République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mentouri - Constantine
Faculté des sciences Exactes
Département de Mathématiques

N° d'ordre :……………

THESE

Présentée par

AIB Nadia

En vue de l'obtention du diplôme de

DOCTORAT D'ETAT

***Option :* Analyse**

Intitulée

Problèmes d'homogénéisation et contrôlabilité pour des structures minces en quinconce

Thèse soutenue le

Devant le jury composé de :

Pr. Nasreddine BENKAFADAR	***Président***	Université Mentouri, Constantine
Pr. Doina CIORANESCU	***Rapporteur***	Université Paris 6
Pr. Gérard TRONEL	***Examinateur***	Université Paris 6
Dr. Fadila BENTALHA	***Examinatrice***	Université de Batna
Pr. Abdelhafid MOKRANE	***Examinateur***	ENS Kouba, Alger

A mon fils Mohamed Tahar El Mehdi

Remerciements

Je remercie de tout mon coeur Mme Doina Cioranescu, directeur de recherche CNRS, Université ParisVI, d'avoir accepté de diriger mes travaux, et je voudrais lui éxprimer ma reconnaissance et gratitude pour la sollicitude dont elle a fait preuve pendant a préparation de cette thèse ; je vous remercie aussi Madame de m'avoir supporter pendant tout ce temps.

Je remercie vivement Mr Benkafadar Nasreddine, Professeur à l'université Mentouri Constantine de m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

Je remercie Mr Gérard Tronel, Maitre de conférence, Université ParisVI, pour son soutien constant, pour ses fructueuses remarques, pour son precieux support et pour avoir accepté de me faire l'honneur de participer à ce jury.

Je remercie trés vivement Mme Bentalha Fadila, Maitre de conférence à l'université de Batna et Mr Mokrane Abdelhafid, Professeur, ENS Kouba, Alger, pour avoir accepté de faire partie du jury.

Mes vifs remerciments vont aussi au Département de Mathématiques de l'Université de Constantine.

SOMMAIRE

Résumé

Introduction générale.

Chapitre 1 : Homogénéisation.

1-1- Position du problème.

1-2- Premier résultat de convergence.

Chapitre2 : Etude de la controlabilité exacte et de la convergence faible des contrôles.

2-1- Position du problème.

2-2- Contrôlabité exacte de (2.1).

2-3- Comportement asymptotique du système (2.1), convergence faible des contrôles.

Chapitre 3 : Etude de la controlabilité exacte et de la convergence du système bidimentionnel.

3-1 Etude de la contrôlabilité exacte du système homogéneisé.

3-2 Résultat de convergence sur l'épaisseur des barres $\mu \to 0$.

3-3 Convergence de la suite des contrôles.

Chapitre4 : Cas des données initiales moins régulières.

4-1 Homogénéisation et convergence des contrôles

Chapitre 5 : Etude de la controlabilité exacte et de la convergence du système bidimentionnel dans le cas des données initiales moins régulières.

5-1 Etude de la contrôlabilité exacte du système (4.12)

Apprendice

Références bibliogrphiques

Abstract.

Let $\Omega_{\varepsilon\mu}$ be a lattice-type plate of thickness ε, ε-periodicaly perforated by strggered holes. The material is concentrated on layers of thikness $\varepsilon\mu$. We are interested in the exact internat controllability of the wave equation posed in $\Omega_{\varepsilon\mu}$ with a homogeneous Neumann boundary condition on the boundary holes. In a first step ; an exact internal control $v_{\varepsilon\mu}$ is bluit by HUM method introduced by J. L. Lions. Then we study the asymptotic behavior of the system and of the sequence of controls $v_{\varepsilon\mu}$ when first ε and afterwards μ go to zero. The first passage to the limit is a classical homogenisation process. We show that $v_{\varepsilon\mu}$ converge weakly to a function v_μ which is an exact internal control for the homogenized system.

This stability property with respect to the small parameter ε, occurs also with respect to the second small parameter μ. Indeed, we show that v_μ converge to a function v, an exact control for the limit system obtained by making $\mu \longrightarrow 0$ in the homogenized problem.

Résumé.

Soit $\Omega_{\varepsilon\mu}$ une plaque récticulée d'épaisseur ε, perforée périodiquement (de periode ε)par des trous carrés, disposés en quinconce. Le matériau est concentré dans des couches dont la taille est de l'ordre de $\varepsilon\mu$. On considère la contrôlabilité exacte interne de l'équation des ondes dans $\Omega_{\varepsilon\mu}$ avec une condition aux limites de Neumann sur le bord des trous. Dans un premier temps, on établit par la méthode de HUM de J. L. Lions, l'existence d'un contrôle exact $v_{\varepsilon\mu}$ pour ce problème. On s'intéresse ensuite au comportement asymptotique de la suite des contrôles $v_{\varepsilon\mu}$ lorsqu'on fait tendre d'abord ε et ensuite μ vers zéro. Le premier passage à la limite est un processus d'homogénéisation classique. On montre que la suite $v_{\varepsilon\mu}$ converge faiblement vers une fonction v_μ qui est un contrôle exact du système homogéneisé.

Cette propriété de stabilité par rapport au petit paramètre ε , se maintient aussi par rapport au deuxième paramètre μ . En effet, nous montrons que v_μ converge vers une fonction v, qui est un contrôle exact interne du système limite obtenu en faisant $\mu \longrightarrow 0$ dans le problème homogéneisé.

Introduction.

Le premier chapitre de cette thèse a été motivée par les travaux de D.Cioranescu et P.Donato [6].

Les auteurs étudient la convergence d'un système dependant d'un seul paramètre représentant la période d'une structure bidimentionnelle dans un couvert borné, perforé périodiquement. C'est-à-dire, ils étudient le comportement de la solution d'un système dilaté lorsque le paramètre désignant la période tend vers zéro. On fait la même étude, pour une structure en quinconce tridimentionnelle et dépendant de deux paramètres représentant respectivement la période et l'épaisseur du domaine.

Le second chapitre de cette thèse porte sur la contrôlabilité exacte interne de l'équation des ondes avec une condition de Neumann, homogène sur les bords des trous [6]. Ensuite nous demontrons un deuxième résultat de convergence et nous montrons que la suite des contrôles exactes converge faiblement vers le contrôle exact du système limite bidinentionnel.

Le troisième chapitre n'a pas été étudié dans [6] ; dans ce chapitre on démontre par la méthode HUM de J.L.Lions [11] que le sytème obtenu aprés passage à la limite lorsque ε tend vers zéro est exactement contrôlable. Ensuite on s'intéresse aux comportements de la solution et du contrôle du système bidimentionnel lorsque le paramètre μ représentant l'épaisseur du domaine tend vers zéro et comme précédemment nous démontrons que la suite des contrôles exacts converge faiblement vers la contrôle exact donné par HUM.

Dans le quatrième chapitre, on s'interesse aux cas ou les données initiales sont moins régulières. On étudie encore le comportement de la solution et du contrôle quand les parmètres ε tend vers zéro. On démontre dans ce cas aussi que la suite des contrôles exacts converge faiblement vers le contrôle exact du système limite.

Le cinquième et dernier chapitre porte sur l'étude du comportement du système bidimentionnel lorsque le parmètre μ représentant l'épaisseur tend vers zéro, avec des conditions initiales plus faibles que celles prisent dans le chapitre trois.

Chapitre 1 :

Homogénéisation

1–1 Position du problème :

On consière le domaine perforé décrit par la Figure (1) ; il est contenu dans l'ouvert $\omega_\varepsilon =]0, \varepsilon[\times]0, \ell[\times]0, L[$ où ε designe la période . La périodicité n'a lieu que dans les directions x_2 et x_3.

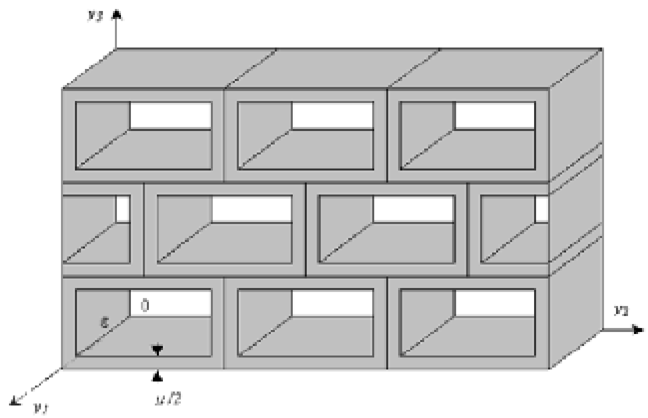

Figure 1. Le domaine en quinconque

On pose $L = m\varepsilon$ et $l = n\varepsilon$ et recouvre ω_ε par mn cellules εY où

$$Y =]0, 1[\times]0, 2[\times]0, 2[$$

est la cellule de référence .

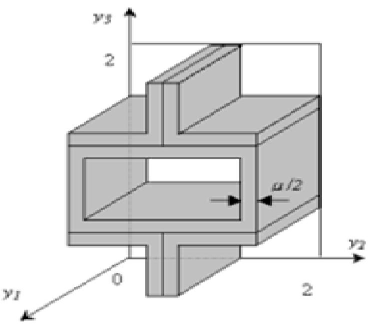

Figure 2. La cellule de référence

On pose $Y_u^*(resp\ \omega_{\varepsilon u}^*)$ la partie de $Y\ (resp\ \omega_\varepsilon)$ occupée par le matriau où μ est un petit paramétre qui designe l'épaisseur des barres , et $\omega_{\varepsilon\mu}^{*,0} =]0,\varepsilon[\times]0,\ell[\times\{0\}$

On considère le systéme suivant :

$$
(1.1) \qquad \begin{cases}
v_{\varepsilon\mu}'' - \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\dfrac{\partial v_{\varepsilon\mu}}{\partial x_j}\right) = 0 & \text{dans } \omega_{\varepsilon\mu}^* \times]0,T[\\
v_{\varepsilon\mu} = 0 & \text{sur } \omega_{\varepsilon\mu}^{*,0} \times]0,T[\\
\dfrac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \dfrac{\partial v_{\varepsilon\mu}}{\partial x_j}.\nu_i = 0 & \text{sur} \underbrace{(\partial\omega_{\varepsilon\mu}^* \diagdown \omega_{\varepsilon\mu}^{*,0})}_{\gamma_{\varepsilon\mu}} \times]0,T[\\
v_{\varepsilon\mu}(0) = v_{\varepsilon\mu}^0 & \text{dans } \omega_{\varepsilon\mu}^* \\
v_{\varepsilon\mu}'(0) = v_{\varepsilon\mu}^1 & \text{dans } \omega_{\varepsilon\mu}^*
\end{cases}
$$

où $\upsilon = (\upsilon_i\,;\, 1 \le i \le 3)$ est la normale unitaire exterieure à $\partial\omega_{\varepsilon\mu}^*$ et les coefficients a_{ij} $1 \le i,j \le 3$ sont constantes indépendantes de ε et μ verifiant :

$$(1.2) \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

T est un nombre réel arbitraire strictement positif.

$$(1.3) \qquad \exists m \succ 0 : a_{ij}\xi_i\xi_j, \geqslant m\xi_i\xi_i \qquad \forall \xi = (\xi_i) \in \mathbb{R}^3$$

Pour travailler dans un domaine fixe, on fait le changement de variable suivant :

$$(1.4) \qquad \begin{cases} z_1 = \dfrac{x_1}{\varepsilon} \\ z_2 = x_2 \\ z_3 = x_3 \end{cases}$$

$$u_{\varepsilon\mu}(z_1, z_2, z_3) = v_{\varepsilon\mu}(x_1, x_2, x_3)$$

Alors le systéme (1.1) devient

$$(1.5) \qquad \begin{cases} u''_{\varepsilon\mu} - \varepsilon^{-2} a_{11} \dfrac{\partial^2 u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1^2} - \varepsilon^{-1} a_{i\ell} \dfrac{\partial^2 u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1 \partial z_\ell} - & \\ -\varepsilon^{-1} a_{k1} \dfrac{\partial^2 u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_k \partial z_1} - \varepsilon^{-1} a_{k\ell} \dfrac{\partial^2 u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_k \partial z_\ell} = 0 & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \times]0, T[\\ u_{\varepsilon\mu} = 0 & \text{sur } \Omega^{*0}_{\varepsilon\mu} \times]0, T[\\ \left(\varepsilon^{-1} a_{i1} \dfrac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} + a_{i\ell} \dfrac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell} \right) v_i = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\mu} \times]0, T[\\ u_{\varepsilon\mu}(0) = u^0_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \\ u'_{\varepsilon\mu}(0) = u^1_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \end{cases}$$

où $\Omega^*_{\varepsilon\mu}$, $\Omega^{*0}_{\varepsilon\mu}$ et $\lceil \varepsilon\mu$ sont les transformés respectives de $\omega^*_{\varepsilon\mu}, \omega^{*,0}_{\varepsilon\mu}, \gamma_{\varepsilon\mu}$.

Dans toute la suite , nous uilisons systématiquement la convention de sommation sur les indices i, j, k, ℓ lorsqu'ils sont répetés. $k, \ell = 2, 3$

Théorème (1-1) : *On suppose que les données initiales $u^0_{\varepsilon\mu}$ et $u^1_{\varepsilon\mu}$ du systéme (1.5) verifient :*

$$u^0_{\varepsilon\mu} \in V_{\varepsilon\mu} \text{ et } u'_{\varepsilon\mu} \in L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu}) \tag{1.6}$$

Alors (1.5) possède une et une seule solution $u_{\varepsilon\mu}$, et cette solution satisfait à la condition :

$$u_{\varepsilon\mu} \in C(]0, T[, V_{\varepsilon\mu}) \cap C^1\left(]0, T[, L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu})\right) \tag{1.7}$$

Preuve. On va utiliser la méthode de Hille et Yosida [3] , [9] , [11] pour plus de détails voir [10]. Pour se faire introduisons l'opérateur :

$$\begin{aligned} A_{\varepsilon\mu} : V_{\varepsilon\mu} \times L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right) &\longrightarrow \; V_{\varepsilon\mu} \times L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right) \\ (u_{\varepsilon\mu}, v_{\varepsilon\mu}) &\longrightarrow A_{\varepsilon\mu}\left(u_{\varepsilon\mu}, v_{\varepsilon\mu}\right) = \left(-v_{\varepsilon\mu}, A_{\varepsilon\mu} u_{\varepsilon\mu}\right) \end{aligned} \tag{1.8}$$

de domaine :

$$D\left(A_{\varepsilon\mu}\right) = \left\{ \left(u_{\varepsilon\mu}, v_{\varepsilon\mu}\right) \in V_{\varepsilon\mu} \times L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right), A_{\varepsilon\mu} u_{\varepsilon\mu} \in L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right) \text{ et } \frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial \nu_{A_{\varepsilon\mu}}} = 0 \right\}$$

Nous allons démontrer le théorème $(1-1)$ pour des données initiales $u^0_{\varepsilon\mu}$ et $u^1_{\varepsilon\mu}$ satisfaisant :

$$\left(u^0_{\varepsilon\mu}, u^1_{\varepsilon\mu}\right) \in D\left(A_{\varepsilon\mu}\right) \tag{1.9}$$

Posons :

$$(1.10)\qquad \begin{cases} Z_{\varepsilon\mu} = \left(u_{\varepsilon\mu}, u'_{\varepsilon\mu}\right) \\ \\ Z^0_{\varepsilon\mu} = \left(u^0_{\varepsilon\mu}, u^1_{\varepsilon\mu}\right) \end{cases}$$

Alors le système (1.5) devient :

$$(1.11)\qquad \begin{cases} Z'_{\varepsilon\mu} + A_{\varepsilon\mu}.Z_{\varepsilon\mu} = 0 \qquad \text{dans }]0;T[\\ \\ Z_{\varepsilon\mu}(0) = Z^0_{\varepsilon\mu} \end{cases}$$

En vertu du théorème de Hille et Yosida [2], il suffit de démontrer que l'opérateur $A_{\varepsilon\mu}$ est maximal monotone.

Montrons que $A_{\varepsilon\mu}$ est monotone.

$$\left(Z^1_{\varepsilon\mu}, Z^2_{\varepsilon\mu}\right) = \left(u^1_{\varepsilon\mu}, u^2_{\varepsilon\mu}\right)_{V_{\varepsilon\mu}} + \left(v^1_{\varepsilon\mu}, v^2_{\varepsilon\mu}\right)_{L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)}$$

Soit $(u_{\varepsilon\mu}, v_{\varepsilon\mu}) \in D\left(A_{\varepsilon\mu}\right)$ on a :

$$\left(A_{\varepsilon\mu}\left(u_{\varepsilon\mu}, v_{\varepsilon\mu}\right), \left(u_{\varepsilon\mu}, v_{\varepsilon\mu}\right)\right)_{V_{\varepsilon\mu}\times L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)} = \left(\left(-v_{\varepsilon\mu}, A_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu}\right), \left(u_{\varepsilon\mu}, v_{\varepsilon\mu}\right)\right)_{V_{\varepsilon\mu}\times L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)}$$

$$= -\left(v_{\varepsilon\mu}, u_{\varepsilon\mu}\right)_{V_{\varepsilon\mu}} + \left(A_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu}, v_{\varepsilon\mu}\right)_{L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)}$$

$$= -\int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} \left(A_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu}.v_{\varepsilon\mu}\right) dz + \int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} \left(A_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu}.v_{\varepsilon\mu}\right) dz = 0$$

Car :

$$\int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} \left(A_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu}.v_{\varepsilon\mu}\right) dz \quad = \quad \left(v_{\varepsilon\mu}, u_{\varepsilon\mu}\right)_{V_{\varepsilon\mu}}$$

Donc $A_{\varepsilon\mu}$ est monotone. Il reste à montrer que pour tout $(f,g) \in V_{\varepsilon\mu} \times L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)$, il existe $(u_{\varepsilon\mu}, v_{\varepsilon\mu}) \in D\left(A_{\varepsilon\mu}\right)$ tel que :

$$A_{\varepsilon\mu}\left(u_{\varepsilon\mu}, v_{\varepsilon\mu}\right) + \left(u_{\varepsilon\mu}, v_{\varepsilon\mu}\right) = (f,g) \tag{1.12}$$

En vertu de la définition de l'opérateur $A_{\varepsilon\mu}$, la relation (1.12) s'écrit encore :

$$(1.13) \qquad \left\{ \begin{array}{r} u_{\varepsilon\mu} - v_{\varepsilon\mu} = f \\ \\ A_{\varepsilon\mu} u_{\varepsilon\mu} + v_{\varepsilon\mu} = g \end{array} \right.$$

D'où l'on déduit :

$$A_{\varepsilon\mu} u_{\varepsilon\mu} + u_{\varepsilon\mu} = f + g \qquad , f + g \in L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right) \tag{1.14}$$

Grâce à la théorie des équations elliptiques, on sait que l'équation (1.14) admet une seule solution ; ayant ainsi obtenu $u_{\varepsilon\mu}$., on obtient $v_{\varepsilon\mu}$ en utilisant la première équation de (1.13).

En outre, la deuxième équation de (1.16) nous permet d'affirmer que $A_{\varepsilon\mu} u_{\varepsilon\mu} \in L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)$; donc $(u_{\varepsilon\mu}, v_{\varepsilon\mu}) \in D\left(A_{\varepsilon\mu}\right)$. Nous avons ainsi établi que l'opérateur $A_{\varepsilon\mu}$ est maximal monotone ;

donc (1.11) possède une seule solution sous l'hypothèse (1.9) et par suite le système (1.5) possède aussi une solution $u_{\varepsilon\mu}$ et cette solution vérifie :

$$\left(u_{\varepsilon\mu}, u'_{\varepsilon\mu}\right) \in C\left([0,T[\,; D\left(A_{\varepsilon\mu}\right)\right) \cap C^1\left([0,T[\,; V_{\varepsilon\mu} \times L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)\right) \tag{1.15}$$

Maintenant nous supposons que $u^0_{\varepsilon\mu}$ et $u^1_{\varepsilon\mu}$ vérifient seulement (1.6).

L'opérateur $A_{\varepsilon\mu}$ étant maximal monotone, son domaine $D\left(A_{\varepsilon\mu}\right)$, est dense dans $V_{\varepsilon\mu} \times L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)$; un simple argument de densité permet de conclure que sous l'hypothèse (1.6), le système (1.5) possède une solution unique $u_{\varepsilon\mu}$ et cette solution vérifie (1.15).

Ceci achève la preuve du théorème. ■

1–2 Premier résultat de convergence : Homogéneisation ($\varepsilon \to 0$)

Dans ce paragraphe, nous allons faire tendre ε vers zèro et nous étudierons la stabilisation du problème limité obtenu . Pour ce faire, nous aurons besoins du résultat suivant :

Lemme (1-2) [7] : *Pour tout* $\varepsilon \succ 0$, $\mu \succ 0$, *il existe un opérateur de prolongement* $Q_{\varepsilon\mu} \in L(H^k(\Omega^*_{\varepsilon\mu}), H^k(\Omega))$ $\quad (k = 0, 1)$ *verifiant :*

$$(\alpha) \qquad Q_{\varepsilon\mu} u_{\varepsilon\mu} = u_{\varepsilon\mu} \qquad \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}.$$

$$(\beta) \qquad \|Q_{\varepsilon\mu} u_{\varepsilon\mu}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u_{\varepsilon\mu}\| \; L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu})$$

$$\gamma) \qquad \|\nabla Q_{\varepsilon\mu} u_{\varepsilon\mu}\|_{(L^2(\Omega))^3} \leq C \|\nabla u_{\varepsilon\mu}\|_{(L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu})^3}$$

où C est une constante positive indépendante de ε et μ
et $\quad \Omega =]0, 1[\times]0, \ell[\times]0, L[$

Lemme (1-3)[6] : *Pour tous* $\varepsilon \succ 0$, $\mu \succ 0$, *il existe un opérateur de prolongement :*

$$P_{\varepsilon\mu} \in L(L^\infty(0, T; H^k(\Omega^*_{\varepsilon\mu}), L^\infty(0, T, H^k(\Omega)), \;\; k = 0, 1$$

tel que pour tout $\varphi \in L^\infty(0, T, H^k(\Omega^*_{\varepsilon\mu}))$ *avec* $\varphi' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu}))$ *,on ait :*

$$\begin{array}{lrcll}
i) & P_{\varepsilon\mu}\varphi & = & \varphi & \text{dans } (\Omega^*_{\varepsilon\mu})\times]0, T[\\
ii) & P_{\varepsilon\mu}\varphi' & = & (P_{\varepsilon\mu}\varphi)' & \text{dans } \quad \Omega^*_{\varepsilon\mu}\times]0, T[\\
iii) & \|P_{\varepsilon\mu}\varphi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} & \leq & C \|\varphi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu}))} & \\
iv) & \|\nabla P_{\varepsilon\mu}\varphi\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^3)} & \leq & C \|\nabla\varphi\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu})]^3)} & \\
v) & \left\|P_{\varepsilon\mu}\varphi'\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} & \leq & C \left\|\varphi'\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu}))} &
\end{array}$$

où C est une constante positive indépendante de ε et μ.

Théorème (1-4) : *On suppose que les données initiales de* (1.5) *verifient :*

$$(1.16)\qquad \begin{cases} \left\| u^0_{\varepsilon\mu} \right\|_{V_{\varepsilon\mu}} \leq \dfrac{c}{\mu} \text{ et } \tilde{u}^0_{\varepsilon\mu} \rightarrow u^0_\mu & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ \\ \left\| u^1_{\varepsilon\mu} \right\|_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu})} \leq c \text{ et } \tilde{u}^0_{\varepsilon\mu} \rightarrow u^1_\mu & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \end{cases}$$

où le $\sim$ désigne le prolongement par zèro à Ω de toute fonction définie dans $\Omega^*_{\varepsilon\mu}$ et c est une constante positive indépendante de ε et μ.
Alors quand $\varepsilon \rightarrow 0$ (avec μ fixe) on a :

$$(1.17)\qquad \begin{cases} P_{\varepsilon\mu} u_{\varepsilon\mu} \rightarrow u_\mu & \text{dans } L^\infty(0,T;H^1(\Omega) \text{ faible}* \\ \\ P_{\varepsilon\mu} u'_{\varepsilon\mu} \rightarrow u'_\mu & \text{dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega) \text{ faible}* \end{cases}$$

où la fonction limite u_μ est telle que :

$$u_\mu \text{ est indépendante de } z_1$$

et vérifie les système homogéneisé

$$(1.19)\qquad \begin{cases} \left| Y^*_\mu \right| u''_\mu - \dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q^{k\ell}_\mu \dfrac{\partial u_\mu}{\partial z_\ell} \right) = 0 & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\times]0,T[\\ u_\mu = 0 & \text{sur } \partial(]0,\ell[\times]0,L[)\times]0,T[\\ u_\mu(0) = \dfrac{u^0_\mu}{\left| y^*_\mu \right|} & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\\ u'_\mu(0) = \dfrac{u^{1,*}_\mu}{\left| Y^*_\mu \right|} & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\end{cases}$$

avec : $\left|Y_\mu^*\right| = \mu(6-2\mu)$

$$u_\mu^{1,*} = \int_0^1 u_\mu^1 dz_1 \tag{1.20}$$

et les coefficients homogénèisés $q_\mu^{k\ell}$ sont donnés par :

$$q_\mu^{k\ell} = \int_{Y_\mu^*} a_{ij} \frac{\partial(-X_\mu^k + y_k)}{\partial y_i} . \frac{\partial(-X_\mu^\ell + y_\ell)}{\partial y_j} dy \tag{1.21}$$

où les fonctions $X_\mu^{k\ell}$ sont solutions du systéme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_{ij} \dfrac{\partial^2(-X_\mu^k + y_k)}{\partial y_i \partial y_j} = 0 & \textit{dans } Y_\mu^* \\ \\ a_{ij} \dfrac{\partial(-X_\mu^k + y_k)}{\partial y_j} ni = 0 & \textit{sur } \partial_N Y_\mu^* \\ \\ X_\mu^k \text{ est périodiquement } y_2 \text{ et } y_3 \text{ et de moyenne nulle} & \end{array} \right. \tag{1.22}$$

Preuve. On commence par montrer qu'il ya conservation de l'énergie du systéme (1.5).

Multiplions $(1.5)_1$ par $u'_{\varepsilon\mu}$ et intérgrons par parties sur $\Omega_{\varepsilon\mu}^* \times]0, T[$; il vient :

$$\left[\int_0^T \left(\int_{\Omega_{\varepsilon\mu}^*} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u'^2_{\varepsilon\mu}) dz \right) dt + \int_0^T \left(\int_{\Omega_{\varepsilon\mu}^*} \left(\varepsilon^{-2} a_{11} \frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} \frac{\partial u'_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \varepsilon^{-1} a_{1\ell} \frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} \frac{\partial u'_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell} + \varepsilon^{-1} a_{k1} \frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_k} . \frac{\partial u'_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} + a_{k\ell} \frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_k} . \frac{\partial u'_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell} \right) dz \right) dt \right]$$
$$= \quad 0$$

Le terme sur le bord est nul grâce à $(1.5)_2$et $(1.5)_3$ et la symetrie $a_{ij} = a_{ji}$. donne :

$$\int_0^T \tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} u'^2_{\varepsilon\mu} dz\right) + \int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} \varepsilon^{-2} a_{11}\left(\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1}\right)^2 dz + \right.$$

$$\left. + \int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} 2\varepsilon^{-1} a_{1\ell}\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1}.\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell} dz + \int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}}\left(a_{k\ell}\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_k}\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell}\right) dz\right] dt = 0$$

$$\int_0^T \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(E(t))dt \quad = \quad 0 \Longrightarrow E(T) = E(0) \tag{1.23}$$

Alors on dit qu'il y a conservation de l'énergie :

$$E(0) \quad = \quad \frac{1}{2}\left[\left\| u^1_{\varepsilon\mu}\right\|^2_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu})} + \left\| u^0_{\varepsilon\mu}\right\|^2_{V_{\varepsilon\mu}}\right] \tag{1.24}$$

$$E(T) \quad = \quad \int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}}\left[u'^2_{\varepsilon\mu} + \varepsilon^{-2}a_{11}\left(\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1}\right)^2 + 2\varepsilon^{-1}a_{1\ell}\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1}.\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell} + \left(a_{k\ell}\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_k}\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell}\right)\right] dz$$

où :

$$\| \ u_{\varepsilon\mu} \ \|_{\varepsilon\mu} \quad = \quad \int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}}\left(\varepsilon^{-2}a_{11}\left(\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1}\right)^2 + 2\varepsilon^{-1}a_{1\ell}\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1}.\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell} + q_{k\ell}\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_k}.\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell}\right)$$

On deduit de (1.23) et (1.24) que :

$$(1.25) \qquad \begin{cases} \left\| u'_{\varepsilon\mu} \right\|_{(L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)} \leq \dfrac{c}{\mu} \\ \\ \left\| u_{\varepsilon\mu} \right\|_{(L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)} \leq \dfrac{c}{\mu} \end{cases}$$

où c est une constante indépendante de ε et μ..

Grâce à (1.3) et (1.25) , on oboutit à :

$$(1.26) \qquad \begin{cases} \left\| \varepsilon^{-1} \dfrac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} \right\|^2_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu})} \leq \dfrac{c}{\mu} \\ \\ \left\| \dfrac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_2} \right\|^2_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu})} \leq \dfrac{c}{\mu} \\ \\ \left\| \dfrac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_3} \right\|^2_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu})} \leq \dfrac{c}{\mu} \end{cases}$$

d'où :

$$\left\| \nabla u_{\varepsilon\mu} \right\|_{(L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu}))^2} \quad \leq \quad \frac{c}{\mu} \tag{1.27}$$

qui par l'inégalité de Poincaré (avec une constante ne dépendant que du diamètre de Ω) donne :

$$\left\| u_{\varepsilon\mu} \right\|_{H'(\Omega^*_{\varepsilon\mu})} \quad \leq \quad \frac{c}{\mu}$$

De (1.25) et (1.27) découle :

$$\begin{cases} \left\| u'_{\varepsilon\mu} \right\|_{(L^\infty(0,T;L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu}))} \leq \dfrac{c}{\mu} \\ \\ \left\| u_{\varepsilon\mu} \right\|_{L^\infty(0,T;(H'(\Omega^*_{\varepsilon\mu}))} \leq \dfrac{c}{\mu} \end{cases}$$

Ceci permet d'appliquer le lemme (1.3) pour avoir à une sous-suite prés les convergences suivantes :

$$(1.28) \qquad \begin{cases} P_{\varepsilon\mu} u_{\varepsilon\mu} \to u_\mu & \text{dans } L^\infty_{(0,T,H'(\mu)} & \text{faible } * \\ \\ P_{\varepsilon\mu} u'_{\varepsilon\mu} \to u'_\mu & \text{dans } L^\infty_{(0,T,L^2(\Omega)} & \text{faible}* \end{cases}$$

où u_μ est indépendane de z_1 (voir [4] , [5])

Nous avons ainsi démontré (1.17),(1.18) et la deuxième équation de (1.19) par une sous-suite exraite de $\{\varepsilon\}$.

Il nous reste à montrer que u_μ vérifie les autres équations de (1.19).

Posons :

$$\xi^i_{\varepsilon\mu} \;=\; \varepsilon^{-1} a_{i1} \frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} + a_{ik} \frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_k} \qquad i = 1, 2, 3$$

En vertu de (1.25) :

$$\left\| \xi^i_{\varepsilon\mu} \right\|_{L^\infty_{(0,T;L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu}))}} \;\leq\; \frac{c}{\mu}$$

de sorte qu'à une sous-suite de $\{\varepsilon\}$, on a :

$$\tilde{\xi}^i_{\varepsilon\mu} \quad \rightarrow \quad \xi^i_\mu \qquad \text{dans } L^\infty_{(0,T;L^2(\Omega))} \text{ faible } *$$

ξ^i_μ vérifie le système :

$$\begin{cases} u''_{\varepsilon\mu} - \varepsilon^{-1}\dfrac{\partial \xi^1_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} - \dfrac{\partial \xi^2_{\varepsilon\mu}}{\partial z_2} - \dfrac{\partial \xi^3_{\varepsilon\mu}}{\partial z_3} = 0 & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}\times]0,T[\\ \\ \xi^1_{\varepsilon\mu n_1} = \xi^2_{\varepsilon\mu n_2} = \xi^3_{\varepsilon\mu n_3} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\mu}\times]0,T[\end{cases}$$

Soit encore :

$$(1.29) \qquad \begin{cases} (P_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu})''\, X_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} - \varepsilon^{-1}\dfrac{\partial \widetilde{\xi}^1_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} - \dfrac{\partial \widetilde{\xi}^2_{\varepsilon\mu}}{\partial z_2} - \dfrac{\partial \widetilde{\xi}^3_{\varepsilon\mu}}{\partial z_3} = 0 & \text{dans } \Omega\times]0,T[\\ \\ \tilde{\xi}^1_{\varepsilon\mu}.n_1 = \tilde{\xi}^2_{\varepsilon\mu}.n_2 = \tilde{\xi}^3_{\varepsilon\mu}.n_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega\setminus(]0,1[\times\{0\})\times]0,T[\end{cases}$$

Maintenant, si l'on prend $\varphi \in D(]0,\ell[\times]0,L[$ et $v \in D\,(]0,T[)$,et que l'on multiplie $(1.29)_1$ par $\varphi.v$ et que l'on intégre par parties le premier terme par rapport à t et le second par rapport à z ,on montre que :

$$(1.30) \qquad \int_0^T \left(\int_\Omega P_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu}.\varphi.v''.\chi_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}}\, dz \right) dt + \int_0^T \int_\Omega \left(\tilde{\xi}^2_{\varepsilon\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial z_2} + \tilde{\xi}^3_{\varepsilon\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial z_3} \right) v dz dt = 0$$

où $\chi_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}}$ désigne la fonction caractéristique de $\Omega^*_{\varepsilon\mu}$.

On se rappelant (voir [2]) la convergence :

$$\chi_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} \quad \rightarrow \quad |Y^*_\mu| \quad \text{dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible} *$$

Le passage à la limite dans (1.30) quand $\varepsilon \to 0$,donne :

$$\int_0^T \left(\int_\Omega u_\mu.\varphi.v''. \left|Y_\mu^*\right| dz \right) dt + \int_0^T \left(\int_\Omega \xi_\mu^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z_2} + \xi_\mu^3 \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} dz \right) dt \quad = \quad 0$$

d'où :

$$\int_0^T \int_\Omega \xi_\mu^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z_2} + \xi_\mu^3 \frac{\partial \varphi}{\partial z_3})dz)dt \quad = \quad - \left|Y_\mu^*\right| \int_0^T (\int_\Omega u_\mu.\varphi.v'')dz)dt = 0$$

d'où :

$$\begin{cases} \int_0^T \left(\int_0^L \left(\left(\int_0^\ell \int_0^1 \left(\xi_\mu^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z_2} + \xi_\mu^3 \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} \right) dz_1 \right) dz_2 \right) dz_3 \right) v dt \\ \\ \qquad = - \left|Y_\mu^*\right| \int_0^T \left(\int_0^L \int_0^\ell \int_0^1 u_\mu.\varphi.v'' dz \right) dt \end{cases}$$

u_μ dépend seulement de z_2 et z_3.le système limite s'ecrit alors sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial z_k} \int_0^1 \xi_\mu^k dz_1 \quad = \quad \left|Y_\mu^*\right| u_\mu''$$

$$(1.31) \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z_2} \left(\int_0^1 \xi_\mu^2 dz_1 \right) + \frac{\partial}{\partial z_3} \left(\int_0^1 \xi_\mu^3 dz_1 \right) = \left|Y_\mu^*\right| u_\mu'' \\ \\ \frac{\partial}{\partial z_\ell} \left(\int_0^1 \xi_\mu^\ell dz_1 \right) = \left|Y_\mu^*\right| u_\mu'' \end{cases}$$

Maintenant, nous allons identifier les termes : $\int_0^1 \xi_\mu^2 dz_1$ et $\int_0^1 \xi_\mu^3 dz_1$ en fonction de u_μ,

ou le terme : $\int_0^1 \xi_\mu^k dz_1; \quad k = 2, 3$

Posons :

$$\begin{cases} \omega^k(y) = -X_\mu^k(y) + y_k \\ \\ \omega_\varepsilon^k(z) = \varepsilon Q\omega^k\left(z_1, \dfrac{z_2}{\varepsilon}, \dfrac{z_3}{\varepsilon}\right) \end{cases}$$

où X_μ^kest définie par (1.22) et Q est le prolongement à Y par le lemme (1.2) pour le domaine Y_μ^* (voir pour plus de détails [7])

Par des calculs simples, on montre (Voir par exemple [6] , [7]) que l'on a listimation suivante :

$$\begin{cases} \left\|\nabla X_\mu^k\right\|_{\left(L^2\left(Y_\mu^*\right)\right)^3} \leq c \ \ (c \text{ indépendante de } \varepsilon) \\ \left\|X_\mu^k\right\|_{H^1\left(Y_\mu^*\right)} \leq c \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} \left\|\omega^k\right\|_{H^1\left(Y_\mu^*\right)} \leq c \\ \left\|\omega_\varepsilon^k\right\|_{H^1(Y)} \leq c \end{cases}$$

On peut donc extraire une sous-suite telle que :

(1.32) $$\omega_\varepsilon^k \rightharpoonup z_k \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ faible}$$

Introduisons :

$$\begin{cases} \eta_i^k(y) = a_{ji}\dfrac{\partial \omega^k}{\partial y_j} \\ \eta_{i\varepsilon}^k(z) = \eta_i^k\left(z_1, \dfrac{z_2}{\varepsilon}, \dfrac{z_3}{\varepsilon}\right) \end{cases}$$

définies respectivement par :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \eta_i^k}{\partial y_i} = 0 & \text{dans } Y_\mu^* \\ \eta_i^k n_i = 0 & \text{sur } \partial_N Y_\mu^* \\ \eta_i^k \text{ périodique en } y_2 \text{ et } y_3 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\varepsilon^{-1}\dfrac{\partial \eta_1^k \varepsilon}{\partial z_1} - \dfrac{\partial \eta_{2\varepsilon}^k}{\partial z_2} - \dfrac{\partial \eta_{3\varepsilon}^k}{\partial z_3} = 0 & \text{sur } \Omega_{\varepsilon\mu}^* \\ \\ \eta_{i\varepsilon}^k n_i = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\mu} \end{cases}$$

On utilisant la même technique de prolongement appliquée à ξ_ε^i, on en deduit :

$$\begin{cases} -\varepsilon^{-1}\dfrac{\partial \widetilde{\eta}_{1\varepsilon}^k}{\partial z_1} - \dfrac{\partial \widetilde{\eta}_{2\varepsilon}^k}{\partial z_2} - \dfrac{\partial \widetilde{\eta}_{3\varepsilon}^k}{\partial z_3} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \\ \widetilde{\eta}_{i\varepsilon}^k n_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega\diagdown(]0,1[\times]0,\ell[\times\{0\}) \end{cases} \tag{1.33}$$

On vérifie, sans peine, que l'on a les estimations

$$\begin{cases} \left\|\eta_i^k\right\|_{L^2\left(Y_\mu^*\right)} \leq c \\ \\ \left\|\widetilde{\eta}_{i\varepsilon}^k\right\|_{L^2(\Omega)} \leq c \end{cases}$$

On a donc la convergence (à une sous-suite prés)

$$\widetilde{\eta}_{i\varepsilon}^k \rightarrow M\left(\widetilde{\eta}_i^k\right) \qquad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \tag{1.34}$$

Soient $v \in D\,(]0,T[, \varphi \in D\,(]0,\ell[\times]0,L[))$, multiplions la première équation de (1.29) par $v.\varphi\omega_\varepsilon^k$ et inetgrons par parties sur $\Omega\times]0,T[$; il vient :

$$\begin{cases} \int_0^T \int_\Omega (P_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu})'' X_{\Omega_{\varepsilon\mu}^*}.v.\varphi.\omega_\varepsilon^k dz)dt + \displaystyle\int_0^T v\left(\varepsilon^{-1}\int_\Omega \widetilde{\xi}_{\varepsilon\mu}^1.\varphi\frac{\partial\omega_\varepsilon^k}{\partial z_1}dz\right)dt \\ \\ \quad + \displaystyle\int_0^T v\int_\Omega\left(\widetilde{\xi}_{\varepsilon\mu}^2.\varphi\frac{\partial\omega_\varepsilon^k}{\partial z_2}dz\right)dt + \int_0^T v\int_\Omega\left(\widetilde{\xi}_{\varepsilon\mu}^3.\varphi\frac{\partial\omega_\varepsilon^k}{\partial z_3}dz\right)dt \\ \\ \quad + \displaystyle\int_0^T v\int_\Omega\left(\widetilde{\xi}_{\varepsilon\mu}^2.\frac{\partial\varphi}{\partial z_2}\omega_\varepsilon^k dz\right)dt + \int_0^T v\int_\Omega\left(\widetilde{\xi}_{\varepsilon\mu}^3.\omega_\varepsilon^k\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}dz\right)dt = 0 \end{cases}$$

Multiplions , maintenant $(1.33)_1$ par $v.\varphi.P_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu}$ et integrons par parties sur $\Omega\times]0,T[$, il vient :

$$\begin{cases} \int_0^T v\left(\varepsilon^{-1}\int_\Omega \tilde{\eta}_{1\varepsilon}^k\varphi\frac{\partial P_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1}dz\right)dt+\int_0^T v\left(\int_\Omega \tilde{\eta}_{2\varepsilon}^k\varphi\frac{\partial P_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_2}dz\right)dt+ \\ \int_0^T v\left(\int_\Omega \tilde{\eta}_{3\varepsilon}^k\varphi\frac{\partial P_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_3}dz\right)dt+\int_0^T v\left(\int_\Omega \tilde{\eta}_{2\varepsilon}^k\frac{\partial\varphi}{\partial z_2}.P_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu}dz\right)dt \\ +\int_0^T v\left(\int_\Omega \tilde{\eta}_{3\varepsilon}^k\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}.P_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu}dz\right)dzdt=0 \end{cases}$$

Par soustraction , on a alors :

$$\begin{cases} \int_0^T v\int_\Omega\left(\xi_{\varepsilon\mu}^2.\frac{\partial\varphi}{\partial z_2}\omega_\varepsilon^k dz\right)dt+\int_0^T v\int_\Omega\left(\xi_{\varepsilon\mu}^3.\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}\omega_\varepsilon^k dz\right)dt \\ -\int_0^T v\int_\Omega\left(\tilde{\eta}_{2\varepsilon}^k.\frac{\partial\varphi}{\partial z_2}P_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu}dz\right)dt-\int_0^T v\int_\Omega\left(\tilde{\eta}_{3\varepsilon}^k.\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}P_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu}dz\right)dt \\ =-\int_0^T\left(\int_\Omega X_{\Omega\varepsilon\mu}^*.v''.P_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu}.\varphi w_\varepsilon^k dz\right)dt \end{cases}$$

D'où en passant à la limte avec ε tend vers zéro , on obtient :

$$\begin{cases} \int_0^T v\int_\Omega\left(\xi_\mu^2.\frac{\partial\varphi}{\partial z_2}z_k dz\right)dt+\int_0^T v\int_\Omega\left(\xi_\mu^3.\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}z_k dz\right)dt- \\ -\int_0^T v\left(\int_\Omega M\left(\tilde{\eta}_2^k\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z_2}u_\mu dz\right)dt-\int_0^T v\left(\int_\Omega m\left(\tilde{\eta}_3^k\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}u_\mu dz\right)dt \\ =-\int_0^T\int_\Omega\left|Y_\mu^*\right|v''.u_\mu.\varphi.z_k dzdt \end{cases}$$

Intégrons par parties dans cette égalité il vient

$$\int_0^1 \xi_\mu^2 dz_1 + \int_0^1 \xi_\mu^3 dz_1 = M\left(\tilde{\eta}_2^k\right)\frac{\partial u_\mu}{\partial z_2} + M\left(\tilde{\eta}_3^k\right)\frac{\partial u_\mu}{\partial z_3}$$

$$\int_0^1 \xi_\mu^\ell dz_1 = M\left(\tilde{\eta}_\ell^k\right)\frac{\partial u_\mu}{\partial z_\ell} \qquad \ell = 2,3$$

En remplaçant cette dernière dans (1.31), on déduit :

$$\frac{\partial}{\partial z_\ell}\left(M\left(\tilde{\eta}_\ell^k\right).\frac{\partial u_\mu}{\partial z_\ell}\right) = \left|Y_\mu^*\right| u_\mu''$$

En posant :

$$q_\mu^{k\ell} = \int_{Y_\mu^*} \eta_\ell^k dy = \int_{Y_\mu^*} a_{ij}\frac{\partial\left(-X_\mu^k + y_k\right)}{\partial y_i}.\frac{\partial\left(-X_\mu^\ell + y_\ell\right)}{\partial y_j} dy$$

on retrouve l'équation $(1.19)_1$

Pour terminer la preuve du théorème $(1-4)$, il reste à montrer que, les deux dernières équations de (1.19) sont vérifiées.

Soients $\varphi \in D]0,\ell[\times]0,L[, v \in D]0,T[$ telque : $v(T) = 0$.

Multiplions la première équation de (1.29) par $\varphi.v$ et integrons par parties sur $\Omega\times]0,T[$; il vient :

$$(1.35) \qquad -\int_0^T\left(\int_\Omega \tilde{u}'_{\varepsilon\mu}.v'\varphi dz\right)dt - \int_\Omega \tilde{u}'_{\varepsilon\mu}(0).v(0)\varphi dz + \int_0^T\left(\int_\Omega \tilde{\xi}_\varepsilon^\ell \frac{\partial\varphi}{\partial z_\ell}.vdz\right)dt = 0$$

Où on va passer à la limite, pour se faire on aura besoin de la limite de $\tilde{u}'_{\varepsilon\mu}$,qui existe grâce aux hypothèses (1.16) .

Soient $\psi \in D(\Omega)$, $h \in D(]0,T[)$:

$$(1.36) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^T \left(\int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} u''_{\varepsilon\mu} \psi h dz \right) dt = \int_0^T \left(\int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} u_{\varepsilon\mu} \psi h'' dz \right) dt \\ \displaystyle\qquad = \int_0^T \left(\int_{\Omega} P_{\varepsilon\mu} u_{\varepsilon\mu} . X_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} . \psi h'' dz \right) dt \end{cases}$$

Par ailleurs

$$(1.37) \qquad \begin{aligned} \int_0^T \left(\int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} u''_{\varepsilon\mu} \psi h dz \right) dt &= \int_0^T \left(\int_{\Omega} \tilde{u}''_{\varepsilon\mu} \psi h dz \right) dt \\ &= - \int_0^T \left(\int_{\Omega} \tilde{u}'_{\varepsilon\mu} \psi h' dz \right) dt \end{aligned}$$

De (1.36) et (1.37) on a :

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} P_{\varepsilon\mu} u_{\varepsilon\mu} . X_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} \psi h'' dz \right) dt \quad = \quad - \int_0^T \left(\int_{\Omega} \tilde{u}'_{\varepsilon\mu} \psi h' dz \right) dt$$

Ce qui donne à la lmite :

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} |Y^*_\mu| . u_\mu . \psi h'' dz \right) dt \quad = \quad - \int_0^T \left(\int_{\Omega} \tilde{u}'_{\varepsilon\mu} \psi h' dz \right) dt$$

Une intégration par parties implique que l'on a :

$$- \int_0^T \left(\int_{\Omega} |Y^*_\mu| . u'_\mu . \psi h' dz \right) dt \quad = \quad - \int_0^T \left(\int_{\Omega} \tilde{u}'_\mu . \psi h' dz \right) dt$$

d'où :

$$\left(\tilde{u}'_{\varepsilon\mu} \to \left|Y^*_\mu\right| u'_\mu \quad \text{dans} \quad L^\infty\left(0, T, L^2(\Omega)\right) \text{ faible} *\right.$$

Passant alors à la limite dans (1.35), il vient :

$$-\int_0^T \left(\int_\Omega \left|Y^*_\mu\right| u'_\mu v'.\varphi dz\right) dt - \int_\Omega u^1_\mu v\left(0\right).\varphi dz + \int_0^T \left(\int_\Omega \xi^\ell_\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z_\ell} v dz\right) dt \;=\; 0$$

Intégrant par parties sur $\Omega \times]0, T[$, on obtient :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T \int_\Omega \left|Y^*_\mu\right| u''_\mu v.\varphi dz dt + \int_\Omega \left|Y^*_\mu\right| u'_\mu\left(0\right) v\left(0\right).\varphi dz \\ \displaystyle -\int_\Omega u^1_\mu v\left(0\right)\varphi dz - \int_0^T v \int_0^L \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial z_\ell}\left(\int_0^1 \xi^\ell_\mu dz_1\right) \varphi dz_2 dz_3 = 0 \end{cases}$$

En vertu de (1.31), on a :

$$\int_\Omega \left|Y^*_\mu\right| u'_\mu\left(0\right) v\left(0\right).\varphi dz - \int_\Omega u^1_\mu.v\left(0\right).\varphi dz \;=\; 0$$

d'où :

$$\left|Y^*_\mu\right| \int_0^L \left(\int_0^\ell \left(u'_\mu\left(0\right)\right)\varphi dz_2\right) dz_3 \;=\; \int_\Omega u^1_\mu \varphi dz = \int_0^L \left(\int_0^\ell \left(\int_0^1 u^1_\mu dz_1\right)\varphi dz_2\right) dz_3$$

d'où l'on déduit aisement :.

$$u'_{\mu}(0) \quad = \quad \frac{1}{|Y_{\mu}^{*}|}\int_{0}^{1} u_{\mu}^{1} dz_{1}$$

Maintenant, montrons que la dernière équation de (1.19), est verifiée.

Soient $\varphi \in D\left(]0,\ell[\times]0,L[\right., v \in D]0,T[)$ tel que : $v^{'}(T) = 0$ et $v^{'}(0) \neq 0$.

Multiplions $(1.29)_1$ par $\varphi.v$ et intégrons par parties, par rapport à t deux fois.

On obtient :

$$\int_{0}^{T}\int_{\Omega}\tilde{u}_{\varepsilon\mu}v''\varphi dzdt + \int_{\Omega}\tilde{u}_{\varepsilon\mu}(0)\,v'(0)\,\varphi dz + \int_{0}^{T}\int_{\Omega}\tilde{\xi}_{\varepsilon}^{\ell}\frac{\partial\varphi}{\partial z_{\ell}}vdzdt \quad = \quad 0$$

$$(1.38) \qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{0}^{T}\int_{\Omega} P_{\varepsilon\mu}u_{_{\varepsilon\mu}}X_{\Omega_{\varepsilon\mu}^{*}}.v''\varphi dzdt + \int_{\Omega} X_{\Omega_{\varepsilon\mu}^{*}}P_{\varepsilon\mu}u_{_{\varepsilon\mu}}(0)\,\varphi v'(0)\,dz + \\ \qquad\qquad \displaystyle\int_{0}^{T}\left(\int_{\Omega}\tilde{\xi}_{\varepsilon}^{\ell}\frac{\partial\varphi}{\partial z_{\ell}}vdz\right)dt = 0 \end{array}\right.$$

Pour y passer à la limite , on remarque que :

$$P_{\varepsilon\mu}u_{_{\varepsilon\mu}}(0) \quad = \quad \varphi_{\varepsilon\mu}u^{0}_{_{\varepsilon\mu}}$$

où $Q_{\varepsilon\mu}$ est le prolongement donné par le lemme (1.2)

or :

$$Q_{\varepsilon\mu}u^{0}_{_{\varepsilon\mu}}.X_{\Omega_{\varepsilon\mu}^{*}} \quad = \quad \tilde{u}^{0}_{_{\varepsilon\mu}}$$

Alors par le théorème $(1-4)$, on a la convrgence :

$$\tilde{u}^0_{\varepsilon\mu} \quad \rightarrow \quad u^0_{\mu} \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible}$$

par conséquant :

$$Q_{\varepsilon\mu} u^0_{\varepsilon\mu} \quad \rightarrow \quad \frac{u^0_{\mu}}{\left|Y^*_\mu\right|} \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible}$$

En passant à la limite dans (1.38), on obtient :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T \left(\int_\Omega \left|Y^*_\mu\right| u_{\mu} v'' \varphi dz\right) dt + \int_\Omega \left|Y^*_\mu\right| \frac{u^0_{\mu}}{\left|Y^*_\mu\right|} . \varphi v'(0)\, dz + \\ \displaystyle + \int_0^T \left(\int_\Omega \xi^\ell_\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z_\ell} v dz\right) dt = 0 \end{cases}$$

On procédant comme au paravant, on a :

$$(1.39) \qquad -\int_\Omega \left|Y^*_\mu\right| u_{\mu}(0)\, v'(0)\, \varphi dz + \int_\Omega u^0_{\mu} \varphi v'(0)\, dz = 0$$

avec u^0_{μ} dépend uniquement de z_2 et z_3.

Les mêmes calculs que pour (1.26) ..... (1.30), donnent :

$$\begin{cases} \left\| u^0_{\varepsilon\mu} \right\|_{H'\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)} \leq c \\ \left\| \tilde{u}^0_{\varepsilon\mu} \right\|_{H'(\Omega)} \leq c \\ \left\| \dfrac{\partial u^0_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} \right\| \leq c.\varepsilon \end{cases}$$

par conséquent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{u}^0_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} \rightarrow \dfrac{u^0_\mu}{\partial z_1} \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ \\ \left\| \dfrac{\partial u^0_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} \right\| \rightarrow 0 \end{cases}$$

d'où

$$\left\| \frac{\partial u^0_\mu}{\partial z_1} \right\| = 0 \Longrightarrow \frac{\partial u^0_\mu}{\partial z_1} = 0$$

Finalement (1.39), donne :

$$u_\mu(0) = \frac{u^0_\mu}{|Y^*_\mu|}$$

Ceci acheve la démonstration. ■

Chapitre 2 :

Etude de la contrôlabilité exacte et de la convergence faible des contrôles

2–1 Position du problème

On considère le domaine perforé périodiquement de période ε (figure : 1).

$\omega_\varepsilon =]0, \varepsilon[\times]0, \ell[\times]0, L[$ est un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^3$.

$Y =]0, 1[\times]0, 2[\times]0, 2[$ (figure :2).

$\omega^*_{\varepsilon\mu}$ $\left(\text{resp } Y^*_\mu\right)$ la partie de ω_ε (resp Y) occupée par le matériau , μ désigne l'épaisseur des barres.

ε et μ sont deux petits paramètres strictement positifs destinés à tendre vers zéro, l'un aprés l'autre.

On considère le système suivant :

$$(2.1) \qquad \begin{cases} \left[u''_{\varepsilon\mu} - \varepsilon^{-2} a_{11} \dfrac{\partial^2 \mu_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1^2} - \varepsilon^{-1} a_{1\ell} \dfrac{\partial^2 \mu_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1 \partial z_\ell} - \varepsilon^{-1} a_{k1} \dfrac{\partial^2 \mu_{\varepsilon\mu}}{\partial z_k \partial z_1} \right. & \\ \left. - a_{k\ell} \dfrac{\partial^2 \mu_{\varepsilon\mu}}{\partial z_k \partial z_\ell} \right] = v_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \times]0, T[\\ u_{\varepsilon\mu} = 0 & \text{sur } \Omega^{*,0}_{\varepsilon\mu} \times]0, T[\\ \left(\varepsilon^{-1} a_{i1} \dfrac{\partial \mu_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} + a_{i\ell} \dfrac{\partial \mu_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell}\right) v_i = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\mu} \times]0, T[\\ u_{\varepsilon\mu}(0) = u^0_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \\ u'_{\varepsilon\mu}(0) = u^1_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \end{cases}$$

où $v_{\varepsilon\mu}$ est le contrôle que nous nous proposons de déterminer de manière à avoir, si $u_{\varepsilon\mu}$ est la solution de (1.5),

$$u_{\varepsilon\mu}(T) = u'_{\varepsilon\mu}(T) = 0 \qquad \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}.$$

Nous allons tout d'abord montrer qu'un tel contrôle existe et ensuite nous allons etudier son comportement lorsque ε tend vers zéro.

La suite de notre travail se présente comme suit :

2-**2-Etude de la contrôlabité exacte de (2.1)**

2-**3-Convergence faible des contrôles**

2–2 Contrôlabité exacte de (2.1) :

Cette étude est guidée par la méthode d'unicité hilbertienne, HUM, introduite par J. L.Lions dans [11] .

Prenons :

$$\left\{u^0_{\varepsilon\mu}, u^1_{\varepsilon\mu}\right\} \text{ dans } V_{\varepsilon\mu} \times L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)$$

Où $V_{\varepsilon\mu}$ est l'espace :

$$V_{\varepsilon\mu} = \left\{u_{\varepsilon\mu} \in H^1\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right); u_{\varepsilon\mu} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right\}$$

muni de la norme :

$$\|\varphi\|_{V_{\varepsilon\mu}} = \|\nabla\varphi\|_{(L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu}))^3}, \ \forall\varphi \in V_{\varepsilon\mu}$$

Considèrons le couple $\left\{\varphi_{\varepsilon\mu}, \psi_{\varepsilon\mu}\right\}$, où $\varphi_{\varepsilon\mu}$ satisfait le système :

$$(2.2) \qquad \begin{cases} \varphi''_{\varepsilon\mu} + A_{\varepsilon\mu}\varphi_{\varepsilon\mu} = 0 & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \times]0,T[\\ \varphi_{\varepsilon\mu} = 0 & \text{dans } \Omega^{*,0}_{\varepsilon\mu} \times]0,T[\\ \dfrac{\partial\varphi_{\varepsilon\mu}}{\partial\upsilon_{A_{\varepsilon\mu}}} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\mu} \times]0,T[\\ \varphi_{\varepsilon\mu}(0) = \varphi^0_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \\ \varphi'_{\varepsilon\mu}(0) = \varphi^1_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \end{cases}$$

alors que $\psi_{\varepsilon\mu}$ verifie :

$$(2.3)\quad \begin{cases} \psi''_{\varepsilon\mu} + A_{\varepsilon\mu}\psi_{\varepsilon\mu} = -\varphi_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \times]0,T[\\ \psi_{\varepsilon\mu} = 0 & \text{dans } \Omega^{*,0}_{\varepsilon\mu} \times]0,T[\\ \frac{\partial \psi_{\varepsilon\mu}}{\partial \upsilon_{A_{\varepsilon\mu}}} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\mu} \times]0,T[\\ \psi_{\varepsilon\mu}(T) = 0 & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \\ \psi'_{\varepsilon\mu}(T) = 0 & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \end{cases}$$

où l'opérateur $A_{\varepsilon\mu}$ est :

$$A_{\varepsilon\mu} = -\varepsilon^{-2} a_{11} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} - \varepsilon^{-1} a_{1\ell} \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_\ell} - \varepsilon^{-1} a_{k1} \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial z_1} - a_{k\ell} \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial z_\ell}$$

La solution $\varphi_{\varepsilon\mu}$ de (2.2) est caractérisée par le lemme suivant de [11] (Voir aussi [10]) :

Lemme (2-2) : *Lorsque* $\left\{\varphi^0_{\varepsilon\mu}, \varphi^1_{\varepsilon\mu}\right\}$ *appartient à* $L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right) \times V'_{\varepsilon\mu}$*, la solution* $\varphi_{\varepsilon\mu}$ *de* (2.2) *est telle que :*

$$\varphi_{\varepsilon\mu} \in C\left([0,T], L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)\right) \cap C\left([0,T]; V'_{\varepsilon\mu}\right)$$

de plus, il existe deux constantes strictement positives c_1 *et* c_2*, independantes de* ε *telles que :*

$$(2.4)\quad \begin{aligned} c_1 \left[\left\|\varphi^0_{\varepsilon\mu}\right\|^2_{L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)} + \left\|\varphi^1_{\varepsilon\mu}\right\|^2_{V'_{\varepsilon\mu}}\right] &\le \left\|\varphi_{\varepsilon\mu}\right\|^2_{L^2\left(0,T,L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)\right.} \\ &\le c_2 \left[\left\|\varphi^0_{\varepsilon\mu}\right\|^2_{L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)} + \left\|\varphi^1_{\varepsilon\mu}\right\|^2_{V'_{\varepsilon\mu}}\right] \end{aligned}$$

Démonstration **:** Voir [2] et le lemme (3.3)

On peut maintenant formuler le résultat de controlabilité exacte.

Théorème (2-3) :*Pour tout $T > 0$ et pour tout couple de données initiales du système* (2.1) *verifiant :*

$$\left\{u^0_{\varepsilon\mu}, u^1_{\varepsilon\mu}\right\} \in V^{'}_{\varepsilon\mu} \times L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right) \tag{2.5}$$

il existe un contrôle interne :

$$v_{\varepsilon\mu} \in L^2(0, T, L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right) \tag{2.6}$$

tel que si $u_{\varepsilon\mu}$ est la solution de (2.1), alors $u_{\varepsilon\mu}$ vérifie :

$$u_{\varepsilon\mu}(T) = u^{'}_{\varepsilon\mu}(T) = 0 \ \text{ dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}$$

Preuve. Posons :

$$\left\{\begin{array}{l} F_{\varepsilon\mu} = L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right) \times V^{'}_{\varepsilon\mu} \\ F^{'}_{\varepsilon\mu} = L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right) \times V_{\varepsilon\mu}, \end{array}\right. \tag{2.7}$$

et définissons l'application suivante :

$$\Lambda_{\varepsilon\mu} : F_{\varepsilon\mu} \to F^{'}_{\varepsilon\mu} \tag{2.8}$$

par :

$$\Lambda_{\varepsilon\mu}\left\{\varphi^0_{\varepsilon\mu}, \varphi^1_{\varepsilon\mu}\right\} = \left\{\psi^{'}_{\varepsilon\mu}(0), -\psi_{\varepsilon\mu}(0)\right\} \tag{2.9}$$

où $\psi_{\varepsilon\mu}$ est la solution de (2.3) .

Multipiant la première équation de (2.3) par $\varphi_{\varepsilon\mu}$ solution de (2.2) , il vient :

$$\int_0^T \int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} \psi''_{\varepsilon\mu}\varphi_{\varepsilon\mu} dzdt + \int_0^T \int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} \varphi_{\varepsilon\mu}.A_{\varepsilon\mu}\Psi_{\varepsilon\mu} dzdt \quad = \quad - \int_0^T \int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} \varphi^2_{\varepsilon\mu} dzdt$$

Integrant par partie par rapport à z , et grâce à $(2.2)_2$ et $(2.3)_3$, on obtient :

$$\int_0^T \int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} \psi''_{\varepsilon\mu}\varphi_{\varepsilon\mu} dzdt + \int_0^T \int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} \Psi_{\varepsilon\mu}.A_{\varepsilon\mu}\varphi_{\varepsilon\mu} dzdt \quad = \quad - \int_0^T \int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} \varphi^2_{\varepsilon\mu} dzdt$$

De plus les termes sur le bord de $\Omega^*_{\varepsilon\mu}$ sont nuls grâce à $(2.2)_2$ et $(2.3)_2$ d'où en utilisant $(2.2)_1$ on aboutit à :

$$\int_0^T \int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} \psi''_{\varepsilon\mu}\varphi_{\varepsilon\mu} dzdt - \int_0^T \int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} \Psi_{\varepsilon\mu}\varphi''_{\varepsilon\mu} dzdt \quad = \quad - \int_0^T \int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} \varphi^2_{\varepsilon\mu} dzdt$$

Soit encore :

$$\int_0^T \int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} \left(\left(\psi'_{\varepsilon\mu}\varphi_{\varepsilon\mu} \right)' - \left(\Psi_{\varepsilon\mu}\varphi'_{\varepsilon\mu} \right)' \right) dzdt \quad = \quad - \int_0^T \int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} \varphi^2_{\varepsilon\mu} dzdt$$

Grâce à $(2.3)_4$ et $(2.3)_5$, une intégration par partie par rapport à t donne :

$$\int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} \left(\left(\psi'_{\varepsilon\mu}(0)\, \varphi_{\varepsilon\mu}(0) \right) - \left(\Psi_{\varepsilon\mu}(0)\, \varphi'_{\varepsilon\mu}(0) \right) \right) dz \;=\; -\int_0^T \int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} \varphi^2_{\varepsilon\mu} dz dt$$

En utilisant les conditions initiales de (2.2) , on a :

$$\int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} \left(\psi'_{\varepsilon\mu}(0)\, \varphi^0_{\varepsilon\mu} - \Psi_{\varepsilon\mu}(0)\, \varphi^1_{\varepsilon\mu} \right) dz \;=\; -\int_0^T \int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} \varphi^2_{\varepsilon\mu} dz dt$$

qui s'ecrit encore :

$$\int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} \left(\psi'_{\varepsilon\mu}(0)\, , -\Psi_{\varepsilon\mu}(0) \right) \left(\varphi^0_{\varepsilon\mu}, \varphi^1_{\varepsilon\mu} \right) dz \;=\; -\int_0^T \int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} \varphi^2_{\varepsilon\mu} dz dt$$

De (2.9) en deduit :

$$\left\langle \Lambda_{\varepsilon\mu} \left(\varphi^0_{\varepsilon\mu}, \varphi^1_{\varepsilon\mu} \right), \left(\varphi^0_{\varepsilon\mu}, \varphi^1_{\varepsilon\mu} \right) \right\rangle = \int_0^T \left(\int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} \varphi^2_{\varepsilon\mu} dz \right) dt \tag{2.10}$$

On a alors, en appliquant le lemme (2.2) :

$$\begin{aligned} c_1 \left\| \left\{ \varphi^0_{\varepsilon\mu}, \varphi^1_{\varepsilon\mu} \right\} \right\|_{F_{\varepsilon\mu}} &\le \left\| \Lambda_{\varepsilon\mu} \left(\varphi^0_{\varepsilon\mu}, \varphi^1_{\varepsilon\mu} \right) \right\|_{F'_{\varepsilon\mu}} \\ &\le c_2 \left\| \left\{ \varphi^0_{\varepsilon\mu}, \varphi^1_{\varepsilon\mu} \right\} \right\|_{F_{\varepsilon\mu}} \end{aligned} \tag{2.11}$$

D'où l'on déduit que $\Lambda_{\varepsilon\mu}$ est un isomorphisme de $F_{\varepsilon\mu}$ sur$F'_{\varepsilon\mu}$, uniformément par rapport à ε.

Comme $\{u^0_{\varepsilon\mu},u^1_{\varepsilon\mu}\} \in F'_{\varepsilon\mu}$, l'équation :

$$\Lambda_{\varepsilon\mu}\left(\varphi^0_{\varepsilon\mu},\varphi^1_{\varepsilon\mu}\right) = \left\{u^1_{\varepsilon\mu},-u^0_{\varepsilon\mu}\right\} \tag{2.12}$$

possède une et une seule solution dans $F_{\varepsilon\mu}$ et compte tenu de la dèfinition de $\Lambda_{\varepsilon\mu}$, on a donc :

$$\begin{cases} \psi'_{\varepsilon\mu}(0) = u^1_{\varepsilon\mu} \\ \\ \psi_{\varepsilon\mu}(0) = u^0_{\varepsilon\mu} \end{cases} \tag{2.13}$$

Si on pose :

$$v_{\varepsilon\mu} = -\varphi_{\varepsilon\mu}$$

On voit que $\psi_{\varepsilon\mu}$ est la solution du système (2.1) .

Mais ce système n'admettant qu'une solution unique, à savoir $u_{\varepsilon\mu}$, l'on a par conséquent :

$$\psi_{\varepsilon\mu} \quad = \quad u_{\varepsilon\mu}$$

par suite :

$$u_{\varepsilon\mu}(T) \quad = \quad u'_{\varepsilon\mu}(T) = 0 \qquad \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}$$

Ceci achève la preuve du théorème $(2-3)$. ■

2–3 Comportement asymptotique du système (2.1) , convergence faible des contrôles

Il est question dans ce paragraphe, de faire tendre ε vers zéro, et de montrer que la suite des contrôle converge faiblement vers une fonction qui est le contrôle exact du système homogéneisé c'est à dire qu'on va etudier la convergence de $\varphi_{\varepsilon\mu}$ car $v_{\varepsilon\mu} = -\varphi_{\varepsilon\mu}$.

Théorème (2-4) : *Soit* $\varphi_{\varepsilon\mu}$ solution de (2.2) , *alors lorsque* $\varepsilon \longrightarrow O$, *on a les convrgences :*

(2.14) $$\tilde{\varphi}^0_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup \varphi^0_\mu \qquad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible,}$$

(2.15) $$\tilde{\varphi}_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup \varphi_\mu \qquad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible.}$$

où φ_μ *est indépendante de* z_1 *et vérifie :*

(2.16) $$\begin{cases} \left|Y^*_\mu\right| \varphi''_\mu - \dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q^{k\ell}_\mu \dfrac{\partial \varphi_\mu}{\partial z_\ell}\right) = 0, \text{ dans }]0,\ell[\times]0,L[\times]0,T[\\ \varphi_\mu = 0 \qquad \text{sur } \partial\left(]0,\ell[\times]0,L[\right) \\ \varphi_\mu(0) = \int\limits_0^1 \varphi^0_\mu dz_1 = \varphi^{0,*} \qquad \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\\ \varphi'_\mu(0) = \varphi^{1,*}_\mu \qquad \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\,. \end{cases}$$

Preuve. On étudie la convergence de $\varphi_{\varepsilon\mu}$ car $v_{\varepsilon\mu} = -\varphi_{\varepsilon\mu}$.

Procédons d'abord aux estimations a priori .

En veutu de (2.4), (2.11), on a l'existence d'une constante positive c, indépendante de ε , telleque :

$$
(2.18) \qquad \begin{cases} \left\|\varphi^0_{\varepsilon\mu}\right\|_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu})} \leq C \\ \\ \left\|\varphi^1_{\varepsilon\mu}\right\|_{V'_{\varepsilon\mu}} \leq C \\ \\ \left\|\varphi_{\varepsilon\mu}\right\|_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu})\times]0,T[} \leq C \end{cases}
$$

ce qui implique les convergences :

$$
(2.19) \qquad \begin{cases} \tilde{\varphi}^0_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup \varphi^0_\mu & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible,} \\ \\ \tilde{\varphi}_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup \varphi_\mu & \text{dans } L^2(0,T,L^2(\Omega)) \text{ faible.} \end{cases}
$$

Ccomme les donnés initiales sont peu régulières , on ne peut pas utiliser le Théorème (1.4)

Pour monter que φ_μ vérifie le problème limite, on va régulariser le système(2.2).

Pour ce faire, introduisons $\tau_{\varepsilon\mu} \in V_{\varepsilon\mu}$, solution du système :

$$
(2.20) \qquad \begin{cases} A_{\varepsilon\mu}\tau_{\varepsilon\mu} = -\varphi^1_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \\ \\ \dfrac{\partial \tau_{\varepsilon\mu}}{\partial \upsilon_{A_{\varepsilon\mu}}} = 0 & \text{sur } \left(\partial\Omega^*_{\varepsilon\mu} \setminus \Omega^{*,0}_{\varepsilon\mu}\right) \\ \\ \tau_{\varepsilon\mu} = 0 & \text{sur } \Omega^{*,0}_{\varepsilon\mu} \end{cases}
$$

et posons :

$$\gamma_{\varepsilon\mu}(z,t) = \int_0^t \varphi_{\varepsilon\mu}(z,s)\,ds + \tau_{\varepsilon\mu} \tag{2.21}$$

Vérifiant que $\gamma_{\varepsilon\mu}$ est solution du problème :

$$\left\{\begin{array}{ll} \gamma''_{\varepsilon\mu} + A_{\varepsilon\mu}\gamma_{\varepsilon\mu} = 0 & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \times]0,T[\\ \gamma_{\varepsilon\mu} = 0 & \text{sur } \Omega^{*,0}_{\varepsilon\mu} \\ \dfrac{\partial\gamma_{\varepsilon\mu}}{\partial\upsilon_{A_{\varepsilon\mu}}} = 0 & \text{sur } \left(\partial\Omega^*_{\varepsilon\mu} \setminus \Omega^{*,0}_{\varepsilon\mu}\right) \\ \gamma_{\varepsilon\mu}(0) = \tau_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \\ \gamma'_{\varepsilon\mu}(0) = \varphi^0_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \end{array}\right. \tag{2.22}$$

Ceci est assuré par le résultat suivant demontré dans l'appendice ■

Lemme (2-5) : *Soit $f_\varepsilon \in V'_\varepsilon$, on suppose qu'il existe une constante c, positive et indépendante de ε telle que :*

$$\|f_\varepsilon\|_{V'_\varepsilon} \leq c$$

Soit $\tau_\varepsilon \in V_\varepsilon$ la solution du problème :

$$\left\{\begin{array}{ll} A_\varepsilon\tau_\varepsilon = f_\varepsilon & \textit{dans } \Omega_\varepsilon \\ \dfrac{\partial\tau_\varepsilon}{\partial\upsilon_{A_{\varepsilon\mu}}} = 0 & \textit{sur } \partial S_\varepsilon \\ \tau_\varepsilon = 0 & \textit{sur } \partial\Omega_\varepsilon \end{array}\right.$$

A_ε est un opérateur dont la matrice des coefficients verifie (1.2).

Alors, il existe $f^* \in H^{-1}(\Omega)$ *et une sous-suite extraite de* ε, *encore notée* ε *tel* que si Q_ε est *l'opérateur de prolongement donné par le lemme* (1.2) *on ait :*

$$Q_\varepsilon \tau_\varepsilon \quad \rightarrow \quad \tau \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible.}$$

avec τ *verifiant :*

$$A\tau \quad = \quad f^* \text{ dans } \Omega.$$

A est l'operateur homogéneisé correspondant à A_ε.

Grâce au Lemme $(2-5)$, on sait que si $\tau_{\varepsilon\mu}$ est solution de (2.20) alors :

$$Q_{\varepsilon\mu}\tau_{\varepsilon\mu} \quad \rightharpoonup \quad \tau_\mu \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible.}$$

et il existe $\varphi_\mu^{1,*} \in H^{-1}(\Omega)$ telle que :

$$-\frac{\partial}{\partial z_k}\left(q_\mu^{k\ell}\frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell}\right) \quad = \quad -\varphi_\mu^{1,*} \text{ dans }]0,\ell[\times]0,L[$$

Grâce à (2.21) et l'hypothèse $\tau_{\varepsilon\mu}$ independante de t ,on a :

$$(2.23) \qquad \begin{cases} \gamma'_{\varepsilon\mu}(z,t) = \varphi_{\varepsilon\mu}(z,t) \\ \\ \gamma''_{\varepsilon\mu}(z,t) = \varphi'_{\varepsilon\mu}(z,t) \end{cases}$$

D'autre part : :

$$A_{\varepsilon\mu}\gamma_{\varepsilon\mu}(z,t) \quad = \quad \int_0^t A_{\varepsilon\mu}\varphi_{\varepsilon\mu}(z,s)\,ds + A_{\varepsilon\mu}\tau_{\varepsilon\mu}$$

Grâce à $(2.20)_1$ et (2.23) :

$$A_{\varepsilon\mu}\gamma_{\varepsilon\mu}(z,t) \quad = \quad \int_0^t -\varphi''_{\varepsilon\mu}(z,s)\,ds - \varphi^1_{\varepsilon\mu}$$

d'où : :

$$(2.24) \qquad A_{\varepsilon\mu}\gamma_{\varepsilon\mu} + \gamma''_{\varepsilon\mu} = 0$$

De plus $(2.2)_2$ et $(2.20)_3$ donnent :

$$(2.25) \qquad \gamma_{\varepsilon\mu} = 0 \text{ sur } \Omega^{*,0}_{\varepsilon\mu}.$$

Et enfin grâce à $(2.1)_3$ et $(2.20)_2$, il vient :

$$(2.26) \qquad \frac{\partial\gamma_{\varepsilon\mu}}{\partial v_{A_{\varepsilon\mu}}} = 0, \text{ sur } \left(\partial\Omega^*_{\varepsilon\mu} \setminus \Omega^{*,0}_{\varepsilon\mu}\right)$$

et de (2.21) et $(2.23)_2$ on obtient :

$$(2.27) \qquad \begin{cases} \gamma_{\varepsilon\mu}(0) = \tau_{\varepsilon\mu} \\ \\ \gamma'_{\varepsilon\mu}(0) = \varphi^0_{\varepsilon\mu} \end{cases}$$

d'où la preuve que $\gamma_{\varepsilon\mu}$ est solution du système (2.22).

Appliquons le théorème $(1-4)$ au système (2.22), pour ce faire, on aura besoin des assertions suivantes :

$$\begin{cases} \|\tau_{\varepsilon\mu}\|_{V_{\varepsilon\mu}} \leq c \\ \\ \tilde{\tau}_{\varepsilon\mu} \text{ converge faiblement dans } L^2(\Omega) \end{cases}$$

Pour les montrer, on multiplie $(2.20)_1$ par $\tau_{\varepsilon\mu} \in V_{\varepsilon\mu}$ et integrant par partie, on obtient :

$$\|\tau_{\varepsilon\mu}\|^2 = \left\langle -\varphi^1_{\varepsilon\mu}, \tau_{\varepsilon\mu} \right\rangle_{V'_{\varepsilon\mu}, V_{\varepsilon\mu}} \tag{2.28}$$

$\langle ., . \rangle$ crochet de dualité,

d'où :

$$\begin{gathered} \|\tau_{\varepsilon\mu}\|^2_{V_{\varepsilon\mu}} \leq \left\|\varphi^1_{\varepsilon\mu}\right\|_{V'_{\varepsilon\mu},} \|\tau_{\varepsilon\mu}\|_{V_{\varepsilon\mu}} \\ \|\tau_{\varepsilon\mu}\|_{V_{\varepsilon\mu}} \leq \left\|\varphi^1_{\varepsilon\mu}\right\|_{V'_{\varepsilon\mu},} \end{gathered} \tag{2.29}$$

Ensuite, grâce à $(2.18)_2$, on a:

$$\|\tau_{\varepsilon\mu}\|_{V_{\varepsilon\mu}} \leq c \tag{2.30}$$

La coercidivitè des coefficients a_{ij} donne l'estimation :

$$\|\nabla\tau_{\varepsilon\mu}\|_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu})} \leq c \tag{2.31}$$

d'où par l'inégalité de Poincaré on a :

$$\|\tau_{\varepsilon\mu}\|_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu})} \leq c$$

Alors, par le lemme $(2-5)$, on a la convergence :

(2.32) $$\varphi_{\varepsilon\mu}\tau_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup \tau_\mu \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible}$$

Puisque :

$$\varphi_{\varepsilon\mu}\tau_{\varepsilon\mu}\chi_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} = \tilde{\tau}_{\varepsilon\mu}$$

On a immédiatement :

(2.33) $$\tilde{\tau}_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup |Y^*_\mu| \, \tau_\mu \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible}$$

Les données $(2.18)_1$ $(2.19)_1$ (2.30) , (2.33) et le théorème $(1-4)$ donnent :

(2.34) $$P_{\varepsilon\mu}\gamma_{\varepsilon\mu} \to \gamma_\mu \text{ dans } L^\infty(0,T,H^1(\Omega)) \text{ faible .}$$

où γ_μ est indépendante de z_1 et vérifie :

(2.35) $$\begin{cases} |Y^*_\mu|\,\gamma''_\mu - \frac{\partial}{\partial z_k}\left(a^{k\ell}_\mu \dfrac{\partial \gamma_\mu}{\partial z_\ell}\right) = 0 & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\times]0,T[\\ \gamma_\mu = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,\ell[\times]0,L[\right) \\ \gamma_\mu(0) = \tau_\mu & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\\ \gamma'_\mu(0) = \dfrac{\displaystyle\int_0^1 \varphi^0_\mu dz_1}{Y^*_\mu} & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\end{cases}$$

Comme

$$\tilde{u}'_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup |Y^*_\mu| \, u'_\mu \text{ dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \text{ faible}$$

il vient :

$$\tilde{\varphi}_{\varepsilon\mu} = \tilde{\gamma}'_{\varepsilon\mu} \to \gamma'_\mu |Y^*_\mu| \,, \ \ (3.7)_2 : \tilde{\varphi}_{\varepsilon\mu} \to \varphi_\mu$$

Et par $(2.19)_2$, on a :

$$\tilde{\varphi}_{\varepsilon\mu} \longrightarrow \varphi_\mu$$

d'où :

$$\varphi_\mu = |Y^*_\mu| \, \gamma'_\mu$$

$$\varphi_\mu (0) = |Y^*_\mu| \, \gamma'_\mu (0) = \int_0^1 \varphi^0_\mu dz_1$$

De la même manière, on a aussi :

$$\varphi'_\mu (0) = |Y^*_\mu| \, \gamma''_\mu (0)$$

$$\varphi'_\mu (0) = |Y^*_\mu| \, \gamma''_\mu (0) = \frac{\partial}{\partial z_k} \left(q^{k\ell}_\mu \frac{\partial \gamma'_\mu (0)}{\partial z_\ell} \right) = \frac{\partial}{\partial z_k} \left(q^{k\ell}_\mu \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell} \right)$$

et par conséquent :

$$\varphi_\mu'(0) = \varphi_\mu^{1,*} \tag{2.36}$$

De plus ,

$$\begin{cases} \left|Y_\mu^*\right| \gamma_\mu'' - \frac{\partial}{\partial z_k}\left(q_\mu^{k\ell}\frac{\partial \gamma_\mu}{\partial z_\ell}\right) = 0 \\ \\ \varphi_\mu' - \frac{\partial}{\partial z_k}\left(q_\mu^{k\ell}\frac{\partial \gamma_\mu}{\partial z_\ell}\right) = 0 \\ \\ \varphi_\mu'' - \frac{\partial}{\partial z_k}\left(q_\mu^{k\ell}\frac{\partial \gamma_\mu'}{\partial z_\ell}\right) = 0 \\ \\ \left|Y_\mu^*\right| \varphi_\mu'' - \frac{\partial}{\partial z_k}\left(q_\mu^{k\ell}\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial z_\ell}\right) = 0 \end{cases}$$

Finalement, on a bien le système (2.16) :

$$\begin{cases} \left|Y_\mu^*\right| \varphi_\mu'' - \dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q_\mu^{k\ell}\dfrac{\partial \varphi_\mu}{\partial z_\ell}\right) = 0, \text{ dans }]0,\ell[\times]0,L[\times]0,T[\\ \\ \varphi_\mu = 0 \qquad \text{sur } \partial\left(]0,\ell[\times]0,L[\right) \\ \\ \varphi_\mu(0) = \int\limits_0^1 \varphi_\mu^0 dz_1 = \varphi^{0,*} \qquad \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\\ \\ \varphi_\mu'(0) = \varphi_\mu^{1,*} \qquad \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\,. \end{cases}$$

Chapitre 3 :

Etude de la contrôlabilité exacte et de la convergence du système bidimentionnel.

3–1 Etude de la contrôlabilité exacte du système homogéneisé.

Dans ce chapitre, on se propose de trouver un contrôle v_μ tel que, si u_μ est la solution du système. (1.19)

$$u_\mu(T) = u'_\mu(T) = 0$$

Ensuite, on fait tendre μ vers zéro et l'on montre que v_μ converge vers une limite v qui est le contrôle du système limite associée à. (1.19).

Théorème (3-1) : *Soit* $u^0_{\varepsilon\mu}$ *et* $u^1_{\varepsilon\mu}$, *donnés initiales de* (1.1) *vérifiant :*

$$(3.1)\qquad \begin{array}{c} \left\| u^0_{\varepsilon\mu} \right\|_{V_{\varepsilon\mu}} \leqslant c.\mu \\ \widetilde{u}^0_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup u^0_\mu \qquad \text{dans } H^1_0(\Omega) \text{ faible} \\ \left\| u^1_{\varepsilon\mu} \right\|_{L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)} \leqslant c.\mu \\ \widetilde{u}^1_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup u^1_\mu \qquad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \end{array}$$

et $v_{\varepsilon\mu}$ *le contrôle exacte du système* (2.1) *,vérifie :*

$$(3.2)\qquad \widetilde{v}_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup v_\mu \qquad \text{dans } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \quad \text{faible}$$

où v_μ est le contrôle exacte du système homogéneisé :

$$(3.3)\quad \begin{cases} \left|Y_\mu^*\right| u_\mu'' - \dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q_\mu^{kl}\dfrac{\partial u_\mu}{\partial z_l}\right) = v_\mu & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\\ u_\mu = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,l[\times]0,L[\right)\times]0,T[\\ u_\mu(0) = \dfrac{u_\mu^0}{\left|Y_\mu^*\right|} & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\\ u_\mu'(0) = \dfrac{\int_0^1 u_\mu^1 dz_1}{\left|Y_\mu^*\right|} & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\end{cases}$$

et

$$(3.4)\quad \begin{cases} P_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup u_\mu & \text{dans } L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \ \text{faible}* \\ P_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu}' \rightharpoonup u_\mu' & \text{dans } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \ \text{faible}* \end{cases}$$

q_μ^{kl} *sont donnés par* (1.21)

Preuve. On déduit du théorème $(2-4)$ que :

$$v_\mu = -\varphi_\mu$$

où φ_μ est donné par.(2.2).

(3.3) et (3.4) sont donnés par le théorème (1.4).

Montrons que le système (3.3) est exactement contrôlable.

De (2.3) ,(2.13) , (2.19) et $u_\mu = \psi_\mu$, on déduit les convergences suivantes :

$$(3.5) \qquad \begin{cases} P_{\varepsilon\mu}\psi_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup \psi_\mu & \text{dans } L^\infty\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right)\right) \text{ faible}* \\ \\ P_{\varepsilon\mu}\psi'_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup \psi'_\mu & \text{dans } L^\infty\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right) \text{ faible}* \end{cases}$$

Le même le raisonnement développé dans la preuve du théorème $(1-4)$ aboutit à :

$$(3.6) \qquad \begin{cases} \left|Y_\mu^*\right|\psi''_\mu - \dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q_\mu^{kl}\dfrac{\partial \psi_\mu}{\partial z_l}\right) = -\varphi_\mu & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\\ \\ \psi_\mu = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,l[\times]0,L[\right)\times]0,T[\\ \\ \psi_\mu\left(T\right) = 0 & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\\ \\ \psi'_\mu\left(T\right) = 0 & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\end{cases}$$

avec :

$$(3.7) \qquad u_\mu = \psi_\mu$$

$$(3.8) \qquad u_\mu\left(T\right) = u'_\mu\left(T\right) = 0$$

Ceci conclut la preuve du théorèmé. ■

Remarque (3-2) : :Une application de la méthode H.U.M au système (3.3) permet de construire un isomorphisme.

$$\wedge_\mu : L^2\left(]0,l[\times]0,L[\right)\times H^{-1}\left(]0,l[\times]0,L[\right)\longrightarrow L^2\left(]0,l[\times]0,L[\right)\times H_0^1\left(]0,l[\times]0,L[\right)$$
$$\wedge_\mu : \left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^{1,*}\right)\longrightarrow\left(\frac{u_\mu^{1,*}}{\left|Y_\mu^*\right|},-\frac{u_\mu^0}{\left|Y_\mu^*\right|}\right)$$

Les mêmes calculs effectués au chapitre (2), donnent :

$$\left|Y_\mu^*\right|\int_0^L\int_0^l\left(\psi'_\mu(0),-\psi_\mu(0)\right)\left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^1\right)dz_2dz_3=\int_0^L\int_0^l\varphi_\mu^2dz_2dz_3$$

et $\wedge_\mu$ est défini par :

$$\wedge_\mu\left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^1\right)=\left(\psi'_\mu(0),-\psi_\mu(0)\right)$$

d'où

$$\left\langle\wedge_\mu\left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^1\right);\left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^1\right)\right\rangle=\frac{1}{\left|Y_\mu^*\right|}\int_0^L\int_0^l\varphi_\mu^2dz_2dz_3$$

Alors le lemme $(2-2)$ donne :

$$c\left(\left\|\varphi_\mu^0\right\|^2+\left\|\varphi_\mu^1\right\|^2\right)\leqslant\left|Y_\mu^*\right|\left\|\left\langle\wedge_\mu\left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^1\right);\left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^1\right)\right\rangle\right\|_{F'}$$

On en déduit :

$$\left\|\left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^{1,*}\right)\right\|\prec\left|Y_\mu^*\right|\left\|\wedge_\mu\left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^{1,*}\right)\right\|$$

et finalement :

$$\left\| \wedge_\mu \left(\varphi_\mu^0, \varphi_\mu^{1,*} \right) \right\|_{F'} \leqslant c \left\| \left(\varphi_\mu^0, \varphi_\mu^{1,*} \right) \right\|_F$$

D'où l'on déduit que $\wedge_\mu$ est isomorphisme de :

$$L^2 \left( ]0,l[\times]0,L[\right) \times H^{-1} \left( ]0,l[\times]0,L[\right) \text{ dans } L^2 \left( ]0,l[\times]0,L[\right) \times H_0^1 \left(\Omega \right)$$

D'où l'équation :

$$\left(\frac{u_\mu^{1,*}}{\left| Y_\mu^* \right|}, -\frac{u_\mu^0}{\left| Y_\mu^* \right|} \right) = \wedge_\mu \left(\varphi_\mu^0, \varphi_\mu^{1,*} \right) = \left(\psi'_\mu \left(0 \right), -\psi_\mu \left(0 \right) \right)$$

a une unique solution dans :

$$L^2 \left( ]0,l[\times]0,L[\right) \times H^{-1} \left( ]0,l[\times]0,L[\right)$$

L'on a par conséquent :

$$\widetilde{v}_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup v_\mu \qquad \text{dans } L^2 \left(0,T; L^2 \left(\Omega \right) \right) \quad \text{faible}$$

avec v_μ contrôle exact du système (3.4)

3–2 Résultat de convergence sur l'épaisseur des barres $\mu \to 0$.

Nous allons étudier le comportement asymptotique de u_μ lorsque μ tend vers zéro, ainsi que l'énergie du système limite obtenu .

Proposition (3-2) : *L'énergie E du système* (3.4) *vérifie*

$$E_\mu(T) = E_\mu(0), \ \forall T > 0. \tag{3.9}$$

On a conservation de l'énergie

Preuve. :Multipliant la premiere équation de (2.6) par u'_μ et intégrant par partie sur $\Omega \times]0, T[$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\int_0^L \int_0^\ell \int_0^T 2\mu(3-\mu) u'_\mu u''_\mu dz_2 dz_3 dt - q_\mu^{k\ell} \int_0^L \int_0^\ell \int_0^T u'_\mu \frac{\partial}{\partial z_k}\left(\frac{\partial u_\mu}{\partial z_\ell}\right) dz_2 dz_3 dt &= 0 \\
2\mu(3-\mu) \int_0^L \int_0^\ell \int_0^T \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(u'_\mu\right)^2 dz_2 dz_3 dt + q_\mu^{k\ell} \int_0^L \int_0^\ell \left(\int_0^T \left(\frac{\partial u_\mu}{\partial z_\ell}\frac{\partial u'_\mu}{\partial z_k} dt\right) dz\right) &= 0 \\
\frac{1}{2} 2\mu(3-\mu) \int_0^L \int_0^\ell \int_0^T \frac{d}{dt}\left(u'_\mu\right)^2 dt dz + \frac{1}{2} q_\mu^{k\ell} \int_0^L \int_0^\ell \left(\int_0^T \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_\mu}{\partial z_\ell}\frac{\partial u_\mu}{\partial z_k} dt\right) dz\right) &= 0 \\
\frac{1}{2}\left[\int_0^L \int_0^\ell \left|Y_\mu^*\right| \left|u'_\mu\right|^2 \Big|_0^T dz_2 dz_3 + \int_0^L \int_0^\ell \left(q_\mu^{k\ell}\frac{\partial u_\mu}{\partial z_\ell}\frac{\partial u_\mu}{\partial z_k}\right)\Big|_0^T dz_2 dz_3\right] &= 0
\end{aligned}$$

Si on note :

(3.10)

$$E_\mu(T) = \frac{1}{2}\left[\int_0^L \int_0^\ell \left|Y_\mu^*\right| \left|u'_\mu(t)\right|^2 dz_2 dz_3 + \int_0^L \int_0^\ell \left(q_\mu^{k\ell}\frac{\partial u_\mu(t)}{\partial z_\ell}\frac{\partial u_\mu(t)}{\partial z_k}\right)\Big|_0^T dz_2 dz_3\right]$$

alors :

$$E_\mu(T) = E_\mu(0).$$

■

Le comportement asymptotique de u_μ lorsque μ tend vers zéro est donné par le resultat suivant :

Théorème (3-3) : *Il existe une sous-suite extraitre de* $\{\mu\}$, *que nous notons encore* $\{\mu\}$, *telle que :*

$$(3.11) \qquad \begin{cases} \mu^{-1}u_\mu^0 \underset{\mu\to 0}{\rightharpoonup} u^0 & \text{dans } H_0^1(]0,\ell[\times]0,L[) \text{ faible} \\ \\ \mu^{-1}u_\mu^{1,*} \underset{\mu\to 0}{\rightharpoonup} u^1 & \text{dans } L^2(]0,\ell[\times]0,L[) \text{ faible} \end{cases}$$

et

$$(3.12) \qquad \begin{cases} u_\mu \underset{\mu\to 0}{\rightarrow} u & \text{dans } L^\infty\left(0,T,H_0^1\left(]0,\ell[\times]0,L[\right)\right) \text{ faible}* \\ \\ u'_\mu \underset{\mu\to 0}{\rightarrow} u' & \text{dans } L^\infty\left(0,T,L^2\left(]0,\ell[\times]0,L[\right)\right) \text{ faible}* \end{cases}$$

où u est la solution du système :

$$(3.13) \qquad \begin{cases} 6u'' - q_\mu^{k\ell}\dfrac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial z_\ell} = 0 & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\times]0,T[\\ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,\ell[\times]0,L[\times]0,T[\right) \\ \\ u_\mu(0) = \dfrac{u^0}{6} & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\\ \\ u'(0) = \dfrac{u^1}{6} & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\end{cases}$$

les coefficients $q_\mu^{k\ell}$ *sont donnés par :*

$$q_{23}^* = q_{32}^* = 0$$

$$(3.14) \qquad q_{22}^* = 4\frac{\Delta}{a_{11}a_{33-}a_{13}a_{31}}$$

$$q_{33}^* = 2\frac{\Delta}{a_{11}a_{22-}a_{12}a_{21}}$$

Δ *: déterminant de la matrice* (a_{ij}) *.*

Preuve. On remarque tout d'abord que :

$$E_\mu(0) = \frac{1}{2}\frac{1}{\left|Y_\mu^*\right|}\int_0^L\int_0^\ell \left|u_\mu^{1,*}\right|^2 dz_2dz_3 + \frac{q_\mu^{k\ell}}{\left|Y_\mu^*\right|^2}\int_0^L\int_0^\ell \left(\frac{\partial u_\mu^0}{\partial z_\ell}\frac{\partial u_\mu^0}{\partial z_k}\right) dz_2dz_3$$

$$(3.15) \quad E_\mu(0) \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{\left|Y_\mu^*\right|}\left\|u_\mu^{1,*}\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + \frac{q_\mu^{k\ell}}{\left|Y_\mu^*\right|^2}\left\|\frac{\partial u_\mu^0}{\partial z_\ell}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}\left\|\frac{\partial u_\mu^0}{\partial z_k}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}$$

par ailleurs les estimations :

$$(3.16) \qquad \left\|u_\mu^{1,*}\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \leqslant \int_\Omega \left|u_\mu^1\right|^2 dz \leqslant c\mu^2$$

et

$$(3.17) \qquad \left\{\begin{array}{l} \left\|\dfrac{\partial u_\mu^0}{\partial z_\ell}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \leqslant c\mu \\ \\ \left\|\dfrac{\partial u_\mu^0}{\partial z_k}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \leqslant c\mu \end{array}\right.$$

impliquent alors que l'on a :

$$(1) \qquad E_{\mu}(0) \leqslant c\mu$$

On en déduit :

$$(3.19) \qquad E_{\mu}(T) \leqslant c\mu$$

On pose :

$$\mu^{-1} q_{\mu}^{k\ell} = q_{\mu}^{k\ell} + \theta_{\mu}^{k\ell} \quad \text{avec } \theta_{\mu}^{k\ell} \longrightarrow 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}$$

et

$$\mu^{-1} q_{\mu}^{k\ell} \longrightarrow q_{k\ell}^{*} \quad , q_{k\ell}^{*} \text{ sont donnés par } (3.14)$$

$$\mu^{-1} q_{\mu}^{k\ell} \mu \left\| \frac{\partial u_{\mu}}{\partial z_k} \right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \left\| \frac{\partial u_{\mu}}{\partial z_\ell} \right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} =$$

$$= \left(q_{k\ell}^{*} + \theta_{\mu}^{k\ell} \right) \mu \left\| \frac{\partial u_{\mu}}{\partial z_k} \right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \left\| \frac{\partial u_{\mu}}{\partial z_\ell} \right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} =$$

$$= \left(q_{\ell\ell}^{*} + \theta_{\mu}^{\ell\ell} \right) \mu \left\| \frac{\partial u_{\mu}}{\partial z_\ell} \right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}^2$$

On choisit maintenant μ tel que :

$$\theta_{\mu}^{\ell\ell} \succ -\frac{q_{\ell\ell}^{*}}{2}$$

il vient alors :

$$q_{\ell\ell}^{*} + \theta_{\mu}^{\ell\ell} \succ \frac{q_{\ell\ell}^{*}}{2}$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} \mu \left\| u'_\mu \right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \leqslant c\mu \\ \\ \mu \left\| \dfrac{\partial u_\mu}{\partial z_\ell} \right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \leqslant c\mu \end{cases}$$

On déduit de la coercitivité des cofficients $q^*_{k\ell}$, de (3.16) , (3.18) , et $E_\mu(T) = E_\mu(0)$ que :

$$\begin{cases} \|u_\mu\|_{L^\infty\left(0,T,H^1_0(]0,\ell[\times]0,L[)\right)} \leqslant c \\ \\ \left\|u'_\mu\right\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(]0,\ell[\times]0,L[))} \leqslant c \end{cases}$$

ce qui implique les convergences :

$$(3.20) \qquad \begin{cases} u_\mu \underset{\mu\to 0}{\rightharpoonup} u & \text{dans } L^\infty\left(0,T,H^1_0\left(]0,\ell[\times]0,L[\right)\right) \text{ faible}* \\ \\ u'_\mu \underset{\mu\to 0}{\rightharpoonup} u' & \text{dans } L^\infty\left(0,T,L^2\left(]0,\ell[\times]0,L[\right)\right) \text{ faible}* \end{cases}$$

D'autre part (3.16) et (3.17) , nous donnent :

$$\begin{cases} \mu^{-1}u^0_\mu \rightharpoonup u^0 & \text{dans } H^1_0(]0,\ell[\times]0,L[) \text{ faible}* \\ \\ \mu^{-1}u^{1,*}_\mu \rightharpoonup u^1 & \text{dans } L^2(]0,\ell[\times]0,L[) \text{ faible}* \end{cases}$$

d'où (3.11)et (3.12) sont obtenus.

Il reste à montrer que (3.13) a lieu.

Soient $\varphi \in \mathfrak{D}\left(]0,\ell[\times]0,L[\right)$, $v \in \mathfrak{D}\left(]0,T[\right)$.

Multiplions la première équation de (1.19) par φv et integrons par parties sur $(]0,\ell[\times]0,L[)\times]0,T[$, on obtient alors :

(3.21)

$$(6-2\mu)\int_0^T \left(\int_0^L \left(\int_0^\ell u_\mu \varphi v'' dz_2\right) dz_3\right) dt + \int_0^T \int_0^L \int_0^\ell \mu^{-1} q^{k\ell}_\mu \frac{\partial u_\mu}{\partial z_\ell}\frac{\partial \varphi}{\partial z_k} v dz dt = 0$$

Passant à la limite, on trouve :

$$6\int_0^T\int_0^L\int_0^\ell \mu\varphi v''dz_2dz_3dt+\int_0^T\int_0^L\int_0^\ell q^*_{k\ell}\frac{\partial u}{\partial z_\ell}\frac{\partial \varphi}{\partial z_k}vdzdt \quad = \quad 0$$

En integrant une deuxième fois par parties, on déduit la première équation de (3.13) grâce à la deuxième équation de système (1.19) et à la première convegence de (3.12), la deuxième équation de (3.13) est satisfaite.

Montrons maintenant que les deux dernières équations de (3.13) sont satisfaites. Pour ce faire, multiplions la première équation du système (1.19) par $\varphi.v$ avec :

$$\varphi \quad \in \quad \mathfrak{D}\left(]0,\ell[\times]0,L[\right)\times]0,T[)\text{ et } v\in\mathfrak{D}(]0,T[),\ v\left(T\right)=0,\ v'\left(T\right)=0$$

et intégrons par parties deux fois par rapport à t ,il vient alors :

$$\left[\int_0^T\int_0^L\int_0^\ell (6-2\mu)\,u_\mu\varphi v''dz_2dz_3dt+\int_0^L\int_0^\ell (6-2\mu)\,u_\mu\left(0\right)v'\left(0\right)\varphi dz_2dz_3\right.$$

$$\left.-\int_0^L\int_0^\ell (6-2\mu)\,u'_\mu\left(0\right)v\left(0\right)\varphi dz_2)dz_3+\int_0^T\int_0^L\int_0^\ell \mu^{-1}q^{k\ell}_\mu\frac{\partial u_\mu}{\partial z_\ell}\frac{\partial \varphi}{\partial z_k}vdzdt\right]=0$$

Le passage à la limite, donne:

$$\begin{cases}\left[\int_0^T\int_0^L\int_0^\ell 6uv''\varphi dz_2dz_3dt+\int_0^L\int_0^\ell u^0\varphi v'\left(0\right)dz_2dz_3\right.\\ \\ \left.-\int_0^L\int_0^\ell u^1\varphi v\left(0\right)dz_2dz_3+\int_0^T\int_0^L\int_0^\ell q^*_{kl}\frac{\partial u}{\partial z_\ell}\frac{\partial \varphi}{\partial z_k}vdzdt\right]=0\end{cases}$$

en integrant par parties et en utilisant $(3.13)_1$,(3.20) et (3.21) ,on trouve :

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\int_0^T\int_0^L\int_0^\ell 6u''v\varphi dz_2dz_3dt+6\int_0^L\int_0^\ell \left(uv'\right|_0^T\varphi dz_2dz_3\right.\\ \\ -6\int_0^L\int_0^\ell \left(u'v\right|_0^T\varphi dz_2dz_3+\int_0^L\left(\int_0^\ell u^0v'(0)\varphi dz_2\right)dz_3\\ \\ \left.-\int_0^L\left(\int_0^\ell u^1v(0)\varphi dz_2\right)dz_3-\int_0^T\int_0^L\int_0^\ell q_{kl}^*\frac{\partial^2u}{\partial z_\ell\partial z_k}\varphi vdzdt\right]=0 \end{array}\right.$$

grâce à $(3.13)_1$, il vient :

$$\left\{\begin{array}{l} \left[v'(0)\int_0^L\left(\int_0^\ell u^0\varphi dz_2\right)dz_3-v(0)\int_0^L\left(\int_0^\ell u^1\varphi dz_2\right)dz_3\right.\\ \\ \left.+6v(0)\int_0^L\left(\int_0^\ell u'(0)\varphi dz_2\right)dz_3-6v'(0)\int_0^L\left(\int_0^\ell u(0)\varphi dz_2\right)dz_3\right]=0 \end{array}\right.$$

En choisit v tel que $v(0)\neq 0$,et $v'(0)=0$ il vient :

$$u'(0)=\frac{u^1}{6}$$

En suite , on choisit v tel que $v(0)=0$ et $v'(0)\neq 0$, alors :

$$u(0)=\frac{u^0}{6}$$

Ceci achève la preuve du théorème $(3-3)$ ■

3–3 Convergence de la suite des contrôles :

Maintenant nous allons étudier la convergence du contrôle $v_\mu = -\varphi_\mu$ du système (3.3) avec φ_μ donnée par (2.16)

Pour ce faire, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme (3-3) : *On suppose que les données initiales* $\varphi_\mu^0, \varphi_\mu^{1,*}$ *du système* (2.16) *vérifient :*

$$\varphi_\mu^0 \in L^2\left(]0,\ell[\times]0,L[\right) \quad ; \quad \varphi_\mu^{1,*} \in H^{-1}\left(]0,\ell[\times]0,L[\right)$$

Alors il existe deux constantes c_1*et* c_2 *, positives et indépendantes de* μ*, telles que :*

$$c_1\left\{\left\|\varphi_\mu^0\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + \mu^{-2}\ \left\|\varphi_\mu^{1,*}\right\|^2_{H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)}\right\} \leqslant$$

$$\left\|\varphi_\mu\right\|^2_{L^2(0,T;L^2(]0,\ell[\times]0,L[))} \leqslant c_2\left\{\left\|\varphi_\mu^0\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + \mu^{-2}\ \left\|\varphi_\mu^{1,*}\right\|^2_{H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)}\right\}$$

Preuve. :

On commence par régulariser le système (2.16) .

Pour ce faire, introduisons τ_μ, solution du système :

$$(3.22) \qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q_\mu^{k\ell}\dfrac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell}\right) = -\varphi_\mu^{1,*} & \text{dans} \quad (]0,\ell[\times]0,L[) \\ \\ \tau_\mu = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,\ell[\times]0,L[\right) \end{cases}$$

Et soit γ_μ la fonction définie par :

$$\gamma_\mu(z,t) \quad = \quad \int_0^t \varphi_\mu(z,s)\,ds + \tau_\mu(z_2,z_3)$$

On vérifie comme pour (2.22) que γ_μ est solution de :

$$(3.23) \qquad \begin{cases} \left|Y_\mu^*\right| \gamma_\mu'' - \dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q_\mu^{k\ell}\dfrac{\partial \gamma_\mu}{\partial z_\ell}\right) = 0 & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\times]0,T[\\ \gamma_\mu = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,\ell[\times]0,L[\right) \\ \gamma_\mu(0) = \tau_\mu & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\\ \gamma_\mu'(0) = \varphi_\mu^{0,*} & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\end{cases}$$

$\forall t \in [0,T]$, $(3,10)$ l'égualite de l'energie (3.10) donne :

(3.24)

$$\left|Y_\mu^*\right| \left\|\gamma_\mu'\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + q_\mu^{k\ell}\left\|\tfrac{\partial \gamma_\mu}{\partial z_\ell}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}\left\|\tfrac{\partial \gamma_\mu}{\partial z_k}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} =$$

$$= \left|Y_\mu^*\right| \left\|\varphi_\mu^0\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + q_\mu^{k\ell}\left\|\tfrac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}\left\|\tfrac{\partial \tau_\mu}{\partial z_k}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} = C \quad \text{(constante positive)}$$

Grâce à $(3.22)_1$, il vient :

$$\int_0^L \int_0^\ell \mu^{-1} q_\mu^{k\ell}\mu\left(\frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell}\right)\left(\frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_k}\right) = -\left\langle \varphi_\mu^{1,*}, \tau_\mu\right\rangle$$

$\langle\ ,\ \rangle$désigne le produit de dualité entre $H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)$ et $H_0^1(]0,\ell[\times]0,L[)$.

En appliquant, les inégalités de Young et Poincaré, on obtient :

(3.25)

$$\mu\int_0^L\int_0^\ell \mu^{-1}q_\mu^{k\ell}\left(\frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell}\right)^2 dz_2dz_3 \leqslant c'\left\|\frac{\varphi_\mu^{1,*}}{2c}\right\|^2_{H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)} + \frac{c}{2}\left\|\frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell}\right\|^2_{H_0^1(]0,\ell[\times]0,L[)}.$$

D'autre part on a grâce à (3.18) et (3.19) on a :

$$\int_0^L \int_0^\ell \mu^{-1} q_\mu^{k\ell} \left(\frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell} \right)^2 dz_2 dz_3 \;\; \geqslant \;\; c \left\| \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell} \right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}$$

Si on choisit μ tel que $c = \dfrac{c_2\mu}{2c'}$; l'inégualité (3.25) devient :

$$\text{(3.26)} \qquad \frac{c_2\mu}{4} \left\| \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell} \right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \leqslant \frac{c'^2\mu}{c_2\mu} \left\| \varphi_\mu^{1,*} \right\|^2_{H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)}$$

Combinant (3.24) et (3.26) , il vient :

$$\left| Y_\mu^* \right| \left\| \gamma'_\mu \right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \;\; \leqslant \;\; c \left(\left| Y_\mu^* \right| \left\| \varphi_\mu^{0,*} \right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + \frac{1}{\mu} \left\| \varphi_\mu^{1,*} \right\|^2_{H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)} \right)$$

comme $\gamma'_\mu = \varphi_\mu$

Alors :

$$\left\| \varphi_\mu \right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \;\; \leqslant \;\; c \left(\left\| \varphi_\mu^{0,*} \right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + \mu^{-2} \left\| \varphi_\mu^{1,*} \right\|^2_{H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)} \right)$$

Montrons maintenant l'inégualité inverse :

$$c_1 \left(\left\| \varphi_\mu^{0,*} \right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + \mu^{-2} \left\| \varphi_\mu^{1,*} \right\|^2_{H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)} \right) \;\; \leqslant \;\; \left\| \varphi_\mu \right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}$$

Pour ce faire, considérons :

$$\rho(t) \;\; = \;\; t^2 \left(T - t \right)^2$$

La multiplication de la première équation de (3.23) par $\rho.\gamma_\mu$ et une intégration par parties , donnent :

$$\int_0^T\int_0^L\int_0^\ell q_{k\ell}^*\frac{\partial\gamma_\mu}{\partial z_k}\frac{\partial\gamma_\mu}{\partial z_\ell}dz_2dz_3dt=$$

$$=\left|Y_\mu^*\right|\left[\int_0^T\int_0^L\int_0^\ell\rho(t)\left(\gamma_\mu'\right)^2dz_2dz_3dt+\int_0^T\int_0^L\int_0^\ell\rho'(t)\gamma_\mu\gamma_\mu'dz_2dz_3dt\right]$$

Compte tenu de (3.24) , il découle de (3.25) :

(3.27)

$$\left[\left|Y_\mu^*\right|\left\|\varphi_\mu^{0,*}\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}+q_\mu^{k\ell}\left\|\frac{\partial\tau_\mu}{\partial z_\ell}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}\left\|\frac{\partial\tau_\mu}{\partial z_k}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}\right]\int_0^T\rho(t)dt=$$

$$=2\left|Y_\mu^*\right|\int_0^T\int_0^L\int_0^\ell\rho(t)\left(\gamma_\mu'\right)^2dz_2dz_3dt+\left|Y_\mu^*\right|\int_0^T\int_0^L\int_0^\ell\rho'(t)\gamma_\mu\gamma_\mu'dz_2dz_3dt$$

Appliquant une inégalité de Young au second terme du membre de droite de (3.27), on obtient part tout $\mu\succ 0$:

(3.28)

$$\int_0^T\int_0^L\int_0^\ell\rho'(t)\gamma_\mu\gamma_\mu'dz_2dz_3dt\leqslant\alpha\int_0^T\int_0^L\int_0^\ell\rho(t)\gamma_\mu^2dz_2dz_3dt+$$

$$+c(\alpha)\int_0^T\int_0^L\int_0^\ell\left(\gamma_\mu'\right)^2dz_2dz_3dt$$

où :

$$c(\alpha)=\frac{1}{4\alpha}\left\|\frac{\rho'^2}{\rho}\right\|_{L^\infty]0,T[}$$

D'autre part, si c_p désigne la constante de Poincarré, alors on a :

(3.29)

$$\int_0^T\int_0^L\int_0^\ell\rho(t)\gamma_\mu^2dz_2dz_3dt\leqslant c_p^2\int_0^T\int_0^L\int_0^\ell\rho(t)\frac{\partial\gamma_\mu}{\partial z_k}\frac{\partial\gamma_\mu}{\partial z_\ell}dz_2dz_3dt$$

Compte tenu de (3.24) et (3.25), il découle de (3.29) :

$$\int_0^T\int_0^L\int_0^\ell \rho(t)\gamma_\mu^2 dz_2dz_3dt \leqslant c_p^2\frac{2}{c}\left[\left\|\varphi_\mu^0\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}+\right.$$

(3.30)

$$\left.+\,\mu^{-1}q_{k\ell}^*\left\|\frac{\partial\tau_\mu}{\partial z_\ell}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}\left\|\frac{\partial\tau_\mu}{\partial z_k}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}\right]$$

Ensuite remplaçants (3.28) et (3.30) dans (3.27) , on obtient :

$$\left(\int_0^T\rho(t)dt\right)\left[\left|Y_\mu^*\right|\left\|\varphi_\mu^0\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}-\left|Y_\mu^*\right|c_p^2\tfrac{2}{c}6\alpha\left\|\varphi_\mu^0\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}+\right.$$

$$+\,q_\mu^{k\ell}\left\|\frac{\partial\tau_\mu}{\partial z_\ell}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}\left\|\frac{\partial\tau_\mu}{\partial z_k}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}-$$

$$\left.-\,6\mu^{-1}q_\mu^{k\ell}\alpha\left\|\frac{\partial\tau_\mu}{\partial z_\ell}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}\left\|\frac{\partial\tau_\mu}{\partial z_k}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}\right]$$

$$\leqslant\left[\left|Y_\mu^*\right|\|\rho\|_{L^\infty]0,T[}+c(\alpha)\left|Y_\mu^*\right|\right]\left\|\gamma'_\mu\right\|^2_{L^2(0,T;L^2(]0,\ell[\times]0,L[))}$$

Grâce à la convergence de $\mu^{-1}q_\mu^{k\ell}$ vers $q_{k\ell}^*$:

$$\left\|\varphi_\mu^{0,*}\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}+q_{k\ell}^*\left\|\frac{\partial\tau_\mu}{\partial z_\ell}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}\left\|\frac{\partial\tau_\mu}{\partial z_k}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}\leqslant c'\left\|\varphi_\mu\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \tag{3.31}$$

D'autre part la formulation $\int_0^L\int_0^\ell\mu^{-1}q_\mu^{k\ell}\mu\left(\frac{\partial\tau_\mu}{\partial z_\ell}\right)\left(\frac{\partial\tau_\mu}{\partial z_k}\right)=-\left\langle\varphi_\mu^{1,*},\tau_\mu\right\rangle$ donne l'estimation :

$$\left|\left\langle\varphi_\mu^{1,*},u\right\rangle\right|\leqslant c\mu\left\|\frac{\partial\tau_\mu}{\partial z_\ell}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}\left\|\frac{\partial\tau_\mu}{\partial z_k}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}\leqslant$$

$$\leqslant c_2\mu\left\|\frac{\partial\tau_\mu}{\partial z_\ell}\right\|\|u\|_{H_0^1(]0,\ell[\times]0,L[)}.$$

par conséquent :

$$\left\|\varphi_\mu^{1,*}\right\|^2_{H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)} \leqslant c\mu \left\|\frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell}\right\|$$

Et enfin en reportant (3.31) dans (3.30) , il vient :

$$c_2\left\{\left\|\varphi_\mu^{0,*}\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + \mu^{-2}\left\|\varphi_\mu^{1,*}\right\|^2_{H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)}\right\} \leqslant \left\|\varphi_\mu\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}$$

Ceci achève la preuve du lemme $(3-3)$.

A présent nous sommes en mesure de démontrer le théorème de contrôlabilité exacte.

■

Théorème (3-4) : *Soit* φ_μ *solution du problème* (2.16) *,Alors :*

$$(3.32) \qquad \begin{cases} \mu^{-1}\varphi_\mu^{0,*} \rightharpoonup \varphi^{0,*} & \text{dans } L^2(]0,\ell[\times]0,L[) \text{ faible} \\ \\ \mu^{-1}\varphi_\mu^{1,*} \rightharpoonup \varphi^{1,*} & \text{dans } H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[) \text{ faible}* \end{cases}$$

$$(3.33) \qquad \mu^{-1}\varphi_\mu \rightharpoonup \varphi \qquad \text{dans } L^2(]0,\ell[\times]0,L[) \text{ faible}$$

où φ *est la solution du système :*

$$\begin{cases} 6\varphi'' - q^*_{k\ell}\dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial z_\ell}\right) = 0 & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\times]0,T[\\ \varphi = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,\ell[\times]0,L[\right) \\ \varphi(0) = \varphi^0 & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\\ \varphi'(0) = \dfrac{\varphi_\mu^{1,*}}{6} & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\end{cases}$$

Preuve. : Tout d'abord, on a les estimations suivantes :

$$\left\|\varphi_\mu^{0,*},\varphi_\mu^{1,*}\right\| \quad \leqslant \quad c\left|Y_\mu^*\right|\left\|\Lambda_{\varepsilon\mu}\left(\varphi_\mu^{0,*},\varphi_\mu^{1,*}\right)\right\|_{F'}$$

$$\left\|\varphi_\mu^{0,*},\varphi_\mu^{1,*}\right\| \quad \leqslant \quad c\mu\left(\frac{\left\|u_\mu^1\right\|}{\left|Y_\mu^*\right|};-\frac{\left\|u_\mu^0\right\|}{\left|Y_\mu^*\right|}\right)\leqslant c\mu$$

ce qui par le lemme $(2-1)$ donne :

$$\begin{aligned}\left\|\varphi_\mu^{0,*}\right\|^2+\mu^{-2}\left\|\varphi_\mu^{1,*}\right\|^2 &\leqslant \left|Y_\mu^*\right|\left\langle\Lambda_{\varepsilon\mu}\left(\varphi_\mu^{0,*},\varphi_\mu^{1,*}\right),\left(\varphi_\mu^{0,*},\varphi_\mu^{1,*}\right)\right\rangle\\ &\leqslant \left|Y_\mu^*\right|\left\|\Lambda_{\varepsilon\mu}\left(\varphi_\mu^{0,*},\varphi_\mu^{1,*}\right)\right\|_{F'}\left\|\left(\varphi_\mu^{0,*};\varphi_\mu^{1,*}\right)\right\|_F\\ &\leqslant c\mu^2\end{aligned}$$

alors, on a :

$$\left\|\varphi_\mu^{0,*}\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \quad \leqslant \quad c\left\{\left\|\varphi_\mu^{0,*}\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}+\mu^{-2}\left\|\varphi_\mu^{1,*}\right\|^2_{H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)}\right\}\leqslant c\mu^2$$

et aussi :

$$\left\|\varphi_\mu\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \quad \leqslant \quad c\mu$$

Par conséquent :

$$\left\|\mu^{-1}\varphi_{\mu}^{0,*}\right\| \leqslant c$$

$$\left\|\mu^{-2}\varphi_{\mu}^{1,*}\right\| \leqslant c$$

$$\left\|\mu^{-1}\varphi_{\mu}\right\| \leqslant c$$

On en déduit les convergences (3.32) et (3.33) .

Comme les données initiales sont peu régulières, avant de passer à la limite dans le système (2.16) .On régularise le problème en posant :

$$\gamma_{\mu}(z,t) = \int_0^t \varphi_{\mu}(z,s)\,ds + \tau_{\mu}(z_2,z_3) \tag{3.34}$$

où τ_{μ} est solution de :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q_{k\ell}^{*}\dfrac{\partial \tau_{\mu}}{\partial z_\ell}\right) = -\varphi_{\mu}^{1,*} & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\\ \tau_{\mu} = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,\ell[\times]0,L[\right) \end{cases}$$

En procédant comme dans la preuve du théorème $(2-4)$, on vérifie sans peine que γ_{μ} est solution du système :

$$\begin{cases} \left|Y_{\mu}^{*}\right|\gamma_{\mu}'' - \dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q_{\mu}^{k\ell}\dfrac{\partial \gamma_{\mu}}{\partial z_\ell}\right) = 0 & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\times]0,T[\\ \gamma_{\mu} = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,\ell[\times]0,L[\right) \\ \gamma_{\mu}(0) = \tau_{\mu} & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\\ \gamma_{\mu}'(0) = \varphi_{\mu}^{0,*} & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\end{cases} \tag{3.35}$$

on a facilement l'estimation :

$$\|\tau_\mu\|_{H^1(]0,\ell[\times]0,L[)} \leqslant c\mu$$

de sorte que :

$$\mu^{-1}\tau_\mu \rightharpoonup \tau \qquad \text{dans } H^1(]0,\ell[\times]0,L[) \text{ faible}$$

On en déduit l'estimation :

$$\|\gamma_\mu\|^2_{H^1(]0,\ell[\times]0,L[)} \leqslant c\mu^2$$

et les convergences

$$\mu^{-1}\gamma_\mu \rightharpoonup \gamma \quad \text{dans} \;\; L^\infty\left(0,T,H^1(]0,\ell[\times]0,L[)\right) \;\; \text{faible} *$$

$$\mu^{-1}\gamma'_\mu \rightharpoonup \gamma' \quad \text{dans} \;\; L^\infty\left(0,T,L^2(]0,\ell[\times]0,L[)\right) \;\; \text{faible} *$$

D'autre part :

$$\mu^{-1}\gamma''_\mu - \mu\frac{\partial}{\partial z_k}\left(\mu^{-1}q^{k\ell}_\mu\frac{\partial\gamma_\mu}{\partial z_\ell}\right) = 0$$

En passant à la limite, on obtient :

$$(3.36)\qquad \begin{cases} 6\gamma'' - q^*_{k\ell}\dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(\dfrac{\partial \gamma}{\partial z_\ell}\right) = 0 & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\times]0,T[\\ \gamma = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,\ell[\times]0,L[\right) \\ \gamma(0) = \tau & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\\ \gamma'(0) = \varphi^0 & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\end{cases}$$

où τ est solution du système. :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q^*_{k\ell}\dfrac{\partial \tau}{\partial z_\ell}\right) = -\varphi^{1,*} & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\\ \tau_\mu = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,\ell[\times]0,L[\right) \end{cases}$$

Comme :

$$\gamma \in c\left([0,T], H^1_0(]0,\ell[\times]0,L[)\right) \cap c^1\left([0,T], L^2(]0,\ell[\times]0,L[)\right)$$

$$\cap c^2\left([0,T], H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)\right)$$

On verifie sans peine que :

$$\gamma'_\mu = \varphi_\mu$$

$$\gamma' = \varphi$$

et (3.36) n'est autre que le système :

$$\begin{cases} 6\varphi'' - q^{*}_{k\ell}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z_k \partial z_\ell} = 0 & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\times]0,T[\\ \varphi = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,\ell[\times]0,L[\right) \\ \varphi(0) = \varphi^0 & \textit{dans }]0,\ell[\times]0,L[\\ \varphi'(0) = \dfrac{\varphi^{1,*}}{6} & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\end{cases}$$

Ceci achève la preuve du théorème (3.4) . ■

Maintenant revenons à l'étude du système (3.3) :

Théorème (3-5): *Lorsque* $\mu \longrightarrow O$ *, on a :*

(3.37)
$$\begin{cases} \mu^{-1}u^{0,*}_{\mu} \rightharpoonup u^0 & \text{dans } H^1_0(]0,\ell[\times]0,L[) \text{ faible} \\ \mu^{-1}u^{1,*}_{\mu} \rightharpoonup u^1 & \text{dans} L^2(]0,\ell[\times]0,L[) \text{ faible} \end{cases}$$

et

(3.38)
$$\begin{cases} u_\mu \rightharpoonup u & \text{dans } L^\infty\left(0,T,H^1_0(]0,\ell[\times]0,L[)\right) \\ u'_\mu \rightharpoonup u' & \text{dans } L^\infty\left(0,T,L^2(]0,\ell[\times]0,L[)\right) \end{cases}$$

avec $\mu^{-1}v_\mu \rightharpoonup v$ *dans* $L^2\left(0,T,L^2(]0,\ell[\times]0,L[)\right)$

où v est le contrôle exact du système limite :

$$(3.39) \qquad \begin{cases} 6u'' - q_\mu^{k\ell} \dfrac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial z_\ell} = v & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\times]0,T[\\ u = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,\ell[\times]0,L[\times]0,T[\right) \\ u_\mu(0) = \dfrac{u^0}{6} & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\\ u'(0) = \dfrac{u^1}{6} & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\end{cases}$$

Preuve. En utilisant les Théorèmes $(3-3)$ et $(3-4)$, on remarque qu'il ne reste plus qu'a montrer que v est le contrôle exact de (3.39)

i.e :

$$(3.40) \qquad u(T) = u'(T) = 0$$

On multiplie (3.6) par μ^{-1},puis grâce à $(3.37)_1$ et aux estimations (3.32) et (3.33) , on a :

$$(3.41) \qquad \begin{array}{l} \Psi_\mu \rightharpoonup \Psi \text{ dans } L^\infty(0,T,H_0^1(]0,\ell[\times]0,L[)) \\ \Psi_\mu^1 \rightharpoonup \Psi' \text{ dans } L^\infty(0,T,L^2(]0,\ell[\times]0,L[)) \end{array}$$

On peut donc passer à la limite dans (3.6) de la même façon que dans la preuve du Théorème $(3-3)$.

On obtient ainssi :

$$\begin{cases} 6\psi'' - \dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q^{kl}\dfrac{\partial \psi}{\partial z_l}\right) = -\varphi & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\\ \psi = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,l[\times]0,L[\right)\times]0,T[\\ \psi(T) = 0 & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\\ \psi'(T) = 0 & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\end{cases}$$

où φ est donnée par (3.33) . Pae ailleurs (3.41) et (3.6) impliquent que $u = \Psi$.
Comme $\Psi(T) = \Psi'(T) = 0$,on a (3.40) .
En appliquant HUM au système (3.39) , on construit l'isomorphisme :

$$\wedge : L^2\left(]0,l[\times]0,L[\right)\times H^{-1}\left(]0,l[\times]0,L[\right) \longrightarrow L^2\left(]0,l[\times]0,L[\right)\times H_0^1\left(]0,l[\times]0,L[\right)$$
$$\wedge : \left(\varphi^0,\varphi^{1,*}\right) \longrightarrow \left(\frac{u^1}{6},-\frac{u^0}{6}\right)$$

et donc de déterminer v de façon unique .
Alors :

$$u_\mu \rightharpoonup u \qquad \text{dans } L^\infty\left(0,T,H_0^1(]0,\ell[\times]0,L[)\right)$$

et

$$\mu^{-1}v_\mu \rightharpoonup v \quad \text{dans } L^2\left(0,T,L^2(]0,\ell[\times]0,L[)\right)$$

■

Chapitre4 :

Cas des données initiales moins régulières.

4-1 Homogeneisations et convergence des contrôles

Dans le problème que nous venons de résoudre, les donnée sinitiales $u_{\varepsilon\mu}^{0}$ et $u_{\varepsilon\mu}^{1}$ du système (1.5) étaient prises respectivement dans $V_{\varepsilon\mu}$ et $L^2\left(\Omega_{\varepsilon\mu}^{*}\right)$. Maintenant, nous allons les choisir dans $L^2\left(\Omega_{\varepsilon\mu}^{*}\right)$ et $V_{\varepsilon\mu}^{'}$ respectivement. Il y a dans ce cas un transfert de régularité ; $\varphi_{\varepsilon\mu}^{0}$ et $\varphi_{\varepsilon\mu}^{1}$ sont plus régulières maintenant. De ce fait, les résultats de convergence liés aux suites $\left\{\varphi_{\varepsilon\mu}\right\}$ et $\left\{u_{\varepsilon\mu}\right\}$ sont échangés.

On considère le système :

$$
(4.1)\qquad \begin{cases}
z_{\varepsilon\mu}'' + A_{\varepsilon\mu} z_{\varepsilon\mu} = v_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\mu}^{*}\times]0,T[\\
z_{\varepsilon\mu} = 0 & \text{sur } \Omega_{\varepsilon\mu}^{*0}\times]0,T[\\
\dfrac{\partial z_{\varepsilon\mu}}{\partial v_{A_{\varepsilon\mu}}} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\mu}\times]0,T[\\
z_{\varepsilon\mu}(0) = z_{\varepsilon\mu}^{0} & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\mu}^{*} \\
z_{\varepsilon\mu}'(0) = z_{\varepsilon\mu}^{1} & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\mu}^{*}
\end{cases}
$$

On suppose encore que les hypothèses (1.2), (1.3) et (1.4) sont satisfaites.

$$
A_{\varepsilon\mu} = -\varepsilon^{-2} a_{11}\frac{\partial^2 u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1^2} - \varepsilon^{-1} a_{i\ell}\frac{\partial^2 u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1 \partial z_\ell} - \varepsilon^{-1} a_{k1}\frac{\partial^2 u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_k \partial z_1} - a_{k\ell}\frac{\partial^2 u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_k \partial z_\ell}
$$

et les données initiales sont :

$$z^0_{\varepsilon\mu} \in L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right) \tag{4.2}$$

(2)

$$z^1_{\varepsilon\mu} \in V'_{\varepsilon\mu}$$

On suppose que $v_{\varepsilon\mu} \in \left[H^1\left(0,T,L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)\right)\right]'$.

Sous les hypothèses données, et pour ε fixe et $T \succ 0$, il éxiste un contrôle telle que la solution $z_{\varepsilon\mu}$ de (4.1) verifie :

$$z_{\varepsilon\mu}(T) = z'_{\varepsilon\mu}(T) = 0$$

Nous montrons d'abord qu'un tel contrôle existe.

Ce contrôle est construit par H.U.M comme suit :

On défine $\varphi_{\varepsilon\mu}$ par :

(4.3)
$$\begin{cases} \varphi''_{\varepsilon\mu} + A_{\varepsilon\mu}\varphi_{\varepsilon\mu} = 0 & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}\times]0,T[\\ \varphi_{\varepsilon\mu} = 0 & \text{sur } \Omega^{*0}_{\varepsilon\mu}\times]0,T[\\ \dfrac{\partial\varphi_{\varepsilon\mu}}{\partial v_{A_{\varepsilon\mu}}} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\mu}\times]0,T[\\ \varphi_{\varepsilon\mu}(0) = \varphi^0_{\varepsilon\mu} \in V_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \\ \varphi'_{\varepsilon\mu}(0) = \varphi^1_{\varepsilon\mu} \in L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right) & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \end{cases}$$

et soit $\Psi_{\varepsilon\mu}$ solution du système :

$$(4.4)\quad \begin{cases} \Psi''_{\varepsilon\mu} + A_{\varepsilon\mu}\Psi_{\varepsilon\mu} \ = -\varphi''_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}\times]0,T[\\ \Psi_{\varepsilon\mu} = 0 & \text{sur } \Omega^{*0}_{\varepsilon\mu}\times]0,T[\\ \dfrac{\partial \Psi_{\varepsilon\mu}}{\partial v_{A_{\varepsilon\mu}}} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\mu}\times]0,T[\\ \Psi_{\varepsilon\mu}(T) = \Psi'_{\varepsilon\mu} = 0 & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \end{cases}$$

la dérivé $\varphi"_{\varepsilon\mu}$ n'est pas prise au sens des distributions :

On définie $\varphi"_{\varepsilon\mu}$ par :

$$(4.5)\qquad \left\langle -\varphi"_{\varepsilon\mu}, \Phi \right\rangle = \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\mu}} \varphi'_{\varepsilon\mu}\Phi' dxdt \qquad \forall \Phi \in H^1\left(0, T, L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\ \right)\ \right)$$

donc :

$$-\varphi"_{\varepsilon\mu} \ \in \ \left[H^1\left(0, T, L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\ \right)\ \right)\right]'$$

Posons :

$$F_{\varepsilon\mu} \ = \ V_{\varepsilon\mu} \times L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\ \right)$$

et

$$\Lambda_{\varepsilon\mu} \quad = \quad \pounds\left(F_{\varepsilon\mu}, F_{\varepsilon\mu}^{'}\right)$$

L'opérateur $\Lambda_{\varepsilon\mu}$ est définie par

$$\wedge_{\varepsilon\mu}\left(\varphi_{\varepsilon\mu}^{0}, \varphi_{\varepsilon\mu}^{1}\right) = \left(\psi_{\varepsilon\mu}'(0), -\psi_{\varepsilon\mu}(0)\right) \tag{4.6}$$

Avec la définition précédente ; on vérifie que :

$$\left\langle \wedge_{\varepsilon\mu}\left(\varphi_{\varepsilon\mu}^{0}, \varphi_{\varepsilon\mu}^{1}\right), \left(\varphi_{\varepsilon\mu}^{0}, \varphi_{\varepsilon\mu}^{1}\right)\right\rangle \quad = \quad \int_{0}^{T}\int_{\Omega_{\varepsilon\mu}}\left(\varphi_{\varepsilon\mu}'\right)^{2} dxdt$$

et on definit une norme sur $F_{\varepsilon\mu}$ par :

$$\left\|\varphi^{0}, \varphi^{1}\right\|_{F_{\varepsilon\mu}}^{2} \quad = \quad \int_{0}^{T}\int_{\Omega_{\varepsilon\mu}^{*}}\left(\varphi'\right)^{2} dxdt = \left\|\varphi'\right\|_{L^{2}\left(\Omega_{\varepsilon\mu}^{*}\right)}^{2}$$

En utilisant les résultas de Lions [11], adapté au domaine perferé, nous avons les estimations suivantes :

(4.7)

$$c_1\left(\left\|\varphi^0_{\varepsilon\mu}\right\|_{V_{\varepsilon\mu}}+\left\|\varphi^1_{\varepsilon\mu}\right\|_{L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)}\right)\leqslant\int_0^T\int_{\Omega_{\varepsilon\mu}}\left(\varphi'\right)^2dxdt\leqslant c_2\left(\left\|\varphi^0_{\varepsilon\mu}\right\|_{V_{\varepsilon\mu}}+\left\|\varphi^1_{\varepsilon\mu}\right\|_{L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)}\right)$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes indépendantes de ε.

Cette estimation motre que $\int_0^T\int_{\Omega_{\varepsilon\mu}}\left(\varphi'\right)^2dxdt$ est effectivement équivalente à la norme de $\left(\varphi^0_{\varepsilon\mu},\ \varphi^1_{\varepsilon\mu}\right)$ dans $F_{\varepsilon\mu}$

Il s'en suit que $\Lambda_{\varepsilon\mu}$ est un isomorphisme entre $F_{\varepsilon\mu}$ et $F'_{\varepsilon\mu}$. Par conséquent, l'équation

$$\Lambda_{\varepsilon\mu}\left(\varphi^0_{\varepsilon\mu},\varphi^1_{\varepsilon\mu}\right)=\left(z^1_{\varepsilon\mu},-z^0_{\varepsilon\mu}\right) \tag{4.8}$$

possède une unique solution et compte tenue de la définition de $\Lambda_{\varepsilon\mu}$, on a donc :

$$\begin{aligned}\Psi'_{\varepsilon\mu}(0)&=z^1_{\varepsilon\mu}\\ \Psi_{\varepsilon\mu}(0)&=z^0_{\varepsilon\mu}\end{aligned}$$

Posons :

$$v_{\varepsilon\mu}=-\varphi''_{\varepsilon\mu} \tag{4.9}$$

où $\varphi_{\varepsilon\mu}$ solution de (4.3) avec $\left(\varphi^0_{\varepsilon\mu},\ \varphi^1_{\varepsilon\mu}\right)$ donnée par (4.8) et (4.9) , on voit que $\Psi_{\varepsilon\mu}$ est la solution de (4.1) , hors ce système n'admettant qu'une solution unique

A savoir $z_{\varepsilon\mu}$:

$$z_{\varepsilon\mu} = \Psi_{\varepsilon\mu} \tag{4.10}$$

Par conséquent :

$$z_{\varepsilon\mu}(T) \;=\; z'_{\varepsilon\mu}(T) = 0$$

Remarque (4-1)

Le contrôle $v_{\varepsilon\mu}$ dans cette situation est encore dans un espace faible.

Maintenant φ^0 et φ^1 appartiennent respectivement à $L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)$ et $V_{\varepsilon\mu}$ donc le théorème d'homogénéisation (2.3) est appliquable au système (4.3).

Mais pour passer à la limite dans (4.1) , nous avons besoin d'un théorème analogue au théorème $(3-1)$.

Théorème (4-2)

Soit $v_{\varepsilon\mu} = -\varphi''_{\varepsilon\mu}$ *le contrôle exact donné par H.U.M pour les ystème* (4.1).
Supposons que :

$$(4.11) \qquad \begin{cases} i) \quad \tilde{z}^0_{\varepsilon\mu} \to z^0_\mu & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ ii) \quad \left\| z^1_{\varepsilon\mu} \right\|_{V'_{\varepsilon\mu}} \leq c & (c \text{ indépendante de } \varepsilon) \end{cases}$$

alors :

$$\tilde{\varphi}'_{\varepsilon\mu} \quad \to \quad \varphi'_\mu \qquad \text{dans } L^2(\Omega \times]0,T[\,) \text{ faible}$$

et $v_{\varepsilon\mu} = -\left|Y^*_\mu\right| \varphi''_\mu$ *est le contrôle exact pour les ystème :*

$$(4.12) \qquad \begin{cases} \left|Y^*_\mu\right| z''_\mu - \dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q^{kl}_\mu \dfrac{\partial z_\mu}{\partial z_l}\right) = v_\mu & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\\ z_\mu = 0 & \text{sur } \partial(]0,l[\times]0,L[) \times]0,T[\\ z_\mu(0) = z^0_\mu & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\\ z'_\mu(0) = z^{1,*} & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\end{cases}$$

où $z^{1,*}$ *est donné par* (3.12)

Ce théorème contient deux resultats de convergences : une pour la solution et l'autre pour le contrôle.

Preuve. : On commence par démontrer la convergence de la solution $z_{\varepsilon\mu}$. Pour démontrer ce théorème, comme on l'a déjà noté dans la remarque $(4-1)$.

On considère le problème :

$$
(4.13) \qquad \begin{cases}
\omega''_{\varepsilon\mu} + A_{\varepsilon\mu}\omega_{\varepsilon\mu} = G'_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}\times]0,T[\\
\omega_{\varepsilon\mu} = 0 & \text{sur } \Omega^{*0}_{\varepsilon\mu}\times]0,T[\\
\dfrac{\partial \omega_{\varepsilon\mu}}{\partial v_{A_{\varepsilon\mu}}} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\mu}\times]0,T[\\
\omega_{\varepsilon\mu}(0) = \omega^0_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \\
\omega'_{\varepsilon\mu}(0) = \omega^1_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}
\end{cases}
$$

avec les conditions initiales $\left(\omega^0_{\varepsilon\mu},\ \omega^1_{\varepsilon\mu}\right)$ satisfaisant le lemme $(2-2)$ et où $G'_{\varepsilon\mu} \in \left[H^1\left(0,T;L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)\right)\right]'$ et est définie par :

$$
\left\langle G'_{\varepsilon\mu}, \Phi\right\rangle = \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\mu}} G_{\varepsilon\mu}\Phi' dxdt \qquad \forall \Phi \in H^1\left(0,T,L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)\right)
$$

supposons que $G_{\varepsilon\mu} \in C\left([0,T]\,;L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)\right)$ et :

$$(4.14) \qquad \begin{cases} i) \quad \tilde{G}_{\varepsilon\mu} \to G_\mu & \text{dans} \quad L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu} \times [0,T]\right) \text{ faible} \\ \\ ii) \quad \tilde{G}_{\varepsilon\mu}(0) \to G_\mu(0) & \text{dans} \quad L^2\left(\Omega_{\varepsilon\mu}\right) \text{ faible} \end{cases}$$

quand $\varepsilon \to 0$. ■

On a le :

Théorème (4-3)

Sous les hypothèses $\left(\left\|\omega^1_{\varepsilon\mu}\right\|_{V'_{\varepsilon\mu}} \leqslant c\right)$, $\left(\tilde{\omega}^0_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup \omega^0_\mu \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible}\right)$ *et* (4.14), *il existe une suite* $\{\omega_{\varepsilon\mu}\}$ *notée encore* $\{\omega_{\varepsilon\mu}\}$ *et une fonction* $\omega^{1,*}_\mu$ *tel que :*

$$\tilde{\omega}_{\varepsilon\mu} \to \omega_\mu \qquad \text{dans} \quad L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \text{ faible}$$

où ω_μ *est solution du système :*

$$(4.15) \qquad \begin{cases} \left|Y^*_\mu\right| \omega''_\mu - \dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q^{kl}_\mu \dfrac{\partial \omega_\mu}{\partial z_l}\right) = \left|Y^*_\mu\right| G'_\mu & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\\ \\ \omega_\mu = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,l[\times]0,L[\right)\times]0,T[\\ \\ \omega_\mu(0) = \int_0^1 \omega^0_\mu dz_1 & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\\ \\ \omega'_\mu(0) = \omega^{1,*} & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\end{cases}$$

où

$$\omega^{1,*}_\mu = \frac{\partial}{\partial z_k}\left(q^{kl}_\mu \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_l}\right) + G_\mu(0)$$

Preuve. La démonstration de ce théorème est quasiment la même que celle du théorème $(2-4)$. Les conditions initiales $\omega^0_{\varepsilon\mu}$ et $\omega^1_{\varepsilon\mu}$ du système (4.13) sont dans des espaces faibles , donc on introduit

$$\gamma_{\varepsilon\mu} = \int_0^t \omega_{\varepsilon\mu}\, ds + \tau_{\varepsilon\mu} \tag{4.16}$$

pour régulariser le système

où $\tau_{\varepsilon\mu} \in V_{\varepsilon\mu}$ est defini par :

$$\begin{cases} A_{\varepsilon\mu}\tau_{\varepsilon\mu} = -\omega^1_{\varepsilon\mu} + G_{\varepsilon\mu}(0) & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \\ \tau_{\varepsilon\mu} = 0 & \text{sur } \Omega^{*0}_{\varepsilon\mu} \\ \dfrac{\partial \tau_{\varepsilon\mu}}{\partial v_{A_{\varepsilon\mu}}} = 0 & \text{sur } \left(\partial\Omega^*_{\varepsilon\mu} \setminus \Omega^{*0}_{\varepsilon\mu}\right) \end{cases} \tag{4.17}$$

Nous avons

$$\gamma'_{\varepsilon\mu} = \omega_{\varepsilon\mu} \; ; \; \gamma''_{\varepsilon\mu}(0) = \omega'_{\varepsilon\mu}$$

et

$$\begin{aligned} A_{\varepsilon\mu}.\gamma_{\varepsilon\mu}(z,t) &= \int_0^t A_{\varepsilon\mu}.\omega_{\varepsilon\mu}\ (z,s)\, ds + A_{\varepsilon\mu}.\tau_{\varepsilon\mu}(z_2,z_3) \\ &= \int_0^t \left(G'_{\varepsilon\mu} - \omega''_{\varepsilon\mu}\right) ds + \left(-\omega^1_{\varepsilon\mu} + G_{\varepsilon\mu}(0)\right) \\ &= G_{\varepsilon\mu}(t) - G_{\varepsilon\mu}(0) - \omega'_{\varepsilon\mu}(t) + \omega'_{\varepsilon\mu}(0) - \omega^1_{\varepsilon\mu} + G_{\varepsilon\mu}(0) \\ &= G_{\varepsilon\mu}(t) - \omega'_{\varepsilon\mu}(t) \end{aligned}$$

d'où

$$A_{\varepsilon\mu}.\gamma_{\varepsilon\mu} + \gamma^{"}_{\varepsilon\mu} = G_{\varepsilon\mu}$$

$(4.13)_2$ et $(4.17)_2$ donnent :

$$\gamma_{\varepsilon\mu} = 0 \qquad \text{sur } \Omega^{*0}_{\varepsilon\mu} \times]0,T[$$

et , $(4.13)_3$ et $(4.17)_3$ donnent :

$$\frac{\partial \gamma_{\varepsilon\mu}}{\partial v_{A_{\varepsilon\mu}}} = 0 \qquad \text{sur } \left(\partial\Omega^{*}_{\varepsilon\mu} \setminus \Omega^{*0}_{\varepsilon\mu}\right) \times]0,T[$$

et

$$\begin{aligned} \gamma'_{\varepsilon\mu}(0) &= \omega_{\varepsilon\mu}\,(0) = \omega^{0}_{\varepsilon\mu} \\ \gamma_{\varepsilon\mu}\,(0) &= \tau_{\varepsilon\mu} \end{aligned}$$

d'où $\gamma_{\varepsilon\mu}$ verifie le système :

$$(4.18) \qquad \begin{cases} \gamma''_{\varepsilon\mu} + A_{\varepsilon\mu}\gamma_{\varepsilon\mu} = G_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^{*}_{\varepsilon\mu} \times]0,T[\\ \gamma_{\varepsilon\mu} = 0 & \text{sur } \Omega^{*0}_{\varepsilon\mu} \times]0,T[\\ \dfrac{\partial \gamma_{\varepsilon\mu}}{\partial v_{A_{\varepsilon\mu}}} = 0 & \text{sur } \left(\partial\Omega^{*}_{\varepsilon\mu} \setminus \Omega^{*0}_{\varepsilon\mu}\right) \times]0,T[\\ \gamma_{\varepsilon\mu}\,(0) = \tau_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^{*}_{\varepsilon\mu} \\ \gamma'_{\varepsilon\mu}\,(0) = \omega^{0}_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^{*}_{\varepsilon\mu} \end{cases}$$

quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Les hypothèses (2.4) e t (4.14) sur $\omega^1_{\varepsilon\mu}$ resp $G_{\varepsilon\mu}$ montrent que si $Q_{\varepsilon\mu}$ est l'opérateur donné par le lemme $(2-1)$, alors :

$$Q_{\varepsilon\mu}\tau_{\varepsilon\mu} \quad \rightarrow \quad \tau_\mu \qquad \text{dans } H^1_0(\Omega) \qquad \text{faible}$$

où τ_μ solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q^{kl}_\mu \dfrac{\partial \tau_\mu}{\partial z_l}\right) = -\omega^{1,*}_\mu + G_\mu\ (0) & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\\ \\ \tau_\mu = 0 & \text{dans } \partial\left(]0,l[\times]0,L[\right) \end{cases}$$

Les même procédés de calcule effectués dans le chapitre 3 , nous permet d'appliquer le théorème $(1-4)$ à (4.18)

$$\begin{cases} P_{\varepsilon\mu}\gamma_{\varepsilon\mu} \rightarrow \gamma_\mu & \textit{dans } L^\infty(0,T;H^1(\Omega) \text{ faible}* \\ \\ P_{\varepsilon\mu}\gamma'_{\varepsilon\mu} \rightarrow \gamma'_\mu & \textit{dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega) \textit{ faible}* \end{cases}$$

où γ_μ solution de :

$$\begin{cases} \left|Y^*_\mu\right|\gamma''_\mu - \dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q^{kl}_\mu \dfrac{\partial \gamma_\mu}{\partial z_l}\right) = G_\mu & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\\ \gamma_\mu = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,l[\times]0,L[\right)\times]0,T[\\ \gamma_\mu(0) = \tau_\mu & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\\ \gamma'_\mu(0) = \dfrac{\int_0^1 \omega^0_\mu dz_1}{\left|Y^*_\mu\right|} & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\end{cases}$$

Les même calcules que dans chapitre (3) ,avec $\gamma'_\mu = \omega_\mu$,nous donne :

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_{\varepsilon\mu} &= \tilde{\gamma}'_{\varepsilon\mu} \rightarrow \left|Y_\mu^*\right| \gamma'_\mu \\ \tilde{\omega}_{\varepsilon\mu} &\rightarrow \omega_\mu\end{aligned}$$

d'où :

$$\omega_\mu = \left|Y_\mu^*\right| \gamma'_\mu$$

donc

$$\omega_\mu(0) = \left|Y_\mu^*\right| \gamma'_\mu(0) = \int_0^1 \omega_\mu^0 dz_1$$

et

$$\omega'_\mu = \left|Y_\mu^*\right| \gamma''_\mu$$

donc

$$\omega'_\mu(0) = \left|Y_\mu^*\right| \gamma''_\mu(0) = \frac{\partial}{\partial z_k}\left(q_\mu^{kl}\frac{\partial \gamma_\mu(0)}{\partial z_l}\right) + G_\mu$$

$$\omega'_\mu(0) = \omega_\mu^{1,*}$$

$$\left|Y_\mu^*\right| \gamma''_\mu - \frac{\partial}{\partial z_k}\left(q_\mu^{kl}\frac{\partial \gamma_\mu}{\partial z_l}\right) = G_\mu$$

en remplaçons $\left|Y_\mu^*\right| \gamma_\mu''$ par $\omega_\mu^{'}$, on a :

$$\omega_\mu^{'} - \frac{\partial}{\partial z_k}\left(q_\mu^{kl}\frac{\partial \gamma_\mu}{\partial z_l}\right) \quad = \quad G_\mu$$

et

$$\omega_\mu^{''} - \frac{\partial}{\partial z_k}\left(q_\mu^{kl}\frac{\partial \gamma_\mu^{'}}{\partial z_l}\right) \quad = \quad G_\mu^{'}$$

multipliant par $\left|Y_\mu^*\right|$:

$$\left|Y_\mu^*\right| \omega_\mu^{''} - \frac{\partial}{\partial z_k}\left(q_\mu^{kl}\frac{\partial \left|Y_\mu^*\right| \gamma_\mu^{'}}{\partial z_l}\right) \quad = \quad \left|Y_\mu^*\right| G_\mu^{'}$$

donc

$$\left|Y_\mu^*\right| \omega_\mu'' - \frac{\partial}{\partial z_k}\left(q_\mu^{kl}\frac{\partial \omega_\mu}{\partial z_l}\right) \quad = \quad \left|Y_\mu^*\right| G_\mu^{'}$$

d'où le sysème (4.15) . ■

Preuve. du théorème $(4-2)$

On donne seulement un apperçu de la démonstration, les arguments sont les même que ceux du théorème $(2-3)$.

De (4.11), (4.8) et l'inégalité (4.7) , il vient :

$$\left\|\varphi_{\varepsilon\mu}^{0}\right\|_{V_{\varepsilon\mu}}+\left\|\varphi_{\varepsilon\mu}^{1}\right\|_{L^{2}\left(\Omega_{\varepsilon\mu}^{*}\right)} \leq c$$

ceci implique que :

$$(4.19) \qquad \begin{cases} i) \quad \tilde{\varphi}_{\varepsilon\mu}^{0} \rightarrow \varphi_{\mu}^{0} & \text{dans } L^{2}(\Omega) \text{ faible} \\ \\ ii) \quad \tilde{\varphi}_{\varepsilon\mu}^{1} \rightarrow \varphi_{\mu}^{1} & \text{dans } L^{2}(\Omega) \text{ faible} \end{cases}$$

Maintenant le théorème d'homogéneisation (1.4) peut être appliqué au problème (4.3). Donc si $P_{\varepsilon\mu}$ est l'opérateur de prolongement donné par le lemme $(2-1)$

$$\begin{cases} P_{\varepsilon\mu}\varphi_{\varepsilon\mu} \rightarrow \phi_{\mu} & \textit{dans } L^{\infty}(0,T;H^{1}(\Omega)) \text{ faible}* \\ \\ P_{\varepsilon\mu}\varphi_{\varepsilon\mu}^{'} \rightarrow \phi_{\mu}^{'} & \textit{dans } L^{\infty}(0,T;L^{2}(\Omega)) \textit{ faible}* \end{cases}$$

où ϕ_{μ} solution de :

$$\begin{cases} \left|Y_{\mu}^{*}\right| \phi_{\mu}+A_{\mu}\phi_{\mu}=0 & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\\ \phi_{\mu}=0 & \text{sur } \partial(]0,l[\times]0,L[)\times]0,T[\\ \phi_{\mu}(0)=\dfrac{\phi_{\mu}^{0}}{\left|Y_{\mu}^{*}\right|} & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\\ \phi_{\mu}^{\prime}(0)=\dfrac{\phi_{\mu}^{1}}{\left|Y_{\mu}^{*}\right|} & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\end{cases}$$

où :

$$A_\mu = -\frac{\partial}{\partial z_k}\left(q_\mu^{kl}\frac{\partial}{\partial z_l}\right)$$

si on note $\varphi_\mu = \left|Y_\mu^*\right| \phi_\mu$, alors :

$$(4.20) \qquad \tilde{\varphi}'_{\varepsilon\mu} \to \varphi'_\mu \qquad \text{dans } L^2\left(]0,l[\times]0,L[\right) \text{ faible}$$

Ce pendant :

$$(4.21) \qquad \begin{cases} \left|Y_\mu^*\right| \varphi''_\mu + A_\mu \varphi_\mu = 0 & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\\ \varphi_\mu = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,l[\times]0,L[\right)\times]0,T[\\ \varphi_\mu(0) = \varphi_\mu^0 & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\\ \varphi'_\mu(0) = \varphi_\mu^1 & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\end{cases}$$

Revenons au système (4.1).

En appliquant (4.3) avec $G_{\varepsilon\mu} = -\varphi''_{\varepsilon\mu}$, il est clair que (4.20) implique (4.14), d'où on obtient le système homogéneisé (4.12) .

Pour conclure, on verifie que $-\varphi''_{\varepsilon\mu}$ est le contrôle exacte de (4.13) .

En utilisant le théorème $(4-3)$, pour passer à la limite dans le système (4.4) , on obtient le système limite :

$$\begin{cases} \left|Y_\mu^*\right| \Psi_\mu'' - \dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q_\mu^{kl}\dfrac{\partial \Psi_\mu}{\partial z_l}\right) = -\left|Y_\mu^*\right| \varphi_\mu^{"} & \text{dans } \Omega \times]0,T[\\ \Psi_\mu = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0,T[\\ \Psi_\mu(T) = \Psi_\mu^{'}(T) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

En appliquant HUM à (4.12) , on peut construire un isomorphisme telle que :

$$\wedge_\mu\left(\varphi_\mu^0, \varphi_\mu^1\right) = \left(z_\mu^{1,*}, -z_\mu^0\right)$$

avec φ_μ donnée par (4.21) , alors $-\left|Y_\mu^*\right| \varphi_\mu^{"}$ est un contrôle éxacte.

Remarque :

$$z_{\varepsilon\mu}^1 \rightarrow z_\mu^1 \qquad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible}$$

et le théorème $(4-2)$ donne $\tilde{z}_\mu^{1,*} = z_\mu^1$ et $(\tilde{z}_{\varepsilon\mu} \rightarrow z_\mu$ dans $L^2(\Omega \times]0,T[)$ faible) ■

Chapitre5 :

Etude de la controlabilité exacte et de la convergence du système bidimentionnel dans le cas des données initiales moins régulières.

5-1 Etude de la contrôlabilité exacte du système (4.12) :

Dans tout ce qui suit, c désigne les différentes constantes positives indépendantes de μ.

On a le :

Théorème (5-1) :

Pourtout $T \succ 0$, il existe un contrôle :

$$v_\mu \in \left[H^1\left(0,T,L^2\left(]0,l[\times]0,L[\ \right)\ \right)\right]' \tag{5.1}$$

telque la solution z_μ de (4.12) satifasse la condition :

$$z_{\varepsilon\mu}(T) = z'_{\varepsilon\mu}(T) = 0 \qquad \textit{dans} \quad]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\tag{5.2}$$

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme (5-2) :

On suppose que les données initiales φ_μ^0 et φ_μ^1 du système (4.21) verifient :

$$\varphi_\mu^0 \in V_\mu \text{ et } \varphi_\mu^1 \in L^2\left(]0,l[\times]0,L[\ \right)$$

Alors il existe deux constantes c_1 et c_2, positives et indépendants de μ telle que :

$$\begin{gathered} c_1\left(\left\|\varphi_\mu^0\right\|_{V_\mu}^2 + \mu^{-1}\left\|\varphi_\mu^1\right\|_{L^2(]0,l[\times]0,L[\ )}\right) \leqslant \left\|\varphi'_\mu\right\|_{L^2(]0,l[\times]0,L[\ )\times]0,T[}^2 \\ \text{et} \\ \left\|\varphi'_\mu\right\|_{L^2(]0,l[\times]0,L[\ )\times]0,T[}^2 \leqslant c_2\left(\left\|\varphi_\mu^0\right\|_{V_\mu}^2 + \mu^{-1}\left\|\varphi_\mu^1\right\|_{L^2(]0,l[\times]0,L[\ )}\right) \end{gathered} \tag{5.3}$$

Ce lemme se démontre comme le lemme $(3-3)$

Preuve. Preuve du théorème $(5-1)$:

Introduisans Ψ_μ solution du problème :

$$(5.4)\qquad \begin{cases} \left|Y_\mu^*\right| \Psi_\mu'' - \dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q_\mu^{kl}\dfrac{\partial \Psi_\mu}{\partial z_l}\right) = -\left|Y_\mu^*\right| \varphi_\mu^{"} & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\\ \Psi_\mu = 0 & \text{sur } \partial]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\\ \Psi_\mu(T) = \Psi_\mu'(T) = 0 & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\end{cases}$$

où $\varphi_\mu^{"}$ verifie :

$$\left\langle -\varphi_\mu^{"}, \Phi\right\rangle = \int_0^T \left(\int_0^l \left(\int_0^L \varphi_\mu' \Phi' dx_2\right) dz\right) dt \qquad \forall \Phi \in H^1\left(0,T,L^2\left(]0,l[\times]0,L[\right)\right)$$

de sort que $\varphi_\mu^{"} \in \left[H^1\left(0,T,L^2\left(]0,l[\times]0,L[\right)\right)\right]'$ espace dual de $H^1\left(0,T,L^2\left(]0,l[\times]0,L[\right)\right)$

Posons $F_\mu = V_\mu \times L^2\left(]0,l[\times]0,L[\right)$, on a maintenant $F_\mu' = V'\mu \times L^2\left(]0,l[\times]0,L[\right)$ et définissons $\wedge_\mu$ comme précédemment.

Grâce au lemme $(5-2)$, nous savons que $\wedge_\mu$ est isomorphisme de F_μ dans F_μ' tel que :

$$(5.5)\qquad c_1\left(\left\|\left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^1\right)\right\|_{F_\mu}\right) \leqslant \left\|\wedge_\mu\left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^1\right)\right\|_{F_\mu'} \leqslant c_2\left(\left\|\left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^1\right)\right\|_{F_\mu}\right)$$

D'où il découle de l'équation

$$(5.6)\qquad \wedge_\mu\left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^1\right) = \left(z_\mu^{1,*}, -z_\mu^0\right)$$

a une et une seule solution dans F_μ car $\left(z_\mu^{1,*}, -z_\mu^0\right) \in F'_\mu$

Choisissant :

$$v_\mu = -\left|Y_\mu^*\right| \varphi_\mu^{"} \tag{5.7}$$

où φ_μ est la solution de (4.21) avec $\left(\varphi_\mu^0, \varphi_\mu^1\right)$ solution de (5.6)

De plus, on a par définition :

$$\wedge_\mu \left(\varphi_\mu^0, \varphi_\mu^1\right) = \left(\Psi'_\mu(0), -\Psi_\mu(0)\right) \tag{5.8}$$

confirmant (5.6) et (5.8), et tenant compte de l'unicité de la solution de (4.21) , on obtient :

$$\tau_\mu \;=\; \Psi_\mu$$

de sorte que : $v_\mu = -\left|Y_\mu^*\right| \varphi_\mu^{"}$ est le contrôle exact convenable. ■

Maintenant nous allons faire tendre μ vers zéro.

Théorème (5-3) :

On suppose que les données initiles $z_\mu^{1,*}$ *et* z_μ^0 *du système* (4.12) *satisfaisant à* (5.6) *:*

$$(5.9) \quad \begin{cases} \mu^{-1} z_\mu^0 \to z^0 & \text{dans } L^2\left(]0,l[\times]0,L[\right) \text{ faible*} \\ \mu^{-1} z_\mu^{1;*} \to z^{1.*} & \text{dans } H^{-1}\left(]0,l[\times]0,L[\right) \text{ faible*} \\ \mu^{-1} z_\mu \to z & \text{dans } L^\infty\left(0,T,L^2\left(]0,l[\times]0,L[\ \right)\ \right) \text{ faible*} \end{cases}$$

Alors, lorsque μ *tend vers zéro, on a :*

$$(5.10) \quad v_\mu \to v \quad \text{dans } \left[H^1\left(0,T,L^2\left(]0,l[\times]0,L[\ \right)\ \right)\right]' \text{ faible *}$$

où v *est le contrôle exact du système :*

$$(5.11) \quad \begin{cases} 6.z'' - q_{kl}^* \dfrac{\partial^2 z}{\partial z_k \partial z_l} = v & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\\ z = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,l[\times]0,L[\right)\times]0,T[\\ z(0) = z^0 & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\\ z'(0) = z^{1,*} & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\end{cases}$$

La preuve de ce théorème découle aisement des résultats suivants

Théorème (5-4) : *Soient* φ_μ^0 *et* φ_μ^1 *les données initiales de* (4.3) *solution de* (5.8). *Alors, on a :*

$$(5.12) \qquad \begin{cases} \mu^{-1}\varphi_\mu^0 \to \varphi^0 & \text{dans } H^1\left(]0,l[\times]0,L[\right) \text{ faible} \\ \mu^{-1}\varphi_\mu^1 \to \varphi^1 & \text{dans } L^2\left(]0,l[\times]0,L[\right) \text{ faible} \end{cases}$$

où φ^0 *est une fonction indépendante de* x_1.

En outre, on a :

$$(5.13) \qquad \begin{cases} \varphi_\mu \to \varphi^0 & \text{dans } L^\infty\left(0,T;H^1\left(]0,l[\times]0,L[\right)\right) \text{ faible} \\ \varphi_\mu' \to \varphi' & \text{dans } L^\infty\left(0,T;L^2\left(]0,l[\times]0,L[\right)\right) \text{ faible} \end{cases}$$

où φ *est la solution du système :*

$$(5.14) \qquad \begin{cases} 6.\varphi'' - q_{kl}^* \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z_k \partial z_l} = v & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\\ \varphi = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,l[\times]0,L[\right)\times]0,T[\\ \varphi(0) = \dfrac{\varphi^0}{6} & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\\ \varphi'(0) = \dfrac{\varphi^1}{6} & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\end{cases}$$

où les coefficients q_{kl}^* *sont donnés par* (3.14).

Preuve. Esquise de la preuve du Théorème (5-4) :

Grâce au lemme $(5-2)$ *ainssi qu'à* (5.6) *et* (5.9) *, on a les estimations suivantes :*

$$\mu^{-1}\left\|\varphi_{\mu}^{0}\right\|_{V_{\mu}} \leqslant c$$

$$\mu^{-1}\left\|\varphi_{\mu}^{1}\right\|_{L^{2}(]0,l[\times]0,L[\ )} \leqslant c$$

$$(5.15) \qquad \left\|\varphi_{\mu}'\right\|_{L^{2}(]0,l[\times]0,L[\ )\times]0,T[} \leqslant c$$

$$\left\|\varphi_{\mu}\right\|_{V_{\mu}} \leqslant c$$

On en deduit (5.12) et (5.13) .Puis on verifie sans peine que φ est la solution de (5.14) ■

Théorèmé (5-5) : *Lorsque μ tends vers zéro, la solution $\Psi\mu$ de (4.4) vérifie :*

$$\mu^{-1}\Psi_\mu \to \Psi^0 \qquad \text{dans } L^\infty\left(0,T;H^1\left(]0,l[\times]0,L[\right)\right) \text{ faible} \tag{5.16}$$

avec Ψ satisfaisant :

$$\left\{\begin{array}{ll} 6.\Psi'' - q^*_{kl}\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial z_k \partial z_l} = -6\varphi'' & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\\ \Psi = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,l[\times]0,L[\right)\times]0,T[\\ \Psi(T) = \Psi'(T) = 0 & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\end{array}\right. \tag{5.17}$$

Preuve. du Théorème (5-5) :

Nous allons procéder comme dans [4] ; pour cela introduisons $\chi_\mu \in V_\mu$, solution de :

$$\left\{\begin{array}{ll} -A_\mu\chi_\mu = \varphi'_\mu(T) & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\\ \chi_\mu = 0 & \text{sur } \partial\left(\ ]0,l[\times]0,L[\right) \\ \dfrac{\partial\chi_\mu}{\partial v} = 0 & \text{sur }]0,l[\times]0,L[\end{array}\right. \tag{5.18}$$

et posons

$$\gamma_\mu(z,t) = \int_t^T \Psi(z,s)\,ds + \chi_\mu$$

Par la même technique de calcul utilisée dans le chapitre (4) , on vérifie aisement que γ_μ est la solution du système :

$$(5.19)\qquad \begin{cases} \left|Y_\mu^*\right| \gamma_\mu'' - \dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q_{kl}^\mu \dfrac{\partial \gamma_\mu}{\partial z_l}\right) = \varphi_\mu' & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\\ \gamma_\mu = 0 & \text{sur } \partial\,]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\\ \gamma_\mu(T) = \chi_\mu & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\\ \gamma_\mu'(T) = 0 & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\end{cases}$$

On montre à partir de (5.15) que χ_μ est bornée pour la norme de V_μ ; par conséquent :

$$(5.20)\qquad \mu^{-1}\chi^\mu \to \chi \qquad \text{dans } H^1(]0,l[\times]0,L[) \text{ faible}$$

avec χ indépendantede z_1 et vérifiant :

$$(5.21)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q_{kl}^* \dfrac{\partial \chi_\mu}{\partial z_l}\right) = \varphi'(T) & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\\ \chi = 0 & \text{sur } \partial\,]0,l[\times]0,L[\end{cases}$$

On utilisant (5.15) et (5.20) on trouve que :

$$(5.22)\qquad \begin{cases} \mu^{-1}\gamma_\mu \to \gamma & \text{dans } L^\infty(0,T;H^1(]0,l[\times]0,L[)) \text{ faible*} \\ \mu^{-1}\gamma_\mu' \to \gamma' & \text{dans } L^\infty(0,T;L^2(]0,l[\times]0,L[)) \text{ faible*} \end{cases}$$

où γ est indépendante de z_1 et γ est solution de :

$$(5.23) \qquad \begin{cases} 6\gamma'' - q^*_{kl}\dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(\dfrac{\partial \gamma}{\partial z_l}\right) = -6\varphi'_\mu & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\\ \gamma = 0 & \text{sur } \partial]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\\ \gamma(0) = \chi & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\\ \gamma'(0) = 0 & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\end{cases}$$

puisque $\Psi_\mu = \gamma'_\mu$, on déduit (5.10) de (5.22) et l'utilisation de (5.21) et (5.23) permet d'affirmer que Ψ est la solution de (5.17) .

Ce qui termine la preuve du théorème $(5-5)$. ■

Preuve. Esquise de la preuve du théorème (5-3) :

Puisque par le théorème (5-1) , on a $z_\mu = \Psi_\mu$, le théorème (4-3) nous donne immédiatement :

$$\mu^{-1} z_\mu \quad \rightarrow \quad z \qquad \text{dans} \quad L^\infty\left(0, T; L^2\left(]0, l[\times]0, L[\right)\right) \quad \text{faible*}$$

D'autre part comme $v_\mu = -\left|Y_\mu^*\right| \varphi_\mu^{"}$, on a aussi :

$$v_\mu \quad \rightarrow \quad v \qquad \text{dans} \quad \left[H^1\left(0, T, L^2\left(]0, l[\times]0, L[\ \right)\ \right)\right]' \quad \text{faible *}$$

Et l'obtention de $(5-11)$ découle du théorème $(5-4)$. Nous tenons à préciser que toutes les convergences obtenues jusqu'à présent sont liées à des sous-suites extraites de $\{\mu\}$. Pour achever la preuve du théorème $(5-3)$, on doit encore montrer que toutes les convergences ont lieu pour toute la suite $\{\mu\}$.

Pour ce faire, on applique la méthode H.U.M au système (5.11), ce qui nous permet de savoir que le contrôle exacte v est unique, d'où l'on déduit que toute la suite $\{v_\mu\}$ converge et par suite, toutes les autres convergences ont lieu pour toute la suite $\{\mu\}$. ■

Apprendice :

Preuve du lemme (3-2)

Notre preuve utilise essentiellement des idées de l'appendice de [6] basée sur le théorème de compacité par compensation [13].

Dans tout ce qui suit, c désigne différentes constantes positives indépendantes de ε et le $\sim$ désigne le prolongement par zéro de toute fonction définie sur Ω_ε.

Maintenant nous donnons la preuve du lemme $(3-2)$.

Preuve. Introduisant ρ_ε et V_ε solution de :

$$
\text{(A.1)} \qquad \begin{cases} -\left[\varepsilon^{-1}\dfrac{\partial^2 \rho_\varepsilon}{\partial z_1^2} + \dfrac{\partial^2 \rho_\varepsilon}{\partial z_2^2} + \dfrac{\partial^2 \rho_\varepsilon}{\partial z_3^2}\right] = f_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \\ \rho_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Omega^{*,\circ}_{\varepsilon\mu} \\ \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial \upsilon} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\mu} \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} -\left[\varepsilon^{-1}\dfrac{\partial}{\partial z_1}\left(\dfrac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial z_1}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z_2}\left(\dfrac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial z_2}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z_3}\left(\dfrac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial z_3}\right)\right] = f_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \\ \rho_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Omega^{*,\circ}_{\varepsilon\mu} \\ \dfrac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial \upsilon} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\mu} \end{cases}
$$

L'équation $A_{\varepsilon\mu}\tau_{\varepsilon\mu} = f_{\varepsilon\mu}$ du lemme $(3-2)$ s'écrit encore :

(A.2) $$-\left[\varepsilon^{-1}\frac{\partial A_1}{\partial z_1} + \frac{\partial A_\ell}{\partial z_\ell}\right] = f_{\varepsilon\mu} \qquad \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}$$

En soustrayant $(A.2)$ de $(A.1)$, on obtient :

$$-\left[\varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(A_1 - \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial z_1}\right) + \frac{\partial}{\partial z_\ell}\left(A_\ell - \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial z_\ell}\right)\right] \quad = \quad 0$$

Posons :

$$\sigma^i_{\varepsilon\mu} \quad = \quad A_i - \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial z_i} = \varepsilon^{-1} a_{i1}\frac{\partial \tau_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} + a_{i\ell}\frac{\partial \tau_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell} - \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial z_i}$$

on vérifie facilement que :

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial \sigma^1_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} + \frac{\partial \sigma^\ell_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell} \quad = \quad 0$$

Comme on a :

$$\|f_{\varepsilon\mu}\|_{V'_{\varepsilon\mu}} \quad \preccurlyeq \quad c.$$

On en déduit d'abord :
$$\begin{cases} \|\tau_{\varepsilon\mu}\| \preccurlyeq c \\ \\ \|\nabla \rho_\varepsilon\|_{\left(\ell^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)\right)^3} \preccurlyeq c. \end{cases}$$

Puis :

$$\|\widetilde{\sigma}_{\varepsilon\mu}\|_{(\ell^2(\Omega))^3} \preccurlyeq c.$$

Ainsi, on a, après extraction éventuelle d'une sous-suite :

$$\begin{cases} \varphi_\varepsilon \tau_{\varepsilon\mu} & \rightharpoonup \tau_\mu \quad \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible} \\ \\ \widetilde{\sigma}_{\varepsilon\mu} & \rightharpoonup \sigma_\mu \quad \text{dans} (\ell^2(\Omega)\ )^3 \text{ faible} \end{cases}$$

Où σ_μ vérifie :

$$\frac{\partial}{\partial z_\ell}\left(\int_0^1 \sigma_\mu^\ell dz_1\right) = 0 \tag{A.3}$$

Soit $h \in D(\Omega)$, on introduit $n_{\varepsilon\mu}$ définie par :

$$n_{\varepsilon\mu} \;=\; \widetilde{\sigma}_{\varepsilon\mu}^1\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial\left(Q_{\varepsilon\mu}W_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_1}\right) + \widetilde{\sigma}_{\varepsilon\mu}^\ell\left(\frac{\partial\left(Q_{\varepsilon\mu}W_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_\ell}\right)$$

tel que :

$$\begin{cases} A_{\varepsilon\mu}W_{\varepsilon\mu} = h & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\mu}^* \\ \\ W_{\varepsilon\mu} = 0 & \text{sur } \Omega_{\varepsilon\mu}^{*,\circ} \\ \\ \dfrac{\partial W_{\varepsilon\mu}}{\partial \upsilon_{A_{\varepsilon\mu}}} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\mu} \end{cases}$$

En remarquant que :

$$\frac{\partial \widetilde{\tau}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial \left(Q_{\varepsilon\mu} W_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_j} = \frac{\partial \left(Q_{\varepsilon} \tau_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial \widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_j}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3$$

Et que :

$$\begin{aligned} n_{\varepsilon\mu} &= A_1 \left(\varepsilon^{-1} \frac{\partial \left(Q_{\varepsilon} W_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_1} \right) + A_{\ell} \frac{\partial \left(Q_{\varepsilon} W_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_{\ell}} - \\ &- \left(\frac{\partial \widetilde{\rho}_{\varepsilon}}{\partial z_1} \left(\varepsilon^{-1} \frac{\partial \left(Q_{\varepsilon\mu} . W_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_1} \right) + \frac{\partial \widetilde{\rho}_{\varepsilon}}{\partial z_{\ell}} . \frac{\partial \left(Q_{\varepsilon\mu} . W_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_1} \right) \end{aligned} \tag{A.4}$$

Il vient :

$$A_1 \left(\varepsilon^{-1} \frac{\partial \left(Q_{\varepsilon} W_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_1} \right) + A_{\ell} \frac{\partial \left(Q_{\varepsilon} W_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_{\ell}} = \varepsilon^{-1} \widetilde{\xi}^{1}_{\varepsilon\mu} \frac{\partial \left(Q_{\varepsilon\mu} . \tau_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_1} + \widetilde{\xi}^{\ell}_{\varepsilon\mu} \frac{\partial \left(Q_{\varepsilon\mu} . \tau_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_{\ell}}$$

Où :

$$\begin{cases} \widetilde{\xi}^{1}_{\varepsilon\mu} = \varepsilon^{-1} a_{11} \dfrac{\partial \widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} + a_{1\ell} \dfrac{\partial \widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_{\ell}} \\ \\ \widetilde{\xi}^{\ell}_{\varepsilon\mu} = \varepsilon^{-1} a_{\ell 1} \dfrac{\partial \widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} + a_{\ell k} \dfrac{\partial \widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_k} \end{cases}$$

Soit $\varphi \in D(\Omega)$, φ indépendante de z_1 , on a alors :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \left(\varepsilon^{-1} \widetilde{\xi}^{1}_{\varepsilon\mu} \frac{\partial \left(Q_{\varepsilon\mu} . \tau_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_1} + \widetilde{\xi}^{\ell}_{\varepsilon\mu} \frac{\partial \left(Q_{\varepsilon\mu} . \tau_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_{\ell}} \right) \varphi dz = \\ &= - \int_{\Omega} \left(\varepsilon^{-1} \frac{\partial \widetilde{\xi}^{1}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} + \frac{\partial \widetilde{\xi}^{\ell}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_{\ell}} \right) Q_{\varepsilon\mu} \tau_{\varepsilon\mu} . \varphi dz - \int_{\Omega} \widetilde{\xi}^{\ell}_{\varepsilon\mu} \left(\varphi_{\varepsilon} \tau_{\varepsilon\mu}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial z_{\ell}} dz \end{aligned} \tag{A.5}$$

Le terme de droite converge vers :

$$I \;=\; \int_{\Omega} \left(\left|Y_{\mu}^{*}\right|.h.\tau_{\mu}.\varphi\right) dz - \int_{\Omega} \left(\xi_{\mu}^{\ell}.\tau_{\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial z_{\ell}}\right) dz$$

par ailleurs on a successivement :

$$I = \int_{\Omega} \left(\left|Y_{\mu}^{*}\right|.h.\tau_{\mu}.\varphi\right) dz - \int_{0}^{\ell}\int_{0}^{\ell} \left(\tau_{\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial z_{\ell}}\right)\left(\int_{0}^{1}\xi_{\mu}^{\ell} dz_{1}\right) dz_{2}dz_{3} =$$

$$= \int_{\Omega} \left(\left|Y_{\mu}^{*}\right|.h.\tau_{\mu}.\varphi\right) dz - \int_{0}^{\ell}\int_{0}^{\ell} \tau_{\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial z_{\ell}}\left(q_{\mu}^{k\ell}\frac{\partial W_{\mu}}{\partial z_{\ell}}\right) dz_{2}dz_{3} \qquad =$$

$$= \int_{\Omega} \left(\left|Y_{\mu}^{*}\right|.h.\tau_{\mu}.\varphi\right) dz + \int_{0}^{\ell}\int_{0}^{\ell} \varphi\frac{\partial \tau_{\mu}}{\partial z_{\ell}}\left(q_{\mu}^{k\ell}\frac{\partial W_{\mu}}{\partial z_{\ell}}\right) dz_{2}dz_{3} \qquad +$$

$$+ \int_{0}^{\ell}\int_{0}^{\ell} \varphi.\tau_{\mu}\left(q_{\mu}^{k\ell}\frac{\partial^{2} W_{\mu}}{\partial z_{\ell}^{2}}\right) dz_{2}dz_{3} =$$

$$= \int_{\Omega} \left(\left|Y_{\mu}^{*}\right|.h.\tau_{\mu}.\varphi\right) dz + \int_{0}^{\ell}\int_{0}^{\ell} \frac{\partial \tau_{\mu}}{\partial z_{\ell}}\left(q_{\mu}^{k\ell}\frac{\partial W_{\mu}}{\partial z_{\ell}}\right) \varphi dz_{2}dz_{3} \qquad -$$

$$- \int_{0}^{\ell}\int_{0}^{\ell} \varphi.\tau_{\mu}\left|Y_{\mu}^{*}\right|.h.dz_{2}dz_{3} = \int_{0}^{\ell}\int_{0}^{\ell} \frac{\partial \tau_{\mu}}{\partial z_{\ell}}\left(q_{\mu}^{k\ell}\frac{\partial W_{\mu}}{\partial z_{\ell}}\right) \varphi dz_{2}dz_{3}$$

Alors :

$$\text{(A.6)} \qquad A_{1}\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial\left(Q_{\varepsilon\mu}.\tau_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_{1}}\right) + A_{\ell}\left(\frac{\partial\left(Q_{\varepsilon\mu}.\tau_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_{\ell}}\right) \rightharpoonup q_{\mu}^{k\ell}\frac{\partial \tau_{\mu}}{\partial z_{\ell}}\frac{\partial W_{\mu}}{\partial z_{\ell}} \text{ dans } D'(\Omega) \text{ faible}$$

On s'intéresse maintenant au deuxième terme de $(A.4)$. La méthode des échelles multiples utilisées dans [2] donne :

$$W_{\varepsilon\mu} = W_\mu + \varepsilon\left(-\chi_\mu^\ell(y)\frac{\partial W_\mu}{\partial z_\ell}\right) + \varepsilon^2\frac{\partial^2 W_\mu}{\partial z_\ell^2}\theta_\mu^\ell(y) + ...$$

Où :

$$W_\mu = \lim_{\varepsilon\to 0} W_{\varepsilon\mu}$$

χ_μ est la fonction donnée par le système (1.22)

θ_μ solution de :

$$\begin{cases} -a_{ij}\dfrac{\partial}{\partial y_i}\left(\dfrac{\partial\theta_\mu^\ell}{\partial y_j} - \chi_\mu^\ell\delta_j^\ell\right) = -q_\mu^{k\ell}\left|Y_\mu^*\right| - a_{ki}\dfrac{\partial\left(\chi_\mu^* - y_k\right)}{\partial y_i} & \text{dans } Y_\mu^* \\ a_{ij}\left(\dfrac{\partial\theta_\mu^\ell}{\partial y_j} - \chi_\mu^\ell\delta_j^\ell\right)n_i = 0 & \text{sur } \partial_N Y_\mu^* \\ \theta_\mu^\ell & \text{periodique en } y_\ell \end{cases}$$

On vérifie aisement l'estimation :

$$\left|\nabla\theta_\mu^\ell\right|_{\left(Y_\mu^*\right)^3} \preccurlyeq c.\mu \qquad (c \text{ constante indépendante de } \varepsilon)$$

on a aussi :

$$\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{\partial\widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1}=-\varepsilon\dfrac{\partial\widetilde{\chi}_\mu^\ell(y)}{\partial y_1}.\dfrac{\partial\widetilde{W}_\mu}{\partial z_\ell}+\varepsilon^2R_\varepsilon^1(z) & \text{avec } \left|R_\varepsilon^1\right|_{H^1\left(\Omega_{\varepsilon\mu}^*\right)}\preccurlyeq c\\ \dfrac{\partial\widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell}=\left(1-\dfrac{\partial\widetilde{\chi}_\mu^\ell(y)}{\partial y_\ell}\right).\dfrac{\partial\widetilde{W}_\mu}{\partial z_\ell}+\varepsilon R_\varepsilon^\ell(z) & \text{avec } \left|R_\varepsilon^\ell\right|_{H^1\left(\Omega_{\varepsilon\mu}^*\right)}\preccurlyeq c\end{array}\right.$$

Ensuite on a successivement :

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial\widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_i}\dfrac{\partial\left(Q_\varepsilon.W_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_i}=\dfrac{\partial\widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_i}.\dfrac{\partial\widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_i}=\dfrac{\partial\widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_1}.\dfrac{\partial\widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1}+\dfrac{\partial\widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_\ell}.\dfrac{\partial\widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell}=\\ =\dfrac{\partial\widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_1}\left(\varepsilon^{-1}\dfrac{\partial\left(Q_\varepsilon.W_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_1}\right)+\dfrac{\partial\widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_\ell}.\dfrac{\partial\widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell}=\\ =\dfrac{\partial\widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_1}\left(-\dfrac{\partial\widetilde{\chi}_\mu^\ell}{\partial y_1}\right)\dfrac{\partial\widetilde{W}_\mu}{\partial z_\ell}+\dfrac{\partial\widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_\ell}\left(1-\dfrac{\partial\widetilde{\chi}_\mu^\ell}{\partial y_\ell}\right)\dfrac{\partial\widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell}+R_\varepsilon(z)=\\ =\dfrac{\partial\widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_1}\left(\delta_{i\ell}-\dfrac{\partial\widetilde{\chi}_\mu^i}{\partial y_i}\right)\dfrac{\partial\widetilde{W}_\mu}{\partial z_\ell}+R_\varepsilon(z)\end{array}\right.$$

Posons :

$$g_{\varepsilon\mu}\quad=\quad\left(\delta_{i\ell}-\frac{\partial\varkappa_\mu^i}{\partial y_i}\right)\frac{\partial\widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_1}$$

il est clair qu'on a la convergence :

$$g_{\varepsilon\mu}\ \rightharpoonup\ g_\mu^*\ \text{ dans } D'(\Omega)\ \text{ faible}$$

Soit maintenant $\varphi \in D(\Omega)$, φ indépendante de z_1 , il vient:

$$\left\{\begin{aligned} &\int_\Omega n_{\varepsilon\mu}.\varphi.dz = \int_\Omega \sigma^1_{\varepsilon\mu}\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial\left(Q_\varepsilon.W_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_1}\right)\varphi dz \\ &\qquad\qquad\qquad + \int_\Omega \sigma^\ell_{\varepsilon\mu}.\frac{\partial\left(Q_\varepsilon.W_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_\ell}.\varphi dz = \\ &= -\int_\Omega\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma^1_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1}+\frac{\partial\sigma^\ell_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell}\right)\varphi_\varepsilon W_{\varepsilon\mu}.\varphi dz - \int_\Omega \sigma^\ell_{\varepsilon\mu}\left(Q_\varepsilon W_{\varepsilon\mu}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z_\ell}dz \end{aligned}\right.$$

on a alors

$$\int_\Omega n_{\varepsilon\mu}.\varphi.dz \rightharpoonup \int_\Omega \sigma^\ell_\mu.W_\mu\frac{\partial\varphi}{\partial z_\ell}dz \qquad =$$

$$= \int_0^\ell\int_0^\ell \frac{\partial}{\partial z_\ell}\left(\int_0^1 \sigma^\ell_\mu dz_1\right)W_\mu dz_2 dz_3 + \int_0^\ell\int_0^\ell\left(\int_0^1\sigma^\ell_\mu dz_1\right)\frac{\partial W_\mu}{\partial z_\ell}.\varphi dz_2 dz_3$$

Grâce à $(A.3)$, il vient :

$$\int_\Omega n_{\varepsilon\mu}.\varphi dz \longrightarrow \int_\Omega\left(\int_0^1 \sigma^\ell_\mu dz_1\right)\frac{\partial W_\mu}{\partial z_\ell}.\varphi dz$$

c'est à dire :

$$n_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup \left(\int_0^1 \sigma^\ell_\mu dz_1\right)\frac{\partial W_\mu}{\partial z_\ell} \qquad \text{dans } D'(\Omega) \text{ faible} \tag{A.7}$$

Combinant alors $(A.4)$, $(A.6)$ et $(A.7)$, on obtient :

$$q^{k\ell}_\mu\frac{\partial\tau_\mu}{\partial z_\ell}.\frac{\partial W_\mu}{\partial z_\ell} - g^*_\mu\frac{\partial W_\mu}{\partial z_\ell} \quad = \quad \left(\int_0^1 \sigma^\ell_\mu dz_1\right)\frac{\partial W_\mu}{\partial z_\ell}$$

Comme le choix de W_μ est arbitraire, on en déduit :

$$q_\mu^{k\ell}\frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell} - g_\mu^* = \int_0^1 \sigma^\ell_{\ \mu} dz_1$$

Grâce à $(A.3)$, il vient :

$$q_\mu^{k\ell}\frac{\partial^2 \tau_\mu}{\partial z_\ell^2} = -\frac{\partial g_\mu^*}{\partial z_\ell}$$

avec

$$\frac{\partial g_\mu^*}{\partial z_\ell} \in H^{-1}\left(]0,\ell[\times]0,\ell[\right) \qquad \text{car} \qquad g_\mu^* \in \ell^2\left(]0,\ell[\times]0,\ell[\right)$$

Il suffit maintenant de choisir :

$$f_\mu^* = -\frac{\partial g_\mu^*}{\partial z_\ell}$$

pour que la preuve du lemme $(3-2)$ soit terminée. ■

Références bibliogrphiques

[1] N. Aib, Homogénéisation des structures réticulés, Thèse de Magister, Université de Constantine, (1990).

[2] A.Bensousssan, J.L. Lions, G. Papanicolau, *Asymtotic analysis for periodic structires*,(Noth-Hollandn Amsterdam, 1978).

[3] H. Bréziz, *Analyse Fonctionnelle. Théorie et App.*, (Masson, Paris, 1983).

[4] P.G. Ciarlet, A justification of the von Karman equations. Arch. RAT. Mech. and Analyis, 73 (1980), 349-389.

[5] *P.G.* Ciarlet, P. Destuynder, A justification of the two-dimensional linear plate model, J. Mécanique 18 (1979),315-344.

[6] D. Cioranescu, P. Donato, Exact internal contollability in perforated domains. J. Math. Pures et Appl, 68 (1989),185-213.

[7] D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin, Homogenisation in open sets with holes. J.Math. Anal. Appl. 71 (1979), 590-607.

[8] D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin, *Homogenizatio of reticulated structures*, Springer-Verlag, Berlin, New York 1999.

[9] A Haraux, Semi-linear hyperbolic problems in bounded domains. Mathematical Reports, edited by J. Dieudonné. Hardwood academic publishers (1987).

[10] V. Komornik, *Exact controllability and stabilization. The multiplier method.* R.AM (Masson et John Wiley, Paris, 1994)

[11] J.L.Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisations des systèmes distribués*, tomes1 et 2 R.M.A. (Masson, Paris, 1988)

[12] J.L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications.* vol. 1 (Dunod, Paris, 1988)

[13] F. Murat, Compacité par compensation, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 5 (1978), 485-507.

[14] J. Saint Jean Paulin, L. R. Tcheugoué Tébou, Contrôlabilité exacte interne dans des domaines perforés avec une conditions aux limites de Fourier sur le bord des trous, Asympt. Analysis, 14 (1997), 193-221.

[15] L. R. Tcheugoué Tébou, Etude de quelques problèmes de contrôlabilité exacte et stabilisation dépendant ou non de petits paramètres, Thèse de Doctorat, Université de Metz, (1995).

[16] D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin, Global behaviour of very thin cellular structures. Applications to networks. Procedings of the 7^{th} Symposium to trends in Applications of Mahematics to Mechanics, edited by J.F. Besseling, W/. Eckhauss. Springer (1988) 26-34

[17] D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin, Asymtotic analysis for elastic wireworks. Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique, Université de Pierre et Marie Curie, Paris (1989), R98008.