

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

Ministère de l'Enseignement Supérieur  
et de la Recherche Scientifique

Université Mentouri Constantine  
Faculté des Sciences de l'Ingénieur  
**Département de Génie Mécanique**

N° d'ordre : 172 / MAG / 2010  
Série : 013 / GM / 2010



**Mémoire**

Présenté en vue de l'obtention du  
Diplôme de Magistère en Génie Mécanique

Option  
Mécanique Appliquée en Engineering

**THÈME**

**CALCUL NUMERIQUE DU MODULE  
D'YOUNG D'UN MATERIAU HOMOGENE  
ET ISOTROPE BASE SUR LA THEORIE  
DES POUTRES**

Par :

**BENDJABALLAH Lynda**

Soutenu le : 02/06/2010

Devant le jury composé de :

Président	Mr. B. NECIB	Prof.	Université Mentouri Constantine
Rapporteur	Mr. A. BOUCHOUCHA	Prof.	Université Mentouri Constantine
Examineurs	Mr. S. MEZIANI	Prof.	Université Mentouri Constantine
	Mr. T. BENMANSOUR	MC.	Université Mentouri Constantine

# REMERCIEMENTS

Je remercie Dieu avant tout.

Je tiens à remercier très chaleureusement mon encadreur **Pr. A. BOUCHOUCHA** qui a su guider ce travail par ses conseils avisés et qui a bien voulu m'aider dans la rédaction de ce mémoire. Je le remercie également pour ses encouragements et pour toutes les connaissances que j'ai acquises à ses côtés.

J'adresse également mes remerciements à Monsieur le **Pr. B. NECIB**, Professeur à l'université Mentouri de Constantine pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de soutenance.

Je remercie aussi Monsieur **A. MEZIANI**, Professeur à l'université Mentouri de Constantine d'avoir participé à mon jury. Je tiens aussi à remercier le Docteur **T. BENMANSOUR**, Maître de conférences à l'université Mentouri de Constantine d'avoir accepté d'être dans mon jury et aussi pour son aide et ses conseils précieux.

Je remercie très chaleureusement mon père et ma mère et toute la famille.

Un grand remerciement à tous les enseignants du Département de Génie Mécanique, mes collègues et tous mes amis.

## DEDICACES

Je dédie le fruit de mon travail aux êtres les plus chers au monde :

- A mes parents pour leur compréhension, leur amour et leurs sacrifices pour me voir réussir, qu'ils trouvent en ce modeste travail le témoignage de ma reconnaissance,
- A mes frères, ma sœur et a mon mari, qui m'ont toujours encouragé à poursuivre mon travail,
- A mon mari pour sa compréhension son soutien et ses encouragements qui m'ont aidé à mener à bout ce mémoire,
- A toutes les familles (Bendjaballah, Bourbia et Semouma),
- A mes collègues, mes amis et tous ceux qui me connaissent.

## Résumé

La poutre métallique est un élément fondamental dans la construction mécanique, or pour choisir un organe de construction, il est nécessaire de connaître ses caractéristiques mécaniques particulièrement le module d'Young. C'est la raison pour laquelle notre étude concerne la détermination et le calcul du module d'Young d'un matériau homogène et isotrope.

Le travail réalisé est présenté en deux grandes parties :

**La première** est consacrée à l'étude bibliographique sur les poutres, ses différentes caractéristiques et les déformations que subissent ces poutres et comment les mesurer.

**La deuxième** est réservée à la détermination des critères qui aident à déterminer le module d'Young ; pour cela, on utilise deux méthodes de calcul, la première est basée sur la théorie d'Euler-Bernoulli, utilisée pour le calcul des modes propres des poutres en question. Le deuxième repose sur la théorie de Timoshenko pour déterminer les fréquences propres et les modes propres par la méthode des éléments finis, et en utilisant un code de calcul MEF ANSYS.

Les résultats obtenus ont permis de faire une comparaison entre les deux théories. Cette comparaison est basée sur le calcul de l'erreur relative du module d'Young. Ceci nous a permis de constater que la théorie d'Euler-Bernoulli convient pour les poutres fortement élancées, par contre la théorie de Timoshenko est valable pour les cas des élancements fortement courts.

**Mots clés** : Poutre homogène et isotrope, poutre vibrante en flexion, module d'Young, théorie des poutres, théorie d'Euler-Bernoulli, théorie de Timoshenko.

## Abstract

The steel beam is a fundamental element in the machinery, to select a body construction, it is necessary to know their mechanical properties, especially the Young's modulus. This is the reason for that our study concerns the determination and calculation of Young's modulus of a homogeneous and isotropic beams.

The study is presented in two parts:

**The first one** is devoted to the literature review on the beams, these characteristics respectful and distortion that suffered these beams and measured.

**The second one** is reserved for the determination of Young's modulus and for this, we use two methods of calculation, the first is based on the Euler-Bernoulli's theory to calculate the own modes of beams considered, the second is based on Timoshenko's theory for determining the natural frequencies and mode shapes by using an ANSYS program calculation.

The results obtained were allowed to make a comparison between the two theories. This comparison is based on calculating the error on the Young's modulus, which allowed us to see that the Euler-Bernoulli beams used in highly elongated, but the cons for Timoshenko's theory, is valid cases without significantly shorter overhangs.

**Key words :** Beam homogeneous and isotropic flexural vibrating beam, Young's modulus, beam theory, Theory of Euler-Bernoulli, theory of Timoshenko.

## ملخص

### الحساب العددي لمعامل يونغ

### للمادة المتجانسة الخواص على أساس نظريات الروافد

تعتبر الرافدة عنصر أساسي في جميع الصناعات المعدنية وخاصة الصناعة الميكانيكية، أضف إلى ذلك أنه عند اختيار قطعة ميكانيكية ما، من الضروري معرفة خصائصها الميكانيكية وبشكل خاص معامل يونغ، لهذا السبب فإن دراستنا تهتم باستخراج وحساب هذا المعامل في حالة المواد المتجانسة الخواص.

تشتمل الدراسة المنجزة على قسمين رئيسيين:

- **القسم الأول:** يحوي الدراسة البيبليوغرافية حول الروافد المعدنية مع دراسة خصائص هذه الروافد والتشوهات التي تحدث فيها وكيفية قياسها.
- **القسم الثاني:** مخصص لتحديد المعايير التي تساعد في تحديد معامل يونغ، لذلك فإننا سنستخدم طريقتين للحساب، تقوم الأولى على أساس نظرية أولر- برنولي والتي تستخدم لحساب الإهتزازات في الروافد المتجانسة قيد الدراسة. وتقوم الثانية على نظرية تيموشينكو لتحديد الترددات الطبيعية والإهتزازات استنادا إلى نظرية العناصر المنتهية وهذا باستخدام برنامج أنسيس.

سمحت النتائج المحصل عليها بإجراء مقارنة بين كلتا الطريقتين فيما يخص الخطأ المطلق في معامل يونغ، وقد أدت بنا هذه المقارنة إلى إستنتاج أنه في حالة الروافد الطويلة من الأحسن استعمال نظرية برنولي. في حين أن النظرية الثانية (نظرية تيموشينكو) تكون أصلح في حالة الروافد القصيرة.

**المصطلحات :** الروافد ذات الخواص المتجانسة، التشوهات والاهتزازات، معامل يونغ، نظرية أولر- برنولي، نظرية تيموشينكو.

# TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENTS	
DEDICACES	
RESUME	
NOMENCLATURES.....	1
INTRODUCTION GENERALE.....	4

## CHAPITRE I LES POUTRES

I. 1. Introduction.....	6
I. 2. Les matériaux homogènes et isotropes.....	6
1. 2. 1. L'isotropie.....	6
1. 2. 2. Un matériau isotrope.....	6
1. 2. 3. Homogénéité.....	6
1. 2. 4. Matériau orthotrope.....	8
1. 2. 5. Isotropie transverse.....	8
I. 3. Définition géométrique d'une poutre.....	8
I. 4. Caractéristiques géométriques des sections droites.....	9
I. 4. 1. Centre de gravité.....	10
I. 4. 2. Moment statique par rapport à une droite.....	10
I. 4. 3. Moment quadratique d'une section par rapport à une droite.....	11
I. 4. 4. Moments principaux d'inertie.....	11
I.4.4.1. Racine de l'équation de troisième degré.....	12
I. 4. 4. 2. Calcul des moments principaux d'inertie.....	13
1. 4. 4. 3. Détermination des directions principales.....	16
I. 5. Type des poutres.....	16
I. 5. 1. Poutres encastées– libre.....	16
I. 5. 2. Poutres bi – appuyées.....	17
I. 6. Les actions mécaniques dans les poutres.....	18
I. 6. 1. Actions mécaniques extérieures.....	18
I. 6. 1. 1. Les charges.....	18
I. 6. 1. 2. Les actions de liaison.....	19
I. 6. 1. 3. Equilibre des actions mécaniques extérieures.....	19

I .6. 2. Efforts intérieurs.....	20
I .6. 2. 1. Définition.....	21
I .6. 2. 2. Diagrammes des efforts intérieurs.....	21
I .6. 3. Equations d'équilibre local des poutres.....	22
I .6. 4. Torseur intérieur et contraintes.....	23

## **CHAPITRE II**

### **MESURE DES DEFORMATIONS ET DES CONTRAINTES**

II. 1. Introduction.....	26
II. 2. Contraintes.....	26
II. 2. 1. Tenseur des contraintes.....	27
II. 2. 2. Contraintes principales.....	28
II. 2. 3. Signification physique des contraintes.....	28
II. 2. 3. 1. Contrainte normale et tangentielle.....	28
II. 2. 3. 2. Utilisation du tenseur des contraintes.....	29
II. 3. Déformation.....	30
II. 3. 1. Définition.....	30
II. 3. 2. Types de déformation.....	30
II. 3. 2. 1. Déformation élastique.....	30
II. 3. 2. 2. Déformation plastique.....	31
II. 4. La limite d'élasticité.....	31
II. 5. Loi de Hooke.....	31
II. 5. 1. Loi de Hooke généralisée.....	32
II. 5. 2. Module de Young.....	34
II. 5. 2. 1. Expression théorique.....	34
II. 6. L'extensométrie.....	34
II. 6. 1. Types de capteurs.....	35
II. 6. 1. 1. Capteurs analogiques.....	35
II. 6. 1. 2. Capteurs logiques.....	36
II. 6. 1. 3. Capteurs numériques.....	36
II. 6. 1. 4. Capteurs digitaux.....	36
II. 6. 2. Photoélasticimétrie.....	36
II. 6. 3. Capteur de Force et de pression.....	37
II. 6. 3. 1. Cellules de pression.....	37
II. 6. 4. Capteur piézoélectrique.....	38
II. 6. 5. Capteur de type AG.....	39
II. 6. 6. Jauge de contrainte.....	39

II. 6. 7. Différents types de jauges.....	40
II. 6. 7. 1. Les jauges simples.....	40
II. 6. 7. 2. Les minis et micro jauges.....	41
II. 6. 7. 3. Rosettes.....	41
II. 6. 7. 4. Les jauges des contraintes résiduelles.....	41
II. 6. 7. 5. Les jauges longues.....	42
I. 6. 7. 6. Les jauges de contraintes optiques.....	42
II. 6. 8. Principe de fonctionnement d'une jauge d'extensométrie.....	43
II. 6. 8. 1. Effet de la température.....	46
II. 6. 9. Champ de déformation quelconque.....	47
II. 6. 10. Mesure des variations de résistance des jauges de déformations.....	48
II.7. Pont de Wheatstone.....	48
II. 7. 1. Montage.....	50
II. 7. 1. 1. Montage en quart de pont.....	50
II. 7. 1. 2. Montage en demi-point.....	51
II. 7. 1. 3. Montage en pont complet.....	51

## **CHAPITRE III**

### **THEORIE DES POUTRES**

III. 1. Théorie des poutres d'Euler-Bernoulli.....	52
III. 2. Introduction.....	52
III. 3. Principes de modélisation.....	52
III. 4. Poutre de section droite.....	52
III. 4. 1. Equation de mouvement lors des vibrations libres de flexion.....	53
III. 4. 2. Déplacement.....	53
III. 4. 3. L'équation du mouvement.....	54
III. 5. Résolution numérique.....	55
III. 5. 1. Poutre de section constante.....	55
III. 5. 2. Poutre de section variable par la méthode des matrices de transfert.....	57
III. 6. Théorie des poutres de Levinson ; prise compte de l'effort tranchant et de l'inertie de rotation.....	58
III. 6. 1. Introduction.....	58
III. 6. 2. Equation de mouvement lors de vibrations libres de flexion.....	59
III. 6. 2. 1. Hypothèses.....	59
III. 6. 2. 2. Déplacement.....	59
III. 6. 2. 3. Equation du mouvement.....	60
III. 6. 3. Résolution numérique.....	62

III. 6. 3. 1. Poutre de section constante.....	62
III. 6. 4. 2. Poutre de section variable ; méthode des matrices de transfert.....	62

## **CHAPITRE VI**

### **CALCUL NUMERIQUE ET ANALYSE COMPARATIVE**

IV. 1. Introduction .....	64
IV. 2. Comparaison entre théorie des poutres d'Euler-Bernoulli et Timoshenko.....	64
VI. 3. Influence de l'élanement sur l'erreur relative.....	67
CONCLUSION GENERALE.....	80
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	81
ANNEXE I.....	83
ANNEXE II.....	86

# Nomenclatures

$\lambda$  : Coefficient de lamé

$\mu$  : Coefficient de lamé

$\sigma$  [Pa] : Contrainte

$\sigma_n$  [Pa] : Contrainte normale

$\sigma_t$  [Pa] : Contrainte tangentielle

$\varepsilon$  : L'allongement relatif

L [m] : La longueur de la poutre

S [m<sup>2</sup>] : La section de la poutre

$\gamma_i$  : Des axes suivants les trois directions

F [N] : Une force répartie sur la surface

E [Pa] : Module d'élasticité ou module d'Young

$\nu$  : Coefficient de Poisson

G : Module de cisaillement

$\{t, n, b\}$  : Le trièdre de Fresnet (figure I. 1)

t : Tangent unitaire (figure I. 1)

n : Normale principale unitaire (figure I. 1)

b : Bi normale unitaire (figure I. 1)

R [mm] : Le rayon de courbure de la poutre (figure I. 1)

T : La torsion géométrique dans (figure I. 1)

d : La dimension transversale de la section droite

A : Un vecteur perpendiculaire à droite

$\delta$  : Une droite du plan de la section droite

$A_2$  [N.m] : Moment statique de S par rapport à  $x_2$

$A_3$  [N.m] : Moment statique de S par rapport à  $x_3$

$I_G$  : Un tenseur d'inertie de S en G (tenseur du second ordre symétrique)

I [m<sup>4</sup>] : Un moment quadratique

J [m<sup>4</sup>] : l'invariant, linéaire, quadratique et cubique du moment quadratique

$I_p$  [m<sup>4</sup>] : le moment d'inertie équivalent

$V_{ij}$  : vecteurs propres

$\vec{u}$  : Vecteur orthonormé

R [N] : Une réaction

$T_{\text{ext}+}$  : La partie du torseur des efforts extérieurs qui s'appliquent sur la partie C+ (figure I. 5)

$T_{\text{ext}}$  : La partie du torseur des efforts extérieurs qui s'appliquent sur la partie C- (figure I. 5)  
 $T_G$  : Le torseur des efforts intérieurs en G. qui est le torseur d'action de la partie C+ sur la partie C- en G (figure I. 5)  
 $T$  [N] : Effort tranchant (vecteur dans le plan de la section droite)  
 $M_G$  [N.m] : Moment au point G  
 $M_t$  [N.m] : Moment de torsion  
 $M_f$  [N.m] : Moment de flexion (vecteur dans le plan de la section droite)  
 $\tau$  [Pa] : Contrainte tangentielle pour la direction X1 (champ des contraintes tangentielles dans la section droite)  
 $N$  [N] : L'effort normal  
 $\gamma$  [m/S<sup>2</sup>] : L'accélération  
 $\sigma_m$  [N] : Contrainte moyenne  
 $\Delta l$  [m] : L'allongement  
 $m$  [N] : Une contrainte moyenne  
 $\rho$  [ $\Omega$ .m] : La résistivité du matériau  
 $\alpha_s$  : Coefficient de dilatation thermique du matériau de la structure  
 $\alpha_j$  : Coefficient de dilatation thermique du matériau conducteur de la jauge  
 $dT$  [°C] : Variation de la température  
 $K$  : Facteur de jauge d'un matériau résistif  
 $C$  : Constante de Bidgman du matériau résistif d'une jauge  
 $\varepsilon^V$  : Déformation réel recherchée  
 $\varepsilon^M$  : Déformation mesurée à corriger  
 $\Omega_i$  [rd/s] : Pulsation propre du mode i  
 $X_i$  : Coefficient du mode i  
 $M_Z$  [N.m] : Moment fléchissant  
 $W(x)$  [m] : Amplitude du déplacement transversal-mode propre  
 $W(x,t)$  [m] : Amplitude du déplacement transversal  
 $\bar{W}(\bar{x})$  : Amplitude du déplacement transversal réduit  
 $\bar{x}$  : Abscisse longitudinale réduit  
 $\theta_i$  [rd] : Rotation des sections due au moment fléchissant  
 $P_Y$  : Inertie de translation  
 $E'_{po}$  [Pa] : Le module d'Young calculé par la théorie des poutres de Timoshenko  
 $E^b_{po}$  [Pa] : Le module d'Young calculé par la théorie des poutres Euler-Bernoulli  
 $f_i^{eb}$  [Hz] : la fréquence propre d'Euler-Bernoulli du mode i

$f_i^{et}$  [Hz] : La fréquence propre de Timoshenko du mode i

$X_i^{eb}$  : Le mode propre d'Euler-Bernoulli du mode i

$X_i^t$  : Le mode propre de Timoshenko du mode i

### INTRODUCTION GENERALE

La conception des structures repose essentiellement sur la théorie des poutres d'Euler- Bernoulli et de Timoshenko en vibration de flexion. En effet, les mouvements vibratoires sont à l'origine de nombreux problèmes typiques. Pour cela, on va calculer l'erreur relative du module de Young et faire une comparaison entre ces deux théories. L'utilisation des matériaux destinés à la fabrication des éléments de résistance, d'un point de vue mécanique, nécessite l'étude du comportement statique et dynamique. Cette étude concerne aujourd'hui de nombreux secteurs industriels. Pour les besoins de la technologie moderne, une bonne connaissance du comportement vibratoire de ces structures est indispensable dans la conception ou la vérification de tout système déformable dans un environnement dynamique. Pour atteindre de tels objectifs, la détermination des caractéristiques dynamiques est nécessaire.

Dans ce mémoire, on se propose le calcul du module de Young dynamique, des éléments poutres homogènes, constituées chacune de différents matériaux tout en se basant sur la théorie d'Euler-Bernoulli. Pour ce faire, on se fixe comme problématique l'objet de savoir les limites de cette hypothèse afin de pouvoir garantir des réponses valables et dans les limites de bonne tolérance.

Le plan du mémoire est articulé comme suit :

Le premier chapitre est consacré à une synthèse bibliographique sur les caractéristiques mécaniques et géométriques des poutres homogènes et isotropes

Le second chapitre est consacré à une étude extenso métrique des mesures de déformation et des contraintes à la surface des structures. On a présenté par conséquent, les différents appareils et les différentes jauges et capteurs utilisés à cette fin.

Le troisième chapitre traite la résolution du problème des vibrations de flexion des poutres homogènes et isotropes grâce à la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli en considérant deux cas à savoir :

- Poutre de section constante,
- Poutre de section variable, par la méthode des matrices de transfert.

De plus, différentes théories sont employées pour modéliser l'influence de l'effort tranchant. La plus connue est certainement celle de Timoshenko; mais elle ne permet pas de vérifier les conditions aux limites ( $\sigma_{xy} = 0$ ), sur les faces inférieures et supérieures de la poutre. C'est la raison pour laquelle on a utilisé la théorie de Levinson qui permet d'en tirer les modes de fréquences propres.

Dans le quatrième et dernier chapitre, on s'est penché sur l'étude des critères permettant d'identifier les limites de l'hypothèse de Bernoulli qui concernent la gamme des catégories de poutres (fortement courte, courte, élancée, fortement élancée) et qui se distingue par ses facteurs d'élancement ( $l/h$ ). Pour atteindre cet objectif, on s'est basé sur une étude comparative de deux théories.

D'une part, celle de référence, dite hypothèse de Bernoulli, qui prend en compte l'effet du mouvement flexionnel seulement, d'autre part celle de Timoshenko utilisée pour la comparaison qui, en plus de l'effet Bernoulli tient compte de l'effet de cisaillement ainsi que de l'effet de l'inertie rotative.

Le module de Young-Bernoulli  $E_p^b$  calculé par la méthode analytique exacte est exprimé en fonction des coefficients  $X_i^{eb}$  qui dépendent du numéro modale ( $i = 1-5$ ), ainsi que des conditions limites de la poutre envisagée pendant l'étude, qui sont pour le cas présent du type (libre-libre). Le module de Young  $E_p^t$  est calculé indirectement moyennant le calcul des fréquences libres utilisant la méthode des éléments finis, et en se basant sur un code de calcul MEF (ANSYS). L'étude comparative des deux modules est effectuée sur la base du rapport représentant la dispersion des écarts d'erreurs ( $\Delta E/E$ ).

## LES POUTRES

### I. 1. Introduction

La poutre est un élément essentiel dans une construction, et notre étude est basée sur les poutres homogènes et isotropes pour cela, il faut étudier les caractéristiques mécaniques et géométriques de ces poutres et les définir.

### I. 2. Les matériaux homogènes et isotropes

#### 1. 2. 1. L'isotropie

L'isotropie caractérise l'invariance des propriétés physiques d'un milieu en fonction de la direction, le contraire de l'isotropie est l'anisotropie. Un milieu isotrope est un milieu dont des propriétés identiques quelle que soit la direction d'observation. Par exemple, les liquides ou les solides amorphes sont (statistiquement) isotropes alors que les cristaux, dont la structure est ordonnée et dépend donc de la direction, sont anisotropes. Ainsi, certains minéraux possèdent une dureté différente selon la direction dans laquelle a été effectué l'essai de dureté [1].

#### 1. 2. 2. Un matériau isotrope

Un matériau est dit isotrope si ses propriétés mécaniques sont identiques dans toutes les directions. On considère généralement les métaux comme étant isotropes statistiquement, c'est-à-dire à l'échelle macroscopique. Cependant après certains procédés de fabrication comme le laminage ou le forgeage, un acier devient anisotrope. Le bois est par contre anisotrope : ses propriétés mécaniques dépendent de la direction d'application des contraintes en raison de sa constitution fibreuse. Un matériau présentant deux directions perpendiculaires pour ses caractéristiques est dit orthotrope.

#### 1. 2. 3. Homogénéité

On admettra que tous les éléments du matériau ont une structure identique en tout point, pour une même pièce. Dans les matériaux isotropes et homogènes on définit les contraintes par la relation suivante:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{ii} \cdot \delta_{ij} + 2 \times \mu \cdot \varepsilon_{ij} \quad (\text{I-1})$$

Pour un cas de traction simple, on considère une poutre cylindrique de longueur limitée à ses extrémités par deux surfaces orthogonales à l'axe de révolution.

Deux forces de tractions opposées sont exercées sur la poutre à chacune de ses extrémités :  $\frac{F}{S} = (F, 0, 0)$ . Le matériau est supposé homogène isotrope, il suit donc une loi de Hooke. Les équations d'équilibre local donnent :

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} = 0 & \text{sur } D \\ \sigma_{1j} \cdot n_j = -F \cdot \sigma_{2j} \cdot n_j = \sigma_{2j} \cdot n_j = 0 & \text{sur } \gamma_1 \\ \sigma_{1j} \cdot n_j = F \cdot \sigma_{2j} \cdot n_j = \sigma_{2j} \cdot n_j = 0 & \text{sur } \gamma_0 \\ \sigma_{ij} \cdot n_j = 0 & \text{sur } D - \{\gamma_1, \gamma_0\} \end{cases}$$

Il est simple de vérifier que la fonction  $\sigma_{11} = F$ ,  $\sigma_{22} = \dots = \sigma_{23} = 0$ , pour résoudre le problème en utilisant la loi de Hooke, on a :

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{F}{3 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu} \\ \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_{11} = \frac{\lambda + \mu}{(3 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu) \cdot \mu} \cdot F \\ \epsilon_{33} = \epsilon_{22} = \frac{-\lambda}{2 \cdot \mu \cdot (3 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu)} \cdot F \end{cases} \end{aligned}$$

On utilise  $\epsilon_{11} = \frac{F}{E} = \frac{\Delta L}{L}$ , il est facile de montrer que le module d'élasticité ou module d'Young est égal à :

$$E = \frac{\mu \cdot (3 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu)}{\lambda + \mu} \tag{I-2}$$

On pose classiquement que :  $-\nu \cdot \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33}$ , on en déduit :  $\nu = \frac{\lambda}{2 \cdot (\lambda + \mu)}$

Où :

$$\lambda = \frac{\nu \times E}{(1 - 2\nu)(1 + \mu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} = G \text{ (cas isotrope)}$$

$$K = \frac{E}{(1 - 2\nu)} \quad \text{Où } \nu < 1/2$$

On inverse la loi de Hooke, et en introduisant les relations précédentes on obtient :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_{kk} \cdot \delta_{ij} \quad (I-3).$$

### 1. 2. 4. Matériau orthotrope

Un matériau est dit orthotrope s'il a deux plans de symétrie de comportement mécanique, il y a donc trois axes d'orthotropie. Dans ce cas, il y a 9 constantes mécaniques pour définir la loi de comportement :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{-\nu_{xy}}{E_y} & \frac{-\nu_{xz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{xy}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & \frac{-\nu_{yz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{xz}}{E_z} & \frac{-\nu_{yz}}{E_z} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} \quad (I-4)$$

### 1. 2. 5. Isotropie transverse

Il s'agit d'un matériau orthotrope, mais avec une seule direction différente [1]. C'est donc la même loi de comportement :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_y = E \\ \nu_{xz} = \nu_{xy} \\ \frac{1}{G_{xz}} = \frac{2 \cdot (1 + \nu_{yz})}{E_y} \end{array} \right. \quad (1-5)$$

### I. 3. Définition géométrique d'une poutre

On peut représenter une poutre par la figure I.1 suivante :

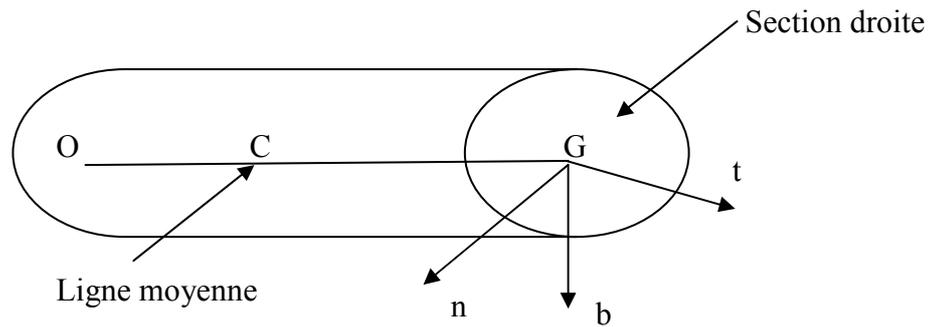


Figure I. 1. Le trièdre de Fresnet en un point de la ligne moyenne

Le trièdre de Fresnet est défini par :

$$\begin{cases} t = \frac{dOG}{dL} \\ n = R \frac{dt}{dL} \\ b = t \wedge n \end{cases} \quad (I-6)$$

On constate que :

$$\frac{dt}{dl} = \frac{n}{R} ; \frac{dn}{dl} = -\frac{t}{R} + \frac{b}{T} ; \frac{db}{dl} = -\frac{n}{T} \quad (I-7)$$

Dans ce plan, on définit la section droite de la poutre, de contour extérieur fermé et de centre de gravité sur la ligne moyenne [2]. La section droite peut aussi avoir des contours intérieurs. On appelle poutre, le volume engendré par les sections droites lorsque G décrit la ligne moyenne. On suppose de plus que :

- Les sections droites sont constantes ou lentement variables lorsque G varie,
- Si on appelle une dimension transversale de la section droite, on a en tout point de la poutre  $d \ll R$ .

Ces deux hypothèses sont essentielles, elles permettent d'assimiler un tronçon de poutre courbe de longueur  $dl$  à un tronçon de poutre droite.

Donc la poutre est un élément de modélisation commun caractérisé par une longueur grande par rapport à sa section. Pour bien définir une poutre il faut savoir sa section droite.

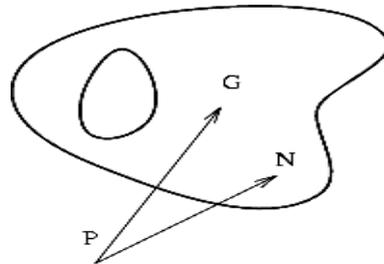
#### I. 4. Caractéristiques géométriques des sections droites

Parmi les caractéristiques géométriques des sections droites on distingue.

**I. 4. 1. Centre de gravité**

Le centre de gravité est défini par :

$$P.G = \frac{1}{S} \int_s P.N ds \tag{I-8}$$



**Figure I. 2. Centre de gravité d'une section droite**

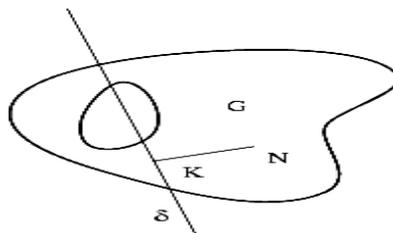
La figure I. 2, représente le centre de gravité d'une section droite, de point courant N et P un point fixe du plan normal. On remarquera que G est indépendant du choix de P par la relation suivante :

$$\int_s GN ds = 0 \tag{I-9}$$

**I. 4. 2. Moment statique par rapport à une droite**

Soit K la projection de N (point courant) sur  $\delta$  (voire figure I.3). Le moment statique de S par rapport à  $\delta$  est défini par :

$$A(S, \delta) = \int_s KN ds \tag{I-10}$$



**Figure I. 3. Moment statique d'une section droite par rapport à la droite  $\delta$**

Si  $G \in \delta \Rightarrow A(S, \delta) = 0$  les droites  $\delta$  qui passent par G sont appelées droites centrales.

Si on définit un repère central orthonormé  $\{G, x_2, x_3\}$  dans le plan normal, alors on obtient les nombres :

$$\begin{cases} A_2 = A(S, x_2) \cdot x_3 = \int_S x_3 ds \\ A_3 = A(S, x_3) \cdot x_2 = \int_S x_2 ds \end{cases} \quad (I-11)$$

### I. 4. 3. Moment quadratique d'une section par rapport à une droite

Avec les notations précédentes, on définit le moment quadratique de S par rapport à  $\delta$  :

$$I(S, \delta) = \int_S K \cdot N^2 ds \quad (I-12)$$

Soit  $I_G$ , qui existe dans un plan normal son repère est :  $\{G, x_2, x_3\}$  les composantes de ce tenseur sont :

$$[I_G] = \begin{bmatrix} I_{22} = \int_S (x_3)^2 ds, & I_{23} = - \int_S x_2 x_3 ds \\ I_{32} = - \int_S x_2 x_3 ds, & I_{33} = \int_S (x_2)^2 ds \end{bmatrix} \quad (I-13)$$

Tel que le moment quadratique de S par rapport à  $\delta$  de la section droite, de direction unitaire U, et passant par G est donné par :

$$I_G(S, u) = u \otimes I_G \otimes u = \begin{bmatrix} u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{22} & I_{23} \\ I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (I-14)$$

Les moments quadratiques :

$$I_G \otimes X_2 = I_2 \cdot X_2 \quad \text{et} \quad I_G \otimes X_3 = I_3 \cdot X_3 \quad (I-15)$$

Dans le repère orthonormé  $\{G, x_2, x_3\}$ , les composantes de  $I_G$  se rangent dans une matrice diagonale [2].

$$[I_G] = \begin{bmatrix} I_{22} = \int_S (x_3)^2 ds & 0 \\ 0 & I_{33} = \int_S (x_2)^2 ds \end{bmatrix} \quad (I-16)$$

### I. 4. 4. Moments principaux d'inertie

Pour calculer les moments principaux d'inertie on a besoin de méthode de calcule les racines de l'équation de troisième degré.

I. 4. 4. 1. Racine de l'équation de troisième degré

On rappelle par la nature, réelle ou complexe des racines de l'équation du troisième degré:  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  dépend de signe algébrique du discriminant  $D = p^3 + q^2$  de l'équation réduite

$$y^3 + 3p.y + 2q = 0 \text{ obtenue en posant } x = y - \frac{a}{3} .$$

Avec :

$$p = \frac{1}{3} \cdot (b - \frac{a^2}{3}) \quad \text{et} \quad q = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{2a^3}{27} - \frac{a.b}{3} + c \right)$$

- Si  $D > 0$ , l'équation réduite admet une seule racine réelle donnée par la formule de Cardan :

$$y = \sqrt[3]{-q + \sqrt{p^3 + q^2}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{p^3 + q^2}}$$

- Si  $D = 0$ , il a une racine réelle double  $y_1 = -\frac{q}{p}$  et une racine réelle simple  $y_2 = \frac{2q}{p}$

- Si  $D < 0$ , cela implique que le paramètre  $p$  est négatif ( $p < 0$ ) et que l'équation réduite admet trois racines réelles  $y_1, y_2$  et  $y_3$  exprimées en fonction des paramètres trigonométrique :

$$\cos \varphi = \frac{q}{-p\sqrt{-p}}$$

La solution trigonométrique de l'équation réduite du troisième degré est donc :

$$\begin{cases} y_1 = -2 \cdot \sqrt{-p} \cdot \cos \frac{\varphi}{3} \\ y_2 = 2 \cdot \sqrt{-p} \cdot \cos \left( \frac{\pi - \varphi}{3} \right) \\ y_3 = 2 \cdot \sqrt{-p} \cdot \cos \left( \frac{\pi + \varphi}{3} \right) \end{cases}$$

On note que la somme des racines de l'équation réduite est nulle:  $y_1 + y_2 + y_3 = 0$ . Les trois racines sont déphasées entre elle deux à deux par le même angle  $\frac{2\pi}{3}$ .

Ainsi, l'équation complète a pour racines, les trois réels  $x_1, x_2$  et  $x_3$  exprimés par :

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{a}{3} - 2\sqrt{-p} \cdot \cos \frac{\varphi}{3} \\ x_2 = -\frac{a}{3} + 2\sqrt{-p} \cdot \cos \left(\frac{\pi - \varphi}{3}\right) \\ x_3 = -\frac{a}{3} + 2\sqrt{-p} \cdot \cos \left(\frac{\pi + \varphi}{3}\right) \end{cases}$$

On remarque que les trois racines vérifient les trois relations suivantes avec les coefficients de l'équation :

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a \qquad b = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 \qquad \text{et} \qquad c = -x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

On a appelé les différents cas à envisager pour la résolution de l'équation du troisième degré, dans le but de pouvoir l'appliquer correctement pour le calcul des moments principaux d'inertie.

#### I. 4. 4. 2. Calcul des moments principaux d'inertie

Soit un tenseur d'inertie d'ordre deux en un point M d'un système dans un repère initial  $\{M, x_1, x_2, x_3\}$ .

$$[I] = \begin{bmatrix} I_1 & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_2 & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(I-17)}$$

Les moments d'inertie sont toujours positifs, et les produits d'inertie sont des grandeurs négatives.

Les moments principaux d'inertie sont des valeurs propres de  $[I]$ , c'est-à-dire les racines du déterminant suivant :

$$\det(\bar{I} - \lambda Id) = \begin{bmatrix} I_1 - \lambda & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_2 - \lambda & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_3 - \lambda \end{bmatrix} \qquad \text{(I-18)}$$

Dont le développement et la simplification conduisent à l'équation algébrique suivante :

$$\lambda^3 - J_1 \lambda^2 + J_2 \lambda - J_3 = 0 \qquad \text{(I-19)}$$

Où les trois invariants, linéaires, quadratiques et cubiques des moments quadratiques, sont positifs :

$$J_1 = I_1 + I_2 + I_3 = I_I + I_{II} + I_{III} = \text{trace}(\bar{I}) = J_0$$

$$J_2 = I_1 \cdot I_2 + I_2 \cdot I_3 + I_1 \cdot I_3 - I_{12}^2 - I_{23}^2 - I_{13}^2 = I_I \cdot I_{II} + I_{II} \cdot I_{III} + I_I \cdot I_{III}$$

$$J_3 = I_1 \cdot I_2 \cdot I_3 - I_1 \cdot I_{23}^2 - I_2 \cdot I_{13}^2 - I_3 \cdot I_{12}^2 + 2 \cdot I_{12} \cdot I_{13} \cdot I_{23} = I_I \cdot I_{II} \cdot I_{III}$$

Le déterminant (I-13) est une équation du troisième degré qui admet trois racines réelles positives ou nulles à cause de la symétrie de tenseur. Par ailleurs, les racines de l'équation ne dépendent pas du repère choisi ce qui implique que les coefficients  $J_1$ ,  $J_2$  et  $J_3$  sont bien des invariants.

Autrement dit, la théorie de l'algèbre linéaire annonce que toute matrice symétrique est diagonalisable et ses trois valeurs propres sont réelles. A ces trois valeurs propres correspondent trois valeurs unitaires propres ou trois orientations.

Quant les trois racines ou valeurs propres sont distinctes, les trois vecteurs propres associés forment une base orthogonale de l'espace, c'est-à-dire les trois vecteurs sont libres et orthogonaux entre eux, donc les directions sont rectangulaires entre elles. Si  $\lambda_1$  est différente de  $\lambda_2$  alors  $n_1$  est normale à  $n_2$ . Ces trois directions privilégiées s'appellent les axes principaux du tenseur d'inertie.

On réduisant l'équation (I-19) à :

$$y^3 + 3 \cdot p \cdot y + 2 \cdot q = 0 \quad \text{Avec :} \quad p = \frac{1}{3} \cdot (J_2 - \frac{J_1^2}{3}) \quad \text{et} \quad q = \frac{1}{2} \cdot (\frac{2 \cdot J_1^3}{27} - \frac{J_1 \cdot J_2}{3} + J_3).$$

Le tenseur d'inertie admet toujours trois solutions réelles donc le discriminant  $D = p^3 + q^2$  est négatif ( $D < 0$ ), le paramètre  $p$  est négatif également ( $P < 0$ ) et l'équation réduite admet trois racines réelles exprimées en fonction du paramètre trigonométrique :

$$\cos \varphi = \frac{q}{-p \sqrt{-p}}$$

Les moments principaux d'inertie sont :

$$\begin{cases} I_I = \frac{J_1}{3} - 2 \sqrt{\frac{1}{3} \cdot (\frac{J_1^2}{3} - J_2)} \cdot \cos \frac{\varphi}{3} \\ I_{II} = \frac{J_1}{3} - 2 \sqrt{\frac{1}{3} \cdot (\frac{J_1^2}{3} - J_2)} \cdot \cos \frac{\pi - \varphi}{3} \\ I_{III} = \frac{J_1}{3} - 2 \sqrt{\frac{1}{3} \cdot (\frac{J_1^2}{3} - J_2)} \cdot \cos \frac{\pi + \varphi}{3} \end{cases} \quad \text{(I-20)}$$

Or, on remarque que le terme  $\sqrt{\frac{1}{3} \cdot (\frac{J_1^2}{3} - J_2)}$ , contenu dans les relations ci-dessus est égal à un constant

réel multiplicatif  $\sqrt{\frac{1}{3} \cdot (\frac{J_1^2}{3} - J_2)} = \frac{1}{3} \sqrt{J_1^2 - 3 \cdot J_2}$ . Au moment équivalent d'expression :

$$I_p = \sqrt{J_1^2 - 3 \cdot J_2} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(I_I - I_{II})^2 + (I_I - I_{III})^2 + (I_{II} - I_{III})^2]}$$

De même, on remarque que le premier invariant est égal à deux fois le moment d'inertie par rapport à l'origine  $J_0$ :  $J_1 = I_1 + I_2 + I_3 = 2 \cdot J_0$ . A partir de ces formules, on peut mettre en place une décomposition du moment d'inertie fort importante pour la dynamique de rotation des systèmes. Le premier terme est triaxial et correspond à l'inertie sphérique. Toute l'inertie est concentrée dans le premier terme qui représente la symétrie. Cependant, le second terme permet de nous renseigner sur la différence entre le moment d'inertie axial et radial.

En effet  $I_p = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(I_I - I_{II})^2 + (I_I - I_{III})^2 + (I_{II} - I_{III})^2]} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(I_I - I_{II})^2 + (I_I - I_{III})^2]} = |I_I - I_{II}|$ , se réduit à la différence entre les moments axial et radial.

Les trois moments principaux sont exprimés en fonction du moment d'inertie et en fonction du moment d'inertie équivalent comme pour les contraintes principales :

$$\begin{cases} I_I = \frac{2 \cdot J_0}{3} - \frac{2}{3} I_p \cos \frac{\varphi}{3} \\ I_{II} = \frac{2 \cdot J_0}{3} - \frac{2}{3} I_p \cos \frac{\pi - \varphi}{3} \\ I_{III} = \frac{2 \cdot J_0}{3} - \frac{2}{3} I_p \cos \frac{\pi + \varphi}{3} \end{cases}$$

Soit, en fonction des moments d'inerties initiales, exprimés dans un repère  $\{M, x_1, x_2, x_3\}$  :

$$\begin{aligned} I_I &= \frac{I_1 + I_2 + I_3}{3} - \frac{2}{3} \cdot \cos \frac{\varphi}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(I_1 - I_2)^2 + (I_1 - I_3)^2 + (I_2 - I_3)^2 + 6 \cdot (I_{12}^2 + I_{13}^2 + I_{23}^2)]} \\ I_{II} &= \frac{I_1 + I_2 + I_3}{3} + \frac{2}{3} \cdot \cos \frac{\pi - \varphi}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(I_1 - I_2)^2 + (I_1 - I_3)^2 + (I_2 - I_3)^2 + 6 \cdot (I_{12}^2 + I_{13}^2 + I_{23}^2)]} \\ I_{III} &= \frac{I_1 + I_2 + I_3}{3} + \frac{2}{3} \cdot \cos \frac{\pi + \varphi}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(I_1 - I_2)^2 + (I_1 - I_3)^2 + (I_2 - I_3)^2 + 6 \cdot (I_{12}^2 + I_{13}^2 + I_{23}^2)]} \end{aligned}$$

On note  $I_p = \sqrt{\frac{1}{2}[(I_1 - I_2)^2 + (I_1 - I_3)^2 + (I_2 - I_3)^2 + 6(I_{12}^2 + I_{13}^2 + I_{23}^2)]}$  est l'expression du moment équivalent dans le repère initial.

**1. 4. 4. 3. Détermination des directions principales**

Dans le cas général, l'équation caractéristique admet trois racines distinctes  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$  auxquelles correspondent trois vecteurs propres. Etant donné que le tenseur est symétrique alors les trois vecteurs propres sont orthogonaux entre eux [3]. Donc les axes principaux sont orthogonaux.

$$\begin{cases} V_{i1} = (I_{i2} - I_i)(I_{3i} - I_i) - I_{23}^2 \\ V_{i2} = I_{12}(I_3 - I_i) + I_{13}I_{23} \\ V_{i3} = I_{13}(I_2 - I_i) + I_{12}I_{23} \end{cases}$$

Ces composantes du vecteur V qui est parallèle à l'axe principal correspondant à  $I_i$ . La norme  $N_i$  de ce vecteur est :

$$N_i = \sqrt{V_{i1}^2 + V_{i2}^2 + V_{i3}^2}$$

Ainsi, les trois vecteurs orthonormés directeurs des trois axes principaux sont :

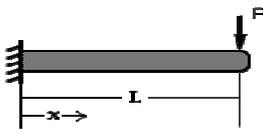
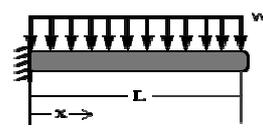
$$\vec{u}_1 = \frac{V_1}{N_1} = \frac{1}{N_1} \times \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{12} \\ V_{13} \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \frac{V_2}{N_2} = \frac{1}{N_2} \times \begin{bmatrix} V_{21} \\ V_{22} \\ V_{23} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{u}_3 = \frac{V_3}{N_3} = \frac{1}{N_3} \times \begin{bmatrix} V_{31} \\ V_{32} \\ V_{33} \end{bmatrix}.$$

**I. 5. Type de poutres**

**I. 5. 1. Poutres encastées libres**

On a deux cas de ces poutres (voire tableau 1), l'une subit une charge ponctuelle, et l'autre une charge uniforme A et B son point gauche et le point droit, P est sous la charge. Les indices, le sens des efforts et le sens des déformations sont omis lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

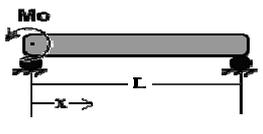
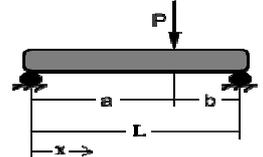
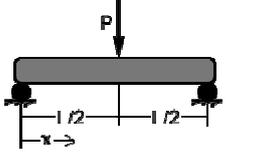
Tableau 1.

Sollicitations	Réaction d'appui	Flèche	Rotation	Equation de la déformée
	$R_A = P$ $M_A = P \cdot L$	$f = \frac{P \cdot L^3}{3 E \cdot I}$	$\phi = \frac{P \cdot L^2}{2 E \cdot I}$	$y = \frac{-P \cdot x^2}{6 E \cdot I} (3 \cdot L - x)$
	$R_A = w \cdot L$ $M_A = \frac{w \cdot L^2}{2}$	$f = \frac{w \cdot L^4}{8 E \cdot I}$	$\phi = \frac{w \cdot L^3}{6 E \cdot I}$	$y = \frac{-w \cdot x^2}{24 E \cdot I} (x^2 - 4L \cdot x + 6L^2)$

I. 5. 2. Poutres bi – appuyées

Le tableau 2 représente quelques poutres bi-appuyées avec leurs fonctions de réactions, la flèche, la rotation et les équations de déformation de chaque sollicitation.

Tableau 2.

Sollicitations	Réaction d'appui	Flèche	Rotation	Equation de la déformée
	$R_A = \frac{M_o}{L}$ $R_B = -\frac{M_o}{L}$	$f = \frac{M_o X}{X E \cdot I}$	$\phi_A = \frac{M_o L}{3 E \cdot I}$ $\phi_B = \frac{M_o L}{6 E \cdot I}$	$y = \frac{-M_o L}{6 E \cdot I} \cdot (x^2 - 3 \cdot Lx + x^2)$
	$R_A = \frac{P \cdot b}{L}$ $R_B = \frac{-P \cdot a}{L}$	$f_P = \frac{P \cdot a^2 b^2}{3 E \cdot I \cdot L}$ $f_{Milieu} = \frac{P X}{X E \cdot I \cdot L}$	$\phi_A = \frac{P \cdot a \cdot b (2L - a)}{6 E \cdot I \cdot L}$ $\phi_B = \frac{P \cdot a \cdot b (L + a)}{6 E \cdot I \cdot L}$	$M = \frac{P \cdot a \cdot b}{L} \cdot y$ $= -\frac{P b x}{6 E \cdot I \cdot L} \cdot (L^2 - b^2 - x^2)$
	$R_A = \frac{P}{2}$ $R_B = \frac{P}{2}$	$f = \frac{P \cdot L^3}{48 E \cdot I}$	$\phi_A = \frac{P \cdot L^2}{16 E \cdot I}$ $\phi_B = \frac{P \cdot L^2}{16 E \cdot I}$	$M = \frac{P \cdot L}{4} \cdot y$ $= \frac{-P \cdot x}{48 E \cdot I} \cdot (3 \cdot L^2 - 4 \cdot x^2)$

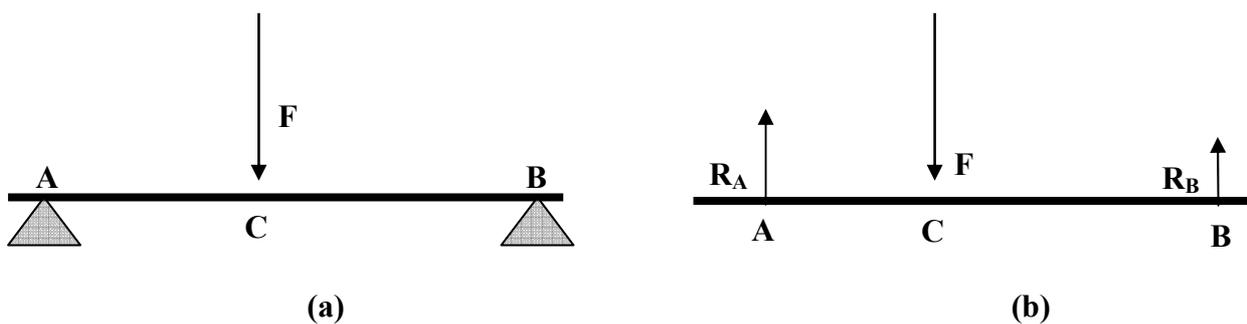
## I. 6. Les actions mécaniques dans les poutres

Si on néglige les effets dynamiques pendant le passage, on considère que la poutre passe par une des états d'équilibre (à partir de l'état initial à l'état déformé); donc les efforts exercés sont constants ou (lentement variables). Et parmi ces actions mécaniques, on distingue:

### I. 6. 1. Actions mécaniques extérieures

Les actions mécaniques extérieures sont des actions appliquées par le milieu extérieur sur un poutre isolée (ou un tronçon de poutre) ces actions sont :

- Les charges sont des efforts auxquels la poutre doit résister (sont des données),
- Les actions de liaison sont des actions mécaniques exercées par les liaisons qui maintiennent la poutre en place (sont des inconnues). La figure I. 4, montre un exemple de sollicitations d'une poutre.



**Figure I. 4. Exemple d'efforts extérieurs à une poutre (a) Schéma du montage et (b) Efforts extérieurs à la poutre isolée**

#### I. 6. 1. 1. Les charges

En théorie des poutres, les charges sont considérées comme étant appliquées sur la ligne moyenne. On distingue :

- Les charges concentrées, sont des torseurs appliqués en un point de la poutre. La charge appliquée en C est un torseur de résultante  $F$  et son moment est nul,
- Les charges réparties : ce sont des densités linéiques de torseur appliquées sur une portion de la ligne moyenne. Le plus souvent, les densités linéiques de torseur se réduisent à des densités linéiques de forces,
- Les densités linéiques de moment sont rares dans la pratique.

**I. 6. 1. 2. Les actions de liaison**

Toute poutre isolée en équilibre a des liaisons avec son milieu extérieur. Les actions de ces liaisons sur la poutre sont des torseurs qu'on définit conventionnellement au point de la liaison. Dans la figure I.4 , le torseur d'action de liaison en A est :

$$T_A = \left\{ \begin{matrix} R_A \\ 0 \end{matrix} \right\} \tag{I-21}$$

En théorie des poutres, on n'utilise que deux types de liaisons :

- Les liaisons parfaites sont le travail des forces de liaison dans les déplacements relatifs sont nuls. Ainsi, si la liaison permet une mobilité de translation dans une direction (u) et une rotation autour de la direction (v) la résultante du torseur de liaison est nécessairement perpendiculaire à (u), et le moment de la liaison est perpendiculaire à (v),
- Les liaisons élastiques, due a cause des mouvements supposés bloqués ont une certaine souplesse alors il semble qu'il est difficile de modéliser une liaison par une liaison parfaite, donc on modélise cette rigidité imparfaite par un ressort. Pour un blocage en translation imparfait dans la direction (u), on met un ressort linéaire dans cette direction, pour un blocage en rotation imparfaite autour de la direction « v », on met un ressort spiral autour de cette direction. Les raideurs de ces ressorts (en N/m ou en mN/rd) sont estimés ou résultent d'une mesure sur une liaison existante.

Le choix d'un modèle de liaison d'un système des poutres réelles, influe de manière importante sur les résultats. Donc il faut bien analyser la liaison réelle pour choisir le modèle de liaison adapté.

**I. 6. 1. 3. Equilibre des actions mécaniques extérieures**

On dit d'un système mécanique en équilibres lorsque la somme des actions mécaniques extérieures (charges et actions de liaison) est nulle [1].

C'est à dire que :

$$\sum_i F_i + \sum_k R_k + \int p(l) dl = 0$$

$$\sum_i OA_i \wedge F_i + \sum_i M_i + \sum_k OB_k \wedge R_k + \sum_k W_k + \int OM \wedge p(l) dl + \int \mu(l) dl = 0 \tag{I-22}$$

On définit que:

$\begin{Bmatrix} F_i \\ M_i \end{Bmatrix}_{A_i}$  : c'est les torseurs de charge extérieures concentrées aux points  $A_i$ ,

$\begin{Bmatrix} P(L) \\ \mu(L) \end{Bmatrix}_G$  : c'est les torseurs des charges extérieures linéiques répartis sur la ligne moyenne,

$\begin{Bmatrix} R_K \\ W_K \end{Bmatrix}_{B_K}$  : c'est les torseurs d'action de liaison aux points de liaison  $B_K$ .

Si on considère les charges comme connues, et les actions de liaison non nulles comme inconnues, on peut classer les problèmes en trois catégories :

- Les problèmes isostatiques, on peut donc déterminer les inconnues de liaison en fonction des charges utilisant uniquement les équations de la statique (nombre des inconnues égale aux nombre des équations),
- Les problèmes hyperstatiques, nombre des inconnues est supérieure au nombre des équations, pour déterminer les inconnues de liaison. Il faudra des équations supplémentaires (dédites de la théorie des poutres) Les systèmes hyperstatiques sont très courants dans la réalité industrielle.
- Les problèmes hypostatiques, le système d'équations de la statique n'a pas de solution. Cela signifie qu'il n'y a pas d'équilibre possible sous l'action des charges avec de telles liaisons. Soit on veut étudier le mouvement et il faut alors écrire les lois de la dynamique, soit on veut que le système prenne une position d'équilibre sous les charges et il faut ajouter des liaisons pour s'opposer au mouvement.

### I. 6. 2. Efforts intérieurs

On définit les efforts intérieurs à une poutre (milieu continu curviligne) par imagination d'une coupure du milieu qui rend extérieurs les efforts intérieurs. Considérons une poutre en équilibre sous l'action d'efforts extérieurs (charges et actions de liaison). Soit une coupure au point G, qui divise le milieu en deux parties C+ et C- (voire figure I.5).

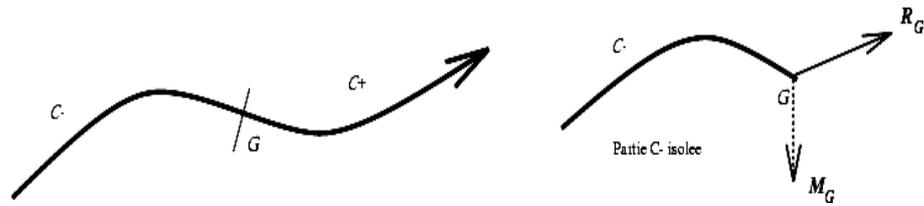


Figure I. 5. Coupure dans une poutre

Equilibre globale de la poutre  $T_{ext-} + T_{ext+} = 0$

Equilibre de la partie C-  $T_{ext-} + T_G = 0$  .

On déduit deux manières d'évaluer le torseur intérieur  $T_G$  en G :  $T_G = T_{ext+} = -T_{ext-}$

### I. 6. 2. 1. Définition

Les différentes composantes de l'effort intérieur défini en G sur la base locale principale d'inertie de la poutre  $\{G, X_1, X_2, X_3\}$  en G ont des noms et des symboles usuels : la poutre est en traction au point G lorsque  $N > 0$  et si la poutre est en état de compression donc :  $N < 0$ .

$$T_2 = R_G \cdot X_2$$

$$T_3 = R_G \cdot X_3$$

$$T = T_2 \cdot X_2 + T_3 \cdot X_3$$

$$M_t = M_G \cdot X_1$$

$$M_{f2} = M_G \cdot X_2$$

$$M_{f3} = M_G \cdot X_3 .$$

$$M_f = M_{f2} \cdot X_2 + M_{f3} \cdot X_3$$

### I. 6. 2. 2. Diagrammes des efforts intérieurs

Pour représenter l'évolution de ces différentes composantes le long de la poutre, il faudrait qu'on trace des courbes en fonction de l'abscisse curviligne. Par exemple, le diagramme de l'effort normal est la courbe  $N = f(L)$ . Cette méthode graphique est très utile pour la recherche des sections droites les plus sollicitées.

I. 6. 3. Equations d'équilibre local des poutres

Considérons une poutre soumise à un torseur extérieur réparti (charges et actions de liaison) représenté par la figure I.6 [2].

$\left\{ \begin{matrix} p(L) \\ \mu(L) \end{matrix} \right\}_G$  : Prenons un tronçon quelconque AB d'une poutre.

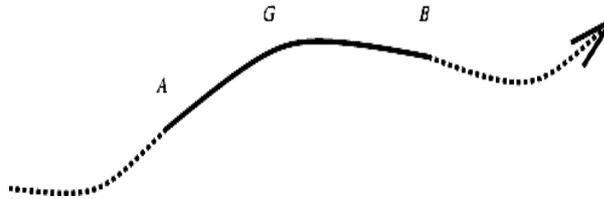


Figure I. 6. Equilibre d'un tronçon de poutre

On isole le tronçon AB, on considère des efforts extérieurs qui sont : la partie de la densité linéique qui s'applique sur le tronçon AB et l'action du reste de la poutre sur le point A et le point B, sont des torseurs intérieurs :

$$\left\{ \begin{matrix} -R_A \\ -M_A \end{matrix} \right\}_A, \left\{ \begin{matrix} R_B \\ M_B \end{matrix} \right\}_B.$$

On dit que le tronçon AB est en équilibre si :

$$\begin{aligned} -R_A + R_B + \int_A^B P(L)dL &= 0 \\ -M_A - OA \wedge R_A + M_B + OB \wedge R_B + \int_A^B \mu(L) dL + \int_A^B OG \wedge P(L) dL &= 0 \end{aligned}$$

On définit les fonctions  $R_G$  et  $M_G$  par :

$$\begin{aligned} R_B - R_A &= \int_A^B \frac{dR_G}{dL} \\ M_B - M_A &= \int_A^B \frac{dM_G}{dL} dL \\ OB \wedge R_B - OA \wedge R_A &= \int_A^B \frac{d(OG \wedge R_G)}{dL} dL \end{aligned}$$

Alors, on peut décrire les équations d'équilibre de AB par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \int_A^B \frac{dR_G}{dL} + P(L)dL = 0 \\ \int_A^B \frac{dM_G}{dL} + \frac{d(OG \wedge R_G)}{dL} + \mu(L) + OG \wedge P(L).dL = 0 \end{cases}$$

Ces intégrales étant nulles pour tout tronçon AB, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{dR_G}{dL} + P(L) = 0 \\ \frac{dM_G}{dL} + \frac{d(OG \wedge R_G)}{dL} + \mu(L) + OG \wedge P(L).dL = 0 \end{cases}$$

On développe la dérivée du produit vectoriel et en simplifiant avec la première équation, on obtient les équations d'équilibre local :

$$\begin{cases} \frac{dR_G}{dL} + P(L) = 0 \\ \frac{dM_G}{dL} + t \wedge R_G + \mu(L) = 0 \end{cases} \tag{I-23}$$

La résolution de ces équations différentielles vectorielles est une autre alternative pour la détermination du torseur intérieur.

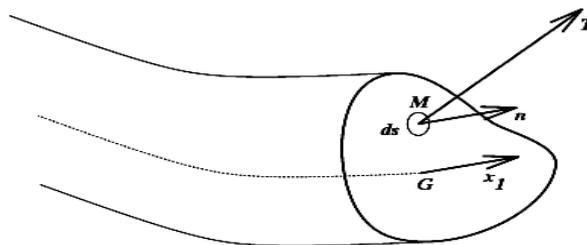
**I. 6. 4. Torseur intérieur et contraintes**

On suppose que la poutre comme un milieu tridimensionnel, donc il y a un tenseur de la poutre, il existe un tenseur des contraintes symétrique  $\sigma$  en tout point M, et même que la contrainte C en ce point et pour une facette de normale unitaire n est donné par :

$$C_{M,n} = \overline{\sigma}_M \otimes n \tag{I-24}$$

Prenons comme coupure la section droite S en G (voire figure I.7) Soit M le point courant de S.

La coupure divise la poutre P en deux parties P<sub>+</sub> et P<sub>-</sub>. Toutes les facettes ds de centre M de cette coupure ont la même normale n = X<sub>1</sub> [2].



**Figure I. 7. Contraintes dans une section droite de poutre**

Le torseur d'action de la partie P<sub>+</sub> sur la partie P<sub>-</sub> est l'intégrale des contraintes sur la coupure S et c'est aussi par définition le torseur intérieur en G [2]. On peut donc écrire les égalités vectorielles :

$$\begin{cases} R_G = \int_S C_M \cdot X_1 dS = \int_S \sigma_M \otimes X_1 \\ M_G = \int_S GM \wedge C_M X_1 dS = \int_S GM \wedge \sigma_M \otimes X_1 dS \end{cases} \quad (I-25)$$

On peut définir les composantes du tenseur des contraintes en M sur la base locale de la poutre  $\{G, X_1, X_2, X_3\}$  par :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (I-26)$$

On projette les égalités vectorielles sur la base locale de la poutre en G, on obtient :

$$\begin{cases} N = \int_S \sigma_{11} \cdot ds \\ T_2 = \int_S \sigma_{12} \cdot ds \\ T_3 = \int_S \sigma_{13} \cdot ds \end{cases} \quad (I-27)$$

$$M_t = \int_S X_2 \cdot \sigma_{13} - X_3 \cdot \sigma_{12} \cdot ds \quad (I-28)$$

$$M_{f2} = \int_S X_3 \cdot \sigma_{11} \cdot ds$$

$$M_{f3} = \int_S -X_2 \cdot \sigma_{11} \cdot ds \quad (I-29)$$

L'interprétation des composantes des contraintes est :

$$\sigma_{21} = \sigma_{12} \cdot$$

$$\sigma_{31} = \sigma_{13} \cdot$$

$$\tau = \sigma_{12} \cdot X_2 + \sigma_{13} \cdot X_3 \cdot$$

Pour déterminer le torseur intérieur il faut connaître les contraintes,  $\sigma_{12}$  et  $\sigma_{13}$  dans la section S pour la seule direction X<sub>1</sub> ; et les termes  $\sigma_{23}$  et  $\sigma_{33}$  n'interviennent pas.

L'effort normal et le vecteur moment de flexion ne dépendent que des contraintes normales dans la section droite  $\sigma_{11}$ , et pour le vecteur effort tranchant et le moment de torsion ne dépendent que des contraintes tangentielles dans la section droite ( $\sigma_{12}$  et  $\sigma_{13}$ ).

## MESURE DES DEFORMATIONS ET DES CONTRAINTES

### II. 1. Introduction

Dans ce chapitre on va étudier les extensométriques qui sont des appareils qui servent à mesurer les déformations ou bien l'allongement qui est la conséquence des contraintes, ses jauges de contraintes (ou jauges d'extensométrie) sont largement utilisées depuis de nombreuses années pour la mesure de déformations à la surface des structures. La pression, la force, l'accélération, le couple... bref toute grandeur mécanique dont l'action sur un corps d'épreuve entraîne sa déformation est mesurable par extensomètre cette mesure de déformation permet d'accéder à la contrainte étant souvent la conséquence d'un effort, l'extensométrie débouche naturellement sur toute une série de capteurs de déplacement, d'accélération, de force ou de pression. Les méthodes expérimentales dans le domaine de l'extensométrie connaissent actuellement un regain d'intérêt en tant que complément indispensable aux outils numériques pour l'analyse prédictive du comportement des systèmes structuraux (constructions mécaniques, ouvrage d'art) ou biomécaniques. Avant de donner plus de détail sur les jauges il faut savoir des notions sur les contraintes et les déformations qui sont la cause de trouver ces instruments de mesures.

### II. 2. Contraintes

Le terme stress, qui désigne en français le syndrome général d'adaptation et a pris dans le langage courant la signification de (nervosité), (tension nerveuse), (inquiétude), (panique) signifie (contrainte) en anglais. De façon générale, une contrainte est une restriction de quelque ordre. Une contrainte n'est pas un obstacle, mais une condition de créativité pour la détourner et la contourner, à l'exemple illustratif des machines volantes pour la contrainte de la pesanteur newtonienne. Une contrainte est un effort par unité de surface qui s'exerce dans le matériau (on pourra parler de densité de force par unité de surface). Elle dépend de la valeur de la sollicitation et de la surface du solide. Pour une même sollicitation, la contrainte sera d'autant plus faible que la surface est grande et inversement. Dans la mécanique, la contrainte normale  $\sigma$  est proportionnelle à l'allongement relatif  $\varepsilon$  par la constante du module de Young.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (\text{II-1})$$

Avec l'allongement relatif donné par :

$$\varepsilon = \frac{L_{finale} - L_{initiale}}{L_{initiale}} \quad (\text{II-2})$$

- **Traction-Compression** : la contrainte de traction-compression est donnée par :

$$\sigma_{traction} = \frac{F}{S} \quad (\text{II-3})$$

- **Flexion** : la contrainte de flexion est décrite avec le moment de flexion de la flèche  $X_2$  et le moment d'inertie.

$$\sigma_{flexion} = \frac{M_3 \cdot X_2}{I_3} \quad (\text{II-4})$$

Avec :

$$I_3 = \int_S X_2^2 dS$$

- **Cisaillement** :

$$\tau_{Moy} = \frac{\sigma_{Cisaillement}}{S} = G \cdot \gamma \quad (\text{II-5})$$

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

### II. 2. 1. Tenseur des contraintes

Le tenseur des contraintes est une représentation utilisée en mécanique des milieux continus pour représenter l'état de contrainte, c'est-à-dire les forces surfaciques (parfois appelées efforts) mises en jeu au sein d'une portion déformée du milieu. Le tenseur est défini en chaque point du solide. L'état de contrainte du solide est donc représenté par un champ de tenseur. On parle aussi de ce fait de champ de contrainte, qui est relié par le champ de déformation par la loi de Hooke [1]. Le tenseur des contraintes est symétrique dans un solide quand il est en équilibre (les contraintes et déformations restent constantes dans le temps), et si l'on peut négliger la densité volumique de moment alors :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (\text{II-6})$$

Cela, traduit l'équilibre en moment d'un volume élémentaire. Le tenseur s'écrit donc :

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{II-7})$$

**II. 2. 2. Contraintes principales**

Tant que la contrainte  $\sigma_{ij}$  est symétrique, il existe un repère orthonormé dans lequel sa matrice est diagonale. Les trois directions correspondantes sont les directions principales des contraintes et les valeurs propres sont appelées contraintes principales notées  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$  et  $\sigma_{III}$ . Le tenseur des contraintes s'écrit donc :

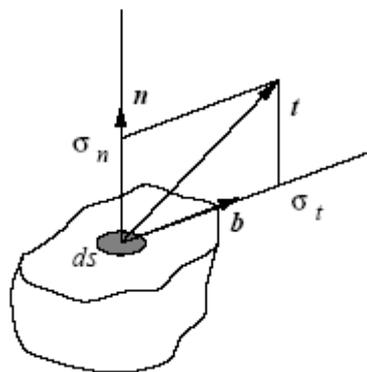
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \tag{II-8}$$

Il est constitué de trois contraintes normales appliquées sur les facettes orthogonales aux directions du repère principal.

**II. 2. 3. Signification physique des contraintes**

**II. 2. 3. 1. Contrainte normale et tangentielle**

Le tenseur des contraintes permet de définir une contrainte normale  $\sigma_n$  une contrainte tangentielle  $\sigma_t$  s'exerçant sur une facette (figure II. 1) [3] :



**Figure II. 1. Contrainte normale et tangentielle**

La contrainte normale est la projection du vecteur contrainte sur la normale à cette facette. Elle s'exprime sous la forme :

$$\sigma_n = \vec{t} \cdot \vec{n} \tag{II-9}$$

La contrainte tangentielle s'exerçant sur une facette est la projection du vecteur contrainte sur cette facette. on note que  $\vec{b}$  le vecteur unitaire du plan de normale portant la contrainte tangentielle, on peut écrire :  $\sigma_t \cdot \vec{b} = \vec{t} - \vec{n}$

Donc : 
$$\sigma_t = \vec{t} - \vec{n} \tag{II-10}$$

**II. 2. 3. 2. Utilisation du tenseur des contraintes**

Les deux contraintes équivalentes les plus utilisées sont celles de Von Mises et de Tresca.

- La contrainte équivalente de Von Mises une fonction uniquement du second invariant des contraintes :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3 \cdot J_2} \tag{II-11}$$

Dans un repère orthonormé, elle s'écrit directement en fonction des composantes du déviateur ou du tenseur des contraintes sous la forme :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \sum_{ij} S_{ij} \cdot S_{ji}} = \sqrt{\frac{3}{2} \sum_{ij} \sigma_{ij} \cdot \sigma_{ji} - \frac{1}{2} \left( \sum_K \sigma_{KK} \right)^2} \tag{II-12}$$

- La contrainte équivalent de Tresca, est définie en fonction des contraintes principales sous la forme :

$$\bar{\sigma} = Sup[(\sigma_I - \sigma_{II}) \times (\sigma_{II} - \sigma_{III}) \times (\sigma_{III} - \sigma_I)] \tag{II-13}$$

Elle présente l'inconvénient de ne pas pouvoir s'écrire simplement en fonction des composantes du tenseur des contraintes. Pour l'obtenir, il faut diagonaliser ce tenseur. Dans un programme numérique, son estimation est donc plus coûteuse que celle de la contrainte équivalente de Von Mises.

- **Contraintes thermiques** : Elles s'exercent dans les composants ayant des coefficients de dilatation thermique différents à chaque fois que la dispersion thermique des composants est entravée ou bien lorsque l'échauffement n'est pas uniforme. Pour l'analyse des déformations, les contraintes mécaniques doivent être considérées indépendamment de leurs causes. Les contraintes résiduelles et thermiques affectent les composants de la même manière qu'une charge appliquée sur ces éléments. Selon leur valeur absolue et leur signe, elles peuvent sensiblement réduire la capacité de chargement extérieur sur l'élément.

- **Contraintes résiduelles** : Ce sont des contraintes internes qui naissent dans les matériaux qui ne sont pas soumis à des sollicitations extérieures. Des contraintes internes apparaissent par exemple lors du refroidissement inégal sur les pièces, après un forgeage ou après soudure de pièces mécaniques ou bien après un traitement de surface. Alors, la contrainte est un outil de calcul, on ne peut pas l'observer directement, mais ses effets qui : études des déformations, études de la cassure, photoélasticité. Pour cela nous sommes intéressé d'étudier la déformation [3].

### **II. 3. Déformation**

#### **II. 3. 1. Définition**

La déformation mécanique est la compagne de la déformation physique, elle définit le changement de forme d'un corps quand les forces appliquées sur celui-ci ou générées à l'intérieur lui font atteindre un nouvel état d'équilibre. La déformation est quantifiée par l'allongement relatif  $\varepsilon$ , encore appelé déformation [4].

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (\text{II-14})$$

#### **II. 3. 2. Types de déformation**

On peut distinguer deux types de déformations, la déformation élastique, qui est réversible et la déformation plastique qui ne l'est pas, et fluage qui est une déformation irréversible qui augmente avec le temps sous l'effet d'une contrainte constante. La vitesse de fluage augmente généralement lorsque la température du matériau augmente.

##### **II. 3. 2. 1. Déformation élastique**

La déformation élastique est une déformation réversible, c'est-à-dire lorsque l'on supprime les sollicitations le milieu retourne à son état initial. L'élasticité linéaire concerne les petites déformations proportionnelles à la sollicitation. Dans cette gamme, l'allongement est proportionnel à la force dans le cas d'un étirement, et l'angle est proportionnel au couple dans le cas d'une torsion. Aux plus grandes déformations, l'élasticité devient non linéaire pour certains matériaux. Pour d'autres, la fracture ou le fluage interviennent. La déformation élastique intervient pour les faibles sollicitations. Si l'on augmente les sollicitations, on change le mode de déformation.

### II. 3. 2. 2. Déformation plastique

La déformation plastique est une déformation irréversible d'une pièce; elle se produit par un réarrangement de la position des atomes. Lorsque l'on sollicite une pièce, un objet (on le tire, on le comprime, on le tord...), celui-ci commence par se déformer de manière réversible (déformation élastique), c'est-à-dire que ses dimensions changent, mais il reprend sa forme initiale lorsque la sollicitation s'arrête. Certains matériaux, dits (fragiles), cassent dans ce mode de déformation si la sollicitation est trop forte.

### II. 4. La limite d'élasticité

Expérimentalement, on a défini pour chaque matériau une contrainte limite admissible au-delà de laquelle la pièce subit des détériorations de ses caractéristiques mécaniques, dimensionnelles, voire une rupture. Donc il faut vérifier que les contraintes engendrées par les sollicitations extérieures ne dépassent pas la contrainte limite admissible par le matériau. Le calcul des contraintes sert à évaluer la tension dans la matière.

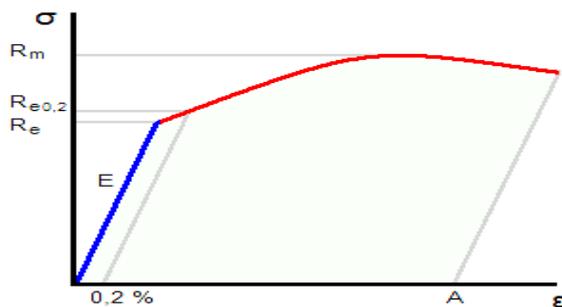


Figure II. 2. La courbe contrainte-déformation

La limite d'élasticité est la contrainte à partir de laquelle un matériau commence à se déformer de manière irréversible. C'est la zone en rouge sur le graphique dans la figure II. 2, au-delà du domaine élastique E représenté en bleu au-delà duquel l'augmentation de la contrainte donne une déformation à la fois linéaire en fonction de cette contrainte et réversible à la suppression de cette contrainte. Les déformations subies au-delà de la limite d'élasticité restent permanentes. Elles se mesurent ou se vérifient habituellement à l'aide d'un essai de traction.

### II. 5. Loi de Hooke

La loi de Hooke est une loi de comportement des solides soumis à une déformation élastique de faible amplitude. Elle a été énoncée par Robert Hooke, par (l'allongement est proportionnel à la force).

Cette loi est appliquée ou l'état de contraintes uni axiales. Les autres états possibles exigent des versions plus étendues. Hooke a considéré que la phase élastique est linéaire, donc proportionnelle et réversible. La forme la plus simple de la loi de Hooke est :

$$\sigma = \varepsilon \times E \quad (\text{II-15})$$

**II. 5. 1. Loi de Hooke généralisée**

Dans notre cas le matériau est isotrope, si l'on reprend en compte le coefficient de Poisson  $\nu$ , la loi de Hooke devient :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \cdot \delta_{ij} \right) \quad (\text{II-16})$$

Il faut inverser, la relation précédente pour donner les déformations en fonction des contraintes :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \cdot \left[ (1+\nu) \cdot \sigma_{ij} - \nu \cdot \sigma_{kk} \cdot \delta_{ij} \right] \quad (\text{II-17})$$

Explicitant cette relation :

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} \cdot \left[ \sigma_{11} - \nu \cdot (\sigma_{22} + \sigma_{33}) \right]$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} \cdot \left[ \sigma_{22} - \nu \cdot (\sigma_{11} + \sigma_{33}) \right]$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E} \cdot \left[ \sigma_{33} - \nu \cdot (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \right]$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \sigma_{12}$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \sigma_{13}$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \sigma_{23}$$

Pour un matériau anisotrope, la contrainte et la déformation locale est définies par un tenseur 3×3, le tenseur des contraintes  $[\sigma_{ij}]$  et le tenseur des déformations  $[\varepsilon_{ij}]$ . Le comportement élastique du matériau est alors modélisé par un tenseur d'ordre 4  $[C_{ijkl}]$  contenant 81 coefficients élastiques et donné par la relation suivante :

$$\sigma_{ij} = C_{ijk1} \times \varepsilon_{k1} \quad (\text{II-18})$$

Explicitement :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1132} & C_{1113} & C_{1131} & C_{1112} & C_{1121} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2232} & C_{2213} & C_{2231} & C_{2212} & C_{2221} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3332} & C_{3313} & C_{3331} & C_{3312} & C_{3321} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2332} & C_{2313} & C_{2331} & C_{2312} & C_{2321} \\ C_{3211} & C_{3222} & C_{3233} & C_{3223} & C_{3232} & C_{2313} & C_{2331} & C_{2312} & C_{2321} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1332} & C_{1313} & C_{1331} & C_{1312} & C_{1321} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3132} & C_{3113} & C_{3131} & C_{3112} & C_{3121} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1232} & C_{1213} & C_{1231} & C_{3112} & C_{3121} \\ C_{2111} & C_{2122} & C_{2133} & C_{2123} & C_{2132} & C_{2113} & C_{2131} & C_{2112} & C_{2121} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \end{bmatrix}$$

Du fait de ces propriétés de symétrie, le tenseur de contraintes et de déformations, c'est à dire : quand  $i \neq j$ ,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  et  $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$ . Donc  $[C_{ijk1}]$  se présente sous la forme d'une matrice 6 x 6, où les directions représentent les directions de la déformation :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3333} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2222} & C_{3233} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

Pour simplifier l'écriture, on adopte souvent une notation de 1 à 6, avec les axes de compression-traction notés de 1 à 3 et les axes de cisaillement notés de 4 à 6:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{II-19})$$

Le nombre de coefficients indépendants est réduit à 21 en tenant compte de la symétrie du tenseur  $[C_{ijk1}]$ .

### II. 5. 2. Module de Young

Le module de Young ou module d'élasticité longitudinal est un rapport entre la contrainte de traction appliquée à un matériau, et la déformation qui en résulte (un allongement relatif) est constante, tant que cette déformation reste petite et que la limite d'élasticité du matériau n'est pas atteinte. Le module de Young est la contrainte mécanique qui engendrerait un allongement de 100% de la longueur initiale d'un matériau (il doublerait donc de longueur), si l'on pouvait l'appliquer réellement : dans les faits, le matériau se déforme de façon permanente, ou se rompt, bien avant que cette valeur soit atteinte. Il ne faut pas confondre élasticité et rigidité puisque la rigidité d'une poutre par exemple dépend de son module de Young mais aussi du moment d'inertie de sa section [5].

#### II. 5. 2. 1. Expression théorique

Dans le système d'unités (naturelles) atomique, le module de Young vaut, pour un matériau isotrope :

$$E = E_0 = \frac{m^4 \varepsilon^{10}}{h^8} \quad (\text{II-20})$$

Ceci dit, compte tenu des problèmes où il apparaît (bilaplacien), il paraît assez naturel de le rationaliser soit  $E_1 = E_0 / 16 \pi^2$ , où  $E_2 = E_0 / 64 \pi^6$ .

$$E = 2 \cdot (1 + \nu) \cdot G \quad (\text{II-21})$$

$$E = \frac{(3 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu) \cdot \mu}{\lambda + \mu} \quad (\text{II-22})$$

### II. 6. L'extensométrie

Comme on l'a déjà vu dans l'introduction de ce chapitre, les capteurs et les jauges sont des appareils importants qu'on utilise en métrologie. L'objet de ce paragraphe, est de présenter les instruments nécessaires pour mesurer les déformations et les contraintes. En effet, les jauges de déformation et des contraintes permettent de transférer une déformation mécanique à des signaux électriques. La fidélité de ces jauges, permet dès l'origine d'envisager leur usage pour fabriquer des capteurs. Avec les mêmes jauges et la même instrumentation en aval, il est possible d'imaginer de nombreux types de capteurs. Les capteurs extensométriques simples peuvent être exécutés même par des non-spécialistes. Il est d'ailleurs fréquent que, dans des ateliers ou des laboratoires, l'utilisateur fabrique d'abord lui-même ses capteurs, quitte à les faire réaliser, ensuite par des professionnels lorsque la méthode s'est révélée satisfaisante et susceptible d'être étendue à de plus grandes précisions [6].

**II. 6. 1. Types de capteurs**

Il existe quatre grandes familles de capteurs qui sont :

**II. 6. 1. 1. Capteurs analogiques**

Ce type de capteurs fournit un signal analogique en fonction d'une grandeur physique, électrique, mécanique, c'est la catégorie la plus importante. Il y a une relation mathématique entre la grandeur d'entrée E et le signal de sortie :  $S = f(E)$ .

Cette famille se décompose en deux grands groupes :

- Les capteurs physiques sont caractérisés par une relation permanente entre la grandeur à mesurer et le signal de sortie du capteur,
- Les capteurs chimiques ne possèdent pas cette caractéristique et vont donc impliquer un processus d'utilisation séquentiel beaucoup plus complexe et beaucoup plus susceptible de conduire à des erreurs d'interprétation. En effet, les capteurs chimiques impliquent une réaction physico-chimique entre le capteur et l'environnement qu'il est chargé d'appréhender, réaction mettant en jeu une surface d'échange dont, par essence, la taille est limitée. Il en résulte le risque de saturation et donc d'inefficacité du capteur, risque que l'on doit apprécier et éviter en procédant très régulièrement à un reconditionnement du capteur. Ce processus sera généralement automatisé selon une fréquence adaptée (toutes les secondes parfois) et pendant sa durée le capteur ne sera évidemment pas disponible pour une mesure. Quelques principaux domaines d'application des capteurs sont représentés dans le tableau 3.

**Tableau 3.**

<b>Capteurs Physiques</b>	<b>Capteurs Chimiques</b>
capteurs optiques	capteurs de gaz
capteurs de déformation (force, pression, accélération, etc.)	capteurs d'humidité
capteurs de température	capteurs ioniques
capteurs magnétiques	capteurs biochimiques
capteurs acoustiques	

**II. 6. 1. 2. Capteurs logiques**

Ils sont représentés par deux états (0 et 1) dont le modèle est le contact ouvert ou fermé (fin de course, capteur de niveau...). C'est la catégorie appelée (Key sensor) en anglais. Ils interviennent le plus souvent en tant qu'éléments de sécurité. Mais en raison de leurs très grandes simplicités étudiées que dans les technologies avancées. Ici on aura :  $S = 0$  ou 1

**II. 6. 1. 3. Capteurs numériques**

Qui fournissent un signal fréquentiel, c'est à dire un certain nombre d'impulsions par unité de temps ( $n$ ) en fonction de la grandeur mesurée ( $E$ ). Le capteur type de cette catégorie est le pluviomètre à auget basculant. Leur intérêt majeur réside dans leur facilité d'emploi puisqu'ils peuvent être directement couplés à un compteur et ne nécessitent donc qu'une électronique associée réduite.  $S = n$ , avec  $n = k \cdot E$  avec  $k$  entier.

**II. 6. 1. 4. Capteurs digitaux**

Il s'agit de dispositifs qui donnent directement des informations binaires combinatoires. Ils sont parfaitement représentés par la famille des codeurs optiques. Ces dispositifs possèdent une grande immunité au bruit et sont peu influencés par des grandeurs parasites, comme ils peuvent être directement couplés au système informatique sans la nécessité d'un système d'amplification puis de conversion analogique numérique. Dans ce cas  $S$  est un code en base 2 en relation linéaire avec  $E$  [7].

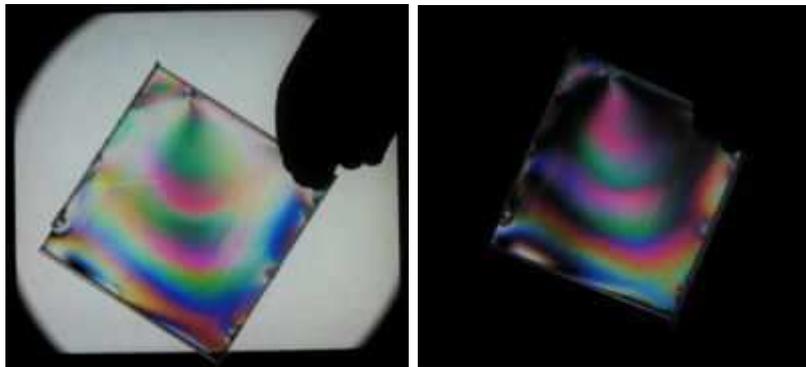
**II. 6. 2. Photoélasticimétrie**

La plupart des corps transparents présentent une intéressante propriété physique connue sous le nom de (Biréfringence accidentelle). La lumière qui les traverse est transmise à des vitesses différentes suivant l'état de contraintes de la matière. Placés entre des filtres polarisants, ces matériaux révèlent leurs contraintes sous forme de frange colorées. On mesure les déphasages optiques, on peut en déduire les contraintes en chaque point. Certains polymères présentent cette propriété avec une grande fidélité. On les utilise suivant l'un ou l'autre des procédés de mesure de contraintes connues sous le nom de photoélasticimétrie :

- Lors de la conception d'un prototype, on réalise un modèle dans un tel matériau. Soumis à des charges alors qu'il est traversé par une lumière polarisée, les contraintes sont visualisées, observées, photographiées et mesurées. C'est la photoélasticimétrie par transmission,

- Sur une machine réelle, par exemple réalisée en métal, une mince couche de polymère est déposée en surface. La lumière après réflexion traverse une seconde fois cette couche. Les franges obtenues révèlent l'état de contrainte à la surface de la machine réelle. Ce procédé de photoélasticimétrie par réflexion est connu sous le nom de (photo stress) [8].

La figure II. 3 représente un exemple d'image prise par le procédé de photoélasticimétrie, la lumière polarisée provient d'un écran plat d'ordinateur. Elle traverse ensuite une plaque de plastique déformée, puis un polaseur. Les déformations et les contraintes dans le plastique peuvent ainsi être visualisées [9].



**Figure II. 3. Image prise par le procédé de photoélasticimétrie**

### **II. 6. 3. Capteur de Force et de pression**

Dans la pratique, pour mesurer une force on dispose 5 méthodes qui se basent sur la relation suivante  $F = m \gamma$  ,  $p = \frac{F}{S}$ . Ainsi, on va pouvoir :

- Comparer la force inconnue via un système de leviers à une masse connue m,
- Mesurer l'accélération d'une masse connue,
- Comparer la force à une force magnétique générée via une circuiterie ad hoc,
- La transformer en une pression en la distribuant sur une aire connue et utiliser un capteur de pression,
- Enfin la convertir en une déformation d'un élément élastique.

#### **II. 6. 3. 1. Cellules de pression**

La figure II.4 représente le principe de mesure qui s'explique comme suit :

La force s'applique sur un dispositif solidaire d'une membrane déformable, cette force vient compresser un liquide hydraulique, d'où variation de pression mesurée par un capteur en P. Lorsque la surface et même l'épaisseur de la cellule peuvent être grande on aura une force de pression très importante. Un tel dispositif est utilisé essentiellement en statique ou avec des forces variantes lentement dans le temps.

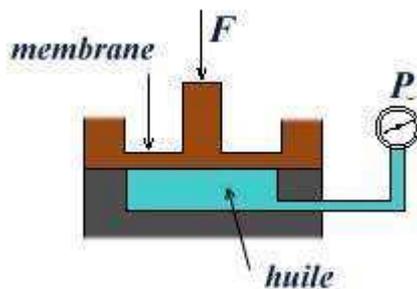


Figure II. 4. Mesure de pression

#### II. 6. 4. Capteur piézoélectrique [10]



Figure II. 5. Capteur piézoélectrique hermétiquement soudé

En raison de la haute impédance des matériaux piézoélectriques (figure II.5), leur emploi comme capteurs implique la proximité de l'amplificateur, dont l'impédance d'entrée doit évidemment être très grande, afin de limiter l'influence des câbles de liaison. La tendance est d'ailleurs de plus en plus à l'intégration de l'électronique dans le boîtier capteur (voir la figure II.6). On note que cette obligation de proximité induit un effet pervers. En effet l'effet piézoélectrique est peu sensible à la température et de ce fait une jauge piézoélectrique peut être a priori utilisée jusqu'à des températures relativement élevées puisque les céramiques utilisées ont généralement une stabilité chimique jusqu'à des températures très élevées (souvent bien au-delà de  $1000^{\circ}\text{C}$ ). Cependant, la présence de l'électronique, du fait de la limitation du silicium à  $200^{\circ}\text{C}$  environ, à proximité immédiate de la membrane réduit quasi à néant cet avantage des capteurs piézoélectriques.

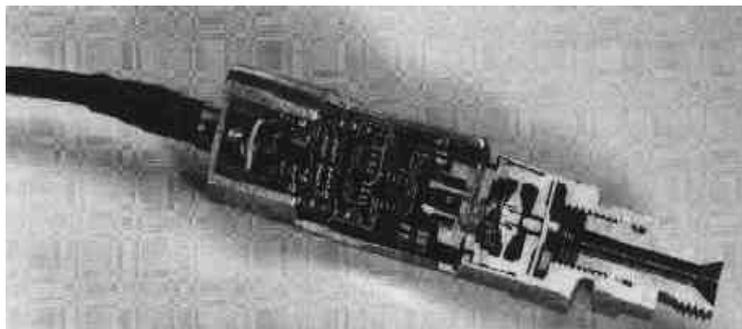


Figure II. 6. Capteur de pression commercialisé

### II. 6. 5. Capteur de type AG (figure II. 7)

Ce type de capteur est constitué d'une ou plusieurs jauges de contrainte. Examinons plus en détail ce qu'on appelle une jauge de contrainte [11].



Figure II. 7. Capteur de type AG

### II. 6. 6. Jauge de contrainte (figure II. 8)

La jauge est un capteur passif traduisant, en variation de résistance électrique, sa propre déformation qui est en principe égale à celle de la structure à l'endroit où il est collé. Pratiquement, son allongement est habituellement limité à environ 3%. En général, une jauge est constituée d'une grille formée par un conducteur collé sur un support isolant.

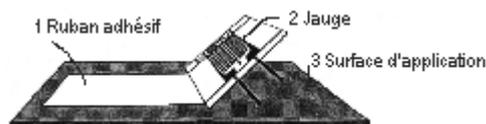


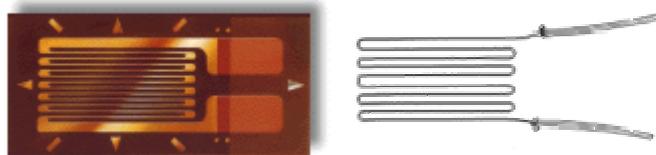
Figure II. 8. Jauge juste avant son collage sur la structure

Le conducteur est soit d'origine métallique, souvent des alliages à base de nickel, soit c'est un semi-conducteur. Le nombre de brin de la grille diffère selon le type du conducteur. Il varie entre 10 et 20 pour un conducteur métallique et est égal à 1 pour les jauges semi-conductrices (figure II.9).



**Figure II. 9. Jauge à fil métallique et jauge semi-conductrice**

Le support isolant est en papier ou, le plus souvent, en plastique. C'est ce support qui est collé sur la pièce dont on veut connaître les déformations et c'est lui qui transmet les déformations au circuit métallique. On conçoit que, pour transmettre avec fidélité les déformations, le support doit avoir des caractéristiques bien particulières (bonne aptitude au collage, coefficient de dilatation pas trop important afin d'éviter un décollage de la jauge par cisaillement, l'adhérence ou faculté du support de pouvoir être bien collé au circuit métallique...) [12]. On peut encore différencier les jauges métalliques par la réalisation de la grille. En effet, il existe des jauges dites à fil et d'autres dites à trame pelliculaire comme elle est montrée dans la figure II.10. C'est les plus fréquentes. Elles sont réalisées selon les procédés de fabrication des circuits imprimés.



**Figure II. 10. Jauge à fil et jauge à trame pelliculaire**

La résistance électrique d'un fil conducteur est définie par la loi de Pouillet qui est le produit scalaire de la résistivité du matériau par la longueur du fil d'une section du fil :

$$R = \frac{\rho \cdot L}{S} \quad (\text{II-23})$$

### II. 6. 7. Différents types de jauges

On va donner un aperçu sur les types de jauges, utilisées en analyse des contraintes. Chaque type correspond bien évidemment à une application particulière.

#### II. 6. 7. 1. Les jauges simples (figure II. 11)

Ce type est utilisé pour la mesure des déformations en vue du calcul des contraintes. Elles ont des formes classiques avec une grille rectangulaire.

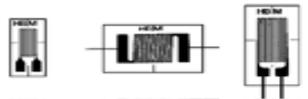


Figure II. 11. Jauge simple

**II. 6. 7. 2. Les minis et micro jauges**

Les minis, micro jauges (voir figure II. 12) sont utiles aux points de concentration de contraintes. Certaines ont des dimensions de l'ordre de 0.2 mm. (Chaînette de jauges).



Figure II. 12. Mini, micro jauge

**II. 6. 7. 3. Rosettes (figure II.13)**

Ce sont des associations de jauges fixées sur un support unique et dont les directions des brins font entre elles des angles parfaitement définis. Elles sont utilisées quand on souhaite connaître simultanément les déformations dans plusieurs directions. Lorsque les directions principales des déformations sont inconnues, il faut pour les déterminer mesurer les déformations dans trois directions : on emploie pour cela des rosettes de 3 jauges à 120° ; lorsque l'une des directions principales est présumée probable, on utilise des rosettes à 45°, la jauge centrale étant alignée avec cette direction. Les rosettes à deux jauges perpendiculaires sont utilisées quand on connaît les directions principales de déformation. D'autres rosettes à deux jauges sont adaptées à la mesure des déformations de torsion.

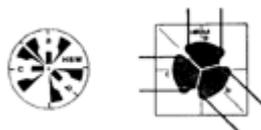


Figure II. 13. Rosette de jauges

**II. 6. 7. 4. Les jauges des contraintes résiduelles**

On colle la jauge, puis on la perce d'un trou à l'endroit indiqué sur la jauge, puis on mesure les contraintes induites par des jauges résiduelles (figure II.14).



**Figure II. 14. Jauge de contrainte résiduelle**

#### **II. 6. 7. 5. Les jauges longues**

On utilise les jauges longues dans la figure II.15 pour mesurer la moyenne d'une déformation intégrée sur une certaine longueur, par exemple sur des matériaux hétérogènes, tel le béton [13].



**Figure II. 15. Jauge longue**

#### **II. 6. 7. 6. Les jauges de contrainte optiques**

Les jauges de contrainte optiques représentées dans la figure II.16, sont conçues à partir des fibres de verre ayant un diamètre de noyau très petit, pas plus de 4 à 9 microns. En comparaison, le diamètre des cheveux humains est de 60 à 80 microns. Le noyau de la fibre est entouré par une couche de verre le plus pur qui soit avec un diamètre de 125 micromètres. La conception brevetée par HBM protège la fibre et vous permet de configurer rapidement et facilement votre installation d'essai. Tirez à la fois le bénéfice de la technologie des sondes optiques et de tout l'éventail d'accessoires existant pour les jauges de contrainte électriques [14]. Les deux meilleures technologies au monde: La technologie de mesure HBM permet l'acquisition simultanée des données on utilise les jauges de contrainte électriques et optiques.



**Figure II. 16. Jauge de contrainte optique**

La figure II. 17 représente quelques produits industriels des jauges de contrainte.



**Figure II. 17. Jauges de contrainte**

Comme on a vu qu'il y a plusieurs types de jauges, on peut dire généralement que les jauges sont différentes cause de leurs matières de construction elles peuvent être métalliques ou semi conductrices, ces dernières sont constituées de Silicium comme matériau de jauge plutôt qu'un alliage métallique. Le principal intérêt réside dans le facteur de jauge accru d'un facteur 50. Dans ce dernier cas on évite ainsi toutes les opérations de montage des jauges sur une membrane. Cependant le silicium présente l'inconvénient majeur d'avoir un fort coefficient de dérive thermique.

Il y a deux présentations différentes des jauges semi-conductrices qui sont la conséquence de leur mode de fabrication : les jauges découpées et les jauges diffusées.

- Les jauges découpées sont formées d'un brin unique découpé mécaniquement ou photo chimiquement dans un monocristal de silicium dopé. Le brin est parallèle à la diagonale du cube cristallin pour le silicium et au côté du cube pour le silicium N. Ordre de grandeur des dimensions : longueur : de quelques  $10^1$  [mm] à quelques mm ; épaisseur : quelques  $10^{-2}$  [mm]. Le brin est collé sur le support de plastique. Etant formées d'un brin unique, ces jauges ont une sensibilité transversale pratiquement nulle,

- Jauges diffusées ce type a une résistance qui est réalisée par diffusion d'impuretés dans une partie d'un substrat de silicium monocristallin déjà dopé.

Les jauges métalliques sont utilisées pour la mesure précise de déformations pouvant atteindre des amplitudes importantes et dans des domaines de température étendus. Les résistances de jauges, métalliques ou semi-conductrices, ont des valeurs standard définies de + 0,2 a + 10 % près et comprises entre 100  $\Omega$  et 5000  $\Omega$  [15].

### II. 6. 8. Principe de fonctionnement d'une jauge d'extensométrie

Ce principe est basé sur une mesure de variation relative d'une résistance d'un conducteur homogène. Les jauges collées sur les structures sont des circuits résistifs de résistance définis par :

$$R = \frac{\rho \cdot L}{S} = \frac{\rho \cdot L^2}{V} \quad (\text{II-24})$$

Cette propriété physique d'un conducteur peut varier en fonction de la température et de son état de déformation; la différenciation de l'expression de R donne :

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + 2 \cdot \frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta V}{V}$$

Pour un conducteur de section rectangulaire de largeur a et d'épaisseur b, son volume s'exprime par :

$$V = b \cdot h \cdot L, \quad \text{d'où : } \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta L}{L}$$

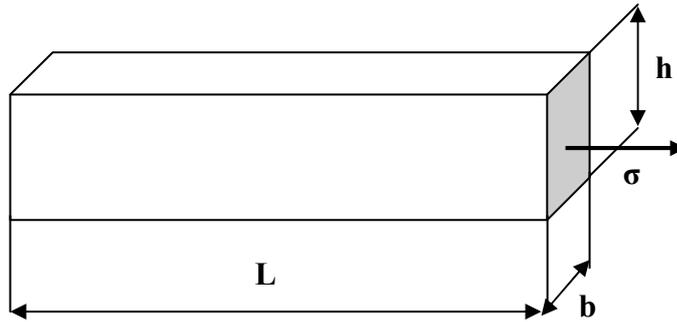


Figure II. 18. Conducteur de section rectangulaire

La figure II.18 représente un conducteur soumis a un champ de contrainte uniforme parallèle a sa longueur, les déformations dans sa section sont reliées à sa déformation longitudinale  $\epsilon$  par :

$$\frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta h}{h} = -\nu \frac{\Delta L}{L} \quad \text{et} \quad \epsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

Le changement de géométrie dû à l'état de contrainte entraîne donc une variation relative de résistance pouvant s'exprimer par :

$$2 \cdot \frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta V}{V} = (2 + 2\nu - 1) \times \frac{\Delta L}{L} = (2 + 2\nu - 1) \cdot \epsilon$$

L'observation montre que la résistivité d'un matériau est fonction de sa dilatation volumique  $\frac{\Delta V}{V}$  . La loi de BRIDGMAN exprime cette variation par la relation :

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = C \cdot \frac{\Delta V}{V} = C \cdot (2\nu - 1) \cdot \epsilon$$

On cumulant les effets géométriques et électriques dus à l'état de déformation, la variation relative de résistance s'exprime donc finalement par :

$$\frac{\Delta R}{R} = [(1 + 2\nu) + C \cdot (2\nu - 1)] \cdot \epsilon \tag{II-25}$$

Où encore :

$$\frac{\Delta R}{R} = K \cdot \varepsilon$$

Les jauges de déformation de même géométrie fabriquées dans des matériaux différents ont des facteurs des jauges K différents parce que la constante de BRIDGMAN, C, quantifiant la sensibilité de la résistivité d'un matériau à la dilatation volumique cette dernière varie d'un matériau à l'autre. Les jauges semi-conductrices ont une sensibilité bien supérieure par rapport aux jauges métalliques. Cependant elles ont une linéarité inférieure et ces jauges métalliques sont plus sensibles aux effets de la température.

Les jauges métalliques sont utilisées pour la mesure précise de déformation pouvant atteindre des amplitudes importantes et dans des domaines de température étendus. Les jauges semi-conductrices trouvent leur intérêt dans la mesure de faibles déformations, dans un domaine de température restreint.

Les valeurs des facteurs de jauges des alliages et matériaux employés couramment sont regroupées dans le tableau 4 :

**Tableau 4.**

Alliages	Nom commercial	Facteur de jauge
Nickel- Cuivre	Constantan	2 à 2.1
Nickel- Chrome	Karma	2.1 à 2.2
Nickel- Fer- Chrome	Isoélastique	3.2 à 3.6
Platine- Tungstène		4 à 4.6
Silicium mono- cristal	Semi- Conducteur	50 à 200

Les jauges en constantan sont les plus utilisées avec les géométries adaptées à l'extensométrie générale (jauges doubles, rosettes à 90°, 120°, chaînette pour mesure de gradients de déformation, etc...). Le karma a des propriétés de sensibilité à la température particulièrement bien adaptées aux variations des propriétés mécaniques des aciers; il est souvent retenu pour les capteurs de précision en acier.

L'isoélasticité a de très bonnes propriétés de résistance à la fatigue, il est donc retenu pour toutes les mesures dynamiques ou les phénomènes vibratoires ont une influence importante sur les durées de vie. La platine-tungstène a une sensibilité double des autres matériaux et peut ainsi permettre d'améliorer la précision de mesure pour de faibles déformations.

Le silicium est évidemment dans le domaine des fortes sensibilités, le mieux adapté théoriquement; son emploi en extensométrie courante se heurte à la fragilité des monocristaux qui imposent des techniques de collage sans pression, et ne tolèrent aucune courbure des surfaces des structures à équiper.

A l'exception de ce dernier type de matériau, la variation relative de la résistance d'une jauge de contrainte est donc du même ordre de grandeur que la déformation à mesurer, sachant que celle-ci dans le domaine élastique des matériaux est bornée par la limite élastique et le module d'élasticité longitudinale, on peut déduire que les mesures extensométriques sur des aciers avec  $\sigma_e = 100$  [MPa] au maximum et  $E = 200\,000$  [MPa] conduiront à des déformations très inférieures à 0.5 % et sur de l'aluminium avec  $\sigma_e = 500$  [MPa] et  $E = 70\,000$  [MPa] à des déformations inférieures à 0.7 %. Le domaine des mesures habituelles est en générale de l'ordre de 0.1 % sauf sur des matières de synthèse comme les polymères ou les résines ou dans le domaine plastiques des métaux.

Les jauges sont en général conçues pour supporter 2 à 3 % de déformation ; des traitements thermiques spéciaux du constantan permettant de porter son domaine d'utilisation jusqu'à 10 %. Dans le cas de l'isoélastique, il faut limiter son utilisation à 0.5 % pour garder un facteur de jauge constant. Cette évaluation des variations relatives de résistance entraînées par les déformations « usuelles » indique la précision imposée pour la mesure de cette propriété électrique traduisant la quantité mécanique à évaluer.

### II. 6. 8. 1. Effet de la température

La relation entre la variation relative de résistance de la jauge de déformation et de la déformation de la structure à étudier a été établie avec l'hypothèse de température constante. Ce paramètre expérimental peut varier pendant des manipulations de durée assez longue et il a trois effets physiques majeurs :

- La dilatation de matériaux,
- La variation de résistivité du matériau de la jauge,
- La variation des caractéristiques mécaniques du matériau de la structure.

Les coefficients de dilatation thermique du matériau de la jauge, et du matériau de la structure étudiée, sont en général différents et toute variation de température entraînera une déformation différentielle thermique entre le (bilame), constitué par la jauge et la surface ou elle est collée, de valeur égale à :

$$d\varepsilon_{th} = (\alpha_s - \alpha_j) . dT \quad (II-26)$$

Les fabricants de jauges mettent à disposition des utilisateurs des matériaux auto-compensés en température. Ces matériaux sont des alliages de composition particularisée pour que leur coefficient de dilatation thermique soit voisin de celui du matériau de la structure à équiper dans une plage d'une dizaine de degrés autour de la température ambiante. Ce type de jauge permet dans cette plage, de réduire d'un ordre de grandeur la déformation d'origine thermique.

Ces jauge auto-compensées existent pour des matériaux courants: aciers, alliages légers, fontes....pour les autres matériaux et pour des variations plus importantes de température on a recours à des montages de mesure pour éliminer cette variation parasite par rapport a la déformation d'origine mécanique à mesurer.

L'effet de la température sur la résistivité du matériau de jauge est pris en compte globalement avec la dilatation de la jauge avec l'influence sur le facteur de jauge K. Pour les jauges à base de matériaux métalliques, cette variation de K est de 0.004 %. Par ° C environ, elle est donc négligeable en première approximation pour des variations de température de 10° C.

Dans le cas des jauges semi-conductrices, l'effet de la température est plus important, les variations sont dans ce cas dix fois plus importantes pour des jauges à très fort facteur de jauges et nécessitent l'emploi de circuits correcteurs. Le dernier effet de la température à prendre en compte concerne la sensibilité du module d'élasticité longitudinale du matériau de la structure à étudier. En général, cette propriété mécanique diminue quand la température augmente. Le module de l'acier diminue de 0.026 % par degré Celsius autour de 20 ° C, celui des alliages légers de 0.058 %. Cette influence est faible si l'on ne considère que les variations de la température ambiante. Elle n'a de l'influence que sur la conversion des déformations mesurées en contraintes subies par le matériau de la structure lors de l'application de la loi de Hooke, ou sur les facteurs d'étalonnage des capteurs de force. Cet effet peut être une source d'erreur si la température du matériau de la structure située sous la jauge s'échauffe trop sous l'effet joule, avec un pouvoir de dissipation de la chaleur trop faible. Ce cas peut se produire avec une tension d'excitation trop élevée pour les jauges collées sur un matériau isolant ou mauvais conducteur.

### **II. 6. 9. Champ de déformation quelconque**

Lors de l'établissement de la relation entre la variation de résistance du conducteur formant la jauge et la déformation mesurée, il a été supposé un état de déformation particulier correspondant à une traction uniforme de direction parallèle à celle du conducteur. En générale a la surface d'une pièce, l'état de contrainte plane est quelconque avec deux contraintes principales non nulles suivant deux directions principales inconnues à priori comme on montre dans la figure II.19. De plus, dans le cas des jauges réelles, le conducteur formé de boucles a des parties non parallèles à la direction générale de la grille qui seront sensibles aux déformations transversales.

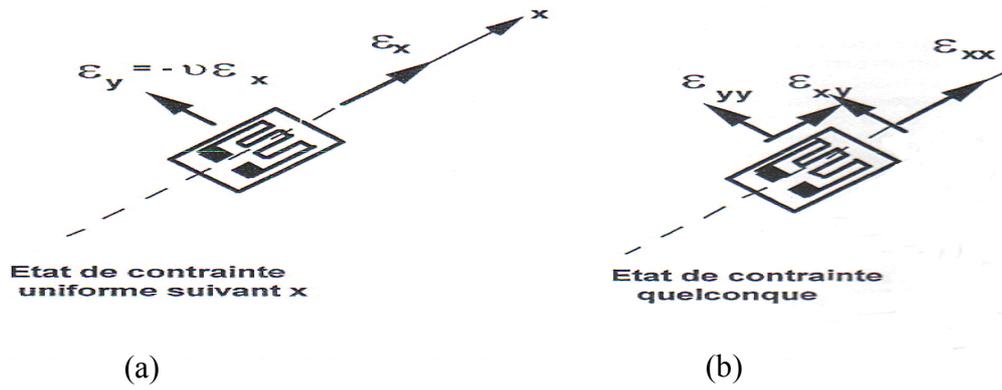


Figure II. 19. Etat de contrainte

Pour tenir compte de la nature quelconque du champ réel de déformations, il faut introduire une correction pour passer des valeurs mesurées aux déformations réelles :

$$\epsilon_x^V = [(1 - \nu \kappa)(\epsilon_x^M - \kappa \epsilon_y^M)] / (1 - \kappa^2)$$

$$\epsilon_y^V = [(1 - \nu \kappa)(\epsilon_y^M - \kappa \epsilon_x^M)] / (1 - \kappa^2)$$

Ce coefficient d'effet transversal est de l'ordre de 1 % pour des champs de déformation proches d'un état équilibre axial ; on peut atteindre des corrections de quelques pourcentage pouvant avoir une importance non négligeable sur des observations de phénomènes de second ordre.

**II. 6. 10. Mesure des variations de résistance des jauges de déformation**

Les variations de résistance des jauges soumises à des déformations sont donc assez faibles. Pour leur mesure, on fait appel à des méthodes de zéro avec pont de Wheatstone simple ou double, ou des méthodes de mesure directe de déséquilibre de pont avec amplification importante permettant soit des lectures directes, soit des acquisitions de données [16].

**II. 7. Pont de Wheatstone**

Un pont de Wheatstone dans la figure II.20 est un instrument de mesure inventé par Samuel Hunter Christie. Il est utilisé pour mesurer une résistance électrique inconnue par équilibrage de deux branches d'un circuit en pont, avec une branche contenant le composant inconnu [17].

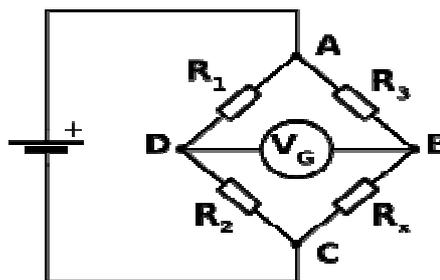


Figure II. 20. Pont de Wheatstone

Le pont est constitué de deux résistances connues,  $R_1$  et  $R_2$ , d'une résistance variable de précision,  $R_3$ , et d'un galvanomètre ou voltmètre sensible  $G$ .

Le potentiel au point de jonction entre  $R_1$  et  $R_2$  (noté  $D$ ) est obtenue grâce au théorème de Millman et vaut :  $V.R_2 / (R_1 + R_2)$ , où  $V$  est la différence de potentiel aux bornes de la pile. Si nous plaçons entre  $R_3$  et la masse une résistance inconnue,  $R_x$ , la tension au point de jonction entre  $R_3$  et  $R_x$  vaut :

$V.R_x / (R_3 + R_x)$ . Ajustons  $R_3$  de façon à annuler le courant dans le galvanomètre; la différence de potentiel aux bornes de celui-ci est donc nulle. En égalant les deux tensions calculées ci-dessus, l'on trouve :

$$R_x = \frac{R_3 \cdot R_2}{R_1} \tag{II-27}$$

En pratique, le pont de Wheatstone comporte un ensemble de résistances calibrées, de façon à pouvoir mesurer une large gamme de valeurs de  $R_x$  avec une seule résistance de précision ; il suffit de changer le rapport  $R_1/R_2$ . Par ailleurs, la même technique peut être utilisée pour mesurer la valeur de condensateurs (pont de Sauty) ou d'inductances (pont de Maxwell). On remplace la source de tension continue par une source de tension alternative et la résistance de précision par un condensateur ou une inductance de précision. À l'équilibre du pont (courant nul dans le galvanomètre), le rapport des impédances dans la branche réactive est égal au rapport des résistances.

Comme le pont n'est jamais parfait et on sera amené à ajouter une compensation de dérive de température du coefficient de jauge ainsi qu'un dispositif d'équilibrage du zéro. Dans ces conditions l'électronique associée pourrait être du type de celle figurée II.21 :

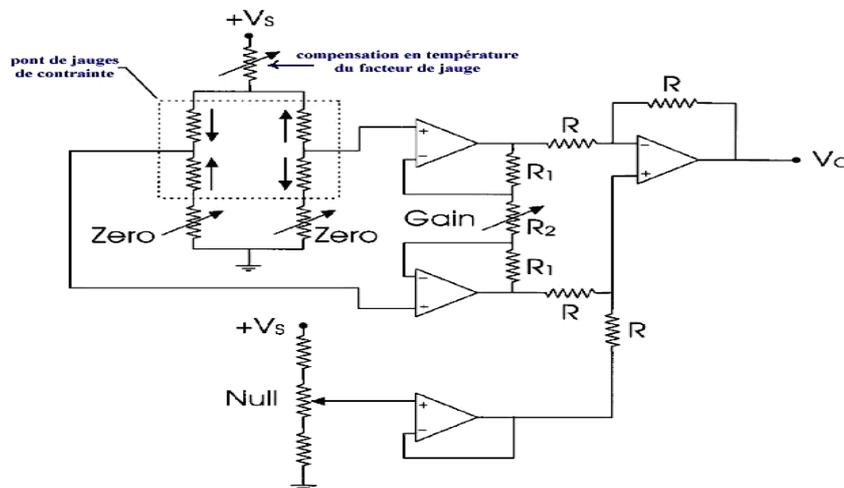


Figure II. 21. Circuit de conditionnement associé à un capteur de pression à pont de jauge

Les capteurs à jauges peuvent se présenter sous de nombreuses apparences selon leur destination. A titre indicatif et non limitatif nous donnons ci-dessous quelques exemples.

### II. 7. 1. Montage

Le montage peut être réalisé avec une seule jauge active (montage dit en quart de pont), deux jauges actives (demi-pont) ou encore quatre jauges actives (pont complet). Ce dernier montage est le montage le plus couramment utilisé pour les capteurs (force, pression...).

#### II. 7. 1. 1. Montage en quart de pont

Dans la figure II. 22 le montage en quart de pont, on ne dispose que d'une jauge et trois résistances viennent en complément avec l'électronique associée. Ce montage est le plus simple et le moins cher mais présente de nombreux inconvénients :

- La jauge étant éloignée des autres résistances, il faut prendre en compte la résistance induite par la longueur de câble,
- La tension alimentant la jauge, diminue la somme des variations de tension rencontrées sur les câbles de liaison. À l'entrée de la jauge, elle est largement inférieure à celle qui sort de l'amplificateur. La sensibilité du capteur (qui varie proportionnellement à la tension d'alimentation) se trouve alors amoindrie,
- La résistance du câblage ajoute également une atténuation du signal et donc une perte d'information. Par exemple, un câble de 100 m conduit à une variation de 10%.

Des corrections sont indispensables à ce type de montage tel que l'étalonnage (shunt) du système de mesures.

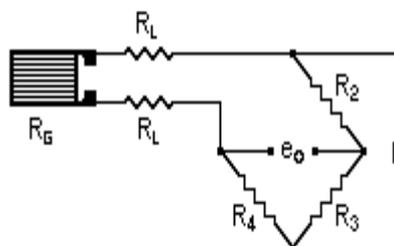


Figure II. 22. Montage en quart de pont

II. 7. 1. 2. Montage en demi-point

Le montage demi-point représenté par la figure II. 23 est couramment utilisé lorsque l'on souhaite faire des corrections en température sur matériaux à mesurer.

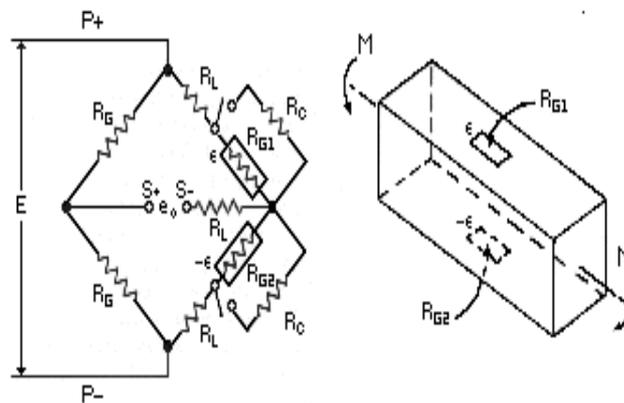


Figure II. 23. Montage en demi-point

II. 7. 1. 3. Montage en pont complet (figure II. 24)

Soit le fil spiralé de longueur  $L$ , de diamètre  $d$  et de section  $S$ . Sa résistance est  $R = r_0$ .

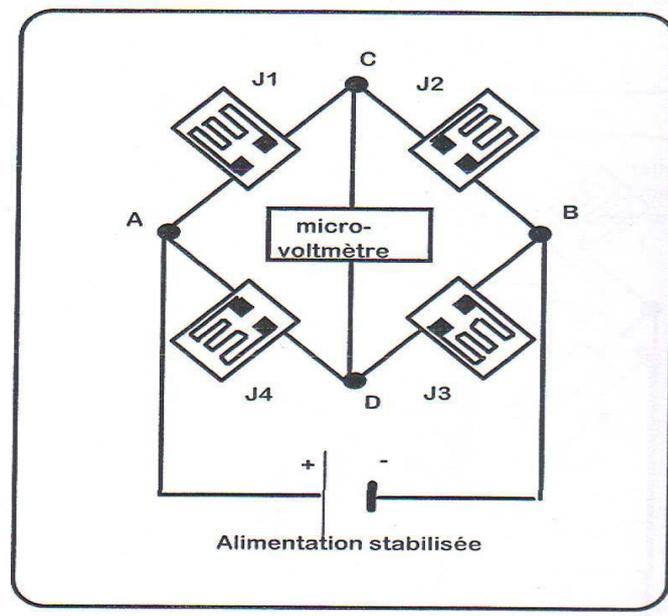


Figure II. 24. Montage en pont complet

## THEORIE DES POUTRES

### III. 1. Théorie des poutres d'Euler-Bernoulli

### III. 2. Introduction

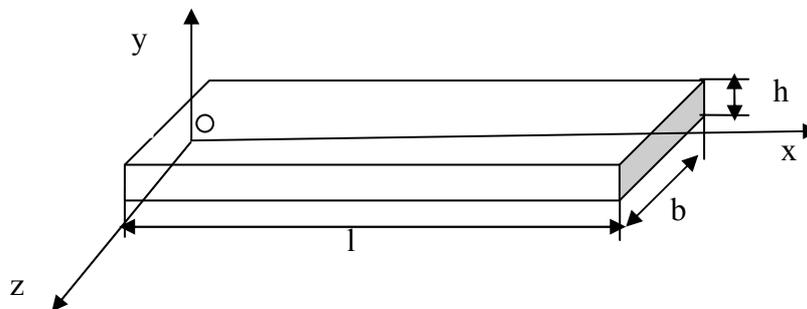
La théorie des poutres, ou théorie d'Euler-Bernoulli, est un modèle de base utilisé dans le domaine de la résistance des matériaux. La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard de Vinci l'aurait précédé. De Vinci avait supposé que la déformation variait de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, le coefficient de proportionnalité étant la courbure, mais il ne pu pas finaliser ses calculs car il ne connaissait pas la loi de Hooke. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte. Ce sont Leonhard Euler et Jacques Bernoulli qui émirent la première théorie utile vers 1750, alors que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent, écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire [18].

### III. 3. Principes de modélisation

On définit la poutre par un solide engendré par des surfaces, appelées (sections droites), telles que :

- Les centres de gravité des sections forment une courbe continue et dérivable, appelée (courbe moyenne); son rayon de courbure est grand devant sa longueur :
- Les sections sont perpendiculaires à la courbe moyenne; elles varient de manière continue et lente,
- La dimension des sections droites est petite devant la longueur de la courbe moyenne,
- Le matériau est homogène et isotrope.

### III. 4. Poutre de section droite (figure III.1)



**Figure III. 1. Une poutre droite**

L'axe  $ox$  est la ligne moyenne de la poutre.

III. 4. 1. Equation de mouvement lors des vibrations libres de flexion

La théorie des poutres est une application de la théorie de l'élasticité isotrope [19] . Pour mener les calculs de résistance des matériaux, on considère les hypothèses suivantes :

- Au cours de la déformation, les sections droites restent perpendiculaires à la courbe moyenne,
- Les sections droites planes restent droites et planes après déformation selon Navier-Bernoulli; l'influence de l'effort tranchant est négligée,
- L'influence de l'inertie de rotation des sections est négligeable,
- L'amortissement est négligeable.

III. 4. 2. Déplacement

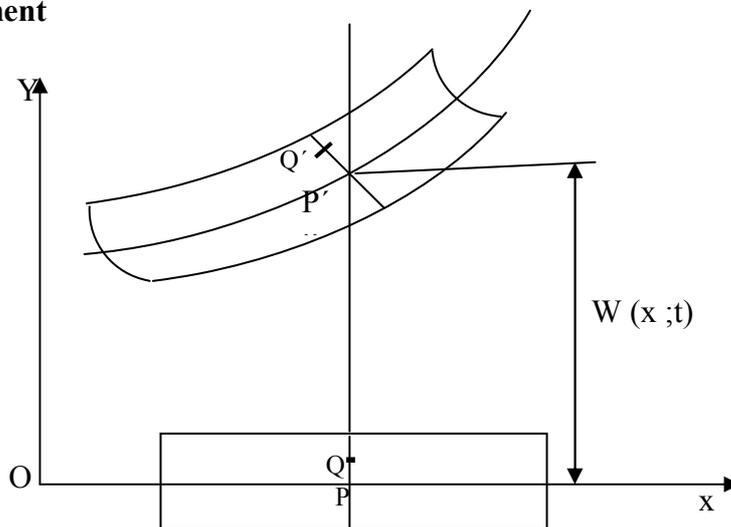


Figure III. 2. Une poutre après déformation

Les coordonnées des points P et Q (figure III. 2) avant et après déformation sont [19] :

$$\vec{op} \begin{vmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad ; \quad \vec{oQ} \begin{vmatrix} x \\ y \\ 0 \end{vmatrix}$$

Après déformation :

$$\vec{op'} \begin{vmatrix} x \\ 0 \\ w \end{vmatrix} \quad ; \quad \vec{oQ'} \begin{vmatrix} x+u \\ y \\ 0 \end{vmatrix}$$

Selon l'hypothèse d'Euler-Bernoulli :

$$u = -y \frac{\partial \omega}{\partial x} \quad (\text{III-1})$$

L'équation de déformation :

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_{xx} = -y \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad (\text{III-2})$$

Suivant la loi de Hooke simplifiée :

$$\sigma_{xx} = E \cdot \epsilon_{xx}$$

$$\sigma_{xx} = -y \cdot E \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad (\text{III-3})$$

On a le moment fléchissant :

$$M_z = \int_{-h/2}^{h/2} -y \cdot \sigma_{xx} b dy$$

On Remplace l'équation de contrainte dans l'équation du moment on trouve :

$$M_z = E \frac{b \cdot h^3}{12} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \text{ avec } I = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$M_z = EI \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad (\text{III-4})$$

### III. 4. 3. L'équation du mouvement

On a l'équation d'équilibre :

$$\begin{cases} \frac{\partial M_z}{\partial x} + T_y = 0 \\ \frac{\partial T_y}{\partial x} + P_y = 0 \end{cases} \quad (\text{III-5})$$

Le terme d'inertie de rotation est négliger dans les hypothèses, et l'inertie de translation et définie par

$$P_y = -\rho.S \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}$$

On élimine  $T_y$  dans la relation (III-4) on obtient :

$$E.I \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \rho.S \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 0 \tag{III-6}$$

On cherche des solutions de la forme :

$$\omega(x,t) = w(x) e^{i.\Omega.t}$$

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} = e^{i.\Omega.t} \frac{d^4 w(x)}{dx^4}$$

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial t^2} = -\Omega^2 . e^{i.\Omega.t} w(x)$$

On remplace ces dérivés dans l'équation (III-5) on trouve :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \Omega^2 \frac{\rho.S}{E.I} W = 0$$

Où encore, en coordonnées réduites :  $\bar{x} = \frac{x}{l}$  et  $\bar{w} = \frac{w}{l}$

$$\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} - x^4 \bar{w} = 0$$

(III-7)

Avec:  $x^4 = \Omega^2 l^4 \frac{\rho.S}{E.I}$ .

### III. 5. Résolution numérique

#### III. 5. 1. Poutre de section constante

La solution générale de l'équation (III-6) est de la forme :

$$\bar{w}(\bar{x}) = A \sin X \bar{x} + B \operatorname{sh} X \bar{x} + C \cos X \bar{x} + D \operatorname{ch} X \bar{x} \quad (\text{III-8})$$

Pour une poutre complètement libre, les conditions aux limites imposent :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{w}}{d \bar{x}^2}(0) &= \frac{d^3 \bar{w}}{d \bar{x}^3}(0) = 0 \\ \frac{d^3 \bar{w}}{d \bar{x}^3}(l) &= \frac{d^4 \bar{w}}{d \bar{x}^4}(l) = 0 \end{aligned}$$

Le système homogène en A, B, C et D ainsi obtenus présente une solution non triviale si :

$$\cos x \operatorname{ch} x = 1$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{w}}{d \bar{x}^2} &= -A \sin X \bar{x} + B \operatorname{sh} X \bar{x} - C \cos X \bar{x} + D \operatorname{ch} X \bar{x} \\ \frac{d^3 \bar{w}}{d \bar{x}^3} &= -A \cos X \bar{x} + B \operatorname{ch} X \bar{x} + C \sin X \bar{x} + D \operatorname{sh} X \bar{x} \end{aligned}$$

Appliquant les conditions aux limites on trouve des relations entre A, B et entre D, C.

$$\bar{w}(\bar{x}) = A_i \left[ (\sin X_i \bar{x} + \operatorname{sh} X_i \bar{x}) + R_i (\cos X_i \bar{x} + \operatorname{ch} X_i \bar{x}) \right] \quad (\text{III-9})$$

Avec :

$$R_i = \frac{\cos X_i - \operatorname{ch} X_i}{\sin X_i + \operatorname{sh} X_i}$$

Ce qui permet de calculer la suite des fréquences propres :

$$\begin{aligned} X_1 &= 4.7300 \\ X_2 &= 7.8532 \\ X_3 &= 10.9956 \\ X_4 &= 14.1371 \\ X_5 &= 17.2787 \\ &\vdots \\ X_i &= \frac{\pi}{2} + i \pi \quad \text{pour } i \geq 6 \end{aligned}$$

La solution générale est la superposition des différents modes propres.

III. 5. 2. Poutre de section variable par la méthode des matrices de transfert

La poutre est découpée en éléments suffisamment petits pour pouvoir être considérés comme de section constante elle est définie sur la figure III. 3 [20] :

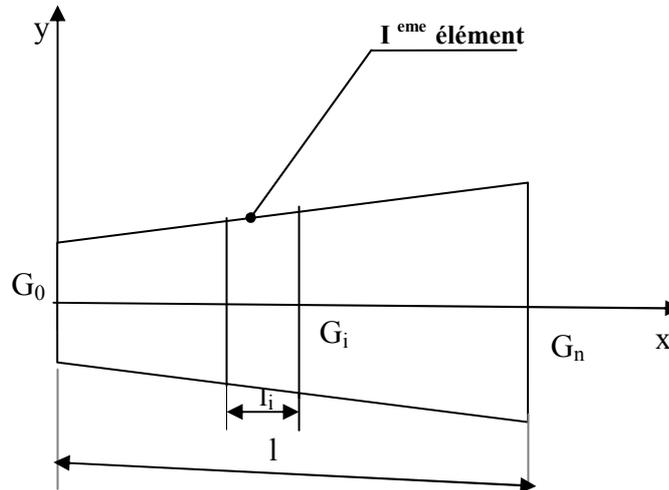


Figure III. 3. Une poutre de section variable.

A la section d'indice i, de section  $S_i$  et d'inertie  $I_i$ , et attaché le secteur d'état  $V_i$ .

$$V_i = \begin{vmatrix} T_i \\ M_i \\ \vartheta_i \\ \mu_i \end{vmatrix}$$

Dont les composantes sont respectivement : l'effort tranchant; le moment fléchissant, la rotation et le déplacement...La matrice de transfert  $A_i$  du  $i^{eme}$  élément relie les vecteurs d'état  $V_{i-1}$  et  $V_i$ .

$$V_i = A_i \cdot V_{i-1}$$

L'expression de  $A_i$  se détermine facilement sachant que l'élément de poutre est supposé de section constante :

$$A_i = \begin{vmatrix} e_1 & -\lambda_i e_4 & -\lambda_i EI_i e_3 & \lambda_i EI_i e_2 \\ e_2 & e_1 & EI_i e_0 & \lambda_i EI_i e_3 \\ e_3/EI_i & e_2/EI_i & e_1 & \lambda_i e_4 \\ -e_4/EI_i & -e_3/EI_i & -e_2 & e_1 \end{vmatrix} \tag{III-10}$$

Sachant que :

$$\begin{aligned}
 e_0 &= \beta_i / 2 (Sh \beta_i l_i - Sin \beta_i l_i) \\
 e_1 &= 1/2 (Ch \beta_i l_i + Cos \beta_i l_i) \\
 e_2 &= 1/2 \cdot \beta_i (Sh \beta_i l_i + Sin \beta_i l_i) \\
 e_3 &= 1/2 \beta_i^2 (Ch \beta_i l_i - Cos \beta_i l_i) \\
 e_4 &= 1/2 \beta_i^3 (Sh \beta_i l_i - Sin \beta_i l_i) \\
 \lambda_i &= -\beta_i^4 = -\Omega^2 \rho S_i / E I_i
 \end{aligned}
 \tag{III-11}$$

La matrice de transfert A de la poutre relie V<sub>0</sub> a V<sub>n</sub>.

$$V_n = A V_0$$

Avec :

$$A = \prod_{i=n}^i A_i .$$

Ainsi, pour les conditions aux limites complètement libres, on obtient le système :

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_i \\ u_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_i \\ u_i \end{vmatrix}
 \tag{III-12}$$

Ce système présente une solution non finale si :

$$A_{13} . A_{24} - A_{23} . A_{14} = 0$$

Cette condition permet de déterminer numériquement la fréquence.

### III. 6. Théorie des poutres de Levinson ; prise en compte de l'effort tranchant et de l'inertie de rotation

#### III. 6. 1. Introduction

Différentes théories peuvent être employées pour modéliser l'influence de l'effort tranchant. La plus connue est certainement celle de Timoshenko [19] mais elle ne permet pas de vérifier les conditions aux limites ( $\sigma_{xy} = 0$ ) sur les faces inférieures et supérieures de la poutre. Nous exposerons la théorie de Levinson [21].

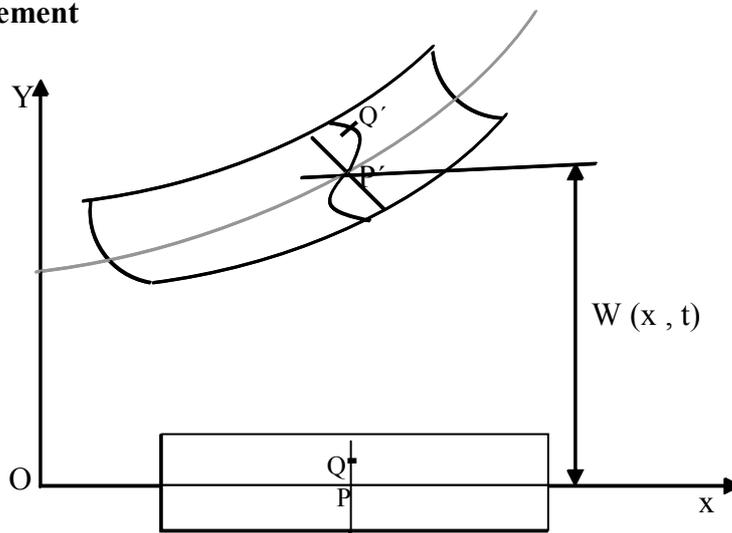
**III. 6. 2. Equation de mouvement lors de vibrations libres de flexion**

**III. 6. 2. 1. Hypothèses**

Les hypothèses sont les suivantes :

- Poutre droite de dimension transversale constante et petite devant la dimension longitudinale,
- Hypothèse de Levinson,
- Matériau homogène, élastique et isotrope,
- Amortissement négligeable.

**III. 6. 2. 2. Déplacement**



**Figure III. 4. Une poutre après déformation**

Les coordonnées des points P et Q (figure III. 4) avant et après déformation sont :

$$\vec{op} \begin{vmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad ; \quad \vec{0Q} \begin{vmatrix} x \\ y \\ 0 \end{vmatrix}$$

Après déformation:

$$\vec{op} \begin{vmatrix} x \\ 0 \\ W \end{vmatrix} \quad ; \quad \vec{0Q} \begin{vmatrix} x + u \\ y \\ 0 \end{vmatrix}$$

Selon l'hypothèse de Levinson, on admet :

$$u = y \psi(x, t) + y^3 \phi(x, t) \quad (\text{III-13})$$

De sorte que les déformations sont :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = y \frac{\partial \Psi}{\partial x} + y^3 \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \Psi + 3 \cdot y^2 \phi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (\text{III-14})$$

Les conditions aux limites ( $\sigma_{xy} = 0$ ) sur les faces inférieure et supérieure imposent :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xy} \left( x, \pm \frac{h}{2} \right) &= 0 \\ \text{soit : } \phi &= -\frac{4}{3 \cdot h^2} \left( \Psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Suivant la loi de Hooke simplifiée :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= E \varepsilon_{xx} = E_y \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{4y^2}{3 \cdot h^2} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) \right) \\ \sigma_{xy} &= 2 \cdot G \cdot \varepsilon_{xy} = G \cdot \left[ \Psi - \frac{4y^2}{h^2} \left( \Psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (\text{III-15})$$

Soit pour le moment fléchissant et l'effort tranchant :

$$\begin{cases} M_z = \int_{-h/2}^{h/2} -y \cdot \sigma_{xx} \cdot b \cdot dy = \frac{EI}{5} \times \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \\ T_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} \cdot b \cdot dy = \frac{2 \cdot G \cdot S}{3} \times \left( \Psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (\text{III-16})$$

### III. 6. 2. 3. Equation du mouvement

Les équations d'équilibre s'écrivent en tenant compte du terme d'inertie de rotation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial x} + T_y + m_z &= 0 \\ \frac{\partial T_y}{\partial x} + p_y &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III-17})$$

Sachant que :

$$\begin{cases} m_z = \int_{-h/2}^{h/2} \rho y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} b dy = \frac{\rho I}{5} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( 4\Psi - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ p_y = -\rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases} \quad (\text{III-18})$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{EI}{5} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{2GS}{3} \left( \Psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\rho I}{5} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( 4\Psi - \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{2GS}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}$$

On élimine  $\Psi$  des deux relations, on obtient l'équation du mouvement :

$$E.I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left( \rho .I + \frac{6}{5} \rho \frac{E.I}{G} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{6}{5} \rho^2 \frac{I}{G} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \rho .S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{III-19})$$

Soit, si on cherche des solutions de la forme :

$$\omega(x,t) = w(x)e^{i\Omega t}$$

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \Omega^2 \left( \frac{\rho}{E} + \frac{6}{5} \frac{\rho}{G} \right) \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{6}{5} \Omega^4 \frac{\rho^2}{E.G} w - \Omega^2 \frac{\rho.S}{E.I} w = 0$$

Ou encore, en coordonnées réduites :

$$\frac{d^4 \bar{w}}{dx^4} + x^4 \left( \frac{1}{\lambda^2} + \frac{6}{5} \frac{E}{\lambda^2 G} \right) \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} - \left( x^4 - \frac{6}{5} \frac{E}{\lambda^4 G} x^8 \right) \bar{w} = 0 \quad (\text{III-20})$$

$$x^4 = \Omega^2 l^4 \frac{\rho S}{E I}$$

Avec :

$$\lambda = \frac{l}{\sqrt{\frac{I}{S}}} = \sqrt{12} \frac{l}{h}$$

On peut remarquer que l'équation (IV-8) est identique à l'équation du mouvement et de Timoshenko [21] avec et pour coefficient de cisaillement  $\kappa = \frac{5}{6}$ . L'intérêt du modèle de Levinson [18] est que les hypothèses sont clairement exposées et en particulier les conditions aux limites sur les faces supérieure et inférieure sont satisfaites.

### III. 6. 3. Résolution numérique

#### III. 6. 3. 1. Poutre de section constante [19]

La solution générale de l'équation (IV-8) est de la forme :

$$\bar{w}(\bar{x}) = A \sin \kappa_1 \bar{x} + B \operatorname{sh} \kappa_2 \bar{x} + C \cos \kappa_1 \bar{x} + D \operatorname{ch} \kappa_2 \bar{x} \quad (\text{III-21})$$

Pour une poutre complètement libre, on note que la suite des fréquences propres est solution du système :

$\det A = 0$ , Avec :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \kappa_1 & 0 & \kappa_2 \\ \bar{\kappa}_1^2 \cos \kappa_1 & \bar{\kappa}_1^2 \sin \kappa_1 & \bar{\kappa}_2 \operatorname{ch} \kappa_2 & \bar{\kappa}_2^2 \operatorname{sh} \kappa_2 \\ \sin \kappa_1 / \kappa_1 & -\cos \kappa_1 / \kappa_1 & \operatorname{sh} \kappa_2 / \kappa_2 & \operatorname{ch} \kappa_2 / \kappa_2 \end{vmatrix} \quad (\text{III-22})$$

$$\begin{cases} \kappa_1 = X^4 p + \sqrt{X^8 q^2 + X^4} \\ \kappa_2 = -X^4 p + \sqrt{X^8 q^2 + X^4} \end{cases}, \quad \begin{cases} \kappa_1' = X^4 q + \sqrt{X^8 q^2 + X^4} \\ \kappa_2' = -X^4 q + \sqrt{X^8 q^2 + X^4} \end{cases}, \quad \begin{cases} p = \frac{1}{2 \lambda^2} \left( 1 + \frac{6 E}{5 G} \right) \\ q = \frac{1}{2 \lambda^2} \left( 1 - \frac{6 E}{5 G} \right) \end{cases}$$

Sachant que :

$$X^4 = \Omega^2 l^4 \frac{\rho S}{E I}$$

III. 6. 3. 2. Poutre de section variable ; méthode des matrices de transfert

La méthode est parfaitement identique à celle développée précédemment, seule l'expression de la matrice de transfert élémentaire change:

$$A_i = \begin{pmatrix} e_1 + \zeta_i e_3 & -\lambda_i e_4 & -\lambda_i EI_i e_3 & \lambda_i EI_i (e_2 + \zeta_i e_4) \\ e_2 & e_1 - \mathfrak{S}_i e_3 & EI_i (e_0 - \mathfrak{S}_i e_2) & \lambda_i EI_i e_3 \\ \frac{e_3}{EI_i} & \frac{(e_2 - \mathfrak{S}_i e_4)}{EI_i} & e_1 - \mathfrak{S}_i e_3 & \lambda_i e_4 \\ -\frac{e_4}{EI_i} & -\frac{e_3}{EI_i} & -e_2 & e_1 + \zeta_i e_3 \\ + \frac{(e_2 + \zeta_i e_4)}{\kappa G S_i} & & & \end{pmatrix} \quad (III-23)$$

Sachant que :

$$\begin{cases} e_0 = \frac{1}{g_i} (a_i^3 C_i - b_i^3 D_i) \\ e_1 = \frac{1}{g_i} (a_i^2 A_i - b_i^2 \beta_i) \\ e_2 = \frac{1}{g_i} (a_i C_i - b_i D_i) \\ e_3 = \frac{1}{g_i} (A_i - \beta_i) \\ e_4 = \frac{1}{g_i} \left( \frac{C_i}{a_i} - \frac{D_i}{b_i} \right) \end{cases}, \quad \begin{cases} \zeta_i = \Omega^2 \frac{\rho}{E} \\ \mathfrak{S}_i = -\frac{\rho}{\kappa G} \\ a_i = \sqrt{\beta_i^4 + \frac{1}{4} (\zeta_i + \mathfrak{S}_i)^2} - \frac{1}{2} (\zeta_i - \mathfrak{S}_i) \\ b_i = \sqrt{\beta_i^4 + \frac{1}{4} (\zeta_i + \mathfrak{S}_i)^2} + \frac{1}{2} (\zeta_i - \mathfrak{S}_i) \\ \lambda_i = -\beta_i^2 = -\Omega^2 \frac{\rho_i S_i}{EI_i} = -\frac{X^4}{e_i^4} \end{cases}, \quad \begin{cases} g_i = a_i^2 + b_i^2 \\ A_i = cha_i l_i \\ C_i = sha_i l_i \\ \beta_i = \cos b_i l_i \\ D_i = \sin b_i l_i \end{cases}$$

## CALCUL NUMERIQUE ET ANALYSE COMPARATIVE

### IV. 1. Introduction

Ce chapitre est basé pour faire la comparaison entre :

- Le module d'Young calculé par la théorie des poutres Euler-Bernoulli avec le module d'Young calculé par la théorie des poutres de Timosheo [21] par le calcul de l'erreur :

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E_{po}^t - E_{po}^b}{E_{po}^t} \quad (IV-1)$$

### IV. 2. Comparaison entre théorie des poutres d'Euler-Bernoulli et Timoshenko

D'après la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli les fréquences propres sont données par la relation suivante :

$$f_i^{eb} = \frac{X_i^{2eb}}{2.\pi.\ell^2} \sqrt{\frac{E^b h^2}{12.\rho}} \Rightarrow E_{po}^{eb} \quad (IV-2)$$

Où les  $X_i$  sont :

$$\begin{aligned} X_1 &= 4.730 \\ X_2 &= 7.853 \\ X_3 &= 10.996 \\ X_4 &= 14.137 \\ X_5 &= 17.2787 \end{aligned}$$

On s'est intéressé aux cinq premiers modes de flexion.

Le spectre des fréquences propres, calculé par la théorie d'Euler-Bernoulli est entré comme donnée dans les calculs du module de Young par la théorie des poutres de Timoshenko.

Il nous permet de retrouver pour chaque fréquence propre la valeur de  $E_{po}^t$ . Le calcul de ces fréquences libres est effectué en utilisant la méthode des éléments finis, et en se basant sur un code de calcul MEF (ANSYS).

Les tableaux 5 à 7 représentent les résultats des fréquences propres des trois matériaux utilisés, calculés par ANSYS. On utilise les propriétés de chaque matériau pour le calcul d'erreurs et des fréquences.

- Tungstène

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{l}{h} \text{ varie de } 30 \text{ à } 300 \\ \nu = 0.28, \rho = 19253 \text{ [kg/m}^2\text{]} \\ \text{mode (5 modes), } E = 410 \cdot 10^9 \text{ [Pa]} \end{array} \right.$$

Tableau 5.

$\lambda$	$f_1$ [Hz] pour mode1	$f_1$ [Hz] pour mode2	$f_1$ [Hz] pour mode3	$f_1$ [Hz] pour mode4	$f_1$ [Hz] pour mode5
30	1.0057	530.78	979.67	1483.8	2066.9
50	1.0057	318.47	587.80	890.30	1240.2
70	1.0057	227.43	419.89	635.97	885.89
90	1.0057	176.96	326.62	494.71	689.12
110	1.0057	144.37	266.47	403.60	562.21
130	1.0057	122.08	225.33	341.28	475.40
150	1.0057	106.16	195.93	296.77	413.39
170	1.0057	93.667	172.88	261.85	364.75
190	1.0057	83.810	154.69	234.30	326.37
200	1.0057	79.617	146.95	222.58	310.04
250	1.0057	63.694	117.56	178.06	248.03
300	1.0057	53.078	97.967	148.38	206.69

- Acier

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{l}{h} \text{ varie de } 30 \text{ à } 300 \\ \nu = 0.3, \rho = 7800 \text{ [kg/m}^2\text{]} \\ \text{mode (5 modes), } E = 2000 \cdot 10^7 \text{ [Pa]} \end{array} \right.$$

Tableau 6.

$\lambda$	$f_1$ [Hz] pour mode1	$f_1$ [Hz] pour mode2	$f_1$ [Hz] pour mode3	$f_1$ [Hz] pour mode4	$f_1$ [Hz] pour mode5
30	0.58284. E 10 <sup>-4</sup>	0.11673. E 10 <sup>-3</sup>	0.1095. E 10 <sup>-3</sup>	0.16315. E 10 <sup>-3</sup>	0.22552. E 10 <sup>-3</sup>
50	0.10950	34.071	64.039	97.892	135.13
70	0.10950	24.975	45.735	69.911	96.637
90	0.10950	34.971	64.039	97.892	135.31
110	0.10950	15.853	29.031	44.378	61.343
130	0.10950	34.971	64.039	97.892	135.31
150	0.10950	11.657	21.346	32.631	45.105
170	0.10950	10.285	18.835	25.792	39.798
190	0.10950	9.2031	16.853	25.762	35.610
200	0.10950	8.7426	16.010	24.473	33.829
250	0.10950	6.9941	12.808	19.578	27.063
300	0.10950	5.8284	10.673	16.315	22.427

**- Plomb**

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{l}{h} \text{ varie de } 30 \text{ à } 300 \\ \nu = 0.4, \rho = 11341 \text{ [kg/m}^2\text{]} \\ \text{mode (5 modes), } E = 17.10^9 \text{ [Pa]} \end{array} \right.$$

Tableau 7.

$\lambda$	$f_1$ [Hz] pour mode1	$f_1$ [Hz] pour mode2	$f_1$ [Hz] pour mode3	$f_1$ [Hz] pour mode4	$f_1$ [Hz] pour mode5
30	0.25513	141.52	249.40	399.24	513.00
50	0.25513	84.910	149.64	239.54	318.60
70	0.25513	69.654	106.89	171.11	227.59
90	0.25513	47.167	83.125	133.07	176.98
110	0.25513	38.492	67.837	108.59	114.43
130	0.25513	32.549	57.362	91.825	122.13
150	0.25513	28.303	49.880	79.848	106.20
170	0.25513	24.973	44.011	70.454	93.705
190	0.25513	22.345	39.380	63.040	83.845
200	0.25513	21.227	37.410	59.886	79.650
250	0.25513	16.982	29.928	47.909	63.720
300	0.25513	14.152	24.940	39.924	53.100

Les résultats des fréquences propres sont utilisés pour calculer les  $X'_i$  grâce aux formules suivantes :

$$X_i^t = \sqrt{\frac{2 \pi \ell^2 f_i^t}{\sqrt{\frac{E h^2}{12 \rho}}}} \quad (IV-3).$$

D'où on a :

$$E_{po}^{eb} = \frac{4 \pi^2 f_i^2 \ell^4 12 \rho}{X_i^{4eb} h^2}$$

$$E_{po}^t = \frac{4 \pi^2 f_i^2 \ell^4 12 \rho}{X_i^{4t} h^2}$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E_{po}^t - E_{po}^{eb}}{E_{po}^t} = 1 - \frac{E_{po}^{eb}}{E_{po}^t}$$

$$\frac{\Delta E}{E} = 1 - \frac{X^{eb.4}}{X^{T.4}}$$

On utilise la relation suivante pour tracer les courbes correspondantes (Voire annexe II) :

$$\frac{\Delta E}{E} = 1 - \frac{X^{eb.4}}{X^{T.4}} \quad (IV-4)$$

**VI. 3. Influence de l'élanement sur l'erreur relative**

Les figures VI. 1-18, montrent l'évolution en fonction du rapport d'élanement (l/h) de l'erreur relative  $\Delta E/E$  des cinq premiers modes. Ces modes sont déterminés sur la base de la réponse vibratoire d'un élément poutre (libre-libre) en tungstène ou en acier ou en plomb. Une comparaison est faite entre les deux méthodes E (Bernoulli)-E (Timoshenko)

- Les résultats du tungstène ( $\nu = 0.28$ )

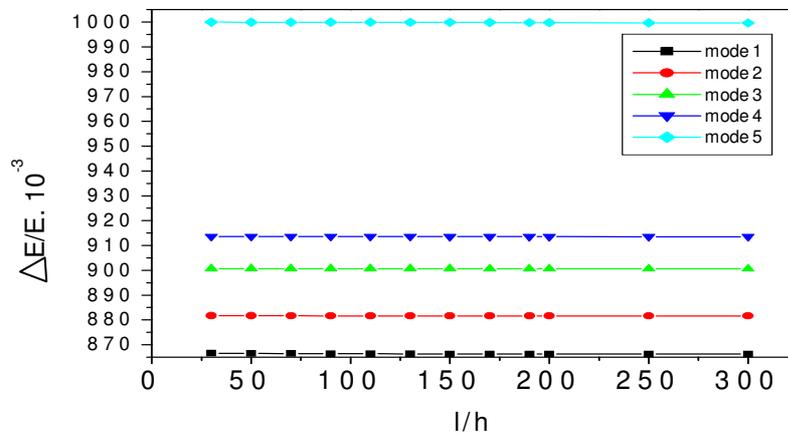


Figure IV. 1. Evolution de  $(\Delta E/E)$  en fonction du rapport (l/h) des 5 modes

La figure IV.1 montre la variation de l'erreur relative avec l'élancement. Les courbes représentatives de l'erreur ont une allure identique, la variation est insignifiante quelle que soit la valeur de l'élancement. Les courbes sont situées l'une sur l'autre, la plus haute correspond à la plus grande fréquence. La courbe inférieure correspond à l'évolution du mode fondamentale par rapport aux différents facteurs d'élancement. Au fur et à mesure de la progression vers les modes supérieures les courbes d'erreurs viennent se superposer dans un ordre respectivement croissant. Cette constatation est consistante car les modes supérieurs font intervenir de plus en plus la présence d'onde qui active la sensibilité à l'effort tranchant qui à son tour augmente le rapport d'erreur. A cause de l'effet d'échelle l'évolution de toutes les courbes pour les différents modes paraît suivre une tendance relativement constante. Afin de contourner cet inconvénient, les courbes sont reprises dans les figures IV 2-6 de façon individuelle, pour mieux cerner les détails de l'analyse comparative.

Comparaison E (Bernoulli)-E (Timoshenko)

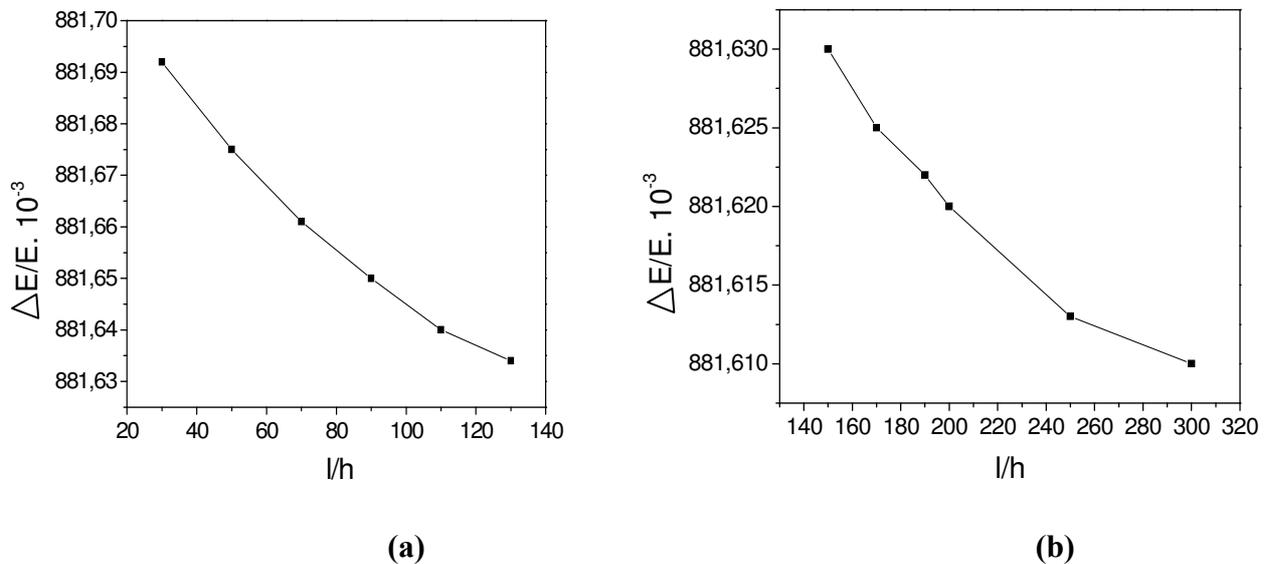
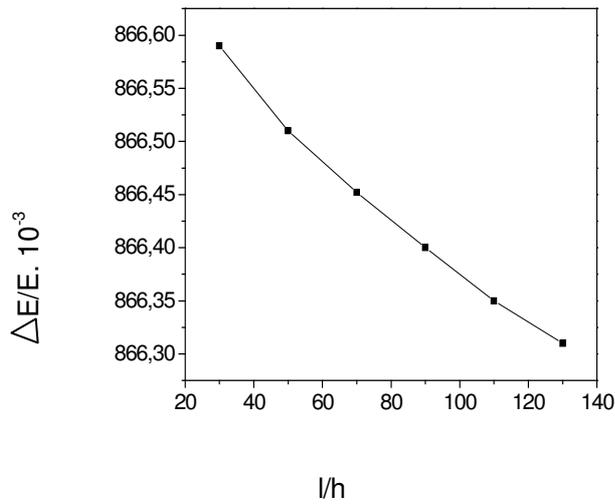
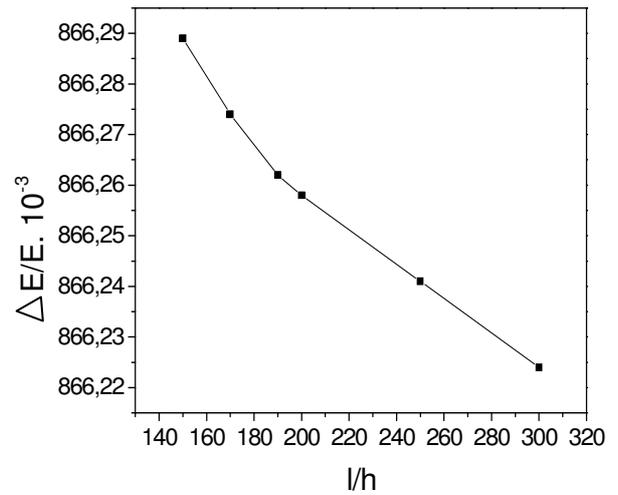


Figure IV. 2. Les courbes  $(\Delta E/E) = f(l/h)$  pour le mode 1, (a) pour les poutres fortement courtes et courtes, (b) pour les poutres élancées, fortement élancées.

Comparaison E (Bernoulli)-E (Timoshenko)



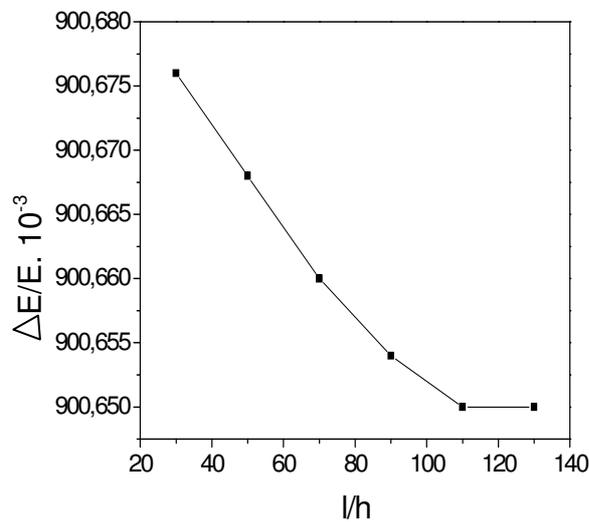
(a)



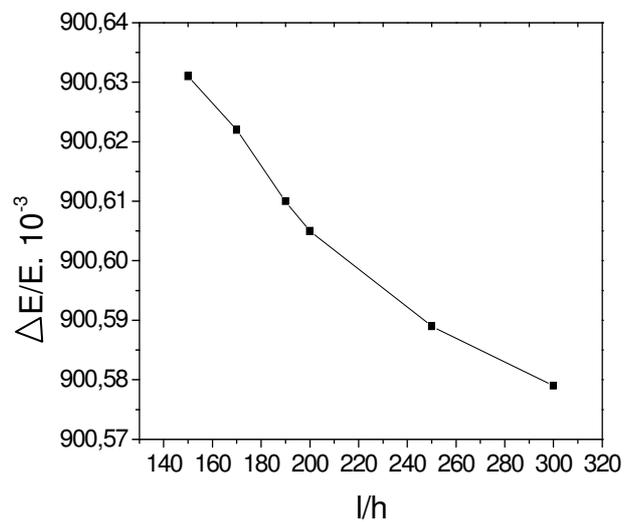
(b)

Figure IV. 3. Les courbes  $(\Delta E/E) = f(l/h)$  pour mode 2, (a) pour les poutres fortement courtes et courtes, (b) pour les poutres élancées, fortement élancées.

Comparaison E (Bernoulli)-E (Timoshenko)



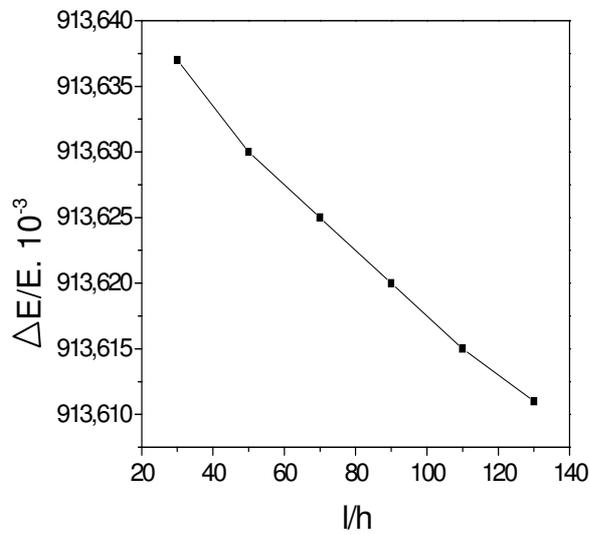
(a)



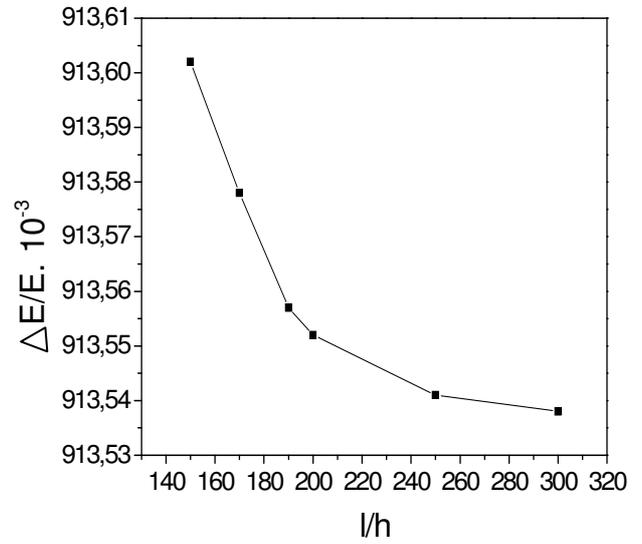
(b)

Figure IV. 4. Les courbes  $(\Delta E/E) = f(l/h)$  pour mode 3, (a) pour les poutres fortement courtes et courtes, (b) pour les poutres élancées, fortement élancées.

Comparaison E (Bernoulli)-E (Timoshenko)



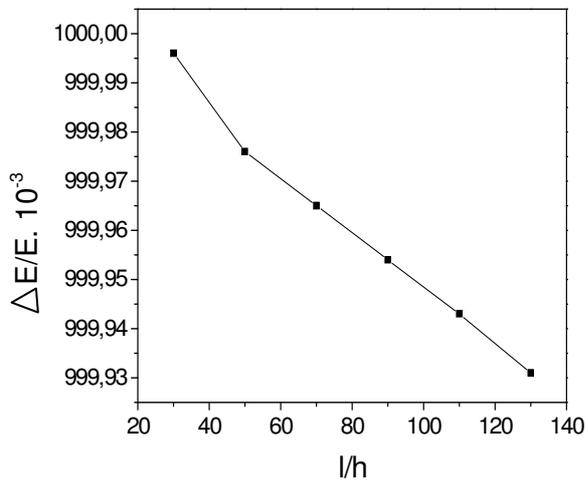
(a)



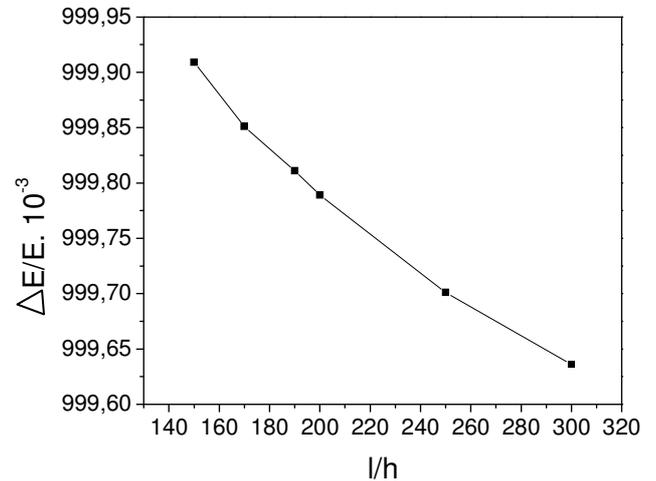
(b)

Figure IV. 5. Les courbes  $(\Delta E/E) = f(l/h)$  pour mode 4, (a) pour les poutres fortement courtes et courtes, (b) pour les poutres élancées, fortement élancées.

Comparaison E (Bernoulli)-E (Timoshenko)



(a)



(b)

Figure IV. 6. Les courbes  $(\Delta E/E) = f(l/h)$  pour mode 5, (a) pour les poutres fortement courtes et courtes, (b) pour les poutres élancées, fortement élancées.

Les figures IV. 2-6 montrent que pour les cinq premiers modes, l'évolution des courbes d'erreurs ( $\Delta E/E$ ), en fonction du rapport d'élanement ( $l/h$ ) déterminées sur la base de la réponse vibratoire d'un élément poutre (libre-libre) fait en matériaux (Tungstène) caractérisé par son coefficient de poisson ( $\nu = 0.28$ ). Toutes les catégories de poutres subissent simultanément deux hypothèses notamment celle de Bernoulli et de Timoshenko. La première tient compte de l'effet de flexion seulement, d'autre part l'hypothèse de Timoshenko qui en plus suppose la présence de l'effet de cisaillement et de l'effet de l'inertie rotatoire. La tendance générale est décroissante pour toutes les catégories de poutres. Ce qui signifie d'une part que les écarts d'erreurs sont relativement importants pour les faibles élanements caractérisant les poutres fortement courtes, courtes, et faiblement élanées graphe (Fig. IV. 2a-6a). D'autre part, les écarts diminuent sensiblement pour la catégorie des poutres élanées, et fortement élanées (Fig. IV 2b-6b). On peut constater aussi que malgré la différence des écarts, la dispersion reste dans les limites de bonne tolérance pour l'ensemble des rapports d'élanement (Erreur  $\leq 10\%$ ). L'hypothèse de Bernoulli est satisfaisante pour le domaine des poutres élanées et fortement élanées, mais pour la catégorie des poutres courtes, il faut tenir compte de l'hypothèse Timoshenko. Cependant, on peut admettre l'hypothèse Bernoulli pour les poutres faiblement élanées et courtes pour les calculs de première approximation et de pré dimensionnement ou d'expertise.

#### - Les résultats de l'acier ( $\nu = 0.3$ )

Comparaison E (Bernoulli)-E (Timoshenko)

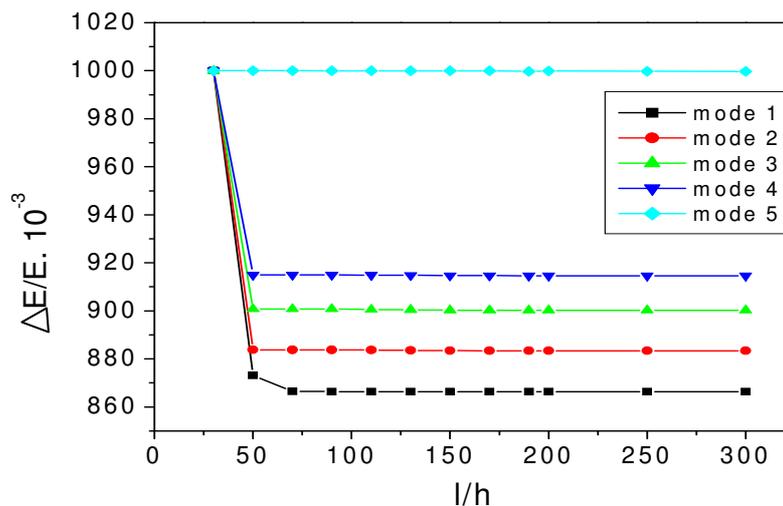


Figure IV. 7. Evolution de ( $\Delta E/E$ ), en fonction du rapport ( $l/h$ ) des 5 modes.

Les courbes des erreurs sont regroupées dans la figure IV.7, en vue de leurs confrontations relatives. La courbe inférieure correspond à l'évolution du mode fondamentale par rapport aux différents facteurs d'élançement. L'enveloppe supérieure qui correspond au cinquième mode se démarque fortement par rapport aux autres courbes. D'autre part, on observe un pic d'erreur commun à toutes les courbes d'erreurs pour un rapport d'élançement ( $l/h = 30$ ). Ceci traduit un comportement rigide dominé essentiellement par l'effet de cisaillement qui donne un grand écart d'erreur. D'autre part, à partir du rapport d'élançement ( $l/h \geq 70$ ) la tendance pour l'évolution des courbes d'erreurs reste constante. Les écarts d'erreurs sont stabilisés pour tous les niveaux modaux. Comme précédemment, on observe aussi, qu'au fur et à mesure de la progression vers les modes supérieures les courbes d'erreurs viennent se superposer dans un ordre respectivement croissant. Cette constatation est consistante car les modes supérieurs font intervenir de plus en plus la présence d'onde qui active la sensibilité à l'effort tranchant qui à son tour augmente le rapport d'erreur. A cause de l'effet d'échelle l'évolution de toutes les courbes, pour les différents modes paraît suivre une tendance relativement constante. Afin d'apprécier l'évolution des faibles écarts, les courbes sont reprises (voire figures IV. 8-12) de façon individuelle, pour mieux cerner les détails de l'analyse comparative. On peut aussi dire que vue, la faible différence des écarts d'erreurs on peut considérer que l'hypothèse Bernoulli présente des réponses dans les limites de bonne tolérance.

Comparaison E (Bernoulli)-E (Timoshenko)

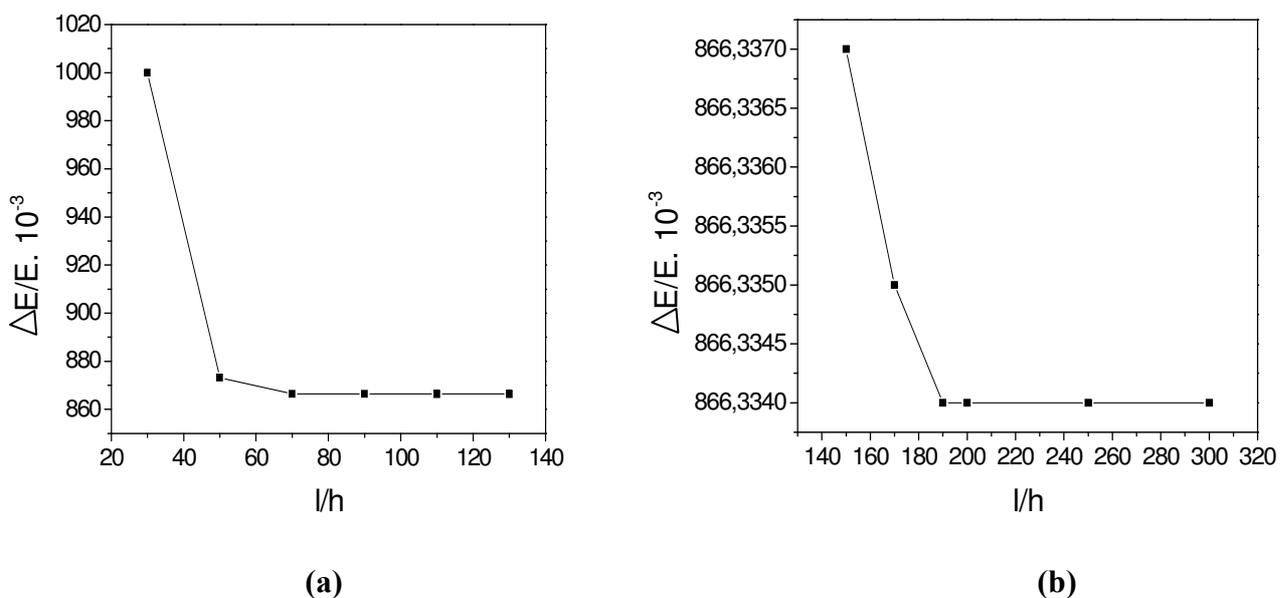
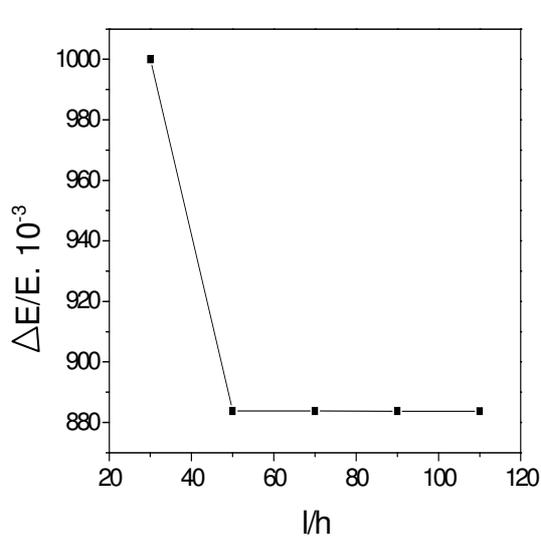
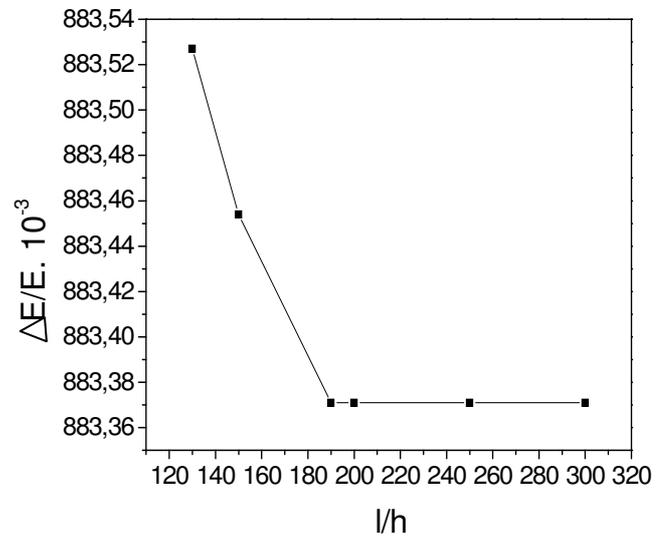


Figure IV. 8. Les courbes  $(\Delta E/E) = f(l/h)$  pour mode 1, (a) pour les poutres fortement courtes et courtes, (b) pour les poutres élancées, fortement élancées

Comparaison E (Bernoulli)-E (Timoshenko)



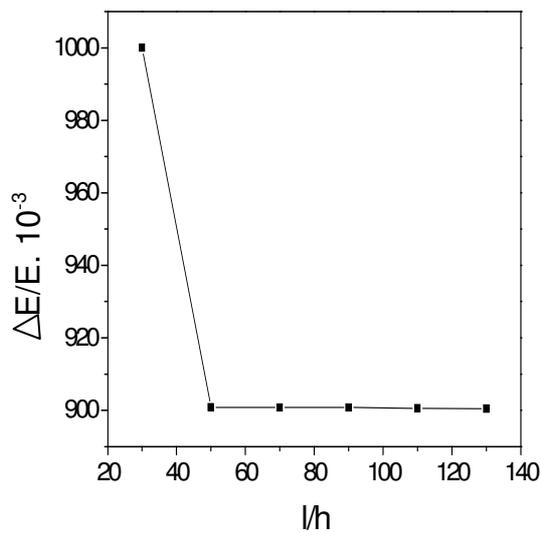
(a)



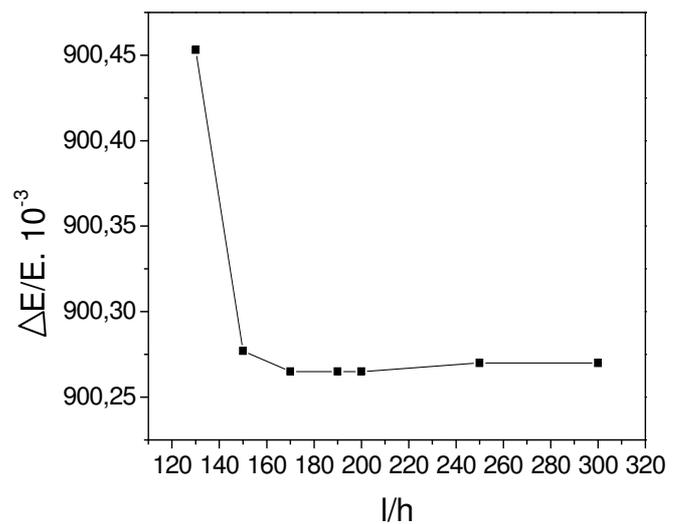
(b)

Figure IV. 9. Les courbes  $(\Delta E/E) = f(l/h)$  pour mode 2, (a) pour les poutres fortement courtes et courtes, (b) pour les poutres élancées, fortement élancées.

Comparaison E (Bernoulli)-E (Timoshenko)



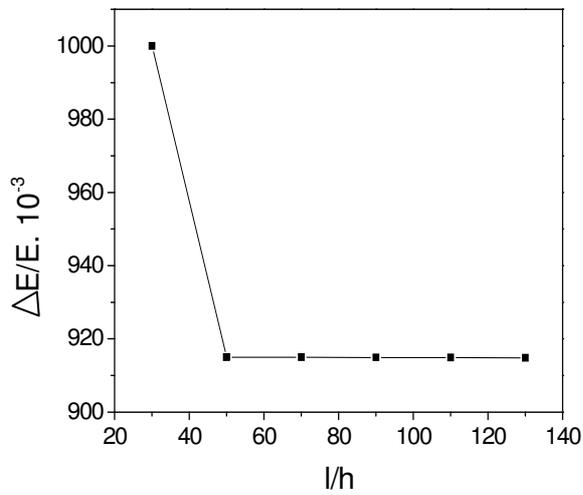
(a)



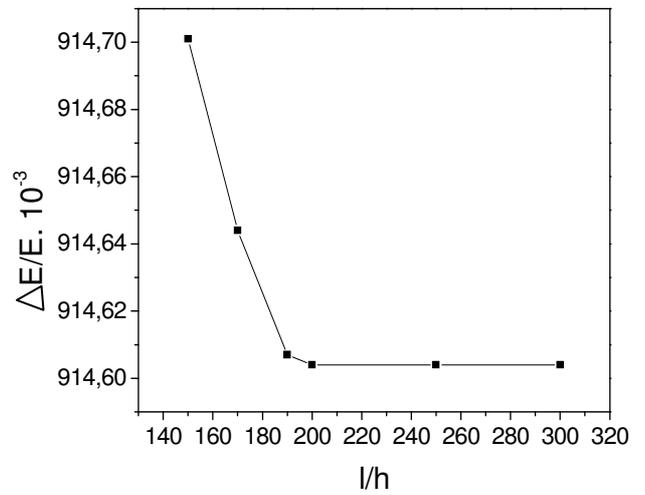
(b)

Figure IV. 10. Les courbes  $(\Delta E/E) = f(l/h)$  pour mode 3, (a) pour les poutres fortement courtes et courtes, (b) pour les poutres élancées, fortement élancées.

Comparaison E (Bernoulli)-E (Timoshenko)



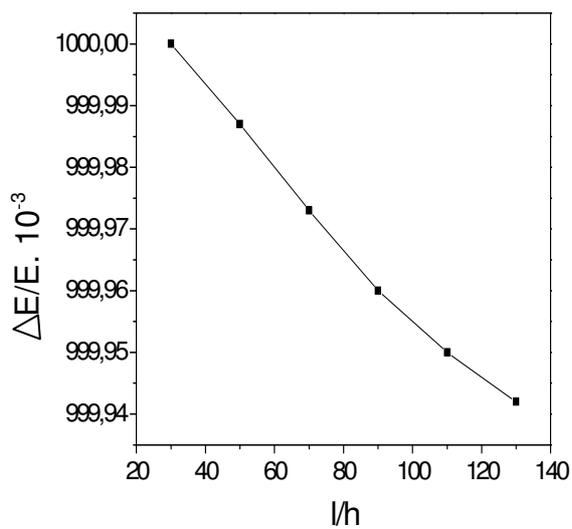
(a)



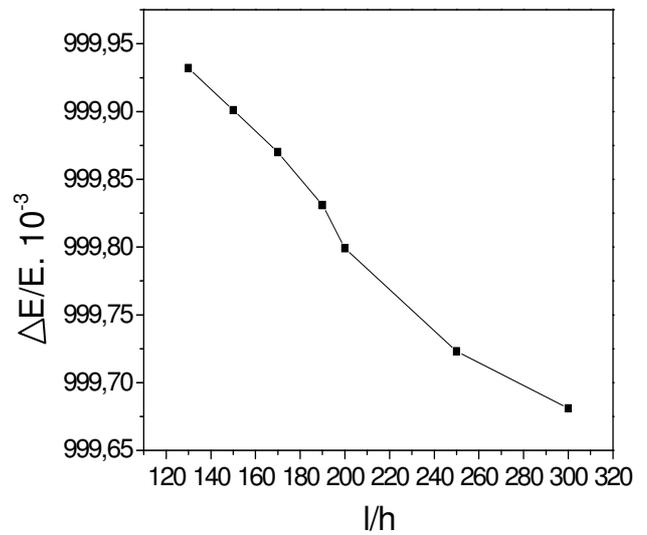
(b)

Figure IV. 11. Les courbes  $(\Delta E/E) = f(l/h)$  pour mode 4, (a) pour les poutres fortement courtes et courtes, (b) pour les poutres élancées, fortement élancées.

Comparaison E (Bernoulli)-E (Timoshenko)



(a)



(b)

Figure IV. 12. Les courbes  $(\Delta E/E) = f(l/h)$  pour mode 5, (a) pour les poutres fortement courtes et courtes, (b) pour les poutres élancées, fortement élancées.

Les figures 8-12 montrent pour les cinq premiers modes, l'évolution des courbes d'erreurs ( $\Delta E/E$ ), en fonction du rapport d'élanement ( $l/h$ ) déterminées sur la base de la réponse vibratoire d'un élément poutre (libre-libre) fait en matériaux (Acier) caractérisé par son coefficient de poisson ( $\nu=0.3$ ). Toutes les catégories de poutres subissent simultanément deux hypothèses notamment celle de Bernoulli et de Timoshenko. La première tient compte de l'effet de flexion seulement, d'autre part l'hypothèse de Timoshenko qui en plus suppose la présence de l'effet de cisaillement et de l'effet de l'inertie rotatoire. La tendance générale est décroissante pour toutes les catégories de poutres. Ce qui signifie d'une part que les écarts d'erreurs sont relativement importants pour les faibles élanements caractérisant les poutres fortement courtes, courtes, et faiblement élanées graphé (Fig. IV.8a-12a). D'autre part les écarts diminuent modestement pour la catégorie des poutres élanées, et fortement élanées figures (Fig. 8b-12b). On peut constater qu'à partir du seuil d'élanement ( $l/h=50$ ) l'erreur est stabilisée constante. Ceci traduit la faible influence de l'effort tranchant est de la dominance de l'hypothèse Bernoulli qui est satisfaisante aussi bien pour le domaine des poutres faiblement élanées et fortement élanées.

- Les résultats du plomb ( $\nu = 0.4$ )

Comparaison E (Bernoulli)-E (Timoshenko)

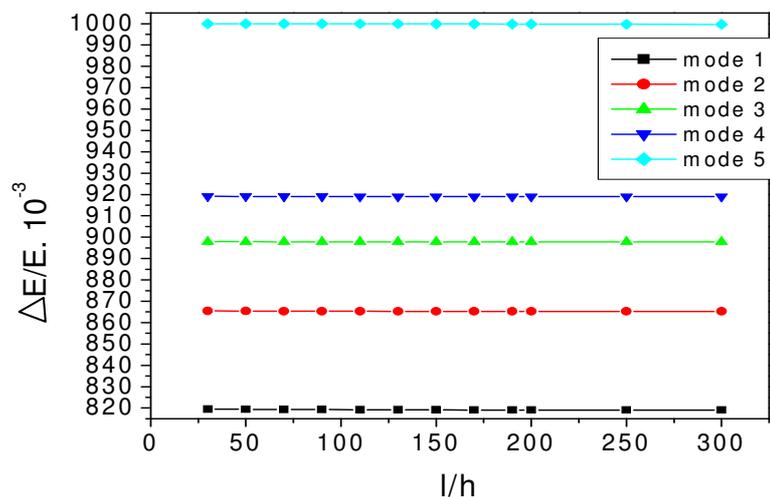


Figure IV. 13. Evolution de ( $\Delta E/E$ ), en fonction du rapport ( $l/h$ ) des 5 modes.

Les courbes de la figure IV. 13 donnent la variation selon les modes propres. La courbe inférieure est une évolution du mode fondamentale par rapport aux différents facteurs d'élanement. Au fur et à mesure de la progression vers les modes supérieures les courbes d'erreurs viennent se superposer dans un ordre respectivement croissant. Cette constatation est primordiale puisque les modes supérieurs font intervenir de plus en plus la présence d'onde qui active la sensibilité à l'effort tranchant, d'où l'augmentation du rapport d'erreur. Vraisemblablement, l'effet d'échelle est à l'origine de ce comportement. Afin de pallier cet inconvénient, les courbes sont reprises (figure IV. 14-18) de façon à mieux distinguer les différences.

#### Comparaison E (Bernoulli)-E (Timoshenko)

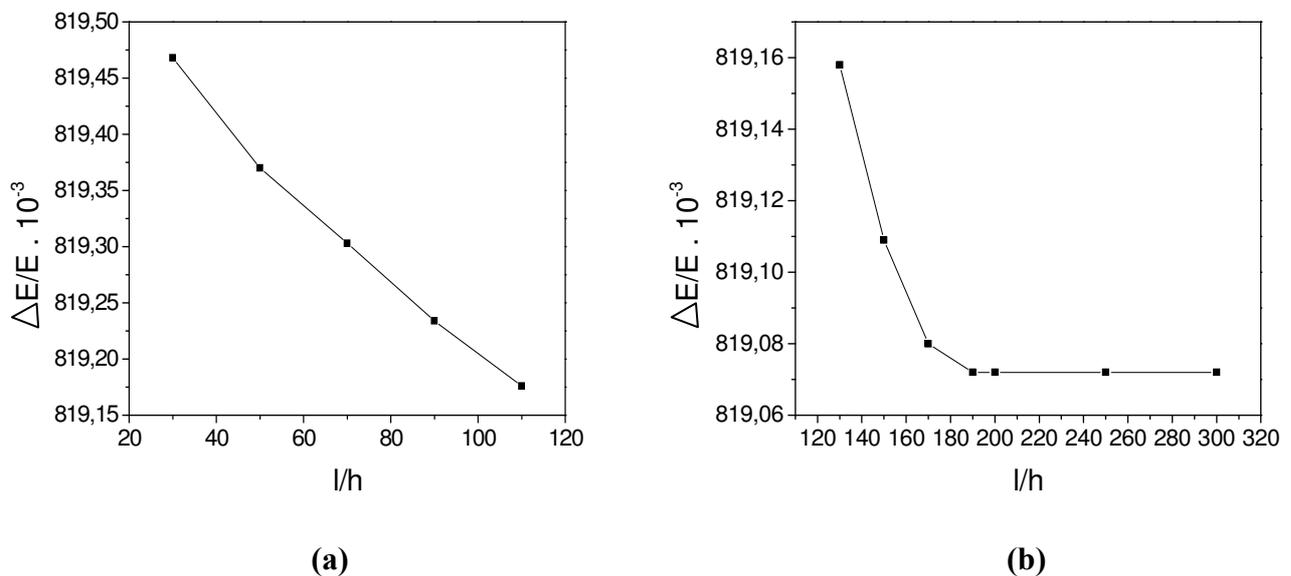
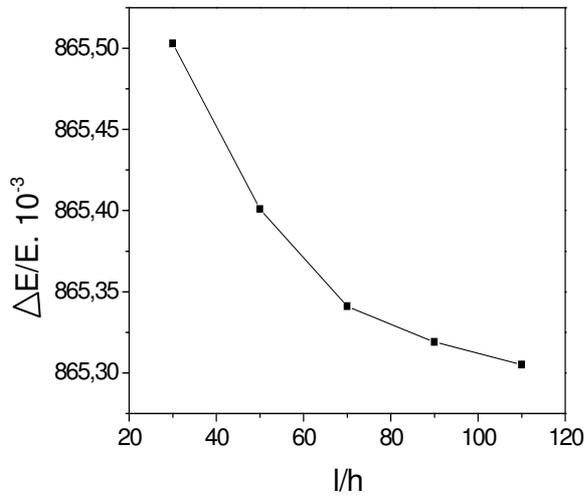
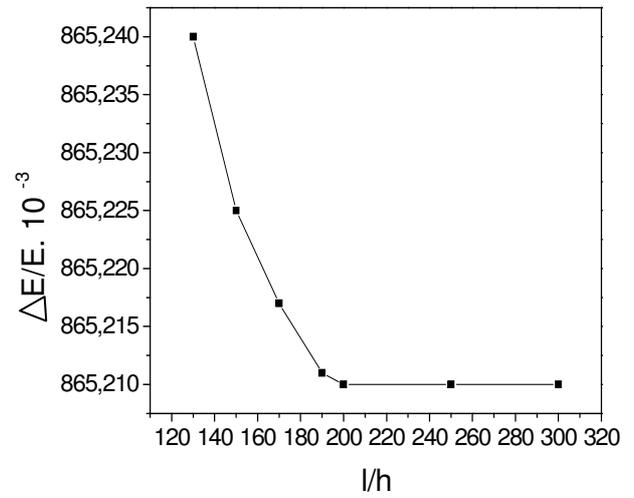


Figure IV. 14. Les courbes  $(\Delta E/E) = f(l/h)$  pour mode 1, (a) pour les poutres fortement courtes et courtes, (b) pour les poutres élancées, fortement élancées.

Comparaison E (Bernoulli)-E (Timoshenko)



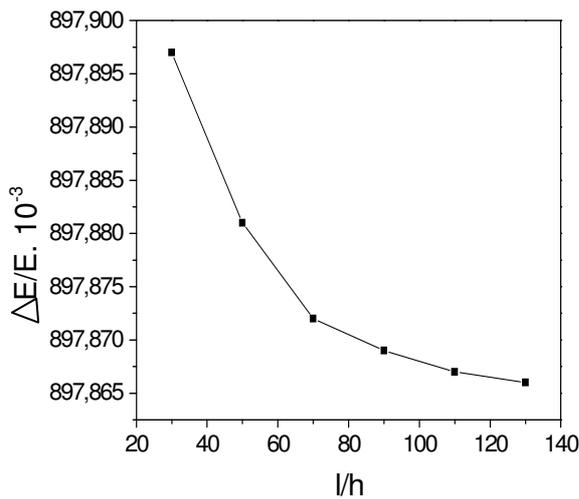
(a)



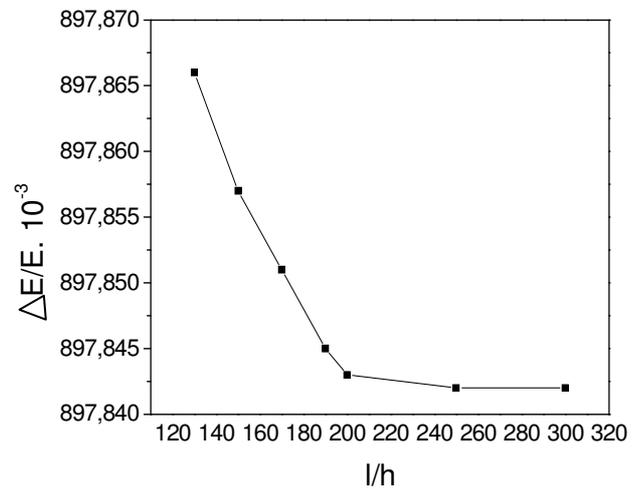
(b)

Figure IV. 15. Les courbes  $(\Delta E/E) = f(l/h)$  pour mode 2, (a) pour les poutres fortement courtes et courtes, (b) pour les poutres élancées, fortement élancées.

Comparaison E (Bernoulli)-E (Timoshenko)



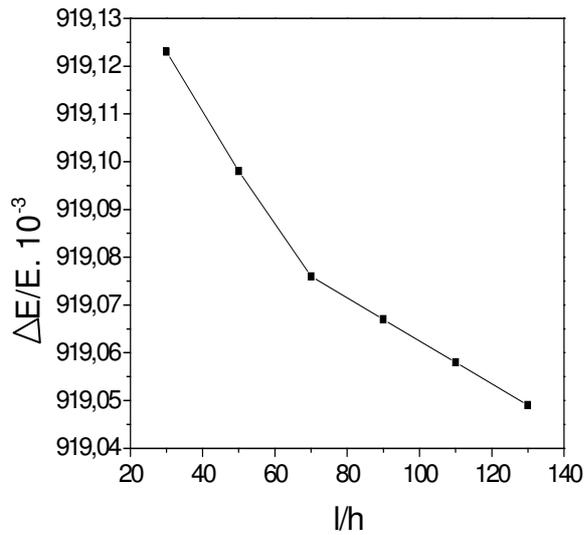
(a)



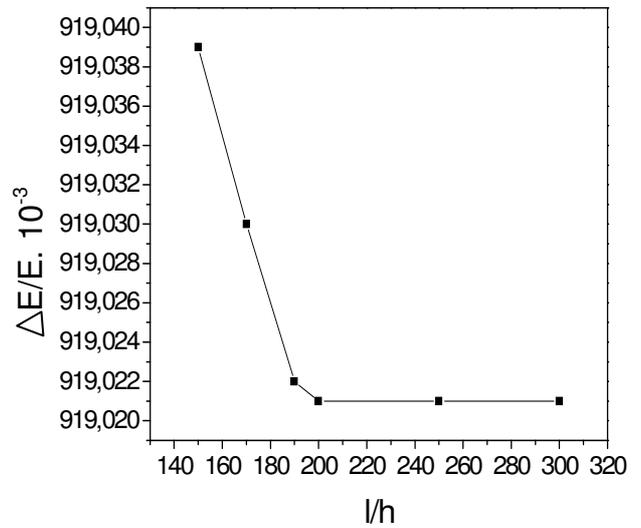
(b)

Figure IV. 16. Les courbes  $(\Delta E/E) = f(l/h)$  pour mode 3, (a) pour les poutres fortement courtes et courtes, (b) pour les poutres élancées, fortement élancées.

Comparaison E (Bernoulli)-E (Timoshenko)



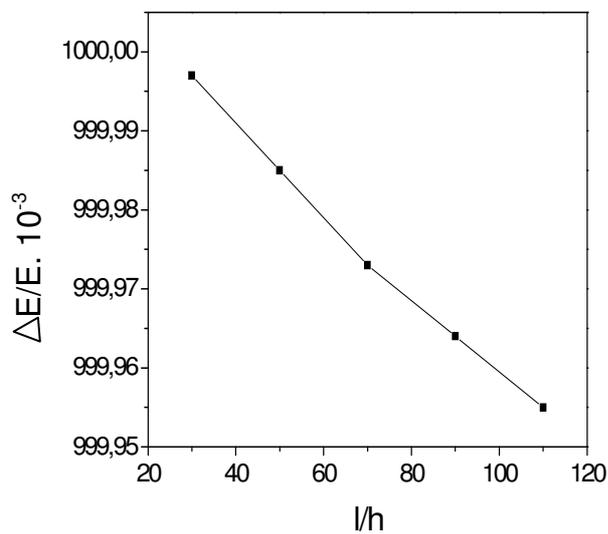
(a)



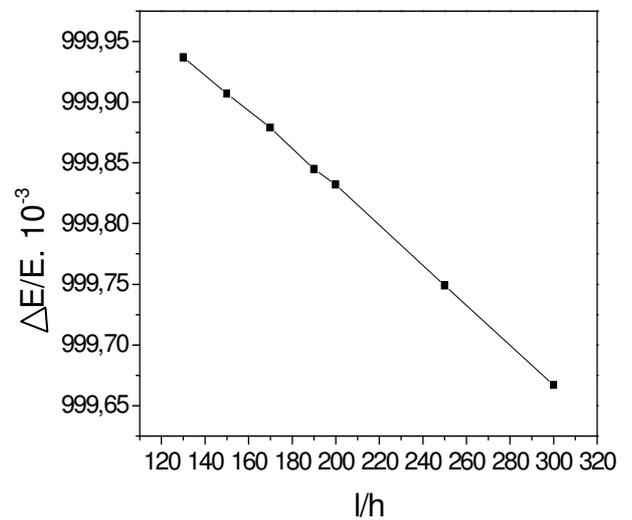
(b)

Figure IV. 17. Les courbes  $(\Delta E/E) = f(l/h)$  pour mode 4, (a) pour les poutres fortement courtes et courtes, (b) pour les poutres élancées, fortement élancées.

Comparaison E (Bernoulli)-E (Timoshenko)



(a)



(b)

Figure IV. 18. Les courbes  $(\Delta E/E) = f(l/h)$  pour mode 5, (a) pour les poutres fortement courtes et courtes, (b) pour les poutres élancées, fortement élancées.

Les courbes des figures IV. 14-18 illustrent les cinq premiers modes. On constate que l'évolution ( $\Delta E/E$ ), selon l'élanement ( $l/h$ ) déterminés à partir des excitations d'un élément poutre (libre-libre) en plomb. Toutes les catégories de poutres subissent simultanément deux hypothèses notamment celle de Bernoulli et de Timoshenko. La première tient compte de l'effet de flexion seulement, d'autre part l'hypothèse de Timoshenko qui, en plus suppose la présence de l'effet de cisaillement et de l'effet de l'inertie rotatoire. La tendance générale est décroissante pour toutes les catégories de poutres. Ce qui signifie d'une part que les écarts d'erreurs sont relativement importants pour les faibles élanements caractérisant les poutres fortement courtes, courtes, et faiblement élanées (Fig. IV. 14a-18a). D'autre part, les écarts diminuent d'une manière significative pour les types de poutres élanées, et fortement élanées (Fig. IV. 14-18b). On peut dès lors constater que malgré la différence des écarts, la dispersion reste dans les limites raisonnables et ce, pour l'ensemble des rapports d'élanement (Erreur  $\leq 10\%$ ). L'hypothèse de Bernoulli est satisfaisante pour le domaine des poutres élanées et fortement élanées, mais pour la catégorie des poutres courtes, il faut considérer l'hypothèse Timoshenko. Cependant, on peut admettre l'hypothèse de Bernoulli pour les poutres faiblement élanées et courtes pour effectuer des calculs de première approximation et de pré dimensionnement.

## **CONCLUSION GENERALE**

L'intérêt de cette étude est de proposer un calcul du module de Young dynamique, des éléments poutres homogènes et isotropes. En faisant une étude comparative entre la théorie d'Euler-Bernoulli et celle de Timoshenko sur des poutres en flexion pour les trois matériaux caractérisés par leurs coefficient de poisson. Des hypothèses ont été considérées afin de pouvoir garantir des réponses valables et dans les limites de bonne tolérance pour les catégories de poutres (fortement courtes, courtes, élancées et fortement élancées) qui se distinguent par leurs facteurs d'élancement ( $l/h$ ).

Il ressort de nos résultats que :

- L'hypothèse de Bernoulli est satisfaisante pour le domaine des poutres élancées et fortement élancées,
- Pour la catégorie des poutres fortement courtes, il faut appliquer la théorie de Timoshenko,
- On peut admettre l'hypothèse d'Euler-Bernoulli pour les poutres fortement élancées,
- L'effet du coefficient de poisson des différents matériaux n'a pas d'influence sur la variation du module d'Young pour les matériaux isotropes, cette constatation ne peut être généralisée pour l'hypothèse des matériaux composite. Il est intéressant d'envisager ce cas dans le cadre de nos futures recommandations.

Enfin, on encourage l'usage de la méthode d'investigation des fréquences propres, à cause de sa simplicité qui n'affecte pas la qualité des réponses ; et on souhaite élargir le champ d'investigation à l'étude expérimentale afin de confirmer et de mettre en évidence les résultats obtenus.

**REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

- [1] J. GOULE, J. PIERRE BOUTTIN, Aide mémoire résistance des matériaux, Dunod 2009.
- [2] Jean. Garrigues @ esm2.imt-mrs.fr
- [3] H. ZAIDI, A. BOUCHOUCHA, Formulation analytique des moments principaux d'inertie d'un matériau homogène isotrope, Université de Poitiers, Laboratoire LMS (UMR-6610) SP2MI, (2008).
- [4] [http://fr.wikipedia.org/wiki/Limite\\_d'elasticite](http://fr.wikipedia.org/wiki/Limite_d'elasticite), la licence de documentation libre GNU (GFDL).
- [5] J. LUC LE GOËR, Mesures mécaniques et dimensionnelles, Ingénieur ESL, école technique supérieure du laboratoire.
- [6] D. LINEBOCK, G. PERI, Le petit journal de l'analyse expérimentale des contraintes, Vishay micro mesures 98 BD- BP 51-92242, Malakoff, Cedex- France.
- [7] D. MANSION, La technologie des capteurs de déformation, (Paris)1984.
- [8] J. LUC LE GOËR, J. Avril, Capteurs a jauges extensometrique, publier 1992.
- [9] M. MARK FROCHT, Photo elasticity, <http://www.icgm.fr/squelettes/statique/publications.php>.
- [10] Y. XU, Ferroelectric Materials and Their Applications, North-Holland (Amsterdam) 1991.
- [11] C. GROSSWEILER, C. CAVALLONI, High Sensitivity and Dynamic Ratio, Sensors with a new Piezoelectric Material, SENSOR99 Conference, Nurnberg, 18-20 May 99, vol2, pp 29-33.
- [12] Encyclopédie VISHAY d'analyse des contraintes 1974- <http://www.vishay.com/strain-gages/>.
- [13] J. M. HERBERT, Ferroelectric Transducers and Sensors, Gordon and Breach (New York), 1982.
- [14] D. MANSION, le point sur les capteurs de pression, Les dossiers du Nouvel Automatism (Paris), 1983
- [15] D. BULLETIN, technique pont d'extensométrie, <http://www.deltalab.fr/produit.php?prodId=748>.
- [16] W. AVRIL, Pont de Wheatstone <http://www.techno-science.net/?ongle>.
- [17] R. BALLARINI, The Da Vinci-Euler-Bernoulli Beam Theory, in Mechanical Engineering Magazine Online, 18 Avril 2003.

## **Références bibliographies**

- [18] M. SEON, H. HAYM BENAROYA et W. TIMOTH, Dynamics of Transversely Vibrating Beams; using for Engineering Theories, in Mechanical Engineering Magazine Online, 22 mars 1999.
- [19] TIMOSHENKO, Théorie des vibrations, Librairie Polytechnique – Ch. Béranger 1954.
- [20] WALTER, D. PILKEY, PINYU CHANG, Modern formulas for Static and Dynamics Dunod 1978.
- [21] LEVINSON, Anew rectangular beam theory . J. sound and vibrations (1981) 74, pp81-87.

ANNEXE I

La méthode de matrice de transport est expliquée par les relations de changement de base.

**- définition de la matrice de passage**

$(\vec{E}_i)$  : la base initiale, avec :  $i = 1, 2, 3$ .

$(\vec{E}_j)$  : la base finale, avec :  $j = 1, 2, 3$ .

Les composantes de la matrice de passage de  $(\vec{E}_i)$  à  $(\vec{E}_j)$  sont définies par :

$\alpha_{ij}$  = j<sup>ème</sup> composante du vecteur de base  $\vec{E}_i$ , il vient :

$$\vec{E}_i = \alpha_{ij} \cdot \vec{E}_j$$

Les deux bases étant orthonormées directes, la matrice de passage est orthonormée :

$$\alpha_{ik} \alpha_{ir} = \delta_{kr}$$

$$\alpha_{kj} \alpha_{rj} = \delta_{kr}$$

Où :  $\delta_{kr}$  est le symbole de Kroneker.

Par suite, si  $V_i$  ( $V_i$ ),  $T_i$  ( $T_i$ ) et  $S_{ijkl}$  ( $S_{ijkl}$ ) désignent les composantes de tenseurs d'ordre respectifs 1, 2, et 4 dans la base initiale (finale), il vient :

$$V_i = \alpha_{im} V_m$$

$$T_{ij} = \alpha_{im} \alpha_{jn} T_{mn}$$

$$S_{ijkl} = \alpha_{im} \alpha_{jn} \alpha_{kp} \alpha_{lq} S_{mnpq}$$

Application au passage d'une base a une autre base :

Ce changement des bases est dû par une rotation d'angle  $\theta$ , les composantes de la matrice de passage sont :

$$\alpha_{11} = C \quad \alpha_{12} = S \quad \alpha_{32} = \alpha_{13} = 0 \quad \text{où : } C = \cos \theta.$$

$$\alpha_{21} = -S \quad \alpha_{22} = C \quad \alpha_{33} = 1 \quad S = \sin \theta.$$

Changement de base des composantes (notation matricielles) dans le plan 1,2 des tenseurs déformations, contraintes, rigidités, complaisances dans les tableaux suivants :

**Déformation**

	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$\epsilon_6$
$\bar{\epsilon}_1$	$C^2$	$S^2$	SC
$\bar{\epsilon}_2$	$S^2$	$C^2$	-SC
$\bar{\epsilon}_6$	-2SC	2SC	$C^2 - S^2$

**Contrainte**

	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_6$
$\bar{\sigma}_1$	$C^2$	$S^2$	SC
$\bar{\sigma}_2$	$S^2$	$C^2$	-SC
$\bar{\sigma}_6$	-2SC	2SC	$C^2 - S^2$

**Rigidités / Rigidités planes**

	$C_{11}$ $\bar{O}_{11}$	$C_{22}$ $\bar{O}_{22}$	$C_{12}$ $\bar{O}_{12}$	$C_{66}$ $\bar{O}_{66}$
$\bar{C}_{11}$ $\bar{O}_{11}$	$C^4$	$S^4$	$2S^2C^2$	$4S^2C^2$
$\bar{C}_{22}$ $\bar{O}_{22}$	$S^4$	$C^4$	$2S^2C^2$	$4S^2C^2$
$\bar{C}_{12}$ $\bar{O}_{12}$	$C^2S^2$	$C^2S^2$	$C^4 + S^4$	$-4S^2C^2$
$\bar{C}_{66}$ $\bar{O}_{66}$	$C^2S^2$	$C^2S^2$	$-2S^2C^2$	$(C^2 - S^2)^2$
$\bar{C}_{16}$ $\bar{O}_{16}$	$-C^3S$	$C S^3$	$C^3S - CS^3$	$2(C^3S - CS^3)$
$\bar{C}_{26}$ $\bar{O}_{26}$	$-C S^3$	$C^3S$	$CS^3 - C^3S$	$2(CS^3 - C^3S)$

**Complaisances**

	$S_{11}$	$S_{22}$	$S_{12}$	$S_{66}$
$\bar{S}_{11}$	$C^4$	$S^4$	$2C^2 S^2$	$C^2 S^2$
$\bar{S}_{22}$	$S^4$	$C^4$	$2C^2 S^2$	$C^2 S^2$
$\bar{S}_{12}$	$C^2 S^2$	$C^2 S^2$	$C^4 + S^4$	$-C^2 S^2$
$\bar{S}_{66}$	$4C^2 S^2$	$4C^2 S^2$	$-8C^2 S^2$	$(C^2 - S^2)^2$
$\bar{S}_{16}$	$-2C^3 S$	$2C S^3$	$2(C^3S - CS^3)$	$C^3S - CS^3$
$\bar{S}_{26}$	$2C S^3$	$2C^3 S$	$2(CS^3 - C^3S)$	$CS^3 - C^3S$

**Déformations / Contraintes**

	$\epsilon_5$ $\sigma_5$	$\epsilon_4$ $\sigma_4$	$\epsilon_3$ $\sigma_3$
$\bar{\epsilon}_5$ $\sigma_5$	$C$	$S$	$0$
$\bar{\epsilon}_4$ $\sigma_4$	$-S$	$C$	$0$
$\bar{\epsilon}_3$ $\sigma_3$	$0$	$0$	$1$

Rigidités / Complaisances

	$C_{13}$ $S_{13}$	$C_{32}$ $S_{32}$	$C_{44}$ $S_{44}$	$C_{55}$ $S_{55}$	$C_{33}$ $S_{33}$
$\dot{C}_{13}$ $\bar{S}_{13}$	$C^2$	$S^2$	0	0	0
$\dot{C}_{32}$ $\bar{S}_{32}$	$S^2$	$C^2$	0	0	0
$\dot{C}_{36}$ $\bar{S}_{36}$	$-SC$	$SC$	0	0	0
$\dot{C}_{45}$ $\bar{S}_{45}$	0	0	$SC$	$-SC$	0
$\dot{C}_{44}$ $\bar{S}_{44}$	0	0	$C^2$	$S^2$	0
$\dot{C}_{55}$ $\bar{S}_{55}$	0	0	$S^2$	$C^2$	0
$\dot{C}_{36}$ $\bar{S}_{55}$	0	0	0	0	1

## ANNEXE II

Résultats de l'ANSYS de l'erreur relatifs pour chaque matériau

Pour le tungstène  $\nu = 0.28$

**Programme de calcul**

```

/NOPR ! Suppress printing of UNDO process
/PMACRO! Echo following commands to log
FINISH! Make sure we are at BEGIN level
/CLEAR, NOSTART! Clear model since no SAVE found
! WE SUGGEST YOU REMOVE THIS LINE AND THE FOLLOWING STARTUP LINES
/input, menust, tmp,", 1
/GRA, POWER
/GST, ON
/PLO, INFO, 3
/GRO, CURL, ON
/CPLANE, 1
/REPLOT, RESIZE
WPSTYLE, 0
/REPLOT, RESIZE
/REPLOT, RESIZE
!*
/NOPR
/PMETH, OFF, 0
KEYW, PR_SET, 1
KEYW, PR_STRUC, 1
KEYW, PR_THERM, 0
KEYW, PR_FLUID, 0
KEYW, PR_ELMAG, 0
KEYW, MAGNOD, 0
KEYW, MAGEDG, 0
KEYW, MAGHFE, 0
KEYW, MAGELC, 0
KEYW, PR_MULTI, 0
KEYW, PR_CFD, 0
/GO
!*
!*
/PREP7
!*
ET, 1, SHELL63
!*
R, 1, 10e-3,
RMORE,
RMORE
RMORE,
!*
!*
MPTEMP,
MPTEMP, 1,0
MPDATA, EX, 1,, 410e9

```

MPDATA, PRXY, 1,0.28  
 MPTEMP,  
 MPTEMP, 1, 0  
 MPDATA, DENS, 1, 19253  
 RECTNG, 0,300e-3, 0,100e-3,  
 )/GOP ! Resume printing after UNDO process  
 )! We suggest a save at this point

**- Les résultats de l'erreur relative de E**

$\lambda$	$\frac{\Delta E}{E} \cdot 10^{-3}$ pour mode1	$\frac{\Delta E}{E} \cdot 10^{-3}$ pour mode2	$\frac{\Delta E}{E} \cdot 10^{-3}$ pour mode3	$\frac{\Delta E}{E} \cdot 10^{-3}$ pour mode 4	$\frac{\Delta E}{E} \cdot 10^{-3}$ Pour mode5
30	866.59	881.692	900.676	913.635	999.996
50	866.510	881.675	900.668	913.630	999.976
70	866.452	881.650	900.660	913.625	999.965
90	866.400	881.640	900.654	913.620	999.956
110	866.350	881.634	900.650	913.615	999.951
130	866.310	881.630	900.650	913.615	999.9310
150	866.289	881.630	900.631	913.602	999.909
170	866.278	881.625	900.622	913.578	999.851
190	866.262	881.622	900.610	913.557	999.811
200	866.258	881.620	900.605	913.552	999.789
250	866.241	881.613	900.589	913.541	999.701
300	866.224	881.610	900.579	913.538	999.936

**Pour l'acier  $\nu = 0.3$**

**- Programme de calcul**

```
/NOPR ! Suppress printing of UNDO process
/PMACRO! Echo following commands to log
FINISH! Make sure we are at BEGIN level
/CLEAR, NOSTART! Clear model since no SAVE found
! WE SUGGEST YOU REMOVE THIS LINE AND THE FOLLOWING STARTUP LINES
/input, menust, tmp,", 1
/GRA, POWER
/GST, ON
/PLO, INFO, 3
/GRO, CURL, ON
/CPLANE, 1
/RELOT, RESIZE
WPSTYLE, 0
/RELOT, RESIZE
!*
/NOPR
/PMETH, OFF, 0
KEYW, PR_SET, 1
KEYW, PR_STRUC, 1
KEYW, PR_THERM, 0
KEYW, PR_FLUID, 0
```

```

KEYW, PR_ELMAG, 0
KEYW, MAGNOD, 0
KEYW, MAGEDG, 0
KEYW, MAGHFE, 0
KEYW, MAGELC, 0
KEYW, PR_MULTI, 0
KEYW, PR_CFD, 0
/GO
!*
!*
/PREP7
!*
ET, 1, SHELL63
!*
R, 1, 6e-3,
RMORE,
RMORE
RMORE,
!*
!*
MPTEMP,
MPTEMP, 1, 0
MPDATA, EX, 1, 200e7
MPDATA, PRXY, 1, 0.3
MPTEMP,
MPTEMP, 1, 0
MPDATA, DENS, 1, 7800
RECTNG, 0,300e-3, 0,100e-3,
)/GOP! Resume printing after UNDO process
)! We suggest a save at this point

```

#### - Les résultants de l'erreur relative de E

$\lambda$	$\frac{\Delta E}{E} \cdot 10^{-3}$ pour mode1	$\frac{\Delta E}{E} \cdot 10^{-3}$ pour mode2	$\frac{\Delta E}{E} \cdot 10^{-3}$ pour mode3	$\frac{\Delta E}{E} \cdot 10^{-3}$ pour mode 4	$\frac{\Delta E}{E} \cdot 10^{-3}$ pour mode5
30	1000	1000	1000	1000	1000
50	873.131	883.783	900.825	914.968	999.989
70	873.452	883.752	900.776	914.953	999.973
90	866.375	883.741	900.773	914.923	999.960
110	866.375	883.678	900.567	914.871	999.950
130	866.333	883.527	900.453	914.821	999.942
150	866.338	883.454	900.277	914.701	999.911
170	866.337	883.371	900.265	914.644	999.900
190	866.335	883.371	900.265	914.607	999.682
200	866.334	883.371	900.265	914.604	999.884
250	866.334	881.613	900.270	914.604	999.740
300	866.334	883.371	900.270	914.604	999.641

Pour le plomb  $\nu = 0.4$ **- Programme de calcul**

```

/NOPR ! Suppress printing of UNDO process
/PMACRO! Echo following commands to log
FINISH! Make sure we are at BEGIN level
/CLEAR, NOSTART! Clear model since no SAVE found
! WE SUGGEST YOU REMOVE THIS LINE AND THE FOLLOWING STARTUP LINES
/input, menust, tmp, 1
/GRA, POWER
/GST, ON
/PLO, INFO.3
/GRO, CURL, ON
/CPLANE, 1
/REPLOT, RESIZE
WPSTYLE, 0
!*
/NOPR
/PMETH, OFF, 0
KEYW, PR_SET, 1
KEYW, PR_STRUC, 1
KEYW, PR_THERM, 0
KEYW, PR_FLUID, 0
KEYW, PR_ELMAG, 0
KEYW, MAGNOD, 0
KEYW, MAGEDG, 0
KEYW, MAGHFE, 0
KEYW, MAGELC, 0
KEYW, PR_MULTI, 0
KEYW, PR_CFD, 0
/GO
!*
!*
/PREP7
!*
ET, 1, SHELL63
!*
R, 1, 10e-3,
RMORE,
RMORE
RMORE,
!*
!*
MPTEMP,
MPTEMP, 1,0
MPDATA, EX, 1,17e9
MPDATA, PRXY, 1,0.44
MPTEMP,
MPTEMP, 1,0
MPDATA, DENS, 1,11341
!*

```

MPTEMP,  
 MPTEMP, 1,0  
 MPDE, EX, 1  
 MPDE, PRXY, 1  
 MPDATA, EX, 1,1.7E+010  
 MPDATA, PRXY, 1, 0.4  
 RECTNG, 0,300e-3, 0,100e-3,  
 )/GOP ! Resume printing after UNDO process  
 )! We suggest a save at this point

**- Les résultants de l'erreur relative de E**

$\lambda$	$\frac{\Delta E}{E} \cdot 10^{-3}$ pour mode 1	$\frac{\Delta E}{E} \cdot 10^{-3}$ pour mode 2	$\frac{\Delta E}{E} \cdot 10^{-3}$ pour mode 3	$\frac{\Delta E}{E} \cdot 10^{-3}$ pour mode 4	$\frac{\Delta E}{E} \cdot 10^{-3}$ pour mode 5
30	891.468	865.503	897.897	919.123	999.997
50	819.370	865.401	897.881	919.058	999.985
70	819.303	865.341	897.872	919.076	999.973
90	819.234	865.319	897.869	919.067	999.964
110	819.176	865.305	897.867	919.058	999.955
130	819.158	865.240	897.866	919.049	999.937
150	819.109	865.225	897.857	919.039	999.907
170	819.080	865.217	897.851	919.030	999.879
190	819.072	865.211	897.845	919.022	999.845
200	819.072	865.210	897.843	919.021	999.832
250	819.072	865.210	897.842	919.021	999.749
300	819.072	865.210	897.842	919.021	999.667