

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ MENTOURI DE CONSTANTINE  
FACULTÉ DES SCIENCES DE L'INGÉNIEUR  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE.



**MÉMOIRE DE MAGISTÈRE**  
**EN VUE D'OBTENTION DU DIPLOME DU MAGISTÈRE EN GÉNIE**  
**MÉCANIQUE**

**OPTION :**

**MÉCANIQUE DES SURFACES ET DES MATÉRIAUX.**

N° d'ordre: /MAG./2010.

Série: /G.M./2010.

**INTITULÉ :**

**OPTIMISATION STATIQUE ET/OU DYNAMIQUE**  
**DES STRUCTURES AÉRONAUTIQUES**  
**COMPLEXES.**

**Présenté par :**

**Mr : Abderrahmane MENZEL-GHERABA**

**Devant le jury :**

**Président : Mr.A. BOUCHOUCHA.**

**Rapporteur : Mr.T. BENMANSOUR.**

**Examineurs : Mr.S. MEZIANI.**

**Mr.S. BENISSAD.**

**Prof. Uni. De Constantine.**

**M.c. Uni. De Constantine.**

**Prof. Uni. De Constantine.**

**M.c. Uni. De Constantine.**

**ANNÉE : 2010.**



## *Remerciement*

*Qu'il me soit permis de traduire , ici mes sincère appréciations et profonde gratitude à monsieur TOUFIK BENMANSOUR, maître conférence a l'université de Constantine , pour avoir dirigé ce travail , pour ses conseils qui ont été d'une grande utilité , sa capacité de jugement exceptionnelle et ses qualités humaines .*

*Je désire exprimer également ma reconnaissance à monsieur ALI BOUCHOUCHA professeur à l'université de Constantine d'avoir bien accepter de présider le jury de la commission d'examen.*

*Je tiens également à remercier messieurs SALIM MEZIANI professeur a l'université de Constantine et monsieur SMAIL BENISSAD maître conférences a l'université de Constantine pour leur probation concernant l'évaluation de ce travail.*

*Je remercie vivement tous ceux qui ont participé de près ou de loin à l'élaboration de ce modeste travail.*

*J'adresse mes remerciements les plus chaleureux à tous mes collègues et amis qui ont bien voulu me faire bénéficier de leur encouragement et soutien morale.*

*Abderrahmane MENZEL-GHERABA*

# RÉSUMÉ

L'optimisation technologique des structures complexes inhérente à la construction aéronautique, se base essentiellement sur le facteur de minimisation du poids propre, tout en observant le respect des conditions de bonne performance mécanique.

Dans ce mémoire on espère déboucher à une contribution dans ce vaste et important domaine de l'optimisation industriel. On se basera sur les techniques d'optimisations combinées à ceux d'analyse aux éléments finis afin de répondre à l'objet des problématiques proposées. Le travail est présenté en deux grandes parties qui sont la partie théorique et celle des applications.

**La partie théorique** a été consacrée à l'étude bibliographique sur le domaine d'optimisation en mécanique, suivi par un développement de la méthode des éléments finis ; et enfin une section réservée au dynamique des structures.

**La partie applications** quand à elle a été réservé a cinq différentes applications, les trois premières se sont basées sur le théorème énergétique de *MAXWELL* dans le cas statique et dynamique, la quatrième application expose la relation analyse conception et la dernière application s'est basé sur l'optimisation par programmation mathématique. Les calculs sont effectués en utilisant le code de calcul *ANSYS* validés parfois par des références parfois par une étude analytique.

On doit signaler qu'avec l'application des ces méthodes d'optimisation; on a remarqué quelles ont une grande efficacité en terme de minimisation de poids ce qui le montre les résultats obtenus.

## ***Mots clés :***

*Optimisation des structures.*

*Structures treillis.*

*Poids minimum.*

# ABSTRACT

Static and/or dynamic optimisation of aeronautics structures.

The technological optimization of complex structures inherent in aircraft construction, is based primarily on the factor of weight minimization own, while observing the conditions of good mechanical performance.

In this paper we hope lead to a contribution in this vast and important field of optimization industry. It will be based on optimization techniques combined with those of finite element analysis to address the subject of proposed issues. The work is presented in two main parts are the theoretical and the applications.

**The theoretical part** was devoted to literature review on the field of mechanical optimisation, followed by development of the finite element method, and finally a section reserved for structural dynamics.

**The applications part** she was reserved to five different applications, the first three were based on the energetic theorem of *MAXWELL* in the case static and dynamic, the fourth application describes the relation analysis to design, the last application was based on optimization by mathematical programming. The calculations are performed using the computer code *ANSYS* and the results sometimes validated by references and sometimes by an analytical study.

Should be reported with the application of these optimisation methods we have noticed what a great efficiency in terms of minimization of weight, which shows the results.

## ***Key words:***

*Optimisation of structures.*

*Truss Structures.*

*Minimum weight.*

## ملخص

### تحسين سكوني و١١ و ديناميكي لهياكل الطائرات المعقدة.

ويستند هذا التحسين التكنولوجي للهياكل المعقدة المتأصلة في بناء الطائرات، في المقام الأول على عامل تقليل الوزن، مع مراعاة شروط أداء ميكانيكية جيدة. نأمل من هذه الدراسة إلى المساهمة في هذا المجال الواسع والمهم في مجال التحسين الصناعي. ويعتمد هنا العمل أساسا على الجمع بين استعمال تقنيات التحسين الأمثل مع تقنيات تحليل العناصر المحددة لمعالجة هذا الموضوع من القضايا المطروحة. وتقدم العمل في جزأين رئيسيين هما النظرية والتطبيقات.

جزء نظري خصص لمراجعة الأدبيات في مجال تحسين الهياكل الميكانيكية، وتليها تطوير طريقة العناصر المحدودة وأخيرا قسم مخصص لديناميكا الهياكل.

جزء التطبيقات عندما حجزت لها على خمسة تطبيقات مختلفة ، واستندت الثلاثة الأولى على نظرية ماكسويل للطاقة في حالة سكون وديناميكا ، وتطبيق الرابعة يصف التصميم والتحليلات ذات الصلة وتطبيق أخير يستند إلى التحسين من خلال البرمجة الرياضية.

يتم تنفيذ العمليات الحسابية باستخدام برنامج الكمبيوتر انسيس التحقق من النتائج يتم أحيانا بالاعتماد على المراجع وأحيانا أخرى عن طريق دراسة تحليلية.

للإشارة فإنه مع تطبيق هته الأساليب سجلنا أنها ذات كفاءة كبيرة من حيث التقليل في الوزن وما يدل على ذلك النتائج المتحصل عليها.

#### الكلمات المفتاحية :

تحسين الهياكل.

الهياكل المتشابكة.

الوزن الأدنى.

# TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GENERALE .....	4
-----------------------------	---

## CHAPITRE I

Méthode d'optimisation en mécanique

I.1INTRODUCTION .....	8
I.2CONCEPTS DE BASE DE L'OPTIMISATION.....	8
.2.I.2.1PROBLEME TYPE D'OPTIMISATION .....	8
I.2.2LA CONTINUTE D'UNE FONCTION .....	9
I.2.3LES FONCTIONS MULTIMODALES .....	9
I.2.4LES FONCTIONS CONVEXES ET CONCAVES.....	10
I.3CLASSIFICATION DES PROBLEMES D'OPTIMISATION .....	11
I.3.1CLASSIFICATION BASEE SUR LA NATURE DES VARIABLES .....	11
I.3.2CLASSIFICATION BASEE SUR LA NATURE DES EQUATIONS INTRODUITES .....	12
I.3.3CLASSIFICATION BASEE SUR LE NOMBRE DE FONCTION OBJECTIVES .....	12
I.4TECHNIQUES CLASSIQUES D'OPTIMISATION .....	12
I.4.1OPTIMISATION A UNE SEULE VARIABLE.....	12
I.4.2OPTIMISATION A PLUSIEURS VARIABLES.....	13
I.4.3OPTIMISATION A PLUSIEURS VARIABLES AVEC DES CONTRAINTES D'EGALITE .....	15
I.4.3.1SOLUTION PAR LA SUBSTITUTION DIRECTE .....	15
I.4.3.2SOLUTIONS PAR LA VARIATION DES CONTRAINTES .....	16
I.4.3.3SOLUTIONS PAR LA METHODE DES MULTIPLICATEURS DE <i>LAGRANGE</i> .....	18
I.4.4OPTIMISATION A PLUSIEURS VARIABLES AVEC DES CONTRAINTES D'INEGALITE .....	19
I.5TYPES D'OPTIMISATION .....	19
I.5.1OPTIMISATION PARAMETRIQUE.....	19
I.5.2OPTIMISATION GEOMETRIQUE.....	21
I.5.3OPTIMISATION TOPOLOGIQUE .....	22
I.6PROCESSUS D'OPTIMISATION .....	23
I.7LES APPLICATIONS DE L'OPTIMISATION.....	24

## CHAPITRE II

METHODE ELEMENTS FINIS

II.1INTRODUCTION .....	27
II.2PROCEDURES D'APPLICATIONS DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS .....	28
II.3FORMULATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE POUR UN ELEMENT BARRE.....	28

II.3.1DANS LE REPERE LOCAL .....	28
II.3.2DANS LE REPERE GLOBAL .....	30
II.4RELATION ENTRE LES FORCES NODALES ET LES DEPLACEMENTS NODAUX DANS LE SYSTEME LOCAL.....	31
II.5RELATION ENTRE LES FORCES NODALES DANS LE SYSTEME LOCAL ET LES FORCES NODALES DANS LE SYSTEME GLOBAL.....	32
II.6FORMULATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE POUR UN ELEMENT POUTRE ...	33
II.7EQUATION DE RIGIDITE D'UN ELEMENT POUTRE AVEC CISAILLEMENT TRANSVERSAL.....	36
II.8PRINCIPE DE NUMEROTATION DES NŒUDS D'UNE STRUCTURE.....	39
II.9METHODE D'ASSEMBLAGE.....	39
II.10CALCUL DES EFFORTS INTERNES DANS UN ELEMENT BARRE .....	41
II.11PROGRAMMATION.....	43
II.11.1ETUDE PAR ORDINATEUR.....	43
II.11.2ENTREES DE DONNEES .....	44

### CHAPITRE III

#### DYNAMIQUE DES STRUCTURES

III.1INTRODUCTION.....	46
III.2VIBRATION LIBRE D'UN SYSTEME MASSE-RESSORT A UN 1D.D.L.....	47
III.2.1REPOSE LIBRE FAIBLEMENT AMORTIE .....	48
III.2.2VIBRATION FORCEE D'UN SYSTEME MASSE-RESSORT-AMORTISSEUR A 1D.D.L .....	48
□ III.3VIBRATION D'UN SYSTEME A PLUSIEURS D.D.L.....	50
III.3.1REPOSE LIBRE NON AMORTIE.....	51
III.3.2REPOSE FORCEE NON AMORTIE.....	52
III.3.3REPOSE FORCEE FAIBLEMENT AMORTIE .....	52
III.4VIBRATION DES BARRES ET DES POUTRES.....	53
III.4.1VIBRATIONS LONGITUDINALES D'UNE BARRE .....	53
II.4.1.III.4.1.1VIBRATIONS LIBRES .....	53
III.4.1.2FREQUENCES ET MODES PROPRES .....	54
III.4.2VIBRATION DE FLEXION D'UNE POUTRE.....	54
III.4.2.III.4.2.1VIBRATIONS LIBRES .....	54
III.4.2.2FREQUENCES ET MODES PROPRES .....	55
III.5METHODE DU QUOTIENT DE RAYLEIGH.....	56
III.5.III.5.1QUOTIENT DE RAYLEIGH.....	56
III.5.2APPROXIMATION : METHODE DE RAYLEIGH.....	57
III.6METHODE DE RAYLEIGH-RITZ.....	57

III.6.1EXEMPLE : VIBRATIONS LONGITUDINALES .....	59
III.6.2SOLUTION EXACTE.....	59
III.6.3SOLUTION APPROCHEE PAR LA METHODE DU QUOTIENT DE RAYLEIGH ....	59
III.6.4METHODE DE RAYLEIGH-RITZ.....	59

**CHAPITRE VI  
APPLICATIONS**

IV.4PREMIERE APPLICATIONS.....	65
IV.4.1INTRODUCTION .....	65
IV.4.2THEOREME DE MAXWELL NIVEN .....	65
IV.4.4ANALYSE STATIQUE DES STRUCTURES .....	69
IV.4.5APPLICATION DE L'EQUATION IV-4 .....	73
IV.4.6APPLICATION DE L'EQUATION IV-5 .....	74
IV.5DEUXIEME APPLICATION .....	77
IV.5.1INTRODUCTION .....	77
IV.5.IV.5.2ANALYSE MODALE DES STRUCTURES .....	77
IV.6TROISIEME APPLICATION .....	85
IV.4.IV.6.1INTRODUCTION .....	85
IV.6.2ANALYSE DE L'EXEMPLE .....	85
IV.7QUATRIEME APPLICATION .....	91
.2.5.IV.7.1INTRODUCTION.....	91
IV.7.2RELATION ANALYSE CONCEPTION.....	91
IV.7.3CONCEPTION DE LA STRUCTURE.....	94
IV.8CINQUIEME APPLICATION.....	97
IV.8.1INTRODUCTION .....	97
IV.8.2PROCEDURE .....	97
IV.8.3DESCRIPTION DU PROBLEME.....	97
IV.8.5L'ALGORITHME.....	99
IV.8.6RESULTATS .....	100
IV.8.7VALIDATION DES RESULTATS.....	101
CONCLUSION GENERALE.....	103
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	104
ANNEXES .....	106



## INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le concepteur industriel étant confronté à plusieurs exigences contradictoires, les méthodes pratiques dans ce domaine sont variées, un produit peut nécessiter une forme expressive pour incarner une idée ou une texture particulière, il peut devoir s'adapter à différentes tailles, il est possible qu'il devra être facile à entretenir et à réparer. Il doit pouvoir être fabriqué de manière économique et à un coût économique le plus bas possible et enfin, son prix et son aspect doivent être attractifs. L'approche et les méthodes de travail du concepteur industriel doivent concerner inévitablement une gamme variée d'intérêt et de préoccupations et, de ce fait, des critères de concurrence. En conséquence, le concepteur industriel doit incarner un peu des connaissances, de la sensibilité et des compétences de l'ingénieur, de l'artiste, du scientifique, de l'économiste et de sociologue.

L'optimisation traite des problèmes apparemment dépourvus de mystère dans lesquels on a à extraire, par exemple un coût minimum d'un ensemble fini. Un instant de réflexion montre que la plupart des problèmes concrets d'optimisation appartiendraient effectivement à cette classe ou peuvent se formuler de cette manière. Quoique fini, la structure à étudier comporte en générale un grand nombre de paramètres par rapport au nombre de données du problème. C'est ce phénomène qui donne l'importance à des méthodes d'optimisations plus que d'autres.

Les applications de l'optimisation sont innombrables, parmi les, on cite le domaine de l'aérospatial et l'aéronautique, ces derniers sont largement liés à l'optimisation, comprenant l'étude et le développement des moteurs de fusée, des satellites artificiels et de sondes de navettes pour l'exploration de l'espace ainsi que les avions et les hélicoptères, avoir un poids minimum est primordial pour des raisons de coût et de performance.

Notre but, et d'introduire quelques idées directrices, versant dans l'axe de l'optimisation pour la conception d'éléments mécaniques et de structures, on touche notamment l'aspect mécanique qui se base essentiellement sur le génie et l'expérience de l'ingénieur. Les structures réticulées (structures treillis) sont choisies comme référence essentielle sur laquelle se base notre travail.

Le présent travail est subdivisé en quatre chapitres, avec une introduction générale, et une conclusion générale suivit de références bibliographiques.

**Le Premier chapitre**, dans lequel, nous avons essayé d'englober les théories qui concernent le domaine d'optimisation à savoir leurs concepts de base, ses techniques, et ses classifications suivis de quelques exemples. Ensuite on a passé en revue les types, les outils et les techniques ainsi que les processus d'optimisation.

**Le deuxième Chapitre** a été consacré à la méthode des éléments finis, dans lequel on a essayé d'exposer tous ce qui touche cette méthode, ses procédures d'application, les principales étapes pour la formulation de la matrice de rigidité pour un élément barre et poutre, le principe de numérotation des nœuds d'une structure et enfin les principales étapes à suivre pour fabriquer un programme pour résoudre un problème par élément finis.

**Le troisième chapitre** quand à lui, traite le domaine de la dynamique des structures simples et complexes, en introduisant les méthodes de résolution des équations d'équilibre dynamique sous leurs formes différentielles ordinaires et

partielles, et en tenant compte des différentes hypothèses du mouvement libre, forcé, amorti et non amorti. Les solutions analytiques exactes étant limitées au cas particulier des barres et poutres simplement appuyées, après et afin d'élargir le champ des solutions de l'analyse vibratoire d'après les méthodes numériques approchées (Rayleigh et Rayleigh-Ritz), Les réponses dynamiques en terme de fréquence et modes propre, ainsi que les déformées et forces modales caractérisant le mouvement libre, sont sélectionnées pour l'analyse complémentaire d'optimisation dynamique.

**Le quatrième et dernier chapitre** entame cinq applications, Les applications sont basées sur l'étude du comportement statique et dynamique des structures réticulées en éléments barre en négligeant l'effet des moments aux nœuds et en tenant compte uniquement des forces axiales statiques et modales. Les trois premières applications se sont basées sur le théorème énergétique de *MAXWELL*, dans le cas statique et dynamique, la quatrième application repose sur la relation analyse-conception dans le design des structures, et la dernière application traite un exemple d'optimisation en utilisant la programmation mathématique.

# Chapitre I

## L'optimisation en mécanique

### Sommaire du chapitre :

I.1 INTRODUCTION .....	8
I.2 CONCEPTS DE BASE DE L'OPTIMISATION .....	8
.2.I.2.1 PROBLEME TYPE D'OPTIMISATION .....	8
I.2.2 LA CONTINUITÉ D'UNE FONCTION .....	9
I.2.3 LES FONCTIONS MULTIMODALES .....	9
I.2.4 LES FONCTIONS CONVEXES ET CONCAVES .....	10
I.3 CLASSIFICATION DES PROBLEMES D'OPTIMISATION .....	11
I.3.1 CLASSIFICATION BASEE SUR LA NATURE DES VARIABLES .....	11
I.3.2 CLASSIFICATION BASEE SUR LA NATURE DES EQUATIONS INTRODUITES .....	12
I.3.3 CLASSIFICATION BASEE SUR LE NOMBRE DE FONCTIONS OBJECTIVES .....	12
I.4 TECHNIQUES CLASSIQUES D'OPTIMISATION .....	12
I.4.1 OPTIMISATION A UNE SEULE VARIABLE .....	12
I.4.2 OPTIMISATION A PLUSIEURS VARIABLES .....	13
I.4.3 OPTIMISATION A PLUSIEURS VARIABLES AVEC DES CONTRAINTES D'EGALITE .....	15
I.4.3.1 SOLUTION PAR LA SUBSTITUTION DIRECTE .....	15
I.4.3.2 SOLUTIONS PAR LA VARIATION DES CONTRAINTES .....	16
I.4.3.3 SOLUTIONS PAR LA METHODE DES MULTIPLICATEURS DE <i>LAGRANGE</i> .....	18
I.4.4 OPTIMISATION A PLUSIEURS VARIABLES AVEC DES CONTRAINTES D'INEGALITE .....	19
I.5 TYPES D'OPTIMISATION .....	19
I.5.1 OPTIMISATION PARAMETRIQUE .....	19
I.5.2 OPTIMISATION GEOMETRIQUE .....	21
I.5.3 OPTIMISATION TOPOLOGIQUE .....	22
I.6 PROCESSUS D'OPTIMISATION .....	23
I.7 les applications de l'optimisation .....	24

# MÉTHODE D'OPTIMISATION EN MÉCANIQUE

## I.1. Introduction

Vu la concurrence accrue entre les industriels, l'optimisation des structures ou de formes est devenue indispensable dans la conception des nouveaux produits, elle intervient dans presque tous les domaines des sciences de l'ingénieur. Elle a par exemple pour cadre soit l'amélioration de l'existant par modification des paramètres vis à vis de nouveaux objectifs ou limitations, soit l'émergence de nouvelles conceptions par l'optimisation topologique. Autrement dit, elle consiste à déterminer la meilleure forme, les meilleures propriétés internes et/ou meilleures conditions de travail d'une structure obéissant à des contraintes connues, produisant ainsi un extremum (soit minimum ou maximum) d'une quantité choisi caractérisant la structure.

Dans les problèmes d'optimisation simples, la solution (l'optimum) est la plupart du temps obtenu en cherchant les zéros de la dérivée de la fonction à optimiser, ou de son gradient dans les cas de dimension supérieure. Ceci fournit dans la plupart des cas des optima locaux, parmi lesquels on doit trouver le vrai optimum.

Le choix d'une forme estimée est essentiel pour l'analyse ainsi que l'optimisation d'une structure mécanique. L'optimisation est donc possible sans établir une étude préliminaire des hypothèses mises à propos des aspects de la réponse de la structure, soit réelle ou imaginaire.

## I.2. concepts de base de l'optimisation

Pour comprendre la stratégie des procédures d'optimisation, certains concepts de base doivent être cités, on va examiner les propriétés de la fonction objective et des contraintes.

### I.2.1. Problème type d'optimisation

Chaque problème d'optimisation peut être mis sous la forme

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, j = 1, 2, \dots, m.$$

$$\phi_K(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, K = 1, 2, \dots, p.$$

$$\psi_L(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, L = 1, 2, \dots, q.$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$$

Les paramètres  $m, p, q$  sont inférieure ou égale à  $n$ .

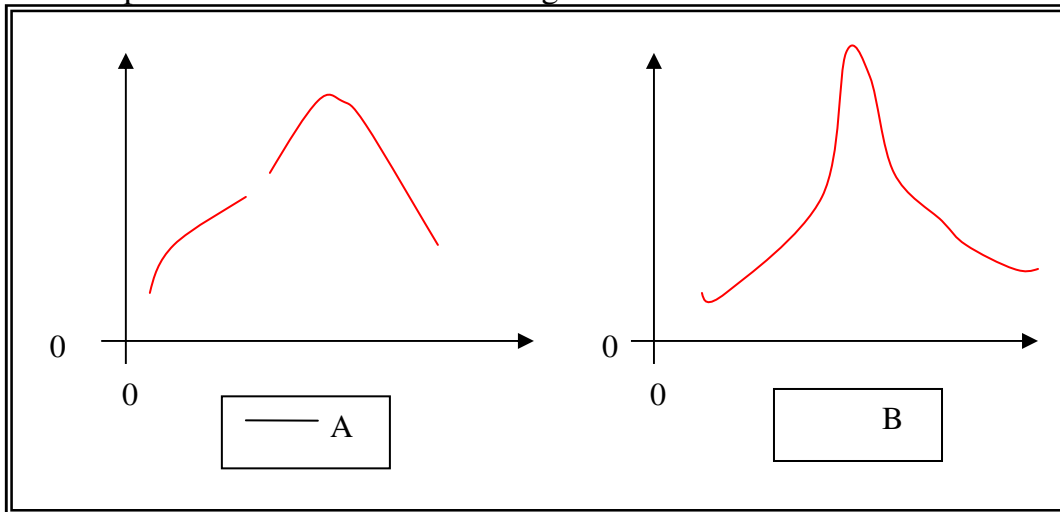
$f$  : est dite la fonction objective.

$g_j$  : contraintes d'égalités.

$\phi_K$  Et  $\psi_L$  : contraintes d'inégalités.

### I.2.2. la continuité d'une fonction

Si on contemple les deux courbes dans la figure I-1. :



*Figure I-1 : Fonctions discontinues.*

On voit que la fonction A est discontinue alors que la discontinuité de B est moins claire.

On définit la propriété de continuité comme suit :

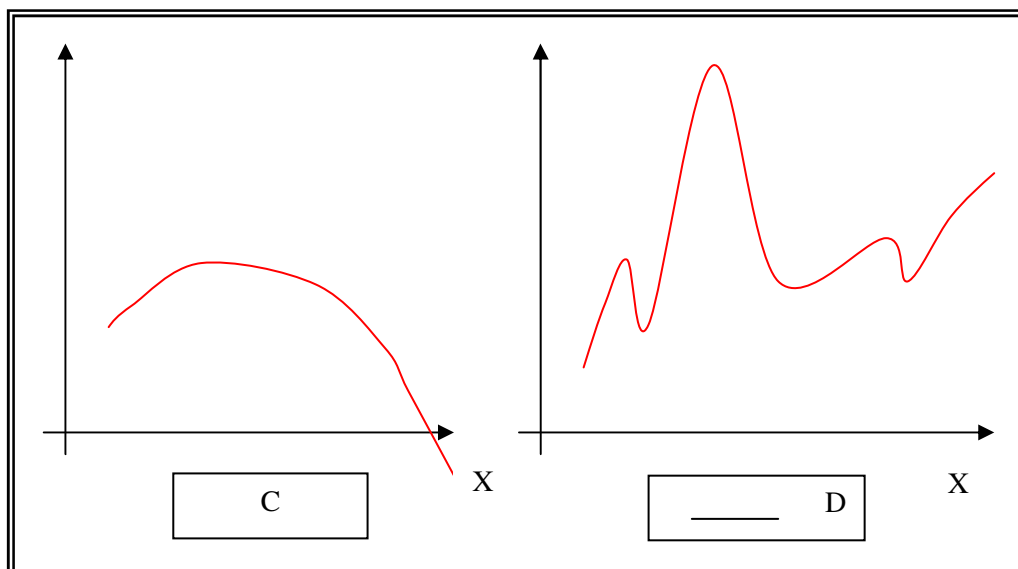
Une fonction à une seule variable est continue au point  $x_0$  si :

$$f(x_0) \text{ Existe. Et } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ existe et que } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

La continuité d'une fonction peut et ne peut être désirable dans les problèmes d'optimisation, dans le cas (A) le point maximum est raisonnablement loin de la discontinuité par contre dans le cas (B) la méthode d'optimisation ne doit pas être une méthode différentielle.

### I.2.3. les fonctions multimodales

Dans la formulation de la fonction objective, il est préférable si possible de choisir une fonction unimodale qu'une multimodale.



*Figure I-2 : Fonction multimodale.*

Si on compare les deux courbes C et D de la figure 1-2. la fonction unimodale C à un seul extremum (maximum ou minimum) tandis que la fonction multimodale D a plusieurs extrêmes, ces points sont appelés points stationnaires.

La distinction entre les différents extremums pour en tirer le plus grand ou le plus petit devient non significative dans les applications numériques des problèmes d'optimisation puisque généralement ces procédures numérique trouve des extremums locaux ce qui ne veut pas dire qu'ils sont les points rechercher.

I.2.4.les fonctions convexes et concaves

La détermination de la concavité ou convexité peut nous aider à établir si la solution optimale locale est aussi la solution optimale globale.

On dit qu'une fonction est concave dans un intervalle R pour deux valeurs de x quelconque  $x_a$  et  $x_b$  appartenant à R lorsque :

$$F[\theta \cdot x_a + (1 - \theta) \cdot x_b] \geq \theta \cdot f(x_a) + (1 - \theta) \cdot f(x_b) \dots \dots \dots (I - 1).$$

Avec  $\theta$  un scalaire défini par  $0 < \theta < 1$

La fonction est dite strictement concave si on remplace le signe ( $\geq$ ) par ( $>$ ).

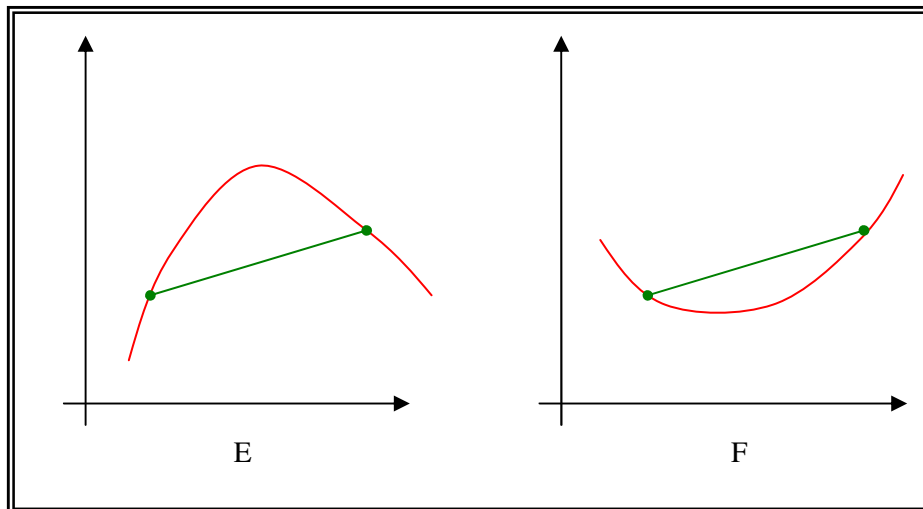


Figure I-3 : Fonction convexe(E) et concave (F).

La deuxième dérivé de  $f(x)$  ou  $\nabla^2 f(x)$  si x est un vecteur cette dernière est appelée la matrice HESSIENNE de  $f(x)$  noté par  $H(x)$ .

Si  $H(x) \geq 0 \Rightarrow f(x)$  est convexe.

Si  $H(x) \leq 0 \Rightarrow f(x)$  est concave.

Pour les fonctions à plusieurs variables  $H(x)$  peut déterminer la nature de la fonction objective.

- $H$  est défini positif si est seulement si  $x^T \cdot H \cdot x > 0$  quel que soit  $x \neq 0$ .
- $H$  est défini négatif si est seulement si  $x^T \cdot H \cdot x < 0$  quel que soit  $x \neq 0$ .
- $H$  est indéfinis si  $x^T \cdot H \cdot x < 0$  pour des valeurs de x est inversement pour d'autre.

Les conditions nécessaires sont suffisantes pour un extremum d'une fonction sans contraintes.

Le problème peut être interpréter géométriquement afin de trouver un point dans un espace a n dimension qui représente l'extremum de la fonction. Si on essaie d'identifier les points stationnaires de la fonction :

$$F(x) = 4 + 4,5x_1 - 4x_2 + x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^4 - 2x_1^2x_2$$

On les trouve en utilisant  $\nabla f(x) = 0$  ce qui donne :

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 4,5 + 2x_1 - 2x_2 + 4x_1^3 - 4x_1x_2 = 0$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = -4 + 4x_2 - 2x_1 - 2x_1^2 = 0$$

Les résultats finaux sont exprimés par ce tableau :

Points stationnaires $(x_1, x_2)$ .	$F(x)$	Valeurs propres de la matrice H		Classification
(1,941, 3,854)	0,9855	37,03	0,97	Minimum local
(-1,053, 1,028)	-0,5124	10,5	3,5	Minimum global
(0,6117, 1,4929)	2,28	7,0	-2,56	Point escabeau

Tableau I-1: résultats finaux.

### I.3. Classification des problèmes d'optimisation

La première tâche de l'ingénieur c'est d'étudier la classe qui convient de problème rencontré, cela pour simplifier la détermination des résultats, la classification des problèmes d'optimisation peut se faire sous différentes façons :

#### I.3.1. classification basée sur la nature des variables

Ce type de classification est divisé en deux groupes, le premier concerne les Variables discrètes alors que le deuxième groupe c'est les variables continues.

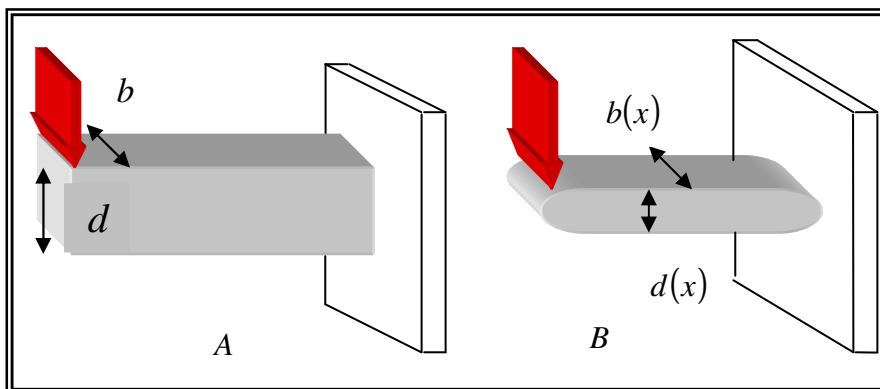


Figure I-4 : poutre console.

La détermination du poids minimum d'une poutre console soumise a la contrainte de la flèche maximale.

(a):  $f(x) = \rho b d$   $b$  Et  $d$  sont des variables discrètes.

(b):  $f(x) = \rho \int_0^L b(x)d(x)dx$  C'est le cas des variables discontinues.

I.3.2.classification basée sur la nature des équations introduites

Ce type de classification est très important il est basée sur la nature de l'expression de fonction objective et des contraintes .on distingue deux cas linéaire et non linéaire.

I.3.3.Classification basée sur le nombre de fonction objectives

Le cas du problème d'optimisation avec plusieurs fonctions objectives est traiter en cherchant une nouvelle fonction objective qui la combinaison linéaire des fonctions objectives originales.

**Exemple :**

Si le nombre de fonction objective est 2 on peut écrire :

$$F(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x).$$

Avec  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  composantes indiquant l'importance de l'une par rapport a l'autre.

I.4. Techniques classiques d'optimisation

Les méthodes classiques d'optimisations sont très utiles pour trouver l'optimum d'une fonction continue et dérivable. Ces méthodes sont analytiques et utilisent les calculs différentiels pour localiser le point optimal.

I.4.1.optimisation à une seule variable

On dit que la fonction  $f(x)$  a un minimum local au point  $x = x^*$  si :

$$f(x^*) \leq f(x^* + h) \text{ Quel que soit la petite valeur de } h \text{ (positif ou négatif).}$$

Inversement on dit que  $x^*$  est maximum local si :

$$f(x^*) \geq f(x^* + h).$$

Dans ce cas d'optimisation on applique les deux théorèmes suivants :

**Théorème 1 :**

Si la fonction  $f(x)$  définit dans l'intervalle  $[a \ b]$  est un point stationnaire relatif  $x^*$

Tel que  $a < x^* < b$  et si la dérivé  $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$  alors  $f'(x) = 0$ .

**Théorème 2 :**

Supposons que

$$f(x^*) = f''(x^*) = \dots = f^{(n-1)}(x^*) = 0 \text{ Mais } f^{(n)}(x^*) \neq 0 \text{ alors } f(x^*) \text{ est :}$$

Une valeur minimale de  $f(x)$  si  $f^{(n)}(x^*) > 0$ .

Une valeur maximale de  $f(x)$  si  $f^{(n)}(x^*) < 0$ .

**Exemple 3**

Dans le cas d'une compression adiabatique de gaz en stages, on comprime le gaz de la pression  $p_1$  vers une pression intermédiaire  $p_2$  , dans le premier stage et de la pression Vers une pression  $p_2$  jusqu'à  $p_3$  a la fin de second stage. Le travail global est donné par:

$$W = NRT_1 \left( \frac{K}{K-1} \right) \left[ \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{(K-1)/K} + \left( \frac{P_3}{P_2} \right)^{(K-1)/K} - 2 \right] \dots \dots \dots (I - 2).$$

$T_1$  Est la température d'entrée.



On doit trouver  $P_2$  optimal pour un travail minimal :

$$\frac{dW}{dP_2} = NRT_1 \left( \frac{K}{K-1} \right) \left[ \left( \frac{1}{P_1} \right)^{(K-1)/K} \frac{K-1}{K} (P_2)^{-1/K} + (P_3)^{(K-1)/K} \left( \frac{-K+1}{K} \right) (P_2)^{(1-2K)/K} \right] = 0$$

$$P_2 = (P_1 P_3)^{1/2} \dots \dots \dots (I-3).$$

La seconde dérivée  $W$  de qui respecte  $P_2$  donne :

$$\frac{d^2W}{dP_2^2} = NRT_1 \left[ \left( \frac{1}{P_1} \right)^{(K-1)/K} \left( \frac{1}{K} \right) (P_2)^{-(1/K)/K} \left( \frac{1-2K}{K} \right) (P_2)^{(1-3K)/K} \right] \dots \dots \dots (I-4).$$

$$\left( \frac{d^2W}{dP_2^2} \right)_{P_2=(P_1 P_3)^{1/2}} = \frac{2NRT_1 \left( \frac{K-1}{K} \right)}{P_1^{(3K-1)2K} P_3^{(K+1)/2K}}$$

Le travail minimal est donné par :

$K > 1$ . On a :

$$P_2 = (P_1 P_3)^{1/2}$$

$$W_{\min} = 2NRT_1 \left( \frac{K}{K-1} \right) \left[ \left( \frac{P_3}{P_1} \right)^{(K-1)/2K} - 1 \right] \dots \dots \dots (I-5).$$

**I.4.2. Optimisation a plusieurs variables**

Dans ce chapitre on va présenter les conditions nécessaires et suffisantes pour les minimums d'une fonction à plusieurs variables sans aucune contrainte.

**Théorème 3**

Si  $f(x)$  à un point extrême (max, min) au point  $x = x^*$  et si la première dérivée partielle existe, alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) = 0 \dots \dots \dots (I-6).$$

**Théorème 4**

La condition suffisante pour un point stationnaire  $x^*$  pour qu'il soit un point extrême et que la **HESSIENNE** de  $f(x)$  évaluée au point  $x^*$  est :

- Positif si  $x^*$  est un minimum.
- Négatif si  $x^*$  est un maximum.

**Exemple 4**

On doit trouver les déplacements  $x_1$  et  $x_2$  sous la force  $P$  en utilisant le principe de l'énergie potentiel minimal : figure I-5. .

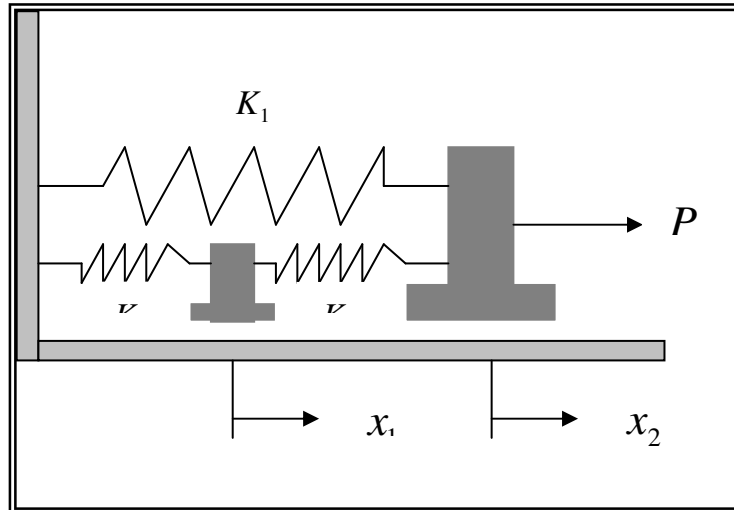


Figure I-5 : Système a deux degrés de liberté.

L'énergie potentielle est égale à :

$$U = \frac{1}{2}k_2x_1^2 + \frac{1}{2}k_3(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_1x_2^2 - Px_2 \dots \dots \dots (I-7).$$

La condition nécessaire pour un minimum de U est :

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = k_2x_1 - k_3(x_2 - x_1) = 0 \dots \dots \dots (I-8).$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = k_1(x_2 - x_1) + k_1x_2 - P = 0 \dots \dots \dots (I-9).$$

Ce qui donne :

$$x_1^* = \frac{Pk_3}{(k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3)} \dots \dots \dots (I-10).$$

$$x_2^* = \frac{P(k_2 + k_3)}{(k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3)} \dots \dots \dots (I-11).$$

La condition suffisante pour que le point  $(x_1^*, x_2^*)$  soit minimum peut être vérifié par la HESSIENNE de U .

$$j|_{(x_1^*, x_2^*)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}_{(x_1^*, x_2^*)} = \begin{bmatrix} (k_2 + k_3) & -k_3 \\ -k_3 & (k_1 + k_3) \end{bmatrix}$$

Les déterminants de cette matrice carrée nous donnent :

$$j_1 = k_2 + k_3 > 0 \dots \dots \dots (I-12).$$

$$j_2 = \begin{bmatrix} (k_2 + k_3) & -k_3 \\ -k_3 & (k_1 + k_3) \end{bmatrix} = k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3 > 0 \dots \dots \dots (I-13).$$

Puisque la HESSIENNE de U est positif donc le point  $(x_1^*, x_2^*)$  est le point minimum optimal.

I.4.3. Optimisation à plusieurs variables avec des contraintes d'égalité

On considère une fonction continue  $f(x)$  soumise à des contraintes :

$$g_j(x) = 0, j = 1, 2, \dots, m \dots \dots \dots (I - 14).$$

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \text{ Avec } m \leq n \text{ (si } m > n \text{ le problème devient indéfini)}$$

Pour résoudre ce type de problème on utilise trois types de méthodes qui sont :  
La substitution directe, la variation des contraintes et les multiplicateurs de LAGRANGE.

I.4.3.1. Solution par la substitution directe

Dans le cas d'une fonction objectives sans contraintes le nombre de variables indépendantes est égal à  $n$ , alors que pour le problème d'optimisation avec des contraintes d'égalité on introduit ces contraintes dans la fonction objectives originales ce qui nous donne une nouvelle fonction objective mais à  $(n - m)$  variables et le problème devient celui d'une fonction à plusieurs variables sans contraintes ce qui a été traité précédemment.

Cette méthode paraît simple théoriquement mais pratiquement elle est inconcevable surtout si les contraintes sont des équations non linéaires. Toutefois cette méthode est fiable pour les problèmes non compliqués.

**Exemple 5**

Dans cet exemple, nous allons chercher les dimensions d'un parallélépipède ou son plus grand volume soit égal à un volume d'une sphère de rayon égale à l'unité. Mettons l'origine de repère cartésien au centre de la sphère, le volume de parallélépipède est égal à :

$$f(x_1, x_2, x_3) = 8x_1x_2x_3 \dots \dots \dots (I - 15).$$

On a à satisfaire la contrainte :

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^2 x_3^2 = 1 \dots \dots \dots (I - 16).$$

Ce problème a trois variables et une contrainte d'égalité :

On peut faire la transformation suivante :

$$x_3 = (1 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2} \dots \dots \dots (I - 17)$$

La forme objective devient :

$$f(x_1, x_2) = 8x_1x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2} \dots \dots \dots (I - 18).$$

La condition nécessaire pour le maximum est donnée par :

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 8x_2 \left[ (1 - x_2^2 - x_1^2) - \frac{x_1^2}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2}} \right] = 0.$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 8x_1 \left[ (1 - x_2^2 - x_1^2) - \frac{x_2^2}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2}} \right] = 0$$

Après simplification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 1 - 2x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ 1 - x_1^2 - 2x_2^2 = 0 \end{cases} \dots\dots\dots(I - 19).$$

$$\begin{cases} 1 - 2x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ 1 - x_1^2 - 2x_2^2 = 0 \end{cases} \dots\dots\dots(I - 19).$$

La résolution du système nous donne :  $x_1^* = x_2^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x_3^* = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ; ce qui définit le

Parallélépipède, on vérifie si cette solution donne le maximum du volume :

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = \frac{8x_1x_2}{(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2}} - \frac{8x_2}{(1-x_1^2-x_2^2)} \left[ \frac{x_1^3}{(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2}} + 2x_1(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2} \right]$$

Pour les valeurs  $(x_1^*, x_2^*)$  de on a :

Au point  $(x_1^*, x_2^*)$  ; la valeur de  $\frac{\partial^2 f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{16}{\sqrt{3}}$ .

On remarque que  $\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \leq 0$  et  $\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} - \left( \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \geq 0$

La *HESSIENNE* de la fonction est négative.

Le point  $(x_1^*, x_2^*)$  correspond à la valeur maximale du volume.

#### 1.4.3.2. solutions par la variation des contraintes

L'idée de cette méthode est de trouver l'expression de la dérivée totale du premier ordre de f, pour tous points vérifiant les contraintes  $g_j(x) = 0, j = 1, 2, \dots, n$ . Les points optimaux sont obtenus en mettant  $df = 0$ .

Démonstration pour  $n = 1$  et  $m = 1$ .

Considérons le problème suivant :

Minimiser  $f(x_1, x_2) \dots\dots\dots(I - 20).$

Sous la contrainte  $g(x_1, x_2) = 0 \dots\dots\dots(I - 21).$

Mettons  $x_2 = h(x_1)$  la solution de la contrainte  $g(x_1, x_2) = 0$ .

En la substituant dans la fonction objective, on aura  $f(x_1, x_2) = f[x_1, h(x_1)]$ .

La condition nécessaire pour que f ait un minimum au point  $(x_1^*, x_2^*)$  est que la dérivée totale soit égale à zéro.

$$df(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = 0 \dots\dots\dots(I - 22).$$

Puisque  $g(x_1, x_2) = 0$  toutes petites variations  $dx_1$  et  $dx_2$  prise autour de  $(x_1^*, x_2^*)$  satisfait la relation :

$$g(x_1^* + dx_1, x_2^* + dx_2) = 0$$

L'expression de la série de *TAYLOR* au point  $(x_1^*, x_2^*)$  donne :

$$g(x_1^* + dx_1, x_2^* + dx_2) = g(x_1^*, x_2^*) + \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) dx_2 = 0$$

Ou :  $dg = \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} dx_2 = 0$ , à  $(x_1^*, x_2^*)$ .....(I - 23).

Ceci peut être dans la figure I - 6. qui représente la courbe de la fonction (I - 21). , si A est le point de base  $(x_1^*, x_2^*)$ , la variation de  $x_1$  et  $x_2$  vers les points B et C est dite variation admissible, alors que la variation vers le point D n'est pas une variation admissible puisque D n'appartient pas à la courbe.

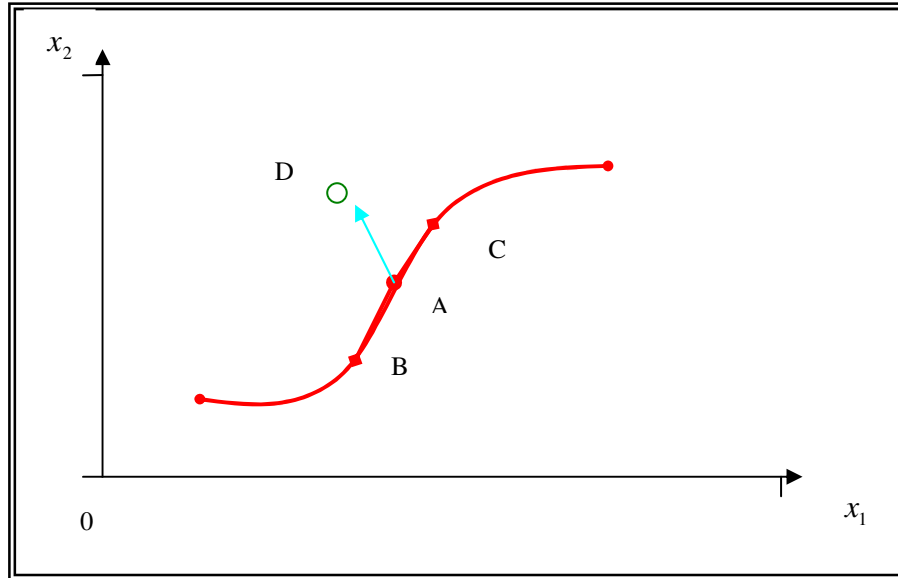


Figure I-6 : Variation autour de A.

En supposant que  $\frac{\partial g}{\partial x_2} \neq 0$ , L'équation (I - 23). devient :

$$dx_2 = -\frac{(\partial g / \partial x_1)}{(\partial g / \partial x_2)}(x_1^*, x_2^*) dx_1 \dots \dots \dots (I - 24).$$

Cette relation indique qu'une variation dans  $x_1(dx_1)$  choisit arbitrairement, décide automatiquement de la variation de  $x_2(dx_2)$  pour que la variation soit admissible. En substituant l'équation (I - 24). et (I - 22). on obtient :

$$df = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{(\partial g / \partial x_1)}{(\partial g / \partial x_2)} \frac{\partial f}{\partial x_2} \right] (x_1^*, x_2^*) dx_1 = 0 \dots \dots \dots (I - 25).$$

Cette équation est valable pour n'importe quelle valeur de  $dx_1$  ce qui implique :

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial g}{\partial x_1} \right) \Big|_{(x_1^*, x_2^*)} = 0 \dots \dots \dots (I - 26).$$

L'équation (I - 27). donne la condition nécessaire pour avoir  $(x_1^*, x_2^*)$  comme point extrême (minimum ou maximum).

**Exemple 6**

Une poutre de section rectangulaire doit être remplacé par une section circulaire d'un diamètre  $2a$ . Cette poutre va être utilisé comme une poutre cantilever et sa longueur doit être fixe.

Nous avons :  $\frac{\sigma}{y} = \frac{M}{I} \dots\dots\dots(I - 27).$

Ou  $M$  est le moment fléchissant,  $I$  : le moment d'inertie.

Si  $2x, 2y$  sont respectivement la largeur et la longueur du rectangle, la contrainte maximale devient :

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I} y = \frac{My}{\left[ \frac{1}{12} (2x)(2y)^3 \right]} = \frac{3M}{4xy^2} = \frac{K}{xy^2} \dots\dots\dots(I - 28).$$

Sous la contrainte :

$$x^2 + y^2 = a^2 \dots\dots\dots(I - 29).$$

Ce problème a deux variables et une contrainte, donc l'équation (I-27). peut être appliquée pour trouver la solution optimale.

$$F = Kx^{-1}y^{-2} \dots\dots\dots(I - 30).$$

$$g = x^2 + y^2 - a^2 \dots\dots\dots(I - 31).$$

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -Kx^{-2}y^{-2}, \frac{\partial f}{\partial y} = -2Kx^{-1}y^{-3}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x, \frac{\partial g}{\partial y} = 2y$$

Ce qui donne :

$$-Kx^{-2}y^{-2}(2y) + 2Kx^{-1}y^{-3}(2x) = 0 \text{ À } (x_1^*, x_2^*)$$

$$y^* = \sqrt{2}x^*$$

La valeur de  $x$  et  $y$  est obtenue des équations (I-31) et (I-32):

$$x^* = \frac{a}{\sqrt{3}}, \text{ et, } y^* = \sqrt{2} \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

**I.4.3.3. solutions par la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE**

Dans cette méthode on introduit une nouvelle variable pour chaque contrainte .dans le problème original il y avait  $n$  variables, avec l'introduction des multiplicateurs de LAGRANGE de nombre devient  $n + m$ .

**Remarque** : Dans le cas ou  $\lambda^* = 0$  : les contraintes n'ont aucune influence sur la fonction objective.

**Exemple 7**

On doit trouver le maximum de la fonction  $f(x) = 2x_1 + x_2 + 10$  soumis à la contrainte

$$g(x) = x_1 + 2x_2^2 = 3$$

La fonction de LAGRANGE est donnée par :

$$L(x, \lambda) = 2x_1 + x_2 + 10 + \lambda(3 - x_1 - 2x_2^2) \dots\dots\dots(I - 33).$$

Les conditions nécessaires pour résoudre le problème sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 - 4\lambda x_2 = 0 \dots\dots\dots(I - 34). \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 3 - x_1 - 2x_2^2 = 0 \end{cases}$$

Les solutions de l'équation (I - 33)

$$x^* = \begin{Bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,125 \\ 2,96875 \end{Bmatrix},$$

$$\lambda^* = 2$$

#### I.4.4.Optimisation à plusieurs variables avec des contraintes d'inégalité

Le problème est sous la forme :

Minimiser  $f(x)$  sous les contraintes :

$$g_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m, \dots\dots\dots(I - 35).$$

Ces contraintes peuvent être transformées en contraintes d'égalité en ajoutant une variable positive :

$$g_j(x) + y_j^2 = 0, j = 1, 2, \dots, m, \dots\dots\dots(I - 36).$$

Cette nouvelle forme du problème ressemble à un problème d'optimisation à plusieurs variables avec des contraintes d'égalité.

### I.5. Types d'optimisation

Parmi les problèmes d'optimisation de formes ou de structures on peut distinguer trois grandes catégories, du plus facile au plus difficile :

#### I.5.1.Optimisation paramétrique

Dans ce type d'optimisation de formes, les formes sont paramétrées par un nombre réduit de variables (par exemple, une épaisseur, un diamètre, des dimensions), ce qui limite considérablement la variété des formes possibles (ou admissibles). L'exemple le plus simple de cette optimisation est l'optimisation de l'épaisseur d'une membrane.

On considère une membrane élastique qui, au repos, occupe un domaine plan  $\Omega$ , et que l'on suppose tendue et fixée sur son contour. Lorsqu'elle est soumise à un chargement ou force verticale  $f$ , elle se déforme en dehors de son plan d'équilibre. Dans le cadre d'une théorie mécanique de petits déplacements et de petites déformations, et si l'on ne considère que des efforts de membranes (en négligeant ceux de flexion), la déformation de cette membrane est modélisé par son déplacement vertical  $u(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , solution de l'équation aux dérivées partielles suivante, dite modèle de membrane :

$$\begin{cases} -div(A\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \dots\dots\dots(I - 37).$$

Où  $A(x)$  est le coefficient (en toute généralité le tenseur) qui représente les propriétés de résistance mécanique en  $x$ . Ce coefficient varie en espace, reflétant ainsi une variation de l'épaisseur de la membrane ou bien un changement de matériau élastique. Nous supposons ici que le matériau est homogène isotrope, mais que l'épaisseur peut varier d'un point à un autre (voir Figure I-7.). Dans ce cas le coefficient  $A$  est relié à l'épaisseur  $h$  par la formule :  $A(x) = \mu h(x)I$

où  $I$  est le tenseur identité, et  $\mu > 0$  est le module de Young du matériau.

D'un point de vue pratique l'épaisseur est limitée par des valeurs minimale et maximale :  $0 < h_{min} \leq h(x) \leq h_{max} < +\infty$ . L'épaisseur  $h$  sera notre variable d'optimisation.

Il reste à définir de manière plus précise l'ensemble des épaisseurs admissibles en tenant compte d'éventuelles contraintes de ressource ou de faisabilité pratique ; contrainte sur le poids par exemple. Dans un tel cas on obtient :

$$U_{ad} = \left\{ h(x) : \Omega \rightarrow R \text{ tel que } h_{min} \leq h(x) \leq h_{max} \text{ et } \int_{\Omega} h(x) dx = h_0 |\Omega| \right\} \dots\dots\dots (I-38).$$

Où  $h_0$  est une épaisseur moyenne imposée.

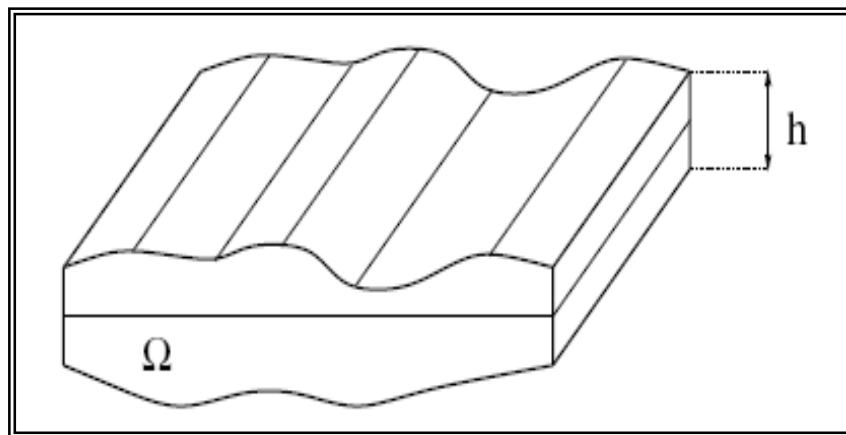


Figure I-7 : Membrane d'épaisseur variable.

Il ne reste maintenant que préciser le dernier ingrédient d'un problème d'optimisation, à savoir le critère d'optimisation. En général, on cherche à optimiser une propriété mécanique de la membrane qui est évaluée à l'aide du déplacement  $u$ , solution de (I-37). Un critère assez général est donc :

$$J(h) = \int_{\Omega} j(u) dx \dots\dots\dots (I-39).$$

Où  $u$  dépend bien sûr de  $h$  à travers l'équation (I-37), et  $j(u)$  prend différentes forme selon besoins, par exemple  $j(u) = fu$  si on joue sur la rigidité d'une structure à savoir quelle est souvent mesurée par le travail des forces extérieures (moins la structure travaille, plus elle est rigide). Un autre exemple consiste à obtenir (ou du moins s'approcher) d'un déplacement cible  $u_0(x)$ , ainsi, on aura :  $j(u) = |u - u_0|^2$ .

On retrouve bien dans ce problème les trois ingrédients essentiels de tout problème d'optimisation de structures : un modèle (I-1), un ensemble admissible (I-2) et un critère (I-3).



I.5.2. Optimisation géométrique

L'idée principale en optimisation géométrique est de faire varier la position des frontières d'une forme, sans toutefois changer sa topologie (c'est-à-dire le nombre de trous en 2D) qui reste la même que celle de la forme initiale.

Par rapport à l'optimisation paramétrique, un certain nombre de difficultés nouvelles se présentent. En particulier, se posent les questions de la représentation mathématique des formes et des variations de formes. Par exemple, on peut représenter une forme par la fonction caractéristique de son domaine (qui vaut 1 à l'intérieur et 0 à l'extérieur) ; mais dans ce cas, comment faire des variations de forme ? En effet, une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques n'est pas, en général, une fonction caractéristique. On ne peut donc pas faire de "calcul des variations" dans l'espace des fonctions caractéristiques, et calculer un gradient. Il s'agit d'une difficulté typique de l'optimisation de formes géométrique qu'il est important de contourner pour des raisons théoriques tout autant que numériques.

Un exemple d'optimisation géométrique est l'optimisation de la forme d'une membrane, mais cette fois-ci à frontières variable ; l'épaisseur est considérée constante, c'est la forme de la membrane qui est la variable d'optimisation.

Un domaine de référence de la membrane est noté  $\Omega$ , et son bord est divisé en trois parties disjointes  $\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma_N \cup \Gamma_D$ , où  $\Gamma$  est la partie variable de la frontière,  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_N$  sont des parties fixe de la frontière (condition aux limites).

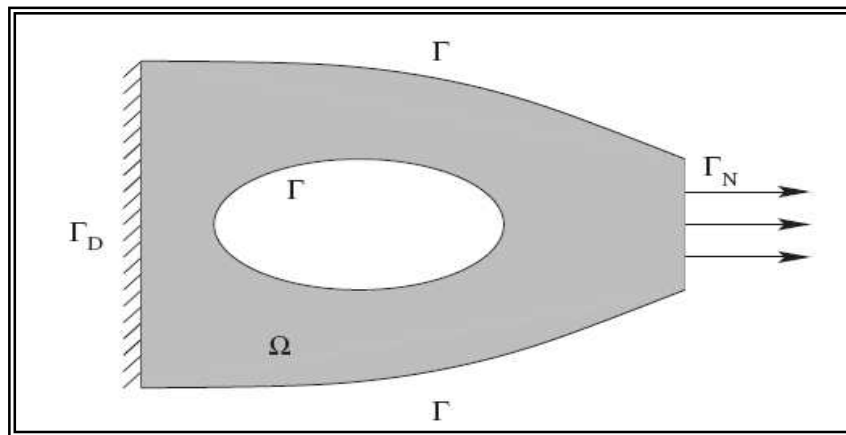


Figure I-8 : Membrane à frontières variables.

On suppose que la partie variable  $\Gamma$  de la frontière est libre de tout effort, autrement dit, le déplacement vertical  $u$  est solution du modèle de membrane suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \partial u / \partial n = g & \text{sur } \Gamma_N \\ \partial u / \partial n = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \dots\dots\dots (I - 40).$$

On rajoutant une contrainte sur le poids ou la masse de la membrane qui est proportionnel au volume de  $\Omega$ , l'ensemble des formes admissibles sera donc :

$$U_{ad} = \left\{ \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ tel que } \Gamma_D \cup \Gamma_N \subset \partial\Omega \text{ et } \int_{\Omega} \partial x = V_0 \right\} \dots\dots\dots(I-41).$$

Où  $V_0$  est un volume imposé.

Il ne manque que le critère d'optimisation pour définir complètement ce problème, celui-ci puisse être la compliance qu'on peut formuler comme suite :

$$J(\Omega) = \int_{\Gamma_N} g u . dx \dots\dots\dots(I-42).$$

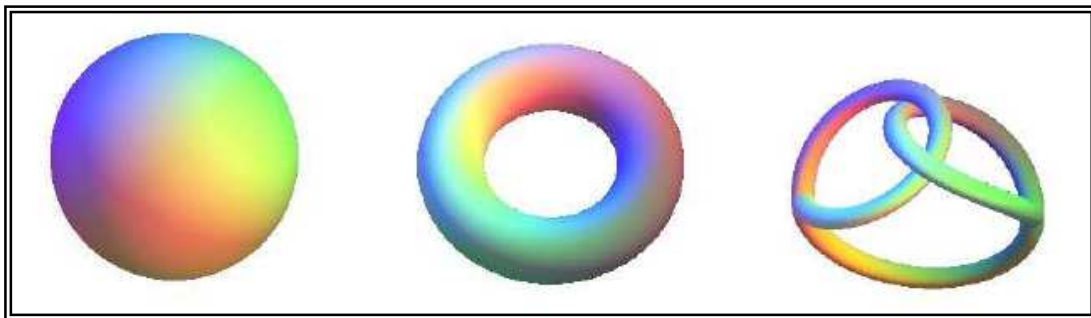
Où un déplacement cible  $u_0(x)$  pour lequel :

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} |u - u_0|^2 dx \dots\dots\dots(I-43).$$

### I.5.3.Optimisation topologique

Dans l'optimisation de formes topologique on cherche, sans aucune restriction explicite ou implicite, la meilleure forme possible quitte à changer de topologie. Ce dernier type d'optimisation est, bien sûr, le plus général mais aussi le plus difficile.

Notons que, si la définition de la topologie d'une forme est assez simple en dimension deux d'espace (nombre de composantes connexes de son bord ou de trous), elle est nettement plus compliquée en dimension trois où ce qui compte n'est pas seulement le nombre de composantes connexes du bord de la forme, mais aussi, son nombre d'anses ou de boucles (une boule  $\neq$  un tore  $\neq$  un bretzel, etc.).



**Figure I-9 :** Formes de topologie différentes.

On peut dire que deux formes ont la même topologie si on peut passer de l'une à l'autre par une déformation continue.

Si l'on considère l'exemple précédent, le but de l'optimisation topologique est donc d'optimiser aussi la topologie de la forme  $\Omega$  (comparer les Figures I-7 et I-9). Pour cela, il ne faut pas représenter une forme par la position de sa frontière, mais plutôt par une fonction indicatrice ou densité de matériau qui vaut 1 si l'on se trouve à l'intérieur de la forme et 0 à l'extérieur.

Il faudra aussi tenir compte de la présence de "trous" minuscules qui permettent d'améliorer les performances de la structure et considérer donc une classe plus large de formes admissibles qui pourront être des matériaux composites de type milieux poreux microperforés.

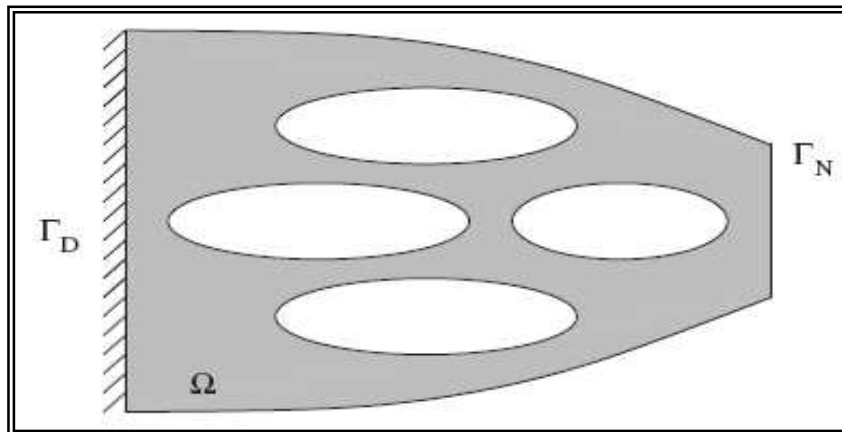


Figure I-10 : Structure à trous en optimisation topologique.

## I.6. processus d'optimisation

Le dimensionnement classique dans un bureau d'études repose souvent sur une approche essais-erreurs, c'est à dire, pour réaliser un composant, le concepteur doit :

Réaliser un modèle initial à partir d'un cahier des charges, de son expérience

Et de l'environnement général où se situe sa pièce ;

Réaliser ensuite des modélisations (statique, dynamique, etc.) permettant de vérifier les critères de dimensionnement ;

Itérer en modifiant sa conception de manière à respecter son cahier des charges.

Divers logiciels d'optimisation d'usage industriel existent actuellement sur le marché, on peut citer parmi eux : Optistruct, ANSYS DesignSpace, Genesis, MSC-Nastran, Tosca, devDept, etc. Leur principe de base est de pouvoir reproduire de façon automatique ce qu'un concepteur réalisait auparavant manuellement, en y ajoutant :

La possibilité de balayer un espace de conception plus large ;

Les calculs automatiques ;

Les possibilités de réaliser des plans d'expériences et de créer ainsi des fonctions d'approximation.

L'atteinte d'optimum grâce à des algorithmes de plus en plus performants

Pour le concepteur, les étapes-clefs en optimisation de forme sont donc :

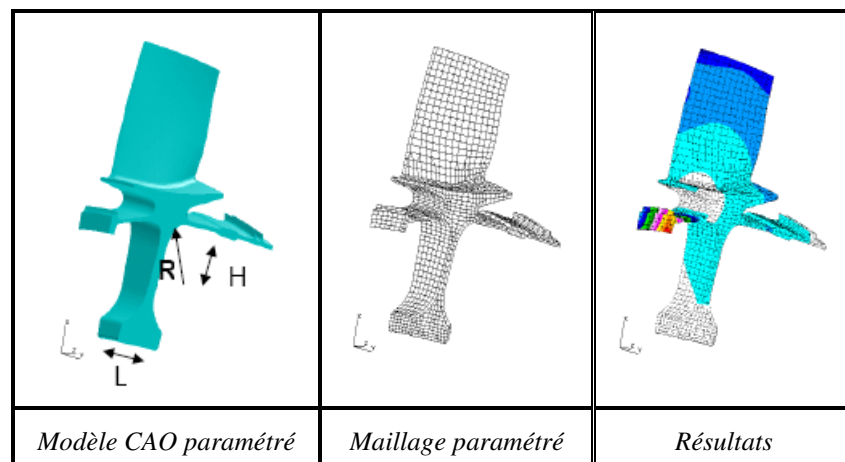
La réalisation du modèle de CAO paramétrée ;

La détermination des analyses à effectuer (statique, dynamique, etc.) ;

La réalisation d'un modèle paramétré éléments finis et associé à la géométrie ;

La définition des critères de dimensionnement associés à la pièce (contraintes maximales, plage de fréquence interdite, masse, déplacements maximaux, etc.).

Le logiciel d'optimisation va être chargé de reconnaître et de gérer ces modèles (Éléments Finis, CAO, etc.), de permettre à l'utilisateur d'identifier les paramètres sensibles, de piloter automatiquement le processus complet de calcul et de traiter les résultats en fonction des paramètres.



**Figure I-11 :** Processus d'optimisation par un software.

Le plan d'expériences se contentera de permettre la création de fonction d'approximation des fonctions (mais possibilités d'erreurs importante entre la fonction estimée et les points réels), tandis que l'optimisation directe utilisera les valeurs réelles des fonctions et les sensibilités pour atteindre des valeurs optimales [10].

## I.7. les applications de l'optimisation

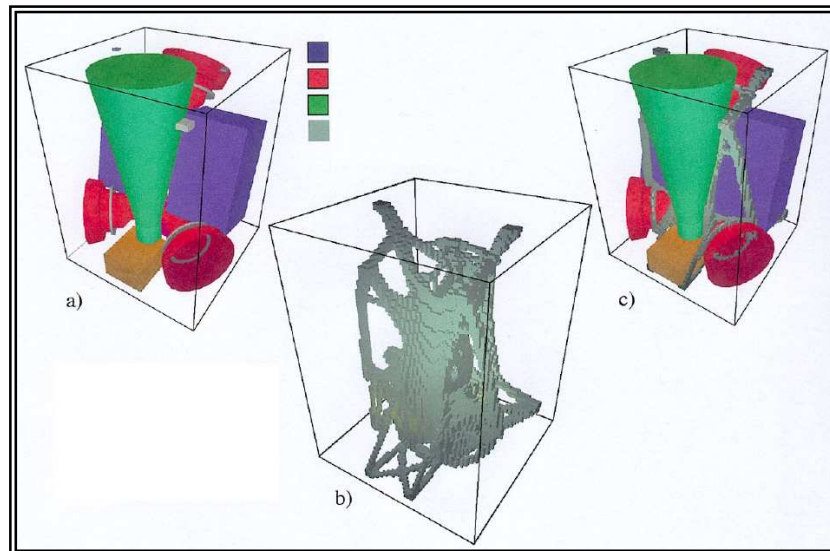
Concernant les applications de l'optimisation de formes ou de structures elle intervient dans presque tous les domaines des sciences de l'ingénieur ; il pourra s'agir de :

Chercher la meilleure aile d'avion, ou un poids minimum (aéronautique), le meilleur pare-brise, ..., etc.

Cristaux photoniques (optique),

Conception d'antennes ou de composants (électromagnétisme, électronique),  
panneaux anti-bruit (acoustique),

Par exemple, les astronomes danois se sont lancés dernièrement dans la réalisation d'un petit satellite capable de détecter des sources de rayon gamma en provenance de galaxies lointaines. Ce satellite est équipé de quatre caméras (situées à chaque angle) et de divers autres instruments. Les différents instruments sont présentés sur la Figure I-6. La taille du satellite est limitée à  $60 \times 60 \times 80 \text{ cm}^3$  et le poids à 80 kg.



**Figure I-12 : Optimisation d'un satellite.**

*a) Région de dessin et instrumentation.*

*b) Structure obtenue par optimisation topologique.*

*c) Structure optimisée avec les instruments.*

La question posée était de trouver la structure permettant d'accrocher ensemble ces divers instruments avec le **minimum de poids** et une **résistance suffisante**, compte tenu des efforts mécaniques endurés par le satellite lors du décollage.

C'est typiquement une question à laquelle l'optimisation topologique apporte une très bonne réponse. La Figure I – 12b, représente le domaine optimal avant post-traitement et la Figure I – 12c, la structure avec les instruments.

Ce type de calcul tridimensionnel peut prendre plusieurs jours sur une machine très puissante [11].

## Méthode éléments finis

### Sommaire du chapitre :

II.1INTRODUCTION.....	27
II.2PROCEDURES D'APPLICATIONS DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.....	28
II.3FORMULATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE POUR UN ELEMENT BARRE.....	28
II.3.1DANS LE REPERE LOCAL .....	28
II.3.2DANS LE REPERE GLOBAL .....	30
II.4RELATION ENTRE LES FORCES NODALES ET LES DEPLACEMENTS NODAUX DANS LE SYSTEME LOCAL .....	31
II.5RELATION ENTRE LES FORCES NODALES DANS LE SYSTEME LOCAL ET LES FORCES NODALES DANS LE SYSTEME GLOBAL .....	32
II.6FORMULATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE POUR UN ELEMENT POUTRE.....	33
II.7EQUATION DE RIGIDITE D'UN ELEMENT POUTRE AVEC CISAILLEMENT TRANSVERSAL. ....	36
II.8PRINCIPE DE NUMEROTATION DES NCEUDS D'UNE STRUCTURE .....	39
II.9METHODE D'ASSEMBLAGE.....	39
II.10CALCUL DES EFFORTS INTERNES DANS UN ELEMENT BARRE .....	41
II.11PROGRAMMATION.....	43
II.11.1ETUDE PAR ORDINATEUR .....	43
II.11.2Entrées de données.....	44

---

# MÉTHODE ÉLÉMENTS FINIS

## II.1. Introduction

L'évolution actuelle de la technologie amène l'ingénieur à réaliser des projets de plus en plus complexes. Pour dominer ces projets, il a besoin de modèles qui lui permettent de simuler le comportement des systèmes physiques complexes. Il peut ainsi prévoir l'influence de ses décisions au moment de la conception du système.

Les sciences de l'ingénieur tel que mécanique des solides, des fluides, thermique ... permettent de décrire le comportement du système physique grâce à des équations aux dérivées partielles. La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées pour résoudre effectivement ces équations. Elle nécessite l'utilisation intensive de l'ordinateur.

La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques. Elle fait appel aux trois domaines suivants :

science de l'ingénieur pour construire les équations décrivant le comportement du système physique.

méthode numérique pour construire et résoudre les équations algébriques.

programmation informatique pour exécuter efficacement les calculs sur ordinateurs.

Depuis quelques années la mécanique des structures permet l'analyse des assemblages de barres et de poutres, le comportement de chaque élément barre ou de poutre est représenté par une matrice de rigidité élémentaire construite grâce aux hypothèses de la résistance des matériaux. À partir des équations des matrices élémentaires nous construisons un système d'équation algébrique en utilisant des conditions de déplacements et d'équilibre des forces aux points de jonctions des éléments dits *nœuds*.

La résolution du système d'équation correspondant à des sollicitations données conduit aux déplacements de tous les nœuds de la structure.

La méthode des éléments finis est maintenant très répandue dans les industries en particulier en construction aéronautique, aérospatiales, navale et nucléaire. Elle se développe en ce moment dans les applications de la mécanique des fluides.

De nombreux programmes généraux de calcul sont disponibles pour utiliser industriellement la méthode des éléments finis principalement dans le domaine de la mécanique des solides. Ces programmes généraux sont conçus pour être exécutés sur de gros ordinateurs. Une nouvelle génération des programmes plus modulaires est adoptée aux mini-ordinateurs va permettre l'utilisation des éléments finis par les entreprises et bureaux d'études de taille réduite et il existe quelques programmes qui permettent de résoudre des problèmes de dimensions moyennes sur les micro-ordinateurs.

## II.2. Procédures d'applications de la méthode des éléments finis

Il est utile de noter les étapes de l'analyse par éléments finis, puisqu'elles restent généralement les mêmes quel que soit le problème et le type d'éléments utilisés. On commence essentiellement par l'identification du type du problème, et choisir en suite un système de coordonnées convenable.

- Etape 1 : noter les structures avec les numéros de nœuds (1),(2),(3)...etc., et Des numéros d'éléments [1],[2],[3]..., etc.
- Etape 2 : former les matrices de rigidité des éléments  $[K_e]$
- Etape 3 : assembler la matrice de rigidité de la structure  $[K]$ , à partir des matrices de rigidité des éléments indépendants  $[K_e]$ .
- Etape 4 : appliquer les conditions aux limites.
- Etape 5 : résolution du système des équations  $\{F\} = [K]\{\delta\}$  pour obtenir les déplacements et ; si nécessaire, les réactions.
- Etape 6 : utiliser les relations entre forces et déplacements pour obtenir les forces dans l'élément.

Nous allons nous intéresser dans ce chapitre de l'élément barres et poutre seulement, puisque les structures que nous allons étudier sont des structures composés par des éléments barres et poutre.

## II.3. Formulation de la matrice de rigidité pour un élément barre

### II.3.1. Dans le repère local

Pour déterminer la matrice de rigidité élémentaire d'un élément barre dans le repère local on suppose que l'élément résiste qu'à des efforts axiaux (traction ou compression), et se déforme suivant la direction axiale (déformation linéaire suivant  $x$ ).

Considérons Un membre ayant comme axe longitudinal  $ox$ . ( $ox$  est orienté suivant la longueur de l'élément étudié), de section transversale  $A$ , de longueur  $L$  et du matériau ayant un module d'élasticité longitudinal  $E$ . Figure II – 1.



Figure : II-1.Élément barre.



On considère que chaque nœud de cet élément possède un seul degré de liberté qui est le déplacement axial, donc :

- Le nœud  $i$  se déplace de la quantité  $U_i$ .
- Le nœud  $j$  se déplace de la quantité  $U_j$ .

On suppose la variation de déplacement  $U(x)$  à l'intérieur de l'élément est linéaire, Donc il peut s'écrire sous la forme :

$$U(x) = A + Bx \dots \dots \dots (II - 1).$$

Où :  $A$  et  $B$  sont des constantes à déterminer des conditions aux limites.

On a :

Pour :  $x = 0 \rightarrow U(x) = U(0) = U_i$   
 $x = L \rightarrow U(x) = U(L) = U_j$

De l'équation (1) on a : 
$$\begin{aligned} U(0) &= A \\ U(L) &= A + B.L \end{aligned}$$

Donc :  $A = U_i$        $A + B.L = U_j \Rightarrow U_i + B.L = U_j$  d'où :  $B = \frac{(U_j - U_i)}{L}$

Donc l'équation (1) devient :

$$U(x) = U_i + \left[ \frac{(U_j - U_i)}{L} \right] . x ; 0 \leq x \leq L$$

$$U(x) = \left( \frac{1-x}{L} \right) U_i + \left( \frac{x}{L} \right) U_j \dots \dots \dots (II - 2).$$

Sous forme matricielle :

$$U(x) = \left[ \left( \frac{1-x}{L} \right) \quad \frac{x}{L} \right] \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix}$$

Sous forme abrégée on a :

$$U(x) = [N] \{U^e\} \dots \dots \dots (II - 3).$$

$[N] = \left[ \frac{1-x}{L} \quad \frac{x}{L} \right]$  : représente la matrice de la fonction d'interpolation.

$\{U^e\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix}$  : représente le vecteur de déplacement des nœuds de l'élément étudié.

D'après la théorie d'élasticité on peut écrire :

$$\varepsilon = \frac{dU(x)}{dx} \dots \dots \dots (II - 4).$$

Où  $\varepsilon$  la déformation longitudinale suivant l'axe  $x$ .

Donc en appliquant l'expression (II - 4) sur l'équation (II - 2) on aura :

$$\varepsilon = \left( \frac{-1}{L} \right) U_i + \left( \frac{1}{L} \right) U_j$$

Sous forme matricielle :  $\varepsilon = \left[ \frac{-1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix}$

Sous forme abrégé :  $\varepsilon = [B] \{U^e\} \dots \dots \dots (II - 5).$

D'où  $[B] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix}$

La relation entre les contraintes internes de l'élément étudié et déformation est définie par la loi de *HOOKE* comme suit :  $\sigma = E\varepsilon$

Sous forme matricielle on a :  $[\sigma] = [D]\{\varepsilon\}$ , avec :

-  $[D] = E$ , matrice d'élasticité (contient les propriétés élastiques de l'élément).

-  $[\sigma]$ : le vecteur des contraintes ;

On a :  $[K^e] = \int_v [B]^T [D] [B] dv \dots \dots \dots (II - 6)$ .

Pour notre cas (II - 6) devient :

$$[K^e] = \int_v \begin{bmatrix} -1 \\ L \\ 1 \\ L \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} dv .$$

$dv = a.dx$  (La section transversale  $A$  est constante le long de l'élément).

Donc :

$$[K^e] = E.A \int_0^L \begin{bmatrix} -1 \\ L \\ 1 \\ L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} dx \Rightarrow [K^e] = E.A \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ L^2 & L^2 \\ -1 & 1 \\ L^2 & L^2 \end{bmatrix} \int_0^L dx$$

Donc :

$$[K^e] = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (II - 7)$$

(II - 7) : est la matrice de rigidité de l'élément barres dans les coordonnées locales.

$EA/L$  : La rigidité axiale de l'élément étudié. [3]

### II.3.2 Dans le repère global

La matrice de rigidité (II - 7) est écrite dans les coordonnées de la barre (locales). Cependant, il faut tenir compte du fait que les structures sont habituellement formées par des ensembles de membres (barres) faisant des angles entre eux.

Pour déterminer la matrice de rigidité de la structure complète, il est nécessaire d'écrire celle de chaque élément dans le système globale de coordonnées adopté pour toute la structure et non dans celui de cet élément; Par la suite on utilise la convention de signe de la figure II - 2. On notera que l'angle  $\theta$  est positif quand il est mesuré dans le sens horaire a partir de l'axe des  $\bar{x}$ .

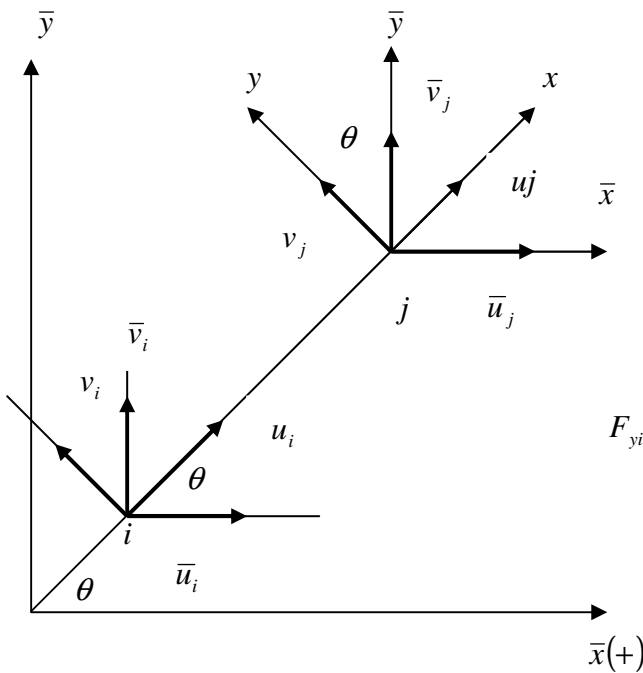


Figure II-2.

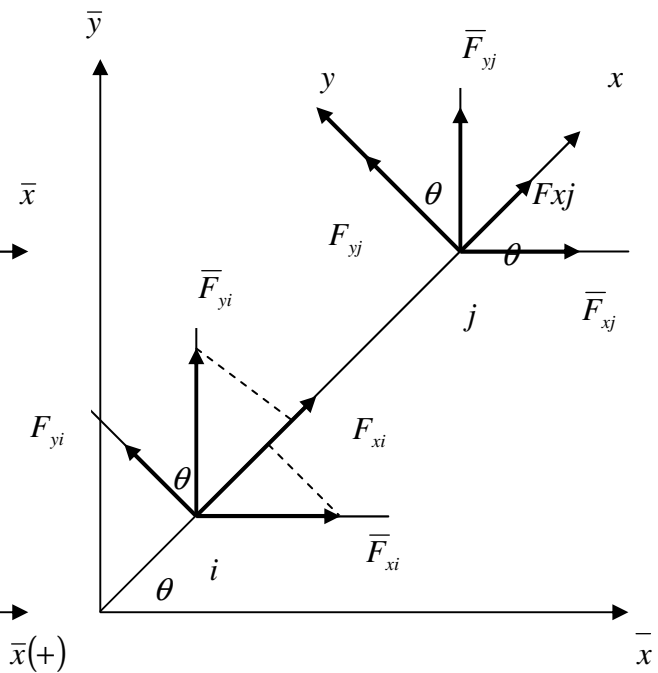


Figure II-3.

Elément barre dans le repère global.

Dans la figure II – 3. le membre articulé  $ij$  est incliné d'un angle  $\theta$  dans le système global.  $(o, x, y)$ , représente le système local de l'élément.

$(o, \bar{x}, \bar{y})$ , Représente le système global de l'élément.

En général :

$F_x, F_y$  : sont les forces appliquées aux nœuds  $i, j$  suivant les axes  $x, y$  respectivement.

$\bar{F}_x, \bar{F}_y$  : sont les forces appliquées aux nœuds  $i, j$  suivant les axes  $\bar{x}, \bar{y}$  respectivement.

$U, V$  : sont les déplacements dus aux forces  $F_x, F_y$  respectivement dans le système local.

$\bar{U}, \bar{V}$  : sont les déplacements dus aux forces  $\bar{F}_x, \bar{F}_y$  respectivement dans le système global.

### II.4. Relation entre les forces nodales et les déplacements nodaux dans le système local

D'après (II – 7) on a :

$$[K^e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \{F^e\} = [K^e] \{U^e\} \text{ donc}$$

$$\begin{bmatrix} F_{x_i} \\ F_{y_j} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \end{bmatrix} \text{ donc : } \begin{cases} F_{x_i} = \left(\frac{EA}{L}\right)U_i - \left(\frac{EA}{L}\right)U_j \\ F_{y_j} = \left(\frac{EA}{L}\right)U_i + \left(\frac{EA}{L}\right)U_j \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} Fx_i = \left(\frac{EA}{L}\right)U_i + 0V_i - \left(\frac{EA}{L}\right)U_j + 0V_j \\ Fy_i = 0U_i + 0V_i + 0U_j + 0V_j = 0 \\ Fx_j = -\left(\frac{EA}{L}\right)U_i + 0V_i + \left(\frac{EA}{L}\right)U_j + 0V_j \\ Fy_j = 0U_i + 0V_i + 0U_j + 0V_j = 0 \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} Fx_i \\ Fy_i \\ Fx_j \\ Fy_j \end{bmatrix} = EA/L \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{bmatrix}$$

Sous forme abrégée :  $\{F^e\} = [K^e] \{U^e\} \dots \dots \dots (II - 8).$

### II.5. Relation entre les forces nodales dans le système local et les forces nodales dans le système global

De la figure II - 3. on fait les projections nécessaires sur x et y on aura :

$$\begin{cases} Fxi = \bar{F}xi \cos \theta + \bar{F}yi \sin \theta \\ Fyi = -\bar{F}xi \sin \theta + \bar{F}yi \cos \theta \\ Fxj = \bar{F}xj \cos \theta + \bar{F}yj \sin \theta \\ Fyj = -\bar{F}xj \sin \theta + \bar{F}yj \cos \theta \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} Fxi \\ Fyi \\ Fxj \\ Fyj \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{F}xi \\ \bar{F}yi \\ \bar{F}xj \\ \bar{F}yj \end{bmatrix} \dots \dots \dots (II - 9).$$

On pose:  $\lambda = \cos \theta, \mu = \sin \theta$ , alors (II - 9) devient :

$$\begin{bmatrix} Fxi \\ Fyi \\ Fxj \\ Fyj \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{F}xi \\ \bar{F}yi \\ \bar{F}xj \\ \bar{F}yj \end{bmatrix}$$

D'où :  $[\bar{K}_e] = [T]^T [K^e] [T]$ : la matrice de rigidité de la barre étudiée dans le repère global.

$$[\bar{K}_e] = EA/L \begin{bmatrix} \lambda & -\mu & 0 & 0 \\ \mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -\mu \\ 0 & 0 & \mu & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & \lambda \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}_e] = EA/L \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -\lambda & 0 \\ \mu & 0 & -\mu & 0 \\ -\lambda & 0 & \lambda & 0 \\ -\mu & 0 & \mu & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & \lambda \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}_e] = EA/L \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & -\lambda^2 & -\lambda\mu \\ \lambda\mu & \mu^2 & -\lambda\mu & -\mu^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 & \lambda\mu \\ -\lambda\mu & -\mu^2 & \lambda\mu & \mu^2 \end{bmatrix}$$

On remarque que  $[\bar{K}_e]$  la matrice de rigidité de l'élément étudié dans le repère global est une matrice symétrique comportant quatre sous matrice  $[K_o]$ .

$$[\bar{K}_e] = EA/L \begin{bmatrix} K_o & K_o \\ K_o & K_o \end{bmatrix} \text{ D'où : } [K_o] = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu \\ \lambda\mu & \mu^2 \end{bmatrix}.$$

## II.6. Formulation de la matrice de rigidité pour un élément poutre

Un élément poutre est représenté dans la figure II - 2., l'axe longitudinale de la poutre est confondu avec l'axe de coordonnées  $x$ . l'élément est considéré avoir deux degrés de liberté en chaque extrémité ,une déformation transversale  $v$  et un angle de rotation de la section  $\theta$  (ou encore  $\partial v / \partial x$ ).un moment de flexion  $M$  et une force de cisaillement  $F$ , correspondant respectivement aux degrés de liberté  $\theta$  et  $v$  agissant en chaque nœud.

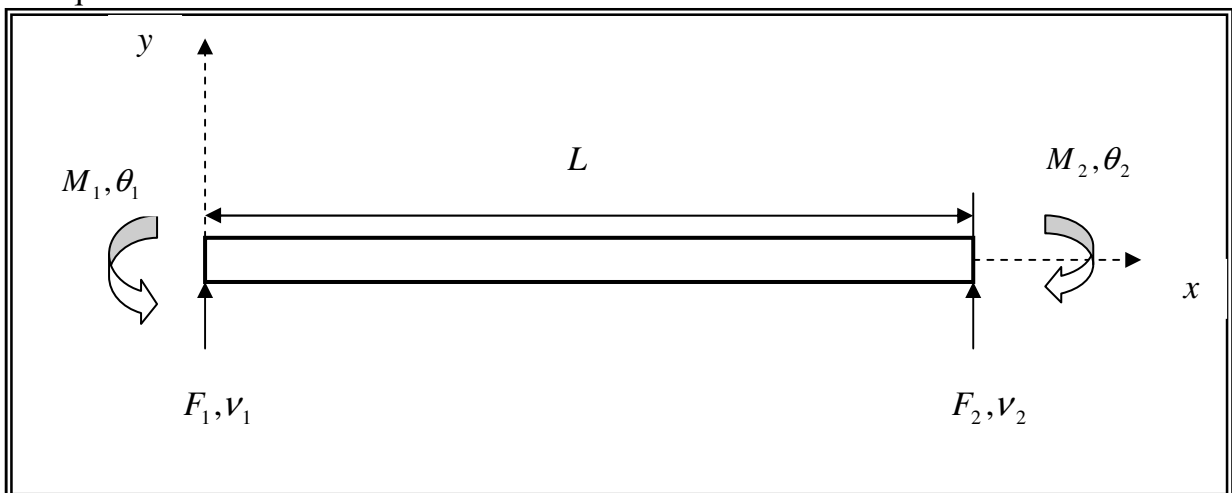


Figure II-4 : Élément poutre de section droite uniforme.

Le comportement de cette poutre est décrit par une fonction polynomiale de troisième degré, qui est la fonction de déplacement caractéristique à cet élément :

$$v(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \dots\dots\dots(II - 10).$$

Où les constantes  $a_1, a_2, a_3$  et  $a_4$  sont des constantes déterminés par les conditions de déplacements aux nœuds peuvent être donc écrites sous la forme matricielle suivante :

$$\text{Pour } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} v = v_1 \\ \theta = \theta_1 \end{cases}, \text{ Pour } x = L \Rightarrow \begin{cases} v = v_2 \\ \theta = \theta_2 \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(II - 11).$$

La forme inverse de l'équation (II - 11) donne les expressions des constantes  $a_i$  :

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(II - 12).$$

Où symboliquement :

$$\{a\} = [T]\{\delta^e\} \dots\dots\dots(II - 13).$$

Après substitution des coefficients  $a_i$  de l'équation (II - 12), dans l'équation (II - 10). Et après réarrangement on obtient la forme finale de la fonction du déplacement.

$$v(x) = f_1(x)v_1 + f_2(x)\theta_1 + f_3(x)v_2 + f_4(x)\theta_2 \dots\dots\dots(II - 14).$$

$$f_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$f_2(x) = x - 2\left(\frac{x^2}{L}\right) + 2\left(\frac{x^3}{L^2}\right)$$

Avec :  $\dots\dots\dots(II - 15).$

$$f_3(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$f_4(x) = -\left(\frac{x^2}{L}\right) + \left(\frac{x^3}{L^2}\right)$$

Après avoir déterminé ces fonctions de forme, on passe à l'application de théorème de CASTIGLIANO.

$$\text{La force généralisée (force ou moment) } F_i = \frac{\partial U}{\partial \delta_i^e} \dots\dots\dots(II - 16).$$

$\delta_i^e$  : Déplacement nodal généralisé.

Pour un élément poutre a une section droite uniforme, l'énergie de déformation est donnée par :

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \dots \dots \dots (II - 17).$$

En combinant l'équation (II - 16).et l'équation (II - 17) on obtient :

$$F_i = \frac{EI}{2} \int_0^L 2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial \delta_i^e} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx \dots \dots \dots (II - 18).$$

Que l'on peut écrire sous la forme :

$$F_i = \frac{EI}{2} \int_0^L 2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial \delta_i^e} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx \dots \dots \dots (II - 19).$$

$$v(x) = K_{i1}v_1 + K_{i2}\theta_1 + K_{i3}v_2 + K_{i4}\theta_2 \dots \dots \dots (II - 20).$$

Avec :

$$K_{ij} = EI \int_0^L f_i''(x) f_j''(x) dx$$

$f_i''(x)$  Et  $f_j''(x)$  sont des dérivées secondes des fonctions de forme exprimées dans l'équation (II - 14).

Après toutes les procédures de dérivations et substitution on aboutit à l'équation de rigidité en coordonnées locales.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L^2 & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (II - 21).$$

Ou symboliquement :

$$\{F\} = [K]\{q\} \dots \dots \dots (II - 22).$$

Une autre procédure pour l'obtention de la matrice de rigidité utilisée pour les éléments finis de grands nombre de degré de liberté ,et qui est toujours applicable aux cas de l'élément poutre présenté dans les étapes suivantes :

En se basant sur l'équation :  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2a_3 + 6a_4x \dots \dots \dots (II - 23).$

En substituant cette dernière équation dans l'équation (II - 17), on obtient :

$$U = 2EI(a_3^2 L + 3a_3 a_4 L^2 + 3a_4^2 L^3)$$

$$U = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

Sous la forme symbolique on aura :

$$U = \{a\}^T [\bar{K}] \{a\} \dots \dots \dots (II - 24).$$

Les éléments de la matrice  $[\bar{K}]$  sont obtenus par l'utilisation de l'équation

$$\bar{K}_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial a_i \partial a_j}, \quad (i, j = 1, 4) \dots \dots \dots (II - 25).$$

En substituant l'équation (II - 12) dans l'équation (II - 24) on obtient :

$$U = \frac{1}{2} \{q\}^T [T]^T [\bar{K}] [T] \{q\} \dots \dots \dots (II - 26).$$

Et par définition, l'énergie de déformation est égale à la moitié somme des forces modales par leurs déplacements correspondants, on peut écrire :

$$U = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (II - 27).$$

En substituant les équations de rigidité (II - 22) pour les forces nodales, nous avons :

$$U = \frac{1}{2} \{q\}^T \{F\} \dots \dots \dots (II - 28).$$

Par comparaison des équations (II - 26), et (II - 28) de l'expression de l'énergie on peut conclure que :

$$U = \frac{1}{2} [T]^T [\bar{K}] [T] \dots \dots \dots (II - 29).$$

C'est la même matrice de rigidité obtenue dans l'équation (II - 21), en utilisant les fonctions de forme.

### II.7. Equation de rigidité d'un élément poutre avec cisaillement transversal.

Les calculs de poutre en flexion sont très importants dans la pratique, Presque tous les éléments de construction modélisables par des poutres ont un moment de flexion dans leurs torseurs des efforts intérieurs.

Toutefois, il est rare que le moment de flexion soit seul. Il est presque toujours associé avec un effort tranchant. Aux contraintes dues au moment de flexion devront s'ajouter à celles dues à l'effort tranchant.

L'énergie de déformation d'une poutre avec cisaillement transversale s'écrit sous la forme suivante :  $U = U_F + U_C$

Avec :

$$U_F = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{EI}{2} \int_0^L \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx, \text{ énergie due au comportement de flexion.}$$



$$U_c = \int_0^L \frac{T^2}{2GA} dx = \frac{GA}{2} \int_0^L \gamma^2 dx, \quad \text{énergie due au comportement de torsion.}$$

Avec :

$\theta$  : Rotation de la section.

$\gamma$  : Angle de cisaillement.

$A$  : Section travaillante au cisaillement.

Dans le cas où l'on prendrait compte les déformations provoquées par le cisaillement, l'angle total de déformation s'écrit sous la forme :

$$\frac{dv}{dx} = \theta + \gamma$$

Après substitution dans l'expression de l'énergie totale de déformation, cette dernière peut être exprimé en fonction de des deux champs  $\theta(x)$  et  $\gamma(x)$  comme suit :

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx + \frac{GA}{2} \int_0^L \left( \frac{dv}{dx} - \theta \right)^2 dx$$

Introduisant le système des coordonnées naturelles  $\xi$  dans les fonctions d'interpolation linéaire pour  $v$  et  $\theta$ .

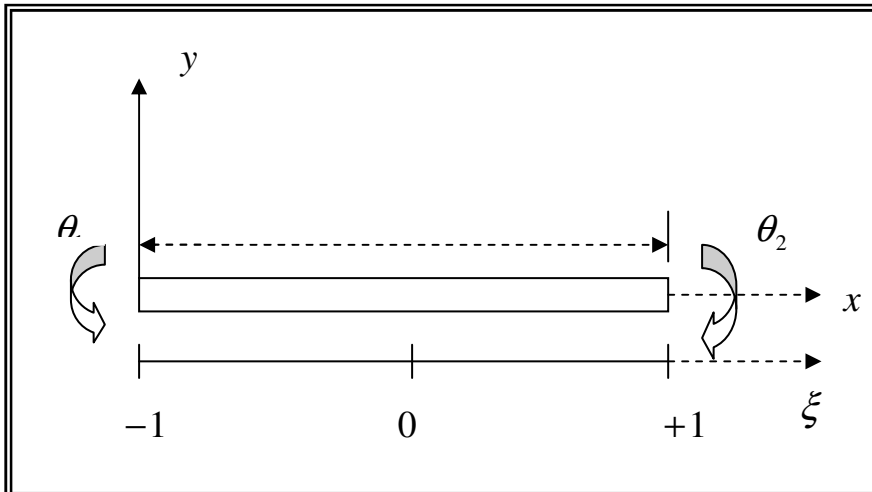


Figure II-5 : Système de coordonnées naturelles

$$x = h_1(\xi)x_1 + h_2(\xi)x_2 = \frac{1+\xi}{2} L$$

$$v(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{1-\xi}{2} & 0 & \frac{1+\xi}{2} & 0 \end{bmatrix} \{q\}$$

$$v(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1-\xi}{2} & 0 & \frac{1+\xi}{2} \end{bmatrix} \{q\}$$

Avec :

$$\{q\}^T = [v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2]$$

D'où :

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2}{L} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \{q\}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{2}{L} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \{q\}$$

$$\gamma = \frac{dv}{dx} - \theta = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & -\frac{1-\xi}{2} & \frac{1}{L} & -\frac{1+\xi}{2} \end{bmatrix} \{q\}$$

L'expression matricielle de l'énergie :

$$U = U_F + U_c = \frac{1}{2} q^T K_F q + \frac{1}{2} q^T K_c q = \frac{1}{2} q^T K q$$

$$K_F = \frac{2EI}{L} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} d\xi$$

$$K_c = \frac{GAL}{2} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & -\frac{1-\xi}{2} & \frac{1}{L} & -\frac{1+\xi}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & -\frac{1-\xi}{2} & \frac{1}{L} & -\frac{1+\xi}{2} \end{bmatrix} d\xi$$

La matrice de rigidité se retire par sommation des contributions des phénomènes de flexion et de cisaillement.

La matrice de rigidité correspondant au comportement de flexion se calcule par intégration numérique à un point, on obtient :

$$K_F = \int_{-1}^{+1} F_{ij}(\xi) d\xi = 2F_{ij}(0)$$

$$K_F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité correspondant au comportement de cisaillement se calcule par intégration numérique en deux points.

$$K_c^{(2)} = \int_{-1}^{+1} F_{ij}(\xi) d\xi = F_{ij}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + F_{ij}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$K_c^{(2)} = \frac{GA}{L} \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{2} & -1 & \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & \frac{L^2}{3} & -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{2} \\ -1 & -\frac{L}{2} & 1 & -\frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & \frac{L^2}{2} & -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{3} \end{bmatrix}$$

Finalement la matrice de rigidité de l'élément est :

$$K = K_F + K_c = \begin{bmatrix} \frac{GA}{L} & \frac{GA}{2} & -\frac{GA}{L} & \frac{GA}{L} \\ \frac{GA}{L} & \frac{GAL}{3} + \frac{EI}{L} & -\frac{GA}{L} & \frac{GE}{2} - \frac{EI}{L} \\ -\frac{GA}{L} & -\frac{GA}{2} & \frac{GA}{L} & -\frac{GA}{L} \\ \frac{GA}{L} & \frac{GE}{2} - \frac{EI}{L} & -\frac{GA}{L} & \frac{GAL}{3} + \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(II - 30).$$

Pour le cas d'un élément poutre encastree a une de ces deux extremités

$$v_1 = 0, \theta = 0 \Rightarrow K = K_F + K_c = \begin{bmatrix} \frac{GA}{L} & -\frac{GA}{2} \\ -\frac{GA}{L} & \frac{GAL}{3} + \frac{EI}{L} \end{bmatrix}.$$

**II.8. Principe de numérotation des nœuds d'une structure**

Avant d'étudier une structure quelconque, la première des choses à effectuer et de numéroter les différents nœuds composant la structure .sachant que la méthode de rigidité conduit à résoudre un système d'équation linéaire :  $\{F\} = [K]\{\delta\}$ .

Ou :  $[K]$  représente une matrice bandée et symétrique.

Le temps mis par l'ordinateur à analyser un tel système, peut considérablement être réduit si on utilise seulement la demi-bande de la matrice.

La largeur de la bande de la matrice de rigidité globale  $[K]$  dépend de la numérotation des nœuds et de nombre de degré de liberté par nœuds. :  $L = (\Delta N + 1).n$

$\Delta N$  : La différence maximale entre les numéros des nœuds qui sont aux deux extrémités de l'élément

$n$  : le nombre de degrés de liberté par nœuds.

Donc si on arrive à minimiser la largeur de la bande, on aura un minimum d'éléments à enregistrer et un minimum de temps de calcul.

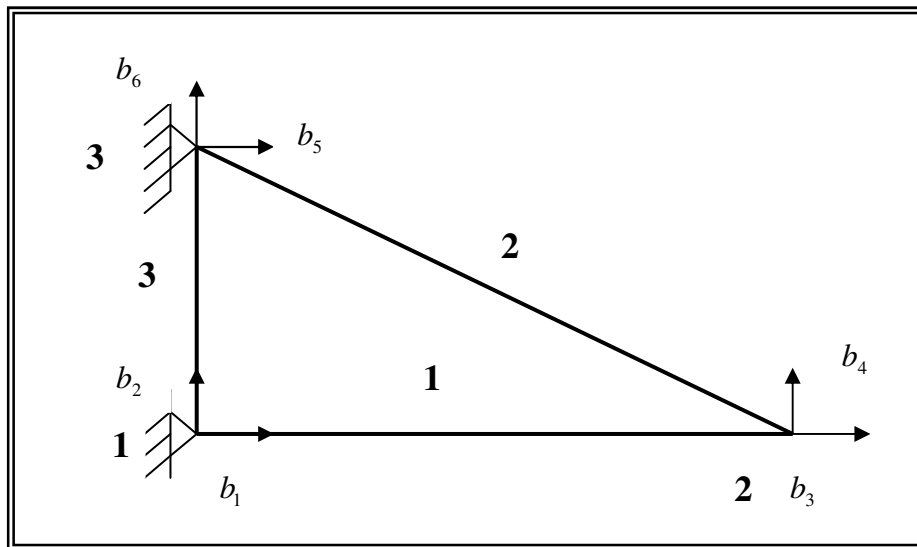
Pour minimiser la largeur de la bande, il est nécessaire de minimiser au maximum possible la différence entre les numéros des nœuds d'un même élément.

Alors ce choix de numérotation assure une bonne gestion de la mémoire, et de temps de calculs.

**II.9. Méthode d'assemblage**

On a calculer la matrice de rigidité d'un élément quelconque d'une structure et cela qu'elle soit dans le repère local ou global, une fois ces matrices élémentaires déterminées, on doit les assembler pour former la matrice de rigidité globale de toute la structure.

Pour éclaircir la procédure d'assemblage, on considère la structure représenté sur la figure(II - 6).cette structure est composée de trois éléments et de trois nœuds .dans ce type de structure le nœud possède deux degrés de liberté, donc la dimension de la matrice de rigidité globale de la structure sera : (2.3.2.3) c.-à-d. (6.6).



FigureII-6 : Structure à étudier.

Soient :  $[K^1]$ ,  $[K^2]$  et  $[K^3]$  les matrices de rigidité élémentaires dans le repère global de la structure. Donc la matrice de rigidité globale est:  $[K] = \sum_{e=1}^3 [K^e]$ .

$$[K^1] = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 & K_{34}^1 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^1 & K_{44}^1 \end{bmatrix}, \text{ et } [K^2] = \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{13}^2 & K_{14}^2 \\ K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 & K_{24}^2 \\ K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 & K_{34}^2 \\ K_{41}^2 & K_{42}^2 & K_{43}^2 & K_{44}^2 \end{bmatrix}$$

$$[K^3] = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} K_{11}^3 & K_{12}^3 & K_{13}^3 & K_{14}^3 \\ K_{21}^3 & K_{22}^3 & K_{23}^3 & K_{24}^3 \\ K_{31}^3 & K_{32}^3 & K_{33}^3 & K_{34}^3 \\ K_{41}^3 & K_{42}^3 & K_{43}^3 & K_{44}^3 \end{bmatrix}$$

La position de  $[K^1]$  dans la matrice de rigidité globale  $[K]$  de la structure sera :

$$[K] = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \left[ \begin{array}{cccc} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 & K_{34}^1 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^1 & K_{44}^1 \\ & & & \\ & & & \end{array} \right]$$

L'addition de  $[K^2]$  dans la matrice de rigidité globale sera :

$$[K] = \begin{bmatrix} 1 & K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & & \\ 2 & K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 & & \\ 3 & K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{34}^1 + K_{12}^2 & K_{13}^2 & K_{14}^2 \\ 4 & K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^1 + K_{21}^2 & K_{44}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 & K_{24}^2 \\ 5 & & & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 & K_{34}^2 \\ 6 & & & K_{41}^2 & K_{42}^2 & K_{43}^2 & K_{44}^2 \end{bmatrix}$$

En additionnant  $[K^3]$  on trouve la matrice de rigidité globale de la structure :

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11}^1 + K_{11}^3 & K_{12}^1 + K_{12}^3 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & K_{13}^3 & K_{14}^3 \\ K_{21}^1 + K_{21}^3 & K_{22}^1 + K_{22}^3 & K_{23}^1 & K_{24}^1 & K_{23}^3 & K_{24}^3 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{34}^1 + K_{12}^2 & K_{13}^2 & K_{14}^2 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^1 + K_{21}^2 & K_{44}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 & K_{24}^2 \\ K_{31}^3 & K_{42}^3 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 + K_{33}^3 & K_{34}^2 + K_{34}^3 \\ K_{41}^3 & K_{42}^3 & K_{41}^2 & K_{42}^2 & K_{43}^2 + K_{43}^3 & K_{44}^2 + K_{44}^3 \end{bmatrix}$$

### II.10. Calcul des efforts internes dans un élément barre

Pour faciliter la tâche on doit d'abord étudier l'élément ressort. Puis on converge celle-ci a l'élément barres.



FigureII-7 : Elément ressort.

$\delta_i, \delta_j$  : Les déplacements des nœuds  $i, j$  respectivement.

L'effort interne dans cette élément (ressort) est : le produit des valeurs de la rigidité axiale de l'élément et de la variation des déplacements nodaux.

D'où :  $S_{ij} = -K.(\delta_i - \delta_j)$

Donc pour un élément barres on aura :  $S_{ij} = EA/L.(\bar{\delta}_j - \bar{\delta}_i)$

$\bar{\delta}_i, \bar{\delta}_j$  : Les déplacements de nœuds  $i, j$  respectivement suivant l'axe de l'élément.

$EA/L$  : La rigidité axiale de l'élément barre.

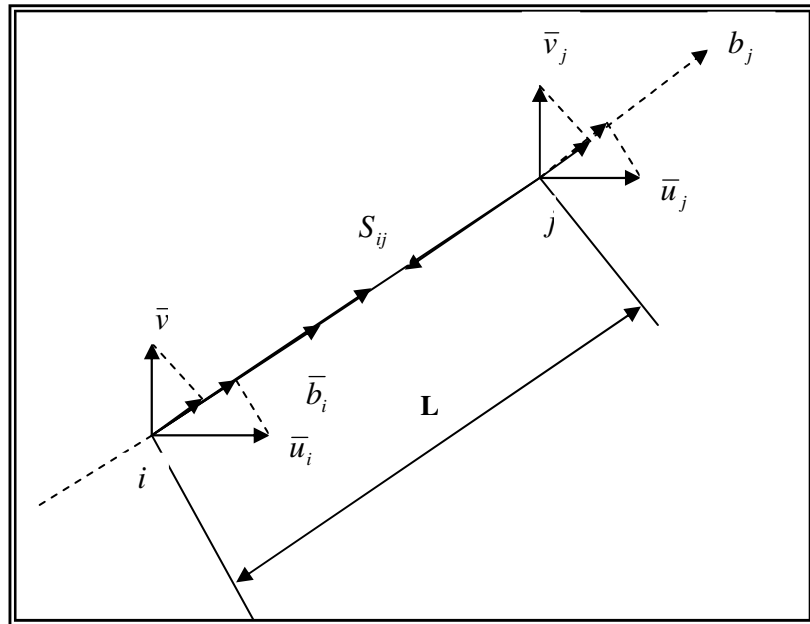


Figure II-8 : Elément barre.

$$\bar{\delta}_j = \bar{U}_j \cos \theta + \bar{V}_j \sin \theta.$$

$$\bar{\delta}_i = \bar{U}_i \cos \theta + \bar{V}_i \sin \theta.$$

Donc :

$$S_{ij} = EA/L(\bar{U}_j \cos \theta + \bar{V}_j \sin \theta - \bar{U}_i \cos \theta - \bar{V}_i \sin \theta)$$

$$S_{ij} = EA/L[\cos \theta(\bar{U}_j - \bar{U}_i) + \sin \theta(\bar{V}_j - \bar{V}_i)]$$

On a :  $\lambda = \cos \theta, \mu = \sin \theta.$

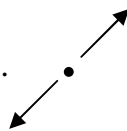
Donc :  $S_{ij} = EA/L[\lambda(\bar{U}_j - \bar{U}_i) + \mu(\bar{V}_j - \bar{V}_i)]$

Sous forme matricielle on aura :

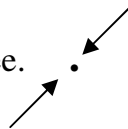
$$S_{ij} = EA/L \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_j & -\bar{U}_i \\ \bar{V}_j & \bar{V}_i \end{bmatrix}$$

- Convention de signe de  $S_{ij}$  :

Si :  $S_{ij} > 0 \rightarrow$  la barre est tendue.



Si :  $S_{ij} < 0 \rightarrow$  la barre est comprimée.



## II.11. Programmation

On a développé dans ce chapitre les étapes nécessaires à l'obtention de la matrice de rigidité de l'élément barre et poutre, et la matrice qui relie les contraintes et déplacements  $[H]$ . La résolution d'un problème par la méthode des éléments finis entraîne le calcul de la matrice de rigidité de tous les éléments de la structure modélisée puis l'assemblage de la matrice de rigidité  $[K]$  de toute la structure.

On a vu que le vecteur de charges  $\{F\}$  était relié au vecteur des déplacements  $\{\delta\}$  par l'équation  $\{F\} = [K]\{\delta\}$  ou  $[K]$  est la matrice de rigidité de toute la structure.

Dans cette méthode les quantités inconnues sont les déplacements et l'objet de la résolution est la détermination des déplacements nodaux  $\{\delta\}$ , une fois que ceux-ci sont calculés on peut obtenir les contraintes de l'élément en utilisant la matrice  $[H]$ .

Le travail numérique consistant à la mise en œuvre de cette étude pour n'importe quelle structure réelle rend l'utilisation de l'ordinateur essentielle à l'application de la méthode des éléments finis. On donne dans cette partie de chapitre un grand nombre de techniques à adopter lorsque l'on fabrique ces programmes sur ordinateur. Ces derniers peuvent être construits en un grand nombre de parties appelées sous-programmes, chacun d'eux ayant une fonction particulière dans l'étude complète. Par exemple, l'évaluation de la matrice de rigidité  $[K^e]$  pour un élément de forme particulière et un type du problème particulier se fait normalement dans un sous-programme écrit spécialement pour cette forme d'élément et ce type du problème, que l'on ait affaire à des contraintes planes, des déformations planes ou à la flexion des plaques.

La modélisation en éléments finis a été étudiée à la fois pour les structures linéaires et les structures continues. On a vu que les étapes de base pour la détermination de la matrice de rigidité de l'élément et de la matrice  $[H]$  étaient les mêmes pour ces différents éléments. De même, la résolution des équations pour les déplacements nodaux et les contraintes suit un modèle indépendant du type d'élément utilisé. Cela rend possible le développement d'un système de calcul numérique des éléments finis dans lequel quelque partie (sous-programmes) sont complètement générales. Un exemple évident est le sous-programme écrit pour la résolution du système d'équation  $\{F\} = [K]\{\delta\}$ . Il est aussi nécessaire d'avoir un programme principal qui contrôle les ordres et utilise les différents sous-programmes. [4]

On va maintenant étudier le développement d'un programme d'ordinateur type

### II.11.1. Etude par ordinateur

L'étude s'effectue en utilisant une introduction des données qui décrivent complètement la structure modélisée et son chargement et en effectuant des sorties qui consistent en la tabulation des déplacements nodaux et des contraintes de l'élément. On va maintenant décrire séparément chaque étape de la table.

### II.11.2. Entrées de données

Pour poser le problème, il est nécessaire d'introduire des données dans l'ordinateur ; ces dernières doivent spécifier la géométrie de la structure modélisée, les propriétés de sa matière et la façon dont elle est chargée et fixée dans l'espace. Les données peuvent aussi inclure des nombres de contrôle qui facilitent la généralité et l'efficacité du programme et doivent être fournis très tôt dans les données, comme le nombre total des nœuds et des éléments ou bien un nombre qui indique si l'on est dans le cas des contraintes planes, déformations planes ou de la flexion des plaques, cela permet au programme principal de déterminer la capacité mémoire requise et de savoir quels seront les sous-programmes utilisés dans l'étude.

On a besoin des données suivantes :

- 1- le nombre et les coordonnées des nœuds ; il est commode de les numérotés 1... $i$ ... $n$ ., de façon a donner pour chaque nœud un numéro  $i$  et des coordonnées  $(x_i, y_i)$ . On a déjà montré l'importance de l'adoption de la meilleure méthode pour numéroté les nœuds.
- 2- On doit aussi numéroté les éléments finis 1... $N$ .. de façon a fournir pour chaque élément les numéros de ses nœuds et les coordonnées nodales correspondantes , cela rendant possible la détermination des dimensions de l'élément et sa position dans la structure . il est aussi nécessaire d'indiquer les propriétés du matériau .c'est-à-dire le module d'*YOUNGE*  $E$  et le coefficient de *POISSON*  $\nu$  .
- 3- Les charges appliquées.
- 4- Les nœuds fixés correspondant aux divers types d'appui. Tout cela apparaît sans doute assez compliqué mais l'utilisation en est plutôt aisée.



# Chapitre III

## Dynamique des structures

### Sommaire du chapitre :

III.1 INTRODUCTION .....	46
III.2 VIBRATION LIBRE D'UN SYSTEME MASSE-RESSORT A UN 1D.D.L .....	47
III.2.1 REPONSE LIBRE FAIBLEMENT AMORTIE .....	48
III.2.2 VIBRATION FORCEE D'UN SYSTEME MASSE-RESSORT-AMORTISSEUR A 1D.D.L .....	48
□ III.3 VIBRATION D'UN SYSTEME A PLUSIEURS D.D.L .....	50
III.3.1 REPONSE LIBRE NON AMORTIE .....	51
III.3.2 REPONSE FORCEE NON AMORTIE .....	52
III.3.3 REPONSE FORCEE FAIBLEMENT AMORTIE .....	52
III.4 VIBRATION DES BARRES ET DES POUTRES .....	53
III.4.1 VIBRATIONS LONGITUDINALES D'UNE BARRE .....	53
II.4.1.III.4.1.1 VIBRATIONS LIBRES .....	53
III.4.1.2 FREQUENCES ET MODES PROPRES .....	54
III.4.2 VIBRATION DE FLEXION D'UNE POUTRE .....	54
III.4.2.III.4.2.1 VIBRATIONS LIBRES .....	54
III.4.2.2 FREQUENCES ET MODES PROPRES .....	55
III.5 METHODE DU QUOTIENT DE RAYLEIGH .....	56
III.5.III.5.1 QUOTIENT DE RAYLEIGH .....	56
III.5.2 APPROXIMATION : METHODE DE RAYLEIGH .....	57
III.6 METHODE DE RAYLEIGH-RITZ .....	57
III.6.1 EXEMPLE : VIBRATIONS LONGITUDINALES .....	59
III.6.2 SOLUTION EXACTE .....	59
III.6.3 SOLUTION APPROCHEE PAR LA METHODE DU QUOTIENT DE RAYLEIGH .....	59
III.6.4 METHODE DE RAYLEIGH-RITZ .....	59

---

# DYNAMIQUE DES STRUCTURES

## III.1.Introduction

L'étude des vibrations d'une structure a pour objectif de déterminer son comportement aux chargements dynamiques, dans le but et de comprendre et de contrôler les problèmes typiques liés aux mouvements vibratoires (fatigue, résonance, bruit ...). La maîtrise du problème inverse permet de développer des techniques efficaces et rapides de caractérisation élastique ou viscoélastique, de contrôle de qualité, d'inspection et diagnostique des structures, basée sur les mesures des vibrations. Dans les deux cas, la première étape consiste à évaluer la réponse de la structure en fonction de tous les paramètres influant sur cette réponse. Selon les hypothèses retenues, la formulation permet de tenir compte du comportement du matériau, des défauts et d'endommagements, de la nature du chargement et éventuellement de l'amortissement externe et de l'effet du milieu, en exprimant la relation entre ces paramètres et les inconnues du problème, champ des contraintes (approche contraintes) ou des déplacements (approche déplacements), sous forme d'équations aux dérivées partielles. La complexité de ces équations, conjuguée à la géométrie de la structure et aux conditions aux limites, ne permet pas en général d'aboutir à une solution exacte, et seules les méthodes d'intégration directe permettent d'obtenir des solutions numériques. La modélisation apporte une simplification du problème en introduisant des approximations des champs inconnus, compatibles avec la géométrie des conditions aux limites. Par une approche déplacement, la modélisation peut être discrète (masses concentrées), analytique (déplacements généralisés) ou par éléments finis. Elle permet dans le domaine des vibrations linéaires, la résolution du problème par superposition modale (ou intégration modale). Cette méthode consiste à décomposer la réponse dans une phase formée par les modes propres de la structure appelé base modale. Chaque composante  $m$  représente la participation de mode  $m$  à la réponse globale, solution de l'équation de l'oscillateur à 1<sup>er</sup> degré de liberté découplée des autres modes. Le comportement dynamique de la structure sera alors défini par ses caractéristiques modales : fréquences et déformées propres et amortissements modaux. Ces caractéristiques sont obtenues en résolvant le problème aux valeurs et vecteurs propres correspondant aux vibrations libres de la structure.

### III.2. Vibration libre d'un système masse-ressort a un 1d.d.l

Le schéma ci-dessous représente un système mécanique paramètre groupés et à 1 degré de liberté (d.d.l) .l'équation différentielle du mouvement (EDM) de ce système s'écrit :

$$mx'' - cx' + kx = F$$

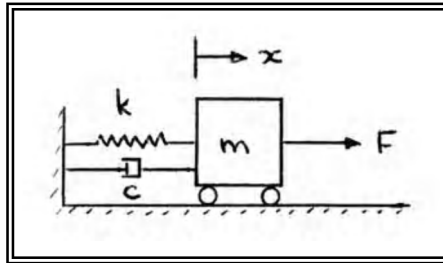


Figure III-1 : Système à 1 degré de liberté.

$x = x(t)$  : Est le déplacement de la masse ( $m$ ) a partir de sa position d'équilibre statique.

$k$  : Est la constante de rigidité du ressort ( $N / m$ ).

$c$  : Est le coefficient d'amortissement ( $N.s / m$ ).

$m$  : Est la masse retenue par le ressort ( $kg$ ).

$F = F(t)$  : Est une force extérieure qui sert à exciter le système ( $N$ ).

Ici,  $F(t) = 0$  et  $c = 0$ .le système masse-ressort peut osciller librement. En appliquant la méthode des transformées de Laplace, on détermine facilement la réponse libre du système suite à l'application de conditions initiales arbitraires  $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$ .

$$x(t) = \frac{v_0}{w_n} \sin(w_n t) + x_0 \cos(w_n t) \dots \dots \dots (III - 1).$$

Ou :  $w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$  est la fréquence naturelle du système ( $rad / s$ ).

On peut aussi écrire cette réponse sous la forme suivante :

$$x(t) = X \sin(w_n t + \phi) \dots \dots \dots (III - 2).$$

Où  $X = \sqrt{x_0^2 + v_0^2}$  est son amplitude

$$\phi = \arctg\left(\frac{x_0 w_n}{v_0}\right) \text{ Est un déphasage}$$

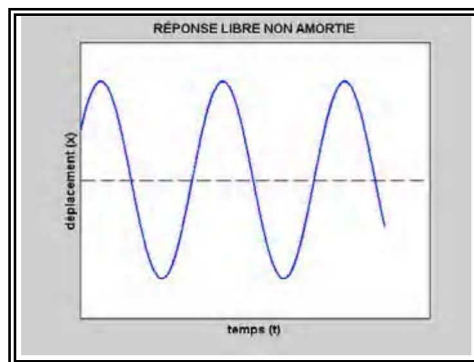


Figure III-2 : Réponse libre non amortie.

**III.2.1 Réponse libre faiblement amortie**

Ici, on a toujours,  $F(t)=0$ . Par contre, on considère un coefficient d'amortissement  $c > 0$ . La méthode de *LAPLACE* nous permet d'obtenir la réponse suivante :

$$x(t) = X \exp(-\zeta \omega_n t) \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi) \dots \dots \dots (III - 3).$$

Ou :  $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$  est le taux d'amortissement (sans unités).

$$\phi = \arctg \left( \frac{x_0 \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{v_0 + x_0 \zeta \omega_n} \right).$$

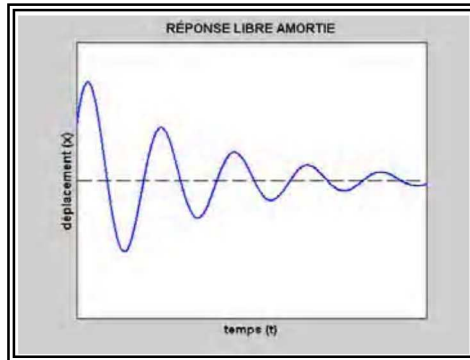


Figure III-3 : Réponse libre amortie.

La réponse ci-dessus n'est valable que dans les cas sous amortis, c'est-à-dire  $\zeta < 1$ . On constate que l'amortissement tend à ramener le système vers sa position d'équilibre initiale en réduisant l'amplitude de la vibration. De plus, la fréquence des oscillations est plus faible que dans le cas non amorti ( $\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} < \omega_n$ )

**III.2.2 Vibration forcée d'un système masse-ressort-amortisseur à 1d.d.l.**

La réponse forcée du système s'obtient en appliquant une force dynamique  $F(t)$  au système. si cette force est *harmonique*,  $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$ , le système masse-ressort-amortisseur est contraint à osciller à la fréquence d'excitation  $\omega$ , plutôt qu'à sa fréquence naturelle  $\omega_n$

Dans ce type d'analyse, on représente la *réponse stationnaire* du système par son *spectre* c'est-à-dire son amplitude et son déphasage en fonction de la fréquence d'excitation. (Le régime stationnaire fait suite au régime transitoire et correspond à la stabilisation du système autour de sa nouvelle position d'équilibre statique.)

En absence de conditions initiales  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ , la transformation de l'E.D.M. dans le domaine de Laplace produit la réponse :

$$X(s) = \frac{F(s)}{ms^2 + cs + k}$$

Pour connaître la réponse en fréquence du système, on remplace la variable de Laplace ( $s$ ) par son équivalent fréquentiel  $s = j\omega$ , pour obtenir :

$$X(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{(k - \omega^2 m) + j\omega c}$$

En multipliant le terme de droite par  $k/k$ , puis en appliquant  $\zeta$  et  $\omega_n$  tels que définis précédemment, on peut réécrire l'équation ci-dessus sous sa forme classique :

$$X(j\omega) = \frac{F(j\omega)/k}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] + 2j\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}$$

La réponse temporelle stationnaire du système peut donc s'écrire :

$$X(t) = X \sin(\omega t + \psi)$$

Où  $X = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}}$  est l'amplitude du déplacement.

$$\psi = \arctg\left[\frac{0}{F_0/F}\right] - \arctg\left[\frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right] \dots\dots\dots(III - 4).$$

Est le déphasage entre la force et la réponse. Ce déphasage représente un retard temporel du déplacement par rapport à la force appliquée au système.

On constate que plus la fréquence d'excitation  $\omega$  se rapproche de la fréquence naturelle  $\omega_n$ , plus le rapport d'amplitude  $kX/F_0$  est élevé. On remarque aussi que plus le taux d'amortissement  $\zeta$  est élevé, plus l'amplitude de la réponse est faible.

La fréquence de résonance ( $\omega_r$ ) est la fréquence d'excitation pour laquelle la réponse du système est la plus forte ( $\omega_r \neq \omega_n$ ).

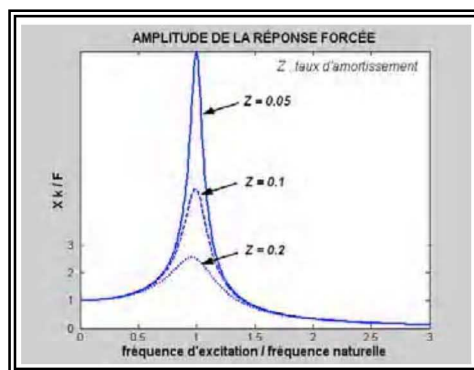


Figure III- 4: Amplitude de la réponse forcée.

La figure (III - 4) ci-dessous montre l'évolution de la phase ( $-\psi$ ) en fonction de la fréquence d'excitation et du taux d'amortissement. On constate que peu importe le taux d'amortissement, le déphasage atteint la valeur  $-\psi = 90$  lorsque la fréquence d'excitation et la fréquence naturelle du système ont la même valeur ( $\omega = \omega_n$ ).

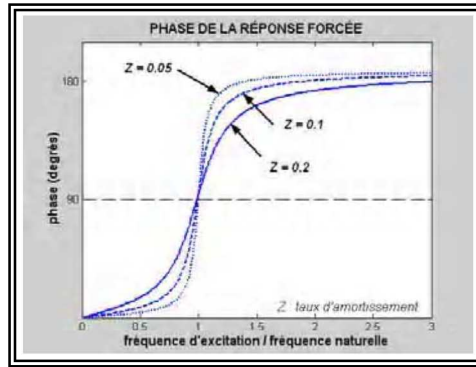


Figure III-5 : Phase de réponse forcée.

Il est donc possible d'évaluer la fréquence naturelle d'un système mécanique réel à partir de résultat expérimentaux .il s'agit de lui imposer une force extérieure contrôlée et de mesurer le déplacement temporel du système. Les spectres d'amplitude et de phase sont obtenus en balayant les fréquences à l'intérieur d'une certaine plage; on évalue la fréquence naturelle du système par l'un et/ou l'autre des deux méthodes suivantes :

- A partir du spectre d'amplitude, on repère la fréquence de résonance et on estime  $w_r \approx w_n$ , ce qui est vrai dans le cas de systèmes très faiblement amortis ( $\zeta < 0,15$ ).
- A partir du spectre de phase, on repère la fréquence pour laquelle  $-\psi = \pi / 2$ .

### III.3.Vibration d'un système à plusieurs d.d.l.

Le schéma ci-dessous représente un système mécanique à paramètres groupés et à 2 degrés de liberté (2d.d.l.).

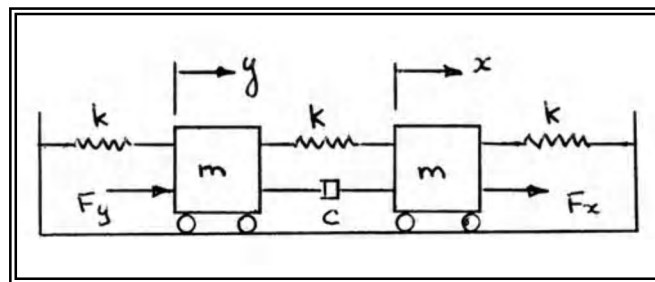


Figure III-6 : Système mécanique à 2 d.d.l.

L'équation différentielle du mouvement EDM de ce système s'écrit sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \dots\dots(III - 5).$$

**III.3.1 Réponse libre non amortie** ( $c = 0$  et  $F_x = F_y = 0$ )

En étudiant les valeurs propres de ce système, on découvre qu'il possède 2 fréquences naturelles, en l'occurrence :  $w_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  Et  $w_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ . Le nombre de fréquences naturelles que possède un système est égal au nombre ( $n$ ) de ses degrés de liberté.

Chaque fréquence naturelle correspond à un mode de vibration (c'est la façon dont le système se déforme). on obtient chacun de ces modes, à l'aide des *vecteurs propres* de l'EDM. (le mode est défini par rapport le rapport d'amplitude  $X/Y$  qui existe entre chaque degré de liberté d.d.l. du système, à une fréquence naturelle donnée.) La *matrice modale* est une matrice  $n \times n$  dont chaque colonne représente l'un des modes du système. Dans le cas présent, la matrice modale s'écrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} X \\ Y \end{matrix} \right\}_{n=1} & \left\{ \begin{matrix} x \\ Y \end{matrix} \right\}_{n=2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

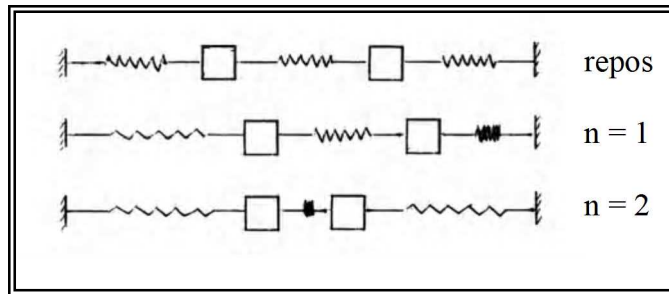


Figure III-7 : Réponse modale du système.

On voit que le système ne se déforme pas de la même façon, selon le mode considéré. On obtient finalement la réponse modale du système (pour chacun des modes  $n = 1, 2$ ) suite à l'application de conditions initiales arbitraires  $x_0, v_0$  :

$$\begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix}_n = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}_n \times [A_n \sin(w_n t + \phi_n)] \dots \dots \dots (III - 6).$$

Ou :  $A_n$  et  $\phi_n$  différent pour chacun des modes  $n$  et dépendent des conditions initiales imposées.

La réponse totale du système est donnée par la somme de ses réponses modales :

$$\begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_n x_n(t) \\ \sum_n y_n(t) \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (III - 7).$$

De la même façon, on peut trouver les  $n$  fréquences naturelles et les  $n$  déformations modales pour tout système à  $n$  d.d.l.

**III.3.2 Réponse forcée non amortie** ( $c = 0$  et  $F_y = 0$ , mais  $F_x \neq 0$ )

L'EDM matricielle d'un système mécanique à 2 d.d.l. prend typiquement la forme :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & -c_{12} \\ -c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k_{11} & -k_{12} \\ -k_{21} & 2k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(III - 8).$$

S'il n'y a pas d'amortissement, alors la matrice des coefficients d'amortissement est nulle. En appliquant une force harmonique  $F_x \sin(\omega_x t)$  au système, celui-ci oscillera selon la fréquence  $\omega_x$  de l'excitation. la réponse du système prendra la forme suivante :

$$x(t) = \frac{F_x (k_{22} - m_2 \omega_x^2)}{m_1 m_2 (\omega_1^2 - \omega_x^2)(\omega_2^2 - \omega_x^2)} \sin(\omega_x t) \dots\dots\dots(III - 9).$$

$$y(t) = \frac{F_x k_{21}}{m_1 m_2 (\omega_1^2 - \omega_x^2)(\omega_2^2 - \omega_x^2)} \sin(\omega_x t) \dots\dots\dots(III - 10).$$

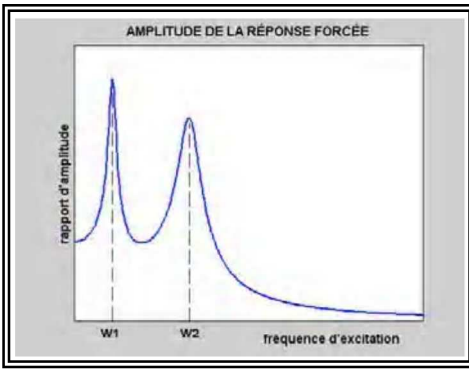
Ou  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont la première et la deuxième fréquence naturelle du système, respectivement.

Il est clair que l'amplitude des oscillations du système atteindra un maximum lorsque la fréquence d'excitation  $\omega_x$  équivaudra à l'une l'autre de ses deux fréquences naturelles.

Aussi, le rapport d'amplitude ( $X/Y$ ) des oscillations du système varie selon la fréquence d'excitation. lorsque la fréquence d'excitation s'approchera de l'une ou l'autre des fréquences naturelles du système, la déformation du système se conformera au mode correspondant.

**III.3.3 Réponse forcée faiblement amortie** ( $c \neq 0$  et  $F_x \neq 0$ , mais  $F_y = 0$ )

Tout comme on le fait pour un système faiblement amorti à 1d.d.l. on peut établir le spectre de la réponse en fréquence du système à  $n$  d.d.l. les spectres d'amplitudes et de phase prennent la forme suivante :



*Figure III-8 : Amplitude de la réponse forcée.*

Le spectre d'amplitude fait voir un pic d'amplitude à chacune des fréquences de résonance. ( $\omega_n \approx \omega_r$ ) On peut ainsi estimer les  $n$  fréquences naturelles d'un système à  $n$  d.d.l.



### III.4. Vibration des barres et des poutres

Dans les sections précédentes, nous avons considéré des systèmes à paramètres groupés (c'est-à-dire des systèmes dont les éléments de masse, de rigidité et d'amortissement sont distincts). Dans le cas des systèmes continus, tels que les poutres et les barres et les plaques, ces trois priorités sont confondues dans l'espace. Elles font partie du matériau et sont indissociables l'une de l'autre. Le système continu peut être considéré comme un système possédant une infinité de degrés de liberté. Il possède donc multitude de fréquences naturelles.

En appliquant les principes de la mécanique des corps déformables, nous pouvons écrire *l'équation aux dérivées partielles* qui régit le mouvement du système continu. L'application des conditions aux limites et des conditions initiales nous permet de résoudre l'équation aux dérivées partielles pour connaître le *comportement naturel* du système

#### III.4.1. Vibrations longitudinales d'une barre

##### III.4.1.1 Vibrations libres

Les variables considérées sont:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N = ES\varepsilon$$

L'équation d'équilibre local est :

$$\frac{dN}{dx} = \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Soit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( S \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\rho S}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Qui devient:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \left( c^2 = \frac{E}{\rho} \right)$$

Energie potentielle:

$$v = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma \varepsilon d\Omega = \frac{1}{2} \int_0^L ES \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \dots \dots \dots (III - 11).$$

Energie cinétique

$$\tau = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 d\Omega = \frac{1}{2} \int_0^L \rho S \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \dots \dots \dots (III - 12).$$

Les conditions aux limites possibles sont :

- déplacement imposé nul aux extrémités:

$$u(0, t) = 0 \text{ Et/ou } u(L, t) = 0$$

- effort imposé nul aux extrémités

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \text{ Et/ou } \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0.$$

### III.4.1.2 Fréquences et modes propres

On effectue une séparation des variables

$$u(x,t) = U(x)T(t)$$

L'équilibre devient:

$$\frac{1}{U} \frac{d^2U}{dx^2} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{T} \frac{d^2T}{dt^2} = cste$$

On a égalité de deux fonctions de variables indépendantes. Les deux fonctions sont donc égales à une constante. Cette constante est choisie négative pour assurer la stabilité de la solution en temps

$$\frac{1}{U} \frac{d^2U}{dx^2} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{T} \frac{d^2T}{dt^2} = -\frac{w^2}{c^2}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \frac{d^2U}{dx^2} + \left(\frac{w}{c}\right)^2 U = 0 \\ \frac{d^2T}{dt^2} + w^2 T = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U(x) = A \sin \frac{wx}{c} + B \cos \frac{wx}{c} \\ T(t) = C \sin wt + D \cos wt \end{cases} \dots\dots\dots(III - 13).$$

Les constantes  $A, B, C, D$  sont calculées à partir des conditions initiales et des conditions aux limites.

## III.4.2 Vibration de flexion d'une poutre

### III.4.2.1 Vibrations libres

Les variables considérées sont:

- le déplacement radial :  $v(x,t)$ .
- la rotation de la section :  $\theta(x,t)$  = (hypothèse de Bernoulli).
- la courbure :  $x_f = \frac{\partial \theta}{\partial x}$
- le moment fléchissant  $M_f = EI \frac{\partial}{\partial x}(x_f)$
- l'effort tranchant  $T_t$

Les équations d'équilibre local sont:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_t}{\partial x} - \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial M_f}{\partial x} + T_t = 0 \end{cases}$$

Ici, on a négligé les termes d'inertie dus à la rotation des sections devant les termes d'inertie dus à leur translation. En éliminant l'effort tranchant, on obtient

$$\frac{\partial^2 M_f}{\partial x^2} + \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

Qui devient :

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\rho S}{EI} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

$$v = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \dots \dots \dots (III - 14).$$

Energie cinétique :

$$\tau = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right)^2 d\Omega = \frac{1}{2} \rho S \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right)^2 dx \dots \dots \dots (III - 15).$$

Les conditions aux limites possibles sont :

- déplacement imposé nul aux extrémités:  
 $v(0,t) = 0$  Et /ou  $v(L,t) = 0$
- rotation imposée nulle aux extrémités  
 $\frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = 0$  Et /ou  $\frac{\partial v}{\partial x}(L,t) = 0$
- moment imposé nul aux extrémités:  
 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0,t) = 0$  Et /ou  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(L,t) = 0$
- effort imposé nul aux extrémités  
 $\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(0,t) = 0$  Et /ou  $\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(L,t) = 0$

### III.4.2.2 Fréquences et modes propres

On effectue une séparation des variables:

$$v(x,t) = V(x)T(t)$$

L'équilibre devient:

$$\frac{EI}{\rho S} \frac{1}{V} \frac{d^4 V}{dx^4} = - \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = cste$$

On a égalité de deux fonctions de variables indépendantes. Les deux fonctions sont donc égales à une constante. Cette constante est choisie positive pour assurer la stabilité de la solution en temps

$$\frac{EI}{\rho S} \frac{1}{V} \frac{d^4 V}{dx^4} = - \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = +w^2$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} \frac{d^4 V}{dx^4} - \beta^4 V = 0 \\ \frac{d^2 T}{dt^2} + w^2 T = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U(x) = A \cosh \beta x + B \sinh \beta x + C \cos \beta x + D \sin \beta x \\ T(t) = E \sin wt + F \cos wt \end{cases} \dots \dots \dots (III - 16)$$

Avec

$$\beta^4 = \frac{\rho S w^2}{EI}$$

Les constantes  $A, B, C, D, E, et F$ , Sont calculées à partir des conditions initiales et des conditions aux limites.

### III.5.Méthode du quotient de Rayleigh

#### III.5.1. Quotient de Rayleigh

Un mode de vibration s'exprime sous la forme:

$$\vec{u}(M, t) = A \sin(\omega t + \varphi) \vec{U}(M) \dots \dots \dots (III - 17).$$

Où  $A$  est l'amplitude,  $\omega$  la pulsation propre et  $\vec{U}$  la déformée modale propre.

La vibration d'un système conservatif étant un échange d'énergie permanent entre énergie cinétique et énergie de déformation (énergie potentielle), on a la propriété suivante :

$$\frac{E_{p \max}}{E_{c \max}} = 1$$

Où  $E_{p \max}$  et  $E_{c \max}$  sont les maxima des énergies potentielle et cinétique atteints au cours du temps.

Dans un système conservatif, l'énergie potentielle ne fait intervenir que des dérivées spatiales et prend en général la forme

$$E_p(\vec{u}) = A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \int_{\Omega} e_d(\vec{U}) dv$$

Où  $e_d$  est l'énergie de déformation locale.

L'énergie cinétique s'écrit:

$$E_c(\vec{u}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)^2 dv = \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho (\vec{U})^2 dv$$

Les maxima sont donc:

$$E_{p \max} = A^2 \int_{\Omega} e_d(\vec{U}) dv \dots \dots \dots (III - 18).$$

$$E_{c \max} = \omega^2 A^2 \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho (\vec{U})^2 dv \dots \dots \dots (III - 19).$$

La propriété de conservation de l'énergie donne alors:

$$\omega^2 = \frac{\int_{\Omega} e_d(\vec{U}) dV}{\int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho (\vec{U})^2 dV} \dots \dots \dots (III - 20).$$

La quantité précédente, qui ne dépend que de la forme propre  $\vec{U}(M)$ , est appelée quotient de Rayleigh de  $\vec{U}$  et noté :

$$R(\vec{U}) = \frac{\int_{\Omega} e_d(\vec{U}) dV}{\int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho (\vec{U})^2 dV} \dots \dots \dots (III - 21).$$

Par exemple, dans le cas des vibrations longitudinales où une poutre droite n'est soumise qu'à de la traction ou de la compression, si  $u(x, t)$  est le déplacement axial d'une section, mis sous la forme  $u(x, t) = A \sin(\omega t + \phi) U(x)$ , on a:

$$R(\vec{U}) = \frac{\frac{1}{2} \int_0^l ES \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dx}{\int_0^l \frac{1}{2} \rho S (U)^2 dx}$$

Dans le cas des vibrations de flexion d'une poutre droite, si  $u(x,t)$  est le déplacement d'une section perpendiculairement à la ligne moyenne, mis sous la forme  $u(x,t) = A \sin(\omega t + \phi) U(x)$ , on a :

$$R(V) = \frac{\frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)^2 dx}{\int_0^L \frac{1}{2} \rho S (V)^2 dx}$$

**III.5.2. Approximation : méthode de Rayleigh**

Lorsque la forme  $\vec{U}(M)$  est forme modale propre de la structure alors le quotient de Rayleigh  $\vec{U}$  est égal au carré de la pulsation propre du mode :

$$R(\vec{U}) = \omega^2$$

Et ce quel que soit le rang du mode considéré.

Lorsqu'on considère une déformée quelconque  $\vec{V}$ , il est toujours possible de calculer son quotient de Rayleigh  $R(\vec{V})$ . Lorsque  $\vec{V}$  est ((Cinématiquement Admissible» (satisfait aux conditions aux limites géométriques du problème), on peut montrer que :

$$R(\vec{U}_0) \leq R(\vec{V}), \quad \forall \vec{V} CA$$

Où  $\vec{U}_0$  est la forme propre fondamentale du système (premier mode de vibration).

On obtient ainsi une méthode d'approximation par borne supérieure de pulsation fondamentale du système:

$$\omega_0^2 \leq R(\vec{V}), \quad \forall \vec{V} CA$$

Ou de la fréquence fondamentale:

$$f_0 \leq \frac{\sqrt{R(\vec{V})}}{2\pi}, \quad \forall \vec{V} CA$$

Il est bien évident que le choix de la forme  $\vec{V}(M)$  joue un rôle très important dans la qualité de l'approximation. Le sens physique du modélisateur intervient alors beaucoup. Des choix possibles de forme approchée  $\vec{V}$  sont:

- solution exacte d'un problème voisin,
- déformé statique de la structure sous son poids propre (lorsque les forces d'inertie sont pilotées par le poids propre),

**III.6.Méthode de rayleigh-Ritz**

La méthode de Rayleigh-Ritz consiste à chercher une approximation des modes de vibration dans un espace de dimension N engendré par N fonctions  $\phi_i$  choisies. C'est-à-dire qu'on cherche des solutions de la forme :

$$W(x, y, z) = \sum_{i=1}^N q_i \phi_i(x, y, z) = \{q\}^T \{\phi\} \dots \dots \dots (III - 22).$$

$$\text{Avec } \{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{Bmatrix} \text{ et } \{\phi\} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{Bmatrix}$$

Les fonctions  $\phi_i$  étant connues, le quotient de Rayleigh d'une telle forme dépend uniquement des paramètres  $q_i$  et peut être mis sous la forme:

$$R(W) = R(q_1, \dots, q_N) = \frac{\{q\}^T K \{q\}}{\{q\}^T M \{q\}} \dots \dots \dots (III - 23).$$

Où  $K$  est appelée matrice de raideur et  $M$  matrice de masse.

La minimisation du quotient de Rayleigh par rapport aux paramètres  $\phi_i$  donne le système:

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial q_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial R}{\partial q_N} = 0 \end{cases} \quad \text{Noté} \quad \frac{\partial R}{\partial \{q\}} = 0$$

Qui correspond après développement a :

$$\frac{K\{q\}\{q\}^T M\{q\} - \{q\}^T K\{q\}M\{q\}}{(\{q\}^T M\{q\})^2} = 0$$

En notant :

$$w^2 = \frac{\{q\}^T K \{q\}}{\{q\}^T M \{q\}},$$

La minimisation donne :

$$\frac{K\{q\} - w^2 M\{q\}}{\{q\}^T M\{q\}} = 0$$

Les quantités  $w_i$  qui assurent le minimum du quotient de Rayleigh sont donc les termes qui annulent le déterminant:

$$[K - w^2 M] = 0$$

On peut montrer que  $w_i$  est une approximation par l'excès de la  $i$ ème fréquence propre du système.

Les vecteurs  $\{q^i\}$ , associés aux  $w_i$ , qui sont solutions du problème aux valeurs propres :

$$[K - w^2 M]\{q\} = 0$$

Donnent les composantes dans la base des fonctions  $\phi_i$  d'approximations des  $N$  premiers modes propres du système.

De manière générale, on peut faire les remarques suivant sur la qualité d'une approximation par la méthode de *Rayleigh-Ritz*:

- la qualité de l'approximation du *i*ème mode décroît avec  $i$ ,
- la qualité de l'approximation des pulsations est meilleure que celle de l'approximation des modes,
- la qualité de l'approximation augmente avec la dimension de la base  $N$ .

### III.6.1. Exemple : vibrations longitudinales

On s'intéresse aux vibrations longitudinales d'une barre encadrée à droite et appuyée à gauche sur un ressort de raideur  $k$ . La barre est de longueur  $L$  et de section  $S$ .  $E$  est le module d'Young du matériau.

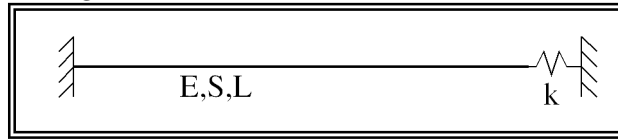


Figure III-9 : Barre encadrée et appuyée sur un ressort.

### III.6.2. Solution exacte

Lorsque la raideur du ressort est telle que  $k = ES/L$ , il existe une solution exacte qui donne pour les deux premières pulsations propres :

$$w_1 = 2,029 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}} \quad , \quad w_2 = 4,913 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$$

Dans la suite on considère que la raideur  $k$  a la valeur  $ES/L$  et les solutions approchées seront comparées à cette solution exacte.

### III.6.3. Solution approchée par la méthode du quotient de Rayleigh

Le quotient de Rayleigh pour toute forme  $U(x)$  qui vérifie la condition d'encastrement  $U(0) = 0$  s'écrit :

$$(U) = \frac{\int_0^L ES \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dx + kU(L)^2}{\int_0^L \rho S U(x)^2 dx}$$

Si on prend comme forme d'approximation, la fonction  $U_1(x) = \sin \frac{\pi x}{2L}$ , qui correspond au premier mode de la poutre libre à droite, on obtient comme approximation du premier mode :

$$w_1 = 2,11 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$$

Ce qui correspond à une bonne approximation du premier mode.

### III.6.4. Méthode de Rayleigh-Ritz

On applique la méthode de Rayleigh-Ritz en dimension 2 en prenant comme deux fonctions d'approximation :

$$U_1(x) = \sin \frac{\pi x}{2L} \quad , \quad U_2(x) = \sin \frac{3\pi x}{2L}$$

Qui correspondent aux deux premiers modes propres de la poutre libre à droite. C'est à dire qu'on cherche des approximations des deux premiers modes propres sous la forme :

$$U_{app}(x) = q_1 U_1(x) + q_2 U_2(x)$$

La suite consiste à trouver les meilleurs couples  $\{q_1, q_2\}$  au sens du minimum du quotient de Rayleigh. Avec les fonctions choisies, le quotient de Rayleigh prend la forme:

$$(U_{app}) = R(q_1, q_2) = \frac{\frac{\pi^2 ES}{8L}(q_1^2 + 9q_2^2) + k(q_1^2 - q_2^2)}{\frac{\rho SL}{2}(q_1^2 + q_2^2)}$$

Si on cherche  $q_1$ , et  $q_2$  de manière à minimiser le quotient de Rayleigh, on écrit:

$$\frac{\partial R}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial q_2} = 0$$

Ces deux équations conduisent au problème aux valeurs propres suivant:

$$\left[ \begin{array}{cc} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{array} \right] - w^2 \left[ \begin{array}{cc} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad \left( (K - w^2 M) \{q\} \right) = 0$$

Avec :

$$k_{11} = \int_0^L ES \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} \right) dx + k U_1(L) U_1(L)$$

$$k_{22} = \int_0^L ES \left( \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) dx + k U_2(L) U_2(L)$$

$$k_{12} = \int_0^L ES \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) dx + k U_1(L) U_2(L)$$

Qui correspondent au numérateur du quotient de Rayleigh et

$$m_{11} = \int_0^L \rho S U_1(x) U_1(x) dx$$

$$m_{22} = \int_0^L \rho S U_2(x) U_2(x) dx$$

$$m_{12} = \int_0^L \rho S U_1(x) U_2(x) dx$$

Qui correspondent au dénominateur.

Ici, compte tenu de la forme du quotient de Rayleigh, on a:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\pi^2 ES}{8L} + k & -k \\ -k & \frac{9\pi^2 ES}{8L} + k \end{bmatrix}$$

$$M = \rho SL \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



Les deux fonctions  $U_1$  et  $U_2$  sont formes propres du problème sans ressort. Elles sont donc orthogonales par rapport à un opérateur de masse qui est le même que celui du problème avec ressort. Elles sont aussi orthogonales par rapport à un opérateur de raideur qui coïncide avec celui qui nous intéresse lorsque  $k$  est nul. Il est donc naturel que la matrice de masse obtenue soit symétrique et que la non-symétrie de la matrice de raideur soit uniquement due au terme  $k$ .

Les deux valeurs de  $w^2$  qui annulent le déterminant de  $[K - w^2 M]$  donnent une approximation des deux premières pulsations propres du système :

$$w_1'' = 2,066 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}} \quad , \quad w_2'' = 4,940 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$$

Il est intéressant de remarquer que l'ajout de la fonction  $U_2$  permet d'améliorer la qualité de l'approximation de  $w_1$  par rapport à la méthode du quotient de Rayleigh (qui est en fait la méthode de Rayleigh-Ritz en dimension un). Cela permet aussi de fournir une approximation de deuxième pulsation propre du système.

## Applications

### Sommaire du chapitre :

IV.4PREMIERE APPLICATIONS.....	65
IV.4.1INTRODUCTION .....	65
IV.4.2THEOREME DE MAXWELL NIVEN .....	65
IV.4.4ANALYSE STATIQUE DES STRUCTURES .....	69
IV.4.5APPLICATION DE L'EQUATION IV-4 .....	73
IV.4.6APPLICATION DE L'EQUATION IV-5 .....	74
IV.5DEUXIEME APPLICATION .....	77
IV.5.1INTRODUCTION .....	77
IV.5.IV.5.2ANALYSE MODALE DES STRUCTURES .....	77
IV.6TROISIEME APPLICATION .....	85
IV.4.IV.6.1INTRODUCTION .....	85
IV.6.2ANALYSE DE L'EXEMPLE .....	85
IV.7QUATRIEME APPLICATION .....	91
.2.5.IV.7.1INTRODUCTION.....	91
IV.7.2RELATION ANALYSE CONCEPTION.....	91
IV.7.3CONCEPTION DE LA STRUCTURE .....	94
IV.8CINQUIEME APPLICATION.....	97
IV.8.1INTRODUCTION .....	97
IV.8.2PROCEDURE .....	97
IV.8.3DESCRIPTION DU PROBLEME.....	97
IV.8.5L'ALGORITHME.....	99
IV.8.6RESULTATS .....	100
IV.8.7VALIDATION DES RESULTATS.....	101

---

# APPLICATIONS

## IV.1. Introduction

Dans cette section, nous allons étudier cinq problèmes d'optimisation des structures de types treillis, dans lesquels on utilisera les théories et les techniques d'optimisation présentés avec chaque application.

Aujourd'hui l'optimisation dans l'ingénierie occupe une place importante et particulière notamment dans l'industrie spatiale et aéronautique. Les structures en treillis se considère comme étant la colonne vertébrale de chaque construction aéronautique (navette, avion ...etc.); d'où viens leurs importance comme éléments mécanique nécessaire et idéal, Le développement des nouvelles technologies, comme l'apparition des matériaux composites, a remplacé quelques applications des structures treillis, mais ils restent toujours un élément dont l'utilisation croît continuellement dans toutes les industries.

La possibilité de minimiser le poids des structures a ouvert la porte devant la recherche de la meilleure forme parmi les formes possibles, envisageant une amélioration des performances des structures, à savoir : une bonne résistance aux conditions de travail, un allègement, une diminution de coût ... etc.

## IV.2. BUT DE L'ETUDE

Mettant en considération ce qui a était dit à la section précédente, il est possible donc d'avoir des structures ayant une forme idéale. Si l'on cherche une forme pour laquelle le poids de la structure soit minimum (structure de forme plus résistante et éventuellement de moindre volume), on est ainsi conduit à un problème d'optimisation de la forme de la structure.

## IV.3. BIBLIOGRAPHIE

L'optimisation des structures en générale et les structures treillis en particulier comprend des calculs, analytiques et mathématiques, beaucoup de paramètres doivent être connus ; l'aspect géométrique, la détérioration, les matériaux, la fabrication et la vérification. Parmi tous ces paramètres, il est essentiel de connaître avec précision les contraintes se trouvant dans chaque élément pour prévenir les risques de rupture et assurer les conditions de bon fonctionnement. Par conséquent, plusieurs méthodes théoriques et mathématiques ont été développées, chaque méthode a une manière différente à l'autre, mais toutes ces méthodes ont le même objectif qui est la détermination de la forme optimale. Parmi ces méthodes qui concernent l'optimisation des structures, on peut citer les suivantes :

**Maxwell Niven (1956)** dans une structure à treillis, Généralement chaque barre est soumise à une force de traction ou de compression. Cela dépend de la magnitude, de la direction des charges et la position relative des points. Il postule que si ce système de points est en équilibre, la somme algébrique de produit de la force à chaque barre et la longueur de cette barre, et le travail des charges extérieur pendant

leur déplacement par rapport a une référence est nul, autrement dit plus cette somme est moins importante plus cette structure treillis a un poids minimale [1].

Dans une structure treillis, il n'est pas normale de maître sous contrainte tous les membres de la structure a la contrainte admissible sans que quelques précontraintes sont introduites dans ces membres, la mise sous précontrainte va nous permettre une importante économie de la matière **Francis 1953**, **Dayaratnam** et **Patnaik 1969**, **Hofmeister** et **Felton 1970**.

**Reyman 1959** considère une structure soumise a des charges fixes, il suppose que le moment est proportionnel a la section d'une poutre, on appelle le flexion compatible avec le diagramme des moments lorsque le signe de moment fléchissant est compatible avec le signe de la courbure a travers la structure. le théorème de **Reyman** postule que, pour des charges données le design peut être trouvé qu'il est compatible avec la forme fléchi de la structure qui a une constante courbure absolu alors le design a un poids minimum.

Les structures treillis dont les membres sont entièrement sous contrainte été l'objet d'une étude extensive par **Razani 1965** et **Kicher 1966**, ils ont arrivé que ces structures ne donne pas toujours le poids minimum.

Le principe d'échec simultané dans plusieurs modes, suppose que si une structure est désignée dans ce sens qui échoue dans tous les modes possible, le design correspond a la structure qui a le poids minimum. Ce principe est appelé principe de **One-hoss shay**, il est extensivement appliqué au développement des structures aéronautique.

Une méthode de relaxation applicable aux poutres continues à plusieurs appuis a été proposée par **Megarefs** et **Sidhu 1968**, le principe de poids minimum a été appliqué aux problèmes à chargement multiple **Mayeda** et **Prager 1967**.

En 1975 **Chiou** propose un algorithme pratique qui peut être développé de ses équations pour obtenir la solution optimale pour des larges structures, la programmation dynamique et une technique de calcul qui peut être utilisé avantageusement dans certains types de problèmes , elle n'est pas une approche d'optimisation discuté précédemment , elle est plutôt une technique d'optimisation séquentiel dérivée d'un problème de décision séquentiel, cette méthode fut développé par **Bellman 1957** ; qui a suggéré de l'appeler programmation dynamique. La formulation d'un problème de design d'une structure pour la solution par programmation dynamique requiert la décomposition de la structure à plusieurs étapes, la définition des variables d'états et la détermination de domaine des valeurs de variables d'états. Les valeurs optimales des variables à une étape ; et généralement déterminées de valeurs discrètes des variables. La méthode est adéquate pour les problèmes qu'ils puissent être décomposés sous forme de série ; cette méthode a connue un large nombre d'applications **Goble** et **DeSantis 1966** ; **Khachaturian** et **Haider 1966**, **Palmer 1968**, **Twisdale 1972** et **Khachaturian 1975**. [2]

Depuis les années quatre vingt, l'orientation des travaux de recherche a surtout été dirigée vers l'application des méthodes numériques : Éléments Finis, Équations Intégrales, Méthode des Potentiels Complexes, Bandes Finies.

## IV.4. Première Application

### IV.4.1. Introduction

Dans cette application nous allons traiter un problème d'optimisation, qui est la désignation de la structure treillis optimale parmi six structures présentées dans le catalogue tableau IV – 1, en utilisant le théorème de *MAXWELL* qui nous fournit une méthode pour obtenir la structure qui a le poids minimale et qui nous aide d'accélérer le processus d'optimisation.

### IV.4.2. Théorème de *MAXWELL NIVEN*

On considère un système de  $N$  points situés en espace, la position de chaque point est définie par ses coordonnées  $X_K, Y_K, Z_K$ , chaque point est soumis à une force extérieure  $P_K$ . Chaque point est connecté à plusieurs autres points par des barres en équilibre. [1]

Généralement chaque barre est soumise à une force de traction ou de compression. Cela dépend de la magnitude, de la direction des charges et la position relative des points.

Le théorème de *MAXWELL NIVEN*, (1952) postule que : si ce système de points est en équilibre, la somme algébrique du produit de la force à chaque barre et la longueur de cette barre, et le travail des charges extérieures pendant leur déplacement par rapport à une référence est nul.

Cette condition est exprimée par la relation :

$$\sum_{i=1}^n F_i L_i + \sum_{K=1}^n (P_{KX} \cdot X_K + P_{KY} \cdot Y_K + P_{KZ} \cdot Z_K) = 0 \dots\dots\dots (IV - 1).$$

$F_i$  : La force dans le membre  $i$ .  $L_i$  : la longueur de membre  $i$ .

$n$  : Nombre des barres,  $n$  : nombre des charges extérieures (des nœuds).

$P_{KX} \cdot X_K, P_{KY} \cdot Y_K, P_{KZ} \cdot Z_K$  : Les composantes du travail des charges extérieures  $P_K$  lorsqu'elles sont déplacées vers l'origine.

$P_{KX} \cdot X_K, P_{KY} \cdot Y_K, P_{KZ} \cdot Z_K$  : sont prises positives lorsque les charges se déplacent vers la direction positive de  $x$ .

Pour les problèmes bidimensionnels l'équation (IV – 1) devient :

$$\sum_{i=1}^n F_i L_i + \sum_{K=1}^n (P_{KX} \cdot X_K + P_{KY} \cdot Y_K) = 0 \dots\dots\dots (IV - 2).$$

Si nous supposons que la traction est la même pour toutes les barres tendues et la contrainte de compression la même pour toutes les barres comprimées, l'équation (2) peut être écrite sous la forme :

$$\sigma_t V_t - \sigma_c V_c = - \sum_{K=1}^n (P_{KX} X_K + P_{KY} Y_K) \dots\dots\dots (IV - 3).$$

$\sigma_t$  : La contrainte de traction dans les barres tendues.

$\sigma_c$  : La contrainte de compression dans les barres comprimées.

$V_t$  : La somme des volumes des barres tendues.

$V_c$  : La somme de volume des barres comprimées.

**IV.4.3. Démonstration de l'égalité IV-3**

On a : 
$$\sum_{i=1}^n F_i L_i = \sum_{i=1}^{n1} F_i^t L_i^t - \sum_{i=1}^{n2} F_i^c L_i^c$$

$n1$  : Nombres des barres tendues.  
 $n2$  : Nombres des barres comprimées (signe-).

$$\sum_{i=1}^{n1} F_i^t L_i^t = \sum_{i=1}^{n1} \left( \frac{F_i^t}{A_i} \right) \cdot L_i^t \cdot A_i ; A_i : \text{Section d'une barre.}$$

$$\sum_{i=1}^{n1} F_i^t L_i^t = \sum_{i=1}^{n1} \sigma_i^t V_i^t$$

La contrainte est la même pour toutes les barres tendues donc :

$$\sum_{i=1}^{n1} F_i^t L_i^t = \sigma_t \sum_{i=1}^{n1} V_i^t \text{ Donc : } \sum_{i=1}^{n1} F_i^t L_i^t = \sigma_t V_t$$

De même on peut démontrer que : 
$$\sum_{i=1}^{n2} F_i^c L_i^c = \sigma_c V_c$$

Donc : 
$$\sum_{i=1}^n F_i L_i = \sigma_t V_t - \sigma_c V_c \Rightarrow \sigma_t V_t - \sigma_c V_c = - \sum_{K=\&}^n (P_{KX} X_K + P_{KY} Y_K).$$

Puisque le volume total  $V$  de la structure est :  $V = V_t + V_c$  ; de l'équation (IV-3) on peut l'exprimer en fonction de volume des membres tendus  $V_t$  ou comprimés  $V_c$  d'où :

$$V = \left( \frac{\sigma_t + \sigma_c}{\sigma_t} \right) V_c - \left( \frac{1}{\sigma_t} \right) \cdot \sum_{K=1}^n (P_{KX} X_K + P_{KY} Y_K) \dots \dots \dots (IV-4).$$

Ou : 
$$V = \left( \frac{\sigma_t + \sigma_c}{\sigma_c} \right) V_t + \left( \frac{1}{\sigma_c} \right) \cdot \sum_{K=1}^n (P_{KX} X_K + P_{KY} Y_K) \dots \dots \dots (IV-5).$$

Démonstration des relations précédentes (IV-4) et (IV5) :

On a :  $V = V_t + V_c \Rightarrow V_t = V - V_c$  et  $V_c = V - V_t$  en remplaçant  $V_t$  dans (IV-3) :

$$\sigma_t (V - V_c) - \sigma_c V_c = - \sum_{K=1}^n (P_{KX} X_K + P_{KY} Y_K)$$

$$V \sigma_t - V_c \sigma_t - V_c \sigma_c = - \sum_{K=1}^n (P_{KX} X_K + P_{KY} Y_K)$$

Donc :

$$V = \left( \frac{\sigma_t + \sigma_c}{\sigma_t} \right) V_c - \left( \frac{1}{\sigma_t} \right) \sum_{K=1}^n (P_{KX} X_K + P_{KY} Y_K)$$

En remplaçant  $V_t$  dans (IV-3) :

$$\sigma_t V_t - \sigma_c (V - V_t) = - \sum_{K=1}^n (P_{KX} X_K + P_{KY} Y_K)$$

$$(\sigma_t + \sigma_c) V_t - \sigma_c V = - \sum_{K=1}^n (P_{KX} X_K + P_{KY} Y_K)$$

Donc : 
$$V = \left( \frac{\sigma_t + \sigma_c}{\sigma_c} \right) V_t + \left( \frac{1}{\sigma_c} \right) \sum_{K=1}^n (P_{KX} X_K + P_{KY} Y_K)$$

---

Les équations (IV-4) et (IV-5) expriment le volume total de la structure en fonction de volume des membres comprimés et tendu respectivement. Dans le cas où les points chargés de la structure sont fixes ainsi que les charges, le second terme dans le côté droit de ces équations est constant, et le volume de la structure minimum quand l'un ou l'autre ( $V_c$ , ou  $V_t$ ).

Les équations (IV-4) et (IV-5) économisent considérablement un totale de temps dans l'optimisation des treillis.

Le catalogue suivant expose six treillis de différentes configurations, tous ces dispositifs subissent les mêmes charges appliquées aux systèmes ; La contrainte dans les membres tendus est  $\sigma_t$ , et dans les membres comprimés est  $\sigma_c$ .

Dans l'ordre de déterminer parmi ces six structures qui a le poids minimale, on emploie l'équation (IV-4) et on compare seulement le volume des membres comprimés, puisque le second terme qui est de côté droit de cette équation est le même pour toutes les structures. Puis on va vérifier l'équation (IV-5) qui prend en compte les membres tendus.

Donc pour obtenir la structure optimale on cherche les efforts internes de toutes les barres des six structures et leurs longueurs.

Catalogue représente les six structures [2].

(1)		(2)		(3)							
Barre	$F = A\sigma$	$L$	$V\sigma$	Barre	$F = A\sigma$	$L$	$V\sigma$	Barre	$F = A\sigma$	$L$	$V\sigma$
1	2.12	2.82	6.00	1	4.74	3.16	15.00	1	2.12	5.66	12.00
2	2.00	2.00	4.00	2	2.12	1.41	3.00				
			10.00				18.00				
(4)		(5)		(6)							
Barre	$F = A\sigma$	$L$	$V\sigma$	Barre	$F = A\sigma$	$L$	$V\sigma$	Barre	$F = A\sigma$	$L$	$V\sigma$
1	2.12	2.82	6.00	1	1.80	1.80	3.25	1	1.80	3.60	6.50
2	1.41	2.82	4.00	2	1.12	1.12	1.25	2	1.33	1.00	1.33
3	0.71	2.82	2.00	3	1.41	1.41	2.00	3	1.00	1.00	1.00
			12.00	4	2.24	1.12	2.50	4	0.60	1.80	1.08
				5	1.12	1.12	1.25				9.91
				6	3.35	1.12	3.75				
							14.00				

Tableau IV-1 : Catalogue des Structures treillis.



- Toutes les barres numérotées sont comprimées ;
- les barres ayant la même numérotation dans une structure ont la même longueur et l'effort à cause de la symétrie ;
- $\sigma$  est la même pour toutes les barres  $\sigma = \sigma_c$  .
- $L$  est la somme des longueurs des barres qui ont la même numérotation dans une structure.

Les propriétés géométriques et mécaniques sont :

- § Matériau isotrope et linéaire.
- § Module d'élasticité :  $E = 2.10^{11}$ .
- § Volume :  $\rho = 7850 \text{ Kg / m}^3$ .
- § Section des barres :  $S = 2.10^{-4} \text{ m}^2$ .
- § Coefficient du poisson :  $\nu = 0,3$
- § La longueur  $L = 1\text{m}$ .

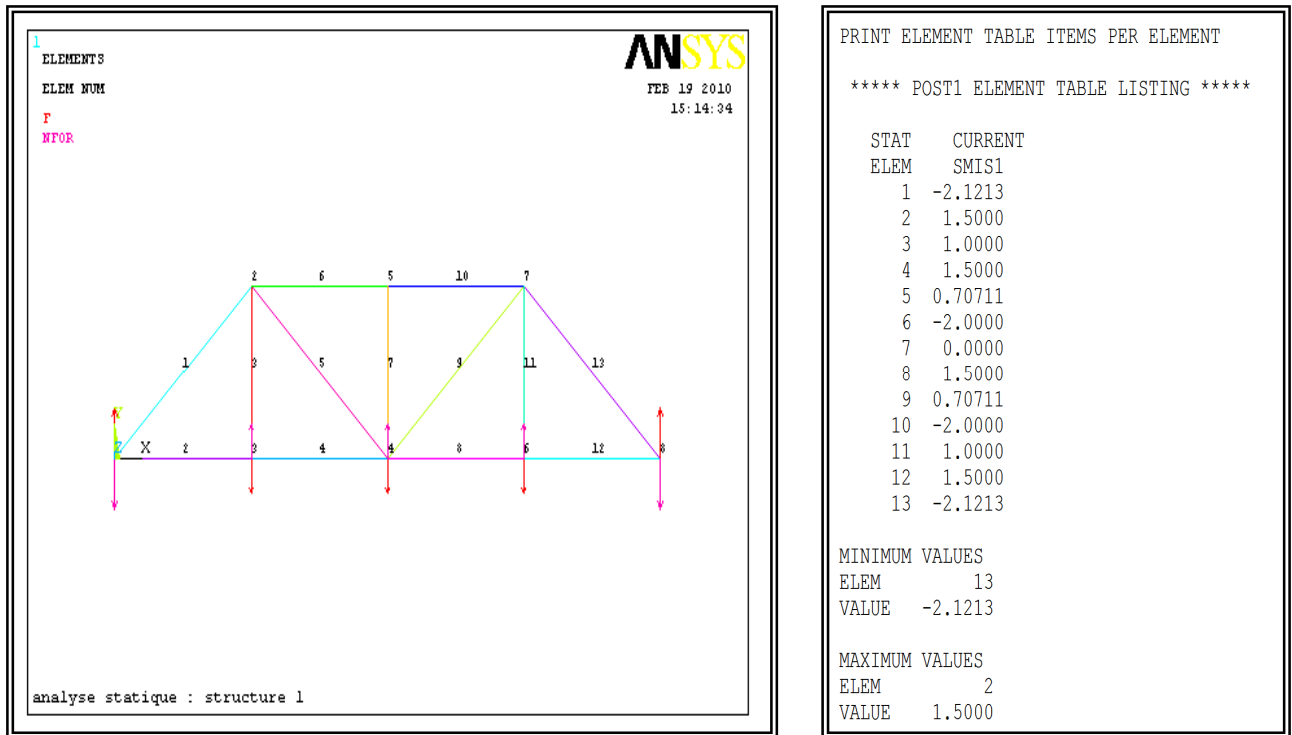
Parmi les six structures représentées dans le tableau on remarque que la structure (6) a le plus petit volume, donc cette structure est la plus légère (optimal) [2].

#### IV.4.4. Analyse statique des structures

Les structures sont de type treillis, de différentes configurations, tous ces dispositifs subissent les mêmes charges appliquées aux systèmes ; En utilisant ANSYS on va calculer les efforts dans les barres pour chaque structure, pour faire les calculs sous le code aux éléments finis ANSYS on choisit l'élément de maillage *LINK 2D-SPAR* c'est -a- dire élément barre avec deux nœuds.

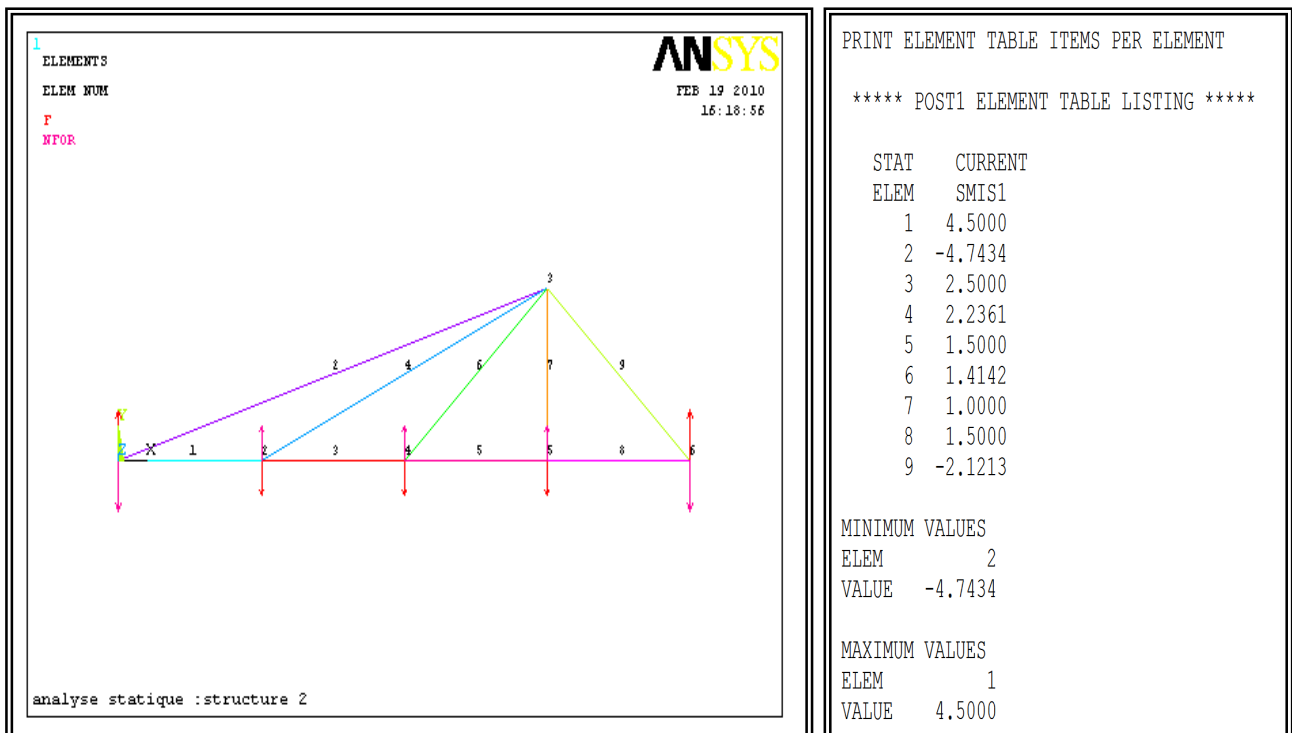
L'élément *LINK 2D-SPAR* est conçu pour modéliser les structures en élément barre, le nombre de nœuds de cet élément est égal à 2, avec deux degrés de liberté à chaque nœud translation suivant  $x$  et  $y$ .

Structure 1



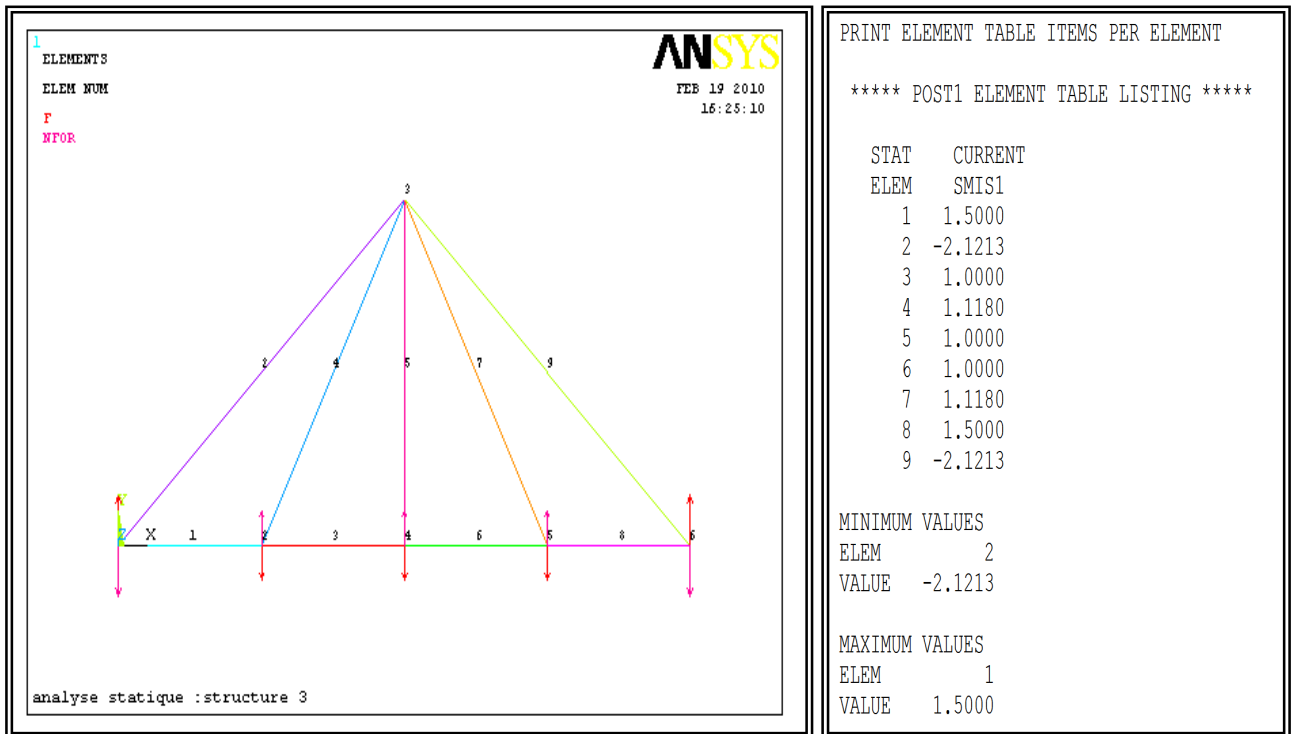
FigureVI-1: Structure1 modélisée avec ses efforts.

Structure 2



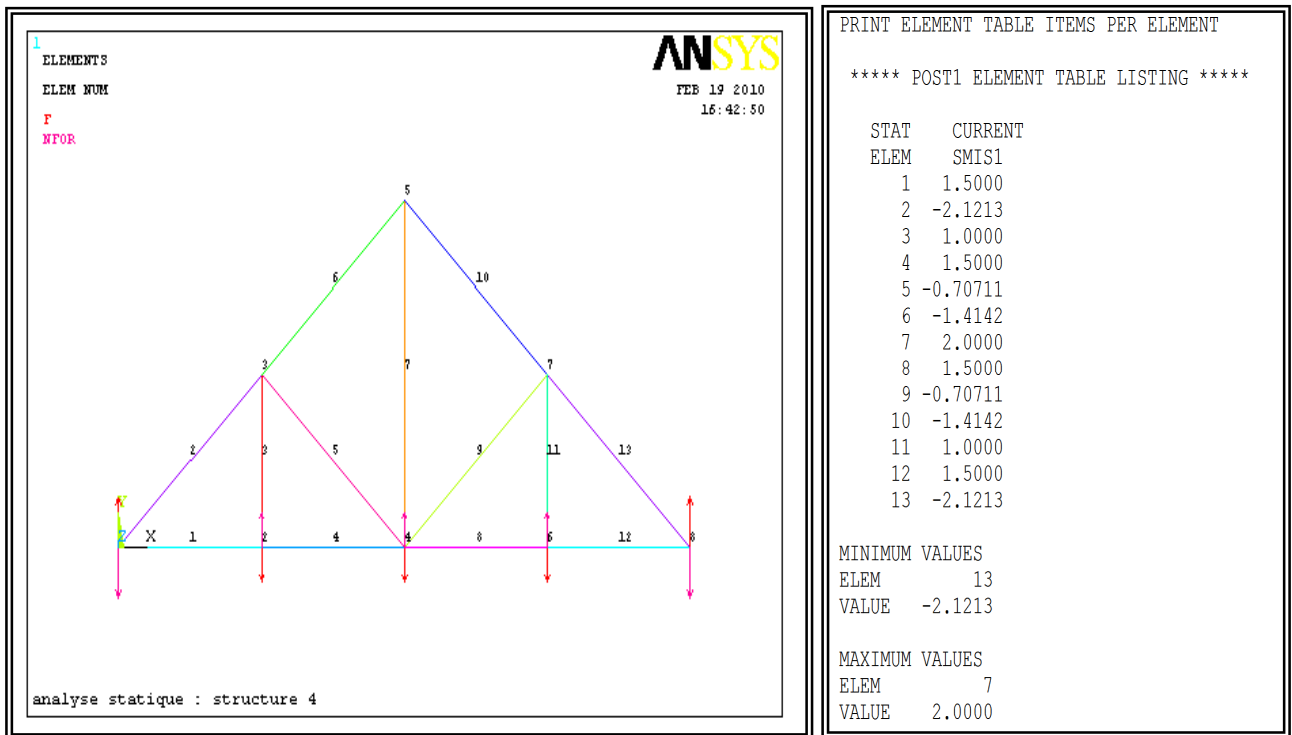
FigureVI-2: Structure2 modélisée avec ses efforts.

Structure 3



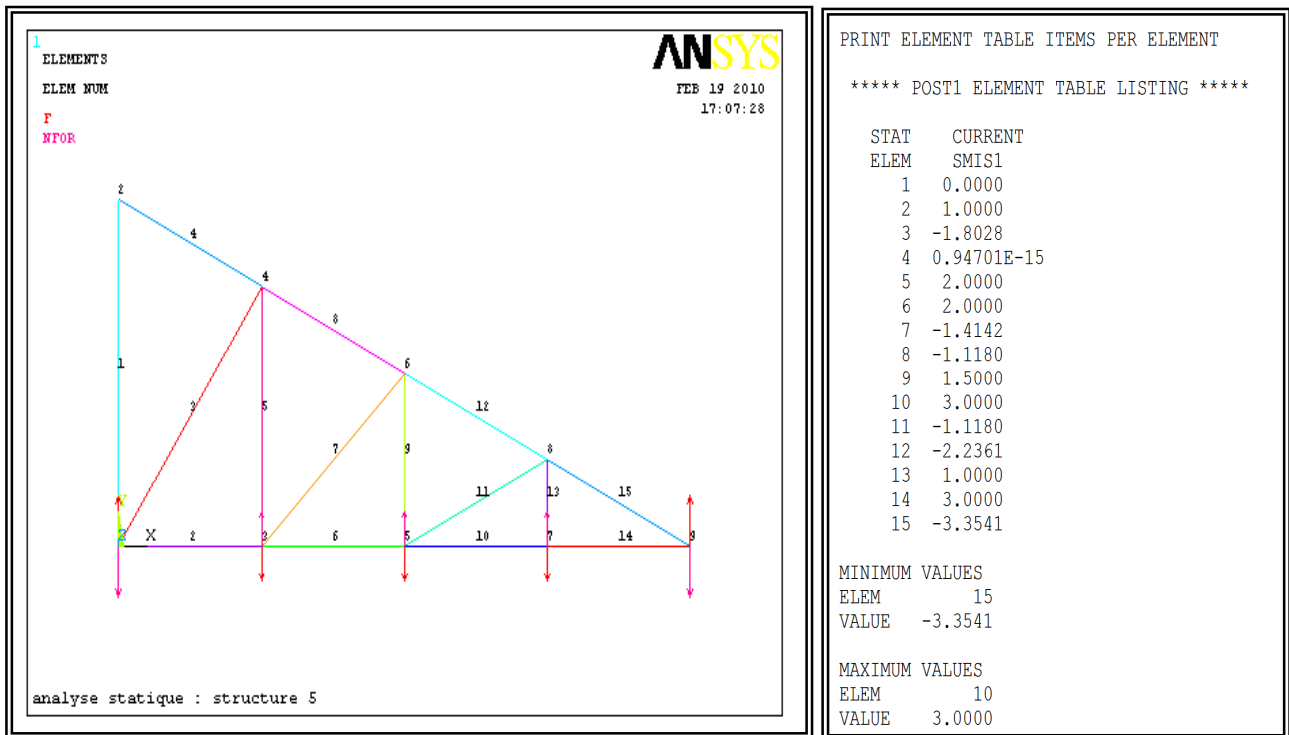
FigureVI-3: Structure3 modélisée avec ses efforts.

Structure 4



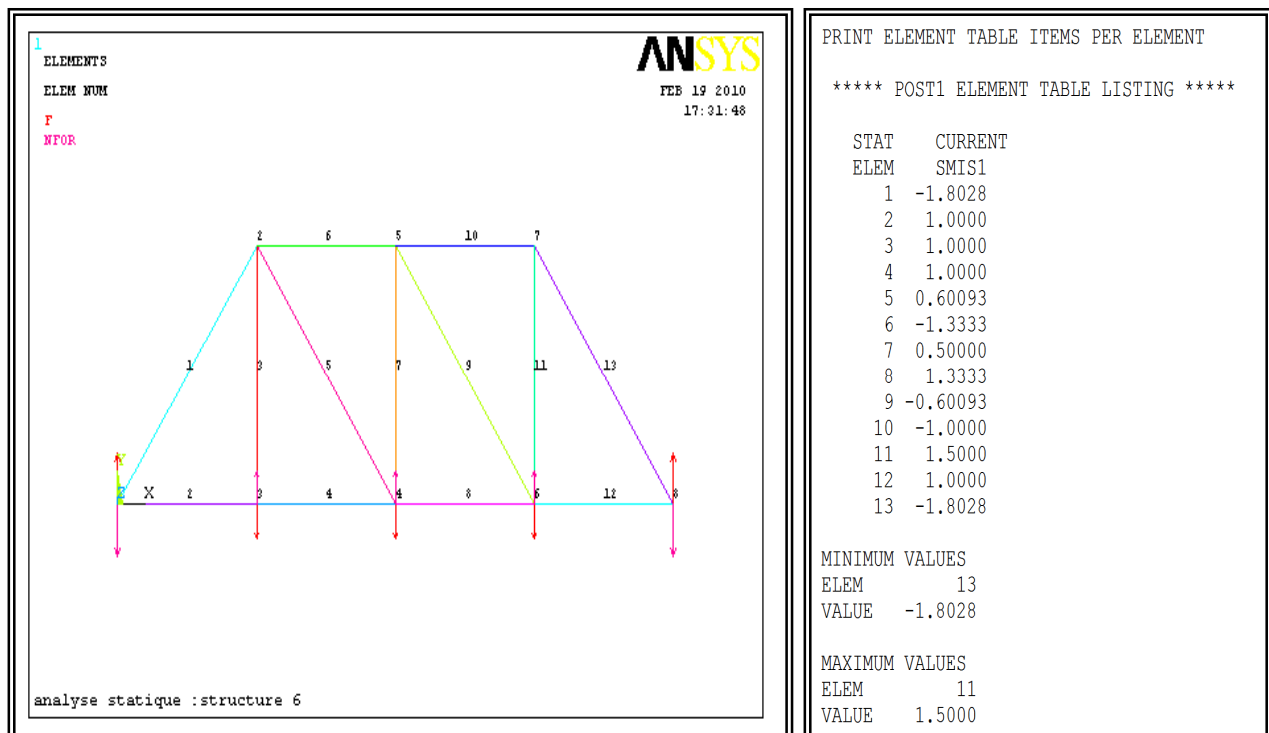
FigureVI-4: Structure4 modélisée avec ses efforts.

Structure 5



FigureVI-5: Structure5 modélisée avec ses efforts.

Structure 6



FigureVI-6: Structure6 modélisée avec ses efforts.

#### IV.4.5. Application de l'équation IV-4

Le tableau ci-dessous représente pour chaque structure, les barres comprimées et leurs longueurs ainsi que les forces de ces barres multipliées fois les longueurs qui les correspondent.

structures	Barres comprimées	Force ( $F^c$ )	Longueur ( $L$ )	$\sum F^c \cdot L$
Structure1	1	2,1213	1,41	9,98
	6	2,0000	1	
	10	2,0000	1,41	
	13	2,1213	1	
Structure2	2	4,74	3,16	17,98
	9	2,12	1,41	
Structure3	2	2,12	2,83	11,96
	9	2,12	2,83	
Structure4	2	2,12	2,82	12
	5	0,70	2,82	
	6	1,41	2,82	
	9	0,70	2,82	
	10	1,41	2,82	
	13	2,12	2,82	
Structure5	3	1,80	1,80	14,07
	7	1,41	1,41	
	8	1,12	1,12	
	11	1,12	1,12	
	12	2,23	1,12	
	15	3,35	1,12	
Structure6	1	1,80	1,80	9,89
	6	1,33	1	
	9	0,60	1,80	
	10	1,00	1	
	13	1,80	1,80	

Tableau IV-2 : Calculs basés sur les résultats ANSYS.

**Tableau comparatif**

	Résultats [2]	Résultats obtenus
STRUCTURE 1	10	9,98
STRUCTURE 2	18	17,98
STRUCTURE 3	12	11,96
STRUCTURE 4	12	12
STRUCTURE 5	14	14,07
STRUCTURE 6	9,91	9,89

*Tableau IV-4 : Tableau comparatif des résultats.***IV.4.6. Application de l'équation IV-5**

Dans l'application précédente nous avons pu désigner la structure optimale en se basant sur les barres en compression, dans cette application nous allons refaire les mêmes étapes de la fois passe mais en prenant en compte que les barres en traction, c'est-à-dire qu'on emploie l'équation (IV - 5)

*Structure 1*

Barres tendues	forces ( $F'$ )	longueur ( $L$ )	$\sum F' . L$
2	1,5	1	<b>9.96</b>
3	1	1	
4	1,5	1	
5	0,7	1,41	
8	1,5	1	
9	0,7	1,41	
11	1	1	
12	1,5	1	

*Tableau IV-5 : structure 1.**Structure 2*

Barres tendues	forces ( $F'$ )	Longueur ( $L$ )	$\sum F' . L$
1	4,5	1	<b>17,98</b>
3	2,5	1	
4	2,23	2,24	
5	1,5	1	
6	1,41	1,41	
7	1	1	
8	1,5	1	

*Tableau IV-6 : structure 2.*

## Structure 3

Barres tendues	forces ( $F^i$ )	Longueur ( $L$ )	$\sum F^i . L$
1	1,5	1	<b>12</b>
3	1	1	
4	1,12	2,24	
5	1	2	
6	1	1	
7	1,12	2,24	
8	1,5	1	

Tableau IV-7 :structure3.

## Structure 4

Barres tendues	forces ( $F^i$ )	longueur ( $L$ )	$\sum F^i . L$
1	1,5	1	<b>12</b>
3	1	1	
4	1,5	1	
7	2	2	
8	1,5	1	
11	1	1	
12	1,5	1	

Tableau IV-8 :structure4.

## Structure 5

Barres tendues	forces ( $F^i$ )	longueur ( $L$ )	$\sum F^i . L$
2	1	1	<b>14</b>
5	2	1,5	
6	2	1	
9	1,5	1	
10	3	1	
13	1	0,5	
14	3	1	

Tableau IV-9 :structure5.

## Structure 6

Barres tendues	forces ( $F'$ )	Longueur ( $L$ )	$\sum F' . L$
2	1	1	<b>9.83</b>
3	1	1,5	
4	1	1	
5	0,6	1,8	
7	0,5	1,5	
8	1,33	1	
11	1,5	1,5	
12	1	1	

Tableau IV-10 : structure 6.

## Tableau comparatif

	<i>Equation (IV - 4)</i>	<i>Equation (IV - 5)</i>
STRUCTURE 1	9,98	9,96
STRUCTURE 2	17,98	17,98
STRUCTURE 3	11,96	12
STRUCTURE 4	12	12
STRUCTURE 5	14,07	14
STRUCTURE 6	<b>9,89</b>	<b>9,83</b>

Tableau IV-11 : Comparaison de résultats obtenus.

**Conclusion**

L'utilisation de code aux éléments finis *ANSYS*, nous a permis de valider Les résultats présenter au catalogue de référence.

Les résultats obtenus par l'analyse statique effectuer sur les six différentes structures donnent la même structure optimale que se soit avec l'utilisation de l'équation (IV - 4) qui tient en compte les barres comprimées, ou l'équation (IV - 5) qui tient en compte les barres tendues.

Le théorème de *MAXWELL NIVEN* montre que la localisation de points de jonction des barres a une influence décisif sur le poids total de la structure.



## IV.5. Deuxième application

### IV.5.1. introduction

Après avoir designer la structure optimale pour le catalogue présenter dans la première application (tableau IV – 1 ) dans le cas statique, nous allons essayer de voir si nous aurons la même structure optimale pour le même catalogue et le même système du chargement mais dans le cas dynamique; pour cela nous allons procéder à une analyse modale de toutes les structures en extrayant les trois premier mode de vibration de chaque structure, après on applique l'équation (IV – 4) qui pris en compte que les barres comprimées, les efforts utilisés pour le calcul de volume de chaque structure sont les efforts moyens  $F_m$  c'est-à-dire qu'on pris en considération que les barres qui restent en compression dans les trois modes, puis en calcul leurs moyenne.

$$F_m = \frac{F_1 + F_2 + F_3}{3} \dots\dots\dots(IV - 6) ,$$

Ou  $F_1$ ,  $F_2$  et  $F_3$ , sont respectivement les forces de premier, deuxième et troisième mode.

Le code employé pour l'analyse modale des structures est ANSYS avec l'utilisation de même élément de maillage utilisé dans la première application qui 'est *LINK 2D-SPAR*.

### IV.5.2. Analyse modale des structures

Les structures sont de type treillis, de différentes configurations, tous ces dispositifs subissent les mêmes charges appliquées aux systèmes ; En utilisant ANSYS on va calculer les efforts modales dans les barres pour chaque structure, pour faire les calculs sous le code aux éléments finis ANSYS on choisit toujours l'élément de maillage *LINK 2D-SPAR* c'est -a- dire élément barre avec deux nœuds.

Dans la section suivante, On a exposé pour chaque structure les forces modales des trois premier mode, et afin de mettre en évidence les barres qui restent en compression dans les trois modes pour chaque structure, on a jugé utile de les représentés graphiquement.

Structure 1

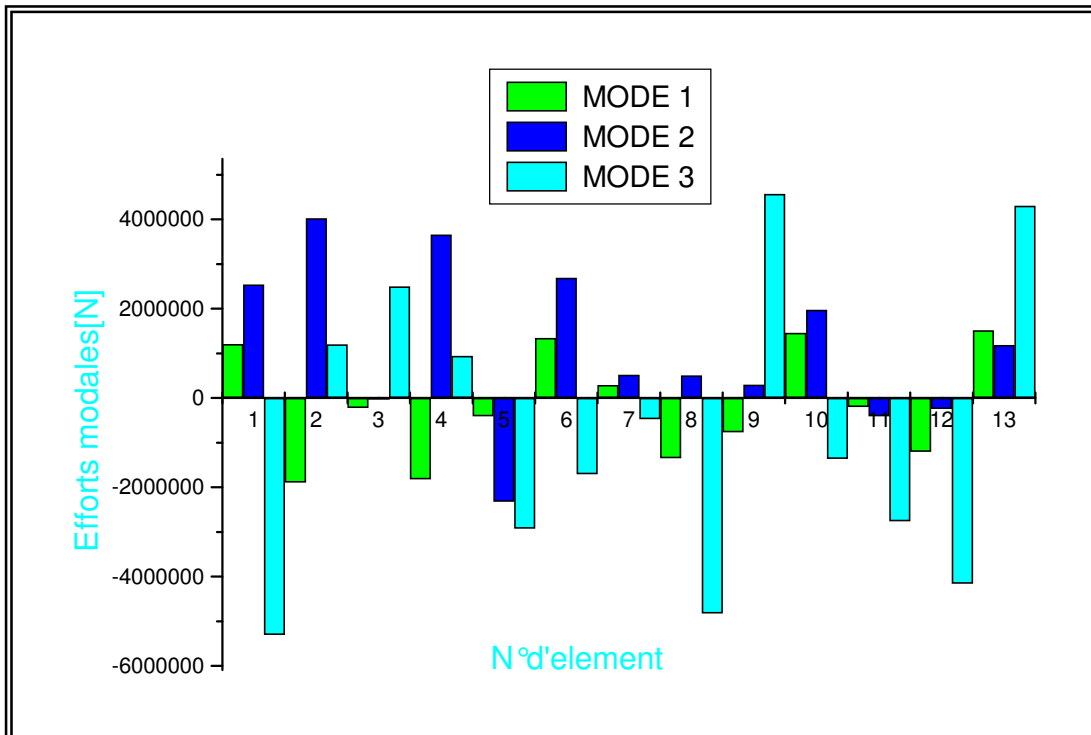
PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT		PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT		PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT	
**** POST1 ELEMENT TABLE LISTING ****		**** POST1 ELEMENT TABLE LISTING ****		**** POST1 ELEMENT TABLE LISTING ****	
STAT	CURRENT	STAT	CURRENT	STAT	CURRENT
ELEM	SMIS1	ELEM	SMIS1	ELEM	SMIS1
1	0.12087E+07	1	0.25441E+07	1	-0.53018E+07
2	-0.18870E+07	2	0.40253E+07	2	0.11977E+07
3	-0.21604E+06	3	-38775.	3	0.25013E+07
4	-0.18190E+07	4	0.36569E+07	4	0.94398E+06
5	-0.40325E+06	5	-0.23227E+07	5	-0.29233E+07
6	0.13444E+07	6	0.26911E+07	6	-0.17037E+07
7	0.28642E+06	7	0.51778E+06	7	-0.47312E+06
8	-0.13459E+07	8	0.50174E+06	8	-0.48195E+07
9	-0.76466E+06	9	0.29600E+06	9	0.45688E+07
10	0.14592E+07	10	0.19768E+07	10	-0.13595E+07
11	-0.20082E+06	11	-0.40384E+06	11	-0.27608E+07
12	-0.12022E+07	12	-0.23751E+06	12	-0.41557E+07
13	0.15164E+07	13	0.11862E+07	13	0.43024E+07
MINIMUM VALUES		MINIMUM VALUES		MINIMUM VALUES	
ELEM	2	ELEM	5	ELEM	1
VALUE	-0.18870E+07	VALUE	-0.23227E+07	VALUE	-0.53018E+07
MAXIMUM VALUES		MAXIMUM VALUES		MAXIMUM VALUES	
ELEM	13	ELEM	2	ELEM	9
VALUE	0.15164E+07	VALUE	0.40253E+07	VALUE	0.45688E+07

Mode1

Mode2

Mode3

FigureIV-7 :Forces modales de la structure 1.



FigureIV-8 :Mise en evidence de barres en traction et en compression dans les trois modes pour la structure 1.

Structure 2

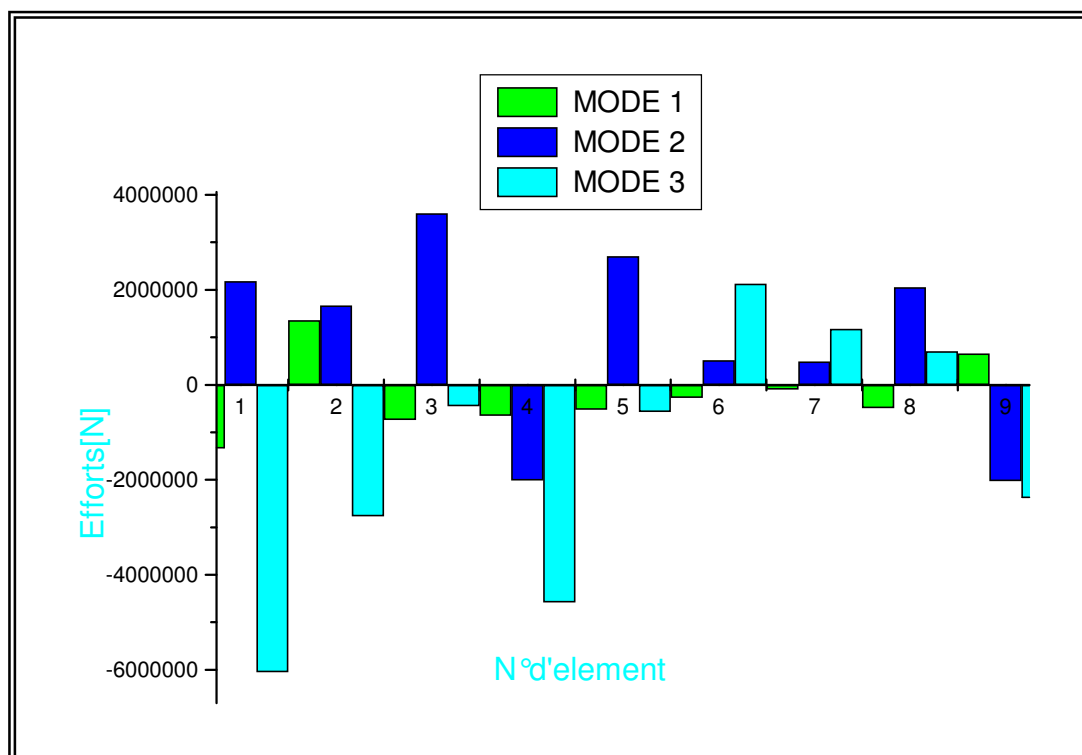
PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT		PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT		PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT	
**** POST1 ELEMENT TABLE LISTING ****		**** POST1 ELEMENT TABLE LISTING ****		**** POST1 ELEMENT TABLE LISTING ****	
STAT	CURRENT	STAT	CURRENT	STAT	CURRENT
ELEM	SMIS1	ELEM	SMIS1	ELEM	SMIS1
1	-0.13328E+07	1	-0.60482E+07	1	0.21799E+07
2	0.13585E+07	2	-0.27639E+07	2	0.16709E+07
3	-0.73597E+06	3	-0.44550E+06	3	0.36105E+07
4	-0.65177E+06	4	-0.45781E+07	4	-0.20085E+07
5	-0.52045E+06	5	-0.56956E+06	5	0.27082E+07
6	-0.26940E+06	6	0.21248E+07	6	0.51625E+06
7	-99835.	7	0.11752E+07	7	0.49179E+06
8	-0.48936E+06	8	0.70262E+06	8	0.20496E+07
9	0.65809E+06	9	-0.23782E+07	9	-0.20248E+07
MINIMUM VALUES		MINIMUM VALUES		MINIMUM VALUES	
ELEM	1	ELEM	1	ELEM	9
VALUE	-0.13328E+07	VALUE	-0.60482E+07	VALUE	-0.20248E+07
MAXIMUM VALUES		MAXIMUM VALUES		MAXIMUM VALUES	
ELEM	2	ELEM	6	ELEM	3
VALUE	0.13585E+07	VALUE	0.21248E+07	VALUE	0.36105E+07

Mode1

Mode 2

Mode3

FigureIV-9 :Forces modales de la structure 2.



FigureIV-10 :Mise en evidence de barres en traction et en compression dans les trois modes pour la structure 2.

Structure 3

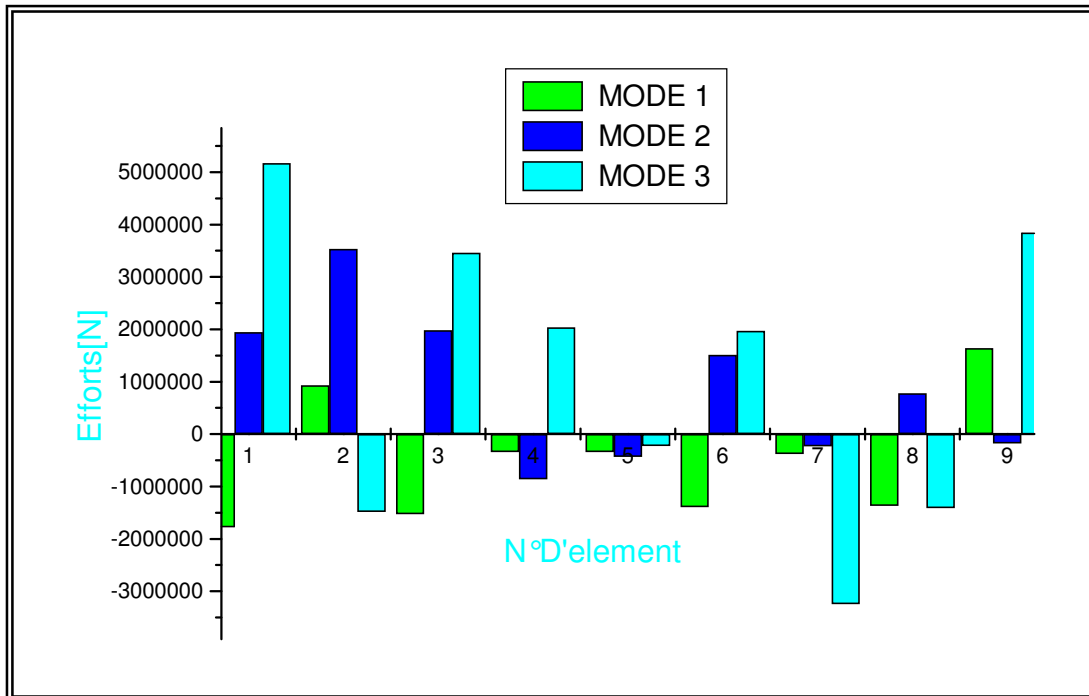
PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT		PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT		PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT	
***** POST1 ELEMENT TABLE LISTING *****		***** POST1 ELEMENT TABLE LISTING *****		***** POST1 ELEMENT TABLE LISTING *****	
STAT	CURRENT	STAT	CURRENT	STAT	CURRENT
ELEM	SMIS1	ELEM	SMIS1	ELEM	SMIS1
1	-0.17718E+07	1	0.19453E+07	1	0.51696E+07
2	0.93222E+06	2	0.35348E+07	2	-0.14828E+07
3	-0.15275E+07	3	0.19832E+07	3	0.34597E+07
4	-0.33889E+06	4	-0.86062E+06	4	0.20341E+07
5	-0.34126E+06	5	-0.43040E+06	5	-0.22461E+06
6	-0.13902E+07	6	0.15112E+07	6	0.19689E+07
7	-0.37957E+06	7	-0.23268E+06	7	-0.32426E+07
8	-0.13659E+07	8	0.77887E+06	8	-0.14099E+07
9	0.16359E+07	9	-0.17787E+06	9	0.38473E+07
MINIMUM VALUES		MINIMUM VALUES		MINIMUM VALUES	
ELEM	1	ELEM	4	ELEM	7
VALUE	-0.17718E+07	VALUE	-0.86062E+06	VALUE	-0.32426E+07
MAXIMUM VALUES		MAXIMUM VALUES		MAXIMUM VALUES	
ELEM	9	ELEM	2	ELEM	1
VALUE	0.16359E+07	VALUE	0.35348E+07	VALUE	0.51696E+07

Mode1

Mode2

Mode3

FigureIV-11 :Forces modales de la structure 3.



FigureIV-12 :Mise en evidence de barres en traction et en compression dans les trois modes pour la structure 3.

Structure 4

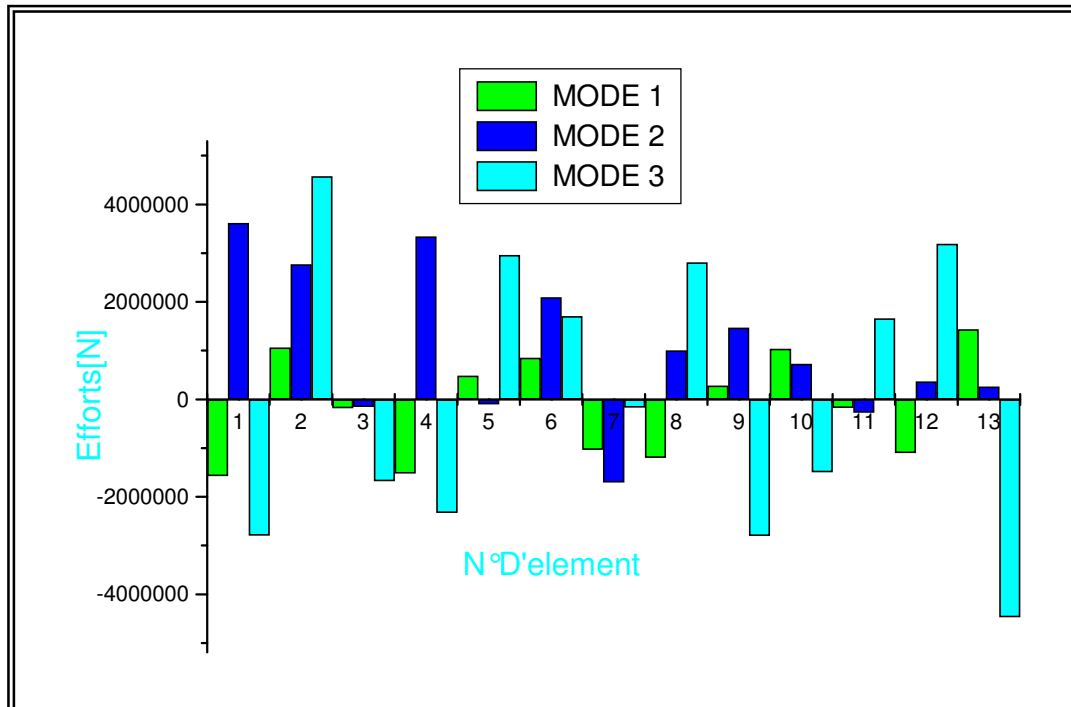
<pre> PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT ***** POST1 ELEMENT TABLE LISTING ***** STAT   CURRENT ELEM   SMIS1   1 -0.15732E+07   2  0.10627E+07   3 -0.17903E+06   4 -0.15225E+07   5  0.48302E+06   6  0.85184E+06   7 -0.10325E+07   8 -0.12005E+07   9  0.27991E+06  10  0.10366E+07  11 -0.17449E+06  12 -0.11021E+07  13  0.14337E+07  MINIMUM VALUES ELEM    1 VALUE -0.15732E+07  MAXIMUM VALUES ELEM    13 VALUE  0.14337E+07                 </pre>	<pre> PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT ***** POST1 ELEMENT TABLE LISTING ***** STAT   CURRENT ELEM   SMIS1   1 -0.27967E+07   2  0.45746E+07   3 -0.16772E+07   4 -0.23255E+07   5  0.29572E+07   6  0.17064E+07   7 -0.16605E+06   8  0.28097E+07   9 -0.28040E+07  10 -0.14914E+07  11  0.16604E+07  12  0.31891E+07  13 -0.44685E+07  MINIMUM VALUES ELEM    13 VALUE -0.44685E+07  MAXIMUM VALUES ELEM     2 VALUE  0.45746E+07                 </pre>	<pre> PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT ***** POST1 ELEMENT TABLE LISTING ***** STAT   CURRENT ELEM   SMIS1   1  0.36163E+07   2  0.27695E+07   3 -0.15532E+06   4  0.33393E+07   5 -0.10178E+06   6  0.20899E+07   7 -0.17019E+07   8  0.99920E+06   9  0.14685E+07  10  0.72699E+06  11 -0.27199E+06  12  0.36436E+06  13  0.25997E+06  MINIMUM VALUES ELEM     7 VALUE -0.17019E+07  MAXIMUM VALUES ELEM     1 VALUE  0.36163E+07                 </pre>
--	---	---

Mode1

Mode2

Mode3

FigureIV-13 :Forces modales de la structure 4.



FigureIV-14 :Mise en evidence de barres en traction et en compression dans les trois modes pour la structure 4.

Structure 5

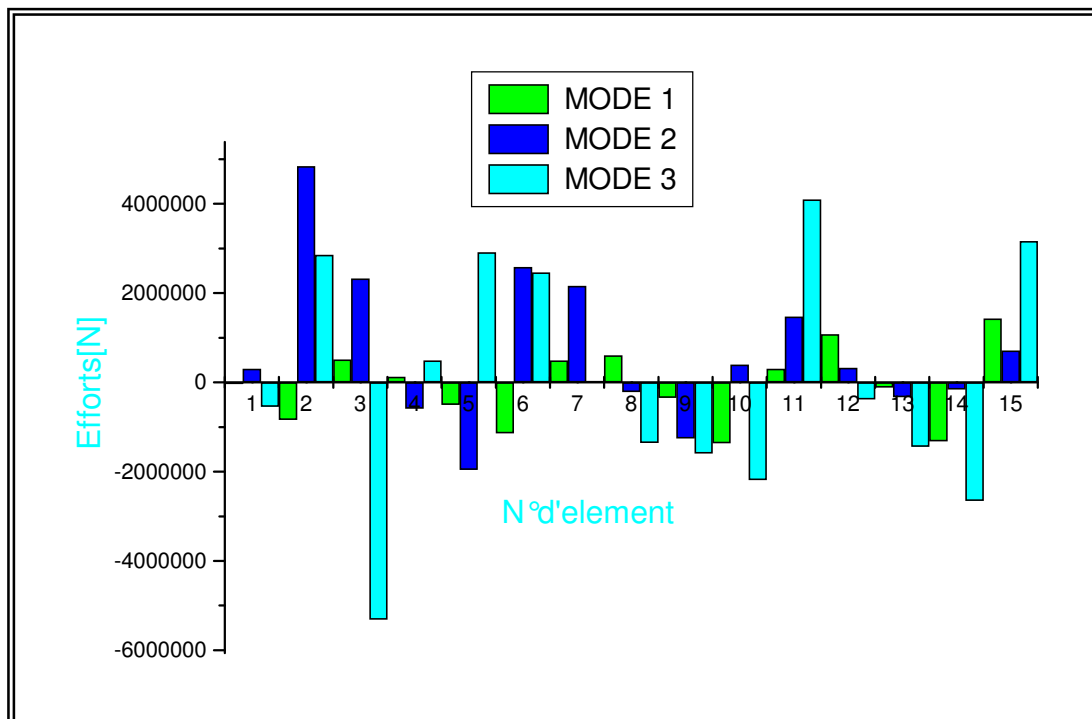
<pre> PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT ***** POST1 ELEMENT TABLE LISTING *****  STAT   CURRENT ELEM   SMIS1   1    -45914.   2   -0.83719E+06   3    0.51129E+06   4    0.12335E+06   5   -0.50415E+06   6   -0.11405E+07   7    0.48931E+06   8    0.60358E+06   9   -0.34047E+06  10   -0.13646E+07  11    0.30202E+06  12    0.10738E+07  13   -0.11296E+06  14   -0.13211E+07  15    0.14268E+07  MINIMUM VALUES ELEM    10 VALUE  -0.13646E+07  MAXIMUM VALUES ELEM    15 VALUE   0.14268E+07                 </pre>	<pre> PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT ***** POST1 ELEMENT TABLE LISTING *****  STAT   CURRENT ELEM   SMIS1   1    0.30229E+06   2    0.48420E+07   3    0.23250E+07   4   -0.58556E+06   5   -0.19553E+07   6    0.25850E+07   7    0.21604E+07   8   -0.21238E+06   9   -0.12502E+07  10    0.39697E+06  11    0.14674E+07  12    0.32597E+06  13   -0.32722E+06  14   -0.15892E+06  15    0.71321E+06  MINIMUM VALUES ELEM    5 VALUE  -0.19553E+07  MAXIMUM VALUES ELEM    2 VALUE   0.48420E+07                 </pre>	<pre> PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT ***** POST1 ELEMENT TABLE LISTING *****  STAT   CURRENT ELEM   SMIS1   1   -0.54323E+06   2    0.28540E+07   3   -0.53124E+07   4    0.48971E+06   5    0.29129E+07   6    0.24623E+07   7     26690.   8   -0.13530E+07   9   -0.15884E+07  10   -0.21836E+07  11    0.40930E+07  12   -0.38121E+06  13   -0.14426E+07  14   -0.26549E+07  15    0.31596E+07  MINIMUM VALUES ELEM    3 VALUE  -0.53124E+07  MAXIMUM VALUES ELEM    11 VALUE   0.40930E+07                 </pre>
--	--	---

Mode1

Mode2

Mode3

FigureIV-15 :Forces modales de la structure 5.



FigureIV-16 :Mise en evidence de barres en traction et en compression dans les trois modes pour la structure 5.

Structure 6

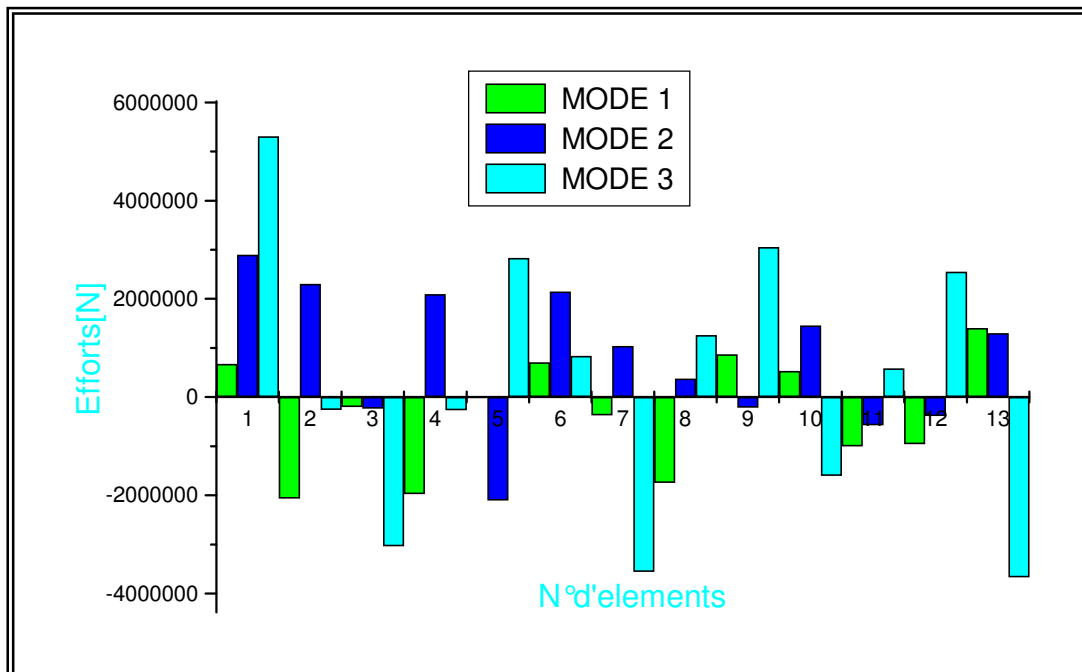
PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT		PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT		PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT	
**** POST1 ELEMENT TABLE LISTING ****		**** POST1 ELEMENT TABLE LISTING ****		**** POST1 ELEMENT TABLE LISTING ****	
STAT	CURRENT	STAT	CURRENT	STAT	CURRENT
ELEM	SMIS1	ELEM	SMIS1	ELEM	SMIS1
1	0.67006E+06	1	0.28941E+07	1	0.53068E+07
2	-0.20665E+07	2	0.23034E+07	2	-0.25944E+06
3	-0.20024E+06	3	-0.23436E+06	3	-0.30327E+07
4	-0.19713E+07	4	0.20923E+07	4	-0.26454E+06
5	-18504.	5	-0.21055E+07	5	0.28316E+07
6	0.70873E+06	6	0.21477E+07	6	0.83363E+06
7	-0.36752E+06	7	0.10401E+07	7	-0.35554E+07
8	-0.17425E+07	8	0.37300E+06	8	0.12623E+07
9	0.87087E+06	9	-0.21426E+06	9	0.30553E+07
10	0.53243E+06	10	0.14581E+07	10	-0.16013E+07
11	-0.10041E+07	11	-0.57136E+06	11	0.57886E+06
12	-0.95591E+06	12	-0.38369E+06	12	0.25486E+07
13	0.14025E+07	13	0.12979E+07	13	-0.36671E+07
MINIMUM VALUES		MINIMUM VALUES		MINIMUM VALUES	
ELEM	2	ELEM	5	ELEM	13
VALUE	-0.20665E+07	VALUE	-0.21055E+07	VALUE	-0.36671E+07
MAXIMUM VALUES		MAXIMUM VALUES		MAXIMUM VALUES	
ELEM	13	ELEM	1	ELEM	1
VALUE	0.14025E+07	VALUE	0.28941E+07	VALUE	0.53068E+07

Mode1

Mode2

Mode3

FigureIV-17 :Forces modales de la structure 6.



FigureIV-18 :Mise en evidence de barres en traction et en compression dans les trois modes pour la structure 6.

### IV.5.3. Résultats

Les résultats obtenus sont présentés sous forme de tableau suivant :

structures	Barres comprimées	Force ( $F^C_m \cdot 10^6$ )	Longueur ( $L$ )	$\sum F^C_m \cdot L \cdot 10^6$
Structure 1	5	1,882	1,41	<b>5,638</b>
	11	1,121	1	
	12	1,864	1	
Structure 2	4	2,412	2,24	<b>5,40</b>
Structure 3	5	0,331	2	<b>3,538</b>
	7	1,284	2,24	
Structure 4	3	0,670	1	<b>2,602</b>
	7	0,966	2	
Structure 5	9	1,059	1	<b>2,749</b>
	13	0,627	0,5	
	14	1,377	1	
Structure 6	3	1,155	1,5	<b>1,733</b>

*Tableau IV-12 : résultats a base d'analyse dynamique.*

### Conclusion

L'application du théorème de *MAXWELL NIVEN* dans le cas dynamique nous a donné la même structure optimale, qui est la structure 6, mais on remarque d'un autre côté que l'ordre a changé, l'ordre dans l'analyse statique était, 6,1,3,4,5, et 2 alors que dans le cas dynamique est devenu, 6,4,5,3,2, et 1.



## IV.6. Troisième application

### IV.6.1. introduction

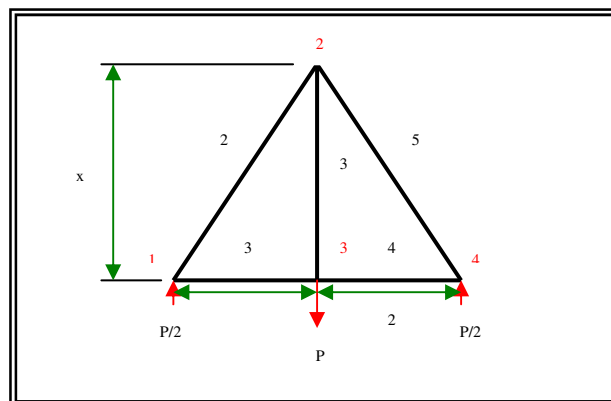
Optimisation Statique à une variable. Dans cette application une structure en treillis est considérée pour l'analyse d'optimisation statique en tenant compte de la variable en hauteur qui donne le poids minimum. Cette même structure est ensuite proliférée en plusieurs panneaux pour donner une structure plus complexe. La même question est abordée afin de d'identifier la hauteur optimale permettant un poids minimum. Grâce à un développement mathématique par récurrence nous avons aboutit à l'expression analytique de la réponse optimale.

Dans le treillis représenté dans la figure(IV –19), on a besoin de trouver la valeur de  $x$ , tel que le volume de la structure soit minimal, De l'équation (IV –4) dans l'ordre de minimiser  $V$ , il est suffisant de minimiser  $V_c$  (volume des membres comprimés).

### IV.6.2. analyse de l'exemple

Le calcul des efforts de chaque élément :

On applique la méthode de l'équilibre des nœuds :



FigureIV-19: Treillis à quatre barres.

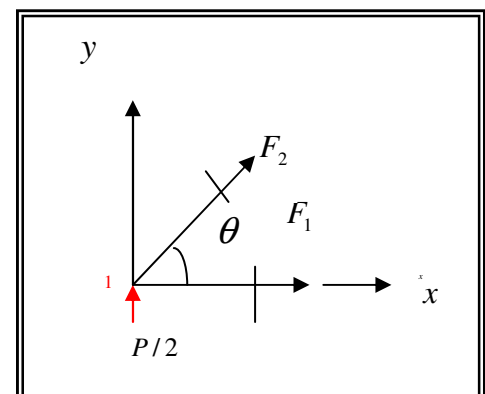
-Le nœud (1) :

$$\sum F / ox = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 \cos \theta = 0$$

$$\sum F / oy = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} + F_2 \sin \theta = 0$$

$$\text{Donc : } F_1 = \left(\frac{P}{2}\right) \text{ctg} \theta; F_2 = \frac{-P}{2} \sin \theta$$

$$\text{Avec : } \sin \theta = \frac{x}{\sqrt{(\lambda^2 + x^2)}} ; \cos \theta = \frac{\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 + x^2)}} ; \text{ctg} \theta = \frac{\lambda}{x}$$



FigureIV-20: nœud 1.

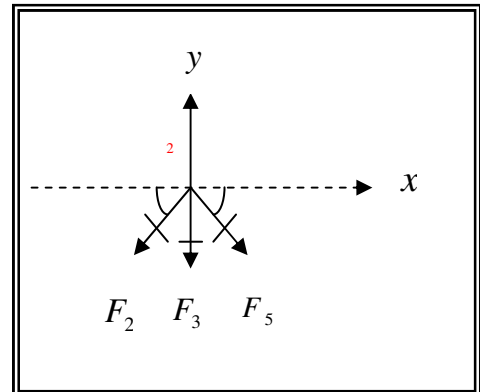
$$\text{D'où : } F_1 = \frac{P\lambda}{2x} ; F_2 = \frac{-P\sqrt{(\lambda^2 + x^2)}}{2x}$$

**-Le nœud (2) :**

$$\sum F / ox = 0 \Rightarrow -F_2 \cos \theta + F_5 \cos \theta = 0$$

$$\sum F / oy = 0 \Rightarrow -F_2 \sin \theta - F_3 - F_5 \sin \theta = 0$$

$$\text{Donc on trouve : } F_3 = P ; F_5 = \frac{-P\sqrt{(\lambda^2 + x^2)}}{2x}$$



**FigureIV-21: nœud 2.**

**-le nœud (4)**

$$\sum F / ox = 0 \Rightarrow -F_4 - F_5 \cos \theta = 0$$

$$\sum F / oy = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} + F_5 \sin \theta = 0$$

$$\text{Donc on a : } F_4 = \frac{P\lambda}{2x}$$

Alors les efforts dans chaque membre sont :

$$\text{-la barre [1] : } F_1 = \frac{P\lambda}{2x}.$$

$$\text{-la barre [2] : } F_2 = \frac{-P\sqrt{(\lambda^2 + x^2)}}{2x}.$$

$$\text{-la barre [3] : } F_3 = P.$$

$$\text{-la barre [4] : } F_4 = \frac{P\lambda}{2x}$$

$$\text{-la barre [5] : } F_5 = \frac{-P\sqrt{(\lambda^2 + x^2)}}{2x}.$$

Donc les barres 1, 3 et 4 sont tendues, et les barres 2 et 5 sont comprimées.

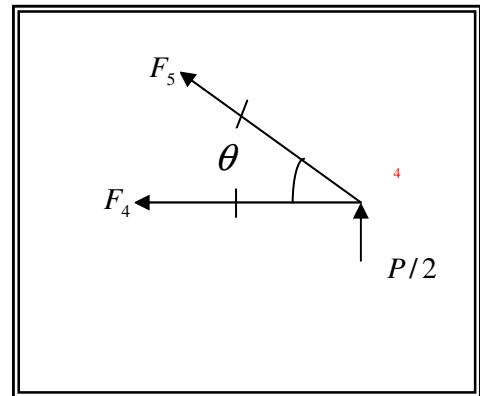
Le calcul du volume des membres comprimés 2 et 5 :

$$V_c = LA$$

$L$  : La somme des longueurs des membres comprimés 2, et 5.

$A$  : La section de chaque membre.

$$\sigma_c = \frac{F}{A} = \frac{F_2}{A} = \frac{F_3}{A}, \text{ donc : } A = \frac{F_2}{\sigma_c}, \text{ donc : } V_c = \frac{LF_2}{\sigma_c}.$$



**FigureIV-22: nœud 4.**

$$L = 2\sqrt{(\lambda^2 + x^2)} \text{ Alors, } V_c = \left[ \frac{2\sqrt{(\lambda^2 + x^2)}}{\sigma_c} \right] \left[ \frac{P\sqrt{(\lambda^2 + x^2)}}{2x} \right].$$

$$\text{Donc : } V_c = \left( \frac{1}{\sigma_c} \right) \left( \frac{P}{x} \right) (\lambda^2 + x^2) \dots \dots \dots (IV - 7)$$

Pour trouver la valeur de x qui nous amène à un  $V_c$  min on doit dériver  $V_c$  et on l'annule ensuite :

$$\frac{dV_c}{dx} = \left( \frac{P}{\sigma_c} \right) \left[ 2x^2 - \lambda^2 - x^2 \right] \frac{1}{x^2} ; \frac{dV_c}{dx} = \left( \frac{P}{\sigma_c} \right) \left[ 1 - \left( \frac{\lambda^2}{x^2} \right) \right]$$

$$\text{Donc : } \frac{dV_c}{dx} = \left( \frac{1}{\sigma_c} \right) \left[ P - \frac{P\lambda^2}{x^2} \right] \dots \dots \dots (IV - 8).$$

$$\frac{dV_c}{dx} = 0 \Rightarrow \left( \frac{1}{\sigma_c} \right) \left[ P - \frac{P\lambda^2}{x^2} \right] = 0 \text{ Donc : } 1 - \left( \frac{\lambda^2}{x^2} \right) = 0 \text{ alors } \lambda = x ;$$

$\lambda = x$  Correspond au volume minimal lorsque :  $\frac{d^2V_c}{dx^2}$  pour  $\lambda = x$  est positif

$$\frac{d^2V_c}{dx^2} = \left( \frac{-P}{\sigma_c} \right) \left( \frac{-\lambda^2 2x}{x^4} \right) = \left( \frac{P}{\sigma_c} \right) \left( \frac{2\lambda^2}{x^3} \right) \dots \dots \dots (IV - 9).$$

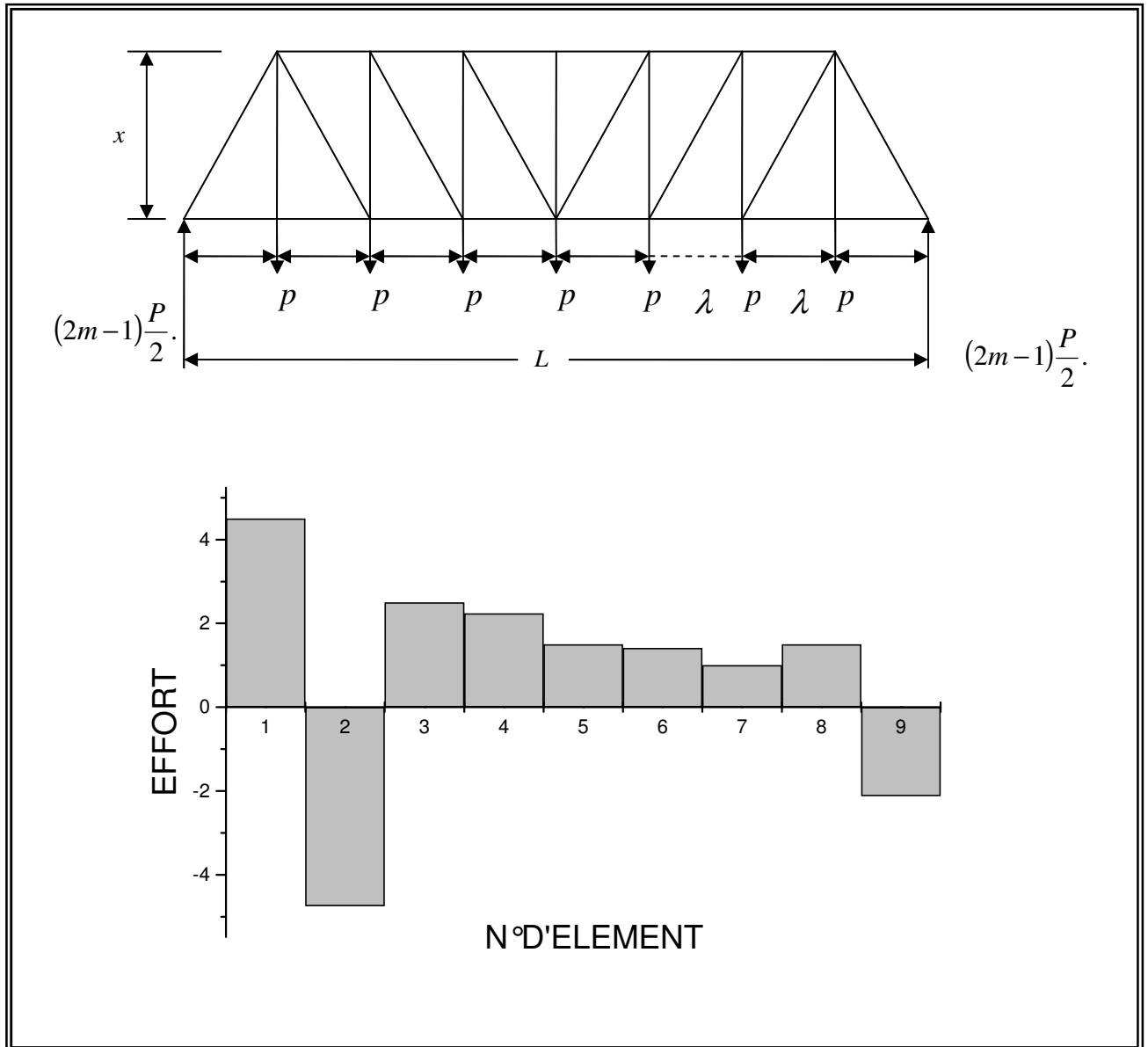
$$\text{Donc : } \frac{d^2V_c}{dx^2} = \frac{2P\lambda^2}{\sigma_c x^3}$$

$$\text{Pour } \lambda = x : \frac{d^2V_c}{dx^2} = \frac{2P}{\sigma_c \lambda} \text{ donc } \frac{d^2V_c}{dx^2} > 0$$

On obtient  $\lambda = x$  la valeur de x qui corresponde au  $V_c$  minimale.

Cette technique peut être appliquer pour l'optimisation des grandes structures .la figure (IV - 23) représente une partie d'un treillis (structure réticulaire rectiligne) qui possède 2m panneaux

(Chaque panneau correspond à une longueur  $\lambda$ ).



FigureIV-23 : Structure a 2m panneaux.

Il est nécessaire de trouver la distance  $x$  quand  $m > 2$ , tel que le volume de cette structure sera minimum.

Puisque les charges  $P$  et leurs points d'action sont fixés, de l'équation IV – 4, le volume de la structure dépend seulement du volume des membres tendus .seulement la moitié de la structure sera considérée à cause de la symétrie.

On procède de la même manière que précédemment; on peut localiser les membres qui sont en tension (effort interne positif) .additionner les volumes de ces barres et les simplifier, le résultat donné est : [2]

$$V_t = \left( \frac{P\lambda^2}{\sigma_t x} \right) (4m^3 + 3m^2 - m) + \left( \frac{Px}{\sigma_t} \right) (6m^2 - 12m + 18) \dots \dots \dots (IV - 10).$$

**IV.6.4. Application de l'équation IV-10**

Appliquant maintenant l'équation IV-10, Dans le but de chercher la formule qui nous donne la forme optimale de la structure a m panneau.

$$V_t = \left(\frac{P\lambda^2}{\sigma_t}\right)(4m^3 + 3m^2 - m) + \left(\frac{Px}{\sigma_t}\right)(6m^2 - 12m + 18)$$

$$\frac{dV_t}{dx} = -\left(\frac{P\lambda^2}{\sigma_t x^2}\right)(4m^3 + 3m^2 - m) + \left(\frac{P}{\sigma_t}\right)(6m^2 - 12m + 18) = 0$$

Donc :  $x = \lambda \left[ \frac{m(4m^2 + 3m - 1)}{6(m^2 - 2m + 3)} \right]^{1/2}$  .....(IV - 12).

Pour que  $x$  correspond au minimum, il faut que  $\frac{d^2V_t}{dx^2} > 0$ , pour cette valeur de  $x$  :

$$\frac{d^2V_t}{dx^2} = \left(\frac{2P\lambda^2}{\sigma_t x^3}\right)(4m^3 + 3m^2 - m) = \left(\frac{2P\lambda^2 m}{\sigma_t x^3}\right)(4m^2 + 3m - 1)$$

Puisque  $x$  est toujours positif et la quantité  $(4m^2 + 3m - 1) > 0, \forall m > 2$ .

Donc :  $\frac{d^2V_t}{dx^2} > 0$  pour  $x = \lambda \left[ \frac{m(4m^2 + 3m - 1)}{6(m^2 - 2m + 3)} \right]^{1/2}$  et  $m > 2$

Alors les treillis à  $2m$  panneaux ( $m > 2$ ) sont optimales pour une valeur de :

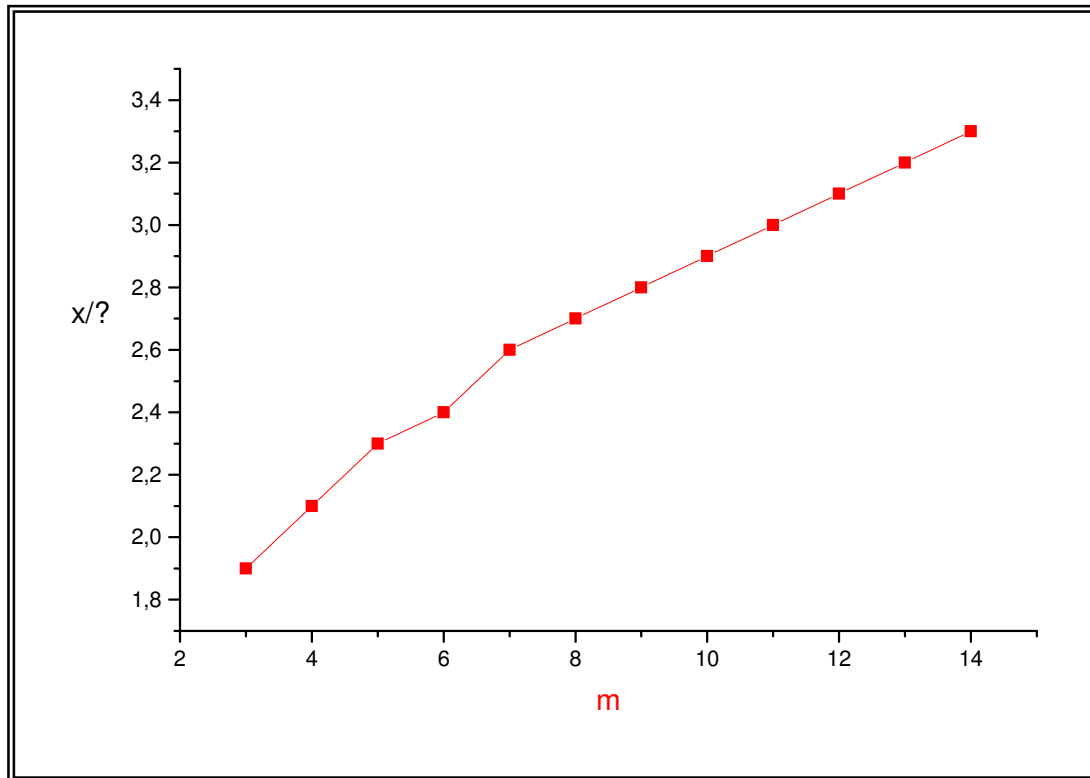
$$x = \lambda \left[ \frac{m(4m^2 + 3m - 1)}{6(m^2 - 2m + 3)} \right]^{1/2}$$
 .....(IV - 13).

$$\frac{x}{\lambda} = \left[ \frac{m(4m^2 + 3m - 1)}{6(m^2 - 2m + 3)} \right]^{1/2}$$

Traçant maintenant la courbe de la variation de Variation de  $\frac{x}{\lambda}$  en fonction de  $m$  :

$m$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\frac{x}{\lambda}$	1,9	2,1	2,3	2,4	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3

*Tableau IV-14 : résultats.*



*Figure IV-32 : Variation de  $\frac{x}{\lambda}$  en fonction de  $m$ .*

### **Conclusion**

De la courbe de la variation de  $\frac{x}{\lambda}$  en fonction de  $m$ , on remarque que La quantité de  $\frac{x}{\lambda}$  croix avec l'augmentation du nombre de panneaux  $m$ , alors que la variation de  $(\Delta x)$  tend a se stabiliser.

L'augmentation de la quantité  $\frac{x}{\lambda}$  avec le nombre de panneaux  $m$ , montre que la hauteur  $x$  augmente au fur et a mesure avec l'augmentation de nombre de panneaux.

## IV.7. Quatrième application

### IV.7.1. Introduction

La plupart des problèmes d'analyses et design peuvent être résolus d'une manière directe si le type de la structure est connue, les efforts, les moments et les contraintes sont calculés d'une manière très simple, et le design est établi sur la base de cette analyse, cette procédure concerne les structures isostatiques.

Cependant, pour les structures hyperstatiques, nous ne pouvons pas utiliser la même procédure, les paramètres de design sont en fonction de la dimension des membres dans les structures hyperstatiques. Le premier essai d'approximation de design est d'une grande importance pour une convergence rapide de design final que l'on doit atteindre, l'entière relation analyse design doit être étroitement examinée et est bien connue si le processus de design est efficace.

L'importante relation dans l'analyse élastique des structures hyperstatiques est la taille relative. Les dimensions réelles des membres ne sont pas importantes mais ce qui est important est la relativité de rigidité d'un membre par rapport aux autres.

### IV.7.2. Relation analyse conception

Pour bien montrer la relation analyse-conception, étudions la structure réticulée représentée dans la figure (IV-33). Cette étude est basée sur l'un des critères d'optimisation (critère de résistance).

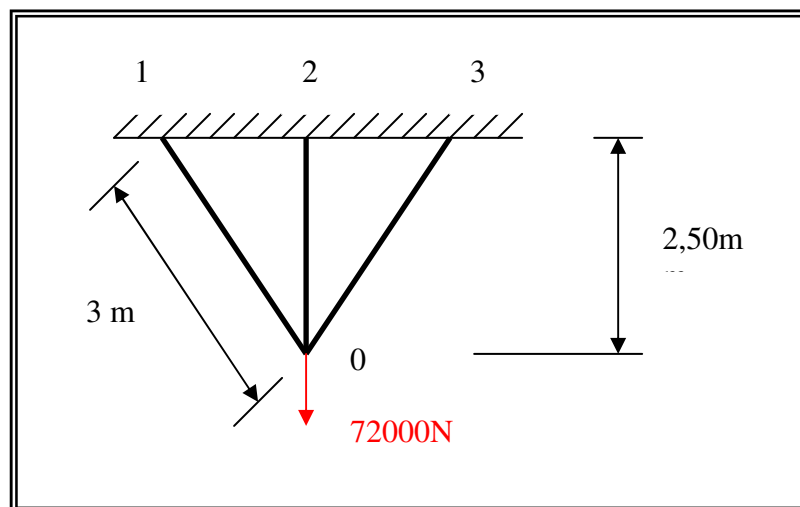


Figure IV-33 : Structure réticulée.

Toutes les barres sont en acier et de module d'élasticité  $E$  ;

Les barres 1 et 2 sont de section  $A_1$ ,  $A_2$  respectivement ;

Les barres 1 et 3 sont de section  $A_1$ , ( $A_1 = A_3$ ) ;

Cette structure est conçue en utilisant la contrainte de la section admissible  $\sigma_{ad} = 138 * 10^6 \text{ N/m}^2$ .

Dans le dispositif représenté dans la figure IV – 33, on doit déterminer les efforts appliqués à chaque barre.

**Calcul de  $F_1, F_2, et F_3$ .**

Les équations d'équilibre statique nous permettent d'écrire :

$$ox / : F_1 \cos \alpha - F_3 \cos \alpha = 0$$

$$oy / : 72000 - F_1 \sin \alpha - F_3 \sin \alpha - F_2 = 0$$

Soit :

$$F_1 - F_3 = 0$$

$$72000 - F_1 \sin \alpha - F_3 \sin \alpha - F_2 = 0$$

Nous disposons que de deux équations d'équilibre statique pour déterminer trois inconnues (force). Il s'agit d'un système hyperstatique avec un seul inconnu surabondant, choisissons  $F_2$  comme inconnu surabondant, les équations d'équilibre permettent de calculer  $F_1 et F_3$  en fonction de  $F_2$ , on obtient :

$$F_1 = F_3 \text{ Donc on aura : } F_1 = F_3 = \frac{72000 - F_2}{2 \sin \alpha}$$

$$F_1 = F_3 = 43200 - 0,6F_2$$

Exprimons, après déformation de système :

$$w = \left( F_1^2 \cdot \frac{3}{2EA_1} \right) + \left( F_2^2 \cdot \frac{2,5}{2EA_2} \right) + \left( F_3^2 \cdot \frac{3}{2EA_3} \right).$$

Soit en remplaçant  $F_1 et F_3$  par leurs valeurs données de façon à ne laisser substituer que l'inconnu surabondant  $F_2$  :

$$w = \left( \frac{1,5}{EA_1} \right) (43200 - 0,6F_2)^2 + \left( \frac{1,25}{EA_2} \right) F_2^2 + \left( \frac{1,5}{EA_1} \right) (43200 - 0,6F_2)^2.$$

$$w = \left( \frac{3}{EA_1} \right) (43200 - 0,6F_2)^2 + \left( \frac{1,25}{EA_2} \right) F_2^2$$

Le théorème de *MENABREA* permet d'écrire  $\frac{\partial w}{\partial F_2} = 0$

$$\frac{\partial w}{\partial F_2} = \left( \frac{6}{EA_1} \right) (-0,6)(43200 - 0,6F_2) + \left( \frac{2,5}{EA_2} \right) F_2.$$

$$\frac{\partial w}{\partial F_2} = \left( \frac{-155530}{EA_1} \right) + \left( \frac{2,16}{EA_1} \right) F_2 + \left( \frac{2,5}{EA_2} \right) F_2.$$

$$\frac{\partial w}{\partial F_2} = \left( \frac{-155530}{EA_1} \right) + (2,5A_1 + 2,16A_2) \frac{F_2}{EA_1 A_2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial F_2} = 0$$

$$\text{Donc : } F_2 = \frac{155530A_2}{2,5A_1 + 2,16A_2}$$



Finalemment :

$$F_1 = F_3 = 43200 - 0,6F_2 .$$

$$F_2 = \frac{155530A_2}{2,5A_1 + 2,16A_2}$$

L'analyse normale de cette structure nous a donné les efforts de tension  $F_1 = F_2 = F_3$  qui sont en fonction des sections  $A_1$  et  $A_2$ .

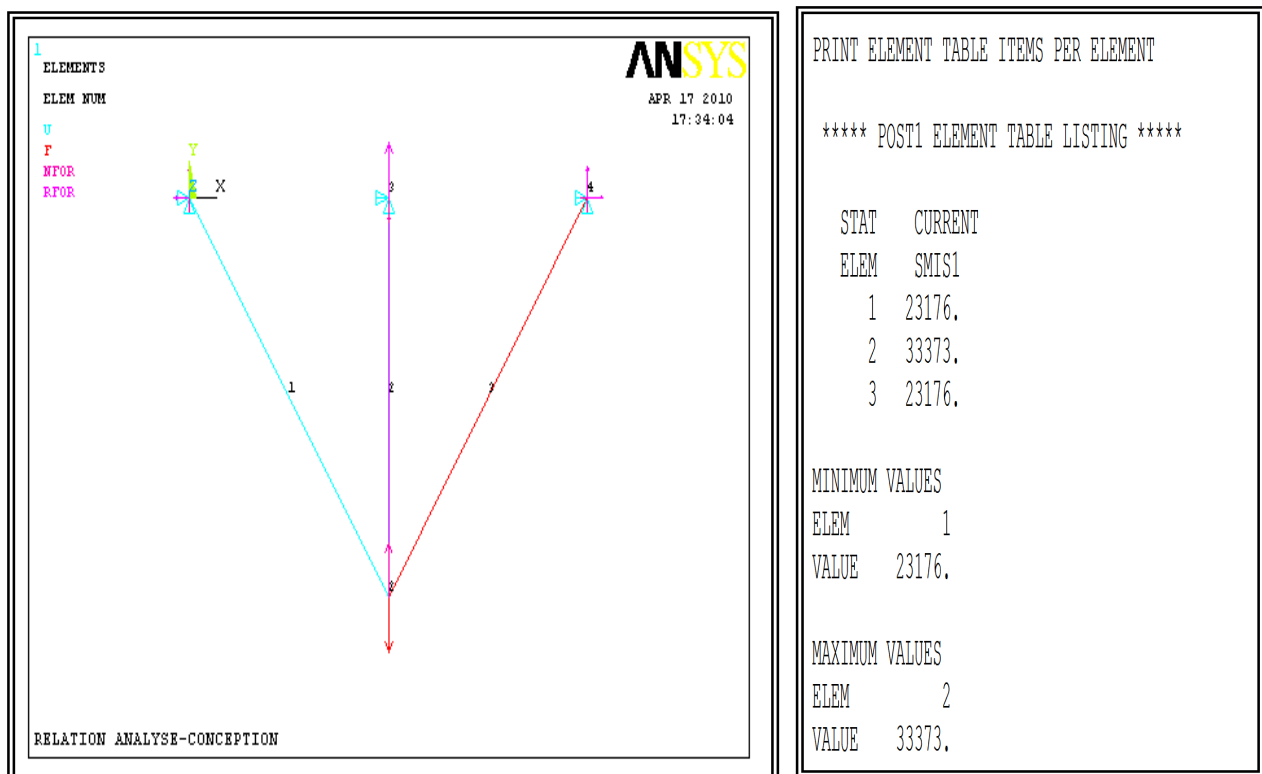
On suppose premièrement que toutes les sections des barres sont égales d'où  $A_1 = A_2$  et calculant les efforts internes correspondants, donc on aura :

$$F_2 = \frac{155530}{(2,5 + 2,16)} = 33375N.$$

$$F_1 = F_3 = 43200 - 0,6.33375 \text{ Donc :}$$

$$F_1 = F_3 = 23174N. \text{ Alors : } F_1 = 23174N. \text{ et } F_2 = 33375N.$$

Validation des résultats



FigureIV-34: Structure réticulée modélisée.

ELEMENTS	MENABREA	ANSYS
1	23174	23176
2	33375	33373
3	23174	23176

Tableau IV-14 : Comparaison des résultats.

### IV.7.3. Conception de la structure

L'essai approximatif de la conception est de grande importance où il permet une convergence rapide vers la meilleure solution réalisable.

Pour l'étude de notre cas, On suppose premièrement que toutes les sections des barres sont égales d'où  $A_1 = A_2$  et calculant les efforts internes correspondants, donc on aura :

$$F_1 = F_3 = 23174N. F_1 = 23174N. Et F_2 = 33375N.$$

Pour calculer les sections, on se base sur la condition de résistance d'où :

$$\sigma_1 \leq \sigma_{ad} \text{ Et } \sigma_2 \leq \sigma_{ad}.$$

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A_1} \leq \sigma_{ad}, \sigma_2 = \frac{F_2}{A_2} \leq \sigma_{ad}.$$

$$A_1 \geq \frac{F_1}{\sigma_{ad}}, A_1 \geq \frac{23174}{138 \times 10^6}.$$

$$A_2 \geq \frac{F_2}{\sigma_{ad}}, A_2 \geq \frac{33375}{138 \times 10^6}.$$

$$\text{Alors : } A_1 = 1,782 \times 10^{-4} m^2 \quad A_2 = 2,42 \times 10^{-4} m^2.$$

La solution a été faite sur la supposition que toutes les barres ont la même section, cette même condition doit être satisfaite maintenant dans la conception.

$$A_1 = A_2 = A_3 = 2,42 \times 10^{-4} m^2.$$

Alors le volume de la matière dans la structure est :

$$V = 2,42 \times 10^{-4} (3 + 2,5 + 3);$$

$$V = 20,57 \times 10^{-4} m^3.$$

Si maintenant les nouvelles sections des barres sont utilisées :

$$A_1 = 1,78 \times 10^{-4} m^2 \text{ Et } A_2 = 2,42 \times 10^{-4} m^2 \text{ donc :}$$

Les nouveaux efforts calculés qui correspondent à ces nouvelles sections sont :

$$F_2 = \frac{155530 A_2}{2,5 A_1 + 2,16 A_2}$$

$$F_2 = \frac{155530 \cdot 2,42 \cdot 10^{-4}}{2,5 \cdot 1,78 \cdot 10^{-4} + 2,16 \cdot 2,42 \cdot 10^{-4}}$$

$$F_2 = \frac{348387,2}{9,2884} = 37508N$$

$$F_1 = 43200 - 0,6 \times 37508 = 20695N.$$

Le volume de la matière dans la structure sera :

$$V = A_1 (3 + 3) + A_2 \times 2,5$$

$$V = 1,78 \times 10^{-4} (3 + 3) + 2,42 \times 10^{-4} \times 2,5$$

$$V = 16,73 \times 10^{-4} m^3.$$

De la même manière on a :

$$\frac{F_1}{A_1} \leq \sigma_{ad}; A_1 \geq \frac{F_1}{\sigma_{ad}}; A_1 \geq \frac{20695}{138 \times 10^6}.$$

$$\frac{F_2}{A_2} \leq \sigma_{ad} ; A_2 \geq \frac{F_2}{\sigma_{ad}} ; A_2 \geq \frac{37508}{138 \times 10^6} .$$

$$A_1 = 1,5 \times 10^{-4} m^2 ; A_2 = 2,72 \times 10^{-4} m^2 .$$

Donc :

$$V = A_1(3+3) + A_2 \times 2,5$$

$$V = 1,5 \times 10^{-4}(3+3) + 2,72 \times 10^{-4} \times 2,5$$

$$V = 15,8 \times 10^{-4} m^3 .$$

En suite :

$$F_2 = \frac{155530A_2}{2,5A_1 + 2,16A_2}$$

$$F_2 = \frac{155530 \times 2,72 \times 10^{-4}}{2,5 \times 1,5 \times 10^{-4} + 2,16 \times 2,72 \times 10^{-4}} = \frac{423041,6}{9,6252} = 43951N .$$

$$F_1 = 43200 - 0,6 \times 43951 = 16829N$$

$$\frac{F_1}{A_1} \leq \sigma_{ad} ; A_1 \geq \frac{F_1}{\sigma_{ad}} ; A_1 \geq \frac{16829}{138 \times 10^6}$$

$$\frac{F_2}{A_2} \leq \sigma_{ad} ; A_2 \geq \frac{F_2}{\sigma_{ad}} ; A_2 \geq \frac{43951}{138 \times 10^6}$$

$$A_1 = 1,22 \times 10^{-4} m^2 ; A_2 = 3,18 \times 10^{-4} m^2$$

$$V = A_1(3+3) + A_2 \times 2,5$$

$$V = 1,22 \times 10^{-4}(3+3) + 3,18 \times 10^{-4} \times 2,5$$

$$V = 15,27 \times 10^{-4} m^3 .$$

$$F_2 = \frac{155530A_2}{2,5A_1 + 2,16A_2}$$

$$F_2 = \frac{155530 \times 3,18 \times 10^{-4}}{2,5 \times 1,22 \times 10^{-4} + 2,16 \times 3,18 \times 10^{-4}} = \frac{494585,4}{9,9188} = 49863N .$$

$$F_1 = 43200 - 0,6 \times 49863 = 13282N ;$$

On peut récapituler tous les calculs précédents dans le tableau suivant :

$A_1(m^2)$	$A_2(m^2)$	$F_1(N)$	$F_2(N)$	$VOL(m^3)$
$A_1$	$A_1$	23174	33375	$20,57 \times 10^{-4}$
$1,782 \times 10^{-4}$	$2,42 \times 10^{-4}$	20695	37508	$16,73 \times 10^{-4}$
$1,50 \times 10^{-4}$	$2,72 \times 10^{-4}$	16829	43951	$15,80 \times 10^{-4}$
$1,22 \times 10^{-4}$	$3,18 \times 10^{-4}$	13282	49863	$15,27 \times 10^{-4}$

**Tableau IV-15 : résultats.**

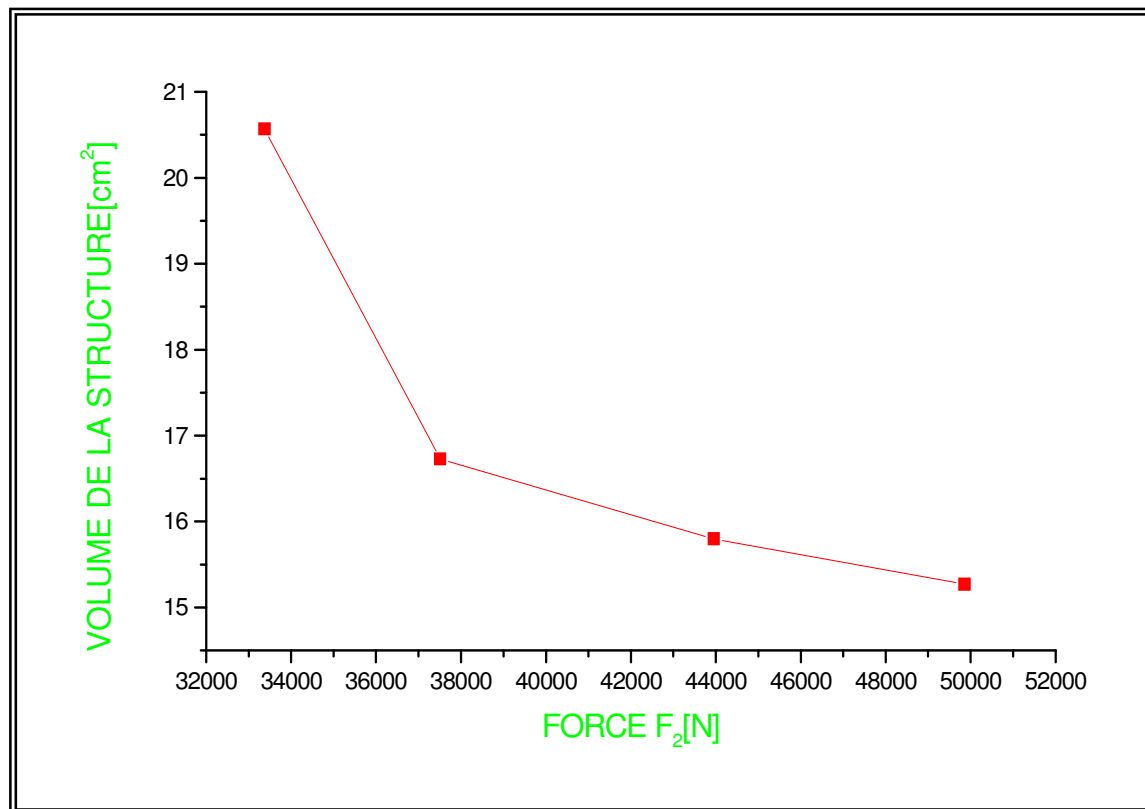


Figure IV-35 : Relation volume- force.

### Conclusion

Si on continue le calcul, la conception continue à changer, chaque ensemble de sections produit des nouveaux efforts des barres, qui indiquent à leurs tours les surfaces des barres révisées. C'est une procédure de la conception de l'analyse normale.

Les calculs montrent à un point défini de la dernière convergence, au niveau de ce point la barre 2 reçoit la charge entière et les barres 2 et 3 sont négligeables. Le volume limite qui correspond à cet état est  $V = 13 \times 10^{-4} m^3$ .

Connaissant le type de la structure, l'analyse nous donne les efforts internes des barres en fonction des sections, tandis que la conception s'intéresse à base, de cette analyse à la manière de la répartition de la matière dans le dispositif de façon à obtenir la structure la moins chargée ou qui a le plus petit volume.

## IV.8. Cinquième application

### IV.8.1. introduction

Les méthodes d'optimisation discutées dans les applications précédentes sont principalement basées sur l'analyse des structures mécanique, et la supposition que la structure optimale est celle qui a le poids minimal, cependant les principes de l'analyse des structures mécaniques seulement ne sont pas suffisant pour la solution des problèmes d'optimisation dans le cas où les critères sont autres que le poids et les contraintes imposent beaucoup d'autres limitations [1].

L'approche de la programmation mathématique est plus générale, elle est basée sur les extremums mathématiques spécialement développés pour être utilisés par ordinateur.

### IV.8.2. procédure

Pour l'optimisation par programmation mathématique on doit exprimer la quantité qu'on va optimiser par le terme variable de design dans la forme générale suivante :

$$V = V(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

La fonction scalaire  $V$  est appelée **fonction objective**, et  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont  $n$  scalaires variables indépendants de design, la fonction objective peut être autre que le volume ou le coût de la structure, dans ce cas, le problème est de déterminer les variables  $x_1$  jusqu'à  $x_n$  afin que  $V$  soit minimum. Le point dans lequel  $V$  est minimum ou maximum est appelé **point optimal**, et  $x_1$  jusqu'à  $x_n$  sont appelés **coordonnées optimales**.

Généralement on s'intéresse seulement par les valeurs positives de  $x$ , il peut exister aussi d'autres conditions qu'elles doivent être satisfaites, ces conditions peuvent être généralement écrites :

$$\psi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, j = 1, 2, \dots, m.$$

$$\phi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, k = 1, 2, \dots, p.$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n.$$

L'équation est appelée contraintes d'égalité et contraintes d'inégalité

Dans la plupart des problèmes d'optimisation, il y a des contraintes d'égalité et d'inégalité, les contraintes d'égalité correspondent aux conditions d'équilibre et de compatibilité, et les contraintes d'inégalité correspondent aux exigences de design comme exemple la limitation de contraintes et de déflexions.

### IV.8.3. Description du problème

Dans cette application, nous allons chercher le design optimal pour la structure 6 désignée auparavant la structure optimale parmi les six structures de catalogue. Pour cela on va utiliser le code ANSYS.

La structure est composée de 13 barres et d'une section identique pour toutes les barres :  $A = 2 \cdot 10^{-2} m^2$ . cette structure est supposée soumise à des forces de 10000N appliquées aux nœuds 3, 4, et 6, figure IV – 29.

#### IV.8.4. Formulation du problème

La fonction objectif : minimiser le volume (le poids) de la structure  $V(A_i)$ .  
 $V(A_i), i = 1, \dots, 13 [\pm 0m^3]$

Les variables de design : les sections des barres  $A_i, 0,2 * 10^{-4} \leq A_i \leq 2 * 10^{-4}, [\pm 10^{-6} m^2]$

Les variables d'états : la contrainte admissible dans les barres tendus et comprimées,  
 Contrainte admissible dans les membres tendus :

$$15 * 10^7 \leq S_i^T \leq 20 * 10^7, [\pm 100Pas]$$

Contrainte admissible dans les membres :

$$-20 * 10^7 \leq S_i^C \leq -15 * 10^7, [\pm 100Pas]$$

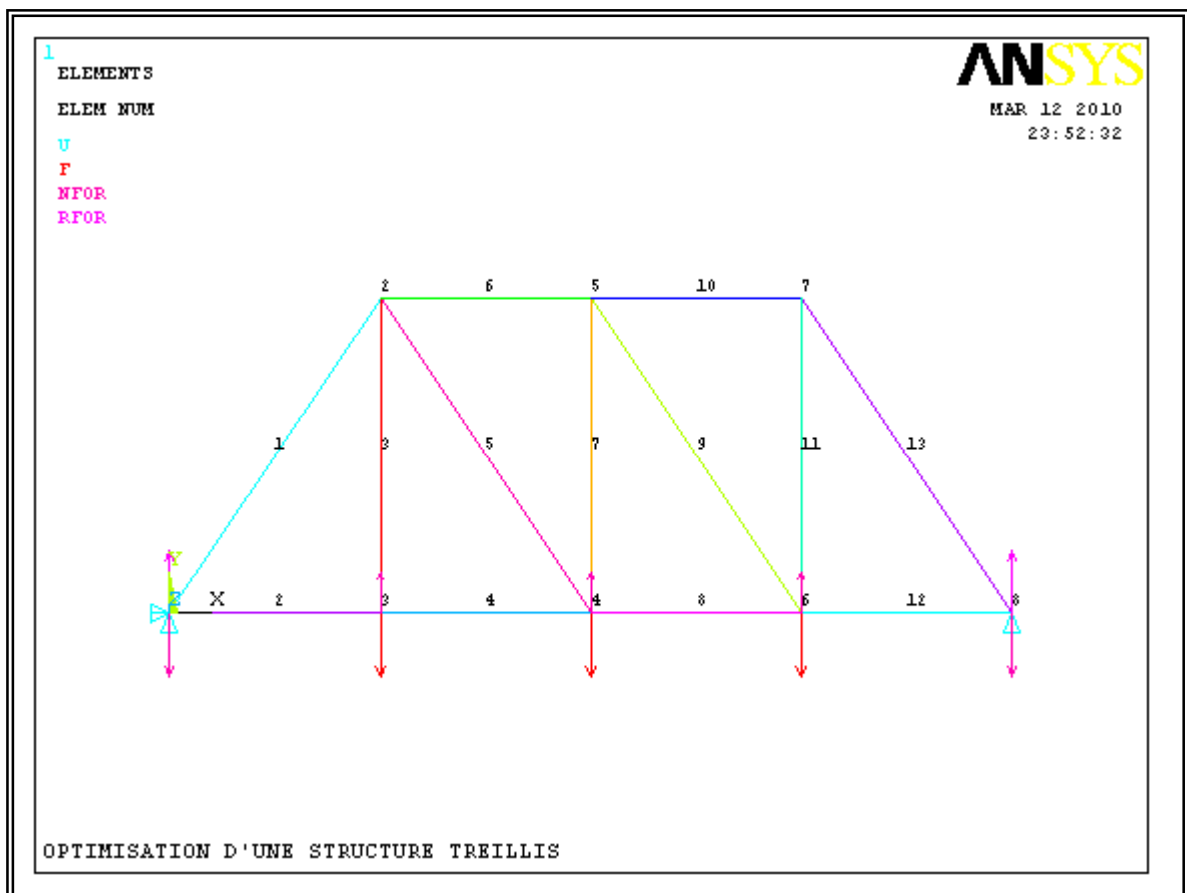
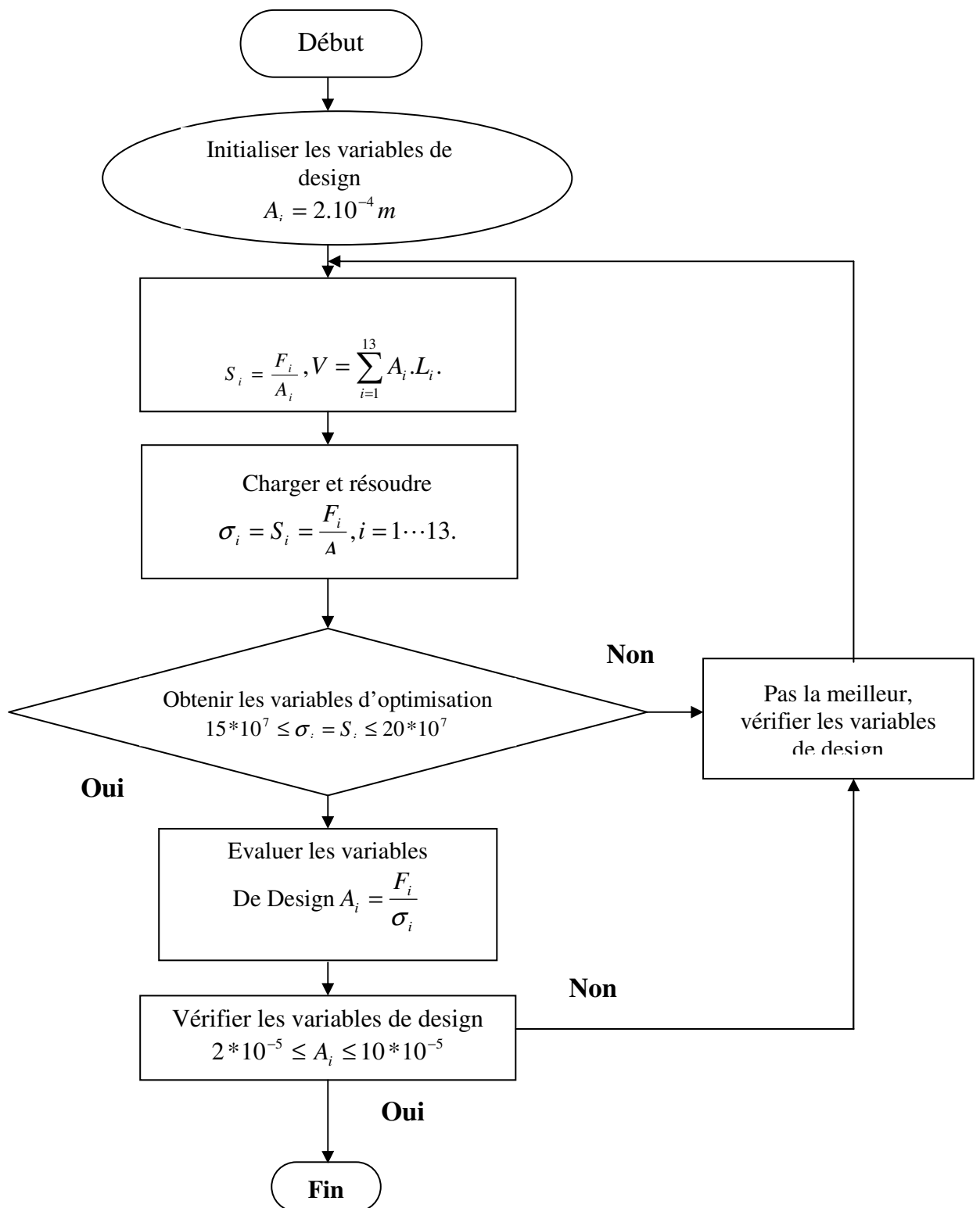


Figure IV-29 : structure treillis à optimiser.

**IV.8.5. L'algorithme**

Les étapes essentielles du programme sont schématisées dans l'organigramme suivant :



Le fichier de commande (batch file) est exposé en annexe D.

### IV.8.6. Résultats.

Après seize itération la solution converge, et Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau IV –16, la figure IV –30 montre la différence entre les sections de design original et celles du design optimisé, alors que la courbe IV –31 nous donne une idée sur la diminution du volume total de la structure avec chaque itération.

Section	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$	$A_8$	$A_9$	$A_{10}$	$A_{11}$	$A_{12}$	$A_{13}$
Initial ( $cm^2$ )	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Optimisé ( $cm^2$ )	0,918	0,510	0,508	0,510	0,330	0,684	0,266	0,684	0,330	0,510	0,762	0,510	0,918

Tableau IV-16 : résultats obtenus.

Les courbes historiques des section ainsi que l'historique de contrainte de traction et compression sont exposé en annexe D

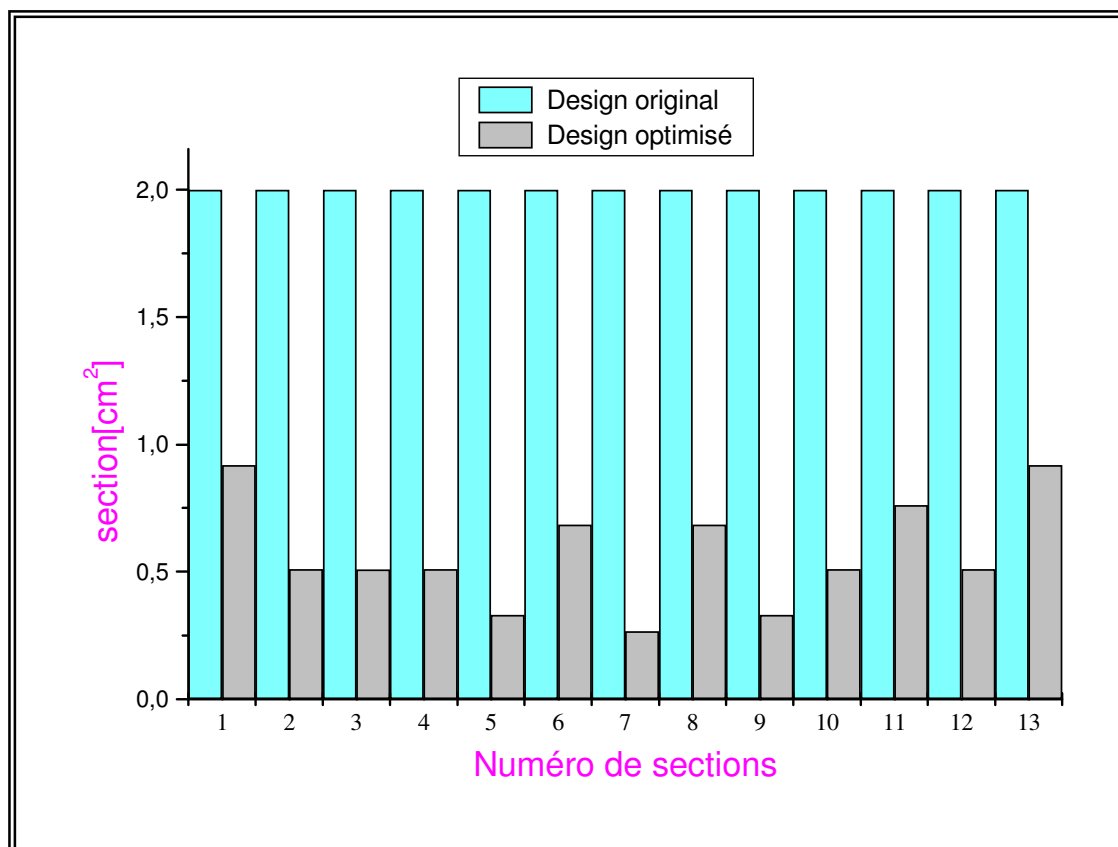


Figure IV-30 : Comparaison de sections originales avec celles optimisées.



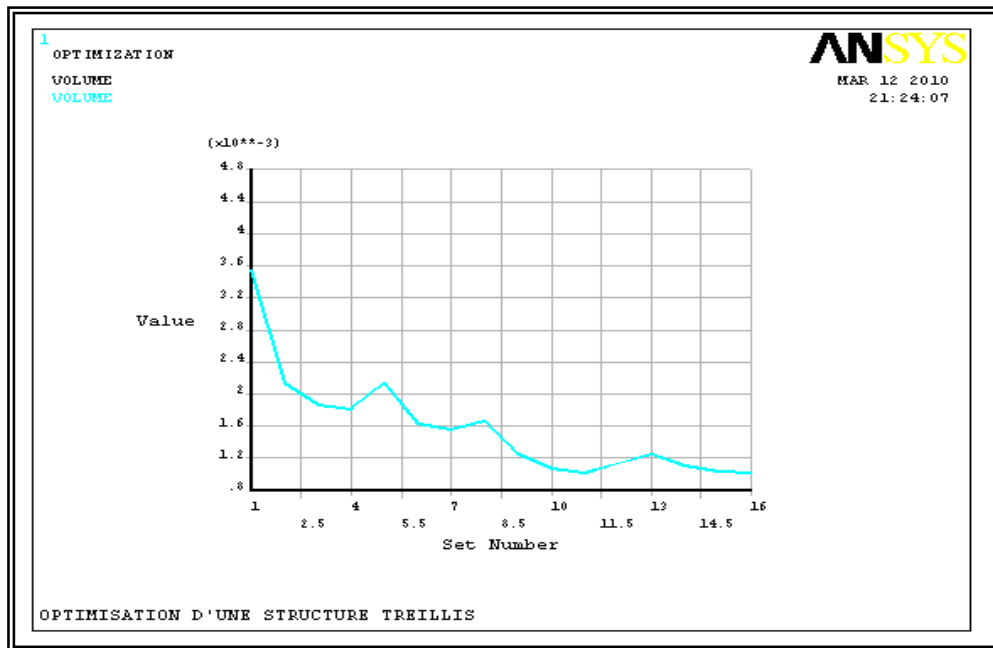


Figure IV-31 : Historique du volume.

#### IV.8.7. validation des Résultats

Nous allons vérifier analytiquement les résultats obtenus en utilisant les efforts calculés de la structure 6 dans la première application.

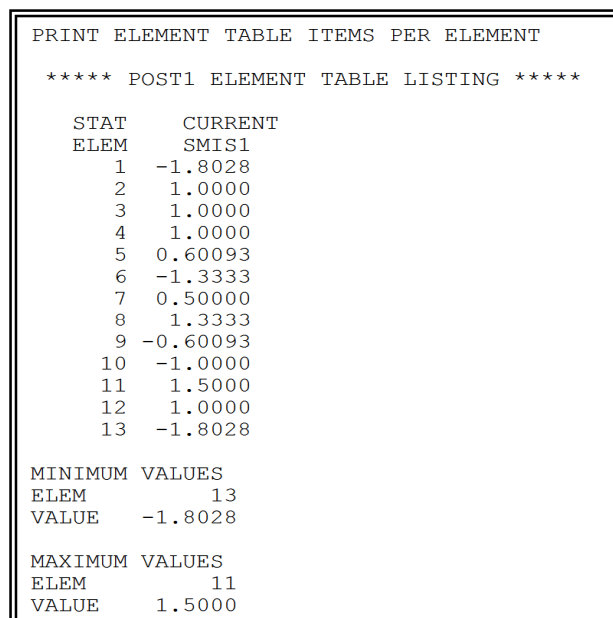


Figure IV-31 : efforts.

Prenant deux éléments qui sont les éléments ayant l'effort maximum et minimum :

**Effort max :**  $F_1 = 1,8028 \times 10000 = 18028N$ .

$$150 \times 10^6 \leq \sigma_1 = \frac{F_1}{S_1} \leq 200 \times 10^6.$$

$$150 \times 10^6 < \sigma_1 = \frac{18028}{0,918 \times 10^{-4}} = 196,38 \times 10^6 \text{ Pas} < 200 \times 10^6 \text{ Pas}.$$

**Effort min :**  $F_7 = 0,500 \times 10000 = 5000N$ .

$$150 \times 10^6 \leq \sigma_7 = \frac{F_7}{S_7} \leq 200 \times 10^6.$$

$$150 \times 10^6 < \sigma_7 = \frac{5000}{0,266 \times 10^{-4}} = 187,97 \times 10^6 \text{ Pas} < 200 \times 10^6 \text{ Pas}.$$

## Conclusion

Dans notre cas, le poids total de la structure a diminué de 27,80Kg à 8,02Kg, soit un équivalent de 70% de poids initial de la structure, toute en respectant les conditions de bonne performance mécanique, c'est-à-dire que les contraintes de toutes les barres que se soit en traction ou compression sont comprises dans le domaine des contraintes admissibles.

Ce résultat montre que l'optimisation par programmation mathématique a une grande efficacité et une très bonne précision.

Avec l'augmentation de nombre de variable de design, la résolution des problèmes par programmation mathématique se complique davantage.

## CONCLUSION GÉNÉRALE

Cette étude consiste à optimiser les structures aéronautiques complexes dans le cas statique et dynamique, ce domaine est devenu indispensable dans la conception des nouveaux produits vu la concurrence accrue entre les industriels(coût), elle intervient dans presque tous les domaines de sciences de l'ingénieur.

L'objectif assigné a ce travail est d'appliquer quelque méthode d'optimisation des structures notamment la méthode d'énergie de *MAXWELL*. Pour atteindre cet objectif nous avons commencé par une étude bibliographique sur tous ce qui touche de près ou de loin l'optimisation des structures, et en particulier les structures en barres et poutres. Les structures étudiées ici sont de types structures treillis, de nombreux travaux sont consacrés à l'optimisation des structures, chacune de ces dernières à une manière différente par rapport à l'autre, mais tous ces travaux ont le même objectif, qui est la détermination de la structure la plus légère.

L'application de ces méthodes en utilisant le code de calcul *ANSYS*, nous a permis d'obtenir les efforts internes des barres dans le cas statique, et les forces modales dans le cas dynamique, ainsi que la solution optimale dans le cas d'optimisation par programmation mathématique.

La résolution des problèmes dans notre étude est essentiellement basée sur le calcul des efforts internes dans les barres dans le cas statique et sur les forces modales dans le cas dynamique.

La comparaison entre les résultats obtenus par le code de calcul *ANSYS* et ceux des références et du calcul analytique, nous donne l'occasion de valider l'approche analytique utilisée, et à mettre en évidence l'avantage de cette dernière en terme de rapidité et de convergence.

Finalement, on doit signaler qu'avec l'utilisation de ces méthodes d'optimisation, On enregistre qu'elles ont une grande efficacité en terme de minimisation du poids, cela rend les structures moins légère et par conséquent moins chère, ce qui généralement souhaité dans la plupart des cas surtout pour les constructeurs automobiles et en aéronautique.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1]. N. V. BANICHUK: Introduction to optimization of structures. Edition Springer-Verlag, New York.
- [2]. ADALI S., BARSUK A, A: design of tall buildings, Edition WILEY New York 1979.
- [3]. L. CHAMPANEY : méthode numérique pour la mécanique, université de Versailles, st-Quentin en Yvelines, 2002.
- [4]. Lenneth ROCKEY, Roy EVANS, William GRIFITHS, ET David NETHERCOT, : Introduction a la méthode des éléments finis, Edition EYROLES 2003.
- [5]. G. Allaire : Conception optimale de structures. Edition Springer, Paris, 2006.
- [6]. C. PALECZNY et D. MONTERIO-FERNANDES : Exemples d'utilisation des techniques d'optimisation en calcul de structures de réacteurs, Snecma Moteurs, France.
- [7]. S. RAO: Optimisation theory and application, edition WILEY.
- [8]. A. MEBARKI: analyse dynamique libre des plaques composites multicouches. Mémoire du magistère 2009 Université de constantine.
- [9]. L. CHAMPANY : dynamique de systèmes continus.
- [10]. L. CHAMPANY : cours dynamique des construction.
- [11]. C. MATTHEWS: aeronautical engineer's data book edition BUTTERWORTH-HEINMEN U.K. 2002.
- [12]. R. JEKISON: Aircraft design projects BUTTERWORTH-HEINMEN U.K. 2003;
- [13]. T. H. G. MEGSON: aircraft structures for engineering students, third edition BUTTERWORTH-HEINMEN U.K. 2002.
- [14]. R. W. CLOUGH: dynamic of structures third edition university of California 1995
- [15]. EDWARD L. WILSON: Three dimensional static and dynamic analysis of structures UNIV OF CALIFORNIA.
- [16]. L. SOLOMMON : élasticité linéaire, édition masson. France.
- [17]. J. F. IMBERT: analyse des structures par éléments finis, '2<sup>nd</sup> éditions, édition CEPATURS, Toulouse ,1984.

- [18].L. TEKEY, R. EVANS, w, Griffith et D. NETHERCOT: introduction a la methode des éléments finis, édition EYROLLES paris 1979.
- [19]. ANSYS V 9.0 Documentation Manual, Advanced Analysis Techniques Guide-Design Optimization-Optimization Techniques.
- [20].E.MADENCI, I. GOVEN :the finite element method and applications in engineering using ANSYS, edition SPRINGER.
- [21]. Y. NAKASONE , S. YOSHIMOTO: engineering analysis with ANSYS software, edition ELSEVIER 2006.
- [22].V.P.MALKOV: optimisation of structures with respect to weight and strength criteria, gorkii university 1971.

ANNEXE A : Lois fondamentales sur les calculs des Structures

ANNEXE B : Première application (analyse statique).

ANNEXE C : Deuxième application (analyse dynamique).

ANNEXE D : Cinquième application (programmation mathématique).

# LOIS FONDAMENTALES DE CALCUL DES STRUCTURES

## 1. Introduction

Quelque soit les causes des forces et des déformations internes dans une structure, trois notions de base doivent être vérifiées, ce sont : l'équilibre des forces, la compatibilité des déplacements et les lois de comportement des matériaux.

Dans cette annexe on va présenter dans un premier paragraphe les équations de base de l'élasticité qui vont être nécessaires pour les formulations par éléments finis.

Dans le second paragraphe, on a exposé les équations différentielles d'équilibre d'un corps solide continu.

Les définitions fondamentales et les expressions listées dans cette annexe peuvent être trouvées dans n'importe quel ouvrage de la théorie d'élasticité.

## 2. Les lois de comportements en théorie d'élasticité

En 1660 *ROBERT HOOKE* publiait la loi de dépendance entre les contraintes et les déformations qui exprime la proportionnalité entre la force qui agit sur une éprouvette métallique et l'allongement (déformation) qu'elle lui subit ; cette loi se limitait aux cas unidimensionnels, et semble de nos jours simple et évidente. Une généralisation de la loi de *HOOKE* s'écrit comme suit :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}, x, T)$$

Avec :

$x$  : Position du point.

$T$  : La température en ce point.

Si à des déformations nulles, correspondent des tensions nulles, c'est-à-dire s'il n'existe pas des tensions initiales, la loi de *Hooke* généralisée peut être exprimée par :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad i, j, k = 1, 2, 3 \dots \dots \dots (1)$$

Où  $C_{ijkl}$  sont des fonctions du point, le choix des axes, et de la température.

Apparemment il y a  $3^4 = 81$  coefficients, mais la symétrie de tenseur de contrainte  $\sigma_{ij}$  et de tenseur de déformation  $\varepsilon_{ij}$  conduit aux égalités évidentes.

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{jilk} = C_{ijlk} \dots \dots \dots (1.2)$$

De sorte que le nombre se réduit à  $6 \times 6 = 36$  coefficients indépendants.

L'équation décrivant les déformations en fonction des contraintes est :

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \dots \dots \dots (1.3)$$

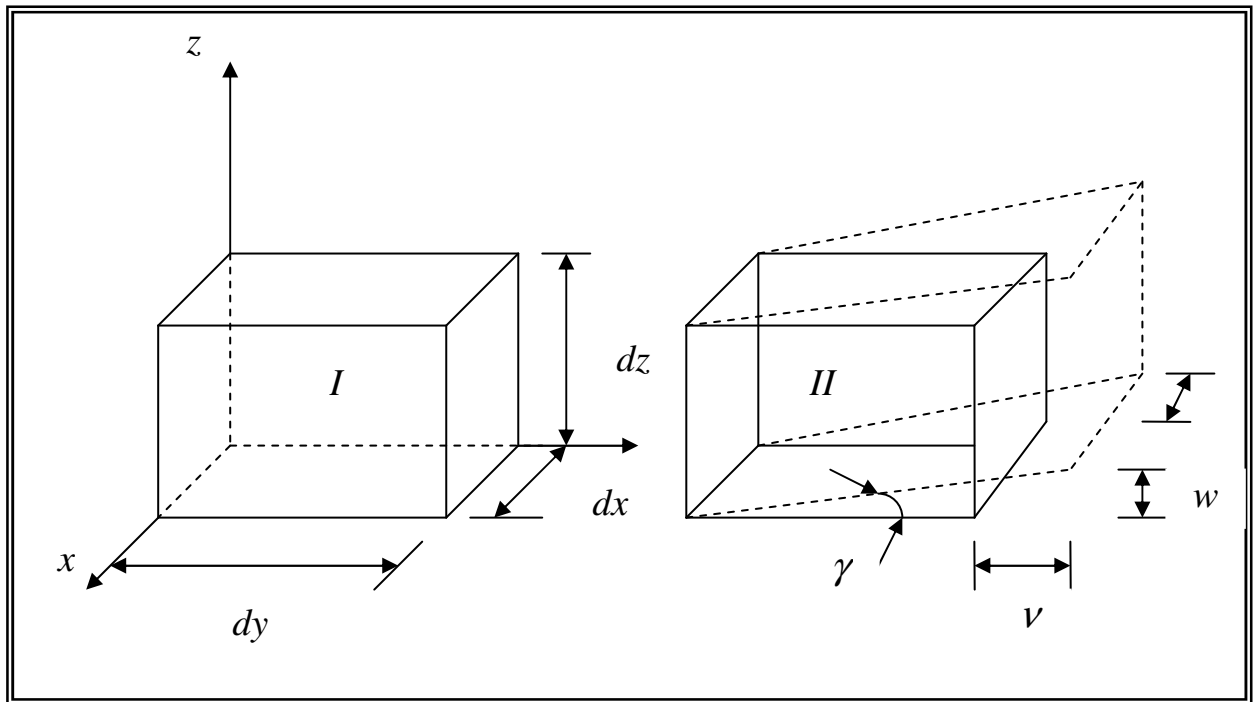
Avec des égalités analogues à (1.3) pour les quantités  $S_{ijkl}$ .

Les quantités  $C_{ijkl}$  s'appellent les coefficients de rigidité élastique, plus ils sont grands, plus les tensions deviennent être grandes pour un même état de déformation. Les coefficients  $S_{ijkl}$  sont les coefficients de déformabilités, plus ils sont grands, plus le corps se déforme pour un état de contrainte donnée.

### 3. champs de déformation

Les équations différentielles entre déformations et déplacements ont une importance primordiale dans les formulations mathématique de la méthode des éléments finis qui sont fondées sur les déplacements.

Afin de former les équations déformation-déplacements du cube élémentaire de la figure (1); considérons un petit déplacement a partir de l'état non déformé (I) vers



l'état déformé (II).

Figure -1 : Champ de déformation d'un cube unitaire.

#### 3.1. Relations déformations –déplacements

Supposant que cet élément subit trois déplacements  $u, v$  et  $w$  suivant les trois axes de repaires  $x, y,$  et  $z$  respectivement 1,2, et 4, dans ce cas les composantes de déformation sont liées aux déplacements par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \dots\dots\dots(2). \\
 \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \epsilon_y &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)
 \end{aligned}$$

$u$

Ou bien d'une manière plus compact, en utilisant la notation indicielle, on aura :

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \dots\dots\dots(2.1).$$



### 3.2. Equation de compatibilité des déplacements

Les équations de compatibilité sont les conditions d'intégralités des déformations qui assurent l'unicité des déplacements. Ces conditions sont obligatoires si on résout le problème d'élasticité en fonction des contraintes, c'est-à-dire dans le cas d'une approche d'équilibre.

Si on effectue la résolution en fonction des déplacements c'est-à-dire dans le cas de l'approche cinématique, la compatibilité des déplacements est immédiate et les équations de compatibilité sont sans objets.

La conditions de compatibilité relative aux problèmes tridimensionnelle s'obtient comme suit :

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x^2} \\ \gamma_{xz} &= \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x^2} \dots\dots\dots(2.2). \\ \gamma_{yz} &= \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y^2}\end{aligned}$$

Finalement on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \dots\dots\dots(2.3). \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\end{aligned}$$

## 4. Champs de contraintes

On a étudié précédemment, les équations qui décrivent la relation entre les contraintes et les déformations sont de la forme :

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \quad i, j = 1, 6$$

Où les coefficients  $C_{ij}$  sont les constantes d'élasticités.

Pour un corps linéairement élastique et isotrope, ces coefficients sont en terme seulement du module d'élasticité  $E$  et du coefficient de poisson  $\nu$ .

Cependant ils existent deux différents cas de l'élasticité plane :

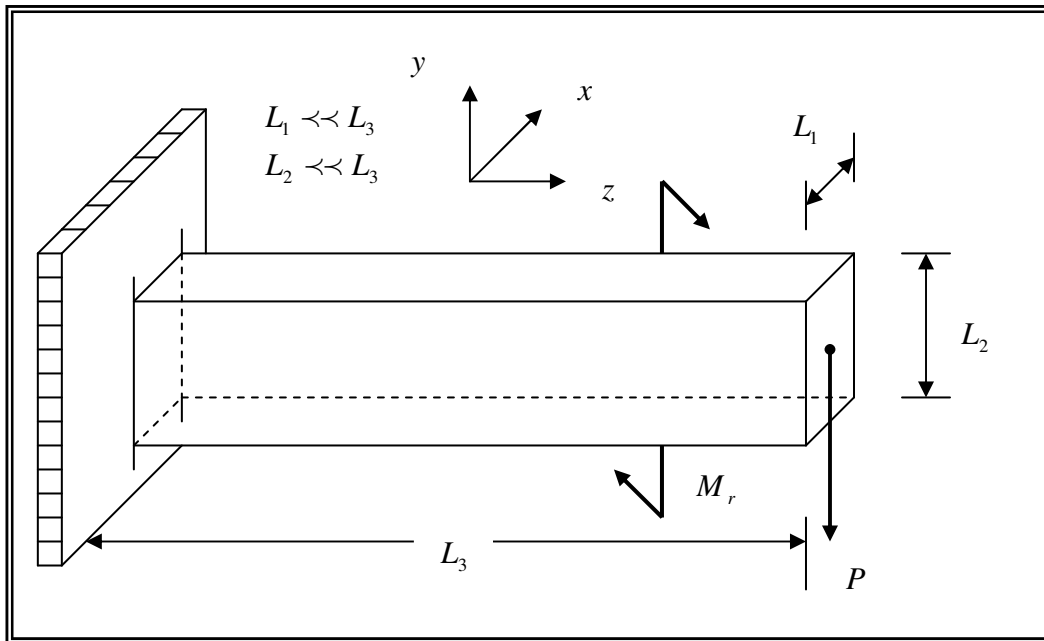
-les déformations planes.

-les contraintes planes.

### 4.1. Déformations planes

On peut dire qu'on est présence d'un problème de déformation plane lorsqu'on a un corps dont l'une des dimensions est très grandes par rapport aux deux autres figure(2). Un tel problème est défini par :

$$\begin{aligned}u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \dots\dots\dots(3). \\ w &= 0\end{aligned}$$



**Figure-2. Déformation plane.**

Pour une situation linéaire élastique, d'un matériau isotrope et homogène, les relations contraintes –déformations sont données sous forme de lamé comme suit :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \dots\dots\dots(3.1).$$

Explicitement on obtient :

$$\sigma_{xx} = 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$$

$$\sigma_{yy} = 2\mu\varepsilon_{yy} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$$

$$\tau_{xx} = 2\mu\varepsilon_{xy}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$$

Ou :

$E$  : Module de *YOUNGE*.

$\nu$  : Coefficient de *POISSON*.

$\mu$  : Module d'élasticité en cisaillement.

$\lambda$  : Constante de *LAMNE*.

Généralement les constante  $\lambda$  et  $\nu$  sont exprimés comme suit :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Et les constantes d'élasticité sont données par :

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$C_{12} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$C_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

En substituant (22) on obtient les équations contraintes-deplacements.

$$\sigma_x = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\sigma_y = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Ou bien en notation indicielle :

$$\sigma_{ij} = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \dots \dots \dots (3.2).$$

### 4.2. Contraintes planes

Contrairement a la condition de déformation plane, celle de contrainte plane est caractérisée par le fait que la dimension suivant une direction est très petite en comparaison aux deux autres, dans ce cas :

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_x(x, y) \\ \sigma_y = \sigma_y(x, y) \\ \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y) \\ \tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0 \end{cases} \dots \dots \dots (4).$$

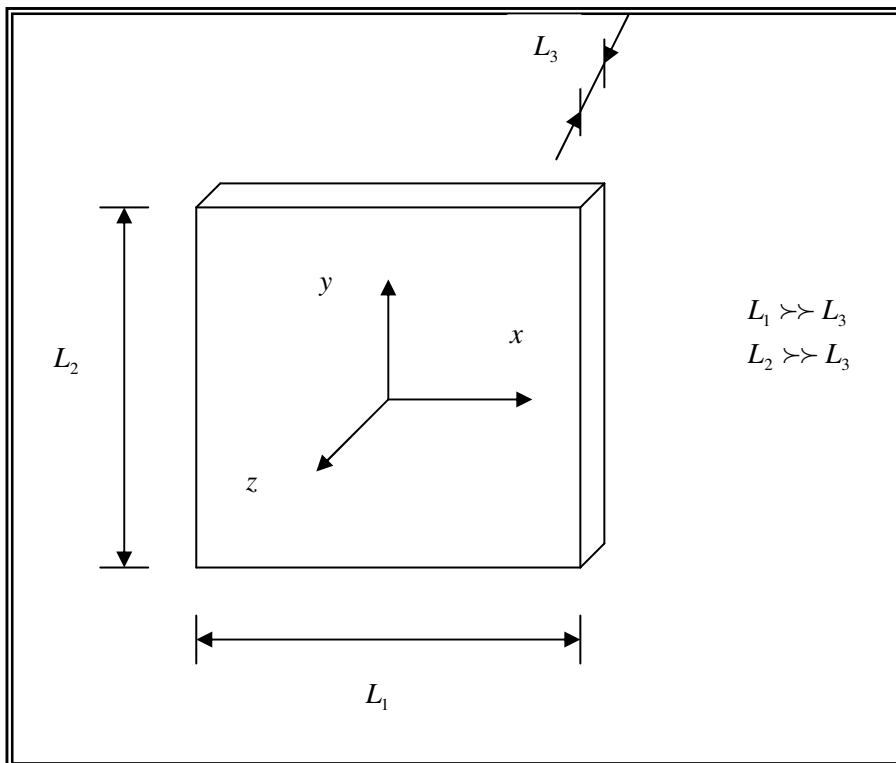


Figure -3 : état de Contrainte plane.

Dans ce cas et pour des matériaux isotropes, les relations contraintes-déformations sont exprimées par :

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy}$$

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Ou bien en notation indicielle :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right) \dots \dots \dots (4.1)$$

En substituant les équations (2.2) dans (4.1), on aura :

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Ou bien en notation indicielle :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \dots \dots \dots (4.2)$$

Les constantes  $C_{ij}$  sont données par :

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad C_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}, \quad C_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

## 5. Equations d'équilibre

L'équation d'équilibre est une condition exprimée simplement que les forces intérieures contrebalancent l'action de la charge extérieure. Bien que la seule utilisation de cette équation soit parfois suffisante de rendre possible la résolution d'un problème statique.

Considérons l'équilibre des forces agissant sur l'élément infinitésimal.

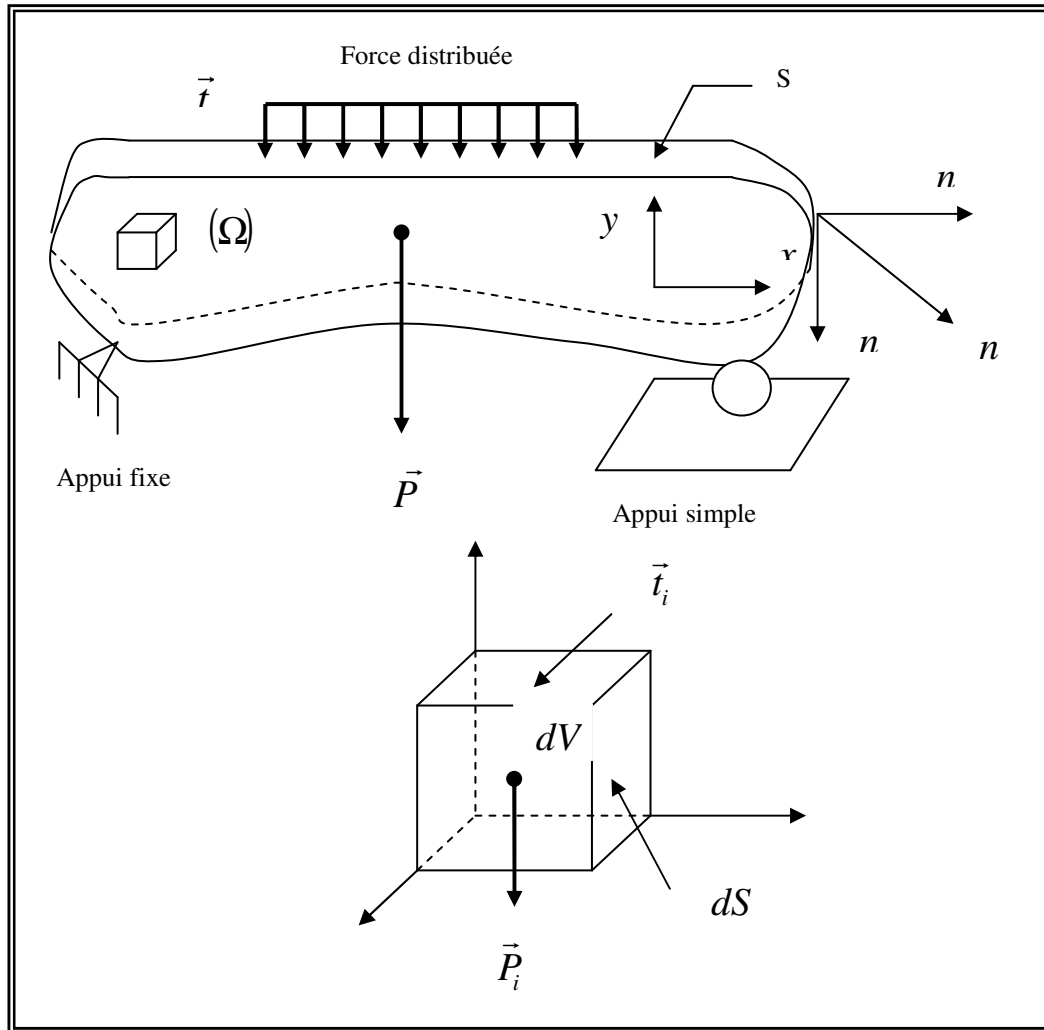


Figure-4 : Équilibre statique d'un corps.

Ce corps est soumis sous l'action des forces surfacique et bien sur à des forces provoquée par sa propre masse.

L'équation d'équilibre s'écrit comme suit :

$$\vec{t} + \vec{P} = \vec{0}$$

Avec :

$$t = \sum_i t_i = \int_S t_i dS, \text{ force de surface.}$$

$$P = \sum_i P_i = \int_V P_i dV, \text{ force de volume.}$$

Donc :

$$\int_S t_i dS + \int_V P_i dV = 0 \dots \dots \dots (5).$$

En projetant les composantes des contraintes sur une surface différentielle de la frontière on obtient :

$$\begin{aligned} t_x &= \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z \\ t_y &= \sigma_y n_y + \tau_{xy} n_x + \tau_{yz} n_z \dots \dots \dots (5.1) \\ t_z &= \sigma_z n_z + \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y \end{aligned}$$

Ou :  $n_y, n_z$  sont les cosinus directeurs de la normale  $\vec{n}$  par rapport aux axes  $x, y, et z$  respectivement.

Les équations (5.1) peuvent être aussi exprimées en notation indicielle par :

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \text{ Sur la surface } S \dots \dots \dots (5.2).$$

Substituant l'équation (5.2) dans les équations d'équilibre (5.1) on obtient :

$$\int_S \sigma_{ij} n_j dS + \int_V P_i dV = 0 \dots \dots \dots (5.3)$$

Pour calculer les deux intégrales sur un même domaine on applique le théorème de (Gauss).

$$\int_S T_{ij} dS = \int_V \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV = \int_V T_{ij,j} dV \Rightarrow \int_S t_{ij} dS = \int_V \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} dV = \int_V t_{ij,j} dV.$$

Alors l'équation d'équilibre se réduit à :

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + P_i) dV = 0$$

Finalement, pour qu'un corps soit en équilibre, alors les composantes de contraintes doivent satisfaire aux équations suffisantes :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + P_i = 0 \dots \dots \dots (5.4).$$

Ou :

$\sigma_{ij}$  : Tenseur de contraintes.

$P_i$  : Sont les composantes des forces volumiques suivant les directions spatiales.

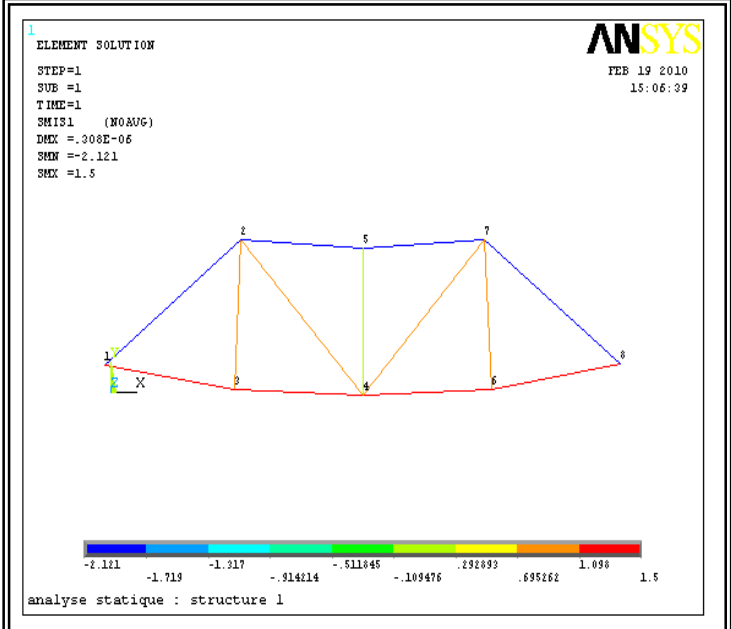
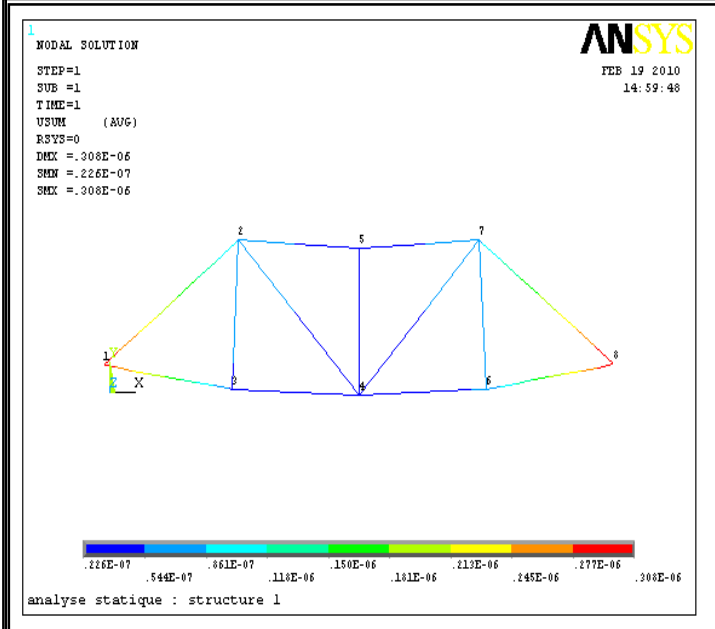
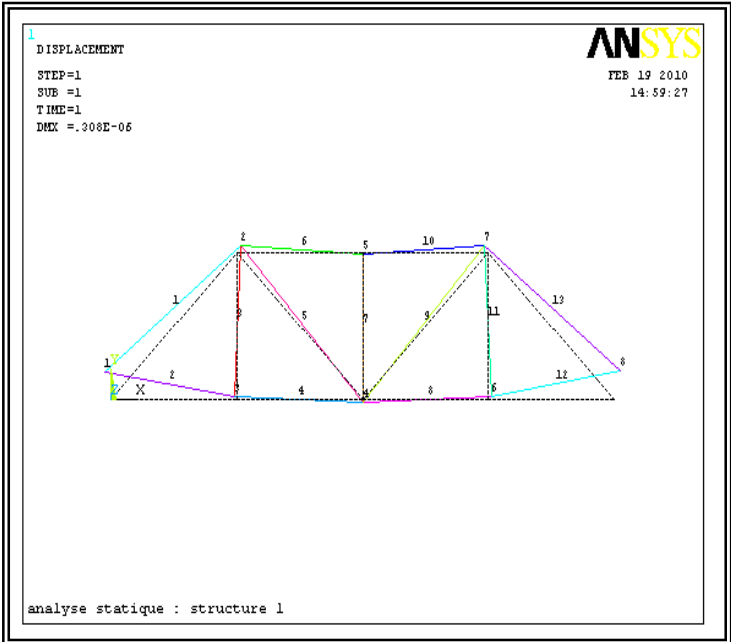
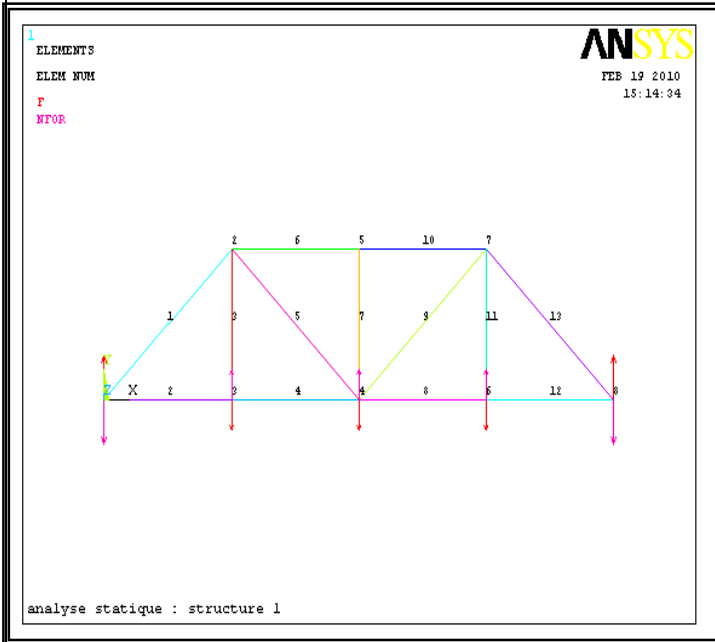
Explicitement :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + P_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + P_y = 0 \dots \dots \dots (5.5). \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + P_z = 0 \end{cases}$$

Pour un problème d'élasticité plane, en substituant les équations (3.2) et (4.2) respectivement dans l'équation d'équilibre on obtient les équations d'équilibre de NAVIER. Exprimées en fonction des composantes de déplacement pour les deux cas suivant :

$$\text{Déformations planes : } \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{\mu} b_i = 0$$

$$\text{Contraintes planes : } \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{\mu} b_i = 0$$



PRINT U NODAL SOLUTION PER NODE

\*\*\*\*\* POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING \*\*\*\*\*

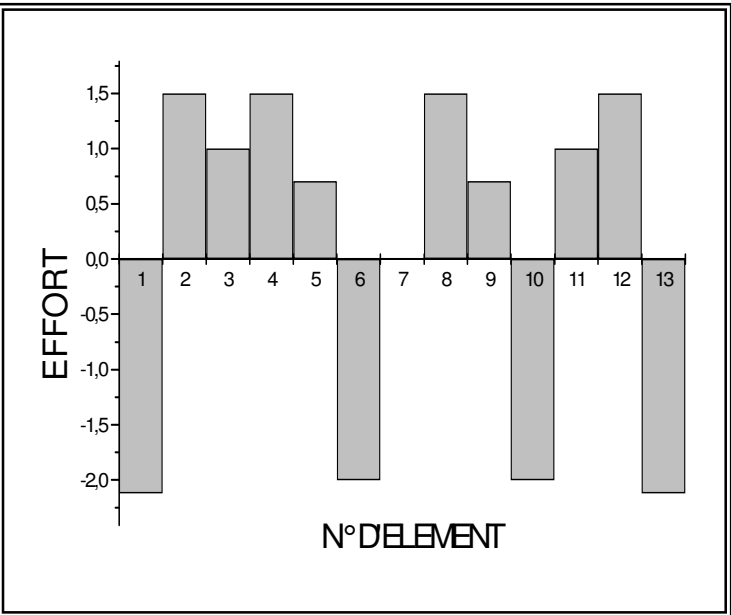
LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1  
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

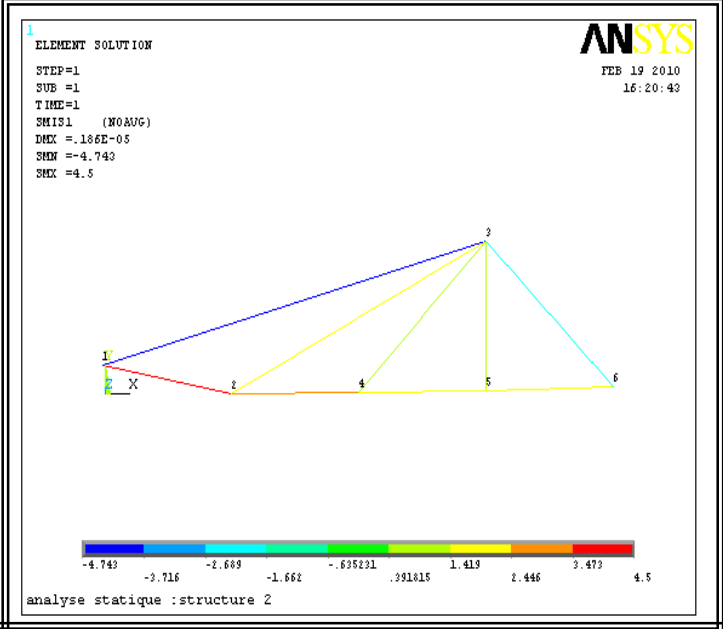
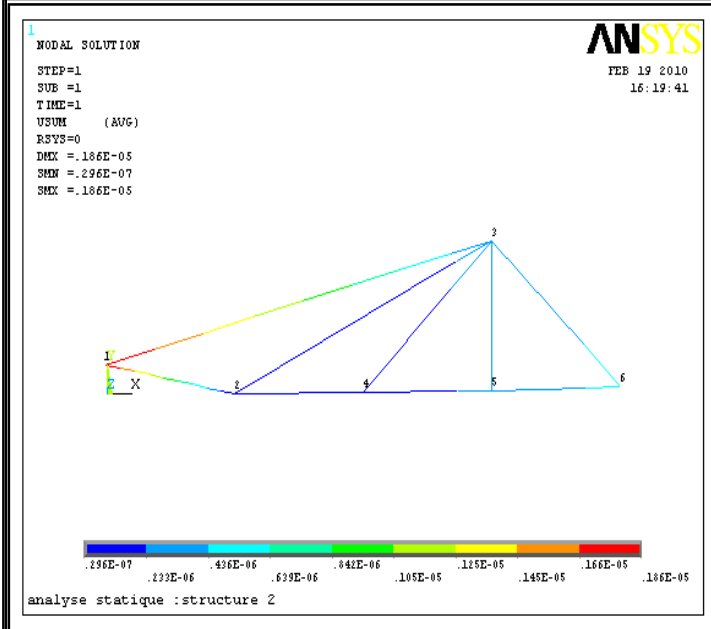
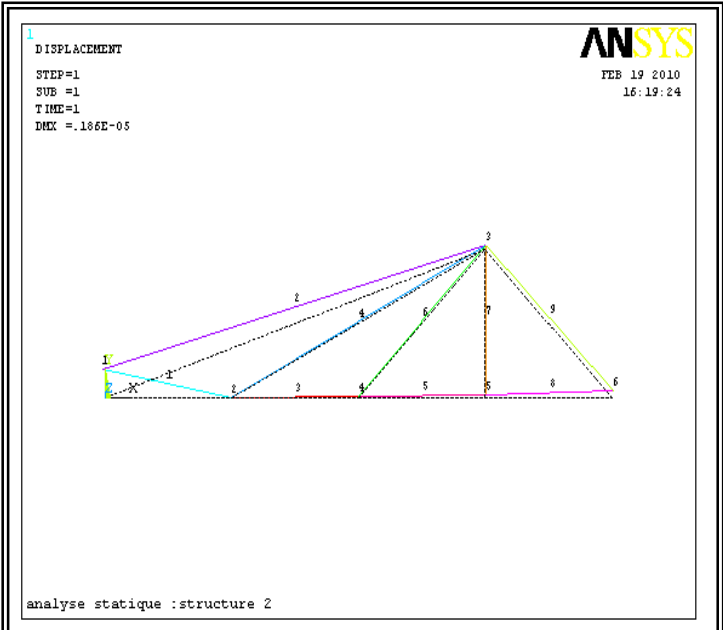
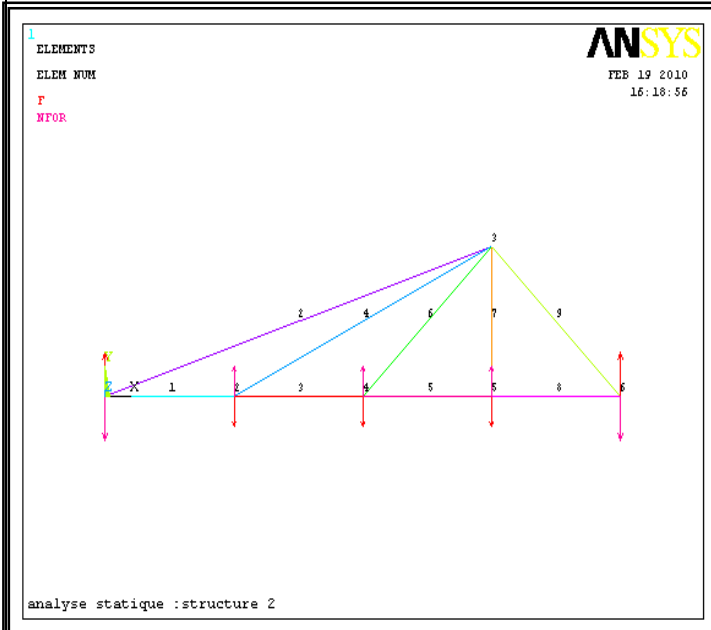
THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

NODE	UX	UY	UZ	USUM
1	-0.69581E-07	0.29046E-06	0.0000	0.29868E-06
2	0.53612E-07	0.61197E-07	0.0000	0.81360E-07
3	-0.32081E-07	0.36197E-07	0.0000	0.48368E-07
4	0.54186E-08	-0.22352E-07	0.0000	0.22999E-07
5	0.36124E-08	-0.22352E-07	0.0000	0.22642E-07
6	0.42919E-07	0.39810E-07	0.0000	0.58539E-07
7	-0.46388E-07	0.64810E-07	0.0000	0.79700E-07
8	0.80419E-07	0.29768E-06	0.0000	0.30835E-06

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES

NODE	8	8	0	8
VALUE	0.80419E-07	0.29768E-06	0.0000	0.30835E-06





PRINT U NODAL SOLUTION PER NODE

\*\*\*\*\* POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING \*\*\*\*\*

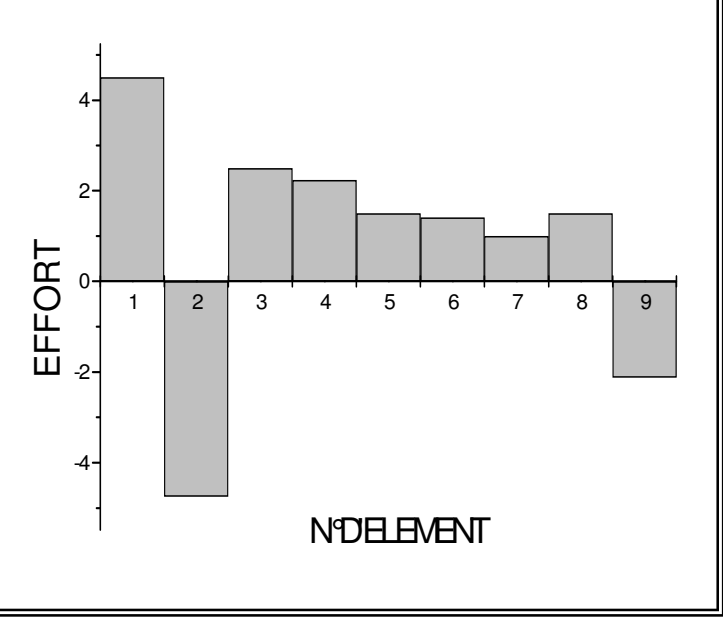
LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1  
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

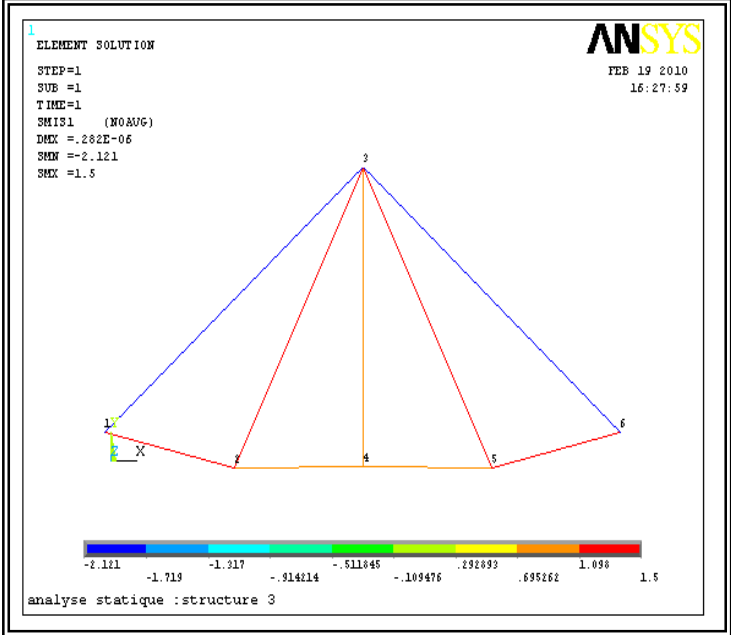
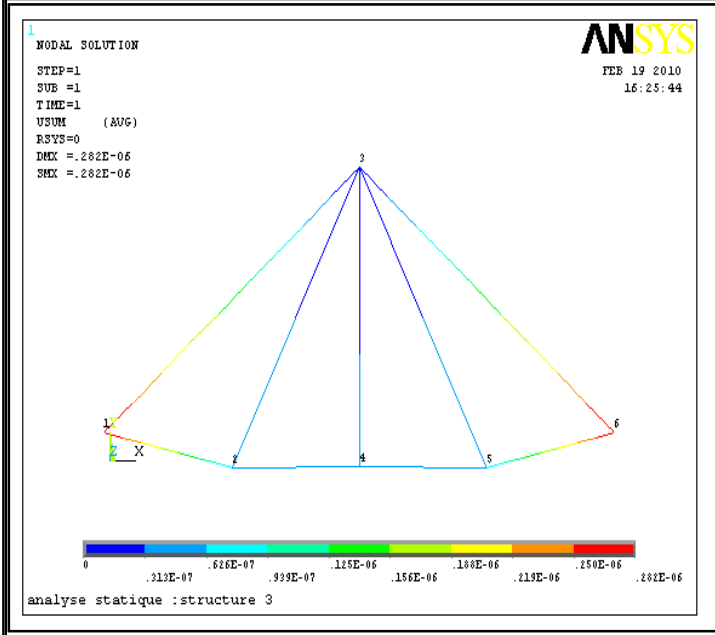
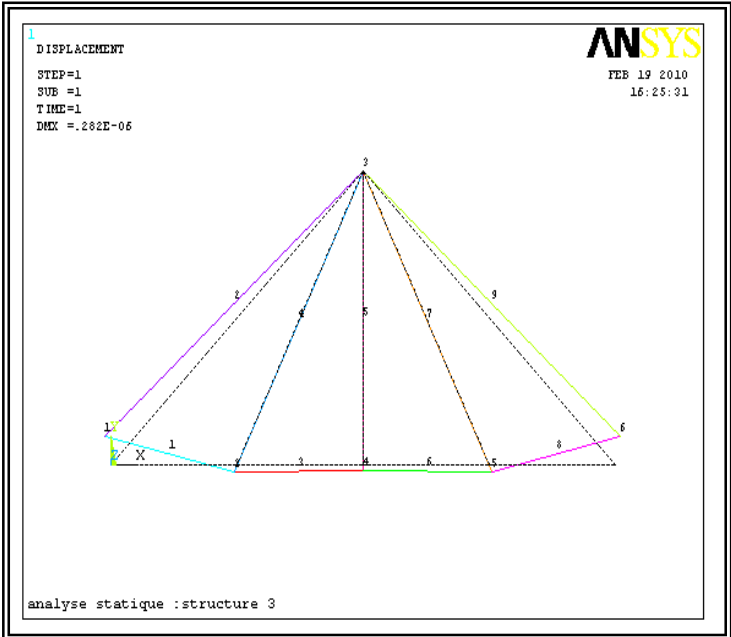
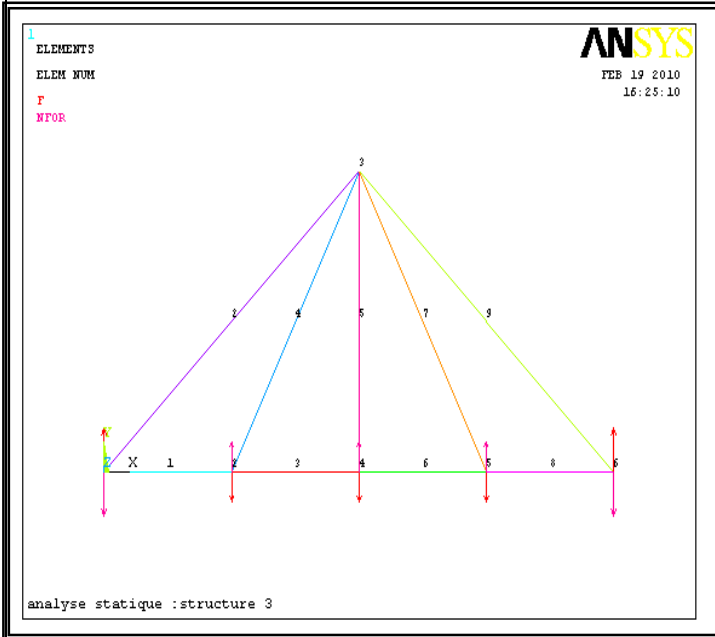
NODE	UX	UY	UZ	USUM
1	-0.11540E-06	0.18549E-05	0.0000	0.18585E-05
2	-0.28954E-08	0.29488E-07	0.0000	0.29629E-07
3	0.19621E-07	0.26396E-06	0.0000	0.26469E-06
4	0.59605E-07	0.15327E-06	0.0000	0.16445E-06
5	0.97105E-07	0.23896E-06	0.0000	0.25794E-06
6	0.13460E-06	0.48501E-06	0.0000	0.50334E-06

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES

NODE	6	1	0	1
VALUE	0.13460E-06	0.18549E-05	0.0000	0.18585E-05







PRINT U NODAL SOLUTION PER NODE

\*\*\*\*\* POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING \*\*\*\*\*

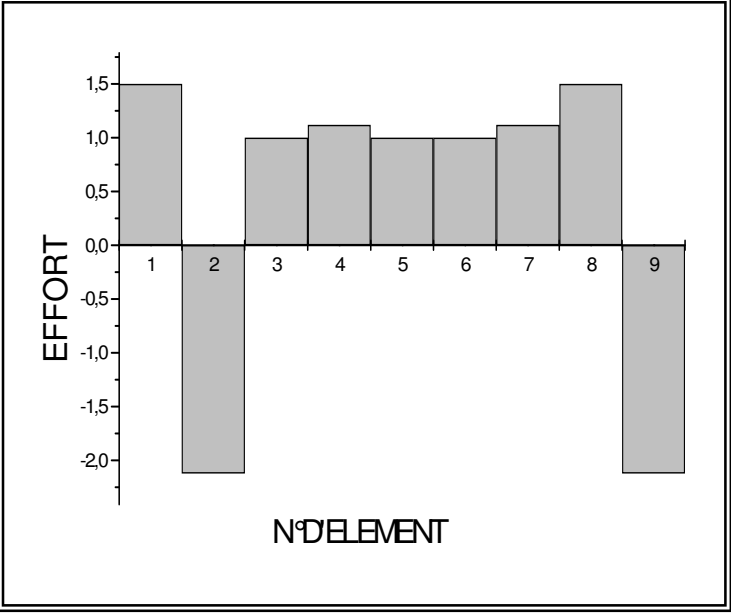
LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1  
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

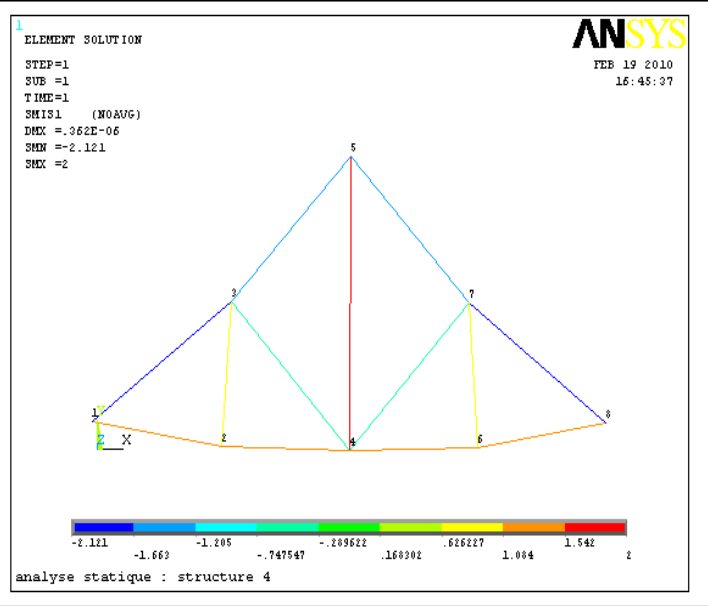
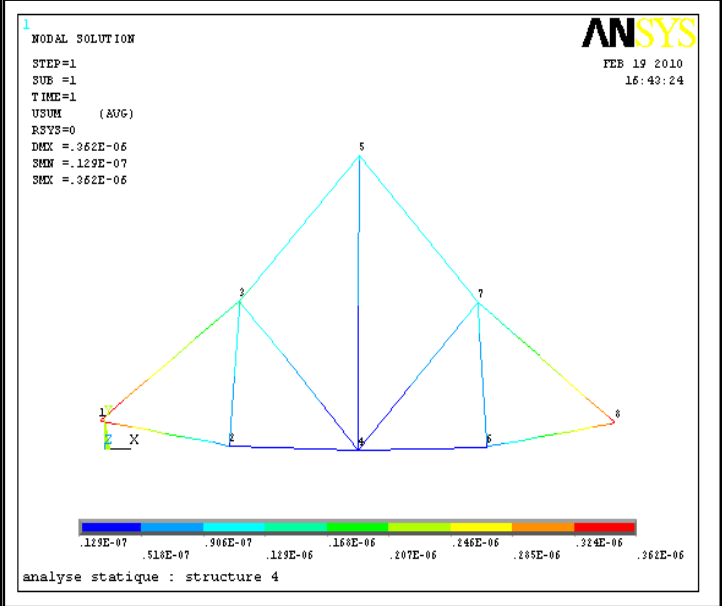
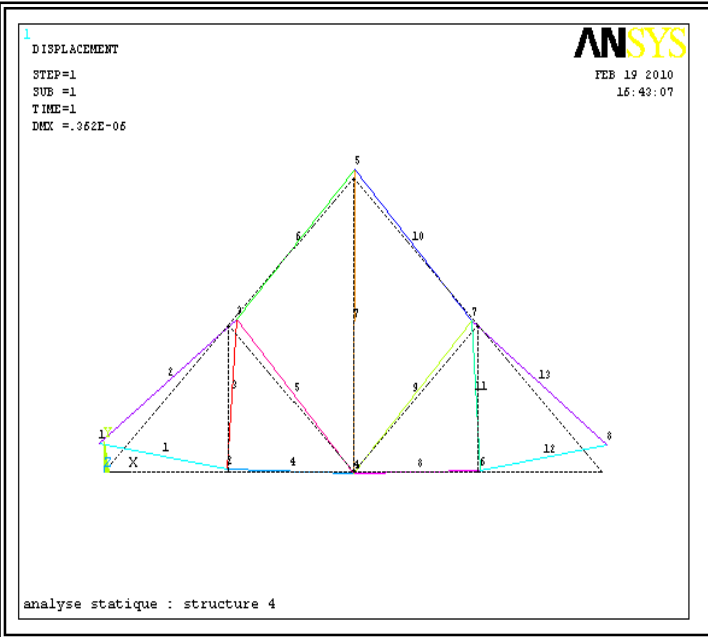
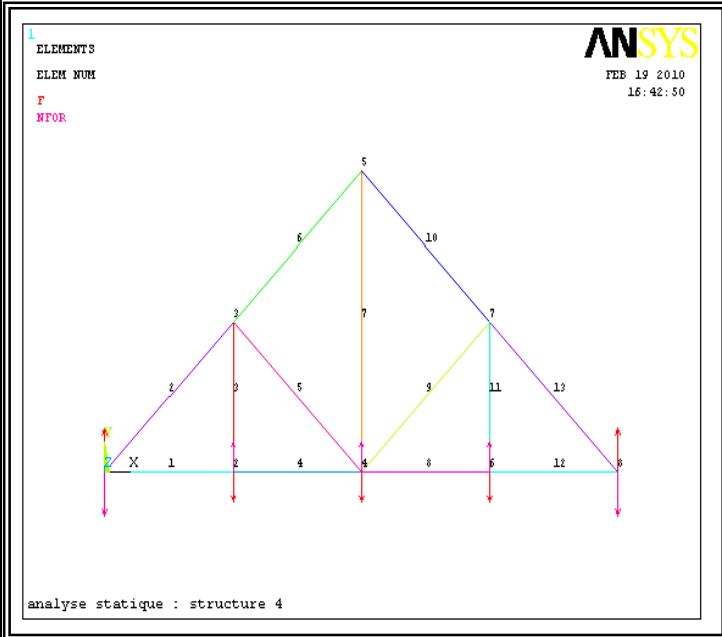
THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

NODE	UX	UY	UZ	USUM
1	-0.62500E-07	0.27463E-06	0.0000	0.28165E-06
2	-0.25000E-07	-0.57377E-07	0.0000	0.62587E-07
3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0000	-0.50000E-07	0.0000	0.50000E-07
5	0.25000E-07	-0.57377E-07	0.0000	0.62587E-07
6	0.62500E-07	0.27463E-06	0.0000	0.28165E-06

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES

NODE	1	1	0	1
VALUE	-0.62500E-07	0.27463E-06	0.0000	0.28165E-06





PRINT U NODAL SOLUTION PER NODE

\*\*\*\*\* POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING \*\*\*\*\*

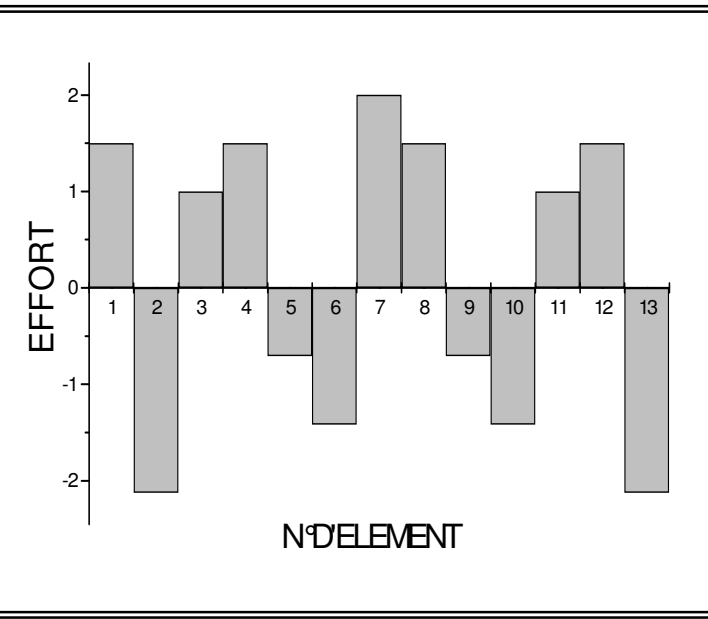
LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1  
 TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

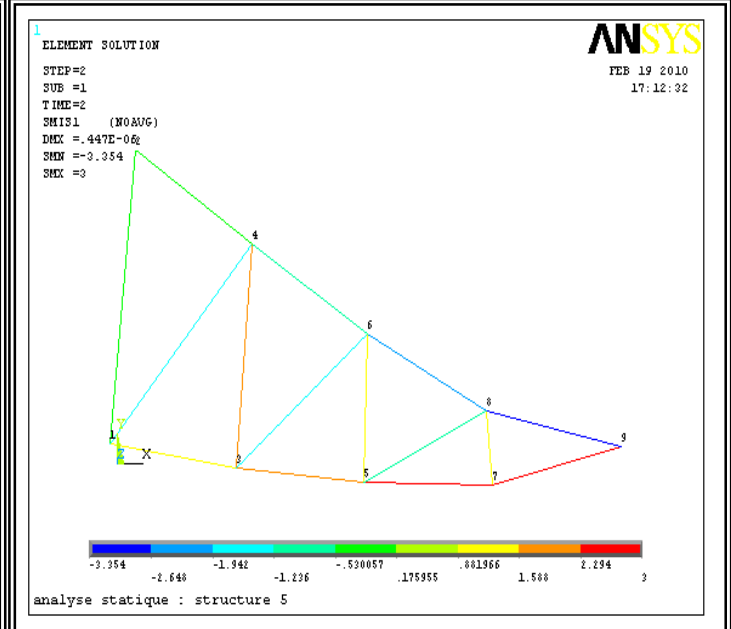
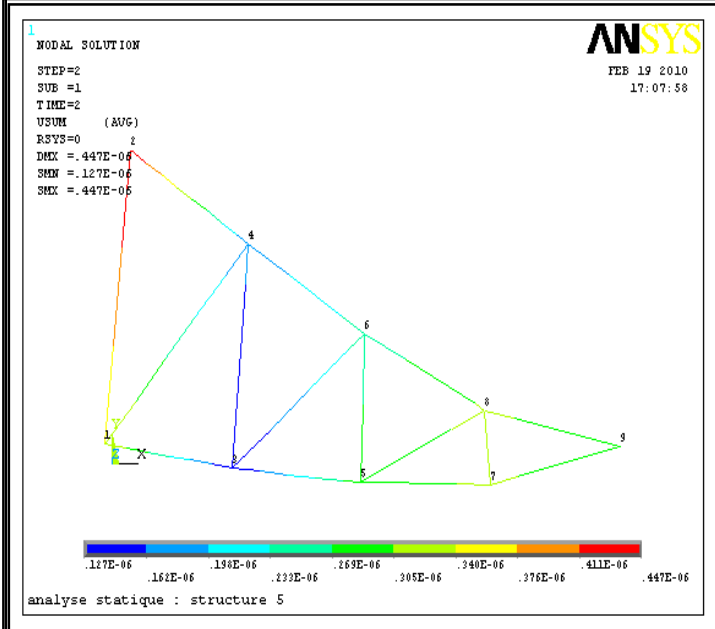
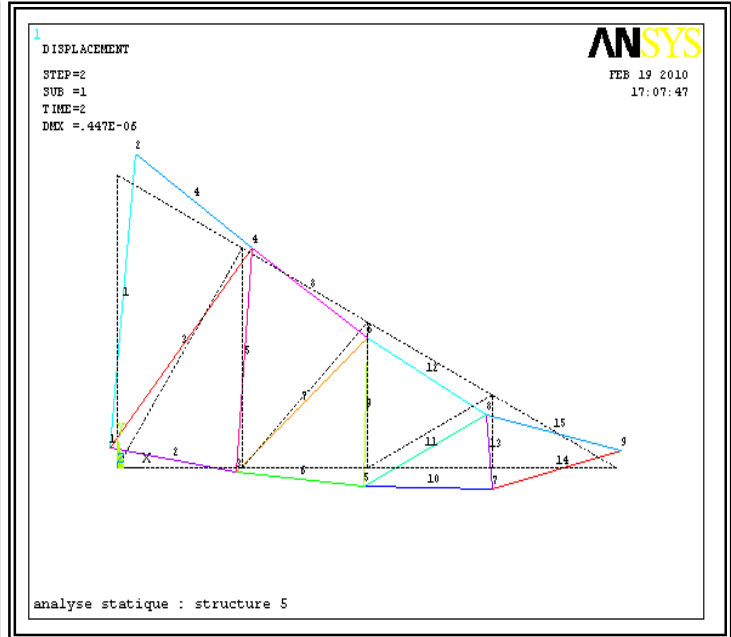
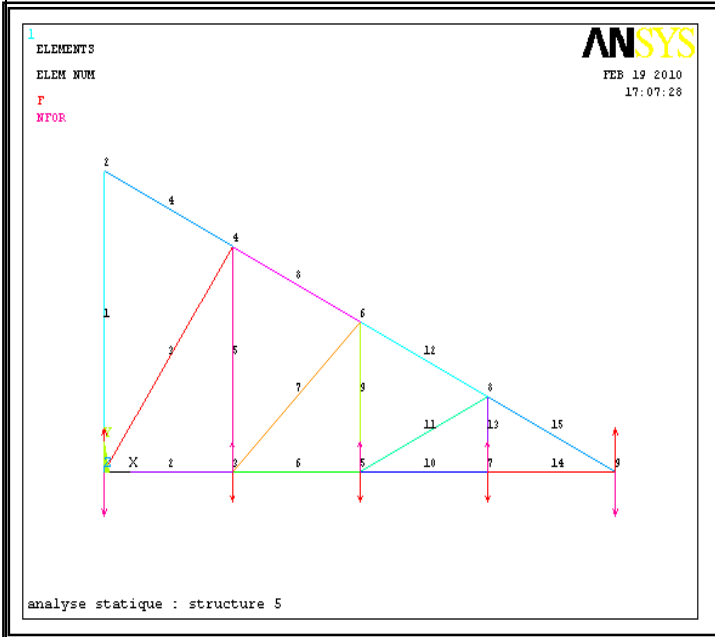
THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

NODE	UX	UY	UZ	USUM
1	-0.68302E-07	0.35599E-06	0.0000	0.36248E-06
2	-0.30802E-07	0.39257E-07	0.0000	0.49899E-07
3	0.11737E-06	0.64257E-07	0.0000	0.13380E-06
4	0.66977E-08	-0.11056E-07	0.0000	0.12926E-07
5	0.21967E-07	0.88944E-07	0.0000	0.91617E-07
6	0.44198E-07	0.23987E-07	0.0000	0.50287E-07
7	-0.88700E-07	0.48987E-07	0.0000	0.10133E-06
8	0.81698E-07	0.32545E-06	0.0000	0.33555E-06

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES

NODE	3	1	0	1
VALUE	0.11737E-06	0.35599E-06	0.0000	0.36248E-06





PRINT U NODAL SOLUTION PER NODE

\*\*\*\*\* POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING \*\*\*\*\*

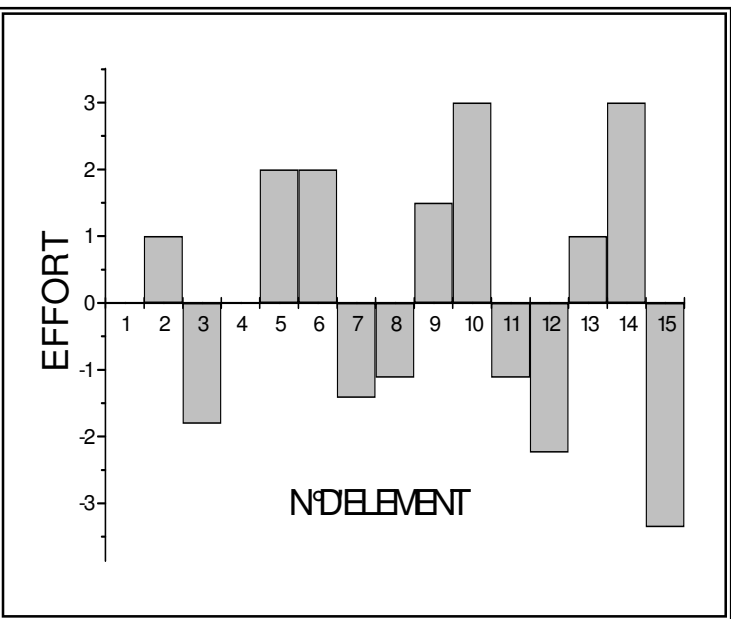
LOAD STEP= 2 SUBSTEP= 1  
TIME= 2.0000 LOAD CASE= 0

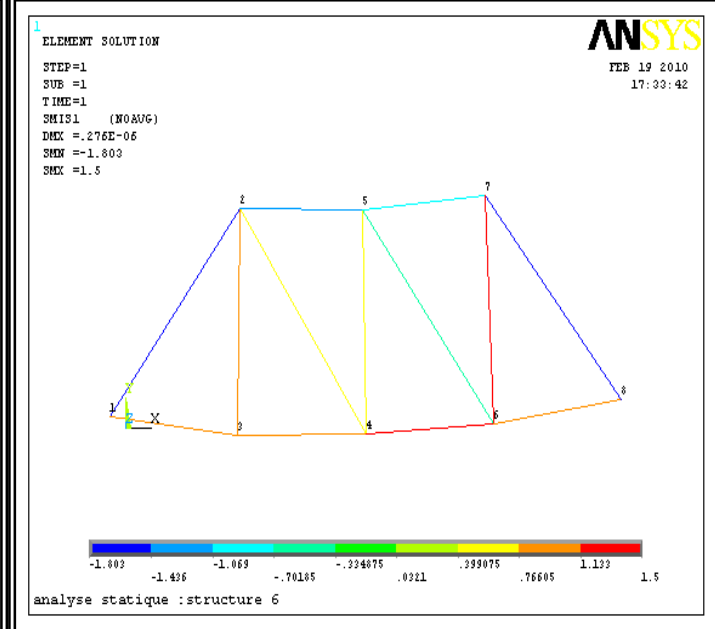
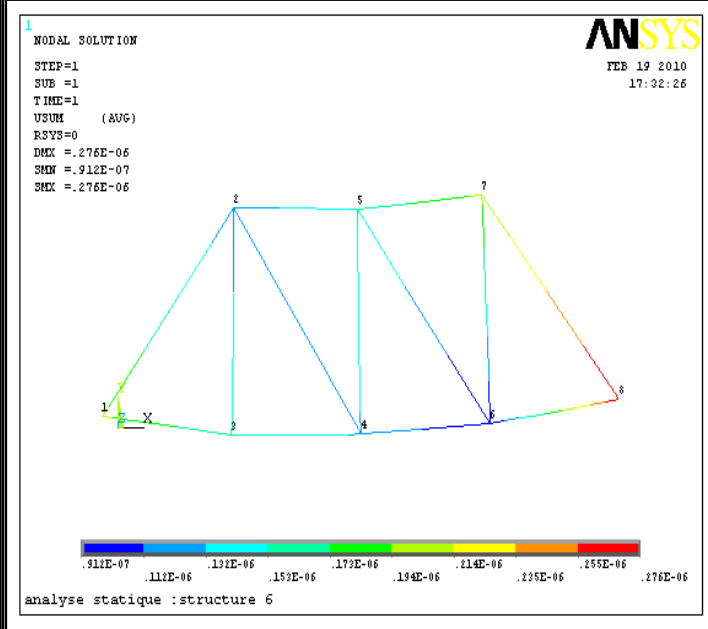
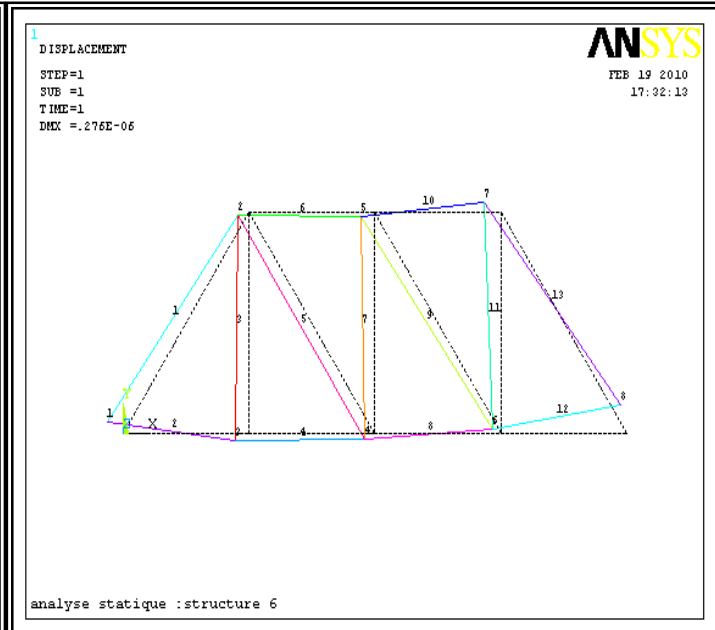
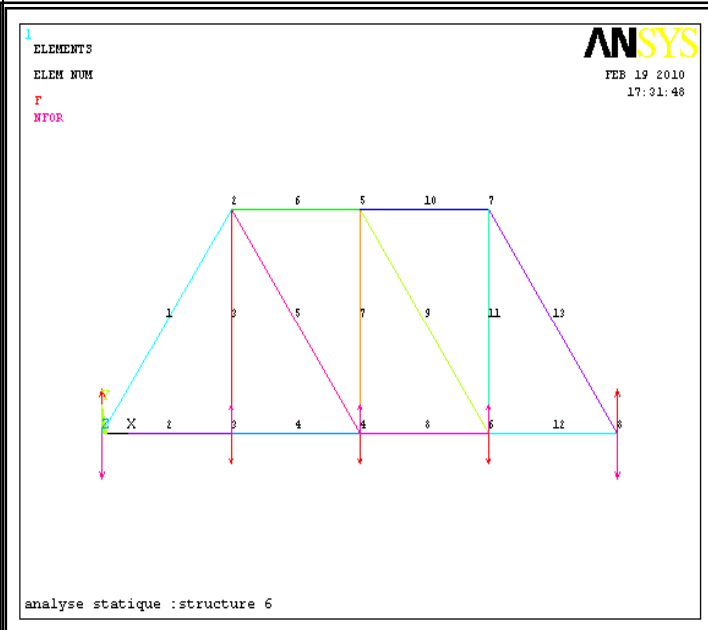
THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

NODE	UX	UY	UZ	USUM
1	-0.13464E-06	0.31227E-06	0.0000	0.34005E-06
2	0.31984E-06	0.31227E-06	0.0000	0.44700E-06
3	-0.10964E-06	-0.63210E-07	0.0000	0.12655E-06
4	0.16960E-06	0.11790E-07	0.0000	0.17001E-06
5	-0.59638E-07	0.28572E-06	0.0000	0.29187E-06
6	0.46585E-08	-0.24822E-06	0.0000	0.24826E-06
7	0.15362E-07	-0.30882E-06	0.0000	0.30921E-06
8	-0.89272E-07	0.29632E-06	0.0000	0.30948E-06
9	0.90362E-07	0.27258E-06	0.0000	0.28716E-06

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES

NODE	2	1	0	2
VALUE	0.31984E-06	0.31227E-06	0.0000	0.44700E-06





PRINT U NODAL SOLUTION PER NODE

\*\*\*\*\* POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING \*\*\*\*\*

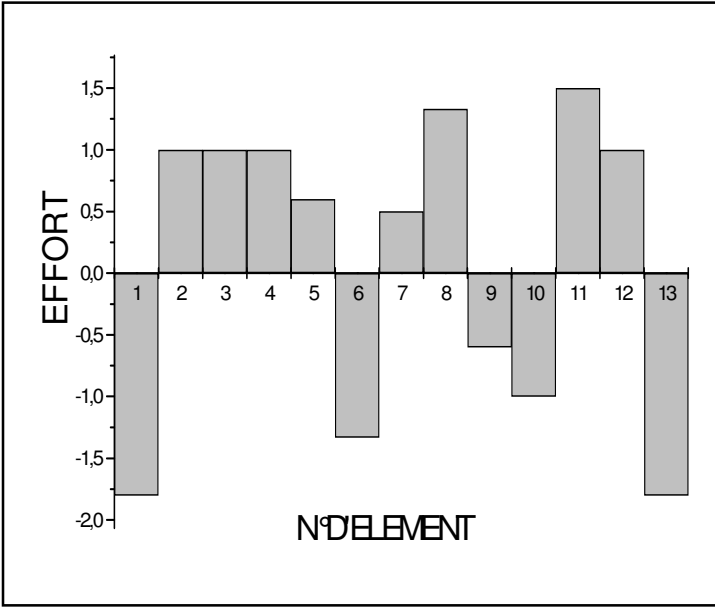
LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1  
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

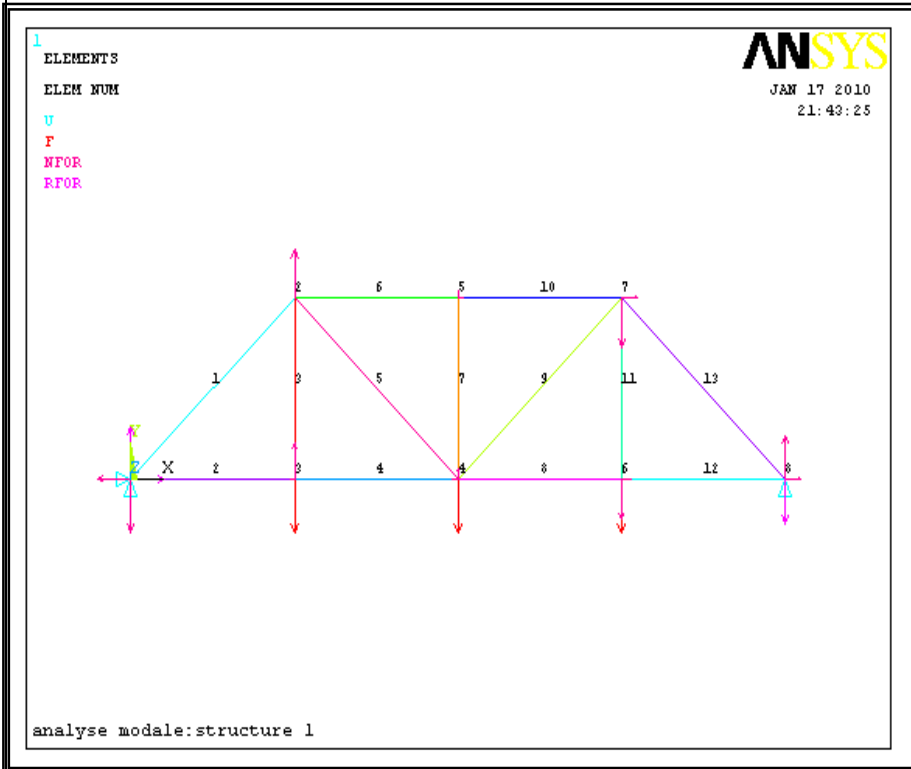
NODE	UX	UY	UZ	USUM
1	-0.16626E-06	0.10593E-06	0.0000	0.19714E-06
2	-0.11618E-06	-0.25102E-07	0.0000	0.11886E-06
3	-0.14126E-06	-0.62602E-07	0.0000	0.15451E-06
4	-0.11626E-06	-0.57704E-07	0.0000	0.12979E-06
5	-0.14951E-06	-0.38954E-07	0.0000	0.15450E-06
6	-0.82923E-07	0.37988E-07	0.0000	0.91210E-07
7	-0.17451E-06	0.94238E-07	0.0000	0.19833E-06
8	-0.57923E-07	0.26961E-06	0.0000	0.27577E-06

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES

NODE	7	8	0	8
VALUE	-0.17451E-06	0.26961E-06	0.0000	0.27577E-06



Structure1



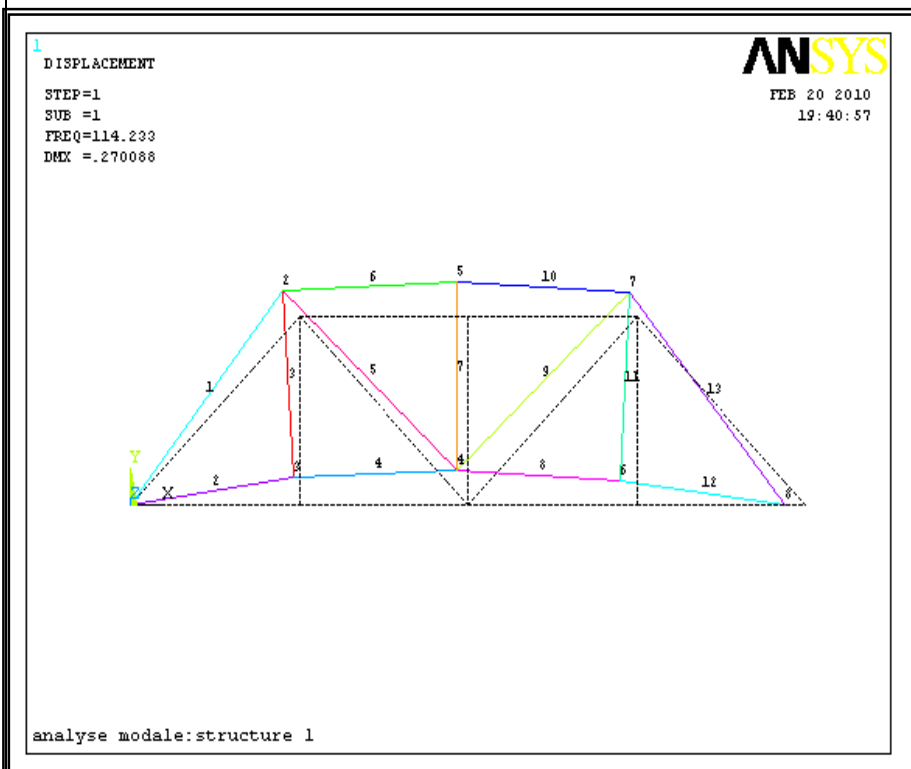
ANSYS

JAN 17 2010  
21:43:25

\*\*\*\*\* INDEX OF DATA SETS ON RESULTS FILE \*\*\*\*\*

SET	TIME/FREQ	LOAD STEP	SUBSTEP	CUMULATIVE
1	114.23	1	1	1
2	195.51	1	2	2
3	327.34	1	3	3

Model



PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT

\*\*\*\*\* POST1 ELEMENT TABLE LISTING \*\*\*\*\*

STAT	CURRENT
ELEM	SMIS1
1	0.12087E+07
2	-0.18870E+07
3	-0.21604E+06
4	-0.18190E+07
5	-0.40325E+06
6	0.13444E+07
7	0.28642E+06
8	-0.13459E+07
9	-0.76466E+06
10	0.14592E+07
11	-0.20082E+06
12	-0.12022E+07
13	0.15164E+07

MINIMUM VALUES

ELEM 2

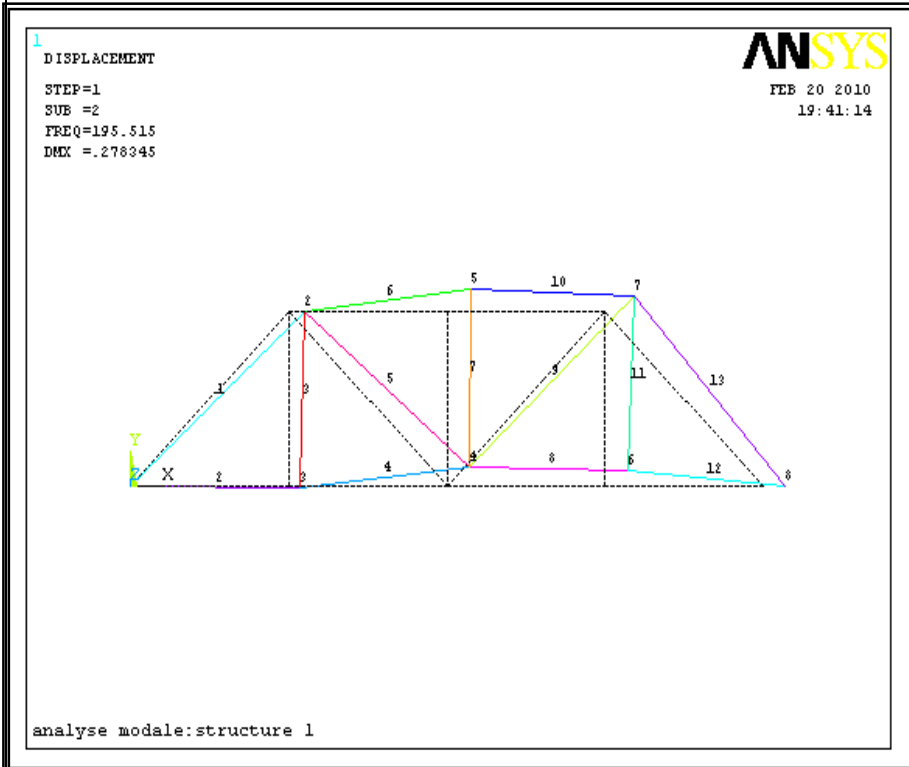
VALUE -0.18870E+07

MAXIMUM VALUES

ELEM 13

VALUE 0.15164E+07

Mode2



PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT

\*\*\*\*\* POST1 ELEMENT TABLE LISTING \*\*\*\*\*

STAT	CURRENT
ELEM	SMIS1
1	-0.53018E+07
2	0.11977E+07
3	0.25013E+07
4	0.94398E+06
5	-0.29233E+07
6	-0.17037E+07
7	-0.47312E+06
8	-0.48195E+07
9	0.45688E+07
10	-0.13595E+07
11	-0.27608E+07
12	-0.41557E+07
13	0.43024E+07

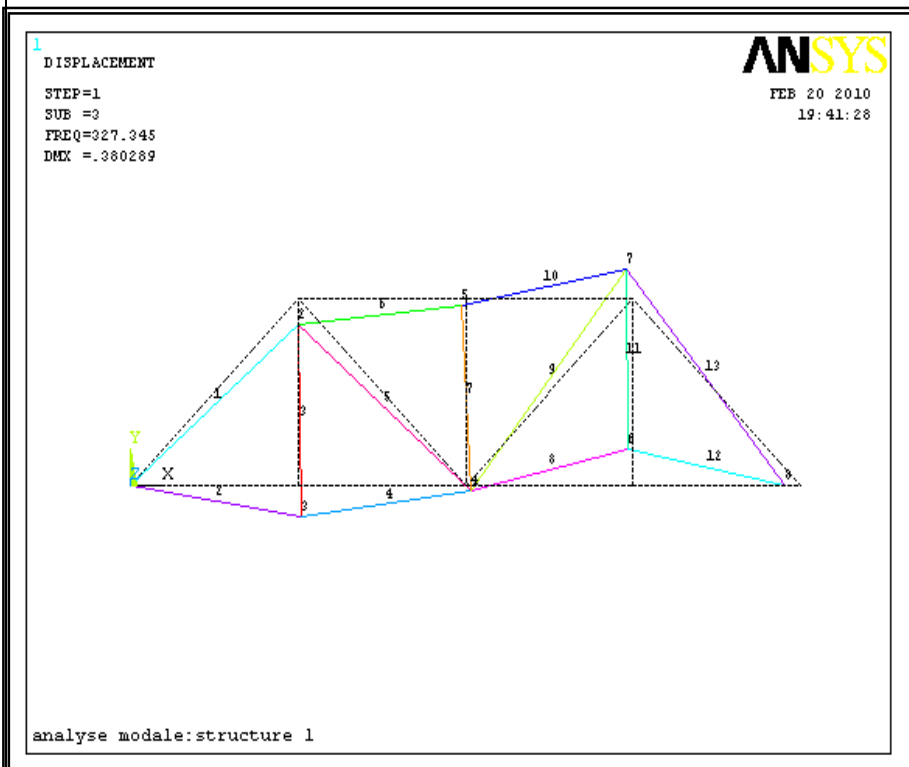
MINIMUM VALUES

ELEM 1  
VALUE -0.53018E+07

MAXIMUM VALUES

ELEM 9  
VALUE 0.45688E+07

Mode3



PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT

\*\*\*\*\* POST1 ELEMENT TABLE LISTING \*\*\*\*\*

STAT	CURRENT
ELEM	SMIS1
1	0.25441E+07
2	0.40253E+07
3	-38775.
4	0.36569E+07
5	-0.23227E+07
6	0.26911E+07
7	0.51778E+06
8	0.50174E+06
9	0.29600E+06
10	0.19768E+07
11	-0.40384E+06
12	-0.23751E+06
13	0.11862E+07

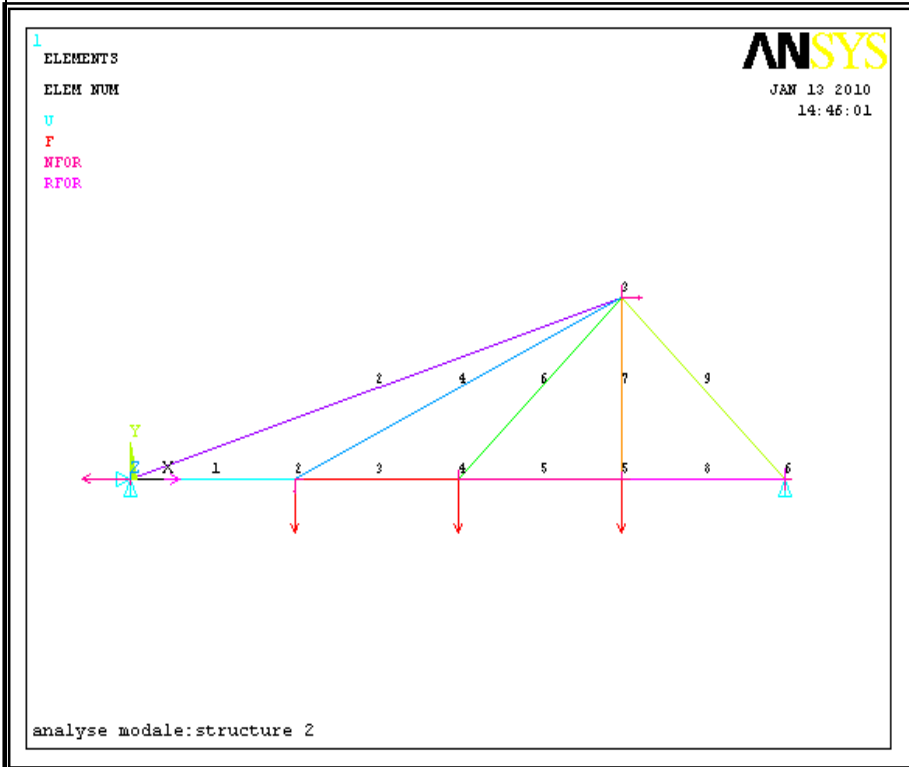
MINIMUM VALUES

ELEM 5  
VALUE -0.23227E+07

MAXIMUM VALUES

ELEM 2  
VALUE 0.40253E+07

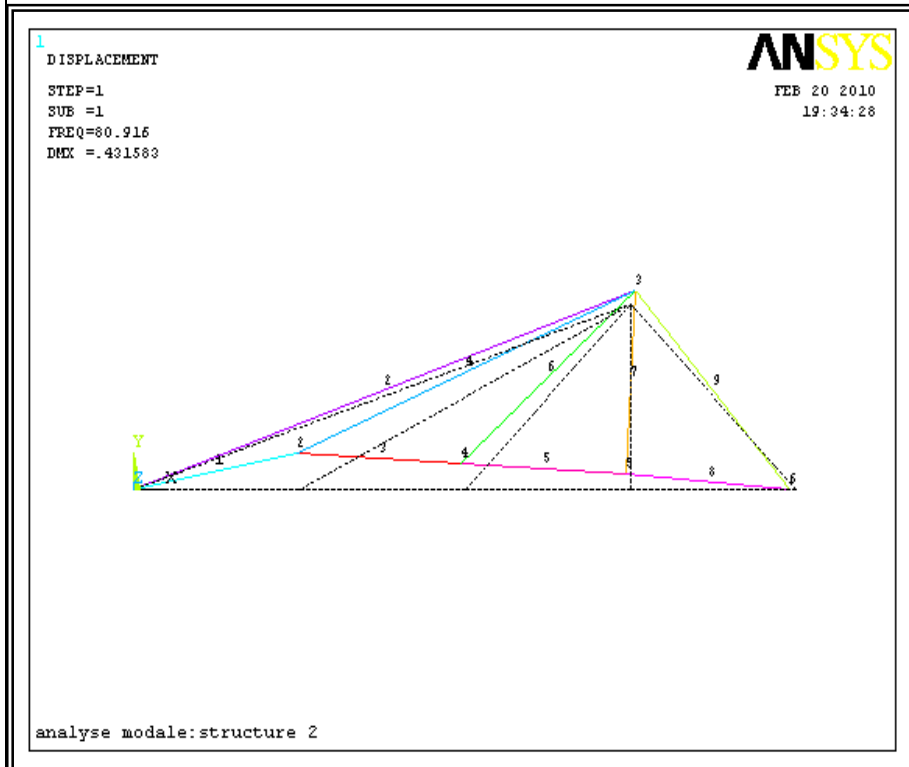
Structure 2



\*\*\*\*\* INDEX OF DATA SETS ON RESULTS FILE \*\*\*\*\*

SET	TIME/FREQ	LOAD STEP	SUBSTEP	CUMULATIVE
1	80.916	1	1	1
2	184.22	1	2	2
3	280.65	1	3	3

Model



PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT

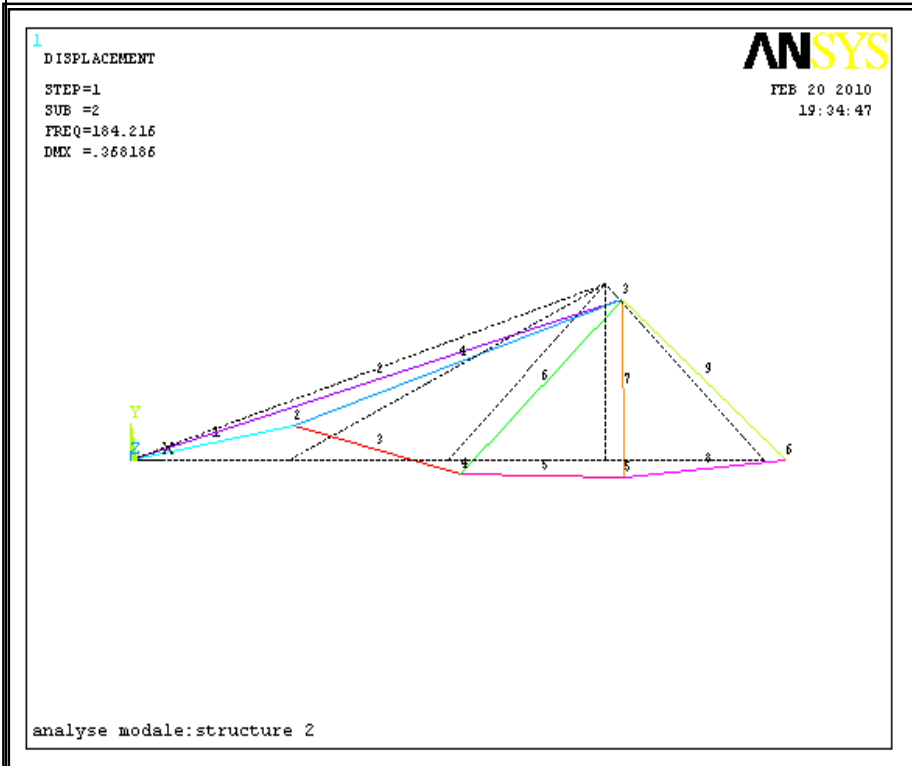
\*\*\*\*\* POST1 ELEMENT TABLE LISTING \*\*\*\*\*

STAT	CURRENT
ELEM	SMIS1
1	-0.13328E+07
2	0.13585E+07
3	-0.73597E+06
4	-0.65177E+06
5	-0.52045E+06
6	-0.26940E+06
7	-99835.
8	-0.48936E+06
9	0.65809E+06

MINIMUM VALUES  
ELEM 1  
VALUE -0.13328E+07

MAXIMUM VALUES  
ELEM 2  
VALUE 0.13585E+07

Mode2



PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT

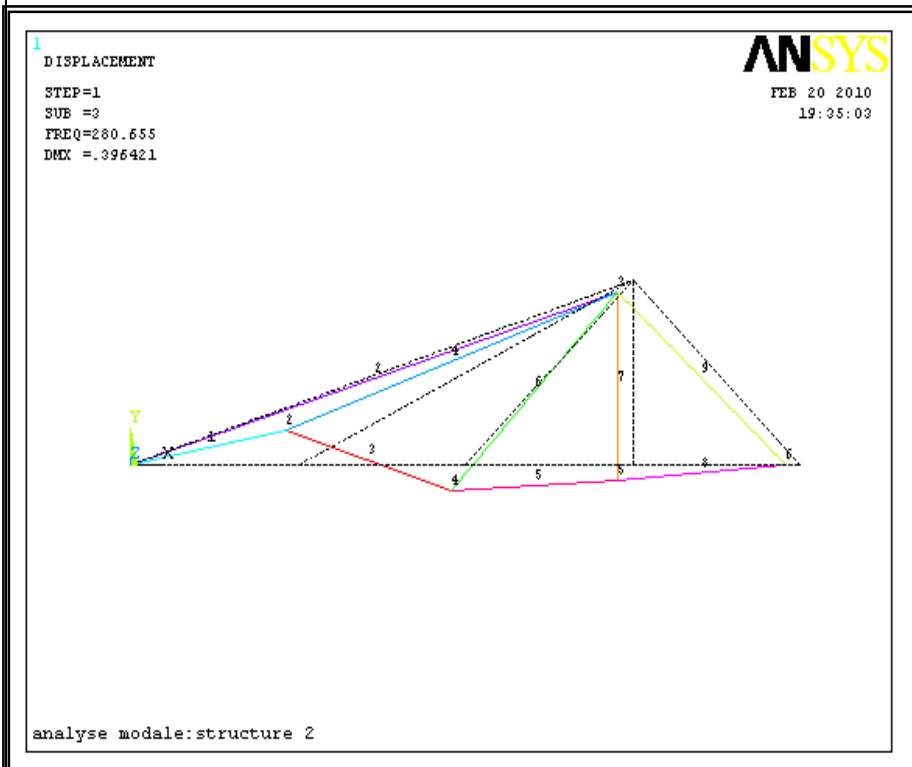
\*\*\*\*\* POST1 ELEMENT TABLE LISTING \*\*\*\*\*

STAT	CURRENT
ELEM	SMIS1
1	0.21799E+07
2	0.16709E+07
3	0.36105E+07
4	-0.20085E+07
5	0.27082E+07
6	0.51625E+06
7	0.49179E+06
8	0.20496E+07
9	-0.20248E+07

MINIMUM VALUES  
ELEM 9  
VALUE -0.20248E+07

MAXIMUM VALUES  
ELEM 3  
VALUE 0.36105E+07

Mode3



PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT

\*\*\*\*\* POST1 ELEMENT TABLE LISTING \*\*\*\*\*

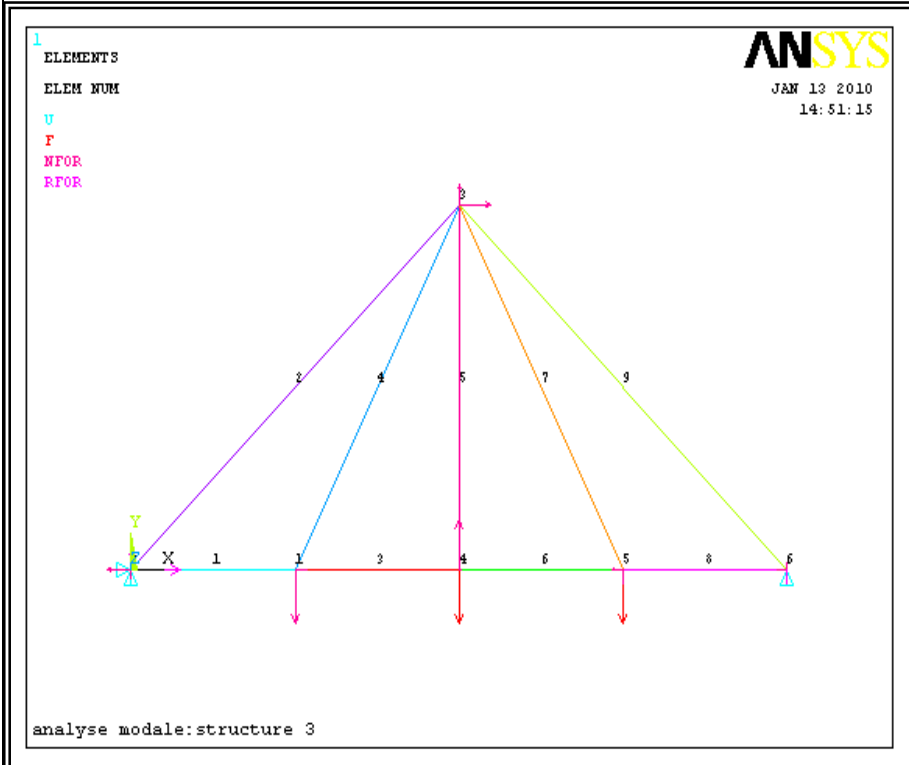
STAT	CURRENT
ELEM	SMIS1
1	-0.60482E+07
2	-0.27639E+07
3	-0.44550E+06
4	-0.45781E+07
5	-0.56956E+06
6	0.21248E+07
7	0.11752E+07
8	0.70262E+06
9	-0.23782E+07

MINIMUM VALUES  
ELEM 1  
VALUE -0.60482E+07

MAXIMUM VALUES  
ELEM 6  
VALUE 0.21248E+07



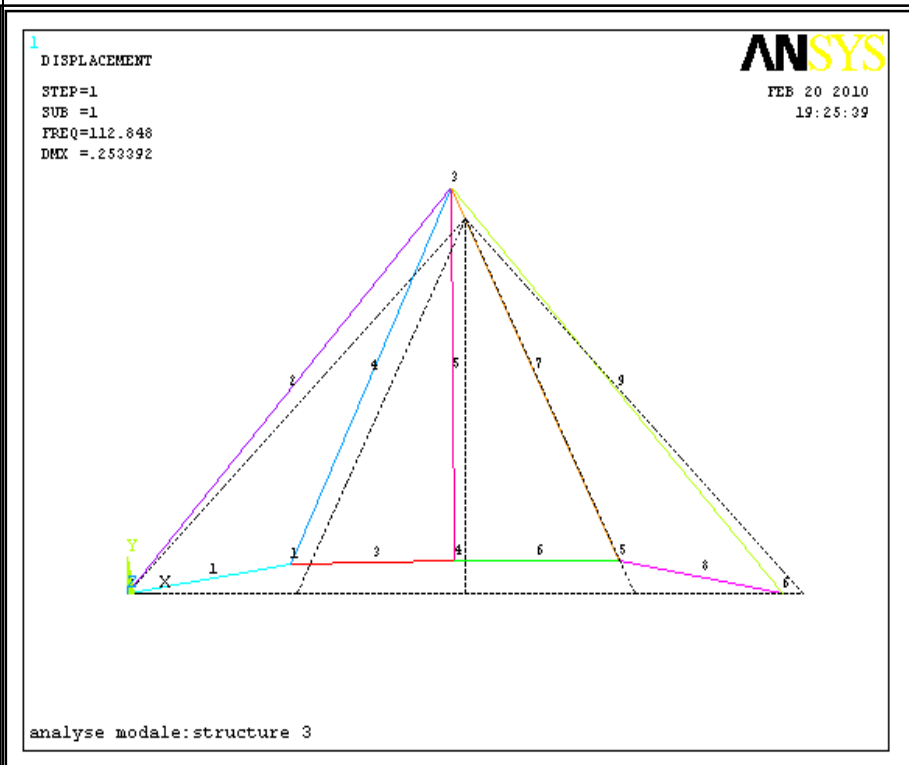
Structure3



\*\*\*\*\* INDEX OF DATA SETS ON RESULTS FILE \*\*\*\*\*

SET	TIME/FREQ	LOAD STEP	SUBSTEP	CUMULATIVE
1	112.85	1	1	1
2	174.68	1	2	2
3	281.92	1	3	3

Model



PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT

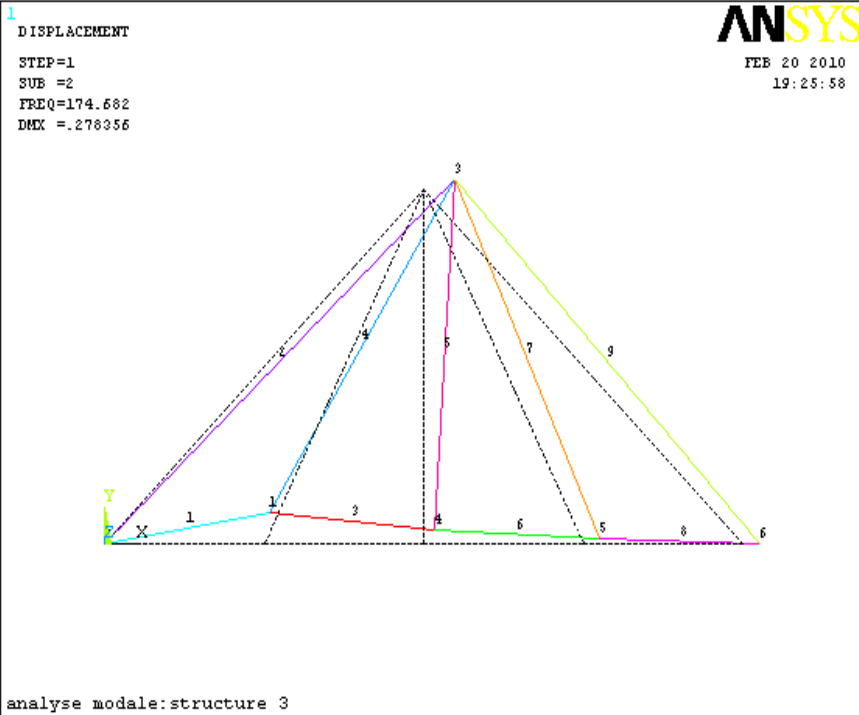
\*\*\*\*\* POST1 ELEMENT TABLE LISTING \*\*\*\*\*

STAT	CURRENT
ELEM	SMIS1
1	-0.17718E+07
2	0.93222E+06
3	-0.15275E+07
4	-0.33889E+06
5	-0.34126E+06
6	-0.13902E+07
7	-0.37957E+06
8	-0.13659E+07
9	0.16359E+07

MINIMUM VALUES  
ELEM 1  
VALUE -0.17718E+07

MAXIMUM VALUES  
ELEM 9  
VALUE 0.16359E+07

Mode2



PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT

\*\*\*\*\* POST1 ELEMENT TABLE LISTING \*\*\*\*\*

STAT	CURRENT
ELEM	SMIS1
1	0.19453E+07
2	0.35348E+07
3	0.19832E+07
4	-0.86062E+06
5	-0.43040E+06
6	0.15112E+07
7	-0.23268E+06
8	0.77887E+06
9	-0.17787E+06

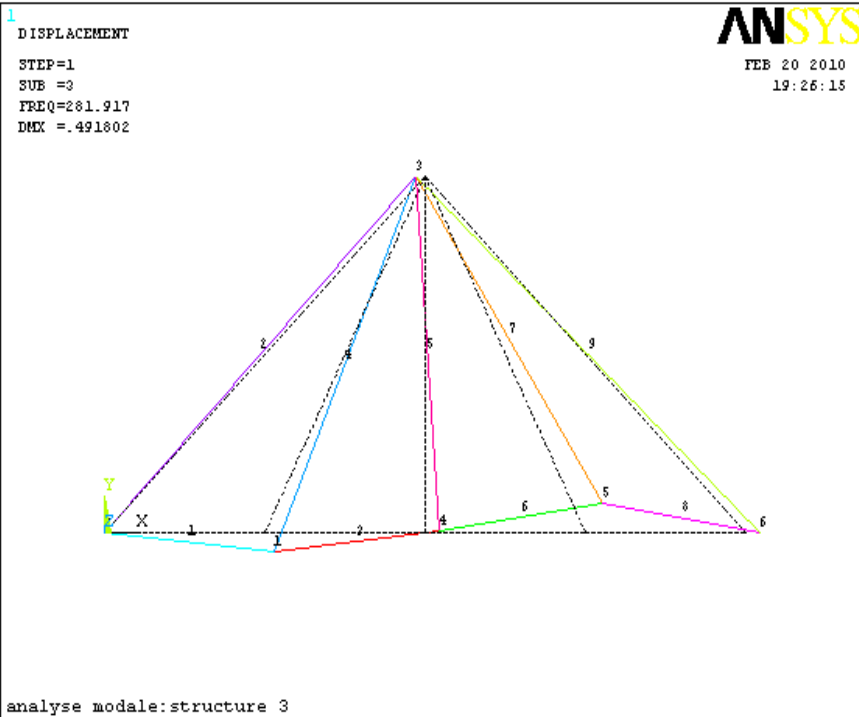
MINIMUM VALUES

ELEM	4
VALUE	-0.86062E+06

MAXIMUM VALUES

ELEM	2
VALUE	0.35348E+07

Mode3



PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT

\*\*\*\*\* POST1 ELEMENT TABLE LISTING \*\*\*\*\*

STAT	CURRENT
ELEM	SMIS1
1	0.51696E+07
2	-0.14828E+07
3	0.34597E+07
4	0.20341E+07
5	-0.22461E+06
6	0.19689E+07
7	-0.32426E+07
8	-0.14099E+07
9	0.38473E+07

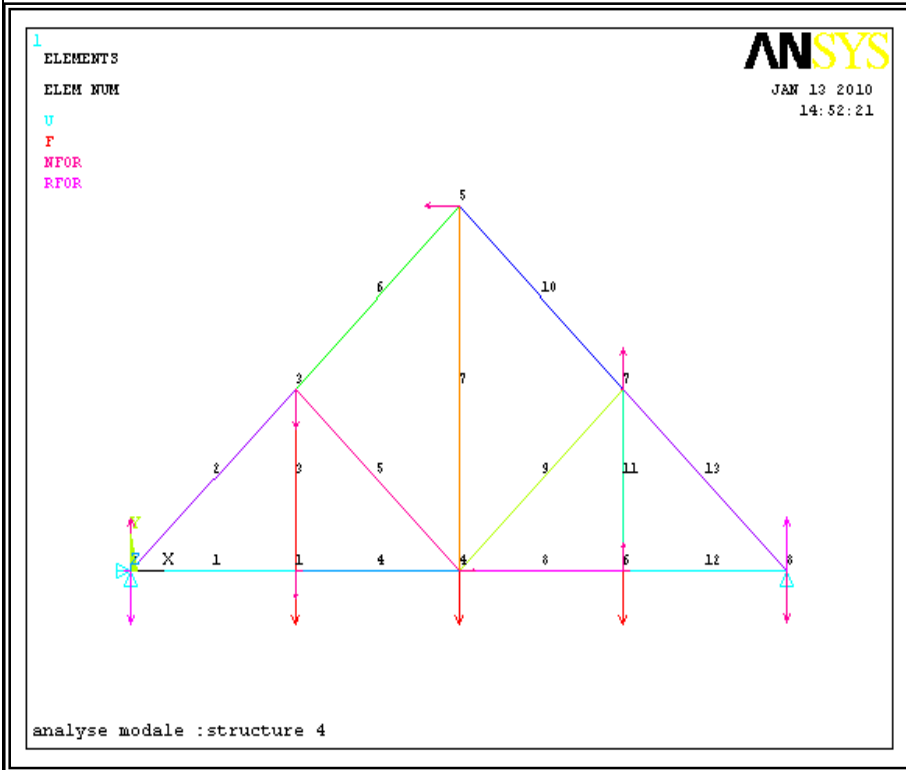
MINIMUM VALUES

ELEM	7
VALUE	-0.32426E+07

MAXIMUM VALUES

ELEM	1
VALUE	0.51696E+07

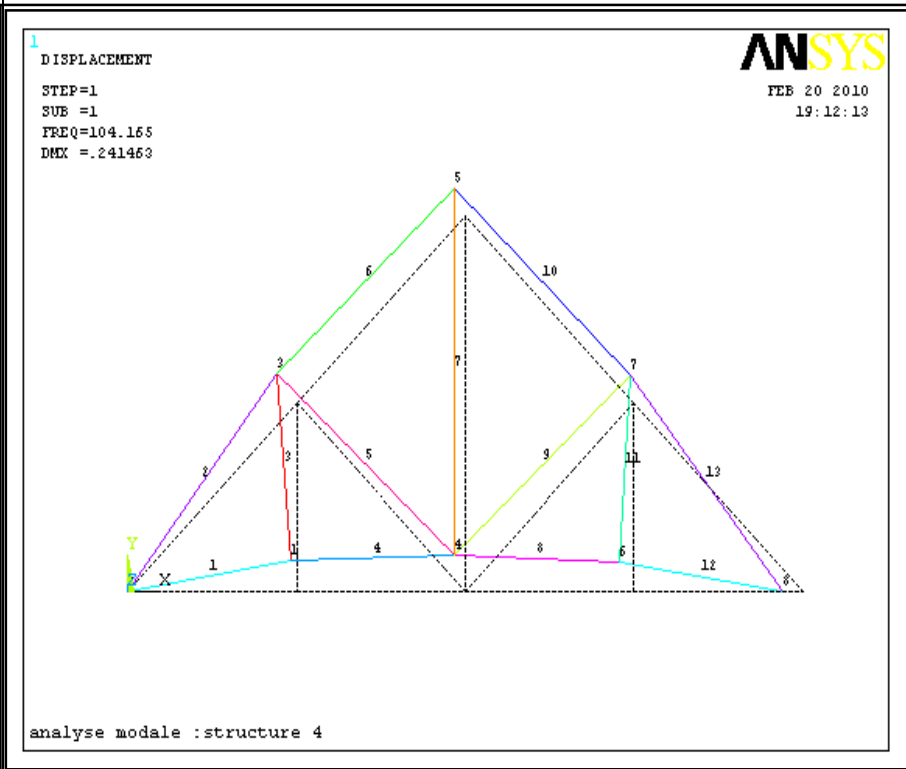
Structure4



\*\*\*\*\* INDEX OF DATA SETS ON RESULTS FILE \*\*\*\*\*

SET	TIME/FREQ	LOAD STEP	SUBSTEP	CUMULATIVE
1	104.16	1	1	1
2	181.78	1	2	2
3	281.91	1	3	3

Model



PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT

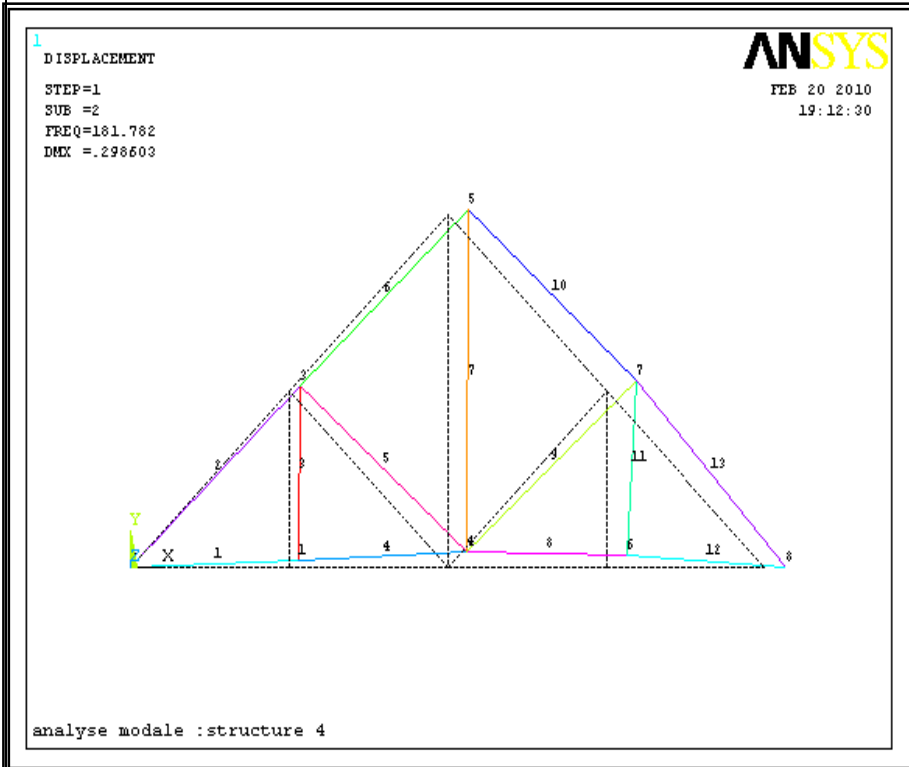
\*\*\*\*\* POST1 ELEMENT TABLE LISTING \*\*\*\*\*

STAT	CURRENT
ELEM	SMIS1
1	-0.15732E+07
2	0.10627E+07
3	-0.17903E+06
4	-0.15225E+07
5	0.48302E+06
6	0.85184E+06
7	-0.10325E+07
8	-0.12005E+07
9	0.27991E+06
10	0.10366E+07
11	-0.17449E+06
12	-0.11021E+07
13	0.14337E+07

MINIMUM VALUES  
ELEM 1  
VALUE -0.15732E+07

MAXIMUM VALUES  
ELEM 13  
VALUE 0.14337E+07

Mode 2



PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT

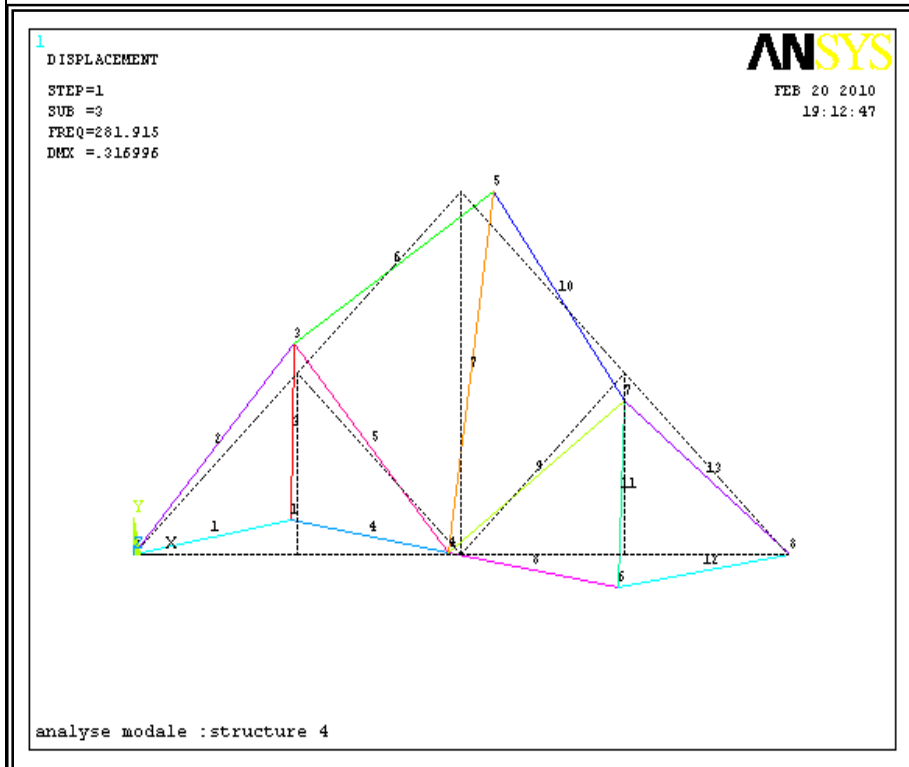
\*\*\*\*\* POST1 ELEMENT TABLE LISTING \*\*\*\*\*

STAT	CURRENT
ELEM	SMIS1
1	0.36163E+07
2	0.27695E+07
3	-0.15532E+06
4	0.33393E+07
5	-0.10178E+06
6	0.20899E+07
7	-0.17019E+07
8	0.99920E+06
9	0.14685E+07
10	0.72699E+06
11	-0.27199E+06
12	0.36436E+06
13	0.25997E+06

MINIMUM VALUES  
 ELEM 7  
 VALUE -0.17019E+07

MAXIMUM VALUES  
 ELEM 1  
 VALUE 0.36163E+07

Mode 3



PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT

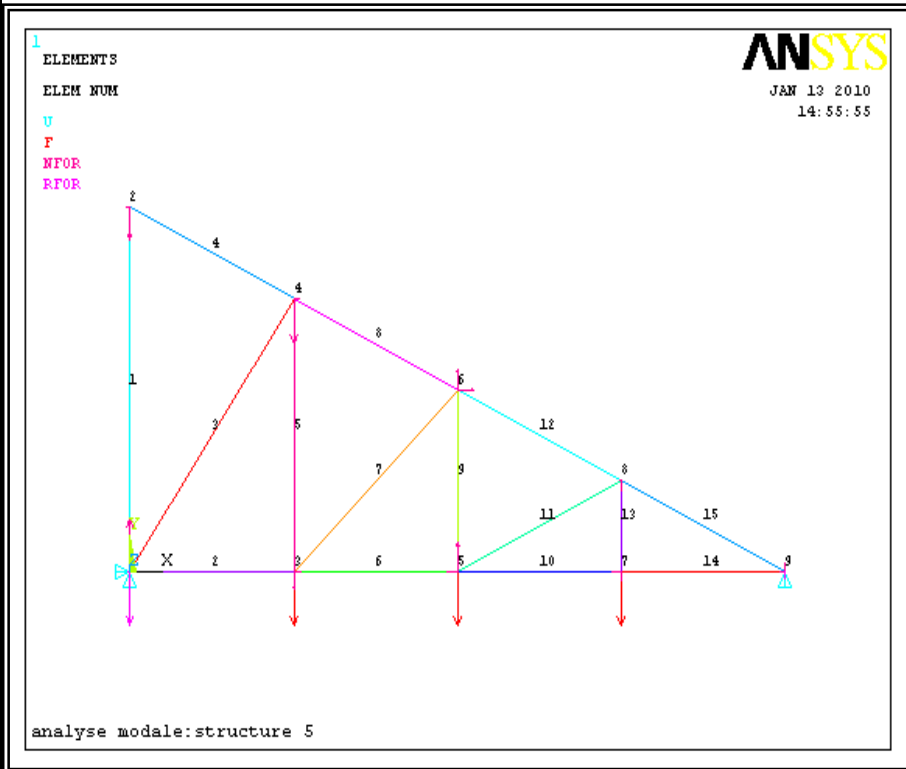
\*\*\*\*\* POST1 ELEMENT TABLE LISTING \*\*\*\*\*

STAT	CURRENT
ELEM	SMIS1
1	-0.27967E+07
2	0.45746E+07
3	-0.16772E+07
4	-0.23255E+07
5	0.29572E+07
6	0.17064E+07
7	-0.16605E+06
8	0.28097E+07
9	-0.28040E+07
10	-0.14914E+07
11	0.16604E+07
12	0.31891E+07
13	-0.44685E+07

MINIMUM VALUES  
 ELEM 13  
 VALUE -0.44685E+07

MAXIMUM VALUES  
 ELEM 2  
 VALUE 0.45746E+07

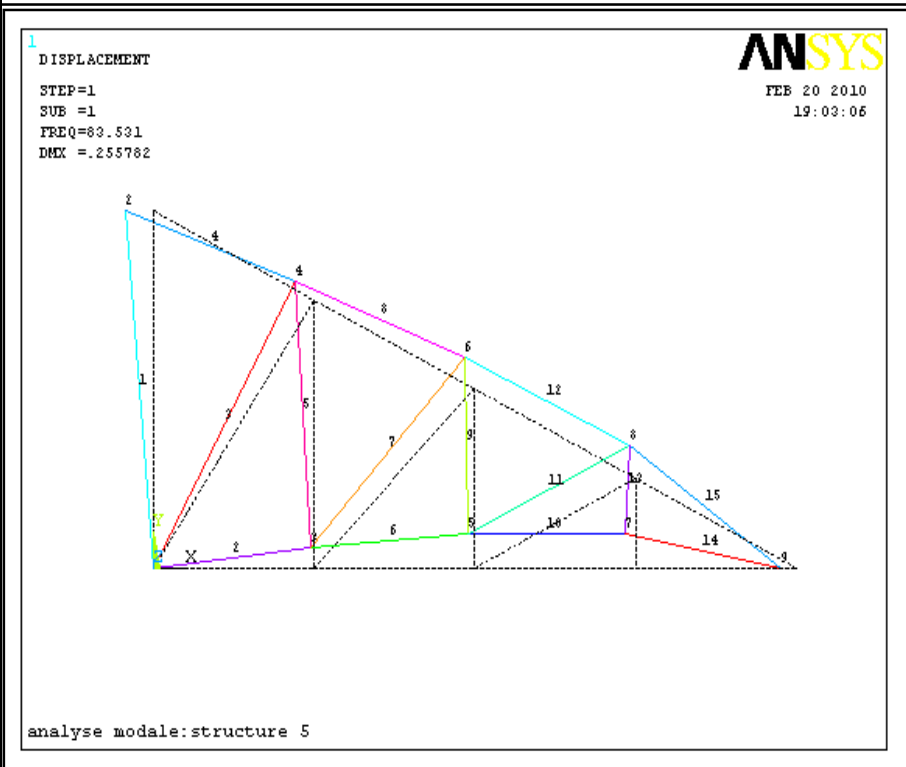
Structure5



\*\*\*\*\* INDEX OF DATA SETS ON RESULTS FILE \*\*\*\*\*

SET	TIME/FREQ	LOAD STEP	SUBSTEP	CUMULATIVE
1	83.531	1	1	1
2	191.18	1	2	2
3	282.64	1	3	3

Mode1



PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT

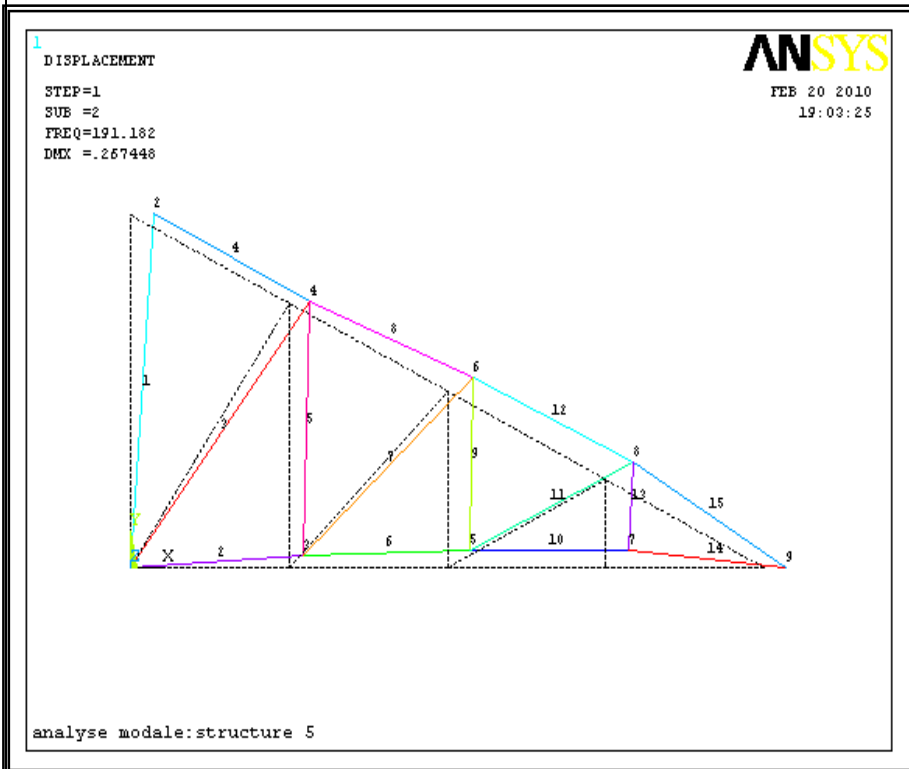
\*\*\*\*\* POST1 ELEMENT TABLE LISTING \*\*\*\*\*

STAT	CURRENT
ELEM	SMIS1
1	-45914.
2	-0.83719E+06
3	0.51129E+06
4	0.12335E+06
5	-0.50415E+06
6	-0.11405E+07
7	0.48931E+06
8	0.60358E+06
9	-0.34047E+06
10	-0.13646E+07
11	0.30202E+06
12	0.10738E+07
13	-0.11296E+06
14	-0.13211E+07
15	0.14268E+07

MINIMUM VALUES  
ELEM 10  
VALUE -0.13646E+07

MAXIMUM VALUES  
ELEM 15  
VALUE 0.14268E+07

Mode2



PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT

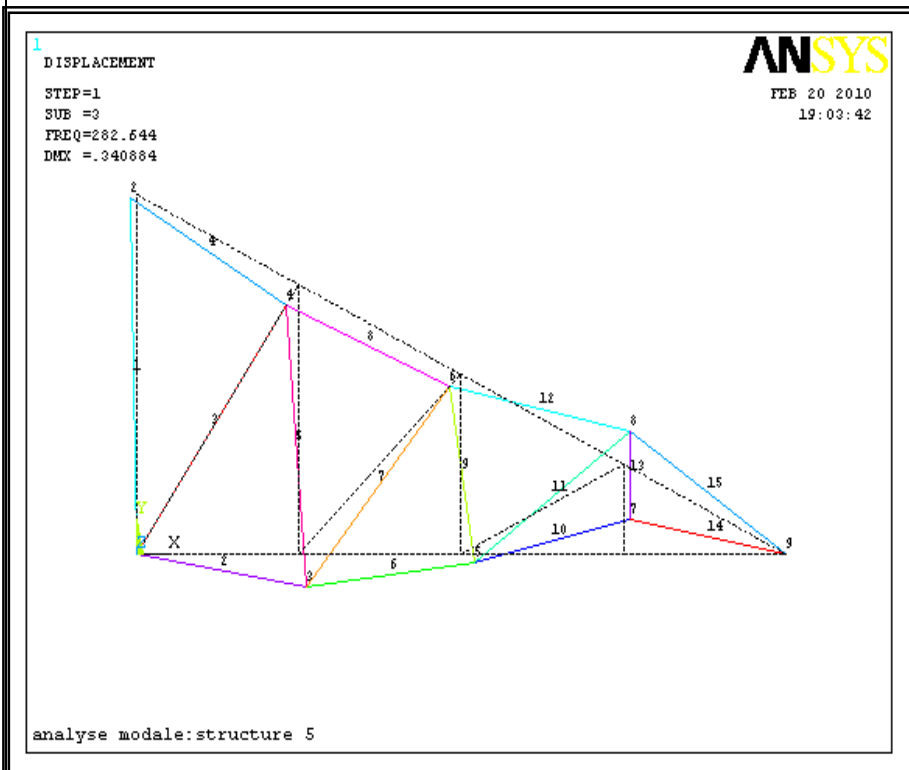
\*\*\*\*\* POST1 ELEMENT TABLE LISTING \*\*\*\*\*

STAT	CURRENT
ELEM	SMIS1
1	0.30229E+06
2	0.48420E+07
3	0.23250E+07
4	-0.58556E+06
5	-0.19553E+07
6	0.25850E+07
7	0.21604E+07
8	-0.21238E+06
9	-0.12502E+07
10	0.39697E+06
11	0.14674E+07
12	0.32597E+06
13	-0.32722E+06
14	-0.15892E+06
15	0.71321E+06

MINIMUM VALUES  
ELEM 5  
VALUE -0.19553E+07

MAXIMUM VALUES  
ELEM 2  
VALUE 0.48420E+07

Mode3



PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT

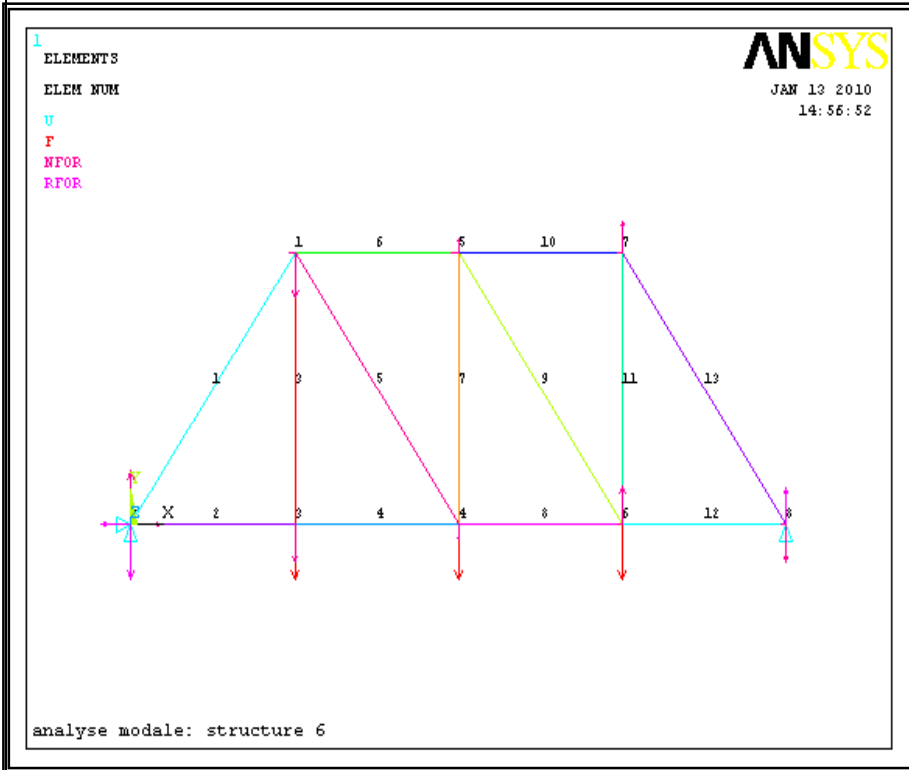
\*\*\*\*\* POST1 ELEMENT TABLE LISTING \*\*\*\*\*

STAT	CURRENT
ELEM	SMIS1
1	-0.54323E+06
2	0.28540E+07
3	-0.53124E+07
4	0.48971E+06
5	0.29129E+07
6	0.24623E+07
7	26690.
8	-0.13530E+07
9	-0.15884E+07
10	-0.21836E+07
11	0.40930E+07
12	-0.38121E+06
13	-0.14426E+07
14	-0.26549E+07
15	0.31596E+07

MINIMUM VALUES  
ELEM 3  
VALUE -0.53124E+07

MAXIMUM VALUES  
ELEM 11  
VALUE 0.40930E+07

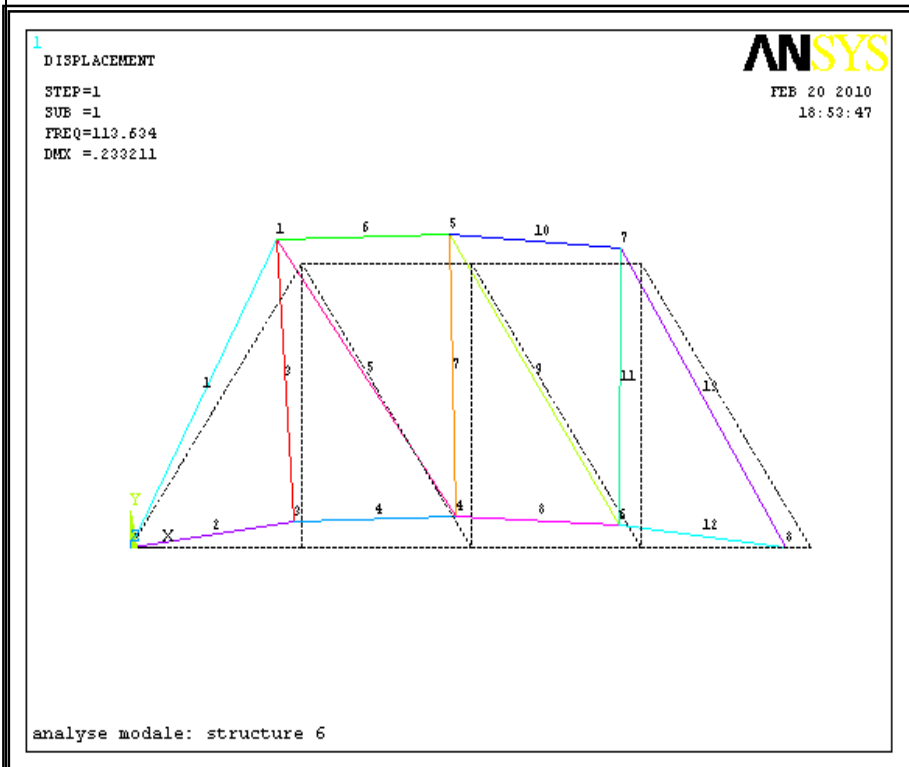
Structure6



\*\*\*\*\* INDEX OF DATA SETS ON RESULTS FILE \*\*\*\*\*

SET	TIME/FREQ	LOAD STEP	SUBSTEP	CUMULATIVE
1	113.63	1	1	1
2	169.02	1	2	2
3	309.27	1	3	3

Model



PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT

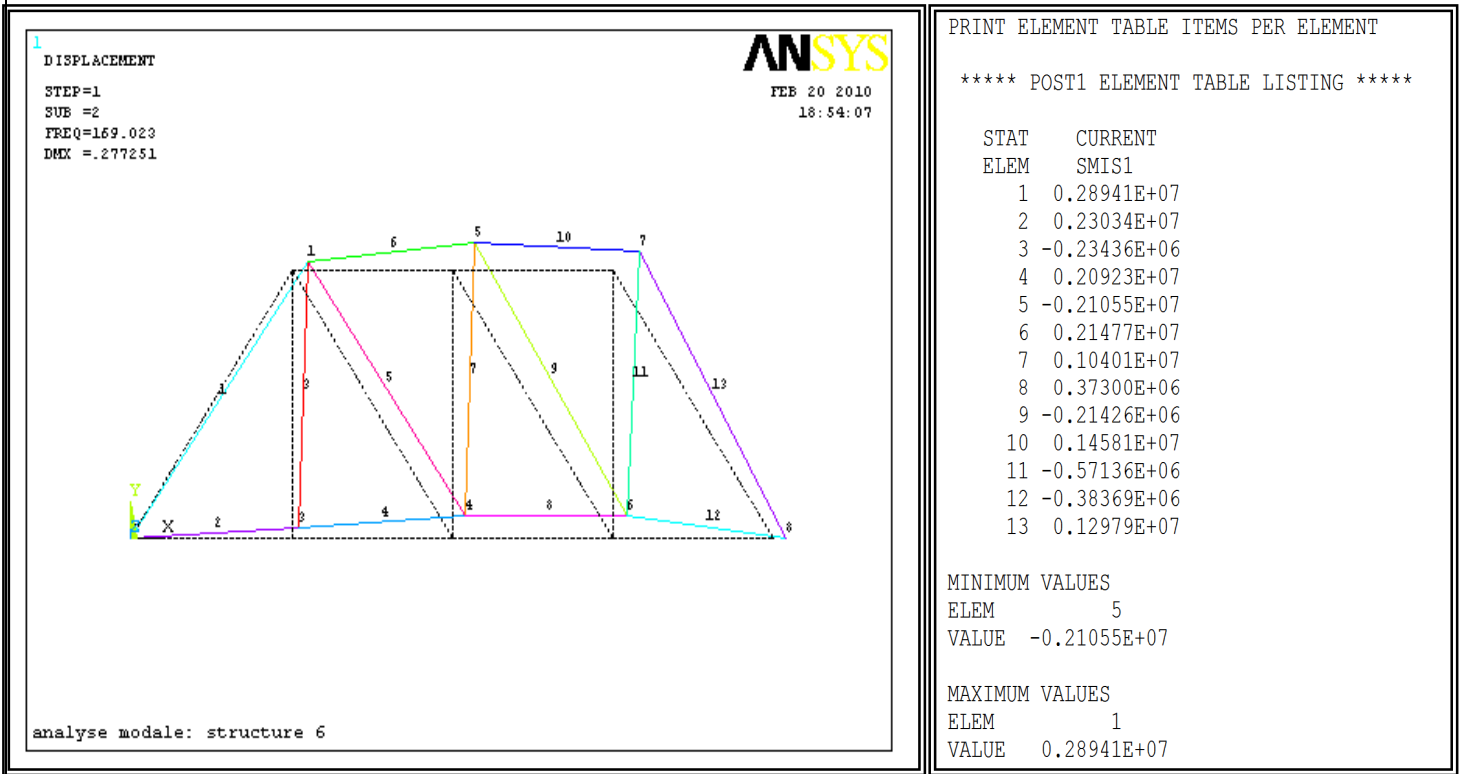
\*\*\*\*\* POST1 ELEMENT TABLE LISTING \*\*\*\*\*

STAT	CURRENT
ELEM	SMIS1
1	0.67006E+06
2	-0.20665E+07
3	-0.20024E+06
4	-0.19713E+07
5	-18504.
6	0.70873E+06
7	-0.36752E+06
8	-0.17425E+07
9	0.87087E+06
10	0.53243E+06
11	-0.10041E+07
12	-0.95591E+06
13	0.14025E+07

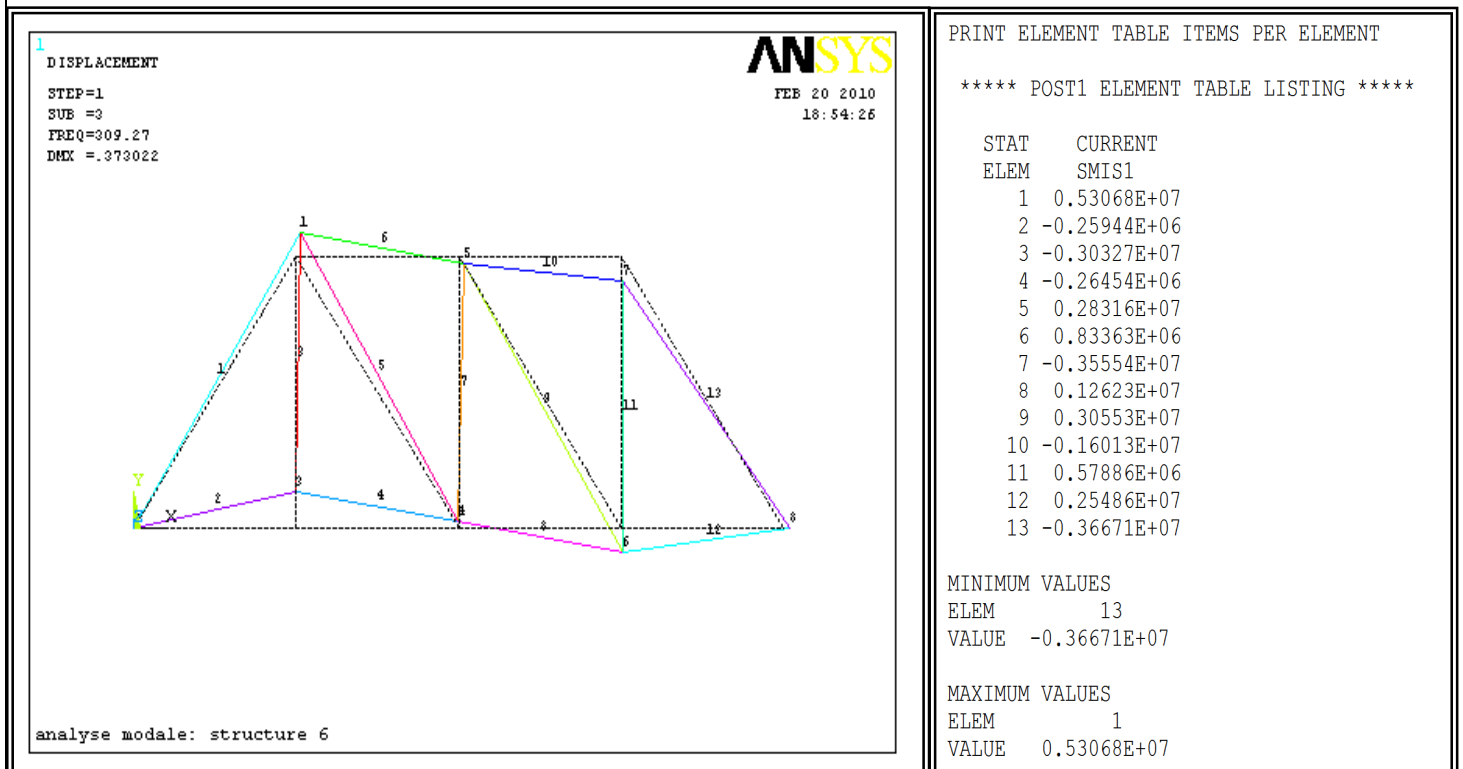
MINIMUM VALUES  
 ELEM 2  
 VALUE -0.20665E+07

MAXIMUM VALUES  
 ELEM 13  
 VALUE 0.14025E+07

Mode2



Mode3





```
/BATCH
! /COM,ANSYS RELEASE 11.0      UP20070125      17:01:46      03/11/2010
/input,menust,tmp,'',,,,,,,,,,,,,,1
! /GRA,POWER
! /GST,ON
! /PLO,INFO,3
! /GRO,CURL,ON
! /CPLANE,1
! /REPLOT,RESIZE
WPSTYLE,,,,,,,,,0
/TITLE,OPTIMISATION D'UNE STRUCTURE TREILLIS
*SET,A1,2E-4
*SET,A2,2E-4
*SET,A3,2E-4
*SET,A4,2E-4
*SET,A5,2E-4
*SET,A6,2E-4
*SET,A7,2E-4
*SET,A8,2E-4
*SET,A9,2E-4
*SET,A10,2E-4
*SET,A11,2E-4
*SET,A12,2E-4
*SET,A13,2E-4
/NOPR
/PMETH,OFF,0
KEYW,PR_SET,1
KEYW,PR_STRUC,1
KEYW,PR_THERM,0
KEYW,PR_FLUID,0
KEYW,PR_ELMAG,0
KEYW,MAGNOD,0
KEYW,MAGEDG,0
KEYW,MAGHFE,0
KEYW,MAGELC,0
KEYW,PR_MULTI,0
KEYW,PR_CFD,0
/GO
! /COM,
! /COM,Preferences for GUI filtering have been set to display:
! /COM, Structural
/PREP7
ET,1,LINK1
R,1,A1, ,
R,2,A2,0,
R,3,A3,0,
R,4,A4,0,
R,5,A5,0,
R,6,A6,0,
R,7,A7,0,
R,8,A8,0,
R,9,A9,0,
R,10,A10,0,
R,11,A11,0,
R,12,A12,0,
R,13,A13,0,
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,2E11
MPDATA,PRXY,1,,.3
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
```

```

MPDATA,DENS,1,,7850
K,1,1,1.5,,
K,2,0,0,,
K,3,1,0,,
K,4,2,0,,
K,5,2,1.5,,
K,6,3,0,,
K,7,3,1.5,,
K,8,4,0,,
L,    2,    1
L,    2,    3
L,    3,    1
L,    3,    4
L,    4,    1
L,    1,    5
L,    5,    4
L,    4,    6
L,    6,    5
L,    5,    7
L,    7,    6
L,    6,    8
L,    8,    7
! /REPLOT
! LPLOT
! /PNUM,KP,1
! /PNUM,LINE,1
! /PNUM,AREA,0
! /PNUM,VOLU,0
! /PNUM,NODE,1
! /PNUM,TABN,0
! /PNUM,SVAL,0
! /NUMBER,0
! /PNUM,ELEM,1
! /REPLOT
CM,_Y,LINE
LSEL, , , ,    1
CM,_Y1,LINE
CMSEL,S,_Y
CMSEL,S,_Y1
LATT,1,1,1, , , ,
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
CM,_Y,LINE
LSEL, , , ,    2
CM,_Y1,LINE
CMSEL,S,_Y
CMSEL,S,_Y1
LATT,1,2,1, , , ,
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
CM,_Y,LINE
LSEL, , , ,    3
CM,_Y1,LINE
CMSEL,S,_Y
CMSEL,S,_Y1
LATT,1,3,1, , , ,
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
CM,_Y,LINE

```

```

LSEL, , , , 4
CM, _Y1, LINE
CMSEL, S, _Y
CMSEL, S, _Y1
LATT, 1, 4, 1, , , ,
CMSEL, S, _Y
CMDELE, _Y
CMDELE, _Y1
CM, _Y, LINE
LSEL, , , , 5
CM, _Y1, LINE
CMSEL, S, _Y
CMSEL, S, _Y1
LATT, 1, 5, 1, , , ,
CMSEL, S, _Y
CMDELE, _Y
CMDELE, _Y1
CM, _Y, LINE
LSEL, , , , 6
CM, _Y1, LINE
CMSEL, S, _Y
CMSEL, S, _Y1
LATT, 1, 6, 1, , , ,
CMSEL, S, _Y
CMDELE, _Y
CMDELE, _Y1
CM, _Y, LINE
LSEL, , , , 7
CM, _Y1, LINE
CMSEL, S, _Y
CMSEL, S, _Y1
LATT, 1, 7, 1, , , ,
CMSEL, S, _Y
CMDELE, _Y
CMDELE, _Y1
CM, _Y, LINE
LSEL, , , , 8
CM, _Y1, LINE
CMSEL, S, _Y
CMSEL, S, _Y1
LATT, 1, 8, 1, , , ,
CMSEL, S, _Y
CMDELE, _Y
CMDELE, _Y1
CM, _Y, LINE
LSEL, , , , 9
CM, _Y1, LINE
CMSEL, S, _Y
CMSEL, S, _Y1
LATT, 1, 9, 1, , , ,
CMSEL, S, _Y
CMDELE, _Y
CMDELE, _Y1
CM, _Y, LINE
LSEL, , , , 10
CM, _Y1, LINE
CMSEL, S, _Y
CMSEL, S, _Y1
LATT, 1, 10, 1, , , ,
CMSEL, S, _Y
CMDELE, _Y
CMDELE, _Y1

```

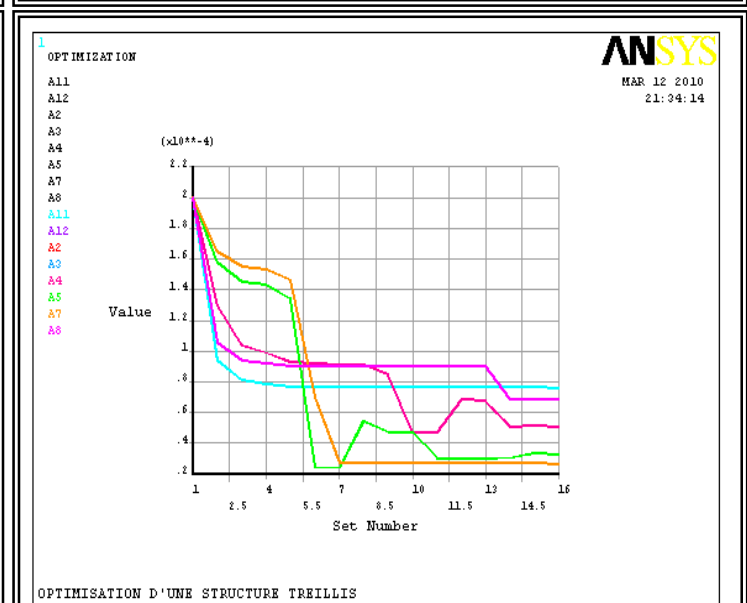
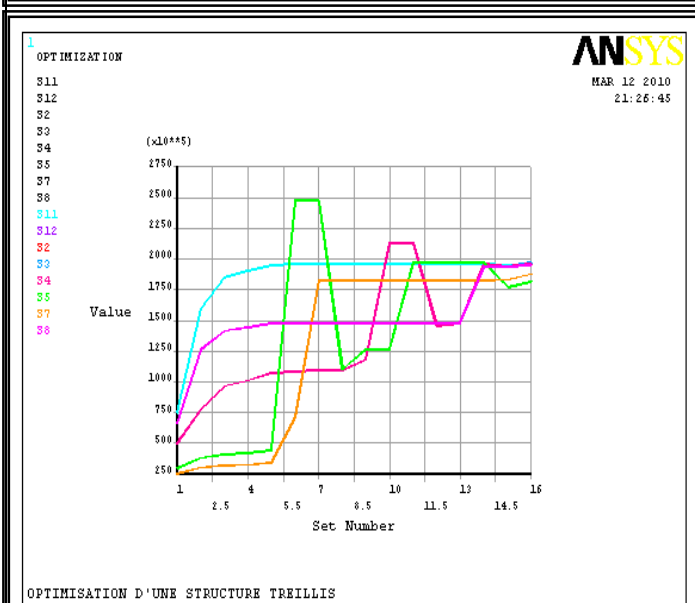
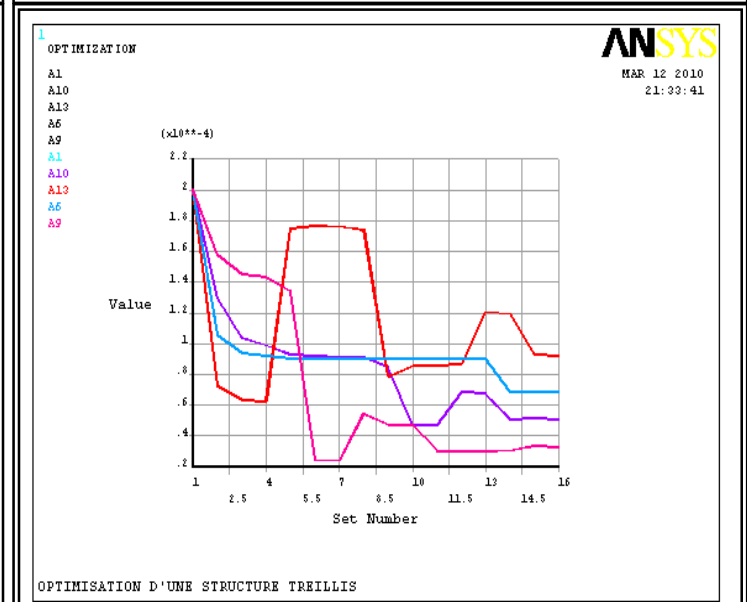
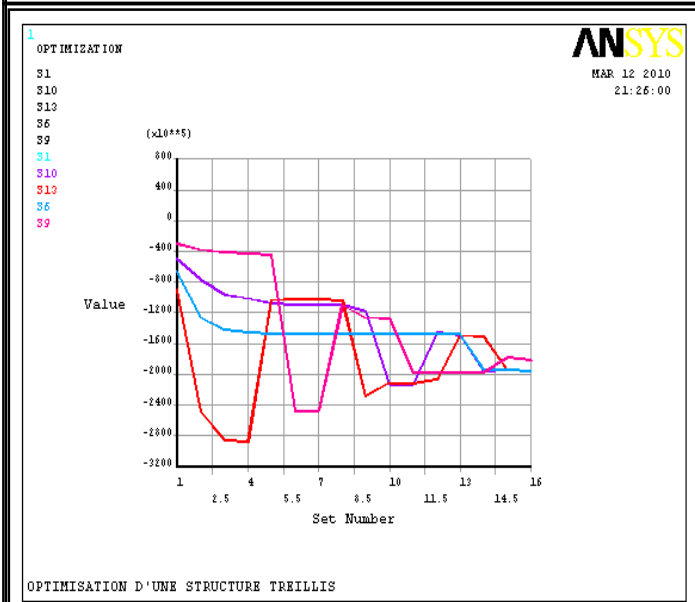
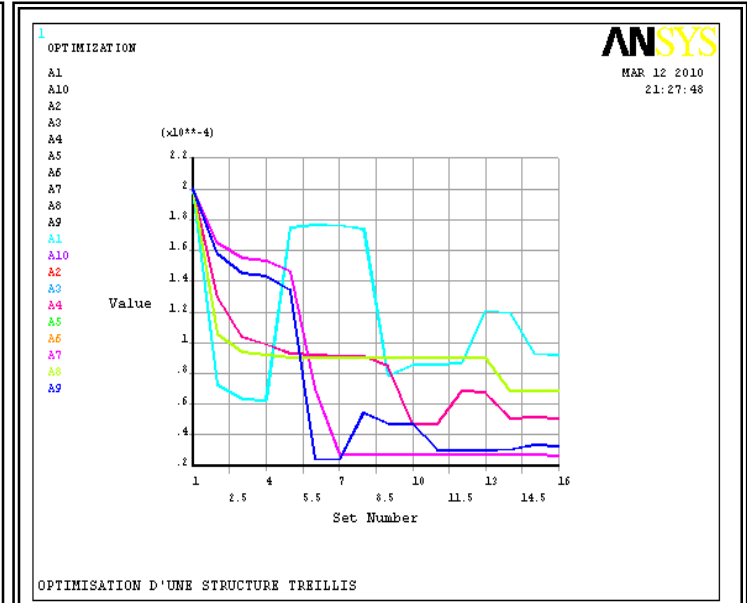
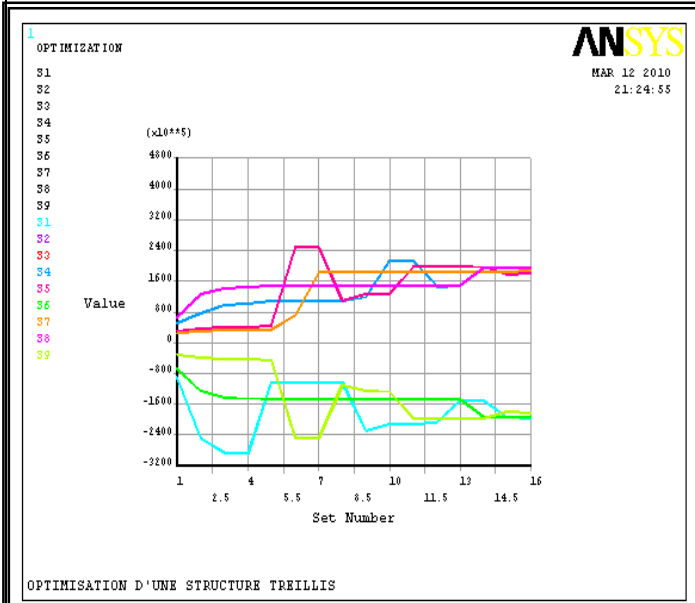
```

CM,_Y,LINE
LSEL, , , , 11
CM,_Y1,LINE
CMSEL,S,_Y
CMSEL,S,_Y1
LATT,1,11,1, , , ,
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
CM,_Y,LINE
LSEL, , , , 12
CM,_Y1,LINE
CMSEL,S,_Y
CMSEL,S,_Y1
LATT,1,12,1, , , ,
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
CM,_Y,LINE
LSEL, , , , 12
CM,_Y1,LINE
CMSEL,S,_Y
CMSEL,S,_Y1
LATT,1,12,1, , , ,
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
CM,_Y,LINE
LSEL, , , , 13
CM,_Y1,LINE
CMSEL,S,_Y
CMSEL,S,_Y1
LATT,1,13,1, , , ,
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
LESIZE,ALL, , ,1, ,1, , ,1,
FLST,2,13,4,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,-13
LMESH,P51X
FINISH
/SOL
ANTYPE,0
FLST,2,2,3,ORDE,2
FITEM,2,2
FITEM,2,8
/GO
DK,P51X, , , ,0,UY, , , , ,
FLST,2,1,3,ORDE,1
FITEM,2,2
/GO
DK,P51X, , , ,0,UX, , , , ,
FLST,2,3,3,ORDE,3
FITEM,2,3
FITEM,2,-4
FITEM,2,6

/GO
FK,P51X,FY,-10000
! SAVE, OPTIMAL6, ,C:\DOCUME~1\ADMINI~1\Bureau\OPTIAM~1\
! /COM,ANSYS RELEASE 11.0 UP20070125 21:02:48 03/12/2010

```

```
/SOLU
! /STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
/POST1
AVPRIN,0, ,
ETABLE, ,VOLU,
!*
SSUM
!*
*GET,VOLUME,SSUM, ,ITEM,VOLU
AVPRIN,0, ,
ETABLE, ,LS, 1
!*
!*
*GET,S1,ELEM,1,ETAB,LS1
!*
!*
*GET,S2,ELEM,2,ETAB,LS1
!*
!*
*GET,S3,ELEM,3,ETAB,LS1
!*
!*
*GET,S4,ELEM,4,ETAB,LS1
!*
!*
*GET,S5,ELEM,5,ETAB,LS1
!*
!*
*GET,S6,ELEM,6,ETAB,LS1
!*
!*
*GET,S7,ELEM,7,ETAB,LS1
!*
!*
*GET,S8,ELEM,8,ETAB,LS1
!*
!*
*GET,S9,ELEM,9,ETAB,LS1
!*
!*
*GET,S10,ELEM,10,ETAB,LS1
!*
!*
*GET,S11,ELEM,11,ETAB,LS1
!*
!*
*GET,S12,ELEM,12,ETAB,LS1
!*
!*
*GET,S13,ELEM,13,ETAB,LS1
!*
*SET,MAXLAYER ,
*SET,I ,
! LGWRITE,'LOG4',' ','C:\DOCUME~1\ADMINI~1\Bureau\OPTIAM~1\ ',COMMENT
```



BEST LISTED SET)					(INFEASIBLE)	(INFEASIBLE)	(INFEASIBLE)	(INFEASIBLE)			
	SET 1	SET 2	SET 3	SET 4							
	(INFEASIBLE)	(INFEASIBLE)	(INFEASIBLE)	(INFEASIBLE)							
S1	(SV)	>-0.90139E+08	>-0.24858E+09	>-0.28562E+09	>-0.28774E+09	S1	(SV)	>-0.22847E+09	>-0.21097E+09	>-0.21097E+09	>-0.20696E+09
S10	(SV)	>-0.50000E+08	>-0.77346E+08	>-0.96629E+08	>-0.10118E+09	S10	(SV)	>-0.11793E+09	>-0.21286E+09	>-0.21283E+09	>-0.14586E+09
S11	(SV)	> 0.75000E+08	> 0.15969E+09	> 0.18518E+09	> 0.19046E+09	S11	(SV)	> 0.19569E+09	> 0.19569E+09	> 0.19569E+09	> 0.19569E+09
S12	(SV)	> 0.50000E+08	> 0.77346E+08	> 0.96629E+08	> 0.10118E+09	S12	(SV)	> 0.11793E+09	> 0.21286E+09	> 0.21283E+09	> 0.14586E+09
S13	(SV)	>-0.90139E+08	>-0.24858E+09	>-0.28562E+09	>-0.28774E+09	S13	(SV)	>-0.22847E+09	>-0.21097E+09	>-0.21097E+09	>-0.20696E+09
S2	(SV)	> 0.50000E+08	> 0.77346E+08	> 0.96629E+08	> 0.10118E+09	S2	(SV)	> 0.11793E+09	> 0.21286E+09	> 0.21283E+09	> 0.14586E+09
S3	(SV)	> 0.50000E+08	> 0.77346E+08	> 0.96629E+08	> 0.10118E+09	S3	(SV)	> 0.11793E+09	> 0.21286E+09	> 0.21283E+09	> 0.14586E+09
S4	(SV)	> 0.50000E+08	> 0.77346E+08	> 0.96629E+08	> 0.10118E+09	S4	(SV)	> 0.11793E+09	> 0.21286E+09	> 0.21283E+09	> 0.14586E+09
S5	(SV)	> 0.30046E+08	> 0.38152E+08	> 0.41338E+08	> 0.41967E+08	S5	(SV)	> 0.12631E+09	> 0.12664E+09	> 0.19712E+09	> 0.19712E+09
S6	(SV)	>-0.66667E+08	>-0.12612E+09	>-0.14151E+09	>-0.14457E+09	S6	(SV)	>-0.14756E+09	>-0.14756E+09	>-0.14756E+09	>-0.14756E+09
S7	(SV)	> 0.25000E+08	> 0.30368E+08	> 0.32251E+08	> 0.32613E+08	S7	(SV)	> 0.18303E+09	> 0.18303E+09	> 0.18303E+09	> 0.18303E+09
S8	(SV)	> 0.66667E+08	> 0.12612E+09	> 0.14151E+09	> 0.14457E+09	S8	(SV)	> 0.14756E+09	> 0.14756E+09	> 0.14756E+09	> 0.14756E+09
S9	(SV)	>-0.30046E+08	>-0.38152E+08	>-0.41338E+08	>-0.41967E+08	S9	(SV)	>-0.12631E+09	>-0.12664E+09	>-0.19712E+09	>-0.19711E+09
A1	(DV)	0.20000E-03	0.72523E-04	0.63117E-04	0.62654E-04	A1	(DV)	0.78907E-04	0.85452E-04	0.85451E-04	0.87107E-04
A10	(DV)	0.20000E-03	0.12929E-03	0.10349E-03	0.98836E-04	A10	(DV)	0.84793E-04	0.46980E-04	0.46986E-04	0.68560E-04
A11	(DV)	0.20000E-03	0.93933E-04	0.81000E-04	0.78757E-04	A11	(DV)	0.76650E-04	0.76650E-04	0.76650E-04	0.76650E-04
A12	(DV)	0.20000E-03	0.12929E-03	0.10349E-03	0.98836E-04	A12	(DV)	0.84793E-04	0.46980E-04	0.46986E-04	0.68560E-04
A13	(DV)	0.20000E-03	0.72523E-04	0.63117E-04	0.62654E-04	A13	(DV)	0.78907E-04	0.85452E-04	0.85451E-04	0.87107E-04
A2	(DV)	0.20000E-03	0.12929E-03	0.10349E-03	0.98836E-04	A2	(DV)	0.84793E-04	0.46980E-04	0.46986E-04	0.68560E-04
A3	(DV)	0.20000E-03	0.12929E-03	0.10349E-03	0.98836E-04	A3	(DV)	0.84793E-04	0.46980E-04	0.46986E-04	0.68560E-04
A4	(DV)	0.20000E-03	0.12929E-03	0.10349E-03	0.98836E-04	A4	(DV)	0.84793E-04	0.46980E-04	0.46986E-04	0.68560E-04
A5	(DV)	0.20000E-03	0.15751E-03	0.14537E-03	0.14319E-03	A5	(DV)	0.47575E-04	0.47452E-04	0.30486E-04	0.30486E-04
A6	(DV)	0.20000E-03	0.10572E-03	0.94222E-04	0.92228E-04	A6	(DV)	0.90356E-04	0.90356E-04	0.90356E-04	0.90356E-04
A7	(DV)	0.20000E-03	0.16464E-03	0.15503E-03	0.15331E-03	A7	(DV)	0.27318E-04	0.27318E-04	0.27318E-04	0.27318E-04
A8	(DV)	0.20000E-03	0.10572E-03	0.94222E-04	0.92228E-04	A8	(DV)	0.90356E-04	0.90356E-04	0.90356E-04	0.90356E-04
A9	(DV)	0.20000E-03	0.15751E-03	0.14537E-03	0.14319E-03	A9	(DV)	0.47575E-04	0.47452E-04	0.30486E-04	0.30486E-04
VOLUME	(OBJ)	0.35422E-02	0.21398E-02	0.18634E-02	0.18183E-02	VOLUME	(OBJ)	0.12591E-02	0.10742E-02	0.10131E-02	0.11377E-02
	SET 5	SET 6	SET 7	SET 8		SET 13	SET 14	SET 15	*SET 16*		
	(INFEASIBLE)	(INFEASIBLE)	(INFEASIBLE)	(INFEASIBLE)		(INFEASIBLE)	(FEASIBLE)	(FEASIBLE)	(FEASIBLE)		
S1	(SV)	>-0.10288E+09	>-0.10225E+09	>-0.10235E+09	>-0.10348E+09	S1	(SV)	>-0.14963E+09	-0.15084E+09	-0.19469E+09	-0.19629E+09
S10	(SV)	>-0.10755E+09	>-0.10888E+09	>-0.10930E+09	>-0.10939E+09	S10	(SV)	>-0.14805E+09	-0.19599E+09	-0.19437E+09	-0.19591E+09
S11	(SV)	> 0.19532E+09	> 0.19561E+09	> 0.19569E+09	> 0.19569E+09	S11	(SV)	> 0.19569E+09	> 0.19569E+09	> 0.19542E+09	> 0.19667E+09
S12	(SV)	> 0.10755E+09	> 0.10888E+09	> 0.10930E+09	> 0.10939E+09	S12	(SV)	> 0.14805E+09	> 0.19599E+09	> 0.19437E+09	> 0.19591E+09
S13	(SV)	>-0.10288E+09	>-0.10225E+09	>-0.10235E+09	>-0.10348E+09	S13	(SV)	>-0.14963E+09	-0.15084E+09	-0.19456E+09	-0.19618E+09
S2	(SV)	> 0.10755E+09	> 0.10888E+09	> 0.10930E+09	> 0.10939E+09	S2	(SV)	> 0.14805E+09	> 0.19599E+09	> 0.19436E+09	> 0.19591E+09
S3	(SV)	> 0.10755E+09	> 0.10888E+09	> 0.10930E+09	> 0.10939E+09	S3	(SV)	> 0.14805E+09	> 0.19599E+09	> 0.19439E+09	> 0.19678E+09
S4	(SV)	> 0.10755E+09	> 0.10888E+09	> 0.10930E+09	> 0.10939E+09	S4	(SV)	> 0.14805E+09	> 0.19599E+09	> 0.19437E+09	> 0.19591E+09
S5	(SV)	> 0.44828E+08	> 0.24748E+09	> 0.24748E+09	> 0.11018E+09	S5	(SV)	> 0.19712E+09	> 0.19698E+09	> 0.17745E+09	> 0.18169E+09
S6	(SV)	>-0.14735E+09	>-0.14752E+09	>-0.14756E+09	>-0.14756E+09	S6	(SV)	>-0.14766E+09	-0.19395E+09	-0.19360E+09	-0.19483E+09
S7	(SV)	> 0.34116E+08	> 0.71317E+08	> 0.18308E+09	> 0.18303E+09	S7	(SV)	> 0.18303E+09	> 0.18303E+09	> 0.18317E+09	> 0.18770E+09
S8	(SV)	> 0.14735E+09	> 0.14752E+09	> 0.14756E+09	> 0.14756E+09	S8	(SV)	> 0.14766E+09	> 0.19395E+09	> 0.19360E+09	> 0.19483E+09
S9	(SV)	>-0.44828E+08	>-0.24748E+09	>-0.24748E+09	>-0.11018E+09	S9	(SV)	>-0.19711E+09	-0.19698E+09	-0.17748E+09	-0.18172E+09
A1	(DV)	0.17523E-03	0.17631E-03	0.17614E-03	0.17422E-03	A1	(DV)	0.12048E-03	0.11952E-03	0.92597E-04	0.91840E-04
A10	(DV)	0.92979E-04	0.91844E-04	0.91495E-04	0.91417E-04	A10	(DV)	0.67545E-04	0.51022E-04	0.51449E-04	0.51043E-04
A11	(DV)	0.76797E-04	0.76683E-04	0.76650E-04	0.76650E-04	A11	(DV)	0.76650E-04	0.76651E-04	0.76758E-04	0.76271E-04
A12	(DV)	0.92979E-04	0.91844E-04	0.91495E-04	0.91417E-04	A12	(DV)	0.67545E-04	0.51022E-04	0.51449E-04	0.51043E-04
A13	(DV)	0.17523E-03	0.17631E-03	0.17614E-03	0.17422E-03	A13	(DV)	0.12048E-03	0.11952E-03	0.92660E-04	0.91896E-04
A2	(DV)	0.92979E-04	0.91844E-04	0.91495E-04	0.91417E-04	A2	(DV)	0.67545E-04	0.51022E-04	0.51450E-04	0.51043E-04
A3	(DV)	0.92979E-04	0.91844E-04	0.91495E-04	0.91417E-04	A3	(DV)	0.67545E-04	0.51022E-04	0.51442E-04	0.50818E-04
A4	(DV)	0.92979E-04	0.91844E-04	0.91495E-04	0.91417E-04	A4	(DV)	0.67545E-04	0.51022E-04	0.51449E-04	0.51043E-04
A5	(DV)	0.13405E-03	0.24282E-04	0.24282E-04	0.54542E-04	A5	(DV)	0.30486E-04	0.30508E-04	0.33864E-04	0.33073E-04
A6	(DV)	0.90487E-04	0.90385E-04	0.90356E-04	0.90356E-04	A6	(DV)	0.90296E-04	0.68746E-04	0.68869E-04	0.68436E-04
A7	(DV)	0.14656E-03	0.70109E-04	0.27311E-04	0.27318E-04	A7	(DV)	0.27318E-04	0.27318E-04	0.27297E-04	0.26639E-04
A8	(DV)	0.90487E-04	0.90385E-04	0.90356E-04	0.90356E-04	A8	(DV)	0.90296E-04	0.68746E-04	0.68869E-04	0.68436E-04
A9	(DV)	0.13405E-03	0.24282E-04	0.24282E-04	0.54542E-04	A9	(DV)	0.30486E-04	0.30508E-04	0.33860E-04	0.33069E-04
VOLUME	(OBJ)	0.21425E-02	0.16293E-02	0.15625E-02	0.16643E-02	VOLUME	(OBJ)	0.12524E-02	0.11150E-02	0.10328E-02	0.10221E-02