REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MENTOURI-CONSTANTINE

FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° D'ordre :….
Série…..

THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT D'ETAT EN MATHEMATIQUES

THEME
Sur des problèmes d'homogénéisation et contrôlabilité exacte pour des structures minces hautes

Option
ANALYSE
Par

BENABBAS Nassira épouse Mesbah

Devant le jury :

Président :M. Benkafadar Nasredine Professeur U. Mentouri Constantine
Rapporteur :M. Doina Cioranscu Directeur de recherche CNRS, Université Paris 6
Examinateurs : Mme Bentalha Fadila Maître de conférences, U. de Batna
M. Gérard Tronel Maître de conférences, Université Paris 6
M. Mokrane Abdelhafid Professeur ENS Kouba ,Alger

Soutenue le

Remerciements

Je remercie de tout mon cœur le professeur D. Cioranescu qui a accepté de diriger mes travaux et je voudrais ici lui exprimer ma profonde gratitude pour toute la sollicitude dont elle a fait preuve tout au long de la préparation de cette thèse.
Je remercie également monsieur N. Benkafadar d’avoir bien voulu présider le jury auquel ce travail est soumis.
Je voudrais aussi exprimer ma profonde reconnaissance à monsieur G. Tronel pour les encouragements qu’il n’a cesse de me prodiguer bien aimablement durant les stages effectués à l’université Pierre et Marie Curie à Paris .
Je remercie aussi les professeurs S.Boughaba et M. Mokrane d’avoir accepté de faire partie du jury .
Mes remerciements sont aussi pour mes parents et mon époux pour leur soutient constant et leur encouragement dans les moments difficiles.
J’aimerai remercier le département de mathématique de l’université Mentouri de Constantine, sans oublier les collègues qui m’ont aidé à la réalisation technique de cette thèse.

Table des matières

I Etude de la contrôlabilité exacte interne d'une structure périodique, perforée et élancée. 6

1 Position du problème 11

2 Etude de la contrôbilité exacte du système 20

3 Comportement asymptotique du système quand ε tend vers zéro : homogénéisation 25

4 Etude de la convergence du contrôle 50

5 Contrôlabilité exacte du problème homogénéisé 56

6 Résultat de convergence sur l'épaisseur des barres 61

II Etude de la contrôlabilité exacte frontière d'un parallélépipède de faible épaisseur dans deux directions. 81

7 1 Position du problème 84

8 2 Résultats préliminaires concernant le système étudie **88**

9 3 Contrôlabilité exacte dans l'ouvert dilaté **106**

10 4 Comportement limite du système donné **112**

11 5 Contrôlabilité exacte du problème limite **122**

Résumé général

On établit la contrôlabilité exacte interne et frontiére de l'équation des ondes dans des structures dépendant de petits paramétres. On utilise la méthode H.U.M, ensuite on étudie le comportement des systèmes quand ces paramétres tendent vers zéro.

Abstract

We establish the local and boundary exact controllability of the wave equatien of structures depending upon small parameters.We use the H. U. M. method, afterwards we study the behaviour of such systems when these parameters tend to zero.

Introduction générale

Le problème de la contrôlabilité exacte par la méthode H. U. M à été introduit par J. L .Lions dans [1] .Il étudie deux types de contrôlabilité exacte, le premier est un problème de contrôlabilité exacte avec un contrôle frontière, où il considére l'équation des ondes $y" - \Delta y = 0$ dans $Q = \Omega\times\ ]0, T[$ avec des conditions initiales $y(0) = y^0$, $y'(0) = y^1$ dans Ω et un contrôle de type Dirichlet $y = v$ ou un controle de type Newmann $\frac{\partial y}{\partial \nu} = v$ sur la frontiére du domaine. Ω. étant un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière suffisament régulière et T un réel strictement positif .

La formulation du problème de la contrôlabilité exacte du système donné est la suivante :

Etant donné un temps T > 0 et des conditions initiales (y^0 , y^1) convenables ,existe-t-il un contrôle v tel que la solution $y = y(v)$ du système donné satisfasse la condition $y(T\ ) = y'(T\ ) = 0$ autrement dit, il s'agit d' étudier l'éxistence d'un contrôle v qui ramène le système à l'état d'équilibre (0,0) au temps T > 0

Le deuxième type de problème est la contrôlabilité exacte avec un contrôle interne, c'est à dire il considère l' équation $y" - \Delta y = v$ dans $Q = \Omega\times]0, T[$

la fonction v est le contrôle du système, il s'agit d' un contrôle agissant dans Ω.

dans [2] , J .L. Lions a examiné le cas des perturbations de domaines et particulièrement les domaines perforés de petits trous arrangés de maniere périodique en faisant des calculs formels. Une théorie plus compléte et plus élaborée a été donnée par D. Cioranescu et P. Donato dans [4] pour un contrôle interne et D. Cioranescu et

M. Vaninathan pour un contrôle frontière dans [12]

La première partie de cette thèse à été motivée par les travaux de D. Cioranescu et P. Donato (cf. [4])

Nous considérons l'équation des ondes avec un domaine tridimensionnel, périodique dans le sens de x_3,de période ε et formé par des barres d'épaisseur $\epsilon\ \delta$(cf. figure 1) et donc pour travailler dans un domaine fixe, on doit le dilaté dans le sens de $x_1$et x_2 et ceci nous fait apparaitre des termes en ε^{-2}et ε^{-1}dans le systéme.

Nous commençons par appliquer la méthode H.U.M pour étudier la contrôlabilité exacte du systéme aprés dilatation. Ensuite, etant donné que notre problème comporte deux petits paramétres ε et δ nous faisons tendre l'un aprés l'autre, ces paramétres vers zéro en commencant par ϵ et la on utilise en plus des techniques d'homogénéisation .

La seconde partie de cette thése porte sur la contrôlabilité exacte frontière de l'équation des ondes avec un domaine tridimensionnel de faible épaisseur dans deux directions (cf. figure 2)

Nous utilisons la méthode H.U.M pour étudier la contrôlabilité exacte du système, ensuite nous faisons tendre le paramétre δ vers zéro et nous démontrons que la suite des contrôles exactes converge faiblement vers le contrôle exacte du système limite unidimensionnel obtenu.

Première partie

Etude de la contrôlabilité exacte interne d'une structure périodique, perforée et élancée.

Résumé

Nous étudions la contrôlabilité exacte interne d'une structure tridimentionnelle périodique dans le sens de x_3 . La taille de la période est de l'ordre ϵ,cette structure est formée par des barres d'épaisseur ϵ δ dans un premier temps, on établit par la méthode H.U.M de J.L.Lions , l'existence du contrôle exact ;ensuite nous faisons tendre l'un après l'autre les deux paramètres vers zéro.On commence par faire tendre ϵ vers zéro et on montre que la suite des contrôles converge faiblement vers une fonction qui est le contrôle exact du système homogéneisé unidimentionnel.Enfin ,nous faisons tendre le paramètre représentant l'épaisseur des barres ,vers zéro et nous établissons que la limite du contrôle exact est le contrôle exact du système limite.

Abstract

We study the exact local controllability of a periodical tridimensional structure in the sens of x_3.

The size of the period is of order ϵ, the structure is composed of barres of thickness ϵ δ.

By using the J. L. Lions, H. U. M. method we establish the existence of the exact control, then we successively make both parameters tend to zero.For the ϵ case we show that ; the sequence of controls weakly converges to a function representing the exact control of the homogenized one dimensional system .And for the thickness parameter of the barres as this latter approaches zero, we establish that the limit of the exact control is the exact control of the limit system

Introduction

D Cioranescu et P. Donato dans [4], ont traité le problème de la contrôlabilitéexacte

interne de l'équation des ondes avec un domaine Ω_ϵ obtenu à partir d'un ouvert Ω en retirant une famille de sous-ensembles petits d'ordre ϵ et arrangés de manière périodique, autrement dit, un ouvert Ω avec des trous de taille ϵ. Ω étant un ouvert borné et régulié de $\mathbb{R}^n$. Il on appliqué la méthode H.U.M de J. L. Lions et puis étudier le comportement du système lorsque ϵ tent vers zéro.

Dans cette partie, on considére le domaine $\omega^*_{\epsilon\delta}$ décrit par la figure 1, il est contenu dans l'ouvert $\omega_\epsilon =]o, \epsilon[\times]0, \epsilon[\times]0, L[$ et est formé de barres vérticales et horizontales d' épaisseur $\epsilon\delta$ et disposées d'une façon périodique dans le sens de x_3.. ϵ et δ sont deux petits paramétres déstinés à tendre vers zéro,l'un aprés l'autre et L désigne un nombre réel quelonque srtictement positif.

Pour commencer, nous allons nous ramener à un domaine fixe en faisant la transformation suivante :

$$(x_1, x_2, x_3) \in \omega^*_{\varepsilon\delta} \rightarrow (z_1, z_2, z_3) \in \Omega^*_{\varepsilon\delta}$$

où l'on a posé

$$\left\{ \begin{array}{ll} z_\alpha = \frac{x_\alpha}{\epsilon}, & \alpha \in \{1, 2\} \\ z_3 = x_3 & \end{array} \right\}$$

Avec tout cela, le problème à résoudre devient un système avec des termes en ϵ^{-1} et ϵ^{-2}.

L'objet de ce travail est d'étudier la contrôlabilité exacte interne du système dilaté et décrire son comportement quand ϵ et δ tendent vers zéro succesivement. La présentation de cette étude est la suivante :

-Dans le chapitre 1, nous démontrons un résultat d'existence et d'unicité de la solution du système donné.

Dans le chapitre 2, nous utilisons la méthode H.U.M pour établir un résultat de contrôlabilité exacte du système.

Dans le chapitre 3, nous étudions le comportement asymptotique de la solution quand ϵ tend vers zéro, δ étant fixe en utilisant des techniques de [3] et [4]. On obtient le problème homogénéisé qui est un système unidimentionnel.

Dans le chapitre 4, nous étudions le comportement du contrôle quand ϵ tend vers zéro, δ étant fixe.

Dans le chapitre 5, nous montrons que la limite du contrôle est le contrôle exact du problème homogénéisé.

Dans le chapitre 6, nous faisons tendre δ vers zéro dans le problème homogénéisé et nous démontrons que la suite du contrôle exact donné par H.U.M converge faiblement vers le contrôle exact du système limite.

Chapitre 1

Position du problème

On se donne le domaine perforé décrit par la figure 1

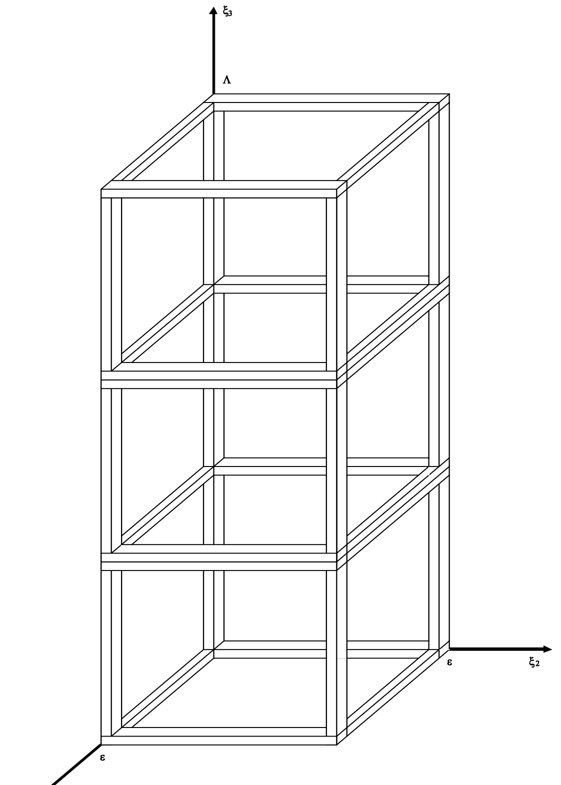

FIGURE 1

Il est contenu dans l'ouvert.

$$\omega_\varepsilon =]0, \varepsilon[\times]0, \varepsilon[\times]0, L[.$$

Soit $Y = (]0,1[)^3$; alors on désigne par Y_δ^* (resp $\omega_{\varepsilon\delta}^*$) la partie de Y (resp de $\omega_{\varepsilon_\delta}$) occupée par le matériau.

On considère le systéme suivant

$$(1\!-\!1) \qquad \begin{cases} y''_{\varepsilon\delta} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial y_{\varepsilon\delta}}{\partial x_j}\right) = 0 & \text{dans} \quad \omega_{\varepsilon\delta}^* \times]0,T[\\ y_{\varepsilon\delta} = 0 & \text{sur} \quad \omega_{\varepsilon\delta}^{*,0} \times]0,T[\\ \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial y_{\varepsilon\delta}}{\partial x_j}\right)\nu_i = 0 & \text{sur} \quad \gamma_{\varepsilon\delta}^* \times]0,T[\\ y_{\varepsilon\delta}(0) = y^0_{\varepsilon\delta} & \text{dans} \quad \omega_{\varepsilon\delta}^* \\ y'_{\varepsilon\delta}(0) = y^1_{\varepsilon\delta} & \text{dans} \quad \omega_{\varepsilon\delta}^* \end{cases}$$

où $\omega_{\varepsilon\delta}^{*,0}$ est la partie de $\omega_{\varepsilon\delta}^*$ qui touche le sol, c'est à dire pour $x_3 = 0$ et $\gamma_{\varepsilon\delta}^* = \partial\omega_{\varepsilon\delta}^* - \omega_{\varepsilon\delta}^{*,0}$. T désigne un nombre réel quelconque strictement positif et $\nu = (\nu_i,\ i = 1,2,3)$ est la normale exterieure à $\gamma_{\varepsilon\delta}^*$. ε est la taille de la période, δ est l'épaisseur des barres ces deux petits paramétres sont destinés à tendre vers zéro séparement.

Dans tout le travail, nous utilisons de façon systématique la convention de sommation sur les indices répétés.

On suppose que les coefficients $a_{ij}, 1 \le i,j \le 3$ verifient

$$(1\!-\!2) \qquad a_{ij} \text{ consants, } a_{ij} = a_{ji}$$

$$(1\!-\!3) \qquad \exists m > 0;\ a_{ij}\xi_i\xi_j \ge m\xi_i\xi_i \quad \forall\xi = (\xi_i) \in \mathbb{R}^3$$

Maintenant, nous allons nous ramener à un domaine fixe en le dilatant dans le sens de x_1, x_2 et ceci grâce au changement de variables suivant

$$(1\!-\!4) \qquad (x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (z_1 = \frac{x_1}{\varepsilon}, z_2 = \frac{x_2}{\varepsilon}, z_3 = x_3)$$

Alors le systéme (1-1) devient

$$(1-5) \qquad \begin{cases} u''_{\varepsilon\delta} + A_{\varepsilon\delta} u_{\varepsilon\delta} = 0 & \text{dans} \quad \Omega^*_{\varepsilon\delta} \times]0, T[\\ u_{\varepsilon\delta} = 0 & \text{sur} \quad \Omega^{*,0}_{\varepsilon\delta} \times]0, T[\\ \frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial v_{A_{\varepsilon\delta}}} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_{\varepsilon\delta} \times]0, T[\\ u_{\varepsilon\delta}(0) = u^0_{\varepsilon\delta} & \text{dans} \quad \Omega^*_{\varepsilon\delta} \\ u'_{\varepsilon\delta}(0) = u^1_{\varepsilon\delta} & \text{dans} \quad \Omega^*_{\varepsilon\delta} \end{cases}$$

où $\Omega^*_{\varepsilon\delta}$, $\Omega^{*,0}_{\varepsilon\delta}$, $\Gamma_{\varepsilon\delta}$ sont respectivement les transformés de $\omega^*_{\varepsilon\delta}, \omega^{*,0}_{\varepsilon\delta}, \gamma^*_{\varepsilon\partial}$ par ce changement de variables, et

$$(1-6) \qquad u_{\varepsilon\delta}(z_1, z_2, z_3) = y_{\varepsilon\delta}(x_1, x_2, x_3)$$

$$(1-7) \qquad A_{\varepsilon\delta} = -\left[\varepsilon^{-2} a_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} + \varepsilon^{-1} a_{\alpha 3} \frac{\partial^2}{\partial z_\alpha \partial z_3} + \varepsilon^{-1} a_{3\alpha} \frac{\partial^2}{\partial z_3 \partial z_\alpha} + a_{33} \frac{\partial^2}{\partial z_3^2}\right]$$

$$(1-8) \qquad \frac{\partial}{\partial v_{A\varepsilon\gamma}} = \left(\varepsilon^{-1} a_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial z_\alpha} + a_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial z_3}\right) n_i$$

Dans tout ce qui suit, les indices α, β varient dans l'ensemble $\{1, 2\}$

Posons

$$(1-9) \qquad V_{\varepsilon\delta} = \left\{u \in H^1\left(\Omega^*_{\varepsilon\delta}\right); u = 0 \text{ sur } \Omega^{*,0}_{\varepsilon\delta}\right\}$$

On munit $V_{\varepsilon\delta}$ de la norme

$$(1-10) \qquad |u_{\varepsilon\delta}|^2_{\varepsilon\delta} = \int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} \left[\varepsilon^{-2} a_{\alpha\beta} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha} \frac{\partial u_{\varepsilon u}}{\partial z_\beta} + 2\varepsilon^{-1} a_{\alpha 3} a \frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3} \frac{a \partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha} + a_{33} \left(\frac{\partial_{u\varepsilon\delta}}{\partial z_3}\right)^2\right] dz$$

et du produit scalaire correspondant.

Alors on a le

Thérème 1.1

On suppose que les données initiales $u^0_{\varepsilon\delta}$ *et* $u^1_{\varepsilon\delta}$ *vérifient*

$$(1-11) \qquad u^0_{\varepsilon\delta} \in V_{\varepsilon\delta} \ et \ u^1_{\varepsilon\delta} \in L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\delta}\right)$$

et donc le systéme ***(1.5)*** *possédent une et une seule solution* $u_{\varepsilon\delta}$ *telle que*

$$(1-12) \qquad u_{\varepsilon\delta} \in C\left([0,T];V_{\varepsilon\delta}\right) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta}))$$

Preuve

On va utiliser le Théorème de Hille-Yosida (voir[8]) qui consiste à :

Si on considère le problème

$$(*) \qquad \begin{cases} \frac{du}{dt} + \mathcal{A}u = 0 & \text{sur} \quad [0,+\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

avec $\mathcal{A}$ un opérateur linéaire non borné

$$\mathcal{A} : \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \subset H \longrightarrow H \ (H \text{ un espace de Hilbert})$$

vérifiant :

1-$\mathcal{A}$ monotone c'est à dire

$$(\mathcal{A}v, v) \geq 0, \forall v \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$$

2-$\forall f \in H$, $\exists u \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ telle que $u + \mathcal{A}u = f$

Alors pour tout $u_0 \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, il existe une fonction u, solution de $(*)$ et $u \in C\left([0,+\infty[, H\right) \cap C\left([0,+\infty[, \mathfrak{D}(\mathcal{A})\right)$.

On veut écrire le système (1-5) sous la forme $(*)$, pour cela posons

$$U_{\varepsilon\delta} = (u_{\varepsilon\delta}, u'_{\varepsilon\delta})$$

et

$$U^0_{\varepsilon\delta} = \left(u^0_{\varepsilon\delta}, u^1_{\varepsilon\delta}\right)$$

et $\mathcal{A}_{\varepsilon\delta}$ l'opérateur

$$(1-13) \qquad \mathcal{A}_{\varepsilon\delta} : V_{\varepsilon\delta}\times L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta}) \longrightarrow V_{\varepsilon\delta}\times L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})$$

$$(u_{\varepsilon\delta}, v_{\varepsilon\delta}) \longmapsto \mathcal{A}_{\varepsilon\delta}\left(u_{\varepsilon\delta}, v_{\varepsilon\delta}\right) = \left(-v_{\varepsilon\delta}, A_{\varepsilon\delta} u_{\varepsilon\delta}\right)$$

avec son domaine

$$(1-14) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{D}(\mathcal{A}_{\varepsilon\delta}) \quad = \quad & \Big\{(u_{\varepsilon\delta}, v_{\varepsilon\delta}) \in V_{\varepsilon\delta} \times L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta}); \\ & A_{\varepsilon\delta} u_{\varepsilon\delta} \in L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta}) \text{ et } \frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial \nu_{\mathcal{A}_{\varepsilon\delta}}} = 0 \text{ sur } \Gamma_{\varepsilon\delta} \times]0, T[\Big\} \end{aligned}$$

Pour pouvoir appliquer le Théorème de Hille-Yosida.
Commençons par prendre $(u^0_{\varepsilon\delta}, u^1_{\varepsilon\delta}) \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}_{\varepsilon\delta})$.
Ainsi le système (1-5) deviant

$$(1-15) \qquad \begin{cases} U'_{\varepsilon\delta} + \mathcal{A}_{\varepsilon\delta} U_{\varepsilon\delta} = 0 & \text{dans} \qquad]0, T[\\ U_{\varepsilon\delta}(0) = U^0_{\varepsilon\delta} \end{cases}$$

et donc il suffit de démontrer que
1-$\mathcal{A}_{\varepsilon\delta}$ est monotone

$$(1-16) \qquad \forall \left(u_{\varepsilon\delta}, v_{\varepsilon\delta}\right) \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}_{\varepsilon\delta}) \;\; \left(\mathcal{A}_{\varepsilon\delta}\left(u_{\varepsilon\delta}, v_{\varepsilon\delta}\right), \left(u_{\varepsilon\delta}, v_{\varepsilon\delta}\right)\right)_{V_{\varepsilon\delta}\times L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})} \geq 0$$

rappelons que $V_{\varepsilon\delta} \times L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})$ est muni du produit scalaire

$$\left(U^1_{\varepsilon\delta}, U^2_{\varepsilon\delta}\right) = \left(u^1_{\varepsilon\delta}, u^2_{\varepsilon\delta}\right)_{V_{\varepsilon\delta}} + \left(v^1_{\varepsilon\delta}, v^2_{\varepsilon\delta}\right)_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})}$$

où

$$U^1_{\varepsilon\delta} = \left(\begin{array}{c} u^1_{\varepsilon\delta} \\ v^1_{\varepsilon\delta} \end{array} \right); U^2_{\varepsilon\delta} = \left(\begin{array}{c} u^2_{\varepsilon\delta} \\ v^2_{\varepsilon\delta} \end{array} \right)$$

$$u^1_{\varepsilon\delta}, u^2_{\varepsilon\delta} \in V_{\varepsilon\delta} \text{ et } v^1_{\varepsilon\delta}, v^2_{\varepsilon\delta} \in L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})$$

alors

$$\begin{aligned}(1-17)\, \left(\mathcal{A}_{\varepsilon\delta}\left(u_{\varepsilon\delta}, v_{\varepsilon\delta}\right), \left(u_{\varepsilon\delta}, v_{\varepsilon\delta}\right)\right)_{V_{\varepsilon\delta}\times L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})} &= \left(\left(-v_{\varepsilon\delta}, A_{\varepsilon\delta}u_{\varepsilon\delta}\right); \left(u_{\varepsilon\delta}, v_{\varepsilon\delta}\right)\right)_{V_{\varepsilon\delta}\times L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})} \\ &= -\left(v_{\varepsilon\delta}, u_{\varepsilon\delta}\right)_{V_{\varepsilon\delta}} + \left(A_{\varepsilon\delta}u_{\varepsilon\delta}, v_{\varepsilon\delta}\right)_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})} \\ &= -\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} \left(A_{\varepsilon\delta}u_{\varepsilon\delta}.v_{\varepsilon\delta}\right) dz + \int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} \left(A_{\varepsilon\delta}u_{\varepsilon\delta}.v\right) dz \\ &= 0\end{aligned}$$

car

$$(1-18) \qquad \int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} A_{\varepsilon\delta}u_{\varepsilon\delta}.v_{\varepsilon\delta}dz = \left(v_{\varepsilon\delta}, u_{\varepsilon\delta}\right)_{V_{\varepsilon\delta}}$$

aprés une intégration par partie, le terme sur le bord est nul parce que $(u_{\varepsilon\delta}, v_{\varepsilon\delta}) \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}_{\varepsilon\delta})$.
2-montrons que $\forall\, (f, g) \in V_{\varepsilon\delta} \times L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})$, il existe $(u_{\varepsilon\delta}, v_{\varepsilon\delta}) \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}_{\varepsilon\delta})$ tel que

$$(1-19) \qquad (u_{\varepsilon\delta}, v_{\varepsilon\delta}) + \mathcal{A}_{\varepsilon\delta}\left(u_{\varepsilon\delta}, v_{\varepsilon\delta}\right) = (f, g)$$

grâce à la définition (1.13), de l'opérateur $\mathcal{A}_{\varepsilon\delta}$, (1-19) devient

$$(1-20) \qquad \begin{cases} u_{\varepsilon\delta} - v_{\varepsilon\delta} = f \\ A_{\varepsilon\delta}u_{\varepsilon\delta} + v_{\varepsilon\delta} = g \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$(1-21) \qquad A_{\varepsilon\delta}u_{\varepsilon\delta} + u_{\varepsilon\delta} = g + f = F,\ \ u_{\varepsilon\delta} \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}_{\varepsilon\delta})$$

Remarquons que (1-21) est une équation elliptique dont le second terme est dans $L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})$. par conséquant une formulation variationnelle classique et le Théorème de Lax miligram nous donne l'existance d'une seule solution de (1-21) (voir [8]). Ayant ainssi obtenu $u_{\varepsilon\delta}$ on obtient $v_{\varepsilon\delta}$ en utilisant la première équation de (1-20).
En autre $(1\text{-}20)_2$ nous permet d'affimer que $A_{\varepsilon\delta}u_{\varepsilon\delta} \in L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})$; donc $(u_{\varepsilon\delta}, v_{\varepsilon\delta}) \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}_{\varepsilon\delta})$. Nous avons demontré le Théorème (1.1) pour des données initiales $u^0_{\varepsilon\delta}$ et $u^1_{\varepsilon\delta}$ satisfaisant $(u^0_{\varepsilon\delta}, u^1_{\varepsilon\delta}) \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}_{\varepsilon\delta})$. Maintenant nous supposons que $u^0_{\varepsilon\delta}$ et $u^1_{\varepsilon\delta}$ vérifient (1-11).
L'opérateur $\mathcal{A}_{\varepsilon\delta}$ étant maximal monotone, alors $\mathfrak{D}(\mathcal{A}_{\varepsilon\delta})$ est dense dans $V_{\varepsilon\delta} \times L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})$, alors un simple argument de densité permet de conclure que sous l'hypothèse (1-11), le système (1-5) posséde une solution unique $u_{\varepsilon\delta}$.
Toujours le Théorème de Hille Yosida nous donne que

$$(u_{\varepsilon\delta}, u'_{\varepsilon\delta}) \in C\left([0,T[\,, \mathfrak{D}(\mathcal{A}_{\varepsilon\delta})\right) \cap C^1\left([0,T[\,, V_{\varepsilon\delta} \times L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})\right)$$

d'où (1-12).Ceci achéve la preuve du Théorème 1.1.

Lemme 1.2

Soit $\varphi_{\varepsilon\delta}$ solution du système

$$(1-22) \qquad \begin{cases} \varphi''_{\varepsilon\delta} + A_{\varepsilon\delta}\varphi_{\varepsilon\delta} = 0 & \text{dans} \quad \Omega^*_{\varepsilon\delta} \times]0,T[\\ \varphi_{\varepsilon\delta} = 0 & \text{dans} \quad \Omega^{*,0}_{\varepsilon\delta} \times]0,T[\\ \frac{\partial \varphi_{\varepsilon\delta}}{\partial \nu_{A_{\varepsilon\delta}}} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_{\varepsilon\delta} \times]0,T[\\ \varphi_{\varepsilon\delta}(0) = \varphi^0_{\varepsilon\delta} & \text{dans} \quad \Omega^*_{\varepsilon\delta} \\ \varphi'_{\varepsilon\delta}(0) = \varphi^1_{\varepsilon\delta} & \text{dans} \quad \Omega^*_{\varepsilon\delta} \end{cases}$$

alors lorsque $(\varphi^0_{\varepsilon\delta}, \varphi^1_{\varepsilon\delta})$ appartient à $L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta}) \times V'_{\varepsilon\delta}$, la solution $\varphi_{\varepsilon\delta}$ de (1-22) est dans $C\left([0,T], L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})\right) \cap C^1\left([0,T], V'_{\varepsilon\delta}\right)$ et vérifie

$$(1-23)\; c_1\left[\left\|\varphi^0_{\varepsilon\delta}\right\|^2_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})} + \left\|\varphi^1_{\varepsilon\delta}\right\|^2_{V'_{\epsilon\delta}}\right] \leq \left\|\varphi_{\varepsilon\delta}\right\|^2_{L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\delta}\right)\right)} \leq c_2\left[\left\|\varphi^0_{\varepsilon\delta}\right\|^2_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})} + \left\|\varphi^1_{\varepsilon\delta}\right\|^2_{V'_{\varepsilon\delta}}\right]$$

où c_1,c_2 sont deux constantes strictement positives indépendante de ε et $V'_{\varepsilon\delta}$ est le dual de $V_{\varepsilon\delta}$ donné par (1-9).

Preuve.

Dans [2], la démonstration est faite dans le cas d'un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^n$. Reste à voir que les constantes c_1 et c_2 ne dépendent pas de ε. Pour cela voir la preuve du Lemme (6-2) faite dans notre cas. ■

Remarque 1-3

La norme définie sur l'espace $V_{\varepsilon\delta}$ verifie

$$\|u_{\varepsilon\delta}\|_{H^1\left(\Omega^*_{\varepsilon\delta}\right)} \leq c\,|u_{\varepsilon\delta}|_{\varepsilon\delta}$$

(c constante positive indépendante de ε et δ)

en effet, l'hypothèse (1.3) et la définition (1.10), nous donne

$$|u_{\varepsilon\delta}|^2_{\varepsilon\delta} \geq m\left[\left\|\varepsilon^{-1}\frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_1}\right\|^2_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})} + \left\|\varepsilon^{-1}\frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_2}\right\|^2_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})} + \left\|\frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3}\right\|^2_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})}\right]$$

d'autre part, on remarque que si $\varepsilon \longrightarrow 0$, alors $\varepsilon^{-1} \succ 1$

et donc

$$|u_{\varepsilon\delta}|^2_{\varepsilon\delta} \geq m\,\|\nabla u_{\varepsilon\delta}\|^2_{\left((L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})\right)^3}$$

d'autre part on a :

$\forall u_{\varepsilon\delta}, u_{\varepsilon\delta} = 0$ *sur* $\Omega^{*,0}_{\varepsilon\delta}$

$$\|u\|_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})} \leq c\,\|\nabla u\|_{\left[L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})\right]^3}$$

où c est une constante indépendante de ε et δ (pour la démonstration voir [5]) *d'où l'on déduit*

$$\|u_{\varepsilon\delta}\|^2_{H^1(\Omega^*_{\varepsilon\delta})} = \|u_{\varepsilon\delta}\|^2_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})} + \|\nabla u_{\varepsilon\delta}\|^2_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})^3} \leq C\,\|\nabla u_{\varepsilon\delta}\|^2_{[L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})]^3}$$

et par conséqent

$$|u_{\varepsilon\delta}|_{\varepsilon\delta} \geq \sqrt{m}\,\|\nabla u_{\varepsilon\delta}\|_{[L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})]^3} \geq \sqrt{\frac{m}{c}}\,\|u_{\varepsilon\delta}\|_{H^1(\Omega^*_{\varepsilon\delta})}$$

Chapitre 2

Etude de la contrôbilité exacte du système

Cette étude .est guidée par la Méthode d'Unicité Hilbertien H.U.M indtroduite par J.L.LIONS dans [1] .

Alors on a le théorème suivant

Théorème 2.1

Soit $(w^0_{\varepsilon\delta}, w^1_{\varepsilon\delta}) \in V_{\varepsilon\delta} \times L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})$ *. Alors il existe un contrôle* $v_{\varepsilon\delta} \in L^2(0,T;L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta}))$ *tel que si* $w_{\varepsilon\delta}$ *est la solution du système*

$$(2-1) \qquad \begin{cases} w''_{\varepsilon\delta} + A_{\varepsilon\delta} w_{\varepsilon\delta} = v_{\varepsilon\delta} & dans & \Omega^*_{\varepsilon\delta} \times]0,T[\,. \\ w_{\varepsilon\delta} = 0 & sur & \Omega^{*,0}_{\varepsilon\delta} \times]0,T[\,. \\ \frac{\partial w_{\varepsilon\delta}}{\partial v_{A_{\varepsilon\delta}}} = 0 & sur & \Gamma_{\varepsilon\delta} \times]0,T[\,. \\ w_{\varepsilon\delta}(0) = w^0_{\varepsilon\delta} & dans & \Omega^*_{\varepsilon\delta} \\ w'_{\varepsilon\delta}(0) = w^1_{\varepsilon\delta} & dans & \Omega^*_{\varepsilon\delta} \end{cases}$$

On a

$$\forall T > 0,\ w_{\varepsilon\delta}(T) = w'_{\varepsilon\delta}(T) = 0 \ dans\ \Omega^*_{\varepsilon\delta}.$$

Preuve.

Nous allons à présent mettre en oeuvre la méthode de Hilbertienne H.U.M. Introduisons $\varphi_{\varepsilon\delta}$ solution du système homogène

$$(2-2)\qquad \begin{cases} \varphi''_{\varepsilon\delta} + A_{\varepsilon\delta}\varphi_{\varepsilon\delta} = 0 & \text{dans} & \Omega^*_{\varepsilon\delta} \times]0,T[\,. \\ \varphi_{\varepsilon\delta} = 0 & sur & \Omega^{*,0}_{\varepsilon\delta} \times]0,T[\,. \\ \frac{\partial\varphi_{\varepsilon\delta}}{\partial v_{A_{\varepsilon\delta}}} = 0 & sur & \Gamma_{\varepsilon\delta} \times]0,T[\,. \\ \varphi_{\varepsilon\delta}(0) = \varphi^0_{\varepsilon\delta} & dans & \Omega^*_{\varepsilon\delta} \\ \varphi'_{\varepsilon\delta}(0) = \varphi^1_{\varepsilon\delta} & dans & \Omega^*_{\varepsilon\delta} \end{cases}$$

Et $\psi_{\varepsilon\delta}$ solution du système rétrograde

$$(2-3)\qquad \begin{cases} \psi''_{\varepsilon\delta} + A_{\varepsilon\delta}\psi_{\varepsilon\delta} = -\varphi_{\varepsilon\delta} & \text{dans} & \Omega^*_{\varepsilon\delta} \times]0,T[\,. \\ \psi_{\varepsilon\delta} = 0 & sur & \Omega^{*,0}_{\varepsilon\delta} \times]0,T[\,. \\ \frac{\partial\psi_{\varepsilon\delta}}{\partial v_{A_{\varepsilon\delta}}} = 0 & sur & \Gamma_{\varepsilon\delta} \times]0,T[\,. \\ \psi_{\varepsilon\delta}(T) = 0 & dans & \Omega^*_{\varepsilon\delta} \\ \psi'_{\varepsilon\delta}(T) = 0 & dans & \Omega^*_{\varepsilon\delta} \end{cases}$$

Posons

$$(2-4)\qquad F_{\varepsilon\delta} = L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta}) \times V'_{\varepsilon\delta},\ \ F'_{\varepsilon\delta} = L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta}) \times V_{\varepsilon\delta}.$$

Où l'on n'identifie pas $F'_{\varepsilon\delta}$ à son dual.

Définisons

$$(2-5)\qquad \Lambda_{\varepsilon\delta} : F_{\varepsilon\delta} \longrightarrow F'_{\varepsilon\delta}$$

$$\left(\varphi^0_{\varepsilon\delta}, \varphi^1_{\varepsilon\delta}\right) \longmapsto \Lambda_{\varepsilon\delta}\left(\varphi^0_{\varepsilon\delta}, \varphi^1_{\varepsilon\delta}\right) = \left(\psi'_{\varepsilon\delta}(0), -\psi_{\varepsilon\delta}(0)\right)$$

Multiplions $(2.3)_1$ par $\varphi_{\varepsilon\delta}$ solution de (2.2), on aura

$$\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}\int_0^T \psi''_{\varepsilon\delta}.\varphi_{\varepsilon\delta}dzdt+\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}\int_0^T A_{\varepsilon\delta}\psi_{\varepsilon\delta}.\varphi_{\varepsilon\delta}dzdt=-\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}\int_0^T \varphi_{\varepsilon\delta}.\varphi_{\varepsilon\delta}dzdt.$$

On intégre par partie par rapport à z, on trouve

$$(2-6)\qquad \int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}\int_0^T \psi''_{\varepsilon\delta}.\varphi_{\varepsilon\delta}dzdt+\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}\int_0^T\left[\varepsilon^{-2}a_{\alpha\beta}\frac{\partial\psi_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\beta}\frac{\varphi_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha}+2a_{\alpha 3}\frac{\partial\psi_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3}\frac{\varphi_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha}\right.$$

$$\left.+a_{33}\frac{\partial\psi_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3}\frac{\varphi_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3}\right]dzdt=-\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}\int_0^T\varphi^2_{\varepsilon\delta}dzdt.$$

Le terme sur le bord est nul grâce à $(2.2)_2$ et $(2.3)_3$.

Donc, en utilisant une deuxieme fois l'integration par partie par rapport à z, ona

$$(2-7)\qquad \int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}\int_0^T \psi''_{\varepsilon\delta}.\varphi_{\varepsilon\delta}dzdt+\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}\int_0^T \psi_{\varepsilon\delta}.A_{\varepsilon\delta}\varphi_{\varepsilon\delta}dzdt=-\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}\int_0^T\varphi^2_{\varepsilon\delta}dzdt,$$

de même, l'intégrale sur $\partial\Omega^*_{\varepsilon\delta}$ est nulle grâce à $(2.3)_2$ et $(2.2)_3$.

D'où, en utilisant $(2.2)_1$, on obtient

$$(2-8)\qquad \int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}\int_0^T \psi''_{\varepsilon\delta}\varphi_{\varepsilon\delta}dzdt-\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}\int_0^T \psi_{\varepsilon\delta}.\varphi''_{\varepsilon\delta}dzdt=-\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}\int_0^T\varphi^2_{\varepsilon\delta}dzdt,$$

ou encore

$$(2-9)\qquad \int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}\int_0^T(\psi''_{\varepsilon\delta}\varphi_{\varepsilon\delta}+\psi'_{\varepsilon\delta}\varphi'_{\varepsilon\delta}-\psi'_{\varepsilon\delta}\varphi'_{\varepsilon\delta}-\psi_{\varepsilon\delta}\varphi''_{\varepsilon\delta})dzdt=-\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}\int_0^T\varphi^2_{\varepsilon\delta}dzdt$$

soit

$$(2-10)\qquad \int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}\int_0^T\left[(\psi'_{\varepsilon\delta}\varphi_{\varepsilon\delta})'-(\psi_{\varepsilon\delta}\varphi'_{\varepsilon\delta})'\right]dzdt=-\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}\int_0^T\varphi^2_{\varepsilon\delta}dzdt$$

grâce à $(2.3)_4$ et $(2.3)_5$ et une intégration par partie par rapport à t on aura

$$(2-11) \qquad \int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} \left[-\psi'_{\varepsilon\delta}(0)\varphi_{\varepsilon\delta}(0)+\psi_{\varepsilon\delta}(0)\varphi'_{\varepsilon\delta}(0)\right]dz = -\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}\int_0^T \varphi^2_{\varepsilon\delta}dzdt$$

$(2.2)_4$et $(2.2)_5$ donnent

$$(2-12) \qquad \int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} (-\psi'_{\varepsilon\delta}(0)\,\varphi^0_{\varepsilon\delta}+\psi_{\varepsilon\delta}(0)\,\varphi^1_{\varepsilon\delta})dz = -\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}\int_0^T \varphi^2_{\varepsilon\delta}dzdt.$$

Soit encore

$$(2-13) \qquad \int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} (\psi'_{\varepsilon\delta}(0),-\psi_{\varepsilon\delta}(0))(\varphi^0_{\varepsilon\delta},\varphi^1_{\varepsilon\delta})dz = \int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}\int_0^T \varphi^2_{\varepsilon\delta}dzdt$$

Grâce à (2.4) on aura

$$(2-14) \qquad \left\langle \Lambda_{\varepsilon\delta}(\varphi^0_{\varepsilon\delta},\varphi^1_{\varepsilon\delta}),(\varphi^0_{\varepsilon\delta},\varphi^1_{\varepsilon\delta})\right\rangle = \int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}\int_0^T \varphi^2_{\varepsilon\delta}dzdt.$$

et donc on définit une norme sur $F_{\varepsilon\delta}$ par

$$(2-15) \qquad \left\|(\varphi^0_{\varepsilon\delta},\varphi^1_{\varepsilon\delta})\right\|_{F_{\varepsilon\delta}} = \left(\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}\int_0^T \varphi^2_{\varepsilon\delta}dzdt\right)^{\frac{1}{2}} = \|\varphi_{\varepsilon\delta}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta}))}$$

une application du lemme (1.2), soit

$$(2-16) \quad c_1\left[\left\|\varphi^0_{\varepsilon\delta}\right\|^2_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})}+\left\|\varphi^1_{\varepsilon\delta}\right\|^2_{V'_{\varepsilon\delta}}\right] \leq \|\varphi_{\varepsilon\delta}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta}))} \leq c_2\left[\left\|\varphi^0_{\varepsilon\delta}\right\|^2_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})}+\left\|\varphi^1_{\varepsilon\delta}\right\|^2_{V'_{\varepsilon\delta}}\right]$$

donne

$$(2-17) \qquad k_1\left\|(\varphi^0_{\varepsilon\delta},\varphi^1_{\varepsilon\delta})\right\|_{F_{\varepsilon\delta}} \leq \left\langle \Lambda_{\varepsilon\delta}(\varphi^0_{\varepsilon\delta},\varphi^1_{\varepsilon\delta})(\varphi^0_{\varepsilon\delta},\varphi^1_{\varepsilon\delta})\right\rangle^{\frac{1}{2}} \leq k_2\left\|(\varphi^0_{\varepsilon\delta},\varphi^1_{\varepsilon\delta})\right\|_{F_{\varepsilon\delta}}$$

ou

$$(2-18) \qquad k_1 \left\|(\varphi^0_{\varepsilon\delta},\varphi^1_{\varepsilon\delta})\right\|_{F_{\varepsilon\delta}} \leq \frac{\langle \Lambda_{\varepsilon\delta}(\varphi^0_{\varepsilon\delta},\varphi^1_{\varepsilon\delta}),(\varphi^0_{\varepsilon\delta},\varphi^1_{\varepsilon\delta})\rangle}{\left\|(\varphi^0_{\varepsilon\delta},\varphi^1_{\varepsilon\delta})\right\|_{F_{\varepsilon\delta}}} \leq k_2 \left\|(\varphi^0_{\varepsilon\delta},\varphi^1_{\varepsilon\delta})\right\|_{F_{\varepsilon\delta}}$$

par conséquent

$$(2-19) \qquad k_1 \left\|(\varphi^0_{\varepsilon\delta},\varphi^1_{\varepsilon\delta})\right\|_{F_{\varepsilon\delta}} \leq \left\|\Lambda_{\varepsilon\delta}(\varphi^0_{\varepsilon\delta},\varphi^1_{\varepsilon\delta})\right\|_{F'_{\varepsilon\delta}} \leq k_2 \left\|(\varphi^0_{\varepsilon\delta},\varphi^1_{\varepsilon\delta})\right\|_{F_{\varepsilon\delta}}$$

d'où l'on déduit que $\Lambda_{\varepsilon\delta}$ est un isomorphisme de $F_{\varepsilon\delta}$sur $F'_{\varepsilon\delta}$ uniformement par rapport à ε et δ.
comme $(w^1_{\varepsilon\delta},-w^0_{\varepsilon\delta}) \in F'_{\varepsilon\delta}$, l'équation

$$(2-20) \qquad \Lambda_{\varepsilon\delta}(\varphi^0_{\varepsilon\delta},\varphi^1_{\varepsilon\delta}) = \left(w^1_{\varepsilon\delta},-w^0_{\varepsilon\delta}\right)$$

posséde une et une seule solution dans $F_{\varepsilon\delta}$ et compte tenu de la définition de $\Lambda_{\varepsilon\delta}$, on a

$$(2-21) \qquad \begin{cases} \psi'_{\varepsilon\delta}(0) = w^1_{\varepsilon\delta} \\ \psi_{\varepsilon\delta}(0) = w^0_{\varepsilon\delta} \end{cases}$$

alors, si on a choisi $v_{\varepsilon\delta} = -\varphi_{\varepsilon\delta}$, on remarque que $\psi_{\varepsilon\delta}$ est solution de (2.1). Mais ce système n'admettant qu'une solution unique, à savoir $w_{\varepsilon\delta}$, l'on a par conséquent

$$(2-22) \qquad \psi_{\varepsilon\delta} = w_{\varepsilon\delta}$$

par suite

$$(2-23) \qquad w_{\varepsilon\delta}(T) = w'_{\varepsilon\delta}(T) = 0 \text{ dans } \Omega^*_{\varepsilon\delta}$$

ce qui achève la preuve du Théorème 2.1 ■

Chapitre 3

Comportement asymptotique du système quand ε tend vers zéro : homogénéisation

Pour la suite du travail, nous aurons besoin des deux lemmes suivants

Lemme : 3.1 (cf. [3])

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un opérateur de prolongement

$$Q_\varepsilon \in L(H^k(\Omega_\varepsilon), H^k(\Omega))(k = 0, 1)$$

vérifiant pour tout $u \in H^1(\Omega_\varepsilon)$

1. $Q_\varepsilon u = u$ *dans* Ω_ε, $\forall u \in H^1(\Omega_\varepsilon)$
2. $\|Q_\varepsilon u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$
3. $\|\nabla Q_\varepsilon u\|_{[L^2(\Omega)]^N} \leq c \|\nabla u\|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^N}$

c est une constante indépendante de ε

Lemme 3-2 (cf. [**3**])

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un opérateur de prolongement

$$P_\varepsilon \in L\left(L^\infty\left(0,T;H^k(\Omega_\varepsilon)\right), L^\infty 0,T\,;L^2(\Omega_\varepsilon)\right)(k=0,1)$$

vérifiant pour tout $u \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon)), u' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))$

1. $P_\varepsilon u = u$ *dans* $\Omega_\varepsilon \times]0,T[$.
2. $P_\varepsilon(u') = (P_\varepsilon u)'$ *dans* $\Omega\ \times]0,T[$.
3. $\|P_\varepsilon u\|_{L^\infty(0,T\,;L^2(\Omega))} \leq c\,\|u\|_{L^\infty(0,T\,;L^2(\Omega_\varepsilon))}$
4. $\|\nabla P_\varepsilon(u)\|_{L^\infty 0,T\,;(L^2(\Omega))^N} \leq c\,\|\nabla u\|_{L^\infty(0,T\,;(L^2(\Omega_\varepsilon))^N}$
5. $\|P_\varepsilon u'\|_{L^\infty(0,T\,;(L^2(\Omega)))} \leq c\,\|u'\|_{L^\infty(0,T\,;(L^2(\Omega_\varepsilon))}$

où c est une constante pisitive indépendante de ε on a alors le

Théorème 3-1

On supose que les données initiales $u^0_{\varepsilon\delta}, u^1_{\varepsilon\delta}$ vérifiant

$$(3-1) \qquad \begin{cases} |u^0_{\varepsilon\delta}|_{\varepsilon\delta} \leq c\delta^2 \qquad \textit{et } \tilde{u}^0_{\varepsilon\delta} \longrightarrow u^0_\delta \textit{ dans } H^1_0(\Omega) \textit{ faible} \\ \|u^1_{\varepsilon\delta}\|_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})} \leq c\delta^2 \textit{ et } \tilde{u}^1_{\varepsilon\delta} \longrightarrow u^1_\delta \textit{ dans } L^2(\Omega) \textit{ faible} \end{cases}$$

où le $\sim$ désigne le prolongement par zéro de toute fonction définie dans $\Omega^*_{\varepsilon\delta}$ et c est une constante positive indépendante de ε et δ.
Alors quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ avec δ fixe, on a

$$(3-2) \qquad \begin{cases} p_{\varepsilon\delta}u_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup u_\delta \quad \textit{dans} \quad L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)) \quad \textit{faible} \ * . \\ p_{\varepsilon\delta}u'_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup u'_\delta \quad \textit{dans} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \quad \textit{faible} \ * . \end{cases}$$

où

$(3-3)$ *u_δ est une fonction indépendante de z_1 et z_2 et solution du système homogéneisé.*

$$(3-4) \qquad \begin{cases} |Y^*_{\varepsilon\delta}|\, u''_\delta - \frac{\partial}{\partial z_3}\left(q_\delta . \frac{\partial u_\delta}{\partial z_3}\right) = 0 & \textit{dans} \quad]0,L[\times]0,T[\\ u_\delta(0) = u_\delta(L) = 0 & \textit{dans} \quad]0,T[\\ u_\delta(0) = \frac{u^0_\delta}{|Y^*_\delta|} & \textit{dans} \quad]0,L[\\ u'_\delta(0) = \frac{\overline{u}^1_\delta}{|Y^*_\delta|} & \textit{dans} \quad]0,L[\end{cases}$$

avec

$$(3-5) \qquad |Y^*_\delta| = 8\delta^2(1-\delta)$$

$$(3-6) \qquad \overline{u}^1_\delta = \int_0^1 \int_0^1 u^1_\delta dz_1 dz_2$$

le coefficient homogéneisé est donné par

$$(3-7) \qquad q_\delta = \int_{Y^*_\delta} a_{3j} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(-\chi^\delta + y_3\right) dy$$

où χ^δ est solution de

$$(3-8)\qquad \begin{cases} a_{ij}\frac{\partial^2\left(-\chi^\delta+y_3\right)}{\partial y_i\partial y_j}=0 & dans \quad Y_\delta^* \\ a_{ij}\frac{\partial\left(-\chi^\delta+y_3\right)}{\partial y_j}n_i=0 & sur \quad \partial_N Y_\delta^* \\ \chi^\delta \textit{ périodique en } y_3 \textit{ et de moyenne nulle.} \end{cases}$$

Preuve

On commence par chercher l'énergie du système (1-5) pour cela on multiplie (1-5)$_1$ par $u'_{\varepsilon\delta}$ et on intégre, on aura

$$(3-9)\qquad \int_0^T\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} u''_{\varepsilon\delta}.u'_{\varepsilon\delta}dzdt+\int_0^T\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} A_{\varepsilon\delta}u_{\varepsilon\delta}.u'_{\varepsilon\delta}dzdt=0$$

ou

$$(3-10)\qquad \int_0^T\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(u'_{\varepsilon\delta}\right)^2dzdt+\int_0^T\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} A_{\varepsilon\delta}u_{\varepsilon\delta}.u'_{\varepsilon\delta}dzdt=0$$

on intégre par partie par rapport à z, on aura

$$(3-11)\qquad \int_0^T\frac{1}{2}\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} \frac{d}{dt}\left(u'_{\varepsilon\delta}\right)^2dzdt+\int_0^T\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}\left[\varepsilon^{-2}a_{\alpha\beta}\frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\beta}\frac{\partial u'_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha}+\right.$$

$$\left.+\varepsilon^{-1}a_{\alpha 3}\frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3}\frac{\partial u'_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha}+\varepsilon^{-1}a_{3\alpha}\frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha}\frac{\partial u'_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3}+a_{33}\frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3}\frac{\partial u'_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3}\right]dzdt=0$$

le terme sur le bord est nul gâce a (1-5)$_2$ et (1-5)$_3$.
Soit encore

$$(3-12)\qquad \int_0^T\frac{1}{2}\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} \frac{d}{dt}\left(u'_{\varepsilon\delta}\right)^2dzdt+\int_0^T\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\varepsilon^{-2}a_{\alpha\beta}\frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\beta}\frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha}+\right.$$

$$\left.+2\varepsilon^{-1}a_{\alpha 3}\frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3}\frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha}+a_{33}\left(\frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3^2}\right)^2\right]dzdt=0$$

car $a_{ij} = a_{ji}$, alors, si on pose

$$(3-13) \qquad E(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} (u'_{\varepsilon\delta})^2\, dz + \frac{1}{2}\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} \left[\varepsilon^{-2} a_{\alpha\beta} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\beta}\frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha} + \right.$$

$$\left. + 2\varepsilon^{-1} a_{\alpha 3} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3}\frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha} + a_{33}\left(\frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3^2}\right)^2\right] dz$$

on obtient

$$(3-14) \qquad \int_0^T \frac{d}{dt} E(t) dt = 0$$

et donc

$$(3-15) \qquad E(T) = E(0)$$

alors, on remarque qu'on a conservation de l'énergie et par conséquent, grâce a (1-10), on a

$$(3-16) \qquad E(0) = \frac{1}{2}\left[\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} \left(u^1_{\varepsilon\delta}\right)^2 dz + \int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} \left(\varepsilon^{-2} a_{\alpha\beta} \frac{\partial u^0_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\beta}\frac{\partial u^0_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\varepsilon^{-1} a_{\alpha 3} \frac{\partial u^0_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3}\frac{\partial u^0_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha} + a_{33}\left(\frac{\partial u^0_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3^2}\right)^2\right)\right] dz = \frac{1}{2}\left[\left\|u^1\right\|^2_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})} + \left|u^0_{\epsilon\delta}\right|^2_{\epsilon\delta}\right]$$

en utilisant (3-1), on aura

$$(3-17) \qquad E(0) \leq c$$

où dans toute la démonstration de ce Théorème c est une constante indépendante de ε mais qui dépend de δ.

(3-13), (3-15) et (3-16) donnent :

$$(3-18) \qquad \|u'_{\varepsilon\delta}\|^2_{L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\delta}\right)} \leq c$$

$$(3-19) \qquad |u_{\varepsilon\delta}|^2_{\varepsilon\delta} \leq c$$

il decoule de (3-18) et (3-19) et la remarque (1-3), que

$$(3-20) \qquad \|u'_{\varepsilon\delta}\|^2_{L^\infty\left(0,T;L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\delta}\right)\right)} \leq c$$

$$(3-21) \qquad \|u_{\varepsilon\delta}\|^2_{L^\infty\left(0,T;H^1\left(\Omega^*_{\varepsilon\delta}\right)\right)} \leq c$$

c est une constante positive indépendante de ε.

grâce au lemme (3-2), on sait alors qu'à une exatraction de sous suite de ε, on a

$$(3-22) \qquad \begin{cases} p_{\varepsilon\delta} u_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup u_\delta \text{ dans } L^\infty\left(0,T;H^1\left(\Omega\right)\right) \text{ faible}* \\ p_{\varepsilon\delta} u'_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup u'_\delta \text{ dans } L^\infty\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right) \text{ faible}* \end{cases}$$

de plus (1-3) et (3-19) nous donne :

$$(3-23) \qquad \left\|\varepsilon^{-1}\frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_1}\right\|_{L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\delta}\right)} \leq c$$

$$(3-24) \qquad \left\|\varepsilon^{-1}\frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_2}\right\|_{L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\delta}\right)} \leq c$$

$$(3-25) \qquad \left\|\frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3}\right\|_{L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\delta}\right)} \leq c$$

et donc on montre que u_δ est indépendante de z_1 et z_2 (voir [1]).

Maintenant, on cherche l'équation vérifiée par u_δ pour cela, posons

$$(3-26) \qquad \xi^i_\varepsilon = \varepsilon^{-1} a_{i\beta}\frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\beta} + a_{i3}\frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3}, i = 1,2,3.$$

en vertu de (3-23), (3-24) et (3-25) on a

$$(3-27) \qquad \|\xi_i\|_{L^\infty\left(0,T;L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\delta}\right)\right)} \leq c.$$

Soit $\tilde{\xi}_\varepsilon^i$ le prolengement par zéro de ξ_ε^i, alors $\tilde{\xi}_\varepsilon^i$ vérifie

$$(3-28) \qquad \left\|\tilde{\xi}_\varepsilon^i\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq c.$$

par conséquent

$$(3-29) \qquad \tilde{\xi}_\varepsilon^i \rightharpoonup \xi^i \text{ dans } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \text{ faible } *$$

de plus ξ_ε^i vérifie le système suivant :

$$(3-30) \qquad \begin{cases} u''_{\varepsilon\delta} - \left[\varepsilon^{-1}\frac{\partial \xi_\varepsilon^1}{\partial z_1} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial \xi_\varepsilon^2}{\partial z_2} + \frac{\partial \xi_\varepsilon^3}{\partial z_3}\right] = 0 & \text{dans} \quad \Omega^*_{\varepsilon\delta} \times]0,T[\\ \xi_\varepsilon^1 n_1 + \xi_\varepsilon^2 n_2 + \xi_\varepsilon^3 n_3 = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_{\varepsilon\delta} \times]0,T[\end{cases}$$

On prolonge à Ω, on aura

$$(3-31) \qquad \begin{cases} p_\varepsilon u''_{\varepsilon\delta}\chi_{\varepsilon\delta} - \left[\varepsilon^{-1}\frac{\partial \tilde{\xi}_\varepsilon^1}{\partial z_1} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial \tilde{\xi}_\varepsilon^2}{\partial z_2} + \frac{\partial \tilde{\xi}_\varepsilon^3}{\partial z_3}\right] = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times]0,T[\\ \tilde{\xi}_\varepsilon^1 n_1 + \tilde{\xi}_\varepsilon^2 n_2 + \tilde{\xi}_\varepsilon^3 n_3 = 0 \quad \text{sur} \quad (\partial\Omega -]0,1[\times]0,1[\times\{0\}) \times]0,T[\end{cases}$$

Soit encore, en pronant $\chi_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}$ la fonction caracteristique de $\Omega^*_{\varepsilon\delta}$ on a

$$(3-32) \qquad \begin{cases} (pu_{\varepsilon\delta})''\chi_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} - \left[\varepsilon^{-1}\frac{\partial \tilde{\xi}_\varepsilon^1}{\partial z_1} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial \tilde{\xi}_\varepsilon^2}{\partial z_2} + \frac{\partial \tilde{\xi}_\varepsilon^3}{\partial z_3}\right] = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times]0,T[\\ \tilde{\xi}_\varepsilon^1 n_1 + \tilde{\xi}_\varepsilon^2 n_2 + \tilde{\xi}_\varepsilon^3 n_3 = 0 \quad \text{sur} \quad (\partial\Omega -]0,1[\times]0,1[\times\{0\}) \times]0,T[\end{cases}$$

soit $\varphi \in \mathcal{D}(]0,L[)$, $v \in \mathcal{D}(]0,T[)$.

On multiple $(3\text{-}32)_1$ par $\varphi.v$ et on intégre dans le premier terme par rapport à t et dans le second par rapport z, on obtient

$$(3-33) \qquad \int_0^T \int_\Omega p_\varepsilon u_{\varepsilon\delta}.\varphi v''.\chi_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} dzdt + \int_0^T \int_\Omega \tilde{\xi}_\varepsilon^3 \frac{\partial \varphi}{\partial z_3}.vdzdt = 0.$$

le terme sur le bord est nul grâce à $(3\text{-}32)_2$.

D'autre part, on sait que

$$(3-34) \qquad \chi_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} \rightharpoonup |Y^*_\delta|$$

(pour les détails des calculs, voir[5])

Maintenant, en utilisant les convergences (3-22)$_2$, (3-34), et (3-29) on a

$$(3-35) \qquad \int_0^T \int_\Omega u_\delta.\varphi.v'' \left|Y^*_\delta\right| dzdt + \int_0^T \int_\Omega \xi^3 \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} v dzdt = 0$$

en posont

$$(3-36) \qquad H =]0,1[\times]0,1[\,;$$

on a

$$(3-37) \qquad |Y^*_\delta| \int_0^T \left(\int_0^L \left(\int_H dz_1 dz_2 \right) u_\delta.\varphi dz_3 \right) v'' dt +$$

$$+ \int_0^T \left(\int_0^L \left(\int_H \xi^3 dz_1 dz_2 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} dz_3 \right) v dt = 0$$

soit encore

$$(3-38) \qquad \int_0^T \left(\int_0^L \left|Y^*_\delta\right| u''_\delta.\varphi dz_3 \right) v dt - \int_0^T \left(\int_0^L \frac{\partial}{\partial z_3} \left(\int_H \xi^3 dz_1 dz_2 \right) \varphi dz_3 \right) v dt = 0$$

alors, on obtient au sens des distributions sur $\mathcal{D}\left(]0,T[\right) \times \mathcal{D}\left(]0,L[\right)$

$$(3-39) \qquad \left|Y^*_\delta\right| u''_\delta - \frac{\partial}{\partial z_3} \left(\int_H \xi^3 dz_1 dz_2 \right) = 0$$

reste à identifier $\int_H \xi^3 dz_1 dz_2$ en fonction de u_δ ; pour cela on introduit la fonction χ^δ

définie par

$$(3-40) \qquad \begin{cases} -a_{ij}\frac{\partial^2(-\chi^\delta+y_3)}{\partial y_i \partial y_j} = 0 & \text{dans} \quad Y_\delta^* \\ a_{ij}\frac{\partial(-\chi^\delta+y_3)}{\partial y_j} n_i = 0 & \text{sur} \quad \partial_N Y_\delta^* \\ \chi^\delta \text{ périodique en } y_3 \text{ et de moyenne nulle.} \end{cases}$$

où

$$(3-41) \qquad \partial_N Y_\delta^* = \partial Y_\delta^* - \{y \in Y_\delta^* : y_3 = 0 \text{ ou } y_3 = 1\}.$$

et posons :

$$(3-42) \qquad g(y) = -\chi^\delta(y) + y_3.$$

$$(3-43) \qquad g_\varepsilon(z) = \varepsilon Q g(z_1, z_2, \frac{z_3}{\varepsilon})$$

alors on a

$$(3-44) \qquad \left\|\chi^\delta\right\|_{H^1(Y_\delta^*)} \leq c\,(\delta).$$

et

$$(3-45) \qquad \|g\|_{H^1(Y_\delta^*)} \leq c\,(\delta).$$

aussi

$$(3-46) \qquad \|g_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq c\,(\delta).$$

$$(3-47) \qquad g_\varepsilon \rightharpoonup z_3 \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ faible.}$$

(pour les details voir [5]).

D'autre part, posons

$$(3-48) \qquad \eta^i(y) = a_{ij}\frac{\partial g}{\partial y_j}.$$

et

$$(3-49) \qquad \eta^i_\epsilon(z) = \eta^i(z_1, z_2, \frac{z_3}{\varepsilon}).$$

alors η^i vérifie le système

$$(3-50) \qquad \begin{cases} -\frac{\partial \eta^i}{\partial y_j} = 0 & \text{dans} \quad Y^*_\delta \\ \eta^1.n_1 = \eta^2.n_2 = \eta^3.n_3 & \text{sur} \quad \partial_N Y^*_\delta \\ \eta^i \text{ périodique en } y_3. & \end{cases}$$

et η^i_ε est solution de

$$(3-51) \qquad \begin{cases} -\left[\varepsilon^{-1}\frac{\partial \eta^1_\varepsilon}{\partial z_1} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial \eta^2_\varepsilon}{\partial z_2} + \frac{\partial \eta^3_\varepsilon}{\partial z_3}\right] = 0 & \text{dans} \quad \Omega^*_{\varepsilon\delta} \\ \eta^1_\varepsilon.n_1 = \eta^2_\varepsilon.n_2 = \eta^3_\varepsilon.n_3 & \text{sur} \quad \Gamma_{\varepsilon\delta} \end{cases}$$

Soit encore

$$(3-52) \qquad \begin{cases} -\left[\varepsilon^{-1}\frac{\partial \widetilde{\eta}^1_\varepsilon}{\partial z_1} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial \widetilde{\eta}^2_\varepsilon}{\partial z_2} + \frac{\partial \widetilde{\eta}^3_\varepsilon}{\partial z_3}\right] = 0 & \text{dans} \qquad \Omega \\ \widetilde{\eta}^1_\varepsilon.n_1 = \widetilde{\eta}^2_\varepsilon.n_2 = \widetilde{\eta}^3_\varepsilon.n_3 & \text{sur} \quad \partial\Omega - (]0,1[\times]0,1[\times\{0\}) \end{cases}$$

et de plus on :

$$(3-53) \qquad \left\|\eta^i\right\|_{L^2\left(Y^*_\delta\right)} \le c\,(\delta)\,.$$

et

$$(3-54) \qquad \left\|\widetilde{\eta}^i_\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)} \le c\,(\delta)$$

et donc

$(3-55) \qquad \widetilde{\eta}_{\epsilon}^{i} \rightharpoonup m(\widetilde{\eta}) \qquad$ dans $L^2(\Omega)$ *faible*

Preuve. Maintenant, on multiplie le système (3-32) par $v.\varphi.g_\varepsilon$ avec $v \in \mathcal{D}(]0,T[)$, $\varphi \in \mathcal{D}(]0,L[)$ et on intégrons par partie par rapport à z, il vient

$$(3-56) \qquad \int_0^T \int_\Omega \left(p_\varepsilon (u_{\varepsilon\delta})''\right).\chi_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}.v\varphi g_\varepsilon dzdt + \int_0^T v\left(\varepsilon^{-1}\int_\Omega \widetilde{\xi}_\varepsilon^1 \varphi \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial z_1} dz\right)dt$$

$$+\int_0^T v\left(\varepsilon^{-1}\int_\Omega \widetilde{\xi}_\varepsilon^2 \varphi \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial z_2} dz\right)dt + \int_0^T v\left(\int_\Omega \widetilde{\xi}_\varepsilon^3 \varphi \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial z_3} dz\right)dt$$

$$+\int_0^T v\left(\int_\Omega \widetilde{\xi}_\varepsilon^3 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z_3}.g_\varepsilon dz\right)dt = 0$$

de même, multiplions (3-52) par $v.\varphi.p_\varepsilon u_{\varepsilon\delta}$ et intégrons par partie sur $\Omega\times]0,T[$, on aura

$$(3-57) \qquad \int_0^T v(\varepsilon^{-1}\int_\Omega \widetilde{\eta}_\varepsilon^1 \varphi \frac{\partial (p_\varepsilon u_{\varepsilon\delta})}{\partial z_1} dz)dt + \int_0^T v(\varepsilon^{-1}\int_\Omega \widetilde{\eta}_\varepsilon^2 \varphi \frac{\partial (p_\varepsilon u_{\varepsilon\delta})}{\partial z_2} dz)dt$$

$$+\int_0^T v(\int_\Omega \widetilde{\eta}_\varepsilon^3 \varphi \frac{\partial (p_\varepsilon u_{\varepsilon\delta})}{\partial z_3} dz)dt + \int_0^T v(\int_\Omega \widetilde{\eta}_\varepsilon^3 \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} p_\varepsilon u_{\varepsilon\delta} dz)dt = 0$$

soustrayant (2-57) de (2-56), on obtient

$$(3-58) \qquad \int_0^T \int_\Omega (p_\varepsilon u_{\varepsilon\delta}).\chi_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} v''.\varphi.g_\varepsilon dzdt + \int_0^T v(\int_\Omega \widetilde{\xi}_\varepsilon^3 \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} g_\varepsilon dz)dt$$

$$-\int_0^T v(\int_\Omega \widetilde{\eta}_\varepsilon^3 \frac{\partial \varphi}{\partial z_3}.p_\varepsilon u_{\varepsilon\delta} dz)dt = 0.$$

Passant à la limite, on utilisant les convergences (3-29), (3-34), (3-47), (3-55) et $(3\text{-}22)_1$, on trouve

$$(3-59) \qquad \int_0^T \int_\Omega u_\delta.\left|Y_\delta^*\right| v''\varphi z_3 dzdt + \int_0^T v(\int_\Omega \xi^3 \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} z_3 dz)dt - \int_0^T v(\int_\Omega m\left(\widetilde{\eta}^3\right)\frac{\partial \varphi}{\partial z_3}.u_\delta dz)dt = 0.$$

Soit encore

$$(3-60) \qquad \int_0^T \left(\int_0^L |Y_\delta^*|\, u_\delta v'' \varphi z_3 dz_3 \right) dt + \int_0^T v(\int_0^L (\int_H \xi^3 dz_1 dz_2) \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} z_3 dz_3) dt$$

$$+ \int_0^T vm\left(\widetilde{\eta}^3\right) (\int_0^L \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} . u_\delta dz_3) dt = 0.$$

Intégrant par partie, il vient

$$(3-61) \qquad \int_0^T \left(\int_0^L |Y_\delta^*|\, z_3 u_\delta'' v \varphi dz_3 \right) dt - \int_0^T v \left[\frac{\partial}{\partial z_3} \left[(\int_H \xi^3 dz_1 dz_2) . z_3 \right] \varphi dz_3 \right] dt$$

$$+ \int_0^T vm\left(\widetilde{\eta}^3\right) \left[\int_0^L \frac{\partial u_\delta}{\partial z_3} . \varphi dz_3 \right] dt = 0.$$

Par conséquet, on a

$$(3-62) \qquad |Y_\delta^*|\, u_\delta'' z_3 + m\left(\widetilde{\eta}^3\right) \frac{\partial u_\delta}{\partial z_3} - \frac{\partial}{\partial z_3} \left[(\int_H \xi^3 dz_1 dz_2) . z_3 \right] . \ = 0$$

et donc

$$(3-63) \qquad |Y_\delta^*|\, u_\delta'' z_3 + m\left(\eta^3\right) \frac{\partial u_\delta}{\partial z_3} - \frac{\partial}{\partial z_3} \left[\int_H \xi^3 dz_1 dz_2 \right] z_3 - \int_H \xi^3 dz_1 dz_2 = 0.$$

d'où l'on déduit aisement, grâce à (3-39) que

$$(3-64) \qquad m\left(\eta^3\right) \frac{\partial u_\delta}{\partial z_3} = \int_H \xi^3 dz_1 dz_2.$$

En remplaçant (3-64) dans (3-39), on obtient

$$|Y_\delta^*|\, u_\delta'' - \frac{\partial}{\partial z_3} \left(m\left(\eta^3\right) \frac{\partial u_\delta}{\partial z_3} \right) = 0.$$

en posant

$$q_\delta = m(\eta^3) = \int_{Y_\delta^*} \eta^3 dy = \int_{Y_\delta^*} a_{3j} \frac{\partial\left(-\chi^\delta + y_3\right)}{\partial y_j} dy.$$

On retrouve la premiere équation de (3-4), dite équation homogéneisée.

$$(3-65) \qquad |Y_\delta^*|\, u_\delta'' - \frac{\partial}{\partial z_3}\left(q_\delta \frac{\partial u_\delta}{\partial z_3}\right) = 0.$$

Par la suite, il nous reste à chercher les conditions intiales de u_δ. pour cela, multiplions (3-30) par $v.\varphi$ où $\varphi \in \mathcal{D}\left(]0,L[\right)$ et $v \in \mathcal{D}\left([0,T]\right)$ telle que $v(T)=0$ et $v(0) \neq 0$. Aprés l'avoir prolongée à $\Omega \times]0,T[$; on a

$$(3-66) \qquad \int_0^T \int_\Omega \tilde{u}_{\varepsilon\delta}''.v\varphi dzdt - \int_0^T \int_\Omega \left[\varepsilon^{-1}\frac{\partial \tilde{\xi}_\varepsilon^1}{\partial z_1} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial \tilde{\xi}_\varepsilon^2}{\partial z_2} + \frac{\partial \tilde{\xi}_\varepsilon^3}{\partial z_3}\right] v.\varphi dzdt = 0$$

Soit encore

$$(3-67) \qquad \int_0^T \int_\Omega \widetilde{u}_{\varepsilon\delta}''.v\varphi dzdt - \int_0^T \int_\Omega \varepsilon^{-1}\frac{\partial \widetilde{\xi}_\varepsilon^1}{\partial z_1} v.\varphi dzdt - \int_0^T \int_\Omega \varepsilon^{-1}\frac{\partial \widetilde{\xi}_\varepsilon^2}{\partial z_2} v.\varphi dzdt - \frac{\partial \widetilde{\xi}_\varepsilon^3}{\partial z_3} v.\varphi dzdt = 0$$

intégrons par partie par rapport à t dans la premiére intégrale et par rapport à z dans les autres intégrales, on aura

$$(3-68) \qquad -\int_0^T \int_\Omega \widetilde{u}_{\varepsilon\delta}'.v'\varphi dzdt - \int_\Omega \widetilde{u}_{\varepsilon\delta}^1.v\left(0\right)\varphi dz + \int_0^T \int_\Omega \widetilde{\xi}_\varepsilon^3 v \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} dzdt = 0$$

car

$$(3-69) \qquad \left(\widetilde{u}_{\varepsilon\delta}\right)'(0) = \widetilde{u_{\varepsilon\delta}'}\left(0\right) = \widetilde{u_{\varepsilon\delta}'\left(0\right)} = \widetilde{u}_{\varepsilon\delta}^1\left(0\right).$$

D'autre part, remarquons que l'on a

$$(3-70) \qquad \widetilde{u_{\varepsilon\delta}'} = \widetilde{u}_{\varepsilon\delta}' \rightharpoonup |Y_\delta^*|\, u_\delta' = U \text{ dans } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \text{ faible}*.$$

en effet cette limite existe d'aprés (3-20) et on a

$$(3-71) \qquad \int_0^T \int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} u''_{\varepsilon\delta}\psi h dzdt = \int_0^T \int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} u_{\varepsilon\delta}\psi h'' dzdt = \int_0^T \int_{\Omega} p_\varepsilon u_{\varepsilon\delta}.\chi_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}.\psi.h'' dzdt$$

et

$$(3-72) \qquad \int_0^T \int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} u''_{\varepsilon\delta}\psi h dzdt = \int_0^T \int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} \widetilde{u''_{\varepsilon\delta}}\psi.h dzdt = -\int_0^T \int_{\Omega} \widetilde{u}'_{\varepsilon\delta}.\psi.h' dzdt$$

où $\psi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ et $h \in \mathfrak{D}(]0,T[)$. Par conséquent

$$(3-73) \qquad \int_0^T \int_{\Omega} p_\varepsilon u_{\varepsilon\delta}.\chi_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}.\psi.h'' dzdt = -\int_0^T \int_{\Omega} \widetilde{u}'_{\varepsilon\delta}.\psi.h' dzdt$$

en passant à la limite dans (3-73) on aura

$$(3-74) \qquad \int_0^T \int_{\Omega} u_\delta. |Y^*_\delta| .\psi.h'' dzdt = -\int_0^T \int_{\Omega} U.\psi.h' dzdt$$

ou encore

$$(3-75) \qquad -\int_0^T \int_{\Omega} u'_\delta. |Y^*_\delta| .\psi.h' dzdt = -\int_0^T \int_{\Omega} U.\psi.h' dzdt$$

et donc

$$U = u'_\delta. |Y^*_\delta|$$

revenons à (3-68) et passant à la limite en utilisant les convergences (3-70), $(3\text{-}1)_2$ et (3-29), on obtient

$$(3-76) \qquad -\int_0^T \int_{\Omega} |Y^*_\delta| .u'_\delta.v'.\varphi dzdt - \int_{\Omega} u^1_\delta.v(0).\varphi dzdt + \int_0^T \int_{\Omega} \xi^3.v.\frac{\partial \varphi}{\partial z_3} dzdt = 0.$$

On intégre comme précedement par rapport à t et z, on a

$$(3-77) \qquad \int_0^T \int_\Omega |Y_\delta^*| .u_\delta''.v.\varphi dzdt + \int_\Omega |Y_\delta^*| .u_\delta' (0) .v' (0) .\varphi dz - \int_\Omega u_\delta^1.v(0).\varphi dz$$

$$- \int_0^T v \left(\int_0^L \frac{\partial}{\partial z_3} \left(\int_H \xi^3 dz_1 dz_2 \right) \varphi dz_3 \right) dt = 0.$$

et en vertu de (3-39), il reste

$$(3-78) \qquad v(0) \left[\int_\Omega |Y_\delta^*| .u_\delta' (0) .\varphi dz + \int_\Omega u_\delta^1.\varphi dz \right] = 0$$

ce qui se-réécrit :

$$(3-79) \qquad |Y_\delta^*| \int_0^L u_\delta'(0)\varphi dz_3 - \int_0^L \left(\int_H u_\delta^1 dz_1 dz_2 \right) \varphi dz_3 = 0$$

d'où l'on déduit

$$(3-80) \qquad u_\delta'(0) = \frac{\int_H u_\delta^1 dz_1 dz_2}{|Y_\delta^*|}$$

Maintenant cherchons la conditions $u_\delta(0)$. On refait les même calculs que précédement cette fois ci on prend $v \in \mathfrak{D}(]0,T[)$ tel que $v'(T) = 0$ et $v'(0) \neq 0$.
Et donc on aura

$$(3-81) \qquad \int_0^T \int_\Omega \tilde{u}_{\varepsilon\delta}\varphi v'' dzdt + \int_\Omega \tilde{u}_{\varepsilon\delta} (0) v' (0) \varphi dz + \int_0^T \int_\Omega \tilde{\xi}_\varepsilon^3 \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} v dzdt = 0$$

ou encore

$$(3-82) \qquad \int_0^T \int_\Omega p_\varepsilon u_{\varepsilon\delta}.\chi_{\Omega_{\varepsilon u}^*}.\varphi.v'' dzdt + \int_\Omega \tilde{u}_{\varepsilon\delta}^0 v' (0) \varphi dz + \int_0^T \int_\Omega \tilde{\xi}_\varepsilon^3 \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} v dzdt = 0$$

en passant à la limite, on a

$$(3-83)\qquad \int_0^T\int_\Omega u_\delta.\left|Y_\delta^*\right|.\varphi.v''dzdt+\int_\Omega u_\delta^0 v'(0)\,\varphi dz+\int_0^T\int_\Omega \xi^3\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}vdzdt=0$$

et donc

$$(3-84)\qquad \int_0^T\int_\Omega u''_\delta.\left|Y_\delta^*\right|.v'.\varphi dzdt-\int_\Omega \left|Y_\delta^*\right|u_\delta(0)\,v'(0)\,\varphi dz+$$

$$\int_\Omega u_\delta^0 v'(0)\,\varphi dz+\int_\Omega v\int_0^L\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}\left(\int_H\xi^3dz_1dz_2\right)\varphi dz_3dt=0.$$

alors, comme précédemment, on a

$$(3-85)\qquad v'(0)\left[-\int_\Omega \left|Y_\delta^*\right|u_\delta(0)\,\varphi dz+\int_\Omega u_\delta^0\varphi dz\right]=0$$

ce qui se réécrit

$$(3-86)\qquad \int_0^L u_\delta^0\varphi dz_3=\int_0^L\left|Y_\delta^*\right|u_\delta(0)\,\varphi dz_3$$

car u_δ^0 dépend uniquement de z_3. en effet, on le montre de la même façon que pour u_δ, en utilisant $(3\text{-}1)_1$ et donc finalement, on aura

$$(3-87)\qquad u_\delta(0)=\frac{u_\delta^0}{\left|Y_\delta^*\right|}.$$

ce qui achève la preuve du théorème 3.1. ■

Remarque3-2

Dans le théorème 3-1, on a pris le second membre de $(1\text{-}5)_1$ égale à zéro ; mais on peut le prendre égale à $f_{\varepsilon\delta}$ telle que $f_{\varepsilon\delta}\in L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}^*\times]0,T[)$ et

$$\tilde{f}_{\varepsilon\delta}\rightharpoonup f_\delta \text{ dans } L^2(\Omega\times]0,T[)\text{ faible,}$$

et donc on obtient $(3\text{-}4)_1$ avec f_δ au lieu de zéro.

Dans la suite, nous faisons l'homogénéisation du prolème (1-5) sans la variable temps et avec le second membre vérifiant une hypothèse trés faible, précisons que si ce dernier est régulier, le théorème suivant est l'objet du travail fait dans [5]. Nous aurons besoin de ce théorème dans le paragraphe 4 où on étudie la convergence du contrôle quand ε tend vers zéro.

Théorème 3-3

Soit $f_{\varepsilon\delta} \in V'_{\varepsilon\delta}$. On suppose qu'il existe une constante c, positive et indépendante de ε telle que

$$(3-88) \qquad \|f_\varepsilon\|_{V'_{\varepsilon\delta}} \leq c.$$

Soit $\tau_{\varepsilon\delta} \in V_{\varepsilon\delta}$, la solution de

$$(3-89) \qquad \begin{cases} A_{\varepsilon\delta}\tau_{\varepsilon\delta} = f_{\varepsilon\delta} & \textit{dans} \quad \Omega^*_{\varepsilon\delta} \\ \tau_{\varepsilon\delta} = 0 & \textit{sur} \quad \Omega^{*,0}_{\varepsilon\delta} \\ \frac{\partial \tau_{\varepsilon\delta}}{\partial \nu_{\varepsilon\delta}} = 0 & \textit{sur} \quad \Gamma_{\varepsilon\delta} \end{cases}$$

Alors il existe $f^*_\delta \in H^{-1}(]0, L[)$ et une sous-suite extraite de ε, encore notée ε tels que si Q_ε est l'opérateur de prolongement du lemme 3-1, on ait

$$(3-90) \qquad Q_\varepsilon \tau_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup \tau_\delta \quad \textit{dans} \quad H^1_0\,(]0, L[) \quad \textit{faible.}$$

avec τ vérifiant

$$(3-91) \qquad \begin{cases} -q_\delta \frac{\partial^2 \tau_\delta}{\partial z_3^2} = f^*_\delta & \textit{dans} \quad]0, L[\\ \tau_\delta(0) = \tau_\delta(L) = 0 \end{cases}$$

où

$$(3-92) \qquad f^* = -\frac{\partial g_\delta^*}{\partial z_3} \text{ avec } g_\delta^* \text{ donné par (3-122).}$$

Preuve.

Remarquons que $(3\text{-}89)_1$ s'ecrit :

$$(3-93) \qquad -\left[\varepsilon^{-1}\frac{\partial A_\alpha}{\partial z_\alpha} + \frac{\partial A_3}{\partial z_3}\right] = f_{\varepsilon\delta} \quad \text{dans} \quad \Omega^*_{\varepsilon\delta}.$$

avec

$$(3-94) \qquad A_i = \varepsilon^{-1} a_{i\alpha}\frac{\partial \tau_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha} + a_{i3}\frac{\partial \tau_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3}.$$

le terme $f_{\varepsilon\delta}$ est mauvais, alors pour éliminer cette dificulté on introduit la fonction ρ_ε solution de :

$$(3-95) \qquad \begin{cases} -\left[\varepsilon^{-1}\frac{\partial^2\rho_\varepsilon}{\partial z_1^2} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial^2\rho_\varepsilon}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2\rho_\varepsilon}{\partial z_3^2}\right] = f_{\varepsilon\delta} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\delta} \\ \rho_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Omega^{*,0}_{\varepsilon\delta} \\ \frac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial\nu} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\delta} \end{cases}$$

ou

$$(3-96) \qquad \begin{cases} -\left[\varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial z_1}\right) + \varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial z_2}\right) + \frac{\partial}{\partial z_3}\left(\frac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial z_3}\right)\right] = f_{\varepsilon\delta} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\delta} \\ \rho_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Omega^{*,0}_{\varepsilon\delta} \\ \frac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial\nu} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\delta} \end{cases}$$

la soustraction de $(3\text{-}96)_1$ et $(3\text{-}93)_1$, nous donne

$$(3-97) \qquad \varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial z_\alpha}\left(A_\alpha - \frac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial z_\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial z_3}\left(A_3 - \frac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial z_3}\right) = 0$$

posons pour $i = 1, 2, 3,$

$$(3-98) \qquad \sigma^i_{\varepsilon\delta} = A_i - \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial z_i} = \left(\varepsilon^{-1} a_{i\alpha} \frac{\partial \tau_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha} + a_{i3} \frac{\partial \tau_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3}\right) - \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial z_i}$$

alors $\sigma^i_{\varepsilon\delta}$ vérifie

$$(3-99) \qquad \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma^\alpha_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha} + \frac{\partial \sigma^3_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3} = 0$$

D'autre part on a les estimations à priori suivantes

$$(3-100) \qquad |\tau_{\varepsilon\delta}|_{\varepsilon\delta} \leq c$$

et

$$(3-101) \qquad \|\nabla \rho_\varepsilon\|_{\left(L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\delta}\right)\right)^3} \leq c$$

puis

$$(3-102) \qquad \|\tilde{\sigma}_{\varepsilon\delta}\|_{(L^2(\Omega))^3} \leq c \ (c \text{ constante indépendante de } \varepsilon).$$

pour cela, il suffit de multiplier $(3\text{-}89)_1$ par $\tau_{\varepsilon\delta}$ et on intégre par partie, on aura

$$|\tau_{\varepsilon\delta}|^2_{\epsilon\delta} = \langle f_{\varepsilon\delta}, \tau_{\varepsilon\delta} \rangle_{V'_{\varepsilon\delta}, V_{\varepsilon\delta}}$$

et donc grâce à (3-88) et la remarque 1-2, on a

$$\|\tau_{\varepsilon\delta}\|_{H^1\left(\Omega^*_{\varepsilon\delta}\right)} \leq c$$

pour plus de détails voir [5].

Puis on refait le même travail pour ρ_ε dans le système (3-96) par conséquent (3-100) et

(3-102) nous donnent

$$(3-103) \qquad Q_\varepsilon \tau_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup \tau_\delta \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible.}$$

où τ_δ est une fonction indépendante de z_1 et z_2. et

$$(3-104) \qquad \tilde{\sigma}_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup \sigma_\delta \text{ dans } \left(L^2(\Omega)\right)^3 \text{ faible.}$$

avec σ_δ vérifiant

$$(3-105) \qquad \frac{\partial}{\partial z_3}\left(\int_0^1 \int_0^1 \sigma_\delta^3 dz_1 dz_2\right) = 0$$

ces calcules sont faits dans [5], mais on ne peut pas continuer comme dans [5], car il y a un terme $\frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial z_i}$ en plus pour cela on introduit la fonction η_ε définie par

$$(3-106) \qquad \eta_\varepsilon = \tilde{\sigma}_{\varepsilon\delta}^{\alpha}.\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial\left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_\alpha}\right) + \tilde{\sigma}_{\varepsilon\delta}^{3}.\left(\frac{\partial\left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_3}\right)$$

où $w_{\varepsilon\delta}$ est solution de

$$(3-107) \qquad \begin{cases} A_{\varepsilon\delta} w_{\varepsilon\delta} = h & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta}^{*} \\ w_{\varepsilon\delta} = 0 & \text{sur } \Omega_{\varepsilon\delta}^{*,0} \\ \frac{\partial w_{\varepsilon\delta}}{\partial \nu_{A_{\varepsilon\delta}}} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\delta} \end{cases}$$

avec $h \in \mathfrak{D}(\Omega)$.

En remarquent que

$$(3-108) \qquad \forall i,j \; \frac{\partial \tilde{\tau}_{\varepsilon\delta}}{\partial z_i}.\frac{\partial\left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_j} = \frac{\partial\left(Q_\varepsilon \tau_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_i}.\frac{\partial \tilde{w}_{\varepsilon\delta}}{\partial z_j}$$

et comme on a

$$(3-109)\qquad \eta_\varepsilon = \left[A_\alpha.\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial\left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_\alpha}\right)+A_3\frac{\partial\left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_3}\right] - \left[\frac{\partial\tilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_\alpha}\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial\left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_\alpha}\right)+\frac{\partial\tilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_3}\frac{\partial\left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_3}\right]$$

alors

$$(3-110)\qquad A_\alpha.\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial\left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_\alpha}\right)+A_3\frac{\partial\left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_3} = \varepsilon^{-1}\tilde{\xi}_\varepsilon^\alpha\frac{\partial\left(Q_\varepsilon \tau_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_\alpha}+\tilde{\xi}_\varepsilon^3\frac{\partial\left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_3}$$

où

$$(3-111)\qquad \begin{cases} \tilde{\xi}_\varepsilon^\alpha = \varepsilon^{-1}a_{\beta i}\frac{\partial\tilde{w}_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\beta}+a_{\alpha 3}\frac{\partial\tilde{w}_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3};\ \alpha,\beta=1,2 \\ \tilde{\xi}_\varepsilon^3 = \varepsilon^{-1}a_{\beta 3}\frac{\partial\tilde{w}_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\beta}+a_{33}\frac{\partial\tilde{w}_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3} \end{cases}$$

Maintenant, soit $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, φ dépendant de z_3 seulement, on a

$$(3-112)\qquad \int_\Omega\left[\varepsilon^{-1}\tilde{\xi}_\varepsilon^\alpha\frac{\partial\left(Q_\varepsilon \tau_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_\alpha}+\tilde{\xi}_\varepsilon^3\frac{\partial\left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_3}\right]\varphi dz$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_\Omega\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial\tilde{\xi}_\varepsilon^\alpha}{\partial z_\alpha}+\frac{\partial\tilde{\xi}_\varepsilon^3}{\partial z_3}\right)\left(Q_\varepsilon\tau_{\varepsilon\delta}\right)\varphi dz-\int_\Omega^3\tilde{\xi}\varepsilon\left(Q_\varepsilon\tau_{\varepsilon\delta}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}dz\\
&\longrightarrow \int_\Omega\left|Y_\delta^*\right|h.\tau_\delta.\varphi dz-\int_\Omega\xi^3.\tau.\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}dz\\
&= \int_\Omega\left|Y_\delta^*\right|h.\tau_\delta.\varphi dz-\int_0^L\tau_\delta\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}\left(\int_0^1\int_0^1\xi^3dz_1dz_2\right)dz_3\\
&= \int_\Omega\left|Y_\delta^*\right|h.\tau_\delta.\varphi dz+\int_0^L\varphi\frac{\partial\tau_\delta}{\partial z_3}.\left(q_\delta.\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial z_3}\right)dz_3+\int_0^L\varphi.\tau_\delta.q_\alpha\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial z_3^2}dz_3\\
&= \int_\Omega\left|Y_\delta^*\right|h.\tau_\delta.\varphi dz+\int_0^L\frac{\partial\tau_\delta}{\partial z_3}.\left(q_\delta.\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial z_3}\right)\varphi dz_3-\int_0^L\varphi.\tau_\delta.\left|Y_\delta^*\right|.hdz_3\\
&= \int_0^L\frac{\partial\tau_\delta}{\partial z_3}.\left(q_\delta.\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial z_3}\right)\varphi dz_3\\
&= \int_\Omega\frac{\partial\tau_\delta}{\partial z_3}.\left(q_\delta.\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial z_3}\right)\varphi dz_3
\end{aligned}$$

pour plus de détail sur ces calculs, voir [5].

et donc

$$(3-113) \qquad A_\alpha \varepsilon^{-1} \frac{\partial \left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_\alpha} + A_3 \varepsilon^{-1} \frac{\partial \left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_3} \rightharpoonup q_\delta \frac{\partial w_\delta}{\partial z_3} . \frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3} \text{ dans } \mathfrak{D}'\left(\Omega\right) \text{ faible.}$$

par la suite, on s'intérèsse au deuxiéme terme de η_ε dans (3-109), pour cela rapelons que la méthode des échelles multiples utilisées dans [5], nous donne :

$$(3-114) \qquad w_{\varepsilon\delta} = w_\delta + \varepsilon \left(-\chi_\delta \left(y\right)\right) \frac{\partial w}{\partial z_3} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z_3^2} \theta \left(y\right) + ...$$

où w_δ est la limite de $w_{\varepsilon\delta}$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ et χ_δ est la fonction donné par le système (3-8). Alors que θ^δ est solution de :

$$(3-115) \qquad \begin{cases} -a_{ij} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\partial \theta^\delta}{\partial y_j} - \chi^\delta \delta_j^3 \right) = -q_\delta \left|Y_\delta^*\right| - a_{3i} \frac{\partial \left(\chi^\delta - y_3\right)}{\partial y_i} & \text{dans } Y_\delta^* \\ a_{ij} \left(\frac{\partial \theta^\delta}{\partial y_j} - \chi^\delta \delta_j^3 \right) n_i = 0 & \text{sur } \partial_N Y_\delta^* \\ \theta^\delta \text{ périodique en } y_3 \text{ et de moyenne nulle.} & \end{cases}$$

et elle vérifie :

$$(3-116) \qquad \left\|\nabla \theta^\delta\right\|_{\left[L^2\left(Y_\delta^*\right)\right]^3} \leq c\delta, \ (c \text{ constante indépendante de } \varepsilon \ )$$

grâce à (3-114) on a

$$(3-117) \qquad \begin{cases} \frac{\partial \tilde{w}_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha} = \left(-\varepsilon \frac{\partial \widetilde{\chi^\delta}}{\partial y_\alpha} \right) \frac{\partial \tilde{w}_\delta}{\partial z_3} + \varepsilon^2 R_\alpha \ ; \ \left\|R_\alpha\right\|_{H^1\left(\Omega_{\varepsilon\delta}^*\right)} \leq c \\ \frac{\partial \tilde{w}_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3} = \left(1 - \frac{\partial \widetilde{\chi^\delta}}{\partial y_3} \right) \frac{\partial \tilde{w}_\delta}{\partial z_3} + \varepsilon R_3 \ ; \ \left\|R_3\right\|_{H^1\left(\Omega_{\varepsilon\delta}^*\right)} \leq c \end{cases}$$

puisque

$$(3-118) \qquad \frac{\partial \tilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_i} . \frac{\partial \left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_i} = \frac{\partial \tilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_i} . \frac{\partial \left(\tilde{w}_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_i}$$

on a

$$(3-119)\qquad \frac{\partial\tilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_\alpha}\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial\left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_\alpha}\right)+\frac{\partial\tilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_3}\left(\frac{\partial\left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_3}\right)$$

$$=\frac{\partial\tilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_\alpha}\left(-\frac{\partial\widetilde{\chi^\delta}}{\partial y_\alpha}\right)\frac{\partial\left(\tilde{w}_\delta\right)}{\partial z_3}+\frac{\partial\tilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_3}\left(1-\frac{\partial\widetilde{\chi^\delta}}{\partial y_3}\right)\frac{\partial\left(\tilde{w}_\delta\right)}{\partial z_3}+\varepsilon R$$

tele que

$$(3-120)\qquad \|R\|_{H^1\left(\Omega^*_{\varepsilon\delta}\right)}\leq c,\ \ (c \text{ constante indépendante de } \varepsilon\ ).$$

par conséquent

$$(3-121)\qquad \frac{\partial\tilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_\alpha}\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial\left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_\alpha}\right)+\frac{\partial\tilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_3}\left(\frac{\partial\left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_3}\right) = \left(\delta^i_\varepsilon-\frac{\partial\widetilde{\chi^\delta}}{\partial y_i}\right)\frac{\partial\tilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_i}.\frac{\partial\tilde{w}_\delta}{\partial z_3}+\varepsilon R$$

$$\rightharpoonup\ g^*_\delta\frac{\partial\tilde{w}_\delta}{\partial z_3}\text{ dans }\mathfrak{D}'(\Omega)\text{ faible.}$$

où on a posé

$$(3-122)\qquad g_{\varepsilon\delta}=\left(\delta^i_3-\frac{\partial\widetilde{\chi^\delta}}{\partial y_i}\right)\frac{\partial\tilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_i}\rightharpoonup g^*_\delta\text{ dans }\mathfrak{D}'(\Omega)\text{ faible.}$$

car

$$(3-123)\qquad \|g_{\varepsilon\delta}\|_{L^1(\Omega)}\leq c,\ \ (c \text{ constante indépendante de } \varepsilon\ ).$$

d'autre part on a, $\forall\varphi\in\mathfrak{D}\left(\Omega\right)$, φdépendante de z_3 seulement

$$(3-124)\qquad \int_\Omega\eta_\varepsilon.\varphi dz=\int_\Omega\sigma^\alpha_{\varepsilon\delta}\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial\left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_\alpha}\right)\varphi dz+\int_\Omega\sigma^3_{\varepsilon\delta}\frac{\partial\left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_3}\varphi dz$$

$$= \quad -\int_\Omega \left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_\varepsilon^\alpha}{\partial z_\alpha}+\frac{\partial\sigma_\varepsilon^3}{\partial z_3}\right)(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta})\,\varphi dz-\int_\Omega \sigma_{\varepsilon\delta}^3\,(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta})\,\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}dz$$

$$\rightharpoonup \quad -\int_\Omega \sigma_\delta^3 . w_\delta . \frac{\partial\varphi}{\partial z_3}dz$$

$$= \quad \int_0^L \frac{\partial}{\partial z_3}\left(\int_0^1\int_0^1 \sigma_\delta^3 dz_1 dz_2\right) w_\delta dz_3+\int_0^L\left(\int_0^1\int_0^1 \sigma_\delta^3 dz_1dz_2\right)\frac{\partial w_\delta}{\partial z_3}\varphi dz_3$$

ceci grâce à (3-99) et (3-104).

Et donc en utilisant (3-105), on aura

$$(3-125) \qquad \int_\Omega \eta_\varepsilon.\varphi dz \longrightarrow \int_\Omega\left(\int_0^1\int_0^1 \sigma_\delta^3 dz_1dz_2\right)\frac{\partial w_\delta}{\partial z_3}\varphi dz_3.$$

$$(3-126) \qquad \eta_\varepsilon \rightharpoonup (\int_0^1\int_0^1 \sigma_\delta^3 dz_1 dz_2)\frac{\partial w_\delta}{\partial z_3} \text{ dans } \mathfrak{D}\prime(\Omega) \text{ faible.}$$

en rassemblant (3-109), (3-113) et (3 126), on obtient

$$(3-127) \qquad q_\delta.\frac{\partial\tau_\delta}{\partial z_3}.\frac{\partial w_\delta}{\partial z_3}-g_\delta^*\frac{\partial w_\delta}{\partial z_3}=(\int_0^1\int_0^1 \sigma_\delta^3 dz_1dz_2)\frac{\partial w_\delta}{\partial z_3}$$

comme le choix de w_δ est arbitraire, on déduit de (3-127) la relation suivante

$$(3-128) \qquad q_\delta.\frac{\partial\tau_\delta}{\partial z_3}-g_\delta^*=\int_0^1\int_0^1 \sigma_\delta^3 dz_1dz_2.$$

et donc grâce à (3-105), on a

$$(3-129) \qquad -q_\delta.\frac{\partial^2\tau_\delta}{\partial z_3^2}=-\frac{\partial g_\delta^*}{\partial z_3}$$

en vertu de (3-128), on sait que $g_\delta^* \in L^2(]0,L[)$, donc

$$(3-130) \qquad \frac{\partial g_\delta^*}{\partial z_3}\in H^{-1}(]0,L[).$$

on prends alors

$$(3-131) \qquad f_\delta^* = -\frac{\partial g_\delta^*}{\partial z_3}$$

et la preuve du Théorème est terminée. $\blacksquare$

Chapitre 4

Etude de la convergence du contrôle

On a montré dans le Théorème 2.1 que le contrôle $v_{\varepsilon\delta} = -\varphi_{\varepsilon\delta}$, où $\varphi_{\varepsilon\delta}$ est solution de (2-2). Ce dernier est le même que (1-5), mais avec des condition initiales plus faibles.

Ce qui nous conduit au Théorème

Théorème 4.1

Soit $\varphi_{\varepsilon\delta}$ solution du système (2-2). alors quand ε tend vers zéro on a

$$(4-1) \qquad \widetilde{\varphi}^0_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup \varphi^0_\delta \quad \textit{dans} \quad L^2(\Omega) \quad \textit{faible.}$$

et

$$(4-2) \qquad \widetilde{\varphi}_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup \varphi_\delta \quad \textit{dans} \quad L^2(\Omega\times]0,T[) \quad \textit{faible.}$$

où φ_δ est indépendante de z_1 et z_2 et solution de

$$(4-3) \qquad \begin{cases} \left|Y^*_{\varepsilon\delta}\right| \varphi''_\delta - \frac{\partial}{\partial z_3}\left(q_\delta \frac{\partial \varphi}{\partial z_3}\right) = 0 & \textit{dans} \quad]0,L[\times]0,T[\\ \varphi_\delta(0) = \varphi(L) = 0 & \textit{dans} \quad]0,T[\\ \varphi_\delta(0) = \overline{\varphi}^0_\delta = \int_0^1 \int_0^1 \varphi^0_\delta dz_1 dz_2 & \textit{dans} \quad]0,L[\\ \varphi'_\delta(0) = \varphi^{1,*}_\delta & \textit{dans} \quad]0,L[\end{cases}$$

avec

$$(4-4) \qquad \varphi_{\delta}^{1,*} = -\frac{\partial g_{\delta}^{*}}{\partial z_3}$$

où g_{δ}^{*} est donné par le Théorème 3.3.

Preuve.

Grâce (2-4), (2-19) et (2-20) on a

$$(4-5) \qquad \left\|\varphi_{\varepsilon\delta}^{0}\right\|_{L^2\left(\Omega_{\varepsilon\delta}^{*}\right)} + \left\|\varphi_{\varepsilon\delta}^{1}\right\|_{V'_{\varepsilon\delta}} \leq c\left(\left\|u_{\varepsilon\delta}^{1}\right\|_{L^2\left(\Omega_{\varepsilon\delta}^{*}\right)} + \left|u_{\varepsilon\delta}^{0}\right|_{\varepsilon\delta}\right)$$

et donc, en utilisant l'hypothèse (3-1), on aura

$$(4-6) \qquad \left\|\varphi_{\varepsilon\delta}^{0}\right\|_{L^2\left(\Omega_{\varepsilon\delta}^{*}\right)} \leq c$$

$$(4-7) \qquad \left\|\varphi_{\varepsilon\delta}^{1}\right\|_{V'_{\varepsilon\delta}} \leq c$$

où c est une constante indépendante de ε et δ.

Appliquant, le lemme 1.2, on obtient

$$(4-8) \qquad \left\|\varphi_{\varepsilon\delta}\right\|_{L^2\left(\Omega_{\varepsilon\delta}^{*}\times]0,T[\right)} \leq c$$

de sorte qu'à une extraction de sous suite prés, l'on a (4-1) et (4-2).

Vu que ces conditions sont peu réguliéres, on ne peut pas utiliser le Théorème 3.1, par conséquant, on introduit la fonction régularisante $R_{\varepsilon\delta}$ définie par

$$(4-9) \qquad R_{\varepsilon\delta}(z,t) = \int_0^t \varphi_{\varepsilon\delta}(z,t)\, ds + \tau_{\varepsilon\delta}$$

où $\tau_{\varepsilon\delta}$, la solution du système

$$(4-10) \qquad \begin{cases} A_{\varepsilon\delta}\tau_{\varepsilon\delta} = -\varphi^1_{\varepsilon\delta} & \text{dans} \quad \Omega^*_{\varepsilon\delta} \\ \tau_{\varepsilon\delta} = 0 & \text{sur } \Omega^{*,0}_{\varepsilon\delta} \\ \frac{\partial\tau_{\varepsilon\delta}}{\partial\nu_{A_{\varepsilon\delta}}} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\delta} \end{cases}$$

et donc, l'égalité (4-9), nous donne

$$(4-11) \qquad R'_{\varepsilon\delta}(z,t) = \varphi_{\varepsilon\delta}(z,t)$$

$$(4-12) \qquad R''_{\varepsilon\delta}(z,t) = \varphi'_{\varepsilon\delta}(z,t)$$

de plus

$$(4-13) \qquad \begin{aligned} A_{\varepsilon\delta}R_{\varepsilon\delta} &= \int_0^t A_{\varepsilon\delta}\varphi_{\varepsilon\delta}(z,s)\,ds + A_{\varepsilon\delta}\tau_{\varepsilon\delta} \\ &= \int_0^t -\varphi''_{\varepsilon\delta}(z,s)\,ds - \varphi^1_{\varepsilon\delta} \\ &= -\varphi'_{\varepsilon\delta}(z,t) + \varphi'_{\varepsilon\delta}(z,0) - \varphi^1_{\varepsilon\delta} \\ &= -\varphi'_{\varepsilon\delta} \\ &= -R''_{\varepsilon\delta}(z,t) \end{aligned}$$

par conséquent

$$(4-14) \qquad R''_{\varepsilon\delta} + A_{\varepsilon\delta}R_{\varepsilon\delta} = 0$$

et

$$(4-15) \qquad R_{\varepsilon\delta}(z,0) = \tau_{\varepsilon\delta} \text{ dans } \Omega^*_{\varepsilon\delta}$$

$$(4-16) \qquad R'_{\varepsilon\delta}(z,0) = \varphi_{\varepsilon\delta}(z,0) = \varphi^0_{\varepsilon\delta} \text{ dans } \Omega^*_{\varepsilon\delta}$$

et grâce à $(2\text{-}2)_2$ et $(4\text{-}10)_2$, on a

$$(4-17) \qquad R_{\varepsilon\delta} = 0 \text{ sur } \Omega^{*,0}_{\varepsilon\delta}$$

de même $(2\text{-}2)_3$ et $(4\text{-}10)_3$, nous donne

$$(4-18) \qquad \frac{\partial R_{\varepsilon\delta}}{\partial\nu_{A_{\varepsilon\delta}}} = 0$$

et donc en regroupant (4-14) jusqu'a (4-18), $R_{\varepsilon\delta}$ est solution de

$$(4-19) \qquad \begin{cases} R''_{\varepsilon\delta} + A_{\varepsilon\delta}R_{\varepsilon\delta} = 0 & \text{dans} \quad \Omega^*_{\varepsilon\delta}\times]0,T[\\ R_{\varepsilon\delta} = 0 & \text{sur} \quad \Omega^{*,0}_{\varepsilon\delta} \\ \frac{\partial R_{\varepsilon\delta}}{\partial\nu_{A_{\varepsilon\delta}}} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_{\varepsilon\delta} \\ R_{\varepsilon\delta}(0) = \tau_{\varepsilon\delta} & \text{dans} \quad \Omega^*_{\varepsilon\delta} \\ R'_{\varepsilon\delta}(0) = \varphi^0_{\varepsilon\delta} & \text{dans} \quad \Omega^*_{\varepsilon\delta} \end{cases}$$

D'autre part, grâce à (3-100) et (4-6), on applique le Théorème (3.1) au système (4-19), on obtient

$$(4-20) \qquad \begin{cases} P_{\varepsilon\delta}R_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup R_\delta \quad \textit{dans} \quad L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)) \quad \textit{faible} \ * . \\ P_{\varepsilon\delta}R'_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup R'_\delta \quad \textit{dans} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \quad \textit{faible} \ * . \end{cases}$$

tel que R_δ est solution du problème

$$(4-21) \qquad \begin{cases} |Y^*_{\varepsilon\delta}|\, R''_\delta - \frac{\partial}{\partial z_3}\left(q_\delta \frac{\partial R_\delta}{\partial z_3}\right) & \text{dans} \quad]0,L[\times]0,T[\\ R_\delta(0) = R_\delta(L) = 0 & \text{dans} \quad]0,T[\\ R_\delta(0) = \tau_\delta & \text{dans} \quad]0,L[\\ R'_\delta(0) = \frac{\overline{\varphi^0_\delta}}{|y^*_{\varepsilon\delta}|} = \frac{\int_0^1\int_0^1 \varphi^0_\delta dz_1 dz_2}{|y^*_{\varepsilon\delta}|} & \text{dans} \quad]0,L[\end{cases}$$

où

$$(4-22) \qquad \widetilde{\tau_{\varepsilon\delta}} = Q_{\varepsilon\delta}\tau_{\varepsilon\delta}.\chi_{\Omega_\varepsilon^*} \rightharpoonup \tau_\delta \left|Y_\delta^*\right|$$

et τ_δ est donné par le Théorème (3.3).
Comme l'on a

$$R'_{\varepsilon\delta} = \varphi_{\varepsilon\delta} \text{ (voir (4-11))}$$

et donc

$$\widetilde{R'_{\varepsilon\delta}} = P_\varepsilon.R'_{\varepsilon\delta}.\chi_{\Omega_\varepsilon^*} \rightharpoonup R'_\delta.\left|Y_\delta^*\right|$$

et en vertu de (4-2)

$$(4-23) \qquad R'_\delta.\left|Y_\delta^*\right| = \varphi_\delta$$

Alors

$$(4-24) \qquad \begin{aligned} \varphi_\delta(0) &= \left|Y_\delta^*\right|.R'_\delta(0) \\ &= \overline{\varphi_0} \\ &= \int_0^1\int_0^1 \varphi_\delta^0 dz_1 dz_2 \end{aligned}$$

et comme $R_\delta \in C\left([0,T]\,;H_0^1\left(]0,L[\right)\right) \cap C^1\left([0,T]\,;L^2\left(]0,L[\right)\right) \cap C^2\left([0,T]\,;H^{-1}\left(]0,L[\right)\right)$ on a

$$
(4-25)\qquad \begin{aligned}\varphi_\delta'(0) &= |Y_\delta^*|\,.R_\delta''(0)\\ &= \frac{\partial}{\partial z_3}\left(q_\delta.\frac{\partial R_\delta(0)}{\partial z_3}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial z_3}\left(q_\delta.\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right)\\ &= \varphi_\delta^{1,*}\end{aligned}
$$

et ceci grâce au Théorème (3.3).

D'autre part, on a

$$
(4-26)\qquad \varphi_\delta(0) = 0 \text{ dans }]0,T[
$$

$$
(4-27)\qquad \varphi_\delta(L) = 0 \text{ dans }]0,T[
$$

et finalement la combinaison de (4-23) et $(4\text{-}21)_1$, donne

$$
(4-28)\qquad |Y^*|\,\varphi_\delta'' - \frac{\partial}{\partial z_3}\left(q_u.\frac{\partial \varphi_\delta}{\partial z_3}\right) = 0 \text{ dans }]0,L[\times]0,T[
$$

en rassemblant (4-24) jusqu'a (4-28), on retrouve le système (4-3). ■

Chapitre 5

Contrôlabilité exacte du problème homogénéisé

Par la suite, on va montrer que la limite du contrôle est le contrôle exacte du problème homogénéisé et ceci grâce au Théorème

Théorème 5.1

On suppose que les données initiales de (2.1) vérifient

$$(5-1) \qquad \begin{cases} |w^0_{\varepsilon\delta}|_{\varepsilon\delta} \leq c\delta^2 & \text{et } \widetilde{w}^0_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup w^0_\delta \text{ dans } H^1_0(\Omega) \text{ faible.} \\ \|w^1_{\varepsilon\delta}\|_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})} \leq c\delta^2 & \text{et } w_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup w^1_\delta \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible.} \end{cases}$$

Soit $v_{\varepsilon\delta}$ le contrôle exacte donné par H.U.M du système (2.1).
Alors lorsque ε tend vers zéro on a

$$(5-2) \qquad \widetilde{v}_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup v_\delta \textit{ dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \textit{ faible.}$$

où v_δ est le contrôle exacte du système homogéneisé

$$(5-3) \qquad \begin{cases} \left|Y_{\varepsilon\delta}^{*}\right| w_{\delta}'' - \frac{\partial}{\partial z_3}\left(q_\delta \frac{\partial w_\delta}{\partial z_3}\right) = v_\delta & dans \quad]0,L[\times]0,T[\\ w_\delta(0) = w_\delta(L) = 0 & \text{dans} \quad]0,T\,[\\ w_\delta(0) = \frac{w_\delta^0}{\left|Y_{\varepsilon\delta}^{*}\right|} & dans \quad]0,L[\\ w_\delta'(0) = \frac{\overline{w}_\delta^1}{\left|Y_{\varepsilon\delta}^{*}\right|} = \frac{\int_0^1\int_0^1 w_\delta^1 dz_1 dz_2}{\left|Y_{\varepsilon\delta}^{*}\right|} & dans \quad]0,L[\end{cases}$$

où comme dans le Théorème 3.1

$$(5-4) \qquad \begin{cases} P_{\varepsilon\delta} w_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup w_\delta \quad dans \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \quad faible \ * . \\ P_{\varepsilon\delta} w_{\varepsilon\delta}' \rightharpoonup w_\delta' \quad dans \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \quad faible \ * . \end{cases}$$

et $\left|Y_{\varepsilon\delta}^{*}\right|$, q_δ sont donnés par (3-5) et (3-7).

Preuve.

D'aprés le Théorème (4.1) $v_\delta = -\varphi_\delta$ où φ_δ est donné par le système (4-3). De même le Théorème (3.1) et la remarque (3.2) nous donnent (5-3) et (5-4). Alors il nous reste à montrer que v_δ est le contrôle exacte du système (5-3), autrement dit il faut avoir

$$(5-5) \qquad w_\delta(T) = w_\delta'(T) = 0$$

grâce à (2-21), (5-1) et (4-8) on peut passer à la limite dans le système (2-3) et on a

$$\begin{cases} P_{\varepsilon\delta}\psi_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup \psi_\delta \text{ dans } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ faible } * . \\ P_{\varepsilon\delta}\psi_{\varepsilon\delta}' \rightharpoonup \psi_\delta' \text{ dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible } * . \end{cases}$$

et φ_δ est donné par (4-2).

Un raisonnement analogue à celui développé dans la preuve du Théorème (3.1) conduit au système suivant

$$(5-6)\qquad \begin{cases} \left|Y_{\varepsilon\delta}^{*}\right|\psi_{\delta}^{\prime\prime}-\frac{\partial}{\partial z_{3}}\left(q_{\delta}\frac{\partial\psi_{\delta}}{\partial z_{3}}\right)=-\varphi_{\delta} & \text{dans }]0,L[\times]0,T[\\ \psi_{\delta}\left(0\right)=\psi_{\delta}\left(L\right)=0 & \text{dans }]0,\mathrm{T}\ [\\ \psi_{\delta}\left(T\right)=0 & \text{dans }]0,L[\\ \psi_{\delta}^{\prime}\left(T\right)=0 & \text{dans }]0,L[\end{cases}$$

D'autre part (2-22) nous donne

$$(5-7)\qquad w_{\delta}=\psi_{\delta}.$$

et donc

$$w_{\delta}\left(T\right)=w_{\delta}^{\prime}\left(T\right)=0$$

et ceci grâce à $(5-6)_2$ et $(5\text{-}6)_3$. ■

Remarque 5.2

Une application de la méthode H.U.M à (5-3) permet la construction d'un isomorphisme

$$\Lambda:F=L^{2}\left(]0,L[\right)\times H^{-1}\left(]0,L[\right)\longrightarrow F^{'}=L^{2}\left(]0,L[\right)\times H_{0}^{1}\left(]0,L[\right)$$

$$\left(\bar{\varphi}_{\delta}^{0},\varphi_{\delta}^{1,*}\right)\longmapsto\left(\frac{\overline{w}_{\delta}^{1}}{\left|Y_{\varepsilon\delta}^{*}\right|},-\frac{w_{\delta}^{0}}{\left|Y_{\varepsilon\delta}^{*}\right|}\right).$$

en effet, on multiple $(5\text{-}6)_1$ par φ_{δ} et on refait les mêmes calculs que dans le paragraphe 2, on obtient

$$\left|Y_{\varepsilon\delta}^{*}\right|\int_{0}^{L}\left(\psi_{\delta}^{\prime}(0),-\psi_{\delta}(0)\right)\left(\bar{\varphi}_{\delta}^{0},\varphi_{\delta}^{1,*}\right)dz_{3}=\int_{0}^{L}\varphi_{\delta}^{2}dz_{3}$$

soit encore

$$\int_0^L (\psi'_\delta(0), -\psi_\delta(0)) \left(\bar{\varphi}^0_\delta, \varphi^{1,*}_\delta\right) dz_3 = \frac{1}{|Y^*_{\varepsilon\delta}|} \int_0^L \varphi^2_\delta dz_3$$

et donc on définit

$$\Lambda \left(\bar{\varphi}^0_\delta, \varphi^{1,*}_\delta\right) = (\psi'_\delta(0), -\psi_\delta(0))$$

alors, on a

$$\begin{aligned} \left\langle \Lambda \left(\bar{\varphi}^0_\delta, \varphi^{1,*}_\delta\right), \left(\bar{\varphi}^0_\delta, \varphi^{1,*}_\delta\right)\right\rangle &= \frac{1}{|Y^*_{\varepsilon\delta}|} \int_0^L \varphi^2_\delta dz_3 \\ &= \frac{1}{|Y^*_{\varepsilon\delta}|} \|\varphi_\delta\|^2_{L^2(]0,L[)} \end{aligned}$$

D'autre part, une application du lemme (6-2) donne

$$c' \left(\left\|\bar{\varphi}^0_\delta\right\|^2_{L^2(]0,L[)} + \left\|\varphi^{1,*}_\delta\right\|^2_{H^{-1}(]0,L[)} \right) < |Y^*_{\varepsilon\delta}| \left\langle \Lambda \left(\bar{\varphi}^0_\delta, \varphi^{1,*}_\delta\right), \left(\bar{\varphi}^0_\delta, \varphi^{1,*}_\delta\right)\right\rangle$$

car $\delta < 1$ et donc $\delta^{-1} > 1$ donc

$$\left\|\left(\bar{\varphi}^0_\delta, \varphi^{1,*}_\delta\right)\right\|_F < \left\|\Lambda \left(\bar{\varphi}^0_\delta, \varphi^{1,*}_\delta\right)\right\|_{F'} |Y^*_{\varepsilon\delta}|$$

de même, on a

$$\left\|\Lambda_\delta \left(\bar{\varphi}^0_\delta, \varphi^{1,*}_\delta\right)\right\|_{F'} \leq c(\delta) \left\|\left(\bar{\varphi}^0_\delta, \varphi^{1,*}_\delta\right)\right\|_F$$

par conséquent Λ_δ est un isomorphisme de $L^2(]0, L[) \times H^{-1}(]0, L[)$ dans $L^2(]0, L[) \times H^1_0(]0, L[)$.

C'est à dire l'équation

$$\left(\frac{\bar{w}^1_\delta}{|Y^*_{\varepsilon\delta}|}, -\frac{w^0_\delta}{|Y^*_{\varepsilon\delta}|} \right) = \Lambda \left(\varphi^0_\delta, \varphi^{1,*}_\delta\right) = (\psi'_\delta(0), -\psi_\delta(0))$$

possède une et une seule solution dans $L^2\left(]0,L[\right)\times H^{-1}\left(]0,L[\right)$ par suite, toute la suite $(\widetilde{v}_{\varepsilon\delta})$vérifie

$$\widetilde{v}_{\varepsilon\delta}\rightharpoonup v_\delta \text{ dans } L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right) \text{ faible}$$

et donc toute la suite $(P_\delta w_{\varepsilon\delta})$ satisfait

$$P_\delta w_{\varepsilon\delta}\rightharpoonup w_\delta \text{ dans } L^\infty\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right)\right) \text{ faible } \quad *$$

Chapitre 6

Résultat de convergence sur l'épaisseur des barres

nous allons étudier le conportement asymtotique de u_δ et v_δ lorsque δ tend vers zéro et commençons par u_δ, on a

Théorème 6.1

Lorsque δ tend vers zéro, la solution u_δ du système homogéneisé (3-4) vérifie

$$(6-1) \qquad \begin{cases} \delta^{-2}\overline{u}_\delta^1 \rightharpoonup u^1 & \textit{dans } L^2(]0,L[) \quad \textit{faible} \\ \delta^{-2}\overline{u}_\delta^0 \rightharpoonup u^0 & \textit{dans } H_0^1(]0,L[) \quad \textit{faible} \end{cases}$$

et

$$(6-2) \qquad \begin{cases} u_\delta \rightharpoonup u & \textit{dans } L^\infty(0,T;H_0^1(]0,L[)) \quad \textit{faible } * \\ u'_\delta \rightharpoonup u' & \textit{dans } L^\infty(0,T;L^2(]0,L[)) \quad \textit{faible } * \end{cases}$$

où u est solution de

$$(6-3)\qquad \begin{cases} 8u'' - q^*\frac{\partial^2 u}{\partial z_3^2} = 0 & \textit{dans} \quad]0,L[\times]0,T[\\ u(0) = u(L) = 0 & \text{dans} \quad]0,\text{T}\,[\\ u(0) = \frac{u^0}{8} & \textit{dans} \quad]0,L[\\ u'(0) = \frac{u^1}{8} & \textit{dans} \quad]0,L[\end{cases}$$

avec

$$(6-4)\qquad q^* = \frac{4\det(a_{ij})}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{4}{A_{33}^{-1}}.$$

Preuve.

La démonstration se fait en trois étapes.

étape 1 Recherche de l'énergie du système homogénéisé.

On multiplie $(3\text{-}4)_1$ par u'_δ, on aura

$$(6-5)\qquad \frac{1}{2}\left|Y^*_{\varepsilon\delta}\right| \int_0^L \int_0^T \frac{d}{dt}\left(u'_\delta\right)^2 dz_3 dt + q_\delta \int_0^L \int_0^T \frac{\partial u_\delta}{\partial z_3^2}\frac{\partial u'_\delta}{\partial z_3} dz_3 dt = 0$$

ou

$$(6-6)\qquad \frac{1}{2}\left|Y^*_{\varepsilon\delta}\right| \int_0^L \int_0^T \frac{d}{dt}\left(u'_\delta\right)^2 dz_3 dt + q_\delta \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_\delta}{\partial z_3}\right)^2 dz_3 dt = 0$$

Soit encore

$$(6-7)\qquad \frac{1}{2}\left|Y^*_{\varepsilon\delta}\right| \int_0^L \left(u'_\delta\right)^2\Big|_0^T dz_3 + \frac{1}{2} q_\delta \int_0^L \left(\frac{\partial u_\delta}{\partial z_3}\right)^2\Bigg|_0^T dz_3 = 0$$

et donc si on note

$$(6-8)\qquad E_\delta(t) = \frac{1}{2}\left[\left|Y^*_{\varepsilon\delta}\right| \int_0^L \left(u'_\delta\right)^2 dz_3 + q_\delta \int_0^L \left(\frac{\partial u_\delta}{\partial z_3}\right)^2 dz_3\right]$$

on aura

$$(6-9) \qquad E_\delta(T) = E_\delta(0)$$

alors

$$(6-10) \qquad E(0) = \frac{1}{2}\frac{1}{|Y^*_{\varepsilon\delta}|}\left\|\overline{u}^1_\delta\right\|^2_{L^2(]0,L[)} + \frac{q_\delta}{|Y^*_{\varepsilon\delta}|^2}\left\|\frac{\partial u^0_\delta}{\partial z_3}\right\|^2_{L^2(]0,L[)}$$

d'autre part, on a

$$(6-11) \qquad \left\|\overline{u}^1_\delta\right\|^2_{L^2(]0,L[)} = \int_0^L \left(\int_0^1\int_0^1 u^1_\delta dz_1 dz_2\right)^2 dz_3 \leq \int_\Omega \left(u^1_\delta\right)^2 dz \leq c\delta^4$$

et ceci d'aprés $(3\text{-}1)_2$.
De même, d'aprés (3-1), on a

$$(6-12) \qquad \left\|\frac{\partial u^0_\delta}{\partial z_3}\right\|_{L^2(]0,L[)} \leq c\delta^2$$

on a

$$(6-13) \qquad c_1 \leq \delta^{-2} q_\delta \leq c_2 \text{ (voir [5])}$$

$$(6-14) \qquad \delta^{-2} q_\delta \longrightarrow q^*$$

où q^* est donné par (6-4) et donc en remplaçant (6-11), (6-12) et (6-13) dans (6-10), on a

$$(6-15) \qquad E(0) \leq c\delta^2$$

en combinant (6-8), (6-9) et (6-15), on obtient

$$(6-16) \qquad |Y^*_{\varepsilon\delta}| \left\| u'_\delta \right\|^2_{L^2(]0,L[)} + q_\delta \left\| \frac{\partial u_\delta}{\partial z_3} \right\|^2_{L^2(]0,L[)} \leq c\delta^2$$

et grâce à (6-13), on a

$$(6-17) \qquad \delta^2 \left\| u'_\delta \right\|^2_{L^2(]0,L[)} \leq c\delta^2$$

et

$$(6-18) \qquad \left\| \frac{\partial u_\delta}{\partial z_3} \right\|^2_{L^2(]0,L[)} \leq c$$

Soit encore

$$(6-19) \qquad \left\| u_\delta \right\|_{L^\infty\left(0,T;H^1_0(]0,L[)\right)} \leq c$$

$$(6-20) \qquad \left\| u'_\delta \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(]0,L[))} \leq c$$

(c constante indépendante de δ)

d'où

$$(6-21) \qquad u_\delta \rightharpoonup u \text{ dans } L^\infty\left(0,T;H^1_0\left(]0,L[\right)\right) \text{ faible } *$$

$$(6-22) \qquad u'_\delta \rightharpoonup u' \text{ dans } L^\infty\left(0,T;L^2\left(]0,L[\right)\right) \text{ faible } *$$

D'autre part (6-11) et (6-12) nous permet d'affirmer que

$$(6-23) \qquad \delta^{-2}\overline{u}^1_\delta \rightharpoonup u^1 \text{ dans } L^2\left(]0,L[\right) \text{ faible } *$$

et

$$(6-24) \qquad \delta^{-2}u_\delta^0 \rightharpoonup u^0 \text{ dans } H_0^1\left(]0,L[\right) \text{ faible } *$$

étape 2 Recherche de l'équation limite.

On multiple $(3\text{-}4)_1$ par $v\varphi$ telle que $v \in \mathfrak{D}\left(]0,T[\right)$ et $\varphi \in \mathfrak{D}\left(]0,L[\right)$ et $v'(T) = v'(0) = 0$ et on intégre par partie par rapport à t et z_3, on aura

$$(6-25) \qquad 8(1-\delta)\int_0^L\int_0^T u_\delta v''\varphi dtdz_3 + \int_0^L\int_0^T \delta^{-2}q_\delta\frac{\partial u_\delta}{\partial z_3}\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}.vdz_3dt = 0$$

en utilisant les convergences(5-21), (6-14), on obtient

$$(6-26) \qquad 8\int_0^L\int_0^T u.v''\varphi dtdz_3 + \int_0^L\int_0^T q^*\frac{\partial u}{\partial z_3}\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}.vdz_3dt = 0$$

on intégre une autre fois par partie, on a

$$(6-27) \qquad 8\int_0^L\int_0^T u''.v\varphi dtdz_3 - \int_0^L q^*\frac{\partial^2 u}{\partial z_3^2}\varphi.vdz_3dt = 0$$

d'où

$$(6-28) \qquad 8u'' - q^*\frac{\partial^2 u}{\partial z_3^2} = 0 \text{ dans }]0,L[\times]0,T[$$

étape3 Par la suite, on cherche les conditions initiales de la limite.

Multiplions $(3\text{-}4)_1$ par $v.\varphi$ avec $\varphi \in \mathfrak{D}\left(]0,L[\right)$ et $v \in \mathfrak{D}\left([0,T]\right)$ telle que $v(T) = 0$ et $v'(T) = 0$ et on intégre par partie par rapport à t deux foix, on obtient

$$(6-29) \qquad \int_0^L\int_0^T 8\left(1-\delta\right)u_\delta v''\varphi dz_3dt + \int_0^L 8\left(1-\delta\right)u_\delta\left(0\right)v'(0)\varphi dz_3$$
$$-\int_0^L 8\left(1-\delta\right)u_\delta'\left(0\right)v(0)\varphi dz_3 + \int_0^L\int_0^T \delta^{-2}q_\delta\frac{\partial u_\delta}{\partial z_3}\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}vdz_3dt = 0$$

en utilisant $(3\text{-}4)_3$ et $(3\text{-}4)_4$, on aura

$$(6-30) \qquad \int_0^L\int_0^T 8\,(1-\delta)\,u_\delta v''\varphi dz_3dt+\int_0^L 8\,(1-\delta)\,\frac{u_\delta^0}{|Y_{\varepsilon\delta}^*|}v'(0)\varphi dz_3$$

$$-\int_0^L 8\,(1-\delta)\,\frac{\overline{u}_\delta^1}{|Y_{\varepsilon\delta}^*|}v(0)\varphi dz_3+\int_0^L\int_0^T \delta^{-2}q_\delta\frac{\partial u_\delta}{\partial z_3}\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}vdz_3dt=0$$

on passe à la limite en utilisant les convergences (6-21), (6-23) et (6-24), on a

$$(6-31) \qquad \int_0^L\int_0^T 8uv''\varphi dz_3dt+\int_0^L \varphi u^0v'(0)dz_3$$

$$-\int_0^L \varphi u^1v(0)dz_3+\int_0^L\int_0^T q^*\frac{\partial u}{\partial z_3}\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}vdz_3dt=0$$

ou encore

$$\int_0^L\int_0^T 8u''v\varphi dz_3dt+8\int_0^L uv'\big|_0^T\varphi dz_3-8\int_0^L u'v\big|_0^T\varphi dz_3$$

$$+\int_0^L u^0v'(0)\varphi dz_3-\int_0^L \varphi u^1v(0)dz_3-\int_0^L\int_0^T q^*\frac{\partial^2u}{\partial z_3^2}\varphi vdz_3dt=0$$

et donc grâce à (6-28), on obtient

$$(6-32) \quad v'(0)\int_0^L u^0\varphi dz_3-v(0)\int_0^L \varphi u^1dz_3+8v(0)\int_0^L \varphi u'(0)dz_3-8v'(0)\int_0^L u(0)\varphi dz_3=0$$

Maintenant, choisissant v telle que $v(0)\neq 0$ et $v'(0)=0$ on aura

$$8\int_0^L \left(u'(0)-u^1\right)\varphi dz_3=0$$

et donc on obtient $(6\text{-}3)_4$, c'est à dire $u'(0)=\frac{u^1}{8}$, de la même façon dans (6-32), on choisit

v telle que $v(0) = 0$ et $v'(0) \neq 0$ on obtient

$$\int_0^L \left(u^0 - 8u(0)\right) \varphi dz_3 = 0$$

d'où (6-3)$_3$,soit $u(0) = \frac{u^0}{8}$.

Ce qui achéve la preuve du Théorème. ■

Par la suite on s'intérèsse à l'étude de la convergence du contrôle v_δ.

Comme on a $v_\delta = -\varphi_\delta$, donc le problème revient à étudier la convergence de φ_δ solution de (4-3). Remarquons que ce dernier est le même que (3-4) mais avec d'autre conditions initiales et donc nous aurons besoin d'abord du lemme suivant

Lemme 6.2

Lorsque $\left(\overline{\varphi}_\delta^0, \varphi_\delta^{1,*}\right)$ appartient à $L^2(]0,L[) \times H^{-1}(]0,L[)$, la solution de (4-3) vérifie

$$(6-33) \qquad \begin{aligned} c' \left[\left\| \overline{\varphi}_\delta^0 \right\|^2_{L^2(]0,L[)} + \delta^{-4} \left\| \varphi_\delta^{1,*} \right\|^2_{H^{-1}(]0,L[)} \right] &\leq \left\| \varphi_\delta \right\|^2_{L^2(0,T;L^2(]0,L[))} \\ &\leq c \left[\left\| \overline{\varphi}_\delta^0 \right\|^2_{L^2(]0,L[)} + \delta^{-4} \left\| \varphi_\delta^{1,*} \right\|^2_{H^{-1}(]0,L[)} \right] \end{aligned}$$

où c et c' deux constantes strictement positives et indépendante de δ.

On va régulariser le problème (4-3) comme dans le Théorème (4.1) pour ce faire introduisons τ_δ, solution du système

$$(6-34) \qquad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial z_3}\left(q_\delta \frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right) = -\varphi_\delta^{1,*} & \text{dans} \quad]0,L[\\ \tau_\delta(0) = \tau_\delta(L) = 0 \end{cases}$$

et posons

$$(6-35) \qquad R_\delta(z_3,t) = \int_0^t \varphi_\delta(z_3)\, ds + \tau_\delta(z_3)$$

on vérifie sans peine que R_δ est la solution du problème

$$(6-36)\qquad \begin{cases} \left|Y_{\varepsilon\delta}^{*}\right| R_\delta'' - \frac{\partial}{\partial z_3}\left(q_\delta \frac{\partial R_\delta}{\partial z_3}\right) = 0 & dans \quad]0,L[\\ R_\delta\left(0\right) = R_\delta\left(L\right) = 0 & dans \quad]0,T[\\ R_\delta\left(0\right) = \tau_\delta & dans \quad]0,L[\\ R_\delta'\left(0\right) = \overline{\varphi}_\delta^0 & dans \quad]0,L[\end{cases}$$

on a alors, pour tout $t \in [0,T]$, l'égalité de l'énergie

$$(6-37)\qquad \left|Y_{\varepsilon\delta}^{*}\right| \left\|R_\delta'\right\|_{L^2(]0,L[)}^2 + q_\delta \left\|\frac{\partial R_\delta}{\partial z_3}\right\|_{L^2(]0,L[)}^2 = \left|Y_{\varepsilon\delta}^{*}\right| \left\|\overline{\varphi}_\delta^0\right\|_{L^2(]0,L[)}^2 + q_\delta \left\|\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right\|_{L^2(]0,L[)}^2$$

or comme τ_δ est la solution de (6-34), on a

$$(6-38)\qquad \delta^2 \int_0^L \delta^{-2} q_\delta \left(\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right)^2 dz_3 = -\left\langle \varphi_\delta^{1,*}, \tau_\delta \right\rangle$$

où le $\langle .,. \rangle$ désigne le produit de dualité entre $H^{-1}\left(]0,L[\right)$ et $H_0^1\left(]0,L[\right)$. Alors on a

$$(6-39)\qquad \delta^2 \int_0^L \delta^{-2} q_\delta \left(\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right)^2 dz_3 \leq \left\|\varphi_\delta^{1,*}\right\|_{H^{-1}(]0,L[)} . \left\|\tau_\delta\right\|_{H_0^1(]0,L[)}$$

et donc l'inégalité de Young

$$ab \leq \frac{a^2}{2c} + \frac{b^2 c}{2}$$

et l'inégalité de poincaré nous donne

Preuve. $(6-40)\qquad \delta^2 \int_0^L \delta^{-2} q_\delta \left(\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right)^2 dz_3 \leq c_p \left[\frac{1}{2c}\left\|\varphi_\delta^{1,*}\right\|_{H^{-1}(]0,L[)}^2 + \frac{c}{2}\left\|\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right\|_{L^2(]0,L[)}^2\right]$

d'autre part on a

$$(6-41) \qquad \begin{aligned} \int_0^L \delta^{-2} q_\delta \left(\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right)^2 dz_3 &= \int_0^L (q^* + \lambda_\delta) \left(\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right)^2 dz_3 \\ &\geq \left[c_2 \left\| \frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3} \right\|^2_{L^2(]0,L[)} - \frac{c_2}{2} \left\| \frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3} \right\|^2_{L^2(]0,L[)} \right] \\ &= \frac{c_2}{2} \left\| \frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3} \right\|^2_{L^2(]0,L[)} \end{aligned}$$

car

$$(6-42) \qquad \delta^{-2} q_\delta \longrightarrow q^*;\ \delta^{-2} q_\delta = q^* + \lambda_\delta;\ q^* > c_2;\ \lambda_\delta \longrightarrow 0;\ \lambda_\delta > -\frac{c_2}{2}$$

$(c_2$ constante strictement positive)

par conséquent, si on choisit

$$c = \frac{c_2 \delta^2}{2 c_p}.$$

(6-40) devient

$$(6-43) \qquad \frac{c_2 \delta^2}{4} \left\| \frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3} \right\|^2_{L^2(]0,L[)} \leq \frac{c_p^2}{c_2 \delta^2} \left\| \varphi_\delta^{1,*} \right\|^2_{H^{-1}(]0,L[)}$$

la combinaison de (6-43) avec (6-37) nous donne

$$(6-44) \qquad |Y^*_{\varepsilon\delta}| \, \|R'_\delta\|^2_{L^2(]0,L[)} \leq c \left[|Y^*_{\varepsilon\delta}| \, \|\overline{\varphi}^0_\delta\|^2_{L^2(]0,L[)} + \frac{1}{\delta^2} \left\| \varphi_\delta^{1,*} \right\|^2_{H^{-1}(]0,L[)} \right]$$

et comme on a $R'_\delta = \varphi_\delta$, on obtient

$$(6-45) \qquad \|\varphi_\delta\|^2_{L^2(0,T;L^2(]0,L[))} \leq c \left(\|\bar{\varphi}^0_\delta\|^2_{L^2(]0,L[)} + \delta^{-4} \left\| \varphi_\delta^{1,*} \right\|^2_{H^{-1}(]0,L[)} \right)$$

(c constante positive indépendante de δ)

pour établir l'inégalité inverse, on prosède comme dans [7]. Soit

$$(6-46) \qquad \rho : t \longmapsto \rho(t) = t^2(T-t)^2$$

Multiplions (6-36)$_1$ par $\rho.R_\delta$ et intégrant par parties sur $]0,L[\times]0,T[$, on trouve

$$(6-47) \qquad \int_0^T \int_0^L q_\delta \left(\frac{\partial R_\delta}{\partial z_3}\right)^2 \rho(t) dz_3 dt \;=\; |Y^*_{\varepsilon\delta}| \left[\int_0^T \int_0^L \rho(t) \left(R'_\delta\right)^2 dz_3 dt + \int_0^T \int_0^L \rho'(t) R_\delta R'_\delta dz_3 dt\right]$$

car

$$(6-48) \qquad \rho(T) = \rho(0) = 0$$

compte tenu de (6-37) (aprés l'avoir multiplié par $\rho(t)$) et (6-47) on a

$$(6-49) \qquad \left[|Y^*_{\varepsilon\delta}| \left\|\overline{\varphi}^0_\delta\right\|^2_{L^2(]0,L[)} + q_\delta \left\|\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right\|^2_{L^2(]0,L[)}\right] \left(\int_0^T \rho(t) dt\right) =$$

$$2\,|Y^*_{\varepsilon\delta}| \int_0^T \int_0^L \rho(t) \left(R'_\delta\right)^2 dz_3 dt + |Y^*_{\varepsilon\delta}| \int_0^T \int_0^L \rho'(t) R_\delta R'_\delta dz_3 dt$$

Appliquant une inégalité de Young au second terme du membre de droite de (6-49), on obtient pour tout $\xi > 0$

$$(6-50) \qquad \int_0^T \int_0^L \rho'(t) R_\delta R'_\delta dz_3 dt \le \xi \int_0^T \int_0^L \rho(t) R^2_\delta dz_3 dt + c\,(\xi) \int_0^T \int_0^L \left(R'_\delta\right)^2 dz_3 dt$$

où l'on a posé

$$(6-51) \qquad c\,(\xi) = \frac{1}{4\xi} \left\|\frac{\rho'^2}{\rho}\right\|_{L^\infty(]0,T[)} = \frac{T^2}{\xi} \text{ et } c = \left\|\frac{\rho'^2}{\rho}\right\|_{L^\infty(]0,T[)} \frac{1}{2\xi}$$

car

$$(6-52)\qquad \int_0^T\int_0^L \rho'(t)R_\delta R'_\delta dz_3dt \;\leq\; \int_0^T\int_0^L \left((\rho'(t))^2\frac{R_\delta^2}{2c}+\frac{c}{2}\left(R'_\delta\right)^2\right)dz_3dt$$
$$\leq\; \int_0^T\int_0^L \left(\frac{\|\rho'^2\|_{L^\infty(]0,T[)}}{\|\rho\|_{L^1(]0,T[)}}.\rho(t)\frac{R_\delta^2}{2c}+\frac{c}{2}\left(R'_\delta\right)^2\right)dz_3dt$$

D'autre part, on utilise l'inégalité de poincaré, on aura

$$(6-53)\qquad \int_0^T\int_0^L \rho(t)R_\delta^2dz_3dt \leq c_p^2\int_0^T\int_0^L \rho(t)\left(\frac{\partial R_\delta}{\partial z_3}\right)^2dz_3dt$$

en autre comte tenu de (6-37) et (6-42), on a

$$(6-54)\qquad \frac{c_2}{2}\delta^2\left\|\frac{\partial R_\delta}{\partial z_3}\right\|^2_{L^2(]0,L[)} \leq |Y^*_{\varepsilon\delta}|\left\|\overline{\varphi}^0_\delta\right\|^2_{L^2(]0,L[)}+q_\delta\left\|\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right\|^2_{L^2(]0,L[)}$$

en reportant (6-54) dans (6-53), on obtient

$$(6-55)\qquad \int_0^T\int_0^L \rho(t)R_\delta^2dz_3dt \leq c_p^2\frac{2}{c_2}\left[8\left\|\overline{\varphi}^0_\delta\right\|^2_{L^2(]0,L[)}+\delta^{-2}q_\delta\left\|\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right\|^2_{L^2(]0,L[)}\right]\left(\int_0^T\rho(t)dt\right)$$

et donc en utilisant (6-50) et (6-55) dans (6-49), on trouve

$$(6-56)\qquad \left(\int_0^T\rho(t)dt\right)\left[|Y^*_{\varepsilon\delta}|\left\|\overline{\varphi}^0_\delta\right\|^2_{L^2(]0,L[)}-|Y^*_{\varepsilon\delta}|\frac{2c_p^2}{c_2}8\xi\left\|\overline{\varphi}^0_\delta\right\|^2_{L^2(]0,L[)}+\right.$$
$$\left.q_\delta\left\|\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right\|^2_{L^2(]0,L[)}-8\delta^2\frac{2c_p^2}{c_2}\delta^{-2}q_\delta\xi\left\|\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right\|^2_{L^2(]0,L[)}\right]$$
$$\leq\left[2\left|Y^*_{\varepsilon\delta}\right|\|\rho\|_{L^\infty(]0,T[)}+c(\xi)\left|Y^*_{\varepsilon\delta}\right|\right]\left\|R'_\delta\right\|_{L^2(0,T;L^2]0,L[)}$$

Si on a choisit $\xi=\frac{c_2}{4C_P^2.8}$, $(6-56)$devient

$$(6-57)\qquad \left(\int_0^T \rho(t)dt\right)\left[\left|Y_{\varepsilon\delta}^*\right|\left\|\overline{\varphi}_\delta^0\right\|_{L^2(]0,L[)}^2 + q_\delta \left\|\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right\|_{L^2(]0,L[)}^2\right]$$

$$\leq 2\left[2\left|Y_{\varepsilon\delta}^*\right|\|\rho\|_{L^\infty(]0,T[)} + \left|Y_{\varepsilon\delta}^*\right| c(\xi)\right]\|R'_\delta\|_{L^2(0,T;L^2]0,L[)}$$

puisque $R' = \varphi_\delta$, on obtient

$$(6-58)\qquad \left|Y_{\varepsilon\delta}^*\right|\left\|\overline{\varphi}_\delta^0\right\|_{L^2(]0,L[)}^2 + q_\delta \left\|\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right\|_{L^2(]0,L[)}^2 \leq \frac{2\left|Y_{\varepsilon\delta}^*\right|\left[2\|\rho\|_{L^\infty(]0,T[)} + c(\xi)\right]}{\|\rho\|_{L^1(]0,T[)}}\|\varphi_\delta\|_{L^2(0,T;L^2]0,L[)}^2$$

Soit encore

$$(6-59)\qquad \left|Y_{\varepsilon\delta}^*\right|\left\|\overline{\varphi}_\delta^0\right\|^2 + q_\delta \left\|\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right\|^2 \leq c\left|Y_{\varepsilon\delta}^*\right|\|\varphi_\delta\|_{L^2(0,T;L^2]0,L[)}^2$$

et toujours grâce à (6-42), on a

$$(6-60)\qquad \left[\left\|\overline{\varphi}_\delta^0\right\|_{L^2(]0,L[)}^2 + \frac{c_2}{2.8}\left\|\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right\|_{L^2(]0,L[)}^2\right] \leq c\|\varphi_\delta\|_{L^2(0,T;L^2(]0,L[))}^2$$

d'autre part la formulation variationnelle de (6-34) nous donne

$$(6-61)\qquad \delta^2\int_0^L \delta^{-2} q_\delta \frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}.\frac{\partial u}{\partial z_3}dz_3 = -\left\langle \varphi_\delta^{1,*}, u\right\rangle, \forall u \in H_0^1(]0,L[)$$

donc

$$(6-62)\qquad \left|\left\langle \varphi_\delta^{1,*}, u\right\rangle\right| \leq c\delta^2\left\|\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right\|_{L^2(]0,L[)}\left\|\frac{\partial u}{\partial z_3}\right\|_{L^2(]0,L[)} < c'\delta^2\left\|\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right\|_{L^2(]0,L[)}\|u\|_{H_0^1(]0,L[)}$$

alors

$$(6-63)\qquad \left\|\varphi_\delta^{1,*}\right\|_{H^{-1}(]0,L[)} \leq c\delta^2\left\|\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right\|_{L^2(]0,L[)}$$

et enfin en reportant (6-63) dans (6-60), on obtient

$$(6-64) \qquad c'\left(\left\|\bar{\varphi}_\delta^0\right\|^2_{L^2(]0,L[)}+\delta^{-4}\left\|\varphi_\delta^{1,*}\right\|^2_{H^{-1}(]0,T[)}\right)\leq \left\|\varphi_\delta\right\|^2_{L^2(0,T;L^2(]0,L[))}$$

et ceci achéve la preuve du lemme. ■

Théorème 6.3

Lorsque δ tend vers zéro, la solution φ_δ du problème (4-3) vérifie

$$(6-65) \qquad \begin{cases} \delta^{-2}\overline{\varphi}_\delta^0 \rightharpoonup \varphi^0 & \textit{dans} \quad L^2(]0,L[) \quad \textit{faible} \\ \delta^{-4}\varphi_\delta^{1,*} \rightharpoonup \varphi^{1,*} & \textit{dans} \quad H^{-1}(]0,L[) \quad \textit{faible} * \end{cases}$$

et

$$(6-66) \qquad \delta^{-2}\varphi_\delta \rightharpoonup \varphi \qquad \text{dans} \quad L^2\left(0,T;L^2\left(]0,L[\right)\right)$$

où φ est solution de

$$(6-67) \qquad \begin{cases} 8\varphi''-q^*\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_3}=0 & \textit{dans} \quad]0,L[\times]0,T[\\ \varphi\left(0\right)=\varphi\left(L\right)\quad =0 & \text{dans} \quad]0,\text{T}\ [\\ \varphi\left(0\right)=\varphi^0 & \text{dans} \quad]0,L[\\ \varphi'\left(0\right)=\frac{\varphi^{1,*}}{8} & \text{dans} \quad]0,L[\end{cases}$$

avec q^* donné par (6-4).

Preuve.

Grâce à la remarque (5.2) ainsi qu'à (6-11) et (6-12) on a

$$(6-68) \qquad \left\|\left(\bar{\varphi}_\delta^0,\varphi_\delta^{1,*}\right)\right\|_F\leq c\left|Y_{\varepsilon\delta}^*\right|\left\|\Lambda\left(\varphi_\delta^0,\varphi_\delta^{1,*}\right)\right\|_{F'}$$

et donc

$$(6-69) \qquad \left\|\left(\bar{\varphi}_\delta^0, \varphi_\delta^{1,*}\right)\right\|_F \leq c\delta^2 \left(\frac{\|\bar{w}_\delta^1\|_{L^2(]0,L[)}}{|Y_{\varepsilon\delta}^*|}, -\frac{\|w_\delta^0\|_{H_0^1(]0,L[)}}{|Y_{\varepsilon\delta}^*|} \right) \leq c\delta^2$$

en reportant dans le Lemme (6.2), on obtient des estimations à priori plus précises

$$(6-70) \qquad \begin{aligned} \left\|\bar{\varphi}_\delta^0\right\|_{L^2(]0,L[)}^2 + \delta^{-4}\left\|\varphi_\delta^{1,*}\right\|_{H^{-1}(]0,L[)}^2 &\leq |Y^*| \left\langle \Lambda_\delta\left(\bar{\varphi}_\delta^0, \varphi_\delta^{1,*}\right), \left(\bar{\varphi}_\delta^0, \varphi_\delta^{1,*}\right)\right\rangle \\ &= |Y^*| \left\|\Lambda_\delta\left(\bar{\varphi}_\delta^0, \varphi_\delta^{1,*}\right)\right\|_{F'} \left\|\left(\bar{\varphi}_\delta^0, \varphi_\delta^{1,*}\right)\right\|_F \\ &\leq c'\delta^2.\delta^2 \\ &= c'\delta^4 \end{aligned}$$

donc

$$(6-71) \qquad \left\|\bar{\varphi}_\delta^0\right\|_{L^2(]0,L[)}^2 \leq c'\delta^4$$

et

$$(6-72) \qquad \delta^{-4}\left\|\varphi_\delta^{1,*}\right\|_{H^{-1}(]0,L[)}^2 \leq c'\delta^4$$

et par suite

$$(6-73) \qquad \|\varphi_\delta\|_{L^2(0,T;L^2(]0,L[))}^2 \leq c\left[\left\|\bar{\varphi}_\delta^0\right\|_{L^2(]0,L[)}^2 + \delta^{-4}\left\|\varphi_\delta^{1,*}\right\|_{H^{-1}(]0,L[)}^2\right] \quad \leq c\delta^4$$

d'ou

$$(6-74) \qquad \|\varphi_\delta\|_{L^2(0,T;L^2(]0,L[))} \leq c\delta^2$$

par conséquent (6-71), (6-72) et (6-74) nous donnent les estimations suivantes

$$(6-75)\qquad \begin{cases} \left\|\delta^{-2}\bar{\varphi}_{\delta}^{0}\right\|_{L^2(]0,L[)} \leq c \\ \left\|\delta^{-4}\varphi_{\delta}^{1,*}\right\|_{H^{-1}(]0,L[)} \leq c \\ \left\|\delta^{-2}\varphi_{\delta}\right\|_{L^2(]0,L[\times]0,T[)} \leq c \end{cases}$$

On déduit alors de $(6\text{-}75)_1$, $(6\text{-}75)_2$, et $(6\text{-}75)_3$ qu'à une extraction de sous-suite prés on a (6-65) et (6-66).

Puisque, les données initiales sont peu régulieres, on ne peut pas faire tendre δ vers zéro directement dans le système (4-3), nous allons donc procéder comme pour le Théorème (4.1). Introduisons la fonction

$$(6-76)\qquad R_{\delta}(z,t) = \int_0^t \varphi_{\delta}(z_3,s)\,ds + \tau_{\delta}(z_3)$$

où $\tau_{\delta}(z_3)$ est la solution de

$$(6-77)\qquad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial z_3}\left(q_{\delta}\frac{\partial \tau_{\delta}}{\partial z_3}\right) = -\varphi_{\delta}^{1,*} & \text{dans} \quad]0,L[\\ \tau_{\delta}(0) = \tau_{\delta}(L) = 0 & \text{dans }]0,T\ [\end{cases}$$

on vérifie sans peine que R_{δ} est la solution de

$$(6-78)\qquad \begin{cases} \left|Y_{\varepsilon\delta}^{*}\right| R_{\delta}'' - \frac{\partial}{\partial z_3}\left(q_{\delta}\frac{\partial R_{\delta}}{\partial z_3}\right) = 0 & \text{dans} \quad]0,L[\times]0,T[\\ R_{\delta}(0) = R_{\delta}(L) = 0 & \text{dans }]0,\text{T}\ [\\ R_{\delta}(0) = \tau_{\delta} & \text{dans} \quad]0,L[\\ R_{\delta}'(0) = \overline{\varphi}_{\delta}^{0} & \text{dans} \quad]0,L[\end{cases}$$

d'aprés (6-43) et (6-72) on a

$$(6-79)\qquad \|\tau_{\delta}\|_{H^1(]0,L[)} \leq c\delta^2 \ (c \text{ constante indépendante de } \delta)$$

et donc

$$(6-80) \qquad \delta^{-2}\tau_\delta \rightharpoonup \tau \text{ dans } H^1\left(]0,L[\right) \text{ faible.}$$

alors (6-37), (6-71), et (6-78) nous donnent

$$(6-81) \qquad \begin{cases} \|R_\delta\|^2_{H^1(]0,L[)} \leq c\delta^4 \\ \|R'_\delta\|^2_{L^2(]0,L[)} \leq c\delta^4 \end{cases}$$

par conséquent

$$(6-82) \qquad \begin{cases} \delta^{-2}R_\delta \rightharpoonup R \quad \text{dans} \quad L^\infty\left(0,T;H^1\left(]0,L[\right)\right) \quad \text{faible}* \\ \delta^{-2}R'_\delta \rightharpoonup R' \quad \text{dans} \quad L^\infty\left(0,T;L^2\left(]0,L[\right)\right) \quad \text{faible}* \end{cases}$$

D'autre part on a

$$(6-83) \qquad 8(1-\delta)\delta^{-2}R''_\delta - \delta^{-2}\frac{\partial}{\partial z_3}\left(\delta^{-2}q_\delta\frac{\partial R_\delta}{\partial z_3}\right) = 0$$

en passant à la limite dans (6-83) et en faisant les mêmes calcules que dans le Théorème (6.1), on obtient le système

$$(6-84) \qquad \begin{cases} 8R'' - q^*\frac{\partial R}{\partial z_3} = 0 & \text{dans} \quad]0,L[\times]0,T[\\ R(0) = R(L) = 0 & \text{dans }]0,\mathrm{T}\ [\\ R(0) = \tau & \text{dans} \quad]0,L[\\ R'(0) = \varphi^0 & \text{dans} \quad]0,L[\end{cases}$$

où τ est la solution du système

$$(6-85) \qquad \begin{cases} -q^*\frac{\partial^2\tau}{\partial z_3^2} = -\varphi^{1,*} & \text{dans} \quad]0,L[\\ \tau(0) = \tau(L) = 0 & \text{dans }]0,\mathrm{T}\ [\end{cases}$$

puisque $R'_\delta = \varphi_\delta$, (6-82) et (6-66) donne $\varphi = R'$.

comme

$$R \in C\left([0,T]\,;H_0^1\left(]0,L[\right)\right) \cap C^1\left([0,T]\,;L^2\left(]0,L[\right)\right) \cap C^2\left([0,T]\,;H^{-1}\left(]0,L[\right)\right)$$

on a

$$(6-86) \qquad \begin{cases} 8\varphi'' - q^* \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} = 0 & \text{dans} \quad]0,L[\times]0,T[\\ \varphi(0) = \varphi(L) = 0 & \text{dans }]0,\text{T} \,[\\ \varphi(0) = \varphi^0 & \text{dans} \quad]0,L[\\ \varphi'(0) = \frac{\varphi^{1,*}}{8} & \text{dans} \quad]0,L[\end{cases}$$

ceci achéve la preuve du Théorème. ■

Maintenant revenons à l'étude du système homogeneisé (5-3), on a alors le

Théorème 6.4

Lorsque δ tend vers zéro, on a

$$(6-87) \qquad \begin{cases} \delta^{-2} w_\delta^0 \rightharpoonup w^0 & \textit{dans} \quad H_0^1\left(]0,L[\right) \quad \textit{faible} \\ \delta^{-2} \overline{w}_\delta^1 \rightharpoonup w^1 & \textit{dans} \quad L^2\left(]0,L[\right) \quad \textit{faible} \end{cases}$$

et

$$(6-88) \qquad \begin{cases} w_\delta \rightharpoonup w & \textit{dans} \quad L^\infty\left(0,T;H_0^1\left(]0,L[\right)\right) \quad \textit{faible}* \\ w_\delta' \rightharpoonup w' & \textit{dans} \quad L^\infty\left(0,T;L^2\left(]0,L[\right)\right) \quad \textit{faible}* \end{cases}$$

avec

$$(6-89) \qquad \delta^{-2} v_\delta \rightharpoonup v \quad \textit{dans} \quad L^2\left(0,T;L^2\left(]0,L[\right)\right) \quad \textit{faible}$$

où v est le contrôle exacte du système limite

$$(6-90) \qquad \begin{cases} 8w" - \; q^* \frac{\partial^2 w}{\partial z_3^2} = v & dans \quad]0,L[\times]0,T[\\ w(0) = w(L) = 0 & \text{dans }]0,\text{T } [\\ w(0) = \frac{w^0}{8} & dans \quad]0,L[\\ w'(0) = \frac{w^1}{8} & dans \quad]0,L[\end{cases}$$

et

$$(6-91) \qquad q^* = \frac{4\det(a_{ij)}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Preuve.

En utilisant les Théorèmes (6.1) et (6.3), on voit qu'il nous reste à montrer seulement que v est le controle exacte de (6-90), c'est à dire

$$(6-92) \qquad w(T) = w'(T) = 0$$

on multiplie $(5\text{-}6)_1$ par δ^{-2} puis grâce à (5-7), (6-87) et $(6\text{-}75)_3$ on a

$$(6-93) \qquad \begin{cases} \psi_\delta \rightharpoonup \psi & \text{dans} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(]0,L[)) \quad \text{faible}* \\ \psi'_\delta \rightharpoonup \psi' & \text{dans} \quad L^\infty(0,T;L^2(]0,L[)) \quad \text{faible}* \end{cases}$$

et donc, on peut passer à la limite dans (5-6) de la même façon que dans le Théorème (6.1), on aura

$$(6-94) \qquad \begin{cases} 8\psi'' - q^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_3^2} = -\varphi & \text{dans} \quad]0,L[\times]0,T[\\ \psi(0) = \psi(L) = 0 & \text{dans }]0,\text{T } [\\ \psi(T) = 0 & \text{dans} \quad]0,L[\\ \psi'(T) = 0 & \text{dans} \quad]0,L[\end{cases}$$

où φ est donné par (6-66).

D'autre part $(6\text{-}88)_1$, $(6\text{-}93)_1$ et (5-7) nous donne

$$w = \psi$$

comme $\psi\,(T) = \psi'\,(T)$; on a (6-92). ■

Remarque 6.5

L'application de la méthode d'unicité Hilbertienne, H.U.M, au système (6-90) permet la construction d'un isomorphisme

$$\begin{aligned} \Lambda : L^2\left(]0, L[\right) \times H^{-1}\left(]0, L[\right) &\longrightarrow L^2\left(]0, L[\right) \times H_0^1\left(]0, L[\right) \\ \left(\varphi^0, \tfrac{\varphi^{1,*}}{8}\right) &\longmapsto \Lambda\left(\varphi^0, \tfrac{\varphi^{1,*}}{8}\right) = \left(\tfrac{w^1}{8}, -\tfrac{w^0}{8}\right). \end{aligned}$$

et donc de determine v de façon unique ; alors toute la suite v_δ converge vers v et toute le suite w_δ converge vers w.

Deuxième partie

Etude de la contrôlabilité exacte frontière d'un parallélépipède de faible épaisseur dans deux directions.

Résumé

Nous étudions la contrôlabilité exacte frontière d'un corps tridimensionnel de faible épaisseur dans deux directions (parallélépipède). Ensuite nous faisons tendre le paramètre représentant cette épaisseur vers zéro et nous établissons la contrôlabilité exacte du problème limite obtenu.

Abstract

We study the exact boundry controllability of a tridimensional solid (parallepipede) of small thickness. we make the parameter representing this thickness tend to zero in order to show the exact centrollability of the deduced limit problem.

Introduction

La contrôlabilité exacte de l'équation des ondes dans des domaines minces a été d'abord abordée par J.I.Lions dans [8] par la méthode des échelles multiples (un calcul formel) puis on suivit plusieurs travaux par exemple :D.Cioranescu et M..Vanninathanr dans [12].

Dans cette partie on se donne le domaine $\Omega_\delta\ =]0, \delta[\times]0, \delta[\times]0, L[$ donné par la figure 2 où δ est un petit paramètre déstiné à tendre vers zéro et L un réel quelquonque positif. Puis on considère la contrôlabilité exacte frontière de l'équation des ondes avec un contrôle du type Dirichlet sur les faces inférieures et supérieures et Neumann sur la patrie latérale.

La première question qu'on se pose est la suivante :

Y a t-il contrôlabilité exacte(pour des contrôles dans des espaces fonctionnels convenables) dans un temps T indépendant de δ. Puis étudier le comportement limite(lorsque δ tend vers zéro) de ce problème.

La suite de cette étude δ représente comme suit.

1. position du problème et dilatation du domaine dans le sens x_1 et x_2.
2. On donnes des résultats préliminaires concernant l'éxistence, l'unicité et la régularité du problème homogène associé au problème étudié et on établit quelques éstimations à priori nécessaires dans l'application de H.U.M.
3. On étudie la contrôlabilité exacte dans l'ouvert dilaté par la méthode H.U.M.
4. On fait tendre δ vers zéro dans le problème posé et on obtient un problème limite unidimensionnel avec un contrôle interne. Ce dernier provient du contrôle frontière donné sur la partie latérale.

   On étudie également le comportement des contrôles.
5. On établit la contrôlabilité exacte du problème limite.

Chapitre 7

1 Position du problème

On considère le domaine $\Omega_\delta =]0,\delta[\times]0,\delta[\times]0,L[$ donné par la figure, suivante :

On note

$$\begin{aligned} F_\delta^1 &= \{\delta\}\times]0,\delta[\times]0,L[\\ F_\delta^2 &= \{0\}\times]0,\delta[\times]0,L[\\ F_\delta^3 &=]0,\delta[\times\{0\}\times]0,L[\\ F_\delta^4 &=]0,\delta[\times\{\delta\}\times]0,L[\end{aligned} \tag{1-0}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_\delta^0 &= F_\delta^1 \cup F_\delta^2 \cup F_\delta^3 \cup F_\delta^4 = \bigcup_{i=1}^{4} F_\delta^i \\ \Gamma_\delta^+ &=]0,\delta[\times]0,\delta[\times\{L\} \\ \Gamma_\delta^- &=]0,\delta[\times]0,\delta[\times\{0\} \end{aligned} \tag{1-1}$$

donc

$$\Gamma_\delta = \Gamma_\delta^0 \cup \Gamma_\delta^+ \cup \Gamma_\delta^-$$

Soit x^0 un point de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $x_\alpha^0 = 0$ où dans toute la partie l'indice α varie dans $\{1,2\}$.

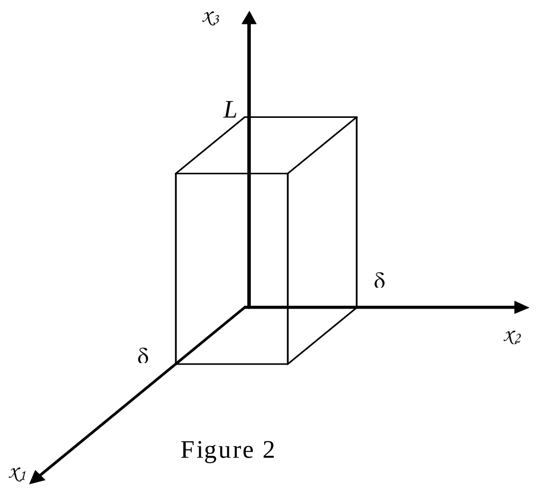

Figure 2

FIG. 7-1 –

On pose

$$\begin{aligned} &m'(x) = x - x^0 \\ &\Gamma_\delta^\pm(x^0) = \{x \in \Gamma^\pm, m_3'(x).\nu_3(x) > 0\} \\ &\Gamma_\delta^{\pm *} = \Gamma_\delta^\pm \backslash \Gamma_\delta^\pm(x^0) \end{aligned} \tag{1-2}$$

et donc pour $T > 0$, on a :

$$\begin{aligned} &Q_\delta = \Omega_\delta \times]0, T[\\ &\Sigma_\delta^\pm = \Gamma_\delta^\pm \times]0, T[\\ &\Sigma_\delta^\pm(x_0) = \Gamma_\delta^\pm(x_0) \times]0, T[\\ &\Sigma_\delta^0 = \Gamma_\delta^0 \times]0, T[\\ &\Sigma_\delta^{\pm *} = \Gamma_\delta^{\pm *} \times]0, T[\\ &\Sigma_\delta = \Gamma_\delta \times]0, T[\end{aligned} \tag{1-3}$$

et on se donne le système

$$\left\{\begin{array}{lll} y" - \Delta y = 0 & \text{dans} & Q_\delta \\ y = v^{\pm} & \text{sur} & \Sigma_\delta^{\pm}\left(x_0\right) \\ y = 0 & \text{sur} & \Sigma_\delta^{\pm *} \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = w & \text{sur} & \Sigma_\delta^0 \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 & \text{dans} & \Omega_\delta \end{array}\right. \tag{1-4}$$

avec (y^0, y^1) dans des espaces appropriés et l'on se propose de trouver des contrôles $v^{\pm}, w$ tels que, si y est la solution de (1-4), on ait $y(T) = y'(T) = 0$ dans Ω_δ.

On commence par fixer le domaine Ω_δ, grâce au changement de variables

$$\left\{\begin{array}{l} x = (x_1, x_2, x_3) \to z = (z_1, z_2, z_3) \\ \text{où} \\ z_\alpha = \delta^{-1} x_\alpha \\ z_3 = x_3 \end{array}\right. \tag{1-5}$$

et par conséquent le changement de fonction suivant

$$f(x) = f_\delta(z) \tag{1-6}$$

alors, le système à résoudre devient : pour (y_δ^0, y_δ^1) convenablement.

choisis, trouver des contôles $v_\delta^{\pm}, w_\delta$ tels que y_δ vérifie ;

$$\left\{\begin{array}{lll} y_\delta'' - (\delta^{-2} \frac{\partial^2 y_\delta}{\partial z_1^2} + \delta^{-2} \frac{\partial^2 y_\delta}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2 y_\delta}{\partial z_3^2}) = 0 & \text{dans} & Q = \Omega \times]0, T[\\ y_\delta = v_\delta^{\pm} & \text{sur} & \Sigma^{\pm}\left(z^0\right) \\ y_\delta = 0 & \text{sur} & \Sigma^{\pm *} \\ \delta^{-1} \frac{\partial y_\delta}{\partial \nu} = w_\delta & \text{sur} & \Sigma^0 \\ y_\delta\left(0\right) = y_\delta^0, y_\delta'\left(0\right) = y_\delta^1 & \text{dans} & \Omega \end{array}\right. \tag{1-7}$$

où Q, $\Sigma^{\pm}\left(z^0\right)$, $\Sigma^{\pm *}$,Σ^0 sont respectivement les transformés de Q_δ, $\Sigma_\delta^{\pm}\left(x^0\right)$, $\Sigma_\delta^{\pm *}$,Σ_δ^0 par ce changement de variables et $\Omega = \,]0,1[\, \times \,]0,1[\, \times \,]0,L[\,$.

Chapitre 8

2 Résultats préliminaires concernant le système étudie

On se basant sur les résultats de **J.L.Lions (cf [1], p.32).**

On a :

Théorème 2-1

Soit φ_δ la solution du système :

$$\left\{\begin{array}{lll} \varphi_\delta'' - (\delta^{-2}\frac{\partial^2\varphi_\delta}{\partial z_1^2} + \delta^{-2}\frac{\partial^2\varphi_\delta}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2\varphi_\delta}{\partial z_3^2}) = 0 & dans & Q = \Omega \times]0,T[\\ \varphi_\delta = 0 & sur & \Sigma^\pm \\ \frac{\partial\varphi_\delta}{\partial\nu} = 0 & sur & \Sigma^0 \\ \varphi_\delta(0) = \varphi^0, \varphi_\delta'(0) = \varphi^1 & dans & \Omega \end{array}\right. \tag{2-1}$$

alors, si on pose

$$V = \left\{u \in H^1(\Omega), u = 0 \ sur \ \Gamma^\pm\right\}$$

et

$$\|u\|_V^2 = |u|_\delta^2 = \int_\Omega \left(\delta^{-2}\left(\frac{\partial u}{\partial z_1}\right)^2 + \delta^{-2}\left(\frac{\partial u}{\partial z_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z_3}\right)^2\right) dz$$

et si $\varphi^0 \in V, \varphi^1 \in L^2(\Omega)$, *le problème (2-1) a une solution unique* φ_δ *vérifiant*

$$\varphi_\delta \in C^0([0,T]\,;V) \cap C^1([0,T]\,;L^2(\Omega)) \cap C^2\left([0,T;V']\right),$$

V' *le dual de* V.

De plus, on a conservation de l'énergie :

$$E(t) = E(0), \forall t$$

où

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\varphi_\delta')^2\,dz + \frac{1}{2}\int_\Omega (\delta^{-2}\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_1}\right)^2 + \delta^{-2}\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_3}\right)^2)dz. \tag{2-2}$$

Pour la régularité de la solution, on utilise les résultats de **GRISVARD (cf [11], p.237)** pour obtenir le théorème suivant :

Théorème 2-2

Si maintenant, on prend $\varphi^0 \in H^2(\Omega) \cap V$, $\varphi^1 \in V$, *alors* φ_δ *est telle que :*

$$\varphi_\delta \in C^0([0,T]\,;H^s \cap V) \cap C^1([0,T]\,;V) \cap C^2([0,T]\,;L^2\,(\Omega)), \forall s; \frac{3}{2} < s < 2.$$

De la même façon, si on considère, un second mêmbre dans $(2\text{-}1)_1$, *on a*

Théorème 2-3

Soit θ_δ *solution du système*

$$\begin{cases} \theta_\delta'' - \left(\delta^{-2}\frac{\partial^2\theta_\delta}{\partial z_1^2} + \delta^{-2}\frac{\partial^2\theta_\delta}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2\theta_\delta}{\partial z_3^2}\right) = f & \text{dans} \quad Q \\ \theta_\delta = 0 & \text{sur} \quad \Sigma^\pm \\ \frac{\partial\theta_\delta}{\partial\nu} = 0 & \text{sur} \quad \Sigma^0 \\ \theta_\delta\,(0) = \theta^0, \theta_\delta'\,(0) = \theta^1 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{2-3}$$

alors si $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega)), \theta^0 \in V$ *et* $\theta^1 \in L^2(\Omega)$, *le problème (2-3) admet une solution* *unique θ_δ, vérifiant*

$$\theta_\delta \in C^0([0,T]\,;V)\cap C^1([0,T]\,;L^2\,(\Omega)).$$

De plus si $f\in L^1(0,T;V),\theta^0\in H^2\cap V$ et $\theta^1\in V$, θ_δ est telle que :

$$\theta_\delta \in C^0([0,T]\,;H^s\cap V)\cap C^1([0,T]\,;V),\forall s;\frac{3}{2}<s<2. \tag{2-3)$_2$}$$

et on a

$$E(t)\leq c\left\{E(0)+\left(\int_0^t \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}\,ds\right)^2\right\}. \tag{2-4}$$

avec c constante indépandnte de δ.

Par la suite, on établit une identité qui permettra d'obtenir les éstimations à priori nécessaires dans l'application de **H.U.M**. On utilise des téchniques de calculs utilisés par **J.L.Lions (cf [1])** dans le cas d'un domaine de frontière Γ de classe C^2 ou d'un convexe et de **P.GRISVARD(cf [11])** qui a généralisé les identités au cas d'un polygone $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ ou d'un polyédre $\Omega\subset\mathbb{R}^3$. et donc ceci s'applique à notre cas et on a :

Lemme 2-4

Soit $m=(m_k)$ un champ de vecteurs quelconque et $f\in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, $\theta^0\in V$ et

$\theta^1 \in L^2(\Omega)$ alors la solution θ_δ du système (2-3) vérifie :

$$\frac{1}{2}\int_{\Sigma^\pm} m_3\nu_3\left(\frac{\partial\theta_\delta}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma + \frac{1}{2}\int_{\Sigma^0} m_\alpha\nu_\alpha\left(\theta_\delta'^2 - \left(\frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_3}\right)^2\right) d\Sigma \tag{2-8}$$

$$= \quad -\int_Q f m_k \frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_k} dzdt + \left[\int_\Omega \theta_\delta' m_k \frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_k} dz\right]_0^T$$

$$+\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial m_k}{\partial z_k}\left[(\theta_\delta')^2 - \delta^{-2}\left(\frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_1}\right)^2 - \delta^{-2}\left(\frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_3}\right)^2\right] dzdt$$

$$+\int_Q \delta^{-2}\frac{\partial m_k}{\partial z_\alpha}\frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_\alpha}\frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_k} dzdt + \int_Q \frac{\partial m_k}{\partial z_3}\frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_3}\frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_k} dzdt$$

où on a appliqué la convention des indices répetés ($x_k y_k = \sum_{k=1}^{3} x_k y_k$) et $\nu = (\nu_k)$ est le vecteur normal à Γ^0.

Preuve. On multiple le système (2-3) par $m_k \frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_k}$ et on intègre sur Q on aura

$$\underbrace{\int_Q \theta_\delta'' m_k \frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_k} dzdt}_{I_1} - \underbrace{\int_Q \left(\delta^{-2}\frac{\partial^2\theta_\delta}{\partial z_1^2} + \delta^{-2}\frac{\partial^2\theta_\delta}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2\theta_\delta}{\partial z_3^2}\right) m_k \frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_k} dzdt}_{I_2} \tag{2-9}$$

$$= \quad \int_Q f m_k \frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_k} dzdt$$

considérons I_1 et intégrons par partie par rapport à t, on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_Q \theta''_\delta m_k \frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_k} dzdt \qquad (2\text{-}10) \\ &= -\int_Q \theta'_\delta m_k \frac{\partial \theta'_\delta}{\partial z_k} dzdt + \int_\Omega \left[\theta'_\delta m_k \frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_k}\right]_0^T dz \end{aligned}$$

D'autre part, remarquons que

$$\theta'_\delta \frac{\partial \theta'_\delta}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z_k}\left(\theta'_\delta\right)^2 \qquad (2\text{-}11)$$

et donc (2-10), devient

$$I_1 = -\int_Q \frac{1}{2} m_k \frac{\partial}{\partial z_k}\left(\theta'_\delta\right)^2 dzdt + \int_\Omega \left[\theta'_\delta m_k \frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_k}\right]_0^T dz \qquad (2\text{-}12)$$

en intègrant par partie par rapport à z, on aura

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}\left[\int_Q \frac{\partial m_k}{\partial z_k}\left(\theta'_\delta\right)^2 dzdt - \int_0^T \left(\int_{\partial\Omega} m_k \left(\theta'_\delta\right)^2 \nu_k d\Gamma\right) dt\right] + \int_\Omega \left[\theta'_\delta m_k \frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_k}\right]_0^T dz \\ &= \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial m_k}{\partial z_k}\left(\theta'_\delta\right)^2 dzdt + \int_\Omega \left[\theta'_\delta m_k \frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_k}\right]_0^T dz - \frac{1}{2}\int_{\Sigma^0} m_\alpha \nu_\alpha \left(\theta'_\delta\right)^2 d\Gamma dt \qquad (2\text{-}13) \end{aligned}$$

car le terme sur $\Sigma^\pm$ est nul grâce à $(2\text{-}3)_2$.

Revenons à I_2 et intègrons par partie par rapport à z, on a

$$I_2 = \int_Q \left(\delta^{-2} \frac{\partial^2 \theta_\delta}{\partial z_1^2} + \delta^{-2} \frac{\partial^2 \theta_\delta}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2 \theta_\delta}{\partial z_3^2} \right) m_k \frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_k} dzdt \tag{2-14}$$

$$= -\left[\int_Q \left(\delta^{-2} \frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \left(m_k \frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_k} \right) + \delta^{-2} \frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_2} \frac{\partial}{\partial z_2} \left(m_k \frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_k} \right) + \frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_3} \frac{\partial}{\partial z_3} \left(m_k \frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_k} \right) \right) dzdt \right]$$

$$+ \int_0^T \left(\int_{\partial\Omega} \left(\delta^{-2} \frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_1} \nu_1 + \delta^{-2} \frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_2} \nu_2 + \frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_3} \nu_3 \right) m_k \frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_k} d\Gamma \right) dt$$

ou encore

$$I_2 = -\int_Q \left(\delta^{-2} \frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_1} \frac{\partial m_k}{\partial z_1} \frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_k} + \delta^{-2} \frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_2} \frac{\partial m_k}{\partial z_2} \frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_k} + \frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_3} \frac{\partial m_k}{\partial z_3} \frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_k} \right) dzdt \tag{2-15}$$

$$\underbrace{-\int_Q \left(\delta^{-2} \frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_1} m_k \frac{\partial^2 \theta_\delta}{\partial z_1 \partial z_k} + \delta^{-2} \frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_2} m_k \frac{\partial^2 \theta_\delta}{\partial z_2 \partial z_k} + \frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_3} m_k \frac{\partial^2 \theta_\delta}{\partial z_3 \partial z_k} \right) dzdt}_{I_3}$$

$$\underbrace{+\int_0^T \left(\int_{\partial\Omega} \left(\delta^{-2} \frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_1} \nu_1 + \delta^{-2} \frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_2} \nu_2 + \frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_3} \nu_3 \right) m_k \frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_k} d\Gamma \right) dt}_{I_4}$$

maintenant, considérons la $2^{éme}$ intégrale dans (2-15) en utilisant (2-11), on aura

$$I_3 = -\frac{1}{2} \int_Q m_k \left(\delta^{-2} \frac{\partial}{\partial z_k} \left(\frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_1} \right)^2 + \delta^{-2} \frac{\partial}{\partial z_k} \left(\frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_2} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial z_k} \left(\frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_3} \right)^2 \right) dzdt \tag{2-16}$$

puis en intégrant par partie par rapport à z, on obtient

$$I_3 = \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial m_k}{\partial z_k}\left[\delta^{-2}\left(\frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_1}\right)^2 + \delta^{-2}\left(\frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_3}\right)^2\right] dzdt \tag{2-17}$$

$$\underbrace{-\frac{1}{2}\int_0^T \left(\int_{\partial\Omega} m_k \left(\delta^{-2}\left(\frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_1}\right)^2 + \delta^{-2}\left(\frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_3}\right)^2\right)\nu_k d\Gamma\right) dt}_{I_5}$$

calculons I_5

$$I_5 = -\frac{1}{2}\int_{\Sigma^0}\left[m_1\nu_1\left(\delta^{-2}\left(\frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_1}\right)^2 + \delta^{-2}\left(\frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_3}\right)^2\right)\right. \tag{2-18}$$

$$\left. + m_2\nu_2\left(\delta^{-2}\left(\frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_1}\right)^2 + \delta^{-2}\left(\frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_3}\right)^2\right)\right] d\Sigma$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Sigma^\pm} m_3\nu_3\left(\delta^{-2}\left(\frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_1}\right)^2 + \delta^{-2}\left(\frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_3}\right)^2\right) d\Sigma$$

Soit encore grâce à $(2\text{-}3)_3$ et $(2\text{-}3)_2$ on a sur Σ^0,

$$\left(\frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_2}\right)^2 = \left(\frac{\partial \theta_\delta}{\partial \nu}\right)^2 = 0$$

et sur $\Sigma^\pm$

$$\frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_1} = 0, \frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_2} = 0$$

car sur $\Sigma^\pm$ on a $\theta_\delta = 0$ comme on a $\frac{\partial \theta_\delta}{\partial z_k} = \nu_k \frac{\partial \theta_\delta}{\partial \nu}$

alors on aura

$$I_5 = -\frac{1}{2}\int_{\Sigma^0}\left[m_1\nu_1\left(\frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_3}\right)^2 + m_2\nu_2\left(\frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_3}\right)^2\right]d\Sigma \tag{2-19}$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Sigma^\pm} m_3\nu_3\left(\frac{\partial\theta_\delta}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\Sigma^0} m_\alpha\nu_\alpha\left(\frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_3}\right)^2 d\Sigma - \frac{1}{2}\int_{\Sigma^\pm} m_3\nu_3\left(\frac{\partial\theta_\delta}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma$$

D'autre part, on remarque que l'on a $\theta_\delta = 0$ sur $\Sigma^\pm$ d'où on a :$\frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_k} = \nu_k\frac{\partial\theta_\delta}{\partial\nu}, \forall k = 1,2,3,$ alors on obtient

$$I_4 = \int_{\Sigma^\pm} m_3\nu_3\left(\frac{\partial\theta_\delta}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma \tag{2-20}$$

Finalement en reportent (2-20), (2-19), (2-17), (2-15) et (2-13) dans (2-9) on obtient (2-8). ■

Lemme 2-5 : Inégalité directe

Soit $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, $\theta^0 \in V$, $\theta^1 \in L^2(\Omega)$ *alors la solution* θ_δ *du système (2-3) vérifie les éstimations suivantes :pour tout* $T > T^*$

$$\int_{\Sigma^\pm}\left(\frac{\partial\theta_\delta}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma \leq c'T\left[E(0) + \left(\int_0^T \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}\,dt\right)^2\right] \tag{2-21}$$

et

$$\left|\int_{\Sigma^0}\theta_\delta'^2 - \left(\frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_3}\right)^2\right| d\Sigma \leq c'T\left[E(0) + \left(\int_0^T \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}\,dt\right)^2\right] \tag{2-22}$$

où

T^* *un réel strictement positif fixé et* c' *constante* (2-23)

indépendante de δ *et* T*,mais qui dépend de* T^*.

Preuve. Preuve. On applique l'égalité (2-8) du Lemme 2-4 avec un choix particulier de champ de vecteurs donné par

$$\begin{cases} m_k \in W^{1,\infty}(\Omega) \\ m_3 \text{ indépendant de } z_1 \text{ et } z_2 \\ m_\alpha = 0 \text{ sur } \Gamma^0 \qquad \alpha = 1,2 \\ m_3 = \nu_3 \qquad\qquad \text{sur}\Gamma^{\pm}, \end{cases} \tag{2-24}$$

le choix $(2\text{-}24)_2$ est justifié par la formule donnant l'énergie. Alors que $(2\text{-}24)_3$ et $(2\text{-}24)_4$ sont liés à l'égalité (2-8), qui devient à ce moment :

$$\frac{1}{2}\int_{\Sigma^\pm}\left(\frac{\partial\theta_\delta}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma \;=\; \underbrace{\left[\int_\Omega \theta'_\delta m_k \frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_k}dz\right]_0^T}_{J_1} \tag{2-25}$$

$$+\underbrace{\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial m_k}{\partial z_k}\left[(\theta'_\delta)^2 - \delta^{-2}\left(\frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_1}\right)^2 + \delta^{-2}\left(\frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_3}\right)^2\right]dzdt}_{J_2}$$

$$+\underbrace{\int_Q \frac{\partial m_k}{\partial z_3}\frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_3}\frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_k}dzdt}_{J_3} + \underbrace{\int_Q \delta^{-2}\frac{\partial m_\beta}{\partial z_\alpha}\frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_\alpha}\frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_\beta}dzdt}_{J_4}$$

$$-\underbrace{\int_Q f m_k \frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_k}dzdt}_{J_5}$$

car

$$\int_Q \delta^{-2}\frac{\partial m_3}{\partial z_\alpha}\frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_\alpha}\frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_k}dzdt = 0$$

et ceci grâce à (2-24).Alors si on pose $M = \max_{1\le k\le 3} \|m_k\|_{1,\infty}$ on obtient facilement que :

$$|J_i| \le ME(t), \forall i = 1,2,3,4.$$

et donc l'inégalité de l'énergie (2-4) nous donne

$$|J_i| \le Mc\left[E(0) + \left(\int_0^t \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}\,ds\right)^2\right] \tag{2-26}$$

Maintenant il nous reste à estimer J_5

$$\begin{aligned} |J_5| &= \left|\int_Q f m_k \frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_k} dzdt\right| \qquad (2\text{-}27)\\ &\le M\int_0^T \|f(t)\|_{L^2(\Omega)} \left\|\frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_k}\right\|_{L^2(\Omega)} dt \\ &\le M\int_0^T \|f(t)\|_{L^2(\Omega)} [E(t)]^{\frac12}\, dt \\ &\le M\int_0^T \|f(t)\|_{L^2(\Omega)} c^{\frac12}\left\{[E(0)]^{\frac12} + \int_0^t \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}\,ds\right\} dt \end{aligned}$$

et ceci grâce à l'inégalité (2-4) du Théorème (2-3).

par conséquent, on a

$$|J_5| \le Mc^{\frac12}[E(0)]^{\frac12}\int_0^T \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt + Mc^{\frac12}\left(\int_0^T \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt\right)^2 \tag{2-28}$$

et donc en utilisant l'inégalité

$$ab \le \frac12 a^2 + \frac12 b^2$$

on obtient

$$\begin{aligned}
|J_5| &\leq Mc^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}E(0)+\frac{1}{2}\left(\int_0^T \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt\right)^2\right]+Mc^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt\right)^2 \\
&\leq 2Mc^{\frac{1}{2}}\left[E(0)+\left(\int_0^T \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt\right)^2\right] \qquad (2\text{-}29) \\
&\leq Tc'\left[E(0)+\left(\int_0^T \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt\right)^2\right]
\end{aligned}$$

avec

$$c' = 2\frac{Mc^{\frac{1}{2}}}{T^*}$$

où T^* est telle que $1 \leq \frac{T}{T^*}$, T^* constante positive.

et donc en regroupant (2-26) et (2-29), on obtient

$$\int_{\Sigma^\pm}\left(\frac{\partial\theta_\delta}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma \leq c'T\left[E(0)+\left(\int_0^T \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}\,ds\right)^2\right] \qquad (2\text{-}30)$$

où c' est une constante positive indépendante de δ et T. mais dépend de T^*.

pour etablir (2-22), on fait le même travail, avec un autre choix de champ de vecteurs ; on prend cette fois ci

$$\begin{cases}
m_k \in W^{1,\infty}(\Omega) \\
m_3 \text{ indépendant de } z_1, z_2 \\
m_\alpha = \nu_\alpha \quad \text{sur} \quad \Gamma_0,\ \alpha = 1,2 \\
m_3 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma^\pm
\end{cases}$$

en effet, on aura

$$\int_{\Sigma^\pm} m_3\nu_3\left(\frac{\partial\theta_\delta}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma = 0$$

et

$$\frac{1}{2}\int_{\Sigma^0} m_\alpha \nu_\alpha \left[(\theta'_\delta)^2 - \left(\frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_3}\right)^2\right] d\Sigma = \frac{1}{2}\int_{\Sigma^0} \left[(\theta'_\delta)^2 - \left(\frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_3}\right)^2\right] d\Sigma$$

et donc on refait les mêmes calculs que précedemment on obtient (2-22). ∎

Remarque 2-6

Si dans le lemme 2-5, on a $f = 0$, alors on a pour φ solution de (2-1) ; les éstimations suivantes

$$\int_{\Sigma^\pm} \left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma \leq c'TE(0) \tag{2-33}$$

$$\left|\int_{\Sigma^0} \left[(\varphi'_\delta)^2 - \left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_3}\right)^2\right] d\Sigma\right| \leq c'TE(0) \tag{2-34}$$

où c' constante indépendante de T et δ.

Lemme 2-7 : Inégalité inverse

Soit φ solution de (2-1) avec $\varphi_0 \in V$ et $\varphi_1 \in L^2(\Omega)$ alors il existe une constante c" et $T^* > 0$ indépendants de δ telle que pour tout $T > T^*$ on a :

$$E(0) \leq c''\left[\int_{\Sigma^\pm(Z^0)} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma + \int_{\Sigma^0} \left((\varphi')^2 + (\varphi)^2\right) d\Sigma\right]. \tag{2-35}$$

Preuve. On applique toujours l'égalité (2-8) du lemme 2-4 avec un autre choix de champs de vecteurs.

Dans ce cas on prend :

$$m'_k(z) = z_k - z_k^0,\ k = 1, 2, 3.$$

avec z^0 un point de $\mathbb{R}^3$ telle que $z_1^0 = z_2^0 = 0$. Ce dernier choix est lié au passage à la limite quand $\delta \to 0$.

comme on a

$$\frac{\partial m'_k}{\partial z_k} = 3;\ \frac{\partial m'_k}{\partial z_\alpha} = \delta_\alpha^k = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \alpha = k \\ 0 & \text{si} \quad \alpha \neq k \end{cases}$$

(2-8) nous donne :

$$\frac{1}{2}\int_{\Sigma^{\pm}} m_3'\nu_3\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma+\frac{1}{2}\int_{\Sigma^0} m_\alpha'\nu_\alpha\left((\varphi_\delta')^2-\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_3}\right)^2\right)d\Sigma \tag{2-36}$$

$$-\left[\int_\Omega \varphi' m_k'\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_k}dz\right]_0^T-\frac{3}{2}\int_Q\left[(\varphi_\delta')^2-\delta^{-2}\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_1}\right)^2-\delta^{-2}\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_2}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}\right)^2\right]dzdt$$

$$-\int_Q\left[\delta^{-2}\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_1}\right)^2+\delta^{-2}\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_2}\right)^2\right]dzdt-\int_Q\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_3}\right)^2 dzdt=0$$

Soit encore :

$$\frac{1}{2}\int_{\Sigma^{\pm}} m_3'\nu_3\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma+\frac{1}{2}\int_{\Sigma^0} m_\alpha'\nu_\alpha\left((\varphi_\delta')^2-\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_3}\right)^2\right)d\Sigma$$

$$-\left[\int_\Omega \varphi' m_k'\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_k}dz\right]_0^T-\int_Q\left[\frac{3}{2}(\varphi_\delta')^2-\frac{1}{2}\delta^{-2}\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_1}\right)^2-\frac{1}{2}\delta^{-2}\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_3}\right)^2\right]dzdt=0 \tag{2-37}$$

on ajoute au deux membres de (2-37), le terme suivant

$$\int_Q\left[(\varphi_\delta')^2+\delta^{-2}\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_1}\right)^2+\delta^{-2}\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_3}\right)^2\right]dzdt \tag{2-38}$$

on obtient, alors

$$\frac{1}{2}\int_Q\left[(\varphi_\delta')^2+\delta^{-2}\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_1}\right)^2+\delta^{-2}\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_3}\right)^2\right]dzdt \tag{2-39}$$

$$=\ \frac{1}{2}\int_{\Sigma^{\pm}} m_3'\nu_3\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma+\frac{1}{2}\int_{\Sigma^0} m_\alpha'\nu_\alpha\left((\varphi_\delta')^2-\delta^{-2}\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_1}\right)^2-\delta^{-2}\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_2}\right)^2\right)d\Sigma$$

$$-\left[\int_\Omega \varphi_\delta' m_k'\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_k}dz\right]_0^T-\int_Q\left((\varphi_\delta')^2-\delta^{-2}\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_1}\right)^2-\delta^{-2}\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_2}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_3}\right)^2\right)dzdt.$$

D'autre part, en multipliant $(2\text{-}1)_1$ par φ_δ et intégrons par partie par rapport à t et z, on obtient

$$-\int_Q (\varphi'_\delta)^2\, dzdt + \int_Q \delta^{-2}\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_1}\right)^2 + \delta^{-2}\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_3}\right)^2 dzdt + \left[\int_\Omega \varphi'_\delta\varphi_\delta dz\right]_0^T = 0 \tag{2-40}$$

et donc en reportant (2-40) dans (2-39), on aura

$$\frac{1}{2}\int_Q \left[(\varphi'_\delta)^2 + \delta^{-2}\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_1}\right)^2 + \delta^{-2}\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_3}\right)^2\right] dzdt \tag{2-41}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\Sigma^\pm} m'_3\nu_3\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\Sigma^0} m'_\alpha\nu_\alpha\left((\varphi'_\delta)^2 - \left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_3}\right)^2\right) d\Sigma}_{I_2}$$

$$-\left[\underbrace{\int_\Omega \varphi'_\delta\left(\varphi_\delta + m'_k\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_k}\right) dz}_{I_3}\right]_0^T$$

le terme de gauche de (2-41) est égal à $TE(0)$ d'aprés la loi de consevation de l'énergie du Théorème (2-1).

D'autre part considérons I_1, on a

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_{\Sigma^\pm(Z^0)} m'_3\nu_3\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma + \int_{\Sigma^{\pm,*}} m'_3\nu_3\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma \leq \int_{\Sigma^\pm(Z^0)} m_3\nu_3\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma \tag{2-42}$$

car

$$m'_3\nu_3 \leq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma^{\pm,*}, \tag{2-43}$$

pour I_2, on a

$$m'_\alpha\nu_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{sur} \quad F_1, F_4 \\ 0 & \text{sur} \quad F_2, F_3 \end{cases} \tag{2-44}$$

par conséquent

$$I_2 = \left(\delta_1^i + \delta_4^i\right) \int_{\Sigma^0} \left((\varphi_\delta')^2 - \left(\frac{\partial \varphi_\delta}{\partial z_3}\right)^2 \right) d\Sigma \tag{2-45}$$

où δ_j^i est le symbole de Kronecker.

et enfin, il nous reste à estimer I_3, ona

$$\begin{aligned} \int_\Omega \varphi_\delta' \left(\varphi_\delta + m_k' \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial z_k}\right) dz &\leq \left| \int_\Omega \varphi_\delta' \left(\varphi_\delta + m_k' \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial z_k}\right) dz \right| \qquad (2\text{-}46) \\ &\leq \frac{1}{2} \int_\Omega (\varphi_\delta')^2 \, dz + \underbrace{\frac{1}{2} \int_\Omega \left(\varphi_\delta + m_k' \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial z_k}\right)^2 dz}_{I_4} \end{aligned}$$

et donc en utilisant (2-11), I_4 devient

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\varphi_\delta^2 + m_k'^2 \left(\frac{\partial \varphi_\delta}{\partial z_k}\right)^2 + 2 m_k' \varphi_\delta \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial z_k} \right) dz \qquad (2\text{-}47) \\ &= \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\varphi_\delta^2 + m_k'^2 \left(\frac{\partial \varphi_\delta}{\partial z_k}\right)^2 + m_k' \frac{\partial}{\partial z_k} (\varphi_\delta)^2 \right) dz \end{aligned}$$

ensuite, intégrons par partie dans le dernier terme on obtient

$$I_4 = \frac{1}{2} \int_\Omega \varphi_\delta^2 dz + \frac{1}{2} \int_\Omega m_k'^2 \left(\frac{\partial \varphi_\delta}{\partial z_k}\right)^2 dz - \frac{1}{2} \int_\Omega \frac{\partial m_k'}{\partial z_k} \varphi_\delta^2 dz + \frac{1}{2} \int_\Gamma m_k' \nu_k \varphi_\delta^2 d\Gamma \tag{2-48}$$

soit encore

$$I_4 = \frac{1}{2} \int_\Omega \varphi_\delta^2 dz + \frac{1}{2} \int_\Omega m_k'^2 \left(\frac{\partial \varphi_\delta}{\partial z_k}\right)^2 dz - \frac{3}{2} \int_\Omega \varphi_\delta^2 dz + \frac{1}{2} \int_{\Gamma^0} m_k' \nu_k \varphi_\delta^2 d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma^\pm} m_k' \nu_k \varphi_\delta^2 d\Gamma \tag{2-49}$$

comme on a $\varphi_\delta = 0$ sur $\Gamma^\pm$ et grâce à (2-44) on aura

$$I_4 = \frac{1}{2}\int_\Omega m_k'^2 \left(\frac{\partial \varphi_\delta}{\partial z_k}\right)^2 dz - \int_\Omega \varphi_\delta^2 dz + \frac{\left(\delta_1^i + \delta_4^i\right)}{2}\int_{\Gamma^0} \varphi_\delta^2 d\Gamma \tag{2-50}$$

et donc en reportant (2-50) dans (2-46), on a

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega \varphi_\delta' \left(\varphi_\delta + m_k' \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial z_k}\right) dz\right| &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\varphi_\delta'\right)^2 dz + \frac{1}{2}\int_\Omega m_k'^2 \left(\frac{\partial \varphi_\delta}{\partial z_k}\right)^2 dz \qquad (2\text{-}51) \\ &\quad - \int_\Omega \varphi_\delta^2 dz + \frac{\left(\delta_1^i + \delta_4^i\right)}{2}\int_{\Gamma^0} \varphi_\delta^2 d\Gamma \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\varphi_\delta'\right)^2 dz + \frac{1}{2}\int_\Omega m_k'^2 \left(\frac{\partial \varphi_\delta}{\partial z_k}\right)^2 dz + \frac{\left(\delta_1^i + \delta_4^i\right)}{2}\int_{\Gamma^0} \varphi_\delta^2 d\Gamma \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \left[\int_\Omega \varphi_\delta' \left(\varphi_\delta + m_k' \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial z_k}\right) dz\right]_0^T &\leq \frac{1}{2}\left[\int_\Omega \left(\varphi_\delta'\right)^2 dz\right]_0^T + \frac{1}{2}\left[\int_\Omega m_k'^2 \left(\frac{\partial \varphi_\delta}{\partial z_k}\right)^2 dz\right]_0^T \qquad (2\text{-}52) \\ &\quad + \frac{\left(\delta_1^i + \delta_4^i\right)}{2}\left[\int_{\Gamma^0} {\varphi_\delta}^2 d\Gamma\right]_0^T \\ &\leq \frac{1}{2}\left[\int_\Omega \left({\varphi_\delta}'\right)^2 dz\right]_0^T + \frac{1}{2}\max_{\substack{x\in\Omega \\ 1\leq k\leq 3}} m_k'^2 \left[\int_\Omega \left(\frac{\partial \varphi_\delta}{\partial z_k}\right)^2 dz\right]_0^T \\ &\quad + \frac{\left(\delta_1^i + \delta_4^i\right)}{2}\left[\int_{\Gamma^0} \varphi_\delta^2 d\Gamma\right]_0^T \end{aligned}$$

D'autre part, grâce à l'inégalité de trace par rapport à la variable t, (continuité de l'application trace par rapport à t), on a

$$\left|\left[\int_{\Gamma^0}\varphi_\delta^2 d\Gamma\right]_0^T\right| = \left|\int_{\Gamma^0}\left[\varphi_\delta^2(T)-{\varphi_\delta}^2(0)\right]d\Gamma\right| \tag{2-53}$$

$$\leq \int_{\Gamma^0}\left[{\varphi_\delta}^2(T)+{\varphi_\delta}^2(0)\right]d\Gamma$$

$$\leq c_1\int_{\Gamma^0}\int_0^T\varphi_\delta^2 d\Gamma dt+\int_{\Gamma^0}\int_0^T({\varphi_\delta}')^2 d\Gamma dt$$

$$= c_1\int_{\Sigma^0}\left[\varphi_\delta^2+({\varphi_\delta}')^2\right]d\Sigma$$

par conséquent (2-52) devient

$$\left|\left[\int_\Omega {\varphi_\delta}'\left(\varphi_\delta+m_k'\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_k}\right)dz\right]_0^T\right|\leq c_2\left[E(0)+\int_{\Sigma^0}\left[\varphi_\delta^2+({\varphi_\delta}')^2\right]d\Sigma\right] \tag{2-54}$$

où

$$c_2=\max(1,\max_{\substack{x\in\Omega\\1\leq k\leq 3}} m_k'^2,\frac{\left(\delta_1^i+\delta_4^i\right)}{2}) \tag{2-55}$$

donc en reportant (2-42), (2-45) et (2-54) dans (2-41) on obtient

$$TE(0) \leq \frac{1}{2}\int_{\Sigma^\pm(Z^0)} m_3'\nu_3\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma+\frac{\left(\delta_1^i+\delta_4^i\right)}{2}\int_{\Sigma^0}\left(({\varphi_\delta}')^2-\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial z_3}\right)^2\right)d\Sigma$$

$$+c_2\left[E(0)+\int_{\Sigma^0}\left[{\varphi_\delta}^2+({\varphi_\delta}')^2\right]d\Sigma\right] \tag{2-56}$$

soit encore

$$(T-c_2)\,E(0) \;\leq\; \frac{1}{2}\max|m_3'\nu_3|\int_{\Sigma^\pm(Z^0)}\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma \tag{2-57}$$

$$+\frac{(\delta_1^i+\delta_4^i)}{2}\int_{\Sigma^0}(\varphi_\delta')^2\,d\Sigma + c_2\int_{\Sigma^0}\left[{\varphi_\delta}^2+(\varphi_\delta')^2\right]d\Sigma$$

$$\leq\; \max\left(\frac{1}{2}\max|m_3'\nu_3|\,,\frac{(\delta_1^i+\delta_4^i)}{2},c_2\right)\left(\int_{\Sigma^\pm(Z^0)}\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma\right.$$

$$\left.+2\int_{\Sigma^{0,*}}(\varphi_\delta')^2\,d\Sigma+\int_{\Sigma^{0,*}}\varphi_\delta^2 d\Sigma\right)$$

et donc

$$E(0) \;\leq\; \frac{2}{(T-c_2)}\max\left(\frac{1}{2}\max|m_3'\nu_3|\,,\frac{(\delta_1^i+\delta_4^i)}{2},c_2\right)\left(\int_{\Sigma^\pm(Z^0)}\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma\right. \tag{2-58}$$

$$\left.+\int_{\Sigma^0}\left[\varphi_\delta^2+(\varphi_\delta')^2\right]d\Sigma\right)$$

et donc on remarque qu'il faut avoir $T > c_2$ où c_2 constante strictement positive indépendante de T et δ. que l'on note T^*. ■

Chapitre 9

3 Contrôlabilité exacte dans l'ouvert dilaté

Nous allons à présent mettre en œuvre la méthode d'unicité hilbertienne H.U.M présentée dans [1] pour avoir le Théorème suivant

Théorème 3-1

Soit

$$T > T^*, \ (T^* \text{ un réel strictement positif donné dans le lemme 2-7}). \tag{3-1}$$

Alors, pour tout couple de données initiales

$$\left(y_\delta^0, y_\delta^1\right) \in L^2(\Omega) \times V' \tag{3-2}$$

Il existe deux contrôles

$$v_\delta^\pm = \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial \nu} \in L^2\left(\Sigma^\pm\left(Z^0\right)\right) \tag{3-3}$$

et

$$W_\delta = \delta \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi_\delta}{\partial t} \right) - \varphi_\delta \right) \in \left[H^1(0, T; L^2\left(\Gamma^0\right)\right]' \tag{3-4}$$

où φ_δ désigne la solution de (2-1), tels que la solution de (1-7) vérifie

$$y_\delta(T) = y'_\delta(T) = 0.$$

3 − 5

Preuve. On applique la méthode H.U.M.

On considère le système homogène le même que (2-1)

$$\begin{cases} \varphi''_\delta - \left(\delta^{-2}\frac{\partial^2\varphi_\delta}{\partial z_1^2} + \delta^{-2}\frac{\partial^2\varphi_\delta}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2\varphi_\delta}{\partial z_3^2}\right) = 0 & \text{dans} \quad Q \\ \varphi_\delta = 0 & \text{sur} \quad \Sigma^\pm \\ \frac{\partial\varphi_\delta}{\partial\nu} = 0 & \text{sur} \quad \Sigma^0 \\ \varphi_\delta(0) = \varphi_\delta^0, \varphi'_\delta(0) = \varphi_\delta^1 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{3-6}$$

et le système rétrograde

$$\begin{cases} \psi''_\delta - \left(\delta^{-2}\frac{\partial^2\psi_\delta}{\partial z_1^2} + \delta^{-2}\frac{\partial^2\psi_\delta}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2\psi_\delta}{\partial z_3^2}\right) = 0 & \text{dans} \quad Q \\ \psi_\delta = g_\delta & \text{sur} \quad \Sigma^\pm(Z^0) \\ \psi_\delta = 0 & \text{sur} \quad \Sigma^{\pm,*} \\ \frac{\partial\psi_\delta}{\partial\nu} = h_\delta & \text{sur} \quad \Sigma^0 \\ \psi_\delta(T) = \psi'_\delta(T) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{3-7}$$

Maintenant, on prend φ_δ^0 dans $H^2(\Omega) \cap V$ et $\varphi_\delta^1 \in V$ et on définit la semi-norme par :

$$\left\|\left(\varphi_\delta^0, \varphi_\delta^1\right)\right\|_F^2 = \int_{\Sigma^\pm(Z^0)} \left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma + \int_{\Sigma^0} \left[\left(\varphi'_\delta\right)^2 + \varphi_\delta^2\right] d\Sigma \tag{3-8}$$

Remarquons que ce choix est lié à l'inégalité inverse (2-35) trouvée dans le lemme (2-7) et de plus elle est bien définie grâce à (2-33)et le Théorème (2-2), car lorsque $(\varphi_\delta^0, \varphi_\delta^1) \in (H^2(\Omega) \cap V) \times V$ on a $\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial t} \in C^0([0,T], V)$.

Toujours d'après (2-35) et (2-2) on a

$$\left|\varphi_\delta^0\right|_V + \left\|\varphi_\delta^1\right\|_{L^2(\Omega)} \leq c_3 \left\|\left(\varphi_\delta^0, \varphi_\delta^1\right)\right\|_F \tag{3-9}$$

et donc cette semi-norme sur F est une norme et donc, soit F le complété de $(H^2(\Omega) \cap V) \times$

V pour cette norme.

Par ailleurs, de l'inégalité inverse on déduit que

$$F \subset V \times L^2(\Omega) \tag{3-10}$$

et par conséquent

$$V' \times L^2(\Omega) \subset F' \tag{3-11}$$

Maintenant on s'intéresse au système rétrograde (3-7).Sa solution ψ_δ est définie par la méthode de transposition (cf J.L.Lions-E.Magenes [9].

Précisons cela, on considère θ_δ solution de (2-3) où $f \in L^1([0,T];V)$ et $\left(\theta_\delta^0, \theta_\delta^1\right) \in F$.

Multiplions (6-5) par θ_δ et intégrons par partie formellement. il vient

$$\int_Q \psi_\delta''.\theta_\delta dzdt + \int_Q \left(\delta^{-2}\frac{\partial\psi_\delta}{\partial z_1}\frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_1} + \delta^{-2}\frac{\partial\psi_\delta}{\partial z_2}\frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_2} + \frac{\partial\psi_\delta}{\partial z_3}\frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_3}\right) dzdt \tag{3-12}$$

$$-\int_{\partial Q}\left(\delta^{-2}\theta_\delta\frac{\partial\psi_\delta}{\partial z_1}\nu_1 + \delta^{-2}\theta_\delta\frac{\partial\psi_\delta}{\partial z_2}\nu_2 + \theta_\delta\frac{\partial\psi_\delta}{\partial z_3}\nu_3\right) d\Sigma = 0$$

Soit encore :

$$\int_Q \psi_\delta''.\theta_\delta dzdt - \int_Q \psi_\delta\theta_\delta'' dzdt + \int_{\partial Q}\left(\delta^{-2}\psi_\delta\frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_1}\nu_1 + \delta^{-2}\psi_\delta\frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_2}\nu_2 + \psi_\delta\frac{\partial\theta_\delta}{\partial z_3}\nu_3\right) d\Sigma \tag{3-13}$$

$$-\int_{\partial Q}\left(\delta^{-2}\theta_\delta\frac{\partial\psi_\delta}{\partial z_1}\nu_1 + \delta^{-2}\theta_\delta\frac{\partial\psi_\delta}{\partial z_2}\nu_2 + \theta_\delta\frac{\partial\psi_\delta}{\partial z_3}\nu_3\right) d\Sigma = 0$$

et donc grâce à $(2\text{-}3)_2$, $(2\text{-}3)_3$, on a :

$$\int_Q \psi_\delta''.\theta_\delta dzdt - \int_Q \psi_\delta\theta_\delta'' dzdt + \int_{\Sigma^\pm}\psi_\delta\frac{\partial\theta_\delta}{\partial\nu}d\Sigma - \delta^{-2}\int_{\Sigma^0}\theta_\delta\frac{\partial\psi_\delta}{\partial\nu}d\Sigma + \int_Q \psi_\delta f dzdt = 0 \tag{3-14}$$

par suite $(3\text{-}7)_2$ et $(3\text{-}7)_4$ nous donnent :

$$\int_\Omega \left[\psi_\delta'(0)\,\theta_\delta^0 - \psi_\delta(0)\,\theta_\delta^1\right] dz = \int_Q \psi_\delta f dzdt + \int_{\Sigma^\pm(Z^0)} g_\delta\frac{\partial\theta_\delta}{\partial\nu}d\Sigma - \delta^{-2}\int_{\Sigma^0}\theta_\delta h_\delta d\Sigma \tag{3-15}$$

Maintenant pour retrouver la norme définie par (3-8) on choisit g_δ et h_δ de la manière suivante :

$$g_\delta = \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial \nu} \quad \text{sur} \quad \Sigma^{\pm}\left(Z^0\right) \tag{3-16}$$

et

$$h_\delta = \delta^2 \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi'_\delta\right) - \varphi_\delta\right] \quad \text{sur} \quad \Sigma^0 \tag{3-17}$$

de façon que la dérivée $\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi'\right)$ soit prise au sens de la dualité entre l'espace $H^1\left(0, T; L^2(\Gamma^0)\right)$ et son dual, c'est à dire

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi'_\delta\right), \mathrm{v} \right\rangle = -\int_{\Sigma^0} \varphi'_\delta \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} d\Sigma, \forall \mathrm{v} \in H^1\left(0, T; L^2(\Gamma^0)\right) \tag{3-18}$$

par conséquent (3-15) s'écrit :

$$\int_\Omega \left[\psi'_\delta(0)\,\varphi^0_\delta - \psi_\delta(0)\,\varphi^1_\delta\right] dz = \int_Q \psi_\delta f dz dt + \int_{\Sigma^{\pm}(Z^0)} \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial \nu}\frac{\partial \theta_\delta}{\partial \nu} d\Sigma + \int_{\Sigma^0}\left(\frac{\partial \varphi_\delta}{\partial t}\frac{\partial \theta_\delta}{\partial t} + \varphi_\delta \theta_\delta\right) d\Sigma \tag{3-19}$$

ainsi que le système (3-7) devient :

$$\begin{cases} \psi''_\delta - \left(\delta^{-2}\frac{\partial^2 \psi_\delta}{\partial z_1^2} + \delta^{-2}\frac{\partial^2 \psi_\delta}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2 \psi_\delta}{\partial z_3^2}\right) = 0 & \text{dans} \quad Q \\ \psi_\delta = \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial \nu} & \text{sur} \quad \Sigma^{\pm}\left(Z^0\right) \\ \psi_\delta = 0 & \text{sur} \quad \Sigma^{\pm,*} \\ \frac{\partial \psi_\delta}{\partial \nu} = \delta^2\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi_\delta}{\partial t}\right) - \varphi_\delta\right] & \text{sur} \quad \Sigma^0 \\ \psi_\delta(T) = \psi'_\delta(T) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{3-20}$$

Remarquons que le premier terme du membre droit de (3-19) est pris dans le sens de la dualité entre les espace $L^1(0,T;V)$ et $L^\infty(0,T;V')$. le second est défini grâce à (2-21), alors que le troisième à un sens grâce à$(2\text{-}3)_2$ du théorème (2-3). En appliquant la méthode de J.L.Lions (cf [1],p.151), on démontre l'existence et l'unicité d'une solution ψ_δ de (3-7), prise au sens (3-9), avec

$$\psi_\delta \in L^\infty(0,T;V') \tag{3-21}$$

$$\left(\psi'_\delta\left(0\right), -\psi_\delta\left(0\right)\right) \in F' \tag{3-22}$$

par conséquent on a

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_\delta}{\partial t}\left(0\right) = \psi_\delta^1 \\ \psi_\delta\left(0\right) = \psi_\delta^0 \end{cases} \tag{3-23}$$

et donc (3-19) de vient

$$\left\langle \left(\psi_\delta^1, -\psi_\delta^0\right), \left(\theta_\delta^0, \theta_\delta^1\right)\right\rangle_{F,F'} = \int_Q \psi_\delta f dzdt + \int_{\Sigma^\pm(Z^0)} \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial \nu}\frac{\partial \theta_\delta}{\partial \nu} d\Sigma + \int_{\Sigma^0}\left(\frac{\partial \varphi_\delta}{\partial t}\frac{\partial \theta_\delta}{\partial t} + \varphi_\delta \theta_\delta\right) d\Sigma \tag{3-24}$$

par la suite, on définit l'opérateur Λ_δ par :

$$\begin{array}{cccc} \Lambda_\delta : & F & \longrightarrow & F' \\ & \left(\varphi_\delta^0, \varphi_\delta^1\right) & \longmapsto & \Lambda_\delta\left(\varphi_\delta^0, \varphi_\delta^1\right) = \left(\psi_\delta^1, -\psi_\delta^0\right) \end{array} \tag{3-25}$$

prenons $f = 0$ et $\left(\theta_\delta^0, \theta_\delta^1\right) = \left(\varphi_\delta^0, \varphi_\delta^1\right)$, alors on a $\varphi_\delta = \theta_\delta$ et donc (3-24) devient

$$\left\langle \left(\psi_\delta^1, -\psi_\delta^0\right), \left(\theta_\delta^0, \theta_\delta^1\right)\right\rangle_{F,F'} = \int_{\Sigma^\pm(Z^0)} \left(\frac{\partial \varphi_\delta}{\partial \nu}\right)^2 d\Sigma + \int_{\Sigma^0}\left(\left(\frac{\partial \varphi_\delta}{\partial t}\right)^2 + \varphi_\delta^2\right) d\Sigma \tag{3-26}$$

Soit encore grâce à (3-8) et (3-23)

$$\left\langle \Lambda_\delta\left(\varphi_\delta^0, \varphi_\delta^1\right), \left(\varphi_\delta^0, \varphi_\delta^1\right)\right\rangle_{F,F'} = \left\|\left(\varphi_\delta^0, \varphi_\delta^1\right)\right\|_F^2 \tag{3-27}$$

ce qui nous donne que Λ_δ est un isomorphisme de F sur F'.

Alors, d'après (3-11) on a pour tout couple de données initiales $\left(y_\delta^0, y_\delta^1\right)$ telle que

$$\left(y_\delta^1, -y_\delta^0\right) \in V' \times L^2\left(\Omega\right) \tag{3-28}$$

il existe $\left(\varphi_\delta^0, \varphi_\delta^1\right)$ unique dans F vérifiant

$$\left(y_\delta^1, -y_\delta^0\right) = \Lambda_\delta\left(\varphi_\delta^0, \varphi_\delta^1\right) = \left(\psi_\delta^1, -\psi_\delta^0\right) \tag{3-29}$$

δet donc

$$\begin{cases} y_\delta^1 = \psi_\delta^1 \\ y_\delta^0 = \psi_\delta^0 \end{cases} \tag{3-30}$$

par conséquent avec le choix

$$v_\delta^\pm = \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial \nu} \quad \text{sur} \quad \Sigma^\pm \left(Z^0\right) \tag{3-31}$$

$$W_\delta = \delta^2 \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi_\delta}{\partial t}\right) - \varphi_\delta\right] \quad \text{sur} \quad \Sigma^0 \tag{3-32}$$

on a

$$y_\delta = \psi_\delta \tag{3-33}$$

et donc $(3\text{-}20)_4$ donne

$$y_\delta (T) = y_\delta' (T) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega. \tag{3-34}$$

■

Chapitre 10

4 Comportement limite du système donné

Maintenant nous allons étudier le comportement limite du système (1-7).

pour commencer nous aurons besoin des résultats suivants

Lemme 4-1

On suppose que

$$\varphi_\delta^0 \rightharpoonup \varphi^0 \quad \textit{faible dans } V \tag{4-1}$$

$$\varphi_\delta^1 \rightharpoonup \varphi^1 \quad \textit{faible dans } L^2(\Omega) \tag{4-2}$$

$$\left\| \delta^{-1} \frac{\partial \varphi_\delta^0}{\partial z_\alpha} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq c \ (c \textit{ constante indépendante de } \delta) \tag{4-3}$$

alors

$$\varphi_\delta \rightharpoonup \varphi \quad \textit{faible} * \ \textit{dans } L^\infty(0,T;V) \tag{4-4}$$

et

$$\varphi_\delta' \rightharpoonup \varphi' \quad \textit{faible } * \textit{dans } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \tag{4-5}$$

où

$$\varphi \textit{ est indépendante de } z_\alpha (\alpha = 1,2) \textit{ et solution de :} \tag{4-6}$$

$$\begin{cases} \varphi'' - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_3^2} = 0 & dans \quad]0, L[\times]0, T[\\ \varphi(0) = \varphi(L) = 0 & sur \quad]0, T[\\ \varphi(0) = \mathcal{M}(\varphi^0) & dans \quad]0, L[\\ \varphi'(0) = \mathcal{M}(\varphi^1) & dans \quad]0, L[\end{cases} \tag{4-7}$$

et

$$\mathcal{M}(f)(z_3) = \int_0^1 \int_0^1 f dz_1 dz_2.$$

Preuve. D'après l'inégalité de l'énergie (2-4), on a :

$$\|\varphi'_\delta\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\delta^{-2} \left(\frac{\partial \varphi_\delta}{\partial z_1} \right)^2 + \delta^{-2} \left(\frac{\partial \varphi_\delta}{\partial z_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_\delta}{\partial z_3} \right)^2 \right) dz \tag{4-8}$$

$$\leq \quad c \left\| \varphi_\delta^1 \right\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\delta^{-2} \left(\frac{\partial \varphi_\delta^0}{\partial z_1} \right)^2 + \delta^{-2} \left(\frac{\partial \varphi_\delta^0}{\partial z_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_\delta^0}{\partial z_3} \right)^2 \right) dz$$

et donc les hypothèses (4-1), (4-2) et (4-3) nous donnent

$$\|\varphi'_\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq c \tag{4-9}$$

$$|\varphi_\delta|_V \leq c \tag{4-10}$$

ce qui nous conduit à (4-4) et (4-5).

D'autre part, grâce à (4-10) on a

$$\left\| \delta^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\alpha} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq c \tag{4-11}$$

Soit encore

$$\left\| \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial z_\alpha} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta c \tag{4-12}$$

Et donc on montre comme précédemment que :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_\alpha} = 0 \tag{4-13}$$

d'où (4-6) et donc on a $\varphi \in L^\infty(0,T;V_3)$ et $\varphi' \in L^\infty(0,T;L^2(]0,L[))$ où

$$V_3 = \left\{ \mathrm{u} \in H^1(]0,L[), \mathrm{u}(0) = \mathrm{u}(L) = 0 \right\} = H_0^1(]0,L[) \tag{4-14}$$

Maintenant, on cherche l'équation vérifiée parφ pour cela, on multiplie $(2\text{-}1)_1$ par une fonction test v telle que v indépendante de z_α et $v \in L^1(0,T;V_3) \cap H^2(0,T;L^2(]0,L[))$ et on intègre par partie, on obtient :

$$\int_Q \varphi_\delta v'' dzdt + \left[\int_\Omega \varphi_\delta' v dz \right]_0^T - \left[\int_\Omega \varphi_\delta v' dz \right]_0^T \tag{4-15}$$

$$+ \int_Q \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial z_3} \frac{\partial v}{\partial z_3} dzdt = 0$$

Soit encore, en choisissant v telle que

$$v(T) = v\prime(T) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \tag{4-16}$$

$$\int_Q \varphi_\delta v'' dzdt - \int_\Omega \varphi_\delta^1 v(0) dz + \int_\Omega \varphi_\delta^0 v'(0) dz + \int_Q \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial z_3} \frac{\partial v}{\partial z_3} dzdt = 0 \tag{4-17}$$

on passe à la limite en utilisant les convergences (4-1), (4-2) ,(4-4) et (4-5), on obtient :

$$\int_Q \varphi v'' dzdt - \int_\Omega \varphi^1 v(0) dz + \int_\Omega \varphi^0 v'(0) dz + \int_Q \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} \frac{\partial v}{\partial z_3} dzdt = 0 \tag{4-18}$$

comme φ et v dépendent uniquement de z_3, on aura

$$\int_0^T \int_0^L \varphi v'' dz_3 dt - \int_0^L v(0) \left(\int_0^1 \int_0^1 \varphi^1 dz_1 dz_2 \right) dz_3 \tag{4-19}$$

$$+\int_0^L v'(0)\left(\int_0^1\int_0^1 \varphi^0 dz_1dz_2\right)dz_3+\int_0^T\int_0^L \frac{\partial\varphi}{\partial z_3}\frac{\partial v}{\partial z_3}dz_3dt=0$$

Posons

$$\mathcal{M}(f)(z_3)=\int_0^1\int_0^1 f dz_1dz_2 \tag{4-20}$$

alors (4-19) nous donne après intégration par partie par rapport à t et z_3 une autre fois :

$$\int_0^T\int_0^L \varphi'' v dz_3dt+\int_0^L \left[\varphi v'\right]_0^T dz_3-\int_0^L \left[\varphi' v\right]_0^T dz_3 \tag{4-21}$$
$$-v(0)\int_0^L \mathcal{M}(\varphi^1)dz_3+v'(0)\int_0^L \mathcal{M}(\varphi^0)dz_3$$

$$-\int_0^T\int_0^L \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_3^2}vdzdt+\left[\int_0^T \frac{\partial\varphi}{\partial z_3}vdt\right]_0^L=0$$

Soit encore on choisissant $v(0)=v'(0)=0$, on aura :

$$\int_0^T\int_0^L \varphi'' v dz_3dt-\int_0^T\int_0^L \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_3^2}vdz_3dt=0 \tag{4-22}$$

ce qui nous donne $(4\text{-}7)_1$.

D'autre part on choisissant dans (4-21) v successivement $v(0)=0$ et $v'(0)=0$ on obtient $(4\text{-}7)_3$ et $(4\text{-}7)_4$.

Pour $(4\text{-}7)_2$ on procéde comme dans la première partie. ■

Remarques 4-2

Si on suppose que

$$\left\|\left(\varphi_\delta^0,\varphi_\delta^1\right)\right\|_F\leq c\ (c\ \textit{constante indépendante de}\ \delta) \tag{4-23}$$

c'est à dire

$$\left(\varphi_\delta^0,\varphi_\delta^1\right)\rightharpoonup\left(\varphi^0,\varphi^1\right)\ \textit{dans}\ F\ \textit{faible} \tag{4-24}$$

et donc grâce à (3-9), les hypothèses du lemme (4-1) sont satisfaits ce qui nous donne (4-4), (4-5), (4-6) et (4-7).

De plus la convergence (4-24) et le choix (3-10) de l'espace F et de sa norme (3-8) nous conduit à

$$\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial\varphi}{\partial t} \text{ dans } L^2\left(\Sigma^0\right) \text{ faible} \tag{4-25}$$

$$\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial\nu} \rightharpoonup \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \text{ dans } L^2\left(\Sigma^\pm\left(z^0\right)\right) \text{ faible} \tag{4-26}$$

où φ est toujours solution de (4-7).

Remarque 4-3

D'après ce qui précède; on a aussi le comportement limite du système (2-3) donné par

$$\begin{cases} \theta'' - \frac{\partial^2\theta}{\partial z_3^2} = \mathcal{M}(f) & \text{dans} \quad]0,L[\times]0,T[\\ \theta(0) = \theta(L) = 0 & \text{sur} \quad]0,T[\\ \theta(0) = \mathcal{M}\left(\theta^0\right) & \text{dans} \quad]0,L[\\ \theta'(0) = \mathcal{M}\left(\theta^1\right) & \text{dans} \quad]0,L[\end{cases} \tag{4-27}$$

par la suite, on s'intéresse au comportement limite du système rétrograde (3-20) et on a :

lemme 4-4

On suppose que $(\varphi_\delta^0, \varphi_\delta^1)$ vérifient (4-24). Alors on a

$$\mathcal{M}(\psi_\delta) \rightharpoonup \psi \quad \text{dans} \quad L^\infty\left(0,T; L^2\left(]0,L[\right)\right) \qquad faible * \tag{4-28}$$

où ψ est indépendante de $z_\alpha\,(\alpha = 1,2)$ et ψ est solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z_3^2} = 4(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \varphi) & \text{dans} \quad]0,L[\times]0,T[\\ \psi\,(0) = \frac{\partial\varphi}{\partial z_3}\,(0) & \text{sur} \quad]0,T[\\ \psi\,(L) = \frac{\partial\varphi}{\partial z_3}\,(L) & \text{sur} \quad]0,T[\\ \psi\,(T) = \psi'\,(T) = 0 & \text{dans} \quad]0,L[\end{cases} \tag{4-29}$$

avec φ solution de (4-7).

Preuve. Pour passer à la limite dans le système (3-20), on considère sa formulation variationnelle ; c'est à dire, on prend θ_δ solution du problème transposé :

$$\begin{cases} \theta_\delta'' - \left(\delta^{-2}\frac{\partial^2\theta_\delta}{\partial z_1^2} + \delta^{-2}\frac{\partial^2\theta_\delta}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2\theta_\delta}{\partial z_3^2}\right) = f & \text{dans} \quad Q \\ \theta_\delta = 0 & \text{sur} \quad \Sigma^\pm \\ \frac{\partial\theta_\delta}{\partial\nu} = 0 & \text{sur} \quad \Sigma^0 \\ \theta_\delta(0) = \theta_\delta^0 & \text{dans} \quad \Omega \\ \theta_\delta'(0) = \theta_\delta^1 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{4-30}$$

puis on multiple le système (3-20) par θ_δ solution de (4-30) et on refait les mêmes calculs que ceux qui nous ont donné (3-24), on obtient

$$\left\langle \left(\psi_\delta^1, -\psi_\delta^0\right), \left(\theta_\delta^0, \theta_\delta^1\right)\right\rangle_{F,F} = \int_Q \psi_\delta f dzdt + \int_{\Sigma^\pm(Z^0)} \frac{\partial\varphi_\delta}{\partial\nu}\frac{\partial\theta_\delta}{\partial\nu} d\Sigma + \int_{\Sigma^0} \left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial t}\frac{\partial\theta_\delta}{\partial t} + \varphi_\delta\theta_\delta\right) d\Sigma \tag{4-31}$$

mais cette fois ci on choisit $\theta_\delta^0, \theta_\delta^1, f$ indépendantes de z_α c'est à dire on prend

$$f \in L^1\left(0, T; L^2\left(]0, L[\right)\right) \tag{4-32}$$

et

$$\theta_\delta^0 \in V_3, \theta_\delta^1 \in L^2\left(]0, L[\right) \tag{4-33}$$

D'autre part, choisissant $\theta^0 = \theta^1 = 0$ et f vérifiant (4-32) alors on aura :

$$-\int_Q \psi_\delta f dzdt = \int_{\Sigma^\pm(Z^0)} \frac{\partial\varphi_\delta}{\partial\nu}\frac{\partial\theta_\delta}{\partial\nu} d\Sigma + \int_{\Sigma^0} \left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial t}\frac{\partial\theta_\delta}{\partial t} + \varphi_\delta\theta_\delta\right) d\Sigma \tag{4-34}$$

commençons par estimer la première intégrale de (4-34) avec ce choix particulier. L'inégalité (2-21) et (2-2) nous donne :

$$\int_{\Sigma^\pm} \left(\frac{\partial\theta_\delta}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma \leq cT\left[\left\|\theta^1\right\|^2_{L^2(]0,L[)} + \left\|\theta^0\right\|^2_{V_3} + \left(\int_0^T \|f(s)\|_{L^2(]0,L[)}\, ds\right)^2\right] \tag{4-35}$$

de même remarquons que θ_δ est indépendante de z_α et donc grâce à (2-4) on a :

$$\int_{\Sigma^0}\left(\frac{\partial\theta_\delta}{\partial \mathrm{t}}\right)^2 d\Sigma \le c\left[\left\|\theta^1\right\|^2_{L^2(]0,L[)} + \left\|\theta^0\right\|^2_{V_3} + \left(\int_0^T \|f(s)\|_{L^2(]0,L[)}\,ds\right)^2\right] \tag{4-36}$$

par conséquent, en rassemblant (4-34), (4-35), (4-36), (4-25) et (4-26) on obtient

$$\left|\int_Q \psi_\delta f dz dt\right| \le c\int_0^T \|f(s)\|_{L^2(]0,L[)}\,ds \tag{4-37}$$

où c est une constante indépendante de δ.

Soit encore

$$\|\mathcal{M}(\psi_\delta)\|_{L^\infty(0,T;L^2(]0,L[))} \le c' \tag{4-38}$$

c'est à dire :

$$\mathcal{M}(\psi_\delta) \rightharpoonup \psi \quad \text{dans} \quad L^\infty\left(0,T;L^2(]0,L[)\right) \text{ faible}* \tag{4-39}$$

par la suite, choisissant $f=0$ et θ^0, θ^1 vérifiant (4-33) alors, des calculs analogues nous donnent :

$$\left\|\mathcal{M}\left(\psi^0_\delta\right)\right\|_{L^2(]0,L[)} \le c \tag{4-40}$$

et

$$\left\|\mathcal{M}\left(\psi^1_\delta\right)\right\|_{V_3'} \le c' \tag{4-41}$$

et donc

$$\mathcal{M}\left(\psi^0_\delta\right) \rightharpoonup \psi^0 \quad \text{dans} \quad L^2(]0,L[) \quad \text{faible} \tag{4-42}$$

$$\mathcal{M}\left(\psi^1_\delta\right) \rightharpoonup \psi \quad \text{dans} \quad \text{V' faible} \tag{4-43}$$

Maintenant, on peut passer à la limite dans (4-31) en utilisant les convergences (4-42), (4-43), (4-39), (4-25) et (4-26) et sachant que φ et θ sont solutions respectivement de

(4-7) et (4-27), on obtient :

$$\left(\psi^1,\theta^0\right)_{V_3',V_3}-\left(\psi^0,\theta^1\right)_{L^2(]0,L[),L^2(]0,L[)} = \int_0^L\int_0^T \psi f dz_3dt \tag{4-44}$$

$$+4\int_0^L\int_0^T\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\theta}{\partial t}+\varphi\theta\right)dz_3dt$$

Soit encore

$$\left(\psi^1,\theta^0\right)_{V_3',V_3}-\left(\psi^0,\theta^1\right)_{L^2(]0,L[),L^2(]0,L[)} = \int_0^L\int_0^T \psi\left(\theta''-\frac{\partial^2\theta}{\partial z_3^2}\right)dz_3dt \tag{4-45}$$

$$+4\int_0^L\int_0^T\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\theta}{\partial t}+\varphi\theta\right)dz_3dt$$

et donc l'intégration par partie par rapport à z_3 et t nous donne :

$$\int_0^L\int_0^T\left(\psi''-\frac{\partial^2\psi}{\partial z_3^2}\right)\theta dz_3dt-\left[\int_0^T\psi\frac{\partial\theta}{\partial z_3}dt\right]_0^L \tag{4-46}$$

$$+4\left[-\int_0^L\int_0^T\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\theta dz_3dt+\int_0^L\int_0^T(\varphi\theta)\,dz_3dt\right]=0$$

ce qui nous conduit à

$$\psi''-\frac{\partial^2\psi}{\partial z_3^2}=4\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\varphi\right)\quad \text{dans}\quad]0,L[\times]0,T[\tag{4-47}$$

et

$$\psi(0)=\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}(0) \tag{4-48}$$

$$\psi(L)=\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}(L). \tag{4-49}$$

■

Théorème 4-4

On suppose en plus que les conditions initiales du systèmes (1-7) vérifie

$$\left\| \left(y_\delta^1, -y_\delta^0 \right) \right\|_{F'} \leq c \text{ } (c \textit{ constante indépendante de } \delta) \tag{4-50}$$

$$\mathcal{M}\left(y_\delta^0 \right) \rightharpoonup y^0 \quad \textit{dans} \quad L^2\left( ]0, L[\right) \quad \textit{faible} \tag{4-51}$$

$$\mathcal{M}\left(y_\delta^1 \right) \rightharpoonup y^1 \quad \textit{dans} \quad V_3' \quad \textit{faible} \tag{4-52}$$

Alors la solution y_δ satisfait à

$$\mathcal{M}\left(y_\delta \right) \rightharpoonup y \quad \textit{dans} \quad L^\infty\left(0, T; L^2\left( ]0, L[\right) \right) \quad \textit{faible}* \tag{4-53}$$

où y est solution de

$$\begin{cases} y'' - \frac{\partial^2 y}{\partial z_3^2} = 4\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \varphi \right) & \textit{dans} \quad]0, L[\times]0, T[\\ y(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial z_3}(0) & \textit{sur} \quad]0, T[\\ y(L) = \frac{\partial \varphi}{\partial z_3}(L) & \textit{sur} \quad]0, \mathrm{T}[\\ y(0) = y^0 & \textit{dans} \quad]0, L[\\ y'(0) = y^1 & \textit{dans} \quad]0, L[\end{cases} \tag{4-54}$$

avec φ solution du système (4-7), pour les contrôles $v_\delta^\pm$ et w_δ, on a :

$$w_\delta = O(\delta), \ \textit{soit} \ w_\delta \longrightarrow 0 \left[H^1\left(0, T; L^2\left(\Gamma^0 \right) \right) \right]' \tag{4-55}$$

et

$$v_\delta^\pm \rightharpoonup \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} \quad \textit{dans} \quad L^2\left(\Sigma^\pm\left(Z^0 \right) \right) \quad \textit{faible.} \tag{4-56}$$

Preuve. Grâce à (3-27), (3-29), (3-30) et (4-50) on a :

$$\left\| \left(\varphi_\delta^0, \varphi_\delta^1 \right) \right\|_F \leq c \text{ } (c \text{ constante indépendante de } \delta) \tag{4-57}$$

et donc en remplaçant (4-57) dans (3-9), on remarque que les hypothèse (4-1), (4-2) sont satisfaites et par suite on a les résultats du lemme 4-1 et la remarque 4-2 et le lemme 4-4 et comme on a $\psi_\delta = y_\delta$, d'où (4-53) et (4-54).

D'autre part on a

$$v_\delta^{\pm} = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \quad \text{et} \quad w_\delta = \delta \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \varphi \right)$$

et les convergences (4-25) et (4-26) nous conduisent à (4-55) et (4-56). ∎

Remarque 4-5

Le problème limite est un problème posé dans $]0, L[$ *(la direction indépendante de* δ*), avec un contrôle interne et un contrôle frontière du type Dirichlet, alors que le problème initial était un problème sans contrôle interne. Rappelons que ce contrôle interne paru dans le problème limite provient du contrôle frontière du type Neumann donné sur la partie latérale, le terme 4 est du aux quatre faces formant cette dernière. Remarquons de plus que le contrôle sur la partie latérale tend vers zéro dans un sens convenable et le contrôle sur les faces du dessus et le dessous est devenu unidimensionnel.*

Chapitre 11

5 Contrôlabilité exacte du problème limite

Par la suite, on s'intérèse à la contrôlabilité exact du problème limite (4-54). c'est un problème unidimentionel avec un contrôle interne et un contrôle par Dirichlet sur le bord. on a alors le

Théorème 5-1

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} \tilde{y}'' - \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial z_3^2} = \tilde{\omega} & \text{dans} \quad]0, L[\times]0, T[\\ \tilde{y} = \tilde{v} & \text{sur } \{0, L\} \times]0, T[\\ \tilde{y}(0) = \tilde{y}^0 & \text{dans} \quad]0, L[\\ \tilde{y}'(0) = \tilde{y}^1 & \text{dans} \quad]0, L[\end{cases} \tag{5-1}$$

avec

$$\left(\tilde{y}^1, -\tilde{y}^0\right) \in V_3' \times L^2(]0, T[) \tag{5-2}$$

alors il existe un contrôle interne $\tilde{\omega}$ donné par

$$\tilde{\omega} = 4\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \varphi\right) \quad \text{dans} \quad]0, L[\times]0, T[\tag{5-3}$$

et un contrôle frontière $\tilde{v}$ définie par

$$\tilde{v} = \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} \quad \text{sur} \quad \{0, L\} \times]0, T[\tag{5-4}$$

telle que

$$\tilde{y}(T) = \tilde{y}'(T) = 0, \forall T > 0 \tag{5-5}$$

où T est le même que celui dans le Théorème (3-1).

Preuve. On applique la méthode H.U.M. en introduisant le système homogène et le système rétrograde associé à (5-1) donnés par :

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}'' - \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z_3^2} = 0 & \text{dans} \quad]0, L[\times]0, T[\\ \tilde{\varphi} = 0 & \text{sur } \{0, L\} \times]0, T[\\ \tilde{\varphi}\,(0) = \tilde{\varphi}^0 & \text{dans} \quad]0, L[\\ \tilde{\varphi}'\,(0) = \tilde{\varphi}^1 & \text{dans} \quad]0, L[\end{cases} \tag{5-6}$$

et

$$\begin{cases} \tilde{\psi}'' - \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial z_3^2} = \tilde{\omega} & \text{dans} \quad]0, L[\times]0, T[\\ \tilde{\psi}(0) = \tilde{v}_1 & \text{sur} \quad]0, T[\\ \tilde{\psi}(L) = \tilde{v}_2 & \text{sur} \quad]0, T[\\ \tilde{\psi}\,(T) = \tilde{\psi}'\,(T) = 0 & \text{dans} \quad]0, L[\end{cases} \tag{5-7}$$

D'autre part, on sait que si on prend $\left(\tilde{\varphi}^0, \tilde{\varphi}^1\right)$ dans $V_3 \times L^2(]0, L[)$, le système (5-6) a une solution unique $\tilde{\varphi}$ telle que

$$\tilde{\varphi} \in C^0([0, T]; V_3) \cap C^1([0, T]; L^2(]0, L[)) \tag{5-8}$$

et elle vérifie (cf Lions[1]p. 39)

$$\|\tilde{\varphi}\|_{V_3} \leq c \left[\left\| \frac{\partial \tilde{\varphi}^0}{\partial z_3} \right\|_{L^2(]0,L[)} + \left\| \tilde{\varphi}^1 \right\|_{L^2(]0,L[)} \right] \tag{5-9}$$

Maintenant, on cherche l'énergie du système (5-6), on le multiplie par $\tilde{\varphi}'$ et on fait des calculs comme précédemment, on obtient :

$$\tilde{E}(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left[(\tilde{\varphi}')^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z_3}\right)^2\right] dz_3 \tag{5-10}$$

De plus, on a conservation de l'énergie :

$$\tilde{E}(t) = \tilde{E}(0), \forall t \tag{5-11}$$

avec

$$\tilde{E}(0) = \frac{1}{2}\int_0^L \left[(\tilde{\varphi}^1)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}^0}{\partial z_3}\right)^2\right] dz_3 \tag{5-12}$$

Par la suite, on utilise des calcules analogues à ceux de l'inégalité (2-21) du lemme (2-5) et les résultats de J .L Lions (cf [1]p. 55-401), on a :

$$\int_0^T \left[\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z_3}\right)^2\right]_0^L dt \leq c_1 \tilde{E}(0) \tag{5-13}$$

$$\tilde{E}(0) \leq c_2 \int_0^T \left[\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z_3}\right)^2\right]_0^L dt, \forall T > \tilde{T} \tag{5-14}$$

$$c_4 \left\|\tilde{\varphi}'\right\|_{L^2(]0,L[\times]0,T[)} \leq \tilde{E}(0) \leq c_3 \left\|\tilde{\varphi}'\right\|_{L^2(]0,L[\times]0,T[)} \tag{5-15}$$

ceci nous conduit à définir

$$\left\|\left(\varphi_\delta^0, \varphi_\delta^1\right)\right\|_{\tilde{F}}^2 = \int_0^T \left[\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z_3}\right)^2\right]_0^L dt + 4\int_0^L \int_0^T \left[\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t}\right)^2 + (\tilde{\varphi})^2\right] dz_3 dt \tag{5-16}$$

où

$$\tilde{F} = V_3 \times L^2\left(]0, L[\right) \tag{5-17}$$

et donc grâce à (5-11), (5-13), (5-14) et (5-15) la norme définie par (5-16) est une norme équivalente à $\tilde{E}(0)$ d'où (5-17).

L'étape suivante de H.U.M est de considèrer le système (5-7) en faisant sa formulation variationnelle. Pour cela, prenons $\tilde{\theta}$ solution du problème transposé suivant

$$\begin{cases} \tilde{\theta}'' - \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z_3} = \tilde{f} & \text{dans} \quad]0, L[\times]0, T[\\ \tilde{\theta}(0) = 0 & \text{sur} \quad]0, T[\\ \tilde{\theta}(L) = 0 & \text{sur} \quad]0, T[\\ \tilde{\theta}\,(0) = \tilde{\theta}^0 & \text{dans} \quad]0, L[\\ \tilde{\theta}'\,(0) = \tilde{\theta}^1 & \text{dans} \quad]0, L[\end{cases} \tag{5-18}$$

avec

$$\tilde{f} \in L^1(0, T; L^2(]0, L[)), \tilde{\theta}^0 \in V_3, \tilde{\theta}^1 \in L^2(]0, L[) \tag{5-19}$$

et donc

$$\tilde{\theta} \in C^0(]0, T[, V_3) \cap C^1(]0, T[; L^2(]0, L[)) \tag{5-20}$$

Alors, on multiplie (5-7) par $\tilde{\theta}$ et on intègre par partie, on obtient :

$$\left(\tilde{\psi}^1, \tilde{\theta}^0\right)_{V_3', V_3} - \left(\tilde{\psi}^0, \tilde{\theta}^1\right)_{L^2(]0,L[), L^2(]0,L[)} = \int_0^L \int_0^T \tilde{\psi}\tilde{f} dz_3 dt + \int_0^T \left[\tilde{\psi}\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z_3}\right]_0^L dt \tag{5-21}$$

$$+ \int_0^L \int_0^T \tilde{\omega}\theta dz_3 dt$$

puis en prenant $\tilde{f} = 0, \tilde{\theta}^0 = \tilde{\varphi}^0$ et $\tilde{\theta}^1 = \tilde{\varphi}^1$, (5-21) devient :

$$\left(\tilde{\psi}^1, \tilde{\varphi}^0\right)_{V_3', V_3} - \left(\tilde{\psi}^0, \tilde{\varphi}^1\right)_{L^2(]0,L[), L^2(]0,L[)} = \int_0^T \left[\tilde{\psi}\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z_3}\right]_0^L dt + \int_0^L \int_0^T \tilde{\omega}\tilde{\varphi} dz_3 dt \tag{5-22}$$

et on définit comme d'habitude l'opérateur

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\Lambda} : & \tilde{F} & \longrightarrow & \tilde{F}' \\ & (\tilde{\varphi}^0, \tilde{\varphi}^1) & \longmapsto & \tilde{\Lambda}\,(\tilde{\varphi}^0, \tilde{\varphi}^1) = \left(\tilde{\psi}^1, -\tilde{\psi}^0\right) \end{array} \tag{5-23}$$

de sorte que (5-22) s'écrit :

$$\left(\tilde{\Lambda}\left(\tilde{\varphi}^0, \tilde{\varphi}^1\right), \left(\tilde{\varphi}^0, \tilde{\varphi}^1\right)\right)_{\tilde{F}', \tilde{F}} = \int_0^T \left[\tilde{\psi}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial z_3}\right]_0^L dt + \int_0^L \int_0^T \tilde{\omega}\tilde{\varphi} dz_3 dt \tag{5-24}$$

et donc pour obtenir (5-16) dans le membre droit de (5-24), on choisit

$$\tilde{\psi}\left(L\right) = \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial z_3}\left(L\right) = \tilde{v}_1, \tilde{\psi}\left(0\right) = \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial z_3}\left(0\right) = \tilde{v}_2 \tag{5-25}$$

et

$$\tilde{\omega} = 4(\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{\varphi}'\right) - \tilde{\varphi}) \tag{5-26}$$

de sorte que

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi'\right), w\right\rangle = -\int_0^L \int_0^T \varphi' w' dz_3 dt, \forall w \in H^1(0, T; L^2(]0, L[)) \tag{5-27}$$

par conséquent (2-24) nous donne :

$$\left\langle\tilde{\Lambda}\left(\tilde{\varphi}^0, \tilde{\varphi}^1\right), \left(\tilde{\varphi}^0, \tilde{\varphi}^1\right)\right\rangle_{\tilde{F}', \tilde{F}} = \left\|\left(\varphi_\delta^0, \varphi_\delta^1\right)\right\|_{\tilde{F}}^2 \tag{5-28}$$

ce qui exprime que $\tilde{\Lambda}$ est un isomorphisme de $\tilde{F}$ sur $\tilde{F}'$ et donc

$$\forall\tilde{y}^0, \tilde{y}^1 \text{ telle que } \left(\tilde{y}^1, -\tilde{y}^0\right) \in \tilde{F}' = V_3' \times L^2(]0, L[)$$

il existe un unique couple $\left(\tilde{\varphi}^0, \tilde{\varphi}^1\right) \in \tilde{F}$ qui vérifie

$$\left(\tilde{y}^1, -\tilde{y}^0\right) = \tilde{\Lambda}\left(\tilde{\varphi}^0, \tilde{\varphi}^1\right) = \left(\tilde{\psi}^1, -\tilde{\psi}^0\right) \tag{5-29}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} \tilde{y}^1 = \tilde{\psi}^1 \\ \tilde{y}^0 = \tilde{\psi}^0 \end{cases} \tag{5-30}$$

or on sait que le problème (5-7) a une solution unique et donc grâce ou choix (5-25) et

(5-26) on peut affirmer que

$$\tilde{y} = \tilde{\psi} \tag{5-31}$$

ce qui nous conduit à

$$\tilde{y}\,(T) = \tilde{y}'\,(T) = 0 \tag{5-32}$$

Remarquons que

$$\tilde{v} = \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} \in L^2(]0, L[)$$

et

$$\tilde{\omega} \in C^0(]0, T[, H^{-1}(]0, L[)).$$

■

Remarque 5-2

Le problème limite est exactement contrôlable dans le même temps que le problème initial avec un contrôle interne, provenant de la limite du contrôle frontière donné sur la partie la latérale.

et un contrôle frontière du type Dirichlet, qui est lui aussi la limite du contrôle frontière sur les faces du dessous et le dessus de Ω.

Bibliographie

[1] J.L.Lions Controlabilité exacte, Perturbations et stabilisation des systèmes distribyués, Tome 1. R.M.A 8(Masson, PARIS, 1988).J.L.Lions

[2] J.L.LIONS "Contrôlabilité exacte perturbations et stabilité solution de système distribués" Tome 2.Collection RMA, Masson 1988

[3] D.Cioranescu, J.Saint Jean Poulin ,Homogénéisation in open sets with hols. J.Math.Amal.Appl 71(1979), 590-607.

[4] D.Cioranescu, P.Donato, Exact internal controllability in perforated domains, J.Math pures et Appl, 68 (1989), 185-213.

[5] N.Benabbas Thése de magistère (1990) Homogénéisation de structures périodiques à paroi minces et élancées.

[6] F.Murat, Compacité par compensation, Annali scuola norm. sup di pisa, 5 (1978), 489-507.

[7] A.haroux , On a completion problem in the theory of distributed control of wave equations, Nonlinear partial differential equation and their application, collège de france seminer 1987-1988, H.Brézis and J.L.Lions Eds., Res.Notes in Math., Pitman.

[8] H.Brezis,Analyse Fonctionnelle.Théorie et Application (Masson, Paris, 1983).

[9] J.L.Lions, E.Magenes, problèmes aux limtes non homogèmes et applications .Vol.1(Dunod,Paris, 1968)

[10] D.Coiranescu, P.Donato, F.Murat,E.Zuazua,Homogenization and correctors for the wave equation in domains with small holes, Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa, Sc. Fis. Mat.4 (1991), 251-293.

[11] P.Grisvard, Contrôlabilité exacte des solutions de l'équation des ondes en presence de singularités. J.Math.Pures. Appl.68(1989), 215-259.

[12] D.Ciaranescu- M.Vanninathan, Exact controllability in thin perforated domains (1998).