République Algérienne Dèmocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mentouri Constantine

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Numéro d'ordre : .... Numéro de série : ....

THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

Thème

Sur une classe de problèmes aux limites avec conditions aux bords de type intégrales

Option : Analyse

Par

LAKHAL Fahim

Sous la direction du prof. Marhoune A. L.

Devant le jury

Président :	Dr. S. Djezzar	MC. A.	Univ. Constantine
Rapporteur :	Dr. MARHOUNE Ahmed Lakhdar	Prof.	Univ. Constantine
Examinateur :	Dr. BADRAOUI Salah	MC. A.	Univ. Guelma
	Dr. BOUSSETILA Nadjib	MC. A.	Univ. Guelma
	Dr. BOUZIT Mohamed	MC. A.	Univ. Oum El Bouaghi

Soutenue le 10 juillet 2011

ملخص

يهدف هذا العمل إلى دراسة جملة من المسائل الحدية التكافؤية مقرونة بشروط حدية تكاملية متغيرة. نبرهن وجود و وحدانية الحل و هذا بفضل طريقة التقديرات القبلية و كثافة صورة المؤثر المولد بالمسألة المراد دراستها.

التصنيف الرياضي (2010 MSC) : .35B45, 35K20, 35M10

الكلمات الإستدلالية : المسائل الحدية التكافؤية، الشروط التكاملية المتغيرة، طريقة التقديرات القبلية.

Résumé

Dans ce travail on étudie une classe de problèmes avec conditions aux limites du type intégrale a bornes variables.
On démontre l'existence et l'unicité de la solution dans un espace fonctionnel de Sobolev à poids.
La démonstration est basée sur une estimation a priori bilatérale et sur la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème considéré.

2010 Mathematics Subject Classification : 35B45, 35K20, 35M10.

Mots clés : *Equations paraboliques, Inégalités de l'énergie, Espaces de Sobolev avec poids, Conditions intégrales avec bornes variables, Opérateurs de régularisation.*

Abstract

In this work, we study a class of problem with an integral space variable condition for a parabolic equation.
The existence and uniqueness of the solution in functional weighted Sobolev space are proved. The proof is based on two sided a priori estimates and the density of the range of the operator generated by the considered problem.

2010 Mathematics Subject Classification : 35B45, 35K20, 35M10.

Key words : *Parabolic Equations, Three-point boundary conditions, Integral space variable conditions, Energy inequalities, Weighted Sobolev spaces, Regularization operators.*

Remerciements

*Mes premiers remerciements vont à monsieur **MARHOUNE Ahmed-Lakhdar** qui a accepté de me prendre sous sa direction. Sans ses conseils précieux, sa grande disponibilité et sa patience, cette thèse n'aurait jamais vu le jour. Je le prie de croire à l'expression de ma très profonde gratitude.*

*Je suis très sensible à l'honneur que m'a fait le Docteur **DJEZZAR Salah** en acceptant de présider mon jury de soutenance et d'examiner ma thèse.*

*Je tiens à remercier vivement les Docteurs **BADRAOUI Salah**, **BOUSSETILA Nadjib** et **BOUZIT Mohamed** qui ont accepté de faire partie du jury.*

Je remercie également tous les membres du département de Mathématiques de l'université de Constantine, pour toute l'aide qui m'a été accordée.

Dedication

To my parents and my family, for their love, support, and encouragement.

Lakhal Fahim

This document is typeset using LaTeX, MikTeX V8. compiler
Mathematics: package[urw-garamond]{mathdesign}

LAKHAL Fahim

Lakhal F

Table des matières

§ Introduction

0.1 Problématique

Nous étudions dans la présente thèse certaines classes de problèmes aux limites non standards. Nous développons plus exactement la méthode des inégalités de l'énergie à de nouvelles classes de problèmes.

Cette méthode s'est avérée un outil efficace dans l'étude des problèmes non classiques.

De tels problèmes ont été étudiés par plusieurs auteurs pour différents types d'équations : paraboliques, pseudo-paraboliques, hyperboliques et du type mixte et cela en utilisant différentes méthodes.

La signification physique de base des conditions intégrales (moyenne, flux total, énergie totale, masse totale, moment,...) a été la raison essentielle de l'intérêt croissant à ce type de problèmes.

La modélisation mathématique des problèmes avec conditions intégrales est rencontrée en théorie de la conduction thermique [6, 7, 21], [26]-[28], dans l'étude des déformations viscoélastiques, dans les matériaux à mémoires (en particulier les polymères), en thermoélasticité [45], dans les semi-conducteurs [1], en physique des plasmas [44] et en biotechnologie. On peut également citer qu'un nombre important de problèmes paraboliques avec conditions non locales sont rencontrés en théorie quasi statique de thermoélasticité [13, 14].
De tels problèmes ont étés étudiés dans [2]-[6], [8]-[11], [15], [25]-[29], [41, 46, 56] pour une classe d'équations paraboliques, dans [12] pour les équations pseudo-paraboliques, dans [37, 41] pour les équations hyperboliques et dans [15]-[17], pour les équations du type mixte.
La méthode utilisée dans [4, 5, 15, 16, 18, 19, 29, 56] est celle des inégalités de l'énergie.

La méthode des inégalités de l'énergie, appelée aussi méthode d'analyse fonctionnelle, trouve son origine dans les travaux de I. G. PETROVSKI [39], utilisée dans la résolution du problème de Cauchy lié aux équations du type hyperbolique. Par la suite, des développements importants de la méthode sont dus à L. LERAY [38] et I. GARDING [23].

La méthode a été également utilisée et développée dans les travaux de O. A. LADYZENSKAYA [30], K. FRIEDRICHS [22], N. I. YURCHUK [48]-[56], A.V. KARTYNNIK [29], M. DENCHE & A. L. MARHOUNE et *all* [15]-[18], [31]-[36], on peut également citer les travaux de F. REBBANI et V.I. CHESALYN [42, 43].

Au fait, en 1986 [56] N. I. YURCHUK a utilisé la condition intégrale

$$\int_0^1 u(x,t)dx = \varphi(t),$$

pour certaines classes d'équations paraboliques, ensuite plusieurs travaux ont été réalisés en modifiant l'équation ou en utilisant des équations hyperboliques, les équations de type mixte.

Jusqu'en 1990 où A.V. KARTYNNIK [29] a développé la méthode des inégalités de l'énergie en prenant la condition intégrale avec une borne variable

$$\int_0^l u(x,t)dx = \varphi(t), \text{ où } 0 < l < 1,$$

à partir de cette période plusieurs autres travaux ont été également réalisés en changeant l'ordre des dérivées ou en changeant l'équation.

En 2007 A. L. MARHOUNE [34] a modifié la condition intégrale en prenant

$$\int_0^\alpha u(x,t)dx + \int_\beta^1 u(x,t)dx = 0, \text{ où } 0 < \alpha \leq \beta < 1,\ \alpha + \beta = 1,$$

et en prenant aussi une condition périodique au lieu des conditions de Neumann-Dirichlet.

Le schéma de la méthode a été donné pour la première fois par A. A. DEZIN [20], et qui peut être résumé comme suit :

D'abord on ramène le problème posé $(\mathscr{P})$ à une équation opérationnelle :

$$Lu = F, \quad u \in D(L),$$

où l'opérateur L est considéré d'un espace de Banach $\mathbb{E}$ dans un espace de Hilbert $\mathbb{F}$ convenablement choisis.
On établit les estimations a priori pour l'opérateur L. On démontre ensuite la densité de l'ensemble des valeurs de cet opérateur dans l'espace $\mathbb{F}$.

Plus précisément nous suivrons dans ce travail l'un des deux schémas suivant :

Schéma 1

Pour l'opérateur L engendré par le problème considéré, nous démontrons l'inégalité de l'énergie du type

$$||u||_{\mathbb{E}} \leq c\,||Lu||_{\mathbb{F}}, \quad \forall u \in D(L). \tag{1.1}$$

Cette démonstration se base sur une analyse précise des formes obtenues en multipliant l'équation donnée par un opérateur Mu contenant la fonction u ou ses dérivées et une certaine
fonction poids, et en intégrant sur le domaine.
Le choix de l'opérateur Mu est fondamental, il est dicté par l'équation et les conditions aux limites.
Ensuite dans les topologies fortes des espaces $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ on construit la fermeture $\overline{L}$
de l'opérateur L, et la solution de l'équation

$$\overline{L}u = F,$$

est appelée solution forte du problème considéré. A l'aide d'un passage à la limite, on prolonge l'inégalité (1.1) à $u \in D(\overline{L})$ et ainsi est garantie l'existence de la solution sur l'ensemble des images $R(\overline{L})$ de l'opérateur $\overline{L}$.
Comme l'image de l'opérateur $\overline{L}$ est fermée dans $\mathbb{F}$ et que

$$R(\overline{L}) = \overline{R(L)},$$

pour la démonstration de l'existence de la solution forte pour tout $F \in \mathbb{F}$ il suffit d'établir la densité de $R(L)$ dans $\mathbb{F}$ qui est obtenue à l'aide des opérateurs de régularisation. L'unicité est déduite de l'inégalité de l'énergie (1.1).

Le choix des opérateurs de régularisation est lié au caractère du problème étudié. Dans notre cas nous utilisons les opérateurs de régularisation par rapport à la variable t introduits dans [56].

Schéma 2

On établit deux estimations a priori bilatérales

$$\|Lu\|_{\mathbb{F}} \leq c\,\|u\|_{\mathbb{E}},$$

$$\|u\|_{\mathbb{E}} \leq c^{'}\,\|Lu\|_{\mathbb{F}},$$

Il résulte de la première estimation que l'opérateur L de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ est continu, et de la deuxième estimation, qu'il admet un inverse continu, et que l'ensemble des valeurs de l'opérateur L est fermé. En d'autres termes, l'opérateur L réalise un ***homéomorphisme linéaire*** de l'espace $\mathbb{E}$ sur l'ensemble fermé $R(L)$.

Ainsi, pour démontrer l'existence de la solution il suffit de démontrer que $R(L)$ est dense dans $\mathbb{F}$.

La méthode des estimations a priori est une méthode efficace pour l'étude de beaucoup de problèmes de la physique mathématique, elle est fondée sur un support théorique solide et est développée dans un cadre abstrait élégant. Mais dans l'application de cette méthode on trouve des difficultés parmi lesquelles nous citons :

- Le choix de l'espace des solutions.
- Le choix du multiplicateur.
- Le choix de l'opérateur de régularisation.

0.2 Contenu de la thèse

Dans la présente thèse nous donnons un développement important de la méthode des inégalités de l'énergie à de nouvelles classes de problèmes non classiques. Elle comporte des résultats intéressants et originaux ayant faits l'objet de publications dans des revues internationales.

La thèse est composés d'une introduction et de trois chapitres. Le premier chapitre est un rappel d'analyse fonctionnelle, et les autres constituent la contribution principale de la problématique étudiée dans ce travail de recherche.

Nous commençons par une introduction où nous présentons l'historique et l'intérêt du thème abordé et nous rappelons certaines notions préliminaires qui seront utilisées par la suite, à savoir les opérateurs de régularisations.

Au second chapitre nous étudions un problème avec condition intégrale à deux bornes variables pour une équation parabolique. Nous écrivons le problème sous forme opérationnelle, et nous décrivons le cadre fonctionnel en précisant les espaces fonctionnels dans lesquels l'étude est faite. Nous établissons un théorème d'homéomorphisme. La démonstration est basée sur une estimation a priori bilatérale et la densité de l'ensemble des valeurs de cet opérateur dans l'espace d'arrivée $\mathbb{F}$.

Dans le troisième chapitre nous étendons la méthode développée au second chapitre à l'étude d'un problème avec condition intégrale à bornes multi-variables pour une équation aux dérivées partielles. Nous décrivons le cadre fonctionnel en précisant les espaces fonctionnels dans lesquels l'étude est faite. Nous montrons l'existence et l'unicité de la solution forte. La démonstration est basée sur une inégalité de l'énergie et sur la densité de l'ensemble des valeurs de l'opérateur engendré par l'opérateur en question dans l'espace d'arrivée $\mathbb{F}$.

Chapitre 1

Rappels et notations

L'objectif de ce chapitre est de rappeler quelques notions et résultats qui seront utilisés tout au long de ce travail. Pour plus de détails, des références à la littérature seront systématiquement données.

Références

- ☐ H. Brezis ; Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications, Masson (1993).
- ☐ H. Tanabe, Equations of Evolution, Pitman, London (1979).

1.1 Notions préliminaires

On se place dans un cadre hilbertien ($H_1 \longrightarrow H_2$), où H_i est un espace de Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni de la norme $|.|_i$ et le produit scalaire $(.,.)_i$, ($i = 1, 2$).

1.1.1 Opérateurs linéaires

De manière générale, un opérateur linéaire est une application $A : \mathscr{D}(A) \subseteq H_1 \longrightarrow H_2$ linéaire, où $\mathscr{D}(A)$ est le domaine de définition de l'application linéaire A, qui est un sous-espace vectoriel de H_1, que l'on suppose en général dense dans H_1. L'opérateur $A : \mathscr{D}(A) = H_1 \longrightarrow H_2$ est dit borné si la quantité

$$||A|| = \sup\left\{|Au|_{H_2},\ \ u \in \mathscr{D}(A),\ |u|_{H_1} = 1\right\}$$

est finie. Dans ce cas A est une application linéaire continue sur $\mathscr{D}(A)$, et lorsque $\mathscr{D}(A)$ est dense dans H_1, A s'étend de manière unique à un opérateur borné sur H_1.

• Tout opérateur A est complètement défini par son graphe $\mathbf{G}(A)$ qui est un sous-espace vectoriel de $H_1 \times H_2$ défini par $\mathbf{G}(A) = \{(v, Av), \quad v \in \mathscr{D}(A)\}$.

Pour tout opérateur linéaire $A : \mathscr{D}(A) \subseteq H_1 \longrightarrow H_2$, on note par :

$$\mathbf{N}(A) = \{h \in \mathscr{D}(A),\ Ah = 0\} \text{ (noyau de } A),$$

$$\mathbf{R}(A) = \{h_2 = Ah_1,\ h_1 \in \mathscr{D}(A)\} \text{ (image de } A).$$

1.1.2 Opérateurs bornés

On note $\mathscr{L}(H_1, H_2)$ (resp. $\mathscr{L}(H_1)$) l'espace vectoriel des ***opérateurs linéaires continus*** de H_1 dans H_2 (resp. des ***endomorphismes continus*** de H_1) muni de la topologie de la convergence uniforme :

$$B \in \mathscr{L}(H_1, H_2), \quad ||B||_{\mathscr{L}(H_1,H_2)} = \sup_{u \in H_1 \setminus \{0\}} \frac{|Bu|_2}{|u|_1}.$$

Définition 1.1.1. On dit qu'une application linéaire continue $S \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$ est ***inversible*** ***ssi*** il existe une application $S' \in \mathscr{L}(H_2, H_1)$ telle que

$$S' \circ S = I_{H_1}, \quad S \circ S' = I_{H_2}.$$

L'application S' si elle existe est unique. On notera $S' = S^{-1}$ et

$$\mathbf{Inv}(H_1, H_2) := \{S \in \mathscr{L}(H_1, H_2),\ S \text{ inversible }\}.$$

Théorème 1.1.1. [Théorème des isomorphismes de Banach]
Toute bijection linéaire continue $S \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$ est inversible.

Définition 1.1.2. Soit $A \in \mathscr{L}(H)$. On appelle ***ensemble résolvant*** de A, l'ensemble

$$\rho(A) := \Big\{\lambda \in \mathbb{C};\ A_\lambda = (\lambda I - A) \text{ est inversible } (\Longleftrightarrow \text{ bijectif })\Big\}.$$

Son complémentaire dans le plan complexe s'appelle le ***spectre*** de A et sera noté $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

On appelle ***rayon spectral*** (noté $\mathrm{spr}(A)$) la borne supérieure du spectre en module, i.e.,

$$\mathrm{spr}(A) := \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

► Le spectre d'un opérateur borné est un compact non vide.
Le spectre ponctuel de A (noté $\sigma_p(A)$) est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que A_λ soit non injectif :

$$\lambda \in \sigma_p(A) \Longleftrightarrow \mathbf{N}(A_\lambda) \neq \{0\}.$$

Un élément $\lambda \in \sigma_p(A)$ est dit valeur propre de A, il lui correspond un $0 \neq h \in H$ tel que $Ah = \lambda h$ que l'on appelle vecteur propre correspondant à λ.

Définition et Proposition 1.1.1. Soit $S \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$. Alors il existe un unique opérateur $S^* \in \mathscr{L}(H_2, H_1)$, appelé adjoint de S, qui vérifie la relation suivante :

$$(Sh_1, h_2)_2 = (h_1, S^* h_2)_1, \quad \forall h_1 \in H_1, \ \forall h_2 \in H_2.$$

De plus, on a les propriétés suivantes :

$$||S|| = ||S^*||, \quad S^{**} = (S^*)^* = S.$$

Si S est bijectif ($\Longrightarrow$ inversible), alors S^* l'est aussi, et $(S^*)^{-1} = (S^{-1})^*$.

Définition 1.1.3. Soit H un espace de Hilbert. On dit que $A \in \mathscr{L}(H)$ est ***auto-adjoint*** si $A = A^*$.

$$A = A^* \Longleftrightarrow (Ax, y) = (x, Ay), \quad \forall x, y \in H.$$

1.2 Opérateurs abstraits de régularisation

Soit H un espace de Hilbert et soit A un opérateur défini de $\mathscr{D}(A)$ vers H avec $\overline{\mathscr{D}(A)} = H$.

Définition 1.2.1. On dit que l'opérateur A est un opérateur dissipatif si

$$Re\, \langle Au, u \rangle \leq 0, \quad \forall u \in \mathscr{D}(A).$$

Définition 1.2.2. On dit que l'opérateur A est accrétif si $(-A)$ est un opérateur dissipatif, i.e.

$$Re\, \langle Au, u \rangle \geq 0, \quad \forall u \in \mathscr{D}(A).$$

Définition 1.2.3. Un operateur dissipatif A est dit maximal si son extension est A lui même.

Proposition 1.2.1. *Un operateur A a domaine dense est dissipatif si et seulement si*

$$||(A+I)u|| \leq ||(A-I)u||, \quad \forall u \in \mathscr{D}(A).$$

Proposition 1.2.2. *Soit $A : \mathscr{D}(A) \subset H \to H$ avec $\overline{\mathscr{D}(A)} = H$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A est un opérateur dissipatif.*
2. $\|(A-\lambda I)u\| \geq Re\lambda\|u\|$, $\forall u \in \mathscr{D}(A)$ *et pour tout λ tel que $Re\lambda > 0$.*
3. $\|(A-\lambda I)u\| \geq \lambda\|u\|$, $\forall u \in \mathscr{D}(A)$ *et pour tout λ tel que $\lambda > 0$.*

Théorème 1.2.1. *Tout opérateur dissipatif admet un prolongement fermé, ce prolongement est aussi un opérateur dissipatif.*

Corollaire 1.2.1. *Un opérateur dissipatif maximal est toujours fermé.*

Théorème 1.2.2. *Tout opérateur dissipatif admet un prolongement maximal dissipatif.*

Proposition 1.2.3. *Soit $A : \mathscr{D}(A) \subset H \to H$ avec $\overline{\mathscr{D}(A)} = H$. Si A est un opérateur dissipatif, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A est un opérateur dissipatif maximal.*
2. $\mathrm{Im}(A-\lambda I) = H$ *pour un certain λ tel que $\lambda > 0$.*
3. $\mathrm{Im}(A-\lambda I) = H$ *pour tout λ tel que $Re\lambda > 0$.*

Théorème 1.2.3. *Soit $A : \mathscr{D}(A) \subset H \mapsto H$ avec $\overline{\mathscr{D}(A)} = H$ un opérateur dissipatif, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A est un opérateur dissipatif maximal.*
2. *A est fermé, $\{\lambda : Re\lambda > 0\} \subset \rho(A)$ et on a de plus $\left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\| \leq (Re\lambda)^{-1}$.*

Théorème 1.2.4. *Soit $A : \mathscr{D}(A) \subset H \mapsto H$ avec $\overline{\mathscr{D}(A)} = H$ un opérateur dissipatif maximal, alors :*

1. $A_{\varepsilon}^{-1} \in \mathscr{L}(H)$.
2. $\left\|A_{\varepsilon}^{-1}\right\| \leq 1$.
3. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} A_{\varepsilon}^{-1}u = u$ *pour tout $u \in H$, où $A_{\varepsilon}^{-1} = (I-\varepsilon A)^{-1}$, $\varepsilon > 0$.*

***Exemple* 1.2.1.** *Soit*

$$A = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathscr{D}(A) = \{u \in L_2(\Omega) : u(0,t) = 0\}, \quad \Omega = (0,1)\times(0,T).$$

Alors A est un opérateur accrétif.

Preuve. On a

$$\langle Au, u\rangle = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}\overline{u}\,dx\,dt = \int_0^1 u\overline{u}\Big|_0^T dx - \int_{\Omega} u\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx\,dt,$$

donc

$$\langle Au, u\rangle + \overline{\langle Au, u\rangle} = \int_0^1 |u|^2\Big|^T dx - \int_0^1 |u|^2|_0 dx = 2Re\,\langle Au, u\rangle = \int_0^1 |u(x,T)|^2 dx,$$

car $u(0,x) = 0$, d'où

$$Re\,\langle Au, u\rangle \geq 0.$$

***Exemple* 1.2.2.** *On prend* $A = \dfrac{\partial^3}{\partial t^3}$, *de domaine de définition*

$$D(A) = \left\{ u \in H = L_2(0,a) : \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \in L_2(0,a), u(0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(0) = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(a) = 0 \right\}.$$

Alors A est un opérateur dissipatif.

Preuve. En effet, on a

$$Re\,\langle Au, u\rangle = Re\int_0^a \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\overline{u}\,dt \;= Re\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\overline{u}\Big|_0^a - Re\int_0^a \frac{\partial u}{\partial t}\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}dt = -\frac{1}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 \Big|_{t=a} \leq 0.$$

On pose $A_{\varepsilon}^{-1} = (I - \varepsilon A)^{-1} = (I - \varepsilon \dfrac{\partial^3}{\partial t^3})^{-1}$, pour $\varepsilon > 0$.
Les opérateurs A_{ε}^{-1} ne sont que ceux qui donnent la solution du problème

$$g_{\varepsilon} - \varepsilon\frac{\partial^3 g_{\varepsilon}}{\partial t^3} = g,\;\; g_{\varepsilon}(0) = 0,\;\; \frac{\partial g_{\varepsilon}}{\partial t}(0) = 0,\;\; \frac{\partial^2 g_{\varepsilon}}{\partial t^2}(a) = 0.$$

Dont le problème adjoint est

$$g_{\varepsilon}^* + \varepsilon\frac{\partial^3 g_{\varepsilon}^*}{\partial t^3} = g,\;\; g_{\varepsilon}^*(0) = 0,\;\; \frac{\partial g_{\varepsilon}^*}{\partial t}(0) = 0,\;\; \frac{\partial^2 g_{\varepsilon}^*}{\partial t^2}(a) = 0.$$

Proposition 1.2.4. *Soit* $v \in L_2(0,a)$, *alors*

- $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \left\| A_{\varepsilon}^{-1}u - u \right\|_{L_2(0,a)} = 0,$
- $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \left\| (A_{\varepsilon}^{-1})^* u - u \right\|_{L_2(0,a)} = 0.$

Soit $\Omega = [0,1] \times [0,T]$. Pour $u \in L_2(\Omega)$, on note par

$$u_\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} u, \;\; v_\varepsilon^* = (A_\varepsilon^{-1})^* u.$$

On a les propriétés suivantes :

1. $\dfrac{\partial^k u_\varepsilon}{\partial t^k} \in L_2(\Omega),\, k = \overline{0,3}.$
2. $u_\varepsilon(x,0) = 0,\;\; \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x,T) = 0,\;\; \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}(x,T) = 0,\;\; \forall x \in [0,1].$
3. $\dfrac{\partial^k v_\varepsilon^*}{\partial t^k} \in L_2(\Omega),\, k = \overline{0,3}.$
4. $v_\varepsilon^*(x,0) = 0,\;\; \dfrac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial t}(x,T) = 0,\;\; \dfrac{\partial^2 v_\varepsilon^*}{\partial t^2}(x,T) = 0,\;\; \forall x \in [0,1].$
5. $\left\| A_\varepsilon^{-1} u \right\|_{L_2(\Omega)} \leq \|u\|_{L_2(\Omega)},\;\; \forall \varepsilon > 0.$
6. $\left\| (A_\varepsilon^{-1})^* v \right\|_{L_2(\Omega)} \leq \|v\|_{L_2(\Omega)},\;\; \forall \varepsilon > 0.$
7. $\left\langle A_\varepsilon^{-1} u, v \right\rangle_{L_2(\Omega)} = \left\langle u, (A_\varepsilon^{-1})^* v \right\rangle_{L_2(\Omega)}.$
8. Si $u \in L_2(\Omega),\, \dfrac{\partial u}{\partial x} \in L_2(\Omega)$, alors
   - $\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \in L_2(\Omega)$, de plus on a $\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} = (\dfrac{\partial u}{\partial x})_\varepsilon$ et $u_\varepsilon(x,T) = A_\varepsilon^{-1}(u(0,T))$.
   - $\dfrac{\partial u_\varepsilon^*}{\partial x} = (\dfrac{\partial u}{\partial x})_\varepsilon^*$ et $u_\varepsilon^*(x,T) = (A_\varepsilon^{-1})^*(u(0,T))$.
9. Si $u \in L_2(\Omega)$, alors
   - $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left\| A_\varepsilon^{-1} u - u \right\|_{L_2(\Omega)} = 0.$
   - $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left\| (A_\varepsilon^{-1})^* u - u \right\|_{L_2(\Omega)} = 0.$

On applique tout au long de ce travail l'ε-inégalité suivante :

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2,\; \forall \varepsilon > 0.$$

Chapitre 2

Problème aux limites avec condition intégrale à deux bornes variables pour certaines classes d'équations paraboliques

Dans ce chapitre on étudie un problème avec condition intégrale à deux bornes variables pour une classe d'équations paraboliques. On démontre l'existence et l'unicité de la solution dans un espace fonctionnel de Sobolev à poids. La démonstration est basée sur une estimation a priori bilatérale et sur la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème considéré.

2.1 Position du problème

Dans le domaine

$$Q_T = (0,1) \times (0,T),\ 0 < T < \infty$$

nous considérons l'équation aux dérivées partielles :

$$\mathscr{L} u = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x,t),\ \ (x,t) \in Q_T, \tag{2.1}$$

où la fonction $a(x,t)$ et ses dérivées sont borneés sur l'intervalle $[0,T]$:

$$0 < a_0 < a(x,t) \leq a_{1,}$$

$$0 < a_2 < \frac{\partial a}{\partial t}(x,t) \leq a_3.$$

A l'équation (2.1) on associe la condition initiale,

$$\ell u = u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in (0,1), \tag{2.2}$$

la condition au bord du type Dirichlet,

$$u(0,t) = u(1,t), \quad t \in (0,T), \tag{2.3}$$

et la condition intégrale,

$$\int_0^\alpha u(\xi,t)d\xi + \int_\beta^1 u(\xi,t)d\xi = 0, \quad 0 < \alpha \leq \beta, \;\; \alpha+\beta = 1, \quad t \in (0,T). \tag{2.4}$$

On suppose que la fonction φ satisfie les conditions de compatibilité données en (2.3) et (2.4), i.e.

$$\varphi(0) = \varphi(1), \quad \int_0^\alpha \varphi(x)dx + \int_\beta^1 \varphi(x)dx = 0.$$

Au problème (2.1)-(2.4) on associe l'opérateur $L = (\mathscr{L}, \ell)$, défini de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$, où $\mathbb{E}$ est un espace de Banach constitué des fonctions $u \in L_2(Q_T)$, vérifiant les conditions (2.3) et (2.4), et muni de la norme

$$\begin{aligned} ||u||^2_{\mathbb{E}} = \int_{Q_T} \theta(x) \left[\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2 \right] dx dt + \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^1 \theta(x) \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx \\ + \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^\alpha |u|^2 dx + \sup_{0 \leq t \leq T} \int_\beta^1 |u|^2 dx, \end{aligned} \tag{2.5}$$

et $\mathbb{F}$ est l'espace de Hilbert constitué des fonctions vectorielles $F = (f, \varphi)$, obtenu comme complété de l'espace

$$L_2(Q_T) \times W_2^2(0,1)$$

par rapport à la norme

$$\begin{aligned} ||F||^2_{\mathbb{F}} = ||(f,\varphi)||^2_{\mathbb{F}} = \int_{Q_T} \theta(x) |f|^2 dx dt + \int_0^1 \theta(x) \left|\varphi'\right|^2 dx \\ + \int_0^\alpha |\varphi|^2 dx + \int_\beta^1 |\varphi|^2 dx, \end{aligned} \tag{2.6}$$

où

$$\theta(x)=\begin{cases} x^2 & 0<x\leq\alpha \\ (1-\beta)^2 & \alpha\leq x\leq\beta \\ (1-x)^2 & \beta\leq x<1. \end{cases} \tag{2.7}$$

En utilisant la méthode des inégalités de l'énergie proposée dans [56] , nous établissons une estimation a priori bilatérale. Alors on montre que l'opérateur L est un homéomorphisme linéaire entre les espaces $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$.

2.2 Estimation a priori bilatérale

Théorème 2.2.1. *Pour toute fonction $u\in\mathbb{E}$, on a l'estimation a priori*

$$||Lu||_{\mathbb{F}}^2\leq k_1\,||u||_{\mathbb{E}}^2, \tag{2.8}$$

où k_1 est une constante indépendante de u, i.e. $k_1=\max(2,4a_1^2,1+4a_3^2T)$.

Preuve. De l'équationn (2.1) on obtient

$$|\mathscr{L}u|^2\leq 2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+2\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|^2.$$

Or

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|^2\leq 2a_3^2\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+2a_1^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2.$$

D'où

$$\int_{Q_T}\theta(x)|\mathscr{L}u|^2\,dx\,dt\leq 2\int_{Q_T}\theta(x)\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+2a_1^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2\right]dx\,dt+4a_3^2T\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^1\theta(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2dx. \tag{2.9}$$

D'autre part, sous la condition (2.2), on a

$$\int_0^1\theta(x)\left|\varphi'\right|^2dx\leq\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^1\theta(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2dx, \tag{2.10}$$

$$\int_0^\alpha|\varphi|^2\,dx\leq\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^\alpha|u|^2\,dx,\quad\text{et}\quad\int_\beta^1|\varphi|^2\,dx\leq\sup_{0\leq t\leq T}\int_\beta^1|u|^2\,dx. \tag{2.11}$$

En combinant les inégalités (2.9)-(2.11), on obtient (2.8) pour tout $u\in\mathbb{E}$.

Lemme 2.2.1. *[24] Pour toute fonction $u \in \mathbb{E}$, on a*

$$\frac{1}{4}\int_0^\alpha \left| \int_x^\alpha \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t} d\xi \right|^2 dx \leq \int_0^\alpha x^2 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx,$$

$$\frac{1}{4}\int_\beta^1 \left| \int_\beta^x \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t} d\xi \right|^2 dx \leq \int_\beta^1 (1-x)^2 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx. \tag{2.12}$$

Théorème 2.2.2. *Pour toute fonction $u \in \mathbb{E}$, on a l'estimation a priori*

$$||u||_{\mathbb{E}}^2 \leq k_2 ||Lu||_{\mathbb{F}}^2, \tag{2.13}$$

où la constante

$$k_2 = \frac{\exp(cT)\max(\delta/4 + 34/\delta a_0^2, 1)}{\min(\delta/2, 1/2, \delta a_0^2/16)},$$

avec

$$\delta = \frac{a_0^2 - 8a_1a_3}{2a_1a_0^2} > 0, \quad c > (5/a_0 + \delta/4)a_3^2. \tag{2.14}$$

Preuve du théorème 2.1.2. On définit le multiplicateur suivant :

$$a(x,t)Mu(x,t) = \begin{cases} x^2 \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + 2x \displaystyle\int_x^\alpha \frac{\partial u}{\partial t}(\xi,t) d\xi, & 0 < x \leq \alpha \\ (1-\beta)^2 \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t), & \alpha \leq x \leq \beta \\ (1-x)^2 \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + 2(1-x) \displaystyle\int_\beta^x \frac{\partial u}{\partial t}(\xi,t) d\xi, & \beta \leq x < 1. \end{cases}$$

On considère pour $u \in \mathbb{E}$ la forme quadratique suivante :

$$Re \int_0^\tau \int_0^1 \exp(-ct)\mathscr{L}u\overline{Mu}\, dx dt,$$

où la constante c vérifie la condition (2.14), obtenue en multipliant l'équation (2.1) par

$$\exp(-ct)Mu,$$

en prenant la partie réelle et intégrant par parties sur

$$Q_T^\tau = (0,1) \times (0,\tau), \quad 0 \leq \tau \leq T.$$

Calculons d'abord :

$$Re\left(\int_0^1 \mathscr{L}u\overline{Mu}dx\right) = Re\left(\int_0^\alpha \mathscr{L}u\overline{Mu}dx + \int_\alpha^\beta \mathscr{L}u\overline{Mu}dx + \int_\beta^1 \mathscr{L}u\overline{Mu}dx\right) \tag{2.15}$$
$$= Re(I_1) + Re(I_2) + Re(I_3).$$

Or

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\alpha \frac{1}{a}x^2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t}dx - \int_0^\alpha \frac{1}{a}x^2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx \\ &\quad + \int_0^\alpha \frac{2x}{a}\left(\int_x^\alpha \frac{\partial \overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right)\frac{\partial u}{\partial t}dx \\ &\quad - \int_0^\alpha \frac{2x}{a}\left(\int_x^\alpha \frac{\partial \overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx \\ &= I_{11} + I_{12} + I_{13} + I_{14}. \end{aligned}$$

En utilisant une intégration par parties, on aura

$$I_{11} = \int_0^\alpha \frac{1}{a}x^2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t}dx = \int_0^\alpha \frac{1}{a}x^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx.$$

$$\begin{aligned} I_{12} &= -\int_0^\alpha \frac{1}{a}x^2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx = -\alpha^2\frac{\partial \overline{u}(\alpha,t)}{\partial t}\frac{\partial u(\alpha,t)}{\partial x} + \int_0^\alpha x^2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t\partial x}dx \\ &\quad + \int_0^\alpha 2x\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}dx - \int_0^\alpha \frac{1}{a}x^2\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ReI_{13} &= Re\int_0^\alpha \frac{2x}{a}\left(\int_x^\alpha \frac{\partial \overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right)\frac{\partial u}{\partial t}dx = \int_0^\alpha \frac{1}{a}\left|\int_x^\alpha \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right|^2 dx \\ &\quad - \int_0^\alpha \frac{x}{a^2}\frac{\partial a}{\partial x}\left|\int_x^\alpha \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right|^2 dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{14} &= -\int_0^\alpha \frac{2x}{a}\left(\int_x^\alpha \frac{\partial \overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx = -2u(0,t)\int_0^\alpha \frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx + 2\int_0^\alpha u\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx \\ &\quad -2\int_0^\alpha x\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx - 2\int_0^\alpha \frac{x}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\left(\int_x^\alpha \frac{\partial \overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right)\frac{\partial u}{\partial x}dx. \end{aligned}$$

Par suite

$$Re(I_1)=\int_0^{\alpha}\frac{x^2}{a}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dx-Re\left(\alpha^2\frac{\partial\overline{u}(\alpha,t)}{\partial t}\frac{\partial u(\alpha,t)}{\partial x}\right)+Re\int_0^{\alpha}x^2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial t\partial x}dx$$

$$+2Re\int_0^{\alpha}x\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}dx-Re\int_0^{\alpha}\frac{x^2}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}dx+\int_0^{\alpha}\frac{1}{a}\left|\int_x^{\alpha}\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right|^2dx$$

$$-\int_0^{\alpha}\frac{x}{a^2}\frac{\partial a}{\partial x}\left|\int_x^{\alpha}\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right|^2dx-2Re\,u(0,t)\int_0^{\alpha}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dx+2Re\int_0^{\alpha}u\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dx$$

$$-2Re\int_0^{\alpha}x\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dx-2Re\int_0^{\alpha}\frac{x}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\left(\int_x^{\alpha}\frac{\partial\overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right)\frac{\partial u}{\partial x}dx. \tag{2.16}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_{\alpha}^{\beta}\frac{(1-\beta)^2}{a}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dx-\int_{\alpha}^{\beta}\frac{(1-\beta)^2}{a}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx\\ &= I_{21}+I_{22}.\end{aligned}$$

Une intégration par parties, donne

$$I_{21}=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{(1-\beta)^2}{a}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{(1-\beta)^2}{a}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dx,$$

et

$$\begin{aligned}I_{22} &= -\int_{\alpha}^{\beta}\frac{(1-\beta)^2}{a}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx=-\left[(1-\beta)^2\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{\alpha}^{\beta}\\ &\quad+\int_{\alpha}^{\beta}(1-\beta)^2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x\partial t}dx-\int_{\alpha}^{\beta}\frac{(1-\beta)^2}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}dx.\end{aligned}$$

Donc

$$Re(I_2)=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{(1-\beta)^2}{a}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dx-Re\left[(1-\beta)^2\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$+Re\int_{\alpha}^{\beta}(1-\beta)^2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x\partial t}dx-Re\int_{\alpha}^{\beta}\frac{(1-\beta)^2}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}dx. \tag{2.17}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_\beta^1 \frac{(1-x)^2}{a}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx - \int_\beta^1 \frac{(1-x)^2}{a}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx \\
&+\int_\beta^1 \frac{2(1-x)}{a}\left(\int_\beta^x \frac{\partial \overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right)\frac{\partial u}{\partial t}dx \\
&-\int_\beta^1 \frac{2(1-x)}{a}\left(\int_\beta^x \frac{\partial \overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx \\
&= I_{31}+I_{32}+I_{33}+I_{34}.
\end{aligned}$$

Or, par une intégration par parties,on trouve

$$I_{31} = \int_\beta^1 \frac{(1-x)^2}{a}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx = \int_\beta^1 \frac{(1-x)^2}{a}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx.$$

$$\begin{aligned}
I_{32} &= -\int_\beta^1 \frac{(1-x)^2}{a}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx = (1-\beta)^2\frac{\partial \overline{u}(\beta,t)}{\partial t}\frac{\partial u(\beta,t)}{\partial x} - 2\int_\beta^1 (1-x)\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}dx \\
&-\int_\beta^1 \frac{(1-x)^2}{a}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}dx + \int_\beta^1 (1-x)^2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x\partial t}dx.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ReI_{33} &= Re\int_\beta^1 \frac{2(1-x)}{a}\left(\int_\beta^x \frac{\partial \overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right)\frac{\partial u}{\partial t}dx = \int_\beta^1 \frac{1}{a}\left|\int_\beta^x \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right|^2 dx \\
&+\int_\beta^1 \frac{(1-x)}{a^2}\frac{\partial a}{\partial x}\left|\int_\beta^x \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right|^2 dx.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{34} &= -\int_\beta^1 \frac{2(1-x)}{a}\left(\int_\beta^x \frac{\partial \overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx = -2u(1,t)\int_\beta^1 \frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx \\
&+2\int_\beta^1 u\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx + 2\int_\beta^1 (1-x)\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}dx \\
&-2\int_\beta^1 \frac{(1-x)}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\left(\int_\beta^x \frac{\partial \overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right)dx.
\end{aligned}$$

D'où

$$Re(I_3) = \int_\beta^1 \frac{(1-x)^2}{a}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx + Re\left((1-\beta)^2\frac{\partial \overline{u}(\beta,t)}{\partial t}\frac{\partial u(\beta,t)}{\partial x}\right)$$

$$-2Re\int_{\beta}^{1}(1-x)\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}dx-Re\int_{\beta}^{1}\frac{(1-x)^2}{a}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}dx$$

$$+Re\int_{\beta}^{1}(1-x)^2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x\partial t}dx+\int_{\beta}^{1}\frac{1}{a}\left|\int_{\beta}^{x}\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right|^2dx$$

$$+\int_{\beta}^{1}\frac{(1-x)}{a^2}\frac{\partial a}{\partial x}\left|\int_{\beta}^{x}\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right|^2dx-2Reu(1,t)\int_{\beta}^{1}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dx$$

$$+2Re\int_{\beta}^{1}u\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dx+2Re\int_{\beta}^{1}(1-x)\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}dx$$

$$-2Re\int_{\beta}^{1}\frac{(1-x)}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\left(\int_{\beta}^{x}\frac{\partial\overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right)dx. \tag{2.18}$$

En remplaçant (2.16)-(2.18) dans (2.15), en tenant compte des conditions (2.3) et (2.4), on obtient

$$Re\left(\int_0^1\mathscr{L}u\overline{Mu}dx\right)=\int_0^1\frac{\theta(x)}{a}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dx+Re\int_0^1\theta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x\partial t}dx$$

$$-Re\int_0^1\frac{\theta(x)}{a}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}dx+\int_0^{\alpha}\frac{1}{a}\left|\int_x^{\alpha}\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right|^2dx$$

$$-\int_0^{\alpha}\frac{x}{a^2}\frac{\partial a}{\partial x}\left|\int_x^{\alpha}\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right|^2dx+\int_{\beta}^{1}\frac{1}{a}\left|\int_{\beta}^{x}\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right|^2dx$$

$$+\int_{\beta}^{1}\frac{(1-x)}{a^2}\frac{\partial a}{\partial x}\left|\int_{\beta}^{x}\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right|^2dx+2Re\int_0^{\alpha}u\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dx$$

$$+2Re\int_{\beta}^{1}u\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dx-2Re\int_0^{\alpha}\frac{x}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\left(\int_x^{\alpha}\frac{\partial\overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right)\frac{\partial u}{\partial x}dx$$

$$-2Re\int_{\beta}^{1}\frac{(1-x)}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\left(\int_{\beta}^{x}\frac{\partial\overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right)dx. \tag{2.19}$$

Regardons maintenant les deux derniers termes de (2.19) :

$$\begin{aligned}-2Re\int_0^{\alpha}\frac{x}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\left(\int_x^{\alpha}\frac{\partial\overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right)\frac{\partial u}{\partial x}dx &= -2Re\int_0^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\int_x^{\alpha}\frac{\partial\overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right)\\ &\quad\times\frac{x}{\sqrt{a}}\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}dx\end{aligned}$$

$$\geq -\int_0^\alpha \frac{1}{a}\left|\int_x^\alpha \frac{\partial \overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right|^2 dx - \int_0^\alpha \frac{x^2}{a}(\frac{\partial a}{\partial x})^2\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx$$

$$\geq -\int_0^\alpha \frac{1}{a}\left|\int_x^\alpha \frac{\partial \overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right|^2 dx - \int_0^1 \frac{\theta(x)}{a}(\frac{\partial a}{\partial x})^2\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx.$$

De même

$$-2Re\int_\beta^1 \frac{(1-x)}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\left(\int_\beta^x \frac{\partial \overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right)dx \geq$$

$$-\int_\beta^1 \frac{1}{a}\left|\int_\beta^x \frac{\partial \overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right|^2 dx - \int_0^1 \frac{\theta(x)}{a}(\frac{\partial a}{\partial x})^2\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx.$$

Alors, l'égalité (2.19) devienne

$$Re\left(\int_0^1 \mathscr{L}u\overline{Mu}dx\right) \geq \int_0^1 \frac{\theta(x)}{a}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx + Re\int_0^1 \theta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x\partial t}dx$$

$$-Re\int_0^1 \frac{\theta(x)}{a}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}dx - \int_0^\alpha \frac{x}{a^2}\frac{\partial a}{\partial x}\left|\int_x^\alpha \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right|^2 dx$$

$$+2Re\int_0^\alpha u\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx + 2Re\int_\beta^1 u\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx$$

$$-2\int_0^1 \frac{\theta(x)}{a}(\frac{\partial a}{\partial x})^2\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx. \tag{2.20}$$

Regardons encore le troisième et le quatrième terme de (2.20), en utilisant les inégalités élémentaires et le lemme 2.1.1, on a

$$-Re\int_0^1 \frac{\theta(x)}{a}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}dx \geq -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\theta(x)}{a}(\frac{\partial a}{\partial x})^2\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\theta(x)}{a}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx.$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^\alpha \frac{x}{a^2}\frac{\partial a}{\partial x}\left|\int_x^\alpha \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right|^2 dx &\leq \alpha\int_0^\alpha \frac{a_3}{a_0^2}\left|\int_x^\alpha \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right|^2 dx \\
&\leq \frac{a_3}{a_0^2}\int_0^\alpha \left|\int_x^\alpha \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right|^2 dx \\
&\leq 4\frac{a_3}{a_0^2}\int_0^\alpha x^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx.
\end{aligned}$$

D'où

$$-\int_0^\alpha \frac{x}{a^2}\frac{\partial a}{\partial x}\left|\int_x^\alpha \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right|^2 dx \geq -4\frac{a_3}{a_0^2}\int_0^\alpha x^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx \geq -4\frac{a_3}{a_0^2}\int_0^1 \theta(x)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx.$$

Alors, en tenant compte de la condition (2.14), l'inégalité (2.20) sera écrite sous la forme

$$Re\left(\int_0^1 \mathscr{L}u\overline{Mu}dx\right) \geq \delta\int_0^1 \theta(x)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx + Re\int_0^1 \theta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x\partial t}dx$$

$$+2Re\int_0^\alpha u\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx + 2Re\int_\beta^1 u\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx - \frac{5}{2}\frac{a_3^2}{a_0}\int_0^1 \theta(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx. \tag{2.21}$$

En multipliant (2.21) par $\exp(-ct)$ et intégrant de 0 à τ, on obtient

$$Re\int_0^\tau\int_0^1 \exp(-ct)\mathscr{L}u\overline{Mu}dxdt \geq \delta\int_0^\tau\int_0^1 \theta(x)\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt$$

$$+Re\int_0^\tau\int_0^1 \theta(x)\exp(-ct)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x\partial t}dxdt + 2Re\int_0^\tau\int_0^\alpha \exp(-ct)u\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dxdt$$

$$+2Re\int_0^\tau\int_\beta^1 \exp(-ct)u\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dxdt - \frac{5a_3^2}{2a_0}\int_0^\tau\int_0^1 \theta(x)\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdt. \tag{2.22}$$

Intégrons par parties le deuxième, troixième et le quatrième terme du membre droit de l'inégalité (2.22) par rapport à t, on aura

$$Re\int_0^\tau\int_0^1 \theta(x)\exp(-ct)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x\partial t}dxdt = \frac{1}{2}\int_0^1 \exp(-c\tau)\theta(x)\left|\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\right|^2 dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 \theta(x)\left|\frac{\partial u(x,0)}{\partial x}\right|^2 dx + \frac{c}{2}\int_0^\tau\int_0^1 \theta(x)\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdt. \tag{2.23}$$

$$Re\int_0^\tau\int_0^\alpha \exp(-ct)u\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dxdt = \frac{1}{2}\int_0^\alpha \exp(-c\tau)|u(x,\tau)|^2 dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^\alpha |u(x,0)|^2 dx + \frac{c}{2}\int_0^\tau\int_0^\alpha \exp(-ct)|u|^2 dxdt. \tag{2.24}$$

$$Re\int_0^\tau\int_\beta^1 \exp(-ct)u\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dxdt = \frac{1}{2}\int_\beta^1 \exp(-c\tau)|u(x,\tau)|^2 dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\beta}^{1}|u(x,0)|^{2}dx+\frac{c}{2}\int_{0}^{\tau}\int_{\beta}^{1}\exp(-ct)|u|^{2}dxdt. \tag{2.25}$$

Remplaçant (2.23)-(2.25) dans (2.22), en tenant compte de la condition initiale (2.2) et la condition (2.14), on obtient

$$Re\int_{0}^{\tau}\int_{0}^{1}\exp(-ct)\mathscr{L}u\overline{Mu}dxdt+\int_{0}^{\alpha}|\varphi|^{2}dx+\int_{\beta}^{1}|\varphi|^{2}dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\theta(x)\left|\varphi^{'}\right|^{2}dx\geq$$

$$\delta\int_{0}^{\tau}\int_{0}^{1}\theta(x)\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{2}dxdt+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\theta(x)\exp(-c\tau)\left|\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\right|^{2}dx$$

$$+(\frac{c}{2}-\frac{5a_{3}^{2}}{2a_{0}})\int_{0}^{\tau}\int_{0}^{1}\theta(x)\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{2}dxdt$$

$$+\int_{0}^{\alpha}\exp(-c\tau)|u(x,\tau)|^{2}dx+\int_{\beta}^{1}\exp(-c\tau)|u(x,\tau)|^{2}dx. \tag{2.26}$$

Regardons maintenant la première intégrale du membre gauche de l'inégalité (2.26), on a

$$Re\left(\int_{0}^{1}\exp(-ct)\mathscr{L}u\overline{Mu}dx\right)=Re\int_{0}^{\alpha}\exp(-ct)\mathscr{L}u\frac{x^{2}}{a}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dx$$

$$+Re\int_{0}^{\alpha}\exp(-ct)\mathscr{L}u\frac{2x}{a}\left(\int_{x}^{\alpha}\frac{\partial\overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right)dx$$

$$+Re\int_{\alpha}^{\beta}\exp(-ct)\mathscr{L}u\frac{(1-\beta)^{2}}{a}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dx+Re\int_{\beta}^{1}\exp(-ct)\mathscr{L}u\frac{(1-x)^{2}}{a}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dx$$

$$+Re\int_{\beta}^{1}\exp(-ct)\mathscr{L}u\frac{2(1-x)}{a}\left(\int_{\beta}^{x}\frac{\partial\overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right)dx$$

$$=ReJ_{1}+ReJ_{2}+ReJ_{3}+ReJ_{4}+ReJ_{5}. \tag{2.27}$$

En appliquant l'$\varepsilon-$ inégalité et le lemme 2.1.1, on trouve

$$\begin{aligned}ReJ_{1} &= Re\int_{0}^{\alpha}\exp(-ct)\mathscr{L}u\frac{x^{2}}{a}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dx\\ &\leq \frac{\delta}{8}\int_{0}^{\alpha}x^{2}\exp(-ct)\left|\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right|^{2}dx+\frac{2}{\delta}\int_{0}^{\alpha}\frac{x^{2}}{a^{2}}\exp(-ct)|\mathscr{L}u|^{2}dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ReJ_2 &= Re\int_0^\alpha \exp(-ct)\mathscr{L}u\frac{2x}{a}\left(\int_x^\alpha \frac{\partial\overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right)dx \\ &\leq \frac{\delta}{8}\int_0^\alpha x^2\exp(-ct)\left|\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right|^2 dx+\frac{32}{\delta}\int_0^\alpha \frac{x^2}{a^2}\exp(-ct)|\mathscr{L}u|^2 dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ReJ_3 &= Re\int_\alpha^\beta \exp(-ct)\mathscr{L}u\frac{(1-\beta)^2}{a}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dx \\ &\leq \frac{\delta}{4}\int_\alpha^\beta (1-\beta)^2\exp(-ct)\left|\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right|^2 dx+\frac{34}{\delta}\int_\alpha^\beta \frac{(1-\beta)^2}{a^2}\exp(-ct)|\mathscr{L}u|^2 dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ReJ_4 &= Re\int_\beta^1 \exp(-ct)\mathscr{L}u\frac{(1-x)^2}{a}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dx \\ &\leq \frac{\delta}{8}\int_\beta^1 (1-x)^2\exp(-ct)\left|\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right|^2 dx+\frac{2}{\delta}\int_\beta^1 \frac{(1-x)^2}{a^2}\exp(-ct)|\mathscr{L}u|^2 dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ReJ_5 &= Re\int_\beta^1 \exp(-ct)\mathscr{L}u\frac{2(1-x)}{a}\left(\int_\beta^x \frac{\partial\overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right)dx \\ &\leq \frac{\delta}{8}\int_\beta^1 (1-x)^2\exp(-ct)\left|\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right|^2 dx+\frac{32}{\delta}\int_\beta^1 \frac{(1-x)^2}{a^2}\exp(-ct)|\mathscr{L}u|^2 dx. \end{aligned}$$

En remplaçant dans (2.27), et intégrant de 0 à τ, on obtient

$$Re\int_0^\tau\int_0^1 \exp(-ct)\mathscr{L}u\overline{Mu}dxdt \leq \frac{\delta}{4}\int_0^\tau\int_0^1 \theta(x)\exp(-ct)\left|\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right|^2 dxdt$$

$$+\frac{34}{\delta}\int_0^\tau\int_0^1 \frac{\theta(x)}{a^2}\exp(-ct)|\mathscr{L}u|^2 dxdt. \tag{2.28}$$

Substituant (2.28) dans (2.26), ce qui donne

$$\frac{3\delta}{4}\int_0^\tau\int_0^1 \theta(x)\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt+\frac{1}{2}\int_0^1 \theta(x)\exp(-c\tau)\left|\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\right|^2 dx$$

$$+(\frac{c}{2}-\frac{5a_3^2}{2a_0})\int_0^\tau\int_0^1 \theta(x)\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdt$$

$$+\int_0^\alpha \exp(-c\tau)|u(x,\tau)|^2\,dx+\int_\beta^1 \exp(-c\tau)|u(x,\tau)|^2\,dx$$

$$\leq \frac{34}{\delta}\int_0^\tau\int_0^1 \frac{\theta(x)}{a^2}\exp(-ct)|\mathcal{L}u|^2\,dx\,dt+\frac{1}{2}\int_0^1\theta(x)\left|\varphi'\right|^2 dx$$

$$+\int_0^\alpha|\varphi|^2\,dx+\int_\beta^1|\varphi|^2\,dx. \tag{2.29}$$

De l'équation (2.1), on a

$$a\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|\leq\left|\frac{\partial u}{\partial t}-\mathcal{L}u\right|+\frac{\partial a}{\partial x}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|,$$

alors

$$\frac{\delta}{16}a^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2\leq\frac{\delta}{4}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+\frac{\delta}{4}|\mathcal{L}u|^2+\frac{2\delta}{16}\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2.$$

D'où

$$\frac{\delta}{16}\int_0^\tau\int_0^1 a^2\theta(x)\exp(-ct)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2 dx\,dt\leq+\frac{\delta}{4}\int_0^\tau\int_0^1\theta(x)\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx\,dt$$

$$+\frac{\delta}{4}\int_0^\tau\int_0^1\theta(x)\exp(-ct)|\mathcal{L}u|^2\,dx\,dt+\frac{2\delta}{16}\int_0^\tau\int_0^1(\frac{\partial a}{\partial x})^2\theta(x)\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\,dt. \tag{2.30}$$

En combinant les inégalités (2.29) et (2.30), en tenant compte de la condition (2.14), on aboutit à

$$\frac{\delta}{2}\int_0^\tau\int_0^1\theta(x)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx\,dt+\frac{1}{2}\int_0^1\theta(x)\left|\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\right|^2 dx+\int_0^\alpha|u(x,\tau)|^2\,dx$$

$$+\int_\beta^1|u(x,\tau)|^2\,dx+\frac{\delta a_0^2}{16}\int_0^\tau\int_0^1\theta(x)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2 dx\,dt$$

$$\leq\exp(cT)(\delta/4+34/\delta a_0^2)\int_{Q_T}\theta(x)|\mathcal{L}u|^2\,dx\,dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1\theta(x)\left|\varphi'\right|^2 dx+\int_0^\alpha|\varphi|^2\,dx+\int_\beta^1|\varphi|^2\,dx. \tag{2.31}$$

Comme le membre droit de (2.31) est indépendant de τ, en prenant le sup du membre gauche par rapport à τ sur l'intervalle $[0;T]$, on obtient l'inégalité désirée.

2.3 Résolvabilité du problème

Des estimations (2.8) et (2.13), on déduit que l'opérateur $L : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ est continu et que son image $R(L)$ est fermée dans $\mathbb{F}$. D'où l'opérateur inverse L^{-1} existe et est continu de $R(L)$ dans $\mathbb{E}$, ainsi L est un homéomorphisme de $\mathbb{E}$ dans $R(L)$. Pour obtenir l'existence de la solution, il suffit de montrer que $R(L) = \mathbb{F}$.

La démonstration est basée sur le Lemme suivant :

Lemme 2.3.1. *Soit*

$$D_0(L) = \{u \in \mathbb{E} : \ell u = 0\}.$$

Si pour $u \in D_0(L)$ et une certaine $\omega \in L_2(Q_T)$ on a

$$\int_{Q_T} \phi(x) \mathscr{L} u \varpi dx dt = 0, \tag{2.32}$$

où

$$\phi(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leq \alpha \\ (1-\beta) & \alpha \leq x \leq \beta \\ (1-x) & \beta \leq x < 1. \end{cases}$$

Alors, $\omega = 0$.

Preuve De (2.32), on a

$$\int_{Q_T} \phi(x) \frac{\partial u}{\partial t} \varpi dx dt = \int_{Q_T} \phi(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \varpi dx dt. \tag{2.33}$$

Pour la fonction $\omega(x,t)$ donnée, on introduit la fonction

$$v(x,t) = \begin{cases} \omega - \displaystyle\int_x^\alpha \frac{\omega(\xi,t)}{\xi} d\xi & 0 < x \leq \alpha \\ \omega & \alpha \leq x \leq \beta \\ \omega - \displaystyle\int_\beta^x \frac{\omega(\xi,t)}{1-\xi} d\xi & \beta \leq x < 1. \end{cases}$$

En intégrant par parties par rapport à ξ, on obtient

$$Nv = \phi(x)\omega = \begin{cases} xv + \displaystyle\int_x^\alpha v(\xi,t) d\xi & 0 < x \leq \alpha \\ (1-\beta)\, v & \alpha \leq x \leq \beta \\ (1-x)v + \displaystyle\int_\beta^x v(\xi,t) d\xi & \beta \leq x < 1. \end{cases}$$

Ceci implique que

$$\int_0^{\alpha} v(\xi,t)d\xi = \int_{\beta}^{1} v(\xi,t)d\xi = 0,$$

i.e.

$$\int_0^{\alpha} v(\xi,t)d\xi + \int_{\beta}^{1} v(\xi,t)d\xi = 0.$$

Alors de l'égalité (2.33), on a

$$-\int_{Q_T} \frac{\partial u}{\partial t}\overline{Nv}dxdt = \int_{Q_T} A(t)u\overline{v}dxdt, \tag{2.34}$$

où

$$A(t)u = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi(x)a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Introduisons les opérateurs de régularisation par rapport à t, [18], [22], [23] et [24],

$$J_\varepsilon^{-1} = \left(I + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1} \text{ et } \left(J_\varepsilon^{-1}\right)^*$$

alors ces opérateurs fournissent les solutions des problèmes respectifs :

$$\varepsilon\frac{dg_\varepsilon(t)}{dt} + g_\varepsilon(t) = g(t)\, g_\varepsilon(t)|_{t=0} = 0, \tag{2.35}$$

et

$$-\varepsilon\frac{dg_\varepsilon^*(t)}{dt} + g_\varepsilon^*(t) = g(t)\, g_\varepsilon(t)|_{t=T} = 0, \tag{2.36}$$

et ces opérateurs vérifient les propriétés suivantes :
Pour $g \in L_2(0,T)$, les fonctions $g_\varepsilon = \left(J_\varepsilon^{-1}\right)g$ et $g_\varepsilon^* = \left(J_\varepsilon^{-1}\right)^* g$ sont dans $W_2^1(0,T)$ telles que

$$g_\varepsilon\,|_{t=0} = 0 \;\text{ et }\; g_\varepsilon^*\,|_{t=T} = 0,$$

D'ailleurs, J_ε^{-1} commute avec $\dfrac{\partial}{\partial t}$, et on a

$$\int_0^T |g_\varepsilon - g|^2 dt \longrightarrow 0, \quad \int_0^T \left|g_\varepsilon^* - g\right|^2 dt \longrightarrow 0 \text{ pour } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

En remplaçant dans (2.34) u par la fonction de régularisation $u_\varepsilon = (J_\varepsilon^{-1})u$, et utilisant la relation

$$A(t)J_\varepsilon^{-1} = J_\varepsilon^{-1}A(\tau) + \varepsilon J_\varepsilon^{-1}\frac{\partial A(\tau)}{\partial\tau}J_\varepsilon^{-1}.$$

Puis, en prenant l'adjoint de l'opérateur J_ε^{-1}, et intégrons par parties par rapport à t dans le membre gauche, on obtient

$$\int_\Omega u\overline{N\left(\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial t}\right)}dxdt = \int_\Omega A(t)u\overline{v_\varepsilon^*}dxdt + \varepsilon\int_\Omega \frac{\partial A}{\partial t}u_\varepsilon \overline{v_\varepsilon^*}dxdt. \tag{2.37}$$

Par passage à la limite, Nous satisfons l'égalité (2.37) pour toute les fonctions vérifiant les conditions (2.2)- (2.4) telles que

$$\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\phi(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) \in L_2(\Omega) \quad \text{for } i = 0, 1.$$

L'opérateur $A(t)$ admet dans $L_2(0,1)$, un inverse continu satisfant

$$\int_0^\alpha A^{-1}(t)g\,dx + \int_\beta^1 A^{-1}(t)g\,dx = 0.$$

Donc la fonction u_ε peut-être représentée sous la forme

$$u_\varepsilon = J_\varepsilon^{-1}A^{-1}Au.$$

Alors, on a

$$\frac{\partial A}{\partial t}u_\varepsilon = A_\varepsilon(t)A(t)u.$$

Par conséquence, l'équation (2.37) devienne

$$\int_\Omega u\overline{N\left(\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial t}\right)}dxdt = \int_\Omega A(t)u\left(v_\varepsilon^* + \varepsilon A_\varepsilon^* v_\varepsilon^*\right)dxdt, \tag{2.38}$$

où $A_\varepsilon^*(t)$ est l'opérateur adjoint de $A_\varepsilon(t)$.

Le membre gauche de l'égalité (2.38) est un fonctionnel linéaire continu en u. Alors la fonction $h_\varepsilon = v_\varepsilon^* + \varepsilon A_\varepsilon^* v_\varepsilon^*$ admette des dérivées $\phi(x)\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x} \in L_2(\Omega)$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi(x)\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}\right) \in L_2(\Omega)$, et les conditions suivantes sont vérifiées

$$h_\varepsilon|_{x=0} = 0,\ h_\varepsilon|_{x=1} = 0,\ \phi(x)\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}|_{x=1} = 0. \tag{2.39}$$

L'opérateur $A_\varepsilon^*(t)$ est borné dans $L_2(\Omega)$. Pour ε suffisament petit, on a $\left\|\varepsilon A_\varepsilon^*(t)\right\|_{L_2(\Omega)} < 1$, par suite l'opérateur $I + \varepsilon A_\varepsilon^*(t)$ admet un inverse borné dans $L_2(\Omega)$.

De plus, $\dfrac{\partial A_\varepsilon^*(t)}{\partial x}$ sont des opérateurs bornés dans $L_2(\Omega)$. Alors, on conclu que la fonction v_ε^* admette des dérivées $\phi(x)\dfrac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x} \in L_2(\Omega)$, $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\phi(x)\dfrac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}\right) \in L_2(\Omega)$, et les conditions suivantes sont satisfies

$$v_\varepsilon^*|_{x=0} = 0,\ v_\varepsilon^*|_{x=1} = 0,\ \phi(x)\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}|_{x=1} = 0. \tag{2.40}$$

Alors, pour ε suffisament petit la fonction v_ε^* a les mêmes propriétées que la fonction h_ε. De plus, v_ε^* satisfie la condition intégrale (2.4).

Posons

$$u = \int_0^t \exp(c\tau) v_\varepsilon^*(x,\tau)\, d\tau,$$

alors on a

$$u(x,0) = \varphi(x) = 0,\ \ x \in (0,1)$$

et

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \int_0^t \exp(c\tau) v_\varepsilon^*(0,\tau)\, d\tau = 0, \\ u(1,t) &= \int_0^t \exp(c\tau) v_\varepsilon^*(1,\tau)\, d\tau = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$u(0,t) = u(1,t),\ \ t \in (0,T).$$

En remplaçant donc

$$u = \int_0^t \exp(c\tau) v_\varepsilon^*(x,\tau)\, d\tau,$$

dans (2.34), où la constante c satisfait

$$ca_0 - a_3 - \frac{\varepsilon a_3^2}{a_0} \geq 0, \tag{2.41}$$

et en utilisant (2.36), on obtient

$$-\int_{Q_T} \exp(ct) v_\varepsilon^* \overline{Nv}\, dx\, dt = \int_{Q_T} A(t) u \exp(-ct) \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} dx\, dt - \varepsilon \int_{Q_T} A(t) u \overline{\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial t}} dx\, dt. \tag{2.42}$$

Intégrons par parties le premier terme du membre droit de (2.42) par rapport à x, ensuite par rapport à t, on trouve

$$\begin{aligned}\int_{Q_T} A(t)\,u \exp(-ct)\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dxdt &= -\int_0^T \left[\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\phi(x)a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\exp(-ct)\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx\right]dt \\ &= \int_{Q_T} \phi(x)a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\exp(-ct)\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x \partial t}dxdt.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\int_{Q_T} \phi(x)a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\exp(-ct)\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x\partial t}dxdt &= \int_0^1 \left[\int_0^T \phi(x)a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\exp(-ct)\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial \overline{u}}{\partial x})dt\right]dx \\ &= \left[\int_0^1 \phi(x)a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\exp(-ct)\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}dx\right]_0^T \\ &\quad -\int_{Q_T}\phi(x)\frac{\partial a(x,t)}{\partial t}\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdt \\ &\quad +c\int_{Q_T}\phi(x)a(x,t)\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdt \\ &\quad -\int_{Q_T}\phi(x)a(x,t)\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}\exp(-ct)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}dxdt.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}2Re\int_{Q_T} A(t)\,u\exp(-ct)\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dxdt &= \int_0^1 \phi(x)a(x,T)\exp(-cT)\left|\frac{\partial u(x,T)}{\partial t}\right|^2 dx \\ &+\int_{Q_T}\exp(-ct)\phi(x)\left(ca(x,t)-\frac{\partial a(x,t)}{\partial t}\right)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdt, \qquad (2.43)\end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}-\varepsilon\int_{Q_T} A(t)\,u\frac{\overline{\partial v_\varepsilon^*}}{\partial t}dxdt &= \varepsilon\int_0^1\left[\int_0^T \frac{\partial}{\partial x}\left(\phi(x)a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial t}(\overline{v_\varepsilon^*})dt\right]dx \\ = -\varepsilon\int_{Q_T}\overline{v_\varepsilon^*}\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi(x)\frac{\partial a(x,t)}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right)dxdt &- \varepsilon\int_{Q_T}\overline{v_\varepsilon^*}\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi(x)a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right)dxdt.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}-\varepsilon\int_{Q_T}\overline{v_\varepsilon^*}\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi(x)\frac{\partial a(x,t)}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right)dxdt &= -\varepsilon\int_0^T\left[\int_0^1 \overline{v_\varepsilon^*}\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi(x)\frac{\partial a(x,t)}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx\right]dt \\ &= \varepsilon\int_{Q_T}\frac{\partial \overline{v_\varepsilon^*}}{\partial x}\phi(x)\frac{\partial a(x,t)}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}dxdt,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
-\varepsilon\int_{Q_T}\overline{v_\varepsilon^*}\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi(x)a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right)dxdt &= -\varepsilon\int_0^T\left[\int_0^1\overline{v_\varepsilon^*}\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi(x)a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right)dx\right]dt\\
&= \varepsilon\int_{Q_T}\frac{\partial\overline{v_\varepsilon^*}}{\partial x}\phi(x)a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}dxdt\\
&= \varepsilon\int_{Q_T}\phi(x)a(x,t)\exp(ct)\left|\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}\right|^2 dxdt.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
Re\left(-\varepsilon\int_{Q_T}A(t)u\frac{\partial\overline{v_\varepsilon^*}}{\partial t}dxdt\right) &= Re\left(\varepsilon\int_{Q_T}\frac{\partial\overline{v_\varepsilon^*}}{\partial x}\phi(x)\frac{\partial a(x,t)}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}dxdt\right)\\
&\quad+\varepsilon\int_{Q_T}\phi(x)a(x,t)\exp(ct)\left|\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}\right|^2 dxdt.
\end{aligned}$$

En appliquant l'ε-inégalité sur l'égalité précédente, on obtient

$$Re\left(-\varepsilon\int_{Q_T}A(t)u\overline{\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial t}}dxdt\right)\geq\frac{-\varepsilon}{2a_0}\int_{Q_T}\exp(-ct)\phi(x)\left|\frac{\partial a}{\partial x}(x,t)\right|^2\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdt. \tag{2.44}$$

En combinant (2.42), (2.43) et (2.44), en tenant compte de (2.45), on obtient

$$-Re\left(\int_{Q_T}\exp(ct)v_\varepsilon^*\overline{Nv}dxdt\right)\geq\int_{Q_T}\exp(-ct)\phi(x)\left(ca_0-a_3-\frac{\varepsilon a_3^2}{a_0}\right)|u_x|^2 dxdt\geq 0. \tag{2.45}$$

En utilisant (2.45), on aura

$$Re\int_{Q_T}\exp(ct)v_\varepsilon^*\overline{Nv}dxdt\leq 0.$$

Alors, pour $\varepsilon\longrightarrow 0$ on obtient

$$Re\int_{Q_T}\exp(ct)v\overline{Nv}dxdt=\int_{Q_T}\exp(ct)\phi(x)|v|^2 dxdt\leq 0.$$

On conclut alors que $v=0$, donc, $\omega=0$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Théorème 2.3.1. *L'image $R(L)$ de L coincide avec $\mathbb{F}$*

Preuve. Comme $\mathbb{F}$ est un espace de Hilbert, on a $R(L)=\mathbb{F}$ si et seulement si la relation

$$\int_{Q_T}\theta(x)\mathscr{L}u\overline{f}dxdt+\int_0^1\theta(x)\frac{d\ell u}{dx}\frac{d\overline{\varphi}}{dx}dx+\int_0^{\alpha}\ell u\overline{\varphi}dx+\int_{\beta}^1\ell u\overline{\varphi}dx=0 \tag{2.46}$$

pour tout $u\in\mathbb{E}$ et $(f,\varphi)\in\mathbb{F}$, implique que $f=0$ et $\varphi=0$.

Soit $u\in D_0(L)$ alors de (2.46), on conclut à partir du lemme 2.2.1 que $\psi f=0$, alors $f=0$; où

$$\psi f=\begin{cases} xf & 0<x\leq\alpha \\ (1-\beta)f & \alpha\leq x\leq\beta \\ (1-x)f & \beta\leq x<1. \end{cases}$$

En prenant $u\in\mathbb{E}$ dans (2.46) on obtient :

$$\int_0^1\theta(x)\frac{d\ell u}{dx}\frac{d\overline{\varphi}}{dx}dx+\int_0^{\alpha}\ell u\overline{\varphi}dx+\int_{\beta}^1\ell u\overline{\varphi}dx=0.$$

Comme l'image de l'opérateur trace ℓ est partout dense dans l'espace de Hilbert muni de la norme

$$\left[\int_0^1\theta(x)\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2+\int_0^{\alpha}|\varphi|^2dx+\int_{\beta}^1|\varphi|^2dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

alors $\varphi=0$.

Chapitre 3

Problème aux limites avec condition intégrale au bord multi-variables pour certaines classes d'équations paraboliques

Dans ce chapitre on étudie un problème avec condition intégrale à bornes multi-variables pour les équations aux dérivé partielles.
On démontre l'existence et l'unicité de la solution dans un espace fonctionnel de Sobolev à poids. La démonstration est basée sur une estimation a priori bilatérale et sur la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème considéré.

3.1 Position du problème

Dans le domaine

$$\Omega = \{(x,t) \in (0,1) \times (0,T), \quad T > 0\}$$

nous considérons l'équation

$$\mathscr{L} u = \frac{\partial u}{\partial t} - a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \tag{3.1}$$

où la fonction $a(t)$ et ses dérivées sont bornées sur l'intervalle $[0;T]$:

$$0 < c_0 \leq a(t) \leq c_1,$$

$$0 < c_2 \leq \frac{da(t)}{dt} \leq c_3.$$

A l'équation (3.1) on associe la condition initiale

$$\ell u = u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in (0,1), \tag{3.2}$$

la condition au bord du type Dirichlet

$$u(0,t) = u(\beta,t) = u(\gamma,t) = u(1,t), \quad t \in (0,T), \tag{3.3}$$

et la condition intégrale

$$\int_0^\alpha u(x,t)dx + 2\int_\beta^\gamma u(x,t)dx + \int_\delta^1 u(x,t)dx = 0, \tag{3.4}$$

$$0 < \alpha < \beta < \gamma < \delta < 1, \text{ et } \alpha = 1 - \delta = \gamma - \beta, \quad t \in (0,T).$$

Où, la fonction φ est donnée vérifie la condition de compatibilité suivante

$$\varphi(0) = \varphi(\beta) = \varphi(\gamma) = \varphi(1), \quad \int_0^\alpha \varphi(x)dx + 2\int_\beta^\gamma \varphi(x)dx + \int_\delta^1 \varphi(x)dx = 0.$$

Lors de l'étude classique de la solution du problème (3.1)-(3.4), avec la condition (3.4) les conditions suivantes doivent être remplies

$$a(0)\left\{\varphi''(0) + \varphi''(\beta) - \varphi''(\gamma) - \varphi''(1)\right\} = f(1,0) + f(\gamma,0) - f(\beta,0) - f(0,0),$$

$$a(0)\left\{\int_0^\alpha \varphi''(x)dx + 2\int_\beta^\gamma \varphi''(x)dx + \int_\delta^1 \varphi''(x)dx\right\} = \int_0^\alpha f(x,0)dx$$
$$+2\int_\beta^\gamma f(x,0)dx + \int_\delta^1 f(x,0)dx.$$

La modélisation mathématique de différents phénomènes conduit à des problèmes avec des conditions non locales ou des conditions au bord du type intégrales. De telles conditions se produisent dans le cas où l'on mesure une valeur moyenne de certains paramètres à l'intérieur du domaine.
Dans ce chapitre nous étudions un problème avec condition intégrale à bornes multi-variables pour une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre.
Au problème (3.1)-(3.4) on associe l'opérateur

$$L = (\mathscr{L}, \ell)$$

défini de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$, où $\mathbb{E}$ est un espace de Banach constitué des fonctions $u \in L_2(\Omega)$, vérifiant les conditions (3.3) et (3.4), et muni de la norme

$$\|u\|_E^2 = \int_\Omega \frac{p(x)}{3}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2 dx\,dt + \sup_{0\leq t\leq T}\int_0^1 \frac{p(x)}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\right]$$

$$+\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^\alpha |u|^2\,dx + \sup_{0\leq t\leq T}\int_\beta^\gamma |u|^2\,dx + \sup_{0\leq t\leq T}\int_\delta^1 |u|^2\,dx, \tag{3.5}$$

et $\mathbb{F}$ est l'espace de Hilbert constitué des fonctions vectorielles

$$F = (f, \varphi)$$

obtenu comme complété de l'espace

$$L_2(\Omega) \times W_2^2(0,1)$$

par rapport à la norme

$$\|F\|_{\mathbb{F}}^2 = \|(f,\varphi)\|_{\mathbb{F}}^2 = \int_\Omega \frac{p(x)}{3}|f|^2\,dx\,dt + \int_0^1 \frac{p(x)}{2}\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 dx + \int_0^\alpha |\varphi|^2\,dx$$

$$+\int_\beta^\gamma |\varphi|^2\,dx + \int_\delta^1 |\varphi|^2\,dx, \tag{3.6}$$

où

$$p(x) = \begin{cases} x^2, & x \in]0,\alpha], \\ (\gamma-\beta)^2, & x \in [\alpha,\beta] \cup [\gamma,\delta], \\ (\gamma-x)^2 + (x-\beta)^2, & x \in [\beta,\gamma], \\ (1-x)^2, & x \in [\delta, 1[. \end{cases}$$

En utilisant la méthode des inégalités de l'énergie proposée dans [56], nous établissons une estimation a priori bilatérale. Alors on montre que l'opérateur L est un homéomorphisme linéaire entre les espaces $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$.

3.2 Estimation a priori bilatérale

Théorème 3.2.1. *Pour toute fonction $u \in \mathbb{E}$, on a l'estimation a priori*

$$\|Lu\|_{\mathbb{F}}^2 \leq c_4\|u\|_{\mathbb{E}}^2, \tag{3.7}$$

où c_4 est une constante indépendante de u, i.e. $c_4 = 2\max(1, c_1^2)$.

Preuve De l'équation (3.1), sous la condition (3.2), on obtient

$$\int_\Omega \frac{p(x)}{3}|\mathscr{L}u|^2\,dx\,dt \leq 2\int_\Omega \frac{p(x)}{3}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + c_1^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2\right] dx\,dt. \tag{3.8}$$

$$\int_0^1 \frac{p(x)}{2}\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 dx \leq \sup_{0\leq t\leq T}\int_0^1 \frac{p(x)}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx, \text{ et } \int_0^\alpha |\varphi|^2\,dx \leq \sup_{0\leq t\leq T}\int_0^\alpha |u|^2\,dx. \tag{3.9}$$

$$\int_\beta^\gamma |\varphi|^2\,dx \leq \sup_{0\leq t\leq T}\int_\beta^\gamma |u|^2\,dx, \text{ et } \int_\delta^1 |\varphi|^2\,dx \leq \sup_{0\leq t\leq T}\int_\delta^1 |u|^2\,dx. \tag{3.10}$$

En combinant les inégalités (3.8), (3.9) et (3.10), on obtient (3.7) pour tout $u \in \mathbb{E}$.

Théorème 3.2.2. *Pour toute fonction $u \in \mathbb{E}$, on a l'estimation a priori*

$$||u||_{\mathbb{E}}^2 \leq c_5\,||Lu||_{\mathbb{F}}^2, \tag{3.11}$$

où

$$c_5 = \frac{\exp(cT)\max(49, 2c_1)}{\min(\frac{13}{32}, c_0, \frac{c_0^2}{2})},$$

et la constante c vérifie

$$cc_0 \geq c_3. \tag{3.12}$$

Avant de démontrer ce théorème, nous donnons tout d'abord le lemme suivant :

Lemme 3.2.1. *[24] Pour toute fonction $u \in \mathbb{E}$, on a*

$$\int_a^b \left|\int_x^b \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right|^2 dx \leq 4\int_a^b (x-a)^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx,$$

$$\int_a^b \left|\int_a^x \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right|^2 dx \leq 4\int_a^b (b-x)^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx.$$

Preuve du Théorème 3.1.2. On définit

$$Mu = \begin{cases} x^2 \dfrac{\partial u}{\partial t} + 2x \displaystyle\int_x^\alpha \dfrac{\partial u(\xi,t)}{\partial t} d\xi, & x \in]0,\alpha], \\ (\gamma-\beta)^2 \dfrac{\partial u}{\partial t}, & x \in [\alpha,\beta] \cup [\gamma,\delta], \\ (\gamma-x)^2 \dfrac{\partial u}{\partial t} + (x-\beta)^2 \dfrac{\partial u}{\partial t} + 2(\gamma-x) \displaystyle\int_\beta^x \dfrac{\partial u(\xi,t)}{\partial t} d\xi & \\ \qquad + 2(x-\beta) \displaystyle\int_x^\gamma \dfrac{\partial u(\xi,t)}{\partial t} d\xi, & x \in [\beta,\gamma], \\ (1-x)^2 \dfrac{\partial u}{\partial t} + 2(1-x) \displaystyle\int_\delta^x \dfrac{\partial u(\xi,t)}{\partial t} d\xi, & x \in [\delta,1[. \end{cases}$$

On considère pour $u \in \mathbb{E}$ la forme quadratique suivante :

$$Re \int_0^\tau \int_0^1 \exp(-ct) \mathscr{L} u \overline{Mu} dx dt,$$

où la constante c vérifie la condition (3.12), obtenue en multipliant l'équation (3.1) par

$$\exp(-ct) Mu,$$

prenant la partie réelle et intégrant par parties sur

$$\Omega^\tau = (0,1) \times (0,\tau), \quad 0 \leq \tau \leq T.$$

Calculons d'abord :

$$Re \left(\int_0^1 \mathscr{L} u \overline{Mu} dx \right) = Re \left(\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} \overline{Mu} dx - a(t) \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \overline{Mu} dx \right)$$

$$= Re(L_1) + a(t) Re(L_2). \tag{3.13}$$

Or

$$\begin{aligned}
L_1 &= \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}\overline{Mu}dx \\
&= \int_0^\alpha \frac{\partial u}{\partial t}\left(x^2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}+2x\int_x^\alpha \frac{\partial \overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right)dx \\
&\quad +(\gamma-\beta)^2\int_\alpha^\beta \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx \\
&\quad +\int_\beta^\gamma \frac{\partial u}{\partial t}\left[(\gamma-x)^2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}+(x-\beta)^2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right. \\
&\quad \left.+2(\gamma-x)\int_\beta^x \frac{\partial \overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi+2(x-\beta)\int_x^\gamma \frac{\partial \overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right]dx \\
&\quad +(\gamma-\beta)^2\int_\gamma^\delta \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx \\
&\quad +\int_\delta^1 \frac{\partial u}{\partial t}\left[(1-x)^2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}+2(1-x)\int_\delta^x \frac{\partial \overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right]dx \\
&= L_{11}+L_{12}+L_{13}+L_{14}+L_{15}.
\end{aligned}$$

Par une intégration par parties, évaluons les intégrales $L_{11}, L_{12}, L_{13}, L_{14}$ et L_{15} :
On a

$$\begin{aligned}
L_{11} &= \int_0^\alpha \frac{\partial u}{\partial t}\left(x^2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}+2x\int_x^\alpha \frac{\partial \overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right)dx \\
&= \int_0^\alpha x^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx+\int_0^\alpha \frac{\partial u}{\partial t}(2x)\left(\int_x^\alpha \frac{\partial \overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right)dx,
\end{aligned}$$

d'où

$$ReL_{11}=\int_0^\alpha x^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx+\int_0^\alpha \left|\int_x^\alpha \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right|^2 dx.$$

De même

$$L_{12}=(\gamma-\beta)^2\int_\alpha^\beta \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx,$$

donc

$$ReL_{12}=(\gamma-\beta)^2\int_\alpha^\beta \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx.$$

On a aussi

$$\begin{aligned} L_{13} &= \int_\beta^\gamma \frac{\partial u}{\partial t}\left[(\gamma-x)^2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}+(x-\beta)^2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right. \\ &\left. +2(\gamma-x)\int_\beta^x \frac{\partial \overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi+2(x-\beta)\int_x^\gamma \frac{\partial \overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right]dx, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} ReL_{13} &= \int_\beta^\gamma \left[(\gamma-x)^2+(x-\beta)^2\right]\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx \\ &+\int_\beta^\gamma \left|\int_\beta^x \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right|^2 dx+\int_\beta^\gamma \left|\int_x^\gamma \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right|^2 dx. \end{aligned}$$

Et

$$L_{14}=(\gamma-\beta)^2\int_\gamma^\delta \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx,$$

d'où

$$ReL_{14}=(\gamma-\beta)^2\int_\gamma^\delta \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx.$$

Finalement

$$L_{15}=\int_\delta^1 \frac{\partial u}{\partial t}\left[(1-x)^2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}+2(1-x)\int_\delta^x \frac{\partial \overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right]dx,$$

donc

$$ReL_{15}=\int_\delta^1 (1-x)^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx+\int_\delta^1 \left|\int_\delta^x \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right|^2 dx.$$

Par suite

$$\begin{aligned} Re(L_1) &= \int_0^1 p(x)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx+\int_0^\alpha \left|\int_x^\alpha \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right|^2 dx \\ &+\int_\beta^\gamma \left[\left|\int_\beta^x \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right|^2 dx+\left|\int_x^\gamma \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right|^2\right]dx \\ &+\int_\delta^1 \left|\int_\delta^x \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right|^2 dx. \end{aligned}$$

i.e.

$$Re(L_1)\geq \int_0^1 p(x)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx. \tag{3.14}$$

Regardons maintenant le terme

$$\begin{aligned}
L_2 &= -\int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\overline{Mu}dx \\
&= -\int_0^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x^2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}+2x\int_x^\alpha \frac{\partial \overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right)dx \\
&\quad -(\gamma-\beta)^2\int_\alpha^\beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx \\
&\quad -\int_\beta^\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left[(\gamma-x)^2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}+2(\gamma-x)\int_\beta^x \frac{\partial \overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right]dx \\
&\quad -\int_\beta^\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left[(x-\beta)^2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}+2(x-\beta)\int_x^\gamma \frac{\partial \overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right]dx \\
&\quad -(\gamma-\beta)^2\int_\gamma^\delta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx \\
&\quad -\int_\delta^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left[(1-x)^2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}+2(1-x)\int_\delta^x \frac{\partial \overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right]dx \\
&= L_{21}+L_{22}+L_{23}+L_{24}+L_{25}+L_{26}.
\end{aligned}$$

Utilisons encore une fois une intégration par parties pour évaluer $L_{21}, L_{22}, L_{23}, L_{24}, L_{25}$ et L_{26} :
On a

$$L_{21} = -\int_0^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x^2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}+2x\int_x^\alpha \frac{\partial \overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right)dx,$$

d'où

$$\begin{aligned}
ReL_{21} &= -Re\left(\frac{\partial u(\alpha,t)}{\partial x}\alpha^2\frac{\partial \overline{u}(\alpha,t)}{\partial t}\right)+Re\left(\int_0^\alpha \frac{\partial u}{\partial x}x^2\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x\partial t}dx\right) \\
&\quad -Re\left(2u(0,t)\int_0^\alpha \frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx\right)+2Re\left(\int_0^\alpha u\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx\right).
\end{aligned}$$

De même, on a

$$L_{22} = -(\gamma-\beta)^2\int_\alpha^\beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx,$$

alors

$$\begin{aligned} ReL_{22} &= Re\left(-\frac{\partial u(\beta,t)}{\partial x}(\gamma-\beta)^2\frac{\partial \overline{u}(\beta,t)}{\partial t}\right)\\ &+Re\left(\frac{\partial u(\alpha,t)}{\partial x}(\gamma-\beta)^2\frac{\partial \overline{u}(\alpha,t)}{\partial t}\right)\\ &+Re\left(\int_\alpha^\beta \frac{\partial u}{\partial x}(\gamma-\beta)^2\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x\partial t}dx\right). \end{aligned}$$

On a aussi

$$L_{23}=-\int_\beta^\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left[(\gamma-x)^2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}+2(\gamma-x)\int_\beta^x \frac{\partial \overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right]dx,$$

donc

$$\begin{aligned} ReL_{23} &= Re\left(\frac{\partial u(\beta,t)}{\partial x}(\gamma-\beta)^2\frac{\partial \overline{u}(\beta,t)}{\partial t}\right)\\ &+Re\left(\int_\beta^\gamma \frac{\partial u}{\partial x}(\gamma-x)^2\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x\partial t}dx\right)\\ &-2Re\left(u(\gamma,t)\int_\beta^\gamma \frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx\right)+2Re\left(\int_\beta^\gamma u\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx\right). \end{aligned}$$

Et

$$L_{24}=-\int_\beta^\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left[(x-\beta)^2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}+2(x-\beta)\int_x^\gamma \frac{\partial \overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right]dx,$$

d'où

$$\begin{aligned} ReL_{24} &= -Re\left(\frac{\partial u(\gamma,t)}{\partial x}(\gamma-\beta)^2\frac{\partial \overline{u}(\gamma,t)}{\partial t}\right)\\ &+Re\left(\int_\beta^\gamma \frac{\partial u}{\partial x}(x-\beta)^2\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x\partial t}dx\right)\\ &-2Re\left(u(\beta,t)\int_\beta^\gamma \frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx\right)+2Re\left(\int_\beta^\gamma u\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx\right). \end{aligned}$$

On a

$$L_{25}=-(\gamma-\beta)^2\int_\gamma^\delta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx,$$

alors

$$
\begin{aligned}
ReL_{25} &= -Re\left(\frac{\partial u(\delta,t)}{\partial x}(\gamma-\beta)^2\frac{\partial\overline{u}(\delta,t)}{\partial t}\right)\\
&\quad +Re\left(\frac{\partial u(\gamma,t)}{\partial x}(\gamma-\beta)^2\frac{\partial\overline{u}(\gamma,t)}{\partial t}\right)\\
&\quad +Re\left(\int_\gamma^\delta\frac{\partial u}{\partial x}(\gamma-\beta)^2\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x\partial t}dx\right).
\end{aligned}
$$

Enfin, on a

$$
L_{26}=-\int_\delta^1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left[(1-x)^2\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}+2(1-x)\int_\delta^x\frac{\partial\overline{u}(\xi,t)}{\partial t}d\xi\right]dx,
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
ReL_{26} &= Re\left(\frac{\partial u(\delta,t)}{\partial x}(1-\delta)^2\frac{\partial\overline{u}(\delta,t)}{\partial t}\right)\\
&\quad +Re\left(\int_\delta^1\frac{\partial u}{\partial x}(1-x)^2\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x\partial t}dx\right)\\
&\quad -2Re\left(u(1,t)\int_\delta^1\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dx\right)+2Re\left(\int_\delta^1 u\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dx\right).
\end{aligned}
$$

Par suite

$$
\begin{gathered}
Re(L_2)=Re\left(\int_0^1 p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x\partial t}dx\right)\\
-2Re\left(u(0,t)\int_0^\alpha\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dx+u(\beta,t)\int_\beta^\gamma\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dx+u(\gamma,t)\int_\beta^\gamma\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dx+u(1,t)\int_\delta^1\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dx\right)\\
+2Re\left(\int_0^\alpha u\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dx+2\int_\beta^\gamma u\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dx+\int_\delta^1 u\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dx\right).
\end{gathered}
\tag{3.15}
$$

En tenant compte des conditions (3.3) et (3.4), alors (3.15) devienne

$$
Re(L_2)=Re\left(\int_0^1 p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x\partial t}dx\right)+2Re\left(\int_0^\alpha u\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dx+2\int_\beta^\gamma u\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dx+\int_\delta^1 u\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dx\right).
\tag{3.16}
$$

En remplaçant (3.14) et (3.16) dans (3.13), en multipliant par $\exp(-ct)$ et intégrant de 0 à τ on obtient

$$
Re\int_0^\tau\int_0^1\exp(-ct)\mathscr{L}u\overline{Mu}dxdt\geq\int_0^\tau\int_0^1 p(x)\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dxdt
$$

$$+Re\int_0^\tau\int_0^1 p(x)\exp(-ct)a\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x\partial t}dxdt+2Re\int_0^\tau\int_0^\alpha \exp(-ct)au\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dxdt$$

$$+4Re\int_0^\tau\int_\beta^\gamma \exp(-ct)au\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dxdt+2Re\int_0^\tau\int_\delta^1 \exp(-ct)au\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dxdt. \tag{3.17}$$

Intégrons par parties le deuxième, troixième, quatrième et le cinquième terme du membre droit de l'inégalité (3.17) par rapport à t en tenant compte de la condition initiale (3.2) et la condition (3.12) on obtient

$$Re\int_0^\tau\int_0^1 \exp(-ct)p(x)a(t)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x\partial t}dxdt \geq \int_0^1\frac{\exp(-c\tau)}{2}p(x)a(\tau)\left|\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\right|^2dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 p(x)a(0)\left|\frac{d\ell u}{dx}\right|^2dx, \tag{3.18}$$

$$Re\int_0^\tau\int_0^\alpha \exp(-ct)a(t)u\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dxdt \geq \int_0^\alpha\frac{\exp(-c\tau)}{2}a(\tau)|u(x,\tau)|^2dx-\int_0^\alpha\frac{a(0)}{2}|\ell u|^2dx, \tag{3.19}$$

$$Re\int_0^\tau\int_\beta^\gamma \exp(-ct)a(t)u\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dxdt \geq \int_\beta^\gamma\frac{\exp(-c\tau)}{2}a(\tau)|u(x,\tau)|^2dx-\int_\beta^\gamma\frac{a(0)}{2}|\ell u|^2dx, \tag{3.20}$$

$$Re\int_0^\tau\int_\delta^1 \exp(-ct)a(t)u\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dxdt \geq \int_\delta^1\frac{\exp(-c\tau)}{2}a(\tau)|u(x,\tau)|^2dx-\int_\delta^1\frac{a(0)}{2}|\ell u|^2dx. \tag{3.21}$$

En remplaçant (3.18), (3.19), (3.20) et (3.21) dans (3.17) on obtient

$$Re\int_0^\tau\int_0^1 \exp(-ct)\mathscr{L}u\overline{Mu}dxdt+\int_0^\alpha a(0)|\ell u|^2dx+2\int_\beta^\gamma a(0)|\ell u|^2dx$$

$$+\int_\delta^1 a(0)|\ell u|^2dx+\frac{1}{2}\int_0^1 p(x)a(0)\left|\frac{d\ell u}{dx}\right|^2dx \geq \int_0^\tau\int_0^1 p(x)\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dxdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1 \exp(-c\tau)p(x)a(\tau)\left|\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\right|^2dx+\int_0^\alpha \exp(-c\tau)a(\tau)|u(x,\tau)|^2dx$$

$$+2\int_\beta^\gamma \exp(-c\tau)a(\tau)|u(x,\tau)|^2dx+\int_\delta^1 \exp(-c\tau)a(\tau)|u(x,\tau)|^2dx. \tag{3.22}$$

En appliquant l'$\varepsilon-$ inégalité sur la première intégrale du membre gauche de l'inégalité (3.22) et le lemme 3.1.1 on a

$$
\begin{aligned}
Re\int_0^\tau\int_0^1 \exp(-ct)\mathcal{L}u\overline{Mu}\,dxdt \leq{}& 16\int_0^\tau\int_0^\alpha x^2\exp(-ct)|\mathcal{L}u|^2\,dxdt \\
&+\frac{17}{32}\int_0^\tau\int_0^\alpha x^2\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt \\
&+16\int_0^\tau\int_\alpha^\beta (\gamma-\beta)^2\exp(-ct)|\mathcal{L}u|^2\,dxdt+\frac{1}{64}\int_0^\tau\int_\alpha^\beta(\gamma-\beta)^2\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt \\
&+16\int_0^\tau\int_\beta^\gamma\left[(\gamma-x)^2+(x-\beta)^2\right]\exp(-ct)|\mathcal{L}u|^2\,dxdt \\
&+\frac{17}{32}\int_0^\tau\int_\beta^\gamma\left[(\gamma-x)^2+(x-\beta)^2\right]\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt \\
&+16\int_0^\tau\int_\gamma^\delta (\gamma-\beta)^2\exp(-ct)|\mathcal{L}u|^2\,dxdt+\frac{1}{64}\int_0^\tau\int_\gamma^\delta(\gamma-\beta)^2\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt \\
&+16\int_0^\tau\int_\delta^1 (1-x)^2\exp(-ct)|\mathcal{L}u|^2\,dxdt+\frac{17}{32}\int_0^\tau\int_\delta^1(1-x)^2\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt. \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

De (3.23) on tire que

$$
\begin{aligned}
Re\int_0^\tau\int_0^1 \exp(-ct)\mathcal{L}u\overline{Mu}\,dxdt \leq{}& 16\int_0^\tau\int_0^1 p(x)\exp(-ct)|\mathcal{L}u|^2\,dxdt \\
&+\frac{17}{32}\int_0^\tau\int_0^1 p(x)\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt. \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

On combine (3.22) et (3.24) on obtient

$$
\begin{aligned}
&\frac{15}{32}\int_0^\tau\int_0^1 p(x)\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt+\frac{1}{2}\int_0^1\exp(-c\tau)p(x)a(\tau)\left|\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\right|^2 dx \\
&+\int_0^\alpha \exp(-c\tau)a(\tau)|u(x,\tau)|^2\,dx+2\int_\beta^\gamma\exp(-c\tau)a(\tau)|u(x,\tau)|^2\,dx \\
&+\int_\delta^1\exp(-c\tau)a(\tau)|u(x,\tau)|^2\,dx \leq 16\int_0^\tau\int_0^1 p(x)\exp(-ct)|\mathcal{L}u|^2\,dxdt
\end{aligned}
$$

$$+\int_0^{\alpha} a(0)|\ell u|^2\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1 p(x)a(0)\left|\frac{d\ell u}{dx}\right|^2 dx+2\int_{\beta}^{\gamma} a(0)|\ell u|^2\,dx+\int_{\delta}^1 a(0)|\ell u|^2\,dx. \tag{3.25}$$

de l'équation (3.1) on a

$$a^2(t)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2 \leq 2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+2|\mathscr{L}u|^2,$$

d'où

$$\frac{c_0^2}{6}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2 \leq \frac{1}{3}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+\frac{1}{3}|\mathscr{L}u|^2,$$

par suite on a

$$\frac{c_0^2}{2}\int_0^{\tau}\int_0^1 \frac{p(x)}{3}\exp(-ct)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2 dx\,dt \leq \int_0^{\tau}\int_0^1 \frac{p(x)}{3}\exp(-ct)|\mathscr{L}u|^2\,dx\,dt$$

$$+\int_0^{\tau}\int_0^1 \frac{p(x)}{3}\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx\,dt. \tag{3.26}$$

En combinant les inégalités (3.25) et (3.26) on obtient

$$\exp(-cT)\left(\frac{13}{32}\int_0^{\tau}\int_0^1 \frac{p(x)}{3}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx\,dt+c_0\int_0^1 \frac{p(x)}{2}\left|\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\right|^2 dx\right.$$

$$+c_0\int_0^{\alpha}|u(x,\tau)|^2\,dx+2c_0\int_{\beta}^{\gamma}|u(x,\tau)|^2\,dx+c_0\int_{\delta}^1|u(x,\tau)|^2\,dx$$

$$\left.+\frac{c_0^2}{2}\int_0^{\tau}\int_0^1 \frac{p(x)}{3}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2 dx\,dt\right) \leq 49\int_{\Omega}\frac{p(x)}{3}|\mathscr{L}u|^2\,dx\,dt+c_1\int_0^1 \frac{p(x)}{2}\left|\frac{d\ell u}{dx}\right|^2 dx$$

$$+c_1\int_0^{\alpha}|\ell u|^2\,dx+2c_1\int_{\beta}^{\gamma}|\ell u|^2\,dx+c_1\int_{\delta}^1|\ell u|^2\,dx. \tag{3.27}$$

Comme le membre de droit de (3.27) est indépendant de τ, en prenant le sup du membre gauche par rapport à τ sur l'intervalle $[0;T]$, on obtient l'inégalité désirée.

3.3 Résolvabilité du problème

Des estimations (3.7) et (3.11) on déduit que l'opérateur $L : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ est continu et que son image $R(L)$ est fermée dans $\mathbb{F}$. D'où l'opérateur inverse L^{-1} existe et est continu de $R(L)$ dans $\mathbb{E}$, ainsi L est un homéomorphisme de $\mathbb{E}$ dans $R(L)$.
Pour obtenir l'existence de la solution, il suffit de montrer que $R(L) = \mathbb{F}$. La démonstration est basée sur le lemme suivant :

Lemme 3.3.1. *Soit*

$$D_0(L) = \{u \in E : \ell u = 0\}$$

Si pour $u \in D_0(L)$ et une certaine $w \in L_2(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega q(x)\mathscr{L} u\overline{w}dxdt = 0, \tag{3.28}$$

où

$$q(x) = \begin{cases} x, & x \in]0, \alpha], \\ \gamma - \beta, & x \in [\alpha, \delta], \\ 1 - x, & x \in [\delta, 1[, \end{cases}$$

Alors, $w = 0$.

Preuve De (3.28) on a

$$\int_\Omega q(x)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{w}dxdt = \int_\Omega q(x)a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\overline{w}dxdt. \tag{3.29}$$

Pour la fonction $w(x,t)$ donnée, de l'égalité (3.28) on définit la fonction

$$v(x,t) = \begin{cases} w(x,t) - \displaystyle\int_x^\alpha \frac{w(\xi,t)}{\xi}d\xi, & x \in]0,\alpha], \\ w(x,t), & x \in [\alpha, \delta], \\ w(x,t) - \displaystyle\int_\delta^x \frac{w(\xi,t)}{\xi}d\xi, & x \in [\delta, 1[. \end{cases}$$

Une intégration par parties par rapport à ξ nous donne

$$q(x)w = \begin{cases} xv + \displaystyle\int_x^\alpha v(\xi,t)d\xi, & x \in]0,\alpha] \\ (\gamma - \beta)v, & x \in [\alpha,\beta] \cup [\gamma,\delta] \\ (\gamma-\beta)v + \displaystyle\int_\beta^\gamma v(\xi,t)d\xi, & x \in [\beta,\gamma] \\ (1-x)v + \displaystyle\int_\delta^x v(\xi,t)d\xi, & x \in [\delta, 1[\end{cases}$$

ceci implique que

$$\int_0^{\alpha} v(\xi,t)d\xi = 0,\ \int_{\beta}^{\gamma} v(\xi,t)d\xi = 0,\ \int_{\delta}^{1} v(\xi,t)d\xi = 0,$$

i.e.

$$\int_0^{\alpha} v(\xi,t)d\xi + 2\int_{\beta}^{\gamma} v(\xi,t)d\xi + \int_{\delta}^{1} v(\xi,t)d\xi = 0.$$

On remplace dans (3.29) $q(x)w$ par Nv on obtient

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}\overline{Nv}dxdt = \int_{\Omega} a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\overline{Nv}dxdt.$$

Donc

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}\overline{Nv}dxdt &= -\int_0^T\int_0^{\alpha} a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x\overline{v} + \int_x^{\alpha}\overline{v}(\xi,t)d\xi\right) \\
&\quad -\int_0^T\int_{\alpha}^{\beta} a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\gamma-\beta)\overline{v}dxdt \\
&\quad -\int_0^T\int_{\beta}^{\gamma} a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left((\gamma-\beta)\overline{v} + \int_{\beta}^{\gamma}\overline{v}(\xi,t)d\xi\right)dxdt \\
&\quad -\int_0^T\int_{\gamma}^{\delta} a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\gamma-\beta)\overline{v}dxdt \\
&\quad -\int_0^T\int_{\delta}^{1} a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left((1-x)\overline{v} + \int_{\delta}^{x}\overline{v}(\xi,t)d\xi\right)dxdt.
\end{aligned}$$

Une intégration par parties par rapport à x, donne

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}\overline{Nv}dxdt &= -\int_0^T\int_0^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x}\left(a(t)x\frac{\partial u}{\partial x}\right)\overline{v}dxdt \\
&\quad -\int_0^T\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial x}\left(a(t)(\gamma-\beta)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\overline{v}dxdt \\
&\quad -\int_0^T\int_{\beta}^{\gamma} \frac{\partial}{\partial x}\left(a(t)(\gamma-\beta)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\overline{v}dxdt \\
&\quad -\int_0^T\int_{\gamma}^{\delta} \frac{\partial}{\partial x}\left(a(t)(\gamma-\beta)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\overline{v}dxdt \\
&\quad -\int_0^T\int_{\delta}^{1} \frac{\partial}{\partial x}\left(a(t)(1-x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\overline{v}dxdt.
\end{aligned}$$

D'où
$$-\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial t}\overline{Nv}dxdt=\int_{\Omega}A(t)u\overline{v}dxdt, \tag{3.30}$$
où
$$Nv=q(x)v,$$
et
$$A(t)u=-\frac{\partial}{\partial x}\left(q(x)a(t)\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$
Introduisons les opérateurs de régularisation par rapport à t [18], [22], [23] et [24], $J_{\varepsilon}^{-1}=\left(I+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1}$ et $\left(J_{\varepsilon}^{-1}\right)^{*}$
alors ces opérateurs fournissent les solutions des problèmes respectifs :
$$\varepsilon\frac{dg_{\varepsilon}(t)}{dt}+g_{\varepsilon}(t)=g(t)\,g_{\varepsilon}(t)|_{t=0}=0 \tag{3.31}$$
et
$$-\varepsilon\frac{dg_{\varepsilon}^{*}(t)}{dt}+g_{\varepsilon}^{*}(t)=g(t)\,g_{\varepsilon}^{*}(t)|_{t=T}=0 \tag{3.32}$$
et ces opérateurs vérifient les propriétés suivantes :
Pour $g\in L_2(0,T)$, les fonctions $g_{\varepsilon}=\left(J_{\varepsilon}^{-1}\right)g$ et $g_{\varepsilon}^{*}=\left(J_{\varepsilon}^{-1}\right)^{*}g$ sont dans $W_2^1(0,T)$ telles que
$$g_{\varepsilon}\,|_{t=0}=0 \text{ et } g_{\varepsilon}^{*}\,|_{t=T}=0.$$
D'ailleurs, J_{ε}^{-1} commute avec $\frac{\partial}{\partial t}$, et on a
$$\int_0^T|g_{\varepsilon}-g|^2dt\longrightarrow 0,\quad \int_0^T\left|g_{\varepsilon}^{*}-g\right|^2dt\longrightarrow 0 \quad \text{pour } \varepsilon\longrightarrow 0.$$
En remplaçant
$$u=\int_0^t\exp(c\tau)v_{\varepsilon}^{*}(x,\tau)d\tau$$
dans (3.30), où la constante c satisfait
$$cc_0-c_3-\frac{\varepsilon c_3^2}{c_0}\geq 0 \tag{3.33}$$
et en utilisant (3.32), on obtient
$$-\int_{\Omega}\exp(ct)v_{\varepsilon}^{*}\overline{Nv}dxdt=\int_{\Omega}A(t)u\exp(-ct)\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dxdt-\varepsilon\int_{\Omega}A(t)u\frac{\partial\overline{v_{\varepsilon}^{*}}}{\partial t}dxdt. \tag{3.34}$$

Intégrons par parties le prmier terme du membre droit de (3.34) par rapport à x, ensuite par rapport à t, on trouve

$$\begin{aligned}\int_\Omega A(t)u\exp(-ct)\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dxdt &= -\int_0^T\left[\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left(q(x)a(t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\exp(-ct)\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dx\right]dt\\ &= \int_\Omega q(x)a(t)\frac{\partial u}{\partial x}\exp(-ct)\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x\partial t}dxdt.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\int_\Omega q(x)a(t)\frac{\partial u}{\partial x}\exp(-ct)\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x\partial t}dxdt &= \int_0^1\left[\int_0^T q(x)a(t)\frac{\partial u}{\partial x}\exp(-ct)\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial\overline{u}}{\partial x})dt\right]dx\\ &= \left[\int_0^1 q(x)a(t)\frac{\partial u}{\partial x}\exp(-ct)\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}dx\right]_0^T\\ &\quad -\int_\Omega q(x)\frac{da(t)}{dt}\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2dxdt\\ &\quad +c\int_\Omega q(x)a(t)\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2dxdt\\ &\quad -\int_\Omega q(x)a(t)\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}\exp(-ct)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}dxdt.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}Re\int_\Omega A(t)u\exp(-ct)\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dxdt &= \frac{1}{2}\int_0^1 a(T)q(x)\exp(-cT)\left|\frac{\partial u(x,T)}{\partial t}\right|^2dx\\ &+\frac{1}{2}\int_\Omega q(x)\exp(-ct)\left(ca(t)-\frac{da(t)}{dt}\right)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2dxdt.\end{aligned}\tag{3.35}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}-\varepsilon\int_\Omega A(t)u\frac{\partial\overline{v_\varepsilon^*}}{\partial t}dxdt &= \varepsilon\int_0^1\left[\int_0^T\frac{\partial}{\partial x}\left(q(x)a(t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial t}(\overline{v_\varepsilon^*})dt\right]dx=\\ -\varepsilon\int_\Omega\overline{v_\varepsilon^*}\frac{\partial}{\partial x}&\left(q(x)\frac{da(t)}{dt}\frac{\partial u}{\partial x}\right)dxdt-\varepsilon\int_\Omega\overline{v_\varepsilon^*}\frac{\partial}{\partial x}\left(q(x)a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right)dxdt.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
-\varepsilon\int_{\Omega}\overline{v_{\varepsilon}^{*}}\frac{\partial}{\partial x}\left(q(x)\frac{da(t)}{dt}\frac{\partial u}{\partial x}\right)dxdt &= -\varepsilon\int_{0}^{T}\left[\int_{0}^{1}\overline{v_{\varepsilon}^{*}}\frac{\partial}{\partial x}\left(q(x)\frac{da(t)}{dt}\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx\right]dt\\
&= \varepsilon\int_{\Omega}\frac{\partial\overline{v_{\varepsilon}^{*}}}{\partial x}q(x)\frac{da(t)}{dt}\frac{\partial u}{\partial x}dxdt,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
-\varepsilon\int_{\Omega}\overline{v_{\varepsilon}^{*}}\frac{\partial}{\partial x}\left(q(x)a(t)\frac{\partial^{2}u}{\partial x\partial t}\right)dxdt &= -\varepsilon\int_{0}^{T}\left[\int_{0}^{1}\overline{v_{\varepsilon}^{*}}\frac{\partial}{\partial x}\left(q(x)a(t)\frac{\partial^{2}u}{\partial x\partial t}\right)dx\right]dt\\
&= \varepsilon\int_{\Omega}\frac{\partial\overline{v_{\varepsilon}^{*}}}{\partial x}q(x)a(t)\frac{\partial^{2}u}{\partial x\partial t}dxdt\\
&= \varepsilon\int_{\Omega}q(x)a(t)\exp(ct)\left|\frac{\partial v_{\varepsilon}^{*}}{\partial x}\right|^{2}dxdt.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
Re\left(-\varepsilon\int_{\Omega}A(t)u\frac{\partial\overline{v_{\varepsilon}^{*}}}{\partial t}dxdt\right) = Re\left(\varepsilon\int_{\Omega}\frac{\partial\overline{v_{\varepsilon}^{*}}}{\partial x}q(x)\frac{da(t)}{dt}\frac{\partial u}{\partial x}dxdt\right)&\\
+\varepsilon\int_{\Omega}q(x)a(t)\exp(ct)\left|\frac{\partial v_{\varepsilon}^{*}}{\partial x}\right|^{2}dxdt.& \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

En utilisant l'ε-inégalité sur le premier terme du membre droit de (3.36), on aura

$$\begin{aligned}
Re\left(\frac{\partial\overline{v_{\varepsilon}^{*}}}{\partial x}\frac{da(t)}{dt}\frac{\partial u}{\partial x}\right) &\geq -\left|\frac{\partial\overline{v_{\varepsilon}^{*}}}{\partial x}\right|\left|\frac{da(t)}{dt}\right|\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\\
&\geq -\frac{1}{2c_{0}}\exp(-ct)\left|\frac{da(t)}{dt}\right|^{2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{2}-\frac{c_{0}}{2}\exp(ct)\left|\frac{\partial v_{\varepsilon}^{*}}{\partial x}\right|^{2},
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
Re\left(\varepsilon\int_{\Omega}\frac{\partial\overline{v_{\varepsilon}^{*}}}{\partial x}q(x)\frac{da(t)}{dt}\frac{\partial u}{\partial x}dxdt\right) &\geq -\frac{\varepsilon}{2c_{0}}\int_{\Omega}q(x)\exp(-ct)\left|\frac{da(t)}{dt}\right|^{2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{2}dxdt\\
&\quad -\frac{\varepsilon c_{0}}{2}\int_{\Omega}q(x)\exp(ct)\left|\frac{\partial v_{\varepsilon}^{*}}{\partial x}\right|^{2}dxdt\\
&\geq -\frac{\varepsilon c_{3}^{2}}{2c_{0}}\int_{\Omega}q(x)\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{2}dxdt\\
&\quad -\frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega}q(x)a(t)\exp(ct)\left|\frac{\partial v_{\varepsilon}^{*}}{\partial x}\right|^{2}dxdt.
\end{aligned}$$

Alors (3.36) devienne

$$Re\left(-\varepsilon\int_{\Omega}A(t)u\frac{\partial\overline{v_{\varepsilon}^{*}}}{\partial t}dxdt\right)\geq-\frac{\varepsilon c_{3}^{2}}{2c_{0}}\int_{\Omega}q(x)\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{2}dxdt. \tag{3.37}$$

En combinant (3.34), (3.35) et (3.37),en tenant compte de (3.33) on tire que

$$Re\left(\int_{\Omega}\exp(ct)v_{\varepsilon}^{*}\overline{Nv}dxdt\right)\leq-\int_{\Omega}q(x)\exp(-ct)\left(cc_{0}-c_{3}-\frac{\varepsilon c_{3}^{2}}{c_{0}}\right)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{2}dxdt\leq0,$$

i.e.

$$Re\left(\int_{\Omega}\exp(ct)v_{\varepsilon}^{*}\overline{Nv}dxdt\right)\leq0. \tag{3.38}$$

Alors, pour $\varepsilon\to0$ on obtient

$$Re\int_{\Omega}\exp(ct)v\overline{Nv}dxdt=\int_{\Omega}q(x)\exp(ct)|v|^{2}dxdt\leq0.$$

On conclut alors que $v=0$, donc $w=0$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Théorème 3.3.1. *L'image $R(L)$ de L coincide avec $\mathbb{F}$.*

Preuve De l'inégalité (3.7) résulte que l'opérateur $L:\mathbb{E}\to\mathbb{F}$ est continu, et l'inégalité (3.11) montre que l'opérateur inverse L^{-1}existe et aussi continu, et que $R(L)$ l'image de L est fermeé. Par suite l'opérateur L est un homéomorphisme de $\mathbb{E}$ vers l'ensemble fermé $R(L)$. Si on arrive à démontrer que $R(L)=\mathbb{F}$, dans ce cas L devient un homéomorphisme de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$.
D'où pour chaque $F=(f,\varphi)\in\mathbb{F}$ le problème (3.1)-(3.4) admet une solution unique qui est $u=L^{-1}(F)$.En effet,comme $\mathbb{F}$ est un espace de Hilbert, on a $R(L)=\mathbb{F}$ si et seulement si la relation

$$\int_{\Omega}\frac{p(x)}{3}\mathscr{L}u\overline{f}dxdt+\int_{0}^{1}\frac{p(x)}{2}\frac{d\ell u}{dx}\frac{d\overline{\varphi}}{dx}dx+\int_{0}^{\alpha}\ell u\overline{\varphi}dx+\int_{\beta}^{\gamma}\ell u\overline{\varphi}dx+\int_{\delta}^{1}\ell u\overline{\varphi}dx=0, \tag{3.39}$$

pour tout $u\in\mathbb{E}$ et pour tout $(f,\varphi)\in\mathbb{F}$, implique que $f=0$ et $\varphi=0$.
Soit $u\in D_{0}(L)$ alors de (3.39), on conclut à partir du lemme 3.2.1 que $\theta f=0$, alors $f=0$; où

$$\theta f=\begin{cases}xf, & x\in]0,\alpha],\\(\gamma-\beta)f, & x\in[\alpha,\delta],\\(1-x)f, & x\in[\delta,1[,\end{cases}$$

En prenant $u\in E$ dans (3.39), on obtient :

$$\int_{0}^{1}\frac{p(x)}{2}\frac{d\ell u}{dx}\frac{d\overline{\varphi}}{dx}dx+\int_{0}^{\alpha}\ell u\overline{\varphi}dx+\int_{\beta}^{\gamma}\ell u\overline{\varphi}dx+\int_{\delta}^{1}\ell u\overline{\varphi}dx=0.$$

Comme l'image de l'opérateur trace ℓ est partout dense dans l'espace de Hilbert muni de la norme

$$\left[\int_0^1 \frac{p(x)}{2}\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 dx + \int_0^{\alpha} |\varphi|^2\, dx + \int_{\beta}^{\gamma} |\varphi|^2\, dx + \int_{\delta}^{1} |\varphi|^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}},$$

alors $\varphi = 0$.

Bibliographie

[1] Allegretto W., Lin Y., and Zhou A., *Abox schememe for coupled systems resulting from micro-sensor thermistor problems*, Dynam. Contin. Discete Impuls. Systems, **5** (1999), 1-4, 573-578.

[2] Batten G. W. Jr., *Second-order correct boundary conditions for the numerical solution of mixed boundary problem for parabolic equations*, Math. Comp., **17** (1963), 405-413.

[3] Beilin A. B., *Existence of solutions for one-dimentional wave equation with a nonlocal condition*, Electron. J. Diff. Eqs., Vol. 2001 (2001), No 76 , 1-8.

[4] Benouar N.E. and Yurchuk N.I., *Mixed Problem with an integral condition for parabolic equations with the Bessel operator*, Diff. Equations, (1991) **27**, N 12 ; pp. 1482-1487.

[5] Bouziani A. and Benouar N.E., *Mixed Problem with an integral condition for a third order parabolic equation*, Kobe J. Math., (1998) **15**, 47-58.

[6] Cahlon B., Kulkarni D. M. and Shi P., *Stepwise stability for the heat equation with non local constraint*, SIAM J. Numer. Anal., **32** (1995), 2, 571-593.

[7] Cannarasa P. and Vespri V., *On Maximal Lp-regularity for abstract Cauchy problem*, Boll. Unione Mat. Italiana, (1986), 165-175.

[8] J.R. Cannon, *The solution of the heat equation subject to the specification of energy*, Quart. Appl. Math., **21** (1963), 155-160.

[9] Cannon J.R., **The one-dimensional heat equation**, in encyclopedia of mathematics and its applications **23**, Addison-Wesley, Mento Park, CA (1984).

[10] Cannon J.R., Perez Esteva S. and Van Der Hoek J., *A Galerkin procedure for the diffusion equation subject to the specification of mass*, Siam J. Numer. Anal., **24** (1987), 499-515.

[11] Choi Y.S. and Chan K.Y., *A parabolic equation with nonlocal boundary conditions arising from electrochemistry*, Nonlinear Anal., **18** (1992), 468-475.

[12] Chouiter F., Problèmes mixtes avec conditions aux limites du type non classique, Mémoire de Magister, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences Exactes, Université Mentouri Constantine, mars (2001).

[13] Day W. A., *A decreasing property of solutions of parabolic equations with applications to thermoelasticity*, Quart. Appl. Math., **40** (1982), 4, 319-330.

[14] Day W. A., *Extensions of a property of the heat equation to linear thermoelasticity and other theories*, Quart. Appl. Math., **41** (1983), 3, 319-330.

[15] Denche M. and Marhoune A.L., *High-order mixed type differential equations with weighted integral boundary conditions*, Electronic journal of differential equation, Vol. 2000 (2000), No 60, 1-10.

[16] Denche M. and Marhoune A.L., *Mixed problem with non local boundary conditions for a third-order partial differential equation of mixed type*, IJMMS **26** : 7(2001) 417-426.

[17] Denche M. and Marhoune A.L., *Mixed problem with integral boundary condition for a high order mixed type partial differential equation*, Journal of applied mathematics and stochastic analysis, **16** : 1 (2003), 69-79.

[18] Denche M. and Marhoune A.L., *A three-point boundary value problem with an integral condition for parabolic equations with the Bessel operator*, Applied mathematics letters, **13** (2000) 85-89.

[19] Denche M. and Memou A., *Boundary value problem with integral conditions for a linear third-order equation*, J. Appl. Math., (2003), No 11, 553-567.

[20] Dezin A. A., *Théoremes d'existence et d'unicité de la solution pour les problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles dans les espaces fonctionnels*, Usp. Math.Naouk, T. 14 (1987), No 3, 22-73.

[21] Ewing R.E. and Lin T., *A class of parameter estimation techniques for fluid flow in porous media*, Adv. Water Ressources, **14** (1991), 89-97.

[22] Friderichs K., *Symetric hyperbolic linear differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., **7**, N 2 (1954), 345-392.

[23] Garding L., **Cauchy's problem for hypebolic equations**, University of Chicago, Lecture notes, 1957.

[24] Hardy G.H., Littlewood J.E. & Polya G., **Inequalities**, Cambridge Press, 1934. Zbl 0010.10703 j JFM 60.0169.01.

[25] Hieber M. and Prüss J., *Heat Kernels and Maximal Lp-Lq estimates for parabolic evolution equations*, Comm. Partial Differential Equations, **22**, (1997), 1647-1669.

[26] Ionkin N.I., *Stability of a problem in Heat-condition*, Differentsial'nye Uravnenya, (1977) **13** No 2, 294-304.

[27] Ionkin N.I, *A problem for the Heat-condition equation with a tow-point boundary condition*, Differentsial'nye Uravnenya, (1979) **15** No 7, 1284-1295.

[28] Kamynin N.I., *A boundary value problem in the theory of the heat condition with non classical boundary conditions*, Th. Vychist. Mat. Fiz., (1964) Vol. 43, No 6, 1006-1024.

[29] Kartynnik A.V., Three-point boundary-value problem with an integral space-variable condition for a second-order parabolic equation, Differ. Equations, (1990) **26**, No 9, 1160-1166.

[30] Ladyzhenskaya O. A., **Mixed problem for hyperbolic equations**, Edition Mir nauka, 1974.

[31] Latrous C., *Mixed problem with integral boundary conditions for a third order partial differential equation*, Tr. Inst. Mat., Minsk, (2004), **6**, 115-119.

[32] Latrous C., Memou A., *A three-point boundary value problem with an integral condition for a third-order partial diffrential equation*, Abstract and Applied Analysis, **1**, (2005), 33-44.

[33] Marhoune A.L. and Bouzit M., *High-order differential equations with integral boundary condition*, Far East J.Math. Sci. (FJMS), **18**(3) (2005), 341-350.

[34] Marhoune A.L., *A three-point boundary value problem with an integral two-space variables condition for parabolic equations*, Computers and Mathematics with Applications **53** (2007), 940-947.

[35] Marhoune A. L. and Hameida A., *Mixed Problem With an Integral Space Variable Condition for a Third Order Parabolic Equation of Mixed Type*, Far East J. Math. Sci. (FJMS)**29**(2)(2008),409-418.

[36] Marhoune A.L. and Latrous C., *A strong solution of a high order mixed type partial differential equation with integral conditions*, Applicable analysis Vol. 87, No. 6, June (2008), 625-634.

[37] Muravei L.A., Philinovskii A.V., *On a certain non-local boundary-value problem for hyperbolic equation*, Matem. Zametski, **54**(1993), 98-116.

[38] Leray J., **Lecture on hyperbolic differential equations with variable coefficiens**, Princeton,Justfor adv. Study, 1952.

[39] Petrovsky I. G., *Uber Das Cauchyshe problem for system von linearen partiallen differentialgeichungen in gebit der nichtanalystischen funktionen*, Bull. Univ d'etat, Moscow, (1938), N0 7, 1-74.

[40] Prüss J. and Simonet G., *Maximal regularity for evolution equations in weighted Lp-spaces*, Fachbereich Mathematik und Informatik, Martin-Luter-Universität Halle-Wittenberg, July (2002).

[41] Pulkina L. S., *A non local problem with integral conditions for hyperbolic equations*, Electronic Journal of Differential Equations, **45** (1999), 1-6.

[42] Rebbani F., Chesalyn V. I., *Problèmes aux limites pour équations différentielles d'ordre impair dans le rectangle*, Izvestia Akad. Nauk. BSSR (en Russe), Serie Phys. Math. Nauk, No 3 (1985).

[43] Rebbani F., Chesalyn V. I., *Problèmes aux limites pour équations différentielles opérationnelles dans le rectangle*, Doklady Akad. Nauk. BSSR (en Russe), T.30 No 12, pp. 1061-1063.

[44] Samarskii, A.A., *Some problem in differential equations theory*, Differentsial'nye Uravnenya, (1980), **16** No 11, 1221-1228.

[45] P. Shi, *Weak solution to evolution problem with a nonlocal constraint*, Siam J. Anal., **24** (1993), 46-58.

[46] P. Shi and M. Shillor, **Design of Contact Patterns in One Dimentional Thermoelasticity**, in Theoretical Aspects of Industrial Design, Society for Industrial and Applied Mathematics,Philadelphia, PA, 1992.

[47] Tanabe H., **Equations of evolution**, Pitman publishing limited, London, (1979).

[48] Yurchuk N. I., *Boundary value problems for equations whose principal part contains operators of the form* $\left(\frac{d^{2m}}{dt^{2m+1}}\right)+A$, Differential Equations, 10, No 4 (1974), 589-592.

[49] Yurchuk N. I., *Boundary value problems for equations whose principal part contains operators of the form* $\left(\frac{d^{2m}}{dt^{2m}}\right)+A$, Differential Equations, 10, No 5 (1974), 735-737.

[50] Yurchuk N. I., *A priori estimates of solutions of boundary value problems for certain differential equations*, Differential Equations, **12**, No 4 (1976), 512-518.

[51] Yurchuk N. I., *Boundary value problems for differential equations whith operator valued coefficients depending on parameter*, Differential Equations, **12**, No 9 (1976), 1157-1168.

[52] Yurchuk N. I., *Solvability of boundary value problems for certain differential operationels equations*, Differential Equations, **13**, No 4 (1977), 423-429.

[53] Yurchuk N. I., *The energy inequality method in the investigation of certain degenerate linear operational differential equations*, Differential Equations, **14**, No 12 (1978), 1558-1567.

[54] Yurchuk N. I., The method of energy inequalities in the study of operator-differential equations, Dissertation, Moscow, (1981).

[55] Yurchuk N. I., *Mixed problem for parabolic equations of variable order*, Soviet. Math. Dokl. **26** No 12 (1982), 39-41.

[56] Yurchuk N. I., *Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations*, Differential Equations, **22**, (1986), 1457-1463.