



N° d'ordre:  
N° de série:

Mémoire  
En vue de l'obtention du Diplôme de Magistère en  
Génie Mécanique

# **DETERMINATION DES PROPRIETES MECANIQUES DES STRUCTURES DISCRETES PAR MODELES CONTINUS**

*Présenté par : Mr LAHLAH Mahrez*

Soutenu le : 02 / 07/ 2014, devant les membres de jury suivant :

Président :	Mr.S. MEZIANI.	Prof. Uni. De Constantine.
Rapporteur :	Mr.B. NECIB.	Prof. Uni. De Constantine.
Examineurs :	Mr.Abd. MERABET.	M.c. Uni. De Constantine.
.	Mme.Z. LABED.	M.c. Uni. De Constantine.

# *Dédicace*

*Je dédie ce travail à mes chères défunts, ma mère & mon père, que dieu les accueille en son vaste paradis.*

*A ma chère femme qui m'a aidé et soutenu tout le temps.*

*A ma petite fille qui vient de fêter sa première année.*

*A ma chère famille.*

*Et A toute personne a aidé de près ou de loin à l'élaboration de ce modeste mémoire.*

# Remerciement

*J'exprime d'abord mes profonds remerciements à DIEU qui m'a donné le courage et la Volonté d'achever ce travail.*

*J'exprime aussi mes profonds remerciements à Mr NECIB brahim, professeur à la faculté des sciences, université de Constantine 1, pour sa patience, ses précieux conseils, sa grande disponibilité à l'aboutissement de ce travail, Qu'il trouve ici mes sentiments de gratitude et de déférence.*

*Je désire exprimer également ma reconnaissance à Mr MEZIANI Salim, professeur à l'université de Constantine 1, d'avoir bien accepté de présider le jury de la commission d'examen.*

*Je tiens également à remercier Mme LABED Zohra maître de conférences à l'université de Constantine 1 et Mr MERABET Abd maître de conférences à l'université de Constantine 1, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de participer à ce jury.*

*Mes sentiments de reconnaissance et de remerciements vont également à l'encontre de toute personne qui a participé de près ou de loin directement ou indirectement à la réalisation de ce travail.*

# RESUME

---

*Les structures discrètes en treillis sont d'une grande importance dans différents domaines d'applications notamment dans l'industrie mécanique, l'aéronautique et le génie civil. Leur analyse statique et dynamique est aussi importante pour leur assurer un bon dimensionnement et un bon fonctionnement. Cependant, cette analyse reste aussi complexe et coûteuse vue le nombre important d'éléments de ces structures*

*Afin de rendre l'opération plus rapide et moins coûteuse, plusieurs méthodes ont été proposées, la plus souvent utilisée consiste à modéliser ces structures discrètes par des structures continues. Cette méthode nécessite la détermination des propriétés équivalentes des modèles en considérant l'analyse d'un élément répétitif de la structure discrète. Les propriétés du modèle continu seront déterminées analytiquement et vérifiées numériquement en utilisant la méthode des éléments finis.*

*Le traitement numérique de plusieurs exemples d'application est effectué à travers le logiciel "ANSYS" pour différents cas de structures (symétrique et asymétrique), et pour différentes conditions aux limites.*

**Mots clés :** Structures, Treillis, Poutres, Rigidité, Equivalence.

# ABSTRACT

---

*The discrete lattice structures are of great importance in different fields of applications especially in the mechanical industry, aerospace and civil engineering. Their static and dynamic analysis is also important to ensure a good design and proper operation. However, this analysis is too complex and expensive for the large number of elements of these structures.*

*To make the process faster and less expensive, several methods have been proposed, the most commonly used consists on the modeling of these discrete structures by continuum models. This method requires the determination of equivalent properties of models considering the analysis of a repetitive element of the discrete structure. The properties of the continuum model will be determined analytically and verified numerically using the finite element method.*

*The numerical processing of several examples of application is made through the "ANSYS" software for different cases of structures (symmetric and asymmetric) and for different boundary conditions.*

**Keywords:** Structures, lattice, beams, strength, Equivalence

الهيكل الشبكية المنفصلة هي ذات أهمية كبيرة في مختلف المجالات التطبيقية بما في ذلك الهندسة الميكانيكية، والفضاء والهندسة المدنية. التحليل الستاتيكي و الديناميكي مهم لضمان حسن التصميم والتشغيل السليم . مع ذلك، فإن هذا التحليل هو معقد جدا ومكلف نظرا لوجود عدد كبير من العناصر في هذه الهياكل.

لجعل العملية أسرع وأقل تكلفة، عدة طرق اقترحت، الأكثر استخداما يتمثل في تمثيل الهياكل المنفصلة بهياكل مستمرة. يتطلب هذا الأسلوب تحديد الخصائص المكافئة لهذه الهياكل و هذا بتحليل العناصر المتكررة للبنية المنفصلة، وسيتم تحديد خصائص النموذج المستمر تحليليا والتحقق منه عدديا باستخدام طريقة العناصر المنتهية. المعالجة الرقمية لعدة أمثلة تطبيقية يتم من خلال برنامج "ANSYS" لحالات مختلفة من الهياكل (المتماثلة وغير المتماثلة)، وللشروط حدود مختلفة.

**الكلمات الرئيسية :** الهياكل الشبكية, الهياكل المستمرة, الصلابة, الخصائص المكافئة

---

# SOMMAIRE

---

<b>Index des Notations</b> .....	<b>8</b>
<b>Liste des Figures</b> .....	<b>11</b>
<b>Liste des Tableaux &amp; Courbes</b> .....	<b>13</b>
<b>INTRODUCTION</b> .....	<b>14</b>
<b>Chapitre I : INTRODUCTION A LA THEORIE D'ELASTICITE</b>	
<b>I.1. Introduction</b> :.....	<b>16</b>
<b>I.2. Définitions du vecteur de contrainte</b> .....	<b>16</b>
I.2.1. Etat de Contrainte Tridimensionnelle .....	17
I.2.2. Tenseur des contraintes .....	18
I.2.3. Contraintes Principales et Directions Principales des Contraintes : .....	18
<b>I.3. Etat Déformations</b> .....	<b>20</b>
I.3.1. Vecteur déplacement .....	20
I.3.2. Tenseur de déformation.....	22
I.3.2.1. Allongement unitaire ou dilatation .....	22
I.3.2.2. Glissement (déformation angulaire) .....	23
I.3.2. Déformations principales : .....	24
<b>I.3. Variation de volume</b> :.....	<b>25</b>
<b>I.4. Equation de compatibilité</b> : .....	<b>25</b>
<b>I.5. Equations d'équilibre</b> .....	<b>27</b>
I.5.1 Equation de la résultante des forces.....	27
I.5.2 Equilibre des moments.....	29
<b>I.6. Conditions aux limites (conditions à la surface)</b> :.....	<b>30</b>
<b>I.7. Loi de comportement de l'élasticité</b> :.....	<b>30</b>
<b>I.8. Interprétation physique de E et <math>\nu</math></b> .....	<b>34</b>
<b>I.9. Conservation de la masse</b> :.....	<b>35</b>
<b>I.10. Etude de la théorie d'élasticité plane</b> .....	<b>35</b>
I.10.1 Etat plan de déformation .....	35
I.10.2 Etat plan de contraintes .....	37
I.10.3 L'énergie de déformation de l'état plan de contrainte .....	38

## Chapitre II : ANALYSE DES STRUCTURES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

<b>II.1. Introduction.....</b>	<b>41</b>
<b>II.2. Procédures d'applications de la méthode des éléments finis .....</b>	<b>42</b>
<b>II.3. Formulation de la matrice de rigidité pour un élément barre .....</b>	<b>42</b>
<b>II.3.1. Dans le repère local .....</b>	<b>42</b>
<b>II.3.2. Dans le repère global .....</b>	<b>44</b>
<b>II.4. Relation entre les forces nodales et les déplacements nodaux dans le système local.....</b>	<b>46</b>
<b>II.5. Relation entre les forces nodales dans le système local et les forces nodales dans le système global .....</b>	<b>47</b>
<b>II.6. Formulation de la matrice de rigidité pour un élément poutre .....</b>	<b>48</b>
<b>II.7. Equation de rigidité d'un élément poutre avec cisaillement transversal .....</b>	<b>52</b>
<b>II.8. Principe de numérotation des nœuds d'une structure .....</b>	<b>55</b>
<b>II.9. Méthode d'assemblage .....</b>	<b>55</b>
<b>II.10. Calcul des efforts internes dans un élément barre.....</b>	<b>57</b>
<b>II.11. Programmation.....</b>	<b>59</b>
II.11.1. Etude par ordinateur .....	59
II.11.2. Entrées de données.....	60

## Chapitre III : MODELISATION DES STRUCTURES DISCRETES EN ELEMENTS CONTINUS

<b>III.1. Introduction :.....</b>	<b>62</b>
<b>III.2. Modélisation d'une structure discrète : .....</b>	<b>63</b>
III.2.1. Définition d'une poutre :.....	63
III.2.2. Le champ de déplacements :.....	65
III.2.3. Le champ de forces :.....	67
<b>III.3. Etude analytique des structures discrètes : .....</b>	<b>70</b>
III.3.1. Structure symétrique :.....	72
III.3.1.1 Cas de traction pure : .....	73
III.3.1.2 Cas de cisaillement pur :.....	74
III.3.1.3 Cas de flexion pure : .....	75
III.3.1.4 Le cas global :.....	77
III.3.2. Structure asymétrique :.....	78
III.3.2.1. Cas de traction pure : .....	79



III.3.2.2.	Cas de cisaillement pur :.....	80
III.3.2.3.	Cas de flexion pure :.....	83
III.3.2.4.	Le cas global : .....	83
<b>III.4. Détermination des résultantes des forces internes :.....</b>		<b>83</b>
III.4.1.	Structure symétrique :.....	83
III.4.2.	Structure asymétrique :.....	85
<b>III.5. Détermination des propriétés de la poutre équivalente : .....</b>		<b>85</b>
III.5.1.	Structure symétrique :.....	85
III.5.2.	Structure asymétriques : .....	86
III.5.3.	Récapitulatif des résultats .....	87
 <b>Chapitre IV : CALCUL DES STRUCTURES DISCRETES PAR ELEMENTS CONTINUS (EXEMPLES D'APPLICATIONS)</b>		
<b>IV.1. Introduction Sur ANSYS : .....</b>		<b>89</b>
<b>IV.2. Détermination des propriétés équivalentes : .....</b>		<b>90</b>
IV.2.1.	Le cas Symétrique :.....	90
IV.2.2.	Le cas Asymétrique :.....	90
IV.2.3.	Tableau des résultats :.....	91
<b>IV.3. Exemples d'applications : .....</b>		<b>92</b>
IV.3.1.	Exemple 01 : Structure sur deux appuis avec force concentrée .....	92
IV.3.2.	Comparaison des déplacements transversaux :.....	93
IV.3.2.1.	1 <sup>er</sup> cas : Structure Symétrique .....	93
IV.3.2.2.	2 <sup>ème</sup> cas : Structure Asymétrique.....	96
IV.3.3.	Exemple 02 : Structure encastree avec force concentrée.....	99
IV.3.4.	Comparaison des déplacements transversaux :.....	100
IV.3.4.1.	1 <sup>er</sup> cas : Structure Symétrique .....	100
IV.3.4.2.	2 <sup>ème</sup> cas : Structure Asymétrique.....	103
<b>IV.4. Discussion des résultats :.....</b>		<b>106</b>
<b>CONCLUSION.....</b>		<b>108</b>
<b>REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE .....</b>		<b>110</b>
<b>ANNEXES .....</b>		<b>113</b>

# Index des Notations

---

$F_i$	Système des charges extérieures [N]
$\delta_i^e$	Déplacement sous chargement extérieur [m]
$\sigma$	Système des contraintes volumiques [N/m <sup>2</sup> ]
$\varepsilon$	Les déformations internes de la structure
$\sigma_{ij}$	Tenseur de contraintes [N/m <sup>2</sup> ]
$\varepsilon_{ij}$	Tenseur de déformation
$x$	Position du point [m]
$C_{ijkl}$	Coefficients de rigidité élastique (constantes d'élasticités) [N/m <sup>2</sup> ]
$S_{ijkl}$	Coefficients de déformabilités [m <sup>2</sup> /N]
$\gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12}$	Distorsions angulaires
$x, y$ et $z$	Les trois axes du repaire
$\partial$	Dérivée partielle
$E$	Module de «Young» [N/m <sup>2</sup> ]
$\nu$	Coefficient de Poisson
$\mu$	Module d'élasticité en cisaillement [N/m <sup>2</sup> ]
$\lambda$	Représente la constante de lamé [N/m <sup>2</sup> ]
$t$	Force de surface [N]
$p$	Force de volume [N]
$ds$	Surface différentielle [m <sup>2</sup> ]
$dv$	Volume différentiel [m <sup>3</sup> ]
$\vec{n}$	Normale
$n_x, n_y, n_z$	Cosinus directeurs
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$	Composantes du tenseur contrainte [N/m <sup>2</sup> ]
$t_i$	Composantes des vecteurs forces suivant les directions spatiales [N]
$p_i$	Composantes des forces volumiques suivant les directions spatiales [N]
$\Delta x$	Longueur infinitésimale [m]
$u_1$ et $u_2$	Déplacements nodaux [m]
$u(x)$	Fonction de déplacement axiale
$f_1(x), f_2(x), f_3(x)$	Fonctions de forme
$f'_i(x)$	Dérivée première de fonction de forme
$S$	Force interne [N]
$U$	Energie de déformation [N.m]

$\frac{EA}{L}$	Rigidité axiale de la barre [N/m]
$\{F\}$	Vecteur force [N]
$\{u\}$	Vecteur déplacement [m]
$[K]$	Matrice de rigidité [N/m]
$K_{ij}$	Coefficients de la matrice de rigidité [N/m]
$\bar{x}, \bar{y}$	Cordonnées locales
$x, y$	Cordonnées globales
$\frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_2}$	Vecteur des déplacements nodaux en coordonnées locales [m]
$\theta$	Angle d'inclinaison
$\lambda$	$\cos \theta$
$\mu$	$\sin \theta$
$\{ \ }^T$	Transposé d'un vecteur
$S_{ij}$	Forces axiales [N]
$\epsilon$	Courbe
$t$	Tangente unitaire
$n$	Normale principale unitaire
$b$	Binormale unitaire
$\Omega$	Contour extérieur
$\Omega_i$	Contours intérieurs
$L, l$	Longueur [m]
$\theta = \partial v / \partial x$	Rotation de la section [rad]
$M$	Moment de flexion [Nm]
$v$	Déplacement transversal [m]
$\frac{\partial U}{\partial \delta_i^e}$	Force généralisée (force ou moment)
$\delta_i^e$	Déplacements élémentaires aux nœuds i [m]
$\begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$	Vecteur déplacement d'un élément poutre
$\begin{pmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{pmatrix}$	Vecteur force d'un élément poutre
$f_i''(x), f_j''(x)$	Dérivées secondes des fonctions formes
$\gamma$	Angle de cisaillement [rad]
$A$	Section travaillante au cisaillement [m <sup>2</sup> ]

$\xi$	Coordonnées naturelles
$N$	Forces d'extension [N]
$Q$	Forces de cisaillement [N]
$M$	Moment de flexion [N.m]
$EA$	Rigidités longitudinales [N]
$EI$	Rigidité transversale [N.m <sup>2</sup> ]
$GA$	Rigidité de cisaillement [N]
$u$	Déplacement longitudinale [m]
$w$	Déplacement transversal [m]
$\Psi$	Rotation de la section transversale [rad]
$\gamma$	Angle de cisaillement [rad]
$G_0$	Centre de gravité
$\vec{x}, \vec{y}$	Vecteurs unitaires suivants les directions $x, y$ respectivement
$G$	Module de Coulomb [N/m <sup>2</sup> ]
$\eta_{12}, \eta_{13}, \eta_{23}$	Coefficients de couplage
$L_i$	Longueur du membre « $i$ » [m]
$\varepsilon_i^t$	Déformations dans le cas de traction pure
$\varepsilon_i^s$	Déformations dans le cas de cisaillement pur
$\varepsilon_i^b$	Déformations dans le cas de flexion pure
$S_i^t$	Effort interne dans le cas de traction pure
$S_i^s$	Effort interne dans le cas de cisaillement pur
$S_i^b$	Effort interne dans le cas de flexion pure

# Liste des Figures

---

Numéro	Intitulé	Page
Figure I-1	Corps de volume $V$ , facette $ds$ et normale $\vec{n}$	16
Figure I-2	Composante d'un vecteur de contrainte	17
Figure I-3	Vecteur de contraintes sur trois facettes orthogonales	17
Figure I-4	Composantes du tenseur des contraintes	18
Figure I-5	Déplacement d'un point du solide	20
Figure I-6	Déplacement d'un point du solide	23
Figure I-7	Déformation angulaire	23
Figure I-8	Parallélépipède en équilibre	27
Figure I-9	Partielibre $S_\xi$ et partie appuyée $S_T$ de la surface $S$	30
Figure I-10	Cas de l'état plan de déformation	36
Figure I-11	L'état plan de contrainte	37
Figure II-1	Élément barre	42
Figure II-2	Élément barre dans le repère global (déplacements)	45
Figure II-3	Élément barre dans le repère global (forces appliquées)	45
Figure II-4	Élément poutre de section droite uniforme	48
Figure II-5	Système de coordonnées naturelles	53
Figure II-6	Structure à étudier	56
Figure II-7	Élément ressort	57
Figure II-8	Élément barre	58
Figure III-1	Effort appliqué sur tronçon d'une poutre	62
Figure III-2	Le trièdre de « Fresnet » en un point de la ligne moyenne	64
Figure III-3	Déformation d'une poutre	65
Figure III-4	Efforts extérieurs agissant sur un élément de poutre	67
Figure III-5	Cellule d'une structure treillis symétrique composée de six barres	72

<b>Figure III-5.1</b>	<i>Cas de traction pure d'une structure symétrique</i>	<b>73</b>
<b>Figure III-5.2</b>	<i>Cas de cisaillement pur d'une structure symétrique</i>	<b>74</b>
<b>Figure III-5.3</b>	<i>Cas de flexion pure d'une structure symétrique</i>	<b>76</b>
<b>Figure III-6</b>	<i>Cellule d'une structure treillis asymétrique composée de cinq barres</i>	<b>78</b>
<b>Figure III-6.1</b>	<i>Cas de traction pure d'une structure asymétrique</i>	<b>79</b>
<b>Figure III-6.2</b>	<i>Cas de cisaillement pur d'une structure asymétrique</i>	<b>80</b>
<b>Figure III-6.3</b>	<i>Cas de flexion pure d'une structure symétrique</i>	<b>83</b>
<b>Figure III-7</b>	<i>Efforts internes dans les membres d'une structure symétrique</i>	<b>84</b>
<b>Figure IV-1</b>	<i>Résultats de la simulation sur ANSYS (Treillis, 1<sup>ier</sup> exemple, cas symétrique)</i>	<b>94</b>
<b>Figure IV-2</b>	<i>Résultats de la simulation sur ANSYS (poutre, 1<sup>ier</sup> exemple, cas symétrique)</i>	<b>95</b>
<b>Figure IV-3</b>	<i>Résultats de la simulation sur ANSYS (Treillis, 1<sup>ier</sup> exemple, cas asymétrique)</i>	<b>97</b>
<b>Figure IV-4</b>	<i>Résultats de la simulation sur ANSYS (poutre, 1<sup>ier</sup> exemple, cas asymétrique)</i>	<b>98</b>
<b>Figure IV-5</b>	<i>Résultats de la simulation sur ANSYS (Treillis, 2<sup>ème</sup> exemple, cas sym)</i>	<b>101</b>
<b>Figure IV-6</b>	<i>Résultats de la simulation sur ANSYS (poutre, 2<sup>ème</sup> exemple, cas sym)</i>	<b>102</b>
<b>Figure IV-7</b>	<i>Résultats de la simulation sur ANSYS (Treillis, 2<sup>ème</sup> exemple, cas asym)</i>	<b>104</b>
<b>Figure IV-8</b>	<i>Résultats de la simulation sur ANSYS (poutre, 2<sup>ème</sup> exemple, cas asym)</i>	<b>105</b>

# Liste des Tableaux & Courbes

---

<b>Numéro</b>	<b>Intitulé</b>	<b>Page</b>
<b>Tableau III-1</b>	<i>Propriétés matérielles et géométriques de la structure symétrique</i>	<b>72</b>
<b>Tableau III-2</b>	<i>Propriétés physiques et géométriques de la structure asymétrique</i>	<b>79</b>
<b>Tableau III-3</b>	<i>Récapitulatif des propriétés équivalentes</i>	<b>87</b>
<b>Tableau IV-1</b>	<i>Valeurs numériques des propriétés équivalentes</i>	<b>91</b>
<b>Tableau IV-2</b>	<i>Comparaison des déplacements pour structure symétrique (1<sup>ier</sup> cas de chargement)</i>	<b>93</b>
<b>Tableau IV-3</b>	<i>Comparaison des déplacements pour structure asymétrique (1<sup>ier</sup> cas de chargement)</i>	<b>96</b>
<b>Tableau IV-4</b>	<i>Comparaison des déplacements pour structure symétrique (2<sup>ème</sup> cas de chargement)</i>	<b>100</b>
<b>Tableau IV-5</b>	<i>Comparaison des déplacements pour structure asymétrique (2<sup>ème</sup> cas de chargement)</i>	<b>103</b>
<b>Courbe IV-1</b>	<i>Courbe de comparaison pour structure symétrique (1<sup>er</sup> cas de chargement)</i>	<b>93</b>
<b>Courbe IV-2</b>	<i>Courbe de comparaison pour structure asymétrique (1<sup>er</sup> cas de chargement)</i>	<b>96</b>
<b>Courbe IV-3</b>	<i>Courbe de comparaison pour structure symétrique (2<sup>ème</sup> cas de chargement)</i>	<b>100</b>
<b>Courbe IV-4</b>	<i>Courbe de comparaison pour structure asymétrique (2<sup>ème</sup> cas de chargement)</i>	<b>103</b>

## INTRODUCTION

La méthode des éléments fins est habituellement utilisée pour l'analyse des structures discrètes. En effet, le nombre d'éléments de ces structures est très important, ce qui rend l'utilisation de cette méthode très coûteuse et prend un temps d'exécution considérable. Afin de rendre l'opération moins coûteuse et plus rapide, plusieurs méthodes ont été proposées, la méthode la plus souvent utilisée consiste à modéliser ces structures discrètes par des modèles continus.

L'approche continue d'une structure en forme treillis remplacée par une poutre ou une plaque de propriétés équivalentes a été trouvée très efficace dans l'analyse du comportement statique et dynamique des grandes structures discrètes. Pour construire le modèle continu équivalent à la structure originale, il faut d'abord que les propriétés mécaniques et physiques soient déterminées en premier lieu.

La méthode est basée sur l'application de l'épreuve statique à une cellule isolée de la structure originale, ainsi et par analogie en utilisant les équations "force-déplacement" on peut prédire des propriétés équivalentes.

Notre travail présente toutes les étapes nécessaires pour déterminer les propriétés du modèle continu équivalent d'une structure en treillis et ce en utilisant les formules analytiques adéquates.

Ce mémoire est organisé en quatre chapitres. Le premier a été réservé aux différentes lois et conditions de base qui règlent la théorie de l'élasticité et qui doivent être vérifiées avant toute application. Le deuxième chapitre aborde la méthode des éléments finis et cite les principales étapes nécessaires pour obtenir l'équation de rigidité élémentaire. Dans le chapitre trois, on aborde les procédures analytiques permettant la constitution des modèles continus de la structure discrète. Le dernier chapitre est consacré à des exemples d'applications ainsi que la vérification de l'exactitude des modèles obtenus par analyse numérique et l'utilisation du logiciel ANSYS.



***CHAPITRE I***  
***INTRODUCTION A LA THEORIE***  
***D'ELASTICITE***

## I.1. Introduction :

L'utilisation de la méthode des éléments finis pour l'analyse des problèmes statique et dynamique nécessite la connaissance des équations de base de la théorie de l'élasticité linéaire. Dans ce chapitre, on présente les relations entre contraintes et les déformations dans le cas tridimensionnel. De ce cas général, dérive le cas particulier de l'élasticité plane (état plan de contrainte et état plan de déformation).

## I.2. Définitions du vecteur de contrainte

Considérons un corps de volume  $V$  où sont appliquées des efforts extérieurs ( $T$ ), en chaque point  $M$  d'un solide, il existe des forces intérieures que l'on met en évidence en effectuant une coupure du solide, suivant la surface  $S$ , en deux parties  $A$  et  $B$  (figure I-1).

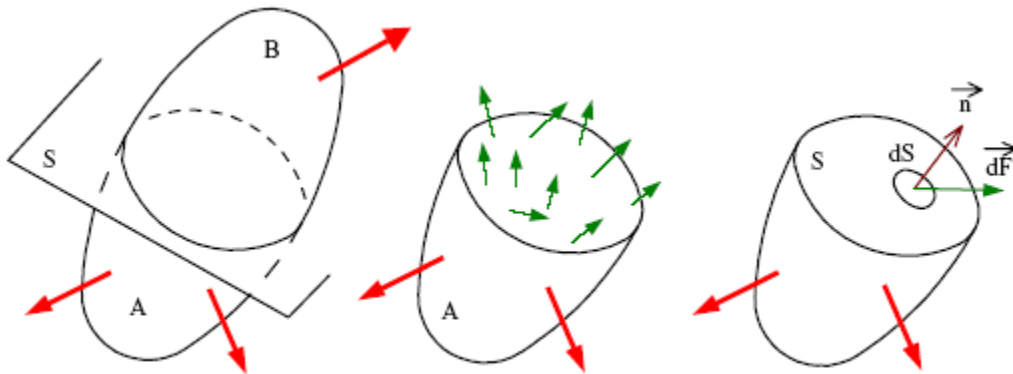


Figure I-1 : Corps de volume  $V$ , facette  $ds$  et normale  $\vec{n}$

La partie  $A$  du corps, est en équilibre sous l'action des forces extérieures ( $T$ ) qui lui sont directement appliquées et des forces intérieures réparties sur la coupure.

Soit  $dS$  un élément infinitésimal de la surface  $S$ , entourant un point  $M$  et  $\vec{n}$  le vecteur unitaire, perpendiculaire à  $dS$  et dirigé vers l'extérieur de la partie  $A$ , c'est-à-dire la facette  $\vec{n}$  en  $M$  de cet élément de surface aussi. Soit  $dF$  la force qui s'exerce sur cette facette. On appelle  $\vec{\sigma}(M, \vec{n})$  le vecteur de contrainte en  $M$  et dans la direction  $\vec{n}$ , définit par :

$$\vec{\sigma}(M, \vec{n}) = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}}{dS} \quad (I-1)$$

Ce vecteur contrainte peut être décomposé en une composante suivant  $\vec{n}$  et une projection sur la facette figure (I-2) :

$$\vec{\sigma}(M, \vec{n}) = \sigma \vec{n} + \vec{\tau} \quad (I-2)$$

Où  $\sigma$  est la contrainte normale et  $\tau$  est le vecteur cisaillement.

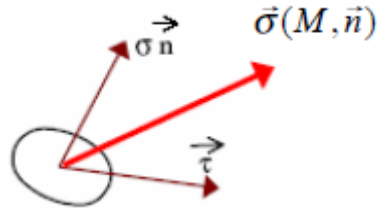


Figure I-2 : Composante d'un vecteur de contrainte

Il est à noter que quand s est une valeur algébrique positive c'est traction et quand elle a une valeur négative c'est une compression.

**I.2.1. Etat de Contrainte Tridimensionnelle**

Les vecteurs unitaires (X, Y, Z) associés au repère orthonormé {O, x y z} définissent en un point M du solide trois facettes perpendiculaires entre elles figure (I-3).

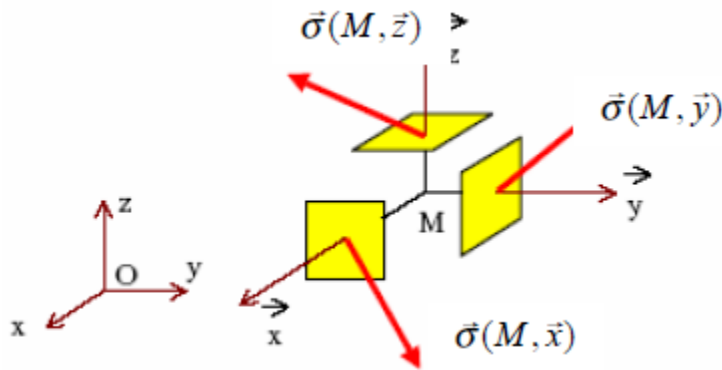
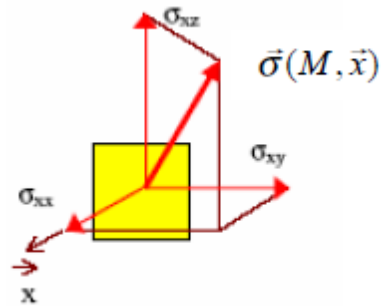


Figure I-3 : Vecteur de contraintes sur trois facettes orthogonales

Les contraintes qui s'exercent sur chacune de ces faces sont définies par leurs composantes dans le repère {O, x y z} :

$$\begin{cases} \text{facette } \vec{X} : \vec{\sigma}(M, \vec{X}) = \sigma_{xx}\vec{X} + \sigma_{xy}\vec{Y} + \sigma_{xz}\vec{Z} \\ \text{facette } \vec{Y} : \vec{\sigma}(M, \vec{Y}) = \sigma_{yx}\vec{X} + \sigma_{yy}\vec{Y} + \sigma_{yz}\vec{Z} \\ \text{facette } \vec{Z} : \vec{\sigma}(M, \vec{Z}) = \sigma_{zx}\vec{X} + \sigma_{zy}\vec{Y} + \sigma_{zz}\vec{Z} \end{cases} \dots\dots\dots (I-3)$$



**Remarque** : sur la facette X, la contrainte normale est égale à :

$$\sigma = \vec{X} \cdot \vec{\sigma}(M, \vec{X}) = \sigma_{xx} \dots\dots\dots (I-4)$$

Le vecteur de cisaillement est égal à :

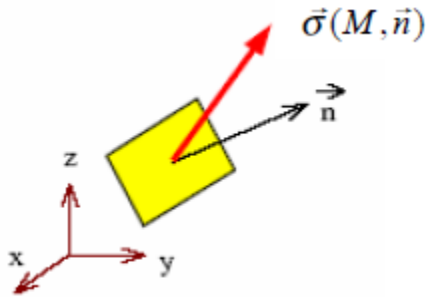
$$\vec{\tau} = \sigma_{xy}\vec{Y} + \sigma_{xz}\vec{Z} \dots\dots\dots (I-5)$$

**I.2.2. Tenseur des contraintes**

Considérons la facette  $\vec{n}$  en M. Soit a, b et c les cosinus directeurs de  $\vec{n}$ .

La contrainte sur la facette  $\vec{n}$  est égale à :

$$\vec{\sigma}(M, \vec{n}) = a\vec{\sigma}(M, \vec{X}) + b\vec{\sigma}(M, \vec{Y}) + c\vec{\sigma}(M, \vec{Z}) = \sigma(M)\vec{n} \quad \dots\dots (I-6)$$



Sous forme matricielle :

$$[\vec{\sigma}(M, \vec{n})] = [\sigma(M)][n] \quad \dots\dots\dots (I-7)$$

où  $[\sigma(M)]$ , appelé tenseur des contraintes en M, a pour expression :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(I-8)$$

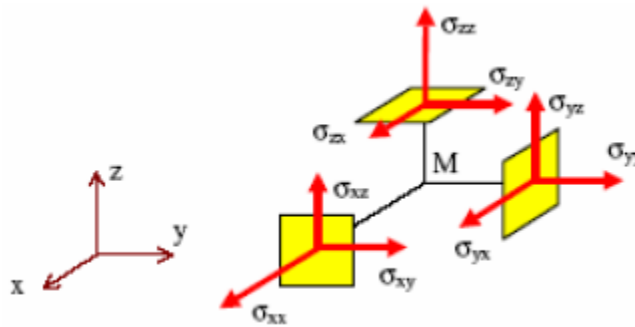


Figure I-4 : Composantes du tenseur des contraintes

**I.2.3. Contraintes Principales et Directions Principales des Contraintes:**

Soit  $\sigma_{ij}$  tenseur contraintes en un point, il permet de déterminer les vecteurs de contraintes pour toutes les facettes, de normale unitaire extérieure  $\vec{n}$ , passant par ce point, par la relation :

$$T_{\vec{n}} = \sigma_{ij} X_{ij} \quad \dots\dots\dots (I-9)$$

On obtient également les contraintes normales pour toutes les facettes:

$$\sigma = \vec{T} \vec{n} = T_i X_i = \sigma_{ij} X_j X_j \dots\dots\dots (I-10)$$

Avec  $X_j X_j =$  cosinus directeur.

S'il existe des vecteurs  $\vec{n}$ , tels que leur produit par un tenseur  $[\sigma]$  leur soient colinéaires c'est-à-dire tels que l'on ait :

$$\sigma_{ij} x_j = \lambda x_i \quad \text{et } \lambda: \text{ valeur scalaire } \dots\dots\dots (I-11)$$

On peut donc rechercher s'il existe des facettes soumises à des contraintes purement normales, c'est -à-dire telle que :

$$T_i = \sigma_{ij} X_j = \lambda X_j \quad \dots\dots\dots (I-12)$$

A l'aide de la règle de substitution d'un indice attaché au symbole de Kronecker, on peut mettre les inconnues  $X_i$  en évidence; on a d'abord :

$$\sigma_{ij} x_j - \lambda \delta_{ij} x_i = 0 \quad \dots\dots\dots (I-13)$$

$$(\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}) x_j = 0 \quad \dots\dots\dots (I-14)$$

Ces conditions sont trois équations linaires et homogènes.

$$\begin{cases} (\sigma_{11}-\lambda)x_1+(\sigma_{12}-\lambda)x_2 + (\sigma_{13}-\lambda)x_3=0 \\ (\sigma_{21}-\lambda)x_1+(\sigma_{22}-\lambda)x_2 + (\sigma_{23}-\lambda)x_3=0 \\ (\sigma_{31}-\lambda)x_1+(\sigma_{32}-\lambda)x_2 + (\sigma_{33}-\lambda)x_3=0 \end{cases} \dots\dots\dots (I-15)$$

La solution non triviale est obtenue en résolvant l'équation caractéristique du degré 3  $\det |\sigma - \lambda I|$ . L'équation caractéristique d'un tenseur d'ordre 2 est une équation cubique en  $\lambda$  qu'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 \quad \dots\dots\dots (I-16)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} I_1 = \text{Tr}(\sigma) \\ I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{13} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \\ I_2 = \frac{1}{2} (\sigma_{ii} \sigma_{jj} - \sigma_{ij} \sigma_{ji}) \\ I_2 = \frac{1}{2} [(\text{Tr} \sigma)^2 - \text{Tr}(\sigma^2)] \\ I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \det[\sigma] \end{cases} \dots\dots\dots (I-17)$$

Dont les solutions sont les trois contraintes principales  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$  et les coefficients  $I_1, I_2, I_3$  les invariants élémentaires du tenseur  $\sigma$ . Où  $(\sigma_{ij})$  représente les composantes du tenseur dans une base R orthonormé mais non nécessairement principale, le symbole désigne le tenseur du second ordre.

En remplaçant  $\lambda$  par  $\sigma_I$  dans (I-15), on obtient un système homogène permettant de trouver les trois composantes  $x_I$  de la première direction principale à un facteur près. Ce facteur se détermine ensuite par la condition suivante :

$$x_{I1}x_{I1} = x_{I1}^2 + x_{I2}^2 + x_{I3}^2 \dots\dots\dots(I-18)$$

On procède de même avec  $\sigma_{II}, \sigma_{III}$

**I.3. Etat Déformations**

Sous l'action des forces extérieures, le solide se déforme. Il en résulte pour tous les points du solide un déplacement que nous supposons petit.

**I.3.1. Vecteur déplacement**

Soient  $\{O, x, y, z\}$  un repère orthonormé et M un point du solide. Au cours de la mise en charge, le point M vient en M' figure (I-5). On appelle vecteur déplacement du point M le vecteur  $dO\vec{M} = M\vec{M}' \dots\dots\dots(I-19)$

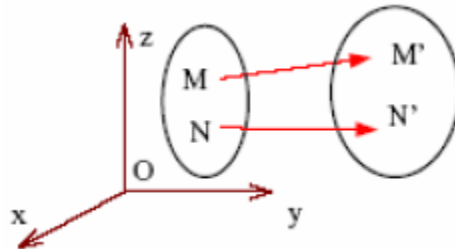


Figure I-5 : Déplacement d'un point du solide

Nous noterons ses composantes :

$$\begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix} \dots\dots\dots(I-20)$$

Soient N un point du solide voisin de M:

$$M\vec{N} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} \dots\dots\dots(I-21)$$

Au cours de la mise en charge N vient en N' .

Le déplacement du point N est égal à :

$$\begin{aligned}
 d\vec{ON} = \vec{NN'} &= \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z \\ \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \Delta z \\ \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z \end{bmatrix} \dots\dots\dots (I-22) \\
 &= \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta w \end{bmatrix} = d\vec{OM} + [D]\vec{MN}
 \end{aligned}$$

n décomposant la matrice [D] en sa partie symétrique

$$[E] = \frac{1}{2} ([D] + [D]^T) \dots\dots\dots (I-23)$$

Et sa partie Antisymétrique

$$[\Omega] = \frac{1}{2} ([D] - [D]^T) \dots\dots\dots (I-24)$$

On peut écrire :

$$d\vec{ON} = d\vec{OM} + [\Omega]\vec{MN} + [E]\vec{MN} \dots\dots\dots (I-25)$$

Avec

$$[E] = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \text{ et } [\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (I-26)$$

Où l'on a posé :

$$\epsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial z} \dots\dots\dots (I-27)$$

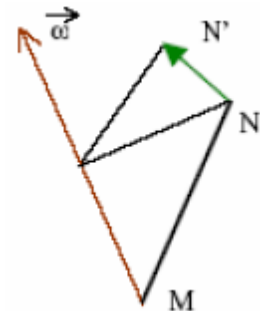
$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \epsilon_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \epsilon_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \dots\dots\dots (I-28)$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \omega_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \omega_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \dots\dots (I-29)$$

Le déplacement du point N

$$d\vec{ON} = d\vec{OM} + \vec{w} \wedge \vec{MN} + [E]\vec{MN} \dots\dots\dots (I-30)$$

s'écrit finalement, Si  $[\Omega]$  et  $[E]$  sont nuls, le déplacement de N se réduit à  $d\vec{ON} = d\vec{OM}$  et tous les points situés au voisinage de M subissent la même translation.



Si  $d\vec{OM}$  et  $[E]$  sont nuls le déplacement de N se réduit à :  $d\vec{ON} = \vec{w} \wedge \vec{MN}$

Si de plus  $\omega = \|\vec{w}\|$  est petit (les dérivées du vecteur déplacement sont petites), tous les points situés au voisinage de M subissent une rotation  $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot}(d\vec{OM})$  d'intensité  $\omega$  autour de l'axe dont l'origine est situé en M.

La matrice  $[E]$  qui représente les déformations du solide en M est appelée tenseur des déformations.

### I.3.2. Tenseur de déformation

#### I.3.2.1. Allongement unitaire ou dilatation

Considérons deux points M et N du solide voisins l'un de l'autre. Au cours de la mise en charge, le point M vient en M' et le point N en N' figure (I-6). Soit  $\vec{n}$  le vecteur unitaire lié à la direction MN. On appelle allongement unitaire en M dans la direction  $\vec{n}$  la quantité :

$$\epsilon(M, \vec{n}) = \lim_{N \rightarrow M} \frac{M'N' - MN}{MN} \dots\dots\dots (I-31)$$

Soient a, b, c les composantes de  $\vec{n}$  et l la longueur de la fibre MN d'où :

$$\vec{MN} = l\vec{n} = l \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = l[\mathbf{n}]$$



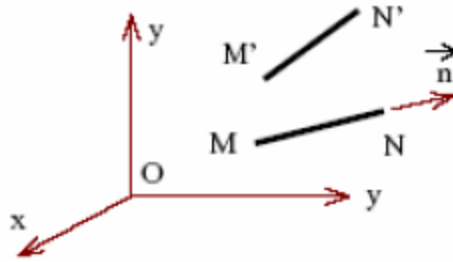


Figure I-6 : Déplacement d'un point du solide

Evaluons la quantité  $dMN^2$ :

$$dMN^2 = d(\overline{MN} \cdot \overline{MN}) \dots\dots\dots (I-32)$$

$$= 2\overline{MN} \cdot d\overline{MN} = 2l^2 [n]^T [E][n]$$

D'autre part :

$$dMN^2 = dl^2 \dots\dots\dots (I-33)$$

$$= 2l dl = 2l^2 \varepsilon(M, \vec{n})$$

On obtient finalement :

$$\varepsilon(M, \vec{n}) = [n]^T [E][n] = a^2 \varepsilon_1 + b^2 \varepsilon_2 + c^2 \varepsilon_3 + 2ab \varepsilon_{12} + 2ac \varepsilon_{13} + 2bc \varepsilon_{23} \dots (I-34)$$

Remarque : si  $\vec{n} = \vec{X}$ , on obtient :  $\varepsilon(M, \vec{X}) = \varepsilon_1$ . De même :  $\varepsilon(M, \vec{Y}) = \varepsilon_2$  Et  $\varepsilon(M, \vec{Z}) = \varepsilon_3$ .  
 Les quantités  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  représentent donc respectivement l'allongement unitaire en M dans les directions  $\vec{X}, \vec{Y}$  et  $\vec{Z}$ .

**I.3.2.2. Glissement (déformation angulaire)**

Soient deux points  $N_1$  et  $N_2$  voisins de M et tels que les directions  $MN_1$  et  $MN_2$  soient orthogonales. Soient  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  les vecteurs unitaires associés à ces deux directions. Au cours de la mise en charge les points M,  $N_1$  et  $N_2$  viennent respectivement en  $M', N'_1$  et  $N'_2$ . Soit  $\alpha$  l'angle que font entre eux les deux vecteurs  $MN'_1$  et  $MN'_2$ . fig (I-7)

On appelle glissement en M dans les directions  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$ , la quantité :

$$\gamma(M, \vec{n}_1, \vec{n}_2) = \lim_{\substack{N_1 \rightarrow N \\ N_2 \rightarrow N}} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \dots\dots (I-35)$$

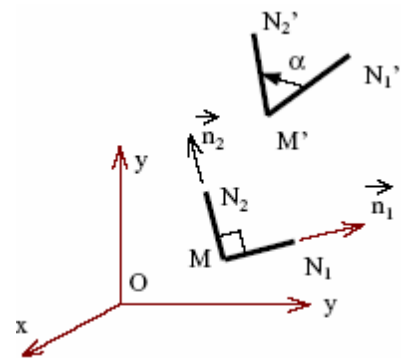


Figure I-7 : Déformation angulaire

Posons :

$$MN_1=l_1, \quad MN_2=l_2, \quad \vec{n}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (I-36)$$

On a donc :

$$\overrightarrow{MN_1} = l_1 \vec{n}_1 = l_1 \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{MN_2} = l_2 \vec{n}_2 = l_2 \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (I-37)$$

Soit  $\varphi$  l'angle que font entre eux les vecteurs  $\overrightarrow{MN_1}$  et  $\overrightarrow{MN_2}$ .

Evaluons la quantité  $d(\overrightarrow{MN_1}, \overrightarrow{MN_2})$  :

$$\begin{aligned} d(\overrightarrow{MN_1}, \overrightarrow{MN_2}) &= d(l_1 l_2 \cos \varphi) \\ &= d(l_1 l_2) \cos \varphi - l_1 l_2 \sin \varphi d\varphi = -l_1 l_2 \gamma(M, \vec{n}_1, \vec{n}_2) \quad \text{car } \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \dots (I-38) \end{aligned}$$

D'autre part :

$$d(\overrightarrow{MN_1}, \overrightarrow{MN_2}) = d\overrightarrow{MN_1} \cdot \overrightarrow{MN_2} + \overrightarrow{MN_1} \cdot d\overrightarrow{MN_2} = 2l_1 l_2 [\mathbf{n}_1]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{n}_2] \quad \dots (I-39)$$

On déduit :  $\gamma(M, \vec{n}_1, \vec{n}_2) = 2[\mathbf{n}_1]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{n}_2] \quad \dots (I-40)$

Soit :

$$\gamma(M, \vec{n}_1, \vec{n}_2) = 2[a_1 a_2 \varepsilon_{11} + b_1 b_2 \varepsilon_{22} + c_1 c_2 \varepsilon_{33} + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \varepsilon_{12} + (a_2 b_3 + a_3 b_2) \varepsilon_{23} + (a_3 b_1 + a_1 b_3) \varepsilon_{13}] \dots\dots\dots (I-41)$$

Remarque:  $\sin_1 = \vec{X}$  et  $n_2 = \vec{Y}$ , l'expression ci-dessus se réduit à :

$$\gamma(M, \vec{X}, \vec{Y}) = \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$$

De même  $\gamma(M, \vec{X}, \vec{Z}) = \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13}$  et  $\gamma(M, \vec{Y}, \vec{Z}) = \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23}$ .

Les quantités  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{13}$  et  $\gamma_{14}$  représentent donc respectivement le glissement en M dans les directions  $(\vec{X}, \vec{Y})$ ,  $(\vec{X}, \vec{Z})$  et  $(\vec{Y}, \vec{Z})$

**I.3.2. Déformations principales :**

L'analyse faite sur le tenseur des contraintes pour déterminer les contraintes principales peut être faite de façon analogue pour déterminer les déformations principales. Le tenseur  $[\varepsilon_{ij}]$  étant un tenseur symétrique du second ordre, il a trois déformations principales dans le repère principale, le tenseur des déformations principales s'écrit simplement:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (I-42)$$

D'après la signification dégagée plus haut des composantes  $[\varepsilon]$ , il ressort que les déformations principales représentent les dilatations linéaires dans les directions principales. Les directions principales ne subissent aucune distorsion, les plans principaux restent orthogonaux après déformation.

### I.3. Variation de volume :

On se place dans le repère principal; Considérons un parallélépipède élémentaire construit sur 3 vecteurs élémentaires parallèles aux axes propres. Après déformation on obtient :

$$\begin{aligned} dx'_1 &= (1 + \varepsilon_1) dx_1 \\ dx'_2 &= (1 + \varepsilon_2) dx_2 \quad \dots\dots\dots (I-43) \\ dx'_3 &= (1 + \varepsilon_3) dx_3 \end{aligned}$$

Le nouveau volume  $dV'$  après déformation est donné par:

$$dV' = dx'_1 dx'_2 dx'_3$$

La variation relative de volume est :

$$\theta = \frac{dV' - dV}{dV} = \frac{(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) dx_1 dx_2 dx_3 - dx_1 dx_2 dx_3}{dx_1 dx_2 dx_3} \quad \dots\dots\dots (I-44)$$

$$\theta = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) - 1 \quad \dots\dots\dots (I-45)$$

En ne tenant compte que des termes du premier ordre :

$$\begin{aligned} \theta &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \text{Trace} = \text{div } \vec{U} \quad \dots\dots\dots (I-46) \\ \theta &= \varepsilon_{kk} = \text{div } \vec{U} \end{aligned}$$

Rapportée à des axes quelconques, la dilatation est donnée par:

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_{ii} = \text{div } \vec{U}$$

Il est clair que ce résultat est indépendant de la forme de l'élément de volume considéré, demême que du système d'axes choisi :

La trace de tenseur  $\varepsilon_{ii}$  se conserve lors d'un changement d'axes.

### I.4. Equation de compatibilité :

En général, Il n'est pas possible, d'imposer à un solide déformable, un champ de déformation arbitraire, fut-il continu et indéfiniment dérivable, sans détruire la cohésion de la matière (vides et recouvrements). Pour que cette cohésion soit

respecte (c-à-d pour que les volumes élémentaires ; auxquels ont été appliquées les déformations  $\epsilon_{ij}$ , continuent de rester accolés), il faut que le champ de déformation  $\epsilon_{ij}(M)$  dérive d'un champ de déplacement  $u_i(M)$ , continûment dérivable, tel que  $\epsilon_{ij}$  puisse s'écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \frac{\partial}{\partial x_i} u_j \\ \epsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} u_j \right) \end{aligned} \right. \dots\dots\dots(1-47)$$

Donc, connaissant le champ de déplacement  $u_i(M)$ , on en déduit par (1-47) le champ de déformation  $\epsilon_{ij}(M)$ . Réciproquement, si on connaît le champ des déformations  $\epsilon_{ij}(M)$ , peut-on calculer le champ de déplacements  $u_i(M)$ . Le premier problème est celui de la compatibilité des déformations, le second celui de l'intégration d'un champ de déplacement.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \epsilon_{ii} &= \frac{\partial^3}{\partial x_j^2 \partial x_i} u_i \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \epsilon_{jj} &= \frac{\partial^3}{\partial x_i^2 \partial x_j} u_j \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \epsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j^2} u_i + \frac{\partial^3}{\partial x_i^2 \partial x_j} u_j \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \epsilon_{ii} + \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \epsilon_{jj} = 2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \epsilon_{ij} \quad (1-48)$$

Il y'a 3 équations, avec: (i, j = 1, 2,3 et i≠j).

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \frac{\partial}{\partial x_i} u_j \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \epsilon_{ii} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} u_i \\ \epsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} u_j \right) \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} u_i + \frac{\partial^3}{\partial x_i^2 \partial x_k} u_j \right) \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \epsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} u_i + \frac{\partial^3}{\partial x_i^2 \partial x_j} u_k \right) \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \epsilon_{jk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_k^2} u_j + \frac{\partial^3}{\partial x_i^2 \partial x_j} u_k \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \epsilon_{ii} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} \epsilon_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \epsilon_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i} \epsilon_{jk} \right] \dots\dots\dots(1-49)$$

En définitif, il y a 6 équations de Saint Venant. Si le champ de déformation n'obéit pas à ces équations de compatibilité, alors le matériau va réagir (apparition de fissures dans le domaine plastique...).

### I.5. Equations d'équilibre

Considérons que les contraintes varient d'un point à un autre, les forces à appliquer sur chaque face du cube pour le maintenir déformé et immobile ont une résultante nulle et un moment résultant nul.

#### I.5.1 Equation de la résultante des forces

Pour simplifier l'écriture (et les calculs), faisant passer les axes par le point M figure (I-8)

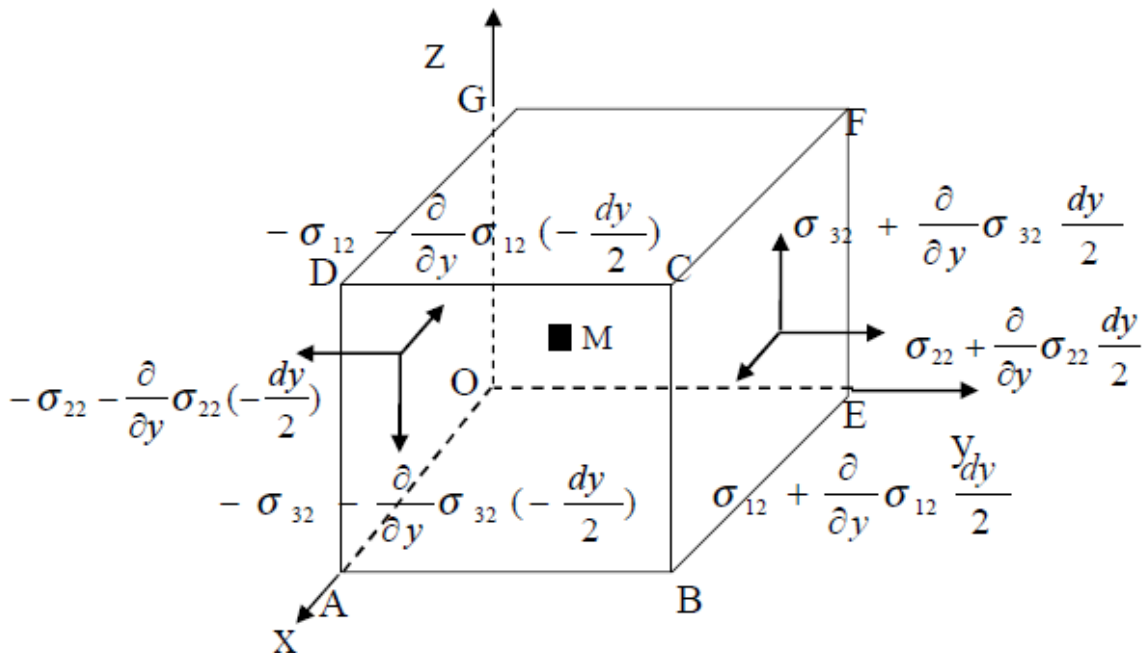


Figure I-8 : Parallélépipède en équilibre

Les forces qui s'exercent sur les faces du cube ABCDOEFG sont les suivantes

Les deux faces perpendiculaires à OX

$$\begin{array}{l}
 \text{ABCD} \left\{ \begin{array}{l} \left( \sigma_{21} + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{21} \frac{dx}{2} \right) dydz \\ \left( \sigma_{11} + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{11} \frac{dx}{2} \right) dydz \\ \left( \sigma_{31} + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{31} \frac{dx}{2} \right) dydz \end{array} \right. \quad \text{OEFG} \left\{ \begin{array}{l} \left( -\sigma_{21} - \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{21} \left( -\frac{dx}{2} \right) \right) dydz \\ \left( -\sigma_{11} - \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{11} \left( -\frac{dx}{2} \right) \right) dydz \\ \left( -\sigma_{31} - \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{31} \left( -\frac{dx}{2} \right) \right) dydz \end{array} \right.
 \end{array}$$

Les deux faces perpendiculaires à OY :

$$\text{BCEF} \begin{cases} \left( \sigma_{12} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{12} \frac{dy}{2} \right) dx dz \\ \left( \sigma_{22} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{22} \frac{dy}{2} \right) dx dz \\ \left( \sigma_{32} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{32} \frac{dy}{2} \right) dx dz \end{cases} \quad \text{OADG} \begin{cases} \left( -\sigma_{12} - \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{12} \left(-\frac{dy}{2}\right) \right) dx dz \\ \left( -\sigma_{22} - \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{11} \left(-\frac{dy}{2}\right) \right) dx dz \\ \left( -\sigma_{32} - \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{31} \left(-\frac{dy}{2}\right) \right) dx dz \end{cases}$$

Les deux forces perpendiculaires à OZ :

$$\text{CDFG} \begin{cases} \left( \sigma_{13} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{13} \frac{dz}{2} \right) dx dy \\ \left( \sigma_{33} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{33} \frac{dz}{2} \right) dx dy \\ \left( \sigma_{23} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{23} \frac{dz}{2} \right) dx dy \end{cases} \quad \text{OABE} \begin{cases} \left( -\sigma_{13} - \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{13} \left(-\frac{dz}{2}\right) \right) dx dy \\ \left( -\sigma_{33} - \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{331} \left(-\frac{dz}{2}\right) \right) dx dy \\ \left( -\sigma_{23} - \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{23} \left(-\frac{dz}{2}\right) \right) dx dy \end{cases}$$

Les équations d'équilibre sont donc, sur chaque axe :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{11} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{12} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{13} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{21} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{22} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{23} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{31} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{32} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{33} = 0 \end{cases} \quad \text{Avec } dx dy dz \neq 0 \quad \dots\dots\dots (I-50)$$

En posant  $x=x_1, y=x_2, z=x_3$  on peut généraliser en écrivant la condition d'équilibre :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \dots\dots\dots (I-51)$$

- En faisant intervenir : - Les forces de volume  $\vec{F} \, dx dy dz$   
 - Les forces d'inertie  $-\rho \vec{\gamma} \, dx dy dz$

Avec  $\vec{\gamma}$  : Accélération  
 $\rho$  : Masse volumique.

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + F_i - \rho \gamma_i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \dots\dots\dots (I-52)$$

C'est l'équation fondamentale qui relie les variantes spatiales des contraintes dans un corps aux accélérations des éléments de volume. Dans le cas où le corps est en équilibre statique, l'équation (I-52) prend la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + F_i = 0 \quad \dots\dots\dots (I-53)$$

**I.5.2 Equilibre des moments**

On ne tient compte, dans l'équilibre des moments que des termes d'ordre 3. Donc, on peut négliger les forces de volume et d'inertie.

Nous supposons que la résultante des forces normales aux faces passe exactement par le milieu des faces, ce qui nous permet de ne pas tenir compte des composantes normales  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{33}$ .

Les axes passant toujours par le point M, écrivons les équations du mouvement dans le cas d'une rotation de l'élément autour de  $M_x$ . Le couple dû aux composantes de cisaillement des contraintes sur les faces perpendiculaires à  $M_y$  et  $M_z$  est :

$$\begin{aligned} \text{Surface BCEF} & \quad \left( \sigma_{32} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{32} \frac{dy}{2} \right) dx dz \frac{dy}{2} \\ \text{Surface AOGD} & \quad \left( \sigma_{32} - \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{32} \left( -\frac{dy}{2} \right) \right) dx dz \frac{dy}{2} \\ \text{Surface CDFG} & \quad - \left( \sigma_{23} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{23} \frac{dz}{2} \right) dx dy \frac{dz}{2} \\ \text{Surface OABE} & \quad - \left( \sigma_{23} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{23} \left( -\frac{dz}{2} \right) \right) dx dy \frac{dz}{2} \end{aligned}$$

On obtient alors simplement, la composante du moment résultant :

- Suivant  $M_x$  :  $(\sigma_{32} dx dz) dy - (\sigma_{23} dy dx) dz = 0$
- Suivant  $M_y$  :  $(\sigma_{13} dx dy) dz - (\sigma_{31} dy dz) dx = 0$
- Suivant  $M_z$  :  $(\sigma_{21} dy dz) dx - (\sigma_{12} dx dz) dy = 0$

Soit :

$$\begin{cases} \sigma_{32} = \sigma_{23} \\ \sigma_{13} = \sigma_{31} \\ \sigma_{21} = \sigma_{12} \end{cases} \quad \text{Où } \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \forall i \text{ et } j \quad \dots\dots\dots (I-54)$$

Par conséquent, le tenseur des contraintes est un tenseur symétrique du 2ème ordre (en l'absence de champs moments, par exemple : pas d'action magnétique). Dans le cas contraire, le tenseur des contraintes n'est pas symétrique.

$$\text{Conditions d'équilibre : } \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + f_i = 0 \\ \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \end{cases} \quad \dots\dots (I-55)$$

### I.6. Conditions aux limites (conditions à la surface) :

La surface limitant le solide étudié peut généralement être divisée en deux parties, une partie  $S_T$  dite libre, où agissent les tractions de surface, et l'autre  $S_\xi$  dite appuyée, où agissent le déplacement imposés figure (I-9).

Sur la section  $S_T$  les tractions de surface  $T_d$  sont équivalentes aux forces internes on a donc :

$$\sigma(x).n(x) = T_d(x) \quad (x \in S_T) \quad \dots\dots\dots (I-56)$$

Ces équations expriment les conditions statiques de la surface ; ce sont en fait les conditions aux limites de caractère statique (c'est-à-dire relatif aux forces et contraintes).

Les conditions cinématiques à la surface portent ordinairement sur les déplacements et non sur les déformations. Elles correspondent aux conditions d'appui usuelles sur  $S_\xi$  . Si les quantités  $\xi_d(x)$  sont imposées (donc connues), ces conditions s'énoncent simplement comme suite :

$$\xi(x) = \xi_d(x) \quad (x \in S_\xi) \quad \dots\dots\dots (I-57)$$

Pour lesquelles il est nécessaire que les surfaces  $S_\xi$  et  $S_T$  forment une partition de  $\partial V$  :

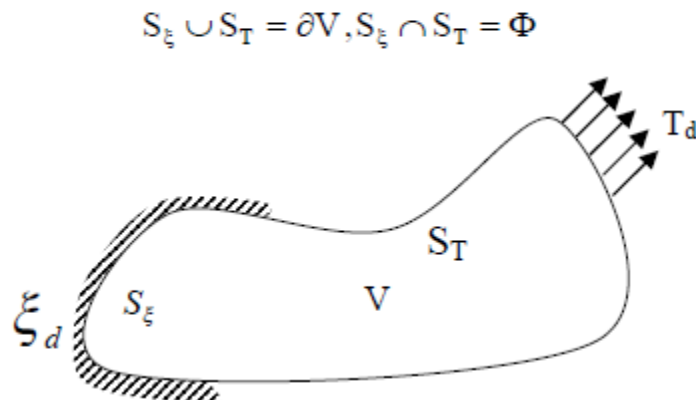


Figure I-9 : Partie libre  $S_\xi$  et partie appuyée  $S_T$  de la surface  $S$

### I.7. Loi de comportement de l'élasticité :

Les équations générales introduites jusqu'à présent qui sont (équations d'équilibre pour les contraintes, équations de compatibilité pour les déformations, conditions aux limites) ne suffisent pas pour résoudre un problème particulier de mécanique de milieux continus, il reste encore à caractériser le comportement mécanique du matériau étudié, par des relations physiques entre contraintes et déformations (ou des quantités qui leur sont dérivées).



Nous nous limiterons, à titre d'exemple, d'établir les équations de comportement de l'élasticité « linéaire » en « petites déformations » pour un milieu isotrope, et à partir d'un état initial naturel.

On considère comme solide isotope, un échantillon métallique à grains fins et orientés dans toutes les directions avec la même probabilité. Donc dans un solide isotope, toutes les directions sont propres et après une déformation, les directions propres sont les mêmes pour les contraintes et les déformations.

Supposons qu'à partir d'un état initial naturel ait été imposée une certaine déformation  $[\varepsilon]$ .

L'isotropie initiale est détruite, mais toutes les grandeurs physiques liées à la déformation ont maintenant même plans de symétrie que les déformations. C'est en particulier le cas de contraintes  $[\sigma]$  qui ont les mêmes directions principales que les déformations.

La relation entre les contraintes principales et les déformations principales étant, d'après la loi de Hooke, linéaire et homogène, soit :

$$\sigma_i = \lambda_{ij} \varepsilon_j \quad \text{avec } i=j=1,2,3. \quad \dots\dots\dots (I-58)$$

A cause de l'isotropie initiale, il faut que les termes diagonaux de cette matrice  $\lambda_{ij}$  soit égaux, et également que les termes non diagonaux soient égaux entre eux. Par suite  $\lambda_{ij}$  à la forme :

$$[\lambda_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des coefficients d'élasticité, caractéristique du matériau étudié, Homogènes à des contraintes.

$$\begin{cases} \sigma_1 = \alpha \varepsilon_1 + \beta(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) = (\alpha - \beta)\varepsilon_1 + \beta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\ \sigma_2 = \alpha \varepsilon_2 + \beta(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) = (\alpha - \beta)\varepsilon_2 + \beta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\ \sigma_3 = \alpha \varepsilon_3 + \beta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = (\alpha - \beta)\varepsilon_3 + \beta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (I-59)$$

On a vu que :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 &= \theta \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 &= 3\varepsilon_m \end{aligned}$$

En posant :

$$\begin{aligned} \beta &= \lambda \\ \alpha - \beta &= 2\mu \end{aligned}$$

$\lambda$  et  $\mu$  sont appelés coefficient d'élasticité de LAME. Il vient :

$$\sigma_1 = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_1 = 3\lambda\varepsilon_m + 2\mu\varepsilon_1 \quad \dots\dots\dots (I-60)$$

$$\sigma_2 = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_2 = 3\lambda\varepsilon_m + 2\mu\varepsilon_2$$

$$\sigma_3 = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_3 = 3\lambda\varepsilon_m + 2\mu\varepsilon_3$$

pour parvenir à une relation entre  $[\varepsilon]$  et  $[\sigma]$  dans un repère quelconque, il suffit de remarquer que la contrainte moyenne (invariante) est donnée par :

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \quad \dots\dots\dots (I-61)$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3}[(3 \times 3\lambda\varepsilon_m) + (3 \times 2\mu\varepsilon_m)]$$

$$\sigma_m = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_m$$

Où  $\varepsilon_m$  est également invariante.

Les valeurs propres des déviateurs sont donc :

$$\begin{aligned} s_1 &= \sigma_1 - \sigma_m \\ &= (2\mu\varepsilon_1 + 3\lambda\varepsilon_m) - (\varepsilon_m [3\lambda + 2\mu]) \\ &= 2\mu\varepsilon_1 - 2\mu\varepsilon_m \\ &= 2\mu(\varepsilon_1 - \varepsilon_m) \\ &= 2\mu e_1 \end{aligned}$$

De la même manière on trouve :

$$\begin{cases} s_1 = 2\mu e_1 \\ s_2 = 2\mu e_2 \\ s_3 = 2\mu e_3 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (I-62)$$

Puisque  $[s]$  et  $[e]$  ont même directions propres, on peut les écrire sous forme tensorielle :

$$[s] = 2\mu [e] \quad \dots\dots\dots (I-63)$$

Ou pour les composantes :

$$s_{ij} = 2\mu e_{ij} \quad \dots\dots\dots (I-64)$$

Les relations entre  $\sigma_m$  et  $\varepsilon_m$  et entre  $[s]$  et  $[e]$  peuvent alors être combinées :

$$\begin{aligned}
 [\sigma] &= [s] + \sigma_m [\delta] \\
 &= 2\mu [e] + (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_m [\delta] \\
 &= 2\lambda\varepsilon_m [\delta] + 2\mu \{ [e] + \varepsilon_m [\delta] \}
 \end{aligned}$$

or :  $[\varepsilon] = [e] + \varepsilon_m [\delta]$

donc  $[\sigma] = 3\lambda\varepsilon_m [\delta] + 2\mu [\varepsilon]$

ou bien  $[\sigma] = \lambda\theta [\delta] + 2\mu [\varepsilon]$

Ou pour les composantes :

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \dots\dots\dots (I-65)$$

Ou encore :  $\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \dots\dots\dots (I-66)$

On peut également définir :

- Le module de compressibilité isotherme :

$$K = -v \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T$$

Pour une pression initiale nulle :

$$K = -\frac{p}{\Delta v} = \frac{\sigma_m}{\theta} = \frac{\sigma_m}{3\varepsilon_m} = \frac{\sigma_m}{\sigma_{kk}} = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \dots\dots\dots (I-67)$$

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

- Le coefficient de compressibilité isotherme :

$$\chi = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \dots\dots\dots (I-68)$$

$$\chi = \frac{1}{p} \frac{\Delta v}{v} = \frac{3\varepsilon_m}{\sigma_m}$$

$$\chi = \frac{3}{3\lambda + 2\mu}$$

Des considérations précédentes peuvent être tirées les relations donnant  $[\varepsilon]$  en fonction de

$[\sigma]$ :

$$[\varepsilon] = [e] + \varepsilon_m [\delta]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\mu} [\sigma] + \frac{\sigma_m}{3\lambda + 2\mu} [\delta] \\
 &= \frac{1}{2\mu} \{[\sigma] - \sigma_m [\delta]\} + \frac{\sigma_m}{3\lambda + 2\mu} [\delta] \\
 [\varepsilon] &= \frac{1}{2\mu} [\sigma] + \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{kk} [\delta] \quad \dots\dots\dots (I-69)
 \end{aligned}$$

Ou pour les composantes :

$$2\mu\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad \dots\dots\dots (I-70)$$

Il est commode d'introduire d'autres coefficients tels que : E (module de Young) et ν (coefficient de Poisson, sans dimension) que l'on peut mesurer directement lors d'une expérience.

La formule (70) sera :  $\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad \dots\dots\dots (I-71)$

### I.8. Interprétation physique de E et ν

En élasticité , on préfère utiliser le module d'Young E et le coefficient de poisson à la place des coefficients de Lamé λ et μ proposés en mécanique des milieux continus, car ils ont une interprétation physique dans l'essai de traction.

Supposons que la température du matériau soit la même à l'état initial et à l'état final. On a donc  $T - T_0 = 0$

Dans la zone centrale d' une éprouvette en traction, le tenseur des contraintes est sensiblement uniaxial et uniforme, c' est à dire que :  $\sigma = s u \otimes u \dots (I-72)$

Où u est un vecteur unitaire dans la direction de la traction, et s un scalaire constant dans la zone centrale.

Dans une base orthonormée dont le premier vecteur de base est u, les composantes de sont :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La contrainte dans la direction u est  $C_u = \sigma \otimes u = su$ . Elle est colinéaire à u, Il s'agit donc d'une contrainte uniquement normale. La contrainte normale dans la direction u est donc :

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E} s u \otimes u - \frac{\nu}{E} s \quad \dots\dots\dots (I-73)$$

Les composantes de  $\epsilon$  dans la même base sont donc :

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \frac{s}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{s}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \frac{s}{E} \end{bmatrix}$$

L'allongement relatif dans la direction  $u$  est :  $u \otimes \epsilon \otimes u = \frac{s}{E}$

L'allongement relatif dans toute direction  $v$  orthogonale à  $u$  est :  $v \otimes \epsilon \otimes v = -\nu \frac{s}{E}$

Young  $E$  est donc le coefficient de proportionnalité entre la contrainte normale dans la direction  $u$  et l'allongement relatif dans cette même direction.

$$u \otimes \sigma \otimes u = E u \otimes \epsilon \otimes u \quad \dots\dots\dots(1-74)$$

Le coefficient de poisson  $\nu$  traduit le rapport entre l'allongement relatif transversal (direction  $v$ ) et l'allongement relatif longitudinal (dans la direction  $u$ ) :

$$v \otimes \epsilon \otimes v = -\nu u \otimes \epsilon \otimes u$$

On verra plus loin que le coefficient de poisson  $\nu$  est positif. Si l'allongement relatif dans la direction  $u$  est  $> 0$  (extension), alors l'allongement relatif dans la direction  $v$  est  $< 0$  (Contraction) ; est inversement.

Dans un essai de traction,  $s = F/S$  où  $F$  est l'effort de traction (indiqué par un dynamomètre sur la machine) et  $S$  est la section de l'éprouvette. On connaît donc facilement la contrainte  $s$ . Les allongements relatifs dans les directions  $u$  et  $v$  sont mesurés avec des extensomètres placés dans les bonnes directions.

**I.9. Conservation de la masse :**

La masse d'une particule de masse  $dm$  ne change pas. On a donc :

$$\rho_0 dv_0 = \rho_t dv_t = 1 + Tr \epsilon \quad \dots\dots\dots(1-75)$$

Cette équation donne la variation de la masse volumique en fonction du tenseur des petites déformations. Elle est de peu d'intérêt pratique en élasticité, car la variation de la masse volumique d'un solide déformable est une information secondaire.

**I.10. Etude de la théorie d'élasticité plane**

**I.10.1 Etat plan de déformation**

On peut dire qu'on est en présence d'un problème de déformation plane lorsqu'on a un corps dont l'une des dimensions est très importante par rapport aux deux autres (Figure I-10).

Un tel problème est défini par :

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y) \\ \vartheta &= \vartheta(x, y) \\ w &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1-76)$$

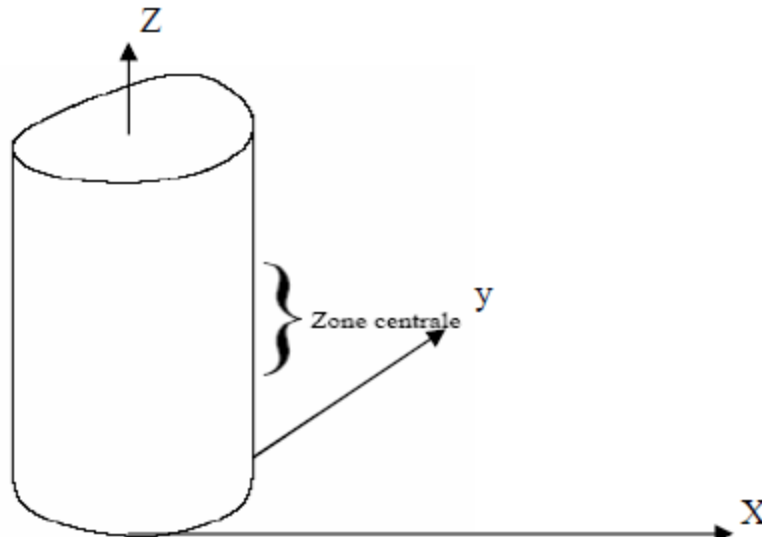


Figure I-10 : Cas de l'état plan de déformation

Les relations entre les déformations et les déplacements sont :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \\ \epsilon_x &= \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1-77)$$

Les contraintes agissant sur un tel corps sont obtenues à partir des équations (69).

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G\epsilon_x + \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y) \\ \sigma_y &= 2G\epsilon_y + \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y) \\ \sigma_z &= \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1-78)$$

Et les équations d'équilibre seront :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} + z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (I-79)$$

**I.10.2 Etat plan de contraintes**

Contrairement à la condition de déformation plane, qui stipule que la dimension longitudinale dans la direction z est importante par rapport aux dimensions suivant x et y ; la condition de contrainte plane est caractérisée par le fait que la dimension suivant la direction z est très petite par rapport aux deux autres (figure I-11).

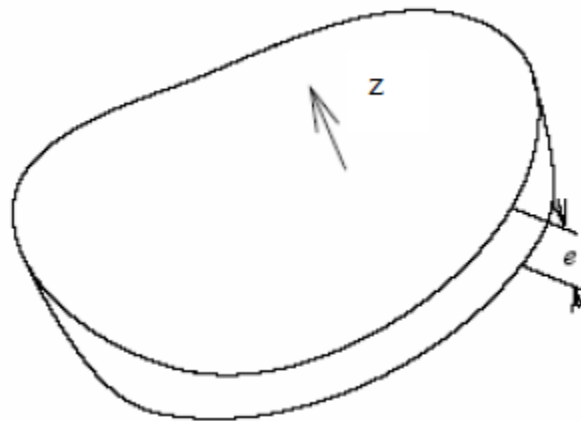


Figure I-11 : L'état plan de contrainte

Dans ce cas les contraintes sont de la forme :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x(x, y) \\ \sigma_y &= \sigma_y(x, y) \\ \sigma_z &= \sigma_z(x, y) \\ \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} &= 0 \end{aligned}$$

Les équations d'équilibre sont alors :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + y &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (I-80)$$

D'autre part les relations entre les déformations et les contraintes seront :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x) \\ \varepsilon_x &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (I-81)$$

Et

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu \cdot \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu \cdot \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G \cdot \gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (I-82)$$

Cependant les relations entre les déplacements et les déformations seront :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (I-83)$$

En substituant les équations (I-83) dans les relations (I-82) on obtiendra :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \tau_{xy} &= G \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (I-84)$$

**I.10.3 L'énergie de déformation de l'état plan de contrainte**

L'expression de l'énergie de déformation dans l'état de contrainte tridimensionnel peut être écrite sous la forme.

$$U = \frac{1}{2} \int_v \{\varepsilon\}^t \{\sigma\} dv \quad \dots\dots\dots (I-85)$$



où  $\sigma$  est le vecteur pour les six composants de contrainte et  $\varepsilon$  contient les six composants correspondants de déformation.

De loi de Hooke, l'énergie de déformation peut être exprimée en fonction de contrainte.

$$U = \int_v \left[ \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right] dv \quad \dots\dots\dots(1-86)$$

Dans le cas de l'état plan de contrainte on a :  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ , l'équation (1-86) devient :

$$U = \int_v \left[ \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2) \right] dv \quad \dots\dots\dots(1-87)$$

En utilisant l'équation contrainte-déformation (1-82) et puis en employant l'équation déformation -déplacement (1-83), cela donne :

$$U = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_A \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2\nu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] t dA \quad \dots(1-88)$$

Ce qui peut aisément être employé pour la dérivation de la matrice de rigidité pour le modèle d'élément fini de déplacement de l'état plan de contrainte. Comme sera expliqué dans la matrice de rigidité de l'état plan de contrainte est simplement convertible en matrice de rigidité de l'état plan de déformation.

***CHAPITRE II***  
***ANALYSE DES STRUCTURES PAR LA METHODES***  
***DES ELEMENTS FINIS***

## II.1. Introduction

L'évolution actuelle de la technologie amène l'ingénieur à réaliser des projets de plus en plus complexes. Pour dominer ces projets, il a besoin de modèles qui lui permettent de simuler le comportement des systèmes physiques complexes. Il peut ainsi prévoir l'influence de ses décisions au moment de la conception du système.

Les sciences de l'ingénieur tel que mécanique des solides, des fluides, thermique ... permettent de décrire le comportement du système physique grâce à des équations aux dérivées partielles. La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées pour résoudre effectivement ces équations. Elle nécessite l'utilisation intensive de l'ordinateur.

La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques. Elle fait appel aux trois domaines suivants :

- Science de l'ingénieur pour construire les équations décrivant le comportement du système physique.
- Méthode numérique pour construire et résoudre les équations algébriques.
- Programmation informatique pour exécuter efficacement les calculs sur ordinateurs.

Depuis quelques années la mécanique des structures permet l'analyse des assemblages de barres et de poutres, le comportement de chaque élément barre ou de poutre est représenté par une matrice de rigidité élémentaire construite grâce aux hypothèses de la résistance des matériaux. À partir des équations des matrices élémentaires nous construisons un système d'équation algébrique en utilisant des conditions de déplacements et d'équilibre des forces aux points de jonctions des éléments dits nœuds.

La résolution du système d'équation correspondant à des sollicitations données conduit aux déplacements de tous les nœuds de la structure.

La méthode des éléments finis est maintenant très répandue dans les industries en particulier en construction aéronautique, aérospatiales, navale et nucléaire. Elle se développe en ce moment dans les applications de la mécanique des fluides. De nombreux programmes généraux de calcul sont disponibles pour utiliser industriellement la méthode des éléments finis principalement dans le domaine de la mécanique des solides. Ces programmes généraux sont conçus pour être exécutés sur de gros ordinateurs. Une nouvelle génération des programmes plus modulaires est adoptée aux mini-ordinateurs va permettre l'utilisation des éléments finis par les entreprises et bureaux d'études de taille réduite et il existe quelques programmes qui permettent de résoudre des problèmes de dimensions moyennes sur les micro-ordinateurs.

## II.2. Procédures d'applications de la méthode des éléments finis

Il est utile de noter les étapes de l'analyse par éléments finis, puisqu'elles restent généralement les mêmes quel que soit le problème et le type d'éléments utilisés. On commence essentiellement par l'identification du type du problème, et choisir en suite un système de coordonnées convenable.

- **Etape1** : noter les structures avec les numéros de nœuds(1),(2),(3)...etc., et Des numéros d'éléments[1],[2],[3]....,etc.
- **Etape2** : former les matrices de rigidité des éléments $[K_e]$
- **Etape3** : assembler la matrice de rigidité de la structure $[K]$  à partir des matrices de rigidité des éléments indépendants $[K_e]$
- **Etape4** : appliquer les conditions aux limites.
- **Etape5** : résolution du système des équations $\{F\}=[K]\{\delta\}$ pour obtenir les déplacements et ; si nécessaire, les réactions.
- **Etape6** : utiliser les relations entre forces et déplacements pour obtenir les forces dans l'élément.

Nous allons nous intéressés dans ce chapitre de l'élément barres et poutre seulement, puisque les structures que nous allons étudier sont des structures composés par des éléments barres et poutre.

## II.3. Formulation de la matrice de rigidité pour un élément barre

### II.3.1. Dans le repère local

Pour déterminer la matrice de rigidité élémentaire d'un élément barre dans le repère local on suppose que l'élément résiste qu'à des efforts axiaux (traction ou compression), et se déforme suivant la direction axiale (déformation linéaire suivant  $x$ ).

Considérons Un membre ayant comme axe longitudinal  $ox$ . ( $ox$  est orienté suivant la longueur de l'élément étudié), de section transversale  $A$ , de longueur  $L$  et du matériau ayant un module d'élasticité longitudinal  $E$ . Figure II-1.



**Figure II-1:** Elément barre.

On considère que chaque nœud de cet élément possède un seul degré de liberté qui est le déplacement axial, donc :

-Le nœud  $i$  se déplace de la quantité  $U_i$

-Le nœud  $j$  se déplace de la quantité  $U_j$

On suppose la variation de déplacement  $U(x)$  à l'intérieur de l'élément est linéaire,

Donc il peut s'écrire sous la forme:

$$U(x) = A + Bx \dots \dots \dots (II-1)$$

Où : A et B sont des constantes à déterminer des conditions aux limites. On a :

Pour :  $x=0 \rightarrow U(x) = U(0) = U_i$

$x=L \rightarrow U(x) = U(L) = U_j$

De l'équation(1) on a :  $U(0) = A$   
 $U(L) = A + B.L$

Donc :  $A = U_i$        $A + B.L = U_j \Rightarrow U_i + B.L = U_j$       d'où:  $B = \frac{(U_j - U_i)}{L}$

Donc l'équation(1) devient :

$$U(x) = U_i + \left[ \frac{(U_j - U_i)}{L} \right] . x ; 0 \leq x \leq L$$

$$U(x) = \left( \frac{1-x}{L} \right) U_i + \left( \frac{x}{L} \right) U_j \dots \dots \dots (II-2)$$

Sous forme matricielle :

$$U(x) = \left[ \left( \frac{1-x}{L} \right) \quad \frac{x}{L} \right] \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix}$$

Sous forme abrégée on a :

$$U(x) = [N] \{U^e\} \dots \dots \dots (II-3)$$

$[N] = \left[ \frac{1-x}{L} \quad \frac{x}{L} \right]$  : représente la matrice de la fonction d'interpolation.

$\{U^e\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix}$  : représente le vecteur de déplacement des nœuds de l'élément étudié.

D'après la théorie d'élasticité on peut écrire :

$$\epsilon = \frac{dU(x)}{dx} \dots \dots \dots (II-4)$$

Où  $\epsilon$  la déformation longitudinale suivant l'axe  $x$ .

Donc en appliquant l'expression (II-4) sur l'équation (II-2) on aura :

$$\epsilon = \left( \frac{-1}{L} \right) U_i + \left( \frac{1}{L} \right) U_j$$

Sous forme matricielle :  $\epsilon = \left[ \frac{-1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix}$

Sous forme abrégé :  $\epsilon = [B] \{U^e\} \dots \dots \dots (II-5)$

$$D'o\grave{u} [B] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix}$$

La relation entre les contraintes internes de l'élément étudié et déformation est définie par la loi de HOOKE comme suit:  $\sigma = E\varepsilon$

Sous forme matricielle on a :  $[\sigma] = [D]\{\varepsilon\}$ , avec :

-  $[D] = E$ , matrice d'élasticité (contient les propriétés élastiques de l'élément).

-  $[\sigma]$ : le vecteur des contraintes ;

$$On\ a : [K^e] = \int [B]^T [D] [B] dv \dots \dots \dots (II-6).$$

Pour notre cas (II - 6) devient :

$$[K^e] = \int_v \begin{bmatrix} -1 \\ L \\ 1 \\ L \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} dv .$$

$dv = a.dx$  (La section transversale  $A$  est constante le long de l'élément).

Donc :

$$[K^e] = E.A \int_0^L \begin{bmatrix} -1 \\ L \\ 1 \\ L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} dx \Rightarrow [K^e] = E.A \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ L^2 & L^2 \\ -1 & 1 \\ L^2 & L^2 \end{bmatrix} \int_0^L dx$$

Donc :

$$[K^e] = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (II - 7).$$

(II-7) : est la matrice de rigidité de l'élément barre dans les coordonnées locales.

$EA/L$  : La rigidité axiale de l'élément étudié.

### II.3.2. Dans le repère global

La matrice de rigidité (II-7) est écrite dans les coordonnées de la barre (locales).

Cependant, il faut tenir compte du fait que les structures sont habituellement formées par des ensembles de membres (barres) faisant des angles entre eux.

Pour déterminer la matrice de rigidité de la structure complète, il est nécessaire d'écrire celle de chaque élément dans le système globale de coordonnées adopté pour toute la structure et non dans celui de cet élément; Par la suite on utilise la convention de signe de la figure II-2. On notera que l'angle  $\theta$  est positif quand il est mesuré dans le sens horaire à partir de l'axe des  $x$ .

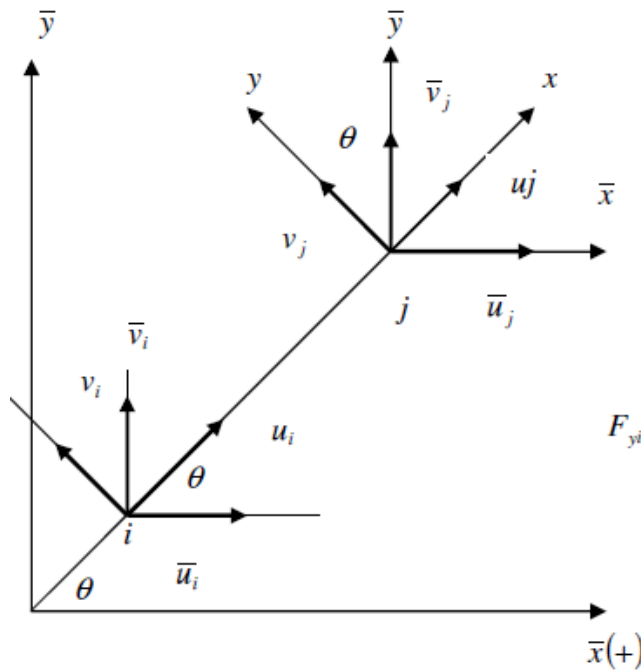


Figure II-2

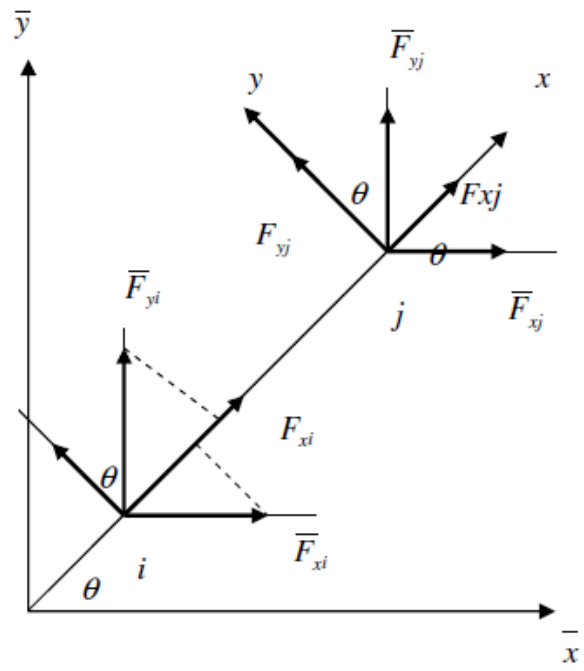


Figure II-3

Elément barre dans le repère global.

Dans la figure II-3, l'élément articulé  $ij$  est incliné d'un angle  $\theta$  dans le système global  $(o, x, y)$ , représente le système local de l'élément.

$(o, \bar{x}, \bar{y})$  Représente le système global de l'élément.

En général :

$F_x, F_y$  : sont les forces appliquées aux nœuds  $i, j$  suivant les axes  $x, y$  respectivement.

$\bar{F}_x, \bar{F}_y$  : sont les forces appliquées aux nœuds  $i, j$  suivant les axes  $\bar{x}, \bar{y}$  respectivement.

$U, V$  : sont les déplacements dus aux forces  $F_x, F_y$  respectivement dans le système local.

$\bar{U}, \bar{V}$  : sont les déplacements dus aux forces  $\bar{F}_x, \bar{F}_y$  respectivement dans le système global.

## II.4. Relation entre les forces nodales et les déplacements nodaux dans le système local

D'après (II-7) on a :

$$[K^e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \{F^e\} = [K^e] \{U^e\} \text{ donc}$$

$$\begin{bmatrix} Fx_i \\ Fy_j \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \end{bmatrix} \text{ donc : } \begin{cases} Fx_i = \left(\frac{EA}{L}\right)U_i - \left(\frac{EA}{L}\right)U_j \\ Fy_j = \left(\frac{EA}{L}\right)U_i + \left(\frac{EA}{L}\right)U_j \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} Fx_i = \left(\frac{EA}{L}\right)U_i + 0V_i - \left(\frac{EA}{L}\right)U_j + 0V_j \\ Fy_j = 0U_i + 0V_i + 0U_j + 0V_j = 0 \\ Fx_j = -\left(\frac{EA}{L}\right)U_i + 0V_i + \left(\frac{EA}{L}\right)U_j + 0V_j \\ Fy_j = 0U_i + 0V_i + 0U_j + 0V_j = 0 \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} Fx_i \\ Fy_i \\ Fx_j \\ Fy_j \end{bmatrix} = EA/L \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{bmatrix}$$

Sous forme abrégée :  $\{F^e\} = [K^e] \{U^e\}$  .....(II-8).



## II.5. Relation entre les forces nodales dans le système local et les forces nodales dans le système global

De la figure II-3, on fait les projections nécessaires sur x et y on aura:

$$\begin{cases} F_{xi} = \bar{F}_{xi} \cos\theta + \bar{F}_{yi} \sin\theta \\ F_{yi} = -\bar{F}_{xi} \sin\theta + \bar{F}_{yi} \cos\theta \\ F_{xj} = \bar{F}_{xj} \cos\theta + \bar{F}_{yj} \sin\theta \\ F_{yj} = -\bar{F}_{xj} \sin\theta + \bar{F}_{yj} \cos\theta \end{cases}$$

Sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{F}_{yi} \\ \bar{F}_{xj} \\ \bar{F}_{yj} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(II-9).$$

On pose:  $\lambda = \cos\theta$ ,  $\mu = \sin\theta$ , alors (II-9) devient :

$$\begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{F}_{yi} \\ \bar{F}_{xj} \\ \bar{F}_{yj} \end{bmatrix}$$

D'où :  $[\bar{K}_e] = [T]^T [K^e] [T]$  : la matrice de rigidité de la barre étudiée dans le repère global.

$$[\bar{K}_e] = EA/L \begin{bmatrix} \lambda & -\mu & 0 & 0 \\ \mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -\mu \\ 0 & 0 & \mu & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & \lambda \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}_e] = EA/L \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -\lambda & 0 \\ \mu & 0 & -\mu & 0 \\ -\lambda & 0 & \lambda & 0 \\ -\mu & 0 & \mu & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & \lambda \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}_e] = EA/L \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & -\lambda^2 & -\lambda\mu \\ \lambda\mu & \mu^2 & -\lambda\mu & -\mu^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 & \lambda\mu \\ -\lambda\mu & -\mu^2 & \lambda\mu & \mu^2 \end{bmatrix}$$

On remarque que  $[\bar{K}_e]$  la matrice de rigidité de l'élément étudié dans le repère global est une matrice symétrique comportant quatre sous matrice  $[K_o]$ .

$$[\bar{K}_e] = EA/L \begin{bmatrix} K_o & K_o \\ K_o & K_o \end{bmatrix} \text{ D'où : } [K_o] = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu \\ \lambda\mu & \mu^2 \end{bmatrix}.$$

## II.6. Formulation de la matrice de rigidité pour un élément poutre

Un élément poutre est représenté dans la figure II-2., l'axe longitudinale de la poutre est confondu avec l'axe de coordonnées  $x$ . l'élément est considéré avoir deux degrés de liberté en chaque extrémité, une déformation transversale  $v$  et un angle de rotation de la section  $\theta$  (ou encore  $\partial v / \partial x$ ). un moment de flexion  $M$  et une force de cisaillement  $F$ , correspondant respectivement aux degrés de liberté  $\theta$  et  $v$  agissant en chaque nœud.

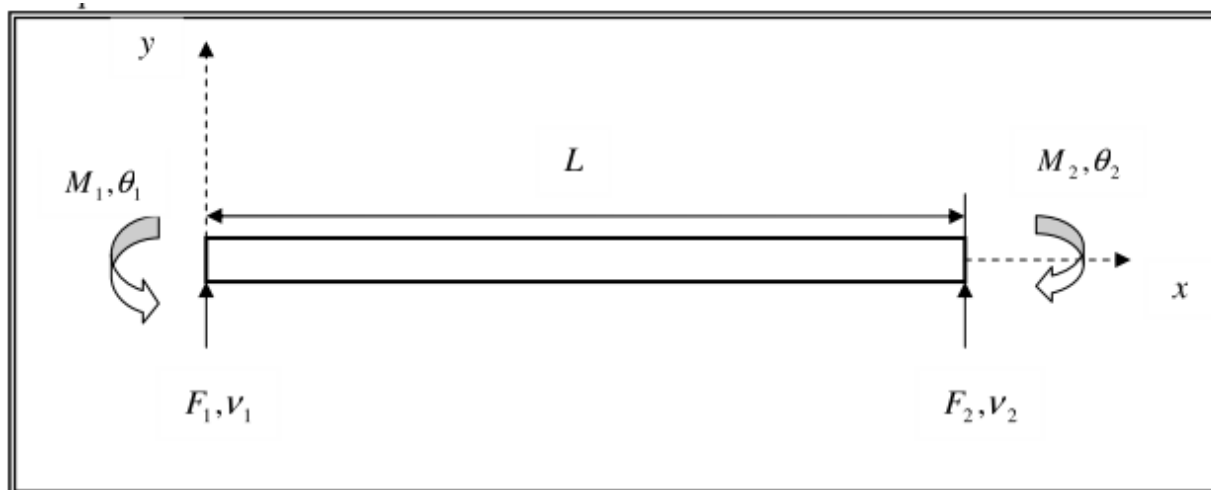


Figure II-4 : Élément poutre de section droite uniforme.

Le comportement de cette poutre est décrit par une fonction polynomiale de troisième degré, qui est la fonction de déplacement caractéristique à cet élément :

$$v(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \dots \dots \dots (II-10).$$

Où les constantes  $a_1, a_2, a_3$  et  $a_4$  sont des constantes déterminés par les conditions de déplacement aux nœuds, peuvent être donc écrites sous la forme matricielle suivante :

$$\text{Pour } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} v = v_1 \\ \theta = \theta_1 \end{cases}, \text{ Pour } x = L \Rightarrow \begin{cases} v = v_2 \\ \theta = \theta_2 \end{cases}$$

Sous forme matricielle:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (II-11).$$

La forme inverse de l'équation (II-11) donne les expressions des constantes  $a_i$ :

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (II-12).$$

Ou symboliquement :

$$\{a\} = [T] \{\delta^e\} \dots \dots \dots (II-13).$$

Après substitution des coefficients  $A_i$  de l'équation (II-12) dans l'équation (II-10). Et après réarrangement on obtient la forme finale de la fonction du déplacement.

$$v(x) = f_1(x)v_1 + f_2(x)\theta_1 + f_3(x)v_2 + f_4(x)\theta_2 \dots \dots \dots (II-14).$$

$$f_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$f_2(x) = x - 2\left(\frac{x^2}{L}\right) + 2\left(\frac{x^3}{L^2}\right)$$

Avec :  $\dots \dots \dots (II-15).$

$$f_3(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$f_4(x) = -\left(\frac{x^2}{L}\right) + \left(\frac{x^3}{L^2}\right)$$

Après avoir déterminé ces fonctions de forme, on passe à l'application du théorème de CASTIGLIANO.

La force généralisée (force ou moment)  $F_i = \frac{\partial U}{\partial \delta_i^e} \dots \dots \dots (II - 16).$

$\delta_i^e$ : Déplacement nodal généralisé.

Pour un élément poutre a une section droite uniforme, l'énergie de déformation est donnée par :

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \dots \dots \dots (II - 17).$$

En combinant l'équation (II - 16).et l'équation (II - 17) on obtient :

$$F_i = \frac{EI}{2} \int_0^L 2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial \delta_i^e} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx \dots \dots \dots (II - 18).$$

Que l'on peut écrire sous la forme :

$$F_i = \frac{EI}{2} \int_0^L 2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial \delta_i^e} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx \dots \dots \dots (II - 19).$$

$$v(x) = K_{i1} v_1 + K_{i2} \theta_1 + K_{i3} v_2 + K_{i4} \theta_2 \dots \dots \dots (II - 20).$$

Avec :

$$K_{ij} = EI \int_0^L f_i''(x) f_j''(x) dx$$

$f_i''(x)$  Et  $f_j''(x)$  sont des dérivées secondes des fonctions de forme exprimées dans l'équation (II - 14).

Après toutes les procédures de dérivations et substitution on aboutit à l'équation de rigidité en coordonnées locales.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (II - 21).$$

Ou symboliquement :

$$\{F\} = [K]\{q\} \dots \dots \dots (II - 22).$$

Une autre procédure pour l'obtention de la matrice de rigidité utilisée pour les éléments finis de grands nombre de degré de liberté, et qui est toujours applicable aux cas de l'élément poutre présenté dans les étapes suivantes :

En se basant sur l'équation :  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2a_3 + 6a_4x \dots \dots \dots (II - 23)$

En substituant cette dernière équation dans l'équation(II-17), on obtient :

$$U = 2EI(a_3^2 L + 3a_3 a_4 L^2 + 3a_4^2 L^3)$$

$$U = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

Sous la forme symbolique on aura :

$$U = \{a\}^T [K] \{a\} \dots \dots \dots (II-24)$$

Les éléments de la matrice  $[K]$  sont obtenus par l'utilisation de l'équation

$$\bar{K}_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial a_i \partial a_j}, (i,j=1,4) \dots \dots \dots (II-25)$$

En substituant l'équation (II-12) dans l'équation (II-24) on obtient :

$$U = \frac{1}{2} \{q\}^T [T]^T [\bar{K}] [T] \{q\} \dots \dots \dots (II-26)$$

Et par définition, l'énergie de déformation est égale à la moitié somme des forces modales par leurs déplacements correspondants, on peut écrire :

$$U = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (II - 27)$$

En substituant les équations de rigidité(II-22) pour les forces nodales, nous avons :

$$U = \frac{1}{2} \{q\}^T \{F\} \dots \dots \dots (II-28)$$

Par comparaison des équations (II-26) et (II-28).  
On peut conclure que :

$$U = \frac{1}{2} [T]^T [\bar{K}] [T] \dots \dots \dots (II-29).$$

C'est la même matrice de rigidité obtenue dans l'équation (II-21), en utilisant les fonctions de forme.

## II.7. Equation de rigidité d'un élément poutre avec cisaillement transversal

Les calculs de poutre en flexion sont très importants dans la pratique, Presque tous les éléments de construction modélisables par des poutres ont un moment de flexion dans leurs torseurs des efforts intérieurs.

Toutefois, il est rare que le moment de flexion soit seul. Il est presque toujours associé avec un effort tranchant. Aux contraintes dues au moment de flexion devront s'ajouter à celles dues à l'effort tranchant.

L'énergie de déformation d'une poutre avec cisaillement transversale s'écrit sous la forme suivante :  $U = U_F + U_C$

Avec :

$$U_F = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{EI}{2} \int_0^L \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx, \text{ énergie due au comportement de flexion.}$$

$$U_C = \int_0^L \frac{T^2}{2GA} dx = \frac{GA}{2} \int_0^L \gamma^2 dx, \text{ énergie due au comportement de torsion.}$$

Avec :

$\theta$ : Rotation de la section.

$\gamma$ : Angle de cisaillement.

$A$  :Section travaillante au cisaillement.

Dans le cas où l'on prendrait compte les déformations provoquées par le cisaillement, l'angle total de déformation s'écrit sous la forme :

$$\frac{dv}{dx} = \theta + \gamma$$

Après substitution dans l'expression de l'énergie totale de déformation, cette dernière peut être exprimé en fonction de des deux champs  $\theta(x)$  et  $\gamma(x)$  comme suit :

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx + \frac{GA}{2} \int_0^L \left( \frac{dv}{dx} - \theta \right)^2 dx$$

Introduisant le système des coordonnées naturelles  $\xi$  dans les fonctions d'interpolation linéaire pour  $v$  et  $\theta$ .

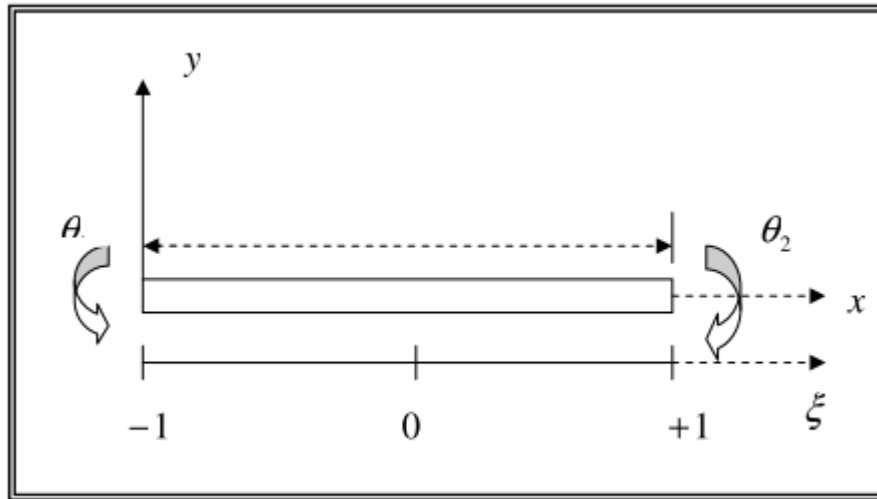


Figure II-5 : Système de coordonnées naturelles

$$x = h_1(\xi)x_1 + h_2(\xi)x_2 = \frac{1+\xi}{2}L$$

$$v(\xi) = \left[ \frac{1-\xi}{2} \quad 0 \quad \frac{1+\xi}{2} \quad 0 \right] \{q\}$$

$$v(\xi) = \left[ 0 \quad \frac{1-\xi}{2} \quad 0 \quad \frac{1+\xi}{2} \right] \{q\}$$

Avec :

$$\{q\}^T = [v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2]$$

D'où

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2}{L} \left[ -\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \right] \{q\}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{2}{L} \left[ 0 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \right] \{q\}$$

$$\gamma = \frac{dv}{dx} - \theta = \left[ -\frac{1}{L} \quad -\frac{1-\xi}{2} \quad \frac{1}{L} \quad -\frac{1+\xi}{2} \right] \{q\}$$

L'expression matricielle de l'énergie :

$$U = U_F + U_c = \frac{1}{2} q^T K_F q + \frac{1}{2} q^T K_c q = \frac{1}{2} q^T K q$$

$$K_F = \frac{2EI}{L} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} d\xi$$

$$K_c = \frac{GAL}{2} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & -\frac{1-\xi}{2} & \frac{1}{L} & -\frac{1+\xi}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & -\frac{1-\xi}{2} & \frac{1}{L} & -\frac{1+\xi}{2} \end{bmatrix} d\xi$$

La matrice de rigidité se retire par sommation des contributions des phénomènes de flexion et de cisaillement.

La matrice de rigidité correspondant au comportement de flexion se calcule par intégration numérique à un point, on obtient :

$$K_F = \int_{-1}^{+1} F_{ij}(\xi) d\xi = 2F_{ij}(0)$$

$$K_F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité correspondant au comportement de cisaillement se calcule par intégration numérique en deux points.

$$K_c^{(2)} = \int_{-1}^{+1} F_{ij}(\xi) d\xi = F_{ij}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + F_{ij}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$K_c^{(2)} = \frac{GA}{L} \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{2} & -1 & \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & \frac{L^2}{3} & -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{2} \\ -1 & -\frac{L}{2} & 1 & -\frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & \frac{L^2}{2} & -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{3} \end{bmatrix}$$



Finalement la matrice de rigidité de l'élément est :

$$K = K_F + K_c = \begin{bmatrix} \frac{GA}{L} & \frac{GA}{2} & -\frac{GA}{L} & \frac{GA}{L} \\ \frac{GA}{2} & \frac{GAL}{3} + \frac{EI}{L} & -\frac{GA}{2} & \frac{GE}{2} - \frac{EI}{L} \\ -\frac{GA}{L} & -\frac{GA}{2} & \frac{GA}{L} & -\frac{GA}{L} \\ \frac{GA}{L} & \frac{GE}{2} - \frac{EI}{L} & -\frac{GA}{L} & \frac{GAL}{3} + \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(II - 30).$$

Pour le cas d'un élément poutre encastree a une de ces deux extremités

$$v_1 = 0, \theta = 0 \Rightarrow K = K_F + K_c = \begin{bmatrix} \frac{GA}{L} & -\frac{GA}{2} \\ -\frac{GA}{2} & \frac{GAL}{3} + \frac{EI}{L} \end{bmatrix}.$$

**II.8. Principe de numérotation des nœuds d'une structure**

Avant d'étudier une structure quelconque, la première des choses à effectuer et de numérotter les différents nœuds composant la structure .sachant que la méthode de rigidité conduit à résoudre un système d'équation linéaire :  $\{F\}=[K]\{\delta\}$ .

Où :  $[K]$  représente une matrice bandée et symétrique.

Le temps mis par l'ordinateur à analyser un tel système, peut considérablement être réduit si on utilise seulement la demi-bande de la matrice.

La largeur de la bande de la matrice de rigidité globale  $[K]$  dépend de la

numérotation des nœuds et de nombre de degré de liberté par nœuds. :  $L=(\Delta N+1)n$

$\Delta N$  : La différence maximale entre les numéros des nœuds qui sont aux deux extrémités de l'élément

$n$  : le nombre de degrés de liberté par nœuds.

Donc si on arrive à minimiser la largeur de la bande, on aura un minimum d'éléments à enregistrer et un minimum de temps de calcul.

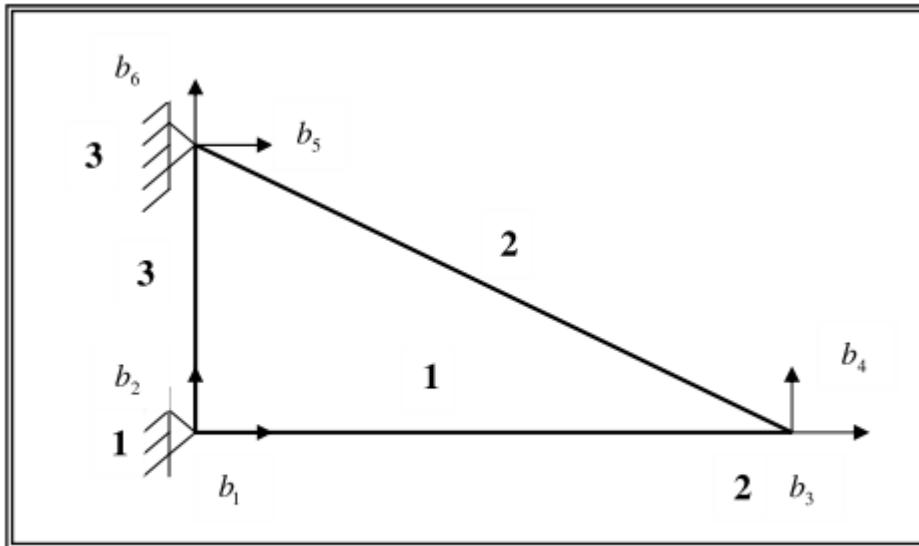
Pour minimiser la largeur de la bande, il est nécessaire de minimiser au maximum possible la différence entre les numéros des nœuds d'un même élément.

Alors ce choix de numérotation assure une bonne gestion de la mémoire, et de temps de calculs.

**II.9. Méthode d'assemblage**

On a calculé la matrice de rigidité d'un élément quelconque d'une structure et cela qu'elle soit dans le repère local ou global, une fois ces matrices élémentaires déterminées, on doit

les assembler pour former la matrice de rigidité globale de toute la structure.  
 Pour éclaircir la procédure d'assemblage, on considère la structure représenté sur la figure(II-6), cette structure est composée de trois éléments et de trois nœuds , dans ce type de structure le nœud possède deux degrés de liberté, donc la dimension de la matrice de rigidité globale de la structure sera : (2.3.2.3) c.-à-d (6.6).



FigureII-6 : Structure à étudier.

Soient :  $[K^1], [K^2]$  et  $[K^3]$  les matrices de rigidité élémentaires dans le repère global de la structure. Donc la matrice de rigidité globale est:  $[K] = \sum_{e=1}^3 [K^e]$ .

$$[K^1] = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 & K_{34}^1 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^1 & K_{44}^1 \end{bmatrix}, \text{ et } [K^2] = \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{13}^2 & K_{14}^2 \\ K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 & K_{24}^2 \\ K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 & K_{34}^2 \\ K_{41}^2 & K_{42}^2 & K_{43}^2 & K_{44}^2 \end{bmatrix}$$

$$[K^3] = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} K_{11}^3 & K_{12}^3 & K_{13}^3 & K_{14}^3 \\ K_{21}^3 & K_{22}^3 & K_{23}^3 & K_{24}^3 \\ K_{31}^3 & K_{32}^3 & K_{33}^3 & K_{34}^3 \\ K_{41}^3 & K_{42}^3 & K_{43}^3 & K_{44}^3 \end{bmatrix}$$

La position de  $[K^1]$  dans la matrice de rigidité globale  $[K]$  de la structure sera :

$$[K] = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 & K_{34}^1 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^1 & K_{44}^1 \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

L'addition de  $[K^2]$  dans la matrice de rigidité globale sera :

$$[K] = \begin{bmatrix} 1 & K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & & \\ 2 & K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 & & \\ 3 & K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{34}^1 + K_{12}^2 & K_{13}^2 & K_{14}^2 \\ 4 & K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^1 + K_{21}^2 & K_{44}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 & K_{24}^2 \\ 5 & & & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 & K_{34}^2 \\ 6 & & & K_{41}^2 & K_{42}^2 & K_{43}^2 & K_{44}^2 \end{bmatrix}$$

En additionnant  $[K^3]$  on trouve la matrice de rigidité globale de la structure :

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11}^1 + K_{11}^3 & K_{12}^1 + K_{12}^3 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & K_{13}^3 & K_{14}^3 \\ K_{21}^1 + K_{21}^3 & K_{22}^1 + K_{22}^3 & K_{23}^1 & K_{24}^1 & K_{23}^3 & K_{24}^3 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{34}^1 + K_{12}^2 & K_{13}^2 & K_{14}^2 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^1 + K_{21}^2 & K_{44}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 & K_{24}^2 \\ K_{31}^3 & K_{32}^3 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 + K_{33}^3 & K_{34}^2 + K_{34}^3 \\ K_{41}^3 & K_{42}^3 & K_{41}^2 & K_{42}^2 & K_{43}^2 + K_{43}^3 & K_{44}^2 + K_{44}^3 \end{bmatrix}$$

### II.10. Calcul des efforts internes dans un élément barre

Pour faciliter la tâche on doit d'abord étudier l'élément ressort. Puis on converge celle-ci à l'élément barres.



FigureII-7 : Elément ressort.

$\delta_i, \delta_j$ : Les déplacements des nœuds  $i, j$  respectivement.

L'effort interne dans cet élément (ressort) est : le produit des valeurs de la rigidité axiale de l'élément et de la variation des déplacements nodaux.

D'où :  $S_{ij} = -K(\delta_i - \delta_j)$

Donc pour un élément barres on aura :  $S_{ij} = EA/L \cdot (\bar{\delta}_i - \bar{\delta}_j)$

$\bar{\delta}_i, \bar{\delta}_j$ : Les déplacements de nœuds  $i, j$  respectivement suivant l'axe de l'élément.

$EA/L$ : La rigidité axiale de l'élément barre.

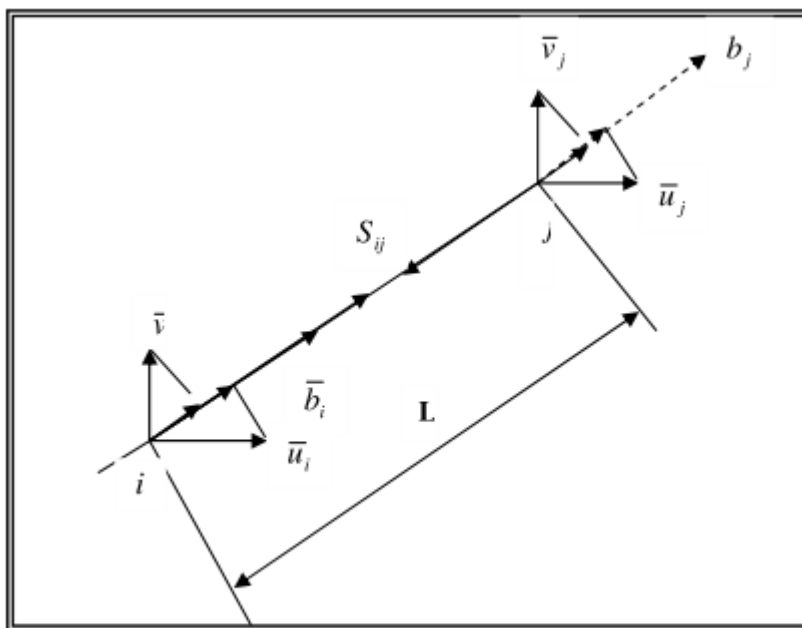


Figure II-8 : Elément barre.

$$\bar{\delta}_j = \bar{U}_j \cos\theta + \bar{V}_j \sin\theta.$$

$$\bar{\delta}_i = \bar{U}_i \cos\theta + \bar{V}_i \sin\theta.$$

Donc :

$$S_{ij} = EA/L(\bar{U}_j \cos\theta + \bar{V}_j \sin\theta - \bar{U}_i \cos\theta - \bar{V}_i \sin\theta)$$

$$S_{ij} = EA/L[\cos\theta(\bar{U}_j - \bar{U}_i) + \sin\theta(\bar{V}_j - \bar{V}_i)]$$

On a :  $\lambda = \cos\theta$ ,  $\mu = \sin\theta$ .

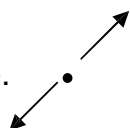
Donc :  $S_{ij} = EA/L [\lambda(\bar{U}_j - \bar{U}_i) + \mu(\bar{V}_j - \bar{V}_i)]$

Sous forme matricielle on aura :

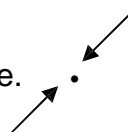
$$S_{ij} = EA/L \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_j & -\bar{U}_i \\ \bar{V}_j & -\bar{V}_i \end{bmatrix}$$

- Convention de signe de  $S_{ij}$ :

Si :  $S_{ij} > 0 \rightarrow$  la barre est tendue.



Si :  $S_{ij} < 0 \rightarrow$  la barre est comprimée.



## II.11. Programmation

On a développé dans ce chapitre les étapes nécessaires à l'obtention de la matrice de rigidité de l'élément barre et poutre, et la matrice qui relie les contraintes et déplacements  $[H]$ . La résolution d'un problème par la méthode des éléments finis entraîne le calcul de la matrice de rigidité de tous les éléments de la structure modélisée puis l'assemblage de la matrice de rigidité  $[K]$  de toute la structure.

On a vu que le vecteur de charges  $\{F\}$  était relié au vecteur des déplacements  $\{d\}$  par l'équation  $\{F\} = [K]\{d\}$  où  $[K]$  est la matrice de rigidité de toute la structure.

Dans cette méthode les quantités inconnues sont les déplacements et l'objet de la résolution est la détermination des déplacements nodaux  $\{d\}$ , une fois que ceux-ci sont calculés on peut obtenir les contraintes de l'élément en utilisant la matrice  $[H]$ .

Le travail numérique consistant à la mise en œuvre de cette étude pour n'importe quelle structure réelle rend l'utilisation de l'ordinateur essentielle à l'application de la méthode des éléments finis. On donne dans cette partie de chapitre un grand nombre de techniques à adopter lorsque l'on fabrique ces programmes sur ordinateur. Ces derniers peuvent être construits en un grand nombre de parties appelées sous-programmes, chacun d'eux ayant une fonction particulière dans l'étude complète. Par exemple, l'évaluation de la matrice de rigidité  $[K^e]$  pour un élément de forme particulière et un type du problème particulier se fait normalement dans un sous-programme écrit spécialement pour cette forme d'élément et ce type du problème, que l'on ait affaire à des contraintes planes, des déformations planes ou à la flexion des plaques.

La modélisation en éléments finis a été étudiée à la fois pour les structures linéaires et les structures continues. On a vu que les étapes de base pour la détermination de la matrice de rigidité de l'élément et de la matrice  $[H]$  étaient les mêmes pour ces différents éléments. De même, la résolution des équations pour les déplacements nodaux et les contraintes suit un modèle indépendant du type d'élément utilisé. Cela rend possible le développement d'un système de calcul numérique des éléments finis dans lequel quelque partie (sous-programmes) sont complètement générales. Un exemple évident est le sous-programme écrit pour la résolution du système d'équation  $\{F\} = [K]\{d\}$ . Il est aussi nécessaire d'avoir un programme principal qui contrôle les ordres et utilise les différents sous-programmes.

On va maintenant étudier le développement d'un programme d'ordinateur type.

### II.11.1. Etude par ordinateur

L'étude s'effectue en utilisant une introduction des données qui décrivent complètement la structure modélisée et son chargement et en effectuant des sorties qui consistent en la tabulation des déplacements nodaux et des contraintes de l'élément. On va maintenant décrire séparément chaque étape de la table.

### II.11.2. Entrées de données

Pour poser le problème, il est nécessaire d'introduire des données dans l'ordinateur ; ces dernières doivent spécifier la géométrie de la structure modélisée, les propriétés de sa matière et la façon dont elle est chargée et fixée dans l'espace. Les données peuvent aussi inclure des nombres de contrôle qui facilitent la généralité et l'efficacité du programme et doivent être fournis très tôt dans les données, comme le nombre total des nœuds et des éléments ou bien un nombre qui indique si l'on est dans le cas des contraintes planes, déformations planes ou de la flexion des plaques, cela permet au programme principal de déterminer la capacité mémoire requise et de savoir quels seront les sous-programmes utilisés dans l'étude.

*On a besoin des données suivantes :*

1. le nombre et les coordonnées des nœuds ; il est commode de les numérotés  $1...i...n$  , de façon à donner pour chaque nœud un numéro  $i$  et des coordonnées  $(x_i, y_i)$  ) on a déjà montré l'importance de l'adoption de la meilleure méthode pour numéroter les nœuds.
2. On doit aussi numéroter les éléments finis  $1...N$ .de façon à fournir pour chaque élément les numéros de ses nœuds et les coordonnées nodales correspondantes, cela rendant possible la détermination des dimensions de l'élément et sa position dans la structure. il est aussi nécessaire d'indiquer les propriétés du matériau .c'est-à-dire le module d'*YOUNGE*  $E$  et le coefficient de *POISSON*  $\nu$ .
3. Les charges appliquées.
4. Les nœuds fixés correspondant aux divers types d'appui. Tout cela apparaît sans doute assez compliqué mais l'utilisation en est plutôt aisée.

***CHAPITRE III***  
***MODELISATION DES STRUCTURES***  
***DISCRETE EN ELEMENTS***  
***CONTINUS***

### III.1. Introduction :

Pour représenter une structure discrète comme une poutre continue, les propriétés de la poutre équivalente doivent être dérivées en premier lieu. Cela peut être accompli en isolant une infrastructure typique de la structure originale et étudiant son comportement pour chaque type de chargement statique appliqué en utilisant les relations force-déformation comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N \\ Q \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{12} & GA & \eta_{23} \\ \eta_{13} & \eta_{23} & EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ \Psi + w_{,x} \\ \Psi_{,x} \end{Bmatrix}$$

Les quantités **N**, **Q** et **M** sont respectivement les forces d'extension, forces de cisaillement et moment de flexion (fig.1).  $u$ ,  $w$  et  $\Psi$  sont les déplacements longitudinaux transversaux et rotation de la section. **EA**, **EI** et **GA** sont la rigidité longitudinale, transversale et de cisaillement, respectivement ;  $\eta_{ij}$  les termes de l'accouplement. Pour un treillis qui possède un plan de symétrie qui coïncide avec son demi-plan les coefficients de l'accouplement disparaissent et les trois déformations sont découplées. Pour une structure arbitraire, les coefficients d'accouplement sont importants dans l'analyse.

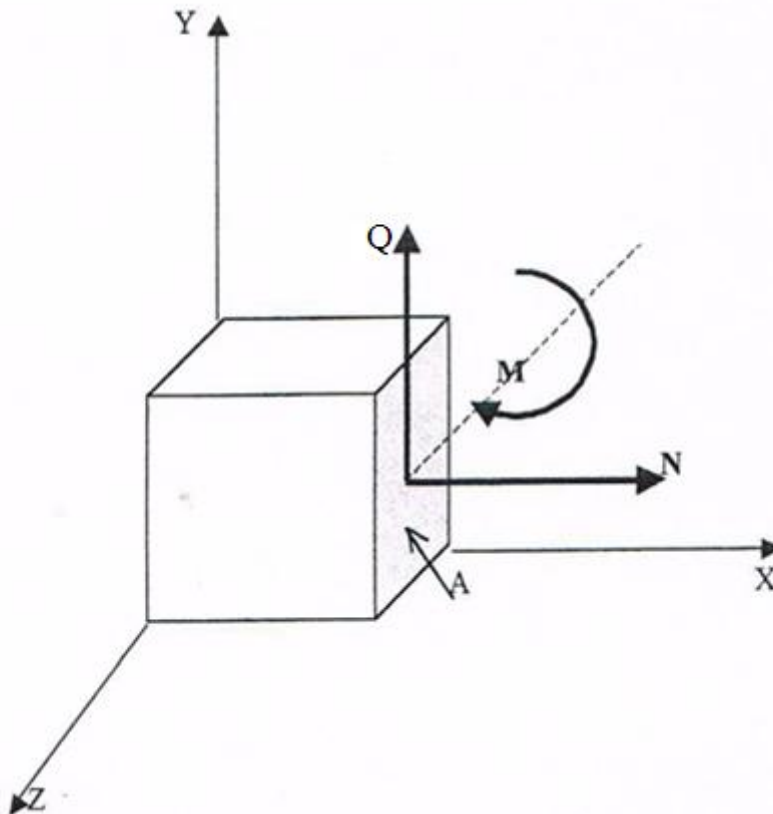


Figure III-1 : Effort appliqué sur tronçon d'une poutre



## III.2. Modélisation d'une structure discrète :

La statique des poutres élastiques est un cas particulier de l'élasticité classique.

On y étudie des solides *déformables, élastiques, en petites déformations et en petits déplacements*, dont la forme est assimilable à une ligne épaisse. Cette géométrie particulière amène, au prix de quelques hypothèses, des simplifications par rapport à l'élasticité tridimensionnelle : les équations y sont plus simples et leurs solutions souvent accessibles analytiquement. De plus, dans la vie courante, un grand nombre de constructions (ponts, bâtiments, éléments de machines...) sont assimilables à des assemblages de poutres. Ces deux raisons expliquent le large succès de ce modèle.

Pour mettre ce modèle, la démarche générale est la suivante :

A partir d'un calcul tridimensionnel en élasticité classique sur un tronçon de poutre droite (le problème de Saint-Venant), on tente de réduire tous ces résultats à des valeurs sur la ligne moyenne de la poutre (figure.2). Ainsi, les grandeurs manipulées ne varient plus qu'en fonction de l'abscisse curviligne sur la ligne moyenne.

On considère donc les efforts comme appliquées sur la ligne moyenne alors qu'en réalité, ils sont appliqués sur la surface extérieure de la poutre. De même, on considère que la connaissance des déplacements de la ligne moyenne est une information suffisante, les déplacements des autres points de la section droite étant considérés comme peu différents.

Par contre, la description des contraintes et celle des déformations reste tridimensionnelle car leurs variations dans la section droite sont importantes et impossibles à négliger.

Comme toute modélisation, l'ingénieur doit s'interroger sur le bien-fondé du choix du modèle pour représenter une réalité. C'est en gardant bien à l'esprit les hypothèses qui y sont introduites, qu'il pourra répondre à cette question, et évitera de faire dire au modèle ce qu'il ne peut pas dire.

Il existe un grand nombre de traités sur les poutres, dans lesquels on développe un grand nombre de méthodes particulières pour résoudre des problèmes de poutres (et de structures de poutres). Beaucoup d'entre-elles sont devenues obsolètes en raison du développement actuel des calculateurs et des logiciels. Ce document se limite donc aux fondements de la théorie des poutres et ne prétend pas à l'exhaustivité. Il a seulement pour but d'exposer les notions indispensables à connaître pour comprendre les limites de la modélisation, comprendre les données nécessaires au modèle, et enfin interpréter correctement les résultats d'un calcul.

### III.2.1. Définition d'une poutre :

Soit  $\epsilon$  une courbe orientée appelée ligne moyenne.

Soit  $G$  son point courant et soit  $l$  son abscisse curviligne mesurée à partir d'un point fixe  $O$  de  $\epsilon$ .

Soit enfin  $(t, n, b)$  le trièdre de « Fresnet » orthonormé associé à la ligne moyenne  $\epsilon$  en G.

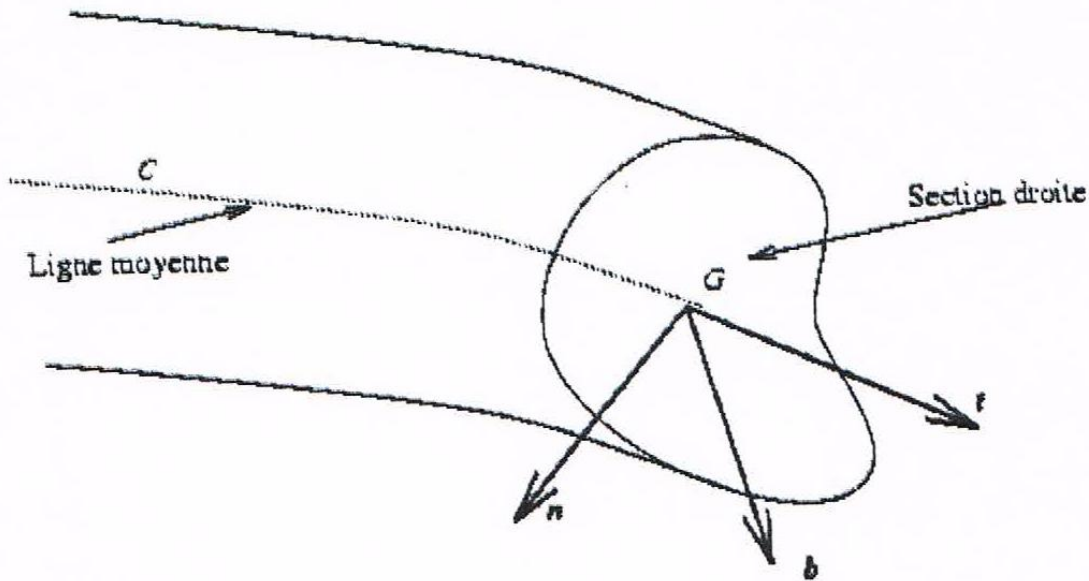


Figure III-2 : Le trièdre de « Fresnet » en un point de la ligne moyenne

On rappelle les formules de « Fresnet » définissant le trièdre de « Fresnet » et les caractéristiques géométriques des courbes dans  $\epsilon$

$$t = \frac{dOG}{dl} \text{ (tangente unitaire)}$$

$$n = R \frac{dt}{dl} \text{ (normale principale unitaire)}$$

$$b = t \wedge n \text{ (binormale unitaire)}$$

$$\frac{dt}{dl} = \frac{n}{R}; \frac{dn}{dl} = -\frac{t}{R} + \frac{b}{T}; \frac{db}{dl} = -\frac{n}{T}$$

Où R est le rayon de courbure (toujours  $\geq 0$ ) et T est la torsion géométrique.

Le plan  $(n, b)$  est appelé plan normal en G. dans ce plan on définit la section droite S de la poutre, de contour extérieur fermé  $\Omega$  et de centre de gravité G sur la ligne moyenne. La section droite peut aussi avoir des contours intérieurs  $\Omega_i$ .

On appelle poutre, le volume engendré par les sections droites lorsque G décrit la ligne moyenne. On suppose de plus que :

Les sections droites sont constantes ou « lentement variables » lorsque G varie.

Si on appelle  $d$  une dimension transversale de la section droite, on a en tout point de la poutre  $d \ll R$ .

Ces deux hypothèses sont essentielles elles permettront d'assimiler un tronçon de poutre courbe de longueur  $dl$  à un tronçon de poutre droite. Cette approximation est à la base de tout ce qui suit.

On se place dans le cadre de *l'élasticité linéaire isotrope, en petites déformations et petits déplacements* : Le tenseur des déformations utilisé est donc  $\varepsilon$ , les équations d'équilibre s'écrivent sur la configurations initiale. Le matériau constituant la poutre a donc une loi de comportement qu'on rappelle ici :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}$$

Soit encore, en utilisant  $E$  et  $\nu$  :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right)$$

Soit encore :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk}$$

**III.2.2. Le champ de déplacements :**

Lors du déplacement, le centre de gravité  $G_0$  de la section transversale se déplace en  $G_1$  en tournant d'un angle  $\psi$ .

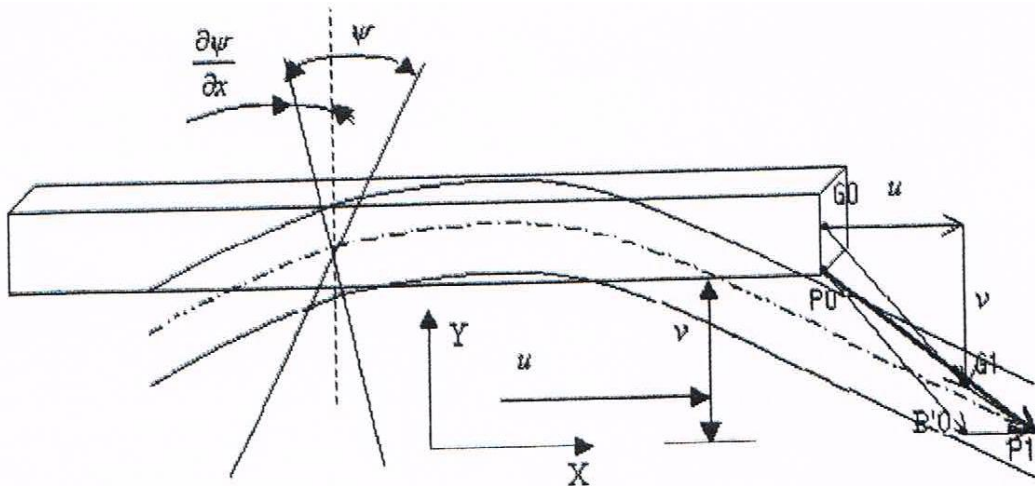


Figure III-3 : Déformation d'une poutre

$$\overrightarrow{G_1G_2} = u\vec{x} + w\vec{y} \dots \dots \dots (III-1)$$

Avec :

$u$  : le déplacement longitudinale

$w$  : le déplacement transversale

Les fonctions  $u$  et  $w$  sont indépendants de  $z$  par hypothèse.

Soit  $p_0$  un point quelconque autour du centre de gravité  $G_0$ .

Après déformation, ce point se déplace en  $P_1$  tel que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0P_1} &= \overrightarrow{P_0P'_0} + \overrightarrow{P'_0P_1} \\ &= \overrightarrow{G_0G_1} + \overrightarrow{P'_0G_1} + \overrightarrow{G_1P_1} \\ &= u\vec{x} + w\vec{y} + \Psi\vec{y} \times \overrightarrow{G_1P'_0} + \text{terme d'ordre } \geq 2 \dots \dots \dots (III-2) \end{aligned}$$

Les termes  $\geq 2$  sont négligeables grâce à l'hypothèse des petites déformations qui permet de confondre l'arc et la corde.

Donc l'équation (III-2) se réduit à :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0P_1} &= \overrightarrow{G_0G_1} + \Psi\vec{y} \times \overrightarrow{G_1P'_0} \\ &= u\vec{x} + w\vec{y} + Y\Psi\vec{x} \\ &= (u + Y\Psi)\vec{x} + w\vec{y} \\ &= U\vec{x} + W\vec{y} \end{aligned}$$

Les déplacements axiaux et transversaux d'un point quelconque de la section droite, seront écrits comme suit :

$$\begin{aligned} U(x, t) &= u(x, t) + \Psi(x, t) \\ W(x, t) &= w(x, t) \dots \dots \dots (III-3) \end{aligned}$$

$u$  et  $w$  sont les déplacements axiaux et transversaux du centre  $G(Y=0)$ .

$\Psi$  : est la rotation de la section transversale.

Substituant les équations (III-3) dans les équations exprimant le champ de déformation :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

La déformation longitudinale peut être formulée comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{\partial U}{\partial x} = U_{,x} \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial}{\partial x} (u + Y\Psi) \Rightarrow \varepsilon_x = u_{,x} + Y\Psi_{,x} \end{aligned}$$

La déformation dans le plan (xy) est exprimé par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} (u + Y\Psi) \right) \\ &= \frac{1}{2} (\Psi + w_{,x}) \\ &= \frac{1}{2} \gamma_{xy} \end{aligned}$$

D'où, l'angle de cisaillement sera exprimé en fonction des déplacements par la relation suivante :

$$\gamma_{xy} = \Psi + w_{,x}$$

Finalement, la relation déformation-déplacement s'écrit comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} + Y\Psi_{,x} \\ \Psi + w_{,x} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (III-4)$$

**III.2.3. Le champ de forces :**

Si on isole une poutre (ou un tronçon de poutre), on appelle actions mécaniques extérieures, les actions mécaniques appliquées par le milieu extérieur sur la partie isolée.

On distingue deux sortes d'actions mécaniques extérieures :

- *Les charges* : ce sont les efforts auxquels la poutre doit résister.
- *Les actions de liaison* : ce sont les actions mécaniques exercées par les liaisons qui maintiennent la poutre en place.

En général, les charges sont des données du problème et les actions de liaison sont inconnues.

Les efforts extérieurs appliqués sur un élément poutre sont modélisés par :

- Une densité linéique d'efforts transversaux  $P_0$ .
- Deux forces appliquées aux nœuds :  $F_i, F_j$ .
- Deux moments appliqués aux nœuds :  $M_i, M_j$ .

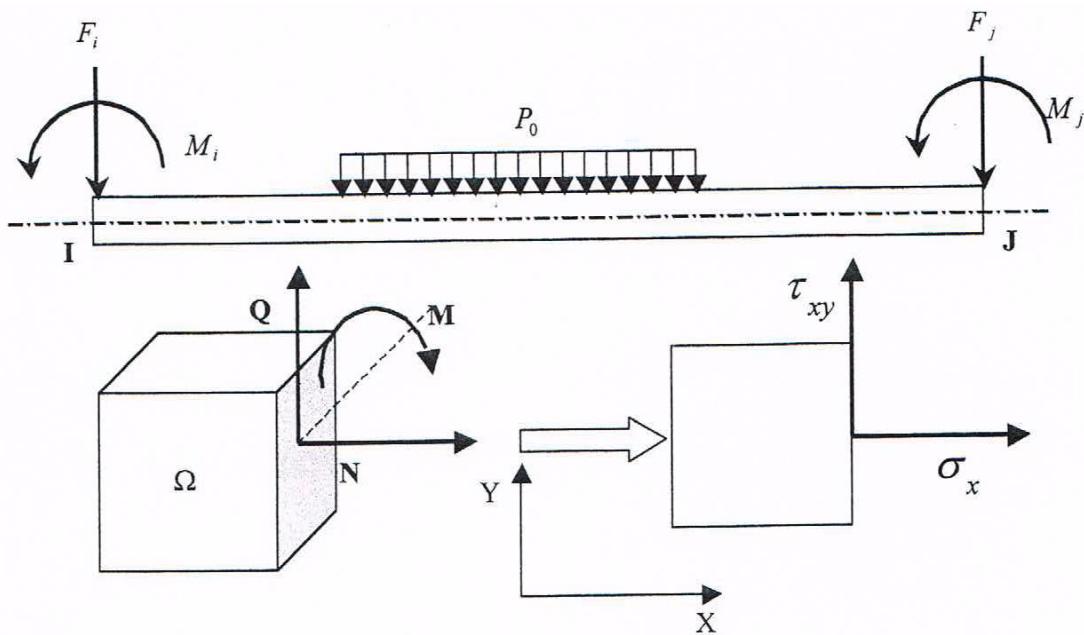


Figure III-4 : Efforts extérieurs agissant sur un élément de poutre

Toute poutre (ou système de poutres) isolé et en équilibre a nécessairement des liaisons avec son milieu extérieur. Les actions de ces liaisons sur le système isolé sont des torseurs qu'on définit conventionnellement au point de la liaison.

L'action des efforts intérieurs  $\vec{N}, \vec{Q}$  et  $\vec{M}$  sur le solide ( $\Omega$ ), provoque un champ de contraintes internes de façon que :

$$\vec{N} = \iint_A \sigma_x dA \vec{x}$$

$$\vec{Q} = \iint_A \tau_{xy} dA \vec{y} \dots\dots\dots (III-5)$$

$$\vec{M} = \iint_A \vec{GP} \times \vec{Q}(p, x) dA = \iint_A Y \sigma_x dA \vec{y}$$

D'après la loi de comportement du matériau :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (III-6)$$

Où  $\sigma_x$  et  $\tau_{xy}$  sont respectivement les contraintes normales et tangentielles, et  $C_{ij}$  : sont les constantes d'élasticité du matériau.

Substituant les équations (III-6) et (III-4) dans les équations (III-5).

Les composants du vecteur force seront donc :

La force axiale :

$$\begin{aligned} N &= \iint_A \sigma_x dA \\ &= \iint_A C_{11} \epsilon_x dA + \iint_A C_{12} \gamma_{xy} dA \\ &= C_{11} \iint_A (u_{,x} + Y \Psi_{,x}) dA + C_{12} \iint_A (\Psi + w_{,x}) dA \\ &= C_{11} A u_{,x} + C_{12} A (\Psi + w_{,x}) + C_{11} \iint_A Y \Psi_{,x} dA \end{aligned}$$

Sous forme matricielle :

$$N = \left\{ C_{11}A \quad C_{12}A \quad C_{11} \iint_A Y dA \right\} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ \Psi + w_{,x} \\ \Psi_{,x} \end{Bmatrix}$$

La force transversale :

$$\begin{aligned} Q &= \iint_A \tau_{xy} dA \\ &= \iint_A C_{12} \varepsilon_x dA + \iint_A C_{22} \gamma_{xy} dA \\ &= C_{12} \iint_A (u_{,x} + Y \Psi_{,x}) dA + C_{22} \iint_A (\Psi + w_{,x}) dA \\ &= C_{12} A u_{,x} + C_{22} A (\Psi + w_{,x}) + C_{12} \iint_A Y \Psi_{,x} dA \end{aligned}$$

Sous forme matricielle :

$$Q = \left\{ C_{12}A \quad C_{22}A \quad C_{12} \iint_A Y dA \right\} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ \Psi + w_{,x} \\ \Psi_{,x} \end{Bmatrix}$$

Le moment de flexion :

$$\begin{aligned} M &= \iint_A y \sigma_x dA \\ &= \iint_A Y C_{11} u_{,x} dA + \iint_A Y^2 C_{11} \Psi_{,x} dA + \iint_A Y C_{12} (\Psi + w_{,x}) dA \\ &= C_{11} \iint_A Y dA u_{,x} + C_{11} \iint_A Y^2 dA \Psi_{,x} + C_{12} \iint_A Y dA (\Psi + w_{,x}) \end{aligned}$$

Avec :

$$\iint_A Y^2 dA = \mathbf{I}$$

$$M = \left\{ C_{11} \iint_A Y dA \quad C_{12} \iint_A Y dA \quad C_{11} \mathbf{I} \right\} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ \Psi + w_{,x} \\ \Psi_{,x} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (III-7)$$

La forme finale du torseur des forces sera donc :

$$\begin{Bmatrix} N \\ Q \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}A & C_{12}A & C_{11} \iint_A Y dA \\ C_{12}A & C_{22}A & C_{12} \iint_A Y dA \\ C_{11} \iint_A Y dA & C_{12} \iint_A Y dA & C_{11} \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ \Psi + w_{,x} \\ \Psi_{,x} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (III-8)$$

Les propriétés du model équivalent seront écrit comme suit :

$$E = C_{11}$$

$$G = C_{22}$$

$$\eta_{13} = C_{11} \iint_A Y dA \dots\dots\dots (III-9)$$

$$\eta_{12} = C_{12}A$$

$$\eta_{23} = C_{12} \iint_A Y dA$$

Donc :

$$\begin{Bmatrix} N \\ Q \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{12} & GA & \eta_{23} \\ \eta_{13} & \eta_{23} & EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ \Psi + w_{,x} \\ \Psi_{,x} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (III-10)$$

Sachant que :

E : le module de Young

G : le module de Coulomb

$\eta_{12}, \eta_{13}, \eta_{23}$  : sont les coefficients de couplage.

### III.3. Etude analytique des structures discrètes :

Une autre alternative de dériver les rigidités du modèle continu de la poutre est présentée dans ce paragraphe. Il consiste à développer des formules explicites en considérant la tension dans les membres individuels de la structure. Par exemple, pour un type isolé d'une structure comme montré dans figure III-5, et pour chaque mode séparé de déformation, l'effort interne dans le membre « i » dû à la tension, cisaillement ou moment de flexion peut être prédit par:

$$\varepsilon_i^t = a_i u_{,x}$$

$$\varepsilon_i^s = b_i \gamma \dots\dots\dots (III-11)$$



$$\varepsilon_i^b = c_i \Psi_{,x}$$

Où  $a_i$ ,  $b_i$  et  $c_i$  c'est des coefficients qui dépendent de la géométrie et des propriétés du matériau du membre « i » ;  $\gamma$  est l'angle de cisaillement donné par :

$$\gamma_{xy} = \Psi + w_{,x}$$

De l'autre côté, pour la même structure isolée, pour un mode spécifique de déformation due aux efforts de : tension, cisaillement ou flexion, ces membres peuvent aussi être trouvées en utilisant les formules suivantes :

$$\varepsilon_i^{t,s,b} = \frac{1}{L_i} [(u_n - u_k) \cos \theta_i + (w_n - w_k) \sin \theta_i] \dots \dots \dots (III-12)$$

Où  $L_i$  est la longueur du membre « i »,  $u_n$  et  $w_n$  sont les déplacements axial et transversal au nœud « n ». Il devrait être noté ici que pour un type spécifique de déformations permises, les déformations générales de la poutre  $u_{,x}$ ,  $\gamma$ ,  $\Psi_{,x}$  peuvent être exprimé en termes de déplacements nodaux de la structure comme suit :

$$u_{,x} = \frac{u_R - u_L}{L_c}$$

$$\gamma = \frac{w_R - w_L}{L_c} + \frac{1}{2} (\Psi_R + \Psi_L) \dots \dots \dots (III-13)$$

$$\Psi_{,x} = \frac{1}{L_c} (\Psi_R - \Psi_L)$$

$\Psi_R, \Psi_L$  sont les rotations de la section à droite et à gauche de la structure.

Les souscrits R et L indiquent les côtés gauche et droit de la structure.

Les rotations de ces deux cotés sont exprimés en fonction des déplacements de chaque coté, ils sont exprimés comme suit :

$$\Psi_R = \frac{1}{Lg} (u_n - u_m)$$

$$\Psi_L = \frac{1}{Lg} (u_p - u_k) \dots \dots \dots (III-14)$$

Pour chaque type de déformation permise, les déplacements nodaux dans l'équation (III-12) peuvent être exprimés en terme de degré de liberté  $u_{,x}$ ,  $\gamma$  et  $\Psi_{,x}$ . En identifiant l'équation (III-11) avec l'équation (III-12), les coefficients matériels  $a_i$ ,  $b_i$  et  $c_i$  peuvent être obtenu.

Comme résultat, la force axiale correspondante dans tout membre de la cellule isolée dû aux trois modes combinés des déformations peut être trouvée, et aussi les forces résultantes (N), (Q) et (M) appliquées à la structure (Figure III-1). Par comparaison

des équations obtenues à l'équation (III-10), les propriétés du model équivalent peuvent être trouvées.

En utilisant cette méthode, des formules explicites de rigidités équivalentes de n'importe quelle structure peuvent être obtenues.

Dans ce contexte, deux exemples sont considérés :

- 1- Structure symétrique,
- 2- Structure asymétrique.

**III.3.1. Structure symétrique :**

Dans ce cas, la structure possède un plan de symétrie qui coïncide avec son demi-plan comme le démontre la fig.5 du cas considéré.

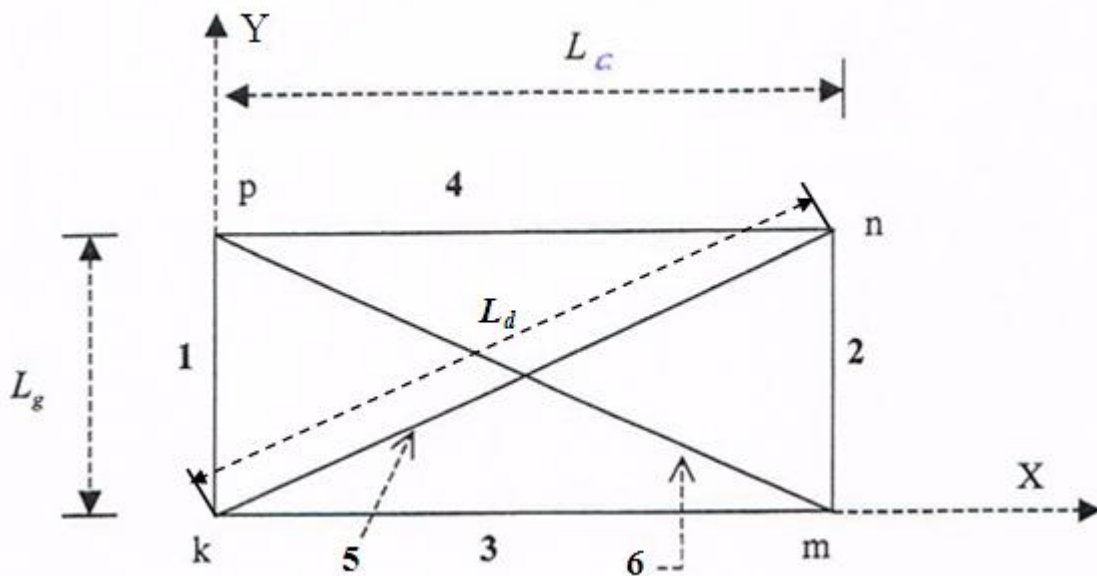


Figure III-5 : Cellule d'une structure treillis symétrique composée de six barres  
 Les propriétés matérielles et géométriques de la structure sont données dans le tableau suivant :

Elément	Longueur	Rigidité	$\lambda$	$\mu$
1	$L_g$	$E_1A_1$	1	0
2	$L_g$	$E_2A_2$	1	0
3	$L_c$	$E_3A_3$	0	1
4	$L_c$	$E_4A_4$	0	1
5	$L_d$	$E_5A_5$	$L_c/L_d$	$L_g/L_d$
6	$L_d$	$E_6A_6$	$-L_c/L_d$	$L_g/L_d$

Tableau III-1 : propriétés matérielles et géométriques de la structure symétrique

III.3.1.1 Cas de traction pure :

Quand seulement une tension pure est permise, c'est-à-dire ( $\gamma = \Psi_{,x} = 0$ ) (fig.5.1), les déplacements axiaux aux nœuds m et n peuvent être exprimés en terme de  $u_{,x}$

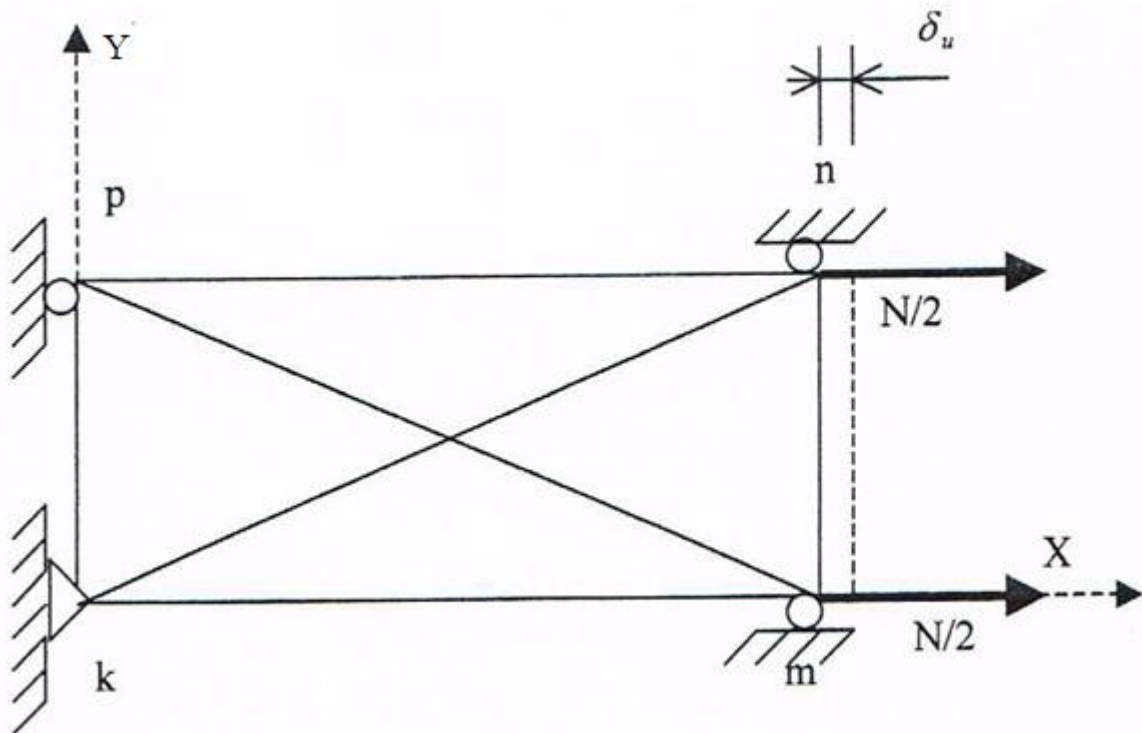


Figure III-5.1 : Cas de traction pure d'une structure symétrique

$$u_m = u_n$$

$$\frac{\Delta L}{L} = u_{,x} \Rightarrow \frac{u_m}{L_c} = \frac{u_n}{L_c} = u_{,x} \dots \dots \dots (III-15)$$

Substituer l'équation précitée dans l'équation (III-12) et identifier avec l'équation (III-11), il en résulte :

$$\varepsilon_i^t = a_i u_{,x}$$

$$\varepsilon_1^t = w_p - w_k = 0 \dots \dots \dots \Rightarrow a_1 = 0$$

$$\varepsilon_2^t = w_n - w_m = 0 \dots \dots \dots \Rightarrow a_2 = 0$$

$$\varepsilon_3^t = \frac{u_m - u_k}{L_c} = \frac{u_m}{L_c} = u_{,x} \dots \dots \dots \Rightarrow a_3 = 1$$

$$\varepsilon_4^t = \frac{u_n - u_p}{L_c} = \frac{u_n}{L_c} = u_{,x} \dots \dots \dots \Rightarrow a_4 = 1$$

$$\varepsilon_5^t = \frac{u_n - u_k}{L_d} \left( \frac{L_c}{L_d} \right) + \frac{w_n - w_k}{L_d} \left( \frac{L_g}{L_d} \right)$$

$$= u_n \frac{L_c}{L_d^2} = \left(\frac{L_c}{L_d}\right)^2 u_{,x} \dots \dots \dots \Rightarrow a_5 = \left(\frac{L_c}{L_d}\right)^2 \dots \dots \dots (III-16)$$

$$\varepsilon_6^t = \frac{u_p - u_m}{L_d} \left(\frac{L_c}{L_d}\right) + \frac{n - w_k}{L_d} \left(\frac{L_g}{L_d}\right)$$

$$= u_m \frac{L_c}{L_d^2} = \left(\frac{L_c}{L_d}\right)^2 u_{,x} \dots \dots \dots \Rightarrow a_6 = \left(\frac{L_c}{L_d}\right)^2$$

Les membres du vecteur déformation aussi bien que les membres du vecteur force dû à la tension peuvent être trouvé comme suit :

$$\{\varepsilon\}^t = \left\{ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ \left(\frac{L_c}{L_d}\right)^2 \ \left(\frac{L_c}{L_d}\right)^2 \right\}^T u_{,x} \dots \dots \dots (III-17)$$

$$S_i^t = E_i A_i \varepsilon_i^t$$

$$\{S\}^t = \left\{ 0 \ 0 \ E_3 A_3 \ E_4 A_4 \ \left(\frac{L_c}{L_d}\right)^2 \ E_5 A_5 \ \left(\frac{L_c}{L_d}\right)^2 \ E_6 A_6 \right\}^T u_{,x} \dots \dots \dots (III-18)$$

"T" fait référence au transposé du vecteur.

**III.3.1.2 Cas de cisaillement pur :**

De la même façon, quand seulement une déformation due à un cisaillement pur est permise, c-à-d  $u_{,x} = \Psi_{,x} = 0$  (figure III-5.2), les déplacements transversaux aux nœuds m et n peuvent aussi être exprimés en terme de  $\gamma$

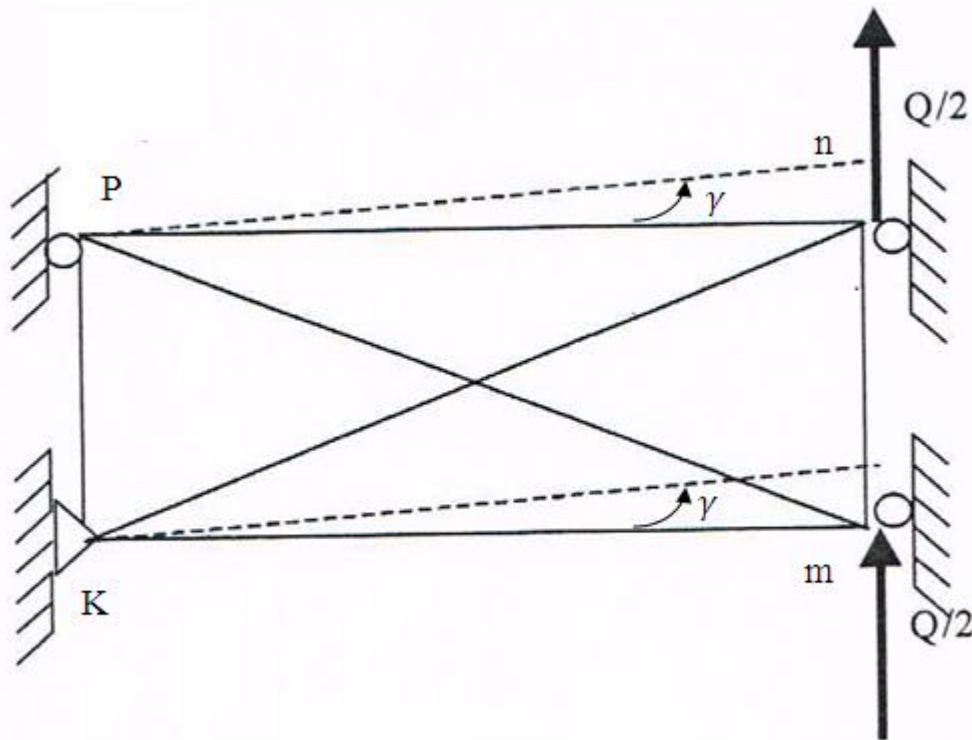


Figure III-5.2 : Cas de cisaillement pur d'une structure symétrique

$$tg\gamma = \frac{w_m}{L_c} = \frac{w_n}{L_c}$$

Pour les petites déformations :

$$tg\gamma = \gamma = \frac{w_m}{L_c} = \frac{w_n}{L_c}$$

Alors :

$$w_m = w_n = L_c\gamma$$

Suivant la même procédure précédente, les coefficients  $b_i$  peuvent être obtenus comme suit :

$$\varepsilon_i^s = b_i\gamma$$

$$\varepsilon_1^s = 0 \dots \dots \dots \Rightarrow b_1 = 0$$

$$\varepsilon_2^s = 0 \dots \dots \dots \Rightarrow b_2 = 0$$

$$\varepsilon_3^s = 0 \dots \dots \dots \Rightarrow b_3 = 0$$

$$\varepsilon_4^s = 0 \dots \dots \dots \Rightarrow b_4 = 0 \dots \dots \dots (III-19)$$

$$\varepsilon_5^s = \frac{L_c L_g}{L_d^2} \dots \dots \dots \Rightarrow b_5 = L_c \frac{L_g}{L_d^2}$$

$$\varepsilon_6^s = -\frac{L_c L_g}{L_d^2} \dots \dots \dots \Rightarrow b_6 = -L_c \frac{L_g}{L_d^2}$$

Avec :

$$L_d^2 = L_c^2 + L_g^2$$

Alors :

$$\{\varepsilon\}^s = \left\{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ L_c \frac{L_g}{L_d^2} \ -L_c \frac{L_g}{L_d^2} \right\}^T \gamma \dots \dots \dots (III-20)$$

$$S_i^s = E_i A_i \varepsilon_i^s$$

Alors, les membres du vecteur force dû au cisaillement peuvent être exprimé comme suit :

$$\{S\}^s = \left\{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ L_c \frac{L_g}{L_d^2} E_5 A_5 \ -L_c \frac{L_g}{L_d^2} E_6 A_6 \right\}^T \gamma \dots \dots \dots (III-21)$$

**III.3.1.3 Cas de flexion pure :**

Lorsque seulement une déformation due à une flexion pure est permise, nous obtenons les déplacements nodaux, aussi bien que les membres du vecteur force comme suit :

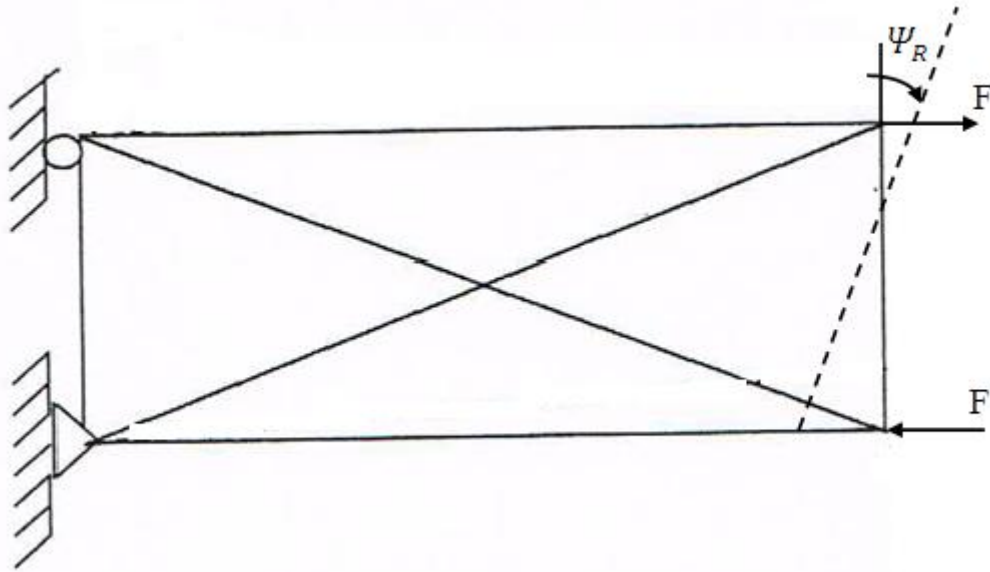


Figure III-5.3 : Cas de flexion pure d'une structure symétrique

$$u_m = -u_n$$

$$\Psi_R = -\frac{u_m}{L_g/2} = \frac{u_n}{L_g/2}$$

$$\Rightarrow u_n = -u_m = \frac{1}{2}L_g\Psi_R$$

$$\text{On a } \begin{cases} \Psi_R - \Psi_L = L_c\Psi_{,x} \\ \Psi_L = 0 \dots \dots \dots \Rightarrow \Psi_R = L_c\Psi_{,x} \end{cases}$$

$$u_n = -u_m = \frac{1}{2}L_cL_g\Psi_{,x}$$

D'après la formule :

$$\gamma = \frac{w_R - w_L}{L_c} + \frac{1}{2}(\Psi_R + \Psi_L)$$

Lorsqu'il s'agit d'une flexion pure, alors que  $\gamma = 0$  donc :

$$\frac{w_R - w_L}{L_c} + \frac{1}{2}(\Psi_R + \Psi_L) = 0$$

$$w_R = w_n$$

$$\Psi_L = w_p = 0 \Rightarrow w_n = -\frac{1}{2}L_c\Psi_R$$

$$\Psi_L = 0$$

On a :  $\Psi_R = L_c \Psi_{,x}$

Alors :

$$w_n = w_m = -\frac{1}{2} L_c^2 \Psi_{,x}$$

Par analogie, les coefficients  $c_i$  peuvent être déterminés :

$$\varepsilon_i^b = c \Psi_{,x}$$

$$\varepsilon_1^b = 0 \dots \dots \dots \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\varepsilon_2^b = 0 \dots \dots \dots \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\varepsilon_3^b = -\frac{1}{2} L_g \Psi_{,x} \dots \dots \dots \Rightarrow c_3 = -\frac{1}{2} L_g \dots \dots \dots (III-22)$$

$$\varepsilon_4^b = \frac{1}{2} L_g \Psi_{,x} \dots \dots \dots \Rightarrow c_4 = \frac{1}{2} L_g$$

$$\varepsilon_5^b = 0 \dots \dots \dots \Rightarrow c_5 = 0$$

$$\varepsilon_6^b = 0 \dots \dots \dots \Rightarrow c_6 = 0$$

Donc :

$$\{\varepsilon\}^b = \left\{ 0 \ 0 \ -\frac{1}{2} L_g \ \frac{1}{2} L_g \ 0 \ 0 \right\}^T \Psi_{,x} \dots \dots \dots (III-23)$$

$$S_i^b = E_i A_i \varepsilon_i^b$$

$$\{S\}^b = \left\{ 0 \ 0 \ -\frac{1}{2} L_g E_3 A_3 \ \frac{1}{2} L_g E_4 A_4 \ 0 \ 0 \right\}^T \Psi_{,x} \dots \dots \dots (III-24)$$

**III.3.1.4 Le cas global :**

En utilisant les équations (III-18), (III-21) et (III-24), les membres du vecteur force résultants dus aux trois modes de déformation combinés peuvent être exprimé sous la forme suivante :

$$S = S_i^t + S_i^s + S_i^b$$

Alors :

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_3 A_3 \\ E_4 A_4 \\ \left(\frac{L_c}{L_d}\right)^2 E_5 A_5 \\ \left(\frac{L_c}{L_d}\right)^2 E_6 A_6 \end{Bmatrix} u_{,x} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{L_c L_g}{L_d^2} E_5 A_5 \\ -\frac{L_c L_g}{L_d^2} E_6 A_6 \end{Bmatrix} \gamma + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{L_g}{2} E_3 A_3 \\ \frac{L_g}{2} E_4 A_4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \psi_{,x} \dots \dots \dots (III-25)$$

**III.3.2. Structure asymétrique :**

Le deuxième exemple représente une structure arbitraire qui ne présente pas un axe de symétrie. Les types des déformations permises et les conditions aux limites sont gardés semblable à ceux considérés pour l'exemple de la structure symétrique (Figure III-6), et les mêmes procédures sont utilisées pour obtenir les propriétés équivalentes de la structure continue. Il devait être signalé que quand la traction et la flexion sont appliquées, les coefficients  $a_i$  et  $c_i$  sont identiques à ceux trouvés dans les équations (III-16) et (III-22) respectivement, mise à part que dans cette structure, le membre 6 est éliminé. D'autre part, quand la force du cisaillement est appliquée (Figure III-6.2), le déplacement transversal au nœud p est important et ne devrait pas être négligé.

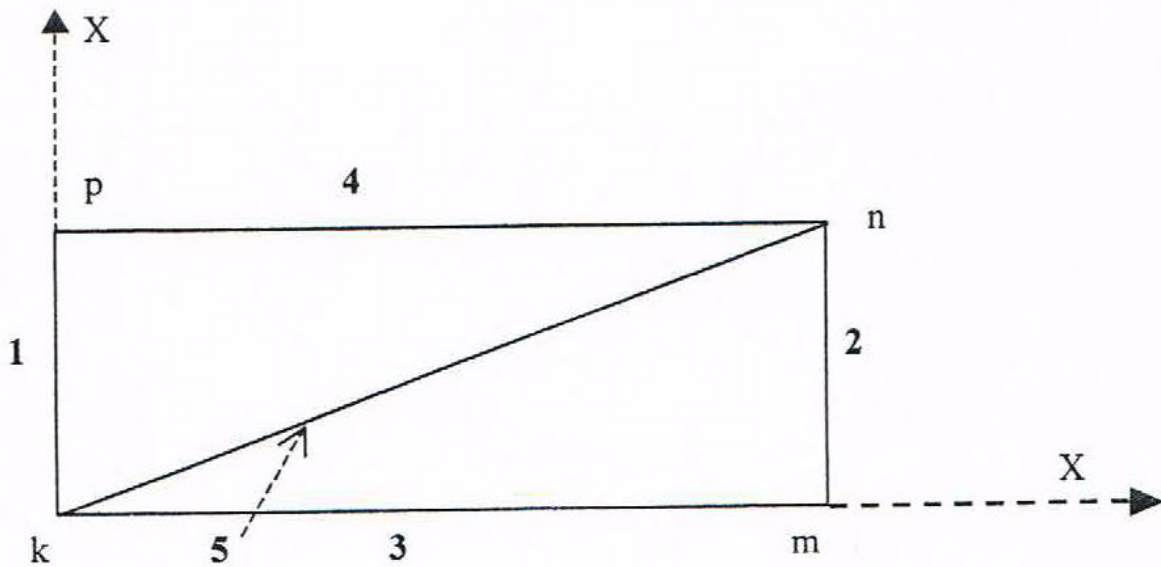


Figure III-6 : Cellule d'une structure treillis asymétrique composée de cinq barres

Les propriétés physiques et géométriques de la structure sont données dans le tableau suivant :



Elément	Longueur	Rigidité	$\lambda$	$\mu$
1	$L_g$	$E_1A_1$	0	1
2	$L_g$	$E_2A_2$	0	1
3	$L_c$	$E_3A_3$	1	0
4	$L_c$	$E_4A_4$	1	0
5	$L_d$	$E_5A_5$	$L_c/L_d$	$L_g/L_d$

Tableau III-2 : propriétés physiques et géométriques de la structure asymétrique

III.3.2.1. Cas de traction pure :

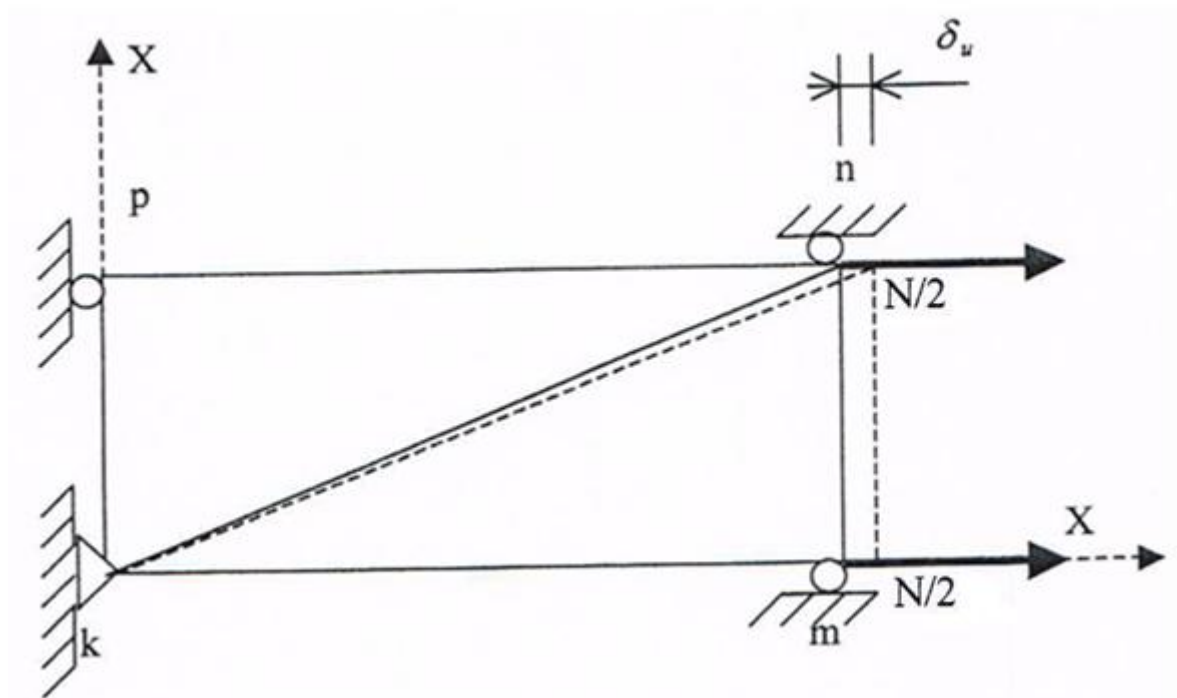


Figure III-6.1 : Cas de traction pure d'une structure asymétrique

$$\{\varepsilon\}^t = \left\{ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ \left(\frac{L_c}{L_d}\right)^2 \right\}^T u_{,x} \dots \dots \dots (III-26)$$

$$\{S\}^t = \left\{ 0 \ 0 \ E_3A_3 \ E_4A_4 \ \left(\frac{L_c}{L_d}\right)^2 \ E_5A_5 \right\}^T u_{,x} \dots \dots \dots (III-27)$$

## III.3.2.2. Cas de cisaillement pur :

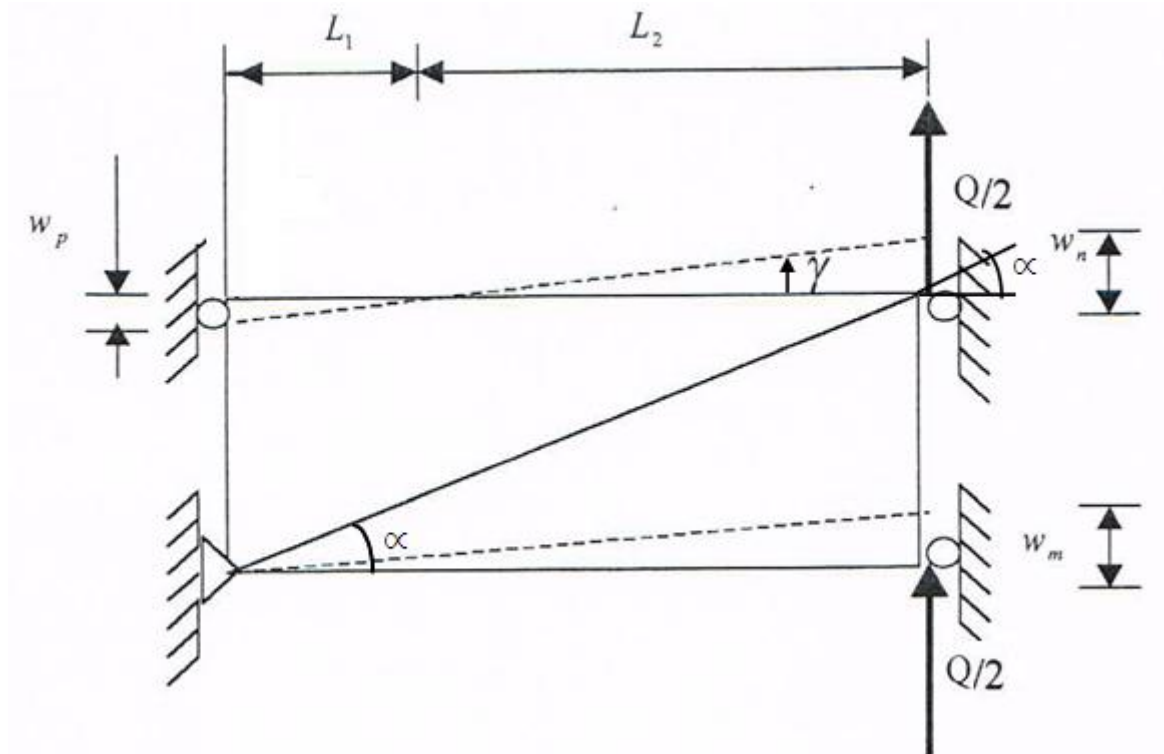


Figure III-6.2 : Cas de cisaillement pur d'une structure asymétrique

Les déplacements nodaux sont rapprochés par :

$$tg\gamma = \frac{w_m}{L_c} = \gamma$$

$$tg\gamma = \frac{w_n}{L_2} = \gamma$$

$$tg\gamma = \frac{w_p}{L_1} = \gamma$$

Donc :

$$w_p = L_1\gamma$$

$$w_n = L_2\gamma$$

$$w_m = L_c\gamma$$

Avec :

$$L_c = L_1 + L_2$$

D'après la configuration de la structure déformée, montrée dans (Figure III-6.2),  $L_1$  et  $L_2$  peuvent être en rapport avec les déplacements nodaux transversaux aux nœuds p, m et n quelque soit la force de cisaillement appliquée. Alors, par l'usage de l'équation de la raideur pour une force de cisaillement unitaire appliquée,  $L_1$  et  $L_2$  peuvent être exprimés en fonction des propriétés des membres de la structure :

$$\gamma = \frac{w_m}{l_c} = \frac{w_n}{l_2} = \frac{w_p}{l_1}$$

Pour l'élément (5) nous disposons :

$$\frac{w_n}{l_2} = \frac{w_n L_d}{l_d l_2} = \frac{\Delta L_d}{L_d \sin \alpha} \frac{L_d}{L_2}$$

$$\frac{w_n}{l_2} = \frac{\Delta L_d L_d L_d}{L_d L_g L_2}$$

Avec :

$$\frac{\Delta L_d}{L_d} = \frac{2Q}{E_5 A_5 \sin \alpha} = \frac{2Q L_d}{E_5 A_5 L_g}$$

Alors :

$$\frac{w_n}{l_2} = \frac{2Q}{E_5 A_5} \frac{L_d^3}{L_g^2} \frac{1}{L_2}$$

$$\frac{w_n}{l_2} = \frac{2Q}{E_5 A_5} \frac{L_d^3}{L_g^2} \frac{1}{(L_c - L_1)}$$

D'autre part pour l'élément (2) :

$$\frac{\Delta L(2)}{L_g} = \frac{w_m - w_n}{L_g} = \frac{w_p}{L_g} = \frac{Q}{E_2 A_2}$$

Puisque :

$$\frac{w_p}{L_g} = \frac{Q}{E_2 A_2}$$

Alors :

$$\frac{w_p}{L_1} = \frac{w_p L_g}{L_g L_1} = \frac{Q}{E_2 A_2} \frac{L_g}{L_1}$$

$$\frac{w_n}{L_2} = \frac{w_p}{L_1} \Rightarrow \frac{2Q}{E_5 A_5} \frac{L_d^3}{L_g^2} \frac{1}{(L_c - L_1)} = \frac{Q}{E_2 A_2} \frac{L_g}{L_1}$$

$$L_1 = \frac{L_c L_g^3 E_5 A_5}{L_g^3 E_5 A_5 + 2L_d^3 E_2 A_2}$$

D'après l'équation suivante :

$$L_c = L_1 + L_2$$

Nous obtenons donc :

$$L_2 = \frac{2L_c L_d^3 E_2 A_2}{2L_d^3 E_2 A_2 + L_5^3 E_5 A_5}$$

On introduisant la quantité D tel que :

$$D = L_g^3 E_5 A_5 + 2L_d^3 E_2 A_2 \dots \dots \dots (III-28)$$

Il se réduit donc :

$$L_1 = \frac{L_c L_g^3 E_5 A_5}{D}$$

$$L_2 = \frac{L_c L_d^3 E_5 A_5}{D} = \frac{2 L_c L_d^3 E_2 A_2}{D} \dots \dots \dots (III-29)$$

Détermination des coefficients  $b_i$  :

La déformation de chaque élément de la structure est exprimée en fonction des déplacements nodaux par la formule suivante :

$$\varepsilon_i^s = \frac{1}{L_i} [(u_n - u_k) \cos \theta_i + (w_n - w_k) \sin \theta_i]$$

Dans le cas de cisaillement pur, elle se réduit à :

$$\varepsilon_i^s = b_i \gamma$$

$$\varepsilon_1^s = \frac{w_p}{L_g} = \frac{L_1}{L_g} \gamma \dots \dots \dots \Rightarrow b_1 = \frac{L_1}{L_g} = \frac{L_c L_g^2}{D} E_5 A_5$$

$$\varepsilon_2^s = \frac{w_n - w_m}{L_g} = -\frac{w_p}{L_g} = -\frac{L_1}{L_g} \gamma \dots \dots \dots \Rightarrow b_2 = -\frac{L_c L_g^2}{D} E_5 A_5$$

$$\varepsilon_3^s = 0 \dots \dots \dots \Rightarrow b_3 = 0$$

$$\varepsilon_4^s = 0 \dots \dots \dots \Rightarrow b_4 = 0$$

$$\varepsilon_5^s = \frac{w_n L_g}{L_d L_d} = \frac{L_g L_2}{L_d^2} \gamma \dots \dots \dots \Rightarrow b_5 = \frac{L_g L_2}{L_d^2} = \frac{2 E_2 A_2}{D} L_c L_g L_d$$

$$\{\varepsilon\}^s = \frac{L_c L_g}{D} \begin{Bmatrix} L_g E_5 A_5 \\ -L_g E_5 A_5 \\ 0 \\ 0 \\ 2 L_d E_2 A_2 \end{Bmatrix} \gamma \dots \dots \dots (III-30)$$

$$\{S\}^s = \frac{L_c L_g}{D} \begin{Bmatrix} L_g E_5 A_5 E_1 A_1 \\ -L_g E_5 A_5 E_2 A_2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 L_d E_2 A_2 E_5 A_5 \end{Bmatrix} \gamma \dots \dots \dots (III-31)$$

III.3.2.3. Cas de flexion pure :

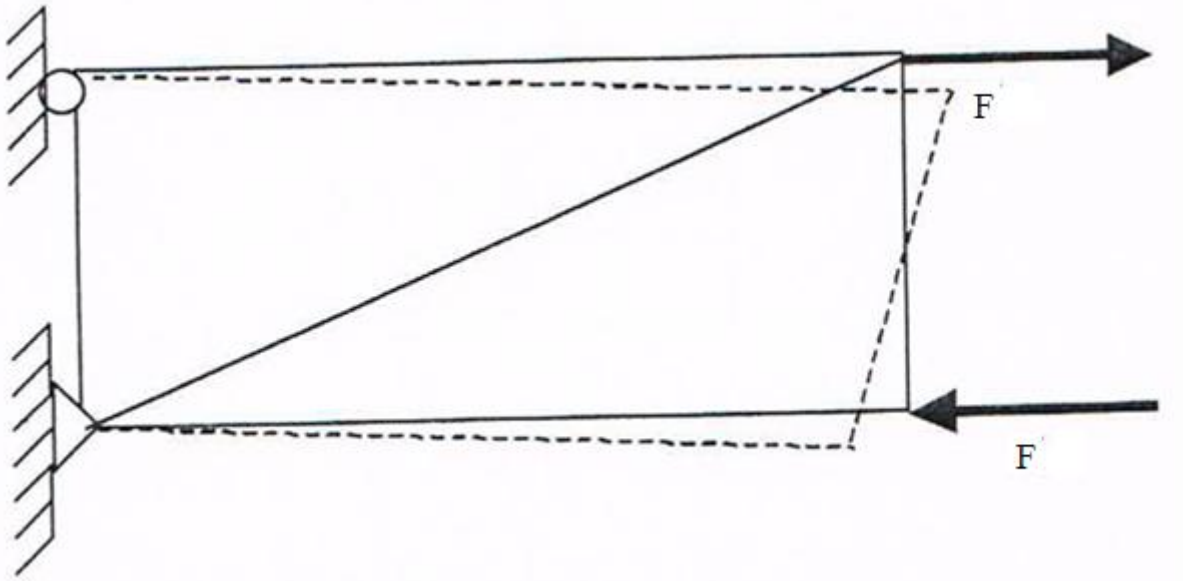


Figure III-6.3 : Cas de flexion pure d'une structure symétrique

$$\{\varepsilon\}^b = \left\{ 0 \quad 0 \quad -\frac{L_g}{2} \frac{L_g}{2} \quad 0 \right\}^T \psi_{,x} \dots \dots \dots (III-32)$$

$$\{S\}^b = \left\{ 0 \quad 0 \quad -\frac{L_g}{2} E_3 A_3 \quad \frac{L_g}{2} E_4 A_4 \quad 0 \right\}^T \psi_{,x} \dots \dots \dots (III-33)$$

III.3.2.4. Le cas global :

Le membre force résultant dû aux trois modes combinées de déformations pour le cas de la cellule asymétrique est exprimé dans la forme suivante:

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_3 A_3 \\ E_4 A_4 \\ \frac{L_c^2}{L_d^2} E_5 A_5 \end{Bmatrix} u_{,x} + \frac{L_c L_g}{D} \begin{Bmatrix} L_g E_5 A_5 E_1 A_1 \\ -L_g E_5 A_5 E_2 A_2 \\ 0 \\ 0 \\ 2L_d E_2 A_2 E_5 A_5 \end{Bmatrix} \gamma + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{L_g}{2} E_3 A_3 \\ \frac{L_g}{2} E_4 A_4 \\ 0 \end{Bmatrix} \psi_{,x} \dots \dots \dots (III-34)$$

III.4. Détermination des résultantes des forces internes :

III.4.1. Structure symétrique :

En se basant sur les résultats obtenus de l'équation (III-25) et (III-34) donnant les forces axiales dans chaque membre de la structure, la force normale résultante N, ainsi que la force de cisaillement Q et le moment de flexion M (Figure III-7) peuvent être obtenu comme suit :

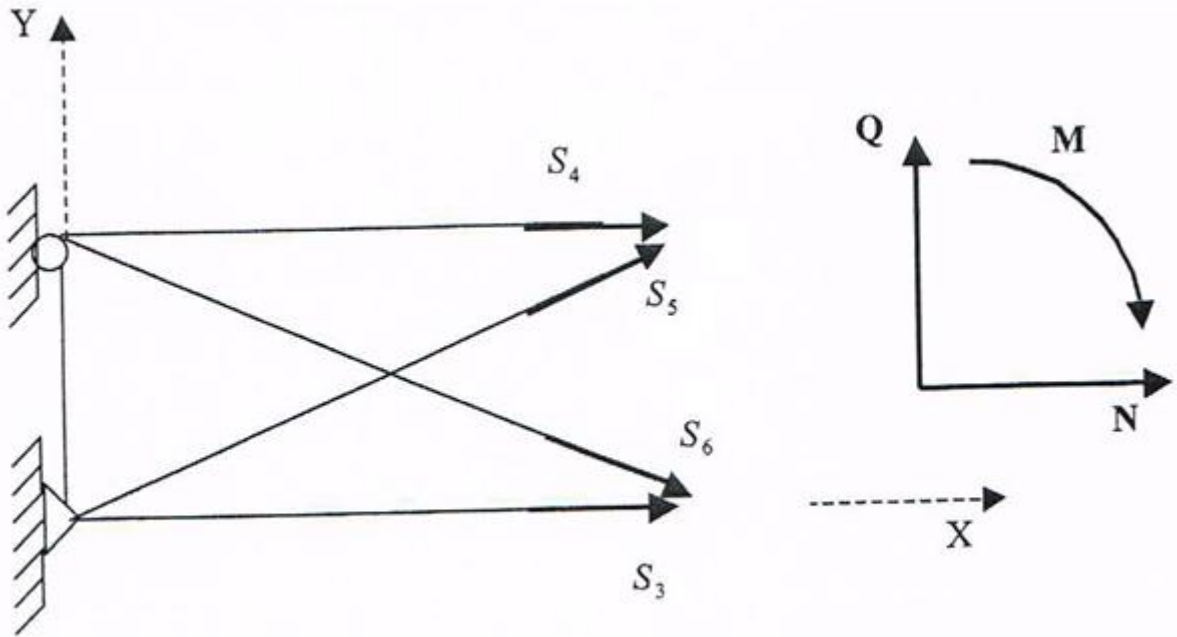


Figure III-7 : Efforts internes dans les membres d'une structure symétrique

$$\begin{aligned}
 N &= S_3 + S_4 + S_5 \frac{L_c}{L_d} + S_6 \frac{L_c}{L_d} \\
 &= \left[ E_3 A_3 u_{,x} - \frac{L_g}{2} E_3 A_3 \Psi_{,x} \right] + \left[ E_4 A_4 u_{,x} + \frac{L_g}{2} E_4 A_4 \Psi_{,x} \right] + \frac{L_c}{L_d} \left[ \frac{L_c^2}{L_d^2} E_5 A_5 u_{,x} + L_c \frac{L_g}{L_d^2} E_5 A_5 \gamma \right] \\
 &\quad + \frac{L_c}{L_d} \left[ \frac{L_c^2}{L_d^2} E_6 A_6 u_{,x} - L_c \frac{L_g}{L_d^2} E_6 A_6 \gamma \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N &= \left[ E_3 A_3 + E_4 A_4 + \frac{L_c^3}{L_d^3} E_5 A_5 + \frac{L_c^3}{L_d^3} E_6 A_6 \right] u_{,x} + L_c^2 \frac{L_g}{L_d^3} [E_5 A_5 - E_6 A_6] \gamma \\
 &\quad + \frac{L_g}{2} [E_4 A_4 - E_3 A_3] \Psi_{,x}
 \end{aligned}$$

Et puisque :  $E_5 A_5 = E_6 A_6$

$$N = \left[ E_3 A_3 + E_4 A_4 + 2 \frac{L_c^3}{L_d^3} E_5 A_5 \right] u_{,x} + \frac{L_g}{2} [E_4 A_4 - E_3 A_3] \Psi_{,x} \dots \dots \dots (III-35)$$

$$\begin{aligned}
 Q &= S_5 \frac{L_g}{L_d} - S_6 \frac{L_g}{L_d} \\
 &= \frac{L_g}{L_d} \left[ \frac{L_c^2}{L_d^2} E_5 A_5 u_{,x} + L_c \frac{L_g}{L_d^2} E_5 A_5 \gamma \right] - \frac{L_g}{L_d} \left[ \frac{L_c^2}{L_d^2} E_6 A_6 u_{,x} - L_c \frac{L_g}{L_d^2} E_6 A_6 \gamma \right]
 \end{aligned}$$

Et puisque :  $E_5 A_5 = E_6 A_6$

$$Q = 2 \frac{L_c L_g^2}{L_d^3} E_5 A_5 \gamma \dots \dots \dots (III-36)$$

Par la même procédure :

$$M = -S_3 \frac{L_g}{2} + S_4 \frac{L_g}{2}$$

$$M = \frac{L_g}{2} [E_4 A_4 - E_3 A_3] u_{,x} + \frac{L_g^2}{4} [E_3 A_3 + E_4 A_4] \Psi_{,x} \dots \dots \dots (III-37)$$

**III.4.2. Structure asymétrique :**

La force de traction (N), la force de cisaillement (Q) et le moment de flexion (M) peuvent être déterminés comme suit :

$$N = S_3 + S_4 + S_5 \frac{L_c}{L_d}$$

$$= \left[ E_3 A_3 u_{,x} - \frac{L_g}{2} E_3 A_3 \Psi_{,x} \right] + \left[ E_4 A_4 u_{,x} + \frac{L_g}{2} E_4 A_4 \Psi_{,x} \right] + \frac{L_c}{L_d} \left[ \frac{L_c^2}{L_d^2} E_5 A_5 u_{,x} - L_c \frac{L_g}{L_d^2} E_5 A_5 \gamma \right]$$

$$N = \left[ E_3 A_3 + E_4 A_4 + \frac{L_c^3}{L_d^3} E_5 A_5 \right] u_{,x} + \left[ 2 L_c \frac{L_g L_d}{D} E_2 A_2 E_5 A_5 \right] \Psi_{,x} \dots \dots \dots (III-38)$$

$$Q = S_5 \frac{L_g}{L_d}$$

$$= \frac{L_g}{L_d} \left[ \frac{L_c^2}{L_d^2} E_5 A_5 u_{,x} + L_c \frac{L_g}{L_d^2} E_5 A_5 \gamma \right]$$

$$Q = \left[ \frac{2}{D} L_d L_g E_2 A_2 E_5 A_5 \right] u_{,x} + \left[ \frac{2}{D} L_d L_g^2 E_2 A_2 E_5 A_5 \right] \gamma \dots \dots \dots (III-39)$$

$$M = -S_3 \frac{L_g}{2} + S_4 \frac{L_g}{2}$$

$$M = \frac{L_g}{2} [E_4 A_4 - E_3 A_3] u_{,x} + \frac{L_g^2}{2} [E_3 A_3 + E_4 A_4] \Psi_{,x} \dots \dots \dots (III-40)$$

**III.5. Détermination des propriétés de la poutre équivalente :**

En comparant les équations (III-10) et celles donnant les valeurs de N, Q et M nous obtenons les expressions des propriétés équivalentes à une poutre pour chaque type de structure.

**III.5.1. Structure symétrique :**

$$(III-10) \Rightarrow N = EA u_{,x} + \eta_{12} \gamma + \eta_{13} \Psi_{,x}$$

$$(III-35) \Rightarrow N = \left[ E_3 A_3 + E_4 A_4 + 2 \frac{L_c^3}{L_d^3} E_5 A_5 \right] u_{,x} + \frac{L_g}{2} [E_4 A_4 - E_3 A_3] \Psi_{,x}$$

Par comparaison :

$$EA = E_3 A_3 + E_4 A_4 + 2 \frac{L_c^3}{L_d^3} E_5 A_5$$

$$\eta_{12} = 0$$

$$\eta_{13} = 0 \text{ puisque } A_3 = A_4$$

$$(III-10) \Rightarrow Q = \eta_{12} \gamma + GA \gamma + \eta_{23} \Psi_{,x}$$

$$(III-36) \Rightarrow Q = \frac{2 L_c L_g^2}{L_d^3} E_5 A_5 \gamma$$

Par comparaison :

$$GA = \frac{2L_c L_g^2}{L_d^3} E_5 A_5$$

$$\eta_{12} = 0$$

$$\eta_{23} = 0$$

$$(III-10) \Rightarrow M = \eta_{13} u_{,x} + \eta_{23} \gamma + EI \Psi_{,x}$$

$$(III-37) \Rightarrow M = \frac{L_g}{2} [E_4 A_4 - E_3 A_3] u_{,x} + \frac{L_g^2}{4} [E_3 A_3 + E_4 A_4] \Psi_{,x}$$

Par comparaison :

$$\eta_{13} = 0 \text{ puisque } A_3 = A_4$$

$$\eta_{23} = 0$$

$$EI = \frac{L_g^2}{4} (E_3 A_3 + E_4 A_4)$$

Le résultat final pour une structure symétrique étant :

$EA = 2E_3 A_3 + 2 \frac{L_c^3}{L_d^3} E_5 A_5$ $GA = \frac{2L_c L_g^2}{L_d^3} E_5 A_5$ $EI = \frac{1}{2} L_g^2 E_3 A_3$ $\eta_{12} = \eta_{13} = \eta_{23} = 0$	<p>..... (III-41)</p>
--	-----------------------

### III.5.2. Structure asymétriques :

En suivant les mêmes étapes que le cas précédent et en comparant avec l'équation (III-10), on obtient :

$EA = E_3 A_3 + E_4 A_4 + \frac{L_c^3}{L_d^3} E_5 A_5$ $GA = \frac{2}{D} L_c L_g^2 E_2 A_2 E_5 A_5, \text{ avec } D = L_g^3 E_5 A_5 + 2L_d^3 E_2 A_2$ $EI = \frac{L_g^2}{4} [E_3 A_3 + E_4 A_4]$ $\eta_{12} = \frac{2}{D} L_g L_c^2 E_2 A_2 E_5 A_5, \text{ avec } D = L_g^3 E_5 A_5 + 2L_d^3 E_2 A_2$ $\eta_{13} = \frac{1}{2} L_g [E_4 A_4 - E_3 A_3]$ $\eta_{23} = 0$	<p>..... (III-42)</p>
--	-----------------------



## III.5.3. Récapitulatif des résultats

Caractéristiques de la poutre équivalente	
Structure Symétrique	Structure Asymétrique
$EA = 2E_3A_3 + 2\frac{L_c^3}{L_d^3}E_5E_5$	$EA = 2E_3A_3 + E_4A_4 + 2\frac{L_c^3}{L_d^3}E_5E_5$
$GA = 2\frac{L_cL_g^2}{L_d^3}E_5A_5$	$GA = \frac{2}{D}L_cL_g^2E_2A_2E_5E_5, avec D = L_g^3E_5A_5 + 2L_d^3E_2A_2$
$EI = \frac{1}{2}L_g^2E_3A_3$	$EI = \frac{1}{4}L_g^2(E_3A_3 + E_4A_4)$
$\eta_{12} = 0$	$\eta_{12} = \frac{2}{D}L_gL_c^2E_2A_2E_5E_5$
$\eta_{13} = 0$	$\eta_{13} = \frac{1}{2}L_g(E_4A_4 - E_3A_3)$
$\eta_{23} = 0$	$\eta_{23} = 0$

Tableau III-3 : Récapitulatif des propriétés équivalentes

***CHAPITRE IV***  
***CALCUL DES STRUCTURES DISCRETE PAR***  
***ELEMENTS CONTINUS***  
***(EXEMPLES D'APPLICATIONS)***

## IV.1. Introduction Sur ANSYS :

ANSYS, créé en 1970 aux Etats-Unis, est un code éléments finis d'usage général dédié à la résolution numérique d'une large variété de problèmes physique en général et de mécanique en particulier. Ces problèmes portent notamment : analyse structurale en statique et en dynamique (linéaire et non linéaire), transfert de chaleur, dynamique des fluides, acoustique, électromagnétique.

Pour mener notre étude par modalisation numérique, on a utilisé le logiciel numérique ANSYS, ce logiciel comprend plusieurs composantes telles que : ANSYS/Professionnel, ANSYS/ Multiphysics...etc. Chaque composante est destinée à l'un des domaines d'ingénierie, et son choix met automatiquement à la disposition de l'utilisateur les processus adéquats (type d'élément, conditions aux limites, tracés,...etc.). Dans notre analyse, on a utilisé les modules structural dans ANSYS/ Multiphysics, qui permet de traiter la majorité des problèmes de mécanique. Il offre des outils puissants pour l'analyse en deux et trois dimensions, On trouve dans le manuel d'aide de « ANSYS » toutes les instructions qui permettent son exploitation à travers son interface utilisateur graphique "Graphical User Interface" ainsi que toute la documentation nécessaire. De nombreux processus de calcul sont disponibles dans ce code et chaque processus est une sorte d'ensemble de fonctions qui effectuent une tâche spécifique.

De façon générale, une résolution par éléments finis comporte trois étapes :

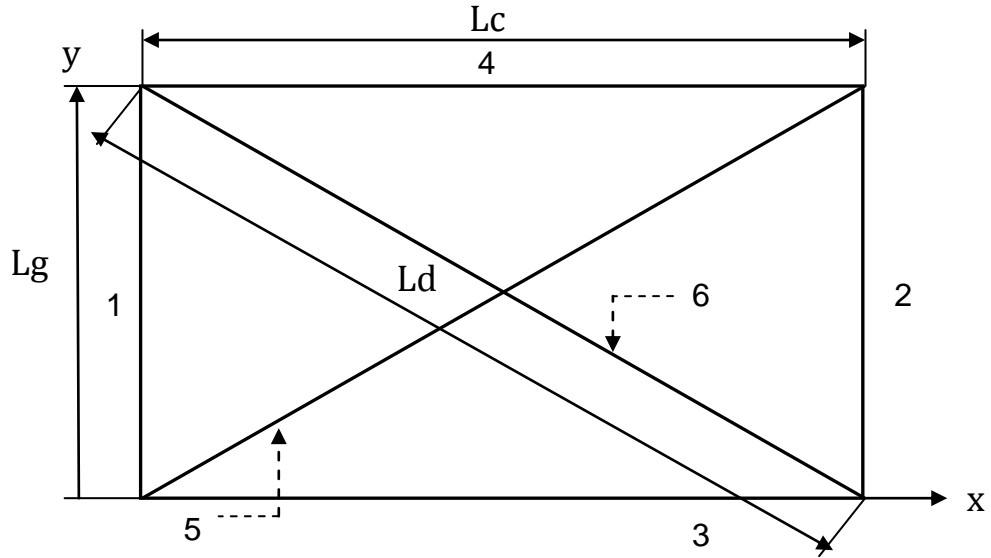
1. Préparation des données ou Pré-processing : définir le problème; les étapes majeurs sont données ci-dessous:
  - Définition des points clés (keypoints) /lignes/surfaces/volumes ;
  - Définir le type d'élément fini, ses propriétés géométriques et les propriétés physiques des matériaux ;
  - Maillage des lignes /surfaces/volume si cela est requis.

Les données nécessaires dépendent évidemment de la dimension du problème. (1D, 2D, axisymétrique, 3D).

2. Traitement ou Processing : assigner les charges, contraintes (conditions aux limites) et résolution; on spécifie notamment la nature des charges (localisées et/ou distribuées), contraintes ou conditions aux limites (translation et rotation) et, finalement, on résout le système d'équations.
3. Post-processing: analyse et visualisation des résultats; lors de cette étape, on peut examiner:
  - La liste des déplacements nodaux ;
  - Les forces et des moments au niveau des éléments;
  - Tracé des Déformées ;
  - Tracé des Iso contours des contraintes.

## IV.2. Détermination des propriétés équivalentes :

### IV.2.1. Le cas Symétrique :



$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E_5 = E_6 = 71,7 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$A_1 = A_2 = A_g = 60 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

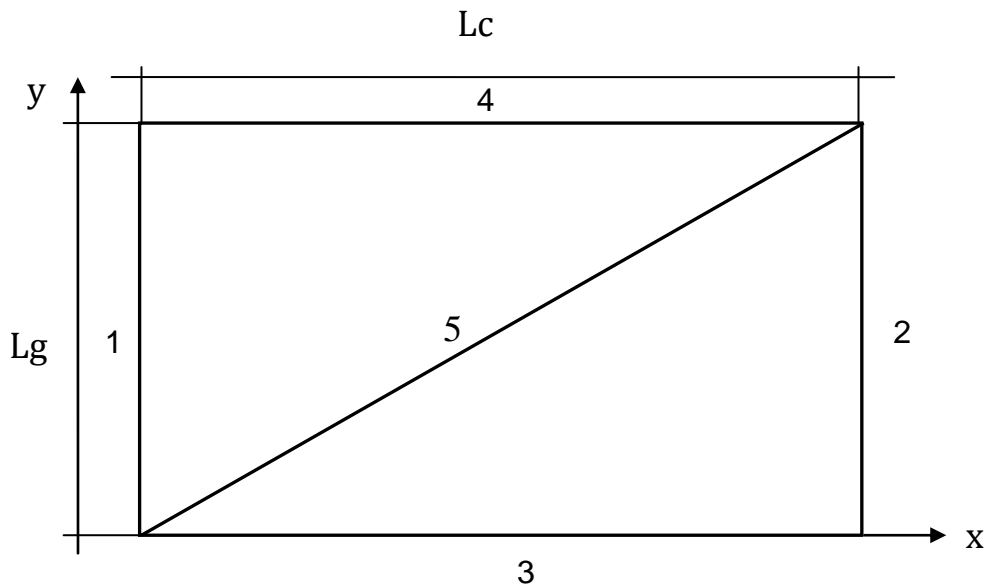
$$A_3 = A_4 = A_c = 80 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$A_5 = A_6 = A_d = 40 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$L_g = 5\text{m} , L_c = 7,5\text{m}$$

$$\rho = 2768 \text{ kg/m}^3$$

### IV.2.2. Le cas Asymétrique :



## IV.2.3. Tableau des résultats :

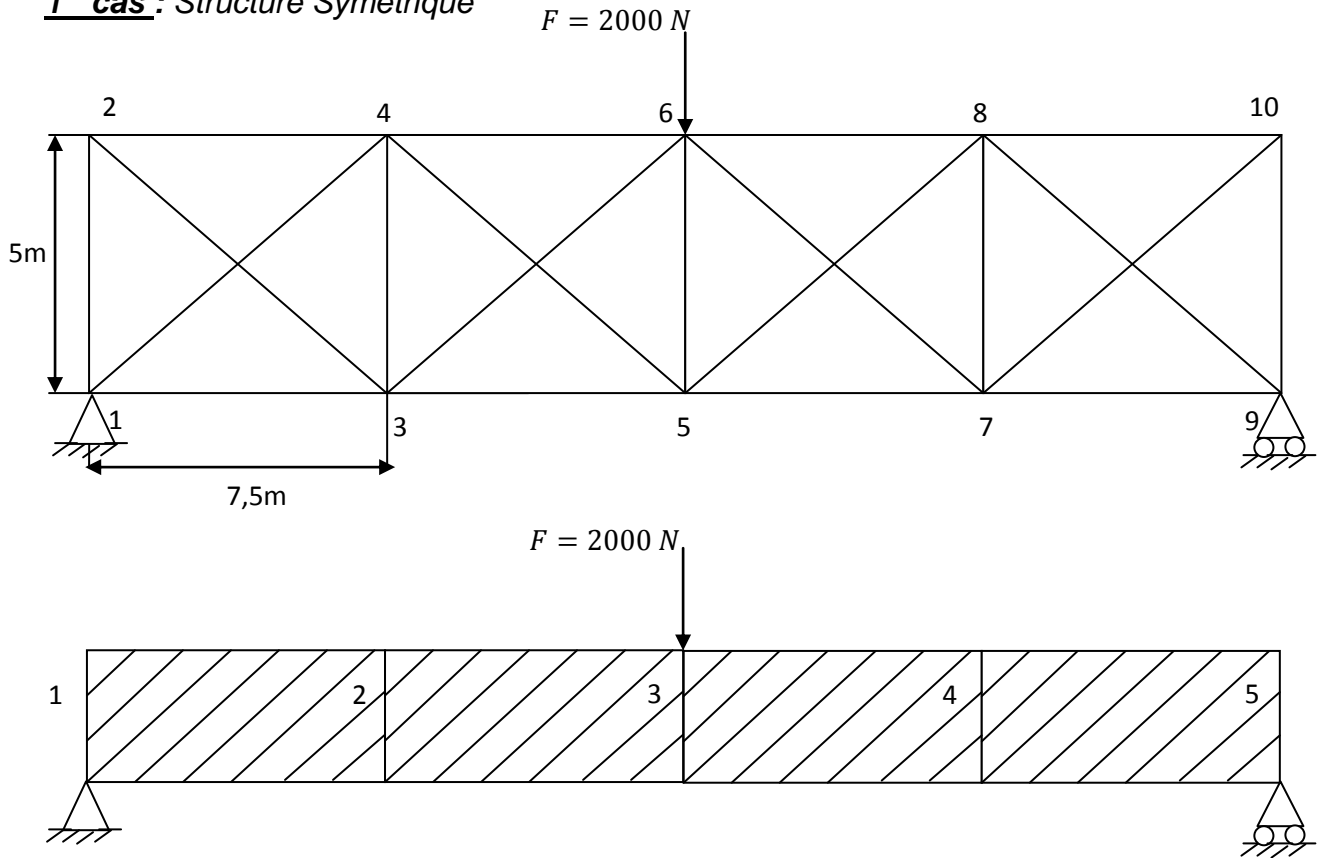
Structure Symétrique		Structure Asymétrique	
Formules	Résultats	Formules	Résultats
$EA = 2E_3A_3 + 2\frac{L_c^3}{L_d^3}E_5E_5$	$1,4776 \times 10^7 N$	$EA = 2E_3A_3 + E_4A_4 + 2\frac{L_c^3}{L_d^3}E_5E_5$	$1,3124 \times 10^7 N$
$GA = 2\frac{L_cL_g^2}{L_d^3}E_5A_5$	$1,4685 \times 10^6 N$	$GA = \frac{2}{D}L_cL_g^2E_2A_2E_5E_5$	$6,9473 \times 10^5 N$
$EI = \frac{1}{2}L_g^2E_3A_3$	$7,17 \times 10^7 Nm^2$	$EI = \frac{1}{4}L_g^2(E_3A_3 + E_4A_4)$	$7,17 \times 10^7 Nm^2$
$\eta_{12} = 0$	0	$\eta_{12} = \frac{2}{D}L_gL_c^2E_2A_2E_5E_5$	$1,0421 \times 10^6 N$
$\eta_{13} = 0$	0	$\eta_{13} = \frac{1}{2}L_g(E_4A_4 - E_3A_3)$	0
$\eta_{23} = 0$	0	$\eta_{23} = 0$	0

Tableau IV-1 : Valeurs numériques des propriétés équivalentes

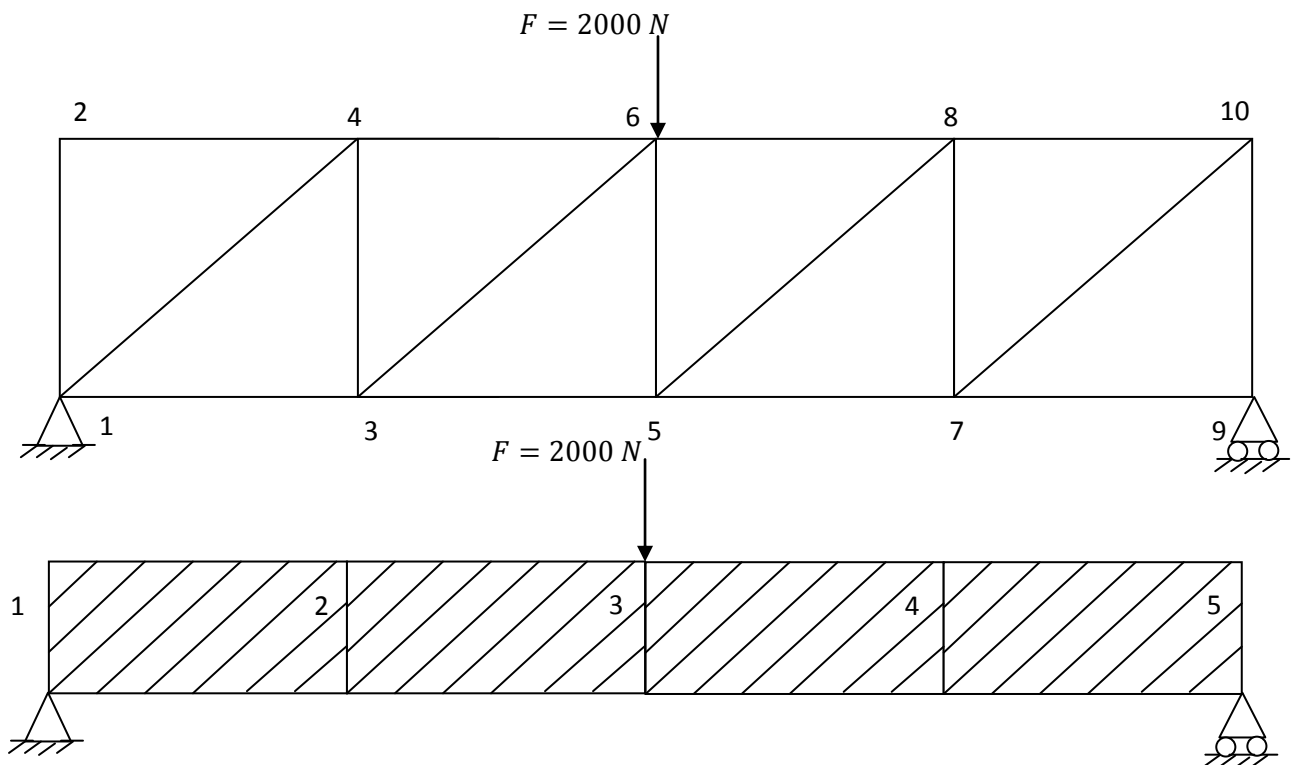
### IV.3. Exemples d'applications :

#### IV.3.1. Exemple 01 : Structure sur deux appuis avec force concentrée

**1<sup>er</sup> cas :** Structure Symétrique



**2<sup>ème</sup> cas :** Structure Asymétrique

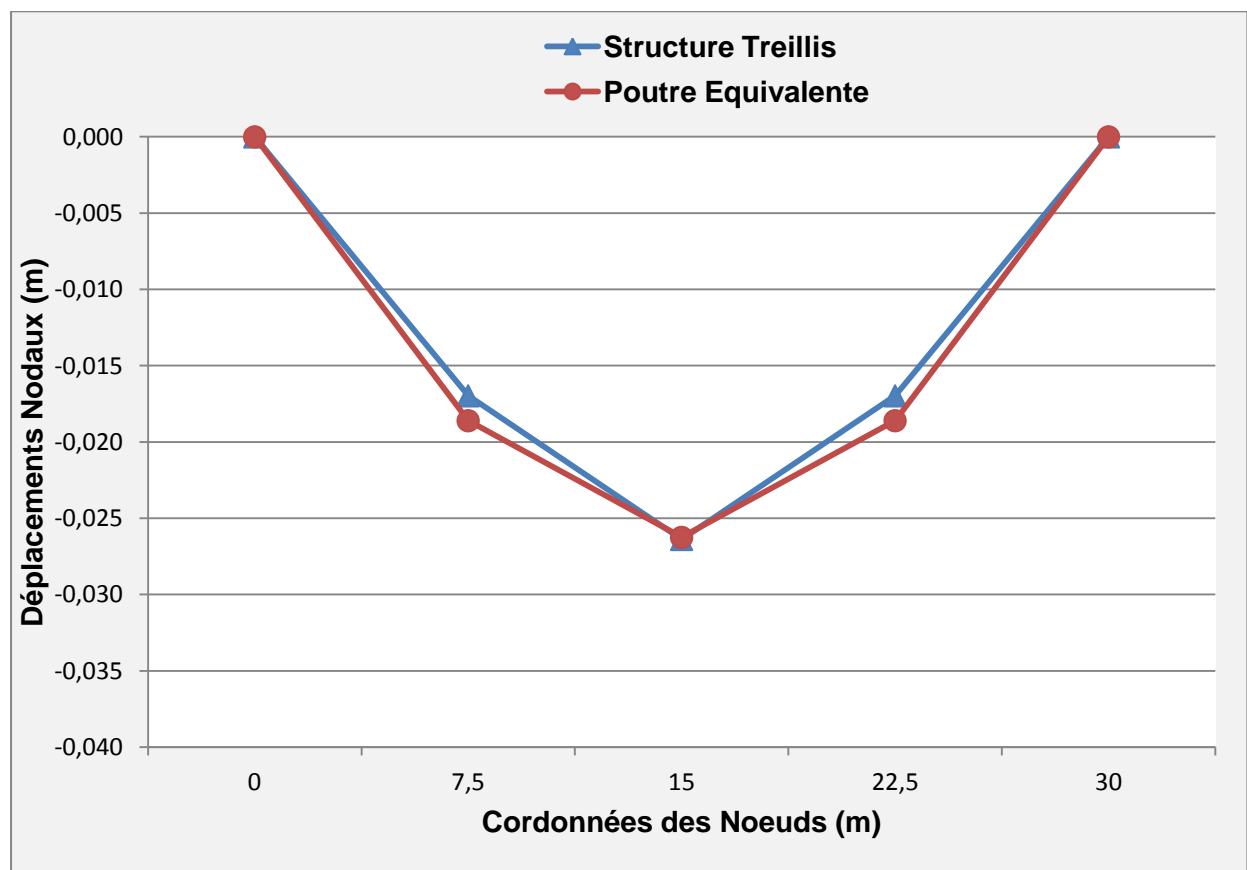


### IV.3.2. Comparaison des déplacements transversaux :

#### IV.3.2.1. 1<sup>er</sup> cas : Structure Symétrique

Nœuds	Structure Treillis	Nœuds	Poutre Equivalente	Erreur
1	0	1	0	0%
3	$-0.16969 \times 10^{-1}$	2	$-0.18600 \times 10^{-1}$	9,6%
5	$-0.26383 \times 10^{-1}$	3	$-0.26247 \times 10^{-1}$	0.5%
7	$-0.16969 \times 10^{-1}$	4	$-0.18600 \times 10^{-1}$	9,6%
9	0	5	0	0%

*Tableau IV-2 : Comparaison des déplacements pour structure symétrique (1<sup>er</sup> cas de chargement)*



*CourbeIV-1 : Courbe de comparaison pour structure symétrique (1<sup>er</sup> cas de chargement)*

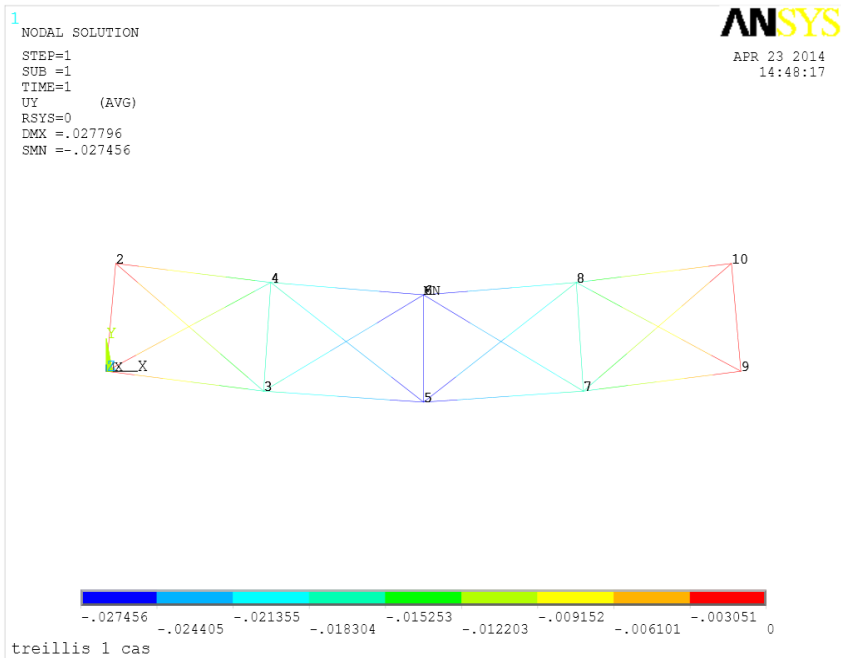
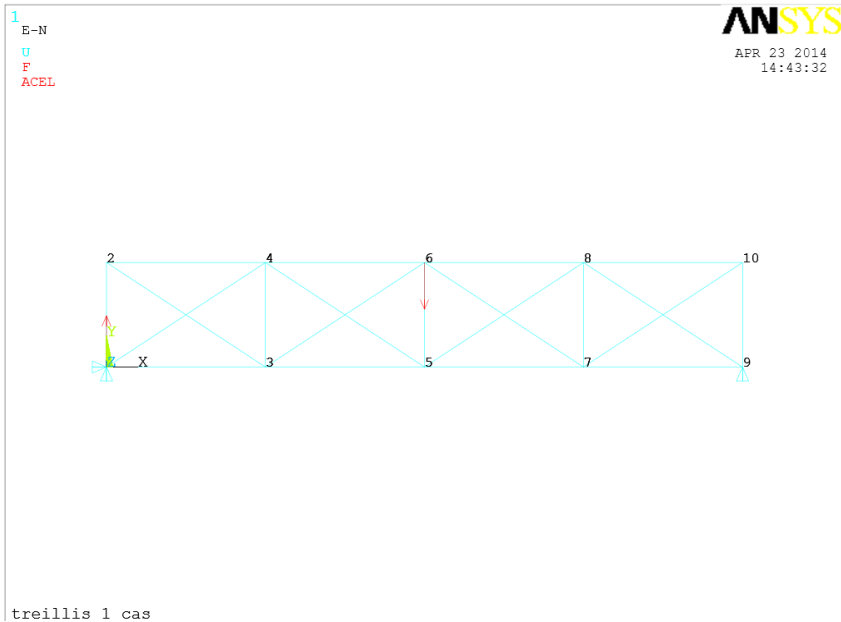
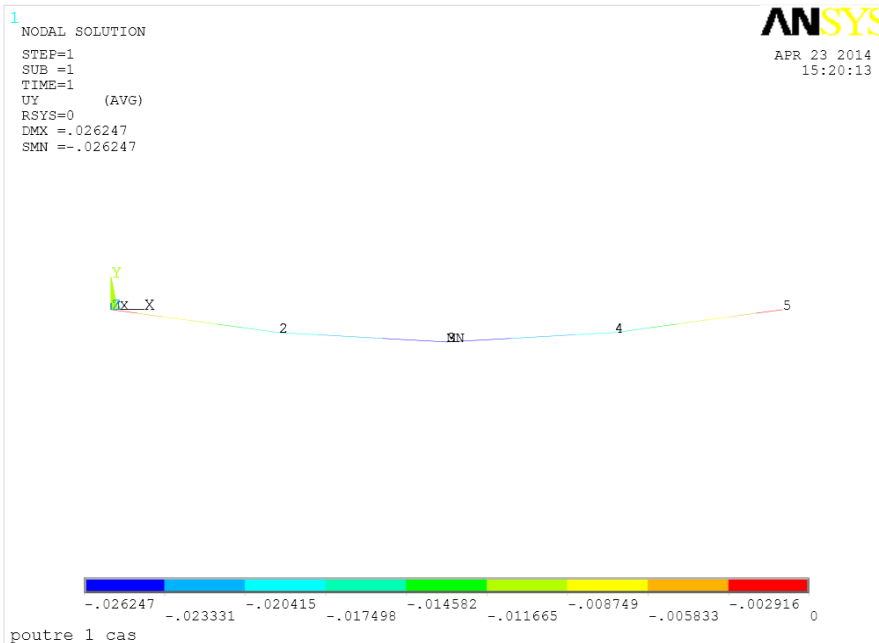
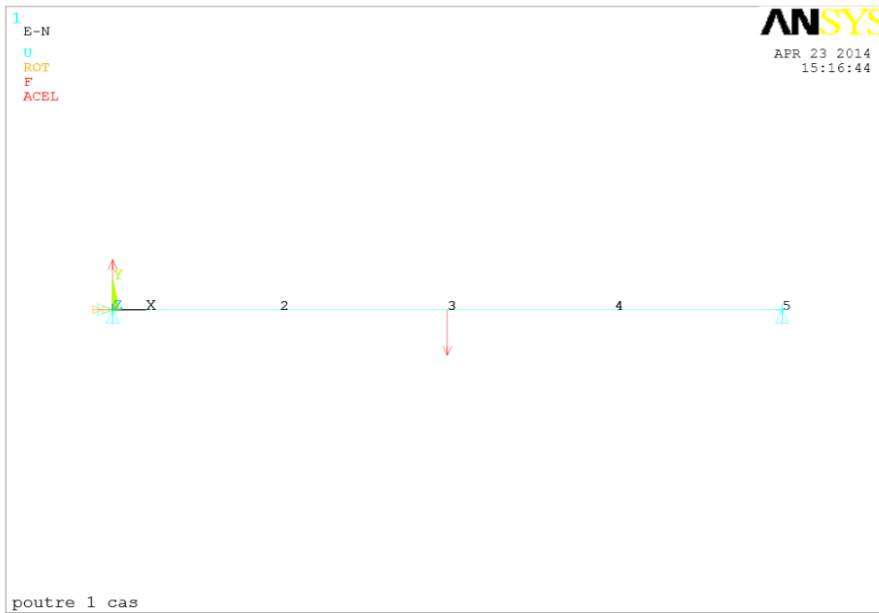


Figure IV-1 : Résultats de la simulation sur ANSYS (Treillis, 1<sup>er</sup> exemple, cas symétrique)





```

PRINT U   NODAL SOLUTION PER NODE

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP=    1  SUBSTEP=    1
TIME=    1.0000    LOAD CASE=    0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

      NODE      UY
      1      0.0000
      2 -0.18600E-01
      3 -0.26247E-01
      4 -0.18600E-01
      5      0.0000

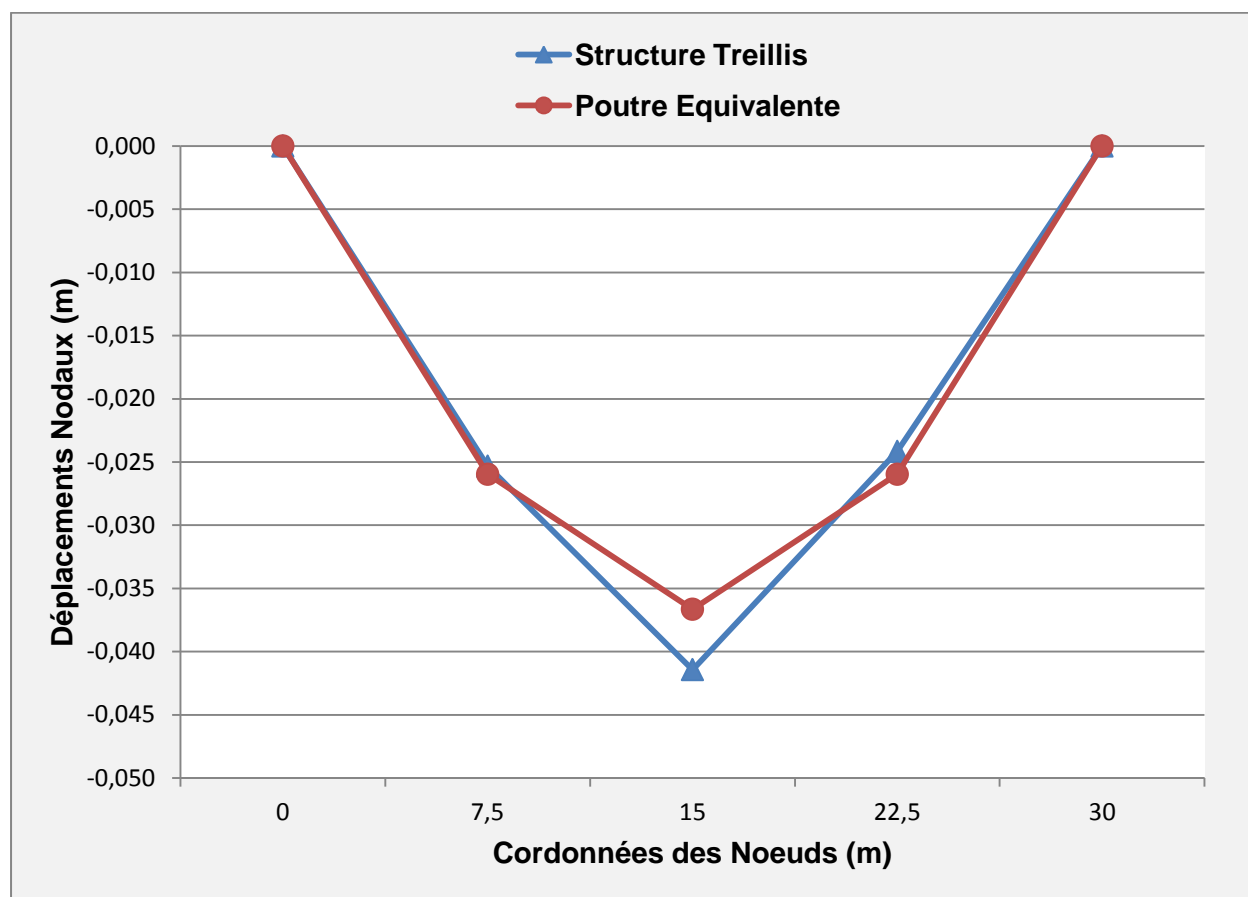
MAXIMUM ABSOLUTE VALUES
NODE      3
VALUE -0.26247E-01
    
```

Figure IV-2 : Résultats de la simulation sur ANSYS (poutres, 1<sup>er</sup> exemple, cas symétrique)

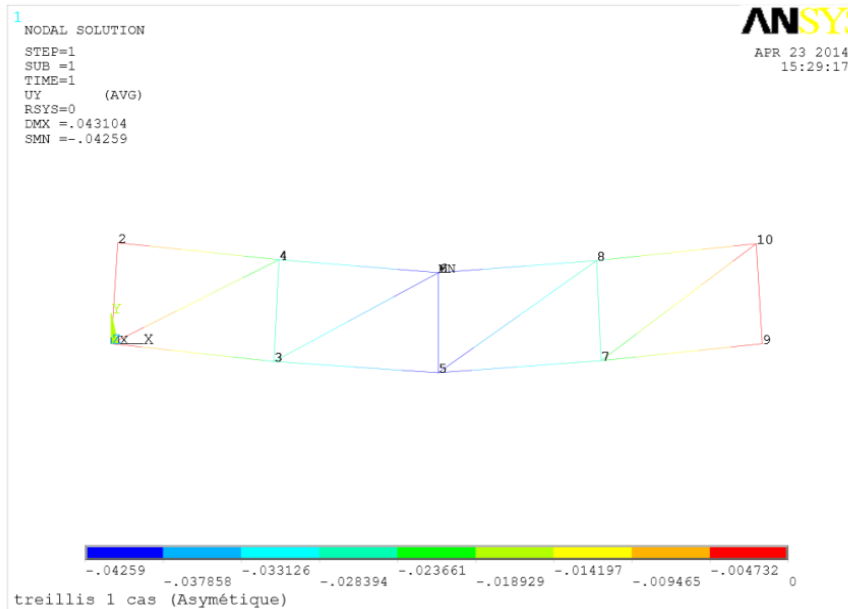
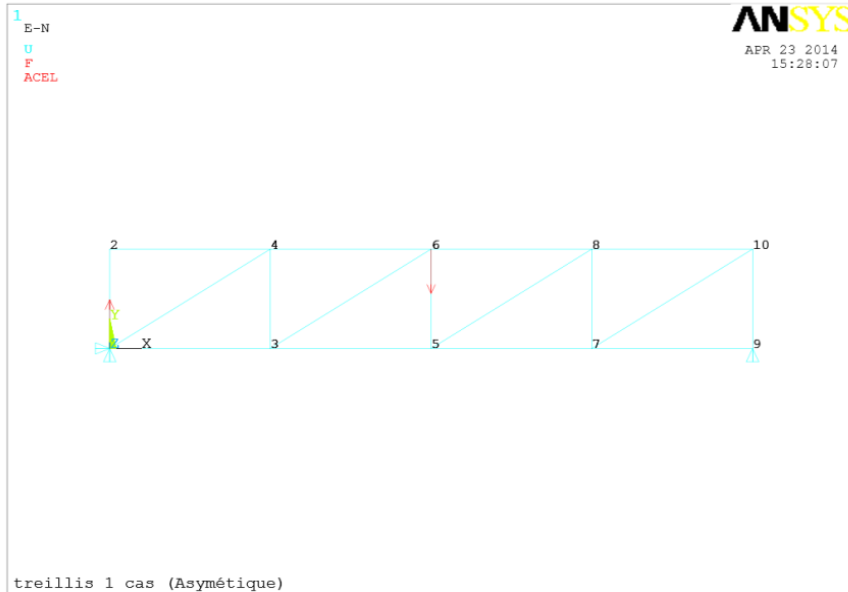
IV.3.2.2. 2<sup>ème</sup> cas : Structure Asymétrique

Nœuds	Structure Treillis	Nœuds	Poutre Equivalente	Erreur
1	0	1	0	0%
3	$-0.25329 \times 10^{-1}$	2	$-0.25972 \times 10^{-1}$	2,5%
5	$-0.41428 \times 10^{-1}$	3	$-0.36653 \times 10^{-1}$	11,5%
7	$-0.24162 \times 10^{-1}$	4	$-0.25972 \times 10^{-1}$	2,5%
9	0	5	0	0%

Tableau IV-3 : Comparaison des déplacements pour structure asymétrique (1<sup>er</sup> cas de chargement)



Courbe IV-2 : Courbe de comparaison pour structure asymétrique (1<sup>er</sup> cas de chargement)



PRINT U    NODAL SOLUTION PER NODE

\*\*\*\*\* POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING \*\*\*\*\*

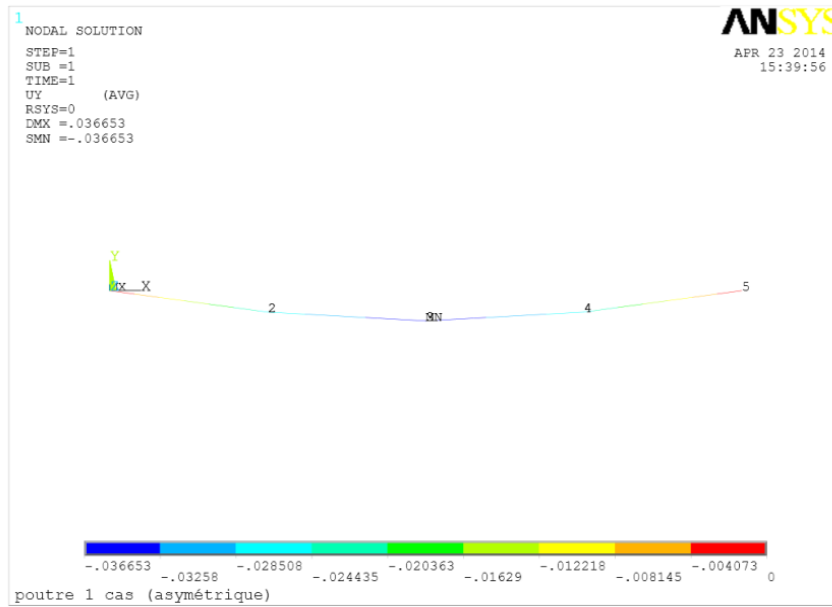
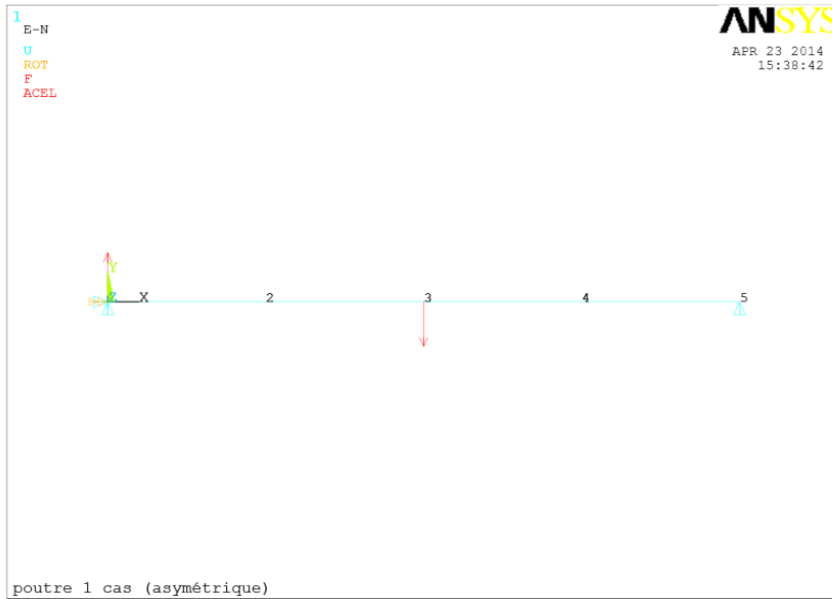
LOAD STEP=    1    SUBSTEP=    1  
TIME=    1.0000    LOAD CASE=    0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

NODE	UY
1	0.0000
2	-0.18936E-04
3	-0.25329E-01
4	-0.24108E-01
5	-0.41428E-01
6	-0.42590E-01
7	-0.24162E-01
8	-0.25383E-01
9	0.0000
10	-0.12702E-02

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES  
NODE    6  
VALUE -0.42590E-01

Figure IV-3 : Résultats de la simulation sur ANSYS (Treillis, 1<sup>er</sup> exemple, cas asymétrique)



PRINT U NODAL SOLUTION PER NODE

\*\*\*\*\* POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING \*\*\*\*\*

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1  
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

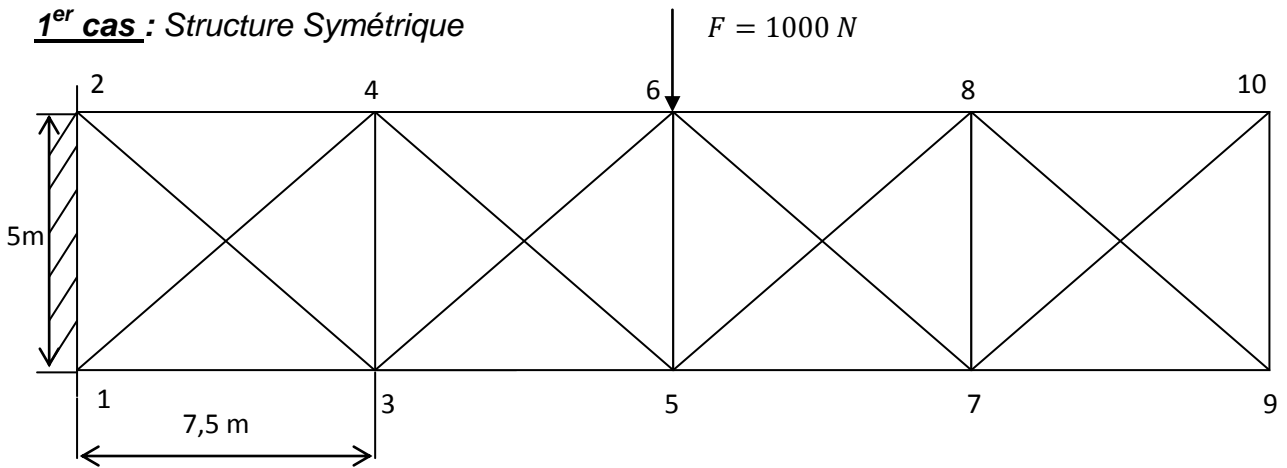
NODE	UY
1	0.0000
2	-0.25972E-01
3	-0.36653E-01
4	-0.25972E-01
5	0.0000

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES  
NODE 3  
VALUE -0.36653E-01

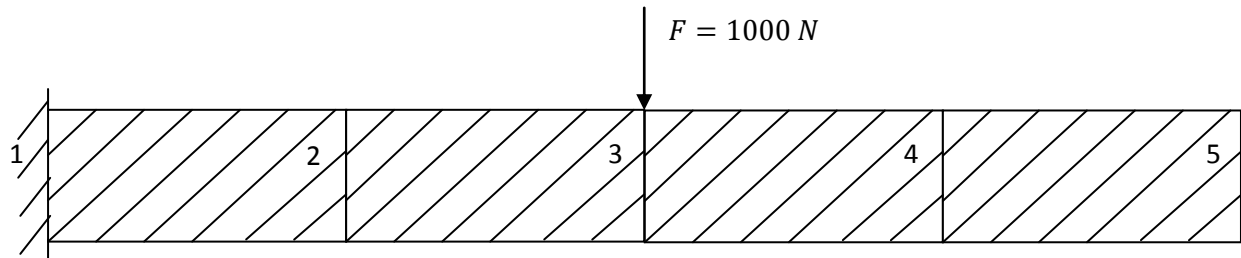
Figure IV-4 : Résultats de la simulation sur ANSYS (poutre, 1<sup>er</sup> exemple, cas asymétrique)

IV.3.3. Exemple 02 : Structure encastrée avec force concentrée

**1<sup>er</sup> cas :** Structure Symétrique

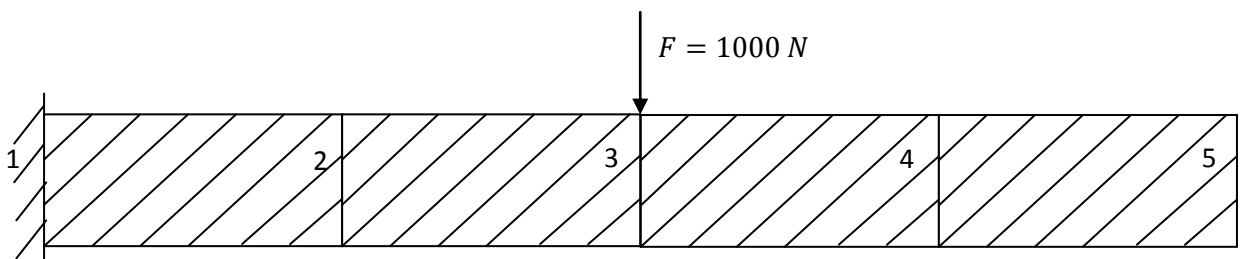
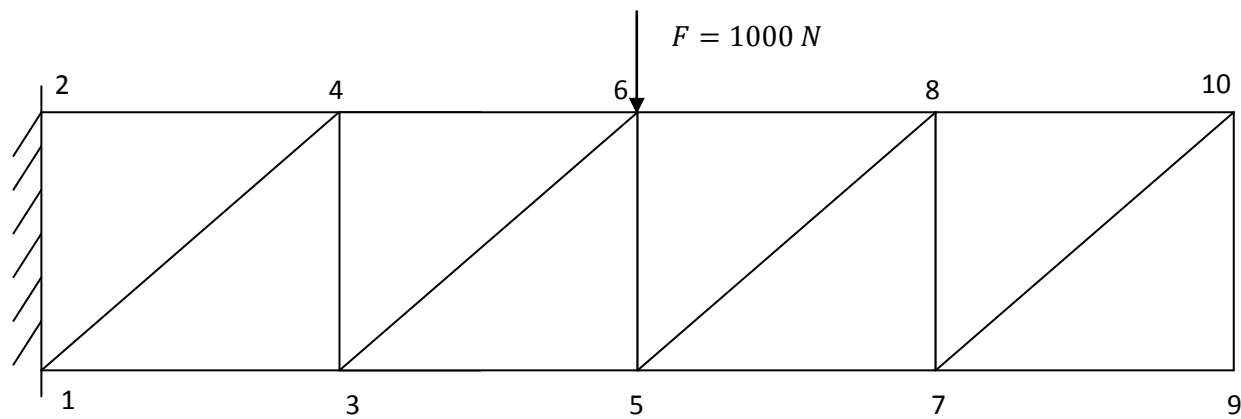


a- Structure originale



b- Poutre équivalente

**2<sup>ème</sup> cas :** Structure Asymétrique

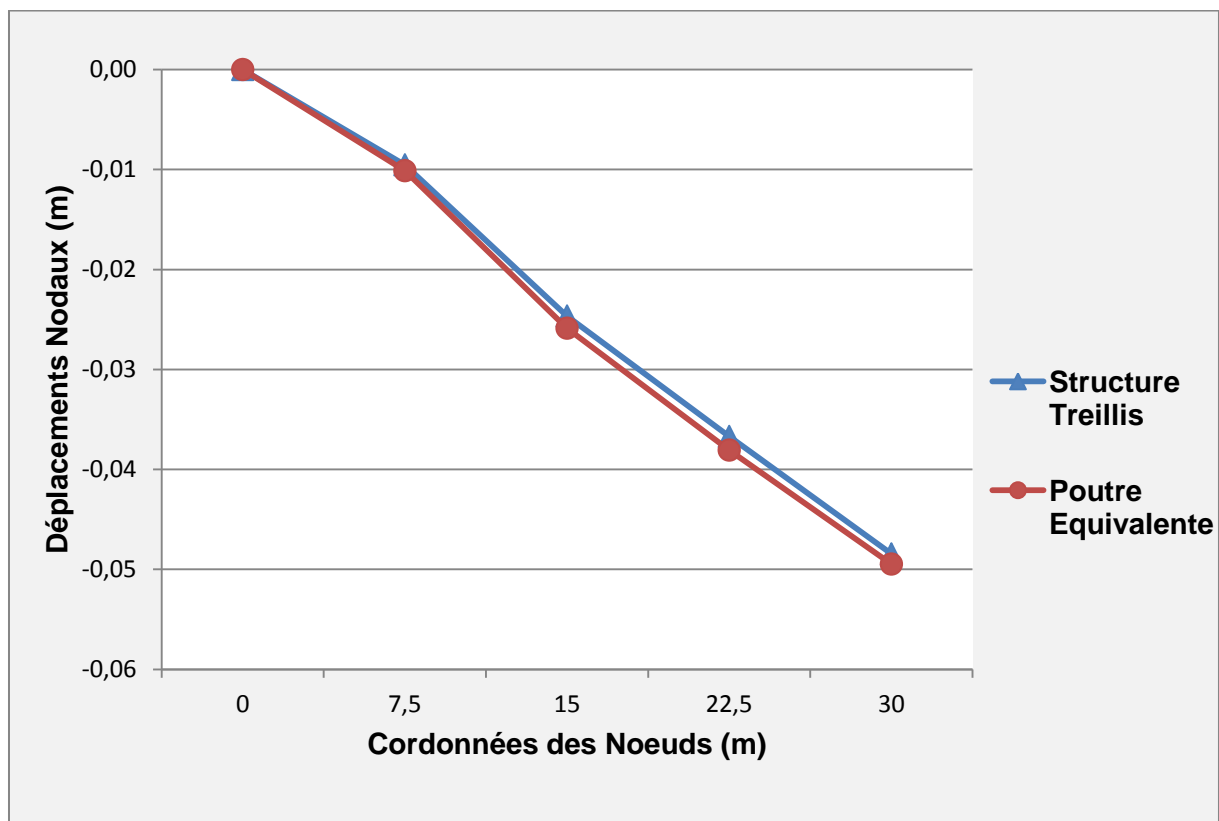


#### IV.3.4. Comparaison des déplacements transversaux :

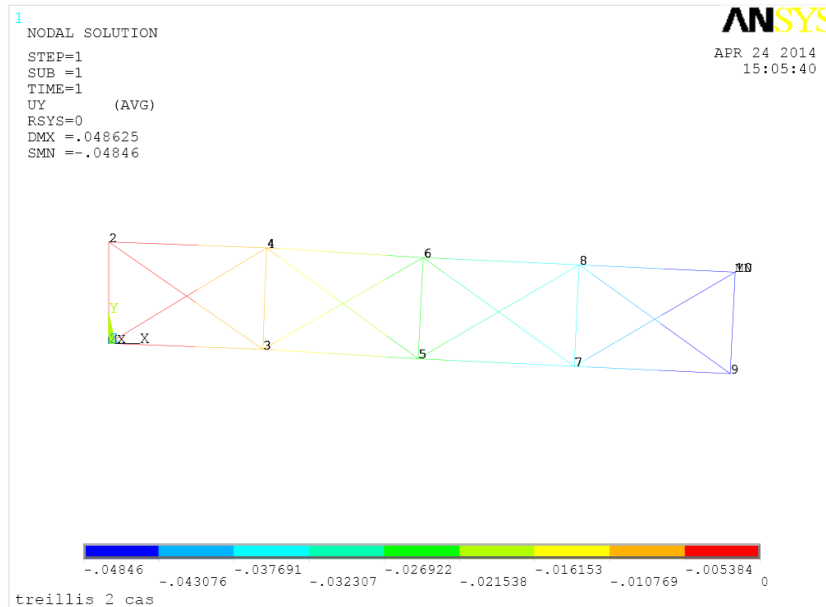
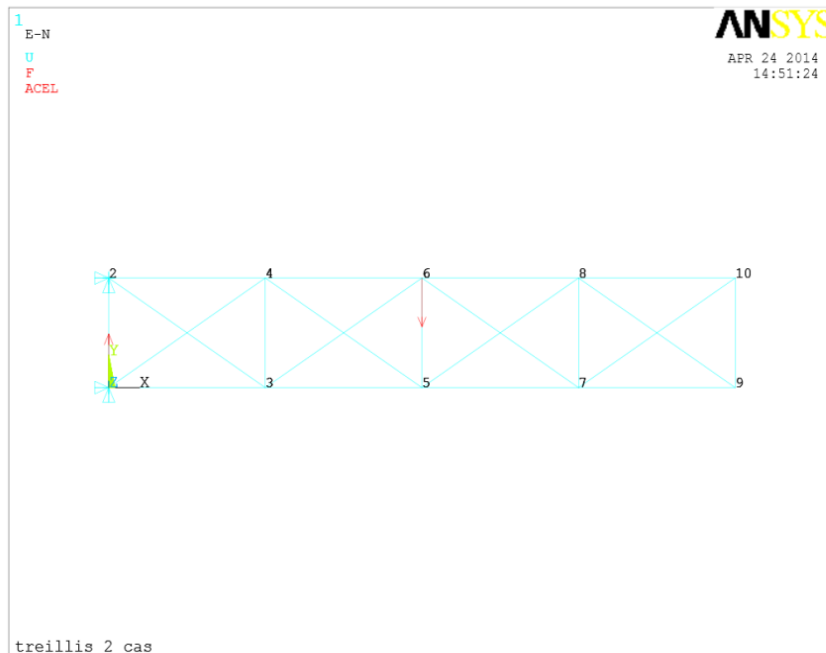
##### IV.3.4.1. 1<sup>er</sup> cas : Structure Symétrique

Nœuds	Structure Treillis	Nœuds	Poutre Equivalente	Erreur
1	0	1	0	0
3	$-0,09531 \times 10^{-1}$	2	$-0,10121 \times 10^{-1}$	5,8%
5	$-0,24656 \times 10^{-1}$	3	$-0,25877 \times 10^{-1}$	4,7%
7	$-0,36703 \times 10^{-1}$	4	$-0,38074 \times 10^{-1}$	3,6%
9	$-0,48459 \times 10^{-1}$	5	$-0,49476 \times 10^{-1}$	2%

Tableau IV-4 : Comparaison des déplacements pour structure symétrique (2<sup>ème</sup> cas de chargement)



Courbe IV-3 : Courbe de comparaison pour structure symétrique (2<sup>ème</sup> cas de chargement)



PRINT U NODAL SOLUTION PER NODE

\*\*\*\*\* POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING \*\*\*\*\*

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1  
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

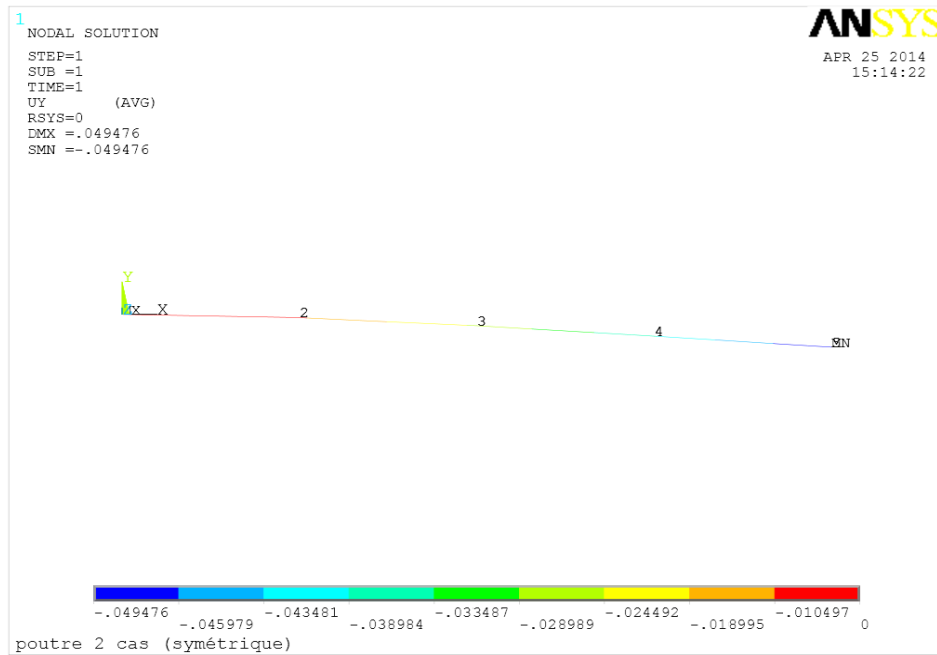
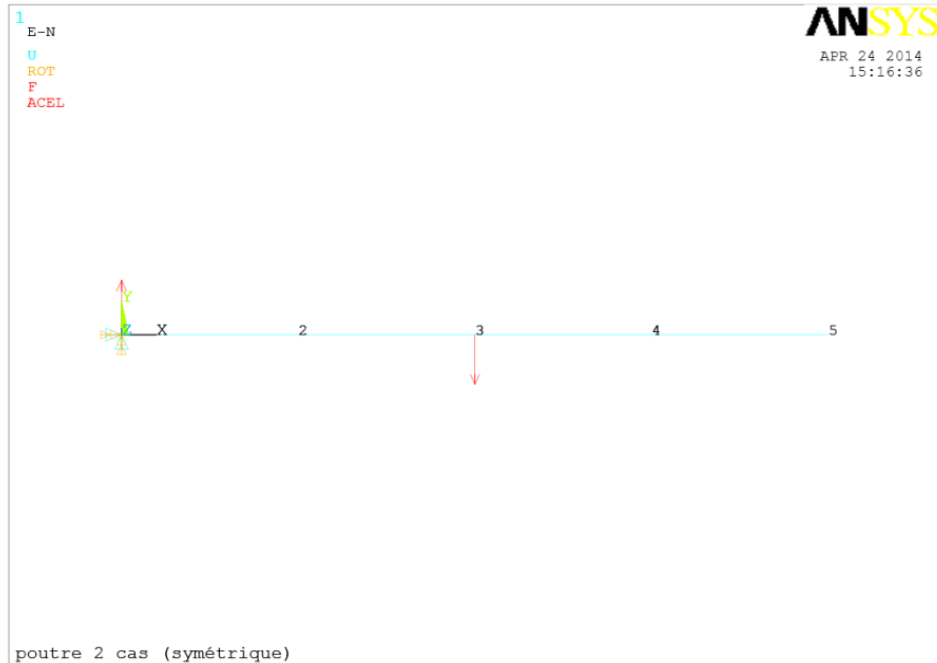
THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

NODE	UY
1	0.0000
2	0.0000
3	-0.95310E-02
4	-0.95093E-02
5	-0.24656E-01
6	-0.25192E-01
7	-0.36703E-01
8	-0.36681E-01
9	-0.48459E-01
10	-0.48460E-01

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES

NODE 10  
VALUE -0.48460E-01

Figure IV-5 : Résultats de la simulation sur ANSYS (Treillis, 2<sup>ème</sup> exemple, cas symétrique)



```

PRINT U   NODAL SOLUTION PER NODE

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP=    1  SUBSTEP=    1
TIME=    1.0000    LOAD CASE=    0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

      NODE      UY
      1      0.0000
      2     -0.10121E-01
      3     -0.25877E-01
      4     -0.38074E-01
      5     -0.49476E-01

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES
NODE          5
VALUE     -0.49476E-01
    
```

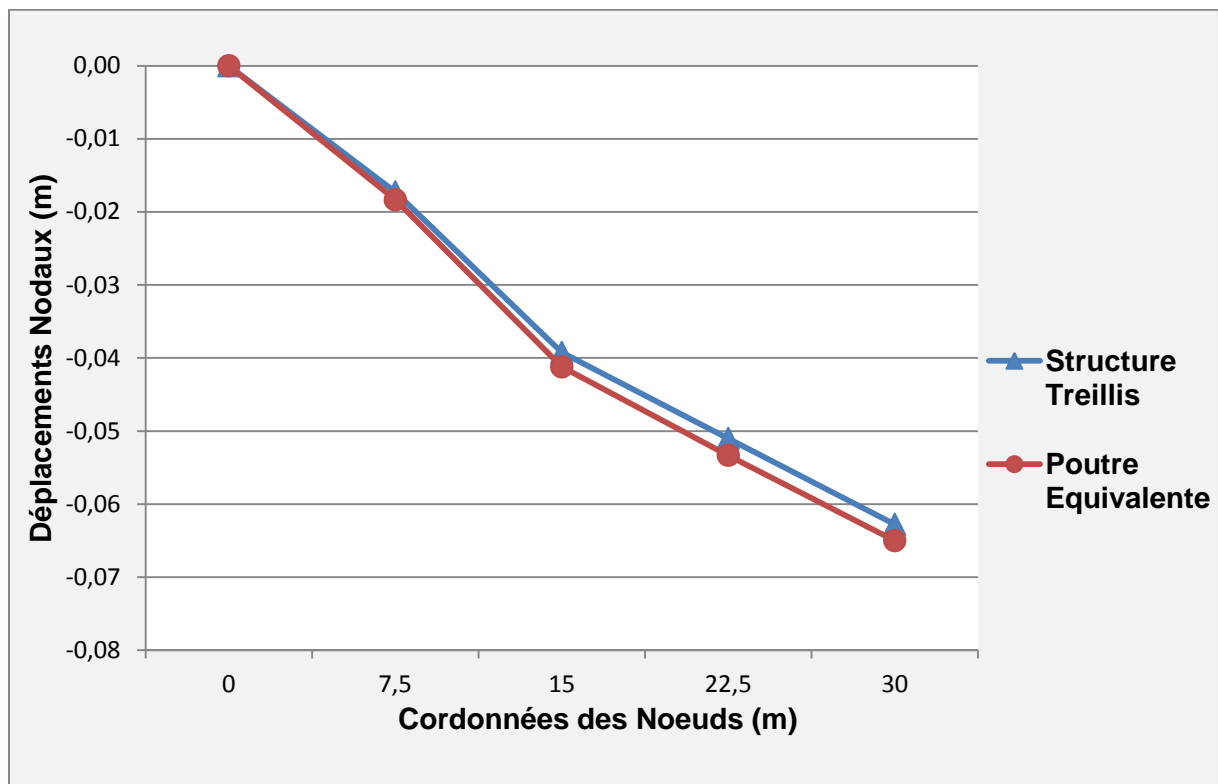
Figure IV-6 : Résultats de la simulation sur ANSYS (poutre, 2<sup>ème</sup> exemple, cas symétrique)



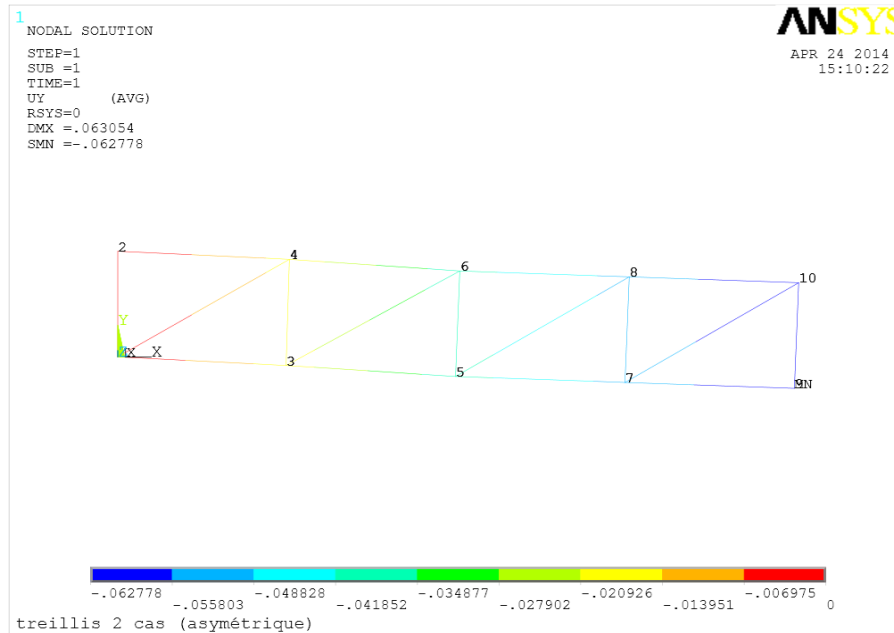
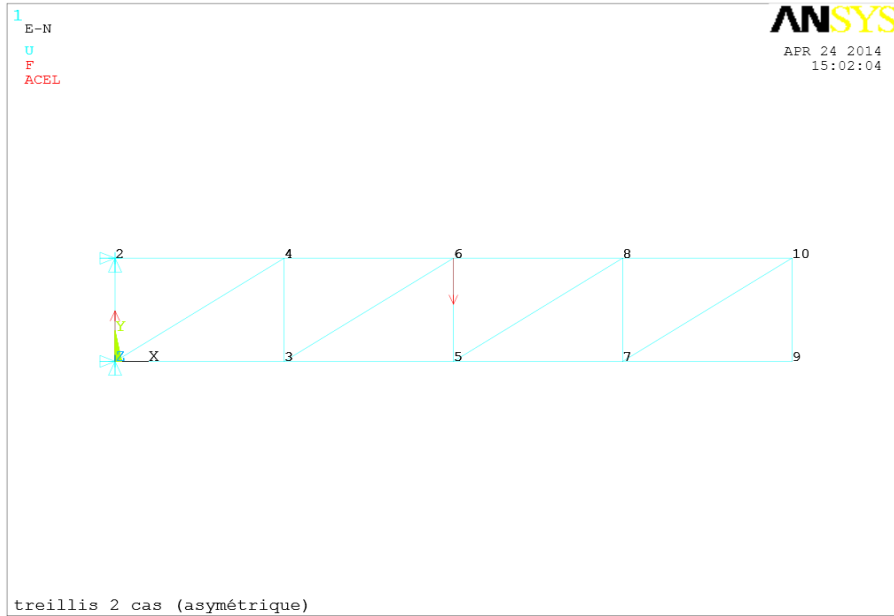
IV.3.4.2. 2<sup>ème</sup> cas : Structure Asymétrique

Nœuds	Structure Treillis	Nœuds	Poutre Equivalente	Erreur
1	0	1	0	0
3	$-0,17261 \times 10^{-1}$	2	$-0,18349 \times 10^{-1}$	5,9%
5	$-0,39243 \times 10^{-1}$	3	$-0,41230 \times 10^{-1}$	4,8%
7	$-0,51011 \times 10^{-1}$	4	$-0,53331 \times 10^{-1}$	4,3%
9	$-0,62778 \times 10^{-1}$	5	$-0,65023 \times 10^{-1}$	3,4%

Tableau IV-5 : Comparaison des déplacements pour structure asymétrique (2<sup>ème</sup> cas de chargement)



Courbe IV-4 : Courbe de comparaison pour structure asymétrique (2<sup>ème</sup> cas de chargement)



```

PRINT U      NODAL SOLUTION PER NODE

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

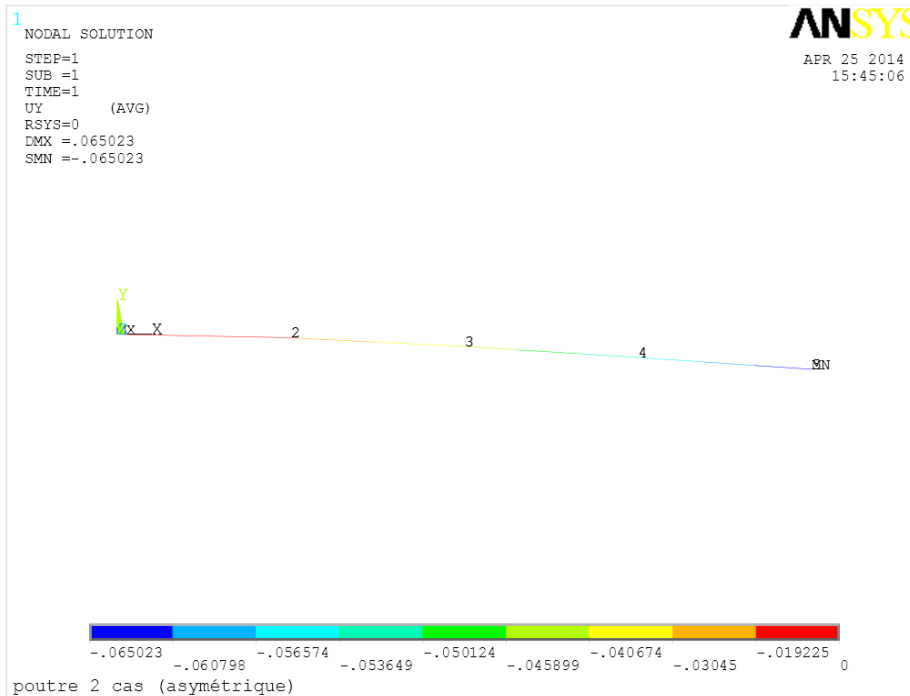
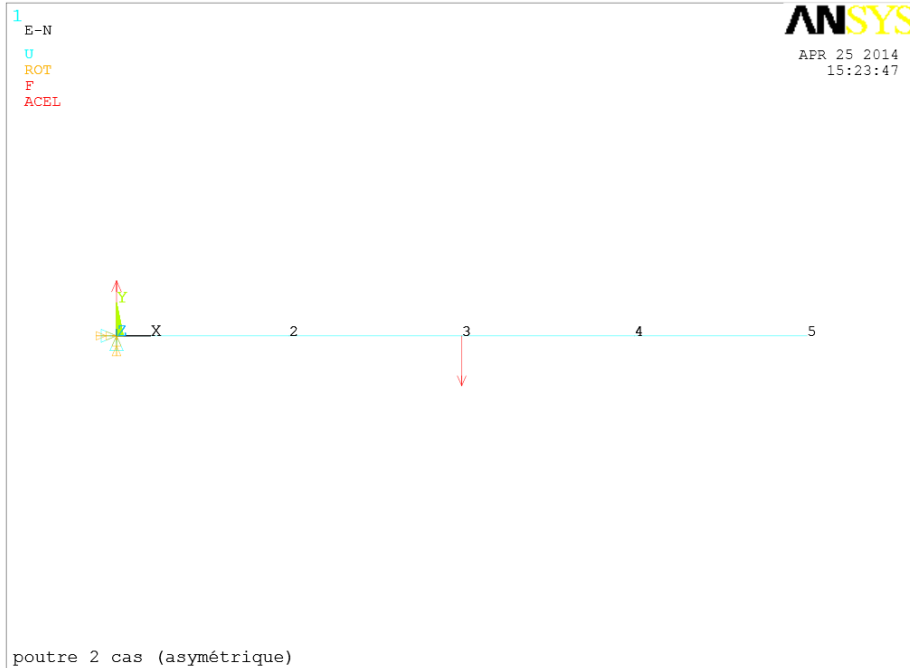
LOAD STEP=    1  SUBSTEP=    1
TIME=    1.0000    LOAD CASE=    0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

      NODE      UY
      1      0.0000
      2      0.0000
      3     -0.17261E-01
      4     -0.16098E-01
      5     -0.39243E-01
      6     -0.39243E-01
      7     -0.51011E-01
      8     -0.51011E-01
      9     -0.62778E-01
     10     -0.62778E-01

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES
NODE      9
VALUE    -0.62778E-01
    
```

Figure IV-7 : Résultats de la simulation sur ANSYS (Treillis, 2<sup>ème</sup> exemple, cas



```

PRINT U      NODAL SOLUTION PER NODE

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP=   1  SUBSTEP=   1
TIME=   1.0000   LOAD CASE=   0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

      NODE      UY
      1      0.0000
      2  -0.18349E-01
      3  -0.41230E-01
      4  -0.53331E-01
      5  -0.65023E-01

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES
NODE      5
VALUE  -0.65023E-01
    
```

Figure IV-8 : Résultats de la simulation sur ANSYS (poutre, 2<sup>ème</sup> exemple, cas asymétrique)

#### IV.4. Discussion des résultats :

Les propriétés équivalentes (EA, GA, EI), calculées en se basant sur la théorie proposée, sont utilisées dans plusieurs simulations numériques pour vérifier cette dernière, deux types de configurations sont proposée, à savoir :

- Structure sur deux appuis avec force concentrée
- Structure encastrée avec force concentrée

Après avoir évalué les déplacements transversaux de la structure en treillis et celle des poutres équivalentes, on remarque qu'il y a une différence presque négligeable de l'ordre de quelques pourcents que ce soit pour le cas symétrique ou le cas asymétrique, et ce pour les deux types de chargements proposés. Ainsi pour le premier cas de chargement et pour le cas symétrique l'erreur est comprise entre 0,5 et 9.6 %, pour le cas asymétrique elle se situe entre 2,5 et 11,5 %. Le même constat est à signaler pour le deuxième cas de chargement où pour le premier cas l'erreur est entre 2 et 6 %, et presque le même intervalle est à signaler pour le cas asymétrique qui est entre 3,4 % et 6 %.

Tous ces résultats prouvent la certitude de la théorie proposée dans ce mémoire et que les deux types de structure donnent des résultats presque similaires.

Les résultats obtenus sont très satisfaisants et cette étude a permis de montrer que ce type de structure discrète pouvait être décrit en un modèle continu en donnant des aboutissements acceptables.

# *CONCLUSION*

## CONCLUSION

Notre travail présente les procédures nécessaires pour évaluer les propriétés du modèle continu équivalent à un modèle discret. Cette méthode nécessite la détermination des propriétés équivalentes des modèles en considérant l'analyse d'un élément répétitif de la structure discrète. Les propriétés du modèle continu seront déterminées analytiquement et vérifiées numériquement par la méthode des éléments finis.

Nous avons présenté dans une première section les équations de base de la théorie de l'élasticité nécessaires pour élaborer les relations contrainte-déformation. Par la suite on a cité les principales étapes pour la construction de l'équation de rigidité, on a exposé la méthode des éléments finis appliquées aux problèmes d'élasticité plane en utilisant le principe des travaux virtuels et la méthode de l'équilibre force-déplacement. Notre attention est limitée en particulier à l'élément barre et l'élément poutre dû à leurs popularités dans les problèmes pratiques de calcul des structures. Enfin on a abordé la modélisation des structures discrètes par des modèles continus.

Pour représenter une structure discrète par une structure continue, les propriétés de la poutre équivalente doivent être dérivées en premier lieu. Cela peut être accompli en isolant une infrastructure typique de la structure originale et en étudiant son comportement pour chaque type de chargement statique appliqué.

Dans ce travail, deux types de structure sont étudiés ; structure symétrique et asymétrique, la structure symétrique possède un plan de symétrie qui coïncide avec son demi-plan, dans ce cas les coefficients de couplage sont négligeable. Le deuxième type négocie une structure arbitraire qui ne présente pas un axe de symétrie. Les types de déformations permises et les conditions aux limites sont identiques pour les deux cas ainsi que les procédures utilisées pour déduire les propriétés équivalentes.

Après avoir calculé les propriétés de l'élément poutre équivalent à une cellule treillis, des exemples pour vérification ont été réalisés et les déplacements en chaque nœud de la structure discrète sont comparés à ceux calculés en utilisant le modèle poutre. Le traitement numérique de ces exemples d'applications est effectué par le logiciel ANSYS.

A l'issu de ce travail et des résultats obtenus, on peut affirmer l'efficacité du modèle proposé à résoudre les problèmes de calculs des structures avec une précision acceptable, on peut conclure que les objectifs fixés au départ ont été atteints.

Ce travail peut être encore développé sous plusieurs aspects. En effet on peut rajouter à l'étude du modèle poutre, le modèle plaque, et on peut aussi aborder l'analyse dynamique à savoir l'étude des vibrations libres ainsi que l'étude de la réponse dynamique à un chargement transitoire, ces aspects qui sont très important dans le domaine industriel.

***REFERENCES***  
***BIBLIOGRAPHIQUES***

- [01] **Jean.Courbon**, “ Structures élastiques composées de poutres ”, Article, (C2030-8), technique de l’ingénieur, édition (2010)
- [02] **Y.Nakasone,S.Yoshimoto**,“Engineering analysis with ANSYS software”, édition ELSEVIER (2006).
- [03] **E.Madenci, I.Goven**,“The finite element method and applications inengineering using ANSYS”, edition SPRINGER (2005).
- [04] **M.Bonnet**, “ Analyse des structures mécaniques par la méthode des éléments finis ”, Ecole polytechnique, édition (2005).
- [05] **L.Rockey, R.Evans, W.Grifiths etD.Nethercot**,“Introduction a la méthode deséléments finis”, éditionEYROLES (2003).
- [06] **Façois.Frey, et Jarostove.Jirousek**, “ Analyse des structures et milieu continu parla méthode des éléments finis ”, volume 6, Presses polytechniques, édition (2001).
- [07] **J.Carrigues**, “ Statiques des solides élastiques en petites déformations ”, Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille, édition (2001).
- [08] **B.Tie**, “ Eléments finis en élasticité linéaire ”, édition septembre (2000).
- [09] **Façois.Frey**, “ Analyse des structures et milieu continu (Mécanique des solides)”, édition (1998).
- [10] **B.Necib**, “ Analyse dynamique des structures discrètes par éléments finis ”, cours, université de Constantine (1997).
- [11] **J. Coirier**, “ Mécanique des milieux continus ”, édition Dunod (1997).
- [12] **O.Rahmani, et S.Kabdani**, “ Introduction à la méthode des éléments finis pour les ingénieurs”, office des publications universitaires, édition (1994)
- [13] **Ph.Trompette**, “ Mécanique des structures par la méthode des éléments finis (Statique et dynamique)”, Masson, édition, (1992).
- [14] **A.Picard**, “ Analyse des structures ”, édition Beauchemin (1992).
- [15] **S.Laroze**, “ Mécanique des structures ”, Tome 3, édition (1992).



- [16] **François. Frey**, “ Analyse des structures et milieu continu (Statique appliquée)”, Presses polytechniques, volume 1, édition (1990).
- [17] **B.Necib, C.T.Sun** “ Analysis of truss beams using a high order timoshenko beam element”, AIAA Journal (1988).
- [18] **R.Gallagher**, “ Introduction aux éléments finis ”, édition PLURALIS (1976).

# **ANNEXES**

## PROGRAMMES SUR “ANSYS”

### Structure en Treillis, Cas symétrique

```

/NOPR ! Suppress printing of UNDO process
/PMACRO ! Echo following commands to log
RESUME, treillies 1 cas,db,
/REPLOT,RESIZE
/REPLOT,RESIZE
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
/POST1
!*
PRNSOL,U,Y
!*
PLDISP,1
/PNUM,KP,0
/PNUM,LINE,0
/PNUM,AREA,0
/PNUM,VOLU,0
/PNUM,NODE,1
/PNUM,TABN,0
/PNUM,SVAL,0
/NUMBER,0
!*
/PNUM,ELEM,0
/REPLOT
!*
/REPLOT,RESIZE
/REPLOT,RESIZE
!*
!*
/EFACET,1
PLNSOL,U,Y,0,1.0
/REPLOT,RESIZE
/REPLOT,RESIZE
GPLOT
EPLOT
GPLOT
FINISH
/SOL
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,6
FDELE,P51X,ALL
FLST,2,2,1,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,9
DDELE,P51X,ALL
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,1
FLIST,ALL
DLIST,ALL
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,6
!*
/GO
F,P51X,FY,-2000
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,2
!*
/GO
D,P51X,,,,,UX,UY,,,,
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,2
DDELE,P51X,ALL
GPLOT
/ZOOM,1,BACK
GPLOT
FLST,2,2,1,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,9
DDELE,P51X,ALL
FLST,2,1,1,ORDE,1

```

```

FITEM,2,6
FDELE,P51X,ALL
NPLOT
FINISH
! /EXIT,MODEL
/GRA,POWER
/GST,ON
/PLO,INFO,3
/GRO,CURL,ON
/CPLANE,1
/REPLOT,RESIZE
WPSTYLE,,,,,,,,0
/REPLOT,RESIZE
GPLOT
/SOLU
FLST,2,2,1,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,9
DDELE,P51X,ALL
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,6
FDELE,P51X,ALL
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,1
!*
/GO
D,P51X,,,,,UX,UY,,,,
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,9
!*
/GO
D,P51X,,,,,UY,,,,
FLST,2,2,1,ORDE,2
FITEM,2,5
FITEM,2,-6
!*
/GO
F,P51X,FY,-2000
FLST,2,2,1,ORDE,2
FITEM,2,5
FITEM,2,-6
FDELE,P51X,ALL
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,6
!*
/GO
F,P51X,FY,-2000
FLIST,ALL
DLIST,ALL
/REPLOT,RESIZE
/REPLOT,RESIZE
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
/POST1
!*
PRNSOL,U,Y
FINISH
! /EXIT,ALL
/GRA,POWER
/GST,ON
/PLO,INFO,3
/GRO,CURL,ON
/CPLANE,1
/REPLOT,RESIZE
WPSTYLE,,,,,,,,0
FLIST,ALL
DLIST,ALL
/POST1
!*
PRNSOL,U,Y
FINISH
! /EXIT,ALL
/GRA,POWER
/GST,ON
/PLO,INFO,3
/GRO,CURL,ON

```

```

/CPLANE,1
/REPLOT,RESIZE
WPSTYLE,,,,,,,,0
GPLOT
/PNUM,KP,0
/PNUM,LINE,0
/PNUM,AREA,0
/PNUM,VOLU,0
/PNUM,NODE,1
/PNUM,TABN,0
/PNUM,SVAL,0
/NUMBER,0
!*
/PNUM,ELEM,1
/REPLOT
!*
FINISH
! /EXIT,ALL
/GRA,POWER
/GST,ON
/PLO,INFO,3
/GRO,CURL,ON
/CPLANE,1
/REPLOT,RESIZE
WPSTYLE,,,,,,,,0
DLIST, ALL
/SOLU
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
/POST1
!*
PRNSOL,U,Y
)/GOP ! Resume printing after UNDO process

```

### Structure en Poutres, Cas symétrique

```

/NOPR ! Suppress printing of UNDO process
/PMACRO ! Echo following commands to log
RESUME, poutre 2appuis,db,
FINISH
! /EXIT,ALL
/GRA,POWER
/GST,ON
/PLO,INFO,3
/GRO,CURL,ON
/CPLANE,1
/REPLOT,RESIZE
WPSTYLE,,,,,,,,0
/PREP7
SECTYPE, 1, BEAM, RECT, cs, 0
SECOFFSET, CENT
FINISH
! /EXIT,ALL
/GRA,POWER
/GST,ON
/PLO,INFO,3
/GRO,CURL,ON
/CPLANE,1
/REPLOT,RESIZE
WPSTYLE,,,,,,,,0
/REPLOT,RESIZE
GPLOT
!*
/SHRINK,0
/ESHAPE,0.0
/EFACET,1
/RATIO,1,1,1
/CFORMAT,32,0
/REPLOT
!*
/SOLU
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,3

```

```

!*
/GO
F,P51X,FY,-2000
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,1
!*
/GO
D,P51X,,,,,UX,UY,,,,
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,5
!*
/GO
D,P51X,,,,,UY,,,,
/TITLE,poutre 1 cas
!*
/PSF,DEFA,,1,0,1
/PBF,DEFA,,1
/PIC,DEFA,,1
/PSYMB,CS,0
/PSYMB,NDIR,0
/PSYMB,ESYS,0
/PSYMB,LDIV,0
/PSYMB,LDIR,0
/PSYMB,ADIR,0
/PSYMB,ECON,0
/PSYMB,XNODE,0
/PSYMB,DOT,1
/PSYMB,PCONV,
/PSYMB,LAYR,0
/PSYMB,FBCS,0
!*
/PBC,ALL,,1
/PBC,NFOR,,0
/PBC,NMOM,,0
/PBC,RFOR,,0
/PBC,RMOM,,0
/PBC,PATH,,0
/REP
!*
FINISH
/PREP7
SECTYPE, 1, BEAM, RECT, CS, 0
SECOFFSET, CENT
SECTYPE, 1, BEAM, RECT, CS, 0
SECOFFSET, CENT
/UI,BEAM,OFF
/REPLOT,RESIZE
/REPLOT,RESIZE
FINISH
/SOL
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
/POST1
!*
PRNSOL,U,Y
!*
/EFACET,1
PLNSOL,U,Y,0,1.0
/REPLOT,RESIZE
/REPLOT,RESIZE
!*
PRNSOL,U,Y
!*
!*
!*
!*
FINISH
/FILNAME,poutre 2appuis,0
!*
FINISH
! /EXIT,MODEL
/GRA,POWER
/GST,ON
/PLO,INFO,3
/GRO,CURL,ON
/CPLANE,1

```

```

/REPLOT,RESIZE
WPSTYLE,,,,,,,,,0
/PREP7
SECTYPE, 1, BEAM, RECT, cs, 0
SECOFFSET, CENT
FINISH
! /EXIT,MODEL
/GRA,POWER
/GST,ON
/PLO,INFO,3
/GRO,CURL,ON
/CPLANE,1
/REPLOT,RESIZE
WPSTYLE,,,,,,,,,0
DLIST, ALL
/POST1
FINISH
/SOL
/STATUS,SOLU
SOLVE
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
/POST1
!*
PRNSOL,U,Y
)/GOP ! Resume printing after UNDO process

```

## Structure en Treillis, Cas Asymétrique

```

/NOPR ! Suppress printing of UNDO process
/PMACRO ! Echo following commands to log
RESUME, treillis 1 cas,db,C:\Users\MSN\Desktop\ESSAIT~1\ASYMET~1\1CAS~1\treillis
/GRA,POWER
/GST,ON
/PLO,INFO,3
/GRO,CURL,ON
/CPLANE,1
/REPLOT,RESIZE
WPSTYLE,,,,,,,,,0
GPLOT
/REPLOT,RESIZE
/PREP7
!*
FLST,3,2,1
FITEM,3,1
FITEM,3,2
EN,17,P51X
DLIST, ALL
FLIST, ALL
FINISH
/SOL
DLIST, ALL
FINISH
/PREP7
!*
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDE,DENS,1
MPDATA,DENS,1,,2768
FINISH
/SOL
ACEL,0,9.81,0,
FLST,2,2,1,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,-2
DDELE,P51X,ALL
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,10
FDELE,P51X,ALL
/REPLOT
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,1

```

```

!*
/GO
D,P51X, , , , , ,UX,UY, , , ,
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,9
!*
/GO
D,P51X, , , , , ,UY, , , , ,
FLIST, ALL
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,10
!*
/GO
F,P51X,FY,-2000
/REPLOT,RESIZE
/REPLOT,RESIZE
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
/POST1
PLDISP,1
FINISH
/PREP7
FINISH
/SOL
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,10
FDELE,P51X,ALL
GPLOT
FLIST, ALL
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,6
!*
/GO
F,P51X,FY,-2000
FLIST, ALL
DLIST, ALL
FLST,2,2,1,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,9
DDELE,P51X,ALL
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,1
!*
/GO
D,P51X, , , , , ,UX,UY, , , ,
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,9
!*
/GO
D,P51X, , , , , ,UY, , , , ,
/REPLOT,RESIZE
/REPLOT,RESIZE
DLIST, ALL
FLIST, ALL
/STATUS,SOLU
SOLVE
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
/PREP7
!*
/UI,BEAM,OFF
FINISH
/POST1
PLDISP,1
/REPLOT,RESIZE
/REPLOT,RESIZE
!*
/EFACET,1
PLNSOL,U,Y,0,1.0
/REPLOT,RESIZE
/REPLOT,RESIZE
!*
PRNSOL,U,Y
FINISH
! /EXIT,ALL

```



```

/GRA, POWER
/GST, ON
/PLO, INFO, 3
/GRO, CURL, ON
/CPLANE, 1
/REPLOT, RESIZE
WPSTYLE, , , , , , 0
/REPLOT, RESIZE
GPLOT
DLIST, ALL
FINISH
! /EXIT, ALL
/GRA, POWER
/GST, ON
/PLO, INFO, 3
/GRO, CURL, ON
/CPLANE, 1
/REPLOT, RESIZE
WPSTYLE, , , , , , 0
/REPLOT, RESIZE
GPLOT
/PREP7
!*
MPTEMP, , , , , ,
MPTEMP, 1, 0
MPDE, DENS, 1
MPDATA, DENS, 1, , 2768
MPTEMP, , , , , ,
MPTEMP, 1, 0
MPDE, EX, 1
MPDE, NUXY, 1
MPDE, PRXY, 1
MPDATA, EX, 1, , 7.17E+010
MPDATA, PRXY, 1, , 0
MPTEMP, , , , , ,
MPTEMP, 1, 0
MPDE, DENS, 1
MPDATA, DENS, 1, , 2768
!*
R, 1, 6e-005, 0, 0
!*
R, 2, 8e-005, 0, 0
!*
R, 3, 4e-005, 0, 0
!*
FINISH
/SOL
ACEL, 0, 9.81, 0,
DLIST, ALL
FLIST, ALL
/STATUS, SOLU
SOLVE
!*
FINISH
/POST1
!*
PRNSOL, U, Y
FINISH
! /EXIT, ALL
/GRA, POWER
/GST, ON
/PLO, INFO, 3
/GRO, CURL, ON
/CPLANE, 1
/REPLOT, RESIZE
WPSTYLE, , , , , , 0
GPLOT
DLIST, ALL
/SOLU
/STATUS, SOLU
SOLVE
FINISH
/POST1
!*
PRNSOL, U, Y
)/GOP ! Resume printing after UNDO process

```

## Structure en Poutres, Cas Asymétrique

```

/NOPR ! Suppress printing of UNDO process
/PMACRO ! Echo following commands to log
RESUME, poutre asym2,db,
FINISH
! /EXIT,ALL
/GRA,POWER
/GST,ON
/PLO,INFO,3
/GRO,CURL,ON
/CPLANE,1
/REPLOT,RESIZE
WPSTYLE,,,,,,,,0
/PREP7
SECTYPE, 1, BEAM, RECT, cs, 0
SECOFFSET, CENT
FINISH
! /EXIT,ALL
/GRA,POWER
/GST,ON
/PLO,INFO,3
/GRO,CURL,ON
/CPLANE,1
/REPLOT,RESIZE
WPSTYLE,,,,,,,,0
/REPLOT,RESIZE
/PREP7
SECTYPE, 1, BEAM, RECT, cs, 0
SECOFFSET, CENT
FINISH
! /EXIT,ALL
/GRA,POWER
/GST,ON
/PLO,INFO,3
/GRO,CURL,ON
/CPLANE,1
/REPLOT,RESIZE
WPSTYLE,,,,,,,,0
/REPLOT,RESIZE
GPOST
!*
/SHRINK,0
/ESHAPE,0.0
/EFACET,1
/RATIO,1,1,1
/CFORMAT,32,0
/REPLOT
!*
/PREP7
/UI,BEAM,OFF
FINISH
/SOL
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,1
!*
/GO
D,P51X,,,,,UX,UY,,,,
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,5
!*
/GO
D,P51X,,,,,UY,,,,
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,3
!*
/GO
F,P51X,FY,-2000
/TITLE,poutre 1 cas (asymétrique)
/REPLOT
!*
/PSF,DEFA,,1,0,1
/PBF,DEFA,,1
/PIC,DEFA,,1

```

```

/PSYMB,CS,0
/PSYMB,NDIR,0
/PSYMB,ESYS,0
/PSYMB,LDIV,0
/PSYMB,LDIR,0
/PSYMB,ADIR,0
/PSYMB,ECON,0
/PSYMB,XNODE,0
/PSYMB,DOT,1
/PSYMB,PCONV,
/PSYMB,LAYR,0
/PSYMB,FBCS,0
!*
/PBC,ALL,,1
/PBC,NFOR,,0
/PBC,NMOM,,0
/PBC,RFOR,,0
/PBC,RMOM,,0
/PBC,PATH,,0
/REP
!*
/REPLOT,RESIZE
/REPLOT,RESIZE
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
/POST1
!*
/EFACET,1
PLNSOL, U,Y, 0,1.0
/REPLOT,RESIZE
/REPLOT,RESIZE
!*
PRNSOL,U,Y
FINISH
! /EXIT,MODEL
/GRA,POWER
/GST,ON
/PLO,INFO,3
/GRO,CURL,ON
/CPLANE,1
/REPLOT,RESIZE
WPSTYLE,,,,,,,,0
/PREP7
SECTYPE, 1, BEAM, RECT, cs, 0
SECOFFSET, CENT
FINISH
! /EXIT,MODEL
/GRA,POWER
/GST,ON
/PLO,INFO,3
/GRO,CURL,ON
/CPLANE,1
/REPLOT,RESIZE
WPSTYLE,,,,,,,,0
/PREP7
SECTYPE, 1, BEAM, RECT, cs, 0
SECOFFSET, CENT
FINISH
! /EXIT,MODEL
/GRA,POWER
/GST,ON
/PLO,INFO,3
/GRO,CURL,ON

```

```
/CPLANE,1
/REPLOT,RESIZE
WPSTYLE,,,,,,,,,0
DLIST, ALL
/SOLU
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
/POST1
!*
PRNSOL,U,Y
)/GOP ! Resume printing after UNDO process
```

