

N°.d'ordre: .../.../2010

Série :.../GM/2010



MÉMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de Magister en Génie Mécanique

OPTION:

« Mécanique Appliquée en Engineering »

Intitulé :

CARACTERISATION DU COMPORTEMENT MICROMECHANIQUE D'UN MATERIAU COMPOSITE PAR DIFFERENTES APPROCHES MATHEMATIQUES

Par

saber BENFERDI

JURY:

Président	: Mr. B. NECIB	Prof. Université Mentouri Constantine
Rapporteur	: Mr. F. MILI	Prof. Université Mentouri Constantine
Examineurs	: Mme. Z. LABED	M.C. Université Mentouri Constantine
	: Mr. Y. CHOUIER	M.C. Université Mentouri Constantine

.....2010

Remerciements

Le remerciement infini avant tous est à dieu le plus puissant qui m'a comblé des bienfaits de l'islam et de la Science.

J'exprime mes profonds remerciements à Monsieur F. MILI, Professeur à l'Université de Constantine, encadreur de ce mémoire, pour son aide précieuse, sa confiance, ses encouragements, sa patience et son soutien favorable pour l'aboutissement de ce travail.

Je tiens aussi à adresser, mes vifs remerciements à Monsieur B.NECIB, Professeur à l'Université de Constantine, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance de ce mémoire.

Je désire aussi adresser mes remerciements les plus respectueux à Madame Z. LABED, Maitre conférence à l'université de Constantine, qui m'a fait l'honneur de bien vouloir juger ce travail.

Mes remerciements vont également à Monsieur Y. CHOUIER, Maitre conférence à l'Université de Constantine, d'avoir accepté d'examiner ce mémoire et d'être membre de jury.

Sans oublier de remercier vivement tous les enseignants de l'EDNMC qui ont contribué à la formation, et spécialement le Directeur de l'école Monsieur T.BOUKHAROUBA professeur à l'université des Sciences et de la Technologie « USTHB » de Bab EZZOUAR /Alger. Et Le Directeur De Département de Génie Mécanique de Constantine Monsieur S.BENIASAAD Maitre conférence à l'université de Constantine.

Je remercie également Mr Aggoune Fateh, d'avoir été l'ami dont l'aide quand je me bésouin, ainsi que tous les étudiants de Constantine, Annaba, Alger, Guelma, Batna et Skikda de ma promotion.

Ma reconnaissance va à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.

SABER

Dédicaces

A ma très chère patrie l'Algérie ;

A la mémoire de mon père ;

A celle pour qui je dois toute réussite, à mon adorable mère akila ;

*A mes merveilleuse freres Bilel, Tarek et Bouzid et sans oublier ma seoure
Samiha tout spécialement ma*

Très chère Farid, mon frère Fateh aggoune et mes beaux frères

Yacine et Farid ;

*A mes cousins et cousines, en particulier mon cher ami et tous mes amis
de l'université, Radoane, Youcef, Nadjib, et Abdrahmane et sans oublier la
mémoire de djamil allah yarhmo*

Et partout sur le territoire national pour leur encouragement, affection

Et leur Soutien durant toute ma vie ;

Je dédie cet humble travail à tous les étudiants algériens et spécialement

À ceux des pays du Tiers monde qui malgré leurs conditions de travail

Souvent difficiles, Essayent de s'accrocher au progrès de la technologie.

SABER

Résumé

Cette étude a pour objectif de prévoir le comportement micromécanique du matériau composite à renforcement unidirectionnel verre-E/époxyde. Elle se base sur les caractéristiques élastiques et propriétés mécaniques des constituants et de la disposition du renfort. Cette technique a revêtu plusieurs aspects en fonction de la complexité du phénomène à mettre en évidence. Le composite est analysé dans ce cas comme un matériau homogène ayant un comportement différent de celui de ses constituants. Des modèles sont développés et mis en équations dans les domaines de comportement élastique linéaire en utilisant des approches mathématiques probabilistes. De tels comportements sont comparés à ceux obtenus par plusieurs et différents modèles basés sur le volume élémentaire représentatif et la loi des mélanges issue de la technique d'homogénéisation. La résistance du matériau a été aussi prise en considération pour deux états de sollicitations importants : traction et compression. Des différents modes de déformations ont été considérés à cette échelle microscopique d'étude du comportement mécanique des matériaux composites fibreux.

Abstract

This study has for objective to predict the micromechanical behavior of the E-glass/epoxy composite material with unidirectional reinforcement. It is based on the elastic characteristics and mechanical properties of the components and the provision of the reinforcement. This technique took on several aspects according to the complexity of the phenomenon to be highlighted. The composite is analyzed in this case like a homogeneous material having a behavior different from that of its components. Some models are developed and put in equations in the domains of linear elastic behavior while using probabilistic mathematical approaches. Such behaviors are compared with those obtained by several and various models based on elementary volume representative and the law of the mixtures resulting from the homogenization technique. The resistance of the material was as consideration for two important solicitation states: traction and compression. Various modes of deformations were considered on this microscopic scale of the mechanical behavior study of fibrous composite materials.

الملخص

الهدف من هذه الدراسة هو تتبؤ التصرف الميكانيكي الدقيق للمادة المركبة و المقوية بألياف أحادية الاتجاه زجاج/ايوكسي. ي تعتمد على خصائص المرونة و المقومات الميكانيكية للمكونات و وضعية الألياف. قد أقرت هذه الذ عدة مظاهر حسب درجة التعقيد التي يجب تسليط الضوء . في هذه الحالة، تم تحليل المادة المركب مادة ذات تصرف مختلف ن مكوناتها. طورت بعض النماذج و وضعت في معادلات بمجالات التصرف الخطي المرن مقاربات رياضيي احتمالية. فورنت مثل هذه التصرفات بتلك التي تم الحصول عليها من خلال عدة نماذج وعلى أساس الحجم الابتدائي التمثيلي و قانون الداخالط الناجم عن : المجانسة. قد أخذت أيضا في الحسبان مقاومة المادة خلال التعرض لحالتين من التوتر: عملية الشد و الضغط . أخذت بعين الاعتبار عدة نماذج للتشويهاات السلم المجهري لدراسة التصرف الميكانيكي للمواد المركبة الا .

LISTE DES FIGURES

- Figure 1-1 Schématisation des renforts noyés dans une matrice
- Figure 1-2 principaux matériaux de renforts
- Figure 1-2 différent type de fibre de verre
- Figure 1-4 différent types de fibres de carbone
- Figure 1-5 différents types de fibres de arammide
- Figure 1-6 caractéristique mécaniques des différentes fibres
- Tableau 1-2 Principales différences entre matrices TP et TD
- Figure 1-8 : Matériaux composites dans des structures d'avions
- Figure 1-9: Répartition des matériaux sur le Boeing 787
- Figure 2-1 détermination des caractéristique du matériau composite à partir de celles ses constituants
- Figure 2.2 Milieu hétérogène (a) .et milieu macroscopiquement (b) relies V.E.R
- Figure 2-3 Volume élémentaire représentatif
- Figure 2.3: chargement dans la direction des fibres
- Figure 2-5 : Variation d' E_1 par apport de fraction volumique de fibre V_f
- Figure 2-6 : chargement dans la direction transverse aux fibres
- Figure 2-7 chargement selon le sens des fibres
- Figure 2-8 la variation de ν_{12} à fraction volumique de fibre
- Figure 2-8 le volume élémentaire représentative de chargement de cisaillement
- Figure 3-2 Géométrie de renforcement par des fibres de Hashin et Rosen et modèle cylindrique de composite
- Figure 3-4 V.E.R et Arrangement carré
- Figure 3-5 V.E.R et Arrangement carré et décalé de fibres rondes

Figure 3-6 V.E.R et Arrangement carré et décalé des fibres rectangulaire

Figure 3-7 modèle auto-cohérent cylindrique composite cylindre

Figure 3-7 Schéma arrangements réels de Fibres

Figure 3-8 cas extrêmes du la contiguïté des fibres

Figure 3-9 Arrangement périodique des fibres dans une section transversale d'un pli

Figure 3-10 modele d'assemblage cylindrique de composite utilisé pour la prédiction de module d'élasticité

Figure 3-11 comparaison des calcule de E_2 par Halpin-Tsai (fibre circulaires) contre ceux d'Adams []

Figure 3-12 Comparaison des calcule de G_{12} par Halpin-Tsai (fibre circulaires) et par d'Adams[]

Figure 3-13 Comparaison des calculs de E_2 par Halpin-Tsai et par Foye[]

Figure 3-14 Comparaison des calculs de G_{12} par Halpin-Tsai et par Foye[]

Figure 3-19 Halpin-Tsai calculs (cercles) en fonction de calculs Foye pour G_{12} rectangulaire de la Croix-Fibres section dans un Arrangement Diamond

Figure 3-20 E_2 calcul pour un bore-époxy matériaux composites (Après Halpin et Tsai)

Figure 3-21 modification Halpin-Tsai calculs par Adams et Donner du G_{12} pour les calculs de la circulaire de fibres dans un Square Array (Après Hewitt Malherbe)

Fig.3-15 Modèle de Cox (d'après Hwang et Gibson)

Figure 4-1 les étapes de déformation d'un matériau composite fibreux.

Figure 4-2 courbes contraintes-déformations pour les fibres et la matrice

Figure 4-3 Evolution la résistance à la traction du composite en fonction de la fraction volumique des renforts (d'après Kelly et Davies[])

La figure 4-4 Modèle de rupture à la traction de Rosen

Figure 4-5 le mode d'extensionnelle et le mode de cisaillement de la fibre de flambement

Figure 4-9 Déformation des fibres pendant le mode de cisaillement de flambage

La figure 5-1 différents modèles des arrangements des fibres (a) et le V.E.R simplifié (b).

Figure 5-2. Variation du module transversal E_2 en fonction de la fraction volumique V_f .

Figure 5-3. Variation du module de cisaillement G_{12} en fonction de la fraction volumique V_f

Figure 5-4 Evolution des bornes d'homogénéisation de Paul

Figure 5-5 Evaluation des bornes du module d'Young par différentes approches.

Figure 5-6 Evaluation des bornes du module de cisaillement G_{12} par différentes approches.

Figure 5-7 Cas extrêmes de la contiguïté des fibres

Figure 5-8. Variation des modules E_1 et E_2 suivant les valeurs des facteurs k et C déterminés théoriquement et expérimentalement (D'après Tsai)

Figure 5-9. Variation des coefficients ν_{12} et G_{12} suivant les valeurs des facteurs k et C déterminés théoriquement et expérimentalement (D'après Tsai)

Figure 5-10 Variation de E_2 par rapport à V_f selon l'approche de Foye

Figure 5-11 Variation de G_{12} par rapport à V_f selon l'approche de Foye.

Figure 5-12. Evolution du module de cisaillement G_{12} par les modèles d'Haplin-Tsai et d'Adams et Donner pour un arrangement carré des fibres

Figure 5-13 courbes M/M_m pour diverses ξ

Figure 5-14 variation du module longitudinal E_1 par rapport à V_f

Figure 5-15 variation du coefficient de poisson ν_{12} par rapport à V_f

Figure 5-16 variation du module transversal E_2 par rapport à V_f

Figure 5-17 variation du module de cisaillement par rapport à V_f .

Figure 5-18 courbes contraintes-déformations pour les fibres et la matrice

Figure 5-19 Géométrie d'une éprouvette soumise à une charge de traction longitudinale

Figure 5-20 Courbe contrainte-déformation pour un stratifié sous une charge de traction

Figure 5-21. Modes de défaillance d'un pli unidirectionnel soumis à une charge longitudinale de traction.

Figure 5-22. Evolution de la résistance à la traction du composite en fonction de la fraction volumique des fibres.

Figure 5-23 Résistance à la traction par rapport à la fraction volumique de fibres V_f

Figure 5-24. Résistance à la traction par rapport à la longueur de la fibre

Figure 5-25 Modes de défaillance de pli unidirectionnel soumis à une charge longitudinale de compression

Figure 5-26. Géométrie d'une éprouvette sous compression longitudinale

Figure 5-27 Courbe contrainte-déformation pour un stratifié sous une charge de compression longitudinale

Figure 5-28. Variation de la résistance à la compression par rapport à la fraction volumique des fibres en présentant les modes de défaillance (,extension et cisaillement)

Figure 5-29. Déformation sous charges de compression à microflambage des matériaux composites renforcés par des fibres

Figure 5-30. Résistance à la compression du Bore/époxyde

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1-1 caractéristiques des fibres et renforts.....	6
Tableau 1-2 Principales différences entre matrices TP et TD.....	8
Tableau 1-3 caractéristiques des polyesters insaturés.....	9
Tableau 1-4 caractéristiques de résine Epoxydes.....	9
Tableau 1-5 caractéristiques des résine polyuthannes et polyurées.....	10
Tableau 5-1 Propriétés typiques des fibres.....	92
Tableau 5-2 Propriétés typiques des matrices.....	92
Tableau 5-2 dimension d'échantillon	118

SOMMAIRE

Chapitre 01

Introduction aux matériaux composites

1.	
Introduction.....	19
1.1. Définitions des composites.....	19
1.2. Constituants des matériaux composites.....	20
1.2.1 Renforts	20
1.2.2 Les matrices	25
1.2.2.1. Les résines thermodurcissables.....	26
1.2.2.2. Les matrices thermoplastiques	28
1.2.3. Les charges organiques	29
1.2.3.1. Les charges minérales.....	29
1.2.3.2.. Oxydes et hydrates métalliques	31
1.2.3.3. Le verre.....	32
1.2.3.4. Le carbone	32
1.3. Classification des matériaux composites.....	33
1.3.1 Classification suivant la forme des constiyuants	33
1.3.2 Classification suivant la nature de la matrice	33
1.4 But d'utilisation des matériaux composite	33
1.4.1 Des avantages.....	33
1.4.2. Les inconvénients.....	34
1.5. Applications des matériaux composites.....	36
1.5..1. Industrie aérospatiale	37
1.5.2. Industrie des articles de sport et de loisir	39
1.5.3. Industrie des transports terrestres et maritimes	39

Chapitre 02

Techniques d'homogénéisation des matériaux composites

2.1 Introduction.....	42
2.2. La théorie micromécanique.....	43

2.3 Homogénéisation.....	45
2.3.1 Notion d'homogénéisation d'un composite quelconque.....	45
2.3.2 Volume élémentaire représentatif	46
2.3.3 Conditions aux limites sur le V.E.R.....	50
2.4. Calcul des coefficients homogénéisés.....	52
2.4.1 Module d'élasticité longitudinale E_1	52
2.4.2. Détermination du module dans la direction transverse aux fibres E_2	54
2.4.3. Coefficient de poisson	55
2.4.4. Détermination de module de cisaillement G_{12}	56

Chapitre 03

Caractérisation micromécanique par différent Modèle mathématique

3-1 Introduction.....	60
3.2 Techniques des bornes d'elasticité.....	61
3.2.1 Borne inférieure sur le module de Young.....	62
3.2.2 Borne supérieure sur le module de Young	64
3.3 Solutions Exacts	69
3.4 Modèle auto-cohérent	72
3.5 Solutions d'élasticité avec contiguïté.....	73
3.6 Modèle d'assemblage cylindrique.....	75
3.7 Les équations de Halpin-Tsai.....	79
3.8 Modèle de cox.....	84

Chapitre 04

Résistance mécaniques approche des matériaux composites

4.1 Introduction.....	88
4.2 Résistance à la traction dans le sens des fibres.....	88
4.2.1 Modèle des fibres de force égale.....	89
4.2.2 Modèle des fibres avec une distribution statistique de résistance.....	93
4.3 Résistance à la compression dans le sens de la fibre.....	95

4.3.1 Mode d'extension ou transverse.....	98
4.3.2 Mode de cisaillement.....	104
Chapitre 05	
Etude comparative du comportement micromécanique du matériau composite verre E /Epoxyde	
5.1 Introduction.....	108
5.2 Présentation des matériaux constitutifs utilisés.....	109
5.3 Caractérisation technique des matériaux composites utilisés	110
5.4 Description des pogramme informatiques utilisées	111
5.5 Application analytique	111
a- Variation des coefficients élastiques par la technique d'homogénéisation.....	113
b- Evolution des bornes d'homogénéise.....	115
c- Etude de la contiguïté	119
d- Confrontation des modèles mathématiques	122
e- Analyse comparative entre les modèles ou les approches d'élasticité	127
5.6 Etude des modèles de résistance	130
5.6.1 Résistance à la traction	131
5.6.2 Discussion des résultats	135
5.6.3. Résistance à la compression	137
Annexe	144
Conclusion.....	157
Bibliographie.....	159

Introduction générale

Les matériaux composites sont plus en plus souvent utilisés pour la réalisation des pièces de structures. Malgré qu'ils soient anisotropes et hétérogènes, leurs propriétés mécaniques spécifiques permettent en effet un allègement des structures, particulièrement lors de leur introduction dans des secteurs d'activités comme l'aéronautique, l'automobile et le sport. Ainsi, les trois grandes classes des matériaux composites, à matrices céramiques, métalliques et polymères, connaissent un développement soutenu.

La micromécanique a pour but de développer des solutions pour définir ces champs de contrainte et de déformation dans les matériaux hétérogènes afin de pouvoir calculer analytiquement ou numériquement les propriétés effectives en se basant sur des procédures d'homogénéisation. Cette approche permet de déterminer les propriétés macroscopiques d'un matériau hétérogène à partir des propriétés des différentes phases qui le constituent. Tout d'abord, on définit un volume élémentaire représentatif VER du matériau, sur lequel sera calculé le comportement du matériau homogène équivalent. En générale, l'homogénéisation est d'un intérêt moindre puisque la pièce peut être étudiée élément par élément.

La plupart des théories de la micromécanique sont limitées à quelques modèles mathématiques idéalisés des systèmes biphasés [1-3]. Les études du comportement micromécanique des composites ont été passées en revue de manière compréhensible par Hashin et Gibson, Halpin- Tsai, Rosen...ect

Le développement des modèles de résistance d'un composite est devenu de plus en plus complexe au cours des dernières années [4,5]. La résistance à la traction sera traitée par l'utilisation d'un modèle qui considère que les fibres sont soumises à la même force. La résistance à la compression sera aussi considérée par l'utilisation d'un autre modèle de flambage des fibres entourées par une matrice.

Le travail réalisée est composée de cinq chapitres à travers lesquels nous avons présenté le comportement micromécanique des matériaux composites par l'utilisation les approches et modèles mathématiques les plus importants et les plus connus dans la littérature. Ces derniers ont été développés en des expressions mathématiques afin de calculer les caractéristiques élastiques et les résistances des composites par le biais de programmes informatiques.

Nous avons commencé cette contribution, par un premier chapitre, à travers lequel nous avons fait une synthèse bibliographique sur l'ensemble des composites à différents renforts et matrices dans le but de mettre en évidence les paramètres pertinents pour de tels matériaux. Leurs propriétés remarquables nous ont obligé de citer les divers domaines d'utilisation pour de différentes applications. La définition de leurs constituants et la présentation des différents modèles du volume élémentaire représentatif a été réalisée au second chapitre. A ce stade, il nous a paru très logique d'énoncer le principe d'homogénéisation et ses différentes techniques de traitement et d'analyse. Dans le troisième chapitre, nous avons présenté l'ensemble des modèles et méthodes de caractérisation micromécanique par leur formulation en des approches mathématique telles que celles de Halpin-Tsai, la solution exacte, le modèle d'assemblage cylindrique et le modèle de Cox. En revanche, le quatrième chapitre est conçu en la prédiction de la résistance des matériaux composites fibreux. Un tel raisonnement permet de développer plusieurs modèles physiques et mathématiques intéressants ésotériques. Il y a deux phénomènes qui sont pris en considération : la résistance à la traction et celle à la compression. L'intérêt du développement de certains modèles mathématiques, leurs comparaisons et leurs applications sur le matériau composite verre-E/époxyde a été discuté et traité au dernier chapitre.

CHAPITRE 1

Introduction aux Matériaux Composites

Chapitre I

Introduction aux matériaux composites

1. Introduction

Les origines des matériaux composites sont inconnues mais tous les écrits historiques contiennent des références à certaines formes des matériaux [1]. Par exemple, la paille a été utilisée par les arabes pour renforcer les briques ; le contreplaqué a été utilisé par les anciens Egyptiens afin d'obtenir une meilleure résistance tant aux chargements mécaniques qu'à l'environnement, les épées et les armures médiévales ont été fabriquées par des couches des différents matériaux. Aujourd'hui, les matériaux composites font partie courante de notre vie que cela soit des objets très excitants et à la mode comme la canne de golf et le kayak, ou beaucoup plus usuels tels que le contreplaqué et le béton.

1.1. Définitions des composites

Un matériau composite peut être défini comme une combinaison d'au moins deux matériaux différents à l'échelle macroscopique ou plusieurs matériaux non miscibles (mais ayant une forte capacité d'adhésion), l'assemblage final ayant des propriétés supérieures aux propriétés de chacun des matériaux constitutifs. On appelle maintenant de façon courante "matériaux composites" des arrangements de fibres, les *renforts* qui sont noyés dans une *matrice* dont la résistance mécanique est beaucoup plus faible (figure 1-1). La matrice assure la cohésion et l'orientation des fibres, elle permet également de transmettre les sollicitations auxquelles sont soumises les pièces. Les matériaux ainsi obtenus sont très *hétérogènes* et *anisotropes*.

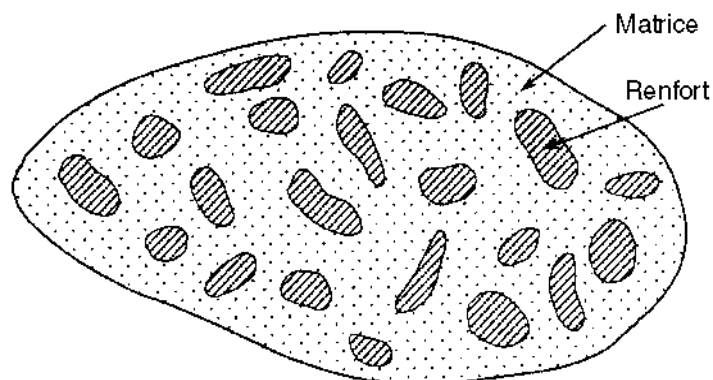


Figure 1-1 Schématisation des renforts noyés dans une matrice

Il faut différencier *charges* et *renforts*. Les charges, sous forme d'éléments fragmentaires, de poudres ou liquide, modifient une propriété de la matière à laquelle on l'ajoute (par exemple la tenue aux chocs, la résistance aux UV, le comportement au feu...). Les renforts, sous forme de fibres, contribuent uniquement à améliorer la résistance mécanique et la rigidité de la pièce dans laquelle ils sont incorporés.

1.2. Constituants des matériaux composites

- **Le renfort** : est une armature, ou squelette de la structure qui il assure la tenue mécanique (résistance à la traction et rigidité). Souvent de nature filamentaire (des fibres organiques ou non organiques).

- **La matrice** : elle lie les fibres renforts, elle répartie les efforts (résistance à la compression ou à la flexion), et elle assure la protection chimique. Par définition, c'est un polymère ou une résine organique.

En plus de ces deux constituants de base, il existe : une interface qui assure la compatibilité renfort-matrice, qui transmettant les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif. Des produits chimiques entrent aussi dans la composition du composite, l'interphase etc. ... qui peuvent jouer sur le comportement mécanique, mais n'interviennent pratiquement jamais dans le calcul de structure composite.

1.2.1 Renforts :

Ils peuvent se présenter sous de nombreuses formes : fibres courtes ou fibres continues (tissus ou textures multidirectionnelles) en fonction de l'application envisagée. Les fibres possèdent généralement une bonne résistance à la traction mais une résistance à la compression faible.

Les composites artificiels sont souvent renforcés soit par des fibres, soit par des composants fabriqués à base de fibres (torons, assemblage de fibres tordues ensemble ; tissus ; mats, ou nappes). Chacune d'entre elles s'impose dans une application particulière en raison de ses propriétés spécifiques et de son prix

Les principaux matériaux de renforts, sont résumés dans l'organigramme suivant :

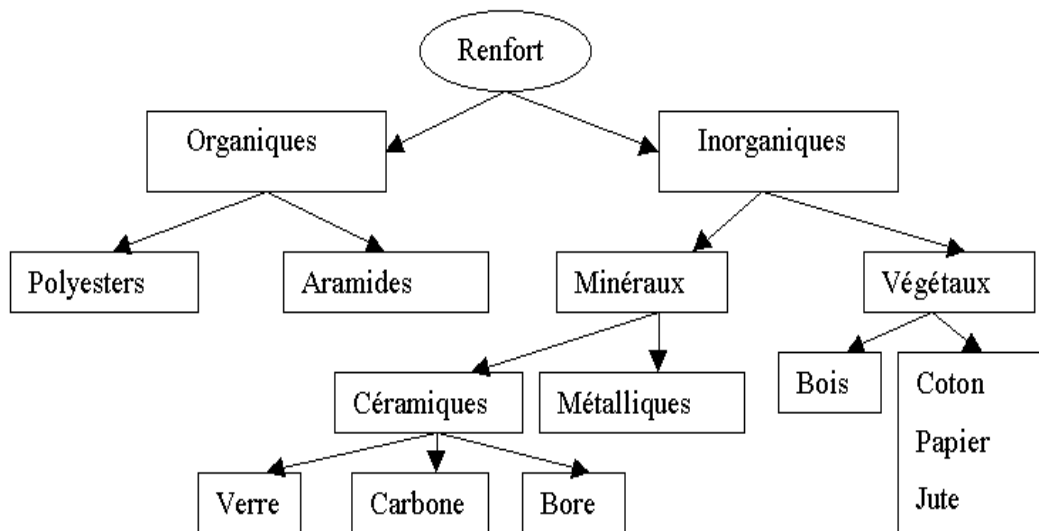


Figure 1-2 principaux matériaux de renforts

Parmi les différents types de renforts, on peut citer [2] :

Les fibres de verre : sont les plus anciennes (1940) et les moins chères (environ 1 euro/kg) des fibres du marché, et celles dont on réalise le plus fort tonnage. Elles sont fabriquées par extrusion du verre au travers d'une filière percée de trous de 1 à 2mm de diamètre, puis étirées jusqu'à obtenir des diamètres de 5 à 15µm, enduites et bobinées. Il existe différentes variétés (E,R,S) selon la proportion de chaque composant (SiO_2 , Al_2O_3 , B_2O_3 , CaO , MgO) (figure 1-3) :

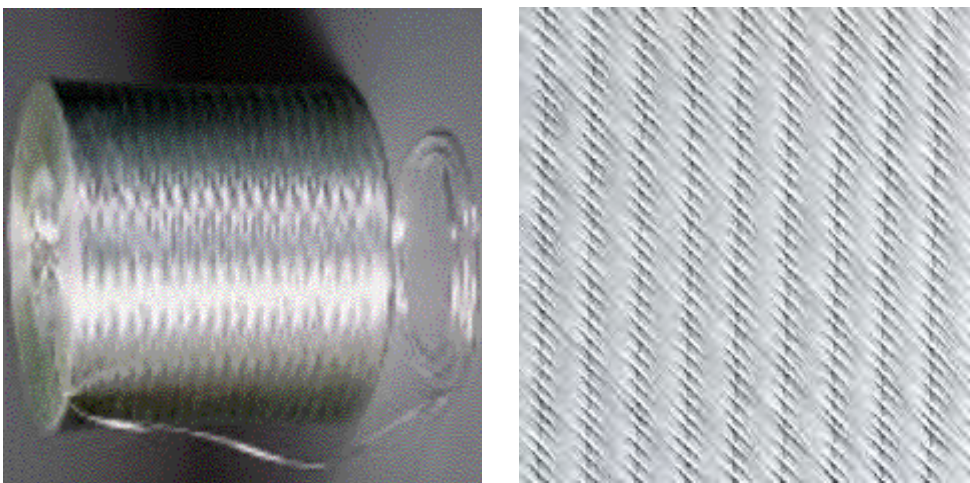


Figure 1-2 différents types de fibres de verre

E : pour les composites de grande diffusion et les applications courantes ;

R : pour les composites hautes performances ;

D : pour la fabrication de circuits imprimés (propriétés diélectriques).

les meilleures propriétés étant obtenues pour les plus fortes proportions de silice (verre S, 65%).

Les fibres de carbone doivent leurs propriétés à la très forte anisotropie des cristallites de graphite qui les composent. Elles sont fabriquées à partir de fibres de polymère (par exemple polyacrylonitrile) préalablement tissées, et carbonisées sous tension en plusieurs étapes, oxydation (100 à 200 C°), puis pyrolyse (1500-2500 C°). on distingue deux types de fibres (figure 1-4) :

-fibres haute résistance (HR) : pour une combustion de 1000 à 1500 °C ;

-fibres haut module (HM) : pour une température de combustion de 1800 à 2000 °C.

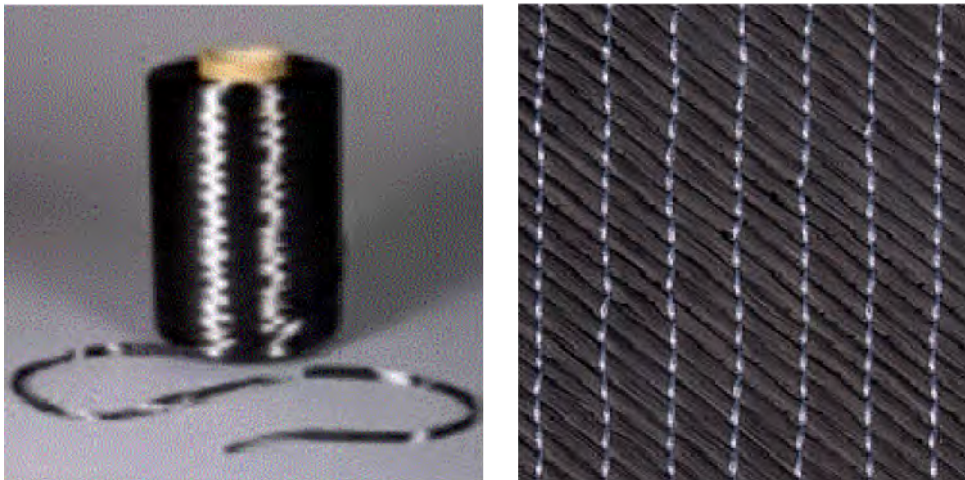


Figure1-4 différents types des fibres de carbone

Fibre d'aramide Souvent appelée KEVLAR® de prix élevé (20 euros/kg), la fibre d'aramide est issue de la chimie des polyamides aromatiques. Il est possible de trouver deux types de fibres d'aramide de rigidités différentes (figure 1-6):

-les fibres bas module : utilisées pour les câbles et les gilets pare-balles ;

- les fibre haut module : employées dans le renforcement pour les composites hautes performances

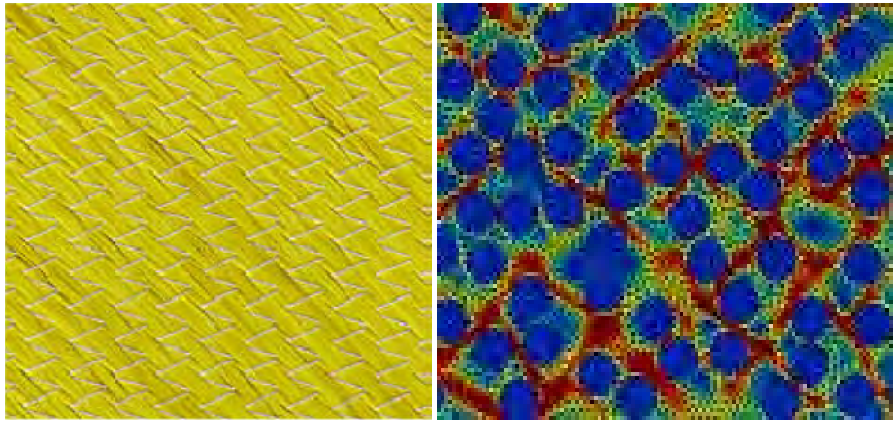


Figure1-5 différents types des fibres de aramide

Les fibres métalliques ou céramiques sont les plus chères de toutes, en raison de leur difficulté de fabrication (de l'ordre de 1000 euros/kg). Les fibres de bore sont obtenues par réduction à 1100 °C de chlorure de bore, qui se dépose sur un fil de tungstène de 10 à 15mm de diamètre.

Le diamètre résultant est de 100 à 200µm pour la fibre. La même procédure expérimentale est utilisée pour produire des fibres de carbure de silicium (SiC). Les derniers développements concernent la production de trichites, ("whiskers") qui sont des monocristaux filamenteux obtenus par décomposition d'un sel métallique en ambiance réductrice. Leur longueur est de quelques millimètres, pour un diamètre d'environ 1µm. Elles approchent les propriétés d'un cristal parfait.

Les microbilles pleines ou creuses peuvent être produites en verre, carbone ou polystyrène. Elles ont des diamètres compris entre 10 et 150µm ; le taux volumique de charge peut atteindre 50%. Le composite résultant a des propriétés mécaniques isotropes.

Les renforts minéraux :

Les principaux renforts minéraux sont le mica et l'amiante. L'un et l'autre sont des composés naturels dont les propriétés ne permettent pas d'atteindre les résistances obtenues avec les fibres. Le mica se présente sous forme de paillettes, dont l'intérêt est d'offrir un renforcement bidirectionnel. L'amiante (mélange d'oxydes de magnésium, de silice et d'eau, comportant également du sodium, du fer,...) se présente sous forme de fibrilles de 20nm, dont il est possible de détacher des fibres de plusieurs centimètres. Son caractère cancérigène a maintenant conduit à un abandon complet.

Leurs caractéristiques élastiques et mécaniques sont résumées dans le tableau 1-1 et la figure 1-6 :

Renforts	Diamètre du filament (μm)	Masse volumique (kg.m^{-3})	Module d'élasticité longitudinal (MPa)	Module de cisaillement (MPa)	Coefficient de Poisson	Contrainte de rupture (traction) MPa	Allongement à rupture %	Coefficient de dilatation thermique $^{\circ}\text{C}^{-1}$
	d	Mv	E	G	k	C_T	A	α
Verre E	16	2 600	74 000	30 000	0,25	2 500	3,5	$0,5 \cdot 10^{-5}$
Verre R	10	2 500	86 000		0,2	3 200	4	$0,3 \cdot 10^{-5}$
Carbone HM	6.5	1 800	390 000	20 000	0,35	2 500	0,6	$0,08 \cdot 10^{-5}$
Carbone HR	7	1 750	230 000	50 000	0,3	3 200	1,3	$0,02 \cdot 10^{-5}$
Kevlar 49	12	1 450	130 000	12 000	0,4	2 900	2,3	$-0,2 \cdot 10^{-5}$
Bore	100	2 600	400 000			3 400	0,8	$0,4 \cdot 10^{-5}$
Silicate d'alumine	10	2 600	200 000			3 000	1,5	
Polyéthylène		960	100 000			3 000		

Tableau 1-1 caractéristiques des fibres et renforts

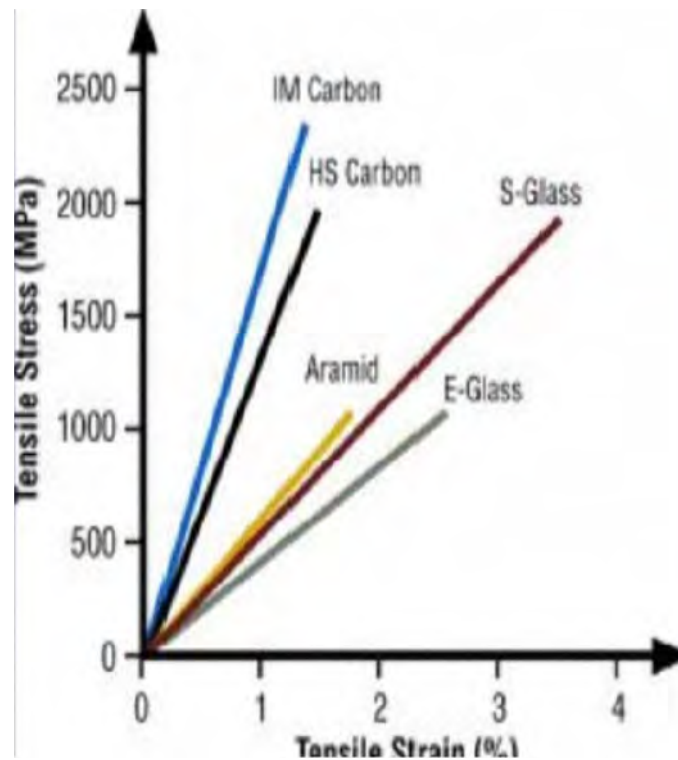


Figure 1-6 Caractéristiques mécaniques des différentes fibres

1.2.2 Les matrices

La matrice a pour rôle de lier les fibres renforts, répartir les contraintes subies, apporter la tenue chimique de la structure et donner la forme désirée au produit.

Il existe différents types de résines (figure 1-7) on utilise actuellement surtout des résines thermodurcissables (TD) que l'on associe à des fibres longues, mais l'emploi de polymères thermoplastiques (TP) renforcés de fibres courtes se développe fortement (tableau 1-2).

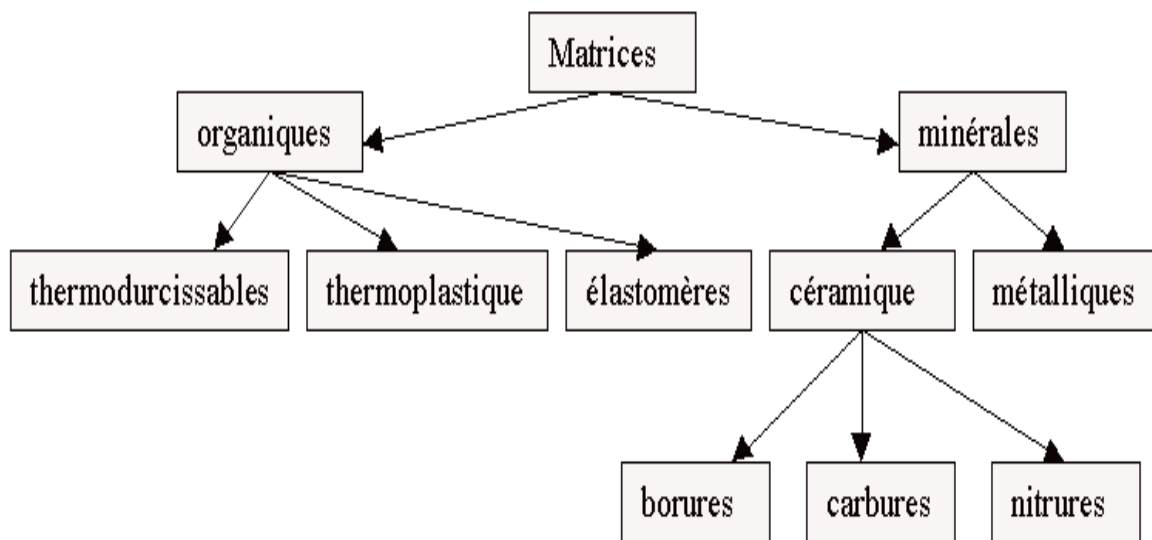


Figure 1-7 Différent type des résines

Il est important de bien situer les différences fondamentales de ces deux types de matrices. La structure des TP se présente sous forme de chaînes linéaires, il faut les chauffer pour les mettre en forme (les chaînes se plient alors), et les refroidir pour les fixer (les chaînes se bloquent). Cette opération est réversible.

La structure des TD a la forme d'un réseau tridimensionnel qui se ponte (double liaison de polymérisation) pour durcir en forme de façon définitive, lors d'un échauffement. La transformation est donc irréversible.

Matrices	Thermoplastiques TP	Thermodurcissables TD
Etat de base	solide prêt à l'emploi	liquide visqueux à polymériser
Stockage	illimité	réduit
Mouillabilité renforts	difficile	aisée
Moulage	chauffage + refroidissement	chauffage continu
Cycle	court	long

Tenue au choc	assez bonne	limitée
Tenue thermique	réduite	bonne
Chutes et déchets	recyclables	perdus ou recyclés en charges
Conditions de travail	propreté	émanation pour "méthode humide"

Tableau 1-2 Principales différences entre matrices TP et TD

1.2.2.1. Les résines thermodurcissables

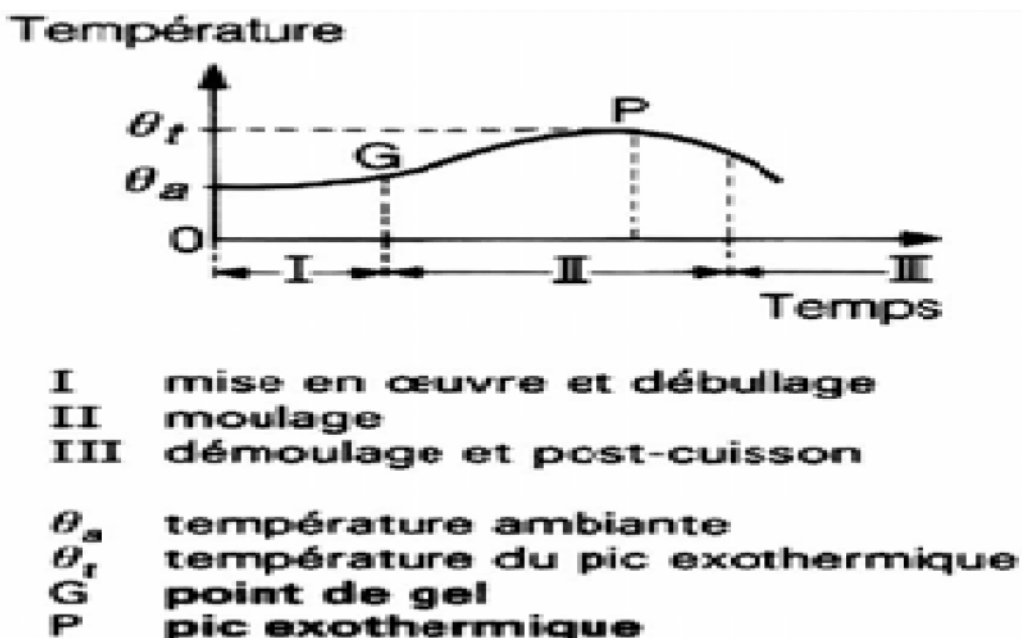
- **Polyesters insaturés** : C'est la résine la plus utilisée dans l'application composite de grande distribution.

Une résine de polyester insaturé contenant un monomère (généralement le styrène) est réticulée à température ambiante par addition d'un catalyseur de type peroxyde organique et d'un accélérateur. Elle passe successivement de l'état liquide visqueux initial à l'état de gel, puis à l'état de solide infusible.

La réaction est exothermique et la température de la résine augmente progressivement depuis le gel jusqu'à un maximum pour redescendre ensuite lentement à la température ambiante.

Le durcissement sera d'autant plus rapide ou, si l'on préfère, le temps nécessaire dans le moule sera d'autant plus court que la courbe de température en fonction du temps se rapprochera davantage de la verticale.

La réaction de durcissement dépend de la réactivité de la résine, de la forme de l'objet fabriqué (épaisseur, etc.), de la nature et du dosage du système catalytique.



Il existe différents types de résines :

Orthophtalique : la plus courante ;

- Isophtalique : qui donne une meilleure tenue à l'humidité ;
- Chlorée : apportant une auto extingüibilité ;
- Bisphénol : possédant de bonnes caractéristiques chimiques et thermiques.

dont leurs caractéristiques résumées dans le tableau 1-3 :

Avantages	Inconvénients
Bonne accroche sur fibres de verre Translucidité Bonne résistance chimique Mise en oeuvre facile Tenue en température (> 150 °C) Prix réduit	Inflammabilité (sauf résines chlorées) Tenue vapeur et eau bouillante Retrait important (6 à 15 %) Durée de conservation en pot limitée Emission de styrène

Tableau 1-3 caractéristiques des polyesters insaturés

- **Vinylesters** : On peut la considérer comme une variante des polyesters produite à partir d'acides acryliques. Elles possèdent une bonne résistance à la fatigue et un excellent comportement à la corrosion, mais demeure combustible.
- **Phénoliques** : Elles sont issues de la polycondensation du phénol et du formol et se caractérisent par une bonne tenue au feu, sans fumée. Elles restent fragiles, sensibles à l'humidité, difficiles à colorer et à mettre en oeuvre.
- **Epoxydes** : Elles résultent de la polyaddition de l'épichlorhydrine sur un polyalcool et constitue la résine type des composites hautes performances HP. On distingue deux classes de résines en fonction : du durcissement à chaud ou à froid ; et de la tenue en température (120-130 °C, ou 180-200 °C). leurs caractéristiques sont résumées dans le tableau 1-4 :

Avantages	Inconvénients
Tenue mécanique, thermique, chimique et fatigue Faible retrait (1 à 2 %) Excellente adhérence sur fibres Auto-extingüibilité Mise en oeuvre facile, sans solvant	Prix élevé Sensibilité à l'humidité et aux UV Vieillessement sous température Sensibilité aux chocs Temps de polymérisation

Tableau 1-4 caractéristiques de résine Epoxyde

- **Polyuréthannes et polyurées** : Dans la fabrication de pièces composites, on utilise surtout des formules élastomériques dont la faible viscosité permet un bon remplissage du moule. Les constituants sont livrés à l'état de prépolymères liquides :

Polyols + polyisocyanates = polyuréthannes ;

Polyéthers + polyamines = polyurées.

leurs caractéristiques sont illustrées dans le tableau 1-5

Avantages	Inconvénients
Facilité de moulage in situ Tenue chimique Vieillessement	Résistance mécanique réduite Combustibilité Coloration en masse difficile : foncée

Tableau 1-5 caractéristiques des résine polyuthannes et polyurées

- **Polyimides** : Ces résines sont surtout utilisées dans les composites HP, lorsque l'on cherche une bonne stabilité sous hautes températures ($> 250\text{ °C}$). Elles restent toutefois très onéreuses et difficiles à mettre en oeuvre.
- **Bismaléimides** : Matrices très peu utilisées en Europe. Elles offrent une bonne tenue à la fois au choc et en température, mais restent difficiles à mettre en oeuvre

1.2.2.2. Les matrices thermoplastiques

Les polymères utilisés sont essentiellement des thermoplastiques techniques qui présentent à l'état vierge de bonnes caractéristiques mécaniques. Un renforcement à l'aide de fibres courtes leur confère une tenue thermique et mécanique améliorée et une bonne stabilité dimensionnelle.

Les principales matrices TP utilisées (possédant tous une tenue en température supérieure à 100 °C) sont les suivantes :

- Polyamide (PA) : tenue au choc, bonne résistance à la fatigue et aux hydrocarbures ;
- Polytéréphtalate éthylénique et butylénique (PET, PBT): bonne rigidité, bonne ténacité
- Polycarbonate (PC) : tenue au choc ;
- Polysulfure de phénylène (PPS) : résistance à l'hydrolyse ;
- Polyoxyméthylène (POM) : bonne tenue à la fatigue ;
- Polysulfurés (PSU et PPS): bonne stabilité chimique et à l'hydrolyse, peu de fluage, tenue au chaud ;
- Polypropylène (PP) : peu onéreux et assez stable en température, mais combustible.

De plus en plus, on utilise des thermoplastiques thermostables (tenue en température > 200 °C et bonnes propriétés mécaniques), en particulier les suivants :

- Polyamide-imide (PAI) ;
- Polyéther-imide (PEI) ;
- Polyéther-sulfone (PES) ;
- Polyéther-éther-cétone (PEEK).

1.2.3. Les charges organiques

Ce sont des Charges cellulosiques, utilisées en tant que charges des résines thermodurcissables (phénoplastes et aminoplastes).

Les avantages de ces matières cellulosiques sont leur coût peu élevé et leur faible densité. on peut distinguer les farines de bois, les farines d'écorces de fruit et de noyaux, les fibres végétales, les pâtes de cellulose, et les amidons.

1.2.3.1. Les charges minérales

elles se présentent sous forme de Craies et carbonates :

La craie ou blanc de Champagne peut contenir jusqu'à 99 % de calcite, de la silice et d'autres corps minéraux. La taille moyenne de ses particules varie de 1 à 3 µm.

Le calcaire et le marbre contiennent 80 à 90 % de calcite et des quantités variables d'oxyde de magnésium et de silice. La taille des particules est comprise entre 0,5 et 30 µm.

Le carbonate de calcium-magnésium ($MgCO_3 \cdot CaCO_3$) est préparé à partir des minerais de dolomite. On l'utilise comme charge et aussi comme retardateur de flamme, ajouté à du trioxyde d'antimoine.

Le carbonate de calcium précipité est un mélange pratiquement pur à 99,00 % de calcite et d'aragonite, obtenu sous forme de particules très fines (0,05 à 16 µm).

Il est surtout utilisé avec le PVC et dans les matières thermodurcissables (SMC, BMC) ainsi que les polyuréthanes (RIM) en raison de son caractère hydrophobe.

Les charges minérales existent aussi sous forme de Silices, Tales et Wollastonite :

-les silices :

La silice (SiO_2), à l'état pur ou combinée avec des oxydes métalliques, est utilisée comme charge sous différentes formes, suivant son origine, sa cristallinité, sa dureté et la taille des particules.

Son incorporation dans la résine améliore les propriétés diélectriques, la résistance à la chaleur et à l'humidité des objets moulés, par exemple ceux en poly(méthacrylate de méthyle).

On constate également l'augmentation de la température de transition vitreuse, du module d'Young et de la résistance en compression, ainsi que la réduction du gonflement dans les solvants.

-Les talcs :

Les talcs sont utilisés pour améliorer l'isolation thermique et la résistance à l'eau, et faciliter l'opération de moulage.

Le talc est la charge la plus utilisée dans les thermoplastiques. Il leur confère une meilleure résistance au fluage ainsi qu'une plus grande rigidité. Notons également que l'introduction de talc facilite l'usinage des produits finis.

-La wollastonite :

Cette charge se présente sous différentes formes : aiguilles, granulés, fibres. Elle est surtout utilisée dans les polyamides, les ABS et les polysulfones, également en remplacement des fibres de verre dans les SMC et les BMC. Elle améliore en particulier la résistance au rayonnement ultraviolet et à l'hydrolyse. Elle est aussi employée dans les résines époxydes pour assurer une bonne stabilité dimensionnelle ainsi que l'isolation thermique et électrique, et permet un contrôle du retrait au moulage.

on cite aussi les argiles et alumino-silicates. Ces substances minérales sont en grande partie constituées par de la silice (42 à 70 %) et de l'alumine (14 à 45 %).

-Le kaolin contribue à une meilleure résistance chimique et électrique, et diminue l'absorption d'eau. On peut l'ajouter à des taux atteignant 60 % dans les compositions à base d'esters polyvinyliques, mais habituellement les poudres à mouler en contiennent de 20 à 45 %.

Le kaolin calciné est utilisé dans les mélanges pour l'isolation de câbles et dans les isolants.

Mélangé à de l'alumine et de la silice, le kaolin calciné est utilisé pour assurer la résistance aux acides.

- La vermiculite est utilisée comme charge de faible densité (2,4) dans les plastiques renforcés de fibres de verre.

- Le mica augmente la stabilité dimensionnelle des pièces moulées ; il améliore les propriétés électriques et thermiques, la résistance aux acides et aux bases, et diminue la reprise d'eau.

Comparé aux fibres de verre, il confère une moins

1.2.3.2.. Oxydes et hydrates métalliques

- Il se présente sous forme de poudres et microsphères :

L'alumine, les oxydes de zinc, de magnésium, de titane et d'antimoine sont utilisés sous forme de poudres fines comme charges du polypropylène, des compositions polyvinyliques, des résines époxydes, des polyesters insaturés. Tous permettent de diminuer le prix de revient et d'augmenter la densité de la matière élastique.

L'oxyde de béryllium est utilisé sous forme de microsphères, qui sont des microsphères de densité voisine de 0,003 et d'un diamètre de l'ordre de 40 μm .

-On peut aussi citer Alumine et le trihydrate d'aluminium :

On obtient l'alumine (Al_2O_3), anhydre ou hydratée, à partir de la bauxite. Cette charge apporte aux résines une meilleure résistivité électrique ainsi qu'une bonne conductivité thermique ; elle diminue le coefficient de dilatation thermique linéique, augmente la rigidité ainsi que la résistance à l'abrasion et au feu.

L'hydrate d'aluminium $\text{Al}(\text{OH})_3$ est une charge ignifugeante qui, du point de vue du prix, est concurrentielle ; elle réduit l'inflammabilité ainsi que l'émission des fumées de combustion car elle se décompose de façon endothermique (effet de refroidissement) en alumine et en eau, aux températures supérieures à 220 °C.

- On cite aussi le Trioxyde d'antimoine :

On chauffe de l'antimoine dans l'air pour obtenir Sb_2O_4 qui donne Sb_2O_3 par fusion et décomposition. Sa densité est de 4,2 et sa dureté est comprise entre 6 et 7. Il apporte aux résines ignifugation et coloration blanche et on l'utilise en particulier dans les PVC plastifiés.

-On caractérise aussi l'Oxyde de béryllium : il est Utilisé sous forme de microsphères dans les résines époxydes, il augmente les conductivités électrique et thermique. Ces carbosphères sont aussi utilisées dans les mousses structurales (PUR) à densité contrôlée, ainsi que pour la fabrication de pièces polyesters ultralégères.

Il existe aussi les céramiques :

Ce sont des microsphères en céramique dont la densité varie entre 0,4 et 2,4 et les dimensions de 1 à 3 000 μm . Une microsphère de 70 μm comportant un revêtement permettant une meilleure dispersion. Conseillée dans les résines polyesters en combinaison avec CaCO_3 , elle

apporte une réduction de masse de 15 à 25 % avec une amélioration des résistances à la compression et au choc.

1.2.3.3. Le verre on peut distinguer :

-Poudres de verre

Une nouvelle variété de poudre de verre de granulométrie 13 μm est apparue sur le marché et son incorporation confère aux thermodurcissables de meilleures résistances à l'abrasion et à la compression ; elle permet par ailleurs d'obtenir un retrait plus faible et plus homogène des pièces moulées.

-Billes de verres creuses

Les billes de verre creuses, de densité comprise entre 0,1 et 0,5, sont obtenues par chauffage de billes de verre contenant un agent gonflant. Elles améliorent les résistances à l'eau et au vieillissement du PMMA, et diminuent la friabilité des pièces phénoliques.

Les densités de ces microsphères creuses du type borosilicate de sodium et de calcium sont comprises entre 0,38 et 0,45 ; parallèlement, leur résistance à la compression varie de 1,7 à 31 MPa. Les applications sont nombreuses (bâtiment, automobile et aéronautique).

-Microsphères de verre

L'utilisation de microsphères de verre permet de réduire de 25 à 35 % la masse des pièces obtenues soit à partir de BMC ou de SMC destinées en particulier à l'industrie automobile, soit également à partir de résines phénoliques pour l'industrie aéronautique. On utilise par ailleurs ce type de charge, dans le cas du PPO modifié, pour la réalisation des capotages de machines de bureau. Elle permet la réduction du temps de cycle de moulage de 20 à 30 %. Il en est de même dans le cas du moulage des mousses structurelles en polyuréthanes.

1.2.3.4. Le carbone on peut distinguer :

-Le noir de carbone

Le noir de carbone est utilisé depuis très longtemps dans l'industrie des plastiques, à la fois comme colorant, pigment, barrière anti-UV, antioxydant.

Le noir de carbone améliore la résistance à la chaleur du polyéthylène réticulé par irradiation et celle du PVC. La conductivité thermique augmente avec le taux de charges, indépendamment de la taille des particules. Par contre, la conductivité électrique des matériaux chargés augmente avec le taux de carbone et avec la finesse des particules

1.3. Classification des matériaux composites

Les composites peuvent être classés suivant la forme des constituants ou suivant la nature des composants.

1.3.1 Classification suivant la forme des constituants :

En fonction de la forme des constituants, les composites sont classés en deux grandes classes :

-Composites à fibres :

On appelle composite à fibre, si le renfort se trouve sous forme de fibre (soit fibres continues, soit fibres discontinues, coupées ou courtes)

- Composites à particules :

On appelle composite à particule, lorsque le renfort se trouve sous forme de particule. Au contraire d'une fibre, la particule n'a pas de dimension privilégiée. Les particules sont généralement utilisées pour améliorer certaines propriétés des matériaux ou des matrices, comme la rigidité, la tenue à la température, la résistance à l'abrasion...etc. mais dans de nombreux cas, les particules sont simplement utilisées comme charges pour réduire le coût du matériau, sans en diminuer les caractéristiques.

Ce type de composite recouvre un domaine étendu dont le développement s'accroît sans cesse. [3]

1.3.2 Classification suivant la nature de la matrice :

Selon la nature de la matrice, les matériaux composites sont classés :

- **Composites à matrice organique (résine, charges)** : peuvent être utilisés dans le domaine des températures ne dépassant pas 300°C.

- **Composites à matrice métallique** (alliages légers et ultra légers d'aluminium, de magnésium, de titane) : domaine des températures jusqu'à 600°C.

- **Composites à matrice minérale (céramique)** : domaine des températures jusqu'à 1000°C.

Ce type de composite (matrice) peut être associé à divers renforts [4]

1.4 But d'utilisation des matériaux composite :

Le développement des matériaux composites est lié à leurs caractéristiques : qui peut présenter :

1.4.1 Des avantages :

•**Facilité de mise en forme** : le matériau durcit et prend un aspect de surface définitif alors qu'il est positionné sur le moule.

Il est ainsi possible de réaliser en une seule opération des formes qui auraient nécessité plusieurs étapes en utilisant d'autres matériaux (exemple : découpe, formage, soudure, polissage pour des tôles métalliques). La réalisation de pièces par moulage au contact nécessite un matériel d'application peu onéreux.

La réalisation des moules pour ce procédé est également simple et permet donc une grande liberté dans la création des formes qui est notamment mise en œuvre dans les applications liées à la carrosserie (voitures, camions, bateaux, ferroviaire, ...).

• **Légèreté** : pour des propriétés mécaniques équivalentes, l'utilisation de matériau composite à la place de métaux permet un gain de poids de près de 50 %. Cette propriété est notamment mise à profit dans le secteur automobile.

• **Adaptabilité** : les caractéristiques mécaniques du composite peuvent être ajustées en jouant globalement sur le taux de fibres mais aussi localement en adaptant la quantité et le positionnement

des fibres dans des zones soumises à de plus fortes contraintes mécaniques.

• **Résistance à la corrosion ou à l'oxydation** : à cause de leur composition chimique à base de résine organique, les composites sont peu sensibles à la corrosion et sont très résistants aux attaques chimiques. Cette caractéristique leur donne un avantage important par rapport aux métaux pour la réalisation de réservoirs et d'équipements destinés à un usage extérieur ou en zone humide.

• **Isolation électrique et thermique** : le bon niveau d'isolation que procurent les matériaux composites pourrait conduire à une utilisation plus importante dans le bâtiment. Toutefois, leur emploi massif est freiné à cause de coûts élevés par rapport aux matériaux de construction traditionnels.

Les composites présentent également quelques inconvénients qui limitent leurs applications :

- la tenue en température et au feu est limitée,
- les résines dégagent des vapeurs de solvant notamment en phase de fabrication,
- la fin de vie de matériaux composés d'un mélange quasi indissociable de résine organique et de fibres de verre pose des problèmes de recyclage. Il faut noter par ailleurs que les résines courantes sont fabriquées à partir de dérivés du pétrole et consomment donc une matière non renouvelable,
- les caractéristiques mécaniques dépendent du positionnement des fibres et ne sont donc pas homogènes dans toutes les directions,
- les composites sont difficilement usinables avec précision

1.4.2. Les inconvénients :

Bien que les avantages des matériaux composites soient impressionnants, ces matériaux ne sont pas une solution miracle pour toutes les applications. Des inconvénients ou des problèmes existent et peuvent empêcher leur usage. Les inconvénients les plus courants sont les suivants :

- **Coût**

Les matériaux composites hautes performances ont été développés principalement pour répondre aux besoins de la communauté aérospatiale où le coût élevé peut être toléré en échange de matériaux plus performants. Par conséquent, le transfert de la technologie des composites aux produits de grande consommation est lent, à quelques exceptions comme les équipements de sports où la performance prime également sur le coût.

- **Conception et analyse**

Les matériaux composites sont souvent à la fois hétérogènes et anisotropes. Ces deux caractéristiques sont différentes des celles de la plupart des matériaux conventionnels. Elles nécessitent de nouvelles approches, généralement plus compliquées, pour la conception et l'analyse des structures.

L'hétérogénéité impose l'analyse selon au moins deux points de vue. La micromécanique examine l'interaction des constituants à l'échelle microscopique. La macro-mécanique suppose que le composite est homogène et s'intéresse aux propriétés apparentes du matériau.

Les matériaux anisotropes nécessitent plus de propriétés mécaniques que les matériaux isotropes pour établir les relations contrainte-déformation (les lois de comportement). Ces propriétés sont déterminées selon les directions principales du pli élémentaire (directions parallèle et perpendiculaire à l'orientation des fibres).

Pour les stratifiés composites, les rigidités sont déterminées à l'aide de la théorie classique des stratifiés. La rupture des stratifiés composites se produit de plusieurs façons très complexes. Il est donc difficile d'établir une théorie de résistance qui tienne compte de tous les modes de rupture et de leurs interactions. Par conséquent, la détermination des résistances est plus compliquée et nécessite des vérifications expérimentales. De plus, la résistance d'un stratifié peut être influencée par les contraintes interlaminaires au voisinage des bords libres. La séquence d'empilement du stratifié doit être soigneusement déterminée afin de minimiser ces contraintes.

- **Assemblage**

Les matériaux composites sont généralement plus fragiles que les matériaux métalliques conventionnels. Par conséquent, la redistribution des contraintes autour des sites de

concentration tel que le trou est moins efficace. La résistance et la rigidité d'un stratifié ne peuvent pas toujours être entièrement transférés par un joint. Le trou est donc souvent renforcé par des inserts métalliques ou par l'augmentation de l'épaisseur du stratifié dans la partie trouée. De tels renforcements entraînent du poids supplémentaire pour la structure. Le problème d'assemblage est donc critique pour le succès de l'emploi des matériaux composites.

• Tolérance aux dommages

Un des points faibles les plus importants des matériaux composites est la tolérance aux dommages. Des dommages de diverses natures peuvent se produire dans la vie d'une structure, par exemple l'impact, soit en service ou pendant la maintenance, est inévitable.

En règle générale, plus un matériau est ductile, plus il est capable de tolérer l'impact car la ductilité fournit la capacité d'absorber de l'énergie. Par conséquent, les structures métalliques ont tendance de se déformer plutôt que de se fracturer sous l'impact. Le caractère fragile des matériaux composites ne permet pas, par contre, de subir l'impact sans avoir d'endommagement.

Les dommages sont souvent des fissurations internes de la matrice, indétectables sur la surface de la structure. Ce type de dommages diminue considérablement la résistance en compression de la pièce endommagée. Les dommages des fibres diminuent la résistance en compression ainsi qu'en traction. Les outils pour évaluer la tolérance aux dommages des structures sont le programme d'inspection, l'analyse de la résistance résiduelle, et l'analyse de la propagation des dommages.

1.5. Applications des matériaux composites

Les composites à fibres présentent des caractéristiques particulièrement intéressantes pour l'industrie. Ils à conservent d'excellentes propriétés mécaniques à haute température, c'est pourquoi on les utilise notamment dans des aubes de compresseur pour étages chauds de réacteurs. À l'avenir, ce type de composite pourrait remplacer le titane dans le fuselage et les ailes des avions supersoniques.[5] À très haute température, on préfère les composites à matrice et à fibres de carbone, en particulier dans les nez de fusées intercontinentales. Mais les composites à fibres les plus employés restent les composites à matrice organique, qui possèdent une souplesse d'élaboration et de réparation, ainsi qu'une excellente isolation thermique. Ils sont utilisés à température ambiante en aéronautique, en médecine comme prothèses, ou dans la fabrication d'articles de sport (raquettes de tennis, skis). Les propriétés des composites à fibres sont remarquables, mais souvent *anisotropes*. Autrement dit, le

matériau ne présente pas les mêmes propriétés selon les directions de l'espace. En outre, tous les matériaux composites sont délicats à mettre en œuvre, et donc coûteux. L'avenir de ces matériaux dépendra donc du développement de leurs techniques de fabrication.

1.5..1. Industrie aérospatiale :

Au début des années 1960, une évaluation de l'impact de la fibre de bore et ses matériaux composites a été effectuée par l'armée de l'air des Etats-Unis. Un stratifié unidirectionnel de fibres de bore a été estimé avoir une rigidité supérieure à celle de l'acier pour seulement un quart de la masse. Cela a provoqué une fameuse prévision que les immeubles construits avec un tel matériau pourraient être cinq fois plus hauts et la travée des ponts cinq fois plus Longues. Bien que cette prévision a lancé les matériaux composites dans des applications aéronautiques sérieuses. Une nouvelle classe de composites appelée les composites hautes performances (advanced composites), basée sur les fibres de bore et subséquentement les fibres de carbone, a été en développement intensif depuis.

Les composites à « haute performance » sont les composites à fibres très résistantes et très rigides comme le bore et le carbone. Les composites carbone/époxy ont connu une grande réputation dans cette classe. Tandis que les fibres de verre sont également très résistantes, leur rigidité n'est pas suffisamment élevée pour l'usage des structures primaires d'avions.

La première utilisation majeure du composite bore/époxy fut l'empennage horizontal du Grumman [6]. Dès lors, l'usage des éléments structuraux en composites a continué à augmenter autant en aviation militaire que civile. La Figure 1-9 présente la croissance rapide de l'utilisation des matériaux composites dans les structures d'avions

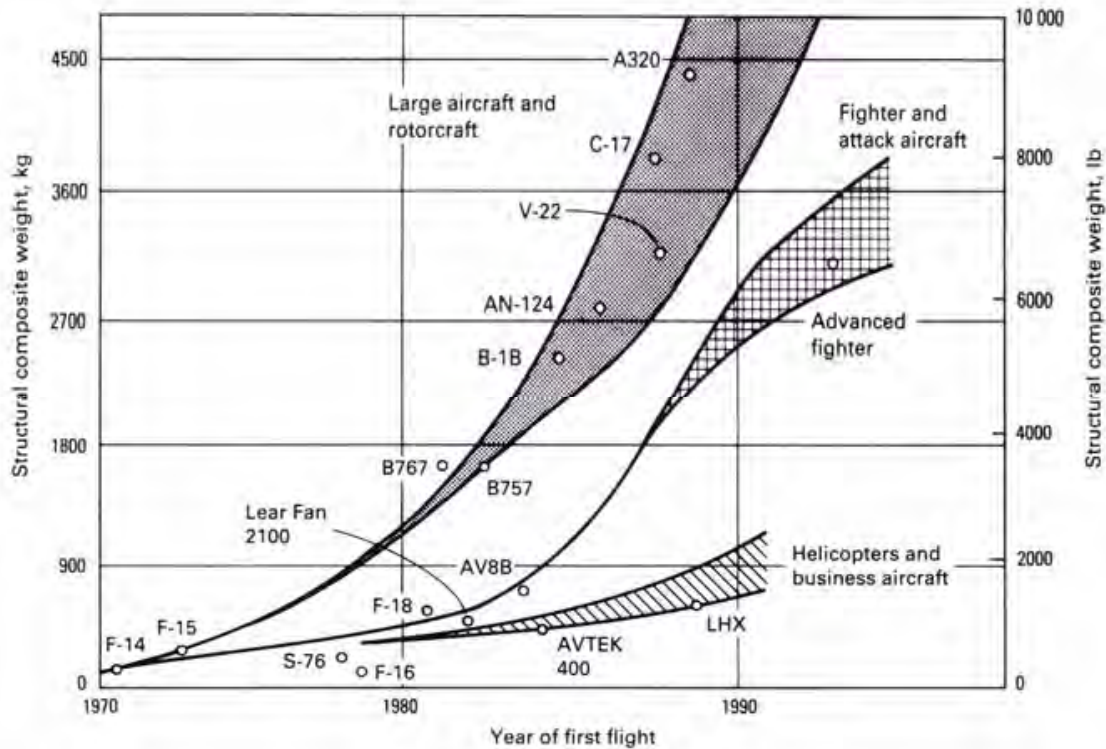


Figure 1-8 : Matériaux composites dans des structures d'avions

Dans la génération actuelle des avions civils, l'Airbus A380) contient des matériaux composites jusqu'à 22% de la masse structurale.

L'illustration la plus marquante concerne la comparaison entre le Boeing 777 et le 787. En pourcentage de la masse structurale, le 777 contient 12% de composites et 50% d'aluminium tandis que le 787 contient 50% de composites et 20% d'aluminium. La répartition des matériaux sur le Boeing 787 est montrée dans la Figure 1-9.[7]



Figure 1-9: Répartition des matériaux sur le Boeing 787

La transition des matériaux composites de l'expérience de laboratoire à l'usage pratique dans la production des avions militaires et civils est une réalité. Des progrès ont passé de l'aviation militaire à l'aviation commerciale, et aujourd'hui à la communauté d'aviation générale. Ces progrès représentent la croissance de la confiance en l'usage des composites et la reconnaissance des avantages en termes de coût et de performance associés à ces matériaux.

1.5.2. Industrie des articles de sport et de loisir :

De par leur légèreté, leur bonne tenue à la fatigue statique' et dynamique et leur stabilité dimensionnelle, les composites sont des matériaux idéaux pour la fabrication et la conception de très nombreux d'articles de sport et de loisirs tels que les skis et les bâtons, les raquettes de tennis, les cannes à pêche et de hockey, les planches à voiles et leurs mâts, les voiliers de plaisance, les aies, les cadres de vélos, des instruments de musique, ... au lieu du bois qui ne pouvait plus taire face à la demande créée par la civilisation des loisirs, ou l'aluminium qui ne correspondait plus aux critères modernes de performance et d'endurance.

De nombreux résultats d'études confirment le haut degrés d'amortissement des vibrations des skis sur neige qui confère au skieur le confort tout en conservant au produit ses caractéristiques essentielles. De plus, les matériaux composites permettent de concevoir des jaquettes légères, très rigides et excellentes eu langue dynamique qui confèrent au joueur une moindre sollicitation des muscles du bras et donc de moindre fatigue et plus de confort.[8]

1.5.3. Industrie des transports terrestres et maritimes :

L'intégration des matériaux composites dans l'industrie de l'automobile et des transports terrestres a pu réduire substantiellement la consommation de carburant au moyen de l'économie du poids obtenu. Les applications sont très nombreuses dans le domaine des transports, même ferroviaires, avec la fabrication de nombreux éléments de carrosserie et des boucliers amortisseurs de choc placés à l'avant des motrices des T.G.V. et qui présentent des performances supérieures en matière d'absorption d'énergie.

La société LOHEAC de transports routiers a pu réduire substantiellement sa consommation de carburant grâce à l'économie du poids obtenue en remplaçant les cabines conventionnelles de ses tracteurs par de nouveaux éléments moulés en une seule pièce. Cette innovation a permis de réduire le poids de la cabine de 875 Kg. équipée en acier, à 455 Kg seulement et de présenter une plus grande solidité et une meilleure résistance aux dégâts [9].

Le saut technologique, réalisé grâce à l'introduction des matériaux composites dans la construction navale, a consacré une évolution fondamentale par rapport aux techniques de

construction traditionnelle en bois. L'adoption de tels matériaux dans la construction des coques des bateaux a permis de procurer à la structure une haute résistance à l'usure et aux chocs répétés dans les vagues et aux collisions encaissées avec les corps flottants.

L'Introduction des matériaux composites, tels que ceux renforcés par la fibre aramide kevlar 49 associée à la fibre de verre-E conduisant à des propriétés mécaniques supérieures, a permis de diminuer le poids des structures de bateaux rapides (patrouilleurs, bateaux d'intervention ou de service) tout en ayant une résistance suffisante afin d'avoir pour résultat soit une augmentation de la vitesse pour une puissance donnée, soit une meilleure rentabilité pour la même vitesse ou soit l'utilisation d'une motorisation moins puissante.

CHAPITRE 2

Techniques d'Homogénéisation des Matériaux Composites

Chapitre II

Techniques d'homogénéisation des matériaux composites

2.1 Introduction

La voie d'étude la plus réalisée et la plus naturelle pour les matériaux composites est de considérer ces dernières comme des matériaux macroscopiquement homogènes. Cette technique, qui est connue sous le nom d'homogénéisation. On va donc présenter les techniques d'homogénéisation des matériaux composites et de fournir des résultats sur le composite homogène à partir de la connaissance des caractéristiques thermomécaniques des constituants et de la disposition des renforts. Les calculs seront développés dans les domaines de comportement élastique, et viscoélastique linéaires.

A une échelle suffisamment petite, tous les matériaux sont hétérogènes, même les matériaux communément appelés homogènes. Cependant, lors de la conception d'une structure macroscopique, l'échelle est si grande que l'on observe une moyenne statistique des propriétés microscopiques et il est licite de faire l'hypothèse de continuité de la matière. Une fois l'hypothèse de continuité est admise, le concept d'homogénéité s'en déduit. Le milieu homogène est celui qui possède des propriétés identiques en chaque point.

Pour l'ingénieur, le concept d'hétérogénéité intervient chaque fois que les propriétés varient en fonction du point. Cette variation peut être soit continue, soit discontinue, ce qui est le cas dans les matériaux composites. Pour un matériau composite, les propriétés ponctuelles subissent des discontinuités au passage des interfaces entre les différentes phases constituantes qui, par contre, sont généralement considérées comme homogènes et isotropes.

Supposons que l'on ait une phase notée 2, dont les inclusions sont dispersées dans une phase notée 1 formant ce qu'on appelle la matrice. Il existe généralement une *dimension caractéristique de l'hétérogénéité*. En pratique, cette distance est une moyenne qui détermine le reflet d'une distribution statistique. Par exemple, pour un composite unidirectionnel, la dimension caractéristique est la distance entre deux fibres. Supposons que l'échelle de la non-homogénéité soit petite en comparaison de l'échelle de la structure et de la distance caractéristique avec laquelle les charges et les conditions aux limites varient. Supposons également que cette échelle reste assez grande pour que l'on puisse toujours appliquer une théorie des milieux continus. On peut alors exhiber une *échelle représentative pour un calcul de moyenne de dimension* d à partir de laquelle les propriétés du matériau peuvent être moyennées avec une bonne précision. Si les propriétés effectives déduites de l'analyse de tout l'échantillon

de dimension d sont indépendantes de l'endroit où il est prélevé, on parle d'*homogénéité statistique*. L'échelle à laquelle on fait le calcul de moyenne se situe entre l'échelle microscopique (les constituants) et l'échelle macroscopique (la structure), de sorte qu'elle est appelée par certains auteurs *échelle mésoscopique ou miniscopique*. Si une telle dimension existe et si on peut parler d'homogénéité statistique, le matériau peut être considéré comme homogène et le calcul de la structure globale peut être réalisé avec ses propriétés moyennes. On parle alors d'*homogénéité macroscopique*. Le processus par lequel un matériau hétérogène à l'échelle microscopique est "rendu homogène" est encore appelé le processus d'*homogénéisation*.

L'approche du comportement de tout composite peut se faire à deux niveaux :

- la *macromécanique* qui assimile le composite (ou un de ses éléments comme le pli du stratifié) à un *matériau homogène équivalent* et représente ses propriétés par des grandeurs effectives comme, par exemple, les constantes élastiques de l'ingénieur que sont les modules et coefficients de Poisson ;

Donc la macromécanique propose des relation entre les contrainte et les déformations externes appliqué ou subie par la composite.

- la *micromécanique* qui développe des solutions pour *estimer les grandeurs effectives* précédentes à partir des propriétés des composants, de la taille, de la forme de la fraction volumique et de l'arrangement des renforts.

Donc la micromécanique lie les propriétés des constituants a celle composite.

2.2. La théorie micromécanique

L'utilisation des définitions opérationnelles de la science des matériaux pour modéliser et pour calculer la valeur des coefficients homogénéisés fait l'objet de la théorie micromécanique. Depuis les années 60, l'analyse micromécanique a fait l'objet de nombreux travaux dont les principaux résultats peuvent être trouvés dans plusieurs ouvrages de synthèse : Hashin [10], Christensen [11] ou Aboudi [12] par exemple. L'approche micromécanique étudie le comportement d'un élément de volume représentatif (V.E.R) au moyen des outils de la mécanique des solides en faisant éventuellement des hypothèses

On distingue deux approches possibles pour déterminer les coefficients moyens. Dans l'approche directe, les coefficients élastiques moyens E_{ij}^* et S_{ij}^* sont ceux qui relient les déformations moyennes $\bar{\epsilon}_{ij}$ et les contraintes moyennes $\bar{\sigma}_{ij}$ sur un volume représentatif de dimension

$$\bar{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}^* \bar{\epsilon}_{kl} \quad (2.1)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = S_{ijkl}^* \bar{\sigma}_{kl} \quad (2.2)$$

Pratiquement, on les détermine en appliquant des conditions de contrainte ou de déformation sur la frontière appelées *conditions aux limites "homogènes"*, c'est-à-dire des conditions aux limites qui produiraient des champs de déformation ou de contrainte homogènes dans un corps homogène. Le théorème de la déformation moyenne Aboudi montre que l'application de conditions "homogènes" de déformation sur la frontière d'un échantillon de référence de volume V produit une déformation moyenne identique à celle que l'on applique sur la frontière $\bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}^0$. Dans ces conditions, il suffit de calculer les contraintes moyennes pour des déplacements homogènes bien choisis, pour déterminer les coefficients élastiques moyens. On obtient un résultat similaire, connu sous le nom de théorème de la contrainte moyenne, lorsqu'on applique des conditions aux limites "homogènes" sur les contraintes : $\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^0$.

La seconde manière de procéder est de passer par les grandeurs énergétiques. L'*approche énergétique* se base sur le théorème du travail virtuel, écrit dans le cas particulier de conditions aux limites homogènes :

$$U_\varepsilon = \frac{1}{2} E_{ijkl}^* \bar{\varepsilon}_{ij} \bar{\varepsilon}_{kl} = w_\varepsilon V \quad (2.3)$$

$$U_\sigma^c = \frac{1}{2} S_{ijkl}^* \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{kl} = w_\sigma^c V \quad (2.4)$$

Où w_ε et w_σ^c sont les densités d'énergie calculées par unité de volume de référence de volume V . Il suffit alors d'appliquer des conditions aux limites homogènes bien choisies et de calculer l'énergie élastique sur le volume de référence pour déterminer les coefficients homogénéisés. On peut démontrer que l'approche énergétique est équivalente à l'approche directe

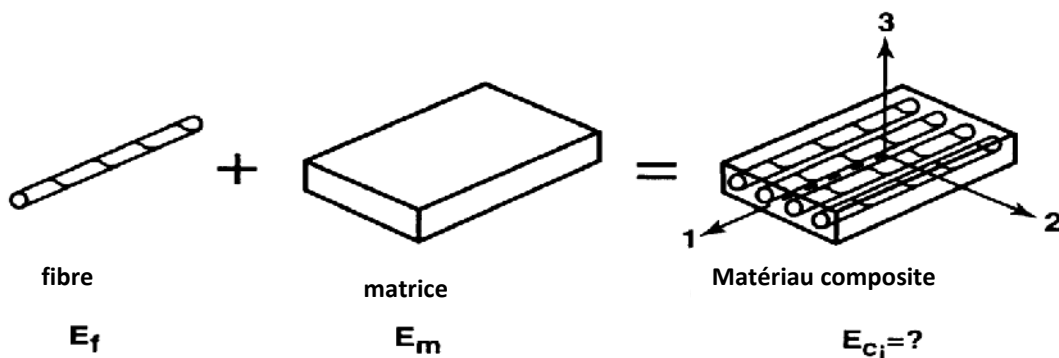


Figure 2-1 détermination des caractéristiques du matériau composite à partir de celles ses constituants

2.3 Homogénéisation

2.3.1 Notion d'homogénéisation d'un composite quelconque

Les propriétés d'un matériau composite : sont déterminées, en premier lieu par quatre types d'informations présentent ou non un caractère aléatoire suivant la nature du matériau :

- **la géométrie des inclusions**
- **la répartition des inclusions** qui est en fait toujours aléatoire quel que soit le soin apporté à la fabrication,
- **les propriétés physiques des inclusions,**
- **la nature de l'interface entre les différentes inclusions.**

Dans les modèles classiques d'homogénéisation, seules les trois premières propriétés sont prises en considération, la quatrième étant idéalisée en admettant que l'interface est parfaite, c'est-à-dire que les efforts et les déplacements sont supposés continus d'une inclusion à l'autre. Il faut cependant noter que l'interface est le point crucial des propriétés des matériaux composites car d'elle dépendent pratiquement toutes les propriétés [13]. Cette interface est particulièrement travaillée avec soin dans les composite réfractaire (C/C, Si/Al, etc.) pour éviter la rupture et la propagation des fissures. Il faut également souligner que les propriétés physique ne sont aléatoires que par la répartition et la géométrie des inclusions et sont définies au point x de la structure Ω de la manière suivante :

$$P\sigma_{ij}(x, \sigma_{ij})d\sigma_{ij}$$

Est la probabilité de trouver au point x la structure composite Ω , la composante d'ordre ij du tenseur des contraintes $\sigma = (\sigma_{ij})$ comprise entre σ_{ij} et $(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij})$;

$$P\rho(x+\rho) d\rho$$

est la probabilité de trouver au point x une masse volumique ρ et $(\rho + d\rho)$.

La contrainte moyenne au point x et la masse volumique moyenne au point x sont alors données par les deux espérances mathématiques suivantes :

$$E[\sigma_{ij}(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{ij} P\sigma_{ij}(x, \sigma_{ij}) d\sigma_{ij} \quad (2.5)$$

$$E[\rho(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) P\rho(x, \rho) d\rho \quad (2.6)$$

Enfin, on prendra garde de ne pas confondre phases et constituants d'un matériau. On entend par nombre de constituants N_C le nombre minimal de matériau constituant le composite et par nombre de phases N le nombre minimal de constituants ayant les mêmes propriétés physique dans un repère donné :

$$N_C \leq N \quad (2.7)$$

Un stratifié dont le motif comporte par exemple quatre plis constitués d'un même matériau anisotrope orienté respectivement à $0^0, +45^0, -45^0, 90^0$ contient 1 constituant et 4 phases

2.3.2 Volume élémentaire représentatif :

Dans la réalité, il est illusoire de vouloir connaître la densité de probabilité d'un champ (contrainte, masse volumique, déformation, etc.) en chaque point x de la structure. L'évolution spatiale de cette dernière traduit l'ordre régnant dans le matériau et cette densité de probabilité est considéré comme définie par la loi conjointe de sa variable aléatoire sur n points $[p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n)]$ par exemple pour la masse volumique]. On parle ainsi d'une description à $1, 2, \dots, n$ points [14]. Un autre point de vue consiste à apprécier loi de probabilité au point x par ses divers moments probabilistes : moment d'ordre 1 ou espérance, moments d'ordre 2 centré ou variance, etc. suivant le degré de connaissance de ces moments ($1, 2, 3, n$) on parle de degré d'homogénéité du matériau [15]. On se contente en général du degré 1 qui est celui relatif à la moyenne ou à l'espérance mathématique qui introduit la notion classique d'homogénéité du matériau composite, ou du matériau statistiquement homogène. Cette notion d'homogénéité est liée à la possibilité de définir dans le matériau un volume élémentaire représentatif (V. E. R.) sur lequel moyenne spatiale du champ considéré coïncide avec la moyenne probabilité du même champ au point x . x est un point particulier de VER., en générale le centre géométrique, et ce volume élémentaire représentatif est indépendant du point x : le V.E.R. est une sorte de masque que l'on peut poser en 'importe quel point du matériau. Cette notion d'homogénéité fait donc appel à la notion générale d'ergodicité qui consiste à remplacer les moyennes probabilistes par les moyennes spatiales (ou autre suivant la théorie) sur le V.E.R. le lien entre les milieux aléatoires et les milieux périodiques (milieux totalement ordonnés dans lesquels le V.E.R. est la période) à été réalisé par Kroner en 1980 [16].

Le volume élémentaire représentatif (V.E.R.) joue pour les matériaux hétérogènes le rôle classique de l'élément de volume de la mécanique des milieux continus. Afin de traduire la

notion d'homogénéité d'une grandeur ou de la valeur efficace de cette grandeur ; on distingue classiquement deux échelle :

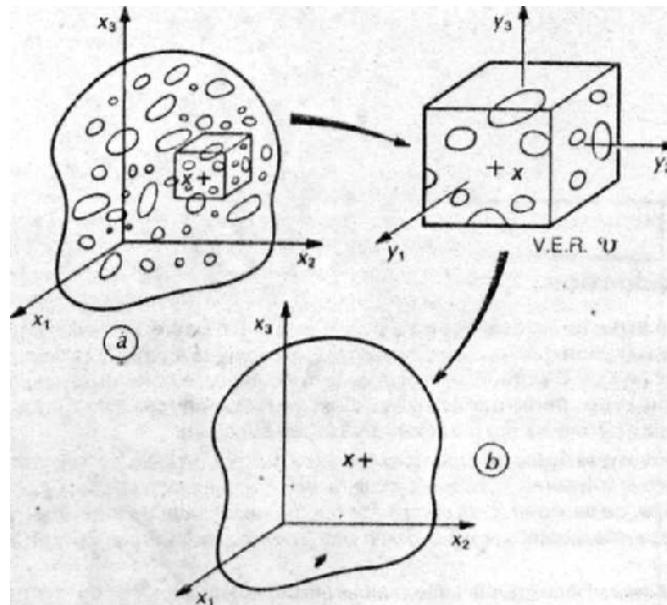


Figure 2.2 Milieu hétérogène (a) et milieu macroscopiquement (b) reliés V.E.R

- L'échelle macroscopique (notée x) qui est un point particulier du V.E.R.
- L'échelle microscopique (notée y) qui décrit.

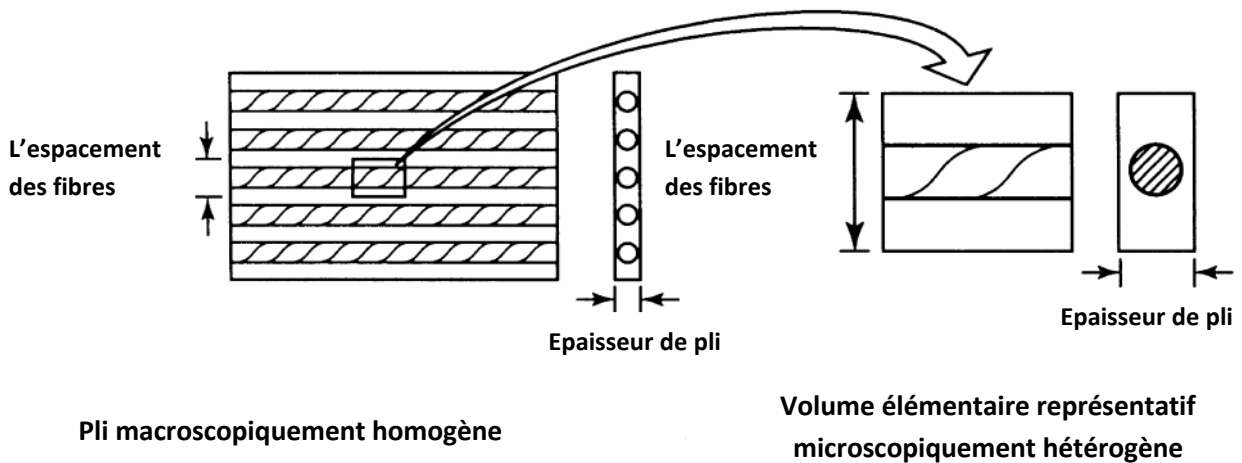


Figure 2-3 Volume élémentaire représentatif

Le milieu composite est relié au milieu homogène ou macroscopiquement homogène (Figure 2-3) par le choix ou la modélisation du V.E.R. qui définit en premier lieu les différentes théories de l'homogénéisation. Il est important de souligner que le V.E.R. ne présente aucun caractère aléatoire et n'est pas nécessairement un prélèvement du milieu composite. Les modèles de V.E.R. les plus couramment rencontrés sont :

- des assemblages de sphères ou de cylindre à base hexagonale ou circulaire qui respectent les pourcentage volumique de chaque phase ;
- des milieux infinis qui sont intéressants pour les faibles concentrations de particules et sont connus sous le nom de modèles auto-cohérents (self-consistent) [17] ;
- des cellules ou périodes de base dans le cas de milieux à structure périodique (stratifiés, tissus, etc.) [18].

Les milieux périodiques méritent une attention particulière, non seulement à cause de leur application en construction (milieux à haute performance) mais aussi à cause des méthodes mises en œuvre pour les étudier. En effet, lorsque les développements possèdent un caractère très rigoureux [19], même s'ils n'apportent pas de résultats nouveaux, ils sont très efficaces dans la justification des diverses approximations rencontrées.

La notion générale d'ergodicité va se traduire sur le V.E.R., pour les contraintes et les déformations, par les égalités suivantes :

$$\begin{cases} E[\sigma_{ij}(x)] = \overline{\sigma_{ij}}(x) \\ E[\varepsilon_{ij}(x)] = \overline{\varepsilon_{ij}}(x) \end{cases} \quad (2.8)$$

Dans lesquelles les moyennes $\overline{\sigma_{ij}}$ et $\overline{\varepsilon_{ij}}$ sont définies

$$\text{par : } \begin{cases} \overline{\sigma_{ij}}(x) = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(x, y) dy & \text{: contraintes macroscopiques} \\ \overline{\varepsilon_{ij}}(x) = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}(x, y) dy & \text{: déformations macroscopiques} \end{cases} \quad (2.9)$$

Avec V volume du V.E.R. et $dy = dy_1 dy_2 dy_3$, de l'élément de volume correspondant.

La loi de comportement thermomécanique effective du milieu homogène du composite sera obtenue en liant la contrainte macroscopique $\overline{\sigma}(x) = (\overline{\sigma_{ij}}(x))$ à la déformation

macroscopique $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) = (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}(\mathbf{x}))$ en utilisant les relations (2.9) et les lois locales liant $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ à $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Cette opération est connue sous le nom de processus d'homogénéisation.

Le processus inverse, le plus délicat, qui permet d'obtenir le champ local $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ et $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ en fonction des grandeurs macroscopiquement $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x})$ et $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x})$ est dit processus localisation ou micromécanique. Le but recherché est résoudre un système d'équation qui traduit l'équilibre du V. E. R. et dont les inconnues sont les microcontraintes $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et les microdéplacements $U(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dont les données sont les grandeurs moyennes $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}^0(\mathbf{x})$ et $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}^0(\mathbf{x})$.

Les problèmes statiques sont régis par les équations d'équilibre locales suivantes :

$$\triangleright \text{loi de comportement locale} \quad (2.10)$$

$$\triangleright \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_j} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \text{ dans } \mathbf{v} \text{ (équilibre locale)} \quad (2.11)$$

$$\triangleright \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} = \boldsymbol{\sigma}_{ij}^0 \text{ ou } \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij} = \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^0 \quad (2.12)$$

Avec
$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_i}{\partial y_j} + \frac{\partial U_j}{\partial y_i} \right]$$

Un calcul simple à partir de la définition des dérivées partielles [20] permet d'établir que :

$$\frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}}{\partial x_j} = \left[\frac{\boldsymbol{\sigma}_{ij}}{\partial y_j} \right] \quad i=1, 2, 3 \quad (2.13)$$

La relation (2.13) montre donc que, dans le cas général, la relation d'équilibre locale implique l'équilibre du milieu homogène représentatif. Signalons que la présence de champ de déplacement discontinus (théorie des charge limites [21], présence de trous [3]) amène à définir la déformation moyenne par une relation plus générale (*) que la définition (2.9) et donnée par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2V} \int_V [U_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) n_j + U_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) n_i] dS \quad (2.14)$$

Avec $\mathbf{n} = (n_i)$ vecteur normal unitaire extérieur à la frontière V du V. E. R. V

(*) le théorème de la divergence pour les fonction continues :

$$\int_V \frac{\partial U_i}{\partial y_j} dy = \int_V U_i n_j ds$$

Le problème de mécanique défini par les relation (2.10), (2.11), (2.12), est différent d'un problème classique car le chargement s'effectue en moyenne sur la frontière V ce qui n'est pas

véritablement une condition aux limites. cette absence de condition aux limites doit être compensée par des conditions aux frontières du V.E. R. qui reproduisent aussi fidèlement que possible l'état in Situ du V.E.R. dans le milieu hétérogène. La différence théorique d'homogénéisation diffère non seulement par le choix du V.E. R. mais aussi par le choix des conditions à la frontière à appliquer sur bord ν du V. E. R.

2.3.3 Conditions aux limites sur le V.E.R.

Le volume élémentaire représentatif joue, alors, le rôle classique de l'élément de volume en mécanique des milieux continus. Il doit donc comporter le contenu énergétique de l'élément de volume, propriété que l'on peut traduire par l'égalité entre les moyennes des contraintes et des déformations par :

$$(\overline{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}) = \bar{\sigma}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij} \quad (2.15)$$

La relation (2.15) est connue sous le nom d'égalité de macro-homogénéité de Hill. Trois types de conditions aux limites sur le bord du V.E.R. sont classiquement envisagés pour remplacer les conditions (2.12) parce qu'elles respectent l'égalité de macro-homogénéité (2.15)

Le processus de micromécanique défini par les équations locales (2.10), (2.11), (2.12) s'écrit alors de la manière suivante :

➤ La loi de comportement locale (2.16)

➤ Equations d'équilibre locales dans ν :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_j} = 0, \quad i=1, 2, 3 \quad (2.17)$$

➤ Conditions aux limites sur :

$$\text{-contraintes homogènes : } \sigma_{ij}n_j = \sigma_{ij}^0 n_j, \quad i=1, 2, 3 \quad (2.18)$$

Ou

$$\text{-déformations homogènes : } U_i = \varepsilon_{ij}^0 n_j, \quad i=1, 2, 3 \quad (2.19)$$

Ou

-condition de périodicité :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{ij}n_j \text{ Antipériodique en } y = (y_i) : U_i = \varepsilon_{ij}^0 y_j + U_i^* \\ U_i^* \text{ périodique en } y = (y_i) \end{array} \right\} \quad (2.20)$$

Dans ces conditions les tenseurs $\boldsymbol{\sigma}^0 = (\sigma_{ij}^0)$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^0 = (\varepsilon_{ij}^0)$ sont des données que nous allons interpréter, et $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_i)$ est le vecteur normal unitaire extérieur à v

Dans les conditions (2.20), propres aux milieux périodiques, l'antipériodicité du vecteur contrainte provient du fait que, sur les faces opposées, les vecteurs contraints sont opposés. Il est clair que dans de tels milieux les champs de contrainte $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ou de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ne sont pas parfaitement périodiques mais que leurs fluctuations sont périodiques en \mathbf{y} à une distance suffisante du bord de la structure. En générale, les conditions aux limites (2.18), (1.19), (2.20), ne sont pas équivalentes entre elle et aucune n'est équivalente aux conditions de périodicité (2.20) dans le cas particulier des milieux périodiques.

L'intégration des relations d'équilibre locale (2.17) montre que la contrainte moyenne sur le V.E.R. a pour expression :

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int \frac{\partial(\sigma_{ik}y_j)}{\partial y_k} dy \quad (2.21)$$

En appliquant le théorème de la divergence à la relation ci-avant et en tenant compte des conditions de contraintes homogènes (2.18), il vient :

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^0 \quad (2.22)$$

L'égalité (2.14) , compte tenu des conditions en déformations homogènes ou périodicité (2.19) ou (2.20) , montre de même que la déformation moyenne dans le V.E.R. a pour valeur :

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 \quad (2.23)$$

Les égalités (2.22) et (2.23) permettent donc d'interpréter d'une part les données σ^0 et ε^0 comme des valeurs moyennes et montrent d'autre part que l'égalité de macro-homogénéité est satisfaite. En effet, les équations d'équilibre locales (2.17) et le théorème de la divergence fournissent la relation suivante :

$$\overline{(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij})} = \frac{1}{2V} \int (U_i n_j + U_j n_i) dS \quad (2.24)$$

Si bien que

$$(\overline{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}) = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij}^0 \bar{\varepsilon}_{ij} \text{ [condition (2.18)]} \\ \bar{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij}^0 \text{ [conditions (2.19) ou (2.20)]} \end{array} \right\} = \bar{\sigma}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} \quad (2.25)$$

L'égalité de macro-homogénéité s'interprète comme le principe des travaux virtuels sur le V.E.R. le travail moyen des efforts intérieurs [premier membre de l'égalité (2.15)] est égale au travail moyen des efforts extérieurs [second membre de l'égalité (2.15)].

2.4. Calcul des coefficients homogénéisés

La prévision des constantes élastiques d'un matériau composite s'effectue à partir des caractéristiques des constituants et leur distribution.

Les constituants du pli : renfort fibreux et matrice, sont supposés continus, homogènes, isotropes et linéairement élastiques avec une répartition régulière des renforts, une parfaite adhésion interfaciale et les fibres sont parfaitement alignées. Pour sa simplicité et ses résultats satisfaisants, on retient la méthode de la loi des mélanges

2.4.1 Module d'élasticité longitudinale E_1

Le pli composite, schématisé par la figure (2-4) est considéré comme un mélange de deux matériaux « renfort + matrice » dont le chargement est dans la direction-1

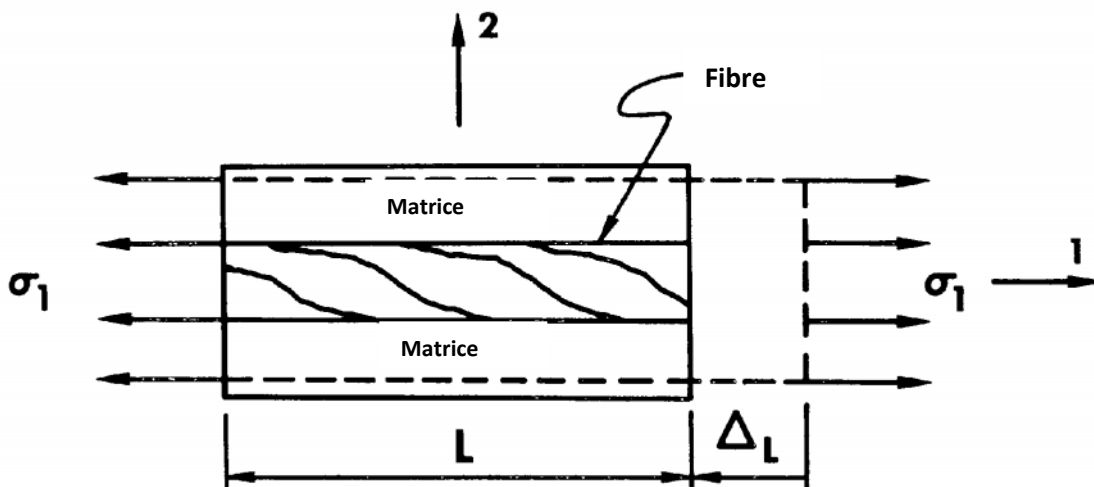


Fig2.3: chargement dans la direction des fibres

La charge appliquée dans le sens longitudinale des fibres sera partagée entre les deux constituants du composite :

$$p = \sigma_1 A = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m \quad (2.26)$$

La déformation longitudinale ε_1 égale à :

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta L}{L} \quad (2.27)$$

La contrainte σ_1 appliquée sur l'aire A de la section transversale du composite :

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1 \quad (2.28)$$

De même, sous l'action de la contrainte σ_1 , la matrice et la fibre subiront la même déformation ε_1 :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_f = \varepsilon_m \quad (2.29)$$

Par conséquent, la contrainte σ_f agissant sur l'aire de la section transversale de la fibre A_f sera égale à :

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_1 \quad (2.30)$$

Ainsi que la contrainte σ_m qui agit sur l'aire de la section transversale de la matrice A_m :

$$\sigma_m = E_m \varepsilon_1 \quad (2.31)$$

Par substitution des relations (2.28), (2.30) et (2.31), on obtient :

$$E_1 = E_f \frac{A_f}{A} + E_m \frac{A_m}{A} \quad (2.32)$$

Dont les fractions volumiques de renfort et de la matrice sont :

$$V_f = \frac{A_f}{A} \quad V_m = \frac{A_m}{A}$$

Et la relation précédant devient :

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m \quad (2.33)$$

Cette équation, dite LOI DES MELANGES, est une analyse simplifiée de la distribution des contraintes dans un composite, et graphiquement (figure 2-5) elle est représentée linéairement et est variée à partie de E_f et E_m et dont V_f varie de 0 à 1 [23]

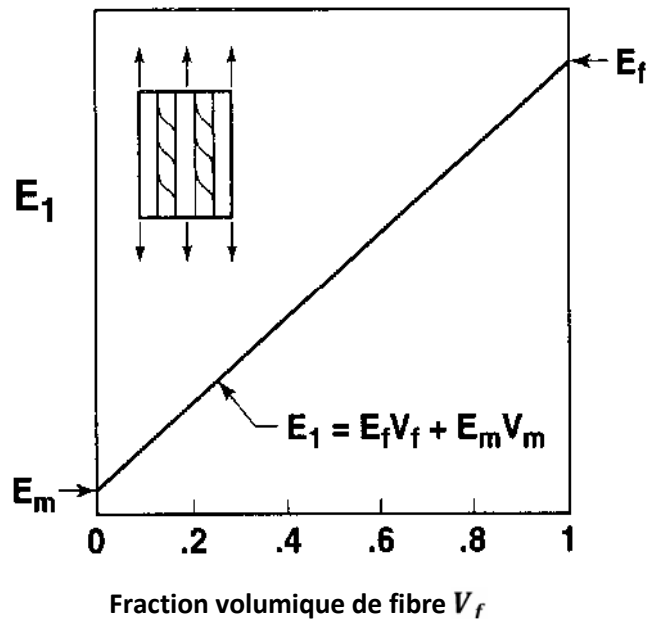


Figure 2-5 : Variation d' E_1 par apport de fraction volumique de fibre V_f

2.4.2. Détermination du module dans la direction transverse aux fibres E_2 :

Le pli composite, représenté par la figure 2-6 est chargé suivant la direction perpendiculaire aux fibres.

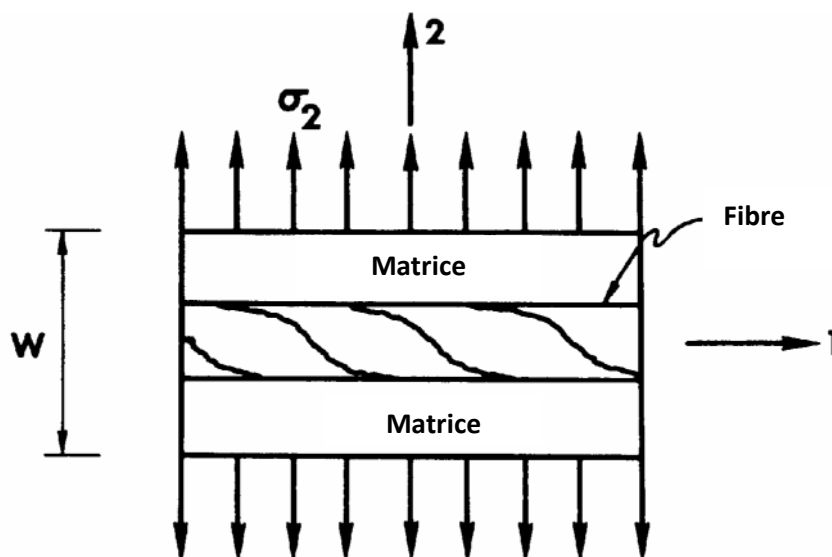


Figure 2-6 : chargement dans la direction transverse aux fibres

Par conséquent, la déformation de fibre et de matrice sous l'effet de la contrainte σ_2 :

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_2}{E_f} \quad \varepsilon_m = \frac{\sigma_2}{E_m} \quad (2.34)$$

La contrainte normale au composite σ_2 occasionnée par le chargement, est supposée la même pour chaque constituant :

$$\sigma_2 = \sigma_f = \sigma_m$$

La variation transverse de l'épaisseur du pli est due à celle des constituants. En tenant compte des fractions volumiques correspondantes, on aura :

$$\begin{aligned} \Delta W &= \varepsilon_2 W = V_f W \varepsilon_f + V_m W \varepsilon_m \\ \varepsilon_2 &= \frac{\Delta W}{W} = V_f \varepsilon_f + V_m \varepsilon_m \end{aligned} \quad (2.35)$$

En substitution la relation de déformation (2.34) dans (2.35), on aura :

$$\varepsilon_2 = V_f \frac{\sigma_2}{E_f} + V_m \frac{\sigma_2}{E_m} \quad (2.36)$$

Mais pour la relation contrainte-déformation macroscopique :

$$\sigma_2 = E_2 \varepsilon_2 = E_2 \left[\frac{V_f \sigma_2}{E_f} + \frac{V_m \sigma_2}{E_m} \right] \quad (2.37)$$

D'où enfin:

$$E_2 = \frac{E_f E_m}{V_f E_f + V_m E_m} \quad (2.38)$$

2.4.3. Coefficient de poisson :

En considérant de nouveau le pli composite chargé suivant le sens des fibres.

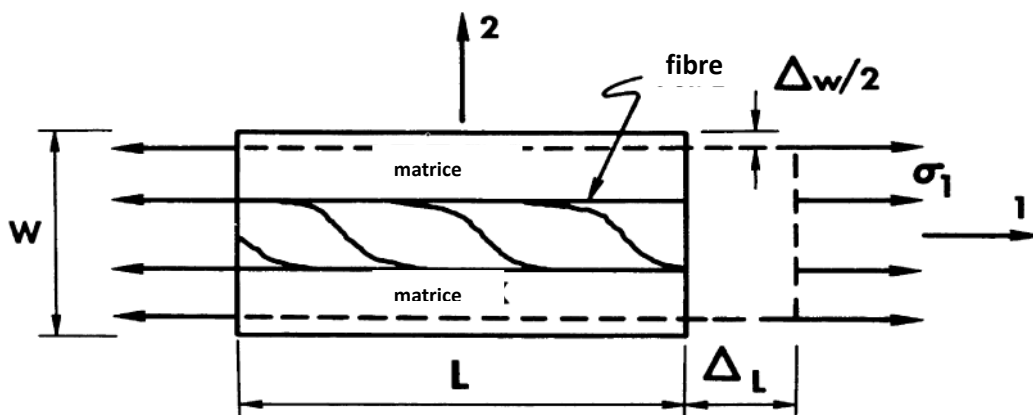


Figure 2-7 chargement selon le sens des fibres

Le coefficient de poisson ν_{12} caractérise, comme l'indique la figure 2-7, par une contraction dans le sens travers du pli lorsqu'on le sollicite en traction suivant sa direction longitudinale :

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad (2.39)$$

La déformation du composite dans sa direction transversale occasionnée par l'action de la contrainte σ_1 , sera alors exprimée par :

$$\varepsilon_2 = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_1 = -\nu_{12} \varepsilon_1 \quad (2.40)$$

Et qui se résulte de la déformation des deux constituants suivant les teneurs de volume correspondantes :

$$\varepsilon_2 = -\frac{\Delta w}{w} = \varepsilon_m V_m + \varepsilon_f V_f \quad (2.41)$$

Dont les déformations transverses de la fibre et de la matrice sont écrites respectivement :

$$\varepsilon_m = -\frac{\nu_m}{E_m} \sigma_1 \quad \varepsilon_f = -\frac{\nu_f}{E_f} \sigma_1 \quad (2.42)$$

En tenant compte des relations(2.41) et (2.42) on obtient :

$$\nu_{12} = \nu_m V_m + \nu_f V_f \quad (2.43)$$

C'est la loi des mélanges pour les coefficients des poissons et lois de leurs tracés est une manière similaire.de celle de la loi des mélanges pour le coefficient de Poisson et est tracée d'une manière similaire à celle de E_1 dans la figure 2-8.

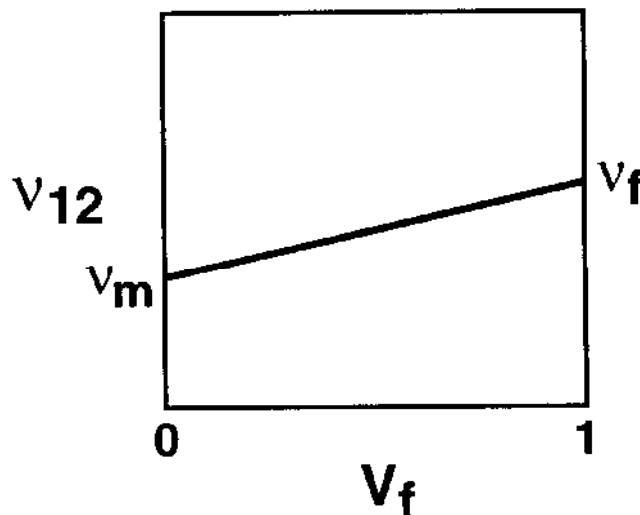


Figure 2-8 la variation de ν_{12} à fraction volumique de fibre

2.4.4. Détermination de module de cisaillement G_{12}

Le module de cisaillement G_{12} dans le plan d'un pli, est déterminé dans la mécanique des matériaux approche en présumant que les contraintes de cisaillement sur la fibre et de la matrice sont les mêmes. la figue 2-9, permet de mettre en évidence le module de cisaillement G_{12} .

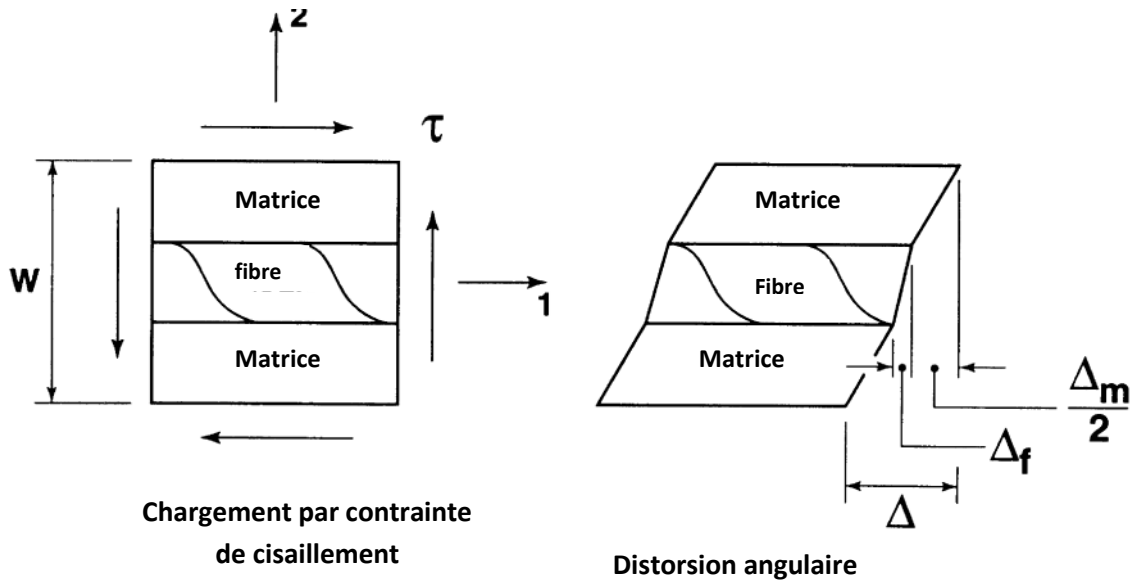


Figure 2-8 le volume élémentaire représentative de chargement de cisaillement

Cette contrainte de cisaillement est supposée la même pour la matrice et pour le renfort :

$$\tau = \tau_m = \tau_f$$

Mais elle entraîne des distorsions angulaires différentes, c'est-à-dire :

$$\gamma_m = \frac{\tau}{G_m} \quad \gamma_f = \frac{\tau}{G_f} \quad (2.44)$$

D'autre part, la déformation globale du pli composite peut être exprimée par :

$$\Delta = \gamma W = \frac{\tau}{G_{12}} W \quad (2.45)$$

Et la déformation dans chaque constituant est :

$$\Delta_m = V_m \gamma_m W \quad \Delta_f = V_f \gamma_f W \quad (2.46)$$

Elle est supposée la résultat de la déformation :

$$\Delta = \Delta_m + \Delta_f$$

C'est à dire:

$$\gamma = \gamma_m V_m + \gamma_f V_f \quad (4.47)$$

En substitution l'équation (2.44) dans (4.47) on trouve :

$$\gamma = \frac{\tau}{G_{12}} = V_m \frac{\tau}{G_m} + V_f \frac{\tau}{G_f} \quad (2.48)$$

Finalement :

$$G_{12} = \frac{G_f G_m}{G_m V_f + G_f V_m} \quad (2.49)$$

Qui a la même d'expression obtenue pour le module d'élasticité transversale E_2 .

$$\frac{G_{12}}{G_m} = \frac{1}{V_m + V_f (G_m / G_f)} \quad (2.50)$$

CHAPITRE 3

Caractérisation Micromécanique par Différent Modèle Mathématique

Chapitre III

Caractérisation micromécanique par différent Modèle mathématique

3-1 Introduction

L'évaluation de la rigidité des matériaux dans la domaine de la micromécanique (les approches des matériaux et d'élasticité à été considérée par Chamis et Sendeckyj[24] en différentes classes : analyse de compensation , la mécanique des matériaux approches, modèles auto-cohérents, techniques variationnelles utilisant les principes de bornage d'énergie, solutions exactes, statistiques approchées, méthodes des élément fini, approches semi-empiriques et théories de microstructure. Toutes (les approches ont l'objectif commun en la prédiction de la rigidité des matériaux composites, sauf les deux premières approches qui utilisent une partie ou l'ensemble des principes de la théorie de l'élasticité à des degrés divers, considérés ici comme des approches d'élasticité. L'objectif de ce chapitre se familiariser avec les théories de la micromécanique après les concepts de base introduites par l'utilisation de la mécanique typique de raisonnement des matériaux.

Les principes de l'énergie variationnel issue de la théorie de l'élasticité classique sont aussi utilisés pour déterminer les bornes supérieure et inférieure sur le module d'un pli. Cependant, cette approche conduit généralement à des bornes qui ne pourraient pas être suffisamment proche pour l'utilisation pratique. Aussi, tous les principes de la théorie d'élasticité sont invoqués pour déterminer les modules d'un pli. En raison de la complexité résultant du problème, des nombreuses techniques analytiques avancées et les procédures de résolution numérique sont aussi utilisées dans la théorie pour obtenir des solutions. Toutefois, les hypothèses faites dans ces analyses relatives à l'interaction entre les fibres et la matrice ne sont pas tout à fait réaliste. Il existe aussi l'approche de la contiguïté, les équations de Halpin-Tsai.

3.2 Techniques des bornes d'élasticité :

Paul [25] était apparemment le premier à utiliser des techniques variationnelle d'élasticité linéaire pour examiner les bornes sur les modules des matériaux multiphasiques. Son travail a été dirigé vers l'analyse des modules d'élasticité des métaux alliés plutôt que vers renforcé de fibres de matériaux composites. En conséquence, le traitement est pour un matériau composite isotrope faite de différents constituants isotrope. Le matériau composite est isotrope, car les constituants d'alliage sont uniformément dispersées et n'ont aucune orientation préférentielle. Le module de la matrice est E_m et le module du matériau dispersé est E_d , tandis que le module du matériau composite est E . Les fractions volumiques des constituants sont V_m et V_d tel que :

$$V_m + V_d = 1 \quad (3.1)$$

Bien évidemment, toute la relation pour le module composite, E , doit céder

$$\begin{aligned} \text{Et} \quad E &= E_m && \text{pour } V_m = 1 \\ E &= E_d && \text{pour } V_d = 1 \end{aligned}$$

Une relation le plus simple qui satisfait les restrictions ci-dessus est la loi des mélanges :

$$E = E_d V_d + E_m V_m \quad (3.2)$$

Dans lequel les composants du matériau composite sont censés de contribuer à la rigidité du composite en proportion directe de leur propre raideur et des fractions de volumique. La loi des mélanges sera illustrée afin de fournir une borne supérieure sur le module E du composite pour le cas particulier où

$$\nu_m = \nu_d = \nu \quad (3.3)$$

Une autre relation simple entre les modules des constituants du composite : $1/E_d$, doit convenir avec la conformité de la matrice $1/E_m$, lorsque $V_m = 1$ et à la conformité du matériau dispersé où $V_d = 1$. Le résultant de la loi des mélanges sera :

$$\frac{1}{E} = \frac{V_m}{E_m} + \frac{V_d}{E_d} \quad (3.4)$$

Dont la borne inférieure sur le module E de matériau composite sera définie.

Dans un essai de traction uniaxiale pour déterminer le module d'élasticité du matériau composite E , les contraintes et les déformations serrant supposées être macroscopiquement uniformes en harmonie avec les hypothèses de base que le matériau composite est macroscopiquement isotrope et homogène. Cependant, sur une échelle microscopique, les contraintes et les déformations sont non uniformes. Dans l'essai de traction uniaxiale :

$$E = \sigma / \varepsilon \quad (3.5)$$

Où σ est la contrainte uniaxiale appliquée et ε est la déformation axiale résultante. L'énergie de déformation résultant peut être écrite sous deux formes équivalentes:

$$U = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} V \quad (3.6)$$

$$U = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 V \quad (3.7)$$

3.2.1 Borne inférieure sur le module de Young

La base pour la détermination d'une borne inférieure sur le module d'Young est basée sur du principe de l'énergie complémentaire minimum qui peut être formulée en considérant les états de tractions (forces et moments) appliquées sur la surface d'un corps. Les contraintes $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \sigma_z^0, \tau_{xy}^0, \tau_{yz}^0, \tau_{zx}^0$ constituent qui satisfait les équations d'équilibre et elles respectent de les conditions aux limites spécifiées champ de contrainte admissible. U^0 est l'énergie de déformation de l'état de contrainte vis-à-vis $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \sigma_z^0, \tau_{xy}^0, \tau_{yz}^0, \tau_{zx}^0$ données par l'utilisation de la relation contrainte-déformation avec un simple réarrangement de la relation contrainte-déformation isotrope :

$$\sigma_x = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + \frac{E}{(1 + \nu)} \varepsilon_x \quad (3.8)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy}$$

Et l'expression de l'énergie de déformation est :

$$U = \frac{1}{2} \int (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV \quad (3.9)$$

Ensuite, L'énergie de déformation réelle U dans le corps en raison des charges spécifiées ne peut pas dépasser U^0 c'est-à-dire :

$$U < U^0 \quad (3.10)$$

Pour une borne inférieure sur le module d'Young apparent, E, on charge le spécimen d'essai dans la direction uniaxiale le champ de contraintes internes qui satisfait à ce chargement et à la contrainte permet d'écrire les équations d'équilibre :

$$\sigma_x^0 = \sigma \quad , \quad \sigma_y^0 = \sigma_z^0 = \tau_{xy}^0 = \tau_{yz}^0 = \tau_{zx}^0 = 0 \quad (3.11)$$

Nous savons bien qu'un tel état de contrainte uniforme ne peut pas exister dans tout le matériau composite, nous cherchons encore les implications d'une telle approximation. L'énergie de déformation pour la contrainte dans l'équation (3.11) est

$$U^0 = \frac{1}{2} \int_V \frac{(\sigma_x^0)^2}{E} dV = \frac{\sigma^2}{2} \int \frac{dV}{E} \quad (3.12)$$

Mais E n'est évidemment pas constant sur le volume, car la matrice a un module E_m par rapport au volume $V_m V$ et le matériau dispersé est de module E_d par rapport au volume $V_d V$ et V est le volume total. Donc,

$$\int_V \frac{dV}{E} = \int_{V_m V} \frac{dV}{E_m} + \int_{V_d V} \frac{dV}{E_d} = \frac{V_m V}{E_m} + \frac{V_d V}{E_d}$$

Donc :

$$U^0 = \frac{\sigma^2}{2} \left[\frac{V_m}{E_m} + \frac{V_d}{E_d} \right] V \quad (3.13)$$

Cependant, en vertu de l'inégalité $U < U^0$ et la définition de U dans l'équation (6)

$$\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} V \leq \frac{\sigma^2}{2} \left[\frac{V_m}{E_m} + \frac{V_d}{E_d} \right] V \quad (3.14)$$

Enfin,

$$\frac{1}{E} \leq \frac{V_m}{E_m} + \frac{V_d}{E_d} \quad (3.15)$$

$$E \geq \frac{E_m E_d}{V_m E_d + V_d E_m} \quad (3.16)$$

C'est une borne inférieure sur le module d'Young E des matériaux composites sur le plan des modules et des fractions volumiques des matériaux constitutifs. Notez que cette limite coïncide avec la valeur du module transversal aux fibres par l'approche de la mécanique des matériaux.

3.2.2 Borne supérieure sur le module de Young :

La base pour la détermination d'une borne supérieure sur le module d'Young est le principe d'énergie potentielle minimale qui peut être énoncé comme étant : les déplacements être spécifiés sur la surface du corps, sauf lorsque la traction correspondante est nulle. Les déformations $\varepsilon_x^* \varepsilon_y^* \varepsilon_z^* \gamma_{xy}^* \gamma_{yz}^* \gamma_{zx}^*$ peuvent être aussi compatibles avec n'importe quelle déformation qui remplit les conditions aux limites spécifiées au déplacement, et à un champ de contrainte admissible. On définit U^* comme étant l'énergie de déformation de l'état de déformation ε_x^* . Par l'utilisation des relations contrainte-déformation :

$$\sigma_x = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_x \quad (3.17)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}$$

Et l'expression de l'énergie de déformation :

$$U = \frac{1}{2} \int (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV \quad (3.18)$$

Ensuite, l'énergie de déformation réelle U dans le corps en raison des déplacements spécifiés ne peut pas dépasser U^* , c'est-à-dire :

$$U < U^* \quad (3.19)$$

Pour trouver une borne supérieure de module de Young, E , on soumet l'éprouvette dans la uniaxiale à un allongement ε_L où ε est la déformation moyenne et L est la longueur de

l'éprouvette. Le champ de déformation interne qui correspond à la déformation moyenne à la limite de l'éprouvette est :

$$\varepsilon_x^* = \varepsilon, \quad \varepsilon_y^* = \varepsilon_z^* = -\nu\varepsilon, \quad \gamma_{xy}^* = \gamma_{yz}^* = \gamma_{zx}^* = 0 \quad (3.20)$$

où ν est le coefficient de Poisson du matériau composite

Nous savons bien qu'un tel état de contrainte uniforme ne peut pas exister dans tout le matériau composite, nous cherchons encore les implications d'un tel rapprochement. Par l'utilisation des relations (3.17) exprimant les contraintes en fonction des déformations, on peut écrire le champ des contraintes dans la matrice :

$$\begin{aligned} \sigma_{x_m}^* &= \frac{1-\nu_m-2\nu_m\nu}{1-\nu_m-2\nu_m^2} E_m \varepsilon \\ \sigma_{y_m}^* &= \sigma_{z_m}^* = \frac{\nu_m-\nu}{1-\nu_m-2\nu_m^2} E_d \varepsilon \\ \gamma_{xy_m}^* &= \gamma_{yz_m}^* = \gamma_{zx_m}^* = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Et les contraintes dans le matériau dispersé est :

$$\begin{aligned} \sigma_{x_d}^* &= \frac{1-\nu_d-2\nu_d\nu}{1-\nu_d-2\nu_d^2} E_d \varepsilon \\ \sigma_{y_d}^* &= \sigma_{z_d}^* = \frac{\nu_d-\nu}{1-\nu_d-2\nu_d^2} E_d \varepsilon \\ \gamma_{xy_d}^* &= \gamma_{yz_d}^* = \gamma_{zx_d}^* = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

L'énergie de déformation dans le matériau composite est obtenue en substituant les déformations (3.20), et les contraintes (3.21) et (3.22), dans la relation de l'énergie de déformation (3.19), d'où :

$$U^* = \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{V_d} \frac{1-\nu_d-4\nu_d\nu+2\nu^2}{1-\nu_d-2\nu_d^2} E_d dV + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{V_m} \frac{1-\nu_d-4\nu_m\nu+2\nu^2}{1-\nu_m-2\nu_m^2} E_m dV \quad (3.23)$$

$$U^* = \frac{\varepsilon^2}{2} \left[\frac{1-\nu_d-4\nu_d\nu+2\nu^2}{1-\nu_d-2\nu_d^2} E_d V_d + \frac{1-\nu_d-4\nu_m\nu+2\nu^2}{1-\nu_m-2\nu_m^2} E_m V_m \right] V \quad (3.24)$$

Cependant, en vertu de l'inégalité $U < U^*$, et la définition de U dans l'équation (3.7) :

$$\frac{1}{2} E \varepsilon^2 V \leq \frac{\varepsilon^2}{2} \left[\frac{1-\nu_d-4\nu_d\nu+2\nu^2}{1-\nu_d-2\nu_d^2} E_d V_d + \frac{1-\nu_d-4\nu_m\nu+2\nu^2}{1-\nu_m-2\nu_m^2} E_m V_m \right] V \quad (3.25)$$

D'où la borne supérieure de E :

$$E \leq \frac{1-\nu_d-4\nu_d\nu+2\nu^2}{1-\nu_d-2\nu_d^2} E_d V_d + \frac{1-\nu_d-4\nu_m\nu+2\nu^2}{1-\nu_m-2\nu_m^2} E_m V_m \quad (3.26)$$

La valeur du coefficient de Poisson ν , pour le matériau composite est inconnue à ce stade de l'analyse, si la borne supérieure sur E n'est pas spécifiée. Conformément au principe de l'énergie potentielle minimale, l'expression de l'énergie de déformation U^* doit être minimisée par rapport à la constante non spécifié ν et de préciser la borne sur E . La procédure de minimisation consiste à écrire :

$$\frac{\partial U^*}{\partial \nu} = 0 \quad (3.27)$$

Et en même temps de vérifier que

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial \nu^2} \geq 0 \quad (3.28)$$

C'est-à-dire :

$$\frac{\partial U^*}{\partial \nu} = \frac{\varepsilon^2 V}{2} \left[\frac{-4\nu_d+4\nu}{1-\nu_d-2\nu_d^2} E_d V_d + \frac{-4\nu_m+4\nu}{1-\nu_m-2\nu_m^2} E_m V_m \right] \quad (3.29)$$

Qui est nulle lorsque

$$\nu = \frac{(1-\nu_m-2\nu_m^2)\nu_d E_d V_d + (1-\nu_d-2\nu_d^2)\nu_m E_m V_m}{(1-\nu_m-2\nu_m^2)E_d V_d + (1-\nu_d-2\nu_d^2)E_m V_m} \quad (3.30)$$

La seconde dérivation de U^* sera sont :

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial \nu^2} = \frac{\varepsilon^2 V}{2} \left[\frac{4E_d V_d}{1-\nu_d+2\nu_d^2} + \frac{4E_m V_m}{1-\nu_m-2\nu_m^2} \right] \quad (3.31)$$

Cependant, la matrice et le matériau dispersé sont considérés isotropes, de sorte que $\nu_m < \frac{1}{2}$ et $\nu_d < \frac{1}{2}$ (c'est la limite du coefficient de Poisson d'un matériau isotrope). Ainsi, à la substitution de ces valeurs pour les ν_m et ν_d , la valeur de $\frac{\partial^2 U^*}{\partial \nu^2}$ sera considérée comme étant toujours positive parce que le terme type $(1 - b - 2b^2)$ est toujours positive quand $b < 1/2$.

Enfin, puisque $\frac{\partial^2 U^*}{\partial \nu^2}$ est toujours positive, la valeur de U^* (Lorsque l'équation (3.30) est utilisée, correspondant à un minimum, maximum ou à un point d'inflexion de la courbe de U^* en fonction de ν) est avérée être un minimum et, en fait, un minimum absolu

La valeur du coefficient de Poisson, ν , pour le matériau composite a été calculée de manière explicite que l'équation (3.30). Ainsi, la borne supérieure de E peut être obtenue en substituant l'expression de ν , de l'équation (3.30), dans l'expression de la borne supérieure de E en fonction de ν , de l'équation (3.26). Dans les applications pratiques, la valeur de ν peut être calculée à partir de l'équation (3.30) et ensuite substituée dans l'équation (3.26) pour obtenir E . Pour le cas particulier où $\nu = \nu_d = \nu_m$, l'expression de ν , de l'équation (3.30), se réduit à :

$$E \leq E_d V_d + E_m V_m \quad (3.32)$$

C'est la valeur du module d'Young E_1 dans le sens de la fibre d'un matériau composite fibreux obtenu par la mécanique des matériaux l'approche. Ainsi, l'expression E_1 est une borne supérieure à la réelle E_1 . En outre, la solution de la mécanique des matériaux comprend de toute évidence une égalité implicite des coefficients de Poisson pour les constituants des matériaux.

L'approche de [Paul] est essentiellement applicable aux matériaux composites isotropes, mais elle peut être interprétée pour matériaux composites fibreux. Par exemple, l'équation (3.32) est la borne supérieure sur le module transversal E_2 d'un matériau composite renforcé par fibre, tandis que l'équation (3.16) est la borne inférieure.

Hashin [26] et Hashin et Shtrikman [27] ont tenté de resserrer les bornes de Paul à fin d'obtenir des estimations plus utiles pour les modules de matériaux isotropes hétérogènes. Leur approche est basée sur l'utilisation d'un modèle de sphères concentriques en considérant le matériau hétérogène comme une sphère élastique contenant à son 'intérieur une partie concentrique sphérique de matière matrice élastique à la proportion de la teneur en volume d'inclusions sphériques dans le volume total du matériau composite. Les sphères ne se touchent jamais mais sont incluses les unes dans les autres dans le modèle, bien qu'il soit évident plus que le pourcentage volumique des particules augmente, plus le risque de contact des particules augmentée. En outre, le manque de contact pourrait impliquer que l'espacement des particules est parfait ; cette situation est improbable sur le plan pratique

Hashin et Rosen[28] ont étendu le travail d'Hashin à fibres renforcées de matériaux composites. Les fibres ont une section circulaire et peuvent être creuses ou pleines. Deux cas peuvent être distingués: (1) fibres identiques dans un arrangement hexagonal et (2) Les fibres de diamètres différents (mais un même rapport de diamètre de l'intérieur vers l'extérieur de, si elles sont creux) dans un arrangement au hasard. Les deux types des arrangements sont présentés dans la figure (3-1). Dans les deux cas, L'élément d'analyse de base est un ensemble de cylindres concentriques avec leurs axes dans le sens de la fibre. Pour l'arrangement aléatoire, par analogie avec le modèle de concentrique de sphères [Hashin], le modèle de cylindres concentriques consiste en des fibres entourées d'une matrice en proportion de volume de matrice par rapport au volume total. Un terme supplémentaire du volume de matrice est nécessaire dans le cas d'un arrangement hexagonal qui tient compte du volume gauche, lorsque les cercles de rayon r_m sont formés autour de chaque fibre comme montre dans la figure 3-2 a. Le modèle concentrique cylindre lui-même est affiché dans la Figure 3-2 a. Le module de Young dans le sens de la fibre s'obtient à partir de la loi des mélanges. Les expressions pour le module d'élasticité transversale pour un arrangement aléatoire ou un arrangement hexagonal de fibres pleines ou creuses sont plus complexes. En tout les cas, les bornes sur les modules pour les fibres dans un arrangement hexagonal sont assez éloignées dans le cas de grandes valeurs du rapport des modules des fibres et de matrice dans les matériaux composites, D'autre part, ce modèle d'arrangement aléatoire n'est pas une représentation exacte de la fibre renforçant les matériaux composites Si, toutefois, plusieurs différents types de fibres ont été inclus pour remplir les vides de matrice entre les différents cylindres concentriques, comme il est représenté la figure 3-2 b, ou le modèle serait vraisemblablement exactes.

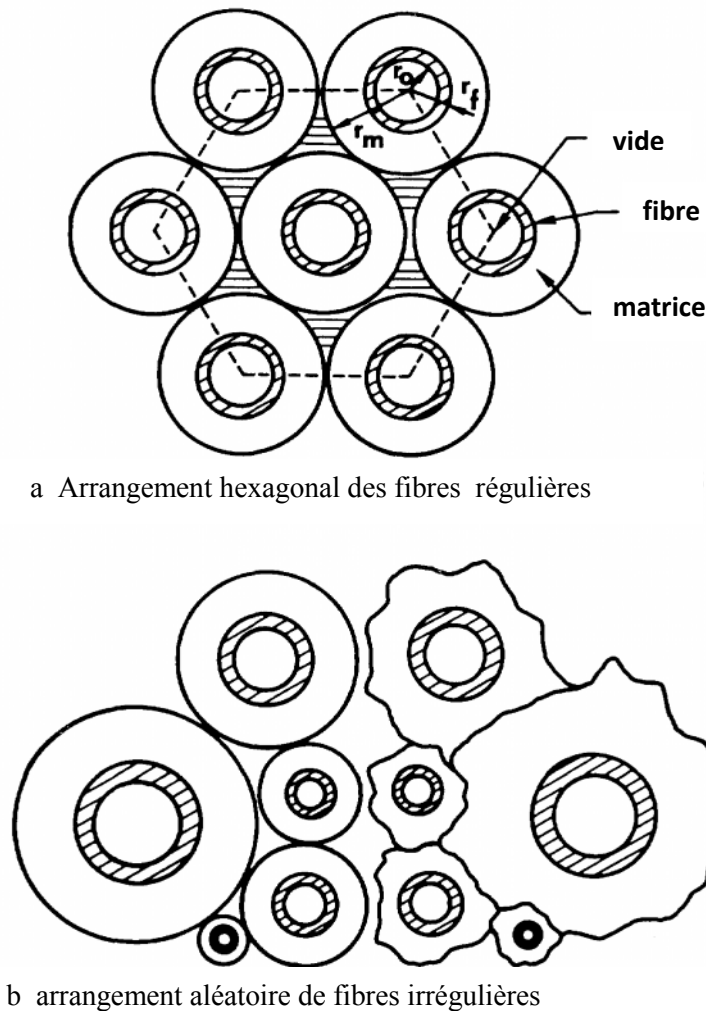


Figure 3-2 Géométrie de renforcement par des fibres de Hashin et Rosen et modèle cylindrique de composite

3.3 Solutions Exactes :

Le problème de la détermination des solutions exactes est très difficile. La méthode semi-inverse est importante parmi les techniques disponibles. Elle consiste en l'hypothèse d'une partie de la solution, c'est à dire, considérer certains des éléments de contrainte, déformation, ou déplacement, et de voir ensuite si la solution supposée satisfait les équations différentielles qui régissent l'équilibre et les conditions aux limites. La solution admise ne peut être rigoureusement spécifiée que les équations d'équilibre et les équations de compatibilité ne sont pas satisfaites. A titre d'exemple, l'hypothèse admise sur les sections qui sont planes et qui restent plan est une

méthode approche semi-inverse. En combinaison avec le théorème de l'élasticité des bornes, la méthode semi-inverse est très efficace.

Les problèmes d'inclusions dans les solides sont également traités par des approches d'élasticité exacte Muskhelishvili[29] que de techniques de cartographie variable. En outre, les techniques de solutions numériques telles que des éléments finis et différences finies ont été largement utilisés.

Des connaissances en élasticité sont requises pour résoudre les problèmes de la micromécanique de matériaux composites. Beaucoup de documents disponibles sont très abstraits et de l'applicabilité directe est peu à l'analyse pratique à ce phase du développement d'approches de l'élasticité à la micromécanique. Même la plus sophistiquée des approches telles que les bornes sont un peu obscures.

Les approches d'élasticités dépendent dans une large mesure de la géométrie spécifique du matériau composite ainsi que sur les caractéristiques des fibres et de la matrice. Les fibres peuvent être creuses ou pleines, mais sont généralement en section circulaire transversale, bien que la section rectangulaire transversale des fibres n'est pas rare. En outre, les fibres sont habituellement isotropes, mais peut avoir un comportement de matériau plus complexe ; par exemple, les fibres de graphite sont transversalement isotrope. Les fibres peuvent exister dans de nombreux types d'arrangement de section transversale. Plusieurs arrangements typiques avec différents types des fibres sont indiqués dans les figures 3-3 à 3-6.

Dans ce cas Le volume élémentaire représentatif de chaque arrangement est représenté, en raison de la symétrie par un élément volume simplifié, mais qui ne comprend pas toute une fibre d'après la Figure 3-5, si les lignes de l'arrangement des fibres rondes sont compensées par la moitié de l'espacement des fibres, le volume élémentaire représentatif sera le même que pour l'arrangement carré, mais avec des directions principale de chargement orientées à 45 °. En outre, la disposition décalée de la section transversale de fibres rectangulaires comme elle représentée par la figure 3-6, est parfois appelée un arrangement de diamants. Herrmann et Pister[30] ont été apparemment le premier à utiliser le volume élémentaire représentatif et à reconnaître sa symétrie inhérente.

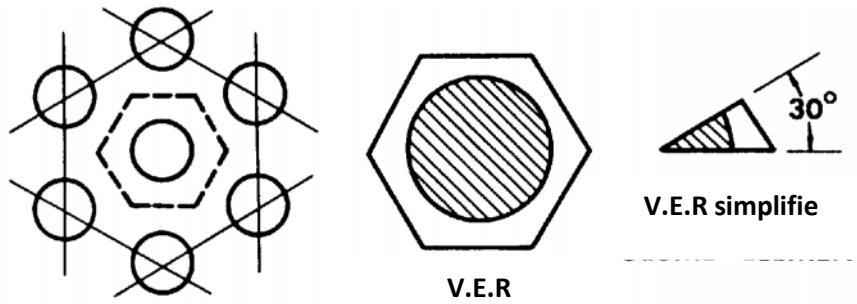


Figure 3-3 V. E. R et Arrangement hexagonale

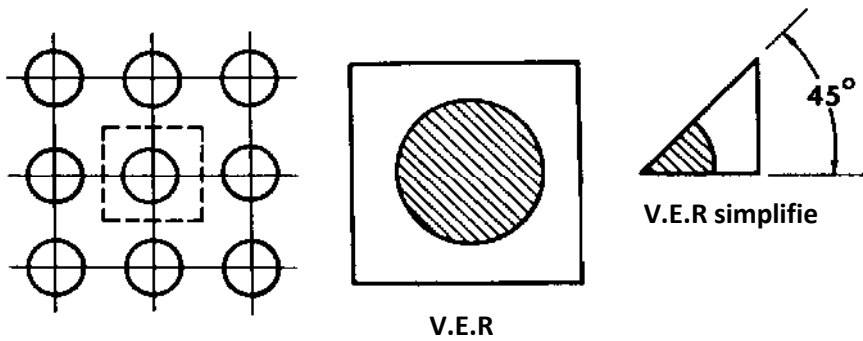


Figure 3-4 V.E.R et Arrangement carré

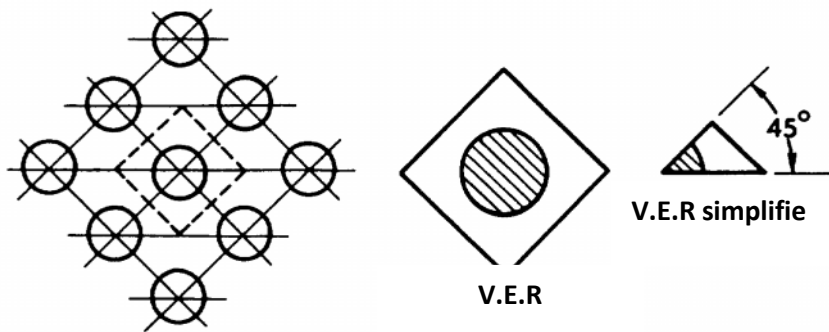


Figure 3-5 V.E.R et Arrangement carré et décalé de fibres rondes

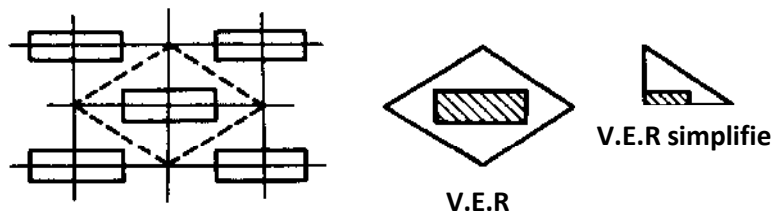


Figure 3-6 V.E.R et Arrangement carré et décalé des fibres rectangulaire

Adams et Tsai [31] ont étudié des arrangements aléatoires de deux types:

- arrangement carré aléatoires
- arrangement hexagonale aléatoires.

Les deux arrangements ont des éléments répétés mais ne sont pas vraiment aléatoires. Cependant, les résultats des analyses par arrangement hexagonal aléatoire s'accordent mieux avec l'expérience que lorsqu'on considère les arrangements aléatoires.

3.4 Modèle auto-cohérent

Ce modèle à été considéré par Whitney et Riley[32]. Il se résume en une fibre creuse unique intégrée dans un cylindre concentrique de matériau de la matrice comme il montré par la Figure3-7.

La fraction volumique de l'inclusion dans le cylindre composite est la même que celle du corps entier à fibres dans le matériau composite. Une telle hypothèse n'est pas entièrement valide, car le matériau de la matrice pourrait avoir tendance à enrober les fibres imparfaites et donc laisser des vides. On note qu'il n'y a pas association de ce modèle avec n'importe quel arrangement particulier de fibres. Par contre il y a une similitude entre ce modèle et le modèle de cylindre concentrique de Hashin et Rosen. D'autres modèles plus complexes comprenant ceux de Hill [33] et Hermans[34] et qui sont discutés par Chamis et Sendekyj. Whitney à étendu son modèle aux fibres transversalement isotrope et aux fibres torsadées.

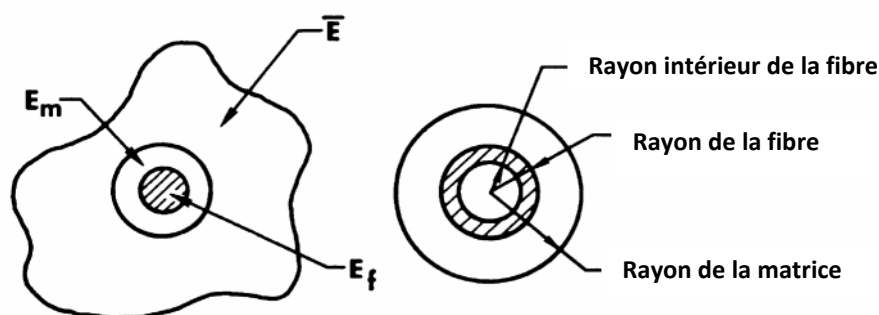


Figure 3-7 modèle auto-cohérent cylindrique composite cylindre

3.5 Solutions d'élasticité avec contiguïté

Dans la fabrication de matériaux composites fibreux, les fibres sont souvent arrangement aléatoirement que plutôt être dans un arrangement ordinaire (Figure 3.8). (Ce caractère aléatoire est beaucoup plus typique pour les fibres de petit diamètre comme dans le cas des matériaux composite graphite/époxy de que ceux à grand diamètre comme il est cas du bore-époxy) Ainsi, les analyses concernant les modules des matériaux composites avec des arrangements réguliers doivent être modifiées pour tenir compte du fait que les fibres sont contiguës. Dans ce cas les fibres se touchent plutôt d'être complètement entourées par le matériau de la matrice. D'un point de vue analytique, deux cas peuvent se présenter une combinaison linéaire d'une solution dans laquelle toutes les fibres sont isolées les unes des autres et une autre solution dans laquelle toutes les fibres entent en contact pour fournir le module correct. Si C représente le degré de contiguïté, puis $C = 0$ correspond à aucune contiguïté (fibres isolées) et $C = 1$ correspond à la contiguïté parfaite (toutes les fibres sont en contact) comme dans la Figure 3-9. Naturellement, avec des fractions volumiques de fibres importantes, C devrait s'approcher de $C = 1$. Cette approche est un exemple de ce que Chamis et Sendekyj présente comme étant une méthode semi-empirique, mais elle pourrait aussi être classée comme une technique de borne.

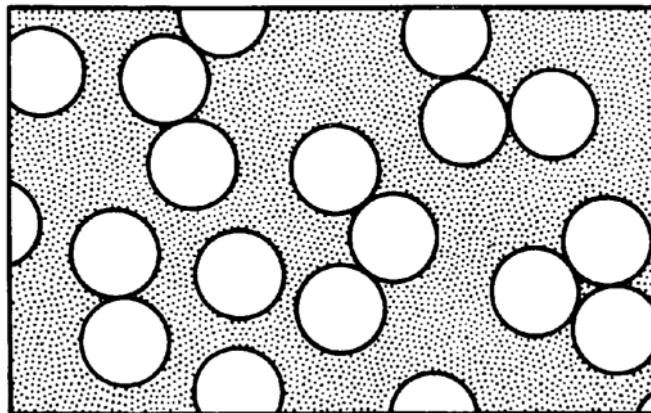


Figure 3-7 Schéma arrangements réels de Fibres

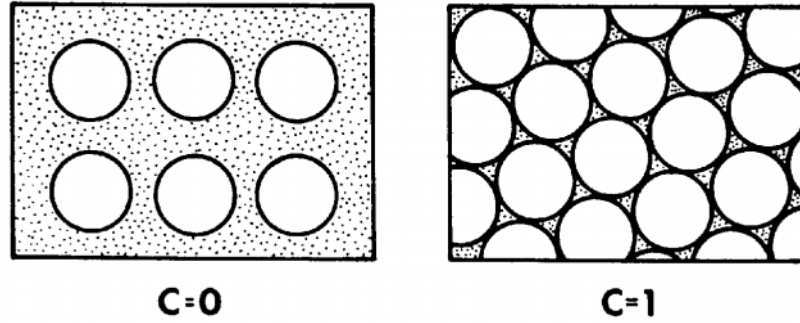


Figure 3-8 Cas extrêmes du la contiguïté des fibres

Pour l'approche de l'élasticité dont la contiguïté est considérée, Tsai obtient pour le module transversal aux fibres

$$E_2 = \left[1 - V_f + (V_f - V_m)V_m \right] \left[(1 - C) \frac{K_f(2K_m + G_m) - G_m(K_f - K_m)V_m}{(2K_m + G_m) + 2(K_f - K_m)V_m} + C \frac{K_f(2K_m + G_m) + G_f(K_m - K_f)V_m}{(2K_m + G_f) - 2(K_m - K_f)V_m} \right] \quad (3.33)$$

Ou:

$$K_f = \frac{E_f}{2(1-\nu_f)}, G_f = \frac{E_f}{2(1+\nu_f)}, K_m = \frac{E_m}{2(1-2\nu_m)}, G_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)} \quad (3.34)$$

A noter que C doit être entre 0 et 1. D'un point de vue pratique, C serait déterminé par comparaison des courbes théoriques de E_2 en fonction de V_f (ou V_m) pour diverses valeurs de C , avec des résultats expérimentaux. La prédiction de la valeur de C pour qui correspond mieux et en accord avec l'expérience est alors la valeur de conception appropriée pour le matériau donné. Puisque $C = 0$ correspond au cas où chaque fibre est isolée et $C = 1$ correspond au cas le moins probable lorsque toutes les fibres sont en contact, de faibles valeurs de C doivent être attendues. Tsai obtient également :

$$\nu_{12} = (1 - C) \frac{K_f \nu_f (2K_m + G_m) V_f + K_m \nu_m (K_f - K_m) V_m}{K_f (2K_m + G_m) - 2G_m (K_f - K_m) V_m} + C \frac{K_f \nu_f (2K_m + G_m) V_f + K_m \nu_m (2K_f - G_m) V_m}{K_f (2K_m + G_m) + G_f (K_m - K_f) V_m} \quad (3.35)$$

$$G_{12} = (1 - C)G_m \frac{2G_f - (G_f - G_m)V_m}{2G_m + (G_f - G_m)V_m} + CG_f \frac{(G_f + G_m) - (G_f - G_m)V_m}{(G_f + G_m) + (G_f - G_m)V_m} \quad (3.36)$$

où les définitions de l'équation (3.34) s'appliquent

Pour le module dans le sens des fibres, Tsai a modifié la loi des mélanges en tenant compte en des imperfections dans l'alignement des fibres:

$$E_1 = k(V_f E_f + V_m E_m) \quad (3.37)$$

Le facteur de mauvais alignement des fibres, k , varie habituellement de 0.9 à 1, alors l'équation (3.37) ne représente pas un écart très significatif de la loi des mélanges. K est une constante qui doit être déterminée expérimentalement et est fortement tributaire du processus de fabrication.

3.6 Modèle d'assemblage cylindrique

Le modèle d'assemblage de cylindre composite (ACC) est un modèle d'élasticité. On suppose que les fibres sont de sections-circulaires, étendues dans un arrangement périodique et continu, comme il est indiqué dans la Figure 3.13. Ensuite, le composite peut être considéré comme étant composé d'éléments répétés appelés les éléments de volume représentatif (V.E.R). Le V.E.R peut être répété entre tout le composite et avoir la même réponse que tout le composite.

Le V.E.R consiste d'un cylindre composite constitué d'un seul cylindre intérieur (fibres) lié à un cylindre extérieur creux (matrice) comme indiqué dans Figure 3.10. Le rayon de la fibre, a , et le rayon extérieur de la matrice, b , sont liés à la fraction volumique des fibres, V_f comme

$$V_f = \frac{a^2}{b^2} \quad (3.38)$$

Les conditions aux limites appropriées sont appliquées pour ce cylindre composite sur la base des modules d'élasticité en cours d'évaluation.

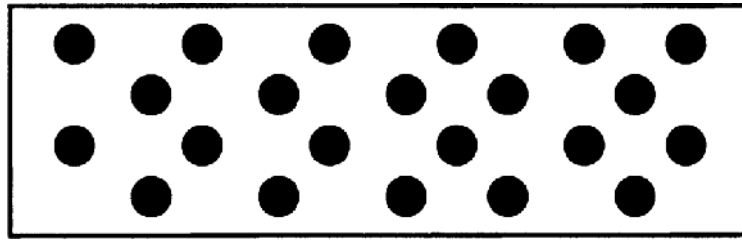


Figure 3-9 Arrangement périodique des fibres dans une section transversale d'un pli

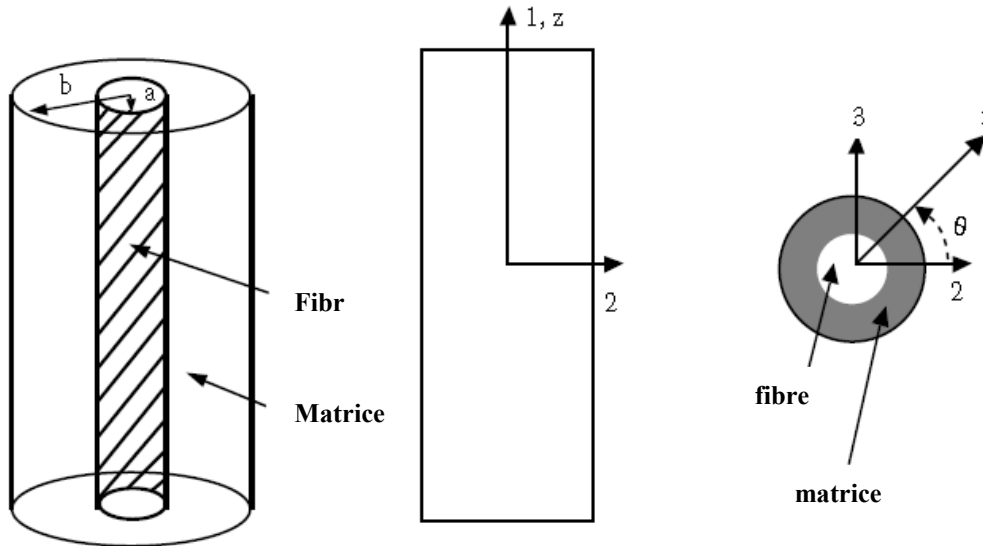


Figure 3-10 Modèle d'assemblage cylindrique de composite utilisé pour la prédiction de module d'élasticité

Pour trouver le module d'élasticité des fibres, nous appliquerons une charge axiale P, dans la direction 1 (Figure 3.10). La contrainte axiale, σ_1 , dans la direction 1, est alors

$$\sigma_1 = \frac{p}{\pi b^2} \tag{3.39}$$

On a le terme de la loi de Hooke

$$\sigma_1 = E \epsilon_1 \tag{3.40}$$

Ainsi, l'équation (3.39) et l'équation (3,40), nous obtenons :

$$E_1 = \frac{p}{\pi b^2 \epsilon_1} \tag{3.41}$$

Pour trouver E_1 en termes de module d'élasticité de la fibre et de la matrice et les paramètres géométriques comme la fraction volumique des fibres, nous avons besoin de relier les charge axiale P, et la déformation axiale ϵ_1 , en ces termes. En supposant que la réponse d'un cylindre est

de révolution s'obtient par l'équation d'équilibre dans la direction radiale et après quelques opérations on aura E_1

$$E_1 = E_f V_f + E_m (1 - V_f) - \frac{2E_m E_f V_f (v_f - v_m)^2 (1 - V_f)}{E_f (2v_m^2 V_f - v_m + V_f v_m - V_f - 1) + E_m (-1 - 2V_f v_m^2 + v_f - V_f v_f + 2v_f^2 + V_f)} \quad (3.42)$$

A noter que les deux premiers termes de la relation (3.42) représentent la mécanique des matériaux approchée donnée par l'équation de la loi des mélanges de même le coefficient de poisson s'écrit comme suit :

$$v_{12} = v_f V_f + v_m V_m + \frac{V_f V_m (v_f - v_m) (2E_f v_m^2 + E_f v_m - E_f + E_m - E_m v_f + 2E_f v_m^2)}{(2v_m^2 V_f - v_m + v_m V_f - 1 - V_f) E_f + (2v_f^2 - V_f v_f - 2V_f v_f^2 + V_f + v_f - 1) E_m} \quad (3.43)$$

Aussi, le module transversal s'exprime comme :

$$E_2 = 2(1 + v_{23}) G_{23} \quad (3.44)$$

Le coefficient de Poisson de la transversale v_{23} est donnée par

$$v_{23} = \frac{k^* - m G_{23}}{k^* + m G_{23}} \quad (3.45)$$

avec

$$m = 1 + 4k^* \frac{v_{12}^2}{E_1} \quad (3.46)$$

Dont le coefficient de compressibilité K^* , du composite est :

$$k^* = \frac{k_m (k_f + G_m) V_m + k_f (k_m + G_m) V_f}{(k_f + G_m) V_m + (k_m + G_m) V_f} \quad (3.47)$$

avec

$$k_f = \frac{E_f}{2(1 + v_f)(1 - 2v_f)} \quad (3.48)$$

et

$$k_m = \frac{E_m}{2(1 + v_m)(1 - 2v_m)} \quad (3.49)$$

la solution est Basée sur l'hypothèse où la fibre est entourée par la matrice c'est-à-dire entourée d'un matériau homogène équivalent au composite. Le module de cisaillement transversal G_{23} , est donné par l'équation du second degré:

$$A \left(\frac{G_{23}}{G_m} \right)^2 + 2B \left(\frac{G_{23}}{G_m} \right) + C = 0 \quad (4.50)$$

Dont les constantes A, B et C, sont donnée par :

$$A = 3V_f(1 - V_f)^2 \left(\frac{G_f}{G_m} - 1 \right) \left(\frac{G_f}{G_m} + \eta_f \right) + \left[\frac{G_f}{G_f} \eta_m + \eta_f \eta_m - \left(\frac{G_f}{G_f} \eta_m - \eta_f \right) V_f^3 \right] \left[V_f \eta_m \left(\frac{G_f}{G_m} - 1 \right) - \left(\frac{G_f}{G_m} \eta_m + 1 \right) \right] \quad (4.51)$$

et

$$B = -3V_f(1 - V_f)^2 \left(\frac{G_f}{G_m} - 1 \right) \left(\frac{G_f}{G_m} + \eta_f \right) + \frac{1}{2} \left| \eta_m \frac{G_f}{G_m} + \left(\frac{G_f}{G_m} - 1 \right) V_f + 1 \right| \left| (\eta_m - 1) \left(\frac{G_f}{G_m} + \eta_f \right) - 2 \left(\frac{G_f}{G_m} \eta_m - \eta_f \right) V_f^3 \right| + \frac{V_f}{2} (\eta_m + 1) \left(\frac{G_f}{G_m} - 1 \right) \left[\frac{G_f}{G_m} + \eta_f + \left(\frac{G_f}{G_m} \eta_m - \eta_f \right) V_f^3 \right] \quad (3.52)$$

et

$$C = 3V_f(1 - V_f)^2 \left(\frac{G_f}{G_m} - 1 \right) \left(\frac{G_f}{G_m} + \eta_f \right) + \left| \eta_m \frac{G_f}{G_m} + \left(\frac{G_f}{G_m} - 1 \right) V_f + 1 \right| \left[\frac{G_f}{G_m} + \eta_f + \left(\frac{G_f}{G_m} \eta_m - \eta_f \right) V_f^3 \right] \quad (3.53)$$

$$\eta_f = 3 - 4\nu_f \quad (3.54)$$

$$\eta_m = 3 - 4\nu_m \quad (3.55)$$

le module de cisaillement axial G_{12}

$$G_{12} = G_m \left[\frac{G_f(1+V_f)+G_m(1-V_f)}{G_f(1-V_f)+G_m(1+V_f)} \right] \quad (3.56)$$

3.7 Les équations de Halpin-Tsai

La plupart des équations précédentes de la micromécanique sont très compliquées et difficiles à utiliser. Ainsi, le besoin existe clairement à des résultats simples pour être utilisés, dans la conception des matériaux composites.

Halpin et Tsai[35] ont développé une procédure d'interpolation qui est une représentation approximative de la micromécanique et des résultats compliqués. La beauté de la procédure est double. Premièrement, elle est simple, il peut donc être facilement utilisée dans le processus de conception. Deuxièmement, elle peut être généralisée mais elle est apparemment tout à fait exacte si la fraction volumique de fibre (V_f) peut être une approche .

L'importance de la procédure est que Halpin et Tsai ont montré que la solution de Hermans les modèles de Hill et l'auto-cohérent peuvent être réduits à la forme approximative suivante :

$$E_1 \equiv E_f V_f + E_m V_m \quad (3.57)$$

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m V_m \quad (3.58)$$

et

$$\frac{M}{M_m} = \frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f} \quad (3.59)$$

avec

$$\eta = \frac{\left(\frac{M_f}{M_m}\right)^{-1}}{\left(\frac{M_f}{M_m}\right)^{-1} + \xi} \quad (3.60)$$

M représente le module du matériau composite E_2 , G_{12} , ou ν_{23}

M_f représente le module correspondant de la fibre E_f , G_f , ou ν_f

M_m représente le module correspondant de la matrice E_m , G_m , ou ν_m

Le coefficient ξ est le facteur de renforcement des fibres du matériau composite, qui dépend de la géométrie des fibres, de la géométrie d'emballage, et des conditions de chargement.

On remarque que les expressions de E_1 et ν_{12} suivant la règle généralement admise de la loi des mélanges. Les équations de Halpin-Tsai sont également applicables à la fibre, bride (ribbon), ou des particules composites. Par exemple, Halpin et Thomas[36] ont appliqué avec succès les

équations (3-42) et (3-423) à l'analyse de la rigidité de bride (ribbon) de verre renforçant des matériaux composites.

La seule difficulté dans l'utilisation des équations de Halpin-Tsai semble être dans la détermination d'une valeur convenable du facteur ξ . Halpin et Tsai ont obtenu un excellent accord avec Adams ou les fibres sont circulaires et en forme carrée en prenant $\xi = 2$ pour le calcul de E_2 et $\xi = 1$ pour le calcul de G_{12} à une fraction volumique des fibres égale 0.55 (Figures 3-11 et 3-12). Pour les mêmes valeurs, d'excellents accords ont également été obtenus avec les résultats de Foye pour les fibres dont les sections transversales sont carrées lorsque la fraction volumique des fibres est 0.9 comme il est montré sur les figures 3-13 et 3-14. Lorsque la section transversale des fibres est rectangulaire ou le modèle de Foye a été abordé, Halpin et Tsai ont constaté que la corrélation avec leurs équations est lorsque la valeur de ξ pendant le calcul du module transversal est :

$$\xi_{E_2} = 2 \frac{a}{b} \quad (3.61)$$

où: a / b est le rapport géométrique de la section transversale rectangulaire.

Aussi, la valeur de ξ pour les calculs de module du cisaillement G_{12} est :

$$\log \xi_{G_{12}} = 1.73 \log \frac{a}{b} \quad (3.62)$$

Cependant, Hewitt et de Malherbe[37] montrent que les équations de Halpin-Tsai donnent une sous-estimation du module de cisaillement G_{12} des matériaux composites à fibres circulaires en forme de carré pour la fractions volumique des fibres supérieure à 0.5. Plus précisément, la sous-estimation est de 30% à $V_f = 0.75$ pour $G_f/G_m = 20$, une valeur réaliste à la fois pour les matériaux composites verre/époxy et de graphite/époxy. Ils ont suggéré que, au lieu de Halpin-Tsai, on doit prendre :

$$\xi = 1 + 40V_f^{10} \quad (3.63)$$

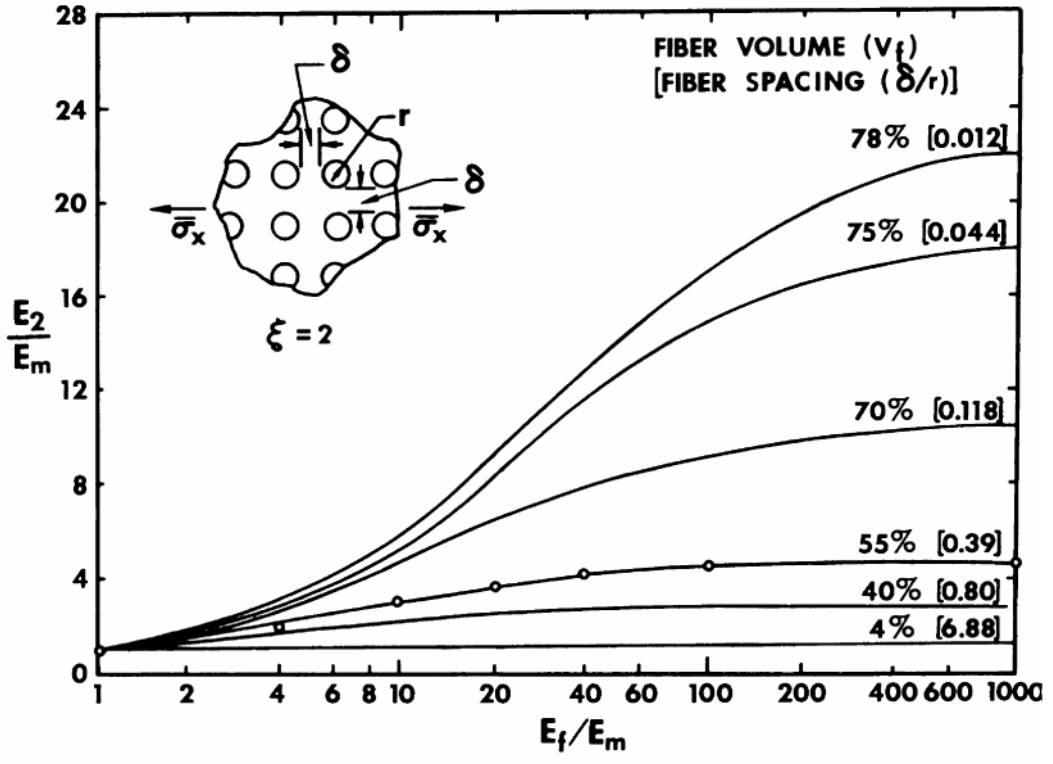


Figure 3-11 comparaison des calculs de E_2 par Halpin-Tsai (fibre circulaires) contre ceux d'Adams

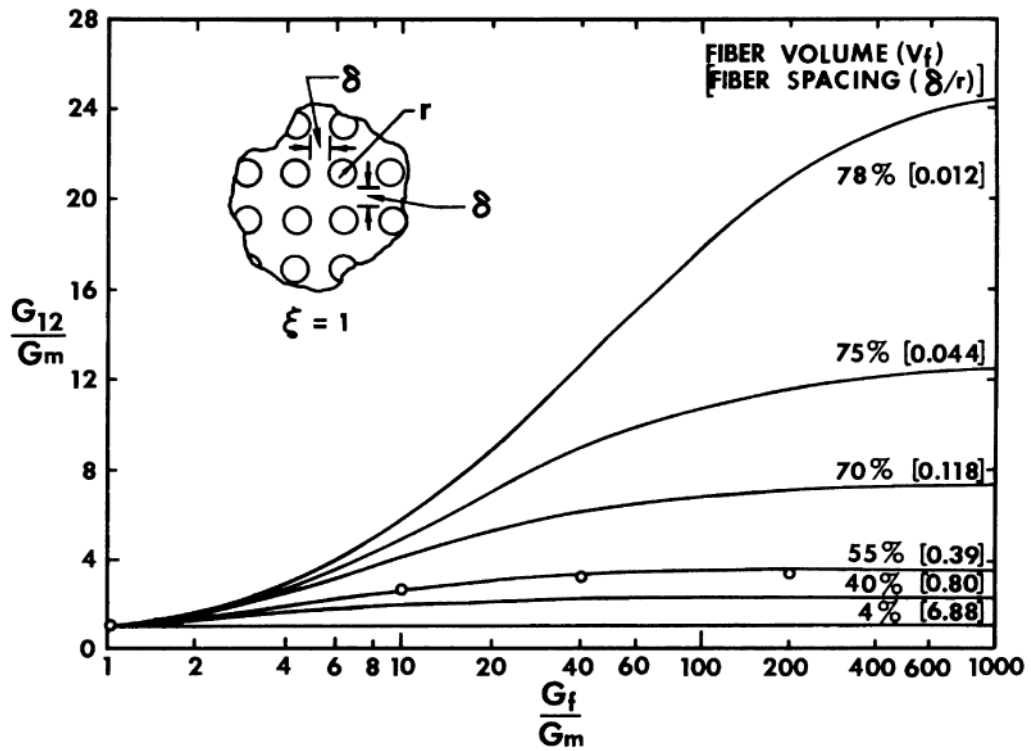


Figure 3-12 Comparaison des calculs de G_{12} par Halpin-Tsai (fibre circulaires) et par d'Adams

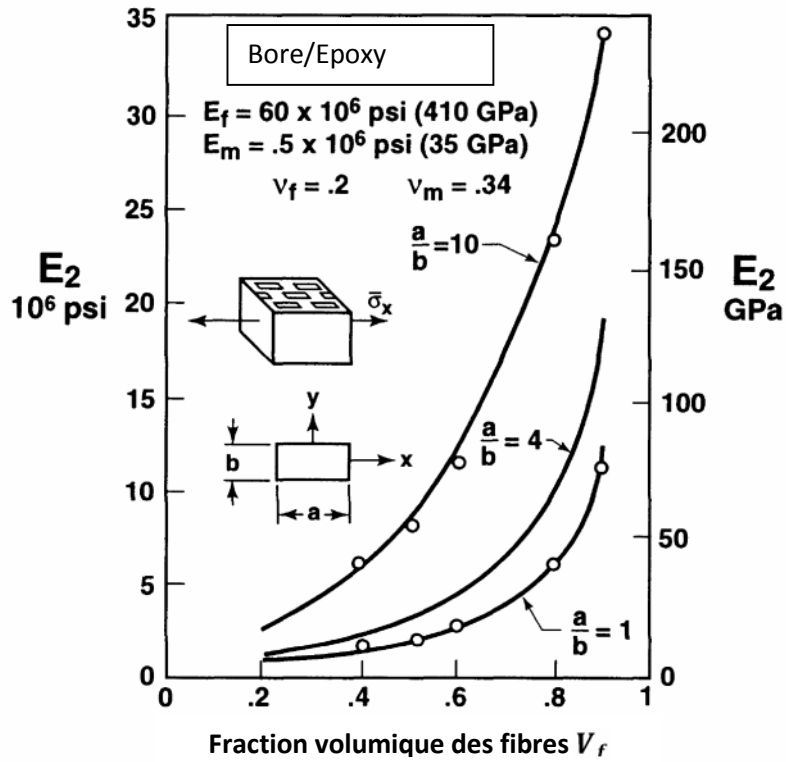


Figure 3-13 Comparaison des calculs de E_2 par Halpin-Tsai et par Foye

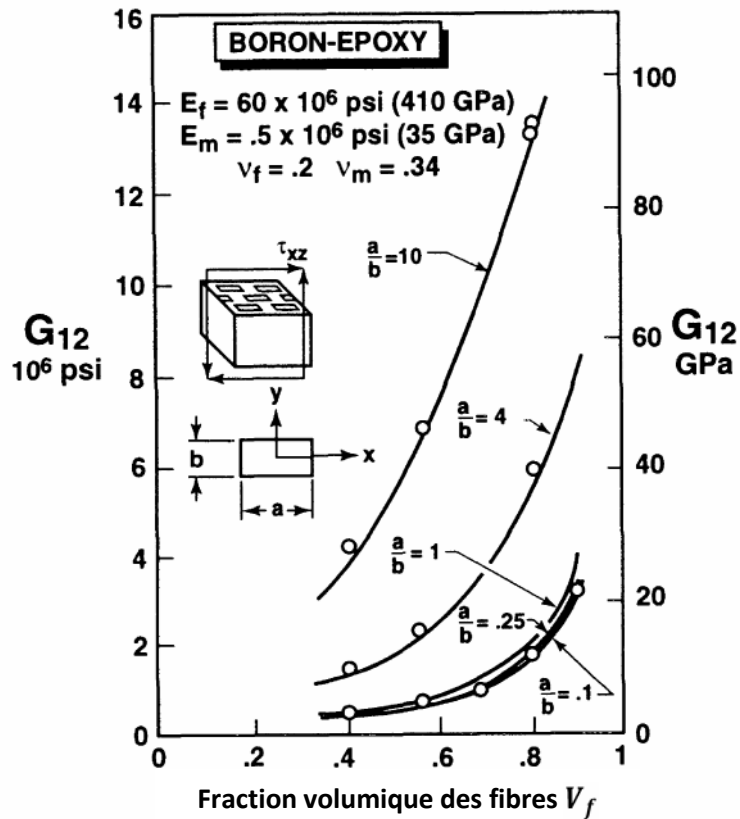


figure 3-14 Comparaison des calculs de G_{12} par Halpin-Tsai et par Foye[39]

Un aperçu physique sur les équations Halpin-Tsai lorsqu'on procède à l'examen de leur comportement pour des gammes de valeurs de ξ et η . Pour la Première, même s'il n'est pas évident, ξ peut varier de 0 à ∞ .

Quand $\xi = 0$,

$$\frac{1}{M} = \frac{V_f}{M_f} + \frac{V_m}{M_m} \quad (3.64)$$

qui est le modèle des connectés en série généralement associé à une borne inférieure d'un module d'un matériau composite.

Quand $\xi = \infty$

$$M = V_f M_f + V_m M_m \quad (3.65)$$

qui est le modèle de connectés en parallèle, connue comme loi des mélanges, généralement associée à une borne supérieure d'un module de matériau composite. Ainsi, ξ est une mesure de l'armature du matériau composite fibreux pour les faibles valeurs de ξ , les fibres ne sont pas très efficaces, alors que pour les grandes valeurs des ξ les fibres sont très efficaces pour accroître la rigidité du composite au-dessus de celle de la matrice. Ensuite, les valeurs limites de η peuvent être démontrées pour les inclusions rigides :

$$\eta = 1 \quad (3.66)$$

pour matériaux homogènes

$$\eta = 0 \quad (3.67)$$

et pour les espaces vides

$$\eta = -\frac{1}{\xi} \quad (3.68)$$

Le terme ηV_f dans l'équation (3.59) peut être interprété comme une fraction volumique réduite des renforts. Le mot «réduit» est utilisé parce que $\eta \leq 1$. En outre, il ressort de l'équation (3.60) que η est affecté par les propriétés des matériaux constitutifs, ainsi que par le facteur de renforcement ξ . De toute évidence, les valeurs pratiques de ηV_f est inférieure à environ 0.6.

3.8 Modèle de cox

Nous allons considérer le composite chargé en traction uniaxiale le long de l'axe des fibres. L'équilibre des forces agissant sur la fibre d'un V.E.R exige que[38]

$$\frac{\pi d_f^2}{4} [(\sigma + d\sigma) - \sigma] - \pi d_f \tau dx_1 = 0 \quad (3.69)$$

Ou σ est la contrainte agissant sur la fibre, τ est la contrainte interfaciale de cisaillement et d_f est le diamètre des fibres. Après simplification, l'équation devient :

$$\frac{d\sigma}{dx_1} = \frac{4\tau}{d_f} \quad (3.70)$$

En supposant que la contrainte au bout de la fibre ($x_1 = 0$) est négligeable, et que la contrainte agissant- sur la fibre à n'importe quelle position x_1 peut être exprimée par :

$$\sigma(x_1) = \frac{4}{d_f} \int_0^{x_1} \tau dx_1 \quad (3.71)$$

Cox[41] a supposé dans son modèle que la contrainte de cisaillement interfaciale est proportionnelle à la différence entre le déplacement axial à un point le long de la fibre u_f , et le déplacement axial de ce même point dans un V.E.R entièrement constitué de matrice, u_m :

$$\tau = c(u_f - u_m) \quad (3.72)$$

Ou c est une constante de proportionnalité qui devra être déterminée ultérieurement.

Ainsi, par substitution, on obtient :

$$\frac{d\sigma}{dx_1} = \frac{4c(u_f - u_m)}{d_f} \quad (3.73)$$

La différentiation de cette équation par rapport à x_1 conduit à :

$$\frac{d^2\sigma}{dx_1^2} = \frac{4c}{d_f} \left(\frac{du_f}{dx_1} - \frac{du_m}{dx_1} \right) \quad (3.74)$$

Il est reconnu que les termes entre les parenthèses représentent les déformations de la fibre et de la matrice, c'est-à-dire :

$$\frac{du_f}{dx_1} = \frac{\sigma}{E_f} \quad (3.75)$$

$$\frac{du_m}{dx_1} = \varepsilon_m \quad (3.76)$$

Ou E_f est le Module de Young des fibres et ε_m est la déformation de la matrice sans fibre. Par substitution et réarrangement. on obtient donc :

$$\frac{d^2\sigma}{dx_1^2} - \beta^2 \sigma = \frac{-4c}{d_f} \varepsilon_m \quad (3.77)$$

Ou $\beta^2 = 4c/(d_f E_f)$. La résolution de cette équation différentielle donne après substitution des conditions aux bords : $\sigma = 0$ à $x_1 = 0$ et à $x_1 = l$ sur la longueur de la fibre :

$$\sigma(x_1) = E_f \varepsilon_m \left[1 - \frac{\tanh \beta \left(\frac{l}{2} - x_1 \right)}{\cosh (\beta l / 2)} \right] \quad (3.78)$$

La contrainte moyenne d'une fibre sur sa longueur est :

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_m \left[1 - \frac{\tanh \left(\frac{\beta l}{2} \right)}{\beta l / 2} \right] \quad (3.79)$$

La contrainte normale moyenne du composite dans le V.E.R peut être calculée à partir de loi des mélanges :

$$\sigma_c = \sigma_f V_f + \sigma_m V_m \quad (3.80)$$

Ou V_f et V_m sont respectivement les fractions volumiques de fibre et de matrice, et σ_m est la contrainte normale moyenne dans la matrice. Par combinaison des deux dernières équations, on obtient :

$$\sigma_c = E_f \varepsilon_m \left[1 - \frac{\tanh \left(\frac{\beta l}{2} \right)}{\beta l / 2} \right] V_f + \sigma_m V_m \quad (3.81)$$

En divisent les élément de cette équation ε_m et en supposant que cette contrainte représente la contrainte dans la matrice, les fibres et le composite, ceci donne avec la loi de Hooke :

$$E_1 = E_f \varepsilon_m \left[1 - \frac{\tanh \left(\frac{\beta l}{2} \right)}{\beta l / 2} \right] + \sigma_m V_m \quad (3.82)$$

Le second terme entre parenthèses représente l'effet de la longueur finie des fibres sur le module longitudinal du composite.

La distribution de la contrainte de cisaillement interfaciale a été examinée par Kelly[39] comme :

$$\tau = \frac{d_f E_f \varepsilon_m \beta}{4} \left[\frac{\sinh(\beta(\frac{l}{2} - x_1))}{\beta l/2} \right] \tag{3.83}$$

Avec

$$\beta^2 = \frac{2\pi G_m}{A_f E_f \ln(\frac{D}{d_f})} \tag{3.84}$$

Une amélioration de la précision du modèle de Cox à été proposée par le modèle de Hwang et Gibson[40]. Ils ont incorporé des blocs de matrice aux bords du V.E.R.

Les blocs de matrice aux bords du V.E.R sont supposés fonctionner en série avec le modèle originale de Cox, ce qui conduit à l’expression du module longitudinal du composite :

$$\frac{1}{E} = \frac{l/(l+e)}{E_1} + \frac{e/(l+e)}{E_m} \tag{3.85}$$

Ou E_1 est le module donné par le modèle originel de Cox, et e est le double de la longueur des blocs de matrice disposés aux bouts des fibres (Fig3-15)

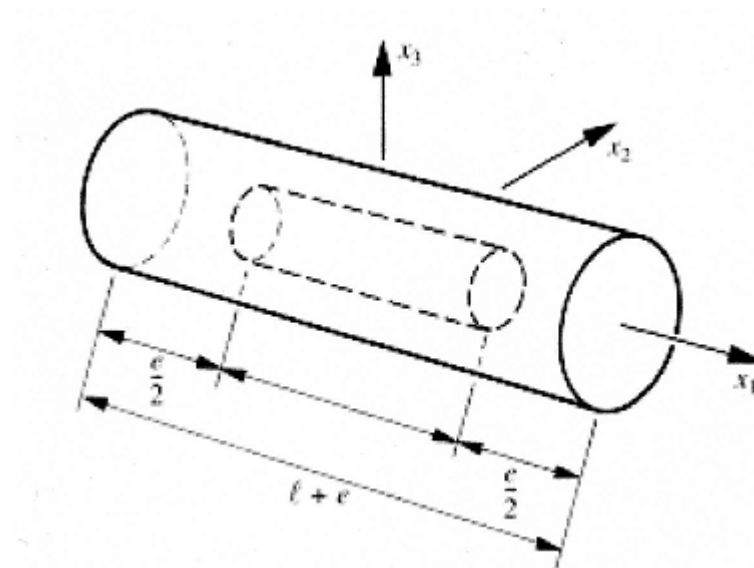


Fig.3-15 Modèle de Cox (d’après Hwang et Gibson)

CHAPITRE 4

Résistance Mécaniques Approchée des Matériaux Composites

Chapitre IV

Résistance mécanique approches des matériaux composites

4.1 Introduction

La prédiction de la résistance des matériaux composites, fibreux permet de développer plusieurs modèles physiques et mathématiques intéressants ésotériques. La plupart des modèles représentent une intégration de l'observation physique avec une description mécanique du phénomène.

On s'intéressera donc durant ce chapitre à la résistance à la traction et la résistance à la compression d'un pli à renforcement unidirectionnel dans le sens des fibres.

La résistance à la traction sera traitée par l'utilisation d'un modèle qui considère que les fibres sont soumises la même force, en plus d'un modèle dans lequel les fibres ont une distribution de puissance. La résistance à la compression sera aussi considérée par l'utilisation d'un autre modèle de flambage des fibres entourées par une matrice.

Ces deux axes d'études ont occupé l'attention de beaucoup de chercheurs [42]. Cependant, jusqu'à présent, peu de travaux ont été effectués sur d'autres sujets, comme la prédiction de la résistance de cisaillement.

4.2 Résistance à la traction dans le sens des fibres

Un matériau composite renforcé par des fibres unidirectionnelles, se déforme en fonction de l'augmentation de charge en suivant quatre étapes, et selon la fragilité relative ou la ductilité des fibres et de la matrice :

- Les deux constituants : fibres et matrice se déforment élastiquement.
- Les fibres continuent à se déformer élastiquement, mais la matrice se déforme d'une manière plastique
- les fibres et la matrice se déforment plastiquement.
- La rupture des fibres conduit à la rupture totale du matériau composite

Ces quatre étapes sont illustrées dans la Figure 4-1 représentant l'évolution des contraintes en fonction des déformations concernant les fibres, la matrice, et les matériaux composites. Notons

que les fibres sont généralement les plus rigides, plus résistantes et moins ductiles des deux constituants des matériaux composites. Bien sûr, pour les fibres fragiles, l'étape 3 ne pourrait pas être réalisée. De même, une matrice fragile ne pourrait pas atteindre l'une des étapes 2 ou 3. La rupture du matériau composite, se produit lors de la rupture de la fibre ou même de la matrice, dépend essentiellement de la ductilité relative des fibres par rapport à la matrice, ainsi bien que de la fraction volumique de ses fibres.

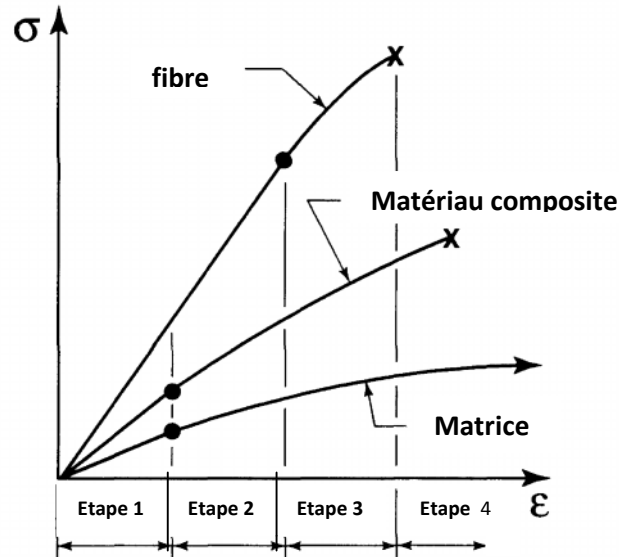


Figure 4-1 les étapes de déformation d'un matériau composite fibreux.

4.2.1 Modèle des fibres de force égale

Considérons que les fibres ont la même force et sont relativement fragiles en comparaison à la matrice, comme c'est étudié par Kelly et Davies[41]. De plus, ce modèle est valable tant que les fibres et la matrice sont actives seulement dans le domaine élastique linéaire (l'étape 1 de la Figure 4-1). Si le matériau composite possède une certaine fraction volumique minimale de fibres, V_f , la résistance ultime est réalisée quand les fibres sont tendues afin d'atteindre leur contrainte (ultime) maximale. C'est-à-dire en termes de déformation :

$$\varepsilon_{c_{\max}} = \varepsilon_{f_{\max}} \quad (4.1)$$

Du fait que les fibres sont plus fragiles que la matrice, elles ne peuvent pas s'allonger autant que cette dernière. Ainsi, les fibres sont la liaison faible, du point de vue de contrainte, dans la chaîne de force que le matériau composite résiste.

Les courbes contrainte-déformation pour les fibres et la matrice représentées sur la figure 4-2 concernant seulement, l'étape 1 de la figure 4-1) sont utiles pour la définition de la résistance du

matériau composite. Ainsi, si on présume que la déformation de la fibre égale à la déformation du matériau composite dans la direction des fibres (comme lors de la prédiction micromécanique de E_1) alors la résistance du matériau composite sera :

$$\sigma_{c_{max}} = \sigma_{f_{max}} V_f + (\sigma_m)_{\epsilon_{f_{max}}} (1 - V_f) \tag{4.2}$$

$\sigma_{f_{max}}$ = contrainte de traction maximale des fibres

$(\sigma_m)_{\epsilon_{f_{max}}}$ = contrainte de matrice correspondant à une déformation de matrice due à la contrainte de traction maximum dans les fibres

Évidemment, la fibre renfort doit mener à une résistance du matériau composite plus grande que peut être obtenue avec la matrice seule, donc

$$\sigma_{c_{max}} > \sigma_{m_{max}} \tag{4.3}$$

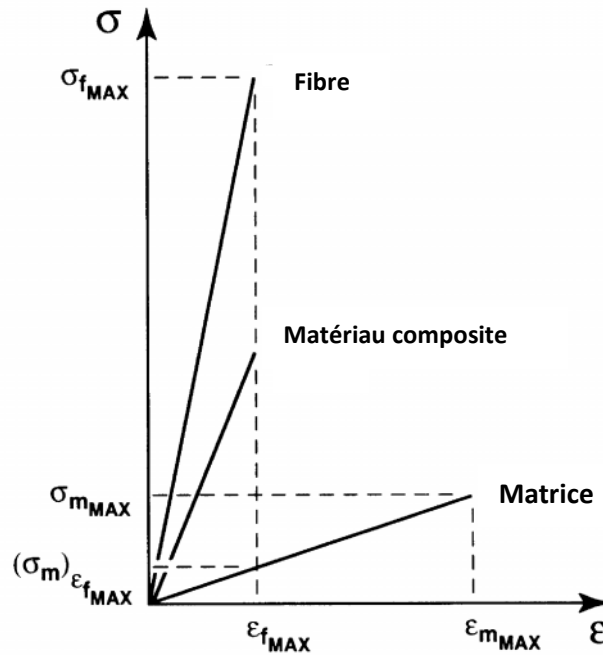


Figure 4-2 courbes contraintes-déformations pour les fibres et la matrice

Les équations peuvent être résolues pour le V_f critique qui doit être dépassé pour obtenir le renforcement des fibres du matériau composite :

$$V_{f_{critique}} = \frac{\sigma_{m_{max}} - (\sigma_m)_{\epsilon_{f_{max}}}}{\sigma_{f_{max}} - (\sigma_m)_{\epsilon_{f_{max}}}} \tag{4.4}$$

Pour de plus petites valeurs de V_f , le comportement du matériau composite ne pourrait pas respecter l'équation (4.2) car il ne pourrait pas y avoir assez de fibres pour contrôler l'allongement de la matrice. C'est-à-dire, la matrice domine la résistance du matériau composite. Ainsi, les fibres seraient soumises à des contraintes plus élevées pour seulement des petites charges provoquant leur rupture.

Si toutes les fibres se cassent à la même contrainte, le matériau composite rompra à moins que la matrice (qui occupe seulement la V_m du volume élémentaire représentatif) peut prendre la charge entière imposée sur le matériau composite, cela veut dire :

$$\sigma_{c_{max}} = \sigma_{m_{max}} V_m \quad (4.5)$$

Ainsi, dans ce cas-là, la matrice est la seule qui contribue à la résistance du matériau composite. En fait, le matériau composite agit comme la matrice de fraction volumique V_m mais sans fibres de quantité V_f avec ses trous. Finalement, le matériau composite entier échoue après la rupture des fibres si :

$$\sigma_{c_{max}} = \sigma_{f_{max}} V_f + (\sigma_m)_{\varepsilon_{f_{max}}} (1 - V_f) \geq \sigma_{m_{max}} (1 - V_f) \quad (4.6)$$

La fraction volumique en renfort minimum $V_{f_{minimum}}$ assurant la validité de l'équation (4.6) peut être obtenue comme :

$$V_{f_{minimum}} = \frac{\sigma_{m_{max}} - (\sigma_m)_{\varepsilon_{f_{max}}}}{\sigma_{f_{max}} + \sigma_{m_{max}} - (\sigma_m)_{\varepsilon_{f_{max}}}} \quad (4.7)$$

Les expressions précédentes, des équations (4.3) à (4.7), permettent de limiter dans la figure 4-3 les valeurs de résistance du matériau composite (c.-à-d, la contrainte maximale du matériau composite) en fonction de la fraction volumique des fibres. Quand V_f est inférieure à $V_{f_{minimum}}$, la résistance du matériau composite sera contrôlée par la déformation de la matrice et qui est en réalité inférieure à la résistance de la matrice. Quand V_f est supérieure à $V_{f_{minimum}}$, mais inférieure à $V_{f_{critique}}$, la résistance de matériau composite sera contrôlée par la déformation des fibres, mais la résistance du matériau composite est encore inférieure à celle de la matrice. mais quand V_f dépasse $V_{f_{critique}}$ la résistance du matériau composite sera augmentée par le renforcement des fibres. Alors,

la résistance du matériau composite est contrôlée par les déformations des fibres parce que V_f est plus grande que $V_{f_{minimum}}$. A note que l'allure de la Figure 4-3 variera en fonction de $V_{f_{critique}}$. Aussi, de l'équation (4.4), on remarque que $V_{f_{critique}}$ devient plus petite quand

$$\sigma_{m_{max}} \cong (\sigma_m)_{\epsilon_{f_{max}}} \tag{4.8}$$

Comme c'est le cas des fibres de verre renforçant une matrice de résine. Dans ce cas, la résistance du matériau composite est toujours contrôlée par la fibre parce que $V_{f_{critique}}$ dépasse toujours $V_{f_{minimum}}$.

L'analyse précédente est fondée sur le faite que les fibres continues sont de même résistance à la rupture à la même position longitudinale. Cependant, les fibres sous tension n'ont pas tous la même résistance à la rupture et ne se rompent pas à la même position. Par contre, puisque des imperfections de surface varient d'une fibre à une autre, les fibres individuelles ont des résistances à la rupture différentes. Une analyse statistique est alors nécessaire pour rationaliser et définir la résistance d'un matériau composite.

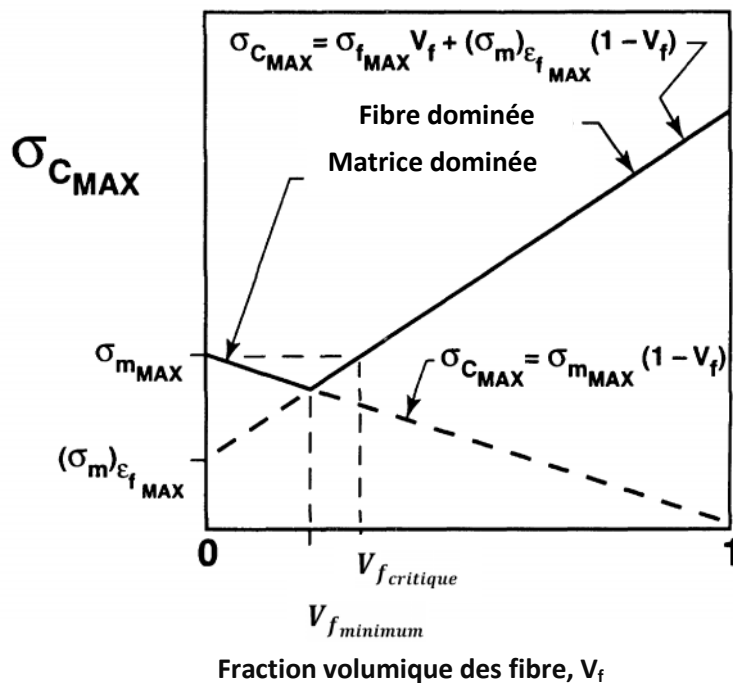


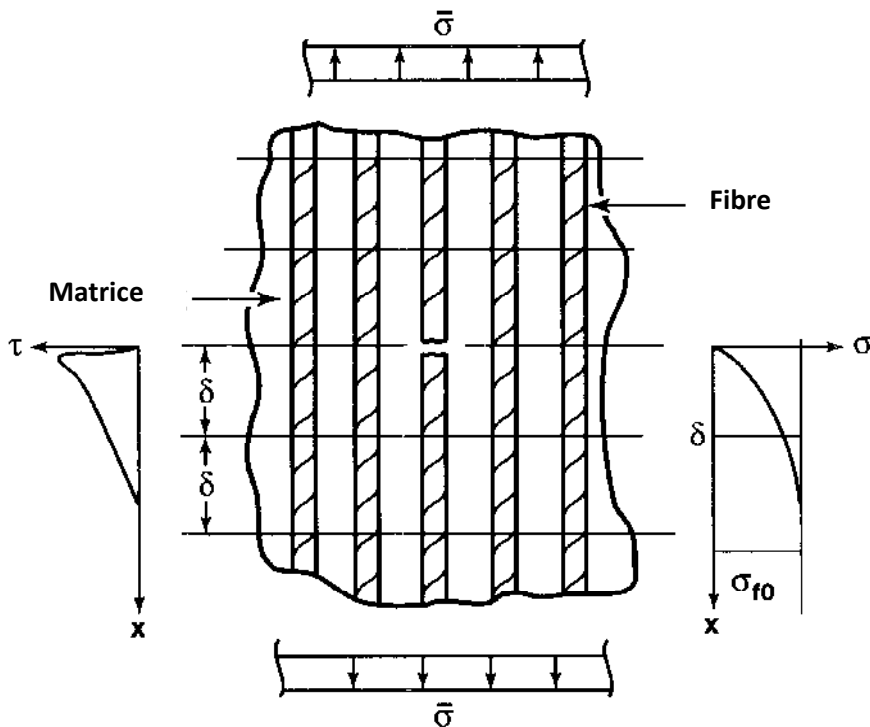
Figure 4-3 Evolution la résistance à la traction du composite en fonction de la fraction volumique des renforts (d'après Kelly et Davies[42])

4.2.2 Modèle des fibres avec une distribution statistique de résistance

Rosen a analysé la résistance des matériaux composites renforcés par des fibres avec une distribution statistique de force, par l'utilisation du modèle illustré par la figure 4-4 [43]. le volume élémentaire représentatif inclut plusieurs fibres intactes et une fibre cassée. Évidemment, le volume élémentaire représentatif subit des changements de la taille pendant le chargement et la rupture de fibre ultérieure ou bien lorsque le nombre de ruptures de fibre dans un volume élémentaire de taille fixe augmente.

La fibre cassée a été vraisemblablement soumise à une contrainte assez importante provoquant la rupture à une imperfection de surface. La fibre cassée cause la redistribution des contraintes autour de la région de rupture.

La déformation doit alors passer d'une extrémité de la fibre cassée après la rupture à l'autre extrémité. Le mécanisme pour compléter ce transfert de déformation est le développement de contraintes de cisaillement importantes dans la matrice sur une courte distance de la région de rupture de la fibre, comme c'est indiqué dans la Figure 4-4. La déformation longitudinale de la fibre est ainsi augmentée mais, il existe une autre contrainte de résistance σ_f d'une autre fibre dans le matériau composite loin de la région de rupture. Ainsi, le problème de fibre-traction à la région de rupture est transformé en problème de fibre-traction en dehors de la rupture de la fibre.



La figure 4-4 Modèle de rupture à la traction de Rosen

La Rupture du matériau composite peut alors se produire de deux façons:

-Premièrement, la contrainte de cisaillement de matrice autour de la fibre pourrait dépasser la contrainte admissible de cisaillement de la matrice. Plus précisément, le lien entre la fibre et la matrice peut être rompu en raison de la contrainte de cisaillement élevé dans le mécanisme précité pour le transfert de déformation entre les fibres brisées.

-En second lieu, la rupture de fibre a pu réellement se propager à travers la matrice par d'autres fibres, et par conséquent causer la rupture globale du matériau composite. Si un bon lien est réalisé entre la fibre et la matrice et si la résistance à la rupture de la matrice est importante, donc les ruptures de fibre peuvent continuer jusqu'à ce que l'accumulation statistique soit suffisante pour causer la rupture brute du matériau composite

Par l'utilisation de l'analyse statistique, Dow et Rosen ont obtenu :

$$\sigma_{cmax} = \sigma_{ref} V_f \left[\frac{1 - V_f^{1/2}}{V_f^{1/2}} \right]^{-1/(2\beta)} \quad (4.9)$$

σ_{ref} est un niveau de déformation de référence qui est fonction de la fibre et des propriétés de la matrice et β est un paramètre statistique dans la distribution de Weibull de la résistance de la fibre.

Des résultats de Rosen ont pour $\beta = 7.7$, concernant les fibres de verre-E que :

$$\sigma_{cmax} = \sigma_{ref} V_f \quad (4.10)$$

Dans laquelle la résistance à la traction de la matrice a été ignorée car elle est très inférieure à la résistance à la traction de la fibre.

Ainsi, σ_{ref} doit être interprétée comme essentiellement la résistance à la traction de la fibre, mais avec quelques implications statistiques. A noter que les résultats de Rosen sont proches de l'expression de loi-des-mélanges.

De tels modèle montrent que la résistance à la rupture du matériau composite est supérieure à celle d'une fibre individuelle parce que les résultats de Rosen situent la capacité d'absorption d'énergie du matériau composite est également supérieure à celle des fibres.

Des études définitives concernant la résistance à la traction de matériau composite d'un point de vue micromécanique n'existent pas dans la littérature.

4.3 Résistance à la compression dans le sens de la fibre

Quand le matériau composite renforcé de fibres est chargé en compression, Dow et Rosen supposent que le mode rupture par flambage de la fibre apparaît [44]. Si le flambement de la fibre devait se produire dans la matrice, il sera alors responsable pour défaut de compression. Ce mode de défaillance a été appelé par Greszczuk microflambement [45].

En plus d'être causée par des charges mécaniques à la compression, la fibre de flambement peut être causée par les contraintes de rétrécissements développées pendant le durcissement du matériau composite. De telles contraintes résultent de la matrice ayant un coefficient de dilatation thermique supérieure à celui des fibres.

Deux modes flambement de fibres sont possibles dans le volume élémentaire représentatif de la figure 4-5a. Premièrement, les fibres peuvent être courbées l'une par rapport à une autre en opposition de phase (symétrique par rapport à une ligne à mi-chemin entre les fibres) pour donner le mode de flambage transverse ou d'extension représenté par la figure 4-5b. Il ya, une ligne à l'origine verticale dans la matrice à mi-chemin entre chaque fibre (les lignes verticales en pointillés de la figure 4-5b) qui ne change pas de position. Toutes les autres lignes à l'origine verticale changent en forme d'ondes sinusoïdales avec une amplitude qui augmente lorsque la distance du milieu entre chaque fibre à un maximum. De plus, des lignes horizontales de longueur originale $2C$ se prolonge ou se contractes. C'est la matrice qui se prolonge ou se contracte dans la direction transversale y à la direction x . Par conséquent, le nom du mode transverse ou le mode d'extension est utilisé. Le second mode, le mode de cisaillement, est ainsi nommé parce que la matrice est soumise à une déformation de cisaillement parce que les fibres présentent des boucles en phase (antisymétrique en ce qui concerne la ligne à mi-chemin entre les fibres) comme indiqué dans la Figure 4-5c. Là, toutes les lignes à l'origine de cisaillement vertical dans la matrice sont d'abord à droite et ensuite à gauche de leur position à l'origine droite en forme d'une onde sinusoïdale. Aussi, des lignes à l'origine horizontales ne changent pas d'orientation ou de longueur pendant le flambement. Ainsi, de cisaillement de la matrice dans le plan x - y étant relatif par rapport à l'axe des abscisses. Par conséquent, le nom du mode de cisaillement est utilisé.

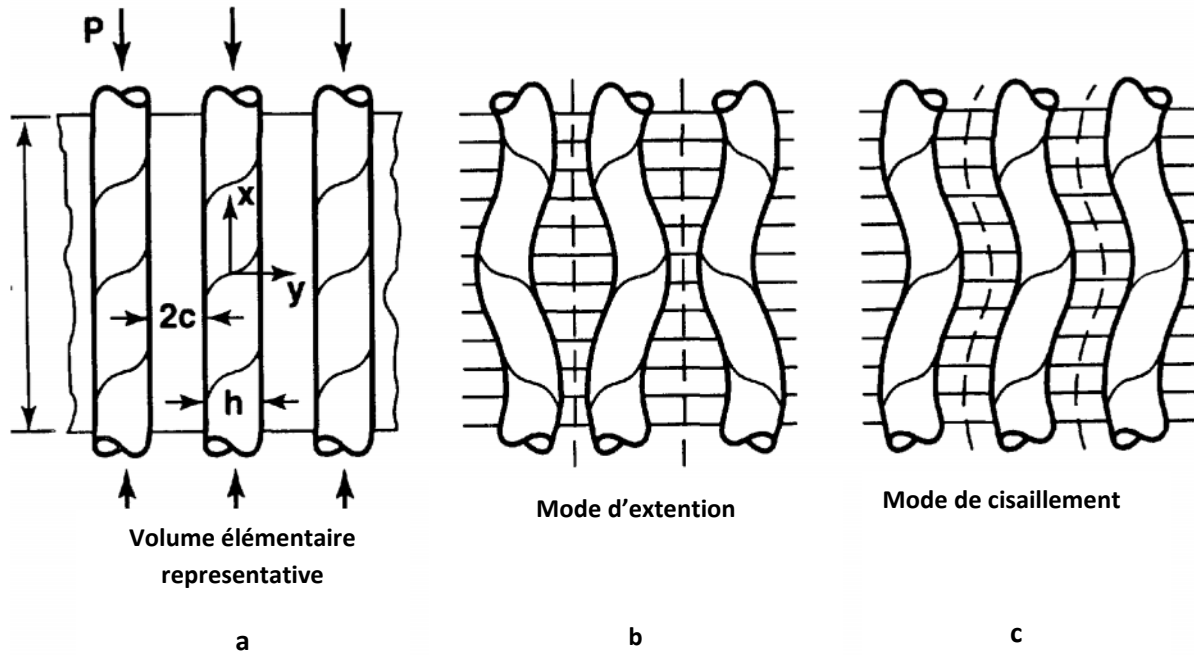


Figure 4-5 le mode d'extensionnelle et le mode de cisaillement de la fibre de flambement

Dans le modèle concernant les deux modes de flambage, les fibres sont considérées comme des plaques de longueur L , infiniment large, et d'épaisseur H séparées par une matrice de $2c$ large. Ainsi, le problème est bidimensionnel parce que la dimension perpendiculaire au plan X-Y sur la figure est négligée. Le résultat du modèle flambement bidimensionnel devrait être une borne supérieure sur le problème de gauchissement de fibre tridimensionnelle réel (dans laquelle les boucles de fibre donnent la forme d'hélice sous une charge inférieure à celle correspondant au flambage sinusoïdal dans un plan). Chaque fibre est soumise à la charge compressive axiale P . Les fibres sont aussi considérées comme étant beaucoup plus rigides que la matrice (c'est-à-dire $G_f \gg G_m$), donc les déformations de cisaillement de la fibre sont négligées. Bien sûr, la charge de flambement d'une fibre qui est entourée de matrice est significativement supérieure que si aucun matériau de matrice n'était présent. Essentiellement, le support latéral de la matrice continue est proportionnel à l'augmentation du nombre de supports latéraux discrets pour une colonne d'Euler.

C'est-à-dire

$$P = m^2 \pi^2 \frac{EI}{L^2} \tag{4.11}$$

La figure 4-6 montre que le mode de flambement dépend du nombre de supports latéraux ($m - 1$). Pour les fortes valeurs de m , la charge de flambement est énormément plus grande que si $m=1$ (une

colonne sans support latéral). Cependant, notons que le support matrice est élastique, c'est-à-dire, un support de déformation comme celui d'un ressort, qui n'est pas le support rigide de la colonne Euler avec des supports discrets.

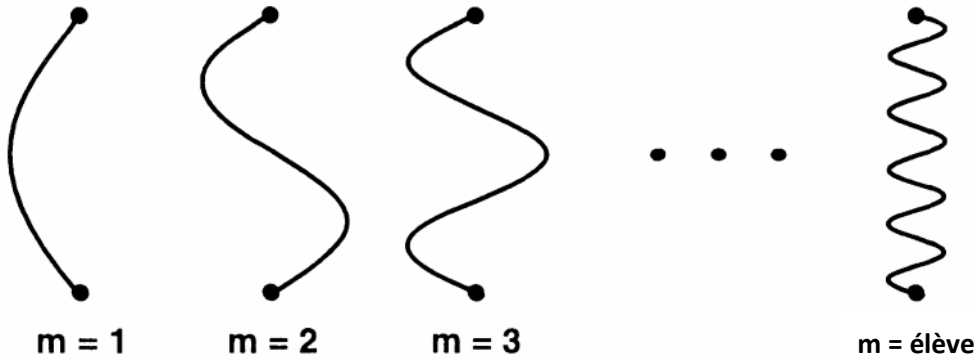


Figure 4 -6 Flambement d'une colonne discrètement supportée

L'analyse permettant de trouver la charge de flambage d'une fibre dans chaque mode est basée sur la méthode d'énergie décrite par Timoshenko et Gere [46]. Le critère de flambement énonce que la variation de l'énergie de déformation de la fibre, ΔU_f , et du matériau de matrice associé, ΔU_m , est assimilé à du travail accompli par la force de la fibre, ΔW , lors de la déformation d'un état à boucles, c'est-à-dire :

$$\Delta U_f + \Delta U_m = \Delta W \quad (4.12)$$

Dans la méthode d'énergie, les configurations de déflexion de boucle sont rapprochées pour les différents modes de boucle. Les charges de gauchissement correspondantes sont alors calculées par l'utilisation de l'équation (4.12). Une caractéristique importante de la méthode de l'énergie est que les charges de gauchissement calculées sont une limite supérieure de la charge de flambement réelle pour le problème considéré. Ainsi, si le déplacement de flambement inconnu, v , d'une fibre individuelle dans la direction y (transversal aux fibres dans la Figure 4-6) est représenté par la série de Fourier de fonction sinus :

$$v = \sum_{n1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (4.13)$$

Alors une charge de flambage sera obtenue comme étant la charge de flambement réelle. Si l'équation (4.13) est utilisée dans les expressions de l'énergie pour flambement transversale et pour voilement par cisaillement du matériau composite renforcé par fibre, donc le plus bas des deux charges de flambage régit le flambage des fibres du matériau composite. Un mode de flambement qui est intermédiaires aux déformations pour les modes transverses et de cisaillement (par exemple, les déformations des fibres qui ne sont ni en phase ni parfaitement déphasées) aurait une charge de flambage plus élevée que n'importe lequel des deux modes simples.

4.3.1 Mode d'extension ou transverse

Pour le mode de flambement transverse dans la Figure 4-6, le matériau de la matrice dilate ou se contracte dans la direction y. Toutefois, la déformation de la matrice dans la direction y (transversale aux fibres) est supposée être indépendante de y, c'est à dire:

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta L}{L} = \frac{2v}{2c} \quad (4.1)$$

D'où les relations de contrainte-déformation de matrice :

$$\sigma_y = E_m \frac{v}{c} \quad (4.15)$$

N'importe quelle déformation du matériau de la matrice dans la direction x est ignorée.

Ainsi, la variation de l'énergie de déformation est présumée être dominée par l'énergie de la contrainte transversale (en extension). Ainsi, pour la matrice,

$$\Delta U_m = \frac{1}{2} \int_V \sigma_y \varepsilon_y dV \quad (4.16)$$

$$\Delta U_m = \frac{E_m}{2c^2} \int_V v^2 dV \quad (4.17)$$

Remplaçant les équations (4.16) et (3.17) dans l'équation(4.13) pour obtenu :

$$\Delta U_m = \frac{E_m}{2c^2} \int_V \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_m a_n \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx dy \quad (4.18)$$

Où la dimension de volume élémentaire représentatif dans la direction z est l'unité. L'intégration et la sommation peuvent prendre la forme suivant :

$$\Delta U_m = \frac{E_m}{2c^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2c} \int_0^L a_m a_n \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx dy \quad (4.19)$$

Cependant, la fonction de sinus est orthogonale, c'est-à-dire :

$$\int_0^L a_m a_n \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx dy = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{L}{2}, & m = n \end{cases} \quad (4.20)$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\Delta U_m = \frac{E_m L}{2c} \sum_n a_n^2 \quad (4.21)$$

Pour les fibres, la variation de l'énergie de déformation est liée à la courbure de la fibre, v'' , considéré comme une colonne définie par de Timoshenko et Gere [47]

$$\Delta U_f = \frac{E_f I_f}{2} \int_0^L (V'')^2 dx \quad (4.22)$$

Avec $I_f = h^3/12$ pour une fibre d'épaisseur h et de profondeur unité (parce que la dimension perpendiculaire au plan XY de la figure 4-6 est infinie et donc inconnue). En substituant la série correspondant à la dérivation afin d'obtenir :

$$\Delta U_f = \frac{E_f h^3}{24} \int_0^L \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_m a_n \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx dy \quad (4.23)$$

L'intégration avec sommation et l'utilisation du résultat d'orthogonalité de l'équation (4.20) permettent d'obtenir :

$$\Delta U_f = \frac{\pi^4 E_f h^3}{48L^3} \sum_n n^4 a_n^2 \quad (4.24)$$

Finalement, le travail fait par la force externe P pendant le flambement sera :

$$\Delta W = P\delta \quad (4.25)$$

Où δ est la distance cause par le déplacement d'une fibre pendant le flambement de sa position droite à l'origine sous l'effet de la force P comme montré dans la Figure 4-7. A noter que la colonne (fibre) ne change pas de longueur pendant le processus de gauchissement.

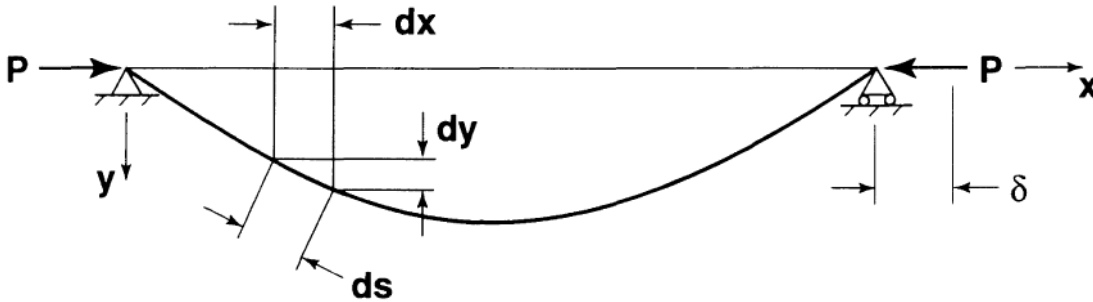


Figure 4-7 la déformation de la colonne simplement appuyée lors du flambage

Le mouvement différentiel $d\delta$, dû à la force P est la différence entre la longueur différentielle d'arc de la colonne, ds et la longueur différentielle dans la direction x , dx , comme montré dans la Figure 4-7,

$$\begin{aligned} d\delta &= ds - dx = \sqrt{dx^2 + dy^2} - dx = dx \left[1 + \left[\frac{dy}{dx} \right]^2 \right]^{1/2} - dx \\ &= dx \left[\frac{1}{2} \left[\frac{dy}{dx} \right]^2 + \dots \right] \cong \frac{1}{2} \left[\frac{dy}{dx} \right]^2 dx \end{aligned} \quad (4.26)$$

En conséquence,

$$\delta = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\frac{dy}{dx} \right]^2 dx \quad (4.27)$$

Alors, sur substitution de la dérivée de la déviation transversale, v , l'équation (4.13), dans l'expression de travail, Équation (4.25) :

$$\Delta W = \frac{P}{2} \int_0^L \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_m a_n \frac{m\pi}{L} \frac{n\pi}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx dy \quad (4.28)$$

L'intégration d'échange avec de sommation et l'utilisation l'analogie de cosinus à sinus et de l'orthogonalité de l'équation (4.20) permettent d'obtenir :

$$\Delta W = \frac{P\pi^2}{4L} \sum_n n^2 a_n^2 \quad (4.29)$$

Dans lequel, pour ce problème bidimensionnel, la charge des fibres par unité de largeur perpendiculaire au plan de la figure 4-6 est

$$P = \sigma_f h \quad (4.30)$$

La substitution des expressions d'énergie précédentes dans le critère de flambement permet de donner la charge de flambage de la fibre :

$$P = \frac{\pi^2 E_f h^3 \sum_n n^4 a_n^2 + \frac{24L^4 E_m}{\pi^4 c h^3 E_f} \sum_n a_n^2}{12L^2 \sum_n n^2 a_n^2} \quad (4.31)$$

Si on suppose que P réalise un minimum pour une onde de sinus particulière, alors :

$$\sigma_{f_{cr}} = \frac{\pi^2 E_f h^2}{12L^2} \left[m^2 + \frac{24L^4 E_m}{\pi^4 c h^3 E_f} \frac{1}{m^2} \right] \quad (4.32)$$

Où m est le nombre de demi-ondes en forme de colonne déformée. Des enquêtes de photoélasticité [47] montrent que le nombre m est évidemment un très grand. Ainsi, $\sigma_{f_{cr}}$ peut être traité comme une fonction continue de m et le minimum $\sigma_{f_{cr}}$ est obtenue de la condition de valeur stationnaire :

$$\frac{\partial \sigma_{f_{cr}}}{\partial m} = 0 \quad (4.33)$$

à la condition d'un minimum qui est :

$$\frac{\partial^2 \sigma_{f_{cr}}}{\partial m^2} \bigg|_{\frac{\partial \sigma_{f_{cr}}}{\partial m} = 0} > 0 \quad (4.34)$$

Si le nombre m était petit, le minimum $\sigma_{f_{cr}}$ doit être trouvé pour des les valeurs discrètes de m . Le raisonnement suivant est offert à l'appui de l'argument précédent. Considérons un complot hypothétique $\sigma_{f_{cr}}$ en fonction de m où $\sigma_{f_{cr}}$ a des valeurs entières de m comme représentée dans la figure 4-8, car il doit y avoir un nombre entier de gauchissement de la moitié des ondes pour satisfaire les conditions de fin de colonne. Dans cet exemple la charge de flambement minimum à $m = 2,7$ n'existe pas physiquement et dévie considérablement dans la valeur du minimum physique à $m = 3$ parce que le numéro du mode est au carré dans l'expression de flambement. Cependant, la charge de flambement pour le deuxième minimum au $m = 37.5$ bien qu'il n'existe pas physiquement, est une approximation raisonnablement proche au minimum réel parce que la différence en pourcentage entre la charge de flambement pour le $m = 37.5$ et que pour le $m = 37$ ou 38 est négligeable. Le minimum $\sigma_{f_{cr}}$ est une fonction continue de m :

$$\sigma_{f_{cr}} = 2 \sqrt{\frac{V_f E_m E_f}{3(1-V_f)}} \tag{4.35}$$

Comme peut facilement être vérifié Dans la dérivation précédente :

$$V_f = \frac{h}{h+2c} \tag{4.36}$$

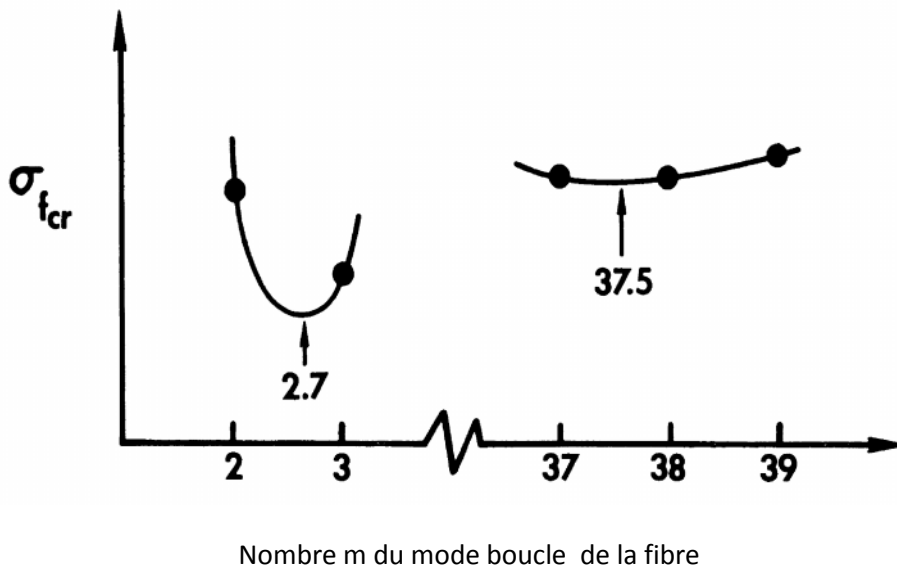


Figure 4-8 les Minimums relatifs hypothétiques de $\sigma_{f_{cr}}$

La contrainte de flambement dans le matériau composite est alors :

$$\sigma_{cmax} = V_f \sigma_{f_{cr}} = 2V_f \sqrt{\frac{V_f E_m E_f}{3(1-V_f)}} \quad (4.37)$$

Où la matrice est assumée pour être essentiellement non souligné dans la direction-x en comparaison des fibres.

Alternativement, la déformation de flambement dans la direction x peut être calculée à partir de l'Équation (4.35) :

$$\varepsilon_{f_{cr}} = 2 \sqrt{\frac{V_f}{3(1-V_f)}} \sqrt{\frac{E_m}{E_f}} \quad (4.38)$$

Si la matrice est considérée avoir la même déformation dans la direction de la fibre comme :

$$\sigma_m = E_m \varepsilon_{f_{cr}} \quad (4.39)$$

Après quoi la contrainte maximale de matériau composite sera :

$$\sigma_{cmax} = V_f \sigma_{f_{cr}} + V_m \sigma_m \quad (4.40)$$

Ou bien :

$$\sigma_{cmax} = \left[V_f + (1 - V_f) \frac{E_m}{E_f} \right] \sigma_{f_{cr}} \quad (4.41)$$

Finalement

$$\sigma_{cmax} = 2 \left[V_f + (1 - V_f) \frac{E_m}{E_f} \right] \sqrt{\frac{V_f E_m E_f}{3(1-V_f)}} \quad (4.42)$$

La différence entre les équations (4.37) et (4.42) est faible pour des proportions élevés de E_f par rapport à E_m comme c'est le cas pratique des matériaux composites renforcés par des fibres.

4.3.2 Mode de cisaillement

Pour le mode de cisaillement présenté dans la Figure 4-6, les déplacements de la fibre sont égaux et en phase. Le matériau de la matrice est alternativement cisailé dans un sens puis dans l'autre, comme x est la direction traversée. Cependant, les changements de la déformation dans la direction y sont ignorés. Ainsi, les contraintes de cisaillement sont supposées fonction seule de la coordonnée de la direction de la fibre. La distorsion angulaire du matériau est définie par :

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.43)$$

Où v est le déplacement dans la direction y et u est le déplacement dans la direction x . Ensuite, parce que le déplacement transversal est indépendant de la coordonnée transverse y :

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_{fibre} = \left. \frac{dv}{dx} \right|_{matrice} \quad (4.44)$$

Et puisque la déformation en cisaillement est indépendante de y , comme c'est indiqué sur la figure 4-9, alors :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{2c} [U(c) - U(-c)] \quad (4.45)$$

Et comme la déformation de cisaillement de la fibre est ignorée, donc :

$$U(c) = \frac{h}{2} \left. \frac{dv}{dx} \right|_{fibre} \quad (4.46)$$

Par substitution de l'équation (4.46) dans l'équation (4.45), on aura :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{h}{2c} \left. \frac{dv}{dx} \right|_{fibre} \quad (4.47)$$

Et des équations (4.47) et (4.44) dans l'équation (4.43) nous obtenons :

$$\gamma_{xy} = \left[1 + \frac{h}{2c} \right] \left. \frac{dv}{dx} \right|_{fibre} \quad (4.48)$$

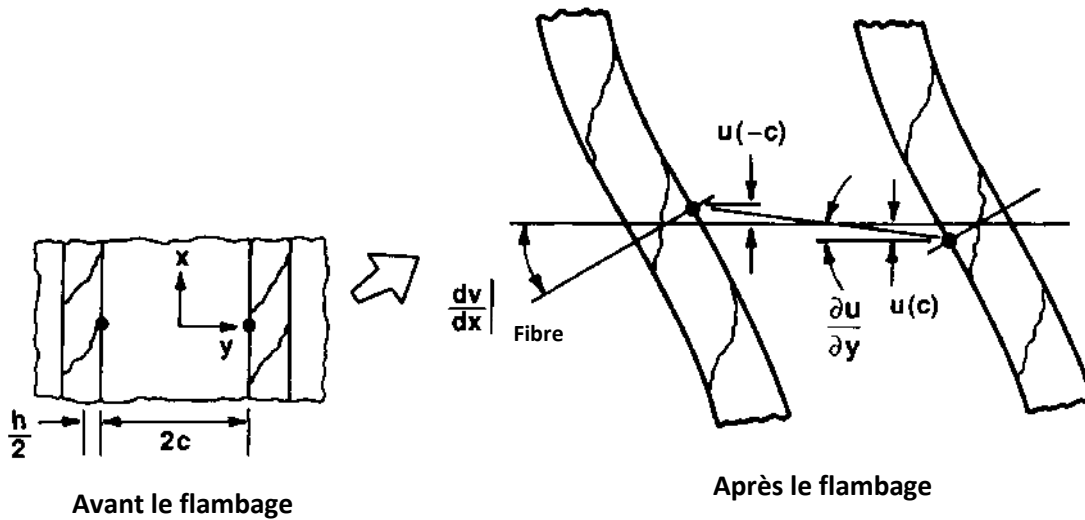


Figure 4-9 Déformation des fibres pendant le mode de cisaillement de flambage

A savoir que la relation contrainte-déformation de base :

$$\tau_{xy} = G_m \gamma_{xy} \tag{4.49}$$

Le changement d'énergie de déformation de la matrice exprimé seulement pour le cisaillement:

$$\Delta U_m = \frac{1}{2} \int_V \tau_{xy} \gamma_{xy} dV \tag{4.50}$$

En substituons les relations (4.48), (4.49) et (4.13) dans (4.50), on obtient :

$$\Delta U_m = G_m c \left[1 + \frac{h}{2c} \right]^2 \frac{\pi^2}{2L} \sum_n n^2 a_n^2 \tag{4.51}$$

Le changement d'énergie de déformation de la fibre donné par l'équation (4.24), et le travail réalisé et exprimé par l'équation (4.29) seront substitués dans le critère de flambement de l'équation (4.12) :

$$\sigma_{f_{cr}} = \frac{G_m}{V_f(1-V_f)} + \frac{\pi^2 E_f}{12} \left[\frac{mh}{L} \right]^2 \tag{4.52}$$

Puisque la longueur d'ondes de boucle est L/m , le deuxième terme de l'équation (4.42) est petit quand la longueur d'ondes de boucle est grande par rapport au diamètre de la fibre, h . Ainsi, la fibre en contrainte de flambement est approximativement :

$$\sigma_{fcr} = \frac{G_m}{V_f(1-V_f)} \quad (4.53)$$

La contrainte maximale du matériau composite est alors :

$$\sigma_{cmax} = \frac{G_m}{1-V_f} \quad (4.54)$$

Et la déformation de flambement est :

$$\varepsilon_{cr} = \frac{1}{V_f(1-V_f)} \left[\frac{G_m}{E_f} \right] \quad (4.55)$$

CHAPITRE 5

Etude Comparative des Caractérisations du Comportement Micromécanique de Matériau Composite Verre E /Epoxyde

Chapitre V**Etude comparative du comportement micromécanique du matériau composite Verre-E /Epoxyde****5.1 Introduction**

Les matériaux composites sont aujourd'hui d'utilisation importante dans des secteurs tels que l'aéronautique ou l'automobile et avec des applications dans le domaine du bâtiment et du génie civil. Ces utilisations des matériaux composites renforcé par des fibres comparées préférentiellement à des alliages traditionnels se justifient notamment par les propriétés mécaniques supérieures de ces composites par rapport aux alliages non renforcés et par les caractéristiques élastiques spécifiques élevées par rapport à celles des matériaux traditionnels ayant des caractéristiques mécaniques équivalentes.

Lors d'une sollicitation mécanique, la réponse élastique d'un composite unidirectionnel est décrite par cinq constantes élastiques d'ingénieur $E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}, et G_{23}$. Elles représentent les propriétés effectives ou homogènes du matériau. Elles sont obtenues analytiquement par des moyennes appropriées des déformations et des contraintes sur un volume représentatif du matériau.

La micromécanique a pour but de développer des solutions pour définir ces champs de contrainte et de déformation dans les matériaux hétérogènes afin de pouvoir calculer analytiquement ou numériquement les propriétés effectives en se basant sur des procédures d'homogénéisation.

La plupart des théories de la micromécanique sont limitées à quelques modèles mathématiques idéalisant le système biphasé. Les études réalisées en micromécanique des composites ont été passées en revue de manière compréhensible par Hashin et Gibson, Halpin- Tsai, Rosen.....etc.

En effet, le but de notre travail consiste à étudier les caractéristiques de la loi de comportement micromécanique des matériaux composites en utilisant quelques approches mathématiques simplifiées et d'informatiser les étapes de calcul des composites considérés par le biais du logiciel Matlab.

5.2 Présentation des matériaux constitutifs utilisés

Afin de choisir la nature du matériau de la fibre à considérer, on est contraint à différents critères de résistance. Par exemple, il faut savoir que la fibre de carbone est plus rigide que la fibre de verre, mais qu'elle n'autorise pas les mêmes facilités. Avec le carbone, la moindre bulle provoque un point faible, et en surface, une bulle se voit comme le nez au milieu de la surface. Il est donc préférable de commencer la manipulation des fibres par du verre, le carbone viendra après. Notez que le Kevlar s'ajoute au carbone pour obtenir des qualités exceptionnelles.

Le composite à étudier, est constitué d'une matrice d'époxyde renforcée par des fibres continues de verre E.

La fibre de verre est d'application courante et est généralement présente dans plusieurs domaines : du mobilier d'un bureau design jusqu'au pare-choc des automobiles. Comme tous les matériaux de pointe, les composites renforcés par du verre ont fait leur première apparition, à la suite d'essais sévères, dans l'aéronautique, le sport et l'automobile. Les grandes séries n'ont été atteintes qu'après des études complètes permettant de tirer le meilleur parti dont les propriétés particulières peuvent assurer plusieurs fonctions. A tous les niveaux, la fibre de verre est une fibre performante. Elle est utilisée au fil des vagues, sur les pistes de montagnes, aux pieds de skieurs et dans la carrosserie des téléphériques. Elle entre dans la constitution de la structure de l'avion concorde et le train TGV. Dans le domaine de sport, elle est à l'origine des meilleures performances de saut à la pêche dont les amateurs de courses en mer savent bien tout le bénéfice qu'ils peuvent en tirer. La fibre de verre est connue par sa haute résistance à la traction. Elle est l'armature idéale des matériaux plastiques et le renfort principal des plastiques, désignés souvent sous le nom général de matériaux composites. Ses multiples fonctions et la facilité de sa mise en œuvre expliquent tous ses succès dans la recherche de performances supérieures, en vitesse et en aérodynamisme dans les meilleures conditions de compétitivité.

Lors du choix du matériau de la matrice, c'est la résine qui domine les différentes applications industrielles. Elle assure la cohésion et l'orientation des fibres, elle permet également de transmettre les sollicitations auxquelles sont soumises les pièces. Les matériaux ainsi obtenus sont très hétérogènes et anisotropes. La matrice Epoxyde résulte de la polyaddition de l'épichlorhydrine sur un polyalcool et constitue la résine type des composites hautes performances HP.

5.3 Caractérisation technique des matériaux composites utilisés :

Les composites verre-E/Epoyde présentent des caractéristiques particulièrement intéressantes pour l'industrie. Ils conservent d'excellentes propriétés mécaniques à haute température ; c'est pourquoi qu'on les utilise notamment dans des aubes de compresseur pour étages chauds de réacteurs. À l'avenir, ce type de composites pourrait remplacer le titane dans le fuselage et les ailes des avions supersoniques. À très haute température, on préfère les composites à matrice et à fibres de carbone, en particulier dans les nez de fusées intercontinentale. Les caractéristiques de différentes natures de renforts et de matrices sont résumées respectivement dans les tableaux (5-1) et (5-2).

Les propriétés	unité	graphite	verre	aramide
module axial	GPa	230	85	124
module transversal	GPa	22	85	8
Axial Coefficient de Poisson	—	0.30	0.20	0.36
Transverse Coefficient de Poisson	—	0.35	0.20	0.37
module de cisaillement axial	GPa	22	35.42	3
Axial coefficient de dilatation thermique	$\mu\text{m}/\text{m}/^\circ\text{C}$	-1.3	5	-5.0
Transverse coefficient de dilatation thermique	$\mu\text{m}/\text{m}/^\circ\text{C}$	7.0	5	4.1
Résistance à la traction axiale	MPa	2067	1550	1379
Résistance à la compression axiale	MPa	1999	1550	276
Résistance à la traction transversale	MPa	77	1550	7
Transverse résistance à la compression	MPa	42	1550	7
Résistance au cisaillement	MPa	36	35	21
Densité	—	1.8	2.5	1.4

Tableau 5-1 Propriétés typiques de différentes fibres

Les propriété	unité	époxy	aluminium	Polyamide
module axial	GPa	3.4	71	3.5
module transversal	GPa	3.4	71	3.5
Axial Coefficient de Poisson	—	0.30	0.30	0.35
Transverse Coefficient de Poisson	—	0.30	0.30	0.35
module de cisaillement axial	GPa	1.308	27	1.3
Coefficient d'expansion thermique	$\mu\text{m}/\text{m}/^\circ\text{C}$	63	23	90
Coefficient d'expansion de l'humidité	$\text{m}/\text{m}/\text{kg}/\text{kg}$	0.33	0.00	0.33
Résistance à la traction axiale	MPa	72	276	54
Résistance à la compression axiale	MPa	102	276	108
Résistance à la traction transversale	MPa	72	276	54
Transverse résistance à la compression	MPa	102	2+76	108
Résistance au cisaillement	MPa	34	138	54
Densité	—	1.2	2.7	1.2

Tableau 5-2 Propriétés typiques de différentes matrices

5.4 Description des programmes informatiques utilisés :

Le logiciel MatLab met à la disposition de l'utilisateur un environnement performant pour mener à bien des calculs numériques ou symboliques. MATLAB est un outil puissant de calcul numérique, de programmation et de visualisation graphique. La facilité de développement des applications dans son langage fait qu'il est pratiquement devenu le standard dans son domaine. Actuellement, on trouve des nombreuses boîtes à outils (Toolboxes) qui contiennent des fonctions spécialisées permettant d'utiliser l'environnement MatLab pour résoudre des classes spécifiques de problèmes. Avec ses fonctions spécialisées, MATLAB peut être aussi considéré comme un langage de programmation adapté pour les problèmes scientifiques. MATLAB est un interpréteur : les instructions sont interprétées et exécutées ligne par ligne. MATLAB fonctionne dans plusieurs environnements tels que X-Windows, Windows, Macintosh.

Il existe deux modes de fonctionnement :

Le première est conçu pour le calcul des caractéristiques élastiques issues de la méthode de la loi des mélangés et de différents modèles mathématiques tels que Halpin-Tsai et modèle d'assemblage cylindrique ; et le modèle de Cox dans le cas des fibres courtes.

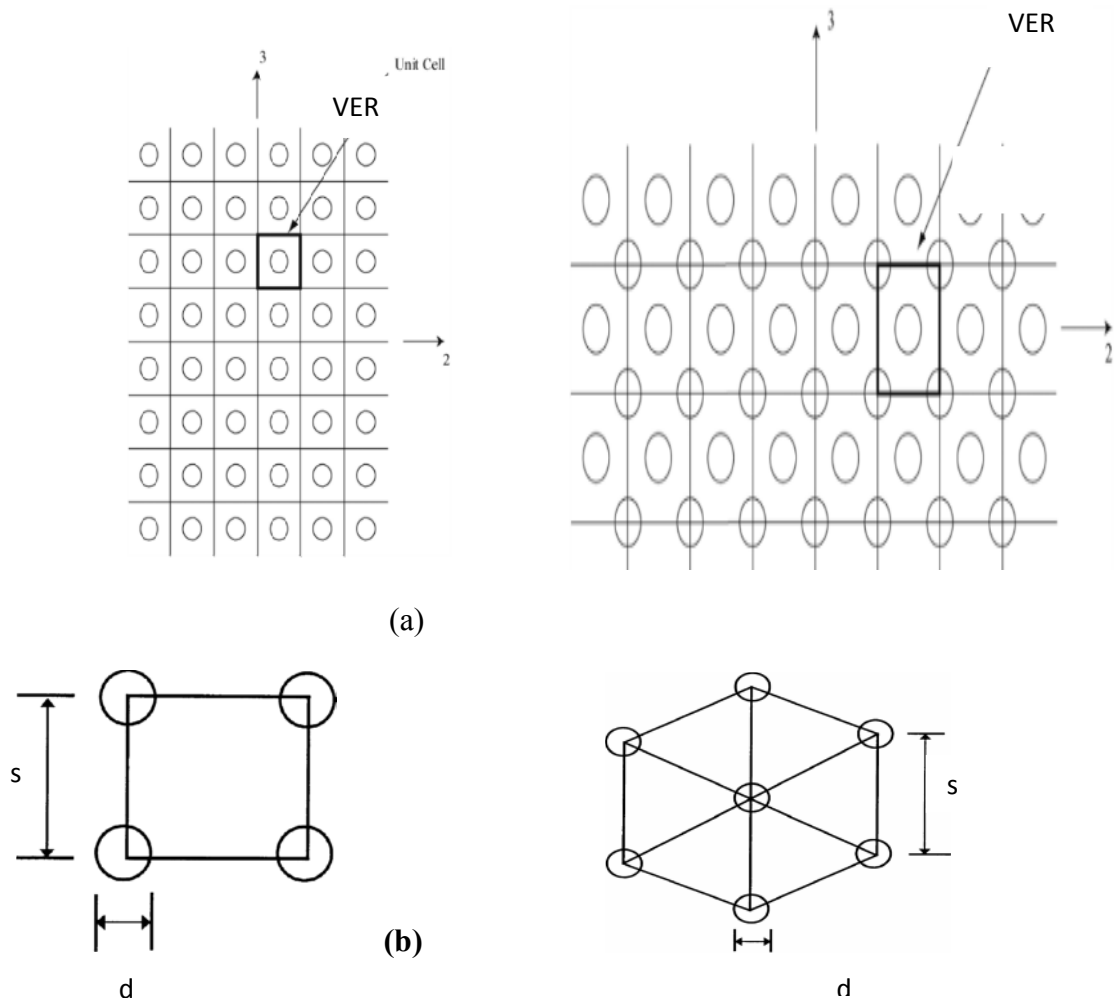
Le deuxième est chargé de la prédiction de la résistance du composite en utilisant une modélisation mathématique basée sur des modèles de résistance tels que la traction et la compression.

5.5 Application analytique :

Plus récemment, l'étude des modules effectifs a attiré l'attention de la communauté des mathématiciens. Ceci a permis de donner des fondements mathématiques solides à la notion d'homogénéisation et d'en étendre le sens avec, notamment, la notion de *G-convergence*. Ces nouveaux développements ont pu montrer toute leur puissance pour le problème qui nous préoccupe. La technique d'homogénéisation représente peut-être l'approche la plus générale, car elle se base sur la convergence des opérateurs et des fonctions intégrales décrivant le comportement du matériau non homogène.

La première étape dans une démarche d'homogénéisation est de préciser les différentes échelles du milieu hétérogène. Un volume élémentaire représentatif (VER) est alors défini, suffisamment grand devant les dimensions des hétérogénéités. Le comportement global du

VER est alors représenté par un milieu homogène équivalent (MHE). Il faut ensuite proposer une représentation morphologique des phases du matériau hétérogène en précisant le comportement mécanique de celles-ci. L'étape de localisation consiste à établir la relation entre les grandeurs macroscopiques (C , contrainte macroscopique et E , déformation macroscopique) et les grandeurs moyennes dans chaque phase d'indice k (σ_k , contrainte et q_k , déformation).



Arrangements carrés des fibres et V.E.R

Arrangements hexagonales des fibres et V.E.R

La figure 5-1 différents modèles des arrangements des fibres (a) et le V.E.R simplifié (b).

On a considéré lors de notre étude, des modèles d'arrangements les plus rencontrés tels que ceux en forme carré et hexagonale

a- Variation des coefficients élastiques par la technique d'homogénéisation

Le problème de l'homogénéisation du matériau composite consiste à rechercher les coefficients élastiques effectifs qui relient les déformations et les contraintes moyennes sur l'échantillon.

On a utilisé la technique d'homogénéisation pour le calcul de ces coefficients concernant le composite verre/époxyde à partir des propriétés de chacun des constituants par l'intermédiaire de MATLAB afin de simplifier le calcul et pour tracer leurs courbes représentatives (les programmes informatiques des calculs établis sont présentés dans l'annexe A). Le matériau composite considéré verre-E/époxyde est d'une fraction volumique des fibres égale à 70%. Les propriétés typiques des matériaux des constituants verre et époxyde ont été présentées dans les tableaux 5-1 et 5-2.

C'est à dire : $E_f = 85 \text{ GPa}$, $E_m = 3.4 \text{ GPa}$, $\nu_f = 0.2$, $\nu_m = 0.3$

$$\rho_f = 2500 \quad \rho_m = 1200$$

Dans le chapitre 2, nous avons exprimé les relations permettant le calcul des coefficients homogénéisés E_1, E_2, ν_{12} , et G_{12} en utilisant les équations (2.33), (2.38), (2.43) et (2.49) (voir l'annexe A).

Les allures des courbes donnant E_1, ν_{12} ont été présentées dans le chapitre 02 par les figures (2-5) et (2-8). Par contre, la variation des modules E_2 et G_{12} par rapport à la fraction volumique des fibres de verre est représentée dans les figures respectives (5-2) et (5-3).

La figure (5-2) représente la variation de module d'Young transversal E_2 par rapport à la fraction volumique des fibres V_f . On remarque que pour un matériau non renforcé ($V_f=0$), Le module sera celui de matrice époxyde ; mais quand V_f s'approche de la valeur 1, E_2 croît rapidement jusqu'à atteindre le module transversal des fibres de verre.

De même, la figure (5-3) représente la variation du module de cisaillement G_{12} par rapport à la fraction volumique des fibres V_f . Lorsqu'on dépasse la limite inférieure de V_f ($G_m = 1.3077$) et la courbe croît lentement par rapport à lorsqu'on s'approche de la valeur 1 et devient égale $G_f = 35.4167$

On remarque aussi que la relation de E_2 définie dans le chapitre 02 n'a pas été bien vérifiée transversalement mais elle donne une indication sur la borne inférieure.

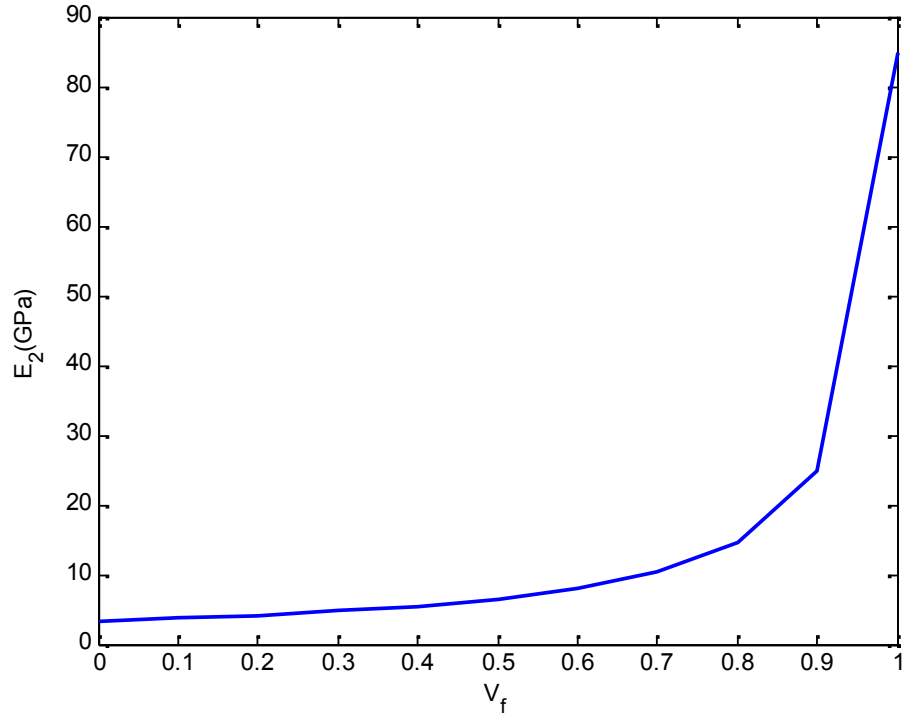


Figure 5-2. Variation du module transversal E_2 en fonction de la fraction volumique V_f .

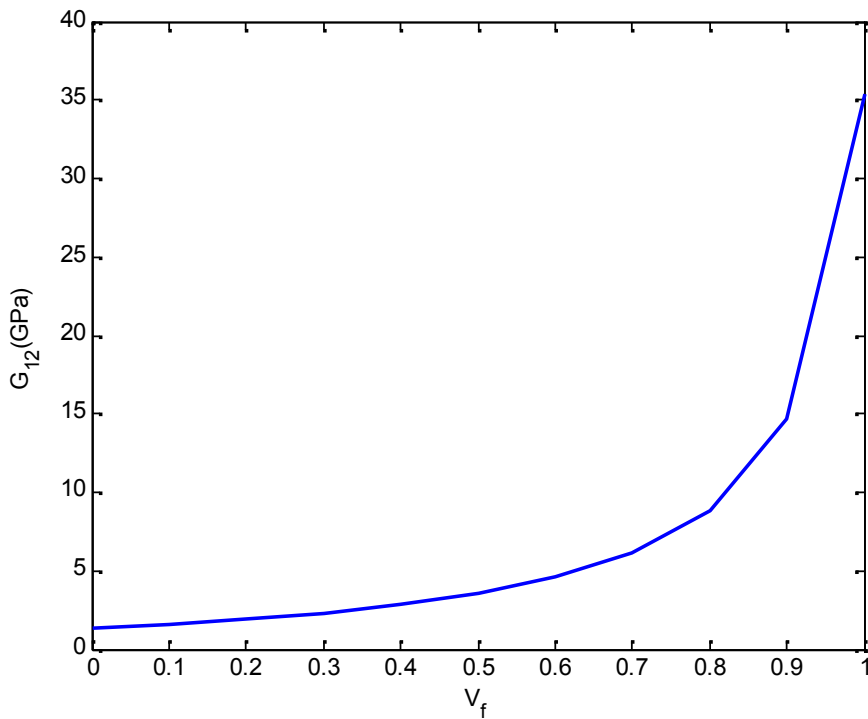


Figure 5-3. Variation du module de cisaillement G_{12} en fonction de la fraction volumique V_f .

b- Evolution des bornes d'homogénéisation :

Plusieurs travaux ont été consacrés pour déterminer les bornes sur les propriétés homogénéisées des composites obtenues par le mélange de deux phases distinctes. Voigt (1889) et Reuss (1929) donnent deux premières estimations des bornes sur les coefficients élastiques des composites. Hashin et Shtrikman (1963) établissent ensuite un principe variationnel capable de donner de manière précise les bornes sur les propriétés effectives en fonction des fractions volumiques des constituants.

Rappelons que les modèles à bornes donnent un encadrement du comportement mécanique du matériau composite par des comportements mécaniques limites (bornes). Les modèles que nous allons présenter sont applicables aux matériaux composites verre/époxyde. Nous remplacerons donc les termes fibres et matrices par des phases. Les bornes correspondent donc aux associations de série des deux phases. L'intérêt est limité dès que l'écart des caractéristiques des deux phases est important.

En utilisant l'équation (3.16) pour calculer la borne inférieure sur le module d'Young E des matériaux composites sur le plan des modules et des fractions volumiques des matériaux constitutifs, et l'équation (3.32) pour calculer la borne supérieure sur le module d'Young E . Le résultat est représenté donc dans la figure (5-4).

Par contre et lors du calcul des bornes du module G_{12} , on utilise l'estimation de Hashin et Shtrikman qui est une expression des bornes de Paul plus resserrée. En revanche, l'expression des bornes plus resserrée de Voigt et Reuss consiste en l'ajout d'une hypothèse supplémentaire sur la géométrie prévoyant l'existence d'une phase continue et une discontinue. Ce modèle utilise le principe variationnel dont les différents constituants sont noyés dans un matériau de comparaison. Si ce dernier matériau est "plus souple" L_{min} ou "plus raide" L_{max} par rapport à toutes les phases du matériau composite, on obtiendra une borne inférieure L^{HS-} et supérieure L^{HS+} pour les différents modules du matériau composite (figure (5-4)).

La figure (5-4) représente l'évolution des bornes supérieure et inférieure du module d'Young par l'approche de Paul d'un matériau composite verre/Epoxyde en fonction de la fraction volumique des fibres. On remarque que la borne supérieure de Paul coïncide avec la valeur du module longitudinale et la borne inférieure coïncide avec la valeur du module transversal.

Pour déterminer les bornes de Hashin-Shtikman en utilisant les équations suivantes :

$$E^{HS+} = \left(V_f k_f + \frac{(1 - V_f) E_m}{1 + \alpha_f \frac{E_m - k_f}{E_f}} \right) \left(V_f + \frac{1 - V_f}{1 + \alpha_f \frac{E_m - E_f}{E_f}} \right)^{-1}$$

$$E^{HS-} = \left((1 - V_f) E_m + \frac{V_f E_f}{1 + \beta_m \frac{E_f - E_m}{E_m}} \right) \left(1 - V_f + \frac{V_f}{1 + \beta_m \frac{E_f - E_m}{E_m}} \right)^{-1}$$

$$G^{HS+} = \left(V_f \mu_f + \frac{(1 - V_f) \mu_m}{1 + \beta_f \frac{\mu_m - \mu_f}{k_f}} \right) \left(V_f + \frac{1 - V_f}{1 + \beta_f \frac{\mu_m - \mu_f}{\mu_f}} \right)^{-1}$$

$$G^{HS-} = \left((1 - V_f) \mu_m + \frac{V_f \mu_f}{1 + \beta_m \frac{\mu_f - \mu_m}{k_m}} \right) \left(1 - V_f + \frac{V_f}{1 + \beta_m \frac{\mu_f - \mu_m}{k_m}} \right)^{-1}$$

Avec :

$$\alpha_f = \frac{(3+4\nu_f)}{8(1-\nu_f)} \quad \alpha_m = \frac{(3+4\nu_m)}{8(1-\nu_m)}$$

$$\beta_f = \frac{(3+4\nu_f)}{4(1-\nu_f)} \quad \beta_m = \frac{(3+4\nu_m)}{4(1-\nu_m)}$$

et

$$\mu_{f,m} = \frac{E_{f,m}}{2(1 + \nu_{f,m})}$$

$$k_{f,m} = \frac{E_{f,m}}{3(1 - \nu_{f,m})}$$

De plus, les figures (5-5) et (5-6) représentent respectivement une comparaison de l'évolution des bornes supérieure HS^+ et inférieure HS^- du module d'Young et de cisaillement du matériau composite verre/Epoxyde en fonction de la fraction volumique des fibres par les approches de Hashin-Shtrikman et celles du Paul. On remarque que les bornes de Hashin-Shtrikman sont plus étroites que les bornes de Paul dans le cas où la répartition des phases est supposée isotrope dans le plan au sein du matériau.

La technique de bornage des modules d'élasticité effectifs est un compromis intéressant dans l'étude des composites statistiquement isotropes (les bornes sont indépendants de la géométrie et de la disposition des inclusions). De plus, les bornes de Hashin et Shtrikman sont les plus rapprochées car on peut les obtenir sans hypothèses sur la texture du matériau.

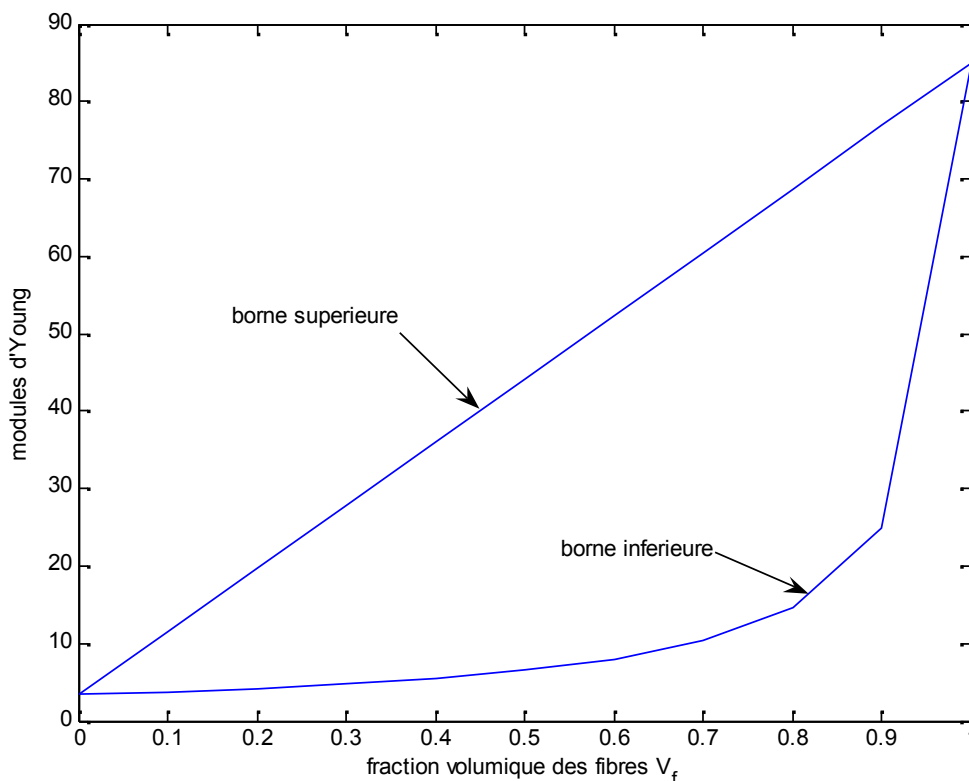


Figure 5-4 Evolution des bornes d'homogénéise du Paul

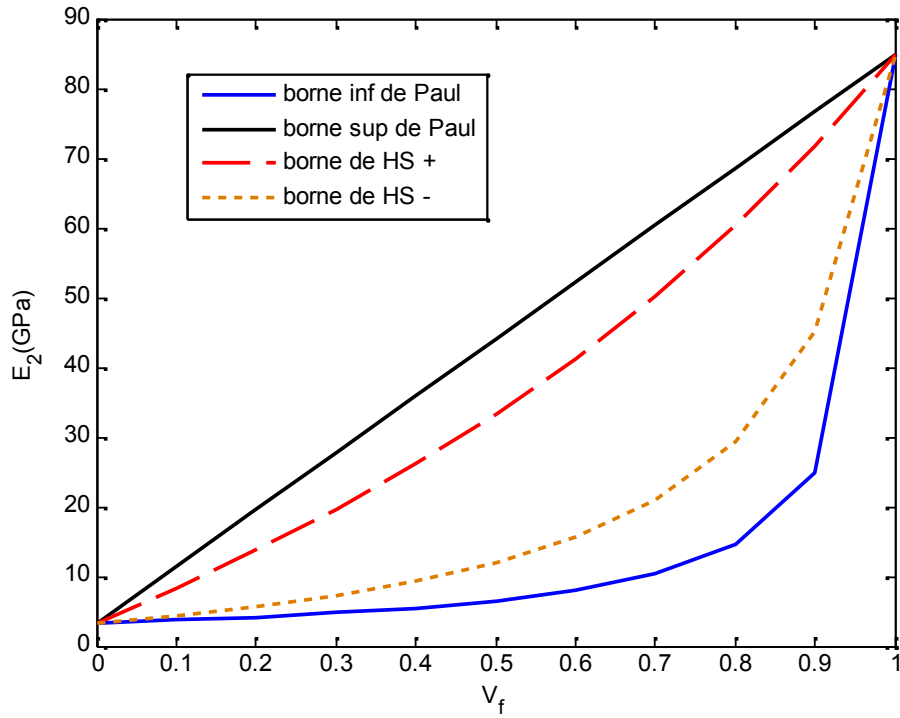


Figure 5-5 Evaluation des bornes du module d'Young par différentes approches.

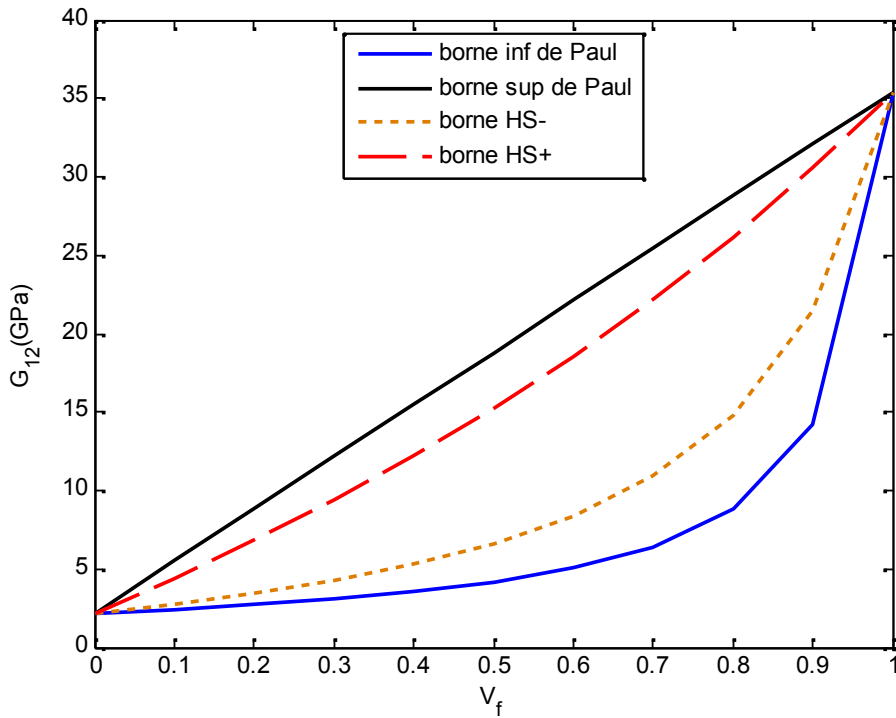


Figure 5-6 Evaluation des bornes du module de cisaillement G_{12} par différentes approches.

c- Etude de la contiguïté :

Les analyses concernant les modules des matériaux composites avec des arrangements réguliers doivent être modifiées pour tenir compte du fait que les fibres sont contiguës. Dans ce cas, les fibres se touchent plutôt d'être complètement entourées par le matériau de la matrice. D'un point de vue analytique, deux cas peuvent se présenter une combinaison linéaire d'une solution dans laquelle toutes les fibres sont isolées les unes des autres et une autre solution dans laquelle toutes les fibres entrent en contact pour fournir le module correct. Si C représente le degré de contiguïté, donc la valeur $C = 0$ correspond à aucune contiguïté (fibres isolées) et $C = 1$ correspond à la contiguïté parfaite (toutes les fibres sont en contact) comme dans la Figure 5-7.

Tsai a réalisé des expériences pour mesurer les différents modules du matériau composite verre/époxyde. La fibre de verre et la résine époxyde ont respectivement un module d'Young et un coefficient de Poisson égaux à (73 GPa et 0.22) et (3,5 GPa et 0.35).

Pour diverses fractions volumiques des fibres, les résultats expérimentaux sont comparés aux résultats théoriques obtenus par les équations (3.37), (3.33), (3.35) et (3.36) permettant de calculer E_1 , E_2 , ν_{12} et G_{12} , respectivement. Les résultats théoriques dépendent du facteur de défaut d'alignement des fibres k et du facteur de la contiguïté C . Les courbes de manière théorique peuvent être établies pour un large éventail des valeurs de k et C . L'objectif de la comparaison des résultats théoriques et expérimentaux est de démontrer à la fois l'accord qualitatif et quantitatif, afin de valider une prédiction théorique. Si les résultats théoriques ont la même forme que les résultats expérimentaux, l'accord est appelé qualitatif. En outre, si, par un ajustement uniforme des paramètres k et C , les deux séries des résultats sont en accord en valeur et l'accord sera ainsi appelé quantitatif. les notions du facteur de désalignement des fibres et du facteur de contiguïté seront étudiées.

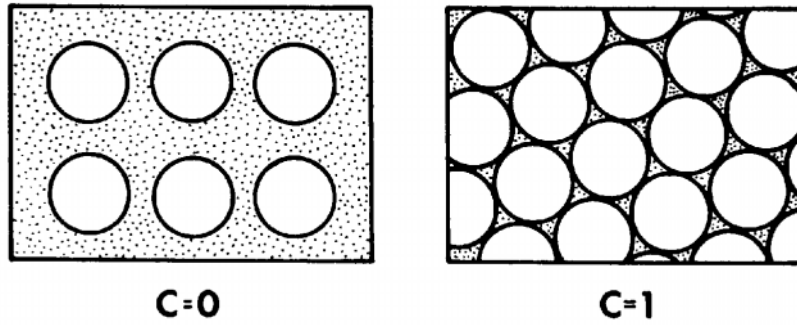


Figure 5-7 Cas extrêmes de la contiguïté des fibres

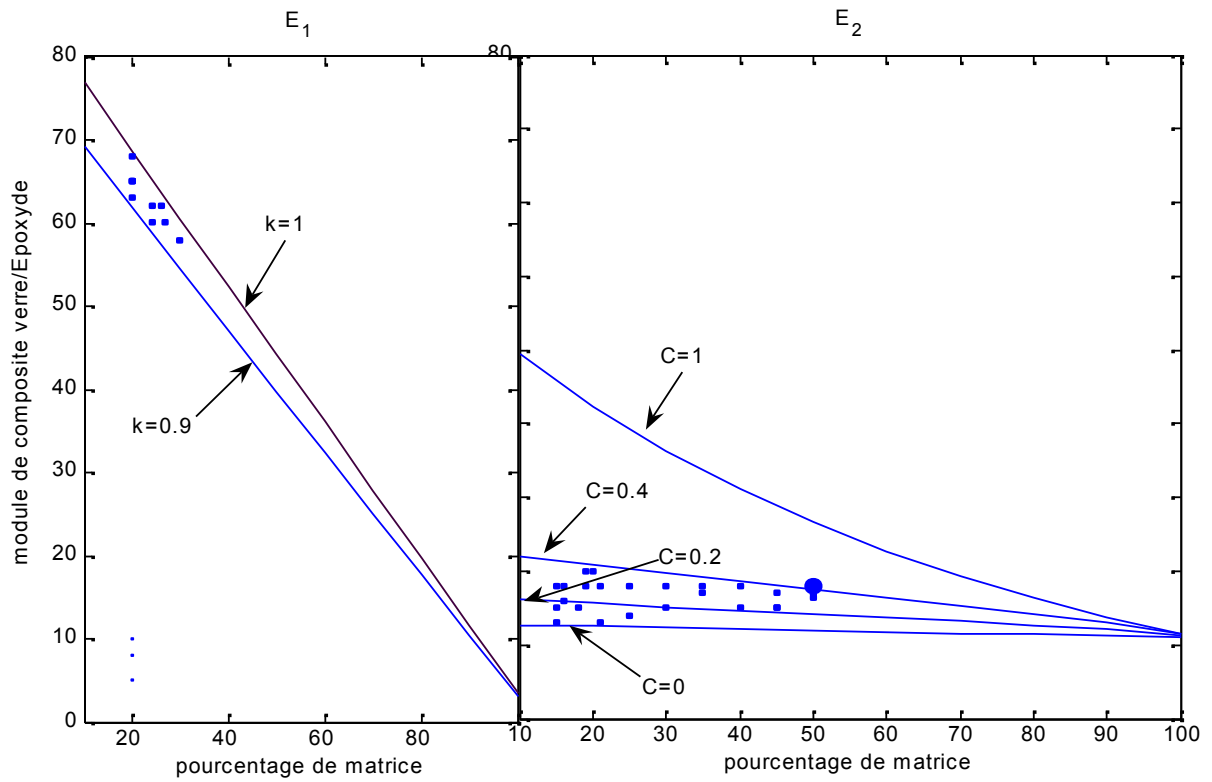


Figure 5-8. Variation des modules E_1 et E_2 suivant les valeurs des facteurs k et C

déterminés théoriquement et expérimentalement (D'après Tsai)

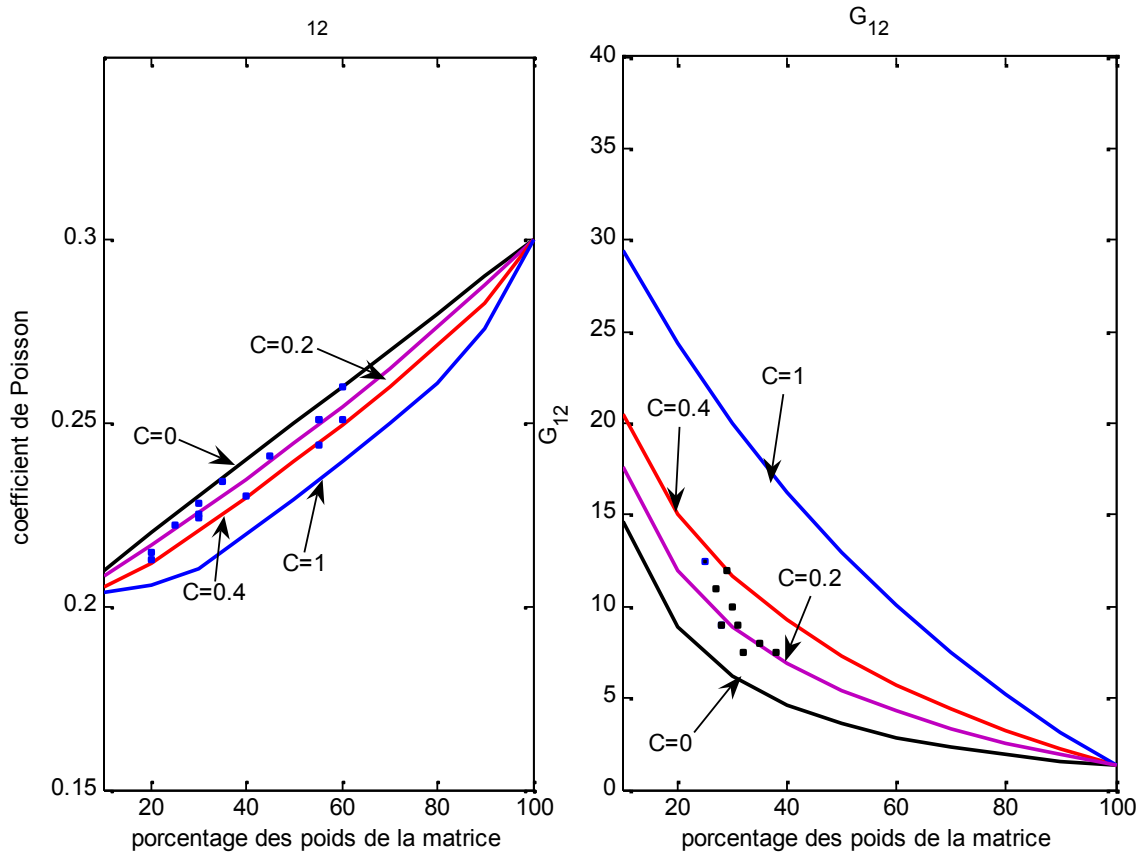


Figure 5-9. Variation des coefficients ν_{12} et G_{12} suivant les valeurs des facteurs k et C déterminés théoriquement et expérimentalement (D'après Tsai)

La figure 5-8 expose les résultats expérimentaux et théoriques des modules d'Young E_1 et E_2 pour des proportions de résine dans des limites variant de 10 % à 100 %. Puisque E_1 n'est pas une fonction de C , il a été varié seulement par rapport à k . Deux valeurs ont été choisies : $k = 0.9$ et $k = 1$. On remarque alors que des résultats expérimentaux de la Figure 5-8 se situent au-dessus de la courbe pour $k = 1$ (c'est-à-dire, ci-dessus de la limite supérieure); et des résultats sont situés au-dessous de $k = 0.9$. Cependant, la plupart des résultats sont situés entre $k = 0.9$ et $k = 1$ dont la première étant une estimation prudente du comportement. Les spécimens réels ont été faits à la main, si la teneur en résine pourrait ne pas être précise, et le mauvais alignement de fibres n'est pas inattendu. Ainsi, les résultats ci-dessus de la limite supérieure ne sont pas rares non plus.

De même, les résultats théoriques et mesurés de E_2 sont présentés dans la figure 5-8 en fonction de la teneur en poids de la résine. Les résultats théoriques développés de l'équation (3.33) sont exprimés pour $C = 0, 0.2, 0.4$, et 1, et ceux mesurés sont limités entre les courbes

pour $C = 0$ et $C = 0.4$. La courbe théorique correspondant à la limite inférieure, $C = 0$, est une estimation excessivement conservatrice de la rigidité. L'existence d'un facteur de contiguïté, C , a été raisonnablement bien démontrée par les résultats de la Figure 3-8. Cependant, un examen plus critique du concept de facteur de contiguïté est en ordre.

La figure 5-9 présente les résultats expérimentaux pour ν_{12} et G_{12} du matériau composite verre/époxyde avec des prédictions théoriques établies à partir des équations (3.35) et (3.36) en fonction de la teneur en poids de la résine. Les résultats théoriques pour ν_{12} sont présentés pour des facteurs de contiguïté $C = 0, 0.2, 0.4$, et 1 . Apparemment, $C = 0$ est la limite supérieure des données, alors que $C = 0.4$ est la limite inférieure. Ainsi, la notion de facteur de contiguïté est encore renforcée. Pour le cas de G_{12} , les résultats expérimentaux sont limités par des courbes pour $C = 0$ et $C = 0.4$. La partie supérieure (connectée en parallèle pour les phases) et inférieure (connectée en série pour les phases) des limites en raison de Paul sont présentées pour démontrer l'exactitude de ces limites dans le cas présent où E_f est beaucoup plus grande que E_m . Le recul des résultats consolidés de Hashin et Rosen correspond à $C = 0$, mais leur limite supérieure est inférieure à une partie des données expérimentales dans la Figure 5-9.

d- Confrontation des modèles mathématiques

Les propriétés macroscopiques d'un matériau hétérogène résultent de la combinaison de celles de ses constituants. La littérature est riche en modèles micromécaniques de prévision de ce comportement élastique effectif. Basée sur des approches parfois très différentes, elle laisse pourtant transparaitre des préoccupations communes. Les plus simples sont de Voigt et Reuss (association parallèle ou série des deux phases). Modèle d'assemblage cylindrique, Halpin et Tsai... ces derniers ont développé une procédure d'interpolation qui est une représentation approximative de la micromécanique et des résultats compliqués. L'importance de la procédure est que Halpin et Tsai ont montré que la solution de Hermans, les modèles de Hill et l'auto-cohérent peuvent être réduits à la forme approximative.

La seule difficulté réside en l'utilisation des équations de Halpin-Tsai et qui semble être lors de la détermination d'une valeur convenable pour ξ . Halpin et Tsai ont obtenu un excellent accord avec les résultats d'Adams et Doner pour un arrangement carré des fibres lorsque $\xi = 2$ lors du calcul de E_2 et $\xi = 1$ lors du calcul de G_{12} pour une fraction volumique de fibres égale à 0.55.

Foye a traité le problème des fibres des sections rectangulaires et a obtenu une excellente relation de facteur de renforcement ξ . pour le module transversal et le module de cisaillement obtenus respectivement par les équations (3.61) et (3.62). Halpin et Tsai ont constaté une corrélation avec leurs équations correspondantes pour des valeurs de ξ concernant le module transversal et le module de cisaillement.

Pour effectuer une étude des résultats de Foye, on considère le matériau composite verre-E/époxyde de fraction volumique égale à 0.55, et $E_f=85$ GPa, $E_m=3.4$ GPa. On analyse donc la variation des modules d'élasticité E_2 par rapport à la fraction volumique des fibres avec changement du rapport des longueurs $a/b = 1, 4$ et 10 comme il est montré sur la figure 5-10. Mêmes considérations lors du calcul du module de cisaillement avec des rapports $a/b = 0.1, 0.25, 1, 4,$ et 10 (figure 5-11).

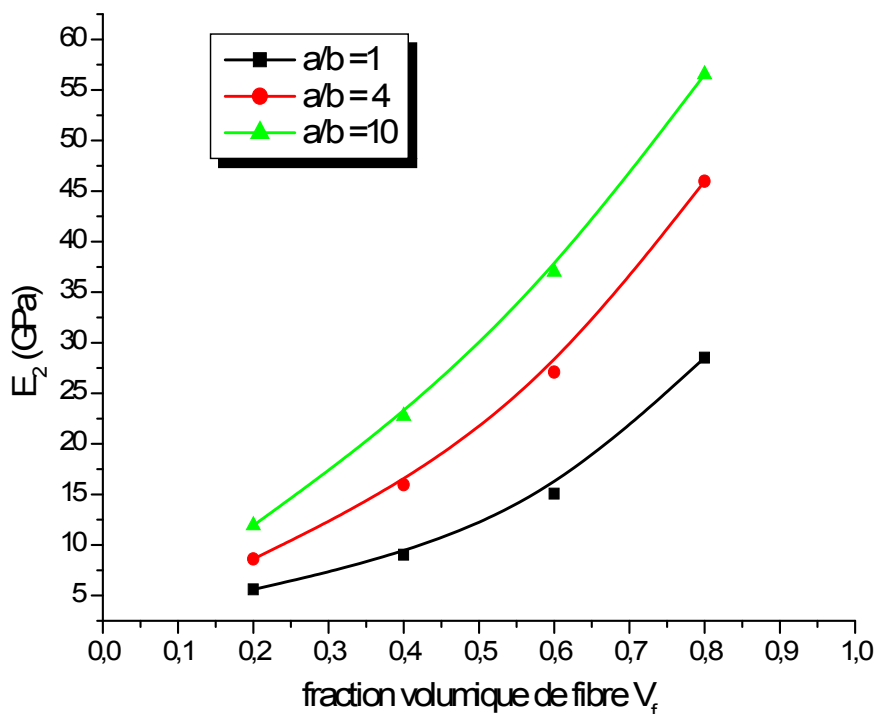


Figure 5-10 Variation de E_2 par rapport à V_f selon l'approche de Foye

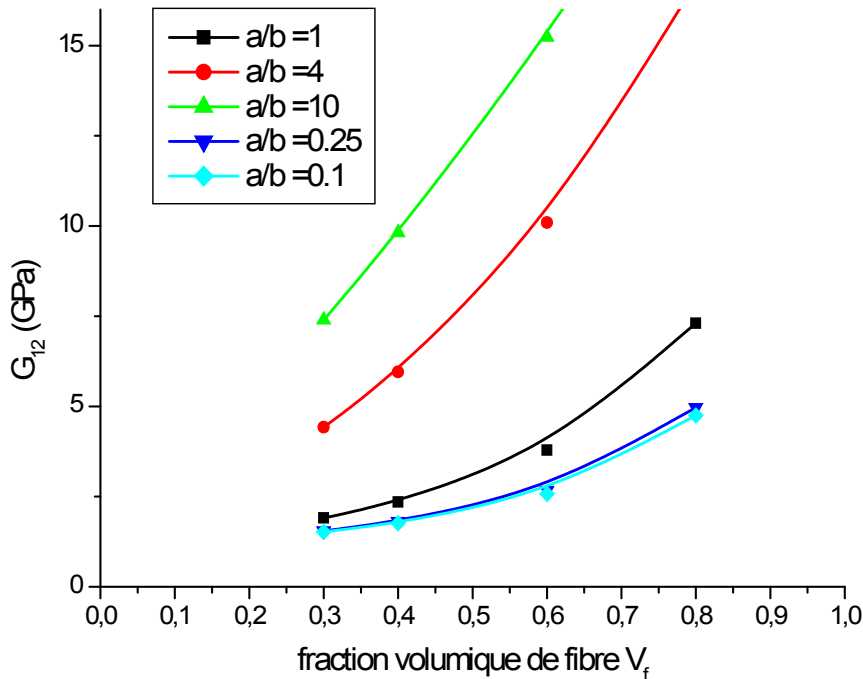


Figure 5-11 Variation de G_{12} par rapport à V_f selon l'approche de Foye.

La figure 5-10 représente donc la variation du module transversal par rapport à la fraction volumique des fibres après les considérations de Foye. On remarque que l'évolution de E_2 est proportionnelle au rapport a/b expliquant la grande influence des dimensions géométriques de la section de la fibre.

D'autre part, la figure 5-11 représente la variation du module de cisaillement G_{12} en fonction de la fraction volumique des fibres selon les considérations de Foye. La même remarque citée précédemment est applicable dans ce cas surtout pour un rapport a/b supérieure à 1. Quand a/b est inférieur à 1 et dans le voisinage de 0.25 et 0.1 les résultats s'approchent.

Hewitt et de Malherbe montrent que les équations de Halpin-Tsai donnent une sous-estimation du module de cisaillement G_{12} des matériaux composites à fibres circulaires en forme de carré pour la fraction volumique des fibres supérieure à 0.5. Plus précisément, la sous-estimation est de 30% pour $V_f = 0.75$ et $G_f/G_m = 20$, une telle valeur est très effective dans le cas du matériau composite verre/Epoxyde.

Une meilleure corrélation entre les équations de Halpin-Tsai et la solution numérique d'Adams et Donner comme le montre la Figure 3-19. Cette relation, comme pour les autres,

est déterminée empiriquement. Des estimations plus précises de ξ peut être trouvée, mais il faut veiller à ne pas établir une expression qui dépasse à la fois aux exigences de précision nécessaires.

Dans cette contribution, on a déterminé les variations des valeurs de G_{12}/G_m par rapport aux valeurs de G_f/G_m par l'utilisation des équations de Halpin-Tsai et sous-estimation numérique de Adams et Donner. En prend $\xi = 1$ pour l'équation de Halpin-Tsai et la relation (3.63) pour Adams et Donner, et G_f/G_m varie de 0 jusqu'à 1000, avec divers fractions volumiques $V_f = 0.75, 0.70, 0.55$ et 0.40 (figure 5-12).

Le terme ηV_f dans l'équation (3.39) peut être interprété comme une réduction de la fraction volumique de fibres. Le mot «réduit» est utilisé parce que $\eta < 1$. Plus de plus, il ressort de l'équation (3.40) que η est affecté par les propriétés des matériaux constitutifs, ainsi que par le renforcement des facteurs de géométrie ξ . Afin d'aider à obtenir une satisfaction entre le modèle d'Halpin-Tsai, l'équation de base et l'équation (3.39), on a établi la Figure 5-13 représentée en fonction de ηV_f .

La figure 5-12 représente la variation du module de cisaillement par rapport au rapport G_f/G_m . On remarque que lorsque $V_f < 0.55$, la courbe d'Adams est identique à celle d'Halpin-Tsai. Quand $V_f \geq 0.55$, le résultat d'Adams est plus supérieure à celui d'Halpin-Tsai.

La figure 5-13 illustre la variation des modules d'élasticité par rapport à ηV_f et dont ξ varie de 0, 0.5, 1, 1.5, et 2. Les courbes avec des valeurs intermédiaires de ξ peuvent être générées rapidement. De toute évidence, la prise des valeurs de ηV_f dans la pratique est inférieure à environ 0.6, mais la plupart des courbes sont présentés dans la Figure 5-13 pour des valeurs allant jusqu'à 0.9. Ces courbes maîtresses, pour diverses valeurs de ξ , peuvent être utilisées dans la conception des matériaux composites.

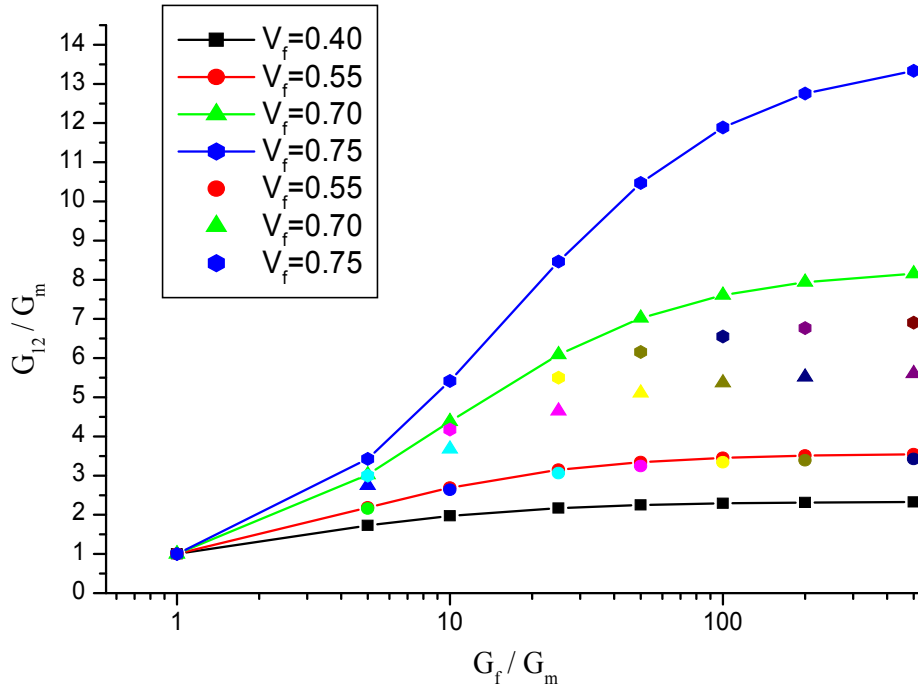


Figure 5-12. Evolution du module de cisaillement G_{12} par les modèles d'Haplin-Tsai et d'Adams et Donner pour un arrangement carré des fibres

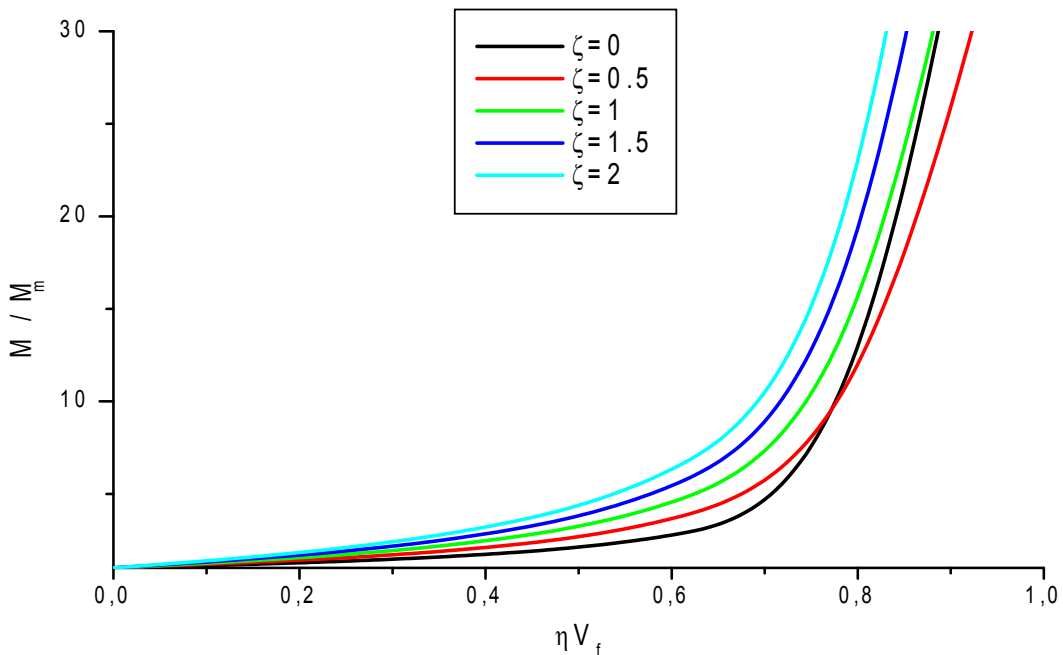


Figure 5-13 courbes M/M_m pour diverses ξ

e- Analyse comparative entre les modèles ou les approches d'élasticité :

Les propriétés mécaniques du matériau composite sont déterminées analytiquement. Il ressort que les modèles analytiques permettent de donner des résultats sensiblement très proches de l'expérimentation.

Après avoir déterminé les bornes sur les propriétés homogénéisées et étudié les modèles d'élasticité et calculé les modules des matériaux composites verre/époxyde, Nous avons proposé une comparaison entre ces modèles en considérant les trois modèles suivants : loi des mélanges, modèle d'assemblage et l'équation de Halpin-Tsai avec application de programmes informatiques en MATLAB pour les trois approches ou modèles d'élasticités.

Les quatre fonctions de Matlab permettant le calcul des constantes élastiques sont présentées dans l'annexe A.

Après, il est nécessaire de calculer ces constantes d'élasticité à partir des propriétés des constituants des fibres et de la matrice tableau (5-1), et tableau (5-2) et présenter les graphes des modules d'Young longitudinale et transverse, coefficient de poisson et le module de cisaillement de chaque modèle. Les détails de calcul sont illustrés dans l'annexe A.

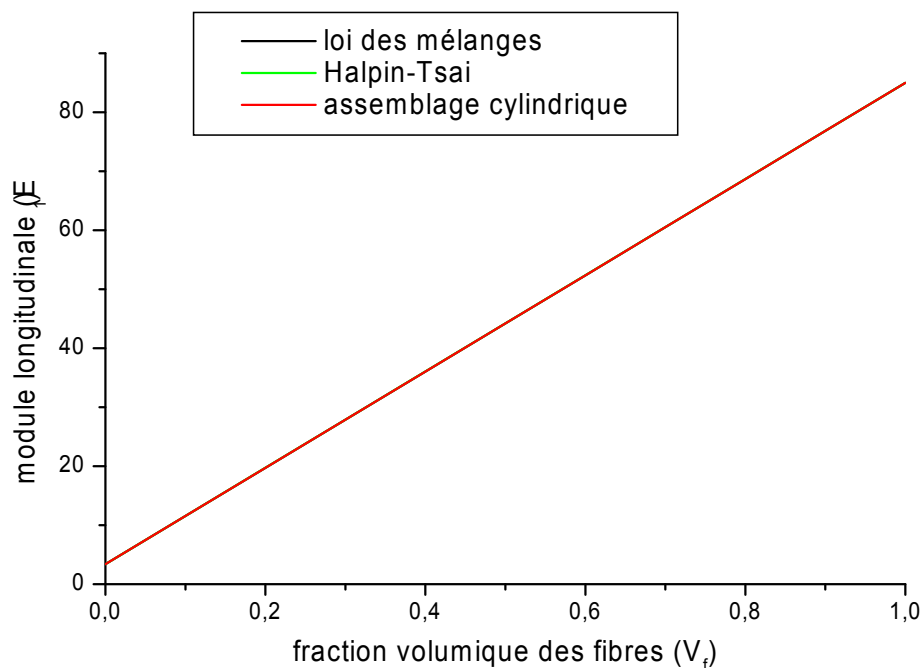


Figure 5-14 variation du module longitudinal E_1 par rapport à V_f

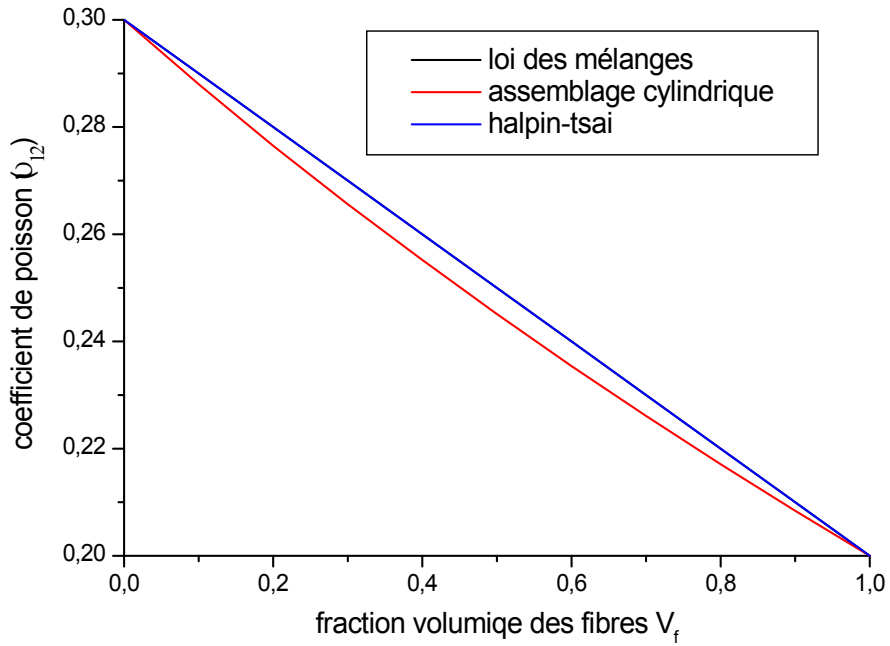


Figure 5-15 variation du coefficient de poisson ν_{12} par rapport à V_f

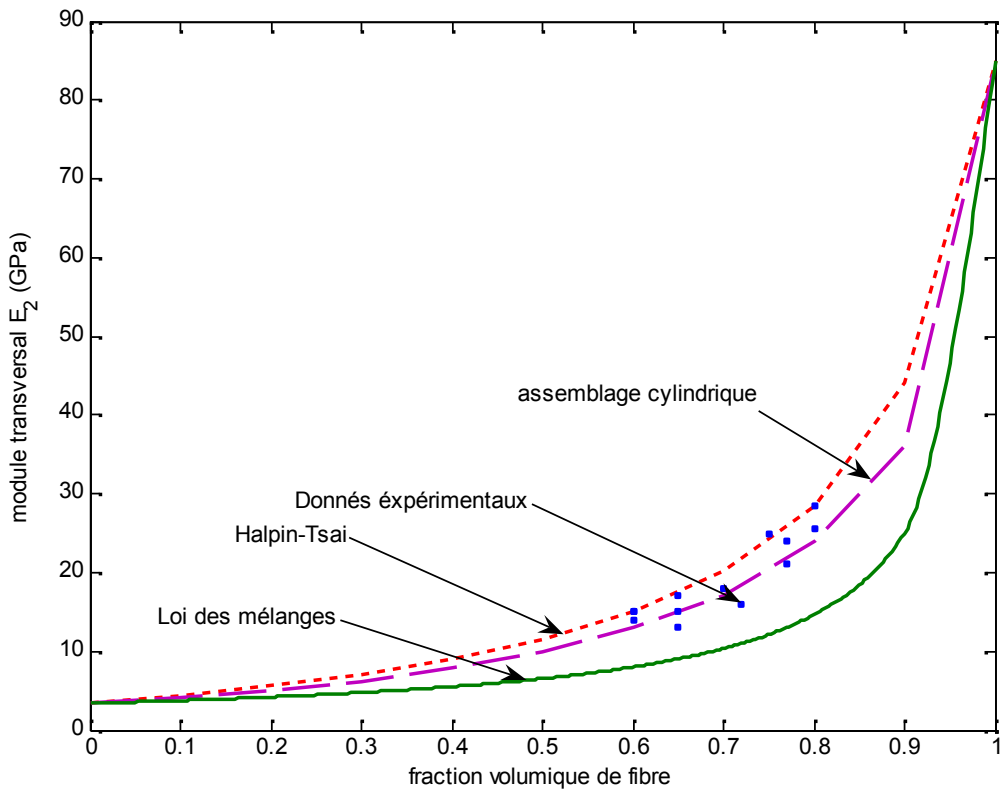


Figure 5-16 variation du module transversal E_2 par rapport à V_f

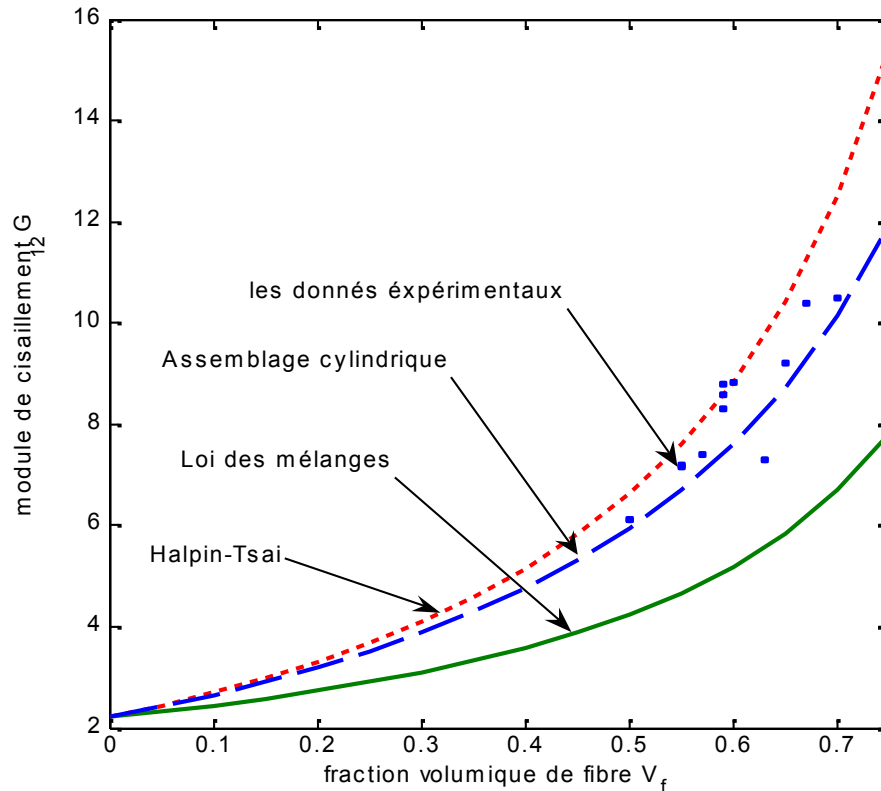


Figure 5-17 variation du module de cisaillement par rapport à V_f .

Les figures (5-14), (5-15), (5-16), (5-17) représentent respectivement la variation du module longitudinal E_1 , coefficient de poisson ν_{12} , module transversal E_2 et module de cisaillement G_{12} du matériau composite verre-E/époxyde par rapport à la fraction volumique des fibres V_f pour les trois modèles d'élasticité suivants : loi des mélanges, équation de Halpin-Tsai et d'assemblage cylindrique. Des résultats expérimentaux sont mentionnés dans les deux derniers graphes.

On remarque que les trois modèles donnent les mêmes résultats de variation du module longitudinale ; ce qui montre que l'équation de Halpin-Tsai et le modèle d'assemblage cylindrique sont identiques et sont plus proches de la loi des mélanges. Par contre, lors du calcul du coefficient de Poisson, les deux modèles : loi des mélanges et l'équation de Halpin-Tsai apparaissent identiques. Mais le modèle d'assemblage cylindrique est très proche des deux autres modèles. Pour le module d'élasticité transversal, il est observé que les modèles de Halpin-Tsai et assemblage cylindrique sont très proches de la loi des mélanges. En revanche, la représentation du module de cisaillement entraîne une approche très remarquable du modèle

d'assemblage cylindrique et de la loi des mélanges et une divergence entre le modèle de Halpin-Tsai et la loi des mélanges.

En comparant ces derniers résultats théoriques aux expérimentaux, on remarque que le modèle de Halpin-Tsai donne des valeurs très approchées à celles mesurées. Par contre le modèle d'assemblage cylindrique est aussi proche mais moins par rapport au modèle de Halpin-Tsai. La loi des mélanges apparaît aussi moins proche des résultats expérimentaux.

A travers les représentations de tous ces modèles, on peut conclure que ces derniers donnent des résultats identiques pour le module longitudinale et le coefficient de poisson et sont différents pour les module transversal et de cisaillement pour raison de l'anisotropie de la fibre non considérés dans l'étude théorique. Aussi, le modèle de Halpin-Tsai peut être considéré comme étant très proche de la réalité car il prend en compte l'effet de certains facteurs de disposition du renfort. Par contre la méthode de loi des mélanges est moins proche et loin de la réalité.

La simple existence de différentes raideurs prédites pour les différents arrangements conduit à conclure que l'existence de diverses méthodes de mise en œuvre du matériau composite produira toujours des variations dans la géométrie de l'arrangement des fibres et donc en modules des composites. Ainsi, nous ne pouvons pas espérer prédire des constantes élastiques des matériaux composites précises car il y a toujours nécessité à des approximations tant que les équations de Halpin-Tsai ne pouvait pas satisfaire à toutes les exigences de la pratique.

5.6 Etude des modèles de résistance

La prédiction de la résistance des matériaux composites est de grande importance dans le domaine de la micromécanique et permet de développer plusieurs modèles mathématiques et physiques.

Il y a dans la littérature beaucoup d'études réalisées dans ce domaine de résistance telle que la traction et la compression dans le sens des fibres et dans le sens transversal. On s'est intéressé à la résistance dans le sens des fibres puisque elle est très importante et est source de résistance. Durant notre étude, on va utiliser le logiciel Matlab comme outil informatique permettant de programmer nos équations mathématiques et aussi de simplifier nos calculs.

Les paramètres de résistance d'un pli unidirectionnel sont beaucoup plus difficiles à prévoir que la détermination des raideurs, car les forces sont plus sensibles à la nature du matériau

(hétérogénéité), contact fibre-matrice (interface), processus de fabrication et l'environnement. Par exemple, une interface faible entre la fibre et la matrice peut entraîner une défaillance prématurée des composites sous une charge transversale à la traction, mais elle peut accroître sa résistance longitudinale à la traction. Pour ces raisons de sensibilité, certaines théories et modèles empiriques sont disponibles pour certains paramètres de résistance. Finalement, l'évaluation expérimentale de ces résistances est très importante, car elle est directe et fiable. Ces techniques expérimentales sont également abordées dans cette section.

5.6.1 Résistance à la traction :

Un matériau composite, renforcé par des fibres unidirectionnelles, se déforme suivant quatre étapes citées dans le chapitre 4 selon la fragilité relative ou la ductilité des fibres et de la matrice. Dans cette section, on s'intéresse à l'étape élastique. Les courbes contraintes-déformations pour les fibres et la matrice sont utiles pour la définition de la résistance du matériau composite.

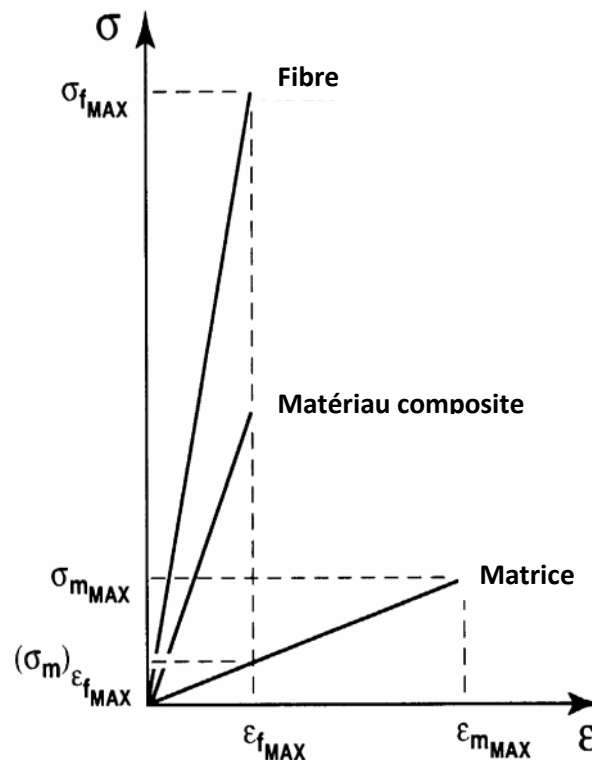


Figure 5-18 courbes contraintes-déformations pour les fibres et la matrice

La figure 5-18 représente la variation des contraintes par rapport aux déformations pour le matériau composite et ses constituants. On remarque que les courbes sont linéaires au départ, mais il se comporte après comme déformation non linéaire, aussi la fibre est plus résistante que le matériau composite et la matrice et cette dernière est moins résistante que le matériau composite. La fibre renfort est donc la source de résistance et doit mener à une résistance du matériau composite plus grande que peut être obtenue avec la matrice seule.

Pour un exemple d'une étude expérimental on donne l'exemple de l'éprouvette de la figure (5-19) de largeur 12.5mm et de longueur 229 mm. L'échantillon est soumis à une charge de traction dans le sens longitudinal. Les contraintes de traction sont appliquées sur l'échantillon à une vitesse de chargement variant entre 0,5 à 1 mm/min). La contrainte dans le sens longitudinal est tracée comme une fonction longitudinale. (Données fournies par R.Y. Kim, Institut de recherche de Dayton, Université de Dayton, OH)

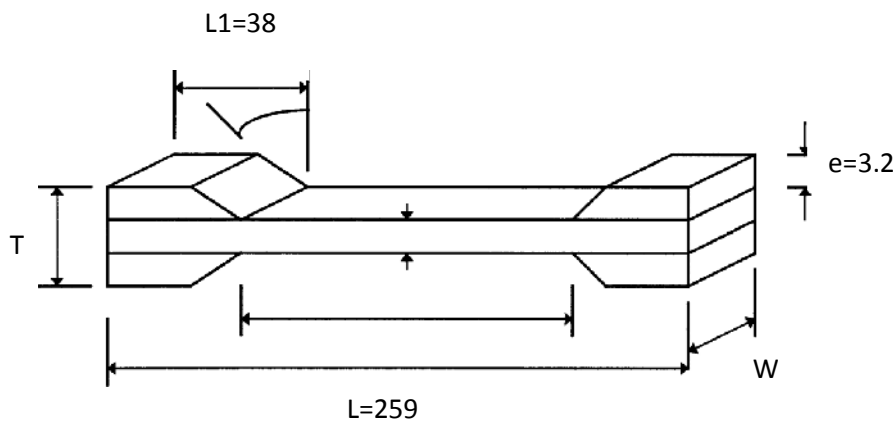


Figure 5-19 Géométrie d'une éprouvette soumise à une charge de traction longitudinale

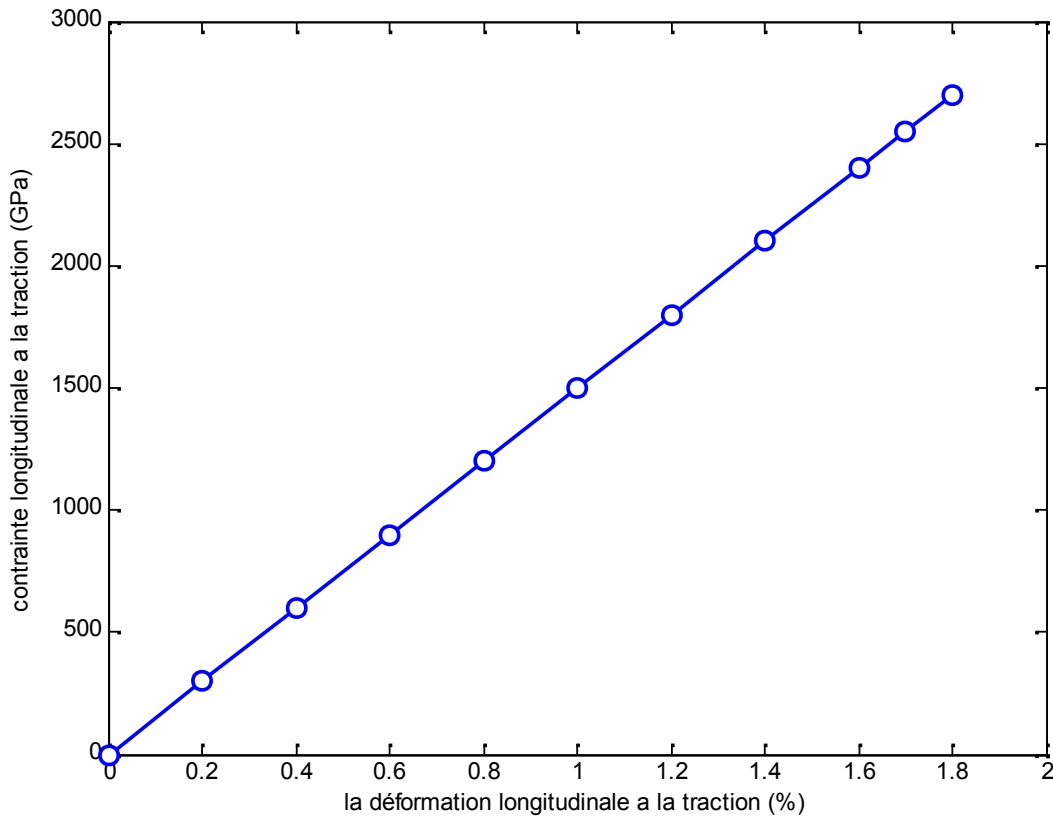


Figure 5-20 Courbe contrainte-déformation pour un stratifié sous une charge de traction

La Figure 5.20 représente la variation de contrainte longitudinale par rapport à la déformation longitudinale sous traction. On remarque que les données sont réduites à régression linéaire. Le module de Young longitudinal est la pente initiale de la courbe $\sigma_1 - \varepsilon_1$.

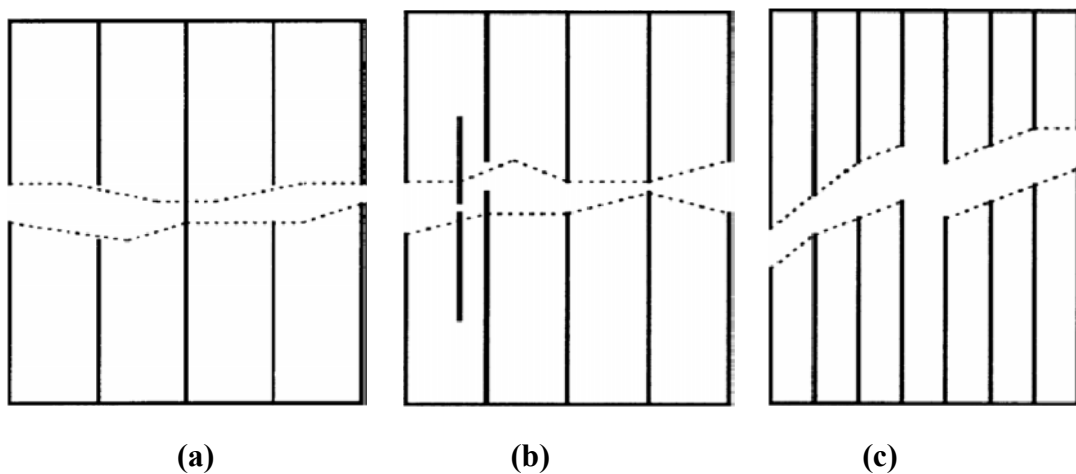


Figure 5-21. Modes de défaillance d'un pli unidirectionnel soumis

à une charge longitudinale de traction.

La figure 5-21 représente plusieurs modes de défaillance. Le mode (1) est effective lorsque le taux de renfort $V_f < 0.4$. Pour des fractions de fibres par volume intermédiaires, soit $0,4 < V_f < 0,65$, le type de défaillance mode (2) se produit. Pour des fractions de haut volume de fibres, $V_f > 0,65$, il apparaît le mode (3).

On étudie maintenant la relation entre les équations (4.3) à (4.7), permettent de limiter les valeurs de résistance du matériau composite (c.-à-d, la contrainte maximale du matériau composite) en fonction de la fraction volumique des fibres.

La figure 5-22 représente l'évolution de la résistance du matériau composite en fonction de la fraction volumique des fibres. On remarque que lorsque V_f est inférieure à $V_{f_{minimum}}$, la résistance du matériau composite sera contrôlée par la déformation de la matrice et qui est en réalité inférieure à la résistance de la matrice. Quand V_f est supérieure à $V_{f_{minimum}}$, mais inférieure à $V_{f_{critique}}$, la résistance de matériau composite sera contrôlée par la déformation des fibres, mais la résistance du matériau composite est encore inférieure à celle de la matrice. Mais quand V_f dépasse $V_{f_{critique}}$, la résistance du matériau composite sera augmentée par le renforcement des fibres. Alors, la résistance du matériau composite sera contrôlée par les déformations des fibres parce que V_f est plus grande que $V_{f_{minimum}}$. A noter que l'allure de la Figure 5-22 variera en fonction de $V_{f_{critique}}$. Aussi, de l'équation (4.4), on remarque que $V_{f_{critique}}$ devient plus petite quand les fibres sous tension n'ont pas tous la même résistance à la rupture et ne se rompent pas à la même position. Par contre, puisque des imperfections de surface varient d'une fibre à une autre, les fibres individuelles ont des résistances à la rupture différentes. Une analyse statistique est alors nécessaire pour rationaliser et définir la résistance d'un matériau composite. Dans ce cas, on considère le modèle de Rosen pour le calcul la résistance à la traction. Rosen a analysé la résistance des matériaux composites renforcés par des fibres avec une distribution statistique de force.

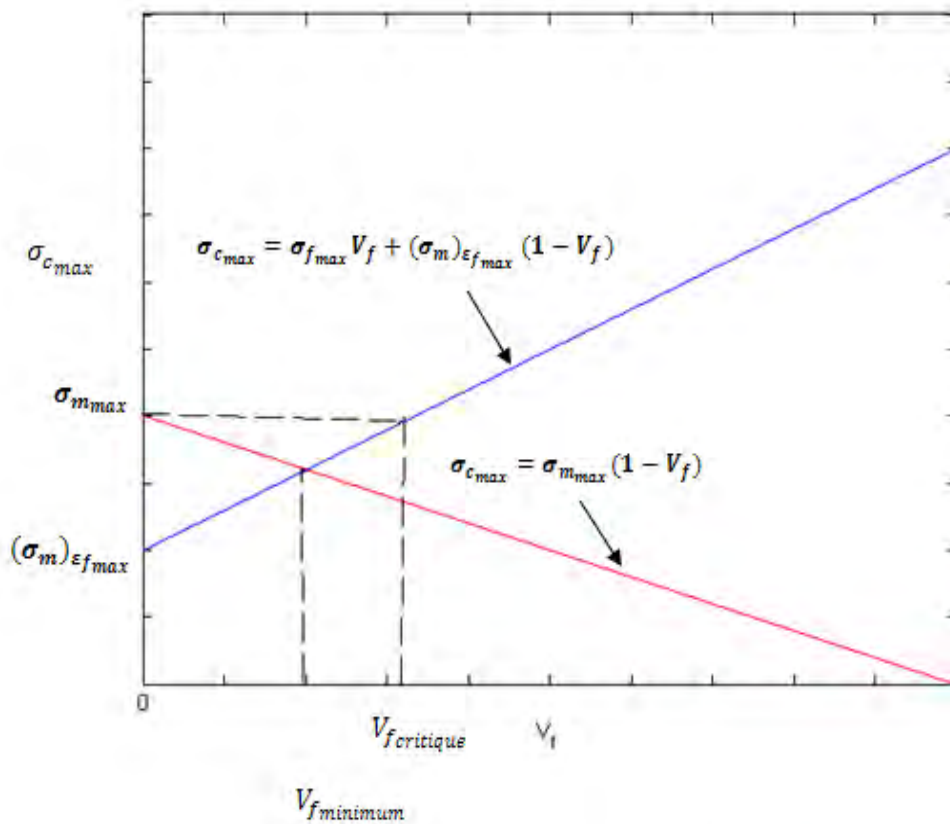


Figure 5-22. Evolution de la résistance à la traction du composite en fonction de la fraction volumique des fibres.

5.6.2 Discussion des résultats :

Après le calcul de la résistance à la traction par le modèle de Rosen et schématiser la variation des résistances par rapport à V_f , nous comparons ce modèle avec l'expression de loi des mélanges comme présenté dans la figue 5-23. les calculs et les programmes sont présentées dans l'annexe B.

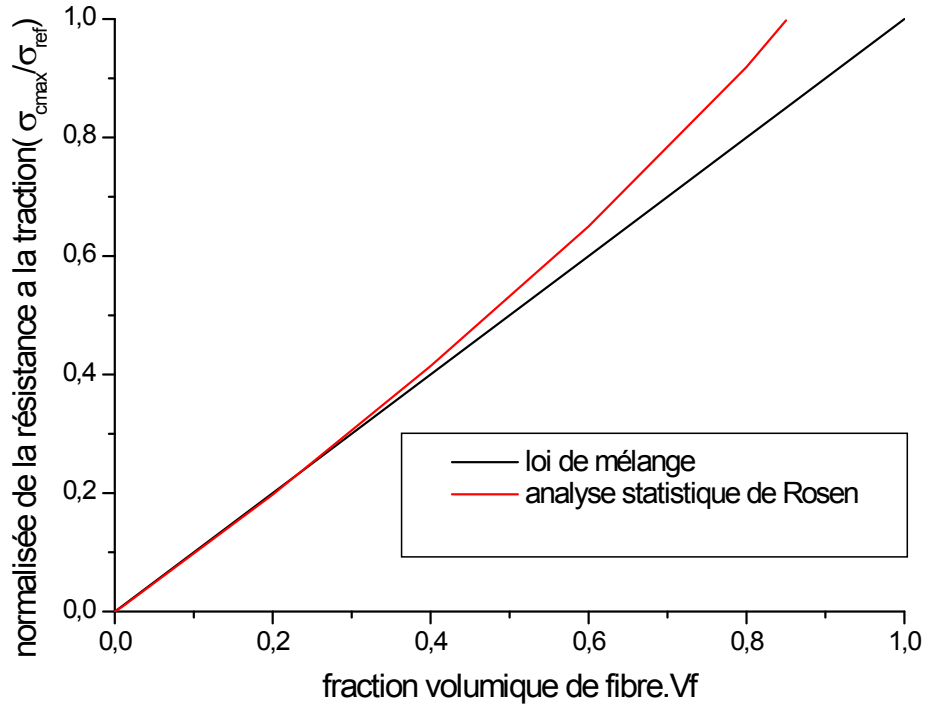


Figure 5-23 Résistance à la traction par apport à la fraction volumique de fibres V_f

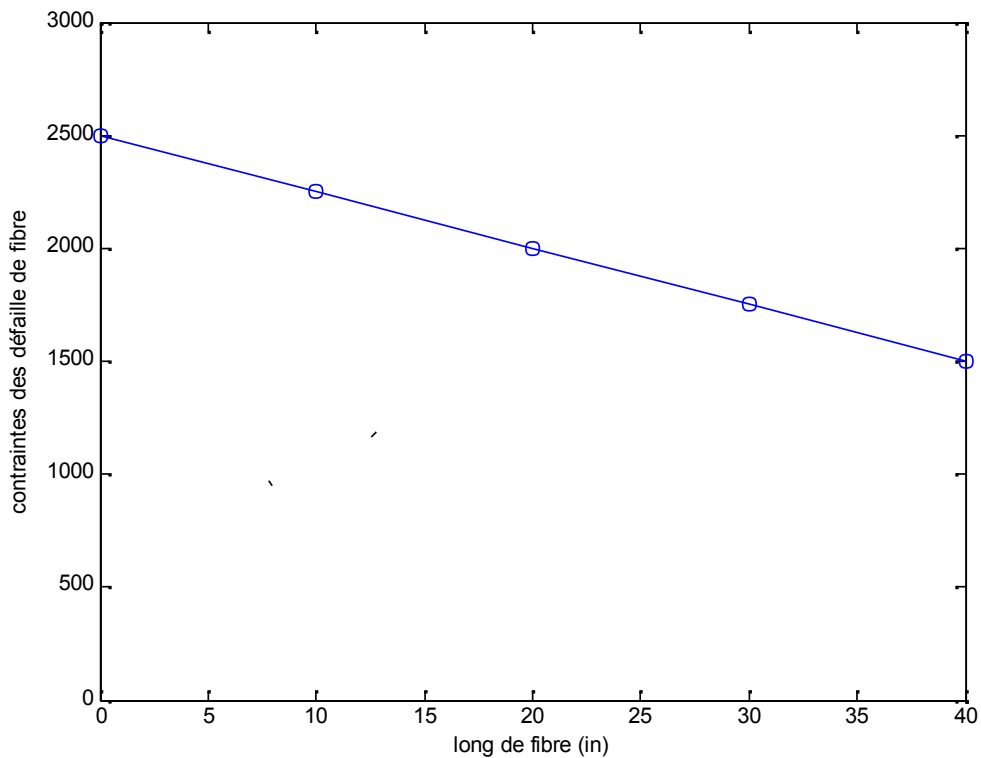


Figure 5-24. Résistance à la traction par rapport à la longueur de la fibre

La figure 5-23 représente la variation de la résistance à la traction par rapport à la fraction volumique des fibres et présente aussi la comparaison entre le modèle de Rosen et la loi des mélanges. On remarque que les résultats de Rosen sont proches de l'expression de la loi des mélanges quand la fraction volumique des fibres est inférieure à 0.7. Si $V_f \geq 0.7$ alors les résultats de Rosen présenteront des divergences de l'expression de la loi des mélanges.

Plusieurs conclusions intéressantes peuvent être tirées de l'observation de la figure 5-23. Fondamentalement, la résistance à la rupture du matériau composite est supérieure à celle d'une fibre individuelle parce que les résultats de Rosen se situent au-dessus de la loi des mélanges. En outre, la capacité d'absorption d'énergie du matériau composite dépasse également celui des fibres.

La figure 5-24 présente la variation de résistance à la traction par rapport à la longueur de la fibre. On remarque que ces caractéristiques découlent de la résistance des fibres (fibres de verre E) qui est observée inversement proportionnelle à la longueur des fibres.

5.6.3. Résistance à la compression

Deux modes de flambement de fibres et de cisaillement sont possibles dans le volume élémentaire représentatif. Les fibres peuvent être courbées l'une par rapport à une autre en opposition de phase (symétrique par rapport à une ligne à mi-chemin entre les fibres) pour donner le mode de flambage transverse ou d'extension. Il ya, une ligne à l'origine verticale dans la matrice à mi-chemin entre chaque fibre qui ne change pas de position. Le mode de cisaillement, est ainsi nommé parce que la matrice est soumise à une déformation de cisaillement parce que les fibres présentent des boucles en phase (antisymétrique en ce qui concerne la ligne à mi-chemin entre les fibres)

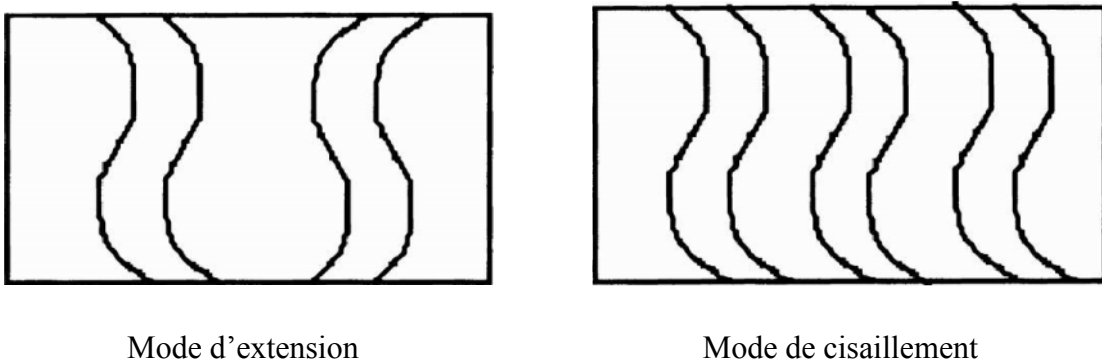


Figure 5-25 Modes de défaillance de pli unidirectionnel soumis à une charge longitudinale de compression

Comme dans le cas de l'état de traction, on considère l'exemple d'une éprouvette de dimensions mentionnées dans le tableau 5.3. Elle est soumise à une contrainte dans le sens longitudinal. Les charges sont du type de compression et la déformation est prise jusqu'à ce que le modèle échoue.

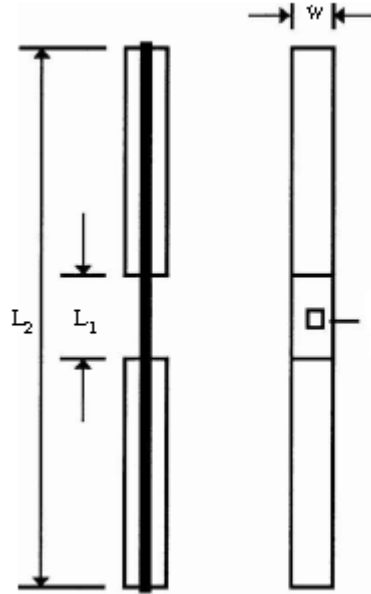


Figure 5-26. Géométrie d'une éprouvette sous compression longitudinale

Dimension d'éprouvette		
L_1 (mm)	L_2 (mm)	W (mm)
12.7 ± 1	12.7 ± 1.5	12.7 ± 0.5

Tableau 5-3 dimension d'échantillon

Il est à noter que le comportement de la fibre et de la matrice doivent suivre la loi de Hooke. Aussi, on suppose qu'il n'y a pas de contraintes résiduelles.

La figure 5-27 représente la variation de la contrainte longitudinale en compression par rapport à la déformation longitudinale. On remarque que la contrainte varie linéairement et progressivement avec la déformation.

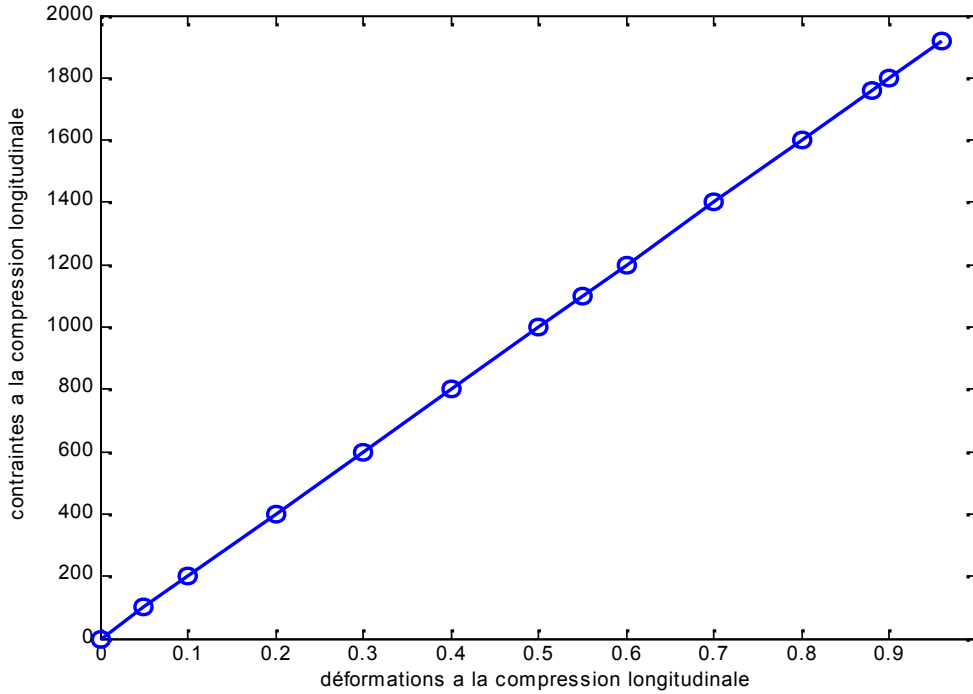


Figure 5-27 Courbe contrainte-déformation pour un stratifié sous une charge de compression longitudinale

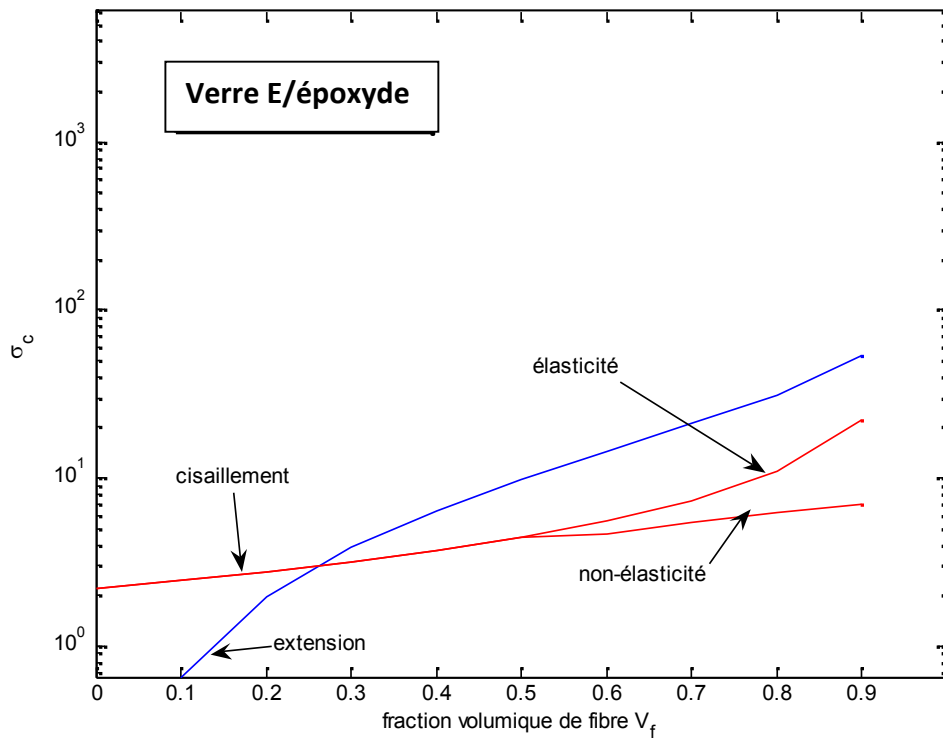


Figure 5-28. Variation de la résistance à la compression par rapport à la fraction volumique des fibres en présentant les modes de défaillance (,extension et cisaillement)

La figure 5-28 représente la variation de la résistance en compression par rapport à la fraction volumique de la fibre et aussi les modes d'extension et de cisaillement. On remarque que le mode de cisaillement correspond à la plus faible résistance du matériau composite sur une large gamme de fractions volumiques des fibres. Cependant, le mode transversal ou d'extension dirige vraiment la résistance du matériau composite pour des basses fractions volumiques des fibres. Pour les fractions de volume des fibres variant entre 0.6 et 0.7, l'estimation de résistance à la compression se situe entre 3100 et 4100 MPa. Ces hauts niveaux de résistance n'ont pas été obtenus pour le matériau composite verre/époxyde. Un tel matériau composite devait avoir une résistance de 3400 MPa. De l'estimation de la résistance à la compression semble alors plus raisonnable pour le matériau composite verre/époxyde, mais ne sont pas toujours aussi bas que les valeurs réelles.

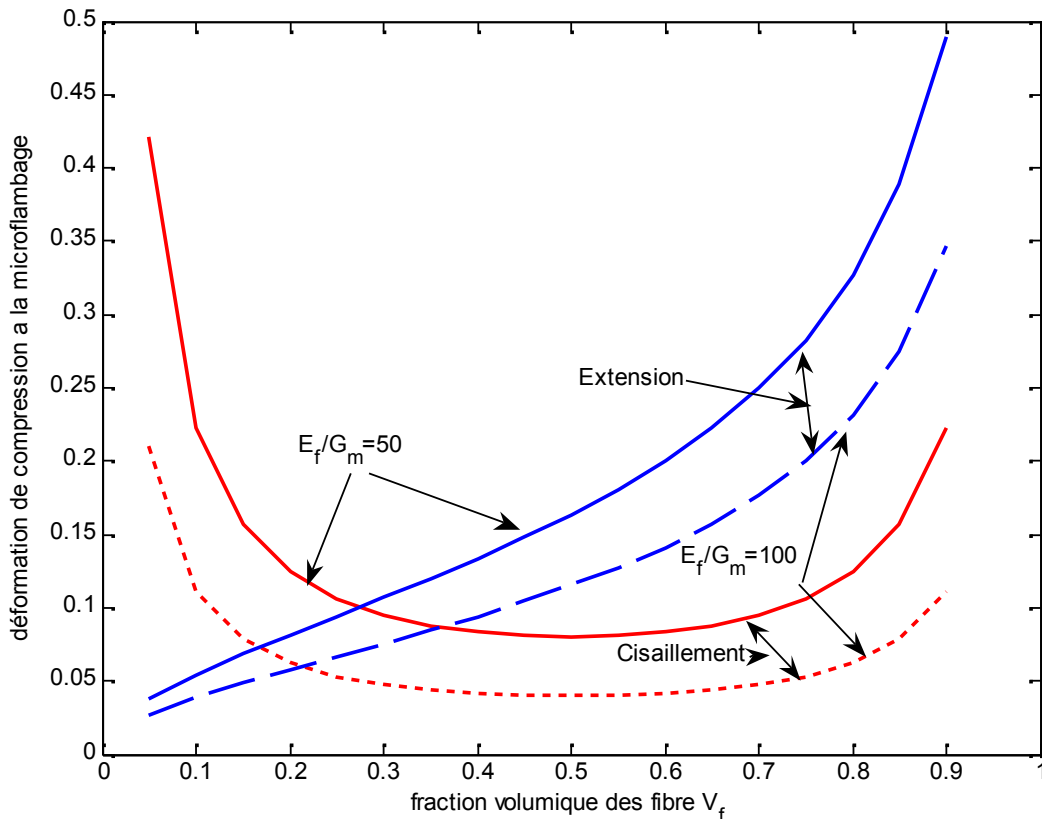


Figure 5-29. Déformation sous charges de compression à microflambage des matériaux composites renforcés par des fibres

Sur la figure 5-29, il est représenté la déformation du matériau composite à fibres par flambement par rapport à la fraction de volume. Ces résultats sont issus de l'équation (4.55)

pour deux valeurs du rapport du module de Young de fibres et du module de cisaillement de la matrice (E_f/G_m) pour un coefficient de poisson de la matrice égal à 0.25. Comme dans la forme précédente de Dow et les résultats de Rosen, le mode de cisaillement régit le comportement des matériaux composites pour une large gamme de fractions de fibres en volume. En outre, on note que le changement du rapport E_f/G_m provoque un changement dans la déformation maximale du matériau composite. Ainsi, l'importance de la réduction du module de cisaillement de la matrice en raison de la déformation inélastique est tout à fait évidente.

Pour expliquer de telles déformations et comportements, on cite des travaux similaires. Schuerch a considéré le matériau composite à fibres de bore et à matrice métallique en utilisant les équations de Rosen pour l'analyse du mode de flambement. Par contre, Greszczuk a étudié le mode de cisaillement et a déterminé que la matrice de cisaillement augmente le module de l'évolution des défaillances dues à la rupture en compression par microflambage brut des fibres. Lager et Juin, le rapport de Dow et les prédictions théoriques de Rosen avec les résultats expérimentaux pour le bore/époxyde. La théorie semble une bonne corrélation avec les mesures expérimentales si les modules de matrice dans les équations (4.37) et (4.54) sont multipliés par un facteur de réduction 0.63, c'est-à-dire :

$$(\sigma_{cmax})_{extension} = V_f \sigma_{f_{cr}} = 2V_f \sqrt{\frac{V_f(0.63E_m)E_f}{3(1-V_f)}}$$

$$(\sigma_{fmax})_{cisaillement} = \frac{0.63G_m}{1-V_f}$$

Les fibres sont considérées avoir un arrangement carré presque parfait comme il a été vérifié par l'inspection des images agrandies des sections usinées. Les résultats théoriques dans les équations précédentes ainsi que les données sont présentées dans la figure 5-30. A noter que les résultats sont obtenus avec le facteur de réduction de 0.63.

Le coefficient d'influence 0.63 est apparemment dû à la matrice plastique n'ayant pas le même degré dans toutes les directions. (Lager et Juin sont en désaccord avec l'hypothèse de Schuerch). L'influence de ce coefficient est considérée comme une fonction puissante du module de la matrice.

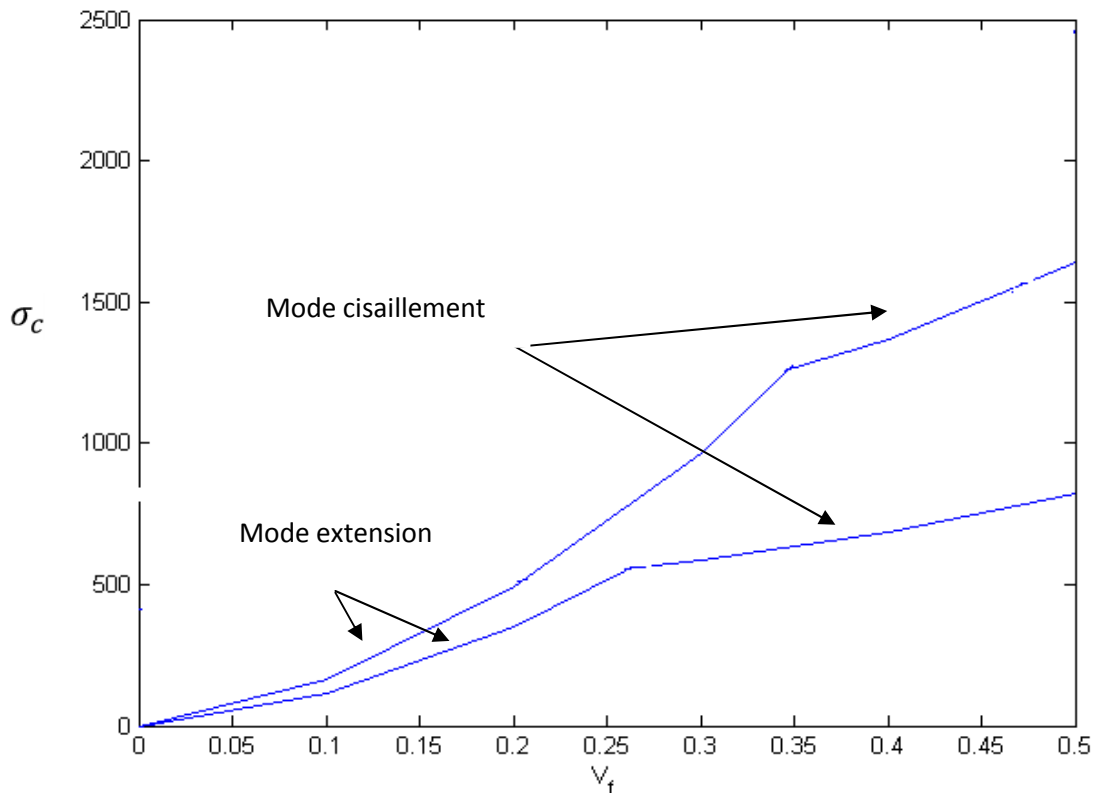


Figure 5-30. Résistance à la compression du Bore/époxyde

Zhang et Latour ont utilisé une mécanique des matériaux plus approfondie pour le modèle de Rosen pour démontrer que le mode de cisaillement et le mode d'extension du microflambage doit coïncider à zéro fraction de fibres de volume, à la différence des résultats de Rosen qui divergent quand $V_f = 0$ (figure 5-28). A basse V_f , la faible densité des fibres n'entraîne aucune différence de charge de flambement entre le mode de cisaillement et le mode d'extension. En outre, ils expliquent qu'à haute V_f , les résultats théoriques conduisent à de grande longueur d'onde de flambage comparé aux résultats expérimentaux donnant clairement de courte longueur d'onde de flambage. En revanche, ils décrivent d'autres facteurs qui peuvent entraîner des fibres à courtes longueurs d'onde de flambage.

Annexe

Annexe

Les 4 fonctions de Matlab pour calculées les constants élastiques sont présentée suivante :

E1(Vf, Ef , Em) ce fonction calculée le module d'Young longitudinale E_1 de pli

NU12(Vf, NUf, NUm) ce fonction calculée le coefficient de poisson ν_{12} de pli

E2(Vf, Ef , Em, Gf, Gm, NUf, NUm, eta, Xi, , p) ce fonction calculée le module transverse E_2 de pli

G12(Vf, Ef , Em, Gf, Gm, NUf, NUm, etaprim, Xi, , p) ce fonction calculée le module de cisaillement G_{12} de pli

Voici une Liste du programme de la fonction MATLAB pour élasticité (MATLABELAST) :

Fonction y = E1(Vf, Ef, Em)

```
%E1 ce fonction le résultat de module d'Young dans le direction longitudinal
% en entrée trois valeurs
% Vf - fraction volumique de la fibre
% Ef - module longitudinale de la fibre
% Em - module d'Young de la matrice
% ce fonction utilisée la loi des mélanges
Vm = 1 - Vf ;
y = Vf *Ef +Vm *Em ;
end
```

Fonction y = NU12(Vf,NUf,NUm)

```
%NU12 ce fonction le résultat de coefficient de poisson dans la direction longitudinale
% en entrée trois valeurs
% Vf - fraction volumique de la fibre
% NUf - coefficient de poisson de la fibre
% NUm - coefficient de poisson de la matrice
% ce fonction utilisée la loi des mélanges
Vm = 1 - Vf ;
y = Vf * NUf + Vm * NUm ;
end
```

Fonction y =E2(Vf, Ef , Em, Gf, Gm, NUf, NUm Eta, Xi, , p)

```
%E2 ce fonction utilisée le résultat de module d'Young transverse
% En entrée dix valeurs
% Vf - fraction volumique de la fibre
% Ef - module longitudinale de la fibre
% Gf - module de cisaillement de la fibre
% Gm - module de cisaillement de la matrice
% Em - module d'Young de la matrice
% NUf - coefficient de poisson de la fibre
```

```

%      Xi   - facteur de renforcement
%      Eta   - facteur de cloisonnement stress
%      NUm  - coefficient de poisson de la matrice
%      p     - paramètre utilisée pour déterminer les équations suivent
%           p = 1 utilisée l'équation (2.38)
%           p = 2 utilisée l'équation (3.59)
Vm = 1 - Vf ;
if P == 1
    y = 1/(Vf/Ef + Vm/Em);
elseif P == 2
    y=Em*((1+Xi*eta*Vf)/(1-eta*Vf))
end

```

```

function y = G12( Vf, Ef , Em, Gf, Gm, NUf, NUm, Etaprim, Xi , p)

```

```

%G12  module de cisaillement G12
%      en entré neuf valeurs:
%      Vf  - fraction volumique de la fiber
%      Ef  - module longitudinale de la fibre
%      Gf  - module de cisaillement de la fibre
%      Em  - module d'Young de la matrice
%      Gm  - module de cisaillement de la matrice
%      NUf - coefficient de poisson de la fibre
%      NUm - coefficient de poisson de la matrice
%      etaprim  - facteur partition de déformation de cisaillement
%      Xi    - facteur de renforcement
%      p     - paramètre utilisée pour déterminer les équations suivent :
%           p = 1 utilisée l'équation (2.49)
%           p = 2 utilisée l'équation (3.60)
%           P = 3 utilisée l'équation (3.56)
Vm = 1 - V
if p == 1
y = 1/(Vf/G12f + Vm/Gm);
elseif p == 2
y = Em*((1+Xi*eta*Vf)/(1-eta*Vf) ;
elseif p == 3
y = Gm.*((Gm + Gf) - Vf.*(Gm - Gf))^3./((Gm + Gf) +Vf.*(Gm - Gf))
end

```

calcul les constants élastiques de matériau composite verre/Epoxy, on utilisons l'approche de loi des mélanges, Halpin-Tsai, et le modèle assemblage cylindrique. Nous savons les propriétés des constituants des fibres et de la matrice (tableau(5-1), et tableau(5-2)) suivants :

$$E_f = 85 \text{ GPa} , E_m = 3.4 \text{ GPa} , V_m = 0.3 , \nu_f = 0.2 , \nu_m = 0.3$$

On remarque que Le module d'Young longitudinal et le coefficient de poisson le même dans les trois équations

Calculée le E_1 :

Function

$$y = E_1(V_f, E_f, E_m)$$

>> Ef = 85;

>> Em = 3.4 ;

>> Vf=(0 :0.1 ;1) ;

>> Vm = 1-Vf

Vm =

0.3000

>> y =Vf*Ef + Vm*Em

y =

Columns 1 through 8

3.4000 11.5600 19.7200 27.8800 36.0400 44.2000 52.3600 60.5200

Columns 9 through 11

68.6800 76.8400 85.0000

>> plot(x,Z)

>> xlabel('V_f');

>> ylabel('E_1 (GPa)');

Calculée le NU_{12} :

Fonction Z =NU₁₂(Vf, NUf, NUm)

>> NUf= 0.2;

>> NUm =0.3;

>> Z=NUf.*Vf +NUm.*(1-Vf)

Z =

Columns 1 through 8

0.3000 0.2900 0.2800 0.2700 0.2600 0.2500 0.2400 0.2300

Columns 9 through 11

0.2200 0.2100 0.2000

```
>> plot(x,Z)
```

```
>> xlabel('V_f');
```

```
>> ylabel('\nu_{12}');
```

Calculé E_2 le module d'Young transverse :

En prend p =1

```
W1=eta(( Vf, Ef , Em, 0, 0, 0, 0, 0, 0, , 1)
```

```
>> Ef =85;
```

```
>> Em=3.4;
```

```
>> W1=1./(Vf./Ef + Vm./Em)
```

W1 =

Columns 1 through 8

3.4000 3.7611 4.2079 4.7753 5.5195 6.5385 8.0189 10.3659

Columns 9 through 11

14.6552 25.0000 85.0000

```
>> plot(x,W1)
```

```
>> xlabel('V_f');
```

```
>> ylabel('E_2(GPa)');
```

En prend p =2

Les fibres ont arrangements carré donc $\xi =2$.

Calculé Eta utilisé l'équation(3.60) :

```
>> Ef =85;
```

```
>> Em=3.4;
```

```
>> Xi=2;
```

```
>> eta=((Ef/Em)-1)/((Ef/Em)+Xi)
```

eta =

0.8889

Fonction $y=E2(V_f, E_f, E_m, G_f, G_m, N_{Uf}, N_{Um}, \eta, \xi, , 2)$

```
>> Xi=2;
```

```
>> eta=((Ef/Em)-1)/((Ef/Em)+Xi)
```

```
>> eta =08889 ;
```

```
>> E2=Em.*((1+Xi.*eta.*Vf)./(1-eta.*Vf))
```

E2 =

Columns 1 through 8

3.4000 4.3951 5.6054 7.1091 9.0276 11.5600 15.0571 20.2000

Columns 9 through 11

28.5077 44.2000 85.0000

```
>> plot(x,W2)
```

```
>> xlabel('V_f');
```

```
>> ylabel('E_2(GPa)');
```

Calculée G_{12} le module de cisaillement:

Pour $p = 1$

Fonction $y1=G_f(V_f, E_f, E_m, G_f, G_m, N_{Uf}, N_{Um}, 0, 0, 1)$

Calculé de G_f, G_m :

Fonction $y=G_f(E_f, N_{Uf})$

```
>> Ef=85;
```

```
>> NUF=0.2;
```

```
>> Gf=Ef/(2*(1+NUf))
```

Gf =

35.4167

Fonction $y=G_m(E_m, N_{Um})$

```
>> Em=3.4;
```

```
>> NUm=0.3;
```

```
>> Gm=Em./(2*(1+NUm))
```

Gm =

1.3077

```
>> y1 = (Gf*Gm)/(Gm*Vf + Gf.*(1-Vf))
```

```
y1 =
```

```
Columns 1 through 8
```

```
1.3077 1.4471 1.6197 1.8390 2.1271 2.5223 3.0977 4.0132
```

```
Columns 9 through 11
```

```
5.6971 9.8152 35.4167
```

```
En prend p = 2
```

```
Fonction y2=eta (Gm, Xi, Gf)
```

```
>> Gm=1.3077;
```

```
Gm=1.3077;
```

```
>> Xi =1;
```

```
>> eta=((Gf./Gm)-1)/((Gf./Gm)+Xi)
```

```
eta =
```

```
0.9288
```

```
Fonction y=G12( Vf, Ef, Em, Gf, Gm, NUf, NUm, Etaprim, Xi, , 2)
```

```
>> Gm=1.3077;
```

```
>> etaprim =0.9288;
```

```
>> Xi =1;
```

```
>> y2=Gm.*((1+Xi*etaprim.*Vf)/(1-etaprim.*Vf))
```

```
>> G12 =
```

```
Columns 1 through 8
```

```
1.3077 1.5755 1.9044 2.3180 2.8538 3.5754 4.5999 6.1683
```

```
Columns 9 through 11
```

```
8.8705 14.6321 35.4254
```

```
En p=3 ;
```

```
y3 = Gm.*((Gm + Gf) - Vf.*(Gm - Gf))./((Gm + Gf) + Vf.*(Gm - Gf))
```

```
y3 =
```

```
Columns 1 through 8
```

```
1.3077 1.5755 1.9044 2.3179 2.8537 3.5753 4.5997 6.1680
```

Columns 9 through 11

8.8700 14.6306 35.4167

```
>> plot(x ;y1) ; hold on ;
```

```
>> plot(x ;y2) ;
```

```
>> plot(x ;y3) ;
```

```
>> xlabel('V_f');
```

```
>> ylabel('G_{12}(GPa)');
```

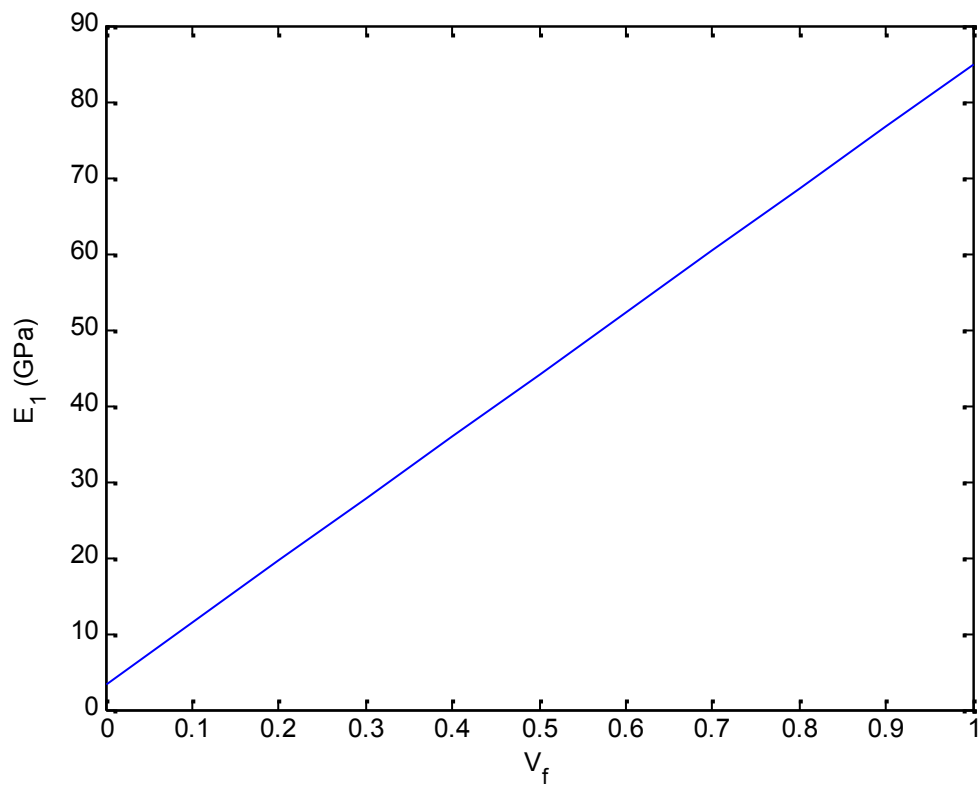


Figure 1 variation de E_1 en fonction de V_f

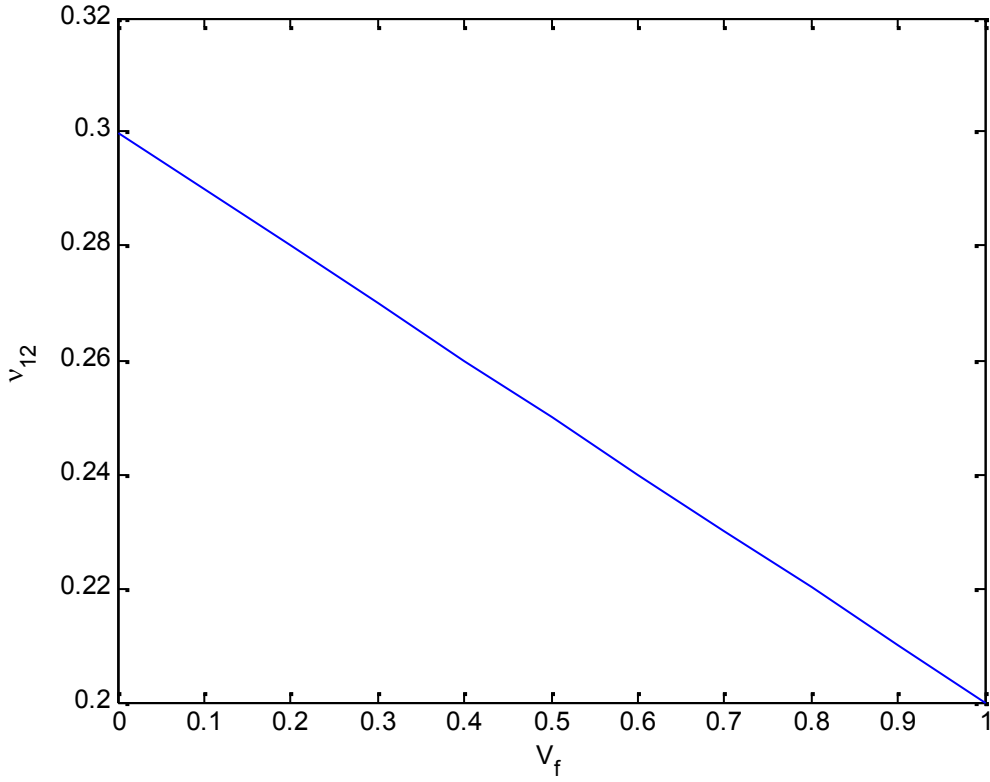


Figure 2 variation le coefficient de poisson ν_{12} en fonction V_f

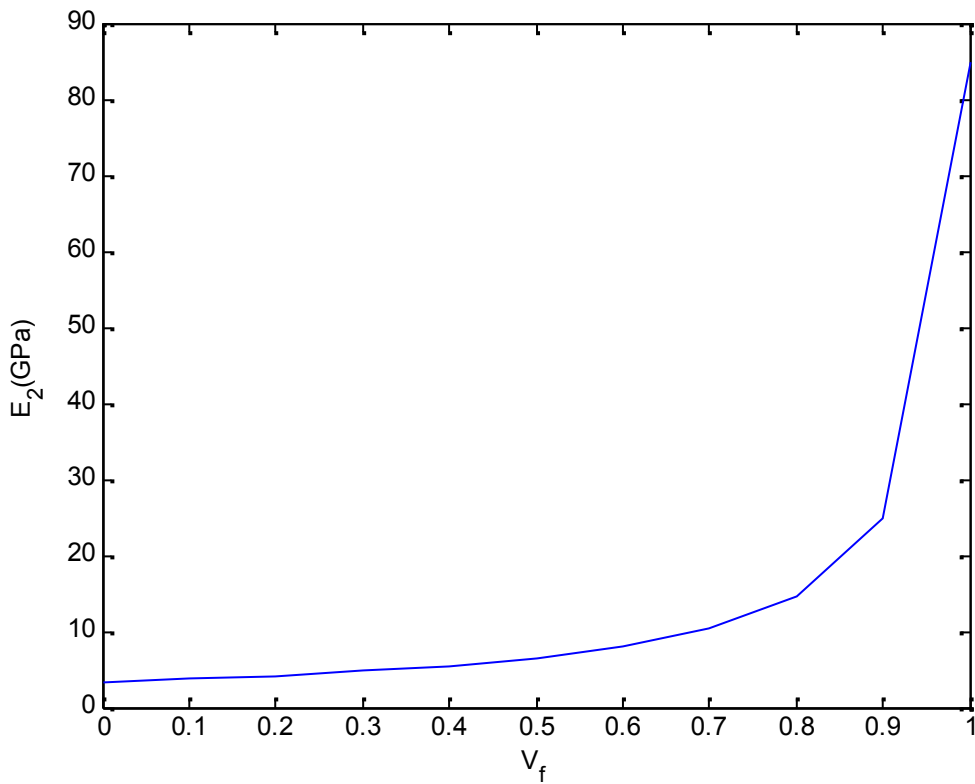


Figure 3 variation de E_2 en fonction de V_f par loi des mélanges

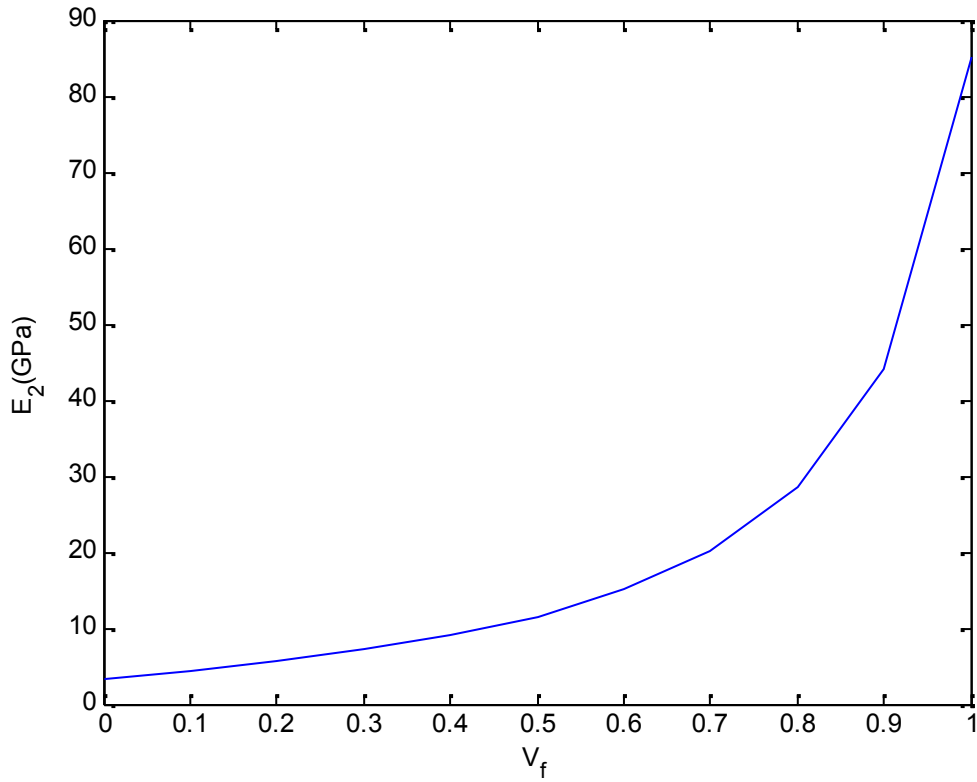


Figure 4 variation de E_2 en fonction de V_f par équation de Halpin-Tsai

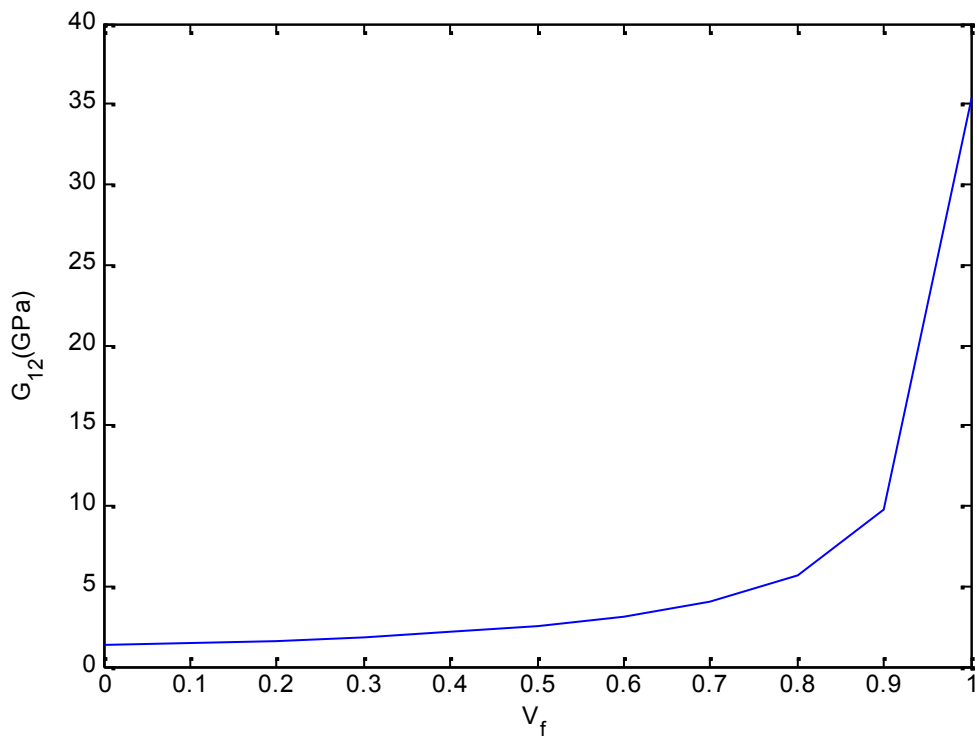


Figure 5 Variation de G_{12} en fonction de V_f par loi des mélange

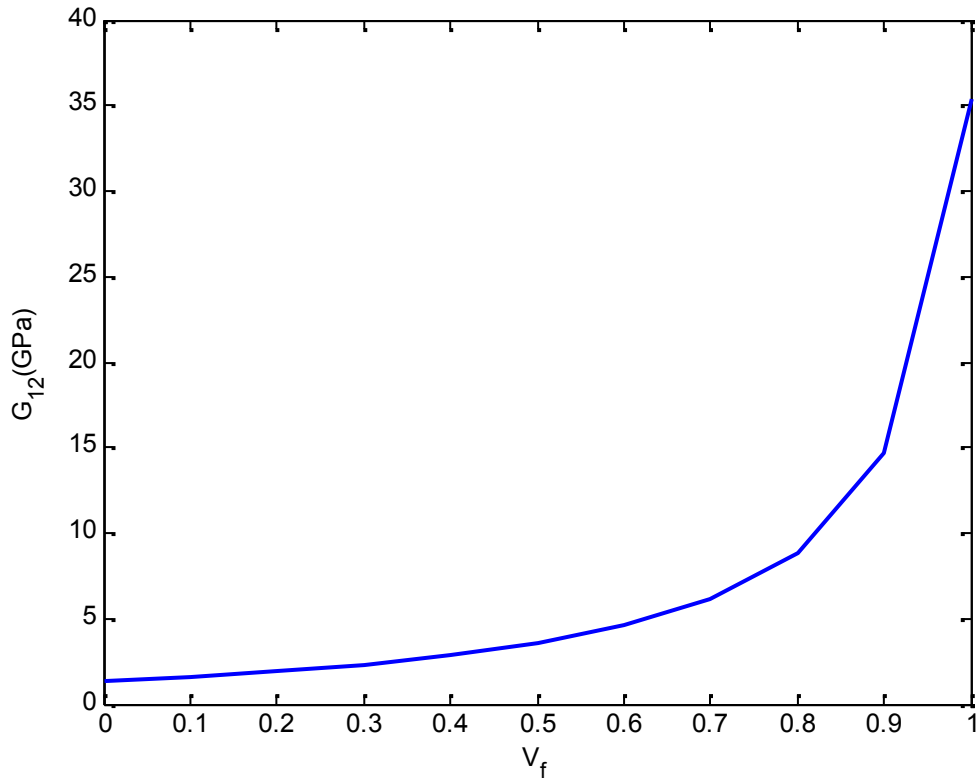


Figure 6 variation de G_{12} en fonction de V_f par équation de Halpin-Tsai

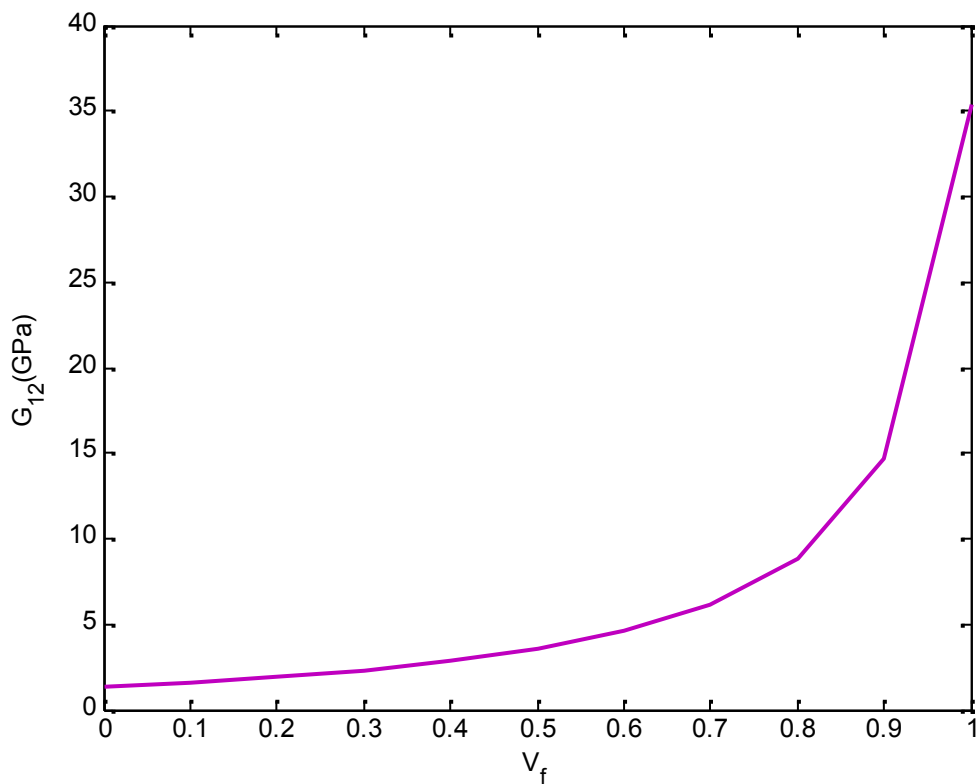


Figure 7 variation de G_{12} en fonction de V_f par équation de modèle d'assemblage cylindrique

Calcule les bornes :

Voici Le programme pour calcule les bornes des Paul et les bornes des Hashin-Shtrikman :

```
Fonction y =E( Vf, Ef , Em, Gf, Gm, NUF, NUm kf, km, bitaf, bitam,p)
%E2      ce fonction utilisée le résultat de module d'Young
%        En entrée les valeurs
%        Vf   - fraction volumique de la fibre
%        Ef   - module longitudinale de la fibre
%        Gf   - module de cisaillement de la fibre
%        Gm   - module de cisaillement de la matrice
%        Em   - module d'Young de la matrice
%        NUF  - coefficient de poisson de la fibre
%        NUm  - coefficient de poisson de la matrice
%        kf   - Le module de compressibilité de fibre
%        km   - Le module de compressibilité de matrice
%        bitaf
%        bitam
%        p    - paramètre utilisée pour déterminer les équations suivent
%            p = 1 utilisée l'équation (3.16)
%            p = 2 utilisée l'équation (3.32)
%            p = 3 utilisée l'équation (5.2)
%            p = 4 utilisée l'équation (5.3)
Vm = 1 - Vf ;
if P = = 1
    y1=(Ef.*Em)/(x.*Em+(1-x).*Ef);
elseif P = = 2
    y2=Ef.*x+Em.*(1-x);
elseif P = = 3
    bitaf=(3-4.*nuf)./4*(1-nuf);
    bitam=(3-4.*num)./4*(1-num);
    y3=(x.*Ef+((1-x).*Em)/(1+bitaf.*(Em-Ef)./Ef))/(x+((1-x)/(1+bitaf.*(Em-Ef)./Ef)));
elseif P = = 4
    y4=((1-x).*Em+(x.*Ef)/(1+bitam.*(Ef-Em)./Em))/((1-x)+(x/(1+bitam.*(Ef-Em)./Em)));
end
```

Programme Pour calcul les bornes les module des cisaillements par Paul et les bornes des Hashin-Shtrikman :

```

Fonction y =G12( Vf, Ef , Em, Gf, Gm, NUf, NUm kf, km, alfaf, bitam,p)
%E2      ce fonction utilisée le résultat de module d'Young
%      En entrée les valeurs
%      Vf  - fraction volumique de la fibre
%      Ef  - module longitudinale de la fibre
%      Gf  - module de cisaillement de la fibre
%      Gm  - module de cisaillement de la matrice
%      Em  - module d'Young de la matrice
%      NUf - coefficient de poisson de la fibre
%      NUm - coefficient de poisson de la matrice
%      kf  - Le module de compressibilité de fibre
%      km  -Le module de compressibilité de fibre
%      alfaf
%      bitam
%      p   - paramètre utilisée pour déterminer les équations suivent
%          p = 1 utilisée l'équation (3.16)
%          p = 2 utilisée l'équation (3.32)
%          p = 3 utilisée l'équation (5.2)
%          p = 4 utilisée l'équation (5.3)
Vm = 1 - Vf ;
if P == 1
    y1=(Gf.*Gm)./(x.*Gm+(1-x).*Gf);
elseif P == 2
    y2=Gf.*x+Gm.*(1-x);
elseif P == 3
    alfaf=(3+4.*nuf)./8*(1-nuf);
    alfam=(3+4.*num)./8*(1-num);
    y3=(x.*kf+((1-x).*km)./(1+alfaf.*(km-kf)./kf))./(x+((1-x)./(1+alfaf.*(km-kf)./kf)));
elseif P == 4
    y4=((1-x).*km+(x.*kf)./(1+alfam.*(kf-km)./km))./((1-x)+(x./(1+alfam.*(kf-km)./km)));
end

```

Conclusion

Conclusion

L'intérêt essentiel de la micromécanique des milieux composites est de prédire leurs propriétés mécaniques et de prévoir leurs caractéristiques élastiques à base de celles de ses éléments constitutifs.

La méthode de disposition du renfort dans la matrice et la répartition des fibres influent beaucoup sur le comportement mécanique des composites. La considération de certaines hypothèses sur les propriétés et la géométrie des constituants permettent d'établir des équations et de formuler des modèles mathématiques.

Cette étude a conduit donc au développement des modèles simplifiés qui ne peuvent pas prendre en compte tous les paramètres d'élaboration, et les résultats obtenus ne doivent aucunement se substituer aux essais comme la théorie de la loi des mélanges, le modèle d'Halpin-Tsai, le modèle d'assemblage cylindrique et le modèle de Cox. Leurs applications au matériau composite verre-E/époxyde et après leurs comparaisons, nous inclurons que le modèle d'Halpin-Tsai donne les résultats les plus proches des données expérimentales pour les modules transverses et le module de cisaillement. Il existe une différence considérable entre les attentes et la réalité. Elle est liée à la conception du matériau et est relative à la conception de la structure. Ainsi, il semble inévitable que les prédictions des propriétés par la micromécanique est toujours imprécise. Dans une telle situation, nous aurions besoin de la micromécanique dans le sens du nombre pour répondre à une conception plus efficace du matériau.

Bibliographies

BIBLIOGRAPHIE :

- [1] Berthelot J.M., Matériaux composites - Comportement mécanique et analyse des structures, Ed. Tec & Doc, Lavoisier, Paris, 2005.
- [2] Glossaire des Matériaux Composites. Centre d'Animation Régional en Matériau Actives -CARMA -
- [3] Stephen W. Tsai – Introduction to Composite Materials . A T echnomic Publishing Company book Includes index p.453 .Congress Card n° 80-51965 Lancaster, Pennsylvania 17604 U.S.A 1980
- [4] PASTOR J, OHAYON J et DISDIER C 6 Homogénéisation périodique et composites à fibres actives .Laboratoire LaMaCo, ESIGEC, université de Savoie, 73376 Le Bourget-du-Lac cedex, France d 8 2002.
- [5] Nadia Bahlouli, Cours Composites sur le site Interne
" <http://www.ipst.ustrasbg.fr/cours/materiaux-composites> "
- [6] Nadine Bourgeois, " Caractérisation et modélisation micromécanique du comportement et de l'endommagement d'un composite à matrice métallique : Al/SiCp ", thèse de doctorat soutenue le 18 janvier 1993, Ecole Centrale de Paris
- [7] Desrumaux F., Meraghni G., Benzeggagh M.L., "Micromechanical modeling coupled to a reliability approach for damage evolution prediction in composite materials", Appl. Comp. Mater., vol. 7, pp. 231-250, 2000.
- [8] Binse P., "Fabrication de profilés en composites par pultrusion", Techniques de l'Ingénieur, 1995.
- [9] Berthelot J.-M. et Christensen - Matériaux composites chapitre 4 Homogénéisation des matériaux composites poreux. Presses de l'Ecole National des Ponts et Chaussées Paris. 1992 p 87-128 2 fig. bibl (32 réf)
- [10] Thomas Parenteau - Modélisation micromécanique de composites thermoplastiques élastomères à matrice polypropylène THÈSE / UNIVERSITÉ DE BRETAGNE-SUD *sous le sceau de l'Université européenne de Bretagne* pour obtenir le titre de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BRETAGNE-SUDThèse soutenue le 12 mai 2009
- [11] ACHENBACH.J.D.Quantitative nondestructive evaluation Internationale journal of Solide and Structures.200,vol.p.13-27.
- [12] PIERRE E.B , LEIF C et JEAN P.M –Matériaux composites à matrice organique (constituants, procédés, propriétés) presses polytechniques et universitaires romandes vol 15 .ISBN 2-88074-528 imprimé en suisse 2004
- [13] LENE.F et LEGUILLOND –Etude de l'influence d'un glissement entre les constituants d'un matériau composite sur ses coefficients de comportement effectifs. J.de mécanique théorique et appliquée (F) vol. 20 n° 3 1981 p 509-363 fig. bibl. (14 réf)CDR centrale des revues .
- [14] KRONER (E) – bond for effective elastic moduli of disordered materials (Bornes des modules d'élasticité des matériax désordonnés). J. Mechanics and physics of solids (GB) vol. 25, 1977, p 137-55, bibl. (14réf) pergamon press oxiford.

- [15] KRONER (E) – bond for effective elastic moduli of disordered materials (Bornes des modules d'élasticité des matériaux désordonnés). J. Mechanics and physics of solids (GB) vol. 25, 1977, p 137-55, bibl. (14réf) pergamon press oxiford.
- [16] KRONER(E) –effective elastic moduli of periodic and random media: a unification (module d'élasticité effectifs des milieu périodique et aléatoires : une unification). Mechanics research communications (USA) vol. 7 n° 5 1980 p. 323-27 bibl.(5réf.) pergamn press New York
- [17] HASHIN (Z) – analysis of composite materials. A survey (analyse des matériaux composites tout d'horizon). J. Applied Mecahnics (USA) vol. 50 1983 p 481-505 4 fig . bibl. (177 réf). ASME New York
- [18] SUQUET (P) – méthode d'homogénéisation en mécanique des solides. 15 congrès du groupe France de Rhéologie (G.F.R) dans comportements rhéologiques et structure des matériaux . Presses de l'Ecole National des Ponts et Chaussées Paris. 1980 p 87-128 2 fig. bibl (32 réf)
- [19] DUVAUT (G). – Analyse fonctionnelle en mécanique des milieux continus, application à l'étude des matériaux composites élastiques à structure périodique. Homogénéisation . théoetical and appied mechanics. Etide par par W.T. koiter p 119-22,bibl.(41réf) 1976 North Holland publishing company Amsterdam
- [20] BENSOUSSAN (A)-LIONS (J.L) PAPANICOLAOU (G) –Asymptotic analysis for periodic structures (Analyse asymptotique des structures périodiques) 700 p bibl. (172 réf) 1978 North Holland publishing company Amsterdam (USA Elsevier North Holland New York)
- [21] CHEVALIER (Y) – Micromécanique des composites Prévisions en élasticité, en viscoélasticité et à la rupture technique de l'ingénieur, traité Généralités vol A 7780 centre France du copyright
- [22] ACHENBACH.J.D.Quantitative nondeestructive evaluation Internationale journal of Solide ande Structures.200,vol.p.13-27.
- [23] J. C. Ekvall, -Structural Behavior of Monofilament Composites, Proceedings of the AIAA 6th Structures and Materials Conference, Palm Springs, California, 5-7 April 1965, AIAA, New York, April 1965.
- [24]C. C. Chamis and G. P. Sendeckyj -Critique on Theories Predicting Thermoelastic Properties of Fibrous Composites, Journal of Composite Materials, July 1968, pp. 332-358.
- [25] B. Paul, -Prediction of Elastic Constants of Multiphase Materials, Transactions of the Metallurgical Society of AIME, February 1960, pp. 36-41.
- [26] Zvi Hashin, -The Elastic Moduli of Heterogeneous Materials, Journal of Applied Mechanics, March 1962, pp. 143-150.
- [27] Zvi Hashin and S. Shtrikman, -A Variational Approach to the Theory of the Elastic Behaviour of Multiphase Materials, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, March-April 1963, pp. 127-140.
- [28] Zvi Hashin and B. Walter Rosen, -The Elastic Moduli of Fiber-Reinforced Materials, Journal of Applied Mechanics, June 1964, pp. 223-232. Errata, March 1965, p. 219.

- [29] 3-9 N. I. Muskhelishvili, Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, P. Noordhoff, Groningen, The Netherlands, 1953.
- [30] L. R. Herrmann and K. S. Pister, -Composite Properties of Filament-Resin Systems, ASME Paper 63-WA-239, ASME Winter Annual Meeting, Philadelphia, Pennsylvania, 17-22 November 1963.
- [31] Donald F. Adams and Stephen W. Tsai, -The Influence of Random Filament Packing on the Elastic Properties of Composite Materials, Journal of Composite Materials, July 1969, pp. 368-381.
- [32] J. M. Whitney and M. B. Riley, -Elastic Properties of Fiber Reinforced Composite Materials, AIAA Journal, September 1966, pp. 1537-1542.
- [33] R. Hill, -Theory of Mechanical Properties of Fibre-Strengthened Materials - III. Self-Consistent Model, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, August 1965, pp. 189-198.
- [34] J. J. Hermans, -The Elastic Properties of Fiber Reinforced Materials when the Fibers are Aligned, Proceedings of the Koninklijke Nederiandse Akademie van Weten-schappen, Amsterdam, Series B, Volume 70, Number 1, 1967, pp. 1-9.
- [35] J. C. Halpin and S. W. Tsai, -Effects of Environmental Factors on Composite Materials, AFML-TR-67-423, June 1969.
- [36] J. C. Halpin and R. L. Thomas, Ribbon Reinforcement of Composites, Journal of Composite Materials, October 1968, pp. 488-497.
- [37] R. L. Hewitt and M. C de Malherbe, An Approximation for the Longitudinal Shear Modulus of Continuous Fibre Composites, Journal of Composite Materials, April 1970, pp. 280-282.
- [38] PIERRE E.B , LEIF C et JEAN P.M –Matériaux composites à matrice organique (constituants, procédés, propriétés) presses polytechniques et universitaires romandes vol 15 .ISBN 2-88074-528 imprimé en suisse 2004
- [39] KELLY A . et TYSON W.R – Tensile Properties of Fiber Reinforced Metals: Copper/ Tungsten and Copper/ Molybdenum J. Mech. Phys. Solids, vol. 13 1965
- [40] HWANG S.J. et GIBSON R.F? –Micro-mechanical modeling of damping in discontinuous Fiber Composites Using a Strain Energy/Finite Element Approach. J. Eng. Mater. Tech, vol 109 1987
- [41] A. Kelly and G. J. Davies, -The Principles of the Fiber Reinforcement of Metals, Metallurgical Reviews, Volume 10, Number 37, 1965, pp. 1-77.
- [42] A. Kelly and G. J. Davies, -The Principles of the Fiber Reinforcement of Metals, Metallurgical Reviews, Volume 10, Number 37, 1965, pp. 1-77.
- [43] B. Walter Rosen, Tensile Failure of Fibrous Composites, AIAA Journal, November 1964, pp. 1985-1991.
- [44] Norris F. Dow and B. Walter Rosen, - Evaluations of Filament-Reinforced Composites for Aerospace Structural Applications, NASA CR-207, April 1965.

[45] L. B. Greszczuk, -Microbuckling Failure of Circular Fiber-Reinforced Composites, AIAA Journal, October 1975, pp. 1311-1318.

[46] S. P. Timoshenko and J. M. Gere, -Theory of Elastic Stability, 2nd edition, McGraw-Hill, New York, 1961