396

3e CYCLE
D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
No D'ORDRE : 63



# THÈSE

*présentée à*

## L'UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR

*pour l'obtention du titre de*

**DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES**

**mention : Optimisation et Méthodes variationnelles**

*par*

**Claude DELODE**

---

*CHAMPS MESURABLES D'ESPACES MÉTRIQUES ET CHAMPS SOUSLINIENS.*

*CARACTÉRISATION DES SOUS-CHAMPS EN TERME DE MULTISECTIONS MESURABLES*

Soutenue le 4 Mars 1977 devant la Commission d'examen :

M. VALADIER ............... Président

J. GENET .................... } Examinateurs
J. P. PENOT ................. }

---

3e CYCLE
D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
No D'ORDRE : 63

# THÈSE

*présentée à*

## L'UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR

*pour l'obtention du titre de*

**DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES**

**mention : Optimisation et Méthodes variationnelles**

*par*

**Claude DELODE**

---



*CHAMPS MESURABLES D'ESPACES MÉTRIQUES ET CHAMPS SOUSLINIENS.*
*CARACTÉRISATION DES SOUS-CHAMPS EN TERME DE MULTISECTIONS MESURABLES*

Soutenue le 4 Mars 1977 devant la Commission d'examen :

M. VALADIER................ Président

J. GENET.................... Examinateurs
J. P. PENOT................. Examinateurs

---

Ce fascicule regroupe deux articles concernant l'étude des champs mesurables et la caractérisation des sous-champs.

Le premier chapitre, dont la première partie a été faite en collaboration avec O. ARINO et J.P. PENOT est paru aux Annales de l'Institut Henri Poincaré en 1976. Dans cet article on définit les champs d'espaces métriques dans le cadre des espaces fibrés et on donne une caractérisation des sous-champs mesurables sous forme de multisection mesurable.

Le deuxième chapitre concerne l'étude des champs mesurables d'espaces topologiques et plus particulièrement des champs sousliniens. On obtient une caractérisation des sous-champs mesurables qui généralise en un certain sens les résultats les plus récents sur le théorème du graphe mesurable.

Je remercie Monsieur M. VALADIER qui, par ses suggestions et remarques a contribué à l'élaboration de ce travail et qui me fait l'honneur de présider le jury.

Je remercie Monsieur J.P. PENOT qui est à l'origine de ce travail et m'a dirigé avec beaucoup de patience et de gentillesse.

Je remercie Monsieur J. GENET qui a accepté de faire partie de ce jury.

Je tiens à exprimer ma gratitude à mon collègue et ami O. ARINO sans la collaboration duquel cette étude n'aurait pu être menée à terme.

Je ne saurais trop remercier Mlle ABEL qui a assuré la dactylographie et la présentation de ces pages, avec sa compétence et sa gentillesse habituelle.

## *CHAMPS MESURABLES ET MULTISECTIONS*

Pour exprimer qu'un espace $E_t$ dépend d'un paramètre $t \in T$ on a le choix entre différentes formulations. Une première possibilité consiste à considérer $E_t$ comme la valeur en $t$ d'une certaine multi-application, la régularité de la dépendance en $t$ s'exprimant par des propriétés de continuité ou de mesurabilité de la multi-application. Une seconde possibilité consiste à considérer $E_t$ comme la fibre d'un certain espace fibré $E$ au-dessus de $T$, la régularité de la dépendance en $t$ se traduisant par la nature de la fibration (et l'on sait combien ce concept revêt de parures différentes). Un cas particulier est celui où $E_t$ est indépendant de $t$ : à la multi-application constante de valeur $E_{t_o}$ correspond le fibré trivial $T \times E_{t_o} \to T$.

Dans ce travail nous introduisons la catégorie des champs mesurables séparables d'espaces métriques dans le but de considérer la théorie des multi-applications mesurables et ses applications (cf. par exemple [2], [3], [4], [9], [10], [14], [15], [16], [20], [23], [24], [29]) du point de vue des espaces fibrés. Le résultat principal qui traduit l'existence de sélections mesurables d'une multi-application à valeurs complètes dans un espace métrique séparable s'exprime (sous des conditions que nous ne précisons pas dans cette introduction) sous la forme d'une caractérisation des sous-objets d'un objet de la catégorie des champs mesurables séparables d'espaces métriques.

Notre démarche a pour intérêt de permettre l'utilisation des constructions classiques dans la théorie des espaces fibrés (produit, somme de Whitney, image réciproque...) pour les questions de sélection, d'intégrandes normales, de désintégration de mesures (seul le premier point est abordé ici). Inversement, la grande souplesse des propriétés de mesurabilité permet de conserver une structure d'espace fibré dans des situations (par exemple intersection de deux sous-fibrés d'un fibré) où une structure plus rigide serait exclue.

## *BIBLIOGRAPHIE*

[1] ARENS R.F.- EELLS J.Jr., Embedding uniform and topological spaces, Pacific J. Math 6 (1956), 203-210.

[2] AUMANN R.J., Measurable utility and measurable choice theorem, La Décision,2 Actes Colloq. Internat., Aix-en-Provence (1967) 15-26.

[3] BERLIOCCHI H.- LASRY J.M., Intégrandes normales et mesures paramétrées en calcul des variations, Bull. Soc. Math. France 101 (1973), 129-184.

[4] CASTAING Ch., Sur les multiapplications mesurables, RIRO 1ère année 1 (1967), 91-126.

[5] CHOQUET G., Outils topologiques et métriques de l'analyse mathématique, rédigé par C. Mayer C.D.U. Collection analyse fonctionnelle, Paris (1969).

[6] CHRISTENSEN, Topology and Borel structure, North Holland mathematics studies N° 10 Amsterdam (1974).

[7] DIXMIER J., Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbre de Von Neuman) Cahier scientifique-XXV, Gauthier-Villars. Paris (1969).

[8] DIXMIER-DOUADY, Champs continus d'espaces hilbertiens et de $C^*$-algèbres, Bull. Soc. Math. France 91 (1963), 227-284.

[9] HIMMELBERG C.J., Measurable relations, Fund. math. LXXXVII (1975), 55-72.

[10] HIMMELBERG C.J., VAN VLECK F.S., Some selections theorems for measurable functions, Canad.J. Math. 21 (1969), 394-399.

[11] HOFFMANN-JØRGENSEN, The theory of analytic spaces, Aarhus (1970), Various publications séries N° 10.

[12] HU S.T., Theory of retracts, Wayne state Univ. Press. Detroit (1965).

[13] KURATOWSKI K., Topology I Academic Press, London (1966).

[14] KURATOWSKI-RYLL-NARDZEWSKI, A general theorem on selectors, Bull. Soc. Pol. Sc. 13 (1965), 397-403.

[15] LEESE S.J., Multifunctions of Souslin type, Bull. Austral. Math. Soc. II (1974), 395-411.

[16] MAITRA A.-RAO B.V., Selections theorems and the reduction principle, Trans. Amer. Math. Soc. 202 (1975), 57-66.

[17] MARECHAL O., Champs mesurables d'espaces hilbertiens, Bull. Sc. Math de France, 93 (1969), 113-143.

[18] MEYER P.A., Probabilité et potentiel, Hermann, Paris (1966) et édition refondue en collaboration avec C. Dellacherie. (à paraître).

[19] PALAIS R., Homotopy theory of infinite dimensional manifolds, Topology 5 (1966), 1-16.

[20] PARTHASARATHY T., Selections theorems and their applications, Lecture notes in mathematics N° 263 Springer Verlag, Berlin, (1971).

[21] PENOT J.P., Géométrie des variétés fonctionnelles; diverses méthodes de construction de variétés d'applications, Thèse, Paris (1970).

[22] PENOT J.P., (en préparation).

[23] ROCKAFELLAR, Measurable dependence of convex sets and functions on parameters, Jour. of Math. anal. and appl. 28 (1969), 4-25.

[24] SAINTE-BEUVE M.F., On the extension of Von Neumann-Aumann's theorem, Jour. of Funct. Anal. 17 (1) (1974), 112-129.

[25] SCHAERFF H.M., On the continuity of measurable functions in neighborhood spaces, Portugaliae Mathematica, 6 (1) (1947), 33-92.

[26] SION M., Approximate continuity and differentiation, Canad. J. Math. 14 (1962), 467-475.

[27] SPZILRAJN-MERCEWSKI, O mierzalnosi i warunku Baire's, Comptes rendus du 1er Congrès de Math. des Pays Slaves, Varsovie, (1929).

[28] VALADIER M., Contribution à l'analyse convexe, Thèse, Paris, (1970).

[29] VON NEUMANN J., On rings of operators, Reduction theory, Annals of Math. 50 (1949), 401-485.

[30] WOJDYSLAWSKI M., Rétractes absolus et hyperespaces des continus, Fund. Math. 32 (1939), 184-192.

# CHAMPS MESURABLES D'ESPACES SOUSLINIENS

*On a introduit dans [1] la notion de champ mesurable d'espaces métriques, notion qui englobe le cas des champs mesurables à valeurs dans un espace polonais.*

*On traite ici le cas de champs mesurables d'espaces topologiques. Pour les champs sousliniens, on établit que les multisections mesurables ont pour image un sous-champ souslinien et qu'inversement les sous-champs sousliniens sont des images de multisections.*

*On établit une caractérisation des sous-champs sousliniens d'un champ souslinien comme image de multiapplications mesurables, généralisant ainsi les principaux résultats de [1], [4] et [5].*

## REFERENCE

(pour une bibliographie plus détaillée nous renvoyons à [1]

[1] DELODE-ARINO-PENOT : Champs mesurables et multisection, Am. Inst. Henri Poincaré, série B, vol XII, n°1, 1976, pp 11-42.

[2] DIXMIER-DOUADY : Champs continus d'espaces Hilbertiens et de $C^*$ - Algèbres. Bull. soc. Math. France, t.91, 1963, pp 227-284.

[3] HOFFMANN-JORGENSEN : The theory of analytic spaces. Aarhus 1970, Various publications séries n° 10.

[4] LEESE : Multifunctions of souslin type. Bull. Austral. Math. soc. vol.11 1974, pp 395-411.

[4'] LEESE : Multifunctions of Souslin type. Corrigendum (13) (1975) pp 159-16

[5] SAINTE-BEUVE : On the extension of Von Neuman - Auman's theorem. Jour. of Funct. Anal. t.17 (1) 1974, pp.112-129.

Vu et approuvé

PAU, le Mars 1977

Le Directeur de l'Institut

Universitaire de Recherche Scientifique

F. METRAS

Vu et permis d'imprimer

PAU, le Mars 1977

Le Président de l'Université