

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
Faculté des Sciences de l'Ingénieur
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE
Ecole Nationale Doctorale de la Mécanique de Construction

N° d'ordre : / MAG / 2010

Série : / GM / 2010



MEMOIRE

Présenté pour obtenir le Diplôme de Magister en Génie Mécanique

Option :

« *Mécanique Appliquée en Engineering* »

Intitulé :

**ETUDE DE L'ANALYSE LIMITE ET CALCUL A LA
RUPTURE DES MATERIAUX ELASTIQUES
PARFAITEMENT PLASTIQUES**

Présenté par:

Rabie CHETTAH

Devant le Jury :

Président :	Mr. A. BOUCHOUCHA	Prof. Université Mentouri	Constantine
Rapporteur :	Mme. Z. LABED	M.C. Université Mentouri	Constantine
Examineurs :	Mr. B. NECIB	Prof. Université Mentouri	Constantine
	Mr. F. MILI	Prof. Université Mentouri	Constantine

Juillet 2010

Dédicaces

Je dédie cet humble travail :

A ma mère et mon père qui leur dévouement et leur affection ont été pour moi un soutiens tout au long de mes études et de ma vie.

A mes frères et mes sœurs

A toute la famille.

A tous mes amis

Remerciements

Je voudrais en premier lieu remercier chaleureusement et beaucoup plus mon directeur de mémoire de Magister Madame **LABED Zohra**, qui a suivi et a encadré ce travail avec intérêt et disponibilité. Je la remercie aussi de m'avoir initié avec autant de talents à ce travail de recherche; aussi pour ses directions scientifiques, ses qualités pédagogiques, et ses qualités humaines durant toute ma formation de post graduation de la 1^{ière} promotion de l'Ecole Nationale Doctorale en Mécanique de Construction (**ENDMC**).

Je tiens particulièrement à remercier beaucoup le Professeur **A. BOUCHOUCHA** de l'Université Mentouri Constantine de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Je tiens aussi à remercier beaucoup aussi les autres membres de jury Messieurs les Professeurs **B. NECIB** et **F. MILI** pour avoir accepté à évaluer ce travail.

Je n'oublie pas aussi de remercier tous les enseignants de l'ENDMC qui ont contribué à ma formation.

Résumé

On admet volontiers qu'un réservoir sous pression finit par se rompre lorsqu'on augmente suffisamment la pression, au-delà de celle pour laquelle les contraintes dans les matériaux restent dans le domaine élastique. Or, des ruptures brutales ont été observées, sans raison apparente immédiate, à des pressions nettement plus basses. Lorsque de tels accidents ont été étudiés de manière détaillée, il a été établi qu'il existait en général préalablement à la rupture un défaut générateur localement de concentration de contraintes.

Le comportement du matériau est entièrement déterminé par l'évolution de son état de contrainte local, défini par un trajet de charge. Alors pour certains matériaux le phénomène d'écroutissage est absent ou peut être négligé. Le modèle de comportement correspondant est élastique parfaitement plastique. Le domaine d'élasticité est unique.

L'objectif de notre travail, portera surtout sur deux volets, le premier est réservé au calcul élasto-plastique d'une poutre chargée uniquement en flexion, et le deuxième volet portera sur la modélisation d'une poutre fissurée en flexion. On a considéré deux cas différents, le chargement et le dimensionnement de la fissure, utilisant un code de calcul »ANSYS ». L'intérêt de cette étude est de visualiser le comportement de la poutre au voisinage de la fissure.

Mots clés: Poutre en acier, Analyse limite, Flexion, Calcul à la rupture, Simulation numérique.

Abstract

It is widely acknowledged that a reservoir pressure finally breaks when the pressure increases sufficiently, beyond that for which the stresses in the materials remain in the elastic. Now, with bursts have been observed without immediate apparent reason, at pressures considerably lower. When such accidents have been studied in detail, it was determined that in general prior to rupture a fault generating local stress concentration.

The material behavior is entirely determined by the evolution of its local stress state, defined by a load path. While for some materials the phenomenon of work hardening is absent or can be neglected. The behavior model corresponding elastic perfectly plastic. The field of elasticity is unique.

The aim of our work will focus on two elements: the first is reserved for the elasto-plastic calculation of a beam loaded in bending only, and the second component focuses on the modeling of a cracked beam in bending. We considered two different cases, loading and sizing of the crack using a computer code "ANSYS". The interest of this study is to visualize the behavior of the girder in the vicinity of the crack.

Keywords: Steel beam, Limit analysis, Bending, Yield design, Numerical simulation.

بالنسبة لبعض المواد ظاهرة تصلب سلالة غير موجودة أو يمكن أن تكون مهمة. إن نمط سلوك هذه المواد متناسقة يرجع إلى مرونة البلاستيك تماما. حيث أن ميدان مرونتها فريدة من نوعها.

والهدف من عملنا ، وسوف تركز على عنصرين طبعا ، أولا حساب اللدونة المر ونية لعارضة قابلة فقط للانحناء والعنصر الثاني يركز على نموذج لعارضة فيها تصدع قابلة أيضا للانحناء واعتبرنا الحالتين مختلفتين ، والتحميل والتحجيم للتصدع باستخدام رمز الكمبيوتر "ANSYS".

والغرض من هذه الدراسة هو تصور سلوك العارضة بالقرب من صدع.

كلمات البحث: شعاع الصلب، والحد من التحليل، والانحناء، تصميم الغلة، والمحاكاة العددية

TABLE DES MATIERES

RESUME

INTRODUCTION	01
--------------------	----

CHAPITRE I : ETUDE ELASTIQUE

I. Introduction d'élasticité.....	03
I.1. Un aperçu du comportement des matériaux réels.....	04
I.1.1 Les deux élasticités (élasticité linéaire et non linéaire).....	06
I.1.2 L'élasticité linéaire.....	07
I.1.3 L'élasticité linéaire isotrope.....	08
I.2 Les modules élastiques.....	09
I.2.1 Module d'Young et coefficient de poisson.....	09
I.2.2 Module de coulomb.....	10
I.3 Les équations de l'élasticité.....	11
I.3.1 La loi de Hooke.....	11
I.4. Les problèmes plans.....	12
I.4.1. La déformation plane.....	12
I.4.2 Fonction de contrainte.....	13
I.4.3 La contrainte plane.....	13

CHAPITRE II : ETUDE ELASTO-PLASTIQUE

II. Le comportement élasto-plastique infinitésimal.....	15
II.1 Introduction.....	15
II.2 Domaines d'élasticité.....	16
II.2.1 L'expérience de traction simple : limites d'élasticité	16

II.3. Sollicitation multiaxiale : domaines d'élasticité.....	20
II.3.1 Généralités.....	20
II.3.2 Matériau écrouissable.....	22
II.3.3 Matériau parfaitement plastique.....	23
II.4 Fonction de charge et critère de plasticité.....	24
II.4.1 Fonction de charge dans l'état initial	24
II.4.2 Modelés d'écrouissage.....	25
II.5. Fonctions de charge et critères de plasticité usuels.....	25
II. 5. 1. Convexité	25
II. 5. 2. Symétries matérielles	26
II. 5. 3. cas du matériau isotrope.....	26
II. 5. 4. Critère de tresca	28
II. 5. 5. Critère de Von mises	29

CHAPITRE III : ANALYSE LIMITE

III. Introduction	33
III.1. Historique	33
III.2. Principes de modélisation.....	34
III.2.1. Démarche.....	34
III.2.2. Contraintes.....	35
III.2.3. Traction simple	36
III. 2. 4. Cisaillement.....	36
III.2.5. Flexion pure	40
III.3. Caractéristiques de la poutre.....	42

III.4. Simulation d'une poutre avec ANSYS	43
III. 4. 1. Déformation de la poutre suivant es axes x, y et z	43
III. 4. 2. contrainte suivant les axes x, y, z	44
III. 5. Les contraintes principales.....	47
III. 6. Les déformations élastiques	49

CHAPITRE IV : CALCUL A LA RUPTURE

IV. Introduction.....	53
IV.1 Aperçu historique sur la rupture.....	53
IV.2 Utilisation de la mécanique de la rupture en conception	56
IV.2.1 Critère d'énergie.....	57
IV.2.2 Concept d'intensité des contraintes.....	60
IV. 2. 3. Propagation des fissures et concept de tolérance au dommage.....	61
IV.3 Influence des propriétés des matériaux sur la rupture.....	62
IV.4 Analyse dimensionnelle en mécanique de la rupture.....	64
IV.5 Description du champ des contraintes à l'extrémité d'une fissure a l'aide au facteur d'intensité des contraintes.....	66
IV.6 Relation entre le facteur d'intensité de contrainte et l'énergie de Griffith.....	69
IV. 7. Principe de superposition en MLR.....	70
IV. 8. Hypothèses et cadre de l'étude	72
IV. 8. 1. Endommagement et mécanique de la rupture	72
IV. 8. 2. Fissures statiques, quasi-statiques, dynamiques.....	73
IV. 8. 3. Modes de rupture	74
IV. 8. 4. Mécanique linéaire, et non-linéaire de la rupture	74
IV. 9. Conditions aux limites.....	75
IV. 10. Déformations de la poutre suivant les axes x, y et z	76
IV. 11. Contraintes suivant les axes x, y, z	79

IV. 12. Les contraintes principales	85
IV. 13. Les déformations élastiques	90
IV. 14. Les déformations élastiques principales.....	93
IV. 15. Deuxième cas : dimension de la fissure	97
IV. 15. 1. Déformations de la poutre suivant les axes x, y et z.....	98
IV. 15. 2. Contraintes suivant les axes x, y, z.....	101
IV. 15. 3. Les contraintes principales	104
IV. 16. Les déformations élastiques	108
CONCLUSION GENERALE	123

INTRODUCTION

INTRODUCTION GENERALE

On admet volontiers qu'un réservoir sous pression finit par se rompre lorsqu'on augmente suffisamment la pression, au-delà de celle pour laquelle les contraintes dans les matériaux restent dans le domaine élastique. Or, des ruptures brutales ont été observées, sans raison apparente immédiate, à des pressions nettement plus basses. Lorsque de tels accidents ont été étudiés de manière détaillée, il a été établi qu'il existait en général préalablement à la rupture un défaut générateur localement de concentration de contraintes.

L'existence du chargement limite d'un système en matériau élastique parfaitement plastique sur un trajet de chargement donné est apparue comme résultant uniquement de la nécessaire compatibilité entre l'équilibre du système et la condition de parfaite plasticité de son matériau constitutif. L'objet de l'analyse limite est la détermination directe des chargements limites à partir de cette seule définition mathématique. Cette définition est le fondement de l'approche statique par l'intérieur du domaine et de l'évaluation des chargements extrêmes par valeurs inférieures.

Notre travail, portera surtout sur deux volets, le premier est réservé au calcul élasto-plastique d'une poutre chargée uniquement en flexion, et le deuxième volet portera sur la modélisation d'une poutre fissurée en flexion. On a considéré deux cas différents chargement et dimensionnement de la fissure, utilisant un code de calcul « ANSYS ».

Ce mémoire est composé, d'une introduction, de quatre chapitres, d'une conclusion, et d'une recherche bibliographique.

Dans le premier chapitre, nous avons donné une idée sur le comportement élastique de certains matériaux. Les différents coefficients élastiques, les équations de calcul des contraintes et des déformations sont présentés dans ce chapitre.

Au chapitre deux, le comportement élasto-plastique, les différents types de matériau, tel que le matériau élastique parfaitement plastique, et le matériau écrouissable sont présentés. Les sollicitations ainsi que leur comportement sont présentés.

Au troisième chapitre, on présente les principes de modélisation, ainsi que les différents types de chargement d'une poutre. L'étude limite est faite pour une poutre chargée uniquement en flexion, utilisant le logiciel « ANSYS ».

Le quatrième chapitre est subdivisé en deux parties, l'une est consacrée à certains modes de rupture, alors que la deuxième est réservée à la simulation par un code de calcul « ANSYS ». Cette simulation concerne le comportement d'une poutre fissurée utilisant deux cas différents et un autre cas où on augmente la dimension de la fissure, afin de pouvoir déduire l'effet de ce dimensionnement.

Enfin une discussion et une conclusion sont présentées pour commenter les résultats obtenus.

Chapitre I

ETUDE ELASTIQUE

I. INTRODUCTION D'ELASTICITE

L'élasticité classique est l'étude du comportement des solides déformables, élastiques, isotropes, en petites déformations, avec une loi de comportement linéaire. On y ajoute une hypothèse simplificatrice supplémentaire : les déplacements sont petits. Le couple d'hypothèses <<petits déplacements>> et <<petites déformations>> est souvent appelé *Hypothèse des petites perturbations* souvent abrégée par HPP. On verra plus loin que toutes ces hypothèses ont pour conséquence de rendre linéaires les équations différentielles de l'élasticité. L'élasticité classique est donc souvent appelée aussi *élasticité linéaire*.

Contrairement à la mécanique des fluides, on ne s'intéressera pas ici à la description du mouvement du solide pendant la déformation, mais seulement à l'état final du corps, lorsque l'application du chargement est terminée et que le solide a atteint son état d'équilibre sous la charge.

On se donne un corps de forme initiale connue, et dont la loi de comportement ci-dessus est supposée refléter correctement le comportement du matériau. On le soumet à un chargement mécanique (efforts appliqués sur le corps ou déplacements imposés) ou thermique (une variation de température), et on se pose les questions suivantes :

1. Sous quels chargements faut-il calculer l'objet ?
2. Quelles sont les contraintes, les déformations et les déplacements engendrés par ces chargements ?
3. Ces chargements sont-ils supportables par le matériau ?
4. Les valeurs trouvées sont-elles acceptables?

Comme on le voit, ces questions sont en rapport direct avec les préoccupations d'un ingénieur qui doit concevoir un objet ou un assemblage d'objets. La statique des corps élastiques ne permettra de répondre qu'aux questions 2 et 3 !

Les réponses à la question 1 et 4 sont sous l'entière responsabilité de l'ingénieur. Il peut parfois être guidé dans cette tâche par des normes ou des règlements.

I. 1. UN APERÇU DU COMPORTEMENT DES MATERIAUX REELS

Si on fait une expérience de traction sur un matériau (l'acier par exemple), on constate que, tant que les efforts de traction ne dépassent pas une certaine limite, la relation contrainte-déformation reste linéaire. Cependant au delà du seuil, on constate que la linéarité et la mémoire de la configuration initiale sont perdues : le matériau a une loi de comportement différente.

$$\sigma_{11} = f(\varepsilon_{11})$$

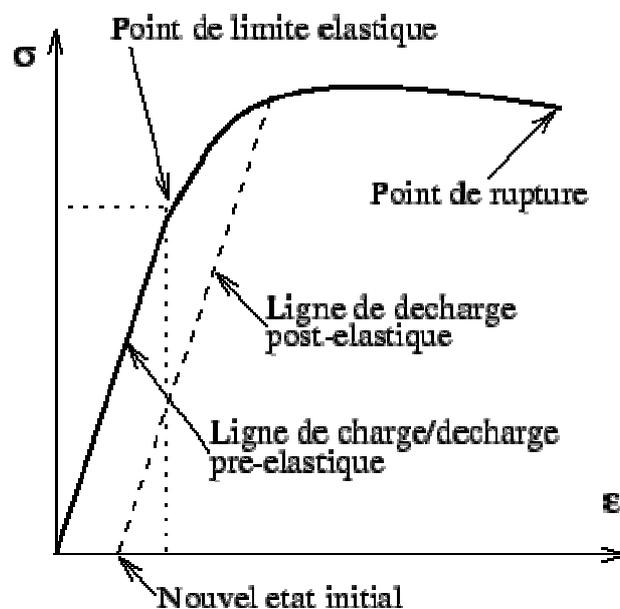


Figure I. 1. Courbe dans un essai de traction.

La courbe de la figure I.1 montre l'allure du comportement d'un acier dans un essai de traction sur une éprouvette, dans un plan déformation-contrainte. On y constate clairement deux comportements :

- Tant qu'on reste en dessous du point de limite élastique, le comportement reste élastique, c'est à dire que la courbe de décharge est confondue avec la courbe de charge. Quand le chargement redevient nul, l'éprouvette retrouve donc sa forme initiale.
- Par contre, si le chargement dépasse la limite élastique, et si on décharge ensuite l'éprouvette, on constate qu'on revient à un autre état : le matériau a perdu la mémoire de son état initial et se comporte comme si l'état initial était changé.

Ainsi, la loi de comportement élastique linéaire présentée dans le cours de mécanique des milieux continus a un domaine d'application limité par deux conditions indépendantes :

1. Les déformations doivent être petites car on utilise le tenseur des petites déformations $\underline{\underline{\epsilon}}$ et non un tenseur de déformation exact.
2. La loi de comportement élastique linéaire n'est valide que tant qu'on reste en dessous d'un certain seuil de limite élastique.

Dans la pratique on peut considérer qu'une déformation est petite lorsqu'elle est inférieure à 10^{-2} ou 10^{-3} .

Pour beaucoup de matériaux métalliques, le seuil de limite élastique est dans le domaine des petites déformations. Si bien que, dans ce cas, on peut confondre les deux limitations : Si on est en dessous du seuil de limite élastique, on est dans le domaine des petites déformations. Mais pour d'autres matériaux, on peut avoir des comportements élastiques avec de grandes déformations, et le comportement élastique peut être non linéaire. Pour de tels matériaux, on peut utiliser l'élasticité linéaire à condition de rester dans le domaine des petites déformations.

Dans tous les cas, la vérification de la validité de ces deux conditions (HPP et limite élastique) ne peut se faire qu'a posteriori, en analysant la solution numérique complète du problème ! Il ne faut pas conclure de cette discussion qu'il faille éviter de construire des objets travaillant au delà de la limite élastique. En construction mécanique, on désire souvent qu'une pièce reprenne sa forme initiale lorsque le chargement a cessé. On doit donc rester dans le domaine élastique, et l'élasticité classique est une théorie satisfaisante.

Mais il existe un grand nombre de problèmes pratiques où elle n'est d'aucun secours :

- Dans le bâtiment, on admet parfois de dépasser la limite élastique (sans aller jusqu'à la rupture !).
- Dans les procédés de formage (pliage, emboutissage, forgeage, etc), il est évident qu'on ne souhaite pas le retour à la forme initiale et qu'on doit s'intéresser au comportement non élastique au delà de la limite élastique.
- Un grand nombre de matériaux nouveaux ont des lois de comportements non linéaires (les élastomères par exemple) ou non isotropes (les matériaux composites par exemple). Là encore, il faut utiliser des théories plus complexes.

On voit donc que, bien qu'elle soit populaire et simple, la théorie de l'élasticité classique ne peut satisfaire tous les besoins.

C'est l'ingénieur qui a la responsabilité de choisir la théorie à utiliser pour résoudre son problème et la responsabilité de vérifier a posteriori que la solution trouvée est bien dans les limites d'application de la théorie choisie.

L'expérience montre que si la déformation du matériau est suffisamment faible, il reprend son état primitif non déformé lors de la suppression des efforts extérieurs ayant provoqué sa déformation. Le comportement élastique parfait correspond à une réversibilité mécanique parfaite. Le tenseur des déformations $\bar{\epsilon}$ est alors une variable d'état et sa donnée détermine, de manière biunivoque, le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$. Le travail de déformation développé entre deux états d'équilibre est alors indépendant du chemin suivi entre ces deux états.

I. 1. 1. LES DEUX ELASTICITES

Les matériaux présentent en deçà d'un certain seuil de chargement qui leur est propre un comportement élastique quasi réversible caractérisé par une densité volumique de potentiel élastique $\pi(\bar{\epsilon})$ qui s'identifie en régime isotherme $T = T_0$ à leur densité volumique d'énergie libre $F(\bar{\epsilon})$. A l'incrément de déformation $d\bar{\epsilon}$ correspond l'état de contrainte tel que :

$$\bar{\sigma} = \frac{\partial \pi}{\partial \bar{\varepsilon}} = \left. \frac{\partial F}{\partial \bar{\varepsilon}} \right|_T = \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\varepsilon}} \right|_T - T_0 \left. \frac{\partial S}{\partial \bar{\varepsilon}} \right|_T \quad \text{I.1}$$

Cette expression montre que l'origine de l'élasticité est double : une contribution provient de la variation d'énergie interne associée à la déformation, l'autre provient de celle de l'entropie. Selon les classes de matériaux ces deux contributions peuvent être d'ordres de grandeur très différents.

- Pour les matériaux très déformables comme les élastomères, les conformations des chaînes macromoléculaires peuvent être considérablement modifiées par les déformations quasiment sans variation des distances interatomiques et le terme entropique, responsable de la haute élasticité caoutchoutique, devient prépondérant. Les déformations résultantes sont importantes et le comportement élastique non linéaire du fait de l'évolution de résistance au changement de conformation des macromolécules, des enchevêtrements, étirement, alignement. La contrainte augmente bien avec la déformation puisque l'entropie diminue, la structure interne du matériau pelotes initialement désordonnée s'ordonnant par étirement des chaînes macromoléculaires.
- La variation d'énergie interne est prépondérante pour les matériaux cristallins pour lesquels de légères variations des distances interatomiques associées à la déformation entraînent des variations considérables de l'énergie de cohésion alors que l'entropie n'est quasiment pas modifiée. Ce type de comportement élastique-linéaire commun à la plupart des structures s'étudie généralement dans le cadre des petites déformations en élasticité-linéaire [1].

I.1.2. L'ELASTICITE LINEAIRE

En deçà de leur seuil d'écoulement plastique (matériaux ductiles) ou de rupture (matériaux fragiles) les matériaux cristallins présentent une réponse élastique-linéaire. Elle se traduit donc par une relation de proportionnalité entre les tenseurs $\bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}$. Dans ce cas les potentiels

$\pi(\bar{\varepsilon}) = F(\bar{\varepsilon})$ et $\omega(\bar{\sigma}) = -\phi(\bar{\sigma})$ sont égaux (Fig.I.1) et la densité volumique d'énergie élastique stockée s'exprime sous la forme :

$$\pi(\bar{\varepsilon}) = F = \frac{1}{2} \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\bar{\sigma}\bar{\varepsilon}) \quad \text{I.2}$$

F se réduit à une fonction homogène de degré 2 des composantes de $\bar{\varepsilon}$ mais aussi de $\bar{\sigma}$. C'est une forme quadratique définie positive ; Le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes conduit à la relation :

$$F = \frac{1}{2} \text{Tr}(\bar{\sigma}\bar{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \text{Tr}\left(\bar{\varepsilon} \frac{\partial F}{\partial \bar{\varepsilon}}\right) \Big|_T = \frac{1}{2} \text{Tr}\left(\bar{\sigma} \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}}\right) \Big|_T \quad \text{I.3}$$

L'énergie libre F permet, en élasticité linéaire seulement, de déduire les déformations par $\bar{\varepsilon} = \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}} \Big|_T$.

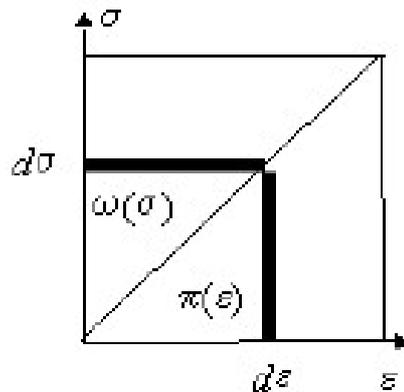


Figure I. 2. Potentiels d'élasticité linéaire.

I. 1. 3. L'ELASTICITE LINEAIRE ISOTROPE

La plupart des matériaux sont élaborés sous forme polycristalline. Comme en mécanique des milieux continus on ne s'intéresse qu'à des particules de matière dont les dimensions sont grandes devant celles des microcristaux, l'isotropie macroscopique du matériau résulte généralement d'une moyenne des propriétés anisotropes des nombreux microcristaux constituant la particule et

les propriétés mécaniques élastiques ne dépendent pas de l'orientation au sein de la matière, contrairement au cas des monocristaux ou des composites.

Soumis à un champ de contrainte suffisamment faible pour que ces matériaux restent en deçà de leur seuil de plasticité, les coefficients de la relation contrainte - déformation en régime élastique linéaire, les modules élastiques de ces matériaux, sont des constantes indépendantes de l'amplitude de la contrainte appliquée.

L'énergie libre F d'un matériau isotrope, étant une fonction homogène de degré 2 des composantes de $\bar{\varepsilon}$ ou de $\bar{\sigma}$, est un scalaire invariant par changement de repère. F ne peut donc dépendre que des invariants quadratiques

$$\{Tr^2(\bar{\varepsilon}), Tr(\bar{\varepsilon})^2\} \text{ ou } \{Tr^2(\bar{\sigma}), Tr(\bar{\sigma})^2\} \quad \text{I.4}$$

$$m_1^\varepsilon Tr^2(\bar{\varepsilon}) + m_2^\varepsilon Tr(\bar{\varepsilon})^2 = F = m_1^\sigma Tr^2(\bar{\sigma}) + m_2^\sigma Tr(\bar{\sigma})^2 \quad \text{I.5}$$

$\{m_1^\varepsilon, m_2^\varepsilon\}$ et $\{m_1^\sigma, m_2^\sigma\}$ constituants des couples de deux modules indépendants caractérisant le comportement élastique linéaire isotrope. Ces couples ne sont pas indépendants et il est possible d'exprimer les modules d'un couple en fonction de ceux de l'autre. De même, par combinaison, il est possible de définir d'autres couples de modules.

Les matériaux isotropes sont caractérisés par 2 modules élastiques indépendants.

I. 2. LES MODULES ELASTIQUES

I. 2. 1. MODULE D'YOUNG ET COEFFICIENT DE POISSON

Vers 1800 Young, médecin de formation, s'intéresse à l'élasticité de la cornée. En procédant à des essais de traction uni axiale, il constate que la déformation ε_{\parallel} mesurée selon l'axe de traction est proportionnelle à la contrainte σ appliquée. Il définit le coefficient de proportionnalité $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_{\parallel}}$

Poisson complète l'analyse en constatant que l'allongement dans la direction de l'axe de traction s'accompagne d'un raccourcissement plus faible proportionnel dans les directions perpendiculaires. Il définit positif le coefficient de proportionnalité $\nu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}}$

- Le Module d'Young E a la dimension d'une contrainte et se mesure généralement en [GPa]. Il représente la contrainte qu'il faudrait appliquer pour obtenir une déformation unité soit doubler la longueur initiale. Aucun matériau ne répond linéairement à une telle contrainte, la plupart ont cède bien avant.
- Le coefficient de Poisson ν est un nombre sans dimension compris dans l'intervalle $\left\{0, \frac{1}{2}\right\}$. A l'exception des élastomères comme le caoutchouc dont le coefficient de Poisson, la plupart des matériaux isotropes continus ont un coefficient de Poisson compris dans l'intervalle $\{0,25 - 0,35\}$

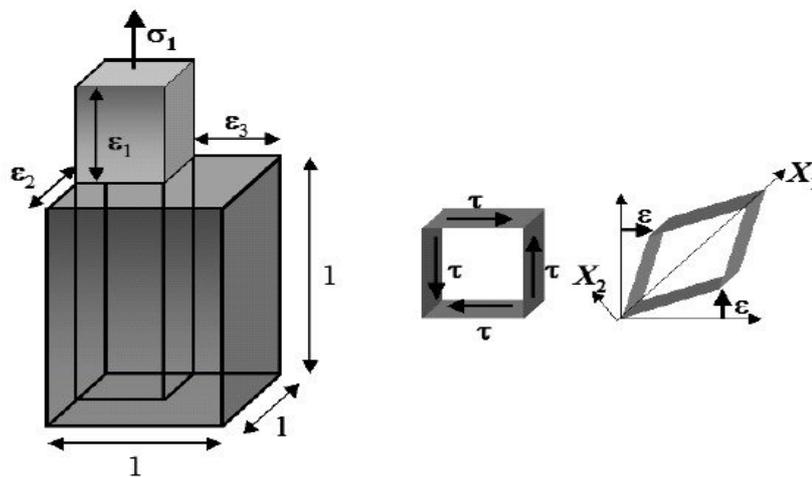


Figure I. 3. Modules: Young, Poisson, Coulomb

Les matériaux structurellement complexes peuvent avoir des coefficients de Poisson supérieurs à 0,5. C'est le cas des granulaires, des poreux, des textiles et de nombreux tissus biologiques comme les muscles qui gonflent fortement lorsqu'on les contracte avec un coefficient de Poisson $\nu \cong 1$. A l'opposé le coefficient de Poisson du liège ν . Un bouchon ne s'allonge pas quand on l'étreint dans une bouche bouteille.

I. 2. 2. MODULE DE COULOMB

Coulomb procède à des essais de torsion (cisaillement pur) et constate que le glissement γ est proportionnel au cisaillement τ appliqué. Il définit le coefficient de proportionnalité $G = \frac{\tau}{\gamma}$

. Le module de Coulomb G a la dimension d'une contrainte et se mesure généralement en [GPa]. Il représente le cisaillement qu'il faudrait appliquer pour obtenir un glissement d'un radian [1].

I. 3. LES EQUATIONS DE L'ELASTICITE

I. 3. 1. LA LOI DE HOOKE

Relation de Young

A partir de la définition de E et de ν la relation contrainte déformation s'écrit :

$$\bar{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \bar{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} = \frac{\sigma_1}{E} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{vmatrix}$$

Tout état de contrainte se réduisant à un état triaxial dans ses axes principaux, le principe de superposition permet de le décomposer $\bar{\sigma}$ en trois états de contraintes uniaxiaux orthogonaux, de calculer pour chacun la déformation résultante puis de sommer ces trois déformations pour obtenir le tenseur des déformations $\bar{\varepsilon}$ associé à $\bar{\sigma}$. Cette relation tensorielle, établie dans le repère principal, est intrinsèque.

Elle s'écrit dans un repère quelconque sous la forme de l'équation de Young :

$$E\bar{\varepsilon} = -\nu \text{Tr}(\bar{\sigma})\bar{\delta} + (1 + \nu)\bar{\sigma} \quad E\varepsilon_{ij} = -\nu\sigma_{kk}\delta_{ij} + (1 + \nu)\sigma_{ij} \quad \text{I.6}$$

Relation de lamé

La relation contrainte - déformation résultant de la relation :

$$\bar{\sigma} = \frac{\partial F}{\partial \bar{\varepsilon}_T}, \text{ avec } F = \frac{\lambda}{2} \text{Tr}^2(\bar{\varepsilon}) + \mu \text{Tr}(\bar{\varepsilon})^2 \quad \text{I.7}$$

S'écrit alors :

$$\sigma = \lambda \text{Tr}(\bar{\varepsilon})\bar{\delta} + 2\mu\bar{\varepsilon} \quad \sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad \text{I.8}$$

I. 4. LES PROBLEMES PLANS

Dans le cas des structures en feuillets minces ou des structures de grande longueur chargées uniquement dans le plan de section droite, il est possible de réduire l'étude à celle d'un problème mécanique bidimensionnel plan.

Au sens mathématique, un problème est bidimensionnel lorsque toutes les grandeurs ne sont fonction que de deux des trois coordonnées d'espace. Cette seule restriction ne simplifie pas les problèmes d'élasticité car si le champ de déplacement \vec{u} ne dépend que de x_1 ; x_2 la déformation $\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$ et les gradients $\frac{\partial u_1}{\partial x_3}$, $\frac{\partial u_2}{\partial x_3}$ sont nuls mais $\frac{\partial u_3}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial u_3}{\partial x_2}$ donc ε_{31} et ε_{32} ne le sont en général pas. Le tenseur des déformations $\bar{\varepsilon}$ possède encore 5 composantes non nulles au lieu de 6 et le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ 6 composantes non nulles.

Afin de simplifier le problème élastique, on impose comme condition supplémentaire que l'axe x_3 soit direction principale en tout point ce qui implique que le chargement de la structure, invariant par translation selon x_3 , s'exécute dans le plan de section droite $\{x_1, x_2\}$. Il faut alors distinguer le cas des déformations planes de celui des contraintes planes.

I. 4. 1. LA DEFORMATION PLANE

En déformation plane l'axe x_3 est en tout point direction principale à valeur propre nulle du tenseur des déformations $\bar{\varepsilon}$ impliquant $\varepsilon_{33} = 0$, $\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0$ et $\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0$ d'où $u_3 = 0$.

L'axe x_3 est également direction principale du tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ impliquant $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$, mais, la déformation ε_{33} étant nulle, en déformation plane les sections adjacentes ne sont pas libres de se déformer par effet Poisson selon x_3 , elles se gênent mutuellement et cette frustration est à l'origine d'une contrainte $\sigma_{33} \neq 0$. Sa valeur $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ se déduit directement de la loi de comportement élastique

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E} (\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})) \text{ (relation d'Young Eq I.6).}$$

La déformation plane concerne donc des structures de grande longueur invariantes en forme et en chargement par translation selon l'axe x_3 telles que des tunnels ou des feuillets minces insérés entre deux blocs suffisamment rigides pour être considérés comme indéformables.

Les tenseurs $\bar{\sigma}$, $\bar{\varepsilon}$ et le champ de déplacement \bar{u} satisfont alors aux relations d'un problème bidimensionnel :

$$\bar{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow u = \begin{vmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{vmatrix} \Rightarrow \bar{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix} \quad \text{I.9}$$

avec

$$\begin{aligned} u_3 &= 0 \\ \sigma_{33} &= \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{aligned} \quad \text{I.10}$$

I. 4. 2. FONCTION DE CONTRAINTE

Lorsque l'on néglige les forces de volumes l'équation de l'équilibre élastique statique se réduit à :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \quad \text{I.11}$$

Les composantes σ_{11} , σ_{22} et σ_{12} se déduisent alors d'une fonction de contrainte arbitraire $\chi(x_1, x_2)$ par les relations :

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{12} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2} \quad \text{I.12}$$

I. 4. 3. LA CONTRAINTE PLANE

Le problème de la contrainte plane

En contrainte plane l'axe x_3 est en tout point de direction principale à valeur propre nulle du tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ impliquant $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$.

Le tenseur des déformations $\bar{\varepsilon}$ déduit de la loi de comportement élastique linéaire (relation d'Young Eq I.6) comporte une composante $\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ fonction de x_1 ; x_2 . La composante u_3 du champ de déplacement est donc une fonction de x_1 ; x_2 ; x_3 linéaire en x_3 . En conséquence $\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \neq 0$ et $\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \neq 0$ impliquant $\varepsilon_{13} \neq 0$, $\varepsilon_{23} \neq 0$ et $\sigma_{13} \neq 0$, $\sigma_{23} \neq 0$.

Le seul problème réellement bidimensionnel de contrainte plane vraie doit donc satisfaire à $\varepsilon_{33} = 0$, c'est également un problème de déformation plane. Il correspond à $\sigma_{11} + \sigma_{22} = 0$. C'est le cisaillement pur [1].

Chapitre II

ETUDE ELASTO-PLASTIQUE

II. LE COMPORTEMENT ELASTO-PLASTIQUE INFINITESIMAL

II. 1. INTRODUCTION

Le schéma élasto-plastique pour le comportement des matériaux, dont la présentation fait l'objet de ce premier chapitre, a été initialement élaboré à partir de constatations expérimentales relatives au comportement tridimensionnel des métaux. Les domaines d'application de cette modélisation débordent maintenant ce cadre. On résout actuellement, par voies analytiques ou numériques, des problèmes d'élasto-plasticité en calcul des structures (structures réticulées, structures à barres fléchies), des plaques et coques métalliques, et l'on utilise aussi ce modèle pour l'analyse de structures en béton ou d'ouvrages de géotechnique.

On se propose, dans la suite, d'exposer le modèle de comportement élasto-plastique classique, construit en se plaçant dans l'hypothèse de la petite transformation. Ce modèle, dont la présentation est maintenant bien acquise, demeure le schéma plastique le plus fréquemment utilisé dans les applications ; il convient toutefois de signaler que des travaux de recherche effectués au cours des trente dernières années ont abouti à la mise sur pied, de la théorie de l'élasto-plasticité en transformation finie (entre autres Lee, 1969 ; Teodosiu, 1970 ; Mandel, 1971, 1973 ; Zarka, 1973 ; Brun, 1992).

Le modèle de comportement élasto-plastique classique laisse de côté, en ce qui concerne la plasticité, tout effet de vieillissement et de viscosité du matériau. Du point de vue des formules mathématiques par les quelles on représente le comportement plastique, cela implique :

1° – en conséquence de l'absence de vieillissement, l'invariance par translation sur la variable temps ;

2° – en conséquence de l'absence de viscosité, la réponse (déformation) du matériau à la variation élémentaire de sollicitation (contrainte) effectuée à un instant donné, se produit en totalité simultanément à cette variation et est indépendante de la vitesse avec laquelle celle-ci est effectuée : il y a donc invariance des formules exprimant le comportement par homothétie positive effectuée à chaque instant sur la variable temps.

Il résulte de cela que les formules exprimant le comportement élasto-plastiques sans vieillissement ni viscosité, ne sauraient dépendre explicitement ou implicitement de l'échelle du temps physique en ce sens que la réponse du matériau à une certaine

histoire de sollicitation ne dépend que de la séquence des évènements de cette histoire. Aussi fera-t-on usage, pour écrire commodément les relations de comportement en plasticité classique, d'un temps, paramètre purement cinématique monotone croissant en fonction du temps physique. Il en ira évidemment de même pour l'étude des problèmes d'élasto-plasticité quasi-statiques.

Ce chapitre est organisé de façon à présenter en deux étapes les concepts fondamentaux sur lesquels s'appuie le modèle de comportement élasto-plastique classique :

- les domaines d'élasticité, qui généralisent la notion de limites d'élasticité mise en évidence dans les expériences en sollicitations uniaxiales (traction simple par exemple) avec le phénomène essentiel d'écrouissage ;
- la règle d'écoulement plastique qui définit, dans le cas des sollicitations multiaxiales, la façon dont évolue la déformation plastique.

Manifestations macroscopiques des mêmes phénomènes physiques au niveau de la micro-mécanique, ces concepts ne sont évidemment pas indépendants [2].

II.2 DOMAINES D'ELASTICITE

II.2.1 L'EXPERIENCE DE TRACTION SIMPLE : LIMITES D'ELASTICITE

La figure II.1 représente le diagramme effort-allongement relevé dans une expérience de traction simple effectuée sur une éprouvette en acier inoxydable (communiqué par H.D. Bui) [2].

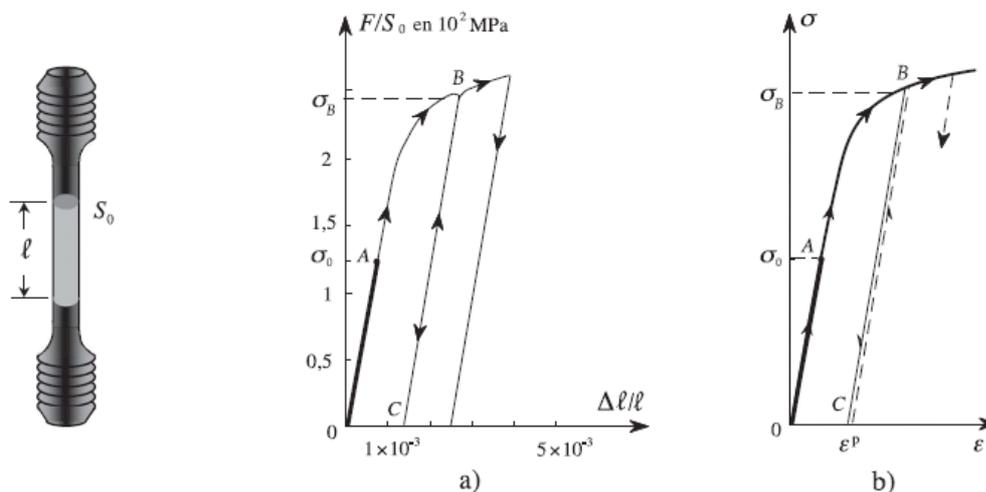


Figure II. 1. Expérience de traction simple pour un matériau écrouissable

L'expérience est effectuée à vitesse de déformation fixée. On constate l'existence d'un seuil pour la contrainte, soit σ_0 , à partir duquel le comportement du matériau devient irréversible. L'éprouvette ayant été chargée au-delà de A jusqu'en B, on effectue une décharge : celle-ci suit sur le diagramme le chemin BC et non le trajet BAO. En particulier, on note qu'après décharge totale, il reste une déformation de l'éprouvette représentée par OC sur la figure II.1a. Cette déformation permanente est la déformation *plastique*. On procède alors à une nouvelle charge : tant que la contrainte reste inférieure à σ_B celle-ci s'effectue en suivant le trajet CB identique, au sens de par cours près, à celui décrit lors de la décharge; le comportement demeure réversible tout au long de CB. Quand σ dépasse σ_B , le point figuratif suit la courbe de première charge au-delà de B, c'est-à-dire la courbe représentant la traction sans décharge. Ainsi lors de la nouvelle charge effectuée à partir de C, σ_B apparaît comme le nouveau seuil en traction. En supposant l'homogénéité de l'état de contrainte et de la déformation dans la partie utile de l'éprouvette, la figure II.1b) donne la représentation du modèle de comportement correspondant pour le matériau sous la forme d'un diagramme reliant la contrainte σ à la déformation ε selon l'axe de l'éprouvette. Sur ce diagramme, σ_0 est la limite initiale d'élasticité ou seuil initial de plasticité. Après charge jusqu'au niveau σ_B , la limite actuelle d'élasticité ou seuil actuel de plasticité est égale à σ_B : ce résultat est parfois appelé « Principe de Coulomb » (Bouasse, 1920). La déformation permanente après décharge est la déformation plastique ε_p .

Pour certains matériaux le diagramme contrainte-déformation, homologue de celui de la figure II.1b), dépend, dans sa partie irréversible, c'est-à-dire inélastique, de la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ adoptée ; c'est le cas en particulier, pour l'aluminium comme le montre la figure II.2 extraite de (Bui et Zarka, 1972)[2].

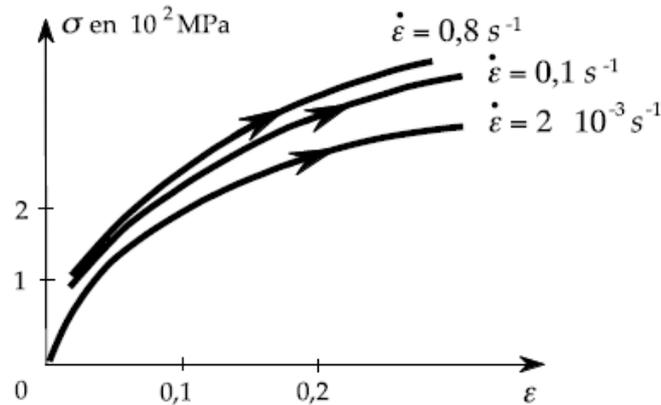


Figure II. 2. Expérience en traction simple sur une éprouvette d'aluminium : influence de la vitesse de déformation

Il pourrait aussi dépendre, dans sa partie irréversible, de l'âge du matériau, c'est à-dire de l'instant t_0 repéré par rapport à l'histoire du matériau, auquel est effectuée l'expérience.

Le modèle de comportement élasto-plastique classique laisse de côté tout effet de viscoplasticité et de vieillissement. Le comportement du matériau en traction simple est alors schématisé par la courbe unique de la figure II.1b), indépendante de t_0 et de $\dot{\epsilon}$, (ou, ce qui revient au même, de σ).

Le phénomène observé à la figure II.1, où la limite actuelle d'élasticité σ_B est effectivement une fonction de ϵ_p , correspond au cas du matériau dit écrouissable. On précise même dans certains cas « matériau à écrouissage positif » pour traduire le fait que le seuil de plasticité est une fonction croissante de ϵ_p . Ce phénomène, quoique le plus répandu, n'est pas général pour le comportement plastique. Ainsi la figure II.3 a représente le diagramme relevé dans le cas de l'expérience de traction simple effectuée sur une éprouvette d'acier doux. On constate que celui-ci présente un palier pour des déformations allant de 10^{-3} à 10^{-2} (ordres de grandeur). Un tel comportement est modélisé selon le diagramme de la figure 3b avec un palier plastique illimité et l'on dit que le matériau correspondant est élastique et parfaitement plastique. Ainsi, pour le modèle élastique-parfaitement plastique, la contrainte ne peut dépasser la valeur σ_0 et, lors qu'elle atteint cette valeur il y a possibilité d'allongement illimité.

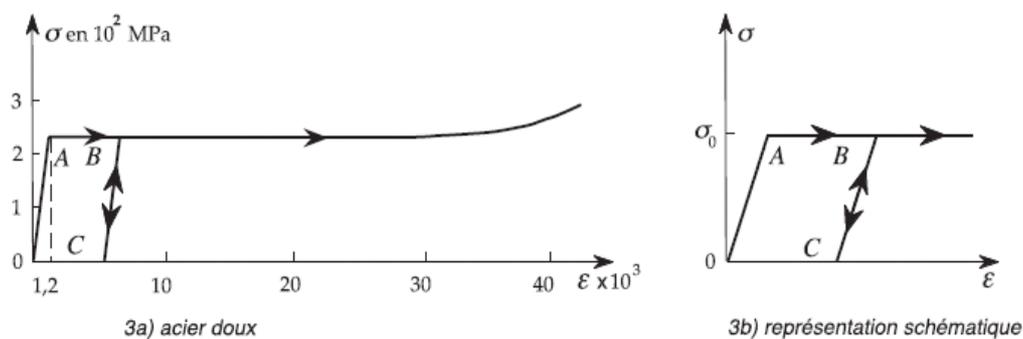


Figure II. 3. Expérience de traction simple pour un matériau élastique parfaitement plastique

On revient maintenant à l'expérience de traction simple dans le cas du matériau écrouissable, après la décharge suivant BC on sollicite la même éprouvette en compression (figure II.4).

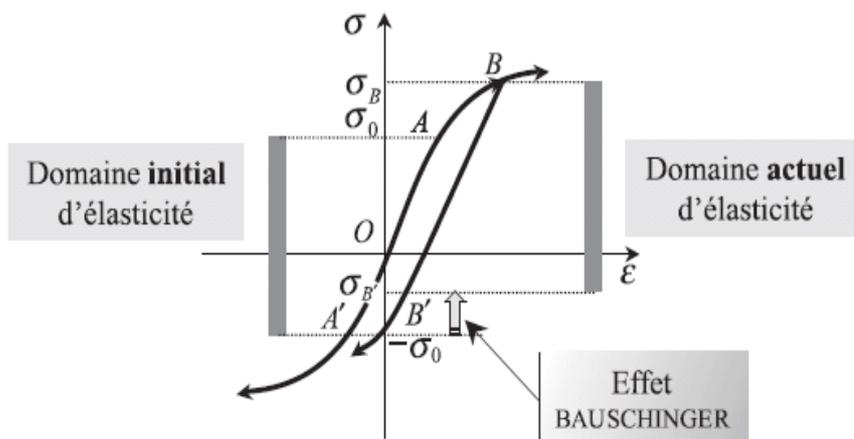


Figure II. 4. Expérience de traction-compression : effet Bauschinger

On constate alors que la limite d'élasticité en compression, initialement égale à $-\sigma_0$, se trouve ramenée à la valeur $\sigma_{B'}$, supérieure (algébriquement) à $-\sigma_0$. Autrement dit, l'écrouissage en traction qui correspond à un relèvement de la limite d'élasticité en traction, s'accompagne d'une diminution (en valeur absolue) de la limite d'élasticité en compression. Ce phénomène est connu sous le nom d'*effet Bauschinger*. Le segment

$[-\sigma_0, \sigma_0]$ définit le domaine initial d'élasticité du matériau en traction-compression simple tandis que le segment $[\sigma_{B'}, \sigma_B]$ définit le domaine actuel d'élasticité après écrouissage en traction simple jusqu'à la valeur σ_B .

Pour l'acier doux, si l'on effectue une première charge en traction jusqu'à obtenir une déformation plastique sous contrainte constante égale à σ_0 on constate ensuite, après décharge de la traction et charge en compression, que la limite d'élasticité en compression est également ramenée à une valeur $\sigma_{B'}$, légèrement supérieure à $-\sigma_0$ (algébriquement) et que, si l'on poursuit la charge avec déformation plastique en compression, la contrainte rejoint rapidement un palier à la valeur $-\sigma_0$ (figure II.5a).

Ce phénomène n'est pas pris en compte dans la modélisation du matériau élastique parfaitement plastique qui pose que les valeurs limites d'élasticité en traction et en compression sont des constantes (figure II. 5b).

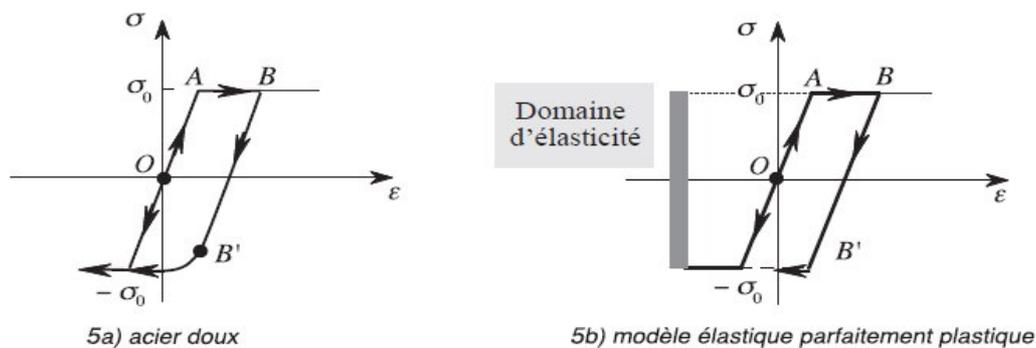


Figure II. 5. Expérience de traction compression

II. 3. SOLLICITATION MULTIAXIALE : DOMAINES D'ELASTICITE

II. 3. 1. GENERALITES

L'expérience mono axiale évoquée ci-dessus ne représente qu'un cas particulier des sollicitations que peut subir un élément de milieu continu tridimensionnel.

D'une façon générale, une sollicitation quelconque de l'élément de matière est caractérisée par le tenseur des contraintes σ (tenseur de Cauchy), élément de l'espace

\mathbb{R}^9 (ou \mathbb{R}^6 en tenant compte des symétries $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $i, j = 1, 2, 3$). Par les résultats expérimentaux on met en évidence l'existence d'un domaine d'élasticité initial contenant l'origine, et tel que pour tout trajet de charge de l'élément de matière, partant de l'état naturel et situé entièrement à l'intérieur de ce domaine, les déformations sont élastiques (c'est-à-dire réversibles). Ce domaine noté C est ainsi défini dans l'espace \mathbb{R}^6 des tenseurs σ .

Par rapport à la sollicitation uniaxiale, il apparaît comme l'homologue du segment $[-\sigma_0, \sigma_0]$ tracé sur l'axe des σ à la figure II.4. On peut dire aussi que le segment $[-\sigma_0, \sigma_0]$ est l'intersection du domaine d'élasticité initial avec la droite « sollicitation en traction-compression ». De même, dans le cas d'une sollicitation plus complexe telle que celle réalisée dans l'expérience de traction-compression et torsion de tubes minces (Bui, 1970), où les seules composantes non nulles du tenseur des contraintes sont la contrainte normale σ_{ZZ} et la contrainte de cisaillement $\sigma_{Z\theta}$ variant indépendamment l'une de l'autre (figure II.6). On obtient un domaine d'élasticité qui est l'intersection du domaine défini dans l'espace \mathbb{R}^6 avec le sous-espace correspondant à la sollicitation appliquée c'est-à-dire le plan d'équations $\sigma_{ZZ} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta Z} = \sigma_{Z\theta} = 0$. C'est d'ailleurs en effectuant de telles expériences analogues que l'on peut parvenir à déterminer le domaine d'élasticité dans l'espace \mathbb{R}^6 . Exemple de domaine initial d'élasticité déterminé expérimentalement (H. D. Bui, 1970)[2].

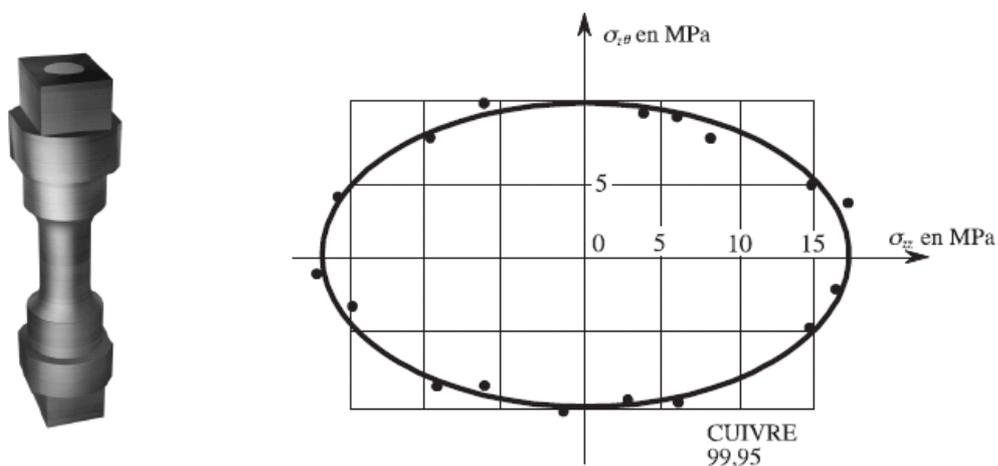


Figure II. 6. Eproutette pour l'expérience de traction-compression et torsion d'un tube mince

II. 3. 2. MATERIAU ECROUISSABLE

Dans le cas du matériau écrouissable la charge peut être poursuivie au-delà du domaine d'élasticité initial ; le point de charge σ ayant atteint la frontière initiale d'élasticité (frontière de C) peut franchir celle-ci, il y a alors apparition de déformations permanentes. On définit, en chaque point du trajet de charge, le domaine d'élasticité actuel, le domaine d'élasticité actuel correspondant à un point B et à un trajet de charge donné aboutissant en B est, par définition, le domaine de \mathbb{R}^6 engendré par l'ensemble des trajets de charge issus de B le long desquels la déformation varie de façon purement élastique.

Lorsque le point de charge franchit la frontière initiale d'élasticité, il entraîne avec lui la frontière du domaine d'élasticité actuel, comme cela est représenté schématiquement, dans l'espace à deux dimensions, à la figure II.7. La forme de la frontière d'élasticité est en général modifiée au cours de cette évolution. Ce phénomène est l'homologue de ce qui a été présenté à la figure II.4 où le domaine d'élasticité actuel était représenté par le segment $[\sigma_B^+, \sigma_B^-]$ sur l'axe σ .

Dans le cas de la sollicitation tridimensionnelle, c'est tout à la fois à « l'entraînement » et à la déformation du domaine d'élasticité que l'on donne le nom d'écrouissage. On remarque qu'avec cette terminologie, l'effet Bauschinger n'est plus qu'un aspect particulier du phénomène d'écrouissage.

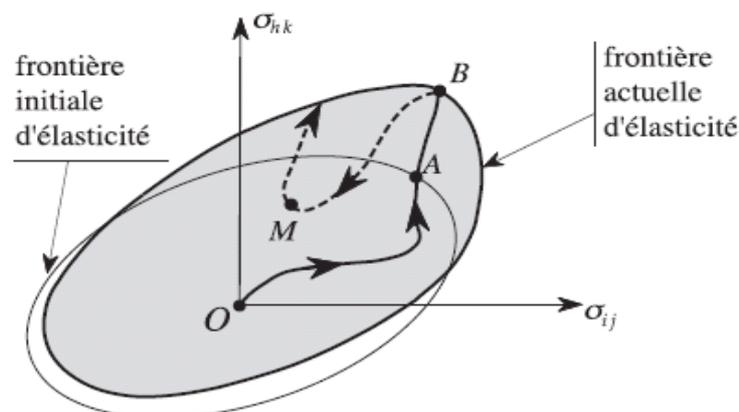


Figure II. 7. Domaines d'élasticité initial et actuel dans \mathbb{R}^6 pour le matériau écrouissable

A noter évidemment que :

- le domaine d'élasticité actuel dépend non seulement de la position actuelle du point de charge, mais du trajet suivi pour l'atteindre à partir de l'état initial naturel de l'élément : on dira qu'il dépend de l'état d'écrouissage du matériau ;
- en particulier, le point de charge n'est pas nécessairement sur la frontière du domaine d'élasticité actuel (ex: le point M de la figure II.7, atteint par le trajet de charge OABM).

Un arc de trajet de charge est dit croissant du point de vue du comportement plastique du matériau si le point de charge σ est à chaque instant à la frontière du domaine d'élasticité actuel, et s'il est orienté vers l'extérieur (au sens strict) de ce domaine. Sur un tel arc de trajet de charge il y a à la fois évolution de la déformation plastique et de l'état d'écrouissage du matériau.

Un arc de trajet de charge situé sur la frontière du domaine d'élasticité actuel est dit neutre : il n'engendre aucune évolution de l'état d'écrouissage ni de la déformation plastique.

II. 3. 3. MATERIAU PARFAITEMENT PLASTIQUE

Pour le matériau parfaitement plastique, le domaine d'élasticité n'est pas modifié par l'apparition des déformations plastiques. On a affaire à un domaine fixe : le point de charge σ ne peut sortir de ce domaine ; les déformations plastiques ne se produisent que si σ est sur la frontière d'élasticité et y demeure (figure II.8).

Le domaine d'élasticité étant supposé fixe, il n'y a en particulier pas d'effet Bauschinger pour le matériau parfaitement plastique, ce qui rejoint bien la modélisation présentée à la figure II.5b.

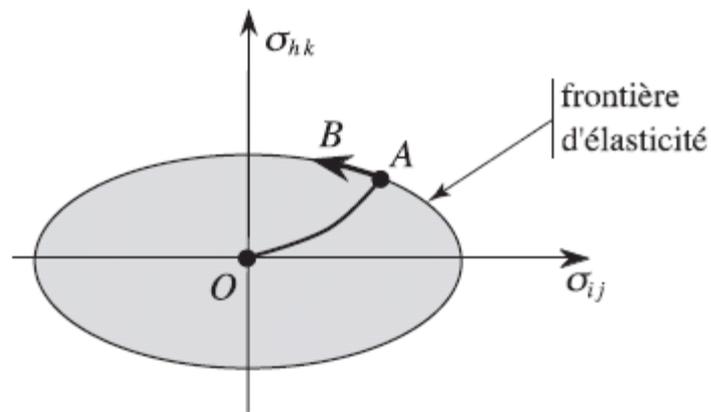


Figure II. 8. Domaine d'élasticité dans \mathbb{R}^6 pour le matériau parfaitement plastique

II. 4. FONCTION DE CHARGE ET CRITERE DE PLASTICITE

II. 4. 1. FONCTION DE CHARGE DANS L'ETAT INITIAL

Il est d'usage, pour définir mathématiquement le domaine d'élasticité initial C , d'introduire une fonction scalaire f de σ , telle que, dans l'espace \mathbb{R}^6 des contraintes :

$$\begin{cases} f(\sigma) < 0 \text{ corresponde à l'intérieur du domaine,} \\ f(\sigma) = 0 \text{ à sa frontière,} \\ f(\sigma) > 0 \text{ à l'extérieur.} \end{cases} \quad \text{II. 1}$$

La fonction f est appelée fonction de charge du matériau dans l'état initial. On désigne aussi couramment par critère de limite d'élasticité, ou critère de plasticité la condition $f = 0$.

Toute fois, dans la pratique, la fonction f elle-même est souvent appelée « critère de plasticité » sans risque de confusion.

II. 4. 2. MODELES D'ECROUISSAGE

- écouissage « isotrope » (Taylor et Quinney)

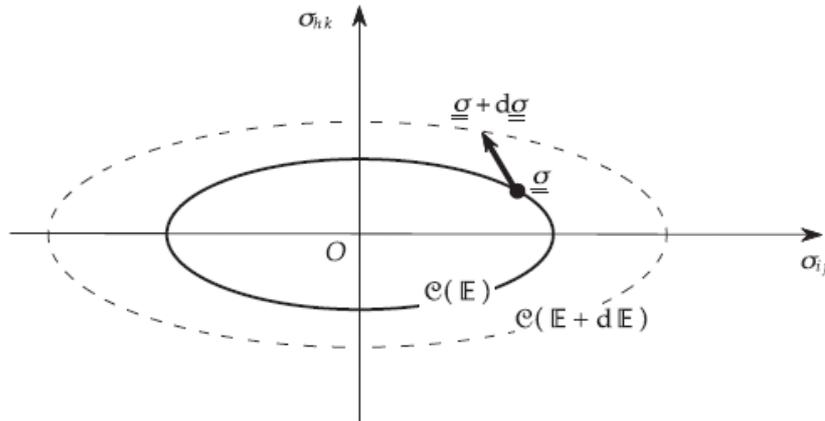


Figure II. 9. Ecouissage « isotrope »

Dans le modèle d'écrouissage dit « isotrope » de Taylor et Quinney (1931), l'état d'écrouissage E est décrit par un seul paramètre scalaire α . Le domaine d'élasticité actuel $C(E)$ suit le point de charge σ sur les arcs de trajet de charge croissants en se transformant par homothétie de centre O (figure II.9). La fonction de charge (Eq II.2) peut se mettre par exemple sous la forme (II.3) où $\alpha = 1$ dans l'état initial :

$$\begin{cases} f(\sigma, E) < 0 \text{ corresponde à l'intérieur de } C(E), \\ f(\sigma, E) = 0 \text{ à la frontière de } C(E), \\ f(\sigma, E) > 0 \text{ à l'extérieur de } C(E). \end{cases} \quad \text{II. 2}$$

$$f(\sigma, E) = f\left(\frac{\sigma}{\alpha}\right), \alpha > 0 \quad \text{II.3}$$

II. 5. FONCTIONS DE CHARGE ET CRITERES DE PLASTICITE USUELS

II. 5. 1. CONVEXITE

L'expérience a montré que pour la quasi-totalité des matériaux les domaines d'élasticités initiaux et actuels sont convexes. Pour les métaux cette propriété de

convexité peut d'ailleurs se démontrer à partir de la connaissance des mécanismes microscopiques qui, à l'échelle de la maille cristalline, correspondent à la déformation plastique (Hill, 1956 ; Mandel, 1966).

Cette propriété sera admise dans toute la suite de cette présentation du comportement élasto-plastique.

La convexité de $C(E)$ implique que la fonction de charge $f(\sigma, E)$ qui intervient dans (Eq II.2) est nécessairement convexe de σ sur la frontière de $C(E)$. La règle habituelle est de choisir pour cette fonction une expression convexe de σ pour toute valeur de σ :

$$\begin{cases} \forall \sigma, \forall \sigma^*, \forall \lambda \in [0, 1] \\ f(\lambda\sigma + (1 - \lambda)\sigma^*, E) \leq \lambda f(\sigma, E) + (1 - \lambda)f(\sigma^*, E) \end{cases} \quad \text{II. 4}$$

II. 5. 2. SYMETRIES MATERIELLES

Les domaines d'élasticité, et donc aussi les critères de limite d'élasticité qui les décrivent, satisfont au principe de respect des symétries de la matière. Ainsi, dans le repère R , deux sollicitations σ et σ^* , liées l'une à l'autre par une isométrie du groupe G des symétries de la matière dans son état actuel, sont équivalentes pour la fonction de charge f_R :

$$\forall \sigma, \forall \sigma^* \in \mathcal{E}, f_R(\sigma) = f_R(\alpha^*, \alpha) \quad \text{II. 5}$$

II. 5. 3. CAS DU MATERIAU ISOTROPE

En particulier pour le matériau isotrope dans son état initial et dont on suppose l'isotropie conservée par la déformation élastique, le critère de limite d'élasticité initiale doit satisfaire la condition (II.5) sous la forme :

$$\forall \sigma, \forall \alpha^* \in \mathcal{E}, f_R(\sigma) = f_R(\alpha^*, \sigma, \alpha) \quad \text{II. 6}$$

qui traduit bien la perception physique du concept d'isotropie : le matériau étant isotrope, la valeur de la fonction de charge ne dépend pas de « l'orientation » du tenseur σ dans R .

La fonction f est alors, à proprement parler, une fonction (isotrope) du (seul) tenseur symétrique σ . Le théorème de représentation (Wineman et Pipkin, 1964) énonce que f s'exprime de façon équivalente comme :

- soit une fonction symétrique des contraintes principales,
- soit une fonction des invariants I_1, I_2, I_3 de σ

$$\begin{cases} I_1 = \text{tr} \sigma = \sigma_{ii} \\ I_2 = \frac{1}{2} \text{tr} \sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ji} \\ I_3 = \frac{1}{3} \text{tr} \sigma^3 = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} \end{cases} \quad \text{II. 7}$$

- soit une fonction de l'invariant I_1 , de σ et des invariants J_2 et J_3 de son déviateur s . Il faut noter que l'expression de f en fonction des invariants de σ ou de s n'est pas nécessairement polynomiale, et ceci même pour des critères très simples (critère de Tresca).

Si l'isotropie est conservée au cours de l'érouissage, le critère actuel est lui aussi une fonction symétrique des contraintes principales.

Il résulte de la propriété énoncée ci-dessus pour f (expression symétrique en fonction des seules contraintes principales) que le domaine d'élasticité pour le matériau isotrope peut être représenté dans l'espace \mathbb{R}^3 des contraintes principales et qu'il admet, dans cet espace, l'axe (1, 1, 1) comme axe de symétrie ternaire et les trois plans bissecteurs des axes comme plans de symétrie. On peut alors montrer que l'étude de la convexité du domaine d'élasticité dans l'espace \mathbb{R}^6 des tenseurs σ , est équivalente pour les matériaux isotropes à celle de la convexité du domaine représentatif dans l'espace \mathbb{R}^3 des contraintes principales.

On présente dans la suite quelques critères couramment utilisés pour les matériaux isotropes.

II. 5. 4. CRITERE DE TRESCA

Ce critère fut introduit par H. Tresca (1864, 1867, 1868) à la suite d'expériences sur le plomb. La fonction de charge correspondante s'écrit :

$$f(\sigma) = \sup \{ \sigma_i - \sigma_j - \sigma_0 \mid i, j = 1, 2, 3 \} \quad \text{II. 8}$$

(σ_i , $i = 1, 2, 3$: contraintes principales).

σ_0 apparaît comme la limite d'élasticité en traction simple ; elle est égale à l'opposé de la limite en compression simple ; la résistance en cisssion simple vaut $\sigma_0/2$.

Ce critère est aussi appelé critère de « cission maximale », terminologie dont l'origine est évidente si l'on se reporte par exemple à la représentation des contraintes dans le diagramme de Mohr; sur toute facette l'intensité de la contrainte de cisaillement est bornée par :

$$|\tau| \leq \sigma_0/2 \quad \text{II. 9}$$

Dans l'espace \mathbb{R}^3 des contraintes principales, le domaine d'élasticité du matériau est un prisme hexagonal régulier d'axe (1, 1, 1) (figure II.10).

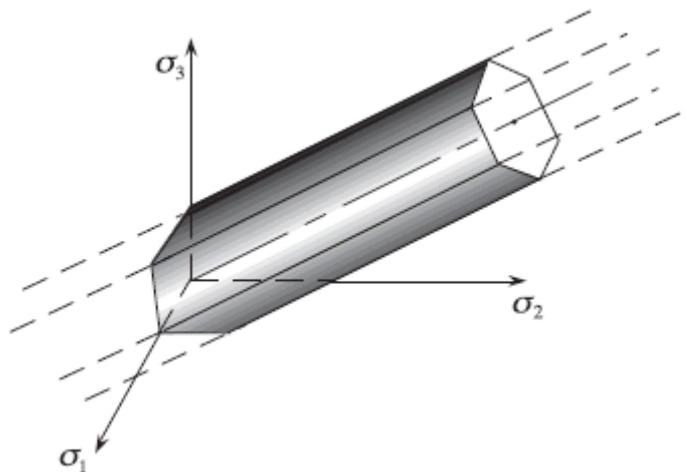


Figure II. 10. Critère de Tresca : domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes Principales

L'expression (II.8) où σ_0 est une constante correspond au cas du matériau parfaitement plastique. Pour le matériau écrouissable, on peut notamment examiner le cas du modèle d'écrouissage isotrope (II.3) pour lequel la fonction de charge s'explique alors sous la forme :

$$f(\sigma, E) = \sup \left\{ \frac{\sigma_i - \sigma_j}{\alpha} - \sigma_0 \mid i, j = 1, 2, 3 \right\} \quad \text{II. 10}$$

L'écrouissage cinématique (II.10) s'exprime ici par :

$$f(\sigma, E) = f(\sigma - \alpha) \quad \text{II. 11}$$

$$f(\sigma, E) = \sup \left\{ (\sigma - \alpha)_i - (\sigma - \alpha)_j - \sigma_0 \mid i, j = 1, 2, 3 \right\} \quad \text{II. 12}$$

Dans laquelle le tenseur symétrique α est de trace nulle. Cet écrouissage ne conserve pas l'isotropie initiale du matériau.

On peut enfin adopter un modèle mixte « isotrope-cinématique » dépendant des paramètres d'écrouissage scalaire α et tensoriel symétrique de trace nulle α , sous la forme :

$$f(\sigma, E) = \sup \left\{ \frac{(\sigma - \alpha)_i - (\sigma - \alpha)_j}{\alpha} - \sigma_0 \mid i, j = 1, 2, 3 \right\} \quad \text{II. 13}$$

II. 5. 5. CRITERE DE VON MISES

Comme le critère de Tresca, il s'agit d'un critère valable pour les matériaux isotropes.

Il est également indépendant de la composante sphérique du tenseur des contraintes. La fonction de charge ne dépend donc que de \mathbf{s} .

De façon générale pour un matériau isotrope, f qui est fonction des invariants de σ s'exprime de manière équivalente comme une fonction de $I_1 = \text{tr} \sigma$, premier invariant de σ , et des invariants non nuls de \mathbf{s} définis par :

$$\begin{cases} J_2 = \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{s}^2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ji} \\ J_3 = \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{s}^3 = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki} \end{cases} \quad \text{II. 14}$$

Si f est indépendante de la partie sphérique de σ et ne dépend donc que de s , elle s'exprime en fonction des seuls invariants J_2 et J_3 .

Le critère de Von Mises correspond pour un critère de ce type à la forme la plus simple.

La fonction de charge s'écrit :

$$f(\sigma) = \sqrt{J_2} - k \quad \text{II. 15}$$

k apparaît comme la limite d'élasticité en cisssion simple. La limite en traction simple est alors égale à $k\sqrt{3}$ la limite en compression simple est $-k\sqrt{3}$.

On définit à partir de cette fonction de charge le concept de contrainte équivalente (de Von Mises) à un état de contrainte donné : notée σ_{eq} , c'est la contrainte de traction qui donne la même valeur à la fonction de charge que l'état de contrainte considéré :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{3J_2} \quad \text{II. 16}$$

Le critère de Von Mises est parfois appelé « critère de la cisssion octaédrale ». Il a été proposé indépendamment par Beltrami (1903), Huber (1904), Von Mises (1913) et Hencky (1924). On en donne aussi une interprétation énergétique : limitation de l'énergie de distorsion élastique du matériau isotrope.

Dans l'espace \mathbb{R}^3 des contraintes principales $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, le domaine d'élasticité du matériau est un cylindre circulaire droit, d'axe $(1, 1, 1)$, et de rayon k (figure II.11).

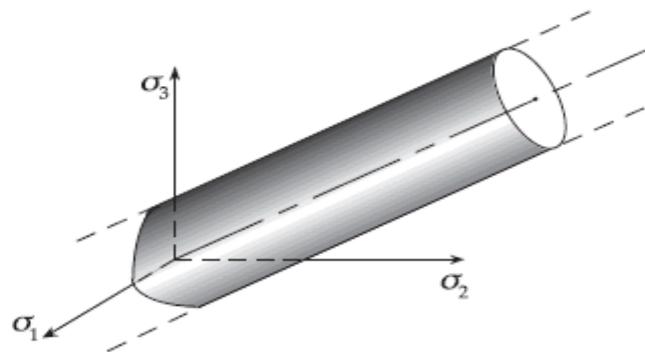


Figure II. 11. Critère de Von Mises : domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes Principales

Pour un matériau parfaitement plastique k est une constante.

L'érouissage isotrope correspond à l'expression :

$$f(\sigma, E) = \frac{\sqrt{I_2}}{\alpha} - k \quad \text{II. 17}$$

et l'érouissage cinématique à :

$$f(\sigma, E) = \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{s} - \alpha)^2} - k \quad \text{II. 18}$$

où α est un tenseur symétrique de trace nulle. L'isotropie initiale du matériau n'est évidemment pas conservée par (II.18).

Le modèle mixte « isotrope-cinématique », dépendant des paramètres α et α comme (II. 12), s'exprime par :

$$f(\sigma, E) = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{s} - \alpha)^2}}{\alpha} - k \quad \text{II. 19}$$

Il est utile, pour les applications pratiques, de donner l'expression de la fonction de charge (II.14) de Von Mises, en fonction des contraintes principales :

$$f(\sigma) = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} - k \quad \text{II. 20}$$

qui permet, souvent, d'éviter des calculs fastidieux.

Chapitre III

ANALYSE LIMITE

III. INTRODUCTION

Les contraintes que peuvent supporter les matériaux solides sont, en général, limitées. Deux comportements physiques particuliers illustrant cet état de fait, la rupture fragile et la plasticité, ont été examinés dans les chapitres précédents, mais il en existe bien d'autres qui conduisent au même constat : les matériaux ont une résistance limitée.

La question posée dans ce chapitre est celle de la tenue d'une structure constituée d'un matériau possédant une résistance limitée et soumise à un chargement dépendant d'un ou plusieurs paramètres Q et ceci sans autre information sur le comportement du matériau constituant la structure que sa résistance. La théorie des charges limites aborde le problème selon deux angles :

- Sous l'angle des champs de contrainte statiquement et physiquement admissibles (approche statique) ; il est en effet exclu qu'une structure puisse soutenir un chargement qu'aucun champ de contrainte physiquement admissible ne pourrait équilibrer.

- Sous l'angle de la puissance des efforts mis en jeu dans un mécanisme de ruine de la structure (approche cinématique).

Les hypothèses de travail faites au long de ce chapitre sont les suivantes :

- Les déformations sont suffisamment petites pour que l'hypothèse des petites perturbations soit légitime.
- Les transformations sont suffisamment lentes pour pouvoir se placer dans l'approximation d'une évolution quasi-statique et isotherme (les effets d'inertie et les variations de température sont négligés).

III. 1. HISTORIQUE

La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard de Vinci l'aurait précédé. De Vinci avait supposé que la déformation variait de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, le coefficient de proportionnalité étant la courbure, mais il ne put finaliser ses calculs car il n'avait pas

imaginé la loi de Hooke. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte.

Ce sont Leonhard Euler et Jacques Bernoulli qui émirent la première théorie utile vers 1750, tandis que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent, écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire. À cette époque, le génie mécanique n'était pas considéré comme une science, et l'on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques puissent avoir des applications pratiques, et l'on continua à bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique. Ce n'est qu'au XIX^e siècle, avec la Tour Eiffel et les grandes roues, que l'on démontra la validité de la théorie à grande échelle [3].

III. 2. PRINCIPES DE MODELISATION

III. 2. 1. DEMARCHE

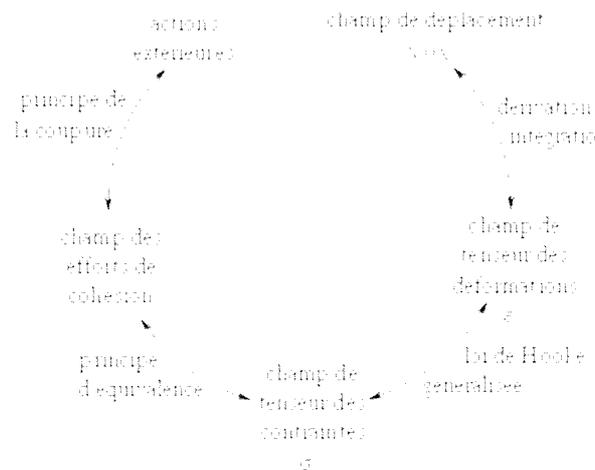


Figure III. 1. Démarche pour l'étude des poutres

Pour étudier les poutres, on met en relation

- les efforts de cohésion avec les efforts extérieurs ;
- les efforts de cohésion avec le tenseur des contraintes, grâce au principe d'équivalence ;
- le tenseur des contraintes avec le tenseur des déformations, grâce à la loi de Hooke généralisée ;
- et la forme finale de la poutre, c'est-à-dire le champ des déplacements, avec le champ de tenseur des déformations [4].

III. 2. 2. CONTRAINTES

Les efforts de cohésion sont des grandeurs macroscopiques, définies sur l'ensemble de la section. Du fait de la linéarité du problème (on reste en petites déformations), on peut considérer indépendamment chaque composante, c'est-à-dire considérer que la poutre n'est soumise à chaque fois qu'à une seule sollicitation simple.

Le principe d'équivalence établit une relation entre chaque effort de cohésion et les contraintes générées localement en chaque point de la section. Pour les sollicitations complexes, on somme les contraintes de toutes les sollicitations simples (principe de superposition).

Selon le principe de Saint-Venant, les efforts sont correctement représentés lorsqu'on s'éloigne du point d'application. Ainsi, si localement cette modélisation ne donne pas de bons résultats, on peut les considérer comme *presque corrects* dès que la distance au point d'application dépasse plusieurs fois le diamètre de la section. Ce principe n'est valable que pour des poutres massives, pour la plupart des autres cas il est faux. Il faut en ce sens entendre « poutre massive » lorsqu'ici est évoquée la notion de poutre [5].

Par la suite, la grandeur S désigne l'aire de la section droite.

III. 2. 3. TRACTION SIMPLE

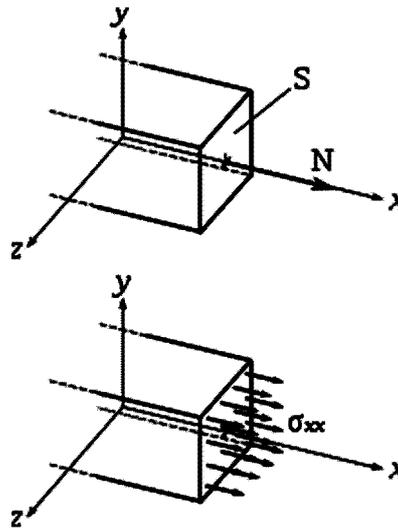


Figure III. 2. Effort normal et contrainte

L'effort normal N correspond à de la traction simple, on a donc la contrainte uniforme

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{S} \quad \text{III. 1}$$

III. 2. 4. CISAILLEMENT

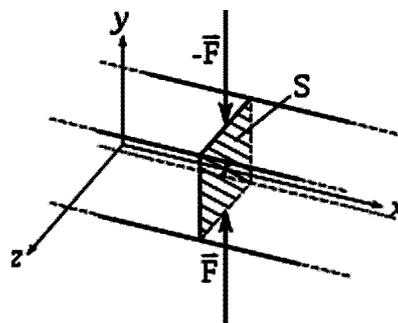


Figure III. 3. Cisaillement simple : les forces sont coaxiales

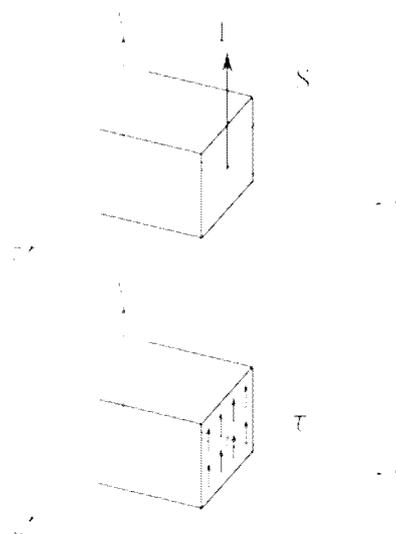


Figure III. 4. Effort tranchant et cession dans le cas du cisaillement simple

Les efforts tranchants T_y et T_z causent le cisaillement, mais il faut distinguer deux cas : celui du cisaillement simple et celui de la flexion simple. Dans les deux cas, les efforts extérieurs sont appliqués parallèlement à la section droite, c'est-à-dire perpendiculairement à la courbe moyenne.

Dans le cas du cisaillement simple, les efforts sont appliqués à la même abscisse x . Hormis au droit des points d'application des efforts, les contraintes sont uniformes (principe de Barré de Saint-Venant) :

$$\bullet \quad \tau_{xy} = \sigma_{xy} = \frac{T_y}{S} \quad \text{III. 2}$$

et

$$\bullet \quad \tau_{zx} = \sigma_{zx} = \frac{T_z}{S} \quad \text{III. 3}$$

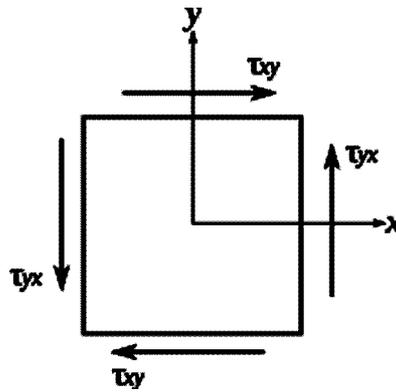


Figure III. 5. Présence de cisaillement selon y associé au cisaillement selon x , nécessaire pour éviter la rotation d'un élément de matière

Si l'on isole un petit élément cubique de matière, on voit que la cession qu'il subit sur les sections droites devraient le faire tourner. Il subit donc également une cession sur les faces perpendiculaires à l'axe (G_y). Il y a donc également cisaillement entre les fibres adjacentes. On peut voir cela en faisant fléchir un paquet de cartes : les cartes glissent les unes sur les autres ; la poutre peut se voir comme un paquet dont les cartes seraient collées, la force de l'adhérence empêchant les cartes de glisser [4].

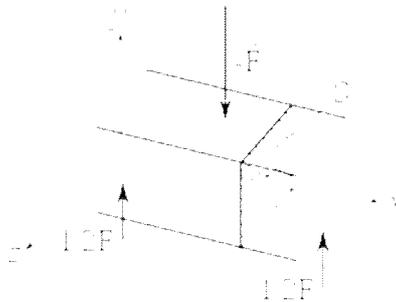


Figure III. 6. Flexion simple : les forces sont décalées

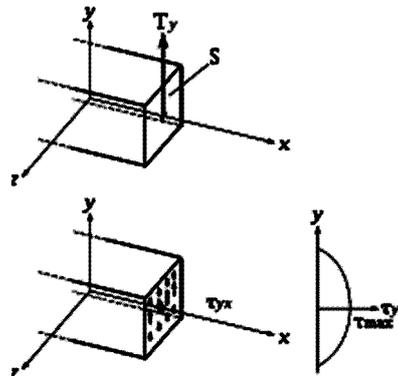


Figure III. 7. Effort tranchant et cession dans le cas de la flexion simple

Dans le cas de la flexion simple, les efforts sont appliqués à des abscisses différentes. Cette contrainte ne génère que peu de risque de rupture et est donc généralement négligée (modèle de Bernoulli). Dans ce cas-là, la répartition des contraintes n'est plus uniforme : la contrainte sur une surface libre est nécessairement dans le plan de la surface, donc la cession sur les faces extérieure est nulle. On a donc une cession qui croît lorsque l'on s'approche de la fibre neutre. La contrainte maximale vaut alors:

- poutre de section rectangulaire pleine : $\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{S}$ **III. 4**

- poutre de section circulaire pleine : $\tau_{max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{S}$ **III. 5**

- tube circulaire mince : $\tau_{max} \simeq 2 \cdot \frac{T}{S}$ **III. 6**

Où S est l'aire de la section droite. On voit que sur ces exemples là, la contrainte est 1,5 à 2 fois supérieure au cas du cisaillement simple.

III. 2. 5. FLEXION PURE

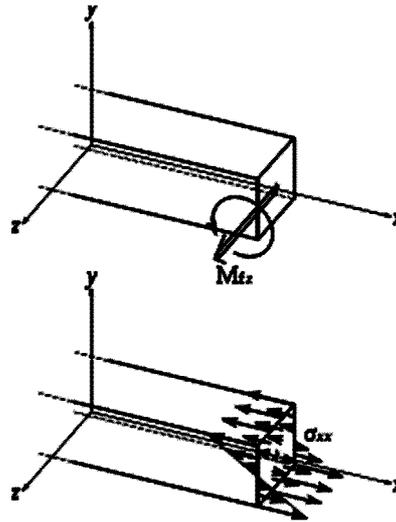


Figure III. 8. Moment fléchissant et répartition de contrainte

Les moments fléchissant M_{fy} et M_{fz} correspondent à de la flexion. Du fait de l'hypothèse de Bernoulli (les sections droites restent perpendiculaires à la courbe moyenne),

- la fibre neutre à un allongement nul ;
- les fibres à l'extérieur de la courbure sont étirées ;
- les fibres à l'intérieur de la courbure sont comprimées.

La contrainte varie de manière linéaire :

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_{fz}}{I_{Gz}} \cdot y \quad \text{III. 7}$$

Où I_{Gz} est le moment quadratique d'axe (Gz), calculé en fonction de la forme de la section droite.

Le risque de rupture se situe sur la face en extension de la poutre. Si l'on appelle V l'ordonnée du point situé sur cette face, la contrainte y vaut :

$$\sigma_{xx \max} = -\frac{M_{fz}}{I_{Gz}} \cdot V = -\frac{M_{fz}}{\frac{I_{Gz}}{V}} \quad \text{III. 8}$$

La grandeur I_{Gz}/V est appelée « module de flexion ».

Si la poutre est symétrique et de hauteur h , on a

$$V = \pm h/2.$$

Note

Comme c'est la valeur absolue de la contrainte qui nous intéresse, on trouve souvent les expressions

$$\sigma_{xx} = \frac{M_{fz}}{I_{Gz}} \cdot y \quad \text{III. 9}$$

et

$$\sigma_{xx \max} = \frac{M_{fz}}{\frac{I_{Gz}}{V}} \quad \text{III. 10}$$

L'objectif de notre travail est l'étude d'une poutre en acier utilisant un code de calcul « ANSYS »

III.3. CARACTÉRISTIQUES DE LA POUTRE

La poutre est en ACIER C1020 de densité $\rho = 7850 \text{ Kg/ m}^3$

MODULE D'ELASTICITE $E = 197 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$

COEFFICIENT DE POISSON $\nu = 0.28$

LA FORCE $F = 925 \text{ N}$

La poutre en section rectangulaire avec :

LA LONGUEUR $L = 350 \text{ mm}$

LA LARGEUR $b = 30 \text{ mm}$

L'HAUTEUR $h = 15 \text{ mm}$

Les conditions aux limites :

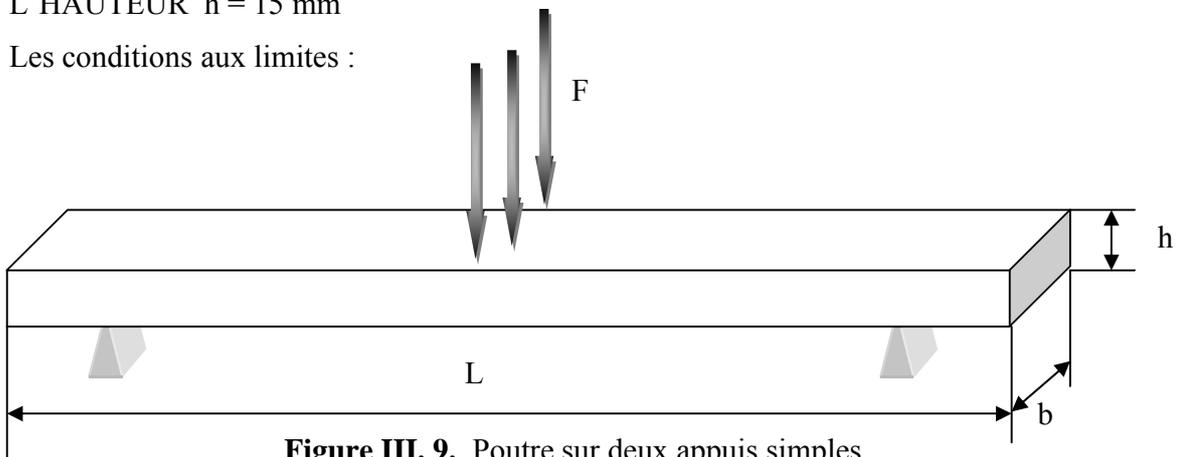


Figure III. 9. Poutre sur deux appuis simples

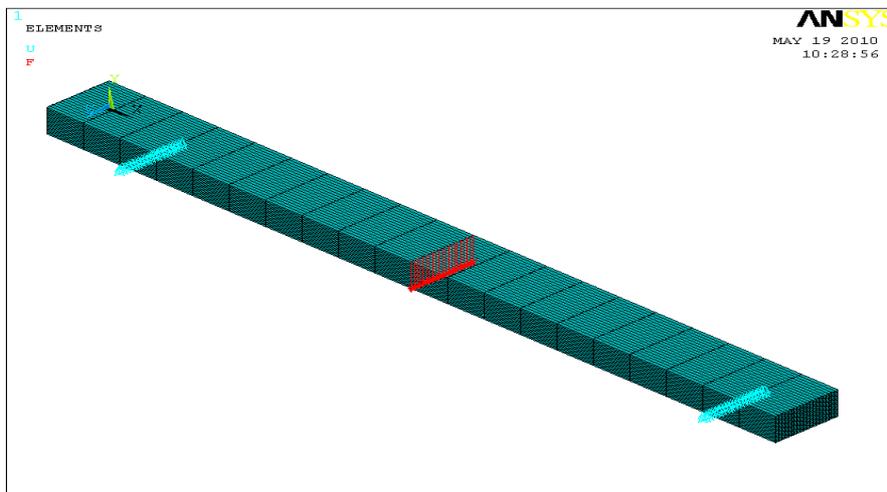


Figure III. 10. La poutre en ANSYS

III. 4. SIMULATION D'UNE POUTRE AVEC ANSYS

III. 4. 1. DEFORMATION DE LA POUTRE SUIVANT LES AXES X, Y ET Z

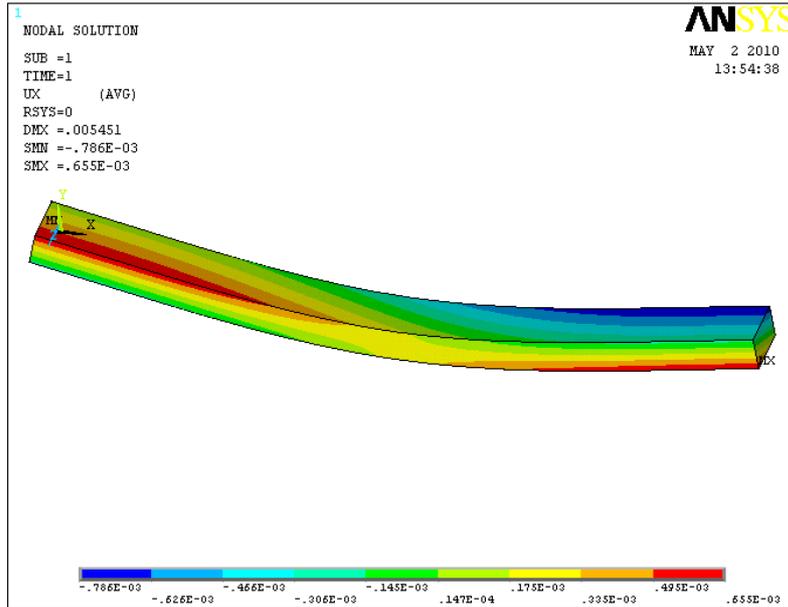


Figure III. 11. Déformation suivant l'axe X

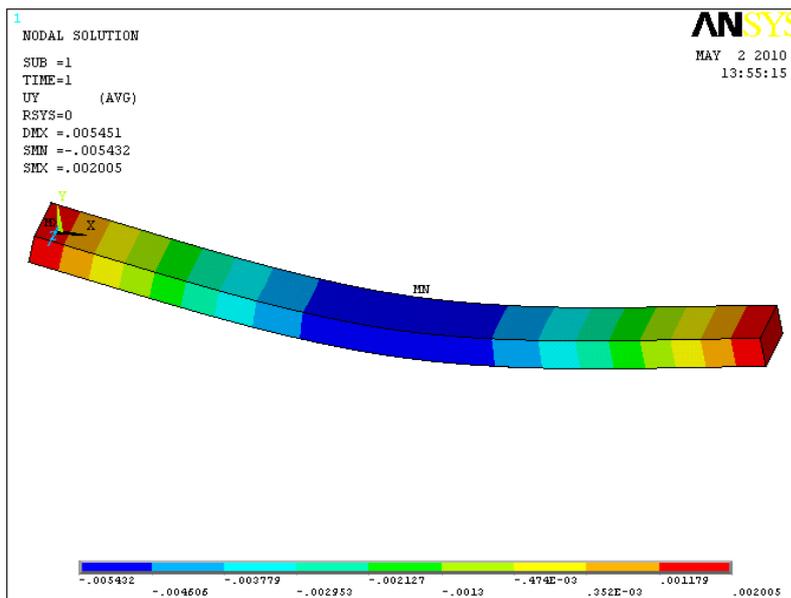


Figure III. 12. Déformation suivant l'axe Y

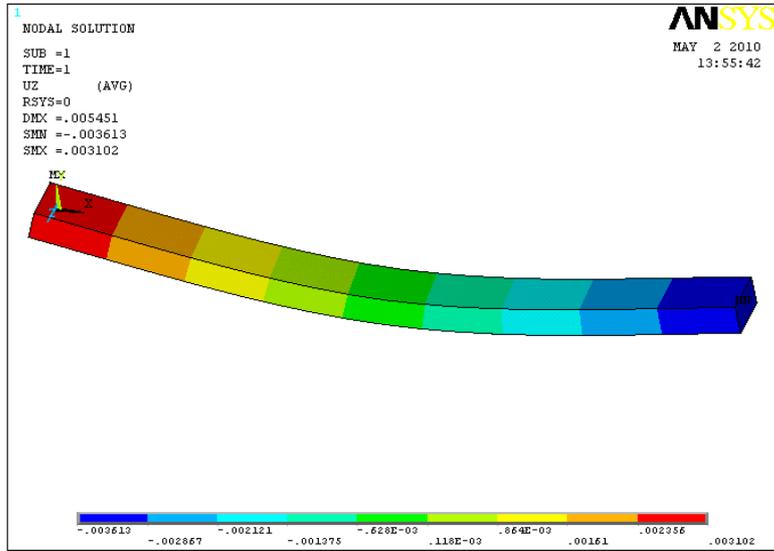


Figure III. 13. Déformation suivant l'axe Z

III. 4. 2. CONTRAINTE SUIVANT LES AXES X, Y, Z :

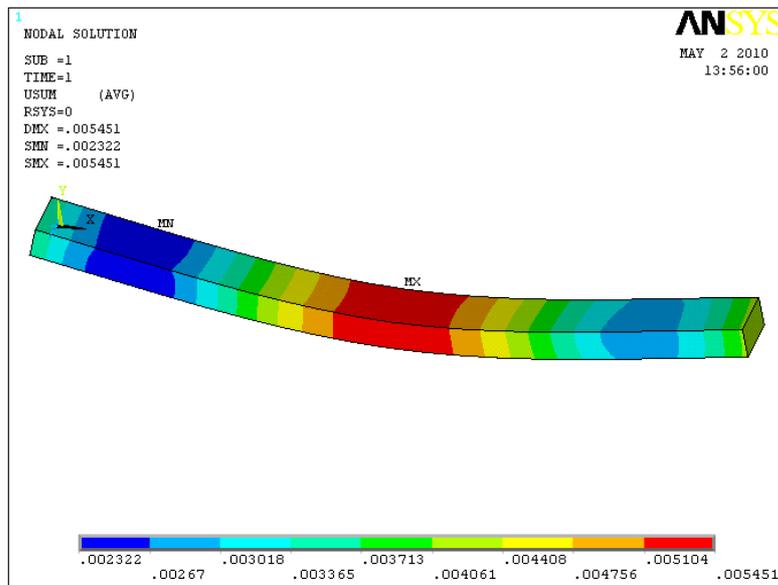


Figure III. 14. Contrainte suivant l'axe X

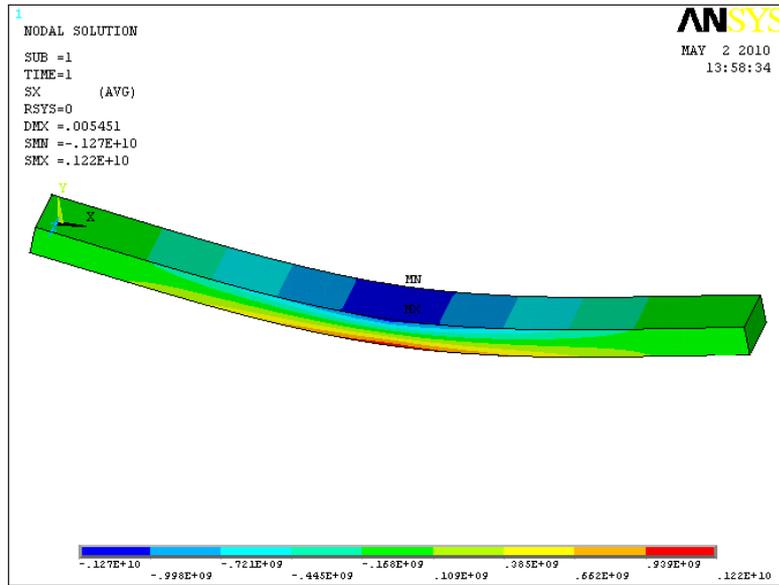


Figure III. 15. Contrainte suivant l'axe Y

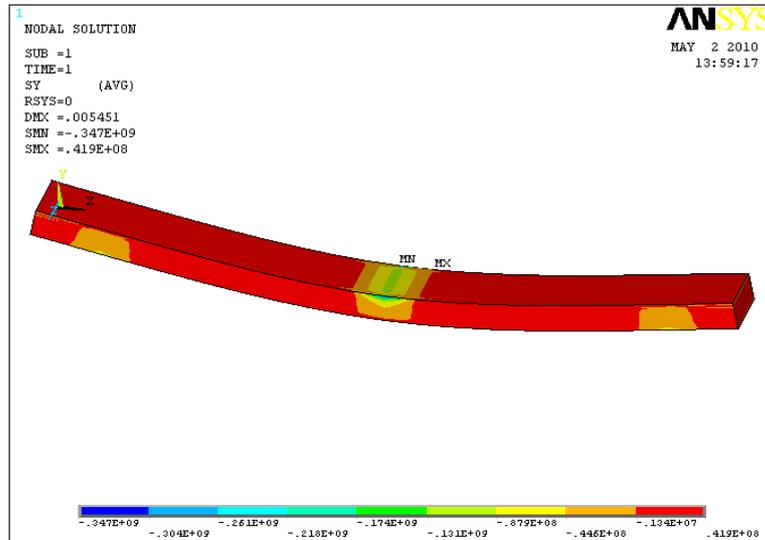


Figure III. 16. Contrainte suivant l'axe Z

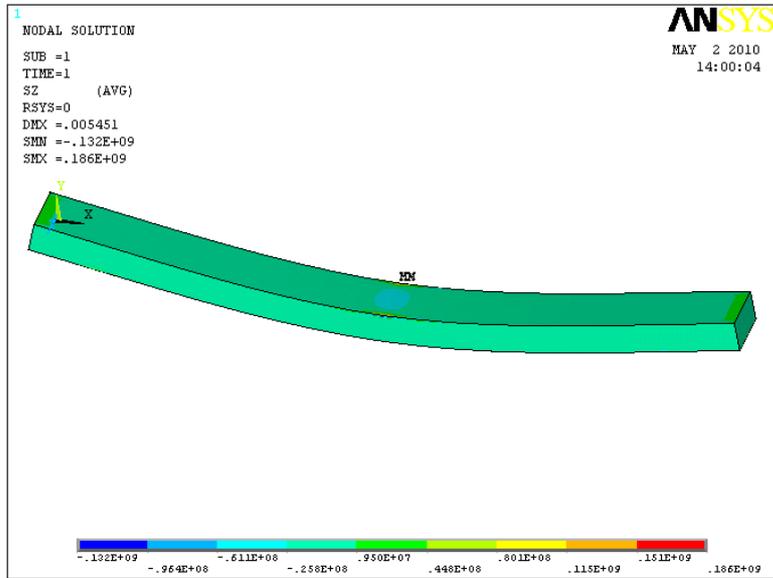


Figure III. 17. Contrainte suivant le plan XY

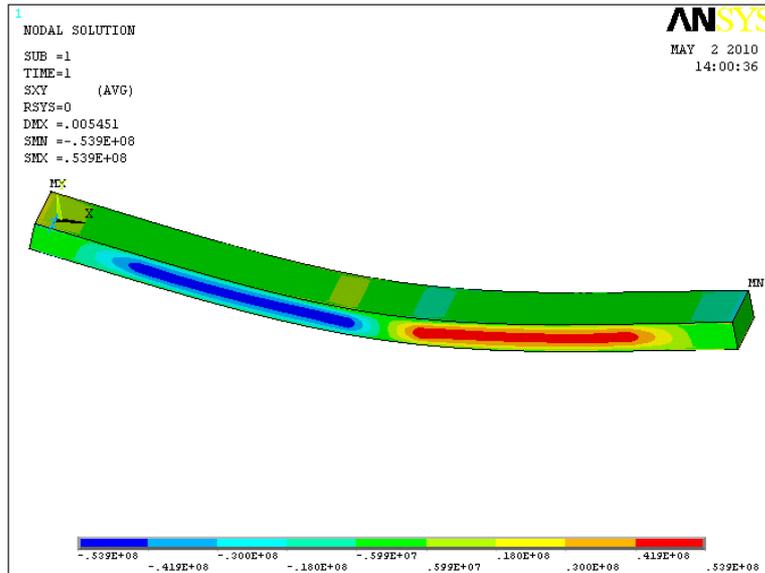


Figure III. 18. Contrainte suivant le plan YZ

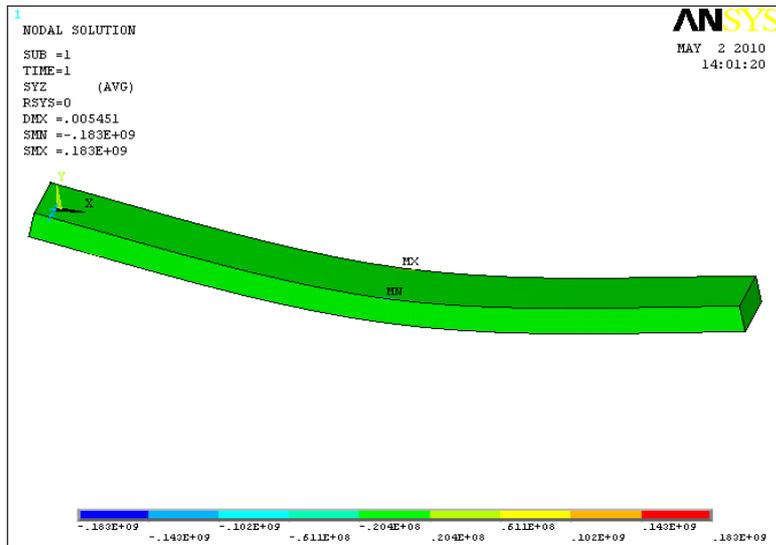


Figure III. 19. Contrainte suivant le plan XZ

III. 5. LES CONTRAINTES PRINCIPALES

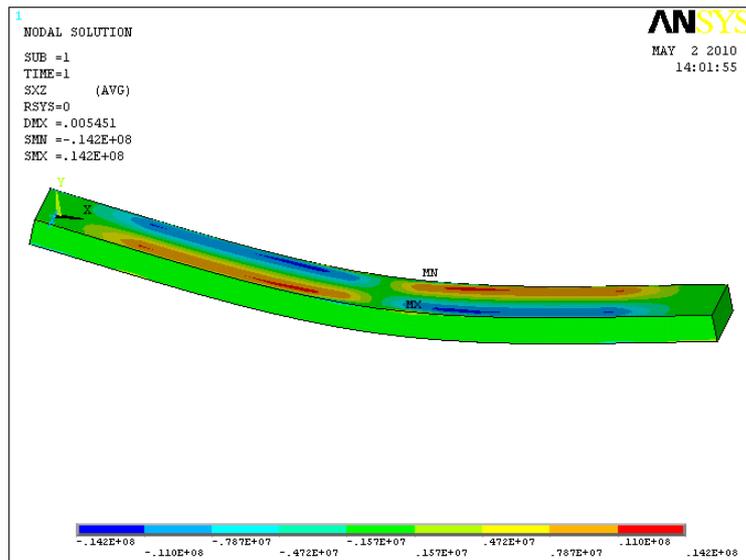


Figure III. 20. La 1^{ère} Contrainte principale

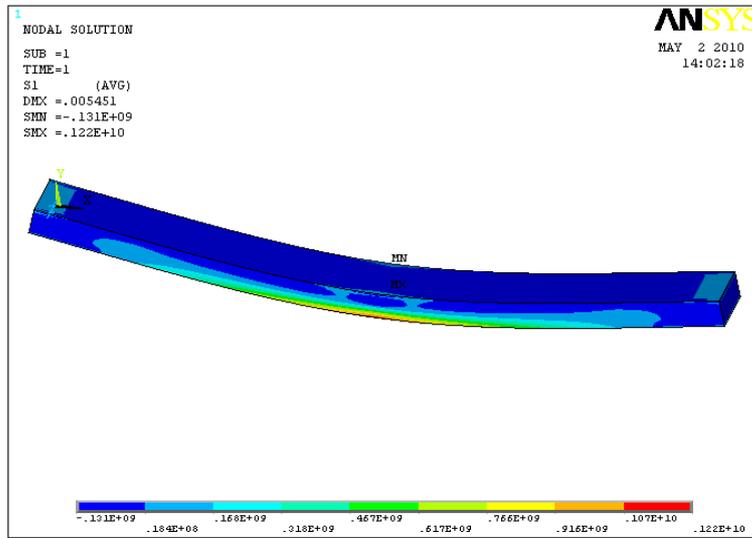


Figure III. 21. La 2^{ème} Contrainte principale

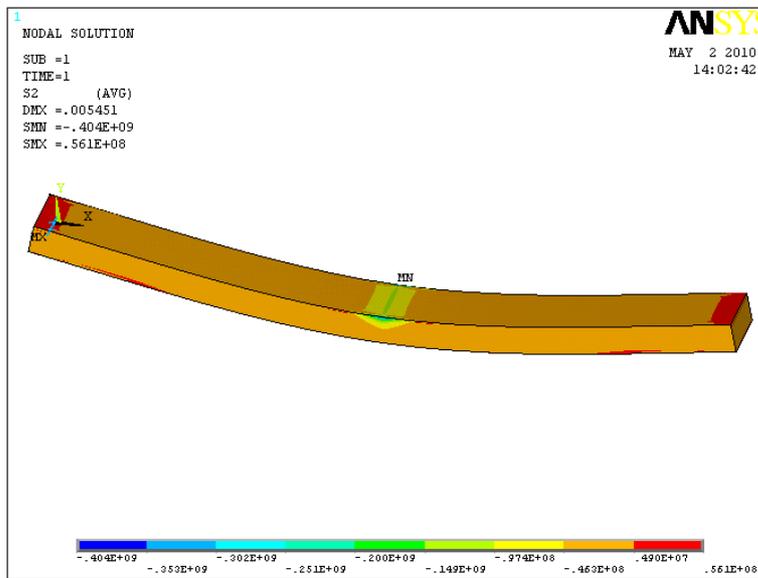


Figure III. 22. La 3^{ème} Contrainte principale

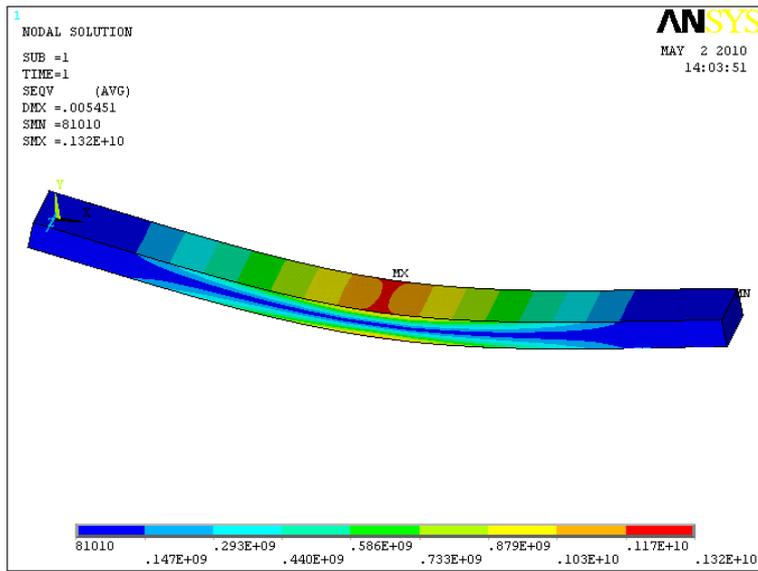


Figure III. 23. Contrainte de Von mises

III. 6. LES DEFORMATIONS ELASTIQUES

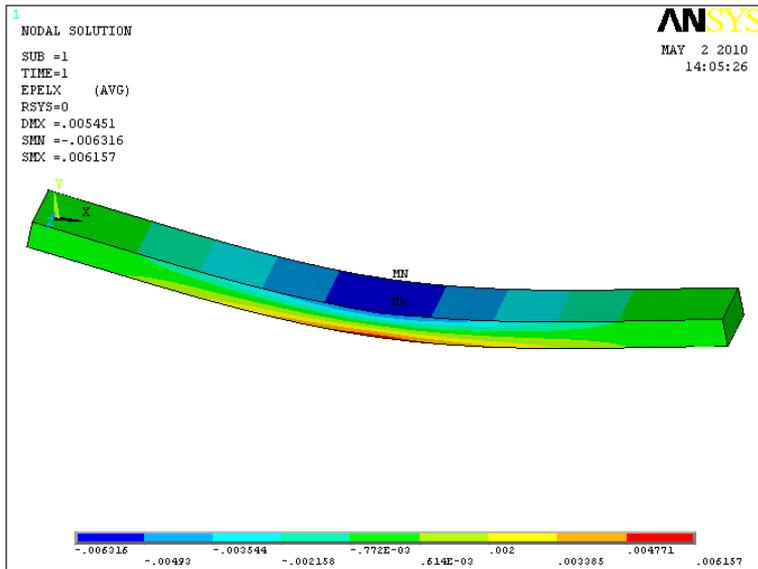


Figure III. 24. Déformation élastique suivant l'axe X

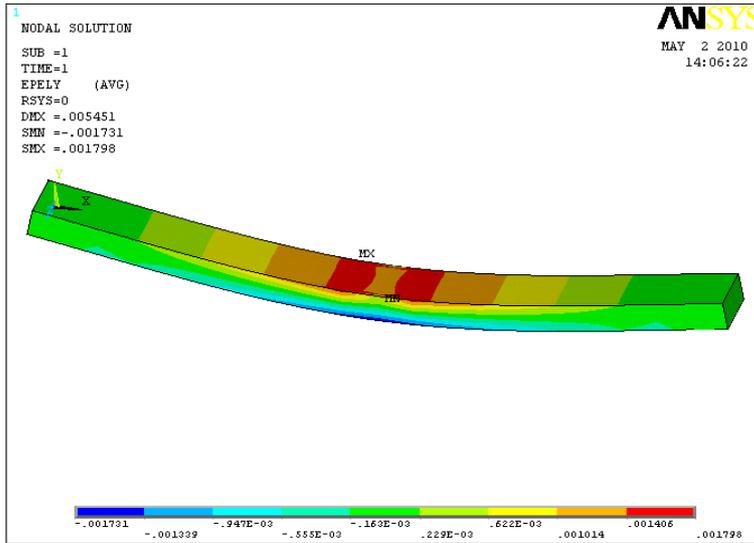


Figure III. 25. Déformation élastique suivant l'axe Y

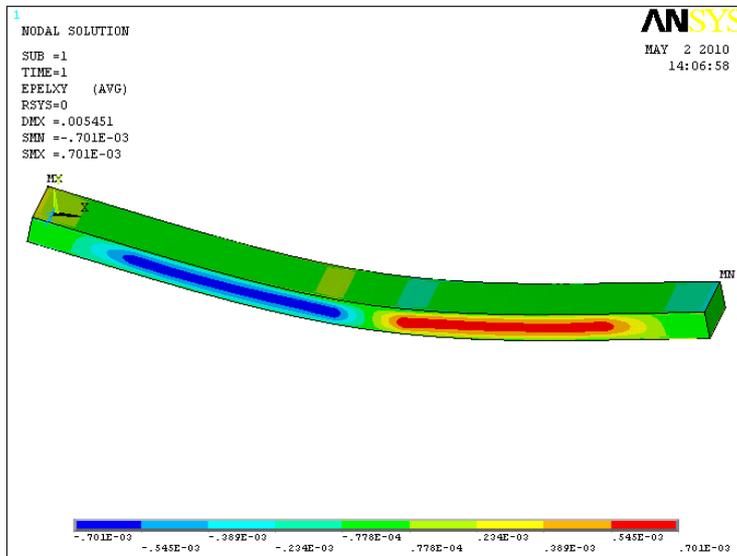


Figure III. 26. Déformation élastique suivant le plan XY

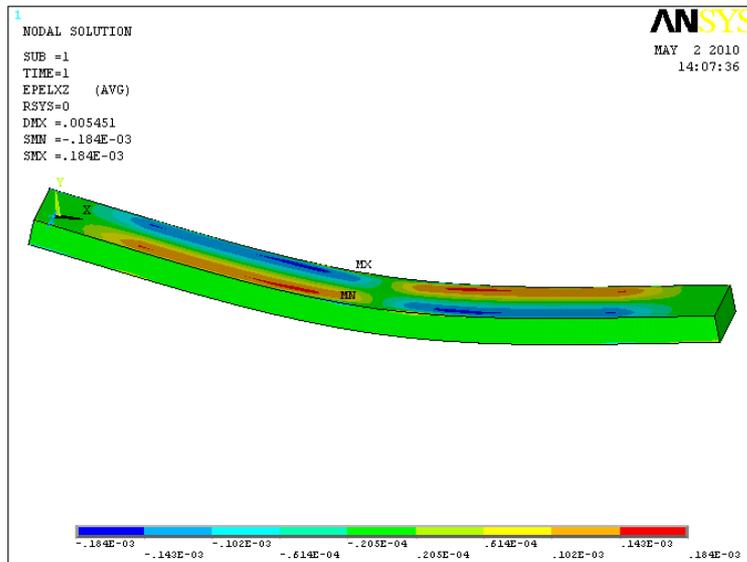


Figure III. 27. Déformation élastique suivant le plan XZ

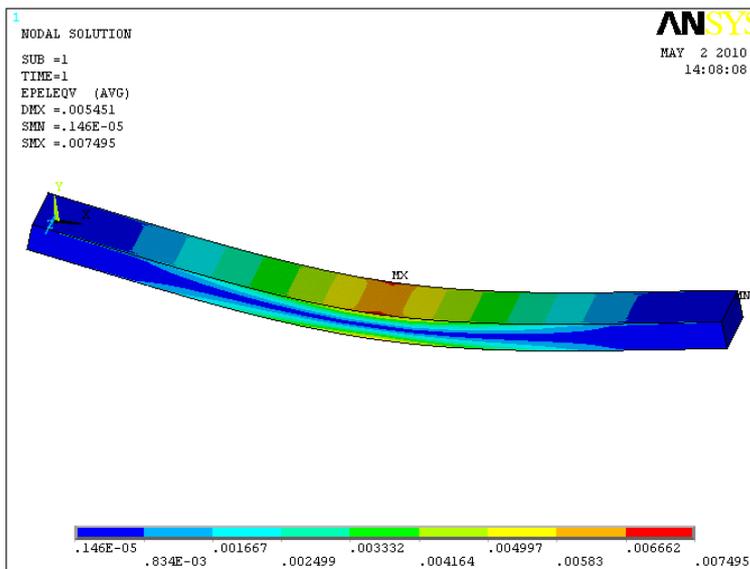


Figure III. 28. Déformation élastique de Von mises

Chapitre IV

CALCUL A LA RUPTURE

IV. INTRODUCTION

La rupture est un problème au quel l'homme aura à faire face aussi long temps qu'il construira a des édifices ou fabriquera des structures. Ce problème est actuellement plus crucial avec le développement de structures complexes lié au progrès technologique. Les avancées dans la connaissance de la mécanique de la rupture permettent aujourd'hui et plus précisément depuis le milieu du 20^{ème} siècle, de mieux prévenir le risque de rupture.

IV. 1. APERÇU HISTORIQUE SUR LA RUPTURE

Eviter la rupture n'est pas en soi une idée nouvelle. Les concepteurs des structures de l'Egypte des pharaons (pyramides) ou ceux de l'empire romain nous ont laissé des édifices que l'on peut encore contempler ce qui prouve bien qu'ils avaient le souci d'éviter la ruine des structures. Les matériaux utilisés avant la révolution industrielle étaient cependant limités pour l'essentiel au bois de construction, à la pierre ou à la brique et au mortier. La brique et le mortier sont relativement fragiles lors qu'on les utilise en traction ; les structures anciennes qui ont résisté au temps, étaient chargées en compression (pyramides, ponts romains...) et de façon générale toutes les structures de l'époque qui précède la révolution industrielle étaient conçues pour des chargements en compression. Il a fallu attendre la révolution industrielle au début du 19^{ème} siècle, avec l'utilisation de l'acier dont les propriétés mécaniques permettaient de concevoir des structures pouvant résister à des charges de traction. La comparaison des anciens ponts romains avec les ponts modernes de structure métallique montre bien que les premiers étaient chargés en compression alors que les seconds le sont plutôt en traction.

L'utilisation de nouveaux matériaux ductiles (acier et autres alliages métalliques) pour des chargements en traction conduisit cependant à quelques problèmes ; des ruptures se produisaient parfois pour des niveaux de charges bien inférieurs à la limite d'élasticité. On a dans un premier temps essayé d'éviter ces risques de ruptures en sur dimensionnant les structures, mais la nécessité d'alléger de plus en plus les structures et de réduire les coûts conduisit au développement des recherches sur la mécanique de la rupture.

Les premiers essais de rupture ont été menés par Léonard de Vinci bien avant la révolution industrielle, qui a montré que la résistance à la traction de fils de fer variait inversement avec leur longueur. Ces résultats suggéraient que les défauts contenus dans le matériau contrôlaient sa résistance ; plus le volume est important (fil de fer long) plus la probabilité de présence de fissure par exemple est importante.

Cette interprétation qualitative fût précisée plus tard en 1920 par Griffith qui établit une relation directe entre la taille du défaut et la contrainte de rupture. S'appuyant sur les travaux d'Inglis, Griffith appliqua l'analyse des contraintes autour d'un trou elliptique à la propagation instable d'une fissure; il formule ainsi à partir du premier principe de la thermodynamique, une théorie de la rupture. Selon cette théorie, un défaut devient instable et conduit à la rupture lorsque la variation d'énergie liée à une propagation du défaut atteint l'énergie spécifique du matériau. Cette théorie prédit correctement la relation entre la contrainte de rupture et la taille du défaut dans les matériaux fragiles. Dans les matériaux ductiles et notamment les alliages métalliques, l'avancée d'un défaut s'accompagne d'une importante dissipation d'énergie due à la plastification qui se développe à l'extrémité d'une fissure et la théorie de Griffith qui ne considère que l'énergie de création de surface ne peut en rendre compte. Il a fallu attendre les travaux d'Irwin en 1948 qui proposa une modification de la théorie de Griffith en incluant justement dans le bilan énergétique, l'énergie due à la plastification, pour que l'approche de Griffith soit applicable aux matériaux ductiles.

La mécanique de la rupture passa du stade de curiosité scientifique à celui d'une discipline scientifique largement utilisée dans l'ingénierie de la construction, après ce qui arriva aux bateaux de la liberté lors de la deuxième guerre mondiale. Le principe de conception de ces bateaux avec une coque entièrement soudée constituait un grand succès jusqu'au jour où un de ces navires se fissa en deux parties entre la Sibérie et l'Alaska dans une mer très froide.

Une dizaine d'autres navires sur les 2700 en service, subira en suite le même sort. Les analyses des causes de rupture montraient que celles-ci étaient dues à la combinaison de trois paramètres :

- Les joints de soudures contenaient des fissures,
- La plupart de ces fissures qui conduisaient à la rupture, se développaient à partir de zones de forte concentration de contrainte,
- L'acier de construction utilisé pour ces bateaux, qui convenait pour les assemblages par rivetage où il n'y avait pas de risque qu'une fissure traverse toute la coque, avait une faible ténacité.

Dès l'instant où la cause des ruptures étaient clairement identifiée, des plaques en acier de meilleure ténacité furent rivetées près des zones de forte concentration des contraintes

Pour arrêter la propagation des fissures. On développa ensuite des aciers de forte ténacité et on améliora le procédé de soudage; c'est dans ces années après guerre qu'un groupe de chercheurs dirigé par Irwin étudia en détail le problème de la rupture au laboratoire national de recherche de la marine américaine.

Irwin considéra que les outils fondamentaux pour étudier la rupture existaient et proposa en 1948, une extension de l'approche de Griffith aux matériaux ductiles en y incluant le terme de dissipation d'énergie due à l'écoulement plastique près des extrémités d'une fissure. Il développa ensuite en 1956 le concept de taux de restitution d'énergie à partir toujours de la théorie de Griffith mais sous une forme facilement exploitable par les concepteurs des structures. En 1957, s'appuyant sur les travaux de Westergaard qui analysa les champs de déplacements et de contraintes élastiques près de l'extrémité d'une fissure sous chargement donné, Irwin montra que les déplacements et les contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fissure peuvent être décrits à l'aide d'un paramètre unique qui était relié au taux de restitution d'énergie ; ce paramètre issu de la mécanique linéaire de la rupture, est le facteur d'intensité des contraintes (FIC).

Les nouveaux concepts de la mécanique de la rupture furent ensuite utilisés pour montrer que la plupart des ruptures dans les fuselages d'avions étaient dues à des fissures de fatigue qui atteignaient une taille critique. Ces fissures prenaient naissance près des hublots dans les coins qui constituent des zones de forte concentration des contraintes. Les ruptures qui se produisaient dans les essieux d'engins roulants ou encore dans les rotors des turbines à vapeur furent aussi expliquées grâce à l'application de ces nouveaux concepts. Le concept de FIC fut également utilisé par Paris pour décrire la propagation des fissures de fatigue et progressivement les courbes de propagation des fissures de fatigue proposées par ces auteurs remplacèrent les courbes d'endurance pour une meilleure prédiction des durées de vie des structures.

La période entre 1960 et 1980 vit une intensification des recherches sur la rupture avec deux écoles qui s'affrontaient. D'une part les tenants de l'approche utilisant la mécanique linéaire de la rupture et ceux qui s'intéressaient essentiellement à la plastification qui se développe à l'extrémité d'une fissure. La mécanique linéaire de la rupture cesse d'être valable lorsqu'une plastification importante précède la rupture. Pour tenir compte de l'effet de cette plastification sur les champs de contraintes et de déplacements à l'extrémité d'une fissure, plusieurs auteurs (Irwin, Dugdale et Barenblatt ...) proposèrent ce qu'on appelle une correction de zone

plastique; la taille de la fissure est alors augmentée de cette zone plastique pour retrouver les champs de contraintes élastiques décrits par le FIC.

Wells, un des représentants de la deuxième école, proposa en 1961 le déplacement à fond de fissure ou CTOD « Crack Tip Opening Displacement » comme paramètre alternatif à la mécanique linéaire de la rupture ou plus précisément au concept de FIC, lorsque la plastification devient importante comme c'est le cas dans les matériaux très ductiles. Plus tard, Hutchinson, Rice et Rosengren (HRR) développèrent un nouveau paramètre appelé intégrale J pour mieux décrire la répartition des contraintes dans les zones plastifiées (champ HRR). Begley et Landes caractérisèrent la ténacité à l'aide du paramètre J et développèrent une procédure standard pour l'utilisation de cette intégrale dans des cas pratiques. Shih et Hutchinson proposèrent également une méthodologie pour utiliser l'intégrale J non seulement pour décrire la ténacité mais aussi pour la relier à la taille du défaut et au champ des contraintes appliquées. Shih établit par la suite la relation existant entre l'intégrale J et le CTOD [6].

IV. 2. UTILISATION DE LA MECANIQUE DE LA RUPTURE EN CONCEPTION :

La figure IV.1a compare l'approche classique pour le dimensionnement des structures basée sur la limite d'élasticité du matériau σ_E à l'approche utilisant le concept de ténacité K_c issu de la mécanique linéaire de la rupture (MLR).

Dans le premier cas, on dimensionne les structures pour que les contraintes appliquées σ restent inférieures à la limite d'élasticité ($\sigma < \sigma_e$). On utilise en général un coefficient de sécurité pour prévenir tout risque de rupture fragile ($\sigma < \alpha \sigma_e$ avec $\alpha < 1$). Cette approche est à deux variables σ et σ_e ; elle fait abstraction de l'existence d'éventuels défauts sous forme de micro fissures par exemple.

L'approche basée sur la mécanique linéaire de la rupture est à trois variables : la contrainte appliquée, la ténacité K_c qui remplace la limite d'élasticité et une variable additionnelle qui est la taille du défaut. Il y a cependant deux approches alternatives de la mécanique de la rupture : l'une utilisant le concept d'intensité des contraintes critique (ténacité du matériau) et l'autre un critère d'énergie. Ces deux approches sont équivalentes dans certaines conditions.

On va les présenter brièvement avant de préciser les hypothèses qui les sous-tendent et de rentrer dans les détails des calculs qu'elles mettent en œuvre [7].

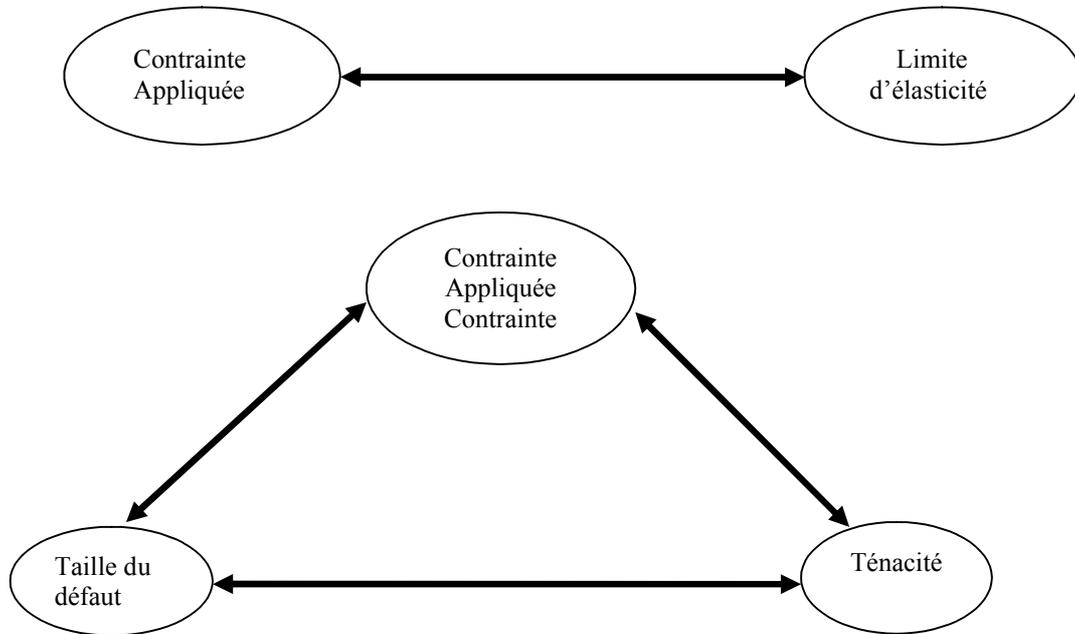


Figure IV. 1. Comparaison de l'approche classique (a) et de l'approche utilisant la MLR (b)

IV. 2. 1. CRITERE D'ENERGIE

L'approche énergétique est basée sur le postulat suivant : l'extension d'une fissure qui conduit à la rupture se produit lorsque l'énergie fournie est suffisante pour vaincre la résistance du matériau : cette résistance se compose de l'énergie de création de surface, de l'énergie de plastification de l'extrémité de la fissure, et éventuellement d'autres types d'énergies dissipatives associées à la propagation d'une fissure.

Griffith fut le premier à proposer un critère d'énergie pour la rupture des matériaux fragiles, qui fut ensuite étendu aux matériaux ductiles par d'autres auteurs : Irwin et Orowan.

L'énergie de Griffith notée G (qu'on appelle aussi taux de restitution d'énergie) est définie par la variation d'énergie par unité de surface fissurée, associée à la propagation d'une fissure dans un matériau linéaire élastique. La rupture se produit lorsque G atteint une valeur critique G_c ; G_c est une mesure de la ténacité du matériau.

Pour une fissure de longueur $2a$ (figure IV.2) dans une plaque de dimensions infinies (ce qui équivaut à dire que la longueur de fissure est très petite par rapport aux dimensions de la plaque dans la plan de chargement), constituée d'un matériau de module d'Young E et soumise à une contrainte de traction σ^{∞} , l'énergie de Griffith G par unité de surface fissurée est donnée par :

$$G = \frac{\pi (\sigma^{\infty})^2 a}{E} \quad \text{IV.1}$$

Si on continue à augmenter la contrainte appliquée σ^{∞} , la rupture se produira lorsqu'elle atteindra sa valeur critique pour une contrainte appliquée σ_R . On a alors d'après la relation précédente :

$$G_c = \frac{\pi \sigma_R^2 a}{E} \quad \text{IV.2}$$

On peut noter qu'à valeur de G_c fixée, la contrainte à rupture σ_R varie avec $a^{-1/2}$; de même à G_c et σ^{∞} fixées, la longueur critique de défaut a_c est donnée par :

$$a_c = \frac{E G_c}{\pi (\sigma^{\infty})^2} \quad \text{IV.3}$$

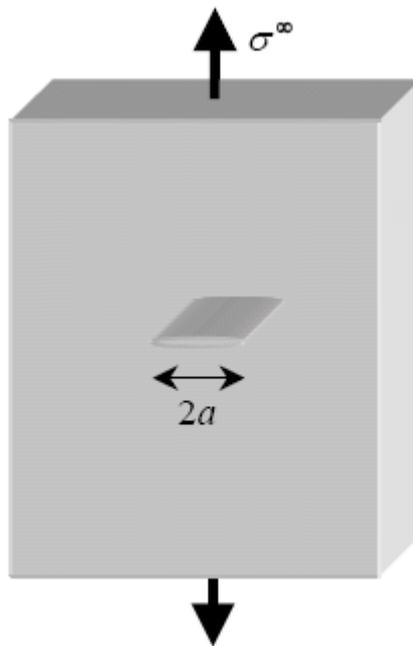


Figure IV. 2. Fissure traversante de longueur $2a$ dans une plaque infinie

La figure IV.3 illustre bien la différence entre l'approche classique qui fait abstraction de l'existence d'une fissure (le critère de rupture est $\sigma^{\infty} = \sigma_E$) et l'approche par la MLR qui prend

en compte la présence de la fissure (σ^∞ proportionnelle à $1/\sqrt{a}$). La zone de non rupture située sous les deux courbes représentant les approches précédentes, montre que de part et d'autre de la longueur de défaut a_0 , on utilisera l'une ou l'autre des approches. L'énergie de Griffith G est la force motrice dans un matériau dont la résistance à la rupture est donnée par G_c . Par analogie avec l'approche basée sur la limite d'élasticité où c'est la contrainte qui joue le rôle de force motrice dans un matériau dont la résistance à la déformation plastique est donnée par la limite d'élasticité σ_E .

Cette analogie est utilisée aussi pour illustrer le concept de similitude. La limite d'élasticité d'un matériau mesurée à partir d'essais sur des éprouvettes de laboratoire est indépendante de la taille des éprouvettes et peut donc être utilisée pour des structures de tailles différentes dès lors que le matériau est raisonnablement homogène. Ce principe de similitude est une des hypothèses fondamentales de la mécanique de la rupture : la ténacité d'un matériau (mesurée par G_c) est indépendante de la taille et de la géométrie de la structure fissurée. Cette hypothèse de similitude reste valable tant que le comportement du matériau demeure linéaire élastique.

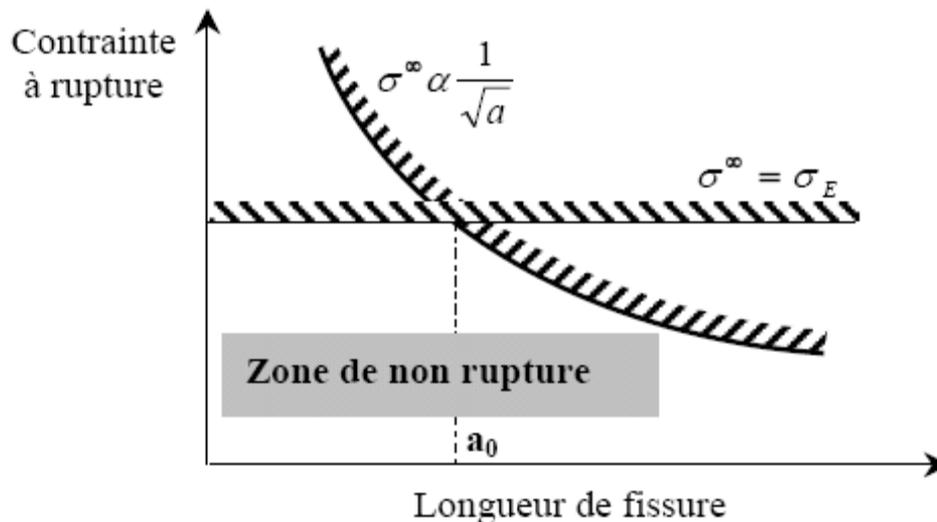


Figure IV. 3. Comparaison entre l'approche classique et celle de la MLR.

IV. 2. 2. CONCEPT D'INTENSITÉ DES CONTRAINTES

La figure IV.4 représente schématiquement les contraintes sur un élément centré sur un point M repéré par les coordonnées polaires r, θ par rapport à une extrémité d'une fissure sollicitée en mode d'ouverture ou mode I.

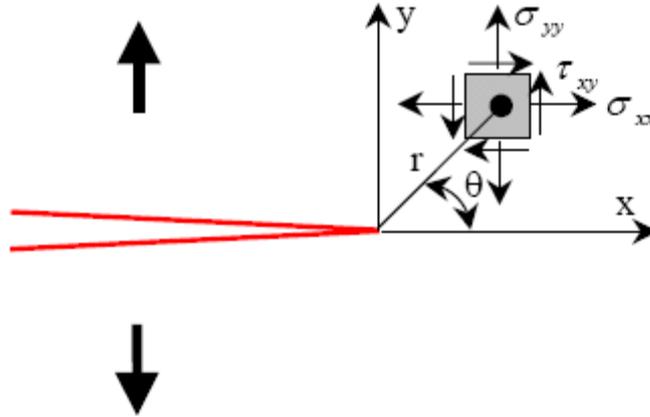


Figure IV. 4. Contraintes près de l'extrémité d'une fissure

Ces contraintes s'expriment à partir d'un paramètre noté K_I et appelé facteur d'intensité des contraintes (FIC) en mode I, par les relations IV.4:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases} \quad \text{IV.4}$$

Ces relations peuvent s'écrire sous la forme condensée suivante :

$$G_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad \text{IV.5}$$

Des formules donnant le FIC K_I pour différentes configurations de chargement existent dans les manuels spécialisés. L'expression du FIC K_I dans le cas de la figure IV.2 est :

$$K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a} \quad \text{IV.6}$$

En comparant les formules (IV.1) et (I.6), il apparaît que :

$$G = \frac{K_I^2}{E} \quad \text{et} \quad G_c = \frac{K_{Ic}^2}{E} \quad \text{IV.7}$$

Dans l'approche basée sur le concept de FIC de la MLR, la rupture se produit lorsque le FIC K_I atteint la valeur critique K_{Ic} qui correspond à la ténacité du matériau. Dans cette approche, le K_I est la force motrice dans un matériau dont la résistance à la rupture est caractérisée par la ténacité K_{Ic} . Le principe de similitude est supposé vérifié comme dans le cas de l'approche énergétique. Les deux approches sont équivalentes (relations IV.7) pour un matériau dont le comportement est linéaire élastique.

IV. 2. 3. PROPAGATION DES FISSURES ET CONCEPT DE TOLÉRANCE AU DOMMAGE

La MLR permet le calcul de la durée de vie d'une structure soumise à des sollicitations cycliques (phénomène de fatigue) ou sujette à des effets de corrosion sous tension. La vitesse de propagation des fissures est alors caractérisée par un paramètre tel que le FIC, et la taille critique de défaut à ne pas dépasser est directement liée à la ténacité du matériau. Dans le cas par exemple de la fissuration par fatigue des alliages métalliques, la propagation de fissure da/dN est généralement représentée par la relation empirique de Paris :

$$\frac{da}{dN} = c (\Delta K)^m \quad \text{IV.8}$$

Où ΔK est l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes et C et m sont des constantes du matériau.

Les structures contiennent la plupart du temps des défauts de type fissure; ces défauts, souvent inhérent aux procédés même de fabrication des composants, étant inévitables, on dimensionne les structures en tenant compte de leur présence et en veillant à ce qu'ils n'atteignent pas la taille critique qui conduit à la rupture brutale : c'est le concept de tolérance au dommage. La MLR fournit les outils nécessaires pour déterminer la taille critique du défaut (relation IV.3) et suivre sa propagation (relation IV.8).

Considérons un défaut (une fissure de fatigue ou de corrosion sous tension) qui se développe dans une structure et dont l'évolution de la taille en fonction du temps est représentée schématiquement sur la figure IV.5. Cette figure illustre bien le concept de tolérance au dommage. La longueur de fissure initiale a_0 correspond généralement à la limite de détection des moyens de contrôle non destructif, et la longueur critique est déterminée à partir du chargement appliqué et de la ténacité du matériau. On prend un coefficient de sécurité de telle sorte que la longueur admissible du défaut reste inférieure à la longueur critique; la durée de vie de la structure est alors déterminée en calculant le temps nécessaire pour que la longueur de défaut passe de a_0 à la longueur admissible.

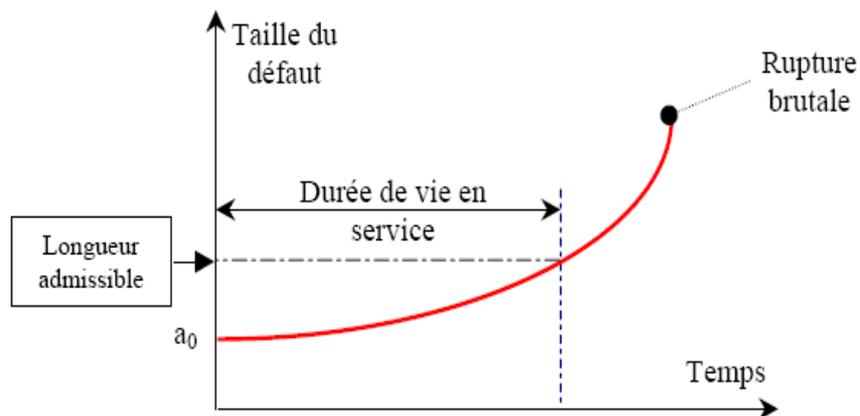


Figure IV. 5. Concept de tolérance au dommage

IV. 3. INFLUENCE DES PROPRIETES DES MATERIAUX SUR LA RUPTURE

Selon le comportement physique d'un matériau, on utilise les concepts adaptés de la mécanique de la rupture. La classification habituellement utilisée pour ces concepts est la suivante :

- La mécanique linéaire de la rupture (MLR) pour les matériaux dont le comportement est essentiellement linéaire élastique. Les alliages d'aluminium à précipitation durcissant, les aciers à haute limite élastique, les céramiques... font partie de cette catégorie.

- La mécanique non linéaire de la rupture (MNLR) ou mécanique élastoplastique de la rupture (MEPR), pour les matériaux ductiles tels que les aciers à faible ou moyenne résistance, les aciers inoxydables ou aciers austénitiques, les alliages de cuivre...
- La mécanique dynamique de la rupture (MDR), linéaire ou non linéaire, pour les métaux sollicités à grandes vitesses de déformation; le comportement peut être aussi viscoplastique dans ces conditions [8].

- La mécanique viscoélastique de la rupture (MVER) pour essentiellement les polymères sollicités à des températures au dessous de la température de transition vitreuse.

- La mécanique viscoplastique de la rupture (MVPR) pour les polymères au dessus de la température de transition, pour les métaux et les céramiques sollicités à haute température.

La MLR et la MEPR sont indépendantes du temps. Le temps intervient en revanche explicitement dans le comportement pour la MDR, la MVER et la MVPR. La MEPR, la MDR, la MVER et la MVPR sont souvent regroupées dans le domaine élargi de la mécanique non linéaire de la rupture (MNLR).

Considérons une plaque fissurée qui est chargée jusqu'à rupture. La figure IV.6 est une représentation schématique de la variation de la contrainte à rupture en fonction de la ténacité des matériaux.

Pour les matériaux à faible ténacité où la contrainte à rupture varie linéairement avec le K_{IC} (relation IV.6), la rupture fragile est le principal mécanisme qui gouverne la ruine de la structure; la MLR décrit raisonnablement bien ce genre de comportement. Pour des matériaux à très haute ténacité, la MLR n'est plus valable et ce sont les propriétés d'écoulement du matériau qui gouvernent le mécanisme de rupture; on utilise alors une simple analyse de chargement limite pour dimensionner les structures. Les matériaux à ténacité intermédiaire constituent une transition entre les deux domaines précédents ; la MNLR est généralement appliquée pour décrire le comportement dans ce domaine.

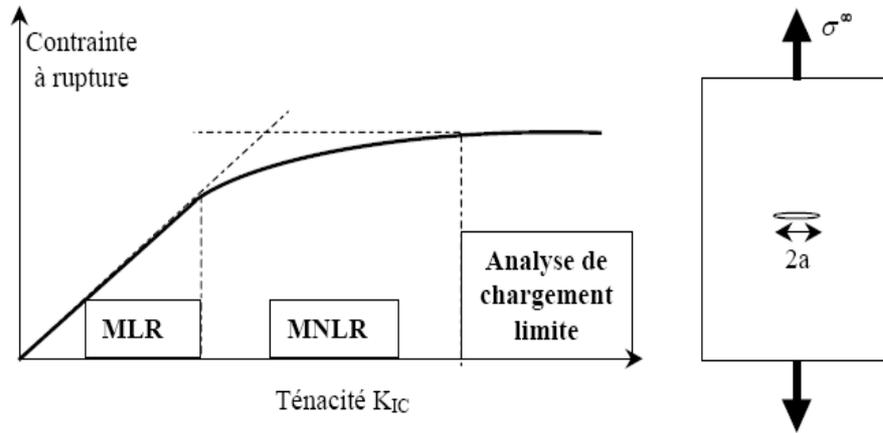


Figure IV. 6. Comportement en fonction de la ténacité

IV. 4. ANALYSE DIMENSIONNELLE EN MECANIQUE DE LA RUPTURE

L'analyse dimensionnelle constitue un outil important pour étudier la mécanique de la rupture. Considérons les configurations de chargement représentées sur la figure IV.7 les différentes géométries de structures fissurées sont soumises à la même contrainte σ^∞ loin de la fissure ; il s'agit de problèmes plans et l'épaisseur n'intervient donc pas. La figure IV.7a représente une fissure de bord de très petite dimension par rapport à celles de la plaque qui peut être alors considérée comme un milieu infini si on se place à l'échelle de la fissure; la plaque est constituée d'un matériau dont le comportement est linéaire élastique. La taille de la fissure de la figure IV.7b n'est plus négligeable et donc la largeur L de l'éprouvette est une variable additionnelle par rapport au cas précédent. Le cas de la figure IV.7c constitue la même configuration de chargement que le cas IV.7b mais le matériau est élastoplastique (élastique plastique parfait) et donc deux autres variables vont s'ajouter : la limite d'élasticité du matériau et la taille de la zone plastifiée qui se forme à l'extrémité de la fissure [10].

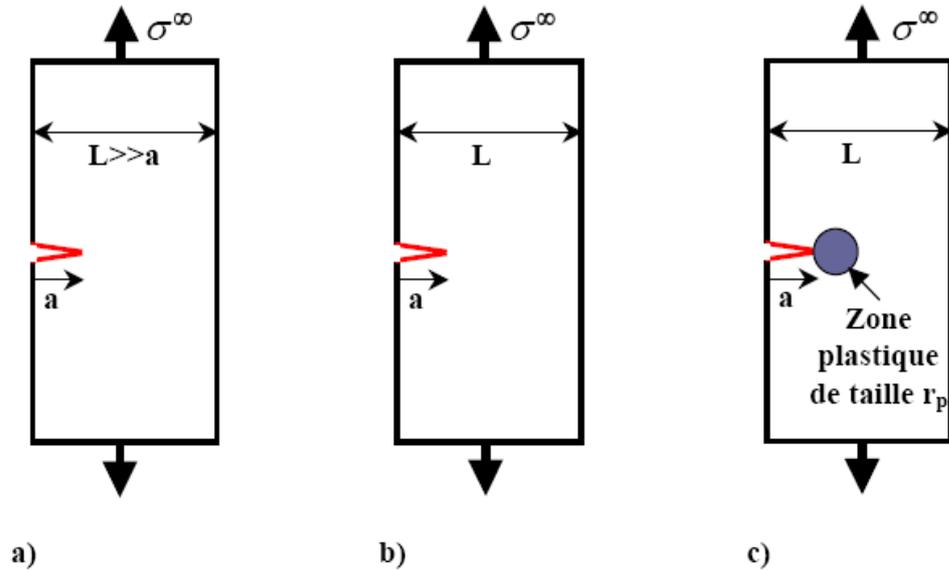


Figure IV. 7. Différents cas d'éprouvettes avec fissure de bord

Dans le cas de la figure IV.7a, les contraintes σ_{ij} en un point repéré par ses coordonnées polaires r, θ par rapport à l'extrémité de la fissure, seront représentées par une fonction de type:

$$\sigma_{ij} = f_1(\sigma^\infty, E, \nu, a, r, \theta) \quad \text{IV.9}$$

L'analyse dimensionnelle (théorème de Buckingham) permet alors d'écrire :

$$\frac{\sigma_{ij}}{\sigma^\infty} = F_1\left(\frac{E}{\sigma^\infty}, \frac{r}{a}, \nu, \theta\right) \quad \text{IV.10}$$

L'analyse dimensionnelle pour le cas de la figure IV.7b où L est la variable additionnelle, conduit à :

$$\frac{\sigma_{ij}}{\sigma^\infty} = F_2\left(\frac{E}{\sigma^\infty}, \frac{r}{a}, \frac{L}{a}, \nu, \theta\right) \quad \text{IV.11}$$

Dans le cas de la figure IV.7c où deux autres variables, la limite d'élasticité du matériau σ_E et la taille de la zone plastifiée r_p vont s'ajouter, la même analyse donne:

$$\frac{\sigma_{ij}}{\sigma^\infty} = F_3\left(\frac{E}{\sigma^\infty}, \frac{\sigma_E}{\sigma^\infty}, \frac{r}{a}, \frac{L}{a}, \frac{r_p}{a}, \nu, \theta\right) \quad \text{IV.12}$$

La relation IV.11 correspond à un comportement élastique linéaire du matériau pour lequel la MLR s'applique ; si $L \gg a$, autrement dit lorsque la largeur de l'éprouvette est grande par rapport à la longueur de la fissure, il n'y a plus d'effet de bord et la largeur L n'est plus considérée comme une dimension caractéristique : on retrouve alors la relation IV.10 où L n'apparaît plus.

La relation IV.12 correspond à un comportement élastique plastique parfait décrit par la MLNR ; lorsque la taille de la zone plastifiée est faible par rapport à la longueur de la fissure ($r_p \ll a$) et que la contrainte appliquée est faible par rapport à la limite d'élasticité du matériau ($\sigma_\infty \ll \sigma_E$), on retrouve la relation IV.11 : c'est précisément dans ces conditions ($r_p \ll a$ et $\sigma_\infty \ll \sigma_E$) qu'on peut appliquer la MLR[9].

IV. 5. DESCRIPTION DU CHAMP DES CONTRAINTES A L'EXTREMITÉ D'UNE FISSURE A L'AIDEDU FACTEUR D'INTENSITE DES CONTRAINTES

La forme générale du champ des contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fissure dans un matériau dont le comportement est élastique et linéaire est de la forme :

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi}} f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}^{(m)}(\theta) \quad \text{IV.13}$$

Les coordonnées (r, θ) sont repérées par rapport à l'extrémité de la fissure (figure IV.8). Les fonctions adimensionnelles $f_{ij} : g_{ij}$ dépendent du mode de sollicitation, et g_{ij} de l'état de contrainte et de la géométrie du corps fissuré aussi.

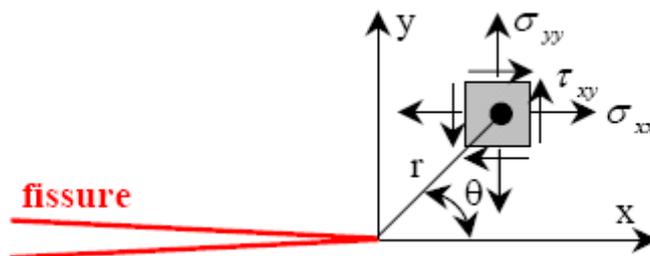


Figure IV. 8. Définition des axes (x,y) et des coordonnées (r,θ)

Au voisinage immédiat de l'extrémité de la fissure, les contraintes présentent une singularité en $1/\sqrt{r}$, c'est à dire lorsque $r \rightarrow 0$ elles tendent vers l'infini comme $1/\sqrt{r}$. Les autres termes d'ordre plus élevé de la relation IV.13 sont alors négligeables. La zone la plus critique est donc le voisinage immédiat de l'extrémité de la fissure et on ne considère alors que les termes en $1/\sqrt{r}$, autrement dit que les champs de contraintes asymptotiques qui sont donc de la forme :

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad \text{IV.14}$$

Ces champs asymptotiques peuvent être décrits à l'aide de l'approche de Westergaard. Selon le mode de sollicitation considéré mode I, II ou III : figure IV.9 ils s'expriment à l'aide des facteurs d'intensité des contraintes K_I , K_{II} ou K_{III} :

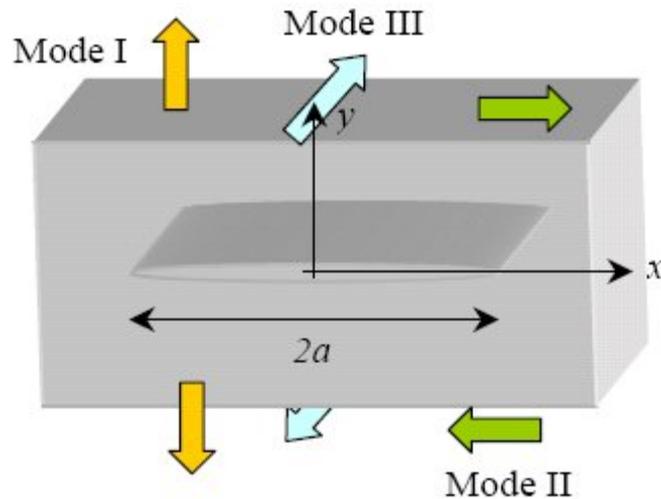


Figure IV. 9. Définition des modes de sollicitation

En mode I

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \end{cases} \quad \text{IV.15}$$

En mode II

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{yy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{cases} \quad \text{IV.16}$$

En mode III

$$\begin{cases} \sigma_{13} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad \text{IV.17}$$

Remarque : Lorsque la structure fissurée est sollicitée dans les 3 modes simultanément, on a en appliquant le principe de superposition en élasticité linéaire :

$$\sigma_{ij}^{(total)} = \sigma_{ij}^{(I)} + \sigma_{ij}^{(II)} + \sigma_{ij}^{(III)} \quad \text{IV.18}$$

Considérons maintenant le mode I seul par exemple. Lorsque $\theta=0$, c'est à dire lorsqu'on se place dans le plan de la fissure, au voisinage immédiat et en aval de l'extrémité de celle-ci, on a d'après les relations IV.15:

$$\sigma_{xx}(\theta = 0) = \sigma_{xx}(\theta = 0) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad \text{IV.19}$$

Le plan (x,y) de la fissure est donc principal pour le mode I. La figure IV.10 est une représentation schématique de la variation de $\sigma_{yy}(\theta=0)$.

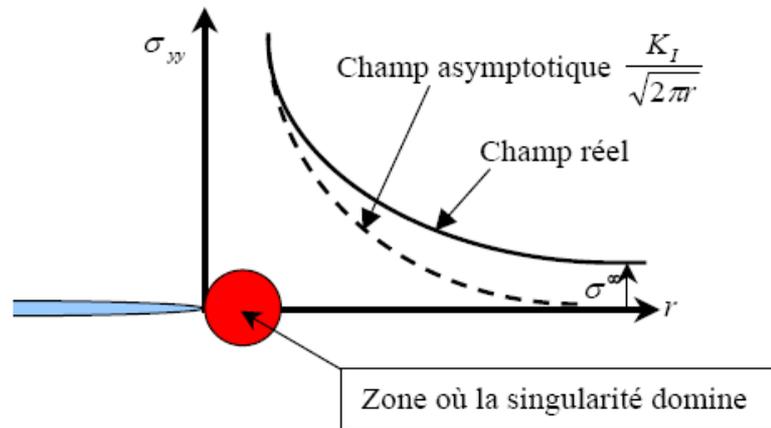


Figure IV. 10. Contrainte $\sigma_{yy}(\theta = 0)$ perpendiculaire au plan de fissuration

Cette figure illustre la zone où la singularité domine c'est à dire lorsque la contrainte varie comme $1/\sqrt{r}$ (IV.19). Au delà de cette zone, on retrouve les conditions limites loin de la zone fissurée et la contrainte σ_{yy} tend alors progressivement vers la contrainte appliquée σ^{∞} . Le facteur d'intensité des contraintes (FIC) K_I définit l'amplitude de la zone de singularité. Les contraintes dans cette zone augmentent proportionnellement à K_I qui caractérise alors complètement les conditions à l'extrémité de la fissure ; si le K_I est connu, on peut déterminer les champs des contraintes, des déformations et des déplacements en fonction des coordonnées (r, θ) . Le FIC est un des concepts les plus importants de la mécanique de la rupture [10].

IV. 6. RELATION ENTRE LE FIC ET L'ENERGIE DE GRIFFITH

Pour les calculs, on considère une fissure élastique sollicitée en mode I (figure IV.11).

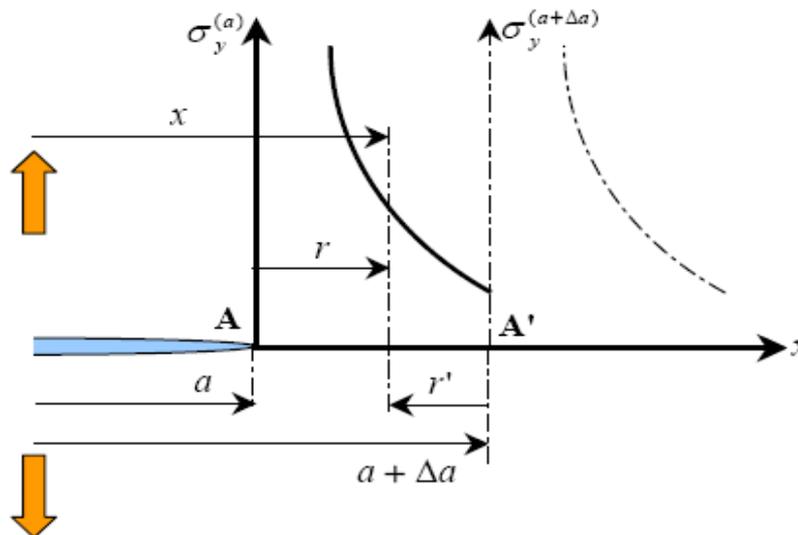


Figure IV. 11. Fissure sollicitée en mode I

La fissure a pour longueur initiale a et se propage de Δa . L'extrémité de la fissure se déplace donc de la position $A(x = a)$ à la position $A'(x = a + \Delta a)$.

- Le champ de contrainte en aval de l'extrémité de la fissure ($\theta = 0$) est donnée par :

$$\sigma_y(r, \theta = 0) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad \text{IV.20}$$

- Le champ des déplacements des lèvres en amont de l'extrémité de la fissure ($\theta = \pi$) s'écrit :

$$U_y(r, \theta = \pi) = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left(\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} \right) \text{ avec } \begin{cases} \tilde{\lambda} = \lambda & \text{en déformations planes} \\ \tilde{\lambda} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} & \text{en contraintes planes} \end{cases} \quad \text{IV.21}$$

$$U_y(r, \theta = \pi) = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} (1 - \vartheta) \text{ avec } \begin{cases} \vartheta = \vartheta & \text{en déformations planes} \\ \vartheta = \frac{\vartheta}{1 + \vartheta} & \text{en contraintes planes} \end{cases}$$

IV. 7. PRINCIPE DE SUPERPOSITION EN MLR

Dans les matériaux élastiques linéaires, les composantes des contraintes, des déformations et des déplacements sont additives : c'est l'application du principe de superposition. Cependant, il faut respecter certaines règles : ainsi par exemple deux contraintes normales selon la direction x peuvent s'ajouter entre elles, mais une contrainte normale ne peut en aucun cas s'additionner avec une contrainte de cisaillement. Il en est de même pour les facteurs d'intensité des contraintes (FIC) : on ne peut additionner des FIC que s'ils concernent le même mode de sollicitation (mode I, II ou III). On a ainsi :

$$K_I^{(total)} = K_I^{(total)} + K_I^{(total)} + K_I^{(total)} + \dots \quad \text{IV.22}$$

$$K_{(total)} \neq K_I + K_{II} + K_{III}$$

Dans beaucoup de cas, le principe de superposition, convenablement appliqué, permet de déterminer la solution pour le FIC dans des configurations de chargement relativement complexes en les décomposant en somme de chargements simples dont les solutions sont connues.

L'exemple de la figure ci-dessous illustre l'application du principe de superposition.

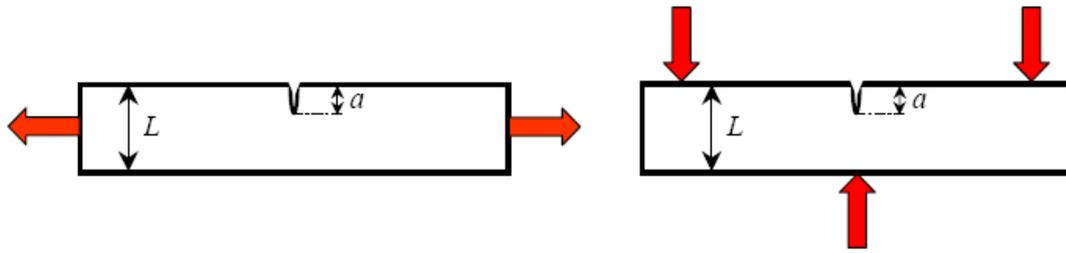


Figure IV. 12. Fissure sollicitée en mode I dû à une traction et à une flexion

Les FIC K_I sont connus pour les deux chargements de traction et flexion (manuels spécialisés). Comme ils conduisent tous les deux à des sollicitations de la fissure en mode I, la solution est :

$$K_I^{(total)} = K_I^{(traction)} + K_I^{(flexion)} \quad \text{IV.23}$$

On applique parfois le principe de superposition en imaginant des chargements dont les solutions sont connues, puis par combinaison on obtient la solution d'un problème donné. La figure IV.13 illustre ce type d'utilisation du principe de superposition.

On cherche à déterminer la solution de K_I pour le chargement de la figure IV.13a, on connaît celle du chargement IV.13b, et celle du chargement IV.13c est nulle puisque la fissure reste fermée et l'intensité des contraintes ne peut être alors transmise. On a ainsi :

$$K_I^{(a)} = K_I^{(b)} - K_I^{(c)} \text{ avec } K_I^{(c)} = 0 \implies K_I^{(a)} = K_I^{(b)} \quad \text{IV.24}$$

Cet exemple illustre un résultat plus général : les contraintes de traction appliquées sur la frontière d'un solide fissuré (cas de la figure IV.13b) peuvent être déplacées sur les lèvres de la fissure (figure IV.13c) sans que cela change le FIC [10].

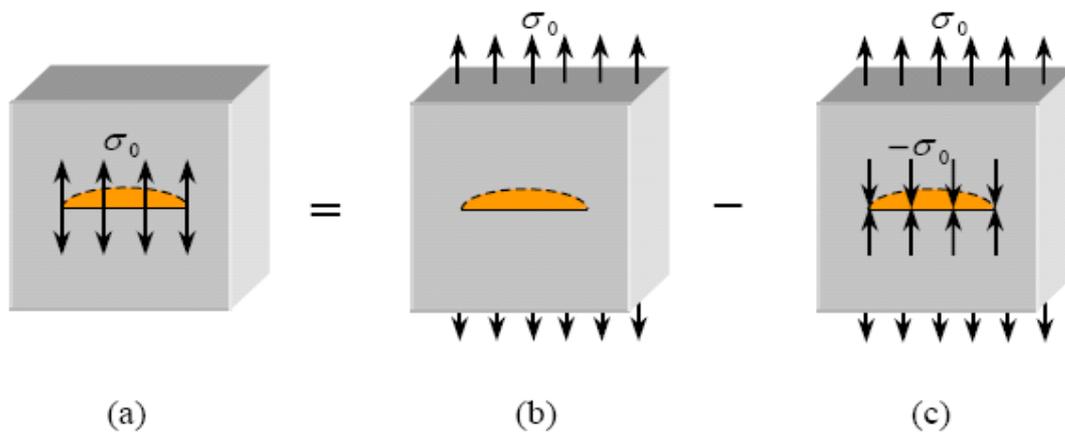


Figure IV. 13. Détermination du FIC K_I pour une fissure dont les lèvres sont soumises à une traction σ_0 .

IV. 8. HYPOTHESES ET CADRE DE L'ETUDE

Le domaine couvert par la mécanique de la rupture est si vaste qu'il serait présomptueux de vouloir en présenter tous les aspects. Il apparaît donc nécessaire de bien préciser les limites de cette étude.

IV. 8. 1. ENDOMMAGEMENT ET MECANIQUE DE LA RUPTURE

Lorsqu'une pièce est soumise à des efforts d'origines variées, il existe des limites, en contraintes ou en déformations, qu'elle ne doit pas dépasser, sous peine d'endommager le matériau et de provoquer sa rupture. Suivant que l'on s'intéresse à la dégradation du matériau d'un point de vue micromécanique ou macro-mécanique, deux approches peuvent être utilisées :

- **La mécanique de l'endommagement**

La mécanique de la rupture constitue également un axe de recherche important, et très sollicitant d'un point de vue numérique. Plusieurs auteurs ont essayé, depuis longtemps, de caractériser avec précision les champs mécaniques en pointe de fissure et de modéliser numériquement la propagation de telles fissures. Si notre connaissance théorique en mécanique de la rupture est maintenant assez étendue, les outils numériques permettant de la modéliser peuvent encore progresser. En effet, les importantes variations dans les champs mécaniques à la pointe d'une fissure nécessitent une modélisation fine et bien contrôlée du maillage dans son voisinage.

La mécanique de la rupture a pour objet l'étude du comportement mécanique d'un matériau en présence de fissures macroscopiques. Cela revient notamment à déterminer le champ des contraintes et des déformations au voisinage de la pointe d'une fissure. L'étude de ces champs mécaniques permettant ensuite de juger de la stabilité ou non d'une fissure. Il est également possible, comme nous le verrons par la suite, d'aborder la mécanique de la rupture à travers une étude énergétique du solide fissuré.

Le choix de l'approche dépend essentiellement de l'étude que l'on désire effectuer. Dans certains procédés de mise en forme des matériaux, l'endommagement est souvent critique, et il n'est donc pas nécessaire d'étudier la propagation de fissures. Par contre, dans d'autres

procédés (usinage, découpage) et en génie civil, l'étude des fissures se propageant dans le matériau est nécessaire et est basée sur la mécanique de la rupture.

De plus, la capacité du code de calcul utilisé à permettre la propagation d'une fissure à travers un maillage est un paramètre important. En effet, en mécanique de l'endommagement, on ne modélise pas réellement les étapes d'amorçage et de propagation de fissures. Ces étapes se produisent naturellement lorsque l'adoucissement dû à la croissance des cavités l'emporte sur l'écroutissage du matériau. Il se produit alors une instabilité mécanique traduite notamment par la chute des contraintes dans la zone endommagée. La fissure correspond alors aux zones qui ne transmettent plus d'efforts normaux. Cette approche présente donc l'avantage de ne pas significativement modifier la topologie du maillage en introduisant une fissure mais reste approximative dans la mesure où la précision sur le chemin de propagation est directement lié à la finesse du maillage. De plus, en grandes déformations, la dégénérescence des éléments correspondant aux zones les plus endommagées peut rapidement entraîner la fin du calcul [11].

IV. 8. 2. FISSURES STATIQUES, QUASI-STATIQUES, DYNAMIQUES

Les premiers travaux réalisés en mécanique de la rupture visaient à établir, de façon précise, les champs mécaniques au voisinage d'une fissure statique. La difficulté d'une telle étude réside dans la prise en compte de la singularité introduite par la pointe d'une fissure. Le calcul précis de paramètres mécaniques tels que les facteurs d'intensité des contraintes, ou le taux de restitution d'énergie réside en grande partie dans la bonne prise en compte de cette singularité. L'étude des champs mécaniques entourant une pointe de fissure statique fait l'objet de cette étude bibliographique.

Ces paramètres mécaniques ainsi calculés, il est possible de prévoir la propagation ou non de la fissure. Suivant le type de matériau étudié, et le chargement appliqué, la propagation pourra être qualifiée de stable (la fissure a besoin de plus d'énergie pour reprendre sa progression) ou d'instable (la fissure poursuit sa progression jusqu'à la ruine de la structure, sans nécessiter d'énergie supplémentaire). On est alors amené à étudier la **propagation quasi-statique de fissures**, à l'aide de critères d'amorçage, de bifurcation, et de stabilité.

Enfin dans les problèmes de chargement rapide, ou lorsque les vitesses de propagation de fissures sont importantes, il devient nécessaire de prendre en compte les termes d'inertie dans

la formulation et dans la résolution du problème. On parle alors de **propagation dynamique des fissures**

IV. 8. 3. MODES DE RUPTURE

La fissuration se manifeste par la séparation irréversible d'un milieu continu en deux parties, appelées lèvres de la fissure, ce qui introduit une discontinuité au sens des déplacements. Les mouvements possibles des lèvres de chaque fissure sont des combinaisons de trois modes indépendants :

- Mode I: ouverture (ou clivage);
- Mode II: cisaillement plan;
- Mode III: cisaillement anti-plan

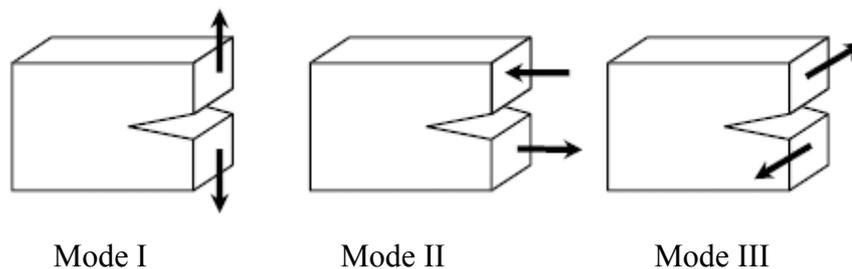


Figure IV. 14. Modes de rupture

Le mode I est le plus dangereux pour l'extension d'une fissure ; cependant, une fois amorcée et pour des sollicitations mixtes ou des géométries complexes, la fissure a tendance à bifurquer, et reste donc rarement rectiligne (2D) ou plane (3D) [12].

IV. 8. 4. MECANIQUE LINEAIRE, ET NON-LINEAIRE DE LA RUPTURE

La mécanique de la rupture se propose de décrire les étapes d'amorçage et de propagation de la fissuration. Selon le comportement du matériau durant la propagation d'une fissure, on peut être confronté à deux types de rupture :

- **Rupture fragile**, en l'absence de déformation plastique significative (mécanique linéaire de la rupture);
- **Rupture ductile**, en présence de déformation plastique non négligeable (mécanique non linéaire de la rupture). Dans ce cas, suivant l'étendue de la zone plastique en pointe de fissure, on différencie le cas de la plasticité confinée, de celui de la plasticité étendue [12].

Notre étude porte sur le comportement d'une poutre fissurée simple ou double en faisant varier le chargement. Ce travail porte sur un calcul numérique utilisant le code « ANSYS », les contraintes et les déformations ont été déterminées.

IV. 9. CONDITIONS AUX LIMITES

Nous allons étudier le comportement de la poutre fissurée, on prend même poutre de chapitre précédente avec même caractéristiques, en considérant l'effet des conditions aux limites et en même temps l'effet du chargement.

Cette étude est sur une poutre en trois et quatre point

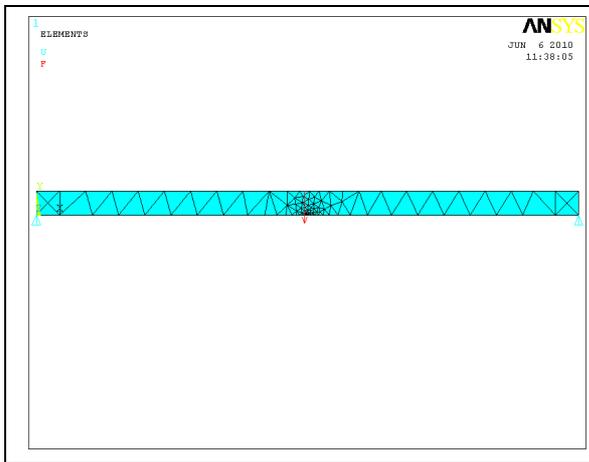


Figure IV. 15. Poutre à trois appuis avec charge ponctuelle

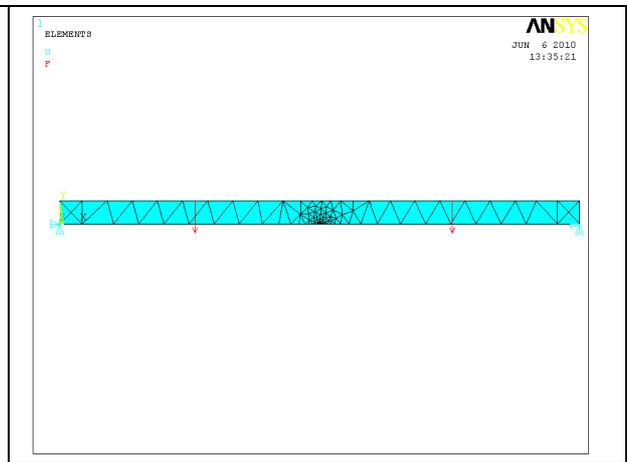


Figure IV. 16. Poutre à deux appuis avec deux charges

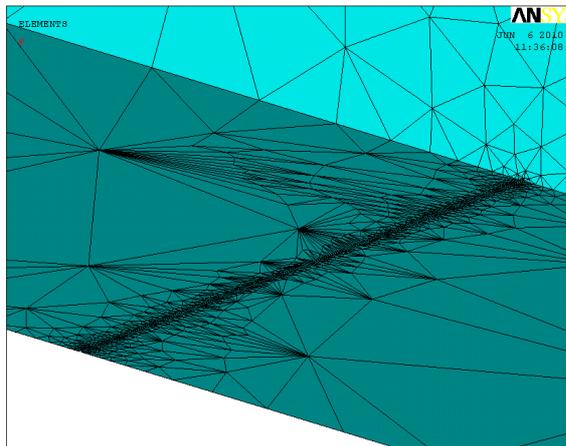


Figure IV. 17. Poutre avec fissure centrale

IV. 10. DEFORMATIONS DE LA POUTRE SUIVANT LES AXES X, Y ET Z :

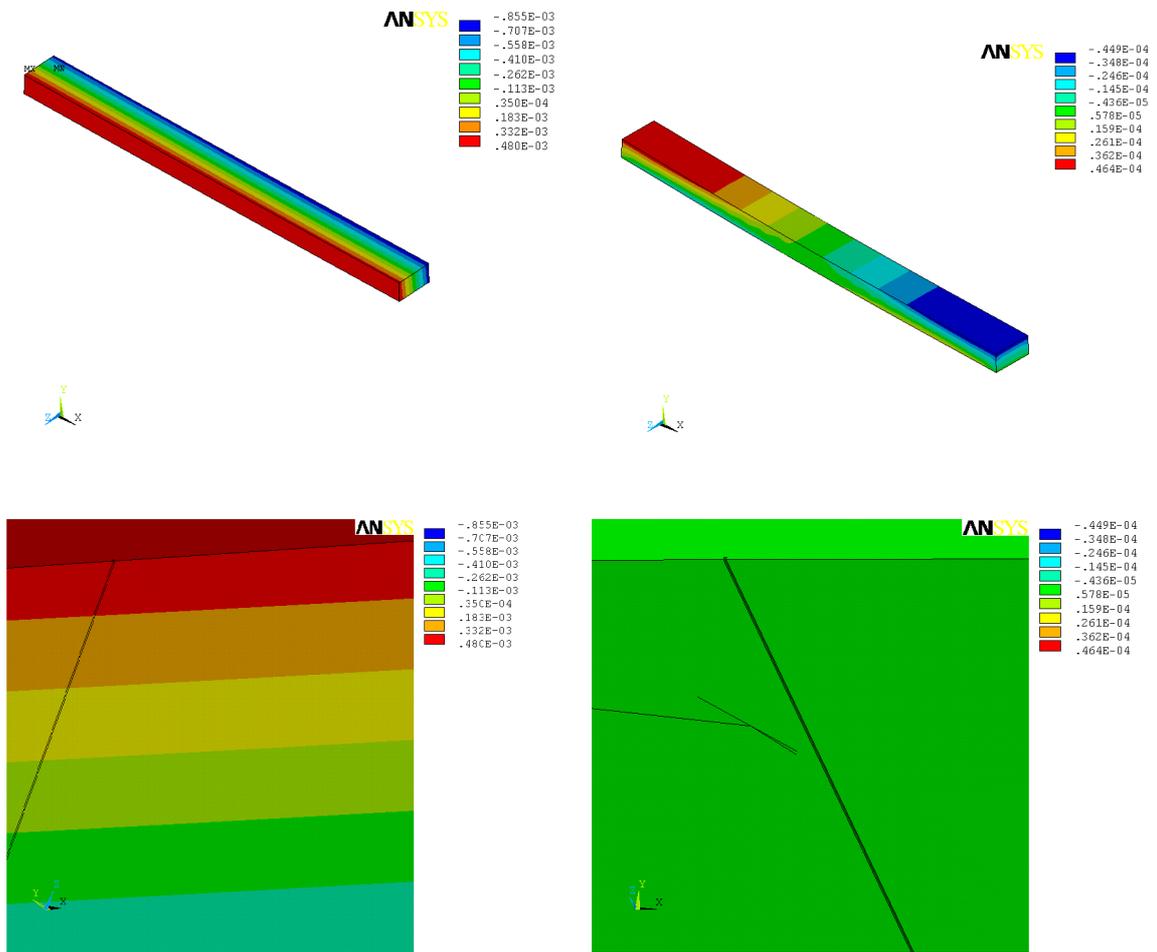


Figure IV. 4. a. Déformations suivant l'axe X

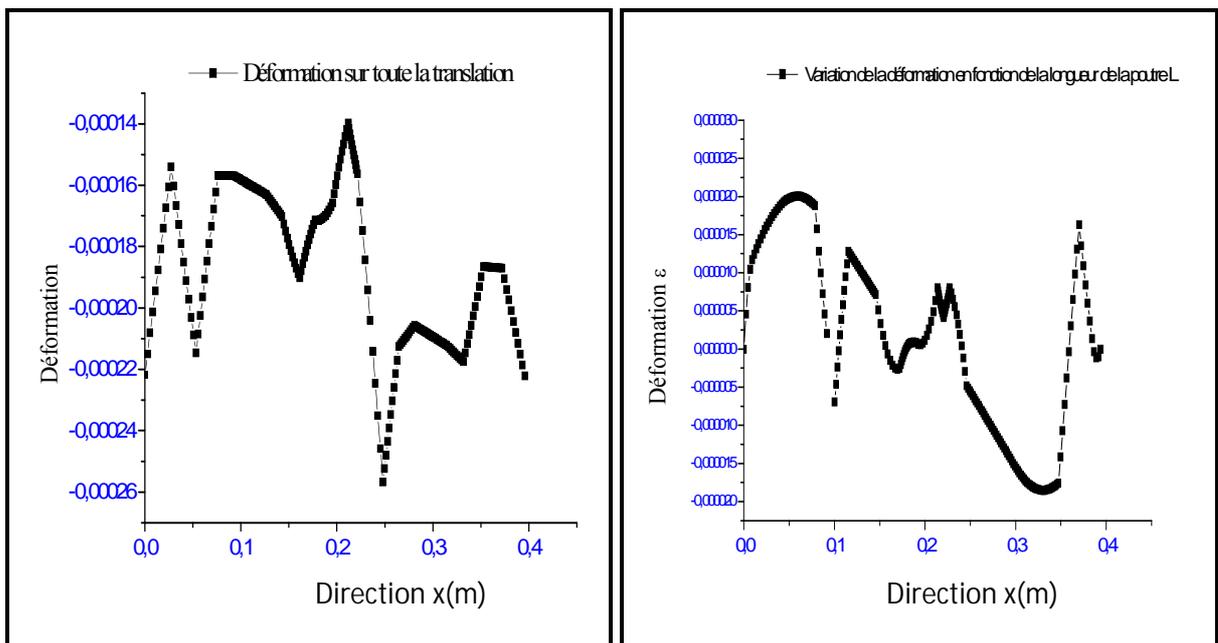


Figure IV. 4. b. Déformations suivant l'axe X (le deux cas)

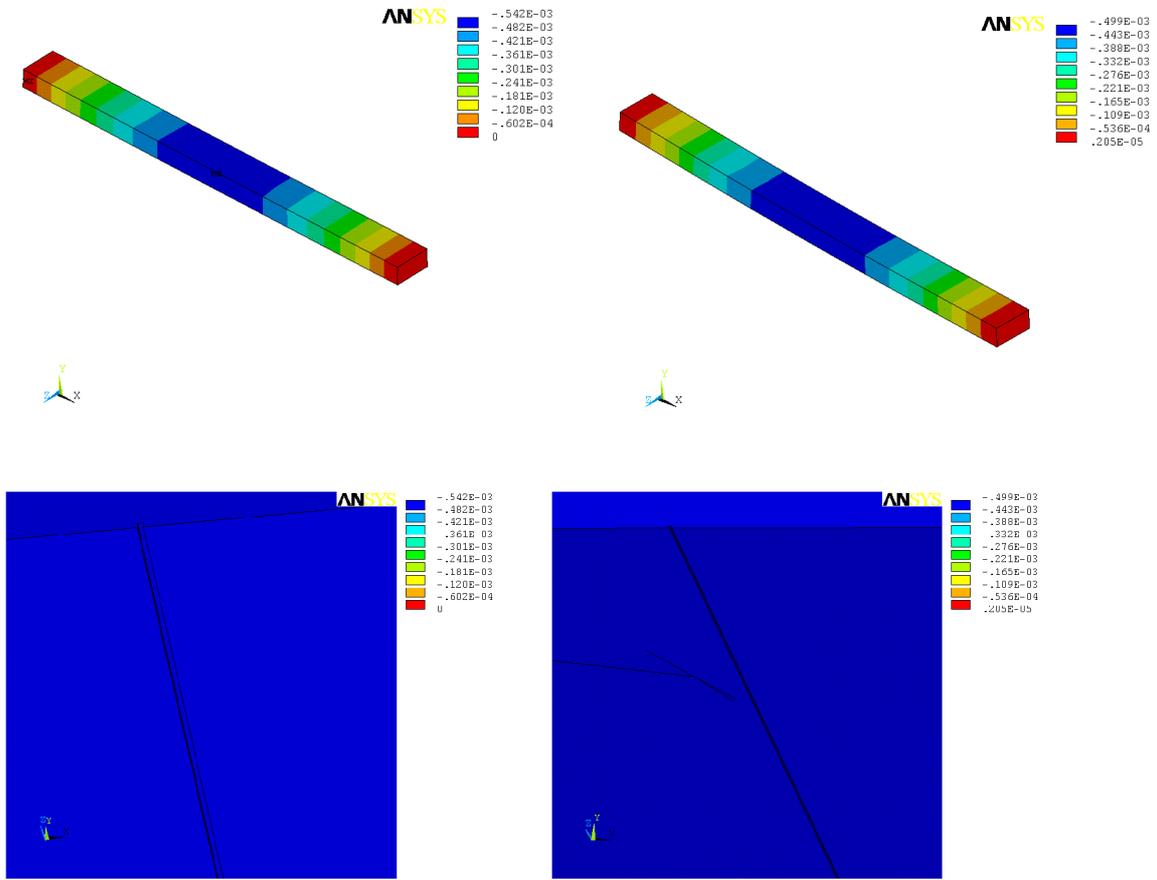


Figure IV. 5. a. Déformations suivant l'axe Y

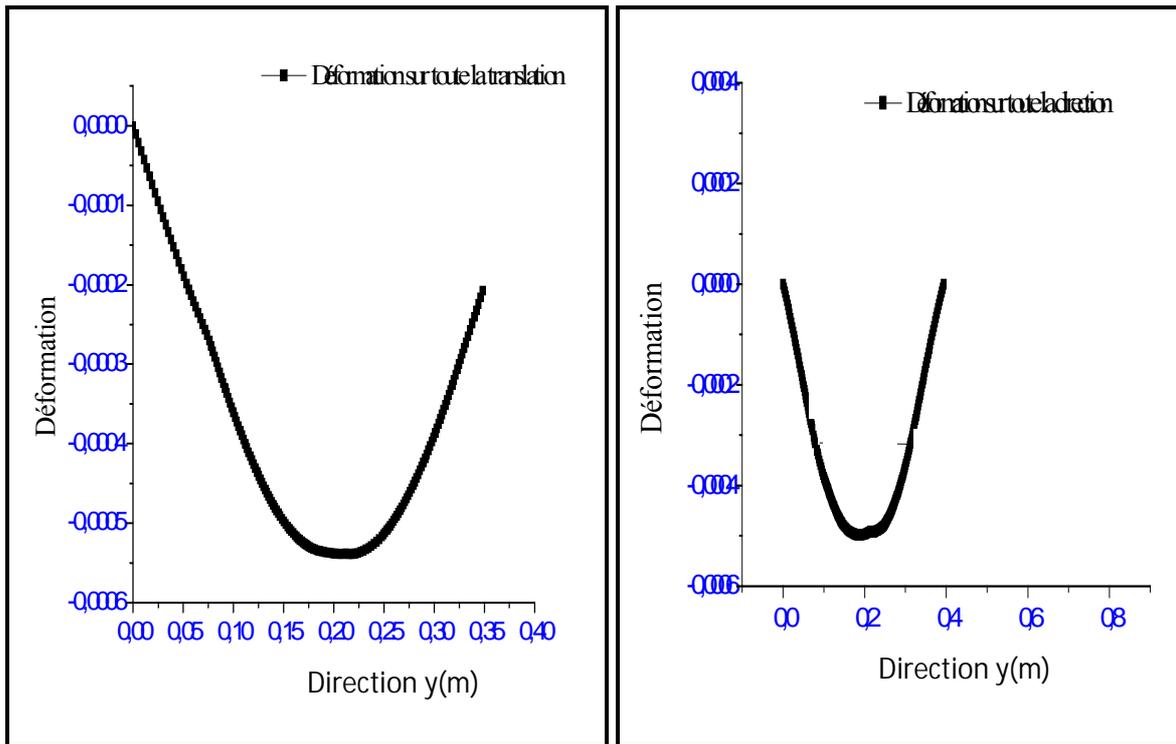


Figure IV. 5. b. Déformations suivant l'axe Y (le deux cas)

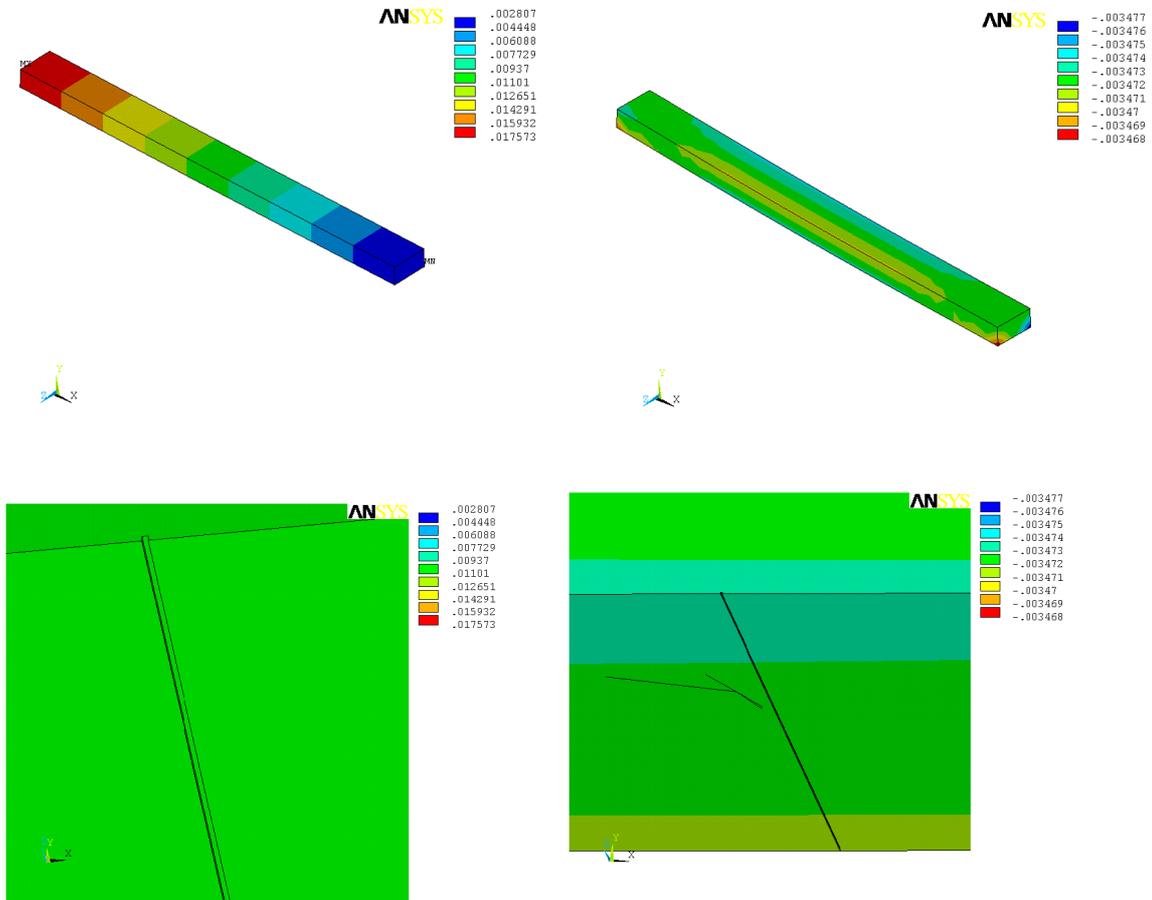


Figure IV. 6. a. Déformations suivant l'axe Z

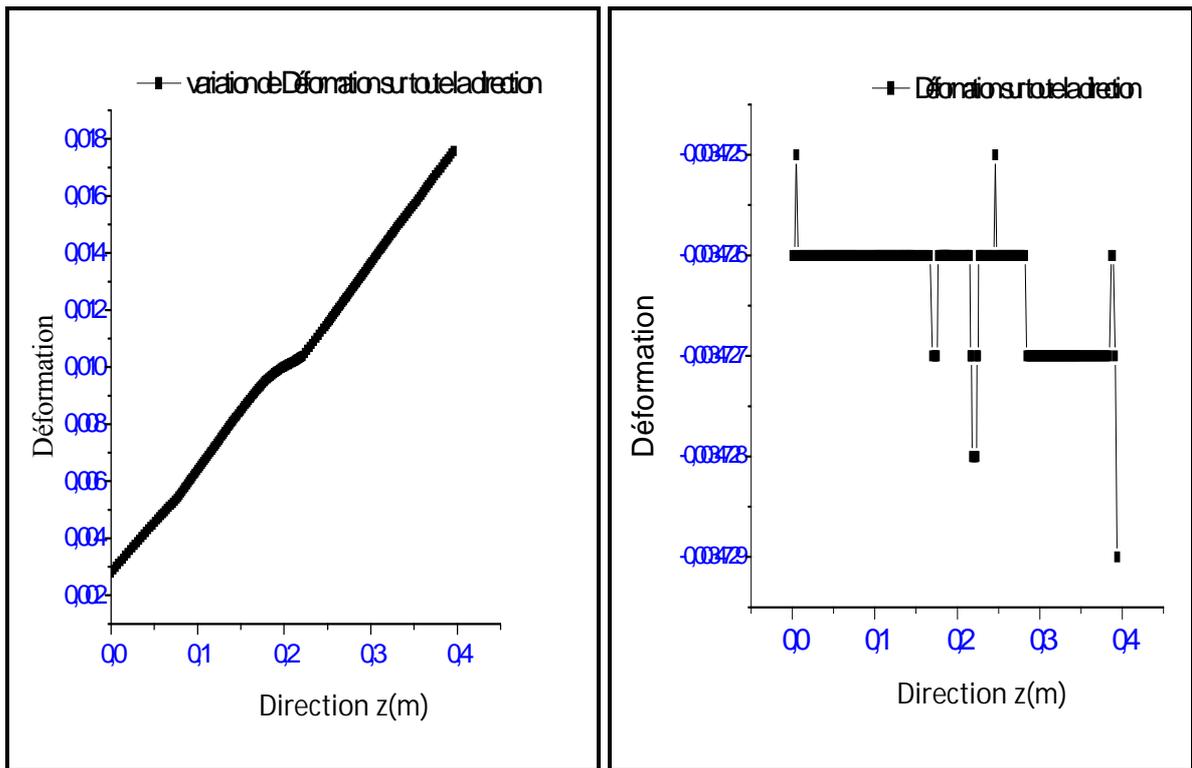


Figure IV. 6. b. Déformations suivant l'axe Z (le deux cas)

IV. 11. CONTRAINTES SUIVANT LES AXES X, Y, Z :

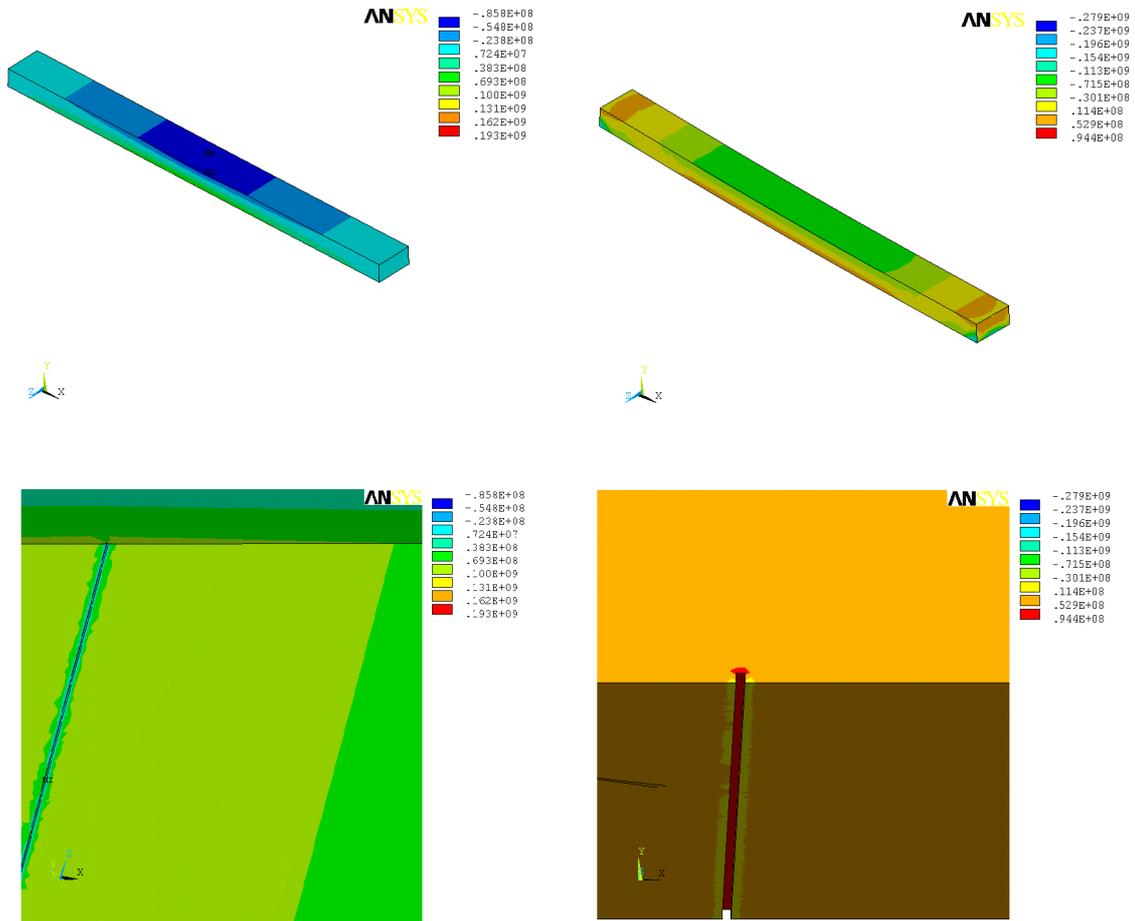


Figure IV. 7. a. Contraintes suivant l'axe X

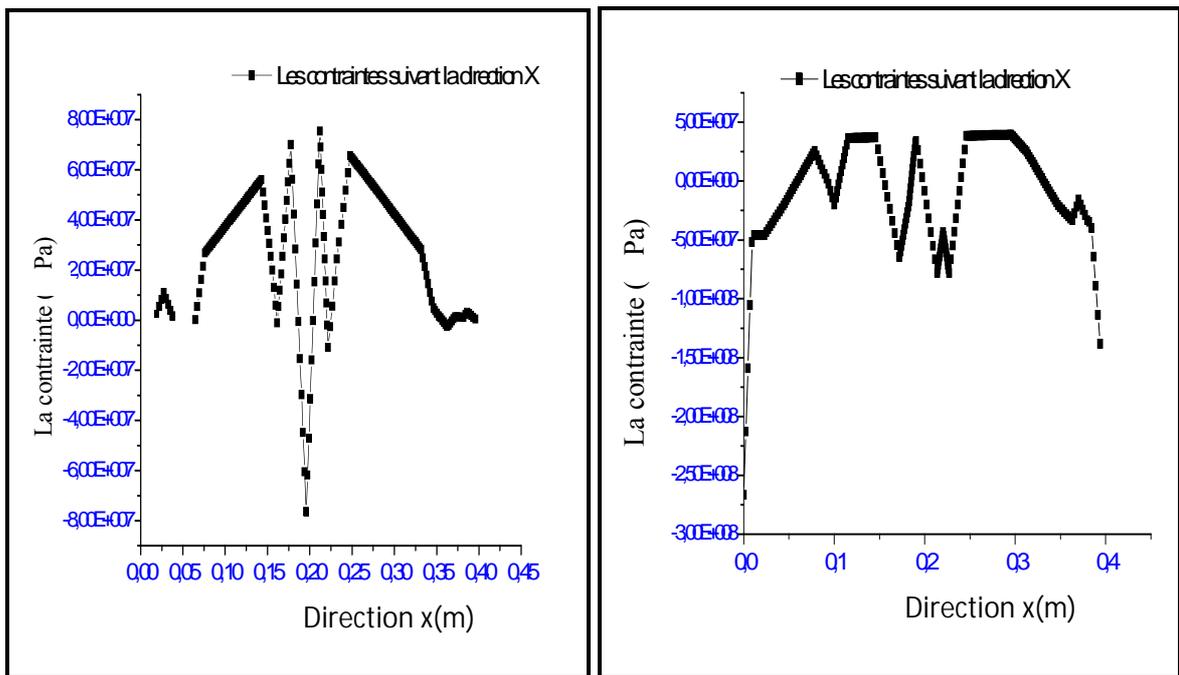


Figure IV. 7. b. Contrainte suivant X (le deux cas)

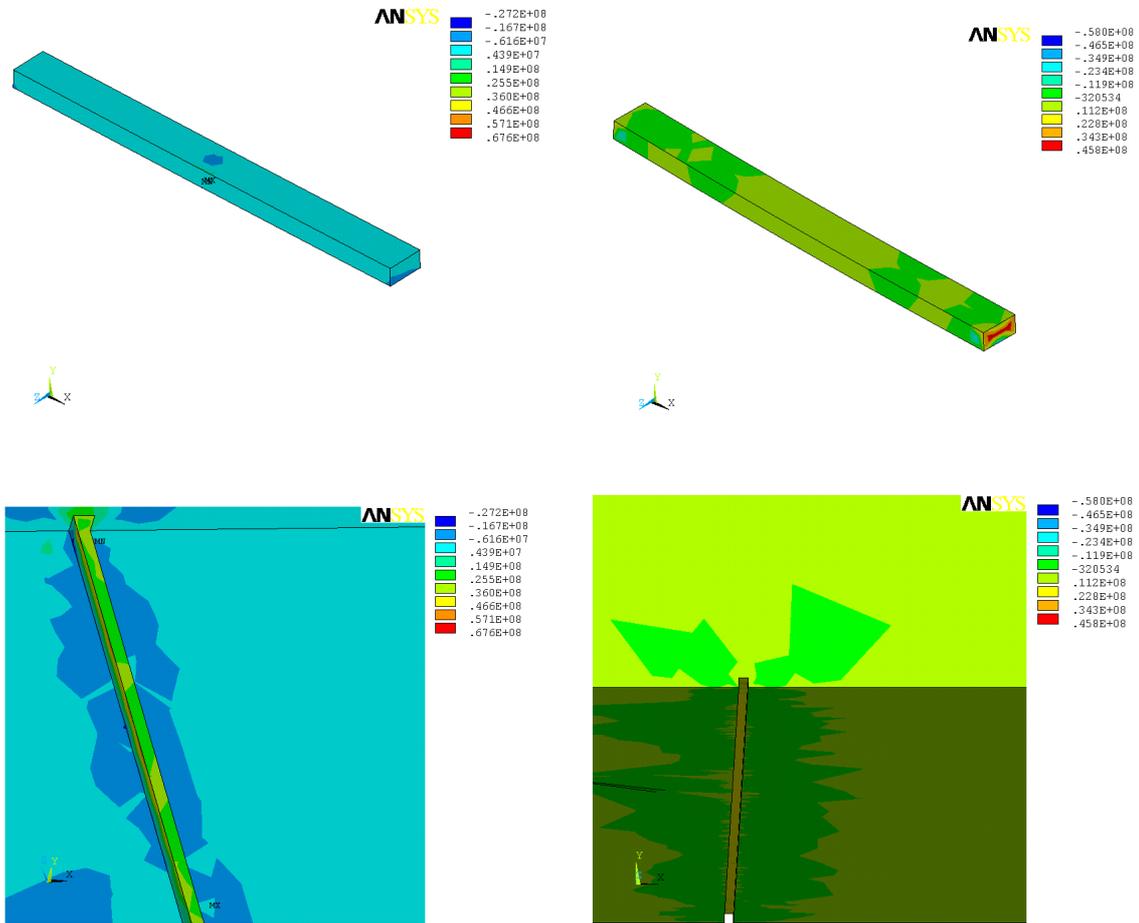


Figure IV. 8. a. Contraintes suivant l'axe Y

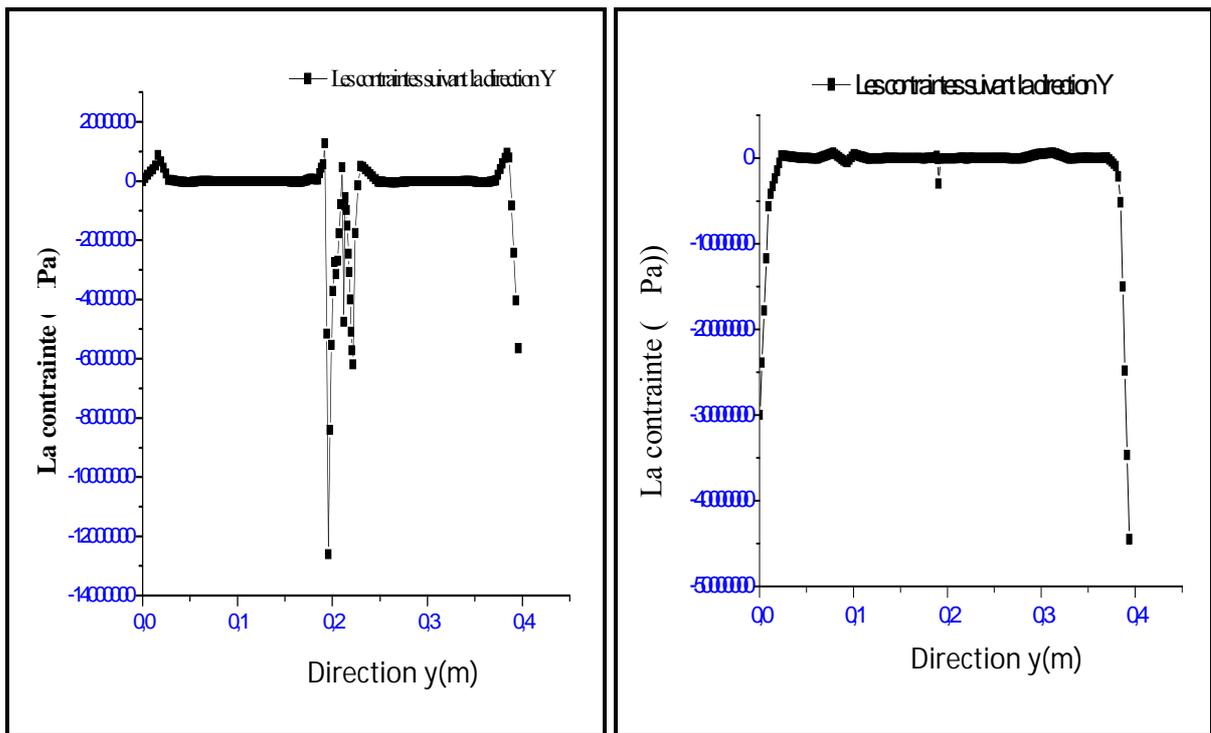


Figure IV. 8. b. Contrainte suivant Y (le deux cas)

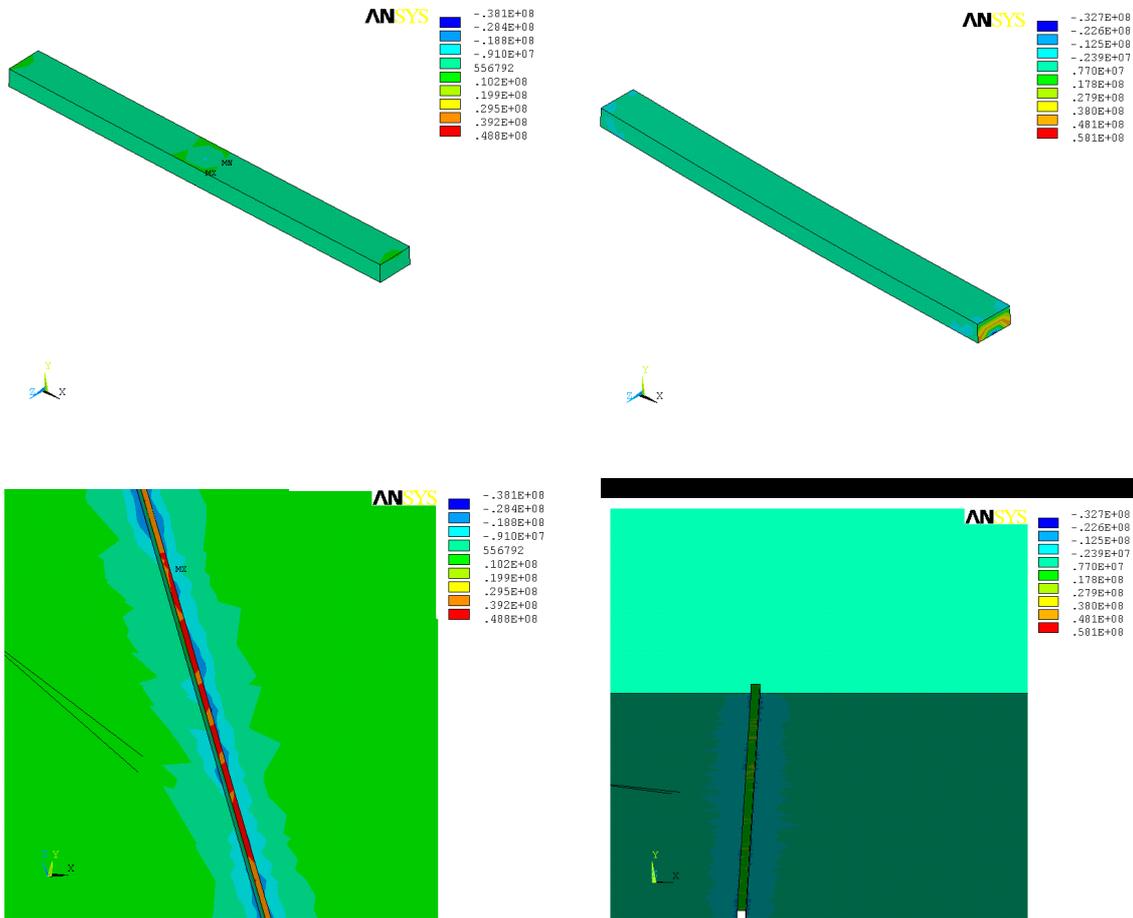


Figure IV. 9. a. Contrainte suivant l'axe Z

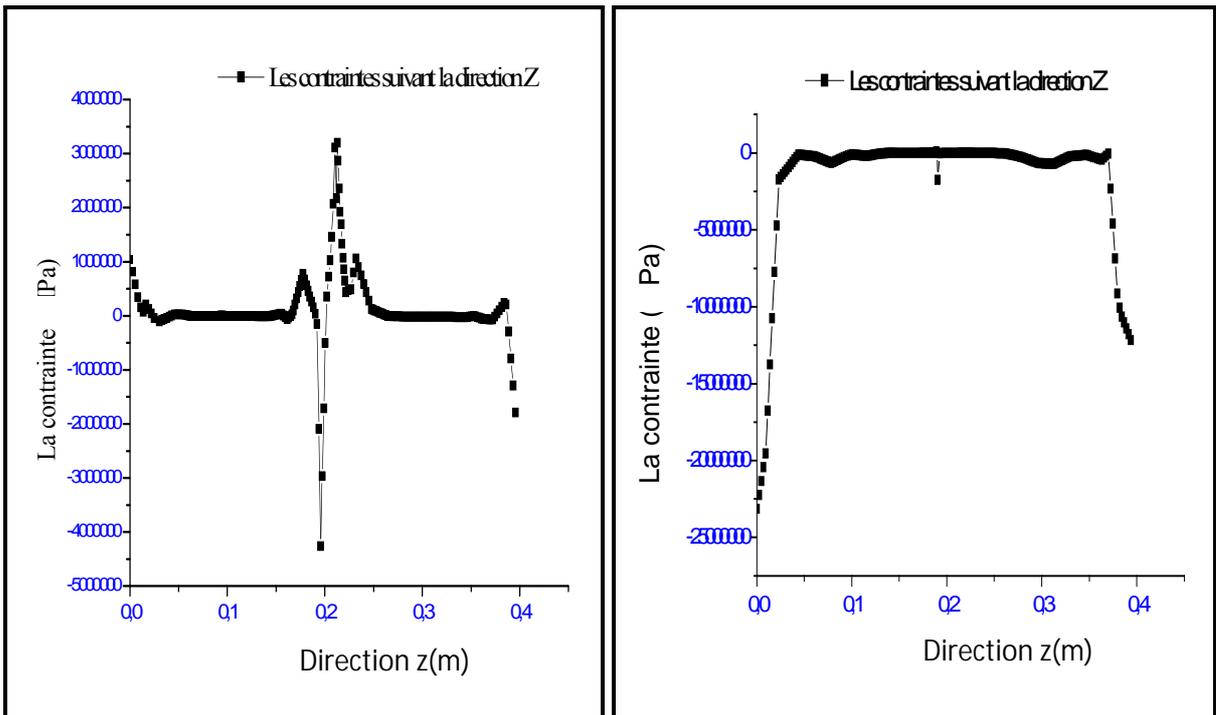


Figure IV. 9. b. Contrainte suivant Z (le deux cas)

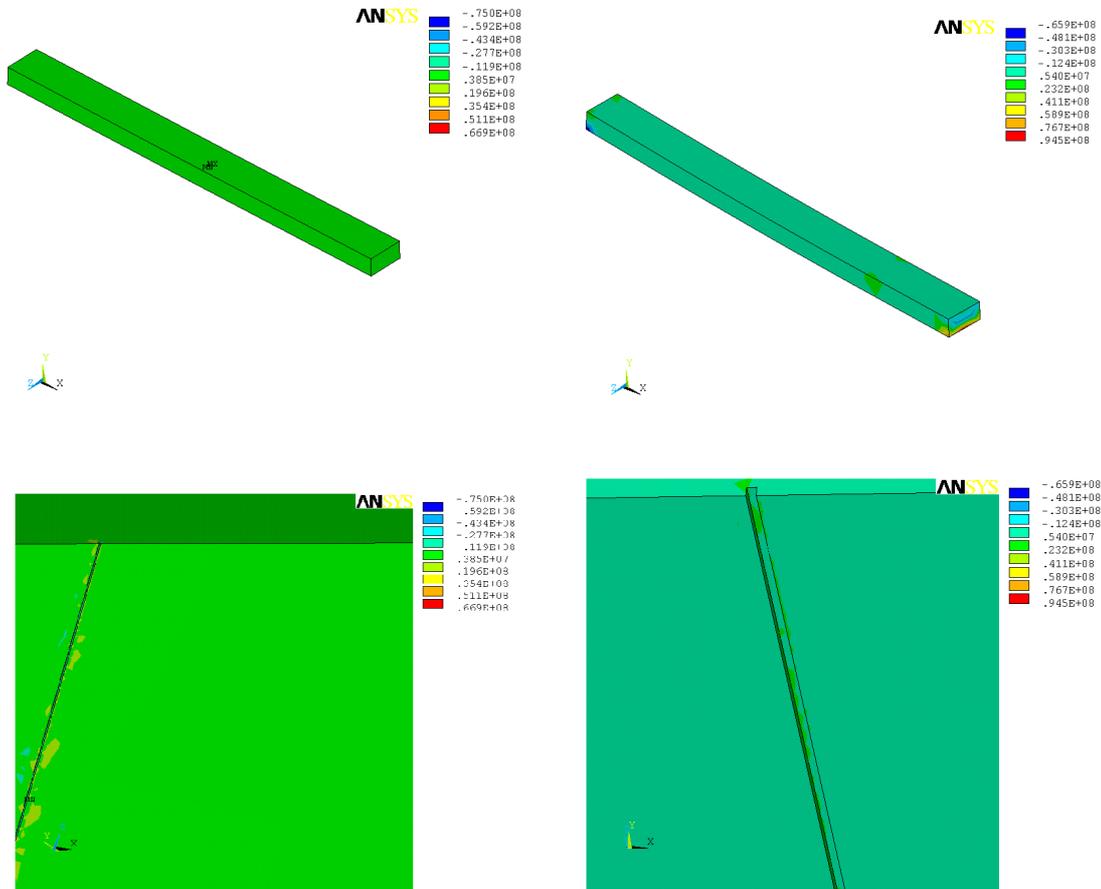


Figure IV. 10. a. Contraintes suivant le plan XY

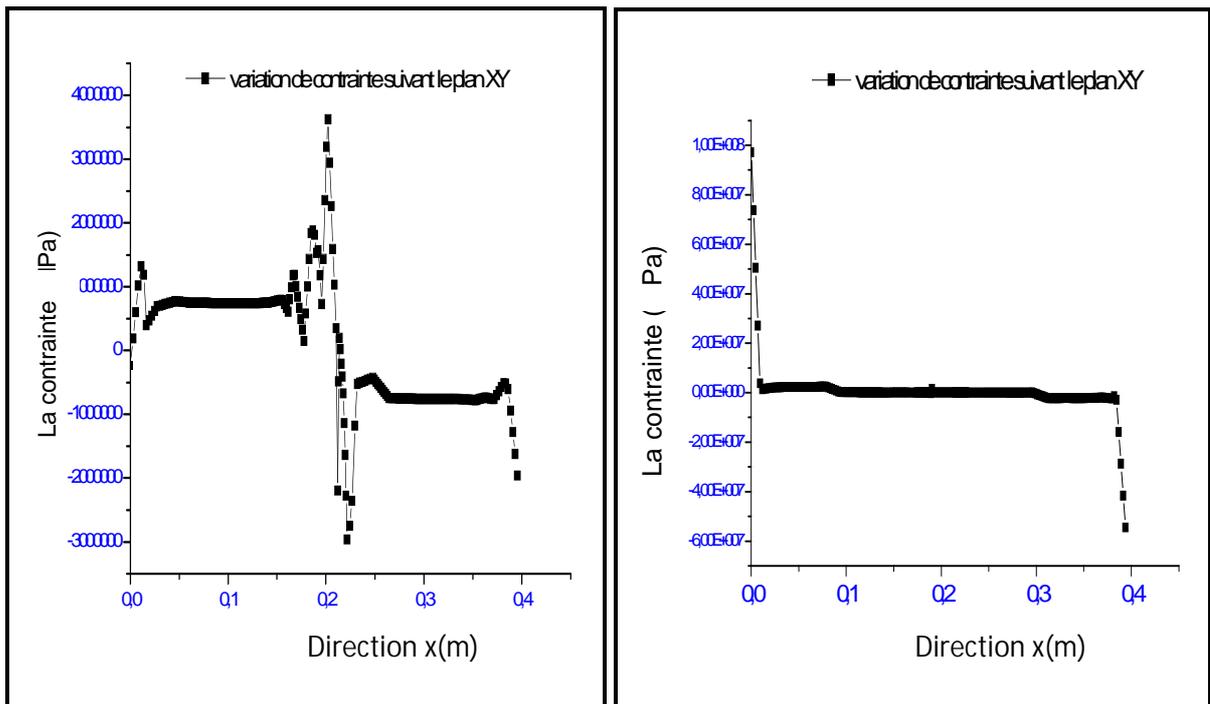


Figure IV.10. b. Contrainte suivant le plan XY (le deux cas)

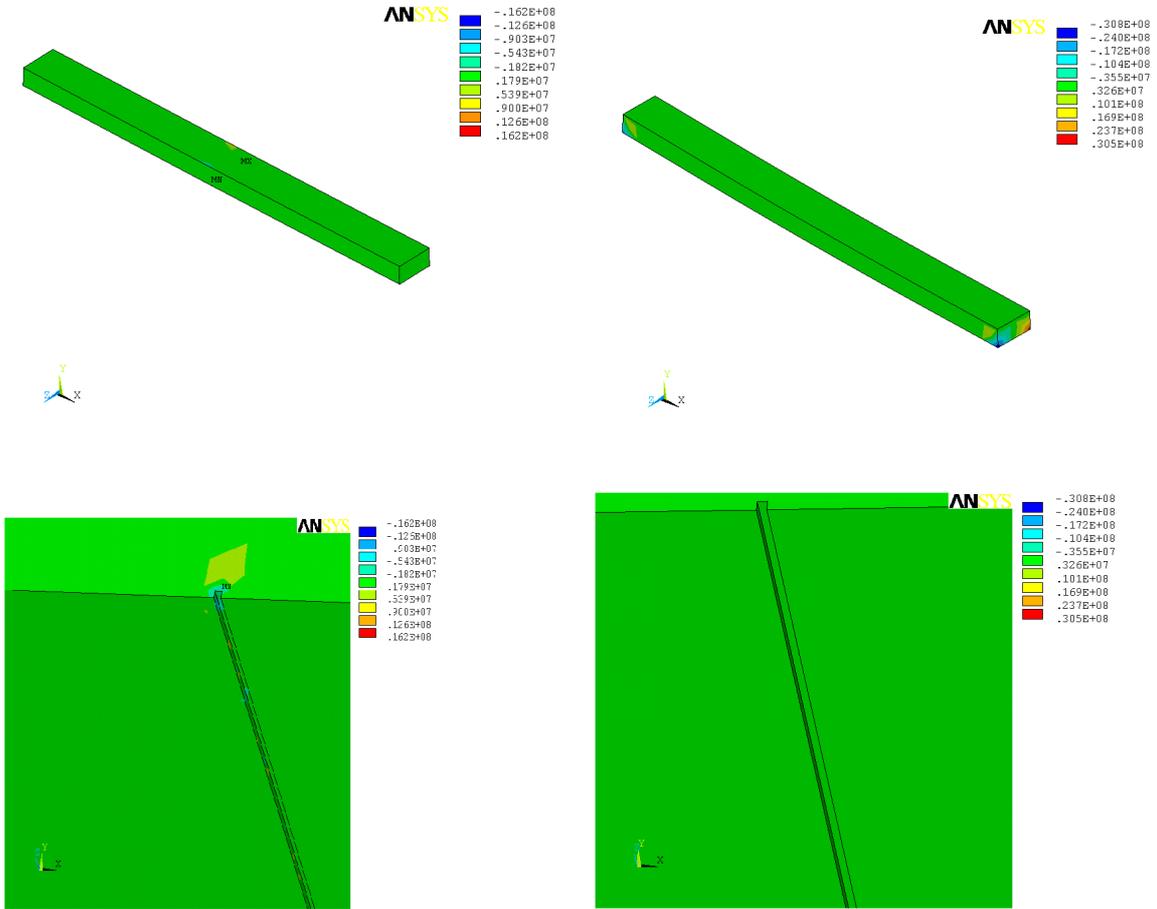


Figure IV. 11. a. Contraintes suivant le plan YZ

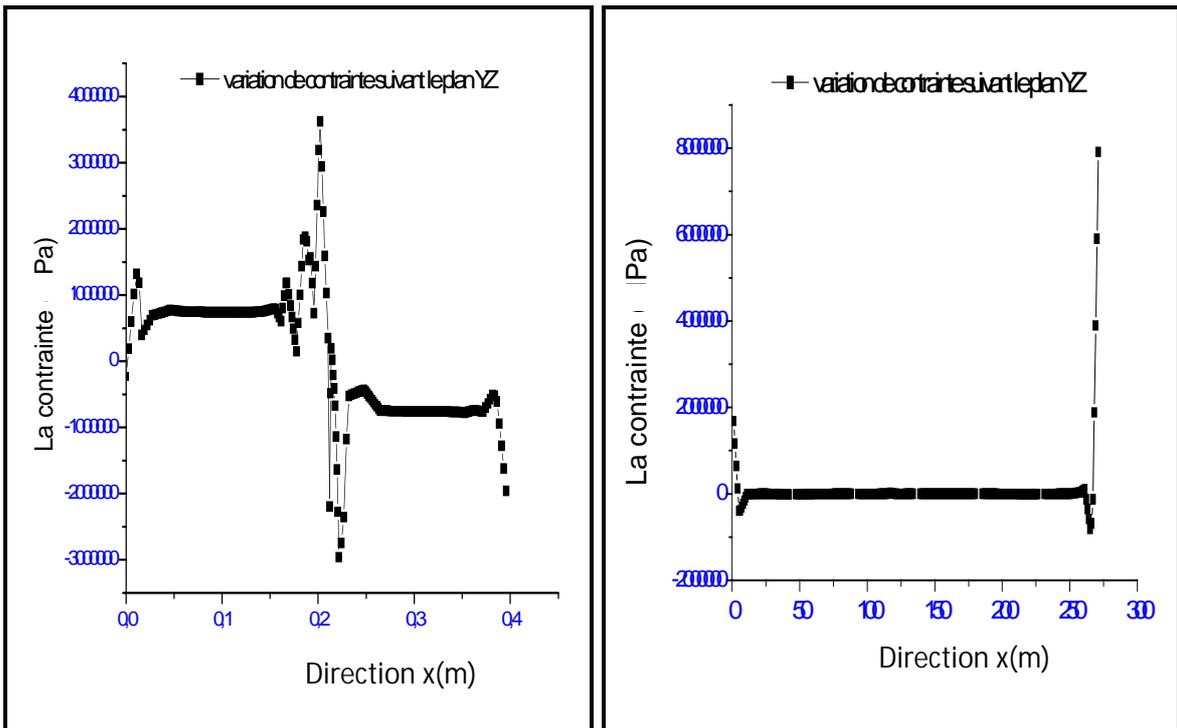


Figure IV.11. b. Contrainte suivant le plan YZ (le deux cas)

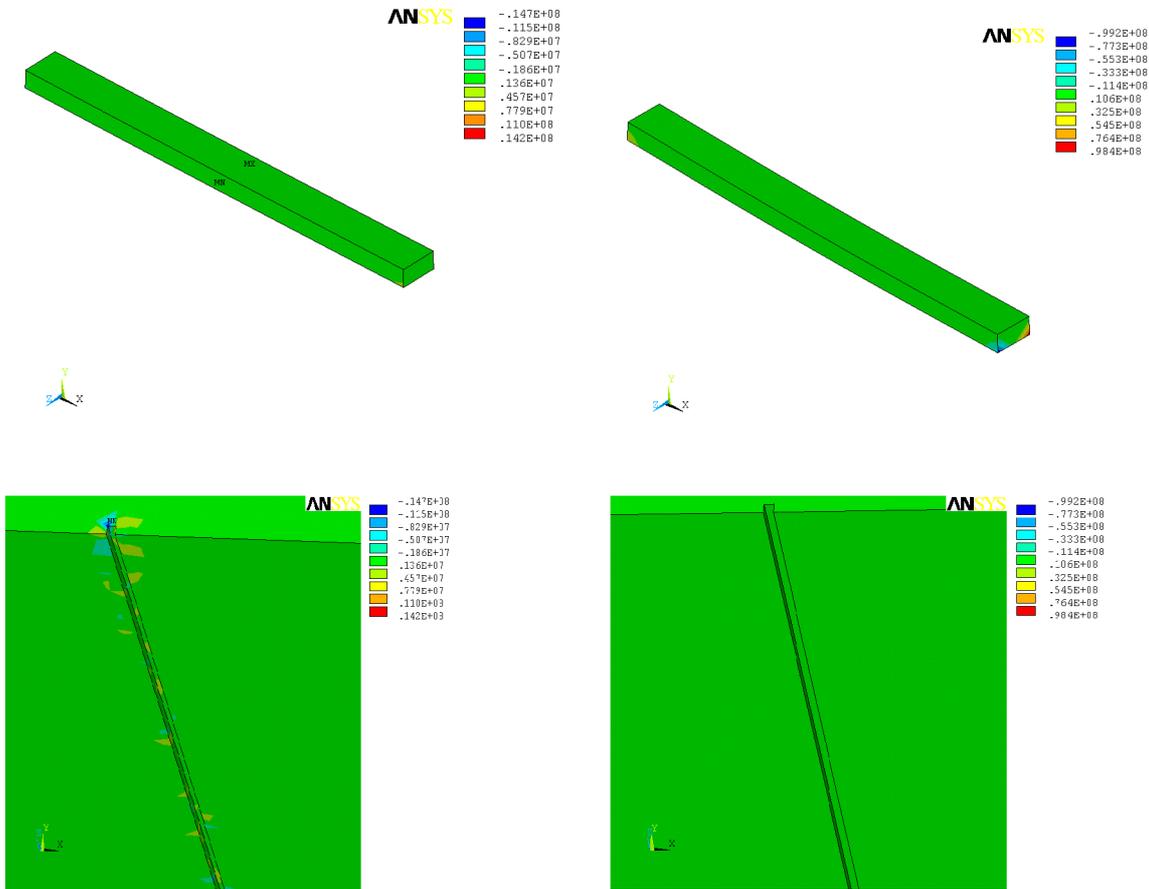


Figure IV. 12. a. Contraintes suivant le plan XZ

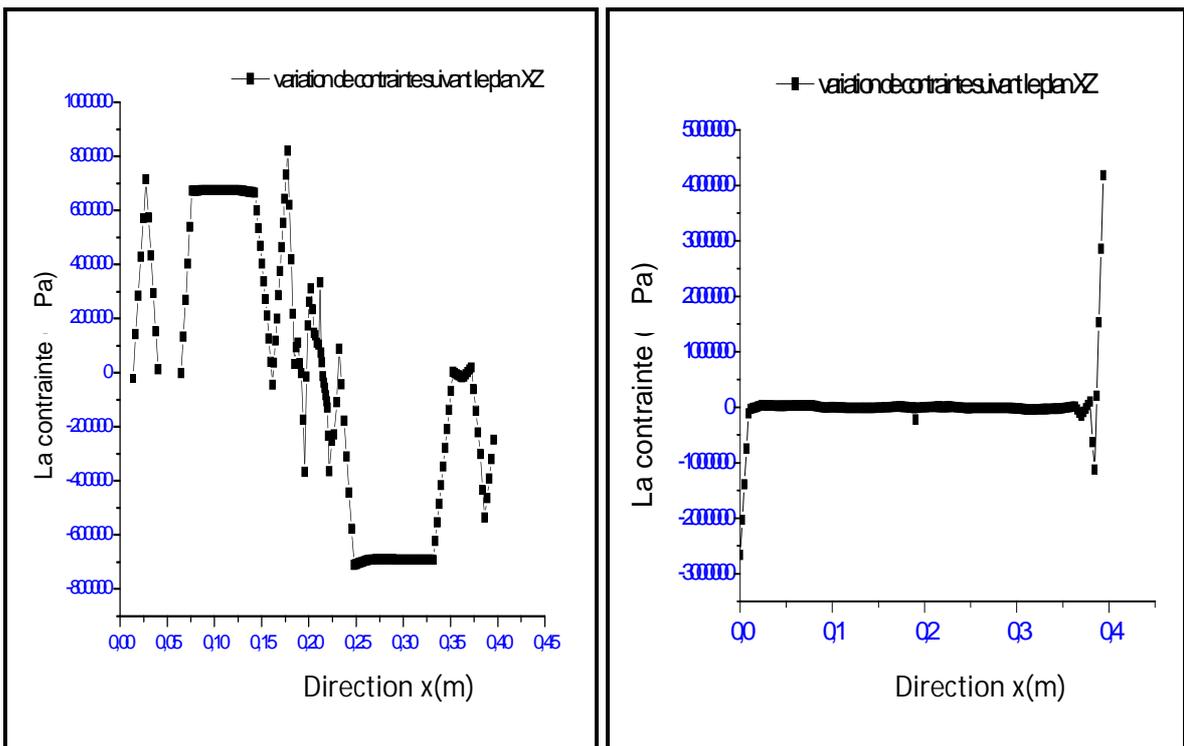


Figure IV.12. b. Contrainte suivant le plan XZ (le deux cas)

IV. 12. LES CONTRAINTES PRINCIPALES :

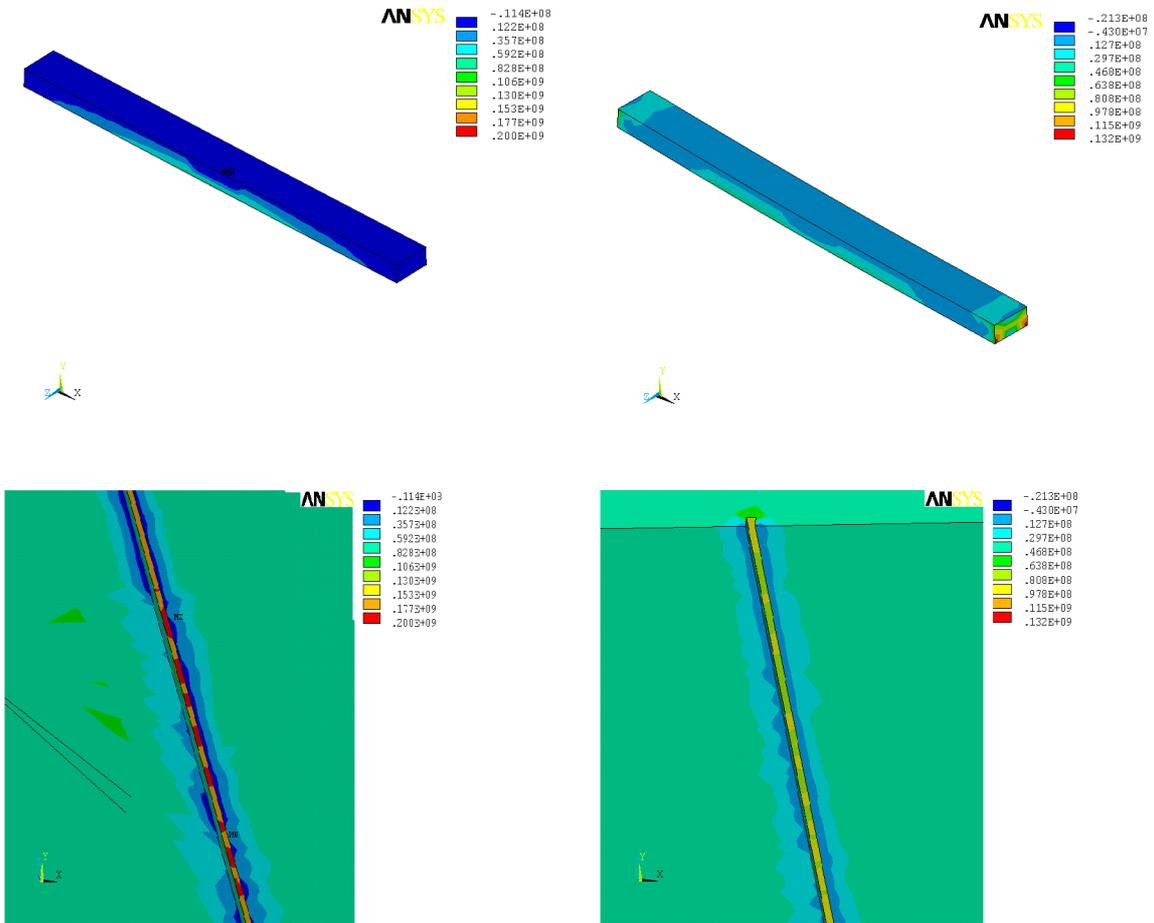


Figure IV. 13. a. La 1^{ère} Contrainte principale

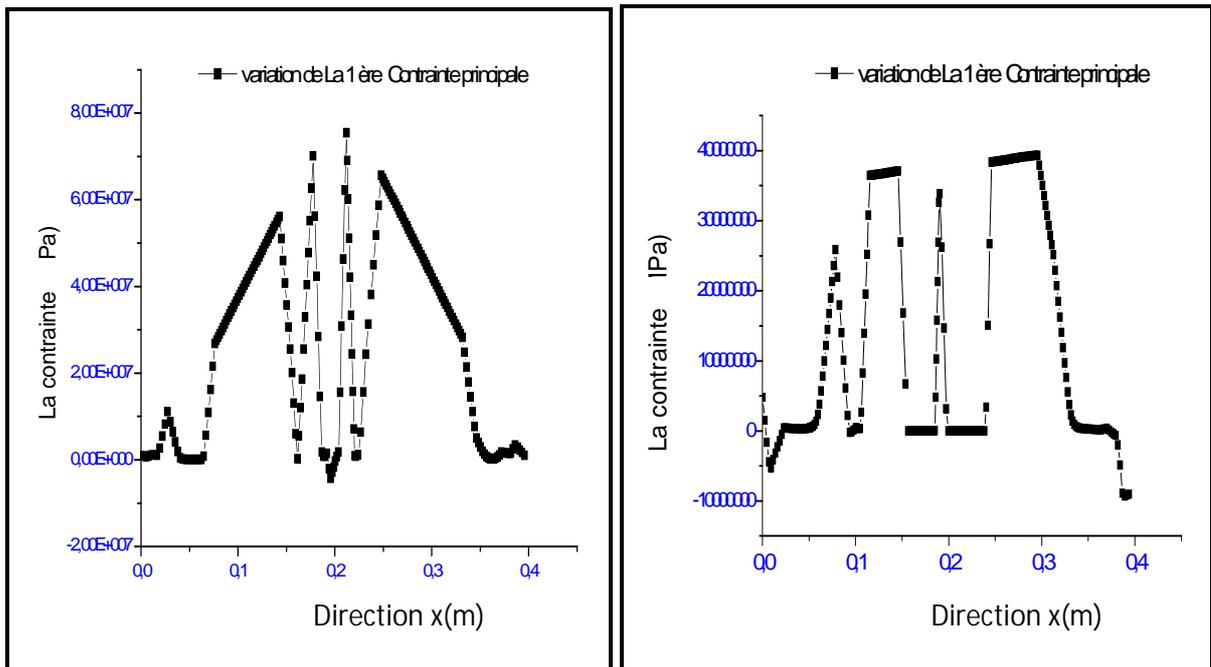


Figure IV. 13. b. La 1^{ère} Contrainte principale(le deux cas)

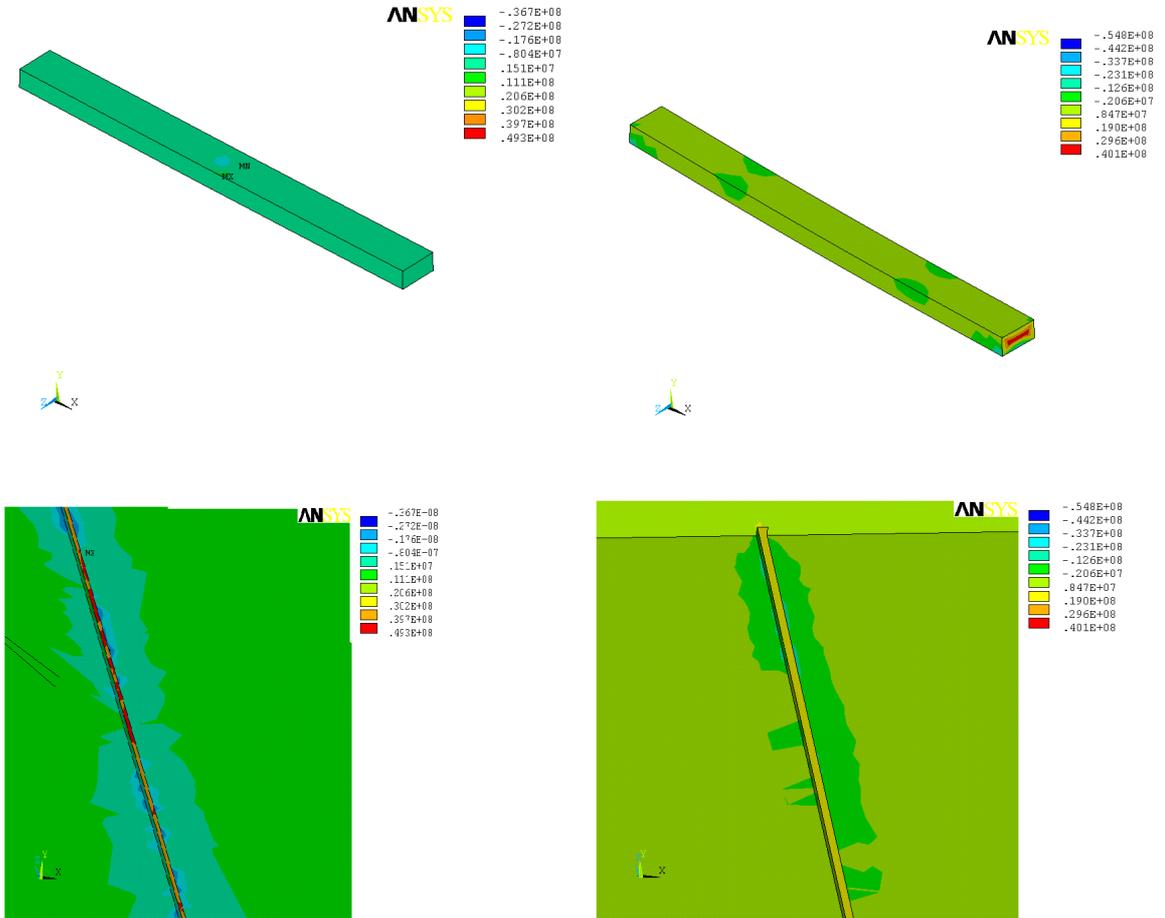


Figure IV. 14. a. La 2^{ème} Contrainte principale

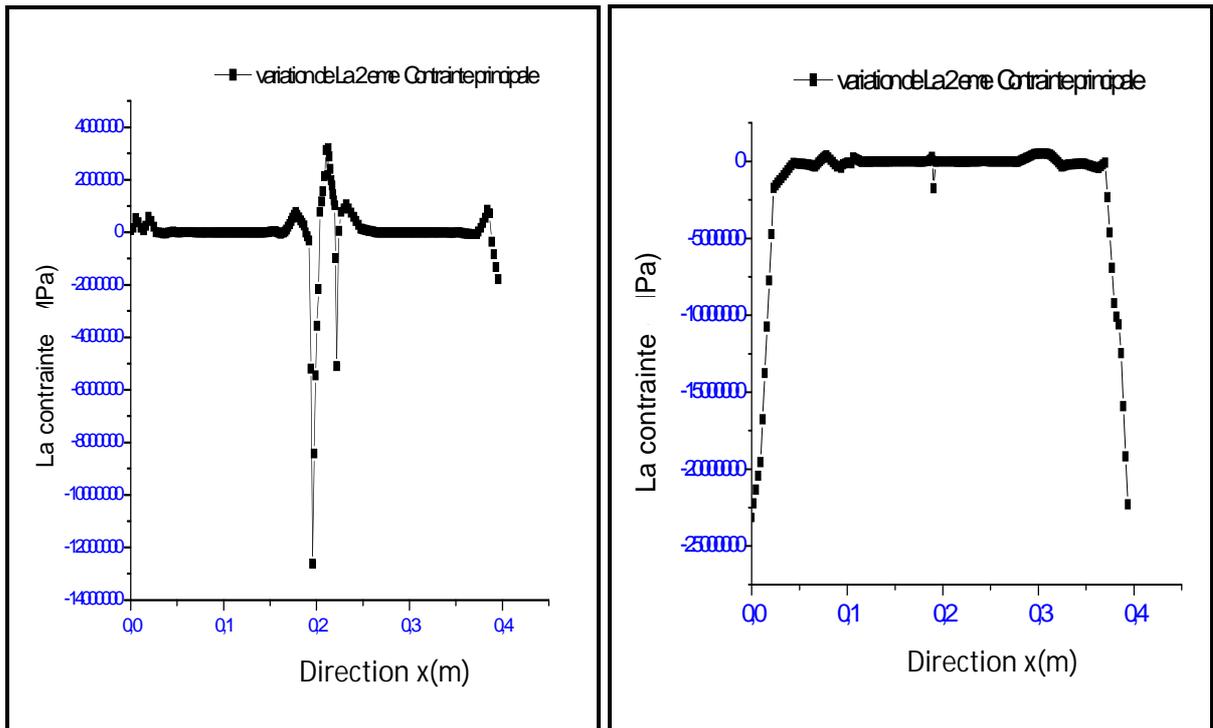


Figure IV. 14. b. La 2^{ème} Contrainte principale (le deux cas)

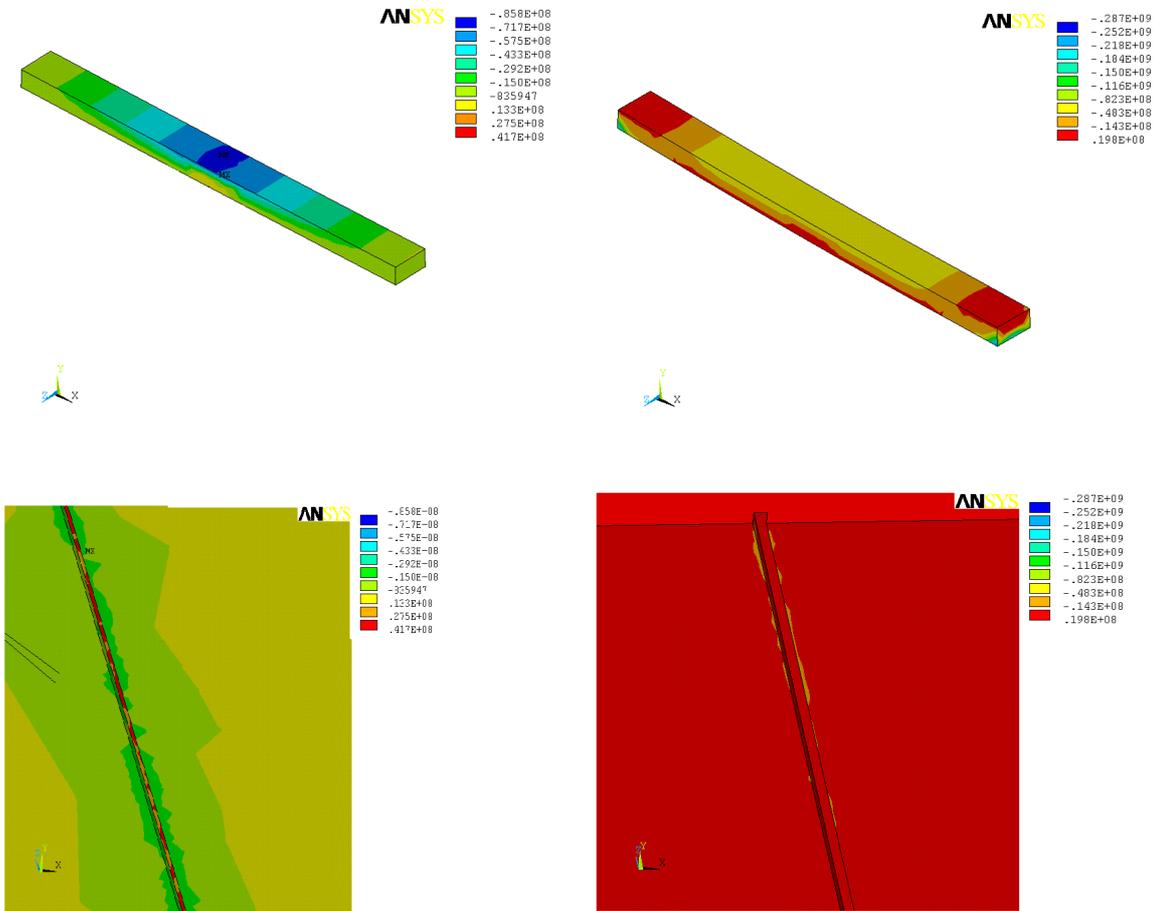


Figure IV. 15. a. La 3^{ème} Contrainte principale

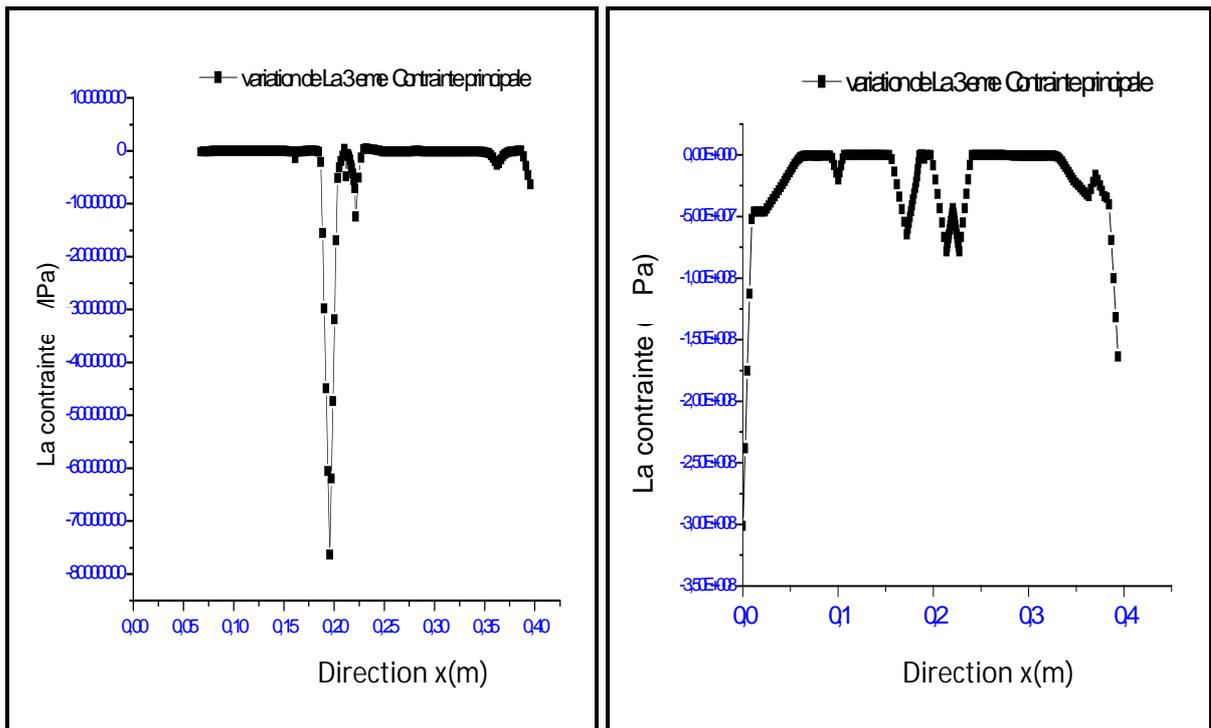


Figure IV.15. b. La 2^{ème} Contrainte principale (le deux cas)

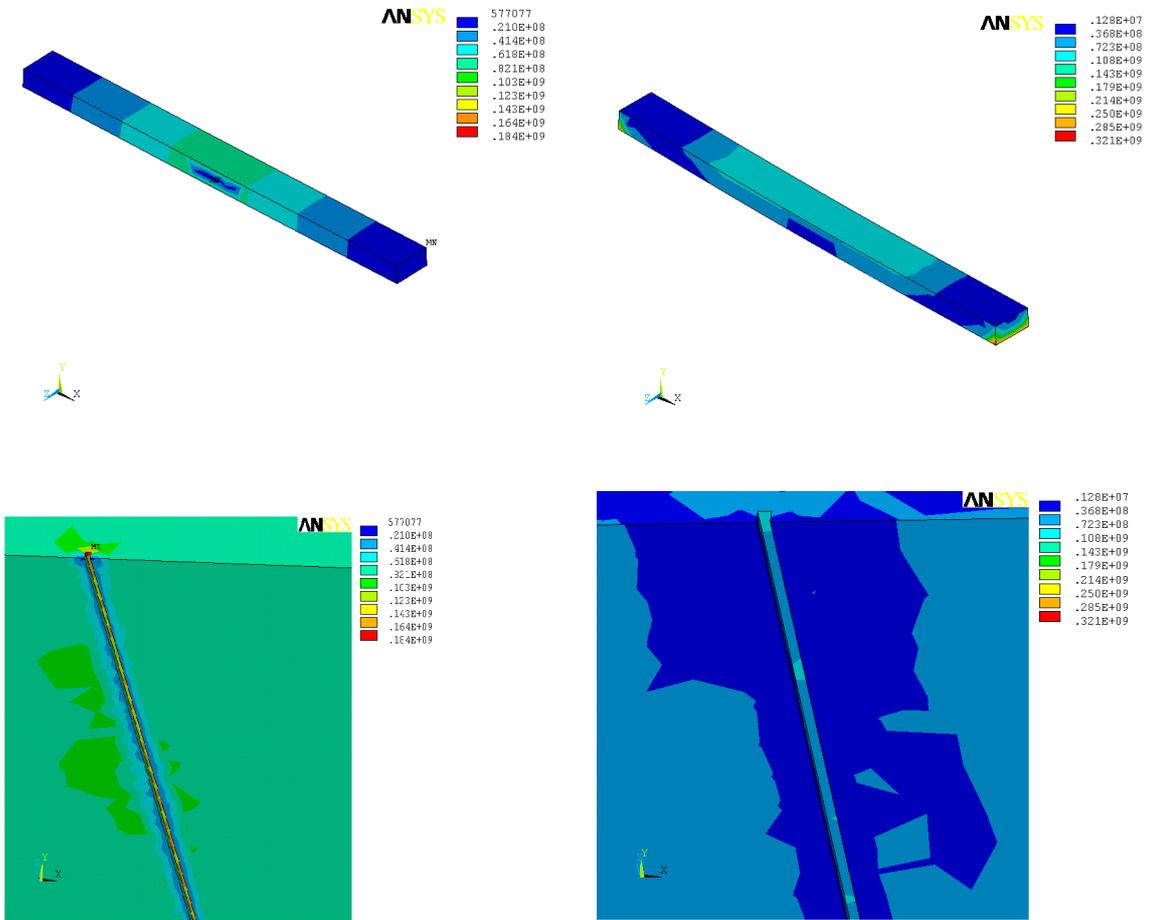


Figure IV. 16. a. Intensité de Contrainte

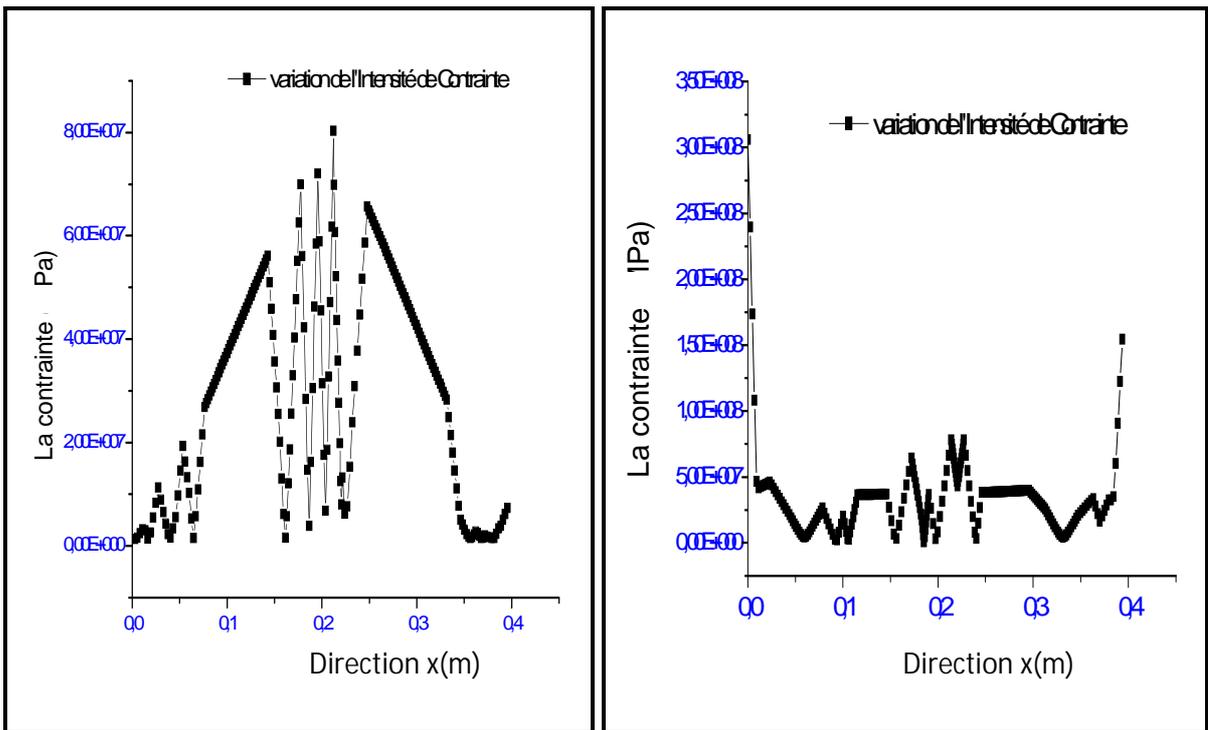


Figure IV. 16. b. Intensité de Contrainte (le deux cas)

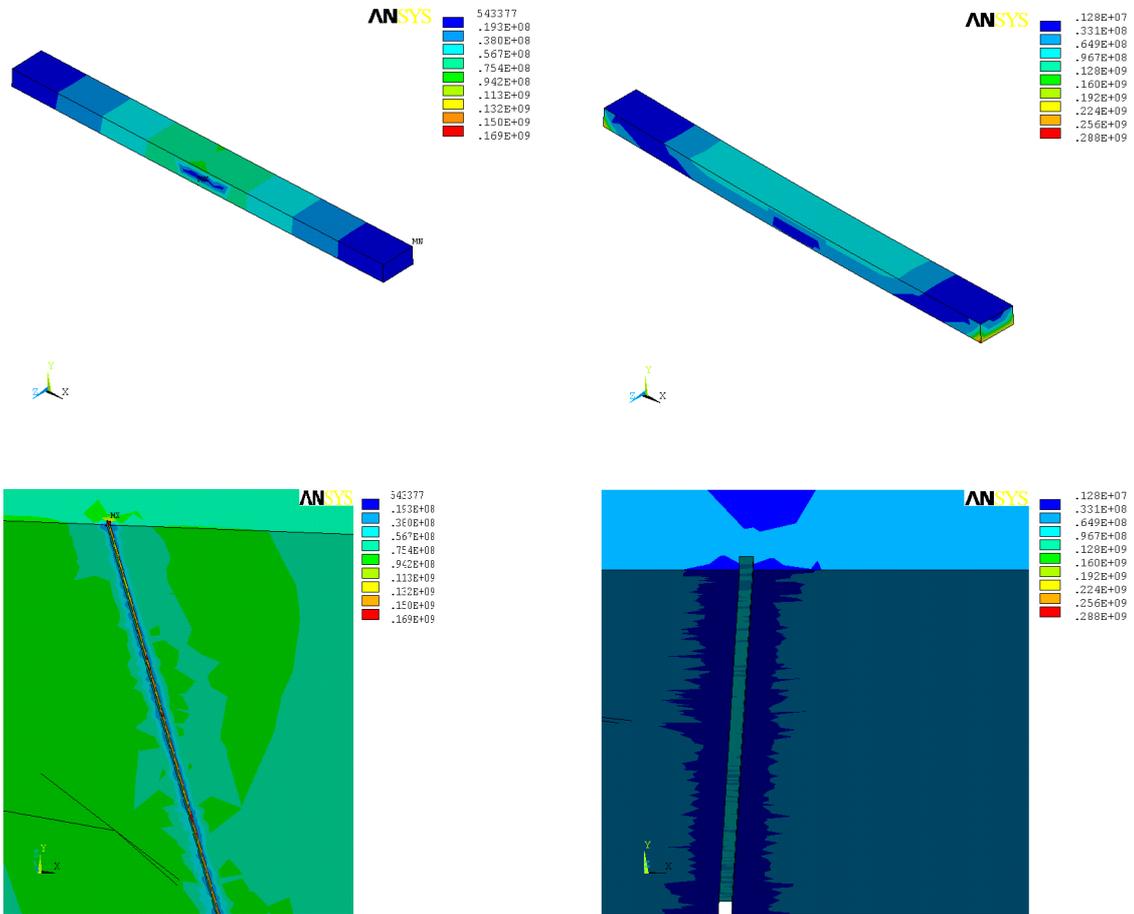


Figure IV. 17. a. Contrainte de Von mises

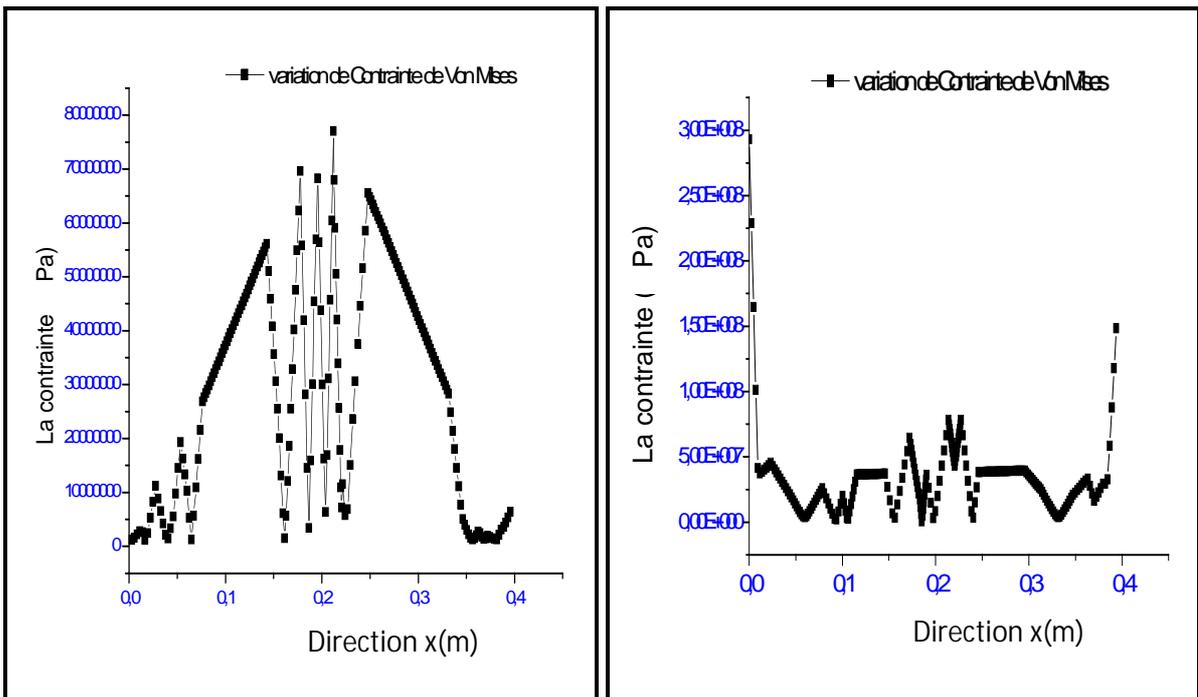


Figure IV. 17. b. Contrainte de Von mises

IV. 13. LES DEFORMATIONS ELASTIQUES :

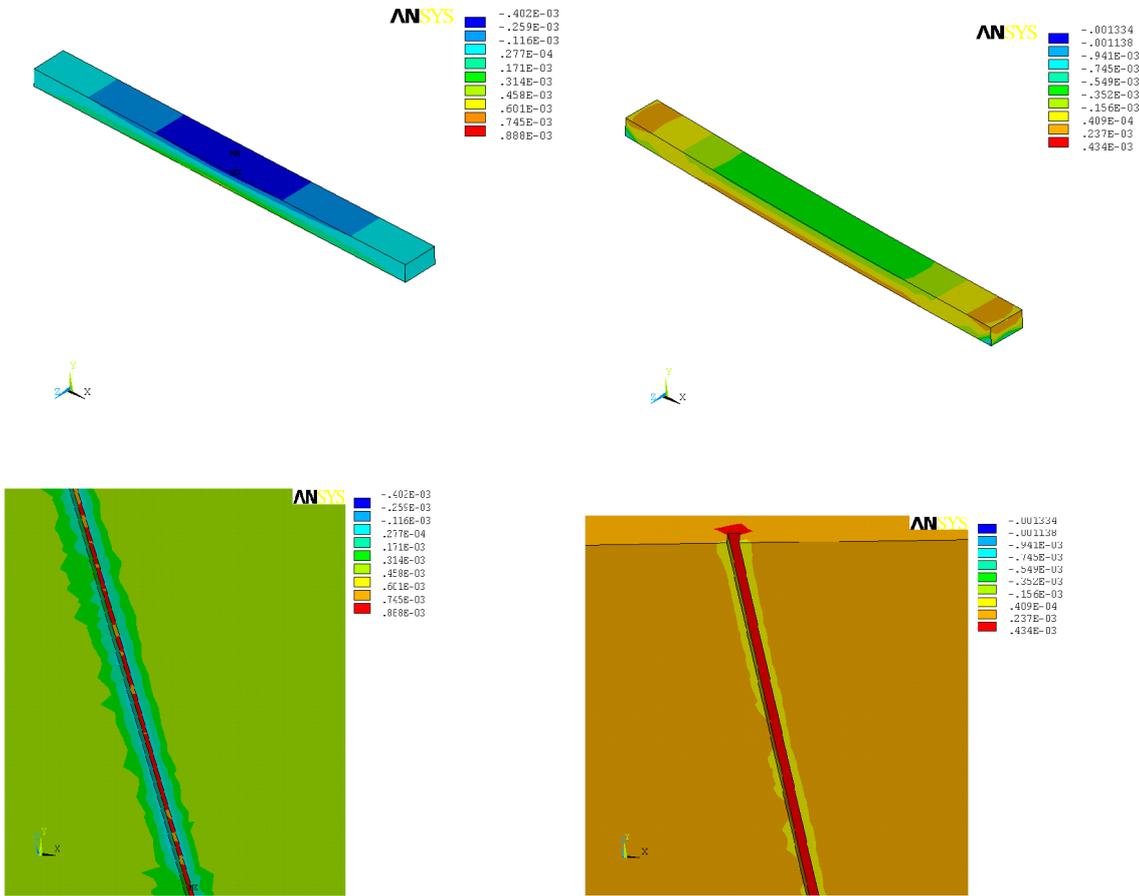


Figure IV. 18. a. Déformation élastique suivant l'axe X

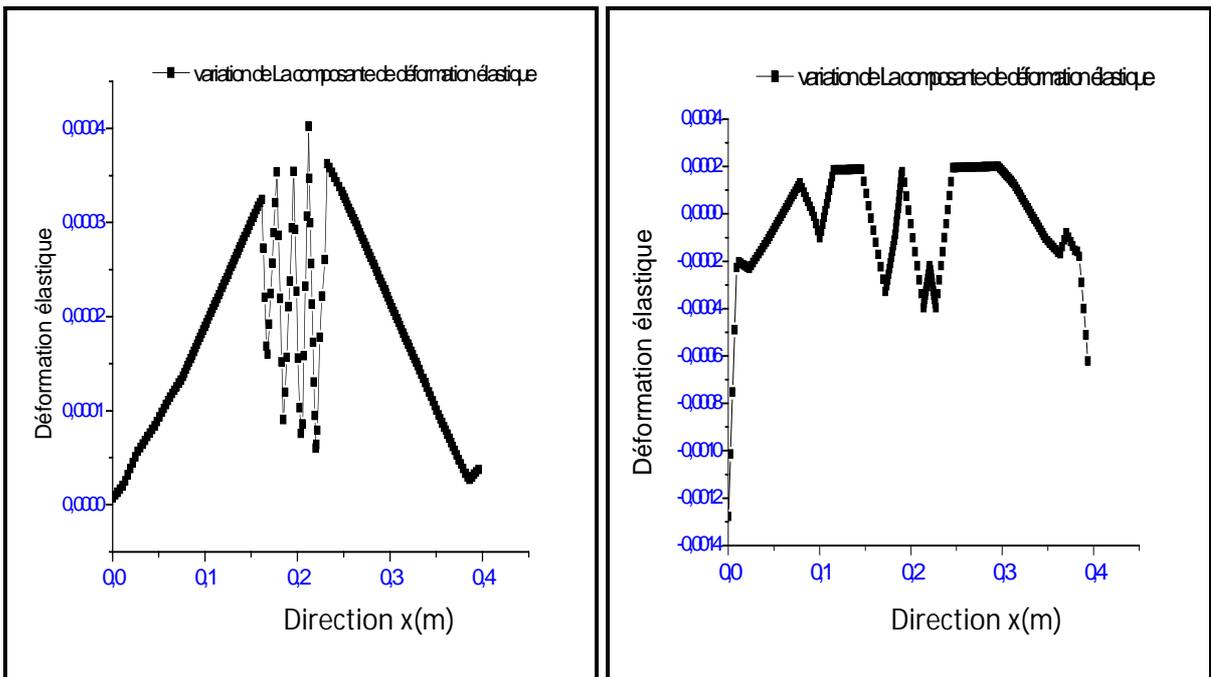


Figure IV. 18. b. Déformation élastique suivant l'axe X

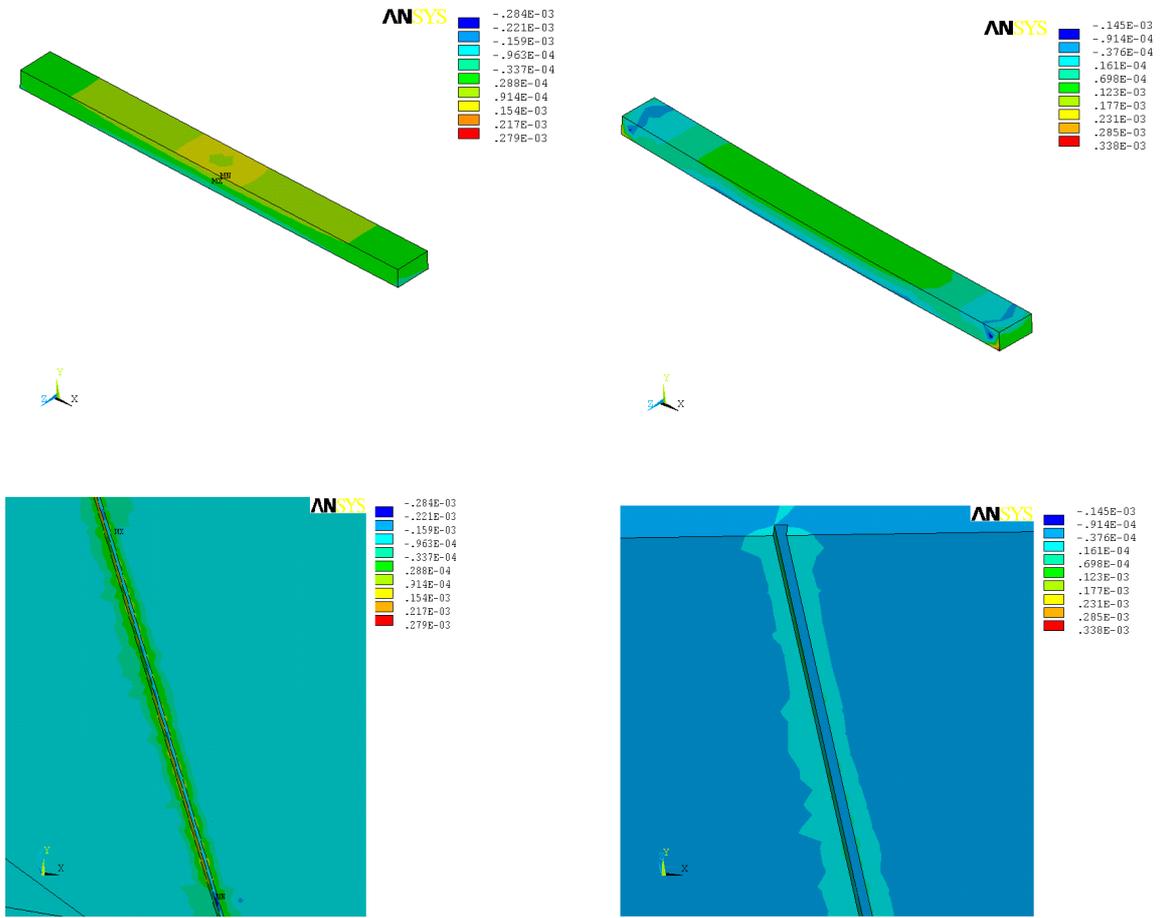
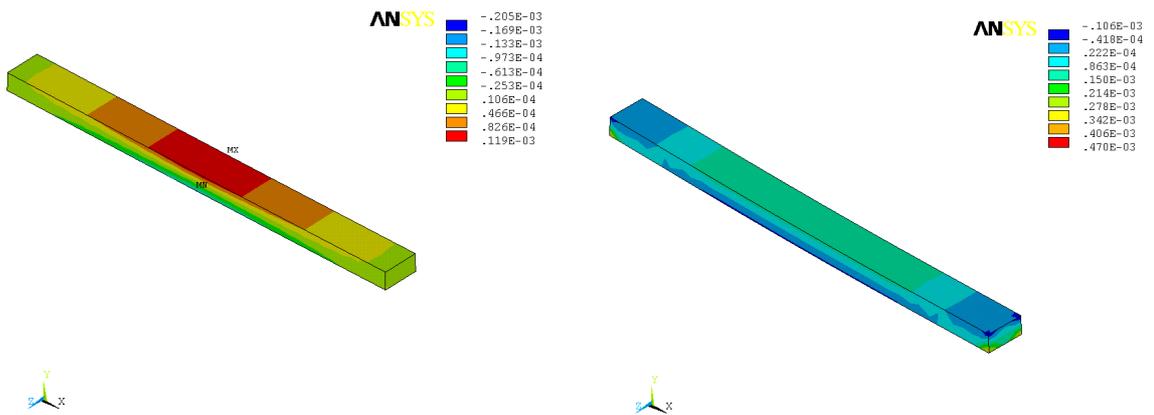


Figure IV. 19. Déformation élastique suivant l'axe Y



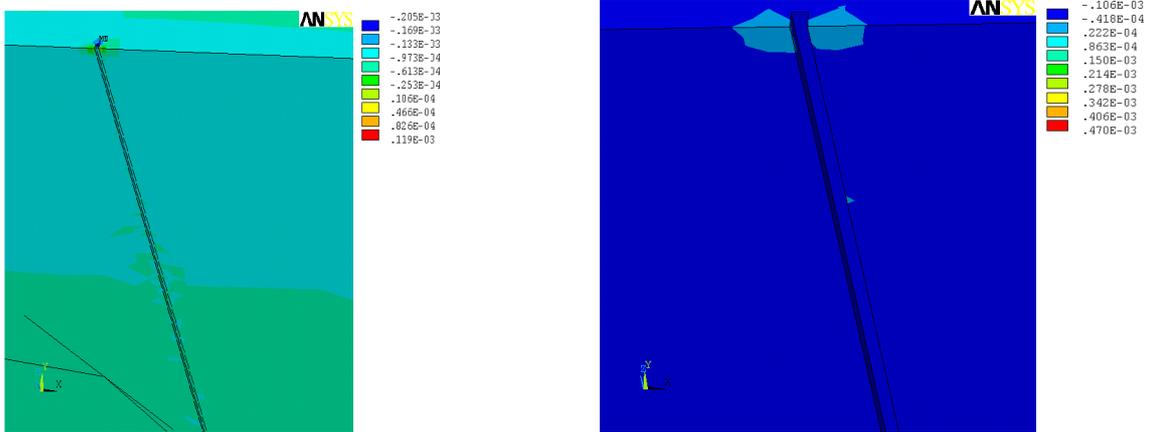


Figure IV. 20. Déformation élastique suivant l'axe Z

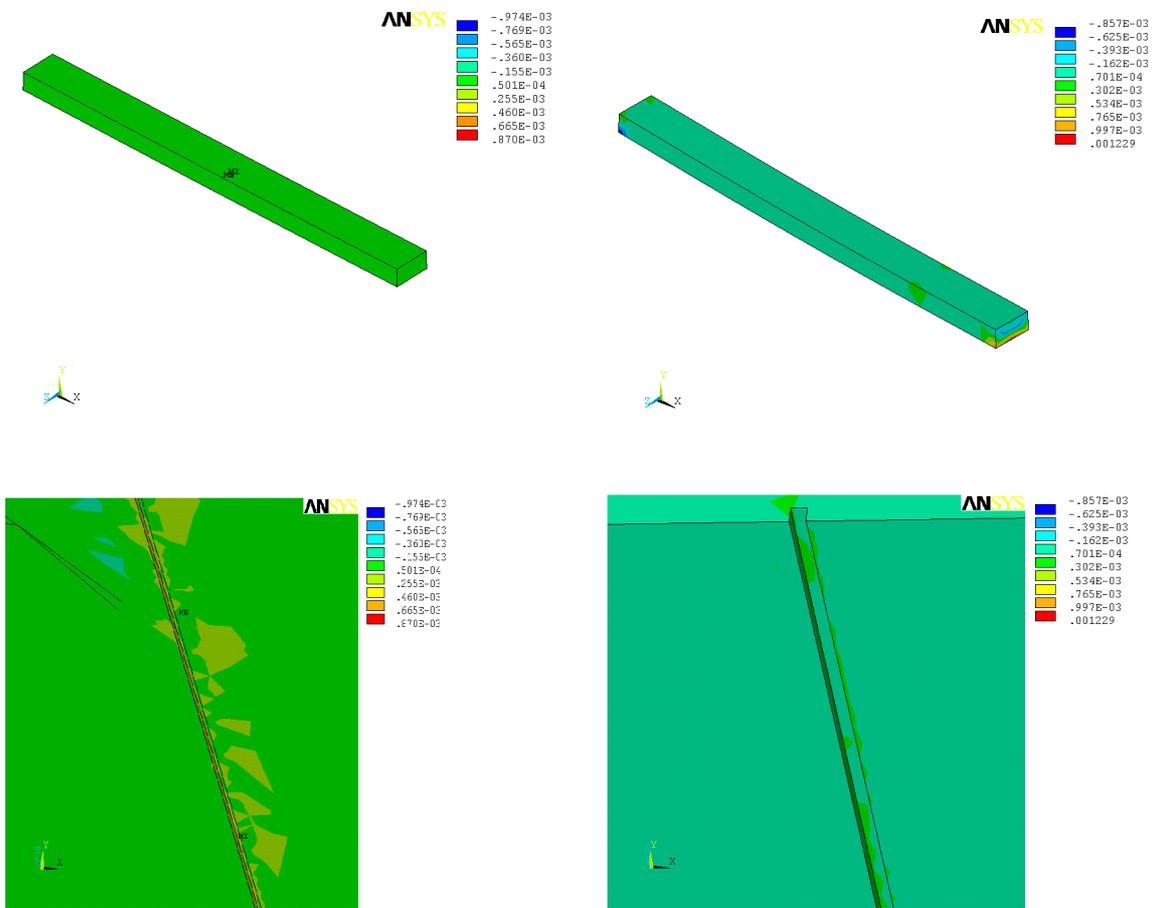


Figure IV. 21. Déformation élastique suivant le plan XY

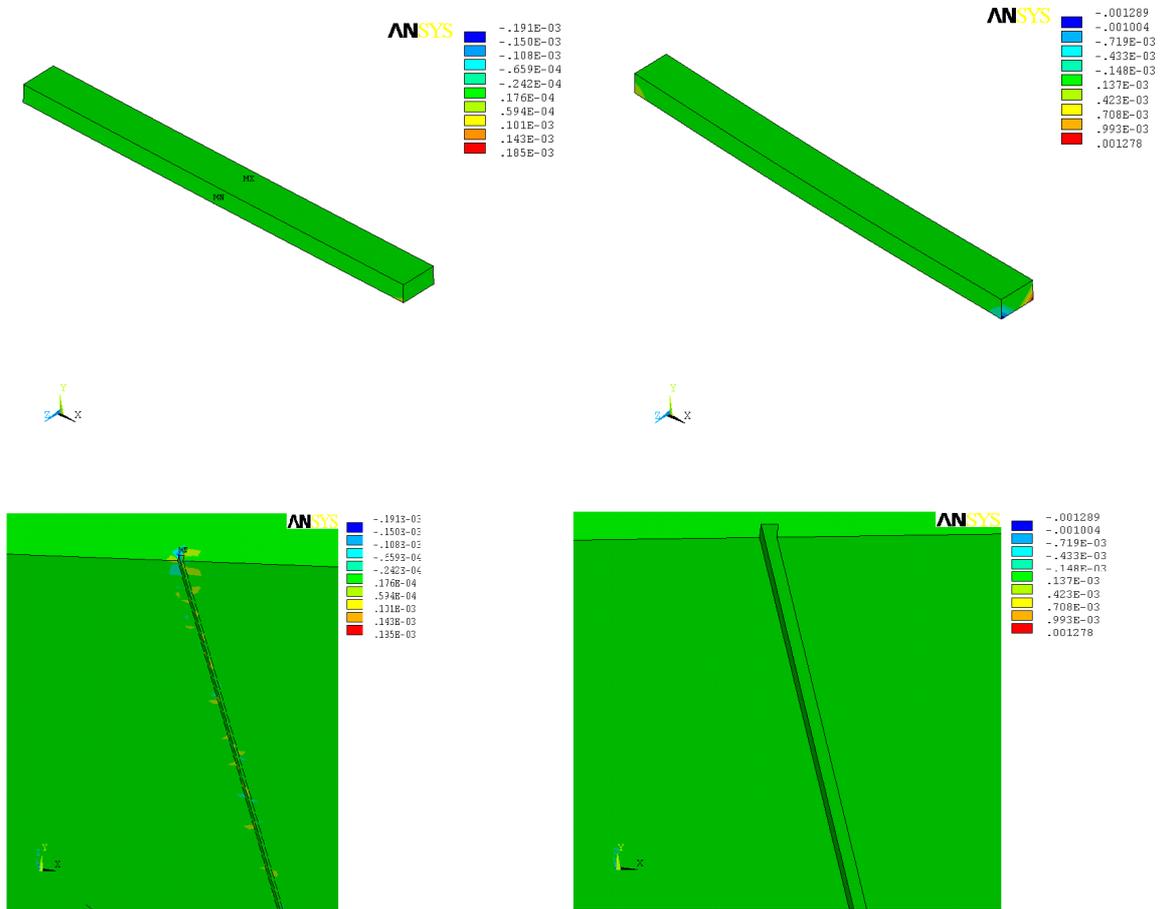
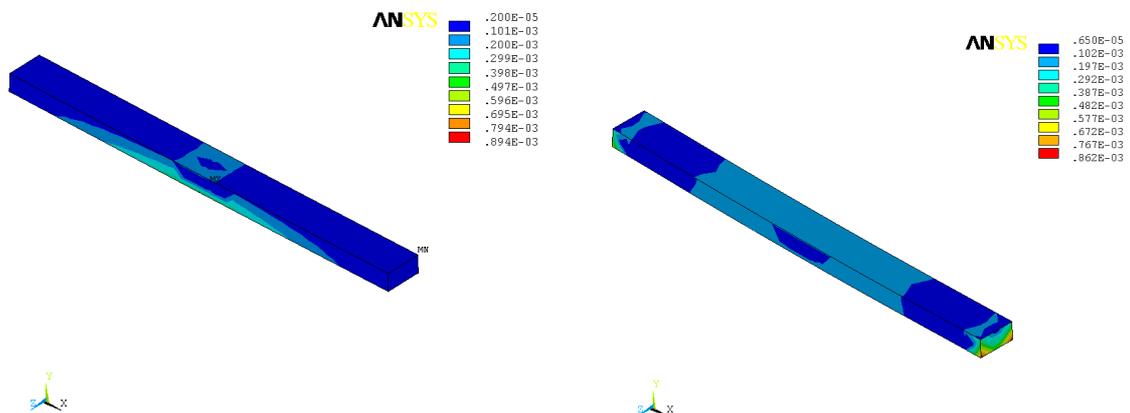


Figure IV. 22. Déformation élastique suivant le plan XZ

IV. 14. LES DEFORMATIONS ELASTIQUES PRINCIPALES



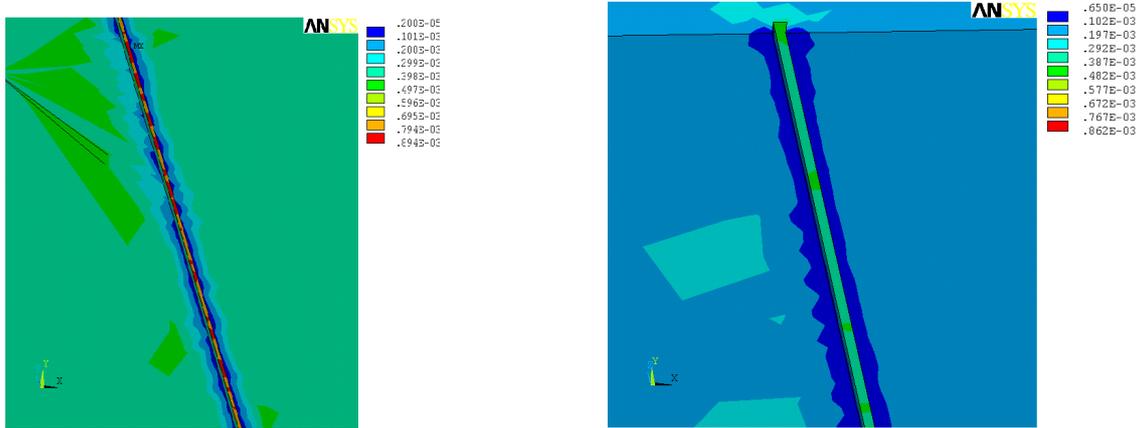


Figure IV. 23. La 1^{ère} Contrainte principale

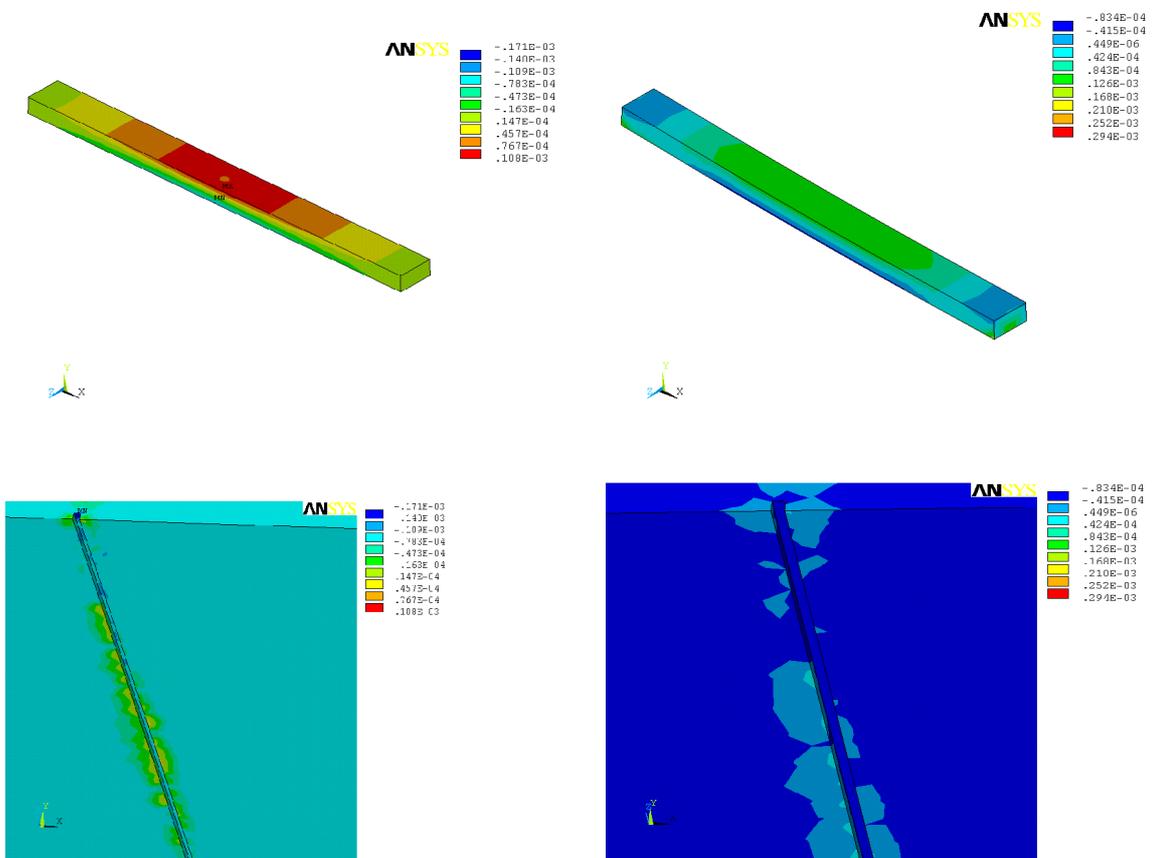


Figure IV. 24. La 2^{ème} Contrainte principale

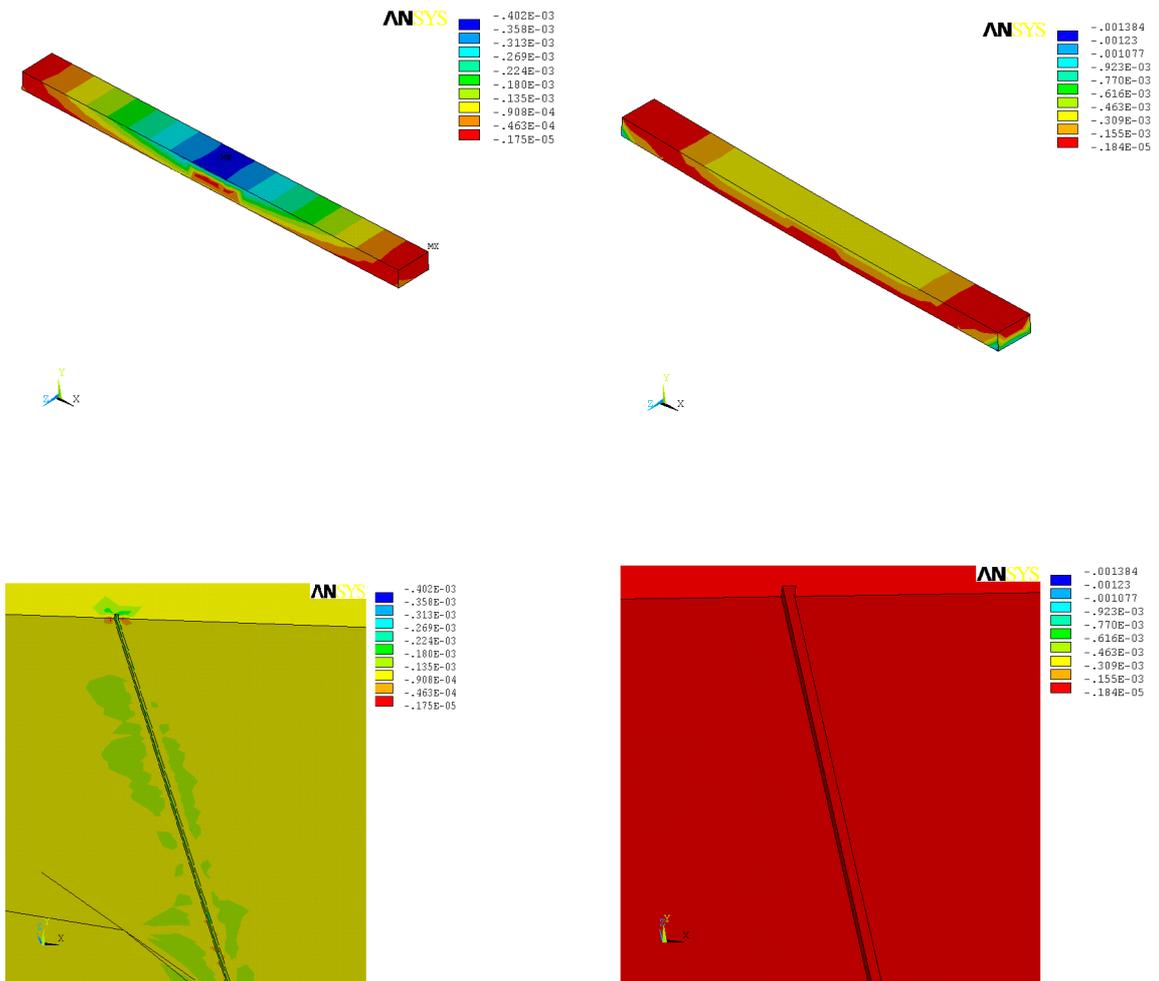


Figure IV. 25. La 3^{ème} Contrainte principale

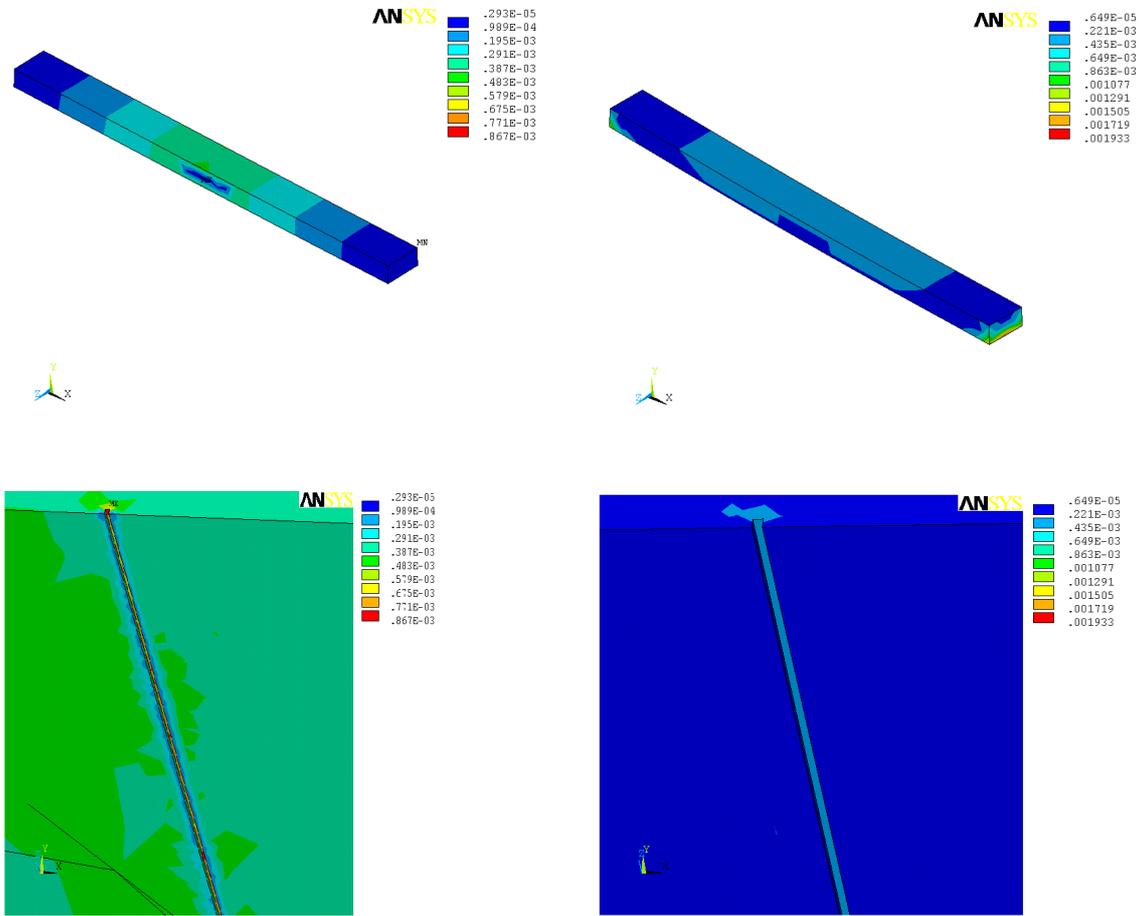


Figure IV. 26. a. Déformation élastique de Von mises

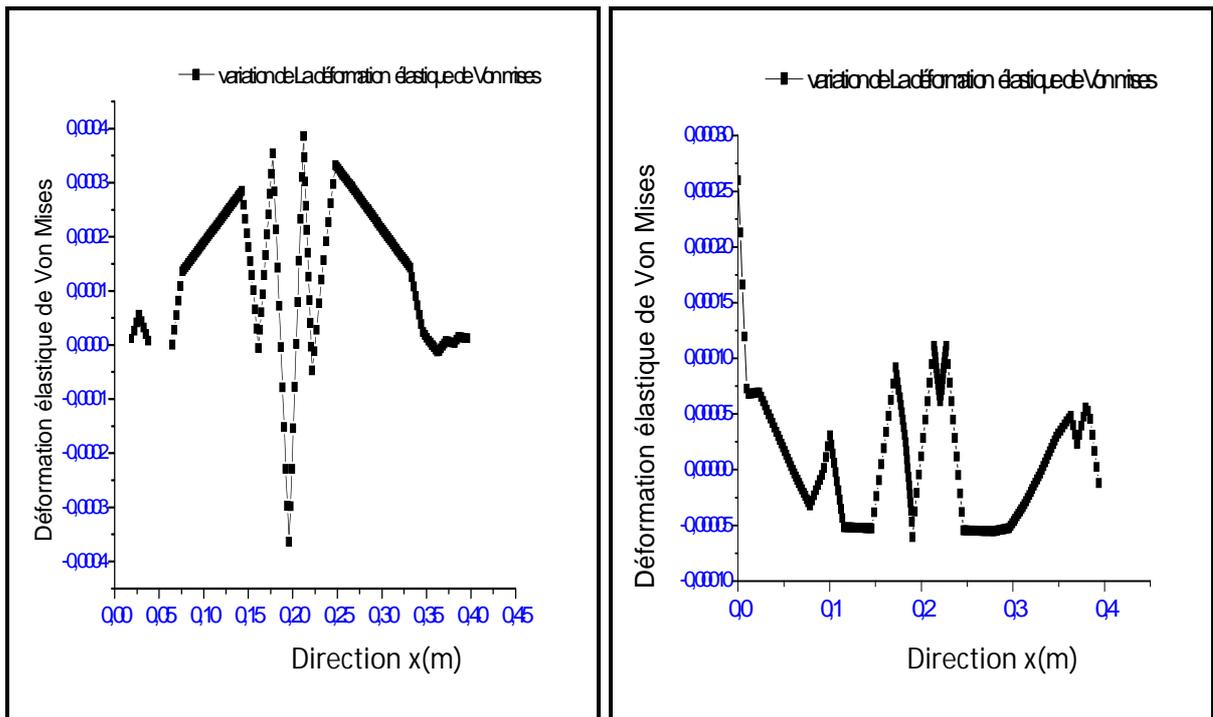


Figure IV. 26. b. Déformation élastique de Von mises

IV. 15. DEUXIEME CAS : DIMENSION DE LA FISSURE

Nous allons étudier maintenant le comportement de la poutre fissurée, en variant le dimensionnement de celle-ci en considérant l'effet du chargement. Nous discutons le cas d'une poutre en flexion trois points.

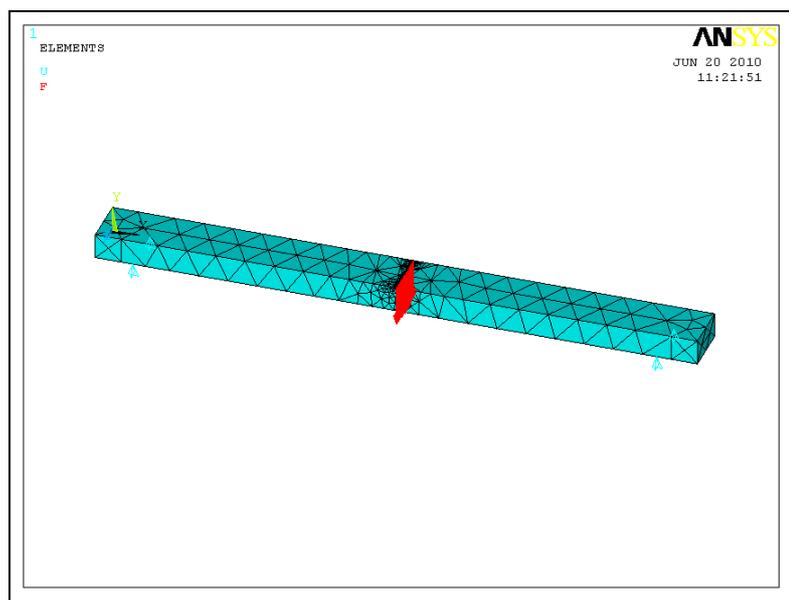


Figure IV.27. Poutre avec fissure centrale élevée

IV. 15. 1. DEFORMATIONS DE LA POUTRE SUIVANT LES AXES X, Y ET Z

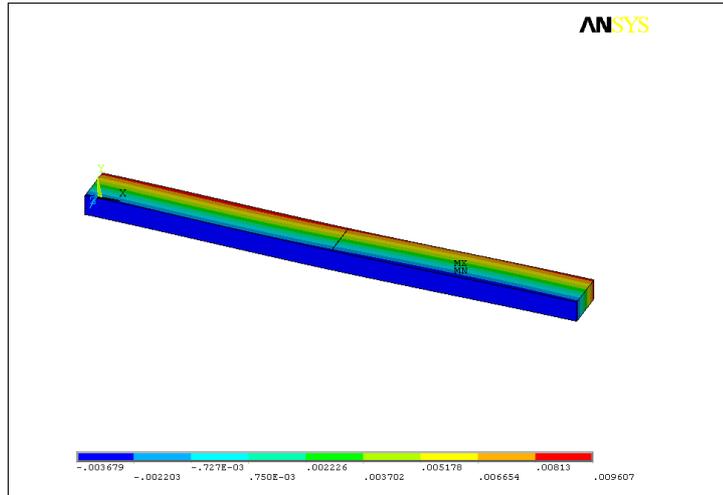


Figure IV. 28. a Déformations suivant l'axe X

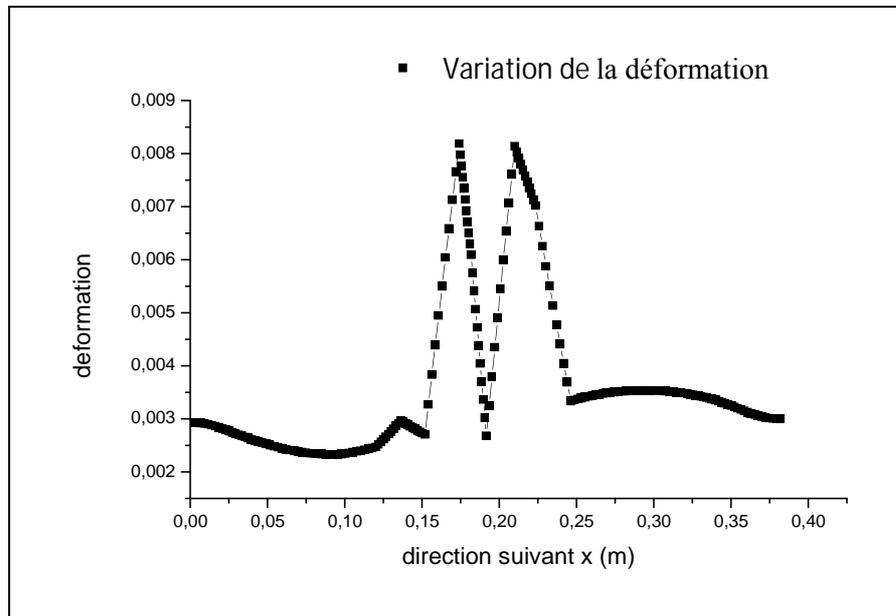


Figure IV. 28. b Déformations suivant l'axe X

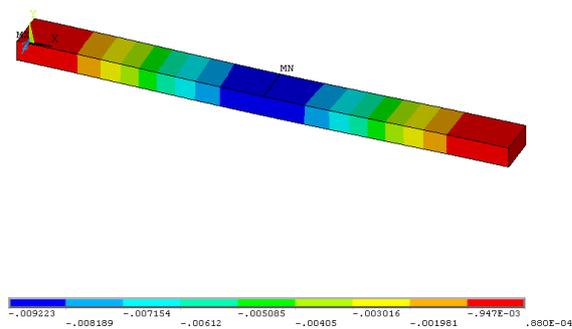


Figure IV. 29. a Déformations suivant l'axe Y

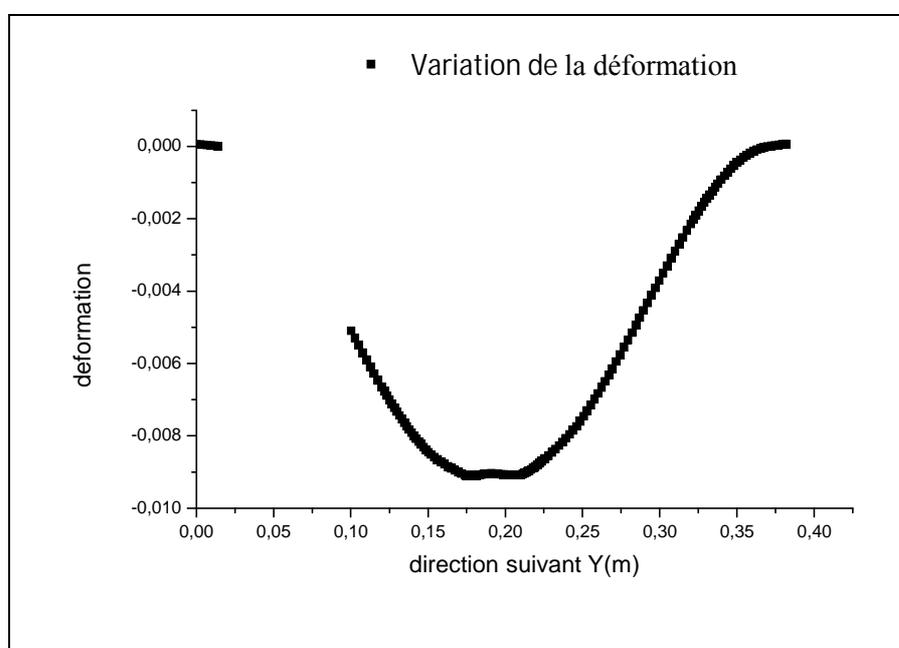


Figure IV. 29. b Déformations suivant l'axe Y

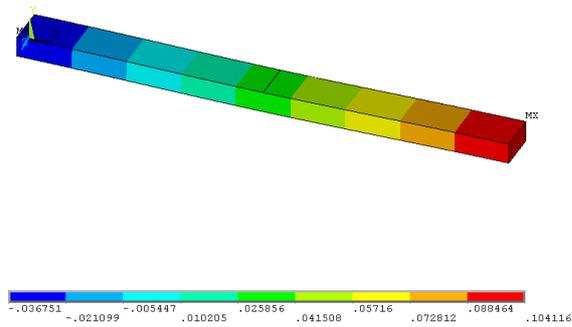


Figure I V. 30. a Déformations suivant l'axe Z

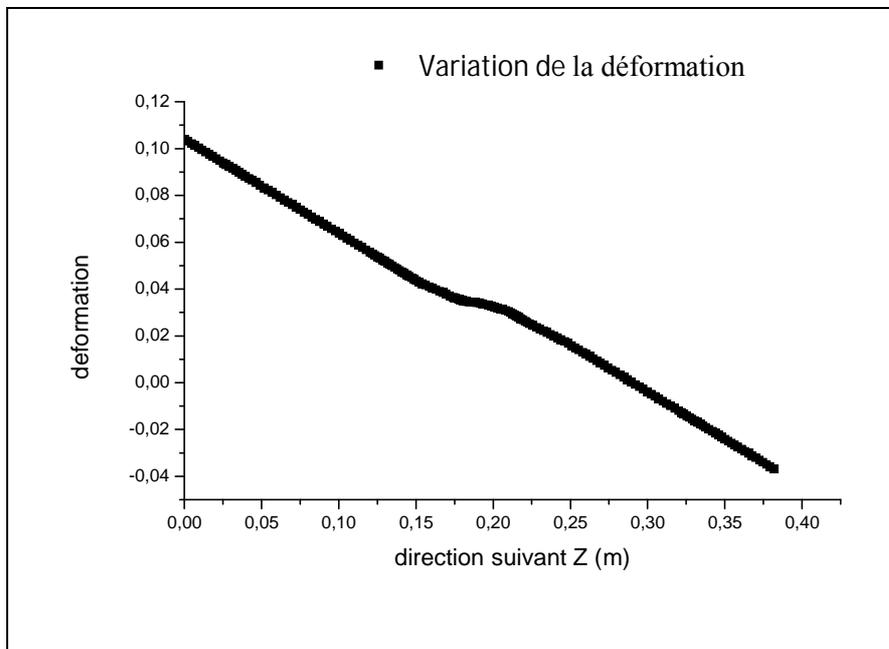


Figure I V. 30. b Déformations suivant l'axe Z

Les déformations suivant les trois axes sont presque nulles, suivant l'axe X (figure IV.28.b) une variation au niveau de la fissure. Suivant l'axe Y (figure IV.29.b) la déformation est nulle au niveau de la fissure, élevée, linéaire et inversement proportionnelle par rapport à la longueur (figure IV.30.b).

IV.15.2. CONTRAINTES SUIVANT LES AXES X, Y, Z

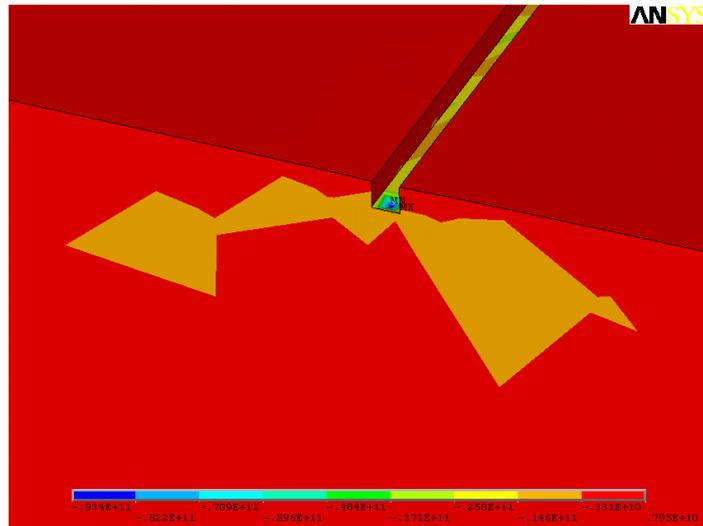


Figure IV.31. a Contraintes suivant l'axe X

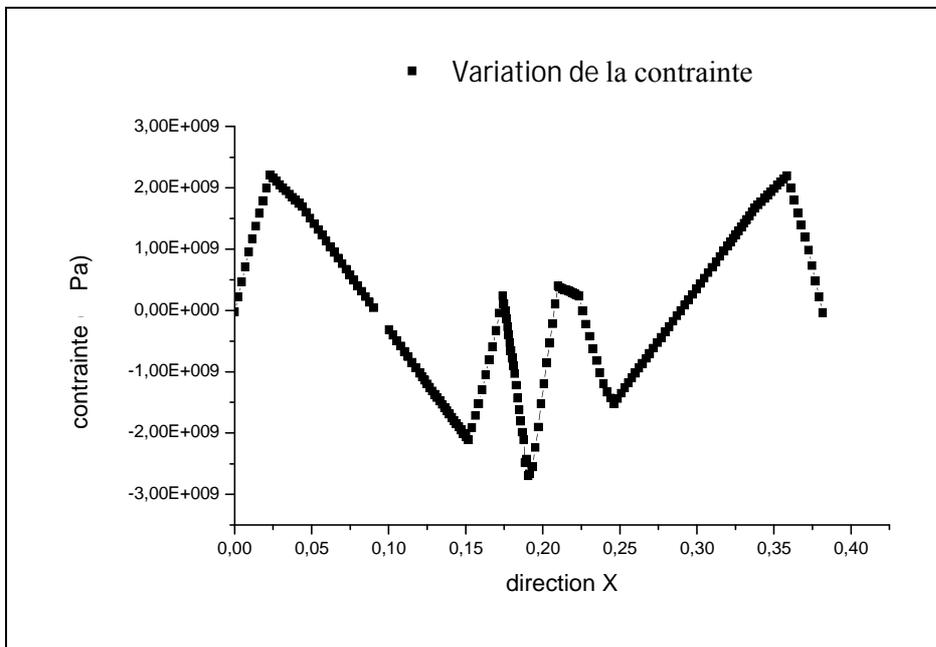


Figure IV.31. b Contraintes suivant l'axe X

On constate au niveau de la fissure, une diminution de contrainte suivant l'axe X, alors qu'aux extrémités on remarque un niveau de contrainte du aux effets de bord (figure IV.31.b). D'un autre côté, la distribution des contraintes suivant l'axe Y est nulle à l'exception de celle au contour de la fissure (figure IV.32.b).

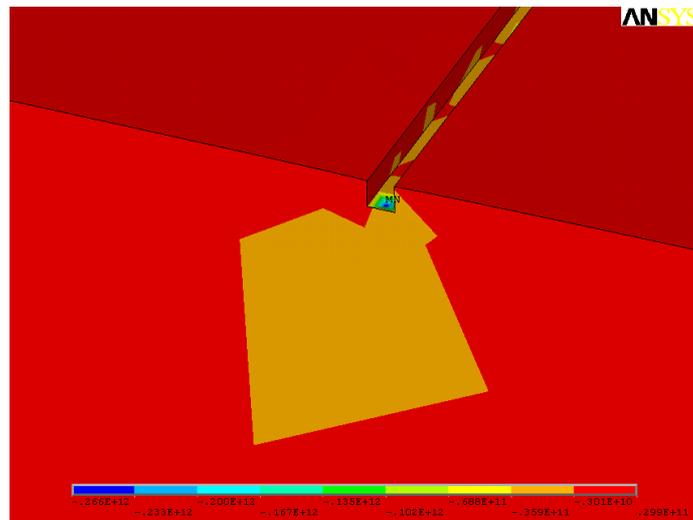


Figure IV.32. a Contraintes suivant l'axe Y

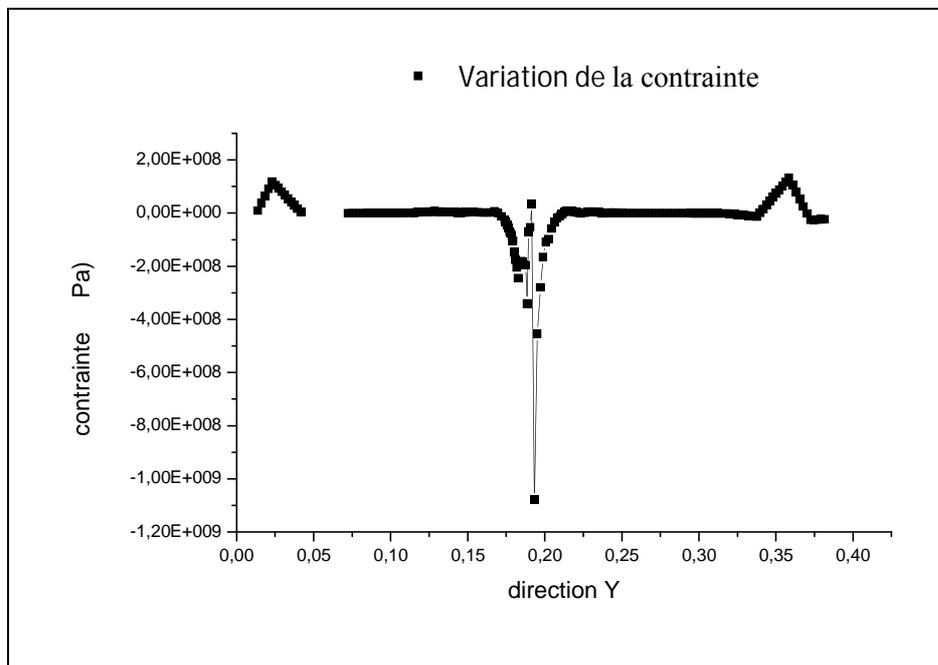


Figure IV.32. b Contraintes suivant l'axe Y

C'est la même constatation, la contrainte est élevée au niveau de la fissure, mais à un effet moindre.

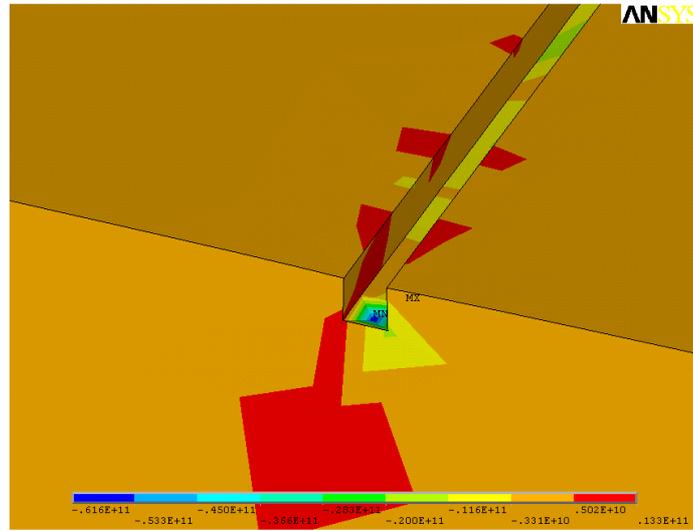


Figure IV.33. a Contraintes suivant l'axe Z

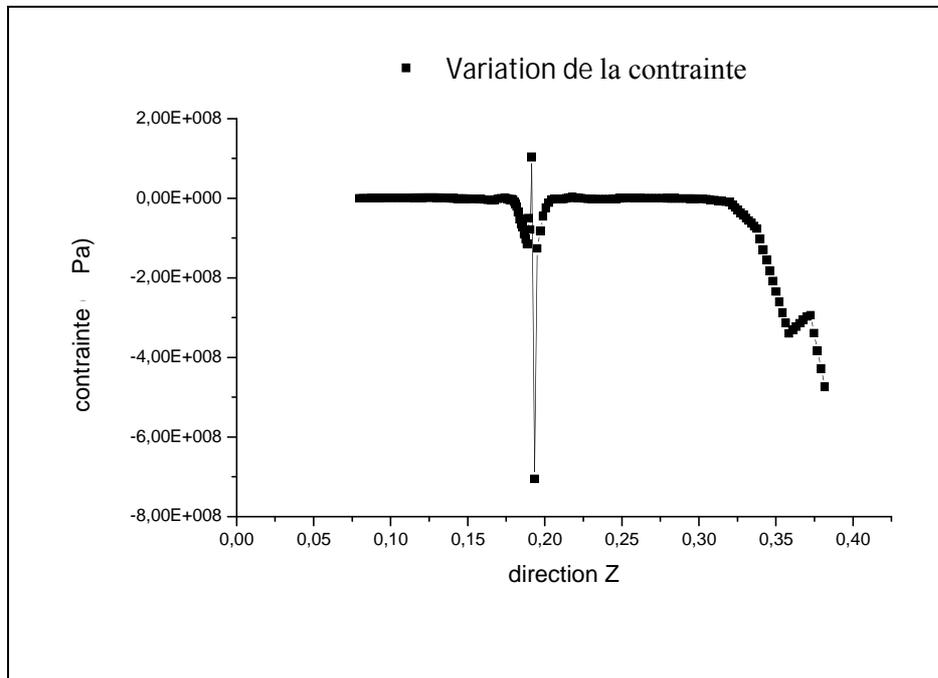


Figure IV.33. b Contraintes suivant l'axe Z

IV. 15. 3. LES CONTRAINTES PRINCIPALES

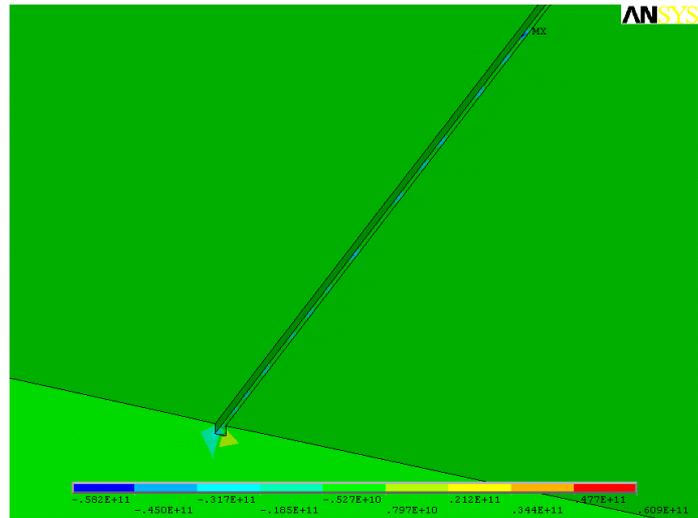


Figure IV. 34. a La 1^{ère} Contrainte principale

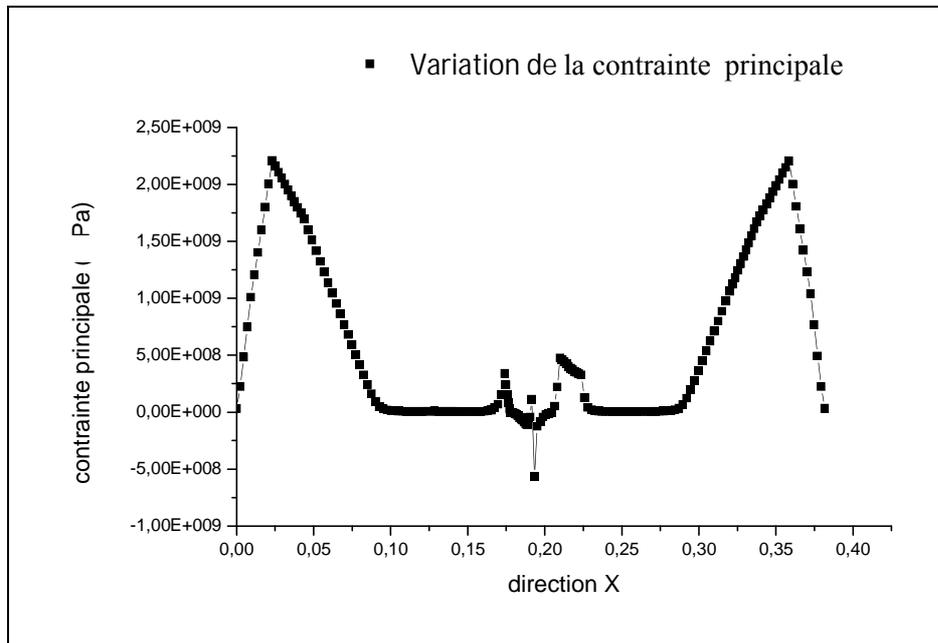


Figure IV. 34. b La 1^{ère} Contrainte principale

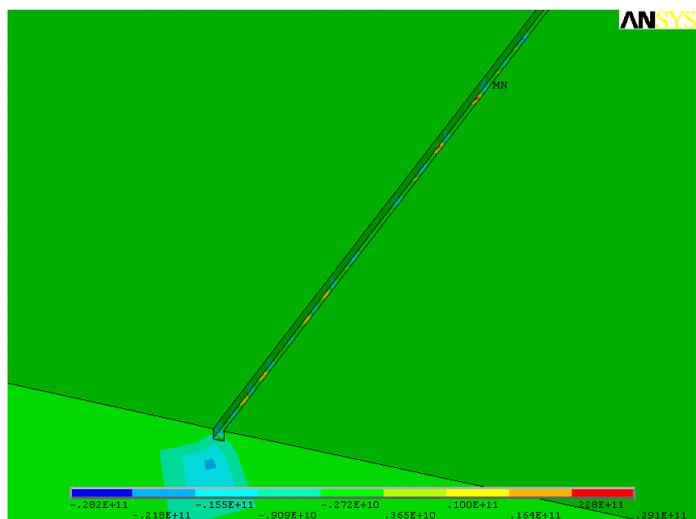


Figure IV. 35. a La 2^{ème} Contrainte principale

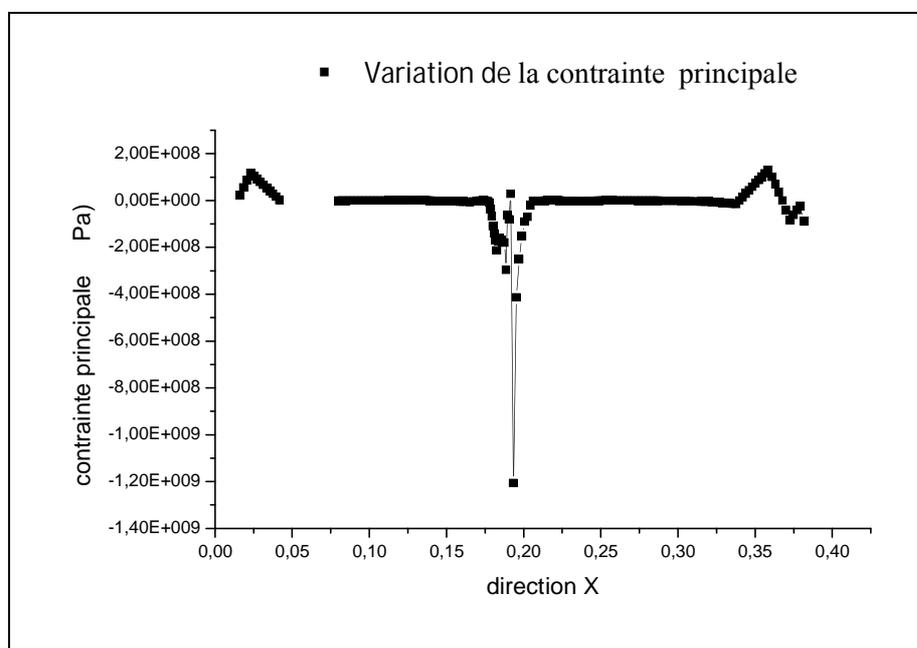


Figure IV. 35. b La 2^{ème} Contrainte principale

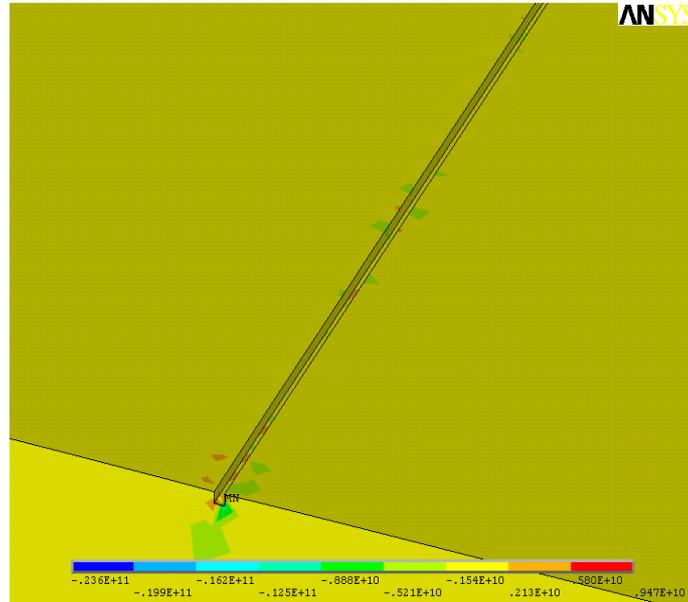


Figure IV. 36. a La 3^{ème} Contrainte principale

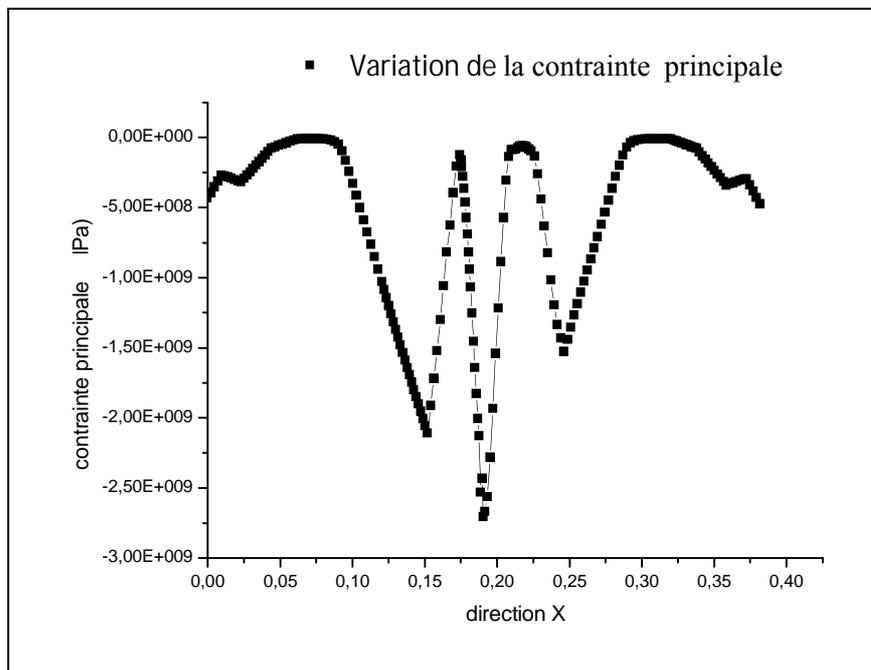


Figure IV. 36. b La 3^{ème} Contrainte principale

En comparant les trois figures des contraintes principales, on peut déduire que la première contrainte principale est la plus importante. Alors que les deux autres contraintes (1^{ère} et 2^{ème}) sont négatives au niveau de la fissure.

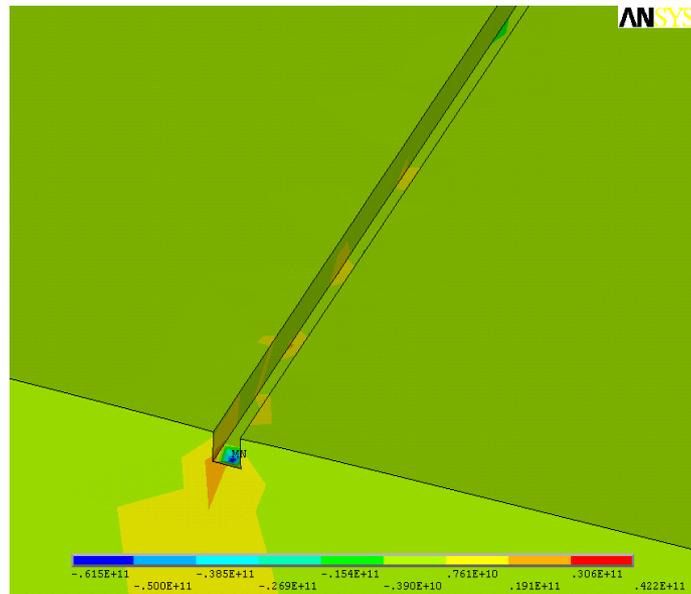


Figure IV. 37. a Contraintes de Von mises

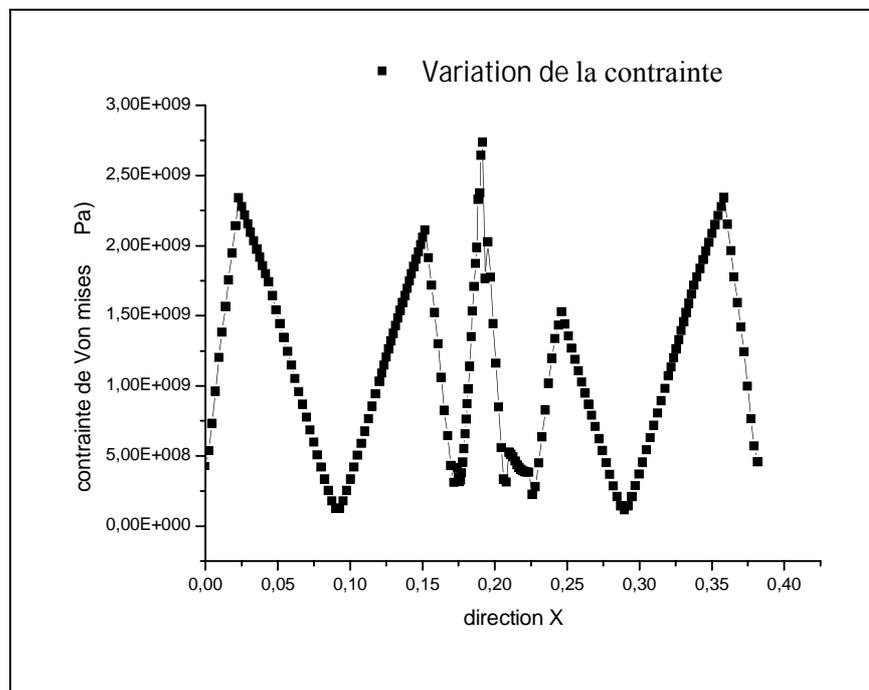


Figure IV. 37. b Contraintes de Von mises

IV. 16. LES DEFORMATIONS ELASTIQUES

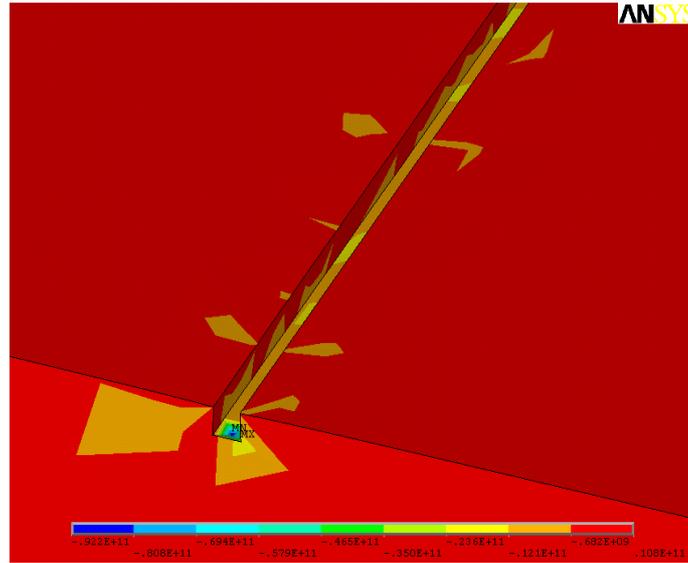


Figure IV. 38. a Déformation élastique suivant l'axe X

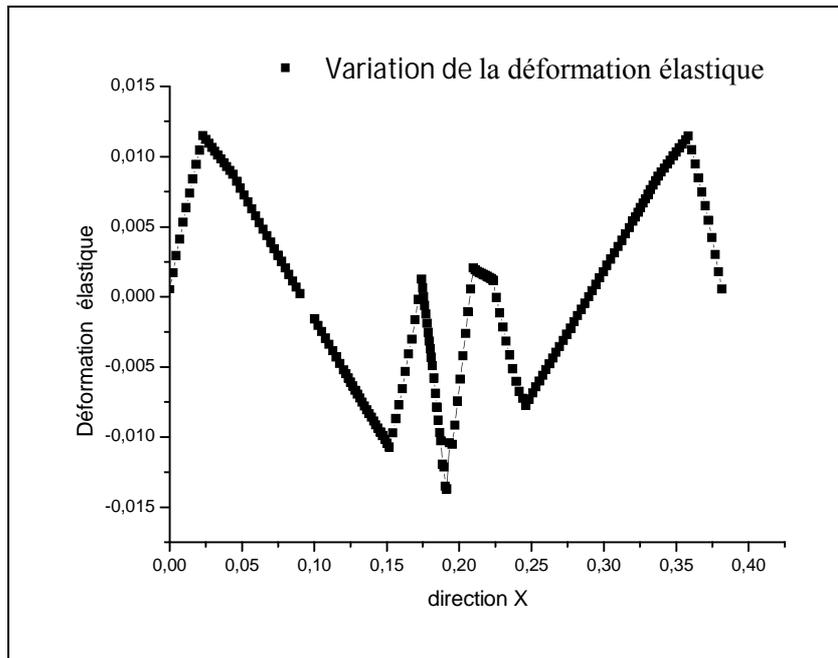


Figure IV. 38. b Déformation élastique suivant l'axe X

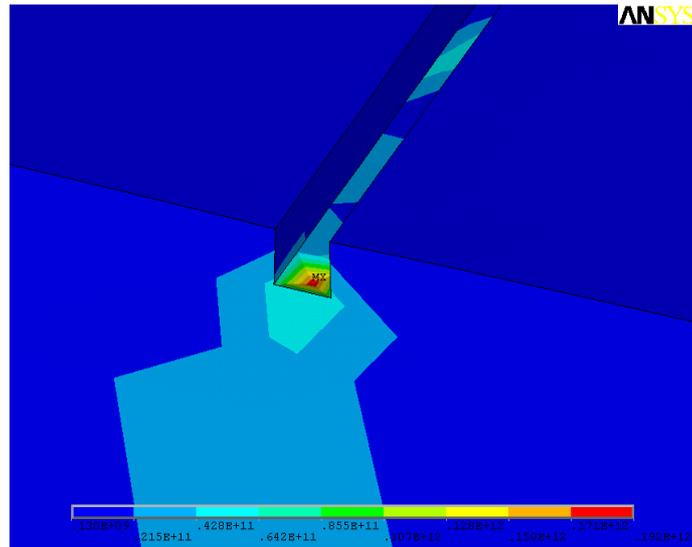


Figure IV. 39. a Déformation élastique suivant l'axe Y

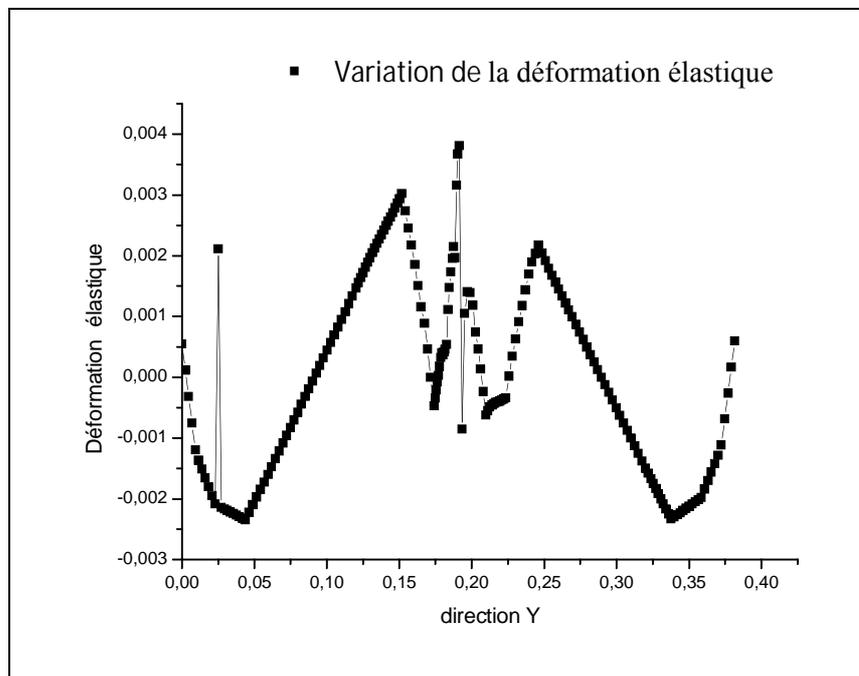


Figure IV. 39. b Déformation élastique suivant l'axe Y

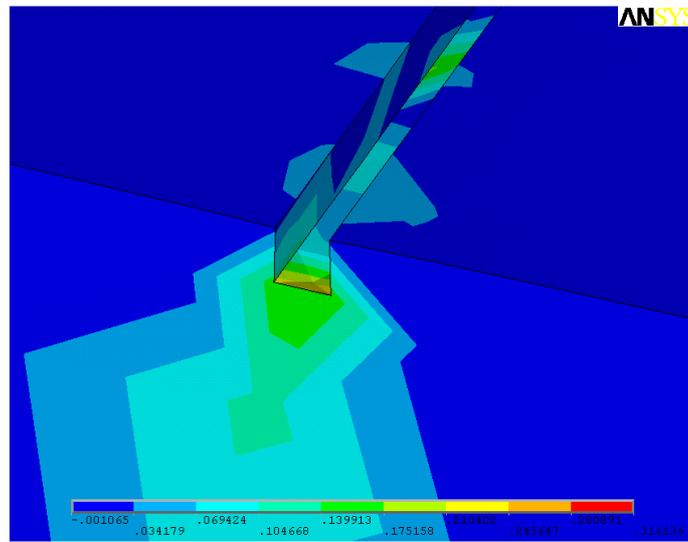


Figure IV. 40. a La 1^{ère} Contrainte principale

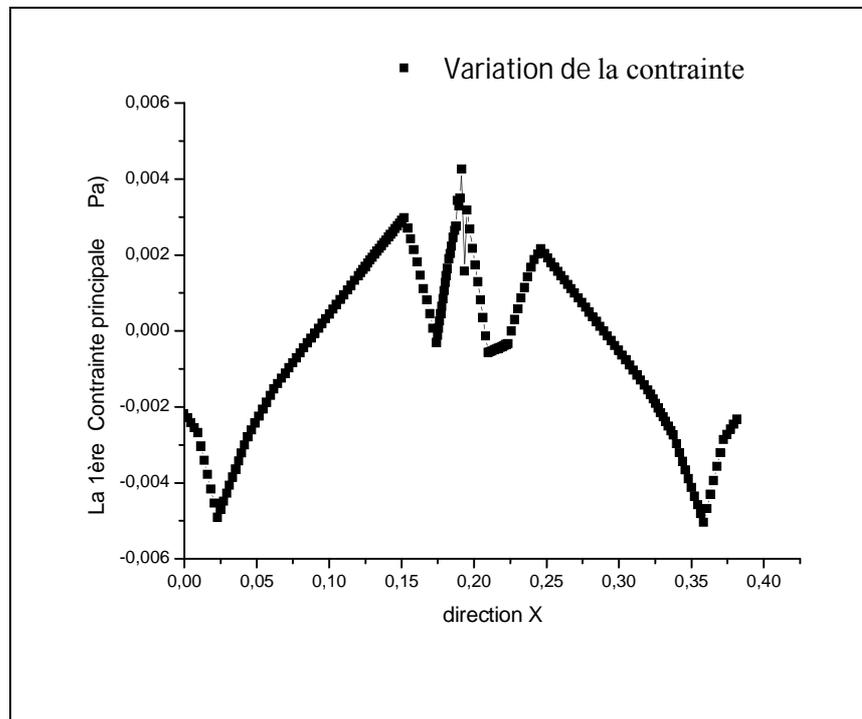


Figure IV. 40. b La 1^{ère} Contrainte principale

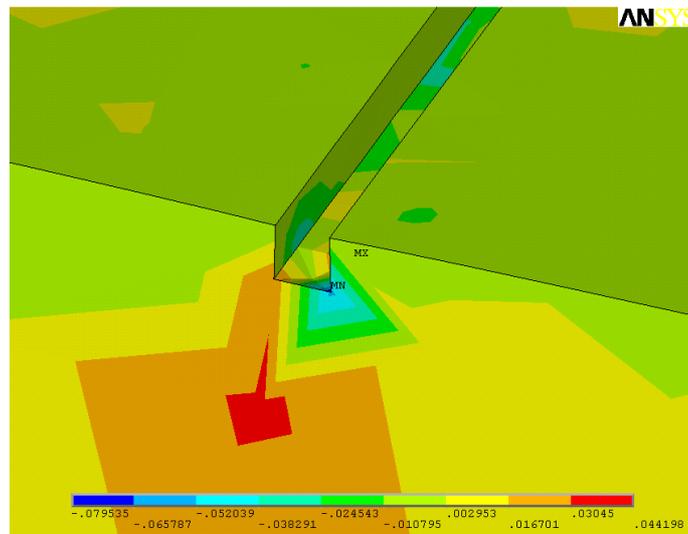


Figure IV. 41. a La 2^{ème} Contrainte principale

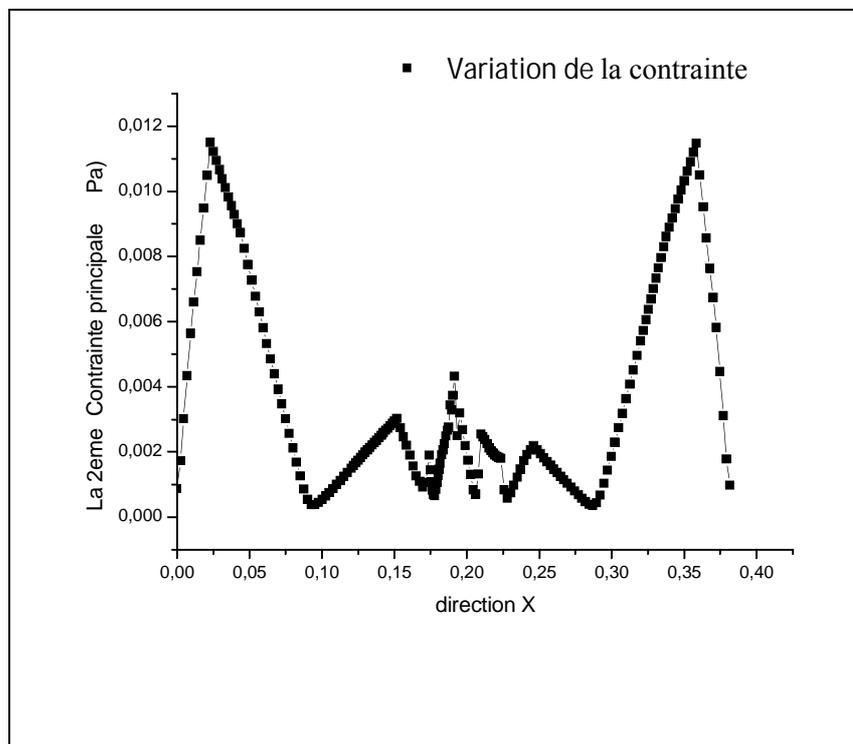


Figure IV. 41. b La 2^{ème} Contrainte principale

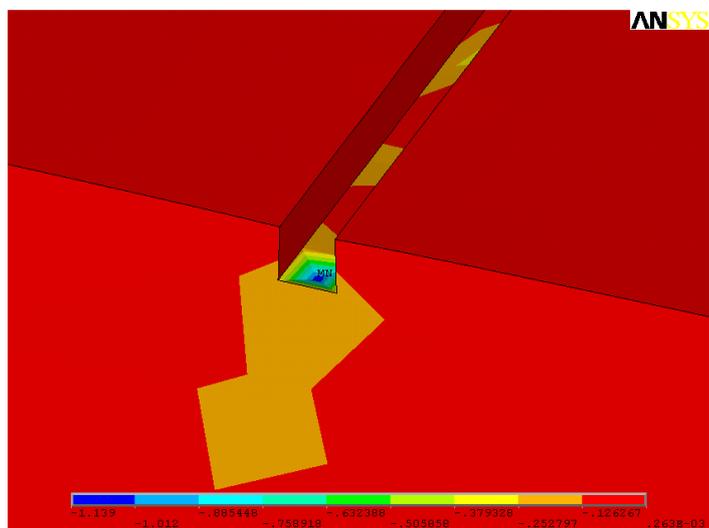


Figure IV. 42. a La 3^{eme} Contrainte principale

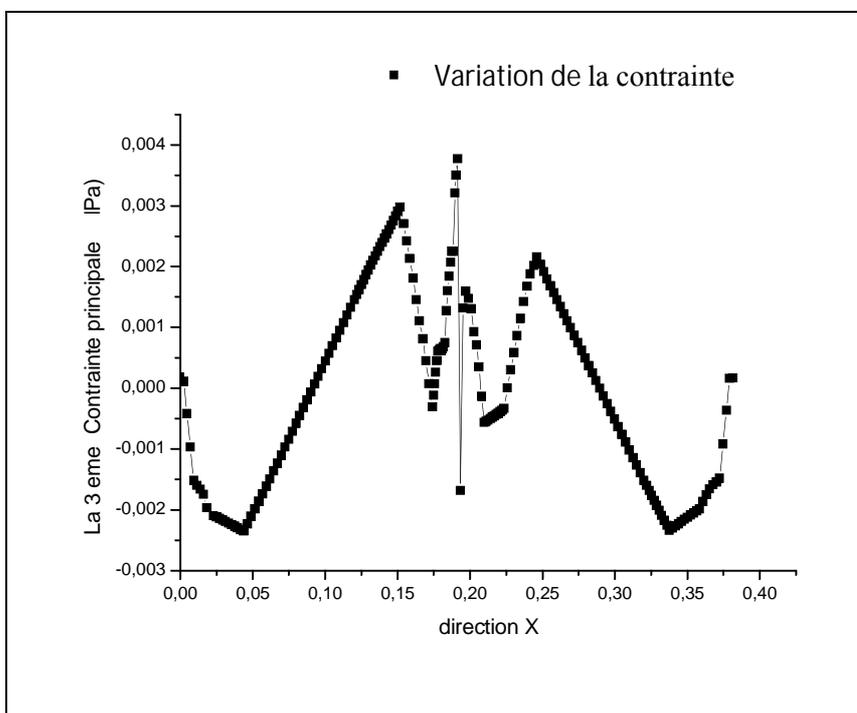


Figure IV. 42. b La 3^{eme} Contrainte principale

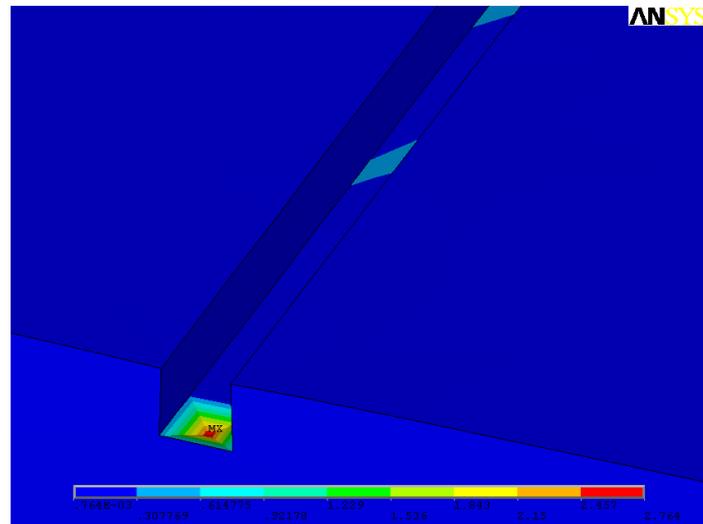


Figure IV. 43. a Déformation élastique de Von mises

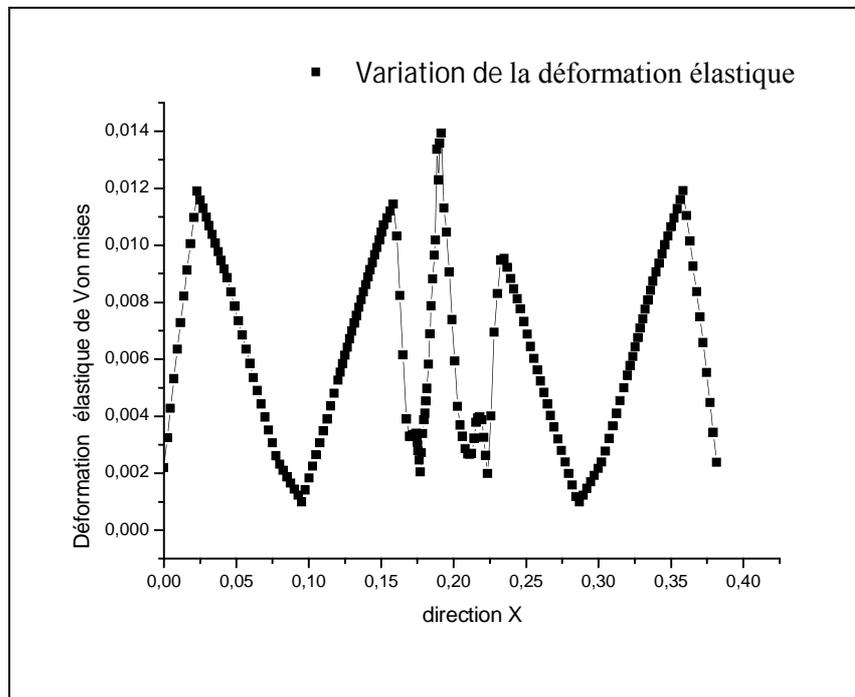


Figure IV. 43. b Déformation élastique de Von mises

IV. 17. CONDITIONS AUX LIMITES

Nous allons étudier le comportement de la poutre fissurée, en considérant l'effet des conditions aux limites (encastrement et appui). On prend toujours la même poutre, ayant les mêmes caractéristiques.

IV. 18. LES CONTRAINTES DE VON MISES ET CONTRAINTES PRINCIPALES

- **LE 1^{er} CAS**

Poutre fissurée avec charge centrale ponctuelle

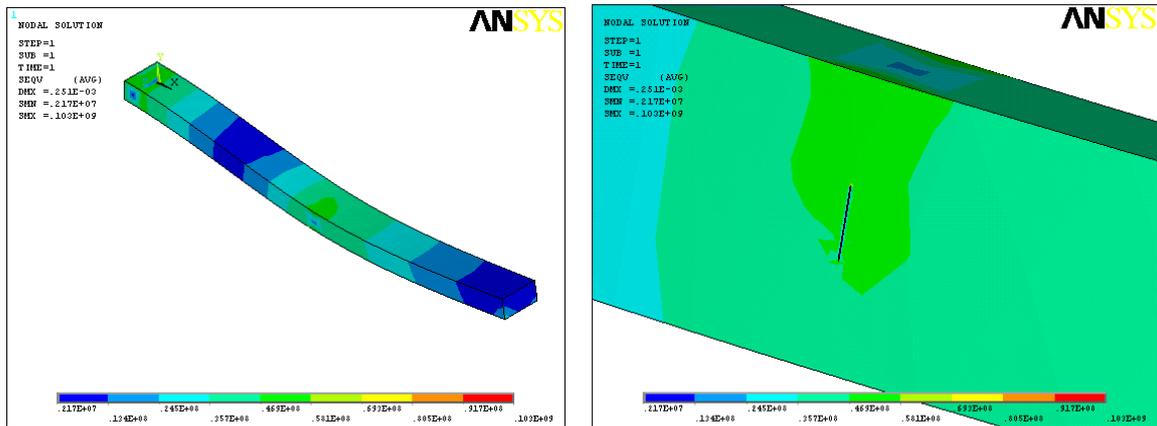


Figure IV. 44. a. Contraintes de Von mises

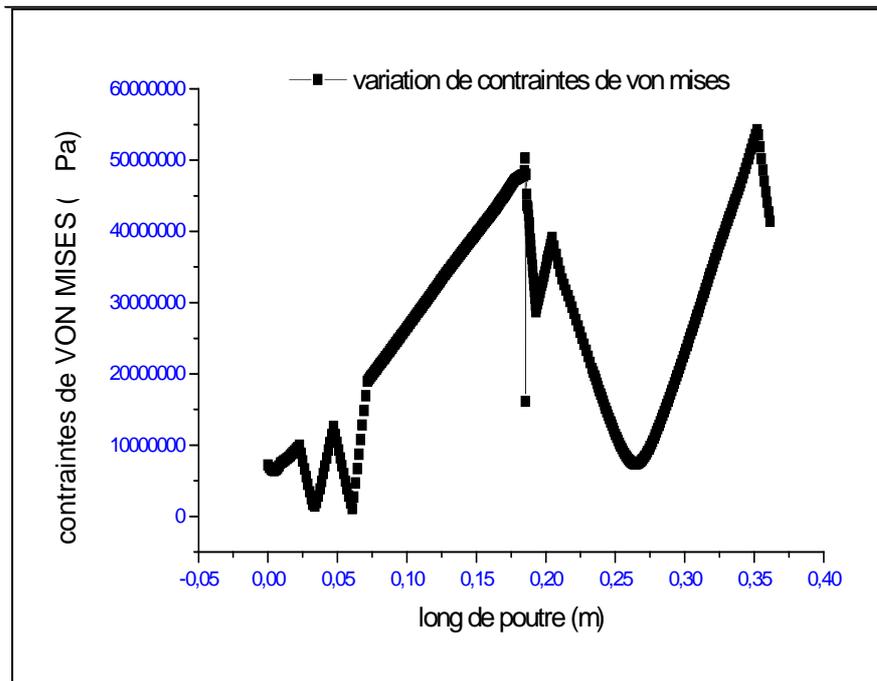


Figure IV. 44. b. Contraintes de Von mises

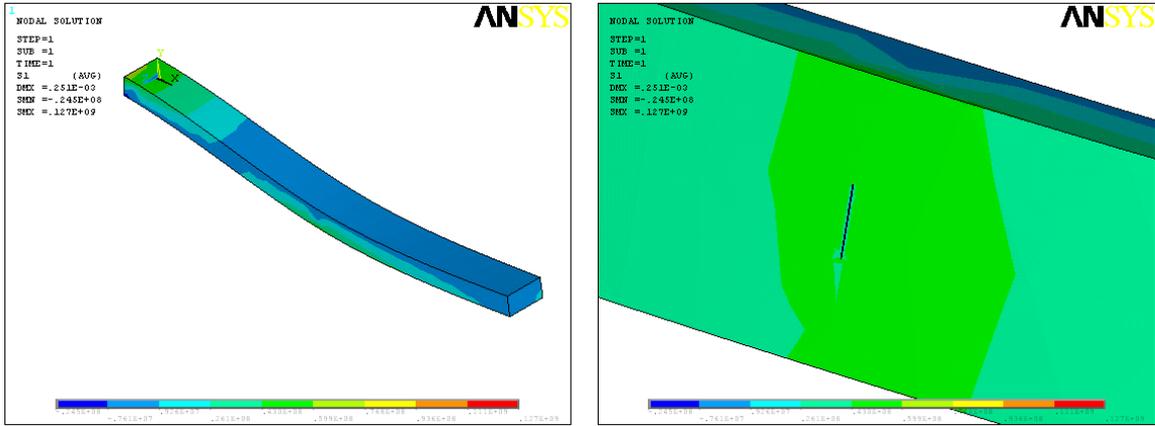


Figure IV. 45. a. La 1^{ère} Contrainte principale

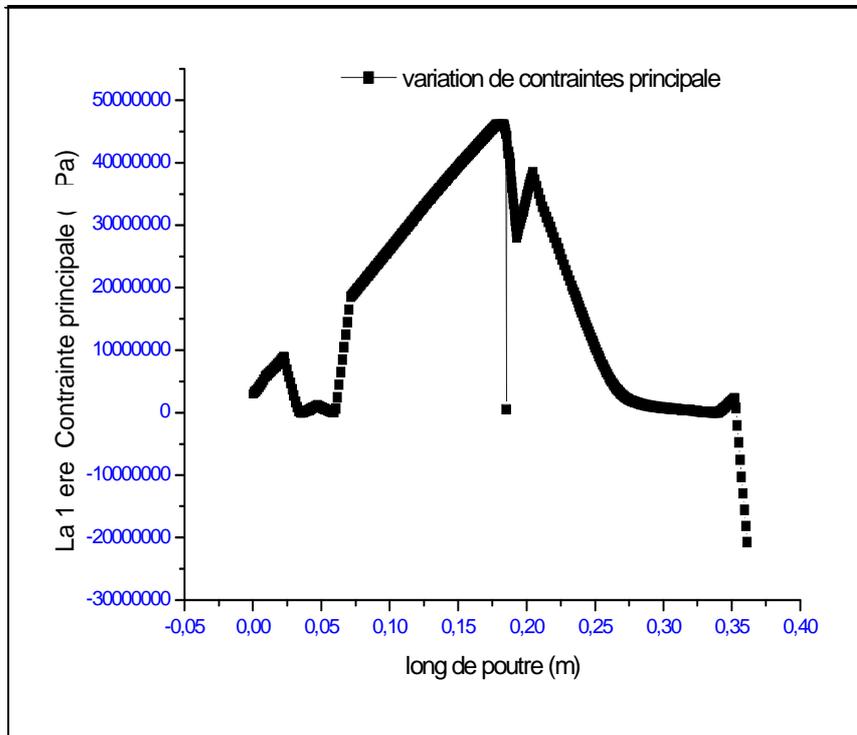


Figure IV. 45. b. La 1^{ère} Contrainte principale

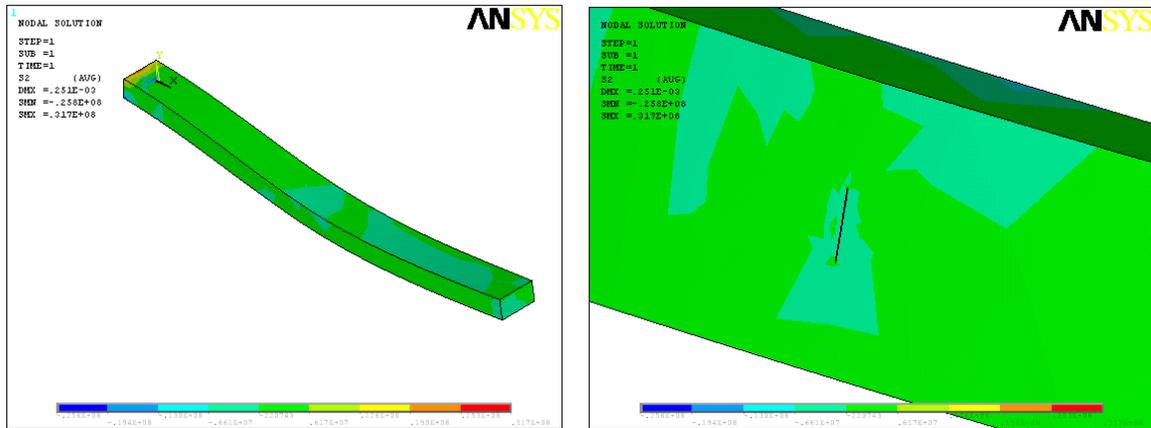


Figure IV. 46. a La 2^{ème} Contrainte principale

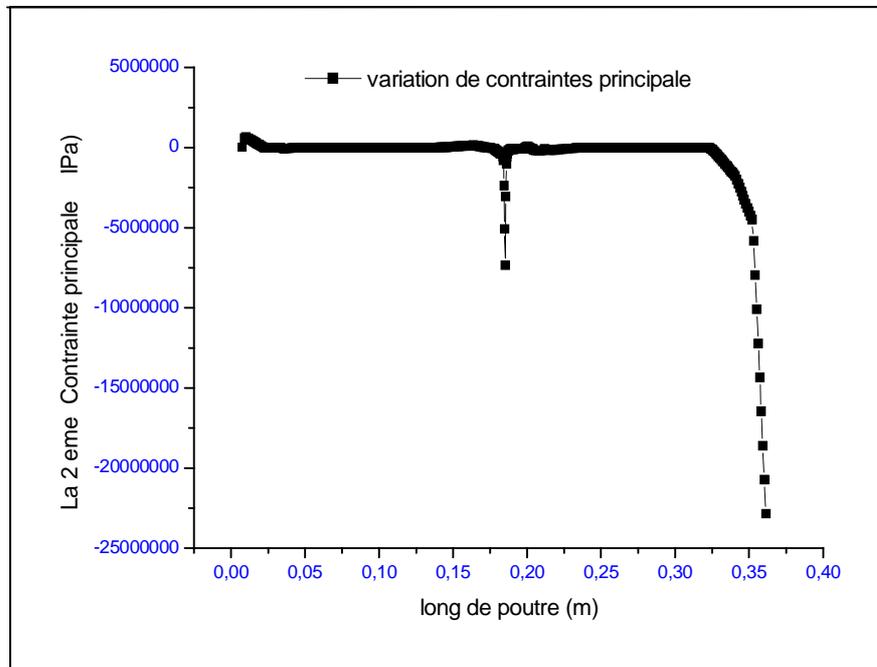


Figure IV. 46. b La 2^{ème} Contrainte principale

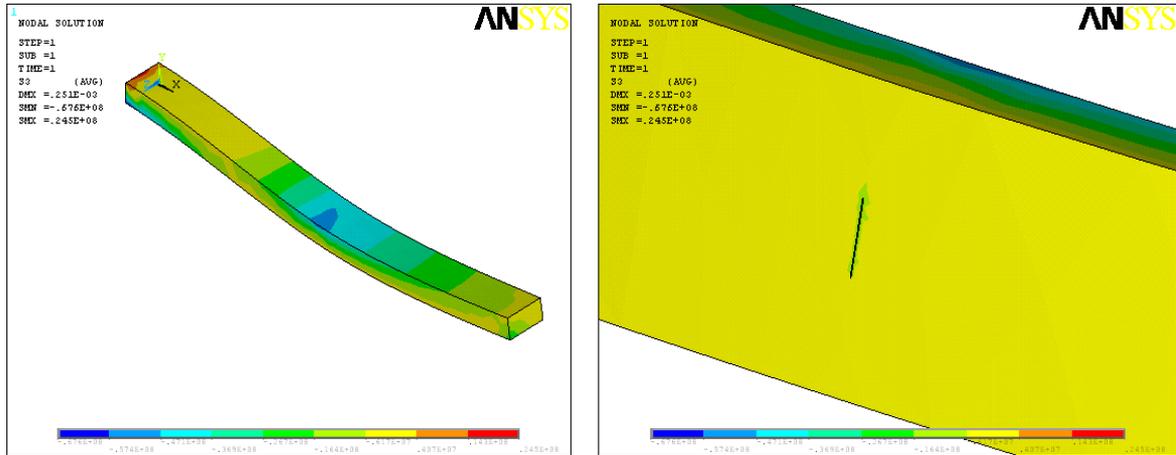


Figure IV. 47. a La 3^{ème} Contrainte principale

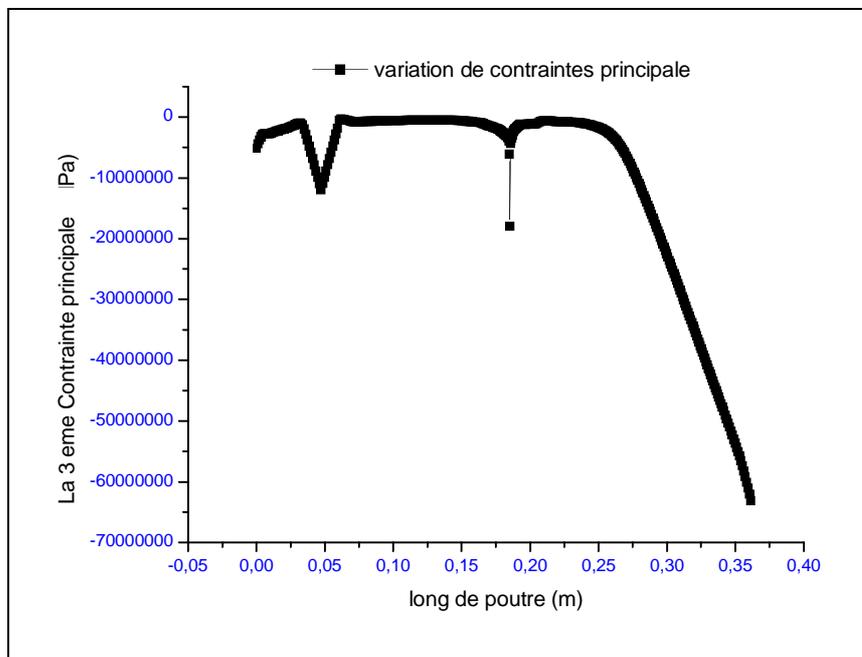


Figure IV. 47. b La 3^{ème} Contrainte principale

Les figures IV.45.b, IV.46.b, IV.47.b représentent la distribution des contraintes principales le long de la poutre, on remarque que le niveau de la première contrainte est important au niveau de la fissure par rapport aux deux autres.

- LE 2^{ème} CAS

Poutre fissurée avec deux charges ponctuelles

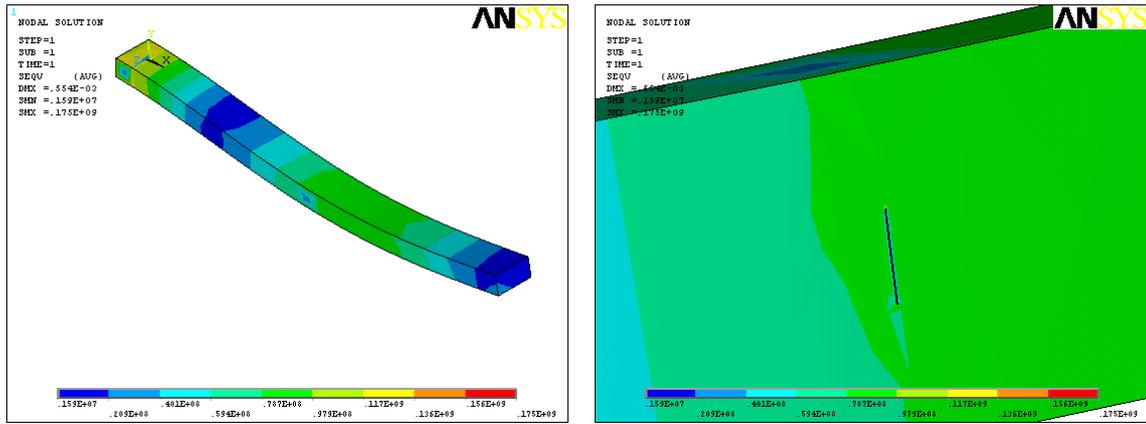


Figure IV. 48. a Contraintes de Von mises

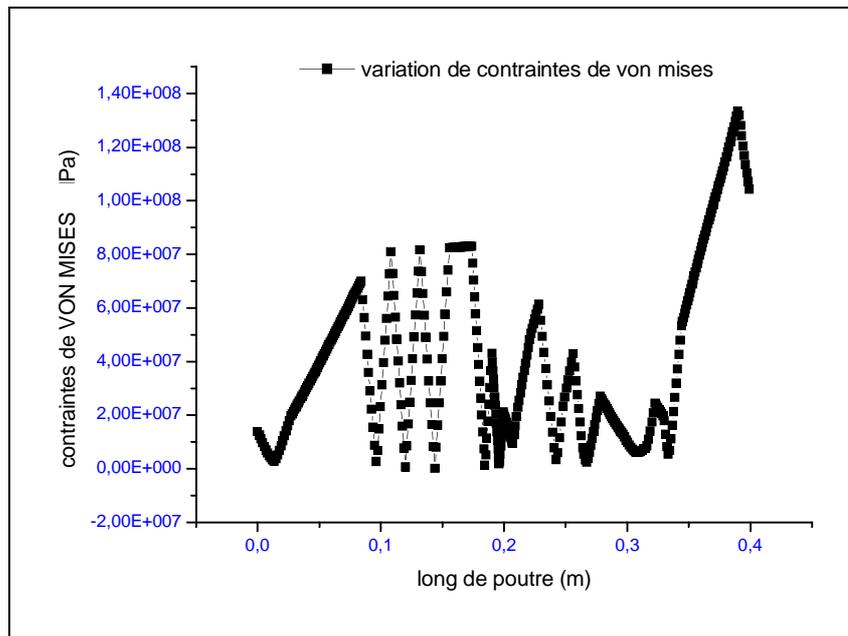


Figure IV. 48. b Contraintes de Von mises

Les figures IV.48.b et IV.44.b représentent les contraintes de Von Mises pour les deux cas énoncés précédemment. On constate l'effet de la charge au niveau de la fissure à une distance environ de 0.1 m, ainsi que l'effet de bords dû aux conditions aux limites (plus important pour le deuxième cas).

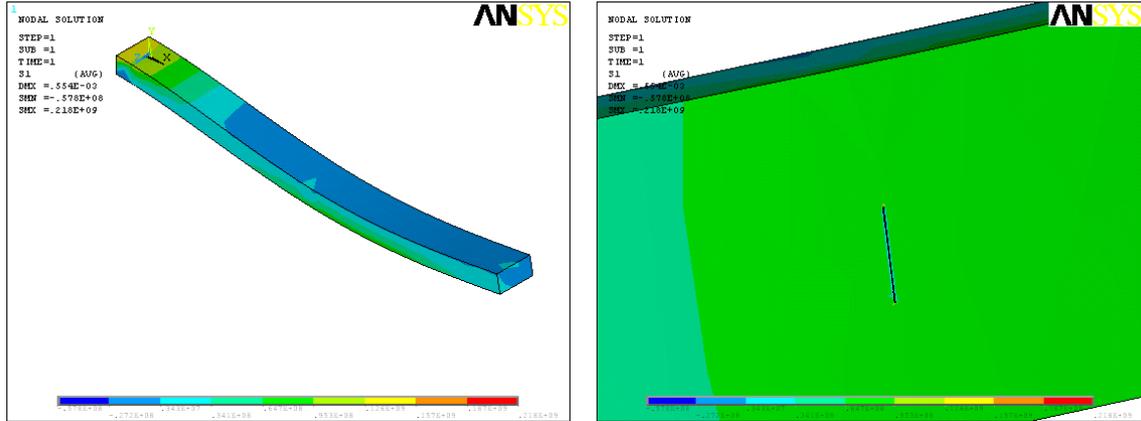


Figure IV. 49. a La 1^{ère} Contrainte principale

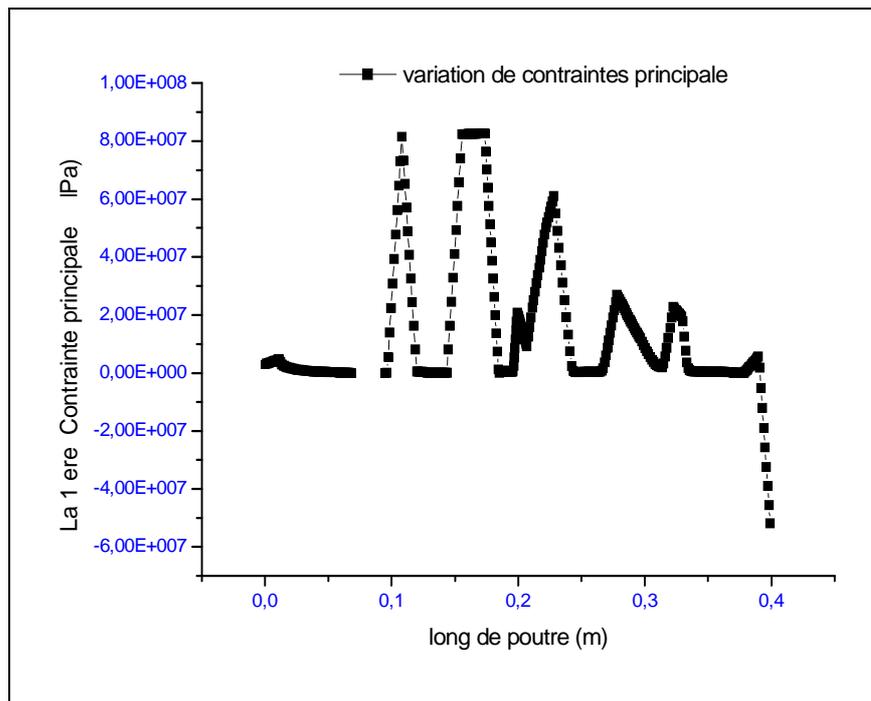


Figure IV. 49. b La 1^{ère} Contrainte principale

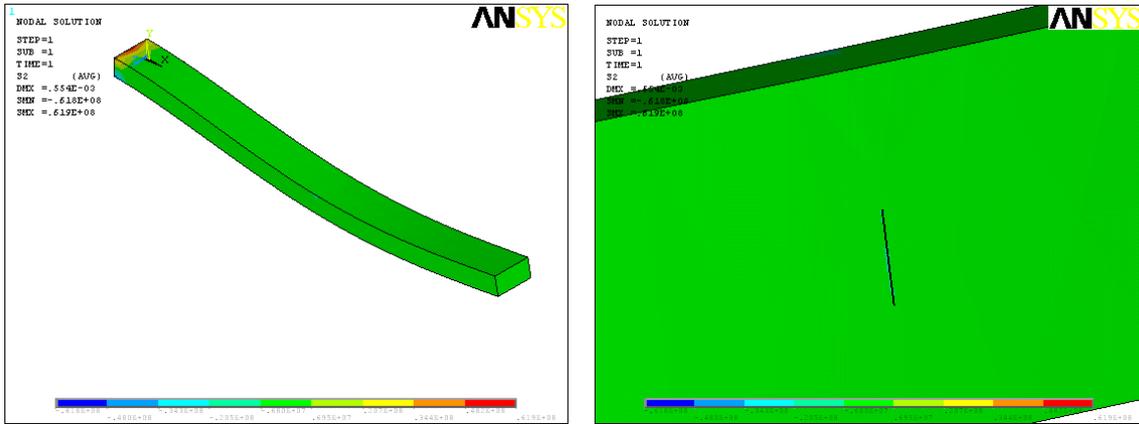


Figure IV. 50. a La 2^{ème} Contrainte principale

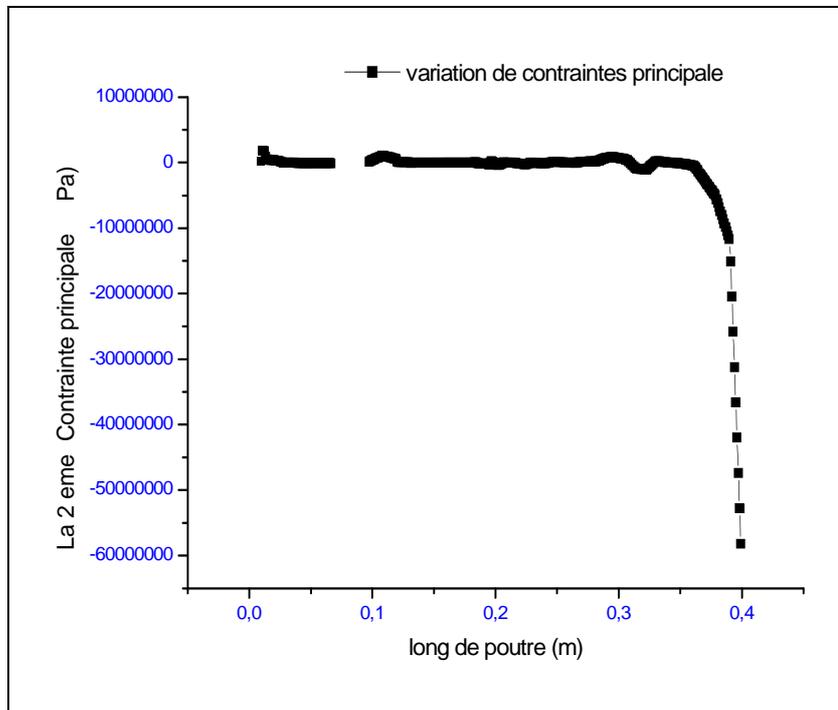


Figure IV. 50. b La 2^{ème} Contrainte principale

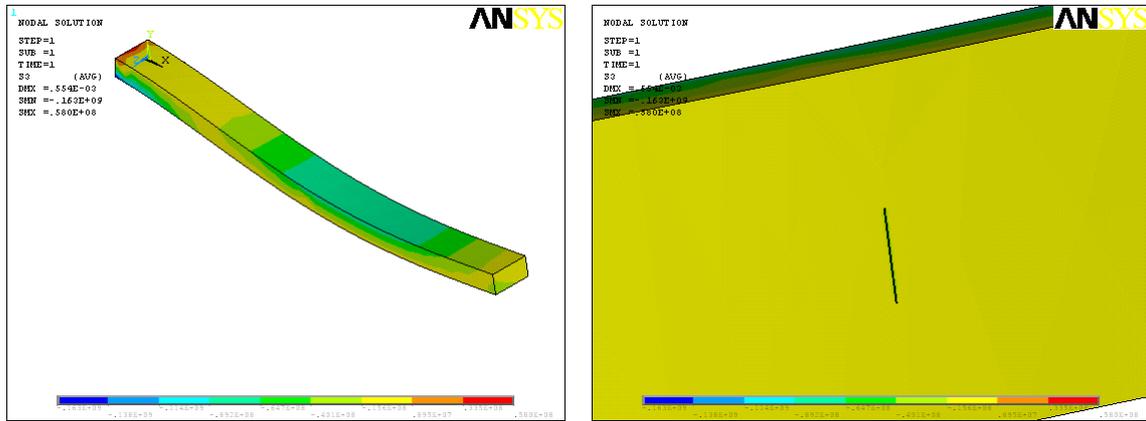


Figure IV. 51. a La 3^{ème} Contrainte principale

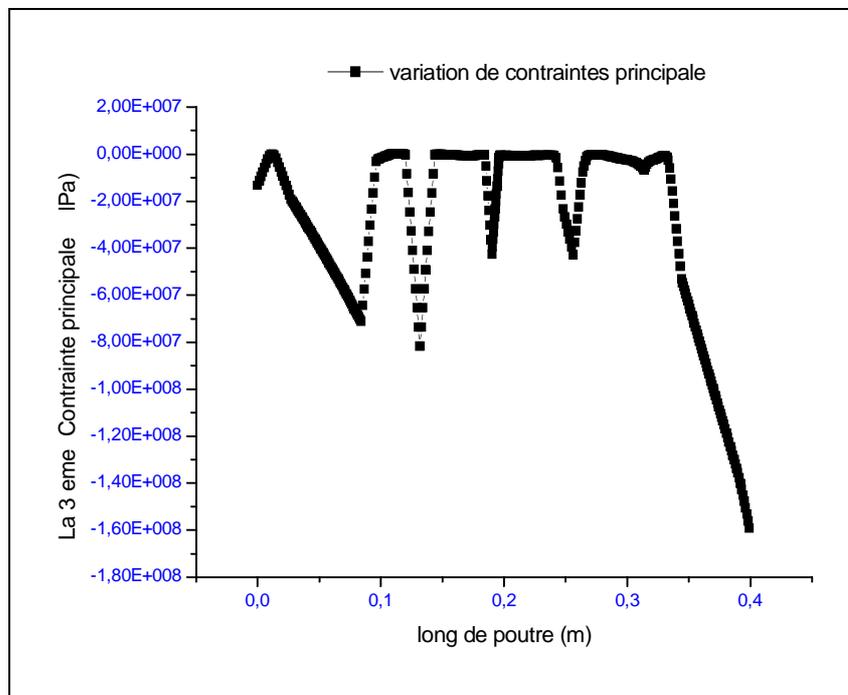


Figure IV. 51. a La 3^{ème} Contrainte principale

La variation des contraintes principales le long de la poutre est assez importante au niveau de la fissure. On peut dire, que pour chaque cas on a une variation différente de l'autre, on passe d'une contrainte de tension à une contrainte de compression (IV.51.a). Alors que l'effet est négligeable pour la deuxième contrainte principale.

En définitif, on peut conclure que l'effet est remarquable toujours au niveau de la fissure.

CONCLUSION

CONCLUSION GENERALE

Notre travail, est basé sur le comportement d'une poutre en acier soumise à une flexion pure. En premier, nous avons considéré l'analyse limite utilisant l'étude élasto-plastique de cette dernière, alors que dans la deuxième partie on considère l'effet de la fissure utilisant le code de calcul « ANSYS ».

La première étude, nous a permis d'obtenir la distribution des contraintes, des déformations et de la contrainte de Von Mises. On a pu constater, que le centre est déformé élastiquement, alors que les fibres éloignées de l'axe neutre sont déformées plastiquement, cela crée une distribution élasto-plastique.

Alors que, la seconde étude nous a permis de déduire le comportement de la poutre pré-fissurée tout en variant la charge et les conditions aux limites.

La distribution des contraintes et des déformations au niveau de la fissure, qui a été simulée au milieu de la poutre utilisant le cas d'une poutre à trois et à quatre points. On constate, que la concentration des contraintes au niveau de la fissure est très évidente vis-à-vis de la variation de la dimension de celle-ci.

RECOMMANDATIONS

A la suite du travail effectué et des résultats obtenus, il nous semble souhaitable de formuler certaines recommandations.

- Pour une analyse ultérieure plus approfondie des résultats, il faudrait utiliser une poutre pré-fissurée de différentes dimensions ainsi que sa position.

Il faudrait étudier l'effet d'un chargement complexe pour pouvoir prédire le comportement de la poutre pré-fissurée.

Références bibliographiques

[1] JEAN-CLAUDE CHARMET « Mécanique du solide et des matériaux Élasticité-Plasticité-Rupture».

[2] JEAN SALENÇON« De l'élasto-plasticité au calcul à la rupture», 2002, p 7-33.

[3] JEAN-LOUIS FANCHON, Guide de mécanique, Nathan, 2001.

[4] CLAUDE HAZARD, FREDY LELONG, BRUNO QUINZAIN, MEMOTECH «Structures métalliques», Casteilla, 1997.

[5] D. SPENLE, R. GOURHANT, «Guide du calcul en mécanique», Hachette, 2003.

[6] ABDEL-HAFEZ, L. M. « Direct design of reinforced concrete skew slabs ». Ph.D Thesis, Dept. of Civ. Eng, University of Glasgow, oct. 1986

[7] ABDEL RAHMAN, H. H. AND HINTON, E. «Non linear finite element analysis of reinforced concrete stiffened and cellular slabs ». Computers and structures, Vol.23, N°.3, 1986, PP.333-350.

[8] ABDEL RAHMAN, H. H, HINTON, E. AND ZIENKIEWICZ, O. C. « Computational models for reinforced concrete systems ». In advanced mechanics of reinforced concrete. Final repport. IABSE colloquium, Delft 1981, PP 303-313.

[9] MOKHDANI, CHERIF, Amorçage et propagation de fissure de fatigue dans un acier. Thèse de Doctorat de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris en Sciences et Génie de Matériaux 1995.

[10] D.C. DRUCKER, R.T. Shiel Limit Analysis of Symmetrically Loaded thin Shells of Revolution Journal of Applied Mechanics, 1999, p 61.68.

[11] A. ZEGHLOUL, Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture. Université de METZ, 2004.

[12] JEAN-CLAUDE CHARMET, Mécanique du solide et des matériaux Elasticité-Plasticité-Rupture. ESPCI - Laboratoire d'Hydrodynamique et Mécanique Physique