République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mentouri Constantine
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

N°: D'ordre……/TE/2006
Série: ……./MAT/2006

THESE PRESENTEE POUR L'OBTENTION
DU
DIPLOME DE DOCTORAT EN SCIENCES

Présentée par Mr
BENKARA MOSTEFA MOHAMED CHERIF

SPECIALITE: TOPOLOGIE ALGEBRIQUE

LES INVARIANTS TOPOLOGIQUES EN ANALYSE MULTIVOQUE

Thèse soutenue le ….. /…. /2007 devant le jury

RAHMANI Fouad Lazhar	**Maître de Conférences,**	**Université Mentouri Constantine**	**Président.**
BENKAFADAR Mohamed Nasreddine	**Professeur,**	**Université Mentouri Constantine**	**Rapporteur.**
ZITOUNI.Mohamed	**Professeur,**	**USTHB**	**Examinateur.**
BOUZAR Cheikh	**Professeur,**	**Université d'Oran**	**Examinateur.**
BOUGHABA Soraya	**Maître de Conférences,**	**Université Mentouri Constantine**	**Examinatrice.**
HARNANE Mohaned Ouamar	**Maître de Conférences,**	**USTHB**	**Examinateur.**

TABLE DES MATIERES

Remerciements

Je remercie mon Directeur de thèse Monsieur le Professeur Benkafadar M.N., pour l'aide précieuse et les directives qu'il n'a pas cessé de me prodiguer tout le long de mon travail de recherche.

Je présente mes plus sincères remerciements à Monsieur le Maître de Conférences Rahmani Fouad Lazhar, qui m'a honoré en acceptant de présider le jury de soutenance.

J'exprime une profonde gratitude à Monsieur le Professeur Zitouni Mohamed qui a eu l'amabilité d'examiner ma thèse.

J'adresse mes sentiments les plus distingués au Professeur Bouzar Cheikh, qui a expertisé mon manuscrit.

Je transmets au Docteur Hernane Mohand mes sentiments les meilleurs pour l'attention qu'il a apporté afin de juger ce travail.

Je prie le Docteur Boughaba Soraya , Maître de Conférences à l'Université Mentouri Constantine, d'agréer l'expression de mes sentiments les plus respectueux pour l'intérêt qu'elle a apporté à la lecture de ma thèse.

Dédicace

Je dédie ce travail ,

à mes chers parents , à qui je dois tout le respect du monde ,

à ma femme et mon fils Amir ,

à mes frères , mes sœurs et mes amis .

INTRODUCTION

La topologie est une des branches les plus vigoureuses des mathématiques modernes et elle a eu de nombreuses répercussions sur les mathématiques classiques. Elle est devenue, il y a une cinquantaine d'années un domaine pleinement autonome des mathématiques et son développement majeur a eu lieu depuis trente ans. Les débuts de la topologie se trouvent dans les œuvres de Karl Weierstrass qui après 1860, découvrit et étudia le concept de limite d'une fonction. Puis vint le développement hardi de la théorie des ensembles de points par Georg Cantor (1874-1895), ce fut une base sur laquelle l'édifice topologique pouvait s'élever.
Le premier aspect, ou topologie ensembliste, fut définitivement établi par F. Hausdorff et son école entre 1915 et 1930 par J.W.Alexander, P.L.Alexandrov, S.Lefschetz et autres. Jusqu'en 1930, la topologie s'appelait analyse locale et ce fut Lefschetz qui le premier utilisa et popularisa le terme de topologie en publiant un livre avec ce titre en 1930.

Un second aspect de la topologie, appelé topologie combinatoire ou Algébrique, fut publié vers 1890 par Henri Poincaré dans sa théorie du calcul intégral à plusieurs dimensions. Une synthèse des topologies ensembliste et combinatoire fut réalisée par L.E.J.Brouwer dans ses études sur la notion de dimension (1908-1912). Elle envahit le calcul des variations avec la théorie des points critiques de M.Morse (Institute for advanced studies, Princeton), elle revigore la géométrie différentielle avec l'étude des faisceaux de fibres avec H.Whitney (Institute for advanced studies, Princeton), des formes différentielles avec G. de Rahm (Lausanne) et des groupes de Lie avec H. Hopf (Zurich). Elle obtient une révolution en algèbre moderne en lui donnant de nouveaux fondements et une nouvelle branche : la topologie Algébrique.

L'algèbre homologique est due à S. Eilenberg (Columbia University) et S. Maclane (University of Chicago) en 1946. Elle donna un nouveau souffle de vie à la géométrie algébrique par le biais de la cohomologie et trouva d'importantes applications dans les équations aux dérivées partielles à travers les travaux de J. Leray (Paris) et de M. Atiyah (Oxford).

Dans la plupart des applications, la topologie algébrique est un outil essentiel et très puissant pour démontrer des propositions fondamentales connues sous le nom de théorèmes d'existence. Rappelons qu'un théorème d'existence est un théorème qui affirme qu'il existe une solution particulière à tous les problèmes d'une certaine classe. De tels théorèmes sont souvent les théorèmes de base d'un thème d'étude. En ce qui nous concerne, dans ce travail, nous abordons les théorèmes d'existence dans la théorie des points de coïncidence et la théorie des points fixes en analyse multivoque.

Les outils mathématiques utilisés sont du domaine des catégories et foncteurs homologiques qui sont des éléments de algèbre commutative.

C'est dans ce contexte que se situe le travail de recherche présenté dans cette thèse.

Dans la catégorie $Top_{(2)}$ des paires espaces topologiques de Hausdorff et des applications univoques continues on caractérise une nouvelle classe de morphismes qu'on appelle n-décomposables. Cette définition utilise la notion d'espaces dominants introduits par Borsuk. Ainsi un morphisme $f:(A,B)\rightarrow(C,D)$ de la catégorie $Top_{(2)}$ est n-décomposable si au rang $n>0$ le n iéme groupe homologique $H_n(C,D)$ est plus dominant que le n iéme groupe homologique $H_n(A,B)$, où H est le foncteur homologique défini de la catégorie $Top_{(2)}$ dans la catégorie V_a des groupes gradués et des homomorphismes de degré zéro. Les propriétés particulières de ces morphismes n-décomposables sont mis en évidence dans le second chapitre de cette thèse.

Une paire de morphismes $(f,g):\left((A,B)\leftarrow\left(Z,Z^{/}\right)\rightarrow(C,D)\right)$ de la catégorie $Top_{(2)}$ est alors caractérisée comme étant n-admissible relativement à la paire de Hausdorff (A,B) si le n iéme groupe homologique $H_n(A,B)$ est dominant par rapport au n iéme groupe homologique $H_n\left(Z,Z^{/}\right)$.

Ceci permet alors de définir pour les couples d'applications univoques continues $(f,g):\left(E^n \supseteq U = \overset{o}{U}\right)\leftarrow X \rightarrow E^n$ n-admissibles sur une paire de Hausdorff $(U,U/K)$ un invariant topologique appelé indice des points de coïncidence noté $I(f,g)$. Notons que cette classe d'applications continues est déterminée dans des espaces euclidiens de dimension finie E^n et X est un espace de Hausdorff arbitrairement donné. Il s'avère alors que ce degré topologique permet d'énoncer des théorèmes puissants dans la théorie des points de coïncidences qui est une généralisation du problème d'existence de points fixes . Il généralise les travaux de J. Bryszewski, A. Dold, Z. Dzedzej, A.Granas, L. Gorniewiecz, Z. Kucharski, W. Kryszewski, M. Powers, Z. Seigberg, G. Skordev et autres.

Dans le dernier chapitre pour une nouvelle classe de morphismes multivoques on construit un nouveau degré qui permet d'énoncer des théorèmes d'existence en analyse multivoque.

CHAPITRE I

Notions sur les catégories et foncteurs

I.1 Catégories [18]

Une catégorie C est caractérisée par les données suivantes :

1. Une classe d'objets notée $ObjC$;

2. Une classe de morphismes notée $MorC$;

3. Pour tout couple d'objets (X,Y) on a une sous-classe de morphismes

de $MorC$ notée $Mor_C(X,Y)$ constituée de tous les morphismes de $MorC$ qui sont des relations binaires f de X dans Y ; on dit alors que le morphisme f à pour source X et pour but Y et on note : $f : X \to Y$ où $X \xrightarrow{f} Y$

4. Une loi de composition des morphismes notée « $\circ$ », qui s'applique

dés que l'on a les éléments suivants :

$$f \in Mor_C(X,Y) \ ; \ g \in Mor_C(Y,Z)$$

alors :

$$g \circ f \in Mor_C(X,Z)$$

qu'on appelle composition des morphismes g et f .

5. La loi de composition doit vérifier les axiomes suivants :

5a. Associativité :

Si $f \in Mor_C(X,Y)$; $g \in Mor_C(Y,Z)$, $h \in Mor_C(Z,L)$ alors

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ h) \in Mor_C(X,L).$$

5b. Existence du morphisme identité :

Pour tout objet X de la catégorie $ObjC$ il existe un morphisme noté $Id_X \in Mor_C(X,X)$ tel que pour tous morphismes $f \in Mor_C(X,Y)$;

$g \in Mor_C(Y,X)$ on a :

$$f \circ Id_X = f \ ,$$

et

$$Id_X \circ g = g \ .$$

ce morphisme Id_X s'appelle le morphisme identité .

6. Si $f \in MorC$ alors la source et le but de f sont uniquement définis .

Nous aurons à considérer les catégories particulières suivantes :

1)La catégorie des paires espaces topologiques de Hausdorff et des applications univoques continues celle-ci est notée $Top_{(2)}$. Elle est caractérisée par les éléments suivants :

a) $ObjTop_{(2)}$ est la classe des couples (X,A) où X est un espace topologique de Hausdorff et A est un sous-ensemble de X .

b) $MorTop_{(2)}$ est la classe des applications univoques continues f .

où si (X,A) , (Y,B) sont deux objets de $Top_{(2)}$ alors un morphisme

$$f:(X,A)\to(Y,B)$$

est une application continue de X dans Y qui vérifie l'inclusion $f(A)\subseteq B$.

c) La loi de composition des morphismes est définie comme étant la composition des applications continues .

2) La catégorie V_a des groupes abéliens et des homomorphismes de groupes abéliens. Celle-ci est caractérisée par les données suivantes :

a) $ObjV_a$ est la classe des groupes abéliens ;

b) $MorV_a$ est la classe des homomorphismes de groupes abéliens ;

c) la loi de composition est définie comme étant la composition des homomorphismes de groupes .

I.2. Foncteurs [18]

Soient C et $C^{/}$ deux catégories données .

On appelle foncteur co-variant F défini de la catégorie C dans une autre $C^{/}$ toute relation qui fait correspondre à un objet X de la catégorie C un objet $F(X)$ de la catégorie $C^{/}$.

Et à toute flèche (morphisme) $f \in Mor_C(X,Y)$ de la catégorie C un morphisme (flèche) $F(f) \in Mor_C(F(X),F(Y))$.

Ainsi à un morphisme f de source X et de but Y de la catégorie C on fait correspondre un morphisme $F(f)$ de source $F(X)$ et de but $F(Y)$ de la catégorie $C^{/}$.

De plus les deux propriétés suivantes doivent être satisfaites :

1) Si $f,g \in MorC$ et si leur composition $f \circ g$ existe alors :

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g) \ ;$$

2) Si $X \in ObjC$ et $Id_X \in Mor_C(X,X)$ est le morphisme identité de l'objet X alors on doit avoir l'égalité :

$$F(Id_X) = Id_{F(X)} \ ;$$

où évidement $Id_{F(X)}$ est le morphisme identité de l'objet $F(X)$ de la catégorie $C^{/}$.

Nous serons conduit dans la méthodologie de construction d'invariants topologiques à nous transporter de la catégorie $Top_{(2)}$ dans la catégorie V_a grâce aux foncteurs homotopiques et homologiques. Ces foncteurs co-variants sont considérés comme des outils modernes du langage mathématique. Ils fûrents introduits principalement par Eilenberg Montgomery en 1946 .

Ce langage mathématique fait partie du domaine de la topologie-Algébrique .

Nous allons donner ci-dessous quelques aspects de ces foncteurs .

I.3. Foncteurs homotopiques

Deux morphismes $f, g \in Mor_{Top(2)}((X, A),(Y, B))$ sont dit homotopes s'il existe un mophisme $F \in Mor_{Top(2)}((X, A)\times[0,1],(Y, B))$ tel que :

$$\begin{cases} F(x,0) = f(x) \\ F(x,1) = g(x) \end{cases}$$

pour tout $x \in X$.

La relation d'homotopie partitionne la classe des morphismes en classes d'homotopie .

Dans le cas ou X est la sphère unité S^n de IR^{n+1}, $A = \{p\} \subset S^n$ et que $B = \{y\} \subset Y$; l'ensemble des classes d'homotopie de

$$Mor_{Top(2)}((S^n, \{p\}),(Y, \{y\}))$$

est noté $p_n(Y, y)$.

Définition 1.3.1 : *On appelle* n^{ieme} *groupe d'homotopie de* (Y,y) *l'ensemble* $p_n(Y,y)$ *muni de la loi interne notée « • » et donnée par:*

$$[f]\bullet[g]=[f\cdot g]$$

dans lequel le produit $f\cdot g$ *est défini par :*

$$(f\cdot g)(t)=\begin{cases} f(2t)\ ; & 0\leq t\leq 1/2 \\ g(2t-1)\ ; & 1/2\leq t\leq 1 \end{cases}$$

Muni de cette loi $p_n(Y,y)$ est un groupe abélien pour $n>1$ appelé le n^{ieme} groupe des n sphéroïdes. Dans le cas $n=1$ on obtient le groupe de Poincaré qu'on appelle également le groupe fondamental.

Ainsi à tout couple $(L,\{l\})$ de $Top_{(2)}$ on peut associer un groupe $p_n(L,\{l\})$ le n^{ieme} groupe d'homotopie qui lui est associé .

Soit $f\in Mor_{Top(2)}((X,\{a\}),(Y,\{b\}))$ un morphisme de $Top_{(2)}$ on obtient alors le morphisme :

$$p_n(f)\in Mor_{V_a}(p_n(X,\{a\}),p_n(Y,\{b\}))$$

défini comme suit :

$$p_n(f)([m])=[f\ \mathbf{o}\ m]$$

On réalise ainsi un foncteur co-variant défini de la catégorie $Top_{(2)}$ dans la catégorie V_a .

I.4. Foncteur homologique singulier

Soient (X,A) un objet de la catégorie $Top_{(2)}$ et $\Delta_n\subset IR^{n+1}$ le n-simplexe euclidien de IR^{n+1} ayant pour sommets la base canonique de IR^{n+1} .

Ainsi Δ_n est l'enveloppe affine des $(e_i)_{i\in\overline{0,n}}$ où à la $(i+1)^{ieme}$ place il y a l'unité et zéro ailleurs; $e_i \in IR^{n+1}$ pour tout $i \in \overline{0,n}$.

Le groupe libre engendré par les éléments

$$s \in Mor_{Top(2)}((\Delta_n, f), (X, A))$$

est appelé le groupe des n-chaînes noté $C_n(X)$. On dit aussi que a est une chaîne de dimension n, et que s est un simplexe singulier de dimension n ou un n-simplexe singulier.

Ainsi si $a \in C_n(X)$ la chaîne a s'écrie $a = \sum_{i=\overline{1,p}} a_i s_i^n$. Son bord noté da est caractérisé par :

$$da = \sum_{i=\overline{1,p}} a_i \, ds_i^n$$

où ds_i^n représente le bord du n-simplexe singulier s_i^n pour tout $i \in \overline{1,p}$

Une n-chaîne est appelée un cycle si son bord est nul .

Une n-chaîne est appelée un bord si elle est le bord d'une autre $(n+1)$chaîne .

L'ensemble des cycles $Z_n(X)$ et des bords $B_n(X)$ sont des sous groupes de $C_n(X)$.

<u>**Définition 1.4.1 :**</u> *On appelle n^{ieme} groupe d'homologie singulier simple le groupe quotient noté est défini par :*

$$H_n(X) = Z_n(X) \big/ B_n(X)$$

Donnons un autre concept mathématique qui réside dans l'homologie relative.

Une n-chaîne $a \in C_n(X)$ est appelée un cycle relatif modulo A si son bord est dans A.

Un bord relatif modulo A est une n-chaîne à lequel on peut ajouter une n-chaîne de A afin, d'obtenir un bord d'une $(n+1)$ chaîne de X .

L'ensemble $Z_n(X,A)$ des cycles relatifs et l'ensemble $B_n(X,A)$ des bords relatifs sont des sous groupes de $C_n(X)$.

<u>Définition 1.4.2 :</u> *On appelle n^{ieme} groupe d'homologie singulier relatif de (X,A) le groupe noté et défini par :*

$$H_n(X,A) = {Z_n(X,A)}\big/{B_n(X,A)}.$$

A chaque morphisme

$$f \in Mor_{Top(2)}((X,A),(Y,B))$$

on peut associer le morphisme

$$H_n(f) \in MorV_a(H_n(X,A), H_n(Y,B))$$

<u>Définition 1.4.3 :</u> *On appelle n^{ieme} foncteur d'homologie singulier relatif noté H_n le foncteur co-variant défini de la catégorie $Top(2)$ dans la catégorie V_a où*

$$1) \quad H_n : Obj_{Top(2)} \to Obj_{V_a}$$

$$(X,A) \to H_n(X,A)$$

$$2) \quad H_n : Mor_{Top(2)} \to MorV_a$$

$$\left((X,A) \xrightarrow{f} (Y,B)\right) \to \left(H_n(X,A) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(Y,B)\right)$$

On appelle n^{ieme} foncteur d'homologie singulier simple noté H_n le foncteur co-variant associé aux groupes et morphismes de l'homologie singulière simple. Ce qui s'exprime par :

$$1) \quad H_n : Obj_{Top(2)} \to Obj_{V_a}$$

$$(X, f) \to H_n(X)$$

$$2) \quad H_n : Mor_{Top(2)}((X, f), (Y, f)) \to Mor_{V_a}(H_n(X), H_n(Y))$$

$$f \to H_n(f)$$

CHAPITRE II

Morphismes univoques r-décomposables

II.1.Caractérisation de la classe des r- homomorphismes

Soit V_a la catégorie des groupes abéliens et des homomorphismes de groupes abéliens.

Définition 2.1.1 : [9] *Un morphisme* $t \in Mor_{V_a}(G_0, G_1)$ *est dit un r-homomorphisme s'il est inversible à droite.*

Donnons quelques propriétés de cette classe de morphismes.

Proposition 2.1.1 : *Un morphisme* $t \in Mor_{V_a}(G_0, G_1)$ *est un r-homomorphisme si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1) t *est un épimorphisme,*

2) $G_0 = Ker t \oplus G$ *ou* G *est un sous-groupe de* G_0

Preuve :

Soit $t \in Mor_{V_a}(G_0, G_1)$ un r- homomorphisme alors il existe un morphisme $s \in Mor_{V_a}(G_1, G_0)$ tel que :

$$t \circ s = Id_{G_1}$$

d'autres part si $x \in G_0$ l'élément $x - s(t(x))$ appartient à $Ker t$

et de l'égalité

$$x = (x - s(t(x)) + s(t(x))$$

on obtient :

$$G_0 = Ker t + \operatorname{Im} s$$

Dans le cas ou pour un certain couple

$$(x,y)\in Ker t\times \mathrm{Im}\, s$$

on a

$$q = x+y,$$

alors il existerait $x_1 \in G_1$ tel que

$$q = x+y = x+s(x_1)$$

et donc

$$y = q = x.$$

Soit $t \in Mor_{V_a}(G_0,G_1)$ un épimorphisme tel que

$$G_0 = Ker t \oplus G\ ,$$

considérons $x_1 \in G_1$ il existe donc au moins un élément

$$x_0 \in G_0 \text{ avec } t\left(x_0\right) = x_1 .$$

D'autre part, il existe un couple unique

$$(a_0, g)\in Ker t\times G \text{ avec } x_0 = a_0 + g$$

Définissons la relation :

$$s : G_1 \to G_0$$

par :

$$s(x_1) = g$$

La relation s est un morphisme de $Mor_{set}(G_1,G_0)$ où Set est la catégorie des ensembles et des applications.

En effet, supposons qu'il existe $x_0' \in G_0$ avec $t(x_0') = x_1$ et $x_0' = a_0' + g'$

alors $g - g' \in Ker t$ et par conséquent $g = g'$.

Prouvons que $s \in Mor_{V_a}(G_1, G_0)$. A cet effet considérons x_1, x_1' deux éléments de G_1 . On déduit alors l’existence des éléments suivants :

1) $x_0, x_0' \in G_0$ avec $t(x_0) = x_1$ et $t(x_0') = x_1'$,

2) $(a_0, g), (a_0', g')$ deux couples uniques de $Ker t \times G$ avec :

$$\begin{cases} x_0 = a_0 + g \ ; \\ x_0' = a_0' + g' \ ; \end{cases}$$

et alors par construction étant donné que :

$$t(x_0 + x_0') = x_1 + x_1'$$

et que

$$x_0 + x_0' = (a_0 + a_0') + (g + g')$$

On conclut que :

$$s\,(x_1 + x_1') = g + g' = s\,(x_1) + s\,(x_1').$$

Montrons que s est un morphisme inverse à droite de t :

Soit $x_1 \in G_1$ alors

$$t \circ s(x_1) = t(g)$$

où $g \in G$, G est un sous groupe de G_0 de plus il vérifie pour un certain $x_0 \in G_0$:

$$\begin{cases} x_0 = a_0 + g \\ t(x_0) = x_1 \end{cases}$$

de ces égalités on déduit :

$$x_1 = t(x_0) = t(g)$$

Autrement dit :

$$t \circ s(x_1) = Id_{G_1}(x_1) . \blacksquare$$

Proposition 2.1.2 : *Un morphisme* $t \in Mor_{V_a}(G_0, G_1)$ *est un r-homomorphisme si et seulement si ils existent un isomorphisme* I *et une rétraction* r *tel que :*

$$t = I \circ r .$$

Preuve :

Soient : $I : G \to G_1$ un isomorphisme et $r : G_0 \to G$ une rétraction.

Considérons la chaîne courte :

$$s = i \circ I^{-1} : G_1 \to G \to G_0$$

où $i : G \to G_0$ est l'injection canonique. On a alors l'égalité suivante :

$$(I \circ r) \circ (i \circ I^{-1}) = Id_{G_1}$$

Prouvant ainsi que $I \circ r = t$ est un r-homomorphisme,

Soit $t \in Mor_{V_a}(G_0, G_1)$ un r-homomorphisme et $s \in Mor_{V_a}(G_1, G_0)$ un morphisme tel que :

$$t \circ s = Id_{G_1}$$

On peut alors considérer l'isomorphisme :

$$I = s^{-1} : s(G_1) \to G_1$$

et l’homomorphisme :

$$s \circ t : G_0 \to G_1 \to s(G_1)$$

ce dernier est une rétraction. En effet si $y \in s(G_1)$ alors il existe $x \in G_1$ avec $s(x) = y$ et ainsi on a les égalités :

$$(s \circ t) \circ i(y) = (s \circ t)(s(x)) = s(x) = y = Id_{s(G_1)}(y) .$$

D’autre part si $x \in G_0$ on déduit :

$$I \circ (s \circ t)(x) = s^{-1} \circ s \circ t(x) = t(x) \quad \blacksquare$$

Considérons $Vect_K$ la catégorie des K-espaces vectoriels de dimensions finies et des applications linéaires alors on a l’assertion suivante :

Proposition 2.1.3 : *Tout morphisme $t \in Mor_{vect_k}(E_0, E_1)$ qui est un épimorphisme est un r-homomorphisme.*

Preuve :

Soit : $t : E_0 \to E_1$ un épimorphisme. Puisque les K-espaces vectoriels sont de dimensions finies donc

$$E_0 \cong \ker t \oplus \mathrm{Im}\, t \quad \blacksquare$$

Proposition 2.1.4 : *La composée de deux r-homomorphismes est un r-homomorphisme .*

Proposition 2.1.5 : *Si* $t \in Mor_{V_a}(G_0, G_1)$ *et* $s \in Mor_{V_a}(G_1, G_2)$ *sont tels que leur composée* $s \circ t \in Mor_{V_a}(G_0, G_2)$ *est un r-homomorphisme alors* s *est un r-homomorphisme.*

II.2. Morphismes univoques n-décomposables

On notera par H le foncteur homologique de Cêch à support compact et à coefficients dans le corps des rationnels Q défini, de la catégorie $Top_{(2)}$ des paires espaces topologiques de Hausdorff et des applications continues dans la catégorie V_a des groupes abéliens gradués et des homomorphismes de degré zéro.

Définition 2.2.1. : *Un morphisme* $f \in Mor_{Top_{(2)}}[(X, A), (Y, B)]$ *est dit n-décomposable sur la paire de Hausdorff* (Y, B) *si le morphisme* $H_n(f) \in Mor_{V_a}(H_n(X, A), H_n(Y, B))$ *est un r-homomorphisme.*

Dans le cas où (X, A) et (Y, B) sont deux objets de $Top_{(2)}$ la classe des morphismes n-décomposables sur (Y, B) de début (source) (X, A) sera notée :

$$D^n_{Top_{(2)}}[(X, A), (Y, B)] \subset Mor_{Top_{(2)}}[(X, A), (Y, B)]$$

Ainsi à chaque classe de morphismes n-décomposables $D^n_{Top_{(2)}}[(X, A), (Y, B)]$ de la catégorie $Top_{(2)}$ on pourra associer la classe de morphismes

$$\{H_n(f) / f \in D^n_{Top_{(2)}}[(X, A), (Y, B)]\} \subset Mor_{V_a}[H_n(X, A), H_n(Y, B)]$$

qu'on notera $HD^n_{Top_{(2)}}[(X, A), (Y, B)]$.

Si $H_n(f) \in HD^n_{Top_{(2)}}[(X,A),(Y,B)]$ on peut alors considérer :

$$R_{(X,A)}(H_n(f),(Y,B))$$

la classe des morphismes de V_a donnée par :

$$R_{(X,A)}[H_n(f),(Y,B)] = \{s \in Mor_{V_a}[H_n(Y,B),H_n(X,A)] / H_n(f) \circ s = Id_{H_n(Y,B)}\}$$

Etudions cette classe de morphismes n-décomposables et montrons qu'elle est vaste, celle ci contient plusieurs autres classes de morphismes connus .

<u>Proposition 2.2.1 :</u> *Si* $f \in Mor_{Top(2)}[(X,A),(Y,B)]$ *est un r-morphisme alors :*

$R_{(X,A)}[H_n(f),(Y,B)] \neq f$ *pour tout* $n \geq 0$.

<u>Preuve :</u>

En effet, si $f \in Mor_{Top(2)}[(X,A),(Y,B)]$ est un r-morphisme, il existe donc un morphisme $g \in Mor_{Top(2)}[(Y,B),(X,A)]$ tel que :

$$f \circ g = Id_{(Y,B)}$$

D'où l'on déduit que :

$$H_n(g) \in R_{(X,A)}[H_n(f),(Y,B)] \ . \blacksquare$$

<u>Conséquence 2.2.1 :</u> *Toute rétraction* $r \in Mor_{Top(2)}[(X,A),(X^/,A^/)]$ *où*

$(X^/,A^/) \overset{i}{\subset} (X,A)$ *est n-décomposable pour tout* $n \geq 0$.

<u>Preuve :</u>

En effet $H_n(i) \in R_{(X,A)}[H_n(r),(X^/,A^/)]$. $\blacksquare$

<u>Proposition 2.2.2 :</u> *Si* $f \in Mor_{Top(2)}[(X,A),(Y,B)]$ *est un h-morphisme alors :*

$R_{(X,A)}[H_n(f),(Y,B)] \neq f$ *, pour tout* $n \geq 0$.

<u>Preuve :</u>

Sous les conditions de la proposition 2.2.2, on déduit l'existence

d'un morphisme $g \in Mor_{Top(2)}[(Y,B),(X,A)]$ tel que la classe d'homotopie

$[f \circ g]$ obtenue de la composition des morphismes f et g soit égale à la classe

d'homotopie du morphisme identité $Id_{(Y,B)} \in Mor_{Top(2)}[(Y,B),(Y,B)]$ ce qui signifie :

$$[f \circ g] = [Id_{(Y,B)}] \ (1)$$

Par conséquent, étant donné que le foncteur d'homologie de Cêch H est

invariant par homotopie on déduit de l'égalité (1) que :

$$H_n(g) \in R_{(X,A)}[H_n(f),(Y,B)] \ . \blacksquare$$

<u>Conséquence 2.2.2 :</u> *Toute faible rétraction* $r \in Mor_{Top(2)}[(X,A),(X',A')]$ *où*

$(X',A') \overset{i}{\subset} (X,A)$ *est n-décomposable pour tout* $n \geq 0$.

<u>Preuve :</u>

On remarquera que :

$$H_n(i) \in R_{(X,A)}[H_n(r),(Y,B)] \ . \blacksquare$$

<u>Proposition 2.2.3 :</u> *Si* $(f,g) \in Mor_{Top(2)}[(X,A),(Y,B)] \times Mor_{Top(2)}[(Z,C),(X,A)]$

est un couple de morphismes de la catégorie $Top_{(2)}$ *tel que :*

$$R_{(Z,C)}[H_n(f \circ g),(Y,B)] \neq f$$

alors

$$f \in D^n_{Top(2)}\left[(X,A),(Y,B)\right] .$$

<u>Preuve :</u>

En effet, si :

$$f_0 g \in D^n_{Top(2)}\left[(Z,C),(Y,B)\right]$$

donc il existe un morphisme $h \in R_{(Z,C)}\left[H_n(f \circ g),(Y,B)\right]$ avec :

$$H_n(f \circ g) \circ h = Id_{H_n(Y,B)} \quad (2)$$

du fait que le foncteur co-variant de Cêch est compatible avec la composition des morphismes on déduit de (2) que :

$$H_n(g) \circ h \in R_{(X,A)}\left[H_n(f),(Y,B)\right] . \blacksquare$$

<u>Conséquence 2.2.3 :</u> *Soient* $(X^{/},A^{/}) \subset (X,A)$ *alors si* $f \in Mor_{Top(2)}\left[(X,A),(Y,B)\right]$ *est un morphine qui admet une restriction* $\tilde{f} \in Mor_{Top(2)}\left[(X^{/}A^{/}),(Y,B)\right]$ *qui est n-décomposable sur* (Y,B) *alors :*

$$R_{(X,A)}\left[H_n(f),(Y,B)\right] \neq f \ .$$

<u>Preuve :</u>

En effet ceci est une conséquence de la proposition 2.2.3 en remarquant que :

$$f \circ i \in D^n_{Top(2)}\left[(X^{/},A^{/}),(Y,B)\right] . \blacksquare$$

<u>Proposition 2.2.4 :</u> *Si* $(f,g) \in D^n_{Top(2)}\left[(X,A),(Y,B)\right] \times D^n_{Top(2)}\left[(Y,B),(Z,C)\right]$

alors :

$$R_{(X,A)}\left[H_n(g \circ f),(Z,C)\right] \neq f \ .$$

Preuve :

En effet ; si

$$(s,m) \in R_{(X,A)}\left[H_n(f),(Y,B)\right] \times R_{(Y,B)}\left[H_n(g),(Z,C)\right]$$

alors d'après la compatibilité du foncteur H avec la composition des morphismes on déduit que :

$$s \circ m \in R_{(X,A)}\left[H_n(gof),(Z,C)\right] . \blacksquare$$

Rappelons qu'un objet non vide X de la catégorie Top, des espaces topologiques et des applications continues est dit Q-acyclique si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} 1\text{- } H_q(X) = 0 \text{ pour tout } q \geq 1 \\ 2\text{- } H_0(X) \cong Q \end{cases}$$

Proposition 2.2.5 : *Si* $f \in Mor_{Top(2)}[(X,A),(Y,B)]$ *est un morphisme tel que :*

1) f *est propre et surjectif ;*

2) $f^{-1}(B) = A$ *;*

3) $f^{-1}(y)$ *est* Q*-acyclique pour tout* $y \in Y$ *;*

alors $R_{(X,A)}\left[H_n(f),(Y,B)\right] \neq f$ *, Pour tout* $n \geq 0$.

Preuve :

En effet, d'après le théorème de Begles-Vietoris-Sklyarenko [35], $H_n(f)$ est un isomorphisme donc inversible.■

Proposition 2.2.6 : *Soit U une partie ouverte d'un espace euclidien E^n de dimension n et K un compact de U, alors l'injection*

$$i \in Mor_{Top(2)}\left[(U, U \setminus K), (E^n, E^n \setminus K)\right]$$

est n-décomposable sur $\left(E^n, E^n \setminus K\right)$.

Soit Z un espace métrique, $\{(X_a, A_a)\}_{a\in J}$ une famille de paires d'espaces compacts de Z dirigées par inclusion considérons la paire :

$$(X, A) = (\bigcap_{a\in J} Xa, \bigcap_{a\in J} Aa)$$

et la famille de morphismes $\{f_a\}_{a\in J}$ de $Top_{(2)}$

ou $f_a \in Mor_{Top(2)}[(X_a, A_a), (Y, B)]$ tel que le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
(X_a, A_a) \arrow[r, "i_a^b"] \arrow[dr, "f_a"'] & (X_b, A_b) \arrow[d, "f_b"] \\
 & (Y, B)
\end{tikzcd} \qquad (1)$$

soit commutatif pour tout $a, b \in J$; $a < b$ et où :

$$(X_a, A_a) \overset{i_a^b}{\subset} (X_b, A_b)$$

Lemme 2.2.1 : *Sous les hypothèses ci-dessus il existe un morphisme*

$f \in Mor_{Top(2)}\left[(X,A),(Y,B)\right]$ *où* $f = f_a \quad , \forall a \in J$.

Preuve :

Ce morphisme est bien défini car d'après le diagramme (1) on a l'égalité

$f_a(x) = f_b(x)$ pour tout élément $x \in X_a$. ■

Théorème 2.2.1 : *Si pour tout* $a \in J$ *il existe un morphisme*

$g_a \in Mor_{Top2}\left[(Y,B),(X_a,A_a)\right]$, *inverse droit de* f_a *tel que pour tout* $a,b \in J, a \leq b$

les classes d'homotopies des morphismes g_b *et* $i_a^b \mathbf{o}\, g_a$ *coïncident alors le*

morphisme f *est n-décomposable pour tout* $n \geq 0$.

Preuve :

Du fait que les classes d'homotopie des morphismes g_b et $i_a^b \mathbf{o}\, g_a$ coïncident

on déduit que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(X_a,A_a) \arrow[dl, "H_n(f_a)"'] & \\
H_n(Y,B) \arrow[rr, equal, "Id_{Hn(Y,B)}"'] & & H_n(Y,B) \arrow[ul, "H_n(g_a)"']
\end{tikzcd}$$

pour tout $a \in J$.

On obtient alors le diagramme commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
H_n(X,A) \arrow[rr, "H_n(i_a)"] \arrow[dr, "H_n(f)"'] & & H_n(X_a,A_a) \\
& H_n(Y,B) \arrow[ur, "H_n(g_a)"'] &
\end{tikzcd}
$$

De ces deux précédents diagrammes on obtient les diagrammes commutatifs :

$$
\begin{tikzcd}
H_n(X,A) \arrow[r, "H_n(i_a)"] \arrow[d, "H_n(f)"'] & H_n(X_a,A_a) \arrow[dl, "H_n(f_a)"'] \\
H_n(Y,B) \arrow[r, phantom, "\equiv"] \arrow[r, phantom, "Id_{H_n(Y,B)}"', shift right=3] & H_n(Y,B) \arrow[u, "H_n(g_a)"']
\end{tikzcd}
$$

Par passage à la limite inductive directe sur les spectres correspondants nous avons :

$$H_n(X,A) = \underset{\rightarrow}{Lim}\, H_n(X_a, A_a)$$

et que

$$H_n(f_a) \circ H_n(g_a) = Id_{H_n(Y,B)}$$

et

$$H_n(f_a) \circ H_n(i_a) = H_n(f)$$

d'où :

$$\underset{\rightarrow}{Lim}\, H_n(f_a) = H_n(f)$$

ce qui implique que :

$$H_n(f) \circ \underset{\rightarrow}{Lim}\, H_n(g_a) = Id_{H_n(Y,B)}\ .\blacksquare$$

<u>Théorème 2.2.2 :</u> *Soit* $E \xrightarrow{f} F$ *un épimorphime de la catégorie des*

espaces vectoriels sur un même corps K *et des applications linéaires.*

Alors si F *est de dimension fini alors* f *est un r-homomorphisme .*

<u>Preuve :</u>

Soit $E/_{\ker f}$ l'espace vectoriel quotient isomorphe à F ; et considérons

$\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, … $\overline{e_n}$ une base de $E/_{\ker f}$. Fixons $a_1, a_2, ..., a_n$ un système de vecteurs

de E tel que $a_i \in \overline{e_i}$ pour $i \in \overline{1,n}$, ce dernier est alors un système libre de E

et nous avons la décomposition en somme directe suivante :

$$E = Kerf \oplus l(a_1, a_2, ..., a_n)$$

où $l(a_1, a_2, ..., a_n)$ est l'enveloppe linéaire associée aux vecteurs $a_1, a_2, ..., a_n$ du K-espace vectoriel E .

En effet, soit $x \in E$ il existe une famille de scalaires uniques $(a_i)_1^n$ du corps K tel que :

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{e_i}$$

à ce dernier vecteur on peut associer le vecteur de l'enveloppe linéaire

$k_{\overline{x}} \in l\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ donné par :

$$k_{\overline{x}} = \sum_{i=1}^{n} a_i a_i$$

Notons que $\overline{x} = \overline{k_{\overline{x}}}$ c. a. d $x - k_{\overline{x}} \in Kerf$ et $k_{\overline{x}} \in l(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Ainsi du fait que $x = (x - k_{\overline{x}}) + k_{\overline{x}}$ on déduit que :

$$E = Ker + l(a_1, a_2, ..., a_n).$$

Prouvons que cette somme et directe :

Pour cela supposons que le vecteur nul q de E se décompose sous la forme :

$$q = k + w \text{, où } (k, w) \in Kerf \times l\{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

Soit $(a_i)_1^n$ une famille de scalaires de K telle que :

$$w = \sum_{i=1}^{n} a_i \quad a_i$$

ainsi

$$k = \sum_{i=1}^{n} (-a_i) \quad a_i$$

alors

$$\overline{k} = \sum_{i=1}^{n} (-a_i)\ \overline{a_i} = \sum_{i=1}^{n} (-a_i)\ \overline{e_i}$$

donc

$$\overline{q} = \sum_{i=1}^{n} (-a_i)\,\overline{e_i}$$

or $\left(\overline{e_i}\right)_1^n$ est une base de $E\big/_{\ker f}$ donc $a_i = 0$, $\forall i \in \overline{1,n}$. Alors $w = q$ d'où $k = q$.

D'où on conclut que :

$$E = Kerf \oplus l\{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

Soit y un élément de F , il existe alors un élément x de E avec $f(x) = y$.

Pour $x \in E$ il existe un coupe unique $(k, g) \in Kerf \times l(a_1, a_2, ..., a_n)$ qui vérifie l'égalité :

$$x = k + g\ .$$

Soit la relation :

$$s\ :\ F \to E$$

donnée par la loi :

$$s(y) = g$$

La relation s est une application.

En effet, considérons les deux égalités suivantes :

$$x' = k' + g' \text{ et } f(x') = y$$

alors

$$x - x' \in Kerf$$

et

$$(x - x') - (k - k') = (g - g')$$

donc

$$g - g' = q$$

alors

$$g = g' \quad .$$

L'application s et un homomorphisme :

$$s(y + y') = g + g' = s(y) + s(y')$$

où

$$x = k + g \,; \quad x' = k' + g' \;;$$

et

$$(x + x') = (k + k') + (g + g') .$$

Enfin pour y un élément donné de F on a l'égalité suivante :

$$f \circ s(y) = f(g) ,$$

où $g \in l(a_1, a_2, ..., a_n)$, $f(x) = y$ et $x = k + g$.

D'où

$$f(g) = f(x) = y \;;$$

ce qui signifie que :

$$f \circ s(y) = y = Id_F(y) . \blacksquare$$

Soit X un espace métrique, $\overline{D}^n \subset IR^n$ la boule fermée unité de IR^n

et S^{n-1} la frontière de D^n.

Théorème 2.2.3: *Si* $f \in Mor_{Top}\left(X, \overline{D}^n\right)$ *est un morphisme de la catégorie* Top *des espaces topologiques et des applications continues tel que :*

1. $H_{n-1}(i) \in Mor_{V_a}(H_{n-1}(f^{-1}(S^{n-1})), H_{n-1}(X))$ *est un morphisme trivial ,*

2. $H_{n-1}(f_{S^{n-1}}) \in Mor_{V_a}(H_{n-1}(f^{-1}(S^{n-1})), H_{n-1}(S^{n-1}))$ *est un morphisme non trivial ,*

ou $f^{-1}(S^{n-1}) \overset{i}{\subset} X$ *et* $f_{S^{n-1}} = f\big|_{S^{n-1}}$ *est la restriction de* f *sur* $f^{-1}(S^{n-1}) \subset X,$

alors $H_n(f)$ *et un morphisme n-décomposable sur la paire* $(\overline{D}^n, S^{n-1})$*.*

<u>Preuve :</u>

Considérons les chaînes exactes d'homologie :

$$(1)\ H_n(X, f^{-1}(S^{n-1})) \xrightarrow{d} H_{n-1}(f^{-1}(S^{n-1})) \xrightarrow{H_{n-1}(i)} H_{n-1}(X)$$

et

$$(2)\ H_n(\overline{D}^n, S^{n-1}) \xrightarrow[d']{} H_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow[H_{n-1}(j)]{} H_{n-1}(\overline{D}^n)\,.$$

Où $f^{-1}(S^{n-1}) \overset{i}{\subset} X$ et $S^{n-1} \overset{j}{\subset} \overline{D}^n$ sont les injections canoniques et d et d' sont les homomorphismes de connexion.

Des chaînes précédentes (1) et (2) on déduit le diagramme commutatif suivant dans la catégorie V_a :

$$\begin{tikzcd}
H_n(X, f^{-1}(S^{n-1})) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "H_n(f)"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & H_{n-1}(f^{-1}(S^{n-1})) \arrow[r, "H_{n-1}(i)"] \arrow[d, "H_{n-1}(f_{S^{n-1}})"] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & H_{n-1}(X) \arrow[d, "H_{n-1}(f)"] \\
H_n(\overline{D}^n, S^{n-1}) \arrow[r, "d'"'] & H_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[r, "H_{n-1}(j)"'] & H_{n-1}(\overline{D}^n)
\end{tikzcd}$$

de l'exactitude de la chaîne homologie (1) et du fait que $H_{n-1}(i)$ et un homomorphisme trivial, on déduit que :

$$\mathrm{Im}(d) = H_{n-1}(f^{-1}(S^{n-1}))$$

et donc d l'homomorphisme de connexion est un épimorphisme .

De la commutativité du carré $(**)$ dans le précédent diagramme et du fait que $H_{n-1}(f_{S^{n-1}})$ et non trivial on déduit que le morphisme $H_{n-1}(j)$ et trivial. Comme conséquence et en tenant compte de l'exactitude de la chaîne d'homologie (2), on déduit que l'homorphisme de connexion d' est un épimorphisme .

D'autre part du fait que $H_{n-1}(S^{n-1})$ est isomorphe à Q et que $H_{n-1}(f_{S^{n-1}})$ est non trivial on obtient que $H_{n-1}(f_{S^{n-1}})$ et également un épimorphisme . Par conséquent l'homomorphisme $H_n(f)$ est un épimorphisme .■

<u>CHAPITRE III</u>

<u>Indice de coïncidence de paires de morphismes univoques</u>

III.1.Classe caractéristique des paires n-admissibles

Soit $(f,g) \in Mor_{Top}(X,U) \times Mor_{Top}(X,E^n)$ une paire de morphismes

de la catégorie $Top_{(2)}$ des paires espaces topologiques de Hausdorff et des applications continues ayant pour source un espace de Hausdorff X .

Définition 3.1.1 : *Un élément x qui appartient à la source X est appelé un point de coïncidence de la paire de morphisme (f,g) si et seulement si on a l'égalité*

$$f(x) = g(x) \ .$$

Notons par $C(f,g)$ l'ensemble des points de coïncidence de la paire (f,g) et considérons le sous ensemble :

$$F(f,g) = \{u \in U \,/\, u \in g(f^{-1}(u))\}.$$

Sous les conditions des hypothèses ci-dessus nous obtenons :

Proposition 3.1.1 : *On a l'égalité*

$$f[C(f,g)] = F(f,g) \ .$$

Preuve :

Soit $x \in C(f,g)$ ceci est équivalent au fait que $f(x) = g(x)$ qui est équivalent à l'assertion $f(x) \in g(f^{-1}(f(x)))$ qui est équivalente à $f(x) \in F(f,g)$.■

Soit K un compact de U qui contient $F(f,g)$ nous obtenons alors le couple de morphisme :

$$(f, f-g) \in Mor_{Top(2)}[(X, X \setminus f^{-1}(K)), (U, U \setminus K)] \times Mor_{Top(2)}[(X, X \setminus f^{-1}(K)), (E^n, E^n \setminus \{q\})] .$$

<u>Définition 3.1.2:</u> *Une paire de morphismes*

$$(f,g) \in Mor_{Top}(X,U) \times Mor_{Top}(X,E^n)$$

est dite n-admissible sur l'objet $(U,U \setminus K)$ *de* $Top_{(2)}$ *si le morphisme :*

$$H_n(f) : H_n(X, X \setminus f^{-1}(K)) \to H_n(U,U \setminus K)$$

est n-décomposable sur $(U,U \setminus K)$ *.*

La classe des paires de morphismes n-admissibles sur l'objet $(U,U \setminus K)$

de $Top_{(2)}$ sera notée :

$$AP(U,U \setminus K) .$$

<u>III.2.Indice de coïncidence :</u>

Soit $(f,g) \in AP(U,U \setminus K)$ et s un élément de $R(H_n(f),(U,U \setminus K))$

si $0_K \in H_n(U,U \setminus K)$ est la classe fondamentale du compact K ,

et $0_{\{q\}} \in H_n(E^n, E^n \setminus \{q\})$ est la classe fondamentale de $\{q\}$,

images de 1 par les compositions :

$$Z = H_n(S^n) \to H_n(S^n, S^n \setminus K) \cong H_n(U,U \setminus K)$$

et

$$Z = H_n(S^n) \to H_n(S^n, S^n \setminus \{q\}) \cong H_n(E^n, E^n \setminus \{q\})$$

respectivement .

Alors on peut définir un invariant de la topologie-algébrique de la façon suivante :

<u>Définition 3.2.1 :</u> *Soit* $(f,g) \in AP(U,U \setminus K)$ *et* $s \in R(H_n(f),(U,U \setminus K))$ *.*

On appellera s *-indice de coïncidence associé à* (f,g) *le rationnel noté*

$I_s(f,g)$ *qui vérifie l'égalité :*

$$H_n(f-g)\circ s\quad(0_K)=I_s(f,g)\cdot 0_{\{q\}}.$$

La définition est correcte car $H_n(E^n, E^n\setminus\{q\})$ admet $0_{\{q\}}$ pour base .

<u>Définition 3.2.2 :</u> *Soit* $(f,g)\in AP(U,U\setminus K)$ *on appellera indice de coïncidence généralisé de la paire* (f,g) *n-admissible sur* $(U,U\setminus K)$ *le sous-ensemble des nombres rationnels* Q *noté et défini*

par :

$$I(f,g)=\{I_s(f,g)/\, s\in R(H_n(f),(U,U\setminus K))\}.$$

Etudions cet indice de coïncidence .

<u>Théorème 3.2.1 :</u> *Soit*

$$(f,g)\in Mor_{Top(2)}[(X,X\setminus f^{-1}(K)),(U,U\setminus K)]\times Mor_{Top(2)}[(X,X\setminus f^{-1}(K)),(E^n,E^n\setminus\{q\})]$$

supposons que :

1) f *est un épimorphisme propre ;*

2) $f^{-1}(U\setminus K)=X\setminus f^{-1}(K)$ *;*

3) $f^{-1}(u)$ *est* Q*-acyclique pour tout* $u\in U$ *.*

Alors la paire $(f,g)\in AP(U,U\setminus K)$.

Ce qui signifie que la paire (f,g) *est n-admissible sur* $(U,U\setminus K)$ *et d'autre part* $I(f,g)$ *est un singleton réduit à* $I_{H_n^{-1}(f)}(f,g)$ *.*

<u>Preuve :</u>

Considérons le diagramme des chaînes d'homologie :

$$\begin{tikzcd}
H_n(X \setminus f^{-1}(K)) \arrow[r, "H_n(i)"] \arrow[d, "x_1"] & H_n(X) \arrow[r, "H_n(j)"] \arrow[d, "x_2"] & H_n(X, X \setminus f^{-1}(K)) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_{n-1}(X \setminus f^{-1}(K)) \arrow[r, "H_{n-1}(i)"] \arrow[d, "x_3"] & H_{n-1}(X) \arrow[d, "x_4"] \\
H_n(U \setminus K) \arrow[r, "H_n(i')"'] & H_n(U) \arrow[r, "H_n(j')"'] & H_n(U, U \setminus K) \arrow[r, "d'"'] & H_{n-1}(U \setminus K) \arrow[r, "H_{n-1}(i')"'] & H_{n-1}(U)
\end{tikzcd}$$

x_i, $i \in \overline{1,4}$ représentent les morphismes canoniques induites .

de l'exactitude des chaînes d'homologie et du théorème sur le 5^{ieme} homomorphisme on déduit que $H_n(f)$ est un isomorphisme .

D'où :

$$R(H_n(f),(U,U \setminus K)) = \{H_n^{-1}(f)\} .\blacksquare$$

<u>Théorème 3.2.2 :</u> *Si $(f,g) \in AP(U,U \setminus K)$ est une paire n-admissible sur $(U,U \setminus K)$ et si $F(f,g) = f$ alors son indice généralisé $I(f,g)$ est réduit à $\{0\}$.*

<u>Preuve :</u>

Grâce au théorème 3.1.1 on déduit que :

$$f(x) \neq g(x) \text{ pour tout } x \in X \ .$$

On peut alors considérer le morphisme

$$H_n\overline{(f-g)} \in Mor[(X, X \setminus f^{-1}(K)),(E^n, E^n \setminus \{q\})]$$

où :

$$\overline{(f-g)} = (f-g) .$$

On conclut la démonstration en remarquant que $H_n(f-g)$ est un homomorphisme trivial .$\blacksquare$

__Théorème (Existence) 3.2.3 :__ *Si* $(f,g) \in AP(U, U \setminus K)$ *et son indice de coïncidence généralisé est non nul alors la paire* (f,g) *admet au moins un point de coïncidence .*

__Preuve :__

Ceci est conséquence du théorème 3.2.2 ■

__Théorème 3.2.4 :__ *La paire de morphismes*

$$(i,g) \in Mor_{Top}(U, E^n) \times Mor_{Top}(U, E^n)$$

où $U \overset{i}{\subset} E^n$ *est n-admissible sur* $(U, U / K)$ *et son indice de coïncidence généralisé coïncide avec l'indice des points fixes* I_g *de* g *qui vérifie l'égalité :*

$$H_n(i-g)(0_K) = I_g \cdot 0_{\{q\}} \ .$$

__Preuve :__

En effet , soit

$$H_n(i) \in Mor[H_n(U, U \setminus K), H_n(E^n, E^n \setminus K)]$$

et 0_K , $0_{\{q\}}$ sont les classes fondamentales de K et $\{q\}$ respectivement ainsi on a ce qui suit :

$$I(i,g) \cdot 0_{\{q\}} = H_n(i-g) \circ H_n^{-1}(i)(0_K) = H_n(i-g)(0_K) = I_g \cdot 0_{\{q\}} \ .■$$

__Théorème (Existence) 3.2.5 :__ *Si* $I(i,g) \neq \{0\}$ *alors* g *admet au moins un point fixe .Autrement dit il existe au moins un élément* x *de* X *qui vérifie :*

$$g(x) = x \ .$$

Preuve :

Ceci est une conséquence de théorème 3.2.3 ■

Considérons

$$(f,g) \in Mor_{Top}(X,U) \times Mor_{Top}(X,E^n)$$

et

$$(f_1,g_1) \in Mor_{Top}(X_1,V) \times Mor_{Top}(X_1,E^n)$$

deux paires de morphismes de la catégorie Top où V est un ouvert de E^n .

Notons par K_1 un compact de V qui contient $F(f_1,g_1) \cup F(f,g)$

et tel que

$$K \subset K_1 \subset V \subset \overline{V} \subset U \ .$$

Théorème 3.2.6 : *S'il existe un morphisme*

$$h \in Mor_{Top}[(X_1, X_1 \setminus f_1^{-1}(K_1)), (X, X \setminus f^{-1}(K))]$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(V,V \setminus K_1) \arrow[d, "i"'] & (X_1, X_1 \setminus f_1^{-1}(K_1)) \arrow[l, "f_1"'] \arrow[r, "f_1-g_1"] \arrow[d, "h"] & (E^n, E^n \setminus \{q\}) \arrow[d, equal] \\
(U,U \setminus K) & (X, X \setminus f^{-1}(K)) \arrow[l, "f"] \arrow[r, "f-g"'] & (E^n, E^n \setminus \{q\})
\end{tikzcd}$$

ou $(V,V \setminus K_1) \overset{i}{\subset} (U,U \setminus K)$ *, alors si* $(f_1,g_1) \in AP(V,V \setminus K_1)$ *les assertions suivantes sont satisfaites :*

1) $(f,g) \in AP(U,U \setminus K)$ *;*

2) $I(f_1,g_1) \subseteq I(f,g)$.

Preuve :

En effet, si $s \in R(H_n(f_1),(V,V \setminus K_1))$ et du fait que

$$H_n(i) \in Mor[H_n(V,V \setminus K_1), H_n(U,U \setminus K)]$$

est un isomorphisme on déduit que :

$$H_n(h) \circ s \circ H_n^{-1}(i) \in \mathrm{R}(H_n(f),(U,U \setminus K)) \ .$$

Soit $q \in I(f_1, g_1)$ donc il existe

$$s \in R(H_n(f_1),(V,V \setminus K_1))$$

tel que $q = I_s(f_1, g_1)$ ce dernier vérifie les égalités suivantes :

$$I_s(f_1, g_1) \cdot 0_{\{q\}} = H_n(f_1 - g_1) \circ s(0_{K_1})$$

$$= I_m(f, g) \cdot 0_{\{q\}}$$

ou

$$m = H_n(h) \circ s \circ H_n^{-1}(i) \ . \blacksquare$$

Théorème 3.2.7 : *Si* $(f, g) \in Mor_{Top}(X,U) \times Mor_{Top}(X, E^n)$ *est une paire de morphismes et s'il existe un morphisme*

$$h \in Mor_{Top}[(X_1, X_1 \setminus (f \circ h)^{-1}(K)),(X, X \setminus f^{-1}(K))]$$

n-décomposable sur l'objet $(X, X \setminus f^{-1}(K))$ *de* $Top_{(2)}$ *alors si la paire de morphismes* (f, g) *est n-admissible sur* $(U,U \setminus K)$ *on a les assertions suivantes qui sont satisfaites :*

1) $(f \circ h, g \circ h) \in AP(U,U \setminus K)$ *;*

2) $I(f \circ h, g \circ h) \subseteq I(f, g)$ *.*

Preuve :

Du théorème 3.2.6 on déduit que :

$$f \circ h \in Mor_{Top}[(X_1, X_1 \setminus (f \circ h)^{-1}(K)), (U, U \setminus K)] \ .$$

D'autre part

$$F(f \circ h, g \circ h) \subseteq F(f, g) \subseteq K \ .$$

Soit $k \in I\ (f \circ h, g \circ h)$ par conséquent il existe $s \in R(H_n(f \circ h), (U, U \setminus K))$

tel que :

$$H_n(f \circ h - g \circ h) \circ s(0_K) = k \cdot 0_{\{q\}}$$

donc :

$$H_n(f - g) \circ H_n(h) \circ s(0_K) = k \cdot 0_{\{q\}} \ .$$

On conclut en remarquant que

$$H_n(h) \circ s \in R(H_n(f), (U, U \setminus K)) \ . \blacksquare$$

Définition 3.2.3 : *Deux paires de morphismes*

$$(f_i, g_i) \in Mor_{Top}(X, U) \times Mor_{Top}(X, E^n) \ , \ i = 0,1$$

sont dit équivariants sur un compact K de E^n s'ils existent :

1-Un objet $(X, X \setminus X^{/})$ de $Top_{(2)}$ tel que :

$$(f_i, g_i) \in Mor_{Top(2)}[(X, X \setminus X^{/}), (U, U \setminus K)] \times Mor_{Top(2)}[(X, X \setminus X^{/}), (E^n, E^n \setminus \{q\})]$$
$$i = 0,1 \ ;$$

2-Une paire de morphismes

$$(j, j - y) \in Mor_{Top(2)}[(X, X \setminus j^{-1}(K)), (U, U \setminus K)] \times Mor_{Top(2)}[(X, X \setminus j^{-1}(K)), (E^n, E^n \setminus \{q\})]$$

n-admissible sur $(U, U \setminus K)$;

3-Un morphisme

$$h \in Mor_{Top(2)}[(X, X \setminus j^{-1}(K)), (X, X \setminus X^{/})]$$

n-décomposable sur $(X, X \setminus X^{/})$ *.Avec le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
(U,U \setminus K) \arrow[d, equal] & (X, X \setminus X^{/}) \arrow[l, "f_0"'] \arrow[r, "f_0 - g_0"] & (E^n, E^n \setminus \{q\}) \arrow[d, equal] \\
(U,U \setminus K) \arrow[d, equal] & (X, X \setminus j^{-1}(K)) \arrow[l, "j"'] \arrow[r, "j - y"] \arrow[u, "h"] \arrow[d, "h"] & (E^n, E^n \setminus \{q\}) \arrow[d, equal] \\
(U,U \setminus K) & (X, X \setminus X^{/}) \arrow[l, "f_1"] \arrow[r, "f_1 - g_1"'] & (E^n, E^n \setminus \{q\})
\end{tikzcd}$$

Théorème 3.2.8 : *Si* (f_i, g_i) *;* $i = 0,1$ *, sont des paires de morphismes équivariant sur* K *alors :*

1) $(f_i, g_i) \in AP(U,U \setminus K)$ *, pour* $i = 0,1$ *;*

2) $I\ (f_0, g_0) = I(f_1, g_1)$.

Preuve :

En effet , de l'équivariance des paires de morphismes considérés on obtient L'égalité suivante :

$$H_n(f_0) \circ H_n(h) = H_n(j) = H_n(f_1) \circ H_n(h)$$

donc grâce au théorème 3.2.7 on déduit que :

$$H_n(f_0) = H_n(f_1)$$

et qu'ils sont n-décomposables sur $(U,U \setminus K)$.

D'autre part , des égalités :

$$H_n(f_0 - g_0) \circ H_n(h) = H_n(j - y) = H_n(f_1 - g_1) \circ H_n(h)$$

on déduit l'égalité

$$I(f_0, g_0) = I(f_1, g_1)\ .\blacksquare$$

<u>Définition 3.2.4:</u> *Deux paires de morphismes*

$$(f_i, g_i) \in Mor_{Top(2)}[(X, X / X^{/}), (U,U / K)] \times Mor_{Top(2)}[(X, X / X^{/}), (E^n, E^n / \{q\})]$$
$$i = 0,1 \;;$$

sont dites homotopes sur un compact $K \subset E^n$ *s'ils existent :*

1) Une paire de morphismes

$$(j, y) \in Mor_{Top(2)}[(X, X \setminus j^{-1}(K \times [0,1])), (U,U \setminus K) \times [0,1]] \times Mor_{Top(2)}[(X, X \setminus j^{-1}(K \times [0,1])), (E^n, E^n \setminus \{q\})]$$

n-admissible sur $(U,U \setminus K) \times [0,1]$ *;*

2) Un morphisme

$$h \in Mor_{Top(2)}[(X, X \setminus X^{/}), (X, X \setminus j^{-1}(K \times [0,1]))]$$

n-décomposable sur $(X, X \setminus j^{-1}(K \times [0,1]))$

avec le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(U,U \setminus K) \arrow[d, "C_0"'] & (X, X \setminus X^{/}) \arrow[l, "f_0"'] \arrow[r, "f_0 - g_0"] \arrow[d, "h"] & (E^n, E^n \setminus \{q\}) \arrow[d, equal] \\
(U,U \setminus K) \times [0,1] & (X, X \setminus j^{-1}(K \times [0,1])) \arrow[l, "j"'] \arrow[r, "j - y"] & (E^n, E^n \setminus \{q\}) \\
(U,U \setminus K) \arrow[u, "C_1"] & (X, X \setminus X^{/}) \arrow[l, "f_1"] \arrow[r, "f_1 - g_1"'] \arrow[u, "h"'] & (E^n, E^n \setminus \{q\}) \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

(1)

où $C_i(x) = (x, i)$ *pour tout* $x \in U$ *et* $i = 0,1$.

<u>Théorème 3.2.9:</u> *Si* (f_0, g_0) *et* (f_1, g_1) *sont deux paires de morphismes*

homotopes sur un compact $K \subset E^n$ *alors on a les deux propriétés suivantes:*

1) $(f_i, g_i) \in AP(U,U / K) \quad i = 0,1$

2) $I(f_0, g_0) = I(f_1, g_1)$.

Preuve :

Les morphismes $H_n(f_0)$ et $H_n(f_1)$ sont égaux du fait que $H_n(C_0)$ et $H_n(C_1)$ sont des isomorphismes et par conséquent du diagramme d'homologie issu de (1) on déduit que les homomorphismes $H_n(f_0)$ et $H_n(f_1)$ sont n-décomposables sur $(U,U \setminus K)$.

Ainsi on déduit que :

$$(f_i, g_i) \in AP(U,U \setminus K) \text{ pour } i = 0,1$$

D'autre part des égalités :

$$H_n(f_0 - g_0) = H_n(f_1 - g_1) = H_n(j - y) \circ H_n(h)$$

on déduit l'égalité des indices de coïncidence généralisé :

$$I(f_0, g_0) = I(f_1, g_1) \ .\blacksquare$$

Théorème 3.2.10: *Soient* $(f, g) \in Mor_{Top}(X,U) \times Mor_{Top}(X, E^n)$ *et* $(f', g') \in Mor_{Top}(X,U') \times Mor_{Top}(X, E^m)$ *ou* U , U' *sont des ouverts de* E^n *et* E^m *respectivement ,* K *un compact de* U *qui contient* $F(f, g)$ *et* K' *un compact de* U' *qui contient* $F(f', g')$ *alors si* $(f, g) \in AP(U,U \setminus K)$ *et* $(f', g') \in AP(U',U' \setminus K')$ *la paire produit des morphismes vérifie :*

1) $(f \times f', g \times g') \in AP(U \times U',U \times U' \setminus K \times K')$

au $rang(n + m)$

2) $I\ (f \times f', g \times g') \supset I(f, g) \cdot I(f', g')$.

Preuve :

On vérifie aisément que :

$$F(f\times f^{/},g\times g^{/})=F(f,g)\times F(f^{/},g^{/})\ .$$

Notons par $0_{K\times K^{/}}$ la classe fondamentale du compact $K\times K^{/}\supset F(f,g)\times F(f^{/},g^{/})$

où $0_{K\times K^{/}}\in H_{n+m}(U\times U^{/},U\times U^{/}\setminus K\times K^{/})$.

Considérons :

$$\left(s,s^{/}\right)\in R(H_n(f),(U,U\setminus K))\times R(H_m(f^{/}),(U^{/},U^{/}\setminus K^{/}))$$

Ainsi , grâce aux propriétés de Kunneth [31] sur le produit on obtient les égalités suivantes :

$$H_{n+m}(f\times f^{/}-g\times g^{/})\circ(s\times s^{/})(0_{K\times K^{/}})=$$

$$[H_n(f-g)\circ s\times H_m(f^{/}-g^{/})\circ s^{/}](0_K\times 0_{K^{/}})=$$

$$H_n(f-g)\circ s(0_K)\times H_m(f^{/}-g^{/})\circ s^{/})(0_{K^{/}})=$$

$$[I_s(f,g)\cdot I_{s^{/}}(f^{/},g^{/})]\cdot 0_{\{q\}}\ .$$

D'où l'on déduit que :

$$I\ (f\times f^{/},g\times g^{/})\supset I(f,g)\cdot I(f^{/},g^{/})\ .\blacksquare$$

CHAPITRE IV

Degré généralisé de points fixes d’applications multivoques

IV. Degré généralisé de points fixes de morphismes multivoques

Soit F un morphisme de la catégorie $Mult$ des m-applications

ayant pour source un ouvert U d'un espace euclidien E^n de dimension fini n

dans lequel F admet des valeurs compactes dans E^n .

Définition 4.1 : *Un morphisme*

$$F : U \to K(E^n)$$

est dit n-admissible sur une paire de Hausdorff $(U, U / K)$ *si la paire de projecteurs*

$$\begin{tikzcd} & U \\ \Gamma_U(F) \arrow[ur, "t_F"] \arrow[dr, "r_F"'] & \\ & E^n \end{tikzcd} \qquad (1)$$

vérifie les conditions suivantes :

1) Il existe un compact non vide K *de* U *qui contient l'ensemble*

$FixF = \{x \in U \,/\, x \in F(x)\}$,

2)La paire de projecteurs de l'application multivoque F *(m-application)*

$(t_F, r_F) \in AP(U, U \setminus K)$. *Ce qui signifie que la paire de morphismes* (t_F, r_F)

est n-admissible sur l'objet $(U, U \setminus K)$ *de* $Top_{(2)}$.

La classe des m-applications $F \in Mult(U, E^n)$ à images compactes n-admissibles sur $(U, U \setminus K)$ sera notée $n - AP(U, U \setminus K)$.

Soit $F \in n - AP(U, U \setminus K)$ on peut alors considérer le diagramme suivant dans la catégorie V_a des groupes abéliens et des homomorphismes de groupes :

$$\begin{tikzcd} & H_n(U, U \setminus K) \\ H_n(\Gamma_U(F), \Gamma_{U \setminus K}(F)) \arrow[ur, "H_n(t_F)"] \arrow[dr, "H_n(t_F - r_F)"'] & \\ & H_n(E^n, E^n \setminus q) \end{tikzcd} \qquad (2)$$

Définition 4.2 : *Le degré généralisé de points fixes d'une m-application* $n - AP(U, U \setminus K)$ *est défini comme étant le sous ensemble des rationnels :*

$$\Im(F; U, K) = \{ I_s(t_F, r_F) / s \in R(H_n(t_F), (U, U \setminus K)) \} .$$

Etudions les propriétés du degré généralisé de points fixes :

Théorème (existence) 4.1 : *Si le degré généralisé de points fixes* $\Im(F; U, K)$ *est distinct du singleton* $\{0\}$ *alors* F *admet un point fixe dans* U *. Ce qui signifie qu'il existe au moins un élément* $x \in U$ *tel que* $x \in F(x)$ *.*

Preuve :

En effet si $\Im(F; U, K) \neq \{0\}$ on déduit que $I(t_F, r_F) \neq \{0\}$ donc d'après le théorème 3.2.3 on obtient que :

$$F(t_F, r_F) = \left\{ x \in U / x \in r_F\left(t_F^{-1}(x)\right) \right\}$$

est non vide ce qui exprime le fait que $FixF \neq f$.■

Théorème (sélecteurs) 4.2 : *Soients* $F, G \in Mult(U, E^n)$ *deux morphismes de la catégorie* $Mult$ *tels que* G *est un élément de l'ensemble* $n - AP(U, U \setminus K)$ *et* G

est un sélecteur de F *alors* F *est un élément de l'ensemble* $n-AP(U,U\setminus K)$

et $\Im(G;U,K)\subset\Im(F;U,K)$.

Preuve :

On a les diagrammes de la catégorie V_a des groupes commutatifs et des homomorphismes de groupes

$$\begin{tikzcd} & H_n(U,U\setminus K) \\ H_n(\Gamma_U(G),\Gamma_{U\setminus K}(G)) \arrow[ur, "H_n(t_G)"] \arrow[dr, "H_n(t_G-r_G)"'] & \\ & H_n(E^n,E^n\setminus\{q\}) \end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd} & H_n(U,U\setminus K) \\ H_n(\Gamma_U(F),\Gamma_{U\setminus K}(F)) \arrow[ur, "H_n(t_F)"] \arrow[dr, "H_n(t_F-r_F)"'] & \\ & H_n(E^n,E^n\setminus\{q\}) \end{tikzcd}$$

Considérons le morphisme

$$H_n(i)\in Mor_{V_a}\left[H_n(\Gamma_U(G),\Gamma_{U\setminus K}(G));H_n(\Gamma_U(F),\Gamma_{U\setminus K}(F))\right]$$

on a alors les égalités suivantes :

$$H_n(t_G)=H_n(t_F)\circ H_n(i)$$

et

$$H_n(t_G-r_G)=H_n(t_F-r_F)\circ H_n(i)$$

d’où l’on déduit que

$$R(H_n(t_F),(U,U\setminus K))\neq f$$

et que

$$\Im(G;U,K)\subset\Im(F;U,K)\ .\blacksquare$$

<u>Définition 4.3 :</u> *Une représentation* $r=[U,E^n,Z,f,g]$ *d’un morphisme* $F\in Mult(U,E^n)$ *est dite n-admissible sur la paire de Hausdorff* $(U,U\setminus K)$ *si la paire de morphisme univoque* (f,g) *est n-admissible sur* $(U,U\setminus K)$ *et* $\{x\in U\,/\,x\in F(x)\}=FixF\subset K$.

Soient U et V deux ouverts de E^n tels que :

$$K\subset K_1\subset V\subset\overline{V}\subset U$$

<u>Théorème (restriction) 4.3 :</u> *Si la restriction* $\tilde{F}\in Mult(V,E^n)$ *du morphisme* $F\in Mult(U,E^n)$ *, admet une représentation* $r=[U,E^n,Z,f,g]$ *n-admissible sur la paire de Hausdorff* $(V,V\setminus K_1)$ *alors* F *est un élément de l’ensemble* $n-AP(U,U\setminus K)$ *et* $\Im_r(\tilde{F};V,K_1)\subset\Im(F;U,K)$ *ou*

$$\Im_r(\tilde{F};U,K_1)=\{I_s(f,g)\,/\,s\in R(H_n(f),(V,V\setminus K_1))\}\ .$$

<u>Preuve :</u>

Sous les conditions du théorème, l’homomorphisme

$$H_n(f)\in Mor_{V_a}\left(H_n\left(Z,Z\setminus f^{-1}(K_1)\right),H_n(V,V\setminus K_1)\right)$$

vérifie

$$R(H_n(f),(V,V\setminus K_1))\neq f\ .$$

Par conséquent pour chaque

$$s \in R\left(H_n(f),(V,V \setminus K_1)\right)$$

on peut définir

$$I_s(f,g) \in Q$$

et ce rationnel vérifie l'égalité :

$$H_n(f-g)\left(s\left(0_{K_1}\right)\right) = I_s(f,g)\cdot 0_{\{q\}} \ .$$

Ainsi l'ensemble $\Im_r\left(\tilde{F};V,K_1\right)$ est correctement défini .

D'autre part nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
H_n(V,V\setminus K_1) & \xleftarrow{H_n(f)} & H_n\left(Z,Z\setminus f^{-1}(K_1)\right) & \xrightarrow{H_n(f-g)} & H_n\left(E^n,E^n\setminus\{q\}\right) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle H_n(i)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle H_n(a)} & & \Big\| \, {\scriptstyle Id_{H_n(E^n,E^n\setminus\{q\})}} \\
H_n(U,U\setminus K) & \xleftarrow[H_n(t_F)]{} & H_n\left(\Gamma_U(F),\Gamma_{U\setminus K}(F)\right) & \xrightarrow[H_n(t_F-r_F)]{} & H_n\left(E^n,E^n\setminus\{q\}\right)
\end{array}$$

où

$$a \in Mor_{Top(2)}\left(\left(Z,Z\setminus f^{-1}(K_1)\right),\left(\Gamma_U(F),\Gamma_{U\setminus K}(F)\right)\right)$$

donné par :

$$a(z) = (f(z),g(z)) \quad z \in Z \ .$$

Grâce au théorème 3.2.6 on conclut la démonstration du théorème ■

<u>Théorème (représentation) 4.4 :</u> *Si un morphisme* $F \in Mult(U,E^n)$ *admet une représentation* $r = [U,E^n,Z,f,g]$ *n-admissible sur* $(V,V\setminus K_1)$ *alors* F *est un élément de l'ensemble* $n-AP(U,U\setminus K)$ *et* $\Im_r(F;V,K_1) \subset \Im(F;U,K)$.

Preuve :

Ceci est une conséquence du théorème 4.3 .■

Nous allons maintenant introduire une nouvelle définition qui généralise la notion d'homotopie pour des morphismes multivoques . Cette nouvelle approche homotopique s'avère adéquate pour cette classe de morphismes n-admissibles .

Définition 4.4 : *Une application univoque continue*

$$l : [0,1]\times U\times E^n \to E^n$$

est dite une distorsion de E^n *si pour tout élément* x *de* U *l'application univoque* $l(0,x,\cdot): E^n \to E^n$ *est l'application identique .*

Définition 4.5 : *Un morphisme* $G \in Mult(U,E^n)$ *est une distorsion d'un morphisme* F *n-admissible sur* $(U,U\setminus K)$ *s'il existe une distorsion* l *de* E^n *telle que :*

(1) $l(1,x,F(x)) = G(x)$ *pour tout* $x \in U$ *;*

(2) $x \notin l(t,x,F(x))$ *pour tout couple* $(t,x) \in [0,1]\times(U\setminus K)$ *.*

Théorème 4.5 : *Si un morphisme* $G \in Mult(U,E^n)$ *est une distorsion d'un morphisme* F *n-admissible sur* $(U,U\setminus K)$ *alors* G *est n-admissible sur* $(U,U\setminus K)$ *et* $\Im(F;U,K) \subseteq \Im(G;U,K)$ *.*

Preuve :

Considérons l'application univoque :

$$x : \left(\Gamma_U(F), \Gamma_{U\setminus K}(F)\right) \to \left(\Gamma_U(G), \Gamma_{U\setminus K}(G)\right)$$

donnée par :

$$x(x,u) = \left(x, \, l(1,x,u)\right)$$

pour tout $(x,u) \in \Gamma_U(F)$.

De l'égalité :

$$t_F = t_G \circ x$$

on déduit que :

$$G \in n - AP(U, U \setminus K) \ .$$

D'autre part les applications univoques continues $(t_F - r_F)$ et $(t_G - r_G) \circ x$

sont des éléments de $Mor_{Top(2)}\left(\left(\Gamma_U(F), \Gamma_{U\setminus K}(F)\right), \left(E^n, E^n \setminus \{q\}\right)\right)$ et elles sont homotopes .

En effet il suffit de considérer l'application univoque continue :

$$h : [0,1] \times \left(\Gamma_U(F); \Gamma_{U\setminus K}(F)\right) \to \left(E^n; E^n \setminus \{q\}\right)$$

donnée par

$$h(t,(x,u)) = x - l(t,x,u)$$

pour tout couple

$$(t,(x,u)) \in [0,1] \times \Gamma_U(F) \ .$$

Celle-ci vérifie les égalités :

$$\begin{aligned} h(0,(x,u)) &= x - l(0,x,u) \\ &= x - u \\ &= (t_F - r_F)(x,u) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} h(1,(x,u)) &= x - l(1,x,u) \\ &= (t_G - r_G) \circ x(x,u) \end{aligned}$$

et du fait que $x \notin l(t,x,F(x))$ pour tout $(t,x) \in [0,1] \times (U \setminus K)$ on déduit que

h qui a pour source $[0,1] \times \Gamma_{U\setminus K}(F)$ prend des valeurs dans $E^n \setminus \{q\}$.

Soit

$$s \in R(H_n(t_F),(U,U \setminus K))$$

alors

$$H_n(x) \circ s \in R(H_n(t_G),(U,U \setminus K))$$

et on a les égalités suivantes :

$$I_s(0_{\{q\}}) = H_n(t_F - r_F) \circ s(0_K)$$

$$= H_n(t_G - r_G) \circ H_n(x) \circ s(0_K)$$

$$= I_{H_n(x)\circ s} \quad 0_{\{q\}} \ .$$

d'où l'on déduit que :

$$\Im(F;U,K) \subseteq \Im(G;U,K) \ . \blacksquare$$

Donnons quelques théorèmes d'évaluation du degré généralisé de points fixes .

Soient U et V deux ouverts de E^n , K et K_1 deux sous-espaces compacts de E^n tels que :

$$K \subset K_1 \subset V \subset \overline{V} \subset U \ .$$

<u>Théorème 4.6 :</u> *Si* $G \in Mult(U,E^n)$ *est un sélecteur n-admissible sur* $(V,V \setminus K_1)$ *d'un morphisme* $F \in Mult(U,E^n)$ *semi-continu supérieurement compact* Q*-acyclique alors* $\Im(G,V,K_1) = \Im(F,U,K) = \{k\}$.

<u>Preuve :</u>

En effet grâce au théorème 4.5 on obtient les deux relations :

$$F \in n - AP(U,U \setminus K)$$

et

$$\Im(G;U,K) \subset \Im(F;U,K)$$

D'autre part puisque F est semi-continu supérieurement compact et Q-acyclique $H_n(t_F)$ est inversible .

On conclut le théorème grâce au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H_n(V,V\setminus K_1) \arrow[d, "H_n(i)"'] & H_n(\Gamma_V(G),\Gamma_{V\setminus K_1}(G)) \arrow[l, "H_n(t_G)"'] \arrow[r, "H_n(t_G - r_G)"] \arrow[d, "H_n(j)"'] & H_n(E^n, E^n\setminus\{q\}) \arrow[d, equal, "Id_{H_n(E^n,E^n\setminus\{q\})}"] \\
H_n(U,U\setminus K) & H_n(\Gamma_U(F),\Gamma_{U\setminus K}(F)) \arrow[l, "H_n(t_F)"] \arrow[r, "H_n(t_F - r_F)"'] & H_n(E^n, E^n\setminus\{q\})
\end{tikzcd}$$

où $i \in Mor_{Top(2)}((V,V\setminus K_1),(U,U\setminus K))$ et $j \in Mor_{Top(2)}((\Gamma_V(G),\Gamma_{V\setminus K_1}(G)),(\Gamma_U(F),\Gamma_{U\setminus K}(F)))$

sont les injections canoniques .■

<u>Théorème 4.7 :</u> *Soit* $F : U \to K(E^n)$ *une m-application n-admissible sur*

la paire de Hausdorff $(U,U\setminus K)$ *ou* K *est un compact* Q*-acyclique.*

Alors si $F(U) \subset K$ *le degré généralisé* $\Im(F;U,K)$ *est égal à* $\{1\}$.

<u>Preuve :</u>

Soit x_0 un élément donné de K et considérons l'application :

$$f : U \to E^n$$

où

$$f(x) = \{x_0\}$$

pour tout $x \in U$ le quintuplet $r = [U, E^n, U, Id_U, f]$ est une représentation de f

n-admissible sur $(U,U\setminus K)$.

On peut considérer le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H_n(U,U\setminus K) & H_n(U,U\setminus K) \arrow[l, "H_n(Id_U)"'] \arrow[r, "H_n(Id_U - f)"] \arrow[d, "H_n(j)"'] & H_n\left(E^n, E^n \setminus \{q\}\right) \\
& H_n\left(E^n, E^n \setminus \{x_0\}\right) \arrow[ur, "H_n(Id_{E^n})"'] &
\end{tikzcd}$$

où $H_n(Id_U)$ est l’isomorphisme associé à identité et $H_n(j)$ est l’isomorphisme associé à l’injection canonique $\left((U,U/K) \overset{j}{\subset} \left(E^n, E^n \setminus \{x_0\}\right) \right)$.

D’où l’on déduit que : $\Im_r(f;U,K) = \{1\}$.

D’autre part considérons l’application multivoque

$$G : U \to K\left(E^n\right)$$

ou :

$$G(x) = K$$

pour tout $x \in U$.

Cette application est semi-continue supérieurement , compacte et Q-acyclique .

Elle est n-admissible sur $(U,U \setminus K)$.

En effet ceci est une conséquence du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H_n(U,U\setminus K) & H_n(U,U\setminus K) \arrow[l, "H_n(Id_U)"'] \arrow[r, "H_n(Id_U - f)"] \arrow[d, "H_n(a)"] & H_n\left(E^n, E^n \setminus \{q\}\right) \\
& H_n\left(\Gamma_U(G), \Gamma_{U\setminus K}(G)\right) \arrow[ul, "H_n(t_G)"] \arrow[ur, "H_n(t_G - r_G)"'] &
\end{tikzcd}$$

où

$$a \in Mor_{Top(2)}\left(\left(U, U \setminus K\right), \left(\Gamma_U(G), \Gamma_{U \setminus K}(G)\right)\right)$$

et définie par

$$a(x) = (x, f(x)) \ .$$

Du théorème 4.4 on déduit que :

$$\Im_r(f; U, K) \subset \Im(G; U, K)$$

par conséquent on a :

$$\Im(G; U, K) = \{1\} \ .$$

On conclut la démonstration de ce théorème en utilisant le théorème 4.6.

En effet l'application multivoque F est un sélecteur multivoque de G .■

<u>Théorème 4.8 :</u> *Toute application multivoque*

$$F : C \to K(C)$$

semi-continue supérieurement Q-acyclique ayant pour source un compact C

de E^n qui est un voisinage rétracte admet au moins un point fixe .

<u>Preuve :</u>

Soit U un ouvert de E^n et $r : U \to C$ une rétraction de U à C .

L'application multivoque

$$G = F \circ r : U \to K(C) \subset K\left(E^n\right)$$

est semi-continue supérieurement Q-acyclique. Par conséquent

$$\Im(G; U, C) = \{1\} \ .$$

On déduit donc que G admet dans U au moins un point fixe. Autrement dit

Il existe $x \in U$ tel que :

$$x \in G(x) = F(r(x)) \ .$$

Cependant x est un élément de C donc $r(x)=x$. Autrement dit il existe $x \in U$ tel que $x \in F(x)$.■

<u>Théorème 4.9 :</u> *Soit* $F : U \to K(E^n)$ *une application multivoque telle que* $\underset{x\in U}{\cap} F(x)$ *soi non vide et* $F(U)$ *est contenu dans un compact* K *de* U *,* K Q*-acyclique. Alors* F *est n-admissible sur* $(U,U \setminus K)$ *et* $\Im(F;U,K)=\{1\}$.

<u>Preuve :</u>

Soit $x_0 \in \underset{x\in U}{\cap} F(x)$. Considérons :

$$f : U \to K(E^n)$$

ou

$$f(x)=\{x_0\}$$

Cette application admet le quintuplet $r = [U, E^n, U, Id_U, f]$ comme représentation n-admissible sur $(U,U \setminus K)$.

En effet on a le diagramme suivant :

$$(U,U \setminus K) \xleftarrow{Id_U} (U,U \setminus K) \xrightarrow{Id_U - f} (E^n, E^n \setminus \{q\}) \quad (1)$$

celui-ci est correctement défini car si

$$x \notin K$$

on déduit :

$$x \neq x_0$$

et par conséquent :

$$(Id_U - f)(x) = x - x_0 \neq q \ .$$

Nous avons alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
(U,U\setminus K) & (U,U\setminus K) \arrow[l, "Id_U"'] \arrow[r, "Id_U - f"] \arrow[d, "j"'] & \left(E^n,E^n\setminus\{q\}\right) \\
& \left(E^n,E^n\setminus\{x_0\}\right) \arrow[ur, "Id_{E^n} - f"'] &
\end{tikzcd} \qquad (2)$$

où :

$$j:(U,U\setminus K)\to\left(E^n,E^n\setminus\{x_0\}\right)$$

est l’injection canonique et

$$Id_{E^n}-f\ :\left(E^n,E^n\setminus\{x_0\}\right)\to\left(E^n,E^n\setminus\{q\}\right)$$

est un homéomorphisme .

On déduit alors le diagramme suivant qui est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H_n(U,U\setminus K) & H_n(U,U\setminus K) \arrow[l, "Id_{H_n(U,U/K)}"'] \arrow[r, "(Id_U - f)_{n*}"] \arrow[d, "j_{n*}"'] & H_n\left(E^n,E^n\setminus\{q\}\right) \\
& H_n\left(E^n,E^n\setminus\{x_0\}\right) \arrow[ur, "(Id_{E^n} - f)_{n*}"'] &
\end{tikzcd}$$

où J_{n*} et $Id_{H_n(U,U/K)}$, $(Id_{E^n}-f)_{n*}$ sont des isomorphismes .

Par conséquent on a :

$$\Im_r(f;U,K)=\{1\}\ .$$

On peut également considérer le diagramme commutatif suivant :

$$
\begin{tikzcd}
(U, U \setminus K) \arrow[d, equal] & (U, U \setminus K) \arrow[l, "Id_U"'] \arrow[r, "Id_U - f"] \arrow[d, "a"] & \left(E^n, E^n \setminus \{q\}\right) \arrow[d, equal] \\
(U, U \setminus K) & \left(\Gamma_U(F), \Gamma_{U \setminus K}(F)\right) \arrow[l, "t_F"] \arrow[r, "t_F - r_F"'] & \left(E^n, E^n \setminus \{q\}\right)
\end{tikzcd}
\qquad (3)
$$

où $a(x) = (x, x_0)$ pour tout $x \in U$.

L'application a est correctement définie car :

Si x est un élément de U alors x_0 est un élément de $F(x)$ pour tout x de U .

D'où l'on déduit le diagramme commutatif suivant :

$$
\begin{tikzcd}
H_n(U, U \setminus K) \arrow[d, equal] & H_n(U, U \setminus K) \arrow[l, "(Id_U)_*"'] \arrow[r, "(Id_U - f)_*"] \arrow[d, "a_*"] & H_n\left(E^n, E^n \setminus \{q\}\right) \arrow[d, equal] \\
H_n(U, U \setminus K) & H_n\left(\Gamma_U(F), \Gamma_{U \setminus K}(F)\right) \arrow[l, "(t_F)_*"] \arrow[r, "(t_F - r_F)_*"'] & H_n\left(E^n, E^n \setminus \{q\}\right)
\end{tikzcd}
$$

Par conséquent F est une application multivoque n-admissible sur $(U, U \setminus K)$.

On a l'inclusion :

$$\Im(f; U, K) \subset \Im(F; U, K)$$

D’autre part l’application multivoque n-admissible sur

$$G : U \to K(E^n)$$

donnée par $G(x) = K$ pour tout $x \in U$ est semi-continue supérieurement compacte et Q-acyclique donc d’après le théorème 4.6 l’application multivoque G est n-admissible sur $(U, U \setminus K)$ et $\Im(G; U, K) = \{k\}$.

De plus F est un sélecteur de G donc d’après le théorème 4.2 on a les égalités et inclusions suivantes :

$$\{1\} = \Im(f; U, K) \subset \Im(F; U, K) \subset \Im(G; U, K) = \{k\}$$

d’où l’on conclut que :

$$\Im(F; U, K) = \{1\} \;.\blacksquare$$

<u>Théorème 4.10 :</u> *Soit* $F : U \to K(E^n)$ *une application multivoque n-admissible sur* $(U, U \setminus K)$ *et de direction non-opposée à l’application univoque continue* $f : (U, U \setminus K) \to (E^n, E^n \setminus \{q\})$ *sur* $(U, U \setminus K)$ *alors :*

$$\Im(F; U, K) = \{\Im(f; U, K)\} \;.$$

<u>Preuve :</u>

Sous les hypothèses du théorème on peut considérer l’application univoque suivante :

$$m : [0,1] \times U \times E^n \to E^n$$

donnée par :

$$m(l, x, u) = (1 - l)u + l f(x)$$

pour tout

$$(l, x, u) \in [0,1] \times U \times E^n .$$

Celle-ci prouve que F est une distorsion de f .

En effet, le fait que F est direction non opposée à f assure que :

$$x \notin m(l, x, F(x))$$

pour tout

$$(l, x) \in [0,1] \times (U \setminus K)$$

de plus

$$m(0, x, F(x)) = Id_{E^n}$$

et

$$m(1, x, F(x)) = f(x)$$

ainsi m est une distorsion de F a f .

Du théorème 4.5 on déduit que

$$\Im(F; U, K) \subset \{\Im(f; U, K)\}.$$

et donc l'égalité. ■

Références bibliographiques

[1] Agarwal R. P and O'Regan D, homtopy and leray- Shauder principles for multimaps, Non-linear Analysis Form 7 (2002) 103-111.

[2] Agarwal R. P , O'Regan D and Parks, Fixed point theory of multimaps in extension type spaces, J. Korean. Math. Soc. 39 (2002) 579-591.

[3] M. Barr, Oriented Singular Homology Theory , Appl . categ . 1 (1995) 1-9.

[4] N.M. Benkafadar, and M.C. Benkara-Mostefa, A generalized coincidence point index, Applied General Topology, Volume 6.No 1.[2005] 87-100.

[5] N.M. Benkafadar, B.D. Gel'man, On some generalized local degrees, Topology Proceedings 25 summer 2000 [2002], 417-433.

[6] N.M. Benkafadar, B.D. Gel'man, On a local degree of one class of multivalued vector fields in infinite-dimensional Banach spaces, Abstract and Applied Analysis 4 [1996], 381-396.

[7] S. Bogatyi , D. Gonçalver, and H. Ziesctang, coincidence theory . The minimizing problem, Procedings of the steklor Instutute of Mathematics 225 (1999), 45-77.

[8] Y.G Borisovitch, Topological characteristics and the investigation of

solvability for nonlinear problems, Izvestiya VUZ'ov, Mathematics 2 (1997), 3-23.

[9] Y.G Borisovitch, Topological characteristics of infinite-dimensional and the solvability for nonlinear boundry value problems, Proccedings of the Steklov Institute of mathematics 3 (1993), 43-50.

[10] K. Borsuk, Theory of retracts, Monografie Matematyczne 44 (polska Academia NAUK, Warszawa, 1967).

[11] K. Borsuk, A. kosinski, on connections between the homology proprerties of a set and its frontiers, Bull. Acad. Pol. Sc., 4 (1956), 331-333.

[12] G.E Bredon, Shealf Theory, springer verlag, N.Y; 1997.

[13] R. Brooks, On removing coincidences of two mpas only one , rather than both , of them way be deforme by a homotopy, Pacific J. of Math . 39 (1971) , No 3, pp 45-52.

[14] R.Brooks, coincidence, roots and fixed points, doctoral dissertation, Univ. of California, los Angeles, 1967.

[15] R.Brooks and C.Odenthal, Niclsen numbers for roots of maps of aspherical manifolds, Pacific. J. Math; 170 (1995), pp 405-420.

[16] R. Brown, A middle-distance look at root theory , in " Nielsen theory and reidemeister torsion ; Banach Center Publications , 49 (1999), 29-41.

[17] R. Brown and H Shirmer , Nielsen theory of roots of maps of pairs ,
Top. Appl ; 92 (1999), 247-274.
[18] W. Bruns and J. Kergoz, Cohen- maculay rings, Camlr. Univ.
Press, 1998.
[19] A-Dold Lectures on Algebraic Topology , 2nd edition , Springer-Verlag ,
Berlin , 1980.
[20] P. J. Ehlers and T.Porter , Joins for Augmented Simplicial sets, J.
Pure Appl. Alg. (1) 245 (2000), 37-44.
[21] S. Eilemberg and D. Montgomey , fixed point theorems for
muti-valued transformations, Anner. J . Math. 58, (1946), pp 214-222 .
[22] R. Fritsh and R.A. Piccimini, cellular Structures in topology, canb .
Uni. Press; 1990.
[23] B.D Gel'man, Topologcal characteristic for multi-valued mapping and
fixed points, Dokl. Acad. NouK 3 (1975), 524-527.
[24] B.D Gel'man, Geeralized degree for multi-valued mapping, Lectures notes
In Math 1520, (1992), 174-192.
[25] Gormiewicz, A lesfschetz-type fixed point theorem ; ilid ;
88 (1975), 103-115.
[26] T.Hili, comlinatorics on convex Polytopes, Carslaw Publ; 1992.

[27] J. Jerierski , The Nielsen coincidence theory on topological manifolds, Fund. Math; 143 (1993), 167-178.

[28] B. Jiang, Fixed points and braids, I , Inv. Math. 75 (1984) 69-74.

[29] B. Jiang, Fixed points and braids, II , Math. Ann. 272 (1985) 249-256.

[30] S. Maclane, The development of mathematical ideas by collision. The case of categories and tops theory, Categorical Topology (S. Maclane and J. Adaamell, eds), Word Scient. Publ; 1-9 August 1988, Prague, Czechoslovakia 1989.

[31] J. W. Milnor, Topologcal Results in comlinatorics, Michigan Math. J. 31 (1984) 113-128.

[32] D. O'Regan, coinsidence principles and fixed point theory for mappings in locally convex spaces, J. of Math. 28 (4) (1998), 1407-140x .

[33] M.J. Powers, Multi-valued mappings and lefstchetz fixed point theories , proc. Cambridge philos. Soc. 68 (1970) 619-630.

[34] H. Shirmer, Nielsen theory of transversal fixed point sets, Fund. Math; 14/ (1992), 31-59.

[35] E.G. Sklyarenko , Homology and Cohomology theories of General spaces, Enc. Math. Sc. So, springer, 1996, pp 124-256.

[36] R. Stanley, Comlinatorics and commutative Algebra, 2nd . ed . Birkhausser, 1996.

Abstract : In the work, the author builds some new algebraic topological invariants for some classes of morphismes.

For this purpose, homological methods are precouised .

The pairs (f,g) called n-admissible are first studied in this thesis and a Coincidence index $I(f,g)$ is defined.

$I(f,g)$ is a subset of the rational number Q , it can test the existence of points which verify the equations $f(x)=g(x)$. Equivalent classes are considered .

An other invariant of type degree for multivalued transformation is introduced. The generalized local degree $\Im(F)$ gives a good theorems in fixed points theory.

The representation of multifonctions is important in this construction .

At last, one gives several applications .

The results are new and generalize the works of many authors.

Keywords : Fixed point, Coincidence point , Index , Degree , Multi-valued mapping ;

ملخص: في هادا العمل نهتم بإنشاء بعض الغير متغيرات الطبولوجيا لبعض صفوف المرفيزمات .

لهدا نلجأ إلى الطرق الهمولوجية.

في أول مرحلة من هده الأطروحة نعرف دليل التلاقي $I(f,g)$. ثم ندرسه من اجل الأزواج (f,g). n-مقبول.

$I(f,g)$ هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الناطقة Q التي تسمح لنا بمعرفة النقاط التي تحقق المعادلة $f(x)=g(x)$.

ندخل غير متغير آخر من نوع الدرجة للدوال المتعددة الأشكال. الدرجة الموضعية المعممة $\Im(F)$ تعطي نظريات جديدة بالنسبة لنظرية النقاط الثابتة.

تمثيل الدوال المتعددة الأشكال مهم في هدا الإنشاء.

و في الأخير نعطي بعض التطبيقات.

النتيجة جديدة و هي معممة لأعمال بعض المؤلفين.

كلمات المفتاح: النقطة الثابتة، نقطة التلاقي، الدليل، الدرجة، الدوال متعددة الأشكال.

ا