RÉPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MENTOURI - CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre :..............................
Série :.....................................

THESE

Présentée pour obtenir

***Le GRADE de* DOCTEUR EN SCIENCES**

En: Mathématiques

Sujet:

Sur la minimisation de la norme d'un opérateur élémentaire et applications.

Option :
Analyse Fonctionnelle

Présentée par :

Mecheri Hacene

Devant le jury :

Président : *Benkafadar Necer-eddine* Professeur Université de Constantine.

Rapporteur : Salah Mecheri Professeur Taibah University.

Examinateurs:

1 Marhoune A. Lakhdar Professeur Université de Constantine.

2 Chorfi Lahcen Professeur Université de Annaba.

3. kelaia smail Professeur Université de Annaba.

Soutenue le : / / **2013**

.

Remerciements

Tout d’abord nous rendons grâce à Dieu tout puissant qui nous a permis d’achever ce travail dans de bonnes conditions.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse **Prof. Mecheri Salah** professeur au Taibah University, qui m'a initié à la recherche. Ses enseignements et son analyse des problèmes mathématiques sont des savoirs inestimables, qu'il m'a fait partager sans ménager son temps. Je le remercie pour la confiance constante qu'il m'a accordée, sa disponibilité et ses encouragements pour me guider dans mes recherches.

Je remercie **Prof. N . Benkafadar**, pour l’honneur qu’il me fait en présidant le jury de cette thèse.

Je remercie également **Prof. Mecheri Salah**, **Prof. Marhoune A. Lakhdar**, **Prof. Chorfi lahcen**, et **Prof. Kelaia. Ismail**, d’avoir accepté d’examiner ce travail et faire partie du jury, et je les en remercie sincèrement.

Je souhaite aussi saluer en cette occasion mes amis , Naui, Fateh, Akram, Jedi, Ilias, Samir, Noury, Ismail, Kamel, Abdessadek, Haouem et les autres . . .

Je voudrais aussi rendre hommage à Saidia Mohammed et son famille.

J'ai une pensée très affectueuse pour ma famille, et une profonde reconnaissance pour mes parents et mes frères « tayeb, Karim,Salah ».

Table des matières

University of Constantine

Université Constantine 1

Ex Université Mentouri - Constantine

Sur la minimisation de la norme d'un opérateur élémentaire et applications

Présentée par
Hacene Mecheri

Dirigé par le Professeur
Salah Mecheri

2-Jul-2013

- Introduction

- Introduction
- Résultats principaux

- Introduction
- Résultats principaux
- La dérivée de Gâteaux et l'orthogonalité dans B(H)

Introduction

Soit H un espace de Hilbert complexe, séparable de dimension infinie et soit $B(H)$, l'algèbre des opérateurs lineaires bornés sur H.
Pour un opérateur $A \in B(H)$, soit δ_A la dérivation intérieure induite par A et définie par

$$\delta_A : \; B(H) \to B(H)$$

$$\delta_A(X) = AX - XA, \quad X \in B(H).$$

Il est connu que l'opérateur identité I n'est pas un commutateur, c'est-à-dire que pour tout $A \in B(H)$, $I \notin Im(\delta_A)$ où $Im(\delta_A)$ désigne l'image de dérivation δ_A.

Introduction

Néaumois J. H. Anderson a prouvé dans [2] l'existance d'un opérateur $B \in B(H)$ tel que $I \in \overline{Im(\delta_B)}$, (où $\overline{Im(\delta_B)}$ est la fermeture de $Im(\delta_B)$, pour la topologie uniforme sur $B(H)$, i.e. $dist(I, Im(\delta_B)) = 0$. Cela a permis de définir une nouvelle classe non vide d'opérateurs:

$$JA(H) = \left\{ A \in B(H);\ I \in \overline{Im(\delta_A)} \right\}.$$

On sait qu'en dimension finie on a toujour $dist(I, Im(\delta_A)) = 1$, alors qu'en dimension infinie ceci n'est pas toujours vrai.

Introduction

Dans [47], J. P. Williams a introduit la notion d'opérateurs finis c'est-à-dire la classe (H) des opérateurs A de $B(H)$ tels que $dist(I, Im(\delta_A)) = 1$, i.e. la classe définie par

$$(H) = \{A \in B(H) / \ \|AX - XA - I\| \geq 1, \forall X \in B(H)\}$$

Autrement dit la classe des opérateurs A de $B(H)$ tels que $Im\,(\delta_A)$ est orthogonale à l'opérateur identité I au sens de Birkhoff.

Introduction

Notre travail est consacré à l'étude des opérateurs finis et leurs caractérisations. Dans [19] S. Mecheri a donné plusieurs classes d'opérateurs finis. Dans [20] l'auteur a montré que la classe des opérateurs finis n'est pas invariante ni par similitude ni par perturbation compacte, il a montré aussi que cette classe est invariante par équivalence unitaire et il a donné de nouvelles caractérisations des opérateurs finis. Dans [17], S. Mecheri a introduit la notion d'opérateurs finis généralisés :

$$G(H) = \{(A, B) \in B(H) \times B(H); \|I - (AX - XB)\| \geq 1, \ \forall X \in B(H)\}.$$

Introduction

Autrement dit la classe des couples d'opérateurs (A, B) de $B(H) \times B(H)$ tels que $Im\,(\delta_{A,B})$ est orthogonale à l'opérateur identité I au sens de Birkhoff , où $\delta_{A,B}$ est la dérivation généralisée induite par $A, B \in B(H)$ définie par

$$\delta_{A,B} : B(H) \to B(H)$$

$$\delta_{A,B}(X) = AX - XB, \quad X \in B(H).$$

Ceci généralise la notion d'opérateurs finis.
Dans le premier chapitre on est tenu à donner une synthèse bibliographique concernant les espaces lisses et les espaces de norme différentiables au sens de la dérivée de Gâteaux**,** Propriété des operateurs dans un espace de Banach et un espace de Hilbert.

Introduction

Dans le deuxième chapitre on minimise dans C_∞, la norme des applications affines convenables de $B(H)$ à C_∞, en utilisant l'analyse convexe et différentielle (dérivée de Gâteaux) ainsi que les données de la théorie des opérateurs. Les applications considérées généralisent ce qu' on appelle "opérateur élémentaire" et en particulier les dérivations généralisées, qui sont trés importantes par elles mêmes. Les résultats principaux obtenus caractérisent le minimum global en termes d'orthogonalité et constitue une combinaison interéssante de l'analyse différentielle dans les dimensions infinies, la theorie d'opérateur et la dualité. Ceci nous amène à caractériser l'orthogonalité au sens de Birkhoof dans C_∞.
Dans le troisième chapitre on minimise dans $B(H)$, la norme des applications affines convenables de $B(H)$ à $B(H)$, en utilisant l'analyse convexe et defférentielle (dérivée de Gâteaux) ainsi que les données de la théorie d'opérateur.

Dérivée de Gâteaux et orthogonalité dans C_∞

Le but de ce chapitre est de minimiser, dans C_∞, la norme des applications affines convenables de $B(H)$ à C_∞, en utilisant l'analyse convexe et différentielle (dérivée de Gâteaux) ainsi que les données de la théorie d'opérateurs.
Les applications considérées généralisent ce qu' on appelle "opérateur élémentaire" et en particulier les dérivations généralisées, qui sont trés importantes par elles mêmes. Les résultats principaux obtenus caractérisent le minimum global, en termes d'orthogonalité, et constitue une combinaison interéssante de l'analyse différentielle dans les dimensions infinies, la theorie d'opérateur et la dualité. Ceci nous amène à caractériser l'orthogonalité au sens de Birkhoof dans C_∞.

Dérivée de Gâteaux et orthogonalité dans C_∞

Soit V un espace de Banach complexe. Rappelant que la norme $\|.\|$ de l'espace de Banach V est dite Gâteaux différentiable au point non nul $x \in V$ si

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} = ReD_x(y), \ \forall y \in V, \ t \in \mathbb{R}^+,$$

Ici Re: désigne la partie reélle et D_x est le support fonctionnel unique (dans l'espace dual $V^\star$) tel que

$$\|D_x\| = 1, \ D_x(x) = \|x\|, \ [9,12] .$$

Dérivée de Gâteaux et orthogonalité dans C_∞

Il est très bien connu (voir [13] et les références qu'il donne) que pour, $1 < p < \infty$, la classe C_p de Von Neuman-Schatten est un espace de Banach uniformément convexe. Donc tout point non nul $T \in C_p$ est un point lisse et dans ce cas, le support fonctionnel de T est donné par

$$D_T(X) = tr\left[\frac{|T|^{p-1}UX^\star}{\|T\|_p^{p-1}}\right]. \tag{1}$$

pour tout $X \in C_p$ où $T = U|T|$ est la décomposition polaire de T. Le premier résultat concernant l'orthogonalité dans l'espace de Banach a été donné par Anderson [2] montrant que si A est un opérateur normal dans l'espace de Hilbert H, alors $AS = SA$ implique que chaque opérateur linéaire borné X vérifie

$$\|S + AX - XB\| \geq \|S\|, \tag{2}$$

Dérivée de Gâteaux et orthogonalité dans C_∞

Ceci veut dire que l'image de dérivation

$$\delta_A : B(H) \to B(H),$$

définie par

$$\delta_A(X) = AX - XA,$$

est orthogonal au noyau de δ_A
Ce résultat a été généralisé dans deux directions, par extension à la classe des applications élémentaires

$$E : B(H) \to B(H),$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} A_i X B_i,$$

et

$$\breve{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} A_i X B_i - X,$$

où $(A_1, A_2, ..., A_n)$ et $(B_1, B_2, ..., B_n)$ sont n-tuples des opérateurs bornnés dans H.
Et par l'extention de l'inégalité (2.2) à C_P–Classes avec $1 < p < \infty$, voir [14] et [17]. Le concept de dérivée de Gâteaux a été utilisé dans [11, 14, 15, 20] et [16], dans tous ces travaux, A n'était pas arbitraire. La caractérisation de $T \in C_p$ pour $1 < p < \infty$ et qui sont orthogonaux à $Im(\delta_A|C_p)$ (l'image de $\delta_A|C_p$), pour un opérateur géneral A, a été démontré par F. Kittaneh [8] qui a montré que si $T = U \mid T \mid$ est la décomposition polaire de T alors

$$\|T + \delta_A(X)\|_p \geq \|T\|_p \forall X \in C_P, \tag{3}$$

pour tout $X \in C_p$, $(1 < p < \infty)$, si et seulement si

$$|T|^{p-1} U^\star \in Ker\delta_A.$$

Dérivée de Gâteaux et orthogonalité dans C_∞

Remarquons

$$\|T+\delta_A(X)\|_p \geq \|T\|_p \, \forall X \in C_P \Longleftrightarrow |T|^{p-1}\, U^\star \in Ker\delta_A.$$

Definition

Soit C_∞ la classe des opérateurs compacts avec

$$\|T\|_{C_\infty} = \underset{\|f\|=1}{Sup}\|Tf\|,$$

représentant la norme usuelle de l'opérateur et pour caractiriser ces opérateurs qui sont orthogonaux à l'image d'une dirivation dans C_∞, on caractérise en premier lieu. Le minimum global de l'application

$$X \to \|S+\Phi(X)\|_{C_\infty},$$

dans C_∞ par l'utilisation de la dérivée de Gâteaux, où Φ est une application linéaire dans $B(H)$.

Dérivée de Gâteaux et orthogonalité dans C_∞

Ces résultats sont alors appliqués pour caractériser les opérateurs $S \in C_\infty$ qui sont orthogonaux à l'image d'opérateurs élémentaires. Soit $B(H)$ l'algèbre de tout les opérateurs lineaires bornés dans un espace de Hilbert H, complexe, séparable de dimension infinie $T \in B(H)$ un compact et soit

$$S_1(T) \geq S_2(T) \geq ..... \geq 0,$$

les valeurs singulières de T, i.e., les valeurs propres de

$$|T| = (T^\star T)^{\frac{1}{2}},$$

dans leur ordre décroissant.

Dérivée de Gâteaux et orthogonalité dans C_∞

Definition

L'opérateur T appartient à l'espace Schatten p–classes C_P, si

$$\|T\|_p = \left[\sum_{i=1}^{\infty} S_i(T)^p\right]^{\frac{1}{p}} = [tr(T)^p]^{\frac{1}{p}} < \infty,\ 1 \leq p < \infty,$$

où

tr : est la trace fonctinelle,

C_1 : est la classe de trace,

C_2 : est la classe de Hilbert-Schmidt,

C_∞ : est la classe des opérateurs compacts avec,

$$\|T\|_\infty = S_i(T) = \underset{\|f\|=1}{Sup}\|Tf\|,$$

définissant la norme usuelle de l'opérateur.

Dérivée de Gâteaux et orthogonalité dans C_∞

Pour la théorie générale p-classes de Schatten, le lecteur peut se référer à [22]. Nous établissons le théorème suivant, qu'on utilisera pour démontrer notre résultat principal Théorème 2.2.2. Nous rappelons que $A = U|A|$, est la décomposition polaire de $A \in B(H)$, où U est une isométrie partielle, $KerU = Ker(A^*A)$ et $A^*A = |A|^2$. Cette décomposition est unique.

Dérivée de Gâteaux et orthogonalité dans C_∞

Theorem

Soit $X, Y \in C_\infty$. Alors

$$D(X, Y) = \max_{\substack{f \in \Gamma \\ \|f\|=1}} \{Re \langle U^\star Yf, f\rangle\},$$

où $X = U|X|$ est la decomposition polaire de X et Γ est le sous-espace dans lequel $X \in C_\infty$ atteint sa norme.

Theorem

Soit $(V, \|.\|)$ un espace de Banach arbitraire et F une application définie come suit

$$F : V \to \mathbb{R}.$$

Si F a un minmum global en $v \in V$ alors

$$DF(v, y) \geq 0 \quad \forall y \in V.$$

Résultats principaux

Soient X un espace de Banach et Φ une application linéaire Φ: $X \to X$ telle que

$$\Psi(x) = \Phi(x) + S$$

pour quelques éléments $S \in X$. Soit $f, g \in X$, on définit l'opérateur

$$f \otimes g : \ x \to \langle x, f \rangle \, g$$

et

$$tr\left[T\left(f \otimes g\right)\right] = \langle Tg, f \rangle \, .$$

Le théorème suivant est une simple conséquence du résultat connu dans l'analyse convexe (la condition nécessaire et suffisante pour l'optimalité).

Theorem

L'application $F_\Psi(x) = \|\Psi(x)\|$ a un minimum global en $x \in X$ si et seulement si

$$D_{\Psi(x)}(\Phi(Y)) \geq 0, \quad \forall Y \in X. \tag{4}$$

Résultats principaux

Ceci donne une condition d'optimalité nécéssaire et suffisante pour minimiser F_Ψ dans $C_\infty-$classes.
Soit

$$\Phi : \ B(H) \to B(H)$$

une application linéaire, On a

$$\Phi(\alpha X + \beta Y) = \alpha\Phi(X) + \beta\Phi(Y), \quad \forall \alpha, \beta, X, Y \in B(H).$$

Notons que

$$U = \{X \in B(H) : \Phi(X) \in C_\infty\},$$

et

$$\Psi : U \to C_\infty$$

définie par

$$\Psi(X) = \Phi(X) + S.$$

Résultats principaux

On définit la fonction $F_\Psi : U \to \mathbb{R}^+$ par

$$F_\Psi(X) = \|\Psi(X)\|_{C_\infty}.$$

Dans le théorème suivant on caractérise le minimum global de F_Ψ dans C_∞ où Φ est une application linéaire satisfaisant

$$tr(X\Phi(Y)) = tr(\Phi^\star(X)Y), \quad \forall X, Y \in C_\infty \tag{5}$$

où $\Phi^\star$ est un conjugué convenable de l'application Φ.
Rappelant que $\Phi^\star$ est la définition de l'application adjointe de Φ.

Résultats principaux

Example

Un exemple de Φ et $\Phi^\star$ qui satisfait la condition (2.5) est donné par l'opérateur élémentaire $E : \Im \to \Im$ tel que

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} A_i X B_i,$$

où $(A_1, A_2, ..., A_n)$ et $(B_1, B_2, ..., B_n)$ sont n-tuples des opérateurs bornés dans l'espace de Hilbert et $\Im$ est un ideal opérateur séparable compact associé avec quelques normes unitaire invariantes. Dans [12], Keckic a montré que l'opérateur conjugué de E est donné par

$$E^\star : \Im^\star \to \Im^\star,$$

$$E^\star(X) = \sum_{i=1}^{n} B_i X A_i.$$

Résultats principaux

Theorem

Soit $V \in C_\infty$ *un point lisse et soient* $\Psi(V) = U\,|\Psi(V)|$ *la décomposition polaire de* $\Psi(V)$, $f \in \Gamma$, *alors* F_Ψ *a un minimum global* V *dans* C_∞, *si et seulement si*

$$(f \otimes Uf) \in \ker \Phi^\star.$$

Soit $\Phi = \delta_{A,B}$, où $\delta_{A,B}$: $B(H) \to B(H)$ est la dérivation généralisée définie par

$$\delta_{A,B}(X) = AX - XB.$$

Corollary

Soit $V \in C_\infty$ *et* $\Psi(V) = U\,|\Psi(V)|$ *est la décomposition polaire de* $\Psi(V)$ *et soit* $f \in \Gamma$. *Alors* F_Ψ *a un minimum global* V *dans* C_∞, *si et seulement si*

$$(f \otimes Uf) \in Ker\delta_{B^*,A^\star}.$$

Résultats principaux

Ce résultat peut être reformulé d'une autre façon où le minimum global V n'aparait pas.
Ce résultat caractérise les opérateurs V dans C_∞qui sont orthogonaux à l'image de la dérivation $\delta_{A,B}$.
Soit Γ le sous-espace dans le quel l'opérateur $S \in C_\infty$ atteint sa norme.
Soit $\Phi = \delta_{A,B}$, où $\delta_{A,B}$: $B(H) \to B(H)$ est la dérivation généralisée définie par

$$\delta_{A,B}(X) = AX - XB.$$

Corollary

Soit $V \in C_\infty$ et $\Psi(V) = U\,|\Psi(V)|$ est la décomposition polaire de $\Psi(V)$ et soit $f \in \Gamma$. Alors F_Ψ a un minimum global V dans C_∞, si et seulement si

$$(f \otimes Uf) \in Ker\delta_{B^*,A^\star}.$$

Résultats principaux

Ce résultat peut être reformulé d'une autre façon où le minimum global V n'aparait pas.
Ce résultat caractérise les opérateurs V dans C_∞qui sont orthogonaux à l'image de la dérivation $\delta_{A,B}$.
Soit Γ le sous-espace dans le quel l'opérateur $S \in C_\infty$ atteint sa norme.

Theorem

Soit $S \in C_\infty,\ \Psi(S) = U\left|\Psi(S)\right|$ et $f \in \Gamma$. Alors

$$\|S + AX - XB\|_{C_\infty} \geq \|\Psi(S)\|_{C_\infty}\, \forall X \in C_\infty,$$

et

$$(f \otimes Uf) \in Ker\delta_{B^\star, A^\star}.$$

Résultats principaux

Comme corollaire de ce théorème nous avons,

Corollary

Soit $S \in C_\infty \cap Ker\delta_{A,B}$, $\Psi(S)$ *a la décomposition polaire* $\Psi(S) = U\,|\Psi(S)|$ *et soit* $f \in \Gamma$. *Alors les deux assertions qui suivent sont équivalantes*

$$\|S + AX - XB\|_{C_\infty} \geq \|\Psi(S)\|_{C_\infty}, \quad \forall X \in C_\infty. \tag{6}$$

$$(f \otimes Uf) \in Ker\delta_{B^\star, A^\star}.$$

Maintenant nous allons présenter une autre caractérisation de l'orthogonalité au sens de Birkhoff .

Résultats principaux

Theorem

Soient $S, Y \in C_\infty$ et $\varphi \in \Gamma$ où $S = U|S|$ est un point lisse dans C_∞, alors les conditions suivantes sont équivalantes

$$L'application\ F_\Psi\ a\ un\ minimum\ globale\ \ S \in C_\infty. \tag{7}$$

$$\max_{\substack{\varphi\in\Gamma \\ \|\varphi\|=1}} \{Re\,\langle \Phi(Y)\varphi, U\varphi\rangle\} \geq 0. \tag{8}$$

$$tr((\varphi \otimes U\varphi)\Phi(Y)) = 0, \quad \forall Y \in C_\infty. \tag{9}$$

$$\Phi(Y)\varphi \perp S\varphi. \tag{10}$$

On note que l'ensemble

$$\{\langle X^*\Phi(Y)f, f\rangle / f \in \Gamma : \|f\| = 1\},$$

est l'image numérique de $X^*\Phi(Y)$ dans le sous espace Γ.

Résultats principaux

En conséquence du théoreme précédent nous obtenons.

Corollary

Soit $\Phi(Y) = AY - YB,\ S,\ Y \in C_\infty$ *et* $\varphi \in \Gamma$ *où* $S = U\,|S|$ *est un point lisse dans* C_∞. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

$$\text{L'application } \|S + AY - YB\|_{C_\infty} \text{ a un minimum globale } S \in C_\infty, \tag{11}$$

$$\max_{\substack{\varphi\in\Gamma \\ \|\varphi\|=1}} \{Re\,\langle (AY - YB)\varphi, U\varphi\rangle\} \geq 0,\ \forall Y \in C_\infty, \tag{12}$$

$$tr\,((\varphi \otimes U\varphi)(AY - YB)) = 0,\ \forall Y \in C_\infty, \tag{13}$$

$$(AY - YB)\varphi \perp S\varphi,\ \forall Y \in C_\infty, \tag{14}$$

Résultats principaux

Si on suppose que $S \in Ker\ \delta_{A,B}$, on obtient.

Corollary

Soient $\Phi(Y) = AY - YB$, $S, Y \in C_\infty$ *et* $\varphi \in \Gamma$ *où* $S = U\,|S|$, *et un points lisse dans* C_∞. *Alors les conditions suivantes sont équivalantes*

$$\|S + AY - YB\|_{C_\infty} \geq \|S\|\,,\ \forall S \in Ker\delta_{A,B}, \tag{15}$$

$$\max_{\substack{\varphi\in\Gamma\\ \|\varphi\|=1}} \{Re\,\langle (AY - YB)\varphi, U\varphi\rangle\} \geq 0, \quad \forall Y \in C_\infty, \tag{16}$$

$$tr((\varphi \otimes U\varphi)(AY - YB)) = 0, \quad \forall Y \in C_\infty. \tag{17}$$

$$(AY - YB)\varphi \perp S\varphi, \quad \forall Y \in C_\infty. \tag{18}$$

Si on prend $\Phi(Y) = Y$ on obtient le corollaire suivant qui caractérise l'orthogonaité au sens de Birkhoff de deux opérateurs dans C_∞.

Résultats principaux

Corollary

Soient $S, Y \in C_\infty$ *et* $\varphi \in \Gamma$ *où* $S = U|S|$ *et un points lisse dans* C_∞. *Alors les conditions suivantes sont équivalantes*

$$Y \perp S \text{ , au sens de Birkhoff.} \tag{19}$$

$$\max_{\substack{\varphi\in\Gamma \\ \|\varphi\|=1}} \{Re \langle (Y\varphi, U\varphi\rangle\} \geq 0, \quad \forall Y \in C_\infty, \tag{20}$$

$$tr((\varphi \otimes U\varphi)Y) = 0, \quad \forall Y \in C_\infty. \tag{21}$$

$$Y\varphi \perp S\varphi, \quad \forall Y \in C_\infty. \tag{22}$$

La dérivée de Gâteaux et l'orthogonalité dans B(H)

Soit $B(H)$ l'algèbre de tous les opérateurs lineaire bornés dans un espace de Hilbert H, complexe, séparable de dimention infinie. Il est connu que les points lisses de $K(H)$ sont les opérateurs compactes qui atteignent leurs norme en un unique (moyennant une multiplication par une constante de module un) vecteur unitaire.
Il a été montré dans [1] que $T \in B(H)$ non nul est un point lisse si et seulement si T atteint sa norme sur un vecteur unitaire unique (moyennant une multiplication par une constante de module un) $e \in H$ et $\|Te\| = \|T\|$. Dans ce cas

$$D_T(X) = Retr\left[\frac{(e \otimes Te)}{\|T\|}X\right] = Re\left\langle Xe, \frac{Te}{\|T\|}\right\rangle, \qquad (23)$$

$\forall X \in B(H), où\langle , \rangle$ désigne le produit scalaire sur H et $(e \otimes Te)$ est l'opérateur de rang un, défini par

$$(e \otimes Te)f = \langle f, Te\rangle\, e, \quad \forall f \in H\ .$$

La dérivée de Gâteaux et l'orthogonalité dans B(H)

Le premier résultat concernant l'orthogonalité dans l'espace de Banach a été donné par Andersson [2], montrant que, si A est un opérateur normale dans un espace de Hilbert H Alors $AS = SA$ implique que, pour tout opérateur linéaire borné X vérifie

$$\|S + AX - XA\| \geq \|S\| . \tag{24}$$

Ceci veut dire que l'image de dérivation δ_A: $B(H) \to B(H)$ définie par

$$\delta_A(X) = AX - XA$$

est orthogonale aux noyau.de δ_A.
Ce resultat a été généralisé dans deux directions.

La dérivée de Gâteaux et l'orthogonalité dans B(H)

Par l'extention de la classe des applications élémentaires

$$E : B(H) \to B(H),$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} A_i X B_i.$$

et

$$\breve{E} : B(H) \to B(H),$$

$$\breve{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} A_i X B_i - X,$$

où $(A_1, A_2, ..., A_n)$ et $(B_1, B_2, ..., B_n)$ sont n-tuples d'opérateurs bornés sur H.

Et par l'extention de l'inégalité (1.3) à C_P-Classes avec $1 < p < \infty$, voir [3] et [18] .

La dérivée de Gâteaux et l'orthogonalité dans B(H)

Le concept de la dérivée de Gâtaeux a été utilisé dans [3] , [15 − 16] et [20] , pour la caractirisation des opérateurs qui sont orthogonaux à l'image de dérivation. Dans ces articles l'attention a été porté sur les C_P–Classes pour quelques $p \geq 1$, nous intéressons, dans cette partie, à la caractérisation du minimum global de l'application

$$X \to \|S + \Phi(X)\|$$

où Φ est une application linéaire dans $B(H)$, en utilisant la dérivée de Gâteaux.
Ces résultats ont été alors appliqué pour caractériser les opérateurs $S \in B(H)$ qui sont orthogonaux à l'image des opérateurs élémentaires sur les points lisses.
Il est très interéssant de faire ressortir le fait que ces résultats ont été réalisés dans C_p classes, avec $1 \leq p < \infty$, mais d'après nos connaissances, il n'a pas été traité dans $B(H)$ jusqu'à maintenant.

La dérivée de Gâteaux et l'orthogonalité dans B(H)

Soit X un espace de Banach, Φ une application linéaire $X \longrightarrow X$ et

$$\Psi(x) = \Phi(x) + S,$$

pour quelques éléments S.
En utilisant la notation

$$D_x(y) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t},$$

où D_x est une sous-additivité et telle que

$$D_x(y) \leq \|y\|,$$

aussi

$$D_x(x) = \|x\|.$$

et

$$D_x(-x) = -\|x\|.$$

La dérivée de Gâteaux et l'orthogonalité dans B(H)

Theorem

L'application $F_\Psi(x) = \|\Psi(x)\|$ *a un minimum global* $x \in X\Lambda$, *si et seulement si*

$$D_{\Psi(x)}(\Phi(y)) \geq 0, \quad \forall y \in X \tag{25}$$

Maintenant, nous astreignons notre attention à $B(H)$. Dans le théoreme suivant, on caractérise le minimum globale de F_Ψ dans $B(H)$ quand Φ est une appliacation linéaire.

Theorem

Soit $V \in B(H)$ *un point lisse et* f *est un vecteur unique pour lequel* V *atteint sa norme. Alors* F_Ψ *a un minimum global* V *dans* $B(H)$ *si et seulement si* $\exists f \in H$ *avec* $\|f\| = 1$ *tel que*

$$tr((f \otimes Vf)\,\Phi(Y)) = 0, \quad \forall Y \in B(H).$$

La dérivée de Gâteaux et l'orthogonalité dans B(H)

Soit $\Phi = \delta_{A,B}$, où

$$\delta_{A,B} : B(H) \to B(H)$$

est la dérivation généralisée définie par

$$\delta_{A,B}(X) = AX - XB.$$

Corollary

Soit $V \in B(H)$ un point lisse et f un vecteur unitaire sur le quel V atteint sa norme alors, F_{Ψ} a un minimum global V dans $B(H)$ si et seulement si

$$f \otimes \Psi(V) f \in Ker\delta_{B,A}.$$

Ce résultat peut être reformulé d'une autre façon où le minimum global V n'apparait pas.
Ce résultat caractérise les opérateurs S dans $B(H)$ qui sont orthogonaux aux images de dérivée $\delta_{A,B}$.

La dérivée de Gâteaux et l'orthogonalité dans B(H)

Theorem

Soit $S \in B(H)$ un point lisse, alors

$$\|S + (AX - XB)\|_{B(H)} \geq \|\Psi(S)\|_{B(H)}, \ \forall X \in B(H).$$

si et seullement si $\exists f \in \Gamma$ avec $\|f\| = 1$, vérifiant

$$f \otimes \Psi(S) f \in Ker\ \delta_{B,A}.$$

Corollary

Soit $S \in B(H)$ et f un vecteur unitaire sur le quel S atteint sa norme, si $S \in Ker\delta_{B,A}$. Alors les deux assertions sonts équivalentes

$$\|S + AX - XB\|_{B(H)} \geq \|S\|_{B(H)}, \ \forall X \in B(H), \tag{26}$$

$$f \otimes Sf \in Ker\delta_{B,A}. \tag{27}$$

La dérivée de Gâteaux et l'orthogonalité dans B(H)

Nous insistons sur le fait que, en s'appuyant sur nos résultats généraux donnés précédemment avec une application linéaire plus générale, le théoreme 3.2.1 et son corollaire 3.2.2 restent vrais pour des classes d'opérateurs plus généraux que $\delta_{A,B}$, tel que les opérateurs élémentaires $E(X)$ et $\check{E}(X)$. Notons que le théorème 3.2.5 et le corollaire 3.2.1 généralisent les résultats donnés dans [13], p. 872, remarque 3.2.2 et [7, lemme 1].
Maintenant nous somme prêt à donner quelques applications du corollaire précédent.

La dérivée de Gâteaux et l'orthogonalité dans B(H)

Soit $\Delta_{A,B}$ un opérateur élémentaire définie dans $B(H)$ par

$$\Delta_{A,B}(X) = AXB - X.$$

Theorem

Soit $S \in B\left(H\right)$ un point lisse et $A, B \in B\left(H\right)$ sont des contractions qui vérifient

$$\Delta_{A,B}(S) = 0.$$

Alors il existe un opérateur $\check{S}$ qui vérifie

$$\Delta_{A,B}(\check{S}) = 0 = \Delta_{A^\star,B^\star}(\check{S}).$$

D'autre part, en appliquant le corrollaire 3.2.2 on obtient

$$\Delta_{A,B}(\check{S}) = 0 = \Delta_{A^\star,B^\star}(\check{S}) \Leftrightarrow \|\Delta_{A,B}(X) + S\| \geq \|S\|\,,\ \forall\ X \in B(H).$$

Maintenant nous allons présanter une autre caractérisation de l'orthogonalité au sens de Birkhoff.

La dérivée de Gâteaux et l'orthogonalité dans B(H)

Theorem

Soient S et $Y \in B(H)$ où S est un point lisse, alors les conditions suivantes sonts équivalantes

1) *L'application F_{Ψ} a un minimum global $S \in B(H)$,*
2) *Il existe un vecteur unitaire $\varphi \in \Gamma$ tel que*

$$Re \langle \Phi(Y)\varphi, S\varphi \rangle \geq 0. \tag{28}$$

3) *Il existe un vecteur unitaire $\varphi \in \Gamma$ tel que*

$$tr(\varphi \otimes S\varphi)\Phi(Y)) = 0, \quad \forall Y \in B\,(H)\,. \tag{29}$$

4) *Il existe une suite de vecteurs unitaires φ_n tels que*

$$\|S\varphi_n\| \to \|S\| \quad et \quad \langle \Phi(Y)\varphi_n, S\varphi_n \rangle \underset{n\to\infty}{\to} 0 \tag{30}$$

La dérivée de Gâteaux et l'orthogonalité dans B(H)

Corollary

Soit $\Phi(Y) = AY - YB$ *et* $S, Y \in B(H)$ *où* S *est un point lisse, alors les conditions suivantes sont équivalentes*

a) *L'application* $\|S + AY - YB\|$ *a un minimum global* $S \in B(H)$.

b) *Il existe un vecteur unitaire* $\varphi \in \Gamma$ *tel que*

$$Re \langle (AY - YB)\varphi, S\varphi \rangle \geq 0. \tag{31}$$

c) *Il existe un vecteur unitaire* $\varphi \in \Gamma$ *tel que*

$$tr(\varphi \otimes S\varphi)(AY - YB)) = 0, \quad \forall Y \in B(H). \tag{32}$$

d) *Il existe une suite de vecteurs unitaires* φ_n *tels que*

$$\|S\varphi_n\| \to \|S\| \text{ et } \langle (AY - YB)\varphi_n, S\varphi_n \rangle \underset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{33}$$

La dérivée de Gâteaux et l'orthogonalité dans B(H)

Si on suppose $S \in Ker\delta_{A,B}$ on obtient

Corollary

Soit $\Phi(Y) = AY - YB$ et $S, Y \in B(H)$ où S est un point lisse, alors les conditions suivantes sont équivalentes

(i)
$$\|S + AY - YB\| \geq \|S\|, \quad \forall S \in Ker\delta_{A,B}, \tag{34}$$

(ii) *Il existe un vecteur unitaire $\varphi \in \Gamma$ tel que*
$$Re\left\langle (AY - YB)\varphi, S\varphi \right\rangle \geq 0, \tag{35}$$

(iii) *Il existe un vecteur unitaire $\varphi \in \Gamma$ tel que*
$$tr\left((\varphi \otimes S\varphi)(AY - YB)\right) = 0, \quad \forall Y \in B(H), \tag{36}$$

(iv) *Il existe une suite de vecteurs unitaires φ_n tel que*
$$\|S\varphi_n\| \to \|S\| \text{ et } \left\langle (AY - YB)\varphi_n, S\varphi_n \right\rangle \underset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{37}$$

La dérivée de Gâteaux et l'orthogonalité dans B(H)

Maintenant soit $\Phi(Y) = Y$, alors, on a le corollaire suivant

Corollary

Soit $S, Y \in B(H)$ où S est un point lisse, alors les conditions suivantes sont équivalantes

1)

$$Y \perp S \quad \text{au sens de Birkhoff,} \tag{38}$$

2) *Il existe un vecteur unitaire $\varphi \in \Gamma$ tel que*

$$Re \langle Y\varphi, S\varphi \rangle \geq 0, \tag{39}$$

3) *Il existe un vecteur unitaire $\varphi \in \Gamma$ tel que*

$$tr(\varphi \otimes S\varphi)Y) = 0, \tag{40}$$

4) *Il existe une suite de vecteurs unitaires φ_n tels que*

$$\|S\varphi_n\| \to \|S\| \text{ et } \langle (AY - YB)\varphi_n, S\varphi_n \rangle \underset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{41}$$

Bibliographie

- Abatzoglu T. J . Norm derivatives on speces of operators, Math. Ann. 239 (1979), 129-135.
- J. Anderson . On normal derivations, Proc. Amer. Math. Soc. 38-1 (1979), 129-135.
- B. P. Duggal, Range-kernel orthogonality of the elementry operators $X \to \sum_{i=1}^{i=n} A_i X B_i - X$, linear Algebra Appl. 337 (2001), 79-86.
- B. P. Duggal, A remark on normal derivations, Proc. Amer. Math. Soc, 126-7 (1998), 2047-2052.
- B. P. Duggal, Range-kernel orthogonality of derivations, linear Algebra Appl. 304 (2000), 103-108.

Bibliographie

- B. P. Duggal, On intertwining operators, Monatsh. Math. 106 (1988), 139-148.
- B. P. Duggal, Putnam-Fuglede Theorem and the range-kernel orthogonality of derivations, Inter. J. Math. Math. Sc, 27 (2001), 573-582.
- R. G. Douglas, On the operators $S^{*}XT = X$ and relited topices, Acta. sci. Math (Szeged) 30 (1969), 19-32.
- J. Diestel, Geometry of Banach speces-Selected Topics, Springer, 1975.
- L. Gajek, J. Jachymski and D. Zagrodny, Projections, Extendability of operators and the Gateaux derivative of the norm, J. Appl. Anal., 1 (1995) -38.

Bibliographie

D. Keckic, Orthogonality of the range and the kernel of some elementary operators, Proc. Amer. Math. Soc. 128-11 (2000), 3369- 3377.

D. Keckic , Orthogonality in C_1 and C_∞ -speces and normal derivations, Jour. Op. Th . 51 (2004) n1. 89-104.

F. Kittaneh, Operators that are orthogonal to the range of a derivation, J. Math. Anal. Appl. 203 (1996), 863-873.

F. Kittaneh, Normal derivations in norm ideals, Proc. Amer. Math. Soc., 123-6 (1995), 1779-1785.

P. J. Maher, Commutator Approximants, Proc. Amer. Math. Soc. 115 (1992), 995-1000.

Bibliographie

- S. Mecheri, On minimizing $\|S-(AX-XB)\|_p$, Serdica Math. J. 26 (2000), no. 2, 119-126.
- S. Mecheri and A. Bachir, Generalized derivation modulo the ideal of all compact operators, Int. J. Math. Science, 32 (2002), 504-506.
- S. Mecheri, No normal derivations and orthogonality, Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), 759-762.
- S. Mecheri, On the range and the kernel of the elementary operator $\sum_{i=1}^{i=n} A_iXB_i - X$, Acta. Math. Univ. Comenianae, vol. LXXII, 2 (2003), 191-196.
- S. Mecheri, Another version of Maher's inequality, J. Anal. Appl. Z. Anal. Anw., 23 (2004), no. 2, 303-311.

Bibliographie

- S. Mecheri and H. Mecheri, The Gâteaux derivative and orthogonality in C_∞, An. St. Univ. Ovidius Constanța, Vol. 20 (1), 2012, 275-284.
- B. Simon, Trace ideals and their applications, London Mathematical Society lecture Notes Series 35, Cambridge University Press, 1979.
- A. Turnsek, Elementary operators and orthogonality, Linear Algebra Appl. 317 (2000), 207-216.
- A. Turnsek, Orthogonality in C_p classes, Monatsh. Math., 132 (2001), 349-354.

..............................*End* ....

Titre

Sur la minimisation de la norme d'un opérateur élémentaire et applications

Résumé

Le problème général dans ce travail de recherche est de minimisé, dans C_{∞}, la norme des applications affines convenables de $B(H)$ à C_{∞} et de $B(H) \rightarrow B(H)$.Utilisant l'analyse convexe et différentielle (dérivée de gâteaux) ainsi que les données de la théorie d'opérateur. Les applications considérées généralisent ce qu'on appelle "opérateur élémentaire" et en particulier les dérivées généralisées qui sont d'un grand intérêt par elle même. Le résultat principale obtenu caractérise le minimum globale en terme d'orthogonalité et constitué une combinaison intéressante de l'analyse différentielle en dimension infinie, de la théorie d'opérateur et de la dualité. Il faut noter que les résultats obtenus, généralisent quelques résultats qu'on trouve dans la littérature concernant les opérateurs qui sont orthogonaux à l'image de dérivation

Mot clé: Les espaces de Banach; Les espaces de Hilbert; Les opérateurs borné et non borné.

العنوان

تصغير النظيم لمؤثر ابتدائي و التطبيقات

ملخص

المسألة عموما في هذا العمل البحثي هي تصغير النظيم في C_{∞} لتطبيقات تآلفية مناسبة من B(H) في C_{∞, ومن B(H) في B(H) .

في هذا العمل نستخدم التحليل المحدب والتحليل التفاضلي (المشتق بمفهوم Gâteaux) وكذلك مفاهيم نظرية المؤثرات.

التطبيقات المعتبرة هنا تعمم ما يسمى بالمؤثرات الإبتدائية وبصورة خاصة المشتقات المعممة والتي لها فائدة كبيرة بواسطتها نفسها.

النتيجة الأساسية المتحصل عليها توصف الحد الأدنى الإجمالي بدلالة التعامد وتشكل توفيقة هامة للتحليل التفاضلي في البعد الغير منتهي.

النتائج المحصل عليها تعمم بعض النتائج الخاصة بالمؤثرات المعامدة لصورة المشتقة.

الكلمات المفتاح: فضاء بناج؛فضاء هلبيرت؛المؤثرات المحدودة و غير المحدودة

Title

Minimizing the norm of **elementary operators and** mappings

Abstract

In this thesis the general problem is minimizing the C_{∞} norm of suitable affine mappings from $B(H)$ to C_{∞} and $B(H) \to B(H)$.Using convex and differential analyses (Gateaux derivative) as well as input from operator theory. The mappings considered generalize the so-called elementary operators and in particular the generalized derivations, which are of great interest by themselves. The main results obtained characterize global minima in term of (Banach space) orthogonality, and constitute an interesting combination of infinite-dimensional differentiable analysis, operator theory and duality . Note that the results obtained generalize some results in the literature concerning operator which are orthogonal to the range of derivation.

Key words: Banach space; Hilbert spaces; bound operateur