REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES

N° d'ordre :……….
N° série :……….

THESE

Présentée pour l'obtention du
Diplôme de :
DOCTORAT D'ETAT

Option

EQUATIONS DIFFERENTIELLES
Thème

PROPRIETES SPECTRALES

D'UNE CLASSE D'OPERATEURS DIFFERENTIELS

Par :

ADJEROUD NACER

Devant le jury :

Président :	**N. HAMRI**	**Prof**	**Univ. Constantine**
Rapporteur :	**M. DENCHE**	**Prof**	**Univ. Constantine**
Examinateur :	**A. AYADI**	**Prof**	**C.Univ. Oum El Bouagh**
Examinateur :	**M.Z. AISSAOUI**	**M.C**	**C.Univ. Guelma**
Examinateur :	**C. SAIDOUNI**	**M.C**	**Univ. Constantine**
Examinateur :	**M. DJEBARNI**	**M.C**	**C.Univ. Bordj Bou Arreridj**

Soutenue le 17-12-2007

Remerciements

Je remercie le professeur M.Denche de m'avoir aidé énormément à soutenir cette thèse.

J'exprime aussi ma gratitude au professeur N.Hamri qui m'a encouragé à travailler et qui m'a fait l'honneur de présider le jury.

Je tiens aussi à remercier le professeur A.Ayadi qui a porté un intérêt constant à mon travail et d'avoir accepté de faire partie du jury.

Enfin je tiens à remercier les professeurs M.Z. Aissaoui, C. Saidouni et M. Djebarni d'avoir acceptés de faire partie du jury.

ملخص: بالرغم من مظهر المؤثرات التفاضلية من الرتبة الثانية فهذه الأخيرة تمثل بنية طيفية ذات أهمية كبيرة، لا تزال تثير الاهتمام في هذا الميدان مع أن التقنيات المستعملة لحل المسائل الحدية التي تعرف هذه المؤثرات لم تتغير ومع ذالك لا يزال الكثير من العمل للإنجاز.فيما يتعلق بالحالة الغير الخطية ّ، كذالك المسائل الحدية قد فازت باهتمام الكثير من الباحثين في السنوات الأخيرة، خاصة فيما يتعلق بوجود الحلول الموجبة للمعادلات الغير الخطية من الرتبة الثانية، وبالنسبة للمعادلات من الرتب العالية يبقى الكثير لإنجازه.

في هذه الرسالة نبين من جهة وجود حل موجب ومتناظر لمسألة حدية متعددة النقاط لمعادلة تفاضلية من الرتبة الثانية بتطبيق مبرهنة النقطة الصامدة *لشودرو*من جهة أخرى وباستعمال نظرية المؤثرات نعطى صيغة تقاربية رفيعة للمحدد المميز للمؤثرالتفاضلى من الرتبة الثانية المعرف بشروط حدية ذات ثلاث نقاط على ناحية مناسبة من المستوى المركب.

<u>كلمات المفاتيح</u>: متعدد النقاط، حل موجب و متناظر، مبرهنة النقطة الصامدة
الصيغة المقاربة للمحدد المميز

RESUME : **Malgré l’apparence simple des opérateurs différentiels d’ordre deux, ceux-ci présentent une structure spectrale extrêmement intéressante,qui continue toujours à gagner l’attention dans ce domaine.Bien que les techniques utilisées pour résoudre les problèmes aux limites définissants ces opérateurs n’aient pas changées , il reste cependant beaucoup de travail à faire . Pour le cas non linéaire , aussi les problèmes aux limites ont gagné l’attention de beaucoup de chercheurs ces dernières années,surtout concernant l’existence des solutions positives des équations différentielles d’ordre deux ,mais pour les équations d’ordre élevé il reste du travail à accomplir . Dans cette thèse on montre d’une part l’existence d’une solution positive et symétrique d’un problème aux limites à multipoint d’une équation différentielle d’ordre deux par application du théorème du point fixe de Schauder , de l’autre part et par utilisation de la théorie des opérateurs on donne une formule asymptotique raffinée du déterminant caractéristique d’un opérateur différentiel d’ordre deux défini par des condition aux limites à trois points sur une région appropriée du plan complexe.**

Mots clés : **multipoint, solution positive symétrique, théorème du point fixe, formule asymptotique du déterminant caractéristique.**

ABSTRACT: Despite the appearance of second order differential operators, this exhibit an exceedingly interesting spectral structure, which always continue to gain attention in this domain. Though, the techniques used for resolve these boundary problems are not changed, however there's still a lot to do, in this domain. For the nonlinear cases, also the boundary-value problems are gained attention of many authors in the recent years, especially the existence of positive solutions of second order differential equations, but for the higher order boundary-value problems there's still a lot to do. In this thesis we study on the one hand the existence of symmetric positive solution of multi-point boundary eigenvalue problems for second order differential equation by using the Schauder fixed point theorem, on the other hand by the use of the operator theory to simplify the development, we obtain the refined asymptotic formula for the characteristic determinant of second order three-point differential operators in the appropriate region of complex plane.
Keywords**: Multi-point, symmetric positive solution, fixed point theorem, asymptotic formula of the characteristic determinant**.

Table des matières

Introduction

Parmi les différents domaines des mathématiques, certains problèmes sont regardés comme faisant partie du champ des problèmes aux limites des équations différentielles ordinaires. Ce champ a commencé à intéresser les mathématiciens depuis 1900, ces problèmes sont rassemblés en un vigoureux champ de problèmes aux limites généraux consistants premièrement à l'étude des systèmes d'équations différentielles avec des conditions aux limites générales, puis à l'étude des opérateurs différentiels avec des conditions aux limites.

En 1962 Feller, [5] en examinant le processus de diffusion, a rencontré une généralisation intéressante du problème de Folkker-Planck sur l'intervalle $]r_1, r_2[$, où r_1 est une limite naturelle, et r_2 est une limite de sortie, il considère l'équation $u_t = a\,(x)\, u_{xx} + b\,(x)\, u_x$, représentant une certaine transition de probabilité comme fonction de position initiale. Alors l'équation de Folnker-Planck représentant les densités de probabilités est donnée par

$$v_t = \left[(a\,(x)\, v)_x - b\,(x)\, v \right]_x - \left(\tau \widetilde{p}\,(x) / p_2 \right) \lim_{x \longrightarrow r_2} \left[(a\,(x)\, v)\, x - b\,(x)\, v \right],$$

où le dernier terme représente la masse répartie sur la frontière. Si $v = w\,(t)\, y\,(x)$, l'équation en y résultant de la séparation des variables est une équation différentielle aux limites

$$\left[(a\,(x)\, y)' - b\,(x)\, y \right]' - \left(\tau \widetilde{p}\,(x) / p_2 \right) \left[(a\,(r_2)\, y\,(r_2))' - b\,(r_2)\, y\,(r_2) \right] = \lambda y.$$

Dans la construction d'un réacteur nucléaire le passage des particules atomiques à travers les boucliers laminés mène à des opérateurs différentiels ordinaires dont le domaine est déterminé par les conditions aux limites de la forme $y\,(a^+) = y\,(a)$ ou $y'\,(a^+) = y'\,(a)$, à l'interface. En physique mathématiques beaucoup de sujets mènent à des problèmes de détermination des valeurs propres et des fonctions propres des opérateurs différentiels, ainsi qu'à des problèmes d'expansions des fonctions arbitraires sous forme de séries (ou d'intégrales) de fonctions propres. Des problèmes de ce genre sont rencontrés aussi, lors de l'utilisation des méthodes de Fourier pour trouver la solution d'une équation aux dérivées partielles sous certaines conditions initiales et aux conditions aux limites, et l'intérêt pour de tels problèmes a été particulièrement encouragé par le développement de la mécanique quantique où la théorie spectrale de ces opérateurs apparaît comme la méthode mathématique de base en particulier pour l'étude détaillée des opérateurs différentiels singuliers, parmis les opérateurs, par exemple ceux qui sont définis sur des intervalles non bornés. Les opérateurs différentiels font l'objet de plusieurs recherches courantes et la plus grande partie des travaux traîte la théorie spectrale de ces opérateurs, c'est-à-dire l'étude de leurs spectres, l'expansion des fonctions données en termes de fonctions propres de ces opérateurs, le calcul de la résolvante et de la fonction de Green. L'étude de tous ces éléments est importante, et de tels opérateurs peuvent avoir un spectre continu, comme ils peuvent avoir un spectre discret, et alors une expansion en termes de fonctions propres prend la forme d'une intégrale de Stieltjes.

L'histoire récente des problèmes aux limites généraux a commencé par la contribution de Picone [19], avec le problème

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} p_i y^{(n-i)} + f, \quad \sum_{k=1}^{n} \int_a^b a_{ik}(t)\, y^{(k-i)}(t)\, dt = 0, \quad i = 1, ..., n.$$

Picone obtient la fonction de Green, pour le cas $p_i = 0, i = 1, ..., n$. En mettant l'équation différentielle sous la forme d'une équation intégrale puis discuta le cas général, ensuite le travail a été développé par Betchler [1], et entamé par Krall [11] en 1963. A partir de cette date commença l'apparition des problèmes aux limites à multi-points dans les articles de Cole [3, 4]. Par la suite Krall considéra l'opérateur différentiel L suivant dans $L^2[0, +\infty]$, tel que

$$ly = -y'' + q(x)\, y,$$

avec $\int_0^{+\infty} |q(x)|\, dx < +\infty$.Avec certaines conditions sur f sur un domaine D_0, il définit le domaine D comme étant l'ensemble des fonctions $f \in D_0$ telles que

$$\int_0^{+\infty} k(x) f(x)\, dx - \beta f(0) + \alpha f'(0) = 0,$$

où $k \in L^2[0, +\infty]$; α, β sont des constantes. En définissant l'opérateur L tel que $Lf = lf$, et $f \in D$, Krall avait montré que pour $|\alpha| + |\beta| \neq 0$, le domaine D est dense dans $L^2[0, +\infty]$, trouva la fonction de Green ainsi que l'opérateur adjoint. Par la suite J.D Tamarkin [21], avait discuté une certaine équation intégro-différentielle

$$y^{(k)} + \sum_{j=1}^{k} r_j(x)\, y^{(k-j)}(x) = r(x) + \sum_{\sigma=1}^{m} \int_a^b y^{(\sigma)}(\xi)\, R_\sigma(x, \xi)\, d\xi,$$

en imposant certaines conditions aux limites, la solution de ce problème est exhibé en terme de fonction de Green, des formules asymptotiques ont été obtenues, ainsi que des expansions en termes de fonctions propres.

Dans les deux dernières décennies la majeure partie des recherches a été accordée aux opérateurs différentiels d'ordre deux, avec l'introduction des conditions aux limites non déparées,des conditiions aux limites intégrales, des conditions aux limites à multi-points, mixtes,des conditions aux limites contenants un paramètres, et d'autres. Dans la majeure partie de ces travaux un intérêt particulier a été accordé à la théorie spectrale des ces opérateurs, c'est -à dire au calcul du déterminant caractéristique, au calcul des valeurs propres soient explicitement ou asymptotiquement, au calcul de la fonction de Green et de la résolvante, à l'estimation de ces fonctions sur des régions appropriées du plan complexe, ainsi que l'introduction de la notion de semi-groupe d'opérateurs dans ce genre de problèmes. Tous ces travaux cités pour les opérateurs différentiels ont été développés par P. Lang, J. Locker et J.M. Gallardo. D'autres part il sera aussi abordé les cas des équations différentielles non linéaires où dans cette partie extrêmement importante l'existence et l'unicité des solutions positives multiples fera l'objet d'études de beaucoup d'auteurs, l'approche principale est de reformuler le problème aux limites donné àune équation opératorielle de la forme $x = Tx$, où T est un certain opérateur approprié, et alors l'existence des solutions positives est assurée par application des théorèmes du point fixe bien connus de M.A. Krasnoselskii, de Leggett-Williams, de Schauder, de Leray Schauder. Citons les résultats récents dans ce genre de problèmes qui sont dûs surtout à G.L. Karakostas et P.Ch. Tsamatos [24] les auteurs ont étudiés le problème aux limites avec des conditions aux limites non locales avec réponse croissante pour une équation différentielle ordinaire du second ordre non linéaire

$$(p(t)\, x'(t))' + q(t)\, f(t, x(t)) = 0, \qquad p.p. \quad t \in [0,1] \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \tag{2}$$

$$x'(1) = \int_{\eta}^{1} x'(s)\, dg(s), \tag{3}$$

où $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante, et les fonctions à valeurs réelles sont définies sur $[0,1]$ et $\eta \in (0,1)$, et où l'intégrale dans (3) est au sens de Riemann-Stieltjes. L'équation (1) est une équation du type de Sturm-Liouville. Les auteurs par application du théorème de Krasnoselskii, montrent l'existence des solutions positives du problème $(1) - (3)$ en imposant une condition de monotonicité sur f . Aussi les mêmes auteurs [25] considèrent le problème $(1) - (3)$ avec la condition que f soit une fonction discrète en zéro, et par application du théorème du point fixe de Krasnoselskii, l'existence des solutions positives a été montré, ainsi que des résultats d'existences pour un ensemble de solutions positives sont données. Après les mêmes auteurs dans [23] considèrent le problème aux valeurs propres pour une équation différentielle non linéaire retardée

$$(p(t)\, x'(t))' + \lambda \sum_{j=0}^{k} q_j(t)\, f_j(x(t), x(h_j(t))), \quad p.p. \quad t \in [0,1] \tag{4}$$

$$x(0) = 0, \tag{5}$$

$$x'(1) = \int_{\eta}^{1} x'(s)\, dg(s), \tag{6}$$

ils ont étudiés les valeurs du paramètre λ pour lesquelles le problème $(4) - (6)$ admet une solution, prévoient des informations sur les estimations en normes et sur l'unicité et la continuité des solutions. L'existence des solutions positives est assurée par le théorème du point fixe de krasnoselskii. J. Henderson [19] étudia le problème aux limites à trois points suivant

$$x''(t) + f(t, x(t)) = 0, \qquad 0 \leq t \leq 1, \tag{7}$$

$$x(0) = 0, \qquad x(\eta) - x(1) = 0, \tag{8}$$

où $\eta \in (0,1)$, et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, est continue. Par application du théorème du double point fixe d'Avery-Henderson, l'existence d'auplus de deux solutions non négatives du problème $(7) - (8)$ est montrée. Dans la même année Z. Bai, Y. Wang, et W. Ge [4] considèrent le problème aux limites suivant

$$x''(t) + p(t) f(t, x(t), x'(t)) = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{9}$$

$$x(0) = 0 = x(1), \tag{10}$$

$$x(0) = 0 = x'(0), \tag{11}$$

où $f :\in C([0,1] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$, $p(t)$ est une fonction non négative mesurable sur $(0,1)$,et $p(t)$ n'est identiquement nulle sur aucun sous-intervalle de $(0,1)$ .Des conditions suffisantes pour l'existence d'auplus trois solutions positives du problème $(9) - (11)$ ont été obtenues par application du théorème du point fixe introduit par Avery et Henderson.

Après viennent J. Chu, Z. Zhou [8] où ces derniers considèrent le problèmes aux valeurs propres avec des conditions aux limites non locales suivant

$$x''(t) + \lambda p(t) f(t, x(t),) = 0, \qquad p.p. \quad t \in [0,1], \tag{12}$$

$$x(0) = 0, \tag{13}$$

$$x'(1) = \int_{\eta}^{1} x'(s)\, dg(s), \tag{14}$$

où $\eta \in (0,1)$, $\lambda > 0$. Cette classe de problèmes aux limites non locales comprend, comme cas special les problèmes aux limites à multi-points considérés par plusieurs auteurs. En effet la condition $(13)-(14)$ est la version continue de la condition multi-points

$$x(0)=0,\quad x'(1)=\sum_{j=1}^{m}a_jx'(\eta_j),$$

lorsque g est une fonction constante par morceaux, décroissante et admet un nombre fini de sauts, où $a_j, j=1,...,m$ sont des réels de même signe, et $0<\eta_1<\eta<...<\eta_m$.Les auteurs ont établis l'intervalle des valeurs propres en fonction de

$$f_0=\lim_{x\longrightarrow 0^+}f(x)/x,\quad \text{et}\quad f_\infty=\lim_{x\rightarrow+\infty}f(x)/x,$$

par application du théorème du point fixe de Krasnoselskii, l'existence de deux solutions positives du problème $(12)-(14)$ pour des intervalles de λ bien appropriés est prouvée.

Très récemment Y. Chen, B. Yan, et L. Zhang [7] considèrent le problème aux limites à trois points singuliers suivant

$$x''(t)+p(t)f(t,x(t),x'(t))=0,\qquad 0<t<1, \tag{15}$$

$$x'(0)=0,\qquad x(1)=\alpha x(\eta), \tag{16}$$

et par le théorème du point fixe de Krasnoselskii, ils montrent que le problème aux limites $(15)-(16)$ admet au moins une solution positive et que l'ensemble des solutions positives de (15) est compact. En même temps John R. Graef, J. Henderson, B. Yang [17] ont étudiés les conditions suffisantes pour l'existence et la non existence des solutions des solutions positives d'un problème aux limites à trois-points non linéaire d'ordre élevé, ils considèrent le problème suivant

$$x^{(n)}(t)=g(t)f(t,x(t)),\qquad 0\leq t\leq 1 \tag{17}$$

$$x^{(i-1)}(0)=0,\qquad 1\leq i\leq n-2 \tag{18}$$

$$x^{(n-2)}(p) = 0, \qquad x^{(n-1)}(1) = 0, \tag{19}$$

où $p \in (1/2, 1)$, $n \geq 4$ est un entier fixe, et $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ sont continues et $g(t) \neq 0$ sur $[0,1]$. Le problème aux limites à trois points considéré ici est utilisé par plusieurs auteurs dans l'étude de l'existence des solutions positives des problèmes d'ordre deux, en considérant la fonction suivante $G_3 : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,+\infty)$ définie par

$$G_3(t,s) = \begin{cases} t(2s-t)/2, & t \leq s \leq p, \\ s^2/2, & s \leq t, \text{et } s \leq p, \\ t(2p-t)/2, & t \leq s, \text{et } s \geq p, \\ t(2p-t)/2 + (t-s)^2/2, & t \geq s \geq p. \end{cases}$$

Pour $n \geq 4$,est définie la fonction

$$G_n(t,s) = \int_0^t G_{n-1}(v,s)\, dv, \qquad (t,s) \in [0,1] \times [0,1].$$

Alors $G_n(t,s)$ dénote la fonction de Green de l'equation

$$x^{(n)}(t) = 0,$$

soumise aux conditions $(18) - (19)$, de plus résoudre le problème $(17) - (19)$ revie[]nt à trouver la solution de l'équation intégrale

$$x(t) = \int_0^1 G_n(t,s)\, g(s)\, f(s, x(s))\, ds, \qquad 0 \leq t \leq 1,$$

avec $G_n(t,s) > 0$.pour $t, s \in (0,1)$ et $n \geq 3$.Les auteurs par application du théorème du point fixe de Guo-Krasnoselskii ont montré l'existence est la non existence des solutions positives du problème $(17) - (19)$.

Dans cette thèse sera donné au chapitre 1 le rappel de quelques notions de bases concernants les opérateurs différentiels ainsi que l'énoncé de certains théorèmes essentiels sur le point fixe, au chapitre 2 sera donné l'étude de l'existence des solutions symetriques et positives correspondantes à des valeurs propres λ appartenants à des intervalles propres bien appropriés. Le but de cette étude est de déterminer comment à partir du travail accompli dans [7] qui porte sur l'existence des solutions positives d'une équation différentielle du second ordre non linéaire avec des conditions aux limites à multi-points, on peut obtenir l'existence d'une solution symetrique et positive d'une équation du second ordre non linéaire avec des conditions aux limites à multi-points.pour terminer au chapitre 3 il sera établi une formule asymptotique du déterminant caractéristique d'un opérateur différentiel d'ordre deux, défini par des conditions aux limites à trois points en utilisant la théorie des opérateurs pour simplifier les développements et par la suite obtenir une formule plus raffinée valable seulement sur la bande horizontale $-\delta \leq Im\rho \leq \delta$, du plan complexe des ρ, avec $\delta > 0$.Dans cette étude on a élargi le travail obtenu dans [36], qui porte sur l'expansion asymptotique du déterminant caractéristique d'un opérateur différentiel d'ordre deux à deux points sur le demi-plan $Im\rho \geq -\delta$, à une expansion du déterminant caractéristique du même opérateur avec des conditions aux limites à trois points sur la bande horizontale $|Im\rho| \leq \delta$.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Pour un opérateur différentiel, des formules asymptotiques pour les valeurs propres et les fonctions propres peuvent-êtres données pour les grandes valeurs de $|\lambda|$. De telles formules ne sont pas seulement intéressantes en elles mêmes, mais elles trouvent aussi leurs applications en des étapes décisives dans les démonstrations de certains théorèmes de la théorie des opérateurs différentiels, plus particulièrement dans les théorèmes d'expansions.

1.1 Les domaines S et T

Le plan complexe des ρ est partagé en $2n$ secteurs $S_k, k = 0, 1, ..., 2n-1$, définis par

$$\frac{k\pi}{n} \leq \arg \rho \leq \frac{(k+1)\pi}{n}.$$

Pour chacun des secteurs S_k.les nombres $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ peuvent-être ordonnés de telle façon que pour chaque $\rho \in S_k$, les inégalités

$$Re(\rho\omega_1) \leq Re(\rho\omega_2) \leq ... \leq Re(\rho\omega_n).$$

Des domaines plus généraux peuvent-être obtenus à partir des secteurs S_k par la translation : $\rho \longrightarrow \rho - c$, où c est un nombre complexe fixe. Les nouveaux secteurs obtenues seront notés $T_k, k = 0, 1, ..., 2n-1$. En tenant compte de la manière dont les T_k sont obtenus des S_k, nous avons aussi pour tous $\rho \in T_k$ les inégalités suivantes

$$Re\,(\rho + c)\,\omega_1 \leq Re\,(\rho + c)\,\omega_2 \leq ... \leq Re\,(\rho + c)\,\omega_n.$$

1.2 Estimation asymptotique des solutions de l'équation $l\,(y) + \rho^n = 0$:

Enonçons le théorème important suivant

Théorème 1.1 Supposons que les coefficients $p_2, p_3, ..., p_n$ sont continues sur $[0, 1]$, alors l'équation

$$y^{(n)} + p_2\,(x)\,y^{(n-2)} + ... + p_{n-1}\,(x)\,y' + p_n\,(x)\,y + \rho^n y = 0,$$

admet dans chaque région T du plan complexe des ρ, n solutions linéairements indépendantes $y_1, ..., y_n$ qui sont régulières pour $|\rho|$ suffisamment grand ces solutions et leurs dérivées peuvent-êtres exprimées par les formules suivantes

$$\begin{cases} y_k = e^{\omega_k \rho x}\left[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], \\ \frac{dy_k}{dx} = \rho e^{\omega_k \rho x}\left[\omega_k + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], \\ \frac{d^{n-1}y_k}{dx^{n-1}} = \rho^{n-1} e^{\omega_k \rho x}\left[\omega_k^{n-1} + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]. \end{cases} \tag{1.1}$$

Donc pour $|\rho|$ assez grand, seulement le premier et le dernier terme dans l'équation

$$y^{(n)} + p_2\,(x)\,y^{(n-2)} + ... + p_n\,(x)\,y + \rho^n y = 0$$

jouent un rôle essentiel.

1.2.1 Rafinement des formules asymptotiques :

Si les coefficients $p_2\,(x)\,, p_3\,(x)\,, ..., p_n\,(x)$ de l'expression différentielle sont continus, ainsi que leurs dérivées d'un certain ordre m, alors les formules asymptotiques (1.1) peuvent-êtres données d'une façon plus précises.

Supposons par exemple que $p_2 \in C^1\,[0, 1]$, nous obtenons que

$$y_k = e^{\omega_k \rho x}\left[1 + \frac{y_{k0}\,(x)}{\rho} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right], \tag{1.2}$$

où

$$y_{k0}(x)=\frac{\omega_k^{n-1}}{n}\int_0^x p_2(t)\,dt. \tag{1.3}$$

De la même manière en utilisant les relations (1.2) et (1.3), nous aurons que

$$\frac{d^\nu y_k}{dx^\nu}=\rho^\nu\omega_k^\nu e^{\omega_k\rho x}\left[1+\frac{y_{k\nu}(x)}{\rho}+O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right], \tag{1.4}$$

$\nu=0,1,...,n-1.$

La répétition de cette procédure mène au corollaire suivant

Corollaire 1.2 Si les coefficients $p_2,p_3,...,p_n$ admettent des dérivées jusqu'à l'ordre $m,(m-1),(m-2),...$;respectivement dans $[0,1]$, alors les formules asymptotiques suivantes sont valables pour les solutions $y_1,...,y_n$ construites dans le théorème 1.1

$$y_k=e^{\omega_k\rho x}\left[1+\frac{y_{k01}(x)}{\rho}+\frac{y_{k02}(x)}{\rho^2}+\frac{y_{k0m}(x)}{\rho^m}+O\left(\frac{1}{\rho^{m+1}}\right)\right], \tag{1.5}$$

$$\frac{d^\nu y_k}{dx^\nu}=\rho^\nu\omega_k^\nu e^{\omega_k\rho x}\left[1+\frac{y_{k\nu1}(x)}{\rho}+\frac{y_{k\nu2}(x)}{\rho^2}+\frac{y_{k\nu m}(x)}{\rho^m}+O\left(\frac{1}{\rho^{m+1}}\right)\right], \tag{1.6}$$

où $y_{k\nu1}(x),y_{k\nu2}(x),...,y_{k\nu m}(x)$ sont des fonctions continues sur $[0,1]$.

Remarque 1.3 le terme $O\left(\frac{1}{\rho^{m+1}}\right)$ dans les relations ci-dessus n'est autre qu'une expression de la forme

$$\frac{1}{\rho^{m+1}}\left[\int_0^x e^{-\omega_k\rho(x-t)}K_1(x,t;\rho)\,h(t,\rho)\,dt-\int_x^1 e^{-\omega_k\rho(x-t)}K_2(x,t;\rho)\,h(t,\rho)\,dt\right],$$

où h(x,t) désigne une certaine fonction bornée, pour $K_1(x,t;\rho),K_2(x,t;\rho)$ voir $[41,p.48-51]$.

1.3 Fonction de Green de l'opérateur $L-\lambda I$:

Soit L un opérateur engendré par l'expression différentielle $l(y)$ et par les formes $U_\nu(y)=0,\nu=1,,...,n$. Soit $y_\nu(x,\lambda)=y_\nu,\nu=1,,...,n$,un système de solutions de l'équation $l(y)=\lambda y$.

On définit le déterminant caractéristique de l'opérateur L par

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & ... & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & ... & U_2(y_n) \\ . & . & ... & . \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & ... & U_n(y_n) \end{vmatrix},$$

et le Wronskien du système de solutions $y_1, y_2, ..., y_n$ par

$$W = \begin{vmatrix} y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & ... & y_n^{(n-2)} \\ . & . & ... & . \\ y_1 & y_2 & ... & y_n \end{vmatrix}.$$

La fonction de green $G(x,t;\lambda)$ de l'opérateur $L - \lambda I$ est donnée par

$$G(x,t;\lambda) = \frac{(-1)^n}{\Delta(\lambda)} H(x,t;\lambda),$$

où

$$H(x,t;\lambda) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n & g(x,t) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & ... & U_1(y_n) & U_1(g) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & ... & U_2(y_n) & U_2(g) \\ . & . & ... & . & . \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & ... & U_n(y_n) & U_n(g) \end{vmatrix},$$

et

$$g(x,t) = \pm \frac{1}{2W(t)} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1^{(n-2)}(t) & y_2^{(n-2)}(t) & ... & y_n^{(n-2)}(t) \\ . & . & ... & . \\ y_1(t) & y_2(t) & ... & y_n(t) \end{vmatrix},$$

qui prend un signe positive si $x > t$, et un signe négative si $x < t$.

Soient les théorèmes importants suivants

Théorème 1.4 (Schauder). Soit E un espace de Banach et $K \subset E$ une partie convexe fermée bornée de E et soit T un opérateur qui applique K dans elle-même $TK \subset K$.Si T est compact sur K, alors T admet un point fixe dans K.

Théorème 1.5(Leray-Schauder) .Soit E un espace de Banach et $T : E \longrightarrow E$

un opérateur compact. Supposons que toute solution éventuelle de l'équation

$$y = \lambda T(y),$$

dans laquelle le paramètre $\lambda \in [0,1]$, vérifie à priori la condition suivante : il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $\lambda \in [0,1]$ et tout y vérifiant l'équation ci-dessus on a

$$\|y\|_E \leq M.$$

Alors l'équation $y = T(y)$ admet une solution.

Théorème 1.6 (Krasnoselskii). Soit E un espace de Banach et soit K un cône dans E.Supposons que Ω_1, Ω_2 sont deux sous-ensembles ouverts de E, avec $0 \in \Omega_1 \subset \overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$, et soit

$$T : K \cap \left(\Omega_2 \backslash \overline{\Omega}_1\right) \longrightarrow K$$

un opérateur compact tel que l'on ait

$$\|Ty\| \leq \|y\|, \quad y \in K \cap \partial\Omega_1, \quad \|Ty\| \geq \|y\|, \quad y \in K \cap \partial\Omega_2$$

ou bien

$$\|Ty\| \geq \|y\|, \quad y \in K \cap \partial\Omega_1, \quad \|Ty\| \leq \|y\|, \quad y \in K \cap \partial\Omega_2.$$

Alors l'opérateur T admet un point fixe dans $K \cap \left(\Omega_2 \backslash \overline{\Omega}_1\right)$.

Chapitre 2

Solution positive symétrique et valeurs propres d'un problème aux lmites à multi-points

2.1 Introduction :

Récemment, l'existence des solutions pour les équations différentielles ordinaires non linéaires avait été étudiée extensivement par plusieurs auteurs utilisant le théorème du point fixe de Leray-Schauder. Dans cet Article nous prouvons l'existence d'une solution positive et symétrique du problème aux limites à multi-points

$$x''(t) + \lambda f(t, x, x', x'') = 0, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

$$x(0) = x(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i x(\eta_i),$$

où λ est un paramètre réel assez petit, par l'application du théorème du point fixe de schauder, nous caractérisons ensuite les valeurs de λ pour lesquelles le problème donné admet au moins une solution positive et symétrique.

Nous commençons par étudier l'existence d'une solution positive et symétrique du problème aux limites à multi-points du second ordre suivant

$$x''(t) + f(t, x, x', x'') = 0, \qquad 0 \leq t \leq 1 \tag{2.1}$$

$$x(0) = x(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i x(\eta_i). \tag{2.2}$$

Nous considérons les hypothèses suivantes :

les coefficients a_i sont tels que $a_i > 0$ pour $i = 1, 2, ..., m-2$ et les nombres η_i sont tels que $0 < \eta_1 < \eta_2 < ... < \eta_{m-2} < 1$ et $\sum_{i=1}^{m-2} a_i < 1$; la fonction f définie par $f : [0,1] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est continue telle que $f(t, 0, 0, 0) \neq 0$ pour $0 \leq t \leq 1, (u, v, w) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$,dans l'expression de f la dérivée seconde de w peut se manifester d'une façon non linéaire. Par la suite nous établirons un résultat pour l'équation

$$x''(t) + \lambda f(t, x, x', x'') = 0, \qquad 0 \leq t \leq 1,$$

avec les conditions (2.2).

Le but du présent travail et de reformuler le problème $(2.1)-(2.2)$ à une équation opératorielle de la forme $x = Tx$, où T est un certain opérateur approprié et alors nous établirons un critère simple pour l'existence d'une solution symétrique et positive du problème aux limites à multi-points $(2.1) - (2.2)$ par application du théorème du point fixe de Schauder.

Nous procédons comme suit dans ce travail. Dans la section 2 nous donnons quelques résultats utilles qui peuvent-êtres utilisés plus tard pour prouver nos résultats essentiels, dans la section 3 nous discutons l'existence de la solution positive et symétrique du problème aux limites $(2.1)-(2.2)$, et par la suite l'existence des valeurs propres de ce problème aux limites.

2.2 Lemmes préliminaires

Lemme 2.1. Soient les nombres réels positifs $a_i > 0$ pour $i = 1, 2, ..., m-2$, avec $\sum_{i=1}^{m-2} a_i \neq 1$.Alors si la fonction $g \in C[0,1]$, le problème aux limites

$$x''(t) + g(t) = 0, \qquad 0 \leq t \leq 1, \tag{2.3}$$

$$x(0) = x(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i x(\eta_i). \tag{2.4}$$

admet une solution unique donnée par

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)\, g(s)\, ds + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^1 G(\eta_i, s)\, g(s)\, ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i}, \tag{2.5}$$

où la fonction G est telle que

$$G(t,s) = \begin{cases} \alpha(1-\beta), & 0 \le \alpha \le \beta \le 1, \\ \beta(1-\alpha), & 0 \le \beta \le \alpha \le 1. \end{cases} \tag{2.6}$$

Preuve. Par intégration de l'équation (2.3) de 0 à t nous obtenons que

$$x'(t) = -\int_0^t g(s)\, ds + C_1.$$

une seconde intégration de $x'(t)$ de 0 à t donne

$$x'(t) = -\int_0^t \left(\int_0^r g(s)\, ds \right) dr + C_1 t + C_2,$$

si on fait une intégration par parties en posant

$$\psi(r) = \int_0^r g(s)\, ds, \qquad \varphi'(r) = 1,$$

il vient que

$$\psi'(r) = \frac{d}{dr} \left(\int_0^r g(s)\, ds \right) = g(r), \qquad \varphi(r) = r,$$

nous obtenons que

$$\begin{aligned} x(t) &= -\left\{ t \int_0^t g(s)\, ds - \int_0^t r g(r)\, dr \right\} + C_1 t + C_2, \\ &= -t \int_0^t g(s)\, ds + \int_0^t r g(r)\, dr + C_1 t + C_2 \\ &= -\int_0^t \{ t g(s) - s g(s) \}\, ds + C_1 t + C_2 \\ &= -\int_0^t (t-s)\, g(s)\, ds + C_1 t + C_2, \end{aligned}$$

ainsi on a

$$x(t) = -\int_0^t (t-s)\, g(s)\, ds + C_1 t + C_2.$$

Par utilisation des conditions aux limites (2.4), il suit que

$$x(0) = C_2,$$

$$a_i x(\eta_i) = -a_i \int_0^{\eta_i} (\eta_i - s)\, g(s)\, ds + C_1 \eta_i a_i + C_2 a_i,$$

aussi

$$\sum_{i=1}^{m-2} a_i x(\eta_i) = -\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\eta_i} (\eta_i - s)\, g(s)\, ds + C_1 \sum_{i=1}^{m-2} \eta_i a_i + C_2 \sum_{i=1}^{m-2} a_i,$$

d'autre part nous avons que

$$x(1) = -\int_0^1 (1-s)\, g(s)\, ds + C_1 + C_2.$$

D'après les conditions (2.4) on a que

$$C_1 = \int_0^1 (1-s)\, g(s)\, ds,$$

et

$$C_2 = \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \eta_i \int_0^1 (1-s)\, g(s)\, ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i} - \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\eta_i} (\eta_i - s)\, g(s)\, ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i}.$$

Donc finalement le problème aux limites à multi-points $(2.3) - (2.4)$ admet une solution unique donnée par

$$\begin{aligned} x(t) &= -\int_0^t (t-s)\, g(s)\, ds + t \int_0^1 (1-s)\, g(s)\, ds \\ &\quad + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \eta_i \int_0^1 (1-s)\, g(s)\, ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i} - \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\eta_i} (\eta_i - s)\, g(s)\, ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i}, \end{aligned}$$

qui peut s'écrire

$$\begin{aligned} x(t) &= -\int_0^t (t-s)\, g(s)\, ds + t\int_0^t (1-s)\, g(s)\, ds + t\int_t^1 (1-s)\, g(s)\, ds \\ &\quad + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i\eta_i \int_0^{i\eta_i} (1-s)\, g(s)\, ds}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i} + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i\eta_i \int_{\eta_i}^{1} (1-s)\, g(s)\, ds}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i} \\ &\quad - \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{i\eta_i} (\eta_i - s)\, g(s)\, ds}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i} \\ &= \int_0^t s(1-s)\, g(s)\, ds + t\int_t^1 (1-s)\, g(s)\, ds \\ &\quad + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_{\eta_i}^{1} \eta_i (1-s)\, g(s)\, ds}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i} + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{i\eta_i} s(1-\eta_i)\, g(s)\, ds}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i}, \end{aligned}$$

qui peut s'écrire

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t s(1-s)\, g(s)\, ds + t\int_t^1 (1-s)\, g(s)\, ds \\ &\quad + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i} \left\{ \int_0^{i\eta_i} s(1-\eta_i)\, g(s)\, ds + \int_{\eta_i}^1 \eta_i (1-s)\, g(s)\, ds \right\}. \end{aligned}$$

Si nous posons

$$G(\eta_i, s) = \begin{cases} \eta_i (1-s), & 0 \le \eta_i \le s \le 1, \\ s(1-\eta_i), & 0 \le s \le \eta_i \le 1, \end{cases}$$

il suit que

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)\, g(s)\, ds + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^1 G(\eta_i, s)\, g(s)\, ds}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i}.$$

Donc le lemme est démontré.

Faisons les remarques suivantes concernants quelques propriétés vérifiées par la fonction G.

Remarque 2.2 . La fonction G vérifie les propriétés suivantes

(i) $G(\alpha, \beta) \ge 0$, pour tous α, β dans $[0,1]$

(ii) $G(\alpha, \beta) = G(1-\alpha, 1-\beta)$,

(iii) $G(\alpha, \beta) \le G(\alpha, \alpha)$.

Ces propriétés sont utiles dans la suite pour montrer certains résultats.

Lemme 2.3 . Supposons que $a_i > 0$, pour $i = 1, 2, ..., m-2$, et que $\sum_{i=1}^{m-2} a_i < 1$.Si la fonction $g(t) \geq 0$, alors le problème aux limites $(2.3)-(2.4)$ admet une solution unique $x(t)$ vérifiant

$$x(t) \geq 0, \qquad \forall t \in [0,1].$$

Preuve . Puisque $x''(t) + g(t) = 0$ donne que $x''(t) = -g(t) \leq 0$, et on sait que le graphe de la fonction $x(t)$ est concave sur $[0,1]$.Utilisons les relations $(2.3)-(2.4)$, on aura que

$$\begin{aligned}
x(0) &= x(1) = \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i\eta_i \int_0^1 (1-s)\, g(s)\, ds}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i} - \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\eta_i} (\eta_i - s)\, g(s)\, ds}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i\eta_i \int_{\eta_i}^1 (1-s)\, g(s)\, ds}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i} + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i\eta_i \int_0^{\eta_i} (1-s)\, g(s)\, ds}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i} \\
&\quad - \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\eta_i} (\eta_i - s)\, g(s)\, ds}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i},
\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
x(0) &= x(1) = \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i\eta_i \int_{\eta_i}^1 (1-s)\, g(s)\, ds}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i} \\
&\quad + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\eta_i} [\eta_i(1-s) - (\eta_i - s)]\, g(s)\, ds}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i\eta_i \int_{\eta_i}^1 (1-s)\, g(s)\, ds}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i} + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i (1-\eta_i) \int_0^{\eta_i} s g(s)\, ds \geq 0}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i}.
\end{aligned}$$

Nous concluons que $x(t) \geq 0$, pour tous $t \in [0,1]$, et si $g(t) > 0$, alors $x(t) > 0$, pour tout $t \in [0,1]$,ce qui achève la preuve.

Lemme 2.5. Supposons que $a_i > 0$, pour $i = 1, 2, ..., m-2$, et que $\sum_{i=1}^{m-2} a_i > 1$. Si $g \in C[0,1]$ et si $g(t) \geq 0$, alors le problème aux limites $(2.3)-(2.4)$ n'admet pas de solution positive.

Preuve . Supposons le contraire, c'est-à-dire que le problème aux limites $(2.3)-(2.4)$ admet une solution positive x, alors nous avons que $x(\eta_i) > 0$, pour tous $i = 1, 2, ..., m-2$, d'après (2.5) nous avons que

$$\begin{aligned} x(\eta_i) &= \int_0^1 G(\eta_i, s)\, g(s)\, ds + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^1 G(\eta_i, s)\, g(s)\, ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i} \\ &= \int_0^1 G(\eta_i, s)\, g(s)\, ds - \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^1 G(\eta_i, s)\, g(s)\, ds}{\sum_{i=1}^{m-2} a_i - 1} > 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$\left(\sum_{i=1}^{m-2} a_i - 1 \right) \int_0^1 G(\eta_i, s)\, g(s)\, ds - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^1 G(\eta_i, s)\, g(s)\, ds > 0,$$

donc

$$\left(\sum_{i=1}^{m-2} a_i - 1 \right) \int_0^1 G(\eta_i, s)\, g(s)\, ds > \sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^1 G(\eta_i, s)\, g(s)\, ds.$$

Il suit que

$$-\int_0^1 G(\eta_i, s)\, g(s)\, ds > 0,$$

autrement dit

$$\int_0^1 G(\eta_i, s)\, g(s)\, ds < 0,$$

donc on a une contradiction et l'assertion est prouvée.

Donc si $\sum_{i=1}^{m-2} a_i > 1$, il est clair que pour $t = 0$, et $t = 1$ le terme $x(0) = x(1)$ n'est pas positive puisque

$$x(0) = x(1) = \frac{-\sum_{i=1}^{m-2} a_i \eta_i \int_{\eta_i}^1 (1-s)\, g(s)\, ds}{\sum_{i=1}^{m-2} a_i - 1} - \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i (1-\eta_i) \int_0^{\eta_i} s g(s)\, ds}{\sum_{i=1}^{m-2} a_i - 1} \leq 0.$$

Lemme 2.6. Supposons que $\sum_{i=1}^{m-2} a_i < 1$ et que η_i sont des réels tels que $0 < \eta_1 < \eta_2 < ... < \eta_{m-2} < 1$. Si la fonction $g(t)$ est symétrique sur $[0, 1]$, alors la solution unique $x(t)$ du problème aux limites $(2.3) - (2.4)$ est symétrique sur $[0, 1]$.

Preuve . D'après (2.5) nous avons que

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s)\, g(s)\, ds + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^1 G(\eta_i, s)\, g(s)\, ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i},$$

il suit que

$$\begin{aligned}
x(1-t) &= \int_0^1 G(1-t,s)\,g(s)\,ds + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^1 G(\eta_i,s)\,g(s)\,ds}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i} \\
&= \int_1^0 G(1-t,1-s)\,g(1-s)\,d(1-s) + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^1 G(\eta_i,s)\,g(s)\,ds}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i} \\
&= \int_0^1 G(t,s)\,g(s)\,ds + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^1 G(\eta_i,s)\,g(s)\,ds}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i} \\
&= x(t).
\end{aligned}$$

Donc $x(t)$ est symétrique sur $[0,1]$ .Considérons l'espace de Banach $B = C^2[0,1]$,muni de la norme.

$$\|x\|_B = \max\{|x|_0, |x'|_0, |x''|_0\},$$

où

$$|x|_0 = \max_{0\leq t\leq 1} |x(t)|.$$

Définissons l'opérateur intégral $T : B \longrightarrow B$ tel que

$$\begin{aligned}
Tx(t) &= \int_0^1 G(t,s)\,f(s,x(s),x'(s),x''(s))\,ds \qquad (2.7) \\
&\quad + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^1 G(\eta_i,s)\,f(s,x(s),x'(s),x''(s))\,ds}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i}.
\end{aligned}$$

Alors la fonction $x = x(t) \in C^2$ est une solution du problème aux limites $(2.1)-(2.2)$ si et seulement si x est un point fixe de l'opérateur T.Appliquons le théorème du point fixe de Schauder..

Théorème 2.7. Soit B unespace de Banach et $T : B \longrightarrow B$, un opérateur qui applique une partie convexe, fermée et bornée K de B dans elle même. Si T est complètement continu(compact) sur K, alors T admet un point fixe dans K.

2.3 Preuve du résultat essentiel

Dans cette section, nous étudions l'existence d'abord d'une solution positive du problème aux limites $(2.1)-(2.2)$, puis l'existence d'une valeur propre pour ce même problème.

Nous avons les résultats suivants.

Théorème 2.8. Soit $a_i > 0$, pour $i = 1, 2, ..., m-2$, suppsons que $\sum_{i=1}^{m-2} a_i < 1$, et $\eta_i : 0 < \eta_1 < \eta_2 < ... < \eta_{m-2} < 1$.

Soit

$$f : [0,1] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}^+,$$

une fonction continue, telle que $f(., u, v, w)$ est symétrique sur $[0, 1]$ pour tous $(u, v, w) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$,avec $f(t, 0, 0, 0) > 0$, pour tout $t \in [0, 1]$.

Supposons qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\max\left\{1, \frac{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i + \sum_{i=1}^{m-2} a_i \eta_i (1 - \eta_i)}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i}\right\} C \leq 2M,$$

où

$$C = \max\{f(t, u, v, w) : 0 \leq t \leq 1, 0 \leq u \leq M, |v| \leq M, -2M \leq w \leq 0\}.$$

Alors le problème aux limites à multi-points du second ordre $(2.1) - (2.2)$ admet au moins une solution positive et symétrique.

Preuve. Nous allons définir tout d'abord le sous-ensemble convexe, fermée et borné K de l'espace de Banach $B = C^2[0, 1]$ .Soit

$$\begin{aligned} K &= \{x(t) \in B : x(t) \text{ est symétrique sur } [0,1], 0 \leq x(t) \leq M, \\ &\quad |x'(t)| \leq M, -2M \leq x''(t) \leq 0\}. \end{aligned}$$

nous montrons que

$$T(K) \subset K.$$

Utilisons les relations $(2.5), (2.6)$ et la remarque 2.2, il suit que pour tout $x \in K$

nous avons quc

$$
\begin{aligned}
Tx(t) &= \int_0^1 G(t,s) f(s, x(s), x'(s), x''(s))\, ds \\
&\quad + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^1 G(\eta_i, s) f(s, x(s), x'(s), x''(s))\, ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i} \\
&\leq \left(\int_0^1 G(t,s)\, ds + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^1 G(\eta_i, s)\, ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i} \right) C \\
&\leq \left(\int_0^1 G(t,t)\, ds + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\eta_i} G(\eta_i, s)\, ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_{\eta_i}^1 G(\eta_i, s)\, ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i} \right) C \\
&\leq \left(\int_0^1 t(1-t)\, ds + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\eta_i} s(1-\eta_i)\, ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i} \right. \\
&\quad \left. + + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_{\eta_i}^1 \eta_i (1-s)\, ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i} \right) C \\
&\leq \left(\frac{t(1-t)}{2} + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \eta_i (1-\eta_i)}{2\left(1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i\right)} \right) C \\
&\leq \left(\frac{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i + \sum_{i=1}^{m-2} a_i \eta_i (1-\eta_i)}{2\left(1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i\right)} \right) C \\
&\leq M,
\end{aligned}
$$

donc

$$
0 \leq Tx(t) \leq M, \qquad \forall t \in [0,1]. \tag{2.8}
$$

Aussi nous avons que

$$\begin{aligned}
(Tx)'(t) &= \int_0^1 \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} f(s, x(s), x'(s), x''(s))\, ds \\
&= \int_0^t \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} f(s, x(s), x'(s), x''(s))\, ds \\
&\quad + \int_t^1 \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} f(s, x(s), x'(s), x''(s))\, ds \\
&= -\int_0^t s f(s, x(s), x'(s), x''(s))\, ds \\
&\quad + \int_t^1 (1-s) f(s, x(s), x'(s), x''(s))\, ds \\
&\leq \int_0^t (1-s) f(s, x(s), x'(s), x''(s))\, ds \\
&\quad + \int_t^1 (1-s) f(s, x(s), x'(s), x''(s))\, ds \\
&\leq \int_0^1 (1-s) f(s, x(s), x'(s), x''(s))\, ds \\
&\leq \frac{C}{2} \leq M,
\end{aligned}$$

d'autres part on a

$$\begin{aligned}
(Tx)'(t) &\geq -\int_0^t s f(s, x(s), x'(s), x''(s))\, ds \\
&\geq -\int_0^1 s f(s, x(s), x'(s), x''(s))\, ds \\
&\geq -\frac{C}{2} \geq -M.
\end{aligned}$$

Donc les deux relations de $(Tx)'(t)$ nous donnent que

$$\left|(Tx)'(t)\right| \leq M, \qquad \forall t \in [0,1]. \tag{2.9}$$

Pour finir, comme

$$(Tx)''(t) = -f(t, x(t), x'(t), x''(t)) \leq 0,$$

et

$$-2M \leq -C \leq (Tx)''(t) \leq 0,$$

on conclut que

$$-2M \leq (Tx)''(t) \leq 0, \qquad \forall t \in [0,1]. \tag{2.10}$$

D'après le lemme 2.1, et (2.8) – (2.10) nous avons que

$$Tx \in K \text{ et } T(K) \subset K.$$

Nous montrons la compacité de l'opérateur T.

Alors pour tous $x, y \in C^2[0,1]$ il suit que

$$\begin{aligned}|(Tx)(t) - (Ty)(t)| \;&\leq\; \left(k_0 + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_{\eta_i}^{1} G(\eta_i, s)\, ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i}\right) \\ &\quad \times \left\| f(x(.), x'(.), x''(.)) - f(y(.), y'(.), y''(.)) \right\|,\end{aligned}$$

où

$$k_0 = \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t,s)\, ds,$$

et où

$$\frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_{\eta_i}^{1} G(\eta_i, s)\, ds}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i}$$

un nombre fini et positif, donc c'est une certaine constante finie. Ainsi T est un opérateur continu.Aussi nous avons que d'après les résultats obtenus juste ci-haut que $Tx(t) \leq M$ pour tout $x \in K$, et $t \in [0,1]$.

Soit $x \in K$, alors pour tous $t_1, t_2 \in [0,1]$, nous avons que

$$\begin{aligned}|(Tx)(t_1) - (Tx)(t_2)| \;&\leq\; \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)|\, |f(x(.), x'(.), x''(.))|\, ds \\ &\leq\; C \left\| G(t_1, .) - G(t_2, .) \right\|_{C(0,1)},\end{aligned}$$

où

$$C = \max\{ f(t,u,v,w) : 0 \leq t \leq 1, 0 \leq u \leq M, |v| \leq M, -2M \leq w \leq 0 \}.$$

D'après le théorème d'Ascoli-Arzela l'opérateur T applique des ensembles bornés dans des ensembles compacts, donc il suit que l'opérateur T est compact. D'après le théorème du point fixe de Schauder, l'opérateur T admet un point fixe $x^* \in K$,c'est-à-dire que $Tx^* = x^*$.Du fait que $f(t, 0, 0, 0) \neq 0, \forall t \in [0, 1], x^*$ est une solution symétrique et positive du problème aux limites $(2.1) - (2.2)$.

Comme application du théorème 2.1, nous considérons le problèmes aux valeurs propres

$$x''(t) + \lambda f(t, x, x', x'') = 0, \qquad 0 \leq t \leq 1 \tag{2.11}$$

$$x(0) = x(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i x(\eta_i), \tag{2.12}$$

Théorème 2.9. Supposons que $\sum_{i=1}^{m-2} a_i < 1$,et $\eta_i : 0 < \eta_1 < \eta_2 < ... < \eta_{m-2} < 1$, et λ un paramètre positif, et soit $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}^+$, une fonction continue, avec $f(t, 0, 0, 0) \neq 0, \forall t \in [0, 1]$ et $f(;, u, v, w)$ est symétrique sur $[0, 1]$ pour tous $(u, v, w) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$. Alors le problème de valeurs propres $(2.11) - (2.12)$ admet au moins une solution positive , symétrique pour chaque λ choisie telle que

$$\lambda \in \left(0, \frac{2M}{\max\left\{1, \frac{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i + \sum_{i=1}^{m-2} a_i \eta_i (1-\eta_i)}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i}\right\} C}\right],$$

où

$$C = \max\left\{f(t, u, v, w) : 0 \leq t \leq 1, 0 \leq u \leq M, |v| \leq M, -2M \leq w \leq 0\right\}, \text{et } M > 0.$$

La valeur propre du paramètre λ choisie dans l'intervalle ci-dessus est appelée valeur propre et la solution positive et symétrique du problème $(2.11) - (2.12)$ est appelée fonction propre associée à la valeur propre λ.

Chapitre 3

Opérateur différentiel du second ordre à trois-points, formule asymptotique du déterminant caractéristique

3.1 Introduction :

Soit L un opérateur différentiel dans un espace d'Hilbert $L^2[0,1]$ défini par

$$D(L) = \left\{y \in H^2[0,1] : W_i(y) = 0, i = 1, 2\right\}, \quad ly = Ly$$

où l est l'expression différentielle formelle sur $[0,1]$ définie par

$$l = -\frac{d^2}{dt^2} + p(t), \quad p \in C[0,1],$$

et soit $H^2[0,1]$ l'espace de Sobolev de toutes les fonctions $y \in L^2[0,1]$ avec y' absolument continue sur $[0,1]$ et $y'' \in L^2[0,1]$, muni de la norme

$$\|y\|_{H^2} = \|y\|_\infty + \|y'\|_\infty + \|y''\|_{L^2}.$$

et les conditions aux limites définissants l'opérateur L sont données par

$$W_i(y) = \sum_{j=1}^{3} W_{ji}(y), \quad W_{ji}(y) = \sum_{l=0}^{1} \alpha_{ji}^{l} y^{(l)}(a_j), \quad i = 1, 2, \tag{3.1}$$

où a_j sont définis tels que $0 = a_1 < a_2 = \eta < a_3 = 1$, et

$$\begin{cases} W_1(y) = \alpha_{11}^0 y(0) + \alpha_{11}^1 y'(0) + \alpha_{21}^0 y(\eta) + \alpha_{21}^1 y'(\eta) + \alpha_{31}^0 y(1) + \alpha_{31}^1 y'(1), \\ W_2(y) = \alpha_{12}^0 y(0) + \alpha_{12}^1 y'(0) + \alpha_{22}^0 y(\eta) + \alpha_{22}^1 y'(\eta) + \alpha_{32}^0 y(1) + \alpha_{32}^1 y'(1). \end{cases}$$

Soit l'équation différentielle du second ordre suivante

$$-y'' + py + \lambda y = 0, \tag{3.2}$$

où λ est un paramètre complexe tel que $\lambda = \rho^2 \neq 0$.

Pour les solutions $u(.;\rho)$ et $v(.;\rho)$ de l'équation différentielle (3.2) vérifiants les conditions initiales suivantes

$$u(0;\rho) = 1, \quad u'(0;\rho) = i\rho, \quad v(0;\rho) = 1, \quad v'(0;\rho) = -i\rho, \tag{3.3}$$

et pour les conditions initiales suivantes

$$\begin{aligned} &u(1;\rho), \quad u'(1;\rho), \quad u(\eta;\rho), \quad u'(\eta;\rho), \\ &v(1;\rho), \quad v'(1;\rho), \quad v(\eta;\rho), \quad v'(\eta;\rho), \end{aligned} \tag{3.4}$$

nous allons établir des formules asymptotiques pour les solutions $u(.;\rho)$ et $v(.;\rho)$ sur la bande horizontale $-\delta \leq Im\rho \leq \delta$, ainsi qu'une formule formule asymptotique du déterminant caractéristique $\Delta(\rho)$ de l'opérateur L sur la bande $-\delta \leq Im\rho \leq \delta$.Les formules asymptotiques que nous allons établir sont similaires dans leurs formes à celles développées par Naimark [42], seulement ici nous utilisons la théorie des opérateurs pour simplifier les développements et obtenir une formule asymptotique pour le déterminant caractéristique sur $-\delta \leq Im\rho \leq \delta$. Des formules asymptotiques pour les solutions u et v,ainsi que pour le déterminant caractéristique $\Delta(\rho)$ ont été obtenues sur les demi-plans $Im\rho \geq \delta, Im\rho \leq -\delta, \delta > 0$ mais avec des conditions autres que celles considérées dans ce travail (voir [36]).

3.2 Formule asymptotique pour $u(.;\rho)$:

Soit L_1 un opérateur différentiel dans un espace d'Hilbert $L^2[0,1]$ défini par

$$D(L_1) = \left\{ \in H^2[0,1] : u(0) = u'(0) = 0 \right\}, \quad L_1 u = -u'',$$

par des calculs on trouve que l'équation ci-dessus $L_1 u = -u'' = \rho^2 u$, ne possède que la solution triviale $u = 0$, donc on conclut que le spectre $\sigma(L_1) = \varnothing$, par la suite l'ensemble résolvant $\rho(L_1) = \mathbb{C}$.

Pour $\lambda = \rho^2 \neq 0$ dans $\rho(L_1)$ l'opérateur résolvant $R_\lambda(L_1) = (\lambda I - L_1)^{-1}$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt sur $L^2[0,1]$ donné par

$$R_\lambda(L_1)\, u(x) = \int_0^1 G(x, t.\lambda)\, u(t)\, dt,$$

et où $G(.,.;\lambda)$ désigne la fonction de Green de l'opérateur $(\lambda I - L_1)$. Les calculs montrent que $R_\lambda(L_1)$ est donnée par

$$R_\lambda(L_1)\, u(x) = \frac{1}{2i\rho} \int_0^1 \left(e^{i\rho(x-t)} - e^{-i\rho(x-t)} \right) u(t)\, dt, \tag{3.5}$$

$\forall x \in [0,1]$ et $u \in L^2[0,1]$.

Soit $\lambda = \rho^2 \neq 0, \lambda \in \mathbb{C}$, posons que

$$f(x;\rho) = u(x;\rho) - e^{i\rho x}, \tag{3.6}$$

avec $x \in [0,1]$, on voit clairement que $f \in H^2[0,1]$. Comme $(\rho^2 I - L_1)\, f(.;\rho) = \rho^2 u + u'' = pu$,et comme $(\rho^2 I - L_1)$ est inversible nous obtenons que

$$u(..\rho) = e^{i\rho x}\left[1 + e^{-i\rho x} R_{\rho^2}(L_1)\{pu(.;\rho)\}\right], \tag{3.7}$$

pour tout $\rho \in \mathbb{C}$.

Maintenant on introduit les opérateurs de multiplication $\Gamma_\rho, \rho \in \mathbb{C}$ et Q sur $L^2[0,1]$ tels que

$$\Gamma_\rho u = e^{i\rho x} u,$$

et

$$Qu = pu, \quad p \neq 0,$$

alors pour chaque $\rho \in \mathbb{C}$ posons

$$h(.;\rho) = e^{-i\rho x} u(..\rho) = \Gamma_{\rho}^{-1} u(..\rho),$$

on a que $h \in H^2[0,1]$, et que

$$u(..\rho) = e^{i\rho x} h(.;\rho) = \Gamma_{\rho} h(.;\rho),$$

donc (3.7) peut s'écrire

$$h(.;\rho) = 1 + \Gamma_{\rho}^{-1} R_{\rho^2}(L_1) Q \Gamma_{\rho} h(.;\rho). \tag{3.8}$$

Posons

$$A_{\rho} = \rho \Gamma_{\rho}^{-1} R_{\rho^2}(L_1) Q \Gamma_{\rho},$$

pour tous les $\rho \in \mathbb{C}, \rho \neq 0$, nous obtenons que

$$h(.;\rho) = 1 + \frac{1}{\rho} A_{\rho} h(.;\rho),$$

où A_{ρ} est l'opérateur intégral linéaire défini sur $L^2[0,1]$ par

$$A_{\rho} u(x) = \frac{1}{2i} \int_0^x \left(1 - e^{-2i\rho(x-t)}\right) p(t) u(t)\, dt, \quad x \in [0,1], \tag{3.9}$$

Alors pour tout $\rho \in \mathbb{C}, |\rho| \geq e^{2\delta} \|p\|_{\infty}$, l'opérateur $\left(I - \frac{1}{\rho} A_{\rho}\right)^{-1}$ peut-être développé en une série de Newmann et d'après la formule (3.9) ci-dessus la série

$$h(.;\rho) = \left(I - \frac{1}{\rho} A_{\rho}\right)^{-1} [1] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} A_{\rho}^n [1]$$

est convergente dans $H^2[0,1]$, et en ne tenant compte que des deux premiers termes dans le développement de cette série, alors on a que

$$h(.;\rho) = 1 + \frac{1}{\rho} A_{\rho}[1] + \frac{1}{\rho^2} A_{\rho}(A_{\rho} h(.;\rho)),$$

pour tous les $\rho \in \mathbb{C}, \rho \neq 0$.

Aussi nous avons que

$$\|h\,(.;\rho)\|_\infty \leq 2, \quad \|A_\rho h\,(.;\rho)\|_\infty \leq 2e^{2|Im\rho|}\,\|p\|_\infty \leq 2e^{2\delta}\,\|p\|_\infty\,,$$

et

$$\|A_\rho\|_{L^2[0,1]} \leq e^{2|Im\rho|}\,\|p\|_\infty \leq e^{2\delta}\,\|p\|_\infty\,.$$

Par la suite de (3.9) il suit que

$$\begin{aligned} h\,(x;\rho) &= 1+\frac{1}{2i\rho}\int_0^x \left(1-e^{-2i\rho(x-t)}\right)p\,(t)\,dt \\ &\quad +\frac{1}{2i\rho^2}\int_0^x \left(1-e^{-2i\rho(x-t)}\right)p\,(t)\,A_\rho h\,(t;\rho)\,dt, \end{aligned} \tag{3.10}$$

la différentiation de (3.10) par rapport à $x \in [0,1]$ nous permet d'obtenir

$$h'\,(x;\rho) = \frac{1}{2i\rho}\int_0^x e^{-2i\rho(x-t)}p\,(t)\,dt + \frac{1}{\rho}\int_0^x e^{-2i\rho(x-t)}p\,(t)\,A_\rho h\,(t;\rho)\,dt, \tag{3.11}$$

et comme on a

$$u\,(x;\rho) = e^{i\rho x}h\,(x;\rho)\,, \tag{3.12}$$

alors nous obtenons que

$$u\,(x;\rho) = e^{i\rho x}\left[1+\frac{1}{2i\rho}\int_0^x \left(1-e^{-2i\rho(x-t)}\right)p\,(t)\,dt + r_1\,(x;\rho)\right], \tag{3.13}$$

où

$$r_1\,(x;\rho) = \frac{1}{2i\rho^2}\int_0^x \left(1-e^{-2i\rho(x-t)}\right)p\,(t)\,A_\rho h\,(t;\rho)\,dt,$$

avec

$$\|r_1\,(;\,;\rho)\|_\infty \leq \frac{2}{|\rho|^2}e^{4|Im\rho|}\,\|p\|_\infty^2 \leq \frac{2}{|\rho|^2}e^{4\delta}\,\|p\|_\infty^2\,.$$

D'après (3.12) nous avons que

$$u'\,(x;\rho) = i\rho e^{i\rho x}h\,(x;\rho) + e^{i\rho x}h'\,(x;\rho)\,,$$

et la substitution de $h\,(x;\rho)$ et de $h'\,(x;\rho)$ par leurs expressions donne que

$$u'\,(x;\rho) = i\rho e^{i\rho x}\left[1+\frac{1}{2i\rho}\int_0^x \left(1+e^{-2i\rho(x-t)}\right)p\,(t)\,dt + r_2\,(x;\rho)\right], \tag{3.14}$$

où

$$r_2(x;\rho) = \frac{1}{2i\rho}\int_0^x \left(1 + e^{-2i\rho(x-t)}\right) p(t)\, A_\rho h(t;\rho)\, dt,$$

avec

$$\|r_2(.;\rho)\|_\infty \leq \frac{2}{|\rho|^2} e^{4|Im\rho|} \|p\|_\infty^2 \leq \frac{2}{|\rho|^2} e^{4\delta} \|p\|_\infty^2 .$$

pour tous $\rho \in \mathbb{C}, \rho \neq 0$ et $|Im\rho| \leq \delta$, avec $|\rho| > 2e^{2\delta} \|p\|_\infty$.

Pour finir posons $x = 0, x = \eta$, et $x = 1$ respectivement dans (3.13) , (3.14) ,alors nous obtenons les formules asymptotiques pour les conditions initiales

$$\begin{cases} u(0;\rho) = 1 \qquad u'(0;\rho) = i\rho, \\ u(\eta;\rho) = e^{i\rho\eta}\left[1 + \frac{1}{2i\rho}\int_0^\eta \left(1 - e^{-2i\rho(\eta-t)}\right) p(t)\, dt + r_1(\eta;\rho)\right], \\ u'(\eta;\rho) = i\rho e^{i\rho\eta}\left[1 + \frac{1}{2i\rho}\int_0^\eta \left(1 + e^{-2i\rho(\eta-t)}\right) p(t)\, dt + r_2(\eta;\rho)\right], \\ u(1;\rho) = e^{i\rho}\left[1 + \frac{1}{2i\rho}\int_0^1 \left(1 - e^{-2i\rho(1-t)}\right) p(t)\, dt + r_1(1;\rho)\right], \\ u'(1;\rho) = i\rho e^{i\rho}\left[1 + \frac{1}{2i\rho}\int_0^1 \left(1 + e^{-2i\rho(1-t)}\right) p(t)\, dt + r_2(1;\rho)\right]. \end{cases} \tag{3.15}$$

Les fonctions $r_1(\eta;\rho), r_2(\eta;\rho)$ et $r_1(1;\rho), r_2(1;\rho)$ sont de l'ordre de $O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)$ sur la bande horizontale $-\delta \leq Im\rho \leq \delta$, pour tout $\rho \in \mathbb{C}, \rho \neq 0$.

3.3 Formule asymptotique pour $v(.;\rho)$:

Soit L_2 un opérateur différentiel dans un espace d'Hilbert $L^2[0,1]$ défini par

$$D(L_2) = \left\{v \in H^2[0,1] : v(0) = v'(0) = 0\right\}, \quad L_2 v = -v''.$$

Comme pour le cas de $u(x)$ nous avons que l'équation $L_2 v = -v'' = \rho^2 v$, ne possède que la solution triviale $v = 0$, donc on conclut que le spectre $\sigma(L_2) = \varnothing$, et par la suite l'ensemble résolvant $\rho(L_2) = \mathbb{C}$. Pour $\lambda = \rho^2 \neq 0, \lambda \in \rho(L_2)$ l'opérateur résolvant $R_\lambda(L_2) = (\lambda I - L_2)^{-1}$ est un opérateur de Hilbert -Schmidt sur $L^2[0,1]$ donné par

$$R_\lambda(L_2)\, v(x) = \int_0^1 G(x, t.\lambda)\, v(t)\, dt,$$

Les calculs montrent que la résolvante $R_\lambda(L_2)$ est donnée par

$$R_\lambda(L_2)\,v(x) = \frac{1}{2i\rho}\int_0^x \left(e^{i\rho(x-t)} - e^{-i\rho(x-t)}\right) v(t)\,dt, \tag{3.16}$$

pour tout $x \in [0,1]$ et $v \in L^2[0,1]$.Soit $\lambda = \rho^2 \neq 0, \lambda \in \mathbb{C}$, posons que

$$g(.;\rho) = v(.;\rho) - e^{-i\rho x}, \qquad 0 \leq x \leq 1,$$

on voit clairement que $g \in H^2[0,1]$ et $g \in D(L_2)$, un raisonnement similaire à celui de $u(.;\rho)$ montre que

$$v(.;\rho) = e^{-i\rho x}\left[1 + e^{i\rho x} R_{\rho^2}(L_2)\{pv(.;\rho)\}\right], \tag{3.17}$$

alors pour chaque $\rho \in \mathbb{C}$ posons

$$\omega(.;\rho) = e^{i\rho x} v(.;\rho) = \Gamma_\rho v(.;\rho),$$

nous avons que $g \in H^2[0,1]$, et donc (3.17) peut s'écrire ainsi

$$\omega(.;\rho) = 1 + \Gamma_\rho R_{\rho^2}(L_2)\, Q\Gamma_\rho^{-1}\omega(.;\rho). \tag{3.18}$$

Posons

$$B_\rho = \rho\Gamma_\rho R_{\rho^2}(L_2)\, Q\Gamma_\rho^{-1},$$

pour tout $\rho \in \mathbb{C}, \rho \neq 0$, nous obtenons que

$$\omega(.;\rho) = 1 + \frac{1}{\rho} B_\rho \omega(.;\rho),$$

où B_ρ est un opérateur intégral linéaire défini sur $L^2[0,1]$ par

$$B_\rho v(x) = \frac{1}{2i}\int_0^x \left(e^{2i\rho(x-t)} - 1\right) p(t)\, v(t)\,dt, \tag{3.19}$$

avec $x \in [0,1]$ et $v \in L^2[0,1]$, et $\forall\rho \in \mathbb{C}$,tel que $-\delta \leq Im\rho \leq \delta$.

Alors $\forall\rho \in \mathbb{C}, |\rho| \geq e^{2\delta}\|p\|_\infty$, l'opérateur $\left(I - \frac{1}{\rho}B_\rho\right)^{-1}$ peut-être développé en une série de Newmann et d'après la formule (3.19), la série

$$\omega(.;\rho) = \left(I - \frac{1}{\rho} B_\rho\right)^{-1} [1] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} B_\rho^n [1]$$

est convergente dans $H^2[0,1]$, en gardant seulement les deux premiers termes dans le développement de cette série, on obtient

$$\omega(.;\rho) = 1 + \frac{1}{\rho} B_\rho [1] + \frac{1}{\rho^2} B_\rho (B_\rho \omega(.;\rho)),$$

Pour tout $\rho \in \mathbb{C}, \rho \neq 0$. d'autre part nous avons que

$$\|\omega(.;\rho)\|_\infty \leq 2, \quad \|B_\rho \omega(.;\rho)\|_\infty \leq 2e^{2|Im\rho|} \|p\|_\infty \leq 2e^{2\delta} \|p\|_\infty,$$

et

$$\|B_\rho\|_{L^2} \leq e^{2|Im\rho|} \|p\|_\infty \leq e^{2\delta} \|p\|_\infty,$$

par la suite la formule (3.20) nous permet d'écrire que

$$\begin{aligned} \omega(x;\rho) &= 1 + \frac{1}{2i\rho} \int_0^x \left(e^{2i\rho(x-t)} - 1\right) p(t)\, dt \\ &\quad + \frac{1}{2i\rho^2} \int_0^x \left(e^{2i\rho(x-t)} - 1\right) p(t)\, B_\rho \omega(t;\rho)\, dt. \end{aligned} \tag{3.20}$$

La différentiation de (3.21) par rapport à $x \in [0,1]$ nous donne que

$$\omega'(x;\rho) = \frac{1}{2i\rho} \int_0^x e^{2i\rho(x-t)} p(t)\, dt + \frac{1}{\rho} \int_0^x e^{2i\rho(x-t)} p(t)\, B_\rho \omega(t;\rho)\, dt, \tag{3.21}$$

et puisque on a

$$\omega(x;\rho) = e^{i\rho x} v(x;\rho), \quad v(x;\rho) = e^{-i\rho x} \omega(x;\rho),$$

nous obtenons que

$$v(x;\rho) = e^{-i\rho x} \left[1 - \frac{1}{2i\rho} \int_0^x \left(1 - e^{2i\rho(x-t)}\right) p(t) + s_1(x;\rho)\right], \tag{3.22}$$

où

$$s_1(x;\rho) = \frac{1}{2i\rho^2} \int_0^x \left(e^{2i\rho(x-t)} - 1\right) p(t)\, B_\rho \omega(t;\rho)\, dt,$$

avec

$$\|s_1(.;\rho)\|_\infty \leq \frac{2}{|\rho|^2} e^{4|Im\rho|} \|p\|_\infty^2 \leq \frac{2}{|\rho|^2} e^{4\delta} \|p\|_\infty^2, \tag{3.23}$$

pour tout $\rho \in \mathbb{C}, \rho \neq 0$, et $|Im\rho| \leq \delta$, avec $|\rho| > 2e^{2\delta} \|p\|_\infty$.

Aussi l'on a

$$v'(x;\rho) = -i\rho e^{-i\rho x}\omega(x;\rho) + e^{-i\rho x}\omega'(x;\rho),$$

et

$$v'(x;\rho) = -i\rho e^{-i\rho x}\left[1 - \frac{1}{2i\rho}\int_0^x \left(1 + e^{2i\rho(x-t)}\right) p(t)\,dt + s_2(t;\rho)\right], \tag{3.24}$$

où

$$s_2(t;\rho) = -\frac{1}{2i\rho}\int_0^x \left(1 + e^{2i\rho(x-t)}\right) p(t)\, B_\rho\omega(t;\rho)\,dt,$$

avec

$$\|s_2(.;\rho)\|_\infty \leq \frac{2}{|\rho|^2} e^{4|Im\rho|} \|p\|_\infty^2 \leq \frac{2}{|\rho|^2} e^{4\delta} \|p\|_\infty^2$$

Si on pose $x = 0, x = \eta$, et $x = 1$ respectivement dans (3.23) et (3.24) nous obtenons les formules asymptotiques pour les conditions initiales

$$\begin{cases} v(0;\rho) = 1, \qquad v'(0;\rho) = -i\rho, \\ v(\eta;\rho) = e^{-i\rho\eta}\left[1 - \frac{1}{2i\rho}\int_0^\eta \left(1 - e^{2i\rho(\eta-t)}\right) p(t) + s_1(\eta;\rho)\right], \\ v'(\eta;\rho) = -i\rho e^{-i\rho\eta}\left[1 - \frac{1}{2i\rho}\int_0^\eta \left(1 + e^{2i\rho(\eta-t)}\right) p(t)\,dt + s_2(\eta;\rho)\right], \\ v(1;\rho) = e^{-i\rho}\left[1 - \frac{1}{2i\rho}\int_0^1 \left(1 - e^{2i\rho(1-t)}\right) p(t) + s_1(1;\rho)\right], \\ v'(1;\rho) = -i\rho e^{-i\rho}\left[1 - \frac{1}{2i\rho}\int_0^1 \left(1 + e^{2i\rho(1-t)}\right) p(t)\,dt + s_2(1;\rho)\right]. \end{cases} \tag{3.25}$$

Les fonctions $s_1(\eta;\rho), s_2(\eta;\rho)$,et $s_1(1;\rho), s_2(1;\rho)$ sont des fonctions analytiques de l'ordre $O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)$ sur la bande horizontale $-\delta \leq Im\rho \leq \delta$, pour tous les $\rho \in \mathbb{C}, \rho \neq 0$.

3.4 Expansion asymptotique pour $\Delta(\rho)$:

Dans cette section nous allons donner une expansion asymptotique appropriée du déterminant caractéristique $\Delta(\rho)$ de l'opérateur différentiel $L = T + Q$, déterminé par l'expression différentielle $l = -\frac{d^2}{dt^2} + p(t)$ dans la bande horizontale

$-\delta \leq Im\rho \leq \delta$ du plan complexe des ρ.

Les déterminants caractéristiques Δ et Δ_0 des opérateurs différentiels respectivement sont fermement liés l'un à l'autre, et les valeurs propres $\lambda = \rho^2$ de L et de T sont déterminées par les nombres ρ qui sont les zéros de Δ et Δ_0.

Des relations (3.1), soient W_1, W_2 les formes linéairements indépendantes définissants l'opérateur différentiel L telles que

$$\begin{cases} W_1(y) = \alpha_{11}^0 y(0) + \alpha_{11}^1 y'(0) + \alpha_{21}^0 y(\eta) + \alpha_{21}^1 y'(\eta) + \alpha_{31}^0 y(1) + \alpha_{31}^1 y'(1), \\ W_2(y) = \alpha_{12}^0 y(0) + \alpha_{12}^1 y'(0) + \alpha_{22}^0 y(\eta) + \alpha_{22}^1 y'(\eta) + \alpha_{32}^0 y(1) + \alpha_{32}^1 y'(1). \end{cases}$$

Introduisons la matrice des coefficients 2×6 notée A associée aux formes W_1, W_2 telle que

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^0 & \alpha_{11}^1 & \alpha_{21}^0 & \alpha_{21}^1 & \alpha_{31}^0 & \alpha_{31}^1 \\ \alpha_{12}^0 & \alpha_{12}^1 & \alpha_{22}^0 & \alpha_{22}^1 & \alpha_{32}^0 & \alpha_{32}^1 \end{bmatrix}.$$

Soient les déterminants obtenus des matrices carrées extraites de A en retenant seulement la $i-$ième et la $j-$ième colonne pour $1 \leq i < j \leq 6$. Il existe quinze déterminants A_{ij} qui sont donnés par les quantités suivantes

$$\begin{aligned}
A_{12} &= \alpha_{11}^0\alpha_{21}^1 - \alpha_{12}^0\alpha_{11}^1; & A_{13} &= \alpha_{11}^0\alpha_{22}^0 - \alpha_{12}^0\alpha_{21}^0; & A_{14} &= \alpha_{11}^0\alpha_{22}^1 - \alpha_{12}^0\alpha_{21}^1; \\
A_{15} &= \alpha_{11}^0\alpha_{32}^0 - \alpha_{12}^0\alpha_{31}^0; & A_{16} &= \alpha_{11}^0\alpha_{32}^1 - \alpha_{12}^0\alpha_{31}^1; & A_{23} &= \alpha_{11}^1\alpha_{22}^0 - \alpha_{21}^1\alpha_{21}^0; \\
A_{24} &= \alpha_{11}^1\alpha_{22}^1 - \alpha_{12}^1\alpha_{21}^1; & A_{25} &= \alpha_{11}^1\alpha_{32}^0 - \alpha_{12}^1\alpha_{31}^0; & A_{26} &= \alpha_{11}^1\alpha_{32}^1 - \alpha_{12}^1\alpha_{31}^1; \\
A_{34} &= \alpha_{21}^0\alpha_{22}^1 - \alpha_{21}^1\alpha_{22}^0; & A_{35} &= \alpha_{21}^0\alpha_{32}^0 - \alpha_{22}^0\alpha_{31}^0; & A_{36} &= \alpha_{21}^0\alpha_{32}^1 - \alpha_{22}^0\alpha_{31}^1; \\
A_{45} &= \alpha_{21}^1\alpha_{32}^0 - \alpha_{31}^0\alpha_{22}^1; & A_{46} &= \alpha_{21}^1\alpha_{32}^1 - \alpha_{22}^1\alpha_{31}^1; & A_{56} &= \alpha_{31}^0\alpha_{32}^1 - \alpha_{32}^0\alpha_{31}^1.
\end{aligned}$$

Nous définissons le déterminant caractéristique $\Delta(\rho)$ des conditions aux limites (3.1) comme étant

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} W_1(u) & W_1(v) \\ W_2(u) & W_2(v) \end{vmatrix},$$

ou bien

$$\Delta(\rho) = W_1(u) W_2(v) - W_2(u) W_1(v),$$

par utilisation des conditions(3.3), et après des calculs nous obtenons que

$$\begin{aligned}
\Delta(\rho) &= -2i\rho A_{12} + A_{13}\left(v(\eta) - u(\eta)\right) + A_{14}\left(v'(\eta) - u'(\eta)\right) \\
&\quad + A_{15}\left(v(1) - u(1)\right) + A_{16}\left(v'(1) - u'(1)\right) + i\rho A_{23}\left(v(\eta) + u(\eta)\right) \\
&\quad + i\rho A_{24}\left(v'(\eta) + u'(\eta)\right) + i\rho A_{25}\left(v(1) + u(1)\right) \\
&\quad + i\rho A_{26}\left(v'(1) + u'(1)\right) + A_{34}\left(v'(\eta)u(\eta) - v(\eta)u'(\eta)\right) \qquad (3.26) \\
&\quad + A_{35}\left(v(1)u(\eta) - v(\eta)u(1)\right) + A_{36}\left(v'(1)u(\eta) - v(\eta)u'(1)\right) \\
&\quad + A_{45}\left(v(1)u'(\eta) - v'(\eta)u(1)\right) + A_{46}\left(v'(1)u'(\eta) - v'(\eta)u'(1)\right) \\
&\quad + A_{56}\left(v'(1)u(1) - v(1)u'(1)\right),
\end{aligned}$$

c'est le déterminant caractéristique de l'opérateur différentiel $L = T + Q$, où T est l'opérateur différentiel défini sur $L^2[0,1]$ par

$$D(T) = \left\{ y \in H^2[0,1] : W_i(y) = 0, i = 1, 2 \right\}, \qquad Ty = -y''.$$

Alors l'opérateur différentiel T tel que $Ty = -y'' = \rho^2 y$, admet comme système fondamental de solutions les fonctions suivantes $u(x;\rho) = e^{i\rho x}$ et $v(x;\rho) = e^{-i\rho x}$, et ainsi on a

$$\begin{cases}
W_1(u) = \alpha_{11}^0 u(0) + \alpha_{11}^1 u'(0) + \alpha_{21}^0 u(\eta) + \alpha_{21}^1 u'(\eta) + \alpha_{31}^0 u(1) + \alpha_{31}^1 u'(1), \\
W_1(v) = \alpha_{11}^0 v(0) + \alpha_{11}^1 v'(0) + \alpha_{21}^0 v(\eta) + \alpha_{21}^1 v'(\eta) + \alpha_{31}^0 v(1) + \alpha_{31}^1 v'(1) \\
W_2(u) = \alpha_{12}^0 u(0) + \alpha_{12}^1 u'(0) + \alpha_{22}^0 u(\eta) + \alpha_{22}^1 u'(\eta) + \alpha_{32}^0 u(1) + \alpha_{32}^1 u'(1), \\
W_2(v) = \alpha_{12}^0 v(0) + \alpha_{12}^1 v'(0) + \alpha_{22}^0 v(\eta) + \alpha_{22}^1 v'(\eta) + \alpha_{32}^0 v(1) + \alpha_{32}^1 v'(1).
\end{cases}$$

Si on désigne par Δ_0 le déterminant caractéristique de l'opérateur T, alors en effectuant les calculs il suit que

$$\begin{aligned}
\Delta_0(\rho) &= -2i\rho A_{12} + A_{13}\left(e^{-i\rho\eta} - e^{i\rho\eta}\right) - i\rho A_{14}\left(e^{-i\rho\eta} + e^{i\rho\eta}\right) \\
&\quad + A_{15}\left(e^{-i\rho} - e^{i\rho}\right) - i\rho A_{16}\left(e^{-i\rho} + e^{i\rho}\right) + i\rho A_{23}\left(e^{-i\rho\eta} + e^{i\rho\eta}\right) \\
&\quad + \rho^2 A_{24}\left(e^{-i\rho\eta} - e^{i\rho\eta}\right) + i\rho A_{25}\left(e^{-i\rho} + e^{i\rho}\right) + \rho^2 A_{26}\left(e^{-i\rho} - e^{i\rho}\right) \\
&\quad - 2i\rho A_{34} + A_{35}\left(e^{-i\rho(1-\eta)} - e^{i\rho(1-\eta)}\right) - i\rho A_{36}\left(e^{-i\rho(1-\eta)} + e^{i\rho(1-\eta)}\right) \\
&\quad + i\rho A_{45}\left(e^{-i\rho(1-\eta)} + e^{i\rho(1-\eta)}\right) + \rho^2 A_{46}\left(e^{-i\rho(1-\eta)} - e^{i\rho(1-\eta)}\right) - 2i\rho A_{56}.
\end{aligned}$$

Après avoir remplacé les quantités (3.15) et (3.25) par leurs expressions dans la relation (3.26) on aura que

$$
\begin{aligned}
\Delta(\rho) \quad = \quad & \Delta_0(\rho) + \frac{A_{13}}{2i\rho}\left\{\int_0^{\eta}\left(e^{-i\rho\eta} - e^{i\rho\eta}\right)p(t)\,dt\right. \\
& \left. + \int_0^{\eta}\left(e^{i\rho(\eta-2t)} + e^{-i\rho(\eta-2t)}\right)p(t)\,dt + \varphi_1(\rho)\right\} \\
& + \frac{A_{14}}{2}\left\{\int_0^{\eta}\left(e^{-i\rho\eta} - e^{i\rho\eta}\right)p(t)\,dt\right. \\
& \left. + \int_0^{\eta}\left(e^{i\rho(\eta-2t)} - e^{-i\rho(\eta-2t)}\right)p(t)\,dt + \varphi_2(\rho)\right\} \\
& + \frac{A_{15}}{2i\rho}\left\{-\int_0^{1}\left(e^{-i\rho} + e^{i\rho}\right)p(t)\,dt\right. \\
& \left. + \int_0^{1}\left(e^{i\rho(1-2t)} + e^{-i\rho(1-2t)}\right)p(t)\,dt + \varphi_3(\rho)\right\} \\
& + \left\{\frac{A_{16}}{2}\int_0^{1}\left(e^{-i\rho} - e^{i\rho}\right)p(t)\,dt\right. \\
& \left. + \int_0^{1}\left(e^{i\rho(1-2t)} - e^{-i\rho(1-2t)}+\right)p(t)\,dt + \varphi_4(\rho)\right\} \\
& + \frac{A_{23}}{2}\left\{\int_0^{\eta}\left(e^{i\rho\eta} - e^{-i\rho\eta}\right)p(t)\,dt\right. \\
& \left. + \int_0^{\eta}\left(e^{i\rho(\eta-2t)} - e^{-i\rho(\eta-2t)}\right)p(t)\,dt + \varphi_5(\rho)\right\} \\
& \frac{i\rho A_{24}}{2}\left\{\int_0^{\eta}\left(e^{i\rho\eta} + e^{-i\rho\eta}\right)p(t)\,dt\right. \\
& \left. + \int_0^{\eta}\left(e^{i\rho(\eta-2t)} + e^{-i\rho(\eta-2t)}\right)p(t)\,dt + \varphi_6(\rho)\right\} \\
& + \frac{A_{25}}{2}\left\{\int_0^{1}\left(e^{i\rho} - e^{-i\rho}\right)p(t)\,dt\right. \\
& \left. - \int_0^{1}\left(e^{i\rho(1-2t)} - e^{-i\rho(1-2t)}\right)p(t)\,dt + \varphi_7(\rho)\right\} \\
& + \left\{\frac{i\rho A_{26}}{2}\int_0^{1}\left(e^{i\rho} + e^{-i\rho}\right)p(t)\,dt\right. \\
& \left. + \int_0^{1}\left(e^{i\rho(1-2t)} + e^{-i\rho(1-2t)}\right)p(t)\,dt + \varphi_8(\rho)\right\} \\
& + A_{34}\left\{\int_0^{\eta}\left(e^{2i\rho(\eta-t)} + e^{-2i\rho(\eta-t)}\right)p(t)\,dt + \varphi_9(\rho)\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{A_{35}}{2i\rho}\left\{\int_0^\eta \left(e^{i\rho(1-\eta)}+e^{-i\rho(1-\eta)}\right)p(t)\,dt\right.\\
&-\int_0^\eta \left(e^{i\rho(1+\eta-2t)}+e^{-i\rho(1+\eta-2t)}\right)p(t)\,dt\\
&+\int_0^1 \left(e^{-i\rho(1-\eta)}-e^{i\rho(1-\eta)}\right)p(t)\,dt\\
&\left.+\int_0^1 \left(e^{i\rho(1+\eta-2t)}+e^{-i\rho(1+\eta-2t)}\right)p(t)\,dt+\varphi_{10}(\rho)\right\}\\
&\frac{A_{36}}{2}\left\{\int_0^\eta \left(e^{i\rho(1-\eta)}-e^{-i\rho(1-\eta)}\right)p(t)\,dt\right.\\
&-\int_0^\eta \left(e^{i\rho(1+\eta-2t)}+e^{-i\rho(1+\eta-2t)}\right)p(t)\,dt\\
&+\int_0^1 \left(e^{i\rho(1-\eta)}-e^{-i\rho(1-\eta)}\right)p(t)\,dt\\
&\left.+\int_0^1 \left(e^{i\rho(1+\eta-2t)}-e^{-i\rho(1+\eta-2t)}\right)p(t)\,dt+\varphi_{11}(\rho)\right\}\\
&+\frac{A_{45}}{2}\left\{\int_0^\eta \left(e^{-i\rho(1-\eta)}+e^{i\rho(1-\eta)}\right)p(t)\,dt\right.\\
&+\int_0^\eta \left(e^{-i\rho(1+\eta-2t)}-e^{i\rho(1+\eta-2t)}\right)p(t)\,dt\\
&+\int_0^1 \left(e^{i\rho(1-\eta)}-e^{-i\rho(1-\eta)}\right)p(t)\,dt\\
&\left.+\int_0^1 \left(e^{i\rho(1+\eta-2t)}-e^{-i\rho(1+\eta-2t)}\right)p(t)\,dt+\varphi_{12}(\rho)\right\}\\
&-\frac{i\rho A_{46}}{2}\left\{\int_0^\eta \left(e^{i\rho(1-\eta)}+e^{-i\rho(1-\eta)}\right)p(t)\,dt\right.\\
&+\int_0^\eta \left(e^{i\rho(1+\eta-2t)}+e^{-i\rho(1+\eta-2t)}\right)p(t)\,dt\\
&-\int_0^1 \left(e^{i\rho(1-\eta)}+e^{-i\rho(1-\eta)}\right)p(t)\,dt\\
&\left.-\int_0^1 \left(e^{i\rho(1+\eta-2t)}+e^{-i\rho(1+\eta-2t)}\right)p(t)\,dt+\varphi_{13}(\rho)\right\}\\
&+A_{56}\left\{\int_0^1 \left(e^{2i\rho(1-t)}+e^{-2i\rho(1-t)}\right)p(t)\,dt+\varphi_{14}(\rho)\right\},
\end{aligned}
$$

où $\varphi_i(\rho), i = 1, 2, ..., 14$ sont des fonctions analytiques pour $\rho \neq 0$,telles que

$$|\varphi_i(\rho)| \leq \frac{M}{|\rho|}, \quad M > 0,$$

autrement dit les fonctions $\varphi_i(\rho)$ sont de l'ordre $O\left(\frac{1}{\rho}\right)$ sur la bande horizontale $-\delta \leq Im\rho \leq \delta$.

Notons que les fonctions $\varphi_i(\rho)$ résultent des produits lors du développement du déterminant caractéristique de l'opérateur différentiel L. Par exemple la fonction $\varphi_1(\rho)$ est la fonction donnée par l'expression suivante

$$\varphi_1(\rho) = 2i\rho \left[e^{-i\rho\eta} s_1(\eta; \rho) + e^{i\rho\eta} r_1(\eta; \rho)\right],$$

où $r_1(\eta; \rho)$ et $s_1(\eta; \rho)$ sont des fonctions analytiques d'ordre $O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)$ sur la bande horizontale $-\delta \leq Im\rho \leq \delta$, et elles sont données par les formules suivantes

$$r_1(\eta; \rho) = \frac{1}{2i\rho^2} \int_0^\eta \left(1 - e^{-2i\rho(\eta - t)}\right) p(t) A_\rho h(t; \rho) \, dt,$$

et

$$s_1(\eta; \rho) = \frac{1}{2i\rho^2} \int_0^\eta \left(e^{2i\rho(\eta - t)} - 1\right) p(t) B_\rho \omega(t; \rho) \, dt,$$

aussi nous avons que $\varphi_2(\rho)$ est donnée par l'expression

$$\varphi_2(\rho) = -2i\rho \left[e^{-i\rho\eta} s_2(\eta; \rho) + e^{i\rho\eta} r_2(\eta; \rho)\right]$$

où $r_2(\eta; \rho)$ et $s_2(\eta; \rho)$ sont données par les formules suivantes

$$r_2(\eta; \rho) = \frac{1}{2i\rho} \int_0^\eta \left(1 + e^{-2i\rho(\eta - t)}\right) p(t) A_\rho h(t; \rho) \, dt,$$

et

$$s_2(\eta; \rho) = \frac{1}{2i\rho} \int_0^\eta \left(1 + e^{2i\rho(\eta - t)}\right) p(t) B_\rho \omega(t; \rho) \, dt,$$

et ainsi on peut obtenir toutes les fonctions restantes on procédant de la même façon.

Notons aussi que si l'on considère l'opérateur différentiel L d'ordre deux à deux points défini sur $L^2[0, 1]$, alors pour les solutions u et v de l'équation différentielle (3.2) vérifiant les conditions (3.3), des formules asymptotiques pour

$u(.;\rho)$ et $v(.;\rho)$ sont obtenues, ainsi qu'une formule asymptotique du déterminant caractéristique de l'opérateur L sur la bande $-\delta \leq Im\rho \leq \delta$, et on a par la suite

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}(\rho) &= \widetilde{\Delta}_0(\rho) + \frac{iA_{12}}{2}\left\{\int_0^1 \left(e^{-i\rho}+e^{i\rho}\right)p(t)\,dt\right. \\
&\left. + \int_0^1 \left(e^{i\rho(1-t)}+e^{-i\rho(1-t)}\right)p(t)\,dt + \theta_1(\rho)\right\} \\
&+ \frac{A_{14}}{2}\left\{\int_0^1 \left(e^{i\rho}-e^{-i\rho}\right)p(t)\,dt\right. \\
&\left. + \int_0^1 \left(e^{i\rho(1-t)}-e^{-i\rho(1-t)}\right)p(t)\,dt + \theta_2(\rho)\right\} \\
&+ \frac{A_{23}}{2}\left\{\int_0^1 \left(e^{i\rho}-e^{-i\rho}\right)p(t)\,dt\right. \\
&\left. - \int_0^1 \left(e^{i\rho(1-t)}-e^{-i\rho(1-t)}\right)p(t)\,dt + \theta_3(\rho)\right\} \\
&- \frac{A_{34}}{2}\left\{\int_0^1 \left(e^{i\rho}+e^{-i\rho}\right)p(t)\,dt\right. \\
&\left. - \int_0^1 \left(e^{i\rho(1-t)}+e^{-i\rho(1-t)}\right)p(t)\,dt + \theta_4(\rho)\right\},
\end{aligned}$$

où les fonctions $\theta_i, i = 1, ..., 4$ sont des fonctions analytiques pour $\rho \neq 0$ sur la bande $-\delta \leq Im\rho \leq \delta, \delta > 0$, et tel que $|\theta_i(\rho)| \leq K|\rho|^{-1}, K > 0$, et où $\widetilde{\Delta}_0(\rho)$ est le déterminant caractéristique de l'opérateur différentiel T, tel que $Tu = -u''$.

Bibliographie

[1]

[2] N. Adjeroud, Symmetric positive solutions and eigenvalues of multi-point boundary-value problem, soumis à Electron. J. Differential Equations, corrections envoyées fin décembre (2006) .

[3] N. Adjeroud, Second order three-point differential operators asymptotic formula of the characteristic determinant, FEJAM, Vol 24(3) (2006) ,281-295.

[4] R. I. Avery and A. C. Petrerson, Three symmetric positive solutions for a second-order boundary-value problem. Appl. Math. Lett.13(2000) 1-7

[5] R. I. Avery and A. C. Petrerson, Three positive fixed points of nonlinear operators on ordered banach spaces Comput. Math. Appl. 42 (2001) 313-332.

[6] Z. Bai, Y. Wang, and W. Ge, Triple positive solutions for a class of two-point boundary-value problems, Electron. J. Differential Equations, Vol.2004 (2004), No. 06, pp. 1-8.

[7] F. Betschler, Uber integraldarstellung welche aus speziellen Randwertproblemen bei gewohnlichen linearen inhomogenen differentialgleichungen entspringen, diss. Jul.- Maximilians Univ., Wurzburg, 1912.

[8] D. Cao and R. Ma, Positive solutions to a second-order multi-point boundary-value problem, Electron. J. Differential Equations, Vol. 2000 (2000). 65, pp. 1-8.

[9] Y. Chen, B. Yan, L. Zhang, Positive solutions for singular three-point boundary-value problems with sign changing nonlinearities depending on x', Electron. J. Differential Equations, Vol. 2007(2007), No. 63, pp. 1-9.

[10] J. Chu and Z. Zhou, Positive solutions and eigenvalues of nonlocal boundary-value problems, Electron. J. Differential Equations, Vol. 2005 (2005), No. 86, 1-9.

[11] E. A Coddington and N. Levinson, Theory of linear differential equations, Mc Graw-Hill, New York, 1955.

[12] R. H. Cole, The expansion problem with boundary conditions at a finite set of points, Can. J. Math. 13(1963), 462-479.

[13] M. Denche, A. Kourta, Boundary value problem for second-order differential operators with mixed nonlocal boundary conditions, Journal of Inequalties in Pure and Applied Mathematics, 52(2004), article 38, 16pp.

[14] ———, General boundary conditions for an ordinary linear differential system, Trans. Amer. Math. Soc. 111(1964), 521-550.

[15] W. Feller, The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations, Boll. Un. Mat. Ital. 22(1967), 135-178.

[16] J. M. Gallardo, Generation of analytic semi-groups by second order differential operators with nonseparated boundary conditions, Rocky Mountain J. Math. 30(3) (2000), 869-899

[17] ————, Second order differential operators with integral boundary conditions and generation of analytic semi-groups, Rocky Mountain Math.30(4) (2000), 1265-1291.

[18] C. Gupta, S. K. Ntouyas and P. Ch. Tsamatos, On $m-$point boundary-value problem for secon-order ordinary differential equations, nonlinear Analysis TMA, 23 (1994), 1427-1436.

[19] J.R. Graef, J. Henderson, and B. Yang, Positive solutions of a nonlinear higher order boundary-value problem, Electron. J. Differential Equations, Vol. 2007(2007), No. 45, pp. 1-10.

[20] X. He and W. Ge, Triple solutions for second-order three-point boundary-value problems, J. Math. Anal. Appl. 268 (2002), 256-265..

[21] J. Henderson, Double solutions of three-point boundary-value problems for second-order differentials equations, Electron. J. Differential Equations, Vol. 2004 (2004), No.115, pp. 1-7.

[22] J. Henderson and H. Wang, Positive solutions for nonlinear eigenvalue problems, J. Math. Anal. Appl. Vol. 208,(1997), pp. 252-259.

[23] E. Hilb, Uber reihenentwicklungen, welche ans speziellen Randwertproblemen bei gewohnlichen linearen inhomogenen differentialgleichungen entspringen, J. Reine Angew. Math 140(1911), 205-229

[24] G. L. Karakostas and P. Ch. Tsamatos, Positive solutions of a boundary-value problem for second-order ordinary differetial equations Electron. J. Differential Equations, Vol. 2000 (2000), No. 49, pp. 1-9.

[25] G. L. Karakostas and P. Ch. Tsamatos, Positive solutions and nonlinear eigenvalue problems for retarded second order differential equations, Electron. J. Differential, Vol. 2002 (2002), No. 59, pp. 1-11.

[26] G. L. Karakostas and P. Ch. Tsamatos, Positive solutions for a nonlocal boundary-value problem with increasing response, Electron. J. Differential Equations, Vol.2000 (2000), No. 73, pp. 1-8.

[27] G. L. Karakostas and P. Ch. Tsamatos, Multiple positive solutions for a nonlocal boundary-value problem with response function quiet at zero, Electron. J. Differential Equations, Vol. 2001 (2001), No. 13, pp. 1-10.

[28] M. V. Keldysh, 'On eigenvalues and eigenfunctions of some classes of nonselfadjoint equations, Doklad. Akad. Nauk SSSR, 77,11-14(1951). (Russ) .

[29] A. M. Krall, The development of general differential and general differential-boundary systems, Rocky Mountain J. Math. 5(4) (1975), 493-542.

[30] , The adjoint of a differential operator with integral boundary conditions, Proc. Amer. Math. Soc. 16(1965), 738-742

[31] M. A. Krasnoselskii, Positive solutions of operator equations, Noordhoff, Groningen, 1964.

[32] P. Lang and J. Locker, spectral theory for a differential operator : Characteristic determinant and Green's function, J. Math. Anal. Appl. 141(1989), 405-423.

[33] P. Lang and J. Locker, spectral theory of two-point differential operators determined by $-D^2$. I. Spectral properties, J. Math. Anal. Appl. 141(1989), 538-558.

[34] P. Lang and J. Locker, spectral theory of two-point differential operators determined by $-D^2$. II. Analysis of cases, J. Math. Anal. Appl. 146(1990), 148-191.

[35] J. Locker, The nonspectral Birkhoff-Regular differential operators determined by $-D^2$, J. Math. Anal. Appl. 154(1991), 243-254.

[36] J. Locker, the spectral theory of second order two-point differential operators, : I. Apriori estimates for the eigenvalues and completeness, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 121(1992), 279-301.

[37] J. Locker, the spectral theory of second order two-point differential operators. II. Asymptotic expansions and the characteristic determinant, J. Diff. Equa. 114(1994), 272-287.

[38] Z. L. Liu and F. Y. Li, Multiple positive solutions of nonlinear two-point boundary-value problem J. Math. Anal. Appl. Vol. 203, 1996, pp. 610-625.

[39] R. Ma, Existence theorems for second order three-point boundary-value problem, J. Math. Anal. Appl. 212 (1997), 430-442.

[40] R. Ma, Existence theorems for second order m-point boundary-value problem, J. Math. Anal. Appl. 211(1997), 545-555.

[41] R. Ma, Positive solutions of nonlinear three-point boundary-value problem, Electron. J. Differential Equations, Vol. 1999 (1999), No. 34, 1-8.

[42] R. Ma and N. Castaneda, existence of solutions of nonlinear $m-$point boundary-value problems, J. Math. Anal. Appl. Vol. 240, 1999, pp. 416-432.

[43] M. A. Naimark, Linear Differential operators, Vol. I., Ungar Publishing, New York, 1967.

[44] M. Picone, I teoremi d'existenza per gl'integrale di una equazione differenziale lineare ordinaria soddisfacenti ad una nuova classe di condizioni, Rend. Acc. Lincei 17(1908), 340-347.

[45] A. A. Shkalikov, Boundary value problems for ordinary differential equations with a parameter in boundary conditions. ZAMM·Z. angew. Math. Mech. 76(1996) S2, 233-235.

[46] Y. P. Sun, Nontrivial solution for a three-point boundary-value priblem, Electron. J. Differential Equations, Vol. 2004 (2004), No.111, 1-10

[47] J. D. Tamarkin, the notion of the Green's function in the theory of integro-differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 29(1927), 755-800.

[48] A. I. Vagabov, A revision of the Tamarkin asymptotic theorem, Uravneniya. Vol. 29, N0. 1, (1993), 33-41.