



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

N° d'ordre: 97 / DS / 2014

N° de série: 07 / MAT / 2014

THÈSE

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ CONSTANTINE 1

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Présentée par

HOUMOR Tarek

Analyse du Chaos dans un Système d'Équations Différentielles Fractionnaires

Soutenue le 30/09/2014

Composition du jury :

- | | | |
|----------------|---|-------------------|
| - A.L MARHOUNE | Professeur, Université Constantine 1 | Président |
| - N. HAMRI | Professeur, Centre universitaire de Mila | Rapporteur |
| - E. ZERAOULIA | Professeur, Université de Tebessa | Examineur |
| - K. HAOUAM | Maître de conférences, Université de Tebessa | Examineur |
| - M. DEGHDAK | Professeur, Université Constantine 1 | Examineur |
| - S. BENHADID | Maître de conférences, Université Constantine 1 | Examineur |

Remerciements

Je pense en premier lieu à Mr Nasr-Eddine HAMRI, professeur au département de mathématiques du centre universitaire de Mila que je remercie énormément pour avoir encadré ce travail de thèse avec ces précieux conseils et beaucoup de compétence et de disponibilité.

Merci monsieur pour vos conseils et la confiance que vous m'avez accordée au cours de ces années.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers les membres de jury pour leur disponibilité :

Mr Ahmed Lakhdar Marhoune, professeur au département de mathématiques, université Constantine1 qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.

Messieurs le professeur ElHadj Zeraoulia et le docteur Kamel Haouam, du département de mathématiques de l'université de Tebessa ont accepté de lire, commenté et écrire des rapports sur cette thèse. Je les en remercie et leur exprime ma profonde reconnaissance.

Je remercie vivement messieurs le professeur Messaoud Deghdak et le docteur Samir Benhadid du département de mathématiques de l'université Constantine1, pour m'avoir fait l'honneur de faire partie du jury.

Mes remerciements vont aussi à toutes les personnes du département de mathématiques de l'université Constantine1.

Dédicaces

A ma très chère femme **Lynda**, pour la patience et le soutien dont elle a fait preuve pendant toute la durée de cette thèse.

A mes enfants **Mohammed** et **Djihène**.

A toute ma famille.

A la mémoire de mon père.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Éléments de Calcul Fractionnaire	3
1 Aperçu historique	4
2 Exemples d'application des systèmes fractionnaires	9
2.1 Automatique	9
2.2 Électricité	10
2.3 Thermique : Diffusion et équation de la chaleur	11
2.4 Acoustique	12
2.5 Mécanique des milieux continus	12
2.6 Electrochimie	13
3 Bases mathématiques du calcul fractionnaire	15
3.1 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire	15
3.1.1 La fonction Gamma	15
3.1.2 La fonction Mittag-Leffler	16
3.2 La transformée de Laplace	16
4 Définitions et propriétés	18
4.1 Intégrales fractionnaires	18
4.1.1 Intégrale de Riemann-Liouville	18
4.2 Dérivées fractionnaire	21
4.2.1 Dérivées de Riemann-Liouville, Liouville et Caputo	21
4.2.2 Dérivées de Grünwald-Letnikov	23
4.3 Propriétés des opérateurs fractionnaires	25
5 Conclusion	30

2	Équations Différentielles Fractionnaires	31
1	Quelques résultats d'existence et d'unicité	32
1.1	Équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville	33
1.2	Équation différentielle fractionnaire de type Caputo	37
2	Équation différentielle fractionnaire linéaire	41
3	Stabilité des équations différentielles fractionnaires	43
3.1	Méthode indirecte (Linéarisation)	43
3.2	Extension au cas fractionnaire de la méthode directe de Lyapounov	45
4	Résolution numérique des équations différentielles fractionnaires	47
4.1	La méthode des différences fractionnaires de Grünwald-Letnikov	47
4.2	La méthode décompositionnelle d'Adomian (ADM)	49
4.3	La méthode d'itération variationnelle (VIM)	50
4.4	La méthode d'Adams-Bashforth-Moulton fractionnaire	51
4.4.1	Formulation Classique	51
4.4.2	Formulation Fractionnaire	53
4.4.3	Propriétés de l'Algorithme	55
5	Conclusion	56
 3	 Détection et Analyse du Chaos	 58
1	Quelques Définitions	59
1.1	Le chaos	59
1.2	Le déterminisme	60
1.3	La dynamique non-linéaire	61
1.4	Espace des phases et section de Poincaré	62
2	Caractérisation du chaos	65
2.1	Sensibilité aux conditions initiales	65
2.2	L'Attracteur Étrange	67
2.3	Diagramme de Bifurcation	73
3	Outils d'analyse et de quantification du chaos	75
3.1	Exposants de Lyapounov	75
3.1.1	Cas d'un système d'équations différentielles ordinaires	75
3.1.2	Cas d'un système d'équations différentielles fractionnaires	78
3.2	Le fer à cheval topologique	80
3.3	Le test 0-1 pour détecter le chaos	82
3.3.1	Description du test	82

3.3.2	Avantages du test	84
4	Conclusion	84
4	Analyse du Chaos dans les Équations Non-linéaires de Bloch Fractionnaires	85
1	Les équations de Bloch	86
2	Les équations non-linéaires de Bloch	87
2.1	Les points fixes et leur stabilité	89
2.2	Comportement chaotique et attracteurs étranges	90
2.3	Transition vers le chaos	92
3	Les équations de Bloch d'ordre fractionnaire	93
4	Les équations non-linéaires de Bloch d'ordre fractionnaire	97
4.1	Une condition nécessaire pour le chaos	97
4.2	Étude des ENB fractionnaires avec la configuration (I)	98
4.3	Étude des ENB fractionnaires avec la configuration (II)	101
4.4	Le fer à cheval topologique dans les ENB fractionnaires	101
4.5	Le test 0-1 pour détecter le chaos dans les ENB fractionnaires	109
5	Synchronisation du chaos dans les ENB fractionnaires	109
6	Conclusion	115
	Conclusion générale et perspectives	117
	Annexe A	119
1	Théorèmes du point fixe	119
1.1	Théorème du point fixe de Weissinger	119
1.2	Théorème du point fixe de Banach	119
1.3	Théorème du point fixe de Schauder	120
1.4	Théorème d'Arzelá-Ascoli	120
	Annexe B	121
1	Programme MATLAB	121
	Bibliographie	123

Introduction générale

LE BUT DU CALCUL FRACTIONNAIRE est de généraliser les dérivées traditionnelles à des ordres non-entiers. Comme il est bien connu, beaucoup de systèmes dynamiques sont mieux caractérisés par un modèle dynamique d'ordre fractionnaire, basé en général sur la notion de différentiation ou d'intégration de l'ordre non-entier. L'étude des systèmes d'ordre fractionnaire est plus délicate que pour leurs homologues d'ordre entier. En effet, les systèmes fractionnaires sont, d'une part, considérés comme des systèmes à mémoire, notamment pour la prise en compte des conditions initiales et d'autre part ils présentent une dynamique beaucoup plus complexe.

Le calcul traditionnel étant basé sur la différentiation et l'intégration d'ordre entier, le concept de calcul fractionnaire a le potentiel énorme de changer la manière dont nous voyons, modélisons, et commandons la "nature" autour de nous. Plusieurs études théoriques et expérimentales montrent que certains systèmes électrochimiques [1], thermiques [2] et viscoélastiques [3] sont régis par des équations différentielles à dérivées non-entières. L'utilisation de modèles classiques basés sur une dérivation entière n'est donc pas appropriée. Par ce fait, des modèles basés sur des équations différentielles à dérivées non-entières ont été développés [4].

Les origines du calcul fractionnaire remontent à la fin du 17^{ème} siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral, mais ce n'est que lors des trois dernières décennies que le calcul fractionnaire a connu le plus d'intérêt et les applications des dérivées fractionnaires se sont le plus diversifiées.

Le **chaos** est la deuxième notion-clé sur laquelle se base cette thèse. La théorie des systèmes dynamiques a pour but initial la description du mouvement d'un objet comme celui d'une planète ou d'une particule, représenté, en temps continu, par une équation différentielle autonome ou bien, en temps discret, par une application que l'on itère. Elle tient ses origines de la mécanique céleste, avec le travail fondateur de Henri Poincaré motivé par la question de la stabilité du système solaire, qu'il élabora dans son mémoire "*Sur le problème des trois corps et les équations de*

la dynamique" paru en 1890. Sa première découverte fut de réaliser que décrire un mouvement en cherchant à résoudre son équation différentielle associée était une démarche complètement illusoire, une telle solution étant en général impossible à calculer. Dans ses deux traités majeurs "*Sur les courbes définies par une équation différentielle*" et "*Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*" (publiés respectivement entre 1881 et 1886, et entre 1892 et 1899), il a donc développé une théorie qualitative des équations différentielles basée sur une approche géométrique (plutôt que sur une approche quantitative) et focalisant sur l'ensemble des trajectoires d'une équation donnée (plutôt que sur une solution particulière). On y découvre notamment la notion essentielle d'application de premier retour, qui permet le passage d'un système dynamique à temps continu à un système à temps discret.

L'étude des systèmes chaotiques s'est développée à partir des années 1970, grâce notamment à l'informatique. Effectivement, les simulations numériques ont permis de découvrir certaines propriétés de ces systèmes très complexes.

L'objectif principal de cette thèse est d'adapter les outils classiques de l'analyse du chaos à des systèmes dynamiques régis par des équations différentielles d'ordres fractionnaires. La démarche suivie consiste à partir d'un formalisme classique puis à remplacer les dérivées par leurs généralisations fractionnaires.

Cette thèse est organisée comme suit :

Le premier chapitre sera consacré aux éléments de base du calcul fractionnaire, un rappel historique et quelques concepts préliminaires seront introduits comme la transformée de Laplace, la fonction gamma et la fonction de Mittag-Leffler qui jouent un rôle important dans la théorie des équations différentielles fractionnaires. Trois approches (Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville et Caputo) à la généralisation des notions de dérivation seront ensuite considérées.

Le deuxième chapitre de cette thèse est dédié aux systèmes dynamiques décrits par des équations différentielles d'ordres fractionnaires et au rappel des principaux résultats concernant ces systèmes. Nous nous intéresserons à la question d'existence et d'unicité de la solution d'une équation différentielle fractionnaire, pour exposer ensuite les différents critères de stabilité et quelques-unes des méthodes d'analyse numérique utiles dans le cas d'un système non-linéaire.

Dans le chapitre trois, le thème du chaos sera abordé, en partant de sa définition pour, ensuite, décrire différentes méthodes permettant sa caractérisation et sa quantification. Le fer à cheval topologique et le test 0-1, deux méthodes récentes et efficaces pour l'analyse et la détection du chaos, seront introduites.

Le dernier chapitre, objet de notre contribution, porte sur l'application et l'adaptation de ces outils à l'analyse du chaos dans un système autonome de dimension trois et à dérivées fractionnaires décrivant le phénomène de résonance nucléaire magnétique : le système de Bloch.

Chapitre 1

Éléments de Calcul Fractionnaire

Ce chapitre sera consacré aux définitions élémentaires et notions de base relatives au calcul fractionnaire telles que : la dérivation fractionnaire, l'intégration fractionnaire, définitions relatives aux opérateurs d'ordre fractionnaire, l'exponentielle de Mittag-Leffler et d'autres notions dont on aura besoin dans la suite de notre travail. Nous commencerons par donner un aperçu historique sur le développement de la théorie de dérivation fractionnaire.

1 Aperçu historique

Notre but dans cette partie n'est pas de dresser un état de l'art complet sur le calcul fractionnaire et ce pour deux raisons :

1. Les domaines de recherche sont actuellement si variés qu'il semble difficile d'avoir un aperçu complet, même si plusieurs ouvrages tels que [5, 6] offrent une vision très large sur ce domaine.
2. Des historiques très détaillés sont donnés dans les ouvrages de références tels que [7, 8].

Nous présentons ici les principales étapes historiques de l'élaboration du calcul fractionnaire, jusqu'à son essor dans le développement d'applications dans les années 1970. Nous nous appuyons sur les ouvrages [7–10] pour couvrir la période de 1695 à 1974.

1695

L'origine du calcul fractionnaire semble remonter à Leibniz. Dans une lettre au Marquis de L'Hospital, il propose de généraliser sa formule pour la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de deux fonctions à $n > 0$ et introduit la notation $d^{1/2}h$. Il écrit notamment que " $d^{1/2}x = x\sqrt{dx : x}$ ". Dans une autre lettre à Bernoulli, il mentionne des dérivées "d'ordres généraux".

1730

Euler est le second grand mathématicien à aborder la question. Dans son article [11] où il introduit sa célèbre fonction Gamma Γ qui généralise la factorielle ($\Gamma(n+1) = n!$), il conclut en proposant une définition pour la dérivée d'ordre $\alpha > 0$ de x^β , avec $\beta > 0$. Son cheminement est le suivant : pour $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \geq n$, on a tout d'abord

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}.$$

Chapitre 1. Éléments de Calcul Fractionnaire

Grâce à sa fonction Gamma cette formule s'étend directement à une puissance $m \succ 0$:

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}. \quad (1.1)$$

Le terme de droite de (1.1) conservant un sens pour un réel $n > 0$ (tel que $n < m + 1$), on peut donc le considérer comme une définition pour la dérivée d'ordre réel $\alpha > 0$ de la puissance réelle $\beta > 0$:

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}. \quad (1.2)$$

Notons ici qu'Euler ne considère en fait que des nombres rationnels (appelés aussi fractionnaires) et non des nombres réels. La dénomination actuelle de dérivée "fractionnaire" pour exprimer en fait une dérivée d'ordre réel pourrait donc trouver son origine historique dans ce travail.

1822

Mentionnons ensuite le travail de Fourier qui, grâce à sa célèbre transformée, obtient une autre définition de la dérivée d'ordre réel. En composant la transformée de Fourier (réelle) d'une fonction f avec sa transformée inverse, Fourier retrouve l'identité :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \cos(p(x-\alpha)) d\alpha dp. \quad (1.3)$$

Il remarque ensuite que la dérivée $n^{\text{ième}}$ ($n \in \mathbb{N}$) du terme en \cos peut s'écrire comme :

$$\frac{d^n}{dx^n} \cos(p(x-\alpha)) = p^n \cos\left[p(x-\alpha) + \frac{n\pi}{2}\right]. \quad (1.4)$$

Le membre de droite garde un sens si on remplace n par $u > 0$, ce qui permet de définir la dérivée d'ordre u de $\cos(p(x-\alpha))$. En utilisant cette définition dans (1.3), Fourier obtient ainsi la dérivée d'ordre $u > 0$ de f :

$$\frac{d^u}{dx^u} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) p^u \cos\left[p(x-\alpha) + \frac{u\pi}{2}\right] d\alpha dp. \quad (1.5)$$

1823

Abel utilise le calcul fractionnaire pour résoudre le problème du tautochrone généralisé.

Chapitre 1. Éléments de Calcul Fractionnaire

1832-37

Liouville est le premier à étudier en détail le calcul fractionnaire, comme semblent l'attester les huit articles qu'il publia entre 1832 et 1837. Partant de la relation

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{ax} = a^n e^{ax}, \quad (1.6)$$

pour $n \in \mathbb{N}$, il propose de l'étendre pour $\alpha \succ 0$, définissant ainsi la dérivée d'ordre α de e^{ax} . Par conséquent toute fonction f pouvant s'écrire sous la forme :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x}, \quad (1.7)$$

admet une dérivée d'ordre $\alpha \succ 0$ donnée par

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k^\alpha e^{a_k x}. \quad (1.8)$$

Afin d'étendre cette définition à d'autres types de fonctions que (1.7), Liouville remarque que :

$$\forall \beta \succ 0, \forall x \succ 0, x^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty u^{\beta-1} e^{-xu} du.$$

À l'aide de (1.6), il trouve :

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^{-\beta} = \frac{(-1)^\alpha}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1} e^{-xu} du,$$

soit

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^{-\beta} = \frac{(-1)^\alpha \Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\beta)} x^{-\alpha-\beta}. \quad (1.9)$$

Même si (1.2) et (1.9) concernent des exposants β différents, la limite $\beta = 0$ est problématique.

Par exemple, pour $\alpha = 1/2$,

- avec la définition d'Euler

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} x^0 = \frac{1}{\sqrt{\pi x}},$$

- alors qu'avec celle de Liouville

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} x^0 = 0.$$

Ce paradoxe est en fait résolu si on utilise les définitions modernes des dérivées fractionnaires. On peut vérifier que la définition d'Euler correspond à la dérivée de Riemann-Liouville et celle

Chapitre 1. Éléments de Calcul Fractionnaire

de Liouville à sa propre version moderne. Par exemple, pour $0 < \alpha < 1$ et $\beta > 0$,

$$\left(\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\right)_{Euler} x^\beta = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-y)^{-\alpha} y^\beta dy,$$
$$\left(\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\right)_{Liouville} x^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x (x-y)^{-\alpha} y^{-\beta} dy.$$

Comme il est signalé dans [10] ces définitions diffèrent en fait par les bornes de leurs intégrales.

Remarque 1.1 *L'expression*

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x (x-y)^{-\alpha} y^{-\beta} dy,$$

est définie ici comme

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{d}{dx} \int_s^x (x-y)^{-\alpha} y^{-\beta} dy.$$

1847

À partir d'une généralisation de la formule de Taylor, Riemann propose une définition d'intégrale fractionnaire :

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} f(y) dy + \psi(x),$$

où $\psi(x)$ est une "fonction complémentaire" qui le gênera en fait dans ses travaux ultérieurs. Elle sera finalement abandonnée pour donner la définition moderne de l'intégrale fractionnaire.

1867-68

Grünwald puis Letnikov proposent de définir une dérivée fractionnaire comme limite de différences finies, par analogie avec la dérivée usuelle qui est la limite de la différence finie (opposée à infinitésimale) entre $f(x+h)$ et $f(x)$ divisée par h .

1869

L'expression définitive de ce qui est maintenant appelé intégrale fractionnaire de Riemann apparaît pour la première fois dans le travail de Sonin. Pour une fonction complexe, en dérivant n fois la formule de Cauchy ($n \in \mathbb{N}$), on obtient :

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(y)}{(y-z)^{n+1}} dz.$$

Chapitre 1. Éléments de Calcul Fractionnaire

Sonin, en choisissant un chemin approprié d'intégration, généralise cette formule à $n < 0$. Il obtient finalement une définition de l'intégrale d'ordre $\alpha > 0$, que l'on notera par la suite ${}_a\mathcal{I}_x^\alpha$:

$${}_a\mathcal{I}_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} f(y) dy.$$

1892

Heaviside fournit cette année-là la première application concrète du calcul fractionnaire (le tautochrone d'Abel relevant davantage du cas d'école) pour la résolution de l'équation de la chaleur unidimensionnelle :

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x, t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t). \quad (1.10)$$

La démarche d'Heaviside est loin d'être rigoureuse (elle ne sera justifiée qu'en 1919), mais fournit toutefois la bonne solution, il trouve que

$$T(x, t) = T_0 \exp(-axp^{1/2}).$$

Il suppose ensuite que $p^{1/2}T_0 = T_0/\sqrt{\pi t}$... ce qui correspond en fait à la dérivée d'ordre 1/2 de T_0 ! En développant la solution en série entière, il obtient finalement la solution exacte de (1.10).

1917

Weyl définit une intégrale fractionnaire adaptée aux fonctions périodiques.

1927

Marchaud introduit une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire :

$$\mathbf{D}_+^\alpha f(x) = c \int_0^\infty \frac{\Delta_t^l f(x)}{t^{1+\alpha}} dt,$$

où $\alpha > 0$, $l \in \mathbb{N}$ avec $l > \alpha$ et c est une constante de renormalisation. L'opérateur Δ_t^l est une différence finie d'ordre l (par exemple, $\Delta_t^1 f(x) = f(x) - f(x-t)$). L'avantage d'une telle définition par rapport aux autres est qu'elle est moins restrictive quant à la régularité de f .

1928

Hardy et Littlewood étudient comment agit l'intégrale fractionnaire ${}_a\mathcal{I}_x^\alpha$ sur certaines classes de fonctions. En particulier, leur théorème majeur stipule que pour $0 < \alpha < 1$ et $1 < p < 1/\alpha$,

${}_a\mathcal{I}_x^\alpha$ est un opérateur borné de L^p dans L^q , où $1/q = 1/p - \alpha$.

1937

Riesz cherche à donner un sens à l'intégrale fractionnaire pour des fonctions à plusieurs variables. Il donne la définition suivante :

$$\mathcal{I}^\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{\|x - y\|^{n-\alpha}} dy.$$

Cet opérateur vérifie notamment $\mathcal{I}^\alpha \circ \mathcal{I}^\beta = \mathcal{I}^{\alpha+\beta}$ et $\Delta \mathcal{I}^{\alpha+2} = -\mathcal{I}^\alpha$, où Δ est l'opérateur Laplacien.

1970

Dans [12] Oldham et Spanier traitent le problème du flux de chaleur à la surface d'un conducteur thermique. Ils montrent que lors d'un phénomène de diffusion, le flux de diffusion est proportionnel à la dérivée 1/2 du paramètre physique (température, concentration d'espèces chimique, potentiel électrique, etc). D'après l'historique de Ross reproduit dans [7], ce problème semble être à l'origine de l'extension du calcul fractionnaire hors du champ des mathématiques.

1974

Cette année-là se tient à l'Université de New Haven (Connecticut) la première conférence sur le calcul fractionnaire organisée par Ross.

2 Exemples d'application des systèmes fractionnaires

Les systèmes fractionnaires apparaissent de plus en plus fréquemment dans les différents champs de recherches. Toutefois, l'intérêt progressif que l'on porte à ces systèmes et les applications en sciences de l'ingénieur restent encore peu développés. On peut noter que pour la majeure partie des domaines présentés ci dessous, les opérateurs fractionnaires sont utilisés pour prendre en compte des effets de mémoire. Mentionnons les ouvrages [5, 6] qui regroupent diverse applications du calcul fractionnaire.

2.1 Automatique

En automatique, peu d'auteurs ont utilisé des lois de commande introduisant des dérivées fractionnaires. Podlubny [13] a montré que la meilleure méthode pour assurer un contrôle

efficace des systèmes fractionnaires, est l'utilisation de contrôleurs fractionnaires. Il propose une généralisation des contrôleurs traditionnels PID. Le groupe CRONE, fondé par Oustaloup dans les années 70, applique ces méthodes à de nombreux systèmes industriels : spectroscope, suspension de voitures [14], robot-cueilleur, charrue électro-hydraulique, batterie pour voitures, etc.

2.2 Électricité

Grâce à des données expérimentales, Shmidt et Drumheller [15] montrent que le courant qui traverse un condensateur est proportionnel à la dérivée non entière de la tension. En effet, en utilisant un composé ($LiN_2H_5SO_4$) et en procédant à des mesures sur une large gamme de températures et de fréquences, ils constatent que les parties réelle et imaginaire de la susceptibilité ou encore, de la fonction diélectrique $\epsilon = \epsilon' + j\epsilon''$ sont très grandes ($\epsilon' \approx \epsilon'' \approx 10^6$) et varient en fonction de la fréquence suivant un ordre de puissance $\frac{1}{2}$ (avec $\epsilon' \in \mathbb{R}$ et $\epsilon'' \in \mathbb{R}$). Dans [15–18], nous trouvons la relation suivante, valable pour un composé ($LiN_2H_5SO_4$) :

$$\epsilon = \epsilon' \omega^{-\frac{1}{2}}(1 - j) = \epsilon' \sqrt{2}(j\omega)^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{avec } j = \sqrt{-1}. \quad (1.11)$$

En utilisant la relation entre la fonction diélectrique et l'impédance, on obtient la relation suivante :

$$Z = \frac{1}{j\omega C_e \epsilon}, \quad (1.12)$$

où C_e est une constante. En substituant la relation (1.11) dans (1.12), on a

$$Z = \frac{1}{j\omega C_e \epsilon' \sqrt{2}(j\omega)^{-\frac{1}{2}}}, \quad (1.13)$$

qu'on peut éventuellement mettre sous la forme

$$Z = \frac{K}{(j\omega)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{où } K = \frac{1}{\sqrt{2}C_e \epsilon'}, \quad (1.14)$$

ou encore, en fonction de la variable de Laplace s :

$$Z = \frac{K}{s^{\frac{1}{2}}}. \quad (1.15)$$

L'équation (1.15) montre en effet que l'on peut bien définir une impédance fractionnaire de capacité, qui peut être fabriquée à partir de composition de matériaux spécifiques et par conséquent

définir le terme “Fractor”, par analogie au terme anglais “Capacitor”, pour mettre l’accent sur le caractère fractionnaire de l’impédance. K désigne alors la constante du “Fractor” (capacité fractionnaire). La réalisation d’une impédance fractionnaire peut se faire par juxtaposition en série de cellules Résistance-Capacité (d’impédance traditionnelle).

2.3 Thermique : Diffusion et équation de la chaleur

L’exemple le plus simple de système fractionnaire est l’équation de la chaleur à une dimension spatiale, commandée aux bords. En opérant un bon choix de la variable de sortie, nous obtenons un dérivateur d’ordre $\frac{1}{2}$. A partir de ce transfert, il n’est pas compliqué de construire un système physique idéalisé qui représente un transfert fractionnaire propre, à savoir un transfert d’ordre deux avec une dérivation d’ordre $\frac{3}{2}$. Cet exemple a été traité dans [19] et repris dans [18, 20, 21]. On rappelle que l’équation de la chaleur est donnée par l’équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) = c \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x), \quad t > 0, \quad -\infty < x < 0, \quad (1.16)$$

où t est une variable scalaire libre symbolisant le temps, x une variable libre scalaire ou vectorielle, représentant l’espace et c une constante positive. Nous nous intéressons ici à l’équation de la chaleur à une dimension spatiale ; où la variable libre x est scalaire. Nous considérons les conditions initiales et aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} v(0, x) &= 0, & \text{pour } x < O, \\ v(t, 0) &= u(t), & \text{pour } x = O, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} v(t, x) &= 0, & \text{pour } t > O. \end{aligned}$$

Nous supposons que u est une fonction de type exponentiel avec variation bornée presque partout (ceci garanti l’existence de la transformée de Laplace de v et la validité de la formule intégrale de la transformée inverse). Ainsi, le problème peut être résolu par passage dans le plan opérationnel. En utilisant la transformée de Laplace nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2}(s, x) &= \frac{s}{c} \hat{v}(s, x), & \text{pour } x > 0, \\ \hat{v}(s, 0) &= \hat{u}(s). \end{aligned} \quad (1.17)$$

La solution formelle de (1.17) est

$$\hat{v}(s, x) = c_1(s) \exp\left(-x\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + c_2(s) \exp\left(x\sqrt{\frac{s}{c}}\right). \quad (1.18)$$

Chapitre 1. Éléments de Calcul Fractionnaire

Pour des raisons de bornitude, et tenant compte de la condition aux limites $\hat{v}(s, 0) = \hat{v}(s)$, on obtient :

$$\hat{v}(s, x) = \hat{u}(s) \exp\left(x\sqrt{\frac{s}{c}}\right). \quad (1.19)$$

Pour $x > 0$,

$$\exp\left(x\sqrt{\frac{s}{c}}\right) = \mathcal{L}\left\{\frac{x}{2\sqrt{\pi c}} t^{-\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{x^2}{4ct}\right)\right\}, \quad (1.20)$$

soit

$$v(t, x) = \frac{x}{2\sqrt{\pi c}} \int_0^t \tau^{-\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{x^2}{4c\tau}\right) u(t - \tau) d\tau. \quad (1.21)$$

D'une part, on vérifie que (1.21) est bien une solution de l'équation (1.16), d'une autre part, à partir de (1.19), on déduit que :

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial x}(s, x) = \frac{1}{\sqrt{c}} s^{\frac{1}{2}} \hat{v}(s, x),$$

et en particulier,

$$\frac{\partial v}{\partial x}(s, 0) = \frac{1}{\sqrt{c}} s^{\frac{1}{2}} \hat{u}(s).$$

Si nous définissons comme variable de sortie

$$y(t) \triangleq \sqrt{c} \frac{\partial v}{\partial x}(t, 0), \quad (1.22)$$

nous obtenons le transfert suivant :

$$\hat{y}(s) = s^{\frac{1}{2}} \hat{u}(s). \quad (1.23)$$

Ce qui permet d'établir le constat suivant : l'équation de transfert de la chaleur avec l'entrée u et la sortie y est donc un dérivateur d'ordre $\frac{1}{2}$.

2.4 Acoustique

Pour certains instruments de musique à vent les pertes visco-thermique peuvent être modélisées efficacement à l'aide de dérivées fractionnaires temporelles [22].

2.5 Mécanique des milieux continus

La déformation des milieux continus (solides ou liquides) est souvent décrite à l'aide de deux tenseurs, celui des déformations noté ϵ_{ij} et celui des contraintes σ_{ij} . Certains matériaux, comme

les polymères (gommes, caoutchouc,...), présentent un comportement intermédiaire entre caractères visqueux et élastiques, qualifié de visco-élastique. De tels systèmes peuvent être modélisés à l'aide de la relation suivante entre les deux tenseurs :

$$\sigma_{ij} = E\epsilon_{ij}(t) + \eta \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \epsilon_{ij}(t), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Cette loi est justifiée par Bagley et Torvik dans [23, 24] (pour $\alpha = 1/2$). Dans [25], l'introduction de dérivée fractionnaire dans le cas de polymères est motivée par l'analyse suivante : à cause de la longueur des fibres, les déformations appliquées prennent du temps à être communiquées de proche en proche (la longueur des fibres, enroulées, étant bien supérieure à la distance géométrique). Elles sont progressivement amorties et induisent des effets de mémoire (l'état à l'instant t va dépendre des états antérieurs). Si la contrainte décroît comme $t^{-(1+\alpha)}$, elle pourra induire une dérivée fractionnaire d'ordre α . Cet opérateur permet ainsi de donner une description macroscopique simple (ne nécessitant que peu de paramètres) de phénomènes microscopiques complexes. Une présentation de la visco-élasticité via la dérivation fractionnaire est donnée dans [26].

2.6 Électrochimie

Le principe d'une cellule électrolytique est esquissé dans la figure Fig.(1.1). La relation entre

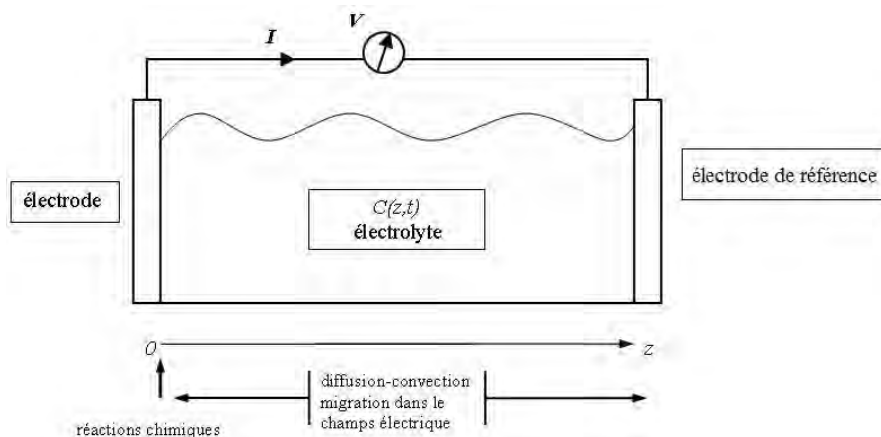


Figure 1.1 – Cellule électrolytique

la tension V et le courant I est non linéaire ; toutefois, pour de faibles variations autour d'un point de fonctionnement, le linéarisé de la relation représente une bonne approximation du système. Ainsi, en identifiant les grandeurs électriques avec leurs transformées de Fourier, on

peut écrire

$$I(\omega) = \frac{1}{Z(\omega)}V(\omega), \quad (1.24)$$

où $Z(\omega)$ est appelée l'impédance de la cellule au point opérationnel donné.

Afin de parvenir à une solution analytique, des hypothèses simplificatrices sont introduites. Nous nous intéressons ici particulièrement au modèle connu sous le nom de "circuit équivalent de Randles", décrit dans la figure Fig.(1.2). Grâce à une motivation basée sur les données expérimentales, Karunathilaka *et al.* [27, 28] apportent une modification du "circuit équivalent de Randles" appelé ici "circuit équivalent de Karunathilaka" (voir figure Fig.(1.3)).

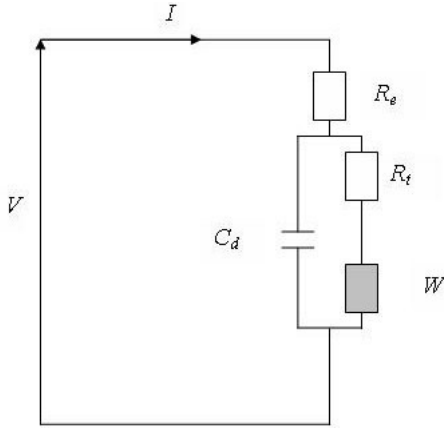


Figure 1.2 – Circuit équivalent de Randles

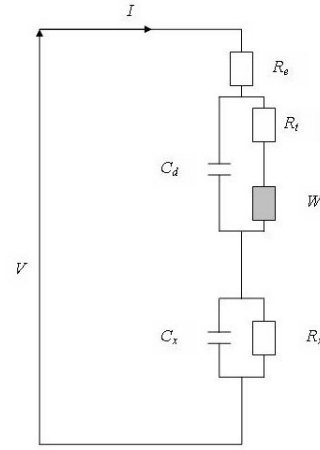


Figure 1.3 – Circuit équivalent de Karunathilaka

L'élément W qui apparait dans les deux circuit est appelé "impédance de Warburg" et représente le transfert [17]

$$Z_w(\omega) \triangleq \frac{\sqrt{2\sigma}}{\sqrt{i\omega}}, \quad (1.25)$$

où σ est une constante réelle appelée le coefficient de Warburg. La présence de W est due aux effets de diffusion au sein de l'électrolyte. L'impédance du circuit équivalent de Randles est donnée par

$$\begin{aligned} Z_r(\omega) &= R_r(\omega) - iX_r(\omega), \\ R_r(\omega) &= R_e + \frac{R_t\omega^{\frac{1}{2}} + \sigma}{\omega^{\frac{1}{2}} \times D(\omega)}, \\ X_r(\omega) &= \frac{1}{C_d\omega} - \frac{\sigma C_d\omega^{\frac{1}{2}} + 1}{C_d\omega \times D(\omega)}, \end{aligned}$$

où

$$D(\omega) = \left(1 + \sigma C_d \omega^{\frac{1}{2}}\right)^2 + C_d^2 \omega \left(R_t \omega^{\frac{1}{2}} + \sigma\right)^2, \quad (1.26)$$

et celui du circuit équivalent de Karunathilaka *et al.* [27, 28] par

$$\begin{aligned} Z_k(\omega) &= R_k(\omega) - iX_k(\omega), \\ R_k(\omega) &= R_e + \frac{R_t \omega^{\frac{1}{2}} + \sigma}{\omega^{\frac{1}{2}} \times D(\omega)} + \frac{R_x}{1 + C_x^2 R_x^2 \omega^2}, \\ X_k(\omega) &= \frac{1}{C_d \omega} - \frac{\sigma C_d \omega^{\frac{1}{2}} + 1}{C_d \omega \times D(\omega)} + \frac{1}{C_x \omega} - \frac{1}{C_x \omega (1 + C_x^2 R_x^2 \omega^2)}. \end{aligned}$$

Le circuit équivalent de Karunathilaka *et al.* a été validé expérimentalement.

3 Bases mathématiques du calcul fractionnaire

3.1 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire

Dans cette section, nous présentons les fonctions Gamma et Mittag-Leffler, qui seront utilisées dans les autres chapitres. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

3.1.1 La fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$. La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivante

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (1.27)$$

avec $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0_+) = +\infty$, $\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$. Une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z), \quad (1.28)$$

q'en peut démontrer par une intégration par parties

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = \left[-e^{-t} t^z\right]_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z).$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n + 1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$.

3.1.2 La fonction Mittag-Leffler

La fonction exponentielle, e^z , joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La généralisation de la fonction exponentielle à un seul paramètre a été introduite par G.M. Mittag-Leffler [29, 30] et désignée par la fonction suivante [31–33] :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \quad (1.29)$$

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette dernière a été introduite par Agarwal [34] et elle est définie par le développement en série suivant [31–33] :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \quad (1.30)$$

Pour $\beta = 1$, on retrouve la relation (1.29).

A partir de la relation (1.30) on montre que

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

Pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire, la fonction de Mittag-Leffler joue le même rôle que la fonction exponentielle. La figure Fig.(1.4) montre le comportement de la fonction Mittag-Leffler à deux paramètres pour différentes valeurs de α et β .

3.2 La transformée de Laplace

Soit f une fonction d'ordre exponentiel α (c'est-à-dire qu'il existe deux constantes positives M et T telles que $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$ pour $t > T$) alors la fonction de la variable complexe définie par :

$$F(s) = L(f(t))(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (1.31)$$

est appelée la transformée de Laplace de la fonction f .

On peut reconstituer f à partir de sa transformée F à l'aide de la transformée de Laplace

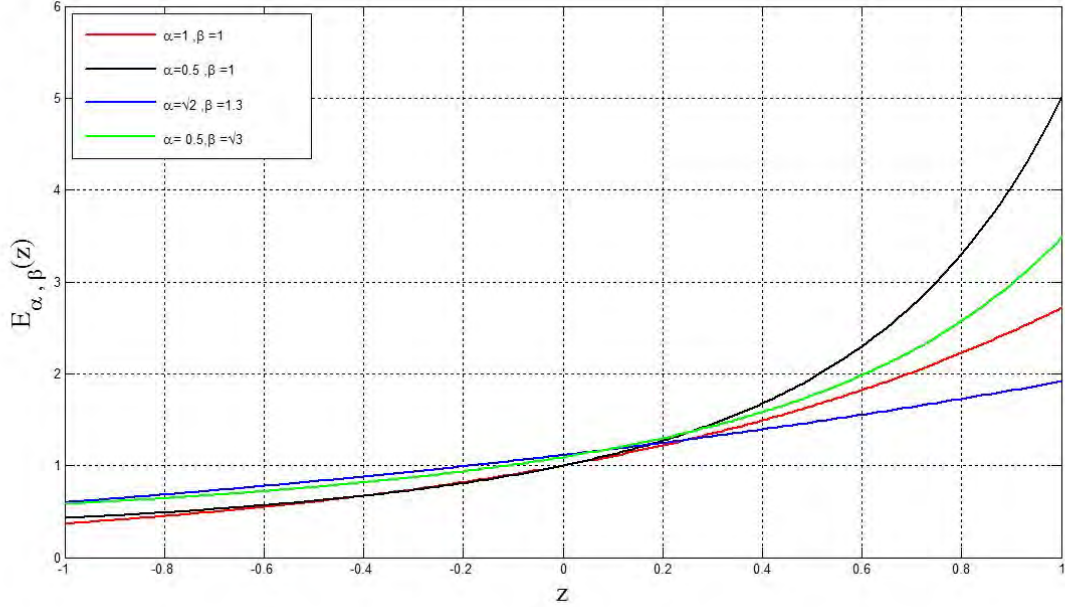


Figure 1.4 – La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres

inverse

$$f(t) = L^{-1}(F(s))(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds, \quad c = \text{Re}(s) > c_0, \quad (1.32)$$

où c_0 est l'indice de convergence de l'intégrale (1.32). Le produit de convolution des fonctions f et g est donné par :

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau. \quad (1.33)$$

La transformée de Laplace du produit de convolution des fonctions f et g peut s'écrire sous la forme :

$$L(f(t) * g(t); s) = F(s)G(s), \quad (1.34)$$

sous l'hypothèse que les fonctions $F(s)$ et $G(s)$ existent.

La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre n de la fonction f peut s'écrire :

$$L(f^{(n)}(t); s) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0). \quad (1.35)$$

4 Définitions et propriétés

Notre but dans cette partie est d'introduire les outils et les résultats utilisés dans notre travail. nous commençons par donner les définitions d'intégrales fractionnaires les plus courantes puis des dérivées fractionnaires et observons que -seulement- certaines propriétés des dérivées classiques peuvent être généralisées au cas fractionnaire. La majorité des définitions de ce chapitre sont tirées de [8] auquel nous renvoyons pour une analyse approfondie du sujet.

4.1 Intégrales fractionnaires

Comme la majorité des ouvrages introductifs au calcul fractionnaire, nous allons suivre l'approche de Riemann pour proposer une première définition d'intégrale fractionnaire, l'intégrale de Riemann-Liouville. D'autres versions seront ensuite abordées. Nous verrons que toutes les définitions que nous avons données sont des définitions "à gauche", il existe des versions symétriques, "à droites". Celles-ci sont rarement utilisées car anti-causales (elles dépendent du futur des fonctions).

4.1.1 Intégrale de Riemann-Liouville

Fonctions définies sur $[a, b]$

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$. Commençons par noter ${}_a\mathcal{I}_t^1$ la primitive de f qui s'annule en a :

$$\forall t \in [a, b], \quad {}_a\mathcal{I}_t^1 f(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau. \quad (1.36)$$

L'itération de ${}_a\mathcal{I}_t^1$ permet d'obtenir la primitive seconde de f qui s'annule en a et dont la dérivée s'annule en a . De plus, d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{I}_t^1 \circ {}_a\mathcal{I}_t^1 f(t) &= \int_a^t \left(\int_a^u f(\tau) d\tau \right) du = \int_a^t \left(\int_\tau^t du \right) f(\tau) d\tau, \\ &= \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En notant $({}_a\mathcal{I}_t^1)^n$ la $n^{\text{ième}}$ itération de ${}_a\mathcal{I}_t^1$, une récurrence directe montre que

$$\left({}_a\mathcal{I}_t^1 \right)^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \quad (1.37)$$

Chapitre 1. Éléments de Calcul Fractionnaire

Si on note $g = ({}_a\mathcal{I}_t^n)^n f$, g est donc l'unique fonction vérifiant

$$\forall 0 \leq k \leq n-1, g^{(k)}(a) = 0, g^{(n)} = f. \quad (1.38)$$

L'égalité $g^{(n)} = f$ justifie la définition suivante :

Définition 1.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'intégrale à gauche d'ordre n de f , que l'on note ${}_a\mathcal{I}_t^n f$, est définie par

$$\forall t \in [a, b], {}_a\mathcal{I}_t^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \quad (1.39)$$

La dénomination "gauche" provient du fait que l'intégrale est évaluée à partir des valeurs à gauche ($\tau < t$) de f . Nous voyons alors qu'il est possible d'étendre directement (1.39) à $n > 0$, et ce grâce à la fonction Gamma d'Euler que nous avons définie précédemment.

C'est la propriété $\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$, qui permet de généraliser la définition (1.1) de la manière suivante :

Définition 1.2 L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre $\alpha > 0$ est définie par

$$\forall t \in [a, b], {}_a\mathcal{I}_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Le tableau suivant montre pour quelles classes de fonctions cette définition a un sens et plus précisément quelles sont les images de ces ensembles par cet opérateur :

	f	${}_a\mathcal{I}_t^\alpha f$	<i>conditions</i>
1.	$L^P([a, b])$	$L^q([a, b])$	$0 < \alpha < 1, 1 < p < \frac{1}{\alpha}, 1 \leq q \leq \frac{p}{1-\alpha p}$
2.	$L^1([a, b])$	$L^P([a, b])$	$0 < \alpha < 1, 1 \leq q \leq \frac{1}{1-\alpha}$
3.	$L^{1/\alpha}([a, b])$	$L^q([a, b])$	$0 < \alpha < 1, q \geq 1$
4.	$L^P([a, b])$	$H^{\alpha-1/p}([a, b])$	$p > \frac{1}{\alpha}, \alpha - \frac{1}{p} \notin \mathbb{N}^*$
5.	$L^\infty([a, b])$	$H^\infty([a, b])$	
6.	$L^P([a, b])$	$L^P([a, b])$	$p \geq 1$
7.	$C^0([a, b])$	$C_+^0([a, b])$	
8.	$AC([a, b])$	$AC([a, b])$	

Toutes les démonstrations se trouvent dans [8].

Fonctions définies sur \mathbb{R}^+ et \mathbb{R}

Il est naturel d'étendre la définition (1.2) aux axes \mathbb{R}^+ et \mathbb{R} . Notons ces opérateurs \mathcal{I}_{0+}^α et \mathcal{I}_+^α :

$$\begin{aligned}\forall t > 0, \mathcal{I}_{0+}^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \\ \forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{I}_+^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

Si $0 < \alpha < 1$, d'après [8], $\mathcal{I}_+^{\alpha} f$ est défini presque partout si $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Intégrales fractionnaires à droite

Si on remonte à la relation de départ (1.36) pour une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, on peut remarquer que l'intégrale

$${}_b\mathcal{I}_t^1 f(t) = \int_b^t f(\tau) d\tau = - \int_t^b f(\tau) d\tau,$$

est aussi une primitive de f , qui cette fois s'annule en b et fait intervenir les valeurs à droite de f .

À partir de la relation :

$$\int_b^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau = (-1)^n \int_t^b (\tau - t)^{n-1} f(\tau) d\tau,$$

on pourrait définir de la même manière que précédemment l'intégrale à droite d'ordre n de f par :

$$\forall t \in [a, b], {}_b\mathcal{I}_t^n f(t) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_t^b (\tau - t)^{n-1} f(\tau) d\tau. \quad (1.40)$$

En notant $h = {}_b\mathcal{I}_t^n f$, h serait l'unique fonction vérifiant :

$$\forall 0 \leq k \leq n-1, h^{(k)}(b) = 0, h^{(n)} = f. \quad (1.41)$$

On définit alors l'intégrale à droite de la manière suivante :

Définition 1.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'intégrale à droite d'ordre n de f , que l'on note ${}_t\mathcal{I}_b^n f$, est définie par :

$$\forall t \in [a, b], {}_t\mathcal{I}_b^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_t^b (\tau - t)^{n-1} f(\tau) d\tau. \quad (1.42)$$

Elle vérifie ainsi la relation

$$\left(-\frac{d}{dt}\right)^n {}_t\mathcal{I}_b^n f(t) = f(t).$$

Là encore, l'extension à un ordre réel positif est immédiate.

Définition 1.4 *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre $\alpha > 0$ est définie par*

$$\forall t \in [a, b], \quad {}_t\mathcal{I}_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau - t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

L'extension sur $[a, +\infty[$ et \mathbb{R} est noté \mathcal{I}_-^α :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{I}_-^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{+\infty} (\tau - t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

4.2 Dérivées fractionnaire

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires, malheureusement elles ne sont pas toutes équivalentes. Nous présentons dans cette parties les définitions de Riemann-Liouville, Liouville, Caputo ainsi que Grunwald-letnikov qui sont les plus utilisées.

4.2.1 Dérivées de Riemann-Liouville, Liouville et Caputo

Si $\alpha > 0$, on note $[\alpha]$ la partie entière de α : $[\alpha]$ est l'unique entier vérifiant $[\alpha] \leq \alpha < [\alpha] + 1$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$. En s'inspirant de la relation classique $\frac{d}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} \circ_a \mathcal{I}_t^1$, on peut définir une dérivée fractionnaire d'ordre $0 \leq \alpha < 1$ par :

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d}{dt} \circ_a \mathcal{I}_t^{1-\alpha}.$$

Plus généralement, si $\alpha > 0$ et si $n = [\alpha] + 1$, on peut poser :

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d^n}{dt^n} \circ_a \mathcal{I}_t^{n-\alpha} \tag{1.43}$$

On obtient exactement la dérivée de Riemann-Liouville à gauche.

Définition 1.5 *Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α est définie par*

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], \quad {}_a\mathcal{D}_t^\alpha f(t) &= \left(\frac{d}{dt} \right)^n \circ_a \mathcal{I}_t^{n-\alpha} f(t), \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-1-\alpha} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Chapitre 1. Éléments de Calcul Fractionnaire

De plus, on a vu que la définition (1.4) d'intégrale à droite était associée à $-d/dt$. Le raisonnement précédent conduit donc à la définition suivante :

Définition 1.6 Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α est définie par

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], {}_t\mathcal{D}_b^\alpha f(t) &= \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \circ {}_t\mathcal{I}_b^{n-\alpha} f(t), \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (\tau-t)^{n-1-\alpha} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Si maintenant $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$, les définitions précédentes se généralisent directement et sont appelées dérivées de Liouville.

Définition 1.7 Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Liouville à gauche d'ordre α est définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{D}_+^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{n-1-\alpha} f(\tau) d\tau.$$

Définition 1.8 Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Liouville à droite d'ordre α est définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{D}_-^\alpha f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^{+\infty} (\tau-t)^{n-1-\alpha} f(\tau) d\tau.$$

D'après (1.38) et (1.41), toutes ces dérivées coïncident avec les dérivées usuelles pour les ordres entiers :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} {}_a\mathcal{D}_t^n f = \mathcal{D}_+^n f = \frac{d^n}{dt^n} f, \\ {}_t\mathcal{D}_b^n f = \mathcal{D}_-^n f = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} f. \end{cases}$$

Par ailleurs, si l'on se replace sur $[a, b]$, l'interversion des compositions dans le membre de droite de (1.43) semble aussi raisonnable pour définir une dérivée fractionnaire :

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = {}_a\mathcal{I}_t^{n-\alpha} \circ \frac{d^n}{dt^n}. \quad (1.44)$$

On notera toutefois que cette définition est moins naturelle que la précédente, puisque $\frac{d}{dt} \circ$

${}_a\mathcal{I}_t^1 f(t) = f(t)$, alors que ${}_a\mathcal{I}_t^1 \circ \frac{d}{dt} f(t) = f(t) - f(a)$.

Ce problème de termes de bords (ici $f(a)$) se retrouve en fait très souvent dans le calcul

Chapitre 1. Éléments de Calcul Fractionnaire

fractionnaire.

La définition donnée par (1.44) est appelée dérivée de Caputo.

Définition 1.9 Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre α est définie par :

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], \quad {}^c_a\mathcal{D}_t^\alpha &= {}_a\mathcal{I}_t^{n-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dt} \right)^n f(t), \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Définissons aussi son analogue à droite.

Définition 1.10 Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre α est définie par

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], \quad {}^c_t\mathcal{D}_b^\alpha &= {}_t\mathcal{I}_b^{n-\alpha} \circ \left(-\frac{d}{dt} \right)^n f(t), \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (t-\tau)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Par contre, de telles définitions ne se recollent pas correctement aux dérivées classique :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} {}^c_a\mathcal{D}_t^n f(t) = f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a), \\ {}^c_t\mathcal{D}_b^n f(t) = (-1)^n (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(b)). \end{cases}$$

Heureusement, le résultat suivant montre qu'elles approchent les dérivées classiques par limite inférieure.

Lemme 1.1 Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ et $n = [\alpha] + 1$. Si $f \in AC^n([a, b])$, alors presque partout

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow n^-} {}^c_a\mathcal{D}_t^\alpha f(t) &= f^{(n)}(t), \\ \lim_{\alpha \rightarrow n^-} {}^c_t\mathcal{D}_b^\alpha f(t) &= (-1)^n f^{(n)}(t). \end{aligned}$$

Démonstration. Comme $f^{(n)} \in L^1([a, b])$, d'après [8], en posant $\beta = n - \alpha$, $\lim_{\beta \rightarrow 0^+} {}_a\mathcal{I}_t^\beta f^{(n)} = f^{(n)}$ presque partout. Le même raisonnement s'applique pour ${}^c_t\mathcal{D}_b^\alpha$. \square

4.2.2 Dérivées de Grünwald-Letnikov

Cette définition se base sur l'obtention de dérivées par différences finies. Nous reprenons ici la présentation de [26].

Chapitre 1. Éléments de Calcul Fractionnaire

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$. Pour $h > 0$, notons τ_h l'opérateur de translation à gauche :

$$\tau_h f(t) = f(t - h).$$

On a ainsi

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(t) - f(t - h)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\text{id} - \tau_h) f(t).$$

En notant $\tau_h^2 = \tau_h \circ \tau_h$, on a : $\tau_h^2 f(t) = f(t - 2h)$.

Concernant la dérivée seconde,

$$\begin{aligned} f''(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} (\text{id} - \tau_h) \right)^2 f(t), \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} (\text{id} - 2\tau_h + \tau_h^2) f(t), \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} (f(t) - 2f(t - h) + f(t - 2h)). \end{aligned}$$

Plus généralement, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f est donnée par

$$\begin{aligned} f^{(n)}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} (\text{id} - \tau_h)^n f(t), \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \text{id}^{n-k} (-\tau_h)^k f(t), \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh), \end{aligned} \tag{1.45}$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Il est possible d'étendre $\binom{n}{k}$ à $k > n$, en posant $\binom{n}{k} = 0$. La formule (1.45) devient alors

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh).$$

Là encore, on peut généraliser le terme de droite grâce à la fonction Gamma, en posant pour $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\alpha - k + 1)}.$$

Notons cette fois que $\binom{\alpha}{k} \neq 0$ même si $k > \alpha$.

Définition 1.11 Soit $\alpha > 0$. La dérivée de Grünwald-letnikov à gauche d'ordre α est définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, {}^{GL}\mathcal{D}_+^\alpha = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh).$$

En remarquant que $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} (\text{id} - \tau_{(-h)})f(t) = -f'(t)$, on obtient la dérivée de Grünwald-Letnikov à droite.

Définition 1.12 Soit $\alpha > 0$. La dérivée de Grünwald-letnikov à droite d'ordre α est définie par

$${}^{GL}\mathcal{D}_-^\alpha = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t + kh).$$

La dérivée de Grünwald-Letnikov présente un intérêt numérique évident. Si h est assez petit, l'évaluation discrète de $\frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh)$ permet d'approximer la dérivée fractionnaire sur \mathbb{R} (de Liouville).

4.3 Propriétés des opérateurs fractionnaires

Un des intérêts du calcul fractionnaire est qu'il généralise aussi certaines propriétés des dérivées et intégrales classiques : la dérivée fractionnaire de l'intégrale du même ordre redonne l'identité, la dérivée d'une dérivée redonne sous certaines conditions une dérivée, l'intégration par parties reste valable et les opérateurs fractionnaires se conjuguent très bien avec les transformées de Fourier et Laplace. Cette dernière propriété est omniprésente dans de nombreux domaines d'applications présents dans la section précédente.

Linéarité

La différentiation et l'intégration fractionnaires sont des opérateurs linéaires :

$$\mathcal{D}_t^\alpha (\gamma f(t) + \delta g(t)) = \gamma \mathcal{D}_t^\alpha f(t) + \delta \mathcal{D}_t^\alpha g(t),$$

pour n'importe quelle approche de dérivation considérée dans cette thèse.

Compositions entre opérateurs

La propriété de composition des dérivées usuelles

$$\frac{d^m}{dt^m} \frac{d^n}{dt^n} = \frac{d^{m+n}}{dt^{m+n}},$$

ne s'étend au cas fractionnaire que pour des fonctions dont les dérivées successives sont nulles au bord (sauf si $m + n < 1$).

- soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $f \in L^1([a, b])$. Alors

$${}_a\mathcal{I}_t^\alpha {}_a\mathcal{I}_t^\beta f = {}_a\mathcal{I}_t^{\alpha+\beta} f.$$

- soit $\alpha > 0$ et $f \in L^1([a, b])$. Alors

$${}_a\mathcal{D}_t^\alpha {}_a\mathcal{I}_t^\alpha f = f.$$

- soit $\alpha > 0$ $n = [\alpha] + 1$ et $f \in AC^n([a, b])$. Alors

$${}_a\mathcal{I}_t^\alpha {}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

Remarquons que des formules pour ${}_a\mathcal{I}_t^\alpha {}_a\mathcal{D}_t^\alpha f$ et ${}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha {}_a\mathcal{I}_t^\alpha f$ existent, mais elles font apparaître des termes de bords plus complexes et les conditions sur f sont plus délicates.

- soit $0 < \alpha < 1$ et $f \in AC([a, b])$. Alors

$${}_a\mathcal{I}_t^\alpha {}_a\mathcal{D}_t^\alpha f = {}_a\mathcal{D}_t^\alpha {}_a\mathcal{I}_t^\alpha f = f.$$

- soit $0 < \alpha < \beta$ et $f \in L^1([a, b])$. Alors

$${}_a\mathcal{D}_t^\alpha {}_a\mathcal{I}_t^\beta f = {}_a\mathcal{I}_t^{\beta-\alpha} f.$$

- Concernant la composition entre dérivées, commençons par remarquer que si $p \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, alors :

$$\begin{aligned} \frac{d^p}{dt^p} {}_a\mathcal{D}_t^\alpha &= \frac{d^{p+n}}{dt^{p+n}} {}_a\mathcal{I}_t^{n-\alpha}, \\ &= \frac{d^{p+n}}{dt^{p+n}} {}_a\mathcal{I}_t^{(p+n)-(p+\alpha)}, \\ &= {}_a\mathcal{D}_t^{p+\alpha}. \end{aligned}$$

Chapitre 1. Éléments de Calcul Fractionnaire

De même,

$${}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha \frac{d^p}{dt^p} = {}_a^c \mathcal{D}_t^{\alpha+p}.$$

- Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $m = [\alpha] + 1$, $n = [\beta] + 1$ et $p = [\alpha + \beta] + 1$. Si $f \in C_+^p([a, b])$, alors

$${}_a \mathcal{D}_t^\alpha {}_a \mathcal{D}_t^\beta f = {}_a \mathcal{D}_t^{\alpha+\beta} f.$$

Le résultat reste valable si l'on remplace un nombre quelconque de dérivées de Riemann par des dérivées de Caputo. Par exemple,

$${}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha {}_a^c \mathcal{D}_t^\beta f = {}_a^c \mathcal{D}_t^{\alpha+\beta} f.$$

- Soit $0 < \alpha < 1$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $f \in C_+^k([a, b])$. Alors :

$$({}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha)^k f = {}_a^c \mathcal{D}_t^{\alpha k} f.$$

- Soit $0 < \alpha < 1$ et $f \in AC^2([a, b])$. Alors :

- Si $0 < \alpha < 1/2$, ${}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha {}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha f = {}_a^c \mathcal{D}_t^{2\alpha} f$,

- Si $\alpha = 1/2$, ${}_a^c \mathcal{D}_t^{1/2} {}_a^c \mathcal{D}_t^{1/2} f = f'$,

- Si $1/2 < \alpha < 1$, ${}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha {}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha f(t) = {}_a^c \mathcal{D}_t^{2\alpha} f + \frac{(t-a)^{1-2\alpha}}{\Gamma(2-2\alpha)} f'(a)$.

Toutes les démonstrations se trouvent dans [8].

Intégration par parties

La formule d'intégration par parties est une des propriétés extensibles aux opérateurs fractionnaires mais là encore sous certaines restrictions. C'est ici qu'apparaissent inévitablement les opérateurs à droite. Dans [8] apparaît une formule d'intégration par parties, mais elle requiert plusieurs conditions. Nous préférons donner ici une version simplifiée avec des conditions explicites que nous avons trouvés dans [35].

Corollaire 1.1 *Soit $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $n - 1 < \alpha \leq n$. Soit $f \in AC^n([a, b])$ et $g \in C_0^n([a, b])$. Alors*

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \cdot {}_a \mathcal{D}_t^\alpha g(t) dt &= \int_a^b {}_t \mathcal{D}_b^\alpha f(t) \cdot g(t) dt, \\ \int_a^b f(t) \cdot {}_t \mathcal{D}_b^\alpha g(t) dt &= \int_a^b {}_a \mathcal{D}_t^\alpha f(t) \cdot g(t) dt \end{aligned}$$

Transformée de Fourier

La transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ peut-être définie par

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \mathcal{F}[f](\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} f(t) dt.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n sont intégrables, alors

$$\mathcal{F}[f^{(n)}](\omega) = (i\omega)^n \mathcal{F}[f](\omega). \quad (1.46)$$

Ce résultat se généralise aux opérateurs fractionnaires définis sur \mathbb{R} .

Lemme 1.2 *Soit $0 < \alpha < 1$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors*

$$\mathcal{F}[\mathcal{I}_{\pm}^{\alpha} f](\omega) = (\pm i\omega)^{-\alpha} \mathcal{F}[f](\omega).$$

Corollaire 1.2 *Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que pour tout $1 \leq k \leq n$, $\mathcal{D}_{\pm}^{k+\alpha-n} f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors*

$$\mathcal{F}[\mathcal{D}_{\pm}^{\alpha} f](\omega) = (\pm i\omega)^{\alpha} \mathcal{F}[f](\omega).$$

Démonstration. *D'après le lemme (1.2),*

$$\mathcal{F}[\mathcal{I}_{\pm}^{n-\alpha} f](\omega) = (\pm i\omega)^{\alpha-n} \mathcal{F}[f](\omega).$$

Comme pour tout $1 \leq k \leq n$, $\frac{d^k}{dt^k} \mathcal{I}_{+}^{n-\alpha} f = \mathcal{D}_{+}^{k+\alpha-n} f \in L^1(\mathbb{R})$, on peut utiliser (1.46) :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathcal{D}_{+}^{\alpha} f](\omega) &= (i\omega)^n \mathcal{F}[\mathcal{I}_{+}^{n-\alpha} f](\omega), \\ &= (i\omega)^{\alpha} \mathcal{F}[f](\omega). \end{aligned}$$

De même pour tout $1 \leq k \leq n$, $\frac{d^k}{dt^k} \mathcal{I}_{-}^{n-\alpha} f = (-1)^k \mathcal{D}_{-}^{k+\alpha-n} f \in L^1(\mathbb{R})$, donc

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathcal{D}_{-}^{\alpha} f](\omega) &= (-1)^n (i\omega)^n \mathcal{F}[\mathcal{I}_{-}^{n-\alpha} f](\omega), \\ &= (-i\omega)^{\alpha} \mathcal{F}[f](\omega). \end{aligned}$$

□

Chapitre 1. Éléments de Calcul Fractionnaire

Transformée de Laplace

On dit qu'une fonction réelle $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^N$ est à croissance sous-exponentielle si

$$\exists A > 0, \exists s_0 \in \mathbb{R}, \exists t_0 > 0, \forall t > t_0, |f(t)| \leq Ae^{s_0 t}.$$

Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ est à croissance sous-exponentielle, rappelons que sa transformée de Laplace est définie par

$$\forall s > s_0, \mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, si $f \in C^n(\mathbb{R}^+)$ est à croissance sous-exponentielle, alors

$$\forall s > s_0, \mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0). \quad (1.47)$$

L'extension au cas fractionnaire s'effectue cette fois avec les opérateurs fractionnaires à supports minorés par 0.

Lemme 1.3 *Soit $\alpha > 0$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ est à croissance sous-exponentielle. Alors*

$$\forall s > s_0, \mathcal{L}[_0\mathcal{I}_t^\alpha f](s) = s^{-\alpha} \mathcal{L}[f](s).$$

Lemme 1.4 *Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. Soit $f \in C^n_+(\mathbb{R}^+)$ est à croissance sous-exponentielle. Alors*

$$\forall s > s_0, \mathcal{L}[_0\mathcal{D}_t^\alpha f](s) = s^\alpha \mathcal{L}[f](s).$$

On remarque qu'ici f doit avoir des conditions nulles au bord, ce qui peut paraître assez restrictif pour les applications. c'est en fait la dérivée de Caputo qui est la plus adaptée pour la transformée de Laplace.

Lemme 1.5 *Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. Soit $f \in C^n(\mathbb{R}^+)$ à croissance sous-exponentielle. Alors*

$$\forall s > s_0, \mathcal{L}[_0^c\mathcal{D}_t^\alpha f](s) = s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0). \quad (1.48)$$

Démonstration. On applique le lemme (1.3) à $f^{(n)}$, puis on utilise (1.47) :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[{}^c_0\mathcal{D}_t^\alpha f](s) &= \mathcal{L}[{}_0\mathcal{I}_t^{n-\alpha} f^{(n)}](s), \\
 &= s^{\alpha-n} \mathcal{L}[f^{(n)}](s), \\
 &= s^{\alpha-n} \left[s^n \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \right], \\
 &= s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0).
 \end{aligned}$$

□

5 Conclusion

Nous venons de voir les principales propriétés des opérateurs fractionnaires. Plusieurs des résultats prouvés ici peuvent être retrouvés dans [36]. On remarquera l'absence de généralisation pour la dérivée du produit et de la composition de deux fonctions. Ces caractéristiques de la dérivée classique passent effectivement mal au fractionnaire. Quelle que soit la définition utilisée et même avec des restrictions sur les fonctions :

$$\begin{aligned}
 \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}(f \cdot g) &\neq \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}(f) \cdot g + f \cdot \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}(g), \\
 \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}(f \circ g) &\neq \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}f(g) \cdot g'.
 \end{aligned}$$

À travers les différentes définitions présentées dans ce chapitre, on peut remarquer que contrairement à la dérivée usuelle, les dérivées fractionnaires ne sont jamais *locales*, c'est-à-dire que pour une fonction f , leurs évaluations en t ne dépendent pas seulement de $f(\tau)$, pour τ au voisinage de t . Les dérivées - ainsi que d'ailleurs les intégrales - à gauche dépendent au contraire de tout le "passé" de la fonction ($f(\tau)$ pour $\tau < t$), alors que leurs contreparties à droite font intervenir le "futur" de f ($f(\tau)$ pour $\tau > t$). C'est justement grâce à cette propriété de non-localité que des phénomènes à mémoires longues peuvent être modélisés.

D'un point de vue physique, seuls les opérateurs à gauche semblent pertinents, car il est naturel que le présent résulte du passé et non du futur. En pratique se sont effectivement ces opérateurs "passé" qui sont utilisés.

Chapitre 2

Équations Différentielles Fractionnaires

Le but de ce chapitre est de présenter, d'une manière synthétique et unifiée, les éléments sur la théorie des équations différentielles fractionnaires. Nous commençons par considérer la question d'existence et d'unicité de la solution d'un problème à valeurs initiales, pour une équation différentielle fractionnaire. Puis seront traitées les questions de résolution d'équations différentielles fractionnaire linéaires et d'étude de la stabilité, pour terminer ce chapitre par la présentation de quelques méthodes numériques nécessaires à la résolution d'équations différentielles fractionnaires.

1 Quelques résultats d'existence et d'unicité

Dans cette partie on va discuter les propriétés d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire. On va se restreindre à des problèmes aux conditions initiales (problèmes de Cauchy). En plus, on va supposer sans perte de généralité que les dérivées fractionnaires sont développées au point 0. Comme conséquence, on utilisera les symboles \mathcal{D}^α , ${}^c\mathcal{D}^\alpha$ et ${}^{GL}\mathcal{D}^\alpha$ pour les dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville, Caputo et Grünwald-letnikov développées au point 0. On commence par donner une définition d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire (EDF) :

Définition 2.1 *Soit $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, $n = [\alpha] + 1$ et $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ alors :*

$$\mathcal{D}^\alpha y(x) = f(x, y(x)), \quad (2.1)$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville. Comme conditions initiales pour ce type d'EDF on utilise :

$$\mathcal{D}^{\alpha-k} y(0) = b_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \quad \lim_{z \rightarrow 0^+} \mathcal{I}^{n-\alpha} y(z) = b_n. \quad (2.2)$$

De la même manière

$${}^c\mathcal{D}^\alpha y(x) = f(x, y(x)), \quad (2.3)$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Caputo et dans ce cas on utilise comme conditions initiales :

$$y^k(0) = b_k \quad (k = 0, 2, \dots, n-1). \quad (2.4)$$

L'utilisation de conditions initiales de différents types pour les équations différentielles fractionnaires (2.1) et (2.3) nous assure l'unicité des solutions de l'EDF correspondante, qu'on va prouver dans les théorèmes suivants [37].

1.1 Équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville

On commence par l'équation de type Riemann-Liouville.

Théorème 2.1 *Soit $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $n = [\alpha] + 1$. De plus, soit $k > 0$, $h^* > 0$, et $b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathbb{R}$. On défini*

$$G = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq h^*, y \in \mathbb{R} \text{ si } x = 0 \text{ et } |x^{n-\alpha}y - \sum_{k=1}^n b_k x^{n-k} / \Gamma(\alpha - k + 1)| < K \text{ sinon} \right\},$$

et supposons que la fonction $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et bornée sur G et vérifie la condition de Lipschitz par rapport à la seconde variable, c'est-à-dire, il existe une constante $L > 0$ telle que, pour tout (x, y_1) et (x, y_2) de G , on a :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < L |y_1 - y_2|.$$

Alors l'équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville (2.1) associée aux conditions initiales (2.2) possède une unique solution $y \in C(O, h]$, où

$$h = \min \left\{ h^*, \tilde{h}, \left(\frac{\Gamma(\alpha + 1)K}{M} \right)^{1/N} \right\} \text{ avec } M = \sup_{x, z \in G} |f(x, z)|,$$

et \tilde{h} est un réel positif qui satisfait :

$$\tilde{h} < \frac{\Gamma(2\alpha - n + 1)}{(\Gamma(\alpha - n + 1)L)^{1/\alpha}}.$$

Ce résultat est similaires aux théorèmes connus dans le cas classique d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre. La démonstration va donc être analogue.

Commençons d'abord par transformer le problème aux valeurs initiales en une équation intégrale de Volterra équivalente (Lemme (2.1)), ensuite on va prouver l'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale par un processus itératif de type Picard (en utilisant une variante du théorème du point fixe de Banach dans un espace métrique bien choisi), (Lemme (2.2)). Le théorème (2.1) est alors une conséquence immédiate de ces deux lemmes.

Lemme 2.1 *Sous les hypothèses du Théorème (2.1) avec $h > 0$, la fonction $y \in C(0, h]$ est*

Chapitre 2. Équations Différentielles Fractionnaires

une solution de l'équation différentielle

$$\mathcal{D}^\alpha y(x) = f(x, y(x)),$$

avec les conditions initiales

$$\mathcal{D}^{\alpha-k} y(0) = b_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \quad \lim_{z \rightarrow 0^+} \mathcal{I}^{n-\alpha} y(z) = b_n.$$

si et seulement si c'est une solution de l'équation intégrale de Volterra

$$y(x) = \sum_{k=1}^n \frac{b_k x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt. \quad (2.5)$$

Démonstration. Supposons d'abord que y est une solution de l'équation de Volterra (2.5). On peut écrire cette équation sous la forme

$$y(x) = \sum_{k=1}^n \frac{b_k x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} + \mathcal{I}^\alpha f(\cdot, y(\cdot))(x).$$

Maintenant on applique l'opérateur différentiel \mathcal{D}^α aux deux membres de cette égalité et on obtient immédiatement que y est aussi une solution de l'équation différentielle (2.1).

Pour les conditions initiales, observons d'abord le cas $1 \leq k \leq n-1$, on trouve en appliquant $\mathcal{D}^{\alpha-k}$ à l'équation de Volterra que

$$\mathcal{D}^{\alpha-k} y(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j \mathcal{D}^{\alpha-k} (\cdot)^{\alpha-j}(x)}{\Gamma(\alpha-j+1)} + \mathcal{D}^{\alpha-k} \mathcal{I}^{\alpha-k} \mathcal{I}^k f(\cdot, y(\cdot))(x).$$

d'après les propriétés des opérateurs fractionnaires vues précédemment

$$\mathcal{D}^{\alpha-k} y(0) = \frac{b_k \mathcal{D}^{\alpha-k} (\cdot)^{\alpha-k}(0)}{\Gamma(\alpha-k+1)} + \mathcal{I}^k f(\cdot, y(\cdot))(0).$$

Comme $k \geq 1$, l'intégrale est nulle, de plus $\mathcal{D}^{\alpha-k} (\cdot)^{\alpha-k}(x) = \Gamma(\alpha-k+1)$. Alors $\mathcal{D}^{\alpha-k} y(0) = b_k$. Pour $k = n$ On applique l'opérateur $\mathcal{I}^{n-\alpha}$ aux deux membres de l'équation intégrale on trouve, pour $z \rightarrow 0$, que tout les termes de la somme s'annulent excepté le $n^{\text{ième}}$ terme. L'intégrale $\mathcal{I}^{n-\alpha} \mathcal{I}^\alpha f(\cdot, y(\cdot))(z) = \mathcal{I}^n f(\cdot, y(\cdot))(z)$ s'annule aussi quand $z \rightarrow 0$. Finalement, on trouve

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \mathcal{I}^{n-\alpha} y(z) = \lim_{z \rightarrow 0^+} \mathcal{I}^{n-\alpha} \frac{b_n \mathcal{I}^{n-\alpha} (\cdot)^{\alpha-n}(z)}{\Gamma(\alpha-n+1)} = b_n$$

Chapitre 2. Équations Différentielles Fractionnaires

Ainsi y est une solution du problème aux valeurs initiales (2.1)-(2.2).

Maintenant, si y est une solution continue du problème aux valeurs initiales, définissons $z(x) = f(x, y(x))$. Par supposition, z est une fonction continue et $z(x) = f(x, y(x)) = \mathcal{D}^\alpha y(x) = \mathcal{D}^n \mathcal{I}^{n-\alpha} y(x)$. Alors $\mathcal{D}^n \mathcal{I}^{n-\alpha} y$ est continue, c'est-à-dire $\mathcal{I}^{n-\alpha} y \in C^n(0, h]$, d'où

$$y(x) = \mathcal{I}^\alpha \mathcal{D}^\alpha y(x) + \sum_{k=1}^n c_k x^{\alpha-k} = \mathcal{I}^\alpha f(., y(.))(x) + \sum_{k=1}^n c_k x^{\alpha-k}$$

en introduisant les conditions initiales définies plus haut, on peut déterminer les constantes c_1, \dots, c_n comme $c_k = b_k / \Gamma(\alpha - k + 1)$. □

En utilisant ce résultat nous pouvons maintenant démontrer le théorème (2.1), en établissant les résultats en terme d'équations intégrales correspondantes :

Lemme 2.2 *Sous les conditions du théorème (2.1), l'équation de Volterra*

$$y(x) = \sum_{k=1}^n \frac{b_k x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha - k + 1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt.$$

possède une unique solution $y \in C(0, h]$.

Démonstration. Soit l'ensemble

$$B = \left\{ y \in C(0, h] : \sup_{0 < x \leq h} \left| x^{n-\alpha} y(x) - \sum_{k=1}^n \frac{b_k x^{n-k}}{\Gamma(\alpha - k + 1)} \right| \leq K \right\},$$

sur cet ensemble on défini l'opérateur A par

$$Ay(x) = \sum_{k=1}^n \frac{b_k x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha - k + 1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt.$$

Notons que, pour $y \in B$, Ay est aussi une fonction continue sur $(0, h]$. De plus,

$$\begin{aligned} \left| x^{n-\alpha} Ay(x) - \sum_{k=1}^n \frac{b_k x^{n-k}}{\Gamma(\alpha - k + 1)} \right| &= \left| \frac{x^{n-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \right|, \\ &\leq \frac{x^{n-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} M \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} dt, \\ &\leq \frac{x^{n-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} M \frac{x^\alpha}{\alpha} = \frac{x^n M}{\Gamma(\alpha + 1)} \leq K. \end{aligned}$$

Pour $x \in (0, h]$, la dernière inégalité provient de la définition de h . Ceci montre que si $y \in B$ alors $Ay \in B$.

Chapitre 2. Équations Différentielles Fractionnaires

Soit l'ensemble

$$\hat{B} = \left\{ y \in C(0, h] : \sup_{0 < x \leq h} |x^{n-\alpha} y(x)| < \infty \right\},$$

sur lequel on définit une norme $\|\cdot\|$ par

$$\|y\|_{\hat{B}} = \sup_{0 < x \leq h} |x^{n-\alpha} y(x)|.$$

En utilisant la définition de A , on peut réécrire l'équation de Volterra sous une forme plus compacte

$$y = Ay.$$

Donc, pour prouver la relation souhaitée, il est suffisant de montrer que l'opérateur A possède un unique point fixe. Pour cela, on va utiliser le théorème du point fixe de Weissinger (Annexe A). On va prouver que pour $y, \tilde{y} \in B$,

$$\|A^j y - A^j \tilde{y}\|_{\hat{B}} \leq \left(\frac{Lh^\alpha \Gamma(\alpha - n + 1)}{\Gamma(2\alpha - n + 1)} \right)^j \|y - \tilde{y}\|_{\hat{B}}. \quad (2.6)$$

Ceci peut être montré par récurrence :

Le cas $j = 0$ est trivial.

Pour l'étape $j - 1 \mapsto j$, on va procéder comme suit :

$$\begin{aligned} \|A^j y - A^j \tilde{y}\|_{\hat{B}} &= \sup_{0 < x \leq h} |x^{n-\alpha} (A^j y(x) - A^j \tilde{y}(x))| \\ &= \sup_{0 < x \leq h} |x^{n-\alpha} (AA^{j-1} y(x) - AA^{j-1} \tilde{y}(x))| \\ &= \sup_{0 < x \leq h} \frac{x^{n-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} [f(t, A^{j-1} y(t)) - f(t, A^{j-1} \tilde{y}(t))] dt \right| \\ &\leq \sup_{0 < x \leq h} \frac{x^{n-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t, A^{j-1} y(t)) - f(t, A^{j-1} \tilde{y}(t))| dt \\ &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \sup_{0 < x \leq h} x^{n-\alpha} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |A^{j-1} y(t) - A^{j-1} \tilde{y}(t)| dt \end{aligned}$$

Chapitre 2. Équations Différentielles Fractionnaires

en utilisant la définition de l'opérateur A et la condition de Lipschitz sur f .

$$\begin{aligned}
 \|A^j y - A^j \tilde{y}\|_{\hat{B}} &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \sup_{0 < x \leq h} x^{n-\alpha} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |A^{j-1} y(t) - A^{j-1} \tilde{y}(t)| dt \\
 &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \sup_{0 < x \leq h} x^{n-\alpha} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\alpha-n} t^{n-\alpha} |A^{j-1} y(t) - A^{j-1} \tilde{y}(t)| dt \\
 &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \|A^{j-1} y - A^{j-1} \tilde{y}\|_{\hat{B}} \sup_{0 < x \leq h} x^{n-\alpha} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\alpha-n} dt \\
 &= \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \|A^{j-1} y - A^{j-1} \tilde{y}\|_{\hat{B}} \sup_{0 < x \leq h} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(2\alpha-n+1)} x^\alpha \\
 &= \frac{Lh^\alpha \Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(2\alpha-n+1)} \|A^{j-1} y - A^{j-1} \tilde{y}\|_{\hat{B}}.
 \end{aligned}$$

Les hypothèses de la récurrence nous donnent la relation (2.6). Ainsi, On peut utiliser le théorème (A.2) avec $\alpha_j = \gamma^j$ où $\gamma = (Lh^\alpha \Gamma(\alpha-n+1)/\Gamma(2\alpha-n+1))^j$. Reste à prouver que la série $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j$ est convergente. Ceci est trivial par le fait que $h \leq \tilde{h}$ et la définition de \tilde{h} qui implique que $\gamma < 1$. Une application du théorème du point fixe nous garantie l'existence et l'unicité de la solution de notre équation intégrale. \square

1.2 Équation différentielle fractionnaire de type Caputo

Un résultat similaire peut être obtenu pour une équation différentielle fractionnaire de type Caputo :

Théorème 2.2 Soit $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $n = [\alpha] + 1$. De plus, soit $k > 0$, $h^* > 0$, et $b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$. On défini

$$G = [0, h^*] \times [b_0 - K, b_0 + K],$$

et soit la fonction continue $f : G \rightarrow \mathbb{R}$. Alors, il existe un réel $h > 0$ et une fonction $y \in C[0, h]$ solution de l'équation différentielle fractionnaire de type Caputo (2.3) munie des conditions initiales (2.4). Dans le cas $\alpha \in (0, 1)$ le paramètre h est donné par la relation

$$h = \min\{h^*, (K\Gamma(\alpha+1)/M)^{1/\alpha}\}, \quad \text{avec } M = \sup_{(x,z) \in G} |f(x,z)|.$$

Si de plus f vérifie la condition de Lipschitz par rapport à la seconde variable, c'est-à-dire :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < L |y_1 - y_2|.$$

Chapitre 2. Équations Différentielles Fractionnaires

avec $L > 0$ une constante indépendante de x , y_1 et y_2 , alors la fonction $y \in C[0, h]$ est unique.

On va suivre le même processus pour prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème aux conditions initiales de type Caputo (2.3)-(2.4). D'abord énonçons le lemme suivant (pour la démonstration voir [38])

Lemme 2.3 *Sous les hypothèses du théorème (2.2) la fonction $y \in C[0, h]$ est une solution de l'EDF de type Caputo (2.3) avec les conditions initiales (2.4) si et seulement si elle est solution de l'équation intégrale de Volterra du second type :*

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} b_k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt.$$

En utilisant ce résultat nous pouvons maintenant démontrer le théorème (2.2) :

Lemme 2.4 *Sous les hypothèses du théorème (2.2), l'équation de Volterra*

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} b_k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt. \quad (2.7)$$

possède une unique solution $y \in C[0, h]$.

Démonstration. *La preuve est divisée en deux parties. On va d'abord considérer le cas $\alpha > 1$ ensuite le cas $\alpha \in (0, 1)$. Ceci est lié au fait que l'équation de Volterra (2.7) possède un noyau singulier $(x-t)^{\alpha-1}$ dans le cas $\alpha \in (0, 1)$, alors que dans l'autre cas ce noyau est continu.*

- *Le cas $\alpha > 1$: L'équation (2.7) possède un noyau continu et la fonction à l'extérieur du signe intégrale est continue. Alors l'existence de la solution découle directement de l'utilisation des méthodes standards de la théorie des équations de Volterra [39]. De même pour l'unicité, en utilisant la condition de Lipschitz.*
- *Le cas $\alpha \in (0, 1)$: Ici, l'équation de Volterra sera réduite à*

$$y(x) = b_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt. \quad (2.8)$$

Pour démontrer l'existence de la solution on introduit l'ensemble

$$U = \{u \in C[0, h] : \|y - b_0\|_\infty \leq K\}.$$

Chapitre 2. Équations Différentielles Fractionnaires

Il est clair que c'est une partie fermée et convexe de l'espace de Banach de toutes les fonctions sur $[0, h]$ muni de la norme de Chebychev ($\|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$). Aussi, U n'est pas vide car la fonction constante $y = b_0$ appartient à U . On défini sur U l'opérateur A

$$(Ay)(x) = b_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt. \quad (2.9)$$

Alors notre équation est réduite à

$$y = Ay,$$

et pour arriver à notre résultat d'existence, on doit montrer que A possède un point fixe.

Regardons de plus près les propriétés de l'opérateur A .

D'abord notons que, pour $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq h$,

$$\begin{aligned} |(Ay)(x_1) - (Ay)(x_2)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{x_1} (x_1-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt - \int_0^{x_2} (x_2-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \right|, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{x_1} \left((x_1-t)^{\alpha-1} - (x_2-t)^{\alpha-1} \right) f(t, y(t)) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_1}^{x_2} (x_2-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \right|, \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{x_1} \left((x_1-t)^{\alpha-1} - (x_2-t)^{\alpha-1} \right) dt + \int_{x_1}^{x_2} (x_2-t)^{\alpha-1} dt \right|, \\ &= \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} (2(x_2-x_1)^\alpha + x_1^\alpha - x_2^\alpha), \end{aligned} \quad (2.10)$$

ce qui prouve que Ay est une fonction continue. De plus, pour $y \in U$ et $x \in [0; h]$, on trouve

$$\begin{aligned} |(Ay)(x) - y_0^{(0)}| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \right| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_\infty x^\alpha, \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_\infty h^\alpha \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_\infty \frac{K\Gamma(\alpha+1)}{\|f\|_\infty} = K. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $Ay \in U$ si $y \in U$, c'est-à-dire que A applique U dans U .

Il ne reste plus qu'à montrer que $A(U) = \{Au : u \in U\}$ est un ensemble relativement compact pour pouvoir appliquer le théorème du point fixe de Schauder (A.4). Ceci peut être fait par le théorème d'Arzelá-Ascoli (A.5). Pour $z \in A(u)$ on trouve que, pour tout $x \in [0, h]$:

$$\begin{aligned} |z(x)| &= |(Ay)(x)| \leq |b_0| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t, y(t))| dt, \\ &\leq |b_0| \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_\infty h^\alpha, \end{aligned}$$

Chapitre 2. Équations Différentielles Fractionnaires

ce qui montre que AU est borné. De plus, pour $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq h$, on a trouvé d'après l'équation (2.10) que :

$$\begin{aligned} |(Ay)(x_1) - (Ay)(x_2)| &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha + 1)} (2(x_2 - x_1)^\alpha + x_1^\alpha - x_2^\alpha), \\ &\leq 2 \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha + 1)} (x_2 - x_1)^\alpha. \end{aligned}$$

Donc, si $|x_2 - x_1| < \delta$, on aura

$$|(Ay)(x_1) - (Ay)(x_2)| \leq 2 \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha + 1)} \delta^\alpha.$$

Notons que le terme de droite de cette expression est indépendant de la variable y , ce qui implique que l'ensemble $A(U)$ est équicontinu. Alors, AU est relativement compacte d'après le théorème D'Arzelà-Ascoli. Le théorème du point fixe de Schauder nous assure, donc, que A possède un point fixe c'est-à-dire que notre problème aux valeurs initiales possède une solution. Pour l'unicité de la solution on va utiliser encore une fois l'opérateur A , tout en rappelant qu'il applique l'ensemble non vide, convexe et fermé $U = \{y \in C[0, h] : \|y - b_0\|_{\infty} \leq K\}$ dans lui-même. Nous allons maintenant montrer que A possède un unique point fixe. Pour cela on va d'abord prouver que pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, h]$, on a

$$\|A^j y - A^j \tilde{y}\|_{L_\infty[0, x]} \leq \frac{(Lx^\alpha)^j}{\Gamma(1 + \alpha j)} \|y - \tilde{y}\|_{L_\infty[0, x]}. \quad (2.11)$$

Ceci peut être démontré par récurrence : Pour $j = 0$, l'inégalité est triviale.

Pour l'étape $j - 1 \mapsto j$, on écrit

$$\begin{aligned} \|A^j y - A^j \tilde{y}\|_{L_\infty[0, x]} &= \|A(A^{j-1}y) - A(A^{j-1}\tilde{y})\|_{L_\infty[0, x]}, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sup_{0 \leq w \leq x} \left| \int_0^w (w-t)^{\alpha-1} [f(t, A^{j-1}y(t)) - f(t, A^{j-1}\tilde{y}(t))] dt \right|. \end{aligned}$$

Dans l'étape suivante on utilisera la condition de Lipschitz sur f ainsi que l'hypothèse de ré-

currence, on trouve

$$\begin{aligned}
 \|A^j y - A^j \tilde{y}\|_{L^\infty[0,x]} &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \sup_{0 \leq w \leq x} \int_0^w (w-t)^{\alpha-1} |A^{j-1} y(t) - A^{j-1} \tilde{y}(t)| dt, \\
 &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \sup_{0 \leq w \leq t} |A^{j-1} y(w) - A^{j-1} \tilde{y}(w)| dt, \\
 &\leq \frac{L^j}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha(j-1))} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\alpha(j-1)} \sup_{0 \leq w \leq t} |y(w) - \tilde{y}(w)| dt, \\
 &\leq \frac{L^j}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha(j-1))} \sup_{0 \leq w \leq x} |y(w) - \tilde{y}(w)| \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\alpha(j-1)} dt, \\
 &= \frac{L^j}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha(j-1))} \|y - \tilde{y}\|_{L^\infty[0,x]} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha(j-1))}{\Gamma(1+\alpha j)} x^{\alpha j},
 \end{aligned}$$

qui est l'inégalité (2.11). Comme conséquence, on trouve, en prenant la norme de chebyshev sur l'intervall $[0, h]$

$$\|A^j y - A^j \tilde{y}\|_\infty \leq \frac{(Lh^\alpha)^j}{\Gamma(1+\alpha j)} \|y - \tilde{y}\|_\infty.$$

On a montré que l'opérateur A satisfait les hypothèses du théorème du point fixe de Weissinger (A.2) avec $\alpha_j = (Lh^\alpha)^j / \Gamma(1+\alpha j)$, on peut donc en déduire l'unicité de la solution de notre équation différentielle. \square

Remarque 1.1 Par souci de simplicité, nous n'avons traité dans cette partie que le cas scalaire. Cependant, tous ces résultats peuvent être étendus au cas vectoriel (c'est-à-dire un système d'équations différentielles) sans aucun problème.

On va maintenant s'intéresser à résoudre explicitement une équation différentielle fractionnaire linéaire de type Caputo.

2 Équation différentielle fractionnaire linéaire

Dans le cas d'une équation différentielle fractionnaire linéaire, on peut donner une expression explicite de la solution, et ce, en utilisant la fonction de Mittag-Leffler E_α .

Théorème 2.3 Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. La solution du problème à valeurs initiales

$${}^c\mathcal{D}^\alpha y(x) = \lambda y(x), \quad y(0) = 1, \quad y^{(k)}(0) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

est donnée par

$$y(x) = E_\alpha(\lambda x^\alpha), \quad x \geq 0.$$

Chapitre 2. Équations Différentielles Fractionnaires

Autrement dit, les fonctions propres de l'opérateur différentiel de Caputo s'écrivent en terme des fonctions de Mittag-Leffler.

Démonstration. *il est clair, d'après les théorèmes d'existence et d'unicité énoncés précédemment, que le problème à valeurs initiales ci-dessus possède une unique solution. Il ne reste plus, qu'à vérifier que la fonction y définie ci-dessus est une solution de ce problème. Pour les conditions initiales, on a $y(0) = E_\alpha(0) = 1$ car*

$$E_\alpha(\lambda x^\alpha) = 1 + \frac{\lambda x^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + \frac{\lambda^2 x^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} + \dots$$

De plus, dans le cas $n \geq 2$ (ou $\alpha > 1$), on a $y^{(k)}(0) = 0$ pour $k = 1, 2, \dots, n - 1$, car

$$y(x) = 1 + \frac{\lambda x^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + \frac{\lambda^2 x^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} + \dots,$$

ce qui implique

$$y^{(k)}(x) = \frac{\lambda x^{\alpha-k}}{\Gamma(1 + \alpha - k)} + \frac{\lambda^2 x^{2\alpha-k}}{\Gamma(1 + 2\alpha - k)} + \dots,$$

pour $k = 1, 2, \dots, n - 1 < \alpha$.

Concernant l'équation différentielle, prenons d'abord le cas $\lambda = 0$ et remarquons que dans ce cas $y(x) = E_\alpha(0) = 1$, alors ${}^c\mathcal{D}^\alpha y(x) = 0 = \lambda y(x)$.

Pour $\lambda \neq 0$, et en utilisant la notation $p_k(x) = x^k$, on a

$$\begin{aligned} {}^c\mathcal{D}^\alpha y(x) &= {}^c\mathcal{D}^\alpha \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda p_\alpha)^j}{\Gamma(1 + j\alpha)} \right] (x) &= {}_0\mathcal{I}^{n-\alpha} \mathcal{D}^n \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j p_{\alpha j}}{\Gamma(1 + j\alpha)} \right] (x) \\ &= {}_0\mathcal{I}^{n-\alpha} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j \mathcal{D}^n p_{\alpha j}}{\Gamma(1 + j\alpha)} \right] (x) &= {}_0\mathcal{I}^{n-\alpha} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j \mathcal{D}^n p_{\alpha j}}{\Gamma(1 + j\alpha)} \right] (x) \\ &= {}_0\mathcal{I}^{n-\alpha} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j p_{\alpha j-n}}{\Gamma(1 + j\alpha - n)} \right] (x) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j {}_0\mathcal{I}^{n-\alpha} p_{\alpha j-n}(x)}{\Gamma(1 + j\alpha - n)} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j p_{\alpha j-\alpha}(x)}{\Gamma(1 + j\alpha - \alpha)} &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j x^{\alpha j-\alpha}}{\Gamma(1 + j\alpha - \alpha)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j+1} x^{\alpha j}}{\Gamma(1 + j\alpha)} &= \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda x^\alpha)^j}{\Gamma(1 + j\alpha)} = \lambda y(x). \end{aligned}$$

La permutation des symboles somme et différentiation puis somme et intégration est justifiée par le fait que la série définissant la fonction de Mittag-Leffler est convergente. \square

3 Stabilité des équations différentielles fractionnaires

Nous allons maintenant considérer la question de stabilité des solutions des systèmes d'équations différentielles fractionnaires. Dans le cas classique d'équation d'ordre entier la stabilité est un domaine de recherche important et bien connu, et elle est généralement étudié pour des équations différentielles du premier ordre. Dans cette partie, nous allons nous intéresser à une classe de problèmes proche de ce cas. Soit donc l'équation différentielle fractionnaire :

$${}^c\mathcal{D}^\alpha y(x) = f(x, y(x)), \quad \text{avec } \alpha \in (0, 1). \quad (2.12)$$

Ici $y(x) \in \mathbb{R}^N$ avec $N \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie sur une partie de \mathbb{R}^{N+1} . Supposons que les conditions d'existence et d'unicité sont vérifiées et que :

$$f(x, 0) = 0, \quad \text{pour tout } x \geq 0. \quad (2.13)$$

Cette condition implique que la fonction $y(x) = 0$ est une solution de (2.12).

Définition 2.2 (a) *La solution $y(x) = 0$ de l'équation (2.12) est dite stable si, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que la solution du problème à valeurs initiales constitué de l'équation (2.12) et de la condition initiale $y(0) = y_0$ vérifie $\|y(x)\| < \epsilon$, pour tout $x \geq 0$ quand $\|y_0\| < \delta$.*

(b) *La solution $y(x) = 0$ de l'équation (2.12) est dite asymptotiquement stable si elle est stable et s'il existe un $\gamma > 0$ telle que $\lim_{x \rightarrow \infty} \|y(x)\| = 0$ quand $\|y_0\| < \delta$.*

Remarque 3.1 *Dans la définition (2.2) nous avons seulement discuté les propriétés de la solution nulle de l'équation (2.12). On peut transférer ces propriétés ainsi que les résultat suivants au voisinage d'une solution arbitraire qui satisfait ou non la condition (2.13) par la procédure suivante :*

Une solution y de l'équation différentielle ${}^c\mathcal{D}^\alpha y(x) = g(x, y(x))$ est dite (asymptotiquement) stable si et seulement si la solution nulle de ${}^c\mathcal{D}^\alpha z(x) = f(x, z(x))$ est (asymptotiquement) stable avec $f(x, z) = g(x, z + y(x)) - g(x, y(x))$.

3.1 Méthode indirecte (Linéarisation)

On commence par donner un résultat de stabilité dans le cas très simple d'une équation différentielle fractionnaire linéaire homogène à coefficients constants ([40]).

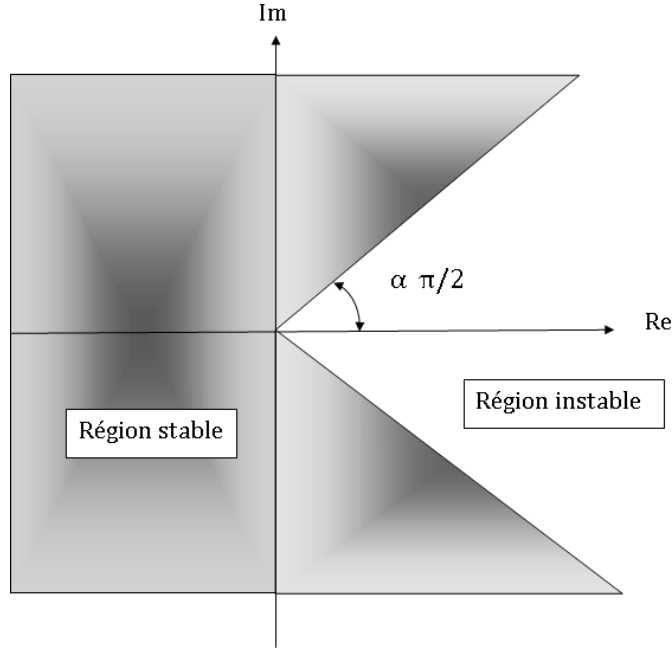


Figure 2.1 – Région de stabilité d'un système linéaire d'équations fractionnaires d'ordre $0 < \alpha < 1$.

Théorème 2.4 Soit l'équation différentielle fractionnaire ${}^c\mathcal{D}^\alpha y(x) = \Lambda y(x)$, où Λ est une matrice d'ordre $N \times N$.

- (a) La solution $y(x) = 0$ du système est asymptotiquement stable si et seulement si les valeurs propres λ_j ($j = 1, 2, \dots, N$) de Λ vérifient $|\arg \lambda_j| > \alpha\pi/2$. De plus le vecteur $y(x)$ tend vers 0 avec $\|y(x)\| < Kx^{-\alpha}$, $x > 0$, $\alpha > 0$.
- (b) La solution $y(x) = 0$ du système est stable si et seulement si les valeurs propres vérifient $|\arg \lambda_j| \geq \alpha\pi/2$ et toutes les valeurs propres vérifiant $|\arg \lambda_j| = \alpha\pi/2$ ont une multiplicité géométrique égale à un (la multiplicité géométrique d'une valeur propre λ de la matrice Λ est la dimension du sous-espace des vecteurs v vérifiant $\Lambda v = \lambda v$).

Dans le cas d'un système non-linéaire autonome ${}^c\mathcal{D}^\alpha y = f(y)$, $0 < \alpha < 1$, ou sous forme vectorielle :

$${}^c\mathcal{D}^\alpha y_i = f_i(y_1, y_2, \dots, y_N), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.14)$$

où $y = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$ et $f = [f_1, f_2, \dots, f_N]^T$, les points d'équilibre du système (2.14) sont les solutions des équations $f_i(y_1, y_2, \dots, y_N) = 0$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Chapitre 2. Équations Différentielles Fractionnaires

Supposons que $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_N^*)$ est un point d'équilibre du système (2.14) c'est-à-dire

$$f_i(y_1^*, y_2^*, \dots, y_N^*) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

pour analyser la stabilité de ce point on défini

$$\epsilon_i = y_i - y_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Alors

$${}^c\mathcal{D}^\alpha y_i = f_i(y_1^* + \epsilon_1, y_2^* + \epsilon_2, \dots, y_N^* + \epsilon_N), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.15)$$

Par développement en séries de Taylor de la fonction f au voisinage du point y^* on trouve :

$$f_i(y_1^* + \epsilon_1, y_2^* + \epsilon_2, \dots, y_N^* + \epsilon_N) = f_i(y_1^*, y_2^*, \dots, y_N^*) + \left[\frac{\partial f_i}{\partial y_1} \Big|_{y^*} \quad \frac{\partial f_i}{\partial y_2} \Big|_{y^*} \quad \dots \quad \frac{\partial f_i}{\partial y_N} \Big|_{y^*} \right] \epsilon + \bar{f}_i(\epsilon), \quad (2.16)$$

pour $i = 1, 2, \dots, N$. Où $\epsilon = [\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N]^T$ et $\bar{f}_i(\epsilon)$ dénote les termes supérieurs dans la série de Taylor. On sait que $f_i(y_1^*, y_2^*, \dots, y_N^*) = 0$ pour $i = 1, 2, \dots, N$, alors :

$$f_i(y_1^* + \epsilon_1, y_2^* + \epsilon_2, \dots, y_N^* + \epsilon_N) \approx \left[\frac{\partial f_i}{\partial y_1} \Big|_{y^*} \quad \frac{\partial f_i}{\partial y_2} \Big|_{y^*} \quad \dots \quad \frac{\partial f_i}{\partial y_N} \Big|_{y^*} \right] \epsilon, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.17)$$

On obtient donc

$${}^c\mathcal{D}^\alpha \epsilon = \mathcal{J} \epsilon, \quad (2.18)$$

où $\mathcal{J} = \partial f / \partial y|_{y^*}$ est la matrice jacobienne associée à f au point y^* .

On peut maintenant appliquer le théorème précédent pour étudier la stabilité locale des solutions d'équilibres du système d'équations fractionnaires autonomes non-linéaires (2.14).

3.2 Extension au cas fractionnaire de la méthode directe de Lyapounov

Par méthode directe de Lyapounov nous faisons allusion à la méthode consistant à trouver une fonction de Lyapounov associée à un problème non-linéaire, si une telle fonction existe alors le système est stable. Cette méthode est difficile à mettre en oeuvre, mais elle est d'une portée beaucoup plus générale. Notons que la méthode directe de Lyapounov nous donne une condition suffisante de stabilité, c'est-à-dire que le système peut être stable même devant l'impossibilité de trouver une fonction de Lyapounov car il n'y a pas de règle générale pour trouver une telle

Chapitre 2. Équations Différentielles Fractionnaires

fonction, cependant, dans les problèmes de mécanique, l'énergie est souvent un bon candidat. Commençons par définir la stabilité au sens de Mittag-Leffler [41] :

Définition 2.3 *La solution de l'équation différentielle fractionnaire non-linéaire*

$${}^c\mathcal{D}^\alpha y(x) = f(x, y(x)), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (2.19)$$

est dite Mittag-Leffler stable si

$$\|y(x)\| \leq \{m[y(x_0)](x - x_0)^{-\gamma} E_{\alpha, 1-\gamma}(-\lambda(x - x_0)^\alpha)\}^b, \quad (2.20)$$

où $0 < \alpha < 1$, $\gamma \in [0, 1 - \alpha]$, $\lambda \geq 0$, $b > 0$, $m(0) = 0$, $m(y) \geq 0$ et $m(y)$ est localement lipschitzienne sur $x \in B \subset \mathbb{R}^N$ avec m_0 comme constante de Lipschitz.

Remarque 3.2 *La stabilité de Mittag-Leffler implique la stabilité asymptotique.*

On va maintenant énoncer un théorème qui est considéré comme une extension de la méthode directe de Lyapounov au cas d'un système d'équations fractionnaires, et qui a pour résultat la stabilité au sens de Mittag-Leffler.

Théorème 2.5 *Soit $y = 0$ un point d'équilibre du système (2.19) et $D \in \mathbb{R}^N$ un domaine contenant l'origine. Soit $V(x, y(x)) : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continument dérivable et localement lipschitzienne par rapport à y telle que :*

$$\alpha_1 \|y\|^a \leq V(x, y(x)) \leq \alpha_2 \|y\|^{ab}, \quad (2.21)$$

$${}^c\mathcal{D}^\beta V(x, y(x)) \leq -\alpha_3 \|y\|^{ab} \quad (2.22)$$

où $x \geq 0$, $y \in D$, $\beta \in (0, 1)$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, a$ et b sont des constantes positives. Alors $y = 0$ est Mittag-Leffler stable.

Si les hypothèses sont vérifiées sur \mathbb{R}^N , alors $y = 0$ est globalement Mittag-Leffler stable.

Pour la démonstration de ce théorème voir [41].

4 Résolution numérique des équations différentielles fractionnaires

Pour la plupart des équations différentielles fractionnaires, obtenir une solutions analytique exacte est très compliqué, ainsi, il est nécessaire de se tourner vers les méthodes numériques. Ces méthodes sont développées sur les idées du cas entier, mais à cause du caractère non-local des dérivées fractionnaires elles vont se distinguer par plusieurs aspects et elles vont exhiber des problèmes qu'on a pas rencontré dans le cas classique.

Nous allons maintenant introduire quelques unes de ces méthodes, tout en donnant une plus grande importance à la méthode d'Adams-Bashforth-Moulton fractionnaire, car c'est la méthode numérique qu'on va appliquer le long de notre travail de simulation de systèmes dynamiques fractionnaires.

4.1 La méthode des différences fractionnaires de Grünwald-Letnikov

Dans cette partie et dans les suivantes, nous voulons développer des algorithmes numériques pour résoudre une équation différentielle d'ordre fractionnaire de type Riemann-Liouville :

$$\mathcal{D}^\alpha y(x) = f(x, y(x)), \quad \mathcal{D}^{\alpha-k} y(0) = b_k \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad \lim_{z \rightarrow 0^+} \mathcal{I}^{n-\alpha} y(z) = b_n, \quad (2.23)$$

ou plus important encore (d'un point de vue pratique) l'équation de type Caputo :

$${}^c\mathcal{D}^\alpha y(x) = f(x, y(x)), \quad \mathcal{D}^k y(0) = b_k \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (2.24)$$

où $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $n = [\alpha] + 1$. Nous nous intéressons à une solution $y(x)$ de l'équation (2.23) ou (2.24) sur un intervalle fermé $[0, X]$ pour un certain $X > 0$.

Comme dans le cas classique, les méthodes numériques ne sont pas supposées donner une solution sur tout l'intervalle $[0, X]$, mais plutôt sur un ensemble de points de cet intervalle.

Supposons que les points x_0, x_1, \dots, x_N sont équidistants sur $[0, X]$ avec un pas $x_{k+1} - x_k = h$, $N = X/h$, $x_0 = 0$ et $x_N = X$. De plus on note y_m l'approximation de $y(x_m)$ et $f_m = f(x_m, y_m)$ la discrétisation du second membre de l'équation différentielle en question.

Commençons par une méthode basée sur la dérivée de Grünwald-Letnikov.

Au lieu de considérer les problèmes aux conditions initiales (2.23) et (2.24) nous allons directement résoudre un troisième type de problèmes donné par :

$${}^{GL}\mathcal{D}^\alpha y(x) = f(x, y(x)), \quad y(0) = 0 \text{ avec } 0 < \alpha < 1, \quad (2.25)$$

Chapitre 2. Équations Différentielles Fractionnaires

où ${}^{GL}\mathcal{D}^\alpha$ est l'opérateur différentiel de Grünwald-Letnikov. Comme la condition initiale est homogène, alors le problème (2.25) est équivalent aux problèmes (2.23) et (2.24) pour $0 < \alpha < 1$. L'avantage d'une telle formulation est que nous gagnons une discrétisation immédiate du problème, d'après la définition de la dérivée de Grünwald-Letnikov

$${}^{GL}\mathcal{D}^\alpha y(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\Delta_h^\alpha y)(x)}{h^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor x/h \rfloor} (-1)^k \binom{\alpha}{k} y(x - kh), \alpha > 0.$$

Sans la limite $h \rightarrow 0$ on a, ce qu'on appelle, l'opérateur de Grünwald-letnikov *fini*

$${}^{GL}_F \mathcal{D}^\alpha y(x_m) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{\alpha}{k} y(x_m - kh), \quad m = 0, 1, \dots, N,$$

qui nous donne une version discrétisée de l'opérateur ${}^{GL}\mathcal{D}^\alpha$.

En utilisant les points de maillage x_0, \dots, x_N on obtient le problème discrétisé

$$\frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{\alpha}{k} y(x_m - kh) = f(x_m, y(x_m)), \quad m = 0, 1, \dots, N.$$

Si on pose $\omega_k = (-1)^k \binom{\alpha}{k}$, on peut alors résoudre ces équations une à une à chaque point x_m par :

$$y_m = h^\alpha f(x_m, y_m) - \sum_{k=1}^m \omega_k y(x_m - kh), \quad m = 1, \dots, N. \quad (2.26)$$

Cette formule calcule la solution numérique de l'équation différentielle fractionnaire (2.25). Remarquons que la solution recherchée y_m apparait dans les deux membres de l'équation (2.26), mais à chaque étape la $m^{\text{ième}}$ équation contient y_m comme unique inconnue, car on aurait calculé y_1, y_2, \dots, y_{m-1} lors des précédentes étapes et y_0 n'est autre que la condition initiale. Dans le cas général où l'équation est non-linéaire on aura besoin d'utiliser la méthode du point fixe pour résoudre chaque équation individuellement.

Avant de généraliser au cas où les conditions initiales ne sont pas nécessairement homogènes, regardons de plus près les coefficients ω_k de la dérivée de Grünwald-Letnikov finie. Les coefficients

Chapitre 2. Équations Différentielles Fractionnaires

ω_k peuvent être calculés d'une manière récursive (avec $\omega_0 = 1$) par :

$$\begin{aligned}\omega_k &= (-1)^k \binom{\alpha}{k} = (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\alpha - k + 1)}, \\ &= -(-1)^{k-1} \frac{\Gamma(\alpha + 1)(\alpha - k + 1)}{k\Gamma(k)\Gamma(\alpha - k)} = \left(\frac{k - (\alpha + 1)}{k} \right) \omega_{k-1}, \\ &= \left(1 - \frac{\alpha + 1}{k} \right) \omega_{k-1},\end{aligned}\tag{2.27}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Les coefficients ω_k peuvent aussi être considérés comme coefficient du développement en série de la fonction $\omega(z) = (1 - z)^\alpha$.

On trouve finalement la formule :

$$y_m = h^\alpha f(x_m, y_m) - \sum_{k=1}^m \omega_k y(x_m - kh) - \left(\frac{m^{-\alpha}}{\Gamma(m - \alpha)} - \sum_{j=0}^m \omega_j \right) y_0, \quad m = 1, \dots, N.\tag{2.28}$$

avec une erreur de l'ordre de $O(h)$ (pour plus de détails voir [38]). Il est clair que les formules (2.26) et (2.28) sont identiques dans le cas où les conditions initiales sont homogènes.

4.2 La méthode décompositionnelle d'Adomian (ADM)

Dans cette partie, on va considérer l'équation fractionnaire de type Caputo (2.24), ou d'une manière équivalente l'équation l'intégrale d'Abel-Volterra de la forme :

$$y(x) = g(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x - t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt,\tag{2.29}$$

où g est définie par :

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} b_k.$$

La méthode décompositionnelle d'Adomian [42, 43] est basée sur l'idée de construire une solution de l'équation intégrale (2.29) sous forme d'une série avec $y_i(x)$, $i = 0, 1, \dots$ comme solutions de base, c'est-à-dire :

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(x) = g(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x - t)^{\alpha-1} \sum_{i=0}^{\infty} f A_i(t) dt,$$

Chapitre 2. Équations Différentielles Fractionnaires

où les ${}_f A_i(t)$ sont appelés les polynômes d'Adomian. Cette méthode est un schéma explicite, défini par

$$\begin{aligned} y_0(x) &= g(x) \\ y_{i+1}(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} {}_f A_i(t) dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.30)$$

où les polynômes d'Adomian ${}_f A_i(t)$ sont obtenus grâce à la relation suivante :

$${}_f A_i(x) = \left[\frac{1}{i!} \frac{d^i}{d\lambda^i} f \left(x, \sum_{j=0}^i \lambda^j y_j \right) \right]_{\lambda=0} \quad (2.31)$$

où λ est un paramètre réel introduit par convenance.

En pratique, il est presque impossible de calculer la somme de la série $\sum_{i=0}^{\infty} y_i(x)$ (sauf cas très particulier). Aussi se contente-t-on généralement d'une solution approchée sous la forme d'une série tronquée $\sum_{i=0}^N y_i(x)$. Les fondements mathématiques de la méthode ainsi que les preuves de convergences ont été précisés par Yves Cherruault [44, 45]. Elles sont basées sur la méthode du point fixe.

4.3 La méthode d'itération variationnelle (VIM)

Cette méthode a été développée par Ji-Huan He [46–48] au début des années 1990.

Cette méthode est utilisée pour résoudre des problèmes non-linéaires, elle a été proposée la première fois pour résoudre des problèmes en mécanique quantique.

La méthode est basée sur la détermination de multiplicateur de Lagrange de façon optimale par l'intermédiaire de la théorie variationnelle.

Considérons le système fractionnaire non-linéaire suivant :

$$Ly + Ry + Ny = g(x), \quad (2.32)$$

où L est l'opérateur de dérivation fractionnaire, R est un opérateur différentiel linéaire, N représente les termes non-linéaires et g une fonction connue.

Nous pouvons construire une correction fonctionnelle selon la méthode d'itération variationnelle suivante :

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x \lambda [Ly_n(s) + R\tilde{y}_n(s) + N\tilde{y}_n(s) - g(s)] ds, \quad (2.33)$$

où λ est un multiplicateur de Lagrange, l'indice n représente la n^{ieme} approximation et \tilde{y}_n est considéré comme une variation restreinte, c'est-à-dire $\delta\tilde{y}_n(s) = 0$.

Pour résoudre l'équation (2.32) par la méthode VIM, on doit d'abord déterminer le multiplicateur de Lagrange λ qui va être identifié via une intégration par parties. Alors, Les approximations successives y_n de la solution $y(x)$ vont être obtenues en utilisant le multiplicateur de Lagrange et une fonction y_0 bien choisie (qui doit au moins satisfaire les conditions initiales), par conséquent, la solution exacte sera la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y(x).$$

La convergence de la méthode a été établie par Dehghan [49] et Odibat [50].

4.4 La méthode d'Adams-Bashforth-Moulton fractionnaire

Nous allons maintenant introduire une méthode numérique pour résoudre une équation différentielle fractionnaire de type Caputo basée sur une formulation fractionnaire de la méthode classique d'Adams-Bashforth-Moulton. En particulier, on va utiliser la formulation du problème original sous forme d'équation intégrale d'Abel-Volterra :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} b_k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt. \quad (2.34)$$

Cette méthode a été introduite et discutée dans [51, 52]. Une analyse mathématique détaillée se trouve dans [53, 54]. Des tests numériques et des comparaisons avec d'autres méthodes sont rapportés dans [55].

Dans ce travail, nous allons donner une vue d'ensemble de la version fractionnaire de cette méthode et citer quelques résultats analytiques importants, basée sur le livre de K. Diethelm [37].

4.4.1 Formulation Classique

Rappelons d'abord la méthode classique d'Adams-Bashforth-Moulton pour la résolution d'équations différentielles ordinaires du premier ordre :

$$Dy(x) = f(x, y(x)) \quad (2.35a)$$

$$y(0) = y_0 \quad (2.35b)$$

Supposons que la fonction f est telle que le problème admet une unique solution sur l'intervalle $[0, X]$, et que cet intervalle est divisé en N sous-intervalles $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, 1, \dots, N-1$ de

Chapitre 2. Équations Différentielles Fractionnaires

longueurs égales $h = X/N$.

L'idée de base est de supposer que nous connaissons les approximations $y_j \approx y(t_j)$, $j = 1, 2, \dots, k$, et nous allons essayer de calculer y_{k+1} par le biais de l'équation :

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(z, y(z)) dz. \quad (2.36)$$

Cette équation découle de l'intégration de (2.35a) sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$. L'intégrale dans le second membre de (2.36) est alors remplacé par la formule de quadrature trapézoïdale :

$$\int_a^b g(z) dz \approx \frac{b-a}{2} (g(a) + g(b)), \quad (2.37)$$

pour obtenir une équation avec comme unique inconnue l'approximation y_{k+1} :

$$y_{k+1} = y_k + \frac{t_{k+1} - t_k}{2} (f(t_k, y(t_k)) + f(t_{k+1}, y(t_{k+1}))), \quad (2.38)$$

en remplaçant $y(k+1)$ par y_{k+1} on retrouve l'équation implicite de la méthode à un pas d'Adams-Moulton

$$y_{k+1} = y_k + \frac{t_{k+1} - t_k}{2} (f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})). \quad (2.39)$$

Le problème avec cette formule est que l'inconnue y_{k+1} apparait dans les deux membres de l'équation, et à cause du caractère non-linaire de f , on ne peut généralement pas la résoudre pour y_{k+1} d'une manière directe. Ainsi on va utiliser (2.39) dans un processus itératif en insérant une valeur préliminaire approchée de y_{k+1} dans le membre de droite dans le but d'obtenir une meilleure approximation.

L'approximation préliminaire y_{k+1}^P , appelée *prédicteur*, est obtenue d'une manière similaire, en remplaçant la formule trapézoïdale par une formule du rectangle :

$$\int_a^b g(z) dz \approx (b-a)g(a), \quad (2.40)$$

on obtient ainsi la méthode explicite d'Adams-Bahforth

$$y_{k+1}^P = y_k + hf(t_k, y_k). \quad (2.41)$$

Il est bien connu que le processus (2.41) et l'équation :

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} (f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1}^P)), \quad (2.42)$$

Chapitre 2. Équations Différentielles Fractionnaires

forment la méthode d'Adams-Bashforth-Moulton à un pas. Cette méthode est convergente, son ordre de convergence est 2, c'est-à-dire :

$$\max_{j=1,2,\dots,N} |y(t_j) - y_j| = O(h^2). \quad (2.43)$$

De plus, cette méthode est satisfaisante du point de vue de sa stabilité numérique [56]. Elle est dite de type PECE (Predict, Evaluate, Correct, Evaluate) car, lors de son implémentation, on commence d'abord par calculer le prédicteur par (2.41), puis on évalue $f(t_{k+1}, y_{k+1}^P)$, qu'on va utiliser pour calculer le correcteur via (2.42), et finalement évaluer $f(t_{k+1}, y_{k+1})$. Ce résultat est stocké pour une utilisation ultérieure, lors de l'étape d'intégration suivante.

4.4.2 Formulation Fractionnaire

Nous allons maintenant essayer de reporter les idées essentielles de cette méthode au problème d'ordre fractionnaire, pour cela, nous avons besoin d'une équation similaire à (2.36). Heureusement une telle équation est disponible, à savoir (2.34). Cette équation est un peu différente de (2.36) car l'intégration commence maintenant de 0 au lieu de x_k . Il s'agit d'une conséquence du caractère non-local des opérateur différentiels d'ordre fractionnaire. Cela ne va toutefois pas causer de problèmes dans notre tentative de généraliser la méthode d'Adams. Ce que nous allons simplement faire, c'est remplacer l'intégrale par une formule de quadrature trapézoïdale du produit, c'est-à-dire qu'on va utiliser les noeuds t_j ($j = 0, 1, \dots, k+1$) et interpréter la fonction $(x_{k+1} - \cdot)^{\alpha-1}$ en tant que fonction poids pour l'intégrale. En d'autres termes, on va appliquer l'approximation

$$\int_0^{x_{k+1}} (x_{k+1} - z)^{\alpha-1} g(z) dz \approx \int_0^{x_{k+1}} (x_{k+1} - z)^{\alpha-1} \tilde{g}_{k+1}(z) dz, \quad (2.44)$$

où \tilde{g}_{k+1} est l'interpolation linéaire par morceaux de g par rapport aux noeuds x_j , $j = 0, 1, \dots, k+1$. Ainsi

$$\int_0^{x_{k+1}} (x_{k+1} - z)^{\alpha-1} \tilde{g}_{k+1}(z) dz = \sum_{j=0}^{k+1} a_{j,k+1} g(x_j), \quad (2.45)$$

où

$$a_{j,k+1} = \int_0^{x_{k+1}} (x_{k+1} - z)^{\alpha-1} \phi_{j,k+1}(z) dz, \quad (2.46)$$

et

$$\phi_{j,k+1}(z) = \begin{cases} (z - x_{j-1})/(x_j - x_{j-1}) & \text{si } x_{j-1} < z < x_j, \\ (x_{j+1} - z)/(x_{j+1} - x_j) & \text{si } x_j < z < x_{j+1}, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (2.47)$$

Chapitre 2. Équations Différentielles Fractionnaires

Un calcul simple nous donne :

$$a_{0,k+1} = \frac{(x_{k+1} - x_1)^{\alpha+1} + x_{k+1}^\alpha [\alpha x_1 + x_1 - x_{k+1}]}{x_1 \alpha (\alpha + 1)}, \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} a_{j,k+1} &= \frac{(x_{k+1} - x_{j-1})^{\alpha+1} + (x_{k+1} - x_j)^\alpha [\alpha(x_{j-1} - x_j) + x_{j-1} - x_{k+1}]}{(x_j - x_{j-1})\alpha(\alpha + 1)} \\ &+ \frac{(x_{k+1} - x_{j+1})^{\alpha+1} + (x_{k+1} - x_j)^\alpha [\alpha(x_j - x_{j+1}) - x_{j+1} + x_{k+1}]}{(x_{j+1} - x_j)\alpha(\alpha + 1)}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

pour $1 \leq j \leq k$, et

$$a_{k+1,k+1} = \frac{(x_{k+1} - x_k)^\alpha}{\alpha(\alpha + 1)}. \quad (2.50)$$

Dans le cas où les noeuds sont équidistants ($x_j = jh$ avec h constant), ces relations sont réduites à :

$$a_{j,k+1} = \begin{cases} \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha + 1)} (k^{\alpha+1} - (k - \alpha)(k + 1)^\alpha) & \text{si } j = 0, \\ \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha + 1)} ((k - j + 2)^{\alpha+1} + (k - j)^{\alpha+1} - 2(k - j + 1)^{\alpha+1}) & \text{si } 1 \leq j \leq k, \\ \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha + 1)} & \text{si } j = k + 1. \end{cases} \quad (2.51)$$

On obtient ainsi notre formule du correcteur (la variante fractionnaire de la méthode d'Adams-Moulton à un pas) :

$$y_{k+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_{k+1}^j}{j!} b_j + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{j=0}^k a_{j,k+1} f(x_j, y_j) + a_{k+1,k+1} f(x_{k+1}, y_{k+1}^P) \right). \quad (2.52)$$

Reste à déterminer la formule du prédicateur requise pour le calcul de y_{k+1}^P . La méthode utilisée pour la généralisation de la formule d'Adams-Bashforth est la même décrite ci-dessus pour la formule d'Adams-Moulton : On remplace l'intégrale dans le membre de droite de (2.34) par une formule du rectangle

$$\int_0^{x_{k+1}} (x_{k+1} - z)^{\alpha-1} g(z) dz \approx \sum_{j=0}^k b_{j,k+1} g(x_j), \quad (2.53)$$

où

$$b_{j,k+1} = \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x_{k+1} - z)^{\alpha-1} dz = \frac{(x_{k+1} - x_j)^\alpha - (x_{k+1} - x_{j+1})^\alpha}{\alpha}. \quad (2.54)$$

Dans le cas équadistant on obtient la formule (plus simple) :

$$b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} ((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha). \quad (2.55)$$

Le prédicateur y_{k+1}^P est ainsi calculé par la formule d'Adams-Bashforth fractionnaire :

$$y_{k+1}^P = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_{k+1}^j}{j!} b_j + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^k b_{j,k+1} f(x_j, y_j). \quad (2.56)$$

Notre algorithme de la méthode Adams-Bashforth-Moulton est maintenant complètement décrit par les équations (2.56) et (2.52) avec les poids $a_{j,k+1}$ et $b_{j,k+1}$ définis par les formules (2.51) et (2.55) respectivement.

4.4.3 Propriétés de l'Algorithme

Nous allons maintenant décrire les propriétés les plus importantes de cet algorithme.

Stabilité

La question de la stabilité est très importante lors de la mise en oeuvre de la méthode sur ordinateur, car nous devons prendre en considération les effets des erreurs d'arrondi. Il est connu [57] que la méthode d'Adams-Bashforth-Moulton classique est une méthode raisonnable dans le sens où ses propriétés de stabilité permettent une utilisation sûre pour la résolution d'équations différentielles, sans propagation grave des erreurs d'arrondi, alors que sa mise en oeuvre n'est pas très coûteuse du point de vue temps.

D'après les résultats dans [58], nous pouvons voir que ces propriétés restent inchangées lorsque qu'on observe la version fractionnaire de l'algorithme, il est donc clair que le comportement de cette méthode ne dépend pas de l'ordre des opérateurs fractionnaires.

Convergence

La stabilité n'est pas un critère suffisant pour juger si une solution numérique est, oui ou non, une bonne approximation de la solution exacte. Nous devons également nous pencher sur le problème de l'estimation de l'erreur, à savoir la question de la convergence.

Pour cela on énonce sans démonstration les résultats les plus significatifs concernant l'analyse de l'erreur de cette méthode qui sont détaillés dans [54]. Le premier de ces résultats est basé sur une supposition sur la régularité de ${}^c\mathcal{D}^\alpha y$:

Théorème 2.6 Soit $\alpha > 0$ et supposons que ${}^c\mathcal{D}^\alpha y \in C^2[0, X]$ pour un certain X . Alors

$$\max_{0 \leq j \leq N} |y(x_j) - y_j| = \begin{cases} O(h^2) & \text{si } \alpha \geq 1, \\ O(h^{1+\alpha}) & \text{si } \alpha < 1. \end{cases} \quad (2.57)$$

Quand au second résultat, il est basé sur la régularité de la fonction y elle même

Théorème 2.7 Soit $0 < \alpha < 1$ et supposons que $y \in C^2[0, X]$ pour un certain X . Alors, pour $1 \leq j \leq N$ on a

$$|y(x_j) - y_j| \leq Cx_j^{\alpha-1} \times \begin{cases} O(h^{1+\alpha}) & \text{si } 0 < \alpha < 1/2, \\ O(h^{2-\alpha}) & \text{si } 1/2 \leq \alpha < 1. \end{cases} \quad (2.58)$$

Complexité arithmétique

Nous remarquons que la complexité arithmétique (c'est-à-dire le nombre d'opérations arithmétiques) de l'algorithme n'est pas $O(\max(t_{j+1} - t_j)^{-1})$ comme c'est le cas pour une équation différentielle ordinaire du premier ordre. Au lieu de cela nous avons $O(\max(t_{j+1} - t_j)^{-2})$ opération. La raison pour laquelle nous avons une si grande complexité arithmétique est la nature de l'opérateur $\mathcal{D}_{t_0}^\alpha$: quand α n'est pas un entier, alors l'opérateur $\mathcal{D}_{t_0}^\alpha$ n'est pas un opérateur local, c'est à dire afin d'évaluer $\mathcal{D}_{t_0}^\alpha$ il ne suffit pas de connaître les valeurs de f dans un petit voisinage de t . Au contraire, il nous faut des informations sur l'ensemble de "l'historique" de la fonction f sur l'intervalle $[t_0, t]$.

5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons concentré notre étude sur la théorie des équations différentielles fractionnaires. Nous avons présenté quelques théorèmes d'existence et d'unicité indispensables à toute étude de problèmes à valeurs initiales, avec des démonstrations détaillées. Une méthode de résolution d'équations différentielles fractionnaires linéaires à coefficients constants basée sur la fonction de Mittag-Leffler à été exposée. Des résultats fondamentaux sur la stabilité des systèmes fractionnaires ont été, ensuite, introduits. Ces résultats de stabilité seront utilisés, dans le chapitre 4, pour obtenir des conditions sur le chaos et la synchronisation des systèmes fractionnaire.

Enfin, pour clôturer ce chapitre, nous avons présenté différentes méthodes qui ont pour but l'évaluation numérique de la dérivée fractionnaire (définition de Grünwald-Letnikov) et la résolution des équations à dérivées fractionnaires.

Chapitre 2. Équations Différentielles Fractionnaires

Nécessaire pour la suite de notre travail, la méthode Adams-Bashforth-Moulton fractionnaire à été particulièrement détaillée.

Chapitre 3

Détection et Analyse du Chaos

L'objectif de ce chapitre est de disposer des éléments théoriques nécessaires à l'analyse du comportement d'un système chaotique. Nous partirons de quelques définitions préliminaires permettant de cerner les caractéristiques essentielles des systèmes dynamiques chaotiques. Nous commencerons par définir la notion de chaos, puis nous aborderons d'autres notions mathématiques comme le déterminisme, la dynamique non-linéaire ou l'espace des phases. Enfin nous présenterons des outils d'analyse et de caractérisation des systèmes chaotiques.

1 Quelques Définitions

1.1 Le chaos

Historiquement, le chaos fut étudié par différentes communautés (mathématiciens, physiciens, théoriciens de l'information...) qui en donnèrent chacune une définition légèrement différente.

Devaney proposa la définition suivante du chaos [59] : un système dynamique est chaotique si et seulement si

- il est topologiquement transitif,
- il possède un ensemble dense d'orbites périodiques,
- il présente le phénomène de sensibilité aux conditions initiales.

La transitivité signifie simplement que si l'on considère deux voisinages quelconques de deux états distincts d'un système dynamique, il existe une trajectoire qui passe de l'un à l'autre.

Notons que les deux premières hypothèses impliquent la troisième [60], sans que la réciproque soit vraie. Toutefois, elles ne permettent pas une quantification simple de la chaotité et sont donc peu adaptées à une étude pratique d'un système dynamique. Au contraire, la sensibilité aux conditions initiales peut être quantifiée grâce aux exposants de Lyapounov et se prête donc bien à l'étude d'exemples concrets.

Dans le cadre topologique, c'est-à-dire celui des applications $T : X \rightarrow X$ continues sur un espace métrique X le plus souvent compact, de nombreuses définitions du chaos ont été proposées. Elles reposent sur un ensemble de propriétés qui traduisent toutes, avec plus au moins de précision, une forme d'instabilité des trajectoires. Parmi ces propriétés : la sensibilité aux conditions initiales définie comme suit :

Définition 3.1 *Soit (X, d) un espace métrique et $T : X \rightarrow X$ une application continue. On dit que le système dynamique topologique (X, T) possède la propriété de sensibilité aux*

conditions initiales lorsqu'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists y \in X, \exists n \in \mathbb{N} : d(x, y) < \epsilon \text{ et } d(T^n(x), T^n(y)) > c.$$

Cette définition exprime que pour n'importe quelle condition initiale, il existe des points aussi proches que l'on veut de celle-ci dont les orbites associées s'éloigneront de la trajectoire initiale. Une autre propriété caractéristique du chaos est l'entropie topologique [61], définie comme suit :

Définition 3.2 Soit (X, d) un espace métrique compact, et $T : X \rightarrow X$ une application continue. Pour $\epsilon > 0$ et n dans \mathbb{N} , un couple de points (x, y) est dit (n, ϵ) -séparé lorsqu'il vérifie : $\max_{0 \leq k \leq n} d(T^k(x), T^k(y)) > \epsilon$. Notant $H_{n, \epsilon}$ le cardinal maximal des familles de X dont tous les couples de points distincts sont (n, ϵ) -séparés, l'entropie topologique $h_{top}(T)$ est définie par :

$$h_{top}(T) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(H_{n, \epsilon}).$$

Le terme $H_{n, \epsilon}$ représente le nombre d'orbites que l'on peut distinguer au bout d'un temps n , si l'on dispose d'une précision de taille ϵ . L'entropie topologique est alors le réel h pour lequel $H_{n, \epsilon}$ croît en $\exp(hn)$, quand n tend vers l'infini : lorsqu'elle strictement positive, cette quantité est donc significative d'un désordre élevé. On obtient ainsi la définition suivante du chaos :

Définition 3.3 Un système dynamique topologique (X, T) sera dit chaotique si son entropie topologique $h_{top}(T)$ est strictement positive.

1.2 Le déterminisme

Durant ces dernières décennies, des chercheurs ont réussi à mettre certains phénomènes en équation et remarqué qu'il existe un côté déterministe dans ce qui paraît être à première vue aléatoire. Il convient alors de distinguer les phénomènes aléatoires du chaos déterministe qui nous intéresse ici. Dans les phénomènes aléatoires, il est absolument impossible de prévoir la trajectoire d'une quelconque particule. C'est le cas du mouvement brownien découvert par Robert Brown en 1827 : il désigne le mouvement aléatoire d'une particule, il est incessant, isotrope et c'est de plus un processus de Markov, c'est-à-dire que le mouvement à venir est indépendant du mouvement passé. Pour l'observer, il suffit d'examiner au microscope une suspension de grains de pollen (figure Fig.(3.1)) : ces particules effectuent des mouvements incessants et aléatoires, mouvements résultant d'impulsions transmises par les molécules du milieu soumises à l'agitation thermique. À l'opposé, les systèmes dynamiques chaotique sont caractérisés par

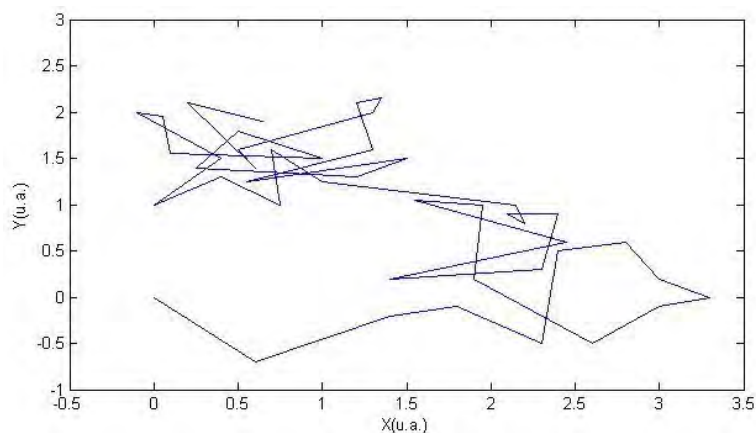


Figure 3.1 – Évolution temporelle dans un plan (X,Y) des grains de pollen durant 30 secondes.

certaines équations rendant compte du phénomène, mais dont les solutions (approximatives, faute de pouvoir les résoudre exactement) sont sensibles aux conditions initiales. La notion de déterminisme est ainsi intrinsèquement liée à tous les systèmes dont l'évolution est définie par un ensemble d'équations différentielles.

1.3 La dynamique non-linéaire

Un système physique est dit linéaire lorsque les grandeurs varient en demeurant proportionnelles. Dans un tel système, la somme de causes produit une somme correspondante d'effets, et il suffit d'étudier séparément les comportements individuels des composantes, puis de les additionner, pour déduire le comportement du tout (on dit qu'il y a proportionnalité entre la cause et l'effet).

Une équation linéaire est illustrée par l'exemple suivant : $U = R.I$. Cette équation correspond à la tension électrique U aux bornes d'une résistance R traversée par un courant I : la tension est bien proportionnelle à la valeur du courant.

Pour une équation non linéaire, nous prendrons l'exemple d'un pendule libre non amorti [62]. Soit un pendule composé d'une masse m soumise à un champ de pesanteur vertical d'accélération g (figure 3.2). La masse est maintenue à un point fixe A par une tige rigide de longueur l . Celle-ci se balance dans un plan vertical et on définit l'angle $\theta(t)$ entre la tige et la verticale. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, le système est alors décrit par l'équation 3.1 [63].

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot \sin\theta(t) \quad (3.1)$$

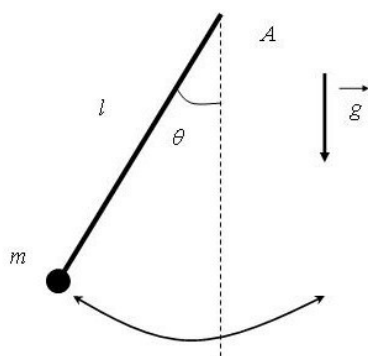


Figure 3.2 – Pendule libre.

Cette équation contient un terme non linéaire $\sin\theta$ qui peut être simplifié par une approximation linéaire, θ , pour de petits déplacements angulaires. Avec les équations linéaires, la solution permet de généraliser d'autres solutions; ce n'est pas le cas avec les équations non linéaires. Bien qu'elles partagent certaines qualités universelles, les solutions non linéaires tendent à être obstinément individuelles et particulières. Contrairement aux courbes régulières obtenues par des équations linéaires, la représentation d'équations non linéaires comprendra des cassures, des boucles, des récursions - toutes sortes de turbulences. Les équations non linéaires s'appliquent alors de manière spécifique aux éléments discontinus. Les domaines d'applications des équations non linéaires sont très diversifiés. Les applications sont aussi bien du domaine scientifique (pendule libre non amorti, cassures brusques des matériaux...) que du domaine économique (croissance d'une société, fonctionnement d'une économie, impact de diverses politiques et stratégies sur l'évolution des villes...). À l'aide de modèles non linéaires, il est possible de localiser dans de tels systèmes des points critiques, au niveau desquels une modification infime peut avoir un impact d'une importance disproportionnée.

Nous pouvons conclure ce paragraphe en insistant sur le fait que la non-linéarité est une des caractéristiques fondamentales des systèmes chaotiques.

1.4 Espace des phases et section de Poincaré

Prenons le cas d'un système physique constitué par des équations différentielles. La représentation de l'évolution temporelle d'un système physique est alors réalisable. Pour cela, on construit d'abord un modèle avec les lois physiques et les paramètres nécessaires et suffisants pour caractériser le système. Puis, on définit, à un instant donné, un point dans un "repère". Ce point caractérisera l'état du système dans l'espace à cet instant. Cet espace est appelé "l'espace des phases". Lorsque le temps s'écoule, le point figurant l'état du système décrit en

général une courbe dans cette espace. On parle alors de son orbite.

Pour les phénomènes les plus simples, ce point est attiré vers un point d'équilibre ou une courbe limite, près desquels il repasse périodiquement. Les mathématiciens appellent ces courbes "limites des attracteurs".

Pour les phénomènes déterministes, une trajectoire dans l'espace des phases a la propriété de ne posséder aucune intersection avec elle-même ou avec d'autres. En effet, prenons l'exemple d'une ou plusieurs trajectoires de l'espace des phases se recoupant en un point. Si l'on considère maintenant ce point comme l'état initial, le système peut donc évoluer selon plusieurs de ces trajectoires possibles et par conséquent, son évolution n'est plus déterminée par son état initial. L'intersection de trajectoires dans l'espace des phases est incompatible avec le caractère déterministe du système.

Il n'existe aucune relation entre un espace physique tridimensionnel et un cas d'espace à trois dimensions. L'espace des phases correspond à un espace purement mathématique qui comporte autant de dimensions que de paramètres dans le système dynamique étudié. Ainsi on pourrait très bien imaginer se retrouver à manipuler un espace de phases à 216 dimensions, si le système dynamique analysé impliquait 216 conditions initiales (toute difficulté géométrique mise à part...). Néanmoins, on peut réduire le nombre de coordonnées en faisant appel à une technique mise au point par Henri Poincaré : un plan d'observation Σ à dimension $d - 1$ transforme la trajectoire continue en une succession de points de passages discontinus au travers de Σ . Ce plan est une section de Poincaré. En plus de la diminution de la dimension de l'espace des phases d en $d - 1$, cette méthode permet de réduire le nombre de données à manipuler en ne conservant que les points d'intersection des trajectoires Γ avec la section Σ (figure Fig.(3.3)). Le reste des points de la trajectoire étant ignorés, la dynamique est ainsi plus facile à étudier [62]. Cet espace, bien qu'abstrait, contient sous forme géométrique une information concrète. Les variables qui sont à la base de la construction de cet espace sont des grandeurs réelles et à chaque point correspond une situation physique bien déterminée. Ainsi l'espace des phases du balancier d'une horloge est construit à partir des variables vitesse et angle par rapport à la verticale.

Le choix de ces variables n'est donc pas arbitraire. L'espace doit contenir toute l'information sur la dynamique du système étudié. Les grandeurs doivent être indépendantes pour que chacune apporte sa propre information. Ce qui implique un certain nombre de variables nécessaires et introduit la notion de degrés de liberté du système qui sont égaux à la dimension de l'espace des phases.

Par exemple, la position d'une balle de tennis est déterminée non seulement par les trois coordonnées spatiales, mais aussi par trois coordonnées de vitesses : la vitesse de haut en bas, celle

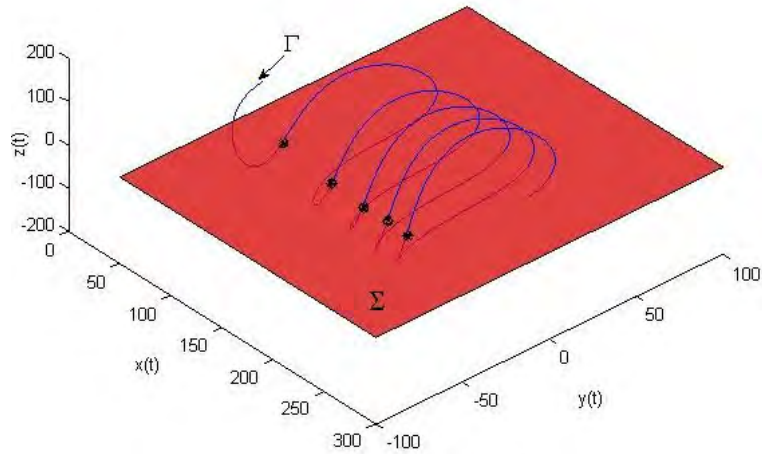


Figure 3.3 – Section de Poincare : la trajectoire de phases Γ coupe le plan Σ

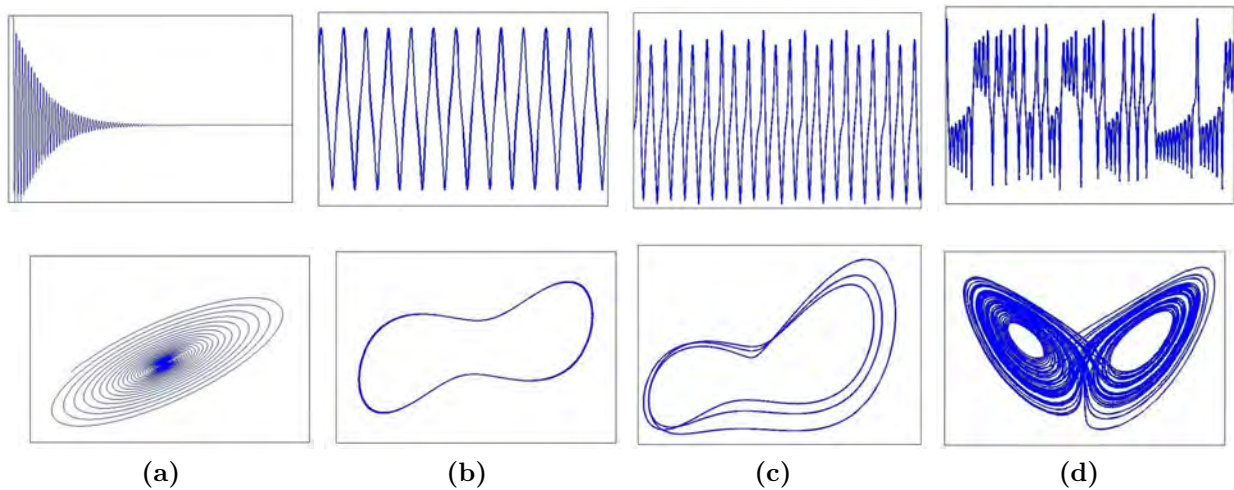


Figure 3.4 – Quelques exemples d'espace de phases

de droite à gauche, celle d'avant en arrière (ou vice versa). Il faut donc six dimensions pour décrire une balle de tennis.

La figure Fig.(3.4) nous permet de mieux comprendre la représentation graphique de quelques espaces des phases : le système (3.4a) converge vers un état d'équilibre après maintes oscillations, ce qui correspond dans l'espace des phases à des boucles qui convergent vers un point. Le système (3.4b) se répète périodiquement, ce qui correspond dans l'espace des phases à une orbite cyclique. Le système (3.4c) a également un mouvement périodique mais plus complexe ; il se répète seulement après trois oscillations différentes : on dit qu'il possède un cycle de période 3. Cela correspond à des boucles plus compliquées dans l'espace des phases. Le système (3.4d) est chaotique, et dans l'espace des phases, a la forme en aile de papillon de l'attracteur étrange de Lorenz.

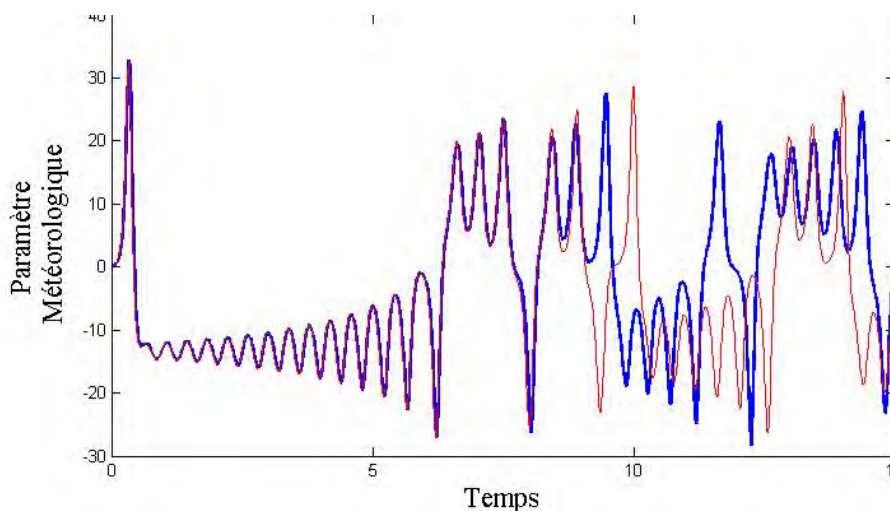


Figure 3.5 – Évolution temporelle pour deux conditions initiales très proches [65]

2 Caractérisation du chaos

2.1 Sensibilité aux conditions initiales

Une autre propriété des phénomènes chaotiques est qu'ils sont très sensibles aux perturbations. L'un des premiers chercheurs à s'en être aperçu fut Edward Lorenz, du MIT, qui s'intéressait à la météorologie et par conséquent aux mouvements turbulents d'un fluide comme l'atmosphère.

Après avoir modélisé, par des relations de thermodynamique et de mécanique des fluides, le mouvement des masses d'air, il programmait son ordinateur de façon à obtenir une simulation numérique. À l'époque, cela prenait beaucoup de temps. Un jour de l'hiver 1961, pour ne pas recommencer les calculs depuis le début, il décida de reprendre son listing et de rentrer en tant que conditions initiales des valeurs prises au cours de la simulation de la veille. L'ordinateur (un Royal McBee LGP-300 [64]) lui donnait une précision à 6 chiffres, cependant 3 chiffres significatifs lui semblaient largement suffisants pour ce genre de mesures physiques. Comme tout scientifique, Lorenz était convaincu que de petites incertitudes au départ ne peuvent engendrer que de petites incertitudes à l'arrivée. Il tronqua donc ces nombres et reprit le calcul. Les résultats qui suivirent furent le "déclic".

Dans un premier temps, la simulation semblait redonner les mêmes valeurs, mais au bout d'un moment rien ne concordait, tout se passait comme si le mouvement représenté par ces valeurs changeait complètement de trajectoire et ce, à cause d'une approximation de l'ordre de 10^{-4} ! E. Lorenz venait de découvrir que dans des systèmes non linéaires, d'infimes différences dans les conditions initiales engendraient à la longue des trajectoires totalement différentes (figure 3.5).

E. Lorenz comprit alors qu'il serait impossible de prédire la météo à moyen ou à long terme. Cela remettait en cause les belles certitudes de la physique classique. Certains phénomènes dynamiques non linéaires sont si sensibles aux conditions initiales que, même s'ils sont régis par des lois rigoureuses et parfaitement déterministes, les prédictions exactes sont impossibles. Comme la plupart des phénomènes sont non linéaires, on comprend alors l'importance de la découverte de Lorenz. On peut illustrer ce fait par "l'effet papillon". Popularisé par E. Lorenz, cet effet papillon consiste en la représentation suivante : on peut considérer que le simple battement d'aile d'un papillon en Australie peut entraîner une tempête sur la côte américaine. Ce qui signifie qu'une perturbation en apparence mineure à l'échelle de l'atmosphère peut avoir de grandes répercussions. Il faut néanmoins garder à l'esprit qu'il s'agit d'une image qui n'est pas tout à fait exacte car l'atmosphère n'est pas un système chaotique "parfait". Le battement d'aile d'un papillon n'aurait en réalité pas une influence si grande car il existe des phénomènes limitant (ces effets limitant sont plus importants qu'on ne l'avait pensé au début). Quoi qu'il en soit, l'image permet de comprendre le phénomène de sensibilité aux perturbations, plus souvent appelé "sensibilité aux conditions initiales". De manière à présenter plus quantitativement les propriétés de sensibilité du chaos, on peut étudier un modèle de croissance des populations animales. Ce modèle très simple, appelé "application logistique", relie la population X_{n+1} de l'année $n + 1$ à la population X_n de l'année n par l'équation :

$$X_{n+1} = K.X_n.(1 - X_n) \quad (3.2)$$

Si on ne conserve que le premier terme de cette équation (qui est linéaire), soit $X_{n+1} = K'.X_n$ on obtient une croissance exponentielle de la population. Cela correspondrait à une évolution sans aucun frein (prédateur, quantité de nourriture disponible, maladie...). En revanche, la prise en compte de tous les facteurs de l'environnement biologique de l'animal conduit à une saturation que l'on peut représenter par un taux de croissance du type $K' = K.(1 - X_n)$, d'où l'équation non linéaire (3.2). Suivant la valeur de K , l'évolution de cette équation est différente. Ainsi, pour $K = 4$, en partant de deux conditions initiales qui diffèrent d'un écart de 0,00001, nous obtenons des évolutions qui divergent à partir de $n = 15$, empêchant par là-même toute prédiction : le système est devenu chaotique (figure 3.6). Cela veut dire par exemple que, dans ce modèle simple, une erreur de comptage de 1 animal sur 60000 conduit à une évaluation complètement fautive à l'échelle de 15 ans.

L'écart entre les deux trajectoires peut être approximé par $e^{\lambda t}$, où λ est positif du fait de l'augmentation exponentielle en fonction du temps de cette divergence de trajectoire. Cet exposant λ est appelé "exposant de Lyapounov". Il correspond à la vitesse de convergence ou de divergence

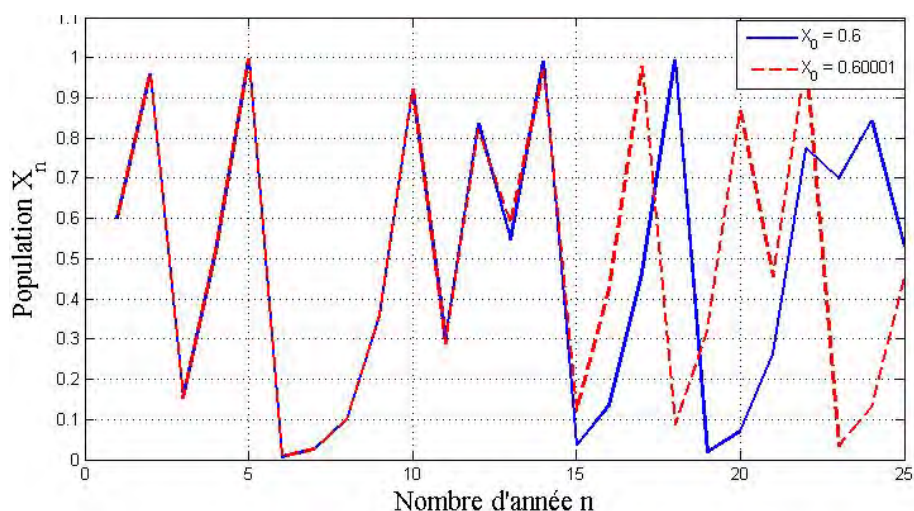


Figure 3.6 – Application logistique : évolution sur 25 ans d’une population avec $K = 4$ pour deux valeurs initiales différentes de 0.00001

des trajectoires. Le nombre d’exposants de Lyapounov est égal à la dimension de l’espace des phases : un exposant de Lyapounov est associé à chaque direction de l’espace des phases. Si l’exposant est positif, les trajectoires divergeront et si l’exposant est négatif, celles-ci convergeront. Pour un exposant nul, les trajectoires sont confondues. Nous verrons plus tard l’utilité des exposants de Lyapounov dans les dynamiques chaotiques. Une des propriétés essentielles du chaos est donc bien cette sensibilité aux conditions initiales que l’on peut caractériser en mesurant des taux de divergence des trajectoires. On peut ainsi définir un horizon de prédictibilité, appelé “temps de Poincaré” : ce temps va de quelques jours pour les prévisions météorologiques à quelques années dans le cas des populations animales et à la centaine de millions d’années pour la mécanique céleste. La météorologie ne pourra ainsi jamais être prédite précisément au-delà de ce temps, quelle que soit la précision des mesures effectuées et la puissance de calcul disponible ; il faudrait une connaissance infiniment précise des conditions initiales pour pouvoir prétendre à cela. D’où l’abus de langage souvent effectué en nommant les comportements des dynamiques chaotiques à long terme par des variations “aléatoires”.

2.2 L’Attracteur Étrange

Comment distinguer un phénomène chaotique d’un phénomène aléatoire ? C’est la question que l’on se pose lorsqu’on est confrontés au comportement chaotique d’un système. Pour illustrer cet aspect, on peut prendre un exemple simple issu de la mécanique, celui du pendule entre tenu :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - (\epsilon - \theta^2) \cdot \frac{d\theta}{dt} + \theta = 0 \quad (3.3)$$

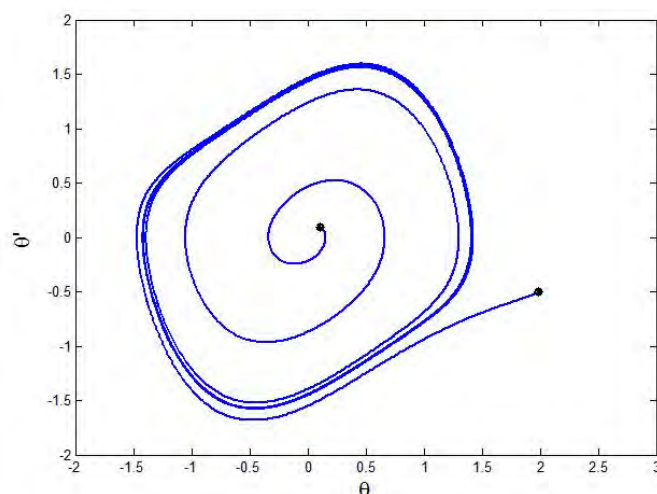
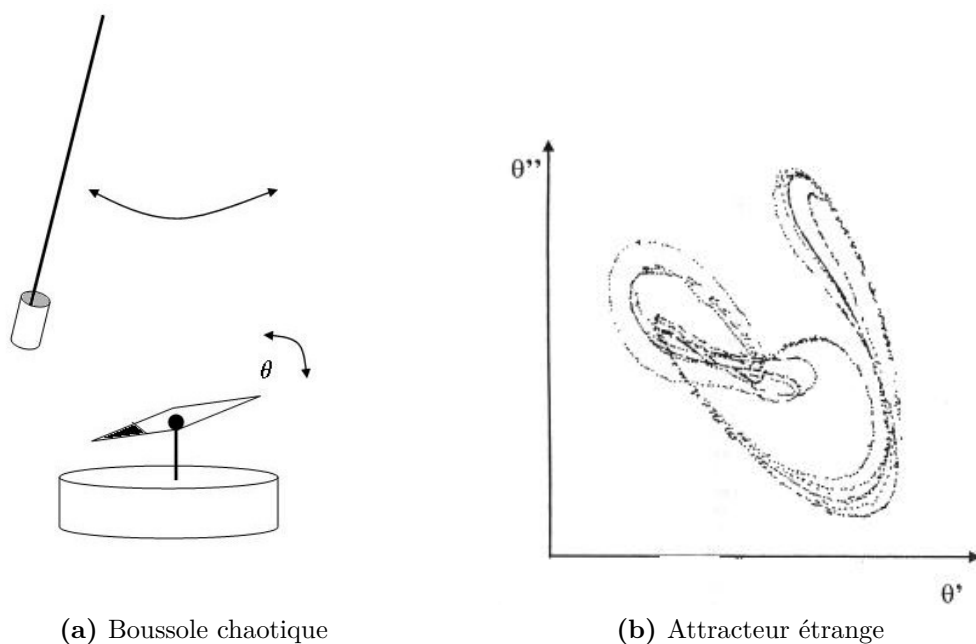


Figure 3.7 – Cycle limite d’un oscillateur entretenu obtenu à partir de deux conditions initiales différentes.

Cette équation décrit le comportement d’un oscillateur entretenu, avec augmentation des oscillations de petite amplitude si $\epsilon > \theta^2$ et décroissance des oscillations de grande amplitude pour $\epsilon < \theta^2$. Un tel système est entièrement déterminé par deux variables : sa position (l’angle θ) et sa vitesse ($d\theta/dt$). Le mouvement est alors représenté dans l’espace des phases (espace à deux dimensions), ayant pour coordonnées la position (θ) et la vitesse ($\dot{\theta}$). Dans cet espace, la trajectoire du pendule entretenu est représentée par une courbe fermée, pratiquement une ellipse, que l’on appelle cycle limite. (figure 3.7) et vers lequel convergent toutes les trajectoires. Ce cycle limite est qualifié d’attracteur et correspond aux oscillations périodiques du pendule. Dans un espace des phases à deux dimensions, les attracteurs sont soit des points (cas du pendule simple avec frottement), soit des cycles limites. Les systèmes à deux variables ne peuvent pas conduire à des mouvements chaotiques : il suffit de rajouter une troisième variable pour que de tels systèmes, dans certaines conditions, deviennent instables. Ceci peut être vérifié à l’aide d’un montage très simple : une boussole dans un champ magnétique oscillant (figure 3.8a). La boussole représente un oscillateur amorti, à deux variables, oscillant autour de la direction du nord magnétique, avant de s’immobiliser dans cette direction. Le champ magnétique oscillant est créé par un aimant pendulaire qui rajoute une troisième variable : la phase de l’oscillation. Lorsqu’on approche suffisamment les deux systèmes, l’aiguille de la boussole a un comportement chaotique, totalement imprévisible. La reconstruction de la trajectoire dans l’espace des phases à trois dimensions montre cette fois dans un plan de coupe (la section de Poincaré) une figure finement structurée et feuilletée appelée “attracteur étrange” (figure 3.8b). Cette figure est très différente de celle que l’on obtiendrait dans le cas d’un processus aléatoire, pour lequel les points couvriraient l’espace des phases de manière totalement désordonnée (absence de



(a) Boussole chaotique

(b) Attracteur étrange

Figure 3.8 – Boussole dans un champs magnétique

structure). Un attracteur étrange représente donc en quelque sorte la signature de l'ordre qui est sous-jacent dans le chaos déterministe. Cet objet particulier possède une structure fractale (nom donné par Benoît Mandelbrot) [66], c'est-à-dire « qu'il a la même structure quelle que soit l'échelle à laquelle on le regarde, et possède une dimension non-entière », comprise entre 2 et 3 pour la boussole chaotique. Autrement dit, cet attracteur est un "objet" qui est un peu plus qu'une surface mais pas tout à fait un volume. Les attracteurs étranges les plus connus sont les attracteurs de Edward Lorenz, de Otto Rössler et de Michel Hénon. Ceux-ci vont être décrits par la suite.

En modélisant le plus simplement les mouvements de l'air, E. Lorenz aboutit à un système d'équations différentielles non linéaires de trois équations à trois inconnues (équation 3.4).

$$\begin{cases} \dot{x} = P_r \cdot (y - x) \\ \dot{y} = r \cdot x - x \cdot z - y \\ \dot{z} = x \cdot y - b \cdot z \end{cases} \quad (3.4)$$

x représente l'amplitude du mouvement de convection, y est la différence de température entre les courants montants et descendants et z celle d'une correction uniforme au champ de température. P_r est le nombre de Prandtl ($P_r = \nu/\kappa_c$, ν étant la viscosité cinématique et κ_c la diffusivité thermique), r le nombre de Rayleigh ($r = (g \cdot b \cdot L^3 \cdot C_p \cdot \Delta T)/(k \cdot \nu)$ avec g accélérateur de la pesanteur, b le coefficient de dilatation volumique, L la longueur, C_p la chaleur spéci-

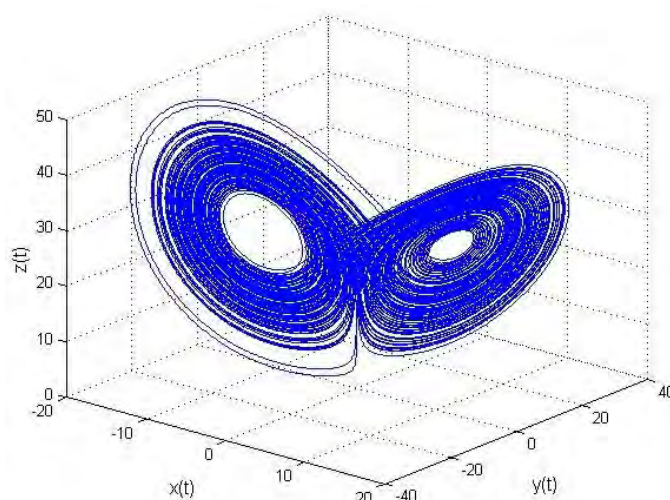


Figure 3.9 – Attracteur de Lorenz avec $P_r = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$.

fique volumique, ΔT la différence de température, k la conductivité thermique et ν la viscosité cinématique du fluide) et b un paramètre relié au vecteur d'onde horizontal. Pour ces conditions, l'attracteur est globalement stable, mais il a un comportement chaotique. Pour d'autres conditions, l'attracteur converge vers un point simple ou part à l'infini (un peu le même comportement que l'équation logistique [67]). La solution, inexprimable en terme mathématique, est étonnante lors d'une intégration numérique. Elle oscille entre les valeurs positives et négatives de x de manière structurée mais totalement imprévisible. C'est là la nature-même d'un système chaotique. Lorenz a donc découvert le chaos par inadvertance (comme la plupart des grandes découvertes!). Cette image magique (figure 3.9), ressemblant à une face des ailes de papillon, est devenue un emblème pour les premiers chercheurs en chaos. Elle montra la fine structure qui se cachait dans un flot incohérent de données.

La dimension 3 permet des enchevêtrements de la même trajectoire, sans donner lieu à une intersection. Elle s'enroule en fait éternellement sur elle-même. Si ce mouvement sur l'attracteur est abstrait, il donne cependant une idée du mouvement du système réel. Par exemple, le passage d'une aile de l'attracteur à l'autre correspond à l'inversion du sens de rotation de la boussole ou de l'aimant pendulaire.

Le principe de ce mélange dense de trajectoire est appelé "étirement-repliement". L'idée d'étirement est à la base de la propriété de sensibilité aux conditions initiales : si l'on étire deux trajectoires infiniment proches, leur écart initial va nécessairement croître au fur et à mesure de l'opération d'étirement. Pour conserver une évolution dynamique dans un espace borné, il suffit d'utiliser le repliement. Prenons l'image du pâtissier qui étire et brasse sa pâte. Considérons au départ, deux points très proches dans la pâte. Un premier étirement les sépare, mais le premier

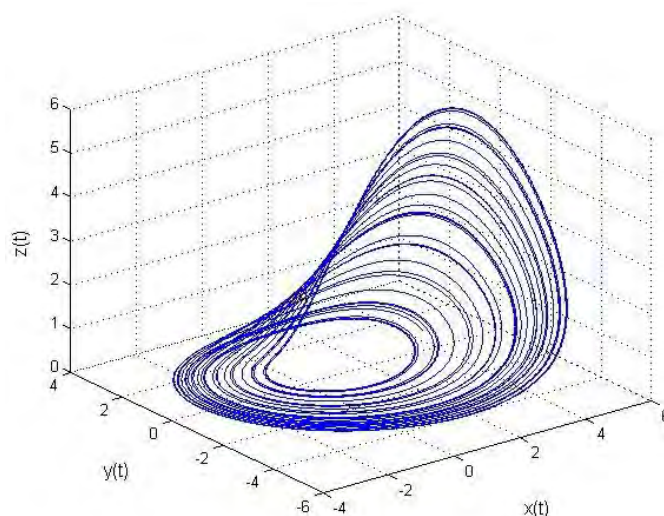


Figure 3.10 – Attracteur de Rössler avec $a = 0.398$, $b = 2$, $c = 4$.

repliement semblera les rapprocher. Chaque étirement les séparera davantage, même si chaque repliement paraîtra les rapprocher à nouveau. Après vingt opérations “étirement-repliement”, ce qui est un minimum pour obtenir une pâte feuilletée, celle-ci est composée d’un “millier de feuilles”, chacune infiniment mince. La distance théorique séparant nos deux points initiaux est alors extrêmement longue, tout en restant dans une surface limitée.

L’étirement-repliement est à l’origine de la structure en feuillets que l’on retrouve dans de nombreuses dynamiques chaotiques continues dont la dimension de l’attracteur est comprise entre 2 et 3. L’attracteur de Rössler est similaire à l’attracteur de Lorenz, mais le système d’équations est différent (équations 3.5). Son comportement est similaire. Les coefficients a , b et c sont des constantes.

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + a.y \\ \dot{z} &= b + x.z - c.z \end{cases} \quad (3.5)$$

Et enfin, l’attracteur de Hénon est une application du plan dans lui-même qui à un point (X_n, Y_n) associe un point (X_{n+1}, Y_{n+1}) . On représente ainsi une suite de points dans le plan XY qui s’agglutinent autour d’une structure bien spécifique. X_n , Y_n sont les variables dynamiques, a est une constante qui contrôle la non-linéarité de l’itération et b est une constante qui joue le rôle de la dissipation.

$$\begin{cases} X_{n+1} &= 1 - a.X_n^2 + Y_n \\ Y_{n+1} &= b.X_n \end{cases} \quad (3.6)$$

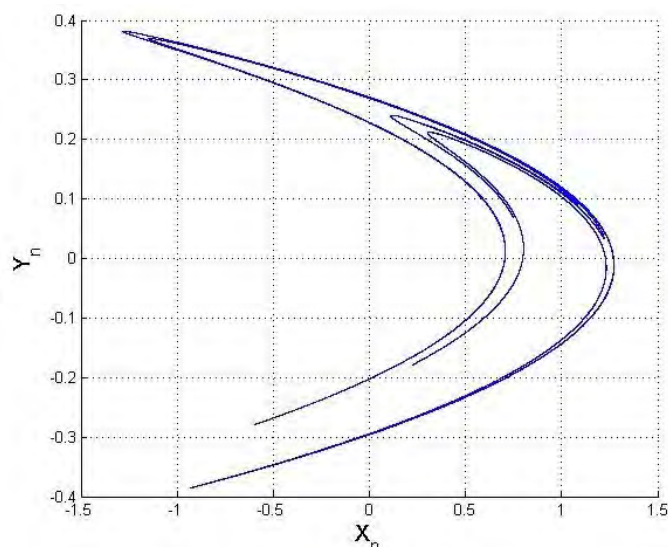


Figure 3.11 – Attracteur de Hénon avec $a = 1.4$, $b = 0.3$.

On distingue donc ici une façon pratique d'étudier les phénomènes pour découvrir s'ils appartiennent à des systèmes dynamiques chaotiques ou non-chaotiques : il suffit d'en tracer les états successifs dans l'espace des phases et de vérifier s'ils répondent aux trois conditions précédemment mentionnées (non-linéarité du système, conditions initiales et espace des phases). Des phénomènes comme le mouvement oscillatoire des pendules, la circulation atmosphérique, les mouvements de convection d'un liquide chauffé dans une petite enceinte, l'écoulement des gouttes d'un robinet qui fuit, le rythme cardiaque sont des exemples concrets où intervient le chaos. Revenons quelques instants aux exposants de Lyapounov. Les systèmes considérés ici étant dissipatifs, les exposants de Lyapounov vérifient la relation $\sum_i \lambda_i < 0$, ce qui correspond dans l'espace des phases à une direction de contraction (c'est-à-dire une contraction de volume au cours du temps). Or l'extrême sensibilité aux conditions initiales des dynamiques chaotiques implique que le système est composé d'exposants de Lyapounov positifs du fait de la divergence des trajectoires au cours du temps. La contraction des volumes n'est alors compatible avec $\lambda > 0$ que s'il existe au moins un exposant de Lyapounov négatif. De plus, pour un attracteur étrange, un des exposants de Lyapounov est toujours nul (chaque trajectoire est issue d'un ensemble d'équations différentielles et varie continûment en fonction du temps). Cela signifie que pour respecter la condition $\sum_i \lambda_i < 0$, un attracteur étrange doit avoir au minimum trois exposants de Lyapounov : λ positif, négatif et nul. En d'autres termes, un système continu dans le temps doit être au moins de dimension trois pour générer une dynamique chaotique. Le pendule libre n'ayant que deux variables, il ne possède pas de comportement chaotique, contrairement au pendule entretenu, décrit par trois variables.

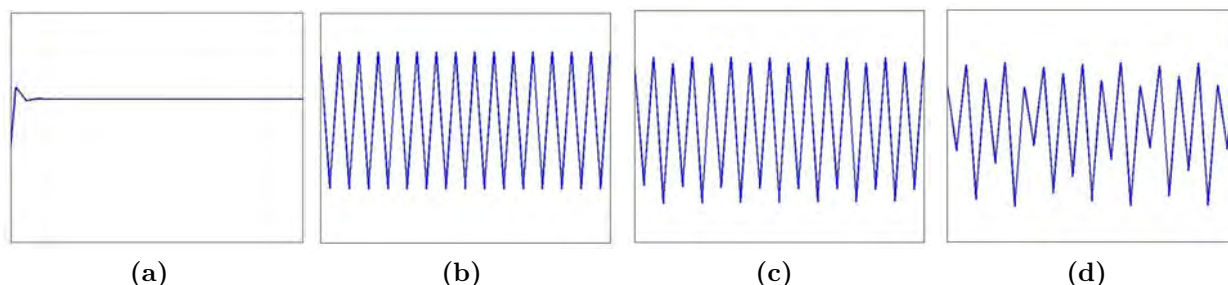


Figure 3.12 – Route vers le chaos de l’application logistique pour différentes valeurs de K : 2.15, 3.2, 3.45, 3.58 (nombre d’années en abscisse et population X_n en ordonnée).

2.3 Diagramme de Bifurcation

La génération d’un système chaotique n’est pas immédiate. En effet, le système n’évolue pas d’un état inexistant à un état chaotique sans passer par des transitions. Considérons que la dynamique étudiée dépende d’un paramètre de contrôle. En variant ce paramètre, le système peut passer d’un état stationnaire à un état périodique, puis au-delà d’un certain seuil, suivre un scénario de transition et devenir chaotique. Pour illustrer cette idée, reprenons l’exemple de l’application logistique cité dans le paragraphe “Sensibilité aux conditions initiales”. Si le paramètre K est inférieur à 3 (figure 3.12a), nous constatons qu’après une période de croissance, les itérations successives convergent vers un état d’équilibre : la population se stabilise et chaque année à la même époque, on retrouve la même population. Pour K supérieur à 3 (figure 3.12b), nous observons un doublement de période : tous les deux ans, la population est la même. Puis pour K supérieur à 3.45 (figure 3.12c), nous avons à nouveau un doublement de période : il faut maintenant quatre ans pour retrouver la population d’origine. Ce scénario se répète ainsi (les périodes passent à 8, 16, 32, etc.) avec des dédoublements de plus en plus rapprochés jusqu’à K proche de 3.58, valeur à partir de laquelle l’application est devenue chaotique (figure 3.12d).

Dans les équations de Lorenz, la résolution du système n’apporte pas toujours le chaos. Ce régime n’apparaît que pour certaines valeurs des paramètres. Pour caractériser le chaos, il peut être intéressant d’étudier l’apparition du chaos (ce qu’on appelle “le scénario vers le chaos”). On distingue trois scénarios théoriques d’évolution vers le chaos. Toutes ces évolutions ont permis de classer certains phénomènes expérimentaux comme “chaotiques déterministes”. On obtient l’apparition du chaos en modifiant la valeur d’un paramètre, que ce soit de manière théorique ou expérimentale.

- *Le doublement de période* : ce scénario a été découvert en même temps par Mitchell Feigenbaum et par les chercheurs français Pierre Couillet et Charles Tresser. L’augmentation d’un paramètre provoque, pour un système périodique, l’apparition d’un doublement de

sa période. La période est ensuite multipliée par 4, 8, 16...D'un doublement au suivant, l'augmentation du paramètre est de plus en plus faible, et, à partir d'une certaine valeur, le chaos apparaît : lorsque la période devient infinie, les mouvements deviennent chaotiques.

L'augmentation du paramètre conduit ensuite à la réapparition de régimes périodiques intercalés dans des zones chaotiques. Ce scénario peut être observé dans un grand nombre d'expériences comme un robinet qui fuit, l'étude d'oscillateurs forcés, ou encore l'apparition de la turbulence dans les fluides.

- *L'intermittence* : ce scénario a été décrit par Yves Pomeau [62]. L'intermittence se caractérise plutôt par un mouvement périodique stable entrecoupé par des bouffées chaotiques. Ces perturbations apparaissent de manière irrégulière. L'augmentation d'un paramètre produit l'augmentation de la fréquence des perturbations, puis le chaos domine le comportement du système.

Ce scénario a été observé dans des expériences sur la convection des fluides et dans des réactions chimiques.

- *La quasi périodicité* : le troisième scénario fait intervenir, pour un système périodique, l'apparition d'une deuxième période dont le rapport avec la première n'est pas rationnel. Ce régime est appelé "quasi périodique" Il peut, de lui-même ou avec l'apparition d'une troisième fréquence gigantesque, donner un régime chaotique. David Ruelle et Jean-Christophe Yoccoz ont contribué de manière importante à cette approche. Ce scénario intervient quand on considère deux oscillateurs fortement couplés. Les variations du champ magnétique terrestre, le déroulement des séismes pourrait être expliqué par un modèle de ce genre. On le retrouve aussi dans le cas d'un pendule qui serait stimulé verticalement.

Une manière plus rapide et plus visuelle de représenter ces scénarios de transition vers le chaos est le "diagramme de bifurcations". Ainsi, on peut observer les changements du comportement dynamique du système, ou "bifurcations", en fonction du paramètre dit de bifurcation. Une bifurcation correspond à une sorte de changement d'état du système, plus exactement un changement de stabilité du régime dynamique lorsqu'un des paramètres du système varie. Cette représentation est en trois dimensions. En effet, la troisième dimension est représentée en niveaux de couleur. Plus le gris est foncé et plus l'amplitude de la densité de probabilité du signal est grande. La figure 3.13 correspond à la représentation du diagramme de bifurcations d'un signal chaotique, réalisé par simulation. Nous pouvons constater trois états différents du système : un régime stable, puis périodique à n états et enfin un régime chaotique.

Cette sorte de représentation permet d'avoir une vue globale d'un ensemble de comportements dynamiques différents. Il s'agit alors plus de méthode de représentation que d'outil d'analyse.

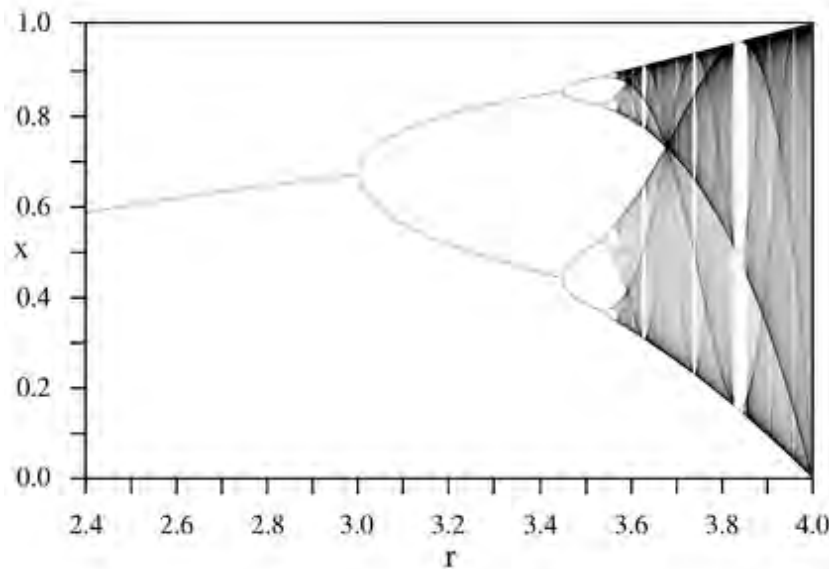


Figure 3.13 – Diagramme de bifurcations

3 Outils d'analyse et de quantification du chaos

3.1 Exposants de Lyapounov

Les exposants de Lyapounov sont des observables dynamiques qui caractérisent la divergence exponentielle de trajectoires initialement proches et donnent donc une information quantitative sur la sensibilité aux conditions initiales d'un système. Notons que si cette dernière ne suppose pas que la séparation entre deux trajectoires augmente exponentiellement au cours du temps, c'est cependant génériquement le cas dans les systèmes chaotiques.

3.1.1 Cas d'un système d'équations différentielles ordinaires

Considérons tout d'abord un système dynamique défini sur un espace de dimension N par N équations différentielles :

$$\forall i \in [1, \dots, N], \quad \dot{x}_i(t) = f_i[x(t)], \quad (3.7)$$

où x_i représente les coordonnées du système. L'évolution d'une petite perturbation $\delta x(t)$ autour d'une trajectoire $x(t)$ s'obtient via un développement de Taylor de l'équation précédente :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[x_i(t) + \delta x_i(t)] &= f_i[x(t) + \delta x(t)] \\ &= f_i[x(t)] + \sum_j \frac{\partial f_i[x(t)]}{\partial x_j} \delta x_j(t) + \frac{1}{2} \sum_{jk} \delta x_k(t) \delta x_j(t) \frac{\partial^2 f_i[x(t)]}{\partial x_k \partial x_j} + o[|\delta x(t)|^2]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Au premier ordre, ceci s'écrit :

$$\dot{x}_i(t) + \delta \dot{x}_i(t) \approx f_i[x(t)] + \sum_j \frac{\partial f_i[x(t)]}{\partial x_j} \delta x_j(t) \quad (3.9)$$

soit d'après (3.7) :

$$\delta \dot{x}_i(t) \approx \sum_j \frac{\partial f_i[x(t)]}{\partial x_j} \delta x_j(t). \quad (3.10)$$

Sous forme matricielle, (3.10) s'écrit :

$$\delta \dot{x} = -A \delta x, \quad (3.11)$$

où $A[x(t)]$ est la matrice définie par $A_{ij} = -\frac{\partial f_i[x(t)]}{\partial x_j}$.

L'équation (3.11) est linéaire en δx , elle décrit la dynamique tangente associée à la dynamique (3.7) et donne l'évolution d'une perturbation infinitésimale autour d'une trajectoire $x(t)$. Pour quantifier la sensibilité aux conditions initiales, il faut caractériser l'évolution de la perturbation $\delta x(t)$.

En notant $U(t)$ la solution de l'équation matricielle :

$$\dot{U} = -AU, \quad (3.12)$$

l'équation (3.11) s'intègre en :

$$\delta x(t) = U(t) \delta x(0). \quad (3.13)$$

La norme de $\delta x(t)$ s'obtient de la forme :

$$|\delta x(t)|^2 = \delta x(0)^t U^t(t) U(t) \delta x(0). \quad (3.14)$$

On définit les exposants de Lyapounov à temps fini comme les valeurs propres de $\frac{1}{2t} \log(U^t U)$:

$$\{\lambda_i(t)\} = \left\{ v.p. \left(\log[U^t(t)U(t)]^{\frac{1}{2t}} \right) \right\} \quad \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N. \quad (3.15)$$

La matrice $[U^t(t)U(t)]^{\frac{1}{2t}}$ converge lorsque $t \rightarrow \infty$ sous des conditions générales [68], ce qui permet de définir les exposants de Lyapounov :

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_i(t). \quad (3.16)$$

Notons que si la définition (3.15) mène à des méthodes analytiques intéressante [69], elle ne permet pas de suivre l'évolution des exposants de Lyapounov au cours d'une simulation numérique ou à partir d'une série temporelle expérimentale. En effet, pour construire les $\lambda_i(t)$, il faut d'abord construire la matrice d'évolution U à chaque temps, puis son adjoint, diagonaliser le produit $U^t U, \dots$ etc, et cela n'est guère pratique.

Il existe, cependant, différents algorithmes pour calculer les exposant de Lyapounov, l'un des plus célèbres étant certainement l'algorithme de Wolf [70]. Cet algorithme permet de calculer les exposants de Lyapounov à partir du calcul effectif de la divergence de deux trajectoires après t pas de temps par rapport à la perturbation introduite parallèlement, et ce au sein d'un attracteur, les étapes de l'algorithme sont :

1. Changement du paramètre de contrôle.
2. Choix aléatoire d'une condition initiale.
3. Création d'une nouvelle trajectoire à partir de la trajectoire courante à laquelle on ajoute une petite perturbation.
4. Évolution dans l'attracteur de ces deux trajectoires voisines et calcul de la moyenne de la divergence renormalisée entre ces deux trajectoires.
5. Réajustement de l'écart, permettant ainsi à chaque pas de temps de l'évolution du point précédent le calcul d'une moyenne de la divergence.
6. Retour à l'étape 5 effectuée selon un nombre donné.
7. Retour à l'étape 1.
8. Représentation du plus grand exposant de Lyapounov en fonction du paramètre de contrôle donné.

L'algorithme de Wolf a été amélioré et référencé dans plusieurs travaux [71–77].

3.1.2 Cas d'un système d'équations différentielles fractionnaires

Calculer les exposants de Lyapounov dans le cas d'un système d'ordre fractionnaire n'est pas une tâche facile, surtout que les méthodes décrites précédemment ne sont pas applicables dans ce cas, car la matrice Jacobienne est difficile à obtenir pour des dérivées fractionnaires et parce que l'algorithme de Wolf est relativement difficile à mettre en oeuvre. Ainsi, dans notre étude nous avons opté pour l'algorithme développé par T. Rosenstein [75] qui permet de calculer le plus grand exposant de Lyapounov à partir de petits ensembles de données (small data sets).

La première étape de cette approche consiste à reconstruire l'attracteur, car d'après la théorie du plongement, il est possible de reconstruire toute la dynamique d'un système à partir de la connaissance du comportement d'une seule de ses variables. Plonger une variable signifie être en mesure de reconstruire une dynamique équivalente à l'originale, c'est-à-dire préservant qualitativement le scénario des bifurcations et conservant quantitativement les mesures des invariants caractéristiques.

Diverses méthodes de plongement ont été proposées. La méthode utilisée dans l'algorithme de T. Rosenstein est la méthode des *coordonnées retardées* ou méthode des *retards*. Cette méthode est basée sur la génération de nouveaux états du système à partir de décalages temporels réalisés sur la série temporelle de la variable plongée. Ces décalages sont des multiples d'un retard de base noté J . La trajectoire reconstruite, X , est écrite sous forme de matrice où chaque ligne est un vecteur de l'espace des phases $X = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_M]^T$.

Pour une série temporelle à N -points $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, chaque X_i est donné par

$$X_i = [x_i \ x_{i+J} \ \dots \ x_{i+(m-1)J}], \quad (3.17)$$

où J est le retard de la reconstruction (ou retard de plongement) et m est la dimension de plongement. Ainsi, X est une matrice de dimension $M \times m$, et les constantes m , M , J et N sont reliées par l'équation :

$$M = N - (m - 1)J. \quad (3.18)$$

La dimension de plongement est usuellement estimée, d'après le théorème de Takens, par $m > 2n$, bien que l'algorithme marche aussi pour m en dessous de la valeur du critère de Takens.

Après reconstruction de l'attracteur, l'algorithme localise le *plus proche voisin* de chaque point de la trajectoire. Le plus proche voisin $X_{\hat{j}}$ est localisé en recherchant le point qui minimise la

distance avec le point de référence X_j , ceci est exprimé par :

$$d_j(0) = \min_{X_{\hat{j}}} \|X_j - X_{\hat{j}}\|, \quad |j - \hat{j}| > P, \quad (3.19)$$

P est la période moyenne, $\|\dots\|$ est la norme Euclidienne.

D'après Sato et al. [78], le plus grand exposant de Lyapounov est donné par

$$\lambda_{max}(i) = \frac{1}{i \cdot \Delta t} \cdot \frac{1}{(M - i)} \sum_{j=1}^{M-i} \ln \frac{d_j(i)}{d_j(0)}, \quad (3.20)$$

Δt est la période d'échantillonnage de la série temporelle, et $d_j(i)$ est la distance entre $j^{\text{ème}}$ paire de plus proches voisins après i étapes du temps discret $i \cdot \Delta t$ seconde. (Rappelons que M est le nombre de points reconstruits défini par (3.18)). Une autre définition a été introduite par Sato [78] dans le but d'améliorer la convergence :

$$\lambda_{max}(i, k) = \frac{1}{k \cdot \Delta t} \cdot \frac{1}{(M - k)} \sum_{j=1}^{M-k} \ln \frac{d_j(i+k)}{d_j(i)}. \quad (3.21)$$

où k est une constante. D'après la définition de λ_{max} , on va supposer que la $j^{\text{ème}}$ paire de proches voisins diverge approximativement à une vitesse déterminée par le plus grand exposant de Lyapounov :

$$d_j(i) \approx C_j e^{\lambda_{max}(i \cdot \Delta t)}, \quad (3.22)$$

où C_j est la séparation initiale. Le logarithme des deux membres de cette équation nous ramène à :

$$\ln d_j(i) \approx \ln C_j + \lambda_{max}(i \cdot \Delta t). \quad (3.23)$$

L'équation (3.23) représente un ensemble de lignes parallèles (pour $j = 1, 2, \dots, M$), chacune avec une pente approximativement proportionnelles à λ_{max} .

Le plus grand exposant de Lyapounov est finalement calculé en utilisant la méthode des moindres carrés :

$$y(i) = \frac{1}{\Delta t} \langle \ln d_j(i) \rangle. \quad (3.24)$$

où $\langle \dots \rangle$ est la moyenne sur toutes les valeurs de j . Ce processus de moyennisation est la clé pour un calcul efficace des valeurs de λ_{max} .

Cette méthode est facile à mettre en oeuvre et rapide, car elle utilise une mesure simple de la divergence exponentielle qui contourne la nécessité de rapprocher le plan tangent. L'algorithme est également intéressant d'un point de vue pratique, car il ne nécessite pas de grands ensembles

de données et il donne en même temps la dimension de corrélation. En outre, la méthode est précise pour de petits ensembles de données.

3.2 Le fer à cheval topologique

Le fer à cheval topologique est un outil puissant pour l'analyse du comportement chaotique des systèmes dynamiques. Il fournit non seulement des informations sur les exposants de Lyapounov, mais il donne aussi une description détaillée sur la dynamique du chaos. Il a été appliqué avec succès pour prouver le chaos dans plusieurs systèmes dynamiques d'ordre entier [79–83]. Le fer à cheval topologique est basé sur la géométrie des applications continues sur des ensembles particuliers. Pour chaque point de ces ensembles, seul un calcul à court terme est exigé pour obtenir son image avec l'application de Poincaré. Le fait que nous n'ayons à résoudre qu'une partie de la trajectoire située entre le point et son image rend l'erreur numérique minimale par rapport à celle commise dans le calcul des exposants de Lyapounov.

Commençons d'abord par rappeler quelques aspects de la dynamique symbolique. Soit $S_m = \{0, 1, \dots, m - 1\}$ l'ensemble des entiers non-négatifs de 0 à $m - 1$ et soit Σ_m la collection de toutes les séquences indexées par \mathbb{Z} avec des éléments de S_m , c'est-à-dire que chaque élément s de Σ_m est de la forme :

$$s = \{\dots, s_{-n}, \dots, s_{-1}, s_0, s_1, \dots, s_n, \dots\}, s_i \in S_m.$$

Maintenant, considérons une autre séquence $\bar{s} \in \Sigma_m$:

$$\bar{s} = \{\dots, \bar{s}_{-n}, \dots, \bar{s}_{-1}, \bar{s}_0, \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n, \dots\}, \bar{s}_i \in S_m,$$

La distance entre s et \bar{s} est définie par :

$$d(s, \bar{s}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{|s_i - \bar{s}_i|}{1 + |s_i - \bar{s}_i|}, \quad (3.25)$$

Muni de la topologie induite par cette distance, Σ_m est un espace métrique compact, parfait (fermé et sans points isolés) et totalement non-connexe (pour tout point, l'union des connexes qui le contiennent est réduite au point lui-même)[84]. Un ensemble avec de telles propriétés topologiques est parfois appelé ensemble de Cantor, il apparaît fréquemment dans la caractérisation des structures complexes des ensembles invariants des systèmes dynamiques chaotiques.

Définissons maintenant l'application m -shift $\sigma : \Sigma_m \rightarrow \Sigma_m$ comme suit :

$$\sigma(s_i) = s_{i+1}.$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 3.1 (a) *L'espace métrique Σ_m est invariant par σ c'est-à-dire $\sigma(\Sigma_m) = \Sigma_m$,*

(b) *σ est continue,*

(c) *l'application σ vue comme un système dynamique défini sur Σ_m possède :*

i *une infinité dénombrable d'orbites périodiques de périodes arbitraires,*

ii *une infinité non dénombrable d'orbites non périodiques,*

iii *une orbite dense.*

Pour les démonstrations voir [84]. Une conséquence de (c) est que la dynamique générée par l'application shift σ est sensible aux conditions initiales et par conséquent chaotique.

Avec ces notions préliminaires, nous pouvons énoncer le théorème principal de cette partie (Le théorème du fer-à-cheval).

Soient X un espace métrique, D un ensemble compact de X et D_1, D_2, \dots, D_m des sous ensembles compacts de D deux-à-deux disjoints. Supposons que $f : D_i \rightarrow X$ est une application continue pour $i = 1, 2, \dots, m$.

Définition 3.4 *Soit γ une partie compacte de D , si pour tout $1 \leq i \leq m$, $\gamma_i = \gamma \cap D_i$ est non-vide et compacte, alors γ est appelée une connexion de D_1, D_2, \dots, D_m .*

F est appelée f -connexion si F est une famille de connexions de D_1, D_2, \dots, D_m qui satisfait la propriété :

$$\gamma \in F \Rightarrow f(\gamma_i) \in F.$$

Théorème 3.1 (Théorème du fer-à-cheval topologique) [85] *Supposons qu'il existe une f -connexion F de D_1, D_2, \dots, D_m . Alors il existe un ensemble compact invariant $K \subset D$ tel que $f|_K$ est semi-conjuguée à une application m -shift.*

Rappelons que la définition de la semi-conjugaison d'une application continue et de l'application shift σ est comme suit :

Définition 3.5 Soit X un espace métrique. Considérons une application continue $f : X \rightarrow X$. Soit Λ un ensemble compact invariant de X . S'il existe une application surjective continue

$$h : \Lambda \rightarrow \Sigma_m$$

telle que $h \circ f = \sigma \circ h$, alors la restriction $f|_{\Lambda}$ est dite semi-conjuguée à σ .

Proposition 3.2 [84] Soit X un espace métrique compact et $f : X \rightarrow X$ une application continue. S'il existe un ensemble invariant $\Lambda \in X$ tel que $f|_{\Lambda}$ est semi-conjuguée à l'application m -shift σ , alors

$$h_{top}(f) \geq h_{top}(\sigma) = \log m,$$

où $h_{top}(f)$ est l'entropie topologique de l'application f .

De plus, pour tout entier positif k , $h_{top}(f^k) = k h_{top}(f)$.

L'entropie topologique étant un réel positif, et on sait qu'un système est chaotique si son entropie est non nulle, alors f est chaotique si $m > 1$.

D'après la théorie développée ci-dessus, le fer à cheval topologique ne peut pas s'appliquer directement aux systèmes continus, cependant, la section de Poincaré et l'application de Poincaré comblent ce fossé. À l'aide de l'application de Poincaré, on peut donc utiliser une méthode de calcul assistée par ordinateur pour prouver le chaos dans les systèmes continus.

3.3 Le test 0-1 pour détecter le chaos

Le test standard pour déterminer si un système dynamique déterministe décrit par des équations différentielles est chaotique ou non consiste à calculer son spectre de Lyapounov. Cette tâche n'est pas facile dans le cas où le système est décrit par des équations à dérivées fractionnaires.

Une nouvelle approche pour distinguer une dynamique chaotique d'un comportement régulier dans un système dynamique déterministe à été proposée, récemment, par Gottwald et Melbourne [86].

3.3.1 Description du test

Soit $\phi(n)$, $n = 1, 2, \dots, N$ une plage de données discrètes (dans notre cas $\phi(n)$ est issue de la résolution numériques des équations à dérivées fractionnaires).

1^{ère} étape Choisir une constante c d'une façon aléatoire dans $[0, \pi]$ puis définir les nouvelles variables :

$$p(n) = \sum_{j=1}^n \phi(j) \cos(\theta(j)), \quad q(n) = \sum_{j=1}^n \phi(j) \sin(\theta(j)), \quad (3.26)$$

où

$$\theta(j) = jc + \sum_{i=1}^j \phi(i), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.27)$$

2^{ème} étape Définir le déplacement quadratique moyen $M_c(n)$ comme suit :

$$M_c(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [p_c(j+n) - p_c(j)]^2 + [q_c(j+n) - q_c(j)]^2, \quad n \in \left[1, \frac{N}{10}\right]. \quad (3.28)$$

3^{ème} étape Définir le déplacement quadratique moyen modifié $D_c(n)$:

$$D_c(n) = M_c(n) - \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \phi(j) \right)^2 \frac{1 - \cos nc}{1 - \cos c}. \quad (3.29)$$

4^{ème} étape Définir la valeur médiane du coefficient de corrélation K :

$$K = \text{median}(K_c). \quad (3.30)$$

où

$$K_c = \frac{\text{cov}(\xi, \Delta)}{\sqrt{\text{var}(\xi)\text{var}(\Delta)}} \in [-1, 1], \quad (3.31)$$

$$\xi = (1, 2, \dots, n_{\text{cut}}),$$

$$\Delta = (D_c(1), D_c(2), \dots, D_c(n_{\text{cut}})),$$

$$n_{\text{cut}} = \text{round}(N/10),$$

la variance et la covariance sont définies pour les vecteurs x et y de longueurs q par

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q (x(j) - \bar{x})(y(j) - \bar{y}),$$

$$\bar{x} = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q x(j), \quad \text{et} \quad \text{var}(x) = \text{cov}(x, x).$$

5^{ème} étape interprétation des résultats comme suit :

1. $K \approx 0$ indique que la dynamique du système étudié est régulière (périodique ou quasi-périodique), alors que $K \approx 1$ montre que le comportement de la solution est chaotique.
2. Les trajectoires bornées dans l'espace (p, q) impliquent que la dynamique est régulière, tandis que les trajectoires Brownienne (non-bornées) montrent que la dynamique est chaotique.

Les justifications théoriques de ce test se trouvent dans [87].

3.3.2 Avantages du test

Le test proposé présente quelques avantages en comparaison avec la méthode des exposants de Lyapounov tels que :

- (i) Le test est appliqué directement à une série temporelle sans avoir besoin de recourir à la reconstruction de l'espace des phases. Cela nous évite toutes les difficultés qu'on pourrait rencontrer lors du choix du retard ou de la dimension de plongement.
- (ii) Ce test est binaire (les sorties sont 0 ou 1) et par conséquent permet de tirer des conclusions définitives sur le comportement du système. Par exemple $K = 0.01$ indique que la dynamique n'est pas chaotique, alors que cette valeur pour un plus grand exposant de Lyapounov nous laisse dans le doute.
- (iii) L'inspection des trajectoires dans le plan (p, q) nous fournit un test visuel simple pour conclure si la dynamique est chaotique ou non.

4 Conclusion

Nous venons de décrire quelques outils parmi les plus utilisés dans l'analyse de systèmes chaotiques. Il existe d'autres outils que nous n'avons pas décrits (comme le spectre de puissance, l'information mutuelle ou l'autocorrélation), outils intéressants, mais nous nous sommes contentés de décrire uniquement ceux qui ont été utilisés dans nos travaux. Ces définitions permettent de cerner les caractéristiques essentielles des systèmes dynamiques. L'étude rigoureuse de ce type de système étant en général délicate, nous nous limiterons à une étude qualitative, afin de formuler les critères permettant de caractériser les mouvements réguliers et les mouvements chaotiques.

Chapitre 4

Analyse du Chaos dans les Équations
Non-linéaires de Bloch Fractionnaires

Le calcul fractionnaire possède plusieurs applications en physique. La principale caractéristique d'un modèle fractionnaire est qu'il contient une dérivée d'ordre non entier. Les modèles fractionnaires peuvent décrire efficacement la mémoire et la transmissibilité de nombreux types de matériaux, et de jouer un rôle très important dans l'ingénierie, la physique, ou la chimie. C'est pourquoi nous considérons que l'utilisation du modèle d'ordre fractionnaire en RMN et IRM peut être réalisée avec succès, et ces modèles fournissent de nouveaux aperçus et de plus grandes connaissances du phénomène que dans le modèle classique (qui peut être considéré comme un cas particulier de sa version fractionnaire).

1 Les équations de Bloch

L'histoire de l'imagerie médicale a commencé en Novembre 1895 lorsque les rayons-X ont été découverts par Wilhelm Conrad Röntgen, qui a reçu le premier prix Nobel en 1901. Depuis, de nombreuses techniques d'imagerie médicale de diagnostics ont été développées, telles que l'absorption des rayons X, la résonance magnétique nucléaire, la réflexion d'ondes ultrasons ou la radioactivité auxquelles on associe parfois les techniques d'imagerie optique comme l'endoscopie. C'est Lauterbur et Mansfield, prix Nobel 2003, qui ont développé l'imagerie par résonance magnétique (IRM) dans les années 1970 avec des aimants résistifs et des champs magnétiques faibles [88]. Aujourd'hui, le noyau d'hydrogène présent dans l'eau est largement utilisé en IRM clinique, cela est dû au fait que ses noyaux sont dotés d'un moment cinétique (spin) [89].

La résonance magnétique nucléaire (RMN) a d'abord été développée pour l'étude des matériaux en chimie et en physique. Le signal du proton décrit la nature d'une population d'atomes, la structure de leurs environnement, et la relation entre les atomes.

La théorie classique de la RMN a été largement utilisée dans de nombreux domaines au cours des 50 dernières années, surtout pour sonder la structure et la dynamique des molécules, de cellules et tissus humains [90], elle est décrite essentiellement par les équations de Bloch.

En RMN ou IRM les équations de Bloch sont un ensemble d'équations macroscopiques qui sont utilisés pour calculer la magnétisation nucléaire $M = (M_x, M_y, M_z)$ comme une fonction du temps en présence des temps de relaxation T_1 et T_2 [91]. Ici $M_x(t)$, $M_y(t)$ et $M_z(t)$ représentent l'aimantation du système, T_1 et T_2 sont deux constantes (dépendant des noyaux considérés et de l'échantillon) appelées respectivement temps de relaxation longitudinal et temps de relaxation transversal. L'équation pour un échantillon uniforme peut être écrite comme

$$\frac{dM}{dt} = \gamma M \times B - \frac{m_x i + M_y j}{T_2} - \frac{M_0 - M_z}{T_1} k, \quad (4.1)$$

où M_0 est l'aimantation d'équilibre, γ est le rapport gyro-magnétique ; c'est une caractéristique des noyaux considérés. B est le champ magnétique local, les composants de $B = (B_x, B_y, B_z)$ sont la radio-fréquence appliquée B_x , Le gradient B_y et le champ magnétique statique B_z . L'équation de Bloch décrit la relation dynamique entre les champs magnétiques appliqués de l'extérieur et les temps de relaxation de l'échantillon internes pour des matériaux homogènes avec une composante de rotation unique, tel que celui observé pour les protons de l'eau [90]. Après projection, on obtient un système d'équations (introduites par Felix Bloch en 1946), dites équations de Bloch :

$$\begin{cases} \frac{dM_x(t)}{dt} = \omega_0 M_y - \frac{M_x}{T_2}, \\ \frac{dM_y(t)}{dt} = -\omega_0 M_x - \frac{M_y}{T_2}, \\ \frac{dM_z(t)}{dt} = \frac{M_0 - M_z}{T_1}. \end{cases} \quad (4.2)$$

ω_0 est la fréquence résonante donnée par la relation de Larmor $\omega_0 = \gamma B_0$, où B_0 est le champ magnétique statique.

La solution analytique de ce système d'équations différentielles est :

$$\begin{aligned} M_x(t) &= e^{-t/T_2} (M_x(0) \cos \omega_0 t + M_y(0) \sin \omega_0 t), \\ M_y(t) &= e^{-t/T_2} (M_y(0) \cos \omega_0 t - M_x(0) \sin \omega_0 t), \\ M_z(t) &= M_z(0)e^{-t/T_1} + M_0 (1 - e^{-t/T_1}). \end{aligned} \quad (4.3)$$

La solution stationnaire (d'équilibre) est la limite de (4.3) quand $t \rightarrow \infty$.

2 Les équations non-linéaires de Bloch

Soit une aimantation M plongée dans un champ magnétique d'induction B_0 et soumise à un champ de radio-fréquence (RF) B_1 . Lorsque l'aimantation est écartée d'un angle θ par rapport à sa position d'équilibre, la projection dans le plan xy est M_{xy} et la précession de M crée une f.e.m induite, dans la bobine de détection, proportionnelle à la dérivée de M_{xy} . Le courant parcourant la bobine est alors à l'origine d'un champ B_{RD} situé dans le plan xy , perpendiculaire et proportionnel à M_{xy} et le mouvement est décrit par les équations de Bloch modifiées [92] :

$$\begin{cases} \dot{M}_x = \delta M_y - \frac{\gamma \mu_0 \nu Q}{2} M_z M_x, \\ \dot{M}_y = -\delta M_x - \omega_1 M_z - \frac{\gamma \mu_0 \nu Q}{2} M_z M_y, \\ \dot{M}_z = \omega_1 M_y + \frac{\gamma \mu_0 \nu Q}{2} (M_x^2 + M_y^2), \end{cases} \quad (4.4)$$

Chapitre 4. Analyse du Chaos dans les ENB Fractionnaires.

où $\delta = \omega_{rf} - \omega_0$ est le déplacement de fréquence dans le repère tournant, γ est le rapport gyro-magnétique et $B_1 = \omega_1/\gamma$ un champ de radio-fréquence parallèle à l'axe x du repère tournant, ν est le facteur de remplissage et Q le facteur de qualité de la sonde. Dans ce cas simple où $B_1 = 0$, l'aimantation évolue sur une sphère et la solution exprimée en fonction des angles (θ, ϕ) est :

$$\tan(\theta/2) = \tan(\theta_0/2) \exp[-\gamma\mu_0\nu Q M(t_0)(t - t_0)/2]. \quad (4.5)$$

L'action de B_{RD} est donc de ramener le vecteur d'aimantation vers sa position d'équilibre en se déplaçant sur la sphère de rayon $M(t_0)$, l'intensité de l'aimantation au temps initial. A chaque instant, le champ B_{RD} est proportionnel à la composante transverse de l'aimantation. Il a été démontré qu'en détectant cette dernière, en lui imposant des corrections de phase et de gain par une électronique appropriée et en la réintroduisant dans le circuit détection/excitation, on peut ainsi générer un champ de compensation B_{FB} dans l'échantillon, permettant d'annuler B_{RD} , mais également de l'amplifier ou encore de l'inverser, ce qui permet de réaliser une inversion de l'aimantation.

En combinant les champs B_{RD} et B_{FB} dans un seul terme dans les équations du mouvement, le champ global de contre-réaction que subit M peut s'écrire $B_{cr} = \gamma G M_t e^{-i\psi}$, avec $M_t = M_x + iM_y$.

La dynamique de l'aimantation en présence d'un champ de feedback obéit donc aux équations de Bloch modifiées suivantes (en tenant compte de la relaxation T_1 et T_2) :

$$\begin{cases} \dot{M}_x &= \delta M_y + \gamma G M_z (M_x \sin \psi - M_y \cos \psi) - M_x/T_2, \\ \dot{M}_y &= -\delta M_x - \omega_1 M_z + \gamma G M_z (M_x \cos \psi + M_y \sin \psi) - M_y/T_2, \\ \dot{M}_z &= \omega_1 M_y - \gamma G \sin \psi (M_x^2 + M_y^2) - (M_z - M_0)/T_1. \end{cases} \quad (4.6)$$

Il est préférable de récrire les équations (4.6) en introduisant de nouvelles variables, $t \rightarrow \omega_1 t$, $\gamma G \rightarrow \gamma G M_0/\omega_1 = \lambda$, $\delta \rightarrow \delta/\omega_1$, $\Gamma_{1,2} \rightarrow \omega_1 T_{1,2}$ et $M \rightarrow M/M_0 = [x, y, z]^T$. On obtient ainsi

$$\begin{cases} \dot{x} &= \delta y + \gamma z (x \sin(c) - y \cos(c)) - x/\Gamma_2, \\ \dot{y} &= -\delta x - z + \gamma z (x \cos(c) + y \sin(c)) - y/\Gamma_2, \\ \dot{z} &= y - \gamma \sin(c) (x^2 + y^2) - (z - 1)/\Gamma_1. \end{cases} \quad (4.7)$$

Les équations différentielles (4.7) ne peuvent pas être résolues analytiquement dans le cas général. On fait alors appel à l'analyse numérique pour étudier l'évolution de la magnétisation dans le temps. Il est donc possible de faire une analyse qualitative du système différentiel dans le but de déterminer son comportement asymptotique en étudiant les solutions stationnaires de

$x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$. Pour cela, on doit d'abord trouver les points fixes de ce système d'équations différentielles et analyser leur stabilité.

2.1 Les points fixes et leur stabilité

Il est clair de voir que le point fixe (x_0, y_0, z_0) du système (4.7) est donné par :

$$x_0 = f(z_0, \gamma, c, \delta, \Gamma_2), \quad y_0 = f(z_0, \gamma, c, \delta, \Gamma_2)$$

où z_0 est donné par l'équation cubique

$$\gamma^2 z_0^3 - \gamma \left[\frac{2 \sin(c)}{\Gamma_2} + 2\delta \cos(c) + \gamma \right] z_0^2 + \left[\frac{1}{\Gamma_2^2} + \delta^2 + \frac{2\gamma \sin(c)}{\Gamma_2} + 2\gamma\delta \cos(c) + \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \right] z_0 - \left(\frac{1}{\Gamma_2^2} + \delta^2 \right) = 0.$$

On peut opérer des restrictions sur les paramètres afin d'obtenir des solutions réelles.

La stabilité au voisinage du point fixe est déterminée par l'équation caractéristique :

$$\lambda^3 + A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda + A_3 = 0, \quad (4.8)$$

A_1 , A_2 et A_3 sont donnés par :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2}{\Gamma_2} + \frac{1}{\Gamma_1} - 2\gamma z_0 \sin(c), \\ A_2 &= \gamma^2 z_0^2 + \frac{1}{\Gamma_2^2} + \frac{2}{\Gamma_1 \Gamma_2} + 1 - \frac{4\gamma z_0 \sin(c)}{\Gamma_1} - \frac{2\gamma z_0 \sin(c)}{\Gamma_2} - \gamma x_0 \cos(c) - \gamma y_0 \sin(c) \\ &\quad + \frac{2\gamma \sin(c)}{\Gamma_1} + \delta^2 - 2\gamma\delta z_0 \cos(c), \\ A_3 &= -\frac{1}{z_0} \left(\delta x_0 + \frac{y_0}{\Gamma_2} \right) \left(\gamma z_0 \sin(c) + \frac{1}{\Gamma_2} \right) + \frac{1}{\Gamma_1} \left(\gamma^2 z_0^2 + \frac{1}{\Gamma_2^2} + \delta^2 - \frac{2\gamma z_0 \sin(c)}{\Gamma_2} - 2\gamma\delta z_0 \cos(c) \right) \\ &\quad - \frac{1}{z_0} \left(\frac{x_0}{\Gamma_2} - \delta y_0 \right) (\gamma z_0 \cos(c) - \delta). \end{aligned}$$

La stabilité du point fixe (x_0, y_0, z_0) dépend du signe des solutions de l'équation (4.8).

Si toutes les solutions de l'équation caractéristique (4.8) sont strictement négatives (possèdent une partie réelle négative) alors le point fixe est asymptotiquement stable, on dit que c'est un noeud stable (puits ou foyer). Si toutes les solutions de (4.8) sont strictement positives (possèdent une partie réelle positive) le point fixe est alors instable, on dit que le point est un noeud instable (source).

En utilisant le critère de Routh-Hurwitz toutes les racines de (4.8) ont une partie réelle négative

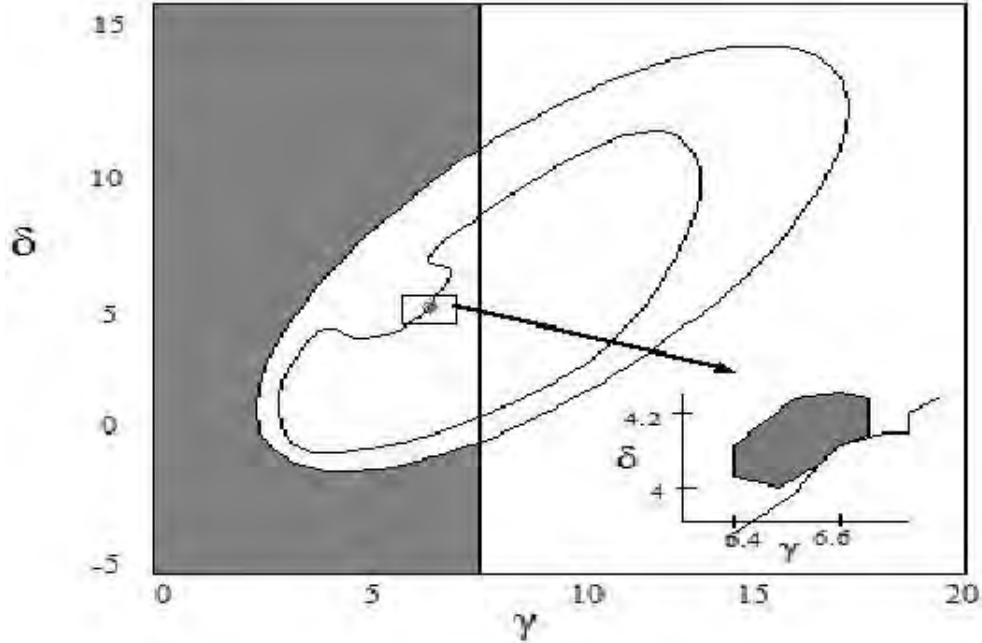


Figure 4.1 – Régions de stabilité du système de Bloch en variant les paramètres γ et δ . les parties en gris représentent le régions de stabilité

si $A_1 > 0$, $A_3 > 0$ et $A_1 A_2 > A_3$, telle est la condition pour la stabilité du point fixe (x_0, y_0, z_0) . Si on considère que $c = 0.7764$, $\Gamma_1 = 0.5$, $\Gamma_2 = 0.45$ alors les régions stables et instables dans l'espace des paramètres (γ, δ) sont montrés dans la figure Fig. (4.1). les parties en gris représentent le régions de stabilité, et le reste les régions d'instabilité. D'après cette figure, il est clair que les points fixe du système (4.7) sont toujours instables pour γ supérieur à 8.327. Concernant l'analyse des bifurcations nous renvoyons à [93].

2.2 Comportement chaotique et attracteurs étranges

Nous allons maintenant nous intéresser aux solutions chaotiques des équations de Bloch non-linéaires (EBNL) en nous basant sur le travail de D. Abergel [94]. Les équations (4.7) dépendent de cinq paramètres, ce qui rend une recherche complète des régions chaotiques dans cet espace de paramètres très difficile. Comme il n'existe pas de méthode simple pour prédire quelle région de l'espace des paramètres donne une solution chaotique, on va fixer les paramètres $(\Gamma_1, \Gamma_2, \delta, \gamma)$ et considérer la phase du champs feedback c comme paramètre de contrôle. Parmi plusieurs ensembles dans l'espace des paramètres, pour lesquels un comportement chaotique a pu être observé, nous citons les deux configurations

$$(I) : \Gamma_1 = 0.5, \Gamma_2 = 0.25, \delta = 0.4\pi, \gamma = 10,$$

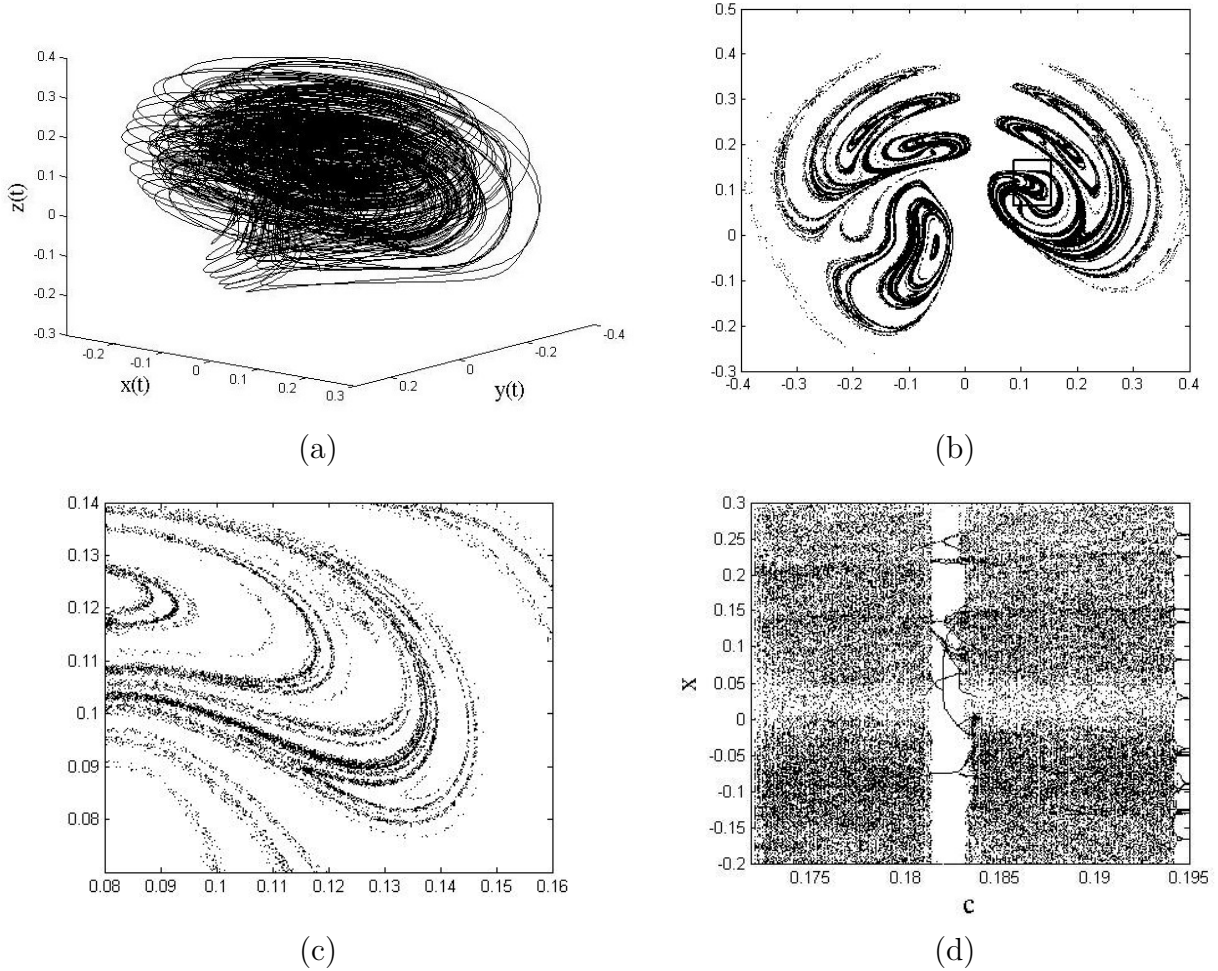


Figure 4.2 – (a) attracteur chaotique pour la configuration (II) avec $c = 0.173$; (b) Section de Poincaré $y = 0$ de l'attracteur; (c) un agrandissement de la région délimitée par un rectangle dans (b); (d) Diagramme de bifurcation de la composante de magnétisation x en fonction du paramètre c

et

$$(II) : \Gamma_1 = 5, \Gamma_2 = 2.5, \delta = -0.4\pi, \gamma = 30.$$

Les exposants de Lyapounov ont été calculé pour chacun de ces ensembles pour c entre 0 et 2π en utilisant l'algorithme de Wolf [70]. l'existence d'un attracteur chaotique a été attestée par l'existence d'une valeur positive du plus grand exposant de Lyapounov. Certaines régions critiques ont ensuite été identifiées et étudiées plus étroitement.

Une fois les régions chaotiques identifiées, les attracteurs correspondants ont été étudiés pour certaines valeurs choisies de c . Le comportement à long terme est étudié pour c se trouvant dans la région où un exposant de Lyapounov positif a été détecté. Une telle évolution est illustrée dans la figure Fig.(4.2-a) pour la configuration (II) et pour $c = 0.173$. Cet attracteur

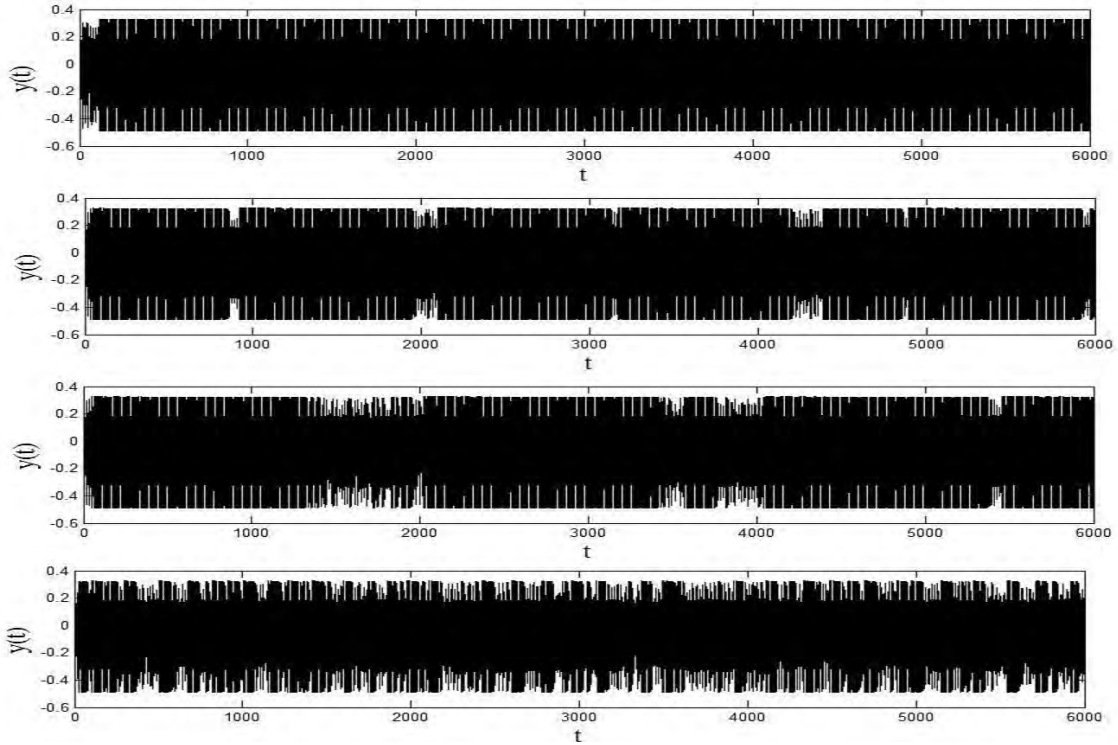


Figure 4.3 – Route vers le chaos par intermittences : la série temporelle y est tracée pour la configuration (I) avec de haut en bas : $c = 0.77634$, $c = 0.776343$, $c = 0.776345$ et $c = 0.7764$.

est aussi caractérisé par l'estimation de sa dimension de Lyapounov $D_\Lambda \approx 2.65$, sa dimension de corrélation $D_2 \approx 2.16$, ainsi que sa dimension de Hausdorff $D_H \approx 1.64$.

Une autre caractéristique de cet attracteur chaotique est fournie par la section de Poincaré représentée dans la figure Fig.(4.2-b). Il est intéressant de remarquer la structure autosimilaire à différentes échelles, typique aux objets fractals.

2.3 Transition vers le chaos

Une question importante est la détermination des mécanismes qui conduisent au chaos. Parmi les scénarios possibles, deux types de transition typiques ont été identifiés pour les paramètres choisis. La caractérisation de la transition vers un comportement chaotique a été guidée par les résultats obtenus lors du calcul des exposants de Lyapounov. Pour l'ensemble de paramètres (II), un diagramme des bifurcations pour c variant de 0.1719 à 0.1950 a été obtenu par le calcul des maxima locaux de la composante de magnétisation x . Le résultat est tracé sur la figure Fig.(4.2-d).

Ce diagramme de bifurcation présente plusieurs régions chaotiques qui correspondent aux régions où le plus grand exposant de Lyapounov est positif, ces régions chaotiques sont séparés

par plusieurs fenêtres périodiques où la route par doublement de périodes est visible, notamment pour $c \approx 0.183$.

D'autre part, pour la configuration (I), le calcul des exposants de Lyapounov indique une transition vers le chaos pour $c \approx 0.7764$. Il est intéressant de voir que l'évolution temporelle de la composante de magnétisation y exhibe une transition vers le chaos par intermittences avec l'apparition de bouffées chaotiques au cours de l'évolution régulière Fig.(4.3). Le nombre de ces bouffées chaotiques augmente au fur et à mesure que la phase c s'approche de la valeur critique $c \approx 0.7763425$. où l'évolution temporelle de y devient chaotique. Pour plus de détails sur la caractérisation de cette transition vers le chaos, voir [94].

Ces résultats permettent donc de démontrer l'existence de solutions chaotiques des équations de Bloch non-linéaires.

Nous allons maintenant nous intéresser au modèle fractionnaire et essayer d'obtenir quelques résultats sur la dynamique de ce modèle.

3 Les équations de Bloch d'ordre fractionnaire

Un modèle fractionnaire de l'équation de Bloch à été introduit par Magin et al. [91] comme suit

$$\begin{cases} {}^c\mathcal{D}^\alpha M_x(t) &= \omega_0 M_y - \frac{M_x}{T_2}, \\ {}^c\mathcal{D}^\alpha M_y(t) &= -\omega_0 M_x - \frac{M_y}{T_2}, \\ {}^c\mathcal{D}^\alpha M_z(t) &= \frac{M_0 - M_z}{T_1}, \end{cases} \quad (4.9)$$

ou sous forme vectorielle

$${}^c\mathcal{D}^\alpha M(t) = AM(t) + b(t), \quad (4.10)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_2} & \omega_0 & 0 \\ -\omega_0 & -\frac{1}{T_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_1} \end{pmatrix}, \quad b(t) = \left(0, 0, \frac{M_0}{T_1}\right)^T, \quad M(t) = (M_x(t), M_y(t), M_z(t))^T.$$

En suivant la démarche de [95], la solution générale du système homogène d'ordre commensurable :

$${}^c\mathcal{D}^\alpha \bar{M}(t) = A\bar{M}(t), \quad (4.11)$$

est de la forme :

$$\bar{M}(t) = c_1 u^{(1)} E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha) + c_2 u^{(2)} E_\alpha(\lambda_2 t^\alpha) + c_3 u^{(3)} E_\alpha(\lambda_3 t^\alpha) \quad (4.12)$$

c_1, c_2, c_3 sont des constantes déterminées par les conditions initiales, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$ sont respectivement les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants associés à la matrice A . E_α étant la fonction de Mittag-Leffler à un paramètre.

La solution du système non-homogène (4.10) s'écrit :

$$M(t) = \bar{M}(t) + \int_0^t \bar{M}(\xi - t) b(\xi) d\xi. \quad (4.13)$$

La matrice A possède une valeur propre réelle $\lambda_1 = -\frac{1}{T_1}$ et deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda_2 = -\frac{1}{T_2} + i\omega_0$ et $\lambda_3 = -\frac{1}{T_2} - i\omega_0$, où $i^2 = -1$, les vecteurs propres correspondants sont : $u^{(1)} = (0, 0, 1)^T$, $u^{(2)} = (1, i, 0)^T$ et $u^{(3)} = (1, -i, 0)^T$.

Ainsi la solution générale de l'équation homogène d'ordre fractionnaire commensurable est :

$$\bar{M}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} E_\alpha\left(-\frac{t^\alpha}{T_1}\right) + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} E_\alpha\left(\left(-\frac{1}{T_2} + i\omega_0\right)t^\alpha\right) + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} E_\alpha\left(\left(-\frac{1}{T_2} - i\omega_0\right)t^\alpha\right). \quad (4.14)$$

En particulier, la solution exacte du problèmes aux valeurs initiales composé de l'équation non-homogène (4.10) et des conditions initiales $(M_x(0), M_y(0), M_z(0))^T = (M_{0x}, M_{0y}, M_{0z})^T$ est donnée par :

$$\begin{aligned} M_x(t) &= \frac{M_{0x}}{2} \left(E_\alpha\left(\left(-\frac{1}{T_2} + i\omega_0\right)t^\alpha\right) + E_\alpha\left(\left(-\frac{1}{T_2} - i\omega_0\right)t^\alpha\right) \right) \\ &\quad - \frac{M_{0y}}{2i} \left(E_\alpha\left(\left(-\frac{1}{T_2} + i\omega_0\right)t^\alpha\right) - E_\alpha\left(\left(-\frac{1}{T_2} - i\omega_0\right)t^\alpha\right) \right), \\ M_y(t) &= -\frac{M_{0x}}{2} \left(E_\alpha\left(\left(-\frac{1}{T_2} + i\omega_0\right)t^\alpha\right) - E_\alpha\left(\left(-\frac{1}{T_2} - i\omega_0\right)t^\alpha\right) \right) \\ &\quad + \frac{M_{0y}}{2} \left(E_\alpha\left(\left(-\frac{1}{T_2} + i\omega_0\right)t^\alpha\right) + E_\alpha\left(\left(-\frac{1}{T_2} - i\omega_0\right)t^\alpha\right) \right), \\ M_z(t) &= M_{0z} E_\alpha\left(-\frac{t^\alpha}{T_1}\right) + \frac{M_0}{T_1} t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}\left(-\frac{t^\alpha}{T_1}\right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

La figure (Fig.4.4) montre le comportement de $M_z(t)$ en fonction du temps pour différentes valeurs de α de 0.5 à 1 avec un pas de 0.1. La fonction de Mittag-Leffler à été calculée numériquement d'après sa représentation en série et en utilisant le programme Matlab écrit par Po-

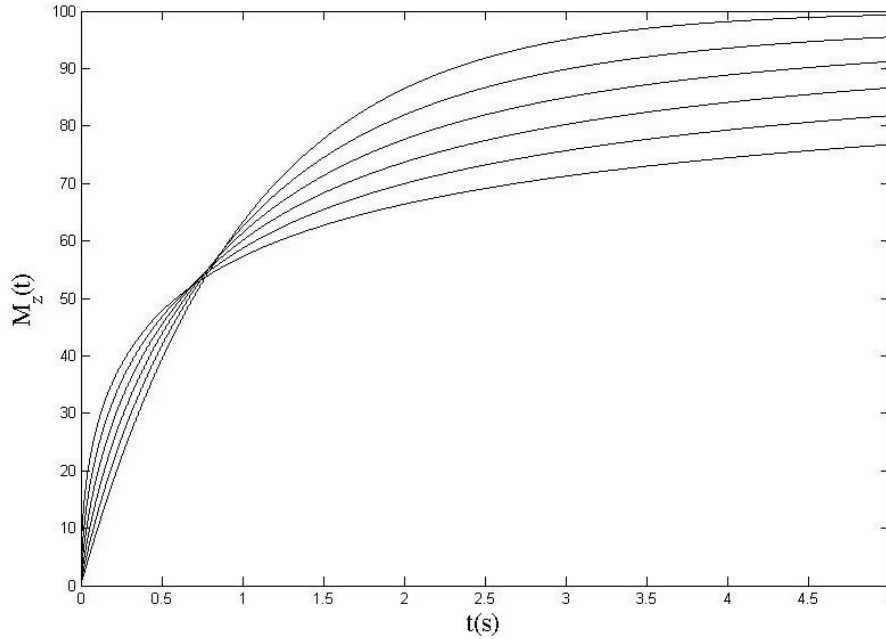


Figure 4.4 – Courbes de $M_z(t)$ pour différentes valeurs de α dans l'intervalle $\alpha = 0.5$ (la courbe la plus en bas) à $\alpha = 1$ (la courbe la plus en haut) avec un pas de 0.1. Ici $M_z(0) = 0$, $T_1 = 1$ et $M_0 = 100$

dlubny et Kacenač (<http://www.mathworks.com/matlabcentral>). La figure Fig.(4.5) montre les courbes de $M_y(t)$ en fonction du temps avec pour valeurs de $\alpha = 1.0, 0.9$ et 0.8 avec comme conditions initiales $M_x(0) = 0$ et $M_y(0) = 100$.

Pour illustrer la relation entre les dynamiques de $M_x(t)$ et $M_y(t)$ dans les cas classique et fractionnaire, ces deux composantes de magnétisation sont tracées dans le plan complexe, figure Fig.(4.6). Le portrait de phase du cas classique $\alpha = 1$ montre une spirale régulière du point initial $M_x(0) = 0$ et $M_y(0) = 0$ jusqu'à l'origine. Dans les deux autres portraits de phases correspondant à $\alpha = 0.9$ et $\alpha = 0.8$, respectivement, on remarque une convergence plus rapide vers l'origine pour les valeurs choisies de T_2 . La trajectoire entière de la magnétisation est tracée en dimension trois dans la figure Fig.(4.7).

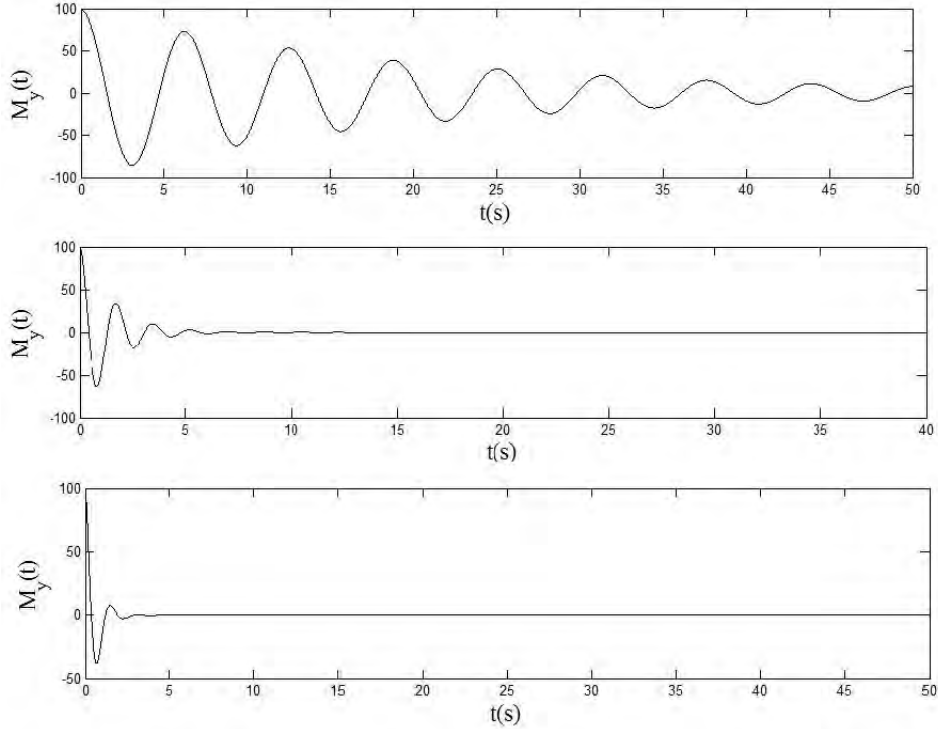


Figure 4.5 – Courbes de $M_y(t)$ pour $T_2 = 20$, $f_0 = (\omega_0/2\pi) = 160Hz$ et $\alpha = 1.0, 0.9$ et 0.8 de haut en bas, respectivement. Ici $M_x(0) = 0$, et $M_y(0) = 100$

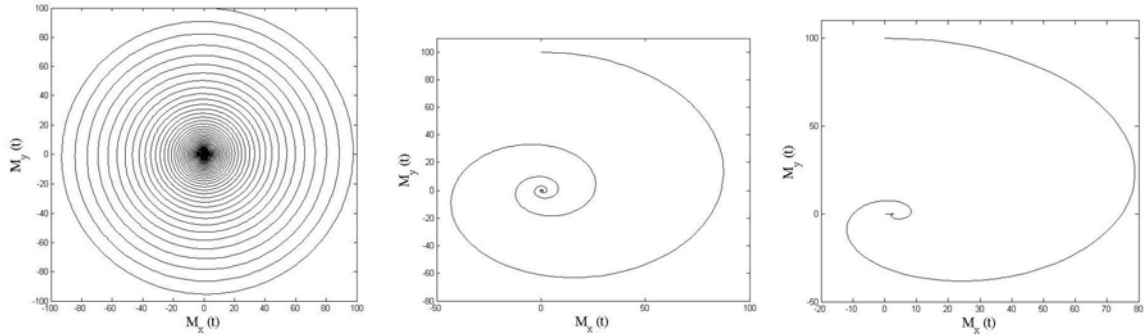


Figure 4.6 – Courbes de $M_x(t)$ vs $M_y(t)$ pour $T_2 = 20$, $f_0 = (\omega_0/2\pi) = 160Hz$ et $\alpha = 1.0, 0.9$ et 0.8 de gauche à droite, respectivement. Ici $M_x(0) = 0$, et $M_y(0) = 100$

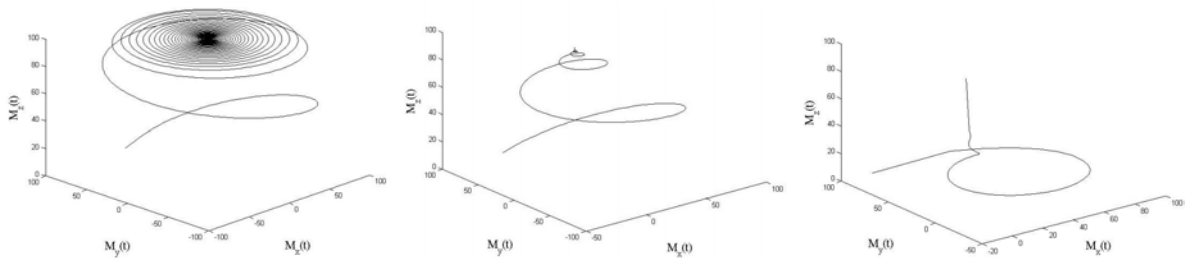


Figure 4.7 – Solution de l'équation de Bloch fractionnaire pour $T_1 = 1$, $T_2 = 20$, $f_0 = (\omega_0/2\pi) = 160Hz$ et $\alpha = 1.0, 0.9$ et 0.8 de gauche à droite, respectivement. Ici $M_x(0) = 0$, et $M_y(0) = 100$

4 Les équations non-linéaires de Bloch d'ordre fractionnaire

Considérons maintenant le système de Bloch d'ordre fractionnaire, la dérivée classique est remplacée par la dérivée de Caputo comme suit :

$$\begin{cases} {}^c\mathcal{D}^{q_1}x &= \delta y + \gamma z(x \sin(c) - y \cos(c)) - x/\Gamma_2, \\ {}^c\mathcal{D}^{q_2}y &= -\delta x - z + \gamma z(x \cos(c) + y \sin(c)) - y/\Gamma_2, \\ {}^c\mathcal{D}^{q_3}z &= y - \gamma \sin(c)(x^2 + y^2) - (z - 1)/\Gamma_1, \end{cases} \quad (4.16)$$

où $0 < q_i < 1$. Notre étude a été faite pour le système dit commensurable, c'est-à-dire $q_1 = q_2 = q_3 = q$, et pour les deux ensembles de paramètres cités précédemment en utilisant l'ordre de dérivation q comme paramètre de contrôle.

4.1 Une condition nécessaire pour le chaos

Considérons le système fractionnaire commensurable suivant :

$${}^c\mathcal{D}^q x = f(x) \quad (4.17)$$

où $0 < q < 1$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Les points d'équilibre de ce système sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$. D'après le théorème (2.4), ces points sont localement asymptotiquement stables si toutes les valeurs propres λ_i de la matrice Jacobienne $A = \frac{\partial f}{\partial x}$ évaluée au point d'équilibre vérifient la condition suivante :

$$|Arg(\lambda_i)| > q \frac{\pi}{2}.$$

Dans la théorie des systèmes dynamiques tridimensionnels, un point selle est un point d'équilibre pour lequel le système linéarisé équivalent possède au moins une valeur propre dans la région stable et une dans la région instable, de plus, ce point est un point selle d'indice 1 si une des valeurs propres est instable et les autres sont stables, et d'indice 2 si deux valeurs propres sont instables et la troisième est stable.

Concernant les systèmes chaotiques, il a été prouvé que les "les scrolls" sont générés seulement autour d'un point selle d'indice 2. Cependant, les points selles d'indice 1 ne sont responsable que de connecter ces scrolls.

Supposons qu'un système chaotique de dimension 3 possède un attracteur 1-scroll, ce système possède alors un point selle d'indice 2 encerclé par cet attracteur, et supposons que $\lambda = \alpha \pm j\beta$

sont les valeurs propres instables de ce point selle d'indice 2. Une condition nécessaire pour le système fractionnaire (4.17) d'avoir un comportement chaotique est de maintenir les valeurs propres λ dans la région instable, ce qui revient à dire :

$$\tan\left(q\frac{\pi}{2}\right) > \frac{|\beta|}{\alpha},$$

ou

$$q > \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{|\beta|}{\alpha}\right). \quad (4.18)$$

4.2 Étude des ENB fractionnaires avec la configuration (I)

Les paramètres sont :

$$\Gamma_1 = 0.5, \Gamma_2 = 0.25, \delta = 0.4\pi, \gamma = 10, c = 0.7764,$$

pour cette configuration, les équation non-linéaires de Bloch possèdent un unique point fixe :

$$E = (0.13985, 0.06727, 0.94926),$$

et les valeurs propres associées sont

$$\lambda_1 = -1.8116, \lambda_2 = 2.5574 + 5.5218j, \lambda_3 = 2.5574 - 5.5218j.$$

Le point fixe E est donc un point selle d'indice 2. D'après (4.18) la condition nécessaire pour que le système de Bloch fractionnaire soit chaotique est $q > 0.72$.

On applique l'algorithme FRAC-PECE décrit au chapitre 2 pour la résolution numérique des équations fractionnaires (4.16) et on varie l'ordre de dérivation q dans l'intervalle $[0.7, 1]$ pour obtenir le diagramme de bifurcation illustré dans la figure Fig.(4.8). En utilisant les portraits de phases ainsi que les exposants de Lyapounov, nous allons décrire la manière avec laquelle le système de Bloch fractionnaire va transiter d'un régime stable vers un régime chaotique.

Comme on l'a vu précédemment, la solution du système (4.16) est asymptotiquement stable pour $q < 0.72$. En augmentant la valeur de q une orbite périodique va apparaître pour $q = 0.85$, puis on va observer une cascade de doublement de période (cascade de Feigenbaum) :

Ainsi, pour $q = 0.86$ on va observer la naissance d'un cycle limite de période 2, pour $q = 0.93$ un cycle de période 4, pour $q = 0.94$ un cycle de période 8, etc. Pour aboutir enfin à un attracteur de Feigenbaum singulier pour $q = 0.947$ Fig.(4.9).

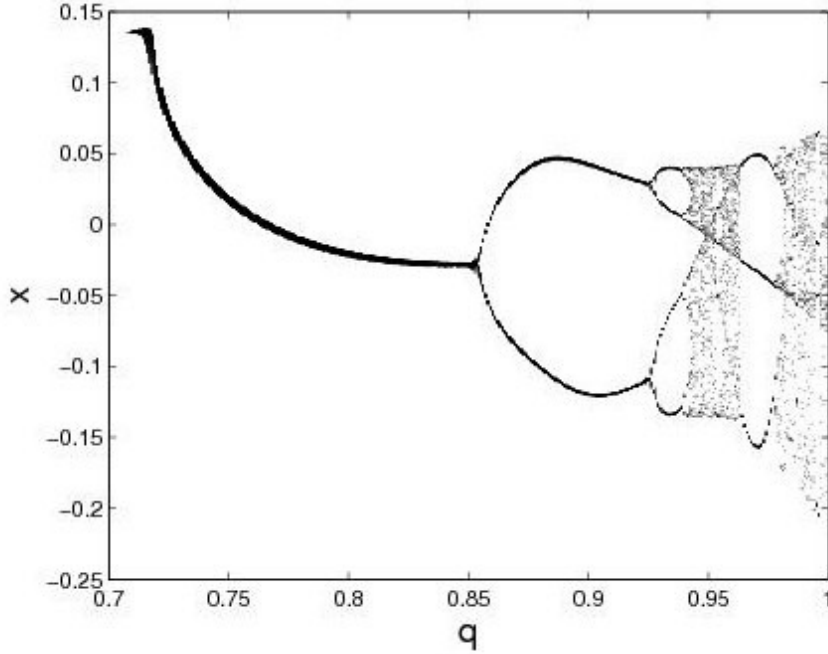


Figure 4.8 – Diagramme de bifurcation du système (4.16) avec la configuration (I)

La cascade de doublement de période est suivie d’une cascade sous-harmonique caractérisée par la naissance de cycles limites de périodes quelconques en conformité avec le scénario établi par Sharkovskii [96]. Ainsi en continuant à augmenter q , on observe une cascade sous harmoniques complète de bifurcations de cycles limites en accord avec l’ordre de Sharkovskii :

$$1 \triangleleft 2 \triangleleft 2^2 \triangleleft 2^3 \triangleleft \dots \triangleleft 2^2 \cdot 7 \triangleleft 2^2 \cdot 5 \triangleleft 2^2 \cdot 3 \triangleleft \dots \triangleleft 2 \cdot 7 \triangleleft 2 \cdot 5 \triangleleft 2 \cdot 3 \triangleleft \dots \triangleleft 7 \triangleleft 5 \triangleleft 3. \quad (4.19)$$

L’ordre $n \triangleleft k$ dans (4.19) signifie que l’existence d’un cycle de période k implique l’existence de tous les cycles de période n . Donc, si notre système possède un cycle limite stable de période trois alors il possède tous les cycles instables de toutes les périodes conformément à l’ordre de Sharkovskii (4.19).

La cascade sous harmonique complète est prouvée par l’existence d’un cycle limite de période six pour la valeur du paramètre $q = 0.948$, un cycle limite de période cinq pour $q = 0.955$ et un cycle limite de période 3 se situant dans l’intervalle $[0.965, 0.979]$ qui, avec une augmentation supplémentaire du paramètre q va entamer une cascade de doublement de période, on observe, par exemple, pour $q = 0.98$ un cycle doublé du cycle de période trois. Cette cascade sous harmonique se termine également par l’apparition d’un attracteur étrange à $q = 0.99$. Certains de ces cycles ainsi que l’attracteur étrange sont illustrés dans la figure Fig.(4.10).

Afin de prouver la dynamique chaotique des solutions de ENB fractionnaires, on se doit de cal-

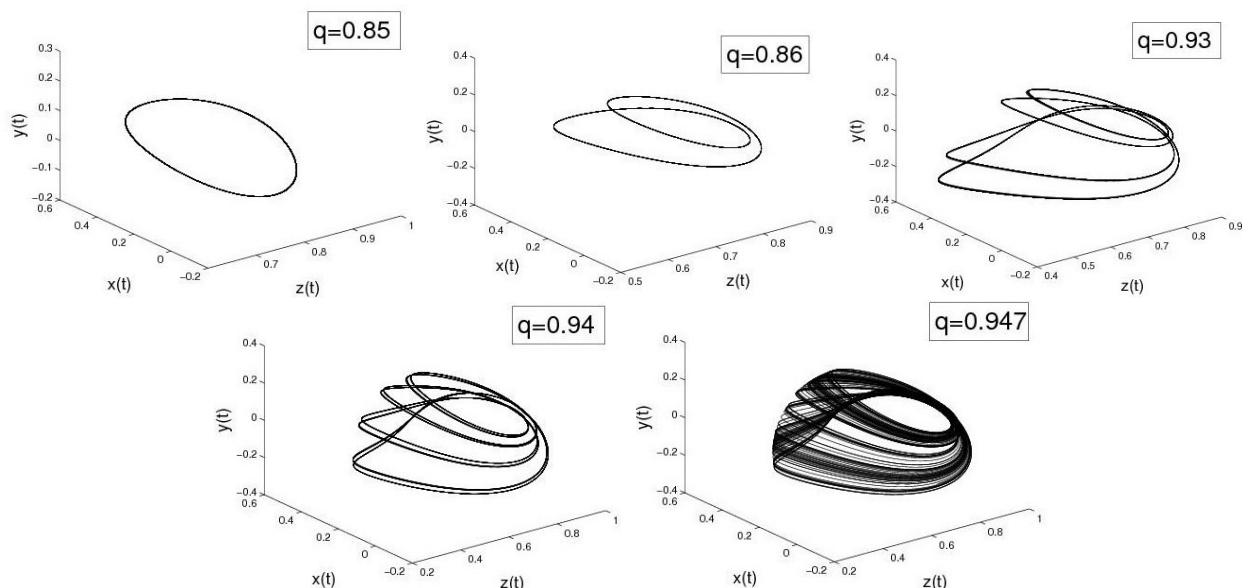


Figure 4.9 – Projections du cycle limite original, cycle de période 2, cycle de période 4, cycle de période 8 et de l'attracteur de feigenbaum pour les ENB fractionnaires.

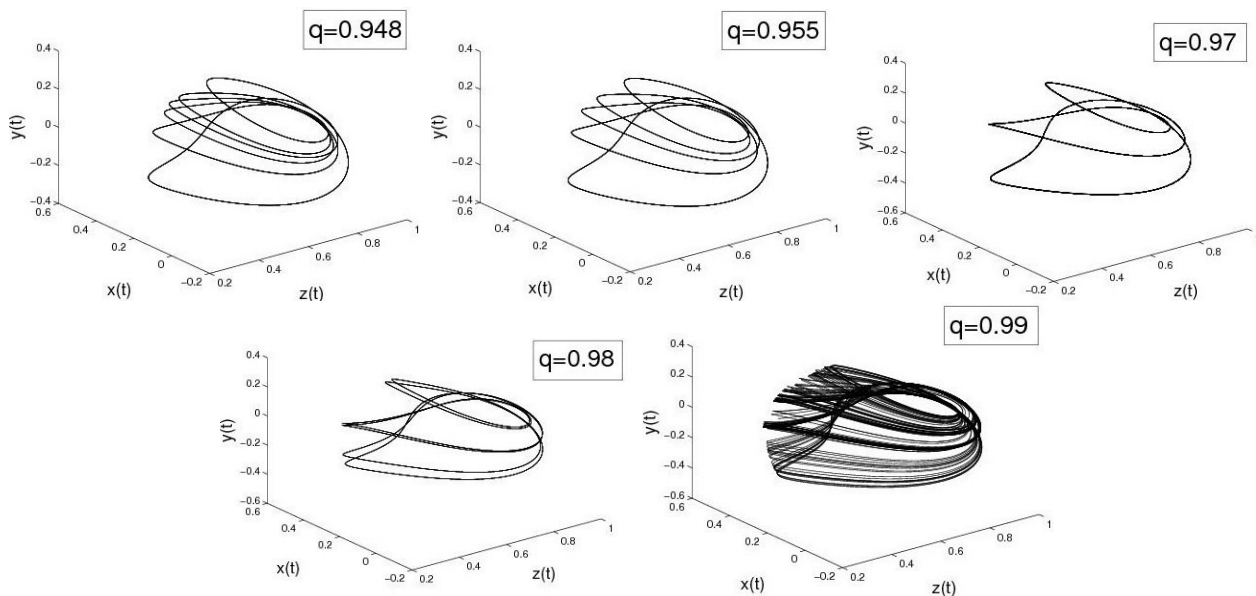


Figure 4.10 – Projections du cycle limite de période 6, cycle de période 5, cycle de période 3, cycle de période 3 doublé et de l'attracteur étrange pour les ENB fractionnaires.

culer le plus grand exposant de Lyapounov, car tout système possédant au moins un exposant de Lyapounov positif est défini comme chaotique [97]. Le calcul des exposants de Lyapounov est souvent une tâche délicate, que ce soit pour les systèmes d'ordre entier ou les systèmes fractionnaires. Dans notre cas nous avons opté pour l'algorithme de Rosenstein décrit au chapitre précédent et qui est à notre avis plus facile à mettre en oeuvre par rapport aux algorithmes classiques de Wolf ou de la Jacobienne.

Les résultats de nos calculs sont illustrés dans la figure Fig.(4.11).

4.3 Étude des ENB fractionnaires avec la configuration (II)

Les paramètres du système sont choisis comme suit

$$\Gamma_1 = 5, \Gamma_2 = 2.5, \delta = -0.4\pi, \gamma = 35, c = 0.173,$$

pour ce groupe de paramètres, le système possède un point d'équilibre :

$$E = (0.02730, 0.00429, 0.99847),$$

et les valeurs propres associées sont :

$$\lambda_1 = -0.19971, \lambda_2 = 5.6155 + 35.685j, \lambda_3 = 5.6155 - 35.685j.$$

Ainsi le point fixe E est un point selle d'indice 2. La condition nécessaire pour que le système (4.16) soit chaotique est $q > 0.90$.

Pour $q \approx 0.90$ une bifurcation de Hopf donne naissance à un cycle limite orbitalement stable. Pour certaines valeurs de q ce cycle limite co-existe avec un autre cycle limite d'une période différente, chacun dans son bassin d'attraction. La figure Fig.(4.13) montre les cycles limites coexistants pour de différentes conditions initiales.

Quelques portraits de phases intéressants sont illustrés dans les figures Fig.(4.14). La figure Fig.(4.12) montre le plus grand exposant de Lyapounov vs q .

4.4 Le fer à cheval topologique dans les ENB fractionnaires

Dans ce qui a précédé, l'existence du chaos dans les ENB fractionnaires a été prouvé numériquement, par des outils tels que les portraits de phases, le diagramme de bifurcations ou les exposants de Lyapounov, ces derniers sont certainement la preuve la plus convaincante de l'existence du chaos dans un système différentiel. Cependant l'erreur numérique existe, et elle

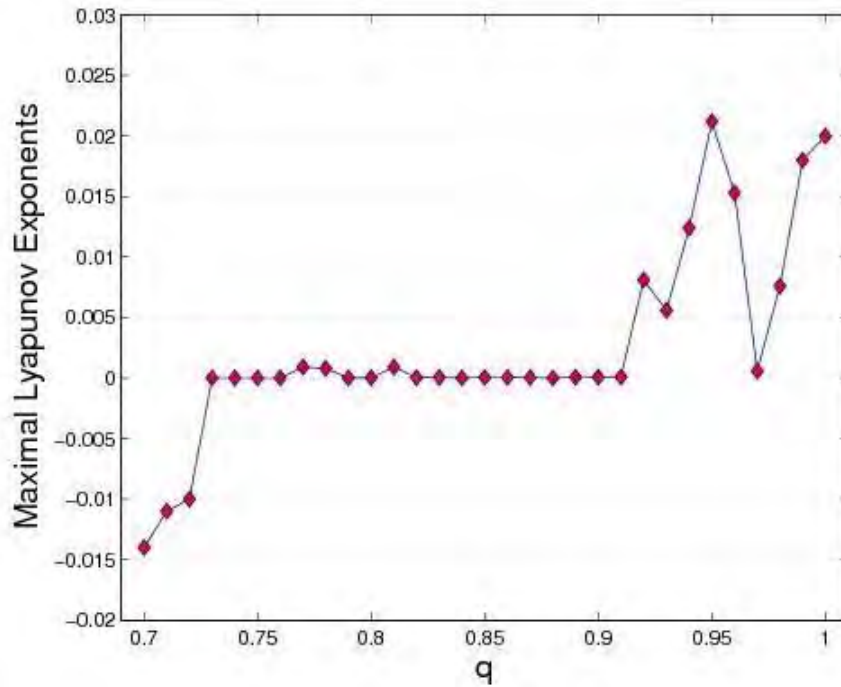


Figure 4.11 – Le plus grand exposant de Lyapounov vs q avec la configuration (I), q variant de 0.7 à 1 avec un pas de 0.01

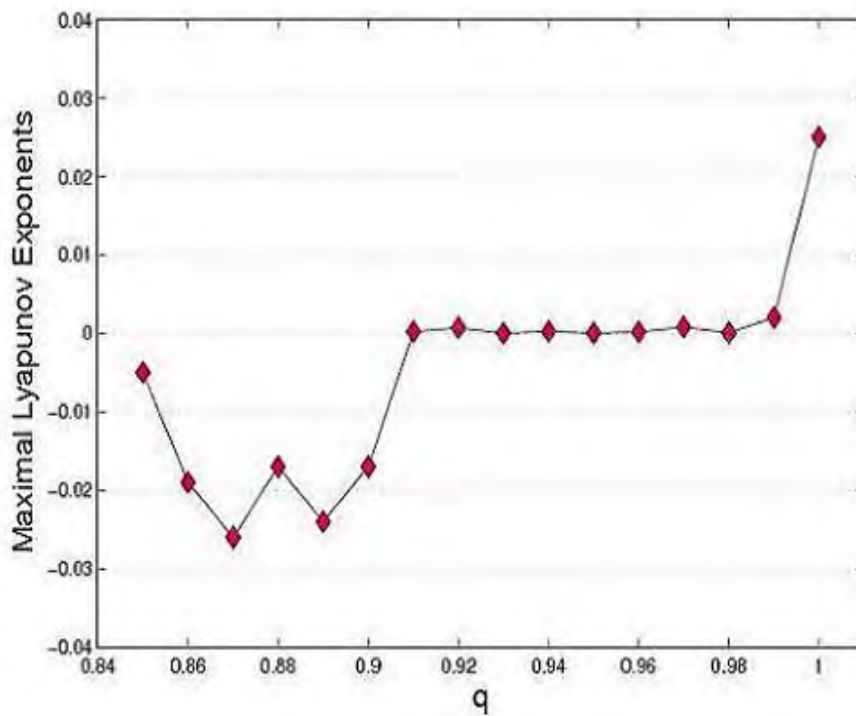


Figure 4.12 – Le plus grand exposant de Lyapounov vs q avec la configuration (II), q variant de 0.85 à 1 avec un pas de 0.01

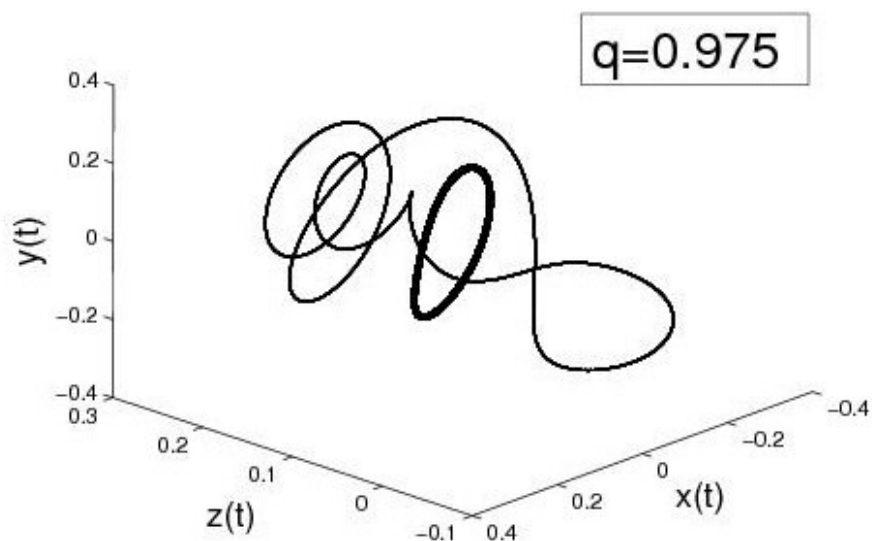


Figure 4.13 – Cycles limites coexistant avec les conditions initiales : $(0.1,0.1,0.1)$ (trait fin) et $(0.01,0.01,0.01)$ (trait gras)

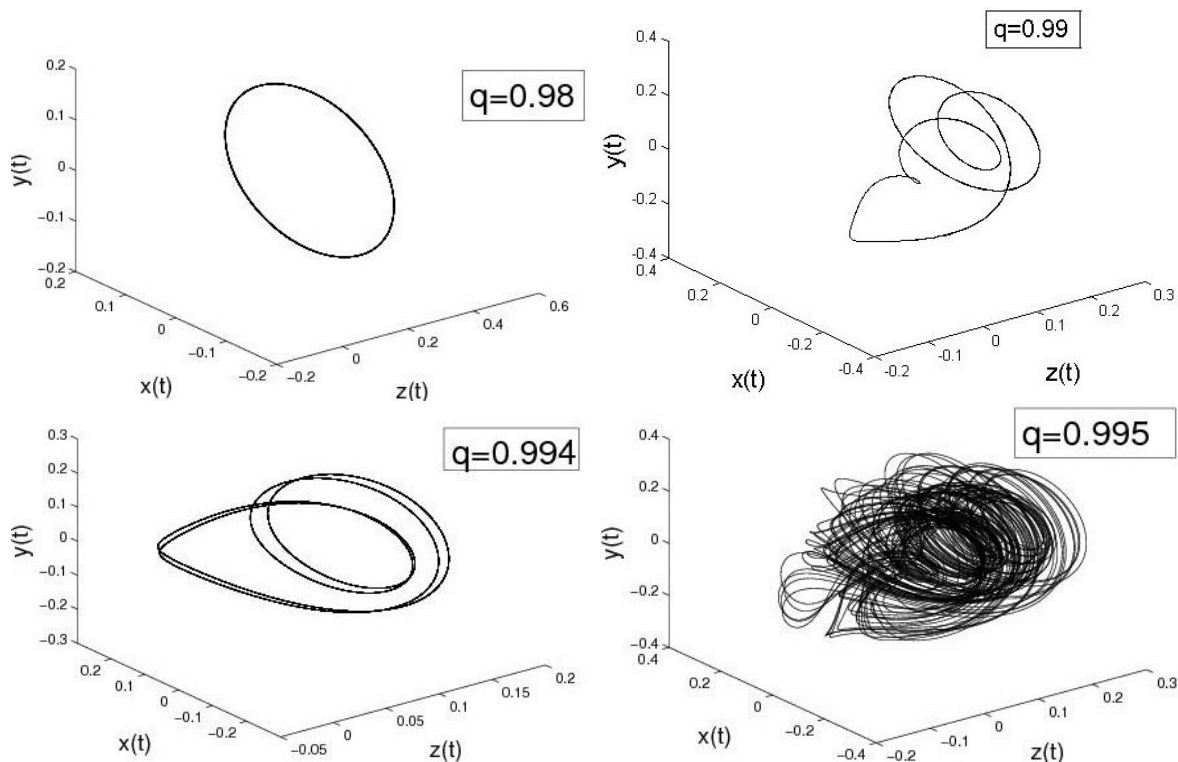


Figure 4.14 – Quelques portraits de phases des solutions des ENB fractionnaires avec la configuration (II)

peut faire que les calculs ne soit pas fiables, surtout si les valeurs du plus grand exposant de Lyapounov sont proche de zéro. Dans ce cas nous ne pouvons plus être sûr si elle est positive ou non. La précision numérique dépend le plus souvent du pas de l'intégration, de la précision de l'ordinateur, du temps de l'intégration et de l'algorithme utilisé. Cette précision est d'autant plus difficile à obtenir dans le cas d'un système d'ordre fractionnaire à cause de la difficulté du calcul de la matrice Jacobienne, nous devons donc calculer les exposants de Lyapounov à partir de séries temporelle. De plus, l'utilisation d'opérateurs d'ordre entier pour approcher les opérateurs d'ordre fractionnaires rend l'erreur d'intégration inévitable, elle va s'accumuler d'une manière exponentielle et par conséquent le calcul à long terme n'est plus fiable.

Le fer à cheval topologique est un puissant outil de détection et d'analyse du chaos, non seulement il nous fournit des informations sur les exposants de Lyapounov mais en plus il nous donne une analyse détaillée du chaos. Cette technique a été appliquée avec succès à des systèmes d'ordre entier [79–82]. Le fer à cheval topologique est basé sur la géométrie des applications continues sur quelques ensembles particuliers de l'espace d'état. Pour chaque point de ces ensembles seul un calcul à court terme est utilisé afin de trouver leurs images par l'application de Poincaré correspondante. Nous n'avons donc besoin que de résoudre le bout de trajectoire situé entre le point et son image, l'erreur numérique est donc plus petite que lors du calcul des exposants de Lyapounov qui nécessite une simulation à long terme. Le fer à cheval topologique est donc un bon moyen d'étudier le comportement chaotique des systèmes d'ordre fractionnaire. Dans cette section nous allons suivre la démarche de [98] pour essayer de donner une preuve rigoureuse de l'existence du chaos dans les ENB fractionnaires avec l'ensemble de paramètres :

$$\Gamma_1 = 5, \Gamma_2 = 2.5, \delta = -0.4\pi, \gamma = 35, c = 0.173,$$

et l'ordre de dérivation

$$q = 0.995.$$

Soit $\phi(x, t)$ l'orbite du système (4.16) avec la condition initiale x , c'est-à-dire $\phi(x, 0) = x$.

On commence par choisir une section de Poincaré $\Pi : y = 0$ dans l'espace des phases comme c'est montré dans la figure Fig.(4.15). Dans le plan $y = 0$ on choisi le quadrilatère $|ABCD|$, avec comme sommets :

$$A = (-0.145, 0, 0.113), \quad B = (-0.155, 0, 0.127),$$

$$C = (-0.095, 0, 0.147), \quad D = (-0.085, 0, 0.135).$$

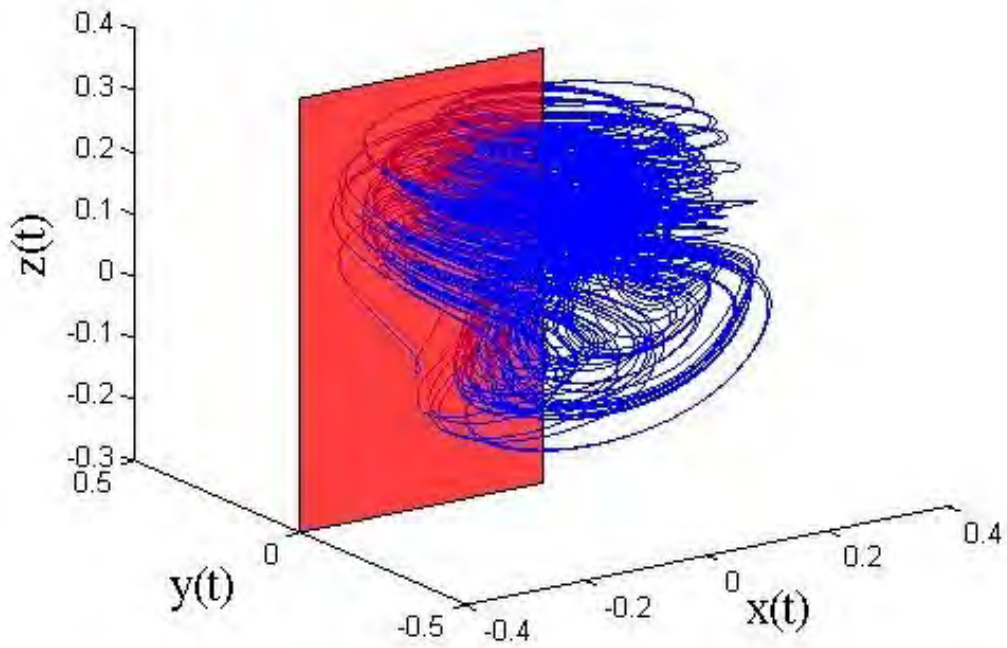


Figure 4.15 – L'attracteur chaotique et sa section de Poincaré

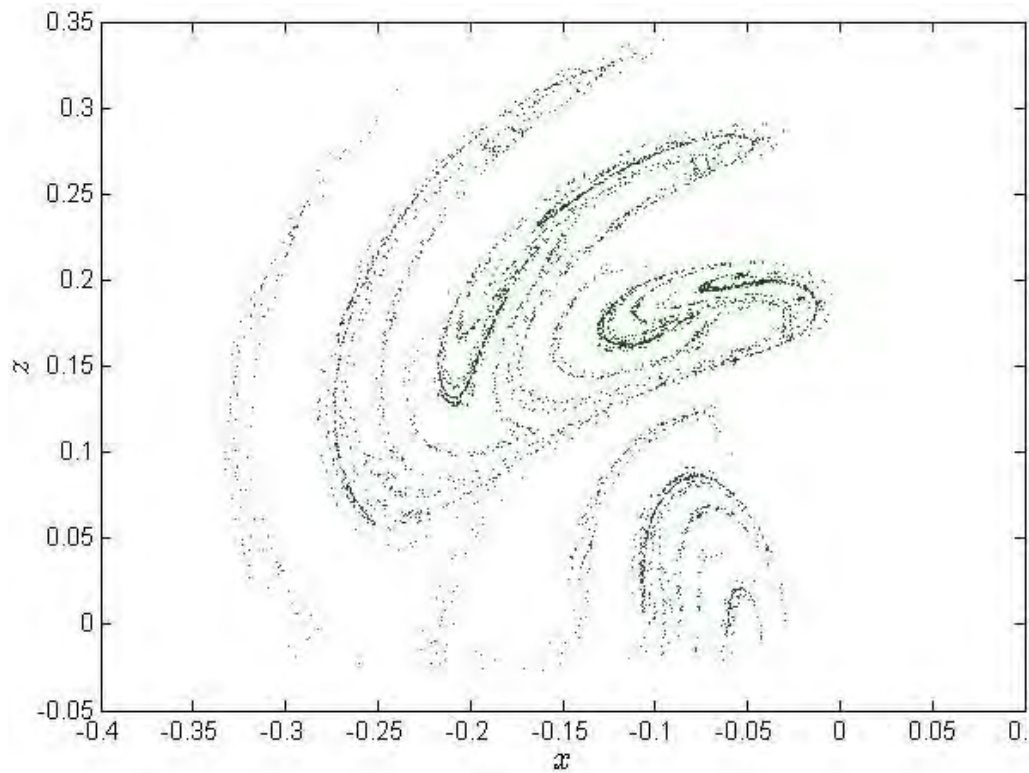


Figure 4.16 – Section de Poincaré $y = 0$

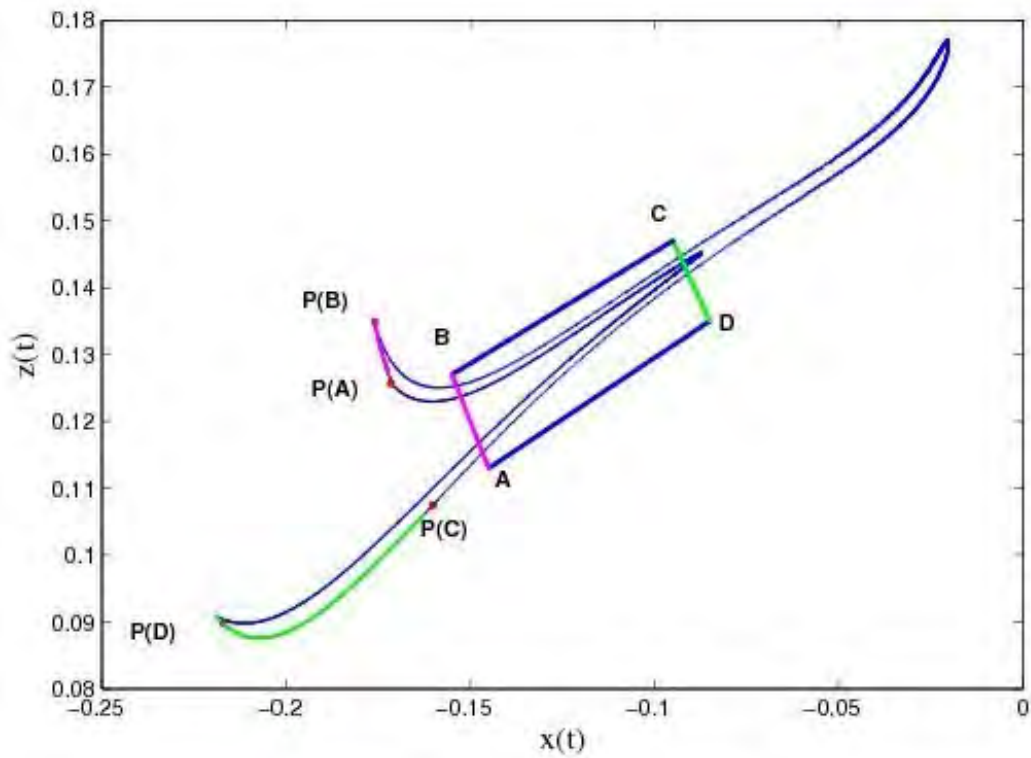


Figure 4.17 – Le quadrilatère $|ABCD|$ et son image

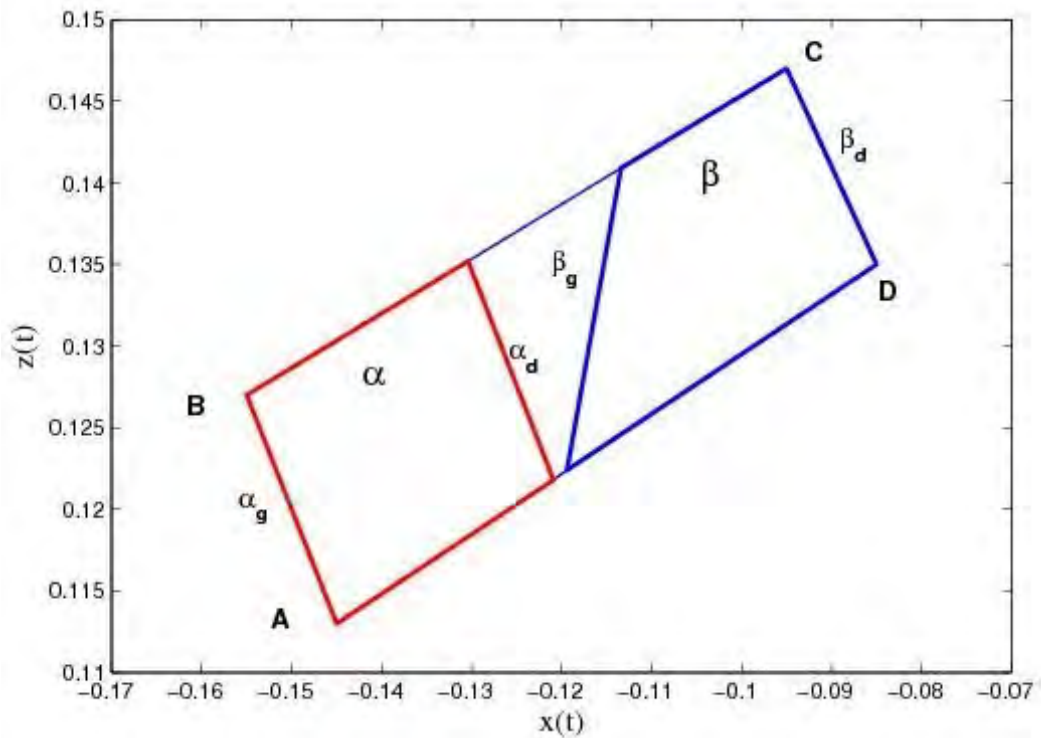


Figure 4.18 – Les deux sous-ensembles disjoints α et β

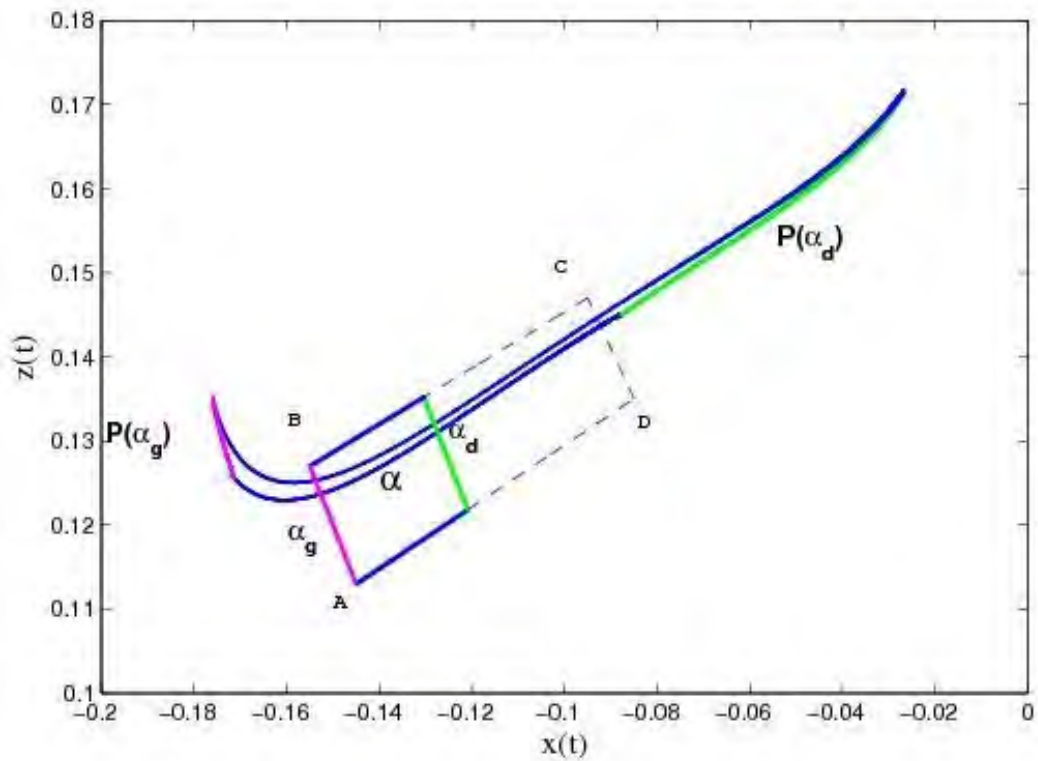


Figure 4.19 – Image du sous-ensemble α

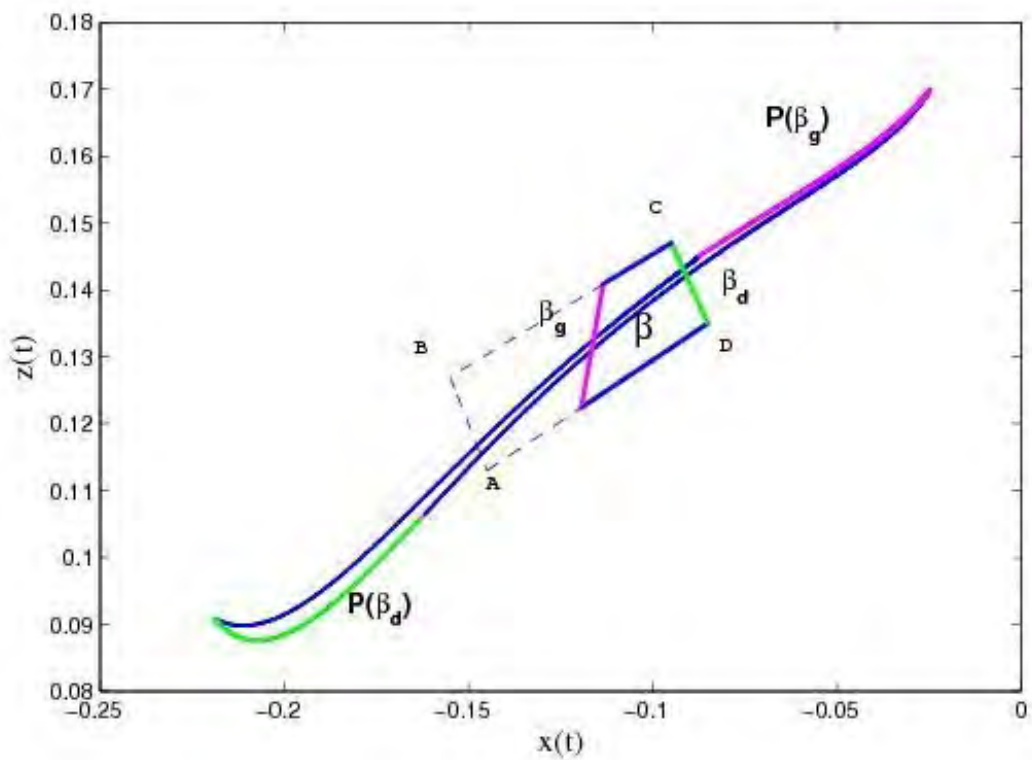


Figure 4.20 – Image du sous-ensemble β

et l'application de Poincaré correspondante :

$$P(x) : |ABCD| \rightarrow \Pi.$$

Pour chaque $x \in |ABCD|$, $P(x)$ est définie comme étant le point de la seconde intersection de l'orbite $\phi(t, x)$ avec le plan Π (application du second retour). La première intersection n'est pas prise en considération car elle ne permet pas de trouver le fer à cheval topologique.

Avec ces choix, l'image du quadrilatère $|ABCD|$ chevauche entièrement $|ABCD|$ comme le montre la figure Fig.(4.17).

Nous allons maintenant prouver que l'application de Poincaré P est semi-conjugée à l'application 2-shift, pour cela on va essayer de trouver deux sous-ensembles disjoints de $|ABCD|$, tels que l'application P possède une famille P -connectée par rapport à ces deux sous-ensembles.

Après plusieurs essais, nous choisissons deux sous-ensembles disjoints α et β de $|ABCD|$ comme le montre la figure Fig.(4.18), les sommets de α et β sont donnés ci-dessous :

$$\alpha : (-0.145, 0, 0.113), (-0.155, 0, 0.127), (-0.1304, 0, 0.1352), (-0.1209, 0, 0.1218),$$

$$\beta : (-0.1194, 0, 0.1224), (-0.1134, 0, 0.1409), (-0.095, 0, 0.147), (-0.085, 0, 0.135).$$

Désignons par α_d et α_g les cotés droit et gauche de α respectivement, et β_d et β_g les cotés droit et gauche de β respectivement. La simulation numérique montre les faits suivants :

- l'image $P(\alpha)$ du quadrilatère α chevauche entièrement $|ABCD|$, avec $P(\alpha_d)$ se trouvant à droite de CD et $P(\alpha_g)$ à gauche de AB comme c'est illustré dans la figure Fig.(4.19).
- l'image $P(\beta)$ du quadrilatère β chevauche entièrement $|ABCD|$, avec $P(\beta_d)$ se trouvant à droite de CD et $P(\beta_g)$ à gauche de AB comme c'est illustré dans la figure Fig.(4.20)

Il est donc clair que pour chaque connexion L de $|ABCD|$ par rapport à α et β , les images $P(L \cap \alpha)$ et $P(L \cap \beta)$ sont aussi des connexions par rapport aux sous ensembles α et β .

D'après la théorie du fer à cheval topologique dans le plan, il existe une famille P -connectée par rapport aux deux sous ensembles α et β et à l'application P , ce qui signifie qu'il existe un ensemble invariant fermé $\Lambda \subset |ABCD|$ pour lequel $P|_{\Lambda}$ est semi conjugée à une application m -shift, ici $m = 2$.

Donc, l'entropie topologique de l'application P est supérieure à celle de l'application 2-shift, c'est-à-dire :

$$h_{top}(P) \geq \log 2 > 0.$$

Concernant l'entropie topologique du système original, elle peut être estimée par la formule d'Abramov : [99]

$$h_{top} = \frac{h_{top}(P)}{\langle \tau \rangle_P}.$$

h_{top} est l'entropie topologique du système continu, $h_{top}(P)$ est l'entropie topologique de son application de Poincaré et $\langle \tau \rangle_P$ est le temps moyen entre deux passages par la section de Poincaré. Un calcul numérique nous donne $\langle \tau \rangle_P = 0.73$, ainsi l'entropie topologique du système de Bloch fractionnaire est strictement supérieure à $\frac{\log 2}{0.73} \approx 0.94$, le système est donc chaotique.

4.5 Le test 0-1 pour détecter le chaos dans les ENB fractionnaires

Nous allons maintenant appliquer le test 0-1 pour détecter le chaos dans les ENB fractionnaires.

Commençons d'abord par générer des séries temporelles par la résolution numérique des équations fractionnaires (4.16), en utilisant la méthode Adams-Bashforth-Moulton fractionnaire. Dans notre travail, on a appliqué le test aux équations (4.16) avec l'ensemble des paramètres (I) avec comme ordres de dérivation $q = 0.85$ et $q = 0.99$, puis avec la configuration (II) et $q = 0.99$ et $q = 0.995$.

En appliquant l'algorithme du test à ces séries temporelles, nous obtenons des résultats en parfait accord avec ceux obtenus par le calcul des exposants de Lyapounov.

Pour la configuration (I) et d'après les figures Fig.(4.21), il est clair que la dynamique des composantes (p, q) est bornée pour $q = 0.85$ ce qui correspond à une dynamique régulière (dans notre cas périodique d'après le portrait de phases) et Brownienne pour $q = 0.99$ ce qui indique que la solution est chaotique, de plus, on voit bien que K est proche de zéro quand $q = 0.85$ et $k \approx 1$ quand $q = 0.99$.

De même, en utilisant la configuration (II), les figures Fig.(4.22) montrent que la dynamique de (p, q) est bornée pour $q = 0.99$ et Brownienne pour $q = 0.995$, de plus on note que $k \approx 0$ pour $q = 0.99$ et $k \approx 1$ pour $q = 0.995$.

5 Synchronisation du chaos dans les ENB fractionnaires

Dans cette section nous allons réaliser une synchronisation de deux systèmes d'équations de Bloch fractionnaires identiques, pour cela construisons une configuration maître-esclave (drive-

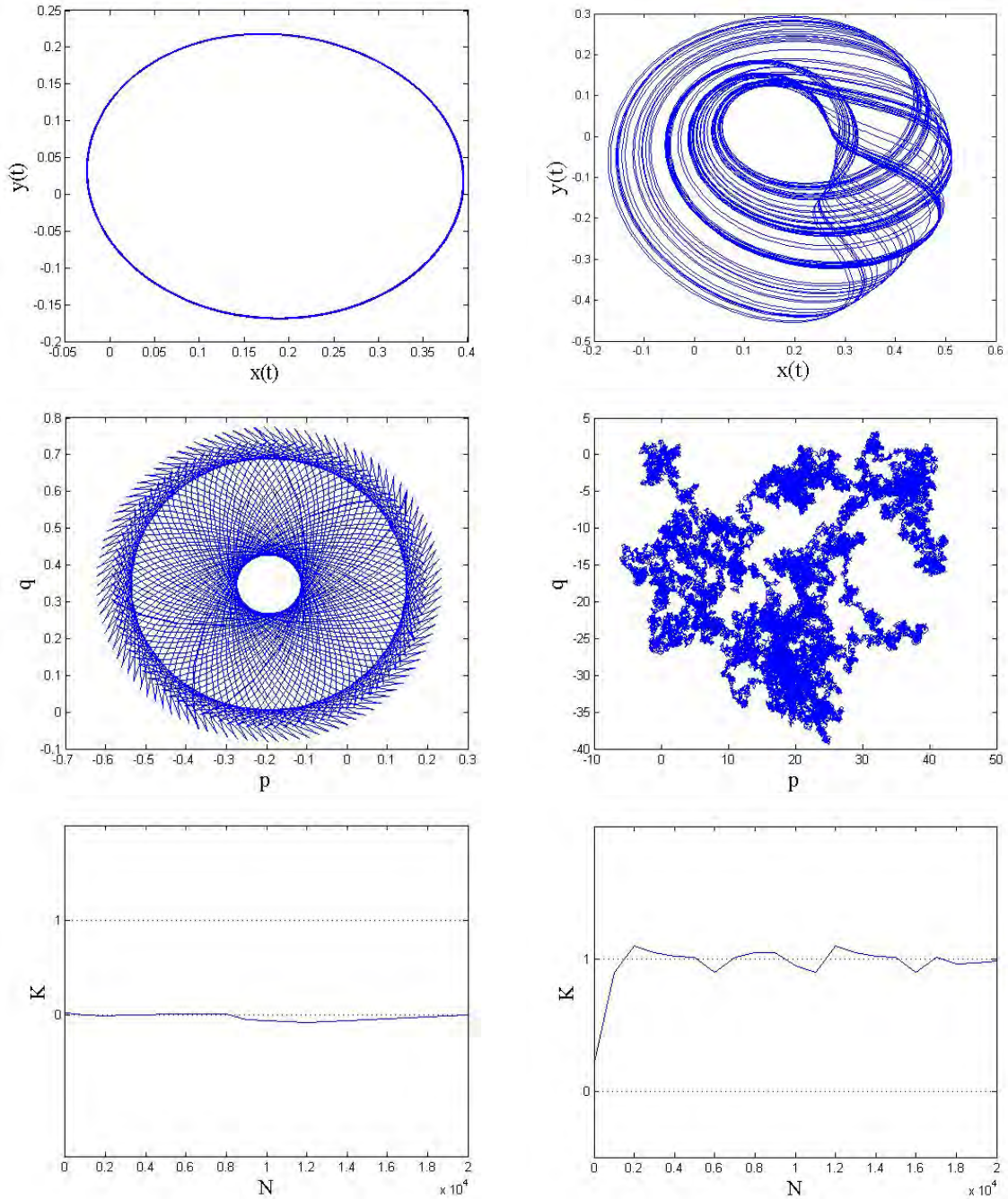


Figure 4.21 – Attracteur dans l'espace des phases (x, y) , les composantes de translation (p, q) et la dépendance de K par rapport au nombre de points N pour la configuration (I) et : $q = 0.85$ (figures de gauche) et $q = 0.99$ (figures de droite)

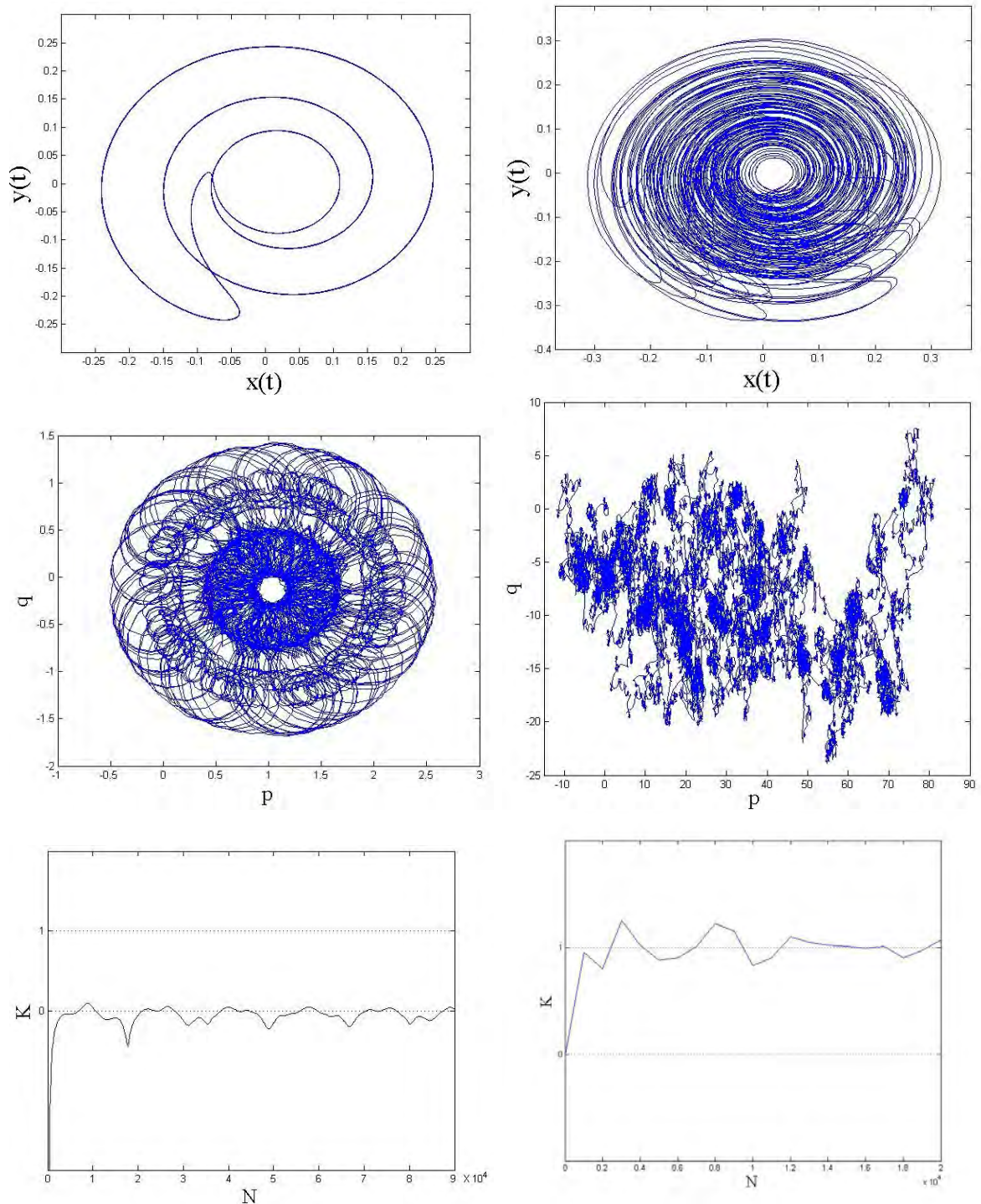


Figure 4.22 – Attracteur dans l'espace des phases (x, y) , les composantes de translation (p, q) et la dépendance de K par rapport au nombre de points N pour la configuration (I) et : $q = 0.99$ (figures de gauche) et $q = 0.995$ (figures de droite)

response) définie par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d^q x_m}{dt} = \delta y_m + \gamma z_m (x_m \sin(c) - y_m \cos(c)) - \frac{x_m}{\Gamma_2}, \\ \frac{d^q y_m}{dt} = -\delta x_m - z_m + \gamma z_m (x_m \cos(c) + y_m \sin(c)) - \frac{y_m}{\Gamma_2}, \\ \frac{d^q z_m}{dt} = y_m - \gamma \sin(c)(x_m^2 + y_m^2) - \frac{z_m - 1}{\Gamma_1}, \end{cases} \quad (4.20)$$

pour le système maître et

$$\begin{cases} \frac{d^q x_s}{dt} = \delta y_s + \gamma z_s (x_s \sin(c) - y_s \cos(c)) - \frac{x_s}{\Gamma_2} + u_1, \\ \frac{d^q y_s}{dt} = -\delta x_s - z_s + \gamma z_s (x_s \cos(c) + y_s \sin(c)) - \frac{y_s}{\Gamma_2} + u_2, \\ \frac{d^q z_s}{dt} = y_s - \gamma \sin(c)(x_s^2 + y_s^2) - \frac{z_s - 1}{\Gamma_1} + u_3, \end{cases} \quad (4.21)$$

pour le système esclave, où $U = [u_1, u_2, u_3]^T$ sont les contrôleurs à désigner pour réaliser la synchronisation entre les deux systèmes, c'est-à-dire

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |X_{master} - X_{slave}| = 0.$$

Le choix des paramètres est tel que les deux systèmes exhibent une dynamique chaotique, par exemple

$$\Gamma_1 = 0.5, \Gamma_2 = 0.25, \delta = 0.4\pi, \gamma = 10, c = 0.7764,$$

et

$$q = 0.99.$$

Définissons l'erreur comme $e_1 = x_s - x_m$, $e_2 = y_s - y_m$ et $e_3 = z_s - z_m$ respectivement. La soustraction du système maître du système esclave nous donne le système erreur suivant :

$$\begin{cases} \frac{d^q e_1}{dt} = -\frac{e_1}{\Gamma_2} + \delta e_2 + \gamma \sin(c)(e_3 x_s + e_1 z_m) - \gamma \cos(c)(e_3 y_s + e_2 z_m) + u_1, \\ \frac{d^q e_2}{dt} = -\delta e_1 - \frac{e_2}{\Gamma_2} - e_3 + \gamma \cos(c)(e_3 x_s + e_1 z_m) + \gamma \sin(c)(e_3 y_s + e_2 z_m) + u_2, \\ \frac{d^q e_3}{dt} = e_2 - \frac{e_3}{\Gamma_1} - \gamma \sin(c)(e_1(x_m + x_s) + e_2(y_m + y_s)) + u_3. \end{cases} \quad (4.22)$$

Ce dernier représente la perturbation qui peut exister entre le deux systèmes.

D'après cette définition on peut conclure que l'étude de la synchronisation identique des sys-

tèmes (4.20) et (4.21) nous ramène à l'étude de la stabilité au voisinage de l'origine du système erreur (4.22).

Définissons les fonctions de contrôle

$$\begin{cases} u_1 = -\gamma \sin(c) z_m e_1 + \gamma \cos(c) y_s e_3, \\ u_2 = -\gamma \sin(c) z_m e_2 - \gamma \cos(c) x_s e_3, \\ u_3 = \gamma \sin(c) (x_m e_1 + y_m e_2). \end{cases} \quad (4.23)$$

Théorème 4.1 *Les deux systèmes de Bloch fractionnaires (4.20) et (4.21) sont synchronisé pour toutes conditions initiales $(x_m(0), y_m(0), z_m(0))$ et $(x_s(0), y_s(0), z_s(0))$ sous les lois de contrôle (4.23).*

Démonstration. *Avec ce choix de contrôleurs, le système erreur (4.22) devient :*

$$\begin{cases} \frac{d^q e_1}{dt} = -\frac{e_1}{\Gamma_2} + (\delta - \gamma \cos(c) z_m) e_2 + \gamma \sin(c) x_s e_3, \\ \frac{d^q e_2}{dt} = (-\delta + \gamma \cos(c) z_m) e_1 - \frac{e_2}{\Gamma_2} + (-1 + \sin(c) y_s) e_3, \\ \frac{d^q e_3}{dt} = -\gamma x_s \sin(c) e_1 + (1 - \gamma \sin(c) y_s) e_2 - \frac{e_3}{\Gamma_1}. \end{cases} \quad (4.24)$$

La matrice de coefficients de ce système est :

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\Gamma_2} & \delta - \gamma \cos(c) z_m & \gamma \sin(c) x_s, \\ -\delta + \gamma \cos(c) z_m & -\frac{1}{\Gamma_2} & -1 + \gamma \sin(c) y_s, \\ -\gamma \sin(c) x_s & 1 - \gamma \sin(c) y_s & -\frac{1}{\Gamma_1}. \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

d'où la matrice symétrique suivante :

$$\frac{A(t) + A^T(t)}{2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\Gamma_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\Gamma_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\Gamma_1}. \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

Supposons que λ est une valeur propre de la matrice A , alors il existe un vecteur non-nul ξ

associé à cette valeur propre, c'est-à-dire :

$$A\xi = \lambda\xi, \quad (4.27)$$

on obtient ainsi :

$$\xi^H A\xi = \lambda\xi^H\xi, \quad (4.28)$$

$$\xi^H A^T\xi = \bar{\lambda}\xi^H\xi. \quad (4.29)$$

D'après les équations (4.28) et (4.29), on a :

$$\xi^H(A + A^T)\xi = (\lambda + \bar{\lambda})\xi^H\xi, \quad (4.30)$$

ou

$$\lambda + \bar{\lambda} = \frac{\xi^H(A + A^T)\xi}{\xi^H\xi}. \quad (4.31)$$

Comme $(A + A^T)$ est une matrice semi-définie négative alors :

$$\lambda + \bar{\lambda} = \frac{\xi^H(A + A^T)\xi}{\xi^H\xi} \leq 0. \quad (4.32)$$

On a alors pour $0 < q < 1$:

$$|\arg(\lambda)| \geq \frac{\pi}{2} > \frac{q\pi}{2}. \quad (4.33)$$

D'après la théorie de stabilité des systèmes à dérivée fractionnaire, le système erreur (4.22) est asymptotiquement stable.

La figure Fig.(4.23) montre l'évolution dans le temps du système erreur. Il apparaît clairement que la solution de ce système converge rapidement vers l'origine, ce qui implique que le système esclave (4.21) est synchronisé au système maître (4.20).

Pour mettre en évidence l'efficacité de ce schéma de synchronisation, on a tracé x_m vs x_s , y_m vs y_s et z_m vs z_s avec et sans les contrôleurs u_1 , u_2 et u_3 dans la figure Fig.(4.24).

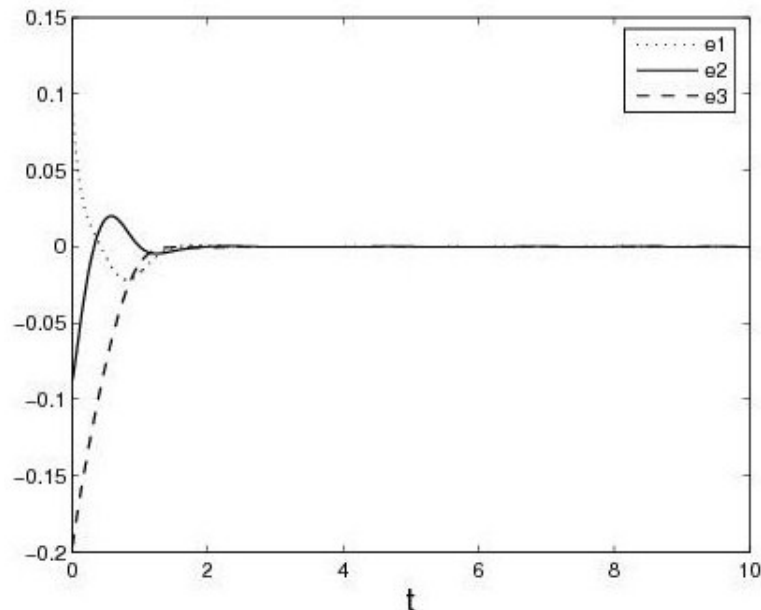


Figure 4.23 – L'évolution temporelle de l'erreur de synchronisation $e_1 = x_m - x_s$, $e_2 = y_m - y_s$ et $e_3 = z_m - z_s$ avec les contrôleurs non-linéaires u_1 , u_2 et u_3 respectivement.

6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a étudié et analysé la dynamique du système de Bloch fractionnaire, en utilisant des outils classiques tels que le diagramme des bifurcations, les portraits de phases et les exposants de Lyapounov. L'algorithme FRAC-PECE a été utilisé pour la simulation numérique. L'ordre de dérivation a été considéré comme paramètre de contrôle. Il a été montré que le système transitait vers un régime chaotique via une cascade de doublement de période avec une fenêtre périodique de période trois dans le diagramme de bifurcation, de plus, des cycles limites coexistants ont été trouvés pour des conditions initiales différentes avec certaines valeurs des paramètres. Le calcul du plus grand exposant de Lyapounov a permis de valider le caractère chaotique du système.

D'un autre côté, deux techniques récentes ont été utilisées pour confirmer l'existence du chaos dans le système étudié : le fer à cheval topologique, une méthode géométrique puissante pour prouver d'une manière rigoureuse l'existence du chaos, et le test 0-1, un outil basé sur les statistiques pour distinguer une dynamique régulière d'une dynamique chaotique.

Finalement, des éléments de la théorie du contrôle non-linéaire ont été utilisés pour réaliser la synchronisation à l'identiques de deux systèmes de Bloch fractionnaires via une configuration maître-esclave.

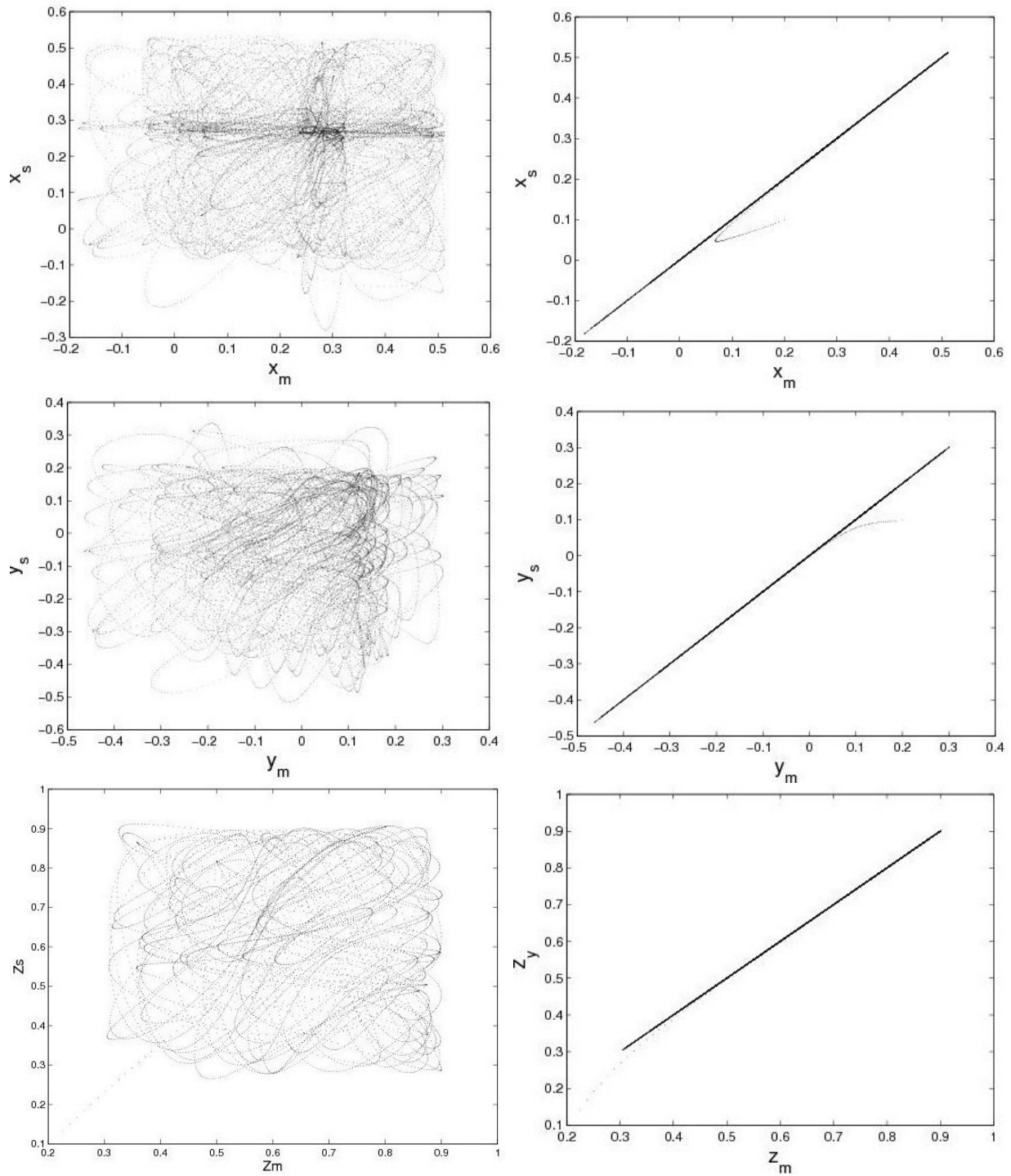


Figure 4.24 – Relations entre les systèmes maîtres et esclaves : sans les contrôleurs (Figures à gauche) et avec les contrôleurs (Figures à droite)

Conclusion générale et perspectives

Cette étude s'inscrit dans la démarche de l'application des outils d'analyse, de caractérisation et de quantification du chaos à des systèmes d'équations différentielles d'ordres fractionnaires. Le premier chapitre nous a permis de nous familiariser avec l'outil fractionnaire et a fourni quelques résultats, élémentaires certes, mais utiles pour notre étude. Dans un premier temps, nous rappelons l'historique du calcul fractionnaire et nous présentons plusieurs exemples de systèmes fractionnaires, s'inscrivant dans des disciplines variées des sciences de l'ingénieur et des sciences physiques. Puis nous exposons la théorie de la dérivation fractionnaires : différents types de dérivation fractionnaire (Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville et Caputo), transformation de Laplace, fonctions de Mittag-Leffler, etc.

Le deuxième chapitre de cette thèse est dédié aux systèmes dynamiques décrits par des équations différentielles d'ordres fractionnaires et au rappel des principaux résultats concernant ces systèmes. Nous nous sommes intéressés à la question d'existence et d'unicité de la solution d'une équation différentielle fractionnaire, pour exposer ensuite les différents critères de stabilité et quelques-unes des méthodes d'analyse numériques utiles dans le cas d'un système non-linéaire. Nous avons ensuite abordé le thème du chaos en partant de sa définition pour, ensuite, décrire différentes méthodes permettant sa caractérisation et sa quantification.

Le dernier chapitre, objet de notre contribution, porte sur l'application et l'adaptation de ces outils à l'analyse du chaos dans un système autonome de dimension trois et à dérivées fractionnaires décrivant le phénomène de résonance nucléaire magnétique : le système de Bloch.

Le comportement dynamique du système de Bloch fractionnaire, y compris certaines propriétés de base : bifurcations, fenêtres périodiques et routes vers le chaos, ont été analysés numériquement, au moyen de diagramme de bifurcations, portraits de phases, et exposants de Lyapounov. De plus, Le fer à cheval topologique a été trouvé, prouvant rigoureusement le caractère chaotique de notre système pour certaines valeurs des paramètres, cette méthode est considérée comme un excellent substitut à la méthode du spectre de Lyapounov, moins fiable numériquement.

Le test 0-1 fournit un critère de diagnostic simple et efficace pour la distinction des solutions chaotiques des orbites régulières, nous l'avons appliqué avec succès dans notre travail. Enfin, des conditions suffisantes pour la réalisation de la synchronisation de deux systèmes de Bloch fractionnaires identiques ont été dérivées. Á cet effet, nous proposons des contrôleurs tels que les composantes du système erreur tendent vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini. Une simulation numérique a été effectuée pour vérifier l'efficacité du schéma proposé.

Ce travail ouvre la voie à d'autres développements sur les systèmes chaotiques à dérivées fractionnaires. Nous pouvons notamment proposer les perspectives suivantes :

- La recherche d'autres méthodes numériques de résolution d'équations différentielles à dérivées fractionnaires, moins coûteuses et plus précises que celles proposées dans cette thèse.
- L'application de la méthode directe de Lyapounov au contrôle et à la synchronisation du chaos dans les systèmes fractionnaires.
- L'étude qualitative d'une application itérée comportant des différences fractionnaires.

Ces perspectives constituent des orientations possibles pour des travaux futurs.

Annexe A

1 Théorèmes du point fixe

Les démonstration des différents théorèmes d'existence et d'unicité des solutions d'équations différentielles se basent généralement sur des théorèmes classiques assurant l'existence et l'unicité de points fixes de certains opérateurs.

Le premier de ces théorèmes et la généralisation du théorème du point fixe de Banach [100].

1.1 Théorème du point fixe de Weissinger

Théorème A.2 *Supposons que (U, d) est un espace métrique complet non-vide, et soit $\alpha_j \geq 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tel que la série $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j$ converge. Soit l'application $A : U \rightarrow U$ qui vérifie l'inégalité*

$$d(A^j u, A^j v) \leq \alpha_j d(u, v) \quad (.1)$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $u, v \in U$. Alors, A possède un unique point fixe u^ . De plus, la suite $(A^j u_0)_{j=1}^{\infty}$ converge vers ce point fixe u^* .*

une conséquence immédiate de ce théorème est

1.2 Théorème du point fixe de Banach

Théorème A.3 *Soit (U, d) un espace métrique complet non-vide, supposons que $0 \leq \alpha < 1$. Soit l'application $A : U \rightarrow U$ qui vérifie l'inégalité*

$$d(Au, Av) \leq \alpha d(u, v) \quad (.2)$$

pour tout $u, v \in U$. Alors, A possède un unique point fixe u^ . De plus, Pour tout $u_0 \in U$, la suite $(A^j u_0)_{j=1}^{\infty}$ converge vers ce point fixe u^* .*

On peut aussi citer un autre théorème qui assure uniquement l'existence du point fixe (pas l'unicité), mais avec des hypothèses plus faibles sur l'opérateur A . On trouver une preuve de ce théorème dans [101].

1.3 Théorème du point fixe de Schauder

Théorème A.4 *Soit (E, d) un espace métrique complet, soit U une partie convexe et fermée de E , et soit $A : U \rightarrow U$ une application telle que l'ensemble $\{Au : u \in U\}$ est relativement compact dans E . Alors A possède au moins un point fixe.*

Dans ce contexte on va rappeler la définition d'un ensemble relativement compact :

Définition A.1 *Soit (E, d) un espace métrique et $F \subseteq E$. L'ensemble F est dit relativement compact dans E si la fermeture de F est une partie compacte de E*

Un résultat classique d'analyse en relation avec cette définition est comme suit. Pour la preuve voir les livres standards d'analyse, pare exemple [102].

1.4 Théorème d'Arzelà-Ascoli

Théorème A.5 *Soit $F \subseteq C[a, b]$, supposons que les ensembles sont équipées de la norme de Chebyshev. Alors, F est relativement compact dans $C[a, b]$ si F est équicontinue (c-à-d pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $f \in F$ et tout $x, x^* \in [a, b]$ avec $|x - x^*| < \delta$ on a $|f(x) - f(x^*)| < \epsilon$) et uniformément bornée (c-à-d il existe une constante $C > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leq C$ pour tout $f \in F$).*

Annexe B

1 Programme MATLAB

La méthode Adams-Bashforth-Moulton pour la résolution des équations non-linéaires de Bloch d'ordre fractionnaire

```
function fractionalBloch
close all
clc;
q=0.85;
Dim=3;q1=q;q2=q;q3=q;
gam=10 ;
sig=1.26;
c=0.7764;
Gam1=0.5;
Gam2=0.25;
h=0.01;t=0:h:250;N=length(t)-1;
x0=[0.1 0.1 0.1]';
x(:,1)=x0;
a=zeros(Dim,N+1);b=zeros(Dim,N+1);
T1=[(h^q1/q1)/gamma(q1);(h^q2/q2)/gamma(q2);(h^q3/q3)/gamma(q3)];
T2=[(h^q1)/gamma(q1+2);(h^q2)/gamma(q2+2);(h^q3)/gamma(q3+2)];
for n=1:N
    aj1(N+1-n)=(n+1)^(q1+1)+(n-1)^(q1+1)-2*n^(q1+1);
    aj2(N+1-n)=(n+1)^(q2+1)+(n-1)^(q2+1)-2*n^(q2+1);
    aj3(N+1-n)=(n+1)^(q3+1)+(n-1)^(q3+1)-2*n^(q3+1);
    bj1(N+1-n)=(n+1)^q1-n^q1;
    bj2(N+1-n)=(n+1)^q2-n^q2;
    bj3(N+1-n)=(n+1)^q3-n^q3;
```

Annexe B

```
a01(n+1)=n^(q1+1)-(n-q1)*(n+1)^q1;
a02(n+1)=n^(q2+1)-(n-q2)*(n+1)^q2;
a03(n+1)=n^(q3+1)-(n-q3)*(n+1)^q3;
end
bj1(N+1)=1;bj2(N+1)=1;bj3(N+1)=1;a01(1)=q1;a02(1)=q2;a03(1)=q3;
a=[aj1;aj2;aj3];
b=[bj1;bj2;bj3];

for n=0:N
    OUT1(:,n+1)=fx(x(:,n+1),gam,sig,c,Gam1,Gam2);
    if(n==0)
sum2=[a01(n+1);a02(n+1);a03(n+1)].*fx(x0,gam,sig,c,Gam1,Gam2);
    else
sum2=sum(a(:,N+1-n:end)).*OUT1(:,2:n+1),2)+...
[a01(n+1);a02(n+1);a03(n+1)].*fx(x0,gam,sig,c,Gam1,Gam2);
    end
    sum1=sum(b(:,N+1-n:end)).*OUT1(:,1:n+1),2);
    xp=x0+T1.*sum1;
    x(:,n+2)=x0+T2.*fx(xp,gam,sig,c,Gam1,Gam2)+T2.*sum2;
end
figure,plot3(x(1,:),x(2,:),x(3),'b');
xlabel('x'),ylabel('y'),zlabel('z');
grid on
figure,plot(x(1,:),x(2),'g');
xlabel('x'),ylabel('y');
grid on

function DX=fx(X,gam,sig,c,Gam1,Gam2)
x=X(1);y=X(2);z=X(3);
DX=[sig*y+gam*z*(x*sin(c)-y*cos(c))-x/Gam2;
-sig*x-z+gam*z*(x*cos(c)+y*sin(c))-y/Gam2;
y-gam*sin(c)*(x^2+y^2)-(z-1)/Gam1];
```

Bibliographie

- [1] R. DARLING AND J. NEWMAN. *On the short behaviour of porous interaction electrodes*. J. of the Electrochemical Society **144**, 3057–3063 (1997). [1](#)
- [2] J. BATTAGLIA, L. LE LAY, J.C. BATSALÉ, A. OUSTALOUP, AND O. COIS. *Heat flux stimulation through inverted non integer identification models*. International Journal of Thermal Science **39**, 374–389 (2000). [1](#)
- [3] C.R. SERMENT. *Synthèse d'un isolateur d'ordre non entier fondé sur une architecture arborescente d'éléments viscoélastiques quasi-identiques*. Thèse de Doctorat, Université Bordeaux 1, France (2001). [1](#)
- [4] O. COIS, A. OUSTALOUP, E. BATTAGLIA, AND J.L. BATTAGLIA. *Non integer model from modal decomposition for time domain system identification*. Proc. IFAC Symposium on System Identification, Santa Barbara, USA (2000). [1](#)
- [5] R. HILFER. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. World Scientific Publ.Co (2000). [4](#), [9](#)
- [6] J. SABATIER, O.P. AGRAWAL, AND J.A. TENREIRO MACHADO. *Advances in fractional calculus*. Springer (2007). [4](#), [9](#)
- [7] K.B. OLDHAM AND J. SPANIER. *The Fractional Calculus*. Academic Press, York and London (1974). [4](#), [9](#)
- [8] S.G. SAMKO, A.A. KILBAS, AND O.I. MARICHEV. *Fractional integrals and derivatives : theory and applications*. Gordon and Breach (1993). [4](#), [18](#), [19](#), [20](#), [23](#), [27](#)
- [9] K.S. MILLER AND B. ROSS. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. Wiley, New York (1993). [4](#)

Bibliographie

- [10] R. HILFER. Threefold introduction to fractional derivatives. In G. RADONS R. KLAGES AND I. M. SOKOLOV, editors, *Anomalous Transport : Foundations and Applications*. Wiley-VCH (2008). [4](#), [7](#)
- [11] L. EULER. *De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini algebraice dari nequeunt*. Comment. Acad. Sci. Imperialis Petropolitanae **5**, 36–57 (1738). [4](#)
- [12] K.B. OLDHAM AND J. SPANIER. *The replacement of fick's laws by a formulation involving semidifferentiation*. J. Electroanal. Chem. **26**, 331–341 (1970). [9](#)
- [13] I. PODLUBNY. Fractional-order system and fractional-order controllers. Technical report uef-03-94 Institut of Experimental Physics, Academy of Sciences, Slovakia (1994). [9](#)
- [14] A. OUSTALOUP, X. MOREAU, AND M. NOUILLANT. *The crone suspension*. Control Eng. Practice **4(8)**, 1101–1108 (1996). [10](#)
- [15] V. H. SCHMIDT AND J. E. DRUMHELLER. *Dielectric properties of lithium hydrazinium sulfate*. Physical Review B **4**, 4582–4597 (1971). [10](#)
- [16] A. LASIA. *Impedance of porous electrodes*. Journal of Electroanalytical chemistry **397**, 27–33 (1995). [10](#)
- [17] A. LASIA. *Modern Aspects of Electrochemistry*. Kluwer Academic/Plenum, New York (1999). [10](#), [14](#)
- [18] N. MRANI. *Contribution à l'étude des Systèmes Fractionnaires : Théorie et Applications*. Thèse de Doctorat, Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, Rabat, Maroc (2004). [10](#), [11](#)
- [19] R. L. BAGLEY AND P. J. TORVIK. *On the appearance of the fractional derivatives in the behaviour of real materials*. J. Applied Mechanics **41**, 294–298 (1984). [11](#)
- [20] R. HOTZEL. *Contribution à Théorie Structurelle et à la commande des Systèmes Linéaires Fractionnaires*. Thèse de Doctorat, Université de PARIS XI, Orsay, France (1998). [11](#)
- [21] I. PODLUBNY. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, New York (1999). [11](#)
- [22] T. HÉLIE AND D. MATIGNON. *Diffusive representations for the analysis and simulation of flared acoustic pipes with visco-thermal losses*. Math. Mod. and Meth. in Appl. Sc. pages 503–536 (2006). [12](#)

Bibliographie

- [23] R. L. BAGLEY AND P. J. TORVIK. *A theoretical basis for the application of fractional calculus in viscoelasticity*. *Journal of Rheology* **27**, 201–210 (1983). [13](#)
- [24] R. L. BAGLEY AND P. J. TORVIK. *On the fractional calculus model of viscoelasticity behavior*. *Journal of Rheology* **30**, 133–155 (1986). [13](#)
- [25] T. PFITZENREITER. *A physical basis for fractional derivatives in constitutive equations*. *Z. Angew. Math. Mech.* **84(4)**, 284–287 (2004). [13](#)
- [26] F. DUBOIS, A. C. GALUCIO, AND N. POINT. *Introduction à la dérivation fractionnaire, théorie et applications*. *Techniques de l’Ingénieur* **AF510** (2010). [13](#), [23](#)
- [27] S. A. G. R. KARUNTHILAKA, N. A. HAMPSON, R. LEEK, AND T. J. SINCLAIR. *The impedance of the alkaline zinc-manganese dioxide cell. i. variation with state of charge*. *Journal of Applied Electrochemistry* **11**, 365–372 (1981). [14](#), [15](#)
- [28] S. A. G. R. KARUNTHILAKA, N. A. HAMPSON, R. LEEK, AND T. J. SINCLAIR. *The impedance of the alkaline zinc-manganese dioxide cell. ii. an interpretation of the data*. *Journal of Applied Electrochemistry* **11**, 715–721 (1981). [14](#), [15](#)
- [29] G.M. MITTAG-LEFFLER. *Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$* . *C. R. Académie des Sciences* **137**, 554–558 (1903). [16](#)
- [30] G.M. MITTAG-LEFFLER. *Sur la représentation analytique d’une branche uniforme d’une fonction homogène*. *Acta Mathematica* **29**, 101–182 (1905). [16](#)
- [31] A. ERDÉLYI. *Higher Transcendental Functions, volume 1*. McGraw-Hill, New York (1955). [16](#)
- [32] A. ERDÉLYI. *Higher Transcendental Functions, volume 2*. McGraw-Hill, New York (1955). [16](#)
- [33] A. ERDÉLYI. *Higher Transcendental Functions, volume 3*. McGraw-Hill, New York (1955). [16](#)
- [34] R.P. AGARWAL. *A propos d’une note de M. Pierre Humbert*. *C. R. Académie des Sciences* **236**, 2031–2032 (1953). [16](#)
- [35] P. INIZAN. *Dynamique fractionnaire pour le chaos hamiltonien*. Thèse de Doctorat, L’Observatoire de Paris, France (2010). [27](#)

Bibliographie

- [36] J. CRESSON AND P. INIZAN. *Variational formulations of differential equations and asymmetric fractional embedding*. Journal of Mathematical analysis and Applications (2010). 30
- [37] K. DIETHELM. *The Analysis of Fractional Differential Equations*. Springer (2004). 32, 51
- [38] M. WEILBEER. *Efficient Numerical Methods for Fractional Differential Equations and their Analytical Background*. Thèse de Doctorat, Carl-Friderich-Gauss Facultat für Mathematik und Informatik, der Technischen Universität Braunschweig (2005). 38, 49
- [39] R. K. MILLER. *Nonlinear Volterra integral equations*. A Wiley-Interscience Publication. Benjamin, Menlo Park (1971). 38
- [40] D. MATIGNON. *Représentations en variables d'état de modèles de guides d'ondes avec dérivation fractionnaire*. Thèse de Doctorat, Université Paris XI (1994). 43
- [41] Y. LI, Y.Q. CHEN, AND I. PODLUBNY. *Stability of fractional order nonlinear dynamic systems : Lyapunov direct method and generalized mittag-leffler stability*. Computers and Mathematics with Applications (2009). 46
- [42] G. ADOMIAN. *A review of the decomposition method in applied mathematics*. J. Math. Anal. Appl. **44**, 135–501 (1988). 49
- [43] G. ADOMIAN. *Solving Frontier problems of physics : the decomposition method*. Boston : Kluwer Academic Publishers (1994). 49
- [44] Y. CHERRUAULT. *Optimisation : Méthodes locales et globales*. Presses Universitaires de France (P.U.F) (1999). 50
- [45] Y. CHERRUAULT. *Modèles et méthodes mathématiques pour les sciences du vivant*. Presses Universitaires de France (P.U.F) (1998). 50
- [46] J. H. HE. *Variational iteration method a kind of non linear analytical technique : some exemples*. International Journal of Non-linear mechanics **34**, 699–708 (1999). 50
- [47] J. H. HE. *Variational iteration method for autonomous ordinary differential systems*. Applied Mathematics and Computation **114**, 115–123 (2000). 50
- [48] J. H. HE AND X. H. WU. *Variational iteration method : New development and applications*. Computers and Mathematics with Applications **54**, 881–894 (2007). 50

Bibliographie

- [49] M. TATARI AND M. DEGHAN. *On the convergence of he's variational iteration method.* J. Comput. Appl. Math. **207**, 121–128 (2007). 51
- [50] Z. M. ODIBAT. *A study on the convergence of variational iteration method.* Mathematical and Computer Modelling **51**, 1181–1192 (2010). 51
- [51] K. DIETHELM AND A. D. FREED. *On the solution of nonlinear fractional differential equations used in the modeling of viscoplasticity.* Scientific Computing in Chemical Engineering II :Computational Fluid Dynamics, Reaction Engineering, and Molecular Properties pages 217–224 (1999). 51
- [52] K. DIETHELM AND A. D. FREED. *The fracpece subroutine for the numerical solution of differential equations of fractional order.* Forschung und wissenschaftliches Rechnen : Beitrage zum Heinz-Billing-Preis pages 57–71 (1999). 51
- [53] K. DIETHELM AND N. J. FORD. *Numerical solution of the bagley-torvik equation.* BIT **42**(3), 490–507 (2002). 51
- [54] K. DIETHELM, N. J. FORD, AND A. D. FREED. *Detail error analysis for a fractional adams method.* Numer. Algorit. **36**(1), 31–52 (2004). 51, 55
- [55] K. DIETHELM AND Y. LUCHKO. *Numerical solution of linear multi-term differential equations of fractional order.* Journal of Computational Analysis and Applications **6**(3), 243–263 (2004). 51
- [56] E. HAIER AND G. WANNER. *Solving Ordinary Differential Equations II : Stiff and Differential Algebraic Problems.* Springer, Berlin (1991). 53
- [57] E. HAIRER AND G. WANNER. *Solving Ordinary Differential Equations II : Stiff and Differential Algebraic Problems.* Springer, Berlin (1993). 55
- [58] C. LUBICH. *Discretized fractional calculus.* SIAM J. Math.Anal **17**, 704–719 (1986). 55
- [59] R.L. DEVANEY. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.* Menlo Park, Benjamin/Cummings (1986). 59
- [60] J. BANKS, J. BROOKS, G. CAIRNS, G. DAVIS, AND P. STACEY. *On devaney definition of chaos.* American Mathematical Monthly (1992). 59
- [61] R. L. ADLER, A. G. KONHEIM, AND M. H. MCANDREW. *Topological entropy.* Trans. Amer. Math. Soc **114**, 309–319 (1965). 60

Bibliographie

- [62] P. BERGÉ, Y. POMEAU, AND C. VIDAL. *L'ordre dans le chaos*. Collection Enseignement des Sciences, Hermann édition (1988). [61](#), [63](#), [74](#)
- [63] J. P. PÉREZ. *Mécanique : Fondements et Applications*. Masson, 5eme édition (1997). [61](#)
- [64] K.T. ALLIGOOD, T.D. SAUER, AND J.A. YORK. *Chaos : an Introduction to Dynamical Systems*. Springer-Verlag (1996). [65](#)
- [65] E.N. LORENZ. *Deterministic non periodic flow*. Journal of Atmospheric Sciences **20**(02), 130–148 (1963). [65](#)
- [66] B. MANDELBROT. *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman edition (1982). [69](#)
- [67] J. GLEICK. *L théorie du chaos - vers une nouvelle science*. Flammarion édition (1999). [70](#)
- [68] V.I. OSELEDETS. *Multiplicative ergodic theorem : Characteristic lyapunov exponents of dynamical systems*. Trudy MMO **19**, 179–210 (1968). [77](#)
- [69] S. TANASE-NICOLA AND J. KURCHAN. *Statistical-mechanical formulation of lyapunov exponents*. J. Phys. A **36**, 99–102 (2003). [77](#)
- [70] A. WOLF, J.B. SWIFT, H.L. SWINNEY, AND J. A. VASTANO. *Determining lyapunov exponents from a time series*. Physica D : Nonlinear Phenomena **16**(3), 285–317 (1985). [77](#), [91](#)
- [71] H.D.I. ABARBANEL, R. BROWN, AND M.B. KENNEL. *Local lyapunov exponents computed from observed data*. Journal of Nonlinear Science **2**(3), 343–365 (1992). [77](#)
- [72] A.G. DARBYSHIRE AND D.S. BROOMHEAD. *Robust estimation of tangent maps and lyapunov spectra*. Physica D : Nonlinear Phenomena **98**(3-4), 287–305 (1996). [77](#)
- [73] J. ECKMANN, S.O. KAMPHORST, D. RUELLE, AND S. CILIBERTO. *Liapunov exponents from a time series*. Physica Review A **34**(6), 4971–4979 (1986). [77](#)
- [74] J. ECKMANN AND D. RUELLE. *Fundamental limitations for estimating dimensions and lyapunov exponents in dynamical systems*. Physica D : Nonlinear Phenomena **56**(2-3), 185–187 (1992). [77](#)

Bibliographie

- [75] M.T. ROSENSTEIN, J.J. COLLINS, AND C. J. DE LUCA. *A practical method for calculating lyapunov exponents from small data sets*. Physica D : Nonlinear Phenomena **65**(1-2), 117–134 (1993). [77](#), [78](#)
- [76] T.D. SAUER, J.A. TEMPKIN, AND J.A. YORKE. *Spurious lyapunov exponents in attractor reconstruction*. Physical Review Letters **81**(20), 4341–4344 (1998). [77](#)
- [77] T.D. SAUER AND J.A. YORKE. *Reconstructing the jacobian from data with observational noise*. Physical Review Letters **83**(7), 1331–1334 (1999). [77](#)
- [78] S. SATO, M. SANO, AND Y. SAWADA. *Practical methods of measuring the generalized dimension and the largest lyapunov exponent in high dimensional chaotic systems*. Prog. Theor. Phys. **77**(1) (1987). [79](#)
- [79] X.S. YANG, Y.G. YU, AND S.C. ZHANG. *A new proof for existence of horseshoe in the rossler system*. Chaos Solitons & Fractals **18**, 223–237 (2003). [80](#), [104](#)
- [80] Y. HUANG AND X.S. YANG. *Horseshoe in modified chen attractor*. Chaos Solitons & Fractals **26**, 79–85 (2005). [80](#), [104](#)
- [81] X.S. YANG AND Q.D. LI. *Existence of horseshoe in a foodweb model*. international Journal of Bifurcation and Chaos **14**, 1847–1852 (2004). [80](#), [104](#)
- [82] X.S. YANG AND Q.D. LI. *Horseshoe chaos in a cellular neural network*. international Journal of Bifurcation and Chaos **16**, 157–161 (2006). [80](#), [104](#)
- [83] X.S. YANG, Y. TANG, AND Q.D. LI. *Horseshoe in a two-scroll control system*. Chaos Solitons & Fractals **21**, 1087–1091 (2004). [80](#)
- [84] S. WIGGINS. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. Springer-Verlag : New York (2003). [80](#), [81](#), [82](#)
- [85] J. KENNEDY AND J.A. YORK. *Topological horseshoes*. Trans. Amer. Math. Soc **353**(6), 2513–2530 (2001). [81](#)
- [86] G. A.GOTTWALD AND I. MELBOURNE. *A new test for chaos in deterministic systems*. Proc. R. Soc. Lond.A **460**, 603–611 (2004). [82](#)
- [87] G. A.GOTTWALD AND I. MELBOURNE. *On the validity of the 0-1 test for chaos*. Non-linearity **22**(6) (2009). [84](#)

Bibliographie

- [88] A. ELLIOT. *Medical imaging*. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A **546**, 1–13 (2005). [86](#)
- [89] W. G. BRADLEY. *History of medical imaging*. Proceedings of the American Philosophical Society **152**(3), 349–361 (2008). [86](#)
- [90] A. ABRAGAM. *Principles of nuclear magnetism*. Oxford University Press, Oxford (2002). [86](#), [87](#)
- [91] R. MAGIN, X. FENG, AND D. BALEANU. *Solving the fractional order bloch equation*. Concepts in Magnetic Resonance Part A **34A**(1), 16–23 (2009). [86](#), [93](#)
- [92] S. BLOOM. *Effects of radiation damping on spin dynamics*. Journal of Applied Physics **28**, 800–805 (1957). [87](#)
- [93] D. GHOSH A, A. ROY CHOWDHURY, AND P. SAHA. *Bifurcation continuation, chaos and chaos control in nonlinear bloch system*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation **13**, 1461–1471 (2008). [90](#)
- [94] D. ABERGEL. *Chaotic solutions of the feedback driven bloch equations*. Physics Letters A **302**, 17–22 (2002). [90](#), [93](#)
- [95] Z. M. ODIBAT. *Analytic study on linear systems of fractional differential equations*. Computers and Mathematics with Applications **59**, 1171–1183 (2010). [93](#)
- [96] A. N. SHARKOVSKIIL. *Coexistence of cycles of a continuous transformation of a line into itself*. Ukrain. Math. journal **26**(1), 61–71 (1964). [99](#)
- [97] R. SHAW. *Strange attractors, chaotic behavior and information flow*. Z. Naturforsch **36A**, 80–90 (1981). [101](#)
- [98] Q. LI AND XS. YANG. *A simple method for finding topological horseshoes*. International journal of bifurcation and chaos **20**(2), 467–478 (2010). [104](#)
- [99] J. ECKMANN AND D. RUELLE. *Ergodic theory of chaos and strange attractors*. Rev. Mod. Phys. **57**, 617–656 (1985). [109](#)
- [100] J. WEISSINGER. *Zur theorie und anwendung des iterations verfahrens*. Math. Nachr **8**, 193–212 (1952). [119](#)

Bibliographie

- [101] L. COLLATZ. *Funktional analysis und numerische Mathematik*. Springer, Berlin (1968).
[120](#)
- [102] C. CORDUNEANU. *Principles of Differential and Integral Equations*. Chelsea Publ. Comp., 2nd edition (1977). [120](#)

Résumé

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux systèmes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire exhibant une dynamique chaotiques. Une attention particulière à été apportée à un système non linéaire d'équations différentielles fractionnaires modélisant un phénomène de résonance nucléaire magnétique : le système de Bloch. Une analyse qualitative de la dynamique de ce système a été effectuée, y compris certaines propriétés de base : bifurcations, fenêtres périodiques et routes vers le chaos. Ces propriétés ont été analysées numériquement, au moyen de diagramme de bifurcations, portraits de phases, et exposants de Lyapounov. Le comportement chaotique de ce système à été confirmé par l'existence d'un exposant de Lyapounov positif.

D'autre part, Le fer à cheval topologique a été trouvé, prouvant rigoureusement le caractère chaotique de notre système pour certaines valeurs des paramètres, cette méthode est considérée comme un excellent substitut à la méthode du spectre de Lyapounov, moins fiable numériquement.

Le test 0-1 fournit un critère de diagnostic simple et efficace pour la distinction des solutions chaotiques des orbites régulières, nous l'avons appliqué avec succès dans notre travail.

Enfin, La méthode du contrôle non linéaire à été étendue pour réaliser la synchronisation à l'identique de deux systèmes de Bloch fractionnaires. Les résultats ont été analytiquement prouvés en utilisant les conditions de stabilité des systèmes fractionnaires. Une simulation numérique a été effectuée pour valider les résultats.

Mots clés : Dérivées d'ordre fractionnaire, Chaos, Exposants de Lyapounov, Fer à cheval topologique, Test 0-1, Synchronisation du chaos.

Abstract

In this thesis, we focus on the differential equations of fractional order systems exhibiting chaotic dynamics. Particular attention has been paid to a nonlinear system of fractional differential equations modeling the phenomenon of nuclear magnetic resonance : the Bloch system. A qualitative analysis of the dynamics of this system has been made, including some basic properties : bifurcations, periodic windows and routes to chaos. These properties were analyzed numerically by bifurcation diagram, phase portraits and Lyapunov exponents . The chaotic behavior of this system was confirmed by the existence of a positive Lyapunov exponent.

On the other hand, the topological horseshoe was found, rigorously proving the chaotic nature of our system for certain parameter values, this method is considered as an excellent substitute for the Lyapunov spectrum method, less reliable numerically.

0-1 test provides a simple and efficient criterion for the distinction chaotic solutions of regular orbits, we have successfully applied this test in our work.

Finally, the method of non-linear control was extended to realize the identical synchronization of two fractional Bloch systems. The results were proven analytically using stability conditions for fractional systems. A numerical simulation was performed to validate the results.

Keywords : Fractional-order derivatives, Chaos, Lyapunov exponent, Topological horseshoe, 0-1 test, Chaos synchronization.

لمخـص

هذه الأطر وحتى تنتق اولها الواسعة موضوع أنظمة الامدادات الاقتصادية الفوضوية ذات التباين الكسرية. وقت تم ليلاء انضمام خاص لنظم غير خطي لمعادلات التفاضلية ذات التباين الكسري في عصر عن ظاهرة الارزاق للمخطي سيالنووي: نظام بلوك يتم إجمالاً حل النواعيل في الهيكلية لهذا النظام مطي لىك بعضال خصائص الأسس التي تشرعبات لمن فذل دورية و ل طرق الاموي لذل الفوضى. وقت متلجيل مذل خصائص عديا عن طريق رسمضاءالطور، مظلطت شعبات وقوى ييلنوف بتعأليد سلسلواللفوضوي لهذا النظام من خلال وجودقوى ييلنوف موجهة.

من ناحية أخرى تم العثور على حدود طول موجي لىك يتنبأ بتبص رامة الظمية الفوضوي لى نظام من أجل تقييم مظمة معينة، وتعتبر هذه الطريقة كليل مذل طيقة في ييلنوف.

يغير إقرار 1-0 م عرابسي طوف اللاتمي زبي نلفوضى والمدارات الظمية، وقد طبقين جاح في علنا.

أخيرا تم مديد طريقة التحكم لى غيرالخطي لتحقيق التزامن التطبق لنظايفوضويين لىلوك ذات تباين كسرية، وقد تثبتت اللتعلق لى لىيلاست خلم شروطا لمتقرار الظمية ذات التباين كسرية، وتم لىحقن لمن تلج جاج لىلشي ه عدي.

مات مفتاحية: مشتقات ذات تباين كسرية، الفوضى، قوى لىيلنوف، الحدود لوطبول ومجة، إقرار 1-0، التزامن.