

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET**  
**DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MENTOURI-CONSTANTINE**  
**FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR**  
**DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE**

N° d'ordre : 122/Mag/2006.

Série : 003/GM/2006.

**MEMOIRE**

Présenté pour obtenir le diplôme de Magister  
en Génie Mécanique

**ETUDE DE L'INSTABILITE HYDRODYNAMIQUE DES**  
**ECOULEMENTS TOURNANTS**

OPTION :

**Thermo-Fluides**

Par :

**BOUKHARI Ali**

Soutenu le: 03/07/2006

Devant le jury composé de :

Président :	M <sup>r</sup> . M. KADJA	Professeur	Université Mentouri - Constantine
Rapporteur :	M <sup>r</sup> . R. BESSAIH	Professeur	Université Mentouri - Constantine
Examineurs :	M <sup>r</sup> . S. BENISSAAD	M.C.	Université Mentouri - Constantine
	M <sup>r</sup> . K. TALBI	M.C.	Université Mentouri - Constantine

# Chapitre I

## INTRODUCTION

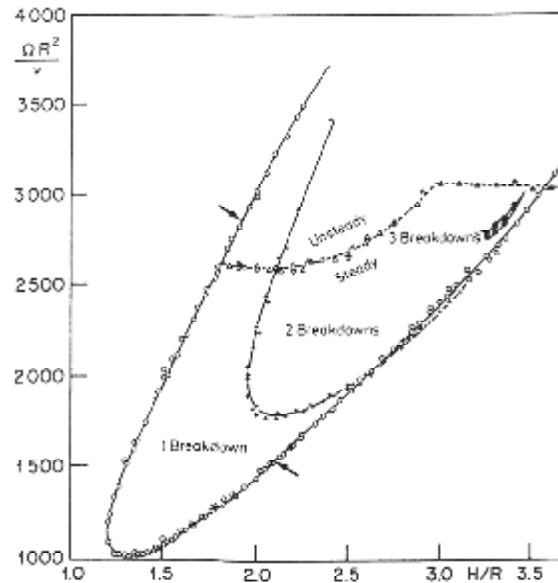
L'écoulement d'un fluide visqueux, incompressible, confiné dans une enceinte cylindrique, induit par la rotation d'une ou plusieurs parois du cylindre qui contient le fluide, était étudié intensivement et à plusieurs reprises durant les dernières années, en éclaircissant la voie de comprendre les mécanismes de génération/destruction d'une variété de configurations de panne de tourbillon (en anglais vortex breakdown) et de son contrôle. Ce type d'écoulements décèle une importance qui ne cesse pas d'accroître vue de leurs applications dans plusieurs domaines d'engineering tel que les viscosimètres, les machines centrifuges, le pompage des métaux liquides à hautes températures de fusion, la production des cristaux par le procédé de tirage Czochralski,....etc.

Une configuration de base fut constituée d'un cylindre droit contenant le fluide considéré, avec un disque de fond tournant. Cette configuration était la première qu'avait utilisé dans ses expériences Vogel [1] [2] (1968,1975) et mettait en évidence que le vortex (tourbillon) peut subir une panne ou arrêt, nommé vortex breakdown, (c.à.d. apparition de points de stagnation suivis de zones de recirculation d'étendues finies le long de l'axe du cylindre), Vogel aussi a déterminé une courbe montrant les limites dans lesquelles le vortex breakdown apparaîtra, c'étaient les limites de stabilité dans le plan  $(H/R, Re = \Omega R^2/n)$ , où  $R$  est le rayon du cylindre,  $H$  sa hauteur et  $Re$  le nombre de Reynolds rotationnel.

Deux ans plus tard, Ronnenberg [3] avait rapporté des mesures détaillées de la structure entière du fluide dans une expérience avec  $H/R = 1.59$ ,  $\Omega R^2/n = 1.580$ , ce qui correspond avec un état de vortex breakdown révélé dans les expériences de Vogel en confirmant les conclusions de ce dernier, et en démontrant quantitativement qu'un phénomène de pompage d'Ekman avait lieu, en presque accord avec l'analyse de Von Karmàn de l'écoulement de fluide en contact avec un disque tournant infini. Le disque tournant exerce sur le fluide une force d'attraction le long de la région centrale (au voisinage de l'axe de rotation), et l'accélère radialement en le dirigeant vers l'extérieur dans une couche limite d'épaisseur  $(1/\sqrt{Re})$  dite *couche d'Ekman*. Près de la paroi latérale du cylindre, le fluide tourne et suit des spirales en se dirigeant vers l'autre extrémité du cylindre, alors en dehors des zones pariétales (loin des parois) générera un équilibre

entre les forces centrifuges et le gradient radial de pression, et a comme conséquence ; la présence d'un écoulement secondaire qui est la recirculation méridienne.

Une série d'observations expérimentales a été conduite par Escudier[4], qui a utilisé la technique dite Laser-induced fluorescence ( fluorescence induite par laser) pour visualiser l'écoulement tourbillonnaire, stationnaire d'un fluide (glycérine/eau) occupant complètement le volume d'une enceinte cylindrique avec un fond tournant, Escudier[4] avec ses observations n'avait pas seulement fait étendre les résultats de Vogel et Ronnenberg[1-3], mais aussi il a découvert le comportement de l'écoulement avec une, deux, et trois bulles du vortex breakdown et établissait un diagramme (de stabilité) de dépendance entre les deux paramètres : le rapport d'aspect du cylindre  $H/R$  et le nombre de Reynolds en rotation  $\Omega R^2/n$  (Fig.I.1).



**Figure I.1:** Diagramme de stabilité obtenu expérimentalement par Escudier [4].

Ce diagramme donnait les points dans le plan  $(H/R, \Omega R^2/n)$ , où le vortex breakdown peut se manifester avec une, deux ou trois bulles stationnaires successivement, ainsi que les limites du nombre de Reynolds au delà desquelles l'écoulement est oscillatoire et même pour de grands nombres de Reynolds l'écoulement est turbulent. Une autre observation qu'apportait les expériences d'Escudier[4] est la perte négligeable de la symétrie axiale au sein de l'écoulement permanent ou bien transitoire, ce qui justifie notre hypothèse de l'axisymétrie de l'écoulement en question.

Les résultats d'Escudier ont été confirmés, prolongés et étendus par plusieurs chercheurs, dans diverses investigations numériques et expérimentales notamment les travaux de Lopez & Perry [6], Valentine & Jahnke [7], Stevens et al. [9], Gelfgat et al. [10], Sotiropoulos & al. [14-15]. Alors, dans diverses investigations récentes, d'autres variantes du problème de base on été jugées intéressantes, tel que:

- § L'influence de la rotation des deux disques ou/et la paroi latérale du cylindre, et leurs sens de rotation (co- ou contre-rotation),
- § L'écoulement à surface libre,
- § L'inclinaison des parois latérales et/ou l'excentricité de l'axe de rotation [20].
- § Le jet tourbillon (en anglais swirling jets, et le cylindre deviendra horizontal), tel que dans Ruith & al. [18] .

Il doit être signalé que dans toutes ces études les arguments concernant la symétrie axiale de l'écoulement ont été renforcés par le fait que des calculs axisymétriques ont reproduit l'allure générale des lignes de courant et l'évolution de ces motifs avec le nombre de Reynolds, observés dans le laboratoire, et dans les régimes d'écoulement stables et instables.

La première des variantes déjà citées peut être la configuration qu'ont étudié en (1994) Valentine & Jahnke [7] , à savoir : l'écoulement du fluide contenu dans une enceinte cylindrique avec un rapport d'aspect  $g = H / R = 1.5$ , induit par la rotation à même vitesse angulaire ( $\Omega$ ) des deux extrémités du cylindre avec une paroi latérale fixe. Dans ce problème, ils ont montré que les points de stagnation arrivent le long de l'axe de rotation entre le plan au milieu (plan de symétrie pour le cylindre) et les fonds tournants pour les valeurs appropriées des paramètres caractéristiques (c.à.d. le nombre de Reynolds et le rapport d'aspect de l'enceinte). À la fin de leur étude, Valentine & Jahnke [7] ont bien examiné l'existence possible des solutions oscillatoires stables par un calcul avec  $Re = 3000$  et  $g = 1.5$ , pour ce cas ils ont réussi de démontrer qu'une solution oscillatoire stable bien existe.

Gelfgat & al. [10] ont présenté une étude numérique très détaillée des états stables et du début des instabilités oscillatoires, de l'écoulement tournant axisymétrique du fluide Newtonien incompressible confiné dans un cylindre droit, avec deux disques au sommet et au fond qui tournent indépendamment l'un de l'autre. Ils ont consacré la première partie de leur investigation à l'influence de la co- et la contre-rotation du disque du fond sur le vortex breakdown qui a lieu dans le problème d'origine de l'écoulement dans un cylindre avec un sommet tournant, où ils ont caractérisé la rotation du disque de fond par le rapport des vitesses angulaires ( $\alpha = \Omega_{bottom} / \Omega_{top}$ , ou rapport de rotation), et ont fait varier ce paramètre le long de l'intervalle  $-1 \leq \alpha \leq 1$  avec trois différentes valeurs du rapport d'aspect  $g = 1.5; 2.0; 2.5$ .

Ils ont trouvé que la faible contre-rotation du fond peut supprimer le vortex breakdown. La plus forte contre-rotation peut induire un vortex breakdown stable à des nombres de Reynolds relativement grands pour lesquels un vortex breakdown ne peut pas apparaître dans le cas du fond stationnaire. Les faibles co-rotations peuvent encourager le vortex breakdown à des Reynolds inférieurs que dans le cylindre avec le fond stationnaire. La co-rotation plus forte mène au détachement de la zone de recirculation de l'axe et la formation d'un anneau de vortex supplémentaire. La deuxième partie de leur étude était consacrée à la détection du début d'instabilité oscillatoire de l'écoulement stationnaire, seulement pour le rapport d'aspect du cylindre de  $g = 1.5$ . Ils ont utilisé la méthode spectrale de Galerkin pour les calculs des états stationnaires et l'analyse des stabilités linéaires, et la méthode des volumes finies basée sur l'algorithme SIMPLE pour les calculs des états oscillatoires. Les nombres de Reynolds critiques et les fréquences critiques d'oscillations ont été calculées comme une fonction du rapport de rotation ( $x$ ). L'analyse de la stabilité a montré qu'il y a plusieurs modes linéaires les plus instables de la perturbation qui deviennent successivement dominant avec un changement continu de  $x$ , il a été aussi montré que l'instabilité oscillatoire peut mener à une apparence et coexistence de plus qu'une bulle séparatrice du vortex.

Une étude numérique de l'écoulement périodique pour  $g = 2.5$  a été conduite par Lopez & Perry [6], qui annonce l'existence des modes distincts d'oscillation. Le premier mode consiste en deux régions formées par les séparatrices des lignes de courant instantanées, l'autre mode consiste en une onde déplaçant axialement du disque fixe vers ce qui est en rotation. Cette étude numérique a utilisé la théorie des systèmes dynamiques non-linéaires afin de décrire les changements cinématiques de l'écoulement et l'installation de l'advection chaotique causée par les oscillations.

Alors Stevens & al. [9] ont achevé une investigation combinée : expérimentale et numérique pour mettre en évidence des états oscillatoires multiples qui existent dans le fluide en écoulement confiné dans un cylindre de rapport aspect  $g = 2.5$ . Ils ont identifié trois états oscillants, deux d'entre eux sont périodiques et le troisième est quasi-périodique avec une fréquence de modulation beaucoup plus petite que la fréquence de base. La gamme des nombres de Reynolds pour lesquels l'écoulement est quasi-périodique existe entre les deux états périodiques. L'analyse harmonique des signaux temporels expérimentaux et numériques par la densité de spectre d'énergie (en anglais PSD, Power Spectrum Density) fournissait les descriptions quantitatives des états déjà mentionnés et leurs périodes adimensionnelles

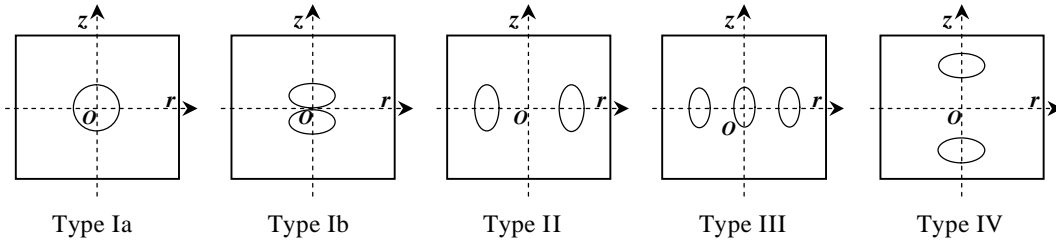
d'oscillations ( $t = \Omega T_{cyc}$ , où  $T_{cyc}$  est le temps en secondes nécessaire pour un cycle complet) en terme de la vitesse angulaire de rotation  $\Omega$ , ainsi que la preuve sans ambiguïté de l'existence de ces états multiples en régimes transitoires.

Pour éclaircir la vision physique et bien contrôler ce type d'écoulements dans leurs applications industrielles, Mullin & al. [20] annonçaient les résultats d'une étude expérimentale et numérique de la création de points de stagnation du champ d'écoulement tournant de fluide dans un cylindre à extrémité en rotation, et ils ont montré que le fait d'ajouter un petit cylindre le long de l'axe de l'écoulement ou incliner sa paroi latérale (petit cylindre intérieur), peut intensifier ou supprimer la recirculation.

Sotiropoulos & Ventikos [14] ont étudié numériquement l'écoulement en question, en résolvant les équations de Navier-Stokes transitoires, tridimensionnelles, par la méthode des volumes finis avec un schéma de second ordre pour tous les termes, et ont suivis les particules par la méthode de Runge-Kutta du quatrième ordre, pour clarifier l'origine et élucider la physique sous-jacente des particularités de ce type d'écoulements complexes, tridimensionnelles et pour révéler les secrets de toutes les asymétries (bulles du vortex breakdown stationnaires et asymétriques) observées dans le laboratoire. En analysant les caractéristiques Lagrangiennes des écoulements calculés, ils avaient expliqué l'origine de ces asymétries, clarifié les mécanismes de remplissage et de vidange à l'intérieur des bulles stationnaires du vortex breakdown, et aussi montré que les particules au sein de ces bulles stationnaires exposent des trajectoires chaotiques.

Dans une autre publication bien détaillée et illustrée, datée en (2001), Sotiropoulos & al. [15] avaient étudié le mouvement non-diffusif, des particules sortant des bulles stationnaires, tridimensionnelles d'un vortex breakdown. Ils avaient éclairci la relation entre les diverses structures de bulles axisymétriques (idéales) et celles de la réalité tridimensionnelle (laboratoire), qui exposent des chemins de particule chaotiques comme nous avons déjà signalé. Une découverte remarquable, lorsqu'ils étudiaient le processus de vidage des bulles du vortex breakdown, est que le taux auquel la sortie de particules est décrite présente une nature fractale (la courbe d'escalier du diable). Gelfgat [11] a employé une visualisation numérique de l'écoulement tourbillonnant axisymétrique stable avec des traceurs de mouvement de particules, et il a trouvé (ou bien a montré) qu'une perte si légère de l'homogénéité de densité au sein du fluide mène à une déviation du mouvement des particules du caractère axisymétrique stable, ce qui rapporte à son tour les motifs (patterns en anglais) asymétriques de l'écoulement visualisé. Cela donne une explication possible d'un désaccord existant entre plusieurs études expérimentales et numériques.

Xinjun [17] a rapporté des simulations numériques des équations de Navier-Stokes pour l'écoulement axisymétrique de fluide en rotation incités par la rotation des couvercles d'extrémités d'un cylindre instantanément à différents taux de vitesse par rapport à la paroi latérale. Il a examiné le comportement transitoire des zones de recirculation dans le plan méridien pendant l'évolution temporelle et avant l'établissement des régimes stables, et a trouvé que les changements de la structure topologique des motifs des lignes de courant méridiennes sont significatifs et l'évolution temporelle d'un motif à un autre révèle des ressemblances entre : le démarrage de repos et le freinage brusque des parois en mouvement aux premiers instants, mais diffère par la suite. Il a employé une discrétisation par différences finies centrales de second ordre pour les dérivées spatiales, et une approximation par moyenne pondérée avec un facteur de pondération  $a$  pour les dérivées temporelles, ainsi il a identifié quatre types de base de motifs topologiques des zones de recirculation dans le plan méridien (Fig. I.2).



**Figure I.2 :** Différents types de motifs topologiques des zones de recirculation dans le plan méridien d'après Xinjun [17].

Afin de prédire le temps de début et l'emplacement de la première période de recirculation, Xinjun [17] a suggéré d'utiliser le facteur de recirculation  $R_f$ , qui est l'intégrale de la fonction de courant dans la région ligne-centrale et le définissait par :

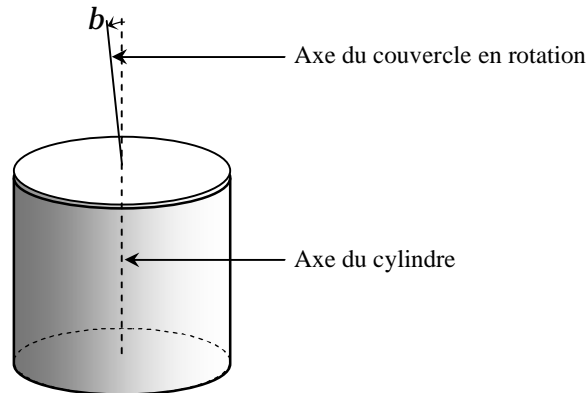
$$R_f = \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_z} \frac{y_{f,i,j}}{n_r \times n_z}$$

Où  $n_r$  et  $n_z$  dénotent respectivement les nombres de nœuds de maillage dans la région ligne-centrale, définie radialement par  $0.05 \leq r_f \leq 0.1$ , et  $y_{f,i,j}$  représente la fonction de courant discrète.

L'effet de changer la vitesse de rotation de la paroi latérale a été aussi discuté, mais aucune influence substantielle n'est observée sur les caractéristiques des zones de recirculation s'il n'y a aucune apparition des vortex de type Taylor-Görtler dans le voisinage de la paroi latérale.

Toujours dans le cadre de contrôler la physique de l'écoulement, et bien éliminer les éventuelles recirculations, Thompson & Hourigan [20] ont porté une investigation numérique pour expliquer les observations expérimentales récentes employant des techniques de

visualisation par traceur, puis ont proposé que même pour les écoulements de faibles nombres de Reynolds, la bulle stable du vortex breakdown dans le cylindre tournant ait une asymétrie, ainsi l'effet des imperfections dans la géométrie du conteneur est examiné numériquement, et particulièrement la détermination quantitative de l'effet d'un mauvais alignement très léger entre l'axe de rotation du disque tournant et l'axe du cylindre (Fig. I.3).



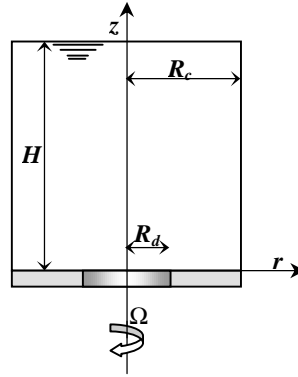
**Figure I.3 :** Alignement des axes dans le problème de Thompson & Hourigan [20].

Thompson & Hourigan [20] montraient que des mauvais alignements même légers, et même probablement qui ne seront pas être mesurables expérimentalement, peuvent produire les détails principalement visibles des bulles de vortex breakdown asymétriques qui ont été observés dans beaucoup d'expériences.

Mununga & al. [21] avaient présenté expérimentalement une méthode non-intrusive de contrôle de l'écoulement avec un petit disque ( $r = 0.15R$ ) en rotation monté en bas en face du couvercle tournant dans l'enceinte cylindrique afin de précipiter ou retarder le début du vortex breakdown selon si ce sont en co-rotation ou contre-rotation, respectivement. Outre, le fait que la co-rotation augmente les dimensions radiales et axiales de la bulle en la décalant vers l'amont, la contre-rotation a tendance de réduire la taille de la bulle, ou la supprimer complètement, et en la dirigeant vers la direction aval. Cette solution a aussi montré que l'emploi de petit disque en co-rotation est plus efficace (de point de vue énergétique) que l'utilisation de fond tournant dans la manipulation de la bulle du vortex breakdown.

Pivaa & Meiburg [22] ont simulé le mouvement stable d'un fluide visqueux dans un conteneur cylindrique avec un disque de fond partiellement tournant et une surface libre au moyen de la résolution des équations de Navier-Stokes axisymétriques (Fig. I.4).





**Figure I.4 :** Dessin schématique montrant un conteneur cylindrique de rayon  $R_c$ , le mouvement fluide est produit par un disque tournant de rayon  $R_d$ , qui forme une partie du fond. Le fluide a une surface libre  $z=H$ .

L'écoulement méridien est dominé par un vortex au-dessus du disque en rotation et un autre contre-tournant au-dessus de la partie stationnaire (le reste) du fond. Ces simulations étaient conduites pour divers rapports d'aspect ( $H/R_d$ ) et des nombres de Reynolds, pour évaluer les changements résultants des configurations du vortex breakdown, et puisque le rapport du rayon du cylindre au rayon du disque ( $D = R_c/R_d$ ) augmente au-dessus d'une valeur d'environ 2.3, l'influence de la paroi latérale du cylindre sur les particularités du l'écoulement central au voisinage du disque tournant devient insignifiante. Cela est dû à la décroissance exponentielle de la vitesse azimutale au-delà du bord du disque.

L'une des premières études qu'on y trouve l'idée de coupler l'écoulement de fluide conducteur avec le transfert de chaleur et/ou le champ magnétique est le travail de Murphy & Lopez [5]. Les auteurs avaient seulement fait une comparaison entre les valeurs du nombre de Rayleigh prévues théoriquement du début d'instabilité, dans les modes stationnaire et oscillatoire, avec les valeurs observées expérimentalement pour une couche de mercure chauffée de dessous (paroi inférieure) et soumise simultanément aux effets d'un champ magnétique vertical et uniforme et la rotation à vitesse angulaire constante autour d'un axe vertical. Alors, ils présentaient les tailles de cellule théoriques et les fréquences de rotation pour le début des instabilités oscillantes.

Mahfouz & Badr [23] ont traité le problème de la convection mixte (forcée et naturelle) d'un cylindre horizontal effectuant un mouvement oscillant rotatoire dans un fluide au repos de dimensions infinies. Tandis que la convection forcée est causée par l'oscillation de cylindre, la convection naturelle est causée par les forces de buoyancy. Le processus du transfert

de chaleur est gouverné par le nombre de Rayleigh,  $Ra$ , le nombre de Reynolds  $Re$ , et la fréquence d'oscillation adimensionnelle,  $S$ . Leur étude avait couvert le domaine de  $Ra$  allant jusqu'à  $10^3$ ,  $Re$  jusqu'à 400 et  $S$  jusqu'à 0.8. Les résultats montraient que, pour le même nombre de Rayleigh  $Ra$ , le taux moyen de transfert de chaleur est entre deux valeurs limites. La première, est la valeur du taux de transfert stable en raison de la convection naturelle d'un cylindre fixe et la deuxième est le taux de transfert de chaleur stable d'un cylindre tournant fermement à une vitesse égale à la vitesse maximale d'oscillation rotative. Pour de petites valeurs de  $Re$ , le nombre de Nusselt moyen dans le temps est plus proche de celui de cylindre fixe au même  $Ra$ , et l'effet de la fréquence adimensionnelle  $S$  est seulement limité au changement d'amplitude du nombre de Nusselt fluctuant.

Iwatsu [24] avait examiné numériquement les motifs des lignes de courant et les caractéristiques de transfert de chaleur de l'écoulement tourbillonnant du fluide visqueux, incompressible et axisymétrique engendré par la rotation constante du couvercle supérieur dans une enceinte cylindrique sous l'hypothèse de Boussinesq, et la différence fixe ( $\Delta T$ ) des températures imposées entre les disques supérieur ( $T_0 + \Delta T/2$ ) et inférieur (du fond  $T_0 - \Delta T/2$ ) avec des parois latérales adiabatiques. Il avait présenté des solutions d'état stable, obtenues pour les gammes de paramètres gouvernants, le nombre de Reynolds  $10^2 \leq Re \leq 3 \cdot 10^3$ , le nombre de Richardson  $0 \leq Ri = (k \Delta T g g^3 / R \Omega^2) \leq 1.0$ , pour un fluide ayant un nombre de Prandtl  $Pr = \nu / a = 1.0$  confiné dans un cylindre de rapport d'aspect  $g = H/R = 1.0$  (où  $k$  est le coefficient d'expansion thermique,  $a$  est la diffusivité thermique). Diverses tracés des isothermes exposent la transition de la solution dominée par convection vers la solution dominée par conduction si  $Ri$  est augmenté. Alors, il était remarqué que quand  $Ri$  est augmenté, une structure de couche horizontale apparaît dans la moitié inférieure avec une distribution verticalement linéaire de la température, et pour des valeurs intermédiaires de  $Ri$ , c.-à-d.  $0 < Ri < 1.0$ , des séparatrices apparaissent dans l'écoulement sur le disque de fond en fonction des valeurs de  $Re$  et  $Ri$ . Ainsi, qu'une classification en plusieurs types différents des motifs des écoulements dans le plan ( $Ri$ ,  $Re$ ) avait été donnée.

Dans un autre article d'Iwatsu [25], une étude numérique des écoulements stables tourbillonnants de fluide visqueux incompressible dans l'enceinte cylindrique, conduits par la rotation du disque de fond à une vitesse angulaire constante avec surface libre, où il a supposé l'axisymétrie de l'écoulement et la condition du glissement à la frontière (surface) plane, libre, a

été faite. Le calcul paramétrique a été exécuté dans un grand intervalle du nombre de Reynolds ( $Re$ ) et du rapport d'aspect du conteneur ( $g$ ) qui couvre la gamme de paramètres non précédemment étudiée. Des solutions stables ont révélé une variété des motifs d'écoulement qui sont dressés dans un diagramme dans le plan paramétrique ( $g, Re$ ). La comparaison avec les études précédentes expérimentales et numériques a été aussi discutée en détail.

Omi & Iwatsu [26] ont examiné numériquement les écoulements tourbillonnants d'un fluide, de Boussinesq confiné dans une enceinte cylindrique avec co- ou contre-rotation des disques des extrémités, avec un gradient de température verticalement stable et paroi latérale supposée adiabatique. Les écoulements étudiés sont presque similaires à ceux étudiés dans [24] du côté de paramétrages et intervalles de balayage à l'exception :

- § du rapport d'aspect qui a été fixé à  $g = 2$ .
- § et du nouveau paramètre  $s$  introduit, qui est le rapport de la vitesse angulaire du disque supérieur à celle du disque de fond,  $-1.0 \leq s \leq 1.0$ .

Pour le cas d'une petite différence de température ( $Ri \sim 0$ ) et un  $Re$  élevé, le fluide intérieurement confiné tourne avec une vitesse angulaire moyenne des celles des disques des extrémités quand ils tournent dans le même sens (co-rotation). Alors quand ces disques font de contre-rotation, un écoulement de cisaillement aura lieu avec la création de la recirculation méridionale. Pour le cas de grand gradient de température ( $Pr \cdot Ri \sim O(1)$ ), la couche d'Ekman est supprimée et la couche limite de la paroi latérale disparaît au milieu du cylindre, l'écoulement en gros s'approche de l'état de repos, laissant le liquide aux alentours de chaque disque de fin en rotation dans chaque sens. Ils ont suggéré d'adopter une différence verticalement stable de température pour contrôler le mouvement du liquide confiné à l'intérieur des enceintes cylindriques avec des disques tournants, et ont récapitulé les cas étudiés de l'écoulement considéré sous forme de diagrammes dans les plan ( $s, Re$ ) et ( $s, Ri$ ).

Mais dans les applications industrielles, l'apparition des zones de recirculation (vortex breakdown) aux seins de ces types d'écoulements décélérera le rôle que joue la convection et conduira à des problèmes d'impureté et non-homogénéité des métaux liquides traités par des techniques faisant intervenir cette configuration comme procédé de pompage ou d'extraction. D'où l'idée de contrôler globalement l'écoulement, et d'éliminer les éventuelles bulles fluides et concentrations des contraintes thermiques. Alors, le procédé le plus adapté dans le domaine industriel pour contrôler les écoulements tournants est l'utilisation d'un champ magnétique pour stabiliser l'écoulement du fluide conducteur.

En réalité, il y a beaucoup d'aspects pour n'importe quel problème de production des cristaux et la compréhension du comportement hydrodynamique et thermique du fluide à faible nombre de Prandtl (métal liquide), et par conséquent, la distribution spatiale des composants était clairement visualisée par les ouvrages que nous avons déjà cités. Mais comme la technique de tirage des cristaux de Czochralski est une des méthodes largement employées dans la production des cristaux, on pourra apprécier la multitude d'ouvrages traitant cette technique et ses relatifs. Toutefois, le régime de l'écoulement peut s'étendre de stable laminaire à instable, périodique laminaire à turbulent. En outre, on a su que si l'écoulement n'est pas stable, des défauts dans le cristal formé, apparaissent. Une approche à l'obtention de cristaux de haute qualité est de contrôler la convection dans le fluide. Puisqu'un champ magnétique influence le mouvement d'un fluide électriquement conducteur, il est suggéré que le mouvement du fluide peut être contrôlé en cultivant un cristal en présence d'un champ magnétique.

Donc, notre effort se concentrera sur l'éclaircissement de l'effet d'un champ magnétique sur le mouvement en global, sans oublier que ce dernier (comportement hydrodynamique du métal liquide) joue un rôle principal dans la détermination de la qualité du cristal.

Les écoulements des fluides conducteurs en présence d'un champ magnétique sont nommés des écoulements magnétohydrodynamiques (MHD en abrégé). Un écoulement MHD peut différer significativement d'un écoulement hydrodynamique ordinaire équivalent. Le mouvement du métal fondu à travers des lignes de champ magnétique produit un courant électrique qui agit réciproquement avec le champ magnétique pour produire une force motrice électromagnétique (EM), qui s'oppose au mouvement du liquide. Même un champ magnétique faible fournit assez de force EM d'amortissement pour éliminer la turbulence et l'instabilité dans la plupart du mouvement concerné, éliminant ainsi beaucoup de micro-défauts dans le cristal. Le taux d'amortissement dépendra en vertu de la force du champ magnétique appliqué aussi bien que son orientation en ce qui concerne la circulation convective [36].

Ben Hadid & al. [27] dans leur investigation datée en (1997), ont employé une méthode numérique spectrale afin de résoudre directement les équations de Navier-Stokes de l'écoulement tridimensionnel oscillatoire d'un métal liquide conducteur confiné dans une cavité cylindrique horizontale de longueur modérée, ainsi, ils examinaient les signaux temporels, les propriétés de symétrie et les bilans d'énergie caractérisant les oscillations de l'écoulement, et l'amortissement des écoulements oscillatoires par un champ magnétique vertical jusqu'à la stabilisation de cet écoulement.

Bessaih & al. [28] ont porté une étude numérique sur l'écoulement MHD laminaire d'un métal liquide contenu dans une enceinte cylindrique, ayant un rapport d'aspect égal à 1, dont la paroi supérieur est en rotation. L'ensemble est soumis à un champ magnétique externe vertical. Un bon accord entre les résultats asymptotiques et numériques est obtenu par les auteurs, ces derniers ont montré que l'on peut contrôler l'écoulement primaire par un bon choix de la conductivité électrique des parois de l'enceinte en question.

L'écoulement incité par un champ magnétique tournant, d'un métal liquide remplissant une enceinte cylindrique avait sa part dans le champ des études des procédés de stabilisation des écoulements industriels, tel que l'étude entreprise par Marty & al.[29] pour connaître les détails de l'interaction du champ magnétique tournant avec l'écoulement du fluide étudié. Ils ont montré que l'application d'un champ magnétique en rotation très modéré à un mouvement convectif du fluide au commencement instable, est capable de reconstituer la stabilité de l'écoulement.

Des travaux expérimentaux et numériques récents soutiennent cette idée comme ceux faits par : Juel & al. [30] et [34], Bessaih [31], en montrant l'effets d'un champ magnétique orthogonale à la direction principale de l'écoulement du Gallium liquide en convection tridimensionnelle. Une fois le champ magnétique est appliqué, la convection sera réduite, aussi que les oscillations trouvées aux gradients élevés de température peuvent être supprimées, tandis que sans application de champ magnétique, l'écoulement est amené à une structure complexe qui soutient la transition observée à la convection oscillante.

Talmage & al. [32] ont publié un article présentant une étude plus approfondie du mouvement de rotation du métal liquide pendant la production de cristaux de silicium par le procédé de Czochralski avec un champ magnétique élevé, uniforme et vertical. Cet article traitait spécialement les effets inertiels dans la couche limites avec la résolution numérique des équations non-linéaires gouvernantes, et les équations de transport pour la vitesse primaire azimutale et pour la vorticité de l'écoulement secondaire avec la méthode de prediction-correction d'Adams-Bashforth-Moulton de quatrième ordre. Ils ont discuté les effets d'inertie sur le mouvement du métal liquide, et ont prévu une compréhension plus claire du mouvement du liquide (silicium fondu), sans laquelle des cristaux plus propre seront difficiles de se produire sur une base cohérente.

L'influence des forces EM (force de Lorentz) sur l'écoulement de l'eau salée, a été discutée par Weier & al. [33]. Leurs expériences montrent une forte accélération de l'écoulement près des parois, si de suffisantes forces électromagnétiques seront appliquées.

En outre, Bessaih & al. [35] ont porté une étude numérique et analytique de l'écoulement laminaire stable engendré par un disque tournant au sommet d'un cylindre ayant un rapport d'aspect  $H/R$  égal à l'unité, rempli d'un métal liquide et soumis à un champ magnétique axial, en résolvant les équations régissant l'écoulement par une méthode de volume finis. Ils donnaient différentes formules analytiques de vitesse et avaient montré qu'en présence d'un champ magnétique, les profils analytiques de vitesse proches des disques aux extrémités obtenus pour une valeur élevée du paramètre d'interaction magnétique  $N$ , présentent un excellent accord avec ceux obtenus par des simulations numériques. Ainsi, ils ont mis en évidence l'importance de la conductivité électrique des parois du conteneur (les deux disques et la paroi latérale), dans le contrôle de l'écoulement.

Bessaih & al. [36] ont effectué une étude combinée numérique et analytique du même écoulement déjà mentionné. Ils ont montré la forte dépendance de la structure de l'écoulement et le transfert de chaleur avec le champ magnétique et la conductivité électrique des parois constituant l'enceinte cylindrique, pour le cas des écoulements à  $Pr$  élevé, afin de montrer l'analogie avec le problème du transfert de masse. En absence du champ magnétique, le nombre de Nusselt suit une dépendance semblable à celle trouvée pour un réservoir cylindrique mélangé par une turbine à aubes. En présence du champ magnétique un amortissement important du transfert de chaleur était observé.

Une façon de supprimer la convection est de cultiver des cristaux dans des conditions de très faible champ gravitationnel (Microgravité) et réduire ainsi les effets de buoyancy. La méthode alternative d'amortir la convection en cultivant les cristaux en présence d'un champ magnétique reste largement utilisée et la plus récemment discutée en matière d'expériences et simulations numériques ([37],[38],[39],[40],[41]).

M. & A. Gelfgat [42], ont mesuré les vitesses azimutales d'un écoulement RMF de fluide confiné dans un conteneur cylindrique, par deux expériences différentes pour des rapports d'aspect différents et diverses magnitudes du champ magnétique (c.à.d. différentes valeurs du nombre de Hartmann  $Ha$ ). Alors, ils avaient expliqué quantitativement la dépendance entre la vitesse angulaire moyenne (normalisée) et le nombre de Hartmann, et même la vitesse moyenne angulaire en fonction du rapport d'aspect. Les résultats expérimentaux annoncés montrent que la rotation moyenne du liquide augmente plus rapidement avec l'augmentation de la hauteur relative de l'enceinte cylindrique ( $H/R > 1$ ), au-delà de la valeur  $H/R = 1$ , la croissance est linéaire.

Kharicha & al. [43](2004), ont utilisé le code commercial Fluent V. 5 pour avoir une solution numérique du modèle de l'écoulement MHD laminaire, permanent conduit par un disque tournant au sommet d'une cavité cylindrique remplie d'un métal liquide. Les effets du champ magnétique, des conductivités électriques des parois et l'épaisseur pariétale sont examinées. Les paramètres appropriés pour ce type d'écoulements ont été variés comme  $Re \geq 100$  et le nombre de Hartmann  $0 \leq Ha \leq 100$ , ce qui correspond à une gamme de paramètre d'interaction  $0 \leq N = Ha^2 / Re \leq 100$ . Malgré la supposition d'un très petit nombre de Reynolds magnétique  $R_m$ , le champ magnétique incité par ce petit  $R_m$  a été tenu en compte dans la formulation de leur problème. Leur étude est destinée à prédire l'influence d'un champ magnétique sur le taux de corrosion d'un métal liquide sur une paroi métallique, ils ont résolu l'équation de concentration pour le produit de corrosion et ont montré que le transfert de masse évolue avec le Hartmann  $Ha$ , et pour une valeur de  $Ha$  fixe, le transfert de matière est plus élevé pour des parois électriquement conductrices que des parois isolantes.

Ma & al. [44] ont étudié numériquement le processus de croissance cristalline de bromure de potassium (KBr) dans une configuration verticale de Bridgman, en employant un modèle intégré qui combine une formulation globale de transfert de chaleur et des tensions thermiques. La distribution globale de température dans le cylindre, les formes des lignes de courant dans le métal liquide, aussi les effets de la convection naturelle aux fronts de croissance ont été examinés. Mais Ma & al. [45] ont présenté une analyse de la stabilité linéaire de la convection thermocapillaire dans un pont liquide limité par deux interfaces liquides-solides planes, maintenues à la même température et par une surface cylindrique avec une entrée axisymétrique de chaleur, les deux frontières solides sont mises en rotation à la même vitesse angulaire dans une direction azimutale et un champ magnétique tournant est appliqué dans l'opposé de la direction azimutale. Les valeurs critiques du nombre de Reynolds pour la convection thermocapillaire et les fréquences de mode critique sont présentées comme les fonctions du nombre de Taylor magnétique pour les champs magnétiques tournants et du nombre de Reynolds pour la vitesse angulaire des frontières solides.

La force de Lorentz incitée par un champ magnétique en mouvement (en anglais TMF, Travelling Magnetic Field) dans une enceinte cylindrique a été discutée par Volz & Mazuruk [46]. Les auteurs ont montré que cette force de Lorentz peut être employée pour contrôler l'écoulement des métaux fondus, électriquement conducteurs et la direction de l'écoulement résultant de l'application du champ magnétique peut être complètement changée. Un champ TMF peut être employé pour éviter partiellement l'écoulement conduit par les forces de buoyancy.

Ganapathysubramanian & Zabarar [47] dans leur travail daté en (2004) ont examiné l'effet d'appliquer un gradient de champ magnétique convenablement placé sur la croissance de cristaux simples, en particulier, la courbure d'interface, le taux de croissance et la distribution de dopant ont été examinés. Aussi, ils ont effectué une comparaison entre la croissance de cristal sous l'influence d'un champ magnétique uniforme et un gradient de champ magnétique et ont révélé les avantages significatifs d'utiliser la méthode de gradient magnétique pour donner une distribution uniforme du dopant et produire une interface plane, ainsi que la faisabilité commerciale d'une telle technique.

Kharicha & al. [48], ont effectué une autre investigation expérimentale de l'écoulement MHD laminaire dans le cas permanent induit par la rotation d'un disque au sommet d'une cavité cylindrique remplie de l'eau ou de mercure. Ils ont analysé les distributions de vitesse en employant la technique de mesure par ultrasons (UVP). Leurs mesures ont été comparées avec des résultats obtenus par un modèle numérique. Ils ont effectué ses mesures et comparaisons essentiellement pour les valeurs de Reynolds allant jusqu'à 30000 et pour  $Ha \leq 260$ . Alors, ils avaient un proche accord entre les résultats numériques, les mesures par ultrasons et d'autres travaux expérimentaux et numériques annoncés dans la littérature. Ses expériences ont révélé quelque chose qui n'a pas été prévu numériquement, la couche pariétale latérale est instable pour des valeurs spécifiques des nombres de Hartmann et de Reynolds.

Mittal & al. [49] ont présenté une simulation numérique pour analyser la convection naturelle bidimensionnelle de métaux liquides soumis au champ magnétique transversal. Dans leur étude spatio-temporelle, ils avaient montré que l'écoulement oscillant change vers un écoulement stable avec l'augmentation de l'intensité de champ magnétique appliqué pour une gamme du nombre de Rayleigh ( $Ra$ ) entre 105 et 108, même pour cette gamme de  $Ra$ , la magnitude du champ magnétique amortie significativement l'amplitude des vitesses, et les amplitudes des oscillations aperiodiques de n'importe quelle variable dynamique. Alors, ils ont analysé l'interaction des forces de buoyancy et les forces électromagnétiques sur le développement et la formation spatio-temporelle des motifs de courant. Pour comprendre cette interaction, ils ont varié l'intensité du champ magnétique appliqué via la variation du nombre de Chandrasekhar  $Q$  ( $Q = \sigma H^2 B_0^2 / \rho_0 \nu = Ha^2$ ) pour une gamme de  $Ra$ , en résolvant numériquement les équations bidimensionnelles de Navier-Stokes, de l'énergie et de la MHD pour des métaux liquides à faible nombre de Prandtl ( $Pr = 0.015$ , cas des semi-conducteurs), confinés dans des cavités carrées de profondeur  $H$ . Outre l'analyse non-linéaire, les auteurs [49] ont effectué une



analyse spectrale pour montrer qu'avec l'augmentation de  $Q$ , le spectre des énergies (PSD) correspondant aux fréquences dominantes diminue, et le nombre de fréquences se réduit aussi en raison d'élimination des basses fréquences.

Le but suprême de modéliser la production de cristaux simples est d'établir un processus par lequel des cristaux sans défauts peuvent être cultivés. Généralement, une large gamme de cristaux produits pour l'utilisation comme des matériaux semiconducteurs ont des propriétés non-uniformes, tant à la macro-échelle qu'à la micro-échelle. Par suite, l'emploi de ces cristaux (avec des propriétés non-uniformes) affecte les performances de dispositifs tels que des circuits intégrés au sens large du mot, c.-à-d., à la macro-échelle, les non-homogénéités de la composition impliquent la ségrégation longitudinale et latérale. À la micro-échelle, les non-uniformités sont associées aux fluctuations dans des concentrations du dopant.

A notre connaissance, l'effet d'un champ magnétique sur la détermination des nombres de Reynolds critiques,  $Re_{cr}$ , en présence du cas de la convection forcée et mixte oscillatoires d'un fluide à faible  $Pr$  à l'intérieur d'une enceinte cylindrique, dont sa paroi supérieure est en rotation, n'a jamais été examiné, à l'exception du cas traité récemment par Bessaih & al. [36] concernant le cas uniquement de la convection forcée en régime laminaire avec et sans champ magnétique.

Notre objectif consistera à la détermination des instabilités hydrodynamiques et thermiques qui naissent dans une enceinte cylindrique ayant un rapport de forme égal à 2, rempli d'un fluide à faible nombre de Prandtl ( $Pr=0.015$ ), et ayant un couvercle en rotation constante situé en haut du cylindre. Cette configuration est soumise à un champ magnétique vertical constant. Avec la compréhension qu'elle fournisse cette configuration, des mécanismes qui contrôlent la physique du mouvement, on va déterminer la valeur critique du nombre de Reynolds  $Re_{cr}$ , pour chaque valeur de Richardson,  $Ri = Gr / Re^2 = 0, 0.5, 1$  et  $2$ , où  $Gr$  est le nombre de Grashof, et du nombre de Hartmann,  $Ha=0$ (absence du champ magnétique),  $5, 10, 20, 30, 40, 50, 60$ (présence du champ magnétique).

Le mémoire présentant ce travail est organisé en quatre chapitres et une conclusion. Dans ce premier chapitre du mémoire nous avons rappelé l'intérêt pratique du thème, résidant derrière l'importance primordiale d'étudier la stabilité des écoulements tournants confinés avec et sans champ magnétique et l'effet du gradient axial de température sur la formation du vortex

breakdown. Ainsi, une étude bibliographique est rapportée sur les instabilités hydrodynamiques et thermiques de convection forcée et mixte des métaux liquides dans des configurations similaires à celle traitée dans notre étude et les écoulements MHD convectifs pendant la croissance cristalline.

Dans le deuxième chapitre, le modèle mathématique décrivant la convection mixte des écoulements axisymétriques, en régime transitoire, en coordonnées cylindriques dans le plan méridien ( $r - z$ ) est présenté.

Dans le troisième chapitre, la méthode numérique des volumes finis pour la résolution des systèmes d'équations différentielles partielles couplées et non-linéaires est décrite en conjonction avec le schéma, le maillage et l'algorithme de résolution adoptés.

Le code de calcul est validé, et les résultats obtenus sont présentés, commentés et visuellement récapitulés dans le quatrième chapitre, suivi d'une conclusion.

## Chapitre II

### MODELE MATHEMATIQUE

Dans ce chapitre, nous présentons la géométrie de la configuration considérée, ainsi que les équations modélisant le problème traité dans ce mémoire. Ces équations mettent en évidence le comportement des fluides conducteurs (tel le cas des métaux liquides) en convection laminaire mixte (naturelle et forcée). Elles sont fondées selon les lois physiques : de conservation de masse (continuité), de quantité de mouvement (Navier-Stokes), et d'énergie. Mais en présence d'un champ magnétique, l'apparition d'une nouvelle force (force de Lorentz) au sein du liquide (écoulement MHD), ajoute une autre équation pour compléter le système. Les démonstrations nécessaires à l'obtention des équations susmentionnées décrivant la dynamique de l'écoulement de fluide laminaire avec transfert de chaleur sont bien expliquées, et illustrées dans beaucoup d'ouvrages de mécanique des fluides et de transferts thermiques (exemple la référence [53]).

#### II.1 Géométrie du problème :

Le système physique considéré (Fig. II.1) est une enceinte cylindrique de rayon  $R$  et de hauteur  $H$ , dont le rapport d'aspect fixe ( $g = H/R = 2$ ). L'enceinte contient du l'aluminium liquide caractérisé par un faible nombre de Prandtl ( $Pr=0.015$ ). Le couvercle (disque supérieur) est en rotation à la vitesse angulaire constante  $\Omega$ , et maintenu à la température  $T_c$ , tandis que l'inférieur est fixe et maintenu à la température  $T_h$  ( $T_h > T_c$ ). la paroi latérale rigide est adiabatique. L'ensemble peut être soumis à un champ magnétique  $B$  de magnitude constante, uniforme et orienté verticalement vers le haut. Les parois de l'enceinte cylindrique sont électriquement isolées.

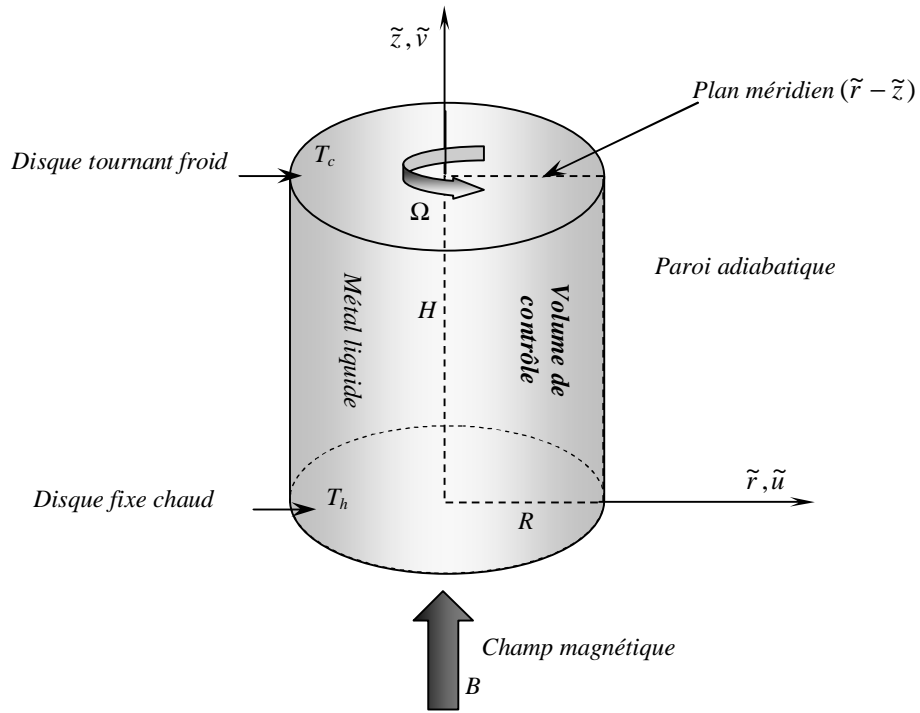


Figure II.1 : Géométrie du problème considéré.

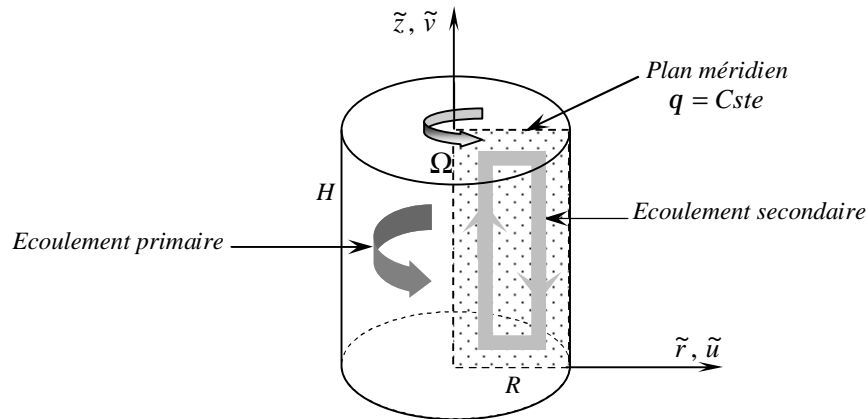
## II.2 Hypothèses simplificatrices :

Afin d'aborder la résolution des équations régissant la convection mixte MHD d'un métal liquide, relatif à la géométrie déjà montrée, on va adopter les hypothèses de simplifications suivantes :

- L'écoulement avec tourbillon (swirl), laminaire et axisymétrique.
- Le métal liquide est incompressible ( $r = Cste$ ) et Newtonien.
- L'effet Joule est négligeable.
- La dissipation visqueuse est négligeable.
- Le métal liquide est non-magnétisé puisque la perméabilité magnétique  $m_m = 1$ .
- L'écoulement n'affecte pas le champ magnétique, c.-à-d. le nombre de Reynolds magnétique est très petit ( $R_m = m_0 s \Omega R \ll 1$ ).
- Les propriétés physiques du métal liquide ( $s$ ,  $l$ ,  $a$  et  $u$ ) sont supposées constantes.
- L'approximation de Boussinesq est valide : Si la variation de densité n'est pas large, on peut considérer la densité comme constante dans les termes transitoire et convectif, et la traiter comme variable seulement dans le terme gravitationnel suivant  $\tilde{z}$ , en sachant qu'elle est exprimée par la formule [53]:

$$(r - r_0)g = -r_0 g b (T - T_0)$$

Où  $r_0$  est la masse volumique de référence, et  $b$  est le Coefficient d'expansion thermique à pression constante.



**Figure II.2 :** Volume de contrôle et mouvement considéré dans le repère de référence.

### II.3 Equations de transport :

Après l'application des hypothèses de simplification susmentionnées, les équations générales régissant l'écoulement secondaire du métal liquide (Fig. II.2) dans le plan méridien, en considérant les forces de buoyancy (phénomène de convection mixte). Ces équations rapportées à un système de coordonnées cylindriques  $(\tilde{r}, \tilde{z}, q)$  sont données selon la description Eulérienne par:

- **Equation de Continuité :**

$$\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial(\tilde{r}\tilde{u})}{\partial\tilde{r}} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tilde{z}} = 0 \quad (\text{II.1})$$

- **Equation de quantité de mouvement radiale :**

$$r \left( \frac{\partial\tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{r}} + \tilde{v} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{z}} - \frac{\tilde{w}^2}{\tilde{r}} \right) = - \frac{\partial\tilde{P}}{\partial\tilde{r}} + m \left( \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial\tilde{r}} \left( \tilde{r} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{r}} \right) + \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{z}^2} - \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}^2} \right) + \tilde{f}_{Lr} \quad (\text{II.2})$$

- **Equation de quantité de mouvement axiale :**

$$r \left( \frac{\partial\tilde{v}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tilde{r}} + \tilde{v} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tilde{z}} \right) = - \frac{\partial\tilde{P}}{\partial\tilde{z}} + m \left( \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial\tilde{r}} \left( \tilde{r} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tilde{r}} \right) + \frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial\tilde{z}^2} \right) + r g b (T - T_c) + \tilde{f}_{Lz} \quad (\text{II.3})$$

- **Equation de quantité de mouvement azimutale (Equation de swirl) :**

$$r \left( \frac{\partial\tilde{w}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tilde{r}} + \tilde{v} \frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tilde{z}} + \frac{\tilde{u}\tilde{w}}{\tilde{r}} \right) = m \left( \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial\tilde{r}} \left( \tilde{r} \frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tilde{r}} \right) + \frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\tilde{z}^2} - \frac{\tilde{w}}{\tilde{r}^2} \right) + \tilde{f}_{Lq} \quad (\text{II.4})$$

Où  $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$  représentent respectivement les composantes de la vitesse radiale, axiale et azimutale,  $g$  est l'accélération de la pesanteur,  $r$  est la masse volumique du fluide et  $\tilde{f}_{Lr}, \tilde{f}_{Lz}, \tilde{f}_{Lq}$  sont respectivement les composantes de la force électromagnétique de Lorentz radiale, axiale et azimutale, cette force EM est donnée par la formule [35]:

$$\vec{f}_L = \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} \quad (\text{II.5})$$

On note que pour l'écoulement secondaire (Fig. II.2), la situation est purement bidimensionnelle (conséquence de l'axisymétrie), par suite la composante azimutale  $\tilde{w}$  de la vitesse est une grandeur scalaire, introduite dans ce système d'équation seulement pour avoir une information de plus sur le champ de vitesse, et pour le calcul du potentiel électrique.

- **Equation de l'énergie :**

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial T}{\partial \tilde{r}} + \tilde{v} \frac{\partial T}{\partial \tilde{z}} = a \left( \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial r} \left( \tilde{r} \frac{\partial T}{\partial \tilde{r}} \right) + \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \tilde{z}^2} \right) \right) \quad (\text{II.6})$$

Où  $a = l / rC_p$ , est la diffusivité thermique du liquide,  $l$  est sa conductivité thermique et  $C_p$  sa chaleur spécifique à pression constante.

- **Equation du potentiel électrique :**

Cette équation est introduite au système d'équations gouvernant, lors de la présence du champ magnétique axial pour compléter ce système vis-à-vis l'apparition d'une nouvelle force de volume (Force de Lorentz), dont les composantes sont les termes  $\tilde{f}_{Lr}$ ,  $\tilde{f}_{Lz}$ ,  $\tilde{f}_{Lq}$  ajoutés aux équations de Navier-Stokes (Eqs. (II.2-II.4)).

En supposant que la conductivité électrique  $\mathbf{s}$  du fluide est isotrope, la loi d'Ohm sera:

$$\mathbf{j} = \mathbf{sE} \quad (\text{II.7})$$

Où  $\mathbf{j}$  est la densité volumique de courant et  $\mathbf{E}$  le champ électrique local. Suivons dans son mouvement un élément fluide; dans un repère absolu, la dernière équation s'écrit :

$$\mathbf{j} = \mathbf{s}(\mathbf{E} + \mathbf{V} \wedge \mathbf{B}) \quad (\text{II.8})$$

Où  $\mathbf{V} = \tilde{u} \mathbf{e}_r + \tilde{v} \mathbf{e}_z + \tilde{w} \mathbf{e}_\theta$  désigne le vecteur vitesse dans le plan méridien et  $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$  le vecteur du champ magnétique, tandis que  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\theta$  sont les vecteurs unitaires respectivement des directions radiale, axiale et azimutale dans le repère absolu.

Aussi puisque, le courant électrique est conservé :

$$\overline{\text{Rot}} \mathbf{E} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E} = -\nabla j \quad (\text{II.9})$$

et

$$\text{div} \mathbf{j} = 0 \quad (\text{II.10})$$

C.-à-d.: le courant électrique dérive d'un potentiel électrique  $j$ .

En substituant les équations (II.9) et (II.10) dans l'équation (II.8), on obtient :

$$\nabla \cdot (-\nabla j + \mathbf{V} \wedge \mathbf{B}) = 0 \quad (\text{II.11})$$

Ce qui donne :  $\Delta j = \mathbf{V} \wedge \mathbf{B}$

Et explicitement en coordonnées cylindriques, l'équation du potentiel électrique  $j$  (II.11) s'écrit :

$$\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{r} \frac{\partial j}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{\partial^2 j}{\partial \tilde{z}^2} = \frac{\tilde{w}}{\tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{r}} \quad (\text{II.12})$$

Mais dans les équations de quantité de mouvement, en savant que les composantes du vecteur densité de courant électrique soient, d'après les équations (II.8) et (II.9) :

$$j_r = s \left( -\frac{\partial j}{\partial \tilde{r}} + \tilde{w}B \right) \quad (\text{II.13a})$$

$$j_z = s \left( -\frac{\partial j}{\partial \tilde{z}} \right) \quad (\text{II.13b})$$

$$j_q = s(-\tilde{u}B) \quad (\text{II.13c})$$

Les composantes de la force EM  $\tilde{f}_{Lr}$ ,  $\tilde{f}_{Lz}$ ,  $\tilde{f}_{Lq}$  peuvent être exprimées comme suit :

$$\tilde{f}_{Lr} = -s\tilde{u}B^2 \quad (\text{II.14a})$$

$$\tilde{f}_{Lz} = 0 \quad (\text{II.14b})$$

$$\tilde{f}_{Lq} = sB \left( \frac{\partial j}{\partial \tilde{r}} - \tilde{w}B \right) \quad (\text{II.14c})$$

Bien que ces formules sont exprimées en termes de quantités dimensionnelles.

#### II.4 Formes adimensionnelles des équations :

Les études expérimentales des écoulements sont souvent effectuées sur des modèles et les résultats sont montrés dans une forme sans dimensions, permettant ainsi des mesures échelonnées vers les conditions réelles des écoulements. La même approche peut être aussi entreprise dans des études numériques. Les équations gouvernant peuvent être transformées à la forme sans dimensions en employant la normalisation appropriée.

En introduisant les variables adimensionnelles suivantes respectivement pour le temps, la longueur, la vitesse, la pression, la température et le potentiel électrique:

$$t = \frac{t}{(1/\Omega)},$$

$$r = \frac{\tilde{r}}{R}, \quad z = \frac{\tilde{z}}{R},$$

$$u = \frac{\tilde{u}}{(\Omega R)}, \quad v = \frac{\tilde{v}}{(\Omega R)}, \quad w = \frac{\tilde{w}}{(\Omega R)},$$

$$P = \frac{\tilde{P}}{r(\Omega R)^2},$$

$$\Theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c},$$

$$\Phi = \frac{j}{(\Omega R^2 B)}.$$



Les équations adimensionnelles gouvernant le système s'écrivent alors :

- **Equation de Continuité :**

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.15})$$

- **Equation de quantité de mouvement radiale :**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{w^2}{r} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right) + NF_{Lr} \quad (\text{II.16})$$

- **Equation de quantité de mouvement axiale :**

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + Ri \cdot \Theta \quad (\text{II.17})$$

- **Equation de quantité de mouvement azimutale (Equation de swirl) :**

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + v \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{uw}{r} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{w}{r^2} \right) + NF_{Lq} \quad (\text{II.18})$$

- **Equation de l'énergie :**

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + u \frac{\partial \Theta}{\partial r} + v \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.19})$$

- **Equation du potentiel électrique :**

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{w}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (\text{II.20})$$

Avec:

Le nombre de Prandtl :  $\text{Pr} = \frac{u}{a}$ ,

Le nombre de Reynolds :  $\text{Re} = \frac{\Omega R^2}{u}$ ,

Le nombre de Richardson :  $Ri = \frac{Gr}{\text{Re}^2} = \frac{bg(T_h - T_c)}{\Omega^2 R}$ , où  $Gr = \frac{b(T_h - T_c)gR^3}{u^2}$  est le nombre de

Grashof, qui exprime le rapport des forces de buoyancy aux forces de viscosité.

Le paramètre d'interaction :  $N = \frac{Ha^2}{\text{Re}} = \frac{SB^2}{r\Omega}$ , qui représente le ratio entre les forces

électromagnétiques et celles d'inertie, et  $Ha = BR\sqrt{S/ru}$  est le nombre de Hartmann, qui définit le rapport des forces électromagnétiques aux forces de viscosité.

Dans les équations de quantité de mouvement (Eqs. (II.16-II.18)),  $F_{Lr}$ ,  $F_{Lz}$ ,  $F_{Lq}$  sont respectivement les forces de Lorentz adimensionnelles dans les directions radiale, axiale et azimutale, dont les expressions sont obtenues après normalisation des composantes dimensionnelles  $\tilde{f}_{Lr}$ ,  $\tilde{f}_{Lz}$ ,  $\tilde{f}_{Lq}$  (Eqs. (II.14a-II.14c)) :

$$F_{Lr} = -u \quad (\text{II.21a})$$

$$F_{Lz} = 0 \quad (\text{II.21b})$$

$$F_{Lq} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} - w \quad (\text{II.21c})$$

Les courants électriques adimensionnels dans les directions  $r$ ,  $z$  et  $q$  sont respectivement:

$$J_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} + w \quad (\text{II.22a})$$

$$J_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (\text{II.22b})$$

$$J_q = -u \quad (\text{II.22c})$$

## II.5 Les conditions aux limites et initiales :

### II.5.1 Les conditions initiales :

Les conditions initiales sont prises pour chaque lancement de calculs comme étant la solution obtenue par le calcul antécédent (les répartitions de  $u, v, w, P, \Phi$  et  $\Theta$  dans le fluide). Toutefois, pour la première exécution, on a supposé que le liquide soit au repos et la répartition de température soit nulle, ainsi qu'un champ de potentiel électrique partout nul dans le volume de contrôle. Alors à  $t = 0$  on aura:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \Theta = 0, \quad \Phi = 0 \quad (0 < r < 1, \quad 0 < z < g). \quad (\text{II.23})$$

### II.5.2 Les conditions aux limites :

Les conditions aux limites des quantités adimensionnelles pour l'écoulement de swirl avec transfert de chaleur et un champ magnétique sont, pour un instant  $t > 0$ ,

Sur l'axe de symétrie:

$$u = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad (r = 0, \quad 0 \leq z \leq g) \quad (\text{II.24a})$$

A la paroi latérale adiabatique et électriquement isolée :

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad (r = 1, \quad 0 \leq z \leq g) \quad (\text{II.24b})$$

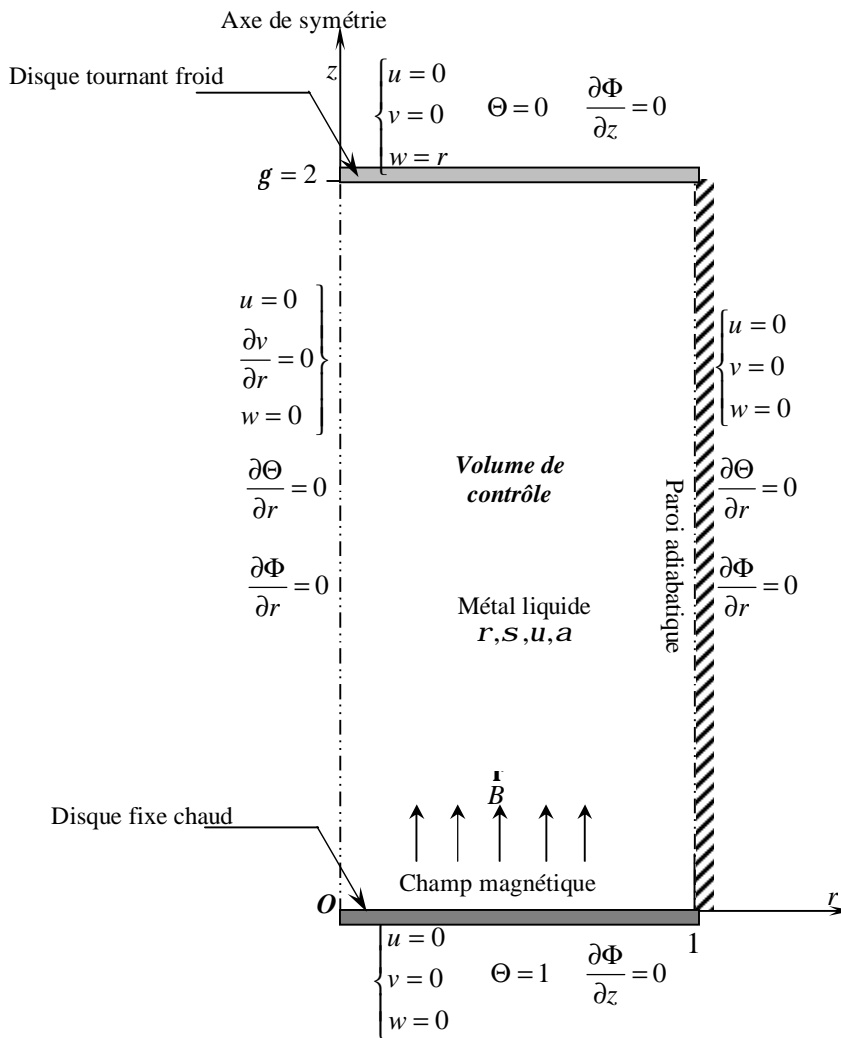
Au disque supérieur froid, en rotation :

$$u = 0, v = 0, w = r, \Theta = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (z = g, 0 \leq r \leq 1) \quad (\text{II.24c})$$

Au disque inférieur chaud et fixe :

$$u = 0, v = 0, w = 0, \Theta = 1, \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (z = 0, 0 \leq r \leq 1) \quad (\text{II.24d})$$

En récapitulation, ces conditions aux limites sont visualisées schématiquement sur la figure II.3.



**Figure II.3 :** Schématisation des conditions aux limites du problème adimensionnel. Les parois de l'enceinte cylindrique sont électriquement isolantes.

## II.6 Outils d'analyse de l'écoulement :

Après la résolution des équations régissant la convection mixte de la cavité cylindrique remplie du métal liquide considéré, les six inconnues  $u, v, w, P, \Phi$  et  $\Theta$  donnent quantitativement une vue sur le phénomène étudié mais, ils existent d'autres paramètres qui peuvent attribuer aux solutions plus de clarté et substantialité quantitativement et qualitativement, et facilitent l'analyse du phénomène étudié. Quelques paramètres dont la nature peut différer (critère adimensionnel, fonction mathématique, ...etc.), sont utilisés dans ce travail pour éclaircir la vision physique du problème.

### II.6.1 La fonction de courant :

Nous utilisons cet intelligent dispositif seulement pour identifier les lignes de courant hydrodynamique, et les débits d'écoulement. La fonction de courant  $y$  (dite de Stokes) est définie en coordonnées cylindriques pour un écoulement incompressible, axisymétrique (c.-à-d. sans variation azimutale  $\partial/\partial q = 0$ ) par :

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial z} \quad v = \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial r} \quad (\text{II.25})$$

Ici les lignes  $y(r, z) = Cste$  sont les lignes de courant, et le débit entre deux lignes de courant est :

$$Q_{1 \rightarrow 2} = 2p(y_2 - y_1) \quad (\text{II.26})$$

### II.6.2 La vorticité :

Un autre outil, la vorticité qui est associée au vecteur vitesse local  $\vec{V} = (u, v, w)$ , est définie par :

$$w = \text{Rot } \vec{V} \quad (\text{II.27})$$

Mais dans les calculs on s'intéresse seulement à la composante azimutale de la vorticité, en la nommant vorticité elle-même :

$$w = w_q = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \quad (\text{II.28})$$

### II.6.3 Le moment angulaire :

Le moment angulaire  $\Lambda$  est une grandeur scalaire :

$$\Lambda = r \cdot w \quad (\text{II.29})$$

Où  $w$  est la composante azimutale de vitesse au point  $(r, z)$ .

**II.6.4 Le nombre de Nusselt :**

Cet outil est un nombre adimensionnel, aide à analyser les transferts thermiques par convection aux frontières, puisque il est inversement proportionnel à l'épaisseur  $d_l$  de la couche limite thermique, et défini localement comme [36]:

$$Nu(r) = -\frac{l \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0}}{l \frac{T_h - T_c}{H}} = -g \left( \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right)_{z=0} \quad (\text{II.30})$$

Aussi, nous utilisons le nombre de Nusselt moyen calculé pour chaque disque d'extrémité de l'enceinte cylindrique:

$$\overline{Nu} = \frac{1}{P} \int_0^1 \int_0^{2p} Nu(r) r dq dr$$

Donc  $\overline{Nu} = 2 \int_0^1 Nu(r) r dr$  (II.31)

## Chapitre III

### SOLUTION NUMERIQUE

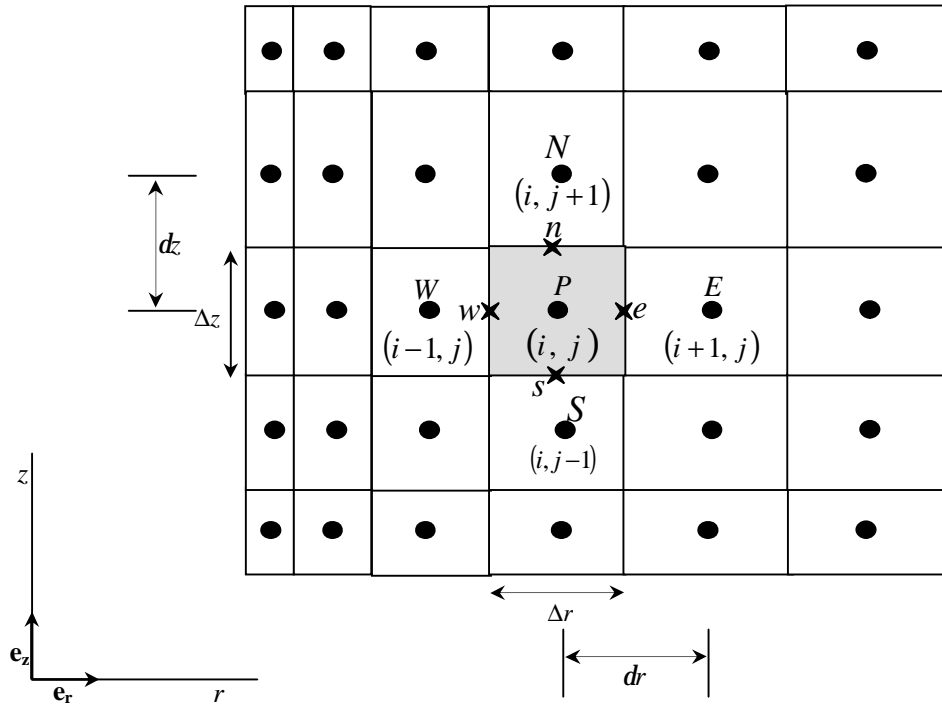
Comme nous avons exposé au précédent chapitre, les équations régissant le phénomène étudié sont des équations aux dérivées partielles (EDP) non-linéaires, dont la résolution analytique ne peut être possible au moyen des outils d'analyse mathématique contemporain. Mais une solution numérique peut être possible en transformant ces équations différentielles en systèmes d'équations algébriques linéaires par une méthode de discrétisation avant de résoudre ce système par des méthodes directes ou par itérations. Pour notre présente étude, nous avons choisi la méthode des volumes finis pour discrétiser les équations du modèle mathématique.

La méthode des volumes finis (VF) emploie la forme intégrale des équations de transport comme son point de départ. Le domaine de solution est subdivisé en un nombre fini de volumes de contrôle (VC) contigus et les équations de conservation sont appliquées à chaque volume de contrôle. Au centre de chaque VC se trouve un noeud auquel les quantités variables doivent être calculées. L'interpolation est employée pour exprimer des valeurs variables à la surface du volume en termes des valeurs nodales au centre du VC. Les intégrales de surface et de volume sont approchées en employant des formules de quadrature appropriées. En conséquence, on obtient une équation algébrique pour chaque VC, dans laquelle quelques valeurs nodales voisines apparaissent.

La méthode VF peut accommoder n'importe quel type de maillage, même pour les géométries complexes. Le maillage définit seulement les frontières de volume de contrôle et n'a pas besoin d'être rapporté à un système de coordonnées. L'approche par VF est peut-être la plus simple à comprendre et à programmer. Tous les termes qui doivent être approchés ont la signification physique c'est pourquoi cette méthode est choisie.

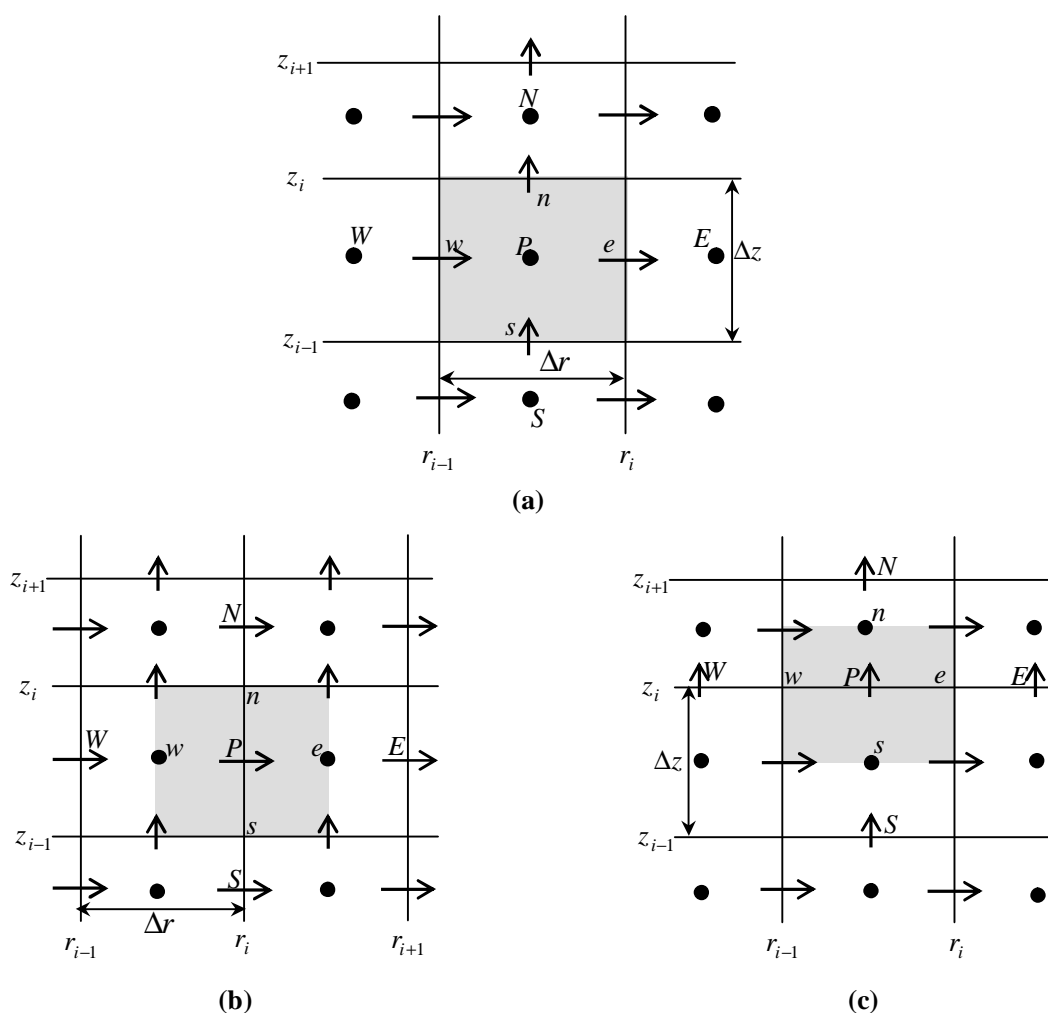
**III.1 Maillage :**

Le domaine physique est divisé en un certain nombre de volumes finis. Sur la figure III.1, on montre un ensemble de volumes de contrôle typiques 2D avec la notation que nous emploierons. La surface de VC consiste en quatre plans, notés par des lettres minuscules correspondant à leur direction ( $e, w, n$  et  $s$ ) en ce qui concerne le noeud central (P). E, W, N et S sont les centres des volumes de contrôles adjacents situés respectivement à l'Est, Ouest, Nord et Sud de celui contenant P. Il est typique d'employer un réseau entrelacé comme indiqué dans la figure III.2. L'idée est d'évaluer les quantités scalaires: composante de vitesse azimutale  $w$ , pression  $p$ , température  $\Theta$  et potentiel électrique  $j$  stockées aux centres des volumes finis, mais calculer les deux composantes de la vitesse  $u$  et  $v$  sur un réseau entrelacé centré autour des faces du volume. La motivation dans l'utilisation d'un tel réseau est d'éviter l'instabilité bien connue « *checkerboard* » [54] : dans lequel des cellules de réseau supplémentaires montrent des solutions complètement différentes.



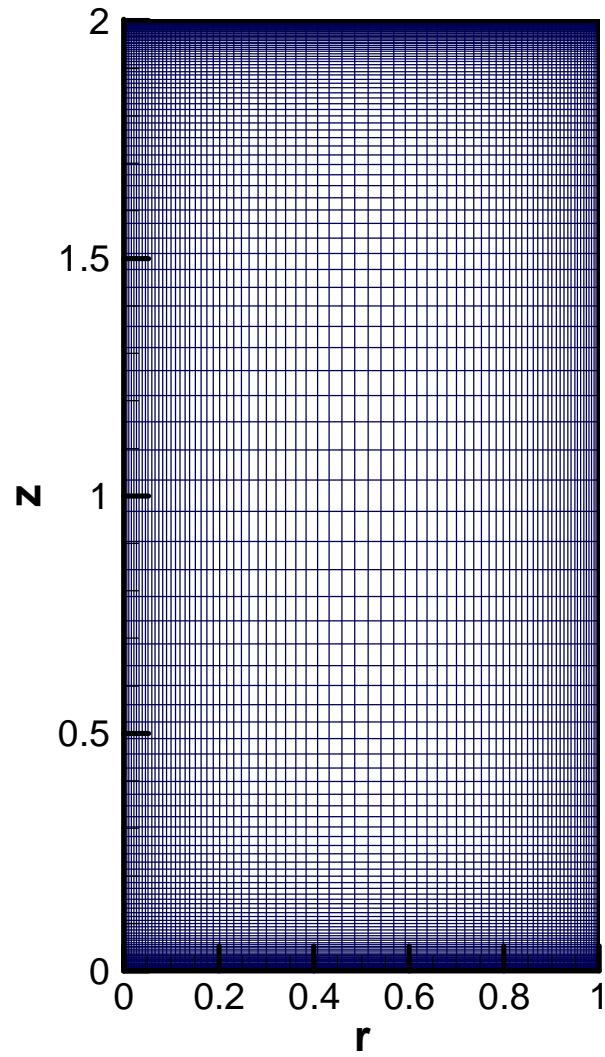
**Figure III.1 :** Volumes de contrôle typique et notation de maillage utilisée pour un maillage 2D.

Dans les écoulements MHD, les couches limites de Hartmann se développent et diffèrent de celles ordinaires présentes en situation purement hydrodynamique. Aux parois perpendiculaires au champ magnétique, les couches limites de Hartmann sont caractérisées par une décroissance exponentielle de la vitesse vers la paroi [35-36] et [48]. Aux parois parallèles au champ magnétique, une couche appelée couche parallèle existe, et cela engendre d'importants gradients de vitesse et de température. Dans l'optique de comprendre ce qu'il est produit aux couches de Hartmann et parallèles, et en prenant en considération la loi de variation de leurs épaisseurs, on a raffiné le réseau de maillage près des parois selon une progression géométrique de raison 1.05 dans la direction  $r$  et 1.07 dans la direction  $z$  (Fig. III.3).



**Figure III.2 :** Volumes de contrôle du maillage entrelacé pour : (a) les quantités scalaires, (b) la composante radiale  $u$ , (c) la composante axiale  $v$  de vitesse.





**Figure III.3** : Maillage utilisé dans les calculs avec raffinement près des parois. ici  $n_r \times n_z = 80 \times 160$ , nombres de nœuds suivant les directions  $r$  et  $z$ .

### III.2 Discrétisation implicite de l'équation générale de transport :

Les équations locales instantanées régissant l'écoulement en question peuvent s'écrire selon la suivante forme de l'équation généralisée de transport d'une variable dépendante  $f$  :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(uf)}{\partial r} + \frac{\partial(vf)}{\partial z} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \Gamma_f \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \Gamma_f \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right) + S_f \quad (\text{III.1})$$

Où :

$\frac{\partial f}{\partial t}$  : représente le terme transitoire.

$\frac{\partial(uf)}{\partial r} + \frac{\partial(vf)}{\partial z}$  : représente le transport par convection de  $f$ .

$\left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \Gamma_f \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \Gamma_f \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right)$  : représente la diffusion de  $f$ .

$S_f$  : représente le terme source.

Le tableau suivant rassemble les expressions de la variable dépendante  $f$ , du coefficient de diffusion  $\Gamma_f$  et du terme source  $S_f$  concernant les équations adimensionnelles citées au précédent chapitre (Eqs. (II.15-II.19)). Toutefois, pour l'équation du potentiel électrique (Eq. II.20), elle est du type Poisson bien connu, et représente la loi de comportement pour la quantité  $\Phi$  en régime stationnaire, et nous faisons abstraction des termes transitoire et de convection pour l'écrire sous la forme de transport générale (Eq. III.1).

Equation de	$f$	$\Gamma_f$	$S_f$
Continuité	1	0	$-u/r$
Quantité de mouvement radiale	$u$	$\frac{1}{\text{Re}}$	$-\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{u}{r^2} - \frac{Ha^2}{\text{Re}} u + \frac{w^2}{r}$
Quantité de mouvement axiale	$v$	$\frac{1}{\text{Re}}$	$-\frac{\partial P}{\partial z} + Ri \cdot \Theta$
Quantité de mouvement azimutale	$w$	$\frac{1}{\text{Re}}$	$-\frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{w}{r^2} + \frac{Ha^2}{\text{Re}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} - w \right) - \frac{uw}{r}$
L'énergie	$\Theta$	$\frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}}$	0
Potentiel électrique	$\Phi$	1	$-\frac{w}{r} - \frac{\partial w}{\partial r}$

**Tableau III.1** Différentes quantités transportées et leurs termes de transport.

Pour obtenir l'équation de discrétisation de la variable dépendante  $f$ , on intègre l'équation générale de transport (III.1) sur un volume fini de contrôle typique de dimensions  $\Delta r \times \Delta z$ , son volume par unité de profondeur est  $\Delta V = r \Delta r \cdot \Delta z$ , et on obtient :

$$A_p f_p = A_E f_E + A_W f_W + A_N f_N + A_S f_S + b \quad (\text{III.2})$$

Les coefficients multiplicatifs ( $A_i ; i = P, E, W, N, S$ ) de la variable dépendante  $f$  ainsi que le terme  $b$  de l'équation (III.2) sont décrits en détail dans Patankar [54], et sont rappelés ci-dessous:

$$A_E = D_e A(|P_e|) + \max[-F_e, 0] \quad (\text{III.3a})$$

$$A_W = D_w A(|P_w|) + \max[F_w, 0] \quad (\text{III.3b})$$

$$A_N = D_n A(|P_n|) + \max[-F_n, 0] \quad (\text{III.3c})$$

$$A_S = D_s A(|P_s|) + \max[F_s, 0] \quad (\text{III.3d})$$

$$A_p = A_E + A_W + A_N + A_S + A_{p^0} \quad (\text{III.3e})$$

$$b = \left( \overline{S_f} + \frac{f^0}{\Delta t} \right) r_p \cdot \Delta r \cdot \Delta z \quad (\text{III.3f})$$

Avec  $A_p, A_E, A_W, A_N$  et  $A_S$  sont respectivement les coefficients correspondants aux noeuds central (point  $P$ ), Est, Ouest, Nord et Sud du volume fini de contrôle et  $A_{p^o}$  est le coefficient de la variable générale  $f$  à calculer au point  $P$  en un instant précédent par :

$$A_{p^o} = \frac{r_p \cdot \Delta r \cdot \Delta z}{\Delta t} \quad (\text{III.3g})$$

Et  $b$  : appelé terme source, qui englobe tous les termes supposés être constants dans le volume de contrôle.  $D_e, D_w, D_n, D_s$  et  $F_e, F_w, F_n, F_s$  sont respectivement les termes diffusifs et convectifs aux faces Est, Ouest, Nord et Sud. Leurs expressions sont :

$$D_e = \frac{\Gamma_e}{dr_e} r_e \cdot \Delta z \quad (\text{III.4a})$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{dr_w} r_w \cdot \Delta z \quad (\text{III.4b})$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n}{dz_n} r_n \cdot \Delta r \quad (\text{III.4c})$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s}{dz_s} r_s \cdot \Delta r \quad (\text{III.4d})$$

$$F_e = u_e \cdot r_e \cdot \Delta z \quad (\text{III.4e})$$

$$F_w = u_w \cdot r_w \cdot \Delta z \quad (\text{III.4f})$$

$$F_n = v_n \cdot r_p \cdot \Delta r \quad (\text{III.4g})$$

$$F_s = v_s \cdot r_p \cdot \Delta r \quad (\text{III.4h})$$

Et  $P_e, P_w, P_n, P_s$  sont :

$$P_i = F_i / D_i \quad ; i = e, w, n, s \quad (\text{III.5})$$

Ces nombres appelés nombres du Peclet, désignent les rapports des flux convectifs aux flux diffusifs aux différentes faces du volume fini de contrôle. Les coefficients  $A_p, A_E, A_W, A_N$  et  $A_S$  dépendent du schéma numérique choisi et du nombre de Peclet.

Dans tous nos calculs, on a utilisé le schéma numérique de différences centrées [54]. Ce choix est motivé par le fait que ce schéma soit le plus usuellement utilisé dans la littérature pour découvrir les instabilités physiques. Ce schéma est donné par la fonction suivante:

$$A(|P_i|) = 1 - 0.5|P_i| \quad ; i = e, w, n, s \quad (\text{III.6})$$

Cependant la résolution de l'équation (III.2) fait apparaître deux difficultés :

- les coefficients des équations discrètes dépendent des valeurs des variables, le système n'est donc pas linéaire.
- Les termes source des équations de quantité de mouvement font intervenir le gradient de pression.

### III.3 Discrétisation de l'équation du potentiel électrique :

On intègre l'équation du potentiel électrique (Eq. II.20) sur un VC typique de dimensions  $\Delta r \times \Delta z$  par unité de profondeur, on obtient :

$$\int_s^e \int_w^e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) r dr dz + \int_s^e \int_w^e \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} r dr dz = \int_s^e \int_w^e \left( \frac{w}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) r dr dz \quad (III.7)$$

Explicitons chaque terme :

$$\int_s^e \int_w^e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) r dr dz = \int_s^e \left[ r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right]_w^e dz = \left[ \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_e - \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_w \right] \Delta z \quad (III.8)$$

$$\int_s^e \int_w^e \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} r dr dz = \int_w^e \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]_s^e r dr = \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_e - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_s \right] r_p \Delta r \quad (III.9)$$

Pour le terme de source, on prend sa valeur moyenne, en supposant que la quantité  $w$  ne varie pas sur le VC fini (c.-à-d.  $\frac{\partial w}{\partial r} = 0$ ):

$$\int_s^e \int_w^e \left( \frac{w}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) r dr dz = \int_s^e \int_w^e \left( \frac{w}{r} \right) r dr dz$$

$$\int_s^e \int_w^e \left( \frac{w}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) r dr dz = \int_s^e [w.r]_w^e dz = [(rw)_e - (rw)_w] \Delta z \quad (III.10)$$

On obtient l'équation linéaire générale, liant la valeur du potentiel électrique  $\Phi$  au centre  $P$  du VC avec les valeurs nodales des VC finis voisins :

$$A_P \Phi_P = A_E \Phi_E + A_W \Phi_W + A_N \Phi_N + A_S \Phi_S + b \quad (III.11)$$

où ces coefficients sont :

$$A_E = \frac{r_e \cdot \Delta Z}{dr_e} \quad (III.12)$$

$$A_W = \frac{r_w \cdot \Delta Z}{dr_w} \quad (III.13)$$

$$A_N = \frac{r_n \cdot \Delta r}{dr_n} \quad (\text{III.14})$$

$$A_S = \frac{r_s \cdot \Delta r}{dr_s} \quad (\text{III.15})$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S \quad (\text{III.16})$$

Et le terme source constant :

$$b = (r_w \cdot w_w - r_e \cdot w_e) \Delta z \quad (\text{III.17})$$

### III.4 Algorithmes de résolution:

Pour résoudre les systèmes d'équations algébriques résultants des discrétisations des équations régissant le mouvement par la méthode VF, il faut remédier aux deux difficultés mentionnées à la fin de la section (III.2). Pour cette raison, on a fait appel à l'algorithme SIMPLER (Patankar [54]) pour construire les coefficients formant les systèmes des équations algébriques. Puis on les résout par l'algorithme TDMA [54], qui est plus approprié à ce genre de systèmes algébriques.

#### III.4.1 Algorithme SIMPLER :

Cet algorithme permet d'obtenir une bonne convergence en pression, nous présentons l'algorithme SIMPLER [54] qu'on utilise dans les calculs, mais on a ajouté les étapes 6,7 et 8 qui sont spécifique à notre problème à résoudre:

- 1- Donner une estimation du champ de vitesse.
- 2- Calculer les Pseudo-vitesses  $\hat{u}$  et  $\hat{v}$  donnée par les équations :

$$\hat{u}_e = \sum_{i=E,W,N,S} \frac{(A_i u_i + b_e^u)}{A_e} \quad (\text{III.18a})$$

$$\hat{u}_w = \sum_{i=E,W,N,S} \frac{(A_i u_i + b_w^u)}{A_w} \quad (\text{III.18b})$$

$$\hat{v}_n = \sum_{i=E,W,N,S} \frac{(A_i v_i + b_n^v)}{A_n} \quad (\text{III.18c})$$

$$\hat{v}_s = \sum_{i=E,W,N,S} \frac{(A_i v_i + b_s^v)}{A_s} \quad (\text{III.18d})$$

Ici  $b_e^u, b_w^u, b_n^v$  et  $b_s^v$  sont les termes de source ne contenant pas les gradients de pression.

Ainsi les vitesses s'écrivent :

$$u_e = \hat{u}_e + d_e^u P \quad (\text{III.19a})$$

$$u_w = \hat{u}_w + d_w^u P \quad (\text{III.19b})$$

$$v_n = \hat{v}_n + d_n^v P \quad (\text{III.19c})$$

$$v_s = \hat{v}_s + d_s^v P \quad (\text{III.19d})$$

Où  $d_i P$  ;  $i = E, W, N, S$  sont les termes de pression déjà omis dans les équations (III.18a-III.18d).

3- Résoudre l'équation de pression résultante en substituant les équations (III.19a-III.19d) dans l'équation discrète de conservation de la masse cette équation sera :

$$A_P P = \sum_{i=E,W,N,S} ((A_i)_P P_i + b_P) \quad (\text{III.20})$$

4- Considérer le champ de pression comme estimation  $P^*$ , et l'utiliser pour résoudre en  $u^*, v^*$  comme des estimées.

5- Corriger le champ de vitesse, mais ne pas corriger la pression.

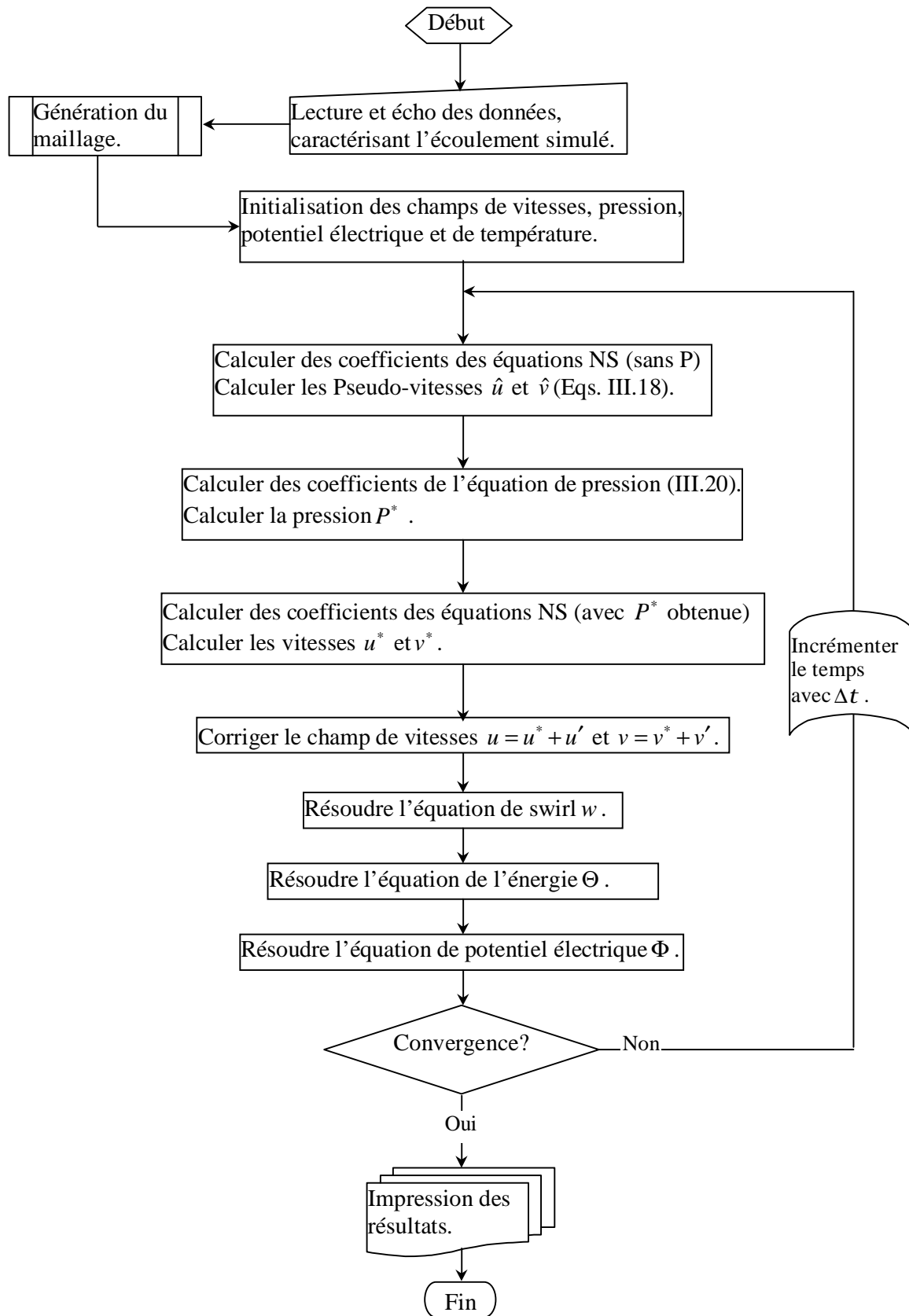
6- Résoudre l'équation de swirl, et obtenir  $w$ .

7- Résoudre l'équation de l'énergie, pour obtenir  $\Theta$ .

8- Résoudre l'équation de potentiel électrique  $\Phi$  en utilisant les valeurs de  $w$  déjà obtenues.

9- Retourner à l'étape 2, avec le nouveau champ de vitesse jusqu'à convergence.

L'organigramme suivant montre les étapes entreprises pour programmer la méthode numérique de résolution et simuler le phénomène étudié.





### III.4.2 Algorithme TDMA :

Quand des équations aux dérivées partielles sont discrétisées, par exemple, en utilisant la méthode des volumes finis, les équations résultantes algébriques ont une structure particulièrement simple. Chaque équation contient seulement les variables à son propre noeud et ses voisins immédiats gauches et droites :

$$A_W^i f_{i-1} + A_P^i f_i + A_E^i f_{i+1} = Q_i \quad (\text{III.21})$$

La matrice  $\mathbf{A}$  correspondante à un système a des termes non nuls seulement sur sa diagonale principale (représenté par  $A_P$ ) et les diagonales immédiatement ci-dessus et au-dessous de cela (représentées par  $A_E$  et  $A_W$ , respectivement). Une telle matrice est appelée *tridiagonale*. Les systèmes contenant matrices tridiagonales sont particulièrement faciles à résoudre. Les éléments matriciels sont les meilleurs stockés comme trois  $n \times 1$  tableaux.

L'élimination de Gauss est particulièrement facile pour des systèmes tridiagonals: seulement un élément doit être éliminé de chaque rangée pendant le processus d'élimination en avant. Quand l'algorithme a atteint la  $i^{\text{me}}$  rangée, seulement  $A_P^i$  doit être modifié et sa nouvelle valeur devient :

$$A_P^i = A_P^i - \frac{A_W^i A_E^{i-1}}{A_P^{i-1}} \quad (\text{III.22})$$

Cette équation doit être comprise dans le sens de programmation, c.-à-d. le résultat est stocké en place de la valeur de  $A_P^i$  originale. Le terme de contrainte est aussi modifié :

$$Q_i^* = Q_i - \frac{A_W^i Q_{i-1}^*}{A_P^{i-1}} \quad (\text{III.23})$$

La substitution en arrière de la méthode est aussi simple. La  $i^{\text{me}}$  variable est calculée de :

$$f_i = \frac{Q_i^* - A_E^i f_{i+1}}{A_P^i} \quad (\text{III.24})$$

Dans le but de résoudre le système d'équations algébriques bidimensionnelles résultant on effectuera un double balayage qui consiste à déterminer les valeurs de la variable  $f$  sur chaque ligne du domaine de calcul indépendamment des autres lignes, en conséquence, le système se transforme en un système unidimensionnel, et on considère les termes des autres dimensions comme des constantes en les ajoutant au terme source de la dimension dont-on veut résoudre son système. Le système d'équations en vertu du balayage est constitué d'une matrice tridiagonale qui peut être résolu par l'algorithme de TDMA qu'on a présenté les directives et les équations dans la présente section.

**III.5 Critères de convergence:**

Les calculs sont effectués avec continuation jusqu'à la satisfaction des critères de convergence qui consiste à déterminer l'écart entre les nombres de Nusselt moyens aux deux disques (froid  $\overline{Nu}_c$  et chaud  $\overline{Nu}_h$ ), et signaler l'arrêt des calculs si cet écart ne dépassera pas une valeur de tolérance  $d$  :

$$\left| \overline{Nu}_c - \overline{Nu}_h \right| \leq d \quad (\text{III.25})$$

Sachant que  $d$  vaut  $5 \cdot 10^{-5}$  pour les calculs effectués avec simple précision (real), et vaudra  $5 \cdot 10^{-9}$  pour ceux effectués en double précision (real\*8). L'utilisation de ce critère vient du fait que les bilans de conservation de masse et de courant électrique soient toujours satisfaits plus rapidement que le bilan énergétique. Autrement, les calculs sont continus jusqu'aux temps adimensionnels  $3000 \leq t \leq 6000$ .

## Chapitre IV

### PRESENTATIONS ET DISCUSSION DES RESULTATS

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux présentations et discussion des résultats obtenus en simulant numériquement l'écoulement tournant confiné dans la cavité cylindrique, de convection mixte sans et avec présence de champ magnétique, dont l'importance dans les applications industrielles a été présentée au chapitre premier. Les résultats figurant dans ce qui suit, sont tous obtenus pour un rapport d'aspect  $g = 2$  et  $Pr = 0.015$  (c'est le cas des métaux liquides), et sont visualisés graphiquement sous plusieurs formes appropriées pour chaque paramètre (des lignes de courant, iso-valeurs des vitesses, des isothermes, potentiel et courant électriques, ...etc.). Ce chapitre se divise en deux parties:

La première partie concerne la situation de la convection mixte en absence du champ magnétique, et la deuxième partie présente le comportement de l'écoulement avec l'application d'un champ magnétique axial de diverses intensités via la variation du nombre de Hartmann  $Ha$ . Toutefois, dans les deux parties l'ultime objectif est la détermination des nombres de Reynolds critiques  $Re_{cr}$  et leurs correspondants en fréquences critiques  $F_{cr}$  pour différentes valeurs du nombre de Richardson  $Ri$ , et cela pour la même configuration décrite au chapitre II. En essayant de mettre en évidence l'effet d'un champ magnétique sur la stabilité hydrodynamique et thermique en régime transitoire pour ce type d'écoulement, dont l'importance industrielle est explicitée au chapitre premier.

Au commencement, on examinera l'effet du maillage sur de la solution numérique, et déduire la qualité de l'approximation, puis on validera le code utilisé dans les calculs en comparant les résultats que produisait avec d'autres données expérimentales et numériques trouvées dans la littérature.

### IV.1 Effet du maillage sur les solutions numériques:

Avant de commencer les calculs paramétriques, l'indépendance de la solution numérique vis-à-vis de la grille de maillage utilisée, est vérifiée pour des valeurs représentatives de paramètres. On montre le résultat de cet essai dans le tableau IV.1.

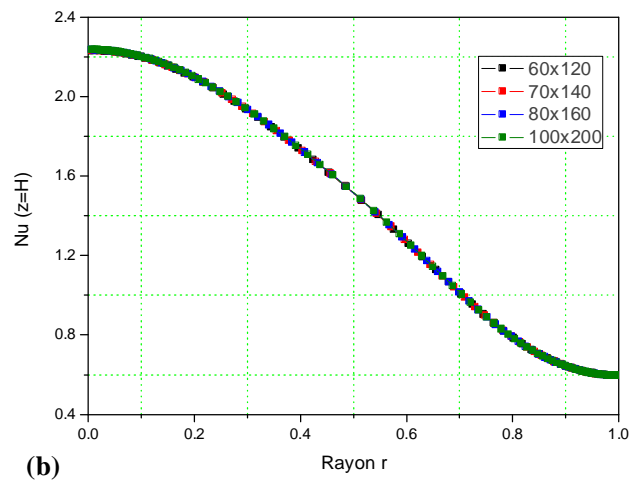
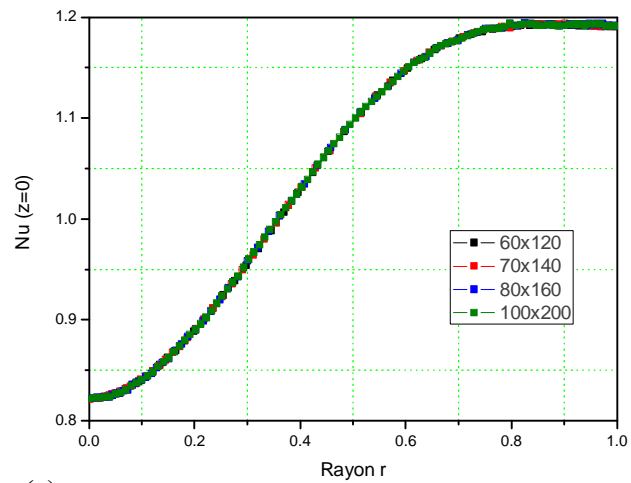
Avec différentes grilles de maillage on a calculé les nombres de Nusselt locaux aux disques (supérieur et inférieur) aux points  $r=0.0, 1.0, 0.5, 0.79$ , pour le cas ;  $Pr = 0.015, Re = 800, Ri = 1.0, Ha = 5.0$  et un pas de temps adimensionnel  $\Delta t$  égal à 0.0001.

Grille $n_r \times n_z$	$Nu_r$	$Nu_c = \partial\Theta/\partial z \big _{z=h}$	$Nu_h = \partial\Theta/\partial z \big _{z=0}$	$\Psi$
	$r$			
60x120	0.0	2.23256	0.82178	$\Psi_{\min} = -0.072006$
	0.5	1.51396	1.09624	
	0.79	0.80746	1.19000	$\Psi_{\max} = 0.001261$
	1.0	0.59638	1.19092	
70x140	0.0	2.23466	0.82168	$\Psi_{\min} = -0.072257$
	0.5	1.51530	1.09612	
	0.79	0.80756	1.19028	$\Psi_{\max} = 0.001237$
	1.0	0.59630	1.19154	
80x160	0.0	2.23574	0.82190	$\Psi_{\min} = -0.072353$
	0.5	1.51586	1.09682	
	0.79	0.80754	1.19110	$\Psi_{\max} = 0.001214$
	1.0	0.59626	1.19130	
100x200	0.0	2.23710	0.82208	$\Psi_{\min} = -0.072449$
	0.5	1.51676	1.09658	
	0.79	0.80732	1.18492	$\Psi_{\max} = 0.001201$
	1.0	0.59616	1.19452	

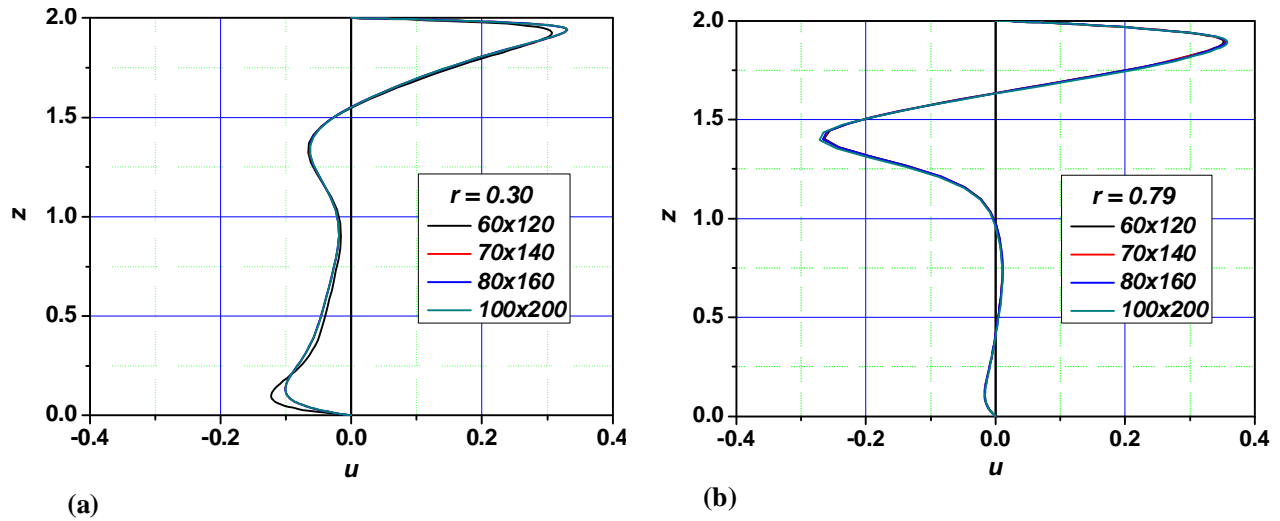
**Table IV.1:** Comparaison des solutions obtenues avec différentes grilles de maillage.

Si on réfère à la grille de maillage la plus fine ( $n_r \times n_z = 100 \times 200$ ), l'erreur numérique relative dans les valeurs,  $Nu(z=0)$  et  $Nu(z=h)$  est à la plupart inférieure à 0.5 % et dans de nombreux cas, de l'ordre de 0.1 % (Fig. IV.1, Tab. IV.1). En examinant le tableau IV.1 qui regroupe les valeurs maximales et minimales de la fonction de courant  $y$  et les nombres de Nusselt locaux, on peut constater aisément que les valeurs  $y_{\max}$  et  $y_{\min}$  diffèrent de 5 % et 0.6 % respectivement entre la grille fine ( $n_r \times n_z = 100 \times 200$ ) et celle la moins dense ( $60 \times 120$ ), les différences entre la grille moyenne ( $n_r \times n_z = 80 \times 160$ ) et la plus dense sont seulement de 1.08% et 0.1 % pour  $y_{\max}$  et  $y_{\min}$  respectivement. Aussi, les divers profils de vitesse présentés (Figs. IV.2-IV.3) nous informent sur la qualité de la solution approchée qu'apportent ces différentes grilles de maillage dans quelques régions du domaine de calcul. Selon le résultat de cet essai, le maillage choisi pour achever les calculs nécessaires à la résolution du problème considéré, est celui avec un nombre moyen de points de discrétisation, c.-à-d. la grille de ( $n_r \times n_z = 80 \times 160$ ), puisqu'il est considéré pour avoir le meilleur compromis entre le temps de calcul et la résolution

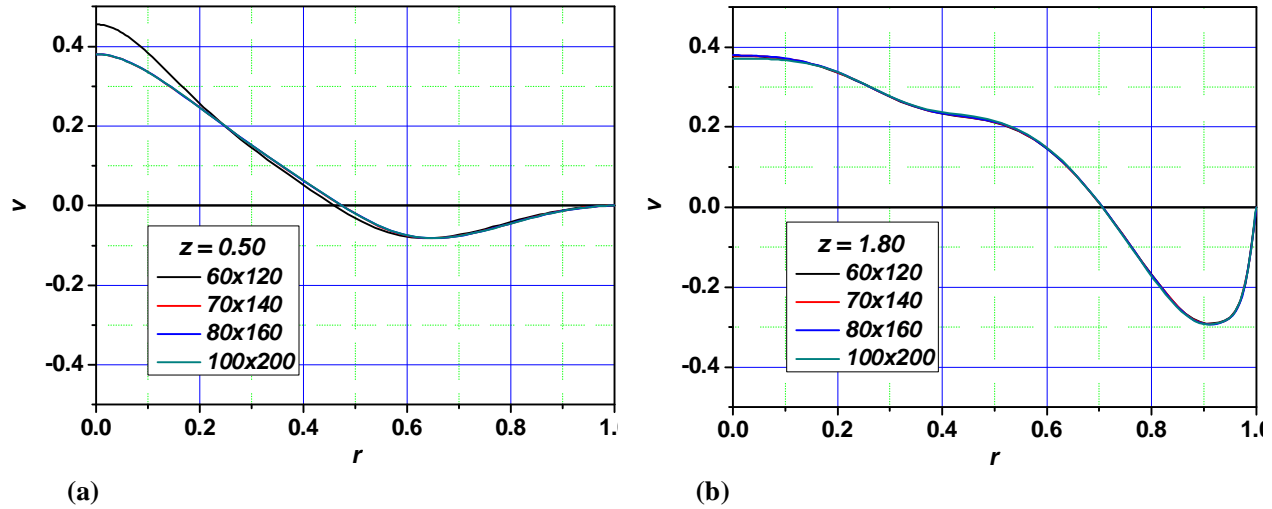
suffisante dans les calculs. Pour cette grille, les espacements de réseau minimum et maximum sont  $2.19.10^{-3}$  et  $2.91.10^{-2}$  respectivement dans la direction radiale, et de  $1.68.10^{-4}$  et  $6.36.10^{-2}$  dans la direction axiale. Les calculs ont été effectués sur un ordinateur personnel avec CPU 2.8 GHz, ainsi, le temps de calcul moyen pour un cas typique était environ de 8 heures.



**Figure IV.1 :** Comparaison des valeurs des nombres de Nusselt locaux pour différentes densités de maillage, (a) disque inférieur (b) disque supérieur tournant. Pour le cas :  $Pr = 0.015, g = 2, Re = 800, Ri = 1.0, Ha = 5.0$ .



**Figure IV.2** : Distributions axiales de la vitesse radiale  $u$  à (a)  $r = 0.30$  (b)  $r = 0.79$ .  
 Obtenues avec différentes densités de maillage,  $Pr = 0.015, g = 2, Re = 800, Ri = 1.0, Ha = 5.0$ .



**Figure IV.3** : Profils radiaux de la vitesse axiale  $v$  (a)  $z = 0.50$  (b)  $z = 1.80$ . Obtenues avec les différentes densités de maillage, ( $Pr = 0.015, g = 2, Re = 800, Ri = 1.0, Ha = 5.0$ ).

## IV.2 Validation du code:

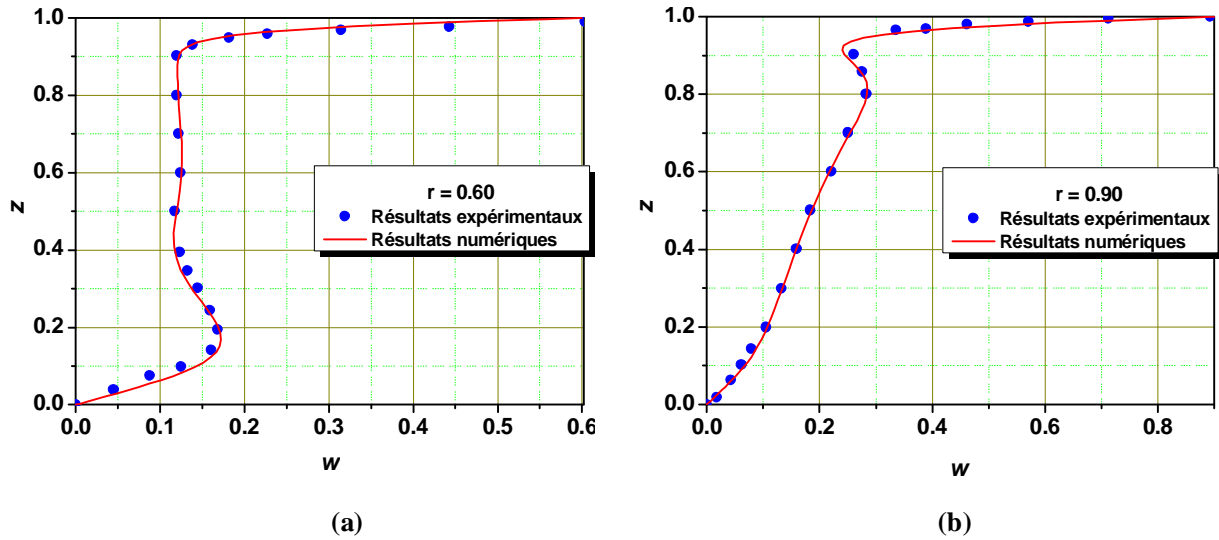
Dans le but d'attribuer plus de confiance aux résultats de nos simulations numériques, on a établi quelques comparaisons quantitatives et qualitatives avec d'autres investigations expérimentales et numériques présentées dans la littérature.

Premièrement, la comparaison est faite pour la distribution de la vitesse radiale  $u$  et azimutale  $w$  le long des lignes verticales  $r=0.60, 0.70, 0.90$  avec les mesures expérimentales obtenues par Michelson [51], qui a utilisé la technique LDA pour déterminer les distributions des vitesses radiales et azimutales dans une cavité cylindrique, dont le disque supérieur est en rotation, et cela pour  $Re=1800$  et  $g = 1$  (Figs. IV.4, IV.5a), et aussi faite pour un profil radial de vitesse axiale  $v$  avec des mesures prises par Spohn [52] (Fig. IV.5b), pour le cas  $Re=1850$ ,  $g = 1.75$  et  $Ha = 0$  où le disque tournant est celui en bas.

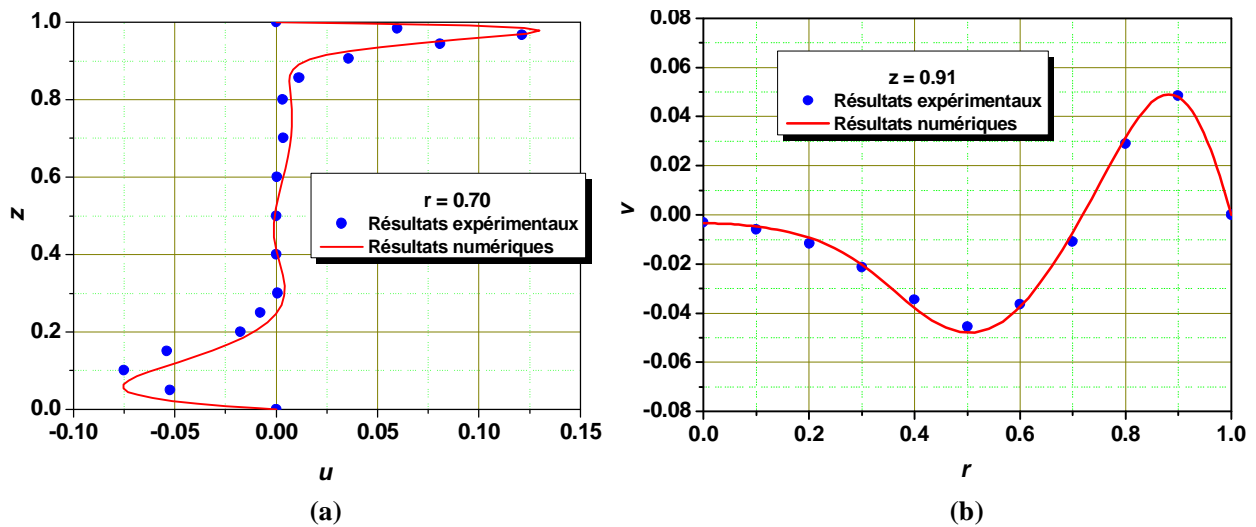
On constate aisément que les valeurs calculées sont en excellent accord avec les mesures dans le champ d'écoulement entier à l'exception de la région près du fond de la cavité ; où des légères déviations peuvent être trouvées. La non-conformité peut il en raison des incertitudes dans les mesures.

Deuxièmement, la comparaison a été faite avec les résultats numériques obtenus par Iwatsu [24], concernant l'écoulement tournant confiné dans la cavité cylindrique, remplie d'un fluide ( $Pr=1$ ), ayant un rapport d'aspect  $g = 1$ , sous l'effet d'une différence de température constante entre les disques supérieur (chaud) et inférieur (froid). Aussi, avec Omi & Iwatsu [26] qui ont étudié le transfert de chaleur du même fluide confiné dans une enceinte cylindrique de rapport de forme  $g = 2$  avec les deux disques extrémaux en rotation désignée par le rapport  $s = \Omega_{top} / \Omega_{bottom}$  des vitesses angulaires.

Nous avons achevé cette étape en utilisant deux grilles de maillages de  $80 \times 80$  et  $80 \times 160$  respectivement, pour les comparaisons avec les deux études numériques précédemment mentionnées. Nous avons présenté de divers profils des paramètres tel que les vitesses radiales, axiales et azimutales et la température le long d'une ligne d'équation  $r = 0.8$ , ainsi que les tracés des contours de la fonction de courant, de vorticités et les isothermes, et cela pour différents nombres de Richardson  $Ri$ . En examinant ces figures, nous pouvons constater que nos résultats numériques sont en bon accord tant qualitatif que quantitatif avec les résultats numériques d'Iwatsu [24] et d'Omi & Iwatsu [26], et tous ces comparaisons valident notre code de calcul en l'attribuant la confiance désirée pour l'utilisation.

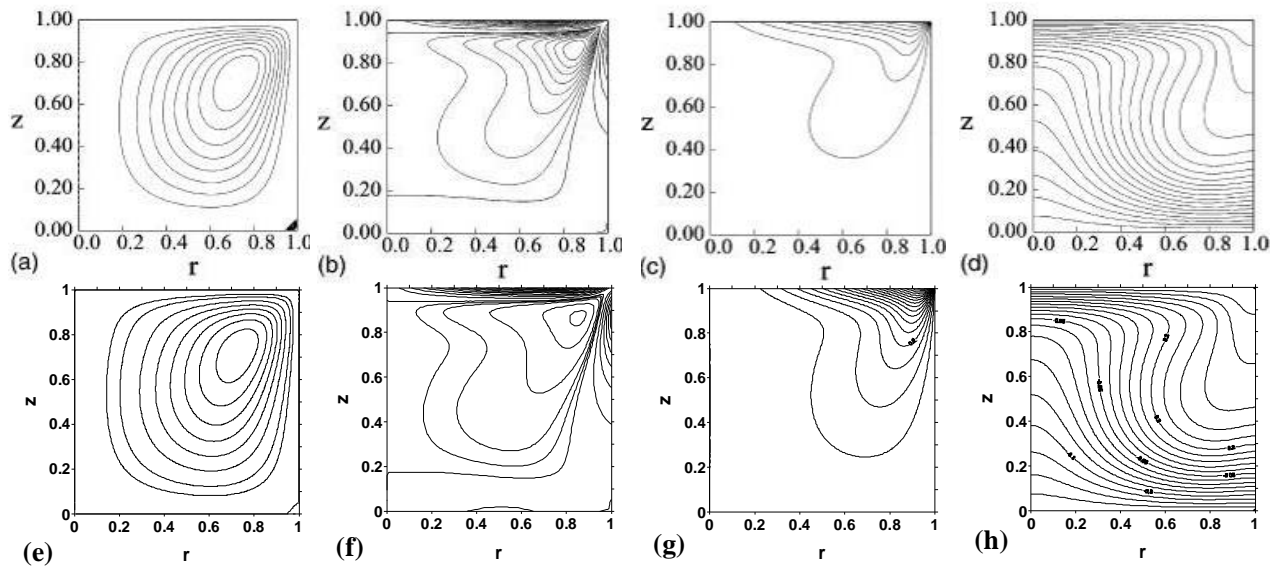


**Figure IV.4 :** Distribution axiale de la vitesse azimutale à : (a)  $r = 0.60$  (b)  $r = 0.90$ . Comparaison avec des données expérimentales (Michelson [51]) pour le cas  $Re=1800$ ,  $g = 1$ .

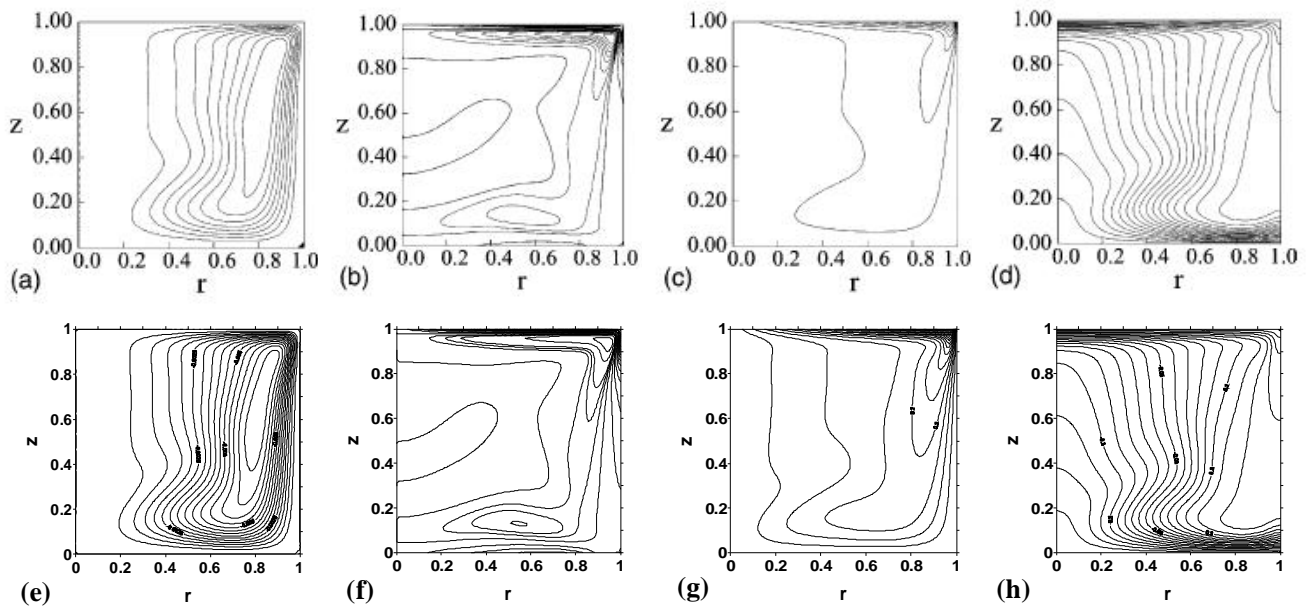


**Figure IV.5 :** Validation du code du calcul avec des mesures expérimentale de vitesses.  
 (a) répartition de la composante radiale  $u$  pour le cas  $Re=1800$ ,  $g = 1$ . et  $Ha = 0$  le long de la verticale d'équation  $r=0.70$  (Michelson [51]).  
 (b) répartition de la composante axiale  $v$  pour le cas  $Re=1850$ ,  $g = 1.75$  et  $Ha = 0$ , où le disque tournant est celui en bas, pour le plan  $z=0.91$  (Spohn [52]).

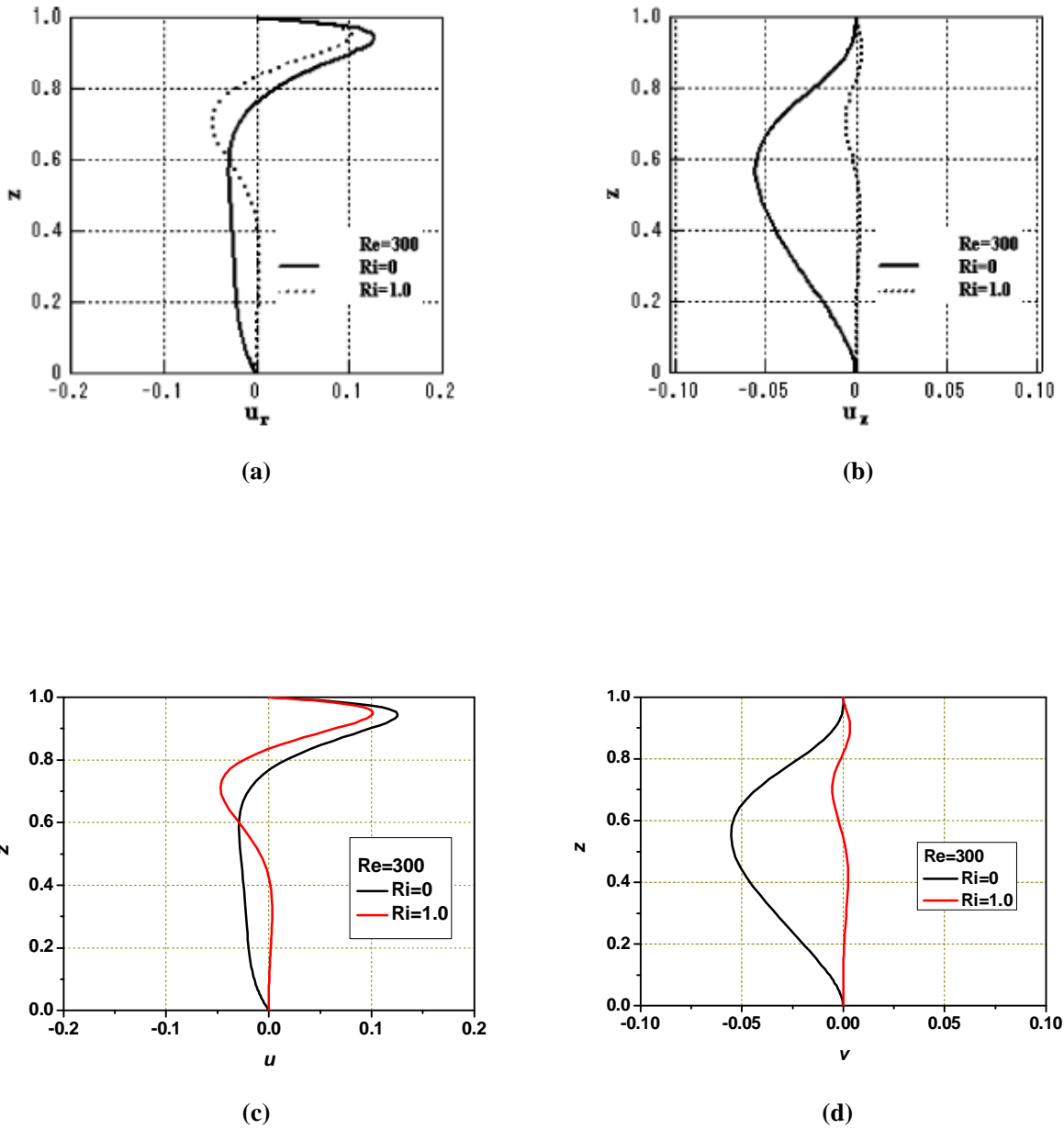




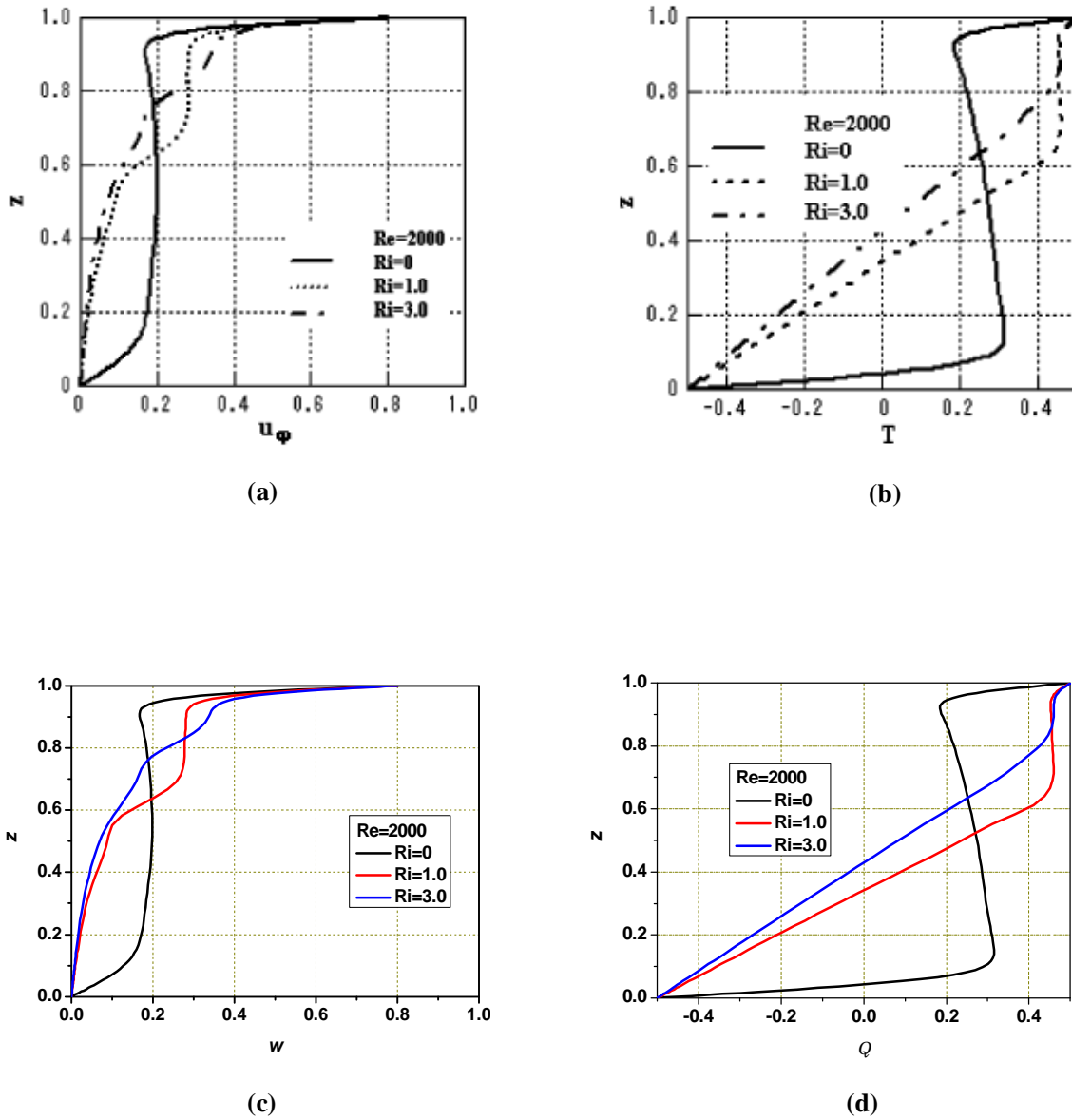
**Figure IV.6 :** Reproduction dans le plan ( $r$ - $z$ ) des contours des lignes de : (e) courant, (f) champs de vorticité, (g) vitesse azimutale et (h) isothermes, en comparaison avec ceux correspondants de Iwatsu[24] (a),(b),(c),(d). Pour le cas  $Pr=1.0$ ,  $Re=3 \times 10^2$ ,  $Ri=0.$ ,  $etg=1.0$ .



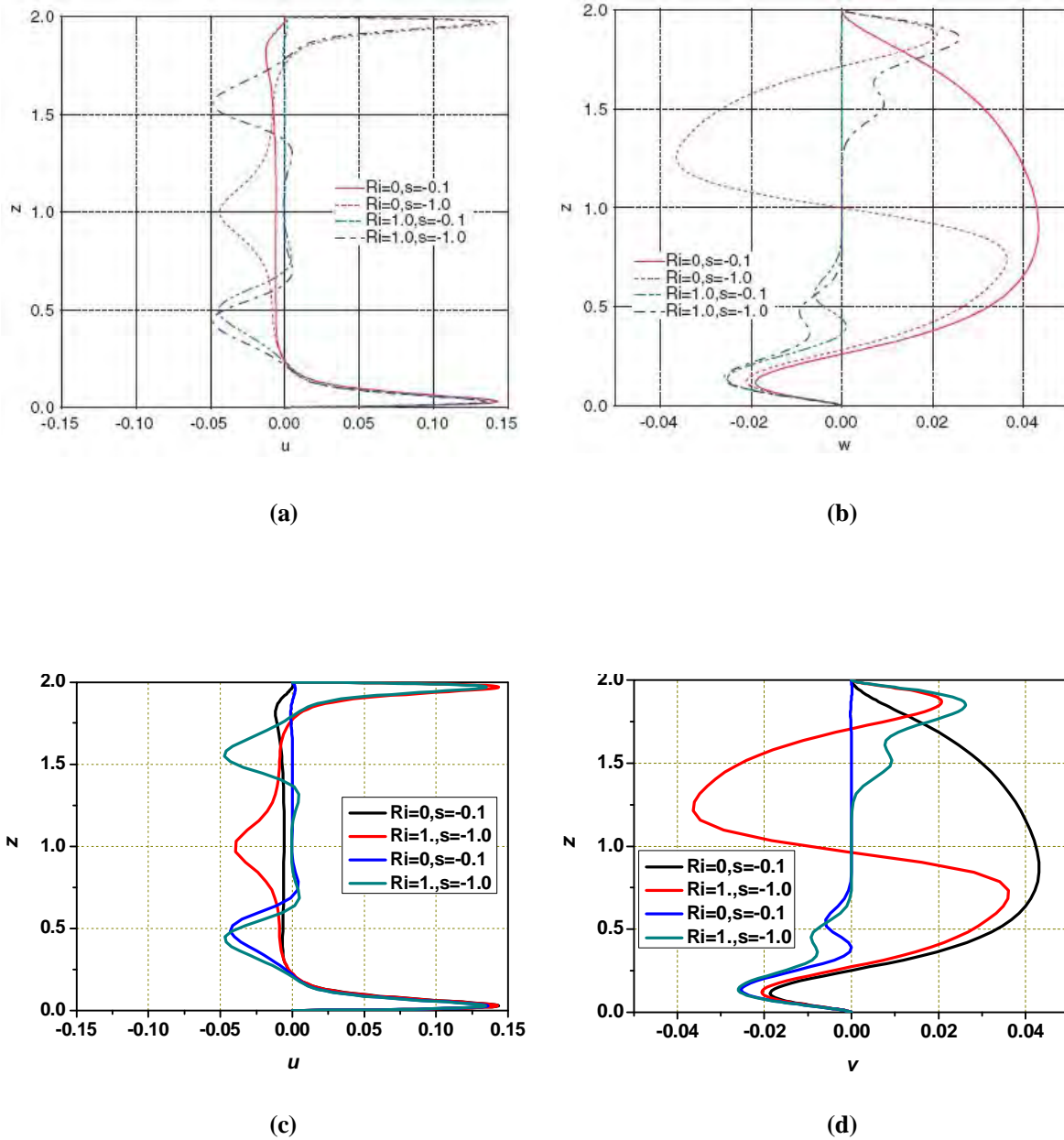
**Figure IV.7 :** Comparaison des mêmes entités : (e), (f), (g) et (h) résultent de notre calcul numérique avec les résultats de Iwatsu [24] (a),(b),(c),(d). Ici  $Pr=1.0$ ,  $Re=2000$ ,  $Ri=0.$ ,  $etg=1.0$ .



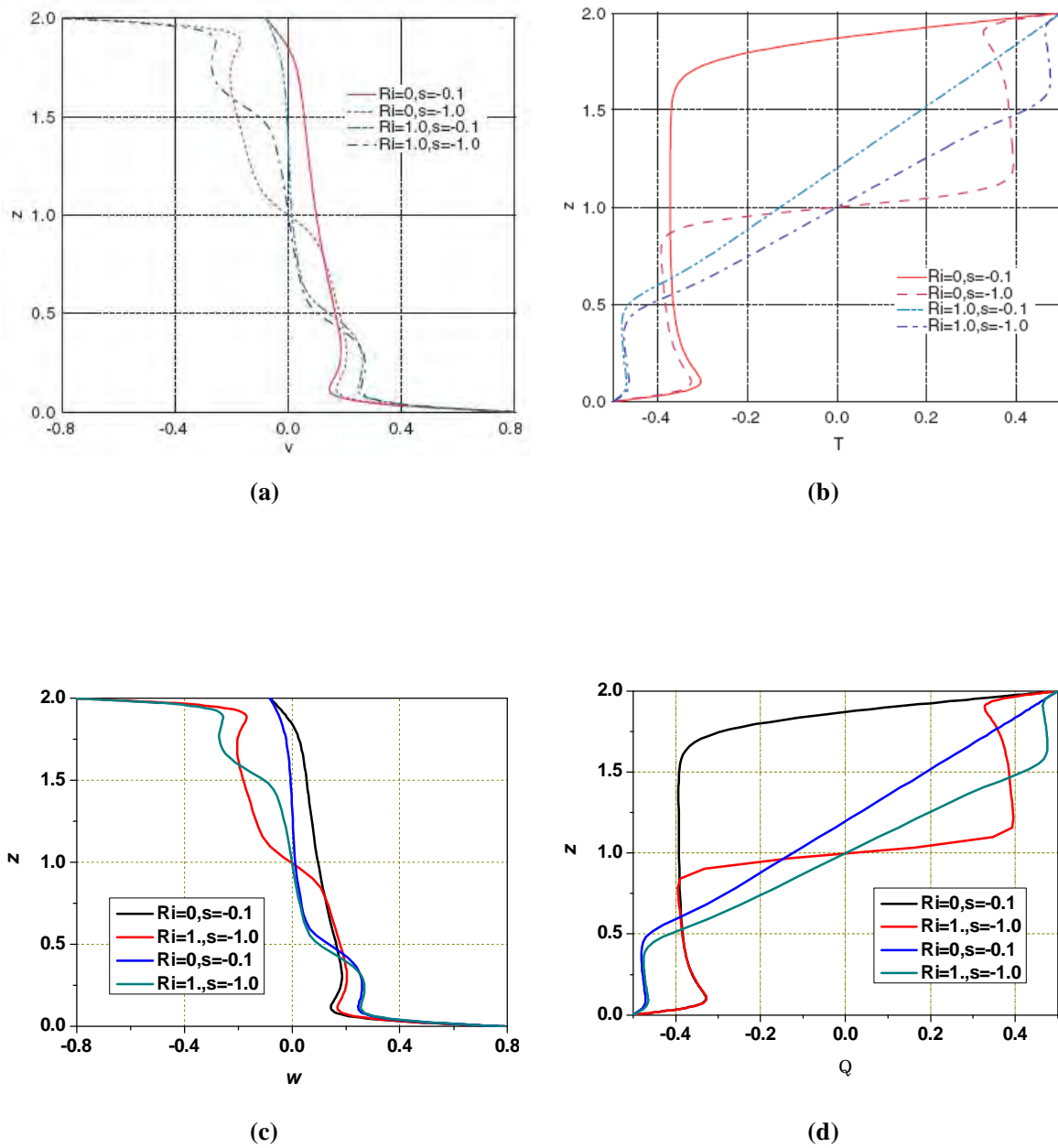
**Figure IV.8 :** Comparaison des distributions des vitesses (c) radiale et (d) axiale à  $r=0.8$  avec les données numériques (a), (b) figurées dans Iwatsu[24] pour  $Re = 300, Ri = 0$  et 1.



**Figure IV.9 :** Comparaison des distributions de (a) vitesse azimutale et (b) température à  $r = 0.8$  figurées dans Iwatsu[24] avec nos résultats numériques(c), (d) respectivement correspondants, pour  $Re = 2000$ ,  $Ri = 0, 1.0$  et  $3.0$ .



**Figure IV.10 :** Comparaison des distributions de vitesse (a) radiale et (b) axiale à  $r = 0.8$  calculées par Omi & Iwatsu [26] avec nos résultats numériques (c), (d) respectivement correspondants, pour  $Re = 1000, Ri = 0, 1.0$  et  $s = -0.1, -1.0$ .



**Figure IV.11 :** Comparaison des distributions (a) de vitesse azimutale et (b) température à  $r = 0.8$  calculées par Omi & Iwatsu [26] avec nos résultats numériques (c), (d) correspondants, pour le cas  $Re = 1000$ ,  $Ri = 0, 1.0$  et  $s = -0.1, -1.0$ .

### IV.3 Présentations des résultats :

Dans ce mémoire on a essayé de déterminer les instabilités physiques naissant au sein de l'écoulement de convection mixte d'un métal liquide ( $Pr=0.015$ ) contenu dans une cavité cylindrique de rapport de forme  $g = 2$  avec le disque au sommet en rotation à vitesse angulaire constante, cet écoulement est soumis à un champ magnétique vertical. Alors la détermination des instabilités physiques se réduit à la détermination d'un nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement sous-jacent, à partir dequel l'écoulement devient instable (ne présente pas des solution unique quand les temps accroissent).

De point de vue des systèmes dynamiques, quand un système rentre dans instabilité il présente au début un caractère oscillatoire ou périodique, puis en raison du phénomène de bifurcation ce système deviendra aperiodique, et en fin il rentre dans le chaos(ou la turbulence). Les nombres de Reynolds caractérisant les écoulements périodiques sont des nombres critiques, et par suite ils leurs correspondent des fréquences d'oscillation des particules fluides. Ces fréquences  $F_{cr}$  peuvent être aussi considérées critiques.

Numériquement parlant, pour détecter les instabilités physiques on effectuera une succession de calculs numériques, en augmentant le nombre de Reynolds dans des intervalles prédéterminés. Pour les valeurs du nombre de Hartmann  $Ha$  comprises dans l'intervalle (0,5,10,20,30,40,50,60) , et chaque rapport de Richardson  $Ri$  dans (0,0.5,1.0,2.0) ,on va découvrir le nombre de Reynolds critique  $Re_{cr}$  marquant le début des instabilités.

Dans le but de vérifier que l'instabilité trouvée pour un pas du temps adimensionnel  $\Delta t$  donné, est réellement physique, on recalcule la solution obtenue avec les mêmes paramètres de l'écoulement mais cette fois-ci avec un pas du temps de  $\Delta t / 2$  , cette méthode éliminera bien les instabilités d'origines numériques qui peuvent naître durant les calculs , si les amplitudes des oscillations restent les mêmes dans tous les sondes après réduction du pas de temps, cette instabilité sera physique.

Avec le maillage de  $n_r \times n_z = 80 \times 160$  , les sondes utilisées pour capter les instabilités physiques sont illustrées dans le dessin schématique suivant (Fig. IV.11):

- Il y a neufs sondes :  $S_1(17,57)$ ,  $S_2(40,57)$ ,  $S_3(64,57)$ ,  $S_4(17,80)$ ,  $S_5(40,80)$ ,  $S_6(64,80)$ ,  $S_7(17,104)$ ,  $S_8(40,104)$  et  $S_9(64,104)$ , qui enregistrent simultanément l'évolution temporelle des trois composantes de vitesse adimensionnelles  $u$ ,  $v$ ,  $w$  , la température adimensionnelle  $\Theta$  et les valeurs du débit (fonctions de courant  $\Psi$ ) dans le plan méridien (Tab. IV.2).

- En outre, il y en a une sonde de position aléatoire, utilisée seulement pour prédire le changement de structure de l'écoulement méridien.
- Et plusieurs autres enregistrements de : Nombres de Nusselt  $Nu$  (Locaux supérieur et inférieur, moyens supérieur et inférieur),  $\Psi_{\min}$  et  $\Psi_{\max}$ , .....

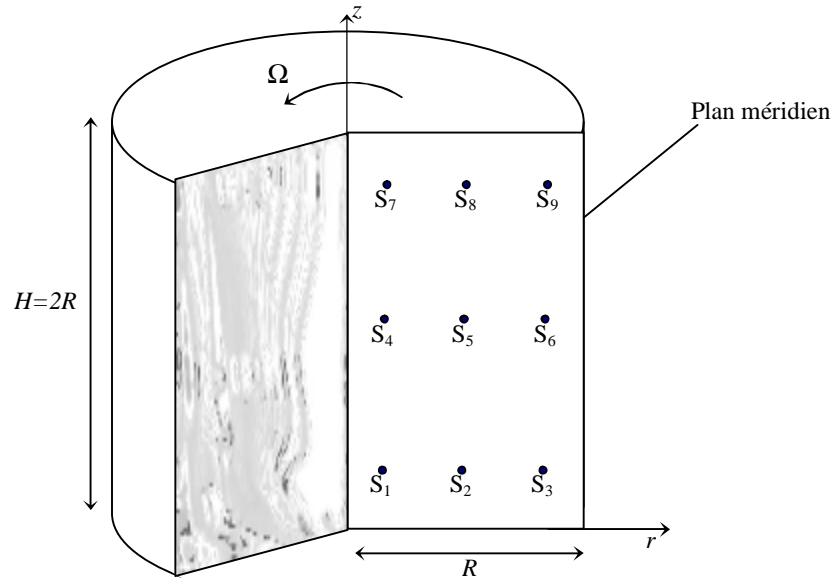


Figure IV.12 : Schéma présentant les positions des sondes utilisées dans les calculs numériques.

Sondes		S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	S <sub>4</sub>	S <sub>5</sub>	S <sub>6</sub>	S <sub>7</sub>	S <sub>8</sub>	S <sub>9</sub>	
Coordonnées	Physiques	<i>r</i>	0.099	0.486	0.900	0.099	0.486	0.900	0.099	0.486	0.900
		<i>z</i>	0.200	0.200	0.200	0.967	0.967	0.967	1.800	1.800	1.800
	Logiques	(17,57)	(40,57)	(64,57)	(17,80)	(40,80)	(64,80)	(17,104)	(40,104)	(64,104)	

Table IV.2: Coordonnées physiques et logiques des sondes pour le maillage ( $n_r \times n_z = 80 \times 160$ ).

#### IV.4 Le cas stable ou permanent :

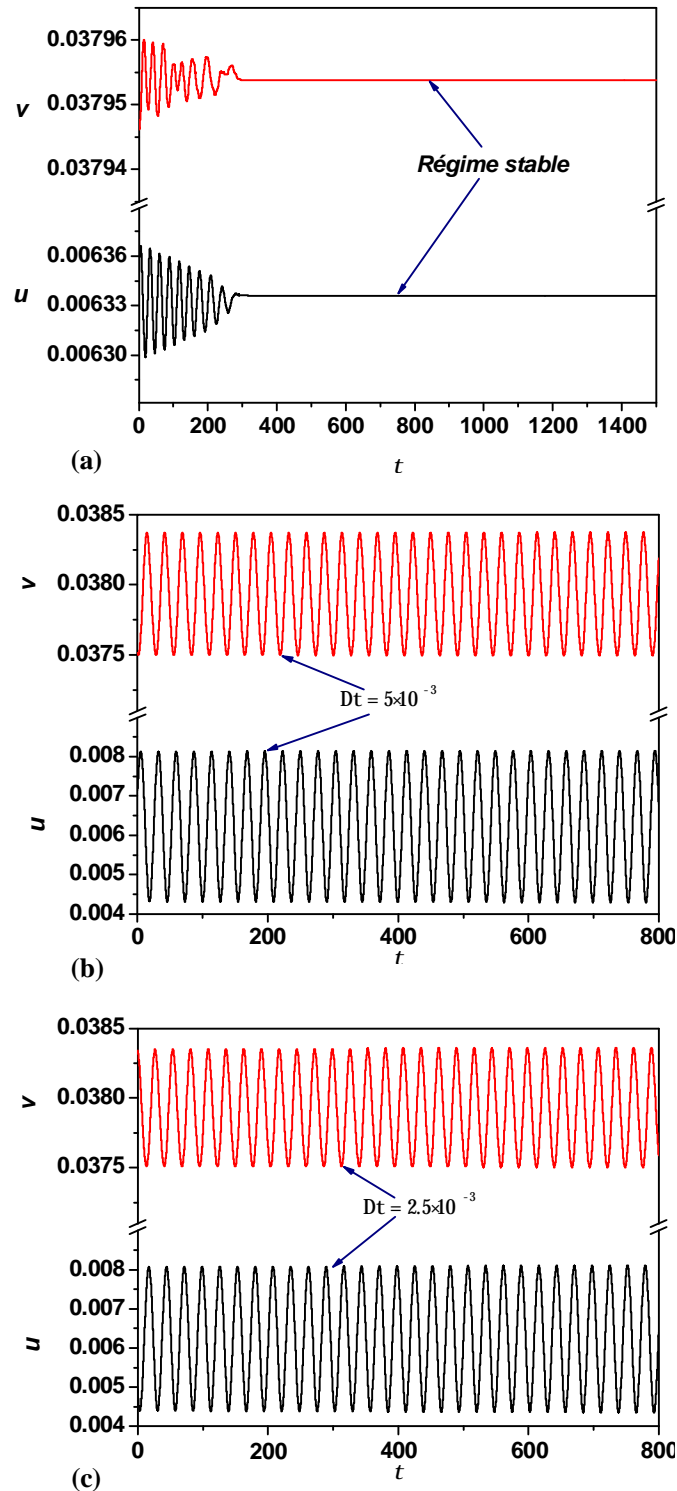
Las figures IV.13a-c illustrent le comportement des composantes de vitesse  $u$  et  $v$  au cours du temps, pour deux cas de l'écoulement en considération: le premier est un cas dont le régime stable (steady) est évidemment établi avec  $Re=2570$  (Fig. IV.13a), le deuxième est un cas où existent des oscillations marquant le début des instabilités physiques (Fig. IV.13b), et le test qui prouvait que ces instabilités apparentes sont vraiment physiques (Fig. IV.13c).

En examinant attentivement les résultats présentés aux deux figures suivantes, on peut remarquer qu'une couche limite (un fort gradient) a lieu sous le disque supérieur tournant où la vitesse azimutale  $w$  est plus élevée dans cette région à d'autres dans la cavité (Fig. IV.14b). Cette couche limite est caractérisée aussi par un débit méridien important par rapport à celui dans les autres zones (Fig. IV.14a), ainsi que la vorticité  $w$  et le moment angulaire  $\Lambda$  (Figs. IV.14c-e). Ce dernier voit ses importantes valeurs seulement aux alentours de la paroi latérale (Figs. IV.14c-IV.14e), alors en ce qui concerne le champ de pression on peut voir aisément la dépression qui règne dans la région centrale (de l'axe de rotation vers le cœur de l'écoulement), ce qui nous permettra de constater qu'il y en a un pompage du liquide passant par l'axe du cylindre en l'évacuant dans le sens des forces centrifuges c.-à-d. dans la direction radiale : ce phénomène de pompage est connu sous le nom du *pompage d'Ekman* (Bessaih[31], Schlichting [55]), aussi il est toujours présent dans ce type d'écoulement conduit par rotation des parois du cylindre, quel que soit le régime d'écoulement : stable ou transitoire.

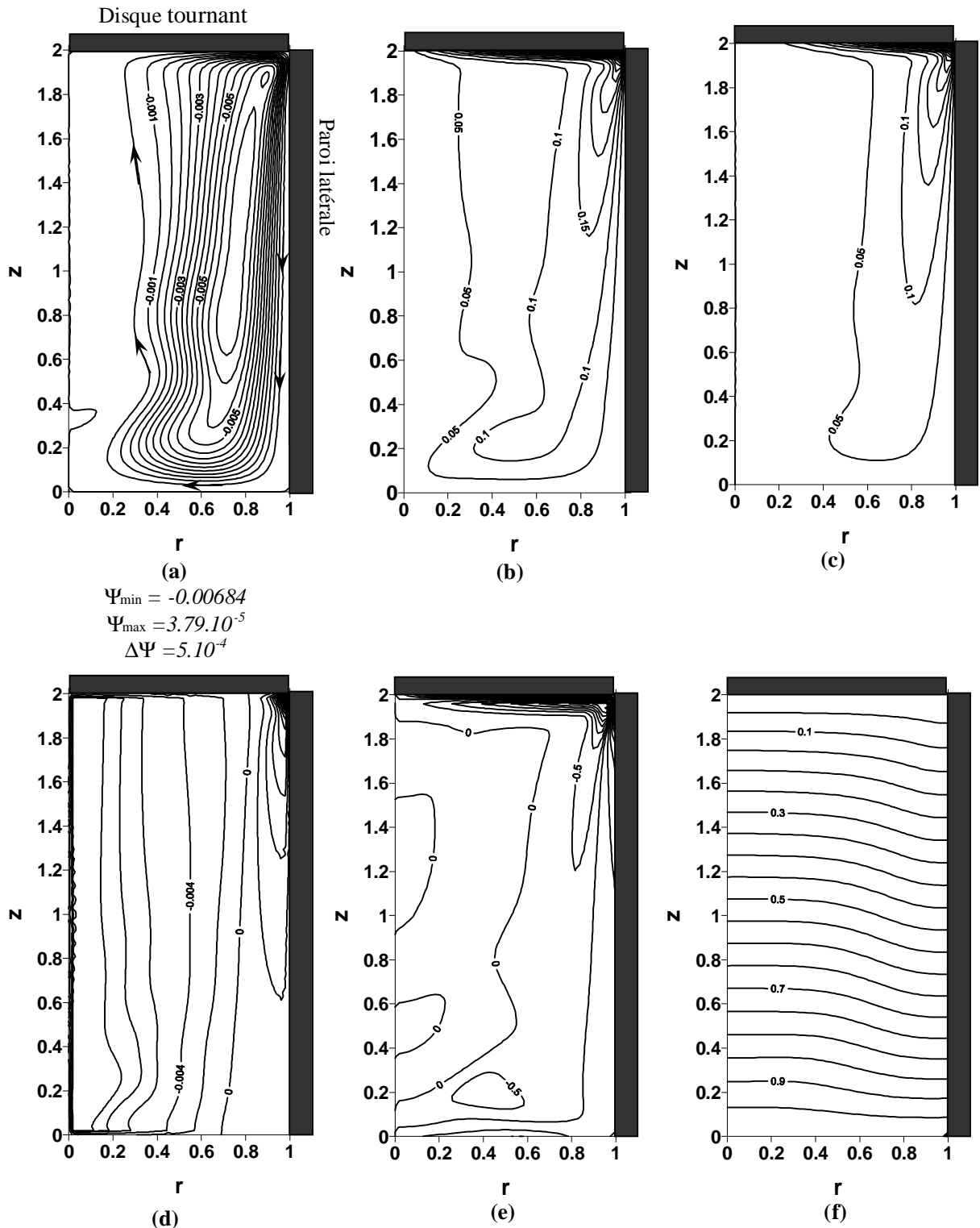
Selon le tracé des lignes de courant hydrodynamiques pour l'écoulement secondaire exposées dans la figure IV.14a, le liquide tourne autour d'un point placé dans la région où le disque tournant rencontre la paroi latérale. On montre les distributions radiale, axiale et azimutale des composantes de vitesse le long de  $r = 0.79$  dans la figure IV.15. L'écoulement radial est tout à fait fort près du disque supérieur, ce qui l'octroi d'une couche limite intensifiée, et la figure IV.16 montre les distributions radiales des composantes de vitesse  $u$ ,  $v$ , et  $w$  sous le disque tournant. On note aussi qu'il y a une couche limite au niveau du disque inférieur fixe de l'enceinte cylindrique.

En découvrant les lignes isothermes dans le plan  $(r, z)$ , on constate bien que l'échange de chaleur se manifeste mais avec une domination du régime conductif spécialement dans la région du cœur (Fig. IV.14f), où les isothermes deviennent horizontales indiquent des profils radiaux similaires, ainsi qu'une déviation remarquable des isothermes a lieu dans la région des contacts du fluide-paroi latérale. Cette déviation vers le disque inférieur chaud est traduite par la représentation des nombres de Nusselt locaux  $Nu(r)$  au niveau des deux disques (Fig. IV.17) pour ce cas de  $Re=2570$  ( $Ri=0$ ,  $Ha=0$ , solution stable). On peut constater aisement que le transfert thermique est intense sous le disque tournant froid où le nombre de Nusselt voit sa valeur maximale  $Nu=1.26$  à  $r=0$ , alors que le nombre de Nusselt local à la paroi inférieure indique que le transfert thermique est élevé dans le voisinage de la paroi latérale, puisqu'elle est la région du premier contact entre le fluide froid descendant et la paroi chaude pendant a recirculation méridienne.





**Figure IV.13:** Evolutions temporelles des composantes de vitesse  $u$  et  $v$  à la sonde  $S_5(0.486, 0.967)$  pour  $Ri=0.$ ,  $Ha=0.$  (a) cas stable  $Re=2570$  avec  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$  (b) cas oscillatoire (début d'instabilité)  $Re_{cr}=2575$  avec  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$  (c) le même cas oscillatoire où  $Re_{cr}=2575$  avec  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3} / 2 = 2.5 \cdot 10^{-3}$  (élimination des instabilités numériques).



**Figure IV.14:** Contours de (a) lignes de courant ( $y = Cste$ ) (b) vitesse azimutale  $w$  (c) moment angulaire  $\Lambda$  (d) champ de pression  $P$  (e) vorticité  $w$  (f) température  $\Theta$ , pour le cas d'écoulement stable (régime permanent) où :  $Re=2570, Ri=0., Ha=0.$

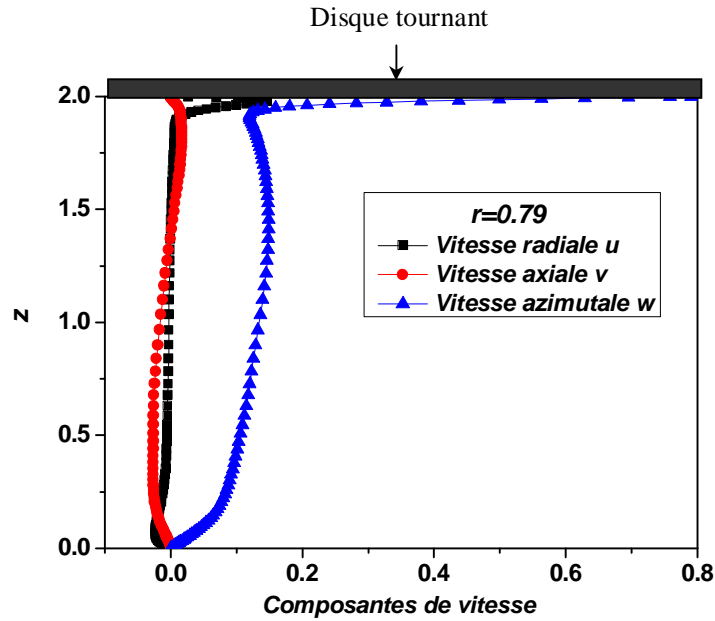


Figure IV.15: Profils axiaux des vitesses  $u$ ,  $v$  et  $w$  à  $r=0.79$ , pour  $Re=2570$ ,  $Ri=0$ . et  $Ha=0$ .

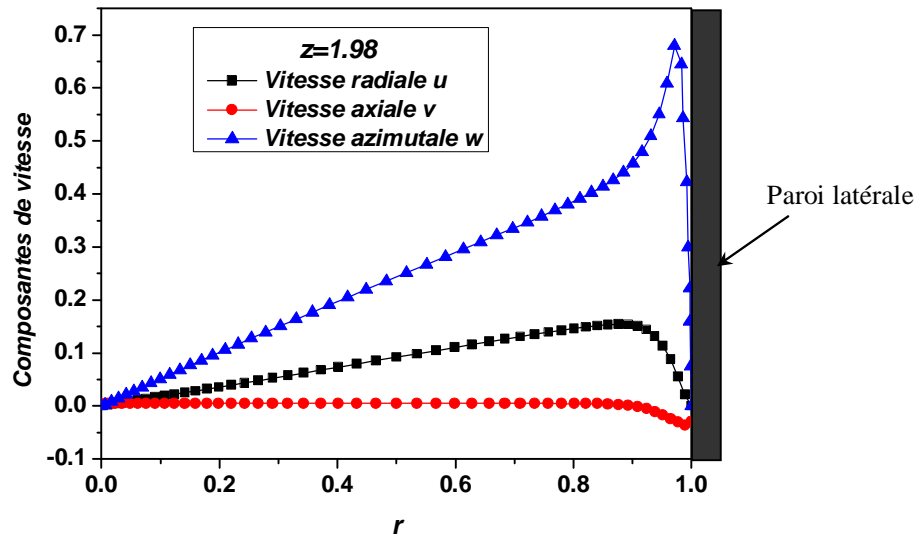
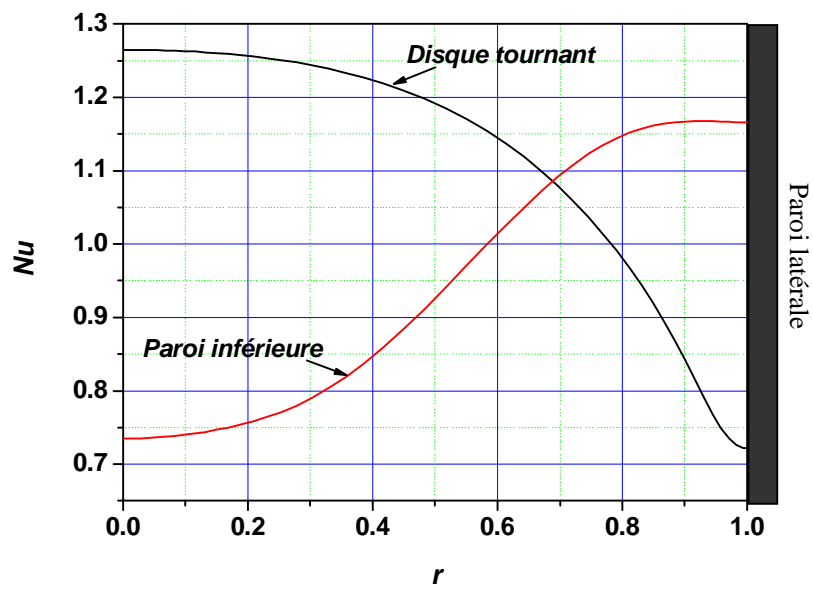


Figure IV.16: Distributions radiales des vitesses  $u$ ,  $v$  et  $w$  sous le disque tournant, à  $z=1.98$ , pour  $Re=2570$ ,  $Ri=0$ . et  $Ha=0$ .



**Figure IV.17:** Nombres de Nusselt locaux aux disques d'extrémités du cylindre ( $Nu_c = \partial\Theta/\partial z \big|_{z=g}$  disque froid,  $Nu_h = \partial\Theta/\partial z \big|_{z=0}$  chaud) pour  $Re = 2570$ ,  $Ri = 0$  et  $Ha=0$ .

### IV.5 Partie A : Situation sans champ magnétique ( $Ha=0$ ).

Dans cette partie de ce mémoire, nous intéressons à la situation en absence du champ magnétique ( $Ha=0$ ) de l'écoulement étudié en régime transitoire. Pour cette raison, seules les équations (Eqs. II.15-II.19) vont être résolues numériquement, sans prendre en compte des termes des forces EM (de Lorentz  $F_{Lr}, F_{Lz}, F_{Lq}$ ) ajoutés aux équations de Navier-Stokes.

Les résultats correspondant pour les différentes valeurs du rapport de Richardson  $Ri = 0., 0.5, 1.0, 2.0$  sont récapitulés en fin de cette partie dans le tableau IV.3 ainsi que deux diagrammes de dépendance ( $Re_{cr}-Ri$ ) et ( $F_{cr}-Ri$ ) dans les figures IV.41-IV.42. L'écoulement primaire est représenté en utilisant la composante azimutale  $w$ . Tandis que l'écoulement secondaire est illustré via les composantes méridiennes  $u$  et  $v$  et les lignes de courant hydrodynamiques tracées à l'aide de la fonction de courant  $\psi$ . Notons que les différentes courbes des évolutions temporelles, portraits de phase et densités des spectres d'énergie sont discutées par groupe.

#### IV.5.1 Apparitions des instabilités physiques :

Nous présentons ici des cas de nombres de Reynolds critiques  $Re_{cr}$  avec une analyse de leurs fréquences d'oscillations prédominantes  $F_{cr}$ , selon le nombre de Richardson  $Ri = 0., 0.5, 1.0$  ou  $2.0$ .

L'aspect oscillatoire (et périodique) des évolutions temporelles des paramètres de l'écoulement ( $u, v, w, \Theta, \overline{Nu}$  et  $\psi$ ) enregistrés aux différentes sondes S1, S2, S3, S4, S5, S6, S7, S8, et S9 (Figs. IV.18-22, IV.24, IV.32 et IV.34) indique que les instabilités oscillatoires commencent, et l'écoulement bifurque vers un régime instable. En comparant les amplitudes des paramètres en oscillation, on peut remarquer que ces amplitudes présentent des grandeurs différentes pour les différents points d'enregistrements d'historiques, cela conduit à conclure que les amplitudes des oscillations dépendent des positions des particules dans le cylindre, tandis que les fréquences d'oscillation sont les mêmes partout (dans le fluide), ce qui justifie la périodicité ( $= 1/F_{cr}$ ) régnant au sein de l'écoulement en global, cette définition de la périodicité a été utilisée par Lopez & Perry [6].

Ce comportement oscillatoire des différents paramètres signale l'existence d'un changement continu des structures de l'écoulement (avec périodicité). Aussi on remarque clairement que les amplitudes des oscillations de la température sont plus petites que celles des

vitesse radiales et axiales ceci peut être interprété par la domination du régime conductif du transfert de chaleur dans ce type d'écoulement de fluides à faible nombre de Prandtl, comme l'on peut voir sur les figures (IV.22b, IV.24b, IV.32b et IV.34b), ces figures présentent les courbes des évolutions temporelles des nombres de Nusselt moyens au niveau des deux disques ( $\overline{Nu_c}$  et  $\overline{Nu_h}$ ), qui oscillent aux alentours de la valeur 1.

Les tracées des composantes adimensionnelles de vitesse dans les plans de phase (selon la terminologie des systèmes dynamiques), sont présentées aux figures (IV.26-IV.27 et IV.36). Ces diagrammes qu'on les appelle *portraits de phase*, sont des boucles fermées avec des harmoniques dominantes ce qui signifie que le régime d'écoulement quasi-périodique est atteint. Les portraits de phase sont utilisés pour inspecter d'une façon intuitive et fiable le régime d'un mouvement, puisqu'ils présentent un point limite lorsque le régime est permanent, ou un cycle limite (nos résultats Figs. IV.26-IV.27-IV.36) dans le cas d'un régime oscillatoire, ou par un tore si le mouvement est apériodique, et par un attracteur étrange (strange attractor) dans le cas du régime chaotique (pour plus de détails voir Stevens & al. [9]).

Outre de cette utilité, on a utilisé les portraits de phase durant les calculs, pour s'assurer que les amplitudes sont uniformes ou en d'autres termes les évolutions temporelles ont le caractère sinusoïdal. Parfaitement, on peut apercevoir ce caractère périodique derrière les cycles limites (Figs. IV.26-IV.27-IV.36). Notons que chaque courbe est obtenue avec plus d'un million d'itérations ( $N_{ech} \geq 2^{20}$  d'échantillons).

Afin d'obtenir le spectre d'énergie des oscillations, on a utilisé la transformée rapide de Fourier (FFT) d'un nombre ( $N_{ech}$ , une certaine puissance de 2) d'échantillons, extraits des valeurs des variations temporelles des différents paramètres adimensionnels. Cette transformée est multipliée par son complexe conjugué et divisée par 2 pour obtenir la densité de spectre d'énergie *PSD* (Power Spectrum Density) en fonction des fréquences des oscillations  $F$ , définies par :  $F = k / (N_{ech} \times \Delta t)$ , où  $\Delta t$  l'incrément du temps et  $k = 1, \overline{N_{ech}} / 2$ . L'énergie est normalisée par  $N_{ech}^2$ . Les valeurs de *PSD* en fonction de  $F$  présentent diverses échelles de grandeurs allant des très petites ( $O(10^{-20})$ ) aux élevées ( $O(10^{-5})$ ), ce qui causera un problème de caractère visuel. Ainsi, l'utilisation du logarithme décimal de *PSD* peut remédier à ce problème de visualisation. Cette analyse spectrale concernera les évolutions temporelles des grandeurs adimensionnées aux sondes déjà mentionnées dans la section IV.3 du présent chapitre. Les fréquences prédominantes adimensionnelles (les plus grands piques) sont considérées comme

celles jouant le rôle principal dans l'oscillation des l'écoulement et donc l'échange de l'énergie cinétique et thermique, mais puisqu'on est entrain d'un phénomène de bifurcation, elles peuvent exister plusieurs d'autres fréquences qui sont les multiplicateurs de celle prédominante [9].

Cette multitude de fréquences d'oscillations dans l'écoulement signifie qu'il est multicellulaire, en d'autre terme c'est le vortex breakdown (ou éclatement tourbillonnaire), où elles existent une ou plusieurs zones de recirculation, chacune est séparée de l'autre et de l'écoulement secondaire par une ligne de courant n'ayant aucun débit  $y = 0$  (ligne séparatrice), donc il y a plusieurs modes linéaires les plus instables de la perturbation qui deviennent successivement dominant avec un changement continu, et l'instabilité oscillatoire peut mener à une apparence et coexistence de plus qu'une bulle séparatrice du vortex. Ceci est en accord avec l'analyse de la stabilité linéaire de Gelfgat & al. [10]

Sur les figures IV.23, IV.25, IV.33 et IV.35 on montre l'analyse spectrale résultant de l'application de la FFT aux évolutions temporelles de quelques paramètres, en indiquant les fréquences prédominantes pour chaque cas, qui correspond à l'harmonique où elle a une énergie spectrale maximale, et les fréquences postérieures sont insignifiantes dans ce travail. Ces fréquences critiques sont regroupées au tableau IV.3 avec les nombres de Reynolds critiques correspondants pour les différentes valeurs du nombre de Richardson  $Ri=0., 0.5, 1.0$  et  $2.0$ .

#### IV.5.2 Exploration de la nature de l'écoulement :

Dans le but de comprendre la nature oscillatoire des différents paramètres de l'écoulement, on a choisi l'évolution temporelle au cours d'une période de la vitesse axiale adimensionnelle  $v$  pour le cas où  $Re_{cr}=924$  et  $Ri=0.5$ , pour explorer la structure de l'écoulement pendant des laps de temps adimensionnels notés par :  $\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d, \tau_e, \tau_f$  (Fig. IV.28).

La figure IV.29 montre les motifs méridiens des lignes de courant hydrodynamiques. Au cours des temps adimensionnels ( $\tau_a, \tau_b, \tau_c \dots$ ), on peut remarquer toujours la présence de la couche d'Eckman située dans la région sous le disque tournant, et caractérisée par l'important débit massique. Qualitativement parlant, l'écoulement méridien pour ce cas ( $Re_{cr}=924$  et  $Ri=0.5$ ) diffère de celui stable par l'apparition d'une bulle ou zone de recirculation secondaire près de la paroi latérale en renfermant un débit massique positif (lignes de courant en pointillés). Alors, les dimensions de cette cellule se changent au cours des temps ( $\tau_a, \tau_b, \tau_c \dots$ ), en subissant un élargissement puis un rétrécissement pendant chaque période sachant que la période est égale à

$1/F_{cr} = 1/0.02289 \approx 43.69$  pour ce cas. Le sens de recirculation des particules fluides confinées dans cette cellule est contre la rotation normale des aiguilles d'une montre, ceci est montré sur la figure IV.30 où nous avons représenté les suivis des particules en conjonction avec le champ méridien des vecteurs vitesses ( $u-v$ ).

La figure IV.31 expose les iso-valeurs de la vitesse azimutale  $w$  projetées dans le plan méridien ( $r-z$ ), et on peut apprécier l'existence de la couche d'Eckman située sous le disque tournant pendant tous les temps de visualisation, alors que les variations remarquables des valeurs de  $w$  résident seulement dans la région du cœur (c.-à-d. la région centrale du cylindre), aussi ces variations de  $w$  sont périodiques de période de 43,69.

Un autre cas dont nous avons représenté les structures historiques est celui pour  $Re_{cr}=606$  et  $Ri=2$ . Mais cette fois, au cours des laps des temps indiqués par :  $\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d, \tau_e, \tau_f, \tau_g, \tau_h$  sur le tracé de l'évolution temporelle de la fonction de courant  $\gamma$  (Fig. IV.37) enregistrée à la sonde  $S_5(0.486,0.967)$ . Les lignes de courant hydrodynamiques de l'écoulement méridien pour le cas de  $Re_{cr}=606$  et  $Ri=2.0$  sont représentées sur la figure IV.38, dans les différents instant de la période balayée.

Au premier instant  $t_a = 70$ , la structure de l'écoulement évolue en présence d'une zone de recirculation fluide située près de la paroi latérale dans la région ( $0.8 \leq r \leq 1$  et  $0 \leq z \leq 1.4$ ), et une couche d'Eckman usuelle sous le disque en rotation. À l'instant  $t_b = 78.71$ , la dite zone de recirculation change peu dans la direction radiale et garde sa dimension suivant  $z$  (Fig. IV.38b). A l'instant  $t_c = 88.48$  la cellule se rétrécit en diminuant grandement sa dimension axiale ( $0.8 \leq z \leq 1.4$ ). Aux instants successifs  $t_d = 96.49$ ,  $t_e = 99.945$  et  $t_f = 103.42$ , la cellule secondaire s'agrandit de manière graduelle dans la direction  $z$  seulement. À  $t_g = 109.31$  la structure de la fonction de courant est parfaitement semblable à celle de l'instant  $t_a$  ce qui signifie que l'écoulement s'effectue d'une manière périodique (Fig. IV.38g) pendant une période d'environ  $1/0.02518 \approx 39.714$ . Notons que les temps successifs dans les deux cas couvrent plus qu'une période d'oscillation. Tandis que le sens de mouvement méridien des particules confinées dans la cellule principale est horaire, les trajectoires des particules appartenant à la cellule secondaire sont dans les sens anti-horaire, comme il est montré sur les figures IV.39.



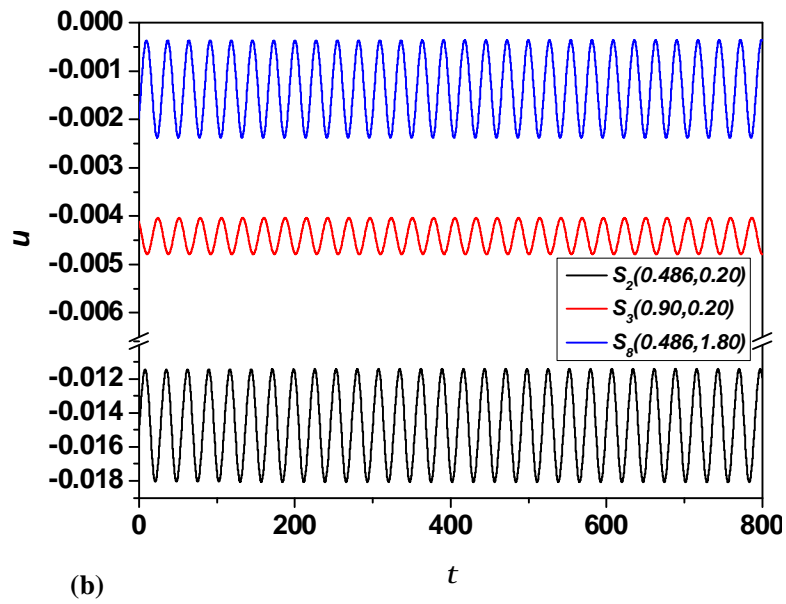
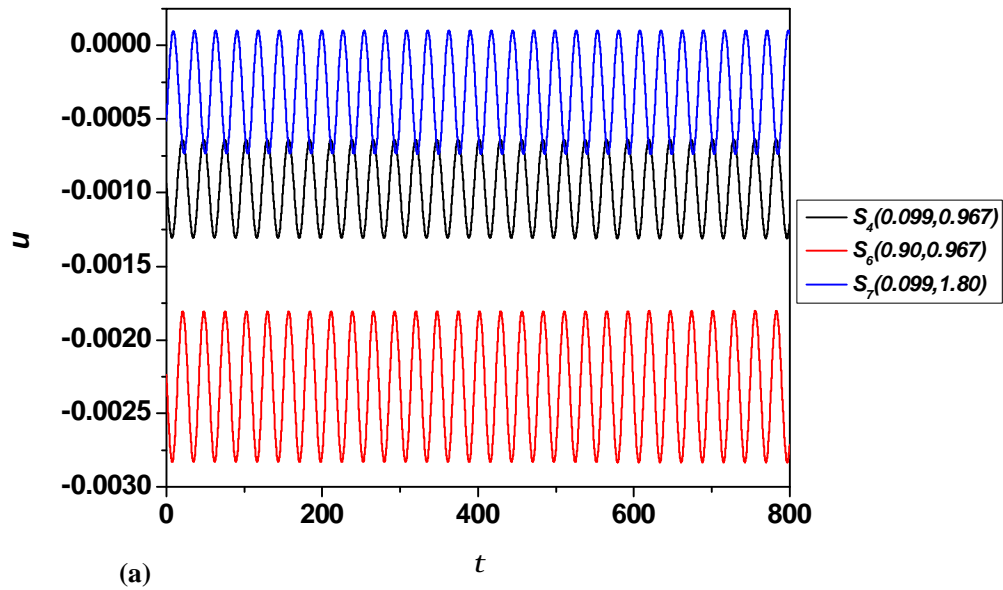
On peut constater aisément que la périodicité des instabilités est liée à l'élargissement et le rétrécissement des cellules principale et secondaire. Quand le nombre de Richardson  $Ri$  est petit, l'effet de Buoyancy est négligeable, et une cellule principale simple se développe dans le plan méridien, quand on augmente la valeur de  $Ri$  l'effet de la stratification thermique est substantiel, et le régime d'écoulement deviendra multi-cellulaire, qui est en accord avec les résultats d'Iwatsu [24], concernant l'effet du gradient de température sur l'écoulement avec swirl.

	$Ri$			
	$0.0$	$0.5$	$1.0$	$2.0$
$Re_{cr}$	2575	924	802	606
$F_{cr}$	0.03662	0.02289	0.02289	0.02518

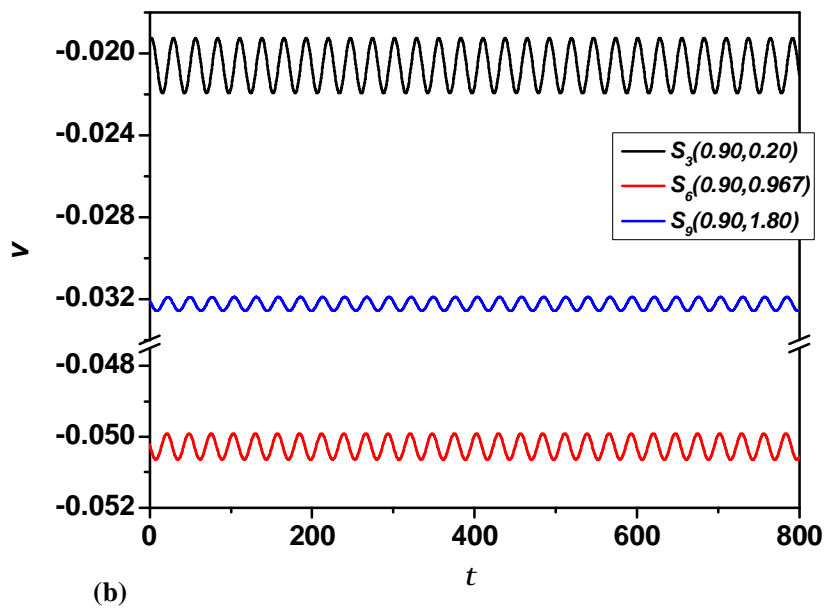
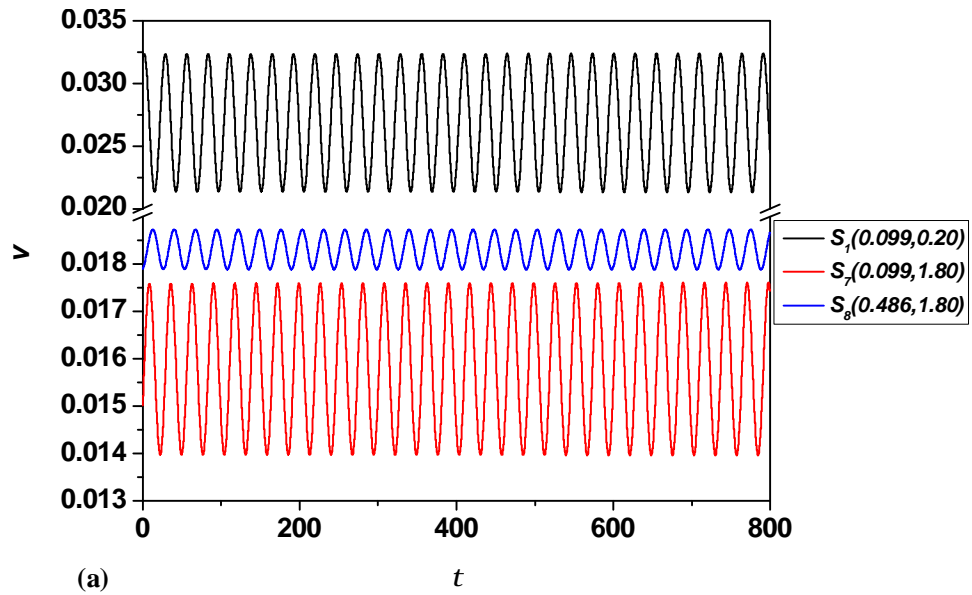
**Table IV.3 :** Fréquences critiques correspondantes aux Reynolds critiques trouvés.

Les diagrammes de stabilité présentés aux figures IV.41 et IV.42, mettent en évidence la variation du nombre de Reynolds critique  $Re_{cr}$  (Fig. IV41) et la fréquence critique  $F_{cr}$  d'oscillations (Fig. IV42) en fonction du rapport de Richardson  $Ri$ . Nous constatons que l'augmentation du nombre de Richardson provoque la diminution du nombre de Reynolds critique, c.-à-d. que l'augmentation des valeurs de  $Ri$  déstabilise l'écoulement aux mêmes valeurs de Reynolds.

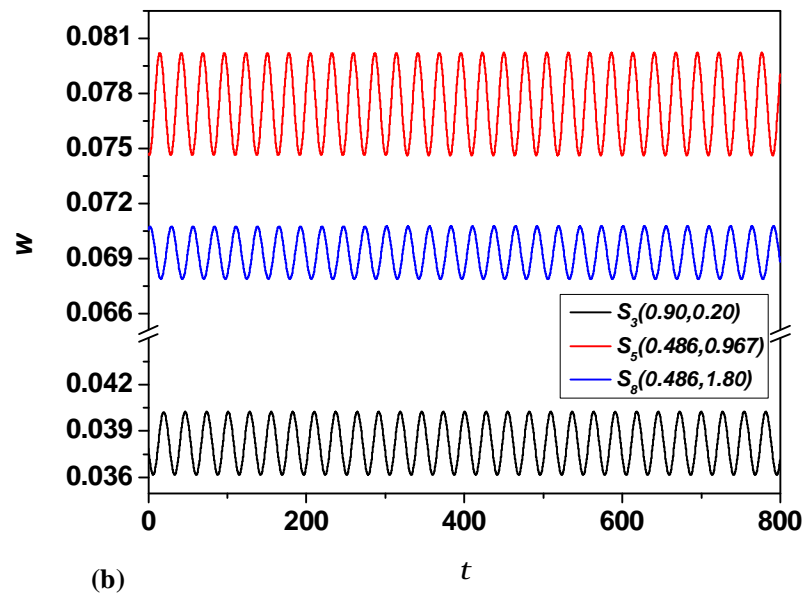
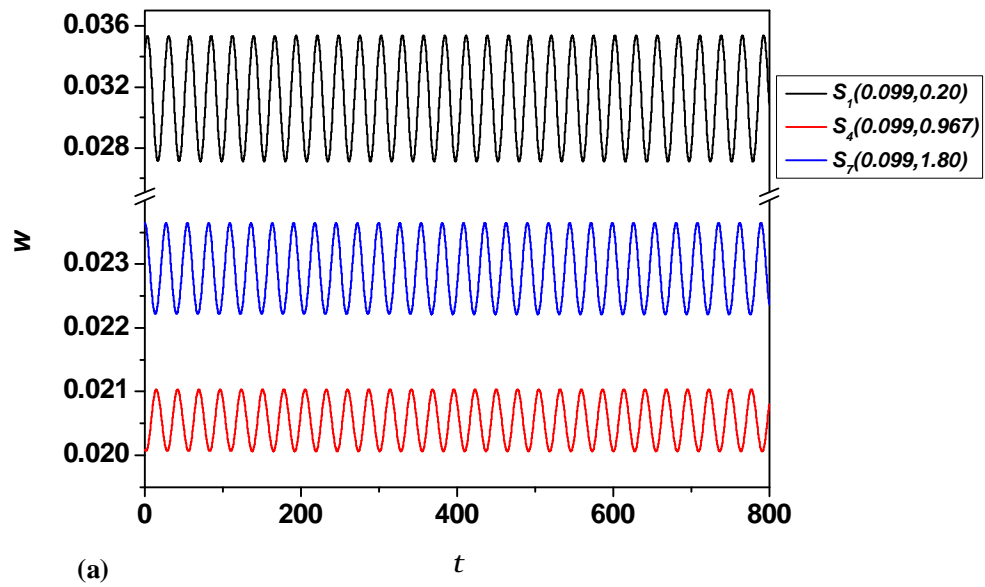
Cas :  $Re_{cr} = 2575$ ,  $Ri = 0$ .



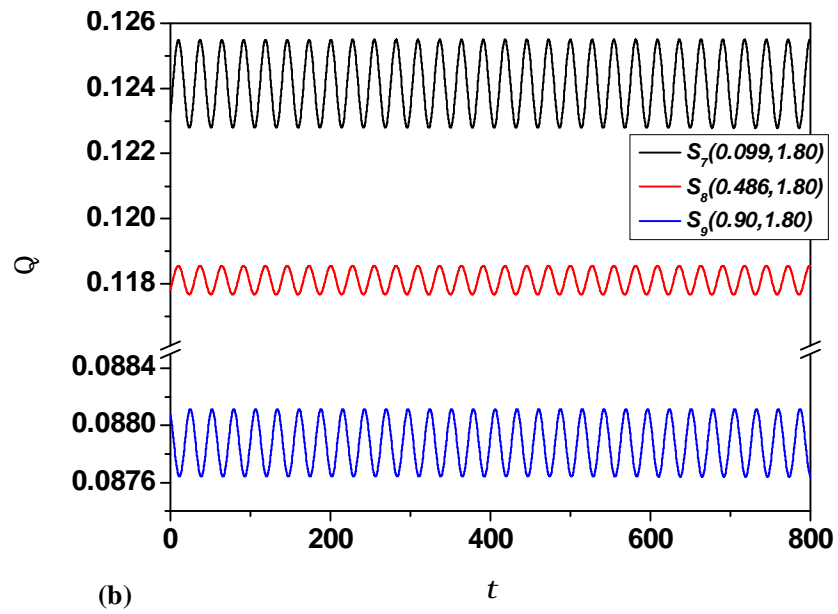
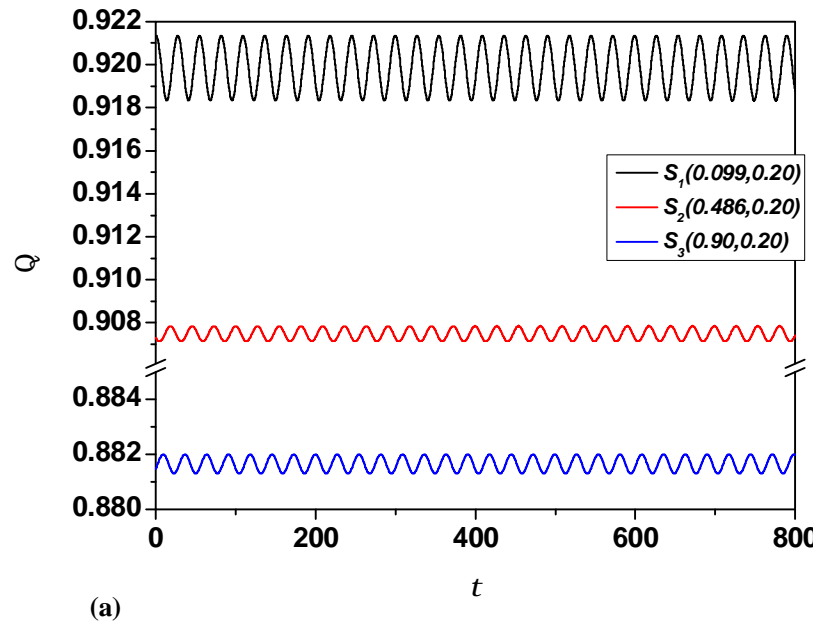
**Figure IV.18:** Evolutions temporelles de la composante radiale de vitesse  $u$  pour  $Re_{cr}=2575$ ,  $Ri=0$ ., (a) aux sondes  $S_4(0.099,0.967)$ ,  $S_6(0.90,0.967)$  et  $S_7(0.099,1.80)$  (b) aux points  $S_2(0.486,0.20)$ ,  $S_3(0.9,0.2)$  et  $S_8(0.468,1.80)$ .



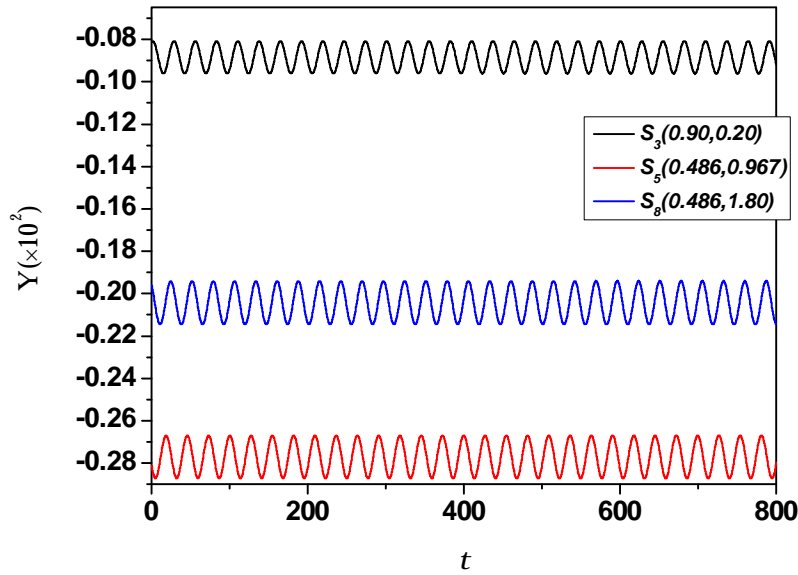
**Figure IV.19:** Evolutions temporelles de la composante axiale  $v$  de la vitesse pour  $Re_{cr}=2575$ ,  $Ri=0.$ , (a) aux sondes  $S_1(0.099,0.2)$ ,  $S_7(0.099,1.80)$  et  $S_8(0.486,1.80)$  (b) aux points  $S_3(0.9,0.2)$ ,  $S_6(0.9,0.967)$  et  $S_9(0.9,1.80)$ .



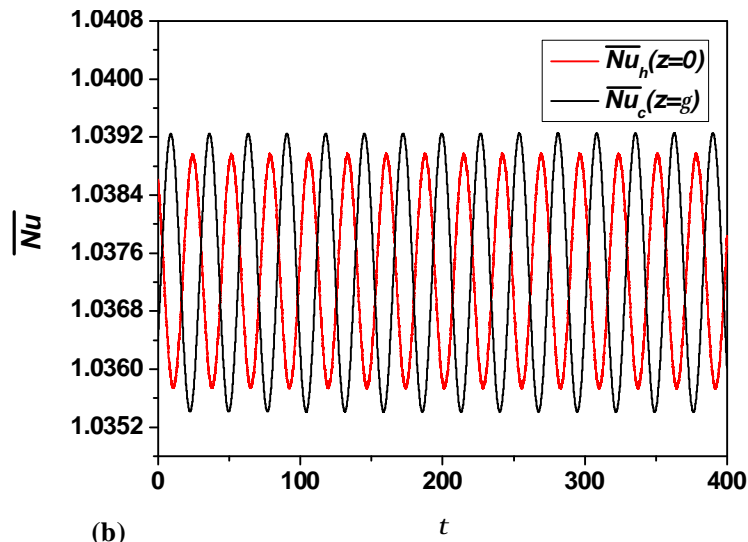
**Figure IV.20:** Evolutions temporelles de la composante azimutale  $w$  de la vitesse pour  $Re_{cr}=2575$ ,  $Ri=0$ . aux sondes : (a)  $S_1(0.099,0.2)$ ,  $S_4(0.099,0.967)$  et  $S_7(0.099,1.80)$  (b)  $S_3(0.9,0.2)$ ,  $S_5(0.486,0.967)$  et  $S_8(0.468,1.80)$ .



**Figure IV.21:** Evolutions de la température adimensionnelle  $\Theta$  au cours du temps pour  $Re_{cr}=2575$ ,  $Ri=0$ . enregistrées aux sondes : (a)  $S_1(0.099,0.2)$ ,  $S_2(0.468,0.2)$  et  $S_3(0.9,0.2)$  (b)  $S_7(0.099,1.80)$ ,  $S_8(0.468,1.80)$  et  $S_9(0.9, 1.80)$ .

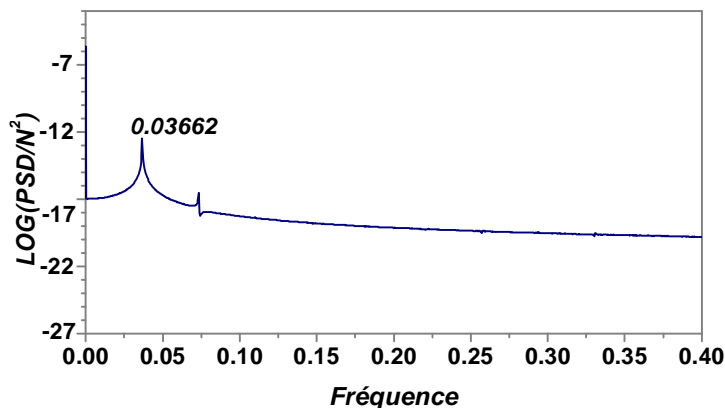


(a)



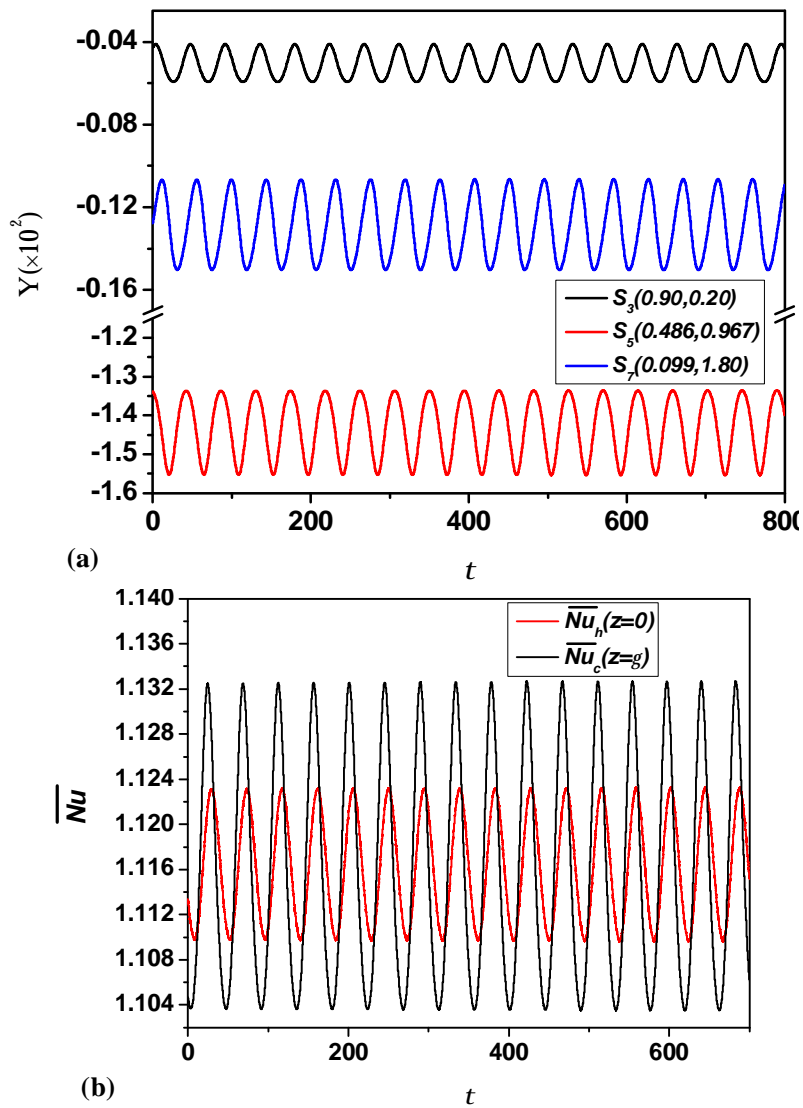
(b)

**Figure IV.22:** Evolutions temporelles de (a) la fonction de courant adimensionnelle  $\Psi$  enregistrées aux sondes :  $S_3(0.9, 0.2)$ ,  $S_5(0.486, 0.967)$  et  $S_8(0.468, 1.80)$  (b) nombres de Nusselt moyens  $\overline{Nu}$  . pour  $Re_{cr}=2575$ ,  $Ri=0$ .

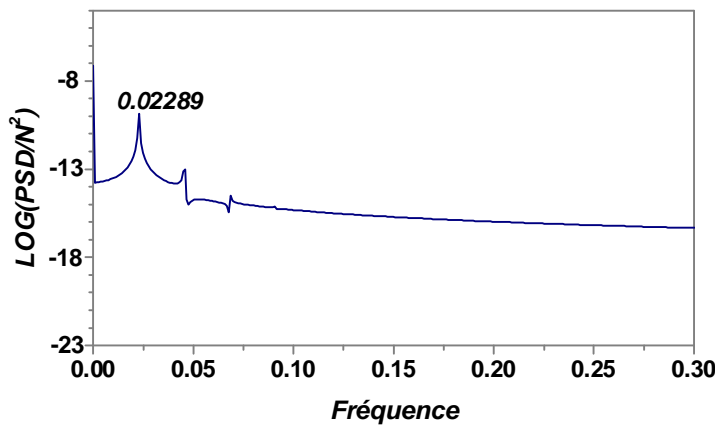


**Figure IV.23 :** Densité du spectre d'énergie (PSD normalisée par  $N_{ech}^2$ ) obtenue par transformation de Fourier de la température adimensionnelle  $\Theta$  au point  $S_5(0.486, 0.967)$  , avec  $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}$  et  $2^{19}$  échantillons.

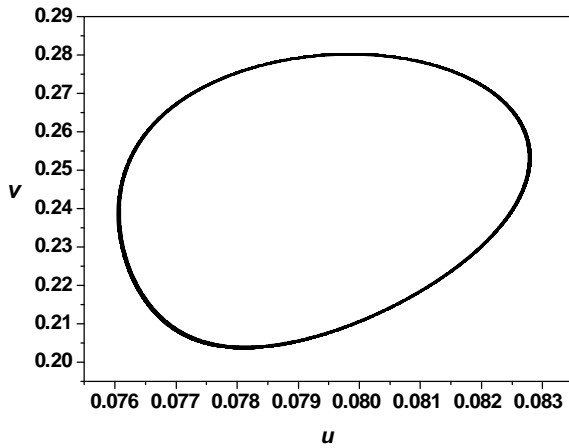
Cas :  $Re_{cr} = 924$ ,  $Ri = 0.5$



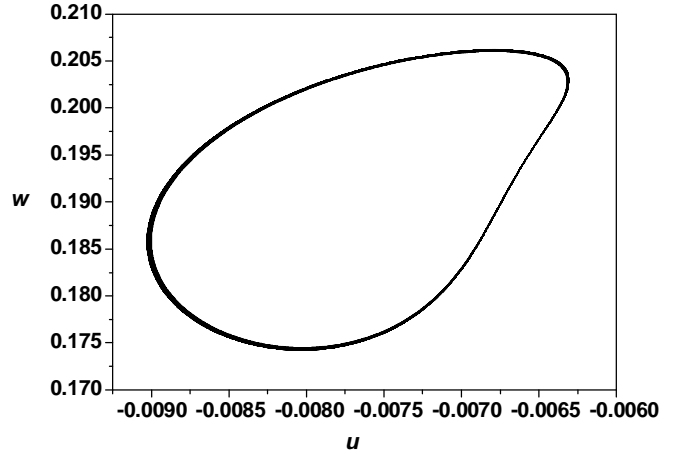
**Figure IV.24:** Evolutions temporelles de (a) la fonction de courant adimensionnelle  $\Psi$  enregistrées aux sondes :  $S_3(0.9,0.2)$ ,  $S_5(0.486,0.967)$  et  $S_7(0.099,1.80)$  (b) nombres de Nusselt moyens  $\overline{Nu}$  (chaud et froid). pour  $Re_{cr}=924$ ,  $Ri=0.5$ .



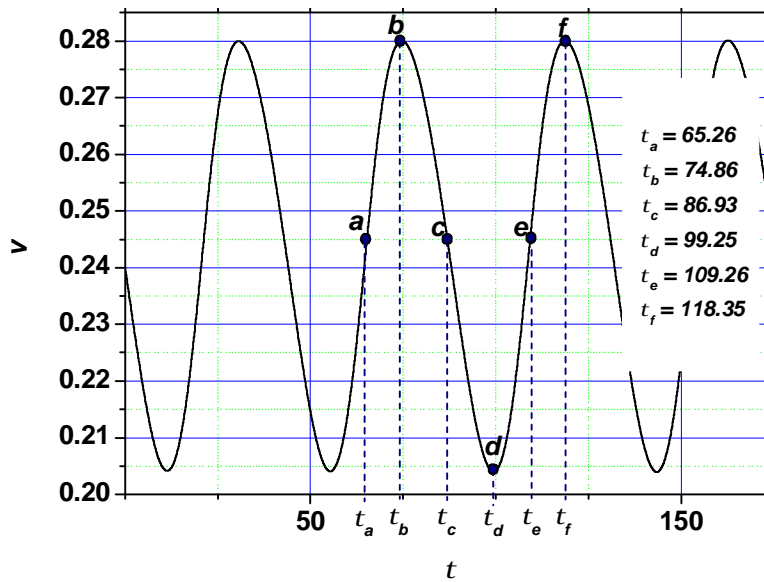
**Figure IV.25 :** Spectres d'énergie (PSD) de la vitesse azimutale  $w$  à la sonde  $S_2$  pour  $Re_{cr}=924$ ,  $Ri=0.5$ ., avec  $\Delta t = 10^{-3}$  et  $N_{ech}=2^{20}$  échantillons.



**Figure IV.26 :** Tracée des composantes de vitesse oscillatoires au point  $S_2(0.468,0.2)$  dans le plan de phase  $(u, v)$  pour  $Re_{cr}=924$ ,  $Ri=0.5$ .

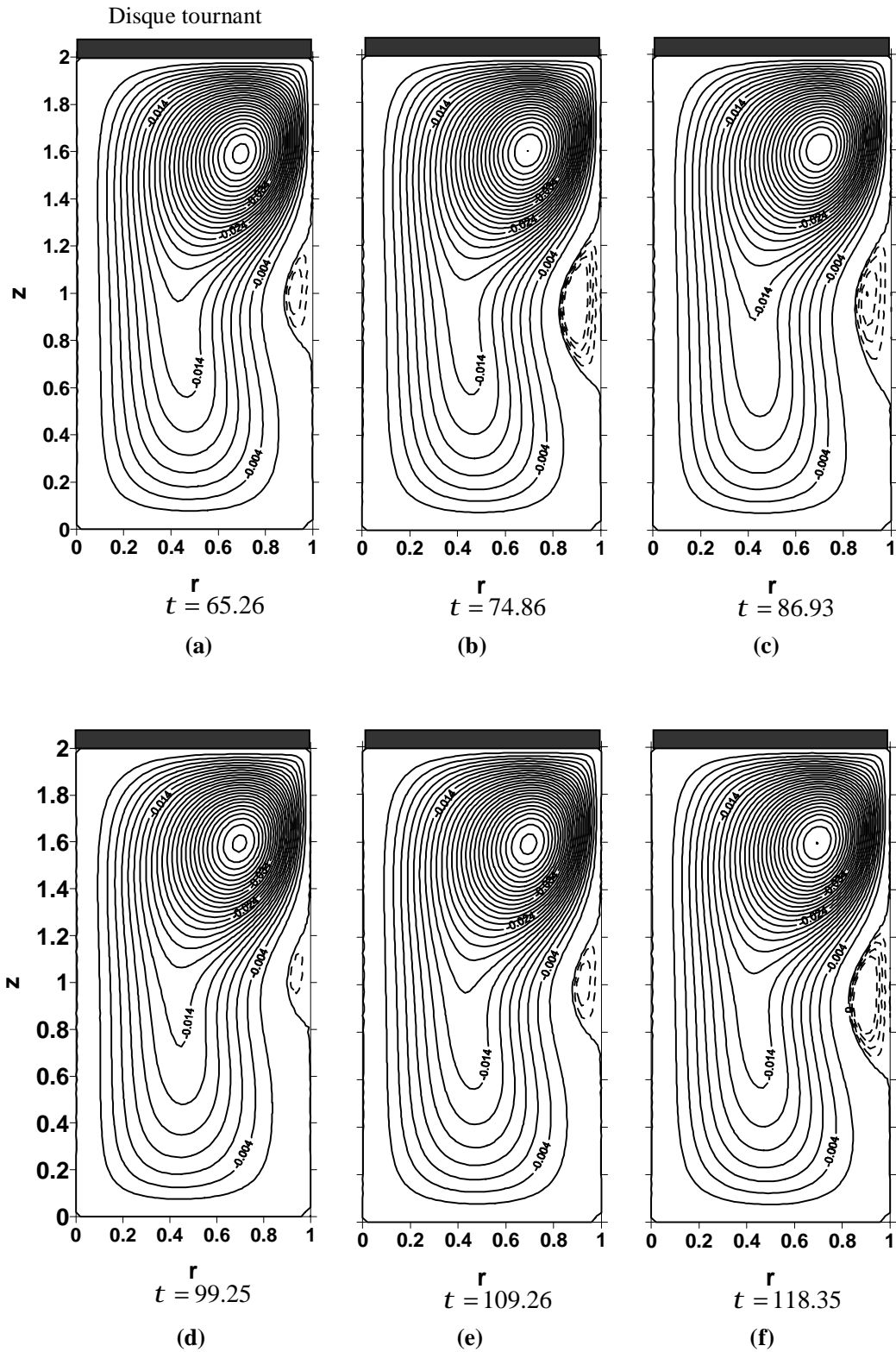


**Figure IV.27 :** Tracée des composantes de vitesse oscillatoires au point  $S_4(0.099,0.967)$  dans le plan de phase  $(u, w)$  pour  $Re_{cr}=924$ ,  $Ri=0.5$ .

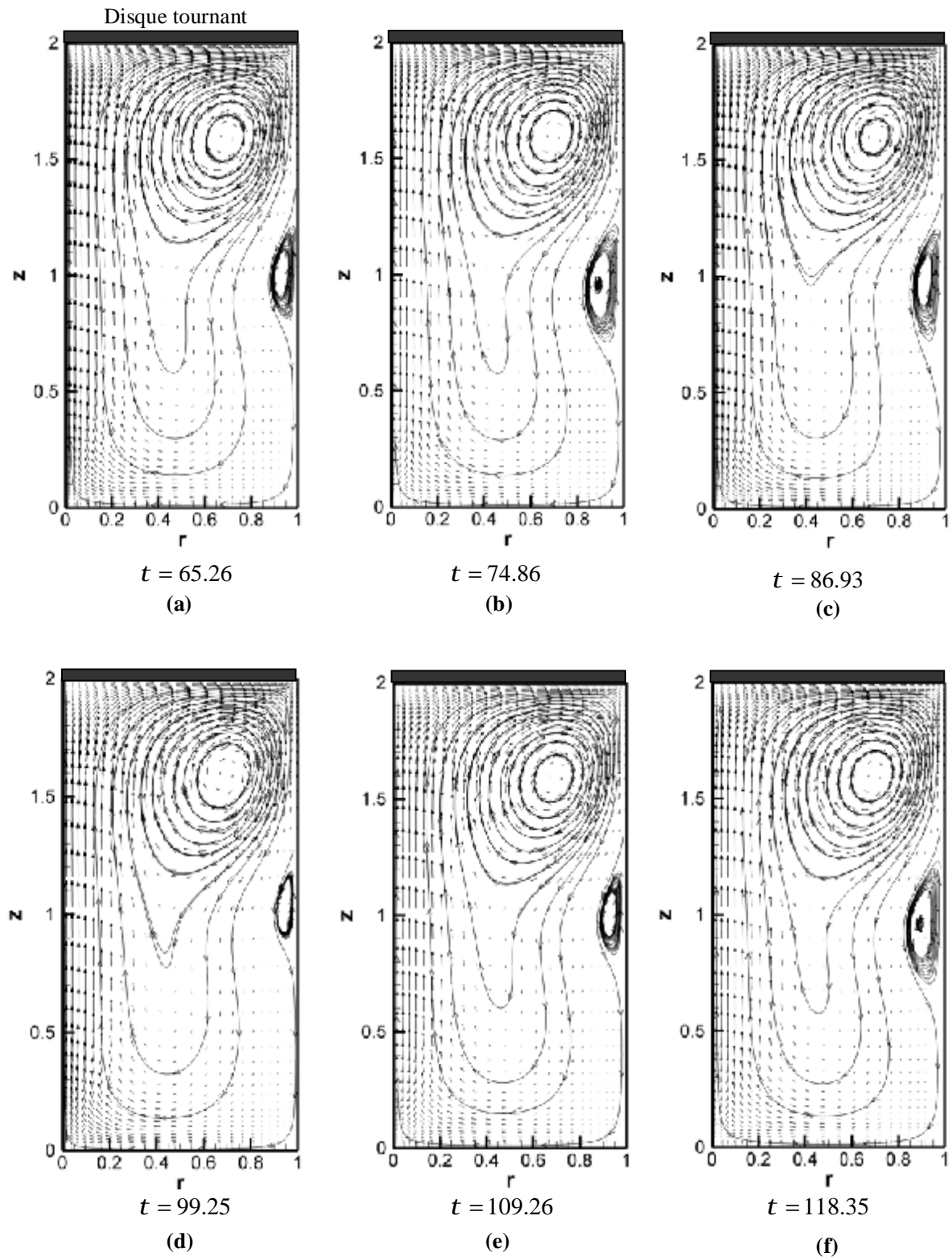


**Figure IV.28 :** Evolution temporelle de la vitesse axiale  $v$  à la sonde  $S_7(0.099,1.80)$  avec des temps choisis **(a, b, c, d, e, f)** pour voir les topologies de l'écoulement à  $Re_r=924$  et  $Ri=0.5$ .

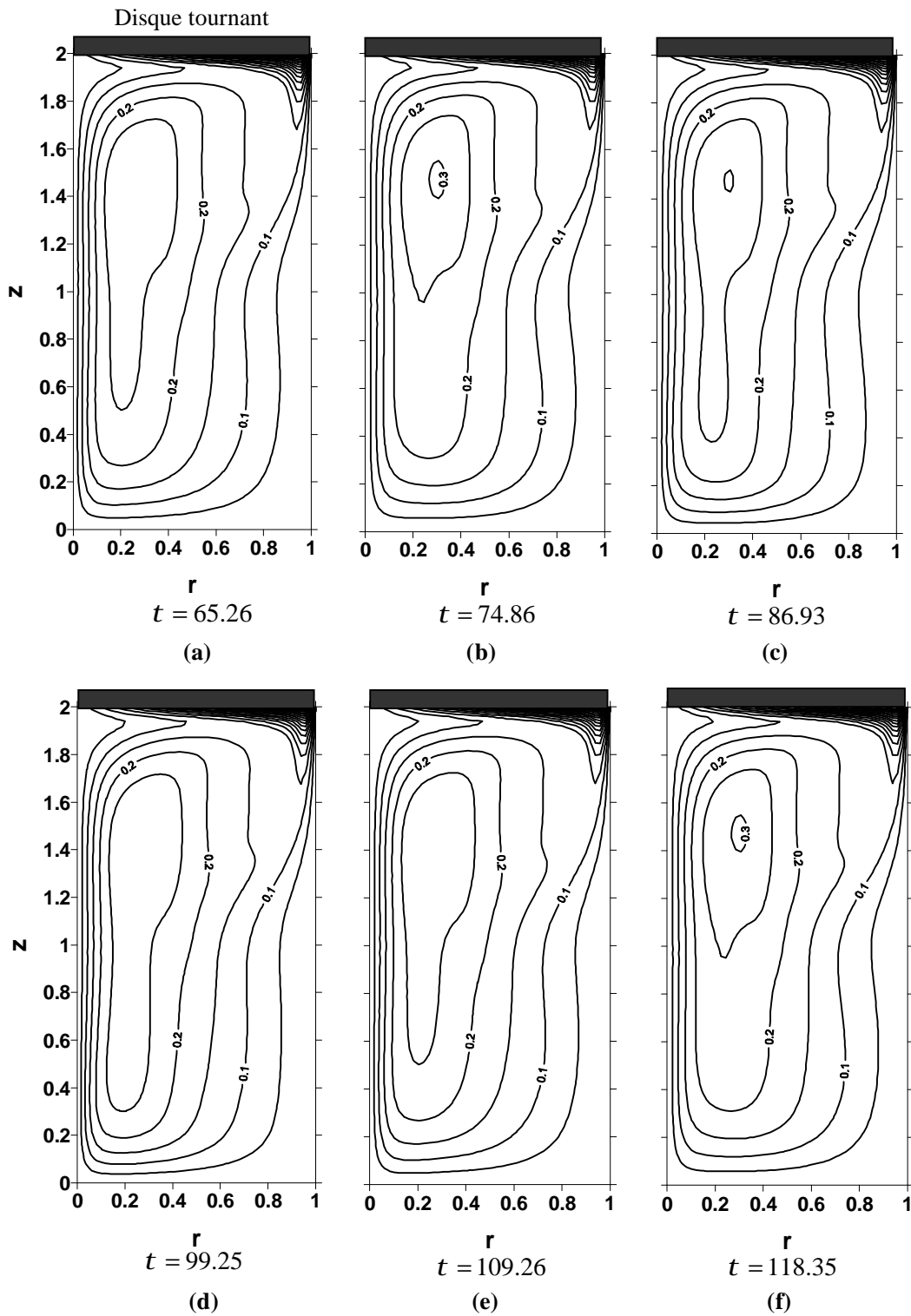




**Figure IV.29** : Evolution temporelle des motifs de la fonction de courant adimensionnelle  $\psi$  aux temps indiqués par (a,b,c,d,e,f), pour  $Re_{cr}=924$  et  $Ri=0.5$ . Les valeurs des  $y_{max}$  en pointillés sont pour : (a)  $1.847 \times 10^{-4}$ , (b)  $4.658 \times 10^{-4}$ , (c)  $2.435 \times 10^{-4}$ , (d)  $1.095 \times 10^{-4}$ , (e)  $1.845 \times 10^{-4}$ , (f)  $4.605 \times 10^{-4}$ .

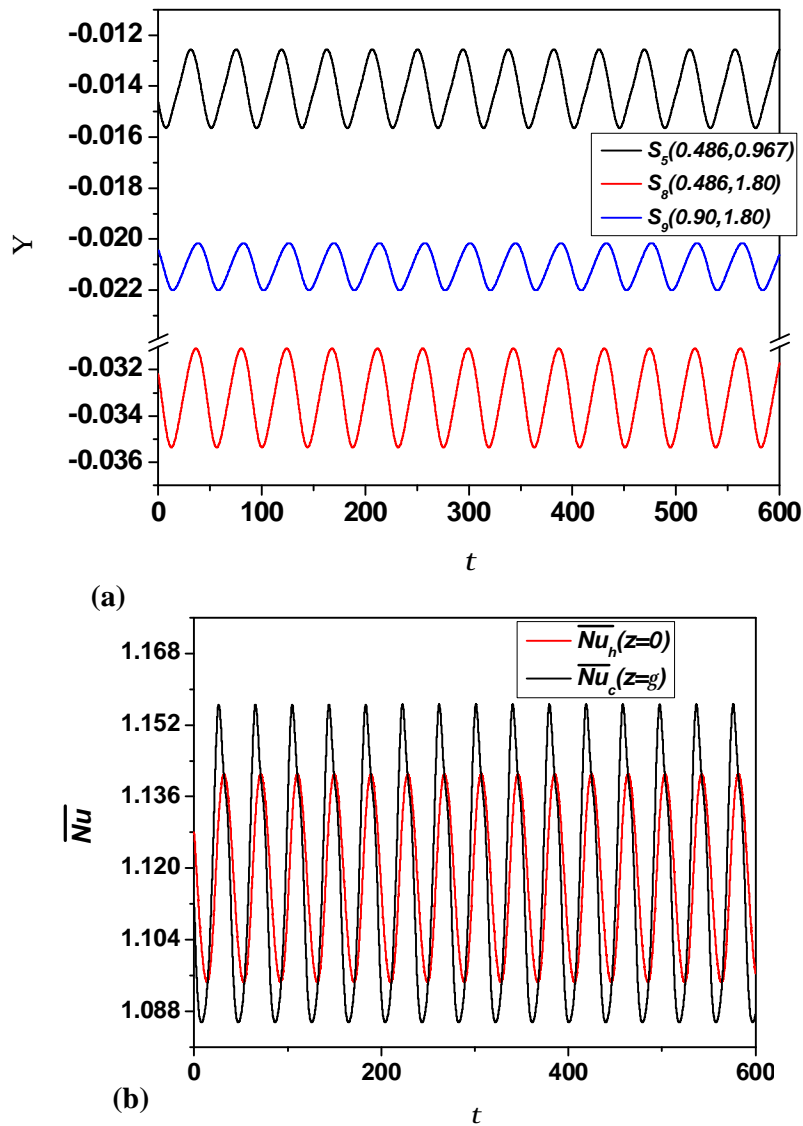


**Figure IV.30 :** Evolution temporelle des motifs de la fonction de courant adimensionnelle  $\psi$  avec les champs méridiens des vitesses  $(u, v)$ , aux temps indiqués par **(a,b,c,d,e,f)** pour  $Re_{cr}=924$  et  $Ri=0.5$ .



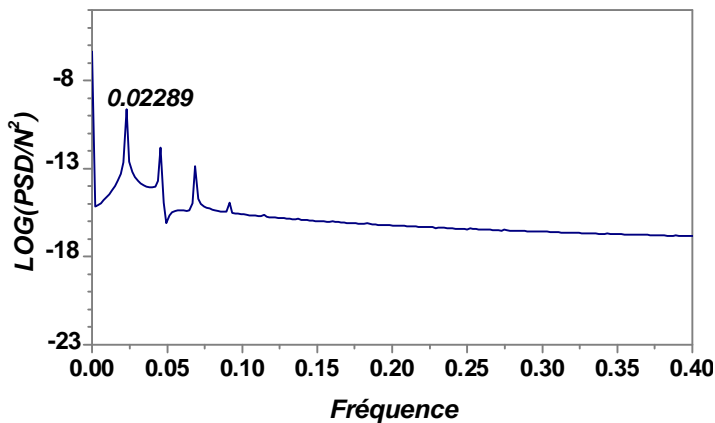
**Figure IV.31 :** Evolution temporelle des contours de la composante azimutale de la vitesse  $w$  aux temps indiqués par (a,b,c,d,e,f) pour  $Re_{cr}=924$  et  $Ri=0.5$ .

Cas :  $Re_{cr} = 802$ ,  $Ri = 1.0$



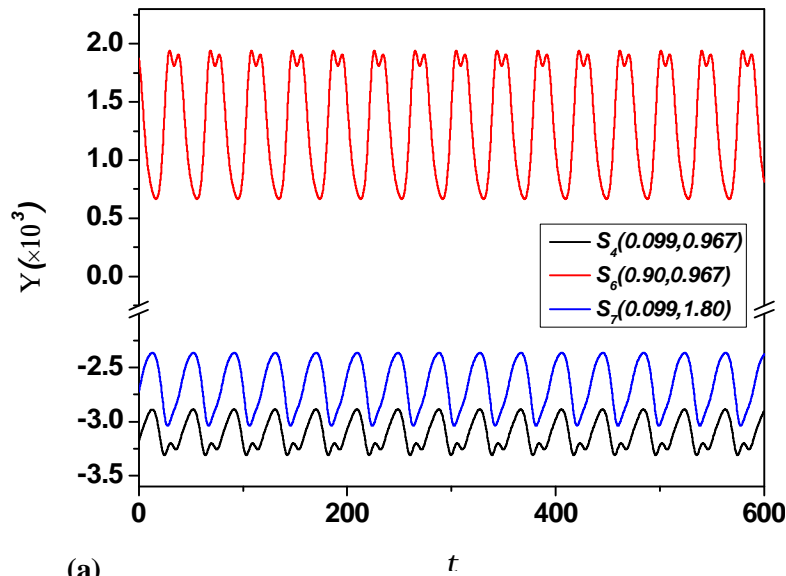
**Figure IV.32:** Evolutions temporelles de (a) la fonction de courant adimensionnelle  $\Psi$  enregistrées aux sondes :  $S_5(0.486, 0.967)$ ,  $S_8(0.468, 1.80)$  et  $S_9(0.9, 1.80)$ .

(b) nombres de Nusselt moyens  $\overline{Nu}$  pour  $Re_{cr}=802$ ,  $Ri=1.0$ .

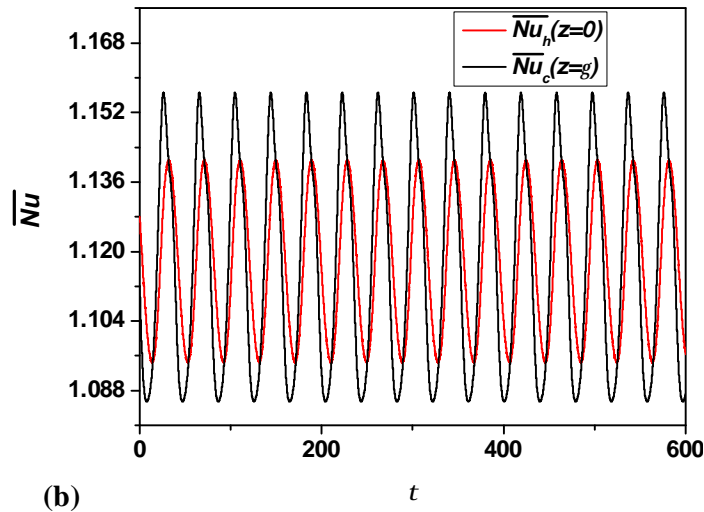


**Figure IV. 33 :** Densité du spectre d'énergie (PSD normalisée par  $N_{ech}^2$ ) obtenue par transformation de Fourier de la vitesse axiale  $v$  adimensionnelle au point  $S_8(0.468, 1.80)$  pour  $Re_{cr}=802$  et  $Ri=1.0$ , avec  $\Delta t = 10^{-3}$  et  $2^{19}$  échantillons.

Cas :  $Re_{cr} = 606$ ,  $Ri = 2.0$



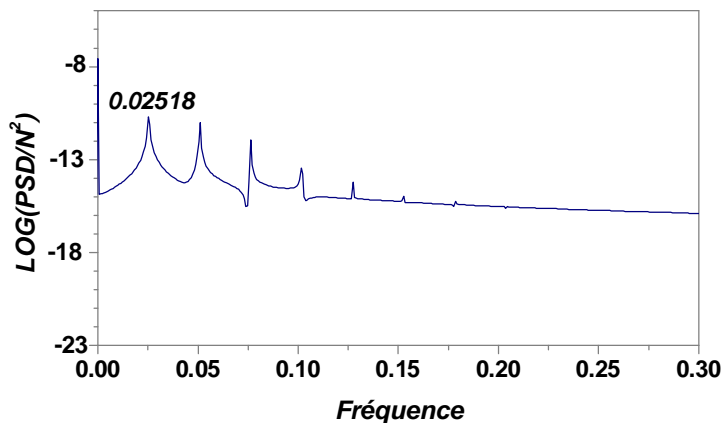
(a)



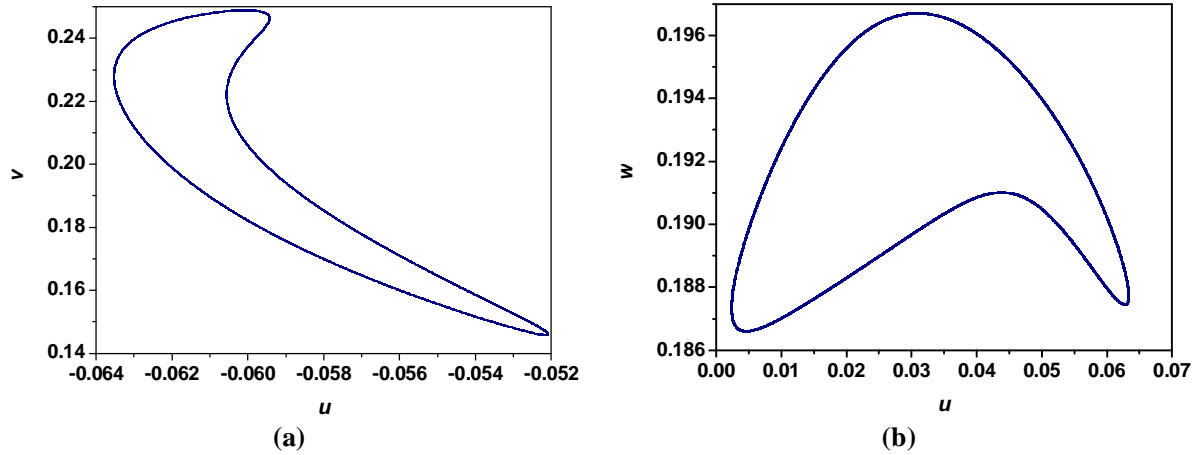
(b)

**Figure IV.34:** Evolutions temporelles (a) la fonction de courant adimensionnelle  $\Psi$  enregistrées aux sondes :  $S_4(0.099, 0.967)$ ,  $S_6(0.9, 0.967)$  et  $S_7(0.099, 1.80)$ .

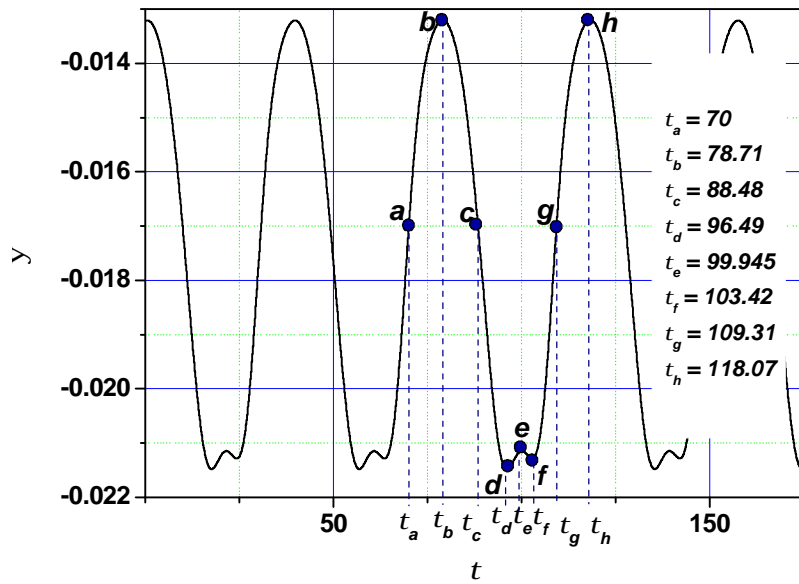
(b) nombres de Nusselt moyens  $\overline{Nu}$  pour  $Re_{cr}=606$ ,  $Ri=2.0$ .



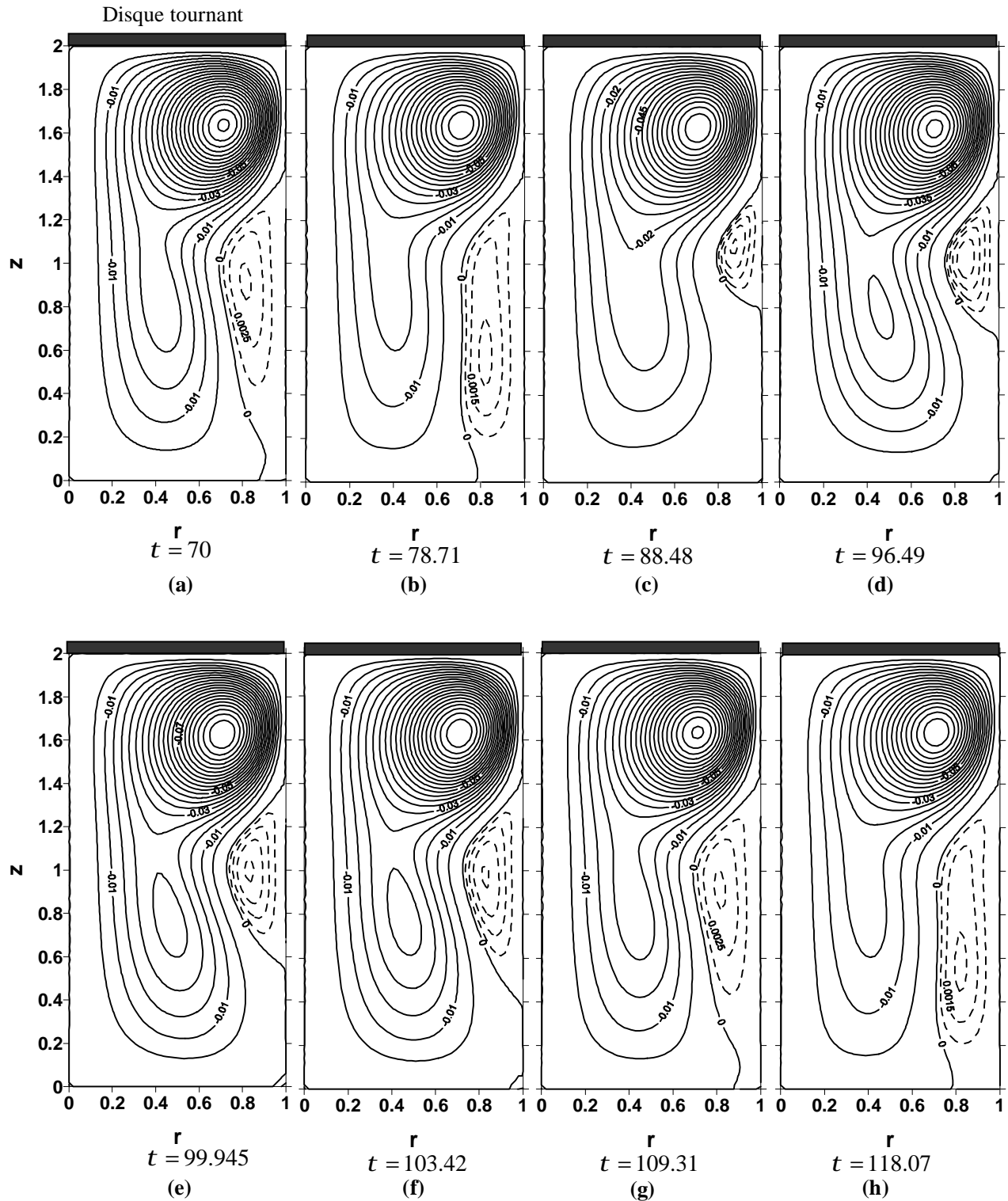
**Figure IV. 35 :** Densité du spectre d'énergie obtenue par transformation de Fourier de la composante radiale de vitesse  $u$  au point  $S_1(0.099, 0.2)$  pour  $Re_{cr}=606$  et  $Ri=2.0$ , avec  $\Delta t = 10^{-3}$  et  $N_{ech}=2^{20}$  échantillons.



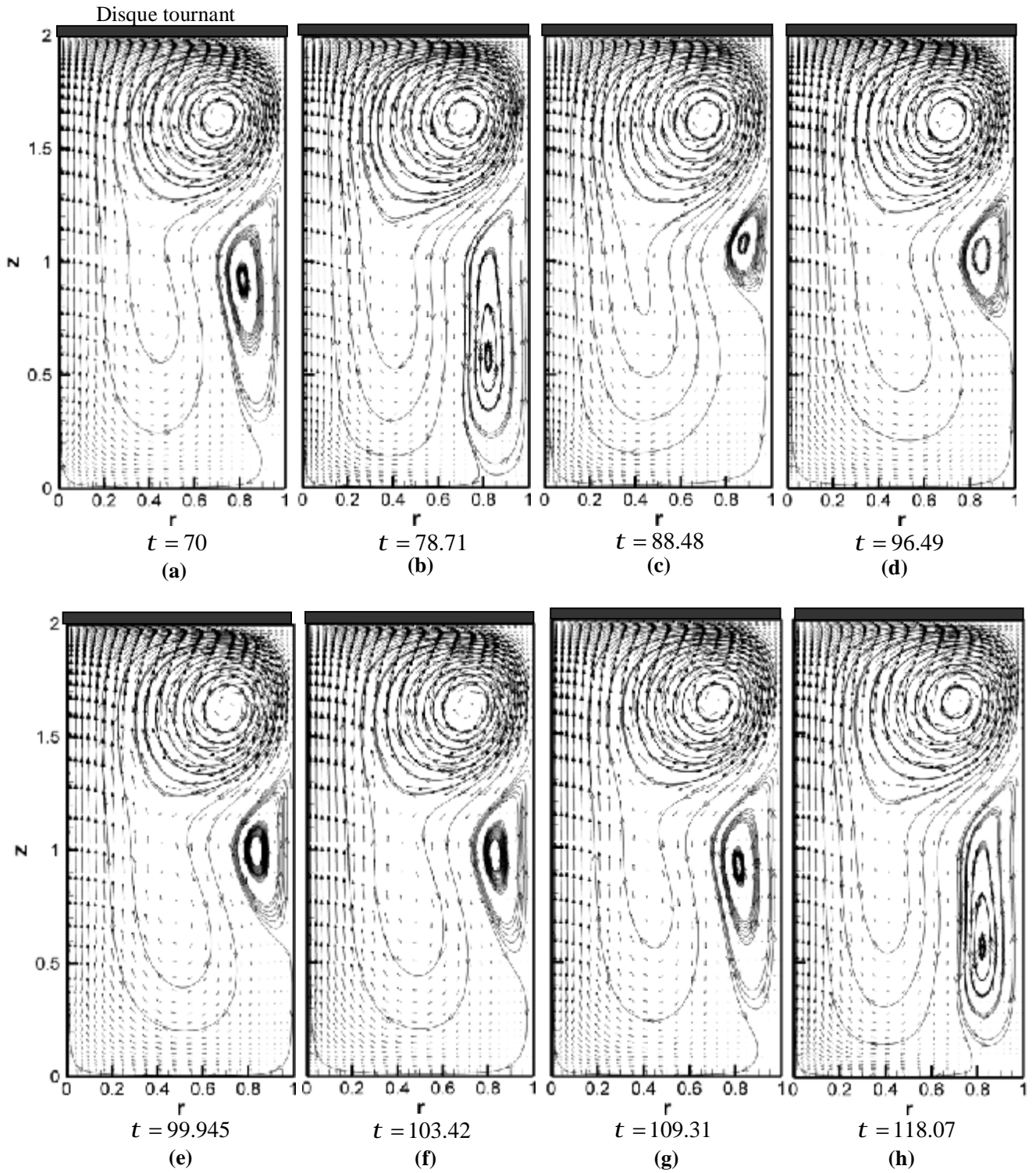
**Figure IV.36 :** Cycles limites pour les tracés des composantes de vitesse oscillatoire dans le plan de phase ; (a)  $(u, v)$  au point  $S_1(0.099, 0.2)$ , (b)  $(u, w)$  au point  $S_5(0.486, 0.967)$ , pour le cas  $Re_\tau=606, Ri=2.0$ .



**Figure IV.37 :** Evolution temporelle de la fonction de courant  $y$  au point  $S_5(0.486, 0.967)$  avec des temps choisis (a, b, c, d, e, f, g, h) pour visualiser les diverses topologies de l'écoulement à  $Re_\tau=606$  et  $Ri=2.0$ .

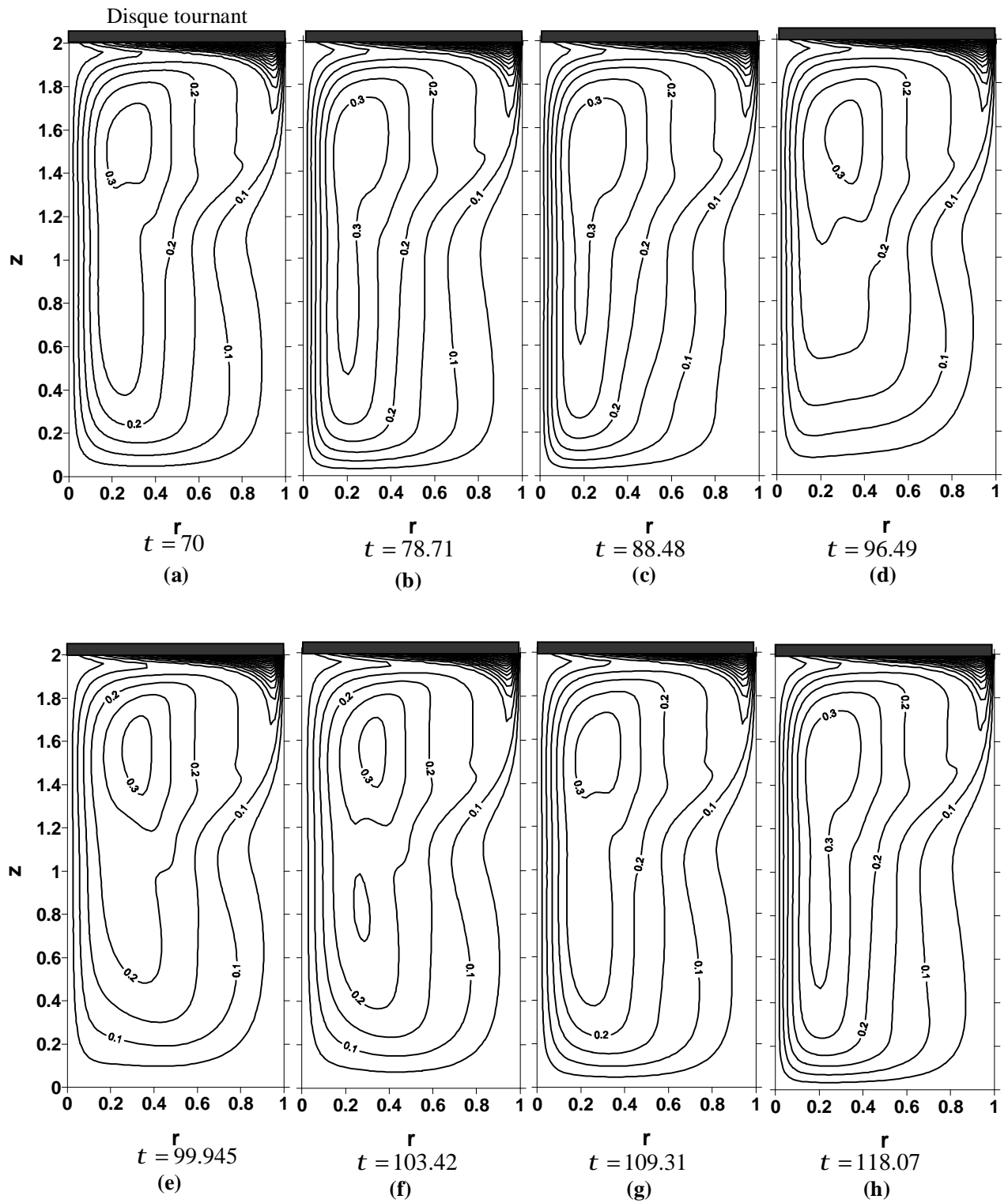


**Figure IV.38** : Evolution temporelle des lignes de courant dans le plan méridien  $(r, z)$ , aux temps adimensionnels indiqués par (a, b, c, d, e, f, g, h) pour  $Re_{cr}=606$  et  $Ri=2.0$ . Les valeurs des  $y_{max}$  en pointillés sont pour : (a) $3.930 \times 10^{-3}$ , (b) $2.422 \times 10^{-3}$ , (c) $1.040 \times 10^{-3}$ , (d) $2.351 \times 10^{-3}$ , (e) $3.229 \times 10^{-3}$ , (f) $3.164 \times 10^{-3}$ , (g) $3.935 \times 10^{-3}$ , (h) $2.393 \times 10^{-3}$ .



**Figure IV.39 :** Evolution temporelle des motifs de la fonction de courant adimensionnelle  $y$  avec les champs vectoriels méridiens des vitesses  $(u, v)$ , aux temps indiqués par (a,b,c,d,e,f,g,h) pour  $Re_{cr}=606$  et  $Ri=2.0$ .





**Figure IV.40 :** Evolution temporelle des contours de la composante azimutale de la vitesse  $w$  aux temps successifs indiqués par (a,b,c,d,e,f,g,h) pour  $Re_{cr}=606$  et  $Ri=2.0$ .

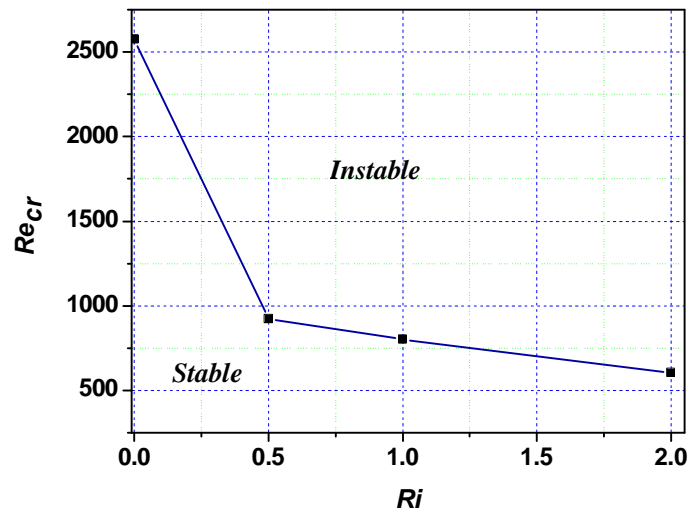


Figure IV.41: Diagramme de stabilité  $Re_{cr}-Ri$

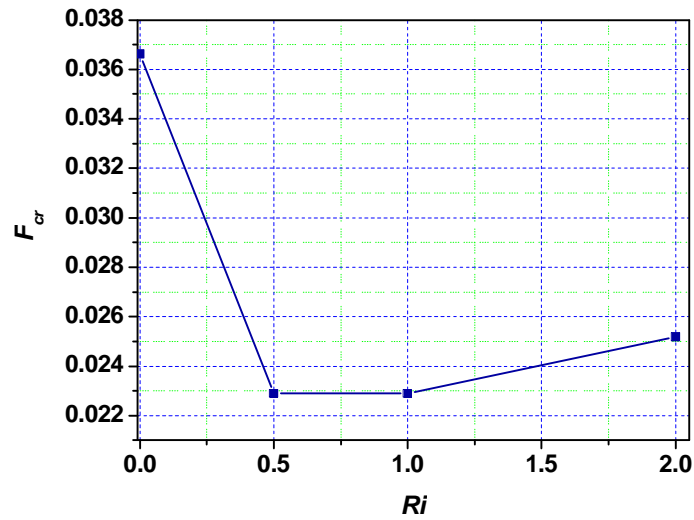


Figure IV.42: Diagramme de stabilité  $F_{cr}-Ri$ .

## IV.6 Partie B : Situation en présence du champ magnétique ( $Ha \neq 0$ )

Dans la présente partie de ce mémoire, nous intéressons à la situation en présence du champ magnétique ( $Ha \neq 0$ ) appliqué verticalement à la configuration étudiée en régime transitoire, donc on a résolu numériquement le système d'équations EDP figurant au deuxième chapitre, y compris l'équation du potentiel électrique (Eqs. II.15-II.20).

De même que dans la partie précédente, l'écoulement secondaire est étudié au moyen des composantes méridiennes  $u$  et  $v$  et les lignes de courant hydrodynamiques tracées à l'aide de la fonction de courant de Stokes  $\psi$ , ainsi que quelques représentations des lignes méridiennes du potentiel et du champ électriques. Les résultats pour les diverses intensités du champ magnétique (donc différentes valeurs du nombre de Hartmann  $Ha=5, 10, 20, 30, 40, 50, 60$ ), et les différents cas du nombre de Richardson ( $Ri = 0., 0.5, 1.0, 2.0$ ) sont récapitulés en fin de cette partie dans le tableau (Tab. IV.4) et les deux diagrammes paramétriques (en  $Ri$ ) de dépendance ( $Re_{cr}-Ha$ ) et ( $F_{cr}-Ha$ ) dans les figures (IV.81 et IV.82).

L'application d'un champ magnétique vertical est reconnue sur la stabilité des écoulements convectifs [35,36 et 43]. Sur les figures IV.43, IV.45, IV.52, IV.54, IV.58 et IV.60, nous avons présenté les évolutions temporelles des paramètres de l'écoulement ( $u, v, w, \Theta, \overline{Nu}$  et  $\psi$ ) enregistrés aux différentes sondes citées dans la section IV.4 de ce chapitre. Alors, en remarquant le comportement oscillatoire des différents historiques, on peut constater l'établissement d'un régime instable au sein de l'écoulement. Cette instabilité peut être interprétée physiquement par l'interaction des forces de volume (forces de Lorentz) et des forces de buoyancy ce qui donne naissance à un écoulement multicellulaire (Mittal [49]).

Aussi, la dépendance entre les amplitudes des oscillations et les positions des particules dans le cylindre est évidente, mais les fréquences d'oscillation sont les mêmes partout dans le fluide [6]. Ce caractère oscillatoire régnant dans l'écoulement de fluide est la cause du changement périodique des structures de l'écoulement instable, aussi la domination du régime conducteur du transfert de chaleur dans ce type d'écoulement de fluides à faible nombre de Prandtl, est appréciée sur les figures IV.45b, IV.54b, IV.57b, IV.60b, IV.68b et IV.69b qui présentent les courbes des évolutions temporelles des nombres de Nusselt moyens au niveau des deux disques ( $\overline{Nu}_c$  et  $\overline{Nu}_h$ ). Ces des derniers oscillent aux alentours d'une valeur légèrement supérieure à 1. ([35] et [36]).

Les figures IV.46, IV.61 et IV.69 montrent quelques portraits de phase des composantes adimensionnelles de la vitesse en quelques sondes dans l'écoulement oscillatoire instable. Nous pouvons remarquer que ces portraits de phase sont des cycles limites (voir la section IV.5.1 pour plus de détails), présentant parfois des boucles avec deux feuilles (Fig. 60), et les différents paramètres varient d'une manière cyclique, ce qui justifiera le caractère oscillatoire déjà vu sur les courbes des évolutions temporelles. Aussi, on peut avoir une idée sur l'ordre des amplitudes d'oscillations des composantes de vitesse en remarquons les intervalles englobant ces cycles limites.

Même dans la situation où le champ magnétique est présent, l'augmentation des valeurs des nombres de Reynolds  $Re$ , de l'écoulement au delà de celles dites critiques engendrera une bifurcation de l'écoulement vers le régime instable, ainsi qu'une multiplicité des fréquences d'oscillations dans l'écoulement aura lieu [10]. Ceci est illustré sur les figures IV.44, IV.53, IV.56, IV.59, IV.67 et IV.75 qui montrent les fréquences d'oscillation prédominantes pour quelques cas de l'écoulement oscillatoire. Cette analyse spectrale est le résultat de l'application de la transformée de Fourier rapide aux évolutions temporelles de quelques paramètres. Les fréquences critiques pour tout les cas investigués dans ce travail sont regroupées au tableau IV.4 en conjonction avec les nombres de Reynolds critiques correspondants pour les différentes valeurs du nombre de Hartmann  $Ha = 0., 5, 10, 20, 30, 40, 50, 60$ , et de différentes valeurs du nombre de Richardson  $Ri = 0., 0.5, 1.0$  et  $2.0$ .

#### IV.6.1 Structures de l'écoulement MHD :

En cherchant à comprendre la nature oscillatoire des différents paramètres de l'écoulement, nous avons présenté l'évolution temporelle au cours d'une période de la vitesse radiale adimensionnelle  $u$  pour le cas où  $Re_{cr} = 961$ ,  $Ri = 0.5$  et  $Ha = 5$ , et nous avons indiqué les différents instants notés par :  $\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d, \tau_e, \tau_f, \tau_h, \tau_g$  (Fig. IV.47).

La figure IV.48 montre les lignes de courant hydrodynamiques. Au cours des temps adimensionnels ( $\tau_a, \tau_b, \tau_c \dots$ ), on remarque l'existence d'une simple cellule ou zone de recirculation secondaire près de la paroi latérale ayant un débit massique positif (lignes de courant en pointillés). Aussi, cette cellule se dilate et rétrécit au cours des temps ( $\tau_a, \tau_b, \tau_c \dots$ ), ce processus se pour une période de  $1/F_{cr} = 1/0.02365 \approx 42.28$ , tandis que le sens du mouvement des particules fluides confinées dans cette cellule est contre la sens ordinaire des aiguilles d'une montre, ceci est montré sur la figure IV.49 où nous avons représenté les suivis des particules en mouvement méridien.

La figure IV.50 expose les iso-valeurs de la vitesse azimutale  $w$  dans le plan méridien. On peut dire que pour ce cas de  $Re_{cr}=961$ ,  $Ri=0.5$  et  $Ha=5$  les écoulements primaire et secondaire ne diffèrent pas d'une façon remarquable de celui à  $Re_{cr}=924$ ,  $Ri=0.5$  et  $Ha=0$ .

Sur la figure IV.51 sont présentés les vecteurs de courant méridien  $J_r$  et  $J_z$  (Equ.II.22a-II.22c) dans l'enceinte cylindrique, où on peut remarquer les vecteurs de courant électriques se concentrent sous le disque tournant (la couche d'Eckman) et aux voisinages du disque fixe de bas. Puisque le fluide est entouré d'un milieu totalement isolant et les lignes de courant électrique doivent nécessairement se refermer au sein du fluide. Les couches de Hartmann situées sous le disque tournant et sur la paroi du fond du cylindre, dans lesquelles se referment les lignes de courant électriques et où l'équilibre azimutal est assuré par un équilibre entre les forces visqueuses et les forces électromagnétiques [31].

L'autre cas dont nous avons choisi de représenter les structures périodiques est celui avec un nombre de Hartmann modéré, c'est les cas :  $Re_{cr}=927$ ,  $Ri=2.0$  et  $Ha=30$ . Les instants successifs choisis pour visualiser cet écoulement sont indiqués par :  $\tau_a$ ,  $\tau_b$ ,  $\tau_c$ ,  $\tau_d$ ,  $\tau_e$ ,  $\tau_f$ ,  $\tau_g$  sur le tracé de l'évolution temporelle de la composante radiale de la vitesse  $u$  (Fig. IV.62) enregistrée à la sonde  $S_7$  de coordonnées  $r=0.099$  et  $z=1.80$ . Les lignes de courant hydrodynamiques de l'écoulement méridien pour ce cas ( $Re_{cr}=927$ ,  $Ri=2.0$  et  $Ha=30$ ) sont représentées sur la figure IV.63, dans les différents instant de la période balayée

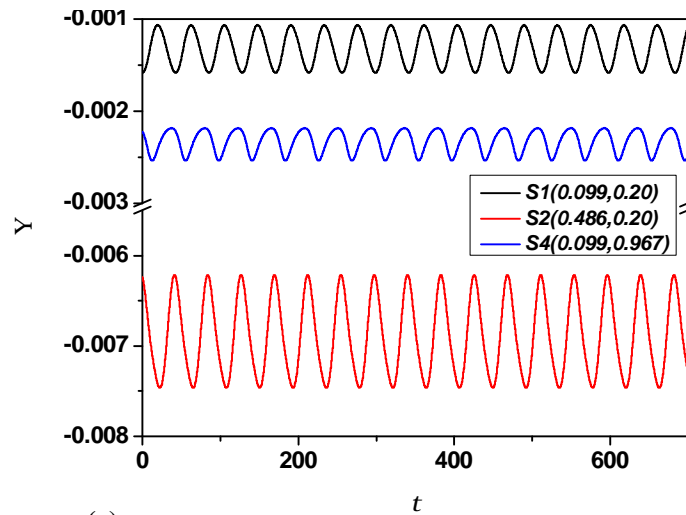
Remarquons qu'au premier instant  $t_a = 55.47$ , l'écoulement présente d'une cellule située sous le disque tournant dans la région centrale ( $0 \leq r \leq 0.4$  et  $1.4 \leq z \leq 2$ ). Cette zone de recirculation est caractérisée par un faible débit massique méridien résultant des petites valeurs des vitesses radiale et axiale (Fig. IV.63a). À l'instant  $t_b = 60.69$ , cette zone de recirculation se contracte (Fig. IV.63b), et une autre zone de recirculation se développe près de la paroi latérale de l'enceinte, alors dans ces deux cellules secondaires les particules fluides meuvent dans le sens anti-horaire. Aux instants  $t_c = 62.96$ ,  $t_d = 65.56$  et  $t_e = 67.92$  la cellule située sous le disque tournant reste inchangée tandis que la deuxième subit des changements graduels dans ses dimensions. Aux instants  $t_f = 73.95$  et  $t_g = 79.04$ , les structures de la fonction de courant est parfaitement semblables à celles des instant  $t_a$  et  $t_b$  respectivement, ce qui prouve que l'écoulement s'effectue d'une manière périodique (Figs. IV.63f-IV.63g) pendant une période de  $1/0.05436 \approx 18.396$ . On note que le sens de mouvement méridien des particules confinées dans la cellule principale est horaire, comme il est montré sur les figures IV.64.

La figure IV.73 illustre les changements des isothermes aux différents instants indiqués par  $\tau_a$ ,  $\tau_b$ ,  $\tau_c$ ,  $\tau_d$ ,  $\tau_e$  et  $\tau_f$  (Fig. IV.70). Outre la périodicité du champ thermique qui règne pendant l'écoulement, on peut constater la courbure importante des isothermes dans la région centrale du domaine du calcul, ce qui indique que le régime du transfert thermique est essentiellement convectif dans cette région.

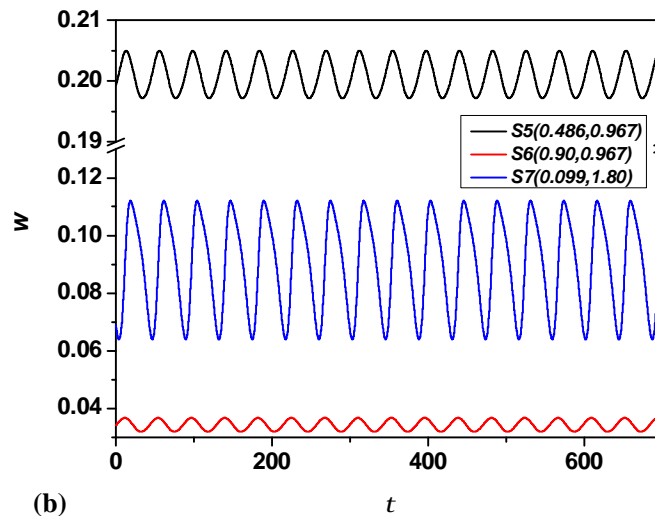
Alors, si on prend un cas avec un champ magnétique élevé, par exemple le cas où  $Re_{cr}=1693$ ,  $Ri=2.0$  et  $Ha=60$ , pour montrer la physique résidant derrière les oscillations apparentes aux évolutions temporelles des différents paramètres (Figs. IV.74-IV.76), aux instants successifs indiqués par :  $\tau_a$ ,  $\tau_b$ ,  $\tau_c$ ,  $\tau_d$ ,  $\tau_e$ ,  $\tau_f$ ,  $\tau_g$  et  $\tau_h$  sur la courbe d'évolution temporelle de la composante azimutale de la vitesse  $w$  (Fig. IV.77) enregistrée à la sonde  $S_4(r=0.099, z=0.967)$ . Les motifs de la fonction de courant hydrodynamique  $\psi$  de l'écoulement méridien pour ce cas ( $Re_{cr}=1693$ ,  $Ri=2.0$  et  $Ha=60$ ) sont représentées sur la figure IV.78, dans les différents instant de la période balayée. Aussi, comme le cas de  $Re_{cr}=927$ ,  $Ri=2.0$  et  $Ha=30$ , une zone de recirculation stationnaire existe sous le disque tournant, mais dans ce cas ses dimensions ont été élargies axialement jusqu'au disque inférieur en couvrant presque toute la région centrale le long de l'axe de symétrie du cylindre. L'autre zone de recirculation naissant près de la paroi latérale et ayant une recirculation anti-horaire (Fig. IV.79) se dilate et se contracte pendant une période du temps adimensionnel de 18,08.

La figure IV.80 montre l'évolution temporelle des iso-valeurs de la vitesse azimutale  $w$  aux différents instants indiqués auparavant par ( $\tau_a$ ,  $\tau_b$ ,  $\tau_c$ ,.....etc). Alors la première remarque qu'on peut tirer est qu'aux différents instants une vitesse azimutale de l'ordre de 0.3 règne dans la zone de recirculation située sous le disque en rotation et s'étendant le long de l'axe de symétrie. Une autre remarque est la présence d'une couche de cisaillement intense séparent ladite zone stationnaire de recirculation de la zone de recirculation principale.

Cas :  $Re_{cr} = 961$ ,  $Ri = 0.5$ ,  $Ha = 5$

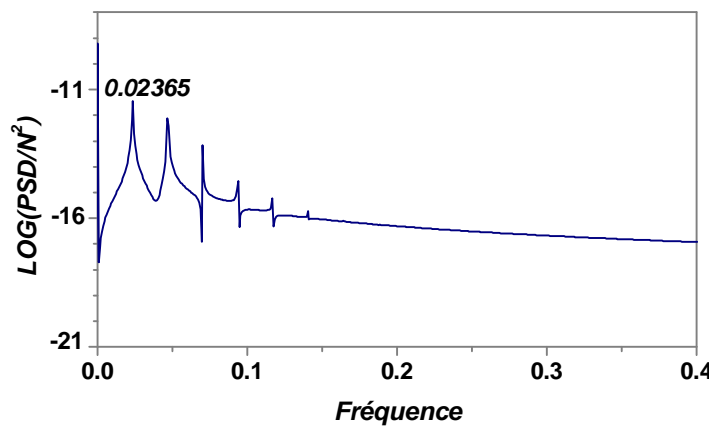


(a)

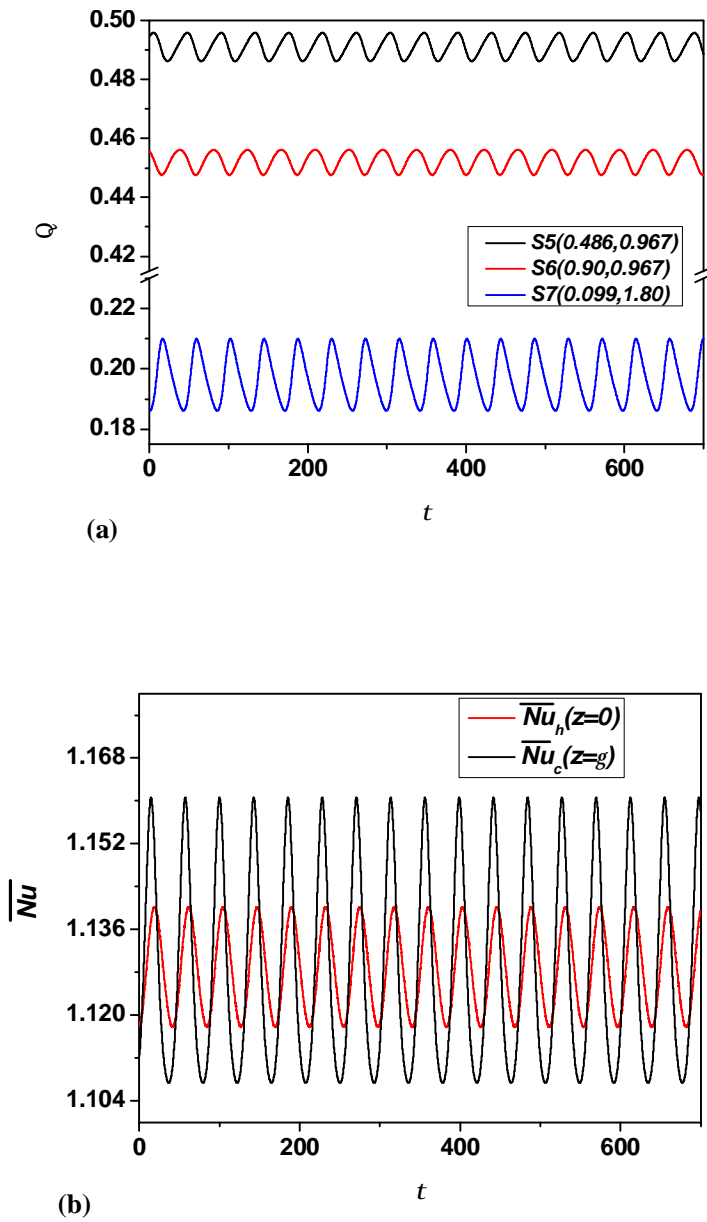


(b)

**Figure IV.43:** Evolutions temporelles (a) la fonction de courant adimensionnelle  $\Psi$  enregistrées aux sondes :  $S_1(0.099,0.2)$ ,  $S_2(0.468,0.2)$  et  $S_4(0.099,0.967)$  (b) la composante azimutale de vitesse  $w$  aux points :  $S_5(0.486,0.967)$ ,  $S_6(0.9,0.967)$  et  $S_7(0.099,1.80)$ , pour  $Re_{cr}=961$ ,  $Ri=0.5$  et  $Ha=5$ .

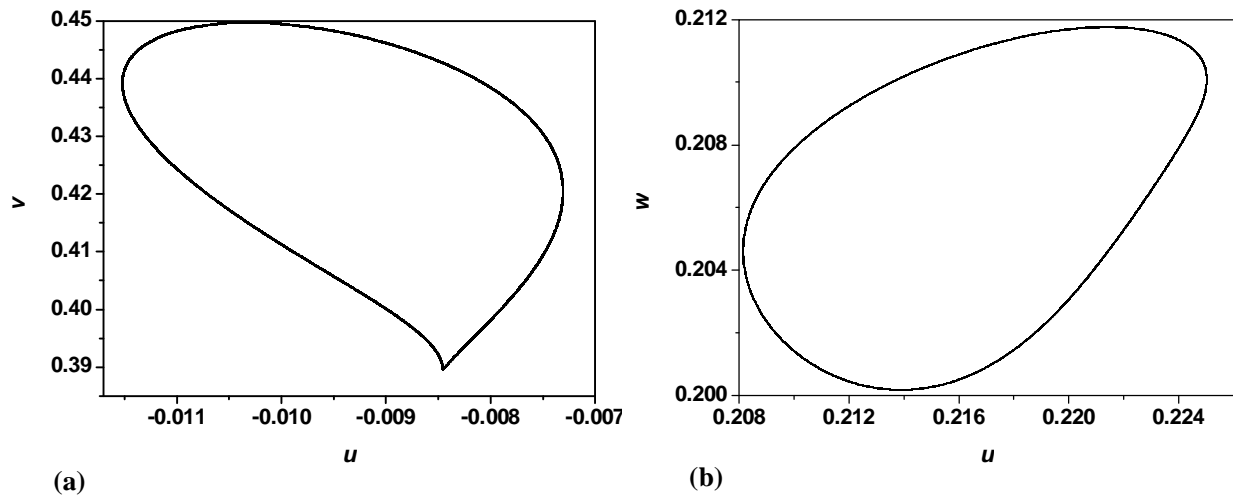


**Figure IV.44 :** Densité du spectre d'énergie obtenue par FFT de la vitesse radiale adimensionnelle  $u$  au point  $S_4(0.099,0.967)$ , pour  $Re_{cr}=961$ ,  $Ri=0.5$  et  $Ha=5$ . avec  $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}$  et  $2^{20}$  échantillons.

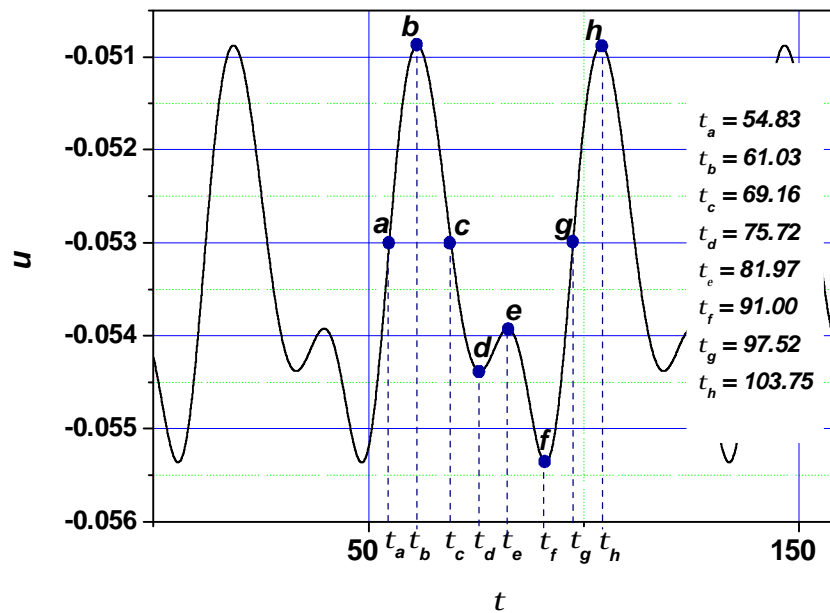


**Figure IV.45:** Evolutions temporelles de (a) la température adimensionnelle  $\Theta$  enregistrées aux sondes :  $S_5(0.486, 0.967)$ ,  $S_6(0.9, 0.967)$  et  $S_7(0.099, 1.80)$ , (b) nombres de Nusselt moyens  $\overline{Nu}$  . pour le cas  $Re_c=961$ ,  $Ri=0.5$  et  $Ha=5$ .

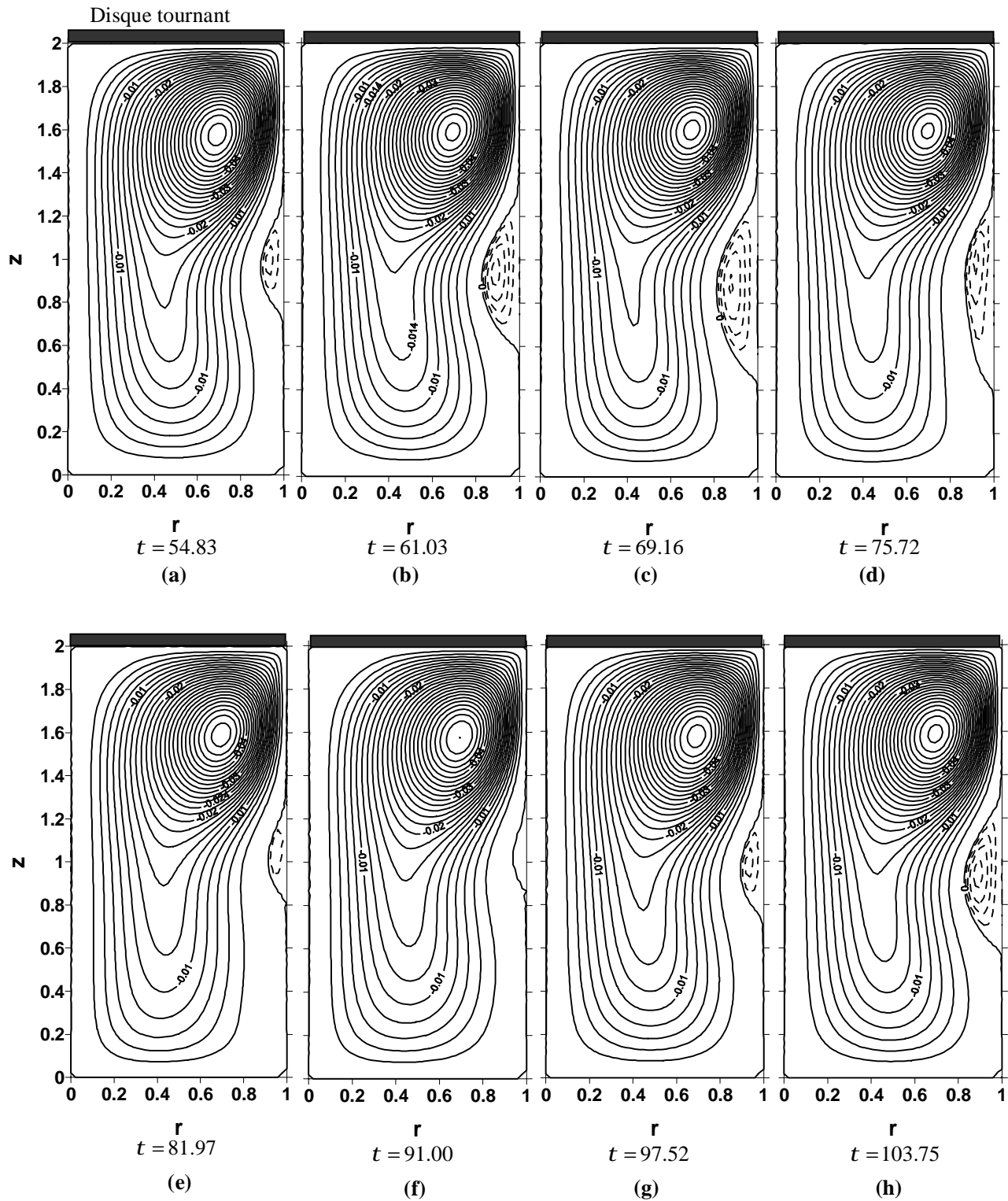




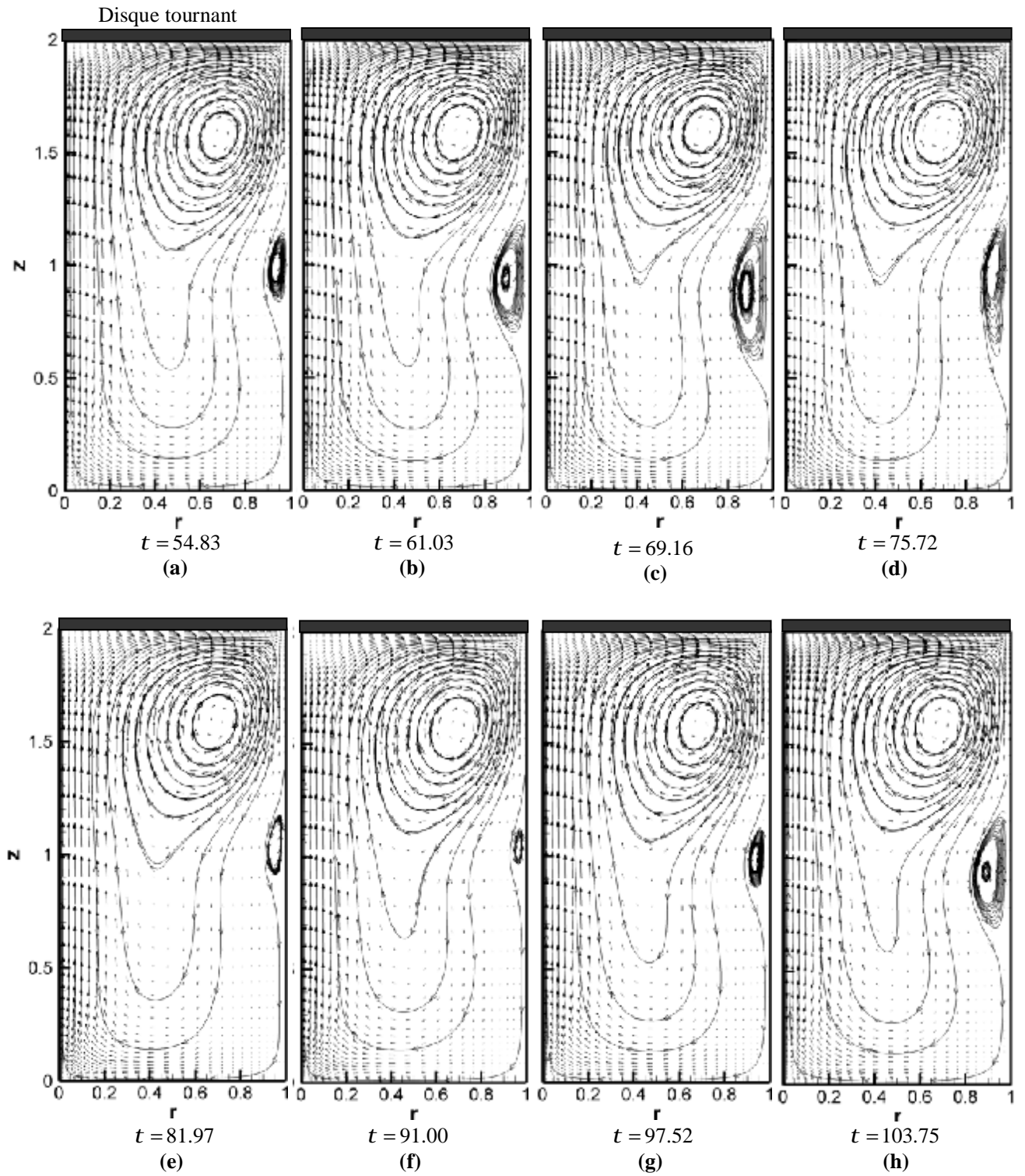
**Figure IV.46 :** Tracée des composantes de vitesse oscillatoires aux points (a)  $S_4(0.099,0.967)$  dans le plan de phase  $(u, v)$ . (b) et  $S_8(0.468,1.80)$  dans le plan de phase  $(u, w)$ , pour le cas  $Re_{cr}=961$ ,  $Ri=0.5$  et  $Ha=5$ .



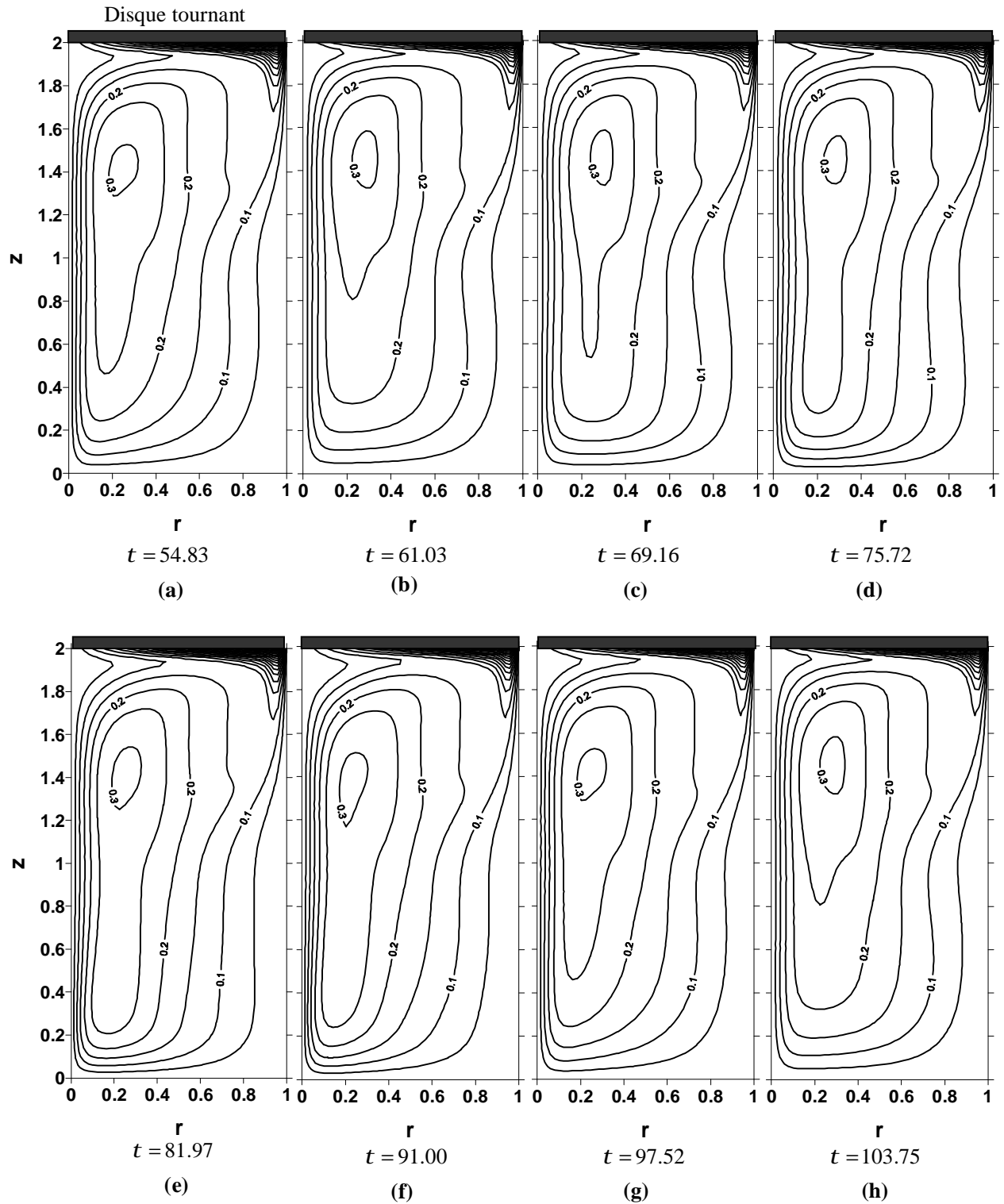
**Figure IV.47 :** Evolution temporelle de la vitesse radiale adimensionnelle  $u$  au point  $S_1(0.099,0.2)$  avec des temps adimensionnels (a, b, c, d, e, f, g, h) d'explorer le champ d'écoulement à  $Re_{cr}=961$ ,  $Ri=0.5$  et  $Ha=5$ .



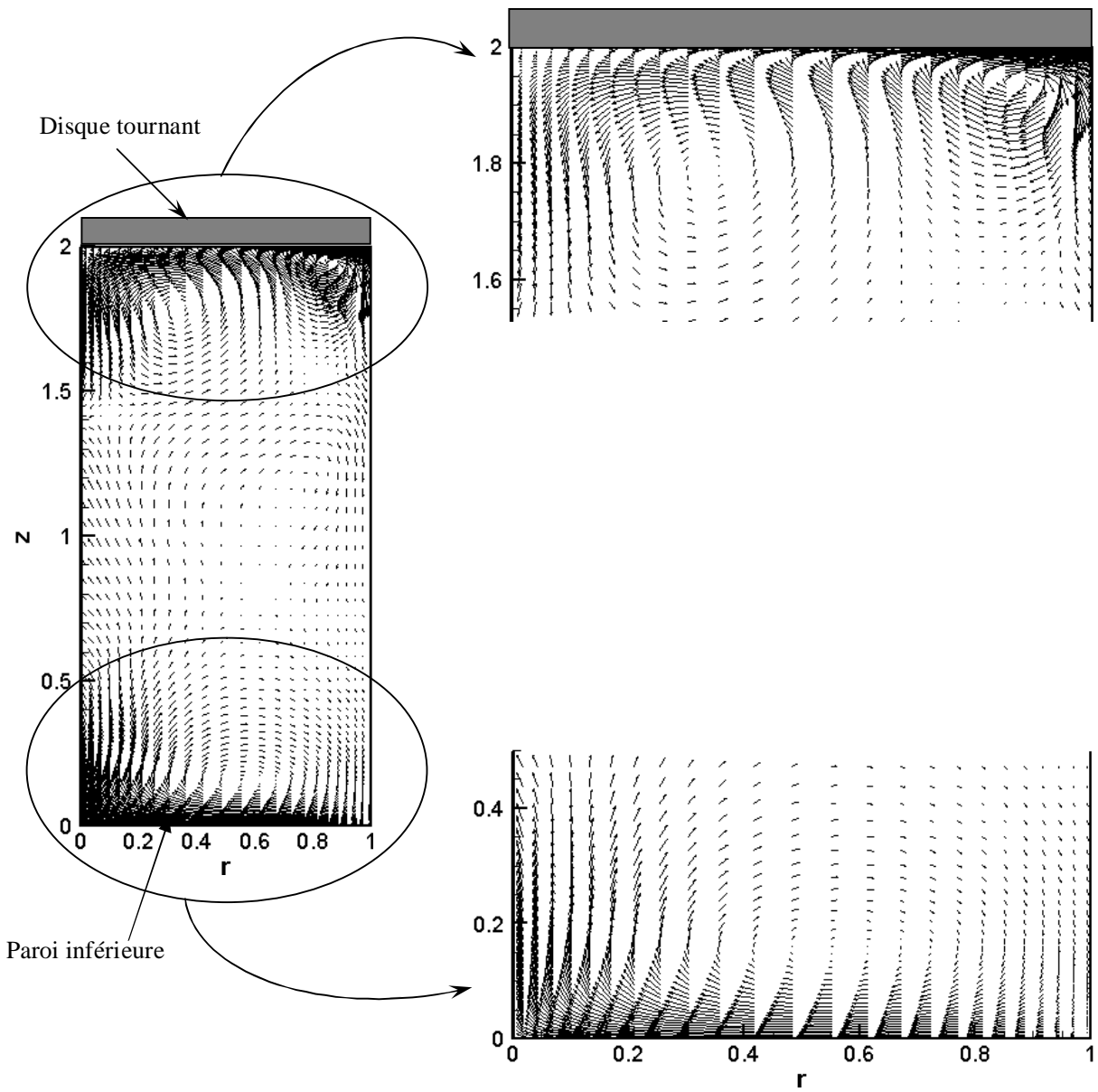
**Figure IV.48** : Evolution temporelle des motifs de la fonction de courant adimensionnelle  $y$  aux temps indiqués par **(a, b, c, d, e, f, g, h)** pour  $Re_{cr}=961$ ,  $Ri=0.5$  et  $Ha=5$ . Les valeurs des  $y_{max}$  en pointillés sont pour : **(a)**  $1.485 \times 10^{-4}$ , **(b)**  $5.437 \times 10^{-4}$ , **(c)**  $5.169 \times 10^{-4}$ , **(d)**  $1.635 \times 10^{-4}$ , **(e)**  $1.085 \times 10^{-4}$ , **(f)**  $1.171 \times 10^{-4}$ , **(g)**  $1.482 \times 10^{-4}$ , **(h)**  $5.450 \times 10^{-4}$ .



**Figure IV.49 :** Evolution temporelle des motifs de la fonction de courant adimensionnelle  $y$  avec les champs méridiens des vitesses  $(u-v)$ , aux temps indiqués par (a, b, c, d, e, f, g, h) pour  $Re_{cr}=961$ ,  $Ri=0.5$  et  $Ha=5$ .

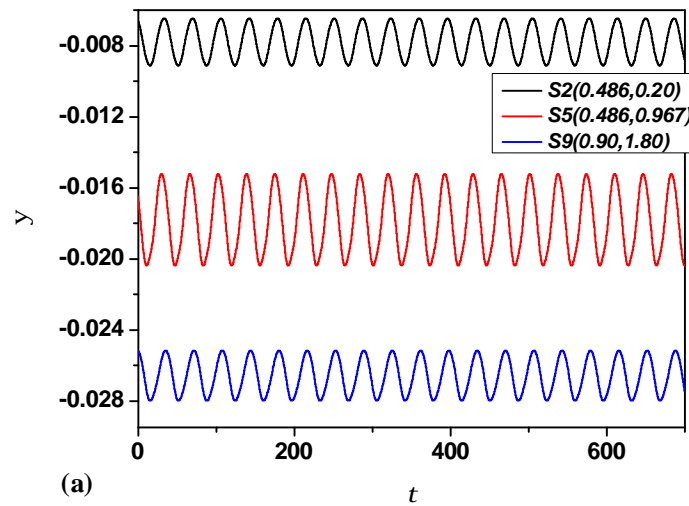


**Figure IV.50 :** Evolution temporelle des iso-valeurs de la vitesse azimutale adimensionnelle  $w$  aux temps indiqués par (a, b, c, d, e, f, g, h). Tracés méridiennes pour  $Re_r=961$ ,  $Ri=0.5$  et  $Ha=5$ .

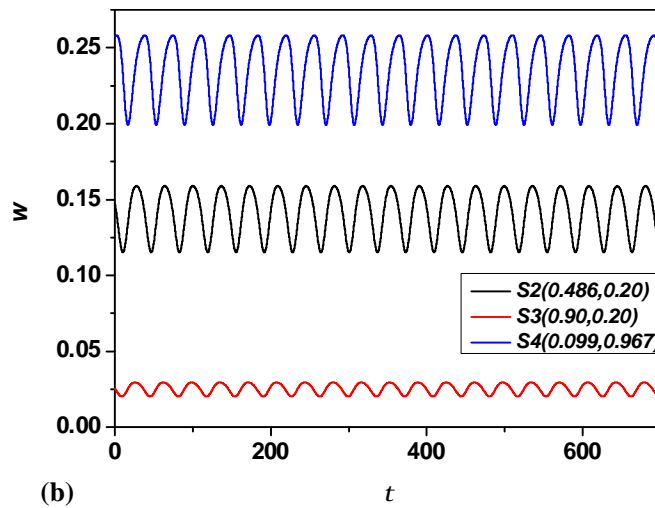


**Figure IV.51** : Champ vectoriel des courants électriques ( $J_r$ - $J_z$ ) au sein du fluide conducteur à l'instant  $t = 75.72$ , pour  $Re_{cr}=961$ ,  $Ri=0.5$  et  $Ha=5$ .

Cas :  $Re_{cr} = 625$ ,  $Ri = 2.0$ ,  $Ha=5$

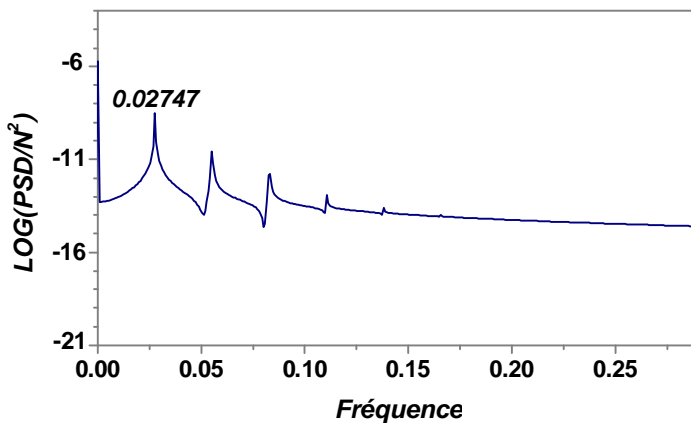


(a)

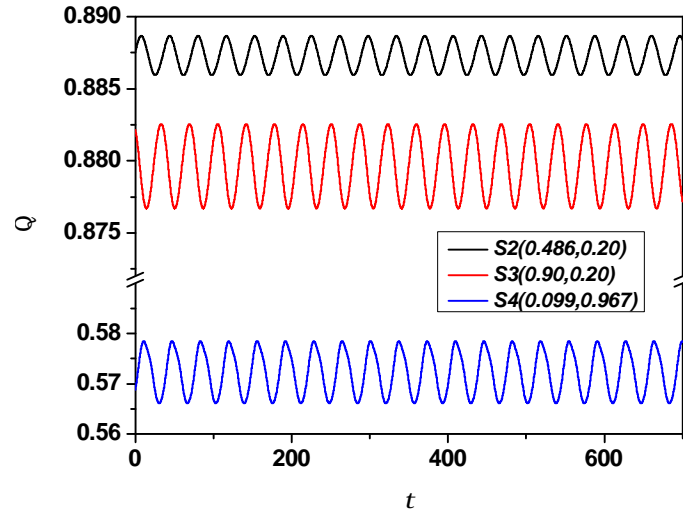


(b)

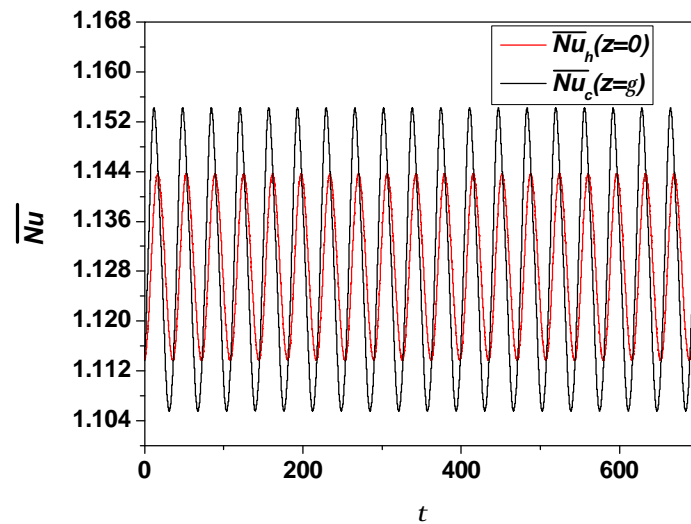
**Figure IV.52:** Evolutions temporelles de (a) la fonction de courant adimensionnelle  $\Psi$  enregistrées aux sondes :  $S_2(0.468,0.2)$ ,  $S_5(0.486,0.967)$  et  $S_9(0.9, 1.80)$  (b) la composante azimutale de vitesse  $w$  aux sondes :  $S_2(0.468,0.2)$ ,  $S_3(0.9,0.2)$  et  $S_4(0.099,0.967)$ , pour  $Re_{cr}=625$ ,  $Ri=2.0$  et  $Ha=5$ .



**Figure IV.53 :** Spectre d'énergie normalisé, obtenu par application de FFT au signal temporel de la vitesse radiale  $v$  à la sonde  $S_7(0.099,1.80)$ , pour  $Re_{cr}=625$ ,  $Ri=2.0$  et  $Ha=5$  sachant que  $\Delta t = 10^{-3}$  et  $N_{ech} = 2^{20}$  échantillons.



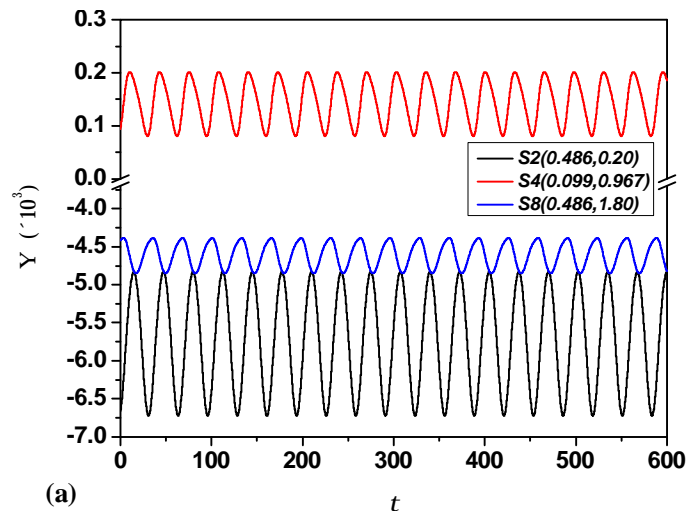
(a)



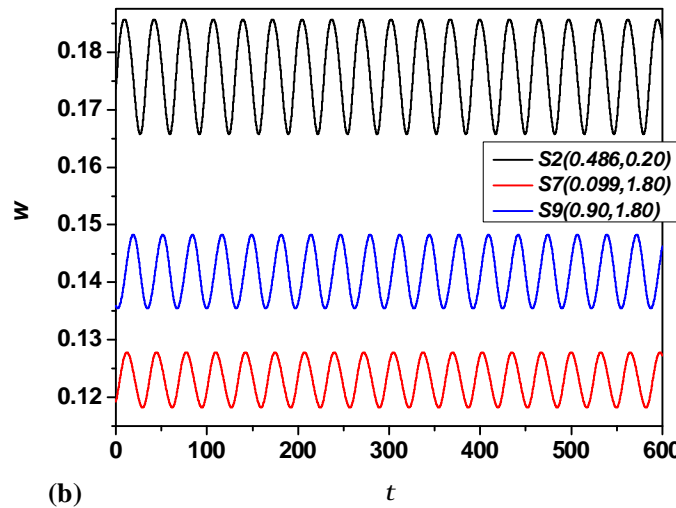
(b)

**Figure IV.54:** Evolutions temporelles de (a) la température adimensionnelle  $\Theta$  enregistrées aux sondes :  $S_2(0.468, 0.2)$ ,  $S_3(0.9, 0.2)$  et  $S_4(0.099, 0.967)$  (b) nombres de Nusselt moyens  $\overline{Nu}$  pour le cas  $Re_{cr}=625$ ,  $Ri=2.0$  et  $Ha=5$ .

Cas :  $Re_{cr} = 1801$ ,  $Ri = 0.5$ ,  $Ha = 30$

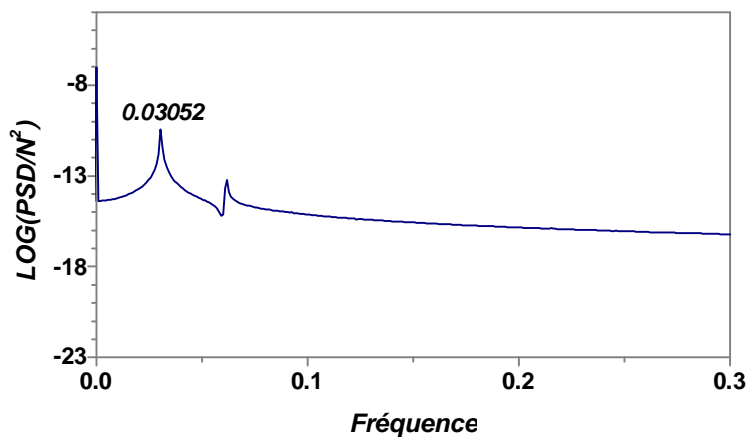


(a)



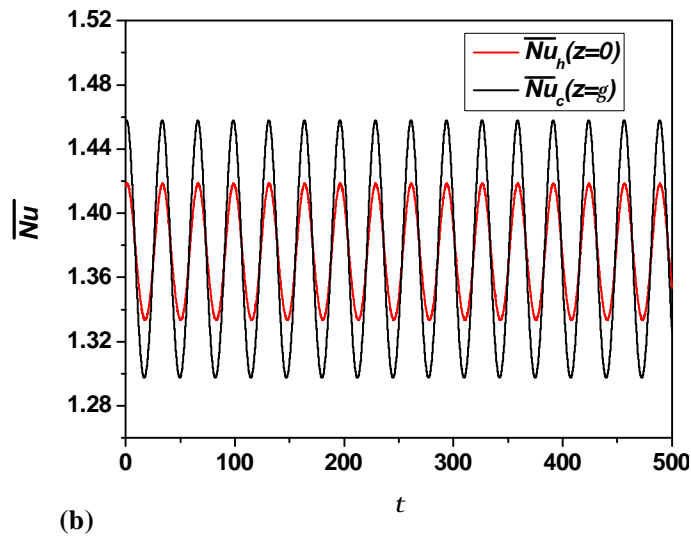
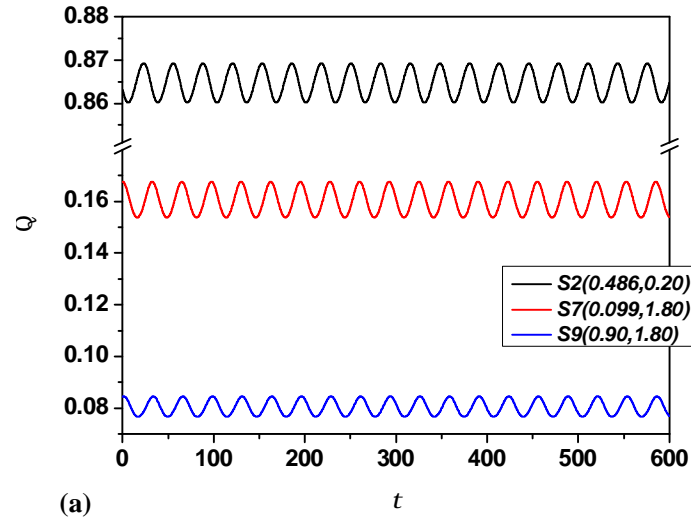
(b)

**Figure IV.55:** Evolutions temporelles de (a) la fonction de courant adimensionnelle  $\Psi$  enregistrées aux sondes :  $S_2(0.468,0.2)$ ,  $S_4(0.099,0.967)$  et  $S_8(0.468,1.80)$  (b) la vitesse azimutale  $w$  aux trois sondes :  $S_2(0.468,0.2)$ ,  $S_7(0.099,1.80)$  et  $S_9(0.9,1.80)$ , pour  $Re_{cr}=1801$ ,  $Ri=0.5$  et  $Ha=30$ .



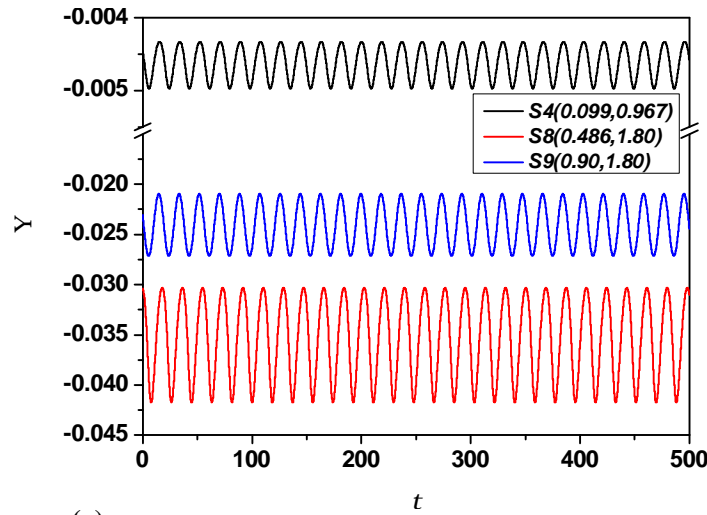
**Figure IV.56 :** Densité du spectre d'énergie, résultant de l'application de FFT à l'évolution temporelle de la température  $\Theta$  au point  $S_7(0.099,1.80)$ , pour  $Re_{cr}=1801$ ,  $Ri=0.5$  et  $Ha=30$ , ici  $\Delta t = 10^{-3}$  et  $N_{ech} = 2^{20}$  échantillons.



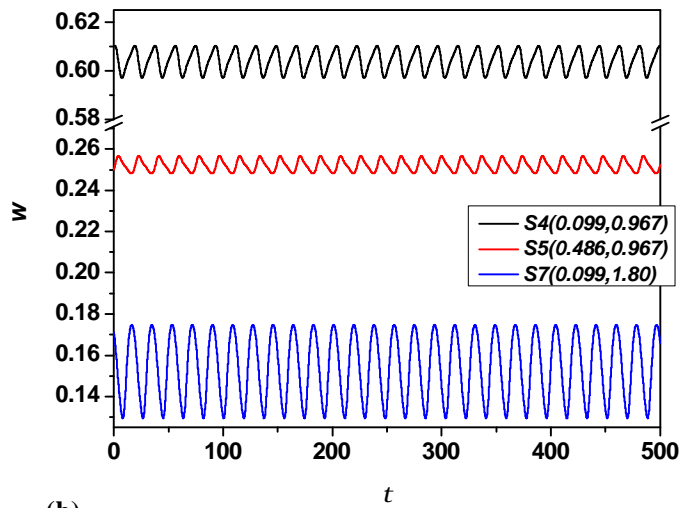


**Figure IV.57:** Evolutions temporelles de (a) la température adimensionnelle  $\Theta$  enregistrées aux sondes :  $S_2(0.468, 0.2)$ ,  $S_7(0.099, 1.80)$  et  $S_9(0.9, 1.80)$  (b) nombres de Nusselt moyens  $\overline{Nu}$  aux disques d'extrémités, pour  $Re_c=1801$ ,  $Ri=0.5$  et  $Ha=30$ .

Cas :  $Re_{cr} = 927$ ,  $Ri = 2.0$ ,  $Ha = 30$

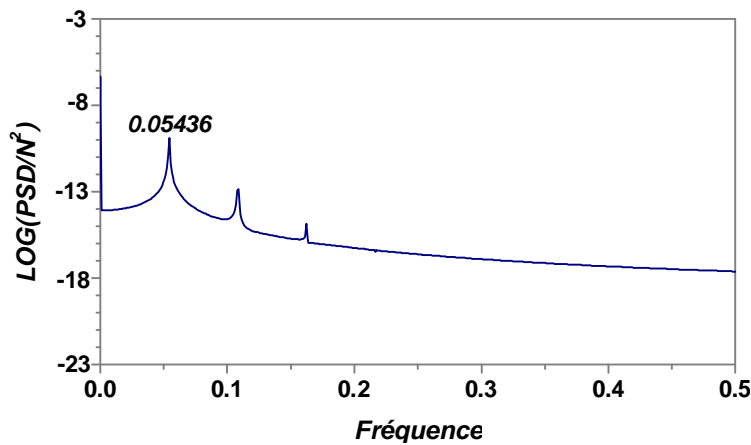


(a)

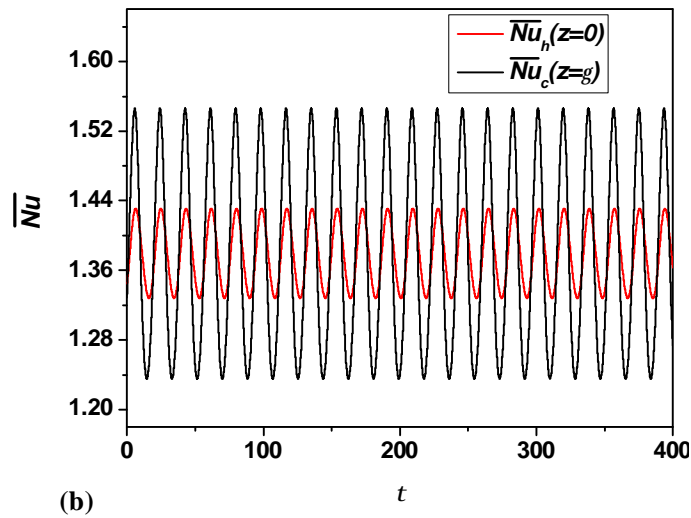
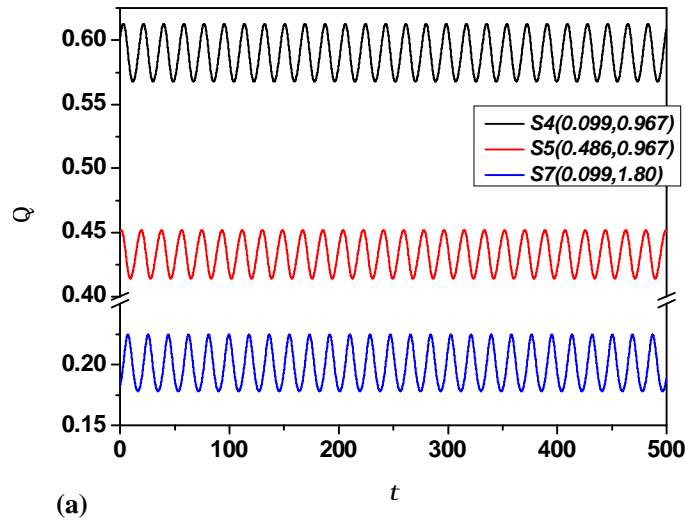


(b)

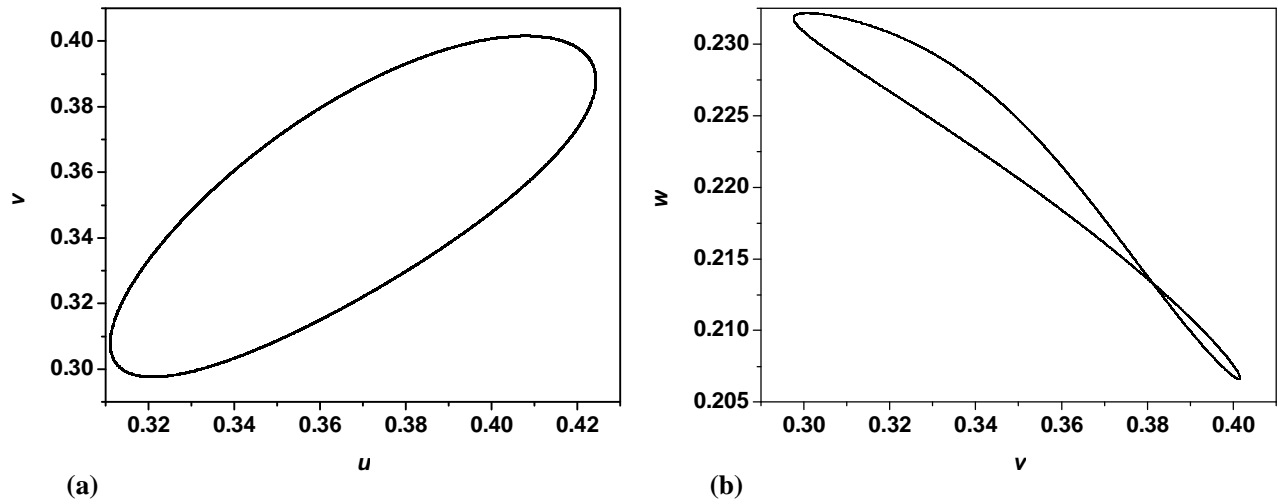
**Figure IV.58:** Evolutions temporelles de (a) la fonction de courant adimensionnelle  $\Psi$  enregistrées aux trois sondes :  $S_4(0.099,0.967)$ ,  $S_8(0.468,1.80)$  et  $S_9(0.9,1.80)$  (b) la vitesse azimutale  $w$  aux sondes :  $S_4(0.099,0.967)$ ,  $S_5(0.486,0.967)$  et  $S_7(0.099,1.80)$ , pour  $Re_{cr}=927$ ,  $Ri=2.0$  et  $Ha=30$ .



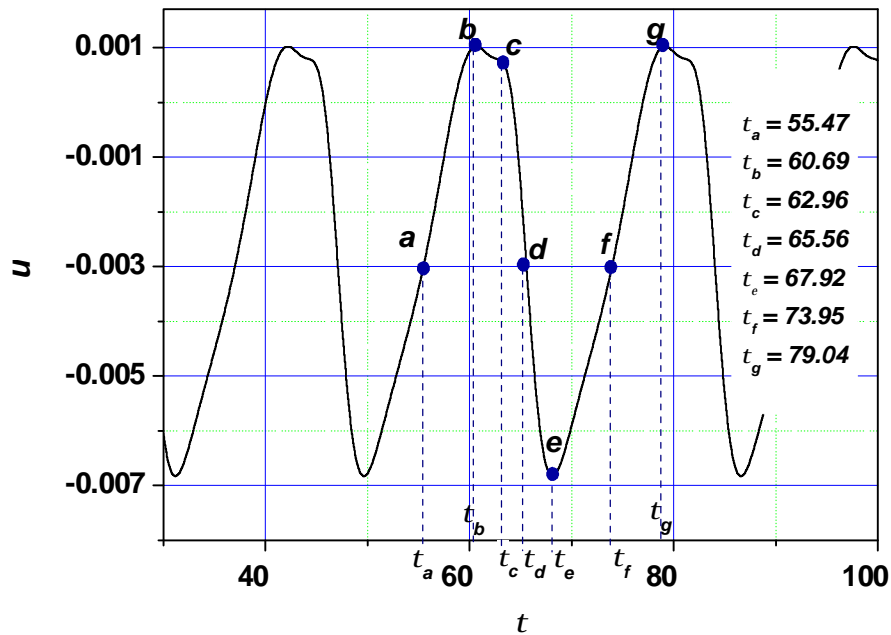
**Figure IV.59 :** spectre d'énergie de  $\overline{Nu_h}(z=0)$  (au disque inférieur chaud), pour  $Re_{cr}=927$ ,  $Ri=2.0$  et  $Ha=30$ , avec  $\Delta t = 10^{-3}$  et  $N_{ech} = 2^{20}$  échantillons.



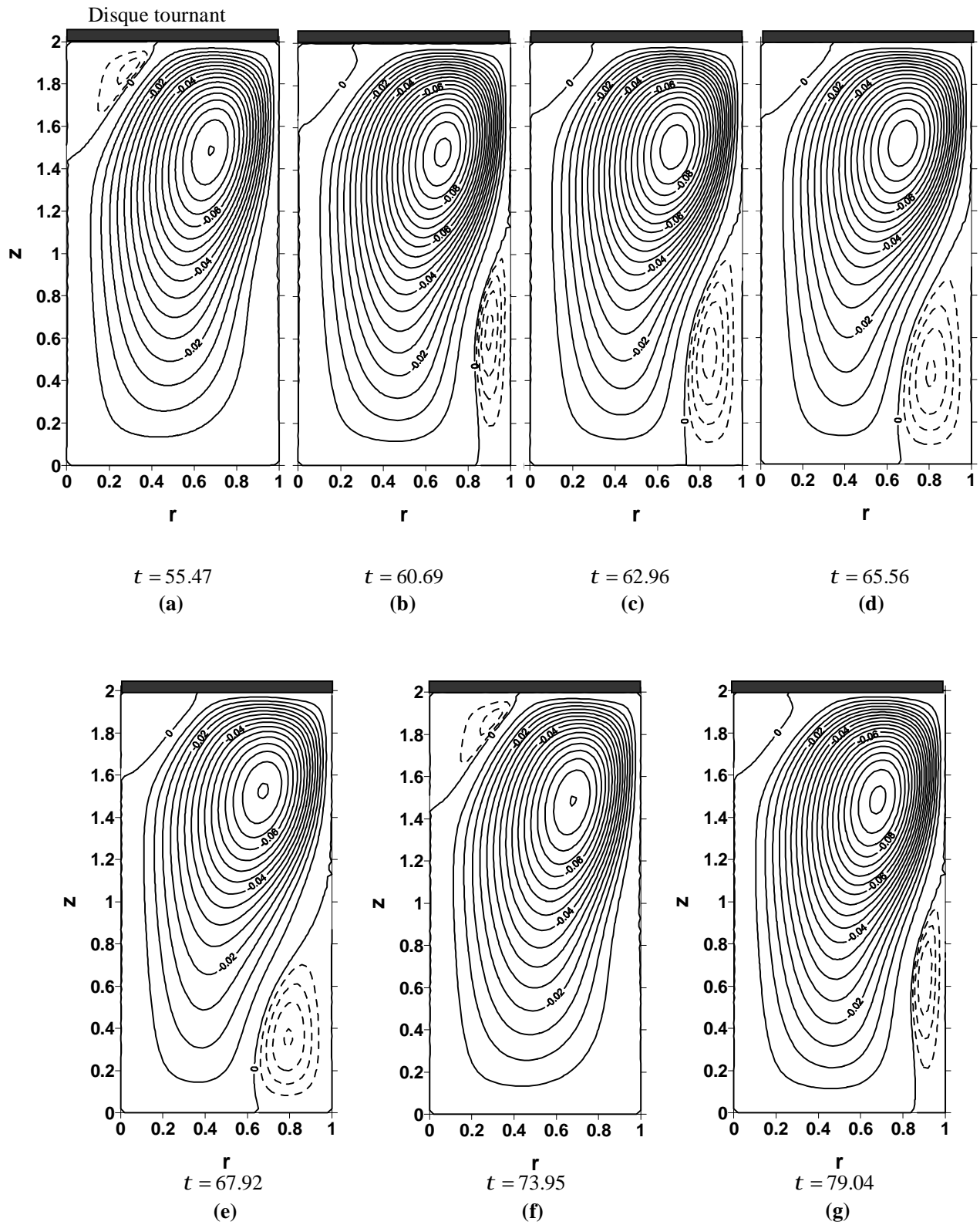
**Figure IV.60:** Evolutions temporelles de (a) la température adimensionnelle  $\Theta$  enregistrées aux sondes :  $S_4(0.099,0.967)$ ,  $S_5(0.486,0.967)$  et  $S_7(0.099,1.80)$  (b) nombres de Nusselt moyens  $\overline{Nu}$  aux disques d'extrémités, pour  $Re_c=927$ ,  $Ri=2.0$  et  $Ha=30$ .



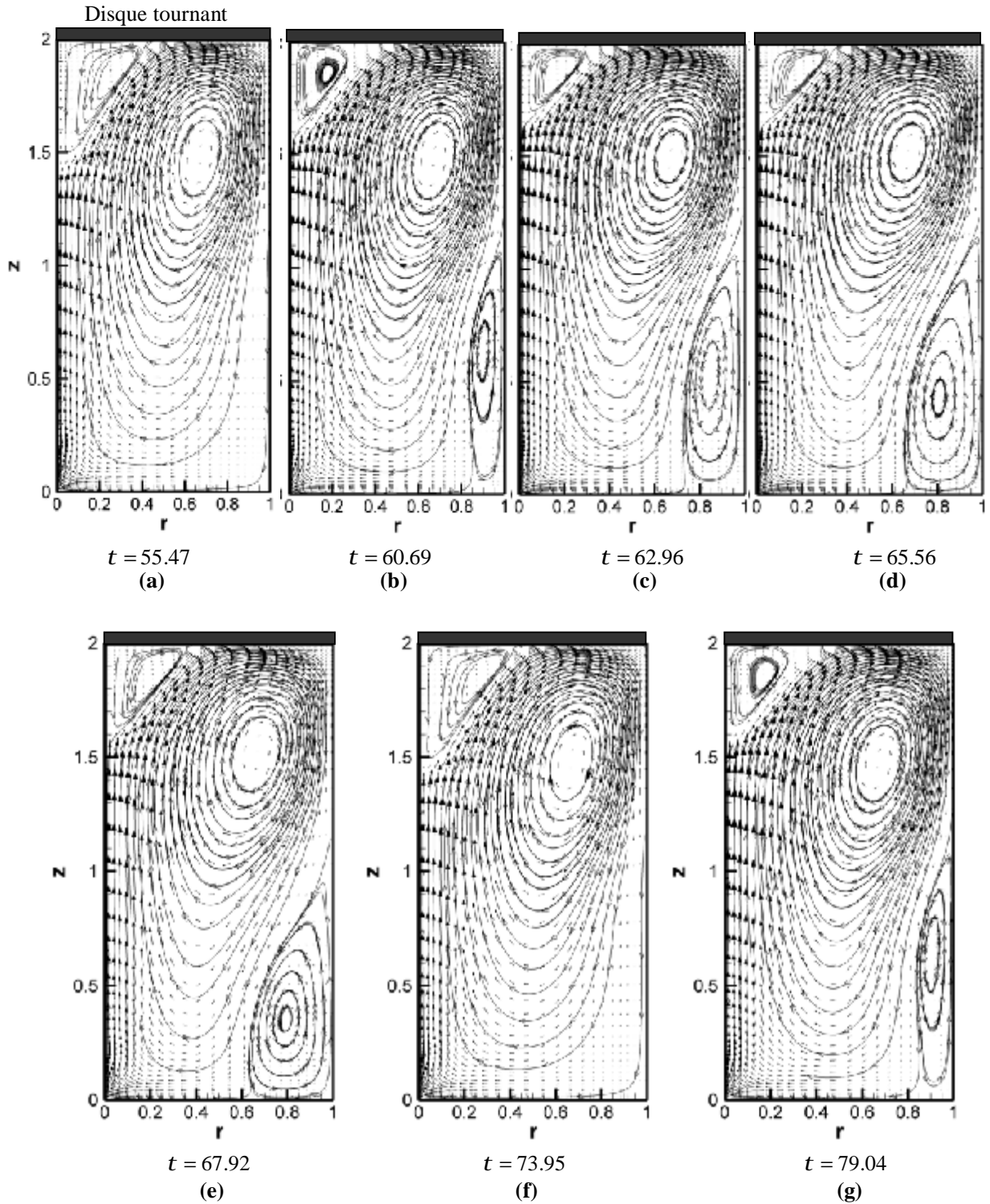
**Figure IV.61 :** Portraits de phase des composantes de vitesse oscillatoires au point  $S_8(0.468, 1.80)$  (a) dans le plan  $(u, v)$ , (b) dans le plan  $(v, w)$ , pour le cas  $Re_{cr}=927$ ,  $Ri=2.0$  et  $Ha=30$ .



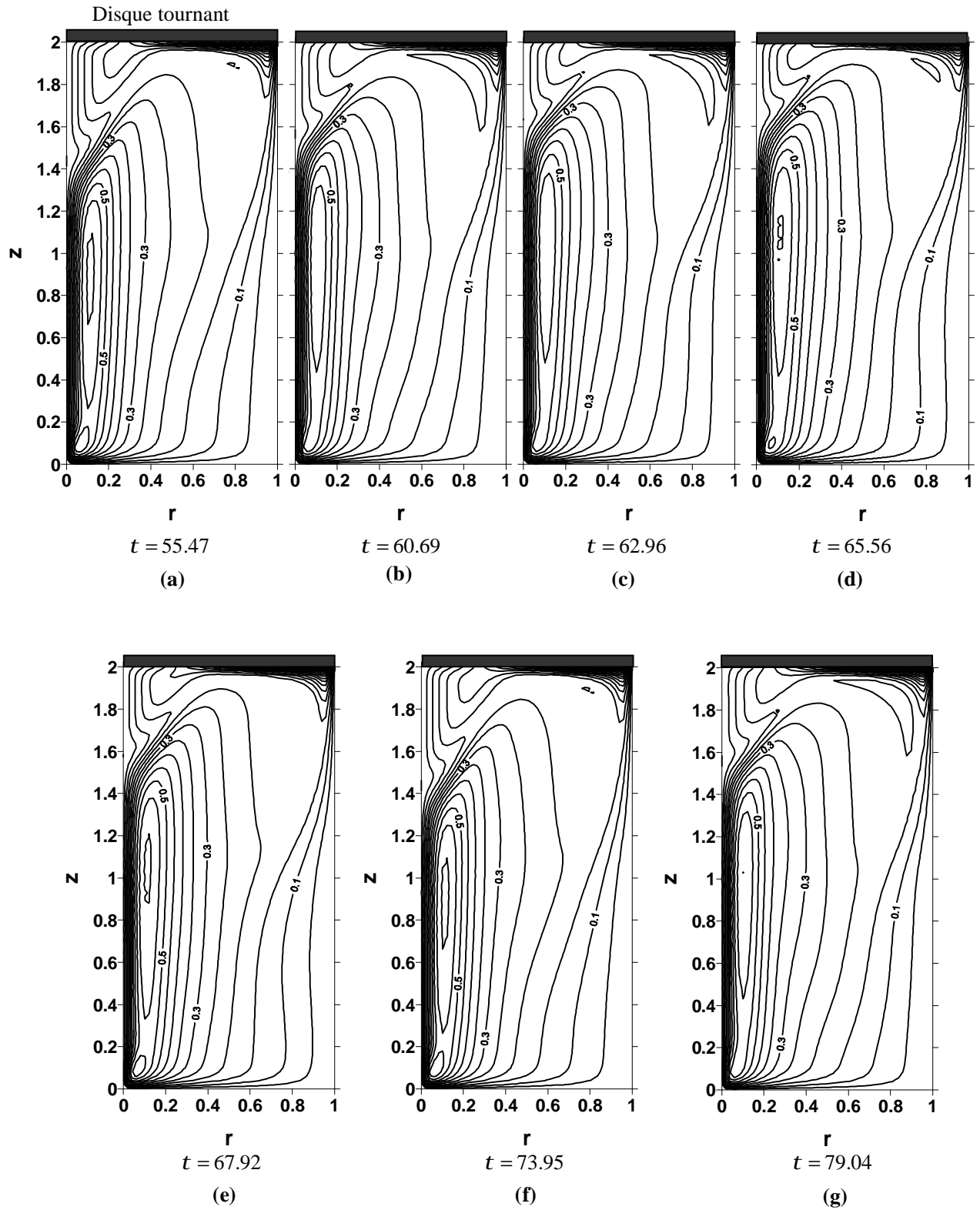
**Figure IV.62 :** Evolution temporelle de la vitesse radiale adimensionnelle  $u$  à la sonde  $S_7(0.099, 1.80)$  avec des temps adimensionnels (a, b, c, d, e, f, g) utilisés afin d'explorer le champ d'écoulement à  $Re=927$ ,  $Ri=2.0$  et  $Ha=30$ .



**Figure IV.63 :** Evolution temporelle des motifs de la fonction de courant adimensionnelle aux temps indiqués par (a, b, c, d, e, f, g) pour  $Re_{cr}=927$ ,  $Ri=2.0$  et  $Ha=30$ . Les valeurs des  $y_{max}$  en pointillés sont pour : (a)  $9.813 \times 10^{-4}$ , (b)  $1.416 \times 10^{-3}$ , (c)  $3.976 \times 10^{-3}$ , (d)  $5.658 \times 10^{-3}$ , (e)  $4.5998 \times 10^{-3}$ , (f)  $9.813 \times 10^{-4}$ , (g)  $1.423 \times 10^{-3}$ .

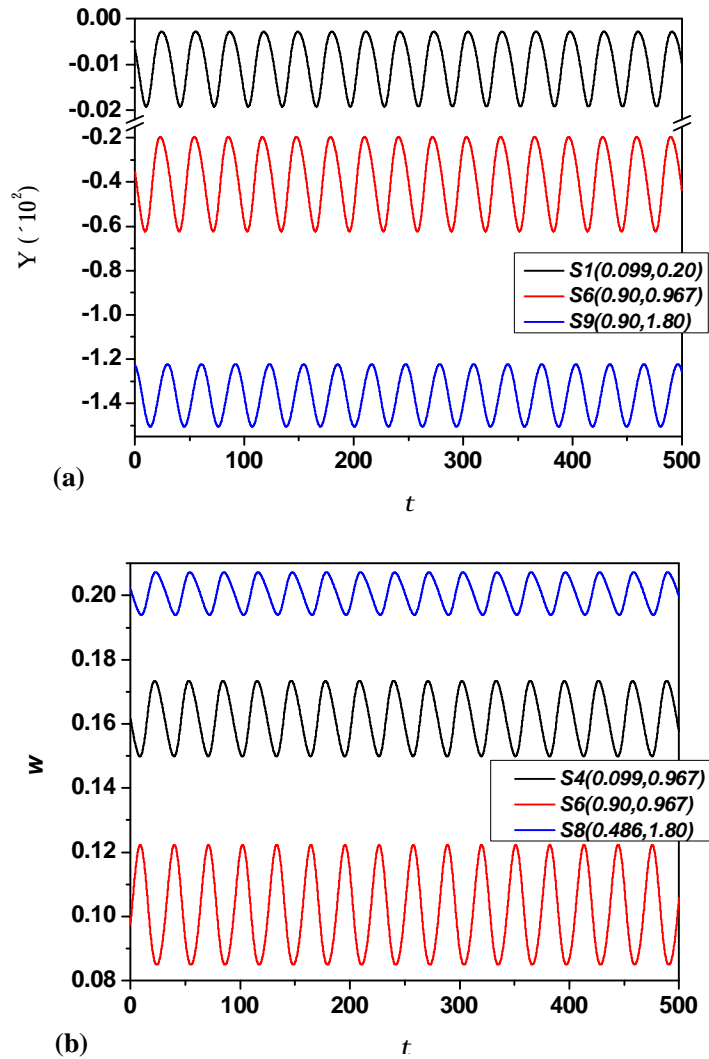


**Figure IV.64** : Evolution temporelle des motifs de la fonction de courant adimensionnelle  $y$  avec les champs méridiens des vitesses  $(u-v)$ , aux temps indiqués par (a, b, c, d, e, f, g) pour  $Re_{cr}=927$ ,  $Ri=2.0$  et  $Ha=30$ .

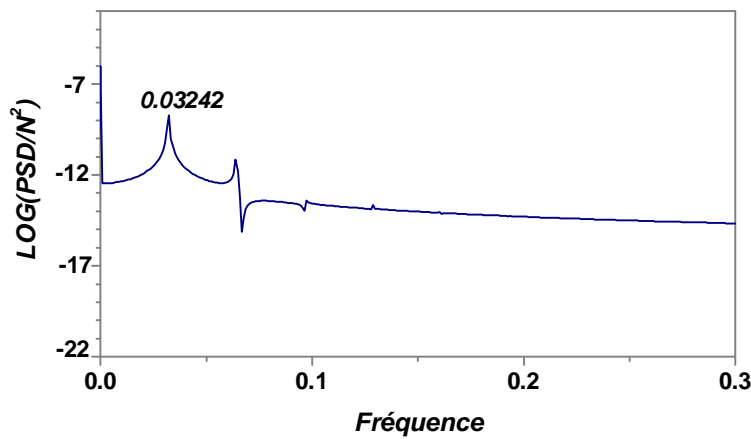


**Figure IV.65 :** Evolution temporelle des contours méridiens de la vitesse azimutale adimensionnelle aux différents temps nommés par (a, b, c, d, e, f, g) pour  $Re_c=927$ ,  $Ri=2.0$  et  $Ha=30$ .

Cas :  $Re_{cr} = 3504$ ,  $Ri = 0.5$ ,  $Ha = 60$

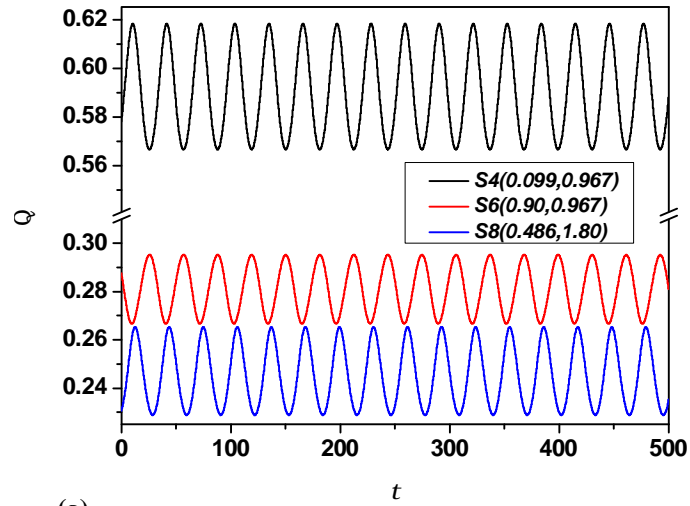


**Figure IV.66:** Evolutions temporelles de (a) la fonction de courant adimensionnelle  $\Psi$  enregistrées aux trois sondes :  $S_1(0.099,0.2)$ ,  $S_6(0.9,0.967)$  et  $S_9(0.9,1.80)$  (b) la vitesse azimutale  $w$  aux sondes :  $S_4(0.099,0.967)$ ,  $S_6(0.9,0.967)$  et  $S_8(0.468,1.80)$ , pour  $Re_{cr}=3504$ ,  $Ri=0.5$  et  $Ha=60$ .

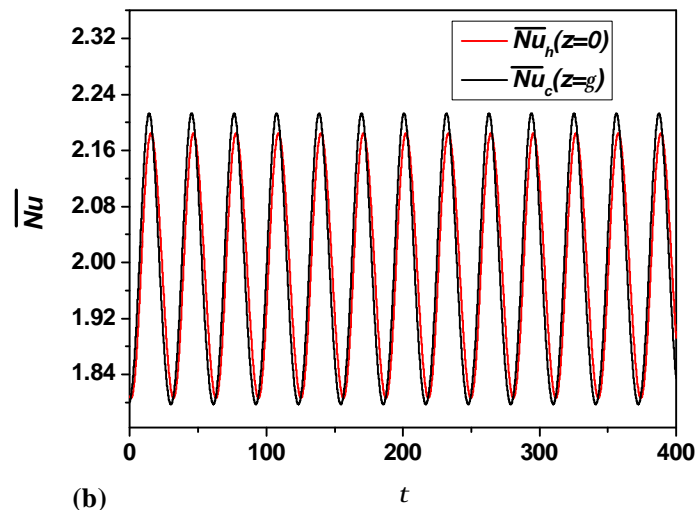


**Figure IV.67 :** spectre d'énergie de  $\overline{Nu_c}(z = g)$  (disque tournant froid), pour  $Re_{cr}=3504$ ,  $Ri=0.5$  et  $Ha=60$ , avec  $\Delta t = 10^{-3}$  et  $N_{ech} = 2^{20}$  échantillons.



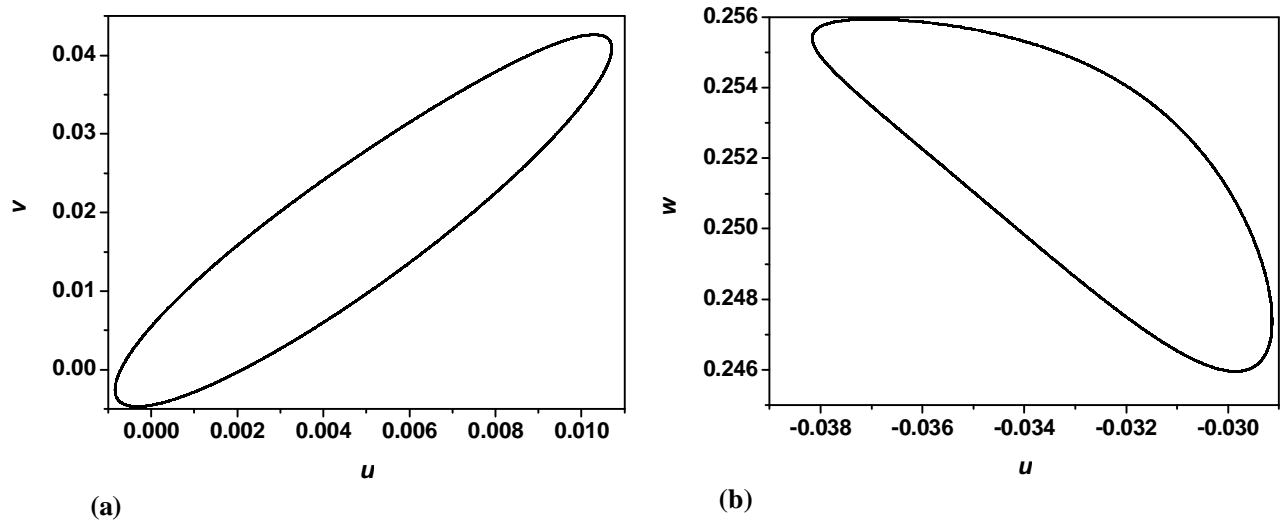


(a)

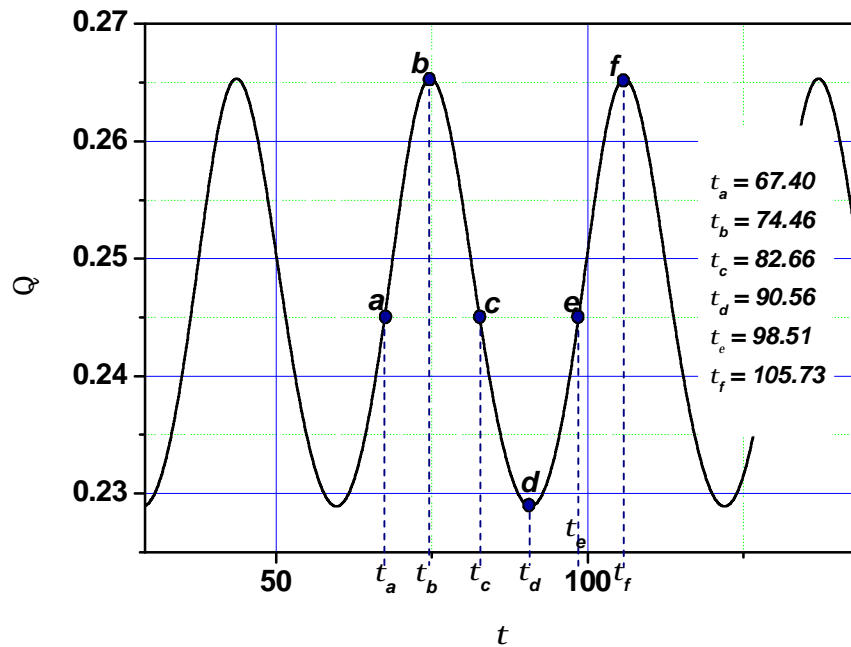


(b)

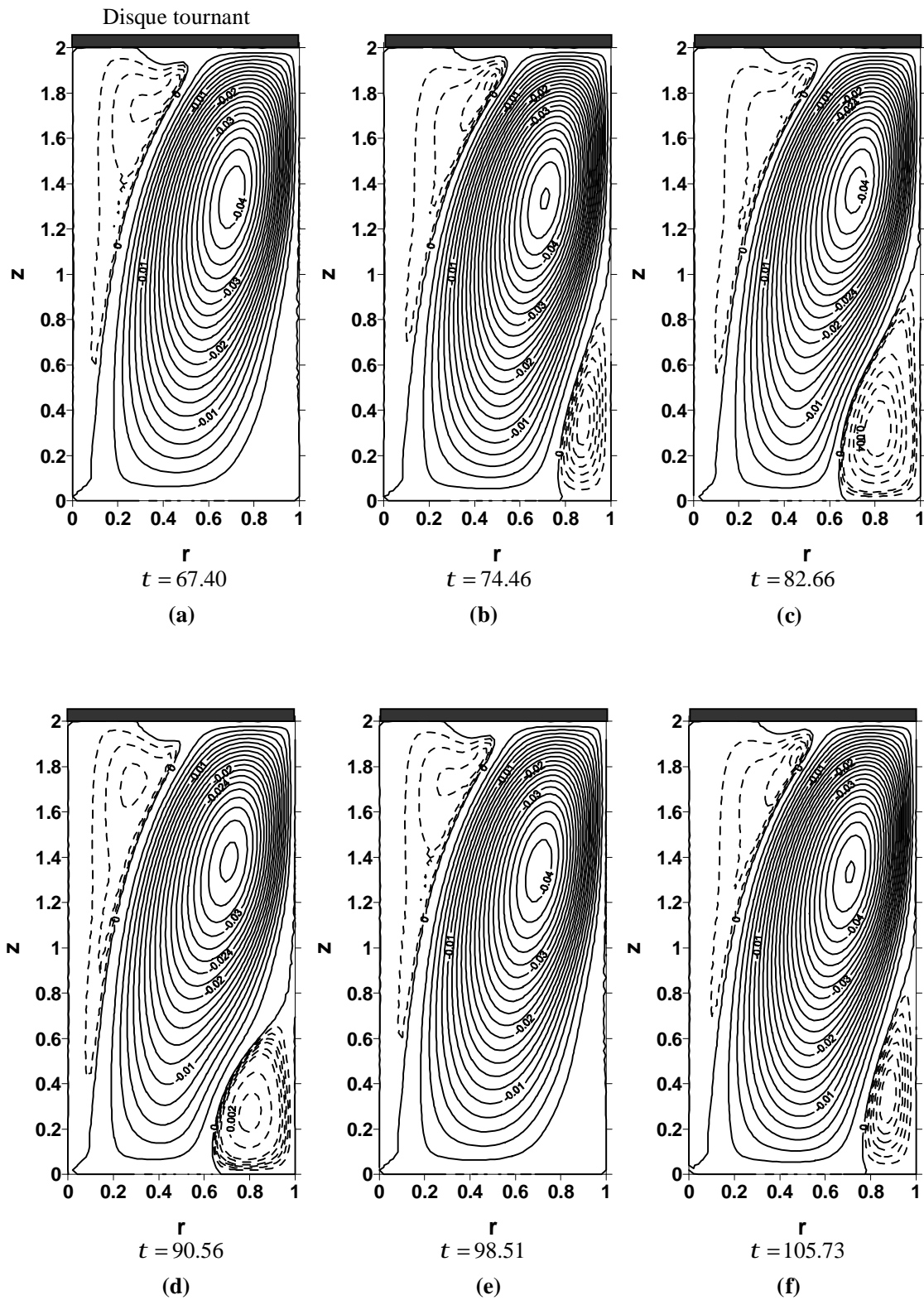
**Figure IV.68 :** Evolutions temporelles de (a) la température adimensionnelle  $\Theta$  enregistrées aux sondes :  $S_4(0.099, 0.967)$ ,  $S_6(0.9, 0.967)$  et  $S_8(0.468, 1.80)$  (b) nombres de Nusselt moyens  $\overline{Nu}$  aux disques d'extrémités, pour  $Re_{cr}=3504$ ,  $Ri=0.5$  et  $Ha=60$ .



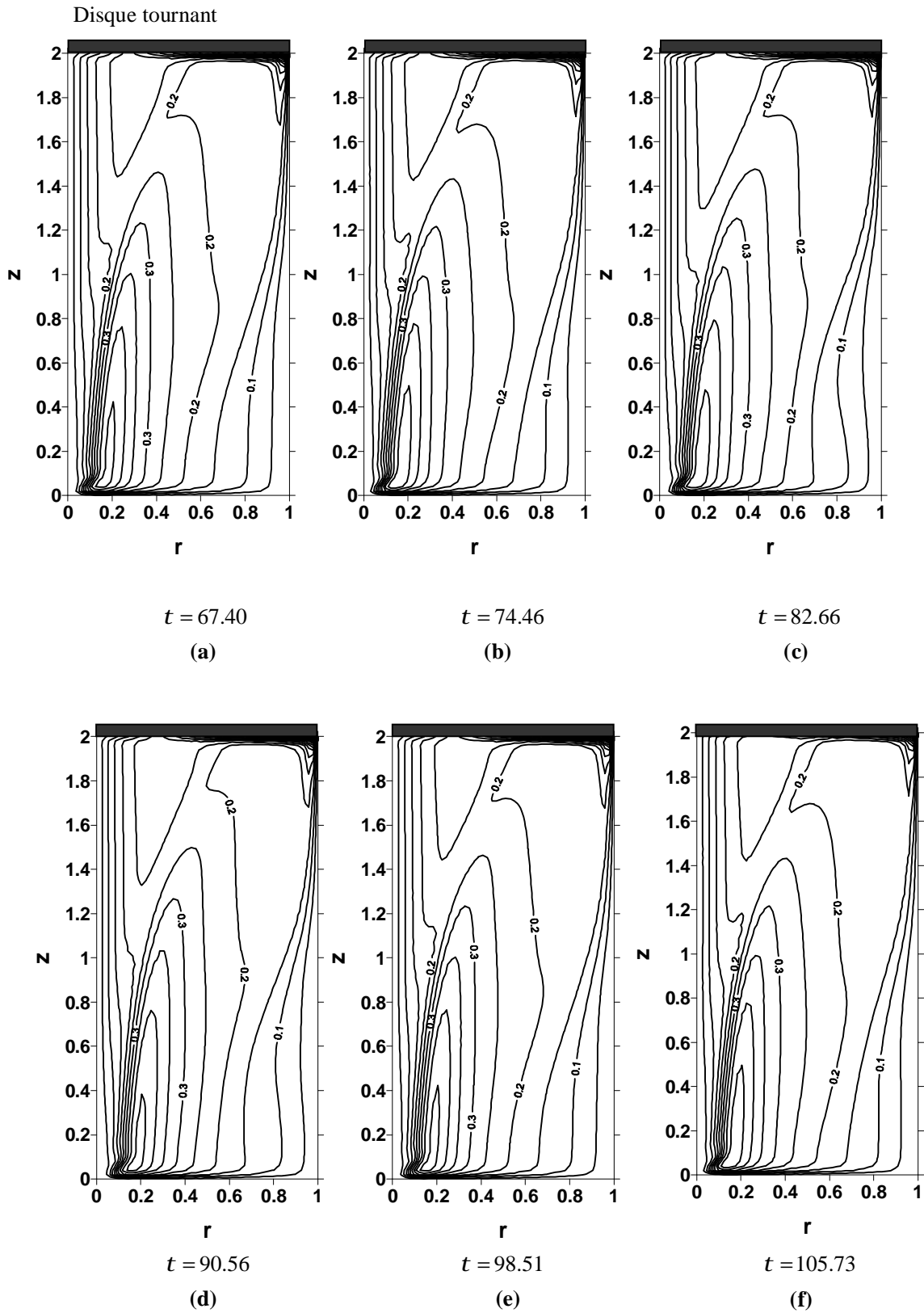
**Figure IV.69 :** Tracé des composantes de vitesse oscillatoires aux sondes (a)  $S_3(0.9,0.2)$  dans le plan de phase  $(u, v)$  (b)  $S_3(0.486,0.967)$  dans le plan de phase  $(u, w)$ , pour le cas  $Re_{cr}=3504$ ,  $Ri=0.5$  et  $Ha=60$ .



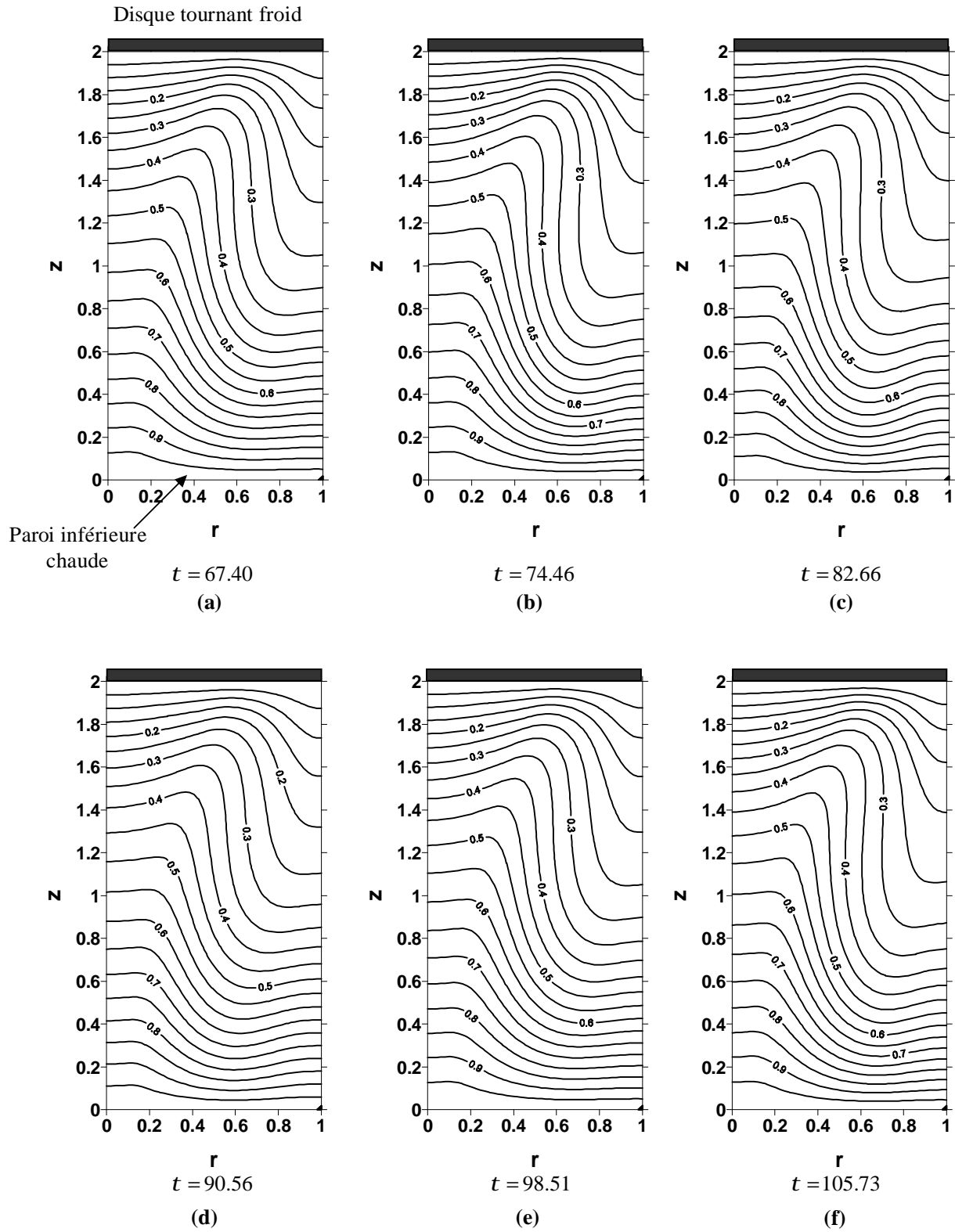
**Figure IV.70 :** Evolution temporelle de la température adimensionnelle  $\Theta$  au point  $S_8(0.468,1.80)$ , en indication ; les temps adimensionnels (a, b, c, d, e, f) utilisés dans la visualisation des structures de l'écoulement à  $Re_r=3504$ ,  $Ri=0.5$  et  $Ha=60$ .



**Figure IV.71 :** Evolution temporelle des motifs de la fonction de courant adimensionnelle  $\psi$  aux temps indiqués par (a, b, c, d, e, f) pour  $Re_{cr}=3504$ ,  $Ri=0.5$  et  $Ha=60$ . Les valeurs des  $y_{max}$  en pointillés sont pour : (a)  $4.672 \times 10^{-4}$ , (b)  $1.771 \times 10^{-3}$ , (c)  $5.968 \times 10^{-3}$ , (d)  $3.417 \times 10^{-3}$ , (e)  $4.672 \times 10^{-4}$ , (f)  $1.771 \times 10^{-3}$ .

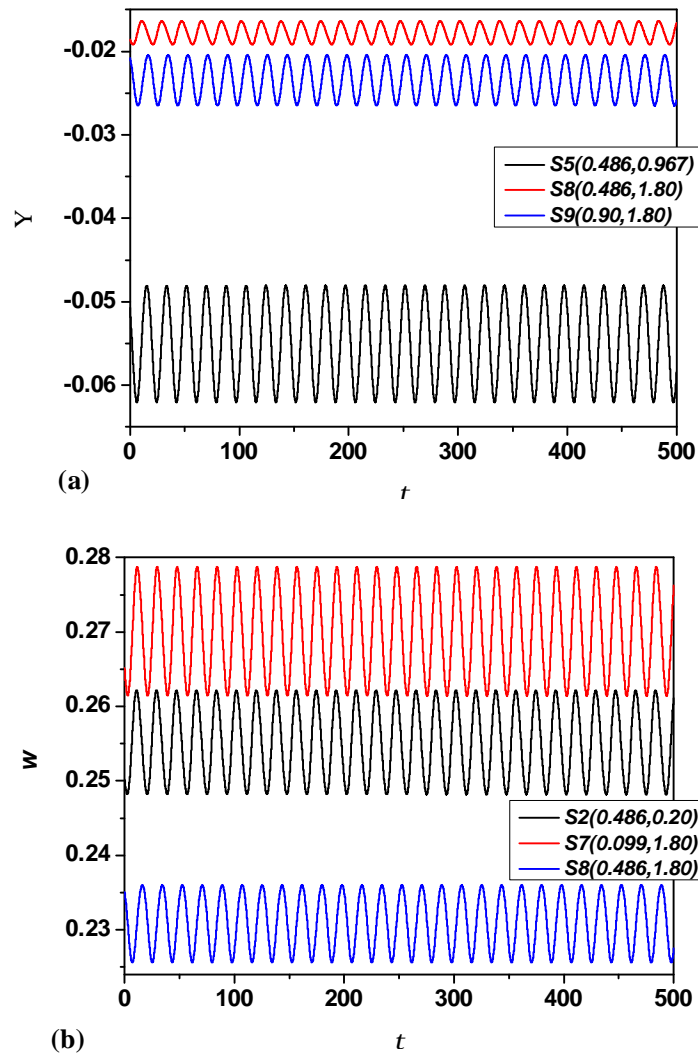


**Figure IV.72 :** Evolution temporelle des contours méridiens de la vitesse azimutale adimensionnelle  $w$  aux différents temps nommés par (a, b, c, d, e, f) pour  $Re_{cr}=3504$ ,  $Ri=0.5$  et  $Ha=60$ .

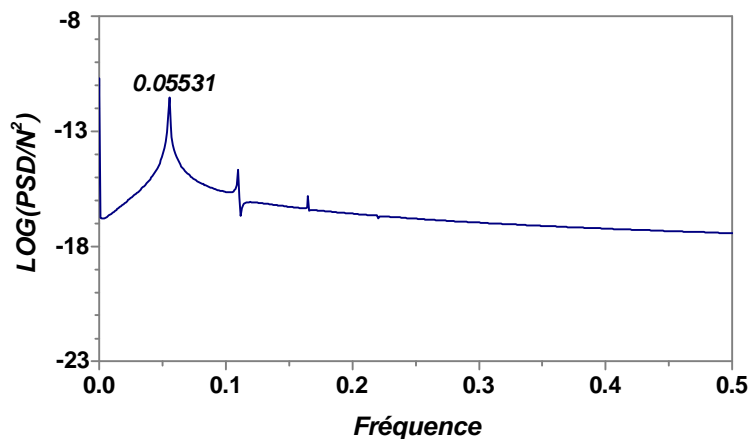


**Figure IV.73 :** Variation temporelle des isothermes dans l'écoulement à  $Re_{\epsilon_r}=3504$ ,  $Ri=0.5$  et  $Ha=60$ , représentée aux différents temps adimensionnels(a, b, c, d, e, f).

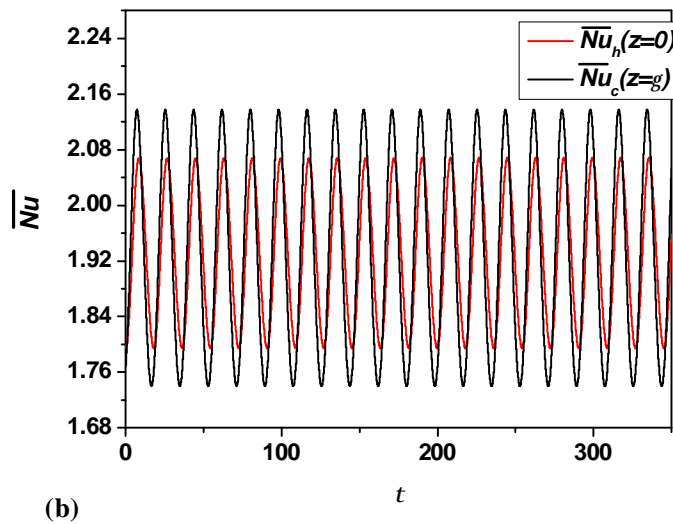
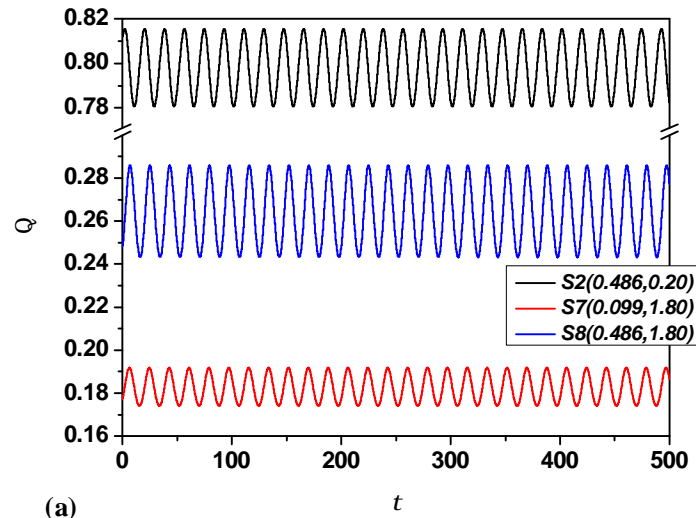
Cas :  $Re_{cr} = 1693$ ,  $Ri = 2.0$ ,  $Ha = 60$



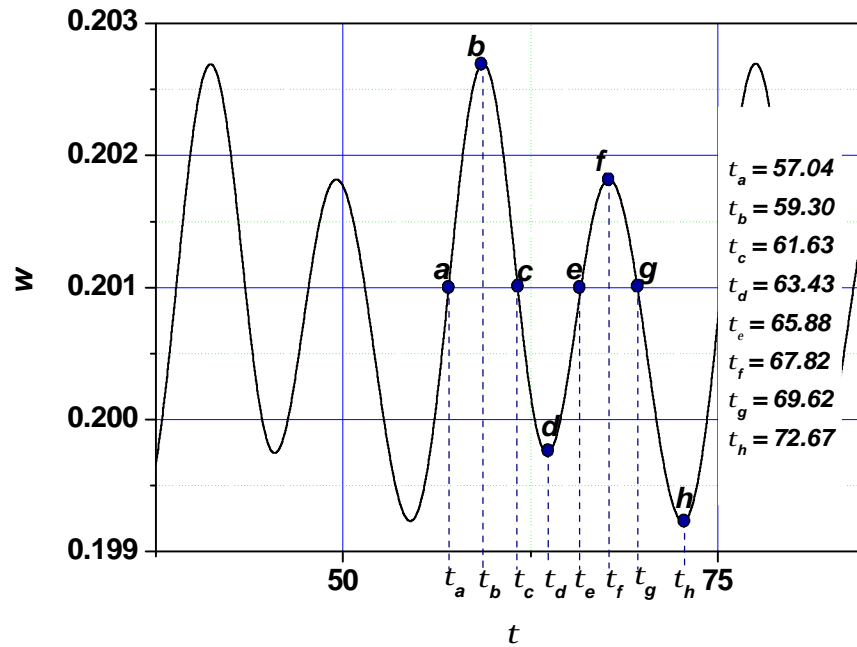
**Figure IV.74:** Evolutions temporelles de (a) la fonction de courant adimensionnelle  $\Psi$  enregistrées aux sondes :  $S_5(0.486, 0.967)$ ,  $S_8(0.468, 1.80)$  et  $S_9(0.9, 1.80)$  (b) la composante azimutale de vitesse  $w$  aux sondes :  $S_2(0.468, 0.2)$ ,  $S_7(0.099, 1.80)$  et  $S_8(0.468, 1.80)$ , pour  $Re_{cr}=1693$ ,  $Ri=2.0$  et  $Ha=60$ .



**Figure IV.75 :** Densité du spectre d'énergie, résultant de l'application de FFT à l'historique de la la fonction de courant adimensionnelle  $\Psi$  au point  $S_3(0.9, 0.2)$ , pour  $Re_{cr}=1693$ ,  $Ri=2.0$  et  $Ha=60$ , avec  $\Delta t = 10^{-3}$  et  $N_{ech} = 2^{20}$  échantillons.

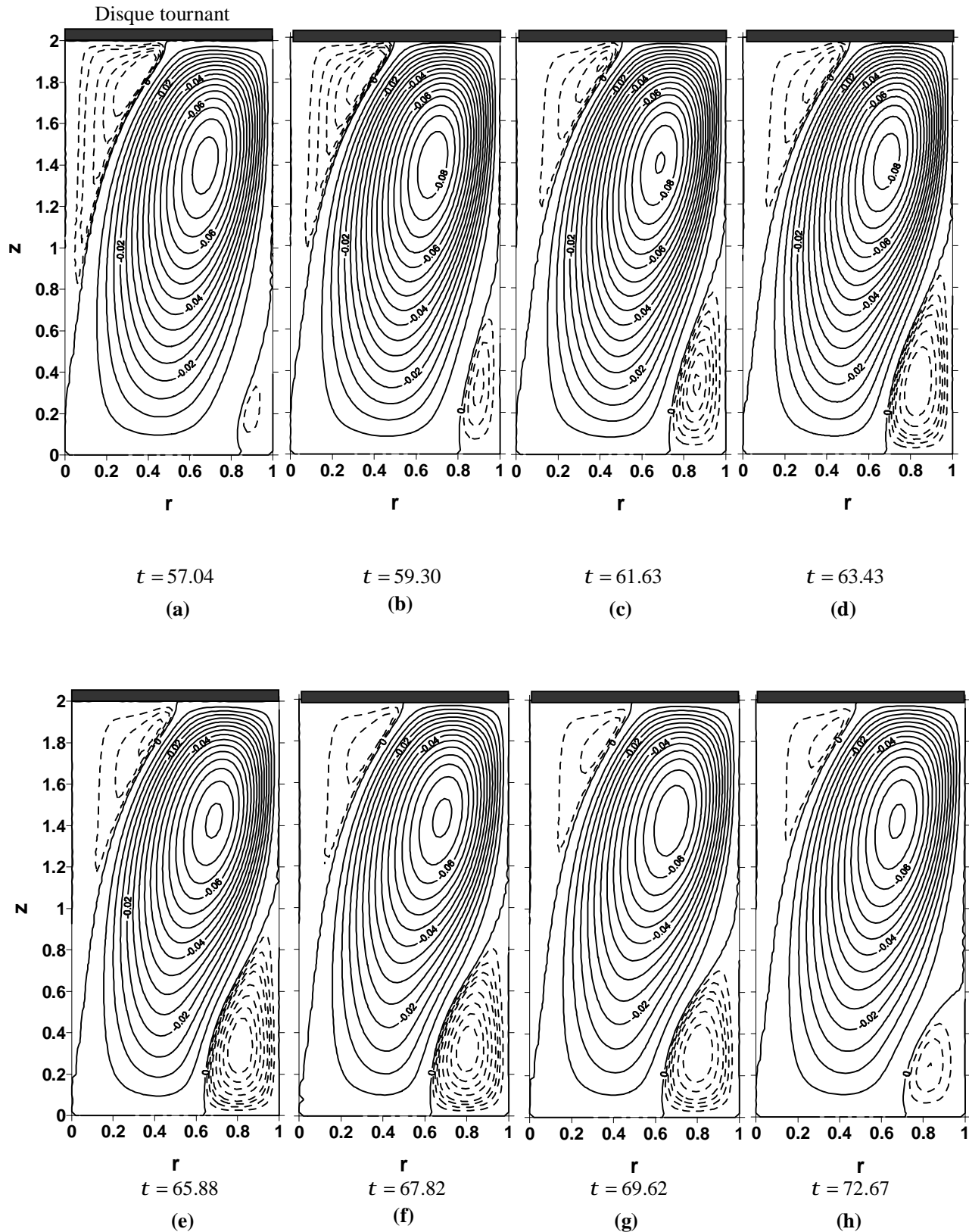


**Figure IV.76 :** Evolutions temporelles de (a) la température adimensionnelle  $\Theta$  enregistrées aux trois sondes :  $S_2(0.468, 0.2)$ ,  $S_7(0.099, 1.80)$  et  $S_8(0.468, 1.80)$  (b) nombres de Nusselt moyens  $\overline{Nu}$  aux disques d'extrémités, pour  $Re_c=1693$ ,  $Ri=2.0$  et  $Ha=60$ .

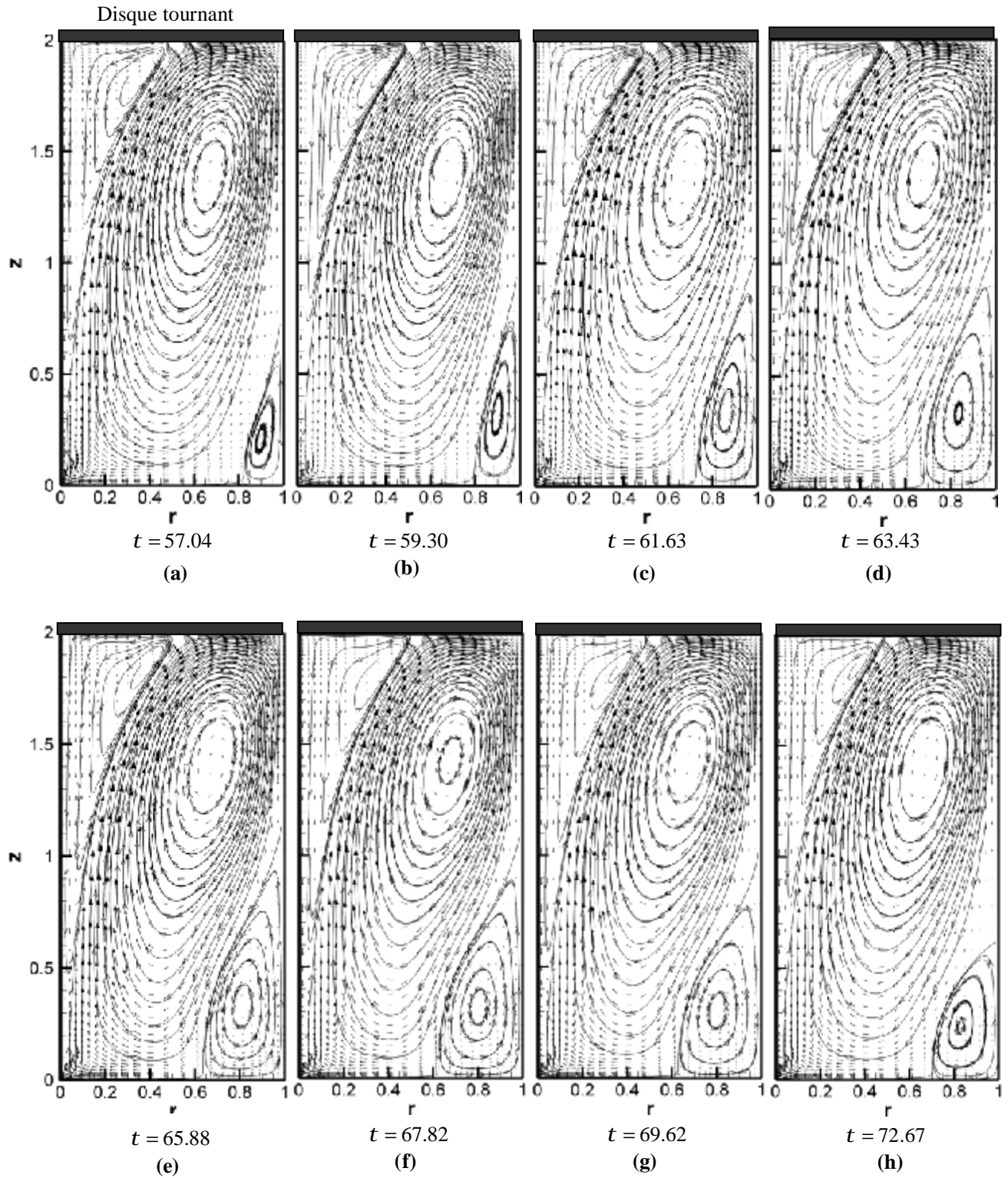


**Figure IV.77** : Evolution temporelle de la vitesse azimutale adimensionnelle  $w$  enregistrée à la sonde  $S_4(0.099,0.967)$ , avec les temps adimensionnels (**a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f**, **g**, **h**) utilisés dans la visualisation des structures de l'écoulement à  $Re_\tau=1693$ ,  $Ri=2.0$  et  $Ha=60$ .

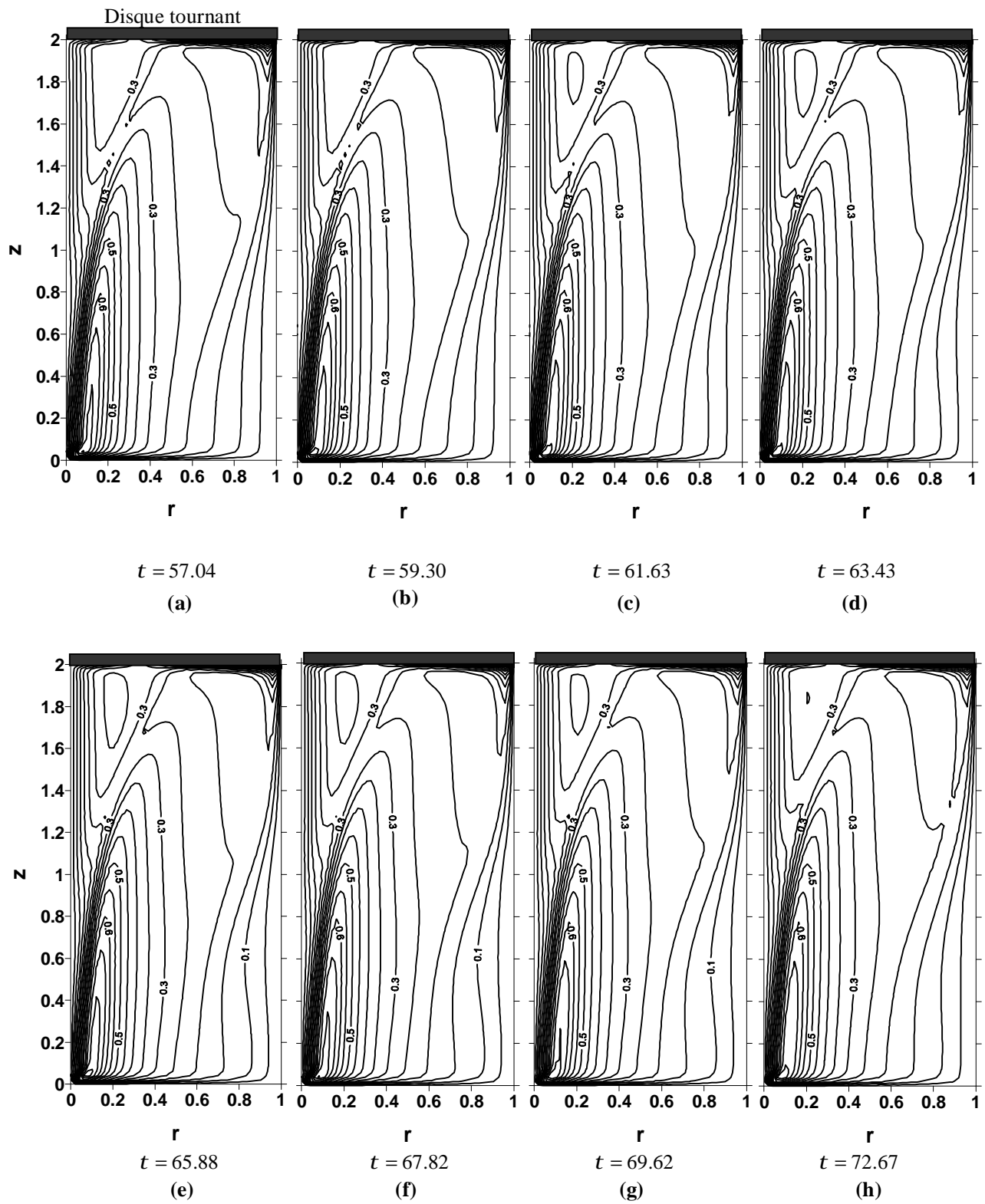




**Figure IV.78 :** Evolution temporelle des lignes de courant adimensionnelles ( $\psi = Cste$ ) aux temps indiqués par (a, b, c, d, e, f, g, h) pour  $Re_{cr}=1693$ ,  $Ri=2.0$  et  $Ha=60$ . Les valeurs des  $\psi_{max}$  en pointillés sont pour : (a)  $1.879 \times 10^{-3}$ , (b)  $2.316 \times 10^{-3}$ , (c)  $3.859 \times 10^{-3}$ , (d)  $6.723 \times 10^{-3}$ , (e)  $9.099 \times 10^{-3}$ , (f)  $8.618 \times 10^{-3}$ , (g)  $6.555 \times 10^{-3}$ , (h)  $1.882 \times 10^{-3}$ .



**Figure IV.79** : Evolution temporelle des motifs de la fonction de courant adimensionnelle  $y$  avec les champs méridiens des vitesses  $(u-v)$ , aux temps indiqués par **(a, b, c, d, e, f, g, h)** pour  $Re_{cr}=1693$ ,  $Ri=2.0$  et  $Ha=60$ .



**Figure IV.80** : Evolution temporelle des contours méridiens de la vitesse azimutale  $w$  aux différents temps nommés par (a, b, c, d, e, f, g, h) pour  $Re_{cr}=1693$ ,  $Ri=2.0$  et  $Ha=60$ .

### IV.7 Récapitulations :

Dans le tableau suivant (Tab.IV.4), sont récapitulées les résultats quantitatifs de la présente investigation numérique, qui sont les différentes valeurs des Reynolds critiques,  $Re_{cr}$ , et leurs correspondantes en fréquences critiques,  $F_{cr}$ , pour les écoulements MHD tournants de convection mixte, en régime transitoire.

Ces valeurs sont bien visualisées graphiquement dans les plans ( $Re_{cr} - Ha$ ) et ( $F_{cr} - Ha$ ), sous forme de courbes paramétriques aux différentes valeurs du nombre de Richardson  $Ri$  (Figs. IV.81-IV.82)

$Ha$	$Ri$				
	$0.0$	$0.5$	$1.0$	$2.0$	
$0$	$Re_{cr}$	2575	924	802	606
	$F_{cr}$	0.03662	0.02289	0.02289	0.02518
$5$	$Re_{cr}$	3079	961	823	625
	$F_{cr}$	0.03738	0.02365	0.02441	0.02747
$10$	$Re_{cr}$	4150	1037	887	690
	$F_{cr}$	0.0267	0.02594	0.02785	0.03052
$20$	$Re_{cr}$	5220	1348	1037	1097
	$F_{cr}$	0.09842	0.02823	0.03662	0.05341
$30$	$Re_{cr}$	6301	1801	1284	927
	$F_{cr}$	0.10681	0.03052	0.04005	0.05436
$40$	$Re_{cr}$	7603	2307	1622	1146
	$F_{cr}$	0.10986	0.03242	0.04196	0.05627
$50$	$Re_{cr}$	8922	2871	2003	1413
	$F_{cr}$	0.11158	0.03242	0.04292	0.05627
$60$	$Re_{cr}$	10525	3504	2419	1693
	$F_{cr}$	0.11253	0.03242	0.04196	0.05531

**Table IV.4 :** Valeurs critiques des paramètres des écoulements oscillatoires

Dans la première partie de ce mémoire, nous avons constaté que la périodicité régnant dans l'écoulement instable est liée à l'élargissement et le rétrécissement des cellules principale et secondaire, aussi les résultats obtenus en présence du champ magnétique ( $Ha \neq 0$ ) confirment la conclusion précédente, annonçant que l'augmentation du rapport de Richardson,  $Ri$ , rendra l'écoulement instable. Alors, l'application du champ magnétique a pour effet de stabiliser l'écoulement (Tab. IV.4), et les courbes illustrées dans la figure IV.81 donnent les limites de stabilité c.-à-d. que pour des valeurs du nombre de Reynolds  $Re$  et de Hartmann  $Ha$ , situées sous chaque courbe l'écoulement reste laminaire stable, et la figure IV.82 montre la dépendance des les fréquences critiques  $F_{cr}$  correspondant à chaque nombre de Reynolds critique en fonction du nombre de Hartmann  $Ha$ .

En ce qui concerne la dépendance entre le nombre de Reynolds critiques et l'intensité du champ magnétique, la croissance de  $Re_{cr}$  avec l'augmentation de  $Ha$ , est clairement vue dans la courbe de stabilité ( $Re_{cr} - Ha$ ) (Fig IV.81).

Cette croissance est monotone à l'exception du cas de  $Ri = 2.0$  et  $Ha = 30$ , où il y'a une légère diminution du nombre de  $Re_{cr}$ , (ce cas a été aussi obtenu par Gelfgat [50]). Cette croissance est expliquée par l'interaction du champ magnétique vertical sur l'écoulement de convection mixte, celle-ci est produite avec la composante radiale de la vitesse. En conséquence, un champ magnétique plus fort est nécessaire pour garder l'écoulement stable pour certaines valeurs élevées du nombre de Reynolds.

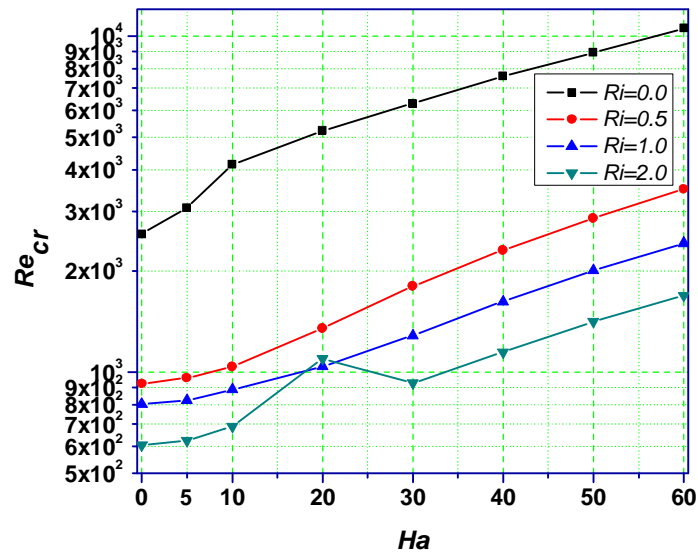


Figure IV.81 : Diagramme paramétrique de stabilité ( $Re_{cr}$ - $Ha$ ).

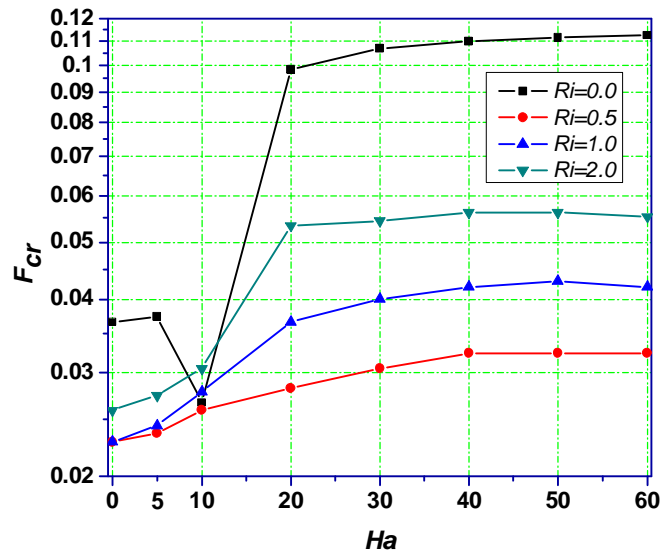


Figure IV.82 : Diagramme paramétrique de stabilité ( $F_{cr}$ - $Ha$ ).

## CONCLUSION

Une étude numérique de la convection mixte dans une enceinte cylindrique remplie d'un fluide à faible nombre de Prandtl ( $Pr=0.015$ ), soumise à un champ magnétique orienté verticalement, a été faite. La méthode des volumes finis a été utilisée pour résoudre numériquement les équations de transports gouvernants le phénomène étudié.

Dans le but de donner plus de confiance aux résultats que produisait notre code de calcul, une validation des celui-ci a été faite, par comparaisons de ces résultats avec des mesures expérimentales et des données numériques présentes dans la littérature. De même, un excellent accord est apprécié entre les mesures expérimentales et numériques et les résultats du code de calcul.

Les résultats obtenus pour le cas d'écoulement stable ont montré l'existence d'un phénomène de pompage d'Eckman dans l'écoulement et la domination du régime conductif du transfert de chaleur.

Nos simulations numériques ont été présentées pour différentes valeurs du nombre de Hartmann ( $Ha = 0, 5, 10, 20, 30, 40, 50$  et  $60$ ) et différentes valeurs du nombre de Richardson ( $Ri=0., 0.5, 1.0, 2.0$ ), afin de voir leurs effets sur la valeur du nombre de Reynolds critique,  $Re_{cr}$  et de la fréquence d'oscillation critique,  $Fr_{cr}$ .

Les résultats obtenus montrent qu'en absence du champ magnétique ( $Ha = 0$ ), les instabilités oscillatoires apparaissent pour les valeurs du nombre de Reynolds critiques  $Re_{cr} = 2575, 924, 802$  et  $606$ , correspondant respectivement aux fréquences d'oscillations critiques  $Fr_{cr}=3.662 \times 10^{-2}$ ,  $2.289 \times 10^{-2}$ ,  $2.289 \times 10^{-2}$  et  $2.518 \times 10^{-2}$ , pour les valeurs du nombre de Richardson  $Ri=0., 0.5, 1.0$  et  $2.0$ , et l'écoulement rentre dans un régime multicellulaire oscillant avec la même fréquence critique. Toutefois, en présence du champ magnétique vertical le fluide continue son écoulement stable jusqu'aux valeurs de nombre de Reynolds plus grandes que celles prévisibles d'avoir des instabilités oscillatoires bien que l'application d'un champ magnétique provoque un changement

remarquable de la structure du champ d'écoulement et du transfert de chaleur, et l'écoulement présente une zone stationnaire de recirculation située sous le disque tournant le long de l'axe du cylindre. Cette zone s'élargit avec l'augmentation de l'intensité du champ magnétique. Les résultats obtenus dans cette étude mettent en évidence la fiabilité de la technique de stabiliser les écoulements industriels de convection mixte, par l'application d'un champ magnétique verticale. En outre, ces résultats permettront aux expérimentateurs et industriels de connaître les régimes oscillatoires naissant durant les écoulements des métaux liquides, afin d'améliorer la qualité des semi-conducteurs obtenus.

Il est intéressant d'étudier les instabilités de l'écoulement en configuration tridimensionnelle, en utilisant la théorie de la stabilité linéaire et déterminer les modes propres des perturbations avec une discrétisation d'ordre 2 des termes transitoires et des termes convectifs selon le schéma numérique Upwind de second ordre [14]. Ceci est un point à recommander dans les futurs travaux.



# ***ETUDE DE L'INSTABILITE HYDRODYNAMIQUE DES ECOULEMENTS TOURNANTS***

## **RÉSUMÉ**

Dans le présent travail, une étude de l'écoulement de convection mixte de fluide à faible nombre de Prandtl ( $Pr=0.015$ ) confiné dans une enceinte cylindrique ayant un rapport de forme égal à 2, avec et sans champs magnétique, a été considérée. La méthode des volumes finis a été utilisée afin de résoudre les équations de continuité, de quantité de mouvement (Navier-Stokes), d'énergie et de potentiel électrique. En absence du champ magnétique, les résultats numériques obtenus montrent l'apparition des instabilités oscillatoires pour les valeurs du nombre de Reynolds critiques  $Re_c = 2575, 924, 802$  et  $606$ , correspondant respectivement aux valeurs du nombre de Richardson  $Ri=0., 0.5, 1.0$  et  $2.0$ . Toutefois, en présence du champ magnétique vertical, le fluide continue son écoulement stable jusqu'aux valeurs de nombre de Reynolds plus grandes que celles prévisibles d'avoir des instabilités oscillatoires. Des diagrammes de stabilité ont été établis d'après les résultats numériques de cette investigation. Ces diagrammes mettent en évidence la dépendance du nombre de Reynolds critique et la fréquence critique d'oscillations avec l'augmentation du nombre de Hartmann pour différentes valeurs du nombre de Richardson. En conclusion, la technique de stabilisation d'écoulement de convection mixte des fluides à faible nombre de Prandtl (semi-conducteurs) par l'application d'un champ magnétique extérieur, est pratiquement fiable.

**Mots clés :** Convection mixte, Enceinte cylindrique, Champ magnétique, Instabilité.

# دراسة اللاإستقرار الهيدروديناميكي في السريانات الدوارة

## ملخص

تم في هذا العمل دراسة سريان مع الحمل الحراري المزدوج للسوائل ذات عدد برانت ضعيف ( $Pr=0.015$ ) ، و المتضمنة في حاويات أسطوانية ذات نسبة الارتفاع إلى نصف القطر مساوية إلى 2 ، مع وجود و عدم وجود مجال مغناطيسي. تم استعمال طريقة الحجوم المنتهية لحل معادلات : الاستمرارية، كمية الحركة (نافي-ستوكس)، الطاقة و الكمون الكهربائي. النتائج العددية المتحصل عليها مع عدم وجود المجال المغناطيسي تبين ظهور الاهتزازات اللاإستقرارية من اجل قيم عدد رينولدس الحرج  $Re_{cr}=2750, 924, 802, 606$  الموافقة على التوالي لقيم من عدد ريتشاردسون  $Ri= 0, 0.5, 1.0, 2.0$ . غير انه في وجود المجال المغناطيسي العمودي فان السائل يستمر في سريانه حتى قيم من عدد رينولدس أكبر من تلك المتوقعة كغير مستقرة. مخططات توازن وسيطية تم إنشاؤها انطلاقا من النتائج العددية في هذا العمل، هذه المخططات تبين العلاقة بين عدد رينولدس الحرج و الترددات الحرجة و التزايد في قيم عدد هارتمان من أجل عدة قيم لعدد ريتشاردسون. ينتج أن استعمال الحقل المغناطيسي لجعل السريان مستقر في حالة أنصاف النواقل يعتبر حلا فعالا.

**كلمات مفتاحية :** حمل حراري مزدوج، حاويات أسطوانية، مجال مغناطيسي، عدم استقرار.

# ***STUDY OF THE HYDRODYNAMIC INSTABILITY OF ROTATING FLOWS***

## **ABSTRACT**

In the present work, a study of the mixed convection flow of low Prandtl number fluid ( $Pr=0.015$ ) confined in a cylindrical enclosure having an aspect ratio equal to 2, with and without magnetic fields, has been considered. The finite volumes method has been used to resolve the equations of continuity, momentum (or Navier-Stokes), energy and electric potential. In the absence of magnetic field, the numerical results obtained show the appearance of oscillatory instabilities for the values of the critical Reynolds number  $Re_{cr}= 2575, 924, 802$  and  $606$ , corresponding respectively to the values of the Richardson number  $Ri=0. ,0.5 , 1.0$  and  $2.0$ . However, in the presence of the vertical magnetic field, the fluid continues its stable flow until the values of Reynolds number greater than those predictable to have oscillatory instabilities. Stability diagrams have been established according to the numerical results of this investigation. These diagrams put in evidence the dependence of the critical Reynolds number and critical frequency of oscillations with the increase of the Hartmann number for various values of the Richardson number. In conclusion, the stabilizing technique of the mixed convection flows of fluids having low Prandtl number (semiconductors) by the application of an external magnetic field, is practically reliable.

**Keywords:** Mixed Convection, cylindrical container, Magnetic field, Instability.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1]- H. U. Vogel. "Experimentelle Ergebnisse über die laminare Strömung in einem zylindrischen Gehäuse mit darin rotierender Scheibe", MPI Bericht 6, 1968.
- [2]- H. U. Vogel. "Rückströmungsblasen in Drallströmungen. Festschrift 50 Jahre Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, 1975.
- [3]- B. Ronnenberg. "Ein selbstjustierendes 3-Komponenten-Laserdoppleranemometer nach dem Vergleichsstrahlverfahren, angewandt für Untersuchungen in einer stationären zylindersymmetrischen Drehströmung mit einem Rückstromgebiet", MPI Bericht 20, 1977.
- [4]- M. P. Escudier. "Observations of the flow produced in a cylindrical container by a rotating endwall", Experiments in Fluids, vol. 2, pp. 189-196, 1984.
- [5]- J. O. Murphy and J. M. Lopez, "The onset of oscillatory instability in a rotating layer of mercury heated from below and subject to a magnetic field", Proceedings of the Royal Society of London. Series A 407, pp. 313-324, 1986.
- [6]- J. M. Lopez and A. D. Perry, "Axisymmetric vortex breakdown. Part 3: Onset of periodic flow and chaotic advection", Journal of Fluid Mechanics, vol. 234, pp. 449-471, 1992.
- [7]- D. T. Valentine and C. C. Jahnke, "Flows induced in a cylinder with both end walls rotating", Physics of Fluids, vol. 6, pp. 2702-2710, 1994.
- [8]- J.C.F. Pereira and J.M.M. Sousa, "Steady and Transient Topologies of Confined Vortex Breakdown Generated by a Rotating Cone", Optical Diagnostics in Engineering, vol. 2(2), pp. 61-70, 1997.
- [9]- J. L. Stevens, J. M. Lopez and B. J. Cantwell, "Oscillatory flow states in an enclosed cylinder with a rotating endwall", Journal of Fluid Mechanics, vol. 389, pp. 101-118, 1999.
- [10]- A. Yu. Gelfgat, P. Z. Bar-Yoseph and A. Solan, "Steady states and oscillatory instability of swirling flow in a cylinder with rotating top and bottom", Physics of Fluids, vol. 8, N°10, pp. 2614-2625, 1996.
- [11]- A. Yu. Gelfgat, "Three-Dimensionality of Trajectories of Experimental Tracers in a Steady Axisymmetric Swirling Flow: Effect of Density Mismatch", Theoretical and Computational Fluid Dynamics, vol. 16, Issue 1, pp. 29-42, 2002.
- [12]- F. Marques, A. Yu. Gelfgat and J. M. Lopez, "Tangent double Hopf bifurcation in a differentially rotating cylinder flow", Physical Review E 68, 2003.
- [13]- A. Yu. Gelfgat and P. Z. Bar-Yoseph, "Multiple solutions and stability of confined convective and swirling flows - a continuing challenge", International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, vol. 14, N°2, pp. 213-241, 2004.
- [14]- F. Sotiropoulos and Y. Ventikos, "The three-dimensional structure of confined swirling flows with vortex breakdown", Journal of Fluid Mechanics, vol. 426, pp. 155-175, 2001.

- [15]-F. Sotiropoulos, Y. Ventikos and T. C. Lackey, "Chaotic advection in three-dimensional stationary vortex-breakdown bubbles: Sil'nikov's chaos and the devil's staircase", *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 444, pp. 257-297, 2001.
- [16]-J. M. Lopez, F. Marques, A. H. Hirska and R. Miraghaie, "Symmetry breaking in free-surface cylinder flows", *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 502, pp. 99-126, 2004.
- [17]-C. Xinjun, "A numerical study of the recirculation zones during spin-up and spin-down for confined rotating flows", *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, vol. 17, pp. 31-49, 2003.
- [18]-M. R. Ruith, P. Chen, E. Meiburg and T. Maxworthy, "Three-dimensional vortex breakdown in swirling jets and wakes: direct numerical simulation", *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 486, pp. 331-378, 2003.
- [19]-T. Mullin, J. J. Kobine, S. J. Tavener and K. A. Cliffe, "On the creation of stagnation points near straight and sloped walls", *Physics of Fluids*, vol. 12, N°2, 2000.
- [20]-M. C. Thompson and K. Hourigan, "The sensitivity of steady vortex breakdown bubbles in confined cylinder flows to rotating lid misalignment", *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 496, pp. 129-138, 2003.
- [21]-L. Mununga, K. Hourigan, M. C. Thompson and T. Leweke, "Confined flow vortex breakdown control using a small rotating disk", *Physics of Fluids*, vol. 16, N° 12, pp. 4750-4753, 2004.
- [22]-M. Pivaa and E. Meiburg, "Steady axisymmetric flow in an open cylindrical container with a partially rotating bottom wall", *Physics of Fluids*, vol. 17, 2005.
- [23]-F. M. Mahfouz and H. M. Badr, "Heat convection from a cylinder performing steady rotation or rotary oscillation - Part II: Rotary oscillation", *Heat and Mass Transfer*, vol.34, N° 5, pp. 375 - 380, 1999.
- [24]-R. Iwatsu, "Flow pattern and heat transfer of swirling flows in cylindrical container with rotating top and stable temperature gradient", *International Journal of Heat and Mass Transfer* vol. 47, pp. 2755-2767, 2004.
- [25]-R. Iwatsu, "Numerical Study of Flows in a Cylindrical Container with Rotating Bottom and Top Flat Free Surface", *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 74, N° 1, pp. 333-344, 2005.
- [26]-Y. Omi and R. Iwatsu, "Numerical study of swirling flows in a cylindrical container with co-/counter-rotating end disks under stable temperature difference", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 48, pp. 4854-4866, 2005.
- [27]-H. Ben Hadid, D. Henry and R. Touihri, "Unsteady three-dimensional buoyancy-driven convection in a circular cylindrical cavity and its damping by magnetic field", *Journal of Crystal Growth*, vol. 180, pp. 433-441, 1997.
- [28]-R. Bessaih, Ph. Marty and M. Kadja, "Numerical study of disk driven rotating MHD flow of a liquid metal in a cylindrical enclosure", *Acta Mechanica*, vol. 135, pp. 153-167, 1999.

- [29]-Ph. Marty, L. M. Witkowski, P. Trombetta and T. Tomasino, “On The Stability of Rotating MHD Flows”, *Transfer Phenomena in Magnetohydrodynamic and Electroconducting Flows*, pp. 327-343, 1999.
- [30]-A. Juel, T. Mullin, H. Ben Hadid and D. Henry, “Magnetohydrodynamic convection in molten gallium”, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 378, pp. 97-118, 1999.
- [31]-R. Bessaih, “Etude de la convection naturelle laminaire et turbulente dans des enceintes “, Thèse de doctorat d’état, Université Mentouri – Constantine, 2000.
- [32]-G. Talmage, S.-H. Shyu, J. M. Lopez and J. S. Walker, “Inertial effects in the rotationally driven melt motion during the Czochralski growth of silicon crystals with a strong axial magnetic field”, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, vol. 51, pp. 267-289, 2000.
- [33]-T. Weier, U. Fey, G. Gerbeth, G. Mutschke and V. Avilov, “Boundary layer control by means of electromagnetic forces”, *ERCOFTAC Bulletin* 44, pp.36–40,2000.
- [34]-A. Juel, T. Mullin, H. Ben Hadid and D. Henry, “Three-dimensional free convection in molten gallium”, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 436, pp. 267-281, 2001.
- [35]-R. Bessaih , M. Kadja, K. Eckert and Ph. Marty, “Numerical and analytical study of rotating flow in an enclosed cylinder under an axial magnetic field”, *Acta Mechanica*, vol. 164, pp. 175-188, 2003.
- [36]-R. Bessaih, Ph. Marty and M. Kadja, “Hydrodynamics and heat transfer in disk driven rotating flow under axial magnetic field”, *International Journal of Transport Phenomena*, vol. 5, pp. 259-278, 2003.
- [37]-B. Hof, A. Juel and T. Mullin, “Magnetohydrodynamic damping of convective flows in molten gallium”, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 482, pp. 163–179, 2003.
- [38]-N. Zabarar, B. Ganapathysubramanian, “Melt flow control using magnetic fields and magnetic field gradients”, *Computational Mechanics WCCM VI in conjunction with APCOM’04*, Sept. 5-10, 2004.
- [39]-E. Balikci, A. Deal, and R. Abbaschian, “Antimony-doped germanium single crystals grown from the melt by the axial heat processing (AHP) technique”, *Journal of Crystal Growth*, vol. 262, pp. 581-593, 2004.
- [40]-Y. Andrew, and J. J. Derby, “Dynamics of three-dimensional convection in microgravity crystal growth: g-jitter with steady magnetic fields,” *Journal of Crystal Growth*, vol. 263, pp. 40-52, 2004.
- [41]-S. Yesilyurt, S. Motakef, R. Grugel, and K. Mazuruk, “The effect of the traveling magnetic field (TMF) on the buoyancy-induced convection in the vertical Bridgman growth of semiconductors,” *Journal of Crystal Growth*, vol. 263, pp. 80-89, 2004.
- [42]-Yu. M. Gelfgat and A.Yu. Gelfgat, “experimental and numerical study of rotating magnetic field driven flow in cylindrical enclosures with different aspect ratios”, *Magnetohydrodynamics*, vol. 40, No. 2, pp. 147–160, 2004.

- [43]-A. Kharicha, A. Alemany, and D. Bornas, "Influence of the magnetic field and the conductance ratio on the mass transfer rotating lid driven flow", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 47, pp. 1997–2014, 2004.
- [44]-N. Ma, R. Hui Zhang, D. J. Larson, and K. C. Mandai, "Dynamics of melt-crystal interface and thermal stresses in rotational Bridgman crystal growth process," *Journal of Crystal Growth*, vol. 266, pp. 216-223, 2004.
- [45]-N. Ma, J. S. Walker and L. M. Witkowski, "Combined effects of rotating magnetic field and rotating system on the thermocapillary instability in the floating zone crystal growth process", *Transactions of the ASME, Journal of Heat Transfer*, vol. 126, pp. 230-235, 2004.
- [46]-M. P. Volz and K. Mazuruk, "Lorentz body force induced by travelling magnetic fields," *Magnetohydrodynamics*, vol. 40, pp. 117-126, 2004.
- [47]-B. Ganapathysubramanian, and N. Zabaras, "Using magnetic field gradients to control the directional solidification of alloys and the growth of single crystals", *Journal of Crystal Growth*, vol. 270, pp. 255-272, 2004.
- [48]-A. Kharicha, A. Alemany, and D. Bornas, "Hydrodynamic study of a rotating MHD flow in a cylindrical cavity by ultrasound Doppler shift method", *International Journal of Engineering Science*, vol. 43, pp. 589–615, 2005.
- [49]-V. Mittal, M. F. Baig and B. Kant Khan, "Buoyancy-driven convection in liquid metals subjected to transverse magnetic fields", *Journal of Indian Institut of Science*, vol. 85, pp. 119–129, 2005.
- [50]-A. Yu. Gelfgat, P.Z. Bar-Yoseph & A.L. Yarin., "Stability of multiple steady states of convection in laterally heated cavities ", *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 388, pp. 315-334, 1999.
- [51]-J. A. Michelson, "Modeling of laminar incompressible rotating fluid flow", AFM 86-05, Ph. D. Dissertation. Dept of Fluid Mechanics, Tech. Univ. of Denmark, 1986.
- [52]-A. Spohn, "Ecoulement et éclatement tourbillonnaires engendrés par un disque tournant dans une enceinte cylindrique", Thèse de Doctorat, Université de Grenoble I, 1991.
- [53]-J. H. Lienhard IV and J. H. Lienhard V, *A Heat Transfer Textbook*, 3<sup>rd</sup> Ed., Cambridge, MA: Phlogiston Press, c2005.
- [54]-S. V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill, 1980.
- [55]-H. Schlichting, *Boundary-Layer Theory*, 6<sup>th</sup> ed., McGraw-Hill, 1968.

## *REMERCIEMENTS*

Je tiens d'abord, à remercier vivement Monsieur le professeur

R. Bessaih

pour son esprit sportif et sa confiance qui n'a cessé de m'acquérir,  
ainsi que Messieurs les membres du jury.

Aussi, je remercie tous les amis, qui m'ont aidé d'une façon directe  
ou indirecte pour réaliser ce travail, notamment :

Fayçal A., Kamel S., Med G., Fouaz F., Fakher S., Redhouane B.,  
Arribi B., M'hammed A., Hichem F., Rachid H., Fayçal G., Djamel  
M., Wanis Z., Kamel H., et tous les autres...

A. Boukhari



# *DEDICACE*

*A la mémoire de mon père,  
qui nous a quitté en pleine lutte.*

*Ali B.*

# SOMMAIRE

REMERCIEMENTS.....	<i>i</i>
DEDICACE.....	<i>ii</i>
SOMMAIRE.....	<i>iii</i>
NOMENCLATURE.....	<i>v</i>
<b>Chapitre I : INTRODUCTION.....</b>	<b>01</b>
<b>Chapitre II : MODELE MATHEMATIQUE.....</b>	<b>18</b>
II.1 Géométrie du problème.....	18
II.2 Hypothèses simplificatrices .....	20
II.3 Equations de transport .....	21
• Equation de Continuité :.....	21
• Equation de quantité de mouvement radiale :.....	21
• Equation de quantité de mouvement axiale :.....	21
• Equation de quantité de mouvement azimutale (Equation de swirl) :.....	21
• Equation de l'énergie :.....	22
• Equation du potentiel électrique :.....	22
II.4 Formes adimensionnelles des équations.....	23
II.5 Les conditions initiales et aux limites.....	25
II.5.1 Les conditions initiales .....	25
II.5.2 Les conditions aux limites .....	25
II.6 Outils d'analyse de l'écoulement .....	27
II.6.1 La fonction de courant .....	27
II.6.2 La vorticité .....	27
II.6.3 Le moment angulaire .....	27
II.6.4 Le nombre de Nusselt .....	28

<b>Chapitre III: SOLUTION NUMERIQUE.....</b>	<b>29</b>
III.1 Maillage .....	30
III.2 Discrétisation implicite de l'équation générale de transport .....	33
III.3 Discrétisation de l'équation du potentiel électrique.....	36
III.4 Algorithmes de résolution .....	37
III.4.1 Algorithme SIMPLER .....	37
III.4.2 Algorithme TDMA .....	40
III.5 Critères de convergence.....	41
<b>Chapitre IV: PRESENTATIONS ET DISCUSSION DES RESULTATS.....</b>	<b>42</b>
IV.1 Effet du maillage sur les solutions numériques.....	43
IV.2 Validation du code.....	46
IV.3 Présentations des résultats.....	53
IV.4 le cas stable ou permanent .....	54
IV.5 Partie A : Situation sans champ magnétique.....	60
IV.5.1 Apparitions des instabilités physiques.....	60
IV.5.2 Exploration de la nature de l'écoulement .....	62
IV.6 Partie B : Situation avec un champ magnétique.....	82
IV.6.1 Structures de l'écoulement MHD.....	83
IV.7 Récapitulations .....	115
<b>CONCLUSION .....</b>	<b>118</b>
<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....</b>	<b>120</b>
<b>RESUME EN FRANÇAIS .....</b>	<b>124</b>
<b>RESUME EN ARABE.....</b>	<b>125</b>
<b>RESUME EN ANGLAIS.....</b>	<b>126</b>

## NOMENCLATURE

- $B$  Champ magnétique, *Tesla*
- $F$  Fréquence adimensionnelle [-]
- $F_L$  Force de Lorentz adimensionnelle [-]
- $g$  Accélération de la pesanteur,  $m^2.s^{-1}$
- $H$  Hauteur du cylindre,  $m$
- $Ha = BR\sqrt{\frac{S}{ru}}$  Nombre de Hartmann [-]
- $J$  Densité du courant électrique,  $A.m^{-2}$
- $N = \frac{SB^2}{r\Omega}$  Paramètre d'interaction [-]
- $N_{ech}$  Nombre d'échantillons [-]
- $Nu$  Nombre de Nusselt local [-]
- $\overline{Nu}$  Nombre de Nusselt moyen [-]
- $P$  Pression adimensionnelle [-]
- $Pr = \frac{u}{a}$  Nombre de Prandtl [-]
- $R$  Rayon du cylindre,  $m$
- $r, z$  Coordonnées méridiennes adimensionnelles [-]
- $Re = \frac{\Omega R^2}{u}$  Nombre de Reynolds [-]
- $Ri = \frac{bg(T_h - T_c)}{\Omega^2 R}$  Nombre de Richardson [-]
- $R_m$  Nombre de Reynolds magnétique [-]
- $t$  Temps dimensionnel,  $s$
- $T$  Température,  $K$
- $u, v, w$  Composantes de la vitesse adimensionnelles [-]

### ***Symboles grecs***

$a$	Diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$
$b$	Coefficient d'expansion thermique, $K^{-1}$
$g$	Rapport d'aspect [-]
$\Delta r, \Delta z$	Incrément de grille dans les directions radiale et axiale [-]
$t$	Temps adimensionnel [-]
$u$	Viscosité cinématique, $m^2.s^{-1}$
$l$	Conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$
$\Theta$	Température adimensionnelle [-]
$r_0$	Masse volumique, $kg.m^{-3}$
$\Phi$	Potentiel électrique adimensionnel [-]
$y$	Fonction de courant de Stokes [-]
$s$	Conductivité électrique, $\Omega.m^{-1}$
$\Omega$	Vitesse angulaire, $rad.s^{-1}$

### ***Indices et exposants***

$cr$	Valeur critique
$\sim$	Grandeur dimensionnelle
$c$	Froide
$h$	Chaude
$r, z, q$	Directions radiale, axiale et azimutale

### ***Abréviations utilisées***

MHD	Magnétohydrodynamique.
EM	Electromagnétique.
RMF	Champ magnétique tournant (Rotating Magnetic field).
VF	Volume fini.
VC	Volume de contrôle.
PSD	Densité du spectre d'énergie (Power Spectrum Density).
FFT	Transformée de Fourier rapide.
EDP	Equation aux dérivées partielles.