*(x,t)$ du problème (3.10)-(3.14) satisfont les estimations suivantes :

$$\|u - u^*\|^2_{C(0,T,L^2(0,l))} \leq \tilde{C}'' \left(\epsilon^2 + \epsilon_0^2 + \epsilon_1^2\right),$$

et

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u^*}{\partial t}\right\|^2_{L^2\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)} \leq \tilde{C}''' \left(\epsilon^2 + \epsilon_0^2 + \epsilon_1^2\right).$$

3.2.3 Cas d'une équation semi-linéaire

Position du problème

L'étude dans cette partie, concerne celle d'un problème mixte avec une condition de Neumann et une condition intégrale pour l'équation de viscosité semi-linéaire.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}\right), \tag{3.103}$$

$$u(x,0) = \varphi_0, \tag{3.104}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi_0, \tag{3.105}$$

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \tag{3.106}$$

$$\int_0^l u(x,t)dx = 0, \tag{3.107}$$

où φ_0 et ψ_0 sont des constantes connues, et la fonction $f(.,.,.)$ est considérée de Lipschitz par rapport à la troisième et quatrième composantes, c'est-à-dire :

$$\exists L > 0 : \quad \| f(x,t,u_1(x,t),u_2(x,t)) - f(x,t,v_1(x,t),v_2(x,t)) \|$$
$$\leq L \left\{ \|u_1(x,t) - v_1(x,t)\| + \|u_2(x,t) - v_2(x,t)\| \right\}, \ \ \forall (x,t) \in \Omega.$$

3.2.4 Solution faible

Processus itératif

Procédons par itération comme suit :

Partant de $u^{(0)}(x,t) \equiv 0, \ \ \forall (x,t) \in \Omega$, on définit la suite $\left\{u^{(n)}(x,t)\right\}_{n \in IN}$ par :

Si $u^{(n-1)}(x,t)$ sont connues, alors on résout le problème :

$$\frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^3 u^{(n)}}{\partial t \partial x^2} = f\left(x, t, u^{(n-1)}, \frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial t}\right), \tag{3.108}$$

$$u^{(n)}(x,0) = \varphi_0, \tag{3.109}$$

$$\frac{\partial u^{(n)}(x,0)}{\partial t} = \psi_0, \tag{3.110}$$

$$\frac{\partial u^{(n)}(l,t)}{\partial x} = 0, \tag{3.111}$$

$$\int_0^l u^{(n)}(x,t)dx = 0. \tag{3.112}$$

Les Théorèmes 3.4 et 3.5 impliquent, pour n fixé, que chacun des problèmes (3.108)-(3.112) admet une solution unique $u^{(n)}(x,t)$.

Au préalable, on s'intéresse au problème semi-linéaire (3.103)-(3.107) pour $n = m$ et $n = m+1$, ainsi on obtient

$$\frac{\partial^2 z^{(m)}}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 z^{(m)}}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^3 z^{(m)}}{\partial t \partial x^3} = F^{(m-1)}(x,t), \ \ m \geq 1, \tag{3.113}$$

$$z^{(m)}(x,0) = 0, \tag{3.114}$$

$$\frac{\partial z^{(m)}(x,0)}{\partial t} = 0, \tag{3.115}$$

$$\frac{\partial z^{(m)}(l,t)}{\partial x} = 0, \tag{3.116}$$

$$\int_0^l z^{(m)}(x,t)dx = 0, \tag{3.117}$$

où

$$z^{(m)}(x,t) = u^{(m+1)}(x,t) - u^{(m)}(x,t),$$

et

$$F^{(m-1)}(x,t) = f\left(x,t,u^{(m)},\frac{\partial u^{(m)}}{\partial t}\right) - f\left(x,t,u^{(m-1)},\frac{\partial u^{(m-1)}}{\partial t}\right).$$

établissons maintenant quelques

Estimation à priori

Théorème 3.7 *Si* $f(x,t,0,0) \in L^2(0,T;B_2^1(0,l))$ *et* $f\left(x,t,u(x,t),\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)$ *satisfait la condition de Lipschitz, alors on a les estimations suivantes :*

$$\left\|z^{(m)}(x,t)\right\|_{C^1\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)} \leq c_4 \left\|z^{(m-1)}(x,t)\right\|_{C^1\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)}; \quad m \geq 1. \tag{3.118}$$

où

$$c_4 = \frac{L^2Tl^2}{2\beta\min(1,2\alpha/l^2)}.$$

Démonstration. Prenons le produit scalaire, dans $L^2(0,\tau;B_2^1(0,l))$avec $0 \leq \tau \leq T$, de l'équation (3.113) et $2\frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}$, nous aurons

$$2\int_0^\tau \left(\frac{\partial^2 z^{(m)}}{\partial t^2},\frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)} dt - 2\alpha\int_0^\tau \left(\frac{\partial^2 z^{(m)}}{\partial x^2},\frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)} dt$$
$$-2\beta\int_0^\tau \left(\frac{\partial^3 z^{(m)}}{\partial t\partial x^2},\frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)} dt = 2\int_0^\tau \left(F^{(m-1)}(x,t),\frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)} dt. \tag{3.119}$$

Tenant compte des conditions homogènes (3.114) et (3.115), les trois termes du membre gauche de l'identité (3.119) deviennent respectivement

$$2\int_0^\tau \left(\frac{\partial^2 z^{(m)}}{\partial t^2},\frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)} dt = \left\|\frac{\partial z^{(m)}(.,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)}, \tag{3.120}$$

$$-2\alpha\int_0^\tau\left(\frac{\partial^2 z^{(m)}}{\partial x^2},\frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)}dt=\alpha\left\|z^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2(0,l)}, \tag{3.121}$$

$$-2\beta\int_0^\tau\left(\frac{\partial^3 z^{(m)}}{\partial t\partial x^2},\frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)}dt=2\beta\int_0^\tau\left\|\frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,l)}dt. \tag{3.122}$$

Insérons (3.120), (3.121) et (3.122) dans l'identité (3.119), il vient

$$\begin{aligned}2\beta\int_0^\tau\left\|\frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,l)}dt+\left\|\frac{\partial z^{(m)}(.,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)}+\alpha\left\|z^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2(0,l)}\\=2\int_0^\tau\left(F^{(m-1)},\frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)}dt.\end{aligned} \tag{3.123}$$

Appliquons les inégalités de Cauchy-Schwartz et de Cauchy au membre droit de (3.123), en tenant compte de la condition de Lipschitz et du Corollaire 1.4, on obtient

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial z^{(m)}(.,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)}+\alpha\left\|z^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2(0,l)}\\\leq\frac{L^2l^2}{2\beta}\int_0^\tau\left(\left\|z^{(m-1)}\right\|^2_{B_2^1(0,l)}+\left\|\frac{\partial z^{(m-1)}}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)}\right)dt.\end{aligned} \tag{3.124}$$

En raison des inégalités (1.16) et (1.20), il vient

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial z^{(m)}(.,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)}+\frac{2\alpha}{l^2}\left\|z^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{B_2^1(0,l)}\\\leq\frac{L^2l^2T}{2\beta}\left(\left\|z^{(m-1)}\right\|^2_{C\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)}+\left\|\frac{\partial z^{(m-1)}}{\partial t}\right\|^2_{C\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)}\right)\end{aligned} \tag{3.125}$$

A fortiori

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial z^{(m)}(.,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)}+\left\|z^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2(0,l)}\\\leq\frac{L^2l^2T}{2\beta\min\left(1,2\alpha/l^2\right)}\left(\left\|z^{(m-1)}\right\|^2_{C(0,T;B_2^1(0,l))}+\left\|\frac{\partial z^{(m-1)}}{\partial t}\right\|^2_{C(0,T;B_2^1(0,l))}\right).\end{aligned} \tag{3.126}$$

Puisque le membre droit de cette dernière inégalité est indépendant de τ, on prend le maximum sur τ de 0 à T dans le membre gauche, il s'ensuit

$$\left\|z^{(m)}\right\|^2_{C^1\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)}\leq\frac{L^2l^2T}{2\beta\min\left(1,2\alpha/l^2\right)}\left\|z^{(m-1)}(x,t)\right\|^2_{C^1\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)}$$

Ainsi la démonstration s'achève.

Existence de la solution

Théorème 3.8 *Sous les hypothèses du Théorème 3.7. Si*

$$L < \left(\frac{2\beta \min\left(1, 2\alpha/l^2\right)}{l^2 T} \right)^{1/2},$$

alors le problème (3.113)-(3.117) possède une solution faible dans l'espace $C^1\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)$.

Démonstration. La règle de d'Alembert, l'estimation (3.118) et les hypothèses du Théorème 3.7, nous conduisent, d'une façon analogue à celle de la démonstration du Théorème 2.8, à conclure que la série

$$\sum_{m\geq 1} z^{(m)}(x,t)$$

converge. Par conséquent la suite $\left\{u^{(m)}(x,t)\right\}_m$ définie par

$$u^{(m)}(x,t) = \sum_{k=0}^{m-1} \left[u^{(k+1)}(x,t) - u^{(k)}(x,t)\right] + u^{(0)}(x,t), \quad m = 1, 2, \ldots$$

converge en norme dans l'espace $C^1\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)$, vers la fonction $\tilde{u}(x,t)$.

Théorème 3.9 *La fonction limite $\tilde{u}(x,t)$ est solution faible au sens de la Définition 3.2 du problème (3.103)-(3.107).*

Démonstration. Le schéma de la démonstration est similaire à celui de la preuve du Théorème 2.2.

Unicité de la solution

établissons, l'estimation à priori suivante.

Théorème 3.10 *Soit $u_1(x,t)$ et $u_2(x,t)$ deux solutions faibles dans l'espace $C^1\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)$ du problème (3.103)-(3.107) alors on a l'estimation*

$$\left\|u_1 - u_2\right\|^2_{C^1\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)} \leq c_4 \left\|u_1 - u_2\right\|^2_{C^1\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)}. \tag{3.127}$$

Démonstration. Les fonction u_1 et u_2, étant solutions du même problème semi-linéaire (3.103)-(3.107), il serait pareil pour la différence

$$z(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t),$$

il en découle

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^3 z}{\partial t \partial x^2} = F(x,t), \tag{3.128}$$

$$z(x,0) = 0, \tag{3.129}$$

$$\frac{\partial z(x,0)}{\partial t} = 0, \tag{3.130}$$

$$\frac{\partial z(l,t)}{\partial x} = 0, \tag{3.131}$$

$$\int_0^l z(x,t)dx = 0. \tag{3.132}$$

où

$$F(x,t) = f\left(x,t,u_1(x,t),\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t}\right) - f\left(x,t,u_2(x,t),\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t}\right).$$

On procède comme dans la preuve du Théorème 3.7, on aboutit à l'estimation suivante :

$$\|z\|^2_{C^1\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)} \leq c_4 \|z\|^2_{C^1\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)},$$

c'est-à-dire

$$\|u_1 - u_2\|^2_{C^1\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)} \leq c_4 \|u_1 - u_2\|^2_{C^1\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)}.$$

Corollaire 3.3 *Le problème (3.103)-(3.107) admet une solution unique.*

Démonstration. La preuve de ce corollaire est analogue à celle du Corollaire 2.3, en utilisant (3.127)

3.2.5 Généralisation du cas d'une équation semi-linéaire

Position du problème

L'étude dans cette partie, est une généralité de celle faite dans la partie deux précédente, étant donné que les conditions initiales seront prises des fonctions dépendantes de la variable spatiale. Au début le problème et ainsi posé

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}-\alpha\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-\beta\frac{\partial^3\theta}{\partial t\partial x^2}=g\left(x,t,\theta,\frac{\partial\theta}{\partial t}\right), \tag{3.133}$$

$$\theta\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right), \tag{3.134}$$

$$\frac{\partial\theta\left(x,0\right)}{\partial t}=\psi\left(x\right), \tag{3.135}$$

$$\frac{\partial\theta\left(l,t\right)}{\partial x}=\mu\left(t\right), \tag{3.136}$$

$$\int_0^l\theta\left(x,t\right)dx=m\left(t\right). \tag{3.137}$$

On introduit une fonction $u\left(x,t\right)$ qui réprésente une dérivation de la fonction $\theta\left(x,t\right)$ à partir de la même fonction construite en première patrtie du Chapitre 2. Ainsi la fonction $u\left(x,t\right)$ définit la solution du problème suivant :

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\alpha\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\beta\frac{\partial^3u}{\partial t\partial x^2}=f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial t}\right), \tag{3.138}$$

$$u\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right), \tag{3.139}$$

$$\frac{\partial u\left(x,0\right)}{\partial t}=\psi\left(x\right), \tag{3.140}$$

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \tag{3.141}$$

$$\int_0^l u(x,t)\,dx = 0. \tag{3.142}$$

Où

$$f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial t}\right) = g\left(x,t,u+U,\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial t}\right),$$
$$\varphi(x) = \Phi(x) - U(x,0), \qquad \psi(x) = \Psi(x) - \frac{\partial U(x,0)}{\partial t}$$

et $\varphi(x), \psi(x)$ sont des fonctions connues et $f(.,.,.,.)$ est considère de Lipschitz par rapport à la troisième et quatrième composantes, c'est-à-dire :

$$\exists L > 0 : \qquad \|f(x,t,u_1(x,t),u_2(x,t)) - f(x,t,v_1(x,t),v_2(x,t))\|$$
$$\leq L\left\{\|u_1(x,t)-v_1(x,t)\| + \|u_2(x,t)-v_2(x,t)\|\right\}, \ \ \forall (x,t)\in\Omega.$$

Considérons le problème auxiliaire suivant :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \alpha\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \beta\frac{\partial^3 w}{\partial t\partial x^2} = 0, \tag{3.143}$$

$$w(x,0) = \varphi(x), \tag{3.144}$$

$$\frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \tag{3.145}$$

$$\frac{\partial w(l,t)}{\partial x} = 0, \tag{3.146}$$

$$\int_0^l w(x,t)\,dx = 0. \tag{3.147}$$

D'aprés l'étude faite dans la première partie de ce Chapitre 3 le problème auxiliaire admet une solution unique.

Soit $z(x,t) = u(x,t) - w(x,t)$. Alors $z(x,t)$ satisfait le problème suivant :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^3 z}{\partial t \partial x^2} = f\left(x, t, z + w, \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t}\right), \tag{3.148}$$

$$z(x,0) = 0, \tag{3.149}$$

$$\frac{\partial z(x,0)}{\partial t} = 0, \tag{3.150}$$

$$\frac{\partial z(l,t)}{\partial x} = 0, \tag{3.151}$$

$$\int_0^l z(x,t)\, dx = 0. \tag{3.152}$$

Notation 3.1 $L_0^2(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : \int_\Omega u dx = 0\right\}$.

Formulation faible

Considérons le prouduit scalaire dans l'éspace $L^2(I, B_2^1(\Omega))$ de l'équation(3.138) par une fonction teste

$v(x,t) \in V = \{v/v \in H^1(I, L_0^2(\Omega)) : v(.,T) = 0\}$, on obtient :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v\right)_{L^2\left(I, B_2^1(\Omega)\right)} - \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, v\right)_{L^2\left(I, B_2^1(\Omega)\right)} - \beta \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}, v\right)_{L^2\left(I, B_2^1(\Omega)\right)}$$
$$= \left(f\left(.,.,u, \frac{\partial u}{\partial t}\right), v\right)_{L^2\left(I, B_2^1(\Omega)\right)}.$$

Similairement au problème (3.10)-(3.14) en aura :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left(I, B_2^1(\Omega)\right)} + \alpha (u,v)_{L^2(I,L^2)} - \beta \left(u, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2(I,L^2)}$$
$$= \left(f\left(.,.,u, \frac{\partial u}{\partial t}\right), v\right)_{L^2\left(I, B_2^1(\Omega)\right)} + \beta (\varphi, v(.,0))_{L^2(0,l)} + (\psi, v(.,0))_{B_2^1(\Omega)}. \tag{3.153}$$

Qu'on peut écrire :

$$A(u,v) = \left(f\left(.,.,u,\frac{\partial u}{\partial t}\right), v \right)_{L^2\left(I, B_2^1(\Omega)\right)} + \beta\left(\varphi, v(.,0)\right)_{L^2(0,l)} + \left(\psi, v(.,0)\right)_{B_2^1(\Omega)}. \quad (3.154)$$

Ou : $A(u,v)$ est le membre gauche dans (3.153).

Définition 3.3 *On appelle $u(x,t)$ solution faible du problème (3.138)-(3.142) si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $u \in L^2\left(I, L_0^2(\Omega)\right)$,
2. $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2\left(I, B_2^1(\Omega)\right)$,
3. *u vérifie la condition intégrale (3.142),*
4. *u vérifie l'identité (3.153) pour toute fonction v de V.*

Estimation à priori

On procèdes par itération : $Z^0(x,t) \equiv 0, \forall (x,t) \in Q$, on définit une suite $\left\{Z^{(n)}, n \in \mathbb{N}\right\}$ par : si $Z^{(n-1)}$ est connue, alors on trouve $Z^{(n)}$ solution faible, dans le sens de la définition 3.3 du problème :

$$\frac{\partial^2 Z^{(n)}}{\partial t^2} - \alpha\frac{\partial^2 Z^{(n)}}{\partial x^2} - \beta\frac{\partial^3 Z^{(n)}}{\partial t \partial x^2} = f\left(x,t,Z^{(n-1)} + w, \frac{\partial Z^{(n-1)}}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t}\right), \quad (3.155)$$

$$Z^{(n)}(x,0) = 0, \quad (3.156)$$

$$\frac{\partial Z^{(n)}(x,0)}{\partial t} = 0, \quad (3.157)$$

$$\frac{\partial Z^{(n)}(l,t)}{\partial x} = 0, \quad (3.158)$$

$$\int_0^l Z^{(n)}(x,t)\,dx = 0. \quad (3.159)$$

D'aprés la première partie de chapitre précédent, pour n fixé, chaque problème (3.155)-(3.159) admis une seule solution $Y^{(n)} = Z^{(n)} - Z^{(n-1)}$.

Donc : $Y^{(n)}$ satisfait :

$$\frac{\partial^2 Y^{(n)}}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 Y^{(n)}}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^3 Y^{(n)}}{\partial t \partial x^2} = F^{(n-1)}(x,t), \tag{3.160}$$

$$Y^{(n)}(x,0) = 0, \tag{3.161}$$

$$\frac{\partial Y^{(n)}(x,0)}{\partial t} = 0, \tag{3.162}$$

$$\frac{\partial Y^{(n)}(l,t)}{\partial x} = 0, \tag{3.163}$$

$$\int_0^l Y^{(n)}(x,t)\,dx = 0. \tag{3.164}$$

Où,

$$F^{(n-1)}(x,t) = f\left(x,t,Z^{(n-1)} + w, \frac{\partial Z^{(n-1)}}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t}\right) - f\left(x,t,Z^{(n-2)} + w, \frac{\partial Z^{(n-2)}}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t}\right).$$

Théorème 3.11 *Supposons que $f(x,t,0,0) \in L^2\left(I, B_2^1(\Omega)\right)$ et $f(x,t,p,q)$ vérifie la condition de Lippschitz, c'est-à-dire*

$$\begin{aligned} \exists L > 0 : \quad & \left\| f(x,t,p_1,q_1) - f(x,t,p_2,q_2) \right\|_{B_2^1(\Omega)} \\ & \leq L \left\{ \left\| p_1 - p_2 \right\|_{B_2^1(\Omega)} + \left\| p_2 - q_2 \right\|_{B_2^1(\Omega)} \right\}, \quad \forall (x,t) \in \Omega. \end{aligned} \tag{3.165}$$

Alors, on obtient l'éstimation

$$\left\| Y^{(n)} \right\|_{H^1\left(I, B_2^1(\Omega)\right)} \leq C_5 \left\| Y^{(n-1)} \right\|_{H^1\left(I, B_2^1(\Omega)\right)}, n = 1.2, \ldots.. \tag{3.166}$$

Où

$$C_5 = \frac{L^2}{2\beta \min\left(l^2, 2\alpha\right)}.$$

Démonstration. Prenons le produit scalaire dans $B_2^1(\Omega)$, de l'équation (3.160) par $\frac{\partial Y^{(n)}}{\partial t}$, on aura :

$$\left(\frac{\partial^2 Y^{(n)}(.,t)}{\partial t^2}, \frac{\partial Y^{(n)}(.,t)}{\partial t}\right)_{B_2^1(\Omega)} - \alpha\left(\frac{\partial^2 Y^{(n)}(.,t)}{\partial x^2}, \frac{\partial Y^{(n)}(.,t)}{\partial t}\right)_{B_2^1(\Omega)} - \beta\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}, \frac{\partial Y^{(n)}(.,t)}{\partial t}\right)_{,B_2^1(\Omega)}$$
$$= \left(F^{(n-1)}(.,t), \frac{\partial Y^{(n)}(.,t)}{\partial t}\right)_{,B_2^1(\Omega)}. \tag{3.167}$$

Intégrons par partie comme dans Chapitre 2

On obtient :

$$\left(\frac{\partial^2 Y^{(n)}(.,t)}{\partial t^2}, \frac{\partial Y^{(n)}(.,t)}{\partial t}\right)_{B_2^1(\Omega)} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|\frac{\partial Y^{(n)}}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(\Omega)}, \tag{3.168}$$

$$-\alpha\left(\frac{\partial^2 Y^{(n)}(.,t)}{\partial x^2}, \frac{\partial Y^{(n)}(.,t)}{\partial t}\right)_{B_2^1(\Omega)} = \frac{\alpha}{2}\left\|Y^{(n)}(.,t)\right\|^2_{B_2^1(\Omega)}, \tag{3.169}$$

$$-\beta\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}, \frac{\partial Y^{(n)}(.,t)}{\partial t}\right)_{,B_2^1(\Omega)} = \beta\left\|\frac{\partial Y^{(n)}}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(\Omega)}. \tag{3.170}$$

Insérons (3.168)-(3.170) dans (3.167) et intégrons entre $(0,\tau)$ il vient :

$$\alpha\left\|Y^{(n)}(.,t)\right\|^2_{B_2^1(\Omega)} + \left\|\frac{\partial Y^{(n)}(.,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(\Omega)} + 2\beta\int_0^\tau \left\|\frac{\partial Y^{(n)}(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(\Omega)} dt$$
$$= 2\int_0^\tau \left(F^{(n-1)}(.,t), \frac{\partial Y^{(n)}(.,t)}{\partial t}\right)_{,B_2^1(\Omega)} dt. \tag{3.171}$$

Appliquons les conditions de Cauchy-Schwartz et de Lipschitz (3.165), il vient,

$$\alpha\left\|Y^{(n)}(.,\tau)\right\|^2_{B_2^1(\Omega)} + \left\|\frac{\partial Y^{(n)}(.,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(\Omega)} + 2\beta\int_0^\tau \left\|\frac{\partial Y^{(n)}(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(\Omega)} dt$$
$$\leq 2\varepsilon L^2\left\|Y^{(n-1)}\right\|_{L^2\left(I,B_2^1(\Omega)\right)} + \left\|\frac{\partial Y^{(n-1)}(.,t)}{\partial t}\right\|_{L^2\left(I,B_2^1(\Omega)\right)} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \left\|\frac{\partial Y^{(n)}(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(\Omega)} dt.$$

Appliquons l'inégalité (3.165) et prenons $\varepsilon = \frac{l^2}{2\beta}$, on obtient :

$$\frac{2\alpha}{l^2}\left\|Y^{(n)}(.,t)\right\|^2_{B_2^1(\Omega)} + \left\|\frac{\partial Y^{(n)}(.,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(\Omega)} \leq \frac{l^2 L^2}{2\beta}\left\|Y^{(n-1)}\right\|^2_{L^2\left(I,B_2^1(\Omega)\right)} + \left\|\frac{\partial Y^{(n-1)}(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L^2\left(I,B_2^1(\Omega)\right)}. \tag{3.172}$$

Intégrons (3.172) sur I on aura,

$$\left\|Y^{(n)}\right\|^2_{H^1\left(I,B_2^1(\Omega)\right)} \leq \frac{L^2}{2\beta\min(l^2,2\alpha)}\left\|Y^{(n-1)}\right\|^2_{H^1\left(I,B_2^1(\Omega)\right)}. \tag{3.173}$$

On achève si on pose $C_5 = \frac{L^2}{2\beta\min(l^2,2\alpha)}$.

3.2.6 Existence, unicité et dépendance continue de la solution

Théorème 3.12 *Sous les hypothèses de théorème précédent et si on outre on suppose que*

$$L < \sqrt{2\beta \min\left(l^2, 2\alpha\right)}. \tag{3.174}$$

Alors, le problème (3.148)-(3.152) admet une solution faible dans l'éspace $H^1\left(I, B_2^1(\Omega)\right).$

Démonstration. Il facile d'observrer que si dans l'inégalité (3.173), on a $C_5 < 1$ c'est-à-dire $L < \sqrt{2\beta \min\left(l^2, 2\alpha\right)}$, ainsi la série $\sum_{n\geq 1} Y^{(n)}$, converge. Donc la suite :

$$Z^{(n)}(x,t) = \sum_{m=0}^{n-1}\left[Z^{(m+1)} - Z^{(m)}\right] + Z^{(0)}, n = 1, 2, ...$$

Converge vers $\bar{Z}(x,t)$ dans $H^1\left(I, B_2^1(\Omega)\right)$. Il reste, d'établir le lemme suivant.

Lemme 3.2 *La fonction limite* $\bar{Z}(x,t)$ *est solution du problème (3.160)-(3.164) dans le sens de la Définition 3.3.*

Démonstration. On montre que $\bar{Z}(x,t)$ vérifie l'identité (3.154). Pour cette fin, on considère la formulation faible pour le problème approché :

$$A\left(Z^{(n)}, v\right) = \left(f^{(n)}\left(.,.,Z^{(n)}, \frac{\partial Z^{(n)}}{\partial t}\right), v\right)_{L^2\left(I, B_2^1(\Omega)\right)} + \beta\left(\varphi^{(n)}, v(.,0)\right) + \left(\psi^{(n)}, v(.,0)\right)_{B_2^1(\Omega)}. \tag{3.175}$$

L'identité (3.175) implique, quand $n \to \infty$, que l'identité suivante est valide pour tout $v \in V$ et $n = 1, 2, ...$

$$\begin{aligned}\lim A\left(Z^{(n)} - \bar{Z}, v\right) + A\left(\bar{Z}, v\right) &= \lim\left(f^{(n)}\left(.,.,Z^{(n)}, \frac{\partial Z^{(n)}}{\partial t}\right), v\right)_{L^2\left(I, B_2^1(\Omega)\right)} \\ &- \left(f\left(.,.,Z, \frac{\partial Z}{\partial t}\right), v\right)_{L^2\left(I, B_2^1(\Omega)\right)} + \left(f\left(.,.,Z, \frac{\partial Z}{\partial t}\right), v\right)_{L^2\left(I, B_2^1(\Omega)\right)} \\ +\beta \lim\left(\psi^{(n)} - \psi, v(.,0)\right) + \beta\left(\psi, v(.,0)\right)_{B_2^1(\Omega)} &+ \lim\left(\psi^{(n)} - \psi, v(.,0)\right)_{B_2^1(\Omega)} + \beta\left(\psi, v(.,0)\right)_{B_2^1(\Omega)}.\end{aligned} \tag{3.176}$$

L'inégalité de Schwartz et celle (), on obtient combinant.

$$A\left(Z^{(n)}-\bar{Z},v\right)\leq\max\left(\frac{l}{\sqrt{2}},\alpha+\beta\right)\left(\left\|Z^{(n)}-\bar{Z}\right\|_{L^2\left(I,B_2^1(\Omega)\right)}+\left\|\frac{\partial Z^{(n)}}{\partial t}-\frac{\partial\bar{Z}}{\partial t}\right\|_{L^2\left(I,B_2^1(\Omega)\right)}\right)\|v\|_{H^1\left(I,B_2^1(\Omega)\right)} \tag{3.177}$$

Tenant des résultats du Théorème 3.8, on aura

$$Z^{(n)}\to\bar{Z}\text{ dans }L^2\left(I,B_2^1(\Omega)\right). \tag{3.178}$$

$$\frac{\partial Z^{(n)}}{\partial t}\to\frac{\partial\bar{Z}}{\partial t}\text{ dans }L^2\left(I,B_2^1(\Omega)\right). \tag{3.179}$$

Par passage à la limite dans (3.177) quand $n\to\infty$, on obtient, $\lim A\left(Z^{(n)}-\bar{Z},v\right)=0.$

Tenant compte de (3.178), (3.179) et de la condition de Lipschitz (3.165) on aura

$$\begin{aligned}&\left(f^{(n)}\left(.,.,Z^{(n)},\frac{\partial Z^{(n)}}{\partial t}\right)-f\left(.,.,Z,\frac{\partial Z}{\partial t}\right),v\right)_{L^2\left(I,B_2^1(\Omega)\right)}\\ &\leq L\left(\left\|Z^{(n)}-\bar{Z}\right\|_{L^2\left(I,B_2^1(\Omega)\right)}+\left\|\frac{\partial Z^{(n)}}{\partial t}-\frac{\partial\bar{Z}}{\partial t}\right\|_{L^2\left(I,B_2^1(\Omega)\right)}\right)\|v\|_{H^1\left(I,B_2^1(\Omega)\right)}\\ &\leq L\left(\frac{l^2}{2}\left\|Z^{(n)}-\bar{Z}\right\|_{L^2\left(I,B_2^1(\Omega)\right)}+\left\|\frac{\partial Z^{(n)}}{\partial t}-\frac{\partial\bar{Z}}{\partial t}\right\|_{L^2\left(I,B_2^1(\Omega)\right)}\right)\|v\|_{H^1\left(I,B_2^1(\Omega)\right)}\end{aligned} \tag{3.180}$$

Par passage à la limite dans (3.180) quand $n\to\infty$, on obtient

$$\lim\left(f^{(n)}\left(.,.,Z^{(n)},\frac{\partial Z^{(n)}}{\partial t}\right)-f\left(.,.,Z,\frac{\partial Z}{\partial t}\right),v\right)_{L^2\left(I,B_2^1(\Omega)\right)}=0. \tag{3.181}$$

L'identité (3.181) montere que la fonction $\bar{Z}(x,t)$ satisfait la formulation faible (3.154) dans Q, par conséquent la fonction limite $\bar{Z}(x,t)$ est solution faible du problème (3.138)-(3.142) au sens de la Définition 3.3.

Théorème 3.13 *Sous les hypothèses du Théorème 3.12 la solution do problème (3.148)-(3.152) est unique.*

Démonstration. Soient u_1,u_2 deux solution du même problème (3.160)-(3.164), ainsi pour la difference :

$$Z(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t).$$

On nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^3 Z}{\partial t \partial x^2} = F(x,t), \tag{3.182}$$

$$Z(x,0) = 0, \tag{3.183}$$

$$\frac{\partial Z(x,0)}{\partial t} = 0, \tag{3.184}$$

$$\frac{\partial Z(l,t)}{\partial x} = 0, \tag{3.185}$$

$$\int_0^l Z(x,t)\, dx = 0. \tag{3.186}$$

Où $F(x,t) = f\left(x,t,u_1,\frac{\partial u_1}{\partial t}\right) - f\left(x,t,u_2,\frac{\partial u_2}{\partial t}\right).$

Procédons comme dans la preuve du Théorème 3.12 on aura,

$$\|Z\|_{H^1\left(I,B_2^1(\Omega)\right)} \leq C_5 \|Z\|_{H^1\left(I,B_2^1(\Omega)\right)}.$$

Puisque $C_5 < 1$, donc $\|Z\|_{H^1\left(I,B_2^1(\Omega)\right)} = \|u_4 - u_2\|_{H^1\left(I,B_2^1(\Omega)\right)} = 0$. D'où l'unicité de la solution.

Continuité par rapport aux données

Théorème 3.14 *Si u et u^* sont deux solutions du problème (3.138)-(3.142) correspondante à (φ,ψ,f) et (φ^*,ψ^*,f^*) respectivement, et si il existe une fonction $K(t)$ non négative et continue et une constante positive L telle qu'on ait l'estimation :*

$$\|f(.,t,p_1,q_1) - f^*(.,t,p_2,q_2)\|_{B_2^1(\Omega)} \tag{3.187}$$

$$\leq K(t) + L\left\{\|p_1 - p_2\|_{B_2^1(\Omega)} + \|p_2 - q_2\|_{B_2^1(\Omega)}\right\}, \quad \textit{pour tout } u,u^* \in B_2^1(\Omega), \forall t \in I.$$

Alors,

$$\|u(.,s) - u^*(.,s)\|^2_{B_2^1(\Omega)} \leq C_6 \left(\|\varphi - \varphi^*\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\psi - \psi^*\|^2_{B_2^1(\Omega)} + \int_0^s K^2(t)\, dt \right). \tag{3.188}$$

Où $C_6 = \frac{\max\left(\frac{4}{L},\frac{(1+4L)l^2}{2}+\frac{2\beta^2}{\alpha}\right)}{\min\left(1,\frac{L}{4}\right)} \exp\left(\frac{LT}{\min(L,4)}\right).$

Démonstration. Soit $\rho(x,t) = u(x,t) - u^*(x,t)$. Alors $\rho(x,t)$ vérifie :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^3 \rho}{\partial t \partial x^2} = f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial t}\right) - f^*\left(x,t,u^*,\frac{\partial u^*}{\partial t}\right), \tag{3.189}$$

$$\rho(x,0) = \varphi(x) - \varphi^*(x) = \rho_0(x), \tag{3.190}$$

$$\frac{\partial \rho(x,0)}{\partial t} = \psi(x) - \psi^*(x) = \rho_1(x), \tag{3.191}$$

$$\frac{\partial \rho(l,t)}{\partial x} = 0, \tag{3.192}$$

$$\int_0^l \rho(x,t)\,dx = 0. \tag{3.193}$$

Considérant la formulation faible du problème (3.138)-(3.142), on aura,

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left(I,B_2^1(\Omega)\right)} + \alpha(\rho,v)_{L^2\left(I,B_2^1(\Omega)\right)} - \beta\left(\rho,\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left(I,B_2^1(\Omega)\right)}$$
$$= \left(f\left(.,t,u,\frac{\partial u}{\partial t}\right) - f^*\left(.,t,u^*,\frac{\partial u^*}{\partial t}\right), v\right)_{L^2\left(I,B_2^1(\Omega)\right)} + \beta(\rho_0, v(.,0)) + (\rho_1, v(.,0))_{B_2^1(\Omega)}. \tag{3.194}$$

Prenant

$$v(x,t) = \begin{cases} 0, \text{ pour } s \leq t \leq T, \\ \int_s^t \rho(x,\tau)\,d\tau, \text{ pour } 0 \leq t \leq s. \end{cases} \tag{3.195}$$

Où s est fixé arbitrairement dans $I = [0,T]$.

Substituant $\rho(x,t)$ par $v(x,t)$ dans (3.194) on obtient,

$$\int_0^s \left(\frac{\partial^2 v(.,t)}{\partial t^2}, \frac{\partial v(.,t)}{\partial t}\right)_{B_2^1(\Omega)} dt - \alpha\int_0^s \left(\frac{\partial v(.,t)}{\partial t}, v(.,t)\right)_{B_2^1(\Omega)} dt + \beta\int_0^s \left\|\frac{\partial v(.,t)}{\partial t}\right\|^2 dt$$
$$= \int_0^s \left(f\left(.,t,u(.,.),\frac{\partial u(.,t)}{\partial t}\right) - f^*\left(.,t,u^*(.,.),\frac{\partial u^*(.,t)}{\partial t}\right), v\right)_{L^2\left(I,B_2^1(\Omega)\right)} - \beta(\rho_0, v(.,0)) - (\rho_1, v(.,0))_{B_2^1}$$

En intégrant les deux premiers termes dans le membre gauche de cette dernière égalité et en remarquant que, $\frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = \rho_0(x)$ et $v(x,s) = 0$ et en appliquant la condition (3.187), on aura

$$\left\|\frac{\partial v(.,s)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(\Omega)}+\alpha\left\|v(.,0)\right\|^2_{B_2^1(\Omega)}+2\beta\int_0^s\left\|\frac{\partial v(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(\Omega)}dt$$

$$\leq\int_0^s\left(K(t)\left\|v(.,t)\right\|_{B_2^1(\Omega)}+L\left(\left\|\frac{\partial v(.,t)}{\partial t}\right\|_{B_2^1(\Omega)}\left\|v(.,t)\right\|_{B_2^1(\Omega)}+\left\|\frac{\partial^2 v(.,t)}{\partial t^2}\right\|_{B_2^1(\Omega)}\left\|v(.,t)\right\|_{B_2^1(\Omega)}\right)\right)dt$$

$$+\left\|\rho_0\right\|_{B_2^1(\Omega)}-2\beta\left(\rho_0,v(.,0)\right)-2\left(\rho_1,v(.,0)\right)_{B_2^1(\Omega)}$$

$$\leq 2\int_0^s K(t)\left\|v(.,t)\right\|_{B_2^1(\Omega)}dt+L\left\|v(.,0)\right\|^2_{B_2^1(\Omega)}-2\left\|\rho_0\right\|_{B_2^1(\Omega)}\left\|v(.,0)\right\|_{B_2^1(\Omega)}$$

$$-2L\int_0^s\left\|\frac{\partial v(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(\Omega)}dt+\left\|\rho_0\right\|^2_{B_2^1(\Omega)}+2\beta\left\|\rho_0\right\|_{B_2^1(\Omega)}\left\|v(.,0)\right\|_{B_2^1(\Omega)}+2\left\|\rho_1\right\|_{B_2^1(\Omega)}\left\|v(.,0)\right\|_{B_2^1(\Omega)}$$

Utilisant (3.195) dans cette dernière inégalité, il vient

$$\left\|\frac{\partial v(.,s)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(\Omega)}+\frac{\alpha}{2}\left\|v(.,0)\right\|^2_{B_2^1(\Omega)}+\frac{L}{2}\left\|v(.,0)\right\|^2_{B_2^1(\Omega)}$$

$$\leq\frac{8}{L}\int_0^s K^2(t)\,dt+\frac{L}{8}\int_0^s\left\|v(.,t)\right\|^2_{B_2^1(\Omega)}dt+\left((1+4L)\frac{l^2}{2}+\frac{2\beta^2}{\alpha}\right)\left\|\rho_0\right\|^2_{B_2^1(\Omega)}+\frac{4}{L}\left\|\rho_1\right\|^2_{B_2^1(\Omega)}\tag{3.196}$$

Introduisant une nouvelle fonction $\delta(x,t)$ définie comme suit

$$\delta(x,t)=\int_t^0\rho(x,\tau)\,d\tau.$$

Utilisant (3.195) on aura $v(x,t)=\delta(x,s)-\delta(x,t)$, et $v(x,0)=\delta(x,s)$. Ainsi, l'inégalité (3.196) devient,

$$\left\|\frac{\partial v(.,s)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(\Omega)}+\frac{\alpha}{2}\left\|\delta(.,0)\right\|^2_{B_2^1(\Omega)}+\frac{L}{4}\left\|\delta(.,0)\right\|^2_{B_2^1(\Omega)}\tag{3.197}$$

$$\leq\frac{8}{L}\int_0^s K^2(t)\,dt+\frac{L}{4}\int_0^s\left\|\delta(.,t)\right\|^2_{B_2^1(\Omega)}dt+\left((1+4L)\frac{l^2}{2}+\frac{2\beta^2}{\alpha}\right)\left\|\rho_0\right\|^2_{B_2^1(\Omega)}+\frac{4}{L}\left\|\rho_1\right\|^2_{B_2^1(\Omega)}$$

Omettant le seconde terme dans le membre gauche de (3.197)

$$\left\|\frac{\partial v(.,s)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(\Omega)}+\frac{\alpha}{2}\left\|\delta(.,0)\right\|^2_{B_2^1(\Omega)}\leq C_6\left(\int_0^s\int_0^s K^2(t)\,dt+\left\|\rho_0\right\|^2_{B_2^1(\Omega)}+\left\|\rho_1\right\|^2_{B_2^1(\Omega)}\right)$$

$$+\frac{L}{\min(L,4)}\int_0^s\left(\left\|\frac{\partial v(.,s)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(\Omega)}+\left\|\delta(.,0)\right\|^2_{B_2^1(\Omega)}\right)dt$$

Où $C_6 = \frac{\max\left(\frac{4}{L}, \frac{(1+4L)l^2}{2} + \frac{2\beta^2}{\alpha}\right)}{\min\left(1, \frac{L}{4}\right)}$

Moyennant le lemme de Gronwall et prenant le suprimum en τ sur $[0, T]$ on aura,

$$\left\| \frac{\partial v\,(.,s)}{\partial t} \right\|^2_{B_2^1(\Omega)} + \frac{\alpha}{2} \left\| \delta\,(.,0) \right\|^2_{B_2^1(\Omega)}$$
$$\leq C_6 \exp\left(\frac{LT}{\min\,(L,4)}\right) \left(\int\limits_0^s K^2\,(t)\,dt + \|\rho_0\|^2_{B_2^1(\Omega)} + \|\rho_1\|^2_{B_2^1(\Omega)} \right).$$

En particulier

$$\left\| \delta\,(.,0) \right\|^2_{B_2^1(\Omega)} \leq C_7 \left(\int\limits_0^s K^2\,(t)\,dt + \|\rho_0\|^2_{B_2^1(\Omega)} + \|\rho_1\|^2_{B_2^1(\Omega)} \right)$$

Où,

$$C_7 = C_5 \exp\left(\frac{LT}{\min\,(L,4)}\right).$$

Autrement,

$$\left\| u\,(.,s) - u^*\,(.,s) \right\|^2_{B_2^1(\Omega)} \leq C_7 \left(\int\limits_0^s K^2\,(t)\,dt + \|\varphi - \varphi^*\|^2_{B_2^1(\Omega)} + \|\psi - \psi^*\|^2_{B_2^1(\Omega)} \right).$$

Cette dernière inégalité traduit la dépendance contine de la solution par rapport aux données et achève la preuve.

CHAPITRE 4
SYSTEME D' EQUATIONS PSEUDO PARA-HYPERBOLIQUES AVEC DES CONDITIONS NON LOCALES

Chapitre 4

SYSTEME D' EQUATIONS PSEUDO PARA-HYPERBOLIQUES AVEC DES CONDITIONS NON LOCALES

4.1 Transformation du système à un problème équivalent

Notre objectif essentiel c'est l'étude du système para-hyperbolique posé comme suit :

$$\begin{cases} -\alpha_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma_1 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = f_1\left(x, t, u, v, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}\right) - \alpha_2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \beta_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \gamma_2 \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial x^2} = f_2\left(x, t, u, v, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}\right) - \frac{\partial u}{\partial t}, \\ u\left(x, 0\right) = \varphi_1\left(x\right), v\left(x, 0\right) = \varphi_1\left(x\right), \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi_1\left(x\right), \frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = \psi_2\left(x\right), \\ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \mu_1\left(t\right), \frac{\partial v(l,t)}{\partial x} = \mu_2\left(t\right), \\ \int_0^l u\left(x, t\right) dx = m_1\left(t\right), \int_0^l v\left(x, t\right) dx = m_2\left(t\right). \end{cases} \tag{4.1}$$

Qu'on peut écrire :

$$\begin{cases} -\alpha_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma_1 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = f_1\left(x, t, u, v, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}\right), \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \beta_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \gamma_2 \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = f_2\left(x, t, u, v, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}\right), \\ u\left(x, 0\right) = \varphi_1\left(x\right), v\left(x, 0\right) = \varphi_1\left(x\right), \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi_1\left(x\right), \frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = \psi_2\left(x\right), \\ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \mu_1\left(t\right), \frac{\partial v(l,t)}{\partial x} = \mu_2\left(t\right), \\ \int_0^l u\left(x, t\right) dx = m_1\left(t\right), \int_0^l v\left(x, t\right) dx = m_2\left(t\right). \end{cases} \tag{4.2}$$

On commence par le transformer en un problème équivalent déterminé ainsi : En posant

$$f_2 = -f_1, \alpha = -\alpha_1 + \alpha_2, \beta = \beta_1 + \beta_2,$$

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2, w = u + v,$$

et en sommant, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \beta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} = 0, \\ w\left(x, 0\right) = \varphi\left(x\right), \\ \frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = \psi\left(x\right), \\ \frac{\partial w(l,t)}{\partial x} = 0, \\ \int_0^l w\left(x, t\right) dx = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Où :

$$\varphi\left(x\right) = \varphi_1\left(x\right) + \varphi_2\left(x\right), \psi\left(x\right) = \psi_1\left(x\right) + \psi_2\left(x\right),$$

$$\mu_1\left(t\right) = -\mu_2\left(t\right), m_1\left(t\right) = -m_2\left(t\right).$$

En s'inspirant, du résultat établit dans le présent chapitre pour le cas linéaire, on déduit que le (4.3) admet une solution faible unique, $w\left(.,.\right) \in H^1\left(0, T; B_2^1\right)$, dépendante continument des données initiales. Par la suite ,on étudiera le problème suivant posé comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\alpha_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\beta_1\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}=f\left(.,.u,\frac{\partial u}{\partial x}\right), \\ u\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right), \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi\left(x\right), \\ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0, \\ \int_0^l u\left(x,t\right)dx=0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Où :

$$\begin{aligned} f\left(.,.u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) &= -f_2\left(.,.u,v,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\beta\frac{\partial^3 w}{\partial t\partial x^2} \\ &= -f_2\left(.,.u,w-u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial\left(w-u\right)}{\partial x}\right)+\beta\frac{\partial^3 w}{\partial t\partial x^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, si l'existence et l'unicité du problème (4.4) Sont satisfaites dans $H^1\left(.,T;B_2^1\right)$ et si on prend $v=w-u$, alors le système (4.1) admettre un couple de solution (u,v) dans l'espace produit $H^1\left(.,T;B_2^1\right)\times H^1\left(.,T;B_2^1\right)$. Donc, la tache importantes c'est l'étude du problème (4.4), dont le résulat est réalisé dans le présent chapitre.

4.2 PROBLEME MIXTE AVEC UNE CONDITION INTEGRALE POUR UNE EQUATION PSEUDO-PARA-HYPERBOLIQUE

4.2.1 Position du problème

Considérons le probléme suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\beta\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}=f\left(x,t\right),\left(x,t\right)\in Q=\Omega\times I=[0,l]\times[0,T] \tag{4.5}$$

$$u\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right), \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial u\left(x,0\right)}{\partial t}=\psi\left(x\right), \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial u\left(l,t\right)}{\partial x}=0, \tag{4.8}$$

$$\int_0^l u\left(x,t\right)dx=0. \tag{4.9}$$

4.2.2 Solution classique

On se permet de prouver l'existence, l'unicité et la continuite par rapport aux donneés de la solutionclassique du problème (4.5)-(4.9). D'abord, on définit la solution classique.

Définition 4.1 *On appelle solution classique du problème (4.5)-(4.9) toute solu tion $u\left(x,t\right)\in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ vérifiant (4.5), les conditions initiales(4.6)-(4.7) et les conditions aux bords (4.8)-(4.9), et $\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}$ existe et appartient à $C\left(\overline{\Omega}\right)$*

4.2.3 Estimation à priori

Ici, on établit deséstimations à priori pour démontrer, dans le suivant paragraphe, l'unicité et la dépendance continue par rapport aux donées de la solution classique. Acette fin, on a besoin du

Lemme 4.1 *On suppose que $u\left(.,.\right)$ est solution classique du problème (4.5)-(4.9) et $f\in C\left(\overline{\Omega}\right)$. Alors,*

$$2\beta\int_0^\tau\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L^2}^2dt+\int_0^\tau\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{B_2^1}^2dt+S^2\left(\tau\right)=S^2\left(0\right)+2\int_0^\tau\left(f,\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{B_2^1}dt, \tag{4.10}$$

où :

$$S^2\left(\tau\right)=\alpha\left\|u\left(0,\tau\right)\right\|_{L^2}^2+\left\|\frac{\partial u\left(0,\tau\right)}{\partial t}\right\|_{B_2^1}^2, \tag{4.11}$$

$$S^2\left(0\right)=\alpha\left\|\varphi\right\|_{L^2}^2+\left\|\psi\right\|_{B_2^1}^2,\text{et }\tau\in\left[0,T\right]. \tag{4.12}$$

Démonstration. On multiple scalairement l'équation(4.5) dans $L^2\left(\left(0,\tau\right),B_2^1\right)$ par $\frac{\partial u}{\partial t}$, et on procède similairement à la preuve du lemme 3.1, on aura les mêmes résultats, aussi,

$$\int_0^\tau \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}\right)_{B_2^1} dt = \int_0^\tau \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{B_2^1}^2 dt,$$

d'où la conclusion du lemme 4.1.

Ce lemme nous permet d'énoncer la proposition suivante :

Proposition 4.1 *La solution classique $u(.,.)$ du problème (4.5)-(4.9) satisfait les éstimations à priori suivantes :*

$$\int_0^\tau \left\|\frac{\partial u(0,t)}{\partial t}\right\|_{L^2}^2 dt \leq \frac{l\sqrt{2}}{2\beta}\left(S(0) + \int_0^\tau \|f(0,t)\|_{B_2^1}^2 dt\right), \tag{4.13}$$

$$\left\|\frac{\partial u(0,\tau)}{\partial t}\right\|_{B_2^1} \leq S(0) + \int_0^\tau \|f(0,t)\|_{B_2^1}^2 dt, \tag{4.14}$$

$$\|u(0,\tau)\|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(S(0) + \int_0^\tau \|f(0,t)\|_{B_2^1}^2 dt\right). \tag{4.15}$$

Démonstration. Dérivons l'expression de $S^2(\tau)$ par rapport à τ :

$$S'(\tau)S(\tau) = \left(f(0,\tau), \frac{\partial u(0,\tau)}{\partial t}\right)_{B_2^1}, \tau \geq 0. \tag{4.16}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwart donne :

$$S'(\tau)S(\tau) \leq \|f(0,\tau)\|_{B_2^1}\left\|\frac{\partial u(0,\tau)}{\partial t}\right\|_{B_2^1}. \tag{4.17}$$

De la définition de $S^2(\tau)$ vient,

$$\left\|\frac{\partial u(0,\tau)}{\partial t}\right\|_{B_2^1} \leq S(\tau), \tag{4.18}$$

et

$$\|u(0,\tau)\|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}S(\tau). \tag{4.19}$$

Par subtitution de (4.18) dans (4.17) on aura

$$S'(\tau) \leq \|f(0,\tau)\|_{B_2^1}.$$

Par intégration, du cette dernière inégalité, par rapport à t entre 0 et τ :

$$\int_0^\tau S'(t)\,dt \leq \int_0^\tau \|f(0,t)\|_{B_2^1}\,dt.$$

$$S(\tau) - S(0) \leq \int_0^\tau \|f(0,t)\|_{B_2^1}\,dt.$$

$$S(\tau) \leq S(0) + \int_0^\tau \|f(0,t)\|_{B_2^1}\,dt. \tag{4.20}$$

Or, de la définition de $S(\tau)$ on a :

$$\left\|\frac{\partial u(0,\tau)}{\partial t}\right\|_{B_2^1} \leq S(\tau), \tag{4.21}$$

et

$$\|u(0,\tau)\|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} S(\tau). \tag{4.22}$$

Minorons (4.20), respectivement par (4.21) et (4.22) on obtient (4.14) et (4.15) c'est-à-dire :

$$\left\|\frac{\partial u(0,\tau)}{\partial t}\right\|_{B_2^1} \leq S(0) + \int_0^\tau \|f(0,t)\|_{B_2^1}^2\,dt,$$

$$\|u(0,\tau)\|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(S(0) + \int_0^\tau \|f(0,t)\|_{B_2^1}^2\,dt\right).$$

Maintenant, dérivons (4.10) par rapport à τ il vient :

$$\left\|\frac{\partial u(0,\tau)}{\partial t}\right\|_{B_2^1}^2 + 2\beta\left\|\frac{\partial u(0,\tau)}{\partial t}\right\|_{L^2}^2 + 2S'(\tau)\,S(\tau) = \left(f(0,\tau), \frac{\partial u(0,\tau)}{\partial t}\right)_{B_2^1}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz donne :

$$\left\|\frac{\partial u(0,\tau)}{\partial t}\right\|_{B_2^1}^2 + 2\beta\left\|\frac{\partial u(0,\tau)}{\partial t}\right\|_{L^2}^2 + 2S'(\tau)\,S(\tau) \leq \|f(0,\tau)\|_{B_2^1}\left\|\frac{\partial u(0,\tau)}{\partial t}\right\|_{B_2^1}.$$

En particulier :

$$2\beta\left\|\frac{\partial u(0,\tau)}{\partial t}\right\|_{L^2}^2 + 2S'(\tau)\,S(\tau) \leq \|f(0,\tau)\|_{B_2^1}\left\|\frac{\partial u(0,\tau)}{\partial t}\right\|_{B_2^1}.$$

En minorant par (4.21) on aura :

$$2\beta \left\| \frac{\partial u(0,\tau)}{\partial t} \right\|_{L^2}^2 + 2 \left\| \frac{\partial u(0,\tau)}{\partial t} \right\|_{B_2^1} S'(\tau) \leq \| f(0,\tau) \|_{B_2^1} \left\| \frac{\partial u(0,\tau)}{\partial t} \right\|_{B_2^1},$$

c'est-à-dire

$$2\beta \left\| \frac{\partial u(0,\tau)}{\partial t} \right\|_{L^2}^2 \leq \left(\| f(0,\tau) \|_{B_2^1} - 2S'(\tau) \right) \left\| \frac{\partial u(0,\tau)}{\partial t} \right\|_{B_2^1}.$$

Vu le Lemme 1.1

$$2\beta \left\| \frac{\partial u(0,\tau)}{\partial t} \right\|_{L^2}^2 \leq \left(\| f(0,\tau) \|_{B_2^1} - 2S'(\tau) \right) \frac{l}{\sqrt{2}} \left\| \frac{\partial u(0,\tau)}{\partial t} \right\|_{L^2}.$$

$$2\beta \left\| \frac{\partial u(0,\tau)}{\partial t} \right\|_{L^2} \leq \left(\| f(0,\tau) \|_{B_2^1} - 2S'(\tau) \right) \frac{l}{\sqrt{2}}.$$

$$\frac{2\sqrt{2}\beta}{l} \left\| \frac{\partial u(0,\tau)}{\partial t} \right\|_{L^2} \leq \left(\| f(0,\tau) \|_{B_2^1} - 2S'(\tau) \right).$$

$$\frac{2\sqrt{2}\beta}{l} \left\| \frac{\partial u(0,\tau)}{\partial t} \right\|_{L^2} + 2S'(\tau) \leq \| f(0,\tau) \|_{B_2^1}.$$

En intégrant entre 0 et τ par rapport à t, il vient :

$$\frac{2\sqrt{2}\beta}{l} \int_0^\tau \left\| \frac{\partial u(0,\tau)}{\partial t} \right\|_{L^2}^2 dt + 2S(\tau) \leq 2S(0) + \int_0^\tau \| f(0,\tau) \|_{B_2^1} dt.$$

Omettant le deuxième terme du membre gauche on obtient (4.13) :

$$\int_0^\tau \left\| \frac{\partial u(0,\tau)}{\partial t} \right\|_{L^2}^2 dt \leq \frac{\sqrt{2}l}{2\beta} \left(S(0) + \int_0^\tau \| f(0,\tau) \|_{B_2^1} dt \right).$$

Remarque 4.1 *On minore par le Lemme 1.1 il vient :*

$$\int_0^\tau \left\| \frac{\partial u(0,\tau)}{\partial t} \right\|_{B_2^1}^2 dt \leq \frac{\sqrt{2}l^3}{4\beta} \left(S(0) + \int_0^\tau \| f(0,\tau) \|_{B_2^1} dt \right).$$

4.2.4 Unicité de la solution classique

Théorème 4.1 *La solution classique $u(.,.)$ du problème (4.5)-(4.9) est unique.*

Démonstration. Supposons que le problème (4.5)-(4.9) admet deux solutions classiques distinctes u_1, u_2. Leur difference $z = u_1 - u_2$ est alors solution classique du même problème seulement avec $f(0,0) \equiv 0, \varphi(.) \equiv 0$ et $\psi(.) \equiv 0$. Donc, cette solution verifie l'éstimation (4.15) dans lequelle $f(0,0)$ et $S(0)$ sont nulles. Alors :

$$\forall t \in [0,T], \|z(.,t)\|_{L^2} = 0.$$

D'où, $z(.,t) = 0$ p.p pour tout $(x,t) \in \Omega$ et que $z(.,0) \in C(\overline{\Omega})$, il vient $z(.,) \equiv 0, \forall (x,t) \in \Omega$ par suite $u_1 \equiv u_2$, $\forall (x,t) \in \Omega$. D'où, l'unicité.

4.2.5 Dépendance continue par rapport aux données de la solution classique

Théorème 4.2 *Soient u et u^* deux solutions du problème (4.5)-(4.9) correpondantes respectivement à (f, φ, ψ) et (f^*, φ^*, ψ^*). Si*

$$\|f(.,t) - f^*(.,t)\|_{B_2^1} \leq \varepsilon, 0 \leq t \leq T, \tag{4.23}$$

$$\|\varphi - \varphi^*\|_{L^2} \leq \varepsilon_0, \tag{4.24}$$

$$\|\psi - \psi^*\|_{B_2^1} \leq \varepsilon_1. \tag{4.25}$$

Alors : on a les éstimations,

$$\|u(.t) - u^*(.t)\|_{L^2} \leq C(\varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2), \tag{4.26}$$

$$\left\| \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} - \frac{\partial u^*(0,t)}{\partial t} \right\|_{B_2^1} \leq C_1(\varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2), \tag{4.27}$$

et

$$\int_0^\tau \left\| \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u^*}{\partial t} \right\|_{B_2^1} dt \leq C_2(\varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Où, $C, C_1,$ et C_2 sont des constantes positives.

Démonstration. Posons $z = u - u^*$. La solution $z(.,.)$ sera solution classique du problème (4.5)-(4.9), avec $f - f^*, \varphi - \varphi^*$, et $\psi - \psi^*$ à la place de f, φ et ψ respectivement. L'égalité (4.12) entraine

$$S^2(0) = \alpha \|\varphi - \varphi^*\|_{L^2}^2 + \|\psi - \psi^*\|_{B_2^1}^2 .$$

Vu les inégalités (4.24) et (4.25) :

$$\begin{aligned} S^2(0) &\leq \alpha\varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2 \\ &\leq \max(1,\alpha)\left(\varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2\right) \\ &\leq \max(1,\alpha)(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)^2 . \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$S(0) \leq \rho_0(\varepsilon_0 + \varepsilon_1) . \tag{4.28}$$

Où $\rho_0^2 = \max(1,\alpha)$. Moyennant, l'égalité (4.15) à la solution $z(.,.)$, il vient

$$\|z(0,\tau)\|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(S(0) + \int_0^\tau \|f(0,t) - f^*(0,t)\|_{B_2^1}^2 dt\right).$$

vu les inégalités (4.28) et (4.16), on aura

$$\begin{aligned} \|z(0,t)\|_{L^2} &\leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(\rho_0(\varepsilon_0 + \varepsilon_1) + \varepsilon T\right) \\ &\leq C_3(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon) . \end{aligned}$$

Où, $C_3 = \max\left(\frac{\rho_0}{\sqrt{\alpha}}, \frac{T}{\sqrt{\alpha}}\right)$. De même, appliquons à $z(0,t)$ les inégalités (4.14), (4.28) et (4.23) on obtient :

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial z(0,\tau)}{\partial t}\right\|_{B_2^1} &\leq S(0) + \int_0^\tau \|f(0,t)\|_{B_2^1} dt \leq \rho_0(\varepsilon_0 + \varepsilon_1) + \varepsilon T \\ &\leq C_3(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon) . \end{aligned}$$

Où, $C_3 = \max(\rho_0, T)$. C'est-à-dire :

$$\left\|\frac{\partial u(0,\tau)}{\partial t} - \frac{\partial u^*(0,\tau)}{\partial t}\right\|_{B_2^1} \leq C_3(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon) .$$

De plus, intégrons cette dernière inégalité entre 0 et τ :

$$\int_0^\tau \left\| \frac{\partial u(0,\tau)}{\partial t} - \frac{\partial u^*(0,\tau)}{\partial t} \right\|_{B_2^1} dt \leq \int_0^T C_3(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon)\, dt$$
$$\leq C_4(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon)\,.$$

Où $C_4 = C_3 T$. Ceci justifie la dépendance continue de la solution aux données.

4.2.6 Existence de la solution

Dans ce paragraphe, on montre l'éxistence effective (non formelle) de la solution classsique. Pour cela, on procède par la méthode de séparation de variable de Fourier. Analytiquement, on prend $u(.,.)$ comme étant la somme de deux fonctions $v(.,.)$ et $w(.,.)$:

$$u = v + w. \tag{4.29}$$

Dans lequelle $v(.;.)$ vérifie :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial x^2} = 0, \tag{4.30}$$

$$v(x,0) = \varphi(x)\,, \tag{4.31}$$

$$\frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = \psi(x)\,, \tag{4.32}$$

$$\frac{\partial v(l,t)}{\partial x} = 0, \tag{4.33}$$

$$\int_0^l v(x,t)\, dx = 0. \tag{4.34}$$

Alors que $w(.,.)$ vérifie :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} = f(x,t)\,, \tag{4.35}$$

$$w(x,0) = 0, \tag{4.36}$$

$$\frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = 0, \tag{4.37}$$

$$\frac{\partial w\left(l,t\right)}{\partial x}=0, \tag{4.38}$$

$$\int_{0}^{l}w\left(x,t\right)dx=0. \tag{4.39}$$

Pour la détermination de la solution $v\left(.,.\right)$ on cherche des solutions de la forme :

$$v\left(x,t\right)=X\left(x\right)T\left(t\right).$$

D'aprés, (4.30) il vient :

$$X\left(x\right)T'\left(t\right)+X\left(x\right)T''\left(t\right)-\alpha X''\left(x\right)T\left(t\right)-\beta X''\left(x\right)T'\left(t\right)=0$$

où :

$$X\left(x\right)\left(T'\left(t\right)+T''\left(t\right)\right)=X''\left(x\right)\left(\alpha T\left(t\right)+\beta X''\left(x\right)T'\left(t\right)\right)$$

où encore :

$$\frac{X''\left(x\right)}{X\left(x\right)}=\frac{T'\left(t\right)+T''\left(t\right)}{\alpha T\left(t\right)+\beta X''\left(x\right)T'\left(t\right)}. \tag{4.40}$$

On voit que le premier membre de (4.40) dépend de t tandis que le deuxième membre dépend de x. Soit $-\lambda^2$ leur valeur commune. On a donc :

$$X''\left(x\right)=-\lambda^{2}X\left(x\right). \tag{4.41}$$

et

$$T''\left(t\right)+\left(1+\beta\lambda^{2}\right)T'\left(t\right)+\alpha\lambda^{2}T\left(t\right)=0. \tag{4.42}$$

La solution de (4.41) ets donnée par :

$$X\left(x\right)=A\cos\left(\lambda x\right)+B\sin\left(\lambda x\right). \tag{4.43}$$

Les conditions aux bords (4.33) et (4.34) deviendront :

$$X'\left(x\right)=0, \tag{4.44}$$

$$\int_{0}^{l}X\left(x\right)dx=0. \tag{4.45}$$

En se servant de (4.44 et (4.45), on aura :

$$B = 0, \text{ et } A \sin(\lambda l) = 0.$$

Pour éviter la cas trivial, on concidère $A \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned} \sin(\lambda l) &= 0, \\ \lambda l &= n\pi, \\ \lambda &= \frac{n\pi}{l}, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Pour chaque valeur de $n \in \mathbb{N}$ valeur on a une valeur λ.

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}, n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} X(x) &= A_n \cos(\lambda_n x) \\ &= A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right), n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Revenons à l'équation diferentille (4.42), dont l'équation caractéristique est :

$$s^2 + \left(1 + \beta\lambda^2\right) s + \alpha\lambda^2 = 0.$$

Avec le discriminant $\Delta = (1 + \beta\lambda^2)^2 - 4\alpha\lambda^2$ at les solutions :

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{-(1 + \beta\lambda^2) + \sqrt{\Delta}}{2}; \\ s_2 &= \frac{-(1 + \beta\lambda^2) - \sqrt{\Delta}}{2}. \end{aligned}$$

On remarque que s_2 est négative, tandis que $\Delta > 0$ et $s_1 < 0$ sont assurées par le choix :

$$0 < \alpha < \beta.$$

La solution de (4.42) sera donnée par la formule (voir Smirnov)

$$T(t) = C \exp(s_1 t) + D \exp(s_2 t). \tag{4.46}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
v(x,t) &= X(t)\,T(t)\\
&= A\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(C\exp(s_1t)+D\exp(s_2t)\right)\\
&= \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(AC\exp(s_1t)+AD\exp(s_2t)\right).
\end{aligned}$$

AC et AD dépendent de $n \in \mathbb{N}$, et vu le théorème de superposition des solutions on aura :

$$\begin{aligned}
v(x,t) &= \sum_{n\geq 0} v_n(x,t)\\
&= \sum_{n\geq 0} \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(C_n\exp(s_1t)+D_n\exp(s_2t)\right). \qquad (4.47)
\end{aligned}$$

Tenant compte, des conditions initiales et que $\varphi(x), \psi(x)$ sont sous forment de série de fourier en cosinus et par identifications, on aura :

$$\begin{cases} C_n + D_n = \varphi_n \\ s_1C_n + s_2D_n = \psi_n \end{cases}.$$

Où :

$$\begin{aligned}
\varphi_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx,\\
\psi_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx.
\end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} = s_2 - s_1 \neq 0\,(s_2 \neq s_1).$$

Alors :

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{s_2\varphi_n - \psi_n}{s_2 - s_1},\\
D_n &= \frac{\psi_n - s_1\varphi_n}{s_2 - s_1}.
\end{aligned}$$

Ainsi la solution (4.47) sera donnée par :

$$
\begin{aligned}
v(x,t) &= \sum_{n\geq 0} \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\frac{s_2\varphi_n-\psi_n}{s_2-s_1}\exp(s_1t)+\frac{\psi_n-s_1\varphi_n}{s_2-s_1}\exp(s_2t)\right)\\
&= \sum_{n\geq 0} \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\left|\frac{s_2\exp(s_1t)-s_1\exp(s_2t)}{s_2-s_1}\varphi_n+\frac{\exp(s_2t)-\exp(s_1t)}{s_2-s_1}\psi_n\right|\right).
\end{aligned}
\tag{4.48}
$$

Maintenant, on cherche $w(x,t)$ sous la forme :

$$
w(x,t) = \sum_{n\geq 0} T_n(t)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right). \tag{4.49}
$$

insérons (4.49) dans (4.35) et supposons que f est sous forme de série de Fourier en cossinus. Par identifications on aura :

$$
T_n''(t) + \left(1+\beta\lambda^2\right)T_n'(t) + \alpha\lambda^2 T_n(t) = f_n(t). \tag{4.50}
$$

Où :

$$
f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f_n(x,t)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx.
$$

En raison, des conditions initiales, on obtient :

$$
T_n(0) = 0. \tag{4.51}
$$

et

$$
T_n'(0) = 0. \tag{4.52}
$$

La solution de l'équation (4.50) avec les conditions (4.51) et (4.52) est donnée dans [48, T2] par l'expression :

$$
T_n(t) = \frac{\exp(s_2t)}{s_2-s_1}\int_0^t f_n(\tau)\exp(-s_2\tau)\,d\tau - \frac{\exp(s_1t)}{s_2-s_1}\int_0^t f_n(\tau)\exp(-s_1\tau)\,d\tau, n\geq 0. \tag{4.53}
$$

Où encore :

$$
T_n(t) = \frac{1}{s_2-s_1}\int_0^t \left(\exp(s_2(t-\tau)) - \exp(s_1(t-\tau))\right)f_n(\tau)\,d\tau, n\geq 0. \tag{4.54}
$$

Ainsi :

$$w(x,t)=\sum_{n\geq 0}\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\frac{1}{s_2-s_1}\int_0^t \exp\left(\left(s_2(t-\tau)\right)-\exp\left(s_1(t-\tau)\right)\right)f_n(\tau)\,d\tau, n\geq 0. \tag{4.55}$$

Donc la solution $u=v+w$ sera donnée par :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n\geq 0} u_n(x,t) \\ &= \sum_{n\geq 0}\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left[\begin{array}{c} \left(\frac{s_2\exp(s_1t)-s_1\exp(s_2t)}{s_2-s_1}\varphi_n+\frac{\exp(s_2t)-\exp(s_1t)}{s_2-s_1}\psi_n\right) \\ +\frac{1}{s_2-s_1}\int_0^t\left(\exp\left(s_2(t-\tau)\right)-\exp\left(s_1(t-\tau)\right)\right)f_n(\tau)\,d\tau \end{array}\right] \end{aligned} \tag{4.56}$$

En serant du Théorème 1.7, on montrera que la solution $u(x;t)$ donnée par (4.56) est effective.

Théorème 4.3 *On suppose que les fonctions f,φ et ψ sont développables en série de Fourier en cossinus et on suppose que, $\varphi,\psi\in C^2(0,l)$ et $f\in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ et possedent des dérivées troisièmes satisfaisant les conditions de Dirichlet. Alors la série $u(x,t)$ converge vers la solution classique du problème (4.5)-(4.9).*

Démonstration. Sous les hypothèses du Théorème 1.7 permet les majorations :

$\mathbf{M}_1$:$|\varphi_n|\leq\frac{k}{n^4}$,

$\mathbf{M}_2$:$|\psi_n|\leq\frac{r}{n^4}$,

$\mathbf{M}_3$:$|f_n|\leq\frac{m}{n^4}$, où k,r et m sont des constantes postives. Vu leur usages abondant on a les majorations :

$\mathbf{M}_4$:$|\exp(s_1t)|<1$ et $|\exp(s_2t)|<1$,

$\mathbf{M}_5$:$\frac{|s_1|+|s_2|}{|s_2-s_1|}\leq O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\frac{1}{|s_2-s_1|}\leq O\left(\frac{1}{n^2}\right)$,

$\mathbf{M}_6$:$\frac{|s_1s_2|}{|s_2-s_1|}\leq O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\frac{|s_1|^2+|s_2|^2}{|s_2-s_1|}\leq O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Continuité de $u\left(x,t\right)$:

$$\begin{aligned}\left|u\left(x,t\right)\right| &\leq \left|\frac{s_2\exp\left(s_1 t\right)-s_1\exp\left(s_2 t\right)}{s_2-s_1}\right|\left|\varphi_n\right|+\left|\frac{\exp\left(s_2 t\right)-\exp\left(s_1 t\right)}{s_2-s_1}\right|\left|\psi_n\right| \\ &+\frac{1}{\left|s_2-s_1\right|}\int_0^t\left|\exp\left(s_2\left(t-\tau\right)\right)-\exp\left(s_1\left(t-\tau\right)\right)\right|\left|f_n\left(\tau\right)\right|d\tau \\ &\leq \frac{\left|s_1\right|+\left|s_2\right|}{\left|s_2-s_1\right|}\left|\varphi_n\right|+\frac{2}{\left|s_2-s_1\right|}\left|\psi_n\right|+\frac{2}{\left|s_2-s_1\right|}\int_0^t\left|f_n\left(\tau\right)\right|d\tau.\end{aligned}$$

En vertu de M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, et M_6 on aura :

$$\begin{aligned}\left|u\left(x,t\right)\right| &\leq O\left(\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{k}{n^4}\right)+2O\left(\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{r}{n^4}\right)+2O\left(\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{m}{n^4}\right)T \\ &\leq O\left(\frac{1}{n^6}\right)\left(k+2r+2mT\right).\end{aligned}$$

Comme le membre gauche de cette dernière inégalité converge. Alors : $\sum_{n\geq 0}u_n\left(x,t\right)$ converge uniformement sur $\overline{\Omega}$. Alors $u\left(x,t\right)$ est continue et on aura :

$$u\left(x,t\right)\underset{t\to 0}{\to}\varphi\left(x\right).\text{ i.e.,}u\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right).$$

Dérivons la fonction $u\left(x,t\right)$ par rapport à t :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{n\geq 0}\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left[\begin{array}{c}\left(\frac{s_1s_2\left(\exp\left(s_1t\right)-\exp\left(s_2t\right)\right)}{s_2-s_1}\varphi_n+\frac{s_2\exp\left(s_2t\right)-s_1\exp\left(s_1t\right)}{s_2-s_1}\psi_n\right) \\ +\frac{1}{s_2-s_1}\int_0^t\left(s_2\exp\left(s_2\left(t-\tau\right)\right)-s_1\exp\left(s_1\left(t-\tau\right)\right)\right)f_n\left(\tau\right)d\tau\end{array}\right].$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| &\leq \frac{\left|s_1s_2\right|\left|\exp\left(s_1t\right)-\exp\left(s_2t\right)\right|}{\left|s_2-s_1\right|}\left|\varphi_n\right|+\frac{\left|s_2\right|+\left|s_1\right|}{\left|s_2-s_1\right|}\left|\psi_n\right|+\frac{1}{\left|s_2-s_1\right|}\int_0^t\left|s_2-s_1\right|\left|f_n\left(\tau\right)\right|d\tau \\ &\leq \frac{2\left|s_1s_2\right|}{\left|s_2-s_1\right|}\left|\varphi_n\right|+\frac{\left|s_2\right|+\left|s_1\right|}{\left|s_2-s_1\right|}\left|\psi_n\right|+\left|f_n\left(\tau\right)\right|T.\end{aligned}$$

Vu M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, et M_6 :

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|\leq 2O\left(\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{k}{n^4}\right)+2O\left(\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{r}{n^4}\right)+\left(\frac{m}{n^4}\right)T.$$

Du moment que le second membre est convergeant, la fonction $\frac{\partial u}{\partial t}$ sera uniformement convergente sur $\overline{\Omega}$. Ainsi, $\frac{\partial u}{\partial t}$ sera continue sur$\overline{\Omega}$. et

$$\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial t}\underset{t\to 0}{\to}\psi\left(x\right).\text{ i.e.,}\frac{\partial u\left(x,0\right)}{\partial t}=\psi\left(x\right).$$

Dérivons $u(x,t)$ par rapport à x :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\sum_{n\geq 0}\frac{n\pi}{l}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left[\begin{array}{c}\left(\frac{s_2\exp(s_1t)-s_1\exp(s_2t)}{s_2-s_1}\varphi_n+\frac{\exp(s_2t)-\exp(s_1t)}{s_2-s_1}\psi_n\right)\\+\frac{1}{s_2-s_1}\int_0^t\left(\exp\left(s_2\left(t-\tau\right)\right)-\exp\left(s_1\left(t-\tau\right)\right)\right)f_n\left(\tau\right)d\tau\end{array}\right].$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\leq\frac{n\pi}{l}\frac{|s_2|+|s_1|}{|s_2-s_1|}\left|\varphi_n\right|+\frac{2}{|s_2-s_1|}\left|\psi_n\right|+\frac{2}{|s_2-s_1|}\int_0^t\left|f_n\left(\tau\right)\right|d\tau.$$

Compte tenu de M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, et M_6 :

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|&\leq\frac{n\pi}{l}\left(O\left(\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{k}{n^4}\right)+2O\left(\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{r}{n^4}\right)+2O\left(\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{m}{n^4}\right)T\right)\\&\leq\frac{\pi}{l}\left(O\left(\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{k}{n^3}\right)+2O\left(\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{r}{n^3}\right)+2O\left(\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{m}{n^3}\right)T\right).\end{aligned}$$

La convergence du second membre guache, entraine la convergence uniforme sur $\overline{\Omega}$ de $\sum_{n\geq 0}\frac{\partial u_n}{\partial x}$. Ainsi $\frac{\partial u}{\partial x}$ sera continue. D'où

$$\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x}\underset{x\to l}{\to}0.\text{ i.e.,}\frac{\partial u\left(l,t\right)}{\partial x}=0.$$

Intégrons $u_n(x,t)$ par rapport à x :

$$\begin{aligned}\int_0^x u_n\left(\xi,t\right)d\xi&=\frac{l}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right)\Bigg|_0^x\begin{array}{c}\left(\frac{s_2\exp(s_1t)-s_1\exp(s_2t)}{s_2-s_1}\varphi_n\left(x\right)+\frac{\exp(s_2t)-\exp(s_1t)}{s_2-s_1}\psi_n\left(x\right)\right)\\+\frac{1}{s_2-s_1}\int_0^t\left(\exp\left(s_2\left(t-\tau\right)\right)-\exp\left(s_1\left(t-\tau\right)\right)\right)f_n\left(\tau\right)d\tau\end{array}\\&=\frac{l}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\begin{array}{c}\left(\frac{s_2\exp(s_1t)-s_1\exp(s_2t)}{s_2-s_1}\varphi_n\left(x\right)+\frac{\exp(s_2t)-\exp(s_1t)}{s_2-s_1}\psi_n\left(x\right)\right)\\+\frac{1}{s_2-s_1}\int_0^t\left(\exp\left(s_2\left(t-\tau\right)\right)-\exp\left(s_1\left(t-\tau\right)\right)\right)f_n\left(\tau\right)d\tau\end{array}.\end{aligned}$$

$$\left|\int_0^x u_n\left(\xi,t\right)d\xi\right|\leq\frac{l}{n\pi}\left[\frac{|s_2|+|s_1|}{|s_2-s_1|}\left|\varphi_n\right|+\frac{2}{|s_2-s_1|}\left|\psi_n\right|+\frac{2}{|s_2-s_1|}\int_0^t\left|f_n\left(\tau\right)\right|d\tau\right].$$

Vu M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, et M_6 on obtient :

$$\left|\int_0^x u_n\left(\xi,t\right)d\xi\right|\leq\frac{l}{n\pi}\left(O\left(\frac{1}{n^6}\right)\left(k+2r+2m\right)\right).$$

La convergence du membre gauche entaine la convergence uniforme de $\int_0^x u_n\left(\xi,t\right)d\xi$ sur $\overline{\Omega}$ c'est-à -dire $\int_0^x u_n\left(\xi,t\right)d\xi\underset{x\to l}{\to}0$, d'où $\int_0^l u_n\left(x,t\right)dx=0$.

Maintenant, nous montrons que $u\left(x,t\right)$ est deux fois dérivable par rapport à x et par rapport à t. Dérivons par rapport à t l'expression de $\frac{\partial ux}{\partial t}$, il vient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_{n\geq 0}\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left[\begin{array}{c}\left(\frac{s_1s_2(s_1\exp(s_1t)-s_2\exp(s_2t))}{s_2-s_1}\varphi_n+\frac{s_2^2\exp(s_2t)-s_1^2\exp(s_1t)}{s_2-s_1}\psi_n\right)\\ +\frac{1}{s_2-s_1}\int_0^t\left(s_2^2\exp\left(s_2\left(t-\tau\right)\right)-s_1^2\exp\left(s_1\left(t-\tau\right)\right)\right)f_n\left(\tau\right)d\tau+f_n\left(\tau\right)\left(s_2-s_1\right)\end{array}\right].$$

Dérivons par rapport à x l'expressionde $\frac{\partial ux}{\partial x}$, il vient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\sum_{n\geq 0}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left[\begin{array}{c}\left(\frac{s_2\exp(s_1t)-s_1\exp(s_2t)}{s_2-s_1}\varphi_n+\frac{\exp(s_2t)-\exp(s_1t)}{s_2-s_1}\psi_n\right)\\ +\frac{1}{s_2-s_1}\int_0^t\left(\exp\left(s_2\left(t-\tau\right)\right)-\exp\left(s_1\left(t-\tau\right)\right)\right)f_n\left(\tau\right)d\tau\end{array}\right].$$

Dérivons l'expression de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ par rapport à t, il vient :

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}=-\sum_{n\geq 0}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left[\begin{array}{c}\left(\frac{s_1s_2(\exp(s_1t)-\exp(s_2t))}{s_2-s_1}\varphi_n+\frac{s_2\exp(s_2t)-s_1\exp(s_1t)}{s_2-s_1}\psi_n\right)\\ +\frac{1}{s_2-s_1}\int_0^t\left(s_2\exp\left(s_2\left(t-\tau\right)\right)-s_1\exp\left(s_1\left(t-\tau\right)\right)\right)f_n\left(\tau\right)d\tau\end{array}\right].$$

Tenant comptedes majorations M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, et M_6, les trois dernières expressions donnent respectivement :

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|\leq\sum_{n\geq 0}\frac{\left|s_1s_2\right|\left|s_1\right|+\left|s_2\right|}{\left|s_2-s_1\right|}\left|\varphi_n\right|+\frac{\left|s_1^2\right|+\left|s_2^2\right|}{\left|s_2-s_1\right|}\left|\psi_n\right|+\frac{1}{\left|s_2-s_1\right|}\int_0^t\left(\left|s_1^2\right|+\left|s_2^2\right|\right)\left|f_n\left(\tau\right)\right|d\tau+\left|s_2-s_1\right|\left|f_n\left(t\right)\right|$$

$$\leq\sum_{n\geq 0}\left[O\left(n^2\right)O\left(\frac{1}{n^2}\right)\frac{k}{n^4}+O\left(n^2\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\frac{r}{n^4}+\int_0^t\left(O\left(n^2\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\frac{m}{n^4}+\frac{1}{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}\frac{m}{n^4}$$

$$\leq\sum_{n\geq 0}\left[\frac{k}{n^4}+\frac{r}{n^2}+\frac{r}{n^6}+Tm\left(O\left(\frac{1}{n^2}\right)+O\left(\frac{1}{n^6}\right)+O\left(n^2\right)\frac{m}{n^4}\right)\right]$$

$$\leq\sum_{n\geq 0}\max\left(k,r,Tm\right)O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La convergence du membre gauche, entraine la convergence uniforme de la série $\sum_{n\geq 0}\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}$.

Ainsi,

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|\leq\sum_{n\geq 0}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\frac{\left|s_1\right|+\left|s_2\right|}{\left|s_2-s_1\right|}\left|\varphi_n\right|+\frac{2}{\left|s_2-s_1\right|}\left|\psi_n\right|+\frac{1}{\left|s_2-s_1\right|}\int_0^t 2\left|f_n\left(\tau\right)\right|d\tau$$

$$\leq\sum_{n\geq 0}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left[O\left(\frac{1}{n^2}\right)\frac{k}{n^4}+2O\left(\frac{1}{n^2}\right)\frac{r}{n^4}+2O\left(\frac{1}{n^2}\right)\frac{m}{n^4}T\right]$$

$$\leq\sum_{n\geq 0}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\left[\frac{k}{n^4}+2\frac{r}{n^4}+2\frac{m}{n^4}T\right]$$

$$\leq\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\max\left(k,2r,2mT\right)\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^4}.$$

Vu la convergence de la série du membre gauche, la série du membre droit convergence uniforme sur $\overline{\Omega}$. Idem,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}\right| &\leq \sum_{n\geq 0}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \frac{|s_1 s_2|}{|s_2 - s_1|}|\varphi_n| + \frac{|s_1|+|s_2|}{|s_2 - s_1|}|\psi_n| + \frac{|s_1|+|s_2|}{|s_2 - s_1|}\int_0^t |f_n(\tau)|\, d\tau \\
&\leq \sum_{n\geq 0}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \left[2O\left(\frac{1}{n^2}\right)\frac{k}{n^4} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\frac{r}{n^4} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\frac{m}{n^4}T\right] \\
&\leq \sum_{n\geq 0}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \left[\frac{2k}{n^4} + \frac{r}{n^4} + \frac{m}{n^4}T\right] \\
&\leq \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \max\left(2k, r, mT\right)\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^4}.
\end{aligned}$$

Tenant compte de la convergence membre gauche, la série du membre droit converge uniforme sur $\overline{\Omega}$. Ainsi, on conclut que la fonction $u(x,t)$ donnée par (4.56) satisfait effectivement à l'équation (4.5).

4.2.7 Solution faible

Dans ce paragraphe la solution cherchée est dans le sens faible, c'est-à-dire, on prendra

$$f \in L^2\left((0,T), B_2^1(0,l)\right), \ \varphi \in L^2(0,l), \ \text{ et } \psi \in B_2^1(0,l).$$

Formulation faible

Commençons par définir une solution faible du problème (4.5)-(4.9). Multiplions l'équation (4.5) dans $L^2((0,T), B_2^1(0,l))$ par une fonction teste $v \in H^1((0,T), B_2^1(0,l))$ nous aurons

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right)_{L^2\left((0,T),B_2^1(0,l)\right)} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v\right)_{L^2\left((0,T),B_2^1(0,l)\right)} - \alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, v\right)_{L^2\left((0,T),B_2^1(0,l)\right)} \\
&\qquad -\beta\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}, v\right)_{L^2\left((0,T),B_2^1(0,l)\right)} = (f,v)_{L^2\left((0,T),B_2^1(0,l)\right)} \qquad (4.57)
\end{aligned}$$

Intégrons par parties le premier terme du membregauche de (4.57), en supposant que $v(.,T) = 0$ et en tenant compte de la condition (4.6) ($u(x,0) = \varphi(x)$), il vient :

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial u}{\partial t},v\right)_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)}\\
&=\int_0^T\left(\frac{\partial u}{\partial t},v\right)_{B_2^1(0,l)}dt\\
&=\int_0^l dx\int_0^T\frac{\partial}{\partial t}J_x^*\left(u\right)J_x^*\left(v\right)dt\\
&=\int_0^l dx\left[\left[J_x^*\left(u\right)J_x^*\left(v\right)\right]_0^T-\int_0^T J_x^*\left(u\right)\frac{\partial}{\partial t}J_x^*\left(v\right)dt\right]\\
&=-\int_0^l J_x^*\left(u\left(x,0\right)\right)J_x^*\left(v\left(x.o\right)\right)dx-\int_0^l\int_0^T J_x^*\left(u\right)J_x^*\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)dxdt\\
&=-\left(\varphi\left(x\right),v\left(.,0\right)\right)_{B_2^1(0,l)}-\left(u,\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)}.
\end{aligned}\tag{4.58}$$

Pour les autres termes de l'identité (4.57), on opère de la même facons que dans le Chapitre 3 on obtient :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},v\right)_{L^2\left((0,T),B_2^1(0,l)\right)}=-\left(\psi\left(x\right),v\left(.,0\right)\right)_{B_2^1(0,l)}-\left(\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)}.\tag{4.59}$$

$$\alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},v\right)_{L^2\left((0,T),\ B_2^1(0,l)\right)}=\alpha\left(u,v\right)_{L^2((0,T),\ L^2(0,l))}.\tag{4.60}$$

$$\beta\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2},v\right)_{L^2\left((0,T),B_2^1(0,l)\right)}=-\beta\left(u,\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2((0,T),\ L^2(0,l))}-\beta\left(\varphi,v\left(.,0\right)\right)_{L^2(0,l)}.\tag{4.61}$$

En substitutiant (4.58), (4.59), (4.60) et (4.61), il vient :

$$\begin{aligned}
&\left(u,\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)}-\left(\varphi\left(x\right),v\left(x,0\right)\right)_{B_2^1(0,l)}-\left(\psi\left(x\right),v\left(.,0\right)\right)_{B_2^1(0,l)}\\
&-\left(\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)}+\alpha\left(u,v\right)_{L^2((0,T),\ L^2(0,l))}-\beta\left(u,\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2((0,T),\ L^2(0,l))}\\
&-\beta\left(\varphi\left(x\right),v\left(x,0\right)\right)_{L^2(0,l)}=\left(f,v\right)_{L^2\left((0,T),B_2^1(0,l)\right)}.
\end{aligned}$$

Autrement :

$$A\left(u,v\right)=\left(f,v\right)_{L^2\left((0,T),B_2^1(0,l)\right)}+\left(\psi,v\left(x,0\right)\right)_{B_2^1(0,l)}+\beta\left(\varphi,v\left(x,0\right)\right)_{L^2(0,l)}+\left(\varphi,v\left(x,0\right)\right)_{B_2^1(0,l)}.\tag{4.62}$$

Où :

$$A(u,v) = -\left(u, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} + \alpha (u,v)_{L^2((0,T),\, L^2(0,l))} - \beta \left(u, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2((0,T),\, L^2(0,l))} - \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)}.$$

A présent, donnons la définition d' une solution faible.

Définition 4.2 *On dit que la solution $u(.,.) \in H^1((0,T), B_2^1(0,l))$ est solution faible du problème (4.5)-(4.9) si elle vérifiée la condition intégrale (4.9) et l'identité (4.62) pour toute fonction $v(.,.) \in H^1((0,T), B_2^1(0,l))$ telle que :*

$$v(.,T) = 0, \ \ et \ \int_0^l v(x,t)\, dx = 0.$$

Problème approché

on suppose qu'il existe des fonctions $\varphi^{(n)}, \psi^{(n)}$ et $f^{(n)}, n = 1, 2, \ldots\ldots\ldots$ vérifiant les conditions du Théorème, telles que :

$$\begin{cases} \varphi^{(n)} \underset{n\to\infty}{\to} \varphi, \text{ dans } L^2(0,l), \\ \psi^{(n)} \underset{n\to\infty}{\to} \psi, \text{ dans } B_2^1(0,l), \\ f^{(n)} \underset{n\to\infty}{\to} f, \text{ dans } B_2^1(0,l), \forall t \in [0,T], \end{cases}$$

et pour $n = 1, 2, \ldots..$, il existe une solution clasique unique $u^n(.,.)$, au sens de la Définition 4.2, du problème mixte :

$$\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} + \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^3 u^{(n)}}{\partial t \partial x^2} = f^{(n)}(x,t), \tag{4.63}$$

$$u^{(n)}(x,0) = \varphi^{(n)}(x), \tag{4.64}$$

$$\frac{\partial u^{(n)}(x,0)}{\partial t} = \psi^{(n)}(x), \tag{4.65}$$

$$\frac{\partial u^{(n)}(l,t)}{\partial x} = 0, \tag{4.66}$$

$$\int_0^l u^{(n)}(x,t)\, dx = 0. \tag{4.67}$$

On concidère le problème (4.63)-(4.67) pour $n = k$ et $n = m$, et on prend la différence :

$$u^{(k,m)}(x,t) = u^{(k)}(x,t) - u^{(m)}(x,t),$$

il vient :

$$\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t} + \frac{\partial^2 u^{(k,m)}}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 u^{(k,m)}}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^3 u^{(k,m)}}{\partial t \partial x^2} = f^{(k,m)}(x,t), \tag{4.68}$$

$$u^{(k,m)}(x,0) = \varphi^{(k,m)}(x), \tag{4.69}$$

$$\frac{\partial u^{(k,m)}(x,0)}{\partial t} = \psi^{(h,m)}(x), \tag{4.70}$$

$$\frac{\partial u^{(k,m)}(l,t)}{\partial x} = 0, \tag{4.71}$$

$$\int_0^l u^{(k,m)}(x,t)\, dx = 0. \tag{4.72}$$

Avec,

$$f^{(k,m)} = f^{(k)} - f^{(m)},$$

$$\varphi^{(k,m)} = \varphi^{(k)} - \varphi^{(m)},$$

$$\psi^{(h,m)} = \psi^{(h,)} - \psi^{(m)}.$$

Estimation à priori

Théorème 4.4 *Pour tout $k, m \in \mathbb{N}^*$, on a les estimations suivantes :*

$$\left\| u^{(k,m)} \right\|^2 \leq C_5 \left(\left\| f^{(k,m)} \right\|^2_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} + \left\| \varphi^{(k,m)} \right\|^2_{L^2(0,l)} + \left\| \psi^{(k,m)} \right\|^2_{B_2^1(0,l)} \right). \tag{4.73}$$

$$\left\| \frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t} \right\|^2 \leq C_5 \left(\left\| f^{(k,m)} \right\|^2_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} + \left\| \varphi^{(k,m)} \right\|^2_{L^2(0,l)} + \left\| \psi^{(k,m)} \right\|^2_{B_2^1(0,l)} \right). \tag{4.74}$$

$$\int_0^\tau \left\| \frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t} \right\|^2_{L^2} dt \leq C_5 \left(\left\| f^{(k,m)} \right\|^2_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} + \left\| \varphi^{(k,m)} \right\|^2_{L^2(0,l)} + \left\| \psi^{(k,m)} \right\|^2_{B_2^1(0,l)} \right). \tag{4.75}$$

Où :

$$C_5 = \frac{\min\left(1 + \beta l^2, \alpha\right)}{\max\left(1, \alpha\right)}.$$

Démonstration. Considérons le produit scalaire dans $L^2(0,T,B_2^1(0,l))$ de l'équation (4.68) et de $2\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}$, on obtient :

$$2\int_0^\tau \left(\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}, \frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)} dt + 2\int_0^\tau \left(\frac{\partial^2 u^{(k,m)}}{\partial t^2}, \frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)} dt - 2\alpha\int_0^\tau \left(\frac{\partial^2 u^{(k,m)}}{\partial x^2}, \frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)} dt$$
$$-2\beta\int_0^\tau \left(\frac{\partial^3 u^{(k,m)}}{\partial t\partial x^2}, \frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)} dt = 2\int_0^\tau \left(f^{(k,m)}, \frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)} dt. \quad (4.76)$$

Le premier terme du membre gauche s'écrit :

$$2\int_0^\tau \left(\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}, \frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)} dt = 2\int_0^\tau \left\|\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)} dt. \quad (4.77)$$

Pour les autres termes du membre, on opère de la même façons, pour le cas pseudo-hyperbolique,on aura

$$2\int_0^\tau \left(\frac{\partial^2 u^{(k,m)}}{\partial t^2}, \frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)} dt = \left\|\frac{\partial u^{(k,m)}(x,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)} - \left\|\psi(x)^{(k,m)}\right\|^2_{B_2^1(0,l)}. \quad (4.78)$$

$$-2\alpha\int_0^\tau \left(\frac{\partial^2 u^{(k,m)}}{\partial x^2}, \frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)} dt = \alpha\left(\left\|u^{(k,m)}(x,\tau)\right\|^2_{L^2(0,l)} - \left\|\varphi^{(k,m)}(x)\right\|^2_{L^2(0,l)}\right). \quad (4.79)$$

$$-2\beta\int_0^\tau \left(\frac{\partial^3 u^{(k,m)}}{\partial t\partial x^2}, \frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)} dt = 2\beta\int_0^\tau \left\|\frac{\partial u^{(k,m)}(x,t)}{\partial t}\right\|_{L^2(0,l)} dt. \quad (4.80)$$

Insérons (4.77), (4.78), (4.79) et (4.80) dans l'équation (4.76) on obtient :

$$2\int_0^\tau \left\|\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)} dt + \left\|\frac{\partial u^{(k,m)}(x,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)} + \alpha\left\|u^{(k,m)}(x,\tau)\right\|^2_{L^2(0,l)}$$
$$+2\beta\int_0^\tau \left\|\frac{\partial u^{(k,m)}(x,t)}{\partial t}\right\|_{L^2(0,l)} dt = 2\int_0^\tau \left(f^{(k,m)}, \frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1(0,l)} dt + \left\|\varphi^{(k,m)}(x)\right\|^2_{L^2(0,l)} + \left\|\psi(x)^{(k,m)}\right\|^2_{B_2^1(0,l)}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz done :

$$2\int_0^\tau \left\|\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)} dt + \left\|\frac{\partial u^{(k,m)}(x,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)} + \alpha\left\|u^{(k,m)}(x,\tau)\right\|^2_{L^2(0,l)} + 2\beta\int_0^\tau \left\|\frac{\partial u^{(k,m)}(x,t)}{\partial t}\right\|_{L^2(0,l)} dt$$
$$\leq \left\|f^{(k,m)}\right\|_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} + \left\|\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right\|^2_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} + \alpha\left\|\varphi^{(k,m)}(x)\right\|^2_{L^2(0,l)} + \left\|\psi(x)^{(k,m)}\right\|^2_{B_2^1(0,l)}.$$

Où encore

$$2\int_0^\tau \left\|\frac{\partial u^{(k,m)}}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)} dt + \left\|\frac{\partial u^{(k,m)}(x,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)} + \alpha\left\|u^{(k,m)}(x,\tau)\right\|^2_{L^2(0,l)} + 2\beta\int_0^\tau \left\|\frac{\partial u^{(k,m)}(x,t)}{\partial t}\right\|_{L^2(0,l)} dt$$
$$\leq \left\|f^{(k,m)}\right\|_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} + \alpha\left\|\varphi^{(k,m)}(x)\right\|^2_{L^2(0,l)} + \left\|\psi(x)^{(k,m)}\right\|^2_{B_2^1(0,l)}.$$

L'inégalité :

$$\|u\|_{B_2^1} \leq \frac{l}{\sqrt{2}} \|u\|_{L^2}$$

donne :

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} + \beta l^2 \int_0^\tau \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)} dt + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)} + \alpha \|u\|^2_{L^2(0,l)}$$
$$\leq \|f\|^2_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} + \alpha \|\varphi\|^2_{L^2(0,l)} + \|\psi\|^2_{B_2^1(0,l)}.$$

$$\left(1+\beta l^2\right) \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)} + \alpha \|u\|^2_{L^2(0,l)}$$
$$\leq \|f\|^2_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} + \alpha \|\varphi\|^2_{L^2(0,l)} + \|\psi\|^2_{B_2^1(0,l)}.$$

Où encore :

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)} + \|u\|^2_{L^2(0,l)}$$
$$\leq \frac{\min\left(\left(1+\beta l^2\right), \alpha\right)}{\max(1,\alpha)} \left(\|f\|^2_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} + \|\varphi\|^2_{L^2(0,l)} + \|\psi\|^2_{B_2^1(0,l)}\right).$$

Par passage au maximum sur τ entre 0 et T dans le membre gauche de l'inégalité ainsi obtenue, on aura :

$$\|u\|^2_{C(0,T;L^2)} \leq C_5 \left(\|f\|^2_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} + \|\varphi\|^2_{L^2(0,l)} + \|\psi\|^2_{B_2^1(0,l)}\right).$$

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{C(0,T;L^2)} \leq C_5 \left(\|f\|^2_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} + \|\varphi\|^2_{L^2(0,l)} + \|\psi\|^2_{B_2^1(0,l)}\right).$$

$$\int_0^\tau \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1(0,l)} dt \leq C_5 \left(\|f\|^2_{L^2\left(0,T,B_2^1(0,l)\right)} + \|\varphi\|^2_{L^2(0,l)} + \|\psi\|^2_{B_2^1(0,l)}\right).$$

Où :$C_3 = \frac{\min\left(\left(1+\beta l^2\right),\alpha\right)}{\max(1,\alpha)}$.

Corollaire 4.1 *La suite $(u^n)_n$ (repect :$\left(\frac{\partial u^n}{\partial t}\right)_n$)) converge vers une fonction $\widetilde{u}(x,t)$(respect :$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t}$) por la normede l'éspace $C\left(0,T;L^2(0,l)\right)$(respect :$C\left(0,T;B_2^1(0,l)\right)$.*

Démonstration. Dans un Banach toute suite de Cauchy est convergente.

Existence de la solution faible

Le but est de démontrer que la fonction limite $\widetilde{u}(x,t)$ est solution faible du problème (4.63)-(4.67).

Théorème 4.5 *Le problème (4.63)-(4.67) admet une solution faible.*

Démonstration. Multiplions scalairement dans $L^2(0,T;B_2^1(0,l))$ l'équation (4.63) par une fonction test $v \in H^1(0,T;B_2^1(0,l))$ et procédons comme dans la cas da la formulation faible, on obtient :

$$-\left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left((0,T),B_2^1(0,l)\right)}\alpha+\left(u^{(n)},v\right)_{L^2((0,T),L^2)}-\left(\psi^{(n)},v(.,0)\right)_{B_2^1(0,l)}-\beta\left(u^{(n)},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2((0,T),L^2)}$$
$$-\beta\left(\varphi^{(n)},v(.,0)\right)_{L^2(0,l)}-\left(\varphi^{(n)},v(x,.)\right)_{B_2^1(0,l)}-\left(u^{(n)},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left((0,T),B_2^1(0,l)\right)}$$
$$=\left(f^{(n)},v\right)_{L^2\left((0,T),B_2^1(0,l)\right)}. \tag{4.81}$$

Quand $n\to\infty$, onaura :

$$\lim_{n\to\infty}\left[\begin{array}{l}-\left(\frac{\partial u^{(n)}-\widetilde{u}}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left((0,T),B_2^1(0,l)\right)}\alpha+\left(u^{(n)}-\widetilde{u},v\right)_{L^2((0,T),L^2)}-\left(\psi^{(n)}-\psi,v(.,0)\right)_{B_2^1(0,l)}-\beta\left(u^{(n)}-\widetilde{u},\frac{\partial v}{\partial t}\right)\\ \qquad -\beta\left(\varphi^{(n)}-\varphi,v(.,0)\right)_{L^2(0,l)}-\left(\varphi^{(n)}-\varphi,v(x,.)\right)_{B_2^1(0,l)}-\left(u^{(n)}-\widetilde{u},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left((0,T),B_2^1(0,l)\right)}\end{array}\right.$$
$$+\lim_{n\to\infty}\left[\begin{array}{l}-\left(\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left((0,T),B_2^1(0,l)\right)}\alpha+\left(\widetilde{u},v\right)_{L^2((0,T),L^2)}-\left(\psi,v(.,0)\right)_{B_2^1(0,l)}-\beta\left(\widetilde{u},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2((0,T),L^2)}\\ \qquad -\beta\left(\varphi,v(.,0)\right)_{L^2(0,l)}-\left(\varphi,v(x,.)\right)_{B_2^1(0,l)}-\left(\widetilde{u},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left((0,T),B_2^1(0,l)\right)}\end{array}\right]$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(f^{(n)}-f,v\right)_{L^2\left((0,T),B_2^1(0,l)\right)}+\left(f,v\right)_{L^2\left((0,T),B_2^1(0,l)\right)}.$$

D'une façons similaire à celle des chapitres précédents :

1. $\lim\limits_{n\to\infty}-\left(\frac{\partial u^{(n)}-\widetilde{u}}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left((0,T),B_2^1(0,l)\right)}\alpha+\left(u^{(n)}-\widetilde{u},v\right)_{L^2((0,T),L^2)}=0.$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\beta\left(u^{(n)}-\widetilde{u},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2((0,T),L^2)}=0.$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\psi^{(n)}-\psi,v(.,0)\right)_{B_2^1(0,l)}=0.$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f^{(n)}-f,v\right)_{L^2\left((0,T),B_2^1(0,l)\right)}=0.$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\beta\left(\varphi^{(n)}-\varphi,v(.,0)\right)_{L^2(0,l)}=0.$

D'autre part

$$\left|\beta\left(\varphi^{(n)}-\varphi,v\left(x,.\right)\right)\right|_{B_2^1(0,l)} \leq \frac{l}{\sqrt{2}}\left|\beta\left(\varphi^{(n)}-\varphi,v\left(x,.\right)\right)\right|_{L^2}$$
$$\leq \frac{l}{\sqrt{2}}\left\|\varphi^{(n)}-\varphi\right\|_{L^2(0,l)}\left\|v\left(x,.\right)\right\|_{L^2(0,l)} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \,.$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to\infty}\beta\left(\varphi^{(n)}-\varphi,v\left(.,0\right)\right)_{B_2^1(0,l)}=0.$

$$\left|\left(u^{(n)}-\widetilde{u},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left((0,T),B_2^1(0,l)\right)}\right| \leq \frac{l}{\sqrt{2}}\left\|u^{(n)}-\widetilde{u}\right\|_{L^2(0,T;L^2)}\left\|v\left(x,.\right)\right\|_{L^2(0,T;L^2)} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \,.$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(u^{(n)}-\widetilde{u},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left((0,T),B_2^1(0,l)\right)}=0.$

En insérant ces égalités dans l'identité (4.81), il vient :

$$-\left(\tfrac{\partial\widetilde{u}}{\partial t},\tfrac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left((0,T),B_2^1(0,l)\right)}+\alpha\left(\widetilde{u},v\right)_{L^2((0,T),L^2)}-\left(\psi,v\left(.,0\right)\right)_{B_2^1(0,l)}-\beta\left(\widetilde{u},\tfrac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2((0,T),L^2)}$$
$$-\beta\left(\varphi,v\left(.,0\right)\right)_{L^2(0,l)}-\left(\varphi,v\left(x,.\right)\right)_{B_2^1(0,l)}=\left(f,v\right)_{L^2\left((0,T),B_2^1(0,l)\right)}.$$

La condition : $\int\limits_0^l\widetilde{u}dx=0$ s'obtient de façons analogue à celle des chapitres précédent. Ainsi $\widetilde{u}$ sera solution faible du problème (4.63)-(4.67) au sens de la Définition 4.2.

Unicité de la solution

Théorème 4.6 *La solution du problème (4.63)-(4.67) est unique.*

Démonstration. On suppose que notre problème a deux solutions u_1 et u_2. Vu la linéairité de l'équation (4.63), la difference $u=u_1-u_2$ satisfait la formulation faible avec :$f\left(x,t\right)\equiv\varphi\left(x\right)\equiv\psi\left(x\right)\equiv0,\forall x\in\left[0,l\right]$:

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left((0,T),B_2^1(0,l)\right)}+\alpha\left(u,\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2((0,T),L^2)}-\beta\left(u,\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2((0,T),L^2)}$$
$$-\left(u,\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left((0,T),B_2^1(0,l)\right)}=0,\forall\in H^1\left((0,T),B_2^1\left(0,l\right)\right).$$

On choisit, aussi :

$$v\left(x,t\right)=\begin{cases}0; & s\leq t\leq T\\ -\int\limits_t^s u\left(x,\tau\right)d\tau=0; & 0\leq t\leq s\end{cases}.$$

Il vient :

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left((0,T),B_2^1(0,l)\right)} - \alpha \left(\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2((0,T),L^2)}$$
$$+\beta \left(\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2((0,T),L^2)} + \left(\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left((0,T),B_2^1(0,l)\right)} = 0.$$

En vertue de $v(x,t)$ et des normes $L^2((0,s), L^2)$ et $L^2((0,s), B_2^1(0,l))$, on a :

$$\left\|\frac{\partial v(.,s)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1} + \alpha \|v(.,0)\|^2_{L^2} + \left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2((0,s),L^2)} + \left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2\left((0,s),B_2^1\right)} = 0.$$

Il en découle :

$$\left\|\frac{\partial v(.,s)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1} = \|v(.,0)\|^2_{L^2} = \left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2((0,s),L^2)} = \left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2\left((0,s),B_2^1\right)} = 0.$$

Vu la définition de $v(x,t)$, on obtient :$\|u(.,s)\|^2_{B_2^1} = 0$ c'est-à-dire $u(.,s) \equiv 0$ dans B_2^1. Or $s \in [0,T], u(x,t) \equiv 0, \forall t \in [0,T]$. D'où l'unicité de la solution du problème.

Continuité par rapport aux données de la solution

Théorème 4.7 *Soient* (f,φ,ψ) *et* $(f^*,\varphi^*,\psi^*) \in L^2(0,T;B_2^1(0,l)) \times L^2(0,l) \times B_2^1$, *et soient* u *et* u^* *les solutions faibles correspondantes du problème (4.63)-(4.67). Alors :*

1.

$$\|u - u^*\|_{C(0,T;L^2)} \leq C\left(\int_0^\tau \|f - f^*\|_{B_2^1} dt + \|\varphi - \varphi^*\|_{L^2} + \|\psi - \psi^*\|_{B_2^1}\right). \quad (4.82)$$

2.

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u^*}{\partial t}\right\|_{C\left(0,T;B_2^1\right)} \leq C'\left(\int_0^\tau \|f - f^*\|_{B_2^1} dt + \|\varphi - \varphi^*\|_{L^2} + \|\psi - \psi^*\|_{B_2^1}\right). \quad (4.83)$$

Démonstration. Appliquons les estimations (4.13)-(4.15) aux solutions classiques $u^{(n)}(x,t), n \geq 1$, et utilisons les relations limites :

$$\left\|u^{(n)}\right\|_{L^2(0,l)} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \|u\|_{L^2(0,l)}, \forall t \in [0,T].$$

$$\left\| f^{(n)} \right\|_{B_2^1(0,l)} \underset{n\to\infty}{\to} \|f\|_{B_2^1(0,l)}, \forall t \in [0,T].$$

$$\left\| \varphi^{(n)} \right\|_{L^2(0,l)} \underset{n\to\infty}{\to} \|\varphi\|_{L^2(0,l)}.$$

$$\left\| \psi^{(n)} \right\|_{B_2^1(0,l)} \underset{n\to\infty}{\to} \|\psi\|_{B_2^1(0,l)}.$$

En suite, passons aux limites, on observera que les estimations (4.13)-(4.15) restent valides pour la solution faible.

Vu que le problème (4.5)-(4.9) est linéaire, alors en prenant $u-u^*, \varphi-\varphi^*, \psi-\psi^*$ et $f-f^*$ au lieu de u, φ, ψ et f on observera que $u-u^*$ est solution faible du problème (4.5)-(4.9), ainsi on obtient les inégalités (4.82)-(4.83).

Corollaire 4.2 *En outre des hypothèses du Théorème précédent, on suppose que :*

$$\|f-f^*\|_{L^2\left(0,T;B_2^1\right)} \leq \varepsilon_0.$$

$$\|\varphi-\varphi^*\|_{L^2(0,l)} \leq \varepsilon_1.$$

$$\|\psi-\psi^*\|_{B_2^1(0,l)} \leq \varepsilon_2$$

Alors on a les estimations suivantes :

1.

$$\|u-u^*\|_{C(0,T;L^2(0,l))} \leq C\left(\varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2\right). \tag{4.84}$$

2.

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u^*}{\partial t} \right\|_{L^2\left(0,T;B_2^1\right)} \leq C'\left(\varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2\right). \tag{4.85}$$

Démonstration. Directe.

Remarque 4.2 *La dépendance continue des solutions par rapport aux données est traduite par (4.84)-(4.85).*

4.3 Cas d'une équation semi-linéaire

4.3.1 Position du problème

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\beta\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}=f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial t}\right), \tag{4.86}$$

$$u\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right), \tag{4.87}$$

$$\frac{\partial u\left(x,0\right)}{\partial t}=\psi\left(x\right), \tag{4.88}$$

$$\frac{\partial u\left(l,t\right)}{\partial x}=0, \tag{4.89}$$

$$\int_0^l u\left(x,t\right)dx=0. \tag{4.90}$$

On suppose que f est Lipschitzienne par rapport à la troisième et quatrième composante c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\exists L>0: \quad & \left\|f\left(x,t,u_1,u_2\right)-f\left(x,t,v_1,v_2\right)\right\| \\ & \leq L\left\{\left\|u_1-v_1\right\|+\left\|u_2-v_2\right\|\right\}, \forall(x,t)\in\Omega.\end{aligned} \tag{4.91}$$

4.3.2 Solution faible

Processus itératif

Commençant de $u^{(0)}\left(x,t\right)\equiv 0, \forall(x,t)\in\Omega$, on définit la suite $\left\{u^{(n)}\left(x,t\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ par :si $u^{(n-1)}\left(x,t\right)$ sont connues, alors on résout le problème :

$$\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t}+\frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial t^2}-\alpha\frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial x^2}-\beta\frac{\partial^3 u^{(n)}}{\partial t\partial x^2}=f\left(x,t,u^{(n-1)},\frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial t}\right), \tag{4.92}$$

$$u^{(n)}\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right), \tag{4.93}$$

$$\frac{\partial u^{(n)}\left(x,0\right)}{\partial t}=\psi\left(x\right), \tag{4.94}$$

$$\frac{\partial u^{(n)}\left(l,t\right)}{\partial x}=0, \tag{4.95}$$

$$\int_0^l u^{(n)}\left(x,t\right)dx=0. \tag{4.96}$$

Les Théorèmes 3.4 et 3.5 du chapitre précédent impliquent, pour n fixe, que chacun des chacun des problèmes (4.92)-(4.96) admet une solution unique $u^{(n)}(.,.)$.

On s'intéresse au même problème semi-linéaire, avec la différence $z^{(m)} = u^{(m)} - u^{(m-1)}$, ainsi $z^{(m)}$ vérifie :

$$\frac{\partial z^{(m)}}{\partial t} + \frac{\partial^2 z^{(m)}}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 z^{(m)}}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^3 z^{(m)}}{\partial t \partial x^2} = F^{(m-1)}(x,t,), \tag{4.97}$$

$$z^{(m)}(x,0) = 0, \tag{4.98}$$

$$\frac{\partial z^{(m)}(x,0)}{\partial t} = 0, \tag{4.99}$$

$$\frac{\partial z^{(m)}(l,t)}{\partial x} = 0, \tag{4.100}$$

$$\int_0^l z^{(m)}(x,t)\,dx = 0. \tag{4.101}$$

Où,

$$F^{(m-1)} = f\left(x,t,u^{(m-1)}, \frac{\partial u^{(m-1)}}{\partial t}\right) - f\left(x,t,u^{(m-2)}, \frac{\partial u^{(m-2)}}{\partial t}\right).$$

Estimation à priori

Théorème 4.8 *Soit $f(x,t,0,0) \in L^2(0,T;B_2^1)$ et $f(x,t,p,q)$ vérifie la condition de Lipschitz (4.91). Alors on a l'estimation suivante :*

$$\left\| z^{(m)} \right\|_{H^1\left(0,T;B_2^1\right)} \leq C_6 \left\| z^{(m-1)} \right\|_{H^1\left(0,T;B_2^1\right)}, m \geq 1. \tag{4.102}$$

Où : $C_6 = \frac{l^2 L^2}{(2\beta + l^2)\min\left(1, \frac{2\alpha}{l^2}\right)}$.

Démonstration. Multiplions scalairement dans $B_2^1(0,l)$, l'équation du problème par $\frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}$:

$$\left(\frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}, \frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1} + \left(\frac{\partial^2 z^{(m)}}{\partial t^2}, \frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1} - \alpha\left(\frac{\partial^2 z^{(m)}}{\partial x^2}, \frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1} - \beta\left(\frac{\partial^3 z^{(m)}}{\partial t \partial x^2}, \frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1}$$
$$= \left(F^{(m-1)}, \frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1}. \tag{4.103}$$

Similairement aux résultats du chapitre (3) ona :

1 $\left(\frac{\partial^2 z^{(m)}}{\partial x^2}, \frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|\frac{\partial z^{(m)}(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1}.$

2 $-\alpha\left(\frac{\partial^2 z^{(m)}}{\partial t^2}, \frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1} = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|z^{(m)}(.,t)\right\|^2_{L^2}.$

3 $-\beta\left(\frac{\partial^3 z^{(m)}}{\partial t\partial x^2}, \frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1} = \beta\left\|\frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}\right\|^2_{L^2}.$

D'autre part on a :

4 $\left(\frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}, \frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1} = \left\|\frac{\partial z^{(m)}(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1}.$

insérons ces inégalités dans l'équation (4.103) et intégrons entre $(0,\tau)$ il vient :

$$\alpha\left\|z^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2} + \left\|\frac{\partial z^{(m)}(.,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1} + 2\beta\int_0^\tau\left\|\frac{\partial z^{(m)}(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L^2}dt + 2\int_0^\tau\left\|\frac{\partial z^{(m)}(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1}dt$$
$$= 2\int_0^\tau\left(F^{(m-1)}, \frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}\right)_{B_2^1}dt.$$

Moyennant Cauchy- Schwartz et la condition de Lipschitz on aura :

$$\alpha\left\|z^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2} + \left\|\frac{\partial z^{(m)}(.,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1} + 2\beta\int_0^\tau\left\|\frac{\partial z^{(m)}(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L^2}dt + 2\int_0^\tau\left\|\frac{\partial z^{(m)}(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1}dt$$
$$\leq 2\varepsilon L\left(\left\|z^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2\left(0,T;B_2^1\right)} + \left\|\frac{\partial z^{(m)}(.,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{L^2\left(0,T;B_2^1\right)}\right) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\left\|\frac{\partial z^{(m)}(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1}dt.$$

Vu que $L^2 \hookrightarrow B_2^1$ (l'injectionde L^2 dans B_2^1),

$$\frac{2\alpha}{l^2}\left\|z^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{B_2^1} + \left\|\frac{\partial z^{(m)}(.,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1} + \frac{4\beta}{l^2}\int_0^\tau\left\|\frac{\partial z^{(m)}(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1}dt + 2\int_0^\tau\left\|\frac{\partial z^{(m)}(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1}dt$$
$$\leq 2\varepsilon L\left(\left\|z^{(m-1)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2\left(0,T;B_2^1\right)} + \left\|\frac{\partial z^{(m-1)}(.,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{L^2\left(0,T;B_2^1\right)}\right) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\left\|\frac{\partial z^{(m)}(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1}dt.$$

Autrement,

$$\min\left(\frac{2\alpha}{l^2},1\right)\left(\left\|z^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{B_2^1} + \left\|\frac{\partial z^{(m)}(.,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1}\right)$$
$$\leq 2\varepsilon L\left(\left\|z^{(m-1)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2\left(0,T;B_2^1\right)} + \left\|\frac{\partial z^{(m-1)}(.,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{L^2\left(0,T;B_2^1\right)}\right) + \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{4\beta}{l^2} - 2\right)\int_0^\tau\left\|\frac{\partial z^{(m)}(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1}dt.$$

En choisissant $\varepsilon = \frac{l^2}{4\beta^2+2l^2}$, il vient :

$$\left(\left\|z^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{B_2^1} + \left\|\frac{\partial z^{(m)}(.,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{B_2^1}\right)$$
$$\leq \frac{2L^2\left(\frac{l^2}{4\beta^2+2l^2}\right)}{\min\left(\frac{2\alpha}{l^2},1\right)}\left(\left\|z^{(m-1)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2\left(0,T;B_2^1\right)} + \left\|\frac{\partial z^{(m-1)}(.,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{L^2\left(0,T;B_2^1\right)}\right).$$

Intégrons cette inégalité sur $[0, T]$ et posons :

$$C_6 = \frac{2L^2 \left(\frac{l^2}{4\beta^2+2l^2}\right)}{\min\left(\frac{2\alpha}{l^2}, 1\right)} = \frac{L^2 l^2}{(2\beta^2 + l^2)\min\left(\frac{2\alpha}{l^2}, 1\right)}.$$

On obtiendra l'estimation (4.102).

Remarque 4.3 *On auurait prendre le maximum sur τ de 0 à T dans le membre gauche, puisque le membre droit est indépendant de τ il s'ensuit :*

$$\left\|z^{(m)}\right\|^2_{C\left(0,T;B_2^1\right)} \leq C_6 \left\|z^{(m-1)}\right\|^2_{C\left(0,T;B_2^1\right)}.$$

Existence de la solution

Théorème 4.9 *Sous les hypothèses du Théorème précédent. Si*

$$L < \frac{\sqrt{(2\beta^2 + l^2)\min\left(\frac{2\alpha}{l^2}, 1\right)}}{l}.$$

Alors le problème (4.97)-(4.101) admet une solution faible dans l'éspace $H^1\left(0, T; B_2^1\right)$.

Démonstration. Appliquation du critère d'Alembert à la serie $\sum\limits_{n\geq 0} z^{(n)}(x,t)$, c'est-à-dire si $C_6 < 1$ alors $L < \frac{\sqrt{(2\beta^2+l^2)\min\left(\frac{2\alpha}{l^2},1\right)}}{l}$.

Il reste à démontrer que $\overline{z}(x,t)$ est solution faible.

Lemme 4.2 *La fonction $\overline{z}(x,t)$ est solution faible du problème (4.97)-(4.101) dans le sens de Définition 4.2.*

Démonstration. Il reste à démon
trer que : $\lim\limits_{n\to\infty} \left(f^{(n)}\left(.,.,z^{(m)}, \frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}\right) - f\left(.,.,\overline{z}, \frac{\partial \overline{z}}{\partial t}\right), v\right)_{L^2\left(0,T;B_2^1\right)}$. Vu la condition de Lipschitz et tenant compte :

$$z^{(n)} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \overline{z} \text{ dans } L^2\left(0, T; L^2(0l)\right),$$

$$\frac{\partial z^{(n)}}{\partial t} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \frac{\partial \overline{z}}{\partial t} \text{ dans } L^2\left(0, T; B_2^1\right).$$

Il vient,

$$\left(f^{(n)}\left(.,.,z^{(m)},\frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}\right)-f\left(.,.,\overline{z},\frac{\partial \overline{z}}{\partial t}\right),v\right)_{L^2\left(0,T;B_2^1\right)}$$
$$\leq L\left(\left\|z^{(m)}-\overline{z}\ \right\|_{L^2\left(0,T;B_2^1\right)}+\left\|\frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}-\frac{\partial \overline{z}}{\partial t}\right\|_{L^2\left(0,T;B_2^1\right)}\right)\|v\|_{L^2\left(0,T;B_2^1\right)}.$$

Par passaga à la limite on aura : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f^{(n)}\left(.,.,z^{(m)},\frac{\partial z^{(m)}}{\partial t}\right)-f\left(.,.,\overline{z},\frac{\partial \overline{z}}{\partial t}\right),v\right)_{L^2\left(0,T;B_2^1\right)}=0$. En plus des résultats du chapitre précédent, on deduit que $\overline{z}\,(.,.)$ vérifie la formulation faible. Ainsi, $\overline{z}$ est solution faible du problème (4.97)-(4.101) au sens de la Définition 4.2.

Unicité de la solution faible

Théorème 4.10 *Sous les hypothèses du Théorème précédent la solution du problème (4.97)-(4.101) est unique.*

Démonstration. Soient u_1 et u_2 deux solutions distinctes du problème semi-linéaire. Alors la difference $z=u_1-u_2$ vérifie :

$$\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-\alpha\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\beta\frac{\partial^3 z}{\partial t\partial x^2}=F\left(x,t,\right),$$

$$z\left(x,0\right)=0,$$
$$\frac{\partial z\left(x,0\right)}{\partial t}=0,$$
$$\frac{\partial z\left(l,t\right)}{\partial x}=0,$$
$$\int_0^l z\left(x,t\right)dx=0.$$

Avec,

$$F\left(x,t\right)=f\left(x,t,u_1,\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)-f\left(x,t,u_2,\frac{\partial u_2}{\partial t}\right).$$

La preuve du Théorème 4.9 précédent donne

$$\|z\|_{H^1\left(0,T;B_2^1\right)}\leq C_4\|z\|_{H^1\left(0,T;B_2^1\right)},$$

c'est-à-dire

$$(1-C_6)\|z\|_{H^1\left(0,T;B_2^1\right)} \leq 0,$$

or,$C_6 < 1$. Alors $\|z\|_{H^1\left(0,T;B_2^1\right)} = 0$, c'est-à-dire $u_1 \equiv u_2$ $\forall (x,t) \in \Omega$, d'où l'unicité.

Dépendance continue de la solution par rapport aux données

Théorème 4.11 *Soient $u(x,t)$ et $u^*(x,t)$ deux solutions du problème (4.97)-(4.101) correpondantes respectivement à (f,φ,ψ) et (f^*,φ^*,ψ^*) et s'ils existent une fonction continue non négative $K(t)$ et une constante positive $L > 2T+3$, telle que*

$$\|f(.,t,p_1,q_1) - f^*(.,t,p_2,q_2)\|_{B_2^1} \leq K(t) + L\left(\|p_1-p_2\|_{B_2^1} + \|q_1-q_2\|_{B_2^1}\right),$$
$$\forall u, u^* \in B_2^1 \text{ et } \forall t \in [0,T]. \tag{4.104}$$

Alors :

$$\|u(.,s) - u^*(.,s)\|^2_{B_2^1} \leq C_7\left(+\|\varphi-\varphi^*\|_{L^2} + \|\psi-\psi^*\|_{B_2^1} + \int_0^s K^2(t)\,dt\right),$$
$$\text{où, } C_7 = \frac{\max\left(1, \frac{L^2 l^2}{2} + \beta^2 + l^2\right)}{\min(1, L-2T-3)} \exp\left(\frac{2T}{\min(1, L-2T-3)}\right).$$

Démonstration. Soit $\rho(x,t) = u - u^*(x,t)$, alors $\rho(x,t)$ vérifie :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} - \alpha\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} - \beta\frac{\partial^3\rho}{\partial t\partial x^2} = f - f^*,$$
$$\rho(x,0) = \varphi(x) - \varphi^*(x) = \rho_0(x),$$
$$\frac{\partial\rho(x,0)}{\partial t} = \psi(x) - \psi^*(x) = \rho_1(x),$$
$$\frac{\partial\rho(l,t)}{\partial x} = 0,$$
$$\int_0^l \rho(x,t)\,dx = 0.$$

La formulation variationnelle

$$-\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left((0,T),B_2^1\right)} + \alpha\left(\rho, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2((0,T),L^2)} - \beta\left(\rho, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2((0,T),L^2)} - \left(\rho, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L^2\left((0,T),B_2^1\right)}$$
$$(\rho_1, v(.,0))_{B_2^1} - \beta(\rho_2, v(.,0))_{L^2} - (\rho_0, v(.,0))_{B_2^1}$$
$$= (f - f^*, v)_{L^2\left((0,T),B_2^1\right)}.$$

prenons

$$v(x,t)=\begin{cases} 0; & s\leq t\leq T \\ \int\limits_{t}^{s}\rho(x,\tau)\,d\tau=0; & 0\leq t\leq s \end{cases}.$$

où, s est un nombre arbitraire fixé dans $[0,T]$. La formulation variationnelle devient :

$$\int\limits_{0}^{s}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\frac{\partial v(..t)}{\partial t}\right)_{B_2^1}dt-\alpha\int\limits_{0}^{s}\left(\frac{\partial v(..t)}{\partial t},v(.,t)\right)_{L^2}dt+\beta\int\limits_{0}^{s}\left\|\frac{\partial v(..t)}{\partial t}\right\|_{L^2}^2dt+\int\limits_{0}^{s}\left\|\frac{\partial v(..t)}{\partial t}\right\|_{B_2^1}^2dt$$

$$=-\int\limits_{0}^{s}(f-f^*,v(.,t))_{B_2^1}dt-(\rho_1,v(.,0))_{B_2^1}-\beta(\rho_2,v(.,0))_{L^2}-(\rho_0,v(.,0))_{B_2^1}.$$

Où,

1

$$-\alpha\int\limits_{0}^{s}\left(\frac{\partial v(..t)}{\partial t},v(.,t)\right)_{L^2}dt=-\alpha\left(\frac{\partial v}{\partial t},v\right)_{L^2(0,s;L^2)}=\frac{\alpha}{2}\left\|v^2(x,s)-v^2(x.0)\right\|_{L^2}^2=\frac{\alpha}{2}\left\|v^2(x.0)\right\|_{L^2}^2.$$

2

$$\beta\int\limits_{0}^{s}\left\|\frac{\partial v(..t)}{\partial t}\right\|_{L^2}^2=\beta\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L^2(0,s;L^2)}.$$

3

$$\int\limits_{0}^{s}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\frac{\partial v(..t)}{\partial t}\right)_{B_2^1}dt=\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial v(..s)}{\partial t}\right\|_{B_2^1}^2-\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial v(..0)}{\partial t}\right\|_{B_2^1}^2=\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial v(..s)}{\partial t}\right\|_{B_2^1}^2-\frac{1}{2}\left\|\rho_0\right\|_{B_2^1}^2.$$

Insérons ces egalités dans le précédente, il vient :

$$\left\|\frac{\partial v(..s)}{\partial t}\right\|_{B_2^1}^2+\alpha\left\|v(x.0)\right\|_{L^2}^2+2\beta\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L^2(0,s;L^2)}+2\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L^2\left(0,s;B_2^1\right)}$$

$$=-2(\rho_1,v(.,0))_{B_2^1}-2\beta(\rho_2,v(.,0))_{L^2}-2(\rho_0,v(x,0))_{B_2^1}-2(f-f^*,v)_{L^2\left((0,T),B_2^1\right)}+\left\|\rho_0\right\|_{B_2^1}^2. \tag{4.105}$$

Tenant compte de la condition de Cauchy-Schwart et de l'inégalité (4.104) on aura

$$\begin{aligned}
-2\left(f-f^{*},v\right)_{L^2\left((0,T),B_2^1\right)} &\leq -2\int_0^s \left\|f-f^{*}\right\|_{B_2^1}\left\|v\right\|_{B_2^1}dt \\
&\leq 2\int_0^s \left(K\left(t\right)+L\left(\left\|u-u^{*}\right\|_{B_2^1}+\left\|\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u^{*}}{\partial t}\right\|_{B_2^1}\right)\right)\left\|v\right\|_{B_2^1}dt \\
&\leq 2\int_0^s \left(K\left(t\right)+L\left(\left\|\rho\right\|_{B_2^1}+\left\|\frac{\partial \rho}{\partial t}\right\|_{B_2^1}\right)\right)\left\|v\right\|_{B_2^1}dt \\
&\leq 2\int_0^s K\left(t\right)\left\|v\right\|_{B_2^1}dt+2L\int_0^s \left\|\rho\right\|_{B_2^1}\left\|v\right\|_{B_2^1}dt+2L\int_0^s \left\|\frac{\partial \rho}{\partial t}\right\|_{B_2^1}\left\|v\right\|_{B_2^1}dt.
\end{aligned}$$

Or, $\rho=\frac{\partial v}{\partial t}$ et $\frac{\partial \rho}{\partial t}=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$. Alors

$$-2\left(f-f^{*},v\right)_{L^2\left((0,T),B_2^1\right)} \leq 2\int_0^s K\left(t\right)\left\|v\right\|_{B_2^1}dt+2L\int_0^s \left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{B_2^1}\left\|v\right\|_{B_2^1}dt+2L\int_0^s \left\|\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right\|_{B_2^1}\left\|v\right\|_{B_2^1}dt.$$

Insérons cette dernière inégalité dans (4.105) on aura

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{\partial v\left(..s\right)}{\partial t}\right\|_{B_2^1}^2+\alpha\left\|v\left(x.0\right)\right\|_{L^2}^2+2\beta\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L^2\left(0,s;L^2\right)}+2\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L^2\left(0,s;B_2^1\right)} \\
&\leq 2\int_0^s K\left(t\right)\left\|v\right\|_{B_2^1}dt+2L\int_0^s \left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{B_2^1}\left\|v\right\|_{B_2^1}dt+2L\int_0^s \left\|\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right\|_{B_2^1}\left\|v\right\|_{B_2^1}dt. \\
&-2\left(\rho_1,v\left(.,0\right)\right)_{B_2^1}-2\beta\left(\rho_2,v\left(.,0\right)\right)_{L^2}-2\left(\rho_0,v\left(x,0\right)\right)_{B_2^1}+\left\|\rho_0\right\|_{B_2^1}^2. \qquad (4.106)
\end{aligned}$$

D'autre part ona

4

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left\|\frac{\partial v\left(.,t\right)}{\partial t}\right\|_{B_2^1}\left\|v\left(.,t\right)\right\|_{B_2^1}\right\}=\left\|\frac{\partial^2 v\left(.,t\right)}{\partial t^2}\right\|_{B_2^1}\left\|v\left(.,t\right)\right\|_{B_2^1}+\left\|\frac{\partial v\left(.,t\right)}{\partial t}\right\|_{B_2^1}^2,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int_0^s \left\|\frac{\partial^2 v\left(.,t\right)}{\partial t^2}\right\|_{B_2^1}\left\|v\left(.,t\right)\right\|_{B_2^1}dt &= \int_0^s \frac{\partial}{\partial t}\left\{\left\|\frac{\partial v\left(.,t\right)}{\partial t}\right\|_{B_2^1}\left\|v\left(.,t\right)\right\|_{B_2^1}\right\}dt-\int_0^s \left\|\frac{\partial v\left(.,t\right)}{\partial t}\right\|_{B_2^1}^2 dt \\
&= \left\|\frac{\partial v\left(.,s\right)}{\partial t}\right\|_{B_2^1}\left\|v\left(.,s\right)\right\|_{B_2^1}-\left\|\frac{\partial v\left(.,0\right)}{\partial t}\right\|_{B_2^1}\left\|v\left(.,0\right)\right\|_{B_2^1}-\int_0^s \left\|\frac{\partial v\left(.,t\right)}{\partial t}\right\|_{B_2^1}^2 dt.
\end{aligned}$$

La définition de $v\left(x,t\right)$ donne

$$\int\limits_0^s \left\| \frac{\partial^2 v\left(.,t\right)}{\partial t^2} \right\|_{B_2^1} \left\| v\left(.,t\right) \right\|_{B_2^1} dt = -\left\| \rho_0 \right\|_{B_2^1} \left\| v\left(.,0\right) \right\|_{B_2^1} - \int\limits_0^s \left\| \frac{\partial v\left(.,t\right)}{\partial t} \right\|_{B_2^1}^2 dt. \tag{4.107}$$

5

$$\begin{aligned} \int\limits_0^s \left\| \frac{\partial v\left(.,t\right)}{\partial t^2} \right\|_{B_2^1} \left\| v\left(.,t\right) \right\|_{B_2^1} dt &= \frac{1}{2} \int\limits_0^s \frac{\partial}{\partial t} \left(\left\| \frac{\partial v\left(.,t\right)}{\partial t} \right\|_{B_2^1} \right) dt = \frac{1}{2} \left\| v\left(.,s\right) \right\|_{B_2^1}^2 - \left\| v\left(.,0\right) \right\|_{B_2^1}^2 \\ &= -\left\| v\left(.,0\right) \right\|_{B_2^1}^2 . \end{aligned} \tag{4.108}$$

Insérons (4.107) et (4.108) et tenons compte de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, l'égalité (4.106) devient :

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{\partial v\left(..s\right)}{\partial t} \right\|_{B_2^1}^2 + \alpha \left\| v\left(x.0\right) \right\|_{L^2}^2 + 2\beta \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L^2\left(0,s;L^2\right)} + 2 \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L^2\left(0,s;B_2^1\right)} \\ &\leq \int\limits_0^s K^2\left(t\right) + \int\limits_0^s \left\| v \right\|_{B_2^1}^2 dt - 2L \left\| \rho_0 \right\|_{B_2^1} \left\| v\left(.,0\right) \right\|_{B_2^1} - 2L \int\limits_0^s \left\| \frac{\partial v\left(.,t\right)}{\partial t} \right\|_{B_2^1}^2 dt \\ &\quad -L \left\| v\left(.,0\right) \right\|_{B_2^1}^2 + \left(\left\| \rho_1 \right\|_{B_2^1}^2 + \left\| v\left(.,0\right) \right\|_{B_2^1}^2 \right) + \left(\beta^2 \left\| \rho_0 \right\|_{L^2}^2 + \left\| v\left(.,0\right) \right\|_{L^2}^2 \right) \\ &\quad + \left(\left\| \rho_0 \right\|_{B_2^1}^2 + \left\| v\left(.,0\right) \right\|_{B_2^1}^2 \right) + \left\| \rho_0 \right\|_{B_2^1}^2 . \end{aligned}$$

L'injection de L^2 dans B_2^1 donne :

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{\partial v\left(..s\right)}{\partial t} \right\|_{B_2^1}^2 + \alpha \left\| v\left(x.0\right) \right\|_{L^2}^2 + 2\beta \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L^2\left(0,s;L^2\right)} + 2 \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L^2\left(0,s;B_2^1\right)} \\ &\leq \int\limits_0^s K^2\left(t\right) + \int\limits_0^s \left\| v \right\|_{B_2^1}^2 dt + \left(L^2 \left\| \rho_0 \right\|_{B_2^1}^2 + \left\| v\left(.,0\right) \right\|_{B_2^1}^2 \right) - 2L \int\limits_0^s \left\| \frac{\partial v\left(.,t\right)}{\partial t} \right\|_{B_2^1}^2 dt \\ &\quad -L \left\| v\left(.,0\right) \right\|_{B_2^1}^2 + \left(\left\| \rho_1 \right\|_{B_2^1}^2 + \left\| v\left(.,0\right) \right\|_{B_2^1}^2 \right) + \left(\beta^2 \left\| \rho_0 \right\|_{L^2}^2 + \left\| v\left(.,0\right) \right\|_{L^2}^2 \right) \\ &\quad \frac{l^2}{2} \left\| \rho_0 \right\|_{L^2}^2 + \left\| v\left(.,0\right) \right\|_{B_2^1}^2 + \frac{l^2}{2} \left\| \rho_0 \right\|_{L^2}^2 . \end{aligned}$$

Autrement :

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{\partial v\left(..s\right)}{\partial t} \right\|_{B_2^1}^2 + \left(\alpha - 1\right) \left\| v\left(.,0\right) \right\|_{L^2}^2 + \left(L - 3\right) \left\| v\left(.,0\right) \right\|_{B_2^1}^2 + 2\beta \int\limits_0^s \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L^2}^2 dt + 2 \int\limits_0^s \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{B_2^1}^2 dt \\ &\leq \int\limits_0^s K^2\left(t\right) + \int\limits_0^s \left\| v \right\|_{B_2^1}^2 dt + \left(\frac{L^2 l^2}{2} + \beta^2 + l^2 \right) \left\| \rho_0 \right\|_{L^2}^2 + \left\| \rho_1 \right\|_{B_2^1}^2 - 2L \int\limits_0^s \left\| \frac{\partial v\left(.,t\right)}{\partial t} \right\|_{B_2^1}^2 dt. \end{aligned}$$

Si on prend $\alpha > 1$ et $L > 3$ on aura particulièrement :

$$\left\| \frac{\partial v\left(..s\right)}{\partial t} \right\|^2_{B_2^1} + (\alpha - 1)\left\| v\left(.,0\right)\right\|^2_{L^2} + (L-3)\left\| v\left(.,0\right)\right\|^2_{B_2^1}$$
$$\leq \int_0^s K^2\left(t\right) + \int_0^s \left\| v \right\|^2_{B_2^1} dt + \left(\frac{L^2 l^2}{2} + \beta^2 + l^2\right)\left\|\rho_0\right\|^2_{L^2} + \left\|\rho_1\right\|^2_{B_2^1}. \tag{4.109}$$

Introduisons une nouvelle fonction

$$\delta\left(x,t\right) = \int_t^0 \rho\left(x,\tau\right) d\tau.$$

D'aprés la définition de $v\left(x,t\right)$ il vient :

$$v\left(x,t\right) = \delta\left(x,s\right) - \delta\left(x,t\right) \text{ et } v\left(x,0\right) = \delta\left(x,s\right).$$

Ainsi l'inégalité (4.109) devient :

$$\left\| \frac{\partial v\left(..s\right)}{\partial t} \right\|^2_{B_2^1} + (\alpha - 1)\left\| \delta\left(x,s\right)\right\|^2_{L^2} + (L-3)\left\| \delta\left(x,s\right)\right\|^2_{B_2^1}$$
$$\leq \int_0^s K^2\left(t\right) + \left(\frac{L^2 l^2}{2} + \beta^2 + l^2\right)\left\|\rho_0\right\|^2_{L^2} + \left\|\rho_1\right\|^2_{B_2^1} + \int_0^s \left\| v\left(x,t\right) \right\|^2_{B_2^1} dt. \tag{4.110}$$

D'autre part :

$$\left\| v\left(x,t\right)\right\|^2_{B_2^1} = \left\| \delta\left(x,s\right) - \delta\left(x,t\right)\right\|^2_{B_2^1} \leq 2\left(\left\| \delta\left(x,s\right)\right\|^2_{B_2^1} + \left\| \delta\left(x,t\right)\right\|^2_{B_2^1}\right).$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\int_0^s \left\| v\left(x,t\right)\right\|^2_{B_2^1} dt &\leq 2\int_0^s \left(\left\| \delta\left(x,s\right)\right\|^2_{B_2^1} + \left\| \delta\left(x,t\right)\right\|^2_{B_2^1}\right) dt \\
&\leq 2s\left\| \delta\left(x,s\right)\right\|^2_{B_2^1} + 2\int_0^s \left\| \delta\left(x,t\right)\right\|^2_{B_2^1} dt \\
&\leq 2T\left\| \delta\left(x,s\right)\right\|^2_{B_2^1} + 2\int_0^s \left\| \delta\left(x,t\right)\right\|^2_{B_2^1} dt.
\end{aligned}$$

Moyennant cette dernière inégalité dans (4.110) on aura :

$$\left\| \frac{\partial v\left(..s\right)}{\partial t} \right\|^2_{B_2^1} + (\alpha - 1)\left\| \delta\left(x,s\right)\right\|^2_{L^2} + (L-2T-3)\left\| \delta\left(x,s\right)\right\|^2_{B_2^1}$$
$$\leq \int_0^s K^2\left(t\right) + \left(\frac{L^2 l^2}{2} + \beta^2 + l^2\right)\left\|\rho_0\right\|^2_{L^2} + \left\|\rho_1\right\|^2_{B_2^1} + 2\int_0^s \left\| \delta\left(x,t\right) \right\|^2_{B_2^1} dt.$$

En particulier :

$$\left\| \frac{\partial v(..s)}{\partial t} \right\|^2_{B^1_2} + (L - 2T - 3) \|\delta(x,s)\|^2_{B^1_2}$$
$$\leq \max\left(1, \frac{L^2 l^2}{2} + \beta^2 + l^2\right) \left(\int_0^s K^2(t) + \|\rho_0\|^2_{L^2} + \|\rho_1\|^2_{B^1_2} \right) + 2\int_0^s \|\delta(x,t)\|^2_{B^1_2} dt.$$

Où encore :

$$\left\| \frac{\partial v(..s)}{\partial t} \right\|^2_{B^1_2} + (L - 2T - 3) \|\delta(x,s)\|^2_{B^1_2}$$
$$\leq \max\left(1, \frac{L^2 l^2}{2} + \beta^2 + l^2\right) \left(\int_0^s K^2(t) + \|\rho_0\|^2_{L^2} + \|\rho_1\|^2_{B^1_2} \right)$$
$$+2\int_0^s \left(\|\delta(x,t)\|^2_{B^1_2} + \left\| \frac{\partial v(..s)}{\partial t} \right\|^2_{B^1_2} \right) dt.$$

Où :

$$\left\| \frac{\partial v(..s)}{\partial t} \right\|^2_{B^1_2} + \|\delta(x,s)\|^2_{B^1_2}$$
$$\leq \frac{\max\left(1, \frac{L^2 l^2}{2} + \beta^2 + l^2\right)}{\min(1, (L - 2T - 3))} \left(\int_0^s K^2(t) + \|\rho_0\|^2_{L^2} + \|\rho_1\|^2_{B^1_2} \right)$$
$$+\frac{2}{\min(1, (L - 2T - 3))} \int_0^s \left(\|\delta(x,t)\|^2_{B^1_2} + \left\| \frac{\partial v(..s)}{\partial t} \right\|^2_{B^1_2} \right) dt.$$

Le Lemme de Gronwall donne :

$$\left\| \frac{\partial v(..s)}{\partial t} \right\|^2_{B^1_2} + \|\delta(x,s)\|^2_{B^1_2}$$
$$\leq \frac{\max\left(1, \frac{L^2 l^2}{2} + \beta^2 + l^2\right)}{\min(1, (L - 2T - 3))} \times \exp\left(\frac{2T}{\min(1, (L - 2T - 3))} \right) \left(\int_0^s K^2(t) + \|\rho_0\|^2_{L^2} + \|\rho_1\|^2_{B^1_2} \right).$$

En particulier :

$$\left\| \frac{\partial v(..s)}{\partial t} \right\|^2_{B^1_2} \leq C_7 \left(\int_0^s K^2(t) + \|\rho_0\|^2_{L^2} + \|\rho_1\|^2_{B^1_2} \right).$$

Où :

$$C_7 = \frac{\max\left(1, \frac{L^2 l^2}{2} + \beta^2 + l^2\right)}{\min(1, (L - 2T - 3))} \exp\left(\frac{2T}{\min(1, (L - 2T - 3))} \right).$$

C'est-à-dire :

$$\|u(.,s) - u^*(.,s)\|^2_{B_2^1} \leq C_7 \left(+ \|\varphi - \varphi^*\|^2_{L^2} + \|\psi - \psi^*\|^2_{B_2^1} + \int_0^s K^2(t)\, dt \right).$$

Ceci achève la preuve et justifie la dépendance continue de la solution par rapport aux données initiales.

Bibliographie

[1] N. E. Benouar, N. I. Yurchuk, Mixed problem with an integral condition for parabolic equations with the Bessel operator, Differents. Uravn., Vol. 27 (1991), 2094-2098.

[2] N. E. Benouar, A. Bouziani, Mixed problem with an integral condition for a third order parabolic equation, Kobe.J. Math., Vol. 15 (1998), 47-58.

[3] N. E. Benouar, Problèmes aux limites pour une classe d'équations composites, CR. Acad. Sci.Paris, t, 319, Serie I, pp.953-958, (1994).

[4] A. Bouziani, On a class of nonclassical hyperbolic equations with nonlocal conditions. J. Appl. Math. Stochastic. Anal (15) (2002),no. 2, 135-153.

[5] A. Bouziani, On a class of nonlinear reaction-diffusion systems with nonlocal boundary conditions. Abstract and Applied Analysis. 9 (2004), 793-813.

[6] A. Bouziani, Mixed problem with boundary integral conditions for a certain parabolic equation, J. Appl. Math. Stochastic. Anal., Vol. 9 (1996), 323-330.

[7] A. Bouziani, Strong solution for a mixed problem with nonlocal condition for certain pluriparabolic equations, Hiroshima Math. J., Vol. 27 (1997), 373-390.

[8] A. Bouziani, On a class of parbolic equations with nonlocal boundary condition, Acad. Roy. Bel. Bull. Cl. Sa. (6) 10 (1999), n1-6, 61-77.

[9] A. Bouziani, On the quasi static fluxure of a thermoelastic rod, Commun. Appl. Anal. 6 (2002) n4, 549-568.

[10] A. Bouziani, Solution forte d'un problème mixte avec une condition non locale pour une classe d'équations paraboliques, Maghreb Math. Rev., Vol. 6 (1997), 1-17.

[11] A. Bouziani, On the solvabiity of a classof singular parabolic equations with nonlocal boundary conditions in nonclassical function spaces. Internat. J. Math & Math. Sci. 30 (2002), 435-447.

[12] A. Bouziani, Initial boundary value problem with nonlocal condition for a viscosity equation, Int. J. Math& math .Sci. 30 (2002), no 6, 327-338.

[13] A. Bouziani, On the solvability of parabolic and hyperbolic equations with a boundary integral condition, Internat. J. Math & Math. Sci. 31 (2002), 201-213.

[14] A. Bouziani, N. E. Benouar, Problème mixte avec conditions intégrales pour une classe d'équations hyperboliques, Bulletin of the Belgian Mathematical Society Sim. Stev., Vol. 31 (1996), 125-133.

[15] A. Bouziani, N. E. Benouar, Problème mixte avec conditions intégrales pour une classe d'équations paraboliques, C.R.A.S, Paris, Vol. 321, Série I, (1995) 1177-1182.

[16] A. Bouziani, T. S. Temsi, On a pseudohyperbolic equation with a nonlocal boundary condition. Kobe Journal of Mathematics, **21** (2004), no. 1-2, 15–31.

[17] A. Bouziani, M. S. Temsi, On a Quasilinear pseudohyperbolic equations with a nonlocal boundary condition. Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 3, 2009, no. 3, 109 - 120.

[18] N. Boubida, Existence globale pour des systèmes de reaction-diffusion avec contrôle de masse, Ph. D. Thesis, Université de Rennes I, France, 1999.

[19] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Masson, Paris, 1987.

[20] J. R. Cannon, S. P. Esteva, J. Van Der Hoek, A Galerkin procedure for the diffusion equation subject to the specification of mass, SIAM J. Numer.Anal., Vol. 24 (1987), 499-551.

[21] J. R. Cannon, S. P. Esteva, J. Van Der Hoek, Diffusion subject to the specification of mass, J. Math. Anal. Appl., Vol. 115 (1986), 517-529.

[22] M. Dehghan, A finite difference method for a nonlocal boundary value problem for tow-dimensional heat equation, Appl. Math. Comput. 112 (2000), no 1, 133-142.

[23] R. Dautry, J. L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Masson, Paris,1988.

[24] S. Godounov, Equations de la physique mathématique, O.P.U., Alger, 1992.

[25] A. Haraux and A. Youkana, On a result of K- Masuda concerning reaction-diffusion equations, Tohoku. Math. J. (2) 40 (1988), no 1, 159-163.

[26] S. L. Hollis, R. H. Martin and M. Pierre, Global existence and boundednes in reaction-diffusion system, SIAM J. Math. Anal. 18(1987) no 3, 744-761.

[27] N. I. Ionkin, Solution of boundary value problem in heat conduction theory with non local boundary conditions, Differentsial'nye Uravneniya, Vol. 13 (1977), 294-304.

[28] N. I. Kamynin, A boundary value problem in the theory of the heat conduction with non classical boundary condition, Th., Vychisl., Mat., Mat., Fiz., Vol. 43, (1964), 1006-1024.

[29] P. Krejic, J. Sprekels, Global solutions to a coupled parabolic-hyperbolic system with hysteris in 1-D Magnetoelasticity.

[30] Ken Deng, Non existence of global solutions of a nonlinear hyperbolic system, Transaction of the Americain Mathematical Society, V. 349 no 4 (1997) pp, 1685-1696.

[31] O. A. Ladyzhenskaya, The boundary value problems in mathematical physics, Springer-Verlag, Vol. 49, 1985.

[32] O. A. Ladyzhenskaya,V. Solonnikov, Linear and quasilinear equations of parabolic type, AMS Providence, 1968.

[33] Y. Lin, Parabolic partial differential equation subject to nonlocal boundary conditions, Ph.D. theses, Washington State University, Pullman, WA, 1988.

[34] J. L. Lions, Quelques méthodes pour la résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris, 1968.

[35] J. L. Lions, E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications, Dunod, Paris, 1968.

[36] Y. Lin, R. Tait, On a class of nonlocal parabolic boundary value problems, Inter. J. Eng. Sci., Vol. 32 (1994) pp.395-407.

[37] V. L. Makarov, D. T. Kulyev, Solution of a boundary-value problem for a quasilinear parabolic equation with a nonclassical condition, Differents. Uravn., Vol. 21 (1985), 296-305.

[38] R. H. Martin, M. Pierre, Nonlinear reaction-diffusion system, Nonlinear equations in the Applied Sciences, Math. Sci. Engrg. Vol, 185, Academic Press, Massachusetts, 1982, pp. 363-398.

[39] M. S. Moulay, L. Bougoffa, Generalized solutions to parabolic-hyperbolic equations, EJDE, Vol 9 (2003), pp, 1-6.

[40] S. Mesloub, A. Bouziani, Problème mixte avec conditions aux limites intégrales pour une classe d'équations paraboliques bidimensionnelles, Bull. Classe Sci., Acad. Roy. Belgique, Vol. 9 (1998), 59-71.

[41] V. Milkhilov, Equations aux dérivées Partielles, Editions de Moscou, 1982.

[42] C. V. Pao, Dynamics of reaction-diffusion equations with nonlocal boundary conditions, Quart. Appl. Math. 53 (1995), no1, 173-186.

[43] C. V. Pao, Numerical solutions of reactions-diffusion equations with nonlocal boundary conditions, J. Comput. appl. Math. 88 (1998), no1, 225-238.

[44] P. Shi, M. Shillor, K. Andreus and S. Wright, A parabolic system modelling the thermoelastic contact of tow rods. Quart. Appl. math., Vol 53 (1995) pp. 53-68.

[45] P. Shi, Weak solution to an evolution problem with a nonlocal constraint, SIAM J. Math.Anal., Vol. 24 (1993), 46-58.

[46] M. R.Spiegel, Analyse de Fourier et applications aux problèmes de valeurs aux limites, McGraw-Hill Inc, New York, 1974.

[47] I. V. Suveika, Problems for an equation describing the propagation of disturbances in viscous media, Differentsial'nye Uravn., Vol. 19 (1983), 337-347.

[48] V. Smirnov, Cours de Mathématiques Supérieures, Vol. 2 & 4, Editions de Moscou, 1984..

[49] A. Tikhonov, O. A. Samarskii, Equations de la physique mathématique, Editions de Moscou, 1984.

[50] V. S. Vladimirov, Equations of mathematical physics, Mir Publishers, Moscow, 1984.

[51] N. I. Yurchuk, Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations, Differents. Uravn., Vol. 22 (1986), 2117-2126.

ملخص

البحث في هده الرسالة موجه لدراسة

جملة معادلات شبه خطية من النمط التكافئ في وسط لزجة من النمط الزائدي في وسط لزج و من النمط التكافئ - الزائدي في وسط لزج مع شرط تكاملي .

بواسطة المتراجحات الطاقوية اثبتنا الوجود الوحدانية و الارتباط المستمر بالمعطيات.

كلمات مفاتيح

نمط تكافئ فى وسط لزج نمط زائدي في وسط لزج حل قوي حل ضعيف الارتباط المستمر شبه خطية شرط تكاملي شرط نيومن متراجحات طاقوية مسالة متقاربة.

الفضاءات

$B_2^1(0,l)$, $L^2(0,T;B_2^1(0,l))$,$L^2(0,T;L^2(0,l))$,$C(0,T;B_2^1(0,0l))$,$C(0,T;L^2(0,l))$.

Résumé

Cette thèse est vouée à l'étude de systèmes d'équations pseudo- paraboliques, pseudo-hyperboliques et pseudo-par-hyperboliques semi-linéaires(ou quasi-linéaires),avec condition intégrale. Par des inégalités énergétiques, on a démontré 'existence, l'unicité et la dépendance continue par rapport aux données.

Mots clés

Pseudo- parabolique, pseudo- hyperbolique, solution classique, solution faible, dépendance continue, semi- linéaire, condition intégrale, condition de Neumann, estimations à priori, problème approché.

Espaces

$B_2^1(0,l)$, $L^2(0,T;B_2^1(0,l))$,$L^2(0,T;L^2(0,l))$,$C(0,T;B_2^1(0,0l))$,$C(0,T;L^2(0,l))$

Abstract

This thesis is devoted to the study: system of equations of pseudo-parabolic, pseudo-hyperbolic, and pseudo-Para-hyperbolic semilinear(or quasi-linear) with integral condition. With inequality energetically we etablish unicity,existance, and continuous dependence.

Key words

Pseudo-parabolic, pseudo-hyperbolic, classical solution weak solution, continuous dependence, semi-linear, inequality energetically, approximation problem.

Spaces

$B_2^1(0,l)$, $L^2(0,T;B_2^1(0,l))$,$L^2(0,T;L^2(0,l))$,$C(0,T;B_2^1(0,0l))$,$C(0,T;L^2(0,l))$.