

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

**Université de Constantine 1      Faculté des Sciences Exactes**

**Département de Mathématiques**

N° d'ordre :

N° de série :

**THESE**

Pour l'obtention du diplôme de doctorat en Sciences en Mathématiques

**Option :**

**SYSTEMES DYNAMIQUES DISCRETS (SYD)**

Présentée par : **SOULA Yamina**

**Intitulée :**

**«BIFURCATION ET SYMETRIE DANS LES SYSTEMES  
DYNAMIQUES DISCRETS COUPLES».**

Devant le **jury** :

Mr. <b>A.L.MARHOUNE</b>	PROF	Université de Constantine 1	Président
Mr. <b>N. HAMRI</b>	PROF	C. Universitaire de Mila	Rapporteur
Mr. <b>M. DEGHDAK</b>	PROF	Université de Constantine 1	Examineur
Mr. <b>E. ZERAOULIA</b>	PROF	Université de Tébessa	Examineur
Mr. <b>S. BENHADID</b>	M.C	Université de Constantine 1	Examineur
Mr. <b>K. HAOUAM</b>	M.C	Université de Tébessa	Examineur

**Soutenu le : 16/06/2014**

# Table des matières

0.1	Remerciements . . . . .	1
0.2	Principales notations utilisées . . . . .	4
0.3	Introduction générale . . . . .	6
<b>1</b>	<b>Définitions et propriétés générales sur les systèmes dynamiques</b>	<b>12</b>
1.1	Introduction . . . . .	12
1.2	Singularités . . . . .	13
1.3	Stabilité des singularités . . . . .	14
1.4	Courbes invariantes . . . . .	15
1.5	Chaos . . . . .	17
1.5.1	Le chaos stable ou attracteur étrange . . . . .	17
1.5.2	Le chaos instable ou répulsif étrange . . . . .	17
1.6	Attracteurs et attracteurs chaotique . . . . .	18
1.6.1	Attracteur chaotique . . . . .	18
1.7	Bassin d'attraction . . . . .	19
1.8	Caractérisation des bassins ridés . . . . .	19
1.9	Bifurcations . . . . .	20
1.10	Types de bifurcation . . . . .	21
1.10.1	Bifurcation fold ou nœud-col (Pli) . . . . .	21
1.10.2	Cas particuliers de la bifurcation fold . . . . .	23
1.10.3	Bifurcation flip ou doublement de période . . . . .	24
1.11	Définition mathématique des lignes critiques . . . . .	27
1.11.1	Feuilletage du plan de phase pour les transformations non inversibles bidimensionnelles . . . . .	28
1.12	Rôle des lignes critiques dans les bifurcations fondamentales des bassins . .	31
1.13	Régions absorbantes . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Bifurcations locales et comportements dynamiques des systèmes chaotiques couplés</b>	<b>37</b>
2.1	Introduction . . . . .	37
2.1.1	Etude analytique . . . . .	38
2.1.2	Equations des courbes de bifurcations pour $T$ . . . . .	47
2.1.3	Cas particuliers de la bifurcation fold . . . . .	49

2.1.4	Points nœuds paramétriques avec multiplicateurs $S_1 = -S_2 = 1$ . . .	63
2.2	Evolution de la structure de bifurcation lorsque le troisième paramètre varie	66
2.2.1	Simulations du plan des paramètres . . . . .	66
2.2.2	Courbes de bifurcation d'un cycle d'ordre $k = 1$ pour $T_1, T_2$ et $T_3$ .	73
2.2.3	Points nœuds paramétriques pour $T_1, T_2$ et $T_3$ . . . . .	75
2.2.4	Courbes de bifurcation d'un cycle d'ordre $k = 2$ pour $T_1, T_2$ et $T_3$ .	79
2.2.5	Equations des courbes de bifurcation données par des droites dans le plan $(a, b)$ . . . . .	80
2.2.6	Structures de bifurcations données par des droites pour la transformation $T_3$ . . . . .	87
<b>3</b>	<b>Bifurcations globales des systèmes chaotiques couplées</b>	<b>90</b>
3.1	Introduction . . . . .	90
3.2	Propriétés de symétrie dans la dynamique de $T_1$ . . . . .	90
3.3	La périodicité de $T$ dans le plan $(x, y)$ . . . . .	92
3.4	Restriction de $T$ à $\Delta$ . . . . .	93
3.5	Étude de symétrie et périodicité de la restriction de $T$ à $\Delta$ dans le plan $(x, y)$	96
3.6	Synchronisation chaotique . . . . .	100
3.7	Restriction de $T$ à l'antidiagonale $\Delta_{-1}$ . . . . .	104
3.8	Courbes de bifurcation . . . . .	106
3.9	Représentation graphique de la récurrence antidiagonale . . . . .	108
3.10	Étude de restriction de $T$ à $\Delta_{-1}$ dans le plan des paramètres . . . . .	109
3.11	Antisynchronisation chaotique . . . . .	112
3.12	Courbes invariantes . . . . .	112
3.12.1	Les pentes . . . . .	113
3.13	Bassins d'attraction . . . . .	115
3.14	Diagramme de bifurcation de $T$ dans le plan $(b, x)$ . . . . .	119
3.15	Lignes critiques . . . . .	121
3.16	Bifurcations d'un bassin d'attraction . . . . .	128
3.17	Attracteur chaotique et zones absorbantes . . . . .	154
<b>4</b>	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>158</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>161</b>
4.1	Résumé, mots-clés . . . . .	167

## 0.1 Remerciements

Ce travail a été effectué au sein de l'équipe Systèmes Dynamiques "SYD" du Laboratoire "LATTIS", au Département de Génie Electrique et Informatique de l'Institut National des Sciences Appliquées "INSA" de Toulouse.

Au terme de ce travail, je remercie tout d'abord DIEU, qui m'a donné force, et courage afin d'élaborer ce mémoire.

Je remercie vivement Monsieur Abdel-Kaddous TAHA, Professeur à l'université de Toulouse (France), pour être intéresser à ce travail, pour ses qualités humaines et scientifiques, pour son aide et ses conseils m'ont donné une vision à la fois plus précise et plus synthétique dans le domaine de la recherche. Je voudrais le remercier pour le temps passé à corriger et à consacrer ce mémoire de thèse, et à examiner ce travail très attentivement.

J'exprime tout ma reconnaissance à Madame Danièle FOURNIER-PRUNARET, Professeur à l'université de Toulouse, qui m'accueilli dans son équipe Systèmes Dynamiques. Je la remercie pour ses remarques pertinentes et fructueuses pour la rédaction de ce document, la gentillesse et la haute compréhension qu'elle m'apporta tout au long de ce travail, je salue surtout sa rigueur, son sens du détail et son esprit de synthèse.

Mes remerciements vont également à mon encadreur Professeur Monsieur Nasr-Eddine HAMRI pour toutes ces remarques constructives, ses encouragements et son soutien scientifique et moral.

Je souhaite également adresser mes remerciements à l'ensemble des membres de jury, Professeur A. L. MARHOUNE qui m'a fait honneur en président mon jury, le Professeur E. ZERAOULIA, le Professeur M. DEGHEDAK, Professeur S. BENHADID et le

Professeur K. HAOUAM pour bien vouloir prendre le temps de s'intéresser à mon travail et faire partie du jury de ce mémoire.

Je tiens à remercier le Ministère de l'Enseignement Supérieur Algérien d'avoir financé partiellement mes activités de recherche par une bourse PAF. Ce qui m'a permis de finir ma thèse dans de bonnes conditions. Par la même occasion, je remercie aussi tous les responsables et évaluateurs de ce programme de bourses.

À mon cher père et ma chère mère

À mon mari et mon fils

À mon frère et mes sœurs

À tous mes amis

**Je dédie ce modeste travail**

## 0.2 Principales notations utilisées

$I$  : matrice identité.

$\det J$  : déterminant d'une matrice jacobienne  $J$ .

$\text{tr} J$  : trace de  $J$ .

$S_i$ , ( $i = 1, 2$ ) : valeurs propres.

$(k, j)$  : un cycle d'ordre  $k$ ,  $j$  caractérise l'ordre d'échange des  $k$  points du cycle.

$\Lambda_{(k)_0}^j$  : une courbe de bifurcation "noeud-col" ou "fold" ou "pli".

$\Lambda_k^j$  : une courbe de bifurcation "doublement de période" ou "flip".

$C_k^j$  : point cuspidal.

$NP_i$  ( $i > 0$ ) : points nœuds paramétriques (points de codimension-deux).

$N_S^k$  : cycle d'ordre  $k$  ( $k \geq 1$ ) de type nœud stable.

$N_I^k$  : cycle d'ordre  $k$  ( $k \geq 1$ ) de type nœud instable.

$C^k$  : cycle d'ordre  $k$  ( $k \geq 1$ ) de type col.

$TNI$  : transformations non inversibles.

$LC_{-1}$  : le lieu des points pour lequel le  $\det J$  de  $T$  s'annule.

$LC = LC_0$  : lignes critiques de rang 1 des courbes  $LC_{-1}$ .

$LC_i$ , ( $i = \overline{1, n}$ ) : itérations, les images des courbes  $LC_{-1}$ .

$Z_i$  : zones, ( $i$  entier naturel).

$B(A)$  ( $D$ ) : bassin (domaine) d'attraction de l'attracteur  $A$ .

$\lambda_i$ , ( $i = 1, 2$ ) : exposants de Lyapunov.

$d$  : dimension de l'attracteur chaotique.

$(VP_i)$ ,  $(i = 1, 2)$  : les valeurs des pentes.

$CI$  : courbe invariante.

$\Delta$  : diagonale ( $y = x$ ).

$\Delta_{-1}$  : antidiagonale ( $y = 1 - x$ ).

$T \setminus \Delta$  : la restriction de  $T$  à diagonale  $\Delta$ .

$T \setminus \Delta_{-1}$  : la restriction de  $T$  à antidiagonale  $\Delta_{-1}$ .

### 0.3 Introduction générale

L'objet de cette thèse consiste en une étude de la "dynamique complexe" générée par des systèmes non linéaires régis par des équations aux récurrences appelées également transformations ponctuelles notées  $T$  et à leurs applications dans les techniques de l'ingénieur. Le terme "dynamique complexe" est utilisé pour caractériser tout comportement à caractère non périodique, notamment les régimes chaotiques.

Les systèmes dynamiques discrets linéaires sont sans grande surprise puisqu'ils répondent toujours dans le sens qu'on leur commande. Il n'en va pas de même des systèmes non-linéaires dont l'évolution peut s'avérer difficile à anticiper. Le chaos résulte d'une instabilité congénitale des trajectoires décrivant la dynamique du système considéré dans son espace des phases, ce qui se traduit par une imprédictibilité à long terme de son état en dépit du déterminisme qui garantit la prédictibilité à court terme. L'étude de systèmes mécaniques élémentaires permettra d'introduire les notions fondamentales de dynamique et les outils disponibles pour caractériser toute la gamme de comportements possibles, du stationnaire au chaotique. Le concept fondamental de bifurcation. De là nous passerons à la description de scénarios classiques de transition vers le chaos et nous introduirons les principales quantités servant à caractériser un régime chaotique, exposants de Lyapunov quantifiant l'imprédictibilité et dimensions fractales rendant compte de la structure des attracteurs étranges dans l'espace des phases. Enfin nous évoquerons les applications de la dynamique non-linéaire (contrôle) et ses implications sur l'analyse et la modélisation des systèmes complexes.

## **Le Chaos**

C'est surtout depuis 1975 que les comportements complexes des systèmes dynamiques, connus sous le nom de "Chaos", "attracteurs chaotiques ou étranges", sont l'objet d'un nombre croissant d'études. Le fait qu'on les rencontre dans nombre de processus des Sciences de la Vie, de la cinétique chimique, de la physique (voir par exemple [37], [38], [33], [47]).

Le chaos, phénomène typique des systèmes dynamiques non-linéaires, est aujourd'hui très largement étudié, en raison de ses propriétés et des nombreuses applications potentielles. Nous pouvons observer du chaos dans de nombreux phénomènes physiques, chimiques, météorologiques, économiques et ses caractéristiques font qu'on peut envisager de l'utiliser à des fines applications.

Un signal chaotique se caractérise notamment par sa sensibilité aux conditions initiales. De plus, un tel signal est non-périodique et complètement déterministe, mais sa dynamique est proche de celle d'un signal aléatoire (un bruit par exemple) [49], [13].

## **Les bifurcations**

Le terme bifurcation est généralement associé à la notion de changement du type topologique de la trajectoire d'un système dynamique lorsqu'un ou plusieurs paramètres dont elle dépend varient. C'est une notion très importante en mécanique où l'étude de systèmes d'équations non-linéaires en fonction de paramètres caractéristiques est classique. Le simple pendule entrepris présente des comportements différents suivant les valeurs des paramètres d'entretien et d'amortissement. Mathématiquement, il y a bifurcation lorsque les portraits des phases ne sont plus homéomorphes.

Une classe particulière de transformations ponctuelles joue un rôle important du point de vue fondamental et appliqué : les transformations non inversibles  $TNI$  (appelé aussi endomorphisme). Elles se différencient des transformations dites inversibles (difféomorphisme) par le fait qu'un point de l'espace de phase ne possède pas un antécédent unique mais peut en avoir zéro, un ou plusieurs antécédents suivant la région de l'espace considérée. Du point de vue historique, l'intérêt porté sur les  $TNI$  s'est accru depuis 1990.

L'étude faite ici concerne principalement les  $TNI$  bi-dimensionnelles. Elles se caractérisent en général par la présence dans le plan de phase de singularités appelées Lignes Critiques ( $LC$ ). Cette notion a été introduite pour la première fois en 1964 [45]. Les  $LC$  limitent dans le plan de phase (d'état) des régions à l'intérieur desquelles un point a un nombre constant  $i$  d'antécédents de rang 1. Les  $LC$  séparent deux régions  $Z_i$  et  $Z_{i'}$  avec  $i \neq i'$ . Du point de vue de la transformation inverse  $T^{-1}$ , le plan de phase apparaît alors comme feuilleté. Chaque feuillet est associé à une détermination bien définie de  $T^{-1}$ . Les Lignes Critiques constituent le lieu des points où les différents feuillets se joignent. Depuis 1969, de nombreuses publications ont développé le rôle des lignes critiques pour expliquer les bifurcations intervenant sur la structure des bassins d'attraction. Parmi les bifurcations où les lignes critiques interviennent, on distingue la bifurcation de type "bassin simplement connexe  $\leftrightarrow$  bassin non connexe", "bassin simplement connexe  $\longleftrightarrow$  bassin multiplement connexe" [43], [41], [42], [44], ainsi que les travaux de [43], [23], [44] pour l'étude de la fractalisation des bassins d'attraction.

De nombreuses études ont été consacrées à des transformations couplées ces dernières années. L'intérêt majeur de leur étude est de comprendre leur comportement dyna-

mique et plus particulièrement la façon comment les phénomènes de synchronisation peut se produire. En effet, les systèmes couplés peuvent présenter un mouvement de chaotique synchronisé sur un sous-espace invariant de l'espace des phases [24], [25] la synchronisation et antisynchronisation des oscillateurs couplés chaotiques ont une variété d'applications, en particulier dans le cadre de la communication sécurisée [18], [31] ou de la biologie. Dans cette thèse nous considérons une famille de transformation ponctuelle couplée en deux dimensions générées par le couplage de deux transformations à une dimension, y compris des fonctions sinusoïdales. Nous proposons d'étendre l'étude proposée dans [34] concernant les bifurcations et les phénomènes de synchronisation et d'antisynchronisation.

La transformation couplée que nous avons choisi d'étudier est basée sur une fonction sinusoïdale :

$$T(x_n, y_n) : \begin{cases} x_{n+1} = F(x_n, y_n) = f_a(x_n) + (1-c)bg(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = G(x_n, y_n) = f_a(y_n) + bg(y_n, x_n), \end{cases} \quad (0.1)$$

Où  $F$  et  $G$  sont des fonctions continues, différentiables, non linéaires,  $x_n$  et  $y_n$  sont des variables réelles du sous-système à temps discret  $n$ , la dynamique locale dans chaque sous-système avec un paramètre réel  $a$  est régie par la fonction  $f_a$  :

$$f_a(x) = x + \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi x), \quad (0.2)$$

$b$  est un paramètre de couplage entre les deux sous-systèmes, et  $g$  est une fonction de couplage de la forme :

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi(y - x)) \quad (0.3)$$

Le paramètre  $c$  ( $0 \leq c \leq 1$ ) représente le degré de la symétrie.

Pour  $c = 0$ , le couplage devient symétrique, alors que pour  $c$  non nul ( $0 < c \leq 1$ ), il devient non symétrique. Le cas limite de couplage non symétrique avec  $c = 1$  correspond au couplage unidirectionnel.

Pour résumer les résultats de ces travaux, nous décomposons la rédaction de ce manuscrit en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous donnons les notions de base concernant les transformations ponctuelles : les singularités, la notion de bifurcation, nous précisons la nature des bifurcations qui interviendront par la suite et nous indiquons les notations utilisées pour chacune d'elles. Nous proposons des définitions générales pour les bassins d'attraction et les attracteurs chaotiques, nous présentons le concept d'un attracteur faible, la notion d'attracteur de Milnor et employons ceci pour examiner les bassins ridés. Nous employons ces concepts pour faciliter la classification des bifurcations des attracteurs des sous-espaces invariants. Ensuite, on donne quelques propriétés de l'endomorphisme, et l'apparition de comportement chaotique.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions la transformation (0.1) dans le plan des paramètres. Un problème fondamental qui se pose est l'étude des bifurcations, nous introduisons un troisième paramètre pour mieux comprendre les changements qualitatifs de comportement du système, donc pour une valeur donnée du paramètre  $c$ , les courbes de

bifurcation dans le plan des paramètres  $(a, b)$  sont données.

Dans le troisième chapitre, on citera d'abord les travaux de Gardini, Millerioux et Mira sur le rôle des lignes critiques toujours pour la récurrence (0.1) dans le plan de phase, sur les variétés invariantes, sur le bassin d'attraction, et l'existence de courbes invariantes passant par un point fixe col. Quelques résultats sont obtenus pour une valeur donnée du paramètre  $c$ .

# Chapitre 1

## Définitions et propriétés générales sur les systèmes dynamiques

### 1.1 Introduction

Ce premier chapitre a pour objectif de donner une introduction générale sur les comportements dynamiques non linéaires, et plus précisément une représentation des récurrences ou transformations ponctuelles d'ordre un et deux [27], [41], [42]. Nous nous intéressons dans ce travail aux transformations ponctuelles (récurrences), de type autonome, définies par :

$$X_{n+1} = T_{\Lambda}(X_n) = F(X_n, \Lambda), \quad X \in \mathbb{R}^p, \quad \Lambda \in \mathbb{R}^q, \quad p, q \in \mathbb{N}^* \quad (1.1)$$

telle que  $F \in C^k$ ,  $k \geq 1$  par rapport à la variable réelle  $X$  et au paramètre  $\Lambda$ .

$X_{n+1}$  est le conséquent de rang 1 de  $X_n$ .

$X_n$  est l'antécédent de rang 1 de  $X_{n+1}$ .

$F^{-n}(X)$  est l'ensemble des antécédents de rang  $n$  de  $X$ . La dimension de l'équation (1.1) est  $p$ , et  $\mathbb{R}^P$  est appelé espace de phase de (1.1). Une solution de (1.1) est formée par suite de points  $X_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  où  $X_0$  est appelée condition initiale, les points  $X_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  forment la trajectoire discrète de phase ou suite itérée ou orbite.

## 1.2 Singularités

On a deux types de singularités de dimension 0 pour la transformation  $T$ , les points fixes et les cycles appelés encore orbites périodiques.

### 1) Les points fixes

Un point fixe  $X^*$  est un point de l'espace de phases vérifiant :

$$T(X^*) = X^* \quad (1.2)$$

### 2) Les cycles d'ordre $k$ ( $k$ entier)

C'est la généralisation d'un point fixe lorsqu'on considère la récurrence obtenue après  $k$  applications de  $T$  notée  $T^k$ ,  $T^k = T \circ T \circ \dots \circ T$ ,  $k$  fois. Les  $k$  points  $X_i^*$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  avec  $k > 1$ , appartenant à un cycle d'ordre  $k$  vérifient les deux relations :

$$\begin{cases} X_i^* = T^k(X_i^*) \\ X_i^* \neq T^j(X_i^*), \quad 1 \leq j < k \quad (j \text{ et } k \text{ entiers}) \end{cases} \quad (1.3)$$

Un cycle d'ordre  $k = 1$  est un point fixe.

Autrement dit, chaque point d'un cycle d'ordre  $k$  est appelé point périodique d'ordre  $k$ .

Il peut également apparaître des singularités dites de dimension un. Ce sont des courbes invariantes par l'application de la transformation  $T$  ou  $T^k$ .

### 1.3 Stabilité des singularités

La notion de multiplicateur permet de caractériser la stabilité de ces singularités (points fixes et cycles). Les multiplicateurs sont définis lorsque  $T$  est différentiable aux points  $X_i^*$ ,  $i = 1 \dots k$ .

- a) Lorsque la dimension de la récurrence  $p = 1$ , c'est-à-dire  $X \in \mathbb{R}$ , le multiplicateur  $S$  d'un point fixe  $X = X_i^* = X^*$  est :

$$S = T'(X^*) = \left. \frac{\partial T}{\partial X} \right|_{x=x^*} \quad (1.4)$$

et le multiplicateur  $S$  d'un cycle d'ordre  $k$  ( $X_1^*, X_2^*, \dots, X_k^*$ ) est :

$$S = \prod_{i=1}^k T'(X_i^*) = \prod_{i=1}^k \left. \frac{\partial T}{\partial X} \right|_{x=x_i^*} \quad (1.5)$$

Un point fixe ou un cycle d'ordre  $k$  est dit attractif si  $|S| < 1$ , et répulsif si  $|S| > 1$ .

- b) Lorsque  $p > 1$ , les multiplicateurs d'un point fixe  $X^*$  ou d'un cycle d'ordre  $k$  ( $X_1^*, X_2^*, \dots, X_k^*$ ) sont les valeurs propres de la matrice jacobienne de  $T(X^*)$  ou de  $T^k(X_i^*)$ ,  $i = 1, \dots, k$ .
- Lorsque  $p = 2$ , on associe à un point fixe ou à un cycle, deux multiplicateurs  $S_i$  ( $i = 1, 2$ ) qui sont les valeurs propres de la matrice jacobienne ou matrice des dérivées partielles de  $T^{(k)}$ , ( $k \geq 1$ ).

On distingue les singularités suivantes :

1) **Col** :  $S_1, S_2 \in \mathbb{R}$ ,  $|S_1| < 1$  et  $|S_2| > 1$ .

Un col est un point instable :

- de type 1 si  $S_1 > 0$  et  $S_2 > 0$ .
- de type 2 si  $S_1 > 0$  et  $S_2 < 0$  (ou  $S_1 < 0$  et  $S_2 > 0$ ).
- de type 3 si  $S_1 < 0$  et  $S_2 < 0$ .

2) **Nœud** :  $S_1, S_2 \in \mathbb{R}$ ,

- stable si  $|S_i| < 1$  ( $i = 1, 2$ ).
- instable si  $|S_i| > 1$  ( $i = 1, 2$ ).

3) **Foyer** :  $S_1, S_2 \in \mathbb{C}$ ,  $S_1 = \rho e^{i\theta}$ ,  $S_2 = \rho e^{-i\theta}$ ,  $\rho = |S_i|$ ,  $i = 1, 2$ .

- stable si  $\rho < 1$ ,
- instable si  $\rho > 1$ .

## 1.4 Courbes invariantes

Il peut également apparaître des singularités dites de dimension un. Ce sont les courbes invariantes par la l'application de la transformation  $T$  ou  $T^k$ . Ces courbes décrites dans le plan de phase par  $Q(X) = \text{constante}$  satisfont l'équation fonctionnelle.

$$Q(X_{n+1}) = Q(X_n) \tag{1.6}$$

Dans le cas d'un point fixe (ou d'un cycle d'ordre  $k$ ) de type col, on note  $W_s$  les branches de la courbe invariante associées au multiplicateur de module inférieur à 1 et  $W_u$  les branches

associées au multiplicateur de module supérieur à 1.

La Figure 1.1 donne une représentation des courbes invariantes au voisinage d'un point fixe  $X^*$ .

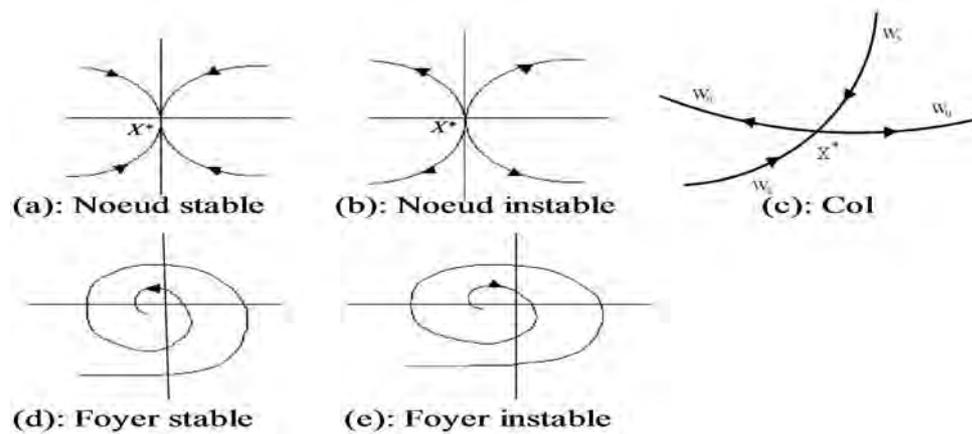


Fig.1.1– Courbes invariantes au voisinage d'un point fixe  $X^*$ .

**Définition 1.1 :** Un ensemble fermé invariant  $A$  est attractant s'il existe un voisinage  $U$  de  $A$  tel que :

$$T(U) \subset U \text{ et } T^n(x) \rightarrow A, \text{ quand } n \rightarrow \infty, \text{ pour tout } x \in U.$$

**Définition 1.2 :** Un attracteur est un ensemble attractant topologiquement transitif, si seulement si quels que soient les ouverts  $U, V \subset A$ , il existe un entier positif  $k$  tel que :

$$T^k(U) \cap V \neq \phi.$$

## 1.5 Chaos

Il n'existe pas de définition précise du chaos, ce phénomène est très irrégulier sur une période ou dont la période est trop grande pour être mise en évidence le chaos englobe divers comportements non périodiques. Un tel comportement est caractérisé par :

- Existence de cycles attractifs d'ordre infini.
- Coexistence d'une infinité de cycles répulsifs.
- L'absence de cycles attractifs d'ordre fini.

Et dans la transformation que nous allons voir, les mouvements chaotiques sont généralement associés à l'existence d'une infinité de cycles instables, qui influencent le comportement du système vers un comportement chaotique.

On distingue deux types du chaos :

### 1.5.1 Le chaos stable ou attracteur étrange

Le système évolue d'une manière très désordonnée dans une zone de l'espace sans en sortir, les caractéristiques de cet attracteur sont :

- La dimension de l'attracteur est fractale (non entière).
- Sensibilité aux conditions initiales.

### 1.5.2 Le chaos instable ou répulsif étrange

On parle de chaos instable lorsqu'il y a existence d'un transitoire étrange dû à la présence d'une infinité de solutions périodiques instables, et le système évolue d'une manière similaire, mais diverge après un certain nombre d'itérations.

## 1.6 Attracteurs et attracteurs chaotique

Dans un système dynamique, il peut exister des singularités plus générales que les points fixes et les cycles ; ce sont les attracteurs. Plusieurs définitions ont été proposées pour ce type de singularités [54], [51], [26]. Dans cette thèse, on se suffira de la définition donnée par Milnor [40] et celle donnée dans la référence [42].

**Définition 1.3 :** Soit  $(X, T, f)$  un système dynamique et soit  $\mu$  la mesure de Lebesgue dans  $X$ . Un sous ensemble fermé  $A$  de  $X$  est dit attracteur au sens de Milnor, si

(i)  $\mu(B(A)) > 0$ , où  $B(A)$  est le bassin d'attraction de  $A$ .

(ii) Pour tout sous ensemble fermé  $A'$  strictement inclus dans  $A$ , on a :

$$\mu(B(A) \setminus B(A')) > 0.$$

**Remarque 1.1 :** Lorsque le sous ensemble fermé  $A$  vérifie uniquement la condition (i),  $A$  est appelé attracteur faible.

**Définition 1.4 :**  $A$  est un attracteur minimal au sens de Milnor, si  $A$  est un attracteur au sens de Milnor [14] et s'il ne contient aucun sous-ensemble strict fermé  $A'$ , tel que  $\mu(B(A'))$  soit strictement positive.

### 1.6.1 Attracteur chaotique

Il existe des systèmes dynamiques déterministes très simples, pour lesquels deux trajectoires issues de points de départ dont la différence est trop petite pour être observable, se séparent après un certain temps. Leur distance croît de façon exponentielle, jusqu'à ce que toute mémoire sur le point de départ soit perdue. On appelle ce phénomène "sensibilité

aux conditions initiales". Cette propriété du système est caractérisée par des coefficients, appelés exposants de Lyapounov.

On dit que l'on a la propriété de sensibilité aux conditions initiales, si au moins un des exposants de Lyapounov est strictement positif.

**Définition 1.5 :** *Un attracteur est dit chaotique, s'il a la propriété de sensibilité aux conditions initiales pour presque tout point le constituant (c'est-à-dire sauf pour un ensemble de points de mesure de Lebesgue nulle).*

Généralement, un attracteur chaotique est un fractal. Ceci résulte du caractère borné de l'attracteur, des phénomènes de contractions (exposants de Lyapounov négatifs) et d'étirements (exposants de Lyapounov positifs), qui conduisent à un pliage complexe et un feuilletage générant une structure fractale de l'attracteur chaotique. Sa dimension de Lyapounov [21], qui est une dimension fractale, est alors non entière.

## 1.7 Bassin d'attraction

**Définition 1.6 :** *Le bassin d'attraction  $B(A)$  d'un ensemble attractant est l'ensemble ouvert constitué de tous les points  $x$  tels que  $T^n(x) \rightarrow A$ , quand  $n \rightarrow \infty$ .*

## 1.8 Caractérisation des bassins ridés

Les bassins d'attraction ridé sont des cas particuliers des bassins d'attraction des systèmes dynamiques [2], [48], [3], [35], [14], [5] et [6].

**Définition 1.7 :** *Soit  $V$  un sous-ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^p$ , on définit le ridé de  $V$  [2] par :*

$$V_{rid} = \{x \in V : \mu(B_\delta(x) \cap V) \mu(B_\delta(x) \cap V^c) > 0 \text{ pour tout } \delta > 0\} \quad (1.7)$$

On note :

- $\mu(\cdot)$  Mesure de Lebesgue.
- $B_\delta(x)$  la boule de centre  $x$  et rayon  $\delta$  telle que :

$$B_\delta(x) = \{y : |x - y| < \delta\} \quad (1.8)$$

- Le complémentaire  $V^c = \mathbb{R}^p \setminus V$ .

Pour l'existence du bassin ridé, il est connu que les conditions suivantes sont vérifiées :

- Il existe une invariante dans le plan de phase, et de sa dynamique interne est chaotique.
- L'exposant de Lyapounov normale à l'invariante est négatif, c'est-à-dire l'invariante est un attracteur.
- Il existe d'autres attracteurs.

## 1.9 Bifurcations

En dynamique, on dit qu'il y a une bifurcation lorsqu'un changement qualitatif ou quantitatif des solutions, se produit à l'occasion de la variation d'un paramètre  $\Lambda$ . Autrement

dit, n'importe quelle variation même très petite d'un paramètre  $\Lambda$  entraîne une modification qualitative des solutions et changement de stabilité d'une singularité [19], etc...

La structure des singularités d'une récurrence est différente pour les valeurs du paramètre  $\Lambda$  alors ces dernières sont appelées valeurs de bifurcation.

## 1.10 Types de bifurcation

On expose dans ce paragraphe quelques bifurcations fondamentales concernant les singularités énumérées ci-dessus.

### 1.10.1 Bifurcation fold ou nœud-col (Pli)

Elle correspond à l'apparition de deux points fixes ou cycles d'ordre  $k$  l'un stable et l'autre instable, les deux cycles sont confondus, et possèdent un multiplicateur  $S = +1$ .

- Pour la transformation d'ordre 1, le schéma de cette bifurcation est donné par :

$$\phi \underset{S=+1}{\leftrightarrow} A^k + R^k \quad (1.9)$$

Où

$\phi$  : signifie l'absence de cycles.

$A^k$  : désigne un point fixe ou cycle d'ordre  $k$  attractif.

–  $R^k$  : désigne un point fixe ou cycle d'ordre  $k$  répulsif.

- Pour la transformation d'ordre 2, la bifurcation fold donne un cycle nœud (stable ou instable), et un cycle col (Figure 1.2).

le schéma de cette bifurcation est donné par :

$$\phi \underset{S=+1}{\leftrightarrow} N_S^k (\text{resp. } N_I^k) + C^k \quad (1.10)$$

$N_S^k$  : désigne un point fixe ou cycle d'ordre  $k$  de type nœud stable.

$N_I^k$  : désigne un point fixe ou cycle d'ordre  $k$  de type nœud instable.

$C^k$  : désigne un point fixe ou cycle d'ordre  $k$  de type col.

Les courbes qui correspondent à cette bifurcation sont notées  $\Lambda_{(k)_0}^j$  où  $k$  représente l'ordre du cycle et  $j$  caractérise l'ordre d'échange de ces points, deux cycles différents peuvent comporter le même nombre de points, mais leur échange est différent.

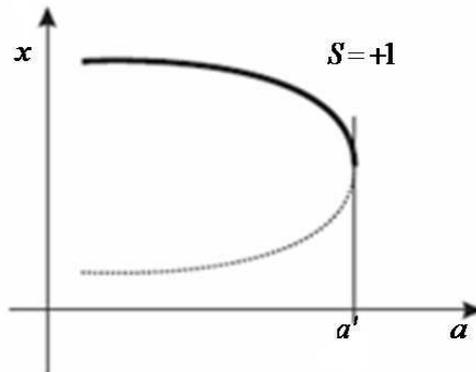


Fig.1.2— Bifurcation fold ou nœud-col (Pli) de points fixes, (-) : stable, (- -) : instable.

### 1.10.2 Cas particuliers de la bifurcation fold

#### a) Bifurcation transcritique ou échange de stabilité

La bifurcation transcritique survient lorsque dans l'espace combiné de l'espace des phases et l'espace des paramètres deux collecteurs différents points fixes se croisent. Au point de passage de l'échange des points fixes il y a la propriété de stabilité. Le point fixe instable devient stable et vice versa. Notez qu'au-delà du point de bifurcation, le nombre de points fixes n'a pas changé contrairement à la bifurcation nœud-col où deux points fixes apparaissent ou disparaissent. Ainsi, la bifurcation transcritique est un cas particulier de la bifurcation nœud-col, sa représentation dans la Figure 1.3.

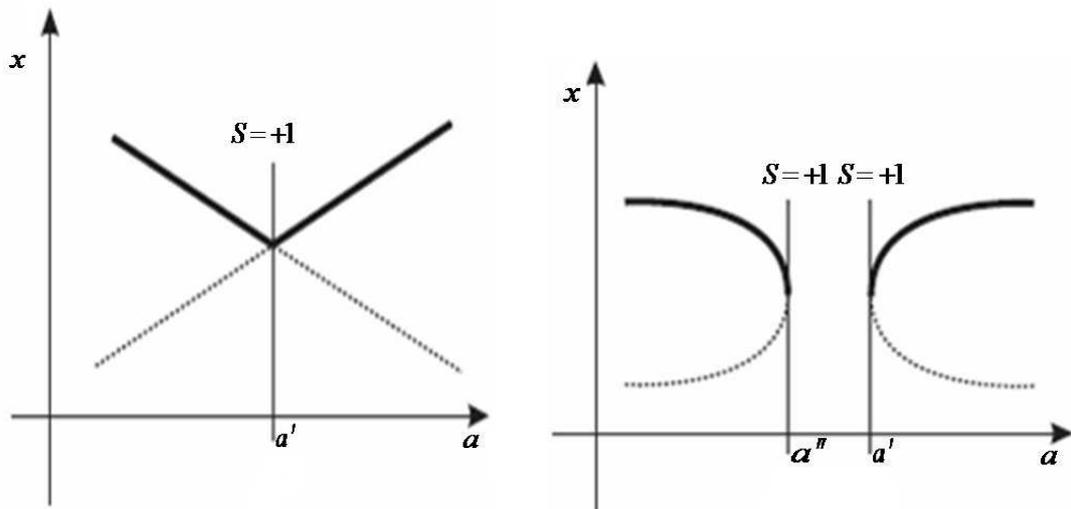


Fig.1.3— Bifurcation transcritique de points fixes (à gauche), et sa dégénérescence après perturbation du système (à droite), (-) : stable, (- -) : instable.

**b) Bifurcation pitchfork ou fourche**

Lorsqu'un des multiplicateurs associé au cycle d'ordre  $k$  traverse la valeur  $+1$  ( $S_1 = 1$ ,  $|S_2| \neq 1$ ), un autre type de bifurcation appelée bifurcation fourche, peut se produire, dans le cas le plus simple, en dimension deux, cette bifurcation obéit au schéma suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_S^k \text{ (resp. } N_I^k) \xleftrightarrow{S=+1} 2N_S^k \text{ (resp. } 2N_I^k) + C^k \text{ (resp. } C^k) \\ C^k \xleftrightarrow{S=+1} 2C^k + N_S^k \text{ (resp. } N_I^k) \end{array} \right. \quad (1.11)$$

On distingue deux types de bifurcation : bifurcation fourche super-critique (stable) et bifurcation fourche sous-critique (instable).

Les courbes qui correspondent à cette bifurcation sont notées  $\Lambda_{(k)\bar{0}}^j$ .

**1.10.3 Bifurcation flip ou doublement de période**

Si le multiplicateur prend la valeur  $S = -1$ , un point fixe (cycle) d'ordre  $k$  change de stabilité et donne naissance à un cycle d'ordre deux (cycle d'ordre  $2k$ ) de même stabilité que le cycle d'origine.

- Pour la transformation d'ordre 1, cette bifurcation est notée par :

$$A^k \xleftrightarrow{S=-1} R^k + A^{2k} \quad (1.12)$$

Ou

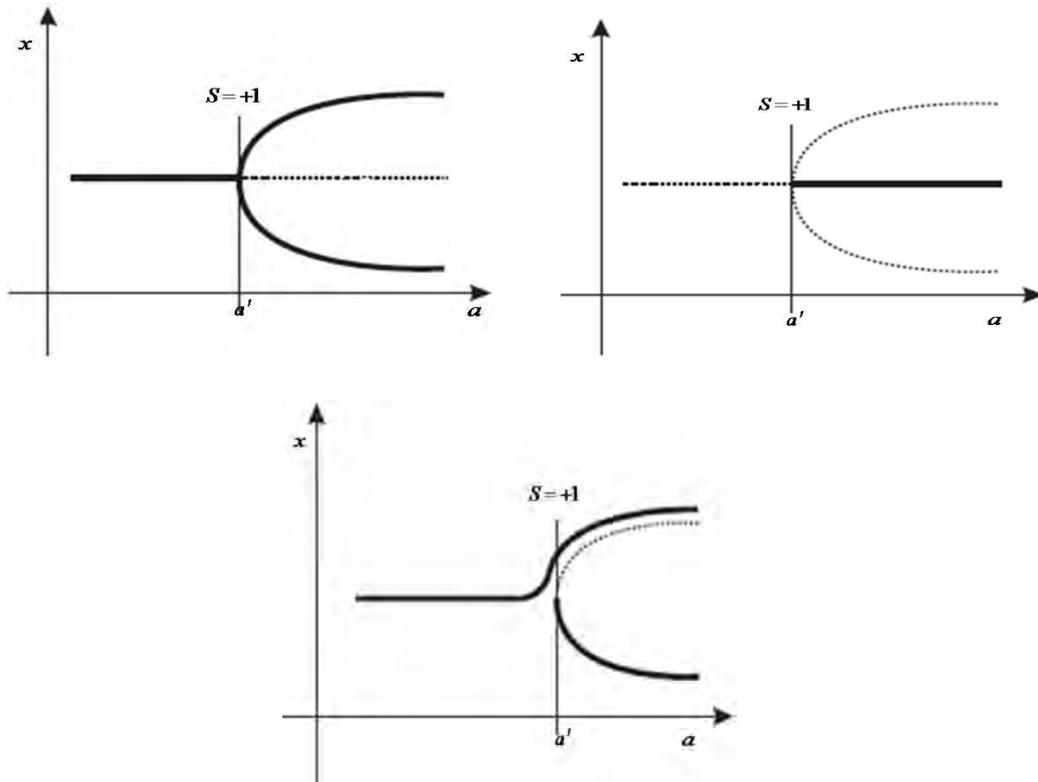
$$R^k \xleftrightarrow{S=-1} A^k + R^{2k} \quad (1.13)$$

- Pour la transformation d'ordre 2, elle est notée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_S^k \text{ (resp. } N_I^k) \xleftrightarrow[S=-1]{} N_S^{2k} \text{ (resp. } N_I^{2k}) + N_I^k \text{ (resp. } N_S^k) \\ C^k \xleftrightarrow[S=-1]{} N_S^k \text{ (resp. } N_I^k) + C^{2k} \end{array} \right. \quad (1.14)$$

$N_I^k$  (resp.  $N_S^k$ ) désigne un point fixe ou cycle d'ordre  $k$  instable (resp. stable).

Les deux cycles résultant sont confondus pour la valeur de la bifurcation  $S = -1$ , la courbe ou a lieu une bifurcation flip est notée :  $\Lambda_k^j$ .



*Fig.1.4*– Bifurcations fourche supercritique (à gauche), sous-critique (à droite) de points fixes et la dégénérescence de la supercritique après perturbation du système (en bas), (-) : stable, (- -) : instable.

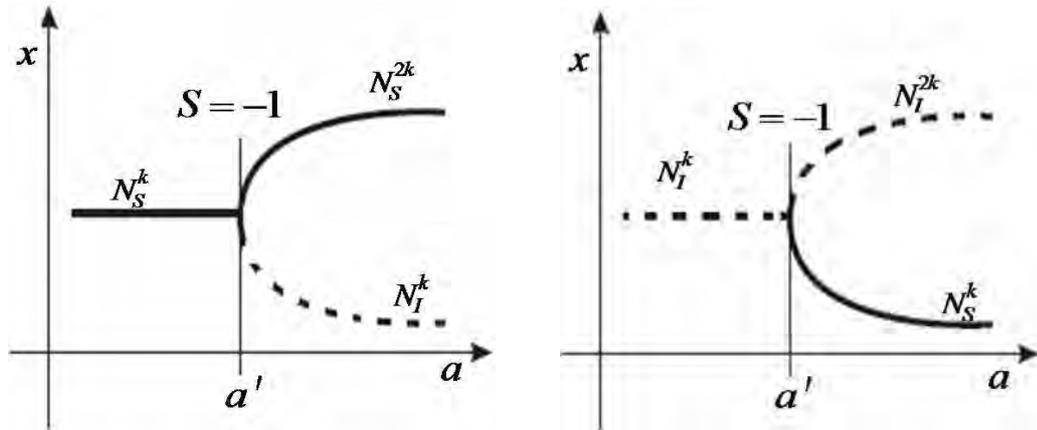


Fig.1.5– Bifurcation flip ou doublement de période supercritique (à gauche), sous-critique (à droite).

**Remarque 1.2**

- Un point cuspidal sur une courbe de bifurcation fold du plan des paramètres  $(a, b)$  est appelé point de codimension 2 fold [41], [4], [16].
- Le point de tangence d'une courbe de bifurcation flip et d'une courbe de bifurcation fold d'ordre double est appelé point de codimension 2 flip [4].
- Points singuliers avec deux multiplicateurs  $S_1 = -S_2 = +1$ .

Ce genre de points sont des points de bifurcation de codimension 2 correspondant à la tangence d'une courbe de bifurcation fold et une courbe de bifurcation flip associés à un même cycle  $(k, j)$  (voir [15]).

### 1.11 Définition mathématique des lignes critiques

Dans le cas où  $T$  est différentiable, et  $X \in \mathbb{R}$ , les points critiques sont les conséquents de rang 1, définis par :

$$\frac{dT}{dX}(X) = 0. \quad (1.15)$$

Pour  $X \in \mathbb{R}^2$ , les lignes critiques  $LC$  sont les courbes conséquentes de rang 1 des courbes  $LC_{-1}$  définies par le lieu des points pour lequel le déterminant  $J(X)$  du jacobien de  $T$  s'annule.

Par conséquent, les courbes critiques de rang  $k$  ( $k \geq 0$ ) sont conséquentes du rang  $k$  de  $LC_{-1}$  notés :

$$LC_{k-1} = T^k(LC_{-1}) = T^{k-1}(LC) \text{ et } LC_0 = LC. \quad (1.16)$$

Et donc, une courbe  $LC_{-1}$  est l'ensemble suivant :

$$\{ X \in \mathbb{R}^2, \det(J(X)) = 0 \} \quad (1.17)$$

Dans le cas où  $T$  est non différentiable, une courbe  $LC_{-1}$  est l'ensemble :

$$\{ X \in \mathbb{R}^2, T \text{ non différentiable en } X \} \quad (1.18)$$

### 1.11.1 Feuilletage du plan de phase pour les transformations non inversibles bidimensionnelles

Notion de feuilletage du plan de phases est fondamentale pour la compréhension des propriétés relatives aux transformations non inversibles (*TNI*), dans ce cas les courbes critiques divisent le plan de phase en régions  $Z_i$ , ( $i \geq 0$ ) [39], [27].

#### Classification des *TNI*

Elles sont classées dans un ordre de complexité croissant, on distingue les types suivants :

- **Transformations : de type  $(Z_0 - Z_2)$  et de type  $(Z_1 - Z_3 - Z_1)$**

Pour une récurrence dont les points admettent 2 ou 0 antécédents suivant leur position dans le plan  $(x, y)$ , une structure possible des feuilletts est représentée sur la Figure 1.6 (a), on a une seule ligne critique  $LC$  qui sépare le plan  $\mathbb{R}^2$  en deux régions, une région  $Z_0$  (pas d'antécédents), une région  $Z_2$  (deux antécédents de rang 1), tandis que sur la Figure 1.7 (a), est représentée une structure des feuilletts dans le cas de zones à 3 ou 1 antécédents, la courbe  $LC$  est discontinue, formée de deux branches distinctes  $LC^{(1)}$  et  $LC^{(2)}$  séparant le plan  $\mathbb{R}^2$  en trois régions,  $LC^{(1)}$  et  $LC^{(2)}$  séparant respectivement les régions  $Z_1^2$  avec  $Z_3$  et  $Z_1^1$  avec  $Z_3$ .

Pour  $T^{-1}$ , un point  $\overline{M}$  doit être considéré comme la superposition de deux points  $M, M'$  (Figure 1.6 (a)), ou trois points  $M, M', M''$  (Figure 1.9 (a)), situés sur des feuilletts différents de  $T^{-1}$ . Les deux (Figure 1.8 (a)), ou trois (Figure 1.7 (a)), antécédents de rang un de  $\overline{M}$  sont alors les images de  $M, M'$ , ou  $M, M', M''$  [50].

Grâce à cette structure en feuillets du plan  $(x, y)$ , il est possible d'analyser qualitativement la configuration obtenue lorsque l'on recherche, par la récurrence  $T^{-1}$ , les antécédents réels du premier rang d'un ensemble quelconque de points du plan  $(x, y)$ . En effet, du point de vue de la recherche de ces antécédents, nous venons de voir que, dans certaines zones, le plan  $(x, y)$  doit être considéré comme replié un certain nombre de fois sur lui-même, les lignes de pliage correspondant aux lignes critiques  $LC$ .

Donc pour étudier qualitativement la structure des antécédents d'un ensemble de point  $(\overline{W})$ , formant un domaine simplement connexe, et en particulier pour connaître leurs positions relatives, il faut considérer que cet ensemble est tracé non pas sur le plan  $(x, y)$  mais sur les divers feuillets qui existent dans la région du plan  $(x, y)$  où est situé  $(\overline{W})$ . Si en recherchant par  $T^{-1}$  les antécédents de rang un de  $(\overline{W})$ , ou d'une partie de  $(\overline{W})$ , on obtient plusieurs domaines sans connexion entre eux,  $(\overline{W})$  sur le plan replié est la superposition de domaines non connexion situés sur des feuillets différents.

Sur la Figure 1.6 (b) où l'ensemble  $(\overline{W})$  est situé en totalité dans la zone à 2 antécédents,  $(\overline{W})$  est la superposition de deux domaines sans connexion, sur deux feuillets, si les antécédents de  $(W)$ , de rang un, n'ont pas de point commun. Sur la Figure 1.7 (b), l'ensemble  $(\overline{W})$  est situé en partie dans la zone à 1 antécédent et en partie dans la zone à 3 antécédents.

Sur le plan replié, on obtient un ensemble  $(W)$  sur un feuillet associé à l'une des déterminations de  $T^{-1}$ , tandis que la portion de  $(\overline{W})$  située dans la zone à 3 antécédents donne l'ensemble  $(W')$  situé sur les deux autres feuillets associés aux 2 autres déterminations restantes et qui se "raccordent" le long de la ligne de pliage des 2 feuillets.

Le domaine  $(W)$  sur le plan replié peut être d'un seul tenant. Il en est ainsi, dans le cas de la Figure 1.7 (b), quand  $(\overline{W})$  est entièrement situé dans une région à un seul antécédent. C'est le cas aussi de la Figure 1.7 (c) où  $(\overline{W})$  traverse les deux lignes critiques. On obtient alors sur le plan replié un seul ensemble  $(W)$ . En effet, dans la zone à 3 antécédents, puisque les déterminations se rejoignent 2 à 2 sur les lignes de pliage, les antécédents de  $(\overline{W})$  forment sur le plan replié un ensemble continu qui permet de passer du feuillet supérieur au feuillet inférieur sans discontinuité.

De la même manière, il est possible de définir des  $TNI$  de complexité supérieure de type  $(Z_0 - Z_2 - Z_4)$ ,  $(Z_1 - Z_2 - Z_4)$ ,  $(Z_1 < Z_3)$ ,  $(Z_1 < Z_3 >)$ ,  $(Z_0 - Z_2 << Z_4)$ ,  $(Z_0 - Z_2 < Z_4 >)$ ,  $(Z_1 - Z_3 < Z_5 - Z_3 > Z_1)$ , etc...

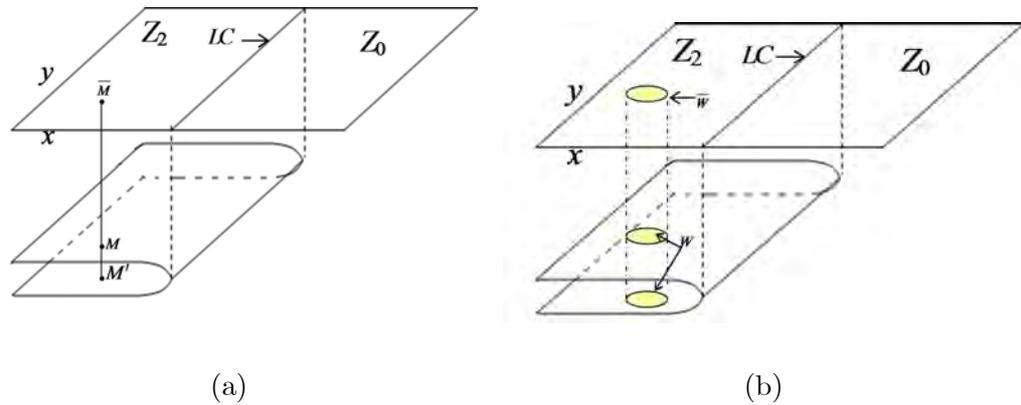


Fig.1.6— (a), (b)— Plan de phase d'une  $TNI$  de type  $(Z_0 - Z_2)$ .

De même pour une récurrence d'ordre 1, on a un seul point critique  $C_1$  qui sépare le plan  $\mathbb{R}$  en deux régions  $Z_0, Z_2$ .

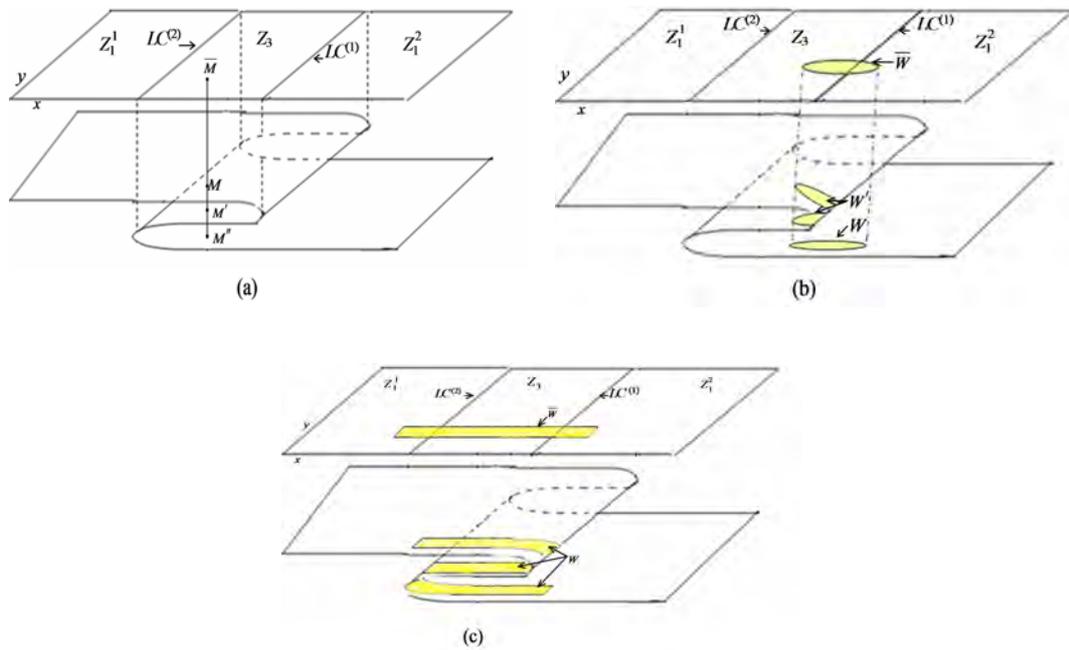


Fig.1.7 – (a), (b) et (c)– Plan de phase d’une *TNI* de type  $(Z_1 - Z_3 - Z_1)$ .

## 1.12 Rôle des lignes critiques dans les bifurcations fondamentales des bassins

Dans ce paragraphe, nous allons décrire les bifurcations de base intervenant dans le changement qualitatif de la structure d’un domaine  $D$ , situé dans le plan de phase qu’on appellera bassin d’un attracteur  $A$ . Ces bifurcations interviennent lors d’un contact ou d’une intersection de  $D$  avec une ligne critique  $LC$  d’une transformation non inversible. On notera  $\partial D$  la frontière de  $D$ ,  $D_0$  le bassin immédiat de l’attracteur  $A$  et  $\partial D_0$  sa frontière.

**Proposition 1.1 :** Soit  $T$  une *TNI* de type  $(Z_0 - Z_2)$  dépendant d’un paramètre  $\lambda$ . Si

le nombre de composantes connexes de  $D \cap LC$  change quand  $\lambda$  traverse une valeur de bifurcation  $\lambda_b$ , alors le bassin d'attraction  $D$  peut subir une bifurcation de bassins parmi les types de bifurcations suivantes :

- 1) bassin connexe  $\longleftrightarrow$  bassin non connexe (quand le nombre de composantes connexes de  $D_0 \cap LC$  change).
- 2) bassin simplement connexe  $\longleftrightarrow$  bassin multiplément connexe (quand le nombre de composantes connexes de  $D_0 \cap LC$  change).
- 3) augmentation ou diminution du nombre d'îlots de  $D$ , ou nouvelle séquence arborescente de telles composantes connexes.
- 4) augmentation ou diminution du nombre de lacs dans  $D$ , ou nouvelle séquence arborescente de lacs.
- 5) transition lacs  $\longleftrightarrow$  baie.
- 6) transition frontière externe faiblement fractale  $\longleftrightarrow$  frontière externe fortement fractale.

La partie (1) de cette proposition est illustrée par la Figure 1.8, sur laquelle on voit deux bifurcations possibles. La première bifurcation  $\lambda = \lambda_{1b}$ , correspond à un contact entre  $\partial D_0$  et  $LC$  au point  $a \cong c$ .  $\{T^{-n}(a)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , est une séquence arborescente de  $N$  points, qui sont les germes d'une séquence arborescente de  $N$  îlots. Autrement dit, le bassin étant connexe pour  $\lambda < \lambda_{1b}$ , devient non connexe pour  $\lambda > \lambda_{1b}$ . La seconde bifurcation  $\lambda = \lambda_{2b}$ , correspond à un contact tangentiel entre  $\partial D_0$  et  $LC$  au point  $a \cong b$ , donnant lieu à un contact non transverse, mais aussi non tangentiel entre  $\partial D_0$  et la frontière  $\partial D_1$  de l'îlot  $D_1$ . Après cette dernière bifurcation  $D$  redevient connexe.

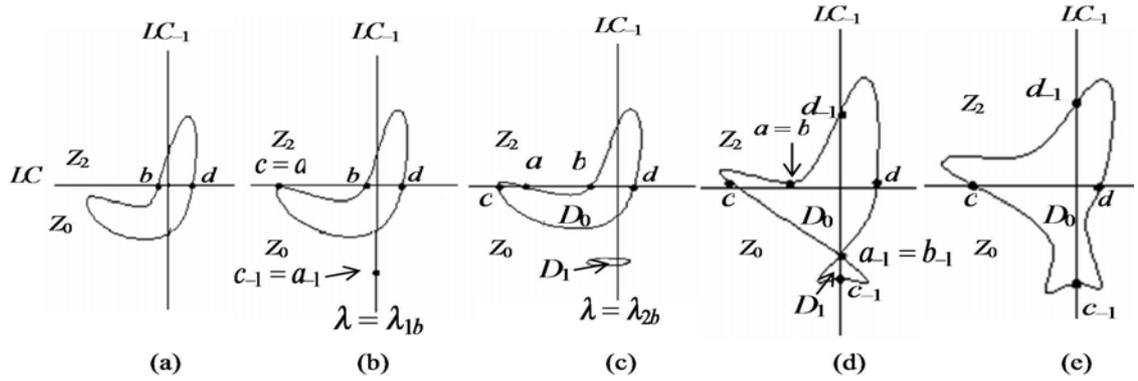


Fig.1.8– Bifurcation d’un bassin connexe  $\longleftrightarrow$  bassin non connexe.

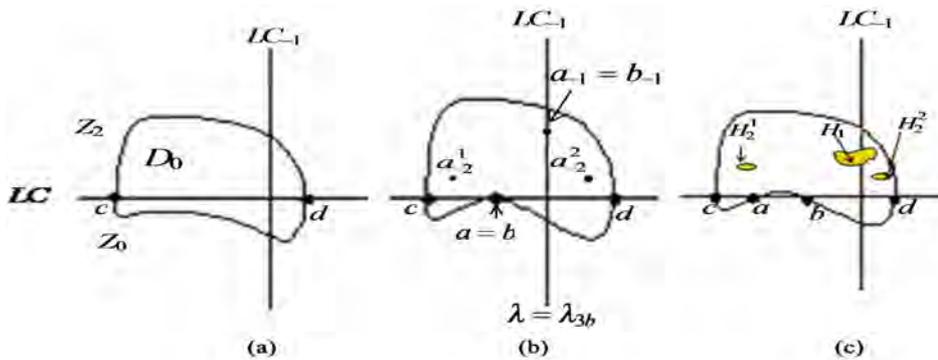


Fig.1.9– Bifurcation d’un bassin simplement connexe  $\longleftrightarrow$  bassin multiplement connexe  
 $\lambda = \lambda_{3b}$ .

La partie (2) de cette proposition est illustrée par la Figure 1.9, sur laquelle on voit une bifurcation qui transforme un bassin simplement connexe en un bassin multiplement connexe. En effet, à la valeur  $\lambda = \lambda_{3b}$  a lieu un contact entre  $\partial D_0$  et  $LC$  au point  $a \cong b$ . Les antécédents de tout rang  $T^{-n}(a)$  du point  $a$ , forment une séquence arborescente de  $N$  points, qui sont les germes d’une séquence arborescente de  $N$  lacs.

La partie (3) de la proposition (1.1) est illustrée par la Figure 1.10, sur laquelle on peut voir deux bifurcations possibles, qui entraînent un changement du nombre d'îlots. La première bifurcation a lieu à la valeur  $\lambda = \lambda_{4b}$  (Figure 1.10 (a)) et qui correspond à un contact tangentiel entre  $LC$  et l'îlot  $D_i$  au point  $\alpha = D_i \cap LC$ . Avant la bifurcation,  $\lambda < \lambda_{4b}$ , l'îlot  $D_i$  était à l'intérieur de la région  $Z_0$  ( $D_i \cap Z_2 = \emptyset$ ). A la bifurcation, les antécédents de tout rang  $T^{-n}(\alpha)$  de  $\alpha$  ( $T^{-1}(\alpha) = \alpha_{-1} \in LC_{-1}$ ) constituent une séquence arborescente de points, qui génèrent après la bifurcation une séquence arborescente d'îlots  $D_{i+n}$ ,  $D_{i+1} \cap LC_{-1} = \emptyset$ . En continuant à faire varier le paramètre  $\lambda$  de manière continue, l'îlot  $D_i$  progresse dans la région  $Z_2$  (Figure 1.10 (b)). La seconde valeur de bifurcation  $\lambda = \lambda_{5b}$  (Figure 1.10 (c)), correspond à un nouveau contact tangentiel entre  $LC$  et l'îlot  $D_i$  au point  $\beta = D_i \cap LC$  ( $D_i \subset \overline{Z_2}$ ). Ceci implique que le point  $\beta_{-1} = T^{-1}(\beta) = D_{i+1} \cap LC_{-1}$  est un point d'intersection limite entre  $D_{i+1}$  et  $LC_{-1}$ , avant que ce dernier se divise en deux îlots  $D_{i+1}^1 \subset R_1$  et  $D_{i+1}^2 \subset R_2$ , lorsque la valeur de  $\lambda$  dépasse la seconde valeur de bifurcation (Figure 1.10 (d)).

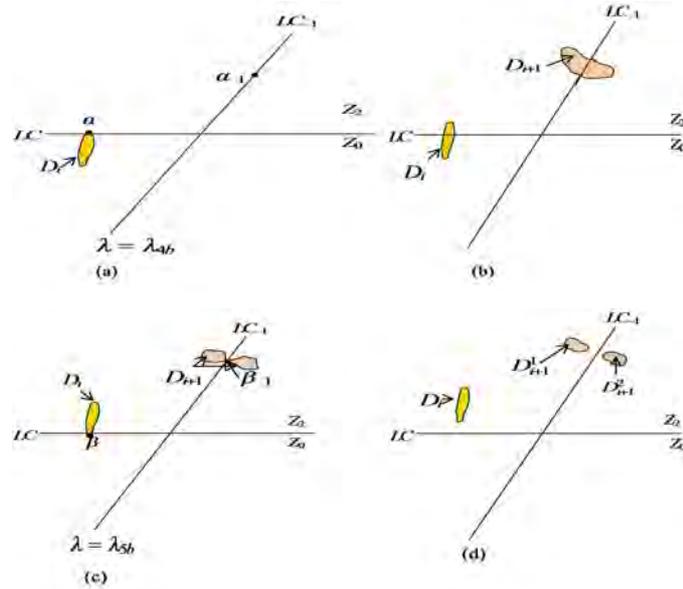


Fig.1.10– Bifurcations d'un changement du nombre d'îlots.

### 1.13 Régions absorbantes

Le concept d'un secteur absorbant d'une transformation non inversible bidimensionnelle, est définie par les images des courbes critiques [8]. Ceci s'est avéré très utile en décrivant la structure des attracteurs pour les systèmes non inversibles bidimensionnelle.

Nous généralisons l'idée d'un secteur absorbant en régions absorbantes ; celles-ci peuvent être définies même pour les systèmes inversibles lisses qui n'ont pas de courbes critiques [11], [30], [36].

**Définition 1.8 :** On suppose que l'ensemble  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  est une région absorbante pour  $T$  si les propriétés suivantes sont satisfaites [7] :

- 1)  $T(A) \subseteq A$ .

2)  $\mu(A) > 0$ ,  $\mu(\cdot)$  Mesure de Lebesgue.

Si  $A$  est une région absorbante telle que  $T(A) = A$ , on dit que c'est une région absorbante invariante.

Notons que :  $\mu(B(A)) \geq \mu(A) > 0$ .

## Chapitre 2

# Bifurcations locales et comportements dynamiques des systèmes chaotiques couplés

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons l'étude du système en dimension deux couplé. Le premier objectif a été de chercher les points fixes, les cycles d'ordre 2, et étudier la stabilité de ces points fixes, et le second étant de localiser les courbes de bifurcations et leur évolution dans le plan paramétrique  $(a, b)$ ,  $a$  est le paramètre de contrôle et  $b$  est le paramètre de couplage. Nous introduisons un troisième paramètre  $c$  ( $0 \leq c \leq 1$ ) qui est un paramètre de réglage du degré de la symétrie dans la transformation pour mieux comprendre la structure de bifurcation.

### 2.1.1 Etude analytique

#### a) Les points fixes

Considérons une famille des systèmes dynamiques discrets couplés générés par la transformation réelle d'ordre deux

$$T(x_n, y_n) : \begin{cases} x_{n+1} = F(x_n, y_n) = f_a(x_n) + (1-c)bg(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = G(x_n, y_n) = f_a(y_n) + bg(y_n, x_n), \end{cases} \quad (2.1)$$

Où  $F$  et  $G$  étant des fonctions continues, différentiables, non linéaires,  $x_n$  et  $y_n$  sont variables réelles du sous-système à temps discret  $n$ , la dynamique locale dans chaque sous-système avec un paramètre réel  $a$  est régie par la fonction  $f_a$  :

$$f_a(x) = x + \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi x), \quad (2.2)$$

$b$  est un paramètre de couplage entre les deux sous-systèmes, et  $g$  est une fonction de couplage de la forme :

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi(y - x)) \quad (2.3)$$

Le paramètre  $c$  ( $0 \leq c \leq 1$ ) est le degré de la symétrie.

Pour  $c = 0$ , le couplage devient symétrique, alors que pour  $c$  non nul ( $0 < c \leq 1$ ), il devient

non symétrique. Le cas limite de couplage non symétrique avec  $c = 1$  correspond au couplage unidirectionnel.

Soit  $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  un point du plan de phase. Notons  $J(X)$ , la matrice jacobienne de  $T$  au point  $X$  :

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial G(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial G(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + a \cos(2\pi x) - (1 - c)b \cos(2\pi(y - x)) & (1 - c)b \cos(2\pi(y - x)) \\ b \cos(2\pi(x - y)) & 1 + a \cos(2\pi y) - b \cos(2\pi(x - y)) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Si  $X^* = (x^*, y^*)$  est un point fixe, nous nous intéressons aux valeurs propres de la jacobienne  $J(x^*, y^*)$ , et si  $(x^*, y^*)$  est un point d'un cycle d'ordre  $k$ , nous nous intéressons aux valeurs propres de :

$$J^k(x^*, y^*) = J(x^*, y^*) \cdot J(T(x^*, y^*)) \cdot \dots \cdot J(T^{k-1}(x^*, y^*)) \quad (2.5)$$

Le calcul des valeurs propres  $S_i$ ,  $i = 1, 2$ , de (2.4), respectivement (2.5), permet de connaître la stabilité du point fixe, respectivement du cycle considéré.

Les points fixes de la transformation  $T$ , sont des racines du système suivant :

$$\begin{cases} f_a(x_n) + (1-c)\frac{b}{2\pi} \sin(2\pi(y_n - x_n)) - x_n = 0 \\ f_a(y_n) + \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi(x_n - y_n)) - y_n = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Nous obtenons une infinité de points fixes dont les coordonnées sont données par l'équation suivante :

$$P^* = (x^*, y^*) = \frac{1}{2}(k, l), \quad k, l \in \mathbb{Z} \quad (2.7)$$

Ces points existent toujours quelque soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , et quelque soit  $c \in [0, 1]$ , c'est-à-dire sont indépendants de  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

De plus, il existe 8 points fixes  $P_i$ ,  $i = \overline{1,8}$ , de forme :

$$\begin{cases} P_1 = (x_1^*, y_1^*), P_2 = (y_1^*, x_1^*), P_3 = (x_2^*, y_2^*), P_4 = (y_2^*, x_2^*), \\ P_5 = (x_2^*, y_1^*), P_6 = (y_1^*, x_2^*), P_7 = (y_2^*, x_1^*), P_8 = (x_1^*, y_2^*). \end{cases} \quad (2.8)$$

Prenons :

$$A = \sqrt{b^2(2a^2 - b^2c^2)(c-2)^2 + a^2(4b^2c - a^2)} \quad (2.9)$$

Puis :

$$\begin{cases} x_1^* = \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{A}{2(c-1)ab}, \frac{-a^2 - b^2c(c-2)}{2(c-1)ab}\right) \\ y_1^* = \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{-A}{2(c-1)ab}, \frac{-a^2 - b^2c(c-2)}{2(c-1)ab}\right) \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\begin{cases} x_2^* = \frac{1}{2\pi} \arctan \left( \frac{-A}{ab}, \frac{a^2 - b^2 c(c+2)}{ab} \right) \\ y_2^* = \frac{1}{2\pi} \arctan \left( \frac{A}{ab}, \frac{a^2 - b^2 c(c+2)}{ab} \right) \end{cases} \quad (2.11)$$

avec :

$$\arctan(u, v) = -i \ln \frac{u + iv}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad (2.12)$$

Dans cette these, nous nous intéressons plus particulièrement aux cas suivants :

1)  $c = 0$

Couplage symétrique, ce modèle a été proposé dans [34].

$$T_1(x_n, y_n) : \begin{cases} x_{n+1} = F_1(x_n, y_n) = f_a(x_n) + \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi(y_n - x_n)) \\ y_{n+1} = G(x_n, y_n) = f_a(y_n) + \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi(x_n - y_n)) \end{cases} \quad (2.13)$$

2)  $0 < c < 1$

Couplage non symétrique

$$T_2(x_n, y_n) : \begin{cases} x_{n+1} = F_2(x_n, y_n) = f_a(x_n) + (1-c) \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi(y_n - x_n)) \\ y_{n+1} = G(x_n, y_n) = f_a(y_n) + \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi(x_n - y_n)) \end{cases} \quad (2.14)$$

3)  $c = 1$

Couplage non symétrique et unidirectionnel

$$T_3(x_n, y_n) : \begin{cases} x_{n+1} = F_3(x_n) = f_a(x_n) \\ y_{n+1} = G(x_n, y_n) = f_a(y_n) + \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi(x_n - y_n)) \end{cases} \quad (2.15)$$

Les points fixes  $P_i$ ,  $i = \overline{1,8}$  existent (les valeurs de coordonnées réelles  $x_i^*$ ,  $y_i^*$ ,  $i = 1,2$ ) si et seulement si  $(a, b)$  appartiennent à des régions de couleur gris clair de la Figure 2.1. Pour les autres valeurs de  $(a, b)$ , des points fixes  $P_i$  ont des coordonnées complexes ou tendent vers l'infini.

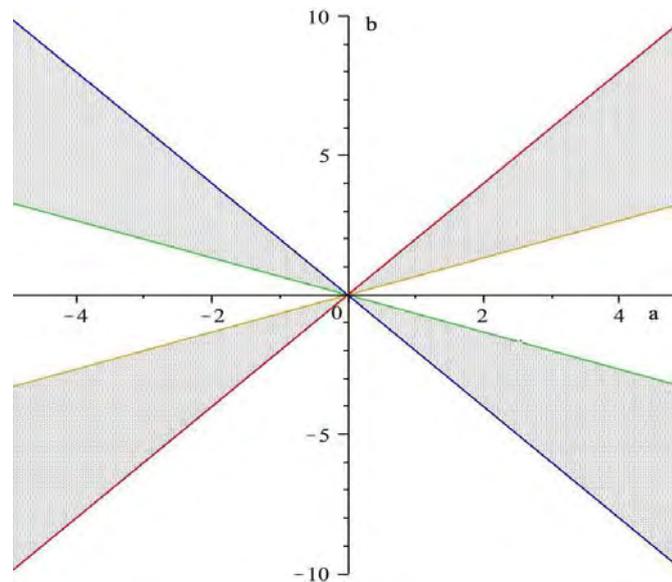


Fig.2.1– Régions de couleur gris clair dans le plan des paramètres  $(a, b)$  correspondent à l'existence des points fixes réelles  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$  pour  $c = \frac{1}{2}$ .

### Remarques 2.1

- Pour la transformation  $T_2$  ( $c = \frac{1}{2}$ ), les points  $P_i$ ,  $i = \overline{1,4}$  et  $i = 6, 8$  ne sont pas des racines du système (2.6), donc ne sont pas des points fixes.
- Pour la transformation  $T_3$ ,  $P_i$  ( $i = 3, 4$  et  $8$ )  $\notin \mathbb{R}^2$  (ils sont dans  $\mathbb{C}^2$ ), et  $P_i$  ( $i = 1, 2, 5, 6$  et  $7$ ) tend vers l'infini quand le paramètre  $c = 1$ .

b) **La stabilité des points fixes**

La stabilité de ces points fixes est fixée par les valeurs propres obtenues en résolvant l'équation  $\det(J(x, y) - SI) = 0$ , où  $I$  est la matrice identité et  $J(x, y)$  est la jacobienne de la récurrence donnée par la relation (2.4).

- (1) Pour les points fixes  $P_1^* = (x^*, y^*) = (k, l)$ ,  $k, l \in \mathbb{Z}$ , les valeurs propres  $S_i$ ,  $i = \overline{1, 2}$  de  $DT(P_1^*) = \det(J(P_1^*) - SI)$  sont :

$$S_1 = 1 + a \text{ et } S_2 = 1 + a - 2b + bc \quad (2.16)$$

- (2) Pour les points fixes  $P_2^* = (x^*, y^*) = \frac{1}{2}(k, l)$ ,  $k = 2k' + 1$ ,  $l = 2l' + 1$ ,

$(k', l') \in \mathbb{Z}^2$ , c'est-à-dire  $k, l$  sont impairs, les valeurs propres de  $DT(P_2^*)$  sont :

$$S_1 = 1 - a \text{ et } S_2 = 1 - a - 2b + bc \quad (2.17)$$

- (3) Pour les points fixes  $P_3^* = (x^*, y^*) = (\frac{1}{2}k, l)$ ,  $k = 2k' + 1$ ,  $(k', l) \in \mathbb{Z}^2$ ,

$k$  est impair, les valeurs propres de  $DT(P_3^*)$  sont :

$$S_{1,2} = 1 + b - \frac{1}{2}bc \pm \frac{1}{2}\sqrt{(bc - 2b)^2 + 4a(a + bc)} \quad (2.18)$$

- (4) Pour les points fixes  $P_4^* = (x^*, y^*) = (k, \frac{1}{2}l)$ ,  $l = 2l' + 1$ ,  $(k, l') \in \mathbb{Z}^2$ ,

$l$  est impair, les valeurs propres de  $DT(P_4^*)$  sont :

$$S_{1,2} = 1 + b - \frac{1}{2}bc \pm \frac{1}{2}\sqrt{(bc - 2b)^2 + 4a(a - bc)} \quad (2.19)$$

(5) Et pour les points fixes  $P_i$ ,  $i = \overline{1,8}$ , les valeurs propres de  $DT(P_i)$  sont :

$$S_{1,2} = \frac{1}{2(c-1)b}(-b^2c^2 + 3b^2c - 2b^2 - 2b + 2bc \pm \sqrt{E}) \quad (2.20)$$

avec :

$$E = -6b^2c^2a^2 + 8b^2ca^2 - 4b^2a^2 + 6b^4c^4 - 14b^4c^3 + 17b^4c^2 + a^4 + 4b^4 - 12b^4c - ca^4 + 2c^3a^2b^2 - c^5b^4 \quad (2.21)$$

Le tableau ci-dessous donne la stabilité des points fixes pour  $c = 0$ ,  $c = \frac{1}{2}$  et  $c = 1$ ,

( $N_S$  signifie Nœud Stable,  $N_I$  Nœud Instable et  $C$  signifie Col) :

Points fixes	Stabilité pour $c = 0$	Stabilité pour $c = \frac{1}{2}$	Stabilité pour $c = 1$
$P_1^*$	$N_S$ $a \in [-2, 0]$ $b \in [\frac{1}{2}a, 1 + \frac{1}{2}a]$	$N_S$ $a \in [-2, 0]$ $b \in [0, \frac{4}{3} + \frac{2}{3}a]$ et $a \in [-2, 0]$ $b \in [\frac{2}{3}a, 0]$	$N_S$ $a \in ]-2, 0[$ $b \in ]a, a + 2[$
$P_2^*$	$N_S$ $a \in [0, 2]$ , $b \in [-\frac{1}{2}a, 1 - \frac{1}{2}a]$	$N_S$ $a \in [0, 2]$ , $b \in [\frac{4}{3} - \frac{2}{3}a, 0]$ et $a \in [0, 2]$ , $b \in [-\frac{2}{3}a, 0]$	$N_S$ $a \in ]0, 2[$ $b \in ]-a, 2 - a[$
$P_3^*$	$C$ donc il est toujours instable	$N_S$ $a \in [0, \frac{2}{3}]$ $b \in [-2a, \frac{2(a^2-4)}{6-a}]$	$N_S$ $a \in ]0, 2[$ $b \in ]-(2+a), -a[$
$P_4^*$	$C$ donc il est toujours instable	$N_S$ $a \in [-\frac{2}{3}, 0]$ $b \in [\frac{2(a^2-4)}{6+a}, 0]$	$N_S$ $a \in ]-2, 0[$ $b \in ]-(2-a), a[$
$P_i$ $i = \overline{1,8}$	$N_S$ $a \in ]-2.828, 0[$ , $b \in ]-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+a^2}, \frac{1}{2}a[$  et $a \in ]0, 2.828[$ , $b \in ]-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+a^2}, -\frac{1}{2}a[$	/	/

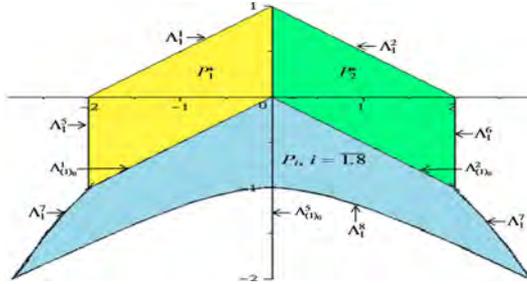


Fig. 2.2— Représentation la stabilité et la symétrie des points fixes de  $T_1$ , ( $c = 0$ ).

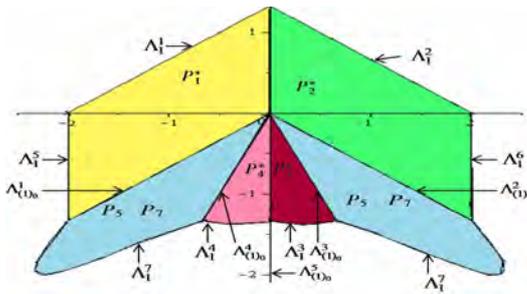


Fig. 2.3— Représentation la stabilité et la symétrie des points fixes de  $T_2$ , ( $c = \frac{1}{2}$ ).

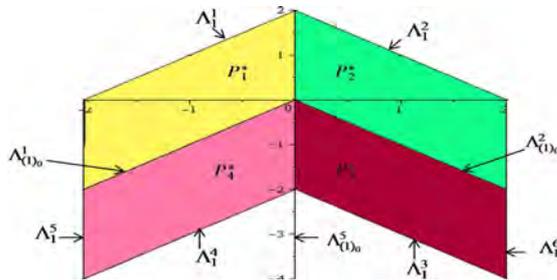


Fig. 2.4— Représentation la stabilité et la symétrie des points fixes de  $T_3$ , ( $c = 1$ ).

On observe dans les Figures (2.2, 2.3, 2.4) la symétrie des points fixes et leur stabilité par rapport à l'axe des ordonnées, soit dans le cas symétrique ( $c = 0$ ), ou bien dans les cas non symétrique ( $c = \frac{1}{2}$ ,  $c = 1$ ).

### 2.1.2 Equations des courbes de bifurcations pour $T$

En utilisant les méthodes développées dans [16], le système d'équations donnant les courbes de bifurcations d'un cycle d'ordre  $k$  de  $T$  est :

$$\left\{ \begin{array}{l} F^k(x, y, a, b, c) - x = 0 \\ G^k(x, y, a, b) - y = 0 \\ G = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f^k}{\partial x} - S & \frac{\partial f^k}{\partial y} \\ \frac{\partial g^k}{\partial x} & \frac{\partial g^k}{\partial y} - S \end{bmatrix} = 0 \\ S = \pm 1 \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Pour la récurrence (2.1), le système d'équations qui permet de construire les courbes de bifurcations des points fixes sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi x) + (1 - c) \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi(y - x)) = 0 \\ \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi y) + \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi(x - y)) = 0 \\ G = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} - S & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} - S \end{bmatrix} = 0 \\ S = \pm 1 \end{array} \right. \quad (2.23)$$

Résolvant ce système d'équations nous obtenons les courbes des bifurcations. Les courbes correspondant à une bifurcation doublement de période ou bien flip ( $S = -1$ , notée  $\Lambda_1^j$ ,  $j$  : le numéro de la courbe) et celles correspondant à une bifurcation nœud-col ou bien fold ( $S = +1$ , notée  $\Lambda_{(1)0}^j$ ,  $j$  : le numéro de la courbe).

### Bifurcation flip ou doublement de période $S = -1$

L'équation d'une courbe de bifurcation  $\Lambda_1^j$  est :

$$\begin{aligned} \Lambda_1^j : & -4 - 2a\cos(2\pi y) + 3b\cos(2\pi(x-y)) - 2a\cos(2\pi x) - a^2\cos(2\pi x)\cos(2\pi y) + \\ & ab\cos(2\pi x)\cos(2\pi(x-y)) + ab\cos(2\pi(x-y))\cos(2\pi y) - bc\cos(2\pi(x-y)) \\ & - bca\cos(2\pi(x-y))\cos(2\pi y) + (1-c)b\cos(2\pi(y-x)) = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Les équations des courbes de bifurcations de type flip ( $S = -1$ ) pour les points fixes  $P_i^*$ ,  $i = \overline{1,4}$  sont :

$$\text{flip : } \left\{ \begin{array}{l} \Lambda_1^1 : b = \frac{a+2}{2-c}, (x, y) = P_1^*, \\ \Lambda_1^2 : b = \frac{-(a-2)}{2-c}, (x, y) = P_2^*, \\ \Lambda_1^3 : b = \frac{a^2-4}{4-2c-ca}, (x, y) = P_3^*, \\ \Lambda_1^4 : b = \frac{a^2-4}{4-2c+ca}, (x, y) = P_4^*, \\ \Lambda_1^5 : a = -2, \forall b, (x, y) = P_1^*, (\text{car } S_1 = -1) \\ \Lambda_1^6 : a = 2, \forall b, (x, y) = P_2^*, (\text{car } S_2 = -1) \end{array} \right. \quad (2.25)$$

### Bifurcation fold ou nœud-col $S = +1$

L'équation d'une courbe de bifurcation  $\Lambda_{(1)_0}^j$  est :

$$\begin{aligned} \Lambda_{(1)_0}^j : & -bcos(2\pi(x-y)) + a^2cos(2\pi x)cos(2\pi y) - acos(2\pi x)bcos(2\pi(x-y)) - \\ & bcos(2\pi(x-y))acos(2\pi y) + bc\cos(2\pi(y-x)) + bca\cos(2\pi(y-x))\cos(2\pi y) + \\ & (1-c)b\cos(2\pi(y-x)) = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

#### 2.1.3 Cas particuliers de la bifurcation fold

##### Bifurcation transcritique ou échange de stabilité $S = +1$

Cette bifurcation se produit lorsque deux points fixes se croisent sur cette courbe et échangent leur stabilité

##### Bifurcation pitchfork ou fourche $S = +1$

La bifurcation fourche possède 2 types de bifurcation, une dite stable et l'autre instable.

**Stable :** Un point fixe stable se déstabilise en un point fixe instable, et deux nouveaux points fixes stables sont créés.

**Instable :** Un point fixe instable se stabilise en un point fixe stable, et deux nouveaux points fixes instables sont créés.

Ce changement de stabilité d'un point fixe accompagné de l'apparition ou de la disparition deux autres points fixes.

Pour la transformation  $T$ , les équations des courbes de bifurcations de type fold ( $S = +1$ )

$\Lambda_{(1)0}^j$ , transcritique ou fourche, pour les points fixes  $P_i^*$   $i = \overline{1,4}$  sont :

$$\text{fold : } \left\{ \begin{array}{l} \text{fourche : } \left\{ \begin{array}{l} \Lambda_{(1)0}^1 : b = \frac{a}{2-c}, (x, y) = P_1^*, \\ \Lambda_{(1)0}^2 : b = \frac{a}{c-2}, (x, y) = P_2^*, \\ \Lambda_{(1)0}^3 : b = -\frac{a}{c}, (x, y) = P_3^*, \\ \Lambda_{(1)0}^4 : b = \frac{a}{c}, (x, y) = P_4^*, \end{array} \right. \\ \text{transcritique : } \left\{ \Lambda_{(1)0}^5 : a = 0, \forall b, x, y \in \mathbb{R}. \right. \end{array} \right. \quad (2.27)$$

• **Bifurcation transcritique et bifurcation fourche (stable et instable)**

**pour les points fixes  $(0, 0)$ ,  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $(\frac{1}{2}, 0)$ ,  $(0, \frac{1}{2})$  avec  $c = \frac{1}{2}$**

\* Bifurcation fourche du point fixe  $(0, 0)$  au passage de  $\Lambda_{(1)0}^1 : F_{0,0} = \frac{a}{2-c}$

- Bifurcation fourche stable : le point fixe  $(0, 0)$  nœud stable ( $N_S$ )  $\xleftrightarrow{S=+1}$  2 points fixes nœud stable ( $N_S$ ) + 1 point fixe col ( $C$ ).

$$N_S^1 \xleftrightarrow{F_{0,0}} 2N_S^1 + C^1 \quad (2.28)$$

Pour  $a = -1$ ,  $b = -0.7$  et  $c = \frac{1}{2}$  on a:

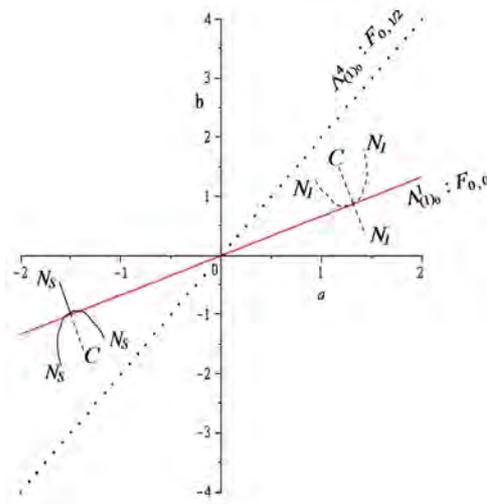
$(x, y)$	$ S_1 $	$ S_2 $	stabilité
$(-0.034, 0.070)$	$ 0.046  < 1$	$ 0.90  < 1$	$N_S$
$(0.034, -0.070)$	$ 0.046  < 1$	$ 0.90  < 1$	$N_S$
$(0, 0)$	$ 0  < 1$	$ 1.05  > 1$	$C$

- Bifurcation fourche instable : le point fixe  $(0, 0)$  nœud instable  $(N_I) \xleftrightarrow{S=+1} 2$  points fixes nœud instable  $(N_S) + 1$  point fixe col  $(C)$ .

$$N_I^1 \xleftrightarrow{F_{0,0}} 2N_I^1 + C^1 \quad (2.29)$$

Pour  $a = 0.68$ ,  $b = 0.466667$  et  $c = \frac{1}{2}$  on a:

$(x, y)$	$ S_1 $	$ S_2 $	stabilité
$(-0.0267, 0.054)$	$ 1.66  > 1$	$ 1.038  > 1$	$N_I$
$(0.0267, -0.054)$	$ 1.66  > 1$	$ 1.038  > 1$	$N_I$
$(0, 0)$	$ 1.68  > 1$	$ 0.97  < 1$	$C$



*Fig.2.5*— Bifurcation fourche stable et instable du point fixe  $(0, 0)$  au passage de  $\Lambda_{(1)0}^1$ ,  $c = \frac{1}{2}$ .

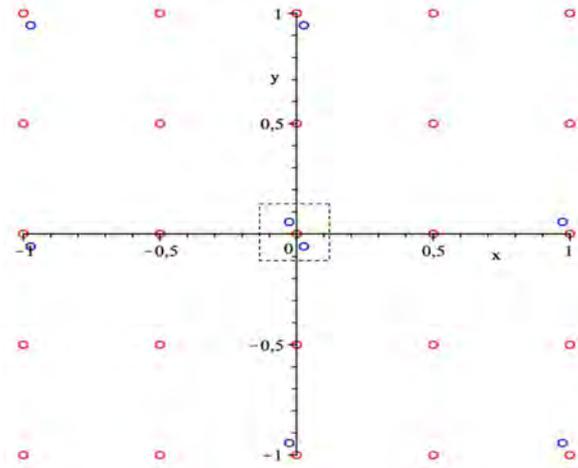


Fig.2.6– Positions des points fixes après une bifurcation fourche instable pour le point fixe  $(0, 0)$  dans le plan  $(x, y)$  pour  $a = 0.68$ ,  $b = 0.466667$  et  $c = \frac{1}{2}$ .

\* Bifurcation fourche du point fixe  $(0, \frac{1}{2})$  au passage de  $\Lambda_{(1)_0}^4 : F_{0, \frac{1}{2}} = \frac{a}{c}$

- Bifurcation fourche stable de  $(0, \frac{1}{2})$

$$(0, \frac{1}{2}) N_S \xleftrightarrow{F_{0, \frac{1}{2}}} 2 \text{ points fixes } (N_S) + 1 \text{ point fixe } (C). \quad (2.30)$$

Pour  $a = -0.53$ ,  $b = -0.934$  et  $c = \frac{1}{2}$  on a:

$(x, y)$	$ S_1 $	$ S_2 $	stabilité
$(-0.053, 0.386)$	$ -0.35  < 1$	$ 0.95  < 1$	$N_S$
$(0.053, -0.386)$	$ -0.35  < 1$	$ 0.95  < 1$	$N_S$
$(0, \frac{1}{2})$	$ 1.02  > 1$	$ -0.42  < 1$	$C$

- Bifurcation fourche instable de  $(0, \frac{1}{2})$

$$(0, \frac{1}{2}) N_I \leftrightarrow 2 \text{ points fixes } (N_I) + 1 \text{ point fixe } (C). \quad (2.31)$$

Pour  $a = 0.72$ ,  $b = 1.4$  et  $c = \frac{1}{2}$  on a:

$(x, y)$	$ S_1 $	$ S_2 $	stabilité
$(-0.026, 0.45)$	$ 3.09  > 1$	$ 1.01  > 1$	$N_I$
$(0.026, -0.45)$	$ 3.09  > 1$	$ 1.01  > 1$	$N_I$
$(0, \frac{1}{2})$	$ 3.11  > 1$	$ 0.99  < 1$	$C$

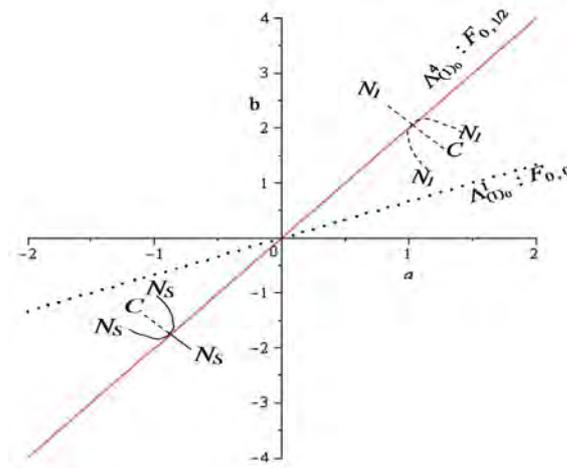


Fig.2.7– Bifurcation fourche stable et instable du point fixe  $(0, \frac{1}{2})$  au passage de  $\Lambda_{(1)0}^4$ ,  $c = \frac{1}{2}$ .

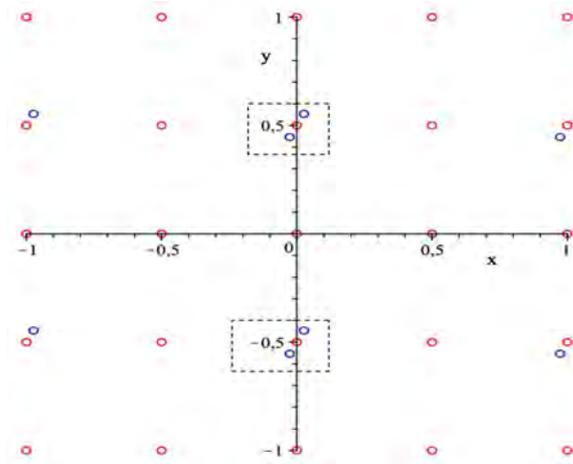


Fig.2.8– Positions des points fixes après une bifurcation fourche instable pour le point fixe  $(0, \frac{1}{2})$  dans le plan  $(x, y)$  pour  $a = 0.72$ ,  $b = 1.4$  et  $c = \frac{1}{2}$ .

\* Bifurcation fourche du point fixe  $(\frac{1}{2}, 0)$  au passage de  $\Lambda_{(1)0}^3 : F_{\frac{1}{2},0} = -\frac{a}{c}$

- Bifurcation fourche stable de  $(\frac{1}{2}, 0)$

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) N_S \leftrightarrow 2 \text{ points fixes } (N_S) + 1 \text{ point fixe } (C). \quad (2.32)$$

Pour  $a = 0.7$ ,  $b = -1.2$  et  $c = \frac{1}{2}$  on a:

$(x, y)$	$ S_1 $	$ S_2 $	stabilité
$(0.44, -0.13)$	$ -0.72  < 1$	$ 0.92  < 1$	$N_S$
$(-0.44, 0.13)$	$ -0.72  < 1$	$ 0.92  < 1$	$N_S$
$(\frac{1}{2}, 0)$	$ 1.03  > 1$	$ -0.84  < 1$	$C$

- Bifurcation fourche instable de  $(\frac{1}{2}, 0)$

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) N_I \xleftrightarrow{F_{\frac{1}{2}, 0}} 2 \text{ points fixes } (N_I) + 1 \text{ point fixe } (C). \quad (2.33)$$

Pour  $a = -0.56$ ,  $b = 1.1$  et  $c = \frac{1}{2}$  on a:

$(x, y)$	$ S_1 $	$ S_2 $	stabilité
$(0.48, -0.04)$	$ 2.64  > 1$	$ 1.005  > 1$	$N_I$
$(-0.48, 0.04)$	$ 2.64  > 1$	$ 1.005  > 1$	$N_I$
$(\frac{1}{2}, 0)$	$ 2.65  > 1$	$ 0.99  < 1$	$C$

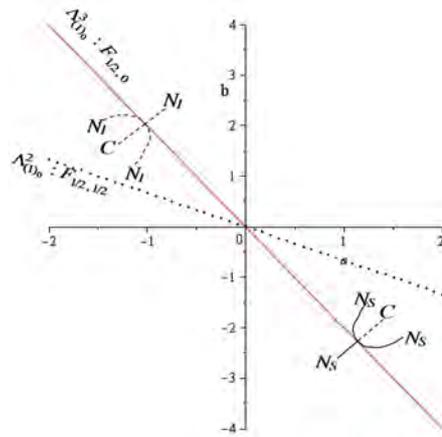
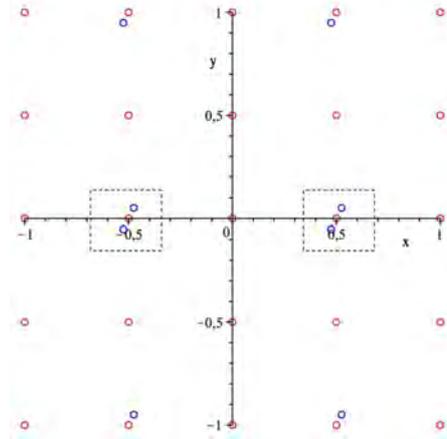


Fig.2.9– Bifurcation fourche stable et instable du point fixe  $(\frac{1}{2}, 0)$  au passage de  $\Lambda_{(1)0}^3$ ,

$c = \frac{1}{2}$ .



*Fig.2.10*– Positions des points fixes après une bifurcation fourche stable pour le point fixe  $(\frac{1}{2}, 0)$  dans le plan  $(x, y)$  pour  $a = 0.6$ ,  $b = -1.17$  et  $c = \frac{1}{2}$ .

\* Bifurcation fourche du point fixe  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  au passage de  $\Lambda_{(1)0}^2 : F_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = \frac{a}{c-2}$

- Bifurcation fourche stable de  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) N_S \leftrightarrow 2 \text{ points fixes } (N_S) + 1 \text{ point fixe } (C). \quad (2.34)$$

Pour  $a = 0.7$ ,  $b = -0.6$  et  $c = \frac{1}{2}$  on a:

$(x, y)$	$ S_1 $	$ S_2 $	stabilité
$(0.43, -0.33)$	$ 0.38  < 1$	$ 0.70  < 1$	$N_S$
$(-0.43, 0.33)$	$ -0.72  < 1$	$ 0.92  < 1$	$N_S$
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$ 0.3  < 1$	$ 1.2  > 1$	$C$

- Bifurcation fourche instable de  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) N_I \xleftrightarrow{F_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}} 2 \text{ points fixes } (N_I) + 1 \text{ point fixe } (C). \quad (2.35)$$

Pour  $a = -0.73$ ,  $b = 0.492$  et  $c = \frac{1}{2}$  on a:

$(x, y)$	$ S_1 $	$ S_2 $	stabilité
$(0.48, -0.46)$	$ 1.72  > 1$	$ 1.02  > 1$	$N_I$
$(-0.48, 0.46)$	$ 1.72  > 1$	$ 1.02  > 1$	$N_I$
$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$ 1.73  > 1$	$ 0.99  < 1$	$C$

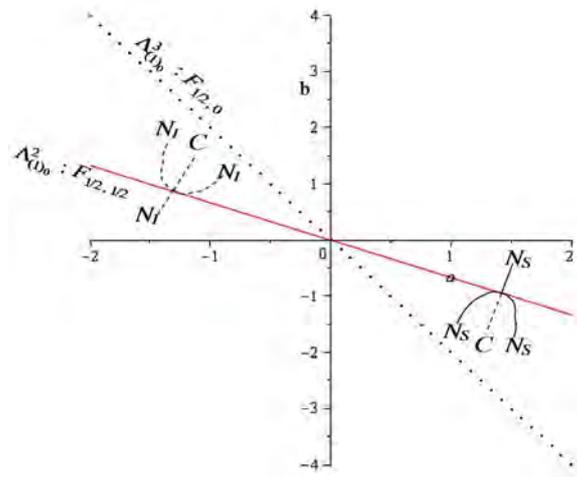


Fig.2.11– Bifurcation fourche stable et instable du point fixe  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  au passage de  $\Lambda_{(1)_0}^2$ ,  $c = \frac{1}{2}$ .

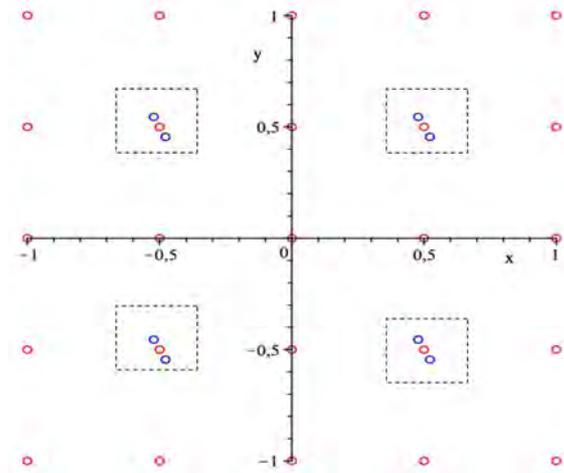


Fig.2.12– Positions des points fixes après une bifurcation fourche instable pour le point fixe  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  dans le plan  $(x, y)$  pour  $a = -0.73$ ,  $b = 0.492$  et  $c = \frac{1}{2}$ .

De la même façon, nous obtenons les bifurcation transcritique et bifurcation fourche (stable et instable) pour les autres points fixes  $P_i^*$ ,  $i = \overline{1,4}$ ,  $P_5 = (x_2^*, y_1^*)$  et  $P_7 = (y_2^*, x_1^*)$  de la transformation  $T_2$  ( $c = \frac{1}{2}$ ) dans le plan des paramètres  $(a, b)$ , où  $x_1^*$ ,  $x_2^*$ ,  $y_1^*$ ,  $y_2^*$  sont données par les équations (2.10, 2.11).

Dans la Figure 2.13, nous pouvons faire les remarques suivantes :

- Bifurcation transcritique entre  $P_1^* \longleftrightarrow P_2^*$  au passage de  $\Lambda_{(1)0}^5$ .
- Bifurcation transcritique entre  $P_3^* \longleftrightarrow P_4^*$  au passage de  $\Lambda_{(1)0}^5$ .
- Bifurcation fourche (stable et instable) autour de  $P_1^*$  au passage de  $\Lambda_{(1)0}^1$ .

$$P_1^* N_S^1 \text{ (resp. } N_I^1) \xleftrightarrow{F_{(P_1^*)}} 2N_S^1 \text{ (resp. } 2N_I^1) + C^1 \text{ (resp. } C^1) \quad (2.36)$$

- Bifurcation fourche (stable et instable) autour de  $P_2^*$  au passage de  $\Lambda_{(1)0}^2$ .

$$P_2^* N_S^1 \text{ (resp. } N_I^1) \xleftrightarrow{F_{(P_2^*)}} 2N_S^1 \text{ (resp. } 2N_I^1) + C^1 \text{ (resp. } C^1) \quad (2.37)$$

- Bifurcation fourche (stable et instable) autour de  $P_3^*$  au passage de  $\Lambda_{(1)0}^3$ .

$$P_3^* N_S^1 \text{ (resp. } N_I^1) \xleftrightarrow{F_{(P_3^*)}} 2N_S^1 \text{ (resp. } 2N_I^1) + C^1 \text{ (resp. } C^1) \quad (2.38)$$

- Bifurcation fourche (stable et instable) autour de  $P_4^*$  au passage de  $\Lambda_{(1)0}^4$ .

$$P_4^* N_S^1 \text{ (resp. } N_I^1) \xleftrightarrow{F_{(P_4^*)}} 2N_S^1 \text{ (resp. } 2N_I^1) + C^1 \text{ (resp. } C^1) \quad (2.39)$$

• **Bifurcation transcritique et bifurcation fourche (stable et instable) pour les points fixes de  $T_1$  ( $c = 0$ ) :**

Dans ce cas ( $c = 0$ ), les courbes de bifurcation de type fold  $\Lambda_{(1)0}^3$ ,  $\Lambda_{(1)0}^4$  des points fixes  $P_3^*$ ,  $P_4^*$  respectivement, tendent vers l'infini.

La Figure 2.14 fait apparaître clairement l'existence des bifurcations suivantes :

- Bifurcation transcritique entre  $P_1^* \longleftrightarrow P_2^*$  au passage de  $\Lambda_{(1)0}^5$ .

- Bifurcation fourche (stable et instable) autour de  $P_1^*$  au passage de  $\Lambda_{(1)0}^1$ .

$$P_1^* N_S^1 \text{ (resp. } N_I^1) \xleftrightarrow{F_{(P_1^*)}} 2N_S^1 \text{ (resp. } 2N_I^1) + C^1 \text{ (resp. } C^1) \quad (2.40)$$

- Bifurcation fourche (stable et instable) autour de  $P_2^*$  au passage de  $\Lambda_{(1)0}^2$ .

$$P_2^* N_S^1 \text{ (resp. } N_I^1) \xleftrightarrow{F_{(P_2^*)}} 2N_S^1 \text{ (resp. } 2N_I^1) + C^1 \text{ (resp. } C^1) \quad (2.41)$$

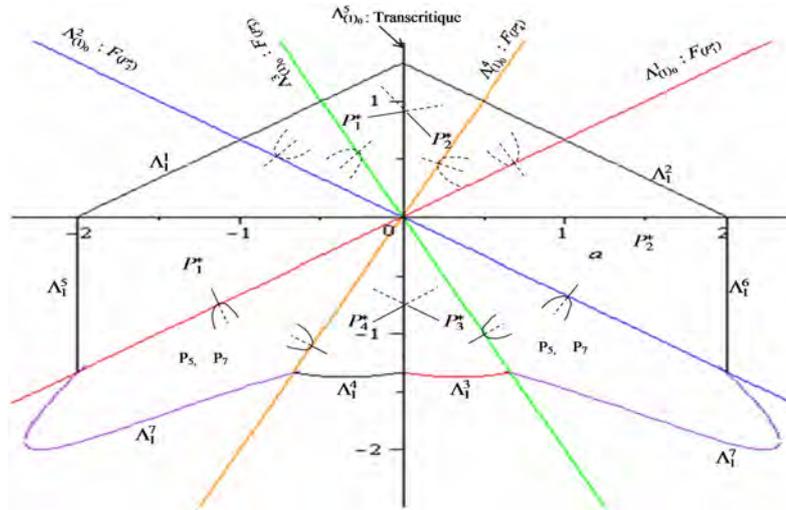


Fig.2.13– Bifurcation transcritique et bifurcation fourche (stable et instable) pour les points fixes  $P_i^*$ ,  $i = \overline{1,4}$ ,  $P_5$  et  $P_7$ , avec  $c = \frac{1}{2}$ , (c'est-à-dire pour  $T_2$ ).

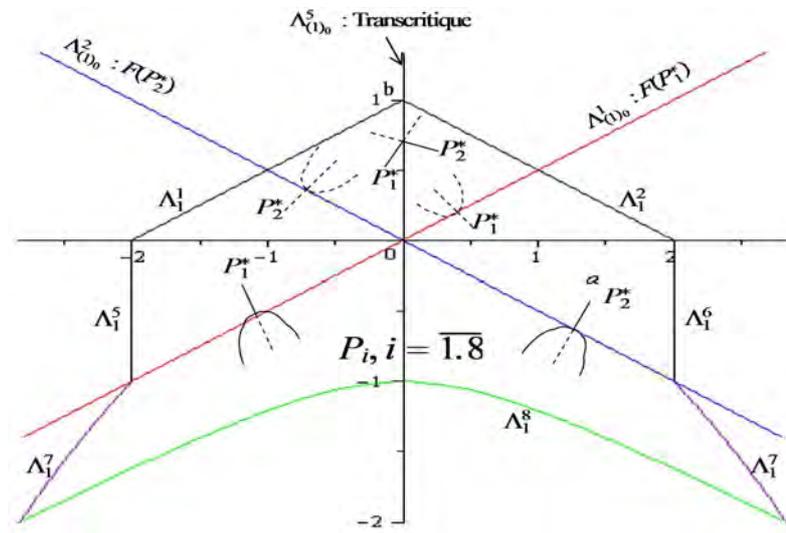


Fig.2.14– Bifurcation transcritique et bifurcation fourche (stable et instable) pour les points fixes  $P_i^*$ ,  $i = \overline{1,2}$ , et  $P_i$ ,  $i = \overline{1,8}$  avec  $c = 0$ .

Par exemple, si on prend  $a = 0.1$ ,  $b = 0.5$ , et  $c = 0$  on a:

$(x, y)$	$ S_1 $	$ S_2 $	stabilité
$(0.23, -0.23)$	$ 1.0099  > 1$	$ 1.99  > 1$	$N_I$
$(-0.23, 0.23)$	$ 1.0099  > 1$	$ 1.99  > 1$	$N_I$
$(0, 0)$	$ 1.1  > 1$	$ 0.1  < 1$	$C$
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$ -0.1  < 1$	$ 0.90  < 1$	$N_S$

et si on prend  $a = -0.1$ ,  $b = 0.5$ , et  $c = 0$  on a:

$(x, y)$	$ S_1 $	$ S_2 $	stabilité
$(0.27, -0.27)$	$ 1.01  > 1$	$ 1.98  > 1$	$N_I$
$(-0.27, 0.27)$	$ 1.01  > 1$	$ 1.98  > 1$	$N_I$
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$ 0.1  < 1$	$ 1.1  > 1$	$C$
$(0, 0)$	$ 0.90  < 1$	$ -0.1  < 1$	$N_S$

Donc au passage de  $\Lambda_{(1)0}^5$ , pour  $b = 0.5$  (constant),  $a = \pm 0.1$  (comme indiqués sur les 2 tableaux précédents), nous retrouvons la bifurcation transcritique entre  $(0, 0)$  et  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , c'est-à-dire nous pouvons observer que :

- Pour  $a = 0.1$ , le point fixe  $(0, 0)$  nœud stable devient col (instable), et le point fixe  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  col (instable) devient nœud stable.
- Et pour  $a = -0.1$ , le point fixe  $(0, 0)$  col devient nœud stable, et le point fixe  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  nœud stable devient col.

- **Bifurcation transcritique et bifurcation fourche (stable et instable) pour les points fixes de  $T_3$  ( $c = 1$ ) :**

Dans le cas où  $c = 1$ , seuls les points fixes  $P_i^*$ ,  $i = \overline{1,4}$  existent puisque les autres points fixes  $P_i$ ,  $i = \overline{1,8}$  tendent vers l'infini. De même, la courbe de bifurcation de type fold  $\Lambda_{(1)0}^3$  est confondue avec la courbe  $\Lambda_{(1)0}^2$ , et la courbe  $\Lambda_{(1)0}^4$  est confondue avec la courbe  $\Lambda_{(1)0}^1$ .

Et nous avons aussi dans la Figure 2.15, les bifurcations suivantes :

- Bifurcation transcritique entre  $P_1^* \longleftrightarrow P_2^*$  au passage de  $\Lambda_{(1)0}^5$ .
- Bifurcation transcritique entre  $P_3^* \longleftrightarrow P_4^*$  au passage de  $\Lambda_{(1)0}^5$ .
- Bifurcation fourche (stable et instable) autour de  $P_1^*$  et  $P_4^*$  au passage de  $\Lambda_{(1)0}^1$ , cette bifurcation obéit au schéma suivant :

$$\begin{aligned} P_1^* N_S^1 \text{ (resp. } N_I^1) &\xleftrightarrow{F_{(P_1^*)}} 2N_S^1 \text{ (resp. } 2N_I^1) + C^1 \text{ (resp. } C^1) & (2.42) \\ P_4^* N_S^1 \text{ (resp. } N_I^1) &\xleftrightarrow{F_{(P_1^*)}} 2N_S^1 \text{ (resp. } 2N_I^1) + C^1 \text{ (resp. } C^1) \end{aligned}$$

- Bifurcation fourche (stable et instable) autour de  $P_2^*$  et  $P_3^*$  au passage de  $\Lambda_{(1)0}^2$ , cette bifurcation obéit au schéma suivant :

$$\begin{aligned} P_2^* N_S^1 \text{ (resp. } N_I^1) &\xleftrightarrow{F_{(P_2^*)}} 2N_S^1 \text{ (resp. } 2N_I^1) + C^1 \text{ (resp. } C^1) & (2.43) \\ P_3^* N_S^1 \text{ (resp. } N_I^1) &\xleftrightarrow{F_{(P_3^*)}} 2N_S^1 \text{ (resp. } 2N_I^1) + C^1 \text{ (resp. } C^1) \end{aligned}$$

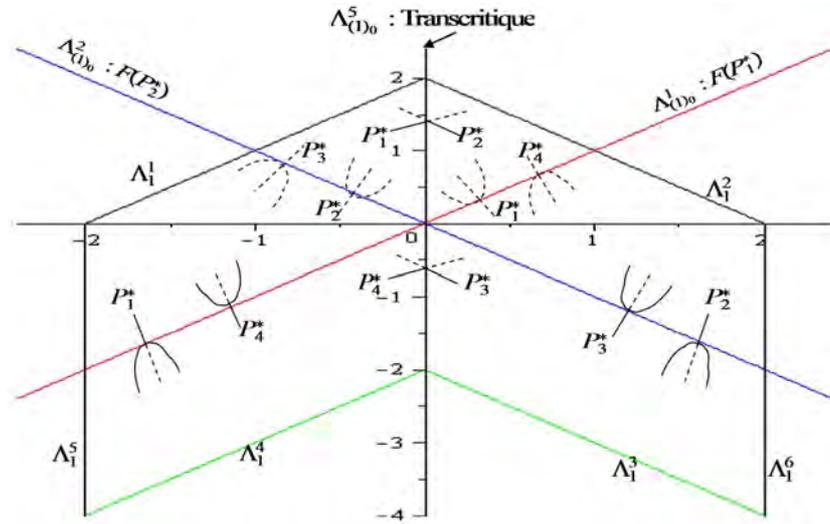


Fig.2.15– Bifurcation transcritique et bifurcation fourche (stable et instable) pour les points fixes  $P_i^*$ ,  $i = \overline{1,4}$ , avec  $c = 1$ .

#### 2.1.4 Points nœuds paramétriques avec multiplicateurs $S_1 = -S_2 = 1$

On sait qu'un point nœud paramétrique pour les points fixes vérifie le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} F(x, y, a, b, c) - x = 0 \\ G(x, y, a, b) - y = 0 \\ D = \det(J(x, y)) + 1 = 0 \\ tr(J) = 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

Où  $D$  est le déterminant de la matrice jacobienne et  $tr(J)$  sa trace.

Pour la transformation  $T$ , les points noeuds paramétriques sont des solutions du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi x_n) + (1-c) \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi(y_n - x_n)) = 0 \\ \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi y_n) + \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi(x_n - y_n)) = 0 \\ D = \det(J(x, y)) + 1 = 0 \\ \text{tr}(J) = 0 \end{array} \right. \quad (2.45)$$

avec :

$$\begin{aligned} D = & 2 + a \cos(2\pi y) - 2b \cos(2\pi(x - y)) + a \cos(2\pi x) + a^2 \cos(2\pi x) \cos(2\pi y) \\ & - ab \cos(2\pi x) \cos(2\pi(x - y)) - ab \cos(2\pi(x - y)) \cos(2\pi y) + bc \cos(2\pi(-y + x)) \\ & + abc \cos(2\pi(x - y)) \cos(2\pi y) \end{aligned} \quad (2.46)$$

et

$$\text{tr}(J) = 2 + a \cos(2\pi x) - (1-c)b \cos(2\pi(y - x)) + a \cos(2\pi y) - b \cos(2\pi(-y + x)) \quad (2.47)$$

Les coordonnées des points nœuds paramétriques sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} NP_1 : a = -2, b = \frac{2}{c-2}, (x, y) = P_1^* \\ NP_2 : a = 2, b = \frac{2}{c-2}, (x, y) = P_2^* \\ NP_3 : a = \frac{-2c}{c-2}, b = \frac{2}{c-2}, (x, y) = P_3^* \\ NP_4 : a = \frac{2c}{c-2}, b = \frac{2}{c-2}, (x, y) = P_4^* \\ NP_5 : a = 0, b = \frac{-2}{c-2}, y = x, \forall x \\ NP_6 : a = 0, b = \frac{2}{c-2}, y = -x, \forall x \end{array} \right. \quad (2.48)$$

En itérant la transformation  $T$  une seconde fois, nous obtenons la récurrence donnant les cycles d'ordre 2 :

$$T : \left\{ \begin{array}{l} x_{n+2} = f_a(x_n) + \frac{a}{2\pi} \sin[2\pi f_a(x_n) - (1-c)b \sin(2\pi(x_n - y_n))] - (1-c)\frac{b}{2\pi} H_{a,b,c}(x_n, y_n) \\ y_{n+2} = f_a(y_n) + \frac{a}{2\pi} \sin[2\pi f_a(y_n) - b \sin(2\pi(y_n - x_n))] - \frac{b}{2\pi} H_{a,b,c}(y_n, x_n) \end{array} \right. \quad (2.49)$$

Où :

$$f_a(x_n) = x_n + \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi x_n) \quad (2.50)$$

$$H_{a,b,c}(x_n, y_n) = \sin(2\pi(x_n - y_n)) + \sin[2\pi(f_a(x_n) - f_a(y_n)) - (2-c)b \sin(2\pi(x_n - y_n))] \quad (2.51)$$

le système d'équations donnant les bifurcations d'un cycle d'ordre 2 est :

$$\begin{cases} f_a(x) + \frac{a}{2\pi} \sin[2\pi f_a(x) - (1-c)b \sin(2\pi(x-y))] - (1-c)\frac{b}{2\pi} H_{a,b,c}(x,y) - x = 0 \\ f_a(y) + \frac{a}{2\pi} \sin[2\pi f_a(y) - b \sin(2\pi(y-x))] - \frac{b}{2\pi} H_{a,b,c}(y,x) - y = 0 \\ S = \pm 1 \end{cases} \quad (2.52)$$

Il est difficile de résoudre ce système (2.52) analytiquement, même pour quelques valeurs fixées de paramètre  $c$ , donc nous avons construit les courbes de bifurcation par des méthodes numériques dans les sections suivantes.

## 2.2 Evolution de la structure de bifurcation lorsque le troisième paramètre varie

Dans cette section, nous présentons l'étude des courbes de bifurcations d'un cycle d'ordre  $k = 1, 2$ , et leur évolution dans le plan paramétrique  $(a, b)$ , pour les trois cas suivants,  $c = 0$  [34],  $c = \frac{1}{2}$  et  $c = 1$ .

### 2.2.1 Simulations du plan des paramètres

Les domaines de stabilité pour les récurrences  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  peuvent être construits numériquement, en utilisant une méthode de balayage aux systèmes (2.13), (2.14) et (2.15) respectivement.

Pour la récurrence  $T_1$ , le résultat du programme de balayage est représenté sur la Figure 2.16 dans le plan paramétrique  $(a, b)$ , nous donnons ici l'existence des cycles attractifs de la transformation  $T_1$  (2.13), et le résultat du programme de balayage pour  $T_2$  (resp.  $T_3$ ) est

représenté sur la Figure 2.18 (resp. Figure 2.20).

Nous remarquons des bifurcations dans le plan paramétrique  $(a, b)$ , le programme trace les domaines d'existence de cycles d'ordre  $k$ ;  $k = 1, 2, \dots, 14$ . Chaque couleur est attribuée à un attracteur d'un certain ordre, quelques attracteurs apparaissent pour  $S = 1$ , et les autres par doublement de période  $S = -1$ .

Il existe un grand nombre de courbes de bifurcations, la frontière entre deux domaines de différentes couleurs représente une courbe de bifurcation.

Dans les Figures (2.16, 2.18, 2.20) nous avons le code des couleurs :

- Les zones bleues représentent les valeurs des paramètres pour lesquelles il existe un point fixe attractif;
- Les zones rouges représentent les zones d'existence d'un cycle attractif d'ordre 2;
- Les zones jaunes représentent les zones d'existence d'un cycle attractif d'ordre 4;
- Les zones verts représentent les zones d'existence d'un cycle attractif d'ordre 8, ainsi de suite pour les cycles jusqu'à l'ordre  $k = 14$ ;
- Les zones noires correspondent aux valeurs de paramètres  $(a, b)$  pour lesquelles il existe des phénomènes chaotiques ou des divergences.

Nous remarquons par exemple, que pour  $a = -2$  (rep.  $a = 2$ ) le passage d'une zone bleue à une zone rouge, ce qui traduit l'apparition d'un cycle d'ordre 2 stable (zone rouge) par une bifurcation flip d'un point fixe. De même, le passage d'une zone rouge à une zone jaune est réalisé grâce à une bifurcation flip d'un cycle d'ordre 2 en donnant naissance à un cycle d'ordre 4, ceci pour  $a = -3.44523$ .

Nous remarquons que les zones bleues qui représentent les zones d'existence d'un point fixe attractif symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ( $a = 0$ ) pour les trois transformations ( $T_1, T_2, T_3$ ), mais les cycles d'ordre 2 (les zones rouges) sont symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ( $a = 0$ ) pour  $T_1$  seulement, pas pour  $T_2, T_3$ .

Les Figures (2.17, 2.19 et 2.21) donnent un exemple de diagramme de bifurcation de type Feigenbaum de les transformations  $T_1, T_2, T_3$  (respectivement). Comme indiqué dans les Figures (2.16, 2.18 et 2.20), lorsque le paramètre  $a$  varie, on peut observer la bifurcation de doublement de période des points fixes attractifs  $\frac{1}{2}k, k \in \mathbb{Z}$  en un cycle d'ordre 2 attractif, puis pour  $a = \pm\pi$  le cycle d'ordre 2 attractif est déstabilisé par une bifurcation flip (une fourche dans la Figure) et création de deux nouveaux cycles d'ordre 2 attractifs, ensuite à un cycle d'ordre 4 attractif, et ainsi de suite.

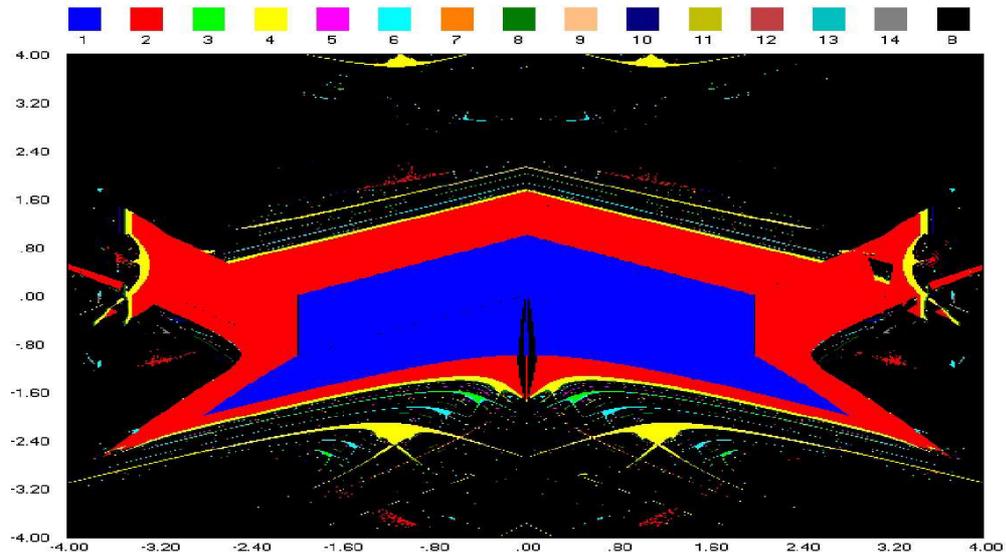


Fig. 2.16– Domaines de stabilité et d'existence des cycles attractifs dans le plan des paramètres  $(a, b)$  pour la transformation  $T_1$ .

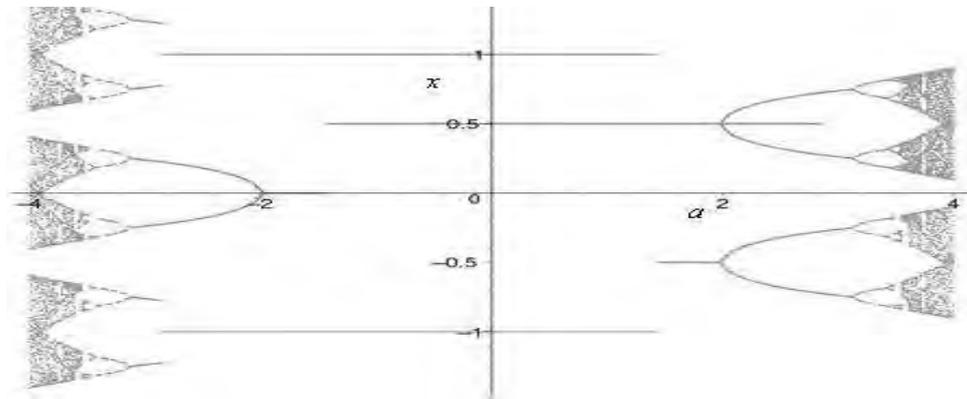


Fig.2.17– Diagramme de bifurcation ( $b = 0.01$  fixé) dans le plan  $(a, x)$  pour la transformation  $T_1$ .

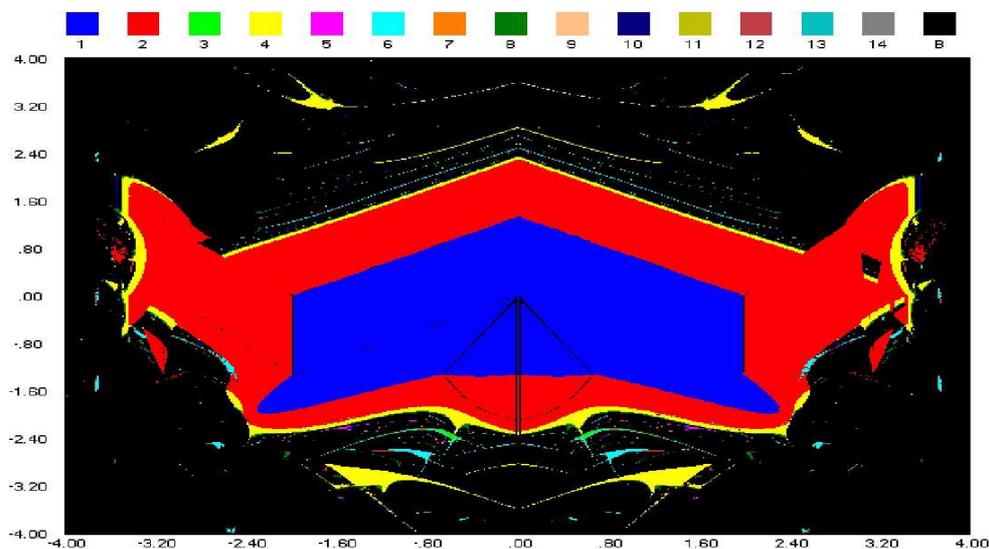


Fig. 2.18— Domaines de stabilité et d'existence des cycles attractifs dans le plan des paramètres  $(a, b)$  pour la transformation  $T_2$ .

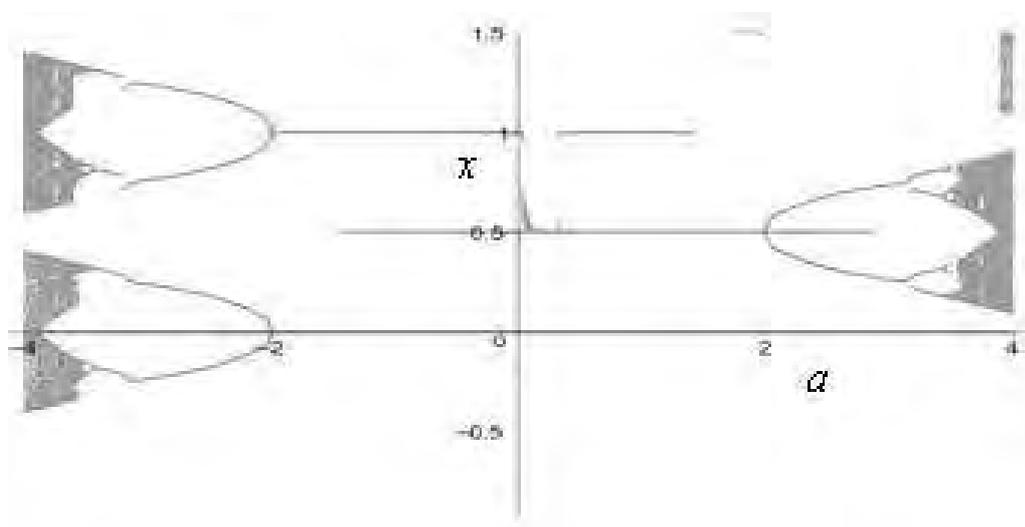
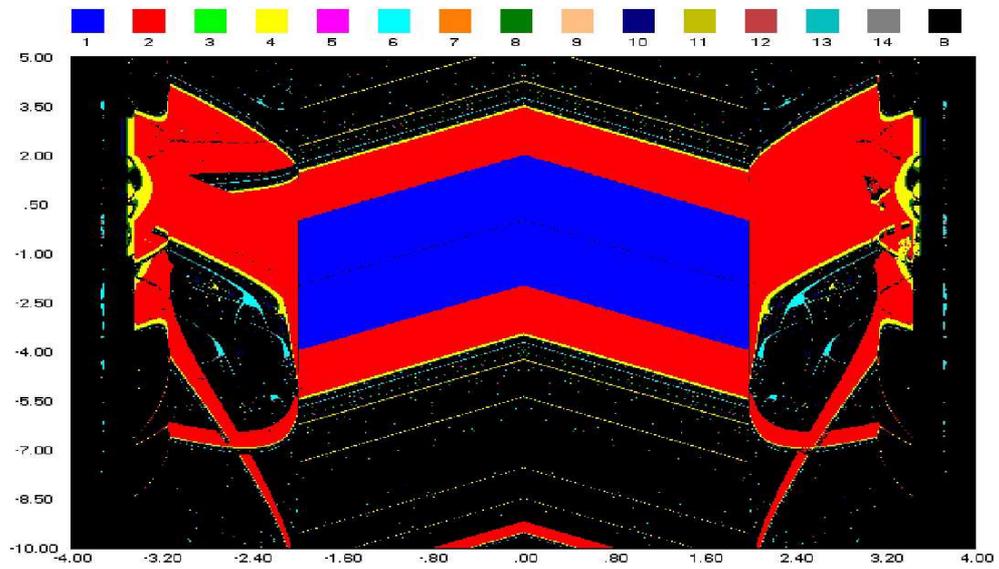
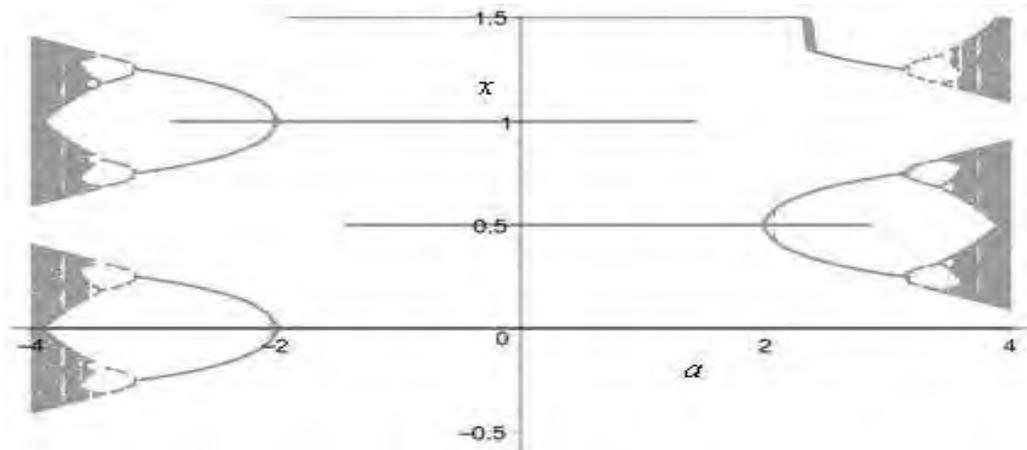


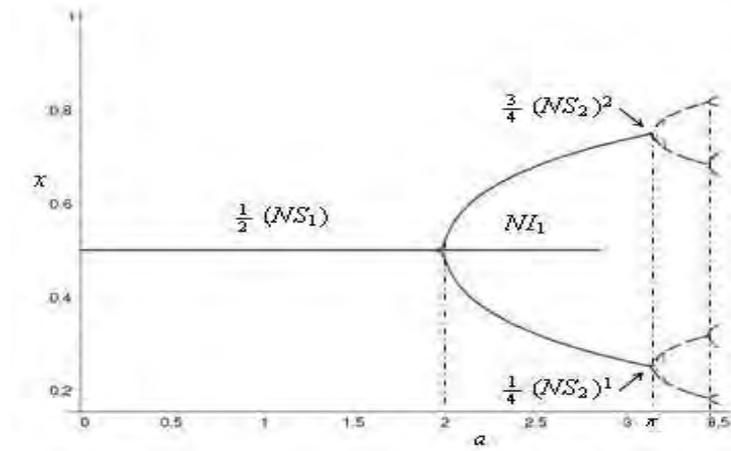
Fig.2.19— Diagramme de bifurcation ( $b = 0.01$  fixé) dans le plan  $(a, x)$  pour la transformation  $T_2$ .



*Fig. 2.20*– Domaines de stabilité et d'existence des cycles attractifs dans le plan des paramètres  $(a, b)$  pour la transformation  $T_3$ .



*Fig. 2.21*–Diagramme de bifurcation ( $b = 0.01$  fixé) dans le plan  $(a, x)$  pour la transformation  $T_3$ .



*Fig.2.22*– Zoom de la Figure 2.17, à  $a = \pi$ , le cycle d'ordre 2,  $x = \frac{1}{4}$  et  $x = \frac{3}{4}$  est déstabilisé par une bifurcation flip et création d'un cycle d'ordre 4 stable.

Dans le plan des paramètres  $(a, b)$  (Figure 2.23), pour  $a \in [-20, 20]$  et  $b \in [-5, 5]$ , on peut observer que la transformation  $T$  n'est pas périodique, mais elle est symétrique par rapport la ligne  $a = 0$ .

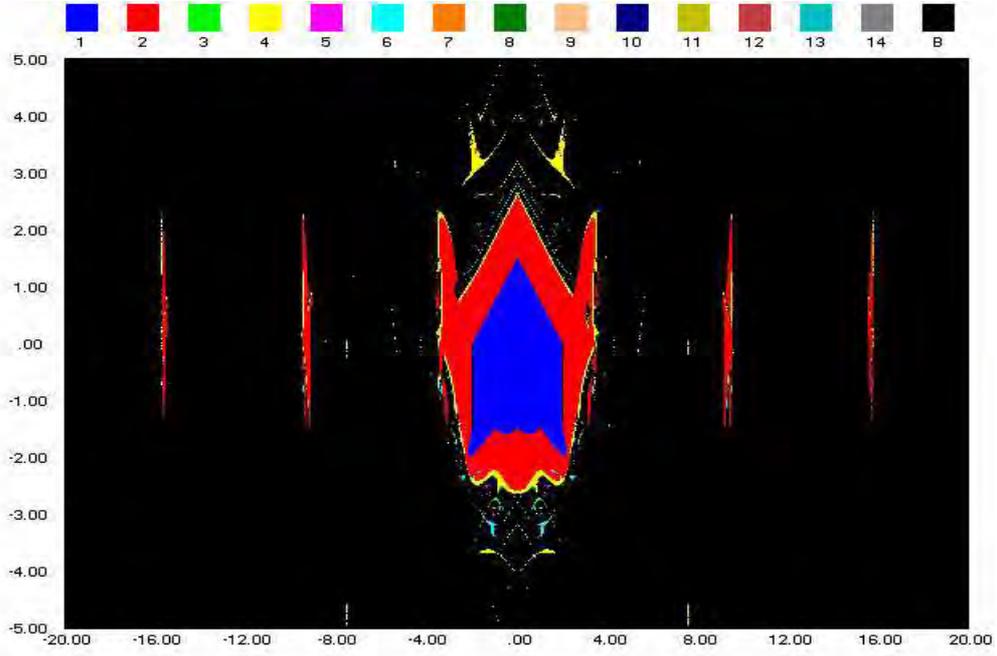


Fig.2.23– Domaines de stabilité pour  $T$ , avec  $c = 0$ ,  $a \in [-20, 20]$  et  $b \in [-5, 5]$ .

### 2.2.2 Courbes de bifurcation d'un cycle d'ordre $k = 1$ pour $T_1$ , $T_2$ et $T_3$

D'après la section précédente, et comme nous avons déjà fait pour l'étude des courbes de bifurcations de la transformation  $T$  (quelque soit  $0 \leq c \leq 1$ ), maintenant on va étudier les courbes de bifurcations du système pour  $c = 0$ ,  $c = \frac{1}{2}$  et  $c = 1$ . Le tableau ci-dessous donne les équations des courbes de bifurcation de type fold ( $S = +1$ )  $\Lambda_{(1)_0}^j$ , ( $j = \overline{1.5}$ ) et de type flip ( $S = -1$ )  $\Lambda_1^{j'}$  ( $j' = \overline{1.9}$ ) des cycles d'ordre 1 pour  $c = 0$ ,  $c = \frac{1}{2}$  et  $c = 1$ .

Points fixes	$\Lambda_{(1)0}^j$ et $\Lambda_1^{j'}$ pour $c = 0$	$\Lambda_{(1)0}^j$ et $\Lambda_1^{j'}$ pour $c = \frac{1}{2}$	$\Lambda_{(1)0}^j$ et $\Lambda_1^{j'}$ pour $c = 1$
$P_1^*$	$\Lambda_{(1)0}^1 : b = \frac{1}{2}a$ $\Lambda_1^1 : b = 1 + \frac{a}{2}$ $\Lambda_1^5 : a = -2$	$\Lambda_{(1)0}^1 : b = \frac{2}{3}a$ $\Lambda_1^1 : b = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}a$ $\Lambda_1^5 : a = -2$	$\Lambda_{(1)0}^1 : b = a$ $\Lambda_1^1 : b = a + 2$ $\Lambda_1^5 : a = -2$
$P_2^*$	$\Lambda_{(1)0}^2 : b = -\frac{1}{2}a$ $\Lambda_1^2 : b = 1 - \frac{a}{2}$ $\Lambda_1^6 : a = 2$	$\Lambda_{(1)0}^2 : b = -\frac{2}{3}a$ $\Lambda_1^2 : b = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}a$ $\Lambda_1^6 : a = 2$	$\Lambda_{(1)0}^2 : b = -a$ $\Lambda_1^2 : b = 2 - a$ $\Lambda_1^6 : a = 2$
$P_3^*$	$\Lambda_{(1)0}^3 \rightarrow \infty$ $\Lambda_1^3 \equiv \Lambda_1^4 : b = (\frac{a}{2})^2 - 1$	$\Lambda_{(1)0}^3 : b = -2a$ $\Lambda_1^3 : b = \frac{2(a^2-4)}{6-a}$	$\Lambda_{(1)0}^3 \equiv \Lambda_{(1)0}^2$ $\Lambda_1^3 : b = -(2+a)$
$P_4^*$	$\Lambda_{(1)0}^4 \rightarrow \infty$ $\Lambda_1^3 \equiv \Lambda_1^4 : b = (\frac{a}{2})^2 - 1$	$\Lambda_{(1)0}^4 : b = 2a$ $\Lambda_1^4 : b = \frac{2(a^2-4)}{6+a}$	$\Lambda_{(1)0}^4 \equiv \Lambda_{(1)0}^1$ $\Lambda_1^4 : b = -(2-a)$
$P_i$ $i = \overline{1,8}$	$\Lambda_{(1)0}^6 \equiv \Lambda_{(1)0}^1$ $\Lambda_{(1)0}^7 \equiv \Lambda_{(1)0}^2$ $\Lambda_1^7 : b = -\frac{1}{4}a^2$ $\Lambda_1^8 : b = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+a^2}$ $\Lambda_1^9 : b = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+a^2}$	/	$P_i \rightarrow \infty$ $\forall i = \overline{1,8}$

**Remarque 2.2**

- La courbe  $\Lambda_{(1)0}^5 : a = 0$  existe toujours, quelque soient  $(x, y)$  et quelque soit  $c \in [0, 1]$ .

### 2.2.3 Points nœuds paramétriques pour $T_1, T_2$ et $T_3$

Les coordonnées des points nœuds paramétriques pour les trois transformations

$T_1, T_2$  et  $T_3$  sont :

Paramètre $c$	Points nœuds paramétriques $NP_i, i = \overline{1,6}$ ( $S_1 = -S_2 = 1$ )
$c = 0$	$\left\{ \begin{array}{l} NP_1 : a = -2, \quad b = -1, \quad (x, y) = P_1^* \\ NP_2 : a = 2, \quad b = -1, \quad (x, y) = P_2^* \\ NP_3 : a = 0, \quad b = -1, \quad (x, y) = P_3^* \\ NP_4 : a = 0, \quad b = -1, \quad (x, y) = P_4^* \\ NP_5 : a = 0, \quad b = 1, \quad y = x, \forall x \\ NP_6 : a = 0, \quad b = -1, \quad y = -x, \forall x \end{array} \right.$
$c = \frac{1}{2}$	$\left\{ \begin{array}{l} NP_1 : a = -2, \quad b = -\frac{4}{3}, \quad (x, y) = P_1^* \\ NP_2 : a = 2, \quad b = -\frac{4}{3}, \quad (x, y) = P_2^* \\ NP_3 : a = \frac{2}{3}, \quad b = -\frac{4}{3}, \quad (x, y) = P_3^* \\ NP_4 : a = \frac{-2}{3}, \quad b = -\frac{4}{3}, \quad (x, y) = P_4^* \\ NP_5 : a = 0, \quad b = \frac{4}{3}, \quad y = x, \forall x \\ NP_6 : a = 0, \quad b = -\frac{4}{3}, \quad y = -x, \forall x \end{array} \right.$
$c = 1$	$\left\{ \begin{array}{l} NP_1 : a = -2, \quad b = -2, \quad (x, y) = P_1^* \\ NP_2 : a = 2, \quad b = -2, \quad (x, y) = P_2^* \\ NP_3 : a = 2, \quad b = -2, \quad (x, y) = P_3^* \\ NP_4 : a = -2, \quad b = -2, \quad (x, y) = P_4^* \\ NP_5 : a = 0, \quad b = 2, \quad y = x, \forall x \\ NP_6 : a = 0, \quad b = -2, \quad y = -x, \forall x \end{array} \right.$

Nous avons tracé les courbes de bifurcation de type flip ainsi que les courbes de type fold des points fixes (voir les Figures (2.24, 2.25 et 2.26) pour les transformations  $T_1, T_2$  et  $T_3$  (respectivement)), de même, les Figures (2.24, 2.25 et 2.26) montrent les différentes situations des singularités dont les multiplicateurs des points fixes vérifient  $S_1 = -S_2 = 1$  au point  $NP_i$ .

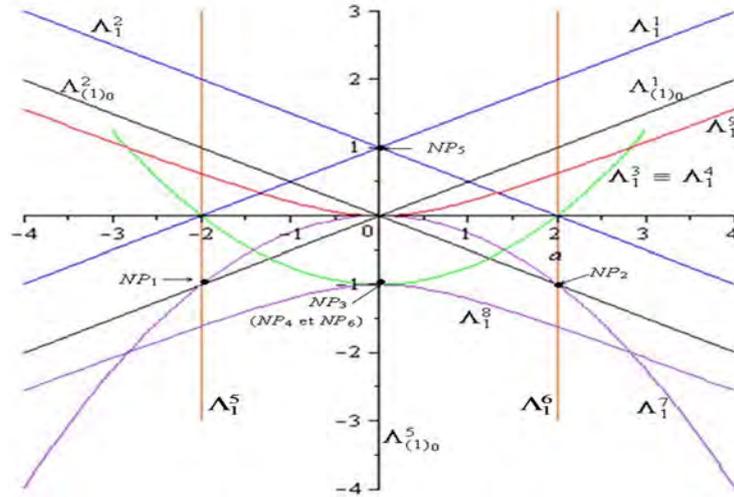


Fig.2.24– Les courbes de bifurcation de type flip  $\Lambda_1^j$ ,  $j = \overline{1, 9}$  ainsi que les courbes de bifurcations de type fold  $\Lambda_{(1)0}^1$ ,  $\Lambda_{(1)0}^2$  et  $\Lambda_{(1)0}^5$  des points fixes de la transformation  $T_1$ .

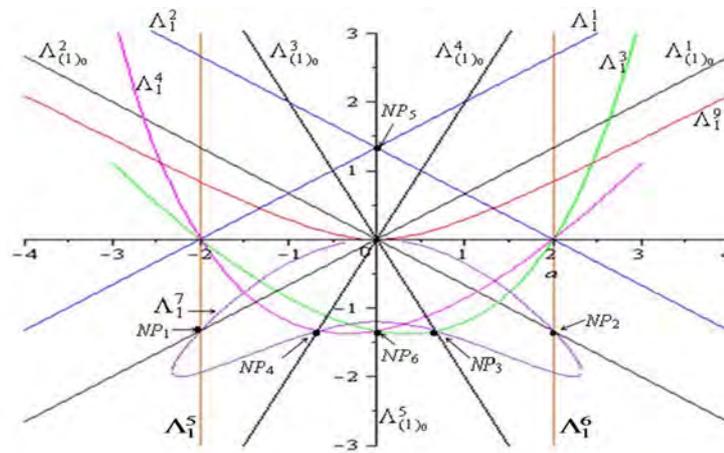


Fig.2.25– Les courbes de bifurcation de type flip  $\Lambda_1^j$ ,  $j = \overline{1, 9}$  ainsi que les courbes de bifurcations de type fold  $\Lambda_{(1)0}^1$ ,  $\Lambda_{(1)0}^2$ ,  $\Lambda_{(1)0}^3$ ,  $\Lambda_{(1)0}^4$  et  $\Lambda_{(1)0}^5$  des points fixes de la transformation  $T_2$ .

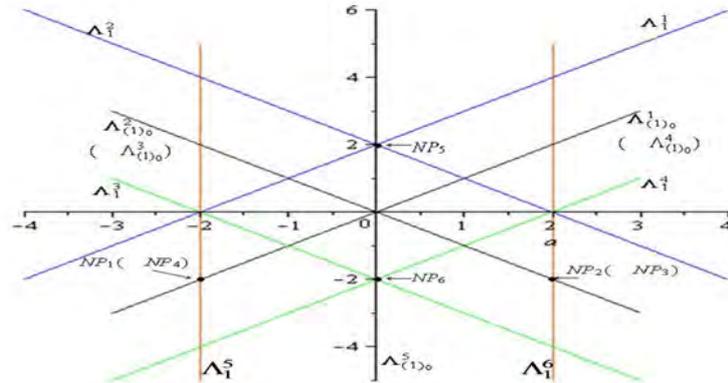


Fig. 2.26– Les courbes de bifurcation de type flip  $\Lambda_1^j$ ,  $j = \overline{1, 6}$  ainsi que les courbes de bifurcations de type fold  $\Lambda_{(1)0}^1, \Lambda_{(1)0}^2, \Lambda_{(1)0}^3, \Lambda_{(1)0}^4$  et  $\Lambda_{(1)0}^5$  des points fixes  $P_i^*$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) de la transformation  $T_3$ .

### Etude les bifurcations des courbes paraboliques

Pour mieux comprendre la structure de bifurcations des courbes paraboliques obtenues dans les Figures (2.24 et 2.25), nous commençons par la situation (a) où  $c = 0.0355730$  (Figure 2.27), nous présentons les bifurcations de ces courbes pour des valeurs différentes de  $c$  [6], et nous prenons  $(a, b) \in [-5, 5]^2$ .

À la valeur de bifurcation  $c = 0.0355730$  (Figure 2.27 (a)), correspond à un nouveau contact entre  $\Lambda_1^7$  et  $\Lambda_1^8$  aux points  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Donc  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont les derniers points d'intersection entre  $\Lambda_1^7$  et  $\Lambda_1^8$ , après cette bifurcation,  $\Lambda_1^7, \Lambda_1^8$  sont divisés en trois courbes, une courbe fermée  $\Lambda_1^7$ , et  $\Lambda_1^8, \Lambda_1^{8'}$  lorsque la valeur de  $c = 0.0355731$  (Figure 2.27 (b) et (c)).

Pour  $c = 0.99$ , nous observons une autre courbe  $\Lambda_1^{10}$ , et si  $c = 0.99999$ , la courbe  $\Lambda_1^9$  est confondue avec la courbe  $\Lambda_1^{10}$ , dans cette situation nous pouvons avoir les courbes sur les diagonaux  $b = a$  et  $b = -a$ . En effet, quand  $c$  tend vers 1, les courbes  $\Lambda_1^8, \Lambda_1^{8'}$  tendent vers

l'infini plus vite que  $\Lambda_1^7$ ,  $\Lambda_1^9$ .

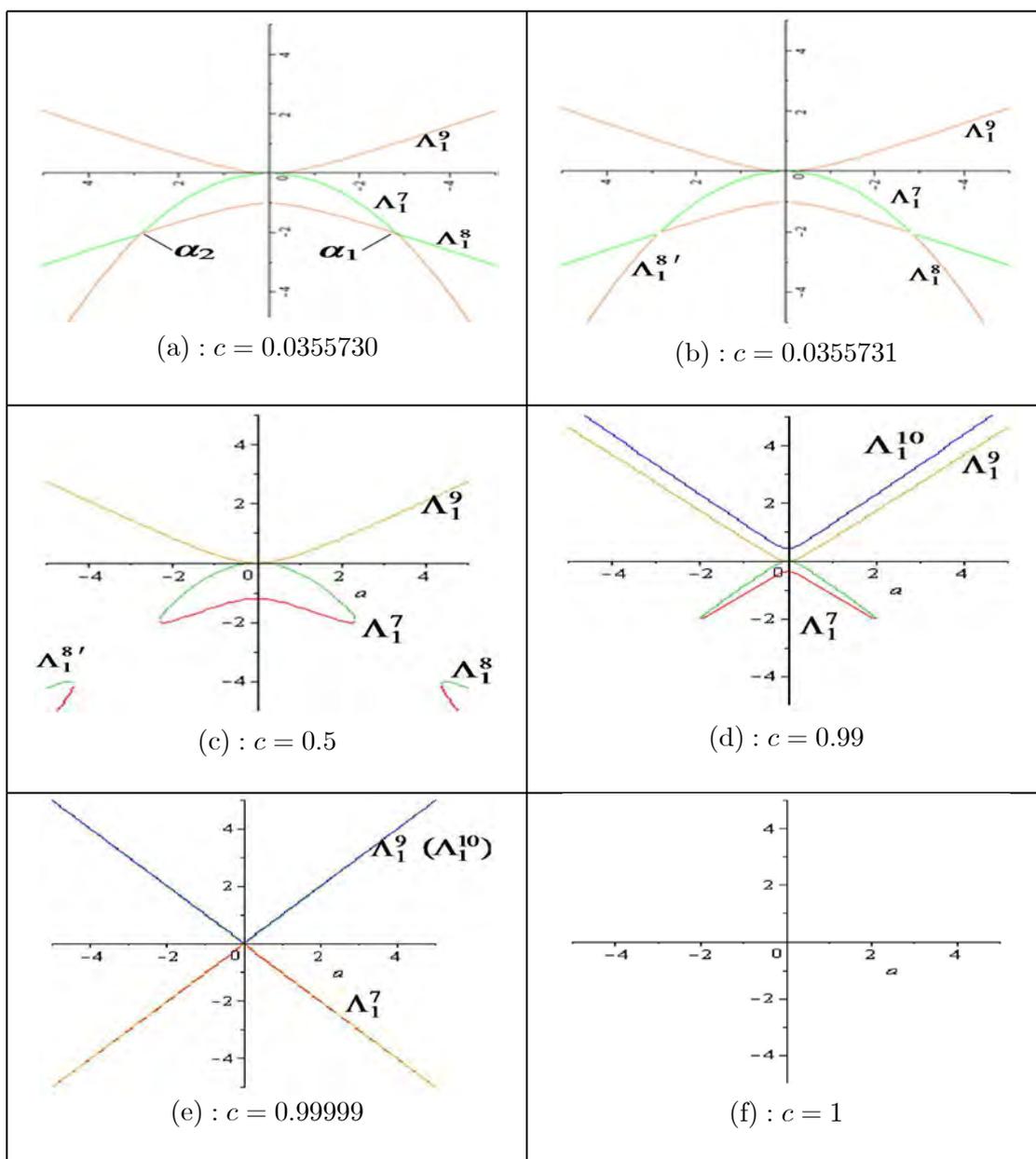


Fig.2.27– Bifurcations des courbes paraboliques pour des valeurs différentes de  $c$ .

### 2.2.4 Courbes de bifurcation d'un cycle d'ordre $k = 2$ pour $T_1$ , $T_2$ et $T_3$

Si nous considérons maintenant les cycles d'ordre 2 de  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$ , c'est-à-dire :

1)  $c = 0$

$$T_1(x_n, y_n) \begin{cases} x_{n+2} = f_a(x_n) + \frac{a}{2\pi} \sin[2\pi f_a(x_n) - b \sin(2\pi(x_n - y_n))] - \frac{b}{2\pi} [H_{a,b}^{(1)}(x_n, y_n)] \\ y_{n+2} = f_a(y_n) + \frac{a}{2\pi} \sin[2\pi f_a(y_n) - b \sin(2\pi(y_n - x_n))] - \frac{b}{2\pi} H_{a,b}^{(1)}(y_n, x_n) \end{cases} \quad (2.53)$$

2)  $c = \frac{1}{2}$

$$T_2(x_n, y_n) \begin{cases} x_{n+2} = f_a(x_n) + \frac{a}{2\pi} \sin[2\pi f_a(x_n) - \frac{1}{2}b \sin(2\pi(x_n - y_n))] - \frac{b}{4\pi} [H_{a,b}^{(2)}(x_n, y_n)] \\ y_{n+2} = f_a(y_n) + \frac{a}{2\pi} \sin[2\pi f_a(y_n) - b \sin(2\pi(y_n - x_n))] - \frac{b}{2\pi} [H_{a,b}^{(2)}(y_n, x_n)] \end{cases} \quad (2.54)$$

3)  $c = 1$

$$T_3(x_n, y_n) \begin{cases} x_{n+2} = f_a(x_n) + \frac{a}{2\pi} \sin[2\pi f_a(x_n)] \\ y_{n+2} = f_a(y_n) + \frac{a}{2\pi} \sin[2\pi f_a(y_n) - b \sin(2\pi(y_n - x_n))] - \frac{b}{2\pi} [H_{a,b}^{(3)}(y_n, x_n)] \end{cases} \quad (2.55)$$

Où :

$$H_{a,b}^{(1)}(x_n, y_n) = \sin(2\pi(x_n - y_n)) + \sin[2\pi(f_a(x_n) - f_a(y_n)) - 2b \sin(2\pi(x_n - y_n))] \quad (2.56)$$

$$H_{a,b}^{(2)}(x_n, y_n) = \sin(2\pi(x_n - y_n)) + \sin[2\pi(f_a(x_n) - f_a(y_n)) - \frac{3}{2}b \sin(2\pi(x_n - y_n))] \quad (2.57)$$

$$H_{a,b}^{(3)}(x_n, y_n) = \sin(2\pi(x_n - y_n)) + \sin[2\pi(f_a(x_n) - f_a(y_n)) - b \sin(2\pi(x_n - y_n))] \quad (2.58)$$

### 2.2.5 Equations des courbes de bifurcation données par des droites dans le plan $(a, b)$

#### Les courbes parallèles à l'axe des ordonnées

Les équations sont immédiatement :

$$a = cte \quad (2.59)$$

#### Les courbes ne sont pas parallèles à l'axe des ordonnées

Elles admettent une équation de la forme :

$$b = ua + v \quad (2.60)$$

$u$  est le coefficient directeur de la droite et  $v$  est l'ordonnée à l'origine puisque si  $a = 0$ , la fonction  $b = f(0) = v$ .

On calcule d'abord le coefficient directeur de la droite  $u$  par la formule suivante :

$$u = \frac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}} = \frac{b_B - b_A}{a_B - a_A} \quad (2.61)$$

tel que :  $A = (a_A, b_A)$  et  $B = (a_B, b_B)$  deux points sur la courbe.

Pour déterminer  $v$ , on exprime que les coordonnées de  $A = (a_A, b_A)$  doivent vérifier cette équation, c'est-à-dire que :  $b_A = ua_A + v$ .

Dans le cas où  $c = 1$ , nous savons que le coefficient directeur de la droite  $u$ , pour les courbes de bifurcation flip  $\Lambda_2^1, \Lambda_2^3, \Lambda_2^7, \Lambda_2^9$  et  $\Lambda_2^{11}$ , est égal 1, c'est-à-dire les courbes ont le même coefficient directeur, donc les courbes  $\Lambda_2^1, \Lambda_2^3, \Lambda_2^7, \Lambda_2^9$  et  $\Lambda_2^{11}$  sont parallèles. Et les courbes  $\Lambda_2^2, \Lambda_2^4, \Lambda_2^8, \Lambda_2^{10}$  et  $\Lambda_2^{12}$  ont le même coefficient  $u = -1$ , donc elles sont parallèles.

Et nous avons aussi que la courbe par exemple  $\Lambda_2^1$  est orthogonale à  $\Lambda_2^2$  car le produit du coefficient directeur de la droite  $\Lambda_2^1$  et le coefficient directeur de la droite  $\Lambda_2^2$  est égal  $-1$  (voir la Figure 2.37).

C'est-à-dire on a les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_2^1 // \Lambda_2^3 // \Lambda_2^7 // \Lambda_2^9 // \Lambda_2^{11} \\ \Lambda_2^2 // \Lambda_2^4 // \Lambda_2^8 // \Lambda_2^{10} // \Lambda_2^{12} \\ \Lambda_2^1 \perp \Lambda_2^2, \Lambda_2^3 \perp \Lambda_2^4, \Lambda_2^7 \perp \Lambda_2^8, \Lambda_2^9 \perp \Lambda_2^{10} \text{ et } \Lambda_2^{11} \perp \Lambda_2^{12} \end{array} \right. \quad (2.62)$$

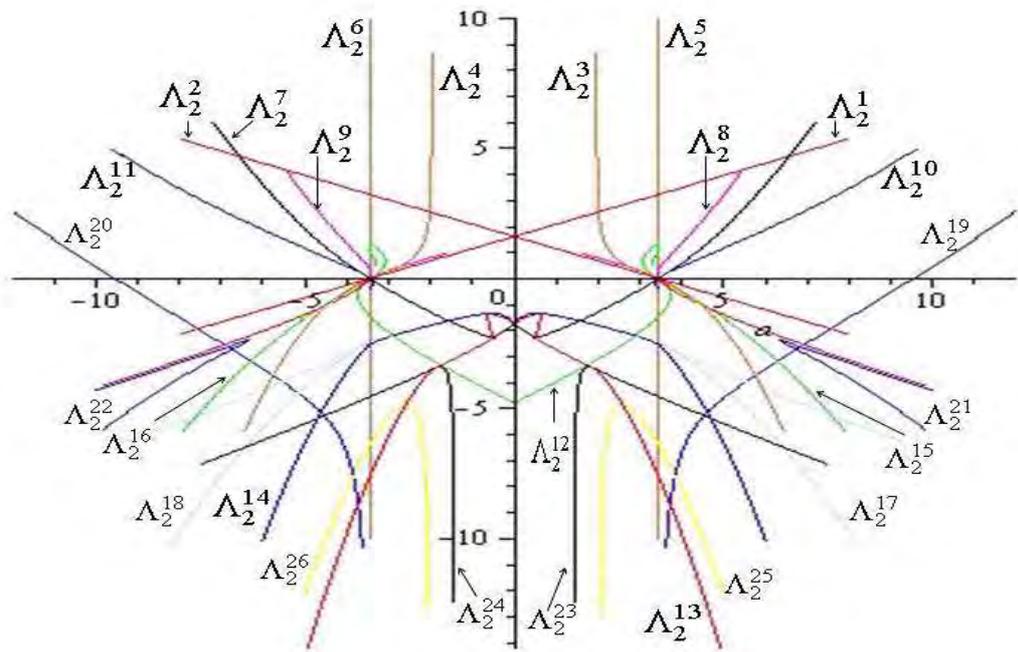
Et on a les mêmes propriétés pour les courbes de bifurcation de type fold (Figure 2.37).

Le tableau ci-dessous donne les équations des droites des courbes de bifurcation de type fold  $\Lambda_{(2)_0}^j$ , et de type flip  $\Lambda_2^j$  des cycles d'ordre 2 pour  $c = 0$ ,  $c = \frac{1}{2}$  et  $c = 1$ .

Equations de droites $\Lambda_{(2)_0}^j$ et $\Lambda_2^j$ pour $c = 0$	Equations de droites $\Lambda_{(2)_0}^j$ et $\Lambda_2^j$ pour $c = \frac{1}{2}$	Equations de droites $\Lambda_{(2)_0}^j$ et $\Lambda_2^j$ pour $c = 1$
$\Lambda_{(2)_0}^3 : a = 0$ / / / / / / / /	$\Lambda_{(2)_0}^3 : a = 0$ / / / / / / / /	$\Lambda_{(2)_0}^1 : b = a - 3.09076$ $\Lambda_{(2)_0}^2 : b = -a - 3.09076$ $\Lambda_{(2)_0}^3 : a = 0$ $\Lambda_{(2)_0}^4 : a = 2$ $\Lambda_{(2)_0}^5 : a = -2$ $\Lambda_{(2)_0}^6 : b = a - 9.20682$ $\Lambda_{(2)_0}^7 : b = -a - 9.20682$ $\Lambda_{(2)_0}^8 : b = a - 15.56803$ $\Lambda_{(2)_0}^9 : b = -a - 15.56803$ $\Lambda_{(2)_0}^{10} : b = a - 21.8531$ $\Lambda_{(2)_0}^{11} : b = -a - 21.8531$
$\Lambda_2^1 : b = 0.47a + 3.44523$ $\Lambda_2^2 : b = -0.47a + 3.44523$ / / $\Lambda_2^5 : a = 3.44523$ $\Lambda_2^6 : a = -3.44523$ / / / / /	$\Lambda_2^1 : b = 0.6773a + \frac{7}{3}$ $\Lambda_2^2 : b = -0.6773a + \frac{7}{3}$ / / $\Lambda_2^5 : a = 3.44523$ $\Lambda_2^6 : a = -3.44523$ / / / / /	$\Lambda_2^1 : b = a + 3.44523$ $\Lambda_2^2 : b = -a + 3.44523$ $\Lambda_2^3 : b = a - 3.44523$ $\Lambda_2^4 : b = -a - 3.44523$ $\Lambda_2^5 : a = 3.44523$ $\Lambda_2^6 : a = -3.44523$ $\Lambda_2^7 : a - 9.53029$ $\Lambda_2^8 : -a - 9.53029$ $\Lambda_2^9 : a - 15.77150$ $\Lambda_2^{10} : -a - 15.77150$ $\Lambda_2^{11} : a - 22.03657$ $\Lambda_2^{12} : -a - 22.03657$

Les Figures 2.28 (resp. 2.30) représente le tracé des courbes de bifurcation des cycles d'ordre

2 de type flip (resp. de type fold) pour  $c = 0$ , nous remarquons qu'il y a la symétrie des courbes par rapport à l'axe des ordonnées. Nous avons tracé les courbes de bifurcation des cycles d'ordre 2 (flip et fold) des deux récurrences  $T_2$  (resp.  $T_3$ ) dans le plan des paramètres  $(a, b)$  (voir Figures 2.32, 2.33, resp. les Figures 2.34, 2.35). Les courbes de bifurcation correspondent aux frontières des domaines de stabilité du plan  $(a, b)$  (Figures 2.16, 2.18 et 2.20).



*Fig.2.28*— Les courbes de bifurcation de type flip ( $S = -1$ ) pour cycle d'ordre 2 de la transformation  $T_1$ .

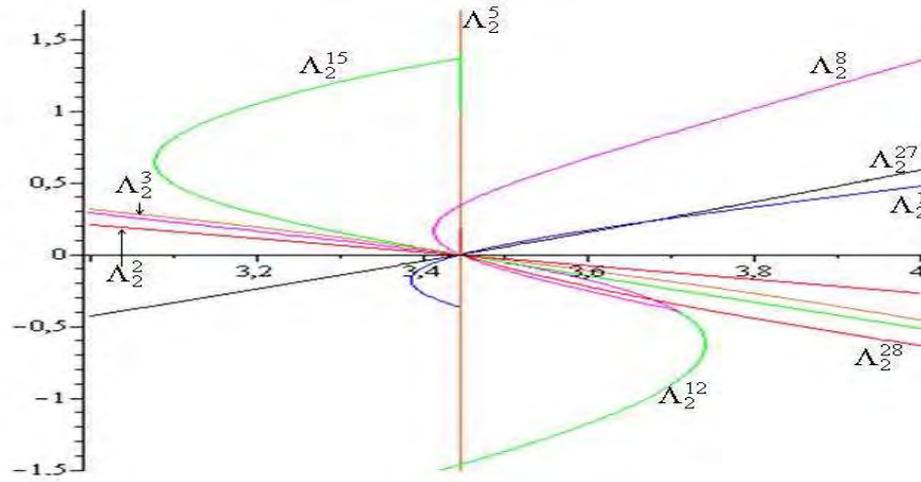


Fig. 2.29– Zoom de Figure 2.28.

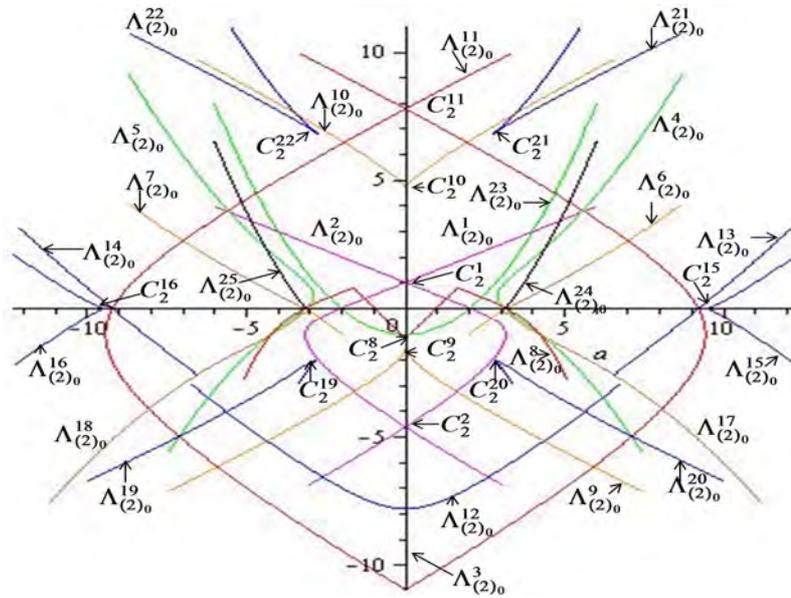


Fig.2.30– Les courbes de bifurcation de type fold ( $S = +1$ ) pour cycle d'ordre 2 de la transformation  $T_1$ .

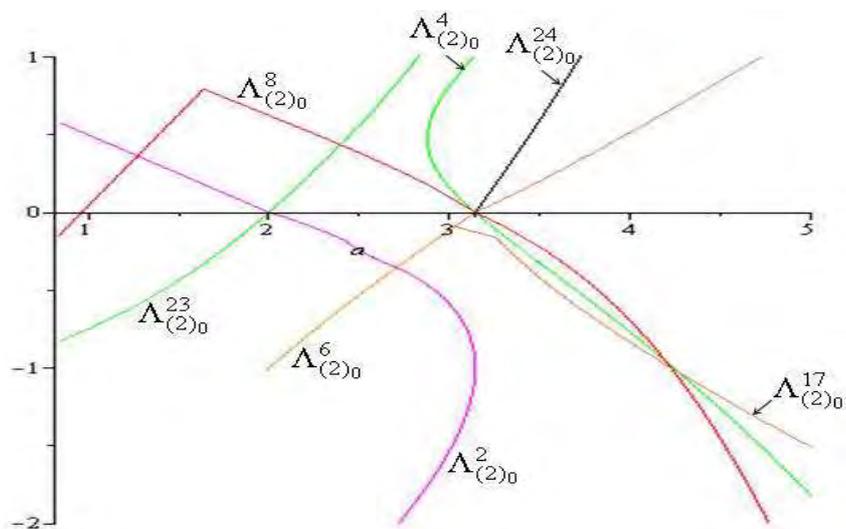


Fig.2.31– Zoom de Figure 2.30.

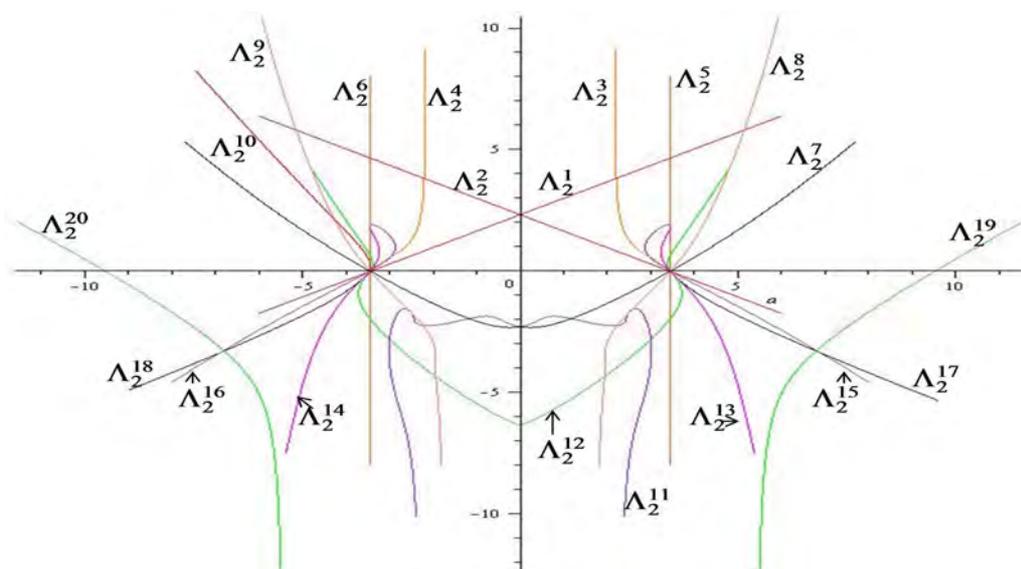


Fig.2.32– Les courbes de bifurcation de type flip ( $S = -1$ ) pour cycle d'ordre 2 de la transformation  $T_2$ .

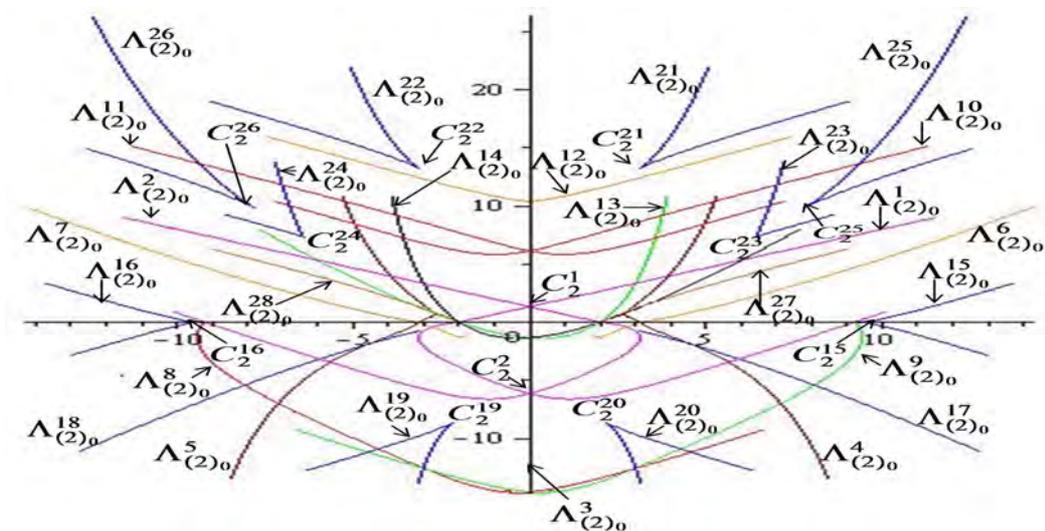


Fig.2.33— Les courbes de bifurcation de type fold ( $S = +1$ ) pour cycle d'ordre 2 de la transformation  $T_2$ .

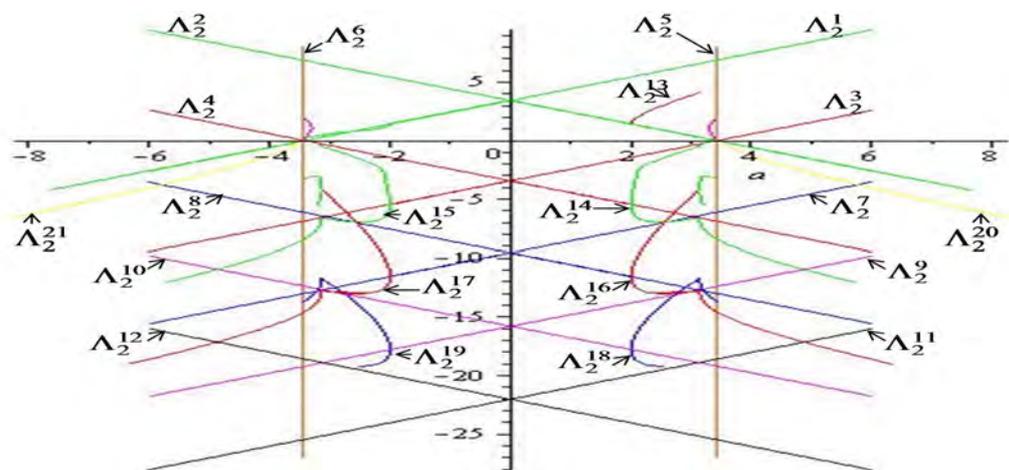


Fig.2.34— Les courbes de bifurcation de type flip ( $S = -1$ ) des cycles d'ordre 2 de la récurrence  $T_3$ .

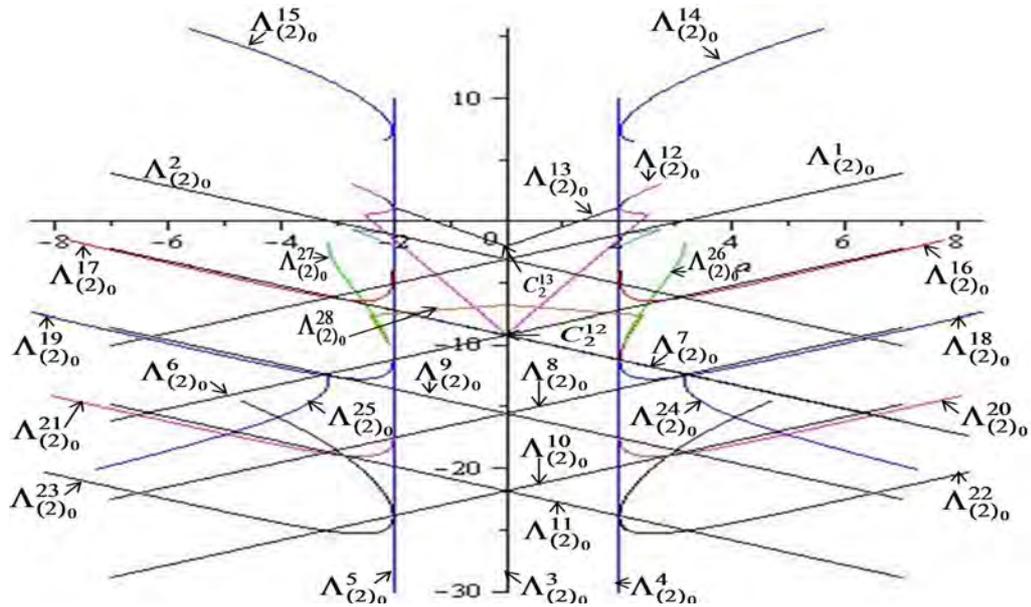


Fig.2.35– Les courbes de bifurcation de type fold ( $S = +1$ ) des cycles d'ordre 2 de la récurrence  $T_3$ .

## 2.2.6 Structures de bifurcations données par des droites pour la transformation $T_3$

**Translation des courbes droites dans le plan  $(a, b)$ , cas  $c = 1$**

**Théorème 2.1** La courbe représentant la fonction  $a \mapsto b = f_2(a) = f_1(a) + \alpha$  s'obtient par translation de la courbe de la fonction  $a \mapsto b = f_1(a)$  de vecteur  $\alpha \vec{j}$ .

La courbe de bifurcation flip  $\Lambda_2^3 : b = a - 3.44523$  s'obtient par translation de la courbe  $\Lambda_2^1 : b = a + 3.44523$  de vecteur  $(-6.89046) \vec{j}$ , c'est-à-dire  $\Lambda_2^3$  est l'image de  $\Lambda_2^1$  par la translation de vecteur  $(-6.89046) \vec{j}$  (voir Figure 2. 37), et la courbe  $\Lambda_2^4$  est l'image de la

courbe  $\Lambda_2^2$  par la translation de même vecteur  $(-6.89046)\vec{j}$ .

De même :  $\Lambda_2^7$ (resp.  $\Lambda_2^8$ ) s'obtient par translation de la courbe  $\Lambda_2^3$  (resp.  $\Lambda_2^4$ ) de vecteur  $(-6.08506)\vec{j}$ .

$\Lambda_2^9$ (resp.  $\Lambda_2^{10}$ ) s'obtient par translation de  $\Lambda_2^7$  (resp.  $\Lambda_2^8$ ) de vecteur  $(-6.24121)\vec{j}$ .

$\Lambda_2^{11}$ (resp.  $\Lambda_2^{12}$ ) s'obtient par translation de  $\Lambda_2^9$  (resp.  $\Lambda_2^{10}$ ) de vecteur  $(-6.26507)\vec{j}$ .

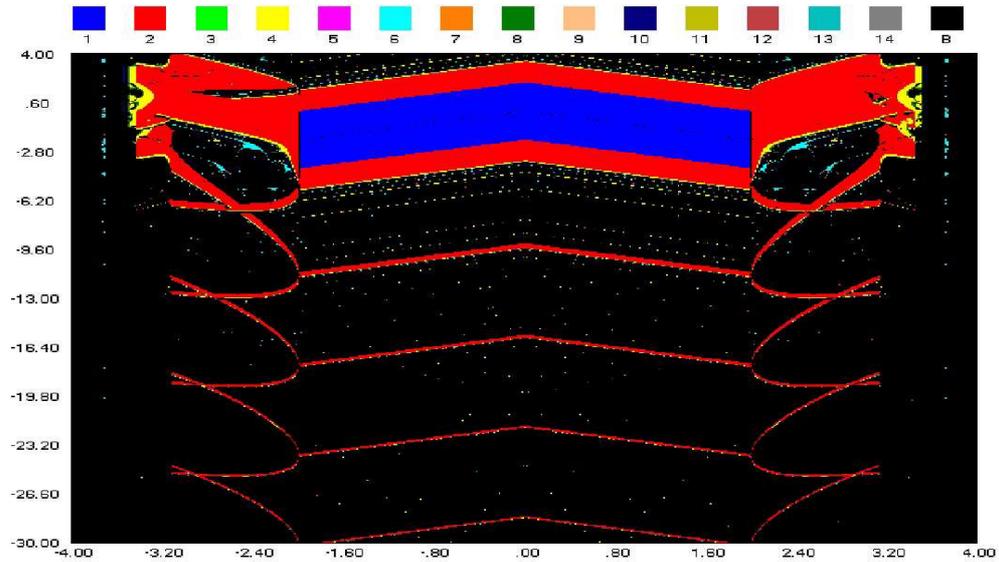
Par conséquence :

$\Lambda_2^7$ (resp.  $\Lambda_2^8$ ) s'obtient par translation de  $\Lambda_2^1$  (resp.  $\Lambda_2^2$ ) de vecteur  $(-12.97552)\vec{j}$ .

$\Lambda_2^9$ (resp.  $\Lambda_2^{10}$ ) s'obtient par translation de  $\Lambda_2^3$  (resp.  $\Lambda_2^4$ ) de vecteur  $(-12.32627)\vec{j}$ .

$\Lambda_2^{11}$ (resp.  $\Lambda_2^{12}$ ) s'obtient par translation de  $\Lambda_2^7$  (resp.  $\Lambda_2^8$ ) de vecteur  $(-12.50628)\vec{j}$ .

Et on a les mêmes propriétés de translation pour les courbes de bifurcation de type fold (droites).



*Fig.2.36*– Domaines de stabilité et structure de bifurcation pour cycle d'ordre 2 de la transformation  $T_3$ ,  $(a, b) \in [-4, 4] \times [-30, 4]$ .

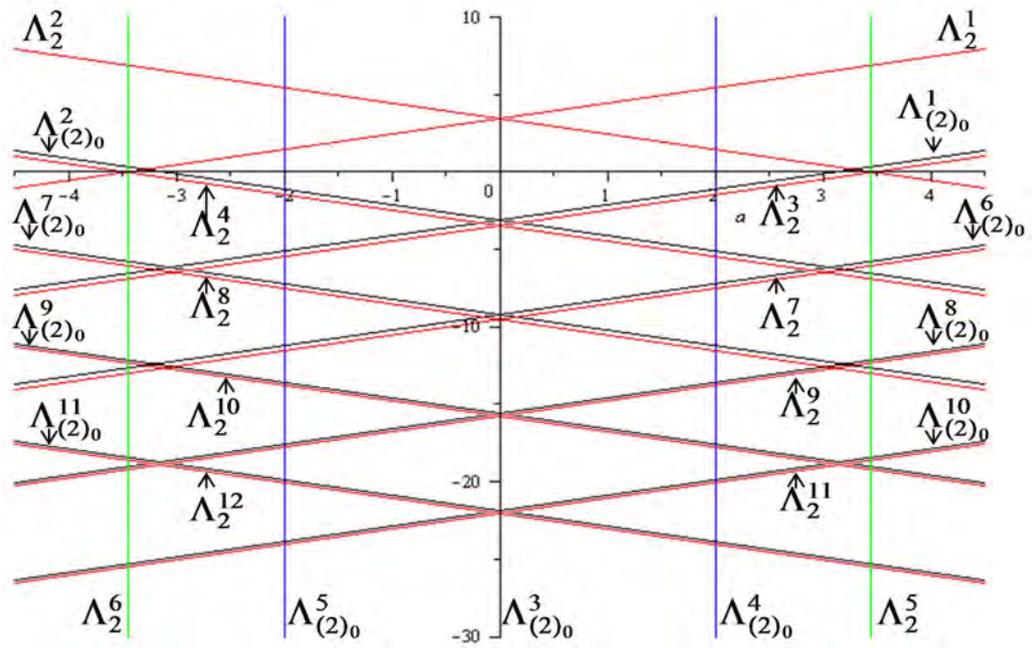


Fig.2.37– Structures de bifurcation des courbes droites pour cycle 2 de la transformation  $T_3$ ,  $(a, b) \in [-4.5, 4.5] \times [-30, 10]$ .

## Chapitre 3

# Bifurcations globales des systèmes chaotiques couplés

### 3.1 Introduction

Nous étudions dans ce chapitre le plan  $(x, y)$  de la récurrence couplée  $T$  (2.1 (chapitre 2)). Les phénomènes de la synchronisation et antisynchronisation [34], [24] et [52], les courbes invariantes associées aux cycles de type col, ainsi que les lignes critiques qui limitent les attracteurs chaotiques sont présentées [29], [43], [22], [9] et [23]. Enfin, nous étudions les bassins d'attraction et leur évolution.

### 3.2 Propriétés de symétrie dans la dynamique de $T_1$

Soit :

$$P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longmapsto (y, x)$$

et soit la diagonale

$$\Delta = \{(x, x)\} \subset \mathbb{R}^2 \quad (3.1)$$

**Proposition 3.1.**  $T_1$  est symétrique si et seulement si  $T_1 \circ P = P \circ T_1$ .

**Preuve**

$$\text{Soit } F_1(x, y) = x + \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi x) + \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi(y_n - x_n))$$

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : P \circ T_1(x, y) &= P(T_1(x, y)) \\ &= P(F_1(x, y), G_1(x, y)) \\ &= P(F_1(x, y), F_1(y, x)) \\ &= (F_1(y, x), F_1(x, y)) \\ &= (G_1(x, y), F_1(x, y)) \\ &= T_1(y, x) = T_1(P(x, y)) = T_1 \circ P(x, y). \end{aligned}$$

Nous avons les corollaires suivants d'après [25].

**Corollaire 3.1.** La diagonale  $\Delta$  est invariante

$$T_1(\Delta) = \Delta \quad (3.2)$$

**Corollaire 3.2.** Si  $(x^*, y^*)$  est un point fixe de  $T_1$ , alors  $P(x^*, y^*)$  est point fixe de  $T_1$ .

**Corollaire 3.3.** Si  $(x^*, x^*) \in \Delta$  est un point fixe de  $T_1$ , alors  $\exists r \in \mathbb{R} : r \in (1, 1)$  est un vecteur propre de  $J(x^*, x^*)$ , ( $J(x^*, x^*)$  la matrice jacobienne de  $T_1$  au point  $(x^*, x^*)$ ).

**Corollaire 3.4.** Si  $\{(O_i), i \in \mathbb{N}\}$  est une orbite de  $T_1$ , alors  $\{P(O_i), i \in \mathbb{N}\}$  est également

orbite de  $T_1$ .

Corollaire 3.2. Déjà fait pour l'étude des points fixes (chapitre précédent).

### 3.3 La périodicité de $T$ dans le plan $(x, y)$

#### Proposition 3.2.

Montrons qu'il existe deux réels  $p, p'$  (strictement positif et le plus petit possible)

tels que tout  $x, y$  dans  $\mathbb{R}$  :  $T_{a,b,c}(x+p, y+p') = T_{a,b,c}(x, y)$

$$T_{a,b,c}(x+p, y+p') = \begin{cases} F(x+p, y+p') \\ G(x+p, y+p') \end{cases} \quad (3.3)$$

avec :

$$\begin{cases} F(x+p, y+p') = f_a(x+p) + (1-c)\frac{b}{2\pi} \sin(2\pi(y+p'-x-p)) \\ G(x+p, y+p') = f_a(y+p') + \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi(x+p-y-p')) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x+p + \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi(x+p)) + (1-c)\frac{b}{2\pi} \sin(2\pi(y-x) + 2\pi(p'-p)) \\ y+p' + \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi(y+p')) + \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi(x-y) + 2\pi(p-p')) \end{cases}$$

#### Démonstration :

Pour vérifier l'égalité  $T_{a,b,c}(x+p, y+p') = T_{a,b,c}(x, y)$ , il faut donc résoudre le système suivant pour déterminer  $p$  et  $p'$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(2\pi p) = 1 \\ \cos(2\pi p') = 1 \\ \cos(2\pi(p' - p)) = 1 \\ \cos(2\pi(p - p')) = 1 \\ \frac{a}{2\pi} \cos(2\pi x) \sin(2\pi p) + p = 0 \\ \frac{a}{2\pi} \cos(2\pi y) \sin(2\pi p') + p' = 0 \\ (1 - c) \frac{b}{2\pi} \cos(2\pi(y - x)) \sin(2\pi(p' - p)) = 0 \\ \frac{b}{2\pi} \cos(2\pi(x - y)) \sin(2\pi(p - p')) = 0 \end{array} \right. \quad (3.4)$$

le système d'équations donnant :  $p = p' = 1$ .

La transformation  $T$  est périodique de période 1 dans le plan de phase  $(x, y)$ , donc les propriétés de symétrie et de périodicité nous permettent de restreindre l'étude du système dans le plan  $(x, y)$  tels que  $x \in [0, 1]$  et  $y \in [0, 1]$ .

Nous présentons dans cette section les propriétés de  $T$  dans le plan des paramètres et dans l'espace d'état.

### 3.4 Restriction de $T$ à $\Delta$

Nous nous intéressons maintenant sur la dynamique de  $T$  limitée à l'invariant diagonale  $\Delta$ . Soit  $(x, x) \in \Delta$  et  $(x_1, x_1) = T(x, x)$ , alors la restriction  $T/\Delta$  la diagonale se réduit à une récurrence unidimensionnel, disons

$$x_1 = f_a(x) = x + \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi x) \quad (3.5)$$

Notons que :

$f'_a(x) = 1 + a \cos(2\pi x)$  et  $f''_a(x) = -2\pi a \sin(2\pi x)$ , et  $f''_a(x) < 0$  si

$$a \in [-(l+1), \frac{-(2l+1)}{2}] \cup [l, \frac{2l+1}{2}], l \in \mathbb{N}^*$$

Ainsi, un maximum local (un point critique de rang-0 de  $f_a$ ) existe pour

$$a \in ]-(l+1), \frac{-(2l+1)}{2}[ \cup ]l, \frac{2l+1}{2}[ , l \in \mathbb{N}^*, \text{ au point}$$

$$c_{-1}^{(k)} = \frac{1}{2\pi}(\pi - \arccos(\frac{1}{a})) + k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

Le point critique de  $f_a$  de rang-1 est le point  $c^{(k)} = f_a(c_{-1}^{(k)})$ , (dans le sens de Julia et Fatou qui est le lieu des points ayant deux antécédents qui coïncident de rang-1), et les points critiques de  $f_a$  de rang- $(i+1)$  pour  $i \geq 1$  sont les images (ou itérations) vers l'avant, c'est-à-dire  $c_i^{(k)} = f_a^{(i+1)}(c_{-1}^{(k)}) = f_a^i(c^{(k)})$ .

Les points fixes de  $f_a$ , solutions de l'équation  $x = x + \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi x)$ , sont :

$$x_k^* = \frac{1}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.7)$$

Pour  $a \in ]-1, 1[$ ,  $f_a(x)$  est un difféomorphisme, et elle présente trois points fixes  $x_0^* = 0, x_1^* = \frac{1}{2}, x_2^* = 1$ , stable, si le paramètre de non linéarité  $a$  augmente ( $a \in ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ )  $f_a(x)$  devient non inversible.

À propos des multiplicateurs, notez que  $f'_a(x_0^*) = f'_a(x_2^*) = f'_a(x_4^*) = 1 + a$ , et  $f'_a(x_1^*) = f'_a(x_3^*) = 1 - a$ , alors  $a = 0$  est une courbe de bifurcation fold quelque soit  $x$ , et  $a = -2$  (resp.  $a = 2$ ) est une courbe de bifurcation flip pour les points fixes  $x_0^*, x_2^*$  et  $x_4^*$  (resp. le point fixe  $x_1^*$  et  $x_3^*$ ) (ceci à déjà était prouvé dans le chapitre 2).

Les formes qualitative de la récurrence (3.5) lorsque  $x$  augmente de 0 à 1 sont représentés sur la Figure 3.1 pour cinq positions particulière.

Nous donnons dans le tableau donné ci-dessous la forme du cycle 2 de  $f_a$  pour différentes valeurs de  $a \in [2, 3.44523]$ .

Paramètre $a$	Cycle d'ordre 2 sur la diagonale $\Delta$
2.1	$(0.415 + k, 0.415 + k)$ $(0.585 + k, 0.585 + k)$ , $k \in \mathbb{Z}$
2.8	$(0.282 + k, 0.282 + k)$ $(0.718 + k, 0.718 + k)$ , $k \in \mathbb{Z}$
3	$(0.262 + k, 0.262 + k)$ $(0.738 + k, 0.738 + k)$ , $k \in \mathbb{Z}$
$\pi$	$(\frac{1}{4} + k, \frac{1}{4} + k)$ $(\frac{3}{4} + k, \frac{3}{4} + k)$ , $k \in \mathbb{Z}$
3.2	$(0.219 + k, 0.219 + k)$ $(0.245 + k, 0.245 + k)$ $(0.28 + k, 0.28 + k)$ $(0.72 + k, 0.72 + k)$ , $k \in \mathbb{Z}$ $(0.755 + k, 0.755 + k)$ $(0.781 + k, 0.781 + k)$
3.43	$(0.184 + k, 0.184 + k)$ $(0.229 + k, 0.229 + k)$ $(0.316 + k, 0.316 + k)$ $(0.684 + k, 0.684 + k)$ , $k \in \mathbb{Z}$ $(0.771 + k, 0.771 + k)$ $(0.816 + k, 0.816 + k)$

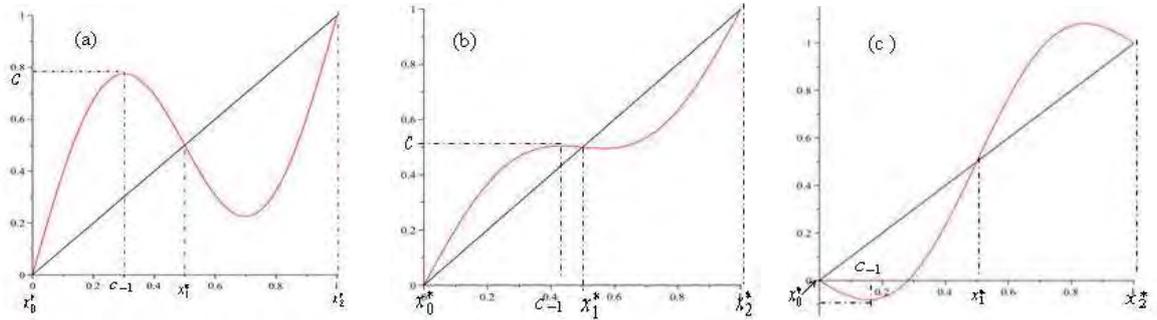


Fig.3.1– Représentation qualitative de la récurrence unidimensionnel définie dans (3.5),  
 (a) :  $a = \pi$ ,  $c_{-1} = 0.30$ ,  $c = 0.775$ . (b) :  $a = 1.1$ ,  $c_{-1} = 0.43$ ,  $c = 0.504$ . (c) :  $a = -1.8$ ,  
 $c_{-1} = 0.16$ ,  $c = -0.08$ .

### 3.5 Étude de symétrie et périodicité de la restriction de $T$ à $\Delta$ dans le plan $(x, y)$

Avant d'entamer une étude des différents attracteurs de la restriction de  $T$  à  $\Delta$ , il convient de mettre en évidence les symétries et les périodicités de la transformation  $f_a$ .

#### – Symétrie

Nous avons la propriété suivante :

$$f_a(-x) = -x + \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi(-x)) = -f_a(x) \quad (3.8)$$

donc la fonction  $f_a$  est impaire et symétrique par rapport à 0.

En itérant la fonction  $f_a$  une seconde fois, nous obtenons la fonction pour les cycles d'ordre 2

$$f_a(f_a(x)) = f_a^2(x) = f_a(x) + \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi f_a(x)) \quad (3.9)$$

dès lors

$$f_a^2(-x) = f_a(-x) + \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi f_a(-x)) = -f_a^2(x) \quad (3.10)$$

Pour les cycles d'ordre 3

$$f_a^3(x) = f_a^2(x) + \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi f_a^2(x)) \quad (3.11)$$

$$f_a^3(-x) = f_a^2(-x) + \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi f_a^2(-x)) = -f_a^3(x) \quad (3.12)$$

De plus, les itérés de la fonction  $f_a$  satisfont l'équation :

$$f_a^p(x) = f_a^{(p-1)}(x) + \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi f_a^{(p-1)}(x)), \quad p \in \mathbb{N} \quad (3.13)$$

Nous obtenons donc pour  $f^p$  la propriété générale de symétrie suivante

$$f_a^p(-x) = f_a^{(p-1)}(-x) + \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi f_a^{(p-1)}(-x)) = -f_a^p(x), \quad p \in \mathbb{N} \quad (3.14)$$

– Périodicité

$f_a$  est périodique de période  $p$  si pour tout  $x$ ,  $f_a(x+p) = f_a(x)$

$$\begin{aligned} f_a(x+p) &= x+p + \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi x + 2\pi p) \\ &= x+p + \frac{a}{2\pi} [\sin(2\pi x) \cos(2\pi p) + \cos(2\pi x) \sin(2\pi p)] \\ &= x + \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi x). \end{aligned}$$

Pour vérifier l'égalité  $f_a(x+p) = f_a(x)$ , il faut donc déterminer  $p$  tel que :

$$\begin{cases} \cos(2\pi p) = 1 \\ p + \frac{a}{2\pi} \cos(2\pi x) \sin(2\pi p) = 0 \end{cases}$$

$$\cos(2\pi p) = 1 \implies 2\pi p = 2\pi \implies p = 1.$$

Le période de  $f_a$  est 1, nous avons pour tout réel  $x$

$$f_a(x) = f_a(x+1) = f_a(x+2) = f_a(x+3)\dots \quad (3.15)$$

Nous retrouvons les propriétés de symétrie et de périodicité de  $f_a$  (la restriction  $T/\Delta$ ), ici dans la Figure 3.2, cette périodicité peut-être observé aussi graphiquement pour les fonctions  $f_a$ ,  $f_a^2$  et  $f_a^3$ , pour  $x \in [0, 1]$ , la fonction  $f_a(x)$  présente trois points fixes stable  $x_0^* = 0$ ,  $x_1^* = \frac{1}{2}$ ,  $x_2^* = 1$ , deux points d'un cycle d'ordre 2 stable  $\alpha_1 = \frac{1}{4}$  et  $\alpha_2 = \frac{3}{4}$  pour  $a = \pi$ , et 22 cycles d'ordre 3 pour  $a = 5$ .

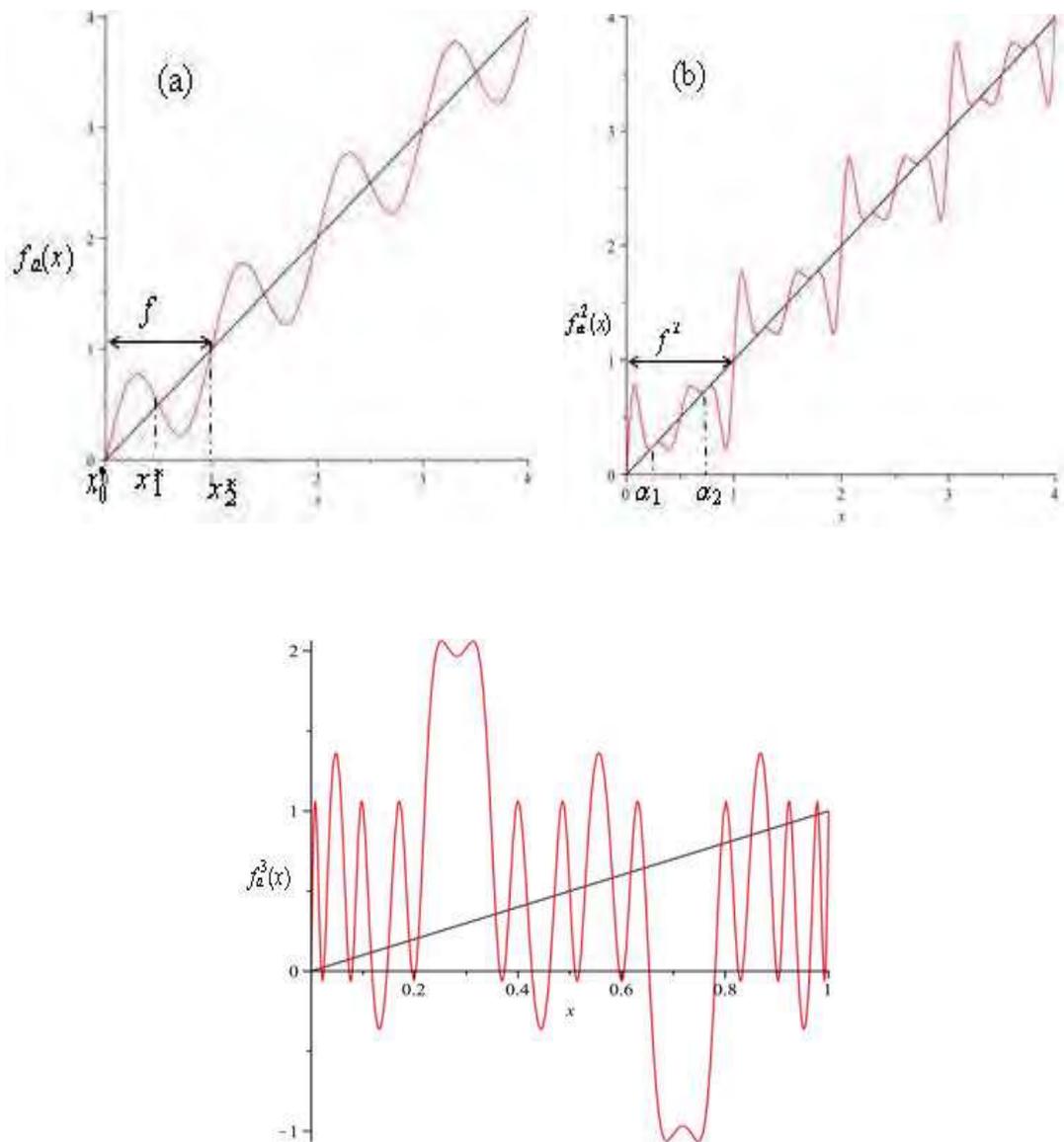


Fig. 3.2– Représentation graphique des fonctions (a) :  $f_a(x)$ , (b) :  $f_a^2(x)$  pour  $a = \pi$ , (c) :  $f_a^3(x)$  pour  $a = 5$ , où  $f_a(x) = x + \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi x)$ .

### 3.6 Synchronisation chaotique

Le diagramme de bifurcation de  $f_a$  de type Feigenbaum, est représenté dans la Figure 3.3,  $x$  par rapport à  $a$ , pour  $a \in [-4, 4]$ . L'intervalle  $a \in [-2, 2]$  dans lequel les points fixes  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  sont stables, et l'intervalles  $[a', a'']$ ,  $[a'_1, a''_1]$  représentent les bassins d'attraction pour les deux solutions symétrique (cycle d'ordre 2) produit de la bifurcation fourche pour  $a = a' = \pi$  et  $a = a'_1 = -\pi$ .

La valeur  $a' < a \simeq 3.528 < a''$  (resp.  $a'_1 < a \simeq -3.528 < a''_1$ ) représente la première valeur d'accumulation de la première cascade de Marberg, liées à la séquence de bifurcation de type flip à partir de point fixe  $x_1^*$  (resp.  $x_2^*$ ), avec la transition vers le chaos. La bifurcation de type flip de  $x_1^*$  (resp.  $x_2^*$ ) ouvre la première boîte du deuxième type [voir [41]], et la valeur  $a = a''' = 3.890$  (resp.  $a = a'''_1 = -3.890$ ) est la fermeture de la première boîte de seconde type.

Sur la diagonale principale  $\Delta$ , le couplage disparaît, et la dynamique coïncide avec celle de la récurrence unidimensionnelle  $f_a(x)$ . Ainsi, pour  $a > a'''$ , la dynamique sur la diagonale principale  $\Delta$  donne un attracteur chaotique à une bande. Pour  $a'' < a < a'''$  on peut observer un attracteur chaotique à deux bandes, et pour  $a^{**} < a < a''$  nous avons la coexistence de deux attracteurs chaotiques à multibandes.

Pour les valeurs du paramètre de non linéarité, où la récurrence  $f_a(x)$  montre le chaos à quatre bandes, on peut observer la coexistence de deux attracteurs synchronisés à quatre bandes, ceci est illustré dans la Figure 3. 4 (a) et (b), (a) pour la transformation  $T_1$ ,  $a = 3.54$ ,  $b = 1.3$ , (b) : pour la transformation  $T_2$ ,  $a = 3.54$ ,  $b = 1.6$ , et la Figure 3. 4 (c) pour la transformation  $T_3$ ,  $a = 3.60$ ,  $b = 2.10$ , nous remarquons l'existence de la coexistence

de deux attracteurs synchronisés à deux bandes. Les deux attracteurs synchronisés à quatre bandes (a), (b) et à deux bandes (c) sont indiqués par des segments le long de la diagonale principale  $\Delta$ , et leurs bassins d'attraction (vert et rose) sont des bassins ridés.

Notez que la récurrence couplée unidirectionnelle  $T_3$  ( $c = 1$ ) a une ligne de synchronisation invariante  $y = x$ , mais il n'y a pas de symétrie, de même pour la récurrence  $T_2$  ( $0 < c < 1$ ).

La Figure 3.5 (a) montre un attracteur synchronisé à deux bandes chaotiques qui coexiste avec deux attracteurs asynchrones de période-2 chaotiques pour  $a = 3.66$  et  $b = 0.83$  et  $c = 0.5$ . Par contre pour  $c = 0$ , nous avons la possibilité d'obtenir l'antisynchronisation chaotique, c'est à dire l'apparition de l'antidiagonale  $y = 1 - x$ .

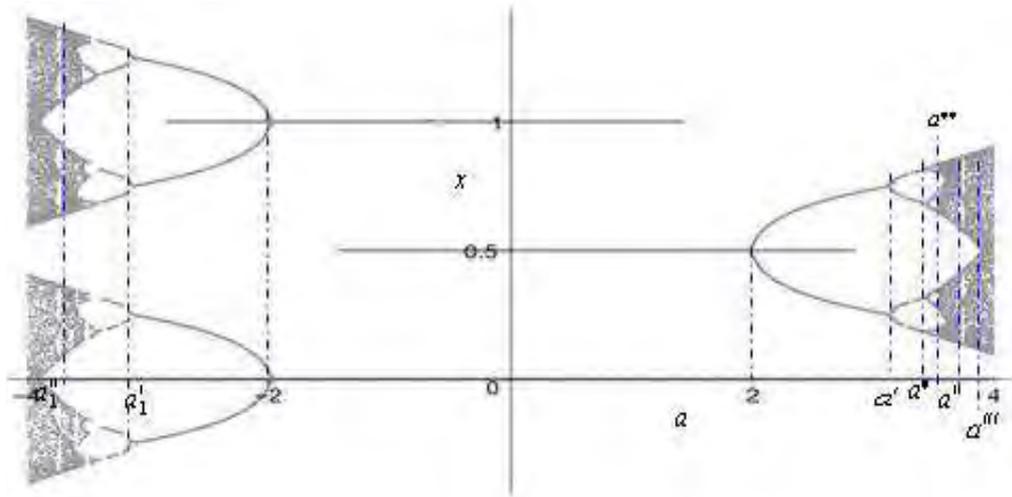
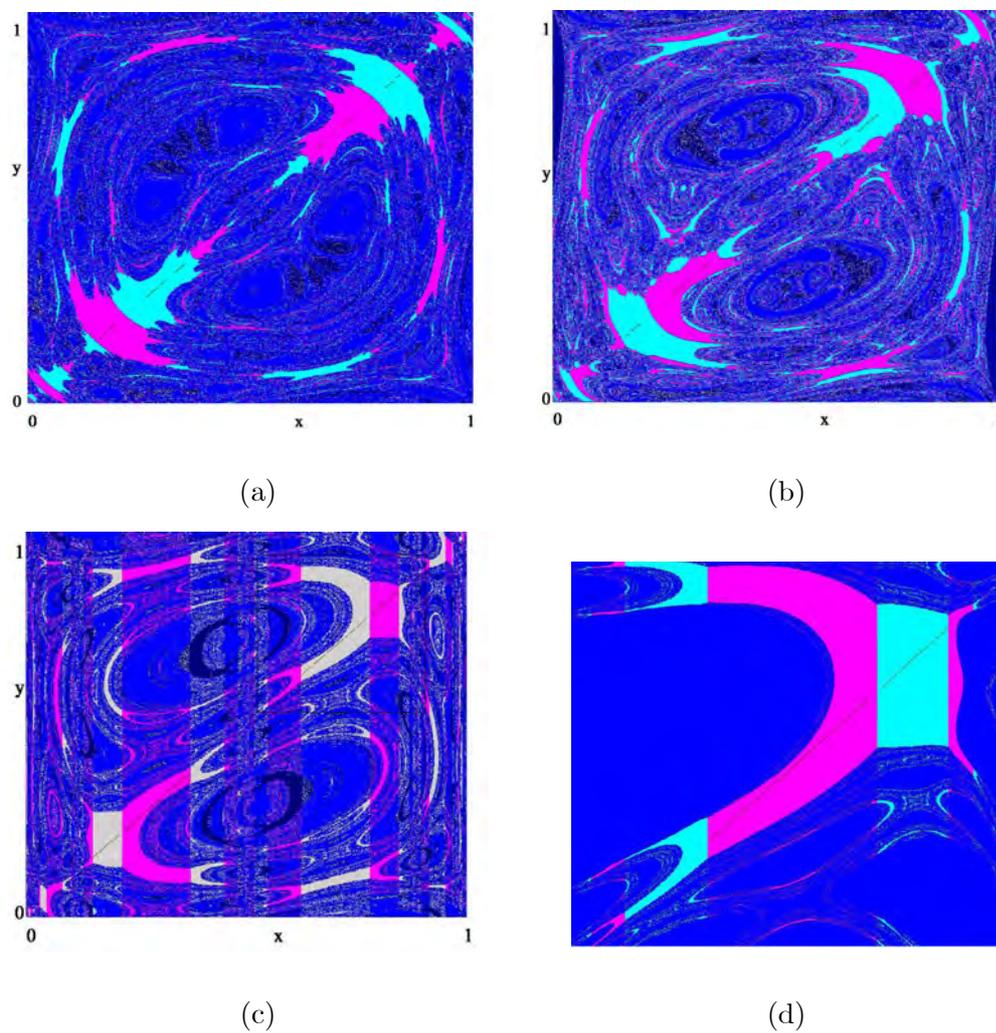
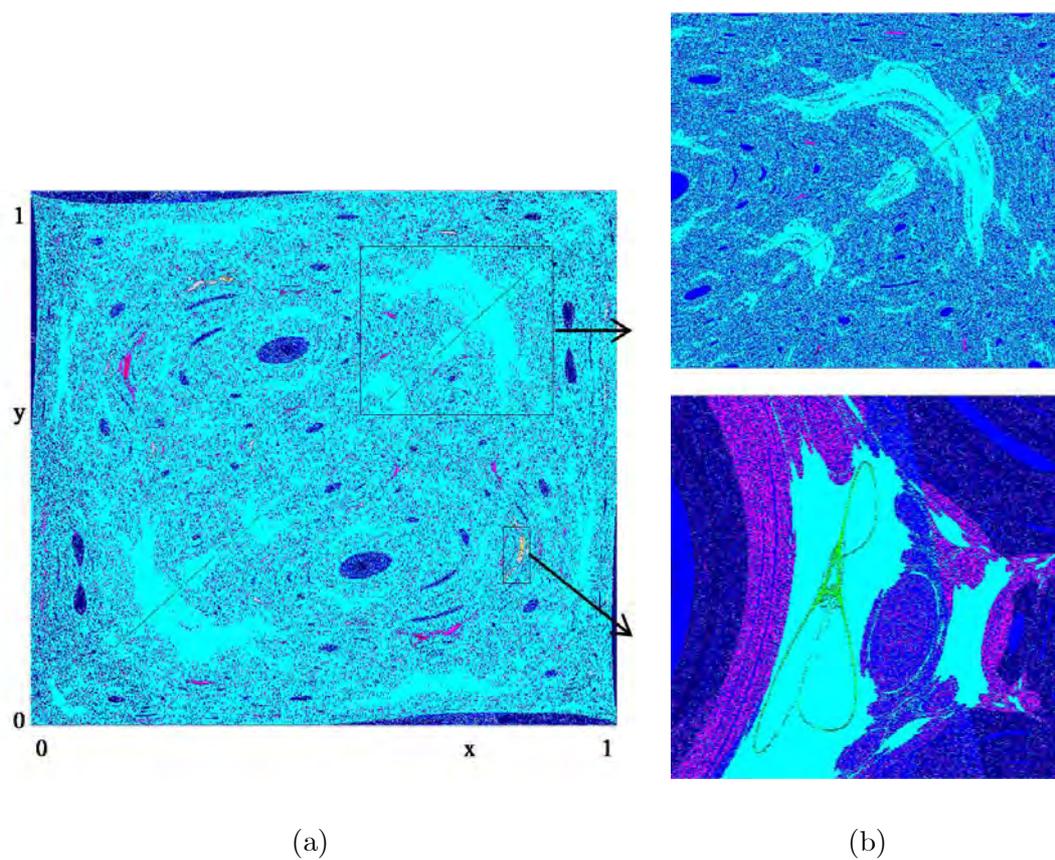


Fig.3.3— Diagramme de bifurcation de  $f_a$  définie dans (3.5),  $x$  par rapport à  $a$ , les intervalles  $[a', a'']$  et (resp.  $[a'_1, a''_1]$ ) indiquent les bassins d'attraction pour les attracteurs symétriques produit de la bifurcation fourche à  $a = a' = \pi$  (resp.  $a = a'_1 = -\pi$ ).



*Fig.3.4*— Les attracteurs coexistant et les bassins d'attraction pour (a) : deux attracteurs chaotiques synchronisés à quatre bandes  $a = 3.54$ ,  $b = 1.3$ ,  $c = 0$  (b) : deux attracteurs chaotiques synchronisés à quatre bandes  $a = 3.54$ ,  $b = 1.6$ ,  $c = 0.5$ , (c) deux attracteurs chaotiques synchronisés à deux bandes,  $a = 3.60$ ,  $b = 2.1$ ,  $c = 1$ , et (d) Zoom de (c).



*Fig.3.5*– (a) : Un attracteur synchronisé à deux bandes chaotiques coexiste avec deux attracteurs asynchrone de période-2 chaotiques (développés à partir de cycles principaux par rapport à l'antidiagonale).  $a = 3.66$ ,  $b = 0.83$ ,  $c = 0.5$ . (b) : Zoom d'une partie de (a) pour observer la structure du bassin, les états chaotiques synchronisés sont asymptotiquement stables, les ensembles chaotiques sont faiblement stable, et les bassins d'attraction sont ridés.

### 3.7 Restriction de $T$ à l'antidiagonale $\Delta_{-1}$

Maintenant nous nous intéressons à la dynamique de  $T$  restreinte à l'antidiagonale  $\Delta_{-1}$ . Soit  $(x, 1-x) \in \Delta_{-1}$  et  $(x_1, y_1) = T(x, 1-x)$ , alors la restriction  $T/\Delta_{-1}$  est :

$$\begin{cases} x_1 = f_a(x) - (1-c)\frac{b}{2\pi} \sin(4\pi x) \\ y_1 = 1 - f_a(x) + \frac{b}{2\pi} \sin(4\pi x) \end{cases} \quad (3.16)$$

avec :

$$f_a(x) = x + \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi x) \quad (3.17)$$

Remarquons que seules les récurrences symétrique, c'est à dire  $c = 0$  possède un invariant  $\Delta_{-1}$  à savoir l'antidiagonale  $\Delta_{-1} = \{x + y = 1\}$ , notez l'absence de cet invariant dans le cas où les transformations sont non symétrique, donc la transformation  $T$  (2.1) ne possède pas l'antisynchronisation chaotique pour  $0 < c \leq 1$ .

Le long de cette diagonale  $\{(x, 1-x)\} \subset \mathbb{R}^2$ , la transformation  $T_1$  se réduit à une récurrence unidimensionnel :

$$f_{a,b}(x) = f_a(x) - \frac{b}{2\pi} \sin(4\pi x) \quad (3.18)$$

Les points fixes de  $f_{a,b}$ , solutions de l'équation  $x = f_{a,b}(x)$ , sont :

$$x_k^* = \frac{1}{2}k, \text{ et } x_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \left[ \arctan\left(\pm \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{b}, \frac{a}{b}\right) \right], \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.19)$$

avec :

$$\arctan(u, v) = -i \ln \frac{u + iv}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad (3.20)$$

La valeur propre pour les points fixes sont :

$$S = \frac{\partial f_{a,b}(x)}{\partial x} \quad (3.21)$$

Dès lors

$$S = 1 + a \cos(2\pi x) - 2b \cos(4\pi x) \quad (3.22)$$

Notez que pour  $(a, b) = (0, 0)$  le multiplicateur  $S = 1$ , quelque soit  $x \in \mathbb{R}$ .

Dans le plan des paramètre  $(a, b)$ , nous étudions la stabilité de ces points fixes.

- Pour  $k = 2l$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ , les points fixes  $x_k^* = \frac{1}{2}k$ , notés  $x_1^*$  sont attractifs si et seulement si  $a \in ]-2, 0[$  et  $b \in ]\frac{1}{2}a, 1 + \frac{1}{2}a[$ , c'est à dire  $(a, b)$  appartiennent à la région de couleur jaune dans la Figure 3.6.
- Pour  $k = 2l + 1$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ , les points fixes  $x_k^* = \frac{1}{2}k$ , notés  $x_2^*$  sont attractifs si et seulement si  $a \in ]0, 2[$  et  $b \in ]-\frac{1}{2}a, 1 - \frac{1}{2}a[$ ,  $(a, b)$  appartiennent à la région de couleur verte dans la Figure 3.6.
- Les points fixes  $x_i$ ,  $i = 1, 2$  sont attractifs si et seulement si  $(a, b)$  appartiennent à la région de couleur blue de la Figure 3.6, pour  $a \in ]-2.828, 0[$ ,  $b \in ]-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+a^2}, \frac{1}{2}a[$  et  $a \in ]0, 2.828[$ ,  $b \in ]-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+a^2}, -\frac{1}{2}a[$ .

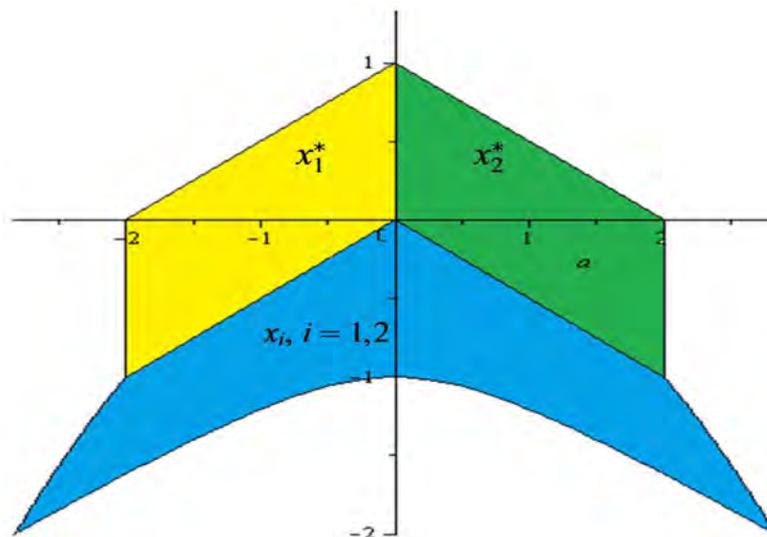


Fig.3.6– Figure donnant les régions de stabilité des points fixes dans le plan  $(a, b)$  de la transformation unidimensionnel  $f_{a,b}(x)$ .

### 3.8 Courbes de bifurcation

La construction des courbes de bifurcation de type fold  $\Lambda_{(k)_0}^j$  (pour  $S = +1$ ) et flip  $\Lambda_k^j$  (pour  $S = -1$ ). Les équations à vérifiées sont :

$$\begin{cases} f^k(x, a, b) - x = 0 \\ \frac{\partial f^k}{\partial x}(x, a, b) - S = 0 \\ S = \pm 1 \end{cases} \quad (3.23)$$

Pour la récurrence unidimensionnel (3.18), nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, a, b) = 1 + a \cos(2\pi x) - 2b \cos(4\pi x) \quad (3.24)$$

donc les courbes de bifurcation fold et flip d'un point fixe satisfont le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi x) - \frac{b}{2\pi} \sin(4\pi x) = 0 \\ 1 + a \cos(2\pi x) - 2b \cos(4\pi x) = \pm 1 \end{cases} \quad (3.25)$$

Les équations des courbes de bifurcation fold  $\Lambda_{(1)0}^j$  et flip  $\Lambda_1^j$  pour les points fixes  $\{x_1^*, x_2^*, x_i, i = 1, 2\}$  sont :

Points fixes	$\Lambda_1^j$ et $\Lambda_{(1)0}^j$
$x_1^* = \frac{1}{2}k, k = 2l, l \in \mathbb{Z}$	$\Lambda_1^1 : b = 1 + \frac{1}{2}a$ $\Lambda_{(1)0}^1 : b = \frac{1}{2}a$
$x_2^* = \frac{1}{2}k, k = 2l + 1, l \in \mathbb{Z}$	$\Lambda_1^2 : b = 1 - \frac{1}{2}a$ $\Lambda_{(1)0}^2 : b = -\frac{1}{2}a$
$x_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \left[ \arctan\left(\pm \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{b}, \frac{a}{b}\right) \right]$	$\Lambda_1^3 : b = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + a^2}$ $\Lambda_1^4 : b = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + a^2}$ $\Lambda_1^5 : b = \frac{-1}{4}a^2$ $\Lambda_{(1)0}^3 \equiv \Lambda_{(1)0}^1$ $\Lambda_{(1)0}^4 \equiv \Lambda_{(1)0}^2$

Nous représentons dans la Figure 3.7 les courbes de bifurcation  $\Lambda_{(1)0}^j$  et  $\Lambda_1^j$  pour les points fixes  $\{x_1^*, x_2^*, x_i, i = 1, 2\}$ , avec les coordonnées des singularités de type nœuds sont :

$$\begin{cases} NP_1 : a = -2, & b = -1, & x = x_1^* \\ NP_2 : a = 2, & b = -1, & x = x_2^* \end{cases} \quad (3.26)$$

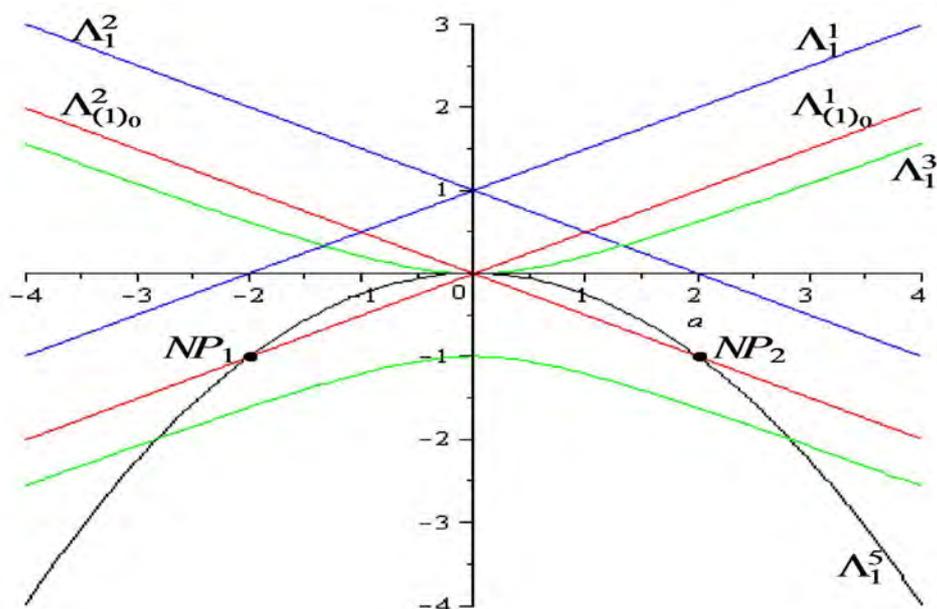


Fig.3.7– Courbes de bifurcations des points fixes de la récurrence antidiagonale (3.18).

### 3.9 Représentation graphique de la récurrence antidiagonale

Selon la valeur du paramètre de couplage  $b$ , la fonction  $f_{a,b}(x)$  prend des formes différentes. Ceci est illustré dans les Figure 3.8.

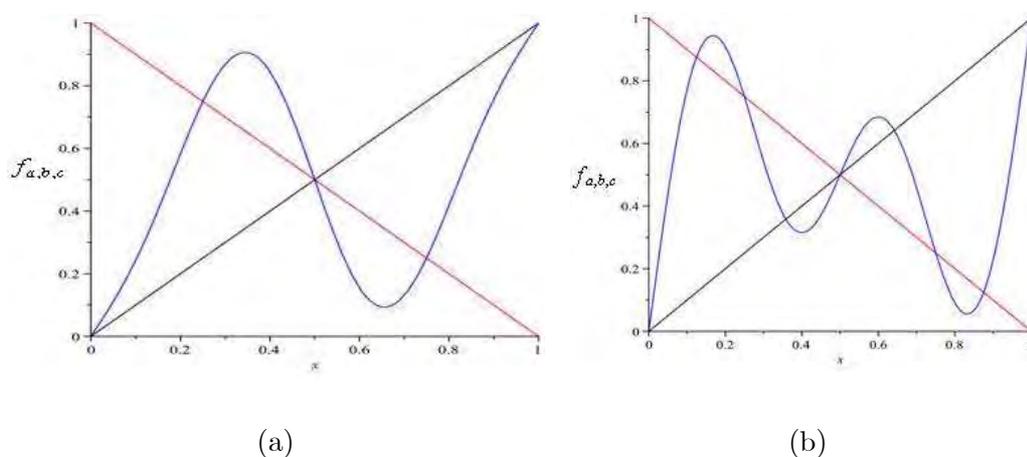


Fig.3.8— Graphiques de la fonction  $f_{a,b}$  dans la direction de l'antidiagonale, (a) :  $a = \pi$  et  $b = 1$ , (b) :  $a = \pi$  et  $b = -2.5$ , dans (b) la récurrence est multimodale.

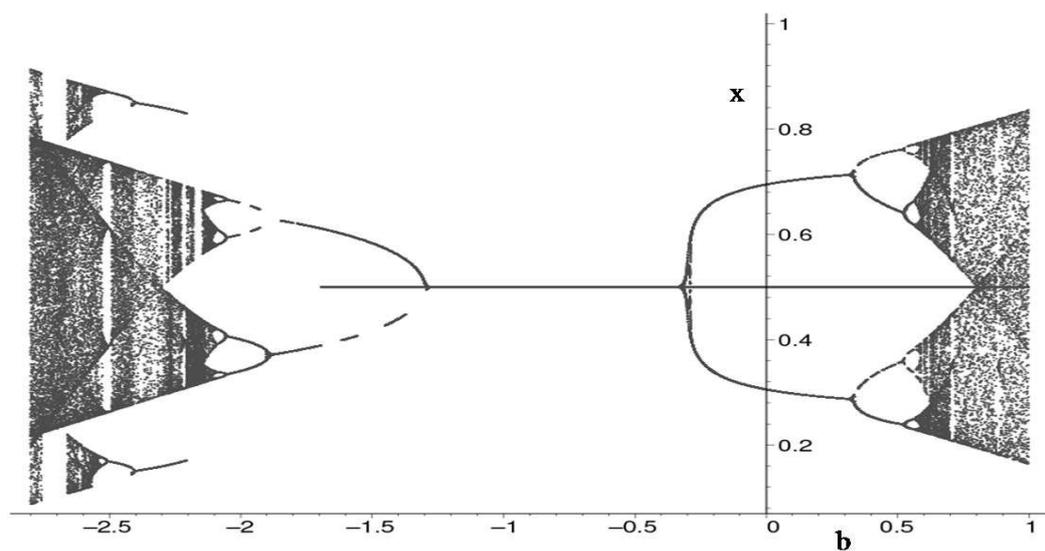
### 3.10 Étude de restriction de $T$ à $\Delta_{-1}$ dans le plan des paramètres

Les Figures 3. 9 montre un exemple de diagramme de bifurcation pour la récurrence antidiagonale  $f_{a,b}$ .

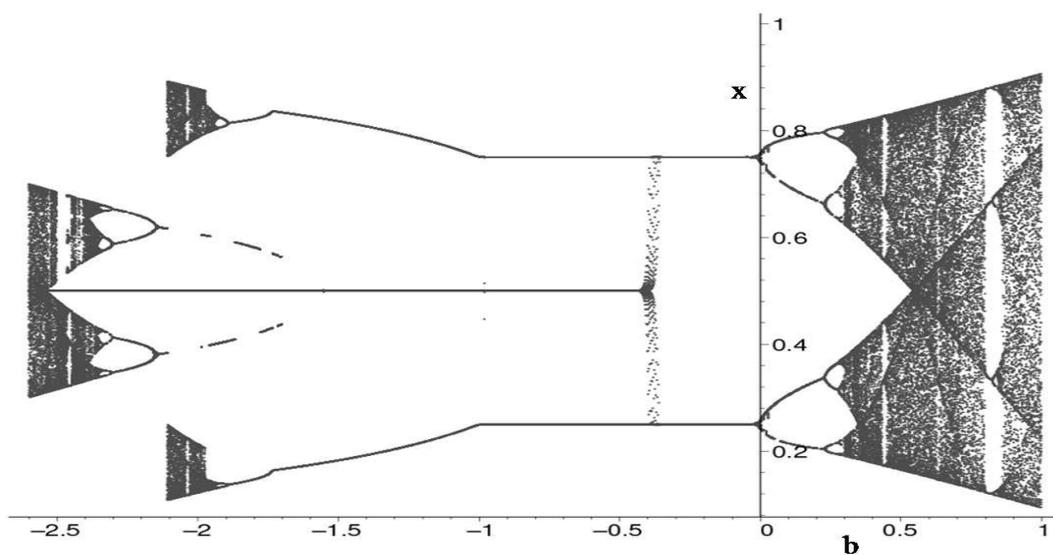
Dans la Figure 3. 9(a) la bifurcation de doublement de période qui se produit pour  $b = 1 - \frac{a}{2}$  est supercritique pour une valeur de  $a < \frac{8}{3}$ . La transition devient sous-critique pour le point de bifurcation  $(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3})$ , et pour les valeurs négatives d'un diagramme de bifurcation de la Figure 3. 9(a), la récurrence antidiagonale admet quatre extrema. Après la bifurcation fourche du point fixe  $\frac{1}{2}$  pour  $b = \frac{-a}{2}$ , deux points fixes symétriques naissent et subissent, chacun de son côté, une cascade de doublement de période vers le chaos, suivie de la fusion des deux attracteurs chaotiques à la limite  $b \simeq -2.30$ . Cependant, avant cela se produit une

nouvelle bifurcation donnant naissance à un cycle d'ordre 2 par une bifurcation fold pour  $b = -2.16$ .

Dans la Figure 3. 9(b) pour  $a = \pi$ , cette Figure illustre le caractère sous-critique de la bifurcation de doublement de période pour  $b = 1 - \frac{a}{2}$  et la bifurcation fold par laquelle la période de cycle 2 est stabilisé. Au même temps, la Figure illustre comment la bifurcation fold, dans laquelle est né le cycle à large amplitude et à période-2 à gauche dans le diagramme, s'est déplacée vers la droite. Les deux bifurcations fold coïncide près de  $b = -1$ .



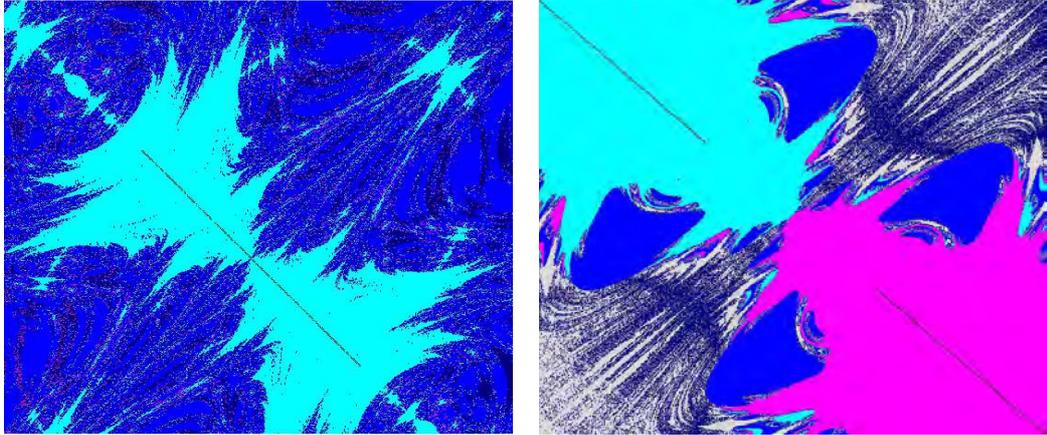
(a)



(b)

Fig.3.9—Diagramme de bifurcation dans le plan  $(b, x)$ , (a) :  $a = 2.6$  (b) :  $a = \pi$ .

### 3.11 Antisynchronisation chaotique



*Fig.3.10* – (a) Une bande attracteur chaotique antisynchronisé pour  $T_1$ ,  $a = \pi$ ,  $b = -2.65$ ,  
 (b) deux attracteurs chaotiques formant une bande antisynchronisation coexistent, pour  $T_1$ ,  
 $a = -2$ ,  $b = -2.70$ , avec  $(x, y) \in [0, 1]^2$ .

### 3.12 Courbes invariantes

Les courbes invariantes [32], [28] notées  $(CI)$  sont des singularités de dimension un, passant par les cycles d'ordre  $k$  de type col. Nous avons calculé les valeurs propres dans le chapitre 2, paragraphe 2.1.1(b).

Considérons les points de type col; notés  $X_f = (x_f, y_f)$  qui sont les points fixes  $P_3^*$  et  $P_4^*$  ( $P_3^* = (\frac{1}{2}k, l)$ ,  $k = 2k' + 1$ ,  $(k', l) \in \mathbb{Z}^2$  et  $P_4^* = (k, \frac{1}{2}l)$ ,  $l = 2l' + 1$ ,  $(k, l') \in \mathbb{Z}^2$ ).

Les vecteurs propres pour  $X_f = P_3^*$  sont de la forme :

$$\begin{aligned}\vec{V}_1 &= \left[ \frac{1}{2} \frac{-2a+bc-\sqrt{V_1}}{b}, 1 \right] \\ \vec{V}_2 &= \left[ \frac{1}{2} \frac{-2a+bc+\sqrt{V_1}}{b}, 1 \right]\end{aligned}\quad (3.27)$$

Et pour  $X_f = P_4^*$  sont de la forme :

$$\begin{aligned}\vec{V}_1 &= \left[ \frac{1}{2} \frac{2a+bc-\sqrt{V_2}}{b}, 1 \right] \\ \vec{V}_2 &= \left[ \frac{1}{2} \frac{2a+bc+\sqrt{V_2}}{b}, 1 \right]\end{aligned}\quad (3.28)$$

Avec :

$$\begin{cases} V_1 = (2a + bc)^2 + 4b^2(1 - c) \\ V_2 = (2a - bc)^2 + 4b^2(1 - c) \end{cases}\quad (3.29)$$

### 3.12.1 Les pentes

Les valeurs des pentes  $VP_i$ ,  $i = 1, 2$  des courbes invariantes en  $X_f$  sont données par :

$$VP_i = \frac{S_i - \frac{\partial F(x,y,a,b,c)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y,a,b,c)}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial G(x,y,a,b)}{\partial x}}{S_i - \frac{\partial G(x,y,a,b)}{\partial y}}\quad (3.30)$$

Où  $S_i$ ,  $i = \overline{1,2}$  sont des valeurs propres de  $DT(X_f)$

\* Si  $X_f = P_3^*$  on a :

$$VP_i = \frac{1}{2} \frac{2a + bc \pm \sqrt{V_1}}{(c-1)b}, \quad i = 1, 2\quad (3.31)$$

\* Si  $X_f = P_4^*$  on a :

$$VP_i = \frac{1}{2} \frac{-2a + bc \pm \sqrt{V_2}}{(c-1)b}, \quad i = 1, 2\quad (3.32)$$

La valeur  $B_i$  de la courbure au point fixe de type col  $X_f = (x_f, y_f)$  de la courbe invariante de pente  $VP_i$  est donnée par l'égalité :

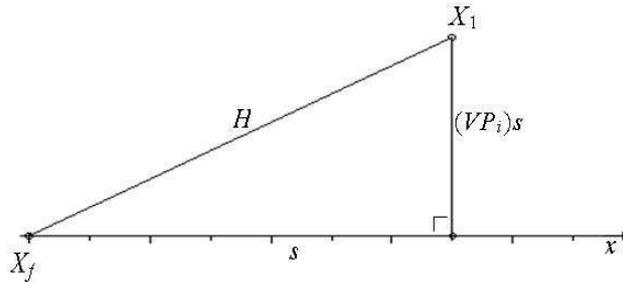
$$B_i = \frac{[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2(VP_i)\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + (VP_i)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}]VP_i - [\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + 2(VP_i)\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} + (VP_i)^2 \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}]}{\frac{\partial G}{\partial y} - (VP_i)\frac{\partial F}{\partial y} - (\frac{\partial F}{\partial x} + (VP_i)\frac{\partial F}{\partial y})^2} \quad (3.33)$$

Soit  $X_1 = (x_1, y_1)$  tel que :

$$\begin{cases} x_1 = x_f + s \\ y_1 = y_f + (VP_i)s + \frac{B_i}{2}s^2 \end{cases} \quad (3.34)$$

Où :

$$s = \frac{H}{\sqrt{1 + (VP_i)^2}} \quad (3.35)$$



Comme les valeurs des dérivées secondes de  $F$  et  $G$  sont nul, alors la valeur de la courbure  $B_i = 0$ . Dans ce cas nous avons que les équations de la courbure sont des équations de droites :

$$\begin{cases} x_1 = x_f + s \\ y_1 = y_f + (VP_i)s \end{cases} \quad (3.36)$$

### Remarque 3.1

Quand le paramètre  $c = 1$  où le couplage de la transformation  $T$  non symétrique et unidirectionnel, les pentes  $(VP_i)$ ,  $i = 1, 2$  tend vers l'infini et  $s = 0$ , dans ce cas nous avons que les équations de la courbure sont des équations de droites, alors l'une des branches de la courbe invariante est horizontale et l'autre est verticale.

Les deux branches d'une courbes invariantes représentent les propriétés suivantes [10] :

### Propriétés 3.1

- Le conséquent par  $T$  d'un segment horizontal est un segment vertical et inversement.
- L'antécédent par  $T$  d'un segment horizontal est un segment vertical et inversement.

## 3.13 Bassins d'attraction

Nous étudions dans ce paragraphe, les bassins d'attraction des cycles attractifs.

Les propriétés fondamentales de la frontière du bassin d'attraction [22] et [53] sont :

### Propriétés 3.2

- Cette frontière est invariante par application de  $T^n$  et  $T^{-n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$
- Cette frontière est constituée par de arcs de courbes invariantes passant par des points fixes et des cycles répulsifs, et par leurs antécédents.

La Figure 3.11 représente les quatre bassins d'attraction des cycles d'ordre 1 attractifs, pour  $a = -1.9$ ,  $b = 0.03$  et  $c \in [0, 1[$ . Les zones de quatre couleurs différentes représentent les bassins d'attraction de quatre points fixes attractifs  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ .

Nous pouvons observer sur cette Figure l'existence de :

- Quatre points fixes de type col  $(\frac{1}{2}, 0)$ ,  $(\frac{1}{2}, 1)$ ,  $(0, \frac{1}{2})$ ,  $(1, \frac{1}{2})$ .
- Un seul point fixe nœud instable  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

De même, nous avons représenté dans la Figure 3.12 les positions des points fixes associés à la Figure 3.11 ainsi que les courbes invariantes  $CI_1$  et  $CI_2$  passant par les points fixes de type col, qui limitent les quatre bassins d'attraction.

Figure 3.13 est obtenue pour les mêmes valeurs des paramètres que ceux utilisés pour la Figure 3.11, avec  $(x, y) \in [-1.1, 1.1]^2$ , cette Figure représente les neuf bassins d'attraction des cycles d'ordre 1 attractifs; nous avons représenté les positions de ces points fixes dans la Figure 3.14, avec les courbes invariantes  $CI_1$ ,  $CI_2$ ,  $CI_3$  et  $CI_4$  passant par les points fixes de type col, et qui limitent les bassins d'attraction.

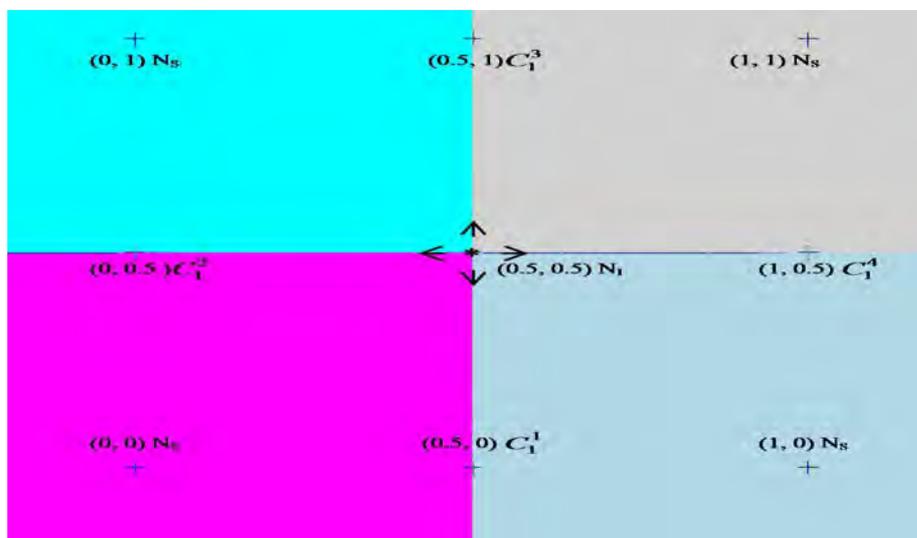


Fig.3.11– Quatre bassins d'attraction des points fixes attractifs,  $a = -1.9$ ,  $b = 0.03$ , et quelque soit  $c \in [0, 1]$ ,  $(x, y) \in [-0.2, 1.2]^2$ .

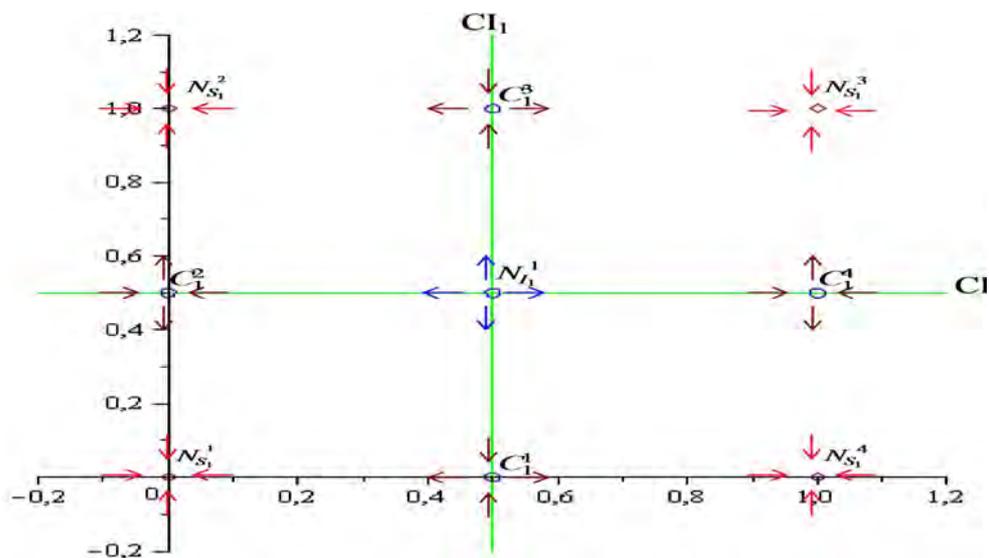


Fig.3.12– Les courbes invariantes ( $CI$ ) limitent les bassins d'attraction.

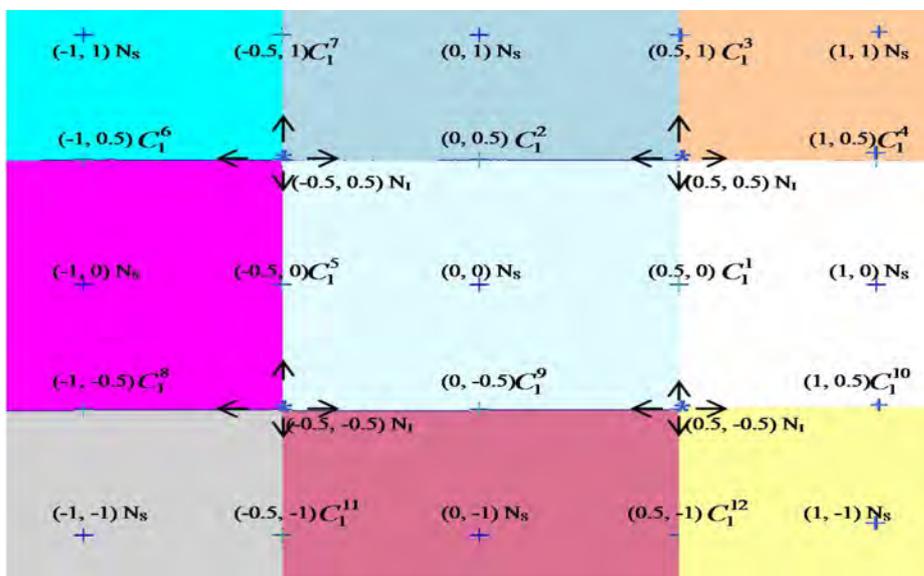


Fig.3.13– Neuf bassins d’attraction des points fixes attractifs  $a = -1.9$ ,  $b = 0.03$ , et  $c \in [0, 1]$ ,  $(x, y) \in [-1.1, 1.1]^2$ .

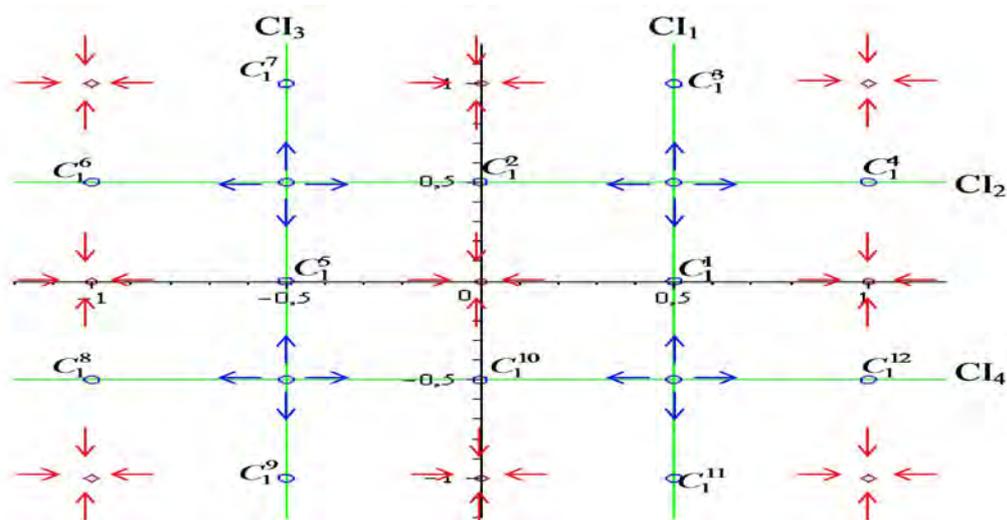


Fig. 3.14– Les courbes invariantes (CI) limitent les bassins d’attraction.

### 3.14 Diagramme de bifurcation de $T$ dans le plan $(b, x)$ .

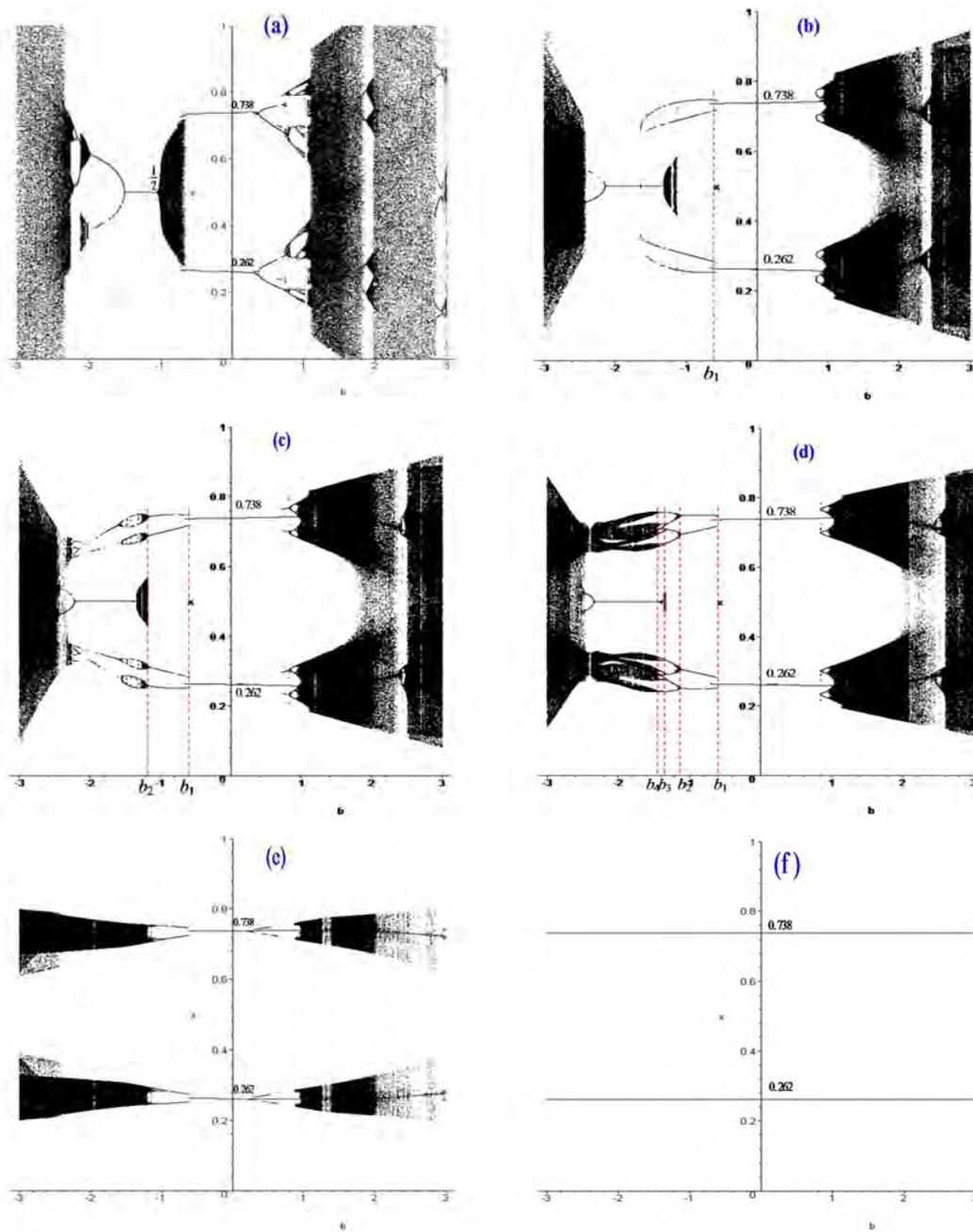
Les Figures suivantes donnent une partie du diagramme de bifurcation de type Feigenbaum [19], [27] de notre système dans le plan  $(b, x)$  par une variation du troisième paramètre  $c$ , pour  $b \in [-3, 3]$ , et  $a$  est fixé à 3.

Dans le cas  $c = 0$  (Figure 3.15 (a)), et  $b \simeq -0.75$  un nouveau cycle d'ordre 2 stable apparaît dans une bifurcation noeud-col (les points de cycle d'ordre 2 sont  $(0.262, 0.262)$ ,  $(0.738, 0.738)$ ). Après cela, le cycle continue (pour  $b \geq 0$ ) de subir des bifurcations qui conduisent au chaos. Et pour  $b \leq -1$ , le point fixe instable  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  subit une nouvelle bifurcation pour  $b = -1.5$  puis un cycle d'ordre 2 apparaît et continue de subir des bifurcations, cette cascade de bifurcation donne lieu au chaos.

Dans la Figure 3.15 (c), ( $c = 0.65$ ), chacun de cycles d'ordre 2 subit une cascade de doublement de période à partir de  $b = b_1$  et ensuite un cycle d'ordre 4 apparaît, et le cycle d'ordre 4 bifurque pour  $b = b_2$  puis un cycle d'ordre 8 apparaît, et pour  $c = 0.72$  (Figure 3.15 (d)) nous observons que :

- Pour  $b \in [b_1, b_2[ \Rightarrow$  bassin d'attraction d'un cycle d'ordre 4.
- Pour  $b \in [b_2, b_3[ \Rightarrow$  bassin d'attraction d'un cycle d'ordre 8.
- Pour  $b \in [b_3, b_4[ \Rightarrow$  bassin d'attraction d'un cycle d'ordre 16.
- Pour  $b \leq b_4 \Rightarrow$  s'accumulent avec la transition vers le chaos.

Le cas limite de couplage asymétrique avec  $c = 1$  (Figure 3.15 (f)) correspond au couplage unidirectionnel. De cette façon, le cycle d'ordre 2 est présenté sans aucune modification qualitative (aucune cascade de bifurcation) dans la direction de  $x$ .



*Fig. 3.15*– Diagramme de bifurcation de  $T$  dans le plan  $(b, x)$  avec  $b \in [-3, 3]$ ,  $a = 3$  (fixé), pour (a) :  $c = 0$ , (b) :  $c = 0.60$ , (c) :  $c = 0.65$ , (d) :  $c = 0.72$ , (e) :  $c = 0.90$ , et (f) :  $c = 1$ .

### 3.15 Lignes critiques

La transformation  $T$  définie en (2.1) est non inversible ( $TNI$ ). Cela signifie que, étant donné un point  $(z, t) \in \mathbb{R}^2$  est l'antécédent de rang 1,  $T^{-1}(z, t)$  peut être plus que un, c'est à dire,  $T^{-1}$  est une relation à valeurs multiples. Ces préimages (antécédents) peuvent être calculées en résolvant, par rapport à  $x$  et  $y$  inconnues, le système algébrique (3.37), qui peut être écrit sous la forme

$$\begin{cases} z = f_a(x) + (1-c)bg(x, y), \\ t = f_a(y) + bg(y, x), \end{cases} \quad (3.37)$$

avec :

$$f_a(x) = x + \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi x), \quad (3.38)$$

et :

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi(y - x)) \quad (3.39)$$

Il est difficile de résoudre ce système analytiquement, nous avons donc construit les courbes par des méthodes numériques. L'étude numérique nous a permis de conclure qu'il peut y avoir 1, 3, 5, 7 et 9 solutions. Conformément à la terminologie de [42], nous désignons par  $Z_k$  une région dont les points ont  $k$  préimages distinctes.

En fait,  $LC_{-1}$  est défini comme le lieu des antécédents de rang 1 des points de  $LC$ , en tout voisinage d'un point de  $LC_{-1}$  il y a au moins deux points distincts cartographiés par  $T$  dans le même point à proximité de  $LC$ , c'est à dire  $LC = T(LC_{-1})$ .

Pour la transformation  $T$  (2.1) qui est différentiable, l'équation de la courbe critique  $LC_{-1}$  dans le plan  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  est donnée par :

$$\begin{aligned} LC_{-1} : 1 + a[\cos(2\pi x) + \cos(2\pi y)] + a^2 \cos(2\pi x) \cos(2\pi y) + \\ ab \cos(2\pi(x - y))[\cos(2\pi y) - \cos(2\pi x)] \\ - bc \cos(2\pi(x - y))[1 + a \cos(2\pi y)] = 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Par conséquent, si le paramètre  $0 \leq c < 1$ ,  $LC_{-1}$  est constitué par cinq branches, notée par  $LC_{-1}^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, 5$ , située symétriquement par rapport à la diagonale  $\Delta$  et aussi par rapport à l'antidiagonale  $\Delta_{-1}$  (Figure 3.16 (a), (b), (c)).

De même  $LC = T(LC_{-1})$  est également l'union de cinq branches, notées  $LC^{(j)} = T(LC_{-1}^{(j)})$ ,  $j = 1, \dots, 5$ , et chaque partie de l'ensemble critique  $LC$  sépare deux régions  $Z_k$  et  $Z_{k+2}$ ,  $k = 1, 3, 5$  et  $7$  (Figure 3.17, (a), (b), (c) et (d)) [1], [11], [12], [20], de même les branches  $LC$  situées symétriquement par rapport à la diagonale  $\Delta$  et à l'antidiagonale  $\Delta_{-1}$ ; on observe aussi que les branches  $LC^{(j)}$ ,  $j = \overline{1,4}$  possèdent quatre points cuspidaux  $C^{(j)}$ ,  $j = \overline{1,4}$  dans  $Z_3$ .

Quand le paramètre  $c = 1$  on a les remarques suivantes:

- $LC_{-1}$  est constitué par quatre branches, notée par  $LC_{-1}^{(j)'}$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , et  $LC$  est également formé par quatre branches, dites  $LC^{(j)'} = T_3(LC_{-1}^{(j)'}), j = 1, \dots, 4$  car :
  - Il y a le contact entre les branches  $LC_{-1}^{(5)}$  avec  $LC_{-1}^{(4)}$  et  $LC_{-1}^{(1)}$  pour  $c = 0.88$ , a partir de cette dernière valeur de  $c$ ,  $LC_{-1}^{(5)}$  touche deux les branches  $LC_{-1}^{(2)}$  et

$LC_{-1}^{(3)}$  (Figure (3.16) (d)), ce qui donne naissance aux quatre nouvelles courbes  $LC_{-1}^{(1)'}$ ,  $LC_{-1}^{(2)'}$ ,  $LC_{-1}^{(3)'}$ ,  $LC_{-1}^{(4)'}$ .

- La première partie de la courbe  $LC^{(5)}$  avec une partie de la courbe  $LC^{(4)}$  et une partie de  $LC^{(2)}$  se confondent et donnent naissance à une nouvelle courbe  $LC^{(2)' = T_3(LC_{-1}^{(2)'})$ .
- La deuxième partie de la courbe  $LC^{(5)}$  se confond avec une partie de la courbe  $LC^{(1)}$  et une partie de  $LC^{(3)}$ , ce qui donne une nouvelle courbe  $LC^{(1)' = T_3(LC_{-1}^{(1)'})$ ,  $LC^{(1)'}$ ,  $LC_{-1}^{(1)'}$ ,  $LC^{(2)'}$ ,  $LC_{-1}^{(2)'}$  sont des droites.
- La troisième partie de la courbe  $LC^{(5)}$  avec une partie de la courbe  $LC^{(1)}$  et une partie de  $LC^{(2)}$  se confondent et donnent naissance à une nouvelle courbe  $LC^{(3)' = T_3(LC_{-1}^{(3)'})$ .
- Et la dernière partie de la courbe  $LC^{(5)}$  avec une partie de la courbe  $LC^{(3)}$  et une partie de  $LC^{(4)}$  se confondent et donnent naissance à une nouvelle courbe  $LC^{(4)' = T_3(LC_{-1}^{(4)'})$ .

- Les points cuspidaux  $C^{(j)}$ ,  $j = \overline{1,4}$  ont disparu à cause de ces contacts entre ces courbes (Figure 3.17 (d)).

Pour étudier les évolutions des lignes critiques  $LC$  et leurs antécédents  $LC_{-1}$  de la transformation  $T$ , nous fixons les valeurs des paramètres  $a = 3$ ,  $b = 0.41$  et faisons varier le paramètre  $c$ , on a les situations suivantes (Figures 3.16, 3.17 (a),(b), (c) et (d)).

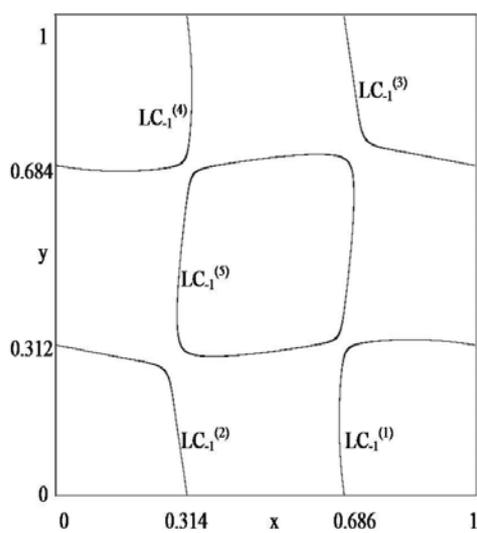
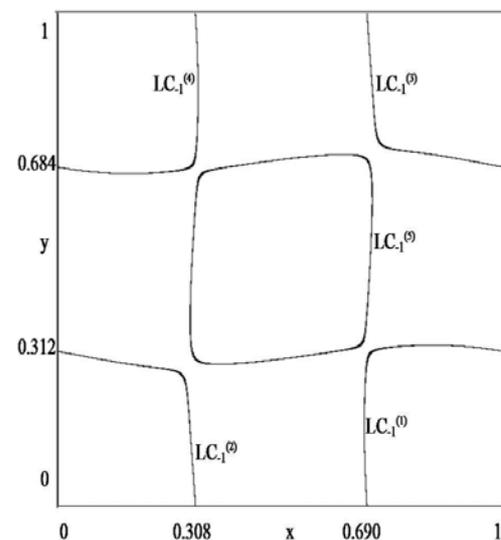
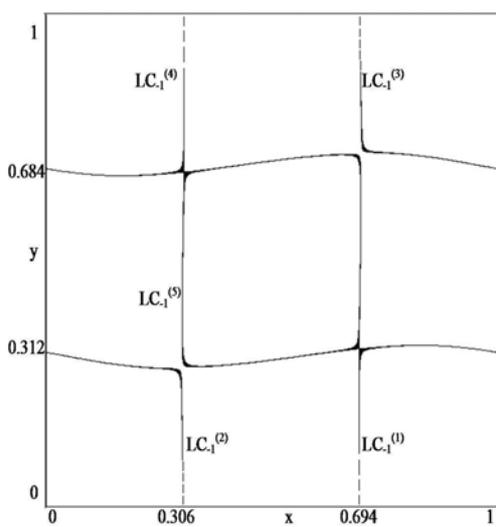
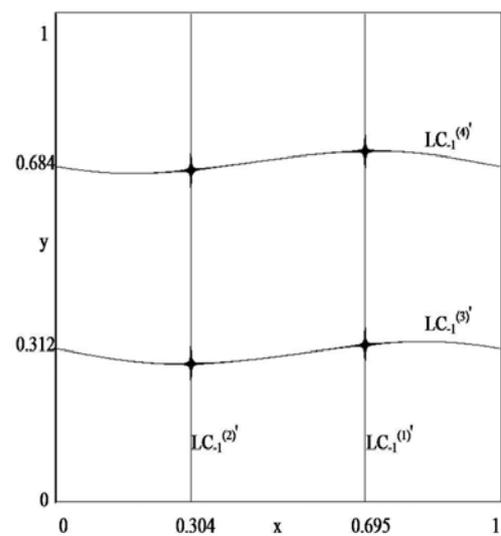
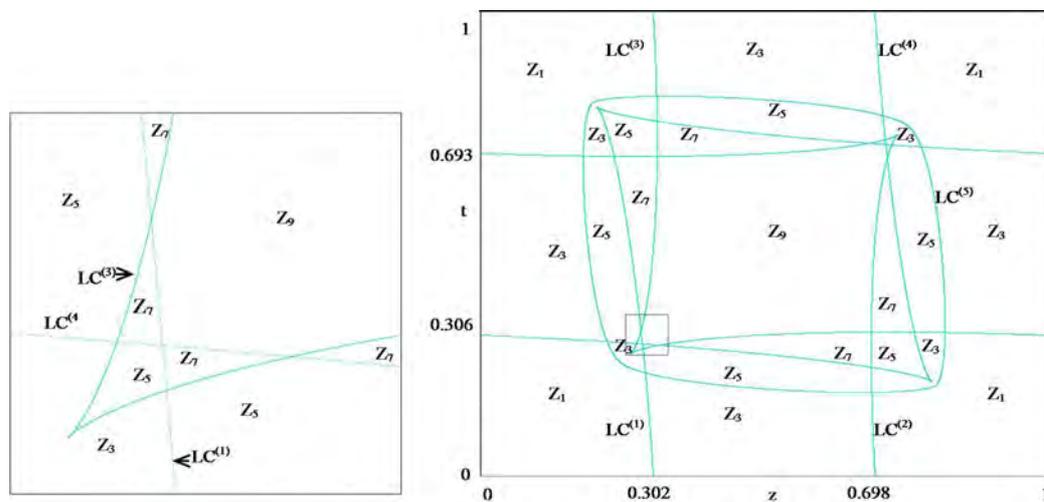
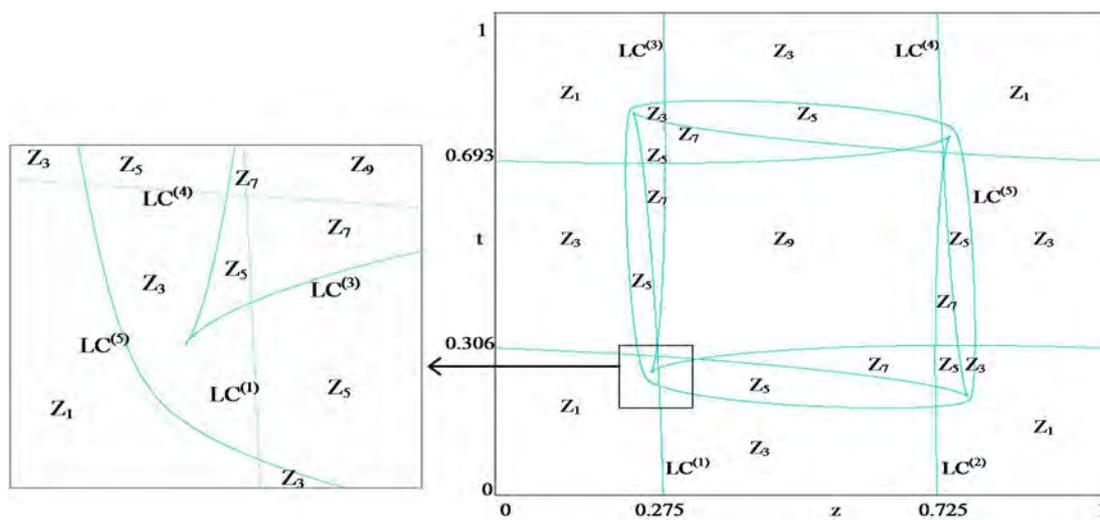
(a) :  $a = 3, b = 0.41, c = 0$ (b) :  $a = 3, b = 0.41, c = 0.5$ (c) :  $a = 3, b = 0.41, c = 0.88$ (d) :  $a = 3, b = 0.41, c = 1$ 

Fig.3.16– Evolution des antécédents des lignes critiques pour la récurrence  $T$  : courbes  $LC_{-1}$ .



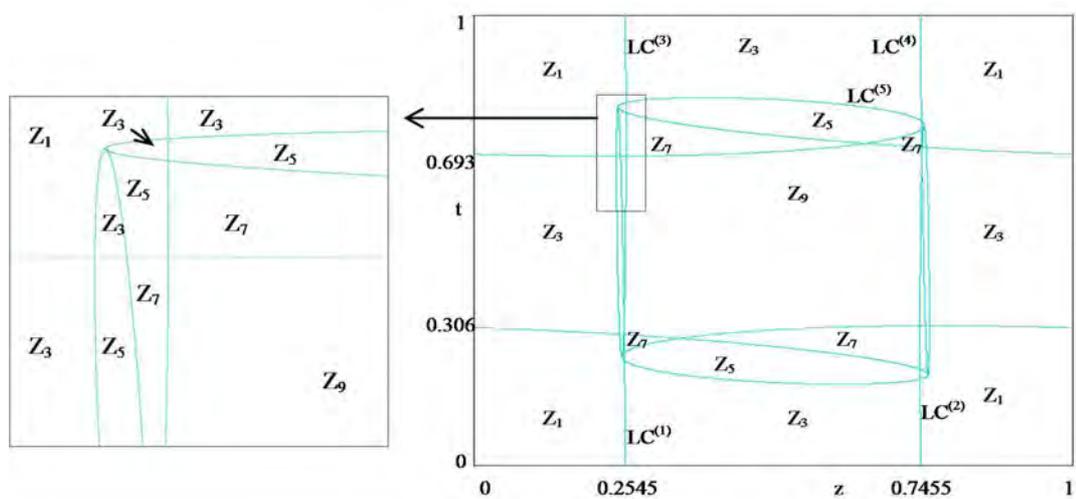
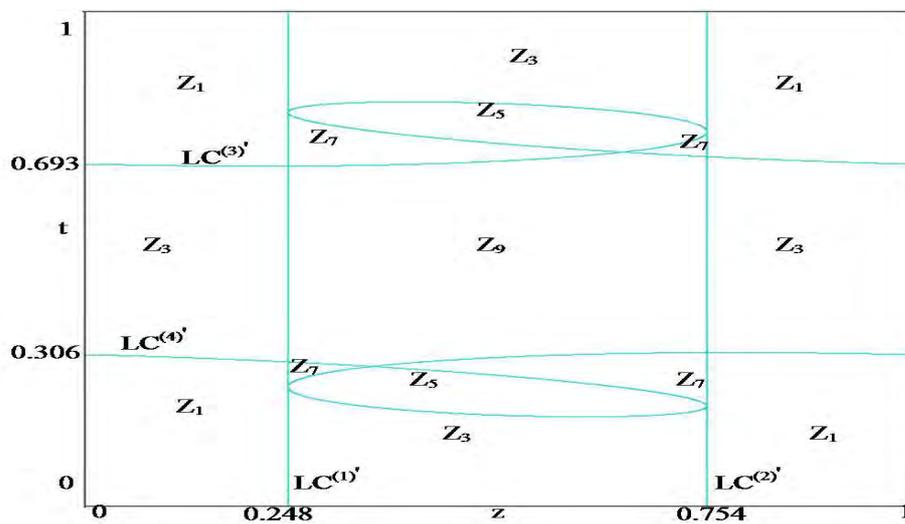
(a) :  $a = 3, b = 0.41, c = 0$

Fig.1.17– Evolution des lignes critiques  $LC$  et les zones  $Z_i, i = 2n + 1, n = \overline{0,4}$  dans le plan  $(z, t)$ , courbes  $LC$ .



(b) :  $a = 3, b = 0.41, c = 0.5$

Fig.1.17– (Suite) (b) pour :  $c = 0.5$ .

(c) :  $a = 3$ ,  $b = 0.41$ ,  $c = 0.88$ Fig.1.17- (Suite) (c) pour :  $c = 0.88$ .(d) :  $a = 3$ ,  $b = 0.41$ ,  $c = 1$ Fig.1.17- (Suite) (d) pour :  $c = 1$ .

L'unique point critique de rang 0 notée par  $C_{-1} = (c_{-1}, c_{-1})$  (point d'un maximum local) de la restriction (3.5) de  $T$  à la diagonale  $\Delta$ .

Formellement,

$$LC_{-1}^{(5)} \cap \Delta = C_{-1} = (c_{-1}, c_{-1}), \text{ avec } c_{-1} = \frac{1}{2\pi}(\pi - \arccos(\frac{1}{3})) = 0.304 \quad (3.41)$$

Bien sûr,

$$LC^{(5)} \cap \Delta = f_{a=3}(C_{-1}) = C = (c, c), \quad (3.42)$$

Avec

$$c = f_{a=3}(c_{-1}) = c_{-1} + \frac{3}{2\pi} \sin(2\pi c_{-1}) = 0.754 \quad (3.43)$$

Si le paramètre  $c = 1$ , l'unique point critique de rang 0 est :

$$LC_{-1}^{(2)'} \cap LC_{-1}^{(3)'} \cap \Delta = C_{-1} \quad (3.44)$$

et le point critique de rang 1,  $C = f_{a=3}(C_{-1})$  est :

$$LC^{(2)'} \cap LC^{(3)'} \cap \Delta = C \quad (3.45)$$

### 3.16 Bifurcations d'un bassin d'attraction

Une étude sur les bassins d'attraction d'une récurrence  $T$ , nécessite une analyse globale des propriétés de ses inverses. En particulier, si  $T$  est une récurrence non inversible, la structures topologiques des bassins devient complexe, tels que des ensembles non connexes et/ou ensembles avec des frontières fractales, sont souvent observés.

Nous étudions l'évolution du bassin d'attraction lorsque le paramètre de couplage  $b$  est modifié dans la récurrence  $T$  (2.1 (chapitre 2)). En utilisant la terminologie de [42], [43], nous pouvons mettre en évidence les bifurcations classiques données aux chapitre 1, ces bifurcations sont directement liées à celles que subit la frontière  $\partial B$  d'un tel domaine (bassin)  $B$ . La route vers les frontières du bassin d'attraction, comme le paramètre de couplage  $b$  est varié, est caractérisée par des bifurcations globales, aussi appelées des bifurcations de contact, c'est une bifurcation bien connu (voir par exemple [42], [46]), en raison de contacts entre l'ensemble critique et les limites des bassins.

Notre objectif est d'expliquer comment des bassins deviennent fractale, non connexe, simplement connexe ou multiplement connexe dans les cas :  $T_1$  (le couplage symétrique,  $c = 0$ ),  $T_2$  ( le couplage non symétrique,  $c = 0.7$ ) et  $T_3$  ( le couplage non symétrique et unidirectionnel  $c = 1$ ) pour la valeur fixe de  $a = 3$ .

En effet, considérons les notations suivantes :

- $B(E_k)$  : Bassin d'attraction d'un cycle d'ordre  $k$ , ( $k = 2, 3, \dots$ ).
- $B(A_j)$  : Bassin d'attraction d'un attracteur chaotique,  $j$  représente le nombre d'un attracteur chaotique.

Dans les trois cas nous avons :

- \* Le point fixe  $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in \Delta \cap \Delta_{-1}$  qui est un noeud instable.
- \* Deux points  $Q_1 = (0.738, 0.738)$ ,  $Q_2 = (0.262, 0.262)$  sont des points d'un cycle d'ordre 2 noté  $E_2 \in \Delta$ , qui est un noeud stable.

1) **Pour la transformation  $T_1$  (cas 1 :  $c = 0$ ) :**

Lorsque le paramètre de couplage  $b$  est modifié dans le sens croissant de la valeur 0.37 à la valeur 0.7004, on a les situations suivantes :

- Pour  $b = 0.37$ , Figure 3.18, le bassin d'un cycle d'ordre 2 de couleur verte est noté  $B(E_2)$  est un ensemble non connexe, les domaines rouge  $B(E_4)$  et orange  $B(E_8)$  sont les bassins de deux différents cycles d'ordre 4 stable notées  $E_4^{(1)}$ ,  $E_4^{(2)}$  et d'un cycle d'ordre 8 stable.  $B(E_4)$  et  $B(E_8)$  sont des bassins non connexe.  $A_4^i$ ,  $i = \overline{1,4}$  quatre points d'un cycle d'ordre 4, et  $B_4^i$ ,  $i = \overline{1,4}$  quatre points d'un autre cycle d'ordre 4.
- Nous savons que pour des valeurs appropriées du paramètre  $b$  il existe des intervalles chaotiques pour la restriction  $T_1$  etc, et qu'ils sont simplement conséquence des propriétés de la transformation  $T$ . Par exemple, à la valeur du paramètre  $b = 0.384$ , le cycle d'ordre 8, de la récurrence  $T_1$ , subit une bifurcation, en donnant naissance à 8 intervalles chaotiques [35], [11], (voir Figure 3.19), ainsi nous obtenons un ensemble chaotique à 8-bandes le long de la antidiagonale  $\Delta_{-1}$  et leurs bassins d'attraction sont ridés. Avec deux attracteurs chaotiques asynchrone de période 4 développés à partir de cycles principaux par rapport à l'antidiagonale,  $E_4^{(1)}$  et  $E_4^{(2)}$ . Pour  $b = 0.39$  quatre intervalles chaotiques, sont obtenus par l'union de 8 intervalles chaotiques, et pour  $b = 0.55$  nous obtenons deux attracteurs chaotiques. La région blanche correspond

aux bassins d'attraction des attracteurs chaotiques.

- Notons également que l'attracteur est une région chaotique. Le contact de cet attracteur chaotique avec la frontière de son bassin transformera l'attracteur chaotique en un répulseur chaotique. Un exemple est exposé ci-dessous (Figure 3.23, pour  $b = 0.617$ ) presque tous les points ont des trajectoires divergentes, cependant, la partie transitoire dans l'ancienne région chaotique présente l'ancienne forme comme une sorte de fantôme. Cela donne lieu à un transitoire chaotique vers l'infini. Il est intéressant de constater l'importance des structures globales et celle des bifurcations globales dans l'interprétation de la dynamique des plans dans le contexte appliqué. Ce contact marquera une bifurcation qui cause des changements qualitatifs de la structure des bassins. Par conséquent, les bassins d'attraction montrent une structure non homogène.
- En effet, nous pouvons avoir des attracteurs simples avec un très petit bassin d'attraction ou avec une structure fractal, et coexistant avec divers autres attracteurs qui limitent l'importance de la propriété d'attractivité (voir la Figure 3.24 pour la valeur  $b = 0.65$  zoom).
- En continuant à faire varier le paramètre  $b$  de manière continue, et pour  $b = 0.67$ , on a les bassins d'un cycle d'ordre 8 et d'ordre 12 (Figure 3.25), à  $b = 0.672$ , il apparaît encore les bassins d'un cycle d'ordre 4, 8, 12 et 16 (Figure 3.26).
- Et lorsque  $b = 0.674$ , on voit deux cycles d'ordre 4 avec des bassins  $B(E_4)$ , de couleur rouge (Figure 3.27), ainsi que d'autres bassins de structure non homogène entre les bassins des cycles d'ordre pair  $2k$ ,  $k = \overline{1,10}$ .
- La valeur de bifurcation  $b = 0.70026$  (voir zoom de la Figure 3.29), correspond à un

nouveau contact entre  $LC_{-1}^{(1)}$  et  $D_4 \subset B(E_4)$  au point  $\beta_{-1} = LC_{-1}^{(1)} \cap D_4$ , donc  $\beta_{-1}$  est un point d'intersection limite entre  $LC_{-1}^{(1)}$  et  $D_4$ , avant que ce dernier ne se divise en deux bassins (îlots)  $D_4^{(1)}$  et  $D_4^{(2)}$ , lorsque la valeur de  $b = 0.7004$  (Figure 3.30).

La structure de bassin, pour toutes les valeurs du paramètre de couplage  $0.37 \leq b \leq 0.7004$ , dans le cas où  $c = 0$ , est non connexe (c'est à dire formé par de nombreuses parties disjointes), et ils sont symétriques par rapport à  $\Delta_{-1}$ .

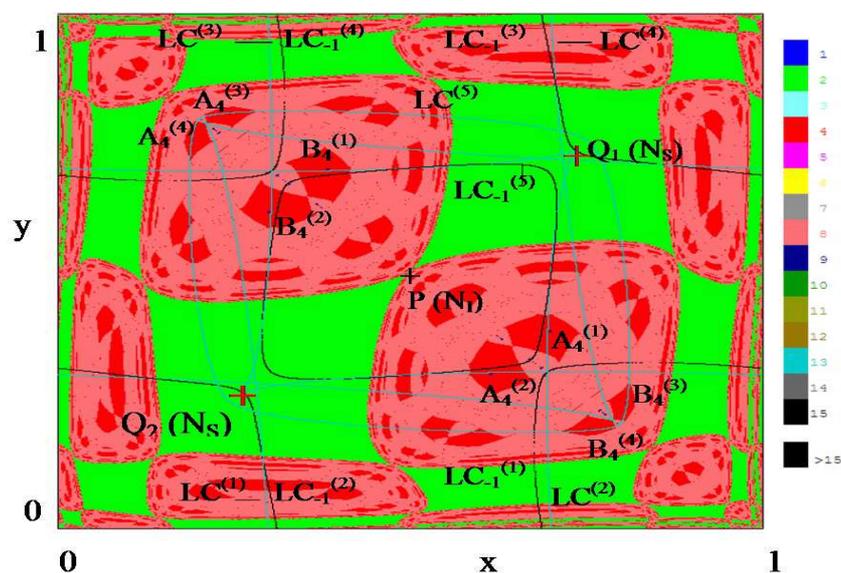


Fig.3.18–  $B(E_2)$  Bassin de couleur verte d'un cycle 2,  $B(E_4)$  bassin de couleur rouge de deux cycle 4 et  $B(E_8)$  bassin de couleur orange d'un cycle 8,  $b = 0.37$ .

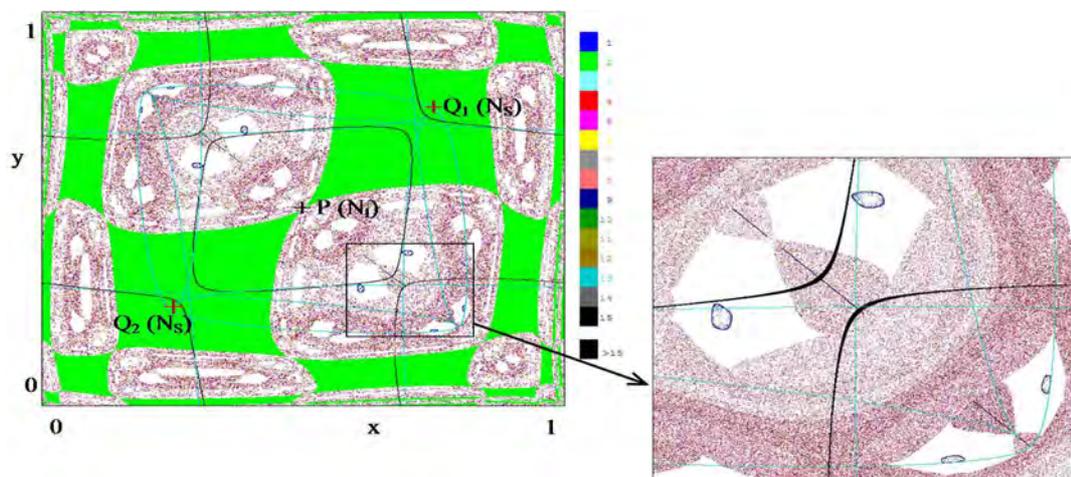


Fig. 3.19— Pour  $b = 0.384$ , un ensemble de 8-bandes chaotiques le long de l'antidiagonale et leur bassin d'attraction est ridé, avec deux attracteurs chaotiques de période 4 asynchrones.

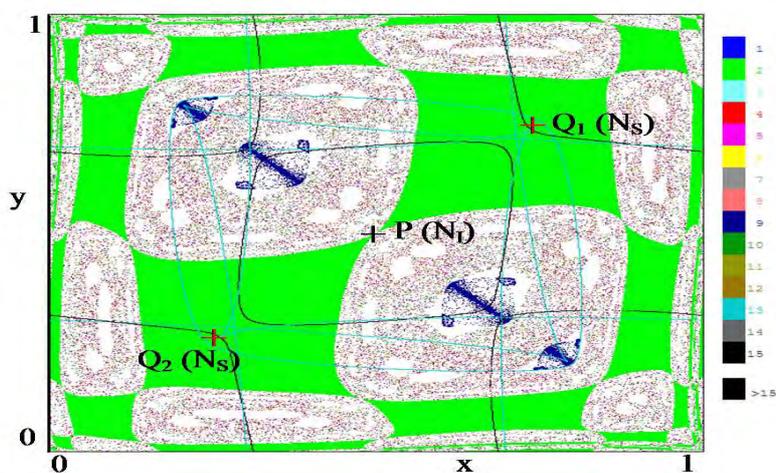


Fig. 3.20— Pour  $b = 0.39$ , quatre intervalles chaotiques sont obtenus par la réunion de huit intervalles chaotiques.

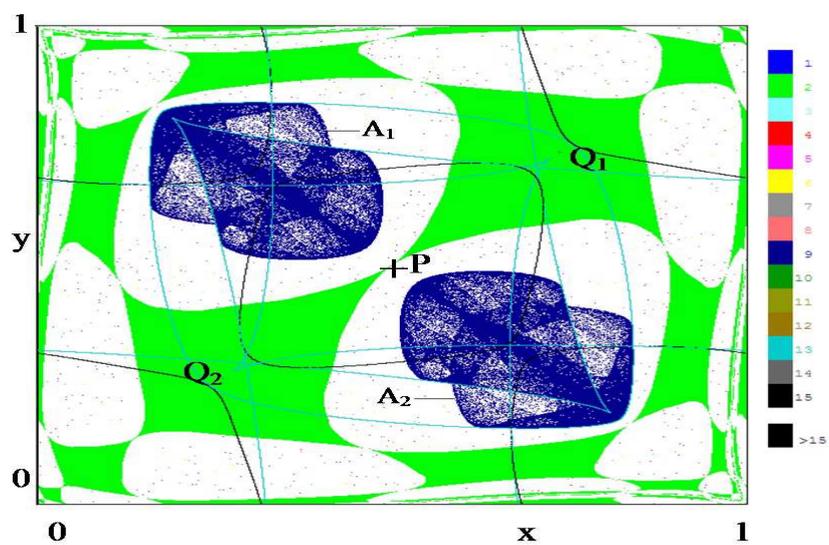


Fig. 3.21— La région blanche  $B(A_j)$ ,  $j = 1, 2$  est le bassin de deux attracteurs chaotique  $A_j$ ,  $j = 1, 2$ ,  $b = 0.55$ .

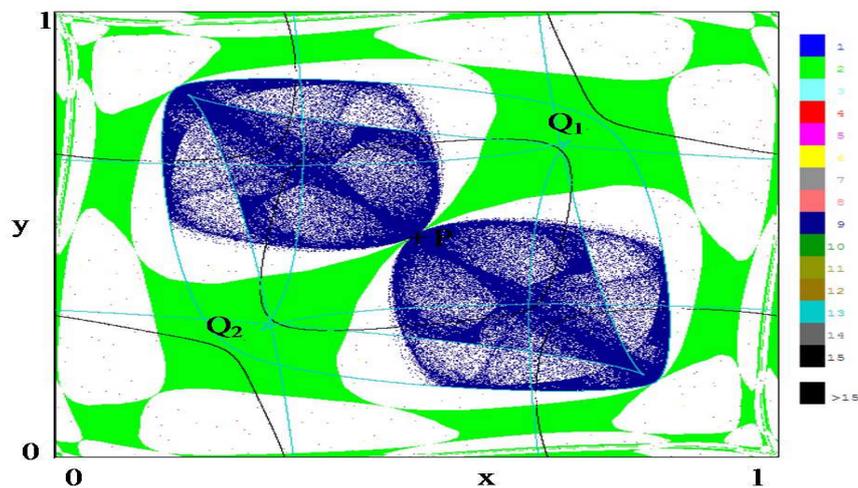
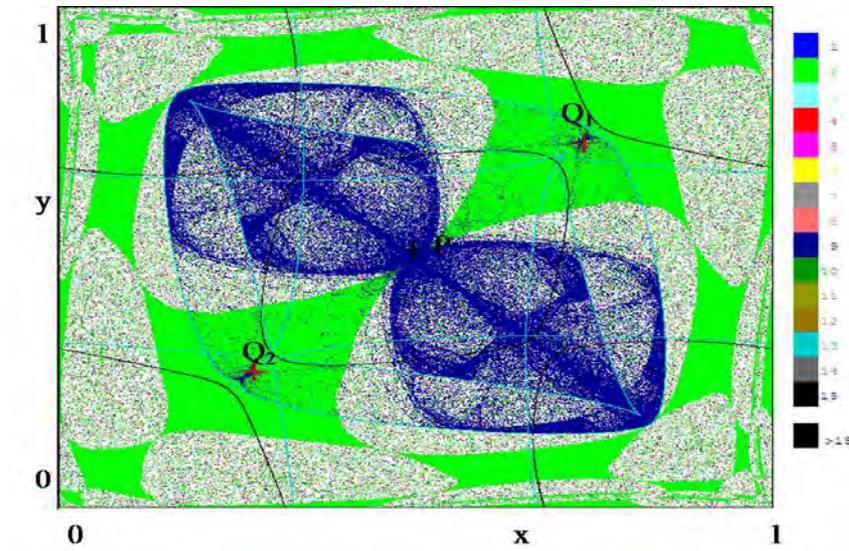
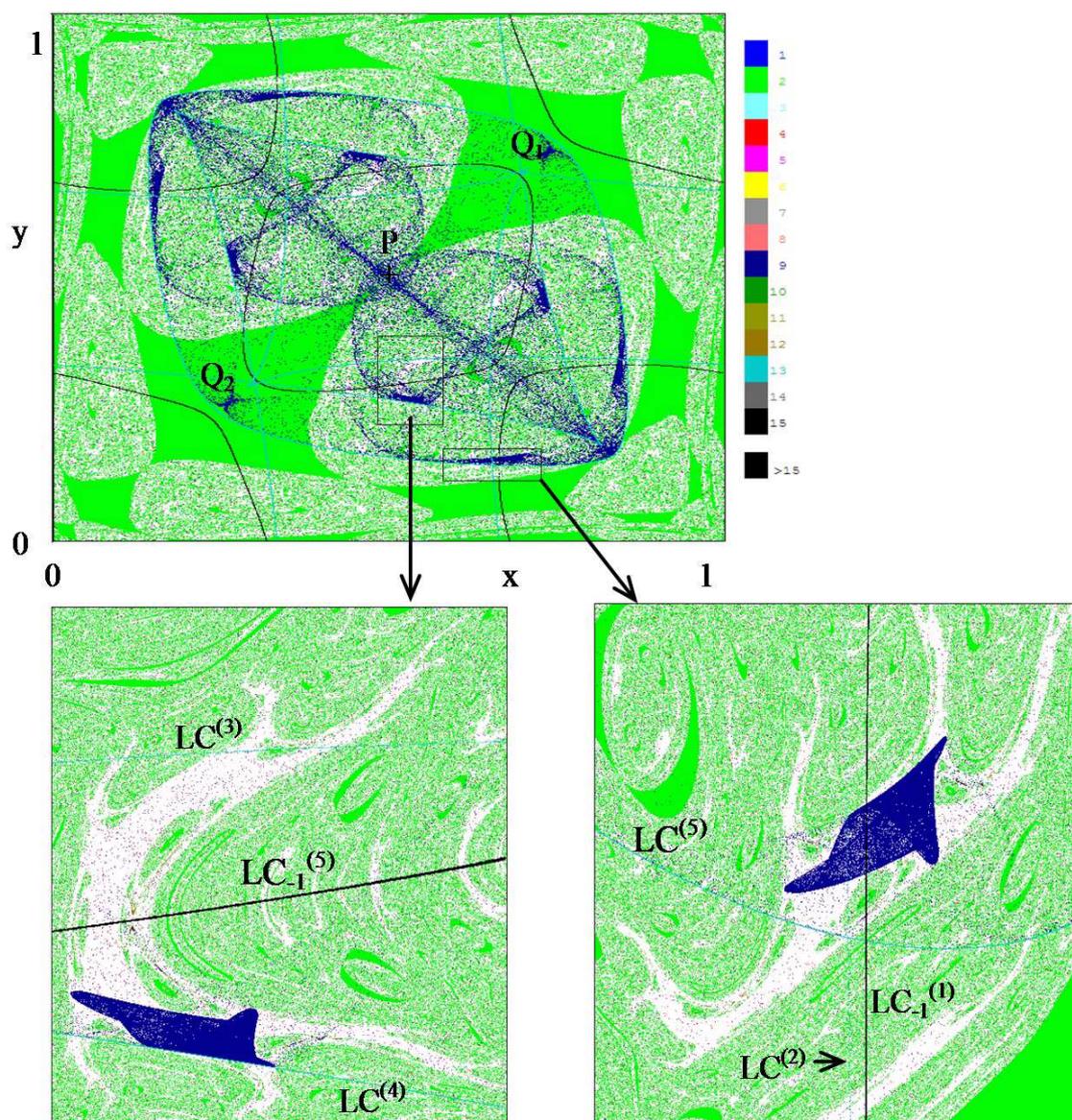


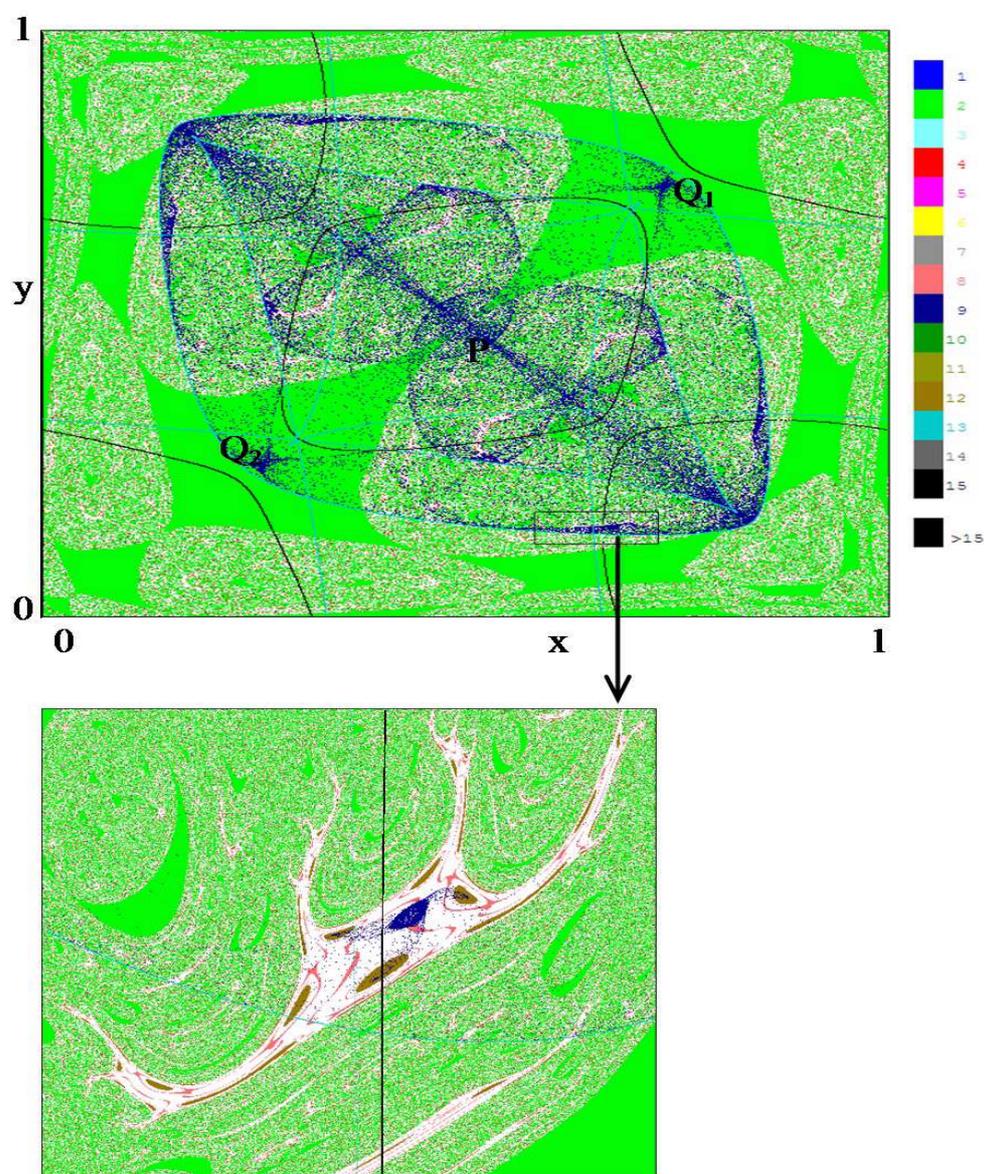
Fig. 3.22— Contact entre deux attracteurs chaotique aux point fixe  $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $b = 0.615$ .



*Fig. 3.23*— Après bifurcation de contact, la structure du bassin est mélangée entre les bassins des cycles d'ordre pair  $2k$ ,  $k = \overline{1.10}$ , avec transitoire chaotique,  $b = 0.617$ .



*Fig. 3.24*– Apparition de 8 attracteurs chaotique avec des bassins très petits et leurs frontières sont fractales,  $b = 0.65$ .



*Fig. 3.25*— Pour  $b = 0.67$ , la disparition des attracteurs chaotiques, et l'apparition d'attracteurs simples, cycle d'ordre 8 et cycle d'ordre 12.

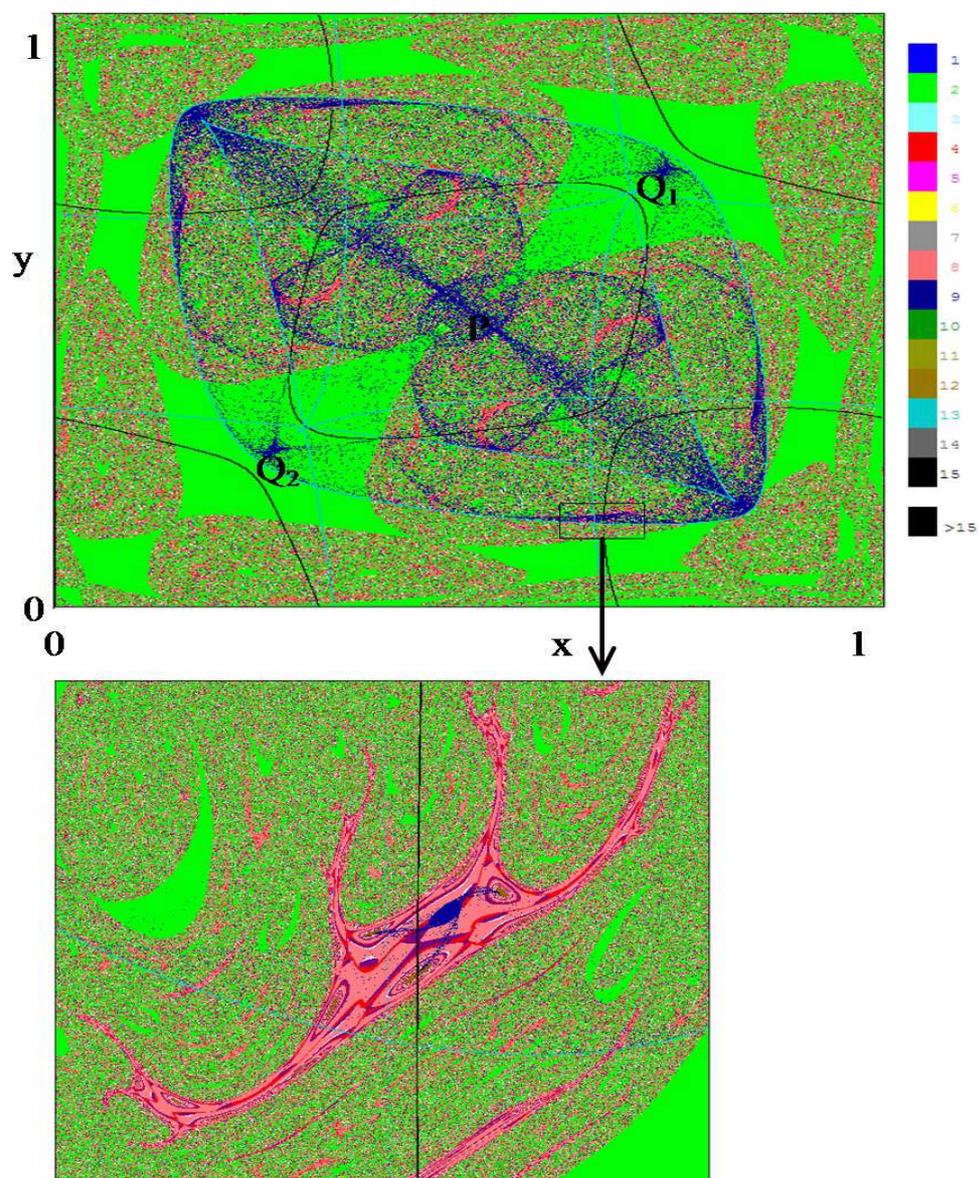
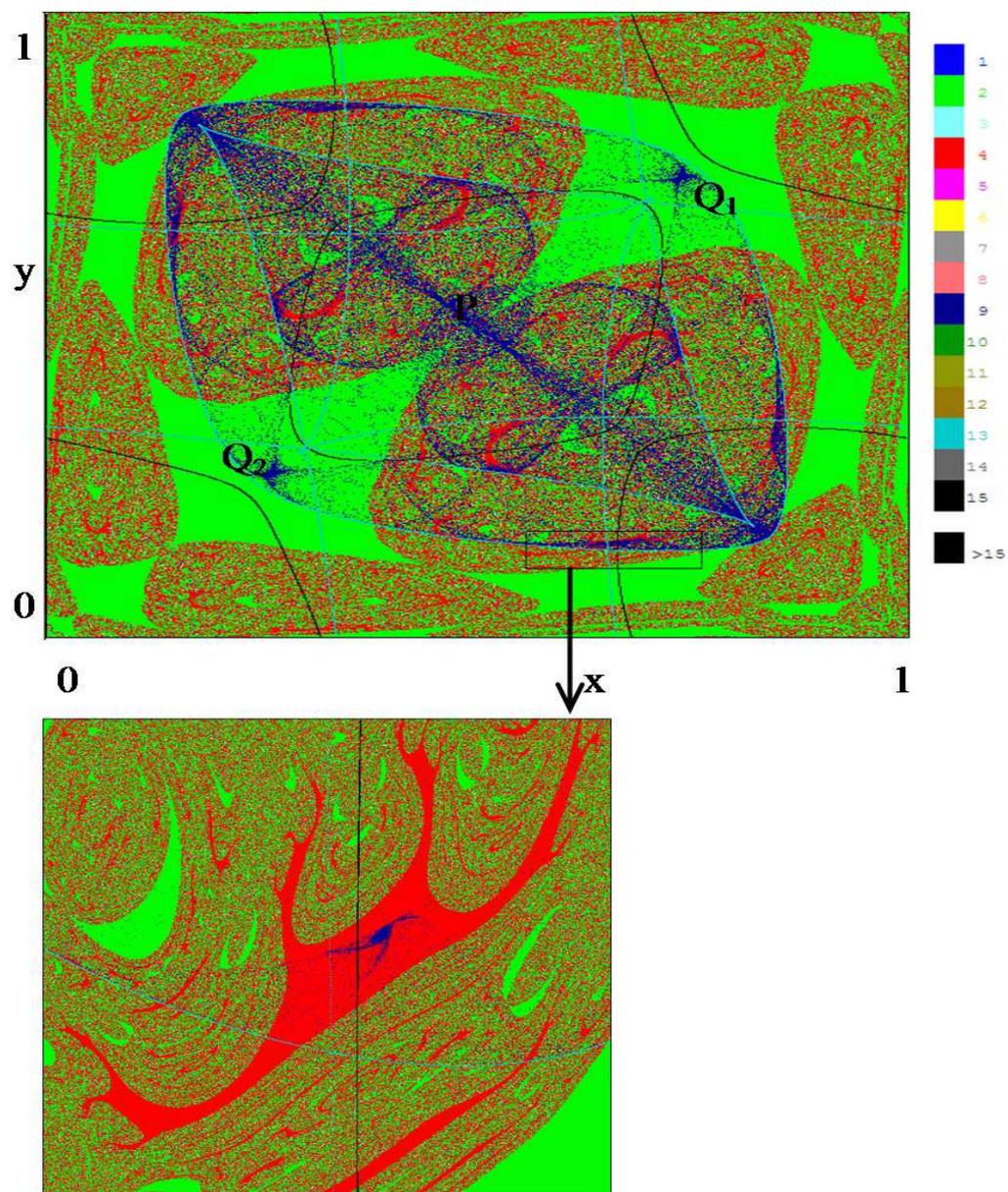


Fig. 3.26— Pour  $b = 0.672$ , l'apparition des bassins de cycles d'ordre 4, 8, 12 et 16.



*Fig. 3.27*– Deux cycles d'ordre 4 avec des bassins de couleur rouge, de même que d'autres bassins mixte entre les cycles d'ordre  $2k$ ,  $k = 1, 10$ ,  $b = 0.674$ .

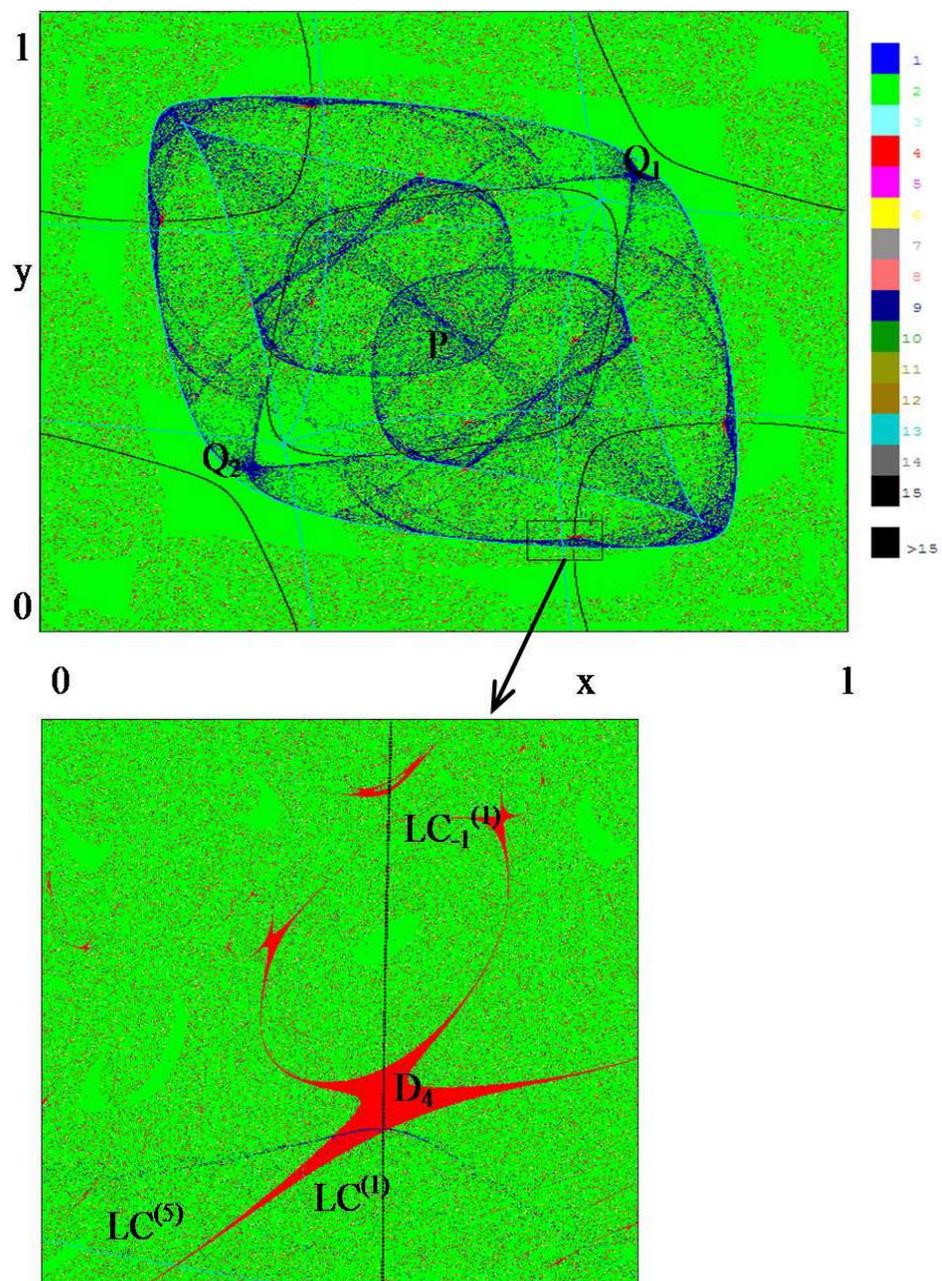


Fig. 3.28— Pour  $b = 0.70$ , évolution du bassin d'attraction des cycles d'ordre 4

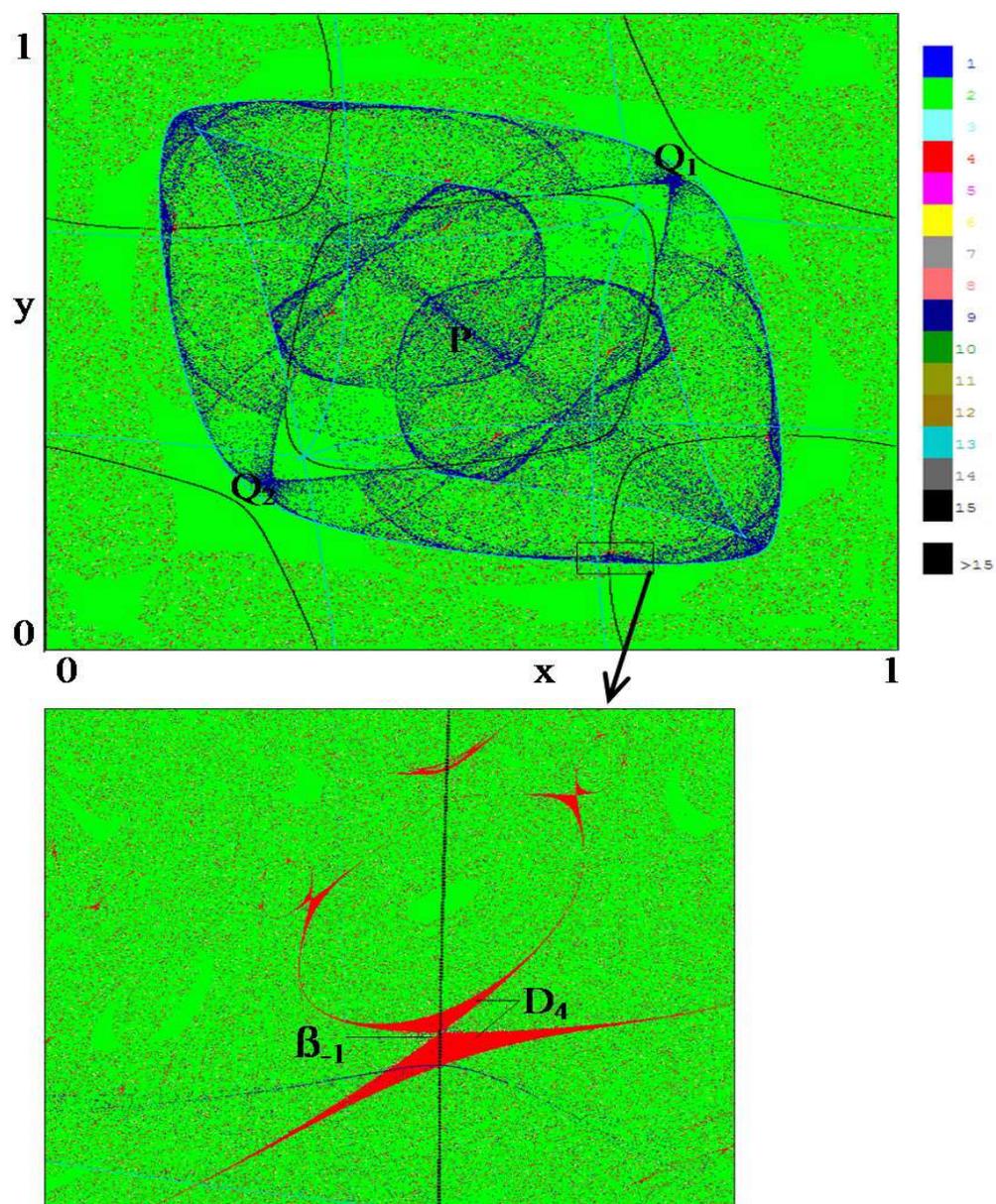
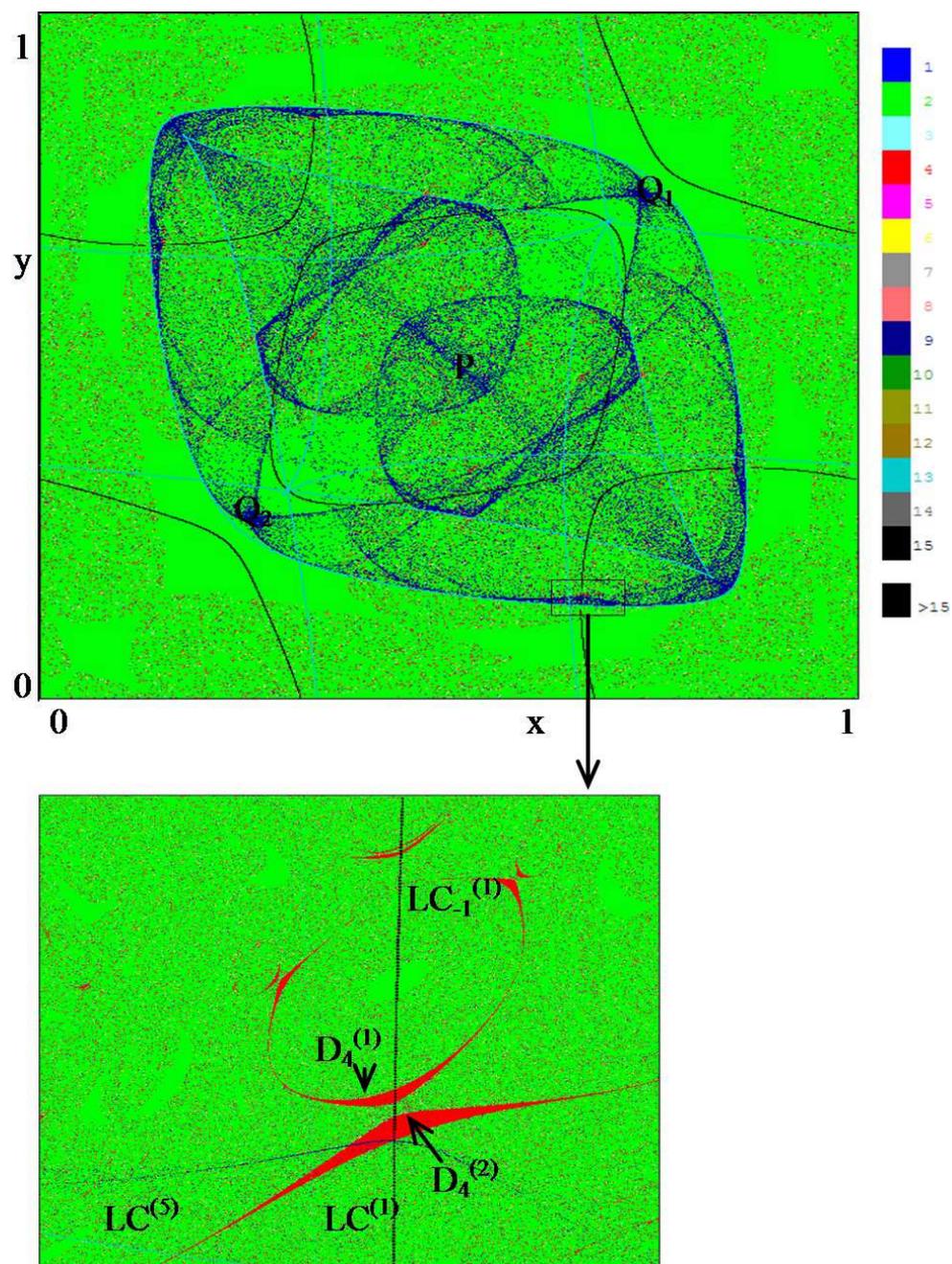


Fig. 3.29– Pour  $b = 0.70026$ , nouveau contact entre  $LC_{-1}^{(1)}$  et  $D_4 \subset B(E_4)$  au point  $\beta_{-1} = LC_{-1}^{(1)} \cap D_4$ .



*Fig. 3.30*– Pour  $b = 0.7004$ , bifurcations d'un changement du nombre des bassins ( $D_4$  se divise en deux bassins (ilôts)  $D_4^{(1)}$  et  $D_4^{(2)}$ ).

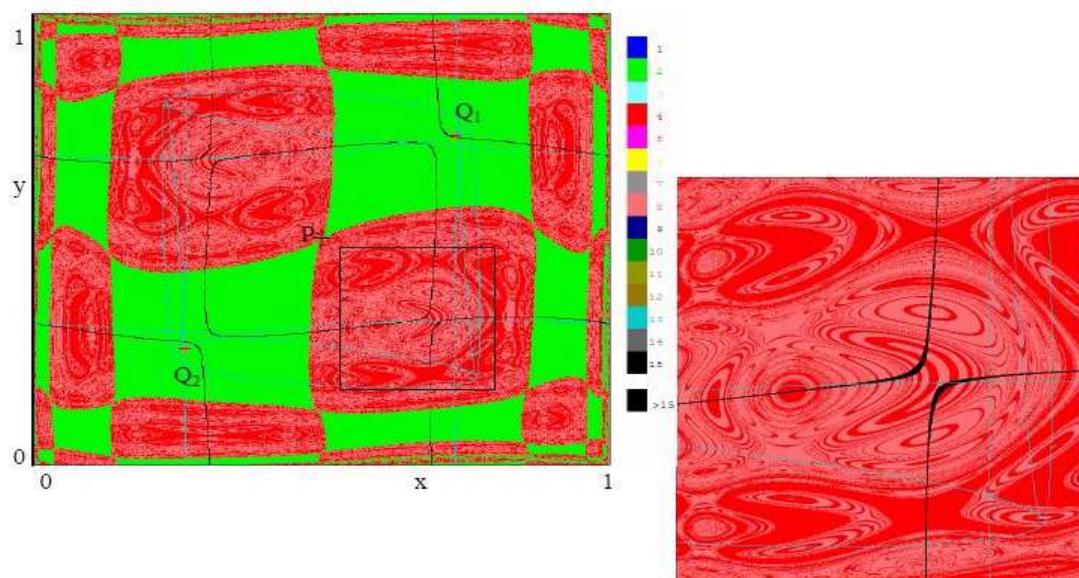
2) **Pour la transformation  $T_2$  (cas 2 :  $0 < c = 0.7 < 1$ ) :**

Lorsque le paramètre de couplage  $b$  est modifié dans le sens croissant de la valeur 0.46 à la valeur 1.02, on a les situations suivantes :

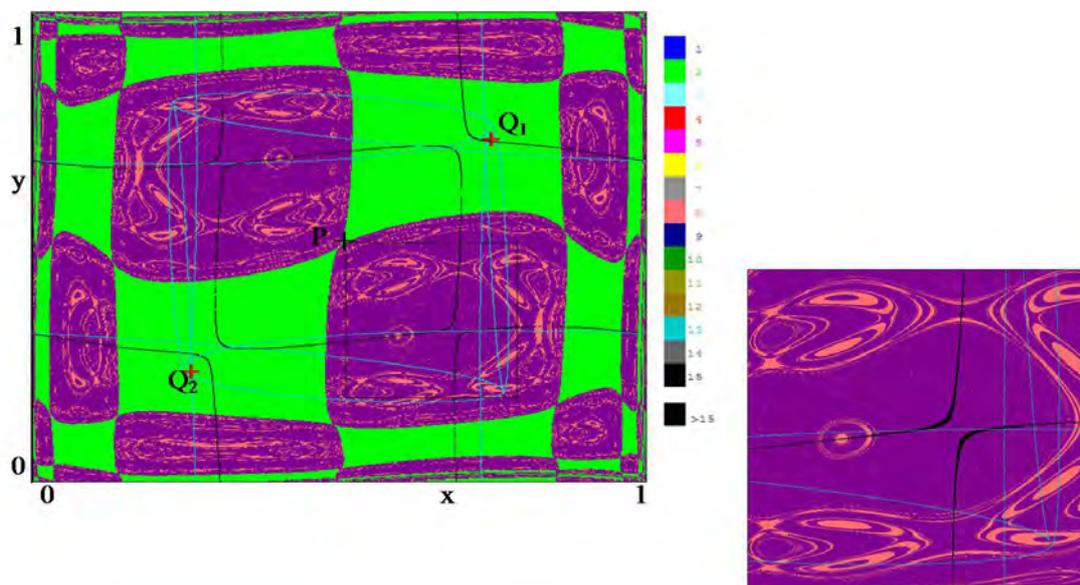
- Afin de comprendre comment les structures de bassins complexes sont obtenus, nous commençons par la situation dans laquelle  $B(E_2)$  est le bassin de couleur verte d'un cycle d'ordre 2 noeud stable, a un forme simple, comme celui montré dans la Figure 3.31, obtenues pour  $b = 0.46$ ,  $B(E_2)$  est un ensemble non connexe. Les domaines rouge  $B(E_4)$  et orange  $B(E_8)$  sont les bassins de cycle d'ordre 4 et d'ordre 8 respectivement.
- A partir de  $b = 0.478$  (Figure 3.32),  $B(E_4)$  disparaît, et simultanément apparaît le bassin  $B(E_{16})$  d'un cycle d'ordre 16, couleur violette sur la Figure, à  $b = 0.55$  nous obtenons 4 parties d'attracteurs chaotique provenant d'une cascade de bifurcations flip de cycles d'ordre  $4 \times 2^i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , et les zones non connexe de couleur blanche, sont les bassins d'attraction de deux attracteurs chaotique notées  $B(A_j)$ ,  $j = 1, 2$  ici  $b = 0.72$ .
- Pour  $0.805 \leq b \leq 0.815$ , les bifurcations du bassin " $B(A_j)$ ,  $j = 1, 2$  non connexe  $\longleftrightarrow$   $B(A_j)$ ,  $j = 1, 2$  multiplement connexe". La Figure 3. 35, nous montre numériquement cette bifurcation de contact ; le contact entre la frontière du bassin d'un cycle d'ordre 2,  $B(E_2)$ , avec une branche de la courbe critique, notée  $LC^{(5)}$  qui traverse  $B(E_2)$  laissant deux régions de  $B(E_2)$ ,  $H_0 \in Z_3$  et  $K_0 \in Z_3$ , délimitées par  $LC^{(5)}$ . Donc on a trois préimages distinctes de rang 1, qui forment l'ensemble  $H_{-1} = T_2^{-1}(H_0)$  trou à l'intérieur du bassin considéré  $B(A_2)$ , de même on a trois préimages distinctes de rang 1, qui forment l'ensemble  $K_{-1} = T_2^{-1}(K_0)$  trou à l'intérieur du bassin  $B(A_1)$ . Ensuite, les deux régions  $H_{-1} \in Z_7$  et  $K_{-1} \in Z_7$  ayant une suite infinie de préimages

à l'intérieur du bassin  $B(A_j)$ ,  $j = 1, 2$ , et toutes ces zones sont des trous (ou sont des petites portions de  $B(E_2)$ ), donc un bassin  $B(A_j)$ ,  $j = 1, 2$  est transformé à partir d'un bassin non connexe en un bassin multiplement connexe, constitué par un nombre infini des petits ensembles de  $B(E_2)$  disjoints.

- A partir de  $b = 0.816$  jusqu'à  $b = 0.82$ , on voit qu'il y a un contact de ces deux attracteurs chaotique avec la frontière de son bassin, les bassins d'attraction  $B(A_j)$ ,  $j = 1, 2$  montrent une structure mélangée entre les bassins des cycles d'ordre pair  $2k$ ,  $k = \overline{1.10}$  (voir Figure 3.37), en particulier les bassins de couleur verte  $B(E_2)$  qui est non connexe. Ce contact va transformer les attracteurs chaotique  $A_j$ ,  $j = 1, 2$  en transitoires chaotique, et son bassins  $B(A_j)$ ,  $j = 1, 2$  disparaît.
- En continuant à faire varier le paramètre  $b$  de manière continue, et après l'union d'un nombre infini de petits ensembles de  $B(E_2)$ , nous obtenons la bifurcation " $B(E_2)$  non connexe  $\longleftrightarrow B(E_2)$  connexe" voir la Figure 3.38 pour  $b = 1.02$ .



*Fig. 3.31*–  $B(E_2)$  Bassin de couleur verte d'un cycle d'ordre 2,  $B(E_4)$  bassin de couleur rouge d'un cycle d'ordre 4 et  $B(E_8)$  bassin de couleur orange d'un cycle d'ordre 8,  $b = 0.46$ .



*Fig. 3.32*–  $B(E_2)$ ,  $B(E_8)$  et  $B(E_{16})$  Bassin de couleur violette d'un cycle d'ordre 16, pour  $b = 0.478$ .

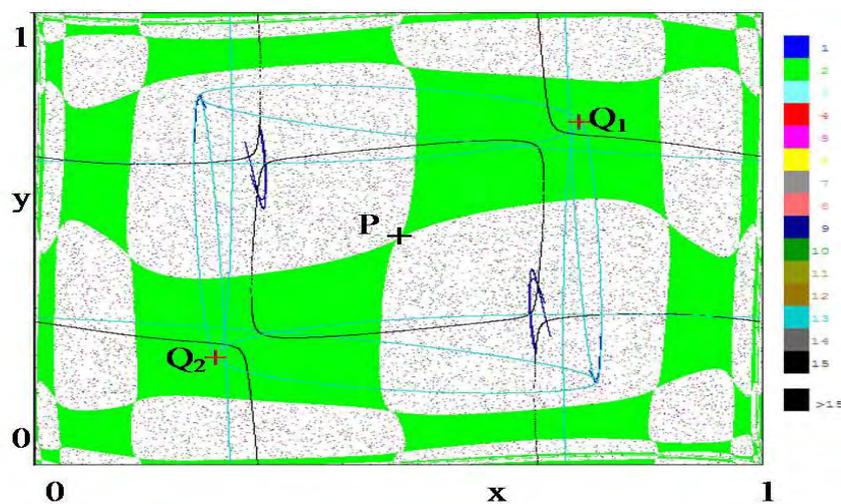


Fig. 3.33 – 4 parties des attracteurs chaotique sont résultent d'une cascade de bifurcations flip de cycles d'ordre  $4 \times 2^i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , pour  $b = 0.55$ .

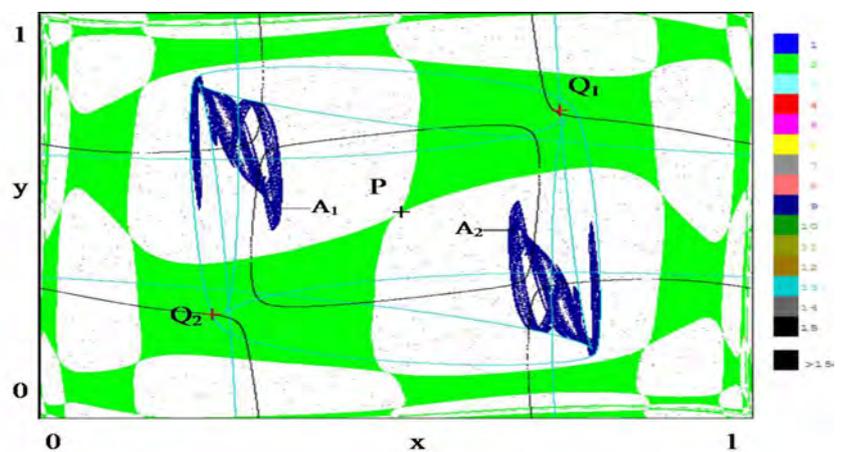


Fig. 3.34– La région non connexe de couleur blanche,  $B(A_j)$ ,  $j = 1, 2$  est le bassin de deux attracteurs chaotique  $A_j$ ,  $j = 1, 2$ , pour  $b = 0.72$ .

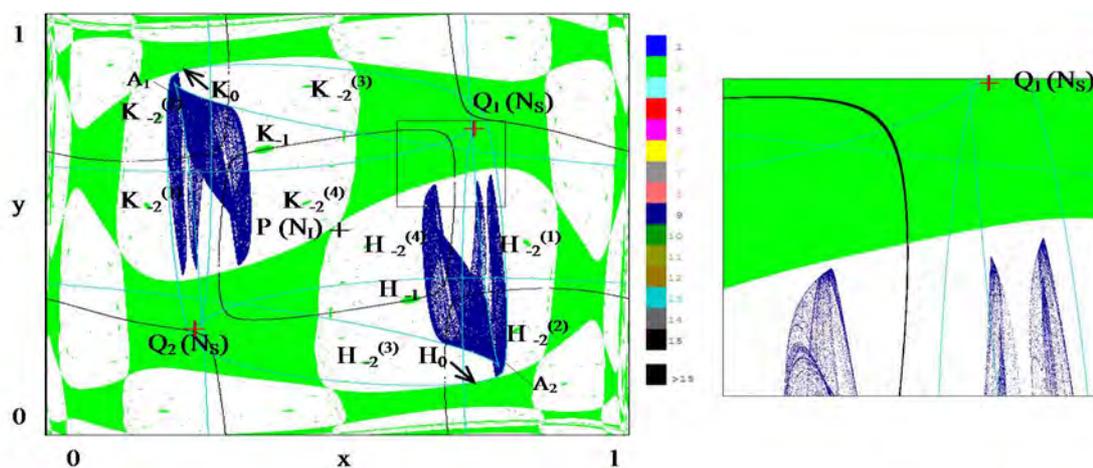


Fig. 3.35— Bifurcation de contact pour  $b = 0.805$  " $B(A_j)$  non connexe  $\longleftrightarrow B(A_j)$  multi-plemment connexe,  $j = 1, 2$ ".

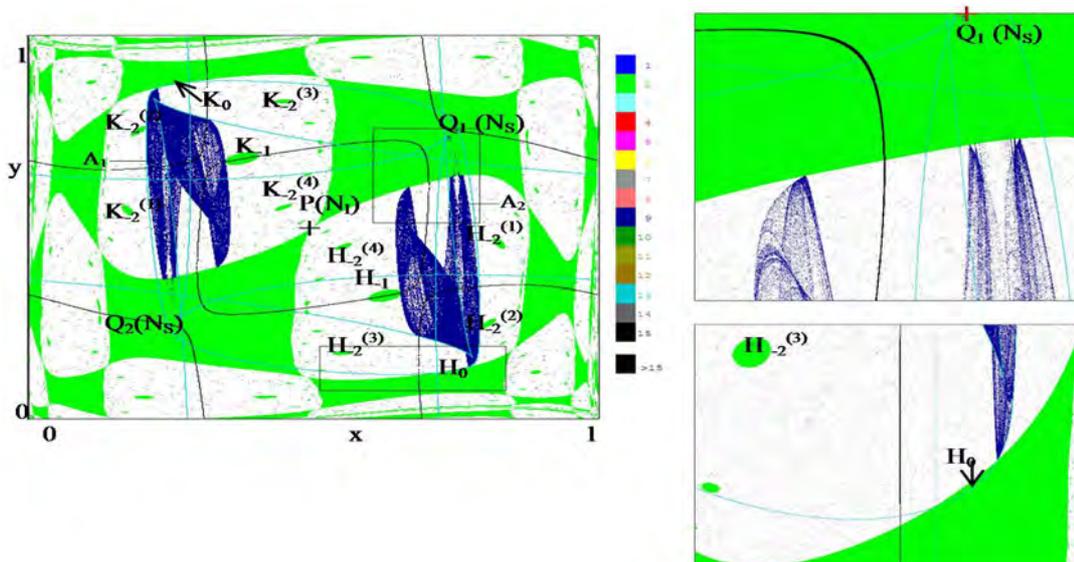


Fig. 3.36—  $B(E_2)$  non connexe,  $B(A_j)$  multi-plemment connexe,  $j = 1, 2$ , contact de deux attracteurs chaotique  $A_j$  avec la frontière de  $B(A_j)$ ,  $j = 1, 2$ , ici  $b = 0.815$ .

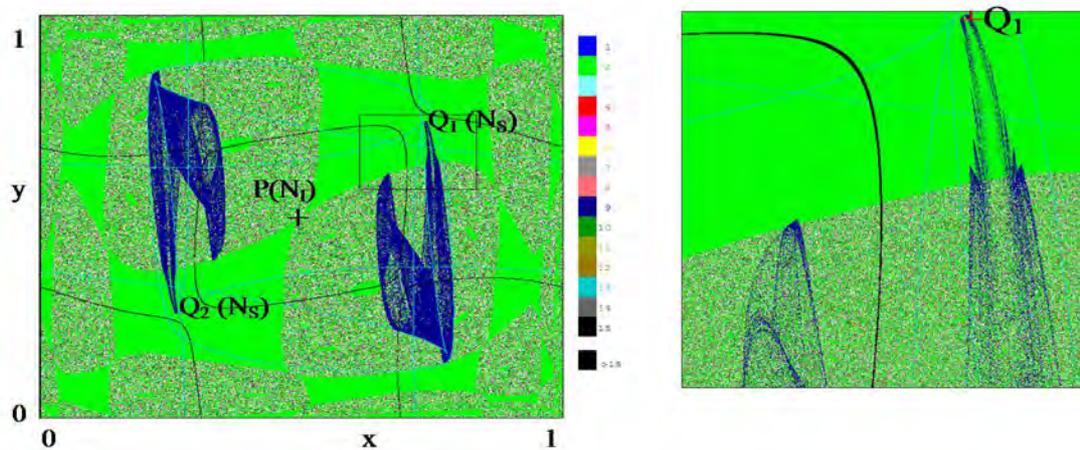


Fig. 3.37— Après le contact,  $B(A_j)$ ,  $j = 1, 2$  montrent une structure mélangée entre les bassins de cycles d'ordre pair  $2k$ ,  $k = \overline{1, 10}$ , les attracteurs chaotique  $A_j$ ,  $j = 1, 2$  deviennent des transitoires chaotique, pour  $b = 0.82$ .

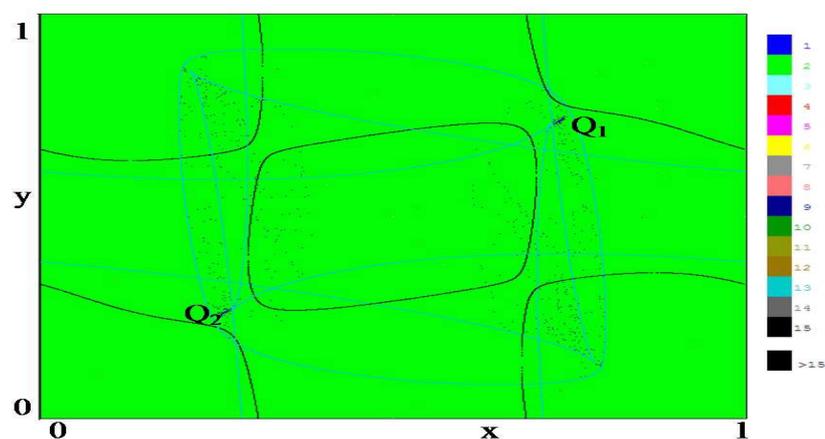


Fig. 3.38— La disparition de  $B(A_j)$ ,  $j = 1, 2$ , et  $B(E_2)$  devient connexe, la bifurcation " $B(E_2)$  non connexe  $\longleftrightarrow$   $B(E_2)$  simplement connexe" pour  $b = 1.02$ .

Dans le cas où  $0 < c = 0.7 < 1$ , et dans le diagramme de bifurcation, nous avons trouvé successivement

"bassin non connexe  $\longleftrightarrow$  bassin multiplement connexe" et

"bassin non connexe  $\longleftrightarrow$  bassin simplement connexe".

**3) Pour la transformation  $T_3$  (cas 3 :  $c = 1$ ) :**

Dans le cas où la transformation de couplage non symétrique et unidirectionnel, nous pouvons analyser la structure des bassins,  $B(E_2)$  et  $B(A_j)$ ,  $j = 1, 2$ , bassin de couleur verte d'un cycle d'ordre 2 stable,  $E_2$  et bassin d'un deux attracteurs chaotique  $A_j$ ,  $j = 1, 2$  respectivement. Nous pouvons caractériser les bifurcations qui provoquent leurs changements qualitatifs lorsque le paramètre de couplage  $b$  varie dans le sens croissant de la valeur 0.83 à la valeur 1.42.

– Partons d'une situation dans laquelle les deux bassins  $B(E_2)$  et  $B(A_j)$ ,  $j = 1, 2$ , sont non connexes, comme celui montré dans la Figure 3.39, obtenu pour  $b = 0.83$ ; la bifurcation de contact de la frontière des bassins  $B(E_2)$  et  $B(A_j)$   $j = 1, 2$  avec les branches des courbes critiques notées  $LC^{(3)'}$  et  $LC^{(4)'}$ , va conduire à  $B(E_2)$  et  $B(A_j)$ ,  $j = 1, 2$  multiplement connexe. Cela est montré numériquement dans la Figure 3.40 pour  $b = 0.86$ , c'est à dire relié avec des trous (des petits bassins ou bien lacs)  $H_i$ ,  $K_i$ ,  $U_i$  et  $V_i$  ( $i = \dots, -2, -1$ ). Juste après la bifurcation de contact, deux portions de  $B(E_2)$ ,  $H_0 \in Z_5$  et  $K_0 \in Z_5$ , délimitées par  $LC^{(4)'}$  et  $LC^{(3)'}$  respectivement. Ainsi on a cinq préimages distinctes de rang 1, qui forment  $H_{-1} = T_3^{-1}(H_0)$ , et cinq préimages distinctes de rang 1, qui forment  $K_{-1} = T_3^{-1}(K_0)$ , les ensembles  $K_{-1} \in Z_7$  et  $H_{-1} \in Z_7$  sont des trous à l'intérieur du bassin  $B(A_j)$   $j = 1, 2$  respectivement.  $H_{-1}$  ayant sept

préimages distinctes, qui forment :  $H_{-2}^{(1)} \in Z_3$ ,  $H_{-2}^{(2)} \in Z_1$ ,  $H_{-2}^{(3)} \in Z_5$ ,  $H_{-2}^{(4)} \in Z_9$ ,  
 et  $K_{-1}$  ayant sept préimages distinctes, qui forment aussi :  $K_{-2}^{(1)} \in Z_3$ ,  $K_{-2}^{(2)} \in Z_1$ ,  
 $K_{-2}^{(3)} \in Z_5$ ,  $K_{-2}^{(4)} \in Z_9$ , et ainsi de suite. Ces préimages sont en nombre infini. Puisque  
 $H_0$  et  $K_0$  sont des parties de  $B(E_2)$  aussi leurs préimages appartiennent à  $B(E_2)$ .

Dans cette situation ( $b = 0.86$ ) nous avons une bifurcation " $B(A_j)$ , ( $j = 1, 2$ ) non  
 connexe  $\longleftrightarrow B(A_j)$ , ( $j = 1, 2$ ) multiplement connexe".

- Ainsi que pour  $b = 0.89$  (Figure 3.41) on voit q'il y a deux portions de  $B(A_j)$ ,  $j = 1, 2$ ,  
 $U_0 \in Z_5$  et  $V_0 \in Z_5$ , délimitées par  $LC^{(4)'}$  et  $LC^{(3)'}$  respectivement. Comme expliqué  
 dans le dernier paragraphe,  $U_0$  et  $V_0$  ayant cinq préimages distinctes de rang 1, qui  
 forment  $U_{-1} = T_3^{-1}(U_0) \in Z_5 \cap Z_7$  et  $V_{-1} = T_3^{-1}(V_0) \in Z_5 \cap Z_7$  respectivement.  $U_{-1}$   
 et  $V_{-1}$  sont des trous à l'intérieur du bassin  $B(E_2)$ , cela signifie que nous avons une  
 bifurcation " $B(E_2)$  non connexe  $\longleftrightarrow B(E_2)$  multiplement connexe".

Encore quelques préimages de rang 1 de  $U_{-1}$  et de  $V_{-1}$  ayant cinq préimages distinctes  
 de rang 2, et les autres préimages ayant sept préimages distinctes de rang 2 forment  
 respectivement  $U_{-2}^{(1)} \in Z_5$ ,  $U_{-2}^{(2)} \in Z_9$  et  $V_{-2}^{(1)} \in Z_5$ ,  $V_{-2}^{(2)} \in Z_9$ .

- Quand le paramètre  $b$  augmente, les lacs se rapprocher des limites extérieure de  $B(E_2)$   
 et  $B(A_j)$ ,  $j = 1, 2$  (voir Figure 3.42 pour  $b = 1.1$ ), vers  $(x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 0.1373$ ,  
 $x_3 = 0.8627, \dots)$ , nous avons plusieurs limites extérieure de  $B(E_2)$  et  $B(A_j)$ ,  $j = 1, 2$ ,  
 on a par exemple plus que trois limites extérieure de  $B(E_2)$  et  $B(A_j)$ ,  $j = 1, 2$ , si  
 $x \in [0, 0.003]$  (Figure 3.43, zoom de Figure 3.42). Nous observons l'union d'un nombre  
 infini de petits ensembles de  $B(E_2)$ ,  $D_1 = H_{-2}^{(1)} \cup H_{-2}^{(2)}$ ,  $D_2 = K_{-2}^{(1)} \cup K_{-2}^{(2)}$ , la structure  
 du bassin devient très compliqué avec des frontières fractales.

- Pour  $b = 1.35$  (Figure 3.45), nouveaux contact de deux attracteurs chaotique  $A_1, A_2$  avec la frontière de ses bassins  $B(A_j), j = 1, 2$ , en conséquence, les bassins d'attractions  $B(A_j), j = 1, 2$ , disparaissent, et les attracteurs chaotique  $A_1, A_2$  se transforment en transitoires chaotique à l'intérieur du bassin  $B(E_2)$ , et le bassin d'un cycle d'ordre 2 stable devient maintenant simplement connexe (Figure 3.46,  $b = 1.42$ ). Ce dernier contact marquera une bifurcation : " $B(E_2)$  multiplement connexe  $\longleftrightarrow B(E_2)$  simplement connexe".

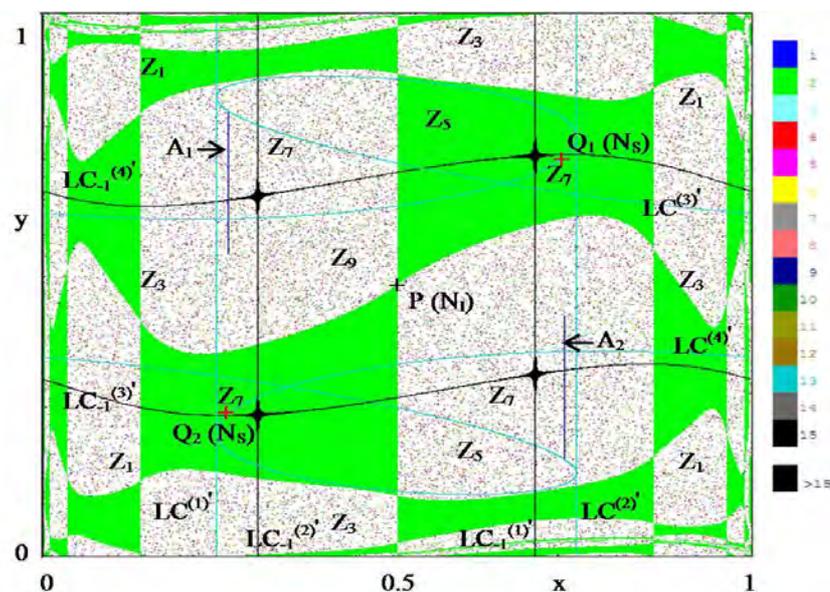


Fig. 3.39– Les deux ensembles  $B(E_2)$  et  $B(A_j), j = 1, 2$  sont des bassins non connexe, pour  $b = 0.83$ .

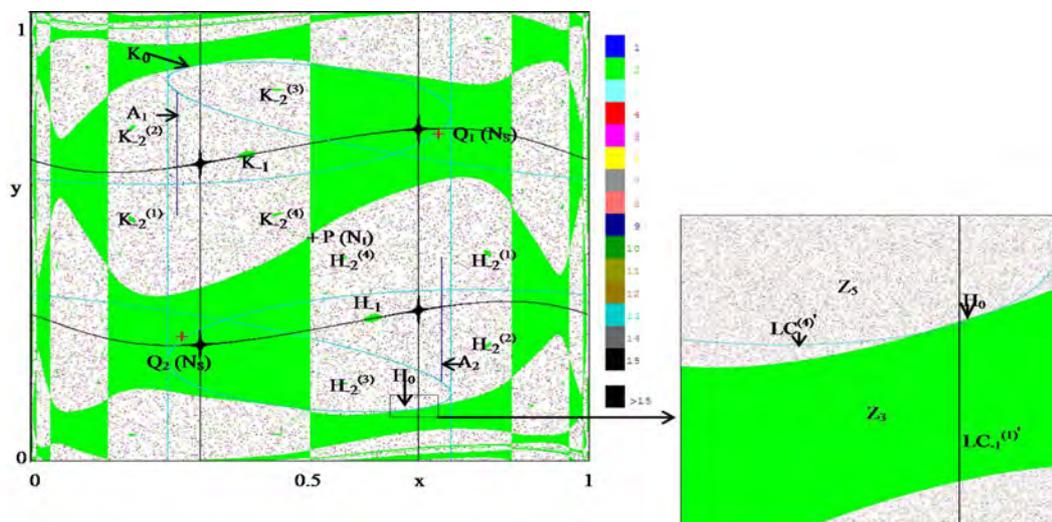


Fig. 3.40–  $B(E_2)$  non connexe,  $B(A_j), j = 1, 2$  devient multiplement connexe après la bifurcation de contact entre les  $B(A_j), j = 1, 2$  et  $LC^{(3)'}, LC^{(4)'}$  respectivement,  $b = 0.86$ .

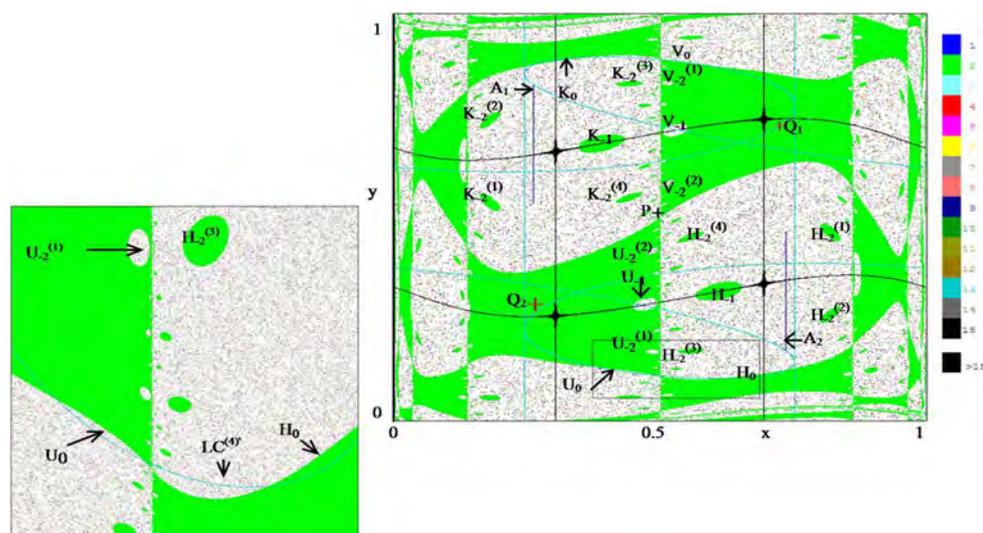


Fig. 3.41–  $B(E_2)$  et  $B(A_j), j = 1, 2$  deviennent multiplement connexe, pour  $b = 0.89$ .

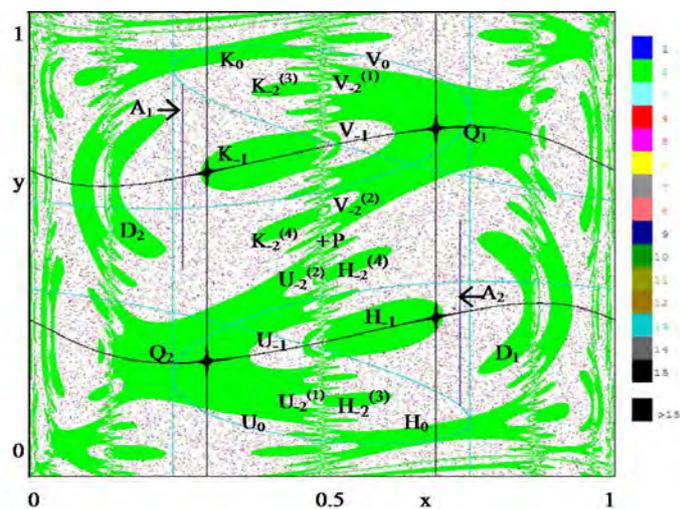


Fig. 3.42– Les trous deviennent plus grands et se rapprochent des limites extérieures de  $B(E_2)$  et  $B(A_j)$ ,  $j = 1, 2$ , la limite extérieure principale est  $x = \frac{1}{2}$ ,  $b = 1.1$ .

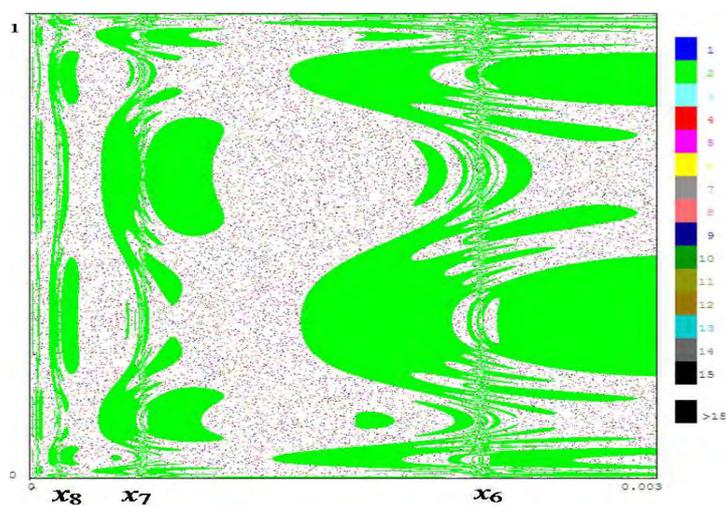


Fig. 3.43– Zoom de Figure (3. 42), pour voir les limites extérieure de  $B(E_2)$  et  $B(A_j)$ ,  $j = 1, 2$ , quand  $x \in [0, 0.003]$ .

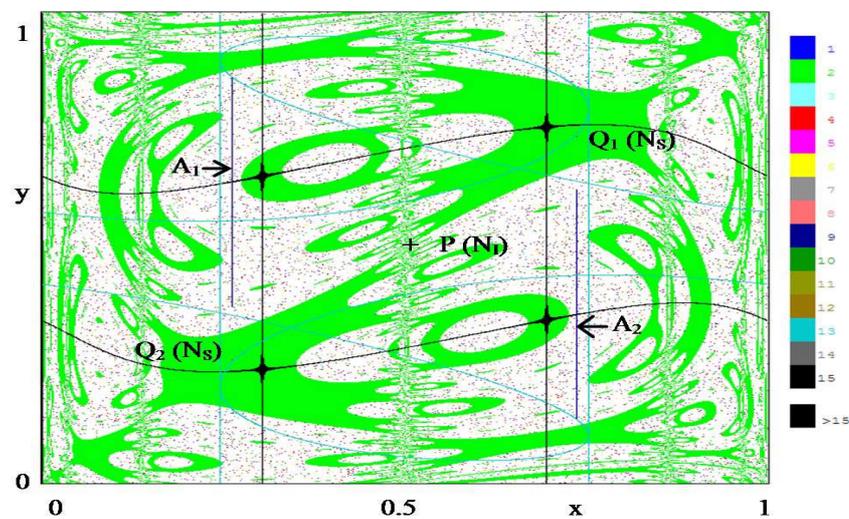


Fig. 3.44– Une suite infinie de préimages des trous, et la structure des bassins devient très compliqué,  $b = 1.24$ .

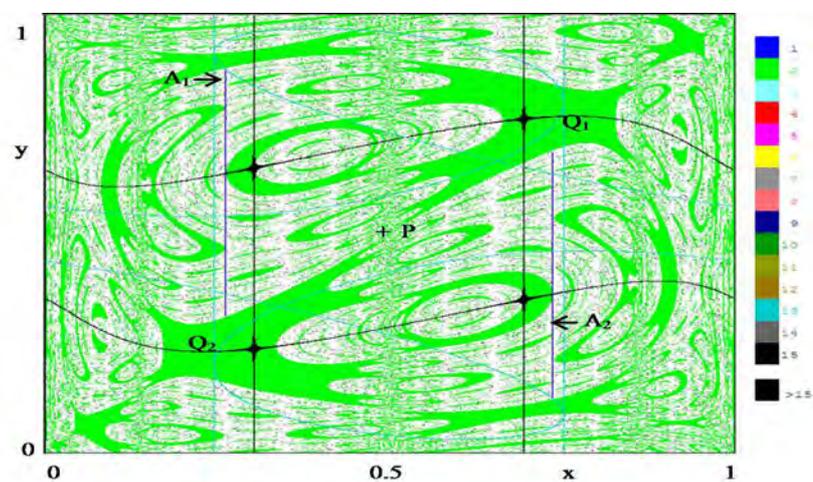
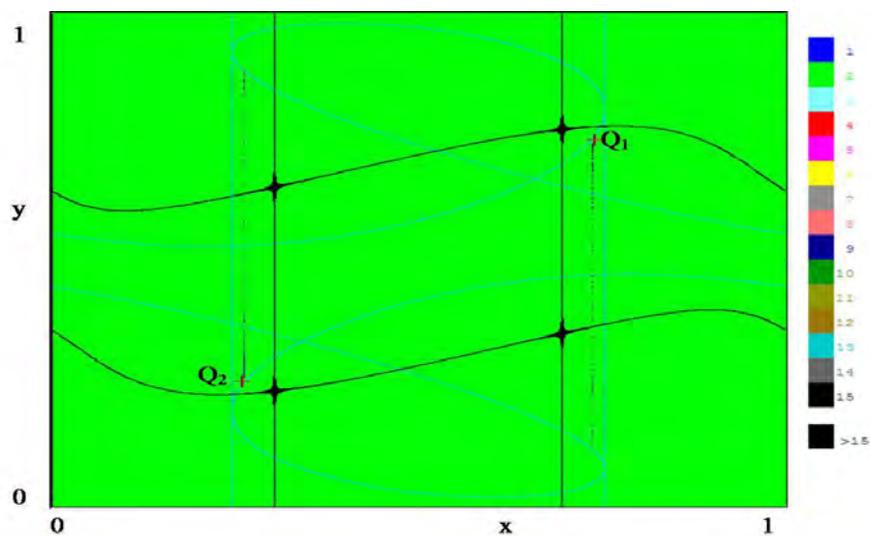


Fig. 3.45– Les bassins d'attraction sont fractales, d'après le contact de deux attracteurs chaotique  $A_1, A_2$  avec les frontières des bassins, pour  $b = 1.35$ .



*Fig. 3.46*–  $B(E_2)$  devient connexe, c'est-à-dire la bifurcation "multiplement connexe  $\longleftrightarrow$  simplement connexe" avec des transitoires chaotique.  $B(A_j)$ ,  $j = 1, 2$  qui ont disparaitre,  $b = 1.42$ .

Dans le cas où  $c = 1$ , et dans le diagramme de bifurcation, nous avons trouvé successives :

"bassin non connexe  $\longleftrightarrow$  bassin multiplement connexe" et

"bassin multiplement connexe  $\longleftrightarrow$  bassin simplement connexe".

### 3.17 Attracteur chaotique et zones absorbantes

Dans la suite de ce chapitre, nous allons montrer quelques attracteurs chaotique pour la transformation  $T$  dans le plan  $(x, y)$ , voir les Figures (3.47(a), 3.48(a), 3.49(a), 3.50(a)), ces attracteurs satisfont aux propriétés d'un attracteur chaotique :

- La sensibilité aux conditions initiales : les attracteurs sont très sensibles aux conditions initiales.
- Les exposants de Lyapunov sont positifs et la dimension est fractale.

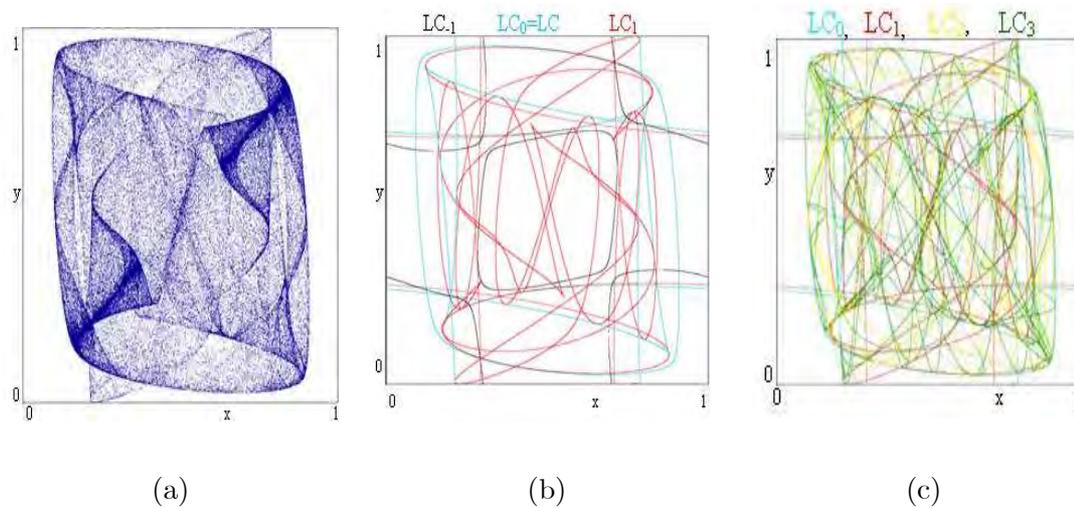
Les exposants de Lyapunov  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2$ ) [39], et la dimension  $d$  de l'attracteur chaotique ont été calculés pour les paramètres correspondants à les Figures (3.47, 3.48, 3.49, 3.50) et sont donnés dans le tableau suivant :

$a$	$b$	$c$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$d$
3	1.213	0	1.3863	0.45364	4.0559
3.6	-0.80	0	1.8245	1.5261	2.1956
3.6	0.81	0.5	1.5261	1.2194	2.2515
3.6	0.81	1	1.5261	1.3323	2.1454

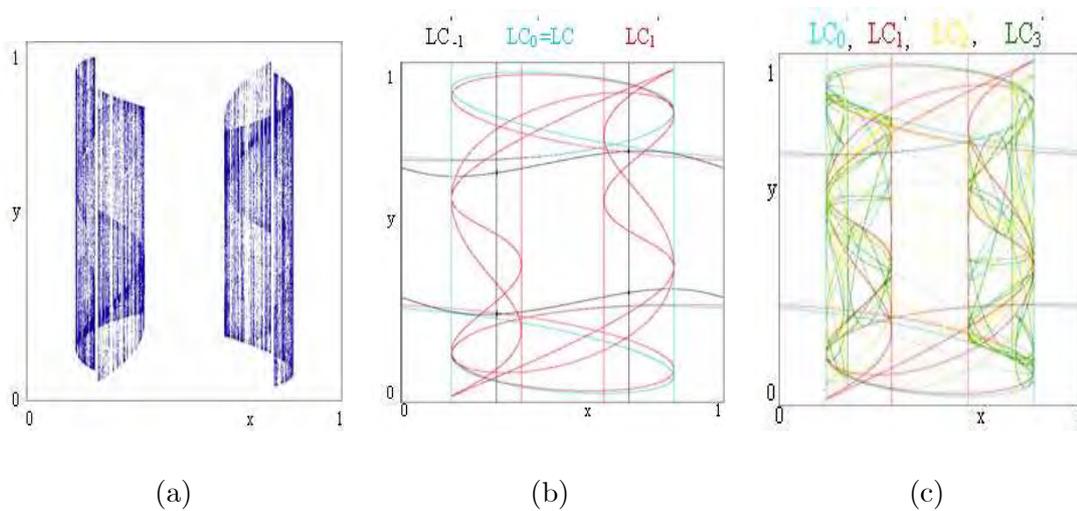
Et comme les exposants sont strictement positifs, les dimension sont fractales (non entière), donc on peut considérer que la présence des attracteurs dans l'espace de phase dans les Figures (3.47(a), 3.48(a), 3.49(a), 3.50(a)) comme des attracteurs chaotique.

Les cinq branches de  $LC_{-1}$  de couleur noir dans les Figures (3.47(b), 3.48(b), 3.49(b), 3.50(b)) inclus à l'intérieur de la zone absorbante (zone chaotique), sont itérées en vue d'obtenir la limite de la zone chaotique. Après quatre itérations, les images des branches de  $LC_{-1}$ , notée par  $LC = LC_0, LC_1, LC_2$  et  $LC_3$  donnent les zones absorbantes (voir Figures 3.47(c), 3.48(c), 3.49(c), 3.50(c)). Alors les  $LC$  sont utilisé pour borner les zones compactes qui agissent comme un domaine borné et absorbant.





*Fig. 3.49*— Attracteur chaotique pour  $a = 3.6$ ,  $b = 0.81$ ,  $c = 0.5$ . Condition initiale  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ .



*Fig. 3.50*— Attracteur chaotique pour  $a = 3.6$ ,  $b = 0.81$ ,  $c = 1$ . Condition initiale  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ .

## Chapitre 4

# Conclusion générale et perspectives

Le travail que nous avons présenté dans cette thèse concerne l'étude d'un système couplée modélisé par des transformations ponctuelles de dimensions deux. Dans le cas particulier où nous considérons un modèle basé sur une fonction sinus, nous avons étudié les types de bifurcation locale (flip, fold, fourche et transcritique) analytiquement et numériquement dans le plan de paramètre  $(a, b)$ , la synchronisation et antisynchronisation des oscillateurs couplés chaotiques. Cette thèse a contribué à développer les travaux initiés depuis quelques années sur les transformations non inversibles.

Nous avons étudié comment l'asymétrie de couplage affecte le mécanisme de bifurcations locales et globales en faisant varier le paramètre de l'asymétrie  $c$ . Les effets de bifurcation pour  $c$  petits sont semblables à ceux dans le cas symétrique de couplage ( $c = 0$ ). Cependant, quand  $c$  augmente, ils changent qualitativement, et finissent par devenir sem-

blables à ceux dans le cas unidirectionnel couplé ( $c = 1$ ).

Et ce travail est composé de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté les notions fondamentales et les outils nécessaires à la compréhension et à l'étude des transformations ponctuelles. Nous avons considéré les deux espaces fondamentaux suivants :

- L'espace d'état (de phase), en ce qui concerne les définitions des courbes invariantes, attracteurs chaotiques, bassins d'attraction et variétés critiques ;
- L'espace paramétrique, en ce qui concerne les types classiques de bifurcations locales (flip, fold, fourche et transcritique).

Nous avons consacré le chapitre deux à l'études analytiques de la récurrence couplée, ceci nous a permis d'établir les équations définissant les courbes de bifurcations pour les points fixes, les courbes de bifurcations des cycles d'ordre deux étant déterminées uniquement numériquement. De même, ceci nous a permis d'établir les équations définissant les points noeuds paramétriques avec multiplicateurs  $S_1 = -S_2 = 1$ .

Nous avons remarqué, qu'il était possible, grâce aux propriétés de symétrie du modèle, de restreindre notre étude dans le plan des paramètres.

Enfin, dans le troisième chapitre, nous avons construit les courbes invariantes associées aux points cols et nous avons analysé les conséquences de la présence des lignes critiques sur les variétés invariantes et les bassin d'attraction, nous avons mis en évidence la modification des bassins d'attraction due à la présence des lignes critiques par variation du paramètre de l'asymétrie  $c$ . Et nous avons montré que les attracteurs chaotiques sont bornés et inclus à l'intérieur de la zone absorbante. Les résultats de ce chapitre sont obtenus

dans le plan de phase  $(x, y)$ .

Il va sans dire que le thème de la présente recherche est loin d'être épuisé et qu'il reste bien beaucoup de problématiques à soulever et de points à développer.

- A titre de suggestion, nous proposons pour le deuxième chapitre de la présente thèse de se pencher sur le point traitant le feuilletage du plan des paramètres  $(a, b)$  par variation de paramètre  $c$ ,  $c = 0$ ,  $c = 1$  et  $0 < c < 1$ .
- Pour le troisième chapitre, approfondir la réflexion sur le feuilletage du plan de phase  $(x, y)$  par variation de paramètre  $c$ ,  $c = 0$ ,  $c = 1$  et  $0 < c < 1$ .
- Et en fin, étudier avec plus de détails la synchronisation et désynchronisation.

# Bibliographie

- [1] Agliari A., Bischi G.I., Gardini L., "3 Some Methods for the Global Analysis of Dynamic Games Represented by Iterated Noninvertible Maps". Voir site bischiweb : [www.econ.univerb.it / bischi / bischiweb.htm](http://www.econ.univerb.it/bischi/bischiweb.htm).
- [2] Alexander, J. C., Yorke, J. A., You, Z. and Kan, I. "Riddled basins" *Int. J. Bif. Chaos* 2 : 795 (1992).
- [3] Alexander J. C., Hunt B. R., Kan I. , and Yorke J. A., "Intermingled basins of the triangle map," *Ergod. Th. Dyn. Syst.* 16, 651–662, (1996).
- [4] Arnold. V. I. "Lecture on bifurcations and versal systems", *Russ Maths. Surveys* 72, 54 (1972).
- [5] Ashwin P. Breakspear M. "Anisotropic properties of riddled basins ", *Physica. Lett. A* 280, 139 -145 (2001).
- [6] Ashwin P. "Riddled basins and coupled dynamical systems" *Lect. Notes Phys.* 671, 181-207 (2005).
- [7] Ashwin P. J. Terry, "On riddling and weak attractors", *Physica. D* 142 87-100 (2000).
- [8] Barugola A. "Quelques propriétés des lignes critiques d'une récurrence du second ordre

- à inverse non unique. détermination d'une zone absorbante, r.a.i.r.o." Numerical Analysis, vol. 18, no. 2, pp. 137–151, (1984).
- [9] Bischi G.I., Gardini L. and Mira C. "Basin fractalizations generated by a two-dimensional family of  $(Z_1 - Z_3 - Z_1)$  map" International Journal of Bifurcations and Chaos, vol. 16, n.3 647-669 (2006).
- [10] Bischi G.I., Mammama C., Gardini L., "Multistability and cyclic attractors in doupoly games" Chaos, Solitons and Fractals, 11, pages 543-564, (2000).
- [11] Bischi G.I., Gardini L. "Role of invariant and minimal absorbing areas in chaos synchronization", Physica. Rev. E 58 5710- 5719 (1998).
- [12] Bischi G.I. Lamantia F. "Coexisting Attractors and complex Basins in Discrete-time Economic Models", Voir site bischiweb : [www.econ.univerb.it / bischi / bischiweb.htm](http://www.econ.univerb.it/bischi/bischiweb.htm).
- [13] Broer H. W. "The how and what of chaos" Naw 5/1, no. 1, mars (2000).
- [14] Cao Y., "A not about Milnor attractor and riddled basin" Chaos, Solitons and Fractals 19, 759-764 (2004).
- [15] Cathala J.C. Kawakami H. Mira C. , "Singular points with two multipliers  $S_1 = -S_2 = +1$  in the bifurcation curves of maps", Int. J. Bifurcation and chaos, Vol. 2, No. 4, 1001-1004 (1992).
- [16] Cracasses J.P., "Sur quelques structures complexes de bifurcations de systèmes dynamiques". thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, (1990).
- [17] Cracasses J.P. Kawakami H. "Existence of a cusp point on a fold bifurcation curve and stability of the associated fixed point. case of an n-dimensional map". International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 9, No. 5, pages 875-894, (1999).

- [18] Cuomo K. M. and Oppenheim A. V. "Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications" *Phys. Rev. Lett.* 71, 65-68, (1993).
- [19] Dinar S. Étude des bifurcations d'une équation non autonome de Duffing-Rayleigh et d'un modulateur MICDIF. PhD Thèse, Université Paul Sabatier de Toulouse, n01673, février (1994).
- [20] Dieci, R. , Bischi G.I. , Gardini L. , "From bi-stability to chaotic oscillations in a macroeconomic model", *Chaos, Solitons & Fractals*, 5(12), 805-822 (2001).
- [21] Farmer J.D., "The Dimension of Chaotic Attractors", North-Holland Publishing Company *Physica* 7D p. 153-180, (1983).
- [22] Fournier-Prunaret D. Mira C. Gardini L. "Some contact bifurcations in two-dimensional examples", in *Grazer Mathematische Berichte* (special issue Proceedings ECIT94), N.334, 77-96 (1997).
- [23] Fournier-Prunaret D. , Ruiz R. L "Basin bifurcation in a two-dimensional logistic map" *arXiv : nlin/0304059v1 [nlin. CD]* 29 Apr (2003).
- [24] Fujisaka H. and Yamada T. "Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems" *Progr. Theor. Phys.* 69, 32-46, (1983).
- [25] Gardini L. Abraham R. and Ronald J. Record, Fournier-Prunaret D. "A DOUBLE LOGISTIC MAP", *Int. J. Bifurcation and chaos*, World Scientific Publishing Company, Vol. 4, No. 1, 145-176, (1994).
- [26] Guckenheimer J. and Holmes P., "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields", Springer, New York (1983).

- [27] Gumowski I. and Mira C. "Dynamique Chaotique, transformations ponctuelles, transition ordre désordre" (Ed. Cépadues, Toulouse) (1980).
- [28] Hadamard J. "Sur l'itération et solutions asymptotiques des équations différentielles". Bull. Soc. Math. France 29, pp. 224-228 (1901).
- [29] Hamri N. E. , Soula Y. "Basins and critical curves generated by a family of two-dimensional sine maps", Electronic Journal of Theoretical Physics, EJTP 7, No. 24, 139-150, (2010).
- [30] Kapitaniak T., Maistrenko Y.L., Stefanski A. , Brindley J. "bifurcations. from locally to globally riddled basins", Phys. Rev, E 57 R 6253- R6256 (1998).
- [31] Kocarev L., Halle K. S., Eckert K., Chua L. O., and Parlity U., "Transmission of Digital signals by chaotic synchronization" Int. J. Bifurc. Chaos, Appl. Sci. Eng. 2, 973-977, (1992).
- [32] Lattes S. "Sur les équations fondamentales qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation". Ann. di Matematica. (3) 13, pp. 1-137 (1906).
- [33] Lorentz E. N. "Deterministic non periodic flows" J. Atmos. Science. v. 20. pp. 130-141, (1963).
- [34] Maistrenko, V. L., Maistrenko, YU. L. & Mosekilde E. "Chaotic synchronization and antisynchronization in coupled sine maps". Int. J. Bifurcation and chaos Vol. 15, No 7, 2161-2177, (2005).
- [35] Maistrenko Yu. L., Maistrenko V. L., Popovich A. and Mosekilde E. "Transverse instability and riddled basins in a system of two coupled logistic maps" Phys. Rev. E57, 2713-2724, (1998).

- [36] Yu. L. Maistrenko, V.L. Maistrenko, A. Popovich, E.Mosekilde. "Role of the absorbing area in chaotic synchronization", *Physica, Rev, Lett*, 80, 1638-1641, (1998).
- [37] May R. M. "Biological populations with non overlapping generations". *Science*. vol. 126, pp. 645-648, (1974).
- [38] May R. M. "Simple mathematical models with very complicated dynamics" *Nature*. vol. 261. june 10. (1976).
- [39] Millerioux. G, "Modèles par transformation non inversibles et application à la sécurité des communications synchronisation du chaos", thèse de doctorat de l'Insa Toulouse (1997).
- [40] Milnor J., "On the concept of attractor", *Comm. Math. Phys.* 99 p. 177 – 195, (1985).
- [41] Mira C., "Chaotic dynamics", Word scientific Publishing. Co. Pte. Ltd (1987).
- [42] Mira C. Gardini L. Barugola A. et Catala J.C., "Chaotic Dynamics in Two-Dimensional Noninvertible Maps", World Scientific Publishing, Singapore, series A, vol. 4, (1996).
- [43] Mira C. , Fournier-Prunaret D. , Gardini L. , Kawakami H. and Cathala J.C., "Basin bifurcations of two-dimensional noninvertible maps : fractalization of basins" *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol.4, No.2, 343-381, (1994).
- [44] Mira C. et Narayaninsamy T. "On Two Behaviours of Two-Dimensional Endomorphisms : Role of the Critical Curves", *International Journal of Bifurcations and Chaos*, vol. 3, No. 1, p. 187-194, (1993).
- [45] Mira C. "Détermination pratique du domaine de stabilité d'un point double d'une récurrence non-linéaire du deuxième ordre à variables réelles. *C. R. Acad. Sc., Paris*. t. 261. p. 5314-5317; Groupe 2. (1964).

- [46] Mira C. , Carcasses J.P., Millerioux G. and Gardini L. "Plane foliation of two dimensional noninvertible maps". *International Journal of Bifurcation & Chaos*, vol.6 (8), 1439-1462, (1996).
- [47] Oraevskij A. I. and Uspenskij A. V. "Travaux F.I.A.N." *Kvantovaja. Radiofisica.* t. 31. p.96, (1965).
- [48] Ott E., Sommerer J. C., Alexander J. C., Kan I., and Yorke J. A. "The transition to chaotic attractors with Riddled Basins", *Physica D* 76 : 384 (1994).
- [49] Pecora L. Ditto W. "la maîtrise du chaos" *Pour la Science*, N. 192, Octobre (1993).
- [50] Roubellat F. "Contribution à l'étude des solutions des récurrences non-linéaires et applications aux systèmes à données échantillonnées". Thèse de doctorat ès Sciences Physiques. Toulouse. 26 sept. (1969).
- [51] Ruelle D., "Small Random Perturbations of Dynamical Systems and the Definitions of attractors", *Comm. Math. Phys.* 82, 137 – 151, (1981).
- [52] Taborev A.V., Maistrenko Y.L. , Mosekilde E. " Partial synchronization in a system of coupled logistic maps". *Int. J. Bifurcation and Chaos* 10, 1051-1066 (2000).
- [53] Takana G., Sanjuan M. A. F., Aihara K., "Crisis-induced interminttency in two coupled chaotic map : Towards understanding chaotic itinerancy" *Physical Review E*, Vol. 71, 016 219-1-11, N, 192, Octobre (2005).
- [54] Williams R.F., "The Zeta Fonction of an Attractor" *Conference on the Topology of Manifolds*, ed. J.G.Hocking, Prindle Weber Schmidt, Boston (1968).
- [55] Zakalyukin V. M. "Bifurcations of wave-fronts depending on one parameter". *FAP* 10 : 2, 69-70; *FAA* 10, 139-140, (1976).

## 4.1 Résumé, mots-clés

### Résumé :

Cette thèse présente les résultats de l'étude théorique d'un système pouvant produire du chaos. Le système est modélisé par une transformation couplée (notées  $T$ ) à deux dimensions basée sur une fonction sinus.

Dans cette étude nous analysons d'abord la stabilité, les bifurcations du système (bifurcation fold et flip lorsqu'un des multiplicateurs associé au cycle d'ordre  $k$  traverse la valeur  $+1$  et  $-1$  respectivement), les attracteurs et leurs bassins d'attraction. Ensuite par des méthodes analytico-numériques, nous construisons les variétés invariantes passant par des points de type col. La transformation étant non inversible ( $TNI$ ), nous déterminons également les lignes critiques ( $LC$ ) du système.

Le premier chapitre de ce mémoire est consacré au rappel d'un certain nombre de notions élémentaires concernant les transformations ponctuelles, puis à la définition de notions plus spécifiques (courbes invariantes, bassins d'attraction, et lignes critiques). Des rappels concernant les bifurcations classiques (fold ou pli, transcritique ou échange de stabilité, fourche et flip) sont données.

Le deuxième chapitre, nous avons effectué une étude mixte, théorique et numérique, pour la transformation couplée  $T_{(a,b,c)}$ , qui génère des structures très complexes, nous avons utilisé principalement une technique numérique pour déterminer les structures global de bifurcation avec domaine de stabilité dite "Balayage" et un programme numérique (Fortran), pour tracer les courbes de bifurcation dans le plan paramétrique  $(a, b)$  lorsque le troisième paramètre  $0 \leq c \leq 1$  varie.

Dans le troisième chapitre, nous étudions la même transformation  $T_{(a,b,c)}$  dans le plan de phase  $(x, y)$ , nous traitons certains problèmes liés soit à l'existence de courbes invariantes passant par un point fixe col, soit aux bassins d'attraction. Nous exposons les lignes critiques, enfin nous déterminons les régions absorbantes.

Nous avons effectué un programme numérique (Fortran), pour tracer les bassins d'attraction des différentes singularités présentes, ensuite on a fait apparaître et étudier les changements qualitatifs de comportements par variation de paramètres du système.

**Mots-clés :** Chaos, bifurcation, courbe invariante, courbe critique, bassin d'attraction, attracteur chaotique.

**Abstract :**

This thesis presents the results of the theoretical study of a system that produce chaos. The system is modeled by a coupled transformation (denoted  $T$ ) in two dimensions based on a sine function.

In this study, we analyze first the stability; the system bifurcations (fold and flip bifurcation when multipliers associated with the cycle of order  $k$  crosses the value  $+1$  and  $-1$  respectively) attractors and their basins of attraction. Afterwards, with analytical-numerical methods, we construct the invariant varieties passing through points of type col. The transformation is not invertible ( $TNI$ ); we also determine the critical lines ( $LC$ ) of the system.

The first chapter of this thesis is devoted to the recall of a number of elementary notions concerning point transformations, then to the definition of more specific notions (invariant curves, basins of attraction, and critical lines.) Reminders for conventional bifurcations (fold, transcritical or exchange of stability, pitchfork and flip) are given.

In the second chapter, we conducted a joint study, theoretical and numerical, for the coupled transformation  $T_{(a,b,c)}$  which generates very complex structures, we mainly used a numerical technique to determine the global structures of bifurcation with stability domain called "Scan", and a digital program "FORTRAN" to trace the bifurcation curves in the parametric plan  $(a, b)$  when the third parameter  $0 \leq c \leq 1$  varies.

In the third chapter, we study the same transformation  $T_{(a,b,c)}$  in the phase plan  $(x, y)$ ; we treat some problems related to either the existence of invariant curves through a fixed collar point, or to the basins of attraction. We expose the critical lines, and finally

we determine the absorbing zones.

We conducted a digital program "FORTRAN" to trace basins of attraction of different present singularities, then we showed and studied qualitative changes in behavior by varying the system parameters.

**Key-words :** Chaos, bifurcation, invariant curve, critical curve, basin of attraction, chaotic attractor.

## ملخص:

تقدم هذه الأطروحة نتائج الدراسة النظرية لنظام بإمكانه إنتاج فوضى. للنظام متموج نظريا بتحويل مرتبط (معلم ب T) ببعدين يعتمدان على وظيفة جيبيية.

نحلل في هذه الدراسة أولا الاستقرار و تفرعات النظام (تفرع عقدة السرج و تفرع المدة المضاعفة عندما يعبر أحد المضاعفات المرتبط بدورة النظام k من القيمة +1 إلى القيمة -1 على التوالي) و الجاذبات و الأحواض جاذبيتها. ثم نبنى بعد ذلك، و بواسطة طرق تحليلية عددية، الأنواع غير المتغيرة المارة بنقاط الصنف سرج. وبما إن التحويل غير عكسي (TNI) فإننا نحدد أيضا المستقيمات الحرجة للنظام (LC).

يختص الفصل الأول من هذه المذكرة في التذكير ببعض المفاهيم الابتدائية التي تتعلق بالتحويلات النقطية و بعد ذلك بتعريف مفاهيم أكثر تحديدا (منحنيات غير متغيرة، الأحواض الجاذبية، المستقيمات الحرجة) كما نقدم تذكيرا يتعلق بالتفرعات الكلاسيكية (تفرع عقدة السرج المضاعف أو تفرع تبادل الاستقرار، تفرع Fourche و تفرع المدة المضاعفة).

في الفصل الثاني، قمنا بدراسة مختلطة، نظرية و عددية فيما يخص التحويل المزدوج  $T_{(a,b,c)}$  الذي يتولد عنه بنيات معقدة جدا، وقد استخدمنا في الأساس تقنية رقمية من أجل تحديد البنية الشاملة للتفرع مع مجال استقرار يدعى "المسح" وكذا برنامجا رقميا (فورتران) من أجل رسم منحنيات التفرع في المعلم  $(a,b)$  عندما يتغير المؤشر الثالث  $0 \leq c \leq 1$ .

في الفصل الثالث، درسنا نفس التحويل  $T_{(a,b,c)}$  في المعلم  $(x,y)$ ، نعالج بعض الإشكاليات المرتبطة إما بوجود منحنيات غير متغيرة مارة بنقطة السرج الثابتة أو مرتبطة بمجال الجاذبية نعرض المستقيمات الحرجة، وفي الأخير نحدد المناطق الماصة.

لقد طبقنا برنامجا رقميا (فورتران) لرسم الأحواض الجاذبة لمختلف الفريديات الحاضرة، ثم برهنا و درسنا التغيرات النوعية في السلوكيات بتغير مؤشرات النظام.

**الكلمات المفتاحية :** الفوضى ، التفرعات، منحنيات غير متغيرة، المستقيمات الحرجة، الأحواض الجاذبية، الجاذبات الفوضوية.