

UNIVERSITE MENTOURI DE CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Thèse de

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Mathématiques appliquées

Option : Analyse et observabilité des systèmes

Présentée par

SAMIR BENHADID

**OBSERVABILITE REGIONALE DES SYSTEMES
HYPERBOLIQUES
APPROCHES ET SIMULATIONS**

Soutenue le 29 juin 2008 devant le jury composé de :

N.Hamri	Professeur, Université de Constantine	Président
E.Zerrik	Professeur, Faculté des sciences Moulay Ismail Meknes-Maroc	Directeur de thèse
A.Ayadi	Professeur, Centre Universitaire Oum El Bouaghi	Rapporteur
F.Z.Nouri	Professeur, Université de Annaba	Examineur
H.Mekias	Professeur, Université de Setif	Examineur
S.Djezzar	M.C , Université de Constantine	Examineur

Remerciements

Mes remerciements à monsieur A.Ayadi, professeur au centre universitaire d'Oum El Bouaghi , pour m'avoir orienté vers le domaine de l'analyse des systèmes distribués, pour ses disponibilités et ses qualités humaines.

Que monsieur le directeur de thèse E.Zerrick, professeur à l'université Moulay Ismail de Meknes, trouve ici l'expression de ma gratitude pour m'avoir accueilli dans son équipe lors des différents stages, son soutien constant, ses conseils, ses qualités scientifiques et humaines ont grandement aidé à la réalisation de ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à monsieur H.Bourray, professeur à l'université Moulay Ismail de Meknes, avec lequel j'ai travaillé en étroite collaboration.

Je suis très sensible par l'accueil chaleureux de la part du professeur A.Boutoulout, chef du département de mathématiques de l'université Moulay Ismail de Meknes, qu'il trouve ici le témoignage de ma gratitude.

Je remercie vivement monsieur N.Hamri professeur à l'université de constantine pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Je tiens à exprimer aussi ma profonde reconnaissance à madame F.Z.Nouri, professeur à l'université de Annaba, à monsieur H.Mekias, professeur à l'université de Sétif et à monsieur S.Djezzar, professeur à l'université de Constantine pour avoir accepté d'examiner ce travail et de participer au jury de ma thèse.

Je remercie également toutes les personnes qui m'ont aidé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

ملخص :

الهدف من أطروحة الدكتوراه هي تطوير الرصدية للنظام الزائدي على جزء أو ناحية من المجال الفضائي الذي يتحرك فيه هذا النظام .
بعد ذلك ندرس مسألة الرصدية لنفس النظام على جزء من حافة ذلك المجال .
في الأخير ندرس للنظام الزائدي نصف الخطي، الرصدية على جزء من مجال تحركه باستعمال تقريبات تعتمد على نظريات النقطة الثابتة .
إن النتائج المتحصل عليها في مختلف أجزاء هذه الأطروحة تدعمت بأمثلة عديدة و تطبيقات على الكمبيوتر جسمت التقريبات المطروحة في هذا السياق.

Abstract :

The purpose of this thesis is to develop the question of regional observability of hyperbolic Systems evolving in spatial domain Ω , it concerns the observability of such system only on a region ω of domain Ω .

After that, we investigate the problem of regional observability in the case where the region of interest is a boundary part Γ of the system evolution domain Ω .

In the end, we explore the concept of regional observability for a class of semi linear distributed hyperbolic system. We present an approach based on fixed point technique.

The obtained results are illustrated by numerical examples and simulations.

Résumé :

Le but de la thèse consiste à développer la question de l'observabilité régionale des systèmes distribués hyperboliques évoluant dans un domaine spatial Ω .

Elle concerne l'observabilité de tels systèmes uniquement sur une région ω de Ω .

Par la suite on s'intéresse aux problèmes de l'observabilité régionale de ces systèmes sur une partie Γ de la frontière du domaine d'évolution $\partial\Omega$.

Enfin on explore le concept de l'observabilité régionale des systèmes hyperboliques semi linéaire, on présente alors une approche basée sur certains théorèmes du point fixe.

Les différents résultats obtenus sont illustrés pour des exemples numériques et des simulations.

TABLE DES MATIERES

Pages

INTRODUCTION	1
CHAPITRE I : L'OBSERVABILITE DES SYSTEMES DISTRIBUES	
1) Rappels mathématiques	8
2) Système considéré et semi- groupe	10
3) Observabilité	13
4) Notion de capteur	17
5) Application	20
CHAPITRE II : SUR L'OBSERVABILITE REGIONALE DES SYSTEMES PARABOLIQUES	
1) Observabilité régionale	27
2) Intérêts	34
3) Reconstruction régionale de l'état	34
4) Approche numérique	40
5) Simulations numériques	42
CHAPITRE III : OBSERVABILITE REGIONALE INTERNE DES SYSTEMES HYPERBOLIQUES	
1) Systèmes considéré.....	45
2) Observabilité régionale	47
3) Intérêts	53
4) Reconstruction régionale.....	53
5) Approche numérique	62
6) Simulations numériques.....	70
7) Conclusion	77
CHAPITRE IV : OBSERVABILITE REGIONALE FRONTIERES DES SYSTEMES HYPERBOLIQUES	
1) Rappels mathématiques.....	78
2) Système considéré.....	79
3) Caractérisation des capteurs Stratégiques.....	83
4) Reconstruction régionale	88
5) Simulations numériques.....	97
CHAPITRE V : OBSERVABILITE REGIONALE DES SYSTEMES HYPERBOLIQUES SEMI-LINEAIRE	
1) Système considéré.....	101
2) Cas général.....	103
3) Cas sectoriel	108
4) Approche numérique	117
CONCLUSION.....	121
BIBLIOGRAPHIE.....	122

Introduction

On rappelle brièvement ce que sont les systèmes localisés et les systèmes distribués. On parle de système localisé (lumped system) lorsqu'il s'agit d'un système dynamique ne faisant apparaître que la variable temps t . Le système est dit distribué où à paramètres répartis (distributed parameter system) lorsqu'il évolue dans le temps et l'espace. Les systèmes distribués évoluent donc en fonction de la variable de temps t et d'une variable d'espace indépendante x , cette variable est définie dans un domaine Ω qui représente la configuration géométrique du système réel. Mathématiquement ces systèmes peuvent être décrits par des équations aux dérivées partielles (EDP), mais il y'a d'autres types de modèles possibles, par exemple : les équations intégrales ou intégral-différentielles, tandis que les systèmes localisés sont généralement décrits par des équations différentielles ordinaires (EDO).

Un point important en théorie des systèmes est la relation qui existe entre le système et son environnement. Le système subit des actions (assimilées à des commandes ou contrôles) et renvoie des informations. On parle alors d'entrée-sortie, d'actionneurs et de capteurs. Les contrôles peuvent être passifs ou actifs tandis que les capteurs sont passifs, les contrôles sont actifs dans le cas d'un système sur lequel on agit depuis l'extérieur directement ; c'est le cas usuel. Ils sont passifs lorsque

indépendamment de tout apport externe ou toute action voulue, son évolution va être forcée par certains événements ou contraintes. Quant aux informations, elles permettent le suivi de l'évolution du système et éventuellement le réajustement des actions à infliger, ce qui conduit à la notion de bouclage.

L'approche usuelle de l'analyse des systèmes est basée sur les différents opérateurs définissant le modèle associé. Ceci est vrai dans le cas distribué comme dans le cas localisé. Considérons alors le système distribué linéaire :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) \\ y(0) = y^0 \\ z(t) = Cy(t) \end{cases}$$

Généralement on considère les hypothèses suivantes $A \in \mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ et $C \in \mathcal{L}(\mathcal{F}, \Theta)$ où $\mathcal{F}, \mathcal{U}, \Theta$ sont respectivement les espaces d'état, de contrôle et de sortie.

La notion de contrôlabilité est étudiée à travers les opérateurs A et B , tandis que la notion d'observabilité l'est à travers les opérateurs A et C . Mais dans le cas distribué, la variable spatiale peut donner plus de consistance à l'étude en exploitant les opérateurs B et C qui vont caractériser le nombre, la localisation et la répartition spatiale des entrées et sorties. Ainsi nous sommes amenés à préciser les opérateurs B et C en introduisant les notions de capteurs et d'actionneurs dans les modèles mathématiques. Cela permettra à l'utilisateur du modèle de préciser

géométriquement les entrées et sorties. Ainsi par exemple, dans le cas d'un four de diffusion, les capteurs sont les thermo-couples et les actionneurs sont les bruleurs.

Il existe deux types de structure de commande, la commande en boucle ouverte (open loop) et la commande en boucle fermée (feedback), ou bien (closed loop). On définit un système de commande en boucle ouverte (resp en boucle fermée) comme étant un système où l'entrée est indépendante (resp dépendante) de la sortie. A titre d'exemple, bloquer la vanne d'arrivée du combustible d'une chaudière à une position fixe constitue une commande en boucle ouverte. Actionner cette vanne en fonction de l'écart entre la température intérieure et une température de consigne, constitue une commande en boucle fermée.

La détermination de l'état d'un système à paramètres répartis est d'une grande importance quand on cherche à appliquer une commande en boucle fermée mais cet état ne peut être mesuré directement d'un point de vue physique. Le problème qui se pose alors est celui de la reconstruction d'un tel état à partir des mesures recueillies par le (ou les) capteur pendant un intervalle de temps donné : c'est le problème de l'observabilité, bien sûr le cas particulier intéressant est celui de la détermination de son état initial, l'état à l'instant t quelconque s'en déduit immédiatement.

Pour le problème de la contrôlabilité, il consiste en la possibilité de transférer l'état d'un tel système, en un temps fini, d'un état initial vers un état désiré choisi à priori.

En pratique de nombreux problèmes physiques ou de l'environnement ne peuvent être formulés que dans un contexte régional. Il font apparaître une région cible ω ($\omega \subset \Omega$) qui peut être plus importante pour l'étude. Cette région pouvant être éventuellement sur la frontière $\partial\Omega$ du domaine Ω . Il s'agit alors de repenser l'étude concernant certains aspects d'analyse et de contrôle sur cette région ω , sachant qu'elle est soumise à la dynamique et aux contraintes globales du système sur tout Ω cela est en fait plus délicat qu'il n'y apparait, pourquoi ? parcequ'on dispose d'un domaine, avec une région cible prédéterminée, des zones (ou points) d'action des zones (ou points) de mesures. Il s'agit alors de coordonner tout cela. Ce qui peut paraître surprenant dans cette problématique, c'est la réalisation d'un objectif sur une région ω par des actions pouvant être exercées ailleurs que sur ω , ces actions découlent de l'utilisation d'informations pouvant être recueillies aussi ailleurs que sur ω . C'est ce qu'on appelle l'analyse régionale.

Notons que la notion de contrôlabilité (resp observabilité) régionale est plus adaptée à l'analyse des systèmes distribués.

Ainsi, par exemple, certains fours tunnels d'industrie céramique, modélisés par des équations de la thermique fonctionnent par avancées successives de chariots chargés de matériaux. Afin d'obtenir certaines propriétés mécanique, ces matériaux doivent être maintenus, pendant un certain temps, à une température assez élevée. Cela se traduit par le fait qu'il faut exiter le système de façon à maintenir sur une région du four cette température prescrite.

Citons aussi le problème d'identification d'une région, source de chaleur, lieu d'explosion par exemple, ou encore détection de la région de fuite dans une canalisation. Dans tous ces problèmes on s'intéresse à la connaissance des informations sur un système uniquement dans une région donnée, c'est le problème de l'observabilité régionale

Notons aussi que si $j(u) = \int_0^T \|u(t)\|_U dt$ désigne le coût de transfert, alors pour tout $\omega \subset \Omega$ le coût de transfert régional sur ω est inférieur à celui sur tout Ω , en effet si

$$W_\Omega = \{u \in L^2(0, T; U) \text{ tel que } y_u(T) = y^d \text{ sur } \Omega\}$$

et

$$W_\omega = \{u \in L^2(0, T; U) \text{ tel que } y_u(T) = y^d \text{ sur } \omega\}$$

alors $W_\Omega \subset W_\omega$ et donc

$$\min_{W_\omega} j(u) \leq \min_{W_\Omega} j(u)$$

d'autre part, la construction de l'état sera plus précise dans le cas régional, sans passer par le concept d'observabilité globale. En effet si y^0 désigne l'état à estimer et \tilde{y}^0 l'état estimé. Alors

$$\|y^0 - \tilde{y}^0\|_{L^2(\omega)} \leq \|y^0 - \tilde{y}^0\|_{L^2(\Omega)}$$

Le concept d'analyse régionale des systèmes distribués a été introduit dans les années 90 par les professeurs El Jai et Zerrik où les notions de contrôlabilité et d'observabilité ont été étudiées uniquement sur une région ω du domaine Ω sur lequel est défini le système. Cette question a été étudiée dans le cas régional

interne des systèmes paraboliques en 1993, 1995 voir ([12],[26])et dans le cas régional frontière des systèmes paraboliques en 2003, 2004 voir ([31,32,33]).

Ce travail constitue une extension des différents travaux sur l'observabilité régionale des systèmes paraboliques, aux cas des systèmes hyperboliques et se présente comme suit.

Le premier chapitre rappelle l'essentiel des notions liées à l'analyse des systèmes distribués. Plus précisément, on introduit les notions d'exacte et de faible observabilité, les définitions et caractérisations des capteurs stratégiques.

Dans le second chapitre, j'ai repris les travaux du professeur Zerrik dans le cas de l'observabilité régionale interne des systèmes paraboliques, voir ([26]) en y ajoutant un exemple numérique illustrant l'approche considérée.

Le troisième chapitre a été consacré à l'observabilité régionale des systèmes hyperboliques, des approches de constructions ont été développées. En particulier on procède à l'extension de l'approche HUM (Hilbert Uniqueness Method), développée par Lions pour la contrôlabilité globale des systèmes hyperboliques, pour la reconstruction régionale. Un exemple numérique a été élaboré et qui atteste la bonne approche considérée.

Au quatrième chapitre, on considère le problème d'observabilité régionale frontière des systèmes hyperboliques. L'approche adoptée consiste à établir un lien entre l'observabilité régionale interne sur ω ($\omega \subset \Omega$) et celle sur une partie Γ ($\Gamma \subset \partial\Omega$). Un exemple numérique illustre l'approche considérée.

Le dernier chapitre est consacré à l'observabilité régionales des systèmes hyperboliques semi-linéaires, utilisant la technique de point fixe.

CHAPITRE 1

Sur l'observabilité des systèmes distribués

Dans ce chapitre, nous rappelons brièvement les diverses notions liées à l'analyse des systèmes distribués, notamment la notion d'exacte (resp faible) observabilité, ainsi que celle de capteur et de capteur stratégique. Dans ce cadre, il existe une littérature variée et très vaste, citons pour mémoire les travaux de A.Eljai, A.J.Pritchard, Lions, Balakrishan, etc,...

1) Rappels mathématiques

Définition 1-1

Soit $U = (u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs dans un espace vectoriel normé E . On dit que cette famille est totale (ou complète) si l'ensemble des combinaisons linéaires finies des vecteurs de U est dense dans E . Ceci exprime que pour tout $x \in E$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $i_1, \dots, i_n \in I$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tel que

$$\|x - (\lambda_1 u_{i_1} + \lambda_2 u_{i_2} + \dots + \lambda_n u_{i_n})\| \leq \varepsilon$$

Théorème 1-1

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite orthonormée de vecteurs dans un espace préhilbertien E . Les assertions suivantes sont équivalentes

i) $(u_n)_{n \geq 1}$ est totale dans E .

ii) Pour tout $x \in E$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n, x \rangle u_n$.

Dans un espace de Hilbert E , une suite orthonormée totale est appelée une base hilbertienne de E .

Si E est un espace de Banach de norme $\|\cdot\|_E$; pour tout $s \in \mathbb{R}$ avec

$1 \leq s < +\infty$, on désigne par $L^s(0, T; E)$ l'espace des fonctions $t \mapsto u(t)$ fortement mesurable sur $(0, T)$ pour la mesure dt (i.e. les fonctions scalaire $t \mapsto \|u(t)\|_E$ sont mesurables pour la mesure dt) et telle que

$$\|u\|_{L^s(0, T; E)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_E^s dt \right)^{1/s} \quad (1-1)$$

c'est un espace de Banach pour la norme (1-1)

Si E est un espace de Hilbert de produit scalaire $(\cdot, \cdot)_E$, $L^2(0, T; E)$ est un espace de hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0, T; E)} = \int_0^T (u(t), v(t))_E dt$$

Notons en outre que si $u : t \mapsto u(t)$ est une fonction de $L^2(0, T; E)$ et si v est un élément de E , la fonction $t \mapsto (u(t), v)_E$ appartient à $L^2(0, T)$.

1-1) Formule de Green

L'opérateur A et son adjoint A^* sont liés par la relation fondamentale suivante

$$\langle Au, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, A^*v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall u, v \in D(A), \forall v \in D(A^*)$$

Cette formule s'étend pour tout $u, v \in H^2(\Omega)$ et constitue la formule de Green pour le cas elliptique (voir [20],[21]) on a

$$\langle Au, v \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle u, A^*v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \eta_{A^*}} - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta_A} \quad \forall u, v \in H^2(\Omega)$$

avec $\frac{\partial u}{\partial \eta_A} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \eta_i$ où η_i désigne le ième cosinus directeur de la normale η à $\partial\Omega$ dirigé vers l'exterieur de Ω . L'opérateur $\frac{\partial}{\partial \eta_A}$ est appelé dérivée conormale associée à l'opérateur A . Dans le cas particulier où $a_{ij} = \delta_{ij}$ (symbole de Kroneker) on a $A = \Delta$ (le Laplacien) et on retrouve pour $\frac{\partial}{\partial \eta_A}$ la dérivée normale $\frac{\partial}{\partial \eta}$.

1-2) Formule d'integration par partie

La formule s'écrit :

$$\int_0^T \langle u'(t), v(t) \rangle dt + \int_0^T \langle u(t), v'(t) \rangle dt = \langle u(T), v(T) \rangle - \langle u(0), v(0) \rangle$$

$\forall u, v \in W(0, T) = \{f / f \text{ et } f' \in L^2(0, T; H)\}$ avec H espace de Hilbert.

2) Système considéré et semi-groupe

2 – 1) Semi-groupe : Rappels

Soit \mathcal{F} un espace de Hilbert séparable.

Définition 1-2

Une famille d'opérateurs $(S(t))_{t \geq 0}$ bornés définie sur \mathcal{F} est dite semi-groupe fortement continu si

- 1) $S(0) = I$, I étant l'opérateur identité
- 2) $S(t + s) = S(t)S(s)$ pour tout $t, s \geq 0$
- 3) $\|S(t)y - y\| \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow 0^+$, pour tout $y \in \mathcal{F}$.

Ainsi $S : IR^+ \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F})$, associe à tout $t \geq 0$ un opérateur $S(t) : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$.

Définition 1-3

On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu

$(S(t))_{t \geq 0}$, l'opérateur A défini par $Ay = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)y - y}{t}$, quand cette limite existe.

Le domaine de l'opérateur A est défini par :

$$D(A) = \left\{ y \in \mathcal{F} / \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)y - y}{t} \text{ existe} \right\}.$$

Une caractérisation des semi- groupes est donnée par le théorème de Hille-yosida suivant (voir [2],[5],[17],[25])

Théorème 1-2

Soit A un opérateur linéaire vérifiant les conditions suivantes :

i) $D(A)$ est dense dans \mathcal{F}

ii) A est fermé

iii) Il existe M et ω réels tels que $\{\lambda \in \mathbb{R} / \lambda > \omega\} \subset \rho_A$ et $\forall k = 1, 2, \dots$

$$\left\| (A - \lambda I)^{-k} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^k} \quad \text{où } \rho_A \text{ est l'ensemble résolvant de } A.$$

Alors A génère un semi-groupe fortement continu $(S(t))_{t \geq 0}$ satisfaisant :

$$\|S(t)\| \leq M e^{\omega t}, \quad t \geq 0.$$

L'adjoint de A noté A^* engendre le semi-groupe $(S^*(t))_{t \geq 0}$ adjoint de $(S(t))_{t \geq 0}$ qui est également fortement continu sur le dual \mathcal{F}^* de \mathcal{F} . Si $D(A)$ est dense dans \mathcal{F} , $D(A^*)$ est dense dans \mathcal{F}^* . Pour plus de détails voir [2].

2 – 2) Système-consideré

Sur Ω , un ouvert borné de \mathbb{R}^n ($n = 1, 2, 3$) avec une frontière $\partial\Omega$ assez régulière et pour $T > 0$, on considère le système décrit par l'équation d'état

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) & 0 < t < T \\ y(0) = y^0 \in D(A) \end{cases} \quad (1-2)$$

Où on suppose que A génère un semi-groupe fortement continu $(S(t))_{t \geq 0}$ sur l'espace d'état $\mathcal{F} = L^2(\Omega)$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, $u \in L^2(0, T; \mathcal{U})$, $D(A)$ étant le domaine de l'opérateur A et \mathcal{U} l'espace de contrôle, supposé séparable de Hilbert. Le système (1-2) est augmenté de la sortie

$$z(t) = Cy(t) \quad (1-3)$$

Où $C \in \mathcal{L}(\mathcal{F}, \Theta)$, Θ étant l'espace d'observation, supposé séparable de Hilbert.

Notons $y_u(t)$ la solution du système (1-1) excité par le contrôle u (pour tout t , $y_u(t)$ est une fonction de la variable $x \in \Omega$). Avec les hypothèses ci-dessus, nous savons que l'équation (1-2) admet une solution unique donnée par :

$$y_u(t) = S(t)y^0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds \quad (1-4)$$

Si A admet un système orthonormé complet de fonctions propres (w_{mj}) associées aux valeurs propres (λ_m) , λ_m étant de multiplicité r_m , alors le semi-groupe engendré par A est donné par :

$$S(t)y = \sum_{m \geq 1} e^{\lambda_m t} \sum_{j=1}^{r_m} \langle y, w_{mj} \rangle w_{mj} \quad (1-5)$$

3) Observabilité

La détermination de l'état d'un système à paramètres répartis à partir des mesures est d'une grande importance quand on cherche à appliquer une commande en boucle fermée sur un tel système.

Les mesures sont fournies par la fonction de sortie (1-3) qui s'écrit encore

$$z(t) = CS(t)y^0 + CH_t u$$

Cette sortie est la somme d'un régime libre avec y^0 à déterminer et du régime contrôlé par u avec état initial nul. Le système étant linéaire, on peut alors étudier l'observation de y^0 en supposant $u = 0$.

Habituellement, on laisse le système en évolution libre pendant un certain intervalle de temps $[0, T_m]$ avec $T_m \leq T$ pendant lequel on effectue des mesures par l'intermédiaire des capteurs, ensuite, on utilise ces mesures pour la reconstruction de l'état initial.

L'intervalle de temps est partitionné comme suit

Mesure	Calcul de y^0	Contrôle
0	T_m	T_c
		T

La longueur de l'intervalle $[T_m, T_c]$ est fonction du volume des calculs à effectuer et des moyens dont on dispose pour le faire. Donc pour un système donné ($T_c - T_m$) est supposé fixé, mais alors comment localiser l'intervalle $[T_m, T_c]$ dans $[0, T]$. Toute les simulations effectuées sur divers types de systèmes montrent, de façon attendue que :

- La précision sur l'état initial estimé croît avec T_m
- L'énergie dépensée sur l'intervalle de commande $[T_c, T]$ est fonction décroissante de $T - T_c$

Remarque 1-1

Pour l'étude de l'observabilité, on peut considérer donc un intervalle de mesure différent $[0, T_m]$ avec $T_m \leq T$. Ici on étudie, sans risque de confusion l'observabilité sur $[0, T]$.

Considérons alors le système (1-2) supposé autonome ($u = 0$)

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) & 0 < t < T \\ y(0) = y^0 \in D(A) \end{cases} \quad (1-6)$$

augmenté de la sortie

$$z(t) = Cy(t) \quad (1-7)$$

Il s'agit donc de déterminer y^0 , solution de l'équation

$$z(t) = CS(t)y^0 = K(t)y^0, \quad t \in [0, T]$$

où $K = CS(\cdot)$ est un opérateur linéaire borné $K : \mathcal{F} \longrightarrow L^2(0, T; \Theta)$. L'opérateur adjoint K^* est donné par :

$$K^*z = \int_0^T S^*(t)C^*z(t)dt$$

C^* étant l'opérateur adjoint de l'opérateur C

En effet on a :

$$(Ky, z)_{L^2(0, T; \Theta) \times L^2(0, T; \Theta')} = (y, K^*z)_0$$

d'autre part on a :

$$\begin{aligned}
(Ky, z)_{L^2(0,T;\Theta) \times L^2(0,T;\Theta')} &= (CS(\cdot)y, z)_{L^2(0,T;\Theta) \times L^2(0,T;\Theta')} \\
&= \int_0^T (CS(t)y, z(t))_{\Theta \times \Theta'} dt \\
&= \int_0^T (y, S^*(t)C^*z(t))_0 dt \\
&= \int_0^T \int_{\Omega} y(x) S^*(t)C^*z(t) dx dt \\
&= \int_{\Omega} y(x) \int_0^T S^*(t)C^*z(t) dt dx
\end{aligned}$$

donc

$$(Ky, z)_{L^2(0,T;\Theta) \times L^2(0,T;\Theta')} = \left(y, \int_0^T S^*(t)C^*z(t) dt \right)_0$$

D'où le résultat.

Définition 1-6

Le système (1-6) avec la sortie (1-7) est dit exactement observable sur $[0, T]$ si $\mathcal{F} \subset \text{Im } K^*$.

Propriété 1-1 (pour la démonstration voir [10])

Le système (1-6) augmenté de l'équation de sortie (1-7) est exactement observable sur $[0, T]$ si et seulement si il existe $\gamma > 0$, tel que

$$\gamma \|y^0\|_0 \leq \|Ky^0\|_{L^2(0,T;\Theta)} \quad \forall y^0 \in L^2(\Omega) \quad (1-8)$$

La notion d'exacte observabilité n'est pas toujours adaptée au cas des systèmes distribués. Ainsi, par exemple, dans le cas des systèmes décrits par des équations paraboliques, nous avons rarement exacte observabilité, divers exemples sont présentés dans [7] et [10]. Ceci a conduit à définir la notion de faible observabilité.

Définition 1-7

Le système (1-6) avec la sortie (1-7) est dit faiblement observable sur $[0, T]$

si $\text{Ker}K = \{0\}$.

Cette nouvelle définition traduit l'injectivité de l'opérateur K , c'est à dire encore que deux états distincts conduisent à deux mesures distinctes .

Définition 1-8

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert

1)-On dit qu'un opérateur N , défini de \mathcal{H} dans \mathcal{H} , est défini positif s'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\langle Ny, y \rangle \geq \alpha \|y\|^2 \quad \forall y \in \mathcal{H}$$

2)- N est dit positif si

$$\langle Ny, y \rangle \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad [\langle Ny, y \rangle = 0 \implies y = 0]$$

Considérons l'opérateur $N = K^*K$ défini de \mathcal{F} dans \mathcal{F} , nous avons alors :

Propriété 1-2 (pour la démonstration voir [10])

Le système (1-6) augmenté de la fonction de sortie (1-7) est exactement (respectivement faiblement) observable sur $[0, T]$ si et seulement si l'opérateur N est défini positif (respectivement positif).

Remarque 1-2

Dans les deux cas (exacte et faible observabilité) l'opérateur N^{-1} existe et alors l'état initial peut être déterminé à partir de l'équation (1-7) par

$$y^0 = (K^*K)^{-1} K^*z \quad (1-9)$$

et donc l'opérateur de reconstruction n'est autre que

$$K^+ = (K^*K)^{-1} K^* \quad (1-10)$$

K^+ désigne le pseudo-inverse de l'opérateur K

Proposition 1-1 (Pour la démonstration voir [10])

Si le système (1-6) – (1-7) est exactement observable sur $[0, T]$ alors l'application

$$K^+: L^2(0, T; \Theta) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

$$z \longmapsto y^0 \text{ défini par (1-9) est continue.}$$

Remarque 1-3

- La proposition 1-1 montre que, pour un système exactement observable, la détermination de l'état initial y^0 à partir de la formule (1-9) est satisfaisante, puisque y^0 dépend continument des mesures effectuées sur le système. Une mesure affectée d'une faible erreur ne conduit pas à un état initial erroné.

- Dans le cas où le système est faiblement observable, cette dépendance n'est plus continue. Toutefois, il est possible d'approcher, dans ce cas,

l'opérateur $(K^*K)^{-1}$ par un opérateur continu, (Pour plus de détail voir [10])

Propriété 1-3 (pour la démonstration voir [10], [26])

Il y a équivalence entre :

- i) (1-6), (1-7) est faiblement observable
- ii) $\overline{\text{Im } K^*} = \mathcal{F}$
- iii) $\overline{\text{Im } K^*K} = \mathcal{F}$
- iv) $\overline{\bigcup_{t \geq 0} \text{Im } S^*(t)C^*} = \mathcal{F}$

4) Notion de capteur

Les capteurs sont l'intermédiaire physique qui permet de recueillir des informations sur le système et son évolution. Ces informations sont exprimées par l'équation (1-7).

Définition 1-9

Un capteur est défini par la donnée d'un couple (Ω_0, f) où $\Omega_0 \subset \Omega$ est le support spatial du capteur et $f \in L^2(\Omega_0)$ sa répartition spatiale. Les capteurs peuvent être également de type zone, ponctuel, interne ou frontière.

Définition 1-10

Un capteur (Ω_0, f) est de type zone si Ω_0 est une partie d'intérieur non vide de Ω , dans ce cas $f \in L^2(\Omega_0)$.

Le capteur (Ω_0, f) est dit ponctuel si Ω_0 est réduit à un point $b \in \Omega$. Dans ce cas $f = \delta_b$ où δ_b représente la masse de Dirac concentré en b .

Dans le cas zone ou ponctuel, si $\Omega_0 \subset \partial\Omega$, le capteur (Ω_0, f) est dit frontière.

Définition 1-11

On dira que le capteur (Ω_0, f) est stratégique si le système qu'il observe est faiblement observable. Dans le cas de plusieurs capteurs $(\Omega_i, f_i)_{1 \leq i \leq p}$, on dira que la suite de capteurs est stratégique si le système associé est faiblement observable.

Dans le cas de p capteurs, la fonction de sortie $C : \mathcal{F} \rightarrow IR^p$ est donnée par :

$$z(t) = Cy(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \cdot \\ z_p(t) \end{bmatrix} \quad (1-11)$$

Dans (1-11), $z_i(t)$ est défini par :

a)- Cas d'observation zone

$$z_i(t) = \langle f_i, y(t) \rangle_{L^2(\Omega_i)} , \text{ pour } 1 \leq i \leq p$$

b)- Cas d'observation ponctuel

$$z_i(t) = y(b_i, t) , \text{ pour } 1 \leq i \leq p$$

On suppose que l'opérateur A admet une base orthonormée de fonctions propres (w_{mj}) et λ_m les valeurs propres associées, λ_m étant de multiplicité r_m . On suppose aussi que les mesures sont données par l'intermédiaire de p capteurs $(\Omega_i, f_i)_{1 \leq i \leq p}$. On a alors le résultat de caractérisation suivant :

Théorème 1-3 (pour la démonstration ,voir [8])

On suppose que $\sup r_m = r < +\infty$, alors la suite de capteurs $(\Omega_i, f_i)_{1 \leq i \leq p}$ est stratégique pour le système (1-6), (1-11) si et seulement si

$$\begin{cases} 1) p \geq r \\ 2) \text{rang} G_m = r_m \quad \forall m \geq 1 \end{cases}$$

Où $G_m = (G_m)_{ij} \quad 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq r_m$ avec

$$(G_m)_{ij} = \begin{cases} \langle f_i, w_{mj} \rangle_{L^2(\Omega_i)} & , \text{ cas de capteurs zones} \\ w_{mj}(b_i) & , \text{ cas de capteurs ponctuels} \end{cases}$$

Ce résultat montre que le nombre de capteurs nécessaires pour avoir la faible observabilité doit être supérieur ou égal au plus grand ordre de multiplicité des valeurs propres de l'opérateur A .

Remarque 1-4

La caractérisation des capteurs fait apparaître une condition sur le nombre minimum de capteurs pouvant assurer la faible observabilité. En fait, cette condition peut être relaxée avec la considération suivante :

Si on suppose que le domaine géométrique Ω dans lequel est représenté le système (1-6) est connu avec une certaine précision, alors, à l'ordre de cette précision près, le choix de $p = 1$ capteur peut suffire pour assurer l'observabilité du système. En fait, on montre que moyennant une faible perturbation de la frontière du domaine Ω , la multiplicité des valeurs propres peut être ramenée à $r_m = 1$. Ainsi un seul capteur peut assurer la faible observabilité du système (voir [9],[23]).

5) – Applications

On va considérer quelques applications à des situations particulières d'un système défini à partir des éléments suivants :

- Ω est ouvert borné de IR^n ($n = 1, 2$) de frontière $\partial\Omega$
- Un système (1-6) dans lequel A désigne le Laplacien

$$Ay = \Delta y$$

ce système s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = \Delta y(x, y) & \text{sur } \Omega \times]0, T[\\ y(x, 0) = y^0(x) & \text{sur } \Omega \\ y(\xi, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\end{array} \right. \quad (1-12)$$

On considère la fonction de sortie, donnée par (1-11), dans le cas où les mesure de l'état sont fournies par des capteurs internes $(\Omega_i, f_i)_{1 \leq i \leq p}$, qui seront précisés pour chacune des applications qu'on va voir.

On sait que A admet un système orthogonal complet de fonctions propres $(w_{m,j})$, $m \in \mathbb{N}$ et $j = 1, \dots, r_m$ associées aux valeurs propres $(\lambda_m)_{m \in \mathbb{N}}$ où r_m désigne la multiplicité de λ_m , avec $\lambda_m < 0$ pour tout m et génère un semi-groupe fortement continu $(S(t))_{t \geq 0}$ donné, pour tout $y \in D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, par :

$$S(t)y = \sum_m e^{\lambda_m t} \sum_{j=1}^{r_m} \langle y, w_{mj} \rangle w_{mj} \quad (1-13)$$

Application 1 : (Cas monodimensionnel)

Plaçons nous dans le cas où $\Omega =]0, a[$, le système (1-12) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) & \text{sur }]0, a[\times]0, T[\\ y(x, 0) = y^0(x) & \text{sur }]0, a[\\ y(0, t) = y(a, t) = 0 & \text{sur }]0, T[\end{array} \right. \quad (1-14)$$

Les fonctions propres et les valeurs propres correspondantes sont alors données par :

$$w_i(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{i\pi x}{a} , i \in IN \quad (1-15)$$

et

$$\lambda_i = -\frac{i^2\pi^2}{a^2} , i \in IN \quad (1-16)$$

Comme pour tout $i \in IN$, $r_i = 1$, avec un seul capteur ($p = 1$) le système peut être observable. On considère alors quelques situations particulières.

Exemple 1-1 (cas de capteur zone (Ω_1, f_1))

Supposons que le système (1-14) est observé par un seul capteur zone (Ω_1, f_1) avec $\Omega_1 = [b_1 - l_1, b_1 + l_1] \subset \Omega$ et $f_1 \in L^2(\Omega_1)$

Nous avons alors le resultat suivant :

Proposition 1-2 (voir [8])

Si f_1 est symetrique par rapport à la droite $x=b_1$ alors le capteur zone (Ω_1, f_1) n'est pas stratégique pour le système (1-14) si $\frac{b_1}{a} \in Q$

Exemple 1-2 (cas de capteur ponctuel localisé en b_1 de Ω)

Supposons que le système (1-14) est observé par un seul capteur ponctuel (b_1, δ_{b_1})

Nous avons le resultat suivant :

Proposition 1-3(voir [8])

Le capteur ponctuel (b_1, δ_{b_1}) est stratégique pour le système (1-14) si et seulement si $\frac{b_1}{a} \notin Q$

Application 2 (Cas bidimensionnel rectagulaire)

Reprenons le système (1-12) avec $\Omega =]0, a[\times]0, b[$, il s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y((x_1, x_2), t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y((x_1, x_2), t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y((x_1, x_2), t)}{\partial x_2^2} \text{ sur } \Omega \times]0, T[\\ y((x_1, x_2), 0) = y^0(x_1, x_2) \text{ sur } \Omega \\ y((\xi_1, \xi_2), t) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times]0, T[\end{array} \right. \quad (1-17)$$

Dans ce cas, les fonctions propres et les valeurs propres correspondantes sont données par :

$$w_{ij}(x_1, x_2) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{i\pi x_1}{a} \sin \frac{j\pi x_2}{b} \quad i, j \in IN \quad (1-18)$$

$$\lambda_{ij} = - \left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right) \pi^2 \quad i, j \in IN \quad (1-19)$$

On sait que si :

$$\frac{a^2}{b^2} \notin Q \implies r_m = 1 \quad (1-20)$$

avec la condition (1-20), un seul capteur ($p = 1$) suffit pour observer l'état du système. On va examiner deux types de capteur.

Remarque 1-5

Dans le cas où le système (1-17) est donné avec les conditions de Newman, ie $\frac{\partial y((\zeta_1, \zeta_2), t)}{\partial \eta} = 0$, sur $\partial\Omega \times]0, T[$, les fonctions propres correspondantes sont données par

$$w_{ij}(x_1, x_2) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos \frac{i\pi x_1}{a} \cos \frac{j\pi x_2}{b} \quad i, j \in IN \quad (1-21)$$

les valeurs propres étant les mêmes que (1-19)

Exemple 1-3 (Cas de capteur zone à support rectangulaire)

On suppose que le système (1-17) est observé par un seul capteur zone (Ω_1, f_1) avec $\Omega_1 = [b_1 - l_1, b_1 + l_1] \times [b_2 - l_2, b_2 + l_2] \subset \Omega$ et $f_1 \in L^2(\Omega_1)$ nous avons le résultat suivant :

Proposition 1-4 (voir [8])

Le capteur zone (Ω_1, f_1) n'est pas stratégique pour le système (1-17) si

- i) $\frac{b_1}{a} \in Q$ (respectivement $\frac{b_2}{b} \in Q$)
- ii) f_1 est symétrique par rapport au plan $x_1 = b_1$ (respectivement $x_2 = b_2$)

Exemple 1-4 (Cas de capteur ponctuel localisé en c de Ω)

Supposons que le système (1-17) est observé par un seul capteur ponctuel (c, δ_c) nous avons le resultat suivant :

Proposition 1-5 (voir [8])

Soit $c = (b_1, b_2) \in \Omega$, le capteur ponctuel (c, δ_c) est stratégique pour le système (1-17) si et seulement si, $\frac{b_1}{a}$ et $\frac{b_2}{b} \notin Q$.

Application 3 (cas bidimensionnel circulaire)

On se place dans le cas bidimensionnel avec un domaine circulaire $\Omega = D(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ ($D(0, 1)$ represente le disque unité centré en zéro). Dans ce cas, il faut au moins deux capteurs ($p = 2$) pour envisager l'observabilité de (1-12).

Nous allons examiner le cas de capteurs zones et de capteurs ponctuels.

a) Cas d'observation zone

$$z(t) = \begin{bmatrix} \langle f_1, y(t) \rangle_{L^2(\Omega_1)} \\ \langle f_2, y(t) \rangle_{L^2(\Omega_2)} \end{bmatrix}$$

b) Cas d'observation ponctuel

$$z(t) = \begin{bmatrix} y(x_1^c, t) \\ y(x_2^c, t) \end{bmatrix}$$

Nous avons le resultat suivant :

Proposition 1-6 (Capteurs zones) (voir [8])

Supposons que le système (1-12) est observé par deux capteurs zones (Ω_1, f_1) et (Ω_2, f_2) avec $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$, $f_1 \in L^2(\Omega_1)$ et $f_2 \in L^2(\Omega_2)$.

Supposons en plus que les supports Ω_1, Ω_2 des capteurs présentent une symétrie radiale par rapport à $\theta = \theta_1$ et $\theta = \theta_2$, alors

le couple de capteurs zones $(\Omega_i, f_i)_{1 \leq i \leq 2}$ n'est pas stratégique pour le système (1-12) si pour tout $i, 1 \leq i \leq 2$, f_i est symétrique par rapport au plan $\theta = \theta_i$ et $\frac{\theta_i}{\pi} \in Q$

Proposition 1-7 (Capteurs ponctuels) (voir [8])

Supposons que le système (1-12) est observé par deux capteurs ponctuels (x_1^c, x_2^c)

Si les capteurs sont reperés par leurs coordonnées polaires $x_i^c = (R_i, \theta_i)$, $i = 1, 2$ alors

i) Le couple de capteurs ponctuels $(x_i^c, \delta_{x_i^c})_{1 \leq i \leq 2}$ n'est pas stratégique pour le système (1-12) si pour tout $i, 1 \leq i \leq 2$, $\frac{\theta_i}{\pi} \in Q$

ii) Si $R_1 = R_2$ alors le couple de capteurs ponctuels $(x_i^c, \delta_{x_i^c})_{1 \leq i \leq 2}$ est stratégique pour le système (1-12) si et seulement si $\frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi} \notin Q$

Remarque 1-6

i) Ces résultats indiquent les mauvaises localisations des capteurs quand on veut observer l'état du système

ii) Si les capteurs sont de type zône, il est naturel de considérer, du point de vue physique une observation uniforme sur la zône et nous aurons bien l'hypothèse de symétrie faite dans les propositions précédentes.

CHAPITRE 2

Sur l'observabilité régionale des systèmes paraboliques

La variable spatiale, souvent cachée dans des espaces de dimension infinie, a été peu exploitée. Dans cette partie on rappelle un concept (voir [12], [24]) qui non seulement constitue un enrichissement de l'analyse des systèmes mais aussi met en relief l'importance de la variable spatiale et par conséquent exploite au mieux la nature distribuée du système. Il s'agit de l'analyse focalisée sur une partie du domaine spatial Ω , on parle alors d'analyse régionale. Le concept de l'observabilité régionale est l'étude de la possibilité de reconstruction de l'état initial sur une partie interne ω du domaine d'évolution Ω du système, connaissant la dynamique du système et des mesures effectuées sur un intervalle de temps fini. L'intérêt de ce concept est capital quand on sait qu'il y a des états qui ne peuvent être construits que sur une région du domaine sur lequel le système est défini.

1) Observabilité régionale

Soit Ω un ouvert borné de IR^n ($n = 1, 2, 3$) de frontière $\partial\Omega$ assez régulière, soit $]0, T[$ l'intervalle du temps fini et ω une région (cible) de Ω de mesure de Lebergue non nulle. On note $Q = \Omega \times]0, T[$ et $\Sigma = \partial\Omega \times]0, T[$ avec $0 < T < +\infty$

Considérons le système autonome décrit par

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = Ay(x, t) & Q \\ y(x, 0) = y^0(x) & \Omega \\ y(\xi, t) = 0 & \Sigma \end{cases} \quad (2-1)$$

Où l'opérateur A est générateur d'un semi-groupe fortement continu sur l'espace d'état $\mathcal{F} = L^2(\Omega)$. Le système (2-1) est augmenté de la fonction de sortie

$$z(t) = Cy(x, t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_p(t) \end{bmatrix} \quad (2-2)$$

avec

$$z_i(t) = y(b_i, t), \quad b_i \in \bar{\Omega} \text{ dans le cas ponctuel}$$

et

$$z_i(t) = \int_{\Omega_i} y(x, t) f_i(x) dx \quad \Omega_i \subset \bar{\Omega} \text{ dans le cas zône}$$

L'opérateur $C \in \mathcal{L}(\mathcal{F}, IR^p)$, dépend de la nature et du nombre p de capteurs considérés. On considère la fonction restriction :

$$\begin{aligned} \chi_\omega : L^2(\Omega) &\longrightarrow L^2(\omega) \\ y &\longmapsto \chi_\omega y = y|_\omega \end{aligned}$$

dont l'adjoint $\chi_\omega^* : L^2(\omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$

est défini par :

$$(\chi_\omega^* y)(x) = \begin{cases} y(x) & x \in \omega \\ 0 & x \in \Omega \setminus \omega \end{cases}$$

Rappelons que le système (2-1), (2-2) est exactement (resp faiblement) observable si $\text{Im } K^* = \mathcal{F}$ (resp $\overline{\text{Im } K^*} = \mathcal{F}$). Voyons ce que sont les définitions du concept d'observabilité régionale.

Notons $\mathcal{F}_\omega = L^2(\omega)$ et introduisons les définitions suivantes :

Définition 2-1

i) Le système (2-1), (2-2) est dit exactement régionalement observable sur ω (ou exactement ω - observable) si

$$\text{Im } \chi_\omega K^* = \mathcal{F}_\omega \quad (2-3)$$

ii) Le système (2-1), (2-2) est dit faiblement régionalement observable sur ω (ou faiblement ω - observable) si

$$\overline{\text{Im } \chi_\omega K^*} = \mathcal{F}_\omega \quad (2-4)$$

De ces définitions résultent diverses propriétés :

Propriété 2-1 (voir [8])

i) *Le système (2-1), (2-2) est dit exactement ω - observable si et seulement si, il existe $\gamma > 0$ tel que :*

$$\forall y \in L^2(\omega) \quad \gamma \|y\|_{L^2(\omega)} \leq \|K \chi_\omega^* y\|_{L^2(0,T;\theta)} \quad (2-5)$$

ii) *Le système (2-1), (2-2) est dit faiblement ω - observable si et seulement si :*

$$\text{Ker } K \chi_\omega^* = \{0\} \cdot \quad (2-6)$$

Remarque 2-1

Il est évident que si un système est exactement ω - observable alors il est faiblement ω - observable. Par ailleurs l'exacte observabilité implique l'exacte observabilité pour tout $\omega \subset \Omega$, en effet

soit $y \in L^2(\omega)$ donc $\chi_\omega^* y \in L^2(\Omega)$, d'après (1-7) de la propriété 1-1 on a

$$\|K\chi_\omega^* y\|_{L^2(0,T;\theta)} \geq \gamma \|\chi_\omega^* y\|_{L^2(\Omega)} = \gamma \|y\|_{L^2(\omega)}$$

d'où le resultat.

Propriété 2-2

Le système (2-1), (2-2) est exactement ω -observable (respectivement, faiblement ω -observable) sur $[0, T]$ si et seulement si l'opérateur $\chi_\omega K^ K \chi_\omega^*$ est défini positif (respectivement positif)*

Preuve :

a) Si $\chi_\omega K^* K \chi_\omega^*$ est défini positif , alors il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} & \langle \chi_\omega K^* K \chi_\omega^* y, y \rangle_{L^2(\omega)} \geq \alpha \|y\|_{L^2(\omega)}^2 \quad \forall y \in L^2(\omega) \\ \iff & \langle K^* K \chi_\omega^* y, \chi_\omega^* y \rangle_{L^2(\Omega)} \geq \alpha \|y\|_{L^2(\omega)}^2 \quad \forall y \in L^2(\omega) \\ \iff & \left\langle \int_0^T S^*(t) C^* C S(t) \chi_\omega^* y dt, \chi_\omega^* y \right\rangle_{L^2(\Omega)} \geq \alpha \|y\|_{L^2(\omega)}^2 \quad \forall y \in L^2(\omega) \\ \iff & \int_0^T \langle C S(t) \chi_\omega^* y, C S(t) \chi_\omega^* y \rangle_\theta dt \geq \alpha \|y\|_{L^2(\omega)}^2 \quad \forall y \in L^2(\omega) \\ \iff & \int_0^T \|K(t) \chi_\omega^* y\|_\theta^2 dt \geq \alpha \|y\|_{L^2(\omega)}^2 \quad \forall y \in L^2(\omega) \\ \iff & \|K\chi_\omega^* y\|_{L^2(0,T;\theta)}^2 \geq \alpha \|y\|_{L^2(\omega)}^2 \quad \forall y \in L^2(\omega) \\ \iff & \text{Le système (2-1), (2-2) est exactement } \omega\text{-observable} \end{aligned}$$

b) Si $\chi_\omega K^* K \chi_\omega^*$ est positif, alors

$$\langle \chi_\omega K^* K \chi_\omega^* y, y \rangle_{L^2(\omega)} \geq 0 \quad \forall y \in L^2(\omega) \quad \text{et}$$

$$\langle \chi_\omega K^* K \chi_\omega^* y, y \rangle_{L^2(\omega)} = 0 \implies y = 0$$

On a :

$$\begin{aligned} \langle \chi_\omega K^* K \chi_\omega^* y, y \rangle_{L^2(\omega)} &= \langle K^* K \chi_\omega^* y, \chi_\omega^* y \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \left\langle \int_0^T S^*(t) C^* C S(t) \chi_\omega^* y dt, \chi_\omega^* y \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_0^T \langle S^*(t) C^* C S(t) \chi_\omega^* y, \chi_\omega^* y \rangle_{L^2(\Omega)} dt \\ &= \int_0^T \langle C S(t) \chi_\omega^* y, C S(t) \chi_\omega^* y \rangle_\theta dt \\ &= \int_0^T \|K(t) \chi_\omega^* y\|_\theta^2 dt = \|K \chi_\omega^* y\|_{L^2(0,T;\theta)}^2 \geq 0 \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} & \left[\langle \chi_\omega K^* K \chi_\omega^* y, y \rangle_{L^2(\omega)} = 0 \implies y = 0 \right] \\ \iff & \left[\|K \chi_\omega^* y\|_{L^2(0,T;\theta)}^2 = 0 \implies y = 0 \right] \\ \iff & [K \chi_\omega^* y = 0 \implies y = 0] \\ \iff & \text{Le système (2-1), (2-2) est faiblement } \omega\text{-observable} \end{aligned}$$

Dans les deux cas (exacte et faible observabilité sur la région ω) l'opérateur $(\chi_\omega K^* K \chi_\omega^*)^{-1}$ existe.

Propriété 2-3

Si le système (2-1), (2-2) est exactement observable sur $[0, T]$ alors l'opérateur $(\chi_\omega K^ K \chi_\omega^*)^{-1}$ est continu*

Preuve :

Le système (2-1), (2-2) étant exactement observable (d'après la propriété 2-2) il existe $\alpha > 0$ tel que $\langle \chi_\omega K^* K \chi_\omega^* y, y \rangle_{L^2(\omega)} \geq \alpha \|y\|_{L^2(\omega)}^2 \forall y \in L^2(\omega)$ et un opérateur \mathcal{T} , linéaire et continu, est inversible et d'inverse continu si et seulement si

il existe $m > 0$ tel que $m \|y\| \leq \|Ty\|$

or

$$\|\chi_\omega K^* K \chi_\omega^* y\|_{L^2(\omega)} \|y\|_{L^2(\omega)} \geq \langle \chi_\omega K^* K \chi_\omega^* y, y \rangle_{L^2(\omega)} \geq \alpha \|y\|_{L^2(\omega)}^2$$

d'où

$$\|\chi_\omega K^* K \chi_\omega^* y\|_{L^2(\omega)} \geq \alpha \|y\|_{L^2(\omega)} \quad \text{et donc le resultat.}$$

Dans le cas où le système (2-1), (2-2) est faiblement ω -observable l'opérateur $(\chi_\omega K^* K \chi_\omega^*)^{-1}$ n'est plus continu. Toutefois, il est possible d'approcher, dans ce cas, l'opérateur $(\chi_\omega K^* K \chi_\omega^*)^{-1}$ par un opérateur continu (pour plus de détail voir [10])

Propriété 2-4 (voir [8] , [26])

i) Le système (2-1), (2-2) est exactement ω - observable si et seulement si

$$Ker \chi_\omega + \text{Im } K^* = \mathcal{F} \quad (2-7)$$

ii) Le système (2-1), (2-2) est faiblement ω - observable si et seulement si

$$Ker \chi_\omega + \overline{\text{Im } K^*} = \mathcal{F} \quad (2-8)$$

Remarque 2-2

- Le choix de la norme dans (2-5) nécessite quelques précautions car dans le cas de mesure ponctuelles l'opérateur C n'est pas borné.

- Un système qui est exactement (resp.faiblement) observable est exactement (resp.faiblement) régionalement observable.

- Un système qui est exactement (resp.faiblement) régionalement observable sur ω_1 est exactement (resp.faiblement) régionalement observable sur tout $\omega_2 \subset \omega_1$.

- Il existe des systèmes qui peuvent être régionalement observables sans être observables. C'est le cas du système décrit par l'équation parabolique suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) &]0, 1[\times]0, T[\\ y(0, t) = y(1, t) = 0 &]0, T[\\ y(0) = y^0 &]0, 1[\end{cases} \quad (2-9)$$

Où y^0 est supposé inconnu. Le système (2-9) est augmenté de la sortie

$$z(t) = y(b, t) \quad (2-10)$$

Nous sommes dans le cas d'une mesure ponctuelle localisée en b , ($b \in]0, 1[\cap Q$).

Le système (2-9) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A(t)y(t) \\ y(0) = y^0 \end{cases}$$

Où $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, génère un semi-groupe fortement continu $(S(t))_{t \geq 0}$ donné par :

$$S(t)y = \sum_{i=1}^{+\infty} e^{\lambda_i t} \langle y, w_i \rangle w_i$$

$(w_i)_{i \geq 1}$, $(\lambda_i)_{i \geq 1}$ étant respectivement les fonctions et les valeurs propres de l'opérateur A . La fonction de sortie (2-10) s'écrit alors :

$$z(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} e^{\lambda_i t} \langle y^0, w_i \rangle w_i(b)$$

Corollaire 2-1 (Pour la démonstration voir [26])

Le système (2-9), (2-10) n'est pas faiblement observable sur $]0, 1[$ mais peut être faiblement observable sur une région $\omega = [\alpha, \beta] \subset]0, 1[$ pour α, β convenablement choisis .

2) Interêts

La notion d'observabilité régionale est mieux adaptée à l'analyse des systèmes.

- Les définitions (2-1) sont générales et englobent le cas de l'observabilité globale (cas $\omega = \Omega$)

- La reconstruction de l'état sera plus précise dans le cas régional. En effet si y^0 désigne l'état à estimer et \tilde{y}^0 l'état estimé, alors on a :

$$\|y^0 - \tilde{y}^0\|_{L^2(\omega)} \leq \|y^0 - \tilde{y}^0\|_{L^2(\Omega)}$$

3) Reconstruction régionale de l'état

Dans cette section on s'intéresse au problème de la reconstruction régionale de l'état du système à partir des mesures effectuées sur un intervalle de temps fini l'approche développée ci-dessous est une extension de l'approche HUM. En particulier la reconstruction régionale de l'état du système (2-1) est ici considérée pour $A = \Delta$ (le Laplacien), on suppose que les mesures sont effectuées par un seul capteur. Dans le cas multiplicateurs, l'approche est identique et les résultats se généralisent sans difficulté. Considérons le système

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = \Delta y(x, t) & Q \\ y(x, 0) = y^0(x) & \Omega \\ y(\xi, t) = 0 & \Sigma \end{cases} \quad (2-11)$$

Pour $y^0 \in L^2(\Omega)$ le système (2-11) admet une solution unique y appartenant à $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$ (voir [5],[24]).

3-1) Observation zone interne

Supposons que le système (2-11) est augmenté de la fonction de sortie

$$z(t) = \langle y(t), f \rangle_{L^2(\Omega_0)} \quad (2-12)$$

Le système (2-11) étant en évolution sur tout Ω , le problème de l'observabilité sur la région ω de Ω , consiste à déterminer l'état initial, supposé inconnu, sur la région ω .

Si on note :

$$y^0 = \begin{cases} y_1^0 & \text{sur } \omega \\ y_2^0 & \text{sur } \Omega \setminus \omega \end{cases}$$

Le problème consiste à reconstruire y_1^0 à partir de la connaissance de (2-11) et (2-12). On considère alors l'ensemble

$$G = \{\varphi^0 \in L^2(\Omega) / \varphi^0 = 0 \text{ sur } \Omega \setminus \omega\}$$

Pour $\varphi^0 \in G$, considérons le système

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) = \Delta \varphi(x, t) & Q \\ \varphi(x, 0) = \varphi^0(x) & \Omega \\ \varphi(\xi, t) = 0 & \Sigma \end{cases} \quad (2-13)$$

qui admet une solution unique $\varphi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$ (voir [5],[24]). ce qui permet de définir sur G la semi-norme

$$\varphi^0 \in G \longrightarrow \|\varphi^0\|_G^2 = \int_0^T \langle f, \varphi(t) \rangle_{L^2(\Omega_0)}^2 dt \quad (2-14)$$

et considérons le système retrograde de (2-13)

$$\begin{cases} -\frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) = \Delta \psi(x, t) + \langle f, \varphi(t) \rangle_{L^2(\Omega_0)} \chi_{\Omega_0}(x) f(x) & Q \\ \psi(x, T) = 0 & \Omega \\ \psi(\xi, t) = 0 & \Sigma \end{cases} \quad (2-15)$$

contrôlé par la solution $\varphi(t)$ du système (2-13) et qui admet une solution unique $\psi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$ (voir [5],[24]). La résolution du système (2-15) fournit $\psi(x, 0)$ qu'on note par $\psi^0(x)$. Considérons alors l'opérateur Λ_0 défini de G dans \mathcal{F} par

$$\Lambda_0 \varphi^0 = P(\psi^0) \quad (2-16)$$

$$\text{où} \quad P = \chi_\omega^* \chi_\omega$$

Soit maintenant le système retrograde de (2-11)

$$\begin{cases} -\frac{\partial \hat{z}}{\partial t}(x, t) = \Delta \hat{z}(x, t) + \langle f, y(t) \rangle_{L^2(\Omega_0)} \chi_{\Omega_0}(x) f(x) & Q \\ \hat{z}(x, T) = 0 & \Omega \\ \hat{z}(\xi, t) = 0 & \Sigma \end{cases} \quad (2-17)$$

contrôlé par la solution $y(t)$ du système (2-11) et qui admet une solution unique $\hat{z} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$ (voir [5],[24]). La résolution du système (2-17) fournit $\hat{z}(x, 0)$ qu'on note $\hat{z}^0(x)$. Si φ^0 est convenablement choisi dans G ,

c'est à dire tel que $\psi^0 = \hat{z}^0$ sur ω , alors le problème de l'observabilité sur la région ω revient à résoudre l'équation

$$\Lambda_0 \varphi^0 = P(\hat{z}^0) \quad (2-18)$$

On a alors le résultat suivant

Théorème 2-1

Si le capteur (Ω_0, f) est stratégique alors la semi-norme (2-14) devient une norme et l'équation (2-18) admet une solution unique φ^0 qui correspond à y_1^0 à observer sur la région ω .

preuve

i)- En effet, Soit $(\omega_j)_{j \geq 1}$ les fonctions propres de l'opérateur Δ et $(\lambda_j)_{j \geq 1}$ les valeurs propres correspondantes, (2-14) définit bien une norme puisque pour $\varphi^0 \in G$ on a

$$\begin{aligned} \|\varphi^0\| = 0 &\iff \langle f, \varphi(t) \rangle = 0 \text{ sur } [0, T] \text{ autrement dit} \\ \sum_{j=1}^{+\infty} e^{\lambda_j t} \langle \varphi^0, w_j \rangle \langle f, w_j \rangle_{L^2(\Omega_0)} &= 0 \text{ sur } [0, T], \text{ on déduit} \\ \langle \varphi^0, w_j \rangle \langle f, w_j \rangle_{L^2(\Omega_0)} &= 0 \quad \forall j \geq 1 \end{aligned}$$

le capteur (Ω_0, f) étant stratégique ceci conduit à $\langle f, w_j \rangle_{L^2(\Omega_0)} \neq 0 \quad \forall j$, il vient alors

$$\langle \varphi^0, w_j \rangle = 0 \quad \forall j \geq 1 \text{ ie } \varphi^0 = 0$$

ii)- Soit \hat{G} le complété de G par rapport à la norme (2-14), il est muni du produit scalaire associé $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\hat{G}}$ et \hat{G}^* désigne son dual.

Montrons que l'équation (2-18) admet une solution unique, pour cela nous allons montrer que l'opérateur Λ est un isomorphisme de \hat{G} dans \tilde{G}^* . En multipliant (2-15) par φ solution de (2 – 19) il vient

$$\begin{aligned} - \int_0^T \langle \dot{\psi}(t), \varphi(t) \rangle dt - \int_0^T \langle \Delta \psi(t), \varphi(t) \rangle dt &= \int_0^T \langle f, \varphi(t) \rangle_{L^2(\Omega_0)} \langle f, \varphi(t) \rangle_{L^2(\Omega_0)} dt \\ &= \int_0^T \langle f, \varphi(t) \rangle_{L^2(\Omega_0)}^2 dt \\ &= \|\varphi^0\|_G^2 \end{aligned}$$

d'autre part en intégrant par partie, il vient

$$\begin{aligned} - \int_0^T \langle \dot{\psi}(t), \varphi(t) \rangle dt &= \int_0^T \langle \psi(t), \dot{\varphi}(t) \rangle dt - \langle \varphi(T), \psi(T) \rangle + \langle \varphi(0), \psi(0) \rangle \\ &= \int_0^T \langle \psi(t), \dot{\varphi}(t) \rangle dt + \langle \varphi(0), \psi(0) \rangle \end{aligned}$$

en utilisant la formule de Green on a

$$\begin{aligned} - \int_0^T \langle \Delta \psi(t), \varphi(t) \rangle dt &= - \int_0^T \langle \psi(t), \Delta \varphi(t) \rangle dt + \int_{\Sigma} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} d\Sigma - \int_{\Sigma} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \eta} d\Sigma \\ &= - \int_0^T \langle \psi(t), \Delta \varphi(t) \rangle dt \end{aligned}$$

par suite on obtient

$$\begin{aligned} - \int_0^T \langle \dot{\psi}(t), \varphi(t) \rangle dt - \int_0^T \langle \Delta \psi(t), \varphi(t) \rangle dt &= \\ \int_0^T \langle \psi(t), \dot{\varphi}(t) \rangle dt + \langle \varphi^0, \psi^0 \rangle - \int_0^T \langle \psi(t), \Delta \varphi(t) \rangle dt &= \\ = \int_0^T \langle \dot{\varphi}(t) - \Delta \varphi(t), \psi(t) \rangle dt + \langle \varphi^0, \psi^0 \rangle &= \\ = \langle \varphi^0, \psi^0 \rangle \end{aligned}$$

ce qui donne finalement

$$\langle \Lambda_0 \varphi^0, \varphi^0 \rangle = \|\varphi^0\|_G^2, \forall \varphi^0 \in G \quad (2-19)$$

Soit maintenant $\hat{\varphi}^0 \in G$ et $\hat{\varphi}(t)$ la solution correspondante du problème (2-13), en multipliant (2-15) par $\hat{\varphi}(t)$, en integrant par partie et en utilisant la formule de Green comme on l'a fait ç-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} \langle \Lambda \varphi^0, \hat{\varphi}^0 \rangle &= \int_0^T \langle f, \varphi(t) \rangle_{L^2(\Omega_0)} \langle f, \hat{\varphi}(t) \rangle_{L^2(\Omega_0)} dt \\ &= \langle \varphi^0, \hat{\varphi}^0 \rangle_{\hat{G}} \\ &\leq \|\varphi^0\|_{\hat{G}} \|\hat{\varphi}^0\|_{\hat{G}} \quad \forall \varphi^0, \hat{\varphi}^0 \in G \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité nous permet de prolonger l'opérateur Λ_0 , de manière unique, en un opérateur linéaire et continue de \hat{G} dans l'espace dual \hat{G}^*

d'où l'isomorphisme de l'opérateur Λ_0 de \hat{G} dans \hat{G}^* .

3-2) Observation ponctuelle interne

Dans ce cas le système (2-11) est augmenté de la sortie

$$z(t) = y(b, t) \quad (2-20)$$

où b désigne l'emplacement du capteur ponctuel. On considère l'application

$$\varphi^0 \in G \longmapsto \|\varphi^0\|_G^2 = \int_0^T \varphi^2(b, t) dt \quad (2-21)$$

qui définit une semi-norme sur G et soit le système retrograde de (2-13)

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) = \Delta \psi(x, t) + \varphi(b, t) \delta(x - b) & Q \\ \psi(x, T) = 0 & \Omega \\ \psi(\xi, t) = 0 & \Sigma \end{array} \right. \quad (2-22)$$

Il admet une solution unique $\psi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$ (voir [5],[24]). La résolution de(2-22) fournit $\psi(x, 0)$ qu'on note $\psi^0(x)$, on considère

alors le même opérateur Λ_0 défini comme dans (2-16) et soit le système retrograde de (2-11)

$$\begin{cases} -\frac{\partial \hat{z}}{\partial t}(x, t) = \Delta \hat{z}(x, t) + y(b, t) \delta(x - b) & Q \\ \hat{z}(x, T) = 0 & \Omega \\ \hat{z}(\xi, t) = 0 & \Sigma \end{cases} \quad (2-23)$$

Il admet une solution unique $\hat{z} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$ (voir [5],[24]). Le problème d'observation sur la région ω revient donc à résoudre l'équation

$$\Lambda_0 \varphi^0 = P(\hat{z}^0) \quad (2-24)$$

Théorème 2-2

Si le capteur (b, δ_b) est stratégique alors la semi-norme (2-21) devient une norme et l'équation (2-24) admet une solution unique φ^0 qui correspond à y_1^0 à observer sur la région ω .

La démonstration est identique au cas zone (pour plus de détail voir [26])

4) Approche numérique

Dans ce paragraphe, nous présentons une démarche de résolution de l'équation (2-24) en vue d'une simulation numérique.

On suppose que le système (2-11) est observé par un seul capteur ponctuel interne (b, δ_b) .

La méthode consiste à déterminer, dans la base $(w_i)_{i \geq 1}$, les composantes Λ_{ij} de l'opérateur Λ_0 , le capteur étant ponctuel en b on a d'après (2-19)

$$\langle \Lambda_0 \varphi^0, \varphi^0 \rangle = \|\varphi^0\|_G^2 = \int_0^T \varphi^2(b, t) dt \quad \forall \varphi^0 \in G$$

or

$$\varphi(b, t) = \sum_{i \geq 1} e^{\lambda_i t} \langle \varphi^0, w_i \rangle_{L^2(\omega)} w_i(b)$$

en posant

$$\langle \varphi^0, w_i \rangle_{L^2(\omega)} = \varphi_i^0$$

il vient

$$\langle \Lambda_0 \varphi^0, \varphi^0 \rangle = \sum_{i, j \geq 1} \varphi_i^0 \varphi_j^0 w_i(b) w_j(b) \frac{e^{(\lambda_i + \lambda_j)T} - 1}{\lambda_i + \lambda_j}$$

si $\Lambda_0 = (\Lambda_{ij}) \quad i, j = 1, \infty$

nous avons

$$\Lambda_{ij} = w_i(b) w_j(b) \frac{e^{(\lambda_i + \lambda_j)T} - 1}{\lambda_i + \lambda_j}$$

d'autre part on a $\forall \varphi^0 \in G$

$$\begin{aligned} \langle P(\hat{z}^0), \varphi^0 \rangle &= \langle \hat{z}^0, \varphi^0 \rangle_{L^2(\omega)} \\ &= \sum_{i \geq 1} \langle \varphi^0, w_i \rangle_{L^2(\omega)} \langle \hat{z}^0, w_i \rangle_{L^2(\omega)} \\ &= \sum_{i \geq 1} \varphi_i^0 \hat{z}_i^0 \end{aligned}$$

où

$$\hat{z}_i^0 = \langle \hat{z}^0, w_i \rangle_{L^2(\omega)}$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{z}^0 = \hat{z}(0) &= \int_0^T s^*(t) C^* C y(t) dt = \int_0^T s(t) y(b, t) \delta(x - b) dt \\ &= \int_0^T y(b, t) \sum_{k \geq 1} e^{\lambda_k t} \langle \delta(\cdot - b), w_k \rangle w_k \\ &= \sum_{k \geq 1} \int_0^T y(b, t) e^{\lambda_k t} w_k(b) w_k \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\langle \hat{z}^0, w_i \rangle_{L^2(\omega)} = \sum_{k \geq 1} \int_0^T y(b, t) e^{\lambda_k t} w_k(b) dt \langle w_k, w_i \rangle_{L^2(\omega)}$$

en faisant une tronquation des sommations à l'ordre M , le problème (2-24) sera approché par la résolution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^M \Lambda_{ij} \varphi_j^0 = z_i^0 \quad i = 1, M \quad (2-25)$$

où on a pris

$$z_i^0 = \sum_{k=1}^M \int_0^T y(b, t) e^{\lambda_k t} w_k(b) dt \langle w_k, w_i \rangle_{L^2(\omega)} \quad (2-26)$$

5) Simulations numériques

Les simulations numériques sont faites dans le cas monodimensionnel où on a pris $\Omega =]0, 1[$ et $\omega =]0.4, 0.6[$, la région où l'état est à observer.

Exemple

On considère le système parabolique monodimensionnel décrit par

$$\begin{cases} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} &]0, 1[\times]0, T[\\ y(0) = y^0 &]0, 1[\\ y(0, t) = y(1, t) = 0 &]0, T[\end{cases} \quad (2-30)$$

L'observation est ponctuelle et donnée par

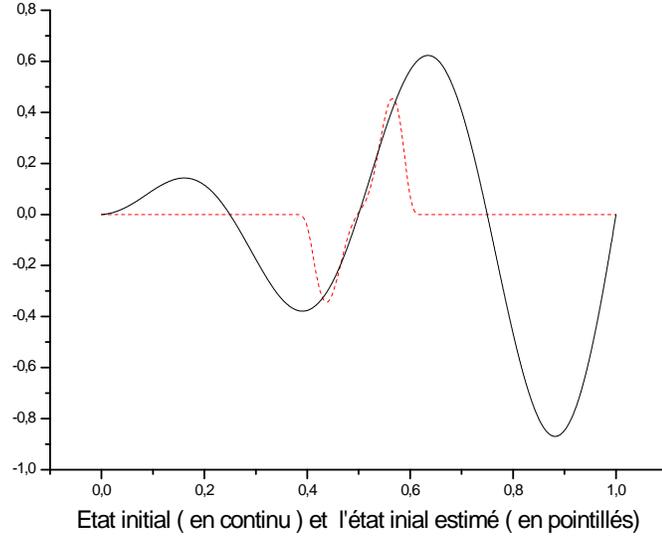
$$z(t) = y(b, t) \quad \text{avec } b = 0.978$$

La valeur initiale y^0 à reconstruire sur la région ω est choisie par

$$y^0(x) = x \sin(4\pi x)$$

comme

$$\begin{aligned} y(b, t) &= \sum_{j \geq 1} e^{\lambda_j t} \langle y^0, w_j \rangle w_j(b) \\ &\simeq \sum_{j=1}^M e^{\lambda_j t} \langle y^0, w_j \rangle w_j(b) \end{aligned}$$



il vient d'après (2-26)

$$\begin{aligned}
 z_i^0 &= \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^M \int_0^T e^{(\lambda_k + \lambda_i)t} \langle y^0, w_j \rangle dt w_j(b) w_k(b) \langle w_k, w_i \rangle_{L^2(\omega)} \\
 &= \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^M \langle y^0, w_j \rangle w_i(b) w_k(b) \frac{e^{(\lambda_k + \lambda_i)T} - 1}{\lambda_i + \lambda_k} \langle w_k, w_i \rangle_{L^2(\omega)}
 \end{aligned}$$

Les composantes z_i^0 du vecteur colonne du système linéaire (2-25) étant maintenant connues, on peut alors procéder à sa résolution. Pour cela on a élaboré un programme en fortran dans lequel on a utilisé la triangularisation de Gauss et l'intégration approchée par la méthode des trapezes généralisée. Les résultats obtenus, en prenant $M = 5$ et $T = 2$, nous ont permis de tracer le graphe, représenté par la figure 2-1 avec une erreur

$$\|y_1^0 - y_e^0\|_{L^2(\omega)} = 7.667 \cdot 10^{-6} \quad \text{où } y_e^0 \text{ représente l'état initial estimé.}$$

CHAPITRE 3

Observabilité régionale interne des systèmes hyperboliques

1) Système considéré

Ω étant un ouvert borné de IR^n ($n = 1, 2, 3$) de frontière $\partial\Omega$ assez régulière.

Considérons le système décrit par l'équation hyperbolique

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = Ay(x, t) & Q \\ y(x, 0) = y^0(x), \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = y^1(x) & \Omega \\ y(\zeta, t) = 0 & \Sigma \end{array} \right. \quad (3-1)$$

A étant l'opérateur elliptique linéaire du second ordre donné par :

$$A = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}) \quad (3-2)$$

et vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{ij} \in C^1(\Omega) \text{ telqu'il existe } \alpha > 0 \text{ et} \\ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \zeta_i \zeta_j \geq \alpha \sum_{j=1}^n |\zeta_j|^2 \quad \forall \zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \in IR^n \\ \text{avec} \quad a_{ij} = a_{ji} \quad 1 \leq i, j \leq n \end{array} \right. \quad (3-3)$$

Le système (3-1) est augmenté de la fonction de sortie

$$z(t) = Cy(t) \quad (3-4)$$

$C : L^2(\Omega) \longrightarrow IR^p$ désigne l'opérateur d'observation dépendant de la nature et du nombre p de capteurs considérés. Soit $D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ le domaine de l'opérateur A , et $\bar{\mathcal{F}} = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. On considère l'opérateur $\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{bmatrix}$ défini par :

$$\bar{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ Ay_1 \end{bmatrix} \quad \forall (y_1, y_2) \in D(\bar{A}) \quad \text{Où} \quad D(\bar{A}) = D(A) \times H_0^1(\Omega)$$

\bar{A} est un opérateur linéaire engendrant un semi-groupe fortement continu $\bar{S}(t)$ sur $\bar{\mathcal{F}}$. Par ailleurs si (w_{mj}) est la base de fonctions propres de l'opérateur A , pour Dirichlet, et λ_m les valeurs propres associées, λ_m étant de multiplicité r_m , alors pour tout (y_1, y_2) dans $\bar{\mathcal{F}}$ on a $\bar{S}(t) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}$ avec :

$$\begin{cases} W_1 = \sum_m \sum_{j=1}^{r_m} \left[\langle y_1, w_{mj} \rangle \cos \sqrt{-\lambda_m} t + \frac{1}{\sqrt{-\lambda_m}} \langle y_2, w_{mj} \rangle \sin \sqrt{-\lambda_m} t \right] w_{mj} \\ \text{et} \\ W_2 = \sum_m \sum_{j=1}^{r_m} \left[-\sqrt{-\lambda_m} \langle y_1, w_{mj} \rangle \sin \sqrt{-\lambda_m} t + \langle y_2, w_{mj} \rangle \cos \sqrt{-\lambda_m} t \right] w_{mj} \end{cases} \quad (3-5)$$

Le produit scalaire étant dans $L^2(\Omega)$ (pour plus de détail voir [10]). L'opérateur \bar{A} permet alors de définir le système (3-6) suivant équivalent au système (3-1). En effet, il suffit de considérer :

$$\begin{cases} \dot{\bar{y}}(t) = \bar{A}\bar{y}(t) & 0 < t < T \\ \bar{y}(0) = \bar{y}^0 \end{cases} \quad (3-6)$$

Dont la variable d'état est $\bar{y}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \frac{\partial y(t)}{\partial t} \end{bmatrix}$, $\bar{y}^0 = \begin{bmatrix} y^0 \\ y^1 \end{bmatrix}$

et $\dot{\bar{y}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} \end{bmatrix}$

Le système (3-5) est augmenté de la sortie

$$\bar{z}(t) = \bar{C}\bar{y}(t) \quad (3-7)$$

où on a pris $\bar{C} = (C, 0)$. Le système (3-6) admet une solution unique donnée par

$$\bar{y}(t) = \bar{S}(t)\bar{y}^0 \quad (3-8)$$

(3-7) peut s'écrire alors sous la forme

$\bar{z}(t) = \bar{K}(t)\bar{y}^0$ où $\bar{K} = \bar{C}\bar{S}(\cdot)$ apparait comme un opérateur linéaire borné de $\bar{\mathcal{F}}$ dans $L^2(0, T; IR^p)$, \bar{K}^* est l'opérateur adjoint de \bar{K} .

A partir de là, les notions d'exacte et de faible observabilité se définissent comme aux paragraphes précédents à l'aide de l'opérateur \bar{K} . Donc, dire que le système (3-6), (3-7) est exactement observable si :

$$\text{Im } \bar{K}^* = \bar{\mathcal{F}}$$

il est faiblement observable si

$$\overline{\text{Im } \bar{K}^*} = \bar{\mathcal{F}}$$

2) Observabilité régionale

Soit A l'opérateur différentiel linéaire d'ordre deux défini par (3-2) et vérifiant (3-3).

Soit Ω un ouvert borné de IR^n ($n = 1, 2, 3$) de frontière $\partial\Omega$ assez régulière.

On considère le système décrit par l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = Ay(x, t) & Q \\ y(x, 0) = y^0(x), \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = y^1(x) & \Omega \\ y(\zeta, t) = 0 & \Sigma \end{cases} \quad (3-9)$$

Les conditions initiales y^0 et y^1 sont supposées inconnues et le système (3-9) est augmenté de la fonction de sortie

$$z(t) = Cy(t) \quad (3-10)$$

Où C désigne l'opérateur d'observation dépendant de la nature et du nombre p de capteurs considérés.

Soit ω un sous-domaine (une région) du domaine Ω supposé non vide.

on définit l'opérateur restriction suivant

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_\omega : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) &\longrightarrow L^2(\omega) \times L^2(\omega) \\ (y_1, y_2) &\longrightarrow (y_1, y_2)|_\omega \end{aligned}$$

dont l'adjoint $\bar{\chi}_\omega^* : L^2(\omega) \times L^2(\omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ est donné par

$$\bar{\chi}_\omega^*(y_1, y_2) = \begin{cases} (y_1, y_2)(x) & x \in \omega \\ 0 & x \in \Omega \setminus \omega \end{cases}$$

Définition 3-1

i) Le système (3-9), (3-10) est dit exactement régionalement observable sur ω (ou exactement ω -observable) si

$$\text{Im}(\bar{\chi}_\omega \bar{K}^*) = L^2(\omega) \times L^2(\omega)$$

ii) Le système (3-9), (3-10) est dit faiblement régionalement observable sur ω (ou faiblement ω -observable) si

$$\overline{\text{Im}(\bar{\chi}_\omega \bar{K}^*)} = L^2(\omega) \times L^2(\omega)$$

Proposition 3-1

1 Le système (3-9), (3-10) est exactement ω - observable si et seulement si

$$\text{Ker} \bar{\chi}_\omega + \text{Im} \bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega \bar{K}^* = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

2 Le système (3-9), (3-10) est faiblement ω - observable si et seulement si

$$\text{Ker} \bar{\chi}_\omega + \overline{\text{Im} \bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega \bar{K}^*} = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Preuve

1) – Soit $\bar{y} \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ donc $\bar{\chi}_\omega \bar{y} \in L^2(\omega) \times L^2(\omega)$, puisque le système (3-9), (3-10) est exactement ω -observable, il existe $z \in L^2(0, T; \theta)$ telque $\bar{\chi}_\omega \bar{y} = \bar{\chi}_\omega \bar{K}^* z = \bar{\chi}_\omega \bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega \bar{K}^* z$, donc $\bar{\chi}_\omega (\bar{y} - \bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega \bar{K}^* z) = 0$, en posant $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$ avec $\bar{y}_1 = \bar{y} - \bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega \bar{K}^* z$ et $\bar{y}_2 = \bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega \bar{K}^* z$, il vient $\bar{y}_1 \in \text{Ker} \bar{\chi}_\omega$ et $\bar{y}_2 \in \text{Im} \bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega \bar{K}^* L^2(\omega) \times L^2(\omega)$

-Iversement

Soit $\bar{y} \in L^2(\omega) \times L^2(\omega)$ donc $\bar{\chi}_\omega^* \bar{y} \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ il existe alors $\bar{y}_1 \in \text{Ker} \bar{\chi}_\omega$ et $\bar{y}_2 \in \text{Im} \bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega \bar{K}^*$ telque $\bar{\chi}_\omega^* \bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$ ceci implique $\bar{\chi}_\omega \bar{\chi}_\omega^* \bar{y} = \bar{\chi}_\omega \bar{y}_1 + \bar{\chi}_\omega \bar{y}_2 = \bar{\chi}_\omega \bar{y}_2$, ie $\bar{y} = \bar{\chi}_\omega \bar{y}_2$ or $\bar{y}_2 = \bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega \bar{K}^* z$ d'où $\bar{y} = \bar{\chi}_\omega \bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega \bar{K}^* z = \bar{\chi}_\omega \bar{K}^* z$ par conséquent $\text{Im}(\bar{\chi}_\omega \bar{K}^*) = L^2(\omega) \times L^2(\omega)$.

2)– Soit $\bar{y} \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ donc $\bar{\chi}_\omega \bar{y} \in L^2(\omega) \times L^2(\omega)$, puisque le système (3-9), (3-10) est faiblement ω –observable, il existe $z \in L^2(0, T; \theta)$ telque $\|\bar{\chi}_\omega \bar{y} - \bar{\chi}_\omega \bar{K}^* z\|_\omega < \varepsilon$ ($\forall \varepsilon > 0$), en posant $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$ avec $\bar{y}_1 = \bar{y} - \bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega \bar{y}$ et $\bar{y}_2 = \bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega \bar{y}$ il vient

$$\bar{\chi}_\omega \bar{y}_1 = \bar{\chi}_\omega \bar{y} - \bar{\chi}_\omega \bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega \bar{y} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad \|\bar{y}_2 - \bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega \bar{K}^* z\|_\Omega &= \|\bar{\chi}_\omega (\bar{\chi}_\omega \bar{y} - \bar{\chi}_\omega \bar{K}^* z)\|_\Omega \\ &= \|\bar{\chi}_\omega \bar{y} - \bar{\chi}_\omega \bar{K}^* z\|_\Omega < \varepsilon \end{aligned}$$

d'où

$$\bar{y}_2 \in \overline{\text{Im } \bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega \bar{K}^*} \text{ et donc } \bar{y} \in \text{Ker } \bar{\chi}_\omega + \overline{\text{Im } \bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega \bar{K}^*} .$$

-Iversement

Soit $\bar{y} \in L^2(\omega) \times L^2(\omega)$ donc $\bar{\chi}_\omega^* \bar{y} \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, il existe alors $(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \in \text{Ker } \bar{\chi}_\omega + \overline{\text{Im } \bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega \bar{K}^*}$ telque $\bar{\chi}_\omega^* \bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$

$$\text{ceci donne } \bar{\chi}_\omega \bar{\chi}_\omega^* \bar{y} = \bar{\chi}_\omega (\bar{y}_1 + \bar{y}_2) = \bar{\chi}_\omega \bar{y}_2 .$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \|\bar{y} - \bar{\chi}_\omega \bar{K}^* z\|_\omega &= \|\bar{\chi}_\omega \bar{y}_2 - \bar{\chi}_\omega \bar{K}^* z\|_\omega \\ &= \|\bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega \bar{y}_2 - \bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega \bar{K}^* z\|_\Omega \\ &= \|\bar{\chi}_\omega (\bar{y}_2 - \bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega \bar{K}^* z)\|_\omega \\ &\leq \|\bar{y}_2 - \bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega \bar{K}^* z\|_\Omega < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

d'où

$$y \in \overline{\text{Im } \bar{\chi}_\omega \bar{K}^*} \text{ ie } \overline{\text{Im } \bar{\chi}_\omega \bar{K}^*} = L^2(\omega) \times L^2(\omega) .$$

Remarque 3-1

-Le système (3-9), (3-10) est faiblement ω –observable si et seulement si

$$\text{Ker } \bar{K} \bar{\chi}_\omega^* = \{0\} .$$

-Un système non globalement observable peut être régionalement observable.

Ceci est illustré par l'exemple suivant :

Exemple 3-1

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) &]0, 1[\times]0, T[\\ y(x, 0) = y^0(x) , \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = y^1(x) &]0, 1[\\ y(0, t) = y(1, t) = 0 &]0, T[\end{cases} \quad (3-11)$$

y^0 et y^1 sont supposés inconnus sur $]0, 1[$

Le système (3-11) est augmenté de la fonction de sortie donnée par

$$z(t) = y(b, t) \quad (3-12)$$

On prend $b = \frac{1}{2}$ et on choisit

$$y^0(x) = \cos(\pi x) \quad \text{et} \quad y^1 = \sin(2\pi x)$$

y^0 et y^1 ne sont pas observables sur $]0, 1[$ mais peuvent être observables sur une région ω choisi, en effet

on a

$$\begin{aligned} \bar{K}(y^0, y^1) &= \sum_{j \geq 1} \left[\langle y^0, w_j \rangle \cos \sqrt{-\lambda_j} t + \frac{1}{\sqrt{-\lambda_j}} \langle y^1, w_j \rangle \sin \sqrt{-\lambda_j} t \right] w_j(b) \\ &= \sqrt{2} \sum_{j \in 2IN+1} \left[\langle y^0, w_j \rangle \cos \sqrt{-\lambda_j} t + \frac{1}{\sqrt{-\lambda_j}} \langle y^1, w_j \rangle \sin \sqrt{-\lambda_j} t \right] \sin \left(j \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

Comme $\langle y^0, w_1 \rangle = 0$ et nous avons $\forall j \in 2IN + 1$

$$\begin{aligned} \langle y^0, w_j \rangle &= \sqrt{2} \int_0^1 \cos(\pi x) \sin(j\pi x) dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 [\sin(1+j)\pi x + \sin(j-1)\pi x] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{1}{(1+j)\pi} (\cos(1+j)\pi - 1) + \frac{1}{(j-1)\pi} (\cos(j-1)\pi - 1) \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\langle y^1, w_j \rangle &= \sqrt{2} \int_0^1 \sin(2\pi x) \sin(j\pi x) dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 [\cos(j-2)\pi x - \cos(j+2)\pi x] dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{1}{(j-2)\pi} \sin(j-2)\pi - \frac{1}{(j+2)\pi} \sin(j+2)\pi \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

il vient $\bar{K}(y^0, y^1) = 0$ et donc le système (3-11), (3-12) n'est pas faiblement observable sur $]0, 1[$.

d'autre part si on prend $\omega = \left] \frac{1}{3}, \frac{5}{6} \right]$, on montre alors que

$$\bar{K} \bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega (y^0, y^1) \neq 0$$

pour cela on procède par l'absurde. On suppose donc que $\bar{K} \bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega (y^0, y^1) = 0$

ie

$$\sum_{j \geq 1} \left[\langle y^0, w_j \rangle_{L^2(\omega)} \cos \sqrt{-\lambda_j} t + \frac{1}{\sqrt{-\lambda_j}} \langle y^1, w_j \rangle_{L^2(\omega)} \sin \sqrt{-\lambda_j} t \right] w_j(b) = 0$$

comme pour T assez grand, les fonctions $(\sin \sqrt{-\lambda_j} t)_{j \geq 1}$ et $(\cos \sqrt{-\lambda_j} t)_{j \geq 1}$ constituent un système orthonormé complet dans $L^2(0, T)$

il vient alors

$$\langle y^0, w_j \rangle_{L^2(\omega)} w_j(b) = \langle y^1, w_j \rangle_{L^2(\omega)} w_j(b) = 0 \quad \forall j \geq 1$$

mais pour tout $j \in 2IN + 1$ on a

$$w_j(b) = \sqrt{2} \sin\left(j \frac{\pi}{2}\right) \neq 0$$

ce qui donne necessairement

$$\langle y^0, w_j \rangle_{L^2(\omega)} = \langle y^1, w_j \rangle_{L^2(\omega)} = 0 \quad \forall j \in 2IN + 1$$

or pour $j = 5$ (par exemple) on a

$$\begin{aligned} \langle y^0, w_5 \rangle_{L^2(\omega)} &= \sqrt{2} \int_{2/6}^{5/6} \cos(\pi x) \sin(5\pi x) dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{2/6}^{5/6} (\sin(6\pi x) + \sin(4\pi x)) dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{6\pi} \end{aligned}$$

d'où $\bar{K} \bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega (y^0, y^1) \neq 0$.

3) Interêts

La notion d'observabilité régionale est mieux adaptée à l'analyse des systèmes.

- Les définitions (3-1) sont générales et englobent le cas de l'observabilité globale (cas $\omega = \Omega$)

- La reconstruction de l'état sera plus précise dans le cas régional. En effet si y^0 désigne l'état à estimer et \tilde{y}^0 l'état estimé, si y^1 désigne la dérivé de l'état à estimer et \tilde{y}^1 la dérivé de l'état estimée alors on a :

$$\|y^0 - \tilde{y}^0\|_{L^2(\omega)} + \|y^1 - \tilde{y}^1\|_{L^2(\omega)} \leq \|y^0 - \tilde{y}^0\|_{L^2(\Omega)} + \|y^1 - \tilde{y}^1\|_{L^2(\Omega)}$$

4) Reconstruction régionale

Le sujet de cette section est d'adapter la méthode HUM (Hilbert Uniqueness Method), développée par Lions ([19]), au cas de l'observabilité régionale des systèmes hyperboliques. En particulier la reconstruction de l'état initial du système (3-9) est ici considérée pour $A = \Delta$ (le Laplacien).

4-1) Observation de l'état

Pour $(y^0, y^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega_0)$ avec $\Omega_0 \subset \Omega$, on considère le système suivant, décrit par l'équation des ondes.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \Delta y(x, t) & Q \\ y(x, 0) = y^0(x), \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = y^1(x) & \Omega \\ y(\zeta, t) = 0 & \Sigma \end{cases} \quad (3-13)$$

Ce système admet une solution unique $y \in C(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega))$, (voir [21],[24]) et est augmenté de la fonction de sortie

$$z(t) = \langle y(t), f \rangle_{L^2(\Omega_0)} \quad (3-14)$$

où f est la distribution spatiale du capteur considéré et Ω_0 son support.

Soit $G_1 = \{(\varphi^0, \varphi^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) / \varphi^0 = \varphi^1 = 0 \text{ sur } \Omega \setminus \omega\}$

Le problème de l'observabilité régionale peut être résolu au moyen de l'approche suivante :

Pour $(\varphi^0, \varphi^1) \in G_1$ le système

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} = \Delta \varphi(x, t) & Q \\ \varphi(x, 0) = \varphi^0(x), \frac{\partial \varphi(x, 0)}{\partial t} = \varphi^1(x) & \Omega \\ \varphi(\zeta, t) = 0 & \Sigma \end{cases} \quad (3-15)$$

admet une solution unique $\in C(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega))$ (voir [21],[24]).

Ceci permet de définir sur G_1 la semi-norme suivante

$$\|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{G_1} = \left(\int_0^T \langle \varphi(t), f \rangle_{L^2(\Omega_0)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3-16)$$

On considère le système retrograde

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = \Delta \psi(x, t) + \langle \varphi(t), f \rangle_{L^2(\Omega_0)} \chi_{\Omega_0}(x) f(x) & Q \\ \psi(x, T) = 0, \quad \frac{\partial \psi(x, T)}{\partial t} = 0 & \Omega \\ \psi(\zeta, t) = 0 & \Sigma \end{cases} \quad (3-17)$$

qui admet une solution unique $\psi \in C(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega))$ (voir [21],[24]). La résolution du système (3-17) fournit $\psi(x, 0)$ qu'on note par $\psi^0(x)$ et $\frac{\partial \psi(x, 0)}{\partial t}$ qu'on note par $\psi^1(x)$. Soit alors Λ_1 l'opérateur défini par

$$\Lambda_1(\varphi^0, \varphi^1) = \mathcal{P}(-\psi^1, \psi^0) \quad (3-18)$$

$$\text{où} \quad \mathcal{P} = \bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega \quad (3-19)$$

Soit le système retrograde du système (3-13)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{z}(x, t)}{\partial t^2} = \Delta \bar{z}(x, t) + \langle y(t), f \rangle_{L^2(\Omega_0)} \chi_{\Omega_0}(x) f(x) & Q \\ \bar{z}(x, T) = 0, \quad \frac{\partial \bar{z}(x, T)}{\partial t} = 0 & \Omega \\ \bar{z}(\zeta, t) = 0 & \Sigma \end{cases} \quad (3-20)$$

La résolution du système (3-20) fournit $\bar{z}(x, 0)$ qu'on note par $\bar{z}^0(x)$ et $\frac{\partial \bar{z}(x, 0)}{\partial t}$ qu'on note par $\bar{z}^1(x)$. Si (φ^0, φ^1) est convenablement choisi dans G_1 c'est à dire de telle sorte que $\psi^0 = \bar{z}^0$ et $\psi^1 = \bar{z}^1$ sur ω alors le problème d'observabilité sur la région ω revient à résoudre l'équation

$$\Lambda_1(\varphi^0, \varphi^1) = \mathcal{P}(-\bar{z}^1, \bar{z}^0) \quad (3-21)$$

On considère la décomposition suivante :

$$y^0 = \begin{cases} y_1^0 & \text{sur } \omega \\ y_2^0 & \text{sur } \Omega \setminus \omega \end{cases} \quad \text{et} \quad y^1 = \begin{cases} y_1^1 & \text{sur } \omega \\ y_2^1 & \text{sur } \Omega \setminus \omega \end{cases} \quad (3-22)$$

Remarque 3-2

Parmi les choix de φ^0 et φ^1 qui réalisent $\psi^0 = \bar{z}^0$ et $\psi^1 = \bar{z}^1$ sur ω on a $\varphi^0 = y_1^0$ et $\varphi^1 = y_1^1$. Ce choix n'est pas nécessairement unique mais si on montre que l'opérateur Λ_1 est un isomorphisme alors l'équation (3-21) admettra une solution unique (φ^0, φ^1) qui coïncidera avec (y_1^0, y_1^1) à observer sur ω .

Théorème 3-1

Si le capteur (Ω_0, f) est stratégique alors la semi-norme (3-16) devient une norme et l'équation (3-21) admet une solution unique (φ^0, φ^1) qui correspond à (y_1^0, y_1^1) à observer sur ω .

Preuve

i) Soit (w_j) les fonctions propres de l'opérateur Δ et (λ_j) les valeurs propres correspondantes, (3-16) définit bien une norme sur G_1 . En effet pour $(\varphi^0, \varphi^1) \in G_1$ on a $\|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{G_1} = 0 \iff \langle \varphi(t), f \rangle_{L^2(\Omega_0)} = 0$ sur $[0, T]$ autrement dit

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left[\langle \varphi^0, w_j \rangle \cos \sqrt{-\lambda_j} t + \frac{\langle \varphi^1, w_j \rangle}{\sqrt{-\lambda_j}} \sin \sqrt{-\lambda_j} t \right] \langle w_j, f \rangle_{L^2(\Omega_0)} = 0 \quad (3-23)$$

Pour T assez grand les fonctions $(\sin \sqrt{-\lambda_j} t)_{j \geq 1}$ et $(\cos \sqrt{-\lambda_j} t)_{j \geq 1}$ constituent un système orthonormé complet dans $L^2(0, T)$ donc de (3-23) on obtient

$\langle \varphi^0, w_j \rangle \langle w_j, f \rangle_{L^2(\Omega_0)} = 0$ et $\langle \varphi^1, w_j \rangle \langle w_j, f \rangle_{L^2(\Omega_0)} = 0$, puisque le capteur (Ω_0, f) est stratégique, on a $\langle w_j, f \rangle_{L^2(\Omega_0)} \neq 0 \forall j \geq 1$, ceci implique que

$\langle \varphi^0, w_j \rangle = \langle \varphi^1, w_j \rangle = 0 \forall j \geq 1$ d'où $\varphi^0 = \varphi^1 = 0$ et (3-16) forme bien une norme sur G_1 .

ii) Soit \hat{G}_1 le complété de G_1 par rapport à la norme (3-16) muni du produit scalaire associé $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\hat{G}_1}$ et \hat{G}_1^* désigne son dual. On montre que l'opérateur Λ_1 est un isomorphisme de \hat{G}_1 dans \hat{G}_1^* . En effet en multipliant la première équation du système (3-17) par φ , solution de (3-15), et en intégrant deux fois par partie, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \psi''(t), \varphi(t) \rangle dt &= \langle \psi'(T), \varphi(T) \rangle - \langle \psi'(0), \varphi(0) \rangle - \langle \psi(T), \varphi'(T) \rangle + \\ &\quad \langle \psi(0), \varphi'(0) \rangle + \int_0^T \langle \psi(t), \varphi''(t) \rangle dt \\ &= \int_0^T \langle \psi(t), \varphi''(t) \rangle dt + \langle \psi(0), \varphi'(0) \rangle - \langle \psi'(0), \varphi(0) \rangle \\ &= \int_0^T \langle \psi(t), \varphi''(t) \rangle dt + \left\langle \left(-\psi'(0), \psi(0) \right), \left(\varphi(0), \varphi'(0) \right) \right\rangle \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\int_0^T \langle \Delta \psi(t), \varphi(t) \rangle dt = \int_0^T \langle \psi(t), \Delta \varphi(t) \rangle dt + \int_{\Sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \varphi d\Sigma - \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \psi d\Sigma, \text{ tenant}$$

compte des conditions aux limites des systèmes (3-15) et (3-17), on aura

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \Delta \psi(t), \varphi(t) \rangle dt &= \int_0^T \langle \psi(t), \Delta \varphi(t) \rangle dt \text{ d'où} \\ \int_0^T \left[\langle \psi''(t), \varphi(t) \rangle - \langle \Delta \psi(t), \varphi(t) \rangle \right] dt &= \int_0^T \langle \psi(t), \varphi''(t) - \Delta \varphi(t) \rangle dt + \\ &\quad \left\langle \left(-\psi'(0), \psi(0) \right), \left(\varphi(0), \varphi'(0) \right) \right\rangle \\ &= \langle \Lambda_1(\varphi^0, \varphi^1), (\varphi^0, \varphi^1) \rangle \end{aligned}$$

d'autre part nous avons :

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[\langle \psi''(t), \varphi(t) \rangle - \langle \Delta \psi(t), \varphi(t) \rangle \right] dt &= \int_0^T \left\langle \langle \varphi(t), f \rangle_{L^2(\Omega_0)} \chi_{\Omega_0} f, \varphi(t) \right\rangle dt \\ &= \int_0^T \langle \varphi(t), f \rangle_{L^2(\Omega_0)}^2 dt \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi

$$\langle \Lambda_1(\varphi^0, \varphi^1), (\varphi^0, \varphi^1) \rangle = \|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{G_1}^2 \quad \forall (\varphi^0, \varphi^1) \in G_1$$

Soit maintenant $(\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1) \in G_1$ et $\hat{\varphi}(t)$ la solution correspondante du problème (3-15), en multipliant (3-17) par $\hat{\varphi}(t)$, en integrant deux fois par partie et en utilisant la formule de Green comme on l'a fait ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_1(\varphi^0, \varphi^1), (\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1) \rangle &= \int_0^T \langle \varphi(t), f \rangle_{L^2(\Omega_0)} \langle \hat{\varphi}(t), f \rangle_{L^2(\Omega_0)} dt \\ &= \langle (\varphi^0, \varphi^1), (\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1) \rangle_{\hat{G}_1} \\ &\leq \|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{\hat{G}_1} \|(\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1)\|_{\hat{G}_1} \quad \forall (\varphi^0, \varphi^1), (\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1) \in G_1 \end{aligned} \quad (3-24)$$

L'inégalité (3-24) nous permet de prolonger l'opérateur Λ_1 de manière unique en un opérateur linéaire et continu de \hat{G}_1 dans l'espace dual \hat{G}_1^* ce qui permet de dire que l'opérateur Λ_1 est un isomorphisme de \hat{G}_1 sur \hat{G}_1^* .

Remarque 3-3

L'approche précédente peut être appliquée avec les mêmes technique si le système (3-13) est observé par un capteur ponctuel interne.

4 – 2) Observation du flux

Dans cette partie on considère le système (3-13) mais avec la sortie

$$z(t) = \left\langle \frac{\partial y(t)}{\partial t}, f \right\rangle_{L^2(\Omega_0)} \quad (3-25)$$

Soit

$$G_2 = \{(\varphi^0, \varphi^1) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega), \varphi^0 = \varphi^1 = 0 \text{ sur } \Omega \setminus \omega\}$$

On définit sur G_2 la semi-norme

$$\|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{G_2} = \left(\int_0^T \left\langle \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t}, f \right\rangle^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3-26)$$

Pour $(\varphi^0, \varphi^1) \in G_2$, le système (3-15) admet une solution unique $\varphi \in$

$C(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^2(0, T; L^2(\Omega))$ (voir [5],[21]).

Le système retrograde de (3-15) est donné par:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = \Delta \psi(x, t) + \left\langle \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t}, f \right\rangle_{L^2(\Omega_0)} \chi_{\Omega_0}(x) f(x) & Q \\ \psi(x, T) = 0, \quad \frac{\partial \psi(x, T)}{\partial t} = 0 & \Omega \\ \psi(\zeta, t) = 0 & \Sigma \end{cases} \quad (3-27)$$

dont la solution unique $\psi(t) \in C(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^2(0, T; L^2(\Omega))$, (voir [5],[21])

Soit l'opérateur Λ_2 défini par

$$\Lambda_2(\varphi^0, \varphi^1) = \mathcal{P}(\Delta \psi(0), -\psi(0))$$

Si on considère le système retrograde de (3-13)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{z}(x, t)}{\partial t^2} = \Delta \bar{z}(x, t) + \left\langle \frac{\partial y(t)}{\partial t}, f \right\rangle_{L^2(\Omega_0)} \chi_{\Omega_0}(x) f(x) & Q \\ \bar{z}(x, T) = 0, \quad \frac{\partial \bar{z}(x, T)}{\partial t} = 0 & \Omega \\ \bar{z}(\zeta, t) = 0 & \Sigma \end{cases} \quad (3-28)$$

Le problème de l'observabilité régionale revient à résoudre l'équation

$$\Lambda_2(\varphi^0, \varphi^1) = \mathcal{P}(\Delta \bar{z}(0), -\bar{z}(0)) \quad (3-29)$$

Théorème 3-2

Si le capteur (Ω_0, f) est stratégique, alors la semi-norme (3-26) devient une norme et l'équation (3-29) admet une solution unique (φ^0, φ^1) qui correspond à (y_1^0, y_1^1) à observer sur ω .

Preuve

1) Soit (w_j) les fonctions propres de l'opérateur Δ et (λ_j) les valeurs propres correspondantes, (3-26) définit bien une norme sur G_2 . En effet pour $(\varphi^0, \varphi^1) \in G_2$

$$\text{on a } \|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{G_2} = 0 \iff \left\langle \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t}, f \right\rangle_{L^2(\Omega_0)} = 0 \text{ sur } [0, T] \text{ autrement dit}$$

$$\sum_{j=1}^{+\infty} [-\sqrt{-\lambda_j} \langle \varphi^0, w_j \rangle \sin \sqrt{-\lambda_j} t + \langle \varphi^1, w_j \rangle \cos \sqrt{-\lambda_j} t] \langle w_j, f \rangle_{L^2(\Omega_0)} \quad (3-30)$$

Pour T assez grand les fonctions $(\sin \sqrt{-\lambda_j} t)_{j \geq 1}$ et $(\cos \sqrt{-\lambda_j} t)_{j \geq 1}$ constituent un système orthonormé complet dans $L^2(0, T)$ donc de (3-30) on obtient

$\langle \varphi^0, w_j \rangle \langle w_j, f \rangle_{L^2(\Omega_0)} = 0$ et $\langle \varphi^1, w_j \rangle \langle w_j, f \rangle_{L^2(\Omega_0)} = 0$, puisque le capteur (Ω_0, f) est stratégique, on a $\langle w_j, f \rangle_{L^2(\Omega_0)} \neq 0 \forall j \geq 1$, ceci implique que $\langle \varphi^0, w_j \rangle = \langle \varphi^1, w_j \rangle = 0 \forall j \geq 1$ d'où $\varphi^0 = \varphi^1 = 0$ et (3-26) forme bien une norme sur G_2 .

2) Montrer que l'équation (3-29) admet une solution unique revient à montrer que l'opérateur Λ_2 est un isomorphisme.

On multiplie la première équation du système (3-27) par $\varphi'(t)$ tel que $\varphi(t)$ soit la solution du système (3-15), on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[\langle \psi''(t), \varphi'(t) \rangle - \langle \Delta \psi(t), \varphi'(t) \rangle \right] dt &= \int_0^T \left\langle \langle \varphi'(t), f \rangle_{L^2(\Omega_0)} \chi_{\Omega_0} f, \varphi'(t) \right\rangle dt \\ &= \int_0^T \langle \varphi'(t), f \rangle_{L^2(\Omega_0)} \langle \chi_{\Omega_0} f, \varphi'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^T \langle \varphi'(t), f \rangle_{L^2(\Omega_0)}^2 dt \\ &= \|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{G_2}^2 \end{aligned}$$

d'autre part, en utilisant la formule de Green, on obtient

$$\int_0^T \langle \Delta \psi(t), \varphi'(t) \rangle dt = \int_0^T \langle \psi(t), \Delta \varphi'(t) \rangle dt + \int_{\Sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \varphi' d\Sigma - \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi'}{\partial \eta} \psi d\Sigma$$

$$= \int_0^T \langle \psi(t), \Delta \varphi'(t) \rangle dt + \int_{\Sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \varphi' d\Sigma$$

en utilisant deux fois l'intégration par partie on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \psi''(t), \varphi'(t) \rangle dt &= \int_0^T \langle \psi(t), \varphi'''(t) \rangle dt - \langle \psi(T), \varphi''(T) \rangle + \langle \psi(0), \varphi''(0) \rangle + \\ &\quad \langle \psi'(T), \varphi'(T) \rangle - \langle \psi'(0), \varphi'(0) \rangle \\ &= \int_0^T \langle \psi(t), \varphi'''(t) \rangle dt + \langle \psi(0), \varphi''(0) \rangle - \langle \psi'(0), \varphi'(0) \rangle \end{aligned}$$

donc on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \psi''(t), \varphi'(t) \rangle dt - \int_0^T \langle \Delta \psi(t), \varphi'(t) \rangle dt &= \int_0^T \langle \psi(t), \varphi'''(t) \rangle dt + \langle \psi(0), \varphi''(0) \rangle \\ &\quad - \langle \psi'(0), \varphi'(0) \rangle - \int_0^T \langle \psi(t), \Delta \varphi'(t) \rangle dt - \int_{\Sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \varphi' d\Sigma \\ &= \int_0^T \langle \psi(t), \varphi'''(t) - \Delta \varphi' \rangle dt + \langle \psi(0), \varphi''(0) \rangle - \langle \psi'(0), \varphi'(0) \rangle - \int_{\Sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \varphi' d\Sigma \end{aligned}$$

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = \Delta \theta(x, t) & Q \\ \theta(x, 0) = \theta^0(x), \quad \frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial t} = \theta^1(x) & \Omega \\ \theta(\zeta, t) = 0 & \Sigma \end{cases} \quad (3-31)$$

$$\text{où} \quad \theta(x, t) = \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t}$$

pour $(\varphi^0, \varphi^1) \in G_2$ on a $(\theta^0, \theta^1) \in G_1$, d'où le système (3-31) admet une solution unique $\theta \in C(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega))$ vérifiant donc $\varphi' = 0$ sur Σ

et $\varphi'''(t) - \Delta \varphi' = 0$ sur Q . Tenant compte de cela, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \psi''(t), \varphi'(t) \rangle dt - \int_0^T \langle \Delta \psi(t), \varphi'(t) \rangle dt &= \langle \psi(0), \varphi''(0) \rangle - \langle \psi'(0), \varphi'(0) \rangle \\ &= \langle \psi(0), \Delta \varphi(0) \rangle - \langle \psi'(0), \varphi'(0) \rangle \end{aligned}$$

D'après la formule de Green on obtient

$$\langle \psi(0), \Delta \varphi(0) \rangle = \langle \Delta \psi(0), \varphi(0) \rangle + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \varphi(0)}{\partial \eta} \psi(0) - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \psi(0)}{\partial \eta} \varphi(0)$$

$$= \langle \Delta\psi(0), \varphi(0) \rangle$$

d'où, finalement

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \psi''(t), \varphi'(t) \rangle dt - \int_0^T \langle \Delta\psi(t), \varphi'(t) \rangle dt &= \langle \Delta\psi(0), \varphi(0) \rangle - \langle \psi'(0), \varphi'(0) \rangle \\ &= \left\langle \left(\Delta\psi(0), -\psi'(0) \right), (\varphi^0, \varphi^1) \right\rangle \\ &= \langle \Lambda_2(\varphi^0, \varphi^1), (\varphi^0, \varphi^1) \rangle \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\langle \Lambda_2(\varphi^0, \varphi^1), (\varphi^0, \varphi^1) \rangle = \|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{G_2}^2 \quad \forall (\varphi^0, \varphi^1) \in G_2$$

Maintenant, si on prend $(\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1) \in G_2$ on a $\hat{\varphi}(t)$ la solution du problème (3-15).

En multipliant la première équation du système (3-27) par $\hat{\varphi}(t)$, en intégrant deux fois par partie, en utilisant la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_2(\varphi^0, \varphi^1), (\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1) \rangle &= \int_0^T \langle \varphi'(t), f \rangle_{L^2(\Omega_0)} \langle \hat{\varphi}'(t), f \rangle_{L^2(\Omega_0)} dt \\ &= \langle (\varphi^0, \varphi^1), (\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1) \rangle_{\hat{G}_2} \\ &\leq \|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{\hat{G}_2}^2 \|(\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1)\|_{\hat{G}_2}^2 \quad \forall (\varphi^0, \varphi^1), (\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1) \in G_2 \end{aligned} \quad (3-32)$$

avec \hat{G}_2 le complété de G_2 pour la norme (3-26). L'inégalité (3-32) nous permet de prolonger, de manière unique, l'opérateur Λ_2 en un opérateur linéaire et continu de \hat{G}_2 dans l'espace dual \hat{G}_2^* . De tout cela, résulte que l'opérateur Λ_2 est un isomorphisme de \hat{G}_2 sur \hat{G}_2^* .

Remarque 3-4

Pour les deux théorèmes 3-1 et 3-2, les démonstrations sont similaires si le capteur considéré est ponctuel

5) Approche numérique

5-1) Cas d'observation de l'état

Dans cette section on donne une approche numérique qui va expliciter les données initiales y_1^0 et y_1^1 . On suppose que le système (3-13) est observé par un capteur ponctuel interne (b, δ_b) , $b \in \Omega$ et dont la fonction de sortie est donnée par

$$z(t) = y(b, t) \quad (3-33)$$

Proposition 3-2

Si le capteur (b, δ_b) est stratégique, alors pour T assez grand, les états initiaux y_1^0 et y_1^1 peuvent être approchés par

$$y_1^0(x) = \begin{cases} -\frac{2}{T} \sum_{j \geq 1} \frac{\langle \bar{z}^1, w_j \rangle_{L^2(\omega)}}{w_j^2(b)} w_j(x) & \text{si } x \in \omega \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \setminus \omega \end{cases} \quad (3-34)$$

$$y_1^1(x) = \begin{cases} -\frac{2}{T} \sum_{j \geq 1} \lambda_j \frac{\langle \bar{z}^0, w_j \rangle_{L^2(\omega)}}{w_j^2(b)} w_j(x) & \text{si } x \in \omega \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \setminus \omega \end{cases} \quad (3-35)$$

Preuve

La résolution de l'équation (3-21) peut être ramenée à un problème de minimisation de la fonctionnelle Φ définie par

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi^0, \varphi^1) &= \frac{1}{2} \langle \Lambda_1(\varphi^0, \varphi^1), (\varphi^0, \varphi^1) \rangle - \langle \mathcal{P}(-\bar{z}^1, \bar{z}^0), (\varphi^0, \varphi^1) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \varphi^2(b, t) dt - \langle (-\bar{z}^1, \bar{z}^0), (\varphi^0, \varphi^1) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \varphi^2(b, t) dt - \langle -\bar{z}^1, \varphi^0 \rangle_{L^2(\omega)} - \langle \bar{z}^0, \varphi^1 \rangle_{L^2(\omega)} \end{aligned} \quad (3-36)$$

on a :

$$\int_0^T \varphi^2(b, t) dt = \int_0^T \left[\sum_{j \geq 1} \left[\langle \varphi^0, w_j \rangle \cos \sqrt{-\lambda_j} t + \frac{1}{\sqrt{-\lambda_j}} \langle \varphi^1, w_j \rangle \sin \sqrt{-\lambda_j} t \right] w_j(b) \right]^2 dt$$

en developpant et en passant à la limite quand $T \longrightarrow +\infty$ on obtient

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T \varphi^2(b, t) dt = \frac{1}{4} \sum_{j \geq 1} \left[\langle \varphi^0, w_j \rangle^2 - \frac{1}{\lambda_j} \langle \varphi^1, w_j \rangle^2 \right] w_j^2(b)$$

donc pour T assez grand on a

$$\frac{1}{2} \int_0^T \varphi^2(b, t) dt \simeq \frac{T}{4} \sum_{j \geq 1} \left[\langle \varphi^0, w_j \rangle^2 - \frac{1}{\lambda_j} \langle \varphi^1, w_j \rangle^2 \right] w_j^2(b)$$

d'autre part on a

$$\varphi^0(x) = \sum_{j \geq 1} \langle \varphi^0, w_j \rangle_{L^2(\omega)} w_j(x) \quad \text{et} \quad \varphi^1(x) = \sum_{j \geq 1} \langle \varphi^1, w_j \rangle_{L^2(\omega)} w_j(x)$$

on obtient alors

$$\langle -\bar{z}^1, \varphi^0 \rangle_{L^2(\omega)} = \sum_{j \geq 1} \langle \varphi^0, w_j \rangle_{L^2(\omega)} \langle -\bar{z}^1, w_j \rangle_{L^2(\omega)}$$

et

$$\langle -\bar{z}^0, \varphi^1 \rangle_{L^2(\omega)} = \sum_{j \geq 1} \langle \varphi^1, w_j \rangle_{L^2(\omega)} \langle -\bar{z}^0, w_j \rangle_{L^2(\omega)}$$

La minimisation de (3-36) équivaut donc à chercher

$$\begin{aligned} \inf_{(\varphi^0, \varphi^1)} \sum_{j \geq 1} \left\{ \frac{T}{4} \left[\langle \varphi^0, w_j \rangle^2 - \frac{1}{\lambda_j} \langle \varphi^1, w_j \rangle^2 \right] w_j^2(b) - \langle \varphi^0, w_j \rangle \langle -\bar{z}^1, w_j \rangle + \right. \\ \left. - \langle \varphi^1, w_j \rangle \langle \bar{z}^0, w_j \rangle \right\} \end{aligned}$$

Ce qui équivaut, en séparant les variables, à résoudre les deux problèmes sui-

vants :

$$\inf_{\varphi^0} \sum_{j \geq 1} \left\{ \frac{T}{4} \langle \varphi^0, w_j \rangle_{L^2(\omega)}^2 w_j^2(b) - \langle \varphi^0, w_j \rangle_{L^2(\omega)} \langle -\bar{z}^1, w_j \rangle_{L^2(\omega)} \right\} \quad (3-37)$$

$$\inf_{\varphi^1} \sum_{j \geq 1} \left\{ \frac{T}{4\lambda_j} \langle \varphi^1, w_j \rangle_{L^2(\omega)}^2 w_j^2(b) - \langle \varphi^1, w_j \rangle_{L^2(\omega)} \langle \bar{z}^0, w_j \rangle_{L^2(\omega)} \right\} \quad (3-38)$$

Problèmes qui ont pour solutions respectives :

$$\langle \varphi^0, w_j \rangle_{L^2(\omega)} = -\frac{2}{T} \frac{\langle \bar{z}^1, w_j \rangle_{L^2(\omega)}}{w_j^2(b)}, \quad \forall j \geq 1 \quad (3-39)$$

et

$$\langle \varphi^1, w_j \rangle_{L^2(\omega)} = -\frac{2\lambda_j}{T} \frac{\langle \bar{z}^0, w_j \rangle_{L^2(\omega)}}{w_j^2(b)}, \quad \forall j \geq 1 \quad (3-40)$$

ce qui achève la démonstration.

Proposition 3-3

Si le capteur (b, δ_b) est stratégique, alors pour T assez grand, les états initiaux

$$y_1^0 \text{ et } y_1^1 \text{ peuvent être approchés par :}$$

$$y_1^0(x) = \begin{cases} \frac{2}{T} \sum_{j \geq 1} \frac{1}{w_j^2(b)} \sum_{k \geq 1} w_k(b) \int_0^T y(b, t) \cos \sqrt{-\lambda_k} t dt \langle w_k, w_j \rangle_{\omega} w_j(x) & \text{sur } \omega \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus \omega \end{cases} \quad (3-41)$$

$$y_1^1(x) = \begin{cases} \frac{-2}{T} \sum_{j \geq 1} \frac{\lambda_j}{w_j^2(b)} \sum_{k \geq 1} \frac{w_k(b)}{\sqrt{-\lambda_k}} \int_0^T y(b, t) \sin \sqrt{-\lambda_k} t dt \langle w_k, w_j \rangle_{\omega} w_j(x) & \text{sur } \omega \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus \omega \end{cases} \quad (3-42)$$

Preuve

Soit $\bar{z}(x, t) = \sum_{k \geq 1} \bar{z}_k(t) w_k(x)$ la solution du système (3-20) avec

$$\bar{z}_k(t) = \frac{w_k(b)}{\sqrt{-\lambda_k}} \int_0^T y(b, s) \sin \sqrt{-\lambda_k} (s - t) ds \quad (\text{voir [3]}) \text{ ce qui donne}$$

$$\bar{z}(x, 0) = \sum_{k \geq 1} \bar{z}_k(0) w_k(x) \text{ avec } \bar{z}_k(0) = \frac{w_k(b)}{\sqrt{-\lambda_k}} \int_0^T y(b, s) \sin \sqrt{-\lambda_k} s ds, \text{ or}$$

$$\bar{z}^0(x) = \sum_{k \geq 1} \langle \bar{z}^0, w_k \rangle_{L^2(\Omega)} w_k(x) \text{ et}$$

$$\bar{z}^1(x) = \sum_{k \geq 1} \langle \bar{z}^1, w_k \rangle_{L^2(\Omega)} w_k(x) \text{ d'où}$$

$$\langle \bar{z}^0, w_k \rangle_{L^2(\Omega)} = \frac{w_k(b)}{\sqrt{-\lambda_k}} \int_0^T y(b, s) \sin \sqrt{-\lambda_k} s ds \quad \forall k \geq 1$$

et

$$\langle \bar{z}^1, w_k \rangle_{L^2(\Omega)} = -w_k(b) \int_0^T y(b, s) \cos \sqrt{-\lambda_k} s ds \quad \forall k \geq 1$$

on obtient donc

$$\langle \bar{z}^0, w_j \rangle_{L^2(\omega)} = \sum_{k \geq 1} \frac{w_k(b)}{\sqrt{-\lambda_k}} \int_0^T y(b, s) \sin \sqrt{-\lambda_k} s ds \langle w_k, w_j \rangle_{L^2(\omega)}$$

et

$$\langle \bar{z}^1, w_j \rangle_{L^2(\omega)} = \sum_{k \geq 1} -w_k(b) \int_0^T y(b, s) \cos \sqrt{-\lambda_k} s ds \langle w_k, w_j \rangle_{L^2(\omega)}$$

d'après la proposition 3-2 on a alors les relations (3-41) et (3-42).

5-2) Cas d'observation du flux

Dans cette section, on suppose encore que le système (3-13) est observé par un capteur ponctuel interne (b, δ_b) , $b \in \Omega$ et dont la fonction de sortie est donnée par :

$$z(t) = \frac{\partial y(b, t)}{\partial t} \quad (3-43)$$

Proposition 3-4

Si le capteur (b, δ_b) est stratégique, alors pour T assez grand, les états initiaux

y_1^0 et y_1^1 peuvent être approchés par :

$$y_1^0(x) = \begin{cases} -\frac{2}{T} \sum_{j \geq 1} \frac{1}{\lambda_j w_j^2(b)} \langle \Delta \bar{z}(0), w_j \rangle_{L^2(\omega)} w_j(x) & \text{si } x \in \omega \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \setminus \omega \end{cases} \quad (3-44)$$

$$y_1^1(x) = \begin{cases} -\frac{2}{T} \sum_{j \geq 1} \frac{1}{w_j^2(b)} \langle \bar{z}'(0), w_j \rangle_{L^2(\omega)} w_j(x) & \text{si } x \in \omega \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \setminus \omega \end{cases} \quad (3-45)$$

Preuve

La résolution de (3-29) se ramène à la minimisation de la fonctionnelle Φ_1 définie par

$$\begin{aligned} \Phi_1(\varphi^0, \varphi^1) &= \frac{1}{2} \langle \Lambda_2(\varphi^0, \varphi^1), (\varphi^0, \varphi^1) \rangle - \langle \mathcal{P}(\Delta \bar{z}(0), -\bar{z}'(0)), (\varphi^0, \varphi^1) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{\partial \varphi(b, t)}{\partial t} \right)^2 dt - \langle (\Delta \bar{z}(0), -\bar{z}'(0)), (\varphi^0, \varphi^1) \rangle \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{\partial \varphi(b, t)}{\partial t} \right)^2 dt - \langle \Delta \bar{z}(0), \varphi^0 \rangle_{L^2(\omega)} + \langle \bar{z}'(0), \varphi^1 \rangle_{L^2(\omega)} \quad (3-46)$$

On a :

$$\varphi(x, t) = \sum_{j \geq 1} \left[\langle \varphi^0, w_j \rangle_{L^2(\omega)} \cos \sqrt{-\lambda_j} t + \frac{1}{\sqrt{-\lambda_j}} \langle \varphi^1, w_j \rangle_{L^2(\omega)} \sin \sqrt{-\lambda_j} t \right] w_j(x)$$

d'où

$$\int_0^T \left(\frac{\partial \varphi(b, t)}{\partial t} \right)^2 dt =$$

$$\int_0^T \left[\sum_{j \geq 1} [-\sqrt{-\lambda_j} \langle \varphi^0, w_j \rangle \sin \sqrt{-\lambda_j} t + \langle \varphi^1, w_j \rangle \cos \sqrt{-\lambda_j} t] w_j(b) \right]^2 dt$$

en developpant et en passant à la limite quand $T \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T \left(\frac{\partial \varphi(b, t)}{\partial t} \right)^2 dt = \sum_{j \geq 1} \frac{1}{4} [-\lambda_j \langle \varphi^0, w_j \rangle^2 + \langle \varphi^1, w_j \rangle^2] w_j^2(b)$$

donc pour T assez grand on aura

$$\frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{\partial \varphi(b, t)}{\partial t} \right)^2 dt \simeq \sum_{j \geq 1} \frac{T}{4} [-\lambda_j \langle \varphi^0, w_j \rangle^2 + \langle \varphi^1, w_j \rangle^2] w_j^2(b)$$

d'autre part on a

$$\varphi^0(x) = \sum_{j \geq 1} \langle \varphi^0, w_j \rangle_{L^2(\omega)} w_j(x) \quad \text{et} \quad \varphi^1(x) = \sum_{j \geq 1} \langle \varphi^1, w_j \rangle_{L^2(\omega)} w_j(x)$$

donc

$$\langle \Delta \bar{z}(0), \varphi^0 \rangle_{L^2(\omega)} = \sum_{j \geq 1} \langle \varphi^0, w_j \rangle_{L^2(\omega)} \langle \Delta \bar{z}(0), w_j \rangle_{L^2(\omega)}$$

et

$$\langle \bar{z}'(0), \varphi^1 \rangle_{L^2(\omega)} = \sum_{j \geq 1} \langle \varphi^1, w_j \rangle_{L^2(\omega)} \langle \bar{z}'(0), w_j \rangle_{L^2(\omega)}$$

La minimisation de (3-46) équivaut donc à

$$\begin{aligned} \text{Inf}_{(\varphi^0, \varphi^1)} \sum_{j \geq 1} \left\{ \frac{T}{4} [-\lambda_j \langle \varphi^0, w_j \rangle^2 + \langle \varphi^1, w_j \rangle^2] w_j^2(b) - \langle \varphi^0, w_j \rangle \langle \Delta \bar{z}^0, w_j \rangle + \right. \\ \left. \langle \varphi^1, w_j \rangle \langle \bar{z}^1, w_j \rangle \right\} \end{aligned}$$

ce qui équivaut, en séparant les variables, à résoudre les deux problèmes sui-

vants :

$$\text{Inf}_{\varphi^0} \sum_{j \geq 1} \left\{ \frac{-\lambda_j T}{4} \langle \varphi^0, w_j \rangle_{L^2(\omega)}^2 w_j^2(b) - \langle \varphi^0, w_j \rangle_{L^2(\omega)} \langle \Delta \bar{z}^0, w_j \rangle_{L^2(\omega)} \right\} \quad (3-47)$$

$$\text{Inf}_{\varphi^1} \sum_{j \geq 1} \left\{ \frac{T}{4} \langle \varphi^1, w_j \rangle_{L^2(\omega)}^2 w_j^2(b) + \langle \varphi^1, w_j \rangle_{L^2(\omega)} \langle \bar{z}'^0, w_j \rangle_{L^2(\omega)} \right\} \quad (3-48)$$

problèmes qui ont pour solutions respectives

$$\langle \varphi^0, w_j \rangle_{L^2(\omega)} = -\frac{2}{T \lambda_j} \frac{\langle \Delta \bar{z}^0, w_j \rangle_{L^2(\omega)}}{w_j^2(b)}, \quad \forall j \geq 1 \quad (3-49)$$

et

$$\langle \varphi^1, w_j \rangle_{L^2(\omega)} = -\frac{2}{T} \frac{\langle \bar{z}'^0, w_j \rangle_{L^2(\omega)}}{w_j^2(b)}, \quad \forall j \geq 1 \quad (3-50)$$

ce qui achève la démonstration.

Proposition 3-5

Si le capteur (b, δ_b) est stratégique, alors pour T assez grand, les états initiaux y_1^0 et y_1^1 peuvent être approchés par :

$$y_1^0(x) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{T} \sum_{j \geq 1} \frac{-1}{\lambda_j w_j^2(b)} \sum_{k \geq 1} w_k(b) \sqrt{-\lambda_k} \int_0^T \frac{\partial y(b, t)}{\partial t} \sin \sqrt{-\lambda_k} t dt \langle w_k, w_j \rangle w_j(x) \text{ sur } \omega \\ 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3-51) \\ \text{sur } \in \Omega \setminus \omega \end{array}$$

$$y_1^1(x) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{T} \sum_{j \geq 1} \frac{1}{w_j^2(b)} \sum_{k \geq 1} w_k(b) \int_0^T \frac{\partial y(b, t)}{\partial t} \cos \sqrt{-\lambda_k} t dt \langle w_k, w_j \rangle w_j(x) \text{ sur } \omega \\ 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3-52) \\ \text{sur } \Omega \setminus \omega \end{array}$$

Preuve

Soit $\bar{z}(x, t) = \sum_{k \geq 1} \bar{z}_k(t) w_k(x)$ la solution du système (3-28) avec

$$\bar{z}_k(t) = \frac{w_k(b)}{\sqrt{-\lambda_k}} \int_0^T \frac{\partial y(b, s)}{\partial s} \sin \sqrt{-\lambda_k} (s - t) ds \quad (\text{voir [3]}) \text{ ce qui donne}$$

$$\bar{z}(x, 0) = \sum_{k \geq 1} \bar{z}_k(0) w_k(x) \text{ avec}$$

$$\bar{z}_k(0) = \frac{w_k(b)}{\sqrt{-\lambda_k}} \int_0^T \frac{\partial y(b, s)}{\partial s} \sin \sqrt{-\lambda_k} s ds$$

$$\text{on a } \Delta \bar{z}(x, t) = \sum_{k \geq 1} \bar{z}_k(t) \Delta w_k(x) = \sum_{k \geq 1} \bar{z}_k(t) \lambda_k w_k(x)$$

d'où

$$\Delta \bar{z}(x, 0) = \sum_{k \geq 1} \bar{z}_k(0) \lambda_k w_k(x)$$

donc

$$\langle \Delta \bar{z}(0), w_j \rangle_{L^2(\omega)} = \sum_{k \geq 1} \bar{z}_k(0) \lambda_k \langle w_k, w_j \rangle_{L^2(\omega)}$$

d'où

$$\langle \Delta \bar{z}^0, w_j \rangle_{L^2(\omega)} = \sum_{k \geq 1} \frac{\lambda_k w_k(b)}{\sqrt{-\lambda_k}} \int_0^T \frac{\partial y(b, s)}{\partial t} \sin \sqrt{-\lambda_k} s ds \langle w_k, w_j \rangle_{L^2(\omega)}$$

d'autre part on a

$$\bar{z}'(x, t) = \sum_{k \geq 1} \bar{z}'_k(t) w_k(x) \text{ ce qui donne}$$

$$\bar{z}'(x, 0) = \sum_{k \geq 1} \bar{z}'_k(0) w_k(x)$$

avec

$$\bar{z}'_k(0) = -w_k(b) \int_0^T \frac{\partial y(b, s)}{\partial s} \cos \sqrt{-\lambda_k} s ds$$

or

$$\bar{z}^1(x) = \sum_{k \geq 1} \langle \bar{z}^1, w_k \rangle_{L^2(\Omega)} w_k(x)$$

ce qui donne

$$\langle \bar{z}^1, w_k \rangle_{L^2(\Omega)} = -w_k(b) \int_0^T \frac{\partial y(b, s)}{\partial s} \cos \sqrt{-\lambda_k} s ds$$

donc

$$\langle \bar{z}^1, w_j \rangle_{L^2(\omega)} = \sum_{k \geq 1} -w_k(b) \int_0^T \frac{\partial y(b, s)}{\partial s} \cos \sqrt{-\lambda_k} s ds \langle w_k, w_j \rangle_{L^2(\omega)}$$

en remplaçant dans (3-44) et (3-45) on achève la démonstration .

6) Simulations numériques

Exemple

Dans le cas monodimensionnel le système (3-13) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} &]0, 1[\times]0, T[\\ y(x, 0) = y^0(x), \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = y^1(x) &]0, 1[\\ y(0, t) = y(1, t) = 0 &]0, T[\end{array} \right. \quad (3-53)$$

Les conditions initiales à reconstruire sur la région $\omega =]\alpha, \beta[\subset]0, 1[$ sont

données par

$$\left\{ \begin{array}{l} y^0(x) = A \sin \pi x \\ y^1(x) = (1 + B)(1 - x) \sin \pi x \end{array} \right. \quad (3-54)$$

où A et B sont ici considérés comme deux constantes, choisies pour des considérations numériques (afin de donner des amplitudes raisonnables à y_1^0 et y_1^1).

Le but est de reconstruire les états initiaux (3-54) du système (3-53) sur la région ω à partir des mesures effectuées par un seul capteur ponctuel localisé au point $b \in \Omega$. Le point b est choisi de sorte que le capteur (b, δ_b) soit stratégique, on prendra alors b irrationnel. On note que numériquement un nombre irrationnel n'existe pas, mais il peut être considéré comme irrationnel si dans la troncature, le nombre de chiffres dépasse la précision voulue.

6-1) Mesure de l'état

Dans ce cas la fonction de sortie est donnée par

$$z(t) = y(b, t) \quad (3-55)$$

On tronque les relations (3-41) et (3-42) à l'ordre M ($M \in \mathbb{N}^*$), on obtient

les nouvelles estimations de y_1^0 et y_1^1

$$\tilde{y}_1^0(x) = \begin{cases} \frac{2}{T} \sum_{j=1}^M \frac{1}{w_j^2(b)} \sum_{k=1}^M w_k(b) \int_0^T y(b, t) \cos \sqrt{-\lambda_k} t dt \langle w_k, w_j \rangle_{\omega} w_j(x) \text{ sur} \\ 0 \quad \text{sur } \Omega \setminus \omega \end{cases} \quad (3-56)$$

$$\tilde{y}_1^1(x) = \begin{cases} \frac{-2}{T} \sum_{j=1}^M \frac{\lambda_j}{w_j^2(b)} \sum_{k=1}^M \frac{w_k(b)}{\sqrt{-\lambda_k}} \int_0^T y(b, t) \sin \sqrt{-\lambda_k} t dt \langle w_k, w_j \rangle_{\omega} w_j(x) \text{ sur } \omega \\ 0 \quad \text{sur } \Omega \setminus \omega \end{cases} \quad (3-57)$$

avec

$$\tilde{y}_1^0 \simeq y_1^0 \quad \text{et} \quad \tilde{y}_1^1 \simeq y_1^1$$

Après avoir élaborer un pogramme en fortran, pour $T = 7$, $M = 5$, $A = 0.02$, $B = -0.01$, $b = 0.38569$, $\omega =]0.4, 0.6[$ et en appliquant les estimations (3-55) – (3-56), les simulations numériques donnent les résultats suivant :

6-1-1) Relation région-erreur

Dans cette partie, on montre numériquement, (voir tableau 3-1), comment l'erreur augmente par rapport à l'aire de la région ω , c'est à dire que plus l'aire de la région ω est grande plus l'erreur est grande.

6-1-2) Relation amplitude-erreur

Dans cette partie, on montre numériquement, (voir tableau 3-2), comment l'erreur diminue par rapport à l'amplitude A (B étant fixé) c'est à dire, plus A est petit plus l'erreur diminue.

ω	e
]0.40, 0.60[$6.207953 \cdot 10^{-6}$
]0.34, 0.64[$1.784972 \cdot 10^{-5}$
]0.28, 0.72[$2.413547 \cdot 10^{-4}$
]0.10, 0.88[$2.645882 \cdot 10^{-4}$
]0, 1[$3.926244 \cdot 10^{-4}$

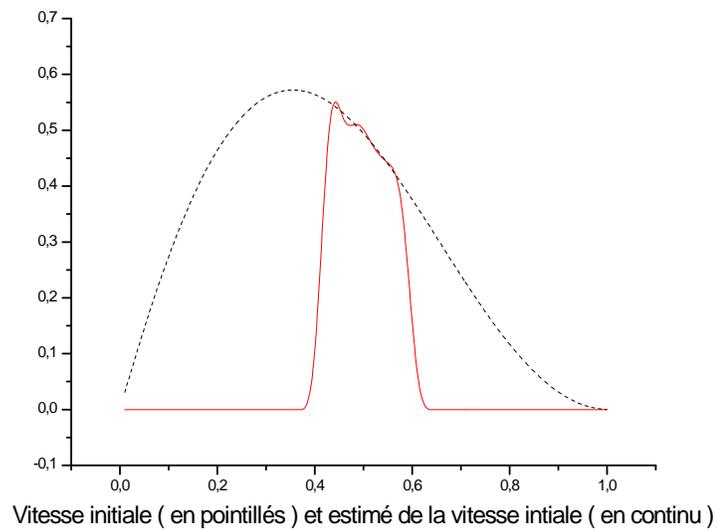
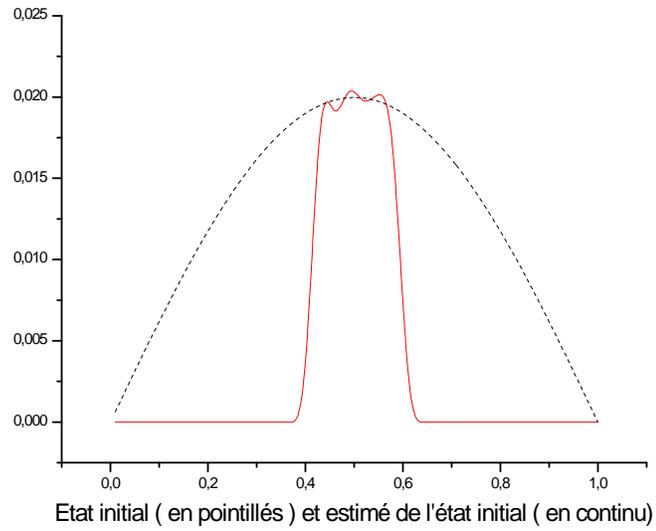
TAB. 3.1

A	e
0.50	$3.872046 \cdot 10^{-3}$
0.10	$1.548713 \cdot 10^{-4}$
0.08	$9.911865 \cdot 10^{-5}$
0.04	$2.478721 \cdot 10^{-5}$
0.02	$6.207953 \cdot 10^{-6}$

TAB. 3.2

Où
$$e = \|y^0 - \tilde{y}_1^0\|_{L^2(\omega)}^2 + \|y^1 - \tilde{y}_1^1\|_{L^2(\omega)}^2$$

6-1-3) Graphes



6-2) Mesure du flux

Dans ce cas, la fonction de sortie est donnée par

$$z(t) = \frac{\partial y(b, t)}{\partial t} \quad (3-58)$$

en tronquant les relations (3-51), (3-52) à l'ordre M ($M \in \mathbb{N}^*$), on obtient les nouvelles estimations de y_1^0 et y_1^1

$$\tilde{y}_1^0(x) = \begin{cases} \frac{2}{T} \sum_{j=1}^M \frac{-1}{\lambda_j w_j^2(b)} \sum_{k=1}^M w_k(b) \sqrt{-\lambda_k} \int_0^T \frac{\partial y(b, t)}{\partial t} \sin \sqrt{-\lambda_k} t dt \langle w_k, w_j \rangle_\omega w_j(x) & \text{sur } \omega \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus \omega \end{cases} \quad (3-59)$$

$$\tilde{y}_1^1(x) = \begin{cases} \frac{2}{T} \sum_{j=1}^M \frac{1}{w_j^2(b)} \sum_{k=1}^M w_k(b) \int_0^T \frac{\partial y(b, t)}{\partial t} \cos \sqrt{-\lambda_k} t dt \langle w_k, w_j \rangle_\omega w_j(x) & \text{sur } \omega \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus \omega \end{cases} \quad (3-60)$$

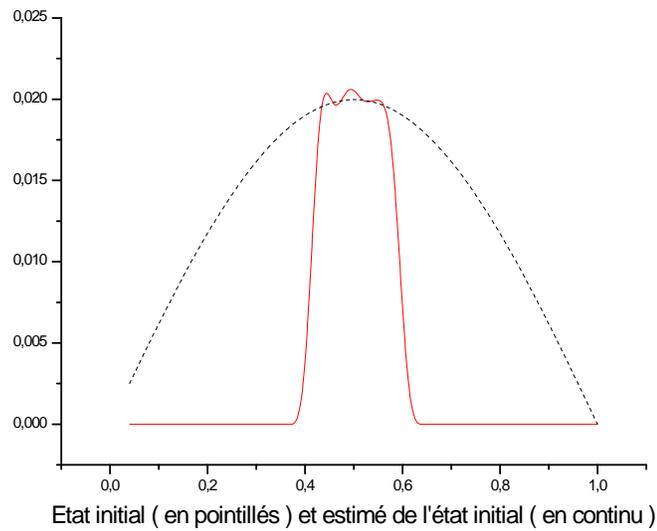
Avec $T = 7$, $M = 5$, $B = -0.01$, $A = 0.02$, $b = 0.38569$, $\omega =]0.4, 0.6[$ et en appliquant les estimations (3-59), (3-60), les simulations numériques donnent les résultats suivants

6-2-1) Relation région-erreur

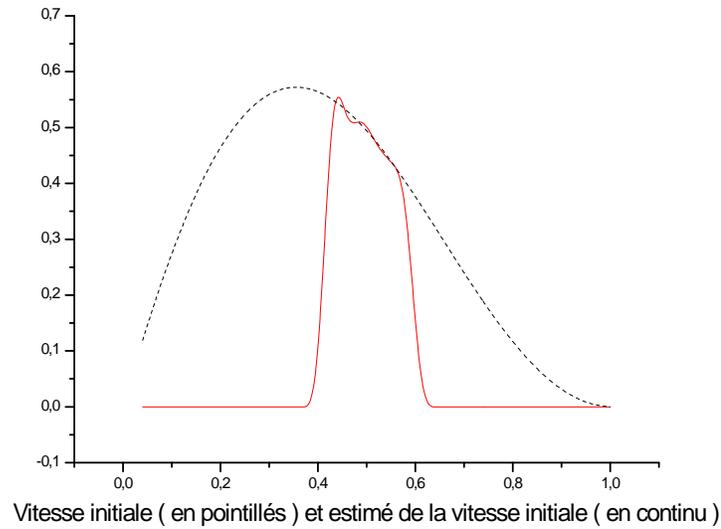
Dans cette section, on montre numériquement comment l'erreur augmente par rapport à l'aire de la région ω , c'est à dire que plus l'aire de la région ω est grande plus l'erreur est grande (voir tableau 3-3).

ω	e
]0.40, 0.60[$6.207953 \cdot 10^{-7}$
]0.34, 0.64[$1.801997 \cdot 10^{-5}$
]0.20, 0.72[$6.494254 \cdot 10^{-5}$
]0.11, 0.72[$9.600429 \cdot 10^{-5}$
]0, 1[$1.148865 \cdot 10^{-4}$

TAB. 3.3



6-2-2) Graphes



A	e
0.50	$3.097577 \cdot 10^{-4}$
0.10	$1.240237 \cdot 10^{-5}$
0.08	$7.941583 \cdot 10^{-6}$
0.04	$1.993427 \cdot 10^{-6}$
0.02	$5.060518 \cdot 10^{-7}$

TAB. 3.4

7-2-3) Relation amplitude-erreur

Dans cette partie on montre numériquement comment l'erreur diminue par rapport à l'amplitude A (B étant fixé) c'est à dire, plus A est petit plus l'erreur diminue (voir tableau 3-4)

7) Conclusion

Le problème de l'observabilité régionale interne de l'équation des ondes a été abordé une méthode de reconstruction a été développée et une approche numérique a conduit à des formules explicites des condition initiales relativement au type de capteur considéré et qui ont été testé avec succès à travers un exemple.

CHAPITRE 4

Observabilité régionale frontière des systèmes hyperboliques

Dans ce chapitre on rappelle la notion d'observabilité régionale frontière introduite par Zerrik et Badraoui [27]. Il s'agit de la reconstruction de l'état du système considéré sur une partie Γ de la frontière $\partial\Omega$ du domaine Ω , l'approche considérée ici est celle qui consiste à établir un lien entre l'observabilité régionale interne et celle de l'observabilité régionale frontière.

1) Rappels mathématiques

On donne la définition du relevement harmonique qui permet de faire le lien entre un espace de Hilbert défini sur Ω et l'espace trace associé.

Définition 4-1

On appelle relevement harmonique, toute application

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) &\longrightarrow H^1(\Omega) \\ g &\longmapsto \mathcal{R}(g) \end{aligned}$$

où $\mathcal{R}(g)$ est la solution du problème

$$\begin{cases} \Delta z = 0 & \text{dans } \Omega \\ z = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4-1)$$

Théorème 4-1

1 - L'application trace d'ordre zéro γ_0 définie sur $\mathfrak{D}(\bar{\Omega})$ et à valeurs dans $C(\partial\Omega)$ se prolonge de manière linéaire continue (resp linéaire continue et surjective) de $H^1(\Omega)$ sur $L^2(\partial\Omega)$ (resp sur $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$).

2 - Il existe un relevement harmonique \mathcal{R} linéaire continu de $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ tel que $\gamma_0\mathcal{R} = Id_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$

3 - $H_0^1(\Omega)$ est identique à $Ker\gamma_0$ dans $H^1(\Omega)$

4 - Si $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, il existe une fonction unique $\mathcal{R}(g) \in H^1(\Omega)$ solution du problème (4-1).

Pour la démonstration et tout autre détail, on réfère à ([1],[4],[6], [22])

2) Système considéré

Ω étant toujours un ouvert borné de IR^n de frontière $\partial\Omega$ assez régulière. Pour $T > 0$, on considère le système

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = Ay(x, t) & Q \\ y(x, 0) = y^0(x) , \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = y^1(x) & \Omega \\ \frac{\partial y(\zeta, t)}{\partial \eta_A} = 0 & \Sigma \end{array} \right. \quad (4-2)$$

y^0 et y^1 sont supposés inconnus

A est un opérateur linéaire défini par (3-2) et vérifiant (3-3).le domaine de l'opérateur A est donné par

$$D(A) = \left\{ \varphi \in H^2(\Omega) , \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_A} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

Le système (4-2) est augmenté de la fonction de sortie

$$z(t) = Cy(t) \quad (4-3)$$

l'opérateur d'observation $C : H^2(\Omega) \longrightarrow IR^p$, dépend du type et du nombre de capteurs p considérés. L'espace produit $H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ jouera le rôle d'espace d'état. L'opérateur $\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{bmatrix}$ engendre le semi-groupe $\bar{S}(t)$, défini comme dans (3-5), avec (w_{mj}) les fonctions propres de l'opérateur A pour Newman. L'opérateur \bar{A} de domaine $D(\bar{A}) = D(A) \times H^1(\Omega)$ permet de définir le système suivant, équivalent au système (4-2)

$$\begin{cases} \dot{\bar{y}}(t) = \bar{A}\bar{y}(t) & 0 < t < T \\ \bar{y}(0) = \bar{y}^0 \end{cases}$$

Dont la variable d'état est

$$\bar{y}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \frac{\partial y(t)}{\partial t} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{y}^0 = \begin{bmatrix} y^0 \\ y^1 \end{bmatrix}$$

On définit alors l'opérateur $\bar{K} : H^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(0, T; IR^p)$ par

$$\bar{K}\bar{y} = \bar{C}\bar{S}(\cdot)\bar{y} \quad \text{où} \quad \bar{C} = (C, 0)$$

Soit maintenant Γ une partie de la frontière $\partial\Omega$ de mesure non nulle et soit ω une partie ouverte de Ω de frontière $\partial\omega$, supposée assez régulière, tel que $\Gamma \subset \partial\Omega \cap \partial\omega$.

On définit les opérateurs restrictions suivants définis par

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_\omega : H^2(\Omega) \times H^1(\Omega) &\longrightarrow H^2(\omega) \times H^1(\omega) \\ (y_1, y_2) &\longmapsto \bar{\chi}_\omega(y_1, y_2) = (y_1, y_2)|_\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\chi}_\Gamma : H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) &\longrightarrow H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ (\zeta_1, \zeta_2) &\longmapsto \bar{\chi}_\Gamma(\zeta_1, \zeta_2) = (\zeta_1, \zeta_2)|_\Gamma\end{aligned}$$

et soit la fonction trace $\bar{\gamma}_0$ (d'ordre zéro)

$$\bar{\gamma}_0 : H^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

L'opérateurs traces $\bar{\gamma}_0$ est linéaire, continu et surjectif par rapport aux espaces considérés.

Définition 4-2

Le système (4-2), (4-3) est dit exactement (resp faiblement) ω -observable si

$$\text{Im } \bar{\chi}_\omega \bar{K}^* = H^2(\omega) \times H^1(\omega) \quad (\text{ resp } \overline{\text{Im } \bar{\chi}_\omega \bar{K}^*} = H^2(\omega) \times H^1(\omega)).$$

Définition 4-3

Le système(4-2), (4-3) est dit exactement (resp faiblement) Γ -observable si

$$\text{Im } \bar{\chi}_\Gamma \bar{\gamma}_0 \bar{K}^* = H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad (\text{ resp } \overline{\text{Im } \bar{\chi}_\Gamma \bar{\gamma}_0 \bar{K}^*} = H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)).$$

\bar{K}^* étant l'adjoint de l'opérateur \bar{K} défini comme au chapitre précédent.

Proposition 4-1

i) *Si le système (4-2), (4-3) est exactement ω -observable alors il est exactement Γ -observable*

ii) *Si le système (4-2), (4-3) est faiblement ω -observable alors il est faiblement Γ -observable.*

Preuve

i) - Montrons d'abord que si le système (4-2), (4-3) est exactement ω -observable alors il est exactement Γ -observable, pour cela il faut montrer que

$$H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset \text{Im } \bar{\chi}_\Gamma \bar{\gamma}_0 \bar{K}^*$$

Soit $(\zeta_1, \zeta_2) \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et soit $(\tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2)$ son extension à l'espace $H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, donc grace au théorème de trace, il existe un relevement harmonique continu $\bar{\mathcal{R}}$ de $H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ dans $H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ tel que $\bar{\gamma}_0 \bar{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} \tilde{\zeta}_1 \\ \tilde{\zeta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\zeta}_1 \\ \tilde{\zeta}_2 \end{pmatrix}$, on a $\bar{\chi}_\omega \bar{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} \tilde{\zeta}_1 \\ \tilde{\zeta}_2 \end{pmatrix} \in H^2(\omega) \times H^1(\omega)$, le système (4-2), (4-3) étant exactement ω -observable, il existe $z_1 \in L^2(0, T; IR^p)$ tel que

$$\begin{aligned} & \bar{\chi}_\omega \bar{K}^* z_1 = \bar{\chi}_\omega \bar{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} \tilde{\zeta}_1 \\ \tilde{\zeta}_2 \end{pmatrix} \\ \implies & \bar{\gamma}_0(\bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega \bar{K}^* z_1) = \bar{\gamma}_0(\bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega \bar{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} \tilde{\zeta}_1 \\ \tilde{\zeta}_2 \end{pmatrix}) \\ \implies & \bar{\chi}_\Gamma \bar{\gamma}_0(\bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega \bar{K}^* z_1) = \bar{\chi}_\Gamma \bar{\gamma}_0(\bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega \bar{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} \tilde{\zeta}_1 \\ \tilde{\zeta}_2 \end{pmatrix}) \end{aligned}$$

or

$$\bar{\chi}_\Gamma \bar{\gamma}_0(\bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega \bar{K}^* z_1) = \bar{\chi}_\Gamma \bar{\gamma}_0(\bar{K}^* z_1)$$

et

$$\bar{\chi}_\Gamma \bar{\gamma}_0(\bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega \bar{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} \tilde{\zeta}_1 \\ \tilde{\zeta}_2 \end{pmatrix}) = (\zeta_1, \zeta_2)$$

$$\text{d'où} \quad \bar{\chi}_\Gamma \bar{\gamma}_0(\bar{K}^* z_1) = (\zeta_1, \zeta_2).$$

ii) - Montrons maintenant que si le système (4-2), (4-3) est faiblement ω -observable alors il est faiblement Γ -observable, donc il faut montrer que $\forall \varepsilon > 0, \forall (\zeta_1, \zeta_2) \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, il existe $z_1 \in IR^p$ tel que $\|\bar{\chi}_\Gamma \bar{\gamma}_0(\bar{K}^* z_1) - (\zeta_1, \zeta_2)\| < \varepsilon$. Soit alors $(\zeta_1, \zeta_2) \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et soit $(\tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2)$ son extension à $H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, d'après le théorème de trace il existe $\bar{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} \tilde{\zeta}_1 \\ \tilde{\zeta}_2 \end{pmatrix} \in H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ tel que $\bar{\gamma}_0 \bar{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} \tilde{\zeta}_1 \\ \tilde{\zeta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\zeta}_1 \\ \tilde{\zeta}_2 \end{pmatrix}$, on a $\bar{\chi}_\omega \bar{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} \tilde{\zeta}_1 \\ \tilde{\zeta}_2 \end{pmatrix} \in H^2(\omega) \times H^1(\omega)$, comme le système (4-2), (4-3) est faiblement ω -observable on a $\forall \varepsilon > 0$, il existe $z_1 \in L^2(0, T; IR^p)$

tel que $\left\| \bar{\chi}_\omega \bar{K}^* z_1 - \bar{\chi}_\omega \bar{\mathcal{R}} \left(\tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2 \right) \right\| < \varepsilon$, puisque l'application trace est linéaire et continue, on a

$$\begin{aligned} \left\| \bar{\gamma}_0(\bar{\chi}_\omega \bar{\chi}_\omega \bar{K}^* z_1 - \bar{\chi}_\omega \bar{\chi}_\omega \bar{\mathcal{R}} \left(\tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2 \right)) \right\| &\leq \left\| \bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega \bar{K}^* z_1 - \bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega \bar{\mathcal{R}} \left(\tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2 \right) \right\|_{H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)} \\ &= \left\| \bar{\chi}_\omega \bar{K}^* z_1 - \bar{\chi}_\omega \bar{\mathcal{R}} \left(\tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2 \right) \right\|_{H^2(\omega) \times H^1(\omega)} \end{aligned}$$

comme

$$\left\| \bar{\chi}_\Gamma \bar{\gamma}_0(\bar{\chi}_\omega \bar{\chi}_\omega \bar{K}^* z_1 - \bar{\chi}_\omega \bar{\chi}_\omega \bar{\mathcal{R}} \left(\tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2 \right)) \right\| \leq \left\| \bar{\gamma}_0(\bar{\chi}_\omega \bar{\chi}_\omega \bar{K}^* z_1 - \bar{\chi}_\omega \bar{\chi}_\omega \bar{\mathcal{R}} \left(\tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2 \right)) \right\|$$

et

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_\Gamma \bar{\gamma}_0(\bar{\chi}_\omega \bar{\chi}_\omega \bar{K}^* z_1 - \bar{\chi}_\omega \bar{\chi}_\omega \bar{\mathcal{R}} \left(\tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2 \right)) &= \bar{\chi}_\Gamma \bar{\gamma}_0(\bar{K}^* z_1 - \bar{\mathcal{R}} \left(\tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2 \right)) \\ &= \bar{\chi}_\Gamma \bar{\gamma}_0(\bar{K}^* z_1) - (\zeta_1, \zeta_2) \end{aligned}$$

il vient

$$\left\| \bar{\chi}_\Gamma \bar{\gamma}_0(\bar{K}^* z_1) - (\zeta_1, \zeta_2) \right\| < \varepsilon$$

3) Caractérisation des capteurs Γ - stratégiques

Dans cette section on se propose de donner une caractérisation des capteurs rendant un système faiblement Γ -observable. On considère le système (4-2) et on suppose que les mesures sont données par l'intermédiaire de p capteurs $(\Omega_i, f_i)_{1 \leq i \leq p}$. L'équation de sortie est alors donnée par

$$z(t) = Cy(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \cdot \\ z_p(t) \end{bmatrix} \quad (4-4)$$

avec

$z_i(t) = y(b_i, t)$, $b_i \in \bar{\Omega}$ dans le cas ponctuel

et

$z_i(t) = \int_{\Omega_i} y(x, t) f_i(x) dx$ $\Omega_i \subset \bar{\Omega}$ dans le cas zône

Définition 4-4

Une suite de capteurs $(\Omega_i, f_i)_{1 \leq i \leq p}$ est dite Γ -stratégique si le système observé est faiblement Γ -observable, ie $\ker K\gamma_0^*\chi_\Gamma^* = \{0\}$ où γ_0^* et χ_Γ^* sont respectivement les opérateurs adjoints de γ_0 et χ_Γ .

On définit les opérateurs restrictions :

$$\chi_\Gamma^1 : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

et

$$\chi_\Gamma^2 : H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \longrightarrow H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$$

χ_Γ^{1*} et χ_Γ^{2*} étant leur adjoints respectifs, et soit les fonction traces

$$\gamma_0^1 : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

et

$$\gamma_0^2 : H^2(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$$

γ_0^{1*} et γ_0^{2*} étant leur adjoints respectifs.

$(w_{mj})_{m \geq 1, 1 \leq j \leq r_m}$ étant les fonctions propres de l'opérateur A pour Newman, associées aux valeurs propres λ_m de multiplicité r_m , on suppose que $(\chi_\Gamma^1 \gamma_0^1 w_{mj})_{m \geq 1, 1 \leq j \leq r_m}$ forment un système complet dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et que

$(\chi_\Gamma^2 \gamma_0^2 w_{mj})_{m \geq 1, 1 \leq j \leq r_m}$ forment un système complet dans $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$. On suppose en plus que $r = \sup r_m$ est fini.

$$z_1^* = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_m} \langle z_1^*, \chi_{\Gamma}^2 \gamma_0^2 w_{mj} \rangle_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} \chi_{\Gamma}^2 \gamma_0^2 w_{mj}$$

donc si $z_1^* \neq 0$ il existe $m_{01} \geq 1$ et j_{01} , $1 \leq j_{01} \leq r_{m_{01}}$ telque

$$\langle z_1^*, \chi_{\Gamma}^2 \gamma_0^2 w_{m_{01}j_{01}} \rangle_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} \neq 0,$$

on considère alors

$$z_{m_{01}}^1 = \begin{bmatrix} \langle z_1^*, \chi_{\Gamma}^2 \gamma_0^2 w_{m_{01}1} \rangle_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \langle z_1^*, \chi_{\Gamma}^2 \gamma_0^2 w_{m_{01}r_{m_{01}}} \rangle_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} \end{bmatrix}$$

D'après (4-5) on obtient

$$G_{m_{01}} z_{m_{01}}^1 = 0$$

comme $z_{m_{01}}^1 \neq 0$, on aura $\text{rang} G_{m_{01}} \neq r_{m_{01}}$

2) - Montrons maintenant que si le système (4-2) est faiblement Γ -observable

alors $\text{rang} G_m = r_m \forall m \geq 1$, on suppose alors qu'il existe $m_0 \geq 1$ telle que

$$\text{rang} G_{m_0} \neq r_{m_0}, \text{ donc il existe } z_{m_0} = \begin{bmatrix} z_{m_01} \\ \cdot \\ \cdot \\ z_{m_0 r_{m_0}} \end{bmatrix} \neq 0 \text{ et } G_{m_0} z_{m_0} = 0$$

Soit alors $z_2^* \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ vérifiant

$$\begin{cases} \langle z_2^*, \chi_{\Gamma}^1 \gamma_0^1 w_{m_0j} \rangle = z_{m_0j} \quad \forall j = 1, \dots, r_{m_0} \\ \langle z_2^*, \chi_{\Gamma}^1 \gamma_0^1 w_{mj} \rangle = 0 \quad \forall m \neq m_0 \text{ et } \forall j = 1, \dots, r_m \end{cases} \quad (4-6)$$

et soit $z_1^* \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ vérifiant

$$\begin{cases} \langle z_1^*, \chi_\Gamma^2 \gamma_0^2 w_{m_0 j} \rangle = z_{m_0 j} \quad \forall j = 1, \dots, r_{m_0} \\ \langle z_1^*, \chi_\Gamma^2 \gamma_0^2 w_{m j} \rangle = 0 \quad \forall m \neq m_0 \text{ et } \forall j = 1, \dots, r_m \end{cases} \quad (4-7)$$

d'où, puisque $G_{m_0} z_{m_0} = 0$, d'après (4-6), (4-7) et en comparant avec les relations (4-5), le système n'est pas faiblement Γ -observable.

4) Reconstruction régionale

4-1) Approche directe

Dans cette section, on montre qu'il est possible de trouver, via un problème d'optimisation, la composante \bar{y}_1^0 de l'état initial $\bar{y}^0 = (y^0, y^1)$ qui peut être décomposé comme suit :

$$\bar{y}^0 = \begin{cases} \bar{y}_1^0 & \text{sur } \Gamma \\ \bar{y}_2^0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma \\ \bar{y}_3^0 & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

avec

$$\bar{y}_1^0 = (y_1^0, y_1^1), \bar{y}_2^0 = (y_2^0, y_2^1) \text{ et } \bar{y}_3^0 = (y_3^0, y_3^1)$$

Soit ε l'erreur d'observation entre la fonction de sortie \bar{z} et le modèle d'observation $\bar{K}\bar{y}^0$ définie par

$$\varepsilon = \|\bar{z} - \bar{K}\bar{y}^0\|_{L^2(0,T;IR^p)}$$

où ε est considéré comme fonction de l'état initial \bar{y}^0 et donc de ses composantes. On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \min \varepsilon(\bar{y}_1^0, \bar{y}_2^0, \bar{y}_3^0) \\ \bar{y}_1^0 \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \end{cases} \quad (4-8)$$

On a alors le résultat suivant

Théorème 4-2

Si le système (4-2) est observable sur $\bar{\Omega}$ le problème (4-8) admet une solution unique donnée par $\tilde{y}_1^0 = D^+ \Psi$ qui coïncide avec l'état initial régional à observer sur la portion de la frontière Γ où D^+ est le pseudo inverse de D , D et Ψ sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 D &= B\gamma_0^* \chi_\Gamma^* (\chi_\Gamma \gamma_0 B^* B \gamma_0^* \chi_\Gamma^*)^{-1} \chi_\Gamma \gamma_0 B^* B \\
 \Psi &= (I - B(B^* B)^{-1} + B\gamma_0^* \chi_\Gamma^* (\chi_\Gamma \gamma_0 B^* B \gamma_0^* \chi_\Gamma^*)^{-1} \chi_\Gamma \gamma_0) B^* \nu \\
 R &= \gamma_0 \bar{K}^* \\
 M &= (RR^*)^{-1} \\
 \nu &= I + R^* MR - \bar{K} (\bar{K}^* \bar{K})^{-1} \bar{K}^* \\
 B &= R^* MR \bar{K}
 \end{aligned} \tag{4-9}$$

Proposition 4-3

On pose $H = \chi_\Gamma \gamma_0 \bar{K}^*$, on a l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

- 1- Le système (4-2), (4-3) est exactement observable sur Γ
- 2- Il existe $c > 0$ tel que

$$\|\bar{y}\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c \|H^* \bar{y}\|_{L^2(0,T;IR^p)} \tag{4-10}$$

Preuve

La démonstration découle du résultat plus général suivant (voir [7])

Soit E, F, G trois espace de Banach réflexifs et $f \in \mathcal{L}(E, G)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$ alors nous avons l'équivalence

$$\text{a) } \text{Im } f \subset \text{Im } g$$

b) il existe $c > 0$ tel que $\|f^*(y)\|_{E^*} \leq c \|g^*(y)\|_{F^*} \forall y \in G^*$

en posant $E = G = H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $F = L^2(0, T; IR^p)$, $f = Id_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$

et $g = H$ on obtient l'inégalité (4-10)

Preuve du théorème 4-2

On a $RR^* \in \mathcal{L}\left(H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\right)$ et

$$\langle RR^*y^*, y^* \rangle = \|K\gamma_0^*y^*\|_{L^2(0, T; IR^p)}^2 \geq c \|y^*\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 \forall y^* \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

d'où l'opérateur RR^* est inversible. La résolution du problème (4-8) peut être achevée en passant par trois étapes structurées de la manière suivante :

La première consiste à la minimisation de $\varepsilon(\bar{y}_1^0, \bar{y}_2^0, \bar{y}_3^0)$ par rapport à \bar{y}_3^0 pour obtenir \tilde{y}_3^0 . Dans la seconde, on cherche \tilde{y}_2^0 minimisant $\varepsilon(\bar{y}_1^0, \bar{y}_2^0, \tilde{y}_3^0)$ par rapport à \bar{y}_2^0 . La troisième et dernière étape consiste alors à déterminer \tilde{y}_1^0 minimisant $\varepsilon(\bar{y}_1^0, \tilde{y}_2^0, \tilde{y}_3^0)$ par rapport à \bar{y}_1^0 .

- Première étape : on minimise $\varepsilon(\bar{y}_1^0, \bar{y}_2^0, \bar{y}_3^0)$ par rapport à \bar{y}_3^0

en développant ε et en utilisant le fait que $\bar{y}^0 = \bar{y}_1^{0*} + \bar{y}_2^{0*} + \bar{y}_3^{0*}$

où

$$\bar{y}_1^{0*} = \begin{cases} \bar{y}_1^0 & \text{sur } \Gamma \\ 0 & \text{sur } \bar{\Omega} \setminus \Gamma \end{cases}, \bar{y}_2^{0*} = \begin{cases} \bar{y}_2^0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma \\ 0 & \text{sur } \Omega \cup \Gamma \end{cases} \text{ et } \bar{y}_3^{0*} = \begin{cases} \bar{y}_3^0 & \text{sur } \Omega \\ 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

on obtient le problème suivant :

$$\begin{cases} \min \Psi_1(\bar{y}_3^{0*}) \\ \gamma_0 \bar{K}^* (\bar{K} \bar{y}_3^{0*}) = 0 \end{cases} \quad (4-11)$$

où $\Psi_1(\bar{y}_3^{0*}) = \langle \bar{K} \bar{y}_3^{0*}, \bar{K} \bar{y}_3^{0*} \rangle + 2 \langle \bar{K} \bar{y}_3^{0*}, \bar{K} (\bar{y}_1^{0*} + \bar{y}_2^{0*}) - \bar{z} \rangle$

considérons le Lagrangien défini par

$$\Lambda(\bar{y}_3^{0*}, \lambda_1) = \langle \bar{K} \bar{y}_3^{0*}, \bar{K} \bar{y}_3^{0*} \rangle + 2 \langle \bar{K} \bar{y}_3^{0*}, \bar{K} (\bar{y}_1^{0*} + \bar{y}_2^{0*}) - \bar{z} \rangle + \langle \lambda_1, \gamma_0 \bar{K}^* \bar{K} \bar{y}_3^{0*} \rangle_{H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$$

alors la condition

$$\frac{\partial \Lambda(\bar{y}_3^{0*}, \lambda_1)}{\partial \bar{y}_3^{0*}} = 0$$

est équivalente à

$$2\bar{K}^* \bar{K} \bar{y}_3^{0*} + 2\bar{K}^* \bar{K} (\bar{y}_1^{0*} + \bar{y}_2^{0*}) - 2\bar{K}^* \bar{z} + \bar{K}^* \bar{K} \gamma_0^* \lambda_1 = 0$$

ceci permet d'écrire

$$\bar{y}_3^{0*} = -(\bar{y}_1^{0*} + \bar{y}_2^{0*}) + (\bar{K}^* \bar{K})^{-1} \bar{K}^* \bar{z} - \frac{1}{2} \gamma_0^* \lambda_1$$

la contrainte $\gamma_0 \bar{K}^* (\bar{K} \bar{y}_3^{0*}) = 0$, qui résulte de $\bar{y}_3^{0*} = 0$ sur $\partial\Omega$, donne

$$-\gamma_0 \bar{K}^* \bar{K} (\bar{y}_1^{0*} + \bar{y}_2^{0*}) + \gamma_0 \bar{K}^* \bar{z} - \frac{1}{2} \gamma_0 (\bar{K}^* \bar{K}) \gamma_0^* \lambda_1 = 0$$

et alors

$$\lambda_1 = 2MR (\bar{z} - \bar{K} (\bar{y}_1^{0*} + \bar{y}_2^{0*}))$$

où M et R sont donnés par (4-9), en remplaçant dans l'expression de \bar{y}_3^{0*} on obtient \tilde{y}_3^{0*} , solution de (4-11), donnée par

$$\tilde{y}_3^{0*} = (\gamma_0 MR \bar{K} - I) (\bar{y}_1^{0*} + \bar{y}_2^{0*}) + \left((\bar{K}^* \bar{K})^{-1} \bar{K}^* - \gamma_0^* MR \right) \bar{z}$$

soit :

$$\varepsilon(\bar{y}_1^{0*}, \bar{y}_2^{0*}, \tilde{y}_3^{0*}) = \|\nu \bar{z} - B(\bar{y}_1^{0*} + \bar{y}_2^{0*})\|_{L^2(0,T;IR^p)}^2 \quad (4-12)$$

où ν et B sont données par (4-9)

- Deuxième étape : on minimise $\varepsilon(\bar{y}_1^{0*}, \bar{y}_2^{0*}, \tilde{y}_3^{0*})$ par rapport à \bar{y}_2^{0*}

on procède comme dans la première étape, on développe (4-12) on obtient le problème suivant :

$$\begin{cases} \min \Psi_2(\bar{y}_2^{0*}) \\ \chi_\Gamma \gamma_0 B^* B(\bar{y}_2^{0*}) = 0 \end{cases} \quad (4-13)$$

où

$$\Psi_2(\bar{y}_2^{0*}) = \langle B\bar{y}_2^{0*}, B\bar{y}_2^{0*} \rangle + 2 \langle B\bar{y}_2^{0*}, B\bar{y}_1^{0*} - \nu\bar{z} \rangle$$

le Lagrangien est donné par

$$\Lambda(\bar{y}_2^{0*}, \lambda_2) =$$

$$\langle B\bar{y}_2^{0*}, B\bar{y}_2^{0*} \rangle + 2 \langle B\bar{y}_2^{0*}, B\bar{y}_1^{0*} - \nu\bar{z} \rangle + \langle \lambda_2, \chi_\Gamma \gamma_0 B^* B\bar{y}_2^{0*} \rangle_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

alors la condition

$$\frac{\partial \Lambda(\bar{y}_2^{0*}, \lambda_2)}{\partial \bar{y}_2^{0*}} = 0$$

est équivalente à

$$2B^* B\bar{y}_2^{0*} + 2B^* B\bar{y}_1^{0*} - 2B^* \nu\bar{z} + B^* B\gamma_0^* \chi_\Gamma^* \lambda_2 = 0$$

on obtient

$$\bar{y}_2^{0*} = -\bar{y}_1^{0*} + (B^* B)^{-1} B^* \nu\bar{z} - \frac{1}{2} \gamma_0^* \chi_\Gamma^* \lambda_2$$

la contrainte $\chi_\Gamma \gamma_0 B^* B(\bar{y}_2^{0*}) = 0$, qui résulte de $\bar{y}_2^{0*} = 0$ sur $\Omega \cup \Gamma$, donne

$$-\chi_\Gamma \gamma_0 B^* B\bar{y}_1^{0*} + \chi_\Gamma \gamma_0 B^* \nu\bar{z} - \frac{1}{2} \chi_\Gamma \gamma_0 B^* B\gamma_0^* \chi_\Gamma^* \lambda_2 = 0$$

on obtient

$$\lambda_2 = 2(\chi_\Gamma \gamma_0 B^* B\gamma_0^* \chi_\Gamma^*)^{-1} \chi_\Gamma \gamma_0 B^* \nu\bar{z} - 2(\chi_\Gamma \gamma_0 B^* B\gamma_0^* \chi_\Gamma^*)^{-1} \chi_\Gamma \gamma_0 B^* B\bar{y}_1^{0*}$$

en remplaçant dans l'expression de \bar{y}_2^{0*} on obtient \tilde{y}_2^{0*} , solution de (4-13), donnée

par

$$\tilde{y}_2^{0*} = -\bar{y}_1^{0*} + [(B^* B)^{-1} - \gamma_0^* \chi_\Gamma^* (\chi_\Gamma \gamma_0 B^* B\gamma_0^* \chi_\Gamma^*)^{-1} \chi_\Gamma \gamma_0 B^* B\bar{y}_1^{0*}]$$

soit alors

$$\varepsilon(\bar{y}_1^{0*}, \tilde{y}_2^{0*}, \tilde{y}_3^{0*}) = \|\Psi\bar{z} - D\bar{y}_1^{0*}\|_{L^2(0,T;IR^p)}^2 \quad (4-14)$$

où Ψ et D sont données par (4-9)

- Troisième étape : on minimise $\varepsilon(\bar{y}_1^{0*}, \tilde{y}_2^{0*}, \tilde{y}_3^{0*})$, donnée par (4-14), par rapport à \bar{y}_1^{0*}

on a

$$\varepsilon(\bar{y}_1^{0*}, \tilde{y}_2^{0*}, \tilde{y}_3^{0*}) = \langle D\bar{y}_1^{0*}, D\bar{y}_1^{0*} \rangle - 2 \langle D\bar{y}_1^{0*}, \Psi \rangle + \langle \Psi, \Psi \rangle$$

la condition

$$\frac{\partial \varepsilon(\bar{y}_1^{0*}, \tilde{y}_2^{0*}, \tilde{y}_3^{0*})}{\partial \bar{y}_1^{0*}} = 0$$

donne

$$2D^*D\bar{y}_1^{0*} - 2D^*\Psi\bar{z} = 0$$

on obtient donc \tilde{y}_1^{0*} minimisant (4-14) et donné par

$$\tilde{y}_1^{0*} = (D^*D)^{-1} D\Psi\bar{z} = D^+\Psi\bar{z}$$

comme (4-14) est strictement convexe, \tilde{y}_1^{0*} est unique, ce qui achève la démonstration.

4-2) Approche HUM

Dans cette section, on s'intéresse à reconstruire l'état initial (y^0, y^1) sur la région ω et déterminer ensuite la restriction de sa trace sur la portion de frontière $\Gamma \subset \partial\Omega \cap \partial\omega$. On prend $A = \Delta$ (le Laplacien), le système (4-2) s'écrit alors

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \Delta y(x, t) & Q \\ y(x, 0) = y^0(x), \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = y^1(x) & \Omega \\ \frac{\partial y(\zeta, t)}{\partial \eta} = 0 & \Sigma \end{cases} \quad (4-15)$$

On suppose en plus que le système (4-15) est observé pour un seul capteur, d'où la fonction de sortie est donnée par

$$z(t) = \langle y(t), f \rangle_{L^2(\Omega_0)} \quad (4-16)$$

f étant la disribution spatiale du capteur considéré et Ω_0 son support spatial.

Soit l'ensemble

$$G_3 = \{(\varphi^0, \varphi^1) \in D(A) \times H^1(\Omega) \text{ tel que } \varphi^0 = \varphi^1 = 0 \text{ sur } \Omega \setminus \omega\}$$

pour $(\varphi^0, \varphi^1) \in G_3$, le système

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} = \Delta \varphi(x, t) & Q \\ \varphi(x, 0) = \varphi^0(x), \frac{\partial \varphi(x, 0)}{\partial t} = \varphi^1(x) & \Omega \\ \frac{\partial \varphi(\zeta, t)}{\partial \eta} = 0 & \Sigma \end{cases} \quad (4-17)$$

admet une solution unique

$\varphi \in C(0, T; H^2(\Omega)) \cap C^1(0, T; H^1(\Omega)) \cap C^2(0, T; L^2(\Omega))$ (voir [5],[21],[24]).

On définit sur G_3 la semi-norme

$$\|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{G_3} = \left(\int_0^T \langle \varphi(t), f \rangle_{L^2(\Omega_0)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4-18)$$

et on considère le système retrograde de (4-17)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = \Delta \psi(x, t) + \langle \varphi(t), f \rangle_{L^2(\Omega_0)} \chi_{\Omega_0}(x) f(x) & Q \\ \psi(x, T) = 0, \frac{\partial \psi(x, T)}{\partial t} = 0 & \Omega \\ \frac{\partial \psi(\zeta, t)}{\partial \eta} = 0 & \Sigma \end{cases} \quad (4-19)$$

qui admet une solution unique

$\psi \in C(0, T; H^2(\Omega)) \cap C^1(0, T; H^1(\Omega)) \cap C^2(0, T; L^2(\Omega))$.

Soit l'opérateur Λ_3 défini par

$$\Lambda_3(\varphi^0, \varphi^1) = \mathcal{P}(-\psi'(0), \psi(0))$$

où \mathcal{P} est donné par (3-19)

On considère le système retrograde de (4-15) donné par

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{z}(x, t)}{\partial t^2} = \Delta \bar{z}(x, t) + \langle y(t), f \rangle_{L^2(\Omega_0)} \chi_{\Omega_0}(x) f(x) & Q \\ \bar{z}(x, T) = 0, \quad \frac{\partial \bar{z}(x, T)}{\partial t} = 0 & \Omega \\ \frac{\partial \bar{z}(\zeta, t)}{\partial \eta} = 0 & \Sigma \end{cases} \quad (4-20)$$

si (φ^0, φ^1) est convenablement choisi dans G_3 , c'est à dire de telle sorte que $\bar{z}^0 = \psi^0$ et $\bar{z}^1 = \psi^1$ sur ω alors le problème d'observabilité du système (4-15), (4-16) sur la région ω revient à résoudre l'équation

$$\Lambda_3(\varphi^0, \varphi^1) = \mathcal{P}(-\bar{z}^1, \bar{z}^0) \quad (4-21)$$

Théorème 4-3

Si le capteur (Ω_0, f) est stratégique, alors la semi-norme (4-18) devient une norme et l'équation (4-21) admet une solution unique (φ^0, φ^1) correspondant à (y_1^0, y_1^1) sur ω et qui permet alors de donner l'état initial à observer sur la partie Γ de la frontière $\partial\Omega$.

Preuve

i) Montrer que (4-18) forme une norme sur G_3 est analogue à celle vue au théorème 3-1 du chapitre précédent

ii) Soit \hat{G}_3 le copmleté de G_3 par rapport à la norme (4-18), muni du produit scalaire associé $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\hat{G}_3}$ et \hat{G}_3^* son dual. On montre que Λ_3 est un isomorphisme de

\hat{G}_3 dans \hat{G}_3^* . En effet, en multipliant la première équation du système (4-19) par φ , solution du système (4-17), et en utilisant deux fois l'intégration par partie on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \psi''(t), \varphi(t) \rangle dt &= \langle \psi'(T), \varphi(T) \rangle - \langle \psi'(0), \varphi(0) \rangle - \langle \psi(T), \varphi'(T) \rangle + \\ &\quad \langle \psi(0), \varphi'(0) \rangle + \int_0^T \langle \psi(t), \varphi''(t) \rangle dt \\ &= \int_0^T \langle \psi(t), \varphi''(t) \rangle dt + \langle \psi(0), \varphi'(0) \rangle - \langle \psi'(0), \varphi(0) \rangle \\ &= \int_0^T \langle \psi(t), \varphi''(t) \rangle dt + \left\langle \left(-\psi'(0), \psi(0) \right), \left(\varphi(0), \varphi'(0) \right) \right\rangle \end{aligned}$$

en utilisant la formule de Green, on obtient

$$\int_0^T \langle \Delta \psi(t), \varphi(t) \rangle dt = \int_0^T \langle \psi(t), \Delta \varphi(t) \rangle dt + \int_{\Sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \varphi - \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \psi$$

tenant compte des conditions aux limites des systèmes (4-17) et (4-19), on aura

$$\int_0^T \langle \Delta \psi(t), \varphi(t) \rangle dt = \int_0^T \langle \psi(t), \Delta \varphi(t) \rangle dt$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[\langle \psi''(t), \varphi(t) \rangle - \langle \Delta \psi(t), \varphi(t) \rangle \right] dt &= \int_0^T \langle \psi(t), \varphi''(t) - \Delta \varphi(t) \rangle dt + \\ &\quad \left\langle \left(-\psi'(0), \psi(0) \right), \left(\varphi(0), \varphi'(0) \right) \right\rangle \\ &= \langle \Lambda_3(\varphi^0, \varphi^1), (\varphi^0, \varphi^1) \rangle \end{aligned}$$

d'autre part nous avons :

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[\langle \psi''(t), \varphi(t) \rangle - \langle \Delta \psi(t), \varphi(t) \rangle \right] dt &= \int_0^T \left\langle \langle \varphi(t), f \rangle_{L^2(\Omega_0)} \chi_{\Omega_0} f, \varphi(t) \right\rangle dt \\ &= \int_0^T \langle \varphi(t), f \rangle_{L^2(\Omega_0)}^2 dt \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi

$$\langle \Lambda_3(\varphi^0, \varphi^1), (\varphi^0, \varphi^1) \rangle = \|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{G_3}^2 \quad \forall (\varphi^0, \varphi^1) \in G_3$$

Soit maintenant $(\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1) \in G_3$ et $\hat{\varphi}(t)$ la solution du problème (4-17), en multipliant (4-19) par $\hat{\varphi}(t)$, en intégrant deux fois par partie et en utilisant la formule de Green comme on l'a fait ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_3(\varphi^0, \varphi^1), (\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1) \rangle &= \int_0^T \langle \varphi(t), f \rangle_{L^2(\Omega_0)} \langle \hat{\varphi}(t), f \rangle_{L^2(\Omega_0)} dt \\ &= \langle (\varphi^0, \varphi^1), (\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1) \rangle_{\hat{G}_3} \\ &\leq \|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{\hat{G}_3} \|(\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1)\|_{\hat{G}_3} \quad \forall (\varphi^0, \varphi^1), (\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1) \in G_3 \end{aligned} \quad (4-22)$$

L'inégalité (4-22) nous permet de prolonger l'opérateur Λ_3 de manière unique en un opérateur linéaire et continu de \hat{G}_3 dans l'espace dual \hat{G}_3^* ce qui permet de dire que l'opérateur Λ_3 est un isomorphisme de \hat{G}_3 sur \hat{G}_3^* .

L'état initial à observer sur la partie Γ de la frontière $\partial\Omega$, notée par (y_Γ^0, y_Γ^1) , est alors donné par

$$(y_\Gamma^0, y_\Gamma^1) = \bar{\chi}_\Gamma \gamma_0(\varphi^0, \varphi^1)$$

Remarque 4-1

L'approche précédente peut être appliquée avec les mêmes technique si le système (4-15) est observé par un capteur ponctuel interne.

5) Simulation numérique

Exemple

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Sur } \Omega =]0, 1[\times]0, 1[, \text{ on considère le système} & \\ \frac{\partial^2 y((x_1, x_2), t)}{\partial t^2} = \Delta y((x_1, x_2), t) & Q \\ y((x_1, x_2), 0) = y^0(x_1, x_2), \quad \frac{\partial y((x_1, x_2), 0)}{\partial t} = y^1(x_1, x_2) & \Omega \\ \frac{\partial y(\zeta, t)}{\partial \eta} = 0 & \Sigma \end{array} \right. \quad (4-24)$$

On suppose que le système (4-24) est observé par un seul capteur ponctuel interne (b, δ_b) , $b = (b_1, b_2) \in \Omega$ est choisi de sorte que le capteur soit stratégique, on prend alors des valeurs b_1, b_2 irrationnels. et dont la fonction de sortie est donnée par

$$z(t) = y((b_1, b_2), t) \quad (4-25)$$

Les conditions initiales à reconstruire sur la région ω sont données par

$$\begin{cases} y^0(x_1, x_2) = A \cos 3\pi x_1 \cos 3\pi x_2 \\ y^1(x_1, x_2) = (1 + B)x_1 x_2 \cos 3\pi x_1 \cos 3\pi x_2 \end{cases} \quad (4-26)$$

Où les constantes A et B sont choisies pour des considérations numériques (afin de donner des amplitudes raisonnables à y^0 et y^1)

On prend $\omega =]0.75, 1[\times]0, 1[$ et $\Gamma = \{1\} \times [0, 1]$

grâce aux relations (3-56) et (3-57), appliquées dans le cas bidimensionnel avec w_j les fonction propres pour Newman données par (1-21), aux fonctions trace et restriction on obtient les estimées respectives \tilde{y}_Γ^0 et \tilde{y}_Γ^1 de y_Γ^0 et y_Γ^1

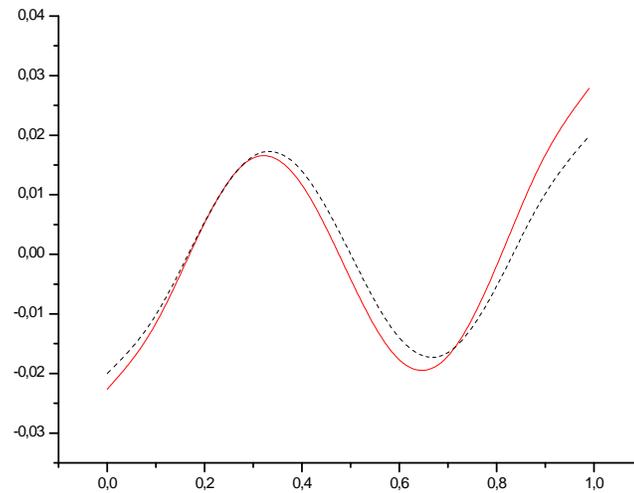
On note que pour $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ les valeurs propres de l'opérateur Δ ne sont pas de multiplicité 1, mais elle le sont sur le domaine $\Omega^* =]0, 1 + \varepsilon[\times]0, 1[$,

en prenant ε une valeur irrationnelle assez petite, Ω^* constitue alors une bonne approche de Ω (voir [23])

Pour les données $T = 7$, $M = 4$, $A = 0.02$, $B = -0.01$ et $(b_1, b_2) = (0.7410, 0.9777)$, les simulations numériques donnent les résultats qui suivent

Région Γ	e
$\{1\} \times [0, 1]$	$2.125011.10^{-2}$
$\{1\} \times [0.23, 0.86]$	$1.293258.10^{-2}$
$\{1\} \times [0.28, 0.76]$	$9.819316.10^{-3}$
$\{1\} \times [0.34, 0.71]$	$5.613350.10^{-3}$
$\{1\} \times [0.38, 0.64]$	$3.288894.10^{-3}$
$\{1\} \times [0.42, 0.54]$	$6.663494.10^{-4}$

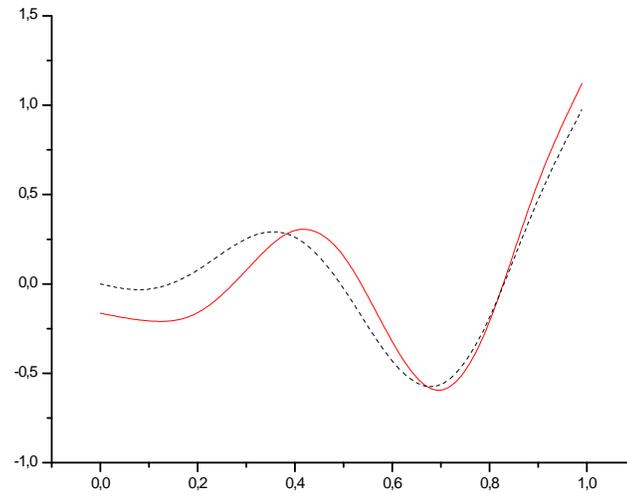
TAB. 4.1

Etat initial (en pointillés) et estimé de l'état initial (en continu) , sur la frontière $\{1\} \times [0,1]$

5-1) Relation région-erreur

Le tableau 4-1 montre l'évolution de l'erreur de l'observabilité frontière par rapport à l'aire de la région Γ , plus l'aire de la région Γ diminue plus l'erreur diminue.

5-2) Graphes



Vitesse initiale (en pointillés) et estimé de la vitesse initiale (en continu) sur la frontière $\{1\} \times [0,1]$

CHAPITRE 5

Observabilité régionale des systèmes hyperboliques semi-linéaires

Dans les problèmes réels, pratiquement tous les modèles sont non linéaires. L'étude des divers notions liées à l'analyse de tel système est très délicate. Les notions de contrôlabilité et d'observabilité n'ont plus qu'un caractère local.

Dans ce chapitre, nous allons voir comment l'utilisation simultanée de la théorie linéaire et de certains théorèmes du point fixe peut aider à résoudre des problèmes liés à l'observabilité régionale de systèmes non linéaires. Il s'agit alors d'observer l'état initial d'un système hyperbolique semi-linéaire sur une région ω du domaine Ω sur lequel est défini le dit système.

On donne premièrement une approche basée sur la technique du point fixe ([15],[16]) qui estime toute la trajectoire sur Ω et dont la restriction à la région ω , au temps $t = 0$, nous fournit l'état initial sur ω . Puis on va considérer une autre approche qui nous donne directement l'état initial régional.

1) Système considéré

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n avec une frontière $\partial\Omega$ assez régulière. On note $Q = \Omega \times]0, T[$ et $\Sigma = \partial\Omega \times]0, T[$ et on considère un système semi-linéaire de type hyperbolique décrit par :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = Ay(x, t) + Ny(x, t) & Q \\ y(x, 0) = y^0(x), \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = y^1(x) & \Omega \\ y(\zeta, t) = 0 & \Sigma \end{cases} \quad (5-1)$$

A étant l'opérateur elliptique linéaire et symétrique du second ordre, N est un opérateur non linéaire défini de $L^2(0, T; L^2\Omega)$ dans $L^2(0, T; L^2\Omega)$. Le système (5-1) est augmenté de la fonction de sortie

$$z(t) = Cy(t) \quad (5-2)$$

où $C : L^2(\Omega) \longrightarrow IR^p$ désigne l'opérateur d'observation dépendant de la nature

et du nombre p de capteurs considérés. En posant $\bar{y}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \frac{\partial y(t)}{\partial t} \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}^0 = \begin{bmatrix} y^0 \\ y^1 \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{N} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Ny_1 \end{bmatrix} \quad \text{pour } (y_1, y_2) \in \bar{\mathcal{F}},$$

où on a pris $\bar{\mathcal{F}} = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, le système (5-1) est équivalent au système

$$\begin{cases} \dot{\bar{y}} = \bar{A}\bar{y}(t) + \bar{N}\bar{y}(t) & 0 < t < T \\ \bar{y}(0) = \bar{y}^0 \end{cases} \quad (5-3)$$

Le système (5-3) est augmenté de la fonction de sortie

$$\bar{z}(t) = \bar{C}\bar{y}(t) \quad (5-4)$$

avec

$$\bar{C} = (C, 0)$$

Le système (5-3) admet une solution unique pouvant être exprimée par : (voir [35]) :

$$\bar{y}(t) = \bar{S}(t)\bar{y}^0 + \int_0^t \bar{S}(t-s)\bar{N}\bar{y}(s)ds \quad (5-5)$$

$\bar{S}(t)$ étant le semi-groupe qu'engendre l'opérateur \bar{A} , $\bar{S}(t)$ est défini par la relation (3-5).

Le système (5-3) peut s'écrire alors sous la forme

$$\begin{cases} \bar{y}(t) = \bar{S}(t)\bar{y}^0 + \int_0^t \bar{S}(t-s)\bar{N}\bar{y}(s)ds \\ \bar{y}(0) = \bar{y}^0 \end{cases} \quad (5-6)$$

On associe au système (5-1) le système linéaire (5-7) défini par :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = Ay(x,t) & Q \\ y(x,0) = y^0(x) , \frac{\partial y(x,0)}{\partial t} = y^1(x) & \Omega \\ y(\zeta,t) = 0 & \Sigma \end{cases} \quad (5-7)$$

2) Cas général

2-1) Observabilité régionale et point fixe

Le problème de l'observabilité des systèmes semi-linéaires a été considéré en utilisant les théorèmes du point fixe, plusieurs papiers ont été publiés ([15],[16],[34]), une question naturelle qui se pose est la possibilité d'étendre ces techniques pour résoudre le problème de l'observabilité régionale des systèmes hyperboliques semi-linéaire, c'est à dire la possibilité de reconstruire l'état initial $\bar{y}^0 = \begin{bmatrix} y^0 \\ y^1 \end{bmatrix}$ sur la région $\omega \subset \Omega$. Soit $\bar{\mathcal{X}} = L^2(0, T; \bar{\mathcal{F}})$, on définit l'opérateur

$$L(.) : \bar{\mathcal{X}} \longrightarrow \bar{\mathcal{X}} \text{ par}$$

$$L(t) \bar{x}(\cdot) = \int_0^t \bar{S}(t-s) \bar{x}(s) ds \quad \forall t \in]0, T[\text{ et } \bar{x} = (x_1, x_2)^T$$

On suppose que le système linéaire (5-7), associé au système (5-1), est faiblement ω -observable, alors on a les deux résultats suivants :

Proposition 5-1

Si $\bar{y}(\cdot)$ est la solution du système (5-3), (5-4) alors $\bar{y}(\cdot)$ est un point fixe de la fonction

$\Phi(\cdot) : \bar{\mathcal{X}} \longrightarrow \bar{\mathcal{X}}$ défini par :

$$\Phi(t)(\bar{y}(\cdot)) = \bar{S}(t) \bar{\chi}_\omega^* \bar{K}_\omega^+ [\bar{z}(\cdot) - \bar{C} \bar{S}(\cdot) \tilde{y} - \bar{C} L(\cdot) \bar{N} \bar{y}(\cdot)] + \bar{S}(t) \tilde{y} + L(t) \bar{N} \bar{y}(\cdot) \quad (5-8)$$

$\bar{K}_\omega^+ = [\bar{K}_\omega^* \bar{K}_\omega]^{-1} \bar{K}_\omega^*$ étant le pseudo inverse de l'opérateur $\bar{K}_\omega = \bar{K} \bar{\chi}_\omega^*$, \bar{K}_ω^* est l'opérateur adjoint de \bar{K}_ω avec $\tilde{y} \in \bar{\mathcal{F}}$ tel que $\tilde{y} = \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \hat{y}$ où $\hat{y} = \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega} \bar{y}(0)$

Preuve

En considérant la décomposition suivante

$$y^0 = \begin{cases} y_1^0 & \text{sur } \omega \\ y_2^0 & \text{sur } \Omega \setminus \omega \end{cases}, \quad y^1 = \begin{cases} y_1^1 & \text{sur } \omega \\ y_2^1 & \text{sur } \Omega \setminus \omega \end{cases}$$

et en notant

$$\bar{y}_1^{0,1} = (y_1^0, y_1^1)^T, \quad \bar{y}_2^{0,1} = (y_2^0, y_2^1)^T \quad (5-9)$$

la solution (5-5) peut être exprimée sous la forme

$$\bar{y}(t) = \bar{S}(t) \bar{\chi}_\omega^* \bar{y}_1^{0,1} + \bar{S}(t) \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1} + L(t) \bar{N} \bar{y}(\cdot) \quad (5-10)$$

à partir de l'équation (5-4) et en utilisant (5-10) on peut écrire

$$\begin{aligned} \bar{z}(t) &= \bar{C} \bar{S}(t) \bar{\chi}_\omega^* \bar{y}_1^{0,1} + \bar{C} \bar{S}(t) \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1} + \bar{C} L(t) \bar{N} \bar{y}(\cdot) \\ &= \bar{K}_\omega(t) \bar{y}_1^{0,1} + \bar{C} \bar{S}(t) \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1} + \bar{C} L(t) \bar{N} \bar{y}(\cdot) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\bar{K}_\omega \bar{y}_1^{0,1} &= \bar{z}(\cdot) - \bar{C}\bar{S}(\cdot) \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1} - \bar{C}L(\cdot) \bar{N}\bar{y}(\cdot) \\ \implies \bar{K}_\omega^* \bar{K}_\omega \bar{y}_1^{0,1} &= \bar{K}_\omega^* \left[\bar{z}(\cdot) - \bar{C}\bar{S}(\cdot) \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1} - \bar{C}L(\cdot) \bar{N}\bar{y}(\cdot) \right]\end{aligned}$$

puisque le système linéaire associé (5-7) est faiblement ω -observable alors

l'opérateur $[\bar{K}_\omega^* \bar{K}_\omega]^{-1}$ existe et dans ce cas on obtient

$$\bar{y}_1^{0,1} = \bar{K}_\omega^+ \left[\bar{z}(\cdot) - \bar{C}\bar{S}(\cdot) \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1} - \bar{C}L(\cdot) \bar{N}\bar{y}(\cdot) \right]$$

en utilisant (5-10) et en posant $\tilde{y} = \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1}$ il vient

$$\begin{aligned}\bar{y}(t) &= \bar{S}(t) \bar{\chi}_\omega^* \bar{K}_\omega^+ \left[\bar{z}(\cdot) - \bar{C}\bar{S}(\cdot) \tilde{y} - \bar{C}L(\cdot) \bar{N}\bar{y}(\cdot) \right] + \bar{S}(t) \tilde{y} + L(t) \bar{N}\bar{y}(\cdot) \\ &= \Phi(t) (\bar{y}(\cdot))\end{aligned}\tag{5-11}$$

Proposition 5-2

Si $\text{Im}(\bar{K}_\omega)$ est fermé dans $L^2(0, T; IR^p)$ et si la fonction (5-8) admet un point fixe unique $\bar{y}^*(\cdot)$ vérifiant la condition

$$\left[\bar{z}(\cdot) - \bar{C}\bar{S}(\cdot) \tilde{y}^* - \bar{C}L(\cdot) \bar{N}\bar{y}^*(\cdot) \right] \in \text{Im}(\bar{K}_\omega) \tag{5-12}$$

avec

$$\tilde{y}^* = \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \hat{y}^* \text{ où } \hat{y}^* = \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega} \bar{y}^*(0)$$

alors $\bar{y}^*(0)|_\omega$ est l'état initial à observer sur la région ω du système (5-3).

Preuve

$\bar{y}^*(\cdot)$ étant le point fixe de la fonction (5-8) il vient

$$\bar{C}\bar{y}^*(\cdot) = \bar{K}_\omega \bar{K}_\omega^+ \left[\bar{z}(\cdot) - \bar{C}\bar{S}(\cdot) \tilde{y}^* - \bar{C}L(\cdot) \bar{N}\bar{y}^*(\cdot) \right] + \bar{C}\bar{S}(\cdot) \tilde{y}^* + \bar{C}L(\cdot) \bar{N}\bar{y}^*(\cdot)$$

puisque l'opérateur $\bar{K}_\omega \bar{K}_\omega^+ : L^2(0, T; IR^p) \longrightarrow L^2(0, T; IR^p)$ est la projection orthogonale de $L^2(0, T; IR^p)$ dans $\text{Im}(\bar{K}_\omega)$ et $\bar{y}^*(\cdot)$ satisfait (5-12),

il vient alors $\bar{C}\bar{y}^*(.) = \bar{z}(.)$. par conséquent

$\bar{y}^*(0)|_\omega = \bar{K}_\omega^+ [\bar{z}(.) - \bar{C}\bar{S}(.)\bar{y}^* - \bar{C}L(.)\bar{N}\bar{y}^*(.)]$ correspond bien à l'état initial à observer sur la région ω du système (5-3).

Ainsi le problème de l'observabilité régionale des systèmes hyperboliques semi-linéaires, revient à trouver la restriction à la région ω du point fixe de la fonction $\Phi(.)$ en $t = 0$.

Dans ce qui suit, on va développer un autre opérateur F sur un espace plus large \mathcal{M} sur lequel F évite l'utilisation du pseudo-inverse

soit l'espace $\mathcal{M} = \bar{\mathcal{F}} \times \bar{\mathcal{X}}$ muni de la norme suivante :

$$\|(\bar{y}^0, \bar{y}(.))\|_{\mathcal{M}} = \|\bar{y}^0\|_{\bar{\mathcal{F}}} + \|\bar{y}(.)\|_{\bar{\mathcal{X}}}$$

On définit les opérateurs

$$\mathcal{S} : \bar{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{M}$$

$$\eta \longmapsto (\eta, \bar{S}(.)\eta)$$

$$\mathcal{L} : \bar{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{M}$$

$$\bar{x}(.) \longmapsto (0, L(.)\bar{x}(.))$$

on note un élément $\hat{y} \in \mathcal{M}$ par $\hat{y} = (\bar{y}^0, \bar{y}(.))$, la solution du système (5-3) peut être exprimée alors sous la forme

$$\begin{cases} \hat{y} = \mathcal{S}\bar{\chi}_\omega^*\bar{y}_1^{0,1} + \mathcal{S}\bar{\chi}_{\Omega\setminus\omega}^*\bar{y}_2^{0,1} + \mathcal{L}\bar{N}\bar{y}(.) \\ \bar{y}^0 = \bar{\chi}_\omega^*\bar{y}_1^{0,1} + \bar{\chi}_{\Omega\setminus\omega}^*\bar{y}_2^{0,1} \end{cases} \quad (5-13)$$

$\bar{y}_1^{0,1}$ et $\bar{y}_2^{0,1}$ sont donnés par (5-9)

soit $\mathcal{M}_\omega = \bar{\mathcal{F}}_\omega \times \bar{\mathcal{X}}_\omega$ avec $\bar{\mathcal{F}}_\omega = L^2(\omega) \times L^2(\omega)$ et $\bar{\mathcal{X}}_\omega = L^2(0, T; \bar{\mathcal{F}}_\omega)$

on définit l'opérateur

$$P_\omega : \mathcal{M}_\omega \longrightarrow \mathcal{M}_\omega$$

$$(\bar{\chi}_\omega \bar{y}^0, \bar{\chi}_\omega \bar{y}(\cdot)) \longmapsto P_\omega(\bar{\chi}_\omega \bar{y}^0, \bar{\chi}_\omega \bar{y}(\cdot)) = \bar{\chi}_\omega \mathcal{S} \bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega \bar{y}^0 + \bar{\chi}_\omega \mathfrak{L} \bar{N} \bar{y}(\cdot)$$

et la fonction

$$q : \bar{\mathcal{X}} \longrightarrow IR$$

$$\bar{y}(\cdot) \longmapsto q(\bar{y}(\cdot)) = \|\bar{z}(\cdot) - \bar{C} \bar{y}(\cdot)\|_Y \quad \text{avec } Y = L^2(0, T; IR^p)$$

l'opérateur F est défini par

$$F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$$

$$(\bar{y}^0, \bar{y}(\cdot)) \longmapsto F(\bar{y}^0, \bar{y}(\cdot)) = \mathcal{S} \bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega \bar{y}^0 + \mathfrak{L} \bar{N} \bar{y}(\cdot) + q(\bar{y}(\cdot)) \bar{\zeta}$$

où $\bar{\zeta} = (\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2) \in \mathcal{M}$ tel que $\bar{\chi}_\omega \bar{\zeta} \in \text{Im } P_\omega$

proposition 5-3

Si $\hat{y}^ = (y^{*0}, y^*(\cdot)) \in M$ est un point fixe de F alors $y^*(\cdot)$ satisfait (5-4) et donc $\bar{\chi}_\omega y^*(\cdot)$ est l'estimation régionale de la trajectoire de (5-3) sur $[0, T]$, $\bar{\chi}_\omega y^*(0)$ est l'estimation régionale de l'état initial.*

Preuve

D'abord, on vérifie aisément que $P_\omega \circ P_\omega = P_\omega$. Maintenant si $(y^{*0}, y^*(\cdot))$

est un point fixe de F , il vient

$$(y^{*0}, y^*(\cdot)) = \mathcal{S} \bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega y^{*0} + \mathfrak{L} \bar{N} y^*(\cdot) + q(y^*(\cdot)) \bar{\zeta}$$

$$\implies$$

$$\bar{\chi}_\omega (y^{*0}, y^*(\cdot)) = \bar{\chi}_\omega (\mathcal{S} \bar{\chi}_\omega^* \bar{\chi}_\omega y^{*0} + \mathfrak{L} \bar{N} y^*(\cdot)) + q(y^*(\cdot)) \bar{\chi}_\omega \bar{\zeta}$$

comme $\bar{\chi}_\omega \bar{\zeta} \in \text{Im } P_\omega$, il vient

$$P_\omega(\bar{\chi}_\omega y^{*0}, \bar{\chi}_\omega y^*(\cdot)) = P_\omega(\bar{\chi}_\omega y^{*0}, \bar{\chi}_\omega y^*(\cdot)) + q(y^*(\cdot)) \bar{\chi}_\omega \bar{\zeta}$$

d'où

$q(y^*(\cdot)) = 0$ ie $\bar{z}(\cdot) = \bar{C} y^*(\cdot)$ par suite $\bar{\chi}_\omega y^*(\cdot)$ coincide avec la restriction sur ω de la solution de (5-3), (5-4) et $\bar{\chi}_\omega y^{*0}$ coincide avec la restriction sur ω de l'état initial.

3) Cas sectoriel

Dans cette section on étudie le problème de l'observabilité régionale, pour des systèmes semi-linéaires, sous des hypothèses supplémentaires sur l'opérateur non linéaire \bar{N} et sur la dynamique du système. Avec les mêmes notations que précédemment on reprend le système semi-linéaire décrit par les équations (5-3) et (5-4) où on suppose que l'opérateur \bar{A} génère un semi-groupe analytique $(\bar{S}(t))_{t \geq 0}$ sur l'espace d'état $\bar{\mathcal{F}}$. De plus soit $A_1 = \bar{A} + aI$ tel que $\text{Re } \sigma(A_1) > \delta > 0$ où a est un réel positif, $\sigma(A_1)$ désigne le spectre de A_1 . Pour $0 \leq \alpha < 1$, $\bar{\mathcal{F}}^\alpha = D(A_1^\alpha)$ définit un espace de Banach dense dans $\bar{\mathcal{F}}$ muni de la norme de graphe

$$\|\cdot\|_{\bar{\mathcal{F}}^\alpha} = \|A_1^\alpha(\cdot)\|_{\bar{\mathcal{F}}}$$

on a

$$\|\bar{S}(t)\|_{\mathcal{L}(\bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathcal{F}}^\alpha)} \leq ct^{-\alpha} \exp(a - \delta)t = g_1(t)$$

où c est une constante strictement positive, pour plus de détail voir ([35])

Soit $r, s > 1$ on suppose que

$$\left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1 \text{ et que } g_1 \in L^r(0, T) \right. \quad (5-14)$$

on suppose de plus que l'opérateur $\bar{N} : L^r(0, T; \bar{\mathcal{F}}^\alpha) \longrightarrow L^s(0, T; \bar{\mathcal{F}})$

vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\bar{N}\bar{x} - \bar{N}\bar{y}\|_{L^s(0,T;\bar{\mathcal{F}})} \leq k(\|\bar{x}\|, \|\bar{y}\|) \|\bar{x} - \bar{y}\|_{L^r(0,T;\bar{\mathcal{F}}^\alpha)} \\ \bar{N}(0) = 0 \quad \text{avec } k : IR^+ \times IR^+ \longrightarrow IR \text{ vérifiant} \\ \lim_{\theta_1, \theta_2 \rightarrow 0} k(\theta_1, \theta_2) = 0 \end{array} \right. \quad (5-15)$$

on considère l'espace $V = \text{Im } \bar{\chi}_\omega \bar{K}^*$, l'idée est alors d'étudier l'observabilité régionale du système (5-3) dans V qui sera muni de la norme

$$\|\cdot\|_V = \|\bar{K}_\omega(\cdot)\|_Y \quad (5-16)$$

3-1) Les états initiaux admissibles

Dans cette section, on montre qu'il existe un ensemble admissible des états initiaux, admissible dans la sens qu'il nous permettent d'obtenir une solution faible unique du système (5-3) dans l'espace considéré.

On définit $\Phi_1(\bar{y}_1^{0,1}, \cdot) : L^r(0, T; \bar{\mathcal{F}}^\alpha) \longrightarrow L^r(0, T; \bar{\mathcal{F}}^\alpha)$ par

$$\Phi_1(\bar{y}_1^{0,1}, \bar{y}) = \bar{S}(\cdot) \bar{\chi}_\omega^* \bar{y}_1^{0,1} + \bar{S}(\cdot) \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1} + L(\cdot) \bar{N}\bar{y}$$

où $\bar{y}_1^{0,1}, \bar{y}_2^{0,1}$ sont respectivement les restrictions sur ω et sur $\Omega \setminus \omega$ de l'état initial \bar{y}^0 donné par (5-9)

alors on a le résultat suivant

Proposition 5-4

Supposons que le système associé (5-7) est faiblement régionalement observable sur ω , que (5-14), (5-15) soient vérifiés et que

$$\|\bar{S}(t) \bar{\chi}_\omega^*\|_{\mathcal{L}(V, \bar{\mathcal{F}}^\alpha)} \leq g_2(t) \quad (5-17)$$

avec $g_2 \in L^r(0, T)$ alors

1) il existe $a_1 > 0$ tel que pour tout $\bar{y}_1^{0,1} \in V$ la fonction $\Phi_1(\bar{y}_1^{0,1}, \cdot)$ admet un point fixe unique dans la boule $B(0, a_1) \subset L^r(0, T; \bar{\mathcal{F}}^\alpha)$ solution du système (5-3)

2) il existe $m = m(a_1)$ et $m_1 = m_1(a_1)$ tel que pour

$$\left\| \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1} \right\|_{\bar{\mathcal{F}}} \leq m_1 \quad (5-18)$$

l'application $f : B(0, m) \longrightarrow B(0, a_1)$ est Lipschitzienne.

$$\bar{y}_1^{0,1} \longmapsto \bar{y}$$

Preuve

On a $\lim_{\theta_1, \theta_2 \rightarrow 0} k(\theta_1, \theta_2) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists a_1 > 0$ tel que pour $\theta_1, \theta_2 \leq a_1 \Rightarrow$

$$k(\theta_1, \theta_2) < \varepsilon \text{ donc pour } \varepsilon < \frac{\gamma}{(T)^{\frac{1}{r}} \|g_1\|_{L^r(0, T)}} \text{ avec } \gamma < \min \left\{ 1, \frac{1}{\|g_2\|_{L^r(0, T)}} \right\}$$

$$\text{on a } \sup_{\theta_1, \theta_2 \leq a_1} k(\theta_1, \theta_2) \leq \frac{\gamma}{(T)^{\frac{1}{r}} \|g_1\|_{L^r(0, T)}},$$

notons

$$c_1 = (T)^{\frac{1}{r}} \|g_1\|_{L^r(0, T)} \sup_{\theta_1, \theta_2 \leq a_1} k(\theta_1, \theta_2)$$

soit maintenant $\bar{y}^1, \bar{y}^2 \in B(0, a_1)$, on a

$$\begin{aligned} \left\| \Phi_1(\bar{y}_1^{0,1}, \bar{y}_2) - \Phi_1(\bar{y}_1^{0,1}, \bar{y}_1) \right\|_{L^r(0, T; \bar{\mathcal{F}}^\alpha)} &= \left\| L(\cdot) (\bar{N}\bar{y}_2 - \bar{N}\bar{y}_1) \right\|_{L^r(0, T; \bar{\mathcal{F}}^\alpha)} \\ &= \left(\int_0^T \left\| L(t) (\bar{N}\bar{y}_2 - \bar{N}\bar{y}_1) \right\|_{\bar{\mathcal{F}}^\alpha}^r dt \right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \left\| L(t) (\bar{N}\bar{y}_2 - \bar{N}\bar{y}_1) \right\|_{\bar{\mathcal{F}}^\alpha}^r &= \left\| \int_0^t \bar{S}(t-\tau) (\bar{N}\bar{y}_2(\tau) - \bar{N}\bar{y}_1(\tau)) d\tau \right\|_{\bar{\mathcal{F}}^\alpha}^r \\ &\leq \int_0^T \left\| \bar{S}(t-\tau) (\bar{N}\bar{y}_2(\tau) - \bar{N}\bar{y}_1(\tau)) \right\|_{\bar{\mathcal{F}}^\alpha} d\tau \\ &\leq \int_0^T \left\| \bar{S}(t-\tau) \right\|_{\mathcal{L}(\bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathcal{F}}^\alpha)} \left\| \bar{N}\bar{y}_2(\tau) - \bar{N}\bar{y}_1(\tau) \right\|_{\bar{\mathcal{F}}} d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_0^T (g_1(\tau))^r \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^T \|\bar{N}\bar{y}_2(\tau) - \bar{N}\bar{y}_1(\tau)\|_{\bar{\mathcal{F}}}^s d\tau \right)^{\frac{1}{s}} \\
&= \|g_1\|_{L^r(0,T)} \|\bar{N}\bar{y}_2 - \bar{N}\bar{y}_1\|_{L^s(0,T;\bar{\mathcal{F}})}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\|\Phi_1(\bar{y}_1^{0,1}, \bar{y}_2) - \Phi_1(\bar{y}_1^{0,1}, \bar{y}_1)\|_{L^r(0,T;\bar{\mathcal{F}}^\alpha)} &\leq T^{\frac{1}{r}} \|g_1\|_{L^r(0,T)} \|\bar{N}\bar{y}_2 - \bar{N}\bar{y}_1\|_{L^s(0,T;\bar{\mathcal{F}})} \\
&\leq T^{\frac{1}{r}} \|g_1\|_{L^r(0,T)} \sup_{\theta_1, \theta_2 \leq a_1} k(\theta_1, \theta_2) \|\bar{y}_2 - \bar{y}_1\|_{L^r(0,T;\bar{\mathcal{F}}^\alpha)} \\
&\leq c_1 \|\bar{y}_2 - \bar{y}_1\|_{L^r(0,T;\bar{\mathcal{F}}^\alpha)}
\end{aligned}$$

et donc $\Phi_1(\bar{y}_1^{0,1}, \cdot)$ est de contraction dans $B(0, a_1)$.

d'autre part, pour $\bar{y} \in B(0, a_1)$ on a

$$\begin{aligned}
\|\Phi_1(\bar{y}_1^{0,1}, \bar{y})\|_{L^r(0,T;\bar{\mathcal{F}}^\alpha)} &= \left\| \bar{S}(\cdot) \bar{\chi}_\omega^* \bar{y}_1^{0,1} + \bar{S}(\cdot) \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1} + L(\cdot) \bar{N}\bar{y} \right\|_{L^r(0,T;\bar{\mathcal{F}}^\alpha)} \\
&\leq \left\| \bar{S}(\cdot) \bar{\chi}_\omega^* \bar{y}_1^{0,1} \right\|_{L^r(0,T;\bar{\mathcal{F}}^\alpha)} + \left\| \bar{S}(\cdot) \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1} \right\|_{L^r(0,T;\bar{\mathcal{F}}^\alpha)} + \left\| L(\cdot) \bar{N}\bar{y} \right\|_{L^r(0,T;\bar{\mathcal{F}}^\alpha)} \\
&= \left(\int_0^T \|\bar{S}(t) \bar{\chi}_\omega^* \bar{y}_1^{0,1}\|_{\bar{\mathcal{F}}^\alpha}^r dt \right)^{\frac{1}{r}} + \left(\int_0^T \|\bar{S}(t) \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1}\|_{\bar{\mathcal{F}}^\alpha}^r dt \right)^{\frac{1}{r}} + \left(\int_0^T \|L(t) \bar{N}\bar{y}\|_{\bar{\mathcal{F}}^\alpha}^r dt \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
\|\bar{S}(t) \bar{\chi}_\omega^* \bar{y}_1^{0,1}\|_{\bar{\mathcal{F}}^\alpha} &\leq \|\bar{S}(t) \bar{\chi}_\omega^*\|_{\mathcal{L}(V, \bar{\mathcal{F}}^\alpha)} \|\bar{y}_1^{0,1}\|_V \\
&\leq g_2(t) \|\bar{y}_1^{0,1}\|_V \\
\|\bar{S}(t) \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1}\|_{\bar{\mathcal{F}}^\alpha} &\leq \|\bar{S}(t)\|_{\mathcal{L}(\bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathcal{F}}^\alpha)} \|\bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1}\|_{\bar{\mathcal{F}}} \\
&\leq g_1(t) \|\bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1}\|_{\bar{\mathcal{F}}}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|L(t) \bar{N}\bar{y}\|_{\bar{\mathcal{F}}^\alpha} &= \left\| \int_0^t \bar{S}(t-\tau) \bar{N}\bar{y}(\tau) d\tau \right\|_{\bar{\mathcal{F}}^\alpha} \\
&\leq \int_0^t \|\bar{S}(t-\tau)\|_{\mathcal{L}(\bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathcal{F}}^\alpha)} \|\bar{N}\bar{y}(\tau)\|_{\bar{\mathcal{F}}} d\tau \\
&\leq \|g_1\|_{L^r(0,T)} \|\bar{N}\bar{y}\|_{L^s(0,T;\bar{\mathcal{F}})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|g_1\|_{L^r(0,T)} k(\|\bar{y}\|, 0) \|\bar{y}\|_{L^r(0,T;\bar{\mathcal{F}}^\alpha)} \\
&\leq \|g_1\|_{L^r(0,T)} \sup_{\theta \leq a_1} k(\theta, 0) \|\bar{y}\|_{L^r(0,T;\bar{\mathcal{F}}^\alpha)}
\end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\|\bar{S}(\cdot) \bar{\chi}_\omega^* \bar{y}_1^{0,1}\|_{L^r(0,T;\bar{\mathcal{F}}^\alpha)} \leq \|g_2\|_{L^r(0,T)} \|\bar{y}_1^{0,1}\|_V$$

$$\|\bar{S}(\cdot) \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1}\|_{L^r(0,T;\bar{\mathcal{F}}^\alpha)} \leq \|g_1\|_{L^r(0,T)} \|\bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1}\|_{\bar{\mathcal{F}}}$$

et

$$\|L(\cdot) \bar{N} \bar{y}\|_{L^r(0,T;\bar{\mathcal{F}}^\alpha)} \leq c_2 \|\bar{y}\|_{L^r(0,T;\bar{\mathcal{F}}^\alpha)}$$

avec

$$c_2 = T^{\frac{1}{r}} \|g_1\|_{L^r(0,T)} \sup_{\theta \leq a_1} k(\theta, 0)$$

d'où

$$\begin{aligned}
\|\Phi_1(\bar{y}_1^{0,1}, \bar{y})\|_{L^r(0,T;\bar{\mathcal{F}}^\alpha)} &\leq \|g_2\|_{L^r(0,T)} \|\bar{y}_1^{0,1}\|_V + \|g_1\|_{L^r(0,T)} \|\bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1}\|_{\bar{\mathcal{F}}} + \\
&\qquad\qquad\qquad c_2 \|\bar{y}\|_{L^r(0,T;\bar{\mathcal{F}}^\alpha)}
\end{aligned}$$

on note

$$m = \frac{1}{\|g_2\|_{L^r(0,T)}} \left[a_1 (1 - c_2) - \|g_1\|_{L^r(0,T)} \|\bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1}\|_{\bar{\mathcal{F}}} \right] \quad (5-19)$$

et

$$m_1 = \frac{a_1 (1 - c_2)}{\|g_1\|_{L^r(0,T)}} \quad (5-20)$$

alors $\bar{y} \in B(0, a_1)$ entraine $\Phi_1(\bar{y}_1^{0,1}, \bar{y}) \in B(0, a_1)$ si on prend

$$\|\bar{y}_1^{0,1}\|_V \leq m \quad \text{et} \quad \|\bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1}\|_{\bar{\mathcal{F}}} \leq m_1$$

il reste donc à montrer que la fonction f est Lipschitzienne

en effet

soient \bar{y}_1, \bar{y}_2 les solutions du système (5-3) qui correspondent respectivement aux états initiaux \bar{y}_1^0 et \bar{y}_2^0 avec

$$\bar{y}_1^0 = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_1^1 \end{bmatrix}, \bar{y}_2^0 = \begin{bmatrix} y_2^0 \\ y_2^1 \end{bmatrix}$$

en considérant les décompositions suivantes

$$y_1^0 = \begin{cases} y_{11}^0 & \text{sur } \omega \\ y_{12}^0 & \text{sur } \Omega \setminus \omega \end{cases}, \quad y_1^1 = \begin{cases} y_{11}^1 & \text{sur } \omega \\ y_{12}^1 & \text{sur } \Omega \setminus \omega \end{cases}$$

et

$$y_2^0 = \begin{cases} y_{21}^0 & \text{sur } \omega \\ y_{22}^0 & \text{sur } \Omega \setminus \omega \end{cases}, \quad y_2^1 = \begin{cases} y_{21}^1 & \text{sur } \omega \\ y_{22}^1 & \text{sur } \Omega \setminus \omega \end{cases}$$

en notant

$$\bar{y}_{11}^{0,1} = (y_{11}^0, y_{11}^1)^T, \quad \bar{y}_{12}^{0,1} = (y_{12}^0, y_{12}^1)^T$$

et

$$\bar{y}_{21}^{0,1} = (y_{21}^0, y_{21}^1)^T, \quad \bar{y}_{22}^{0,1} = (y_{22}^0, y_{22}^1)^T$$

on peut écrire alors, en prenant $\bar{y}_{12}^{0,1} = \bar{y}_{22}^{0,1}$

$$\begin{aligned} & \|f(\bar{y}_{21}^{0,1}) - f(\bar{y}_{11}^{0,1})\|_{L^r(0,T;\bar{\mathcal{F}}^\alpha)} = \|\bar{y}_2 - \bar{y}_1\|_{L^r(0,T;\bar{\mathcal{F}}^\alpha)} \\ & = \|\bar{S}(\cdot) \bar{\chi}_\omega^* (\bar{y}_{21}^{0,1} - \bar{y}_{11}^{0,1}) + L(\cdot) (\bar{N}\bar{y}_2 - \bar{N}\bar{y}_1)\|_{L^r(0,T;\bar{\mathcal{F}}^\alpha)} \\ & \leq \|\bar{S}(\cdot) \bar{\chi}_\omega^* (\bar{y}_{21}^{0,1} - \bar{y}_{11}^{0,1})\|_{L^r(0,T;\bar{\mathcal{F}}^\alpha)} + \|L(\cdot) (\bar{N}\bar{y}_2 - \bar{N}\bar{y}_1)\|_{L^r(0,T;\bar{\mathcal{F}}^\alpha)} \\ & \leq \|g_2\|_{L^r(0,T)} \|\bar{y}_{21}^{0,1} - \bar{y}_{11}^{0,1}\|_V + c_1 \|\bar{y}_2 - \bar{y}_1\|_{L^r(0,T;\bar{\mathcal{F}}^\alpha)} \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\|\bar{y}_2 - \bar{y}_1\|_{L^r(0,T;\bar{\mathcal{F}}^\alpha)} \leq \frac{\|g_2\|_{L^r(0,T)}}{1 - c_1} \|\bar{y}_{21}^{0,1} - \bar{y}_{11}^{0,1}\|_V \quad (5-21)$$

ainsi f est Lipschitzienne .

Remarque 5-1

Les résultats obtenus montrent que si l'état initial sur la région ω est pris dans $B(0, m)$ avec l'état résiduel sur $\Omega \setminus \omega$ borné alors l'existence et l'unicité de la solution du système (5-3) sont assurées dans $B(0, a_1)$ où m et a_1 sont donnés ci-dessus.

3-2) Observabilité régionale et point fixe

Ici on va montrer que si on prend les mesures dans une boule $B(0, \rho)$ où ρ sera défini ultérieurement, alors l'état régional $\bar{y}_1^{0,1}$ peut être obtenu comme solution d'un problème de point fixe.

Soit la fonction

$$\Phi_2 : Y \times V \longrightarrow V$$

définie par

$$\Phi_2(\bar{z}, \bar{y}_1^{0,1}) = \bar{K}_\omega^+ \left(\bar{z} - \bar{C}\bar{S}(\cdot) \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1} - \bar{C}L(\cdot) \bar{N}f(\bar{y}_1^{0,1}) \right)$$

supposons que $\text{Im } \bar{K}_\omega$ est fermé et que

$$\forall \bar{y} \in B(0, a_1) \quad \bar{C}L(\cdot) \bar{N}\bar{y} \in \text{Im } \bar{K}_\omega \quad (5-22)$$

alors on le resultat suivant

Proposition 5-5

Supposons que le système (5-7) est faiblement régionalement observable sur ω et sous les hypothèses (5-14), (5-15) ainsi que

$\exists \beta_1 > 0$ tel que

$$\forall \bar{y} \in L^s(0, T; \bar{\mathcal{F}}) \quad \|\bar{C}L(\cdot) \bar{y}\|_Y \leq \beta_1 \|\bar{y}\|_{L^s(0, T; \bar{\mathcal{F}})} \quad (5-23)$$

et $\exists \beta_2 > 0$ tel que

$$\forall \bar{y} \in \bar{F} \quad \|\bar{C}\bar{S}(\cdot)\bar{y}\|_Y \leq \beta_2 \|\bar{y}\|_{\bar{F}} \quad (5-24)$$

alors on a

1) il existe $a_2 > 0$ et $\rho = \rho(a_2) > 0$ tel que

$\forall \bar{z} \in B(0, \rho) \subset Y$ la fonction $\Phi_2(\bar{z}, \cdot)$ admet un point fixe unique dans $B(0, m)$

correspondant à l'état initial régional $\bar{y}_1^{0,1}$ du problème (5-3) à observer sur ω

2) La fonction

$$\begin{aligned} h : B(0, \rho) &\longrightarrow B(0, m) \\ \bar{z} &\longmapsto \bar{y}_1^{0,1} \end{aligned}$$

est Lipschitzienne.

Preuve

1) Montrons que $\Phi_2(\bar{z}, \cdot)$ est contractante sur $B(0, m) \subset V$

soient $\bar{y}_{2,1}^{0,1}, \bar{y}_{1,1}^{0,1} \in B(0, m)$

on a $\Phi_2(\bar{z}, \bar{y}_{2,1}^{0,1}) - \Phi_2(\bar{z}, \bar{y}_{1,1}^{0,1}) = \bar{K}_\omega^+ (\bar{C}L(\cdot) (\bar{N}f(\bar{y}_{2,1}^{0,1}) - \bar{N}f(\bar{y}_{1,1}^{0,1})))$

d'après (5-15), (5-16), (5-21), (5-22) et (5-23)

on obtient

$$\begin{aligned} \|\Phi_2(\bar{z}, \bar{y}_{2,1}^{0,1}) - \Phi_2(\bar{z}, \bar{y}_{1,1}^{0,1})\|_V &= \|\bar{K}_\omega \bar{K}_\omega^+ (\bar{C}L(\cdot) (\bar{N}f(\bar{y}_{2,1}^{0,1}) - \bar{N}f(\bar{y}_{1,1}^{0,1})))\|_Y \\ &\leq \beta_1 \|\bar{N}f(\bar{y}_{2,1}^{0,1}) - \bar{N}f(\bar{y}_{1,1}^{0,1})\|_{L^s(0,T;\bar{F})} \\ &\leq \beta_1 k (\|f(\bar{y}_{2,1}^{0,1})\|, \|f(\bar{y}_{1,1}^{0,1})\|) \|f(\bar{y}_{2,1}^{0,1}) - f(\bar{y}_{1,1}^{0,1})\|_{L^r(0,T;\bar{F}^\alpha)} \end{aligned}$$

on a $\lim_{\theta_1, \theta_2 \rightarrow 0} k(\theta_1, \theta_2) = 0$ d'où

pour $\varepsilon < \frac{(1-c_1)\gamma_1}{\beta_1 \|g_2\|_{L^r(0,T)}}$ avec $0 < \gamma_1 < 1$, il $\exists a_2 > 0$ tel que

$$\sup_{\theta_1, \theta_2 \leq a_2} k(\theta_1, \theta_2) \leq \frac{(1-c_1)\gamma_1}{\beta_1 \|g_2\|_{L^r(0,T)}}$$

\implies

$$\beta_1 \sup_{\theta_1, \theta_2 \leq a_2} k(\theta_1, \theta_2) \frac{\|g_2\|_{L^r(0,T)}}{(1-c_1)} = c_3 \leq \gamma_1$$

on obtient alors

$$\|\Phi_2(\bar{z}, \bar{y}_{2,1}^{0,1}) - \Phi_2(\bar{z}, \bar{y}_{1,1}^{0,1})\|_V \leq c_3 \|\bar{y}_{2,1}^{0,1} - \bar{y}_{1,1}^{0,1}\|_V$$

ainsi donc $\Phi_2(\bar{z}, \cdot)$ est de contraction sur $B(0, m)$.

D'autre part, d'après (5-14), (5-15), (5-16), (5-23) et (5-24)

on a

$$\begin{aligned} \|\Phi_2(\bar{z}, \bar{y}_1^{0,1})\|_V &= \left\| \bar{z} - \bar{C}\bar{S}(\cdot) \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1} - \bar{C}L(\cdot) \bar{N}f(\bar{y}_1^{0,1}) \right\|_Y \\ &\leq \|\bar{z}\|_Y + \left\| \bar{C}\bar{S}(\cdot) \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1} \right\|_Y + \|\bar{C}L(\cdot) \bar{N}f(\bar{y}_1^{0,1})\|_Y \\ &\leq \|\bar{z}\|_Y + \beta_2 \left\| \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1} \right\|_{\bar{\mathcal{F}}} + \beta_1 k(\|f(\bar{y}_1^{0,1}, \cdot)\|, 0) \|f(\bar{y}_1^{0,1})\|_{L^r(0,T;\bar{\mathcal{F}}^\alpha)} \\ &\leq \|\bar{z}\|_Y + \beta_2 \left\| \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1} \right\|_{\bar{\mathcal{F}}} + \beta_1 a_1 \sup_{\theta, \leq a_2} k(\theta, 0) \end{aligned}$$

on pose

$$\rho = m - \left(\beta_2 \left\| \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1} \right\|_{\bar{\mathcal{F}}} + \beta_1 a_1 \sup_{\theta, \leq a_2} k(\theta, 0) \right) \quad (5-25)$$

alors

$$\text{pour } \|\bar{z}\|_Y \leq \rho \text{ on a } \|\Phi_2(\bar{z}, \bar{y}_1^{0,1})\|_V \leq m$$

et par suite elle admet un point fixe unique.

2) Montrons que h est *Lipschitzienne*

soient $\bar{z}_1, \bar{z}_2 \in B(0, \rho)$, on a

$$\begin{aligned} h(\bar{z}_2) - h(\bar{z}_1) &= \bar{y}_{2,1}^{0,1} - \bar{y}_{1,1}^{0,1} \\ &= \Phi_2(\bar{z}_2, \bar{y}_{2,1}^{0,1}) - \Phi_2(\bar{z}_1, \bar{y}_{1,1}^{0,1}) \\ &= \Phi_2(\bar{z}_2, h(\bar{z}_2)) - \Phi_2(\bar{z}_2, h(\bar{z}_1)) + \Phi_2(\bar{z}_2, h(\bar{z}_1)) - \Phi_2(\bar{z}_1, h(\bar{z}_1)) \end{aligned}$$

\implies

$$\begin{aligned}
& \| h(\bar{z}_2) - h(\bar{z}_1) \|_V \leq \\
& \quad \| \Phi_2(\bar{z}_2, h(\bar{z}_2)) - \Phi_2(\bar{z}_2, h(\bar{z}_1)) \|_V + \| \Phi_2(\bar{z}_2, h(\bar{z}_1)) - \Phi_2(\bar{z}_1, h(\bar{z}_1)) \|_V \\
& \quad \leq c_3 \| h(\bar{z}_2) - h(\bar{z}_1) \|_V + \| \bar{K}_\omega^+(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) \|_V \\
& \quad = c_3 \| h(\bar{z}_2) - h(\bar{z}_1) \|_V + \| \bar{z}_2 - \bar{z}_1 \|_Y
\end{aligned}$$

et donc on obtient

$$\| h(\bar{z}_2) - h(\bar{z}_1) \|_V \leq \frac{1}{1 - c_3} \| \bar{z}_2 - \bar{z}_1 \|_Y \quad (5-26)$$

d'où h est *Lipschitzienne*.

Remarque 5-2

1) D'après les propositions 5-4 et 5-5 on doit avoir

$$\left\| \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1} \right\|_{\bar{\mathcal{F}}} \leq \min \{ m_1, m_2 \} \quad \text{et} \quad m > \beta_1 a_1 \sup_{\theta \leq a_2} k(\theta, 0)$$

où $m_2 = \frac{1}{\beta_2} \left[m - \beta_1 a_1 \sup_{\theta \leq a_2} k(\theta, 0) \right]$, ceci dans le but de voir $\rho > 0$
 ρ étant défini par (5-25).

2) La proposition 5-5 montre que si les mesures sont de normes assez grandes, le système (5-3) ne peut être régionalement observable.

4) Approche numérique

Dans cette section on montre l'existence d'une suite d'états initiaux qui converge vers l'état initial régional à observer sur ω .

Proposition 5-6

On suppose que les hypothèses de la proposition 5-5 sont vérifiées,

pour $\bar{z} \in B(0, \rho)$, la suite des états initiaux régionaux défini dans $B(0, m) \subset V$

par

$$\begin{cases} \bar{y}_{0,1}^{0,1} = 0 \\ \bar{y}_{n+1,1}^{0,1} = \bar{K}_\omega^+ \left(\bar{z} - \bar{C}\bar{S}(\cdot) \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1} - \bar{C}L(\cdot) \bar{N}f(\bar{y}_{n,1}^{0,1}) \right) \end{cases} \quad (5-27)$$

converge vers $\bar{y}_1^{0,1}$ l'état initial régional à observer sur ω .

Preuve

Montrons que la suite définie par (5-27) est convergente, en effet

on a

$$\begin{aligned} \|\bar{y}_{n+1,1}^{0,1} - \bar{y}_{n,1}^{0,1}\|_V &= \|\Phi_2(\bar{z}, \bar{y}_{n,1}^{0,1}) - \Phi_2(\bar{z}, \bar{y}_{n-1,1}^{0,1})\|_V \\ &\leq c_3 \|\bar{y}_{n,1}^{0,1} - \bar{y}_{n-1,1}^{0,1}\|_V \\ &\leq c_3^2 \|\bar{y}_{n-1,1}^{0,1} - \bar{y}_{n-2,1}^{0,1}\|_V \\ &\quad \cdot \\ &\leq c_3^n \|\bar{y}_{1,1}^{0,1}\|_V \end{aligned}$$

Soient $\bar{y}_n = f(\bar{y}_{n,1}^{0,1})$ et $\bar{z}_n = \bar{C}\bar{y}_n$

avec

$$\begin{cases} \bar{y}_n = \bar{S}(\cdot) \bar{\chi}_\omega^* \bar{y}_{n,1}^{0,1} + \bar{S}(\cdot) \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1} + L(\cdot) \bar{N}\bar{y}_n \\ \text{et} \\ \bar{z}_n = \bar{K}_\omega \bar{y}_{n,1}^{0,1} + \bar{C}\bar{S}(\cdot) \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1} + \bar{C}L(\cdot) \bar{N}\bar{y}_n \end{cases}$$

on a

$$\bar{K}_\omega^+ (\bar{z} - \bar{z}_n) = \bar{y}_{n+1,1}^{0,1} - \bar{y}_{n,1}^{0,1}$$

en effet

$$\bar{z} - \bar{z}_n = \bar{z} - \bar{C}\bar{S}(\cdot) \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1} - \bar{C}L(\cdot) \bar{N}f(\bar{y}_{n,1}^{0,1}) - \bar{K}_\omega \bar{y}_{n,1}^{0,1}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned}\bar{K}_\omega^+ (\bar{z} - \bar{z}_n) &= \bar{K}_\omega^+ \left(\bar{z} - \bar{C}\bar{S}(\cdot) \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1} - \bar{C}L(\cdot) \bar{N}f(\bar{y}_{n,1}^{0,1}) \right) - \bar{K}_\omega^+ \bar{K}_\omega \bar{y}_{n,1}^{0,1} \\ &= \bar{y}_{n+1,1}^{0,1} - \bar{y}_{n,1}^{0,1}\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\| \bar{z} - \bar{z}_n \|_Y &= \| \bar{y}_{n+1,1}^{0,1} - \bar{y}_{n,1}^{0,1} \|_V \\ &\leq c_3^n \| \bar{y}_{1,1}^{0,1} \|_V\end{aligned}$$

ainsi la suite \bar{z}_n converge vers \bar{z} dans Y

d'autre part on a d'après (5-26)

$$\begin{aligned}\| \bar{y}_{n,1}^{0,1} - \bar{y}_1^{0,1} \|_V &= \| h(\bar{z}_n) - h(\bar{z}) \| \\ &\leq \frac{1}{1 - c_3} \| \bar{z} - \bar{z}_n \|_Y\end{aligned}$$

et donc $\bar{y}_{n,1}^{0,1}$ converge vers l'état initial régional $\bar{y}_1^{0,1}$, à observer sur ω .

Algorithme

On pose $r_{n+1} = \bar{z} - \bar{C}\bar{S}(\cdot) \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1} - \bar{C}L(\cdot) \bar{N}f(\bar{y}_{n,1}^{0,1})$

d'où

$$\bar{y}_{n+1,1}^{0,1} = \bar{K}_\omega^+ r_{n+1}$$

on a

$$\begin{aligned}\bar{z}_n &= \bar{K}_\omega \bar{y}_{n,1}^{0,1} + \bar{z} - r_{n+1} \\ &= \bar{K}_\omega (\bar{K}_\omega^+ r_n) + \bar{z} - r_{n+1} \\ &= r_n + \bar{z} - r_{n+1}\end{aligned}$$

\Rightarrow

$$r_{n+1} = \bar{z} - \bar{z}_n + r_n$$

on obtient alors l'algorithme suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 1) \quad r_1 = \bar{z} - \bar{C}\bar{S}(\cdot) \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1} - \bar{C}L(\cdot) \bar{N}f(0) \\
 2) \quad \bar{y}_{n,1}^{0,1} = \bar{K}_\omega^+ r_n \\
 3) \quad \dot{\bar{y}}_n = \bar{A}\bar{y}_n + \bar{N}\bar{y}_n, \bar{y}_n(0) = \bar{\chi}_\omega^* \bar{y}_{n,1}^{0,1} + \bar{\chi}_{\Omega \setminus \omega}^* \bar{y}_2^{0,1} \\
 4) \quad \bar{z}_n = \bar{C}\bar{y}_n \\
 5) \quad \text{si } \|\bar{z} - \bar{z}_n\|_Y \leq \varepsilon \text{ arreter et } \bar{y}_{n,1}^{0,1} \text{ correspond à l'état initial régional } \bar{y}_1^{0,1} \\
 \quad \text{sinon} \\
 6) \quad r_{n+1} = \bar{z} - \bar{z}_n + r_n \text{ aller à 2}
 \end{array} \right.$$

CONCLUSION

Le problème de l'observabilité régionale interne de l'équation des ondes a été abordé en adaptant la méthode HUM. On a développé une approche numérique qui a permis d'avoir des expressions explicites des conditions initiales sur la région $\omega \subset \Omega$ et qui sont exploitables d'un point de vue numérique, ensuite nous avons étendu cette étude au cas où ω est une partie de la frontière $\partial\Omega$ du domaine du système, les différentes mises en oeuvre numériques attestent de l'efficacité des approches considérées.

Bien sûr dans les problèmes réels, pratiquement tous les modèles sont non linéaires, ceci nous a conduit à tenir compte des effets de la non linéarité en considérant des systèmes hyperboliques semi-linéaires, toutefois la difficulté de base de ces systèmes est qu'on ne dispose pas de théorèmes permettant de prouver dans un cadre général l'existence et l'unicité de la solution de tels systèmes mais l'introduction des théorèmes de point fixe nous a amené à quelques résultats locaux qui ont permis d'aboutir à un algorithme exploitable d'un point de vue numérique.

Bibliographie

- [1] Adams R.A
Sobolev space .Academic press , N.Y. 1975 .
- [2] Balakrishnan A.V.
Applied fonctionnal analysis.Springer. 1976
- [3] Bouyaghroumni J.
Controlabilité et observabilité des systèmes hyperboliques
Thèse d'état -Université de Perpignan -France-
- [4] Bourray H.
Quelques extentions de l'observabilité régionales , thèse d'état ,université
Moulay-Ismail , Meknès ,Maroc .2002
- [5] Brezis H. Analyse fonctionnelle . Théorie et application 1993 .
- [6] Caradus S.R
Operator theorie of the pseudo inverse . 1974 .
- [7] Curtain R.F-Pritchard A.J.
Infinite dimensional linear systems theory .Lecture note in control and
information science .N°8 , 1978 . Springer .
- [8] El jai A.
Eléments d'analyse et de controle des systèmes . 2004
- [9] El jai A.
Nouvelle approche pour la modélisation de systèmes en expansion spatiale :
Dynamique de végétation .Tendances nouvelles en modélisation pour

l'environnement . Elsevier .pp 439-445 , 1997

[10] El jai A.- Pritchard A.J

Capteurs et actionneurs dans l'analyse des systèmes distribués . 1986

[11] El jai A.-Gonzalez A.

Actionneurs et contrôlabilité d'un système hyperbolique .IMP-CNRS .

Automatique université de Perpignan Ap11-1989-23-360-384 France

[12] El Jai A.-Simon M.-Zerrik E. and Pritchard A.,1995 , Régional

controllability of distributed parameter systems , international journal .

Control , vol 62 N°6 pp 1351-1365

[13] El Jai A.-Amouroux M.-Zerrik E. , Régional observability of

distributed systems .International journal of systems science (1994)

vol 24 N°2 pp 301-313

[14] El Jai A.

Distributed systems analysis via sensors and actuators . Int .Journal

on sensors and actuators .Vol 29 N°1 , pp 1-11 (1991)

[15] Felipe De Souza J.A.M

Control, state estimation and parameter identification of non linear

distributed parameter system using fixed point. IFAC control of

distributed parameter system, Los Angeles. California 1986.

[16] Felipe De Souza J.A.M

Non linear control and estimation using fixed point theorems.

1st Mecos'83 Symposium Acta press 1984 S.G TZafestas M.H.Hamza Editions.

[17] Grisvard P.

Théorie des semi-groupes (cours)

[18] Larhrissi R.

Controlabilité régionale des systèmes hyperboliques linéaires et semi-linéaires
thèse d'état ,université Moulay-Ismaïl , Meknès ,Maroc .2003 .

[19] Lions J.L

Controlabilité exacte .Perturbation et stabilisation des systèmes distribués .

Tome 1 .Masson 1988 .

[20] Lions J.L

Optimal control of systems governed by partial differential equations ,
springer -verlag New york - 1971 .

[21] Lions J.L-Magenes E.

Problèmes aux limites non homogènes et applications.Vol1.Dunod Paris 1968

[22] Lions J.L - Dautray R.

Analyse mathématiques et calcul numérique pour les sciences et les techniques
serie scientifique , 3 , Masson , 1984 .

[23] Micheletti A.M.

Perturbazione dello sopetto di un opertore elliptico di tipo variazionale in
relazione ad una variazione del campo . Ricerche di matematica . Vol XXV
Fasc II .1976

[24] Raviart P.A - Thomas J.M

Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles .

Masson . Paris , Nework , Barcelone ,Milan ,Mexico, Sao palo . 1983

[25] Yoshida K.

Functional analysis . Springer Verlag 2nd Edit . 1968

[26] Zerrick E.H

Analyse régionale des systèmes distribués . These d'état , université Moulay-
Ismail . Meknes . 1993.Maroc

[27] Zerrick E. -Badraoui L.

Sensor charactersation for regional bondary observability .International
journal on applied Mathematics and Computer Science ,vol10, N°2
pp 101-112 , 2000 .

[28] Zerrick E.-El Jai A.-Simon M. and Amouroux M.

Regional observability and sensors structure .Int.J.of sensors and
actuators.Vol 19 N°2 pp 95-102 (1993)

[29] Zerrick E.-El Jai A. and Amouroux M

Regional observability of distributed systems Int.J.of systems science
Vol 25 N°2 pp 301-313 (1994)

[30] Zerrick E.-El Jai A.and Simon M.

Regional observability of thermal process .Transssactions on
automatic control .Vol 40 N°3 pp 518-521 (1995)

[31] Zerrick E. -Bouurray H. and Boutellout H.

Regional bondary observability , numerical approach .International
journal of applied Mathematics and computer science .

Vol 12 N°2 pp 143-151 (2002)

[32] Zerrick E. -Bouurray H. and El Jai A.

Regional flux reconstruction for parabolic systems

Int.J of systems sciences .Vol 34 N°12 – 13 pp 641-650 (2003)

[33] Zerrick E. -Bouurray H. and

Sensors and simulations .Sensors and actuators Journal

Vol 109 N°1 – 2 pp 34-46 (2003)

[34] ZuaZua E.

Exact contrability for semilinear wave equation.Vol 69 PP 1-31 1990.

[35] Zeidler E. Non linear functional analysis and its applications II/

A linear applied functional analysis, Spring-Verlang 1990