REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE CONSTANTINE 1

FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre : 07/MAT/2013
N° série : 36/DS/2013

THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT EN SCIENCES

Thème

Etude de la Fiabilité des Systèmes Disposés en Blocs

Option
Probabilités-Statistique

Par :
SLIMANE BOUHADJAR

Devant le jury :

Président:	**F.L. RAHMANI**	**Prof.**	**Univ. Constantine 1**
Rapporteur:	**B. KSIR**	**Prof.**	**Univ. Constantine 1**
Examinateurs:	**A. AISSANI**	**Prof .**	**U.S.T.H.B. Alger**
	A. HITTA	**M.C.A.**	**Univ. Guelma**
	S. BELALOUI	**M.C.A.**	**Univ. Constantine 1**
	N. GHORAF	**M.C.A.**	**Univ. Oum El-Bouaghi**

Soutenue le 16/06/2013

A la mémoire de ma Mère

Remerciements

Je voudrais profiter de cette opportunité pour adresser ma profonde gratitude envers

Dieu pour son aide et son soutien le long de ma vie.

Monsieur le professeur Brahim Ksir qui accepté avec sa gentillesse habituelle de diriger ce travail. De ses précieux conseils pour la réalisation de cette thèse et de la confiance qu'il m'a prodiguée, je lui exprime mon respect et mon estime.

Je tiens également à remercier Monsieur le Professeur F. L. Rahmani qui accepté de juger ce travail, et je suis également très honoré qu'il soit le président de jury de ma thèse, ainsi que Monsieur A. Aissani Professeur à l'université USTHB Alger, Monsieur A. Hitta Maître de conférence classe A à l'université de Guelma, Madame S. Belaloui Maître de conférence classe A à l'université Constantine 1, et Monsieur N. Ghoraf Maître de conférence classe A à l'université d'Oum el Bouaghi d'avoir bien voulu faire partie de ce jury et de juger ce travail.

Je remercie mes proches qui m'ont soutenu et encouragé.

Table des matières

0.1 Introduction

Dans la théorie de la fiabilité, l'étude d'un système consiste, à calculer ou approximer sa probabilité de panne (donc sa fiabilité) par des techniques probabilistes ou algorithmiques. Lorsque la configuration du système est trop compliquée, la fiabilité peut être estimé par un encadrement, qui conduit au calcul de la distribution limite lorsque la taille du système augmente indéfiniment.

Pour des systèmes dont la configuration est en série ou en parallèle, des travaux approfondis ont donné lieu à des résultats très développés. Dans le cas où les composants sont indépendants et identiquement distribués, Fisher, Tippet et Genedenko en 1943 [2], ont montré que pour des systèmes dont les composants sont en série, il n'existe que trois types de lois asymptotiques possibles pour leur temps de panne :

$$W_1(x) = 1 - \exp(-x^{\alpha}), \ si \ x \geq 0 \ et \ \alpha > 0,$$

$$W_2(x) = 1 - \exp(-(-x)^{\alpha}), \ si \ x \leq 0 \ et \ \alpha > 0,$$

et

$$W_3(x) = 1 - \exp(-\exp(x)), \ si \ -\infty < x < +\infty.$$

Un résultat analogue se déduit par dualité pour le temps de panne d'un système en parallèle.

Dans le cas d'un système "k-consécutifs-sur-n”, qui a été introduit dans la littérature mathématiques pour la première fois par Kontoleon[4] , il existe une bibliographie intensive, dans laquelle on peut trouver plusieurs résultats sous des hypothèses diverses (composants du systèmes identiques on non, indépendance mutuelle des composants, dépendance markovienne,...). Avant de continuer, on donne d'abord la définition de ce type de système.

Un système "k-consécutifs-sur-n" est un système comportant n composants disposés linéairement ou circulairement. Ce système tombe en panne si et seulement si au moins k consécutifs de ses composant sont en panne. Ces systèmes sont utilisés particulièrement dans les domaine des télécommunications, des circuit intégrés, pompage de pétrole par pipelines,...[5] , [6, 7, 8] .

Parmi les travaux scientifiques qui ont été réalisés sur ce type des systèmes, on trouve deux catégories d'articles. Dans la première, les auteurs s'intéresse au calcul exact ou approximatif de la fiabilité du système[4, 5 − 27, 49] et ce en utilisant des méthodes algorithmiques ([10] , [12 − 14] , [32] , [35]), ou des techniques probabilistes ([9, 11, 14]) , ou bien devant la complexité des hypothèses, ils s'intéressent à chercher un encadrement de la valeur de la fiabilité du système ([15, 37, 39]) . Dans la seconde, les chercheurs ont traité le problème du comportement asymptotique du temps de panne du système sous différents hypothèses sur les lois des temps de panne des composants ([20, 22, 58]) .

Dans ce travail, qui est l'objet de la thèse, on se propose une nouvelle formule pour calculer la fiabilité du système "k-consécutifs-sur-n", en utilisant les chaines de Markov. Plus précisément, on considère un système "k-consécutifs-sur-n" où tous les composants ont la même probabilité de panne q. Habituellement, dans les articles cités ci-dessus, on suppose cette probabilité q connue. Il est possible de l'estimer à partir d'un échantillon par la méthode du maximum de vraisemblance, mais dans les formules et les bornes de la probabilité de bon fonctionnement du système apparaît la quantité q^k. Autrement dit une petite erreur sur l'estimation de q peut entrainer une erreur importante sur l'estimation de q^k et donc sur l'estimation de la fiabilité du système. Ici, nous proposons une estimation directe de q^k pour éviter les erreurs cumulées dues à la puissance, en utilisant la nouvelle formule qui est basée sur les chaines de Markov. Un calcul numérique permet de mettre en relief la différence des valeurs de la fiabilité du système obtenues dans les deux méthodes d'estimation.

Finalement, nous allons étudier un système de configuration plus complexe : un montage en parallèle de blocs constitués d'éléments disposés linéairement et qui opèrent selon une configuration " k-consécutifs-su-l_n". Plus précisement, on va proposer un encadrement pour la fiabilité de ce type de système.

La thèse est composée de quatre chapitres présentés comme suit :

– **Chapitre 1 :** Ce chapitre est consacré à rappeler quelques notions de base de la théorie de la fiabilité.

– **Chapitre 2 :** Ici nous traitons le système "k-consécutifs-sur-n" où nous présentons quelques résultats obtenus concernant le calcul et l'encadrement de la fiabilité de ce type des systèmes.

– **Chapitre 3 :** Dans ce chapitre nous proposons une estimation pour la fiabilité du système "k-consécutifs-sur-n", qui a fait l'objet d'une publication internationale [63] , où nous avons établi aussi une formule de la fiabilité de ce système basée sur les chaines de Markov, dans le cas où les composants sont supposés indépendants et identiquement distribués.

– **Chapitre 4 :** Ce dernier chapitre est consacré à l'étude des systèmes "k-consécutifs-sur-l_n- parallèle", où nous proposons un encadrement pour sa probabilité de panne.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on donne quelques définitions et notations qu'on utilisera dans la suite, et on rappelle brièvement quelques résultats sur les systèmes en série et les systèmes en parallèle dans le cas binaire.

La théorie des systèmes cohérents binaires sera toujours sollicitée dans notre travail car les généralisations introduites par les différents modèles et la construction de la multinaire font souvent appel à ce qui été dans la théorie binaire.

1.2 Aspect déterministe

Définitions et notations

On considère un système cohérent constitué de n composants (n est appelé l'ordre du système). Le système est considéré à un moment fixe du temps et dont l'état est supposé ne dépondre que des états actuels des composants. Nous distinguons seulement deux types d'états : état de fonctionnement et état de panne. Cette dichotomie s'applique aussi bien au système qu'aux composants.

Alors pour indiquer l'état du $i^{ème}$ ($i = 1, 2, ..., n$) composant on pose :

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{si le composant i fonctionne} \\ 0, \text{si le composant i est en panne.} \end{cases}$$

Le but est de caractériser l'état du système (marche ou panne) en fonction de l'état de chacun des composants. Il faut, pour cela, se donner une fonction Φ dépendant du vecteur $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ et décrivant de façon binaire le fonctionnement du système. Nous prendrons la même notation :

$$\Phi(X) = \begin{cases} 1, \text{ si le système est opérationnel} \\ 0, \text{ si le système est en panne.} \end{cases}$$

La fonction Φ est appelée la fonction de structure du système. Elle représente la logique du système et fait intervenir à la fois l'architecture et les interactions entre composants en vue d'objectifs précis de fonctionnement.

Système en série :

Un système en série est un système formé de n composants. Ce système fonctionne si et seulement si chaque composant fonctionne. Ainsi la fonction de structure est donnée par :

$$\begin{aligned} \Phi(X) &= \prod_{i=1}^{n} X_i \\ &= \min(X_1, X_2, ..., X_n), \end{aligned}$$

$$\left(\prod_{i=1}^{n} X_i = X_1.X_2...X_n \right)$$

où $X_1, X_2, ..., X_n$ sont les états respectifs des composants $1, 2, ..., n$.

Le temps de panne du système est donné par :

$$T = \min_{1 \leq i \leq n} T_i,$$

où $T_1, T_2, ..., T_n$ sont les temps de panne respectifs des composants $1, 2, ..., n$.

Système en parallèle :

Un système en parallèle est un système formé de n composants disposés en parallèle tels que le système fonctionne si et seulement si l'un des composants fonctionne. La fonction de structure est donnée par :

$$\begin{aligned} \Phi(X) &= \coprod_{i=1}^{n} X_i \\ &= \max(X_1, X_2, ..., X_n) \end{aligned}$$

$$\left(\coprod_{i=1}^{n} X_i = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - X_i) \right).$$

Le temps de panne du système est donné par :

$$T = \max_{1 \leq i \leq n} T_i.$$

Définition.1.2.1. *Pour une fonction de structure Φ, nous dirons que Φ^D est la fonction de structure duale de Φ si, pour tout vecteur binaire X, l'égalité suivante est vérifiée :*

$$\Phi^D(X) = 1 - \Phi(1 - X),$$

où

$$1 - X = (1 - X_1, 1 - X_2, ..., 1 - X_n).$$

Remarque.1.2.1. Le système en parallèle est le dual du système en série. La réciproque est aussi vraie.

1.3 Décomposition pivotale

Soit Φ la fonction de structure d'un système d'ordre n. Pour un composant i fixé, nous avons, pour tout X, la relation suivante :

$$\Phi(X) = X_i.\Phi(X, 1_i) + (1 - X_i).\Phi(X, 0_i).$$

Nous dirons alors que nous avons une décomposition pivotale de Φ selon le composant numéro i. Cette formule définit un algorithme qui permet de construire de proche en proche la fonction de structure. Il suffit pour cela, de décomposer successivement selon les différents composants du système.

Proposition.1.3.1. *Si Φ est une fonction de structure cohérente, alors elle est encadrée de la façon suivante :*

$$\prod_{i=1}^{n} X_i \leq \Phi(X) \leq \coprod_{i=1}^{n} X_i.$$

1.4 Coupes et chemins

Soit $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ le vecteur indiquant les états des composants $C = (1, 2, ..., n)$. Nous réservons le vecteur 0 (resp. 1) pour indiquer le vecteur dont les composantes sont égales $(0, 0, ..., 0)$ (resp.$(1, 1, ..., 1)$). L'ensemble des états E se décompose en deux parties correspondantes respectivement aux états de marche et aux états de panne :

$$E^{+} = \{X : \Phi(X) = 1\},$$

et

$$E^{-} = \{X : \Phi(X) = 0\}.$$

Définition.1.4.1. *Pour tout vecteur* X *tel que* $\Phi(X) = 1$, *l'ensemble* $C_1(X) = \{i : X_i = 1\}$ *est appelé le chemin (lien) lié à* X.

Si $\Phi(X) = 0$, *l'ensemble* $C_0(X) = \{i : X_i = 0\}$ *est appelé la coupe liée à* X.

Un chemin est donc un ensemble de composants dont le bon fonctionnement assure le bon fonctionnement du système. De façon duale, un ensemble suffisant de composants, qui, lorsqu'ils sont en panne mettent en panne le système est une coupe.

Définition.1.4.2. *Si* X *et* Y *sont deux des vecteurs de* E, *on dira que* X *est inférieur à* Y, *ce que l' on notera* $X < Y$ *si, pour tout i=1,2,...,n on a* $X_i \leq Y_i$ *et au moins une inégalité est stricte.*

Soit X *un état de* E^+, *un chemin* $C_1(X)$ *est minimal si tout* Y *inférieur à* X *appartient à* E^- :

$$Y < X \text{ implique } \Phi(Y) = 0.$$

Soit X *un état de* E^-, *une coupe* $C_0(X)$ *est minimale si tout* Y *supérieur à* X *appartient à* E^+

1.5 1.2 Aspect stochastique

Fiabilité d'un système

L'état du $i^{ème}$ composant est une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$.

on sait que :

$$\begin{aligned} E(X_i) &= P(X_i = 1) \\ &= p_i, \ i = 1, 2, ..., n, \end{aligned}$$

où p_i est la fiabilité du $i^{ème}$ composant (c-à-d la probabilité que le $i^{ème}$ composant fonctionne, donc $q_i = P(X_i = 0)$ est la probabilité que le composant i est en panne).

De la même façon, la probabilité que le système fonctionne est donnée par :$E(\Phi(X)) = P(\Phi(X) = 1)$.

Définition.1.5.1. *La fonction R qui est définie par :*

$$\begin{aligned} R &= E\left(\Phi\left(X\right)\right) \\ &= R\left(p\right) \text{ avec } p = \left(p_1, p_2, ..., p_n\right), \end{aligned}$$

est appelée fonction de fiabilité du système.

Proposition.1.5.1. *La fonction de fiabilité d'un système cohérent vérifie l'identité suivante :*

$$R\left(p\right) = p_i.R\left(p, 1_i\right) + \left(1 - p_i\right).R\left(p, 0_i\right), \text{ pour } i = 1, ..., n.$$

Théorème.1.5.1. *Soit Φ une structure cohérente dont les composants $1, 2, ..., n$ ont des fiabilités $p_1, p_2, ..., p_n$ respectivement, alors :*

$$\prod_{i=1}^{n} p_i \leq P\left(\Phi\left(X\right) = 1\right) \leq \prod_{i=1}^{n} p_i.$$

1.6 Distributions limites

On se pose la question suivante :

- Quels sont les types de distributions limites possibles pour la distribution du temps de panne d'un système formé de composants disposés selon les configurations présentées ci-dessus lorsque le nombre augmente indéfiniment ?

Définition.1.6.1. *Une fonction de distribution F est dite distribution limite de la suite $\left(F_n\right)_n$ s'il existe des constantes $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ telles que*

$$\lim_{n \to +\infty} F_n\left(a_n x + b_n\right) = F\left(x\right), \text{ pour tout } x \in C_{F.}$$

Si on suppose que :

$$\alpha_n = a.a_n \text{ et } \beta_n = b.b_n,$$

où,

$$a > 0 \text{ et } b \in (-\infty, +\infty).$$

on trouve que :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} F_n(\alpha_n x + \beta_n) &= F(a_n(ax+b)+b_n),\\ &= F(ax+b) \text{ pour tout } x \in C_{F.}\end{aligned}$$

Si F est une distribution limite de $(F_n)_n$, alors G $(G(x) = F(ax+b)\ \ a > 0$ et $b \in (-\infty, +\infty)\ )$ a la même propriété. Pour cela on donne la définition suivante.

Définition.1.6.2. *Deux fonctions de distributions F et G sont dites du même type s'il existe des constantes $a > 0$ et $b \in (-\infty, +\infty)$ telles que*

$$F(ax+b) = G(x), \text{ pour tout } x.$$

Lemme.1.6.1. *Si $(F_n)_n$ est une suite de fonctions de distributions telle que pour tout x :*

1. $\lim_{n\to+\infty} F(a_n x + b_n) = F(x)$
2. $\lim_{n\to+\infty} F_n(\alpha_n x + \beta_n) = G(x)$,

où F et G sont distributions non dégénérées, alors F et G sont du même type.

Définition.1.6.3. *Une fonction de distribution est dite minimale stable si pour tout entier k, ils existent des constantes $\alpha_k > 0$ et $\beta_k \in \mathbb{R}$ telles que :*

$$\bar{G}^k(\alpha_k x + \beta_k) = \bar{G}(x) \text{ pour tout } x.$$

On pose $T = \min_{1\le i\le n}\{T_i\}$ tel que T_i est le temps de panne du composant i, $i = 1, 2, ..., n$.

Théorème.1.6.1. *G est une distribution limite de T si et seulement si G est minimale stable.*

Théorème.1.6.2. *Les seules distributions limites pour*

$$T = \min_{1 \leq i \leq n} \{T_i\},$$

sont :

1) $W_1(x) = 1 - \exp(-x^\alpha)$, *si* $x \geq 0$ *et* $\alpha > 0$,

2) $W_2(x) = 1 - \exp(-(-x)^\alpha)$, *si* $x \leq 0$ *et* $\alpha > 0$,

3) $W_3(x) = 1 - \exp(-\exp(x))$, *si* $-\infty < x < +\infty$.

Comme le système en parallèle est le dual du système en série, on peut déduire facilement les distributions limites possibles pour $\max_{1 \leq i \leq n} \{T_i\}$.

Chapitre 2

Système k-consécutifs-sur-n

Dans ce chapitre nous allons présenter le système k-consécutifs-sur-n à partir de quelques résultats importants concernant le calcul et l'encadrement de la fiabilité. Ce type de systèmes est introduit pour la première fois dans la théorie de la fiabilité par J.M. Kontoleon en 1980.

2.1 Notations et Définitions

Dans ce chapitre on note :

- n le nombre de composants dans le système.

- k $(k \leq n)$ le nombre minimum de composants consécutifs en panne qui cause la panne du système.

- X_i l'état du composant i, $X_i = 0$ s'il est en panne et $X_i = 1$ s'il fonctionne.

- $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x!}{y!(x-y)!}$ le coefficient binomial.

Définition.2.1.1. *Un système k-consécutifs-sur-n est un système formé de n composants disposés linéairement ou circulairement. Ce système tombe en panne si et seulement si au moins k composants consécutifs sont en panne.*

Remarque.2.1.1. On remarque que :

1- Pour $k = 1$, on obtient un système en série.

2- Pour $k = n$, on obtient un système en parallèle.

2.1.1 Domaines d'applications

Il y a plusieurs domaines d'applications pour les systèmes k-consécutifs-sur-n, ici on donne les deux exemples suivants :

Exemple 1 : Une suite de n stations transmet l'information d'un point A vers un point B. Les stations sont placées à distances égales entre A et B. Chaque station transmet l'information vers $(k-1)$ stations plus loin. Il est clair que ce système tombe en panne si au moins k stations consécutives sont en panne.

Exemple 2 : Pour transporter du pétrole d'un point A vers un point B on dispose de n pompes. Ces pompes sont placées à distances égales entre A et B. Chaque pompe peut transporter le pétrole vers $(k-1)$ pompes plus loin. Donc ce système tombe en panne si au moins k pompes consécutives sont en panne.

2.2 Fonction de structure et Temps de panne

Dans ce paragraphe, et dans toute la suite, on considère que le système est formé de n composants disposés linéairement.

2.2.1 Fonction de structure

La fonction de structure du système est donné par

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \min_{1\leq i\leq n-k+1}\left(\max_{i\leq j\leq i+k-1}\{X_j\}\right)\\ &= \prod_{i=1}^{n-k+1}\coprod_{j=1}^{i+k-1} X_j,\end{aligned}$$

où, $X_1, X_2, ..., X_n$ sont les états des composants $1, 2, ..., n$.

2.2.2 Temps de panne

Le temps de panne du système k- consécutifs-sur-n est donné par

$$Y_n = \min_{1 \leq i \leq n-k+1} \left(\max_{i \leq j \leq i+k-1} \{T_j\} \right),$$

où, $T_1, T_2, ..., T_n$ sont les temps de panne des composants $1, 2, ..., n$.

2.3 Formules exactes de la fiabilité du système

Dans ce paragraphe, on suppose que les composants du système sont indépendants et qu'ils ont tous la même fiabilité $p = p_1 = p_2 = ... = p_n$, on note $q = 1 - p$ (la probabilité de panne de chaque composant). On va rappeler quelques résultats concernant le calcul de la fiabilité du système k-consécutifs-sur-n.

On désigne par $N(j, n; k)$ le nombre de fois que le système "k-consécutifs-sur-n " fonctionne sachant que j composants dans le système sont en panne. En utilisant ce nombre on peut écrire (la fiabilité du système) $R_k(n, p) = \sum_j q^j p^{n-j} \ N(j, n; k)$ et par conséquent le problème du calcul de la fiabilité revient au calcul du nombre $N(j, n; k)$. Les expressions de $N(j, n; k)$ sont données dans [5] et [15] par

$$N(j, n; k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}, & \text{si } j < k \\ 0, & \text{si } j \geq n \\ \sum_{i=0}^{k-1} N(j-i, n-i-1; k), & \text{si } n > j \geq k \geq 1. \end{cases}$$

Plus précisément la fiabilité du système est donnée par le théorème suivant :

Théorème.2.3.1. [15] *pour tout* $1 \leq k \leq n$, *on a :*

$$R_k(n,p) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i p^{i-1} q^{ki} \left[\begin{pmatrix} n-ki+1 \\ i \end{pmatrix} - q \begin{pmatrix} n-ki \\ i \end{pmatrix} \right].$$

2.4 Formules récursives de la fiabilité

La fiabilité du système est donnée aussi par les formules récursives suivantes :

Formule 1.[5] Pour $n \geq k$ on a :

$$R_k(n,p) = p^{n-k+1} + \sum_{i=1}^{n-k+1} \sum_{j=i+1}^{i+k+1} p^i q^{j-i} R_k(n-j,p).$$

Formule 2.[51] Pour $n \geq k$ on a :

$$R_k(n,p) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq n \leq k-1 \\ R_k(i,p)\, R_k(n-i,p) - pq^k \sum\limits_{s=k+1-i}^{k} R_k(n-i-s,p), & \text{si } 1 \leq i \leq k \\ R_k(i,p)\ R_k(n-i,p) - p^2 q^k \sum\limits_{s=2}^{k} R_k(n-i-s,p) \times & \\ \sum\limits_{r=k+2-s}^{k} q^{r+s-k-2} R_k(i-r,p), & \text{si } k \leq i \leq \left[\frac{n}{2}\right]. \end{cases}$$

2.5 Encadrement de la fiabilité

Dans le cas où les composants d'un système "k-consécutifs-sur-n" sont supposés indépendants et identiques, plusieurs travaux ont donné des bornes (bornes inférieures et bornes supérieures) de la fiabilité du système. On donne ici quelques résultats de ces travaux.

Dans[16] ,on trouve les inégalités simples suivantes :

$$\left(1-q^{k}\right)^{n-k+1} \leq R_{k}\left(n,p\right) \leq \left(1-q^{k}+q^{k+1}\right)^{n-k+1}.$$

Dans [21], on a :

$$\begin{aligned} & \exp\left(-\left(n-k+1\right)q^{k}\right)-\left[\left(2k-1\right)q^{k}+2\left(k-1\right)q\right] \\ \leq \; & R_{k}\left(n,p\right) \\ \leq \; & \exp\left(-\left(n-k+1\right)q^{k}\right)+\left[\left(2k-1\right)+2\left(k-1\right)q\right]. \end{aligned}$$

Dans [23] , il y a le résultat suivant :

$$\begin{aligned} & \exp\left(-p\left(n-k+1\right)q^{k}\right)-\left(2kp-1\right)q^{k} \\ \leq \; & R_{k}\left(n,p\right) \\ \leq \; & \exp\left(-p\left(n-k+1\right)q^{k}\right)+\left(2k-1\right)q^{k}. \end{aligned}$$

Parmi les résultats obtenus sur les bornes de la fiabilité du système "k-consécutifs-sur-n" il existe des bornes récursives ; parmi eux on donne le résultat intéressant suivant ([46]),

Théorème.2.5.1. *Si* $1<k<n$ *et* $0<p<1$, *alors on a pour tout* m *où,* $k\leq m\leq n$:

$$\begin{aligned} R_{k}\left(m,p\right).R_{k}\left(n-m+k-1,p\right) &< R_{k}\left(n,p\right) \\ &< R_{k}\left(m,p\right)R_{k}\left(n-m,p\right). \end{aligned}$$

En appliquant ce théorème pour $m=k$, on obtient

$$\begin{aligned}\left(1-q^{k}\right) R_{k}\left(n-1,p\right) &\leq R_{k}\left(n,p\right)\\ &\leq \left(1-q^{k}\right) R_{k}\left(n-k,p\right).\end{aligned}$$

Si on procède de la même manière on trouve :

$$\left(1-q^{k}\right)^{n-k+1} \leq R_{k}\left(n,p\right) \leq \left(1-q^{k}\right)^{\left[\frac{n}{k}\right]}.$$

Chapitre 3

Méthode d'estimation de la fiabilité d'un système k-consécutifs-sur-n

Dans le chapitre précédent, on peut remarquer que dans les formules exactes et les bornes de la fiabilité du système "k-consécutifs-sur-n" apparaît la quantité q^k, où q est la probabilité de panne de chacun parmi les composants du système, qui sont supposés indépendants et identiquement distribués. Habituellement, on suppose que la probabilité q est connue. Bien entendu, il est possible de l'estimer à partir d'un échantillon par la méthode du maximum de vraisemblance. De petits écarts sur l'estimation de q, peut entrainer des importants écarts dans l'estimation de q^k et donc dans l'estimation de la fiabilité du système. Le but de ce chapitre est d'estimer directement q^k pour éviter les erreurs cumulées dues à la puissance. Plus précisément, nous proposons une nouvelle formule basée sur les chaines de Markov pour calculer et estimer la fiabilité du système.

Avant de présenter ce travail, en détail, on commence par un rappel, en bref, sur les chaines de Markov.

3.1 Chaînes de Markov.

Les chaines de Markov constituent l'exemple le plus simple des processus stochastiques, lorsque dans l'étude d'une suite de variables aléatoires, on abandonne l'hypothèse d'indépendance. Il s'agit d'un processus à temps discret. Pour donner la définition d'une chaine de Markov on commence par la définition et quelques propriétés d'un processus stochastique.

Définition.3.1.1. *Soit T un ensemble d'indices, on appelle processus stochastique (aléatoire) défini sur T à valeurs dans l'espace mesurable (E, IB), le terme $\left(\Omega, \digamma, P, (X_t)_{t\in T}\right)$ tel que $(X_t)_t$ est une famille de variables aléatoires définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \digamma, P)$ à valeurs dans (E, IB).*

On note simplement les processus stochastiques (X_t), $X(t)$, ...

Pour tout $t \in T$, X_t est une variable aléatoire de $(\Omega, \digamma, P)$ à valeurs dans (E, IB).

$$X_t : \Omega \longrightarrow E.$$

Remarque.3.1.1. A partir de la définition d'un processus stochastiques on distingue les remarques suivantes :

1) L'ensemble d'indices T est appelé espace de temps. Pour tout $\omega \in \Omega$ et $t \in T$ la quantité $X_t(\omega)$ est l'état du processus à l'instant t. Ainsi (E, IB) est appelé espace des états (espace de phase). On dit aussi que E est l'ensemble des états du processus.

2) Pour tout $\omega \in \Omega$ l'application $t \longmapsto X_t(\omega)$ définie de T à E est appelé trajectoire de processus.

3) Si $(E, IB) = (\mathbb{R}, IB)$ le processus est dit réel.

4) Si $(E, IB) = (\mathbb{R}^n, IB^n)$ le processus est dit multidimensionnelle.

5) Si $T \subseteq \mathbb{N}$, on dit que le processus est à temps discret, ce type de processus est décrit par une suite : X_0, $X_1, ..., X_n, ...$

Définition.3.1.2. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans l'en-*

semble E des états, supposé égal à $\mathbb{N}$. On dit que cette suite est une chaine de Markov, si pour tout $n \geq 1$ et toute suite $(i_0, i_1, ..., i_{n-1}, i, j)$ d'éléments de E, pour laquelle la probabilité $P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, ..., X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i)$ est strictement positive, on a la relation suivante entre probabilités conditionnelle :

$$P(X_{n+1} = j / X_0 = i_0, ..., X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j / X_n = i).$$

Autrement dit, dans l'évolution au cours du temps, l'état du processus à l'instant $(n+1)$ ne dépend que de celui à l'instant n précédent, mais non de ses états antérieurs. Le processus est dit sans mémoire.

Définition.3.1.3. *On pose :*

$$p_{i,j} = P(X_{n+1} = j / X_n = i),$$

cette probabilité ; on l'appelle la probabilité de transition (de passage) de l'état i à l'état j, en une étape.

Définition.3.1.4. *La matrice*

$$M = \begin{pmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & p_{0,2} & & \cdots \\ p_{1,0} & p_{1,1} & p_{1,2} & & \cdots \\ & & & & \\ & & & & \\ . & . & . & & \cdots \\ . & . & . & & \cdots \\ . & . & . & & \cdots \end{pmatrix}$$

dont les coefficients sont les probabilités de transition $p_{i,j}$ est appelée matrice de transition (ou de passage) de la chaine,.

C'est une matrice finie ou dénombrable, suivant que l'ensemble des états est fini ou dénombrable.

Propriété.3.1.1. *Toute matrice* $M = \left(p_{i,j} \right), \left((i,j) \in E^2 \right)$ *vérifie les propriétés suivantes :*

(1) *pour tout couple* (i,j)*, on a :* $p_{i,j} \geq 0$;

(2) *pour tout* $i \in E$*, on a* $\sum\limits_{j \in E} p_{i,j} = 1.$

Remarque.3.1.2. Une matrice M, qui vérifie les conditions (1) et (2) de la propriété précédente, est appelée matrice stochastique.

Pour revenir au font de ce chapitre, considérons un système "k-consécutifs-sur-n", dont les composants sont supposés indépendants et identiquement distribués.

Notations :

$X_i = 0,\ i = 1, ..., n$ désigne que le composant i est en panne.

$X_i = 1,\ i = 1, ..., n$ désigne que le composant i est fonctionne.

$P\ (X_i = 0) = q$ et $P\ (X_i = 1) = p, (p = 1 - q)$.

Z_i est un sous système de k composants.

$S_n = 1$ désigne que le système fonctionne.

3.2 Système k-consécutifs-sur-n via les chaines de Markov :

On considère les variables $Z_n = \max\limits_{n \leq i \leq n+k-1} X_i$. On va démontrer que le processus $(Z_n)_{n \geq 1}$ est une chaine de Markov, puis en utilisant ce résultat on trouvera une nouvelle formule pour calculer la fiabilité du système k-consécutifs-sur- n .

Théorème.3.2.1. [63] *La suite de variables aléatoires* $(Z_n)_{n \geq 1}$ *est une chaine de Markov .*

Preuve. Il faut démontrer que,

$$P(Z_{n+1} = z_{n+1}/Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ..., Z_n = z_n) = P(Z_{n+1} = z_{n+1}/Z_n = z_n),$$

$$\text{pour tout } \ n \geq 1 \ \text{ et } \ \ z_n \in \{0, 1\}\,.$$

1) On a

$$\begin{aligned} P(Z_{n+1} &= 1/Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ..., Z_{n-1} = z_{n-1}, Z_n = 0) \\ &= \frac{1}{P(Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ..., Z_{n-1} = z_{n-1}, Z_n = 0)} \\ &\times \int\limits_{[Z_1=z_1, Z_2=z_2, ..., Z_{n-1}=z_{n-1}, Z_n=0]} 1_{[Z_{n+1}=1]} dp \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} P(Z_{n+1} &= 1/Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ..., Z_{n-1} = z_{n-1}, Z_n = 0) \\ &= \frac{1}{P(Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ..., Z_{n-1} = z_{n-1}, Z_n = 0)} \times \\ &\left(\int\limits_{[Z_1=z_1, Z_2=z_2, ..., Z_{n-1}=z_{n-1}, Z_n=0] \cap [X_n=0]} 1_{(Z_{n+1}=1)} dp \right. \\ &+ \left. \int\limits_{[Z_1=z_1, Z_2=z_2, ..., Z_{n-1}=z_{n-1}, Z_n=0] \cap [X_n=1]} 1_{(Z_{n+1}=1)} dp \right) \end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned}
P(Z_{n+1} &= 1/Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ..., Z_{n-1} = z_{n-1}, Z_n = 0) \\
&= \frac{1}{P(Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ..., Z_{n-1} = z_{n-1}, Z_n = 0)} \\
&\quad \times \int\limits_{[Z_1=z_1, Z_2=z_2, ..., Z_{n-1}=z_{n-1}, Z_n=0] \cap [X_n=0]} 1_{(X_{n+k}=1)} dp \\
&= \frac{1}{P(Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ..., Z_{n-1} = z_{n-1}, Z_n = 0)} \times \\
&\quad \times \int\limits_{[Z_1=z_1, Z_2=z_2, ..., Z_{n-1}=z_{n-1}, Z_n=0]} 1_{(X_{n+k}=1)} dp.
\end{aligned}$$

Il est clair que les deux événements, $(X_{n+k} = 1)$ et $(Z_1 = z_1, Z_n = 2, ..., Z_n = 0)$ sont indépendants.

Donc,

$$\begin{aligned}
P(Z_{n+1} &= 1/Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ..., Z_{n-1} = z_{n-1}, Z_n = 0) = \\
&= \frac{P\left(Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ..., Z_{n-1} = z_{n-1}, Z_n = 0\right)}{P(Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ..., Z_{n-1} = z_{n-1}, Z_n = 0)} \times P\left(X_{n+k} = 1\right) \\
&= P\left(X_{n+k} = 1\right) \\
&= \frac{P\left(Z_n = 0\right)}{P\left(Z_n = 0\right)} \times P\left(X_{n+k} = 1\right).
\end{aligned}$$

Comme les deux événements $(Z_n = 0)$ et $(X_{n+k} = 1)$ sont indépendants, on conclut que :

$$\frac{P\left(Z_n=0\right)}{P\left(Z_n=0\right)}P\left(X_{n+k}=1\right)=\frac{P\left(Z_n=0,\ X_{n+k}=1\right)}{P\left(Z_n=0\right)}.$$

De plus on a :

$$\begin{aligned}\left(Z_n=0\ ,\ X_{n+k}=1\right) &= \left\{Z_n=0\right\}\cap\left\{X_{n+k}=1\right\}\\ &= \left\{Z_n=0\right\}\cap\left\{Z_{n+1}=1\right\}\\ &= \left(Z_n=0\ ,\ Z_{n+1}=1\right).\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}P(Z_{n+1} &= 1/Z_1=z_1,Z_2=z_2,...,Z_{n-1}=z_{n-1},Z_n=0)\\ &= \frac{P(Z_n=0\ ,\ Z_{n+1}=1)}{P\left(X_n=0\right)}\\ &= P\left(Z_{n+1}=1/Z_n=0\right).\end{aligned}$$

2) Comme l'événement $\{Z_{n+1}=0\}$ est l'événement contraire de $\{Z_{n+1}=1\}$, on déduit que

$$\begin{aligned}P(Z_{n+1} &= 0/Z_1=z_1,Z_2=z_2,...,Z_{n-1}=z_{n-1},Z_n=0)\\ &= 1-P(Z_{n+1}=1/Z_1=z_1,Z_2=z_2,...,Z_{n-1}=z_{n-1},Z_n=0)\\ &= 1-P\left(Z_{n+1}=1/Z_n=0\right)\\ &= P\left(Z_{n+1}=0/Z_n=0\right).\end{aligned}$$

3) Maintenant, on démontre l'égalité pour $z_{n+1}=0$ et $z_n=1$.

On a :

$$
\begin{aligned}
P(Z_{n+1} &= 0/Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ..., Z_{n-1} = z_{n-1}, Z_n = 1) \\
&= \frac{1}{P(Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ..., Z_{n-1} = z_{n-1}, Z_n = 1)} \\
&\quad \times \int\limits_{[Z_1=z_1, Z_2=z_2, ..., Z_{n-1}=z_{n-1}, Z_n=1]} 1_{[Z_{n+1}=1]} dp \\
&= \frac{1}{P(Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ..., Z_{n-1} = z_{n-1}, Z_n = 1)} \\
&\quad \times \left(\int\limits_{[Z_1=z_1, Z_2=z_2, ..., Z_{n-1}=z_{n-1}, Z_n=1] \cap [X_n=0]} 1_{[Z_{n+1}=1]} dp \right. \\
&\quad \left. + \int_{[Z_1=z_1, Z_2=z_2, ..., Z_{n-1}=z_{n-1}, Z_n=1] \cap [X_n=1]} 1_{[Z_{n+1}=1]} dp \right).
\end{aligned}
$$

Ce qui donne :

$$
\begin{aligned}
P(Z_{n+1} &= 0/Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ..., Z_{n-1} = z_{n-1}, Z_n = 1) \\
&= \frac{1}{P(Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ..., Z_{n-1} = z_{n-1}, Z_n = 1)} \\
&\quad \times \int\limits_{[Z_1=z_1, Z_2=z_2, ..., Z_{n-1}=z_{n-1}, Z_n=1] \cap [X_n=1]} 1_{[\max(X_{N+1}, X_{n+2}, ..., X_{n+k})=0]} dp.
\end{aligned}
$$

Alors,

$$
\begin{aligned}
P(Z_{n+1} &= 0/Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ..., Z_{n-1} = z_{n-1}, Z_n = 1) \\
&= \frac{1}{P\left(Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ..., Z_{n-1} = z_{n-1}, Z_n = 1\right)} \\
&\quad \times \int\limits_{[Z_1=z_1,Z_2=z_2,...,Z_{n-1}=z_{n-1},Z_n=1]\cap[X_n=1]} 1_{[(X_{N+1}=0,X_{n+2}=0,...,X_{n+k}=0)]}dp \\
&= \frac{1}{P\left(Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ..., Z_{n-1} = z_{n-1}, Z_n = 1\right)} \\
&\quad \times \int\limits_{[Z_1=z_1,Z_2=z_2,...,Z_{n-1}=z_{n-1},Z_n=1]\cap[X_n=1]\cap[X_{n+1}=0,X_{n+2}=0,...,X_{n+k-1}=0]} 1_{[X_{n+k}=0]}dp \\
&= \frac{1}{P\left(Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ..., Z_{n-1} = z_{n-1}, Z_n = 1\right)} \\
&\quad \times P\left(Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ..., Z_{n-1} = z_{n-1}, Z_n = 1, X_n = 1, X_{n+1} = 0, ..., X_{n+k-1} = 0\right) \\
&\quad \times P\left(X_{n+k} = 0\right) \\
&= \frac{P\left(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = 1, X_{n+1} = 0, ..., X_{n+k-1} = 0\right)}{P\left(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_{n-1} = x_{n-1}, Z_n = 1\right)} \\
&\quad \times P\left(X_{n+k} = 0\right).
\end{aligned}
$$

Il est clair que les deux événements $(X_1 = x_1, ..., X_{n-1} = x_{n-1})$ et $(X_n = 1, X_{n+1} = 0, ..., X_{n+k-1} = 0)$ sont indépendants, même chose pour les événements $(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_{n-1} = x_{n-1})$ et $(Z_n = 1)$.

On conclut que :

$$\begin{aligned}
P(Z_{n+1} &= 0/Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ..., Z_{n-1} = z_{n-1}, Z_n = 1) = \\
&= \frac{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_{n-1} = x_{n-1}) P\left(X_n = 1, X_{n+1} = 0, ..., X_{n+k-1} = 0\right)}{P\left(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_{n-1} = x_{n-1}\right) P\left(Z_n = 1\right)} \\
&\quad \times P\left(X_{n+k} = 0\right) \\
&= \frac{P\left(X_n = 1, X_{n+1} = 0, ..., X_{n+k-1} = 0, X_{n+k} = 0\right)}{P\left(Z_n = 1\right)}.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\left(Z_n = 1, Z_{n+1} = 0\right) &= \left(Z_n = 1, \max\left(X_{n+1}, X_{n+2}, ..., X_{n+k}\right) = 0\right) = \\
&= \left(Z_n = 1, X_{n+1} = 0, X_{n+2} = 0, ..., X_{n+k} = 0\right) \\
&= \left(X_n = 0, X_{n+1} = 0, X_{n+2} = 0, ..., X_{n+k} = 0\right).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
P(Z_{n+1} &= 0/Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ..., Z_{n-1} = z_{n-1}, Z_n = 1) \\
&= \frac{P\left(Z_n = 1, Z_{n+1} = 0\right)}{P\left(Z_n = 1\right)} \\
&= P\left(Z_{n+1} = 0/Z_n = 1\right).
\end{aligned}$$

4) L'événement $\{Z_{n+1} = 1\}$, est l'événement contraire de $\{Z_{n+1} = 0\}$, donc

$$\begin{aligned} P(Z_{n+1} &= 1/Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ..., Z_{n-1} = z_{n-1}, Z_n = 1) \\ &= 1 - P(Z_{n+1} = 0/Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ..., Z_{n-1} = z_{n-1}, Z_n = 1) \\ &= 1 - P\left(Z_{n+1} = 0/Z_n = 1\right) \\ &= P\left(Z_{n+1} = 1/Z_n = 1\right). \end{aligned}$$

Finalement, on conclut que la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ est une chaine de Markov.

3.3 Calcul des probabilités de transition

Pour calculer la fiabilité du système k-consécutifs-sur- n , Il faut d'abord calculer les probabilités de transition de l'état i (à l'instant n) à l'état j (à l'instant $n+1$) telles que : i , $j \in \{0,1\}$. Pour cela, on pose

$$\Pi(l,m) = P\ \left(Z_{n+1} = j\ /Z_n = i\ \right).$$

On va calculer cette quantité, pour tout $i, j, l, m \in \{0,1\}$.

1) Commençons par le calcul de $\Pi\left(0,0\right)$; on a

$$\begin{aligned} \Pi\left(0,0\right) &= P\left(Z_{n+1} = 0/Z_n = 0\right) \\ &= \frac{P\left(Z_{n+1} = 0, Z_n = 0\right)}{P\left(Z_n = 0\right)} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\Pi(0,0) &= \frac{P(Z_{n+1}=0, Z_n=0, X_n=0) + P(Z_{n+1}=0, Z_n=0, X_n=1)}{P(Z_n=0)} \\
&= \frac{P(Z_{n+1}=0/Z_n=0, X_n=0)\,P(Z_n=0/X_n=0)\,P(X_n=0)}{P(Z_n=0)} \\
&= \frac{qq^{k-1}q}{q^k} \\
&= q.
\end{aligned}$$

2) On sait que $\{Z_{n+1}=1\}$ est l'événement contraire de$\{Z_{n+1}=0\}$, donc,

$$\begin{aligned}
\Pi(0,1) &= P(Z_{n+1}=1/Z_n=0) \\
&= 1-P(Z_{n+1}=0/Z_n=0) \\
&= 1-\Pi(0,0) \\
&= 1-q.
\end{aligned}$$

3) Maintenant, on calcule $\Pi(1,0)$,

$$\begin{aligned}
\Pi(1,0) &= P(Z_{n+1}=0/Z_n=1) \\
&= \frac{P(Z_{n+1}=0, Z_n=1)}{P(Z_n=1)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\Pi(1,0) = \frac{P(Z_{n+1}=0, Z_n=1, X_n=0) + P(Z_{n+1}=0, Z_n=1, X_n=1)}{P(Z_n=1)},$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}\Pi(1,0) &= \frac{P(Z_{n+1}=0/Z_n=1, X_n=1)\times P(Z_n=1/X_n=1)\,P(X_n=1)}{P(Z_n=1)} \\ &= \frac{q^k(1-q)}{1-q^k}.\end{aligned}$$

4) Pour calculer $\Pi(1,1)$, on utilise le même raisonnement du deuxième cas.

$$\begin{aligned}\Pi(1,1) &= P(Z_{n+1}=1/Z_n=1) \\ &= 1-P(Z_{n+1}=0/Z_n=1) \\ &= 1-\Pi(1,0) \\ &= 1-\frac{q^k(1-q)}{1-q^k}.\end{aligned}$$

3.4 Nouvelle formule de la fiabilité d'un système k-consécutifs-sur-n.

Maintenant, on propose un résultat concernant la fiabilité du système.

Théorème.3.4.1. [63] *La fiabilité d'un système" k-consécutifs-sur-n" est donnée par*

$$R=\left(1-q^k\right)\left[1-\frac{q^k(1-q)}{1-q^k}\right]^{n-k}.$$

Preuve. On sait que :

$$R=P(S_n=1),\ \text{où } S_n=Z_1.Z_2...Z_{n-k}.Z_{n-k+1}.$$

Donc

$$P(S_n=1)=P(Z_1.Z_2...Z_{n-k}.Z_{n-k+1}=1)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} P\left(S_n=1\right) &= P\left(Z_1=1, Z_2=1, ...Z_{n-k}=1, Z_{n-k+1}=1\right) \\ &= P\left(Z_{n-k+1}=1/Z_1=1, Z_2=1, ..., Z_{n-k}=1\right) \\ & \quad \times P\left(Z_{n-k}=1/Z_1=1, Z_2=1, ..., Z_{n-k-1}=1\right) \times \\ & \quad ... \times P\left(Z_2=1/Z_1=1\right) \times P\left(Z_1=1\right). \end{aligned}$$

Comme, $(Z_i)_{i\geq 1}$ est une chaîne de Markov, on conclut que :

$$\begin{aligned} P\left(S_n=1\right) &= P\left(Z_{n-k+1}=1/Z_{n-k}=1\right).P\left(Z_{n-k}=1/Z_{n-k-1}=1\right) \\ & \quad \times ... \times P\left(Z_2=1/Z_1=1\right).P\left(Z_1=1\right). \end{aligned}$$

On a démontré, précédemment, que :

$$\begin{aligned} P\left(Z_i=1/Z_{i-1}=1\right) &= \Pi\left(1,1\right) \\ &= 1-\frac{q^k\left(1-q\right)}{1-q^k}, \text{ pour tout } i, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} R &= P\left(S_n=1\right)=\Pi\left(1,1\right).\Pi\left(1,1\right)...\Pi\left(1,1\right).P\left(Z_1=1\right) \\ &= \left[\Pi\left(1,1\right)\right]^{n-k}\left[1-P\left(Z_1=0\right)\right] \\ &= \left[1-\frac{q^k\left(1-q\right)}{1-q^k}\right]^{n-k}\left(1-q^k\right). \end{aligned}$$

3.5 Estimation de la fiabilité du système

Dans ce paragraphe, on va estimer, en utilisant le Maximum de vraisemblance, la fiabilité (R) du système "k-consécutifs-sur-n" par deux méthodes. Pour cela on pose $R_1 = R$ dans la première méthode, et $R_2 = R$ dans la seconde. On note par $\widehat{R_1}$ et $\widehat{R_2}$ les estimateurs de R_1 et R_2 respectivement.

3.5.1 Première méthode

On considère un système de n composants $X_1, X_2, ..., X_n$ tel que :

$$P\ (X_i = 1) = p \text{ et } P\ (X_i = 0) = q.$$

alors,

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{i=n} P(X_i = x_i) \quad \text{où} \quad x_i \in \{0, 1\}$$

ce qui donne

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)}.$$

On estime les probabilités p et q, par la méthode de maximum de vraisemblance.

On a :

$$\begin{aligned} L\ (x_1, x_2, ..., x_n, p) &= P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n) \\ &= p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\frac{\partial \ln L\ \ (x_1, x_2, ..., x_n, p)}{\partial p} = \frac{\partial \ln \left(p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{\sum_{i=1}^{n} (1-x_i)} \right)}{\partial p}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L\ \ (x_1, x_2, ..., x_n, p)}{\partial p} &= \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{p} - \sum_{i=1}^{n} (1 - x_i) \frac{1}{1-p} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Alors,

$$\widehat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

et

$$\begin{aligned} \widehat{q} &= 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n} (1 - x_i)}{n}. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\widehat{R}_1 = \left(1 - \widehat{q}^{k}\right) \left[1 - \frac{\widehat{q}^{k} \left(1 - \widehat{q}\right)}{1 - \widehat{q}^{k}}\right]^{n-k}.$$

3.5.2 Deuxième méthode

On considère

$$Z_i = \max_{i \leq j \leq i+k-1} X_j, \quad i = 1, 2, ..., n - k + 1.$$

Donc

$$\begin{aligned} P(Z_1, Z_2, ..., Z_{n-k+1}) &= P(Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ..., Z_{n-k+1} = z_{n-k+1}) \\ & \quad z_i \in \{0, 1\} \text{ pour tout } i = 0, 1, ..., n. \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}P(Z_1 = z_1 \quad, Z_2 = \quad & z_2, ..., Z_{n-k+1} = z_{n-k+1}) \\ = \quad & P\left(Z_{n-k+1} = z_{n-k+1}/Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ..., Z_{n-k} = z_{n-k}\right) \\ & P\left(Z_{n-k} = z_{n-k} \ / \ Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ..., Z_{n-k-1} = z_{n-k-1}\right) \\ & \times ... \times P\left(Z_2/Z_1\right) \times P\left(Z_1\right).\end{aligned}$$

On a démontré que $(Z_n)_{n\geq 1}$ est une chaîne de Markov, alors,

$$\begin{aligned}& P\left(Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ..., Z_{n-k+1} = z_{n-k+1}\right) \\ = \ & P\left(Z_{n-k+1} = z_{n-k+1}/Z_{n-k} = z_{n-k}\right).P\left(Z_{n-k} = z_{n-k}/Z_{n-k-1} = z_{n-k-1}\right) \\ & \times ... \times P\left(Z_2 = z_2/Z_1 = z_1\right).P\left(Z_1 = z_1\right).\end{aligned}$$

On pose :

$$\Pi\left(0,0\right) = P\left(Z_{n+1} = 0/Z_n = 0\right) = \alpha$$

$$\Pi\left(1,1\right) = P\left(Z_{n+1} = 1/Z_n = 1\right) = \beta,$$

ce qui donne,

$$\Pi\left(0,1\right) = 1 - \alpha \ \text{ et } \Pi\left(1,0\right) = 1 - \beta.$$

Avec ces notations, l'expression précédente peut s'écrire comme suit :

$$P\left(Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ..., Z_{n-k+1} = z_{n-k+1}\right) = P\left(Z_1 = z_1\right).\alpha^{n_{0,0}}\left(1-\alpha\right)^{n_{01}}.\beta^{n_{1,1}}\left(1-\beta\right)^{n_{1,0}}.$$

où,

$$\begin{aligned}n_{0,0} &= \text{Card }\left\{i: \ Z_i = 0 \text{ et } Z_{i+1} = 0, i = 1,2,...,n-k+1\right\} \\ n_{0,1} &= \text{Card }\left\{i: \ Z_i = 0 \text{ et } Z_{i+1} = 1, i = 1,2,...,n-k+1\right\}\end{aligned}$$

$$n_{1,1} = \text{Card } \{i : \ Z_i = 1 \text{ et } Z_{i+1} = 1, i = 1, 2, ..., n-k+1\}$$

et

$$n_{1,0} = \text{Card } \{i : \ Z_i = 1 \text{ et } Z_{i+1} = 0, i = 1, 2, ..., n-k+1\}.$$

Il est facile de vérifier que les estimateurs, par le maximum de vraisemblance des paramètres α et β sont :

$$\widehat{\alpha} = \frac{n_{0,0}}{n_{0,0} + n_{0,1}} \text{ et } \widehat{\beta} = \frac{n_{1,1}}{n_{1,0} + n_{1,1}}.$$

On a :

$$\begin{aligned} P(S_n = 1) &= P(Z_{n-k+1} = 1/Z_{n-k} = 1).P(Z_{n-k} = 1/Z_{n-k-1} = 1) \\ &\times ... \times P(Z_2 = 1/Z_1 = 1).P(Z_1 = 1). \end{aligned}$$

Alors la fiabilité du système est :

$$\begin{aligned} R_2 &= P(S_n = 1) = \Pi(1,1).\Pi(1,1)...\Pi(1,1).P(Z_1 = 1) \\ &= [\Pi(1,1)]^{n-k}.[1 - P(Z_1 = 0)] \\ &= \beta^{n-k}\left(1 - q^k\right). \end{aligned}$$

Car,

$$\begin{aligned} P(Z_1 = 0) &= P\left(\max_{1 \leq j \leq 1+k-1} X_j = 0\right) \\ &= P\left(\max_{1 \leq j \leq k} X_j = 0\right) \\ &= q^k. \end{aligned}$$

En utilisant :

$$\begin{aligned}\Pi(1,0) &= \frac{q^k(1-q)}{1-q^k} \\ &= 1-\beta.\end{aligned}$$

et après des calculs élémentaires on obtient :

$$q^k = \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}.$$

Alors,

$$R_2 = \beta^{n-k}\left(\frac{1-\alpha}{2-\alpha-\beta}\right).$$

Finalement, l'estimateur de R_2 est :

$$\widehat{R_2} = \widehat{\beta}^{n-k}\left(\frac{1-\widehat{\alpha}}{2-\widehat{\alpha}-\widehat{\beta}}\right).$$

3.6 Applications numériques

Ici on propose quelques exemples numériques.

Exemple 1 :

On considère un système de 15 composants dont ses états sont comme suit :

111001000011000.

Après les calculs, on obtient le tableau numérique suivant :

n	k	$\widehat{q}$	$\widehat{\alpha}$	$\widehat{\beta}$	$\widehat{R_1}$	$\widehat{R_2}$
15	2	$0,6$	$0,6$	$0,625$	$0,023286387$	$0,001146037$
15	3	$0,6$	$0,5$	$0,818181818$	$0,193108315$	$0,06599322$
15	4	$0,6$	0	$0,9$	$0,442962416$	$0,28528236$
15	5	$0,6$	0	1	$0,65440151$	1
15	6	$0,6$	0	1	$0,797950845$	1

Exemple 2 :

Considérons un système de 15 composants disposés comme suit :

$$00011011100000100001.$$

Après les calculs, on obtient les valeurs numériques suivantes :

n	k	$\widehat{q}$	$\widehat{\alpha}$	$\widehat{\beta}$	$\widehat{R_1}$	$\widehat{R_2}$
20	2	0.65	$0,666666667$	$0,777777778$	$0,002813377$	$0,006509548$
20	3	$0,65$	$0,5$	$0,818181818$	$0,064724217$	$0,024196271$
20	4	$0,65$	$0,333333333$	$0,846153846$	$0,231716035$	$0,056106438$
20	5	$0,65$	0	$0,933333333$	$0,436585272$	$0,333060344$
20	6	$0,65$	0	1	$0,616357328$	1

Exemple 3

Considérons un système contenant 30 composants leurs états sont donnés comme suit :

$$100000011001000111100011001111.$$

Après les calculs, on obtient :

n	k	$\widehat{q}$	$\widehat{\alpha}$	$\widehat{\beta}$	$\widehat{R_1}$	$\widehat{R_2}$
30	2	$0,533333333$	$0,545454545$	$0,705882353$	$0,000128979$	$3,53017E-05$
30	3	$0,533333333$	$0,5$	$0,857142857$	$0,02753838$	$0,012114129$
30	4	$0,533333333$	$0,666666667$	$0,956521739$	$0,190738849$	$0,278496956$
30	5	$0,533333333$	$0,5$	$0,958333333$	$0,446077869$	$0,318531767$
30	6	$0,533333333$	0	$0,956521739$	$0,668197211$	$0,329756124$
30	7	$0,533333333$	0	1	$0,815718478$	1

Chapitre 4

Système k-consécutifs-sur-l_n-parallèle

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à des systèmes dont la configuration est plus compliquée ; un montage en parallèle de blocs constitués d'éléments disposés linéairement et qui opèrent selon un système "k-consécutifs-sur-l_n". Nous les appelons systèmes "k-consécutifs-sur-l_n-parallèle".

4.1 Notations et Définitions

Dans ce chapitre on note :

- B_i le bloc numéro i, $i = 1, ..., n$.

- n le nombre de blocs dans le système.

- l_n le nombre de composants dans chaque sous système (bloc) B_i.

- k ($k \leq n$) le nombre minimum de composants consécutifs en panne qui cause la panne du sous-système B_i.

- nl_n le nombre de composants dans le système.

- X_j l'état du composant j, $X_j = 0$ s'il est en panne et $X_j = 1$ s'il fonctionne, pour tout $j = 1, 2, ..., nl_n$.

Définition.4.1.1. *Un système "k-consécutifs-sur-l_n-parallèle" est un système qui contient n blocs $B_1, B_2, ..., B_n$ disposés en parallèle, et les blocs possèdent la configuration "k-consécutifs-sur-l_n". Donc le système tombe en panne si et seulement si tous les sous-systèmes (tous les blocs) sont en panne, et chaque bloc est en panne si au moins k consécutifs de ses composants sont en panne.*

Cas particuliers

1. Si $n = 1$, on obtient, système *"k-consécutifs-sur-l_n"*.

2. Si $k = 1$, on obtient système série-parallèle.

3. Si $l_n = 1$, on obtient système parallèle.

4.2 Fonction de structure et Temps de panne

Dans ce paragraphe, et dans toute la suite, on suppose que les blocs et les composants de chaque bloc soient indépendants, de plus on suppose que tous les composants sont identiquement distribués.

4.2.1 Fonction de structure

La fonction de structure du système *"k-consécutifs-sur-l_n-parallèle"* est donnée par

$$\begin{aligned}\Phi(X) &= \max_{1\leq i\leq n} \min_{(i-1)l_n+1\leq s\leq (i+1)l_n-k+1} \max_{s\leq j\leq s+k-1} \{X_j\} \\ &= \coprod_{i=1}^{n} \prod_{s=(i-1)l_n+1}^{(i+1)l_n-k+1} \coprod_{j=s}^{s+k-1} \{X_j\}.\end{aligned}$$

Structure duale :

La structure duale, de la structure du système *"k-consécutifs-sur-l_n parallèle"* est donnée par

$$\begin{aligned}\Phi^D(X) &= \min_{1\le i\le n} \max_{(i-1)l_n+1\le s\le (i+1)l_n-k+1} \min_{s\le j\le s+k-1} \{X_j\} \\ &= \prod_{i=1}^{n} \coprod_{s=(i-1)l_n+1}^{(i+1)l_n-k+1} \prod_{j=s}^{s+k-1} \{X_j\}.\end{aligned}$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned}\Phi^D(X) &= 1-\Phi(1-X) \\ &= 1-\coprod_{i=1}^{n} \prod_{s=(i-1)l_n+1}^{(i+1)l_n-k+1} \coprod_{j=s}^{s+k-1} \{(1-X_j)\}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\Phi^D(X) &= 1-\coprod_{i=1}^{n} \prod_{s=(i-1)l_n+1}^{(i+1)l_n-k+1} \left(1-\prod_{j=s}^{s+k-1} X_j\right) \\ &= 1-\coprod_{i=1}^{n} \left(1-\coprod_{s=(i-1)l_n+1}^{(i+1)l_n-k+1} \prod_{j=s}^{s+k-1} X_j\right) \\ &= 1-\left(1-\prod_{i=1}^{n} \coprod_{s=(i-1)l_n+1}^{(i+1)l_n-k+1} \prod_{j=s}^{s+k-1} X_j\right),\end{aligned}$$

c'est à dire,

$$\Phi^D(X) = \prod_{i=1}^{n} \coprod_{s=(i-1)l_n+1}^{(i+1)l_n-k+1} \prod_{j=s}^{s+k-1} X_j.$$

4.2.2 Temps de panne

Le temps de panne du système *"k-consécutifs-sur-l_n parallèle"* est donné par la formule suivante :

$$Z_n = \max_{1\le i\le n} \min_{(i-1)l_n+1\le s\le (i+1)l_n-k+1} \max_{s\le j\le s+k-1} T_j,$$

où T_j est le temps de panne du composant j, $j=1,2,...,nl_n$.

4.3 Encadrement de la fiabilité

Avant d'établir un résultat concernant l'encadrement de la probabilité de temps de panne d'un système "k-consécutifs-sur-l_n-parallèle"(donc l'encadrement de la fiabilité du système), il faut d'abord encadrer la probabilité du temps de panne du système "k-consécutifs-sur-l_n". Pour cela considérons un système contenant l_n composants supposés indépendants, et que leurs temps de panne $T_1, T_2, ..., T_{l_n}$ ont même distribution, ce système tombe en panne si et seulement si k consécutifs de ses composants sont en panne. D'où le théorème suivant :

Théorème.4.3.1. *Soit Y_{l_n} le temps de panne du système k-consécutifs-sur-l_n, alors on a :*

$$\frac{(l_n-k+1)\,(F(t))^k}{1+2\frac{F(t)-(F(t))^k}{1-F(t)}+(l_n-k+1)\,(F(t))^k} \leq P\left(Y_{l_n} \leq t\right) \leq (l_n-k+1)\,(F(t))^k,$$

où F est la distribution de T_i, $i = 1, 2, ..., l_n$.

Preuve. On sait que :

$$Y_{l_n} = \min_{1 \leq i \leq l_n-k+1} \left(\max_{i \leq j \leq i+k-1} \{T_j\} \right),$$

donc,

$$\begin{aligned} P\left(Y_{l_n} \leq t\right) &= P\left(\min_{1 \leq i \leq l_n-k+1} \left(\max_{i \leq j \leq i+k-1} \{T_j\} \right) \leq t \right) \\ &= P\left(\bigcup_{1 \leq i \leq l_n-k+1} \ \bigcap_{i \leq j \leq i+k-1} (T_j \leq t) \right), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
P\left(Y_{l_n} \leq t\right) & \leq \sum_{i=1}^{l_n-k+1} P\left(\bigcap_{i \leq j \leq i+k-1}\left(T_j \leq t\right)\right) \\
& \leq \sum_{i=1}^{l_n-k+1} \prod_{j=i}^{i+k-1} F_j(t).
\end{aligned}$$

Alors

$$P\left(Y_{l_n} \leq t\right) \leq \left(l_n-k+1\right)(F(t))^k.$$

Maintenant, on procède comme dans[45] ; on définit les variables aléatoires suivantes :

$$Z_j(t)=\begin{cases} 1, \text{ si } X_j=X_{j+1}=\ldots=X_{j+k-1}=0, \\ 0, \text{ sinon,}\end{cases}$$

où, $j=1,2,\ldots,l_n-k+1$,
et

$$Z(t)=\sum_{j=1}^{l_n-k+1} Z_j(t).$$

Donc,

$$\begin{aligned}
P\left(Y_{l_n} \leq t\right) & = P(Z>0) \\
& = P\left(\bigcup_{j=1}^{l_n-k+1}\left\{Z_j(t)=1\right\}\right).
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Schwartz , on a :

$$P(Z>0) \geq \frac{(E(Z))^2}{E\left(Z^2\right)},$$

et on a

$$\begin{aligned} E\left(Z\right) &= E\left(\sum_{j=1}^{l_n-k+1} Z_j\left(t\right)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{l_n-k+1} E\left(Z_j\left(t\right)\right). \end{aligned}$$

Mais,

$$E\left(Z_j\left(t\right)\right) = \left(F\left(t\right)\right)^k,$$

donc

$$E\left(Z\right) = \left(l_n - k + 1\right)\left(F\left(t\right)\right)^k.$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} E\left(Z^2\right) &= E\left(\left(\sum_{j=1}^{l_n-k+1} Z_j\left(t\right)\right)^2\right) \\ &= E\left(\sum_{j=1}^{l_n-k+1} Z_j^2 + \sum_{u\neq v} Z_u.Z_v\right) \\ &= \sum_{j=1}^{l_n-k+1} E\left(Z_j\right) + \sum_{u\neq v} E\left(Z_u.Z_v\right), \end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned} \sum_{u\neq v} E\left(Z_u.Z_v\right) &= \sum_{u\neq v} P\left(Z_u = 1, Z_v = 1\right) \\ &= \sum_{|u-v|<k} P\left(Z_u = 1, Z_v = 1\right) + \sum_{|u-v|\geq k} P\left(Z_u = 1, Z_v = 1\right) \\ &= 2\sum_{0<u-v<k} P\left(Z_u = 1, Z_v = 1\right) + \sum_{|u-v|\geq k} P\left(Z_u = 1\right).P(Z_v = 1). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{u\neq v} E\left(Z_u.Z_v\right) &\leq 2\sum_{0<u-v<k} P\left(Z_u=1,Z_v=1\right)+\sum_u\sum_v P\left(Z_u=1\right).P(Z_v=1)\\
&\leq 2\sum_{r=1}^{k-1}\sum_{u-v=r} P\left(Z_u=1,Z_v=1\right)+\left(l_n-k+1\right)^2\left(F\left(t\right)\right)^{2k}\\
&\leq 2\left(l_n-k+1\right)\sum_{r=1}^{k-1}\left(F\left(t\right)\right)^k.\left(F\left(t\right)\right)^r+\left(l_n-k+1\right)^2\left(F\left(t\right)\right)^{2k}\\
&\leq 2\left(l_n-k+1\right)\left(F\left(t\right)\right)^k\frac{F\left(t\right)-\left(F\left(t\right)\right)^k}{1-F\left(t\right)}+\left(l_n-k+1\right)^2\left(F\left(t\right)\right)^{2k}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
E\left(Z^2\right) &\leq \left(l_n-k+1\right)\left(F\left(t\right)\right)^k+2\left(l_n-k+1\right)\left(F\left(t\right)\right)^k\frac{F\left(t\right)-\left(F\left(t\right)\right)^k}{1-F\left(t\right)}\\
&\quad+\left(l_n-k+1\right)^2\left(F\left(t\right)\right)^{2k},
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
P\left(Y_{l_n}\leq t\right) &\geq \frac{\left(\left(l_n-k+1\right)\left(F\left(t\right)\right)^k\right)^2}{\left(l_n-k+1\right)\left(F\left(t\right)\right)^k+2\left(l_n-k+1\right)\left(F\left(t\right)\right)^k\frac{F(t)-(F(t))^k}{1-F(t)}+\left(l_n-k+1\right)^2\left(F\left(t\right)\right)^{2k}}\\
&\geq \frac{\left(l_n-k+1\right)\left(F\left(t\right)\right)^k}{1+2\frac{F(t)-(F(t))^k}{1-F(t)}+\left(l_n-k+1\right)\left(F\left(t\right)\right)^k}.
\end{aligned}$$

D'où la démonstration du théorème est achevée.

Maintenant, pour conclure un encadrement pour la fiabilité du système "k-consécutifs-sur-l_n-parallèle", on établit le théorème suivant :

Théorème.4.3.2. *Soit Z_n le temps de panne du système, alors on a :*

$$\left[\frac{\left(l_n-k+1\right)\left(F\left(t\right)\right)^k}{1+2\frac{F(t)-(F(t))^k}{1-F(t)}+\left(l_n-k+1\right)\left(F\left(t\right)\right)^k}\right]^n\leq P\left(Z_n\leq t\right)\leq\left[\left(l_n-k+1\right)\left(F\left(t\right)\right)^k\right]^n,$$

où F est la distribution de T_j, $j = 1, 2, ..., nl_n$.

Preuve. Comme on a :

$$Z_n = \max_{1 \leq i \leq n} \min_{(i-1)l_n+1 \leq s \leq (i+1)l_n-k+1} \max_{s \leq j \leq s+k-1} T_j,$$

on déduit que :

$$P(Z_n \leq t) = P\left(\left\{\max_{1 \leq i \leq n} \min_{(i-1)l_n+1 \leq s \leq (i+1)l_n-k+1} \max_{s \leq j \leq s+k-1} T_j\right\} \leq t\right).$$

Mais tous les composants sont indépendants, donc

$$P(Z_n \leq t) = \prod_{i=1}^{n} P\left(\left\{\min_{(i-1)l_n+1 \leq s \leq (i+1)l_n-k+1} \max_{s \leq j \leq s+k-1} T_j\right\} \leq t\right),$$

et comme tous les composants ont la même distribution F, d'après le théorème.4.3.1. on conclut que

$$P\left(\left\{\min_{(i-1)l_n+1 \leq s \leq (i+1)l_n-k+1} \max_{s \leq j \leq s+k-1} T_j\right\} \leq t\right) \leq \left[(l_n - k + 1)(F(t))^k\right].$$

Alors

$$\begin{aligned} P(Z_n \leq t) &\leq \prod_{i=1}^{n} \left[(l_n - k + 1)(F(t))^k\right] \\ &\leq \left[(l_n - k + 1)(F(t))^k\right]^n. \end{aligned}$$

Du même théorème, on a

$$P\left(\left\{\min_{(i-1)l_n+1 \leq s \leq (i+1)l_n-k+1} \max_{s \leq j \leq s+k-1} T_j\right\} \leq t\right) \geq \frac{(l_n - k + 1)(F(t))^k}{1 + 2\frac{F(t)-(F(t))^k}{1-F(t)} + (l_n - k + 1)(F(t))^k},$$

donc

$$
\begin{aligned}
P\left(Z_n \leq t\right) & \geq \prod_{i=1}^{n} \frac{\left(l_n-k+1\right)\left(F\left(t\right)\right)^k}{1+2\frac{F(t)-(F(t))^k}{1-F(t)}+\left(l_n-k+1\right)\left(F\left(t\right)\right)^k} \\
& \geq \left[\frac{\left(l_n-k+1\right)\left(F\left(t\right)\right)^k}{1+2\frac{F(t)-(F(t))^k}{1-F(t)}+\left(l_n-k+1\right)\left(F\left(t\right)\right)^k}\right]^n .
\end{aligned}
$$

A partir de ce théorème, on peut conclure un encadrement concernant la fiabilité du système, d'où le corollaire suivant :

Corollaire.4.3.1. *Soit R la fiabilité du système "k-consécutifs-sur-l_n-parallèle", alors :*

$$
1-\left[\left(l_n-k+1\right)\left(F\left(t\right)\right)^k\right]^n \leq R\left(t\right) \leq 1-\left[\frac{\left(l_n-k+1\right)\left(F\left(t\right)\right)^k}{1+2\frac{F(t)-(F(t))^k}{1-F(t)}+\left(l_n-k+1\right)\left(F\left(t\right)\right)^k}\right]^n .
$$

Preuve. Pour démontrer ce corollaire, il suffit d'utiliser,

$$
\begin{aligned}
R\left(t\right) & = P\left(Z_n > t\right) \\
& = 1-P\left(Z_n \leq t\right)
\end{aligned}
$$

Conclusion :

Dans ce travail, la partie qui nous semble la plus originale réside dans le chapitre (III) où l'on établit une formule basée sur les chaînes de Markov au moyen duquelle on peut calculer la fiabilité d'un système "k-consécutifs-sur-n", et dans le chapitre (IV) où l'on étend certains résultats à des systèmes de configuration plus compliquée.

L'intérêt de cette nouvelle formule est mis en évidence dans les exemples fournis à la fin du chapitre (III). Ainsi, pour des systèmes du type susindiqué, les estimations $\widehat{R_1}$ et $\widehat{R_2}$ de la fiabilité R, obtenues respectivement par la méthode basée sur le maximum de vraisemblance et par la dite formule, sont totalement différentes, et le calcul de $\widehat{R_1}$ passe forcément par des estimations $\widehat{q}$ et $\widehat{q}^k$ de q et q^k respectivement, alors que celui de $\widehat{R_2}$ utilise seulement une estimation $\widehat{\beta}$ de β laquelle est indépendante de $\widehat{q}$. De plus, le calcul de R par la nouvelle formule fait apparaître un terme de degré $n-k$ ce qui permet d'éviter des erreurs cumulées dues à la puissance, lorsque k est suffisamment proche de n. Enfin, si $n = 100$ et $k = 90$, le calcul de $\widehat{R_1}$ nécessite 90 itérations alors que celui de $\widehat{R_2}$ n'en exige que 10.

Au chapitre (IV), nous avons proposé un encadrement de la fiabilité de systèmes dits "k-consécutifs-sur-l_n-parallèle" ($i.e.$un montage en parallèle de blocs constitués d'éléments disposés linéairement et qui opèrent selon un système "k-consécutifs-sur-l_n"), dont les composants sont supposés indépendants et identiquement distribués, et il serait intéressant de généraliser ce type de résultat au cas où les composants suivent des lois différentes, en particulier il est possible d'utiliser cet encadrement pour trouver les lois limites possibles pour la fiabilité du système.

Bibliographie

[1] M. Métivier, Notions fondamentales de la théorie des probabilités. Dunod, Paris, 1972.

[2] R. E. Barlow, F. Proshan, "Statistical theory of reliability and life testing probability models" Holt, Rinehart and Winston, New York, 1975.

[3] Kontoleon, J.M., " Reliability determination of a r-successive-k-out-of-n : F systems", IEEE. Trans. Reliab., vol R-29 (1980) p 437.

[4] Chiang, D.T, Nui, S.C., "Reliability of consecutive-k-out-of-n : F system", IEEE. Trans. Reliab. ,Vol R-30 Apr (1981), pp 87-89.

[5] Bollinger, R.C , Salvia, A.A "Consecutive k-out-of-n : F networks", IEEE Trans. Reliab., Vol R-31, Apr (1982) , pp 53-56.

[6] Derman, C., Lieberman, G.J., Ross, S.M., "On the consecutive-k-out-of-n : F system", IEEE. Trans. Reliab., Vol. R-31 Apr (1982) pp 57-63.

[7] Bollinger R C, "Direct computation for consecutive-k-out-of-n : F system", IEEE. Trans. Reliab. ,Vol R-31 Dec (1982) ,pp 444-446.

[8] Hwang F. K., "Fast solutions for consecutive-k-out-of-n : F systems", IEEE. Trans. Reliab., vol. R-31, Dec. (1982) pp 447-448.

[9] Shantikumar, J.G. "reliability algorithm to evaluate the reliability of a consecutive k-out-of-n F system" IEEE Trans. Reliab. Vol R-31 Dec.(1982),pp 442-443.

[10] Lambiris, M., Papastavridis, S.G., " Exact reliability formulas for linear & circular consecutive-k-out-of-n : F systems", IEEE. Trans. Reliab. , Vol R-34 Jun (1985) pp 124-126.

[11] Bollinger R C, "An algorithm for direct computation in consecutive-k-out-of-n : F systems", IEEE. Trans. Reliab. ,Vol. R-35 No 5, Dec (1986) ,pp 611-612.

[12] Grifith W.S, "On Consecutive-k-out-of-n failure systems and their generalizations", A.P.Basu (ed), Reliability and quality control, Elsevier (North-Holland), (1986), pp 157-165.

[13] Papastavridis, S.G., " Algorithms for strict consecutive-k-out-of-n : F systems", IEEE Trans. Reliab. Vol. R-35, No 5 December (1986), pp 613-615.

[14] Hwang F. K. "Simplified Reliabilities for Consecutive–k-out-of-n systems" SIAM J Alg. Disc. Meth. vol.7, N 2, April (1986) pp 258-264.

[15] Fu, J.C., "Bounds for reliability of a large consecutive-k-out-of-n : F systems with unequal component reliability", IEEE. Trans. Reliab. ,Vol. R-35, Aug(1986a) pp 316-319.

[16] Fu, J.C., "Reliability of a consecutive-k-out-of-n : F system with (k-1)-step Markov dependence", IEEE. Trans. Reliab., Vol. R-35 (1986b) pp 602-606.

[17] W. S. Griffith, "On consecutive-k-out-of-n failure systems and their generalizations". A. P. Basu (ed.), Reliability and Quality Control, Elsevier (North-Holland) (1986), pp. 157–165.

[18] Fu, J.C., Hu, Beihua, "On reliability of a consecutive-k-out-of-n : F system with (k-1)-step Markov dependence", IEEE. Trans. Reliab., Vol. R-36 (1987)pp 75-77.

[19] Papastavridis, S.G., " A limit theorem for the reliability of a consecutive-k-out-of-n : F system", Adv.Appl. Probab.,vol.19, (1987a), pp 746-748.

[20] Papastavridis , S G , Lambiris M, "Reliability of a consecutive-k-out-of-n :F system for Markov-Dependent components" IEEE Trans. Reliab. Vol. 36,No 1, Apr (1987), pp 78-79.

[21] Chrysaphinou, O, Papastavridis, S.G., " Limit distribution for a consecutive k-out-of-n : F system", Adv. Appl. Probab., vol 22, (1990b), pp 491-493.

[22] Chrysaphinou, O, Papastavridis, S.G., "Reliability of a consecutive-k-out-of-n : F system in a random environment", J. Appl. Probab., Vol. 27, (1990c),pp 452-458.

[23] Ge, G. P., Wang, L. S "Exact reliability formula of a consecutive-k-out-of-n : F systems with homogeneous Markov dependence" IEEE Trans. on Reliab.Vol. 39, No 5, Decem. (1990),pp 600-602.

[24] Kuo W, Zhang W, Zuo M, "A consecutive-k-out-of-n : G system : The Mirror Image of a Consecutive-k-out-of-n : F system", IEEE Transactions on Reliability, Vol.39, No.2, June (1990), pp 244-253.

[25] W. Kuo, W. Zhang and M. Zuo, "A consecutive-k-out-of-n : G system : The mirror image of a consecutive-k-out-of-n : F system", IEEE Trans. Relib. 39 (1990) 244–253.

[26] Salvia, A.A., Lacher, W.C., "2-Dimensional consecutive-k-out-of-n : F models", IEEE Trans. Reliability, vol. 39, Aug (1990), pp. 382-385.

[27] E.R. Canfield, W.P. Mccormik, "Asymptotic Reliability of Consecutive-k-out-of-n Systems" J.Appl.Prob., **29**, 1992, pp. 142-155.

[28] Ksir B, "Comment on 2-Dimensional consecutive -k-out-of-n :F models", IEEE Trans. Reliability, vol. 41, No .4, Dec (1992) p 575.

[29] Ksir, B., Boushaba, M., "Reliability bounds and exact formula of consecutive k-out-of-n : F system with Markov dependence" Microelec. and Reliab. Journal vol 33 ,N 3 , (1993) pp 313-317.

[30] Krzysztof Klowrocki, "On a class of limit reliability functions of some regular homogeneous series-parallel system". Reliability Engineering and System Safety. 39 (1993), pp 11-23.

[31] Wu, J.S., Chen, R.J., " Efficient algorithm for reliability of a circular consecutive-k-out-of-n : F system", IEEE. Trans. Reliab. , Vol-42, No 1, March(1993) pp 163-164.

[32] Hwang F. K, "An O (nk)-time algorithm for computing the reliability of a circular consecutive-k-out-of-n : F system" IEEE. Trans. Reliab. , Vol. 42, N. 1, March (1993) pp 161-162.

[33] Koutras, M.V., Papadopoulos, G.K.,.Papastavridis, S.G. " Reliability of 2-Dimensional consecutive-k-out-of-n : Systems" , IEEE Trans. Reliability, Vol. 42, N.4 , (1993) , pp 658-661.

[34] Sfakianakis M, Papastavridis S G, "Reliability of a general consecutive-k-out-of-n : F system" IEEE. Trans. Reliab. , Vol-42, N. 3, September (1993) pp 491-496.

[35] Krzyztof Klowrocki, "The classes of asymptotic reliability functions for series parallel & parallel-series systems", Reliability Engineering and System Safety. 46, (1994), pp179-188.

[36] Jun Cai, "Reliability of a large Consecutive-k-out-of-r-from-n :F System with Unequal Component-Reliability", IEEE Transactions On Reliability, Vol. 43, N.1, March (1994) , pp 107-111.

[37] Fu, J.C., Koutras, M.V., "Distribution theory of runs : A Markov chain approach", J.Amer. Statist. Assoc.,Vol. 89, (1994b), pp 1050-1058.

[38] Chao, M.T., Fu, J.C., Koutras, M.V., "Survey of reliability studies of consecutive-k-out-of-n : F & related systems", IEEE. Trans. Reliab., Vol. 44, (1995), pp 120-127.

[39] Hwang F. K., Wright, P.E., "An algorithm for the consecutive-k-out-of-n : F System" IEEE. Trans. Reliab. ,Vol 44, (1995), pp 128-131.

[40] Fu, J.C., "Distribution theory of runs and patterns associated with sequence of multi-state trials", Statistica Sinica, 6, (1996), pp 957-974.

[41] Jacek Malinowski, Wolfgang Preuss, "Reliability increase of consecutive k-out-of-n and related system through components rerrangement". Microelectronics Reliab. Vol. **36** No10 (1996). pp. 1417-1423

[42] B. Ksir, “A Weibull limit law for an arbitrary component law of a consecutive-k-out-of-n : F System ”, 2^{ND} International Symposium On Semi-Markov Models : Theory and Application. December 1998, pp. 9-11 Compiègne, France.

[43] Boland, P.J ,Papastavridis, S.G., ”Consecutive-k-out-of-n : F systems with cycle k” Statistics & Probability Letters, 44, (1999), pp 155-160.

[44] Fen-Hui Lin, Way Kuo, Frank Hwang, ”Structure importance of consecutive k-out-of-n systems”, Operations Research Letters, 25, (1999), pp 101-107.

[45] B. Ksir, N. Ghoraf, “A Weibull limit law for the failure time of consecutive-k-out-of-n system with unequal component reliability” ISSAT International Conference. Las-Vegas (USA). pp. 11-13 Aug. 1999.

[46] Muselli, M., "Useful inequalities for longest run distribution". Statistics and Probability letters, vol. 46, pp 239-249.

[47] Zuo, M.J., Lin, D., Wu, Y., ” Reliability evaluation of combined k-out-of-n : F, consecutive-k-out-of-n : F and linear connected-(r,s)-out-of-(m,n) : F system structures”, IEEE. Trans. Reliab. , Vol R-49, (2000), pp 99-104.

[48] Lam Yeh, Hon Keung Tony Ng , "A general model for consecutive-k-out-of-n : F repairable system with exponential distribution and (k-1)-step Markov dependence", European Journal of Operations Research, 129, (2001), pp663-682.

[49] Hwang F K., "A new index of components importance" Operations research letters 28, (2001), pp 75-79.

[50] G. Arulmozhi, “Exact equation and an algorithm for Reliability evaluation of consecutive k-out-of-n : G system”. Reliability, Engineering and System Safety **68**, 2002, pp. 87-91.

[51] Chang H W, Chen R J, Hwang F K, "the structural Birnbaum Importance of Consecutive-k-out-of-n systems" , Journal of Combinatorial Optimization , 6 ,(2002), pp 183-197.

[52] Bouhadjar S, Ksir B " Fiabilité du système k-consécutifs-sur-l_n séries, 3ème rencontre Internationale d'Analyse Mathématiques et ses Applications (RAMA III), Bejaia, 21-23 Mai 2002.

[53] Ghoraf N, Boushaba M, "Systèmes 2-k-consécutifs-sur-n", 3ème Rencontre Internationale d'analyse mathématique et ses applications (RAMA III), Bejaia,21-23 Mai (2002).

[54] Cui, L., " The IFR property for consecutive-k-out-of-n : F systems", Statistics & Probability Letters, vol 59, (2002), pp 405-414.

[55] Wendai Wang, James Loman. "Reliability/ A vailability of k-out-of-N system with M Cold standby units". Proceeding annual Reliability and waintainability sympasium 2002 IEEE.

[56] Chang H W, Chen R J, Hwang F K, "the structural Birnbaum Importance of Consecutive-k systems" , Journal of Combinatorial Optimization , 6 ,(2002), pp 183-197.

[57] Yam R, Zuo M, Zhang Y, "A method for evaluation of reliability indices for repairable circular consecutive-k-out-of-n : F systems", Reliability engineering and system safety 79, (2003), pp 1-9.

[58] Namir GHORAF, Brahim KSIR ,"A Weibull limit law for the failure time of cousecutive-k-out-of-m-from-n : F System", International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering, Vol. 13, No. 5, October (2006),pp 421-431.), pp 83-96.

[59] Belaloui S. Evaluation de systèmes de fiabilité à configuration complexe, Thèse de doctorat d'état so, Nov 2007. Constantine.

[60] Ghorf N. Fiabilité des systèmes r-consécutifs-k-sur-n, Thèse de doctorat, 9 Juin 2007. Constantine.

[61] Bouhadjar S, Ksir B, "Fiabilité des systèmes k-consécutifs -sur-n, via les chaînes de Markov". Vth International Workshop on ProbabilityAnd Stochastic Analysis Biskra, Algeria, December 17 – 18, 2008.

[62] Bouhadjar S, " Théorèmes limites pour le temps de panne d'un système k-consécutifs-sur-l_n série dont les composants ne sont pas identiquement distribués" Colloque international sur les systèmes dynamiques distribués et contrôle 08-10 Novembre 2009. Oum El Bouaghi.

[63] Brahim Ksir, Slimane Bouhadjar, " An estimation method for the reliability of consecutive k-out-of-n system", Serdica Math. J. Vol. 38 (Number 4) (2012) pp 633-644.

ملخـــص:

نتطرق في هذا العمل إلى دراسة النظام k متوالية من بين n عنصر والنظام k متوالية من بين ln توازي.

في صيغ حساب أو حصر الوثوقية لنظام k متوالية من بين n عنصر يظهر الحد q^k. أخطاء صغيرة في تقدير q قد ينتج عنها أخطاء مهمة في تقدير q^k وبالتالي في تقدير الوثوقية للنظام. لهذا الغرض نقترح طريقة جديدة تعتمد على سلاسل Markov التي تسمح لنا بتقدير الوثوقية مباشرة باستعمال تقدير q^k عوض تقدير q بالتدقيق سنبرهن صيغة جديدة لحساب وتقدير الوثوقية للنظام.

الهدف الثاني في هذا العمل هو إيجاد حصر لتابع الوثوقية لنظام k متوالية منب ين ln توازي.

كلمات المفاتيـــح:

نظام k ، متوالية من بين n عنصـــر، نظام k، متوالية من بين ln توازي، تقدير باستعمال طريقة المعقولية العظمـــى سلاسل Markov.

Title: Study of the reliability of disposed systems in blocks.

Abstract: The object of our work is a study the consecutive k-out-of-n system and the consecutive k-out-l_n parallel.

Firstly, in the expressions and bounds of the reliability (R) consecutive k-out-of-n system appair the trem q^k , so, a little gaps in the evaluation of q yields a great one in the evalution of q^k and then in the estimation of R. Ror this reason we propose a new method based on the Markov chains; this can help us to estimate directly R with the q^k estimator rather the q estimator. More precisely, we establish a new method to calculate and estimate the reliability of the system.

Finally, we propose bounds for the reliability of consecutive k-out-of-l_n parallel system.

Keywords : Consecutive-k-out-of-n system, Likelihood estimation, Markov chains. Consecutive-k-out-of-l_n parallel system.

Titre de la thèse: *Etude de la Fiabilité des Systèmes Disposés en Blocs*

Résumé: Notre travail est consacré à l'étude des systèmes "k-consécutifs-sur-n" et "k-consécutifs-sur-l_n parallèle".

Dans les formules ou les bornes de la fiabilité du système "k-consécutifs-sur-n" apparait le terme q^k. De petits écarts sur l'estimation de q peut entrainer de grands écarts dans l'estimation de q^k est donc dans l'estimation de la fiabilité du système. Pour cette raison on propose ici, une nouvelle méthode basée sur les chaines de Markov, qui permet d'estimer directement la fiabilité du système en utilisant l'estimateur de q^k au lieu d'utiliser l'estimateur de q. Plus précisément, on établit une nouvelle méthode pour calculer et estimer la fiabilité du système.

Le deuxième but de ce travail est de donner un encadrement pour la fiabilité d'un système "k-consécutifs-sur-l_n parallèle", où les composants sont supposés indépendants et identiquement distribués.

Mots Clés: Système "k-consécutifs-su-n" , Estimation par la méthode de maximum de vraisemblance, Chaines de Markov, Système "k-consécutifs-sur-l_n parallèle".