RÉPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MENTOURI - CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre :..............................
Série :......................................

THESE

Présentée pour obtenir

Le GRADE de **DOCTEUR EN SCIENCES**

E n: **Mathématiques**

Sujet:

Etude de Quelques Classes d'Equations et Systèmes d'Equations aux Dérivées Partielles

Option :

Equations aux Dérivées Partielles

Présentée par :

Mesloub Fatiha

Devant le jury :

Président : *Marhoune A. Lakhdar* *Professeur Université de Constantine.*
Rapporteur : *Mesloub Said* *Professeur King Saud University.*
Examinateurs :
1. *Tatar Nasser-eddine* *Professeur King Fahd University.*
2 Hamri Nasserddine *Professeur C.U. Milla..*
3. Aibeche Aissa *Professeur Université de Setif.*
4. Guzzane Assia *Professeur Université de Annaba.*
5. Abdelli Mouloud *MC Université de Constantine.*

Soutenue le :… … … ..

Remerciements

Tout d'abord nous rendons grâce à Dieu tout puissant qui nous a permis d'achever ce travail dans de bonnes conditions.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon encadreur Prof. Mesloub Said prof au King Saud University, pour m'avoir proposé ce travail. Pour sa disponibilité et avoir su m'initiée à la recherche.

Je remercie Prof. Marhoune A. Lakhdar, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de ce thèse.

Je remercie également Prof.Tatar Nasser-eddine, Prof. Abdelli Mouloud, Prof. Guzzan Assia, Prof. Aibech Aissa et Prof. Hamri Nasserddine, d'avoir accepté d'examiner ce travail et faire partie du jury.

Table des matières

0 Introduction **3**

1 Notions préliminaires **9**

2 Étude d'un problème mixte nonlocal pour une équation viscoélastique singuliere non linéaire **17**

2.1 Formulation du problème 18

2.2 Problème linéaire associé 19

2.3 Unicité de la solution 20

2.4 Existence de la solution 28

2.5 Problème non linéaire 33

3 Sur un système couplé de thermoélasticité non linéaire singulière **43**

3.1 Position du problème 44

3.2 Espaces Fonctionnels Associés 45

3.3 Estimation a priori et ses consequences 46

3.4 Existence de la solution du problème posé 51

3.5 Problème Non linéaire 56

4 Sur une équation de dimension supérieure de Boussinesq avec condition non classique **73**

4.1 L'existence de la solution du problème 75
4.2 Unicité de la solution 85

Chapitre 0

Introduction

Les modèles mathématiques pour les problèmes mixtes avec des contraintes au bord non locales se presentent dans de nombreux modèles d'ingénierie tels que la conduction de chaleur, désintégration radioactive nucléaire dans les flux de fluide, flux non-newtonienne, déformations viscoélastiques des matériaux à mémoire (en particulier polymers), la modélisation des semi-conducteurs, le plasma de la physique, la dynamique des populations, thérmoelasticité , Les problèmes de vibrations, la diffusion chimique, dynamique des réacteurs nucléaires, la théorie du contrôle, les sciences medicales, écoulement souterrain de l'eau, la théorie de la transmission et de certains processus biologiques. Les conditions standard (Dirichlet, Neumann et le type Robin) qui sont prescrites ponctuellement ne sont pas toujours suffisantes car elle dépendent du contexte physique dont les données peuvent être mesurés au bord du domaine physique.

Beaucoup de phénomènes physiques sont modélisés par des problèmes aux limites non classiques qui relient les valeurs de la fonction inconnue sur la frontière et à l'intérieur du domaine comme la condition intégrale sur le domaine spatial d'une fonction de la solution cherchée. Les conditions aux limites non locales apparaissent principalement lorsque les données sur la frontiere ne peuvent pas êtres mesurées directement, mais seulement leurs valeurs moyennes sont connues. Plus precisement, dans certains cas, il n'est pas possible de prescrire la solution u (pression, température, ...) ponctuellement, parce que la valeur moyenne de la solution peut être mesurée le long de la frontière ou sur une partie de celui-ci.

La signification physique des conditions non locales, telle qu'une moyenne, la masse totale, moments, etc, a servi comme cause fondamentale de l'intérêt considérable de ce genre de problèmes aux limites.

Les problèmes non locaux, spcialement avec conditions integrales sont généralement rencontrées en génie chimique, la transmission de chaleur, la physique des plasmas, la transmission de chaleur, thermoelsticity. Voir à ce sujet les articles de Ewing et Lin [13], Choi et Chan [10], Shi et Shilor [45], Bouziani [5]. Pour certains problèmes hyperboliques non locaux mixtes, le lecteur devrait consulter les travaux effectués par Beilin [2], Mesloub Lekrine [33], Mesloub et Messaoudi [34-35], Mesloub et Bouziani [30], Muravei Philinovskii [42], Nukushev [42], et Pulkina [43]. Des travaux récents concernant les problèmes mixtes non linéaires non locaux peuvent êtres trouvés dans Mesloub [27-28-29]. En utilisant la méthode du potentiel, Cannon [6], et Kamynin [18] ont traité des équations paraboliques.

Aussi pour certains modèles paraboliques et en utilisant la méthode de Fourier, Ionkin [16], Ionkin et Moiseev [17] ont obtenu des résultats d'existence et d'unicité de la solution.

Concernant la méthode d'analyse fonctionnelle (Méthode de l'énergie) nous citons les travaux de Bouziani [3], Mesloub [27-29], Kartynik [19], et Mesloub Bouziani [31-32], et Mesloub Lekrine [33].

Pour le cas hyperbolique, nous citons les travaux de Mesloub et Bouziani [30], Muravei Philinovskii [41], et Pulkina [43]. Pour le cas pseudoparabolic, nous citons les travaux de Bouziani [4] et de Mesloub [26]. Pour le cas des problèmes aux limites a valeurs initiales pour les équations viscoélastique linéaires et non linéaires avec des conditions classique on peut citer par exemple, Cavalcanti et al. [8] qui ont établit un taux de décroissance exponentielle de l'équation

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-\tau)\,\Delta u(\tau)\,d\tau - a(x)\,u_t + |u|^\gamma\,u = 0, \quad \text{dans} \ \ \Omega \times (0,\infty),$$

où $a: \ \Omega \to \mathbb{R}^+$ est une fonction qui peut etre nulle sur une partie $\omega \subset \Omega$ de mesure positive. Les résultats ont été obtenus en vertu de certaines restrictions sur la géométrie de ω et tel que $a(x) \geq a_0 > 0$, $\forall x \in \omega$, $\xi_1 g(t) \leq g'(t) \leq \xi_2 g(t)$, $t \geq 0$. Dans un autre travail, Cavalcanti et al. [

9] ont amélioré les résultats dans [8] en considérant l'équation

$$u_{tt}-k_0\Delta u+\int_0^t \operatorname{div}\left[a\left(x\right)g\left(t-\tau\right)\nabla u\left(\tau\right)\right]d\tau+b\left(x\right)h\left(u_t\right)+f\left(u\right)=0,$$

sous des conditions similaires sur la fonction de relaxation g et $a(x)+b(x)\geq\rho>0$, pour tout $x\in\Omega$. Ils ont établi la stabilité exponentielle quand g décroit exponentiellement et h est linéaire et la stabilité polynomiale quand g décroit polynomiallement et h non linéaire. En outre, Cavalcanti et al. [7] ont étudié, dans un domaine borné, l'équation suivante

$$\left|u_t\right|^{\rho}u_{tt}-\Delta u-\Delta u_{tt}+\int_0^t g\left(t-\tau\right)\Delta u\left(\tau\right)d\tau-a\left(x\right)u_t-\gamma\Delta u_t=0,\quad \rho>0,$$

et ont démontré un résultat d'existence globale pour $\gamma\geq 0$ et une décroissance exponentielle pour $\gamma>0$. Cette décroissance a été plus tard améliorée par Messaoudi et Tatar [36] avec la présence d'une source. Kirane et Tatar [20] ont considéré une équation d'onde légèrement amortie et ont prouvé que cette dissipation interne est suffisante pour stabiliser la solution uniforme au moyen d'un feedback non linéaire de type mémoire agissant sur une partie de la frontière. Ce résultat a été établie sans aucune restriction sur la dimension de l'espace ou sous conditions géométriques sur la domaine et sa frontière.

Les systèmes d'équations thermoélastiques ont été étudiés par de nombreux auteurs et de nombreux résultats ont été obtenus. Ces résultats portent principalement sur l'étude de l'existence, comportement asymptotique, régularité, contrôllabilité, propagation des singularités et l'explosion des solutions. Par exemple dans Messaoudi [39], l'auteur a examiné le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t)=au_{xx}(x,t)+b\theta_x(x,t)=\left|u(x,t)\right|^{\alpha-1}\left|u(x,t)\right|, \\ c\theta_t(x,t)=k\theta_{xx}(x,t)+bu_{xt}(x,t),\quad x\in\mathbb{R},\ t\geq 0, \\ u\left(x,0\right)=u_0\left(x\right),\ u_t\left(x,0\right)=u_1\left(x\right),\ \theta(x,0)=\theta_0(x),\ x\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

où a,c,k sont des constantes strictement positives, b est un constante non nul, et $\alpha\geq\sqrt{1+b^2/(ac)}$. Il a prouvé quelque résultats d'explosions, qui ont été généralisés et améliorés par Kirane et Tatar [21], où les auteurs ont étudié un système plus général en permettant des termes gradient dans les deux équations. Plus tard, les résultats dans le travail et Kirane et Tatar [21], ont été généralisés par Messaoudi [38] en considérant le problème

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = div(A(x)\nabla u(x,t)) + b\nabla\theta(x,t) + D(x).\nabla u(x,t) \\ -m(x)u_t(x,t) + e^{\beta t}u(x,t)\left|u(x,t)\right|^{p-2}, \quad x \in \Omega,\ t > 0 \\ c(x)\theta_t(x,t) = div(K(x)\nabla\theta(x,t) + b(x)u_t(x,t) + R(x).\nabla u(x,t), \\ u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right),\ u_t\left(x,0\right) = u_1\left(x\right),\ \theta(x,0) = \theta_0(x),\ x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0,\ \theta(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega,\ t \geq 0, \end{cases}$$

où b, D, R sont des fonctions de $n-$composante des vecteurs réels ; c, m sont des fonctions ; A, K sont des matrices $n \times\ n$ tel que A est symétrique, $b \neq 0$, $p > 2$, $\beta > 0$, Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, de frontière regulière $\partial\Omega$.

Racke et Wang [47] ont examiné la propagation des singularités pour des systèmes de thermoélasticité homogène unidimensionnels. Assila [1], a étudié l'existence globale et le comportement asymptotique des solutions pour un système purement linéaire multidimensionnel de la thermoélasticité non homogène et anisotrope, associé à des conditions aux limites non linéaires. Pour les résultats concernant l'existence, la régularité, contrôlabilité et de comportement des systèmes de thermoélasticité, nous renvoyons le lecteur aux documents Dafermos [11], Hrusa [15], Munoz-Rivera [39-40], Racke [44], et Racke Shibata [45] et Slemrod [48].

Actuellement, les méthodes d'analyse fonctionnelle sont très essentielles dans l'étude des problèmes mathématiques théoriques et appliqués. Le rôle principal des méthodes d'analyse fonctionnelle, est de donner de meilleurs résultats par rapport à ceux obtenus par les techniques classiques, en conséquence, il y a eu des progrès considérables dans l'étude des équations différentielles opérationnelles dans les espaces de Banach ou de Hilbert.

L'une des méthodes d'analyse fonctionnelle utilisées dans l'étude des problèmes mixtes est la méthode des estimations a priori qu'on a développé et appliqué pour quelques types de problèmes aux limites dans cette these. Cette méthode est basée sur les idées de Dezin [12] et développée par Ladyzenskaya [22-23], où elle a été utilisée dans la résolution du problème de Cauchy lié aux équations du type hyperbolique. Par la suite les développements importants de la méthode sont dus à J. Leray [25] et L. Garding [14]. Cette méthode a été également utilisée et développée dans les travaux de Mesloub [26-27-28],Yurchuk [49] et d'autres. En 1986 N. I. Yurchuk [49] a utilisé la condition intégrale $\int_0^1 u(x,t)\,dx = \varphi(t)$, pour certaines équations paraboliques, ensuite plusieurs travaux ont été réalisés en modifiant l'équation ou en cosidérant des équations hyperboliques, les équations de type mixte, ... Jusqu'en 1990 où Kartynnik A.V [1] a développé la méthode des inégalités énergétiques en prenant la condition intégrale avec une borne variable

$$\int_0^z u(x,t)\,dx = \varphi(t,z), \quad \text{où } z \in (0,1)$$

Pour le traitment des problèmes linèaires, le schéma de la méthode peut être exposé comme suit : D'abord on ramène le problème posé à une équation opérationnelle :

$$Lu = \mathcal{F}, \quad u \in D(L), \tag{$\bullet$}$$

où l'opérateur L est considéré de l'espace de Banach E dans l'espace de Hilbert F convenablement choisis.

On établit les estimations a priori pour l'opérateur L et on démontre l'inégalité énergétique du type

$$\|u\|_E \leq C\,\|Lu\|_{\mathcal{F}}, \quad \forall u \in D(L).$$

La démonstration se base sur une analyse précise des formes obtenues en multipliant l'équation donnée par un opérateur Mu contenant la fonction u, ses dérivées et ses premitives. Le choix de l'opérateur Mu est fondamental, il est dicté par l'équation et les conditions aux limites.

On démontre ensuite la densité de l'ensemble des valeurs de cet opérateur dans l'espace F. Ensuite dans les topologies fortes des espaces E et F on construit la fermeture $\overline{L}$ de l'opérateur L ; et la solution de l'équation

$$\overline{L}u = \mathcal{F}, \quad \mathcal{F} \in F,$$

est appelée solution forte du problème considéré. A l'aide d'un passage à la limite, on prolonge l'inégalité $(*)$ à $u \in D\left(\overline{L}\right)$ et ainsi est garantie l'existence de la solution sur l'ensemble des images $R\left(\overline{L}\right)$ de l'opérateur $\overline{L}$. Comme l'image de l'opérateur L est fermée dans F et que $R\left(\overline{L}\right) = \overline{R(L)}$, alors pour démonstrer l'existence de la solution forte pour tout $\mathcal{F} \in F$, il suffit d'établir la densité de $R(L)$ dans F , qui est obtenue à l'aide des opérateurs de régularisation. Le choix des opérateurs de régularisation est lié au caractère du problème étudié. L'unicité est déduite de l'inégalité de l'énergie.

Pour l'étude des problemes non linéaires, nous traitons d'abord les problemes linéaires associés, et sur la base des resultats déjà obtenus on étudie les problèmes nonlinèaires.

La thèse est composée de quatre chapitres et d'une bibliographie.

Nous commençons par une introduction où nous présentons l'historique de la méthode fonctionnelle dans le chapitre 0 et nous rappellons certaines notions préliminaires qui seront utilisées par la suite, dans le premier chapitre.

Au second chapitre nous étudions un problème mixte non linéaire pour une équation viscoélastique avec l'opérateur de Bessel en combinant une condition classique de type Neumann et une condition intégrale avec poids. On établit d'abord l'existence et l'unicité pour le problème linéaire associé et ensuite, sur la base des résultas du problème linéaire, nous appliquons un processus itérative pour établir l'existence et l'unicité de la solution faible du probleme non linéaire. Ce travail peut être considéré comme une extension de celle de Bouziani [4] et Mesloub [26].

Dans le troisième chapitre nous étudions un problème aux limite non local à valeur initiale pour un système de thermoélasticité singulier non linéaire où une condition aux limite classique est remplacée par une autre non locale. Pour traiter le cas linéaire associé, on reformule le problème linéaire posé sous une forme opérationelle, nous utilisons la méthode des inégalités énergétiques où on établit quelques estimations a priori pour la solution du système donné ainsi que la densité de l'ensemle des images de l'opérateur engendré par le problème considéré, puis on applique une méthode itérative pour le cas non linéaire. Les résultats obtenus peuvent êtres considérés comme une généralisation des résultats obtenues par Mesloub [27-28].

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude d'un problème aux limites mixte non local pour l'équation de Boussinesq à $n-$dimensions dans un cylindre $Q_T = \Omega \times (0,T)$. En utilisant la méthode de Galerkin, nous démontrons l'existence de la solution faible du problème posé ainsi que l'unicité de la solution généralisée du problème posé.

Nous donnons à la fin les différentes références utilisées dans cette thèse.

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1 Espaces normés. Un espace vectoriel E est appelé *espace normé* si à tout $x \in E$ correspond un nombre positif $\|x\|$ (appelé *norme* de x) tel que les trois axiomes suivants, dits *axiomes de la norme*, sont vérifiés :

1°. $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$ (la norme est *non dégénérée*) ;

2°. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (la norme est *homogène*) ;

3°. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*inégalité triangulaire*).

Ainsi donc, la norme est une application définie sur E, prenant des valeurs positives et vérifiant les propriétés 1° à 3°.

Remarque 1.1 *Si l'on étudie plusieurs espaces normés à la fois on fera figurer ces espaces en indice pour en distinguer les normes, par exemple* $\|x\|_E$.

1.2. Espaces de Banach. Un espace normé est dit *complet* si toute suite de Cauchy y est convergente. Un espace normé complet est appelé *espace de Banach.*

1.3. Espaces de Hilbert. Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé *espace de Hilbert* s'il est complet au sens de la norme associée au produit scalaire.

Les espaces de Hilbert qui sont des espaces de Banach particuliers sont des généralisations des espaces IR^n et C^n.

1.4. Espaces de Sobolev.

Soit $\Omega \subset IR^n$ un ouvert et soit $p \in IR$ avec $1 \leq p \leq \infty$; on pose

$$\begin{aligned} L^p(\Omega) &= \left\{ u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } \int\limits_\Omega |u|^p \, dx < \infty \right\}, \quad 1 \leq p < \infty, \\ L^\infty(\Omega) &= \{ u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et il existe } c \text{ tel que } |u(x)| \leq c \quad \text{p.p. sur } \Omega \}. \end{aligned}$$

$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{L^P(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |u|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Pour $p = 2$, $L^p(\Omega)$ est un espace de Hilbert ayant le produit scalaire

$$(f, g)_{L^p(\Omega)} = \int\limits_\Omega f(x) g(x) dx.$$

Définition 1.1 *L'espace de Sobolev $W^{1,P}(\Omega)$ est définit par*

$$W^{1,P}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists g_1, g_2, ..., g_n \in L^p(\Omega) \text{ tels que} \\ \int\limits_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int\limits_\Omega g_i \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \forall i = \overline{1, n} \end{array} \right\}.$$

Pour $u \in W^{1,P}(\Omega)$, on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \quad et \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = \operatorname{grad} u.$$

L'espace $W^{1,P}(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{W^{1,P}(\Omega)} = \left[\|u\|^p_{L^P(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{L^P(\Omega)} \right]^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Définition 1.2 *Soit $m \geq 2$ un entier. On définit par récurrence l'espace de Sobolev $W^{m,P}(\Omega)$ par*

$$W^{m,P}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,P}(\Omega); \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,P}(\Omega) \quad \forall i = \overline{1, n} \right\}.$$

Il revient au même d'introduire

$$W^{m,P}(\Omega)=\left\{u\in L^p(\Omega)\left|\begin{array}{l}\forall\alpha \text{ avec } |\alpha|\leq m \quad \exists g_\alpha\in L^p(\Omega) \quad \text{tel que}\\ \int\limits_\Omega uD^\alpha\varphi dx=(-1)^{|\alpha|}\int\limits_\Omega g_\alpha\varphi dx \quad \forall\varphi\in C_c^\infty(\Omega)\end{array}\right.\right\}.$$

où pour

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n),\qquad \alpha_i\in IN,\qquad i=\overline{1,n}$$

un muli-indice ; on pose

$$|\alpha|=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \qquad et \qquad D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1\partial x_2...\partial x_n}.$$

Pour $u\in W^{m,P}(\Omega)$, *on note* $D^\alpha u=g_\alpha$ *.L'espace* $W^{m,P}(\Omega)$ *muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{1,P}(\Omega)}=\left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m}\|D^\alpha u\|_{L^P(\Omega)}^p\right)^{1/p},\qquad 1\leq p<\infty.$$

est un espace de Banach.

Définition 1.3 *Pour* $m\in IN$, *on note :*

$$W^{m,P}(\Omega)=\left\{u\in\mathfrak{D}'(\Omega);\ D^\alpha u\in L^P(\Omega)\qquad |\alpha|\leq m\right\},$$

où $\mathfrak{D}'(\Omega)$ *est l'espace des distributions sur* Ω*.Alors pour* $m=0$, *on a* $W^{0,P}(\Omega)=L^P(\Omega)$ *et pour* $m\geq 1$, *on retrouve les espaces introduits dans les deux définitions* ***1*** *et* ***2****.*

Remarque 1.2 *Dans les applications on rencontre fréquemment le cas où* $p=2$*. On utilise alors la notation* $W^{m,2}(\Omega)=H^m(\Omega)$*.*

L'espace $H^m(\Omega)$ *est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$(u,v)_{H^m(\Omega)}=\sum_{0\leq|\alpha|\leq m}\int\limits_\Omega D^\alpha uD^\alpha v dx.$$

Pour tout $m \in IN$, on a les inclusions suivantes :

$$\mathfrak{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega) \subset H^m(\Omega) \subset H^{m-1}(\Omega) \subset ... \subset H^1(\Omega) \subset H^0(\Omega) = L^2(\Omega) \subset \mathfrak{D}'(\Omega).$$

1.5. La formule de Green.

Lemme 1.1 *Soit $\Omega \subset IR^n$ un ouvert borné de frontière Γ, C^1par morçeaux, et soient $u, v \in H^1(\Omega)$, alors on a*

$$\int\limits_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int\limits_\Gamma uv\vartheta_i ds - \int\limits_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \quad \text{pour} \quad i = \overline{1, n},$$

où ϑ_i est la $i-$éme composante de ϑ (la normale extérieure à Γ) et $u(s), v(s)$ sont les traces des fonctions $u(x)$ et $v(x)$ sur Γ, et $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

1.6. Éléments orthogonaux. Supplémentaire orthogonal.

Définition 1.4 *Soit E un espace muni d'un produit scalaire. Chaque fois que $(x,\ y) = 0$, nous dirons que les éléments x et y sont orthogonaux et nous le noterons $x \perp y$. De toute évidence, l'élément nul de E est orthogonal à tout élément de E.*

Définition 1.5 *Un ensemble L dans un espace vectoriel E s'appelle variété linéaire (ensemble linéaire) si pour deux éléments quelconques x et $y \in L$ et deux scalaires λ, μ la combinaison linéaire $\lambda x + \mu y \in L$.*

Définition 1.6 *Soit L une variété linéaire dans un espace de Hilbert H. L'ensemble des éléments de H orthogonaux à L est appelé supplémentaire orthogonal de L et est noté $L^\perp$.*

Théorème 1.1 *Soit L une variété linéaire dans un espace de Hilbert H. Alors, pour que L soit dense dans H, il faut et il suffit que $L^\perp = \{0\}$.*

Preuve On peut consulter[13] (voir théorème 2, page 66). ■

1.7. Opérateurs fermés. Opérateurs fermables.

Définition 1.7 *Soient E et F deux espaces de Banach. On dit qu'un opérateur $A : E \to F$ est fermé si $G(A)$ est fermé dans $E \times F$. $G(A)$ est le graphe de A.*

Dire que $G(A)$ est fermé revient à dire que pour $u_n \in D(A)$ et $(u_n, Au_n) \to (u, f)$ dans $E\times F$, on a $u \in D(A)$ et $f = Au$. $D(A)$ est le domaine de A.

Définition 1.8 *Soient E et F deux espaces de Banach. On dit qu'un opérateur $A : E \to F$ est fermable s'il admet un prolongement fermé.*

Autrement dit ; A est fermable si et seulement si pour toute $u_n \in D(A)$, $u_n \to 0$ et $Au_n \to f$ entraîne $f = 0$.

1.8. Opérateurs de régularisations.

Le développement et l'étude des *opérateurs de régularisation* sont dûs principalement à S. Sobolev et K. O. Friedrichs.la thèse se base sur le schéma proposé par K. O. Friedrichs.

Soit W une fonction paire de classe C^∞, d'une seule variable ξ avec $W(\xi) \geq 0$; $W = 0$ si$|\xi| \geq 1$, et

$$\int_{-1}^{1} W(\xi)d\xi = 1.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose

$$W_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{\varepsilon}W\left(\frac{x-x'}{\varepsilon}\right).$$

Alors, on a

$$\int_{-1}^{1} W_\varepsilon\left(x, x'\right) dx' = \int_{-1}^{1} W_\varepsilon\left(x, x'\right) dx = 1,$$

avec

$$W_\varepsilon\left(x, x'\right) = 0 \quad \text{si} \quad |x - x'| \geq \varepsilon.$$

On définit les *opérateurs de régularisation* J_ε par la formule

$$\begin{aligned}\left(J_\varepsilon v\right)(x) &= \int_{\Omega} W_\varepsilon(x, x')v\left(x'\right) dx' \\ &= \int_{|x-x'|<\varepsilon} W_\varepsilon(x, x')v\left(x'\right) dx',\end{aligned}$$

où, $\Omega = (a, b) \subset IR$ et $v \in L^2(\Omega)$.

Ces opérateurs ont les propriétés suivantes :

P1. La fonction $J_\varepsilon v \in C^\infty(\Omega)$ si $v \in L^2(\Omega)$, et

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} J_\varepsilon v = J_\varepsilon \frac{\partial^m}{\partial x^m} v \quad \text{si} \quad v \in C^m(\Omega).$$

P2. Si $v \in L^2(\Omega)$, alors

$$\|J_\varepsilon v - v\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \qquad \text{quand} \qquad \varepsilon \to 0,$$

et

$$\|J_\varepsilon v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

P3. Si $\alpha(x) \in C(\Omega)$ et $v \in L^2(\Omega)$, alors

$$\|\alpha J_\varepsilon v - J_\varepsilon(\alpha v)\|_{L^2(Q_s)} \to 0 \quad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0.$$

P4. Si $\alpha(x) \in C^1(\Omega)$ et $v \in L^2(\Omega)$, alors

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha J_\varepsilon v - J_\varepsilon(\alpha v)\right) \right\|_{L^2(Q_s)} \to 0 \quad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0.$$

La `démonstration` des propriétés **P1- P4** est analogue à celle des propriétés des opérateurs de régularisation obtenus dans [16] (voir lemme 9.1).

1.9.Quelques inégalités auxiliaires.

Lemme 1.2 *Si les $h_i(t)$, $i = 1, 2, 3.$,sont des fonctions non négatives sur l'intervalle $[0, T]$, $h_1(t), h_2(t)$ sont intégrables et $h_3(t)$ est non décroissante, alors de l'inégalité*

$$\int_0^\tau h_1(t)dt + h_2(t) \leq h_3(t) + c \int_0^\tau h_2(t)dt,$$

il s'ensuit que

$$\int_0^\tau h_1(t)dt + h_2(t) \le e^{c\tau} h_3(t).$$

La `démonstration` du lemme est analogue à celle du lemme 7.1 [16].

1.9.1. Inégalité intégrale de cauchy-schwarz.

$$\forall (f,g) \in \left(L^2(Q)\right)^2 : \int_Q |fg| \ \le \left(\int_Q f^2\right)^{1/2} \left(\int_Q g^2\right)^{1/2}.$$

1.9.2. Inégalité de cauchy.

$$\forall (a,b) \in IR^2 : |ab| \le \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2.$$

1.9.3. Inégalité de cauchy avec ε. Soit ε un nembre réel strictement positif, alors

$$\forall (a,b) \in IR^2 : |ab| \le \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2.$$

1.9.4. Inégalité de Young. Soient p et q des nombres réels strictement positifs liés par la relation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Alors

$$\forall (a,b) \in IR^2 : |ab| \le \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}.$$

1.9.5. Inégalité de Young avec ε. Soit ε un nembre réel strictement positif, alors

$$\forall (a,b) \in IR^2 : |ab| \le \varepsilon\,|a|^p + C(\varepsilon)\,|b|^q\,,$$

où p et q sont reliés par la relation (9.4) et $C(\varepsilon) = \frac{1}{q}(\varepsilon p)^{-q/p}$.

1.9.6. Inégalité intégrale de Hölder.

$$\forall (f,g) \in L^p(Q) \times L^q(Q) : \int\limits_Q |fg| \ \leq \left(\int\limits_Q |f|^p \right)^{1/p} \left(\int\limits_Q |g|^q \right)^{1/q},$$

où p et q sont toujours reliés par la relation : $1/p + 1/q = 1$.

1.9.7. Inégalité de Poincaré

Pour tout $u\left(x\right) \in W_2^1\left(\Omega\right),\ u|_{\partial\Omega} = 0$ on a

$$\int_\Omega u^2 dx \leq C_\Omega^2 \int_\Omega u_x^2 dx.$$

ou C_Ω est la constante de Poincaré dependant de Ω.

Chapitre 2

Étude d'un problème mixte nonlocal pour une équation viscoélastique singuliere non linéaire

Dans ce présent chapitre, nous étudions un problème mixte non linéaire pour une équation viscoélastique avec une condition aux limites non classiques (condition intégrale). Nous commencons d'abord par résoudre le problème linéaire associé. En écrivant le problème linéaire sous forme opérationnelle, nous établissons une estimation a priori pour la solution de laquelle on déduit l'unicité de la solution forte du probleme linéaire posé. Pour l'existence de la solution, on démontre la densite de l'image de l'opérateur engendré par le problème considéré. Sur la base des résultas du problème linéaire, nous appliquons un processus itérative pour établir l'existence et l'unicité de la solution faible du problème non linéaire.

.

2.1 Formulation du problème

On considère l'équation aux dérivées partielles non linéaire

$$u_{tt} - \frac{1}{x}(xu_x)_x + \int_0^t g\,(t-s)\,\frac{1}{x}(xu_x)_x(x,s)ds + au_t = f(x,t,u,u_x), \tag{2.1.1}$$

dans le domaine$Q = (0,1) \times [0,T]$.

On associé à l'équation (2.1.1) les conditions initiales

$$\ell_1 u = u\,(x,0) = u_0\,(x)\,,\;\; \ell_2 u = u_t\,(x,0) = u_1\,(x)\,, \qquad\qquad x \in (0,1)\,, \tag{2.1.2}$$

la condition aux bord

$$u_x\,(1,t) = 0, \qquad\qquad t \in [0,T]\,, \tag{2.1.3}$$

et la condition intégrale

$$\int_0^1 xudx = 0, \qquad\qquad t \in [0,T]\,. \tag{2.1.4}$$

Pour la fonction de relaxation $g\,(t)$, on suppose que $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction bornée de classe C^2 telle que

$$1 - \int_0^T g\,(s)\,ds = \lambda > 0, \tag{2.1.5}$$

et

$$g\,(t) \geq 0, \quad g'\,(t) \leq 0. \tag{2.1.6}$$

La condition (2.1.5) est necéssaire pour garantir l' hyperbolicité du système $(2.1.1) - (2.1.4)$.

La fonction f est supposée Lipschitzienne :

$$|f\;\;(x,t,u_1,v_1) - f\;\;(x,t,u_2,v_2)| \leq \delta\,(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|)\,,$$

pour tout $(x,t) \in Q$, et δ est une constante positive.

Pour le problème posé on démontre l'existence et l'unicité de la solution.

2.2 Problème linéaire associé

On étudie tout d'abord le problème linéaire associé :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = u_{tt} - \frac{1}{x}(xu_x)_x + \int_0^t g\left(t-s\right)\frac{1}{x}(xu_x)_x(x,s)ds + au_t = f\ \ (x,t)\,, \\ \qquad \ell_1 u = u_0\left(x\right), \quad \ell_2 u = u_1\left(x\right) \qquad\qquad x \in \Omega = (0,1)\,, \\ \qquad\quad u_x\left(1,t\right) = 0, \ \int_0^1 xudx = 0, \qquad\qquad t \in \left[0,T\right], \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Pour l'étude du problème posé nous avons besoin de quelques espaces fonctionnels. Soit $L^2_\rho\left(Q\right)$ où $Q = \Omega \times (0,T)$, l'espace de Hilbert avec poid des fonctions définies et de carré intégragles sur Q, muni de la norme

$$\|u\|^2_{L^2_\rho(Q)} = \int_Q xu^2dxdt,$$

et le produit scalaire

$$\left(u,\, v\right)_{L^2_\rho(Q)} = \left(xu,\, v\right)_{L^2(Q)}\,,$$

et soit l'espace de Sobolev-Slobodetski $W^{1,1}_\rho\left(Q\right)$ avec poid équipé du produit scalaire

$$\left(u,\, v\right)_{W^{1,1}_\rho(Q)} = \left(u,\, v\right)_{L^2_\rho(Q)} + \left(u_x,\, v_x\right)_{L^2_\rho(Q)} + \left(u_t,\, v_t\right)_{L^2_\rho(Q)}\,,$$

et $W^{1,0}_\rho\left(Q\right)$ l'espace de Sobolev ayant le produit scalaire

$$\left(u,\, v\right)_{W^{1,0}_\rho(Q)} = \left(u,\, v\right)_{L^2_\rho(Q)} + \left(u_x,\, v_x\right)_{L^2_\rho(Q)}\,.$$

Au problème (2.2.1) on associe l'opérateur non borné $L = \{\mathcal{L},\, \ell_1,\, \ell_2\}$ avec domaine de definition

$$D\left(L\right) = \left\{u \in L^2_\rho\left(Q\right) \diagup u_t,\, u_x,\, u_{tt},\, u_{xt},\, u_{xx} \in L^2_\rho\left(Q\right)\right.$$

verifiant les conditions aux bord (2.1.3) et (2.1.4) . L'opérateur L est considéré de E dans F,où E est un espace de Banach de fonctions $u \in L^2_\rho\left(Q\right)$ satisfaisant aux conditions (2.1.3) et (2.1.4) et ayant la norme finie

$$\|u\|_E^2 = \|u\|^2_{C\left(0,T;W_\rho^{1,1}(\Omega)\right)} = \sup_{0\le\tau\le T} \|u(x,\tau)\|^2_{W_\rho^{1,1}(\Omega)},$$

et F est l'espace de Hilbert $L_\rho^2(Q) \times W_\rho^1(\Omega) \times L_\rho^2(\Omega)$, avec la norme finie

$$\|\mathcal{F}\|_F^2 = \|f\|^2_{L_\rho^2(Q)} + \|u_0\|^2_{W_\rho^1(\Omega)} + \|u_1\|^2_{L_\rho^2(\Omega)}, \ \mathcal{F} = (f, u_0, u_1).$$

2.3 Unicité de la solution

Théorème 1. *Pour toute fonction $u \in D(L)$, il existe une constante C positive indépendante de u telle que*

$$\|u\|^2_{C\left(0,T;W_\rho^{1,1}(\Omega)\right)} \le C\left(\|f\|^2_{L_\rho^2(Q)} + \|u_0\|^2_{W_\rho^1(\Omega)} + \|u_1\|^2_{L_\rho^2(\Omega)}\right). \tag{2.3.1}$$

Preuve Considérons l'équation

$$(\mathcal{L}u, Mu)_{L_\rho^2(\Omega)} = (f, Mu)_{L_\rho^2(\Omega)}, \tag{2.3.2}$$

où

$$Mu = u_t - \Im_x^2(\xi u_t),$$

et

$$\Im_x^2(\xi u_t) = \int_0^x \int_0^\xi \eta u_t(\xi,t)\,d\eta\,d\xi,$$

on a

$$\begin{aligned}
& (u_{tt},\, u_t)_{L^2_\rho(\Omega)} - ((xu_x)_x\,,\, u_t)_{L^2(\Omega)} \\
& + \left(\int_0^t g\,(t-s)\,(xu_x\,(x,\,s))_x\, ds,\, u_t \right)_{L^2(\Omega)} + (au_t,\, u_t)_{L^2_\rho(\Omega)} \\
& - \left(u_{tt},\, \Im_x^2\,(\xi u_t)\right)_{L^2_\rho(\Omega)} + \left((xu_x)_x\,,\, \Im_x^2\,(\xi u_t)\right)_{L^2(\Omega)} \\
& - \left(\int_0^t g\,(t-s)\,(xu_x)_x\,(x,\,s)\, ds,\, \Im_x^2\,(\xi u_t) \right)_{L^2(\Omega)} \\
& - \left(au_t,\, \Im_x^2\,(\xi u_t)\right)_{L^2_\rho(\Omega)} \\
= \;& (f,\, u_t)_{L^2_\rho(\Omega)} - \left(f,\, \Im_x^2\,(\xi u_t)\right)_{L^2_\rho(\Omega)}\,. \qquad (2.3.3)
\end{aligned}$$

Utilisation des conditions (2.1.3) et (2.1.4), et des intégrations par partie successive, on obtient

$$(u_{tt},\, u_t)_{L^2_\rho(\Omega)} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 xu_t^2 dx, \qquad (2.3.4)$$

$$-\left((xu_x)_x\,,\, u_t\right)_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 xu_x^2 dx, \qquad (2.3.5)$$

$$(au_t,\, u_t)_{L^2_\rho(\Omega)} = a\int_0^1 xu_t^2 dx, \qquad (2.3.6)$$

$$\begin{aligned}
& \left(\int_0^t g\,(t-s)\,(xu_x\,(x,\,s))_x\, ds,\, u_t \right)_{L^2(\Omega)} \\
= \;& \int_0^t \left(g\,(t-s) \int_0^1 u_t\,(x,t)\,(xu_x\,(x,s))_x\, dx \right) ds \\
= \;& -\int_0^t \left(g\,(t-s) \int_0^1 xu_{xt}\,(x,t)\, u_x\,(x,s)\, dx \right) ds \\
= \;& \int_0^t \left(g\,(t-s) \int_0^1 xu_x\,(x,s)\, \frac{d}{dt}\,(u_x\,(x,s) - u_x\,(x,t))\, dx \right) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \left(g(t-s) \int_0^1 x\left(u_x(x,s)-u_x(x,t)\right) \frac{d}{dt}\left(u_x(x,s)-u_x(x,t)\right) dx \right) ds \\
&\quad + \int_0^t \left(g(t-s) \int_0^1 x u_x(x,t) \frac{d}{dt}\left(u_x(x,s)-u_x(x,t)\right) dx \right) ds \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t \left(g(t-s) \int_0^1 x \frac{d}{dt}\left(u_x(x,s)-u_x(x,t)\right)^2 dx \right) ds \\
&\quad -\frac{1}{2} \int_0^t \left(g(t-s) \int_0^1 x \frac{d}{dt}\left(u_x(x,t)\right)^2 dx \right) ds. \qquad (2.3.7)
\end{aligned}$$

Prenant $t-s=\nu$ dans (2.3.7), il vient

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^t g(t-s)\left(x u_x\right)_x(x,\, s)\, ds,\, u_t \right)_{L^2(\Omega)} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t \left(g(t-s) \int_0^1 x \frac{d}{dt}\left(u_x(x,s)-u_x(x,t)\right)^2 dx \right) ds \\
&\quad -\frac{1}{2} \int_0^t \left(g(\nu) \int_0^1 x \frac{d}{dt}\left(u_x(x,t)\right)^2 dx \right) d\nu \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{dt} \left\{ g(t-s) \int_0^1 x\left(u_x(x,s)-u_x(x,t)\right)^2 dx \right\} ds \\
&\quad -\frac{1}{2} \int_0^t \left(g'(t-s) \int_0^1 x\left(u_x(x,s)-u_x(x,t)\right)^2 dx \right) ds \\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \left\{ \int_0^1 x u_x^2(x,t)\, dx \int_0^t g(s)\, ds \right\} + \frac{1}{2} g(t) \int_0^1 x u_x^2(x,t)\, dx, \qquad (2.3.8)
\end{aligned}$$

$$-\left(u_{tt},\, \Im_x^2\left(\xi u_t\right)\right)_{L^2_\rho(\Omega)} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int_0^1 \left(\Im_x\left(\xi u_t\right)\right)^2 dx, \qquad (2.3.9)$$

$$\left(\left(x u_x\right)_x,\, \Im_x^2\left(\xi u_t\right)\right)_{L^2(\Omega)} = -\int_0^1 x u_x \Im_x\left(\xi u_t\right) dx, \qquad (2.3.10)$$

$$\begin{aligned}
&-\left(\int_0^t g(t-s)\left(x u_x(x,\, s)\right)_x ds,\, \Im_x^2\left(\xi u_t\right) \right)_{L^2(\Omega)} \\
&= -\int_0^t \left(g(t-s) \int_0^1 \Im_x^2\left(\xi u_t\right)\left(x u_x(x,\, s)\right)_x dx \right) ds \\
&= \int_0^t \left(g(t-s) \int_0^1 x \Im_x\left(\xi u_t(x,\, t)\right) u_x(x,\, s)\, dx \right) ds, \qquad (2.3.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\left(au_t,\, \Im_x^2\left(\xi u_t\right)\right)_{L^2_\rho(\Omega)} &= -a\Im_x^2\left(\xi u_t\right)\Im_x\left(\xi u_t\right)\Big|_{x=0}^{x=1} + a\int_0^1 \left(\Im_x\left(\xi u_t\right)\right)^2 dx \\
&= a\int_0^1 \left(\Im_x\left(\xi u_t\right)\right)^2 dx. \qquad (2.3.12)
\end{aligned}$$

La substitution de (2.3.4) – (2.3.6) et (2.3.8) – (2.3.12) dans (2.3.3), donne

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 xu_t^2dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 xu_x^2dx + a\int_0^1 xu_t^2dx \\
&+a\int_0^1 \left(\Im_x\left(\xi u_t\right)\right)^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \left(\Im_x\left(\xi u_t\right)\right)^2 dx \\
&+\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}\left\{g\left(t-s\right)\int_0^1 x\left(u_x\left(x,s\right)-u_x\left(x,t\right)\right)^2 dx\right\} ds \\
&-\frac{1}{2}\int_0^t \left(g'\left(t-s\right)\int_0^1 x\left(u_x\left(x,s\right)-u_x\left(x,t\right)\right)^2 dx\right) ds \\
&-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^1 xu_x^2\left(x,t\right)dx\int_0^t g\left(s\right)ds\right\} + \frac{1}{2}g\left(t\right)\int_0^1 xu_x^2\left(x,t\right)dx \\
&+\int_0^t \left(g\left(t-s\right)\int_0^1 x\Im_x\left(\xi u_t\left(x,\,t\right)\right)u_x\left(x,\,s\right)dx\right)ds - \int_0^1 xu_x\Im_x\left(\xi u_t\right)dx \\
=\;& \left(f,\,u_t\right)_{L^2_\rho(\Omega)} - \left(f,\,\Im_x^2\left(\xi u_t\right)\right)_{L^2_\rho(\Omega)}. \qquad (2.3.13)
\end{aligned}$$

L'équation (2.3.13) est équivalente à

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 xu_t^2dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left(1-\int_0^t g\left(s\right)ds\right)\int_0^1 xu_x^2\left(x,t\right)dx\right\} \\
&+a\int_0^1 xu_t^2dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t \left\{g\left(t-s\right)\int_0^1 x\left(u_x\left(x,s\right)-u_x\left(x,t\right)\right)^2 dx\right\} ds \\
&-\frac{1}{2}\int_0^t \left(g'\left(t-s\right)\int_0^1 x\left(u_x\left(x,s\right)-u_x\left(x,t\right)\right)^2 dx\right) ds \\
&+\frac{1}{2}g\left(t\right)\int_0^1 xu_x^2\left(x,t\right)dx + a\int_0^1 \left(\Im_x\left(\xi u_t\right)\right)^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \left(\Im_x\left(\xi u_t\right)\right)^2 dx \\
&+\int_0^t \left(g\left(t-s\right)\int_0^1 x\Im_x\left(\xi u_t\left(x,\,t\right)\right)u_x\left(x,\,s\right)dx\right)ds - \int_0^1 xu_x\Im_x\left(\xi u_t\right) \\
=\;& \left(f,\,u_t\right)_{L^2_\rho(\Omega)} - \left(f,\,\Im_x^2\left(\xi u_t\right)\right)_{L^2_\rho(\Omega)}, \qquad (2.3.14)
\end{aligned}$$

mais puisque $g(t) \geq 0$ et $g'(t) \leq 0$, alors (2.3.14) devient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 xu_t^2dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left(1-\int_0^t g(s)\,ds\right)\int_0^1 xu_x^2(x,t)\,dx\right\} \\
& +a\int_0^1 xu_t^2dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t \left\{g(t-s)\int_0^1 x\left(u_x(x,s)-u_x(x,t)\right)^2dx\right\}ds \\
& +a\int_0^1 \left(\Im_x(\xi u_t)\right)^2dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \left(\Im_x(\xi u_t)\right)^2dx - \int_0^1 xu_x\Im_x(\xi u_t) \\
& +\int_0^t \left(g(t-s)\int_0^1 x\Im_x(\xi u_t(x,t))\,u_x(x,s)\,dx\right)ds \\
\leq\;& (f,u_t)_{L_\rho^2(\Omega)} - \left(f,\Im_x^2(\xi u_t)\right)_{L_\rho^2(\Omega)}, \qquad (2.3.15)
\end{aligned}$$

l'intégration des deux membres de (2.3.15) par rapport à t sur $(0,\tau)$, donne

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_0^1 xu_t^2(x,\tau)\,dx + \frac{1}{2}\left(1-\int_0^\tau g(s)\,ds\right)\int_0^1 xu_x^2(x,\tau)\,dx \\
& +a\int_{Q^\tau} xu_t^2dxdt + \frac{1}{2}\int_0^\tau \left\{g(\tau-s)\int_0^1 x\left(u_x(x,s)-u_x(x,\tau)\right)^2dx\right\}ds \\
& +a\int_{Q^\tau} \left(\Im_x(\xi u_t)\right)^2dxdt + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\Im_x(\xi u_t(x,\tau))\right)^2dx - \int_0^\tau\int_0^1 xu_x\Im_x(\xi u_t)\,dxdt \\
& +\int_0^\tau \left\{\int_0^t \left(g(t-s)\int_0^1 x\Im_x(\xi u_t(x,t))\,u_x(x,s)\,dx\right)ds\right\}dt \\
\leq\;& (f,u_t)_{L_\rho^2(Q^\tau)} - \left(f,\Im_x^2(\xi u_t)\right)_{L_\rho^2(Q^\tau)} + \frac{1}{2}\int_0^1 xu_1^2dx \\
& +\frac{1}{2}\int_0^1 x\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\Im_x(\xi u_1)\right)^2dx. \qquad (2.3.16)
\end{aligned}$$

Comme $g(t) \geq 0$, alors en éliminant le troisième, le quatrième et cinquième terme du membre gauche de (2.3.16), et en appliquant l'inégalité de Young pour les deux premiers termes de la partie droite de cette inégalité, on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\left\|u_t(x,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\frac{1}{2}\left\|\Im_x\left(\xi u_t(x,\tau)\right)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
& +\frac{1}{2}\left(1-\int_0^\tau g(s)\,ds\right)\int_0^1 xu_x^2(x,\tau)\,dx \\
\leq\; & \frac{1}{2}\left\|u_1\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u_\circ}{\partial x}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\frac{1}{2}\left\|\Im_x\left(\xi u_1\right)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
& +\frac{1}{2}\left\|u_t\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\left\|f\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\frac{1}{4}\left\|\Im_x\left(\xi u_t\right)\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
& -\int_0^\tau\left\{\int_0^t\left(g(t-s)\int_0^1 x\Im_x\left(\xi u_t(x,t)\right)u_x(x,s)\,dx\right)ds\right\}dt+\int_0^\tau\int_0^1 xu_x\Im_x\left(\xi u_t\right)dxdt
\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

Les deux derniers termes de membre gauche de (2.3.17) peuvent êtres estimés de la manière suivante

$$\begin{aligned}
& -\int_0^\tau\int_0^t\left\{\left(g(t-s)\int_0^1 x\Im_x\left(\xi u_t(x,t)\right)u_x(x,s)\,dx\right)ds\right\}dt \\
=\; & -\int_{Q^\tau}\left(\int_0^t g(t-s)\,xu_x(x,s)\,ds\right)\Im_x\left(\xi u_t(x,t)\right)dxdt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leq\; & \frac{1}{2}\int_{Q^\tau}\left(\int_0^t g(t-s)\,xu_x(x,s)\,ds\right)^2 dxdt+\frac{1}{2}\int_{Q^\tau}\left(\Im_x\left(\xi u_t\right)\right)^2 dxdt \\
\leq\; & \frac{1}{2}\int_{Q^\tau}\left(\sup_{0\leq\, s\,\leq T} g(s)\right)^2\left(\int_0^t x\left|u_x(x,s)\right|ds\right)^2 dxdt \\
& +\frac{1}{2}\int_{Q^\tau}\left(\Im_x\left(\xi u_t\right)\right)^2 dxdt.
\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

Comme

$$\begin{aligned}
\int_0^\tau\left(\int_0^t x\left|u_x(x,s)\right|ds\right)^2 dt \;&\leq\; \frac{T^2}{2}\int_0^\tau x^2u_x^2(x,t)\,dt \\
&\leq\; \frac{T^2}{2}\int_0^\tau xu_x^2(x,t)\,dt,
\end{aligned} \tag{2.3.19}$$

alors il en résulte de (2.3.18) et (2.3.19) que

$$\begin{aligned} & -\int_0^\tau \int_0^t \left\{ \left(g(t-s) \int_0^1 x \Im_x \left(\xi u_t(x,\, t) \right) u_x(x,\, s)\, dx \right) ds \right\} dt \\ \leq \ & \frac{1}{2} \int_{Q^\tau} \left(\Im_x \left(\xi u_t \right) \right)^2 dx dt + \frac{\beta T^2}{2} \int_{Q^\tau} x u_x^2(x,\, t)\, dx dt, \end{aligned} \tag{2.3.20}$$

où

$$\beta = \sup_{0 \leq\ s\ \leq T} \left[g(s) \right]^2,$$

$$\int_0^\tau \int_0^1 x u_x \Im_x \left(\xi u_t \right) dx dt \leq \frac{1}{2} \int_{Q^\tau} \left(\Im_x \left(\xi u_t \right) \right)^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{Q^\tau} x u_x^2 dx dt. \tag{2.3.21}$$

En combinant (2.3.17), (2.3.20) et (2.3.21), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\| u(x,\, \tau) \right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \frac{1}{2} \left\| \Im_x \left(\xi u_t(x,\, \tau) \right) \right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\ & + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^\tau g(s)\, ds \right) \int_0^1 x u_x^2(x,\tau) \\ \leq \ & \frac{1}{2} \left\| u_1 \right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u_\circ}{\partial x} \right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \frac{1}{2} \left\| \Im_x \left(\xi u_1 \right) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & + \frac{1}{2} \left\| u_t \right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \frac{1}{2} \left\| f \right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \frac{5}{4} \left\| \Im_x \left(\xi u_t \right) \right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\ & + \left(\frac{1}{2} + \frac{\beta T^2}{2} \right) \int_{Q^\tau} x u_x^2 dx dt. \end{aligned} \tag{2.3.22}$$

En tenant compte du fait que $g(t) \geq 0$, nous avons alors

$$\begin{aligned} 1 - \int_0^\tau g(s)\, ds \ & \geq \ 1 - \int_0^T g(s)\, ds \\ & = \ \lambda. \end{aligned}$$

Soit l'inégalité élémentaire

$$\frac{1}{2} \left\| u(x,\, \tau) \right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} - \frac{1}{2} \left\| u \right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} - \frac{1}{2} \left\| u_t \right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \frac{1}{2} \left\| u_0 \right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \leq 0. \tag{2.3.23}$$

Des inégalités (2.3.22) et (2.3.23), il en résult que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\|u_t(x,\tau)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\int_0^1 x u_x^2(x,\tau)\,dx + \frac{1}{2}\|u(x,\tau)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
& + \frac{1}{2}\|\Im_x(\xi u_t(x,\tau))\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
\leq\ & \frac{1}{2}\|u_1\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u_\circ}{\partial x}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
& + \|f\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \frac{1}{2}\|\Im_x(\xi u_1)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
& + \|u_t\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \frac{5}{4}\|\Im_x(\xi u_t)\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
& + \left(\frac{1}{2} + \frac{\beta T^2}{2}\right)\|u_x\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}. \qquad (2.3.24)
\end{aligned}$$

Nous déduisons de (2.3.24) et de l'inégalité

$$\|\Im_x(\xi u_1)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\|u_1\|^2_{L^2_\rho(\Omega)},$$

que

$$\begin{aligned}
& \|u(x,\tau)\|^2_{W^{1,1}_\rho(\Omega)} + \|\Im_x(\xi u_t(x,\tau))\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\leq\ & \gamma\Big(\|u\|^2_{W^{1,1}_\rho(Q^\tau)} + \|u_0\|^2_{W^1_\rho(\Omega)} + \|u_1\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
& + \|f\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \|\Im_x(\xi u_t)\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}\Big), \qquad (2.3.25)
\end{aligned}$$

où

$$\gamma = \frac{\max\left(\frac{5}{4}, \frac{1+\beta T^2}{2}\right)}{\min\left(\frac{1}{2}, \frac{\lambda}{2}\right)}.$$

En appliquant le lemme de Gronwall a l'inégalité (2.3.25), nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \|u(x,\tau)\|^2_{W^{1,1}_\rho(\Omega)} + \|\Im_x(\xi u_t(x,\tau))\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
\leq\ & \gamma e^{\gamma T}\Big(\|f\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \|u_0\|^2_{W^1_\rho(\Omega)} + \|u_1\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}\Big), \qquad (2.3.26)
\end{aligned}$$

en négligéons le second terme de la partie gauche de (2.3.26), Puis en prenant le supremum par rapport à τ sur $[0, T]$, nous obtenons

$$\|u\|^2_{C\left(0,T;W^{1,1}_\rho(\Omega)\right)} \le \gamma e^{\gamma T}\left(\|f\|^2_{L^2_\rho(Q)} + \|u_0\|^2_{W^1_\rho(\Omega)} + \|u_1\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}\right), \tag{2.3.27}$$

Ce qui acheve la démonstration du Théorème 1, avec $C = \gamma e^{\gamma T}$. ∎

Proposition 2. *L'opérateur L définit sur E dans F est fermable.*

Preuve La preuve de cette proposition est analogue à la proposition 1 dans [30]. Soit $\overline{L}$ la fermeture de l'opérateur L, et $D(\overline{L})$ son domaine de définition. La solution de l'équation $\overline{L}u = \mathcal{F}$, où $\mathcal{F} = (f, u_1, u_0)$, est appelée solution forte de problème (2.2.1).Nous prolongeons l'inégalité (2.3.1) à l'ensemble des solutions $u \in D(L)$, en passant à la limite et donc établir l'unicité d'une solution forte et la fermeture de l'ensemble des valeurs $R\left(\overline{L}\right)$, de l'opérateur L dans l'espace F. ∎

2.4 Existence de la solution

Théorème 3. Pour tout $\mathcal{F} = (f, u_1, u_0) \in F$, il existe une solution unique forte $u = \overline{L}^{-1}\mathcal{F} = \overline{L^{-1}}\mathcal{F}$ de problème (2.3.1) satisfaisant a l'estimation a priori

$$\|u\|^2_{C\left(0,T;W^{1,1}_\rho(\Omega)\right)} \le C\left(\|f\|^2_{L^2_\rho(Q)} + \|u_0\|^2_{W^1_\rho(\Omega)} + \|u_1\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}\right) \tag{2.4.1}$$

où C est une constante positive indépendante de u.

Preuve Pour prouver que le problème (2.2.1) admet une solution forte unique pour tout $\mathcal{F} = (f, u_1, u_0) \in F$,il suffit de prouver que l'ensemble $R(L)$ est dense dans F. Pour cela, nous démontrons le résultat suivant (la preuve de la densité dans le cas particulier). ∎

Théorème 4. *Si pour une fonction $\zeta \in L^2_\rho(Q)$,*

$$(\mathcal{L}u, \zeta)_{L^2_\rho(Q)} = 0, \tag{2.4.2}$$

pour toutes les fonctions $u \in D_0(L) = \{u/u \in D(L), \ \ell_1 u = \ell_2 u = 0\}$, alors $\zeta = 0$ presque *partout dans Q.*

Preuve du Théorème 4. on a

$$\begin{aligned}
(u_{tt}, \zeta)_{L^2_\rho(Q)} &= ((xu_x)_x, \zeta)_{L^2(Q)} - (au_t, \zeta)_{L^2_\rho(Q)} \\
&\quad - \left(\int_0^t g(t-s)(xu_x)_x(x,\tau)\, d\tau, \zeta \right)_{L^2(Q)}.
\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Maintenant on pose

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \Im_t(\Im_s V) \\
&= \Im_t^2 V \\
&= \int_0^t \int_0^s V(x,\tau)\, d\tau ds,
\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

où $V,\ xV_x,\ (xV_x)_x,\ (x\Im_t V_x)_x,\ (x\Im_t^2 V_x)_x, (x\Im_t^3 V_x)_x \in L^2(Q)$, et la fonction V satisfait les conditions aux limites (2.1.3) et (2.1.4) et la condition

$$\frac{5(x-1)}{8\lambda} \exp\left(\frac{\sqrt{\frac{5}{8}}}{\sqrt{\lambda}} t \right) \leq V(x,t) \leq \frac{5(x-1)}{8\lambda} \exp\left(-\frac{\sqrt{\frac{5}{8}}}{\sqrt{\lambda}} t \right), \tag{2.4.5}$$

où

$$\lambda = T^2 + 2T^4 \left((g(0))^2 + 2 \sup_{0\leq t\leq T}^2 g + T^2 \sup_{0\leq t\leq T}^2 |g'| \right).$$

Les équations (2.4.3) et (2.4.4) donnent

$$\begin{aligned}
(V, \zeta)_{L^2_\rho(Q)} &= \left(\left(x\Im_t^2 V_x \right)_x, \zeta \right)_{L^2(Q)} - (a\Im_t V, \zeta)_{L^2_\rho(Q)} \\
&\quad - \left(\int_0^t g(t-s) \left(x\Im_\tau^2 V_x \right)_x d\tau, \zeta \right)_{L^2(Q)}.
\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Comme le membre gauche de (2.4.6) est une fonctionnelle linéaire continue de V, alors $\Im_t^* V = \int_t^T V(x,\tau)\, d\tau,\ \Im_t^{**} V = \int_t^T \int_s^T V(x,\tau)\, d\tau ds \in L^2(Q)$, de sorte que $\Im_t^{**} V_x,\ (x\Im_t^{**} V_x)_x \in L^2(Q)$,et $\Im_t^{**} V_x|_{x=1} = 0$.

En définissant

$$\zeta(x,t) = (T-t)^2 V(x,t), \tag{2.4.7}$$

l'équation (2.4.6) prend la forme

$$\begin{aligned}\left((T-t)^2 V, V\right)_{L^2_\rho(Q)} &= \left(\left(x\Im_t^2 V_x\right)_x, (T-t)^2 V\right)_{L^2(Q)} \\ &\quad - \left(\int_0^t g(t-\tau)\left(x\Im_\tau^2 V_x\right)_x d\tau, (T-t)^2 V\right)_{L^2(Q)} \\ &\quad - \left(a\Im_t V, (T-t)^2 V\right)_{L^2_\rho(Q)}. \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

En utilisation les conditions aux limites (2.1.3) et (2.1.4), et en intégrant par partie dans (2.4.8), on obtient

$$\left(\left(x\Im_t^2 V_x\right)_x, (T-t)^2 V\right)_{L^2(Q)} = \left\|(T-t)\Im_t V_x\right\|^2_{L^2_\rho(Q)} - \left\|\Im_t^2 V_x\right\|^2_{L^2_\rho(Q)}, \tag{2.4.9}$$

$$-\left(a\Im_t V, (T-t)^2 V\right)_{L^2_\rho(Q)} = -a\left\|\sqrt{T-t}\Im_t V\right\|^2_{L^2_\rho(Q)}, \tag{2.4.10}$$

$$
\begin{aligned}
& -\left(\int_0^t g(t-\tau)\left(x\Im_\tau^2 V_x\right)_x d\tau,\ (T-t)^2 V\right)_{L^2(Q)} \\
= & \int_Q \left(\int_0^t g(t-\tau)\left(x\Im_\tau^2 V_x\right) d\tau\right)\ (T-t)^2 V_x dx dt \\
= & \int_0^1 \left(\int_0^t g(t-\tau)\left(x\Im_\tau^2 V_x\right) d\tau\right)\ (T-t)^2 \Im_t V_x\Big|_{t=0}^{t=T} dx \\
& -\int_Q g(0)\, x\Im_t^2 V_x (T-t)^2 \Im_t V_x dx dt \\
& -\int_Q \left(\int_0^t x g'(t-\tau)\Im_\tau^2 V_x d\tau\right)\ (T-t)^2 \Im_t V_x dx dt \\
& +2\int_Q \left(\int_0^t x g(t-\tau)\Im_\tau^2 V_x d\tau\right)\ (T-t)\Im_t V_x dx dt \\
= & -\int_Q g(0)\, x\Im_t^2 V_x (T-t)^2 \Im_t V_x dx dt \\
& -\int_Q \left(\int_0^t x g'(t-\tau)\Im_\tau^2 V_x d\tau\right)\ (T-t)^2 \Im_t V_x dx dt \\
& +2\int_Q \left(\int_0^t x g(t-\tau)\Im_\tau^2 V_x d\tau\right)\ (T-t)\Im_t V_x dx dt. \qquad (2.4.11)
\end{aligned}
$$

En substituant (2.4.9) – (2.4.11) dans (2.4.8), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
& \left\|(T-t)\, V_x\right\|_{L_\rho^2(Q)}^2 + a\left\|\sqrt{T-t}\,\Im_t V\right\|_{L_\rho^2(Q)}^2 \\
= & \left\|(T-t)\Im_t V_x\right\|_{L_\rho^2(Q)}^2 - \left\|\Im_t^2 V_x\right\|_{L_\rho^2(Q)}^2 \\
& -g(0)\left((T-t)^2 \Im_t V_x, \Im_t^2 V_x\right)_{L_\rho^2(Q)} \\
& -\left((T-t)^2 \Im_t V_x, \left(\int_0^t g'(t-\tau)\Im_\tau^2 V_x d\tau\right)\right)_{L_\rho^2(Q)} \\
& +2\left((T-t)\Im_t V_x, \left(\int_0^t g(t-\tau)\Im_\tau^2 V_x d\tau\right)\right)_{L_\rho^2(Q)}. \qquad (2.5.12)
\end{aligned}
$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, l'inégalité de Cauchy-ε et l'inégalité

$$
\left\|\Im_t h\right\|_{L^2([0,T])}^2 \leq \frac{T^2}{2}\left\|h\right\|_{L^2([0,T])}^2,
$$

on peut estimer les trois derniers termes du membre droit de (2.4.12) pour avoir

$$\begin{aligned} & -g(0)\left((T-t)^2 \Im_t V_x, \Im_t^2 V_x\right)_{L_\rho^2(Q)} \\ \leq \; & 2T^2 g^2(0) \left\|(T-t) \Im_t V_x\right\|_{L_\rho^2(Q)}^2 + \frac{1}{8}\left\|\Im_t^2 V_x\right\|_{L_\rho^2(Q)}^2, \end{aligned} \tag{2.4.13}$$

$$\begin{aligned} & -\left((T-t)^2 \Im_t V_x, \left(\int_0^t g'(t-\tau) \Im_\tau^2 V_x d\tau\right)\right)_{L_\rho^2(Q)} \\ \leq \; & 4T^4 \sup_{0\leq t\leq T}^2 |g'| \; \left\|(T-t) \Im_t V_x\right\|_{L_\rho^2(Q)}^2 + \frac{1}{8}\left\|\Im_t^2 V_x\right\|_{L_\rho^2(Q)}^2, \end{aligned} \tag{2.4.14}$$

$$\begin{aligned} & 2\left((T-t) \Im_t V_x, \left(\int_0^t g(t-\tau) \Im_\tau^2 V_x d\tau\right)\right)_{L_\rho^2(Q)} \\ \leq \; & 4T^2 \sup_{0\leq t\leq T}^2 |g| \; \left\|(T-t) \Im_t V_x\right\|_{L_\rho^2(Q)}^2 + \frac{1}{8}\left\|\Im_t^2 V_x\right\|_{L_\rho^2(Q)}^2, \end{aligned} \tag{2.4.15}$$

Si nous négligeant le second terme de la partie gauche de (2.4.12) et ensuite de combiner avec les inégalités (2.4.13) – (2.4.15), nous obtenons

$$\left\|(T-t) V\right\|_{L_\rho^2(Q)}^2 \leq \lambda \left\|\Im_t V_x\right\|_{L_\rho^2(Q)}^2 - \frac{5}{8}\left\|\Im_t^2 V_x\right\|_{L_\rho^2(Q)}^2. \tag{2.4.16}$$

La condition (2.4.5), confirme que le membre de droite de (2.4.16) est non positive, et donc

$$\left\|(T-t) V\right\|_{L_\rho^2(Q)}^2 \leq 0, \tag{2.4.17}$$

l'inégalité (2.4.17) implique que $\zeta(x,t) = 0$ presque partout dans Q. Ce qui acheve la preuve de Théorème 4.

Nous allons maintenant prouver le cas général de la densité. Sachant que $F = L_\rho^2(Q) \times W_\rho^1(\Omega) \times L_\rho^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, alors l'image de l'opérateur L est dense dans F signifie que l'orthogonalité d'un vecteur $\Phi = (\zeta, \varphi_0, \varphi_1) \in F$ pour l'ensemble $R(L)$, implique que $\Phi \equiv 0$. C'est a dire

$$(\mathcal{L}u, \zeta)_{L_\rho^2(Q)} + (\ell_1 u, \varphi_0)_{W_\rho^1(\Omega)} + (\ell_2 u, \varphi_1)_{L_\rho^2(\Omega)} = 0, \tag{2.4.18}$$

implique que $(\zeta, \varphi_0, \varphi_1) \equiv 0$.

En posant $u \in D_0(L)$ dans l'équation (2.4.18) nous avons

$$(\mathcal{L}u, \zeta)_{L^2_\rho(Q)} = 0, \qquad \text{pour tout } \; u \in D_0(L).$$

D'après le théorème 4 on en déduit que $\zeta \equiv 0$, et (2.4.18) devient

$$(\ell_1 u,\varphi_0)_{W^1_\rho(\Omega)} + (\ \ell_2 u,\varphi_1)_{L^2_\rho(\Omega)} = 0,$$

comme les images $\ell_1 u$ et $\ell_2 u$ s'annulent d'une maniere indépendante et que les ensemble des valeurs des opérateurs de trace ℓ_1 et ℓ_2 sont respectivement denses dans les espaces $W^1_\rho(\Omega)$ et $L^2_\rho(\Omega)$, alors $\varphi_0 = 0,\ \varphi_1 = 0$. Par consequence $\Phi = 0$, d'où $R(L)^\perp = \{0\}$ c'est à dire que $\overline{R(L)} = F$. Ceci achève la démonstration du Théorème 3. ■

2.5 Problème non linéaire

Nous somme maintenant prés à résoudre le problème non linéaire (2.1.1) − (2.1.4). En se basant sur les résultats obtenus précédement, nous appliquons un processus itérative pour établir l'existence et l'unicité de la solution faible du problème non linéaire. Si u est une solution du problème (2.1.1) − (2.1.4) et Ψ est une solution du problème

$$\begin{cases} \Psi_{tt} - \left(\frac{1}{x}\Psi_x + \Psi_{xx}\right) + \int_0^t g(t-s)\left(\frac{1}{x}\Psi_x + \Psi_{xx}\right)(x,s)ds + a\Psi_t = 0, \\ \Psi(x,0) = u_0(x),\ \ \Psi_t(x,0) = u_1(x), \\ \Psi_x(1,t) = 0,\ \ \int_0^1 x\Psi(x)dx = 0, \end{cases} \tag{2.5.1}$$

alors $W(x,t) = u(x,t) - \Psi(x,t)$ est une solution de

$$\begin{cases} W_{tt} - \left(\frac{1}{x}W_x + W_{xx}\right) + \int_0^t g(t-s)\left(\frac{1}{x}W_x + W_{xx}\right)(x,s)ds + aW_t = G(x,t,W,W_x), \\ W(x,0) = 0,\ W_t(x,0) = 0, \\ W_x(1,t) = 0,\ \ \int_0^1 xW(x,t)dx = 0, \end{cases} \tag{2.5.2}$$

où

$$G(x,t,W,W_x) = f(x,t,W+\Psi,W_x+\Psi_x),$$

qui satisfait à la condition

$$\begin{aligned} & |G(x,t,u_1,v_1) - G(x,t,u_2,v_2| \\ \leq\ & \delta(|u_1-u_2| + |v_1-v_2|). \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

Théorème 4 montre que le problème (2.5.1), admet une solution unique qui dépend continûment des données $u_0 \in W_\rho^1(\Omega)$ et $u_1 \in W_\rho^1(\Omega)$ .Afin de résoudre le problème (2.5.2), nous allons montrer qu'il a une solution faible unique. L'idée générale, est de construire une suite itérative $\left(W^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément de $W \in L^2\left(0,T;V_\rho^1(\Omega)\right)$ qui sera la solution du problème à l'étude (2.5.2).

Théorème 5. *Supposons que la condition* (2.5.3) *a lieu et que*

$$\sqrt{\eta T} e^{\eta T/2} < 1,$$

où

$$\eta = \frac{\max\left\{4\delta^2, T^2\beta + 7/2\right\}}{\min\{1, 2\lambda\}},$$

et

$$\beta = \left(\sup g(s)_{0\leq s\leq T}\right)^2,$$

alors le problème (2.6.2) *admet une solution unique faible appartenant à* $L^2\left(0,T;W_\rho^1(\Omega)\right)$.

Preuve Supposons que W et $\upsilon \in C^1(Q)$ telle que $W(x,0) = 0, W_t(x,0) = 0$, $\upsilon_t(x,T) = 0$, $\int_0^1 xWdx = 0$, $\int_0^1 x\upsilon dx = 0$.

Pour $\upsilon \in C^1(Q)$, nous avons

$$(\mathcal{L}W, \Im_x(\xi\upsilon_t))_{L^2_\rho(Q)} = (G, \Im_x(\xi\upsilon_t))_{L^2_\rho(Q)}. \tag{2.5.4}$$

En tenant compte des conditions ci-dessus sur les fonctions W et υ, nous avons

$$(W_{tt}, \Im_x(\xi\upsilon_t))_{L^2_\rho(Q)} = (\upsilon_{tt}, \Im_x(\xi W_t))_{L^2_\rho(Q)}, \tag{2.5.5}$$

$$-\left((xW_x)_x, \Im_x(\xi\upsilon_t)\right)_{L^2(Q)} = (\upsilon_t, W_x)_{L^2_\rho(Q)}, \tag{2.5.6}$$

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^t g(t-s)\,(xW_x(x,s))_x\,ds,\, \Im_x(\xi\upsilon_t)\right)_{L^2(Q)}\\ = &-\left(\upsilon_t, \int_0^t g(t-s)\,xW_x(x,s)\right)_{L^2_\rho(Q)},\end{aligned} \tag{2.5.7}$$

$$(aW_t, \Im_x(\xi\upsilon_t))_{L^2_\rho(Q)} = -(a\upsilon_t, \Im_x(\xi W_t))_{L^2_\rho(Q)}, \tag{2.5.8}$$

$$(G, \Im_x(\xi\upsilon_t))_{L^2_\rho(Q)} = -(\upsilon_t, \Im_x(\xi G))_{L^2_\rho(Q)}. \tag{2.5.9}$$

En combinant $(2.5.4)-(2.5.9)$, on obtient

$$B(W, \upsilon_t) = (\upsilon_t, \Im_x(\xi G))_{L^2_\rho(Q)}, \tag{2.5.10}$$

où

$$\begin{aligned}B(W,\upsilon_t) \;=\;& (a\upsilon_t, \Im_x(\xi W_t))_{L^2_\rho(Q)} + \left(\upsilon_t, \int_0^t g(t-s)\,xW_x(x,s)\,ds\right)_{L^2_\rho(Q)}\\ &-(\upsilon_{tt}, \Im_x(\xi W_t))_{L^2_\rho(Q)} - (\upsilon_t, W_x)_{L^2_\rho(Q)}.\end{aligned} \tag{2.5.11}$$

nous devons mentionner ici que nous entendons par une solution faible du problème (2.5.2) une fonction $Z \in L^2_\rho(Q)$ satisfaisant (2.5.10) et $Z_x(1,t) = 0$. Nous allons maintenant définir la suite itérative $\left(W^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit : Soit $W^{(0)} = 0$, compte tenu de l'élément $W^{(n-1)}$, alors pour

$n = 1, 2, ...$ résoudre le problème itérative :

$$\begin{cases} W_{tt}^{(n)} - \left(\frac{1}{x} W_x^{(n)} + W_{xx}^{(n)}\right) + \int_0^t g\left(t-s\right) \left(\frac{1}{x} W_x^{(n)} + W_{xx}^{(n)}\right)(x,s) ds + a W_t^{(n)} \\ \qquad = G\left(x, t, W^{(n-1)}, W_x^{(n-1)}\right), \\ W^{(n)}\left(x, 0\right) = 0,\ W_t^{(n)}\left(x, 0\right) = 0, \\ W_x^{(n)}\left(1, t\right) = 0,\ \int_0^1 x W^{(n)}(x,t) dx = 0. \end{cases} \tag{2.5.12}$$

Pour n fixe, le Théorème 3, montre que chaque problème (2.5.12) admet une solution unique $W^{(n)}\left(x, t\right)$. Maintenant, nous posons $S^{(n)}\left(x, t\right) = W^{(n+1)}\left(x, t\right) - W^{(n)}\left(x, t\right)$, on obtient alors la nouveau problème

$$\begin{cases} S_{tt}^{(n)} - \left(\frac{1}{x} S_x^{(n)} + S_{xx}^{(n)}\right) + \int_0^t g\left(t-s\right) \left(\frac{1}{x} S_x^{(n)} + S_{xx}^{(n)}\right)(x,s) ds + a S_t^{(n)} \\ \qquad = \Gamma^{(n-1)}\left(x, t\right), \\ S^{(n)}\left(x, 0\right) = 0,\ S_t^{(n)}\left(x, 0\right) = 0, \\ S_x^{(n)}\left(1, t\right) = 0,\ \int_0^1 x S^{(n)}(x) dx = 0, \end{cases} \tag{2.5.13}$$

où

$$\Gamma^{(n-1)}\left(x, t\right) = G\left(x, t, W^{(n)}, W_x^{(n)}\right) - G\left(x, t, W^{(n-1)}, W_x^{(n-1)}\right).$$

■

Lemme 6. *Supposons que la condition* (2.5.3) *est vérifiée, alors il existe une constante* $\varkappa$ *positive telle que pour le problème* (2.5.13)*, nous avons l'estimation a priori*

$$\left\| S^{(n)} \right\|_{L^2\left(0,T; W_\rho^1(\Omega)\right)} \leq \sqrt{\eta T} e^{\eta T/2} \left\| S^{(n-1)} \right\|_{L_\rho^2(Q)}. \tag{2.5.14}$$

Preuve du lemme 6. Prenant le produit scalaire dans $L_\rho^2\left(Q^\upsilon\right)$, avec $0 \leq \nu \leq T$, de l'équation différencielle dans (2.5.13) et l'opérateur intégro-différentiel

$$\mathcal{O} S^{(n)} = S_t^{(n)} - \Im_x^2 \left(\xi S_t^{(n)}\right),$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \left(S_{tt}^{(n)}, S_t^{(n)}\right)_{L_\rho^2(Q^\upsilon)} - \left(\left(xS_x^{(n)}\right)_x + S_t^{(n)}\right)_{L^2(Q^\upsilon)} + \left(aS_t^{(n)}, S_t^{(n)}\right)_{L_\rho^2(Q^\upsilon)} \\
& + \left(\int_0^t g\left(t-s\right)\left(xS_x^{(n)}\right)_x(x,s)ds, S_t^{(n)}\right)_{L^2(Q^\upsilon)} - \left(S_{tt}^{(n)}, \Im_x^2\left(\xi S_t^{(n)}\right)\right)_{L_\rho^2(Q^\upsilon)} \\
& + \left(\left(xS_x^{(n)}\right)_x + \Im_x^2\left(\xi S_t^{(n)}\right)\right)_{L^2(Q^\upsilon)} - \left(aS_t^{(n)}, \Im_x^2\left(\xi S_t^{(n)}\right)\right)_{L_\rho^2(Q^\upsilon)} \\
& - \left(\int_0^t g\left(t-s\right)\left(xS_x^{(n)}\right)_x(x,s)ds, \Im_x^2\left(\xi S_t^{(n)}\right)\right)_{L^2(Q^\upsilon)} \\
= \; & \left(\Gamma^{(n-1)}, S_t^{(n)}\right)_{L^2(Q^\upsilon)} + \left(\Gamma^{(n-1)}, \Im_x^2\left(\xi S_t^{(n)}\right)\right)_{L^2(Q^\upsilon)}.
\end{aligned} \tag{2.5.15}$$

on obtient aprés intégration par partie de chaque terme de (2.5.15),

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\left\|S_t^{(n)}(x,\nu)\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\left\|\Im_x\left(\xi S_t^{(n)}\right)(x,\nu)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& +\frac{1}{2}\left(1-\int_0^\upsilon g\left(s\right)ds\right)\left\|S_x^{(n)}(x,\nu)\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2 + a\left\|S_t^{(n)}\right\|_{L_\rho^2(Q^\upsilon)}^2 \\
& +a\left\|\Im_x\left(\xi S_t^{(n)}\right)\right\|_{L_\rho^2(Q^\upsilon)}^2 - \left(S_x^{(n)}, \Im_x\left(\xi S_t^{(n)}\right)\right)_{L_\rho^2(Q^\upsilon)} \\
& + \left(\int_0^\upsilon g\left(t-s\right)S_x^{(n)}(x,s)ds, \Im_x\left(\xi S_t^{(n)}\right)\right)_{L_\rho^2(Q^\upsilon)} \\
& +\frac{1}{2}\left(g\left(t-s\right), \left(S_x^{(n)}(x,s)-S_x^{(n)}(x,t)\right)^2\right)_{L_\rho^2(Q^\upsilon)} \\
& -\frac{1}{2}\int_0^\upsilon\left(\int_0^t g'\left(t-s\right)\left(\int_0^1 x\left(S_x^{(n)}(x,s)-S_x^{(n)}(x,t)\right)^2dx\right)ds\right)dt \\
& +\frac{1}{2}\int_{Q^\upsilon} xg\left(t\right)\left(S_x^{(n)}(x,t)\right)^2dxdt \\
= \; & \left(\Gamma^{(n-1)}, S_t^{(n)}\right)_{L_\rho^2(Q^\upsilon)} - \left(\Gamma^{(n-1)}, \Im_x^2\left(\xi S_t^{(n)}\right)\right)_{L_\rho^2(Q^\upsilon)}.
\end{aligned} \tag{2.5.16}$$

En utilisant le fait que $g \geq 0$ et $g' \leq 0$, et en negligeant le cinquième et le quatrième terme du membre droite de (2.5.16) il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\|S_t^{(n)}(x,\nu)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\frac{1}{2}\left\|\Im_x\left(\xi S_t^{(n)}\right)(x,\nu)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\lambda}{2}\left\|S_x^{(n)}(x,\nu)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}\\
\leq\ &\left(S_x^{(n)},\Im_x\left(\xi S_t^{(n)}\right)\right)_{L^2_\rho(Q^v)}-\left(\int_0^t g(t-s)\,S_x^{(n)}(x,s)ds,\Im_x\left(\xi S_t^{(n)}\right)\right)_{L^2_\rho(Q^v)}\\
&+\left(\Gamma^{(n-1)},S_t^{(n)}\right)_{L^2_\rho(Q^v)}-\left(\Gamma^{(n-1)},\Im_x^2\left(\xi S_t^{(n)}\right)\right)_{L^2_\rho(Q^v)}. \qquad (2.5.17)
\end{aligned}$$

Les terme du membre droit de (2.5.17) peuvent êtres estimi comme suit

$$\left(S_x^{(n)},\Im_x\left(\xi S_t^{(n)}\right)\right)_{L^2_\rho(Q^v)}\leq\frac{1}{2}\left\|S_x^{(n)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q^v)}+\frac{1}{2}\left\|\Im_x\left(\xi S_t^{(n)}\right)\right\|^2_{L^2(Q^v)}, \qquad (2.5.18)$$

$$\begin{aligned}
&-\left(\int_0^t g(t-s)\,S_x^{(n)}(x,s)ds,\Im_x\left(\xi S_t^{(n)}\right)\right)_{L^2_\rho(Q^v)}\\
\leq\ &\frac{1}{2}\left\|\Im_x\left(\xi S_t^{(n)}\right)\right\|^2_{L^2(Q^v)}+\frac{\beta T^2}{2}\left\|S_x^{(n)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q^v)}, \qquad (2.5.19)
\end{aligned}$$

$$\left(\Gamma^{(n-1)},S_t^{(n)}\right)_{L^2_\rho(Q^v)}\leq\frac{1}{2}\left\|S_t^{(n)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q^v)}+\delta^2\left(\left\|S^{(n-1)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q^v)}+\left\|S_x^{(n-1)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q^v)}\right), \qquad (2.5.20)$$

$$\left(\Gamma^{(n-1)},\Im_x^2\left(\xi S_t^{(n)}\right)\right)_{L^2_\rho(Q^v)}\leq\delta^2\left(\left\|S^{(n-1)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q^v)}+\left\|S_x^{(n-1)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q^v)}\right)+\frac{1}{4}\left\|\Im_x\left(\xi S_t^{(n)}\right)\right\|^2_{L^2(Q^v)}. \qquad (2.5.21)$$

Si nous combinons les inégalités (2.5.18) – (2.5.21), nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\left\|S_t^{(n)}(x,\nu)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\left\|\Im_x\left(\xi S_t^{(n)}\right)(x,\nu)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\lambda\left\|S_x^{(n)}(x,\nu)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}\\
\leq\ &\left(\beta T^2+1\right)\left\|S_x^{(n)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q^v)}+\frac{5}{2}\left\|\Im_x\left(\xi S_t^{(n)}\right)\right\|^2_{L^2(Q^v)}+\left\|S_t^{(n)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q^v)}\\
&+4\delta^2\left(\left\|S^{(n-1)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q^v)}+\left\|S_x^{(n-1)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q^v)}\right). \qquad (2.5.22)
\end{aligned}$$

Nous avons

$$\left\|S^{(n)}(x,\nu)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}\leq\left\|S_t^{(n)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q^v)}+\left\|S^{(n)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q^v)}. \qquad (2.5.23)$$

En additionnant (2.5.22) et (2.5.23) membre a membre, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
& \left\|S^{(n)}(x,\nu)\right\|^2_{W^1_\rho(\Omega)} + \left\|S^{(n)}_t(x,\nu)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \left\|\Im_x\left(\xi S^{(n)}_t\right)(x,\nu)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\leq\ & \eta\left(\left\|S^{(n)}\right\|^2_{W^1_\rho(Q^\upsilon)} + \left\|S^{(n)}_t\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\upsilon)} + \left\|\Im_x\left(\xi S^{(n)}_t\right)\right\|^2_{L^2(Q^\upsilon)}\right. \\
& \left. + \left\|S^{(n-1)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\upsilon)} + \left\|S^{(n-1)}_x\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\upsilon)}\right). \qquad (2.5.24)
\end{aligned}$$

En appliquant le Lemme de Gronwall pour (2.5.24) on obtient

$$\begin{aligned}
& \left\|S^{(n)}(x,\nu)\right\|^2_{W^1_\rho(\Omega)} + \left\|S^{(n)}_t(x,\nu)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \left\|\Im_x\left(\xi S^{(n)}_t\right)(x,\nu)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
\leq\ & \eta e^{\eta T}\left\|S^{(n-1)}\right\|^2_{W^1_\rho(Q^\upsilon)}. \qquad (2.5.25)
\end{aligned}$$

On déduit de (2.5.25) que

$$\left\|S^{(n)}(x,\nu)\right\|^2_{W^1_\rho(\Omega)} \leq \eta e^{\eta T}\left\|S^{(n-1)}\right\|^2_{W^1_\rho(Q^\upsilon)}. \qquad (2.5.26)$$

Nous allons maintenant intégré les deux membres de (2.5.26) par rapport à ν de 0 à T pour obtenir

$$\left\|S^{(n)}\right\|_{L^2\left(0,T;W^1_\rho(\Omega)\right)} \leq \sqrt{\eta T}e^{\eta T/2}\left\|S^{(n-1)}\right\|_{L^2\left(0,T;W^1_\rho(\Omega)\right)}. \qquad (2.5.27)$$

Il en résulte de (2.5.27) que la série $\sum_{n=1}^{\infty} S^{(n)}$converge si $\sqrt{\eta T}e^{\eta T/2} < 1$.Comme $S^{(n)}(x,t) = W^{(n+1)}(x,t) - W^{(n)}(x,t)$, alors il s'ensuit que la suite $\left(W^{(n)}(x,t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{aligned}
W^{(n)}(x,t) &= \sum_{k=0}^{n-1} S^{(n)}(x,t) + W^{(0)}(x,t) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(W^{(n+1)}(x,t) - W^{(n)}(x,t)\right) + W^{(0)}(x,t), \qquad n = 1,2,...
\end{aligned}$$

converge vers un élément $W \in L^2\left(0,T;W^1_\rho(\Omega)\right)$. Nous devons montrer que W satisfait

1- $B(W,\upsilon_t) = (\upsilon_t,\Im_x(\xi G))_{L^2_\rho(Q)}$,

2- $W_x(1,t) = 0$, comme mentionné précédemment.

Des égalités (2.5.12), nous avons

$$B\left(W^{(n)}, \upsilon_t\right) = \left(\upsilon_t, \Im_x\left(\xi G\left(\xi,t,W^{(n-1)},W_\xi^{(n-1)}\right)\right)\right)_{L^2_\rho(Q)},$$

d'où il sensuit que

$$\begin{aligned} & B\left(W^{(n)} - W,\upsilon_t\right) + B\left(W,\upsilon_t\right) \\ = & \left(\upsilon_t, \Im_x\left(\xi G\left(\xi,t,W^{(n-1)},W_\xi^{(n-1)}\right)\right) - \Im_x\left(\xi G\left(\xi,t,W,W_\xi\right)\right)\right)_{L^2_\rho(Q)} \\ & + \left(\upsilon_t,\Im_x\left(\xi G\left(\xi,t,W,W_\xi\right)\right)\right)_{L^2_\rho(Q)}. \end{aligned} \tag{2.5.28}$$

Maintenant, à partir de l'équation différentielle partielle (2.5.12), nous avons

$$\begin{aligned} & B\left(W^{(n)} - W,\upsilon_t\right) \\ = & \left(\upsilon_t,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Im_x\left(\xi\left(W^{(n)} - W\right)\right)\right)_{L^2_\rho(Q)} \\ & - \left(\upsilon_t,\Im_x\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi\frac{\partial}{\partial \xi}\left(W^{(n)} - W\right)\right)\right)\right)_{L^2_\rho(Q)} \\ & + \left(\upsilon_t, \int_0^t g\left(t-s\right)\Im_x\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi\frac{\partial}{\partial \xi}\left(W^{(n)} - W\right)\right)\right)(x,s)\,ds\right)_{L^2_\rho(Q)} \\ & + a\left(\upsilon_t,\frac{\partial}{\partial t}\Im_x\left(\xi\left(W^{(n)} - W\right)\right)\right)_{L^2_\rho(Q)}. \end{aligned} \tag{2.5.29}$$

En utilisant les conditions sur υ et W, on obtient après quelques intégrations par parties

$$\begin{aligned} & B\left(W^{(n)} - W,\upsilon_t\right) \\ = & -\left(\upsilon_{tt},\frac{\partial}{\partial t}\Im_x\left(\xi\left(W^{(n)} - W\right)\right)\right)_{L^2_\rho(Q)} + \left(x\upsilon_t,\frac{\partial}{\partial x}\left(W^{(n)} - W\right)\right)_{L^2_\rho(Q)} \\ & + \left(x\upsilon_t, \int_0^t g\left(t-s\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(W^{(n)} - W\right)(x,s)\,ds\right)_{L^2_\rho(Q)} \\ & + a\left(\upsilon_t,\frac{\partial}{\partial t}\Im_x\left(\xi\left(W^{(n)} - W\right)\right)\right)_{L^2_\rho(Q)}. \end{aligned} \tag{2.5.30}$$

Application de l'inégalité de Cauchy Schwarz aux termes de la partie droite de (2.5.30) donne

$$\begin{aligned} & B\left(W^{(n)} - W, \upsilon_t\right) \\ \leq\ & \frac{1}{\sqrt{2}} \|\upsilon_{tt}\|_{L^2_\rho(Q)} \left\|W_t^{(n)} - W_t\right\|_{L^2\left(0,T;W^1_\rho(\Omega)\right)} \\ & + (1+\beta T) \|\upsilon_t\|_{L^2_\rho(Q)} \left\|W^{(n)} - W\right\|_{L^2\left(0,T;W^1_\rho(\Omega)\right)} \\ & + \frac{a}{2} \|\upsilon_t\|_{L^2_\rho(Q)} \left\|W_t^{(n)} - W_t\right\|_{L^2\left(0,T;W^1_\rho(\Omega)\right)}, \end{aligned} \tag{2.5.31}$$

comme $W^{(n)}(x,0) = 0$ et $W(x,0) = 0$, on déduit de (2.5.31) que

$$\begin{aligned} & B\left(W^{(n)} - W, \upsilon_t\right) \\ \leq\ & \sup\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 2T + 2\beta T^2 + \frac{a}{2}\right) \left\|W_t^{(n)} - W_t\right\|_{L^2\left(0,T;W^1_\rho(\Omega)\right)} \\ & \times \left(\|\upsilon_{tt}\|_{L^2_\rho(Q)} + \|\upsilon_t\|_{L^2_\rho(Q)}\right). \end{aligned} \tag{2.5.32}$$

En d'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} & \left(\upsilon_t, \Im_x\left(\xi G\left(\xi,t,W^{(n-1)},W_\xi^{(n-1)}\right)\right) - \Im_x\left(\xi G\left(\xi,t,W,W_\xi\right)\right)\right)_{L^2_\rho(Q)} \\ \leq\ & \frac{\delta}{\sqrt{2}} \|\upsilon_t\|_{L^2_\rho(Q)} \left\|W^{(n)} - W\right\|_{L^2\left(0,T;W^1_\rho(\Omega)\right)} \\ & + \frac{2\delta T}{\sqrt{2}} \|\upsilon_t\|_{L^2_\rho(Q)} \left\|W_t^{(n)} - W_t\right\|_{L^2\left(0,T;W^1_\rho(\Omega)\right)}. \end{aligned} \tag{2.5.33}$$

En utilisant (2.5.32) et (2.5.33) et par passage à la limite que $n \to \infty$ dans (2.5.30), nous obtenons

$$B\left(W, \upsilon_t\right) = \left(\upsilon_t, \Im_x\left(\xi G\left(\xi,t,W,W_\xi\right)\right)\right)_{L^2_\rho(Q)}, \tag{2.5.34}$$

pour conclure que la problème (2.5.2) admet une solution faible, il reste à montrer que $W_x(1,t) = 0$, Comme $W \in L^2\left(0,T;W^1_\rho(\Omega)\right)$, alors $\int_0^t \frac{\partial W}{\partial x}(x,\sigma)\, d\sigma \in C\left(\overline{Q}\right)$, et nous concluons que $W_x(1,t) = 0$. ■

Il reste maintenant à prouver l'unicité de la solution du problème (2.5.2).

Théorème 7. *Si la condition* (2.6.3) *est satisfaite, alors la solution du problème* (2.6.2) *est unique.*

Preuve Supposons que $W_1,\ W_2 \in L^2\left(0,T;W_\rho^1\left(\Omega\right)\right)$ Sont deux solutions de (2.6.2), alors $W = W_1 -\ W_2 \in L^2\left(0,T;W_\rho^1\left(\Omega\right)\right)$ et satisfait

$$\begin{cases} W_{tt} - \left(\frac{1}{x}W_x + W_{xx}\right) + \int_0^t g\left(t-s\right)\left(\frac{1}{x}W_x + W_{xx}\right)(x,s)ds + aW_t = \theta\left(x,t\right), \\ W\left(x,0\right) = 0,\ W_t\left(x,0\right) = 0, \\ W_x\left(1,t\right) = 0,\ \int_0^1 xW(x,t)dx = 0, \end{cases} \tag{2.6.35}$$

où

$$\theta\left(x,t\right) = G\left(x,t,W_1,\frac{\partial W_1}{\partial x}\right) - G\left(x,t,W_2,\frac{\partial W_2}{\partial x}\right).$$

En prenant le produit scalaire dans $L_\rho^2\left(Q\right)$ de l'équation différentielle (2.6.35) et l'opérateur intégro-différentielles

$$\mathcal{O}W = W_t - \Im_x^2\left(\xi W_t\right),$$

et en utilisant la même procédure du Lemme 6, nous obtenons

$$\left\|W\right\|_{L^2\left(0,T;W_\rho^1(\Omega)\right)} \leq \chi\left\|W\right\|_{L^2\left(0,T;W_\rho^1(\Omega)\right)}, \tag{2.6.36}$$

où $\chi = \sqrt{\eta T}e^{\eta T/2}$. Comme $\chi < 1$, on déduit de (6.36) que $W_1 -\ W_2 = 0$ et donc $W_1 =\ W_2 \in L^2\left(0,T;W_\rho^1\left(\Omega\right)\right)$, Ceci achève la démonstration du Théorème 7. ■

Chapitre 3

Sur un système couplé de thermoélasticité non linéaire singulière

Dans ce travail, on étudie un problème aux limite a valeur initiale pour un système de thermoélasticité non linéaire singulier, où une condition classique est remplacée par une condition non locale de type intégrale. On utulise une approche d'analyse fonctionnelle pour traiter le cas linéaire associé, et une méthode itérative pour le cas non linéaire. Les résultats obtenus généralisent et développent les travaux de Mesloub [27-29], et Bouziani [4]. Le lecteur pourra également se référer à [14] pour une théorie plus générale des problèmes aux limites.

L'organisation de ce chapitre est comme suit : Dans la section 1, on donnons la position du problème non linéaire et le problème linéaire associé et on introduit les différents espaces fonctionnels utilisés. Dans la section 3, on donne un résultat d'unicité pour le problème linéaire posé associé et dans la section 4, on établit l'existence de sa solution. Enfin, Dans la section 5, on démontre l'existence et l'unicité de la solution du problème non linéaire.

3.1 Position du problème

On considère un problème mixte avec conditions non locales pour un système non linéaire couplé de thermoélasticité en combinant une condition classique et une condition intégrale :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 u = u_{tt}(r,t) - \frac{1}{r}(ru_r)_r + \int_0^t g\,(t-s)\,\frac{a}{r}(ru_r)_r(r,s)ds + br\theta_r = f(r,t,u,\theta,u_r,\theta_r), \\ \mathcal{L}_2\theta = \theta_t(r,t) - \frac{\varkappa}{r}(r\theta_r)_r + bru_{rt} = h(r,t,u,\theta,u_r,\theta_r), \end{cases} \tag{3.1.1}$$

dans le domaine borné

$$Q = \Omega \times (0,T) = \{(r,t) : 0 < r < 1, 0 < t < T\},$$

où a, b, $\varkappa$ sont des constantes positives, $f \in L^2_\rho(Q)$, $h \in L^2_\rho(Q)$ et $g \in C^2$ une fonction satisfaisant $g : IR^+ \to IR^+$ telle que $1 - a\int\limits_0^T g(t)dt = A > 0$, et $g(t) \geq 0$, $g'(t) \leq 0$.

Au problème $(3.1.1)$, on associe les conditions initiales

$$\ell_1 u = u(r,0) = u_0(r), \qquad 0 < r < 1, \tag{3.1.2}$$

$$\ell_2 u = u_t(r,0) = u_1(r), \qquad 0 < r < 1, \tag{3.1.3}$$

$$\ell_3\theta = \theta(r,0) = \theta_0(r), \qquad 0 < r < 1, \tag{3.1.4}$$

les conditions aux bord

$$u_r(1,t) = 0, \qquad 0 < t < T, \tag{3.1.5}$$

$$\theta(1,t) = 0, \qquad 0 < t < T, \tag{3.1.6}$$

et la condition intègrale

$$\int_0^1 rudr = 0. \tag{3.1.7}$$

Notre objectif est d'étudier l'existence et l'unicité de la solution faible du problème $(3.1.1) - (3.1.7)$. Nous allons d'abord attaqué le problème linéaire associé à $(3.1.1) - (3.1.7)$ et utilisé les résultats obtenus pour traiter le cas non linéaire. Basé sur une estimation a priori et sur la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème en considération, nous démontrons l'existence, l'unicité et la dépendance continue des données de la solution forte du problème linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} u_{tt}(r,t) - \frac{1}{r}(ru_r)_r + \int_0^t g\,(t-s)\,\frac{a}{r}(ru_r)_r(r,s)ds \\ +br\theta_r = f(r,t), \\ \theta_t(r,t) - \frac{\varkappa}{r}(r\theta_r)_r + bru_{rt} = h(r,t), \\ u\,(r,0) = u_0\,(r)\,,\ u_t\,(r,0) = u_1\,(r)\,, \\ \theta\,(r,0) = \theta_0\,(r)\,,\ 0<r<1, \\ u_r\,(1,t) = 0,\ \theta\,(1,t) = 0,\ \int_0^1 rudr = 0, \quad 0<t<T. \end{array}\right. \tag{3.1.8}$$

3.2 Espaces Fonctionnels Associés

Pour l'étude du problème posé, introduisons certains espaces fonctionnels qui nous sont nécessaires. Soit $L_\rho^2\,(Q)$ l'espace avec poids des fonctions a carré integrables ayant le produit scalaire

$$\begin{aligned} (f\,,\,g)_{L_\rho^2(Q)} &= (f\,,\,g)_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ &= (rf\,,\,g)_{L^2(Q)} \\ &= \int_Q rfgdrdt, \end{aligned}$$

et l'espace de Sobolev avec poids $W_{2,\rho}^{1,1}\,(Q)$ muni du produit scalaire

$$\begin{aligned} (f\,,\,g)_{W_{2,\rho}^{1,1}(Q)} &= (f\,,\,g)_{L^2(0,T;W_{2,\rho}^{1,1}(\Omega))} \\ &= (f\,,\,g)_{L_\rho^2(Q)} + (f_r\,,\,g_r)_{L_\rho^2(Q)} + (f_t\,,\,g_t)_{L_\rho^2(Q)}\,. \end{aligned}$$

Les espace avec poids sur Ω, tels que $L_\rho^2\,(\Omega)$ et $W_{2,\rho}^{1,1}\,(\Omega)$ sont utilisés, leurs définitions sont analogues à celle des espaces sur Q.

Le problème (3.1.8) est équivalant à l'équation opérationnelle : $AU = \mathcal{H}$, avec $U = (u,\,\theta)$, $AU = (L_1 u,\,L_2\theta)$, et $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_1,\,\mathcal{H}_2)$, où

$$L_1 u = \{\mathcal{L}_1 u,\, \ell_1 u,\, \ell_2 u\}\,, \quad L_2\theta = \{\mathcal{L}_2\theta,\, \ell_3\theta\}\,,$$

et

$$\mathcal{H}_1 = \{f,\, u_\circ,\, u_1\}\,, \quad \mathcal{H}_2 \; = \{h,\, \theta_\circ\}\,.$$

L'opérateur A est considéré de l'espace de Banach E dans l'espace de Hilbert F, où E est l'espace des paires de fonctions $(u, \theta) \in \left(L^2_\rho(Q)\right)^2$ vérifiant les conditions $(3.1.5) - (3.1.7)$ et ayants la norme finie

$$\|U\|^2_E = \sup_{o\leq\tau\leq T}\left\{\|u(r,\tau)\|^2_{W^{1,1}_{2,\rho}(\Omega)} + \|\theta(r,\tau)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}\right\} + \|\theta_r\|^2_{L^2_\rho(Q)}\,,$$

et $F = F_1 \times F_2$ est l'espace $\left\{L^2_\rho(Q) \times W^1_{2,\rho}(\Omega) \times L^2_\rho(\Omega)\right\} \times \left\{L^2_\rho(Q) \times L^2_\rho(\Omega)\right\}$ avec la norme finie

$$\|\mathcal{H}\|^2_F = \|f\|^2_{L^2_\rho(Q)} + \|u_\circ\|^2_{W^1_{2,\rho}(\Omega)} + \|u_1\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \|h\|^2_{L^2_\rho(Q)} + \|\theta_\circ\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}\,.$$

Soit $D(A)$, le domaine de définition de l'opérateur A, définie par :

$$D(A) = \left\{(u,\theta) \in \left(L^2_\rho(Q)\right)^2 \diagup u_t,\, \theta_t,\, u_{tt},\, u_r, \theta_r,\, u_{rr},\, \theta_{rr},\, u_{tr},\, \theta_{tr} \in L^2_\rho(Q)\right\}.$$

3.3 Estimation a priori et ses consequences

Dans cette unité, nous allons établir une inégalité d'énergie à partir de laquelle on déduit l'unicité de la solution du problème linéaire (3.1.8).

Théorème 1. *Pour tout fonction $U = (u, \theta) \in D(A)$ on a l'estimation a priori*

$$\|U\|_E \leq c\,\|AU\|_F\,, \tag{3.3.1}$$

où C est une constante positive indépendante de U.

Preuve Considérons le produit scalaire dans $L^2_\rho(Q^\tau)$, où $Q^\tau = \Omega \times (0,\tau)$,et $\Omega = (0,1)$,des équations aux dérivées partielles dans (3.1.8) et les opérateurs :

$$\begin{aligned} M_1 u &= u_t - \Im_r^2 (\rho u_t) \\ &= u_t - \int_0^r \int_0^\rho \xi u_t(\xi, t) d\xi d\rho, \end{aligned}$$

et

$$M_2 \theta = \theta$$

respectivement, on a

$$\begin{aligned} & (u_{tt}, u_t)_{L^2_\rho(Q^\tau)} - ((ru_r)_r, u_t)_{L^2(Q^\tau)} \\ & + a \left(\int_0^t g(t-s) (ru_r)_r (r, s) \, ds, u_t \right)_{L^2(Q^\tau)} + b (r\theta_r, u_t)_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\ & - \left(u_{tt}, \Im_r^2 (\rho u_t) \right)_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \left((ru_r)_r, \Im_r^2 (\rho u_t) \right)_{L^2(Q^\tau)} \\ & - a \left(\int_0^t g(t-s) (ru_r)_r (r, s) \, ds, \Im_r^2 (\rho u_t) \right)_{L^2(Q^\tau)} \\ & - b \left(r\theta_r, \Im_r^2 (\rho u_t) \right)_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\ & + (\theta_t, \theta)_{L^2_\rho(Q^\tau)} - \varkappa ((r\theta_r)_r, \theta)_{L^2(Q^\tau)} + b (ru_{rt}, \theta)_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\ = \; & (f, u_t)_{L^2_\rho(Q^\tau)} - \left(f, \Im_r^2 (\rho u_t) \right)_{L^2_\rho(Q^\tau)} + (h, \theta)_{L^2_\rho(Q^\tau)} . \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Intégrons par partie chaque terme dans(3.3.2) on obtient

$$2 (u_{tt}, u_t)_{L^2_\rho(Q^\tau)} = \| u_t (r, \tau) \|^2_{L^2_\rho(0, 1)} - \| u_1 \|^2_{L^2_\rho(0, 1)} , \tag{3.3.3}$$

$$-2 ((ru_r)_r, u_t)_{L^2(Q^\tau)} = \| u_r (r, \tau) \|^2_{L^2_\rho(0, 1)} - \left\| \frac{\partial u_\circ}{\partial r} \right\|^2_{L^2_\rho(0, 1)} , \tag{3.3.4}$$

$$\begin{aligned}
& a\left(\int_0^t g\,(t-s)\,(ru_r)_r\,(r,\,s)\,ds,\,u_t\right)_{L^2(Q^\tau)} \\
= \;& \frac{a}{2}\int_0^\tau g(\tau-s)\left(\int_0^1 r\,(u_r(r,s)-u_r(r,\tau))^2\,dr\right)ds \\
& -\frac{a}{2}\int_0^\tau\int_0^t\left(g^{'}(t-s)\int_0^1 r\,(u_r(r,s)-u_r(r,t))^2\,dr\right)dsdt \\
& -\frac{a}{2}\int_0^\tau\frac{d}{dt}\left\{\int_0^1 ru_r^2(r,t)dr\int_0^t g(s)ds\right\}dt \\
& +\frac{a}{2}\int_0^\tau g(t)\int_0^1 ru_r^2(r,t)drdt,
\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

$$\begin{aligned}
& -2\left(u_{tt},\,\Im_r^2\left(\rho u_t\right)\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
= \;& \left\|\Im_r\left(\rho u_t\left(.,\,\tau\right)\right)\right\|^2_{L^2(0,\,1)}-\left\|\Im_r\left(\rho u_1\right)\right\|^2_{L^2(0,\,1)},
\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

$$\left((ru_r)_r\,,\,\Im_r^2\left(\rho u_t\right)\right)=\left(u_r,\,\Im_r\left(\rho u_t\right)\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)}, \tag{3.3.7}$$

$$\begin{aligned}
& -a\left(\int_0^t g\,(t-s)\,(ru_r)_r\,(r,\,s)\,ds,\,\Im_r^2\left(\rho u_t\right)\right)_{L^2(Q^\tau)} \\
= \;& a\left(\int_0^t g\,(t-s)\,.u_r\,(r,\,s)\,ds,\,\Im_r\left(\rho u_t\right)\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)},
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

$$\begin{aligned}
& -b\left(r\theta_r,\,\Im_r^2\left(\rho u_t\right)\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
= \;& 2b\left(\theta,\,\Im_r^2\left(\rho u_t\right)\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)}+b\left(r\theta,\,\Im_r\left(\rho u_t\right)\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)},
\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

$$2\left(\theta_t,\,\theta\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)}=\left\|\theta\left(r,\,\tau\right)\right\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)}-\left\|\theta_\circ\right\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)}, \tag{3.3.10}$$

$$-\varkappa\left((r\theta_r)_r\,,\,\theta\right)_{L^2(Q^\tau)}=\varkappa\left\|\theta_r\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}, \tag{3.3.11}$$

$$b\left(ru_{rt},\,\theta\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)}=-b\left(r\theta_r,\,u_t\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)}-2b\left(u_t,\,\theta\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)}. \tag{3.3.12}$$

Substituons (3.3.3) – (3.3.12) dans (3.3.2), utilisons l'inégalité de Cauchy-ε et l'inégalité de

Poincare [8], et negligeons les termes positifs dans le membre la gauche, on trouve

$$\begin{aligned}
& \left\|\Im_r\left(\rho u_t\left(.,\,\tau\right)\right)\right\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)}+\left\|u\left(r,\,\tau\right)\right\|^2_{W^{1,\,1}_{2,\,\rho}(0,\,1)} \\
& +\left\|\theta\left(r,\,\tau\right)\right\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)}+\left\|\theta_r\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
\leq\;& c_1\left(\left\|u_1\right\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)}+\left\|u_\circ\right\|^2_{W^1_{2,\,\rho}(0,\,1)}+\left\|\theta_\circ\right\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)}\right. \\
& \left.+\left\|f\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\left\|h\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}\right)+c_2\left(\left\|\Im_r\left(\rho u_t\right)\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}\right. \\
& \left.+\left\|u\right\|^2_{W^{1,\,1}_{2,\,\rho}(Q^\tau)}+\left\|\theta\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}\right),
\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

où

$$c_1=\frac{2}{\min\left(1,\,A,\,2\varkappa\right)}, \tag{3.3.14}$$

et

$$c_2=\frac{\max\left(2b+2,\,\frac{3}{2}+a+2b,\,1+\frac{aT^2}{2}\left(\sup_{0\leq t,s\leq T}\left(g\left(t-s\right)\right)\right)^2,\,5b+1\right)}{\min\left(1,\,A,\,2\varkappa\right)}. \tag{3.3.15}$$

Maintenant, pour éliminer la somme $\left\|\Im_r\left(\rho u_t\right)\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\left\|u\right\|^2_{W^{1,\,1}_{2,\,\rho}(Q^\tau)}+\left\|\theta\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}$, du membre droit de (3.3.13), nous utilisons la version suivante du lemme de Gronwall. ■

Lemme de Gronwall. Si les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, et $f_3(x)$ sont des fonctions positives sur l'intervale $[0,T]$, $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont intégrables sur $[0,T]$, et $f_3(x)$ non décroissante sur $[0,T]$ et C est un constante positive, alors

$$\int_0^\tau f_1(t)dt+f_2(\tau)\leq f_3(\tau)+C\int_0^\tau f_2(t)dt,$$

découle l'inégalité

$$\int_0^\tau f_1(t)dt+f_2(\tau)\leq e^{C\tau}f_3(\tau).$$

Si on pose

$$f_1(\tau)=\left\|\theta\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)},$$

$$f_2(\tau)=\left\|\Im_r\left(\rho u_t\left(.,\,\tau\right)\right)\right\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)}+\left\|u\left(r,\,\tau\right)\right\|^2_{W^{1,\,1}_{2,\,\rho}(0,\,1)}+\left\|\theta\left(r,\,\tau\right)\right\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)},$$

et

$$\begin{aligned} f_3(\tau) &= c_1 \Big(\|u_1\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)} + \|u_\circ\|^2_{W^1_{2,\,\rho}(0,\,1)} + \|\theta_\circ\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)} \\ &\quad + \|f\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \|h\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} \Big), \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \|\Im_r(\rho u_t(.,\,\tau))\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)} + \|u(r,\,\tau)\|^2_{W^{1,\,1}_{2,\,\rho}(0,\,1)} \\ & + \|\theta(r,\,\tau)\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)} + \|\theta_r\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\ \leq\ & c_1 e^{c_2 T} \Big(\|u_1\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)} + \|u_\circ\|^2_{W^1_{2,\,\rho}(0,\,1)} + \|\theta_\circ\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)} \\ & + \|f\|^2_{L^2_\rho(Q)} + \|h\|^2_{L^2_\rho(Q)} \Big). \end{aligned} \tag{3.3.16}$$

Comme le premier terme du membre gauche de (3.3.16) est positive, on a

$$\begin{aligned} & \|u(r,\,\tau)\|^2_{W^{1,1}_{2,\,\rho}(0,\,1)} + \|\theta(r,\,\tau)\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)} + \|\theta_r\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\ \leq\ & c_1 e^{c_2 T} \Big(\|u_1\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)} + \|u_\circ\|^2_{W^1_{2,\,\rho}(0,\,1)} + \|\theta_\circ\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)} \\ & + \|f\|^2_{L^2_\rho(Q)} + \|h\|^2_{L^2_\rho(Q)} \Big). \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

Le membre droit de l'inégalité ci-dessus (3.3.17) ne dépend pas de τ. En prenant le supremum par rapport à τ entre 0 à T, on obtient l'inégalité cherchée (2.3.1) avec $c = \sqrt{c_1} e^{c_2 T/2}$.

Proposition 2. *L'opérateur $A : E \to F$ possède une fermeture.*

Preuve La preuve est analogue à celle de [11].

Par passage à la limite on prolonge l'inégalité (4.1) aux solutions fortes, alors il existe une constante C positive telle que

$$\|U\|_E \leq C \left\|\overline{A}U\right\|_F, \quad \forall U \in D\left(\overline{A}\right). \tag{3.3.18}$$

Il en result de l'inégalité (3.4.18) que la solution forte du problème (3.2.8) est unique et depend continûment de $\mathcal{H} = (\{f,\, u_\circ,\, u_1\},\ \{h,\, \theta_\circ\}) \in F$, et l'ensemble des valeurs $R\left(\overline{A}\right)$ de l'opérateur $\overline{A}$ est fermé dans F, et $R\left(\overline{A}\right) = \overline{R(A)}$. ■

3.4 Existence de la solution du problème posé

Proposition 3. *Si pour toute fonction* $W = (\sigma_1, \sigma_2) \in \left(L^2_\rho(Q)\right)^2$ *et pour tout* $U \in D_\circ(A) = \{U \diagup U \in D(A) : \ell_1 u = \ell_2 u = \ell_3 \theta = 0\}$*, on a*

$$(\mathcal{L}_1 u, \sigma_1)_{L^2_\rho(Q)} + (\mathcal{L}_2 \theta, \sigma_2)_{L^2_\rho(Q)} = 0, \tag{3.4.1}$$

alors W *s'annulle presque par tout dans* Q*.*

Preuve . En utilisant le fait que la relation (3.4.1) est donnée pour tout élément de $D(A)$, on peut l'exprimer sous la forme particulière $U = (u, \theta)$ donnée par

$$U = \begin{cases} (0, 0), & 0 \le t \le p, \\ \left(\int_p^t (t-\tau) u_{\tau\tau} d\tau, \ \int_p^t \theta_\tau d\tau\right), & p \le t \le T, \end{cases} \tag{3.4.2}$$

tel que (u_{tt}, θ_t) est la solution du système

$$\begin{cases} u_{tt} - \Im^2_r(\rho u_{tt}) = E_1(r, t), \\ \theta_t = E_2(r, t), \end{cases} \tag{3.4.3}$$

où

$$E_1(r, t) = \int_t^T \sigma_1(r, \tau)\, d\tau,$$

et

$$E_2(r, t) = \int_t^T \sigma_2(r, \tau)\, d\tau.$$

Il est claire que

$$\begin{cases} \sigma_1 = -u_{ttt} + \Im^2_r(\rho u_{ttt}), \\ \sigma_2 = -\theta_{tt}. \end{cases} \tag{3.4.4}$$

Lemme 4. *La fonction* $W = (\sigma_1, \sigma_2)$ *définie par* (3.4.4) *est dans* $\left(L^2_\rho(Q)\right)^2$. ∎

Preuve La preuve peut être faite de la même manière que dans [10].

Maintenent remplacons les fonctins $\sigma_1$et σ_2 données par (3.4.4) dans la relation (3.4.1), en tenant compte les conditions aux bord (3.1.8) et les relations (3.4.2) et (3.4.3), et en integrant par partie chaque terme de l'égalité, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\|u_{tt}(r,p)\right\|^2_{L^2_\rho(0,1)}+\frac{1}{2}\left\|u_{rt}(r,T)\right\|^2_{L^2_\rho(0,1)}\\
&+ag(0)\left\|u_r\right\|^2_{L^2_\rho(Q_p)}+\frac{1}{2}\left\|\Im_r(\rho u_{tt}(.,p))\right\|^2_{L^2(0,1)}\\
&+\frac{1}{2}\left\|\theta_t(r,p)\right\|^2_{L^2_\rho(0,1)}+\varkappa\left\|\theta_{rt}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_p)}\\
=\;& ag(0)\left(u_r(r,T),u_{tr}(r,T)\right)_{L^2_\rho(0,1)}\\
&+a\left(\left(\int_p^T g'(T-s)\,u_r(r,s)\,ds\right),u_{tr}(r,T)\right)_{L^2_\rho(0,1)}\\
&-ag'(0)\left(u_r,u_{tr}\right)_{L^2_\rho(Q_p)}-a\left(\int_0^t g''(t-s)\,u_r(r,s)\,ds,u_{tr}\right)_{L^2_\rho(Q_p)}\\
&+\left(u_{rt},\Im_r(\rho u_{tt})\right)_{L^2_\rho(Q_p)}-ag(0)\left(u_r,\Im_r(\rho u_{tt})\right)_{L^2_\rho(Q_p)}\\
&-a\left(\int_0^t g\prime(t-s)\,u_r(r,s)\,ds,\Im_r(\rho u_{tt})\right)_{L^2_\rho(Q_p)}\\
&-b\left(r\theta_t,\Im_r(\rho u_{tt})\right)_{L^2_\rho(Q_p)}-2b\left(\theta_t,\Im_r^2(\rho u_{tt})\right)_{L^2_\rho(Q_p)}\\
&+2b\left(u_{tt},\theta_t\right)_{L^2_\rho(Q_p)},
\end{aligned}\tag{3.4.5}$$

où $Q_p=\Omega\times[p,T]$.

Estimons tout les termes du membre droit de (3.4.5) à l'aide de l'inégalité de Cauchy-ε, on a

$$\begin{aligned}
&\left\|u_{tt}(r,p)\right\|^2_{L^2_\rho(0,1)}+\left\|u_{rt}(r,T)\right\|^2_{L^2_\rho(0,1)}\\
&+\left\|\Im_r(\rho u_{tt}(.,p))\right\|^2_{L^2(0,1)}+\left\|\theta_t(r,p)\right\|^2_{L^2_\rho(0,1)}\\
\leq\;& \Gamma\left\{\left\|u_{tt}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_p)}+\left\|u_{rt}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_p)}+\left\|\Im_r(\rho u_{tt})\right\|^2_{L^2(Q_p)}\right.\\
&\left.+\left\|\theta_t\right\|^2_{L^2_\rho(Q_p)}\right\},
\end{aligned}\tag{3.4.6}$$

où

$$\Gamma=\max 4\left(\frac{5b}{2},\lambda,\gamma\right).$$

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \left[\begin{array}{c}
\frac{1}{2}+2\left(ag\left(0\right)\right)^{2}\left(\frac{T^{2}}{2}+1\right) \\
+a^{2}T^{3}\sup_{p\leq s\leq T}\left(g'\left(T-s\right)\right)^{2} \\
+a\left(g'\left(0\right)\right)^{2}\frac{T^{2}}{4}+\frac{aT^{4}}{8}\left(\sup_{p\leq t,\ s\leq T}g''\left(t-s\right)\right)^{2} \\
+a+ag\left(0\right)\frac{T^{2}}{4}+\frac{aT^{4}}{8}\left(\sup_{p\leq t,\ s\leq T}g'\left(t-s\right)\right)^{2}
\end{array}\right], \\
\gamma &= \frac{1}{2}+\frac{a}{2}\left(1+g\left(0\right)\right)+b.
\end{aligned}
$$

Pour utiliser l'inégalité (3.4.6), on remarque que la fonction à intégrer dans le second membre de cette inégalité est indépendant de p, tandis que dans le premier membre ellle dépend de p. Afin d'éviter cette difficulté, nous introduisons une nouvelle fonction ϑ défini par la formule

$$\vartheta\left(r,\ t\right)=\int_{t}^{T}u_{\tau\tau}d\tau. \tag{3.4.7}$$

Alors

$$\vartheta\left(r,\ t\right)=u_{t}\left(r,\ T\right)-u_{t}\left(r,\ t\right), \tag{3.4.8}$$

et

$$\vartheta\left(r,\ p\right)=u_{t}\left(r,\ T\right),\qquad u_{t}\left(r,\ t\right)=\vartheta\left(r,\ p\right)-\vartheta\left(r,\ t\right). \tag{3.5.9}$$

Ainsi, l'inégalité (3.4.6) peut etre ecrite sous la forme

$$
\begin{aligned}
&\left\|u_{tt}\left(r,\ p\right)\right\|_{L_{\rho}^{2}(0,\ 1)}^{2}+\left\|\vartheta_{r}\left(r,\ p\right)\right\|_{L_{\rho}^{2}(0,\ 1)}^{2} \\
&+\left\|\Im_{r}\left(\rho u_{tt}\left(.,\ p\right)\right)\right\|_{L^{2}(0,\ 1)}^{2}+\left\|\theta_{t}\left(r,\ p\right)\right\|_{L_{\rho}^{2}(0,\ 1)}^{2} \\
\leq\ &\Gamma\left\{\left\|u_{tt}\right\|_{L_{\rho}^{2}(Q_{p})}^{2}+\left\|\vartheta_{r}\left(r,\ p\right)-\vartheta_{r}\left(r,\ t\right)\right\|_{L_{\rho}^{2}(Q_{p})}^{2}\right. \\
&\left.+\left\|\Im_{r}\left(\rho u_{tt}\right)\right\|_{L^{2}(Q_{p})}^{2}+\left\|\theta_{t}\right\|_{L_{\rho}^{2}(Q_{p})}^{2}\right\} \\
\leq\ &2\Gamma\left\{\left\|u_{tt}\right\|_{L_{\rho}^{2}(Q_{p})}^{2}+\left\|\vartheta_{r}\left(r,\ p\right)\right\|_{L_{\rho}^{2}(Q_{p})}^{2}+\left\|\vartheta_{r}\left(r,\ t\right)\right\|_{L_{\rho}^{2}(Q_{p})}^{2}\right. \\
&\left.+\left\|\Im_{r}\left(\rho u_{tt}\right)\right\|_{L^{2}(Q_{p})}^{2}+\left\|\theta_{t}\right\|_{L_{\rho}^{2}(Q_{p})}^{2}\right\} \\
=\ &2\Gamma\left\{\left\|u_{tt}\right\|_{L_{\rho}^{2}(Q_{p})}^{2}+\left(T-p\right)\left\|\vartheta_{r}\left(r,\ p\right)\right\|_{L_{\rho}^{2}(0,\ 1)}^{2}\right. \\
&\left.+\left\|\vartheta_{r}\left(r,\ t\right)\right\|_{L_{\rho}^{2}(Q_{p})}^{2}+\left\|\Im_{r}\left(\rho u_{tt}\right)\right\|_{L^{2}(Q_{p})}^{2}+\left\|\theta_{t}\right\|_{L_{\rho}^{2}(Q_{p})}^{2}\right\}.
\end{aligned} \tag{3.4.10}
$$

D'où il en découle de (3.4.10) que

$$\begin{aligned} & \|u_{tt}(r,\, p)\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)} + (1 - 2\Gamma (T - p)) \|\vartheta_r (r,\, p)\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)} \\ & + \|\Im_r (\rho u_{tt}(.,\, p))\|^2_{L^2(0,\,1)} + \|\theta_t (r,\, p)\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)} \\ \leq\ & 2\Gamma \Big\{ \|u_{tt}\|^2_{L^2_\rho(Q_p)} + \|\vartheta_r (r,\, t)\|^2_{L^2_\rho(Q_p)} + \|\Im_r (\rho u_{tt})\|^2_{L^2(Q_p)} \\ & + \|\theta_t\|^2_{L^2_\rho(Q_p)} \Big\}. \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

On choisit $p_\circ \geq 0$ tel que $p \in [T - p_\circ,\, T]$ et $4\Gamma (T - p_\circ) = 1$. Alors il vient

$$\begin{aligned} & \|u_{tt}(r,\, p)\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)} + \|\vartheta_r (r,\, p)\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)} \\ & + \|\Im_r (\rho u_{tt}(.,\, p))\|^2_{L^2(0,\,1)} + \|\theta_t (r,\, p)\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)} \\ \leq\ & 4\Gamma \Big\{ \|u_{tt}\|^2_{L^2_\rho(Q_p)} + \|\vartheta_r (r,\, t)\|^2_{L^2_\rho(Q_p)} + \|\Im_r (\rho u_{tt})\|^2_{L^2(Q_p)} \\ & + \|\theta_t\|^2_{L^2_\rho(Q_p)} \Big\}. \end{aligned} \tag{3.4.12}$$

Si on pose dans (3.4.12)

$$Y(p) = \|u_{tt}\|^2_{L^2_\rho(Q_p)} + \|\vartheta_r (r,\, t)\|^2_{L^2_\rho(Q_p)} + \|\Im_r (\rho u_{tt})\|^2_{L^2(Q_p)} + \|\theta_t\|^2_{L^2_\rho(Q_p)}\,,$$

alors on obtient

$$\frac{dY(p)}{4dp} + \Gamma Y(p) \geq 0, \tag{3.4.13}$$

et on deduit de (3.4.13) que

$$\frac{d}{dp}\left(Y(p)\, e^{4\Gamma p}\right) \geq 0. \tag{3.4.14}$$

Intégrons (3.4.14) sur $[0,\, T]$ et en tenant compte que $Y(T) = 0$, on obtient

$$Y(p)\, e^{4\Gamma p} \leq 0. \tag{3.5.15}$$

Par conséquent, l'inégalité (3.4.15) montre que $W = (\sigma_1,\, \sigma_2) = 0$ presque par Tout dans $Q_{T-p_\circ}$.En procédant de cette façon étape par étape, on prouve que $W = 0$ presque par tout dans Q. ■

Théorème 5. *Pour tout* $(f, h) \in \left(L^2_\rho(Q)\right)^2$, $u_\circ \in W^1_{2,\,\rho}(\Omega)$, $u_1 \in L^2_\rho(\Omega)$ *et* $\theta_\circ \in L^2_\rho(\Omega)$, *il existe une solution forte unique* $U = (u, \theta) = \overline{A}^{-1}(\mathcal{H}) = \overline{A^{-1}}(\mathcal{H})$ *du problème* (3.1.8).

Preuve . Pour prouver que le problème (3.1.8) admet une solution forte unique pour tout $\mathcal{H} = (\{f, u_\circ, u_1\}, \{g, \theta_\circ\}) \in F$, il suffit de démontrer que $D(A)$ est dense dans F.

Soit $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) = (\{\sigma_1, \sigma_3, \sigma_4\}, \{\sigma_2, \sigma_5\}) \in R(A)^\perp$, tel que l'identité suivante est vérifiée

$$\begin{aligned}
(AU, \mathcal{X})_F &= (\{L_1 u, L_2\theta\}, \{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2\})_F \\
&= (\{(\mathcal{L}_1 u, \ell_1 u, \ell_2 u), (\mathcal{L}_2\theta, \ell_3\theta)\}, \{(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_4), (\sigma_2, \sigma_5)\})_F \\
&= (\mathcal{L}_1 u, \sigma_1)_{L^2_\rho(Q)} + (\ell_1 u, \sigma_3)_{W^1_{2,\,\rho}(\Omega)} + (\ell_2 u, \sigma_4)_{L^2_\rho(\Omega)} \\
&\quad + (\mathcal{L}_2\theta, \sigma_2)_{L^2_\rho(Q)} + (\ell_3\theta, \sigma_5)_{L^2_\rho(\Omega)} \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{3.4.16}$$

il s'ensuit que $\mathcal{X} = 0$.

Posons $U \in D_\circ(A)$ dans (3.4.16), on a

$$(\mathcal{L}_1 u, \sigma_1)_{L^2_\rho(Q)} + (\mathcal{L}_2\theta, \sigma_2)_{L^2_\rho(Q)} = 0, \tag{3.4.17}$$

donc, d'aprés la proposition 3 il s'ensuit de (3.4.17) que $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$.

La relation (3.4.16) implique que

$$(\ell_1 u, \sigma_3)_{W^1_{2,\,\rho}(\Omega)} + (\ell_2 u, \sigma_4)_{L^2_\rho(\Omega)} + (\ell_3\theta, \sigma_5)_{L^2_\rho(\Omega)} = 0. \tag{3.4.18}$$

Puisque $\ell_1 u$, $\ell_2 u$,et $\ell_3\theta$, sont indépendants et les ensembles $R(\ell_1)$, $R(\ell_2)$, et $R(\ell_3)$ des valeurs des opérateurs de traces ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 sont respectivement partout dense dans les espaces $W^1_{2,\,\rho}(\Omega)$, $L^2_\rho(\Omega)$ et $L^2_\rho(\Omega)$, donc, il résulte de (3.4.18) que $\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0$. Et par conséquent $\mathcal{X} = 0$, qui est $R(A)^\perp = \{0\}$. Ainsi $\overline{R(A)} = F$. ■

3.5 Problème Non linéaire

Maintenant on résoud le problème non linéaire $(3.1.1)-(3.1.7)$. S'appuyant sur les résultats obtenus précédement, nous appliquons un processus itératif pour établir l'existence et l'unicité de la solution faible du problème non linéaire.

Si $U=(u,\theta)$ est solution du problème $(3.1.1)-(3.1.7)$ et $\zeta=(\Psi,\Phi)$ est solution du problème :

$$\begin{cases} \Psi_{tt}-\left(\frac{1}{r}\Psi_r+\Psi_{rr}\right)+\int_0^t g\left(t-s\right)\left(\frac{1}{r}\Psi_r+\Psi_{rr}\right)(r,s)ds+br\Phi_r=0, \\ \Phi_t-\frac{\varkappa}{r}(r\Phi_r)_r+br\Psi_{rt}=0, \\ \Psi\left(r,0\right)=u_0\left(r\right),\ \Psi_t\left(r,0\right)=u_1\left(r\right), \\ \Psi_r\left(1,t\right)=0,\ \int_0^1 r\Psi(r)dr=0, \\ \Phi(r,0)=\Phi_0(r),\quad \Phi(1,t)=0, \end{cases} \tag{3.5.1}$$

alors $\eta=(u-\Psi,\theta-\Phi)=(V,W)$ satisfait

$$\begin{cases} V_{tt}-\left(\frac{1}{r}V_r+V_{rr}\right)+\int_0^t g\left(t-s\right)\left(\frac{1}{r}V_r+V_{rr}\right)(r,s)ds+brW_r \\ \qquad =F(r,t,V,V_r,W,W_r) \\ W_t-\frac{\varkappa}{r}(rW_r)_r+brV_{rt}=H(r,t,V,V_r,W,W_r) \\ V\left(r,0\right)=0,\ V_t\left(r,0\right)=0, \\ V_r\left(1,t\right)=0,\ \int_0^1 rV(r)dr=0, \\ W(r,0)=0,\quad W(1,t)=0, \end{cases} \tag{3.5.2}$$

où les fonctions F et H vérifient

$$\begin{aligned} &|F(r,t,u_1,v_1,w_1,z_1)-F(r,t,u_2,v_2,w_2,z_2| \\ \leq\ & C_1\left(|u_1-u_2|+|v_1-v_2|+|w_1-w_2|+|z_1-z_2|\right), \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

$$\begin{aligned} &|H(r,t,u_1,v_1,w_1,z_1)-H(r,t,u_2,v_2,w_2,z_2| \\ \leq\ & C_2\left(|u_1-u_2|+|v_1-v_2|+|w_1-w_2|+|z_1-z_2|\right), \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

pour tout $(r,t) \in Q$.

D'après le Théorème 5, le problème (3.5.1) admet une solution unique $\zeta = (\Psi, \Phi)$ dépendant continûment de $u_0 \in W^1_{2,\rho}(\Omega)$, $u_1 \in L^2_\rho(\Omega)$, $\Phi_0 \in L^2_\rho(\Omega)$. Alors, on va démontrer que le problème (3.5.2) admet une solution unique.

Soit v, V, $W \in C^1(Q)$, tel que

$$\begin{cases} v(x,T) = 0, \quad \int_0^1 rv(r)dr = 0, \\ V(r,0) = 0, \quad V_t(r,0) = 0, \quad \int_0^1 rV(r)dr = 0, \\ W(r,0) = 0, \ W(1,t) = 0, \end{cases}$$

on a

$$(\mathcal{L}_1(\eta), \Im_r(\rho v))_{L^2_\rho(Q)} = (F, \Im_r(\rho v))_{L^2_\rho(Q)}, \tag{3.5.5}$$

$$(\mathcal{L}_2(\eta), \Im_r(\rho v))_{L^2_\rho(Q)} = (H, \Im_r(\rho v))_{L^2_\rho(Q)}. \tag{3.5.6}$$

En tenant compte des conditions ci-dessus sur les fonctions v, V, W, on a

$$(V_{tt}, \Im_r(\rho v))_{L^2_\rho(Q)} = (v_t, \Im_r(\rho V_t))_{L^2_\rho(Q)}, \tag{3.5.7}$$

$$-(\frac{1}{r}(rV_r)_r, \Im_r(\rho v))_{L^2_\rho(Q)} = (V_r, v)_{L^2_\rho(Q)}, \tag{3.5.8}$$

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^t g(t-s)\left(\frac{1}{r}V_r + V_{rr}\right)(r,s)ds, \Im_r(\rho v)\right)_{L^2_\rho(Q)} \\ = \quad & -\left(\int_0^t g(t-s)\,V_r(r,s)ds, v\right)_{L^2_\rho(Q)}, \end{aligned} \tag{3.5.9}$$

$$(brW_r, \Im_r(\rho v))_{L^2_\rho(Q)} = -\left(br^2W, v\right)_{L^2_\rho(Q)} + 2\,(bv, \Im_r(\rho W))_{L^2_\rho(Q)}. \tag{3.5.10}$$

en termes de (3.5.7) – (3.5.10), l'équation (3.5.5) est transformée en

$$\begin{aligned}
& \left(v_t, \Im_r\left(\rho V_t\right)\right)_{L_\rho^2(Q)}+\left(V_r, v\right)_{L_\rho^2(Q)}+-\left(\int_0^t g(t-s) V_r(r, s) d s, v\right)_{L_\rho^2(Q)} \\
& -\left(b r^2 W, v\right)_{L_\rho^2(Q)}+2\left(b v, \Im_r(\rho W)\right)_{L_\rho^2(Q)} \\
= & =\left(F, \Im_r(\rho v)\right)_{L_\rho^2(Q)} . \qquad (3.5.11)
\end{aligned}$$

De même façons, les termes du membre droit de (3.5.6) peuvent être évalués comme suit

$$\left(W_t, \Im_r(\rho v)\right)_{L_\rho^2(Q)}=\left(v_t, \Im_r(\rho W)\right)_{L_\rho^2(Q)}, \qquad (3.5.12)$$

$$-\left(\frac{\varkappa}{r}\left(r W_r\right)_r, \Im_r(\rho v)\right)_{L_\rho^2(Q)}=\varkappa\left(r W_r, v\right)_{L_\rho^2(Q)}, \qquad (3.5.13)$$

$$\left(b r V_{r t}, \Im_r(\rho v)\right)_{L_\rho^2(Q)}=b\left(r^2 V, v_t\right)_{L_\rho^2(Q)}+2 b\left(v_t, \Im_r(\rho V)\right)_{L_\rho^2(Q)} . \qquad (3.5.14)$$

Substituons (3.5.12) – (3.5.14) dans (3.5.6) on obtient

$$\begin{aligned}
& \left(v_t, \Im_r(\rho W)\right)_{L_\rho^2(Q)}+\varkappa\left(r W_r, v\right)_{L_\rho^2(Q)} \\
& +b\left(r^2 V, v_t\right)_{L_\rho^2(Q)}+2 b\left(v_t, \Im_r(\rho V)\right)_{L_\rho^2(Q)} \\
= & \left(H, \Im_r(\rho v)\right)_{L_\rho^2(Q)},. \qquad (3.5.15)
\end{aligned}$$

En sommant (3.5.11) et (3.5.15), il vient

$$\begin{aligned}
& \left(v_t, \Im_r\left(\rho V_t\right)\right)_{L_\rho^2(Q)}+\left(V_r, v\right)_{L_\rho^2(Q)}+2\left(b v, \Im_r(\rho W)\right)_{L_\rho^2(Q)} \\
& -\left(\int_0^t g(t-s) r V_r(r, s) d s, v\right)_{L_\rho^2(Q)}-\left(b r^2 W, v\right)_{L_\rho^2(Q)} \\
& +\left(v_t, \Im_r(\rho W)\right)_{L_\rho^2(Q)}+\varkappa\left(r W_r, v\right)_{L_\rho^2(Q)} \\
& +b\left(r^2 V, v_t\right)_{L_\rho^2(Q)}+2 b\left(v_t, \Im_r(\rho V)\right)_{L_\rho^2(Q)} \\
= & \left(F, \Im_r(\rho v)\right)_{L_\rho^2(Q)}+\left(H, \Im_r(\rho v)\right)_{L_\rho^2(Q)} . \qquad (3.5.16)
\end{aligned}$$

Si on note le membre droit de (3.5.16) par $\mathcal{N}(v,V,W)$, on obtient

$$\mathcal{N}(v,V,W) = \left(\Im_r\left(\rho F, v\right)\right)_{L^2_\rho(Q)} + \left(\Im_r\left(\rho H\right), v\right)_{L^2_\rho(Q)}. \tag{3.5.17}$$

Definition 6. *Une fonction* $\eta = (u-\Psi, \theta-\Phi) = (V,W) \in L^2(0,T;W^{1,1}_{2,\rho}(\Omega)) \times L^2(0,T;W^1_{2,\rho}(\Omega))$ *est dite solution faible du problème* (3.4.2) *si* $V_r(1,t) = 0$, $W(1,t) = 0$ *et* (3.5.17) *est satisfaite.*

Maintenant on considère le système itérative de notre problème

$$\begin{cases} V_{tt}^{(m)} - \left(\frac{1}{r}V_r^{(m)} + V_{rr}^{(m)}\right) + \int_0^t g\left(t-s\right)\left(\frac{1}{r}V_r^{(m)} + V_{rr}^{(m)}\right)(r,s)ds \\ +brW_r^{(m)} = F(r,t,V^{(m-1)},V_r^{(m-1)},W^{(m-1)},W_r^{(m-1)}) \\ W_t^{(m)} - \frac{\varkappa}{r}(rW_r^{(m)})_r + brV_{rt}^{(m)} = H(r,t,V^{(m-1)},V_r^{(m-1)},W^{(m-1)},W_r^{(m-1)}) \\ V^{(m)}\left(r,0\right) = 0,\ V_t^{(m)}\left(r,0\right) = 0, \\ V_r^{(m)}\left(1,t\right) = 0,\ \int_0^1 rV^{(m)}(r)dr = 0, \\ W^{(m)}(r,0) = 0, \quad W^{(m)}(1,t) = 0, \end{cases} \tag{3.6.18}$$

où la suite itérée $\eta^{(m)} = \left\{V^{(m)}, W^{(m)}\right\}_{m\geq 0}$ est construite de la manière suivante : Étant donné $\eta^{(0)} = (V^{(0)}, W^{(0)}) = 0$ et l'élément $\eta^{(m-1)} = (V^{(m-1)}, W^{(m-1)})$, alors pour $m = 1, 2, ...$, résolvons le problème (3.5.18). Théorème 5, affirme que pour tout n fixé, chaque problème (3.6.18) admet une solution unique $\eta^{(m)} = (V^{(m)}, W^{(m)})$. Si on pose

$$(\omega^{(m)}(x,t), \sigma^{(m)}(x,t)) = (V^{(m+1)}(x,t) - V^{(m)}(x,t), W^{(m+1)}(x,t) - W^{(m)}(x,t)),$$

alors on a le problème

$$\begin{cases} \omega_{tt}^{(m)} - \left(\frac{1}{r}\omega_r^{(m)} + \omega_{rr}^{(m)}\right) + \int_0^t g\left(t-s\right)\left(\frac{1}{r}\omega_r^{(m)} + \omega_{rr}^{(m)}\right)(r,s)ds \\ +br\sigma_r^{(m)} = G_1^{(m-1)}(x,t) \\ \sigma_t^{(m)} - \frac{\varkappa}{r}(r\sigma_r^{(m)})_r + br\omega_{rt}^{(m)} = G_2^{(m-1)}(x,t) \\ \omega^{(m)}\left(r,0\right) = 0,\ \omega_t^{(m)}\left(r,0\right) = 0, \\ \omega_r^{(m)}\left(1,t\right) = 0,\ \int_0^1 r\omega^{(m)}(r)dr = 0, \\ \sigma^{(m)}(r,0) = 0, \quad \sigma^{(m)}(1,t) = 0, \end{cases} \tag{3.5.19}$$

où

$$G_1^{(m-1)}(x,t) = F(r,t,V^{(m)},V_r^{(m)},W^{(m)},W_r^{(m)}) - F(r,t,V^{(m-1)},V_r^{(m-1)},W^{(m-1)},W_r^{(m-1)}),$$

et

$$G_2^{(m-1)}(x,t) = H(r,t,V^{(m)},V_r^{(m)},W^{(m)},W_r^{(m)}) - H(r,t,V^{(m-1)},V_r^{(m-1)},W^{(m-1)},W_r^{(m-1)}).$$

Lemme 7. *En présence des conditions* (3.6.3) *et* (3.6.4), *on peut trouver une constante* $K > 0$, *tel que pour le problème* (3.6.19), *on a l'inégalité*

$$\begin{aligned} & \left\|\omega^{(m)}\right\|^2_{L^2(0,T;W^{1,1}_{2,\rho}(\Omega))} + \left\|\sigma^{(m)}\right\|^2_{L^2(0,T;W^{1}_{2,\rho}(\Omega))} \\ \leq\ & K\left(\left\|\omega^{(m-1)}\right\|^2_{L^2(0,T;W^{1,1}_{2,\rho}(\Omega))} + \left\|\sigma^{(m-1)}\right\|^2_{L^2(0,T;W^{1}_{2,\rho}(\Omega))}\right), \end{aligned}$$

où

$$K = (1+T)\left(C_1^2 + C_2^2\right)k_2 e^{k_1 T} < 1,$$

avec

$$k_1 = \frac{\max\left\{\left(1+\frac{aT^2}{2}\left(\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left(g(t)\right)\right)^2\right), 2b+a+\frac{3}{2}, 5b+1\right\}}{\min\left\{A,\varkappa,1\right\}},$$

et

$$k_2 = \frac{4}{\min\left\{A,\varkappa,1\right\}}.$$

Preuve On considère le produit scalaire dans $L^2_\rho\left(Q^\tau\right)$, des EDPs dans (3.5.19) et les opérateurs intégro-différentiels

$$\mathcal{M}_1\omega^{(m)} = \omega_t^{(m)} - \Im_r^2\left(\rho\omega_t^{(m)}\right),$$

et

$$\mathcal{M}_2\sigma^{(m)} = \sigma^{(m)},$$

respectivement, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\|\omega_t^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)}+\frac{1}{2}\left\|\omega_x^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)}\\
&+\frac{a}{2}\int_0^\tau g(\tau-s)\left(\int_0^1 r\left(\omega_x^{(m)}(r,s)-\omega_x^{(m)}(r,t)\right)^2dr\right)ds\\
&-\frac{a}{2}\int_0^\tau\int_0^t g'(t-s)\left(\int_0^1 r\left(\omega_x^{(m)}(r,s)-\omega_x^{(m)}(r,t)\right)^2dr\right)dsdt\\
&+\frac{a}{2}\int_0^\tau g(t)\int_0^1 r(\omega_x^{(m)}(r,t))^2drdt+\frac{1}{2}\left\|\Im_r(\rho\omega_t^{(m)}(.,\tau))\right\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)}\\
&+\frac{1}{2}\left\|\sigma^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)}+\varkappa\left\|\sigma_r^{(m)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_\tau)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=\;&\frac{a}{2}\int_0^\tau g(s)ds\left(\int_0^1 r\omega_x^{(m)}(r,\tau)^2dr\right)+\left(\omega_x^{(m)},\Im_r(\rho\omega_t^{(m)})\right)_{L^2_\rho(Q_\tau)}\\
&-a(\int_0^t g(t-s)\omega_x^{(m)}(r,s)ds,\Im_r(\rho\omega_t^{(m)}))_{L^2_\rho(Q_\tau)}\\
&-2b\left(\sigma^{(m)},\Im_r^2(\rho\omega_t^{(m)})\right)_{L^2_\rho(Q_\tau)}-b\left(r\sigma^{(m)},\Im_r(\rho\omega_t^{(m)})\right)_{L^2_\rho(Q_\tau)}\\
&+2b\left(\sigma^{(m)},\omega_t^{(m)}\right)_{L^2_\rho(Q_\tau)}+\left(G_1^{(m-1)},\omega_t^{(m)}\right)_{L^2_\rho(Q_\tau)}\\
&-\left(G_1^{(m-1)},\Im_r^2(\rho\omega_t^{(m)})\right)_{L^2_\rho(Q_\tau)}+\left(G_2^{(m-1)},\sigma^{(m)}\right)_{L^2_\rho(Q_\tau)}.
\end{aligned}
\tag{3.6.20}
$$

Utilisons les inégalités de Cauchy et de Poincaré, pour estimer les termes du membre droit de (3.6.20), on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\|\omega_t^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)}+\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{2}\int_0^T g(s)ds\right)\left\|\omega_x^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)}\\
&+\frac{a}{2}\int_0^\tau g(\tau-s)\left(\int_0^1 r\left(\omega_x^{(m)}(r,s)-\omega_x^{(m)}(r,t)\right)^2dr\right)ds\\
&-\frac{a}{2}\int_0^\tau\int_0^t g'(t-s)\left(\int_0^1 r\left(\omega_x^{(m)}(r,s)-\omega_x^{(m)}(r,t)\right)^2dr\right)dsdt\\
&+\frac{a}{2}\int_0^\tau g(t)\int_0^1 r(\omega_x^{(m)}(r,t))^2drdt+\frac{1}{2}\left\|\Im_r(\rho\omega_t^{(m)}(.,\tau))\right\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)}\\
&+\frac{1}{2}\left\|\sigma^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)}+\varkappa\left\|\sigma_r^{(m)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_\tau)}\\
\leq\;&\left(\frac{1}{2}+\frac{aT^2}{4}\right)\left(\sup_{0\le t\le T}(g(t))\right)^2\left\|\omega_x^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(Q_\tau)}\\
&+(\frac{3}{4}+\frac{a}{2}+b)\left\|\Im_r(\rho\omega_t^{(m)})\right\|^2_{L^2_\rho(Q_\tau)}+(\frac{1}{2}+b)\left\|\omega_t^{(m)})\right\|^2_{L^2_\rho(Q_\tau)}\\
&+(\frac{5b}{2}+\frac{1}{2})\left\|\sigma^{(m)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_\tau)}+\left\|G_1^{(m-1)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_\tau)}+\frac{1}{2}\left\|G_2^{(m-1)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_\tau)}. \qquad (3.5.21)
\end{aligned}$$

Les conditions sur les fonctions g et g' nous permettent d'éliminer les troisième, quatrième et cinquième termes du membre droit de (3.5.21) pour avoir

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\|\omega_t^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)}+\frac{A}{2}\left\|\omega_x^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)}\\
&+\frac{1}{2}\left\|\Im_r(\rho\omega_t^{(m)}(.,\tau))\right\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)}+\frac{1}{2}\left\|\sigma^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)}\\
&+\varkappa\left\|\sigma_r^{(m)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_\tau)}\\
&\leq\left(\frac{1}{2}+\frac{aT^2}{4}\right)\left(\sup_{0\le t\le T}(g(t))\right)^2\left\|\omega_x^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(Q_\tau)}\\
&+(\frac{3}{4}+\frac{a}{2}+b)\left\|\Im_r(\rho\omega_t^{(m)})\right\|^2_{L^2_\rho(Q_\tau)}+(\frac{1}{2}+b)\left\|\omega_t^{(m)})\right\|^2_{L^2_\rho(Q_\tau)}\\
&+(\frac{5b}{2}+\frac{1}{2})\left\|\sigma^{(m)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_\tau)}+\left\|G_1^{(m-1)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_\tau)}+\frac{1}{2}\left\|G_2^{(m-1)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_\tau)}. \qquad (3.5.22)
\end{aligned}$$

Les conditions (3.5.3) et (3.5.4) donnent

$$\begin{aligned}\left\|G_1^{(m-1)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_\tau)} &\leq 4C_1^2\left(\left\|\omega^{(m-1)}\right\|^2_{L^2(0,\tau;W^{1,1}_{2,\rho}(\Omega))}+\left\|\sigma^{(m-1)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_\tau)}\right.\\ &\left.\left\|\sigma_r^{(m-1)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_\tau)}\right), \qquad (3.5.23)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\|G_2^{(m-1)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_\tau)} &\leq 4C_2^2\left(\left\|\omega^{(m-1)}\right\|^2_{L^2(0,\tau;W^{1,1}_{2,\rho}(\Omega))}+\left\|\sigma^{(m-1)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_\tau)}\right.\\ &\left.\left\|\sigma_r^{(m-1)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_\tau)}\right). \qquad (3.5.24)\end{aligned}$$

Il est évident que

$$\frac{1}{2}\left\|\omega^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)} \leq \frac{1}{2}\left\|\omega^{(m)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_\tau)}+\frac{1}{2}\left\|\omega_t^{(m)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_\tau)}. \qquad (3.5.25)$$

En combinons (3.5.22) – (3.5.25), on obtient

$$\begin{aligned}&\left\|\omega^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{W^{1,1}_{2,\rho}(0,\,1)}+\left\|\Im_r(\rho\omega_t^{(m)}(.,\tau))\right\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)}\\ &+\left\|\sigma^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)}+\left\|\sigma_r^{(m)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_\tau)}\\ \leq\;& k_1\left(\left\|\omega^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(Q_\tau)}+\left\|\Im_r(\rho\omega_t^{(m)})\right\|^2_{L^2_\rho(Q_\tau)}+\left\|\sigma^{(m)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_\tau)}\right)\\ &+(C_1^2+C_2^2)k_2\left(\left\|\omega^{(m-1)}\right\|^2_{L^2(0,\tau;W^{1,1}_{2,\rho}(\Omega))}+\left\|\sigma^{(m-1)}\right\|^2_{L^2(0,\tau;W^{1}_{2,\rho}(\Omega))}\right), \qquad (3.5.26)\end{aligned}$$

où k_1 et k_2 sont donnés comme précédemment. Si on applique le lemme de Gronwall pour (3.5.26), et on neglige le second terme de du membre gauche, on obtient

$$\begin{aligned}&\left\|\omega^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{W^{1,1}_{2,\rho}(0,\,1)}+\left\|\sigma^{(m)}(.,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(0,\,1)}+\left\|\sigma_r^{(m)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_\tau)}\\ \leq\;&(C_1^2+C_2^2)k_2e^{k_1}\left(\left\|\omega^{(m-1)}\right\|^2_{L^2(0,\tau;W^{1,1}_{2,\rho}(\Omega))}\right.\\ &\left.+\left\|\sigma^{(m-1)}\right\|^2_{L^2(0,\tau;W^{1}_{2,\rho}(\Omega))}\right). \qquad (3.5.27)\end{aligned}$$

En intégrant les deux membres de (3.5.27) par rapport à τ sur $[0,T]$, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left\|\omega^{(m)}\right\|^2_{L^2(0,T;W^{1,1}_{2,\rho}(\Omega))} + \left\|\sigma^{(m)}\right\|^2_{L^2(0,T;W^{1}_{2,\rho}(\Omega))} \\ \leq\ & (1+T)\,(C_1^2+C_2^2)k_2e^{k_1T}\left(\left\|\omega^{(m-1)}\right\|^2_{L^2(0,\tau;W^{1,1}_{2,\rho}(\Omega))}\right. \\ & \left. + \left\|\sigma^{(m-1)}\right\|^2_{L^2(0,\tau;W^{1}_{2,\rho}(\Omega))}\right). \end{aligned} \tag{3.5.28}$$

Ceci prouve le Lemme 7.

Observez qu'il en résulte de (3.5.28) que les series $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\omega^{(m)}$ et $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sigma^{(m)}$ convergent si

$$(1+T)\,(C_1^2+C_2^2)k_2e^{k_1T} < 1.$$

Comme $\omega^{(m)}(x,t) = (V^{(m+1)}(x,t) - V^{(m)}(x,t)$ et $\sigma^{(m)}(x,t)) = W^{(m+1)}(x,t) - W^{(m)}(x,t)$, il s'ensuit que les séries

$$\begin{aligned} V^{(m)}(x,t) &= \sum_{k=0}^{m-1}\omega^{(k)} + V^{(0)}(x,t) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1}(V^{(k+1)}(x,t) - V^{(k)}(x,t)) + V^{(0)}(x,t), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} W^{(m)}(x,t) &= \sum_{k=0}^{m-1}\sigma^{(k)} + W^{(0)}(x,t) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1}(W^{(k+1)}(x,t) - W^{(k)}(x,t)) + W^{(0)}(x,t), \end{aligned}$$

converge respectivement vers les éléments $V \in L^2(0,T;W^{1,1}_{2,\rho}(\Omega))$ et $W \in L^2(0,T;W^{1}_{2,\rho}(\Omega))$. Maintenent pour prouver que la fonction limite $\eta = (V,W)$ est la solution du problème (3.5.2), nous devons montrer que $\eta = (V,W)$ satisfait (3.5.17) et $V_r(1,t) = 0$, $W(1,t) = 0$.

Du problèmes du système itérative (3.5.18), nous avons

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}(v,V^{(m)},W^{(m)}) \\
=\;& \big(\Im_r(\rho F(\rho,t,V^{(m-1)},V_r^{(m-1)},W^{(m-1)},W_r^{(m-1)})),v\big)_{L^2_\rho(Q)} \\
&+\big(\Im_r(\rho H(\rho,t,V^{(m-1)},V_r^{(m-1)},W^{(m-1)},W_r^{(m-1)})),v\big)_{L^2_\rho(Q)}. \qquad (3.5.29)
\end{aligned}$$

Nous déduisons de (3.5.29) que

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}(v,V^{(m)}-V,W^{(m)}-W)+\mathcal{N}(v,V,W) \\
=\;& \big(\Im_r(\rho F(\rho,t,V^{(m-1)},V_r^{(m-1)},W^{(m-1)},W_r^{(m-1)})) \\
&-\Im_r(\rho F(\rho,t,V,V_r,W,W_r)),v)_{L^2_\rho(Q)} \\
&+\big(\Im_r(\rho H(\rho,t,V^{(m-1)},V_r^{(m-1)},W^{(m-1)},W_r^{(m-1)})) \\
&-\Im_r(\rho H(\rho,t,V,V_r,W,W_r)),v)_{L^2_\rho(Q)} \\
&+(\Im_r(\rho F(\rho,t,V,V_r,W,W_r)),v)_{L^2_\rho(Q)} \\
&+(\Im_r(\rho H(\rho,t,V,V_r,W,W_r)),v)_{L^2_\rho(Q)}. \qquad (3.5.30)
\end{aligned}$$

D'aprés les eéquations aux dérivées partielle dans (3.5.18), on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}(v, V^{(m)} - V, W^{(m)} - W) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Im_r(\rho(V^{(m)} - V)), v\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
&- \left(\Im_r(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\frac{\partial}{\partial \rho}(V^{(m)} - V))), v\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
&+ \left(\int_0^t g(t-s)\Im_r(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\frac{\partial}{\partial \rho}(V^{(m)} - V)))(r,s)ds, v\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
&+b\left(\Im_r(\rho\frac{\partial}{\partial \rho}(W^{(m)} - W)), v\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
&+ \left(\frac{\partial}{\partial t}\Im_r(\rho(W^{(m)} - W)), v\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
&-\varkappa\left(\Im_r(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\frac{\partial}{\partial \rho}(W^{(m)} - W)), v\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
&+b\left(\frac{\partial}{\partial t}\Im_r(\rho^2\frac{\partial}{\partial \rho}(V^{(m)} - V)), v\right)_{L^2_\rho(Q)}. \qquad (3.5.31)
\end{aligned}$$

En utilisant les conditions sur les fonctions v, V, W, et en intégrant par partie chaque terme du membre gauche de l'identité (3.5.31), on obtient

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Im_r(\rho(V^{(m)} - V)), v\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
= \quad &\left(\Im_r(\rho v_t, \frac{\partial}{\partial t}(V^{(m)} - V)\right)_{L^2_\rho(Q)}, \qquad (3.5.32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-\left(\Im_r(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\frac{\partial}{\partial \rho}(V^{(m)} - V))), v\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
= \quad &-\left(rv, \frac{\partial}{\partial r}(V^{(m)} - V)\right)_{L^2_\rho(Q)}, \qquad (3.5.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^t g(t-s)\Im_r(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}(V^{(m)}-V)))(r,s)ds, v\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
= \quad &\left(\int_0^t g(t-s)\frac{\partial}{\partial\rho}(V^{(m)}-V)))(r,s)ds, v\right)_{L^2_\rho(Q)}, \qquad (3.5.34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&b\left(\Im_r(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}(W^{(m)}-W)), v\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
= \quad &-b\left(\Im_r(\rho v), \frac{\partial}{\partial r}(W^{(m)}-W)\right)_{L^2_\rho(Q)}, \qquad (3.5.35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t}\Im_r(\rho(W^{(m)}-W)), v\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
= \quad &\left(W^{(m)}-W, \Im_r(\rho v_t)\right)_{L^2_\rho(Q)}, \qquad (3.5.36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-\varkappa\left(\Im_r(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}(W^{(m)}-W)), v\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
= \quad &\varkappa\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(W^{(m)}-W)), rv\right)_{L^2_\rho(Q)}, \qquad (3.5.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&b\left(\frac{\partial}{\partial t}\Im_r(\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}(V^{(m)}-V)), v\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
= \quad &b\left(\frac{\partial}{\partial t}(V^{(m)}-V), r^2 v\right)_{L^2_\rho(Q)}. \qquad (3.5.38)
\end{aligned}$$

En substituant les égalités (3.5.32) – (3.5.38) dans (3.5.31), il vient que

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}(v, V^{(m)} - V, W^{(m)} - W) \\
= &\left(\Im_r(\rho v_t, \frac{\partial}{\partial t}(V^{(m)} - V)\right)_{L^2_\rho(Q)} - \left(rv, \frac{\partial}{\partial r}(V^{(m)} - V)\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
&\left(\int_0^t g(t-s)\frac{\partial}{\partial \rho}(V^{(m)} - V)))(r,s)ds, v\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
&-b\left(\Im_r(\rho v), \frac{\partial}{\partial r}(W^{(m)} - W)\right)_{L^2_\rho(Q)} + \left(W^{(m)} - W, \Im_r(\rho v_t)\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
&+\varkappa\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(W^{(m)} - W)), rv\right)_{L^2_\rho(Q)} + b\left(\frac{\partial}{\partial t}(V^{(m)} - V), r^2 v\right)_{L^2_\rho(Q)}. \qquad (3.5.39)
\end{aligned}$$

Appliquons les inégalité de Cauchy-Shwarz et Poincaré de type

$$\|\Im_r(\rho v\|_{L^2(Q)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|\Im_r(\rho v\|_{L^2_\rho(Q)},$$

on trouve

$$\begin{aligned}
&\left(\Im_r(\rho v_t, \frac{\partial}{\partial t}(V^{(m)} - V)\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
\leq\ &\frac{1}{\sqrt{2}}\|v_t\|_{L^2_\rho(Q)}\left\|\frac{\partial}{\partial t}(V^{(m)} - V)\right\|_{L^2_\rho(Q)}, \qquad (3.5.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-\left(rv, \frac{\partial}{\partial r}(V^{(m)} - V)\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
\leq\ &\|v\|_{L^2_\rho(Q)}\left\|\frac{\partial}{\partial r}(V^{(m)} - V)\right\|_{L^2_\rho(Q)}, \qquad (3.5.41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^t g(t-s)\frac{\partial}{\partial \rho}(V^{(m)} - V)))(r,s)ds, v\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
\leq\ &\frac{T^2}{2}\sup_{0\leq t\leq T}(g(t))\|v\|_{L^2_\rho(Q)}\left\|\frac{\partial}{\partial r}(V^{(m)} - V)\right\|_{L^2_\rho(Q)}, \qquad (3.5.42)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -b\left(\Im_r(\rho v), \frac{\partial}{\partial r}(W^{(m)}-W)\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
\leq \;& \frac{b}{\sqrt{2}}\|v\|_{L^2_\rho(Q)}\left\|\frac{\partial}{\partial r}(W^{(m)}-W)\right\|_{L^2_\rho(Q)},
\end{aligned} \tag{3.5.43}
$$

$$
\begin{aligned}
& \left(W^{(m)}-W, \Im_r(\rho v_t)\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
\leq \;& \frac{1}{\sqrt{2}}\|v_t\|_{L^2_\rho(Q)}\left\|(W^{(m)}-W)\right\|_{L^2_\rho(Q)},
\end{aligned} \tag{3.5.44}
$$

$$
\begin{aligned}
& \varkappa\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(W^{(m)}-W)), rv\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
\leq \;& \varkappa\|v\|_{L^2_\rho(Q)}\left\|\frac{\partial}{\partial r}(W^{(m)}-W)\right\|_{L^2_\rho(Q)},
\end{aligned} \tag{3.5.45}
$$

$$
\begin{aligned}
& b\left(\frac{\partial}{\partial t}(V^{(m)}-V), r^2 v\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
\leq \;& b\|v\|_{L^2_\rho(Q)}\left\|\frac{\partial}{\partial t}(V^{(m)}-V)\right\|_{L^2_\rho(Q)}.
\end{aligned} \tag{3.5.46}
$$

En combinant les égalités (3.5.40) – (3.5.46) et l'inégalité (3.5.39) il vient que

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{N}(v, V^{(m)}-V, W^{(m)}-W) \\
\leq \;& D_1\left\|V^{(m)}-V\right\|^2_{L^2(0,T;W^{1,1}_{2,\rho}(\Omega))}\left(\|v\|_{L^2_\rho(Q)}+\|v_t\|_{L^2_\rho(Q)}\right) \\
& +D_2\left\|W^{(m)}-W\right\|^2_{L^2(0,T;W^{1}_{2,\rho}(\Omega))}\left(\|v\|_{L^2_\rho(Q)}+\|v_t\|_{L^2_\rho(Q)}\right),
\end{aligned} \tag{3.5.47}
$$

où

$$
D_1 = \max\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, b, 1+\frac{T^2}{2}\sup_{0\leq t\leq T}(g(t))\right),
$$

et

$$
D_2 = \max\left(\frac{b}{\sqrt{2}}+\varkappa, 2\right).
$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
&\left(\Im_r(\rho F(\rho,t,V^{(m-1)},V_r^{(m-1)},W^{(m-1)},W_r^{(m-1)}))\right. \\
&\left.-\Im_r(\rho F(\rho,t,V,V_r,W,W_r)),v\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
\leq\ & \frac{2}{\sqrt{2}}C_1\left\|v\right\|_{L^2_\rho(Q)}\left(\left\|V^{(m)}-V\right\|^2_{L^2(0,T;W^{1,1}_{2,\rho}(\Omega))}\right. \\
&\left.+\left\|W^{(m)}-W\right\|^2_{L^2(0,T;W^{1}_{2,\rho}(\Omega))}\right), \qquad (3.5.48)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\left(\Im_r(\rho H(\rho,t,V^{(m-1)},V_r^{(m-1)},W^{(m-1)},W_r^{(m-1)}))\right. \\
&\left.-\Im_r(\rho H(\rho,t,V,V_r,W,W_r)),v\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
\leq\ & \frac{2}{\sqrt{2}}C_2\left\|v\right\|_{L^2_\rho(Q)}\left(\left\|V^{(m)}-V\right\|^2_{L^2(0,T;W^{1,1}_{2,\rho}(\Omega))}\right. \\
&\left.+\left\|W^{(m)}-W\right\|^2_{L^2(0,T;W^{1}_{2,\rho}(\Omega))}\right). \qquad (3.5.49)
\end{aligned}$$

En tenant compte de (3.5.47) – (3.5.49) et en passant à la limite dans (3.5.30), on obtient (3.5.17). Maintenant comme $V\in L^2(0,T;W^{1,1}_{2,\rho}(\Omega))$, et $W\in L^2(0,T;W^{1}_{2,\rho}(\Omega))$, alors $\int_0^t V_r(r,\nu)\,d\nu\in C(\overline{Q})$, et $\int_0^t W(r,\nu)\,d\nu\in C(\overline{Q})$, et on conclut que $V_r(1,t)=0$, et $W(1,t)=0$. ■

Ainsi, nous avons prouvé

Théorème 8. *Supposons que les conditions* (3.5.3) *et* (3.5.4) *sont satisfaites, et tel que*

$$(1+T)\,(C_1^2+C_2^2)k_2e^{k_1T}<1,$$

alors le problème (3.5.2) *admet une solution faible unique dans* $L^2(0,T;W^{1,1}_{2,\rho}(\Omega))\times L^2(0,T;W^{1}_{2,\rho}(\Omega))$.

On demontre maitenant l'unicité de la solution du problème (3.5.2).

Théorème 9. Si les conditions (3.5.3) et (3.5.4) ont lieu, alors le problème (3.5.2) admet une solution unique.

Preuve On suppose que $(V^{(1)},W^{(1)})$, $(V^{(2)},W^{(2)})\in(L^2(0,T;W^{1,1}_{2,\rho}(\Omega))\times L^2(0,T;W^{1}_{2,\rho}(\Omega))^2$ sont deux solutions du problème (3.6.2) alors $(U^{(1)},U^{(2)})=(V^{(1)}-V^{(2)},W^{(1)}-W^{(2)})\in L^2(0,T;W^{1,1}_{2,\rho}(\Omega))\times$

$L^2(0,T;W^1_{2,\rho}(\Omega))$ et satisfaisant

$$\left\{\begin{array}{c} U^{(1)}_{tt} - \left(\frac{1}{r}U^{(1)}_r + U^{(1)}_{rr}\right) + \int_0^t g\left(t-s\right)\left(\frac{1}{r}U^{(1)}_r + U^{(1)}_{rr}\right)(r,s)ds \\ +brU^{(2)}_r = \sigma_1(r,t) \\ U^{(2)}_t - \frac{\varkappa}{r}(rU^{(2)}_r)_r + brU^{(1)}_{rt} = \sigma_2(r,t) \\ U^{(1)}\left(r,0\right) = 0,\ U^{(1)}_t\left(r,0\right) = 0, \\ U^{(1)}_r\left(1,t\right) = 0,\ \int_0^1 rU^{(1)}(r,t)dr = 0, \\ U^{(2)}(r,0) = 0,\quad U^{(2)}_r(1,t) = 0, \end{array}\right. \tag{3.5.50}$$

où

$$\sigma_1(r,t) = F(r,t,V^{(1)},V^{(1)}_r,W^{(1)},W^{(1)}_r) - F(r,t,V^{(2)},V^{(2)}_r,W^{(2)},W^{(2)}_r),$$

$$\sigma_2(r,t) = H(r,t,V^{(1)},V^{(1)}_r,W^{(1)},W^{(1)}_r) - H(r,t,V^{(2)},V^{(2)}_r,W^{(2)},W^{(2)}_r).$$

Considerons le produit scalaire dans $L^2_\rho(Q)$ des membres droit et gauche des équations aux dérivées partielles dans (3.5.50) et les opérateurs

$$P_1U^{(1)} = U^{(1)}_t - \Im^2_r(\rho U^{(1)}_t),$$

et

$$P_2U^{(2)} = U^{(2)}.$$

Nous suivons la même procédure utulisee pour demontrer le Lemme 7, on obtient

$$\begin{aligned} & \left\|U^{(1)}\right\|^2_{L^2(0,T;W^{1,1}_{2,\rho}(\Omega))} + \left\|U^{(2)}\right\|^2_{L^2(0,T;W^1_{2,\rho}(\Omega))} \\ \leq\ & (1+T)\left(C_1^2 + C_2^2\right)k_2e^{k_1T}\left(\left\|U^{(1)}\right\|^2_{L^2(0,T;W^{1,1}_{2,\rho}(\Omega))} + \left\|U^{(2)}\right\|^2_{L^2(0,T;W^1_{2,\rho}(\Omega))}\right). \end{aligned}$$

Comme

$$K = \frac{T(C_1^2 + C_2^2)k_2e^{k_1T}}{\min(1,T)} < 1,$$

il en découle que

$$(1-K)\left(\left\|U^{(1)}\right\|^2_{L^2(0,T;W^{1,1}_{2,\rho}(\Omega))} + \left\|U^{(2)}\right\|^2_{L^2(0,T;W^1_{2,\rho}(\Omega))}\right) = 0.$$

D'où

$$\begin{cases} U^{(1)} = V^{(1)} - V^{(2)} = 0, \\ U^{(2)} = W^{(1)} - W^{(2)} = 0. \end{cases}$$

ce qui implique que $(V^{(1)}, W^{(1)}) = (V^{(2)}, W^{(2)})$. Ceci termine la démonstration du Théorème 8. Ainsi, nous avons prouvé l'unicité de la solution du problème (3.5.2). ■

Chapitre 4

Sur une équation de dimension supérieure de Boussinesq avec condition non classique

Dans ce chapitre, on étudie un problème mixte aux limites avec une condition nonlocale pour l'équation de Boussinesq de $n-$dimensions dans un cylindre $Q_T = \Omega \times (0,T)$, où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ avec une frontière régulière $\partial\Omega$.Notre objectif est d'étendre la methode de Galerkin aux problème mixte avec conditions aux limites non classiques de type integrale.

Dans la section 1 de ce chapitre, on pose le problème, on définit les espaces fonctionneles utilisés et on définit la solution faible du probleme posé. La section 2 est consacrée à l'étude de l'existence de la solution faible du problème posé a l'aide de la méthode de Galerkin. Enfin, dans la section 3, on démontre l'unicité de la solution généralisée du problème posé.

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = u_{tt} - \alpha^2 \Delta u - \beta^2 \Delta u_{tt} = F(x,t), \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \\ \partial u / \partial \eta = \displaystyle\int_0^t \int_\Omega u(\xi,\tau) d\xi d\tau, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

où $F(x), \varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions données, et $\partial u/\partial \eta$ désigne la dérivée normale.

Soit

$$W_2^1(Q_T) = \left\{ u \in L^2(Q_T) : D^\alpha u \in L^2(Q_T) \text{ pour tout } |\alpha| \leq 1 \right\},$$

est l'espace habituel de Sobolev, et soit ${W_2}^{\Delta,1}(Q_T)$ l'espace de Hilbert dont les éléments u sont dans $L^2(Q_T)$ avec u_t et $u_x \in L^2(Q_T)$, et admet dans Q_T des dérivés généralisées u_{xx} et ayant la norme finie

$$\|u\|_{W_2^{\Delta,1}(Q_T)} = \left(\int_{Q_T} [u^2 + u_x^2 + u_t^2 + (\Delta u)^2] dxdt \right)^{1/2}.$$

Le produit scalaire dans $W_2^{\Delta,1}(Q_T)$ est définie par

$$(u, v)_{W_2^{\Delta,1}(Q_T)} = \int_{Q_T} (uv + u_x v_x + u_t v_t + \Delta u.\Delta v) dxdt.$$

Soit maintenant soient $V(Q_T)$ et $W(Q_T)$ les espaces définis respectivement par

$$V(Q_T) = \left\{ u \in W_2^{\Delta,1}(Q_T) : \nabla u_t \in L^2(Q_T) \right\},$$

et

$$W(Q_T) = \{ u \in V(Q_T) : u(x, T) = 0 \}.$$

Considérons l'équation

$$\begin{aligned} & (u_{tt}, v)_{L^2(Q_T)} - \alpha^2 (\Delta u, v)_{L^2(Q_T)} - \beta^2 (\Delta u_{tt}, v)_{L^2(Q_T)} \\ = \; & (F, v)_{L^2(Q_T)}, \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

où $(.,.)_{L^2(Q_T)}$ est le produit scalaire dans $L^2(Q_T)$, u est supposé la solution de (4.1.1) et $v \in W(Q_T)$.L' évaluation des produits scalaire dans (4.1.2), et l'utilisation des conditions aux bord dans (4.1.1) conduit à

$$\begin{aligned} & \alpha^2 \left(\nabla u, \nabla v\right)_{L^2(Q_T)} - \beta^2 \left(\nabla u_t, \nabla v_t\right)_{L^2(Q_T)} - \left(u_t, v_t\right)_{L^2(Q_T)} \\ = \; & (F, v)_{L^2(Q_T)} - \alpha^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} v \left(\int_0^t \int_\Omega u(\xi, \tau) d\xi d\tau \right) dsdt \\ & + \beta^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} v_t \left(\int_\Omega u(\xi, t) d\xi \right) dsdt + (v(x, 0), \psi)_{L^2(\Omega)} \\ & - \beta^2 (v(x, 0), \Delta\psi)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Définition 1. *La fonction $u \in V(Q_T)$ est appelée solution généralisée du problème* (4.1.1), *si elle satisfait l'équation* (4.1.3) *pour chaque $v \in W(Q_T)$ et $u(x, 0) = \varphi(x)$.*

4.1 L'existence de la solution du problème

Nous donnons maintenant le résultat principal de l'existence de la solution du problème (4.1.1) et le prouvons à l'aide de la méthode de Galerkin.

Théorème 2. *Si $\varphi(x) \in {W_2}^1(\Omega)$, $\psi(x) \in {W_2}^1(\Omega)$ et $F(x, t) \in L^2(Q_T)$, alors il existe au moins une solution généralisée dans $V(Q_T)$ du problème* (4.1.1).

Preuve Soit $\{Z_k(x)\}_{k \geq 1}$ un système fondamental dans ${W_2}^1(\Omega)$ et supposons pour commodité qu'elle est orthonormée dans $L^2(\Omega)$, c'est adire $(Z_k, Z_l)_\Omega = \delta_{k,l}$.

On cherche une solution approchée $u^N(x)$ sous la forme

$$u^N(x, t) = \sum_{k=1}^N C_k(t) Z_k(x), \tag{4.2.1}$$

où les constantes $C_k(t)$ sont définies par les conditions

$$(\mathcal{L}u, Z_l)_{L^2(\Omega)} = (F, Z_l)_{L^2(\Omega)}, \quad l = 1, ..., N,$$

et peuvent êtres déterminées à partir des relations

$$\begin{aligned}
& \left(u_{tt}^N, Z_l\right)_{L^2(\Omega)} + \alpha^2 \left(\nabla u^N, \nabla Z_l\right)_{L^2(\Omega)} + \beta^2 \left(\nabla u_{tt}^N, \nabla Z_l\right)_{L^2(\Omega)} \\
& +\alpha^2 \int_{\partial\Omega} Z_l \left(\int_0^t \int_\Omega u^N(\xi,\tau) d\xi d\tau\right) ds \\
& +\beta^2 \int_{\partial\Omega} Z_l \left(\int_0^t \int_\Omega u_{tt}^N(\xi,\tau) d\xi d\tau\right) ds \\
= & \left(F, Z_l\right)_{L^2(\Omega)}, \quad l = 1, ..., N,
\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

et

$$C_k(0) = \alpha_k, \quad C_k'(0) = \beta_k, \tag{4.2.3}$$

où les constantes $\beta_k = (Z_k, \psi)_{L^2(\Omega)}$ et α_k représentent les coéfficients dans les sommes $\varphi^N(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k Z_k(x)$, qui approximent la condition initiale $\varphi(x)$ dans la norme de $W_2^1(\Omega)$ lorsque $N \to \infty$. Substitution de (4.2.1) dans (4.2.2), donne

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega \sum_{k=1}^{N} \left(C_k''(t) Z_k Z_l + \alpha^2 C_k \nabla Z_k \nabla Z_l + \beta^2 C_k'' \nabla Z_k \nabla Z_l\right) dx \\
& +\alpha^2 \sum_{k=1}^{N} \int_0^t \left(C_k(\tau) \int_{\partial\Omega} Z_l(x) \int_\Omega Z_k(\xi) d\xi ds\right) d\tau \\
& +\beta^2 \sum_{k=1}^{N} \int_0^t \left(C_k''(\tau) \int_{\partial\Omega} Z_l(x) \int_\Omega Z_k(\xi) d\xi ds\right) d\tau \\
= & \left(F, Z_l\right)_{L^2(\Omega)}. \qquad l = 1, ..., N,
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

De (4.2.4), il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
& \left(F, Z_l\right)_{L^2(\Omega)} \\
= & \sum_{k=1}^{N} \left(C_k''(t) \left((Z_k, Z_l)_{L^2(\Omega)} + \beta^2 (\nabla Z_k, \nabla Z_l)_{L^2(\Omega)}\right) + \alpha^2 C_k(t) (\nabla Z_k, \nabla Z_l)_{L^2(\Omega)}\right) \\
& + \sum_{k=1}^{N} \alpha^2 \int_0^t \left(C_k(\tau) \int_{\partial\Omega} Z_l(x) \int_\Omega Z_k(\xi) d\xi ds\right) d\tau \\
& + \sum_{k=1}^{N} \beta^2 \int_0^t \left(C_k''(\tau) \int_{\partial\Omega} Z_l(x) \int_\Omega Z_k(\xi) d\xi ds\right) d\tau, \qquad l = 1, ..., N,
\end{aligned}$$

Si dans cette dernière égalité, nous introduisons les notations

$$(Z_k, Z_l)_{L^2(\Omega)} = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \tag{4.2.5}$$

$$(\nabla Z_k, \nabla Z_l)_{L^2(\Omega)} = \gamma_{kl}, \tag{4.2.6}$$

$$\int_{\partial\Omega} Z_l(x) \int_{\Omega} Z_k(\xi) d\xi ds = \chi_{kl}, \tag{4.2.7}$$

$$(F, Z_l)_{L^2(\Omega)} = F_l(t), \tag{4.2.8}$$

alors on a

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N} \Big[C_k''(t)(\delta_{kl} + \beta^2\gamma_{kl}) + \alpha^2 C_k(t)\gamma_{kl} \\ & + \int_0^t \left(\alpha^2 C_k(\tau)\chi_{kl} + \beta^2 C_k''(\tau)\chi_{kl} \right) d\tau \Big] \\ = \; & F_l(t), \qquad\qquad l = 1, ..., N, \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Différenciation par rapport à t dans (4.2.9) conduit au système suivant

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N} \Big[C_k'''(t)(\delta_{kl} + \beta^2\gamma_{kl}) + \alpha^2 C_k'(t)\gamma_{kl} + \alpha^2 C_k(t)\chi_{kl} \\ & + \beta^2 C_k''(t)\chi_{kl} \Big] \\ = \; & F_l'(t), \qquad\qquad l = 1, ..., N, \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{N} C_k''(0)(\delta_{kl} + \beta^2\gamma_{kl}) + \alpha^2\alpha_k\gamma_{kl} = F_l(0) \\ \qquad\qquad C_k'(0) = \beta_k, \quad C_k(0) = \alpha_k. \end{cases} \tag{4.2.11}$$

Les équations (4.2.10) forment un système des équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients constants du troisième ordre en t pour les inconnues $C_k(t)$, $k = 1, ...N$. D'après la théorie des équations differentielles ordinaires, le problème (4.2.10) admet une solution unique pour les conditions initiales (4.2.11). Ainsi, pour chaque n, il existe une fonction $u^N(x)$ satisfaisant (4.2.2). Nous allons obtenir des bornes pour u^N, qui ne dépendent pas de N. Multiplions chaque équation de (4.2.2) par la fonction appropriée $C_k'(t)$, additionnons-les de 1 à N, puis intégrons par rapport à t entre 0 et τ, avec $\tau \leq T$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \left(u_{tt}^N, u_t^N\right)_{L^2(Q^\tau)} + \alpha^2 \left(\nabla u^N, \nabla u_t^N\right)_{L^2(Q^\tau)} \\
& +\beta^2 \left(\nabla u_{tt}^N, \nabla u_t^N\right)_{L^2(Q^\tau)} \\
& +\alpha^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} u_t^N \left(\int_0^t \int_\Omega u^N(\xi,\eta) d\xi d\eta\right) dsdt \\
& +\beta^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} u_t^N \left(\int_0^t \int_\Omega u_{tt}^N(\xi,\eta) d\xi d\eta\right) dsdt \\
= \; & \left(F, u_t^N\right)_{L^2(Q^\tau)}. \qquad (4.2.12)
\end{aligned}$$

L'évaluation de chaque terme du membre gauche de (4.2.12), conduit à

$$\left(u_{tt}^N, u_t^N\right)_{L^2(Q^\tau)} = \frac{1}{2}\left\|u_t^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2}\left\|u_t^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2, \qquad (4.2.13)$$

$$\begin{aligned}
\alpha^2 \left(\nabla u^N, \nabla u_t^N\right)_{L^2(Q^\tau)} \; = \; & \frac{\alpha^2}{2}\left\|\nabla u^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& -\frac{\alpha^2}{2}\left\|\nabla u^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2, \qquad (4.2.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta^2 \left(\nabla u_{tt}^N, \nabla u_t^N\right)_{L^2(Q^\tau)} \; = \; & \frac{\beta^2}{2}\left\|\nabla u_t^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& -\frac{\beta^2}{2}\left\|\nabla u_t^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2, \qquad (4.2.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} u_t^N \left(\int_0^t \int_\Omega u^N(\xi,\eta) d\xi d\eta\right) dsdt \\
= \; & \alpha^2 \int_{\partial\Omega} u^N(x,\tau) \int_0^\tau \int_\Omega u^N(\xi,t) d\xi dtds \\
& -\alpha^2 \int_{\partial\Omega}\int_0^\tau u^N(x,t) \int_\Omega u^N(\xi,t) d\xi dtds, \qquad (4.2.16)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \beta^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} u_t^N \left(\int_0^t \int_\Omega u_{tt}^N(\xi,\eta) d\xi d\eta \right) dsdt \\
= \; & \beta^2 \int_{\partial\Omega} \int_0^\tau u_t^N(x,t) \int_\Omega u_t^N(\xi,t) d\xi dtds \\
& -\beta^2 \int_{\partial\Omega} \int_0^\tau u_t^N(x,t) \int_\Omega u_t^N(\xi,0) d\xi dtds. \qquad (4.2.17)
\end{aligned}
$$

Substitution des égalités (4.2.13) – (4.2.17) dans (4.2.12), donne

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left\| u_t^N(x,\tau) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^2}{2} \left\| \nabla u^N(x,\tau) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\beta^2}{2} \left\| \nabla u_t^N(x,\tau) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
= \; & \frac{1}{2} \left\| u_t^N(x,0) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^2}{2} \left\| \nabla u^N(x,0) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\beta^2}{2} \left\| \nabla u_t^N(x,0) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& -\alpha^2 \int_{\partial\Omega} u^N(x,\tau) \int_0^\tau \int_\Omega u^N(\xi,t) d\xi dtds \\
& +\alpha^2 \int_{\partial\Omega} \int_0^\tau u^N(x,t) \int_\Omega u^N(\xi,t) d\xi dtds \\
& -\beta^2 \int_{\partial\Omega} \int_0^\tau u_t^N(x,t) \int_\Omega u_t^N(\xi,t) d\xi dtds \\
& +\beta^2 \int_{\partial\Omega} \int_0^\tau u_t^N(x,t) \int_\Omega u_t^N(\xi,0) d\xi dtds \\
& + \left(F, u_t^N \right)_{Q^\tau}. \qquad (4.2.18)
\end{aligned}
$$

A l'aide de l'inégalité de Cauchy et l'inégalité (voir [24]),

$$
\|w\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \le \varepsilon \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 + l(\varepsilon) \|w\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad l(\varepsilon) > 0, \qquad (\mathbf{A})
$$

qui est vrais pour $w \in W_2^1(\Omega)$ et pour tous $\varepsilon > 0$, on peut borner les cinq derniers termes du membre droit de (4.2.18) comme suit

$$\begin{aligned}
& -\alpha^2 \int_{\partial\Omega} u^N(x,\tau) \int_0^\tau \int_\Omega u^N(\xi,t) d\xi dt ds \\
\leq\; & \frac{\alpha^2 \varepsilon_1}{2} \int_{\partial\Omega} \left(u^N(x,\tau)\right)^2 ds \\
& + \frac{\alpha^2}{2\varepsilon_1} \int_{\partial\Omega} \left(\int_0^\tau \int_\Omega u^N(\xi,t) d\xi dt \right)^2 ds \\
\leq\; & \frac{\alpha^2 \varepsilon_1}{2} \left(\varepsilon \left\| \nabla u^N(x,\tau) \right\|^2_{L^2(\Omega)} + l(\varepsilon) \left\| u^N(x,\tau) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right) \\
& + \frac{\alpha^2}{2\varepsilon_1} \tau \left|\Omega\right|^2 l(\varepsilon) \left\| u^N(x,t) \right\|^2_{L^2(Q^\tau)}, \qquad (4.2.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha^2 \int_{\partial\Omega} \int_0^\tau u^N(x,t) \int_\Omega u^N(\xi,t) d\xi dt ds \\
\leq\; & \frac{\alpha^2}{2} \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(u^N(x,t)\right)^2 ds dt + \\
& \frac{\alpha^2}{2} \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(\int_\Omega u^N(\xi,t) d\xi \right)^2 ds dt \\
\leq\; & \frac{\alpha^2}{2} \left(\varepsilon \left\| \nabla u^N(x,t) \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} + l(\varepsilon) \left\| u^N(x,t) \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \right) \\
& + \frac{\alpha^2}{2} l(\varepsilon) \left|\Omega\right| \left\| u^N(x,t) \right\|^2_{L^2(Q^\tau)}, \qquad (4.2.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\beta^2 \int_{\partial\Omega} \int_0^\tau u_t^N(x,t) \int_\Omega u_t^N(\xi,t) d\xi dt ds \\
\leq\; & \frac{\beta^2}{2} \left(\varepsilon \left\| \nabla u_t^N(x,t) \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} + l(\varepsilon) \left\| u_t^N(x,t) \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \right) \\
& + \frac{\beta^2}{2} l(\varepsilon) \left|\Omega\right| \left\| u_t^N(x,t) \right\|^2_{L^2(Q^\tau)}, \qquad (4.2.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \beta^2 \int_{\partial\Omega} \int_0^\tau u_t^N(x,t) \int_\Omega u_t^N(\xi,0) d\xi dt ds \\
\leq\; & \frac{\beta^2}{2} \left(\varepsilon \left\| \nabla u_t^N(x,t) \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} + l(\varepsilon) \left\| u_t^N(x,t) \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \right) \\
& + \frac{\beta^2}{2} l(\varepsilon) \left|\Omega\right| \tau \left\| u_t^N(x,0) \right\|^2_{L^2(\Omega)}, \qquad (4.2.22)
\end{aligned}$$

$$\left(F, u_t^N\right)_{Q^\tau} \leq \frac{1}{2}\|F\|_{L^2(Q^\tau)}^2 + \frac{1}{2}\left\|u_t^N(x,t)\right\|_{L^2(Q^\tau)}^2. \tag{4.2.23}$$

En combinant les inégalités (4.2.19) – (4.2.23) et l'égalité (4.2.18), et en ulilisant l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}\left\|u^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq\ & \left\|u^N(x,t)\right\|_{L^2(Q^\tau)}^2 + \left\|u_t^N(x,t)\right\|_{L^2(Q^\tau)}^2 \\ & + \left\|u^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2,\end{aligned} \tag{4.2.24}$$

on obtient

$$\begin{aligned}& (1 - \frac{\alpha^2\varepsilon_1}{2}l(\varepsilon))\left\|u^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\left\|u_t^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \frac{\alpha^2}{2}(1-\varepsilon\varepsilon_1)\left\|\nabla u^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\beta^2}{2}\left\|\nabla u_t^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq\ & (\frac{1}{2} + \frac{\beta^2}{2}l(\varepsilon)\,|\Omega|\,T)\left\|u_t^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|u^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \frac{\alpha^2}{2}\left\|\nabla u^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\beta^2}{2}\left\|\nabla u_t^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|F\|_{L^2(Q^\tau)}^2 \\ & + (1 + \frac{\alpha^2}{2\varepsilon_1}T\,|\Omega|^2\,l(\varepsilon) + \frac{\alpha^2}{2}l(\varepsilon) + \frac{\alpha^2}{2}l(\varepsilon)\,|\Omega|)\left\|u^N(x,t)\right\|_{L^2(Q^\tau)}^2 \\ & + (\frac{3}{2} + \beta^2 l(\varepsilon) + \beta^2 l(\varepsilon)\,|\Omega|)\left\|u_t^N(x,t)\right\|_{L^2(Q^\tau)}^2 \\ & + \frac{\alpha^2}{2}\varepsilon\left\|\nabla u^N(x,t)\right\|_{L^2(Q^\tau)}^2 + \beta^2\varepsilon\left\|\nabla u_t^N(x,t)\right\|_{L^2(Q^\tau)}^2.\end{aligned} \tag{4.2.25}$$

En prenant $\varepsilon_1 = 1/\alpha^2 l(\varepsilon)$, et en choisissant ε de telle sorte que $\alpha^2 l(\varepsilon) > \varepsilon$, on ramène (4.2.25) a la forme simple

$$\begin{aligned}& \left\|u^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|\nabla u^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|u_t^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \left\|\nabla u_t^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq\ & D\Big(\left\|u^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|u_t^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|\nabla u^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \left\|\nabla u_t^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|u^N(x,t)\right\|_{L^2(Q^\tau)}^2 + \left\|\nabla u^N(x,t)\right\|_{L^2(Q^\tau)}^2 \\ & + \left\|u_t^N(x,t)\right\|_{L^2(Q^\tau)}^2 + \left\|\nabla u_t^N(x,t)\right\|_{L^2(Q^\tau)}^2\Big),\end{aligned} \tag{4.2.26}$$

où

$$D = \frac{\max\left\{\frac{1}{2} + \frac{\beta^2 l(\varepsilon)|\Omega|T}{2}, \frac{\beta^2}{2}, \frac{\alpha^2}{2}, 1 + \frac{\alpha^4 l^2(\varepsilon)|\Omega|^2 T}{2} + \frac{\alpha^2 l(\varepsilon)}{2} + \frac{\alpha^2 l(\varepsilon)|\Omega|}{2},\ \frac{3}{2} + \beta^2 l(\varepsilon)\,|\Omega| + \beta^2 l(\varepsilon), \beta^2\varepsilon,\ \frac{\alpha^2}{2}\varepsilon\right\}}{\min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\beta^2}{2}, \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\varepsilon}{2l(\varepsilon)}\right\}}. \tag{4.2.27}$$

Pour l'inégalité (4.2.26), nous appliquons le lemme de Gronwall, puis on intègre par rapport à t de 0 à τ pour obtenir

$$\begin{aligned} & \left\|u^N\right\|^2_{L^2(Q^\tau)} + \left\|\nabla u^N\right\|^2_{L^2(Q^\tau)} + \left\|u^N_t\right\|^2_{L^2(Q^\tau} + \left\|\nabla u^N_t\right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\ \leq\ & De^{DT}\left\{\left\|u^N(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|u^N_t(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\nabla u^N(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \right. \\ & \left. + \left\|\nabla u^N_t(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \|F\|^2_{L^2(Q^\tau)}\right\}. \end{aligned} \tag{4.2.28}$$

Si on neglige le dernier terme du membre gauche de (4.2.28), elle prend la forme

$$\left\|u^N\right\|^2_{W^1_2(Q^\tau)} \leq De^{DT}\left(\|\varphi\|^2_{W^1_2(\Omega)} + \|\psi\|^2_{W^1_2(\Omega)} + \|F\|^2_{L^2(Q^\tau)}\right). \tag{4.2.29}$$

On déduit de (4.2.29) que

$$\left\|u^N\right\|^2_{W^1_2(Q^\tau)} \leq A.$$

Par conséquent, la suite $\left\{u^N\right\}_{N\geq 1}$ est bornée dans $V(Q_T)$, et nous pouvons en extraire une sous suite pour laquelle nous utilisons la même notation qui converge faiblement dans $V(Q_T)$ vers une fonction limite $u(x,t)$. Nous devons montrer que $u(x,t)$ est une solution généralisée de (4.1.1). Puisque $u^N(x,t) \to u(x,t)$ dans $L^2(Q_T)$ et $u^N(x,0) \to \varphi(x)$ dans $L^2(\Omega)$, alors $u(x,0) = \varphi(x)$. Maintenant, pour prouver que (4.2.2) est en lieu, on multiplie chacune des relations (4.2.2) par une fonction $p_l(t) \in W^1_2(0,T)$, $p_l(T) = 0$, puis on additionne les égalités obtenues de $l = 1$ à

$l = N$, et on intégre par rapport t sur $(0,T)$. Si on pose $\eta^N = \sum_{k=1}^{N} p_l(t) Z_k(x)$, alors on a

$$\begin{aligned}
& -\left(u_t^N, \eta_t^N\right)_{L^2(Q_T)} + \alpha^2 \left(\nabla u^N, \nabla \eta^N\right)_{L^2(Q_T)} \\
& -\beta^2 \left(\nabla u_t^N, \nabla \eta_t^N\right)_{L^2(Q_T)} \\
= \; & \left(u_t^N(x,0), \eta^N(0)\right)_{L^2(\Omega)} + \beta^2 \left(\nabla u_t^N(x,0), \nabla \eta^N(0)\right)_{L^2(\Omega)} \\
& -\alpha^2 \int_{\partial\Omega} \int_0^T \eta^N(x,t) \int_0^t \int_\Omega u^N(\xi,\tau) d\xi d\tau dt ds \\
& -\beta^2 \int_{\partial\Omega} \int_0^T \eta^N(x,t) \int_0^t \int_\Omega u_{tt}^N(\xi,\tau) d\xi d\tau dt ds \\
& + \left(F, \eta^N\right)_{L^2(Q_T)}.
\end{aligned} \tag{4.2.30}$$

Évaluation du dernier terme du membre droit de (4.2.30), réduit cette derniere à

$$\begin{aligned}
& -\left(u_t^N, \eta_t^N\right)_{L^2(Q_T)} + \alpha^2 \left(\nabla u^N, \nabla \eta^N\right)_{L^2(Q_T)} \\
& -\beta^2 \left(\nabla u_t^N, \nabla \eta_t^N\right)_{L^2(Q_T)} \\
= \; & \left(F, u_t^N\right)_{L^2(Q_T)} + \left(u_t^N(x,0), \eta^N(0)\right)_{L^2(\Omega)} \\
& +\beta^2 \left(\nabla u_t^N(x,0), \nabla \eta^N(0)\right)_{L^2(\Omega)} \\
& -\alpha^2 \int_{\partial\Omega} \int_0^T \eta^N(x,t) \int_0^t \int_\Omega u^N(\xi,\tau) d\xi d\tau dt ds \\
& -\beta^2 \int_{\partial\Omega} \int_0^T \eta^N(x,t) \int_\Omega u_t^N(\xi,t) d\xi dt ds \\
& +\beta^2 \int_{\partial\Omega} \int_0^T \eta^N(x,t) \int_\Omega u_t^N(\xi,0) d\xi dt ds,
\end{aligned} \tag{4.2.31}$$

pour tous les η^N de la forme $\sum_{k=1}^{N} p_l(t) Z_k(x)$.

Comme

$$\int_0^t \int_\Omega (u^N(\xi,\tau) - u(\xi,\tau)) d\xi d\tau \leq \sqrt{T\,|\Omega|} \left\| u^N - u \right\|_{L^2(Q_T)},$$

$$\int_0^T \eta^N(x,t) \int_\Omega (u_t^N(\xi,t) - u_t(\xi,t)) d\xi dt \leq \sqrt{|\Omega|} \left(\int_0^T \eta^N(x,t) \right)^{1/2} \left\| u_t^N - u_t \right\|_{L^2(Q_T)},$$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \eta^N(x,t) \int_\Omega (u_t^N(\xi,0) - u_t(\xi,0)) d\xi dt \\ \leq \quad & \sqrt{|\Omega|} \left(\int_0^T \eta^N(x,t) \right)^{1/2} \left\| u_t^N(x,0) - u_t(x,0) \right\|_{L^2(Q_T)}, \end{aligned}$$

et

$$\left\| u^N - u \right\|_{L^2(Q_T)} \to 0, \quad \text{quand } N \to \infty,$$

on donc

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega} \int_0^T \eta^N(x,t) \int_0^t \int_\Omega u^N(\xi,\tau) d\xi d\tau dt ds \\ \to \quad & \int_{\partial\Omega} \int_0^T \eta(x,t) \int_0^t \int_\Omega u(\xi,\tau) d\xi d\tau dt ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega} \int_0^T \eta^N(x,t) \int_\Omega u_t^N(\xi,t) d\xi dt ds \\ \to \quad & \int_{\partial\Omega} \int_0^T \eta(x,t) \int_\Omega u_t(\xi,t) d\xi dt ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega} \int_0^T \eta^N(x,t) \int_0^t \int_\Omega u_t^N(\xi,0) d\xi d\tau dt ds \\ \to \quad & \int_{\partial\Omega} \int_0^T \eta(x,t) \int_0^t \int_\Omega u_t(\xi,0) d\xi d\tau dt ds. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction limite u satisfait (4.2.2) pour chaque $\eta^N = \sum_{k=1}^{N} p_l(t) Z_k(x)$. On désigne par $\mathbb{Q}_N$ la totalité de toutes les fonctions de la forme $\eta^N = \sum_{k=1}^{N} p_l(t) Z_k(x)$, avec $p_l(t) \in W_2^1(0,T)$, $p_l(T) = 0$. Mais $\cup_{l=1}^{N} \mathbb{Q}_N$ est dense dans $W(Q_T)$, alors la relation (4.2.2) est valable pour tout $u \in W(Q_T)$. Ainsi, nous avons montré que la fonction limite $u(x,t)$ est une solution généralisée du problème (4.1.1) dans $V(Q_T)$. ■

4.2 Unicité de la solution

Théorème 3. *Le problème* (4.1.1) *ne peut pas avoir plus d'une solution généralisée dans* $V(Q_T)$.

Preuve Supposons que $u_1 \in V(Q_T)$ et $u_2 \in V(Q_T)$ sont deux solutions du problème (4.1.1) tel que $u_1 \neq u_2$. Alors $U = u_1 - u_2$ est solution du probleme

$$\begin{cases} U_{tt} - \alpha^2 \Delta U - \beta^2 \Delta U_{tt} = 0 \\ U(x,0) = 0, \quad U_t(x,0) = 0, \\ \partial U / \partial \eta = \int_0^t \int_\Omega U(\xi,\tau) d\xi d\tau, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.3.1}$$

et (4.1.3) donne

$$\begin{aligned} & \alpha^2 (\nabla U, \nabla v)_{L^2(Q_T)} - \beta^2 (\nabla U_t, \nabla v_t)_{L^2(Q_T)} - (U_t, v_t)_{L^2(Q_T)} \\ = \; & -\alpha^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} v \left(\int_0^t \int_\Omega U(\xi,\tau) d\xi d\tau \right) ds dt \\ & + \beta^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} v_t \left(\int_\Omega U(\xi,t) d\xi \right) ds dt. \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Définissons maintenant la fonction $v(x,t)$ par

$$v(x,t) = \begin{cases} \int_t^\tau U(x,s) ds, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \tau \leq t \leq T. \end{cases} \tag{4.3.3}$$

Il est évident que $v \in W(Q_T)$ et $v_t(x,t) = -U(x,t)$ pour tout $t \in [0,\tau]$.Une intégration par parties dans le membre gauche de (4.3.2) donne

$$\alpha^2 (\nabla U, \nabla v)_{L^2(Q_T)} = \frac{\alpha^2}{2} \|\nabla v(x,0)\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{4.3.4}$$

$$-\beta^2 (\nabla U_t, \nabla v_t)_{L^2(Q_T)} = \frac{\beta^2}{2} \|\nabla U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{4.3.5}$$

$$-\left(U_t, v_t\right)_{L^2(Q_T)} = \frac{1}{2}\left\|U(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{4.3.6}$$

la substitution de (4.3.4) − (4.3.6) dans (4.3.2), conduit à l'égalité

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha^2}{2}\left\|\nabla v(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta^2}{2}\left\|\nabla U(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\left\|U(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
= \; & \beta^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} v_t \left(\int_\Omega U(\xi,t)d\xi\right) dsdt \\
& -\alpha^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} v \left(\int_0^t \int_\Omega U(\xi,\tau)d\xi d\tau\right) dsdt.
\end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Le membre droit de (4.3.7) peut être estimé comme suit

$$\begin{aligned}
& -\alpha^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} v \left(\int_0^t \int_\Omega U(\xi,\tau)d\xi d\tau\right) dsdt \\
\leq \; & \alpha^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{v^2(x,t)}{2} + \frac{T\left|\Omega\right|}{2}\int_0^t \int_\Omega U^2(\xi,\tau)d\xi d\tau\right) dsdt \\
\leq \; & \frac{\alpha^2 T^2 \left|\Omega\right| \left|\partial\Omega\right|}{2} \int_0^\tau \int_\Omega U^2(\xi,t)d\xi dt \\
& +\alpha^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \frac{v^2(x,t)}{2} dsdt.
\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

En utilisant l'inégalité **A,** alors (4.3.8), devient

$$\begin{aligned}
& -\alpha^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} v \left(\int_0^t \int_\Omega U(\xi,\tau)d\xi d\tau\right) dsdt \\
\leq \; & \frac{\alpha^2}{2}\left(\varepsilon\left\|\nabla v\right\|^2_{L^2(Q^\tau)} + l(\varepsilon)\left\|v\right\|^2_{L^2(Q^\tau)}\right) + \frac{\alpha^2 T^2 \left|\Omega\right| \left|\partial\Omega\right|}{2}\left\|U\right\|^2_{L^2(Q^\tau)}.
\end{aligned}$$

Maintenant comme

$$v^2(x,t) = \left(\int_t^\tau U(x,s)ds\right)^2 \leq \tau \int_0^\tau U^2(x,s)ds,$$

alors

$$\left\|v\right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \leq \tau^2 \left\|U\right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \leq T^2 \left\|U\right\|^2_{L^2(Q^\tau)}, \tag{4.3.9}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
& -\alpha^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} v \left(\int_0^t \int_\Omega U(\xi,\tau) d\xi d\tau \right) ds dt \\
\leq & \left(\frac{\alpha^2}{2} l(\varepsilon) T^2 + \frac{\alpha^2 T^2 |\Omega| |\partial\Omega|}{2} \right) \|U\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\
& + \frac{\alpha^2}{2} \varepsilon \|\nabla v\|^2_{L^2(Q^\tau)} .
\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
& \beta^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} v_t \left(\int_\Omega U(\xi,t) d\xi \right) ds dt \\
= & -\beta^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} v \int_\Omega U_t(\xi,t) d\xi ds dt \\
= & -\beta^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} v \int_\Omega U_t(\xi,t) d\xi ds dt \\
\leq & \ \beta^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \frac{v^2(x,t)}{2} ds dt \\
& + \frac{\beta^2 |\Omega| |\partial\Omega|}{2} \int_0^\tau \int_\Omega U_t^2(\xi,t) d\xi dt.
\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

En utilisant à nouveau les inégalités **A** et (4.3.9), l'estimation (4.3.11) prend la forme

$$\begin{aligned}
& \beta^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} v_t \left(\int_\Omega U(\xi,t) d\xi \right) ds dt \\
\leq & \frac{\beta^2 |\Omega| |\partial\Omega|}{2} \|U_t\|^2_{L^2(Q^\tau)} + \frac{\beta^2}{2} \varepsilon \|\nabla v\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\
& + \frac{\beta^2}{2} l(\varepsilon) T^2 \|U\|^2_{L^2(Q^\tau)} .
\end{aligned} \tag{4.3.12}$$

En combinant $(4.3.7), (4.3.10)$ et $(4.3.12)$ on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha^2}{2} \|\nabla v(x,0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta^2}{2} \|\nabla U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \|U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\leq & \frac{(\beta^2+\alpha^2)}{2} \varepsilon \|\nabla v\|^2_{L^2(Q^\tau)} + \frac{\beta^2 |\Omega| |\partial\Omega|}{2} \|U_t\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\
& + \left(\frac{(\beta^2+\alpha^2)}{2} l(\varepsilon) T^2 + \frac{\alpha^2 T^2 |\Omega| |\partial\Omega|}{2} \right) \|U\|^2_{L^2(Q^\tau)} .
\end{aligned} \tag{4.3.13}$$

Multiplions maintenant l'équation différentielle (4.3.1) par U_t et intégrons sur $Q^\tau = \Omega \times (0, \tau)$, on obtient

$$(U_{tt}, U_t)_{L^2(Q^\tau)} - \alpha^2(\Delta U, U_t)_{L^2(Q^\tau)} - \beta^2(\Delta U_{tt}, U_t)_{L^2(Q^\tau)} = 0. \tag{4.3.14}$$

Les conditions aux limites et initiales dans (4.3.1) et l'intégration par parties standard dans (4.3.14) conduit à

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|U_t(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha^2}{2}\|\nabla U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta^2}{2}\|\nabla U_t(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ = \; & \alpha^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} U_t \left(\int_0^t \int_\Omega U(\xi,\eta) d\xi d\eta \right) dsdt \\ & + \frac{\beta^2}{2} \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} U_t \int_\Omega U(\xi,t) d\xi dsdt. \end{aligned} \tag{4.3.15}$$

Le membre droit de (4.3.15) peut être estimé comme suit

$$\begin{aligned} & \alpha^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} U_t \left(\int_0^t \int_\Omega U(\xi,\eta) d\xi d\eta \right) dsdt \\ \leq \; & \frac{\alpha^2}{2} \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} U_t^2(x,t) dsdt \\ & + \frac{\alpha^2}{2} T^2 |\Omega| |\partial\Omega| \int_0^\tau \int_\Omega U^2(\xi,\eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \tag{4.3.16}$$

En utilisant l'inégalité de **A** à (4.3.16), devient

$$\begin{aligned} & \alpha^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} U_t \left(\int_0^t \int_\Omega U(\xi,\eta) d\xi d\eta \right) dsdt \\ \leq \; & \frac{\alpha^2}{2} T^2 |\Omega| |\partial\Omega| \int_0^\tau \int_\Omega U^2(\xi,\eta) d\xi d\eta \\ & + \frac{\alpha^2}{2} \left(\varepsilon \|\nabla U_t\|^2_{L^2(Q^\tau)} + l(\varepsilon) \|U_t\|^2_{L^2(Q^\tau)} \right) \\ = \; & \frac{\alpha^2}{2} T^2 |\Omega| |\partial\Omega| \|U\|^2_{L^2(Q^\tau)} + \frac{\alpha^2}{2} \varepsilon \|\nabla U_t\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\ & + \frac{\alpha^2}{2} l(\varepsilon) \|U_t\|^2_{L^2(Q^\tau)}. \end{aligned} \tag{4.3.17}$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned}
&\frac{\beta^2}{2}\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}U_t\int_\Omega U(\xi,t)d\xi dsdt \\
\leq\ &\frac{\beta^2}{4}\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}U_t^2(x,t)dsdt+\frac{\beta^2}{4}\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}|\Omega|\int_\Omega U^2(\xi,\eta)d\xi d\eta \\
=\ &\frac{\beta^2}{4}|\Omega|\,|\partial\Omega|\int_0^\tau\int_\Omega U^2(\xi,\eta)d\xi d\eta \\
&+\frac{\beta^2}{4}\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}U_t^2(x,t)dsdt. \qquad (4.3.18)
\end{aligned}$$

Nous appliquons l'inégalité **A** à (4.3.18) pour devenir

$$\begin{aligned}
&\frac{\beta^2}{2}\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}U_t\int_\Omega U(\xi,t)d\xi dsdt \\
\leq\ &\frac{\beta^2}{4}|\Omega|\,|\partial\Omega|\,\|U\|^2_{L^2(Q^\tau)}+\frac{\beta^2}{4}\varepsilon\,\|\nabla U_t\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\
&+\frac{\beta^2}{4}l(\varepsilon)\,\|U_t\|^2_{L^2(Q^\tau)}. \qquad (4.3.19)
\end{aligned}$$

D'où en combinant les inégalités $(4.3.17), (4.3.19)$ et l'égalité $(4.3.15)$ on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|U_t(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\alpha^2}{2}\|\nabla U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+\frac{\beta^2}{2}\|\nabla U_t(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\leq\ &\left(\frac{\beta^2}{4}|\Omega|\,|\partial\Omega|+\frac{\alpha^2}{2}T^2|\Omega|\,|\partial\Omega|\right)\|U\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\
&+\frac{\varepsilon}{4}\left(\alpha^2+\beta^2\right)\|\nabla U_t\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\
&+\frac{l(\varepsilon)}{4}\left(\alpha^2+\beta^2\right)\|U_t\|^2_{L^2(Q^\tau)}. \qquad (4.3.20)
\end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre (4.3.13) et (4.3.20), on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha^2}{2}\left\|\nabla v(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta^2+\alpha^2}{2}\left\|\nabla U(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& + \frac{1}{2}\left\|U(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\left\|U_t(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta^2}{2}\left\|\nabla U_t(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\leq & \left(\frac{\beta^2}{4}\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right| + \alpha^2 T^2\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right| + \frac{(\beta^2+\alpha^2)}{2} l(\varepsilon) T^2\right)\left\|U\right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\
& + \left(\frac{l(\varepsilon)}{4}\left(\alpha^2+\beta^2\right) + \frac{\beta^2\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|}{2}\right)\left\|U_t\right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\
& + \frac{\varepsilon}{4}\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left\|\nabla U_t\right\|^2_{L^2(Q^\tau)} + \frac{(\beta^2+\alpha^2)}{2}\varepsilon\left\|\nabla v\right\|^2_{L^2(Q^\tau)}. \qquad (4.3.21)
\end{aligned}$$

Maintenant, pour faire face au dernier terme du membre droit de (4.3.21), on définit la fonction $\theta(x,t)$ par la relation

$$\theta(x,t) = \int_0^t U(x,s)ds.$$

En utilisant (4.3.3), il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
v(x,t) &= \theta(x,\tau) - \theta(x,t),\ \nabla v(x,0) = \nabla\theta(x,\tau),\ \text{et} \\
\left\|\nabla v\right\|^2_{L^2(Q^\tau)} &= \left\|\nabla\theta(x,\tau) - \nabla\theta(x,t)\right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\
&\leq 2\tau\left\|\nabla\theta(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\nabla\theta(x,t)\right\|^2_{L^2(Q^\tau)}.
\end{aligned}$$

Par conséquent l'inégalité (4.3.21) prend la forme

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha^2}{2}\left\|\nabla\theta(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\beta^2+\alpha^2}{2}\left\|\nabla U(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& +\frac{1}{2}\left\|U_t(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\beta^2}{2}\left\|\nabla U_t(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\left\|U(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
\leq\ & \left(\frac{\beta^2}{4}\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right| + \alpha^2T^2\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right| + \frac{(\beta^2+\alpha^2)}{2}l(\varepsilon)T^2\right)\left\|U\right\|_{L^2(Q^\tau)}^2 \\
& +\left(\frac{l(\varepsilon)}{4}\left(\alpha^2+\beta^2\right) + \frac{\beta^2\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|}{2}\right)\left\|U_t\right\|_{L^2(Q^\tau)}^2 \\
& +\frac{\varepsilon}{4}\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left\|\nabla U_t\right\|_{L^2(Q^\tau)}^2 + \left(\frac{(\beta^2+\alpha^2)}{2}\varepsilon\right)\left\|\nabla\theta(x,t)\right\|_{L^2(Q^\tau)}^2 \\
& +\frac{(\beta^2+\alpha^2)}{2}\varepsilon 2\tau\left\|\nabla\theta(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 .
\end{aligned} \tag{4.3.22}$$

Comme τ est arbitraire, nous supposons que

$$(\alpha^2/2) - (\beta^2+\alpha^2)\varepsilon 2\tau > 0,$$

alors (4.3.22) devient après l'ajout de $\left\|\nabla U\right\|_{L^2(Q^\tau)}^2$ a son membre droit

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\alpha^2}{2} - \varepsilon\tau(\beta^2+\alpha^2)\right)\left\|\nabla\theta(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\beta^2+\alpha^2}{2}\left\|\nabla U(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& +\frac{1}{2}\left\|U_t(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\beta^2}{2}\left\|\nabla U_t(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\left\|U(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
\leq\ & \left(\frac{\beta^2}{4}\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right| + \alpha^2T^2\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right| + \frac{(\beta^2+\alpha^2)}{2}l(\varepsilon)T^2\right)\left\|U\right\|_{L^2(Q^\tau)}^2 \\
& +\frac{\varepsilon}{4}\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left\|\nabla U_t\right\|_{L^2(Q^\tau)}^2 + \left(\frac{l(\varepsilon)}{4}\left(\alpha^2+\beta^2\right) + \frac{\beta^2\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|}{2}\right)\left\|U_t\right\|_{L^2(Q^\tau)}^2 \\
& \left(\frac{(\beta^2+\alpha^2)}{2}\varepsilon\right)\left\|\nabla\theta(x,t)\right\|_{L^2(Q^\tau)}^2 + \left\|\nabla U\right\|_{L^2(Q^\tau)}^2 .
\end{aligned}$$

Donc on obtient

$$\begin{aligned}
& \|\nabla\theta(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|U_t(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& + \|\nabla U_t(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\leq\ & A(T)\Big(\|\nabla\theta(x,t)\|^2_{L^2(Q^\tau)} + \|\nabla U\|^2_{L^2(Q^\tau)} + \|U_t\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\
& + \|\nabla U_t\|^2_{L^2(Q^\tau)} + \|U\|^2_{L^2(Q^\tau)}\Big), \qquad (4.3.23)
\end{aligned}$$

où $A(T) = De^{DT}$, et

$$D = \frac{\max\left\{\frac{\beta^2|\Omega||\partial\Omega|+4\alpha^2T^2|\Omega||\partial\Omega|}{4} + \frac{(\beta^2+\alpha^2)l(\varepsilon)T^2}{2},\ \frac{(\beta^2+\alpha^2)\varepsilon}{2},\ \frac{l(\varepsilon)\left(\alpha^2+\beta^2\right)+2\beta^2|\Omega||\partial\Omega|}{4},\ 1\right\}}{\min\left\{\frac{\alpha^2-2\varepsilon\tau(\beta^2+\alpha^2)}{2},\ \frac{\beta^2}{2},\ \frac{1}{2}\right\}}.$$

Si on applique le lemme de Gronwall à (4.3.23), on obtient

$$\begin{aligned}
& \|\nabla\theta(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|U_t(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& + \|\nabla U_t(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\leq\ & 0, \qquad \forall\tau \in [0, \alpha^2/2\varepsilon(\beta^2+\alpha^2)].
\end{aligned}$$

En procédant de la même façon pour les intervalles

$$\tau \in [(m-1)\alpha^2/2\varepsilon(\beta^2+\alpha^2), m\alpha^2/2\varepsilon(\beta^2+\alpha^2)]$$

pour couvrir tout l'intervalle $[0,T]$, et cela prouve que $U(x,\tau) = 0$, pour tout τ dans $[0,T]$. D'ou l'unicité de la solution. ■

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudier trois problèmes mixtes non locaux pour des équations et systèmes non linèaires . Nous avons commencé par un problème mixte non linéaire pour une équation viscoélastique avec l'opérateur de Bessel ou l'une des conditions aux limites est remplacée par une condition intégrale. Malgré la complexité des calculs techniques des méthodes utilisées, nous avons pu établir l'existence, l'unicité et la dépendance continue de la solution par rapport des donnés initales du problème proposé. Sur la base des résultas du problème linéaire, nous avons appliqué un processus itérative pour établir l'existence et l'unicité de la solution faible du problème non linéaire.

Le second problème mixte non local est un système couplé de thermoélasticité non linéaire avec condition non classique, qui peut se découpler en une équation hyperbolique et une autre parabolique. On a pu appliquer pour la première fois une approche d'analyse fonctionnelle (méthode des estimations a priori) pour traiter le cas linéaire associé, et une approche itérative pour le cas non linéaire pour ce type de systèmes ou nous avons combiné des conditions classiques et d'autres non classiques de type intégrale. Les solutions sont cherchées dans des espaces de Sobolev avec poids.

En fin nous avons appliqué la mèthode classique de Fado Galerkin pour traiter un problème mixte avec une condition non locale (la derivèe normale est exprimé par une valeur moyenne de la solution) pour une équation de Boussinesq de dimensions superieurs. Notre resultat généralise la plus part des résultats obtenus quand la méthode utilisée est celle de Galerkin.

Notre objectif ultime aprés ce travail de thèse est de traiter d'autres problèmes mixtes non locaux plus compliqués comme par exemple les systèmes de Temoshinko non linéaires avec conditions non locales.

Bibliographie

[1] Assila M, Nonlinear boundary stabilization of an inhomogeneous and anisotropic thermoelasticity system, Applied Math Letters. **13** (2000), 71-76.

[2] Beilin SA. On a mixed nonlocal problem for a wave equation. Electron. J. Diff. Eqns. 2006 ; **103 :** 1-10.

[3] Bouziani, A. : Mixed problem with boundary integral conditions for a certain parabolic equation. J. Appl.Math. Stoch. Anal. 9, 323–330 (1996).

[4] Bouziani A, Solvability of nonlinear pseudoparabolic equation with a nonlocal boundary condition, Nonlinear Analysis 55 (2003) 883-904.

[5] Bouziani A, Strong solution for a mixed problem with a nonlocal condition for certain pluriparabolic equations. Horishima. Math. J. 27 (1997), 373-390.

[6] Cannon, R. : The solution of heat equation subject to the specification of energy. Q. Appl. Math. 21(2),155–160 (1963).

[7] Cavalcanti, M.M., Domingos Cavalcanti, V.N., Ferreira, J. : Existence and uniform decay for nonlinearviscoelastic equation with strong damping. Math. Methods Appl. Sci. 24, 1043–1053 (2001).

[8] Cavalcanti, M.M., Domingos Cavalcanti, V.N., Soriano, J.A. : Exponential decay for the solution of semilinear viscoelastic wave equations with localized damping. Electron. J. Differ. Equ. 2002(44).

[9] Cavalcanti, M.M., Oquendo, H.P. : Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation.SIAM J. Control Optim. 42(4), 1310–1324 (2003).

[10] Choi. Y.S and Chan. K.Y. A parabolic equation with nonlocal boundary conditions arising from electro-chemestry. Nonlinear Anal. 18 (1992), 317-331.

[11] Dafermos C. M and L. Hsiao, Development of singularities in solutions of the equations on nonlinear thermoelasticity system, Q. Appl. Math **44** (1986), 463-474.

[12] Dezin A.A., Théorème d'existence et d'unicité de la solution pour les problèmes auxlimites des équations aux dérivées partielles dans les espaces fonctionnels. Uspekh.Math. Naouk. 14. N 3. (37). 22-73. 1959.

[13] Ewing. R.E and Lin. T. A class of parameter estimation techniques for fluid flow in porous media. Adv. water resour. 14 (1991), 89-97.

[14] Garding L., Cauchy problem for hyperbolic equations, Lecture notes, University of Chicago, 1957.

[15] Hrusa W. J. and S. A. Messaoudi, On formation of singularities on one-dimensional nonlinear thermoelasticity, Arch. Rational Mech. Anal **3** (1990), 135-151.

[16] Ionkin, N.I. : Solution of boundary value problem in heat conduction theory with nonclassical boundaryconditions. Differ. Uravn. 13(2), 1177–1182 (1977).

[17] Ionkin, N.I., Moiseev, E.I. : A problem for the heat conduction equation with two-point boundary condition.Differ. Uravn. 15(7), 1284–1295 (1979).

[18] Kamynin, N.I. : A boundary value problem in the theory of heat conduction with non classical boundary condition. TH. Vychisl. Mat. Fiz. 43(6), 1006–1024 (1964).

[19] Kartynnik, A.V. : Three-point boundary value problem with an integral space-variable condition for a second order parabolic equation. Differ. Equ. 26, 1160–1162 (1990).

[20] Kirane, M., Tatar, N.E. : A memory type boundary stabilization of a mildly damped wave equation. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 6, 1–7 (1999).

[21] Kirane M. and Tatar N., A nonexistence result to a Cauchy problem in nonlinear one-dimensional thermoelasticity, J. Math. Anal. Appl. **254** (2001), 71-86.

[22] LadyzenskayaO.A., Solution of the third boundary value problem for quasilinear parabolic equations, Trudy Mosk. Mat. Obš. 7, 1958.

[23] Ladyzenskaya O.A., On solution of nonstationary operator equations, Mat. Sbornik 39(1956), No 4.

[24] Ladyzhenskaya O.A., The boundary value problems of Mathematical physics, Springer-Verlag, New York Heidelberg Tokyo 1985.

[25] Leray J., Lectures on hyperbolic di¤erential equations with variable coefficients, Princeton, Just for Adv. Study, 1952.

[26] Mesloub S. A nonlinear nonlocal mixed problem for a second order pseudoparabolic equation. J. Math. Anal. Appl. 2006 ; **316** : 189-209.

[27] Mesloub S. On a singular two dimensional nonlinear evolution equation with nonlocal conditions. Nonlinear Analysis : Theory, methods & applications. 2008 ; **68** : 2594-2607.

[28] Mesloub S. Mixed non local problem for a nonlinear singular hyperbolic equation. Math. Meth. Appl. Sci. 2010, 33 57–70, DOI : 10.1002/mma.1150.

[29] Mesloub S, On a nonlocal problem for a pluriparabolic equation, Acta Sci. Math. (Szeged) **67** (2001), 203-219.

[30] Mesloub S and Bouziani A, On a classe of singular hyperbolic equation with a weighted integral condition, Internat. J. Math. & Math. Sci. Vol **22** N°**3** (1999), 511-519.

[31] Mesloub, S., Bouziani, A. : Mixed problem with a weighted integral condition for a parabolic equationwith Bessel operator. J. Appl. Math. Stoch. Anal. 15(3), 291–300 (2002).

[32] Mesloub, S., Bouziani, A. : Problème mixte avec conditions aux limites intégrales pour une classed'équations paraboliques bidimensionnelles. Bull. Classe Sci. Acad. R. Belg. 6, 59–69 (1998).

[33] Mesloub S, Lekrine N. On a nonlocal hyperbolic mixed problem, Acta. Sci. Math. (Szeged). 2004 ; **70** : 65-75.

[34] Mesloub S, Messaoudi SA. A three point boundary value problem with a nonlocal condition for a hyperbolic equation. Elect. J. Diff. Eqns. 2002 ; **62** : 1-13.

[35] Mesloub S, Messaoudi SA. A nonlocal mixed semilinear problem for second order hyperbolic equations. Elect. J. Diff. Eqns. 2003 ; **30** : 1-17.

[36] Messaoudi, S.A., Tatar, N.E. : Global existence asymptotic behavior for a nonlinear viscoelastic problem. Math. Methods Sci. Res. J. 7(4), 136–149 (2003)

[37] Messoudi S. A, On weak solutions of semilinear thermoelastic equations, Magreb math. Review, Vol **1** No 1 (1992), 31-40.

[38] Messoudi S. A, A blow up result in a multidimensional semilinear thermoelasticity system, Electron. J. Differential. Equations,Vol. **2001** No. 30 (2001) 1-9.

[39] Munoz Rivera J. E. and R. K. Barreto, Existence and exponential decay in nonlinear thermoelasticity, Nonlinear Analysis **31** No. **1/2** (1998), 149-162.

[40] Munoz Rivera J. E. and R. Racke, Smoothinfg properties, decay, and global existence of solutions to nonlinear coupled systems of thermoelasticity type, SIAM J. Math. Anal, **26** (1995), 1547-1563.

[41] Muravei LA, Philinovskii AV. On a certain nonlocal boundary value problem for hyperbolic equation. Matem. zametki. 1993 **54** : 98-116.

[42] Nakushev AM. On certain approximate method for boundary value problems for differential equations and its applications in ground waters dynamics. Differenentsialnie Uravnenia. 1982 ; **18** : 72-81.

[43] Pulkina LS. *A* nonlocal problem with integral conditions for hyperbolic equations. Electron. J. Diff. Eqns. 1999 ; **45** : 1-6.

[44] Racke R, blow up in nonlinear three dimensional thermoelasticity, Math. Methods Appl. Sci. **12** No **3** (1990), 273-276.

[45] Racke R, and Y. Shibata, Global smooth solutions and asymptotic stability in one-dimensional nonlinear thermoelasticity, Arch. rational. Mech. Anal. **116** (1991), 1-34.

[46] Racke R, and Y. G. Wang, Propagation of singularities in one-dimensional thermoelasticity, J. Math. Anal. Appl, **223** (1998), 216-247.

[47] Shi. p. and Shilor. Design of contact patterns in one dimensional Termoelasticity, in theoretical aspects of industrial design. SIAM, Philadelphia (1992).

[48] Slemrod M. Global existence, uniqueness, and asymptotic stability of classical solutions in one-dimensional thermoelasticity, Arch. rational. Mech. Anal. **76** (1981), 97-133.Théorème 4.3 donne le résultat.

[49] Yurchuk N. I., Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations, Differential Equations, 22, (1986), pp. 1457-1463.

[50] D. Bahuguna, S. Abbas, J. Dabas, Partial functional di¤erential equation with an integral boundary condition and application to population dynamics, Nonlinear Anal. TMA 69 (2008) 2623 2635.