REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MENTOURI - CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre :..............................
Série :......................................

THESE

Présentée pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES

En: Mathématiques

Sujet:

Existence globale pour des systèmes de réaction-diffusion avec contrôle de masse

<u>Option</u> :

Equations aux Dérivées Partielles

Présentée par :

REBIAI Belgacem

<u>Devant le jury</u> :

Président :	DENCHE Mohammed	Prof.	Univ. Constantine
Rapporteur :	KOUACHI Saïd	Prof.	C.Univ. Khenchela
Examinateurs:	MARHOUNE Ahmed Lakhdar	Prof.	Univ. Constantine
	AYADI Abdelhamid	Prof.	Univ. Oum-Bouaghi
	BOUZIT Mohammed	M.C.	Univ. Oum-Bouaghi
	NOUAR Ahmed	M.C.	Univ. Skikda

<u>Soutenue le</u> :*…04 / 07 / 2010……..*

Je dédie ce travail à ma chère épouse,
à ma famille, à ma belle famille,
*à ma fille **Ibtissem***
*et à mon fils **Aimen**.*

REMERCIEMENTS

JE tiens à exprimer toute ma reconnaissance au professeur Saïd KOUACHI qui m'a guidé tout au long de cette thèse. Ce travail n'aurait jamais pu aboutir, si je n'avais pu profiter de ses précieux conseils et de ses compétences.

Un grand merci au professeur Saïd BENACHOUR qui m'a accueilli dans son laboratoire à l'institut de mathématiques Elie Cartan Nancy, France. Ses compétences et ses précieux conseils m'ont été plus que profitables pour mener à terme ce travail.

Je suis particulièrement flatté que le professeur Mohammed DENCHE ait accepté d'être le président du jury. Je le remercie sincèrement.

Un grand merci aussi au Pr Ahmad Lakhdar MARHOUNE, Pr Abdelhamid AYADI, Dr Mohammed BOUZIT et Dr Ahmed NOUAR pour avoir accepté de siéger dans mon jury de thèse.

Je remercie également tous les chercheurs rencontrés au cours de ma thèse et qui m'ont permis de progresser dans ma recherche et de m'intégrer dans la communauté scientifique.

j'adresse un merci particulier à mes parents, à mes beaux-parents, à mes frères, à mes soeurs et à mes belles-soeurs, pour les sacrifices dont ils ont fait pour moi, sans lesquels rien de tout cela ne serait arrivé.

Je remercie enfin et surtout celle avec qui j'ai la chance de partager ma vie. Elle a été pour moi un soutien constant. Merci à toi ma chère épouse.

REBIAI Belgacem

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Ce travail est une contribution à l'étude de l'existence globale et du comportement asymptotique des solutions des systèmes de réaction-diffusion du type suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = F(u) & \text{sur } (0,+\infty)\times\Omega, \\ u(0,.) = u_0(.) & \text{sur } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière $\partial\Omega$, $u(t,.)$ est une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, D est une matrice carrée d'ordre m définie positive et diagonalisable appelée matrice de diffusion et F est une fonction localement lipschitzienne de $\mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ appelée terme de réaction qui est le résultat de toutes les interactions entre les composantes de u. Par exemple, en chimie u est un vecteur de concentrations chimiques, F représente l'effet des réactions chimiques sur ces concentrations et le terme $D\Delta u$ représente les diffusions moléculaires à travers la frontière de réaction. On ajoutera une condition aux limites sur la frontière $\partial\Omega$ de manière à ce que le problème (1) soit bien posé. Il faut noter que durant ces dérnières décennies, l'interêt porté à l'étude de ce type de systèmes n'a cessé de croître et une abondante littérature a été développée sur ce sujet, notamment sur les problèmes d'existences locales, globales ou d'explosion en temps fini, de comportement asymptotique, etc.

Ce travail est organisé de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, nous commençons par rappeler brièvement quelques notions générales. Ensuite nous présentons certains résultats préliminaires qui nous seront utiles dans les chapitres ultérieures.

Le deuxième chapitre est consacré à la modélisation des réactions chimiques. Ceci conduit à des systèmes dits de réaction-diffusion. Nous commençons par rappeler certaines lois fondamentales de la physique (lois de conservations) et certaines lois de comportement (première loi de Fick et loi de Fourier). Nous arrivons à modéliser l'évolution des réactions chimiques sous forme de systèmes différentiels. Enfin, nous présenterons quelques modèles mathématiques de la dynamique de populations.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à l'étude de l'existence globale et du comportement asymptotique des solutions des systèmes de réaction-diffusion de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = f(u,v) \quad \text{sur } (0,+\infty)\times\Omega, \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = g(u,v) \quad \text{sur } (0,+\infty)\times\Omega, \tag{3}$$

pour lesquels deux hypothèses essentielles sont vérifiées, à savoir

- une hypothèse assurant que la positivité de la solution est préservée au cours du temps

$$\begin{cases} f(0,v) \geq 0, \;\; g(u,0) \geq 0 \;\text{ pour tout } u,v \geq 0, \\ u_0 \geq 0, \;\; v_0 \geq 0. \end{cases} \tag{4}$$

- une hypothèse de contrôle de masse sur f et g

$$f(u,v)+g(u,v)\leq M(t)(u+v)+N(t). \tag{5}$$

Ici, nous supposons que Ω est un ouvert borné de classe C^1de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$, f et g sont deux fonctions continûment différentiables de croissance exponentielle (ou plus rapide), a et b sont deux constantes strictement positives, M et N sont deux fonctions positives continues sur $[0,+\infty)$ et de façon classique pour définir (u,v) nous supposons que u et v vérifient des conditions initiales :

$$u(0,x)=u_0(x),\;\; v(0,x)=v_0(x),\;\; \text{sur}\;\; \Omega, \tag{6}$$

et de bonnes conditions sur le bord :

$$\lambda_1 u+(1-\lambda_1)\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0,\;\; \text{sur}\;\; (0,+\infty)\times\partial\Omega, \tag{7}$$

$$\lambda_2 v+(1-\lambda_2)\frac{\partial v}{\partial \nu} = 0,\;\; \text{sur}\;\; (0,+\infty)\times\partial\Omega, \tag{8}$$

avec $0\leq\lambda_i\leq 1$, $i=1,2$.

Pour justifier cette étude, remarquons tout d'abord que les deux hypothèses (4) et (5) assurent l'existence globale pour le système d'équations différentielles ordinaires associé :

$$\begin{cases} u'(t)=f(u,v) & \text{sur}\;\; (0,+\infty),\\ v'(t)=g(u,v) & \text{sur}\;\; (0,+\infty).\end{cases}$$

En effet, (4) et (5) impliquent immédiatement l'inégalité

$$\begin{aligned} 0\leq u(t)+v(t) \;&\leq\; u(0)+v(0)+\int_0^t M(s)\,(u(s)+v(s))\,ds\\ &\quad +\int_0^t N(s)ds,\end{aligned}$$

ce qui donne, d'après l'inégalité de Gronwall, l'inégalité

$$0\leq u(t)+v(t)\leq e^{\int_0^t M(s)ds}\,(u(0)+v(0))+\int_0^t N(s)e^{\int_s^t M(\xi)d\xi}ds,$$

ce qui assure l'existence globale de solutions (Remarque 1.2.1).

Rappelons que l'existence globale pour une équation différentielle ordinaire implique toujours l'existence globale pour l'équation de réaction-diffusion associée (c'est une application du principe du maximum), mais ce résultat est en général faux pour les systèmes (voir, par exemple, Proposition 1.2.1).

La conséquence principale des deux hypothèses (4) et (5) est, sous de bonnes conditions sur le bord, une estimation uniforme de la norme L^1 de la solution. Ces deux hypothèses fournissent ainsi un contrôle de la masse totale du système (2)-(3), ce qui justifie la terminologie de "*systèmes avec contrôle de masse*". Il n'est donc pas étonnant de retrouver ces deux hypothèses dans de nombreux modèles issus de la chimie, de la biologie, de l'écologie, etc., ce qui donne aussi un intérêt pratique à ce problème. Mais cette estimation L^1 uniforme est insuffisante pour obtenir l'existence globale de la solution.

Notons que dans le cas $a = b$, les deux hypothèses (4) et (5) impliquent l'existence globale de la solution. En effet, en sommant les deux équations (2) et (3) et grâce à (5), nous obtenons par le théorème de comparaison (Théorème 10.1 dans [52]) une inégalité de type Gronwall

$$\begin{aligned}\|u(t)+v(t)\|_\infty &\leq \|u_0+v_0\|_\infty + \int_0^t M(s)\,\|u(s)+v(s)\|_\infty ds \\ &\quad + \int_0^t N(s)ds,\end{aligned}$$

d'où

$$\|u(t)+v(t)\|_\infty \leq e^{\int_0^t M(s)ds}\,\|u_0+v_0\|_\infty + \int_0^t N(s)e^{\int_s^t M(\xi)d\xi}ds,$$

ce qui assure, grâce à (4), l'existence globale de solutions (Remarque 1.2.1).

Hormis ce cas particulier, l'étude de l'existence globale sous les hypothèses de positivité et de contrôle de masse est un problème plus difficile.

Pour aborder ce problème de nombreux travaux ont été effectués sur le système suivant proposé par R. H. Martin :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = -uv^\beta & \text{sur } (0,+\infty)\times\Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = +uv^\beta & \text{sur } (0,+\infty)\times\Omega, \end{cases}$$

où $\beta \geq 1$. Ce système a l'avantage de bien isoler la difficulté.

Remarquons tout d'abord, que la positivité de la solution et la structure de la première équation fournissent une estimation L^∞ sur u. Le problème de l'existence globale pour ce système se ramène donc à la recherche d'une estimation L^∞ sur v.

Le premier résultat d'existence globale pour ce système a été obtenu par Alikakos [2] dans le cas $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et $1 \leq \beta < (n+2)/2$.

L'existence globale dans le cas $\beta \geq 1$ quelconque a été prouvée tout d'abord par Masuda [24], lorsque

$$\begin{aligned} g(\xi,0) &= f(0,\eta) = 0, \\ g(\xi,\eta) &\leq \varphi(\xi)f(\xi,\eta), \\ g(\xi,\eta) &\leq \varphi(\xi)(\eta+\eta^\beta), \end{aligned}$$

où φ est une fonction croissante sur $[0,+\infty)$, et puis par S. L. Hollis, R. H. Martin et M. Pierre [21]. Ces derniers, ont traité ce problème ainsi que d'autres avec une structure triangulaire pour les termes de réaction. Ils ont démontré l'existence globale de solutions classiques sous une hypothèse de croissance polynomiale sur la fonction g.

La méthode de K. Masuda a été généralisé par la suite par A. Haraux et A. Youkana [18] qui ont traité les non-linéarités $f(\xi,\eta)$ et $g(\xi,\eta)$ vérifiant :

$$g(\xi,\eta) = f(\xi,\eta) \leq \xi e^{\alpha\eta^{\beta}}, \quad 0 < \beta < 1, \quad \alpha > 0.$$

En considérant le cas où $\beta = 1$, A. Barabanova [4] a réussi a obtenir l'existence globale de solutions classiques sous la condition :

$$\|u_0\|_{\infty} < \frac{8ab}{\alpha n(a-b)^2}.$$

Notons que dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^n$, $0 < b \leq a < \infty$ et lorsque

$$g(\xi,\eta) = f(\xi,\eta),$$

R. H. Martin et M. Pierre [39] (voir aussi M. A. Herrero *et al.* [20]) ont prouvé l'existence globale de solutions classiques pour toutes données initiales bornées et sans aucune condition de croissance sur la fonction g. Ces résultats sont basés sur une représentation explicite des solutions par la solution fondamentale de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^n$ et le Lemme 1.2.1 (voir aussi le Lemme 3.1 de [20] où le noyau de la chaleur est soigneusement analysé). Malheureusement, ce lemme n'est pas vrai pour un problème aux limites (voir Exemple 3.1.1).

Toutefois, le problème aux limites sur $(0,+\infty)\times\Omega$ a été considéré dans J. I. Kanel [22] lorsque $0 < b < a < \infty$. Il a prouvé que les solutions classiques du problème (2)-(3), (6)-(8) sont globales pour toutes données initiales bornées et sans aucune restriction sur la croissance de la fonction g mais avec une condition de structure entre f et g.

Dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^n$, M. A. Herrero, A. A. Lacey et J. J. L. Velazquez [20] ont étudié le cas où $0 < a < b < \infty$ et ont prouvé que le problème de Cauchy admet une solution classique globale pour toute donnée initiale positive et bornée dans le cas

$$g(\xi,\eta) = f(\xi,\eta) \leq C\varphi(\xi)e^{\alpha\eta},$$

pour certaines constantes $C > 0$, $\alpha > 0$ et toute fonction positive continue φ sur $[0,+\infty)$ telle que $\varphi(0) = 0$.
Notons que le but de certaines recherches est d'affaiblir les hypothèses sur la croissance de g et sur les données initiales. Par exemple, dans [43] M. Pierre a prouvé l'existence globale de solutions faibles pour les systèmes de réaction-diffusion préservant la positivité et le contrôle de la masse totale des solutions avec de bonnes conditions aux limites et avec des données initiales intégrables. Mais ces solutions ne sont que des solutions faibles et l'explosion dans L^{∞} peut se produire dans un temps fini.

Les références [39], [46] et [51] présentent un résumé des résultats disponibles en 2000.

Enfin, nous signalons que dans [44], M. Pierre présente dans un survey, un nouvel éclairage sur les systèmes de réaction-diffusion non-linéaires.

Notre première contribution dans ce travail est essentiellement consacré à l'étude de l'existence globale des solutions classiques du système (2)-(3) dans le cas d'une croissance exponentielle (ou plus rapide) sur les termes de réaction non-linaires f et g. A cette fin, nous supposons, en plus de l'hypothèse (4), les trois hypothèses supplémentaires suivantes :

- deux hypothèses sur la structure des termes non-linaires

$$\begin{aligned} f(\xi,\eta) &\leq 0, \\ g(\xi,\eta) &\leq \psi(\eta)f(\xi,\eta), \end{aligned}$$

  où ψ est une fonction positive continûment différentiable sur $[0,+\infty)$ telle qu'il existe une constante $\beta \geq 1$ telle que

$$\lim_{\eta\to+\infty} \eta^{\beta-1}\psi(\eta) = \ell,$$

  où ℓ est une constante positive.

- une hypothèse de croissance exponentielle sur g

$$g(\xi,\eta) \leq C\varphi(\xi)e^{\alpha\eta^{\beta}},$$

  pour certaines constantes $C > 0$ et $\alpha > 0$ où β est le même paramètre que celui utilisé ci-dessus et φ est une fonction positive continûment différentiable sur $[0,+\infty)$ telle que $\varphi(0) = 0$.

Dans le quatrième chapitre, nous étudions, à l'aide des régions invariantes, l'existence globale de solutions classiques de systèmes de réaction-diffusion à matrice de diffusion tridiagonale de la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a_{11}\Delta u - a_{12}\Delta v = f(u,v,w) & \text{sur } (0,+\infty)\times\Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - a_{21}\Delta u - a_{22}\Delta v - a_{23}\Delta w = g(u,v,w) & \text{sur } (0,+\infty)\times\Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial t} - a_{32}\Delta v - a_{11}\Delta w = h(u,v,w) & \text{sur } (0,+\infty)\times\Omega, \end{cases} \tag{9}$$

avec des conditions aux limites :

$$\begin{cases} \lambda u + (1-\lambda)\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \beta_1 & \text{sur } (0,+\infty)\times\partial\Omega, \\ \lambda v + (1-\lambda)\dfrac{\partial v}{\partial \nu} = \beta_2 & \text{sur } (0,+\infty)\times\partial\Omega, \\ \lambda w + (1-\lambda)\dfrac{\partial w}{\partial \nu} = \beta_3 & \text{sur } (0,+\infty)\times\partial\Omega, \end{cases} \tag{10}$$

et des données initiales :

$$u(0,x) = u_0(x),\ v(0,x) = v_0(x),\ w(0,x) = w_0(x) \ \text{ sur } \Omega, \tag{11}$$

Ici, Ω est un ouvert borné de classe C^1de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$, f, g et h sont des fonctions continûment différentiables de croissance polynomiale, a_{ij} $(i,j=1,2,3$ $(i,j)\neq(1,3),(3,1))$ sont des constantes strictement positives, $0\leq\lambda\leq 1$ et $\beta_i\in\mathbb{R}$ avec $\beta_i=0$ lorsque $\lambda=0$ ou $\lambda=1$, $i=1,2,3$.

Pour justifier cette étude, nous mentionnons que l'étude des systèmes fortement couplés qui ne sont pas triangulaires dans la partie de diffusion est relativement plus difficile. D'après l'explosion de solutions en temps fini mentionné dans le Théorème 1.2.2, on ne peut pas espérer l'existence globale de solutions classiques pour de tels systèmes non-triangulaires même si les données initiales sont régulières, les solutions sont positives et les termes de réaction non-linéaires sont négatifs. Cette structure assurait l'existence globale dans le cas diagonal (voir, par exemple, Théorème 1.2.2 et Proposition 1.2.2).

Pour contourner cette difficulté, Pozio et Tesei (voir [47] et [48]) ont utilisé des idées empruntées à la méthode des rectangles invariants de Chueh, Conley et Smoller (voir [8]) pour l'obtention d'estimations L^∞, cette technique nécessite deux conditions, d'abord une restriction de taille sur les coefficients extra-diagonaux, la seconde condition se concerne le champ $(f(u,v,w),g(u,v,w),h(u,v,w))$ qui doit pointer à l'intérieur du rectangle, de plus f, g et h doivent avoir même type de croissance à l'infini (donc de même ordre).

Nous mentionnons aussi que dans le cas de deux composantes, certains résultats ont été obtenus dans le cas d'un couplage triangulaire ($a_{12}=0$), par exemple, Kouachi et Youkana [34] ont généralisé la méthode de Haraux et Youkana [18] pour traiter les fonctions f et g satisfont

$$f\left(u,v\right)=-\lambda F\left(u,v\right),g\left(u,v\right)=+\mu F\left(u,v\right),F\left(u,v\right)\geq 0,$$

sous la condition

$$\lim_{s\to+\infty}\left[\frac{\ln\left(1+F\left(r,s\right)\right)}{s}\right]<\alpha^*,\text{ pour tout } r\geq 0,$$

avec

$$\alpha^*=\frac{2a_{11}a_{22}}{n\left(a_{11}-a_{22}\right)^2\left\|u_0\right\|_\infty}\min\left\{\frac{\lambda}{\mu},\frac{a_{11}-a_{22}}{a_{21}}\right\},$$

où les coefficients de diffusion a_{11}, a_{22} vérifient : $a_{11}>a_{22}>0$ et a_{21}, λ, μ sont des constantes strictement positives.

Dans le cas d'un couplage "*plein*", Kanel et Kirane [23] ont prouvé l'existence globale de solutions avec des conditions aux limites homogènes de Neumann et toutes données initiales positives et bornées lorsque

$$g(u,v)=-f(u,v)=uv^m,\ \ m>0\ \text{ est un entier impair},$$

sous les conditions

- $0 < a_{22} - a_{11} < a_{21}$,

- $0 < a_{12} \ll 1$,

- $|a_{22} - a_{11} + a_{12} - a_{21}| < \dfrac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 C_p}$,

où

$$\gamma_1 = \frac{a_{22} - a_{11} - \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2a_{12}} < -1$$

et C_p est la même constante utilisée dans le Théorème 1.2.5 (Théorème 1 dans [36]). Par la suite, ils ont amélioré leurs résultats dans [25] pour obtenir l'existence globale sous les restrictions suivantes :

- $a_{22} < a_{11} + a_{21}$,

- $a_{12} < \varepsilon_0 = \dfrac{a_{11}a_{22}(a_{11} + a_{21} - a_{22})}{a_{11}a_{22} + a_{21}(a_{11} + a_{21} - a_{22})}$ si $a_{11} \leq a_{22} < a_{11} + a_{21}$,

- $a_{12} < \min\left\{\dfrac{1}{2}(a_{11} + a_{21}), \varepsilon_0\right\}$ si $a_{22} < a_{11}$,

et

- $|F(v)| \leq C_F(1 + |v|^{1-\varepsilon}), \quad vF(v) \geq 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}$,

où ε et C_F sont des constantes positives avec $\varepsilon < 1$ et

$$g(u,v) = -f(u,v) = uF(v).$$

Dans la même direction, Kouachi [32] a réussi a construire des régions invariantes, dans lesquelles il est possible d'établir l'existence globale de solutions pour les systèmes de réaction-diffusion à matrice pleine 2×2 avec des conditions aux limites non homogènes et des données initiales dans ces régions sous une croissance polynomiale sur les termes de réaction.

Notre seconde contribution dans ce travail est d'essayer d'étendre les résultats connus dans le cas diagonal à la situation tridiagonale sans aucune hypothèse supplémentaire sur les coefficients de diffusion (ou le moins possible) au moins dans le cas d'une croissance polynomiale sur les termes non-linaires. Pour cela, nous construisons des régions invariantes où nous montrons que pour toute donnée initiale dans l'une de ces régions, le problème (4.1)-(4.5) est équivalent à un problème dont l'existence globale résulte par une technique usuelle basée sur la fonctionnelle de Lyapunov (voir, par exemple, Kirane et Kouachi [27], Kouachi et Youkana [34] et Kouachi [29], [32]).

Nous terminons ce travail par une conclusion où nous mentionnons quelques problèmes restant ouverts.

CHAPITRE 1

NOTIONS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

L'OBJECTIF de ce chapitre est de rappeler quelques notions et résultats préliminaires qui nous seront utiles dans les chapitres ultérieures. Nous commençons par rappeler brièvement quelques notions générales. Puis nous présentons un résultat d'existence locale de solutions classiques positives pour les systèmes d'équations de réaction-diffusion, ainsi qu'une caractérisation du temps maximal d'existence de la laquelle nous déduisons un critère d'existence globale. Ensuite, nous présentons quelques résulats des explosions en temps fini. Et enfin, nous présentons les techniques utilisées dans cette étude et certaines estimations sur les solutions.

1.1 Notations et notions générales

1.1.1 Opérateurs différentiels

Soit n un entier, on note $x = (x_1,...,x_n)$ un point (ou vecteur) de $\mathbb{R}^n$.

On appelle champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ une application $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, qui à $x = (x_1,...,x_n)$ associe $v(x) = (v_1(x),...,v_n(x))$.

Pour une fonction $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, son gradient est le champ de vecteurs défini par $\mathrm{grad}u(x) = \nabla u(x) = (\dfrac{\partial u}{\partial x_1}(x),...,\dfrac{\partial u}{\partial x_n}(x))$.

Pour un champ de vecteurs $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ on appelle divergence de v la fonction définie par $\mathrm{div}v(x) = \dfrac{\partial v}{\partial x_1}(x) + ... + \dfrac{\partial v}{\partial x_n}(x)$.

On appelle Laplacien d'une fonction $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\Delta u(x) = \mathrm{div}(\nabla u)(x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + ... + \dfrac{\partial^2 v}{\partial x_n^2}(x)$.

Soit Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ régulière. On appelle normale à $\partial\Omega$ un champ de vecteurs $\nu(x)$ défini sur le bord $\partial\Omega$ tel qu'en tout point $x \in \partial\Omega$, $\nu(x)$ soit orthogonal au bord et unitaire.

On appelle normale extérieure une normale qui pointe vers l'extérieur du domaine en tout point.

On appelle dérivée normale d'une fonction régulière u sur le bord $\partial\Omega$ la fonction définie sur les points de $\partial\Omega$ par $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \nabla u(x) \cdot \nu(x)$ (produit scalaire du vecteur $\nabla u(x)$ avec le vecteur $\nu(x)$).

1.1.2 Espaces fonctionnels

On désigne par $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ l'espace de fonctions (ou plus exactement des classes d'équivalence de fonctions, au sens de l'égalité presque partout) u mesurables sur Ω telles que

$$\int_\Omega |u|^p \, dx < \infty,$$

muni de la norme

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |u|^p \, dx.$$

On désigne par $L^\infty(\Omega)$ l'espace de fonctions u mesurables et vérifient

$$|u| \leq C \quad \text{p.p (presque partout) sur } \Omega,$$

où C est une constante positive. $L^\infty(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} \text{ess} \, |u(x)| = \inf\{C, |u| \ \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

On définit les espaces $L^p(0,T,\mathbb{X})$, $1 \leq p < \infty$ et $L^\infty(0,T,\mathbb{X})$ comme suit :

$$L^p(0,T,\mathbb{X}) = \left\{ u : [0,T] \to \mathbb{X} \ \text{ mesurable }, \ \int_0^T \|u\|^p_{\mathbb{X}} \, dt < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|^p_{L^p(0,T,\mathbb{X})} = \int_0^T \|u\|^p_{\mathbb{X}} \, dt.$$

$$L^\infty(0,T,\mathbb{X}) = \left\{ u : [0,T] \to \mathbb{X} \ \text{ mesurable }, \ \sup_{t\in(0,T)} \text{ess} \, \|u\|_{\mathbb{X}} < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(0,T,\mathbb{X})} = \sup_{t\in(0,T)} \text{ess} \, \|u\|_{\mathbb{X}}.$$

Naturellement on a : $L^p(0,T,L^p(\Omega)) = L^p((0,T)\times\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$.

$C(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues et bornées sur Ω muni de la norme

$$\|u\|_{C(\Omega)} = \max_{x\in\Omega} |u(x)|.$$

$C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ désigne l'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω et on écrit

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\geq 0} C^k(\Omega).$$

$H^1(\Omega)$ c'est l'espace de **Sobolev** défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \le i \le n \right\}$$

muni de la norme

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{H^1(\Omega)} &= \int_\Omega |u|^2 \, dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \\ &= \int_\Omega |u|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx. \end{aligned}$$

D'une façon générale pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $1 \le p < \infty$, les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ et $W^{m,p}(\Omega)$ sont définis comme suit :

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \ D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ vérifiant } |\alpha| \le m \right\},$$

muni de la norme

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{H^m(\Omega)} &= \sum_{|\alpha| \le m} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 \, dx \\ &= \sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} , \end{aligned}$$

$$W^{m,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) : \ D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \le m \},$$

muni de la norme

$$\|u\|^p_{m,p} = \sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)},$$

où $D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i$ est la dérivée au sens des distributions.

Naturellement on a : $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ et $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

1.1.3 Formule de Green

Soit Ω un ouvert borné de frontière régulière $\partial\Omega$ et $\nu(x)$ la normale extérieure au point x. Soient u une fonction de $H^2(\Omega)$ *et* v une fonction de $H^1(\Omega)$. Alors la *formule de Green* s'écrit :

$$\int_\Omega (\Delta u) \, v dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\sigma - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

1.1.4 Inégalité de Hölder

Soient $1 < p, q < \infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient u une fonction de $L^p(\Omega)$ *et* v une fonction de $L^q(\Omega)$. Alors *l'inégalité de Hölder* s'écrit :

$$\int_\Omega |uv| \, dx \le \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |v|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

1.1.5 Inégalité de Gronwall

Soient u, v, w des fonctions continues sur un intervalle $[t_0, t_1]$ de $\mathbb{R}$ *et* C une constante réelle. Supposons que u soit positive sur $[t_0, t_1]$ et que :

$$w(t) \leq C + \int_{t_0}^{t} [u(s)w(s) + v(s)]\, ds,$$

pour tout $t \in [t_0, t_1]$.
Alors, on ait :

$$w(t) \leq Ce^{\int_{t_0}^{t} u(s)ds} + \int_{t_0}^{t} v(s) e^{\int_{s}^{t} u(\tau)d\tau} ds,$$

pour tout $t \in [t_0, t_1]$ (voir, par exemple, [19]).

1.1.6 Inégalité de Poincaré-Wirtinger

Soit Ω un ouvert connexe et borné de classe C^1 et soit $1 \leq p \leq \infty$. Alors il existe une constante C telle que pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on ait

$$\|u - \overline{u}\|_p \leq C \|\nabla u\|_p,$$

où $\overline{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x)dx$ (voir [7]).

1.1.7 Formes quadratiques

Définition 1.1.1. *Une forme quadratique est un polynôme homogène du second degré.*

Une forme quadratique par rapport aux n variables $u_1, u_2, ..., u_n$, peut être représentée par

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j,$$

où

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

est une matrice symétrique.

Si nous désignons la matrice-colonne $(u_1, u_2, ..., u_n)$ par u et la forme quadratique $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j$ par $A(u,u)$, nous pouvons écrire

$$A(u,u) = u^T A u = Au \cdot u.$$

Définition 1.1.2. *Une forme quadratique $A(u,u)$ est dite définie positive si*

$$A(u,u) > 0,\ \forall u \in \mathbb{R}^n,\ u \neq 0.$$

Théorème 1.1.1. *Une forme quadratique $A(u,u)$ est définie positive si, et seulement si, tous les déterminants principaux successifs de sa matrice des coefficients sont positifs.*

Voir F. R. Gantmacher [16] pour une démonstration de ce théorème.

1.2 Systèmes de réaction-diffusion

1.2.1 Existence locale et positivité des solutions

Soit Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ régulière. Nous considérons le système d'équations de réaction-diffusion suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = f(u,v) \qquad \text{sur } (0,+\infty)\times\Omega, \tag{1.1}$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = g(u,v) \qquad \text{sur } (0,+\infty)\times\Omega, \tag{1.2}$$
$$u(0,x) = u_0(x),\ \ v(0,x) = v_0(x) \quad \text{sur } \Omega, \tag{1.3}$$
$$\lambda_1 u + (1-\lambda_1)\frac{\partial u}{\partial \nu} = \beta_1 \qquad \text{sur } (0,+\infty)\times\partial\Omega, \tag{1.4}$$
$$\lambda_2 v + (1-\lambda_2)\frac{\partial v}{\partial \nu} = \beta_2 \qquad \text{sur } (0,+\infty)\times\partial\Omega, \tag{1.5}$$

où les hypothèses suivantes sont supposées vérifiées :

(H1) a, b, λ_i, β_i, $i = 1,2$, sont des constantes avec $a,b > 0$, $\beta_i \geq 0$ et soit $0 < \lambda_i < 1$, $\lambda_i = 1$ ou $\lambda_i = 0$. Aussi $\beta_i = 0$ si $\lambda_i = 0$.

(H2) f et g sont deux fonctions continûment différentiables de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec $f(0,\eta), g(\xi,0) \geq 0$ pour tout $\xi,\eta \geq 0$.

(H3) $(u_0,v_0) \in (L^\infty(\Omega))^2$ avec $u_0(x), v_0(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$.

Théorème 1.2.1. *Sous les hypothèses (H1)-(H3), le système (1.1)-(1.5) admet une unique solution locale et classique (u,v) sur $[0,T_{\max})\times\Omega$, et il existe deux fonctions $N_1, N_2 : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ continues telles que*

$$0 \leq u(t,x) \leq N_1(t) \ \text{ et } \ 0 \leq v(t,x) \leq N_2(t) \ \text{ pour tout } (t,x) \in [0,T_{\max})\times\Omega.$$

De plus le temps maximal d'existence $T_{\max}$ est caractérisé par :

$$\text{si } \ T_{\max} < +\infty, \ \text{ alors } \quad \lim_{t\uparrow T_{\max}} \left(\|u(t)\|_\infty + \|v(t)\|_\infty\right) = +\infty. \tag{1.6}$$

Voir Hollis, Martin et Pierre [21] pour une démonstration de ce théorème.

Remarque 1.2.1. *Pour étudier l'existence globale de la solution du système (1.1)-(1.5), c'est-à-dire déterminer si $T_{\max} = +\infty$, nous utilisons la contraposée de la caractérisation (1.6) du temps maximal d'existence :*

$$\begin{cases} \text{s'il existe une fonction } \ M : [0,+\infty) \to [0,+\infty) \ \text{ continue telle que} \\ \qquad \|u(t)\|_\infty + \|v(t)\|_\infty \leq M(t) \ \text{ pour tout } \ t \in [0,T_{\max}), \\ \text{alors} \qquad T_{\max} = +\infty. \end{cases} \tag{1.7}$$

c'est-à-dire, si les fonctions $u(t)$ et $v(t)$ sont bornées pour tout $t \in [0,T]$, $T < T_{\max}$, alors $T_{\max} = +\infty$.

Par conséquent, pour montrer l'existence globale de solutions classiques, il suffit de montrer que celles-ci restent uniformément bornées sur leur temps d'existence.

1.2.2 Exemples d'explosion en temps fini

Proposition 1.2.1. *Soit B la boule unité dans $\mathbb{R}^n$. Soit le système de réaction-diffusion*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u + 2an & sur\ (-1,+\infty)\times B, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + 2(n-t)^+ v^2 - 8\,|1-u|\,v^3 & sur\ (-1,+\infty)\times B, \\ u = 0,\ v = (1+t^2)^{-1} & t > -1,\ x \in \partial B, \end{cases} \tag{1.8}$$

où r^+ est définie par

$$r^+ = \begin{cases} r & si\ \ r \geq 0, \\ 0 & si\ \ r < 0. \end{cases}$$

Le systme différentiel ordinaire associé est

$$\begin{cases} y_1' = 2an & t \geq 0, \\ y_2' = 2(n-t)^+ y_2^2 - 8\,|1-y_1|\,y_2^3 & t \geq 0, \\ y_1(-1) = \xi_1,\ y_2(-1) = \xi_2. \end{cases} \tag{1.9}$$

Alors, si $a > \dfrac{(n+1)^2}{4n}$, la solution de (1.9) existe sur $[-1,\infty)$, $\forall \xi_1, \xi_2 \geq 0$. De plus

$$u(r,t) = 1 - r^2,\ v(r,t) = (t^2+r^2)^{-1}$$

est une solution positive de (1.8) sur $(-1,\infty)\times\overline{\Omega}$ qui explose dans $L^\infty(\Omega)$ quand $t \to 0$.

Cette proposition est démontrée dans R. H. Martin et M. Pierre [39].

Remarque 1.2.2. *la proposition ci-dessus montre que l'existence globale pour un système d'équations différentielles ordinaires n'implique pas l'existence globale pour le système de réaction-diffusion associé.*

Théorème 1.2.2. *Soit B la boule unité dans $\mathbb{R}^n$. Il existe $f, g \in C^\infty\left([0,+\infty)^2;\mathbb{R}\right), T > 0, d_1 > 0, d_2 > 0,\ \alpha_1, \alpha_2 \in C^\infty([0,T]),\ u_0, v_0 \in C^\infty(\overline{B})$, $u_0 \geq 0$, $v_0 \geq 0$, $\lambda \in (0,1)$ et (u,v) solution classique et positive de*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - d_1\Delta u = f(u,v) & sur\ (0,T)\times B, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - d_2\Delta v = g(u,v) & sur\ (0,T)\times B, \\ u(t,x) = \alpha_1(t),\ v(t,x) = \alpha_2(t) & sur\ (0,T)\times\partial B, \\ u(0,x) = u_0(x),\ v(0,x) = v_0(x) & pour\ x \in B, \end{cases}$$

tels que

$$\begin{cases} f + g \leq 0, \\ f + \lambda g \leq 0, \end{cases}$$

$$f(0,v) \geq 0,\ g(u,0) \geq 0, \forall u_0, v_0 \geq 0,$$

$$\begin{cases} il\ existe\ K > 0, \sigma \geq 1\ tel\ que \\ |f(u,v)| + |g(u,v)| \leq K\left(u^\sigma + v^\sigma + 1\right), \end{cases}$$

$$\lim_{t\nearrow T} \|u(t)\|_\infty = \lim_{t\nearrow T} \|v(t)\|_\infty = +\infty\,.$$

Ce théorème est démontré dans M. Pierre et D. Schmitt [45].

Proposition 1.2.2. *Soit B la boule unité dans $\mathbb{R}^n$. Il existe $f,g \in C^\infty\left([0,+\infty)^2;\mathbb{R}\right), 0 < T < +\infty$, une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients réels, dont les valeurs propres sont positives, $\alpha_1, \alpha_2 \in C^\infty([0,T])$, $u_0, v_0 \in C^\infty\left(\overline{B}\right)$, $u_0 \geq 0$, $v_0 \geq 0$ et (u,v) solution classique et positive de*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u - b\Delta v = f(u,v) & \text{sur } (0,T)\times B, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - c\Delta u - d\Delta v = g(u,v) & \text{sur } (0,T)\times B, \\ u(t,x) = \alpha_1(t),\ v(t,x) = \alpha_2(t) & \text{sur } (0,T)\times \partial B, \\ u(0,x) = u_0(x),\ v(0,x) = v_0(x) & \text{pour } x \in B, \end{cases}$$

tels que

$$\begin{cases} f \leq 0, \\ g \leq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{il existe } K > 0, \sigma \geq 1 \text{ tel que} \\ |f(u,v)| + |g(u,v)| \leq K\left(u^\sigma + v^\sigma + 1\right), \end{cases}$$

$$\lim_{t \nearrow T} \|u(t)\|_\infty = \lim_{t \nearrow T} \|v(t)\|_\infty = +\infty.$$

Cette proposition est démontrée, à l'aide du théorème ci-dessus, dans N. Boudiba [5].

1.2.3 Systèmes de réaction-diffusion triangulaire

Définition 1.2.1. *Nous dirons que le système (1.1)-(1.5) est un système avec contrôle de masse, s'il existe une constante strictement positive α et deux fonctions $M,N : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ continues telles que*

$$\alpha f(u,v) + g(u,v) \leq M(t)(u+v) + N(t). \tag{1.10}$$

Définition 1.2.2. *Nous dirons que le système (1.1)-(1.5) est un système triangulaire, s'il existe une constante strictement positive α et deux fonctions M,N : $[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ continues telles que*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(u,v) \\ g(u,v) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} M(t) & N(t) \\ M(t) & N(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u+v \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

Proposition 1.2.3. *Supposons que le système (1.1)-(1.5) vérifie les hypothèses (H1)-(H3) et l'hypothèse de contrôle de masse (1.10). soit (u,v) une solution classique de (1.1)-(1.5). Alors il existe une fonction $C : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ croissante telle que*

$$\|\alpha u(t) + v(t)\|_1 \leq C(t)\left(\|\alpha u_0 + v_0\|_1 + 1\right) \ \text{pour tout } \ t \in [0,T_{\max}).$$

Preuve. Nous multiplions l'équation (1.1) par α , nous l'ajoutons à l'équation (1.2) et nous intégrons sur Ω en utilisant l'hypothèse (1.10), nous obtenons une inégalité de type Gronwall

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}(\alpha u+v)(t,x)dx \leq M(t)\int_{\Omega}(u+v)(t,x)dx+|\Omega|N(t),$$

en utilisant la positivité des solutions nous obtenons

$$\|\alpha u(t)+v(t)\|_1 \leq e^{\int_0^t M(s)ds}\|\alpha u_0+v_0\|_1+|\Omega|\int_0^t N(s)e^{\int_s^t M(\xi)d\xi}ds,$$

et de cette inégalité nous déduisons le résultat annoncé. □

1.2.4 Fonctionnelle de Lyapunov

Définition 1.2.3. *On appelle fonctionnelle de Lyapunov associée au système (1), toute fonction*

$$L:[0,+\infty)\to[0,+\infty),$$

telle que

$$\frac{d}{dt}L(u(t,.))\leq 0,$$

pour tout $t>0$ et toute solution $u(t,.)=(u_1(t,.),u_2(t,.),...u_m(t,.))$ du système (1).

1.2.5 Régions invariantes

Définition 1.2.4. *Un sous-ensemble fermé $\Sigma\subset\mathbb{R}^m$ est appelé une région invariante pour le système défini par (1) si, toute solution $u(t,x)$ ayant ses valeurs initiales dans Σ, reste dans Σ pour tout $(t,x)\in[0,T_{\max})\times\Omega$.*

Théorème 1.2.3. *On suppose que Σ est une région de $\mathbb{R}^m$ définie par*

$$\Sigma=\bigcap_{i=1}^{k}\{u:G_i(u)\leq 0\},$$

où les G_i désignent des fonctions définies sur $\mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, deux fois continûment dérivables telles que le gradient ∇G_i ne s'annule pas. Alors on a les propriétés suivantes :
(i) On suppose que pour tout $v\in\partial\Sigma$, $\nabla G_i(v)$ est vecteur propre de la matrice D et que si la valeur propre correspondante n'est pas nulle, la fonction $\Delta G_i(v)$ est positive. On suppose d'autre part que

$$\nabla G_i(v)\cdot F(v)<0,\ \textit{pour tout } v\in\partial\Sigma. \tag{1.12}$$

Alors Σ est une région invariante pour le système (1).
(ii) Inversement si Σ est une région invariante pour le système (1), alors pour tout $v\in\partial\Sigma$, $\nabla G_i(v)$ est vecteur propre de la matrice D, la fonction $\Delta G_i(v)$ est positive dès que la valeur propre correspondante à $\nabla G_i(v)$ n'est pas nulle et on a

$$\nabla G_i(v)\cdot F(v)\leq 0.$$

Ce théorème est démontré dans E. Conway, D. Hoff et J. Smoller [9] (voir aussi J. Smoller [52])

Remarque 1.2.3. *Le théorème ci-dessus donne des conditions presque nécessaire et suffisantes (remplacer $<$ par $\leq$) et il indique que lorsque D est diagonale, les seules régions invariantes sont les rectangles.*

Corollaire 1.2.1. *On suppose que la matrice D est diagonale. Alors, toute région de la forme*

$$\Sigma = \bigcap_{i=1}^{m} \{u : a_i \leq u_i \leq b_i\},$$

est invariante dès que la fonction F pointe à l'intérieur de Σ sur $\partial\Sigma$, i.e., dès que la fonction F satisfait la condition (1.12).

Corollaire 1.2.2. *On suppose que la matrice D est diagonale. Alors, toute région de la forme*

$$\Sigma = \bigcap_{i=1}^{m} \{u : u_i \geq 0\},$$

est invariante dès que la fonction F satisfait

$$\begin{cases} f_i(u_1, u_2, ..., u_{i-1}, 0, u_{i+1}, ..., u_m) \geq 0, \\ \quad \text{pour tout } u_j \geq 0, \ \ i, j = 1, 2, ..., m \ (i \neq j). \end{cases}$$

1.2.6 Semi-groupes et effets régularisants

Soit $\mathbb{X}$ un espace de Banach et $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ une famille d'opérateurs bornés dans $\mathbb{X}$. Soit Σ un secteur défini par

$$\Sigma = \{z \in \mathbb{C} : \ Re z > 0 \ \text{ et } \ \varphi_1 < \arg z < \varphi_2, \ \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}.$$

Définition 1.2.5. *On dit que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur $\mathbb{X}$ (en abrégé semi-groupe sur $\mathbb{X}$) si les conditions suivantes sont satisfaites*
(i) $S(0) = I$,
(ii) $S(t)S(s) = S(t+s)$, *pour tout* $t, s \geq 0$,
(iii) $\lim_{t\to 0^+} S(t)u = u$, *pour tout* $u \in \mathbb{X}$.

Définition 1.2.6. *On dit que $A : D(A) \subset \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ est un générateur infinitésimal du semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, si*

$$D(A) = \left\{ u \in \mathbb{X} : \lim_{t\to 0^+} \tfrac{S(t)u-u}{t} \text{ existe} \right\},$$
$$Au = \lim_{t\to 0^+} \tfrac{S(t)u-u}{t}, \quad \text{pour tout } \ u \in D(A).$$

Définition 1.2.7. *On dit que $\{S(t)\}_{z\in\Sigma}$ est un semi-groupe analytique sur $\mathbb{X}$ si les conditions suivantes sont satisfaites*
(i) $S(0) = I$,
(ii) $S(z_1)S(z_2) = S(z_1 + z_2)$, *pour tout* $z_1, z_2 \in \Sigma$,
(iii) $\lim_{z\to 0} S(z)u = u$, *pour tout* $u \in \mathbb{X}$,
(iv) *l'application* $z \longmapsto S(z)$ *est analytique sur* Σ.

Proposition 1.2.4. *Soient $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe et A son générateur infinitésimal. On a les propriétés suivantes :*

(i) *Pour $u \in D(A)$, on a*

$$S(t)u \in D(A) \;\; et \;\; \frac{d}{dt}S(t)u = AS(t)u = S(t)Au, \; \forall t > 0.$$

(ii) *Pour $u \in \mathbb{X}$, on a*

$$\int_0^t S(\tau)ud\tau \in D(A) \;\; et \;\; A\int_0^t S(\tau)ud\tau = S(t)u - u.$$

Cette proposition est démontrée dans A. Pazy [42].

Théorème 1.2.4. *Soient $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe et $p,q \in [1,+\infty]$ avec $p \leq q$. Alors pour tout $w \in L^p(\Omega)$ et pour tout $t > 0$, il existe $C > 0$ tel que*

$$\|S(t)w\|_q \leq Ct^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|w\|_p .$$

Pour la démonstration de ce théorème, voir par exemple F. Rothe [50].

Proposition 1.2.5. *Soit w une solution classique du problème de Cauchy abstrait (i.e à valeurs dans un espace de Banach)*

$$\begin{cases} w(t) - d\Delta w(t) = \theta(t) & t \in (0,T), \\ w(0) = w_0, \end{cases}$$

où $d > 0$. Alors w vérifie

$$w(t) = S(t)w_0 + \int_0^t S(t-s)\theta(s)ds,$$

où $S(t)$ est le semi-groupe engendré par $d\triangle$.

Preuve. Posons $\varphi(s) = S(t-s)w(s)$ et dérivons φ par rapport à s, on obtient

$$\begin{aligned} \varphi'(s) &= -d\Delta S(t-s)w(s) + S(t-s)w'(s) \\ &= -d\Delta S(t-s)w(s) + S(t-s)(d\Delta w(s) + \theta(s)) \\ &= S(t-s)\theta(s). \end{aligned}$$

Alors

$$\varphi(t) - \varphi(0) = \int_0^t S(t-s)\theta(s)ds,$$

ce qui nous donne

$$w(t) = S(t)w_0 + \int_0^t S(t-s)\theta(s)ds.$$

□

Proposition 1.2.6. *Soit w une solution classique de*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - d\Delta w = \theta & sur\ Q_T = \Omega \times (0,T) \\ w = 0 & sur\ (0,T) \times \partial\Omega, \\ w(0,x) = 0 & sur\ \Omega, \end{cases}$$

où $d > 0$ *et* $\theta \in L^p(Q_T), 1 < p < \infty$.

Alors pour tout $p > \frac{n+2}{2}$, *il existe* $C = C(T, p, \Omega) > 0$ *tel que*

$$\|w(t)\|_\infty \leq C \|\theta\|_{L^p(Q_T)}.$$

Preuve. Nous avons

$$w(t) = \int_0^t S(t-s)\theta(s)ds,$$

où $S(t)$ est le semi-groupe engendré par $d\triangle$.
En utilisant les effets régularisants du semi-groupe $S(t)$, mentionnés dans le théorème ci-dessus, pour $q = \infty$, nous obtenons

$$\|w(t)\|_\infty \leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2p}} \|\theta(s)\|_p \, ds,$$

En majorant l'intégrale par l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|w(t)\|_\infty &\leq C \left(\int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2(p-1)}} ds \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_0^t \|\theta(s)\|_p^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \left(\int_0^T (t-s)^{-\frac{n}{2(p-1)}} ds \right)^{\frac{p-1}{p}} \|\theta\|_{L^p(Q_T)}. \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale est convergente pour $p > \frac{n+2}{2}$, ce qui achève la preuve de la proposition. □

Théorème 1.2.5. *Soit* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un semi-groupe analytique borné sur* $L^2(\Omega)$ *tel que*

$$\|S(t)w\|_p \leq \|w\|_p \quad pour\ t \geq 0,\ p \in [1, +\infty]\ et\ w \in L^p(\Omega) \cap L^2(\Omega),$$

et A son générateur infinitésimal. On associe à A le problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} - Au = f & sur\ (0,T), \\ u(0) = 0, \end{cases} \tag{1.13}$$

où $f \in L^p([0,T] \times \Omega)$, $p \in (1, +\infty)$. *Alors le problème (1.13) admet une solution u continue sur* $[0,T]$, *à valeurs dans* $L^p(\Omega)$, *telle que les fonctions* $\dfrac{du}{dt}$ *et Au (définies presque partout sur* $[0,T]$*) appartiennent à* $L^p([0,T] \times \Omega)$ *et il existe une constante* C_p *(indépendante de T et de f) telle que*

$$\left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^p([0,T]\times\Omega)} + \|Au\|_{L^p([0,T]\times\Omega)} \leq C_p \|f\|_{L^p([0,T]\times\Omega)}.$$

Pour la démonstration de ce théorème, voir Lamberton [36].

Lemme 1.2.1. *Pour $\lambda > 0$, soit w_λ la solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_\lambda}{\partial t} - \lambda \Delta w_\lambda = f & \textit{sur} \ \ (0,+\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ w_\lambda(0,.) = 0 & \textit{sur} \ \ \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

où f ($f \neq 0$) est une fonction régulière positive sur $(0,+\infty)\times\mathbb{R}^n$. Alors

$$\lambda \longmapsto \lambda^{n/2} w_\lambda(t,x) \quad \textit{est croissante pour tout} \ \ (t,x).$$

Voir R. H. Martin et M. Pierre [39] pour une démonstration de ce lemme.

CHAPITRE 2

APPLICATIONS DES SYSTÈMES DE RÉACTION-DIFFUSION

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présenterons quelques applications des systèmes de réaction-diffusion du type suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = F(u) & \text{sur } (0,+\infty)\times\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière $\partial\Omega$, $u(t,.)$ est une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, D est une matrice carrée d'ordre m définie positive et diagonalisable appelée matrice de diffusion et F est une fonction régulière (au moins localement lipschitzienne) de $\mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ appelée terme de réaction qui est le résultat de toutes les interactions entre les composantes de u. Ces systèmes apparaissent naturellement dans de nombreuses situations. Par exemple, en chimie u est un vecteur de concentrations chimiques. En dynamique des populations, u est un vecteur de densités de populations humaines, animales ou végétales. On ajoutera une condition aux limites sur la frontière $\partial\Omega$ de manière ce que le problème soit bien posé. Nous commençons par rappeler certaines lois fondamentales de la physique (lois de conservations) et certaines lois de comportement (loi de Fick et loi de Fourier). La quantité cléf de la modélisation ici est celle de la vitesse des réactions, en plus des lois fondamentales de la physique. Nous arrivons à modéliser l'évolution des réactions chimiques sous forme de systèmes différentiels. C'est en tenant compte de la dépendance des concentrations de la variable espace que nous obtenons des systèmes de réaction-diffusion. Enfin, nous présentons quelques modèles mathématiques de la dynamique de populations.

2.2 Quelques principes généraux en modélisation des milieux continus

On désigne par *milieu continu* tout liquide, gaz ou solide déformable considéré d'un point de vue *macroscopique*. On peut l'assimiler à un système de particules dont l'évolution ou l'équilibre peut-être décrit à l'aide des lois universelles de la physique, à savoir : la loi de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et du moment de cette quantité de mouvement par rapport à un point et de l'énergie.

Toutes les équations de la physique et des sciences voisines sont obtenues d'une part à partir de ces lois fondamentales, d'autre part à partir des lois de comportements qui sont spécifiques au milieu considéré. Ces lois de comportements ont généralement un caractère empirique et des domaines de validité plus ou moins limités. La dérivation de ces lois de comportement est un sujet difficile ; il est indispensable de s'appuyer sur les connaissances et l'expérience des experts du domaine d'application envisagé.

2.2.1 Loi de conservation de la masse

Elle s'appliquent à tout système matériel, indépendamment de sa nature : liquide, gazeuse ou autre.
Rappelons qu'un milieu continu est intuitivement un "système de particules" en mouvement. On le modélise à chaque instant par l'ensemble des points d'un ouvert $\Omega(t)$ de $\mathbb{R}^3$. On imagine que chaque point est une particule qui se déplace et que l'ensemble des particules occupe le domaine $\Omega(t)$ à l'instant t. On suppose, de plus, l'existence d'une famille de bijections $S(s,t)_{s,t\geq 0}$ de $\Omega(s)$ dans $\Omega(t)$ dépendant régulièrement de $s,t \geq 0$ et permettant de suivre chacun des points du domaine initial dans sa trajectoire au cours du temps, soit

$$w_0 \mapsto S(0,t)w_0 = w(t,w_0),$$

où w_0 est un sous-ensemble mesurable quelconque de $\Omega(0)$.

On associe à ce milieu les quantités suivantes :

- $\overrightarrow{V}(t,w_0)$ la vitesse *Lagrangienne* définie par

$$\overrightarrow{V}(t,w_0) = \frac{\partial}{\partial t} w(t,w_0),$$

- $\overrightarrow{v}(t,w_0) = \overrightarrow{v}(t,w(t))$ la vitesse *Eulérienne*.
- $\rho(t,x) =$ la densité du milieu à l'instant t, c'est-à-dire la masse par unité de volume dans $\Omega(t)$, ainsi la masse $m(w)$ de tout sous-ensemble mesurable w de $\Omega(t)$ est donnée par

$$m(w) = \int_w \rho(t,x)dx.$$

Afin de traduire mathématiquement les lois de conservation, nous utiliserons le lemme suivant qui permet d'exprimer la dérivée par rapport au temps d'une intégrale du type

$$K(t) = \int_{w(t)} k(t,x)dx, \tag{2.1}$$

où $k(.,.)$ est une fonction définie sur $\Omega(t)$. Cette dérivée est parfois appelée *dérivée particulaire* par référence au fait qu'on dérive selon les trajectoires des particules.

Lemme 2.2.1. *Sous les hypothèses de régularité, la dérivée par rapport au temps de l'intégrale (2.1) est donnée par*

$$K'(t) = \int_{w(t)} (\frac{\partial k}{\partial t} + \mathrm{div}(k\overrightarrow{v}))dx,$$

ou encore

$$K'(t) = \int_{w(t)} \frac{\partial k}{\partial t} dx + \int_{\partial w(t)} k\overrightarrow{v}\overrightarrow{\nu} d\sigma,$$

où $\overrightarrow{\nu}$ est la normale extérieur unitaire à $\partial w(t)$.

Pour une démonstration de ce lemme, voir par exemple [14].

La loi de conservation de la masse exprime l'invariance par rapport au temps t de la masse de tout sous-système matériel $(w(t) = S(0,t)w_0)$ que l'on suit au cours du temps. Cette masse est donnée par

$$m(w(t)) = \int_{w(t)} \rho(t,x)dx,$$

on a donc

$$\frac{d}{dt}m(w(t)) = 0.$$

D'après le lemme appliqué à $k = \rho$, on a pour tout sous-ensemble w_0 de $\Omega(0)$

$$\int_{w(t)} (\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}))dx = 0,$$

et puisque w_0 et donc $w(t)$ sont arbitraires dans $\Omega(t)$, on en déduit l'équation de conservation de la masse, dite parfois *équation de continuité*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0.$$

2.2.2 Loi de diffusion de Fick

Fick à établi expérimentalement au $XIX^{è}$ siècle une loi (équation du flux de diffusion) traduisant le lien entre le courant volumique de particules (l'effet) et l'inhomogénéité de la concentration de ces particules (la cause). Cette loi exprime qualitativement que les particules se déplacent vers les régions à plus faible densité. Quantitativement, ce mouvement est tel que le flux de diffusion ($\vec{J} = \rho \vec{v}$) à travers chaque surface soit proportionnel au gradient de densité, ce qui peut s'écrire

$$\vec{J} = -d\nabla\rho,$$

où ρ est la densité particulaire et d un coefficient, toujours positif, appelé *coefficient de diffusion*. L'équation de conservation de la masse devient alors

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \operatorname{div}(d\nabla\rho) = 0,$$

soit encore, si d est une constante positive

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - d\Delta\rho = 0,$$

qui est la célèbre *équation linéaire de la chaleur* sans sources.

Remarque 2.2.1. *Notons que dans le cas stationnaire, c'est-à-dire lorsque $\rho(t,x) = \rho(x)$, et lorsque le coefficient de diffusion est constant, la densité satisfait à l'équation de Laplace $\Delta\rho = 0$.*

Remarque 2.2.2. *La densité ρ satisfait à l'équation de diffusion dans le cas le plus général avec un terme de réaction Q :*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - d\Delta\rho = Q,$$

où Q est tel que $Q > 0$ si source et $Q < 0$ si absorption, par unité de temps et par unité de volume.

2.2.3 Loi de Fourier pour la conduction de la chaleur

Considérons un milieu continu de conductivité thermique k, de masse volumique ρ et de chaleur massique c. Alors l'expression générale de l'équation de la chaleur est donnée par

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = Q + k\Delta T,$$

et la loi de Fourier (équation du flux de chaleur) par

$$\vec{J} = -k\nabla T,$$

où T est la température et Q représente une source de chaleur. Cette loi a été établie expérimentalement par Fourier en 1822 dans son livre *Théorie analytique de la chaleur*. Elle exprime que la conduction thermique (ou diffusion thermique) est un transfert thermique spontané d'une région de température élevée vers une région de température plus basse.

Remarque 2.2.3. *La loi de Fourier est une loi analogue à la loi de fick, mais appliquée au flux de chaleur et non au flux de matière.*

2.3 Modélisation de l'évolution des réactions chimiques

2.3.1 Vitesse d'une réaction, conservation de la matière

On convient de noter $[A]$ la concentration d'un constituant A dans un système donné, c'est-à-dire par définition, la quantité de ce constituant par unité de volume. On utilise généralement la mole par litre (symbole mol/L) comme unité de concentration. Rappelons que la mole par cube (symbole mol/m^3) est l'unité standard du système international (SI) pour la quantité de matière ($1mol/L = 10^3 mol/m^3$).

Considérons de manière générale la réaction en équilibre suivante :

$$n_1A_1 + n_2A_2 + ... + n_pA_p \rightarrow m_1B_1 + m_2B_2 + ... + m_qB_q, \tag{2.2}$$

où p, q, $n_i, i = 1,...,p$, et m_j , $j = 1,...,q$, sont des entiers ≥ 1 et les constituants $A_i, i = 1,...,p$, et $B_j, j = 1,...,q$ représentent les réactifs et les produits respectivement. Cette réaction d'équilibre contient en soi la conservation de la quantité de matière. Ainsi, en supposant le système clos, c'est-à-dire, sans aucun apport extérieur ni perte de matière, on obtient

$$v = \frac{1}{m_j}\frac{d[B_j]}{dt} = -\frac{1}{n_i}\frac{d[A_i]}{dt}, \ i = 1,...,p, \ j = 1,...,q,$$

où le nombre v est appelé *vitesse instantanée* de la réaction (2.2).

En général, une réaction d'équilibre n'est pas seulement constituée d'une réaction élémentaire, mais de plusieurs réactions parallèles ou successives, par exemple du type suivant :

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C, \tag{2.3}$$

ou encore

$$A \rightleftharpoons B, \tag{2.4}$$

ou encore

$$A + B \rightleftharpoons X, X \rightleftharpoons C + D. \tag{2.5}$$

Par simplicité, nous convenons de noter dans la suite, $a = [A]$, $b = [B]$, etc. Dans ces équations, la loi de conservation de la matière s'exprime par

- $b^{'}(t) = -a^{'}(t) - c^{'}(t)$, i.e, $a(t) + b(t) + c(t) = cste$, pour (2.3),
- $a^{'}(t) + b^{'}(t) = 0$, pour (2.4),
- $x^{'}(t) = 2(-a^{'}(t) - c^{'}(t))$, $a^{'}(t) = b^{'}(t)$, $c^{'}(t) = d^{'}(t)$, pour (2.5),

quand aux vitesses de réactions, elles s'écrivent

- $v_1 = -a^{'}(t)$, $v_2 = c^{'}(t)$, pour (2.3),
- $v = -a^{'}(t) = b^{'}(t)$, pour (2.4),
- $v_1 = -a^{'}(t) = -b^{'}(t)$, $v_2 = c^{'}(t) = d^{'}(t)$, pour (2.5).

Il s'agit maintenant de décrire les lois de comportement de ces vitesses. Notons que dans les systèmes précédents, on a souvent moins d'équations que d'inconnues. Les lois de comportements vont permettre de "clore" ces systèmes.

2.3.2 Réactions élémentaires

Une réaction est dite *élémentaire* si les réactifs réagissent simultanément en un même point pour donner directement des produits sans former d'espèces intermédiaires. La vitesse de réaction dépend donc de la probabilité de rencontre des réactifs donc de la fréquence des "*chocs*".

On va supposer que les réactions élémentaires satisfont la loi d'action de masse (ou loi d'équilibre), c'est-à-dire que, les concentrations des réactifs de départ et des produits formés, sont reliées par une expression dont la valeur est constante à une température donnée. La constante ainsi définie est appelée *constante d'équilibre*. Les vitesses de la réaction directe et de la réaction inverse étant égales.

On va supposer aussi que, la vitesse de réaction est proportionnelle au produit des concentrations des réactifs. Pour des réactions plus complexes, elle est généralement proportionnelle à des puissances de ces concentrations. Cependant, on verra que la vitesse peut aussi être une fonction exponentielle des concentrations, voire des combinaisons plus complexes de ces comportements. Ces lois sont déduites à partir des connaissances approfondies des étapes intermédiaires de la réaction considérée.

2.3.2.1 Loi d'ordre un

On considère la réaction la plus simple

$$A \to B.$$

Si cette réaction est élémentaire, on considère qu'à température constante, la vitesse de réaction est proportionnelle à la concentration $[A]$, soit

$$a^{'}(t) = -ka(t) = -b^{'}(t),\ k > 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{da}{a} = -kdt.$$

Cette équation différentielle s'intègre immédiatement en

$$a(t) = a_0 e^{-kt},$$

où $a_0 = a(0)$ est la valeur initiale de a. Beaucoup de réactions suivent en fait cette loi, par exemple la décomposition radioactive de certains éléments chimiques. La constante k est appelée *constante de vitesse*. Sa valeur n'est pas toujours très bien connue, on peut la déterminer à l'aide de mesures expérimentales. On s'attend à ce que la valeur de cette constante varie avec la température. C'est l'objet de *la loi d'Arrhénius* qui s'écrit

$$k = Ae^{-E_a/RT},$$

où T est la température absolue, R la constante des gazs parfaits ($= 8,314 J/K$), E_a l'énergie d'activation et A une constante positive à préciser dans chaque cas.

2.3.2.2 Loi d'ordre deux

On considère la réaction supposée "élémentaire"

$$A + B \to C.$$

On considère que la température est constante, la vitesse de réaction est de la forme

$$c^{'}(t) = ka(t)b(t) = -a^{'}(t) = -b^{'}(t).$$

On dit alors qu'il s'agit d'une loi d'ordre deux par rapport à l'ensemble des réactifs. Alors on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{a}{a-a_0+b_0} = \dfrac{a_0}{b_0}e^{-k(b_0-a_0)t} & \text{si} \quad a_0 \neq b_0, \\ a(t) = \dfrac{a_0}{1+a_0kt} & \text{si} \quad a_0 = b_0. \end{cases}$$

A partir de ces deux lois élémentaires, on peut écrire les lois de comportement des vitesses pour des réactions plus complexes, mais décomposables en réactions élémentaires du type ci-dessus.

Exemple 2.3.1.

$$A \xrightarrow{k_1} B,$$
$$B \xrightarrow{k_2} C.$$

La loi de conservation de la matière s'ècrit alors

$$b^{'}(t) = -a^{'}(t) - c^{'}(t).$$

Pour la loi de comportement, on peut supposer que chaque réaction est élémentaire et d'ordre un, ce qui donne

$$\begin{cases} a^{'} = -k_1a, \\ b^{'} = k_1a - k_2b, \\ c^{'} = k_2b. \end{cases} \tag{2.6}$$

Exemple 2.3.2.

$$A + B \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} X,$$
$$X \xrightarrow{k_2} C + D.$$

Le système d'équations s'écrit

$$\begin{cases} a^{'} = -k_1ab + k_{-1}x = b^{'}, \\ x^{'} = k_1ab - k_{-1}x - k_2x, \\ c^{'} = k_2x = d^{'}. \end{cases} \tag{2.7}$$

Exemple 2.3.3. *On considère l'exemple de l'ammoniac*

$$N_2 + 3H_2 \longrightarrow 2NH_3,$$

dont le mécanisme peut être expliqué par l'introduction d'un état intermédiaire X

$$\begin{aligned} N_2 + 3H_2 &\underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} X, \\ X &\xrightarrow{k_2} NH_3 + NH_3. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Si on suppose que les deux réactions sont élémentaires, le système d'équations s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}[N_2] = -k_1[N_2][H_2]^3 + k_{-1}[X] = \dfrac{1}{3}\dfrac{d}{dt}[H_2], \\ \dfrac{d}{dt}[X] = k_1[N_2][H_2]^3 - k_{-1}[X] - k_2[X], \\ \dfrac{d}{dt}[NH_3] = 2k_2[X]. \end{cases} \tag{2.9}$$

Exemple 2.3.4. *On va étudier l'exemple important de la catalyse enzymatique qui s'écrit :*

$$\begin{aligned} E + S &\underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} ES, \\ ES &\xrightarrow{k_2} E + P, \end{aligned} \tag{2.10}$$

où les molécules de substrat S réagissent avec l'enzyme E pour donner un produit P via la formation d'un complexe intermédiaire ES. On obtient alors

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}[E] = -k_1[E][S] + k_{-1}[ES] + k_2[ES], \\ \dfrac{d}{dt}[S] = -k_1[E][S] + k_{-1}[ES], \\ \dfrac{d}{dt}[ES] = k_1[E][S] - k_{-1}[ES] - k_2[ES], \\ \dfrac{d}{dt}[P] = k_2[ES]. \end{cases} \tag{2.11}$$

2.3.3 Formation de complexe intermédiaire et principe des états stationnaires

Nous venons de donner quelques exemples d'équations simples mais dont la compréhension du vrai mécanisme nécessite l'introduction d'une succession d'équations intermédiaires et aussi de composants intermédiaires. Souvent, ceux-ci sont très réactifs et ne sont pas vraiment détectables dans le mélange. Leur concentration reste en tous cas négligeable devant celle des vrais réactifs ou produits. C'est le principe dit des états stationnaires (P.E.S) que nous expliquons sur l'exemple 2.3.2.

On y considère donc que le complexe intermédiaire X est très réactif et qu'il arrive très vite à l'équilibre. Le P.E.S consiste à considérer brutalement que $x^{'}(t) = 0$ dans le système (2.7), ce qui donne

$$k_1 ab = (k_{-1} + k_2)x,$$

alors

$$x = \frac{k_1}{k_{-1} + k_2} ab,$$

ainsi, le système devient

$$\begin{cases} a^{'} = -\dfrac{k_{-1}k_2}{k_{-1} + k_2} ab = b^{'}, \\ b = a + b_0 - a_{0,} \\ c^{'} = \dfrac{k_1 k_2}{k_{-1} + k_2} ab = d^{'}. \end{cases}$$

Ainsi, on peut considérer qu'en fait, la réaction $A+B \longrightarrow C+D$ est d'ordre 2. Par ailleurs, on peut intégrer directement les deux premières équations pour obtenir a,b, puis en déduire c,d.

Exemple 2.3.5. *On applique le P.E.S à la réaction (2.8), en considérant que le complexe intermédiaire X est très réactif, soit* $\frac{d}{dt}[X]=0$*, d'où*

$$[X] = \frac{k_1}{k_{-1}+k_2}[N_2][H_2]^3,$$

et donc

$$\frac{d}{dt}[N_2] = -k_1[N_2][H_2]^3 + \frac{k_1k_{-1}}{k_{-1}+k_2}[N_2][H_2]^3,$$

d'où

$$\frac{d}{dt}[N_2] = \frac{-k_1k_2}{k_{-1}+k_2}[N_2][H_2]^3 = \frac{1}{3}\frac{d}{dt}[H_2],$$

d'autre part

$$\frac{d}{dt}[NH_3] = 2k_2[X],$$

ainsi

$$\frac{d}{dt}[NH_3] = \frac{2k_1k_2}{k_{-1}+k_2}[N_2][H_2]^3.$$

Exemple 2.3.6. *Considérons de manière analogue la réaction (2.10)*

$$E+S \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} ES,$$
$$ES \xrightarrow{k_2} E+P.$$

En considérant que $\frac{d}{dt}[ES]=0$*, on obtient*

$$k_1[E][S] = (k_2+k_{-1})[ES],$$

et donc

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}[E] = 0, \\ \frac{d}{dt}[S] = -\frac{k_1k_2}{k_{-1}+k_2}[E][S], \\ \frac{d}{dt}[P] = \frac{k_1k_2}{k_{-1}+k_2}[E][S]. \end{cases}$$

En utilisant le fait que $[E]+[ES]=[E]_0$*, on a alors*

$$[E]_0 = [E](\frac{k_{-1}+k_2+k_1[S]}{k_{-1}+k_2}),$$

ainsi, le système d'équations obtenues est le suivant

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}[E] = 0, \\ \frac{d}{dt}[S] = \frac{-k_2}{K_M+[S]}[E]_0[S], \\ \frac{d}{dt}[P] = \frac{k_2}{K_M+[S]}[E]_0[S]. \end{cases}$$

où $K_M = \dfrac{k_{-1} + k_2}{k_1}$*, appelée constante de Michaelis.*

Exemple 2.3.7. *Il a été proposé en 1906 pour la vitesse de réaction de l'Hydrogène et du Brome*

$$Br_2 + H_2 \longrightarrow 2HBr, \tag{2.12}$$

la loi empirique suivante

$$\frac{d}{dt}[HBr] = \frac{2L[H_2][Br_2]^{\frac{1}{2}}}{1 + m[HBr]/[Br_2]}.$$

Cette loi établie empiriquement pour expliquer le mécanisme de réactions en chaîne suivant (voir [37])

$$\begin{array}{lcl}
Br_2 & \xrightarrow{k_1} & Br^{\cdot} + Br^{\cdot}, \\
Br^{\cdot} + H_2 & \xrightarrow{k_2} & HBr + H^{\cdot}, \\
H^{\cdot} + Br_2 & \xrightarrow{k_3} & HBr + Br^{\cdot}, \\
H^{\cdot} + HBr & \xrightarrow{k_4} & H_2 + Br^{\cdot}, \\
Br^{\cdot} + Br^{\cdot} & \xrightarrow{k_5} & Br_2.
\end{array}$$

En effet, le système d'équations obtenues est le suivant

$$\begin{cases}
\frac{d}{dt}[Br_2] & = -k_1[Br_2] - k_3[H^{\cdot}][Br_2] + k_5[Br^{\cdot}]^2, \\
\frac{d}{dt}[Br^{\cdot}] & = 2k_1[Br_2] - k_2[Br^{\cdot}][H_2] + k_3[H^{\cdot}][Br_2] + k_4[H^{\cdot}][HBr] - 2k_5[Br^{\cdot}]^2, \\
\frac{d}{dt}[H_2] & = -k_2[Br^{\cdot}][H_2] + k_4[H^{\cdot}][HBr], \\
\frac{d}{dt}[H^{\cdot}] & = k_2[Br^{\cdot}][H_2] - k_3[H^{\cdot}][Br_2] - k_4[H^{\cdot}][HBr], \\
\frac{d}{dt}[HBr] & = k_2[Br^{\cdot}][H_2] - k_4[H^{\cdot}][HBr] + k_3[H^{\cdot}][Br_2].
\end{cases}$$

En appliquant le P.E.S, il vient que

$$[H^{\cdot}] = \frac{k_2[Br^{\cdot}][H_2]}{k_3[Br_2] + k_4[HBr]} \text{ et } [Br^{\cdot}]^2 = \frac{k_1}{k_5}[Br_2],$$

ainsi

$$\begin{cases}
\frac{d}{dt}[Br_2] & = \dfrac{-L[H_2].[Br_2]^{\frac{1}{2}}}{1 + m[HBr]/[Br_2]}, \\
\frac{d}{dt}[H_2] & = \dfrac{-L[H_2].[Br_2]^{\frac{1}{2}}}{1 + m[HBr]/[Br_2]}, \\
\frac{d}{dt}[HBr] & = \dfrac{2L[H_2].[Br_2]^{\frac{1}{2}}}{1 + m[HBr]/[Br_2]}.
\end{cases}$$

où $L = k_2\sqrt{\dfrac{k_1}{k_5}}$ *et* $m = \dfrac{k_4}{k_3}$.

2.3.4 Systèmes de réaction-diffusion

Nous nous plaçons maintenant dans une situation plus réaliste où les réactions ont lieu dans un milieu ambiant où les concentrations dépendent aussi de la variable d'espace. Prenons par exemple la réaction suivante

$$A+B \overset{k_1}{\to} C,$$
$$B+C \overset{k_2}{\to} D.$$

en supposant que chacune des réactions est élémentaire et suit une loi d'ordre 2, nous aurions

$$\begin{cases} a' = -k_1ab, \\ b' = -k_1ab - k_2bc, \\ c' = k_1ab - k_2bc, \\ d' = k_2bc. \end{cases}$$

et la conservation de la matière s'exprime par

$$c' = -a' - d', b' = a' - d'.$$

Pour tenir compte de la dépendance des concentrations de la variable d'espace x, nous pouvons assimiler chaque constituant à un milieu continu animé d'une vitesse eulérienne $\vec{v}(t,x)$. La quantité du constituant A contenu dans le volume $w(t)$ est donnée par :

$$m_a(w(t)) = \int_{w(t)} a(t,x)dx,$$

et de même pour les autres constituants.
D'après les résultats déjà obtenus, on a

$$\frac{d}{dt}m_a(w(t)) = \int_{w(t)} \left(\frac{\partial a}{\partial t} + \operatorname{div}(a(t,x)\vec{v})\right) dx,$$

ainsi, la variation instantanée de quantité de matière est donnée par

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \operatorname{div}(a(t,x)\vec{v}).$$

Supposons que la vitesse des réactions ci-dessus suit une loi d'ordre 2 ce qui consiste à écrire que cette variation instantanée est proportionnelle au produit des concentrations de A et B. Ainsi, la première équation du système précident devient

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \operatorname{div}(a(t,x)\vec{v}) = -k_1ab,$$

que nous écrivons sous la forme

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \operatorname{div}(J_a) = S_a,$$

et les lois de conservation de matière deviennent

- $\frac{d}{dt}m_c(w(t)) = -\frac{d}{dt}m_a(w(t)) - \frac{d}{dt}m_d(w(t)),$
- $\frac{d}{dt}m_b(w(t)) = \frac{d}{dt}m_a(w(t)) - \frac{d}{dt}m_d(w(t)).$

Pour compléter le système, il faut ajouter une loi de comportement pour la vitesse des particules ou le flux de matière de chaque constituant. La loi la plus simple et de domaine de validité relativement large pour ce type d'application est *la première loi de Fick*, soit

$$J_a = a\overrightarrow{v} = -d_a \nabla a,$$

où d_a est la fonction de diffusivité du constituant A. On introduit la même loi pour les autres constituants avec pour chacun sa propre constante de diffusivité d_b , d_c , d_d. On obtient comme modèle le système suivant d'équations aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \frac{\partial a}{\partial t} - \operatorname{div}(d_a \nabla a) = -k_1 ab, \\ \frac{\partial b}{\partial t} - \operatorname{div}(d_b \nabla b) = -k_1 ab - k_2 bc, \\ \frac{\partial c}{\partial t} - \operatorname{div}(d_c \nabla c) = k_1 ab - k_2 bc, \\ \frac{\partial d}{\partial t} - \operatorname{div}(d_d \nabla d) = k_2 bc. \end{cases}$$

Ici, il s'agit d'un système de réaction-diffusion, terminologie qui fait référence aux deux phénomènes apparaissant dans l'équation, diffusion de chaque constituant avec sa propre vitesse de diffusion (régie par la constante de diffusivité) et interaction non linéaire entre les différents constituants.

La variable x varie dans un domaine de $\mathbb{R}^3$. On peut supposer ici que ce domaine est indépendant du temps si la réaction a lieu dans un milieu "fixe", on le note Ω.

Pour *fermer* le système, il est indispensable d'ajouter des conditions au bord de Ω qui doivent traduire les éventuels échanges de matière avec le milieu extérieur. Par exemple :

1) Si la réaction se produit dans un milieu isolé, on écrit que le flux de matière à la frontière est nul, soit $a\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v} = 0$ sur $\partial\Omega$, ou selon la loi de *Fick*, $d_a \nabla a.\overrightarrow{v} = 0$ sur $\partial\Omega$, ce qui peut encore s'écrire si d_a est une constante positive $\frac{\partial}{\partial v}a(t,x) = 0$ pour $t > 0, x \in \partial\Omega$.

2) Si le flux de matière, à travers la frontière est une fonction affine de la concentration, on aura dans ce cas

$$\lambda \nabla a.\overrightarrow{v} = -(1-\lambda)a + \alpha \quad \text{sur } (0,+\infty) \times \partial\Omega,$$

ou encore

$$\lambda \frac{\partial a}{\partial \nu} + (1-\lambda)a = \alpha \quad \text{sur } (0,+\infty)\times\partial\Omega,$$

où $\lambda \in [0,1]$.

Ainsi, en appliquant ces résultats aux exemples précédents, après l'application du principe des états stationnaires (P.E.S), nous obtenons :

- pour la réaction de l'ammoniac (2.8), le système de réaction-diffusion associé est

$$\begin{cases} \dfrac{\partial[N_2]}{\partial t} - d_1\Delta[N_2] = -\dfrac{k_1k_2}{k_{-1}+k_2}[N_2][H_2]^3 & \text{sur } (0,+\infty)\times\Omega, \\ \dfrac{\partial[H_2]}{\partial t} - d_2\Delta[H_2] = -\dfrac{3k_1k_2}{k_{-1}+k_2}[N_2][H_2]^3 & \text{sur } (0,+\infty)\times\Omega, \\ \dfrac{\partial[NH_3]}{\partial t} - d_3\Delta[NH_3] = \dfrac{2k_1k_2}{k_{-1}+k_2}[N_2][H_2]^3 & \text{sur } (0,+\infty)\times\Omega, \\ \dfrac{\partial[N_2]}{\partial \nu} = \dfrac{\partial[H_2]}{\partial \nu} = \dfrac{\partial[NH_3]}{\partial \nu} = 0 \ (e.g.) & \text{sur } (0,+\infty)\times\partial\Omega, \\ [N_2](0,x) = n_0, [H_2](0,x) = h_0, [NH_3](0,x) = 0 & \text{pour } x\in\Omega. \end{cases}$$

- la réaction enzymatique (2.10), donne

$$\begin{cases} \dfrac{\partial[E]}{\partial t} - d_1\Delta[E] = 0 & \text{sur } (0,+\infty)\times\Omega, \\ \dfrac{\partial[S]}{\partial t} - d_2\Delta[S] = \dfrac{-k_2}{K_M+[S]}[E]_0[S] & \text{sur } (0,+\infty)\times\Omega, \\ \dfrac{\partial[P]}{\partial t} - d_3\Delta[P] = \dfrac{k_2}{K_M+[S]}[E]_0[S] & \text{sur } (0,+\infty)\times\Omega, \\ \dfrac{\partial[E]}{\partial \nu} = \dfrac{\partial[S]}{\partial \nu} = \dfrac{\partial[P]}{\partial \nu} = 0 \ (e.g.) & \text{sur } (0,+\infty)\times\Omega, \\ [E](0,x) = E_0, [S](0,x) = S_0, [P](0,x) = 0 & \text{pour } x\in\Omega. \end{cases}$$

- quand à la réaction de l'Hydrogène et du Brome (2.12), elle entraîne le système de réaction-diffusion suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial[Br_2]}{\partial t} - d_1\Delta[Br_2] = \dfrac{-L[H_2].[Br_2]^{\frac{1}{2}}}{1+m[HBr]/[Br_2]} & \text{sur } (0,+\infty)\times\Omega, \\ \dfrac{\partial[H_2]}{\partial t} - d_2\Delta[H_2] = \dfrac{-L[H_2].[Br_2]^{\frac{1}{2}}}{1+m[HBr]/[Br_2]} & \text{sur } (0,+\infty)\times\Omega, \\ \dfrac{\partial[HBr]}{\partial t} - d_3\Delta[HBr] = \dfrac{2L[H_2].[Br_2]^{\frac{1}{2}}}{1+m[HBr]/[Br_2]} & \text{sur } (0,+\infty)\times\Omega, \\ \dfrac{\partial[Br_2]}{\partial \nu} = \dfrac{\partial[H_2]}{\partial \nu} = \dfrac{\partial[HBr]}{\partial \nu} = 0 \ (e.g.) & \text{sur } (0,+\infty)\times\partial\Omega, \\ [Br_2](0,x) = n_0, [H_2](0,x) = h_0, [HBr](0,x) = 0 & \text{pour } x\in\Omega. \end{cases}$$

2.4 Modèles en dynamique des populations

2.4.1 Un modèle prédateur-proie

Dans la première moitié du $XX^{è}$ siècle, l'étude de la dynamique de plusieurs espèces en interaction connut un essor considérable. C'est à cette époque appelée *l'âge d'or de l'écologie théorique* que furent développés les premiers modèles basés sur des comportements de type compétition et des relations prédateur-proie. Dans [54], V. Volterra a étudié la coexistence de *deux espèces dont l'une dévore l'autre*. Considérant deux espèce, la première, la proie $u(t,x)$, aurait si elle était seule une croissance *exponentielle* ou une croissance *malthusienne* [38]. La seconde, le prédateur $v(t,x)$, se nourrit exclusivement de la première et en l'absence de proie *s'épuiserait progressivement et disparaîtrait*. La mise en équation de la fonction représentant la prédation est basée sur la méthode des rencontres et sur l'hypothèse des équivalents élaborées par Volterra [54]. La première considère que pour qu'il y ait prédation entre une espèce prédatrice et une espèce proie, il faut tout d'abord qu'il y ait rencontre entre ces deux espèces et que le nombre de rencontres entre ces deux espèces est proportionnel au nombre des individus qui la compose. Le coefficient de proportionnalité étant égal à la probabilité de rencontre. La seconde consiste à supposer qu'il existe *un rapport constant entre les disparitions et apparitions d'individus que provoquent les rencontres*, *i.e.*, que la prédation de la proie est équivalente à la croissance du prédateur. De plus, Volterra [54] considère comme immédiat cet accroissement. Ceci conduit au système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - d_u \Delta u = au - buv & \text{sur } (0,+\infty)\times\Omega, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - d_v \Delta v = -cv + duv & \text{sur } (0,+\infty)\times\Omega, \end{cases}$$

où a représente le taux de croissance de la proie en l'absence de prédateur, b le taux de prédation du prédateur sur la proie, c le taux de mortalité du prédateur en l'absence de proie et d le taux de croissance du prédateur du fait de sa prédation et d_u, d_v sont les constantes de diffusion de proie et du prédateur, respectivement.

2.4.2 Un modèle prédateur-compétiteur-proie

On considère un système d'un prédateur et deux populations de proies du type prédateur-compétiteur (proie introduite)-proie indigène. Les densités de populations sont notées respectivement B, R et C pour les proies, compétiteurs et prédateurs. Le modèle mathématique associé est le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B}{\partial t} - d_b \Delta B = r_b B\left(1 - \dfrac{B}{K_b}\right) - \eta BR - \dfrac{\alpha B}{\alpha B + R}\mu_b C & \text{sur } (0,+\infty)\times\Omega, \\ \dfrac{\partial R}{\partial t} - d_r \Delta R = r_r R\left(1 - \dfrac{R}{K_r}\right) - \dfrac{R}{\alpha B + R}\mu_r C & \text{sur } (0,+\infty)\times\Omega, \\ \dfrac{\partial C}{\partial t} - d_c \Delta C = r_c C\left(1 - \mu_r \mu_b \dfrac{C}{\mu_r B + \mu_b R}\right) & \text{sur } (0,+\infty)\times\Omega, \end{cases}$$

où r_r, r_b, K_r, K_b, μ_r et μ_b les taux de croissance, capacités d'accueil du milieu et les taux de prédation respectifs pour les populations de proies introduites et natives, α le coefficient de préférence des prédateurs, η la compétition asymétrique entre proies natives et introduites (*i.e.* pression unilatérale des proies introduites sur les proies natives), et d_b, d_r, d_c sont les constantes de diffusion des proies, compétiteurs et prédateurs, respectivement (voir [10] et [11]).

2.4.3 Un modèle génétique

On considère une population d'individus "diploïdes", c'est-à-dire chez qui l'information génétique est dédoublée. On suppose qu'un certain gène sur une certaine paire de chromosomes se présente sous deux formes possibles, ou *allèles*, que l'on notera a et A. La population se subdivise alors en individus "homozygotes" de type aa ou AA, et "hétérozygotes" de type aA. Notons $\rho_1(t,x)$, $\rho_2(t,x)$, $\rho_3(t,x)$ la densité d'individus de type aa, aA, AA respectivement, au point x et à l'instant t. Supposons que les individus constituant la population se reproduisent avec un taux r (indépendant du génotype), et se déplacent aléatoirement dans l'espace suivant un mouvement brownien de constante d (également indépendante du génotype). On suppose en revanche que les taux de décés τ_1, τ_2, τ_3 des trois populations peuvent légèrement différer. Alors les densités ρ_1, ρ_2, ρ_3 sont solution du système suivant (voir [3]) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho_1}{\partial t} - d\Delta\rho_1 = -\tau_1\rho_1 + \dfrac{r}{\rho}\left(\rho_1 + \frac{1}{2}\rho_2\right)^2 & \text{sur } (0,+\infty)\times\Omega, \\ \dfrac{\partial \rho_2}{\partial t} - d\Delta\rho_2 = -\tau_2\rho_2 + \dfrac{2r}{\rho}\left(\rho_1 + \frac{1}{2}\rho_2\right)\left(\rho_3 + \frac{1}{2}\rho_2\right) & \text{sur } (0,+\infty)\times\Omega, \\ \dfrac{\partial \rho_3}{\partial t} - d\Delta\rho_3 = -\tau_3\rho_3 + \dfrac{r}{\rho}\left(\rho_3 + \frac{1}{2}\rho_2\right)^2 & \text{sur } (0,+\infty)\times\Omega, \end{cases}$$

où $\rho(t,x) = \rho_1(t,x) + \rho_2(t,x) + \rho_3(t,x)$

CHAPITRE 3

EXISTENCE GLOBALE ET COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE POUR DES SYSTÈMES DE RÉACTION-DIFFUSION AVEC DES NON-LINÉARITÉS DE CROISSANCE EXPONENTIELLE

3.1 Introduction

Dans ce chapitre [49], nous nous intéressons à l'existence globale et au comportement asymptotique de solutions classiques pour le système de réaction-diffusion suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = -f(u,v) \quad \text{sur} \quad (0,+\infty)\times\Omega, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = g(u,v) \quad \text{sur} \quad (0,+\infty)\times\Omega, \tag{3.2}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1, a, b sont des constantes strictement positives et f, g sont des fonctions positives continûment différentiables sur $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ satisfont les hypothèses suivantes :

$$\textbf{(A1)} \quad f(0,\eta) = g(0,\eta) = 0 \quad \text{et} \quad g(\xi,0) \geq 0,$$

$$\textbf{(A2)} \quad g(\xi,\eta) \leq \psi(\eta) f(\xi,\eta),$$

où ψ est une fonction positive continûment différentiable sur $[0,+\infty)$ telle qu'il existe une constante $\beta \geq 1$ telle que

$$\lim_{\eta\to+\infty} \eta^{\beta-1}\psi(\eta) = \ell,$$

où ℓ est une constante positive.

$$\textbf{(A3)} \quad g(\xi,\eta) \leq C\varphi(\xi)e^{\alpha\eta^{\beta}},$$

pour certaines constantes $C>0$ et $\alpha>0$ où β est la même que dans (**A2**) et φ est une fonction positive continûment différentiable sur $[0,+\infty)$ telle que $\varphi(0)=0$.

Le système (3.1)-(3.2) est complété par :

- les conditions initiales :

$$u(0,x) = u_0(x), \quad v(0,x) = v_0(x) \quad \text{sur} \quad \Omega, \tag{3.3}$$

où u_0, v_0 sont des fonctions positives dans $L^\infty(\Omega)$.

- les conditions aux limites homogènes :

$$\lambda_1 u + (1-\lambda_1)\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0,\ \lambda_2 v + (1-\lambda_2)\frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } (0,+\infty)\times\partial\Omega, \tag{3.4}$$

où $\frac{\partial}{\partial \nu}$ désigne la dérivée normale extérieure sur $\partial\Omega$ et λ_1, λ_2 sont des fonctions de classe C^1 sur $\partial\Omega$ telles que : $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $i = 1,2$.

A titre indicatif, nous présentons ci-après un exemple typique de terms de réaction que nous avons considéré :

$$\begin{aligned} f(\xi,\eta) &= \xi(1+\eta)e^{\eta^2}, \\ g(\xi,\eta) &= \xi e^{\eta^2}, \\ \psi(\eta) &= \frac{1}{1+\eta}, \\ \varphi(\xi) &= \xi. \end{aligned}$$

Lorsque $a = b$, les solutions classiques locales sur $(0,T)$ peuvent être prolongées sur $(0,+\infty)$, sous les hypothèses (**A1**) et (**A2**).
En effet, comme les conditions initiales sont positives, alors à partir de l'hypothèse (**A1**), nous concluons que la positivité de solutions est préservée au cours du temps.
De l'équation (3.1), il s'ensuit, par le biais du principe du maximum :

$$\|u(t)\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty \quad \text{pour tout} \quad t \in (0,T).$$

En multipliant l'équation (3.1) par une constante positive $k \geq \ell + 1$, en l'ajoutant à l'équation (3.2) et en utilisant la régularité de la fonction f et l'hypothèse (**A2**), on obtient, pour une constante appropriée C, le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(ku+v) - a\Delta(ku+v) \leq C, \\ ku(0,x) + v(0,x) = ku_0(x) + v_0(x), \\ \frac{\partial}{\partial \nu}(ku+v) = 0. \end{cases}$$

En posant

$$\begin{cases} \mathscr{L} = \frac{\partial}{\partial t} - a\Delta, \\ w = ku + v, \\ h(t) = \|ku_0 + v_0\|_\infty + Ct, \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{cases} \mathscr{L}(w) \leq \mathscr{L}(h), \\ w(0,x) \leq h(0), \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} \leq \frac{\partial h}{\partial \nu}. \end{cases}$$

En utilisant le théorème de comparaison (Théorème 10.1 dans [52]), on obtient

$$0 \leq w(t,x) \leq h(t) \quad \text{pour tout} \quad (t,x) \in (0,T) \times \Omega,$$

à partir de laquelle nous concluons que

$$\|ku+v\|_{L^\infty(Q_T)} \leq \|ku_0 + v_0\|_\infty + CT.$$

Comme k, u et v sont positives, alors d'après le critère d'existence globale (Remarque 1.2.1), on peut déduire l'existence de solutions classiques globales du problem (3.1)-(3.4).

Ainsi, tout au long de cette étude, il sera admis que les coefficients de diffusion a et b sont différents.

Le problème de l'existence globale de solutions classiques a été initialement proposé par R. H. Martin lorsque

$$g(\xi,\eta) = f(\xi,\eta) = \xi\eta^{\beta}, \quad \beta \geq 1,$$

avec de bonnes conditions aux limites et des données initiales positives.

Le premier résultat d'existence globale a été obenu par N. D. Alikakos [1] avec des conditions aux limites homogènes de type Neumann sous l'hypothèse $1 \leq \beta < \frac{n+2}{n}$.

L'existence globale dans le cas où $\beta \geq 1$ quelconque a été prouvée tout d'abord par K. Masuda [40] lorsque

$$\begin{array}{rcl} g(\xi,0) & = & f(0,\eta) = 0, \\ g(\xi,\eta) & \leq & \varphi(\xi)f(\xi,\eta), \\ g(\xi,\eta) & \leq & \varphi(\xi)(\eta+\eta^{\beta}), \end{array}$$

où φ est une fonction croissante sur $[0,+\infty)$ et puis par S. L. Hollis, R. H. Martin and M. Pierre [21]. Ces derniers, ont traité ce problème ainsi que d'autres avec une structure triangulaire pour les termes de réaction. Ils ont démontré l'existence globale de solutions classiques sous une hypothèse de croissance polynomiale sur la fonction g.

La méthode de K. Masuda a été généralisé par la suite par A. Haraux et A. Youkana [18] qui ont traité les non-linéarités $f(\xi,\eta)$ et $g(\xi,\eta)$ satisfont

$$g(\xi,\eta) = f(\xi,\eta) \leq \xi e^{\alpha\eta^{\beta}}, \quad 0 < \beta < 1, \quad \alpha > 0.$$

Dans le cas où $\beta = 1$, A. Barabanova [4] a obtenu l'existence globale de solutions classiques sous la condition

$$\|u_0\|_{\infty} < \frac{8ab}{\alpha n(a-b)^2}.$$

Notons que dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^n$, $0 < b \leq a < \infty$ et lorsque

$$g(\xi,\eta) = f(\xi,\eta),$$

R. H. Martin et M. Pierre [39] (voir aussi M. A. Herrero *et al.* [20]) ont prouvé l'existence globale de solutions classiques pour toutes données initiales bornées et sans aucune condition de croissance sur la fonction g. Ces résultats sont basés sur une représentation explicite de solutions par la solution fondamentale de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^n$ et le Lemme 1.2.1 (voir aussi le Lemme 3.1 de [20] où le noyau de la chaleur est soigneusement analysé). Malheureusement, ce lemme n'est pas vrai pour un problème aux limites, comme on peut le voir dans l'exemple suivant.

Exemple 3.1.1. *Nous considérons le problème aux limites*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \pi^2 \sin \pi x \quad \text{sur} \quad (0,+\infty)\times(0,1), \\ u(0,x) = 0, \\ u(t,0) = u(t,1) = 0. \end{cases}$$

où λ est une constante positive.

La fonction h_λ définie par

$$h_\lambda(t,x) = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\pi^2 \lambda t}) \sin \pi x,$$

est une solution de ce problème aux limites.

Dérivons $\lambda^{\frac{1}{2}} h_\lambda(t,x)$ par rapport à λ, on obtient

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\lambda^{\frac{1}{2}} h_\lambda(t,x)\right] = \frac{1}{2\lambda\sqrt{\lambda}}\left[e^{-\pi^2\lambda t}(1+2\pi^2\lambda t) - 1\right] \sin \pi x.$$

Puisque $\sin \pi x > 0$ pour tout $x \in (0,1)$ et $e^{-\pi^2\lambda t}(1+2\pi^2\lambda t)$ tend vers 0 lorsque $\lambda \longrightarrow +\infty$, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_0$, on ait

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\lambda^{\frac{1}{2}} h_\lambda(t,x)\right] < 0.$$

Par conséquent, la fonction $\lambda \longmapsto \lambda^{\frac{1}{2}} h_\lambda(t,x)$ n'est pas monotone pour (t,x) fixé dans $(0,+\infty)\times(0,1)$.

Toutefois, le problème aux limites sur $(0,+\infty)\times\Omega$ a été considéré dans J. I. Kanel [22] lorsque $0 < b < a < \infty$. Il a prouvé que les solutions classiques de tel problème sont globales pour toutes données initiales bornées et sans aucune restriction sur la croissance de la fonction g mais avec une condition de structure sur f et g.

Dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^n$, M. A. Herrero, A. A. Lacey et J. J. L. Velazquez [20] ont étudié le cas où $0 < a < b < \infty$ et ont prouvé que le problème de Cauchy admet une solution classique globale pour toute donnée initiale positive et bornée lorsque

$$g(\xi,\eta) = f(\xi,\eta) \le C\varphi(\xi)e^{\alpha\eta},$$

pour certaines constantes $C > 0$, $\alpha > 0$ et toute fonction positive continue φ sur $[0,+\infty)$ telle que $\varphi(0) = 0$. Ce résultat est étendu au cas où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ par J. I. Kanel et M. Kirane [24] sous la même structure ci-dessus pour les non-linéarités f et g.

Notons que le but de certaines recherches est d'affaiblir les hypothèses sur la croissance de g et sur les données initiales. Par exemple, dans [43] M. Pierre a prouvé l'existence globale de solutions faibles pour les systèmes de réaction-diffusion en préservant la structure principale de la positivité et la structure de contrôle de la masse de solutions avec de bonnes conditions aux limites et toutes données initiales intégrables. Mais ces solutions ne sont que des solutions faibles et l'explosion dans L^∞ peut se produire dans un temps fini.

Les références [39], [46] et [51] présentent un résumé des résultats disponibles en 2000.

Enfin, nous signalons que dans [44], M. Pierre présente dans un survey, un nouvel éclairage sur les systèmes de réaction-diffusion non-linéaires.

Notre objectif principal est de compléter les études de [18], [4], [34] et [43]. Ainsi, nous prouvons l'existence globale de solutions classiques du système (3.1)-(3.4) dans le cas d'une croissance exponentielle (ou plus rapide) sur les termes non-linaires. A cette fin, nous supposons que les hypothèses (**A1**)-(**A3**) sont satisfaites.

Tout au long de cette étude, on désigne par $\|\cdot\|_p, \quad p \in [1,+\infty)$ et $\|\cdot\|_\infty$ les normes usuelles dans les espaces $L^p(\Omega)$ et $L^\infty(\Omega)$, respectivement, définies par

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad \|u\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} \text{ess}\, |u(x)|.$$

3.2 Résultats principaux

L'objectif de cette étude est de montrer que pour f et g vérifient les hypothèses (**A1**)-(**A3**), les solutions classiques du (3.1)-(3.4) sont globales pour toute u_0 vérifie la restriction

$$\|u_0\|_\infty < \frac{8ab}{\alpha\beta\ell n(a-b)^2}, \quad \ell > 0. \tag{3.5}$$

De plus, il existe deux constantes positives u^* et v^* telles que

$$\lim_{t\uparrow+\infty} \|u(t)-u^*\|_\infty = \lim_{t\uparrow+\infty} \|v(t)-v^*\|_\infty = 0.$$

Afin d'atteindre les objectifs ci-dessus, nous avons utilisé des techniques appropriées qui sont basées sur les semi-groupes, les estimations de l'énergie et la fonctionnelle de Lyapunov.

L'idée pour prouver l'existence globale de solutions classiques du problème (3.1)-(3.4) est une fonctionnelle de Lyapunov. Des fonctionnelles similaires ont été utilisées dans [18], [4] et [34].

Théorème 3.2.1. *Sous les hypothèses (**A1**)-(**A3**) et la restriction* (3.5)*, les solutions de* (3.1)-(3.4) *sont globales et uniformément bornées sur* $[0,+\infty)\times\Omega$.

Notons que dans le cas où $\ell \geq 0$, nous pouvons remplacer la restriction (3.5) par

$$\ell\|u_0\|_\infty < \frac{8ab}{\alpha\beta n(a-b)^2},$$

et nous observons que si $\ell = 0$, alors la donnée initiale $u_0 \geq 0$ dans $L^\infty(\Omega)$ est attribuée de manière arbitraire. Par conséquent, nous obtenons le corollaire suivant.

Corollaire 3.2.1. *Supposons que le système* (3.1)-(3.4) *satisfait les hypothèses (**A1**)-(**A3**) et* $\ell = 0$.
Alors pour tout $u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega)$*, les solutions de* (3.1)-(3.4) *sont globales et uniformément bornées sur* $[0,+\infty)\times\Omega$.

Par exemple, dans le cas où

$$f(\xi,\eta) = \xi(1+\eta^m)e^{\eta^\beta}, \quad g(\xi,\eta) = \xi e^{\eta^\beta},\ m > \beta - 1 \geq 0,$$

on peut prendre $\psi(\eta) = 1+\eta^m$. Dans ce cas $\ell = 0$ et nous obtenons l'existence globale sans condition de taille sur les données initiales.

Remarque 3.2.1. *Dans le système* (3.1)-(3.2)*, le changement de fonction :*

$$v = \theta(w),$$

conduit au système :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u &= -f(u,\theta(w)),\\ \frac{\partial w}{\partial t} - b\Delta w &= \frac{1}{\theta'(w)}g(u,\theta(w)) + b\frac{\theta''(w)}{\theta'(w)}|\nabla w|^2.\end{aligned}$$

En supposant que la fonction θ *est régulière sur* $(0,+\infty)$ *et satisfaisant :*

$$\theta' > 0, \quad \theta'' \leq 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{\eta\to+\infty}\frac{\psi(\theta(\eta))}{\theta'(\eta)} = \ell,$$

où ℓ *est une constante positive et* ψ *est une fonction positive continûment différentiable sur* $[0,+\infty)$ *telle que :*

$$g(\xi,\eta) \leq \psi(\eta)f(\xi,\eta) \quad \textit{pour tout} \quad \xi \geq 0,\ \eta \geq 0.$$

Alors, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u &= -F(u,w),\\ \frac{\partial w}{\partial t} - b\Delta w &\leq G(u,w),\end{aligned}$$

où les nouveaux termes de réaction :

$$\begin{aligned} F(u,w) &= f(u,\theta(w)), \\ G(u,w) &= \frac{1}{\theta'(w)} g(u,\theta(w)), \end{aligned}$$

*satisfont les hypothèses (**A1**)-(**A3**).*

Le fait qu'il y ait inégalité au lieu d'égalité dans la deuxième équation ne change bien sûr rien quand il s'agit de trouver des fonctions de Lyapounov.

Par exemple, le changement de fonction :

$$v = \ln w,$$

permet de résoudre le problème (3.1)-(3.4) *avec certaines non-linéarités de croissance supérieur à celle de (**A3**) :*

$$f(u,v) = u(1+e^{mv})e^{e^v}, \quad g(u,v) = ue^{e^v}, \quad m > 1.$$

Dans ce modèle, on a $\ell = 0$ et nous obtenons donc l'existence globale de solutions classiques sans restriction de taille sur les données initiales.

L'étude de l'existence locale et l'unicité de la solution (u,v) du problème (3.1)-(3.4) découle de la théorie de base des équations paraboliques semi-linéaires (voir, par exemple, [2], [19], [21] et [42]). En conséquence, il existe un $T^* \in (0,+\infty]$ tel que (3.1)-(3.4) possède une unique solution classique sur $[0,T^*) \times \Omega$. De plus, si $T^* < +\infty$, alors

$$\lim_{t \uparrow T^*} (\|u(t)\|_\infty + \|v(t)\|_\infty) = +\infty.$$

Par conséquent, s'il existe une constante positive C telle que

$$\|u(t)\|_\infty + \|v(t)\|_\infty \leq C \quad \text{pour tout} \quad t \in [0,T^*),$$

alors $T^* = +\infty$.

Puisque $f \geq 0$, u satisfait le principe du maximum, *i.e.*,

$$\|u(t)\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty \quad \text{pour tout} \quad t \in [0,T^*).$$

Ainsi, le problème de l'existence globale se réduit à établir une estimation uniforme de $\|v(t)\|_\infty$ sur $[0,T^*)$. D'après la théorie de la régularité L^p, $1 < p < \infty$ pour les opérateurs paraboliques (voir, par exemple, [35], [50] et Proposition 1.2.6), il suffit d'obtenir une estimation uniforme de $\|g(u(t),v(t))\|_p$ sur $[0,T^*)$ pour un certain $p > \frac{n}{2}$.

La preuve du Théorème 3.2.1 est basée sur la proposition clé suivante.

Proposition 3.2.1. *Supposons que les hypothèses (**A1**)-(**A3**) et la restriction* (3.5) *sont satisfaites. Pour toute solution classique* (u,v) *du problème* (3.1)-(3.4) *sur* $[0,T^*)\times\Omega$*, on considère la fonction*

$$L : t \longmapsto \int_\Omega \left[\delta u + (M-u)^{-\gamma} e^{\alpha p (v+1)^\beta}\right](t,x)dx,$$

où α, β, γ, δ, p *et* M *sont des constantes positives telles que*

$$\beta \geq 1,\ \ \|u_0\|_\infty < M < \frac{2\gamma}{\alpha\beta\ell n}\ \ et\ \ \gamma = \frac{4ab}{(a-b)^2}. \tag{3.6}$$

Alors, il existe $\delta > 0$ *et* $p > \frac{n}{2}$ *tels que*

$$L \quad est\ décroissante\ sur \quad [0,T^*). \tag{3.7}$$

3.3 Preuves des résultats principaux

Il nous faut d'abord présenter le lemme suivant qui nous aurons besoin pour démontrer la proposition 3.2.1.

Lemme 3.3.1. *Soit* (u,v) *une solution de* (3.1)-(3.4) *sur* $[0,T^*)\times\Omega$*, alors sous les hypothèses (**A1**)-(**A3**), nous avons*

$$\int_\Omega f(u(x,t),v(x,t))dx \leq -\frac{d}{dt}\int_\Omega u(x,t)dx \tag{3.8}$$

et il existe $\delta_1 > 0$ *et* $p > \frac{n}{2}$ *tels que*

$$\int_\Omega \left[\alpha p\beta M(v+1)^{\beta-1}g(u,v) - \gamma f(u,v)\right] e^{\alpha p(v+1)^\beta}dx \leq \delta_1 \int_\Omega f(u,v)dx, \tag{3.9}$$

où α, β, γ *et* M *sont des constantes strictement positives vérifiant* (3.6).

Preuve du Lemme 3.3.1. Il suffit d'intégrer les deux membres de l'équation (3.1) satisfaite par u sur Ω, pour obtenir (3.8). Il reste à montrer (3.9).

D'après les conditions (3.6) on obtient $\frac{n}{2} < \frac{\gamma}{\alpha\beta\ell M}$, donc on peut choisir p tel que $\frac{n}{2} < p < \frac{\gamma}{\alpha\beta\ell M}$.

D'après l'hypothèse (**A2**), nous avons

$$\begin{aligned} &\left[\alpha p\beta M(v+1)^{\beta-1}g(u,v) - \gamma f(u,v)\right] e^{\alpha p(v+1)^\beta} \\ \leq\ &\left[\alpha p\beta M(v+1)^{\beta-1}\psi(v) - \gamma\right] e^{\alpha p(v+1)^\beta} f(u,v). \end{aligned}$$

Puisque $\alpha p\beta\ell M < \gamma$ et $(\eta+1)^{\beta-1}\psi(\eta)$ tend vers ℓ lorsque $\eta \to +\infty$, il existe $\eta_0 > 0$ tel que pour tout $\eta > \eta_0$, on ait

$$\left[\alpha p\beta M(\eta+1)^{\beta-1}\psi(\eta) - \gamma\right] e^{\alpha p(\eta+1)^\beta} f(\xi,\eta) \leq 0.$$

D'autre part, si η est dans l'intervalle compact $[0,\eta_0]$, alors la fonction continue

$$\eta \longmapsto \left[\alpha p\beta M(\eta+1)^{\beta-1}\psi(\eta) - \gamma\right] e^{\alpha p(\eta+1)^\beta}$$

est bornée. Par conséquent, on obtient (3.9). □

Nous passons maintenant à la démonstration de la Proposition 3.2.1.

Preuve de la Proposition 3.2.1. Dérivons $L(t)$ par rapport à t et utilisons la formule de Green, on obtient

$$\frac{d}{dt}L(t) = \delta \frac{d}{dt}\int_{\Omega} u(x,t)dx + I + J, \tag{3.10}$$

où

$$\begin{aligned} I &= \int_{\partial\Omega}\left[a\gamma\frac{\partial u}{\partial \nu} + b\alpha p\beta(M-u)(v+1)^{\beta-1}\frac{\partial v}{\partial \nu}\right](M-u)^{-\gamma-1}e^{\alpha p(v+1)^{\beta}}ds \\ &- \int_{\Omega}\Big[a\gamma(1+\gamma)|\nabla u|^2 + \alpha p\beta\gamma(a+b)(M-u)(v+1)^{\beta-1}\nabla u\nabla v \\ &+ b\alpha p\beta(M-u)^2\left(\beta-1+\alpha p\beta(v+1)^{\beta}\right)(v+1)^{\beta-2}|\nabla v|^2\Big](M-u)^{-\gamma-2}e^{\alpha p(v+1)^{\beta}}dx, \end{aligned}$$

et

$$J = \int_{\Omega}\left[\alpha p\beta(M-u)(v+1)^{\beta-1}g(u,v) - \gamma f(u,v)\right](M-u)^{-\gamma-1}e^{\alpha p(v+1)^{\beta}}dx,$$

où ds désigne l'élément de surface de la dimension $(n-1)$.

Puisque $\beta \geq 1$, alors d'après (3.4), nous obtenons

$$I \leq -\int_{\Omega} Q(\nabla u, \nabla v)(M-u)^{-\gamma-2}e^{\alpha p(v+1)^{\beta}}dx,$$

où

$$\begin{aligned} Q(\nabla u, \nabla v) &= a\gamma(1+\gamma)|\nabla u|^2 + \alpha p\beta\gamma(a+b)(M-u)(v+1)^{\beta-1}\nabla u\nabla v \\ &\quad + b\left(\alpha p\beta(M-u)(v+1)^{\beta-1}\right)^2|\nabla v|^2 \end{aligned}$$

est une forme quadratique par rapport aux ∇u et ∇v.

Le discriminant de Q est donné par

$$D = \gamma\left(\alpha p\beta(M-u)(v+1)^{\beta-1}\right)^2\left[\gamma(a-b)^2 - 4ab\right].$$

A partir de (3.6), nous avons $Q(\nabla u, \nabla v) \geq 0$ et par conséquent

$$I \leq 0. \tag{3.11}$$

En ce qui concerne le terme J, puisque $0 \leq u \leq \|u_0\|_\infty < M$, on observe que

$$J \leq (M - \|u_0\|_\infty)^{-\gamma-1}\int_{\Omega}\left[\alpha p\beta M(v+1)^{\beta-1}g(u,v) - \gamma f(u,v)\right]e^{\alpha p(v+1)^{\beta}}dx.$$

Grâce à (3.9), on obtient

$$J \leq \delta_1(M - \|u_0\|_\infty)^{-\gamma-1}\int_{\Omega} f(u,v)dx.$$

Posons $\delta = \delta_1 (M - \|u_0\|_\infty)^{-\gamma-1}$ et utilisons (3.8), nous obtenons

$$J \leq -\delta \frac{d}{dt} \int_\Omega u(x,t)dx. \tag{3.12}$$

De (3.10)-(3.12), nous concluons que

$$\frac{d}{dt} L(t) \leq 0.$$

Ceci conclut la démonstration de la Proposition 3.2.1. □

Nous pouvons maintenant faire la preuve du Théorème 3.2.1.

Preuve du Théorème 3.2.1. Dans ce qui suit p est la même que dans la Proposition 3.2.1.
Puisque $M^{-\gamma} \leq (M-\xi)^{-\gamma}$ pour tout $\xi \in [0, \|u_0\|_\infty]$, on a

$$\|g(u,v)\|_p^p = \int_\Omega |g(u,v)|^p dx \leq M^\gamma K^p L(t),$$

où

$$K = \max_{0 \leq \xi \leq \|u_0\|_\infty} \varphi(\xi).$$

D'après la Proposition 3.2.1, on en déduit que

$$\begin{aligned} \|g(u,v)\|_p^p &\leq M^\gamma K^p L(0) \\ &\leq |\Omega| M^\gamma K^p \left[\delta \|u_0\|_\infty + (M - \|u_0\|_\infty)^{-\gamma} e^{\alpha p \|v_0 + 1\|_\infty^\beta} \right]. \end{aligned}$$

Alors $g(u(t,.), v(t,.))$ est uniformément bornée sur $L^p(\Omega)$ pour tout $t \in [0, T^*)$ avec $p > \frac{n}{2}$. En utilisant les résultats de régularité pour les solutions des équations paraboliques (voir, par exemple, [35], [50] et Proposition 1.2.6), nous concluons que les solutions de (3.1)-(3.4) sont uniformément bornées sur $[0, +\infty) \times \Omega$. □

3.4 Comportement asymptotique de solutions

Dans cette section, nous traitons le comportement en grand temps de solutions classiques du problème (3.1)-(3.4).

Avant d'énoncer notre résultat, rappelons quelques propriétés de la théorie des semi-groupes analytiques.
Pour chaque $p \in (1, +\infty)$, on peut définir un opérateur linéaire fermé A sur $L^p(\Omega)$ avec domaine $D(A)$ par

$$\begin{aligned} Aw &= -d\Delta w \quad \text{pour} \quad w \in D(A), \\ \|w\|_{2,p} &\leq C\left(\|w\|_p + \|Aw\|_p\right), \quad \text{pour} \quad w \in D(A), \quad \text{et} \\ D(A) &= \left\{ w \in W^{2,p}(\Omega) : \lambda w + (1-\lambda)\frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \right\}, \end{aligned}$$

où $\|\cdot\|_{2,p}$ est la norme dans l'espace de Sobolev usuel $W^{2,p}(\Omega)$, d, C sont des constantes strictement positives et λ est une fonction de classe C^1 sur $\partial\Omega$ telle que $0 \leq \lambda \leq 1$.

Il est bien connu que $-A$ engendre un semi-groupe analytique d'opérateurs linéaires bornés $\left\{e^{-tA}\right\}_{t\geq 0}$ sur $L^p(\Omega)$ et que

$$\|A^m e^{-tA} w\|_p \leq C_m t^{-m} \|w\|_p, \quad \text{pour} \quad t > 0, \quad w \in L^p(\Omega), \tag{3.13}$$

avec une certaine constante positive C_m pour $m = 0, 1, 2, ...$ (voir, par exemple, [19]).
En utilisant le théorème d'interpolation (voir, par exemple, [41]), on obtient

$$\|\nabla\left(e^{-tA} - e^{-sA}\right) w\|_p^2 \leq C\|\left(e^{-tA} - e^{-sA}\right) w\|_p \|A\left(e^{-tA} - e^{-sA}\right) w\|_p, \tag{3.14}$$

pour $0 < s \leq t$, $w \in L^p(\Omega)$ et une certaine constante $C > 0$.

Lemme 3.4.1. *Pour toute fonction h dans $L^q((0, +\infty), L^p(\Omega))$ avec $q > 2$, nous définissons la fonction w par :*

$$w(t) = e^{-tA} w_0 + \int_0^t e^{-(t-\sigma)A} h(\sigma) d\sigma \tag{3.15}$$

où w_0 est une fonction positive dans $L^\infty(\Omega)$.
Alors, pour $0 < s \leq t$, nous avons

$$\|\nabla w(t) - \nabla w(s)\|_p \leq C(ts)^{\frac{-1}{2}} (t-s)^{\frac{1}{2}} + C(t-s)^\theta \left(\int_0^t \|h(\sigma)\|_p^q d\sigma\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{3.16}$$

où $\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$.

Preuve du Lemme 3.4.1. A partir de (3.15), nous avons

$$\begin{aligned}
\nabla w(t) - \nabla w(s) &= \nabla\left(e^{-tA} - e^{-sA}\right) w_0 \\
&\quad + \int_0^s \nabla\left(e^{-(t-\sigma)A} - e^{-(s-\sigma)A}\right) h(\sigma) d\sigma \\
&\quad + \int_s^t \nabla e^{-(t-\sigma)A} h(\sigma) d\sigma \\
&= I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

Pour l'estimation de I_1, nous utilisons (3.14) et (3.13) avec $m = 0, 2$,

$$\begin{aligned}
\|I_1\|_p &= \|\nabla\left(e^{-tA} - e^{-sA}\right) w_0\|_p \\
&\leq C\|w_0\|_p^{\frac{1}{2}} \|A\left(e^{-tA} - e^{-sA}\right) w_0\|_p^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\|w_0\|_p^{\frac{1}{2}} \left(\int_s^t \|A^2 e^{-\sigma A} w_0\|_p d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C(ts)^{\frac{-1}{2}} (t-s)^{\frac{1}{2}} \|w_0\|_p.
\end{aligned}$$

Le terme I_2 est estimé en utilisant (3.14), (3.13) avec $m = 0,2$ et l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}
\|I_2\|_p &\leq \int_0^s \|\nabla\left(e^{-(t-\sigma)A} - e^{-(s-\sigma)A}\right)h(\sigma)\|_p d\sigma \\
&\leq C\int_0^s \|h(\sigma)\|_p^{\frac{1}{2}} \|A\left(e^{-(t-\sigma)A} - e^{-(s-\sigma)A}\right)h(\sigma)\|_p^{\frac{1}{2}} d\sigma \\
&\leq C\int_0^s \|h(\sigma)\|_p^{\frac{1}{2}} \left(\int_{s-\sigma}^{t-\sigma} \|A^2 e^{-\xi A}h(\sigma)\|_p d\xi\right)^{\frac{1}{2}} d\sigma \\
&\leq C(t-s)^{\frac{1}{2}} \int_0^s (t-\sigma)^{\frac{-1}{2}}(s-\sigma)^{\frac{-1}{2}} \|h(\sigma)\|_p d\sigma \\
&\leq C(t-s)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^s (t-\sigma)^{\frac{-q}{2(q-1)}}(s-\sigma)^{\frac{-q}{2(q-1)}} d\sigma\right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_0^s \|h(\sigma)\|_p^q d\sigma\right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
&\int_0^s (t-\sigma)^{\frac{-q}{2(q-1)}}(s-\sigma)^{\frac{-q}{2(q-1)}} d\sigma = \int_0^s (t-s+\sigma)^{\frac{-q}{2(q-1)}} \sigma^{\frac{-q}{2(q-1)}} d\sigma \\
&\leq \int_0^\infty (t-s+\sigma)^{\frac{-q}{2(q-1)}} \sigma^{\frac{-q}{2(q-1)}} d\sigma \\
&\leq (t-s)^{\frac{-q}{2(q-1)}} \int_0^{t-s} \sigma^{\frac{-q}{2(q-1)}} d\sigma + \int_{t-s}^\infty \sigma^{\frac{-q}{q-1}} d\sigma \\
&\leq C(t-s)^{\frac{-1}{q-1}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|I_2\|_p \leq C(t-s)^\theta \left(\int_0^t \|h(\sigma)\|_p^q d\sigma\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Pour l'estimation de I_3, nous utilisons (3.14), (3.13) avec $m = 0,1$ et l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}
\|I_3\|_p &\leq \int_s^t \|\nabla e^{-(t-\sigma)A}h(\sigma)\|_p d\sigma \\
&\leq C\int_s^t \|h(\sigma)\|_p^{\frac{1}{2}} \|Ae^{-(t-\sigma)A}h(\sigma)\|_p^{\frac{1}{2}} d\sigma \\
&\leq C\int_s^t (t-\sigma)^{\frac{-1}{2}} \|h(\sigma)\|_p d\sigma \\
&\leq C\left(\int_s^t (t-\sigma)^{\frac{-q}{2(q-1)}} d\sigma\right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_s^t \|h(\sigma)\|_p^q d\sigma\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C(t-s)^\theta \left(\int_0^t \|h(\sigma)\|_p^q d\sigma\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Tenant compte les estimations ci-dessus, on obtient (3.16). □

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat de cette section concernant le comportement asymptotique de solutions du problème (3.1)-(3.4).

Théorème 3.4.1. *Soit Ω un ouvert connexe et borné de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1. Soit (u,v) une solution de* (3.1)-(3.4). *Alors, lorsque $t \to +\infty$, nous avons*

$$\|u(t)-u^*\|_\infty \longrightarrow 0,$$
$$\|v(t)-v^*\|_\infty \longrightarrow 0,$$

où u^* et v^* sont des constantes positives telles que

$$f(u^*,v^*)=g(u^*,v^*)=0.$$

Preuve du Théorème 3.4.1. En multipliant l'équation (3.1) par u, en intégrant sur $(0,t)\times\Omega$ et en appliquant la formule de Green, alors d'après (3.3) et (3.4), on obtient

$$\|u(t)\|_2^2+2a\int_0^t\|\nabla u(s)\|_2^2ds+2\int_0^t\int_\Omega u(s)f(u,v)(s)dxds\le\|u_0\|_2^2,$$

à partir de laquelle on en déduit que

$$\int_0^t\|\nabla u(s)\|_2^2ds \quad \text{est uniformément borné.}$$

De la même manière, nous avons

$$\|v(t)\|_2^2+2b\int_0^t\|\nabla v(s)\|_2^2ds\le\|v_0\|_2^2+2\int_0^t\int_\Omega v(s)g(u,v)(s)dxds.$$

D'une part, en tenant compte de (**A2**), la majoration uniforme de (u,v) et (3.8), on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_\Omega v(s)g(u,v)(s)dxds &\le \int_0^t\int_\Omega v(s)\psi(v(s))f(u,v)(s)dxds\\ &\le C\int_0^t\int_\Omega f(u,v)(s)dxds\\ &\le C\left(\int_\Omega u_0(x)dx-\int_\Omega u(x)dx\right)\\ &\le C|\Omega|\|u_0\|_\infty.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\int_0^t\|\nabla v(s)\|_2^2ds \quad \text{est uniformément borné.}$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Hölder, la majoration uniforme de (u,v) et (3.8), on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^t\|f(u,v)(s)\|_p^{3p}ds &\le \int_0^t\left(\int_\Omega f(u,v)(s)dx\right)\left(\int_\Omega f(u,v)(s)^{\frac{3p-1}{2}}dx\right)^2ds\\ &\le C\int_0^t\int_\Omega f(u,v)(s)dxds\\ &\le C\left(\int_\Omega u_0(x)dx-\int_\Omega u(x)dx\right)\\ &\le C|\Omega|\|u_0\|_\infty,\end{aligned}$$

à partir de laquelle, en utilisant (**A2**), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|g(u,v)(s)\|_p^{3p} ds &\leq \int_0^t \|\psi(v(s))f(u,v)(s)\|_p^{3p} ds \\
&\leq C\int_0^t \|f(u,v)(s)\|_p^{3p} ds \\
&\leq K\int_0^t \int_\Omega f(u,v)(s) dx ds \\
&\leq K\left(\int_\Omega u_0(x)dx - \int_\Omega u(x)dx\right) \\
&\leq K|\Omega|\|u_0\|_\infty.
\end{aligned}$$

Maintenant, puisque (u,v) est une solution de (3.1)-(3.4) sur $(0,+\infty)\times\Omega$, alors, en utilisant le Lemme 3.4.1 avec $q=3p$, on en déduit que

$$t \longmapsto \|\nabla u(t)\|_2 \quad \text{et} \quad t \longmapsto \|\nabla v(t)\|_2,$$

sont uniformément continues sur $[\varepsilon,+\infty)$ pour tout $\varepsilon>0$.
D'après les arguments ci-dessus, nous concluons que

$$\lim_{t\to+\infty} \|\nabla u(t)\|_2 = \lim_{t\to+\infty} \|\nabla v(t)\|_2 = 0. \tag{3.17}$$

D'après (3.1), (3.2), (3.4), (**A2**), la majoration uniforme de v et (3.8), on obtient

$$\frac{d}{dt}\overline{u}(t) \leq 0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}((1+\delta_2)\overline{u}(t)+\overline{v}(t)) \leq 0,$$

où $\overline{u}$, $\overline{v}$ sont respectivement les valeurs moyennes sur Ω de u, v et δ_2 est une constante positive.
Par conséquent, nous concluons que

$$\lim_{t\to+\infty} \overline{u}(t) = u^* \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} \overline{v}(t) = v^*,$$

où u^* et v^* sont des constantes positives.
Tenant compte du fait que $\{u(t)\}_{t\geq\varepsilon}$ et $\{v(t)\}_{t\geq\varepsilon}$ sont relativement compactes dans $C(\overline{\Omega})$ (voir, par exemple, [17]), (3.17) et en utilisant l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, on obtient

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = u^* \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} v(t) = v^*, \quad \text{sur} \quad C(\overline{\Omega}).$$

Puisque, d'après (3.8) et (**A2**), les intégrales

$$\int_0^t \int_\Omega f(u,v) dx ds \quad \text{et} \quad \int_0^t \int_\Omega g(u,v) dx ds$$

sont uniformément bornés, on obtient

$$f(u^*,v^*) = g(u^*,v^*) = 0.$$

Ainsi, la preuve du Théorème 3.4.1 est terminée. □

CHAPITRE 4

RÉGIONS INVARIANTES ET EXISTENCE GLOBALE POUR DES SYSTÈMES DE RÉACTION-DIFFUSION À MATRICE DE DIFFUSION TRIDIAGONALE

4.1 Introduction

Dans ce chapitre [33], nous considérons le système de réaction-diffusion suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a_{11}\Delta u - a_{12}\Delta v = f(u,v,w) \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a_{21}\Delta u - a_{22}\Delta v - a_{23}\Delta w = g(u,v,w) \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - a_{32}\Delta v - a_{11}\Delta w = h(u,v,w) \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \quad (4.3)$$

avec les conditions aux limites :

$$\left.\begin{array}{l} \lambda u + (1-\lambda)\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \beta_1, \\ \lambda v + (1-\lambda)\dfrac{\partial v}{\partial \nu} = \beta_2, \\ \lambda w + (1-\lambda)\dfrac{\partial w}{\partial \nu} = \beta_3, \end{array}\right. \quad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \quad (4.4)$$

et les données initiales :

$$u(0,x) = u_0(x),\ v(0,x) = v_0(x),\ w(0,x) = w_0(x) \quad \text{sur } \Omega, \quad (4.5)$$

où :

(i) $0 < \lambda < 1$ et $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,3$, pour les conditions aux limites non homogènes de Robin.

(ii) $\lambda = \beta_i = 0$, $i = 1,2,3$, pour les conditions aux limites homogènes de Neumann.

(iii) $1 - \lambda = \beta_i = 0$, $i = 1,2,3$, pour les conditions aux limites homogènes de Dirichlet.

Ω est un ouvert borné de classe C^1 de $\mathbb{R}^N$ de frontière $\partial\Omega$ et $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ désigne la dérivée normale extérieure sur $\partial\Omega$.

Les termes de diffusion a_{ij} ($i,j = 1,2,3$ et $(i,j) \neq (1,3),\ (3,1)$) sont supposés des constantes strictement positives avec $a_{11} = a_{33}$ et

$$(a_{12} + a_{21})^2 + (a_{23} + a_{32})^2 < 4a_{11}a_{22}$$

qui assure la parabolicité du système et implique en même temps que la matrice de diffusion

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{11} \end{pmatrix}$$

est définie positive. Les valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 ($\lambda_1 < \lambda_2$, $\lambda_3 = a_{11}$) de A sont strictement positives.
Si nous posons

$$\underline{a} = \min\{a_{11}, a_{22}\} \text{ et } \overline{a} = \max\{a_{11}, a_{22}\},$$

alors la positivité des coefficients de diffusion implique que

$$\lambda_1 < \underline{a} \leq \lambda_3 \leq \overline{a} < \lambda_2.$$

Les données initiales sont supposées dans la région Σ définie par

$$\Sigma = \begin{cases} \left\{(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3 : \mu_2 v_0 \leq a_{21} u_0 + a_{23} w_0 \leq \mu_1 v_0,\ a_{32} u_0 \leq a_{12} w_0\right\} \\ \qquad \text{si } \mu_2 \beta_2 \leq a_{21}\beta_1 + a_{23}\beta_3 \leq \mu_1 \beta_2,\ a_{32}\beta_1 \leq a_{12}\beta_3, \\ \\ \left\{(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3 : \mu_2 v_0 \leq a_{21} u_0 + a_{23} w_0 \leq \mu_1 v_0,\ a_{12} w_0 \leq a_{32} u_0\right\} \\ \qquad \text{si } \mu_2 \beta_2 \leq a_{21}\beta_1 + a_{23}\beta_3 \leq \mu_1 \beta_2,\ a_{12}\beta_3 \leq a_{32}\beta_1, \\ \\ \left\{\begin{array}{l} (u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3 : \\ \frac{1}{\mu_2}(a_{21}u_0 + a_{23}w_0) \leq v_0 \leq \frac{1}{\mu_1}(a_{21}u_0 + a_{23}w_0),\ a_{32}u_0 \leq a_{12}w_0 \end{array}\right\} \\ \qquad \text{si } \frac{1}{\mu_2}(a_{21}\beta_1 + a_{23}\beta_3) \leq \beta_2 \leq \frac{1}{\mu_1}(a_{21}\beta_1 + a_{23}\beta_3), a_{32}\beta_1 \leq a_{12}\beta_3, \\ \\ \left\{\begin{array}{l} (u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3 : \\ \frac{1}{\mu_2}(a_{21}u_0 + a_{23}w_0) \leq v_0 \leq \frac{1}{\mu_1}(a_{21}u_0 + a_{23}w_0),\ a_{32}u_0 \geq a_{12}w_0 \end{array}\right\} \\ \qquad \text{si } \frac{1}{\mu_2}(a_{21}\beta_1 + a_{23}\beta_3) \leq \beta_2 \leq \frac{1}{\mu_1}(a_{21}\beta_1 + a_{23}\beta_3),\ a_{32}\beta_1 \geq a_{12}\beta_3, \end{cases}$$

où

$$\mu_1 = \underline{a} - \lambda_1 > 0 > \mu_2 = \underline{a} - \lambda_2.$$

Puisque nous pouvons utiliser la même méthode pour traiter tous les cas de Σ, nous traitons seulement le premier cas.

Nous supposons que les fonctions f, g et h sont continûment différentiables, polynomialement bornées sur Σ, $(f(r_1,r_2,r_3), g(r_1,r_2,r_3), h(r_1,r_2,r_3))$ pointe à l'intérieur de Σ pour tout $(r_1,r_2,r_3) \in \partial\Sigma$ (on dit que (f,g,h) strictement dans Σ sur $\partial\Sigma$), *i.e.*,

$$a_{21}f(r_1,r_2,r_3) + a_{23}h(r_1,r_2,r_3) \leq \mu_1 g(r_1,r_2,r_3), \tag{4.6}$$

pour tous r_1, r_2 et r_3 tels que

$$\mu_2 r_2 \leq a_{21}r_1 + a_{23}r_3 = \mu_1 r_2 \quad \text{et} \quad a_{32}r_1 \leq a_{12}r_3,$$

et

$$\mu_2 g(r_1,r_2,r_3) \leq a_{21}f(r_1,r_2,r_3) + a_{23}h(r_1,r_2,r_3), \tag{4.6a}$$

pour tous r_1, r_2 et r_3 tels que

$$\mu_2 r_2 = a_{21}r_1 + a_{23}r_3 \leq \mu_1 r_2 \quad \text{et} \quad a_{32}r_1 \leq a_{12}r_3,$$

et

$$a_{32}f(r_1,r_2,r_3) \leq a_{12}h(r_1,r_2,r_3), \tag{4.6b}$$

pour tous r_1, r_2 et r_3 tels que

$$\mu_2 r_2 \leq a_{21}r_1 + a_{23}r_3 \leq \mu_1 r_2 \quad \text{et} \quad a_{32}r_1 = a_{12}r_3,$$

et pour des constantes strictement positives E et D, nous avons

$$(Ef + Dg + h)(u,v,w) \leq C_1(u+v+w+1), \tag{4.7}$$

pour tout (u,v,w) dans Σ, où C_1 est une constante strictement positive.

Dans le cas de deux composantes, certains résultats ont été obtenus dans le cas d'un couplage triangulaire ($a_{12} = 0$), par exemple, Kouachi et Youkana [34] ont généralisé la méthode de Haraux et Youkana [18] pour traiter les fonctions f et g satisfont

$$f(u,v) = -\lambda F(u,v),\ g(u,v) = +\mu F(u,v),\ F(u,v) \geq 0,$$

sous la condition

$$\lim_{s\to+\infty}\left[\frac{\ln(1+F(r,s))}{s}\right] < \alpha^*, \text{ pour tout } r \geq 0,$$

avec

$$\alpha^* = \frac{2a_{11}a_{22}}{n(a_{11}-a_{22})^2\|u_0\|_\infty}\min\left\{\frac{\lambda}{\mu}, \frac{a_{11}-a_{22}}{a_{21}}\right\},$$

où les coefficients de diffusion a_{11}, a_{22} vérifient $a_{11} > a_{22} > 0$ et a_{21}, λ, μ sont des constantes strictement positives.

Dans le cas d'un couplage plein, Kanel et Kirane [23] ont prouvé l'existence globale de solutions avec des conditions aux limites homogènes de Neumann et toutes données initiales positives et bornées lorsque

$$g(u,v) = -f(u,v) = uv^m,\ \ m > 0 \ \text{ est un entier impair,}$$

sous les conditions

- $0 < a_{22} - a_{11} < a_{21}$,
- $0 < a_{12} \ll 1$,
- $|a_{22} - a_{11} + a_{12} - a_{21}| < \dfrac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 C_p}$,

où

$$\gamma_1 = \frac{a_{22} - a_{11} - \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2a_{12}} < -1$$

et C_p est la même constante utilisée dans le Théorème 1.2.5 (Théorème 1 dans [36]). Par la suite, ils ont amélioré leurs résultats dans [25] pour obtenir l'existence globale sous les restrictions suivantes

- $a_{22} < a_{11} + a_{21}$,
- $a_{12} < \varepsilon_0 = \dfrac{a_{11}a_{22}(a_{11} + a_{21} - a_{22})}{a_{11}a_{22} + a_{21}(a_{11} + a_{21} - a_{22})}$ si $a_{11} \leq a_{22} < a_{11} + a_{21}$,
- $a_{12} < \min\left\{\dfrac{1}{2}(a_{11} + a_{21}), \varepsilon_0\right\}$ si $a_{22} < a_{11}$,

et

- $|F(v)| \leq C_F(1 + |v|^{1-\varepsilon}), \quad vF(v) \geq 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}$,

où ε et C_F sont des constantes positives avec $\varepsilon < 1$ et

$$g(u,v) = -f(u,v) = uF(v).$$

Dans la même direction, Kouachi [32] a réussi a construire des régions invariantes, dans lesquelles il est possible d'établir l'existence globale de solutions pour les systèmes de réaction-diffusion à matrice pleine 2×2 avec des conditions aux limites non homogènes et des données initiales dans ces régions sous une croissance polynomiale sur les termes de réaction.

De nombreuses opérations chimiques et biologiques sont décrites par des systèmes de réaction diffusion avec une matrice des coefficients de diffusion tridiagonale. Les composantes $u(t,x)$, $v(t,x)$ et $w(t,x)$ peuvent être représentent des concentrations des produits chimiques ou la densité des populations (voir, par exemple, Cussler [12] et [13]).

Nous mentionnons que l'étude des systèmes fortement couplés qui ne sont pas triangulaires dans la partie de diffusion est relativement plus difficile. D'après les explosions de solutions en temps fini mentionnées dans [45], nous pouvons en effet prouver que nous ne pouvons pas espérer d'existence globale de solutions classiques pour de tels systèmes non-triangulaires même si les données initiales sont régulières, les solutions sont positives et les termes non-linéaires sont négatifs, structure qui assurait l'existence globale dans le cas diagonal.

Notre but dans ce travail est d'essayer d'étendre les résultats connus dans le cas diagonal à la situation tridiagonale sans aucune hypothèse supplémentaire sur les coefficients de diffusion (ou le moins possible) au moins dans le cas d'une croissance polynomiale sur les termes non-linaires. Pour cela, nous construisons des régions invariantes où nous pouvons montrer que pour toute donnée initiale dans l'une de ces régions, le problème (4.1)-(4.5) est équivalent à un problème dont l'existence globale résulte par une technique usuelle basée sur la fonctionnelle de Lyapunov (voir, par exemple, Kirane et Kouachi [27], Kouachi et Youkana [34] et Kouachi [32]).

4.2 Existence locale et régions invariantes

Cette section est consacrée à prouver que si champ de vecteurs (f,g,h) pointe à l'intérieur de Σ sur $\partial\Sigma$, alors Σ est une région invariante pour le problème (4.1)-(4.5), *i.e.*, la solution reste dans Σ pour toute donnée initiale dans Σ. Une fois que les régions invariantes sont construites, les deux problèmes de l'existence locale et de l'existence globale deviendront plus facile. Pour le premier problème nous démontrons que le système (4.1)-(4.3) avec les conditions aux limites (4.4) et les données initiales dans Σ est équivalent à un problème dont l'existence locale tout au long de l'intervalle du temps $[0,T^*)$ peut être obtenu par une procédure usuelle et pour le second, nous avons besoin des régions invariantes comme a été expliqué dans la section précédente.

Le résultat principal de cette section est présenté dans la proposition suivante

Proposition 4.2.1. *Supposons que (f,g,h) strictement dans Σ sur $\partial\Sigma$, alors pour tout (u_0,v_0,w_0) dans Σ la solution (u,v,w) du problème (4.1)-(4.5) reste dans Σ pour tout t dans $[0,T^*)$.*

Preuve. Soient $(x_{i1},x_{i2},x_{i3})^t$, $i=1,2,3$, les vecteurs propres de la matrice A^t associés à ses valeurs propres λ_i, $i=1,2,3$ $(\lambda_1<\lambda_3<\lambda_2)$. En multipliant les équations (4.1), (4.2) et (4.3) du système par x_{i1}, x_{i2} et x_{i3} respectivement et en additionnant les équations obtenues, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}z_1-\lambda_1\Delta z_1 = F_1(z_1,z_2,z_3) \text{ sur } (0,T^*)\times\Omega, \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}z_2-\lambda_2\Delta z_2 = F_2(z_1,z_2,z_3) \text{ sur } (0,T^*)\times\Omega, \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}z_3-\lambda_3\Delta z_3 = F_3(z_1,z_2,z_3) \text{ sur } (0,T^*)\times\Omega, \tag{4.10}$$

avec les conditions aux limites

$$\lambda z_i+(1-\lambda)\frac{\partial z_i}{\partial \nu}=\rho_i,\ i=1,2,3, \text{ sur } (0,T^*)\times\partial\Omega, \tag{4.11}$$

et les données initiales

$$z_i(0,x)=z_i^0(x),\ i=1,2,3, \text{ sur } \Omega, \tag{4.12}$$

où

$$z_i=x_{i1}u+x_{i2}v+x_{i3}w,\ i=1,2,3, \text{ sur } (0,T^*)\times\Omega, \tag{4.13}$$

$$\rho_i=x_{i1}\beta_1+x_{i2}\beta_2+x_{i3}\beta_3,\ i=1,2,3,$$

et

$$F_i(z_1,z_2,z_3)=x_{i1}f+x_{i2}g+x_{i3}h,\ i=1,2,3, \tag{4.14}$$

pour tout (u,v,w) dans Σ.

Tout d'abord, comme il a été mentionné ci-dessus, on note que la condition de la parabolicité du systèm (4.1)-(4.3) implique aussi la parabolicité du système (4.8)-(4.10), puisque

$$(a_{12}+a_{21})^2+(a_{23}+a_{32})^2<4a_{11}a_{22} \Longrightarrow \begin{cases} \det A>0, \\ a_{11}a_{22}-a_{23}a_{32}>0. \end{cases}$$

Puisque λ_1, λ_2 et λ_3 $(\lambda_1<\lambda_3<\lambda_2)$ sont les valeurs propres de la matrice A^t, le problème (4.1)-(4.5) est équivalent au problème (4.8)-(4.12) et pour prouver que Σ est une région invariante pour le systèm (4.1)-(4.3), il suffit de prouver que

$$\Sigma=\left\{\begin{array}{c} (u_0,v_0,w_0)\in\mathbb{R}^3: \\ z_i^0=x_{i1}u_0+x_{i2}v_0+x_{i3}w_0\geq 0,\ i=1,2,3 \end{array}\right\}, \tag{4.15}$$

pour certaines constantes x_{ij}, $i,j=1,2,3$, et que la région

$$\left\{(z_1^0,z_2^0,z_3^0)\in\mathbb{R}^3 : z_i^0\geq 0, i=1,2,3\right\}=[0,+\infty)^3 \tag{4.16}$$

est invariante pour le système (4.8)-(4.10) avec les même constantes x_{ij}, $i,j=1,2,3$, ci-dessus.

Puisque $(x_{i1},x_{i2},x_{i3})^t$ est un vecteur propre de la matrice A^t associé à la valeur propre λ_i, $i=1,2,3$, alors

$$\left\{\begin{array}{l}(a_{11}-\lambda_i)x_{i1}+a_{21}x_{i2} \qquad\qquad =0\\ \\ a_{12}x_{i1}+(a_{22}-\lambda_i)x_{i2}+a_{32}x_{i3}=0\\ \\ \qquad\qquad a_{23}x_{i2}+(a_{11}-\lambda_i)x_{i3}=0\end{array}\right. ,\ i=1,2,3.$$

Si nous supposons, sans perte de généralité, que $a_{11}\leq a_{22}$ et nous choisissons $x_{12}=\mu_1$, $x_{22}=-\mu_2$ et $x_{33}=a_{12}$, nous obtenons

$$x_{i1}u_0+x_{i2}v_0+x_{i3}w_0\geq 0, i=1,2,3$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{r}-a_{21}u_0+\mu_1v_0-a_{23}w_0\geq 0,\\ \\ a_{21}u_0-\mu_2v_0+a_{23}w_0\geq 0,\\ \\ -a_{32}u_0+a_{12}w_0\geq 0.\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{r}\mu_2v_0\leq a_{21}u_0+a_{23}w_0\leq\mu_1v_0,\\ \\ a_{32}u_0\leq a_{12}w_0.\end{array}\right.$$

Alors, (4.15) est prouvée. De plus, nous pouvons écrire (4.13) sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l}z_1=-a_{21}u+\mu_1v-a_{23}w,\\ \\ z_2=a_{21}u-\mu_2v+a_{23}w,\\ \\ z_3=-a_{32}u+a_{12}w.\end{array}\right. \tag{4.13a}$$

Maintenant, pour prouver que la région $[0,+\infty)^3$ est invariante pour le système (4.8)-(4.10), il suffit de montrer que $F_i(z_1,z_2,z_3)\geq 0$ pour tout (z_1,z_2,z_3) tel que $z_i=0$ et $z_j\geq 0$, $j=1,2,3\,(j\neq i)$, $i=1,2,3$ grâce à la méthode de la région invariante (voir Smoller [52]). En utilisant les expressions (4.14), on obtient

$$\left\{\begin{array}{l}F_1=-a_{21}f+\mu_1g-a_{23}h,\\ \\ F_2=a_{21}f-\mu_2g+a_{23}h,\\ \\ F_3=-a_{32}f+a_{12}h,\end{array}\right. \tag{4.14a}$$

pour tout (u,v,w) dans Σ. Comme, d'après (4.6), (4.6a) et (4.6b), nous avons $F_i(z_1,z_2,z_3)\geq 0$ pour tout (z_1,z_2,z_3) tel que $z_i=0$ et $z_j\geq 0$, $j=1,2,3\,(j\neq i)$, $i=1,2,3$, alors $z_i(t,x)\geq 0$, $i=1,2,3$, pour tout $(t,x)\in[0,T^*)\times\Omega$. Par conséquent Σ est une région invariante pour le système (4.1)-(4.3). $\square$

De plus, le système (4.1)-(4.3) avec les conditions aux limites (4.4) et les données initiales dans Σ est équivalent au système (4.8)-(4.10) avec les conditions aux limites (4.11) et les données initiales positives (4.12). Comme il a été mentionné au début de cette section et puisque les constantes ρ_i, $i = 1,2,3$, données par

$$\begin{cases} \rho_1 = -a_{21}\beta_1 + \mu_1\beta_2 - a_{23}\beta_3, \\ \\ \rho_2 = a_{21}\beta_1 - \mu_2\beta_2 + a_{23}\beta_3, \\ \\ \rho_3 = -a_{32}\beta_1 + a_{12}\beta_3, \end{cases}$$

sont positives, nous avons pour toute donnée initiale dans $C\left(\overline{\Omega}\right)$ ou dans $L^p\left(\Omega\right)$, $p \in \left(1,+\infty\right]$, l'existence locale et l'unicité de solutions du problème (4.8)-(4.12) et par conséquent celles du problème (4.1)-(4.5) découlent de la théorie de base de l'existence pour les équations différentielles abstraites semi-linéaires (voir, par exemple, Friedman [15], Henry [19] et Pazy [42]). Les solutions sont classiques sur $[0,T^*) \times \Omega$ où T^* est le temps maximal d'existence dans $L^\infty\left(\Omega\right)$. La solution locale se prolonge à une solution globale par des estimations a priori.
Une fois que les régions invariantes sont construites, on peut appliquer la technique de Lyapunov pour établir l'existence globale de solutions uniques du problème (4.1)-(4.5).

4.3 Existence globale

En tant que le déterminant du système algébrique linéaire (4.13), par rapport aux variables u, v et w, est différent de zéro. Alors pour prouver l'existence globale de solutions du problème (4.1)-(4.5), il suffit de la prouver pour le problème (4.8)-(4.12). Pour cette fin, il est bien connu qu'il suffit de trouver des estimations uniformes de $\left\|F_i\left(z_1,z_2,z_3\right)\right\|_p$, $i = 1,2,3$ sur $[0,T]$, $T < T^*$, pour certain $p > N/2$ (voir, par exemple, [35], [50] et Proposition 1.2.6) où $\|.\|_p$ désigne les normes usuelles dans les espaces $L^p\left(\Omega\right)$, définies par

$$\|u\|_p^p = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |u(x)|^p\,dx, 1 \leq p < \infty, \text{ et } \|u\|_\infty = \sup_{x\in\Omega}\operatorname{ess}|u(x)|.$$

Soient θ et σ deux constantes positives telles que

$$\begin{aligned} \theta &> A_{12}, && (4.17)\\ \left(\theta^2 - A_{12}^2\right)\left(\sigma^2 - A_{23}^2\right) &> \left(A_{13} - A_{12}A_{23}\right)^2, && (4.18) \end{aligned}$$

où

$$A_{ij} = \frac{\lambda_i + \lambda_j}{2\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}, i,j = 1,2,3\,(i<j).$$

et soient

$$\theta_q = \theta^{(p-q+1)^2} \text{ et } \sigma_p = \sigma^{p^2}, \text{ pour } q = 0,1,...,p \text{ et } p = 0,1,...,n, \qquad (4.19)$$

où n est un entier positif.

Le résultat principal de cette section est énoncé dans le théorème suivant :

Théorème 4.3.1. *Soit $\left(z_1(t,.), z_2(t,.), z_3(t,.)\right)$ une solution positive de (4.8)-(4.12). On introduit la fonctionnelle*

$$t \longmapsto L(t) = \int_{\Omega} H_n\left(z_1(t,x), z_2(t,x), z_3(t,x)\right) dx, \tag{4.20}$$

où

$$H_n(z_1,z_2,z_3) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{p} C_n^p C_p^q \theta_q \sigma_p z_1^q z_2^{p-q} z_3^{n-p}, \tag{4.21}$$

avec n un entier positif et $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$.
Alors, la fonctionnelle L est uniformément bornée sur l'intervalle $[0,T]$, $T < T^*$.

Pour démontrer le Théorème 4.3.1, nous avons besoin de quelques lemmes préparatoires.

Lemme 4.3.1. *Soit H_n le polynôme homogène défini par (4.21). Alors*

$$\frac{\partial H_n}{\partial z_1} = n\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{p} C_{n-1}^p C_p^q \theta_{q+1}\sigma_{p+1} z_1^q z_2^{p-q} z_3^{(n-1)-p}, \tag{4.22}$$

$$\frac{\partial H_n}{\partial z_2} = n\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{p} C_{n-1}^p C_p^q \theta_{q}\sigma_{p+1} z_1^q z_2^{p-q} z_3^{(n-1)-p}, \tag{4.23}$$

$$\frac{\partial H_n}{\partial z_3} = n\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{p} C_{n-1}^p C_p^q \theta_{q}\sigma_{p} z_1^q z_2^{p-q} z_3^{(n-1)-p}. \tag{4.24}$$

Preuve . Dérivons H_n par rapport à z_1, nous obtenons

$$\frac{\partial H_n}{\partial z_1} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{p} q C_n^p C_p^q \theta_q \sigma_p z_1^{q-1} z_2^{p-q} z_3^{n-p}.$$

En utilisant le fait que

$$qC_p^q = pC_{p-1}^{q-1} \text{ et } pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}, \tag{4.25}$$

pour $q = 1,2,...,p,\ \ p = 1,2,...,n$, on obtient

$$\frac{\partial H_n}{\partial z_1} = n\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{p} C_{n-1}^{p-1} C_{p-1}^{q-1} \theta_q \sigma_p z_1^{q-1} z_2^{p-q} z_3^{n-p},$$

Si en changeant dans les sommes les indices $q-1$ et $p-1$ par q et p respectivement, on déduit (4.22). Pour la formule (4.23), la dérivation de H_n par rapport à z_2 donne

$$\frac{\partial H_n}{\partial z_2} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=0}^{p-1} (p-q)\, C_n^p C_p^q \theta_q \sigma_p z_1^q z_2^{p-q-1} z_3^{n-p}.$$

En tenant compte de

$$C_p^q = C_p^{p-q},\ q = 0,1,...,p-1 \text{ et } p = 1,2,...,n, \tag{4.26}$$

en utilisant (4.25) et en changeant l'indice $p-1$ par p, on obtient (4.23).
Enfin,si nous dérivons H_n par rapport à z_3, nous obtenons

$$\frac{\partial H_n}{\partial z_3} = \sum_{p=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{p}(n-p)\,C_n^p C_p^q \theta_q \sigma_p z_1^q z_2^{p-q} z_3^{n-p-1}.$$

Comme $(n-p)\,C_n^p = (n-p)\,C_n^{n-p} = nC_{n-1}^{n-p-1} = nC_{n-1}^p$, alors on déduit (4.24).
□

Lemme 4.3.2. *Les dérivées partielles secondes de H_n sont données par*

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial z_1^2} = n(n-1)\sum_{p=0}^{n-2}\sum_{q=0}^{p} C_{n-2}^p C_p^q \theta_{q+2}\sigma_{p+2} z_1^q z_2^{p-q} z_3^{(n-2)-p}, \tag{4.27}$$

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial z_1 \partial z_2} = n(n-1)\sum_{p=0}^{n-2}\sum_{q=0}^{p} C_{n-2}^p C_p^q \theta_{q+1}\sigma_{p+2} z_1^q z_2^{p-q} z_3^{(n-2)-p}, \tag{4.28}$$

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial z_1 \partial z_3} = n(n-1)\sum_{p=0}^{n-2}\sum_{q=0}^{p} C_{n-2}^p C_p^q \theta_{q+1}\sigma_{p+1} z_1^q z_2^{p-q} z_3^{(n-2)-p}, \tag{4.29}$$

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial z_2^2} = n(n-1)\sum_{p=0}^{n-2}\sum_{q=0}^{p} C_{n-2}^p C_p^q \theta_{q}\sigma_{p+2} z_1^q z_2^{p-q} z_3^{(n-2)-p}, \tag{4.30}$$

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial z_2 \partial z_3} = n(n-1)\sum_{p=0}^{n-2}\sum_{q=0}^{p} C_{n-2}^p C_p^q \theta_{q}\sigma_{p+1} z_1^q z_2^{p-q} z_3^{(n-2)-p}, \tag{4.31}$$

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial z_3^2} = n(n-1)\sum_{p=0}^{n-2}\sum_{q=0}^{p} C_{n-2}^p C_p^q \theta_{q}\sigma_{p} z_1^q z_2^{p-q} z_3^{(n-2)-p}. \tag{4.32}$$

Preuve . Dérivons $\dfrac{\partial H_n}{\partial z_1}$, donnée par la formule (4.22), par rapport à z_1, on obtient

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial z_1^2} = n\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{q=1}^{p} qC_{n-1}^p C_p^q \theta_{q+1}\sigma_{q+1} z_1^{q-1} z_2^{p-q} z_3^{(n-1)-p}.$$

Utilisons (4.25), on déduit (4.27).
Dérivons $\dfrac{\partial H_n}{\partial z_1}$, donnée par la formule (4.22), par rapport à z_2, on obtient

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial z_1 \partial z_2} = n\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{q=0}^{p-1}(p-q)\,C_{n-1}^p C_p^q \theta_{q+1}\sigma_{p+1} z_1^q z_2^{p-q-1} z_3^{(n-1)-p}.$$

Appliquons (4.26) et puis (4.25), on déduit (4.28).
Dérivons $\dfrac{\partial H_n}{\partial z_1}$, donnée par la formule (4.22), par rapport à z_3, on obtient

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial z_1 \partial z_3} = n\sum_{p=0}^{n-2}\sum_{q=0}^{p}((n-1)-p)\,C_{n-1}^p C_p^q \theta_{q+1}\sigma_{p+1} z_1^q z_2^{p-q} z_3^{(n-2)-p}.$$

Appliquons successivement (4.26), (4.25) et (4.26) une deuxième fois, on déduit (4.29).
Dérivons $\frac{\partial H_n}{\partial z_2}$, donnée par la formule (4.23), par rapport à z_2, on obtient

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial z_2^2} = n\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{q=0}^{p-1}(p-q)\,C_{n-1}^{p}C_p^q\theta_q\sigma_{p+1}z_1^q z_2^{p-q-1}z_3^{(n-1)-p}.$$

Une application de (4.26) et puis de (4.25) donne (4.30).
Dérivons $\frac{\partial H_n}{\partial z_2}$, donnée par la formule (4.23), par rapport à z_3, on obtient

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial z_2 \partial z_3} = n\sum_{p=0}^{n-2}\sum_{q=0}^{p}((n-1)-p)\,C_{n-1}^{p}C_p^q\theta_q\sigma_p z_1^q z_2^{p-q}z_3^{(n-2)-p}.$$

Appliquons (4.26) et puis (4.25) on trouve (4.31). Enfin nous obtenons (4.32), par la dérivation de $\frac{\partial H_n}{\partial z_3}$ par rapport à z_3 et l'application successive de (4.26), (4.25) et (4.26) une deuxième fois.

Preuve du Théorème 4.3.1. Dérivons $L(t)$ par rapport à t, on obtient

$$\begin{aligned}
L'(t) &= \int_\Omega \left(\frac{\partial H_n}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial t}+\frac{\partial H_n}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial t}+\frac{\partial H_n}{\partial z_3}\frac{\partial z_3}{\partial t}\right)dx\\
&= \int_\Omega \left(\lambda_1\frac{\partial H_n}{\partial z_1}\Delta z_1+\lambda_2\frac{\partial H_n}{\partial z_2}\Delta z_2+\lambda_3\frac{\partial H_n}{\partial z_3}\Delta z_3\right)dx\\
&\quad +\int_\Omega \left(\frac{\partial H_n}{\partial z_1}F_1+\frac{\partial H_n}{\partial z_2}F_2+\frac{\partial H_n}{\partial z_3}F_3\right)dx\\
&= I+J,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
I &= \int_\Omega \left(\lambda_1\frac{\partial H_n}{\partial z_1}\Delta z_1+\lambda_2\frac{\partial H_n}{\partial z_2}\Delta z_2+\lambda_3\frac{\partial H_n}{\partial z_3}\Delta z_3\right)dx,\\
J &= \int_\Omega \left(\frac{\partial H_n}{\partial z_1}F_1+\frac{\partial H_n}{\partial z_2}F_2+\frac{\partial H_n}{\partial z_3}F_3\right)dx.
\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green à la première intégrale, nous obtenons $I = I_1 + I_2$, où

$$I_1 = \int_{\partial\Omega}\left(\lambda_1\frac{\partial H_n}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial \nu}+\lambda_2\frac{\partial H_n}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial \nu}+\lambda_3\frac{\partial H_n}{\partial z_3}\frac{\partial z_3}{\partial \nu}\right)ds,$$

et

$$\begin{aligned}
I_2 &= -\int_\Omega \left[\lambda_1\frac{\partial^2 H_n}{\partial z_1^2}|\nabla z_1|^2+(\lambda_1+\lambda_2)\frac{\partial^2 H_n}{\partial z_1\partial z_2}\nabla z_1\nabla z_2\right.\\
&\quad +(\lambda_1+\lambda_3)\frac{\partial^2 H_n}{\partial z_1\partial z_3}\nabla z_1\nabla z_3+\lambda_2\frac{\partial^2 H_n}{\partial z_2^2}|\nabla z_2|^2\\
&\quad \left.+(\lambda_2+\lambda_3)\frac{\partial^2 H_n}{\partial z_2\partial z_3}\nabla z_2\nabla z_3+\lambda_3\frac{\partial^2 H_n}{\partial z_3^2}|\nabla z_3|^2\right]dx,
\end{aligned}$$

où ds désigne un élément de surface de dimension $(n-1)$.

Nous prouvons qu'il existe une constante positive C_2 indépendante de $t \in [0,T^*)$ telle que

$$I_1 \leq C_2 \quad \text{pour tout} \quad t \in [0,T^*), \tag{4.33}$$

et que

$$I_2 \leq 0. \tag{4.34}$$

A cette fin, nous avons suivi le même raisonnement de [30].

(i) Si $0 < \lambda < 1$, en utilisant les conditions aux limites (4.11), nous obtenons

$$I_1 = \int_{\partial\Omega} \left(\lambda_1 \frac{\partial H_n}{\partial z_1} (\gamma_1 - \alpha z_1) + \lambda_2 \frac{\partial H_n}{\partial z_2} (\gamma_2 - \alpha z_2) + \lambda_3 \frac{\partial H_n}{\partial z_3} (\gamma_3 - \alpha z_3) \right) ds,$$

où $\alpha = \dfrac{\lambda}{1-\lambda}$ et $\gamma_i = \dfrac{\rho_i}{1-\lambda}$, $i = 1,2,3$.
Puisque

$$\begin{aligned} H(z_1,z_2,z_3) &= \lambda_1 \frac{\partial H_n}{\partial z_1} (\gamma_1 - \alpha z_1) + \lambda_2 \frac{\partial H_n}{\partial z_2} (\gamma_2 - \alpha z_2) + \lambda_3 \frac{\partial H_n}{\partial z_3} (\gamma_3 - \alpha z_3) \\ &= P_{n-1}(z_1,z_2,z_3) - Q_n(z_1,z_2,z_3), \end{aligned}$$

où P_{n-1} et Q_n sont des polynômes à coefficients positifs et de degrés $n-1$ et n respectivement et comme la solution est positive, alors on ait

$$\limsup_{(|z_1|+|z_2|+|z_3|)\to+\infty} H(z_1,z_2,z_3) = -\infty \tag{4.35}$$

ce qui preuve que H est uniformément borné sur $[0,+\infty)^3$ et par conséquent, on obtient (4.33).

(ii) Si $\lambda = 0$, alors $I_1 = 0$ sur $[0,T^*)$.

(iii) Le cas de conditions homogènes de Dirichlet est trivial, puisque dans ce cas, la positivité de la solution sur $[0,T^*) \times \Omega$ implique que

$$\frac{\partial z_1}{\partial \nu} \leq 0, \ \frac{\partial z_2}{\partial \nu} \leq 0 \ \text{et} \ \frac{\partial z_3}{\partial \nu} \leq 0 \ \text{ sur } \ [0,T^*) \times \partial\Omega.$$

Par conséquent, on obtient encore (4.33) avec $C_2 = 0$.

Maintenant, nous prouvons (4.34). En appliquant le Lemme 4.3.2, on obtient

$$I_2 = -n(n-1) \int_\Omega \sum_{p=0}^{n-2} \sum_{q=0}^{p} C_{n-2}^p C_p^q \left[(B_{pq} z) \cdot z \right] dx,$$

où

$$B_{pq} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \theta_{q+2} \sigma_{p+2} & \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} \theta_{q+1} \sigma_{p+2} & \frac{\lambda_1+\lambda_3}{2} \theta_{q+1} \sigma_{p+1} \\ \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} \theta_{q+1} \sigma_{p+2} & \lambda_2 \theta_q \sigma_{p+2} & \frac{\lambda_2+\lambda_3}{2} \theta_q \sigma_{p+1} \\ \frac{\lambda_1+\lambda_3}{2} \theta_{q+1} \sigma_{p+1} & \frac{\lambda_2+\lambda_3}{2} \theta_q \sigma_{p+1} & \lambda_3 \theta_q \sigma_p \end{pmatrix},$$

pour $q = 0,1,...,p,\ \ p = 0,1,...,n-2$ et $z = (\nabla z_1, \nabla z_2, \nabla z_3)^t$.

Les formes quadratiques (par rapport aux $\nabla z_1, \nabla z_2$ et ∇z_3) associées aux matrices B_{pq}, $q = 0,1,...,p$, $p = 0,1,...,n-2$ sont positives, puisque leurs déterminants principaux successifs Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont aussi, selon critère de Sylvester. Pour voir ceci, nous avons

1) $\Delta_1 = \lambda_1 \theta_{q+2} \sigma_{p+2} > 0,$

pour $q = 0,1,...,p$ et $p = 0,1,...,n-2$.

2) $$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \lambda_1 \theta_{q+2} \sigma_{p+2} & \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} \theta_{q+1} \sigma_{p+2} \\ \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} \theta_{q+1} \sigma_{p+2} & \lambda_2 \theta_q \sigma_{p+2} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 \theta_{q+1}^2 \sigma_{p+2}^2 \left(\theta^2 - A_{12}^2\right),$$

pour $q = 0,1,...,p$ et $p = 0,1,...,n-2$.

En utilisant (4.17), on obtient $\Delta_2 > 0$.

3) $$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \lambda_1 \theta_{q+2} \sigma_{p+2} & \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} \theta_{q+1} \sigma_{p+2} & \frac{\lambda_1+\lambda_3}{2} \theta_{q+1} \sigma_{p+1} \\ \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} \theta_{q+1} \sigma_{p+2} & \lambda_2 \theta_q \sigma_{p+2} & \frac{\lambda_2+\lambda_3}{2} \theta_q \sigma_{p+1} \\ \frac{\lambda_1+\lambda_3}{2} \theta_{q+1} \sigma_{p+1} & \frac{\lambda_2+\lambda_3}{2} \theta_q \sigma_{p+1} & \lambda_3 \theta_q \sigma_p \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \theta_{q+1}^2 \theta_q \sigma_{p+2} \sigma_{p+1}^2 \left[\left(\theta^2 - A_{12}^2\right)\left(\sigma^2 - A_{23}^2\right) - \left(A_{13} - A_{12} A_{23}\right)^2\right],$$

pour $q = 0,1,...,p$ et $p = 0,1,...,n-2$.

En utilisant (4.18), on ait $\Delta_3 > 0$.

Par conséquent, nous avons (4.34).

Concernant le terme J, nous substituons les expressions des dérivées partielles données par le Lemme 4.3.1 dans la deuxième intégrale, nous obtenons

$$J = \int_\Omega \left[n \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{p} C_{n-1}^p C_p^q z_1^q z_2^{p-q} z_3^{(n-1)-p} \right] \left(\theta_{q+1} \sigma_{p+1} F_1 + \theta_q \sigma_{p+1} F_2 + \theta_q \sigma_p F_3\right) dx.$$

En utilisant les expressions (4.14a), on obtient

$$\begin{aligned}
&\theta_{q+1}\sigma_{p+1}F_1+\theta_q\sigma_{p+1}F_2+\theta_q\sigma_pF_3\\
=\ &\left(-\theta_{q+1}\sigma_{p+1}a_{21}+a_{21}\theta_q\sigma_{p+1}-a_{32}\theta_q\sigma_p\right)f+\left(\theta_{q+1}\sigma_{p+1}\mu_1-\mu_2\theta_q\sigma_{p+1}\right)g\\
&+\left(-\theta_{q+1}\sigma_{p+1}a_{23}+a_{23}\theta_q\sigma_{p+1}+a_{12}\theta_q\sigma_p\right)h\\
=\ &\left(a_{23}\left(\theta_q\sigma_{p+1}-\theta_{q+1}\sigma_{p+1}\right)+a_{12}\theta_q\sigma_p\right)\\
&\cdot\left(\frac{a_{21}\left(\theta_q\sigma_{p+1}-\theta_{q+1}\sigma_{p+1}\right)-a_{32}\theta_q\sigma_p}{a_{23}\left(\theta_q\sigma_{p+1}-\theta_{q+1}\sigma_{p+1}\right)+a_{12}\theta_q\sigma_p}f+\frac{\theta_{q+1}\sigma_{p+1}\mu_1-\mu_2\theta_q\sigma_{p+1}}{a_{23}\left(\theta_q\sigma_{p+1}-\theta_{q+1}\sigma_{p+1}\right)+a_{12}\theta_q\sigma_p}g+h\right)\\
=\ &\theta_{q+1}\sigma_p\left(a_{23}\frac{\sigma_{p+1}}{\sigma_p}\left(\frac{\theta_q}{\theta_{q+1}}-1\right)+a_{12}\frac{\theta_q}{\theta_{q+1}}\right)\\
&\cdot\left(\frac{a_{21}\frac{\sigma_{p+1}}{\sigma_p}\left(\frac{\theta_q}{\theta_{q+1}}-1\right)-a_{32}\frac{\theta_q}{\theta_{q+1}}}{a_{23}\frac{\sigma_{p+1}}{\sigma_p}\left(\frac{\theta_q}{\theta_{q+1}}-1\right)+a_{12}\frac{\theta_q}{\theta_{q+1}}}f+\frac{\mu_1\frac{\sigma_{p+1}}{\sigma_p}-\mu_2\frac{\theta_q}{\theta_{q+1}}\frac{\sigma_{p+1}}{\sigma_p}}{a_{23}\frac{\sigma_{p+1}}{\sigma_p}\left(\frac{\theta_q}{\theta_{q+1}}-1\right)+a_{12}\frac{\theta_q}{\theta_{q+1}}}g+h\right).
\end{aligned}$$

Comme $\frac{\theta_q}{\theta_{q+1}}$ et $\frac{\sigma_{p+1}}{\sigma_p}$ sont suffisamment larges lorsque nous choisissons θ et σ assez grandes, en utilisant la condition (4.7) et la relation (4.13a) successivement, on obtient, pour une constante appropriée C_3, l'inégalité suivante

$$J\le C_3\int_\Omega\left[\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{p}\left(z_1+z_2+z_3+1\right)C_{n-1}^pC_p^qz_1^qz_2^{p-q}z_3^{(n-1)-p}\right]dx.$$

Pour prouver que la fonctionnelle L est uniformément bornée sur l'intervalle $[0,T]$, on écrit tout d'abord

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{p}\left(z_1+z_2+z_3+1\right)C_{n-1}^pC_p^qz_1^qz_2^{p-q}z_3^{(n-1)-p}\\
&=R_n\left(z_1,z_2,z_3\right)+S_{n-1}\left(z_1,z_2,z_3\right),
\end{aligned}$$

où $R_n\left(z_1,z_2,z_3\right)$ et $S_{n-1}\left(z_1,z_2,z_3\right)$ sont deux polynômes homogènes de degrés n et $n-1$, respectivement. Puisque les polynômes H_n et R_n sont les deux de degré n, il existe une constante positive C_4 telle que

$$\int_\Omega R_n\left(z_1,z_2,z_3\right)dx\le C_4\int_\Omega H_n\left(z_1,z_2,z_3\right)dx.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder à l'intégrale $\int_\Omega S_{n-1}\left(z_1,z_2,z_3\right)dx$, on obtient

$$\int_\Omega S_{n-1}\left(z_1,z_2,z_3\right)dx\le|\Omega|^{\frac{1}{n}}\left(\int_\Omega\left(S_{n-1}\left(z_1,z_2,z_3\right)\right)^{\frac{n}{n-1}}dx\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Puisque pour tous $z_1 \geq 0$ et $z_2, z_3 > 0$, on ait

$$\frac{(S_{n-1}(z_1,z_2,z_3))^{\frac{n}{n-1}}}{H_n(z_1,z_2,z_3)} = \frac{(S_{n-1}(\xi_1,\xi_2,1))^{\frac{n}{n-1}}}{H_n(\xi_1,\xi_2,1)},$$

où $\xi_1 = \frac{z_1}{z_2}$, $\xi_2 = \frac{z_2}{z_3}$ et

$$\lim_{\substack{\xi_1 \to +\infty \\ \xi_2 \to +\infty}} \frac{(S_{n-1}(\xi_1,\xi_2,1))^{\frac{n}{n-1}}}{H_n(\xi_1,\xi_2,1)} < +\infty,$$

alors il existe une constante positive C_5 telle que

$$\frac{(S_{n-1}(z_1,z_2,z_3))^{\frac{n}{n-1}}}{H_n(z_1,z_2,z_3)} \leq C_5, \text{ pour tout } z_1,z_2,z_3 \geq 0.$$

Par conséquent, la fonctionnelle L satisfait l'inégalité différentielle

$$L'(t) \leq C_6 L(t) + C_7 L^{\frac{n-1}{n}}(t),$$

qui s'écrit, pour $Z = L^{\frac{1}{n}}$, comme suit

$$nZ' \leq C_6 Z + C_7.$$

Une intégration simple sur l'intervalle $[0,t]$, $0 \leq t \leq T$, donne

$$Z \leq (Z_0 + \frac{C_7}{C_6}) e^{\frac{C_6}{n}t} - \frac{C_7}{C_6}.$$

Ainsi, la fonctionnelle L est uniformément bornée sur l'intervalle $[0,T]$, ce qui termine la preuve du Théorème 4.3.1. □

Corollaire 4.3.1. *Supposons que les fonctions $f(r_1,r_2,r_3)$, $g(r_1,r_2,r_3)$ et $h(r_1,r_2,r_3)$ sont continûment différentiables sur Σ, (f,g,h) strictement dans Σ sur $\partial\Sigma$ et satisfont la condition (4.7). Alors, toutes les solutions de (4.1)-(4.5) avec des données initiales dans Σ et uniformément bornées sur Ω sont dans $L^\infty(0,T;L^p(\Omega))$ pour tout $p \geq 1$.*

Preuve. La preuve de ce corollaire est une conséquence immédiate du Théorème 4.3.1, l'inégalité évidente

$$\int_\Omega (z_1+z_2+z_3)^p \, dx \leq L(t) \text{ sur } [0,T^*),$$

et les expressions (4.13a). □

Proposition 4.3.1. *Sous les hypothèses du Corollaire 4.3.1, si $f(r_1,r_2,r_3)$, $g(r_1,r_2,r_3)$ et $h(r_1,r_2,r_3)$ sont polynomialement bornées sur Σ, alors toutes les solutions de (4.1)-(4.4) avec des données initiales dans Σ et uniformément bornées sur Ω sont globales.*

Preuve. Comme il a été mentionné ci-dessus, il suffit de trouver des estimations uniformes de $\|F_1(z_1,z_2,z_3)\|_p$, $\|F_2(z_1, z_2,z_3)\|_p$ et $\|F_3(z_1,z_2,z_3)\|_p$ sur $[0,T]$, $T < T^*$ pour certain $p > \dfrac{N}{2}$.
Puisque les réactions $f(u,v,w)$, $g(u,v,w)$ et $h(u,v,w)$ sont polynomialement bornées sur Σ, en utilisant les relations (4.13a) et (4.14a) nous obtenons que $F_1(z_1,z_2,z_3)$, $F_2(z_1,z_2,z_3)$ et $F_3(z_1,z_2,z_3)$ sont aussi polynomialement bornées et la preuve devient une conséquence immédiate du Corollaire 4.3.1. $\square$

CONCLUSION

Les études antérieures relatives aux systèmes de réaction-diffusion ont montré que les termes de réaction à croissance plus rapide qu'un polynôme restent en géneral ouverts. Il convient cependant à noter que certaines travaux (voir, par exemple, Brabanova [4], Herrero *et al.* [20], Kouachi et Youkana [34] et Kouachi [32]) autorisent, sous certaines conditions, une croissance exponentielle comme limite maximale pour les systèmes triangulaires.

Nous avons donc établi dans ce travail quelques résultats nouveaux concernant l'exstence globale en temps de solutions pour des systèmes de réaction-diffusion où la structure des termes non-linéaires assure a priori que la masse totale de la solution est uniformément bornée. Ces résultats vont dans deux directions distinctes :

Dans la première partie de notre travail nous avons réussi à obtenir, sous des hypothèses de structure sur les termes de réaction, un résultat d'existence globale de solutions classiques pour des systèmes de réaction-diffusion triangulaires avec une possibilité d'une croissance sur les termes non-linéaires plus rapide qu'une exponentielle. Mais le problème en question demeure ouvert lorsque $g = f$ et $\beta > 1$, malgré que la conjecture prévoit à la possibilité d'une explosion en temps fini (voir, par exemple, Herrero *et al.* [20] et Pierre [44]).

Dans la seconde partie de ce travail, nous avons réussi à étendre les résultats connus dans le cas diagonal d'un système de réaction-diffusion 3×3 (voir S. Kouachi [29]) à la situation tridiagonale avec seulement la condition supplémentaire $a_{11} = a_{33}$ sur les coefficients de diffusion. Mais le problème reste ouvert sans cette condition. Le problème reste aussi ouvert pour les systèmes de réaction-diffusion à matrice de diffusion tridiagonale $m \times m, m > 3$, malgré qu'il y a des résultats positifs dans la situations diagonale dans le cas d'une croissance polynomiale sur les termes non-linéaires.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. D. Alikakos, *L^p-bounds of solutions of reaction-diffusion equations*, Comm. Partial Differential Equations **4** (1979), 827–868. (Cité page 39.)

[2] H. Amann, *Dynamic theory of quasilinear parabolic equations - I. Abstract evolution equations*, Nonlinear Anal. **12** (1988), 895–919. (Cité page 43.)

[3] D. G. Aronson and H. F. Weinberger, *"Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve pulse propagation"*, Lecture Notes in Mathematics **446**, Springer, Berlin, 1975. (Cité page 35.)

[4] A. Barabanova, *On the global existence of solutions of a reaction-diffusion equation with exponential nonlinearity*, Proc. Amer. Math. Soc. **122** (1994), 827–831. (Cité pages 4, 39, 41 et 67.)

[5] N. Boudiba, *Existence globale pour des sytèmes de réaction-diffusion avec contrôle de masse*, Thèse d'université, Université de Rennes 1, France, 1999. (Cité page 15.)

[6] N. Boudiba and M. Pierre, *Global existence for coupled reaction-diffusion systems*, J. Math. Ana. and Appl. **250** (2000), 1–12.

[7] H. Brezis, *"Analyse fonctionnelle : Théorie et applications"*, Masson, Paris, 1983. (Cité page 12.)

[8] K. Chueh, C. Conley and J. Smoller, *Positively invariant regions for systems of nonlinear diffusion equations*, Indiana Univ. Math. J. **26** (1977), 373–392. (Cité page 6.)

[9] E. Conway, D. Hoff and J. Smoller, *Large time behavior of solutions of systems of nonlinear reaction-diffusion equations*, SIAM J. Appl. Math. **35** (1978), 1–16. (Cité page 17.)

[10] F. Courchamp, M. Langlais and G. Sugihara, *Control of rabbits to protect island birds from cat predation*, Journal of Biological Conservation. **89** (1999), 219–225. (Cité page 34.)

[11] F. Courchamp, M. Langlais and G. Sugihara, *Rabbits killing birds : modelling the hyperpredation process*, Journal of Animal Ecology. **69** (2000), 154–164. (Cité page 34.)

[12] E. L. Cussler, *"Multicomponent diffusion, Chemical Engineering Monographs"*, Vol. **3**, Elsevier Publishing Scientific Company, Amesterdam, 1976. (Cité page 55.)

[13] E. L. Cussler, *"Diffusion, Mass Transfer in Fluid Systems"*, Second Edition, Cambridge University Press, 1997. (Cité page 55.)

[14] G. Duvaut, *"Mécanique des milieux continus"*, Masson, Paris, 1990. (Cité page 23.)

[15] A. Friedman, *"Partial differential equations of parabolic type"*, Prentice Hall Englewood Chiffs. N. J. 1964. (Cité page 58.)

[16] F. R. Gantmacher, *"Théorie des matrices. Tome 1 : Théorie générale"*, Dunod, Paris, 1966. (Cité page 12.)

[17] A. Haraux and M. Kirane, *Estimations C^1 pour des problèmes paraboliques non-linéaires*, Ann. Fac. Sci. Toulouse, **5** (1983), 265–280. (Cité page 50.)

[18] A. Haraux and A. Youkana, *On a result of K. Masuda concerning reaction-diffusion equations*, Tôhoku Math. J. **40** (1988), 159–163. (Cité pages 4, 6, 39, 41 et 53.)

[19] D. Henry, *"Geometric theory of semilinear parabolic equations"*, Lecture Notes in Mathematics **840**, Springer-Verlag, New York, 1981. (Cité pages 12, 43, 47 et 58.)

[20] M. A. Herrero, A. A. Lacey and J. J. L. Velazquez, *Global existence for reaction-diffusion systems modelling ignition*, Arch. Rational Mech. Anal. **142** (1998), 219–251. (Cité pages 4, 39, 40 et 67.)

[21] S. L. Hollis, R. H. Martin and M. Pierre, *Global existence and boundedness in reaction-diffusion systems*, SIAM J. Math. Anal. **18** (1987), 744–761. (Cité pages 3, 13, 39 et 43.)

[22] J. I. Kanel, *On global initial boundary-value problems for reaction diffusion systems with balance conditions*, Nonlinear Anal. **37** (1999), 971–995. (Cité pages 4 et 40.)

[23] J. I. Kanel and M. Kirane, *Pointwise a priori bounds for a strongly coupled system of reaction-diffusion equations with a balance law*, Math. Methods Appl. Sci. **21** (1998), 1227–1232. (Cité pages 6 et 53.)

[24] J. I. Kanel and M. Kirane, *Global solutions of reaction-diffusion systems with a balance law and nonlinearities of exponential growth*, J. Differential Equations **165** (2000), 24–41. (Cité page 40.)

[25] J. I. Kanel, M. Kirane and N. E. Tatar, *Pointwise a priori bounds for a strongly coupled system of reaction-diffusion equations*, Int. J. Differ. Equ. Appl. **1** (2000), 77–97. (Cité pages 7 et 54.)

[26] S. Kaplan, *On the growth of solutions of quasi-linear parabolic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **XVI** (1963), 305–330.

[27] M. Kirane and S. Kouachi, *Global solutions to a system of strongly coupled reaction-diffusion equations*, Nonlinear Anal. **26** (1996), 1387–1396. (Cité pages 8 et 55.)

[28] S. Kouachi, *Existence of global solutions to reaction-diffusion systems via a Lyapunov functional*, Electron. J. Differ. Equ. **2001** (2001), No. 68, pp. 1–10.

[29] S. Kouachi, *Existence of global solutions to reaction-diffusion systems with nonhomogeneous boundary conditions via a Lyapunov functional*, Electron. J. Differ. Equ. **2002** (2002), No. 88, pp. 1–13. (Cité pages 8 et 67.)

[30] S. Kouachi, *Global existence of solutions for reaction-diffusion systems with a full matrix of diffusion coefficients and nonhomogeneous boundary conditions*, Electron. j. Qual. Theory Differ. Equ., 2002, No. 2, pp. 1–10. (Cité page 62.)

[31] S. Kouachi, *Global existence of solutions in invariant regions for reaction-diffusion systems with a balance law and a full matrix of diffusion coefficients*, Electron. j. Qual. Theory Differ. Equ., 2003, No. 4, pp. 1–10.

[32] S. Kouachi, *Invariant regions and global existence of solutions for reaction-diffusion systems with full matrix of diffusion coefficients and nonhomogeneous boundary conditions*, Georgian Math. J. **11** (2004), 349–359. (Cité pages 7, 8, 54, 55 et 67.)

[33] S. Kouachi and B. Rebiai, *Invariant regions and global existence of solutions for reaction-diffusion systems with a tridiagonal matrix of diffusion coefficients*, accepted in Georgian Math. J. **17** (2010). (Cité page 51.)

[34] S. Kouachi and A. Youkana, *Global existence for a class of reaction-diffusion systems*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **49** (2001), 303–308. (Cité pages 6, 8, 41, 53, 55 et 67.)

[35] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov and N. N. Ural'ceva, *"Linear and quasi-linear equations of parabolic type"*, Amer. Math. Soc. 1968. (Cité pages 43, 46 et 58.)

[36] D. Lamberton, *Equations d'évolution linéaires associées a des semi-groupes de contractions dans les espaces L^p*, J. Funct. Anal. **72** (1987), 252–262. (Cité pages 7, 20 et 54.)

[37] S. Logan, *"Introduction à la cinétique chimique. Cours et exercices corrigés"*, Dunod, Paris, 1998. (Cité page 30.)

[38] T. R. Malthus, *"An essay on the principle of population"*, J. Johnson, in St. Paul's Church-yard, London, 1798. (Cité page 34.)

[39] R. H. Martin and M. Pierre, *Nonlinear reaction-diffusion systems*, in Nonlinear Equations in the Applied Sciences, W.F. Ames and C. Rogers ed., Math. Sci. Eng. **185**, Acad. Press, New York 1991. (Cité pages 4, 5, 14, 20, 39 et 41.)

[40] K. Masuda, *On the global existence and asymptotic behavior of solutions of reaction-diffusion equations*, Hokkaido Math. J. **12** (1983), 360–370. (Cité page 39.)

[41] S. Mizohata, *"The theory of partial differential equations"*, Cambridge University Press 1973. (Cité page 47.)

[42] A. Pazy, *"Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations"*, Appl. Math. Sci. **44**, Springer-Verlag, New York 1983. (Cité pages 18, 43 et 58.)

[43] M. Pierre, *Weak solutions and supersolutions in L^1 for reaction-diffusion systems*, J. Evol. Equ. **3** (2003), 153–168. (Cité pages 4 et 41.)

[44] M. Pierre, *Global existence in reaction-diffusion systems with dissipation of mass : a survey*, preprint. (Cité pages 5, 41 et 67.)

[45] M. Pierre and D. Schmitt, *Blow up in reaction-diffusion systems with dissipation of mass*, SIAM J. Math. Anal. **28** (1997), 259–269. (Cité pages 15 et 55.)

[46] M. Pierre and D. Schmitt, *Blow up in reaction-diffusion systems with dissipation of mass*, SIAM Rev. **42** (2000), 93–106 (electronic). (Cité pages 5 et 41.)

[47] M.A. Pozio and A. Tesei, *Global existence of solutions for a strongly coupled semilinear parabolic system*, Recent advances in nonlinear elliptic and parabolic problems (Nancy, 1988), 172–183, Pitman Res. Notes Math. Ser., **208** , Longman Sci. Tech., Harlow, 1989. (Cité page 6.)

[48] M.A. Pozio and A. Tesei, *Invariant rectangles and strongly coupled semilinear parabolic systems*, Forum Math. **2** (1990), 175–202. (Cité page 6.)

[49] B. Rebiai and S. Benachour, *Global classical solutions for reaction-diffusion systems with nonlinearities of exponential growth*, hal-00400191, version 1, accepted in J. Evol. Equ. **10** (2010). (Cité page 37.)

[50] F. Rothe, *"Global solutions of reaction-diffusion systems"*, Lecture Notes in Mathematics **1072**, Springer-Verlag, New York, 1984. (Cité pages 18, 43, 46 et 58.)

[51] D. Schmitt, *Existence globale ou explosion pour les sytèmes de réaction-diffusion avec contrôle de masse*, Thèse d'université, Université de Nancy 1, France, 1995. (Cité pages 5 et 41.)

[52] J. Smoller, *"Shock waves and reaction-diffusion equations"*, Springer-Verlag, New York 1983. (Cité pages 3, 17, 38 et 57.)

[53] V. A. Solonnikov, *Estimates for solutions of nonstationary Navier-Stokes equations*, J. Soviet. Math. **8** (1977), 467–529.

[54] V. Volterra, *"Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie"*, Gauthier-Villars, Paris, 1931. (Cité page 34.)

العنوان :

الوجود الكلي لحلول أنظمة الانتشار ورد الفعل مع مراقبة الكتلة

الملخص : هذا العمل هو مساهمة في الوجود الكلي لحلول أنظمة الانتشار ورد الفعل بالنسبة للزمن في الحالة التي تكون فيها بنية الحدود غير الخطية تستلزم أن الكتلة الكلية للحلول محدودة بإنتظام. هذا النوع من الأنظمة يظهر غالبا في التطبيقات .

مساهمتنا الأولى خصصت لدراسة الوجود الكلي وسلوك التقارب لحلول أنظمة الانتشار ورد الفعل في حالة التزايد الآسي أو أسرع بالنسبة للحدود غير الخطية .لهذا الغرض نستخدم تقنيات مناسبة تعتمد على أشباه المجموعات ، تقديرات الطاقة و الدالة "ليا بونوف".

في القسم الثاني من هذا العمل نهتم بدراسة الوجود الكلي بالنسبة للزمن لحلول أنظمة الانتشار ورد الفعل ذات مصفوفة انتشار "ترِيدياقونال ". لهذه الغاية نقوم بإ نشاء مناطق ثابتة من خلالها نستطيع إثبات انه من اجل كل معطاة أولية في هذه المناطق فاءن المسألة المعتبرة تكافئ مسألة يأتي الموجود الكلي لحلولها عن طريق التقنية المعتمدة على دالة "ليابونوف".

المفاتيح: أنظمة الانتشار ورد الفعل، المناطق الثابتة، دالة"ليابونوف" الوجود الكلي، سلوك التقارب .

Titre Existence globale pour des systèmes de réaction-diffusion avec contrôle de masse

Résumé Ce travail est une contribution à l'étude de l'existence globale en temps de solutions pour des systèmes de réaction-diffusion où la structure des termes non-linéaires assure a priori que la masse totale de la solution est uniformément bornée. ce type de systèmes apparaît souvent dans les applications.
Notre première contribution est consacrée à l'étude de l'existence globale et du comportement asymptotique de solutions des systèmes de réaction-diffusion dans le cas d'une croissance exponentielle (ou plus rapide) sur les termes non-linaires. À cette fin, nous utilisons des techniques appropriées qui sont basées sur les semi-groupes, les estimations de l'énergie et la fonctionnelle de Lyapunov.
Dans la seconde partie de ce travail, nous nous intéressons à l'étude de l'existence globale en temps pour des systèmes de réaction-diffusion à matrice de diffusion tridiagonale. Pour cela, nous construisons des régions invariantes où nous pouvons montrer que pour toute donnée initiale dans ces régions, le problème considéré est équivalent à un problème dont l'existence globale résulte par une technique usuelle basée sur la fonctionnelle de Lyapunov.

Mots-clés Systèmes de réaction-diffusion, régions invariantes, fonctionnelle de Lyapunov, globale existence, comportement asymptotique

Title Global existence for a class of reaction-diffusion systems with mass control

Abstract This work is a contribution to the study of global existence in time of solutions for reaction-diffusion systems where the structure of the nonlinear terms a priori implies that the total mass of the solution is uniformly bounded. This type of systems often appears in applications.
Our first contribution is devoted to the study of global existence and asymptotic behavior of solutions for reaction-diffusion systems with nonlinearities of exponential growth (or faster). For this purpose, we use the appropriate techniques which are based on semigroups, energy estimates and Lyapunov functional methods.
In the second part of this work, we are interested in the study of global existence in time for reaction-diffusion systems with a tridiagonal matrix of diffusion coefficients. For this end, we construct the invariant regions in which we can demonstrate that for any initial data in this regions, the problem considered is equivalent to a problem for which the global existence follows by a usual technique based on Lyapunov functional.

Keywords Reaction diffusion systems, invariant regions, Lyapunov functionals, global existence, asymptotic behavior

2000 Mathematics Subject Classification 35K45, 35K57, 35B40