

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTER DE L'ESEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE MENTOURI- CONSTANTINE  
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR  
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

N° d'ordre : /Mag/2006

Série : /GM/2006

**Mémoire**

Présenté Pour L'obtention du Diplôme de Magister

Option

Construction mécanique

Par

***Abdelhafid Gherfi***

**Étude De La Propagation  
De l'Onde Élastique Dans Les Corps  
Continus**

**Devant le jury:**

Président:	A. Bouchoucha	Prof	Université de Constantine
Rapporteur:	B. Necib	Prof	Université de Constantine
Examineurs:	S. Meziani	Prof	Université de Constantine
	H. boughouas	M.C	Université de Constantine

***Constantine:.....Juin 2006***

## DEDICACES

A mes parents

A mes sœurs, frères et leurs enfants

A toute la famille GHERFI, et tous mes amis

A mes collègues du travail, et en particulier du service

méthodes usinage

Je dédie ce travail

## REMERCIEMENT

Je remercie vivement Monsieur **Brahim Necib**, Professeur au Département de Génie Mécanique Université Mentouri Constantine, Directeur du laboratoire de Mécanique et encadreur de ma mémoire de magistère, pour la confiance qu'il a placé en moi, pour sa patience, pour ces conseils, pour son aide précieuse et son soutien permanent durant tout mon travail.

Je tiens à exprimer mes remerciements à Monsieur **Ali Bouchoucha**, Professeur au Département de Génie Mécanique Université Mentouri Constantine, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance de ce mémoire.

Je remercie Messieurs le Professeur **S. Meziani** et M<sup>er</sup> **H. Boughouas** Maîtres de conférence, ainsi que M<sup>er</sup> **T Bentchakar**, docteur ingénieur membre de jury.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à Monsieur **Dernani Ahmed**, le directeur du CP usinage du Complexe Moteur Tracteur de **Oued Hamimime El-khroub**, et je suis très reconnaissant pour son aide durant ma préparation de ce travail.

## Nomenclature

$\mathbf{s}$ : Tenseur de contraintes	$[N / m^2]$
$h$ : Tenseur de viscosité	$[N \bullet m / s^2]$
$m$ : Coefficient De Lamé	$[N / m^2]$
$h$ : Coefficient De Viscosité	$[N \bullet m / s^2]$
$t_0$ : Temps De Relaxation	$[s]$
$t_1$ : Temps De Relaxation	$[s]$
$r$ : Masse Volumique	$[Kg / m^3]$
$w$ : Pulsation Propre	$[rd / min]$
$u$ : Vecteur De Déplacement	$[m]$
$C_p$ : Vitesse De L'onde Longitudinale	$[m / s]$
$C_s$ : Vitesse De L'onde Transversale	$[m / s]$
$C_{ijkl}$ : Tenseur De Rigidité	$[N / m^2]$
$u_p$ : Déplacement de l'onde longitudinale	$[m]$
$u_s$ : Déplacement de l'onde traversable	$[m]$
$A$ : Amplitude De L'onde	$[m]$
$T$ : Période	$[s]$
$V$ : Vitesse De Phase	$[m \bullet rd / min]$
$f$ : Force Extérieur	$[N]$
$k$ : Nombre D'ondes	$[1 / longueur]$
$P$ : La Pression	$[N / m^2]$
$G(x,t)$ : Fonction De Green	
$Q$ : Facteur De Qualité	
$e$ : Tenseur De Déformation	
$h$ : Le Pas De Discrétisation E Espace	

$N$  : Taille De Maillage

$\Delta t$  : Pas Du Temps

$\hat{u}$  : Transformation De Fourier Du Vecteur Déplacement

$\Delta x$  : Pas De Discrétisation En Espace

$G_{ijkl}$  : Tenseur De Relaxation

$J_{ijkl}$  : Tenseur De Fluage

$n_j$  : Direction De Propagation De L'onde

$d_{ij}$  : Kronecker

$\Phi$  : Potentiel Scalaire

$j$  : Phase De L'onde

$y$  : Potentiel Vecteur

$M(w)$  : Module Complexe

$\hat{f}$  : Transformation De Fourier D'une Fonction  $f$

$\Omega$  : Un Ouvert De  $\mathbb{R}^3$

$rot$  : Le Rationnel

$div$  : Divergence

$\Delta$  : Opérateur De Laplace

$w$  : Tenseur De Rotation

$t_i$  : Vecteur De Contrainte

# Table De Matières

<b>Introduction</b> .....	1
<b>Chp.1 : Etude De La Propagation Des Ondes Elastiques Dans Les Solides Isotropes</b>	
<b>1.1 Introduction</b> .....	5
<b>1.2 Différents Types D'ondes</b> .....	5
<b>1.2.1 Ondes Acoustiques</b> .....	5
<b>1.2.1.1 Définition</b> .....	5
<b>1.2.1.2 Equation générale des ondes acoustiques</b> .....	5
<b>1.2.1.3 Domaines D'applications Des Ondes Acoustiques</b> .....	7
<b>1.2.1.3.a Acoustique musicale</b> .....	7
<b>1.2.1.3.b Acoustique sous marine</b> .....	7
<b>1.2.2 Ondes Elastiques (L'élastodynamique linéaire)</b> .....	7
<b>1.2.2.1 Définition</b> .....	7
<b>1.2.2.2 Equation générale des ondes élastiques</b> .....	7
<b>1.2.3 Domaines D'applications Des ondes élastique</b> .....	9
<b>1.2.3.1.a Géophysique</b> .....	9
<b>1.2.3.1.a Contrôle non destructif</b> .....	9
<b>1.2.4 Ondes électromagnétiques</b> .....	9
<b>1.2.4.1 Définition</b> .....	9
<b>1.2.4.2 Equation général des ondes électromagnétique</b> .....	10
<b>1.2.4.3 domaines d'applications des ondes électromagnétique</b> .....	11
<b>1.2.4.3.a Furtivité radar</b> .....	11
<b>1.2.4.3.b Antennes</b> .....	11
<b>1.2.4.3.b Optique</b> .....	11
<b>1.2.5 Ondes De Gravite</b> .....	12
<b>1.2.5.1 Définition</b> .....	12
<b>1.2.5.2 Equation de la houle (l'onde de gravité)</b> .....	12
<b>1.3 Equation Générale De La Propagation D'ondes Elastique</b> .....	13

1.3.1 Introduction .....	13
1.3.1 Équation générale de la propagation de l'onde élastique dans les solides isotropes.....	14
1.3.2.1 Cas général .....	14
<b>Chp.2 : Analyse Mathématique De L'équation De La Propagation Des Ondes Elastiques</b>	
2.1 Introduction .....	21
2.2 Analyse mathématique.....	21
2.2.1 Régime harmonique.....	21
2.2.1.1 Analyse par ondes planes.....	22
2.2.1.2 Problème en fréquence.....	25
2.2.1.3 Analyse de Fourier par ondes planes harmonique 1D.....	27
2.2.1.4 Décomposition en ondes planes harmoniques.....	29
2.3 Solution Exacte De L'équation De La Propagation d'onde.....	32
2.3.1 Cas 1D formule de d'Alembert .....	32
2.3.1.1 Démonstration de la formule de d'Alembert .....	32
2.3.1.2 Exemple d'application.....	34
2.3.2 Cas 3D Equation D'onde Au Second Membre.....	34
2.3.2.1 Introduction.....	34
2.3.2.2 Application de la transformer de Fourier en 3D .....	35
2.3.2.3 Application De La Fonction De Green (Solution Elémentaire) Cas 3D.....	37
2.3.2.4 Application De La Fonction De Green Pour Le Cas 1D.....	38
<b>Chp.3 : Analyse Numérique de l'équation de la propagation des ondes</b>	
3.1 Introduction.....	40
3.2 Cas 1 D - schémas aux différences finies .....	41
3.2.1 Discrétisation de l'équation d'onde.....	41
3.3 Simulation numérique de l'équation d'onde 1D.....	43
3.3.1 Condition de Cauchy avec vitesse initiale nulle (régime établi).....	43
3.3.1.1 Premier cas la vitesse de l'onde $c = 0.02$ .....	43
3.3.1.2 Deuxième cas pour une vitesse $c = 0.5$ .....	44

3.3.1.3 Troisième cas $c=1$ .....	45
3.3.1.4 Quatrième cas $c=1.2$ .....	46
3.3.2 Condition de Cauchy avec vitesse initiale différent de zéro.....	47
3.3.2.1 Premier cas pour une vitesse $c=0.02$ .....	47
3.3.2.2 Deuxième cas pour une vitesse $c=0.5$ .....	48
3.3.2.3 Troisième cas pour une vitesse $c=1$ .....	49
3.3.3 Condition de Cauchy avec vitesse initiale constante.....	50
3.3.3.1 Cas ou la vitesse $c=1$ .....	50
3.3.4 Discussion des résultats.....	51
3.4 Cas 2 D schémas aux différences finies.....	51
3.4.1 Discrétisation de l'équation d'onde 2 D.....	51
 <b>Chp.4 : Propagation Des Ondes Elastiques Dans Les Solides Viscoélastique Isotropes</b>	
4.1 Introduction.....	55
4.2 Présentation des modèles.....	55
4.2.1 Ecriture Sous La Forme Intégrale.....	55
4.3 Équation générale de la propagation (milieu viscoélastique) .....	57
4.3.1 Equation de propagation d'onde pour le cas 1D.....	57
4.3.2 Equation de propagation d'onde pour le cas 3D.....	58
4.4 Le modèle de Zener.....	60
4.4.1 Le modèle de Zener isotrope.....	60
4.4.2 Le modèle de Zener monodimensionnelle.....	61
4.4.3 Généralisation du modèle de Zener.....	61
4.5 Analyse mathématique du modèle de Zener.....	62
4.5.1 Etude des milieux homogènes.....	62
4.5.1.1 Analyse par ondes planes en 1D.....	62
4.5.1.2 Propriétés des solutions.....	65
4.5.1.2.1 Propriétés du mode purement amorti.....	65
4.5.1.2.1 Propriétés des modes propagatifs amorties.....	66
4.5.2 Analyse par ondes planes en 3 D.....	68

4.5.3 Facteur de qualité.....	69
4.5.3.1 Définitions.....	70
4.5.3.2 Facteur de qualité quasi-constant.....	72
<b>Chp.5 : Analyse Numérique De L'équation De La Propagation Des Ondes Dans Les Milieux Viscoélastiques</b>	
<b>5.1 Introduction .....</b>	<b>74</b>
<b>5.2 Présentation du problème.....</b>	<b>74</b>
<b>5.3 Cas 1D – Schémas Au Différences Finis.....</b>	<b>75</b>
5.3.1 Discrétisation en espace.....	75
5.3.2 Discrétisation en temps.....	76
5.3.3 Cas ou $q = \frac{t_1}{t_0} = 1.2$ .....	78
5.3.4 Cas ou $q = \frac{t_1}{t_0} = 0.12, t_0 = 1.2, t_0 = 10$ .....	79
5.3.5 Cas ou $g(i) \neq 0$ (est une constante).....	80
<b>Conclusion .....</b>	<b>83</b>
<b>Références bibliographiques.....</b>	<b>85</b>

# Introduction

La propagation des ondes élastiques est un domaine très vaste et d'un point de vue recherche il est très riche. Plusieurs thèmes de recherches peuvent être rencontrés tels que la modélisation d'un très grand nombre de phénomènes physiques (acoustiques, électromagnétiques, élastodynamique et même vibratoire) pour lesquels l'équation des ondes est un problème type.

Dans le domaine de l'acoustique on trouve de très grandes applications pour la médecine notamment la détermination des paramètres élastiques des tissus biologiques. La technique utilisée consiste à détecter la déformation des tissus lorsqu'ils sont soumis à une contrainte externe, ou interne tel que contrainte cardiaque. Les nombreux travaux dans ce domaine ont conduit à la conception et réalisation du palpeur acoustique remplaçant ou aidant ainsi le médecin à l'identification de tumeurs par palpation. Le palpeur permet d'obtenir une vision qualitative, quantitative et fonctionnelle du corps humaine. On se basant sur la détection des déformations des tissus, plusieurs techniques ont été mises au point pour distinguer certaines zones d'intérêt dans le corps humaine tel qu'un module cancéreux dans le sein. C'est pour quoi au début des années 80 plusieurs scientifiques ont cherché à compléter l'approche échographique par d'autres techniques. Dickinson 1981 a eu l'idée de quantifier les vibrations naturelles du corps et a mis au point une technique de corrélation des signaux ultrasonores afin de quantifier l'amplitude et la fréquence de ces mouvements. Il suggère alors une relation entre l'élasticité des organes étudiés et leurs déplacements naturels.

A. Eisencher a remplacé les vibrations naturelles par des vibrations mécaniques contrôlées. Cette méthode qu'il appelle Echosismographie consiste à combiner l'échographie classique avec l'utilisation d'un vibreur extérieur. Il a montré qu'il est possible d'interpréter qualitativement les images obtenues par cette technique pour déterminer des zones, d'élasticités différentes. Ophier dans les années 90, lui aussi a montré que l'utilisation de l'échographie seule est suffisante pour déterminer l'élasticité des tissus biologiques. Sa technique repose sur le simple fait de comparer plusieurs images échographiques avant et après l'application d'une contrainte statique sur le milieu étudié.

La propagation des ondes élastique est largement utilisée dans le domaine de contrôle non destructif des solides, en particulier pour la vérification de l'intégrité des composants des centrales nucléaires (les pièces composant les cuves). La vérification des installations existantes peut se faire de plusieurs manières. Elle peut d'abord se faire expérimentalement par des mesures

directes réalisées sur site mais l'obtention de ces mesures est coûteuse d'un point de vue sécurité humaine et matériel. De plus, réaliser des mesures peut être très complexe pour des pièces mécaniques de petite taille ou d'accès lointain et en réaliser un grand nombre (par exemple, pour suffisamment d'angles d'incidence) est parfois impossible. La simulation numérique est alors un outil de vérification pouvant remédier à ces inconvénients. Plus précisément, le besoin actuel en simulation concerne la diffraction d'ondes élastiques par un ou plusieurs défauts (inclusions, fissures), présentes dans une pièce mécanique donnée. Dans ce domaine plusieurs travaux ont été élaborés ; Scarella [7] a présenté une étude théorique et numérique de la propagation des ondes dans un milieu fissuré. Il s'intéressait aux problèmes de l'élasticité linéaire en dynamique, en petites déformations ; cette étude ne cherche pas a priori la détection de la présence d'une fissure, ni à identifier sa forme. Il suppose aussi que la géométrie de la fissure ne varie pas au cours du temps. En particulier, il ne tient pas compte de la propagation de la fissure.

En trouve aussi le cas de l'usinage à grande vitesse (UGV), le poinçonnage à très grande vitesse, les blindages et les satellites. En effet, actuellement on fait l'usinage à 20 000 tr/min, on poinçonne à 1200 coups/minutes, les blindages sont soumis à des projectiles de plus en plus perforants et les satellites sont bombardés en permanence par des poussières et des débris spatiaux. Aussi, l'usage de techniques de fabrication à grande vitesse, le design d'éléments de structure (blindages, panneaux solaires des satellites,...) ou d'outils destinés à être soumis à des conditions de chargements sévères nécessitent une meilleure connaissance des mécanismes de déformation en sollicitations dynamiques et des processus de ruines dynamiques liées aux grandes vitesses de déformation. Cependant, un grand nombre de mesures locales sont difficilement accessibles au cours de ces expériences de chocs (limites technologiques du matériel d'essai, coût prohibitif). Aussi, pour comprendre les différents processus de rupture dynamique, les simulations numériques deviennent incontournables. Le développement de nouvelles méthodes expérimentales et la nécessité de développer des lois de comportements fiables pour modéliser et comprendre l'endommagement et la ruine des structures sous sollicitations dynamiques sont également indispensables. Dans sa thèse, Campagne [22] s'intéresse uniquement au cas de matériaux métalliques sensibles à la vitesse de déformation et à la température. Son étude est basée sur le comportement des métaux sous chargement dynamique, pour cela deux approches sont retenues. Parmi les deux approches proposées par l'auteur on trouve dans cette thèse un rappel des points essentiels de la théorie des ondes nécessaire à ce travail pour étudier des problèmes de chocs. Le régime dynamique rapide se

caractérisé par les phénomènes de création et de propagation d'ondes mécaniques (notamment ondes de chocs). Lorsque deux corps entrent en collision, il se produit un déséquilibre localisé de part et d'autre de l'interface de contact. Ce déséquilibre est une source d'ondes de contraintes qui se propagent dans les deux corps entraînant de grandes vitesses de déformation. Ces ondes jouent un rôle important au niveau des structures ou des matériaux soumis aux sollicitations dynamiques. En effet, lorsque le choc est suffisamment intense, il y a création d'ondes de choc qui peuvent entraîner des déformations plastiques sur leurs passages.

On trouve aussi plusieurs recherches dans le domaine de la géophysique qui visent à l'amélioration des performances en exploitation et production pour une meilleure estimation du sous sol, le traitement des données sismique est une étape incontournable en exploitation pétrolière tout d'abord elle constitue un outil essentiel pour la compréhension des phénomènes physiques intervenants lors des campagnes d'exploration sismique, notamment dans des milieux complexes. La modélisation sur des modèles de sous sol permet également de mener des études de faisabilité avant l'acquisition de données sismiques (optimisation des paramètres d'acquisition afin d'illuminer la zone réservoir ciblée). Enfin, les données du terrain sont indispensables pour la validation des nouvelles techniques de traitement de données conduisant à l'imagerie du sous sol.

On trouve aussi dans le domaine de la propagation des ondes élastique dans les solides viscoélastique, en particulier les roches qui dissipent de l'énergie lorsqu'ils sont soumis à des déformations. Le mouvement moyen d'un fluide par rapport à une matrice élastique conduit à un mécanisme dissipatif (Loi de Biot pour la propagation d'onde dans les milieux poreux) et donc une atténuation des ondes. Les origines de la dissipation en dehors de phénomène de Biot sont multiples (les effets thermiques frottement grains à grains les mouvements locaux de fluide). Elles sont nombreuses et complexes et une modélisation physique qui tient compte de la totalité des causes sera très compliquée. Ces milieux sont le siège de phénomènes de dissipation intrinsèque qui provoquent une décroissance de l'énergie et une atténuation exponentielle de l'amplitude des ondes au cours de leur propagation. Pour bien simuler la réalité physique, il est important de tenir compte de ce phénomène d'absorption des ondes du à une propriété viscoélastique du milieu de propagation. On trouve dans ce domaine le travail de Ezziyani [6], son étude se fait pour un objet purement mathématique. Il s'intéressait à la modélisation de ce phénomène par l'introduction de modèles viscoélastiques linéaires qui sont bien adaptés à la description d'une large classe de phénomènes dissipatifs. Ces modèles nécessitent la

connaissance non seulement des valeurs actuelles des contraintes et des déformations mais aussi des valeurs du passé, ils sont dit des matériaux à mémoire. La modélisation mathématique et numérique de la propagation d'ondes dans les milieux complexes, c'est-à-dire des milieux obéissant à une loi de comportement non classique. En l'occurrence, il s'agit ici des milieux solides obéissant à une loi rhéologique destinée à prendre en compte la dissipation des ondes dans un matériau ou à la porosité du milieu d'étude. Ces dernières propriétés induisent des phénomènes spécifiques de nature variée (absorption intrinsèque, dispersion intrinsèque ...) qui correspondent à de nouvelles difficultés mathématiques et numériques.

Dans ce programme de recherche nous allons présenter une étude détaillée sur la propagation des ondes élastiques dans les milieux isotropes, la formulation des équations mathématiques de la propagation de l'onde élastique du cas le plus simple au cas générale ainsi que l'étude de la solution numérique exacte de ces équations. Cette étude est divisée en deux parties, la première contient trois chapitres. Dans le premier chapitre nous avons présenté les différents types d'ondes et leurs équations avec une formulation de l'équation générale de la propagation pour un milieu isotrope. Dans le deuxième chapitre nous avons fait une analyse mathématique de ces équations. Le troisième chapitre l'analyse numérique pour les deux cas unidimensionnel et bidimensionnels sont présentées avec les résultats de cette simulation. Dans la deuxième partie nous avons présenté une étude concernant les milieux viscoélastiques isotopes, cette partie est divisée en deux chapitres. Le premier est consacré à l'étude mathématique et le deuxième à l'étude numérique avec tous les résultats de cette simulation.

## 1.1 Introduction

La propagation d'onde de toutes natures est l'un des phénomènes physiques les plus simples et les plus usuels auxquels nous sommes confrontés dans la vie courante (sons, vibrations, vagues, télécommunications, radar) et même à l'échelle de l'univers (ondes électromagnétiques, de gravité) et ainsi à celui de l'atome (émission, spontanée ou stimulée, interférences entre particules), ce sont l'émission et la réception des ondes qui constituent notre moyen privilégié de connaissance du monde qui nous entoure. L'étude revient à la simulation numérique des phénomènes de propagation représentant donc une activité très répandue dans les divers domaines de la physique et de l'art de l'ingénieur, la variété et la complexité des problèmes posés, leur intérêt scientifique et industriel.

De façon générale le but de ce travail est orienté vers, l'analyse, l'approximation numérique du modèle mathématique pour la description des phénomènes de propagation d'ondes intervenant en mécanique et en physique et dans la science de l'ingénieur

## 1.2 Différents Types D'ondes

### 1.2.1 Ondes Acoustiques

#### 1.2.1.1 Définition

Ces ondes se propagent en milieu fluide et sont le support de la propagation du son, on cherche à calculer une distribution de pression.

#### 1.2.1.2 Equation générale des ondes acoustiques

Les équations de l'acoustique linéaire peuvent être vues comme une dégénérescence des équations de l'élastodynamique linéaire (ondes élastiques) lorsque le coefficient de lamé tend vers 0. En fait,  $m=0$  caractérise le comportement élastique d'un fluide, l'autre coefficient de lamé  $l$ , restant strictement positif. A partir des équations de Hooke pour un matériau linéaire isotrope écrite en notation indicelle par :

$$s_{ij}(u) = l \operatorname{div} \mathbf{u} d_{ij} + 2e_{ij}(\mathbf{u}) \quad (1-1)$$

Il est facile de voir que le tenseur des contraintes devient sphérique, c'est-à-dire proportionnel à la matrice identité on pose alors :  $\mathbf{s} = -pI$  (1-2)

Où  $p = p(x, t)$  est par définition la pression du fluide, de l'équation (1-1) on déduit :

$$p = -l \operatorname{div}(\mathbf{u}) \quad (1-3)$$

Si on désigne  $\Omega$  un ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^3$  (borné ou non) rempli de fluide, la propagation d'ondes acoustiques dans un fluide dépend de la densité du fluide  $\rho(x)$  au point  $x$ , la vitesse locale des ondes acoustiques est  $c(x)$ . L'équation qui régit les variations de la pression  $p(x, t)$  du fluide en un point  $x$  et à l'instant  $t$  est l'équation des ondes suivante :

$$\left(\frac{1}{\rho(x)}\right) \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \text{div}\left(\frac{1}{\rho(x)}\nabla P\right) = g(x, t) \quad (1-4)$$

$x \in \Omega, t > 0$  où  $\rho(x) = \rho(x)c^2(x)$  pour un milieu homogène cette équation devient simplement :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - C^2 \nabla^2 P = g \quad , x \in \Omega, t > 0 \quad (1-5)$$

La fonction  $g(x, t)$  est la source.

Cette équation représente aussi les petites vibrations transversales d'une membrane homogène tendue. Elle s'appelle aussi l'équation des membranes vibrantes et la quantité que l'on calcule dans ce cas est le déplacement normal:

On doit joindre à cette équation pour qu'elle soit bien posée les conditions suivantes :

§ *Des conditions initiales* : (deux car l'équation est d'ordre deux) :

$$p_0(x) = p(x, 0); \text{ Et } \frac{\partial P}{\partial t}(x, 0) = P_1(x)$$

§ *Des conditions au limites* : posées sur le bord du domaine (par exemple homogènes)

§ *Conditions de Dirichlet* : Si la condition de surface libre  $P = 0$  sur  $\partial\Omega$ .

§ *Conditions de Neumann* : Si on considère que le bord est rigide, les particules fluides ne peuvent que glisser, ce qui signifie que la composante normale du déplacement est nulle:  $\frac{\partial P}{\partial n} = 0$  sur  $\partial\Omega$ .

§ *Condition d'impédance* :  $\frac{\partial P}{\partial n} + \frac{\partial P}{\partial t} = 0$  sur  $\partial\Omega$ .

En acoustique, l'équation (1-1) décrit la propagation d'une onde de pression qui se propage à une vitesse  $C$ , En 2D, on peut penser à la propagation d'une onde dans l'eau lorsqu'on jette un caillou. L'onde due à l'excitation ponctuelle (caillou) se propage suivant des cercles et s'atténue au cours du temps mais ne disparaît pas. Un exemple d'onde

acoustique en 3D, c'est bien sur le son qui se propage dans l'air, cette fois-ci l'onde acoustique passe et disparaît.

### 1.2.1.3 Domaines D'applications des Ondes Acoustiques

#### 1.2.1.3.a Acoustique Musicale

Une application particulièrement séduisante de modèles numériques de propagation d'ondes est la simulation sur ordinateur d'instruments de musique, le but est alors non seulement une meilleure compréhension du fonctionnement de ces instruments mais aussi aider à la facture d'instrument nouveau. Dans la pratique, une modélisation réaliste de ces instruments conduit à étudier en fait des problèmes d'interaction fluide structure, c'est-à-dire l'interaction entre une onde acoustique et une structure vibrante telle une membrane, une plaque ou une coque.

#### 1.2.1.3.b Acoustique Sous Marine

L'acoustique sous marine a pour objet l'étude et l'utilisation de modèles mathématiques décrivant la propagation des ondes qui dépend des caractéristiques physiques locales du milieu pouvant évoluer au cours du temps. Les résultats de recherche dans ce domaine trouvent leurs applications directes en océanographie, biologie marine et géophysique.

## 1.2.2 Ondes élastiques (l'élastodynamique linéaire)

### 1.2.2.1 Définition

Ces ondes se propagent dans les solides, l'inconnue est la distribution du champ des déplacements au sein de la structure.

### 1.2.2.2 Equation Général Des Ondes Elastiques

Les équations du mouvement sont données par :

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \text{div}(\mathbf{s}) = \rho \mathbf{g} \quad (1-6)$$

Où  $\mathbf{u}(x,t)$  est un vecteur représentant le déplacement d'une particule du point  $x$  à l'instant  $t$ ,  $\mathbf{s}$  est le tenseur des contraintes, relié au tenseur des déformations  $\mathbf{e}(\mathbf{u})$  par la loi de comportement du matériau. Si on considère la loi de Hooke linéaire :

$$\mathbf{s} = \mathbf{C} \mathbf{e}(\mathbf{u}) \Leftrightarrow s_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} \quad (1-7)$$

$$\text{Avec } e_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (1-8)$$

Où  $C$  est un tenseur d'ordre 4, vérifiant des conditions de symétrie  $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij}$

Pour un cas particulier des matériaux dits isotropes, c'est-à-dire dont les propriétés dans toutes les directions sont identiques. Dans ce cas, le milieu ne dépend plus que de deux paramètres,  $\mu$  et  $\lambda$ , appelés coefficients de lamé.

$$C_{ijkl} = l d_{ij} d_{kl} + m(d_{ik} d_{jl} + d_{il} d_{jk}) \quad (1-9)$$

Et la relation de Hooke devient simplement :

$$s_{ij} = l \text{div}(\mathbf{u}) d_{ij} + 2m e_{ij}(\mathbf{u}) \Leftrightarrow \mathbf{s} = l \text{Tr}(\mathbf{e}) \mathbf{I} + 2m \mathbf{e} \quad (1-10)$$

Où  $\text{Tr}(\mathbf{e})$  et  $\mathbf{I}$  sont la matrice transposée du tenseur de déformation et la matrice identique.

L'équation (1-6) pour un milieu isotrope homogène ( $\mathbf{m} = cte$  et  $\mathbf{l} = cte$ ) peut être écrite sous la forme suivante :

$$r \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - (\mathbf{l} + 2\mathbf{m}) \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}) + \mathbf{m} \text{rot}(\text{rot} \mathbf{u}) = r \mathbf{g} \quad (1-11)$$

$$r \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - (\mathbf{l} + \mathbf{m}) \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}) - \mathbf{m} \Delta \mathbf{u} = r \mathbf{g} \quad (1-12)$$

$$\text{La dernière équation provient de l'identité } \mathbf{l} \Delta = \text{grad}(\text{div}) - \text{rot}(\text{rot}) \quad (1-13)$$

Où le deuxième rotationnel noté  $\text{rot}$  sans flèche est scalaire (2D) ou vectoriel avec flèche soit  $\text{rot}^{\mathbf{l}}$  (3D). Cette équation décrit la propagation de deux types d'ondes se propageant à des vitesses différentes :

Les ondes de Pression P (Pressure), et les ondes de cisaillement S (*Shear*). Ces deux ondes correspondent aux opérateurs divergence et rotationnel.

La divergence représente une variation de volume, en mouvement de compression ou de traction, alors que le rotationnel représente une déformation sans variation de volume, donc un cisaillement.

Posons  $d = \text{div}(\mathbf{u})$  et  $r = \text{rot}(\mathbf{u})$ . Alors il est facile de voir que ces deux quantités obéissent à des équations d'ondes :

Ø Prenons la divergence de (1-11) et (1-12), alors on suppose les deux propriétés  $\text{div}(\text{grad}) = \Delta$  et  $\text{div}(\text{rot}) = 0$ , on voit que  $d$  vérifie l'équation des ondes scalaire:

$$\frac{\partial^2 d}{\partial t^2} - C_p^2 \Delta d = \text{div}(\mathbf{g}) \quad (1-14)$$

Où  $C_p = \sqrt{\frac{I + 2m}{\rho}}$  est la vitesse des ondes  $p$ .

- Prenons le rotationnel de (1-11) et (1-12), alors en utilisant les deux propriétés  $\text{rot}(\text{grad}) = 0$  et  $\text{rot}(\text{rot}(r)) = -\Delta r$  car  $(\text{div}(r) = \text{div}(\text{rot}(u)) = 0)$ , on voit que  $r$  vérifie l'équation des ondes scalaires en 2D et vectorielle en 3D:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - C_s^2 \Delta r = \text{rot}(g) \quad (1-15)$$

Où  $C_s = \sqrt{\frac{m}{I}}$  est la vitesse des ondes  $S$ .

### 1.2.2.3 Domaines D'applications des Ondes Elastiques

#### 1.2.2.3.a Géophysique

La géophysique s'intéresse à la propagation des ondes dans le sous sol (éventuellement en milieu marin), ces ondes interviennent bien sûr dans des phénomènes naturels comme les séismes, mais elles sont aussi utilisées à des fins industrielles essentiellement dans l'industrie du pétrole par le développement des méthodes de prospection pétrolière par la sismique. Ces méthodes constituent un vaste champ d'application pour les méthodes numériques.

#### 1.2.2.3.b Contrôle Non Destructif

Une autre application très répandue des ondes élastiques est le contrôle non destructif, le but est de détecter la présence d'un défaut dans une pièce métallique (typiquement fissure) sans casser cette dernière.

On utilise alors des ondes ultrasonores dont on mesure l'écho à la surface de la pièce. Un champ d'application privilégié d'une telle méthode est le contrôle des centrales nucléaires.

### 1.2.3 Ondes Électromagnétiques

#### 1.2.3.1 Définition

Ces ondes n'ont pas besoin de support pour se propager, les inconnues du problème sont essentiellement le champ électrique  $E(x, t)$  et le champ magnétique  $H(x, t)$ , l'induction électrique  $D(x, t)$  et l'induction magnétique  $B(x, t)$ .

### 1.2.3.2 Equation Générale Des Ondes Électromagnétiques

Dans un milieu que nous supposons diélectrique linéaire isotrope, un champ électromagnétique dans un domaine  $\Omega$  est décrit par le champ électrique  $\vec{E}(x, t)$  et le champ magnétique  $H(x, t)$  qui vérifient les équations de Maxwell :

$$m \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{E}) = 0 \quad (1-16)$$

$$e \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + s \vec{E} - \text{rot}(\vec{H}) + \vec{j}_s = 0 \quad (1-17)$$

Où  $e(x) > 0$  est la permittivité diélectrique du milieu,  $m(x) > 0$  est la perméabilité magnétique du milieu,  $s(x) \geq 0$  est la conductivité du matériau,  $\vec{j}_s$  est un courant source. La vitesse des ondes du milieu est donnée par la relation suivante :

$$C^2 = \frac{1}{em}$$

Le vide est un cas particulier des milieux homogènes, il est non conducteur donc  $s_0 = 0$  et

$$e(x) = e_0 = (36\pi \cdot 10^9)^{-1}$$

$$m(x) = m_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$$

Ce qui donne la fameuse valeur de la vitesse de la lumière dans le vide :

$$C_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Lorsque la conductivité est positive, une onde qui se propage dans un milieu conducteur est atténuée au cours de sa propagation c'est à dire qu'il y a un phénomène d'absorption.

Nous supposons par la suite que le milieu est non conducteur. Le champ électromagnétique vérifie alors les équations de Maxwell:

$$m \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{E}) = 0 \quad (1-18)$$

$$e \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \text{rot}(\vec{H}) + \vec{j}_s = 0 \quad (1-19)$$

On peut remarquer qu'en prenant la divergence de (1-18) avec la propriété ( $\text{div}(\text{rot}) = 0$ ), cette dernière peut être écrite sous la forme

$$\frac{\partial \text{div}(m\vec{H})}{\partial t} = 0 \quad (1-20)$$

Par conséquent, si on suppose qu'à l'instant initial on a :  $\text{div}(\mathbf{m}\dot{\mathbf{H}}_0) = 0$ , cette propriété reste vraie pour tout instant:  $\text{div}(\mathbf{m}\dot{\mathbf{H}}) = 0$ .

De même si on prend la divergence de (1-19), en supposant que  $\text{div}(\mathbf{j}_s) = 0$  et que  $\text{div}(\mathbf{e}\dot{\mathbf{E}}_0) = 0$ , Alors  $\text{div}(\mathbf{e}\dot{\mathbf{E}}) = 0$ .

### 1.2.3.3 Domaines D'applications Des ondes Électromagnétiques

#### 1.2.3.3.a Furtivité Radar

Les ondes électromagnétiques sont très utilisées pour la détection d'objets volants dans les applications militaires. Les problèmes de calcul numérique qui se posent sont de deux natures :

- Comment calculer la réponse d'un objet à une onde incidente ;
- Comment rendre cet objet furtif.

Le thème furtivité fait notamment appel à la modélisation de nouveaux matériaux absorbants (anisotropes, non linéaire...).

#### 1.2.3.3.b Antennes

Les antennes sont une des technologies de base pour la communication à longue distance par ondes électromagnétiques, elle sont utilisées pour émettre, diriger et réfléchir les ondes. Le calcul des antennes pose notamment des difficultés liées à leur géométrie très complexe (antenne, plaquées, éléments filaires.)

#### 1.2.3.3.c Optique

Les ondes électromagnétiques sont également largement utilisées en télécommunications pour transmettre de l'information par support optique (fibres optiques, optique intégrée).

La technologie pour la conception de guides d'ondes optiques est très pointue et fait largement appel à des matériaux nouveaux, tels que les supraconducteurs. L'intérêt des méthodes numériques dans ce domaine est croissant.

## 1.2.4 Ondes De Gravité

### 1.2.4.1 Définition

Il s'agit des ondes liées à la propagation de la houle, les modèles utilisés sont dérivés de la mécanique des fluides. Les applications concernent prioritairement l'industrie maritime notamment pour tout ce qui concerne les problèmes de stabilité des navires, de la tenue à la mer et de la résistance aux vagues.....

### 1.2.4.2 Equation De La Houle (L'onde De Gravité)

Le modèle que nous allons présenter est censé décrire les mouvements de l'océan. Sa validité est soumise à un certain nombre d'hypothèses physiques licites quand on s'intéresse à la propagation de la houle :

- ∅ L'écoulement est irrotationnel ;
- ∅ Le fluide est incompressible ;
- ∅ Le fluide est non visqueux ;
- ∅ Les déplacements sont petits.

La première particularité du modèle tient dans la géométrie du domaine de propagation  $\Omega$  supposé fixe et doit être nécessairement délimité par deux surfaces  $\Gamma_F, \Gamma_L$  :

- ∅  $\Gamma_F$  représente le fond marin .
- ∅  $\Gamma_L$  représente la surface moyenne de l'eau (ou surface libre) .
- ∅  $\Gamma = \Gamma_F \cup \Gamma_L$  .

L'écoulement étant irrotationnel, on en déduit que le champ des vitesses dans le fluide  $v(x, t)$  qui dérive d'un potentiel  $\Phi(x, t)$  s'écrivant comme suit :

$$v = -grad \Phi$$

L'incompressibilité du fluide se traduit par :

$$div(v) = 0$$

On en déduit que la fonction est harmonique dans un intervalle donné :

$$\Delta \Phi = 0$$

La condition de glissement sur le fond se traduit par la condition de Neumann pour  $\Phi$  :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} /_{\Gamma_F} = 0 \quad (1-21)$$

C'est seulement au niveau de la condition aux limites sur la surface libre  $\Gamma_L$  que le temps intervient. Cette condition s'obtient à partir de la linéarisation de l'équation de Bernoulli qui traduit le fait que la pression à la surface du fluide est égale à la pression atmosphérique :

$$\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{Sur } \Gamma_L \quad (1-22)$$

Dans cette équation,  $g$  est l'accélération de pesanteur.

Cette condition appelée condition de surface libre. C'est la deuxième particularité de ce modèle qui est responsable sur la propagation de la houle. Signalons qu'on peut à partir de  $\Phi$  décrire la déformation de la surface de l'eau sous l'effet de la houle comme la surface d'équation suivante :

$$x_2 = h(x_1, x_2, t) \quad (1-23)$$

$$h(x_1, x_3, t) = \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x_1, x_3, 0, t) \quad (1-24)$$

### 1.3 Equation générale de la propagation d'ondes élastique

#### 1.3.1 Introduction

Notre activité repose avant tout sur l'existence des modèles mathématiques issus de la physique. Il s'agit d'équations aux dérivées partielles de type hyperbolique.

Les modèles de base, qui s'appuient sur une physique simplifiée sont linéaires s'expriment par l'équation des ondes suivante :

$$\frac{\partial^2 u(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - C^2 \Delta u(\vec{x}, t) = 0 \quad (1-25)$$

Avec :

$u(\vec{x}, t)$  : Le champ de déplacement suivant la direction  $\vec{x}_k$  à l'instant  $t$

$t$  : le temps.

$C$  : la vitesse de l'onde.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \quad (1-26)$$

Cette dernière équation s'applique directement aux ondes acoustiques mais constitue un modèle scalaire simplifié pour les autres types d'ondes.

La physique vient en général enrichir ces modèles de base et en accroître la complexité des conditions aux limites, termes non linéaires, termes intègro-différentiel et le couplage des modèles.

On peut distinguer deux types de problèmes associés à ces modèles :

- ∅ Les problèmes en temps (ou problèmes transitoires) et les problèmes en fréquence (ou problèmes harmoniques), dans le premier cas le temps fait explicitement partie des variables de l'inconnue du problème et on s'intéresse alors à un problème d'évolution.
- ∅ Dans le second cas et à titre d'exemple, la dépendance en temps est imposée à priori par l'intermédiaire de la source.

Elle est supposée périodique en temps, et même harmonique, on cherche alors une solution proportionnelle à  $\exp^{i\omega t}$  où  $\omega > 0$  désigne la pulsation (on parle aussi de fréquence).

Le temps n'intervient alors plus que par l'intermédiaire de cette fréquence, qui joue le rôle de paramètre, et l'inconnu recherché est une fonction des seules variables spatiales  $(x, y, z)$ . Ainsi l'équation des ondes donne naissance à l'équation de Helmholtz

$$U = ue^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\omega^2 e^{i\omega t} u$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = ue^{i\omega t} \quad (1-27)$$

$$\Leftrightarrow -C^2 \Delta U - \omega^2 U = 0$$

### 1.3.2 Formulation de L'équation Générale De La Propagation De L'onde Elastique Dans Les milieux Isotropes

#### 1.3.2.1 Cas Général

Dans ce paragraphe nous allons faire une démonstration de l'équation de la propagation déjà présentée. En cristallographie les matériaux peuvent être classés suivant leur type de symétrie, chaque système est directement associée à un tenseur de quatrième ordre appelé le tenseur des rigidité  $C_{ijkl}$ , reliant les déformations aux contraintes  $S_{ij}$ , c'est la loi de Hooke qui s'écrit comme suit :

$$S_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} \quad \forall ij = 1 \mathbf{L} d \quad (1-28)$$

$$\text{Où } \mathbf{e}_{kl} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right] \quad (1-29)$$

Nous avons l'équation de la propagation de la forme :

$$r \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \nabla s_{ij} = f_i \quad \forall ij = 1 \mathbf{L} d \quad (1-30)$$

Dans  $\Omega \times [0, T]$

§  $u_i$  représente le champ de déplacement dans le solide.

§  $e$  est le tenseur de déformations.

§  $s$  le tenseur de contraintes.

§  $\Omega$  est ouvert de  $R^d$ .

§  $r$  est la masse volumique du milieu solide exprimée en  $Kg \times m^{-3}$ .

§  $C$  est le tenseur des coefficients d'élasticité exprimés en  $Pa$ .

§  $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij} \quad \forall i, j, k, l = 1 \mathbf{L} d$ .

En utilisant les propriétés des différents tenseurs, nous allons reformuler le système d'équation (1-28) sous une forme proche de la formulation mixte de l'équation des ondes présentée précédemment, donc on a :

$$r \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \nabla [s_{ij}] = f_i$$

Or  $s_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}$

$$r \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \nabla [C_{ijkl} e_{kl}] = f_i \quad \text{Avec} \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{est} \quad e_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)$$

$$r \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + C_{ijlk} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right] = f_i$$

$$r \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ C_{ijlk} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + C_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right] = f_i$$

$$r \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_j} = f_i \quad (1-31)$$

Si  $f_i = 0$  (source nul)

$$r \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} \quad (1-32)$$

Cette équation représente l'équation générale de la propagation d'une onde élastique dans un solide anisotrope ce système de trois équations différentielles de second ordre est généralisé en 3D.

Pour un milieu isotrope on a l'équation de lamé qui est le reflet de l'équilibre local des forces dans un milieu élastique pour un volume infinitésimal ( $dv$ ), la loi fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$r \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j} \quad (1-33)$$

Où

$r$  Est la densité local

$u_i$  La composante  $i$  du déplacement de  $u$ ,

$s_{ij}$  Est Le tenseur des contraintes défini par :

$$s_{ij} = l e_{kk} d_{ij} + 2m e_{ij} \quad (1-34)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad (1-35)$$

Où  $e_{ij}$  est le tenseur de déformation

$l$ ,  $m$  sont les coefficients de lamé ils ne sont pas forcément constantes dans le milieu.

Dans notre cas nous allons prendre :  $l = cte$  et  $m = cte$ .

Après substitution des deux équations (1-34) et (1-35) dans l'équation (1-33) on trouve

$$(l + m) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + m \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + r f_i = r \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1-36)$$

L'équation (1-36) peut être écrite sous la forme :

$$(l + m) \nabla \nabla \bullet u + m \nabla^2 u + r f = r \mathfrak{R} \quad (1-37)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{(l + m)}{r} \text{graddiv}(u) + \frac{m}{r} \text{rotrot}(u) = 0 \quad (1-38)$$

$$\mathfrak{R} = \left( \frac{l + 2m}{r} \right) \nabla \nabla \bullet u + \frac{m}{r} \nabla \times \nabla \times u + f \quad (1-39)$$

L'équation (1-39) représente le cas général de la propagation de l'onde élastique dans un solide isotrope homogène (le terme homogène signifie que le corps a une masse volumique constante) on peut remarquer que cette équation est valable dans le cas des coordonnées rectangulaires pour l'étendre au cas des coordonnées généralisées, on a le tenseur de rotation qui s'écrit sous la forme :

$$w = \frac{1}{2} \nabla \times u \Rightarrow w_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1-40)$$

L'écriture de l'équation (1-38) en fonction du tenseur de rotation  $w$  nous donne :

Soit

$$\Delta = \nabla \cdot u = e_x + e_y + e_z = e_{kk} \quad (1-41)$$

Ou

$$(I + m) \nabla \Delta + m \nabla^2 u + r f = r \mathbb{R} \quad (1-43)$$

$$\text{Utilisant la propriété suivante : } \nabla^2 u = \nabla \nabla \cdot u - \nabla \times \nabla \times u \quad (1-44)$$

$$\text{Avec : } w = \frac{1}{2} \nabla \times u \quad (1-45)$$

Après substitution on trouve l'équation de propagation en fonction du tenseur de rotation sous la forme :

$$(I + 2m) \nabla \Delta - 2m \nabla \times w + r f = r \mathbb{R} \quad (1-46)$$

$$\mathbb{R} = \frac{I + 2m}{r} \nabla \Delta - 2 \frac{m}{r} \nabla \times w + f \quad (1-47)$$

Cette équation est valable dans le cas des coordonnées généralisées. Dans les deux systèmes différentiels des deux équations (1-39) et (1-47), les trois composantes des déplacements sont couplées, on veut d'obtenir des équations découplées, pour cela on définit un potentiel scalaire  $f$  et un potentiel vecteur  $y$  comme suit :

$$\text{Où } u = \nabla f + \nabla \times y \quad (1-48)$$

Etant donnée les relations suivantes :

$$\nabla y = 0, \quad \nabla \times (\nabla f) = 0, \quad \nabla \cdot (\nabla \times y) = 0$$

$$\text{Et } f = \nabla g + \nabla \times B \quad \text{Avec } \nabla \cdot B = 0$$

La substitution de l'équation (1-48) dans l'équation (1-39) nous donne :

$$(I + m) \nabla \nabla \cdot (\nabla f + \nabla \times y) + m \nabla^2 (\nabla f + \nabla \times y) + \nabla g + \nabla \times B = r (\nabla f + \nabla \times y) \quad (1-49)$$

$$\nabla \left[ (l + 2m) \nabla^2 f + r g - r f \right] + \nabla \times \left[ m \nabla^2 \mathbf{y} + r B - r \mathbf{y} \right] = 0$$

$$(l + 2m) \nabla^2 f + r g = r f \quad (1-49)$$

$$m \nabla^2 \mathbf{y} + r B = r \mathbf{y} \quad (1-50)$$

On peut aussi écrire ces deux équations sous la forme:

$$r \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - (l + 2m) \nabla^2 f - r g = 0 \quad (1-51)$$

$$r \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial t^2} - m \nabla^2 \mathbf{y} - r B = 0 \quad (1-52)$$

Dans le cas où les forces extérieures sont nulles et en revenant à l'équation (1-39), on peut trouver deux termes :

$$\frac{l + 2m}{r} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}$$

Qui décrit une onde volumique longitudinale qui se propage avec une vitesse :

$$C_p = \sqrt{\frac{l + 2m}{r}} \quad (1-53)$$

Et le terme :

$$\frac{m}{r} \nabla \times \nabla \mathbf{u}$$

Qui correspond aux ondes volumiques transversales qui se propagent avec la vitesse :

$$C_s = \sqrt{\frac{m}{r}} \quad (1-54)$$

Le déplacement des ondes transversales s'effectue selon deux directions perpendiculaires à la direction de propagation, ce qui implique l'existence de deux états de polarisation possibles.

La vitesse de propagation des ondes de compression est supérieure à celle des ondes de cisaillement, elle sont détectées en premier et c'est pour cette raison qu'on les appelle ondes **P** (*Primary Waves*), les ondes de cisaillement sont aussi appelées ondes **S** car elle se propagent plus lentement que les ondes **P**, et sont détectées en second (*Secondary Waves*).

La décomposition de l'équation (1-39) ayant pour résultat de remplacer une équation vectorielle par une autre équation scalaire, le nombre de grandeurs décrivant la propagation de l'onde est augmenté d'une unité.

Aux trois composantes  $u_1, u_2, u_3$  du déplacement se substituent quatre fonctions  $f, y_1, y_2, y_3$ . Il est possible d'imposer une relation entre ces dernières, on a  $\nabla \bullet \mathbf{y} = 0$ . Il est aussi possible de décomposer le vecteur de déplacement en un vecteur sans divergence  $\mathbf{u}_s$  et un vecteur rotationnel  $\mathbf{u}_p$  avec  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_s$  (1-55)

$$\text{rot}(\mathbf{u}_p) = 0, \text{div}(\mathbf{u}_s) = 0$$

En reportant dans l'équation (1-39) et en faisant apparaître les vitesses  $C_s$  et  $C_p$ , on obtient deux équations semblables aux deux équations (1-51) et (1-52) qui sont :

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} - C_p^2 \nabla^2 u_p - g = 0 \quad (1-56)$$

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} - C_s^2 \nabla^2 u_s - B = 0 \quad (1-57)$$

Ces deux équations confirment l'indépendance de la propagation des deux composantes  $\mathbf{u}_s$  et  $\mathbf{u}_p$  avec les vitesses  $C_s$  et  $C_p$ .

Supposons que  $\hat{\mathbf{a}}$  est la direction de propagation de l'onde :

La propagation de l'onde longitudinale suivant une direction  $\hat{\mathbf{a}}$  entraîne une variation de la distance entre les plans parallèles qui contiennent les atomes si bien que le volume occupé par un nombre donné d'atomes varie, en conséquence le rotationnel du vecteur déplacement est nul ( $\text{rot}(\mathbf{u}_p) = 0$ ) mais pas sa divergence ( $\text{div}(\mathbf{u}_p) \neq 0$ ). Lors de la propagation d'une onde transversale, les atomes se déplacent perpendiculairement à  $\hat{\mathbf{a}}$ . Le glissement des plans parallèles ne donne lieu à aucune variation de volume.

Le Rotationnel du déplacement  $\mathbf{u}_s$  est différent de zéro ( $\text{rot}(\mathbf{u}_s) \neq 0$ ), mais sa divergence est nulle ( $\text{div}(\mathbf{u}_s) = 0$ ).

En concluant, un solide isotrope se décrit du point de vue de la propagation des ondes élastiques par deux sphères de rayons  $C_s$  et  $C_p$  ou de rayons  $\frac{1}{C_s}$  et  $\frac{1}{C_p}$ , schématisées sur la

figure I-1 :

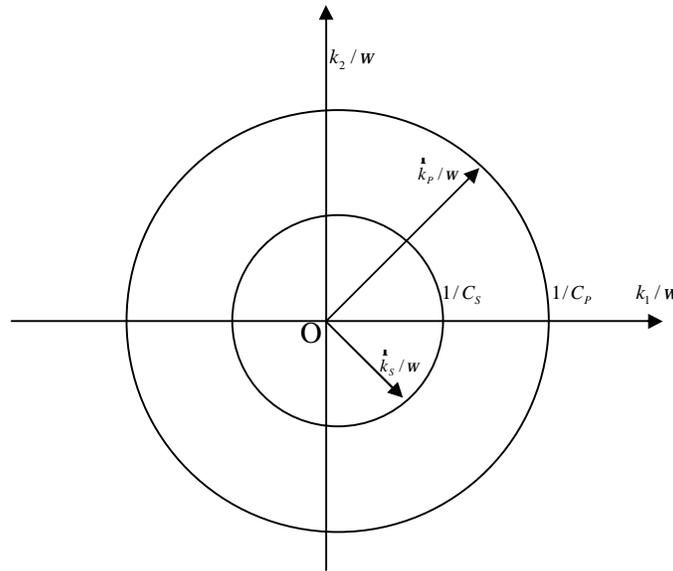


Fig.I-1 Schématisation de la propagation des ondes élastiques dans les solides isotropes  
Ces deux représentations sont équivalentes pour le cas isotrope, elles ne le sont pas pour un solide anisotrope.

Les deux équations (1-56) et (1-57) sont des équations d'onde à trois dimensions, où  $u_p$  représente une onde de compression puisque :  $(\text{div}(\mathbf{u}_p) \neq 0 = \Delta)$

Avec :

$$\Delta = \nabla \cdot \mathbf{u} = e_x + e_y + e_z = e_{kk} .$$

La vitesse de l'onde de compression  $C_p = \sqrt{\frac{l+2m}{r}}$ , est celle de l'onde  $u_s$  dans laquelle

n'interviennent que des glissements, la vitesse de cette dernière est :  $C_s = \sqrt{\frac{m}{r}}$ .

Les deux équations (1-56) et (1-57) qui régissent la propagation des ondes élastiques dans les milieux isotropes homogènes, présentent une difficulté pour les résoudre, notamment pour les cas 3D. Pour cette raison, on trouve dans ce domaine de la recherche un développement très avancé des méthodes numériques, pour connaître mieux le phénomène de la propagation des ondes, dans les prochains chapitres nous allons présenter une analyse mathématique et une autre numérique en appliquant la méthode des différences finies .

## 2.1 Introduction

Il est commun de distinguer deux types de problèmes associés à ces modèles : Les problèmes en temps (ou problèmes transitoire) et les problèmes en fréquences (ou problèmes harmonique). Dans le premier cas, le temps fait explicitement partie des variables de l'inconnue du problème et on s'intéresse alors à un problème d'évolution. Dans le second cas, la dépendance du temps est imposé a priori, par l'intermédiaire de la source par exemple, elle est supposé périodique dans le temps, et même harmonique on cherche une solution proportionnelle à  $\exp(i \omega t)$  où  $\omega > 0$  désigne la pulsation (on parle aussi de fréquence). Le temps n'intervient alors plus que par l'intermédiaire de cette fréquence, qui joue le rôle de paramètre, et l'inconnue recherchée est une fonction des seules variables spatiales. Ainsi l'équation des ondes donne naissance à l'équation de Helmholtz.

Il convient de souligner que ces deux types de problèmes bien qu'issus d'une même modélisation physique, ont des propriétés mathématiques radicalement différentes et nécessitent le développement de méthodes adaptées, toute fois il existe un point commun entre ces problèmes : l'existence d'une dimension caractéristique qu'on appelle la longueur d'onde. Cette dimension est la longueur sur la quelle, la solution recherchée varie substantiellement (typiquement, la période d'une solution périodique).

Dans le cas d'une propagation en milieu hétérogène, il conviendra de parler de plusieurs longueurs d'onde, celle-ci pouvant varier d'une région à une autre, sa connaissance a bien entendu une influence fondamentale sur les propriétés de la solution et donc sur le choix d'une méthode numérique.

## 2.2 Analyse mathématique

### 2.2.1 Régime Harmonique

Les problèmes de la propagation des ondes se classent en deux grandes catégories qui sont :

§ Les problèmes en temps (régime transitoire):

Trouver  $u : (x, t) \rightarrow u(x, t)$

Les problèmes en fréquence (régime harmonique) en cherchant la solution sous la forme  $u(x, t) = u(x, \omega) \exp^{-i \omega t}$  avec  $\omega > 0$  et la Fréquence et on aboutit à l'équation d'Helmholtz en régime établi.

$$-\nabla^2 u - \frac{\omega^2}{C^2} u = 0 \quad (2-1)$$

Dans notre étude la solution de l'équation de propagation proposée au chapitre 1 se fait en deux approches, analyse de la solution en régime harmonique et une autre de la solution exacte.

### 2.2.1.1 Analyse Par Ondes Planes

La propagation des ondes est supposé le long d'une membrane plane schématisée sur la figure (2-I) le mouvement des particules pour le cas 1D est définie par:

$$nr - ct = cte \quad (2-2)$$

Dans ce qui suit on suppose  $r, m, l$  étant des constantes strictement positives on prend l'équation générale de la propagation (1-36) écrite en notation indicielle :

$$(l + m) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + m \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + r f_i = r \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

On peut la réécrire aussi sous la forme suivante :

$$(l + m) u_{j,ji} + m u_{i,jj} + r f_i = r \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2-3)$$

La solution de l'équation (2-3) en trois dimensions est de la forme :

$$u = AF(nr - Ct) \quad (2-4)$$

Cette solution s'écrit en notation indicielle comme suit:

$$u_i = A_i F(n_k x_k - Ct) \quad (2-5)$$

Avec

$C$  : Vitesse de l'onde.

$n_i$  : La normale de l'onde.

$A_i$  : C'est un vecteur d'amplitude de l'onde.

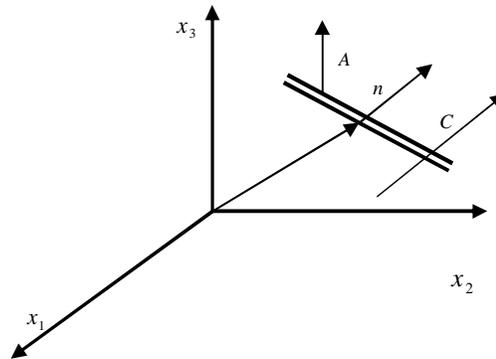


Fig.2-I Schématisation De La Propagation D'onde Dans Une Membrane

$$\text{On pose } j = n_k x_k - Ct \quad (2-6)$$

On appelle la phase de l'onde. La substitution de la solution (2-5) dans l'équation (2-3), ce qui nous donne:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i,j} = A_i \frac{\partial F}{\partial x_j} = A_i \frac{\partial F}{\partial j} \frac{\partial j}{\partial x_j} = A_i F' n_j \\ u_{i,ij} = A_i \frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2} = A_i \frac{\partial F}{\partial j} \frac{\partial F}{\partial j} \frac{\partial j}{\partial x_j} \frac{\partial j}{\partial x_j} \\ u_{i,ij} = A_i F'' \bullet n_j n_j \mathbf{L} \text{ avec } \mathbf{L} n_j \bullet n_j = 1 \\ u_{i,ij} = A_i F'' \\ u_{j,ij} = A_j F'' n_j n_i \\ \mathbf{L} = C^2 A_i F'' \end{array} \right. \quad (2-7)$$

On remplace les équations (2-7) dans (2-3) on trouve:

$$(1 + m) A_j n_j n_i + m A_i = r C^2 A_i \quad (2-8)$$

ou  $i, j = 1-3$

Cette équation représente l'équation générale de la propagation dans le cas des ondes planes avec les amplitudes  $A_1, A_2, A_3$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} i=1 \Rightarrow (1 + 2m - rC^2) A_1 = 0 \\ i=2 \Rightarrow (m - rC^2) A_2 = 0 \\ i=3 \Rightarrow (m - rC^2) A_3 = 0 \end{array} \right. \quad (2-9)$$

Ce système d'équations à trois inconnues nous permet de l'écrire sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} 1 + 2m - rC^2 & 0 & 0 \\ 0 & m - rC^2 & 0 \\ 0 & 0 & m - rC^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

Le déterminant de ce système d'équation s'écrit comme suite :

$$\det = (1 + 2m - rC^2)(m - rC^2)^2 = 0 \quad (2-11)$$

Donc le système d'équations (2-10) présente une solution seulement dans le cas où le déterminant  $\det \neq 0$ , nous avons les deux racines de l'équation (2-11) sont :

$$C_1 = C_p = \sqrt{\frac{I + 2m}{r}} \quad (2-12)$$

$$C_2 = C_s = \sqrt{\frac{m}{r}}$$

Ces deux vitesses représentent les vitesses des ondes transversales et longitudinales, ceci est le cas général pour la propagation des ondes planes dans un solide isotrope homogène.

Si on considère l'effet de traction sur cette membrane, nous avons deux cas:

**1<sup>er</sup> cas**  $u_i // n_i$  :

Considérons maintenant le cas où le déplacement  $u_i$  est parallèle à la normale d'onde  $n_i$ ,

$$\text{nous avons : } A_j n_j = A, n_i = \frac{A_i}{A} \quad (2-13)$$

Donc l'équation (2-8), peut être écrite sous la forme:

$$(I + 2m - rC^2)A_i = 0 \quad (2-14)$$

$$\text{Dans le cas où } u_i \text{ est parallèle à la normale de l'onde on a } \nabla \times u = 0 \quad (2-15)$$

Le vecteur de contraintes est:

$$t_i = S_{ij} n_j \quad (2-16)$$

Est on utilisant la relation contrainte-déformation et la relation déformation-déplacement on peut écrire le vecteur de contrainte sous la forme:

$$t_i = \{ I u_{k,k} d_{ij} + m(u_{i,j} + u_{j,i}) \} n_j \quad (2-17)$$

A partir de la formule (2-5) de  $u_i$ , et en faisant sortir les quantités de  $u_{k,k}$ ,  $u_{i,j}$ ,  $u_{j,i}$  et après substitution dans la relation (2-17), on trouve les équations suivantes :

$$t_i = \{ (I + m) A_k n_k n_i + m A_i \} F' \quad (2-18)$$

$$t_i = (I + 2m) A F' n_i \quad (2-19)$$

Cette équation montre que la traction est parallèle à la normale de l'onde, donc on peut conclure que dans le cas où le déplacement est parallèle à la normale de l'onde, la vitesse de propagation de cette dernière s'écrit:

$$C_1 = C_p = \sqrt{\frac{I + 2m}{r}} \quad (2-20)$$

Et la contrainte le long de l'onde est normale au front.

**2<sup>eme</sup> cas**  $u_i \perp n_i$  :

On considère que le déplacement est perpendiculaire à la normale de l'onde nous avons la condition  $(A_j n_j = 0)$  L'équation (2-8) devient  $(m - rC^2)A_i = 0$  dans ce cas on a :  $\nabla \bullet u = 0$

L'expression du vecteur de la contrainte peut être écrite sous la forme suivante:

$$t_i = mA_i F' \quad (2-21)$$

Cette équation montre que le vecteur de contrainte est perpendiculaire au front de l'onde, et la vitesse de propagation de l'onde dans ce cas est:

$$C_2 = C_s = \sqrt{\frac{m}{r}} \quad (2-22)$$

Et la contrainte de cisaillement est appliquée le long du front d'onde.

### 2.2.1.2 Problème En Fréquence

Dans le cas courant, les ondes planes peuvent être considérées comme des simples ondes harmoniques qui se propagent dans les milieux infinis, pour but de simplification des calculs est pour traiter ce phénomène, la solution de l'équation (1-39) en 3D est sous la forme:

$$\begin{aligned} u &= A \exp^{ik(x-Ct)} \\ v &= B \exp^{ik(x-Ct)} \\ w &= D \exp^{ik(x-Ct)} \end{aligned} \quad (2-23)$$

Où  $i$  est un nombre complexe.

$w$  La pulsation propre (rad/min).

$k$  Nombre d'ondes (1/long).

$C$  La vitesse de l'onde (m/min).

Avec:  $w = kC$

Et  $u, v, w$  les déplacements suivant  $(x, y, z)$  ou  $(x_1, x_2, x_3)$ .

L'équation (1-39) peut être écrite en coordonnées cartésiennes sous forme d'un système d'équations de trois lignes:

$$\begin{aligned} (I + m) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + m \nabla^2 u + r f_x &= r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ (I + m) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) + m \nabla^2 v + r f_y &= r \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ (I + m) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + m \nabla^2 w + r f_z &= r \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2-24)$$

En substituant les trois solutions précédentes dans le système (2-24), on trouve un système d'équations à trois inconnues  $A, B, D$  si  $f_i = 0$  :

$$\begin{aligned} k^2 \{(I + 2m) - rC^2\} A &= 0 \\ k^2 (m - rC^2) B &= 0 \quad \cdot \quad (2-25) \\ k^2 (m - rC^2) D &= 0 \end{aligned}$$

§ Dans le cas où  $C = C_p = \sqrt{\frac{I + 2m}{r}}$ , on a  $B = D = 0$ .

§ Dans le cas où  $C = C_s = \sqrt{\frac{m}{r}}$  on a  $A = 0$ .

Donc, on peut conclure pour le premier cas ( $A \neq 0$ ), le mouvement des particules est purement longitudinal, et pour le deuxième cas ( $A = 0$ ), le mouvement est purement transversal. Ces deux cas sont schématisés par les trois figures (2-II, 2- III et 2-IV (a, b)).

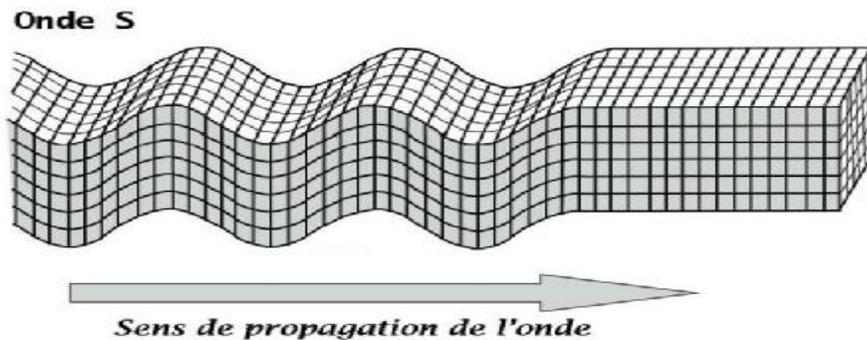


Figure 2-II : Mouvement relatif au passage d'une onde transversale.

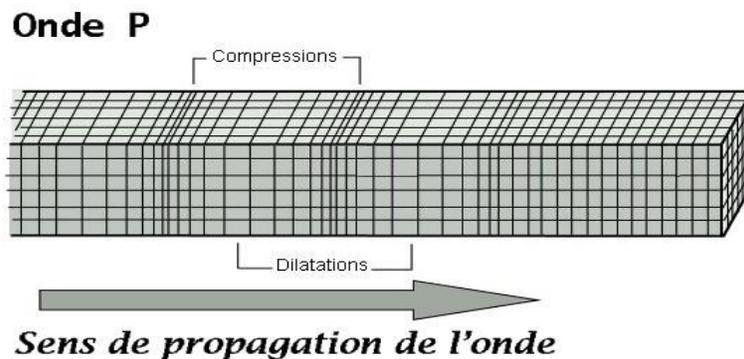


Figure 2-III : Mouvement relatif au passage d'une onde longitudinale.

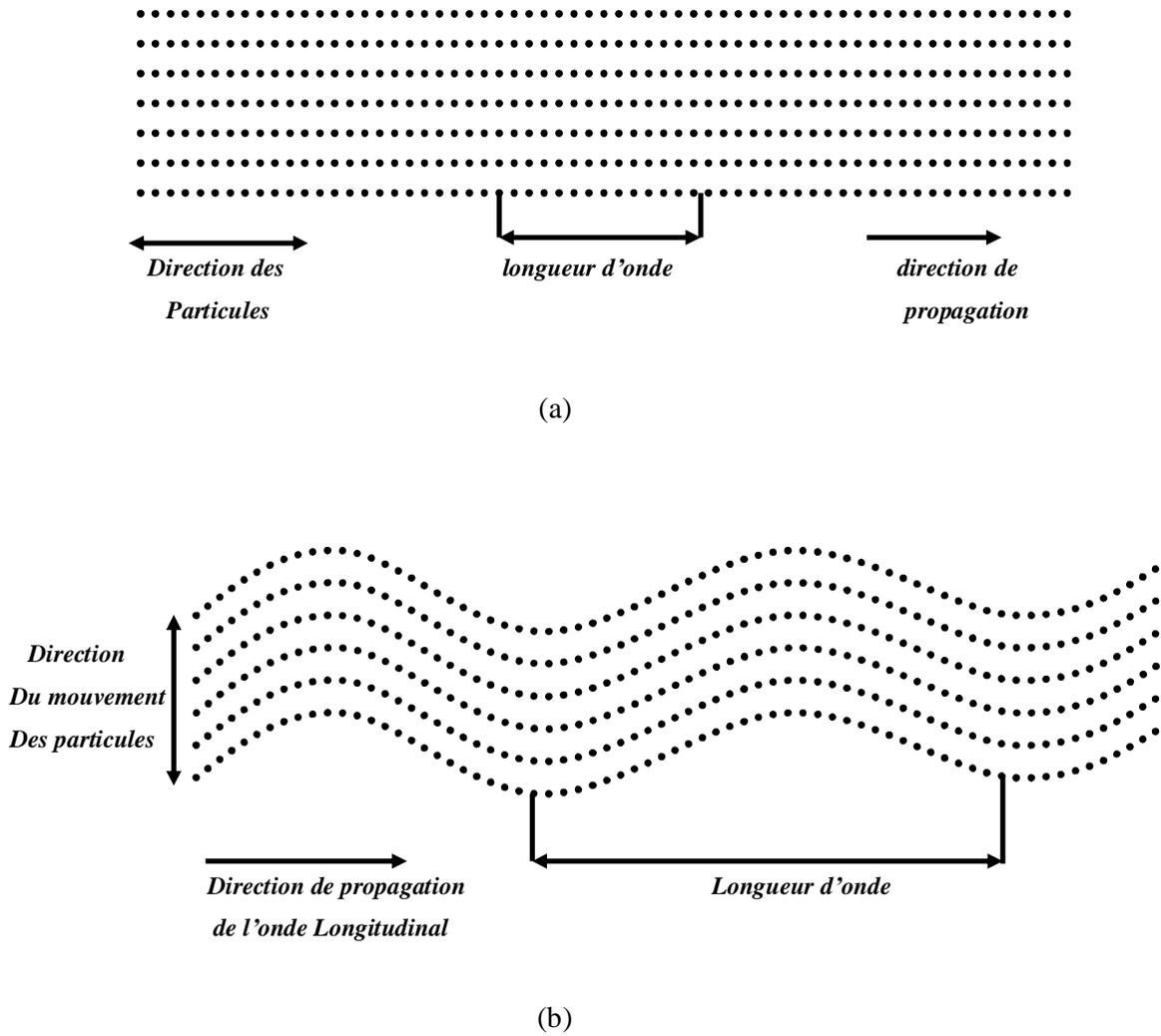


Figure.2- IV Direction Du mouvement Des particules:

(a) onde longitudinale;

(b) onde transversale.

**2.2.1.3 Ondes Planes Harmoniques et Analyse De Fourier**

Par définition les ondes planes harmoniques sont des fonctions de la forme

$$u(x,t) = u_0 \exp i(\omega t - kx) \tag{2-26}$$

Avec  $(k, \omega) \in \mathbb{R}^2$ , nous remarquons que l'équation de l'onde en 1D est une équation aux coefficients réels, mais nous avons considéré une solution  $u$  aux valeurs complexes, pour obtenir des solutions aux valeurs réels, il est nécessaire de prendre  $Re(u)$  qui est la partie réel du déplacement tandis que  $Im(u)$  est la partie imaginaire du déplacement.

On constate qu'en tout point:

$$|u(x,t)| = |u_0| \quad (2-27)$$

Où  $u_0$  désigne un nombre complexe quelconque, on dit qu'on a affaire à une onde d'amplitude  $u_0$ .

La fonction (2-26) définie, est oscillante en temps et en espace (voir figures (2-V)) et on définit pour cela :

Ø  $k$  est le nombre d'onde, la solution est périodique en espace avec une période:

$$I = \frac{2p}{|k|} \quad (2-28)$$

$I$  Est la longueur d'onde.

Ø  $w$  est la pulsation (ou fréquence) la solution est périodique en temps avec une période:

$$T = \frac{2p}{w} \quad (2-29)$$

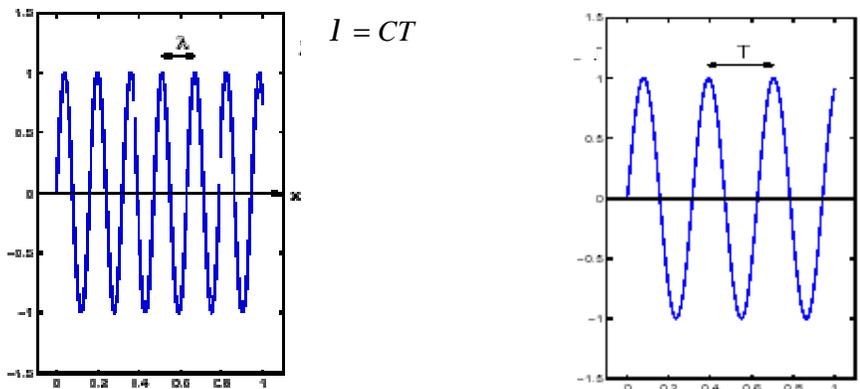


Fig. (2-V) Longueur d'onde et période.

L'équation (1-26) peut être écrite sous la forme

$$u(x,t) = \exp i w(t - \frac{x}{V}), V = \frac{w}{k} \quad (2-30)$$

On voit qu'il s'agit d'une onde se propageant à la vitesse:

$$V = \frac{w}{k} \quad (2-31)$$

Elle est dite également vitesse de phase, pour que (2-26) soit la solution à l'équation d'onde, on voit que  $w$  et  $k$  doivent satisfaire la condition de dispersion :

$$w^2 - c^2 k^2 = 0 \quad (2-32)$$

Considérons cette relation comme une équation en  $w$ , où  $k$  joue le rôle de paramètre, on voit que cette équation admet deux solutions réelles de la forme:

$$w = \pm ck \quad (2-33)$$

La vitesse de phase des ondes harmoniques est donc donnée par:

$$V = \pm c \quad (2-34)$$

Ce qui est traduit aussi par le fait que les oscillations spatiales et temporelles sont reliées par:

$$l = cT \quad (2-35)$$

On montre que la vitesse de phase  $V$  ne dépend pas de  $k$ , en d'autres termes toutes les longueurs d'ondes  $l$  se propagent à la même vitesse : On dira que l'équation des ondes est non dispersive. C'est ce qui fait qu'un signal de forme quelconque est supposé comme étant la superposition de signaux harmoniques de longueurs d'ondes différentes, et se propage sans déformation.

#### 2.2.1.4 Décomposition En Ondes Planes Harmoniques

Cherchons maintenant à résoudre l'équation d'ondes (1-56) ou (1-57) par la transformée de Fourier partielle en espace, posé avec les conditions de Cauchy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2 \nabla^2 u &= 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \quad x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= u_1(x) \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2-36)$$

Avec:  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  pour le cas 1D

On va aussi montrer que la solution  $u(x, t)$  peut se réécrire comme une superposition d'ondes planes harmoniques.

Nous utiliserons ici la transformation de Fourier  $F$  comme un outil de calcul, celle que nous choisissons est définie dans l'espace  $L^1(\mathbb{R})$  par:

$$u(x) \in L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \hat{u}(k) = F(u(k)) = \int u(x) \exp(-ikx) dx \quad (2-37)$$

La transforme de Fourier inverse est :

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{u}(k) \exp(ikx) dk \quad (2-38)$$

Pour notre cas la transformée de Fourier de  $u(x, t)$ , la solution de l'équation d'onde

(2-36) est:

$$\hat{u}(x,t) = \int u(x,t) \exp(-ikx) dx \quad (2-39)$$

Avec:  $k \in$

On pourra donc tirer  $u$  à partir de  $\hat{u}$  à l'aide de la formule :

$$u(x,t) = \frac{1}{2p} \int \hat{u}(k,t) \exp(ikx) dk \quad (2-40)$$

A partir de la définition (2-39) et de l'équation d'ondes (2-36), on voit que, pour chaque  $k \in$  , la fonction  $t \rightarrow \hat{u}(k,t)$  est une solution de l'équation différentielle ordinaire:

$$\frac{d^2 \hat{u}}{dt^2} + c^2 k^2 \hat{u} = 0 \quad (2-41)$$

À laquelle il convient d'ajouter les conditions initiales:

$$\begin{aligned} \hat{u}(k,0) &= \hat{u}_0(k) \\ \frac{d\hat{u}}{dt}(k,0) &= \hat{u}_1(k) \end{aligned} \quad (2-42)$$

La solution des équations (2-41) et (2-42) est :

$$\hat{u}(k,t) = \hat{u}_0(k) \cos(ckt) + \hat{u}_1(k) \frac{\sin(ckt)}{ck} \quad (2-43)$$

Par transformation de Fourier inverse, nous obtenons:

$$u(x,t) = \frac{1}{2p} \int \left( \hat{u}_0(k) \cos(ckt) + \hat{u}_1(k) \frac{\sin(ckt)}{ck} \right) \exp(ikx) dk \quad (2-44)$$

Pour faire le lien avec les ondes planes nous pouvons réécrire (2-43) sous la forme :

$$\begin{aligned} \hat{u}(k,t) &= \hat{u}^+(k,t) + \hat{u}^-(k,t) \\ \hat{u}^+(k,t) &= a^+(k) \exp(-ickt) \\ \hat{u}^-(k,t) &= a^-(k) \exp(+ickt) \end{aligned} \quad (2-45)$$

Avec:

$$\begin{aligned} a^+(k) &= \frac{1}{2} (\hat{u}_0(k) + i \frac{\hat{u}_1(k)}{ck}) \\ a^-(k) &= \frac{1}{2} (\hat{u}_0(k) - i \frac{\hat{u}_1(k)}{ck}) \end{aligned} \quad (2-46)$$

A partir de la Formule de l'inverse du transformer de Fourier et l'équation (2-45), nous obtenons alors :

$$u(x, t) = u^+(x, t) + u^-(x, t)$$

ou

$$u^+(x, t) = \frac{1}{2p} \int a^+(h) \exp[ik(w - ct)] dk \quad (2-47)$$

$$u^-(x, t) = \frac{1}{2p} \int a^-(h) \exp[ik(w + ct)] dk$$

On peut dire que la solution  $u$  s'écrit comme la superposition de deux ondes ( $u^+$  et  $u^-$ ), chacune d'entre elles apparaissant comme la superposition (sur tous les nombres d'ondes réel  $k$ ) d'ondes planes harmoniques dont les amplitudes sont respectivement  $\frac{a^+(k)}{2p}$  et  $\frac{a^-(k)}{2p}$  variant avec  $k$ . Elles sont déterminées par les données initiales. Il

faut essentiellement retenir de cette observation que les ondes harmoniques constituent dans le cas d'un milieu homogène infini, un système fondamental de solutions (en quelque sorte une base de solutions), à partir des quelles on peut reconstruire n'importe quelle solution par une simple superposition.

Nous avons établi ci-dessous (la solution d'équation d'ondes d'après la formule de d'Alembert) un résultat intermédiaire important qui exprime que la solution de l'équation d'onde homogène qui s'écrit:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2-48)$$

Se décompose sous la forme:

$$u(x, t) = u^+(x, t) + u^-(x, t) \quad (2-49)$$

Avec, pour la première partie:

$$u^+(x, t) = f(x - ct) \quad (2-50)$$

Est une onde progressive se propageant à la vitesse  $c$  dans la direction  $x > 0$  :

$$u^+(x + L, t) = u^+(x, t - \frac{L}{c}) \quad (2-51)$$

(Le graphe de  $x \rightarrow u(x, t + T)$  se déduit de celui de  $x \rightarrow u(x, t)$  par une simple translation de  $L = cT$  vers la droite). Une telle solution est constante sur les droites  $x - ct = Cte$ . Cette famille de droites constitue ce qu'on appelle la première famille de courbes caractéristiques associées à l'équation des ondes.

Et pour la deuxième partie:

$$u^-(x, t) = g(x + ct) \quad (2-52)$$

Elle représente une onde progressive se propageant à la vitesse  $c$  dans la direction  $x < 0$  :

$$u^-(x-L, t) = u^-(x, t - \frac{L}{c}) \quad (2-53)$$

(Le graphe de  $x \rightarrow u(x, t+T)$  se déduit de celui de  $x \rightarrow u(x, t)$  par une simple translation de  $L = cT$  vers la droite). Une telle solution est constante le long des droites  $x + ct = Cte$ . C'est ce qu'on appelle la seconde famille de courbes caractéristiques associées à l'équation des ondes.

## 2.3 Solution Exacte De L'équation De La Propagation d'onde

### 2.3.1 Cas 1D Formule De D'Alembert

Si on prend l'équation générale de la propagation en 3D (1-36) dans le cas 1D, pour  $i = j = 1$  on peut écrire cette dernière sous la forme suivante:

$$(1 + 2m) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r f = r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2-54)$$

La solution de l'équation (2-47) est donnée par:

$$u(x, t) = h(x - Ct) + g(x + Ct) \quad (2-55)$$

Si on suppose une vitesse constante et une source nulle, et si on s'intéresse au problème de Cauchy défini par le système d'équations suivant:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f \\ u(x, 0) &= u_0(x) \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= u_1(x) \end{aligned} \quad (2-56)$$

La solution du problème (2-56) pour  $f = 0$ , est donnée par la formule de d'Alembert suivante :

$$u(x, t) = \frac{u_0(x + Ct) + u_0(x - Ct)}{2} + \frac{1}{2C} \int_{x-Ct}^{x+Ct} u_1(s) dx \quad (2-57)$$

#### 2.3.1.1 Démonstration De La Formule De D'Alembert

Pour le cas  $f = 0$  l'idée est d'utiliser l'identité:

$$\partial_t^2 - C^2 \partial_x^2 = (\partial_t - C \partial_x)(\partial_t + C \partial_x) \quad (2-58)$$

C'est-à-dire, de supposer que l'équation des ondes est constituée de deux équations de transport se propageant en sens inverses, et d'introduire des variables qui permettent l'intégration directe. Faisons le changement de variable:

$$\partial_x \rightarrow \partial_t + C\partial_x, \quad \partial_h \rightarrow \partial_t - C\partial_x, \quad \begin{matrix} x = x - Ct \\ h = x + Ct \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = \frac{x+h}{2} \\ t = \frac{x-h}{2C} \end{matrix} \quad (2-59)$$

Et  $u(x,t)$  peut être écrit comme suit:

$$U(x,h) = u(x,t)$$

On aura donc:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{2C} (\partial_t + C\partial_x)u \\ \frac{\partial U}{\partial h} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial h} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial h} = -\frac{1}{2C} (\partial_t - C\partial_x)u \end{aligned} \quad (2-60)$$

Et l'équation d'ondes devient simplement :

$$\frac{\partial^2 U(x,h)}{\partial x \partial h} = 0 \quad (2-61)$$

Les conditions initiales en  $t = 0$  deviennent des conditions en  $x = h$ :

$$\begin{aligned} U(x,x) &= U_0(x) \\ \frac{\partial U(x,x)}{\partial h} - \frac{\partial U(x,x)}{\partial x} &= \frac{U_1(x)}{C} \end{aligned} \quad (2-62)$$

En intégrant l'équation (2-52) par rapport à  $x$  et  $h$  on obtient la formule suivante :

$$\frac{\partial U(x,h)}{\partial h} = G(h) \quad (2-63)$$

$$\frac{\partial U(x,h)}{\partial x} = F(x) \quad (2-64)$$

Et la deuxième condition initiale devient comme suit :

$$G(x) - F(x) = \frac{U_1(x)}{C} \quad (2-65)$$

En intégrant l'équation (2-36) par rapport à  $h$  entre  $h_0 = x$  et  $h$ , on trouve :

$$U(x,h) - U(x,x) = \int_x^h G(s) ds \quad (2-66)$$

Ce qui se réécrit par rapport à la première condition initiale  $u(x,0) = u_0(x)$  :

$$U(x,h) - u_0(x) = \int_x^h G(s) ds \quad (2-67)$$

De même, en intégrant (2-64) par rapport à  $x$ , entre  $x_0 = h$  et  $x$  :

$$U(x,h) - U(h,h) = -\int_x^h F(s) ds \Rightarrow U(x,h) - u_0(h) = -\int_x^h F(s) ds \quad (2-68)$$

Et en sommant les deux équations (2-68) et (2-67), on trouve la formule de d'Alembert

$$2U(x,h) = u_0(x) + u_0(h) + \int_x^h \frac{u_1(s)}{C} ds \Rightarrow u(x,t) = \frac{u_0(x-Ct) + u_0(x+Ct)}{2} + \frac{1}{2C} \int_{x-Ct}^{x+Ct} u_1(s) ds \quad (2-69)$$

### 2.3.1.2 Exemple D'application

#### Ø Application De La Formule De D'Alembert

Prenons l'exemple suivant avec les conditions initiales de Cauchy:

$$u_0(x) = j(x) \quad \text{Avec } j(x) = (1-x^2)^2 \text{ si } |x| < 1 \quad \text{sinon } j(x) = 0$$

$$u_1(x) = 0$$

La solution de l'équation d'ondes d'après la formule de d'Alembert est donnée par :

$$u(x,t) = \frac{u_0(x-Ct) + u_0(x+Ct)}{2} + \frac{1}{2C} \int_{x-Ct}^{x+Ct} u_1(x) dx + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{|y-x| < c(t-x)} f(y,x) dy$$

On a  $x = x + ct$

$$\text{La source est nulle et } u_1(x) = 0, \text{ donc } u(x,t) = \frac{1}{2} [u_0(x+ct) + u_0(x-ct)]$$

Après intégration on trouve:

$$u(x,t) = 1 - 2x^2 + x^4 + 6x^2 c^2 t^2 + c^4 t^4 - 2c^2 t^2$$

Pour des données numériques de la vitesse ( $C = 1$ ) et le temps, la solution pour chaque instant est :

$$t = 0 \quad \text{En a } u(x,0) = (x^2 - 1)^2$$

$$t = 1 \quad \text{En a } u(x,1) = x^2(x^2 + 4)$$

### 2.3.2 Cas 3D Equation D'onde Au Second Membre

#### 2.3.2.1 Introduction

Les équations de propagation des ondes dans les solides (milieu continu) sont les résultats de certaines conditions imposées, par exemple les déplacements et les vitesses de propagations. Jusqu'à maintenant, nous avons considéré que le cas où la source est nulle (forces extérieures nulles). Dans ce paragraphe nous allons tenir compte des forces extérieures agissant sur le solide. La solution de ce type d'équations présente un domaine très riche d'investigation, plusieurs savants ont contribué pour la solution de ce problème tel

que Both poisson (1820), Kirchhoff (1883). Avec les conditions initiales de Cauchy, Kirchhoff présente une solution générale de ce problème, si on considère un volume  $V$  d'un matériau lié a une surface, comme il schématisé sur la figure (2-IV), La solution de l'équation:

$$\frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial t^2} - C^2 \nabla^2 f(x, y, z, t) = f \tag{2-70}$$

Dans le cas général est donnée par la formule Kirchhoff suivante :

$$f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t) = \frac{1}{4pC^2} \int_v \frac{1}{r} [f] dv + \frac{1}{4p} \int_s \left( \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial f}{\partial n} \right] - [f] \frac{\partial r^{-1}}{\partial n} + \frac{1}{Cr} \frac{\partial r}{\partial n} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right] \right) ds \tag{2-71}$$

Avec:

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial n} \right] [f], \left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right], \text{ sont des termes qui sont calculés à l'instant } t = t - r/C .$$

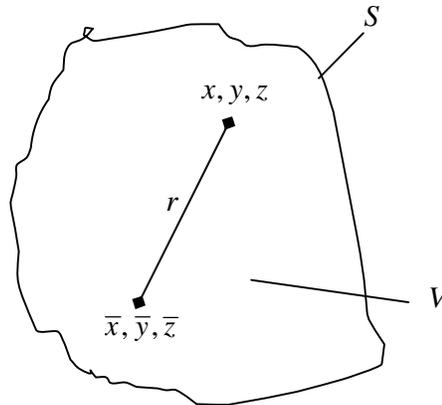


Fig.2-VI Schématisation D'un Solide Pour La Présentation Du Solution De Kirchhoff

### 2.3.2.2 Application de la transformer de Fourier en 3D

La solution proposé par Kirchhoff est généralement difficile à résoudre l'intégrale dans le cas tridimensionnel, pour cela on trouve une très grande application de la transformée de Fourier pour ce genre de problèmes.

Introduisons la transformée de Fourier du 4<sup>eme</sup> ordre qui est définie par :

$$\bar{\Phi}(k_1, k_2, k_3, w) = \frac{1}{4p^2} \int_{v_4} \Phi(x_1, x_2, x_3, t) \exp \{ i(k_p x_p + wt) \} dv_4 \tag{2-72}$$

Avec :

$$p = 1, 2, 3 \text{ et } dv_4 = dx_1 dx_2 dx_3 dt$$

L'inverse de la transformée de Fourier est donnée par:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4p^2} \int_{\bar{v}_4} \bar{\Phi}(k_1, k_2, k_3, w) \exp\{-i(k_p x_p + wt)\} d\bar{v}_4 \quad (2-73)$$

$$d\bar{v}_4 = dk_1 dk_2 dk_3 dt \quad (2-74)$$

Le symbole  $t$ , correspond aux coordonnées spatiales, qui est définie par :

$$t = c_1 t$$

En appliquant la formule de la transformée de Fourier à l'équation de propagation d'ondes (2-3) nous allons obtenir l'équation caractéristique suivante:

$$(I + m)k_p x_p \bar{u}_p + mk_q k_q \bar{u}_p - rc_p^2 w \bar{u}_p = r f_p \bar{f}_p \quad (2-75)$$

Où le temps  $t$  est remplacé par  $t = \frac{t}{c_1}$ , le déterminant de cette équation est donné par

$$\Delta = [(I + 2m)g^2 - rc_1^2 w^2] (mg^2 - rc_1^2 w^2) \quad (2-76)$$

Et

$$g^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \quad (2-77)$$

La solution de l'équation pour  $p = 1$  est:

$$\bar{u}_1 = (mg^2 - rc_1^2 w^2) \left[ ((I + 2m)g^2 - rc_1^2 w^2) r f_1 \bar{f}_1 - (I + m)k_1 (r f_p \bar{f}_p) \right] / \Delta \quad (2-78)$$

La solution générale de l'équation peut être trouvée facilement en remplaçant les indices de chacun des paramètres  $\bar{f}_1, k_1$  par  $p$ , Posons:

$$b^2 = \frac{I + 2m}{m} \quad (2-79)$$

Nous pouvons écrire

$$\bar{u}_p = \frac{b^2 (g^2 - w^2) \bar{f}_p - (b^2 - 1) k_p k_q \bar{f}_q}{c_1^2 (g^2 - w^2) (g^2 - b^2 w^2)} \quad (2-80)$$

En appliquant l'inverse de la transformée de Fourier à cette dernière équation on trouve la solution générale de l'équation d'ondes en 3 D:

$$u_p = \frac{1}{4p^2} \int_{\bar{v}_4} \frac{b^2 (g^2 - w^2) \bar{f}_p - (b^2 - 1) k_p k_q \bar{f}_q}{c_1^2 (g^2 - w^2) (g^2 - b^2 w^2)} \exp\{-i(k_r x_r + wt)\} d\bar{v}_4 \quad (2-81)$$

Avec:

$$p = 1, 2, 3$$

$$q = 1, 2, 3$$

Cette équation est la solution générale de l'équation d'ondes en trois dimensions

Pour le cas bidimensionnel, la troisième composante de  $f_q$  est nulle c-à-d  $f_3 = 0$  et tous les facteurs entrant dans la solution, sont fonctions de  $x_1, x_2$ , et la transformée de Fourier dans l'espace, nous donne la solution en deux dimensions comme suit :

$$u_a = \frac{1}{(2p)^{\frac{3}{2}} \sqrt{v_3}} \int \frac{b^2 (g^2 - w^2) \bar{f}_a - (b^2 - 1) k_a k_h \bar{f}_h}{c_1^2 (g^2 - w^2) (g^2 - b^2 w^2)} \exp\{-i(k_h x_h + wt)\} d\bar{v}_3 \quad (2-82)$$

Avec :

$$g^2 = k_1^2 + k_2^2 \text{ et } h = 1, 2$$

Si on prend  $x = x_1, y = x_2, u = u_1, v = u_2$  et si en plus  $f_y = 0$  on peut écrire la solution en deux dimensions sous la forme suivante :

$$u = \frac{1}{c_1^2 (2p)^{\frac{3}{2}} \sqrt{v_3}} \int \frac{(b^2 (k^2 + h^2 - w^2) - (b^2 - 1) k^2) \bar{f}_x}{(k^2 + h^2 - w^2) (k^2 + h^2 - b^2 w^2)} \exp\{-i(kx + hy + wt)\} dv_3 \quad (2-83)$$

$$v = \frac{-(b^2 - 1)}{c_1^2 (2p)^{\frac{3}{2}} \sqrt{v_3}} \int \frac{kh}{(k^2 + h^2 - w^2) (k^2 + h^2 - b^2 w^2)} \bar{f}_x \exp\{-i(kx + hy + wt)\} dv_3 \quad (2-84)$$

### 2.3.2.3 Application De La Fonction De Green (Solution Élémentaire) Cas 3D

L'objectif de ce paragraphe est de montrer que, dans un milieu homogène infini, il est relativement facile de calculer la solution de façon quasi-explicite, la fonction de Green sert également à représenter la solution du problème de propagation d'ondes avec le second membre, on appelle aussi cette solution la solution élémentaire.

Nous considérons l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f \\ u(x, 0) &= u_0(x) \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= u_1(x) \end{aligned}$$

Pour ( $C > 0$ ), nous résolvons ce problème par la transformation de Fourier en espace, comme présenté dans le paragraphe ci-dessus. Après l'application de la transformation de Fourier au système d'équations précédent, on aboutit à l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{u}(k, t)}{dt^2} + C^2 |k|^2 \bar{u}(k, t) &= \bar{f}(k, t) \\ \bar{u}(k, 0) &= \bar{u}_0(k) \\ \frac{\partial \bar{u}(k, 0)}{\partial t} &= \bar{u}_1(k) \end{aligned} \quad (2-85)$$

Avec:

$$|k|^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$$

La solution du système d'équations s'écrit sous la forme :

$$\bar{u}(k, t) = \bar{u}_0(k) \cos(C|k|t) + \bar{u}_1(k) \left[ \frac{\sin(C|k|t)}{C|k|} \right] + \int_0^t \frac{\sin(C|k|t-s)}{C|k|} \bar{f}(k, s) ds \quad (2-86)$$

Introduisons alors la fonction définie par :

$$\bar{G}(k, t) = \frac{\sin(C|k|t)}{C|k|} \quad (3-87)$$

Donc, il est facile d'écrire l'équation (2-86) sous la forme suivante :

$$\bar{u}(k, t) = \frac{d}{dt} (\bar{G}(k, t) \bar{u}_0(k)) + \bar{G}(k, t) \bar{u}_1(k) + \int \bar{G}(k, t-s) \bar{f}(k, s) ds \quad (4-88)$$

En appliquant la transformation de Fourier inverse à l'expression de  $\bar{G}(k, t)$ , on peut écrire :

$$G(x, t) = F^{-1}(\bar{G}(k, t))$$

Et en utilisant les propriétés de transformation de Fourier par rapport la convolution\*, on a alors:

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int G(x-y, t) u_0(y) dy \right] + \int G(x-y, t) u_1(y) dy + \int_0^t \int G(x-y, t-s) f(y, s) dy ds \quad (4-89)$$

Elle est la solution générale de l'équation d'onde avec le deuxième membre en 3D .

### 2.3.2.4 Application De La Fonction De Green Pour Le Cas 1D

On considère le problème définie par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f \\ u(x, 0) &= 0 \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 0 \end{aligned} \quad (4-90)$$

L'application de la formule (4-89) pour ce type de problème nous permet d'écrire  $u$  sous la forme :

$$u(x,t) = \int_0^t \int G(x-y, t-s) f(y,s) dy ds \quad (4-91)$$

Si on considère que:

$$G(x,t) = \frac{1}{2C}, \text{ si } x \in [-Ct, +Ct] \quad (4-92)$$

$$G(x,t) = 0, \text{ si } |x| > Ct$$

Et si on a une source de la forme:

$$f(x,t) = 1, \text{ si } |x| < C^*t, \quad f(x,t) = 0, \text{ si } |x| > C^*t \text{ avec } C^* > 0$$

On peut à partir de la formule générale (4-91) obtenir l'expression explicite de la solution  $u$  du problème, on a donc :

$$u(x,t) = \frac{1}{2C} \int_0^t \int_{D(x,t)} f(y,s) dy ds$$

Cas où  $C^* < C$  la solution est donnée par:

$$u(x,t) = \frac{1}{2C} \frac{C^* C t^2 - x^2}{(C + C^*)}, \text{ si } |x| \leq C^* t$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2C} \frac{C^* (Ct - |x|)^2}{(C^2 - (C^*)^2)}, \text{ si } C^* t \leq |x| \leq Ct \quad (4-93)$$

$$u(x,t) = 0, \text{ si } |x| \geq Ct$$

Le graphe de la fonction est donc une réunion d'arcs de parabole, comme le montre la figure ci-dessous.

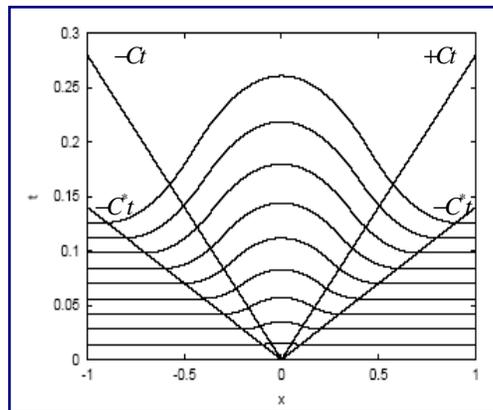


Fig. (2-VII) la solution d'après la fonction de Green pour  $C^* = 0.5$  et  $C = 1$

### 3.1 Introduction

Les premières contributions de l'analyse numérique d'équations d'ondes remontent à moins de 40 ans. Le développement du calcul intensif pour la propagation des ondes a débuté dans les années 70 sous l'impulsion de l'industrie pétrolière. Plusieurs travaux ont été fait dans ce domaine on cite à titre d'exemple :

Ø K. S. Yee. Numerical solution of initial boundary value Problems involving Maxwell's equations (1966)

Ø J. Lysmer, B.L. Kuhlmeyer. Finite dynamic model for Infinite media (1969)

Ø R.M. Alford, K.R. Kelly and D.M. Boore. Accuracy of finite Difference modelling of the acoustic wave equation (1974).

Ces équations sont modélisées par des équations relativement simples (Systèmes hyperboliques linéaires de premier ou de second ordre). Ces équations cachent cependant, des phénomènes qui peuvent être très complexes et de natures très variées (Propagation, réflexion - transmission, diffraction, résonances, Guidage...).

Le domaine de la simulation numérique de ces équations est un Champ de recherche très actif en physique, en mathématiques et en méthodes numériques. Les domaines d'application industriels des phénomènes de propagation d'ondes ont un très grande champ d'application tel que :

- Ø Secteur Pétrolier.
- Ø Secteur Aéronautique et Spatial.
- Ø Secteur Automobile.
- Ø Secteur Militaire.
- Ø Secteur Médical (Imagerie).
- Ø Secteur Télécommunications.
- Ø Secteur Energie.
- Ø Secteur Composants.

La résolution du système d'équations (1-51), (1-52) peut se faire par différentes méthodes numériques. La méthode la plus utilisée est celle des différences finies d'ordre 2 de type saute-mouton (yée), cette méthode a des limites d'utilisation dans le traitement des milieux hétérogène, le développement actuel est d'aboutie a des méthode plus performants tel que :

- Ø Méthodes des différences finis d'ordre élevé

- Ø Méthode d'éléments finis d'ordre élevé.
- Ø Méthode des volumes finis et Galerkin discontinue.
- Ø Traitement des potentiels retardés.
- Ø Méthode des domaines fictifs.
- Ø Raffinement de maillage et hybridation.
- Ø Couplage multi physique.
- Ø Développement des méthodes approchées.

Dans notre étude nous avons pris deux cas, premièrement le cas unidimensionnel et en deuxième le cas bidimensionnel, pour cela nous avons utilisé la méthode des différences finies d'ordre 2 puisqu'il s'agit d'un cas simple (milieux homogènes isotropes avec une source nulle).

### 3.2 Cas 1 D - schémas aux différences finies

#### 3.2.1 Discrétisation de l'équation d'onde

Nous nous intéressons dans un premier temps au cas unidimensionnel. Notre objectif est de faire une discrétisation de l'équation de propagation (1-49) avec un schéma aux différences finies en espace et en temps, cette dernière doit être stable et convergente. On prend l'équation (1-49) avec les conditions initiales de Cauchy et une vitesse de propagation constante. On introduit un découpage en temps  $\Delta t$  avec un pas du temps,  $t^n = n\Delta t$ . Pour la discrétisation en espace on prend un maillage régulier sur un domaine I, de pas  $h = \Delta x$  constitué de segments  $[x_j, x_{j+1}]$ ,  $j = 1 \dots N$ ,  $I = [a, b]$ ,  $x_j = a + (j-1)h$ .

Avec:

$$h = \frac{b-a}{N}$$

L'application de cette méthode doit satisfaire les conditions suivantes:

- Avec la condition de stabilité du schéma  $(C \cdot dt / dx) < 0$ .
- Absorption des ondes incidentes normale.
- La méthode a un caractère explicite en temps du schéma.

On utilise le schéma explicite centré au point X pour le calcul du point O, comme il est illustré dans la figure (3-I), on a l'équation (1-36) écrite en dimension 1 sous la forme suivante :

$$(1 + 2m) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r f = r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3-1)$$

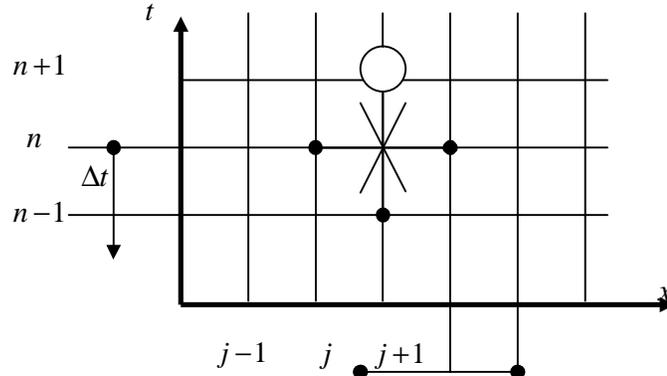


Fig.3-I Schémas aux différences finis pour le cas unidimensionnel.

Pour une source nulle l'équation devient comme suit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) &= F(x) \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= u_1(x) = g(x) \end{aligned} \quad (3-2)$$

Où la vitesse  $C$  peut être de l'onde transversale ou longitudinale.

Après la discrétisation totale en temps et en espace de l'équation (3-1), cette dernière devient comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - C^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} &= 0 \\ u_j^{n+1} &= 2 \left( 1 - \left( \frac{C\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right) u_j^n + \left( \frac{C\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) - u_j^{n-1} \end{aligned} \quad (3-3)$$

Les conditions initiales peuvent être écrites après discrétisation :

$$\begin{aligned} u_j^0 &= u_0(x) \\ \frac{1}{2\Delta t} (u_j^1 - u_j^{-1}) &= u_1(x) \end{aligned} \quad (3-4)$$

La discrétisation totale de ce problème donne un système d'équations à résoudre avec pour inconnu  $u_j^{n+1}$  :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= 2 \left( 1 - \left( \frac{C\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right) u_j^n + \left( \frac{C\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) - u_j^{n-1} \\ u_j^0 &= u_0(x) = F_j \\ u_j^1 &= -u_j^{-1} + 2 \left( 1 - \left( \frac{C\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right) F_j + \left( \frac{C\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (F_{j+1} + F_{j-1}) \\ 2\Delta t G_j &= u_j^1 - u_j^{-1} \end{aligned} \quad (3-5)$$

### 3.3 Simulation Numérique De L'équation D'onde 1D

#### 3.3.1 Condition De Cauchy Avec Vitesse Initiale Nulle (Régime Etabli)

Sur les figures (I, II, III), on présente les résultats issus de cette simulation, on trace la norme du déplacement en fonction de  $x$  calculée en plusieurs instants, entre  $t = 0$  et  $t = 12$ .

On impose des conditions initiales de Cauchy de la forme suivante :

$$u_0(x) = \left[ \frac{(1 - ((x-6)^2))}{4} \right]^3 \text{ si } 4 < x < 8 \quad (3-6)$$

$$\text{si...non...} u_0(x) = 0$$

On suppose que  $u_1(x) = 0$  avec une source nulle  $f = 0$ , pour des vitesses de propagation données longitudinales et transversales pour différents matériaux. Le problème est posé sur un segment de  $[0, 15]$ , les résultats sont présentés pour  $N = 500$ ,  $dx = 0.024$ ,  $dt = 0.002$

Nous allons voir l'effet des différentes valeurs de la vitesse sur la propagation de l'onde avec les conditions aux limites de Cauchy ci-dessus et on trace le déplacement en fonction de  $x$  pour plusieurs instants.

##### 3.3.1.1 Premier Cas La Vitesse De L'onde $c = 0.02$

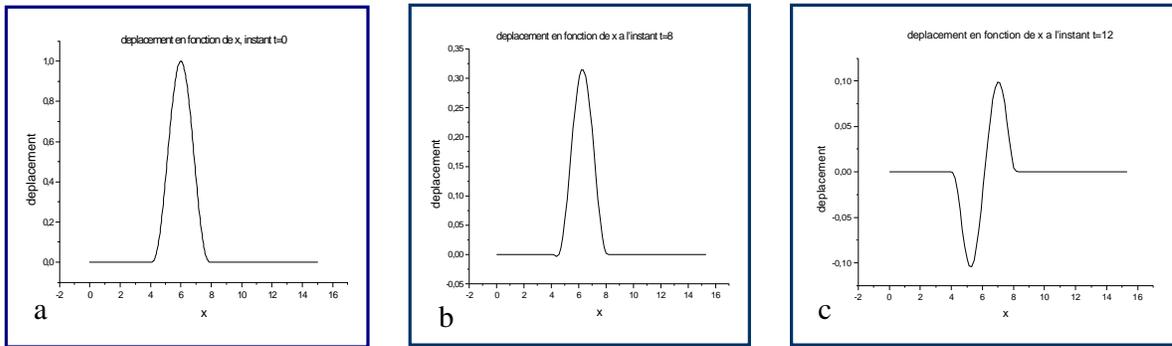


Fig.3-II : le déplacement en fonction de  $x$  en plusieurs instants pour une vitesse  $c = 0.02$

3.3.1.2 Deuxième Cas Pour Une Vitesse  $c = 0.5$

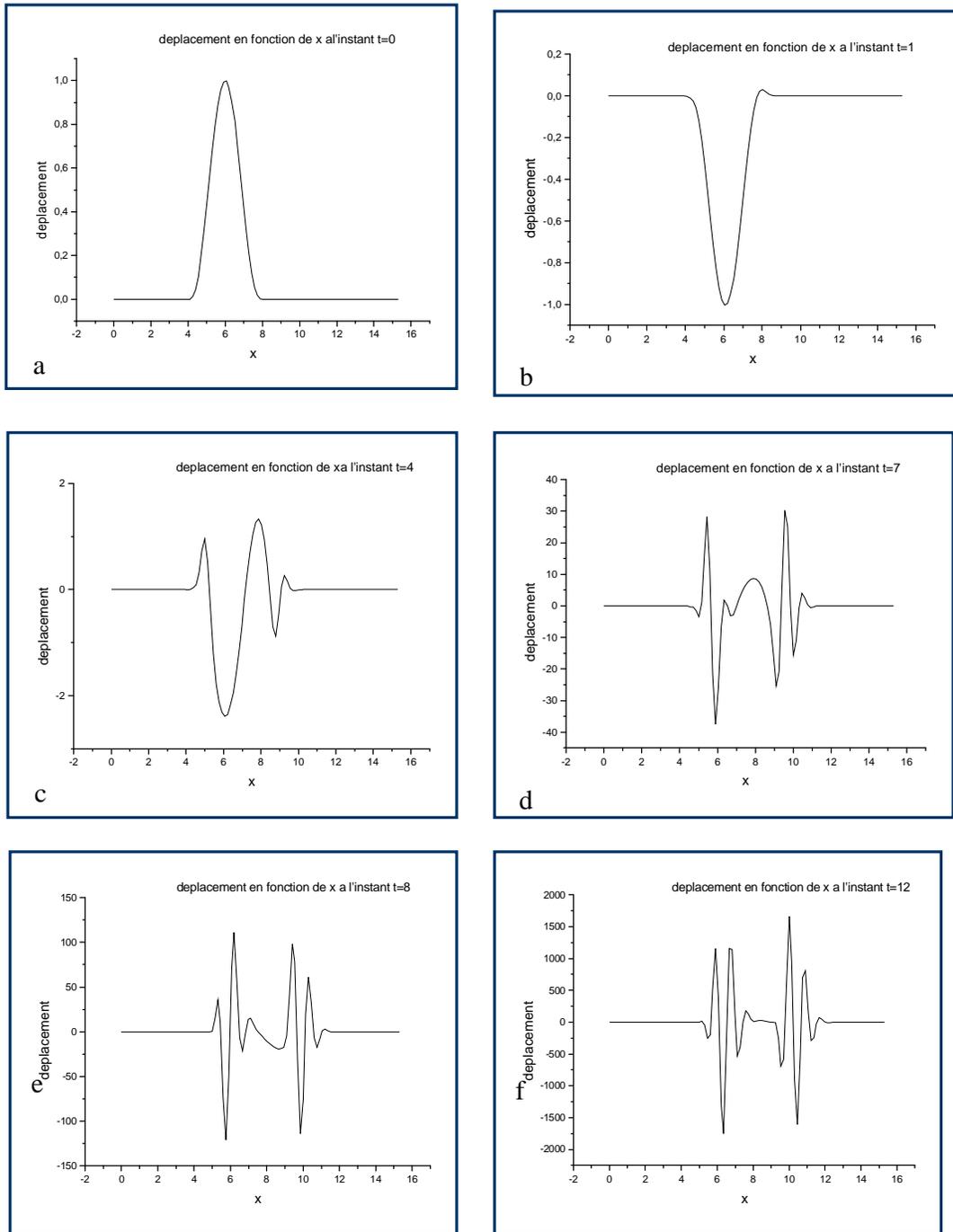


Fig.3-III Le déplacement en fonction de  $x$  en plusieurs instants pour une vitesse  $c = 0.5$ .

3.3.1.3 Troisième cas  $c = 1$

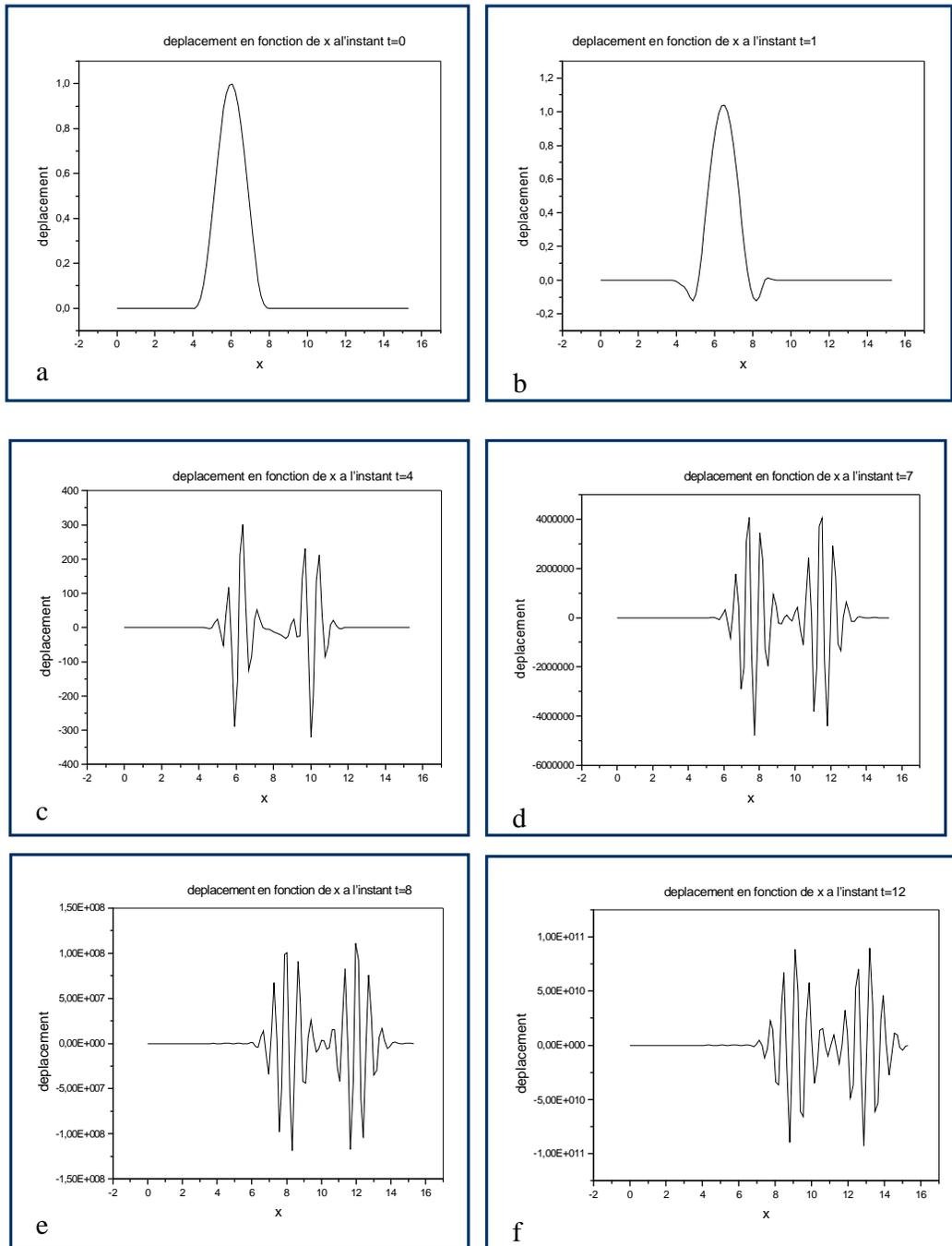


Fig.3-IV Le déplacement en fonction de  $x$  en plusieurs instants pour une vitesse  $c = 1$

3.3.1.4 Quatrième cas  $c = 1.2$

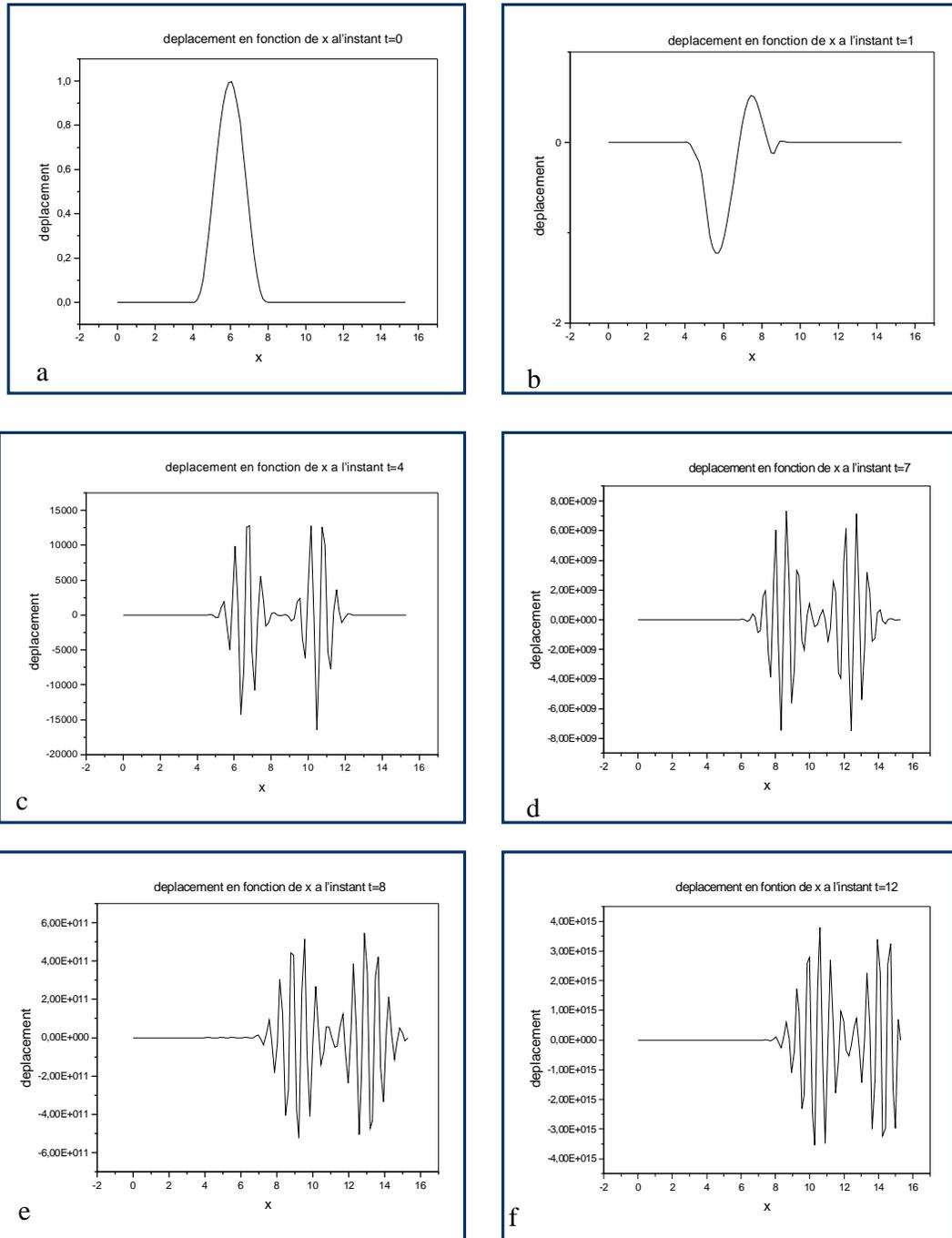


Fig.3-V Le déplacement en fonction de  $x$  en plusieurs instants pour une vitesse  $c = 1.2$

### 3.3.2 Condition De Cauchy Avec Vitesse Initiale Différent De Zéro

Soit les condition initiales suivantes:

$$u_0(x) = \left[ \frac{(1 - ((x-6)^2))^3}{4} \right] \text{ si } 4 < x < 8 \quad \text{Et } u_1(x) = -\exp(-(x-9)^2) + 2\exp(-(x-7.5)^2) \quad (3-7)$$

si...non... $u_0(x) = 0$

#### 3.3.2.1 Premier cas pour une vitesse $c = 0.02$

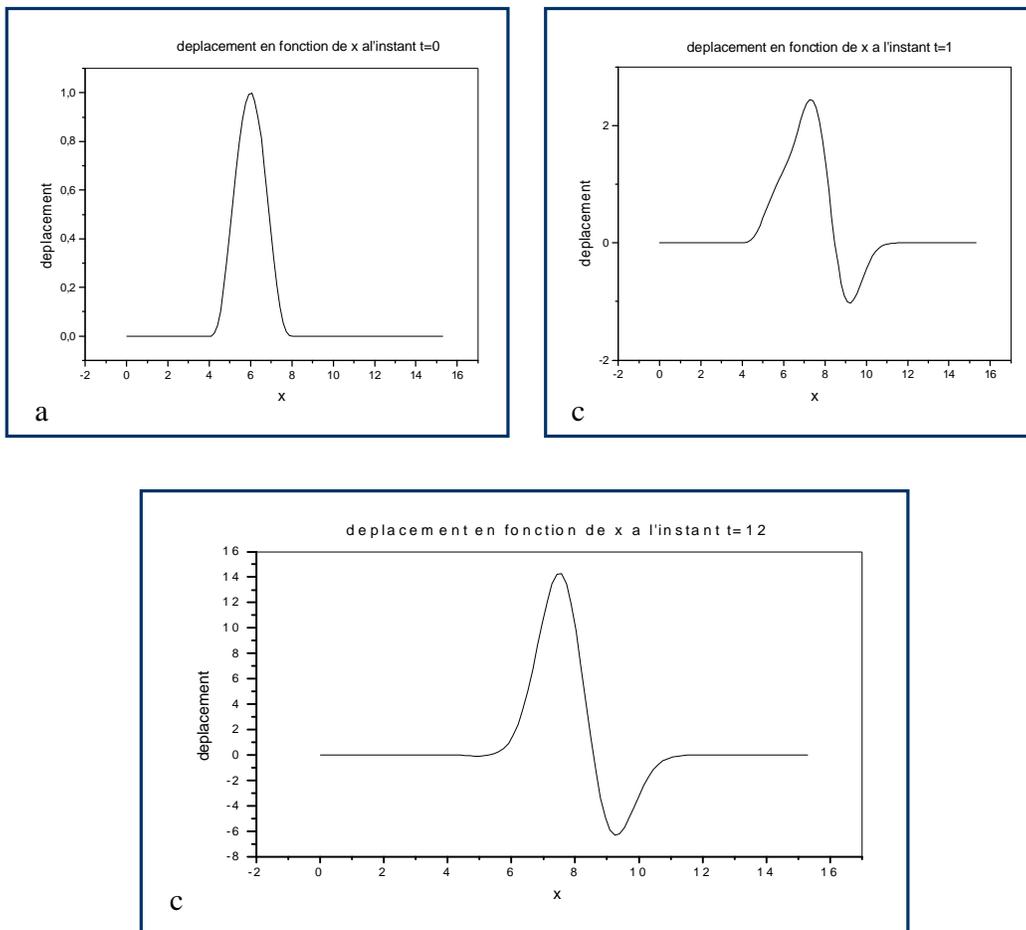


Fig.3-VI Le déplacement en fonction de  $x$  en plusieurs instants pour une vitesse  $c = 0.02$ , avec

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = u_1(x) = g(x) \neq 0$$

3.3.2.2 Deuxième Cas Pour Une Vitesse  $c = 0.5$

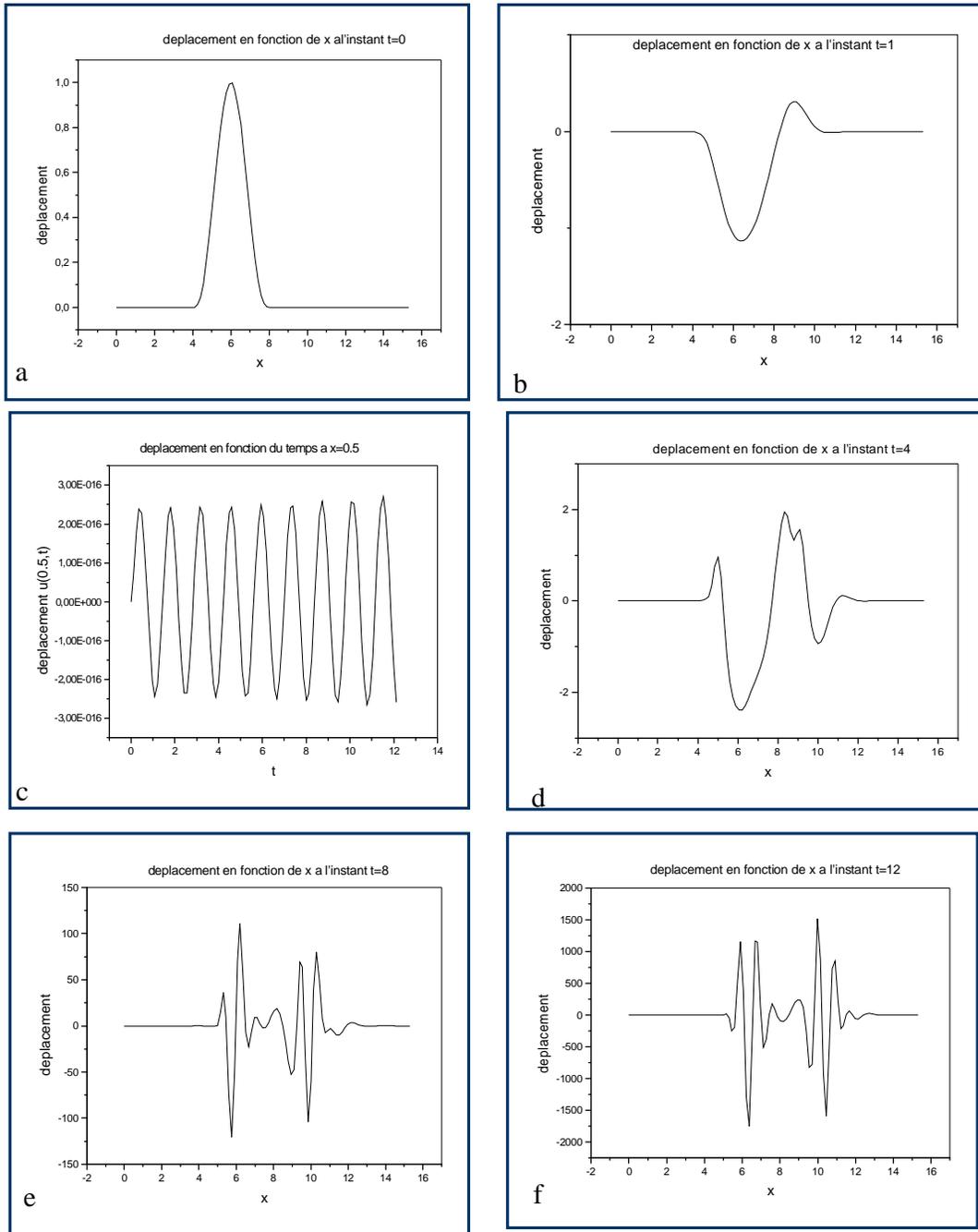
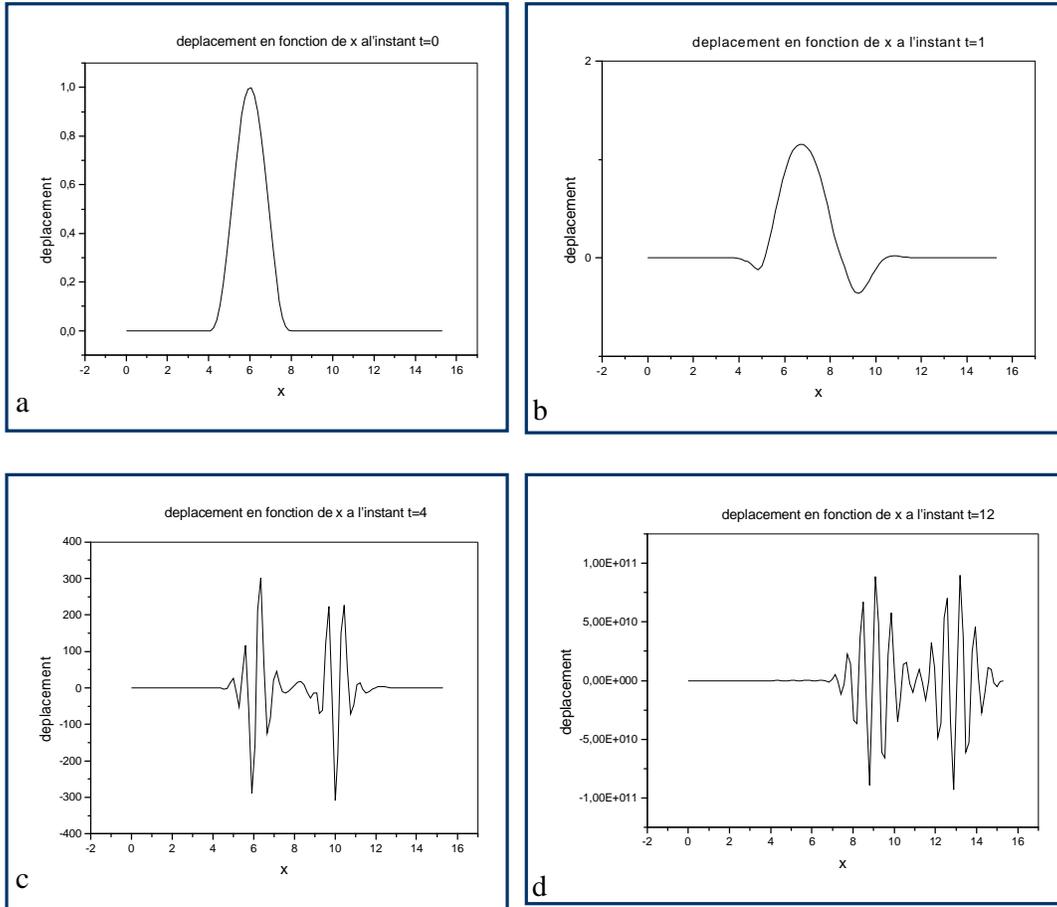


Fig.3-VII Le déplacement en fonction de  $x$  en plusieurs instants pour une vitesse  $c = 0.5$ , avec

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = u_1(x) = g(x) \neq 0$$

3.3.2.3 Troisième Cas Pour Une Vitesse  $c = 1$ Fig.3-VIII Le déplacement en fonction de  $x$  en plusieurs instants pour une vitesse  $c = 1$ , avec

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = u_1(x) = g(x) \neq 0$$

### 3.3.3 Condition De Cauchy Avec Vitesse Initiale Constante

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 0 \\ g(x) &= cte \end{aligned} \tag{3-8}$$

#### 3.3.3.1 Cas Où La Vitesse $c = 1$

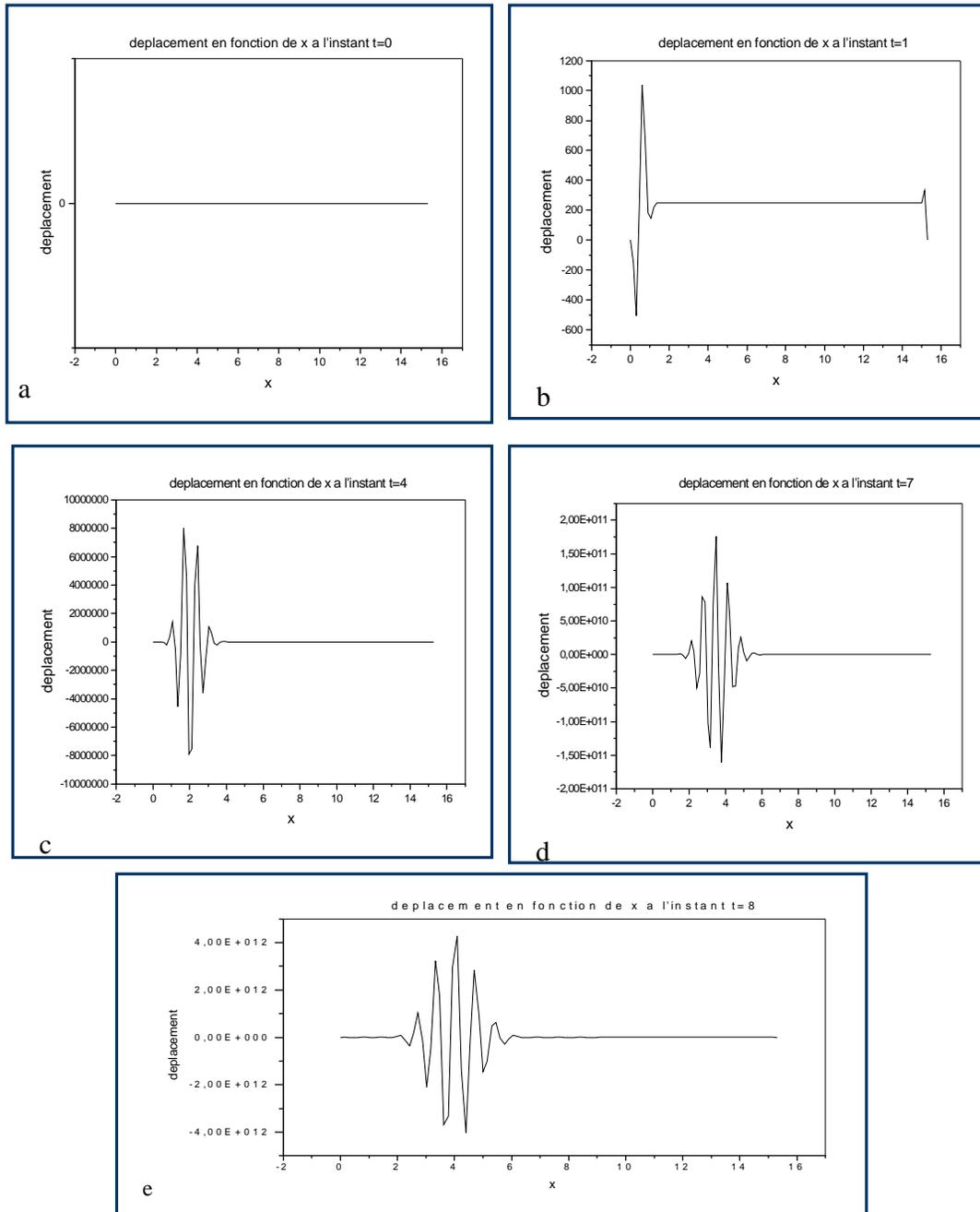


Fig-3-IX Le déplacement en fonction de  $x$  en plusieurs instants pour une vitesse  $c = 1$ , avec

$$\begin{aligned} g(x) &= cte \\ u(x, 0) &= 0.0 \end{aligned}$$

### 3.3.4 Discussion Des Résultats

La première observation qu'on peut tirer de ces graphes est que pour des vitesses de propagations très faibles, la détection de ces ondes est très lente, voir Figure (3-I). l'onde est détectée à l'instant  $t = 8$  pour la vitesse  $C = 0.02$ , plus la vitesse augmente plus la détection de cette onde est rapide c'est le cas pour la vitesse  $C = 1$  l'onde a été détectée à l'instant  $t = 1$ . Cette observation confirme ce que nous avons dit dans le chapitre 1, où nous avons présenté les deux types d'ondes avec deux vitesses différentes, l'onde  $S$  et l'onde  $P$ . La propagation de ces ondes est produite au même temps, donc on peut dire que lorsque on applique une contrainte sur un solide, cette dernière se transforme en une déformation selon la loi de Hooke, cette contrainte génère une déformation de la tranche voisine, etc. Donc, une telle onde est dite élastique, car les forces responsables de la propagation sont des forces élastiques du solide décrites par la loi de Hooke.

En plus, on peut voir aussi sur ces figures que les conditions aux limites ont une influence directe sur la forme de l'onde, si on considère que la vitesse initiale est différente de zéro, l'onde détectée à l'instant  $t = 1$  pour une vitesse  $C = 0.02$ , ce n'est pas le même cas pour la figure (3-I), la forme de l'onde reste la même jusqu'à l'instant  $t = 8$ , puisque on a une vitesse très faible ( $C = 0.02$ ), ce qui traduit que plus la vitesse augmente plus l'onde continue sa propagation le long du domaine considéré.

Sur la figure (3-VI), on voit que pour une vitesse initiale constante  $C = 1$ , la propagation de l'onde s'approche à une fonction sinusoïdale et cela à partir de l'instant  $t = 4$  où elle garde la même allure jusqu'à l'instant  $t = 8$ . On peut étendre ces observations au cas 2D comme le montre la figure (3-X), où on a présenté le milieu en 3 D pour mieux voir la propagation de l'onde au cours du temps. Ces observations restent les mêmes pour les cas bidimensionnels.

## 3.4 Cas 2 D Schémas Aux Différences Finies

### 3.4.1 Discrétisation De L'équation D'ondes 2D

Nous nous intéressons dans ce paragraphe au cas bidimensionnel. Notre objectif est de faire une discrétisation de l'équation de propagation (1-36) écrite en notation indicelle pour le cas bidimensionnel avec un schéma aux différences finies en espace et en temps qui doit être stable et convergent. On prend l'équation (1-36) avec des conditions initiales de Cauchy et avec une vitesse de propagation constante, puis on introduit un découpage en temps :  $\Delta t$  (Le pas du temps),  $t^n = n\Delta t$ . Pour la discrétisation en espace on prend un

maillage régulier sur un domaine  $I$ , de pas  $h = \Delta x = \Delta y$  constitué de segments  $[x_j, x_{j+1}]$ ,  $j = 1 \dots N$ ,  $I = [a, b]$ ,  $x_j = a + (j-1)h$

$$r \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (I + m) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + m \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (3-7)$$

Pour le cas bidimensionnel, l'équation précédente avec les conditions initiales de Cauchy, peut être écrite en supposant  $\Delta x = \Delta y = h$  sous la forme :

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = C^2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) = F(x, y) \quad (3-8)$$

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = u_1(x, y) = g(x, y)$$

Où la vitesse  $C$  peut être de l'onde transversale ou longitudinale.

Après la discrétisation totale en temps et en espace de l'équation (3-8), on peut écrire:

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - 2u_{ij}^n + u_{ij}^{n-1}}{\Delta t^2} - C^2 \left( \frac{u_{i+1j}^n - 2u_{ij}^n + u_{i-1j}^n}{h^2} + \frac{u_{ij+1}^n - 2u_{ij}^n + u_{ij-1}^n}{h^2} \right) = 0 \quad (3-9)$$

L'inconnue de l'équation précédente est le déplacement au point  $x(i, j, k+1)$ , le schéma est explicite donc on peut tirer l'inconnue directement de cette équation

$$u_{ij}^{k+1} = -u_{ij}^{k-1} + 2 \cdot \left( 1 - 2 \cdot \frac{C^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} \right) \cdot u_{ij}^k + \frac{C^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} \cdot (u_{i+1j}^k + u_{ij-1}^k + u_{ij+1}^k) \quad (3-10)$$

Les conditions initiales peuvent être écrit après discrétisation :

$$u_{i,j}^{-1} = -2 \cdot \Delta t \cdot g(i, j) + \frac{C^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} [g(i+1, j) + g(i, j+1) + g(i, j-1)] + 2 \cdot \left( 1 - 2 \cdot \frac{C^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} \right) \quad (3-11)$$

$$u_{ij}^1 = \frac{C \Delta t^2}{\Delta x^2} \cdot (u_{i+1j}^0 + u_{ij+1}^0 + u_{ij-1}^0) + 2 \cdot \left( 1 - 2 \cdot \frac{C \Delta t^2}{\Delta x^2} \right) \cdot u_{ij}^0 - u_{ij}^{-1} + 2 \cdot g(i, j) \cdot \Delta t \quad (3-12)$$

Prenons l'exemple pour un jeu de données suivant :

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) = \begin{pmatrix} -\exp(-(x-9)^2) + \exp(-(x-7.5)^2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = u_1(x, y) = 0.0 \quad (3-13)$$

$$f = 0$$

Le milieu étudié est considéré comme un milieu élastique isotrope homogène de densité  $\rho = 1$  dont les coefficients de Lamé sont donnés par  $m = 0.3, l = 0.4$ . On trouve les deux vitesses des ondes longitudinale est celle de l'onde transversale  $C_p = 1$  et  $C_s = \sqrt{0.3}$ .

Pour la discrétisation, on considère  $N_x = N_y = 300$  points de discrétisation en espace. Le pas d'espace sur le maillage régulier est  $h_x = h_y = 0.05$ , le pas du temps  $\Delta t = 0.05$ , puis on trace la norme du déplacement instantané sur les figures suivantes pour des vitesses données :

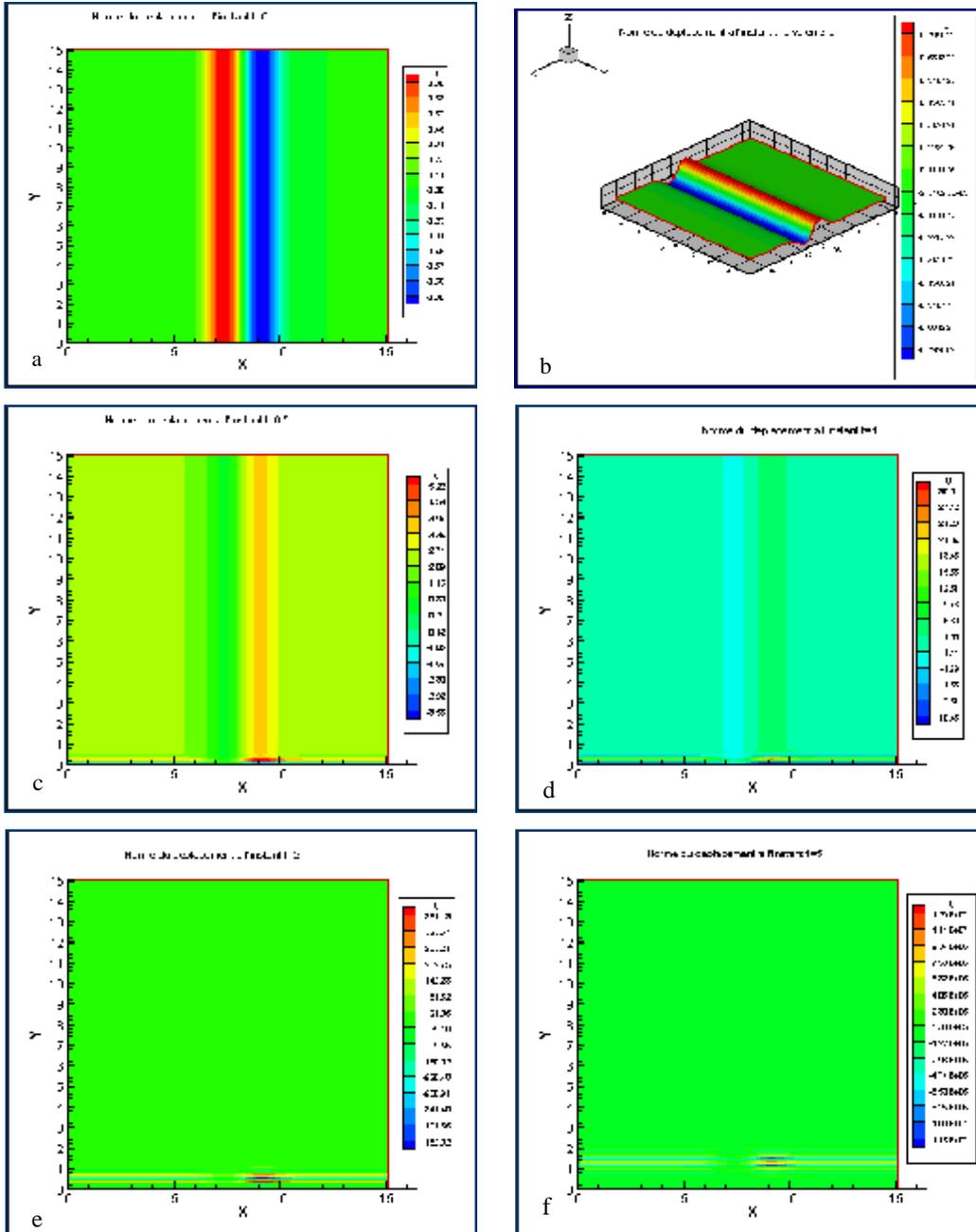


Fig.3-X Norme du déplacement en fonction de x, y pour C = 1 a l'instant t = 0 a 5

Si on considère dans ce cas, les conditions de Cauchy suivantes:

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) = 0.0$$

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = u_1(x, y) = -\exp(-(x-9)^2) + \exp(-(x-7.5)^2)$$

$$f = 0$$

On présente les résultats de la simulation sur la figure (3-XI) :

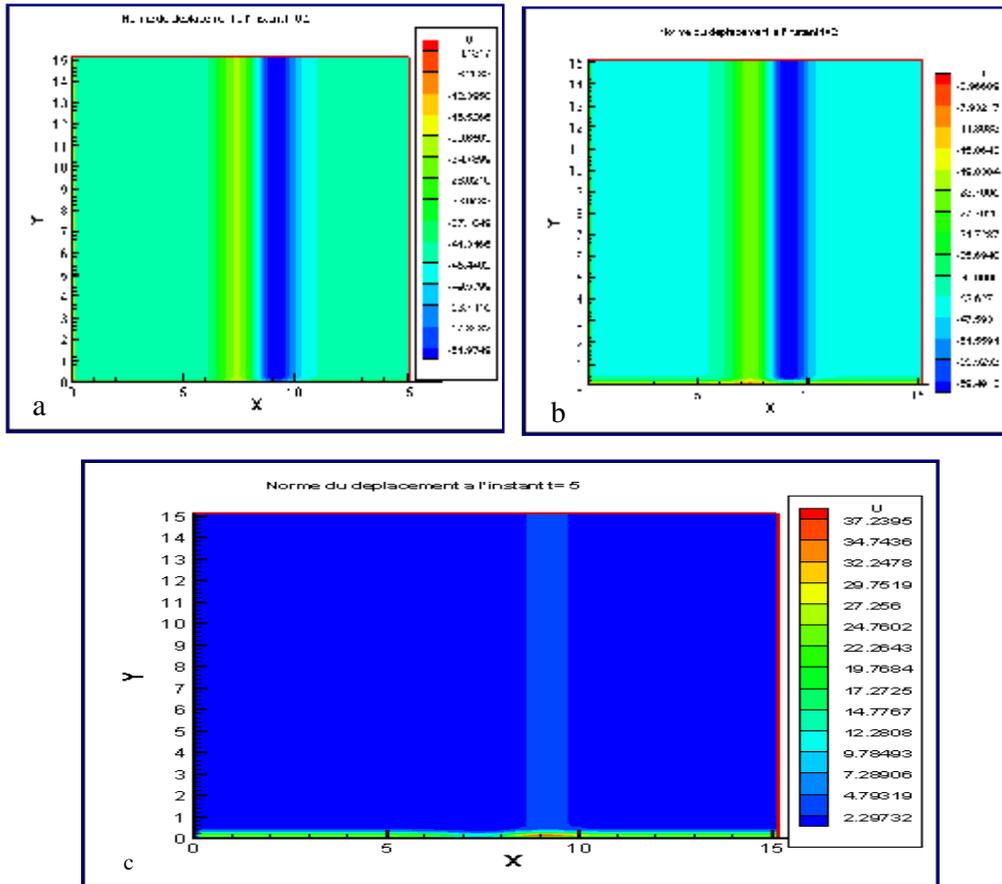


Fig.3-XI Norme du déplacement en fonction de x , y pour C = 0.547 à l'instant t = 0 a 5

## 4.1 Introduction :

Pour modéliser la propagation d'onde dans les milieux solides, il est courant de supposer que le milieu suit une loi de comportement **élastique** qui relie en chaque point du milieu, la déformation à un temps donné à la contrainte au même instant. Ces milieux ont la propriété de conserver l'énergie et les seuls facteurs de diminution de l'amplitude des ondes sont la divergence géométrique.

Ce pendant, pour certains matériaux dits à mémoire, il est important de prendre en compte des effets dus aux déformations différées ce qui est réalisé en supposant que le milieu suit une loi de comportement viscoélastique.

Ces milieux sont absorbants, ils sont le siège de phénomène de dissipation intrinsèque qui provoque une décroissance de l'énergie et une atténuation exponentielle de l'amplitude des ondes au cours de leur propagation.

Il existe de nombreuses applications utilisant les modèles de viscoélasticité:

- La propagation d'onde haute fréquence dans les premières couches de sédiments marins.
- La propagation d'ondes dans les tissus osseux.

## 4.2 Présentation Des Modèles

### 4.2.1 Ecriture Sous La Forme Intégrale

Les modèles de viscoélasticité linéaire permettent de prendre en compte le phénomène de dissipation d'un milieu, dans un tel modèle, si on considère le tenseur des déformations à l'instant  $t$  :

$$e_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad (4-1)$$

Associé à un champ de déplacement  $u(x, t) \dots x \in \mathbb{R}^n$  avec  $n=1,2,3$  la relation liant la contrainte  $S$  à  $e$  est:

$$S_{ij}(x, t) = \int_{-\infty}^t G_{ijkl}(t-t) \frac{\partial e_{kl}(t)}{\partial t} dt \quad (4-2)$$

Où  $G$  est un tenseur d'ordre quatre, appelé tenseur de relaxation qui vérifie les symétries suivantes:

$$G_{ijkl} = G_{jikl} = G_{klij} \quad (4-3)$$

La formule (4-2), exprime que l'état de la contrainte à l'instant  $t$  dépend de l'histoire des déformations, c'est pourquoi on qualifie ces modèles à mémoire. De plus  $s(t)$  n'est pas influencé par le futur de la déformation (par  $e(t)$  pour  $t > t$ ).

Il existe dans la littérature plusieurs façons d'exprimer la relation (4-2), par exemple une simple intégration par partie conduit à:

$$s_{ij}(x,t) = G_{ijkl}(0)e_{kl}(t) + \int e_{kl}(t-t) \frac{\partial G_{ijkl}(t)}{\partial t} dt \tag{4-4}$$

Nous supposons que tous les termes sont nulles, pour  $t < 0$  l'expression (4-2) généralise la loi de Hooke, le cas du matériau élastique est obtenue avec le choix de:

$$G = C(x)H(t) \tag{4-5}$$

Où H est la fonction Heaviside et C le tenseur d'élasticité.

Une forme alternative de la relation de contrainte déformation peut être obtenue en inversant les rôles de la déformation et de la contrainte dans (4-2), de telle manière que la déformation à l'instant  $t$  soit déterminée par l'histoire de la contrainte, ce qui s'écrit sous la forme:

$$e_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t J_{ijkl}(t-t) \frac{\partial s_{kl}(t)}{\partial t} dt \tag{4-6}$$

Où J est le tenseur de fluage vérifiant  $J_{ijkl} = J_{jikl} = J_{ijlk}$  (3-7)

On trouve dans la littérature trois modèles couramment utilisés, dont deux sont appliqués pour les solides qui sont les modèles de Zener et Kelvin-Voigt, et le troisième pour le cas des fluides, c'est le modèle de Maxwell:

**Ø Modèle De Zener :** Le modèle de Zener s'exprime comme suit:

$$s + t_0 \frac{\partial s}{\partial t} = m \frac{\partial u}{\partial x} + mt_1 \frac{\partial e}{\partial t} \rightarrow (1-D) \tag{4-8}$$

$$s_{ij} + t_0 \frac{\partial s_{ij}}{\partial t} = l d_{ij} e_{kk} + 2m e_{ij} + t_0 l t_1 \frac{\partial e_{kk}}{\partial t} + 2t_0 m t_1 e_{ij} \rightarrow (3-D) \tag{4-9}$$

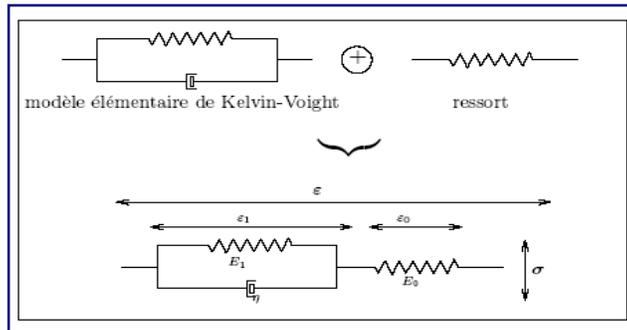


Fig.4-I Modèle de Zener

Ø **Modèle de Kelvin-Voigt :** Le modèle de Kelvin-voigt s'exprime comme suit:

$$s = m \frac{\partial u}{\partial x} + hm \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \rightarrow (1-D) \tag{4-10}$$

$$s_{ij} = l(e_{kk} + q_l \epsilon_{kk}) d_{ij} + 2m(e_{ij} + q_m \epsilon_{ij}) \rightarrow (3-D) \tag{4-11}$$

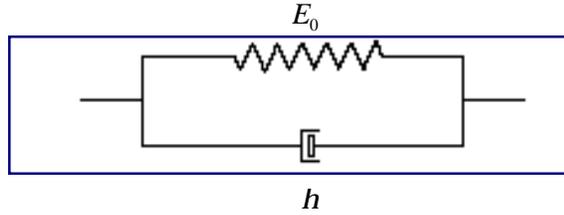


Fig.4-II Modèle de Kelvin-Voigt

Ø **Modèle de Maxwell :**

$$\epsilon = \frac{s}{E} + \frac{s}{h} \rightarrow (1-D) \tag{4-12}$$

$$e_{ij} = \frac{1+u}{E} \left( \epsilon_{ij} + \frac{s}{t_1} \right) - \frac{u}{E} \left( \epsilon_{kk} + \frac{s_{kk}}{t_2} \right) d_{ij} \rightarrow (3-D) \tag{4-13}$$

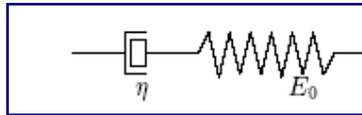


Fig.4-III Modèle de Maxwell

### 4.3 Equation Générale De La Propagation (Milieu Viscoélastique)

#### 4.3.1 Equation De Propagation D'onde Pour Le Cas 1D

La relation entre contraintes et déformations est sous la forme:

$$[s] = [C][e] \tag{4-14}$$

Où  $s = Ce$  (pour le cas unidimensionnel). Ceci implique que toute contrainte provoque instantanément (sans déphasage), une déformation (et inversement).

Cette hypothèse est en contradiction avec l'observation que l'amplitude d'une onde décroît après un trajet plus ou moins long, suivant la nature du milieu dans lequel elle se propage, les vibration d'un résonateur à ondes élastique s'amortissent si on ne lui apporte pas d'énergie .

Il est donc raisonnable d'introduire dans le cas d'un solide comme dans le cas d'un fluide un terme d'amortissement et d'écrire la loi de Hooke pour le cas unidimensionnel comme suit :

$$\mathbf{s} = \mathbf{C}\mathbf{e} + \mathbf{h} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} \quad (4-15)$$

$\mathbf{h}$  Est un coefficient de viscosité (qui s'exprime en N.s/m<sup>2</sup>).

$\mathbf{C}$  Est le tenseur de rigidité (ne pas confondre avec la vitesse de l'onde pour le chapitre 1).

Cette équation qui d'écrit un processus du premier ordre recèle un temps caractéristique  $t$  on appel temps de relaxation:

$$t \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \mathbf{e}(t) = \mathbf{K}\mathbf{s} \quad (4-16)$$

En posant  $t = h/C$  et  $K = 1/C$ .

L'équation (4-16), est l'équation de propagation de l'onde dans un milieu viscoélastique pour le cas unidimensionnel, pour le régime harmonique la contrainte peut être écrite sous la forme:

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{s}_0 \exp^{i\omega t} \quad (4-17)$$

L'équation (4-16) devient:

$$(1 + i\omega t) \mathbf{e}_0 = \mathbf{K}\mathbf{s}_0 \quad (4-18)$$

Le terme  $\omega t = \frac{2\pi t}{T} = \frac{\omega h}{C}$ , apparaît naturellement comme une grandeur caractéristique quand il s'agit de solide, on se rapporte à son inverse  $Q$  appelé coefficient ou facteur de qualité élastique:

$$Q = \frac{1}{\omega t} = \frac{C}{\omega h} \quad (4-19)$$

### 4.3.2 Equation De Propagation D'onde Pour Le Cas 3D

L'introduction d'un terme d'amortissement généralise donc la loi de Hooke pour un cristal donne :

$$\mathbf{s}_{ij} = C_{ijkl} \mathbf{e}_{kl} + \mathbf{h}_{ijkl} \frac{\partial \mathbf{e}_{kl}}{\partial t} \quad (4-20)$$

Un cristal est ainsi caractérisé par plusieurs coefficients de qualité liés à la nature de l'onde et à la direction de propagation.

Le tenseur de viscosité  $\mathbf{h}$  est d'ordre quatre, puisqu'il relie deux tenseurs d'ordre deux. La symétrie du cristal lui impose, quant au nombre de composantes indépendantes, les mêmes restrictions pour le tenseur des contraintes élastiques  $C_{ijkl}$ .

En portant l'expression (4-20) dans la loi générale de la dynamique, on obtient l'équation de la propagation :

$$r \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} + h_{ijkl} \frac{\partial^3 u_l}{\partial x_j \partial x_k \partial t} \quad (4-21)$$

Cette équation représente l'équation générale de la propagation des ondes élastiques dans un milieu viscoélastique homogène.

Examinons le milieu le plus symétrique, c'est-à-dire un milieu isotrope dont la description demande un coefficient de viscosité propre a la compression soit  $C$ , et un coefficient propre au cisaillement soit  $h$ . Comme la loi de Hooke d'un milieu isotrope s'exprime par :

$$s_{ij} = l d_{ij} e + c d_{ij} \frac{\partial e}{\partial t} + 2m e_{ij} + 2h \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} \quad (4-22)$$

On déduit:

$$\frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j} = l \frac{\partial e}{\partial x_i} + c \frac{\partial^2 e}{\partial x_i \partial t} + m \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + h \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j^2 \partial t} + h \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_i \partial x_j \partial t} \quad (4-23)$$

Avec:  $e = \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$

$$r \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (l + m) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + (c + h) \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_i \partial x_j \partial t} + m \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + h \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j^2 \partial t} \quad (4-24)$$

C'est l'équation de la propagation des ondes dans un solide viscoélastique isotrope en fonction des déplacements pour le cas 3 D.

L'équation se simplifie si on ne considère que l'onde longitudinale se propage suivant

$x_1, (i = j = 1) :$

$$r \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = (l + 2m) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + (c + 2h) \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^2 \partial t} \quad (4-25)$$

Dans notre étude nous avons pris le modèle de Zener homogène isotrope, pour cela nous allons faire une analyse mathématique et une autre numérique.

#### 4.4 Le modèle de Zener :

Pour ce modèle, les polynômes différentiels sont de degré 1, plus précisément, la loi de comportement s'écrit sous la forme différentielle:

$$\mathbf{s} + t_0 \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} = C \mathbf{e}(u) + t_0 D \mathbf{e} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (4-26)$$

Où  $t_0 > 0$  est un temps de relaxation,  $C$  et  $D$  sont deux tenseurs  $4 \times 4$  symétrique, définis positifs, cette équation peut être écrite sous la forme intégrale comme suit:

$$\frac{1}{t_0} (\mathbf{s} - D \mathbf{e}(u)) + \partial_t (\mathbf{s} - D \mathbf{e}(u)) = -\frac{1}{t_0} (D - C) \mathbf{e}(u) \quad (4-27)$$

En multipliant cette équation par  $\exp\left(\frac{1}{t_0}\right)s$  et en intégrant entre 0 et  $t$  on obtient, avec la condition initiale  $\mathbf{s}_0 = D \mathbf{e}(u_0)$ , la relation suivante :

$$\mathbf{s}(t) = D \mathbf{e}(u(t)) + \int_0^t -\frac{1}{t_0} (D - C) \exp\left(-\frac{t-s}{t_0}\right) \mathbf{e}(u(s)) ds \quad (4-28)$$

Ce qui donne la forme intégrale de la loi de Zener:

$$\mathbf{s}(t) = G(0) \mathbf{e}(t) + \int_0^t \frac{\partial G}{\partial s}(s) \mathbf{e}(t-s) ds \quad (4-29)$$

Avec:

$$G(t) = C + (D - C) \exp\left(-\frac{t}{t_0}\right) \quad (4-30)$$

La fonction de relaxation  $G$  s'écrit donc comme la superpositions du tenseur d'élasticité et d'une fonction exponentielle, qui s'annule à l'infini, nous verrons que le tenseur  $D - C$  doit être défini positif pour que le modèle soit dissipatif:

##### 4.4.1 Le Modèle De Zener Isotrope

Par analogie avec le cas purement élastique, on dit que le milieu caractérisé par la loi de comportement (4-8), est isotrope si il existe des coefficients  $l(x), m(x), t_l(x), t_m(x)$  tels que :

$$\begin{aligned} (Cs)_{ij} &= l d_{ij} s_{kk} + 2m s_{ij} \\ (Ds)_{ij} &= l t_l d_{ij} s_{kk} + 2m t_m s_{ij} \end{aligned} \tag{4-31}$$

Et on défini les coefficients  $c_p = \sqrt{\frac{l+2m}{r}}$ ,  $c_s = \sqrt{\frac{m}{r}}$ ,  $t_p = t_0 \frac{l t_l + 2m t_m}{l+2m}$ ,  $t_s = t_0 t_m$ , avec  $c_p, c_s$  les vitesses, et  $t_p, t_s$  sont les temps de relaxation associe à l'onde de pression et l'onde de cisaillement.

#### 4.4.2 Le Modèle De Zener Monodimensionnelle

On retrouve le modèle de zener 1 D dans le cas où  $C = m$  et  $D = t_0^{-1} m t_l$  avec la condition  $t_l > t_0$  (équivalente a  $D - C > 0$ ) dans le cas général.

Dans ce cas la loi de comportement devient :

$$s + t_0 \partial_t s = m \partial_x u + m t_l \partial_{xt}^2 u \tag{4-32}$$

#### 4.4.3 Généralisation Du Modèle De Zener

A partir du modèle de Zener simple, il est facile de construire un modèle plus complexe composé d'un certain nombre d'éléments de Zener en parallèle comme ceci est illustré dans le cas 1D sur la figure (4-I). Sur cette figure, les paramètres  $E_i, i = 1 \dots k$  représentent les modules d'élasticité des ressorts et  $h_i, i = 1 \dots k$  les paramètres de viscosité des amortisseurs. En dimensions supérieures, le modèle de Zener généralisé revient à définir le tenseur des contraintes comme une superposition :

$$s = \sum_{i=1}^k s_i \tag{4-33}$$

Où chaque  $s_i$  est reliée au tenseur des déformations par:

$$s_i + t_i^0 \frac{\partial s_i}{\partial t} = C_i e(u) + t_i^0 D_i e(\partial_t u), i = 1 \dots k \tag{4-34}$$

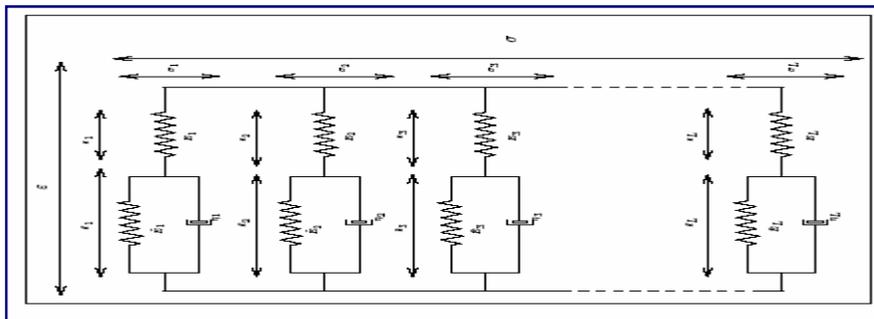


Fig.4-IV Modèle De Zener Généralisé.

## 4.5 Analyse Mathématique Du Modèle De Zener

On s'intéresse à la propagation des ondes dans un milieu, par une loi de comportement de type Zener en dimension  $n$  ( $n = 1, 2, 3$ ). On cherche donc à déterminer le champ de déplacement  $u$  et le tenseur de contraintes  $s$  vérifiant:

$$\begin{aligned} r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \text{div } s &= f \mathbf{L} \text{ dans } \mathbb{R}^n \times [0, T] \\ s + t_0 \frac{\partial s}{\partial t} &= C e(u) + t_0 D e \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \mathbf{L} \text{ dans } \mathbb{R}^n \times [0, T] \\ u(x, 0) &= u_0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1 \mathbf{L} \\ s(x, 0) &= s_0 \end{aligned} \quad (4-35)$$

Où:

$r$  Est la masse volumique;

$t_0$  Le temps de relaxation;

$D$  et  $C$  deux tenseurs 4X4 symétriques  $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij}$ ,  $D_{ijkl} = D_{jikl} = D_{klij}$ .

### 4.5.1 Etude Des Milieux Homogènes

On se place pour faire cette analyse, en milieu homogène. Nous allons tout d'abord déterminer les ondes planes se propageant dans un milieu viscoélastique 1D, nous pourrons ensuite étendre les résultats 1 D au cas tridimensionnel.

#### 4.5.1.1 Analyse Par Ondes Planes En 1D

On suppose que  $r, m, t_0, t_1$  sont des constantes strictement positives, on considère le problème de Zener monodimensionnel (4-32) et trouver  $u(x, t): \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  pour le système d'équations:

$$\begin{aligned} r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial s}{\partial x} &= f \mathbf{L} \text{ dans } \mathbb{R} \times [0, T] \\ s + t_0 \frac{\partial s}{\partial t} &= m \frac{\partial u}{\partial x} + t_1 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial t} \mathbf{L} \text{ dans } \mathbb{R} \times [0, T] \end{aligned} \quad (4-36)$$

On s'intéresse aux solutions particulières du problème homogène, c'est-à-dire pour  $f = 0$  de type ondes planes de la forme:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_0 \exp(i(\omega t - kx)) \\ S(x,t) &= S_0 \exp(i(\omega t - kx)) \end{aligned} \quad (4-37)$$

Où:

$k \in$  Est le nombre d'onde;

$\omega$  La pulsation propre.

Pour que (4-37) soit une solution de (4-36),  $k, \omega$  doivent être reliés par la relation de dispersion:

$$\omega^2 = c^2 k^2 \frac{(1 + i\omega t_1)}{(1 + i\omega t_0)}, c = \sqrt{\frac{m}{r}} \quad (4-38)$$

On peut obtenir cette équation par la substitution des solutions exprimées par la relation (4-37) dans le système d'équations (4-36).

Nous allons étudier cette équation comme une équation en  $\omega$ , où  $k$  est un paramètre, si on fait le changement de variable  $S = i\omega$ , la relation (4-38) devient:

$$\frac{S^2}{c^2 k^2} = -\frac{1 + St_1}{1 + St_0} \quad (4-39)$$

Ce qui équivaut à l'équation à coefficients réels de degré 3 suivante:

$$t_0 S^3 + S^2 + t_1 c^2 k^2 S + c^2 k^2 = 0 \quad (4-40)$$

Cette équation admet soit, trois racines réelles soit, une racine réelle et deux racines complexes conjuguées. Notons qu'une racine réelle correspond à un mode non propagatif (mode purement amorti).

#### - Démonstration

Rappelons qu'une équation algébrique du troisième degré ( $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ), ce ramène par le changement de variable ( $x = X - \frac{b}{3a}$ ) à la forme canonique:

$$\begin{aligned} X^3 + 3pX + 2q &= 0 \\ p &= \frac{3ac - b^2}{3a^2} \\ q &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \right] \end{aligned}$$

Cette équation à trois racines :

Ø  $\Delta > 0$ , une racine réelle et deux complexe;

Ø  $\Delta \leq 0$ , trois racines réelles.

L'équation (4-40) après réduction à sa forme canonique a pour discriminant:

$$\Delta = p^3 - q^2 = \frac{c^2 k^2}{27 t_0^4} \left[ t_0 t_1^3 c^4 k^4 + \left( \frac{27}{4} t_0^2 - \frac{9}{2} t_0 t_1 - \frac{1}{4} t_1^2 \right) c^2 k^2 + 1 \right] \quad (4-41)$$

$\Delta$  a le même signe que :

$$\mathcal{X}(k^2) = Ak^4 + Bk^2 + 1 \quad (4-42)$$

Avec:

$$A = t_0 t_1^3 c^4 \text{ et } B = \left[ \left( \frac{27}{4} t_0^2 - \frac{9}{2} t_0 t_1 - \frac{1}{4} t_1^2 \right) c^2 \right]$$

Une étude du trinôme  $\mathcal{X}(k^2)$  montre que :

Ø Si  $t_0 < \frac{t_1}{9}$ , le trinôme admet deux racines réelles positives:

$$Z_{1,2}(t_0, t_1, c) = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4A}}{2A}$$

Qui peuvent être s'exprimées en fonction du rapport  $R = \frac{t_0}{t_1}$  :

$$Z_{1,2}(t_0, t_1, c) = \frac{1}{2c^2 t_0 t_1} \left( -27(R - a_1)(R - a_2) \pm (1 - 9R)^{\frac{3}{2}} (1 - R)^{\frac{1}{2}} \right)$$

Avec:

$$a_{1,2} = \frac{1}{3} \left( 2 \frac{\sqrt{3}}{3} \pm 1 \right)$$

Il est donc clair que,  $\mathcal{X}(k^2) \leq 0$  si  $k^2 \in [Z_1, Z_2] c$ 'est à dire  $k \in [K_1, K_2]$  avec  $K_{1,2} = \sqrt{Z_{1,2}}$ .

Ø Si  $t_0 \geq \frac{t_1}{9}$ , on montre que  $\mathcal{X}$  est toujours positif (si  $t_0 < t_1$ ), on admet deux racines réelles négatives (si  $t_0 \geq t_1$ ), donc dans tous les cas  $\mathcal{X}(k^2) > 0$  pour tout  $k$ .

Il nous reste à montrer que les racines sont comprises entre  $(-\frac{1}{t_0}$  et  $-\frac{1}{t_1})$ , ceci est immédiat

en se rappelant qu'une racine  $S$  est solution de (4-39), et si  $S$  est réelle, le membre de gauche est positif ce qui montre que  $(1 + t_1 S)(1 + t_0 S) < 0$  et par conséquent que toute racine

réelle est située entre  $-\frac{1}{t_0}$  et  $-\frac{1}{t_1}$ .

### 4.5.1.2 Propriétés Des Solutions

On s'intéresse ici au cas où l'équation (4-40) admet une racine réelle  $S = S^*$  et deux racines complexes conjuguées ( $S = h \pm i w^*$ ), ces solutions correspondent à :

Ø Deux modes propagatifs :

$$\left. \begin{array}{l} \exp(h(k)t) \bullet \exp(i(w^*(t) - kx)) \\ \exp(h(k)t) \bullet \exp(i(-w^*(t) - kx)) \end{array} \right\} \quad (4-41)$$

Ø Un mode purement amorti :

$$\exp(S^*(k)t) \bullet \exp(-kx) \quad (4-42)$$

Si on fait la somme des trois racines de l'équation (4-40) on trouve :

$$2h(k) + S^*(k) = -\frac{1}{t_0} \Rightarrow h(k) = -\frac{1}{2} \left[ S^*(k) + \frac{1}{t_0} \right] \quad (4-43)$$

On a  $S^*(k)$  située entre  $-\frac{1}{t_0}$  et  $-\frac{1}{t_1}$ , ce qui montre que :

Ø Si  $t_1 \geq t_0$  alors  $-\frac{1}{2} \left( \frac{1}{t_0} - \frac{1}{t_1} \right) \leq h(k) \leq 0 \quad \forall k$ , ce qui correspond à l'amortissement.

Ø Si  $t_1 < t_0$  alors  $-\frac{1}{2} \left( \frac{1}{t_0} - \frac{1}{t_1} \right) \geq h(k) \geq 0 \quad \forall k$ , ce qui correspond cette fois-ci à un terme exponentiellement croissant en temps.

#### Hypothèse :

On supposera que pour tout ce qui suit  $t_0 < t_1$ .

#### 4.5.1.2.1 Propriétés Du Mode Purement Amorti

On montre que pour tout  $k \in \mathbb{R}$ , la racine réelle  $S = S^*(k)$  vérifie:

Ø  $-\frac{1}{t_0} < S^*(k) < -\frac{1}{t_1} \quad \forall k \in \mathbb{R}$

Ø  $S^*(k)$  est paire.

Ø  $\lim_{k \rightarrow 0} S^*(k) = -\frac{1}{t_0}$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} S^*(k) = -\frac{1}{t_1}$ .

La première propriété peut être démontrée par l'hypothèse ( $t_0 < t_1$ ). La deuxième propriété découle du fait que l'équation (4-40) définissant les solutions, ne dépend que de  $k^2$ . Enfin, les

limites s'obtiennent aisément à partir de (4-39) en n'utilisant que  $S^*$  (étant réelle). On peut en fait, montrer plus précisément que:

$$S^*(k) \approx -\frac{1}{t_0} + (t_1 - t_0)c^2k^2 \quad (4-43)$$

Nous illustrons ces propriétés sur la figure (4-V) où on représente un exemple  $S^*(k)$ , notons que les hautes fréquences sont moins amorties (temps de relaxation  $t_1$ ) que les basses fréquences (temps de relaxation  $t_0 < t_1$ ).

#### 4.5.1.2.2 Propriétés Des Modes Propagatifs Amorties

Qui correspondent aux solutions  $S = h(k) \pm iw^*(k)$  la relation (4-43) permet de déduire des propriétés sur  $h(k)$ , c'est-à-dire sur l'amortissement des modes propagatifs.

$$\emptyset \quad \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_0} \right] \leq h(k) \leq 0.$$

$$\emptyset \quad h(k) \text{ paire.}$$

$$\emptyset \quad \lim_{k \rightarrow 0} h(k) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} h(k) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_0} \right].$$

On peut enfin déduire de (3-43) l'équivalence:

$$h(k) \approx -\frac{1}{2} [t_1 - t_0] c^2 k^2 \quad (4-44)$$

Nous illustrons ces propriétés sur la figure (4-VI), où on représente un exemple de courbe, les hautes fréquences sont plus amorties que les basses fréquences (pour les quels l'amortissement tend vers 0), et la constante de temps à haute fréquence est  $2 \frac{t_0 t_1}{t_1 - t_0}$ .

En ce qui concerne la partie propagative, la vitesse de phase des modes propagatifs est donnée par  $\frac{w^*(k)}{k}$ , le produit des racines de l'équation (4-36) s'exprime:

$$(w^*(k)^2 + h(k)^2) S^*(k) = -\frac{c^2 k^2}{t_0} \quad (4-45)$$

Ce qui permet d'obtenir :

$$\frac{w^*(k)^2}{c^2 k^2} = -\frac{1}{t_0 S^*(k)} - \frac{h(k)^2}{c^2 k^2} \quad (4-46)$$

En utilisant la propriété de la limite de  $S^*(k)$  quand  $k \rightarrow 0$ , et  $k \rightarrow \infty$ , on montre que :

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \frac{w^*(k)^2}{c^2 k^2} = \frac{t_1}{t_0}, \dots \lim_{k \rightarrow 0} \frac{w^*(k)^2}{c^2 k^2} = 1$$

Les hautes fréquences se propagent donc plus vite que les basses fréquences. On représente la vitesse de phase sur la figure (4-VII).

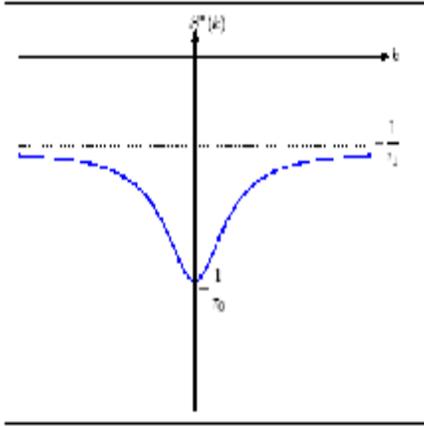


Fig. (4-V) : allure de  $s^*(k)$

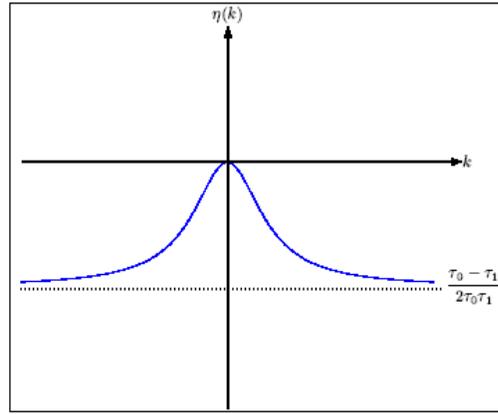


Fig. (4-VI) : allure de  $h(k)$

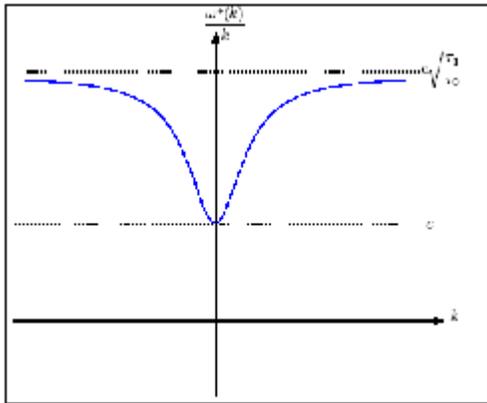


Fig. (4-VII) : allure  $\frac{w^*(k)}{k}$

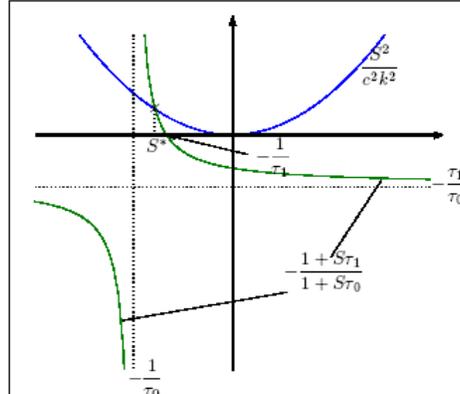


Fig. (4-VIII) : solution graphique

**Conclusion**

Un mode purement amorti correspond à  $S = S^*$ . Les hautes fréquences sont moins amorties (temps de relaxation  $t_1$ ) que les basses fréquences (temps de relaxation  $t_0 < t_1$ ).

Ø Deux modes propagatifs amortis correspondant à  $S = h \pm iw$ . Les hautes fréquences sont plus amorties que les basses fréquences (pour lesquelles l'amortissement tend vers 0) et la constante de temps à haute fréquence est  $\frac{2t_1 t_0}{t_1 - t_0}$ .

Ø Pour les modes propagatifs, les hautes fréquences se propagent plus vite mais sont davantage amorties.

#### 4.5.2 Analyse Par Ondes Planes En 3 D

Nous menons dans cette section une analyse par ondes planes analogue à celle du cas 1D, dans le cas d'un milieu viscoélastique isotrope 3D. On considère le problème isotrope en milieu homogène :

$$r \partial_{ii}^2 u_i - \partial_{xy} s_{ij} = 0 \quad (4-47)$$

$$s_{ij} + t_0 \mathfrak{S}_{ij} = l d_{ij} e_{kk} + 2m e_{ij} + t_0 l t_1 \frac{\partial e_{kk}}{\partial t} + 2t_0 m t_m e_{ij} \quad (4-48)$$

On s'intéresse aux solutions particulières de la forme :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \vec{d} \\ s(x,t) &= s_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \vec{D} \end{aligned} \quad (4-49)$$

Avec:

$$\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)^t, \vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^t, \vec{d} = (d_1, d_2, d_3)^t$$

Et

$$\vec{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}$$

En remplaçant ces expressions dans le système (4-47) et (4-48), on obtient la relation de dispersion:

$$\left[ i\omega^3 t_0 + \omega^2 - \left( \frac{m}{r} + i\Omega t_0 \frac{m t_m}{r} \right) |k|^2 \right] \vec{d} = \left[ \frac{l+m}{r} + i\Omega t_0 \frac{l t_1 + m t_m}{r} \right] \left( \vec{k} \cdot \vec{d} \right) \vec{k} \quad (4-50)$$

En introduisant les vitesses  $c_p$ ,  $c_s$  et les temps de relaxation  $t_p$  et  $t_s$

avec  $c_p = \sqrt{\frac{l+2m}{r}}$ ,  $c_s = \sqrt{\frac{m}{r}}$ ,  $t_p = t_0 \frac{l t_1 + 2m t_m}{l+2m}$ ,  $t_s = t_0 t_m$ , l'équation (4-50) devient :

$$\left[ i\omega^3 t_0 + \omega^2 - c_s^2 (1 + i\Omega t_s) |k|^2 \right] \vec{d} = \left[ c_p^2 (1 + i\omega t_p) - c_s^2 (1 + i\omega t_s) \right] \left( \vec{k} \cdot \vec{d} \right) \vec{k} \quad (4-51)$$

Le produit scalaire de cette équation par  $\vec{k}$  implique en particulier:

$$\vec{k} \cdot \vec{d} \left[ i\omega^3 t_0 + \omega^2 - c_p^2 (1 + i\omega t_p) |k|^2 \right] = 0 \quad (4-52)$$

Deux cas se présentent alors, selon que le produit scalaire  $\vec{k} \cdot \vec{d}$  est nul ou non :

**Ø Les ondes P** (ondes de compressions) :  $\vec{k} \cdot \vec{d} \neq 0$

Dans ce cas, la relation (4-51) montre que  $\vec{k}$  et  $\vec{d}$  sont colinéaires et (4-52) donne la relation de dispersion des ondes **P**:

$$\omega^2 (1 + i\omega t_0) = c_p^2 |k|^2 (1 + i\omega t_p) \quad (4-53)$$

**Ø Les ondes S** (ondes de cisaillement) :  $\vec{k} \cdot \vec{d} = 0$

Les vecteurs  $\vec{k}$  et  $\vec{d}$  sont orthogonaux et l'équation (4-51) donne la relation de dispersion des ondes **S**:

$$\omega^2 (1 + i\omega t_0) = c_s^2 |k|^2 (1 + i\omega t_s) \quad (4-54)$$

On peut remarquer que, si on fait le changement de variable ( $S = i\omega$ ), les équations de dispersion (4-53) et (4-54), s'écrivent sous la forme :

$$t_0 S^3 + S^2 + t_i c_i^2 |k|^2 S + c_i^2 |k|^2 = 0 \quad \forall i = p, s \quad (4-55)$$

L'équation (4-55) est la même que équation (4-40) obtenue en dimension un, en remplaçant  $t_i$  par  $t_1$ ,  $c_i$  par  $c$  et  $|k|$  par  $k$  pour  $i = p, s$  les conclusions de l'analyse en 1D peuvent donc être étendues en 3D.

### 4.5.3 Facteur de qualité

Bien qu'on ait à sa disposition un modèle mathématique faisant appel à de nombreux paramètres, comme c'est le cas des modèles de Zener généralisés que nous étudions dans ce travail, une difficulté subsiste au niveau de la modélisation dans le calage de ces paramètres sur la réalité physique. C'est dans cette direction que se situe le contenu de cette section. Nous commençons au paragraphe 5.3.1, par définir quelques notions qui sont plus liées aux mesures physiques, en particulier celles du facteur de qualité. Puis, au paragraphe 5.3.2, nous montrons comment on peut décrire à l'aide de nos modèles, des milieux qui sont dits à facteur de qualité quasi-constant, lesquels sont fréquemment rencontrés en géophysique.

### 4.5.3.1 Définitions

En faisant l'analyse par ondes planes nous avons montré que la dissipation du modèle viscoélastique est liée à la fréquence. Une façon d'étudier cette dissipation est de définir le facteur de qualité  $Q$  qui la caractérise d'une manière quantitative. Dans un premier temps, on définit le module complexe et le facteur de qualité dans le cas 1D et on généralisera cette étude dans le cas de dimension supérieure.

On considère la loi de comportement :

$$s + t_0 \frac{\partial s}{\partial x} = m \frac{\partial u}{\partial x} + mt_1 \frac{\partial e}{\partial t} \rightarrow (1-D) \quad (4-56)$$

La transformée de Fourier  $\hat{f}$  d'une fonction  $f$  définie par :

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-iwt) dt \quad (4-57)$$

En appliquant la transformée de Fourier (4-56), on obtient:

$$\hat{S} = M(w) \hat{e}(w) \quad (4-58)$$

Où  $\hat{S}$  et  $\hat{e}$  sont respectivement les transformées de Fourier des fonctions  $s$  et  $e$ , et  $M(w)$  est appelé module complexe:

$$M(w) = m \frac{1 + iwt_1}{1 + iwt_0} \quad (4-59)$$

On sépare  $M$  en parties réelle et imaginaire :

$$M = \Re e(M) + i \Im m(M) \quad (4-60)$$

Ce qui implique :

$$\hat{S}(w) = \hat{e}(w) |M| \exp(ij(w)) \quad (4-61)$$

Avec:

$$\tan j(w) = \frac{\Im m(M)}{\Re e(M)} \quad (4-62)$$

$j$  Est l'angle de déphasage entre la contrainte et la déformation, on l'appelle angle de pertes et il est relié a la viscoélasticité. Dans le cas d'un milieu élastique ( $t_0 = t_1 = 0$ ), la fonction  $M$  est égale à  $m$ , d'où  $\Re e(M) = m$  et  $\Im m(M) = 0$  et  $j = 0$ , ce qui implique que la partie imaginaire  $\Im m(M)$  caractérise la dissipation des modèles viscoélastiques, par contre la partie réelle  $\Re e(M)$  est liée a la réponse instantanée. On définit alors le facteur de qualité  $Q$  par :

$$Q = \frac{\Re e(M)}{\Im m(M)} = \frac{1}{\tan j(w)} \quad (4-63)$$

Pour un milieu élastique non dissipatif, le facteur  $Q$  est infini, par contre un facteur de qualité nul implique un milieu absorbant.

Les parties réelle et imaginaire du modèle complexe  $M$  défini par l'équation (4-60), sont données par :

$$\Re(M) = m \frac{1 + w^2 t_1 t_0}{1 + w^2 t_0^2} \quad (4-64)$$

$$\Im(M) = m \frac{w(t_1 - t_0)}{1 + w^2 t_0^2} \quad (4-65)$$

D'où le facteur de qualité et l'angle de perte associés à la loi élémentaire (4-56) :

$$Q(w) = \frac{1 + w^2 t_1 t_0}{w(t_1 - t_0)}, \quad (4-66)$$

$$\tan j(w) = Q^{-1} = \frac{w(t_1 - t_0)}{1 + w^2 t_1 t_0} = \frac{t_1 - t_0}{\sqrt{t_0 t_1}} \frac{w \sqrt{t_0 t_1}}{1 + w^2 t_1 t_0} \quad (4-67)$$

Si on note par  $q$  le rapport  $t_1/t_0$ , le maximum de  $Q^{-1}$ , représentant la dissipativité maximale,

elle est atteinte pour la pulsation ( $w_{\max} = 1/\sqrt{t_1 t_0}$ ), Ce qui nous permet d'écrire:

$$Q^{-1}(\max, q) = \frac{(t_1 - t_0)}{2\sqrt{t_1 t_0}} = \frac{(q - 1)}{\sqrt{q}} \quad (4-68)$$

Elle est croissante par rapport à  $q$ , ce qui implique que plus le rapport  $q$  est grand, plus l'amortissement augmente. La figure (4-IX) donne les variations de l'inverse de  $Q^{-1}$  en fonction de la pulsation  $w$ .

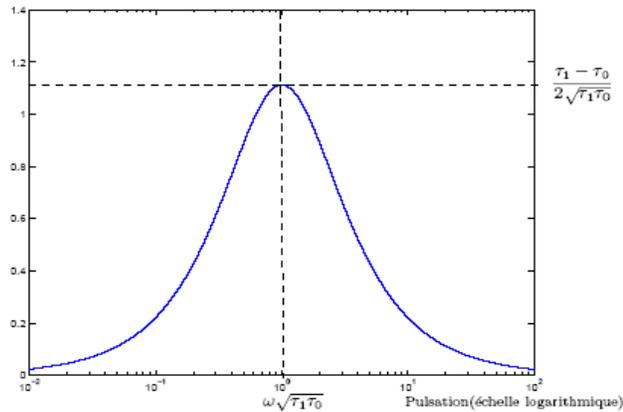


Fig. (4-IX) : La variation de  $Q^{-1}$  en fonction de  $w$

### 4.5.3.2 Facteur de qualité quasi-constant

On constate que le facteur de qualité dépend de la fréquence (voir Fig.4-IX). Or, en géophysique une classe importante de matériaux est caractérisée par des facteurs de qualité constants sur une large bande de fréquence, on parle alors de matériaux à facteur de qualité constant ou Quasi-constant. Le modèle de Zener élémentaire n'est pas suffisant (voir l'équation 41), c'est pourquoi il est intéressant de considérer le modèle de Zener généralisé.

Nous déterminons un modèle avec un facteur de qualité quasi-constant, en superposant plusieurs modèles de Zener élémentaires ayant tous le même module relâché  $m$  et on détermine les temps de relaxation pour avoir un facteur de qualité quasi-constant sur une bande de fréquence donnée. On considère la loi de comportement générale :

$$s_l + t_l^0 s_l = m e(u) + m t_l^1 e(i\omega) \quad (4-69)$$

$$\forall l = 1, \dots, L$$

$$s = \sum_{l=1}^L s_l$$

Et on désigne respectivement par:

$$M_l \text{ et } Q_l = \frac{\Re M_l}{\Im m M_l} \quad (4-70)$$

Le module complexe et le facteur de qualité associé à la  $l^{ieme}$  loi élémentaire. Le facteur de qualité associé à la loi (4-69) est donné par:

$$Q(\omega) = \frac{\sum_{l=1}^L \Re(M_l)}{\sum_{l=1}^L \Im m(M_l)} \quad (4-71)$$

Avec:

$$\Re M_l(\omega) = m \frac{1 + \omega^2 t_{1,l} t_{0,l}}{1 + \omega^2 t_{0,l}^2} \quad (4-72)$$

Et

$$\Im m M_l(\omega) = m \frac{\omega(t_{1,l} - t_{0,l})}{1 + \omega^2 t_{0,l}^2} \quad (4-73)$$

On écrit alors l'inverse du facteur de qualité sous la forme :

$$Q^{-1}(w) = \frac{\sum_{l=1}^L \frac{w(t_{1,l} - t_{0,l})}{1 + w^2 t_{0,l}^2}}{\sum_{l=1}^L \frac{1 + w^2 t_{1,l} t_{0,l}}{1 + w^2 t_{0,l}^2}} \quad (4-74)$$

et les coefficients d'amortissements  $t_{1,l}$  pour tout  $l = 1, \dots, L$  sous la forme :

$$t_{1,l} = t_{0,l}(1 + g_l), g_l > 0 \quad (4-75)$$

Après substitution de la formule (4-75) dans (4-74), le facteur de qualité s'écrit comme suit :

$$Q^{-1}(w) = \frac{\sum_{l=1}^L \frac{w t_{0,l}}{1 + w^2 t_{0,l}^2} g_l}{L + \sum_{l=1}^L \frac{w^2 t_{0,l}^2}{1 + w^2 t_{0,l}^2} g_l} \quad (4-76)$$

## 5.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'analyse et l'approximation numérique du problème modèle étudié précédemment. L'étude numérique de ces problèmes a commencé il y a environ 15 ans (voir par exemple les travaux de Carcione et al [17, 18, 19]). La plupart des méthodes développées sont basées sur des schémas d'approximation aux différences finies. En particulier, un travail de référence est du a Robertson, Blanch et Symes [20]. Ces derniers proposent une analyse de Fourier, la stabilité de leur méthode qui est toutefois limitée aux milieux homogènes unidimensionnels. Les différences finies sont bien adaptées pour des géométries simples et pour le traitement des milieux homogènes. Cependant, une manière robuste de traiter les milieux hétérogènes et complexes est d'utiliser la méthode des éléments finis. Dans le cadre des ondes viscoélastiques, il semble qu'il n'y ait que très peu de travaux existants, plusieurs travaux proposent une méthode d'éléments finis en espace et de quadrature pour l'intégration en temps, pour résoudre un problème viscoélastique isotrope basé sur une formulation en déplacement et une représentation intégrale du modèle de viscoplasticité. Mentionnons également l'approche par éléments finis espace-temps, de nature beaucoup moins mathématique.

Notre objectif dans cette étude est de faire une approximation numérique par la méthode des différences finies. On prend le cas unidimensionnel pour un milieu viscoélastique isotropes homogènes.

## 5.2 Présentation du problème

Nous considérons le modèle suivant dans un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 1, 2, 3$ ), généralisant le problème unidimensionnelle de Zener :

Trouver le champ de déplacement  $u$  et le tenseur des contraintes  $\mathbf{s}$  vérifiant :

$$\begin{aligned}
 r\partial_t^2 u - \operatorname{div} \mathbf{s} &= f \mathbf{L} \quad (i) && \text{Dans } \Omega \times ]0, T[ \\
 \mathbf{s} + t_0 \partial_t \mathbf{s} &= C e(u) + t D e(\partial_t u) \mathbf{L} \quad (ii) && \text{Dans } \Omega \times ]0, T[ \\
 u(x, 0) = u_0, \partial_t u(x, 0) &= u_1, \mathbf{s}(x, 0) = \mathbf{s}_0 \mathbf{L} \quad (iii) && \text{Dans } \Omega \\
 u &= 0 \mathbf{L} \quad (iv) && \text{Dans } \Omega \times ]0, T[
 \end{aligned}
 \tag{5-1}$$

Avec:

$$(\text{div} \mathbf{s})_i = \sum \frac{\partial \mathbf{s}_{ij}}{\partial x_j}, \forall i = 1, n \quad (5-2)$$

Où  $r$  est la masse volumique,  $t_0$  un temps de relaxation,  $C$  et  $D$  deux tenseurs d'ordre 4 symétriques:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij}, D_{ijkl} = D_{jikl} = D_{klij} \quad (5-3)$$

Sont définis positifs.

On définit le modèle généralisé (5-1), comme le modèle obtenu en prenant le tenseur des contraintes  $\mathbf{s}$  comme une superposition des contraintes élémentaires :

$$\mathbf{s} = \sum_l^L \mathbf{s}_l \quad (5-4)$$

Les  $\mathbf{s}_l$  étant relié au tenseur des déformations par la loi élémentaire :

$$\mathbf{s}_l + t_{0,l} \partial_t \mathbf{s}_l = C_l \mathbf{e}(u) + t_{0,l} D_l \mathbf{e}(\partial_t u), \forall l = 1, \dots, L \quad (5-5)$$

Où  $t_{0,l}$ ,  $C_l$ ,  $D_l$  ont respectivement les mêmes propriétés que  $t_0$ ,  $C$ ,  $D$  dans (5-1).

### 5.3 Cas 1D – Schémas Au Différences Finis

Nous nous intéressons dans un premier temps au cas unidimensionnel. Notre objectif est de déterminer un schéma aux différences finies généralisable en dimension supérieure et qui soit explicite et stable.

On considère un domaine  $I = ]a, b[$  occupé par un milieu viscoélastique avec des conditions de Dirichlet au bord et on cherche à déterminer le déplacement  $u$  et la contrainte  $\mathbf{s}$  vérifiant :

$$\begin{aligned} r \partial_{tt}^2 u - \partial_x \mathbf{s} &= f \mathbf{L} \quad (i) \\ \mathbf{s} + t_0 \partial_t \mathbf{s} &= m(\partial_x u + t_1 \partial_{xt}^2 u) \mathbf{L} \quad (ii) \\ u(x, 0) &= u_0, \partial_t u(x, 0) = u_1, \mathbf{s}(x, 0) = \mathbf{s}_0 \mathbf{L} \quad (iii) \\ u(a, t) &= u(b, t) = 0 \mathbf{L} \quad (iv) \end{aligned} \quad (5-6)$$

Avec:  $t_1 > t_0$

#### 5.3.1 Discrétisation En Espace

On introduit un maillage régulier du domaine  $I$  de pas  $h = \Delta x$  constitué de segments  $[x_j, x_{j+1}]$ ,  $j = 1, \dots, N$ , avec  $x_j = a + (j-1)h$  et  $h = \frac{b-a}{N}$ . On approche la première

équation de (5-6) aux points  $x_j$  et la deuxième aux points milieu  $x_{j+\frac{1}{2}} = x_j + \frac{1}{2}h$  (voir la figures 5-I). On note par  $u_j(t)$  l'approximation de  $u(x_j, t)$  et  $s_{j+\frac{1}{2}}$  l'approximation de  $s(x_{j+\frac{1}{2}}, t)$ , et on propose d'approcher (5-6) par le schéma centré d'ordre 2.

Si on considère que  $r, m, t_0, t_1$  sont des constantes avec la condition sur les temps de relaxation suivante ( $t_1 > t_0$ ), le schéma semi-discrétisé en espace peut être écrit sous la forme suivante :

$$r \frac{d^2 u_j}{dt^2} - \frac{s_{j+\frac{1}{2}} - s_{j-\frac{1}{2}}}{h} = f_j$$

$$s_{j+\frac{1}{2}} + t_0 \frac{ds_{j+\frac{1}{2}}}{dt} = \frac{m}{h} \left[ t_1 \left( \frac{du_{j+1}}{dt} - \frac{du_j}{dt} \right) + u_{j+1} - u_j \right] \quad (5-7)$$

$$u_j(0) = u_{0,j}, \frac{du_j}{dt}(0) = u_{1,j}, s_{j+\frac{1}{2}}(0) = s_{0,j+\frac{1}{2}}$$

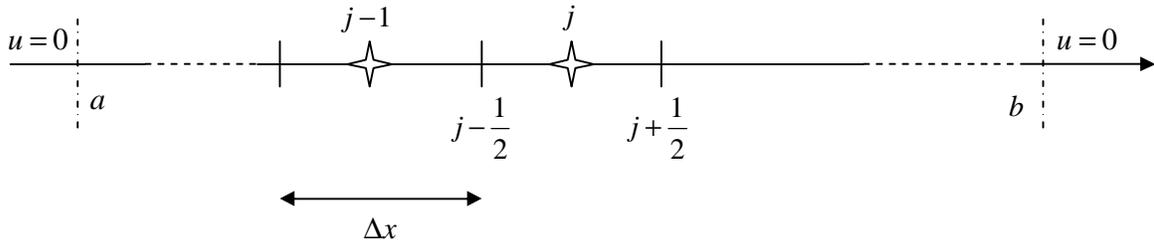


Fig.5-I Discrétisation en espace

### 5.3.2 Discrétisation En Temps

On considère une discrétisation en temps avec un pas de temps  $\Delta t$ . On note  $t^n = n\Delta t$ ,  $u_j^n$  l'approximation de  $u(x_j, t^n)$  et par  $s_{j+\frac{1}{2}}^n$  l'approximation de  $s(x_{j+\frac{1}{2}}, t^n)$  (voir les figures 4-2,4-3).

Si on approche la première équation  $t = t^n$  en utilisant le schéma saute-mouton et la deuxième équation en  $t = t^{n+\frac{1}{2}}$  en utilisant un schéma centré d'ordre 2, nous obtenons le schéma totalement discrétisé:

$$r \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{s_{j+\frac{1}{2}}^n - s_{j-\frac{1}{2}}^n}{h} = f_j^n \quad (5-8)$$

$$\frac{s_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} + s_{j+\frac{1}{2}}^n}{2} + t_0 \frac{s_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - s_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} = \frac{m}{h} \left[ t_1 \left( \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} - \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right) + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{2} - \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{2} \right] \quad (5-9)$$

$$u_j^0 = u_{0,j}, u_j^1 = \mathcal{U}_j, s_{j+\frac{1}{2}}^0 = s_{0,j+\frac{1}{2}} \quad (5-10)$$

Où  $f_j^n$  est l'approximation de  $f(x_j, t^n)$  et  $\mathcal{U}_j$  est une approximation de  $u(x_j, \Delta t)$  d'ordre 2 :

$$\mathcal{U}_j = u_j^0 + \Delta t u_{1,j} + \frac{\Delta t^2}{2rh} (s_{j+\frac{1}{2}}^0 + s_{j-\frac{1}{2}}^0) \quad (5-11)$$

Calcul de  $u$  au point ●

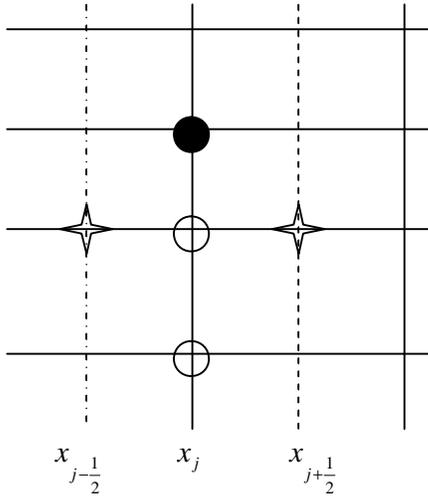


Fig. (5-II) Calcul de  $u_j^{n+1}$  en fonction de

$$u_j^n, s_{j-\frac{1}{2}}^n \text{ et } s_{j+\frac{1}{2}}^n$$

calcul de  $s$  au point ☆

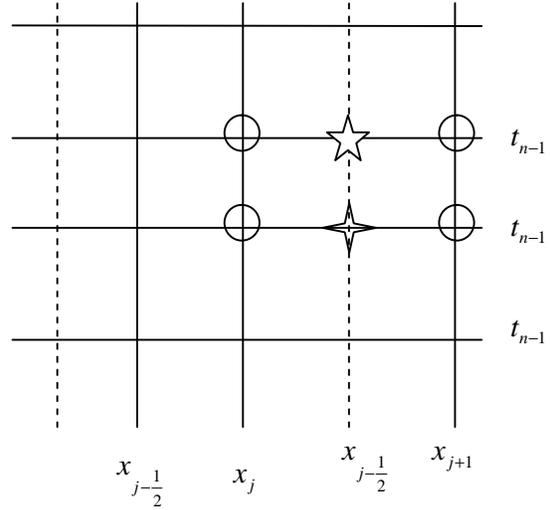


Fig. (5-III) Calcul de  $s_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}$  en fonction de

$$u_{j+1}^{n+1}, u_j^{n+1}, u_{j+1}^n, u_j^n \text{ et } s_{j+\frac{1}{2}}^n$$

Dans une première expérience, afin de montrer l'influence des coefficients d'amortissement  $t_0$  et  $t_1$  sur l'atténuation de propagation des ondes élastiques dans ce type de milieu, nous allons présenter sur la figure (5-IV), une Expérience numérique où on fait varier le rapport  $\frac{t_1}{t_0}$ . On voit que l'absorption de l'énergie en d'autre terme l'amortissement des

ondes est liée au rapport  $q = \frac{t_1}{t_0}$ . Pour une valeur grande du rapport  $\frac{t_1}{t_0}$ , on a plus

d'amortissement est inversement cette conclusion et très claire sur les figures (5-IV) et la figure (5-VI), on peut voir que l'amplitude de l'onde sur la figure (5-IV) diminue lentement avec le temps, mais sur la figure (5-VI), cette amplitude est presque nulle. Pour aboutir à ces résultats nous avons fait plusieurs tests numériques, pour cela on a pris un cas défini par les conditions de Cauchy suivantes :

$$\begin{aligned}
 f(x,t) &= u(0,t) = u(1,t) = 0 \\
 u(x,0) &= u_0(x) = \sin(px) \\
 \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= u_1(x) = 0 \\
 s(x,0) &= \frac{mt_1}{t_0} p \cos(px)
 \end{aligned}
 \tag{5-12}$$

5.3.3 Cas ou  $q = \frac{t_1}{t_0} = 1.2$

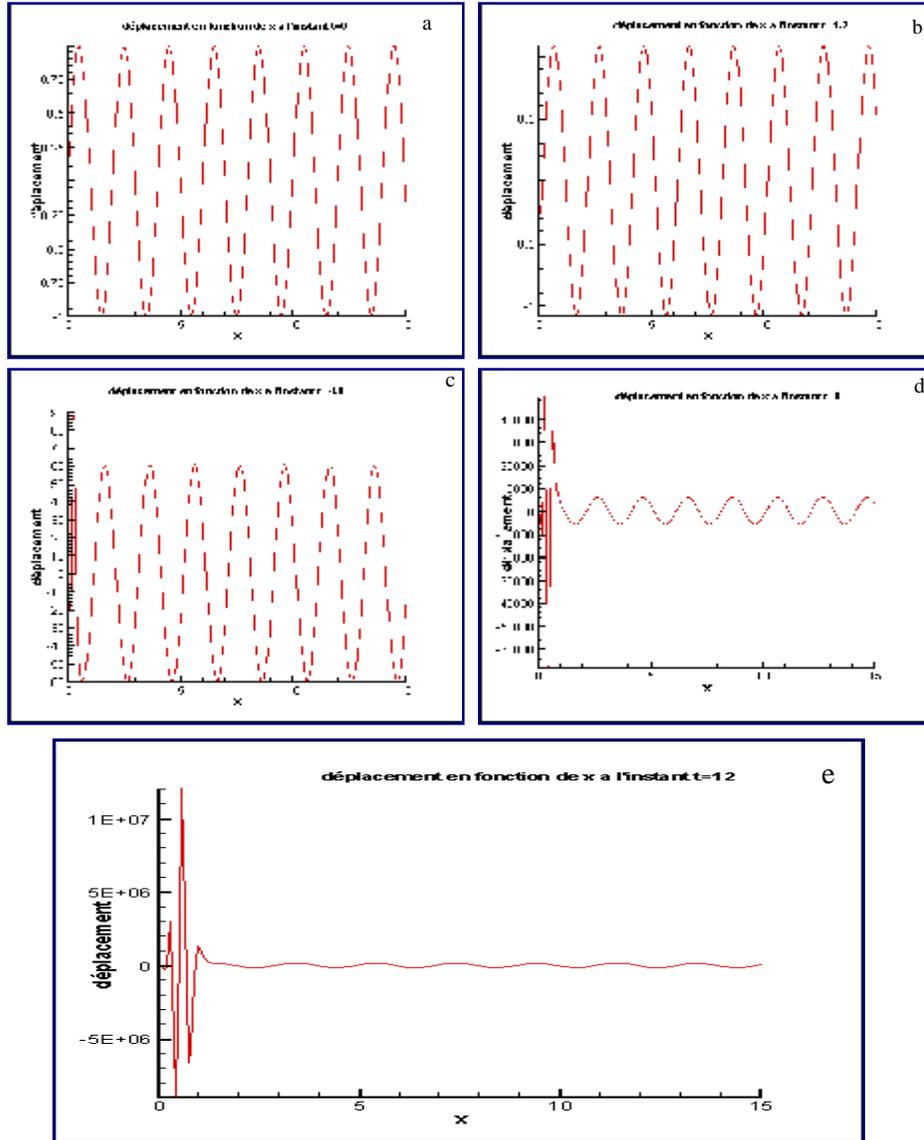


Fig. 5-IV norme du déplacement en fonction de  $x$  à l'instant  $t = 0$  à  $t = 12$  pour  $q = \frac{t_1}{t_0} = 1.2$

5.3.4 Cas où  $q = \frac{t_1}{t_0} = 0.12, t_0 = 1.2, t_1 = 10$

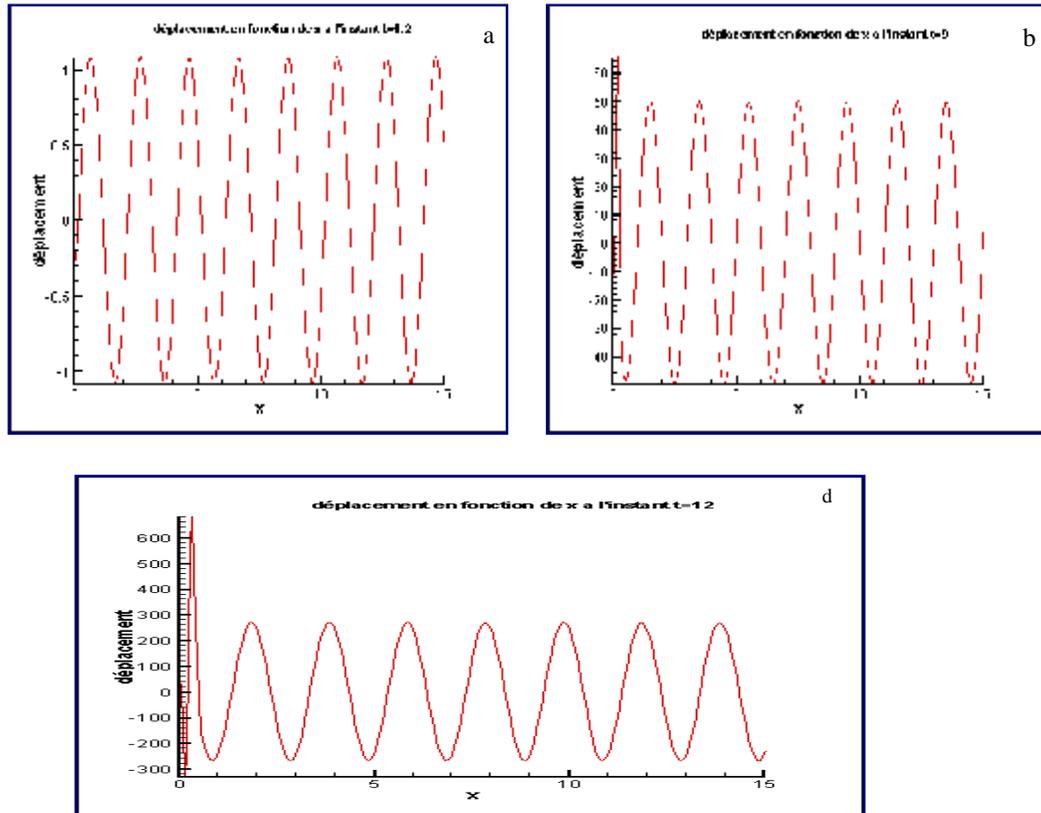


Fig.5-V norme du déplacement en fonction  $x$  de à l'instant  $t = 0$  à  $t = 12$  pour  $q = \frac{t_1}{t_0} = 0.12$

5.3.5 Cas où  $q = \frac{t_1}{t_0} = 0.012$

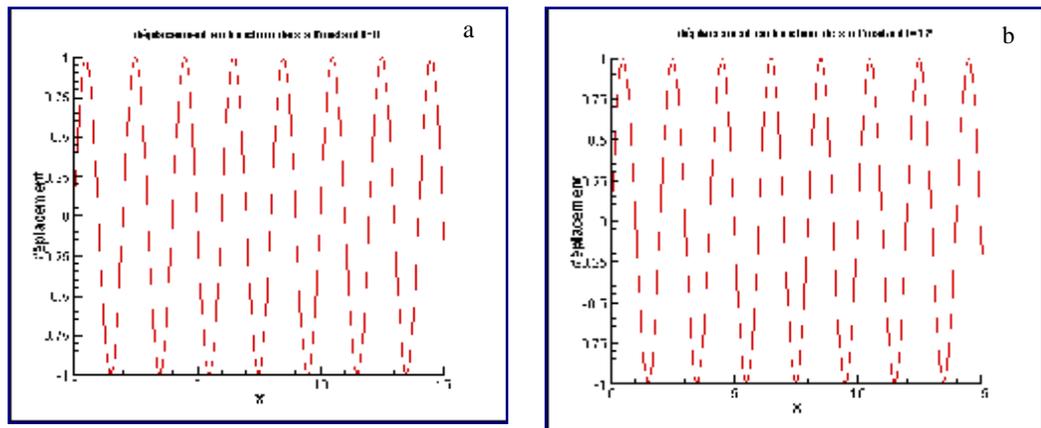


Fig.5-VI norme du déplacement en fonction  $x$  de a l'instant  $t = 0$  a  $t = 12$  pour  $q = \frac{t_1}{t_0} = 0.012$

Cas où  $g(i) \neq 0$  (est une constante),  $q = \frac{t_1}{t_0} = 1.2$

$$f(x,t) = u(0,t) = u(1,t) = 0$$

$$u(x,0) = u_0(x) = \sin(px)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x) = g(x)$$

$$s(x,0) = \frac{mt_1}{t_0} p \cos(px)$$

$$\emptyset \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x) = g(x) = 1$$

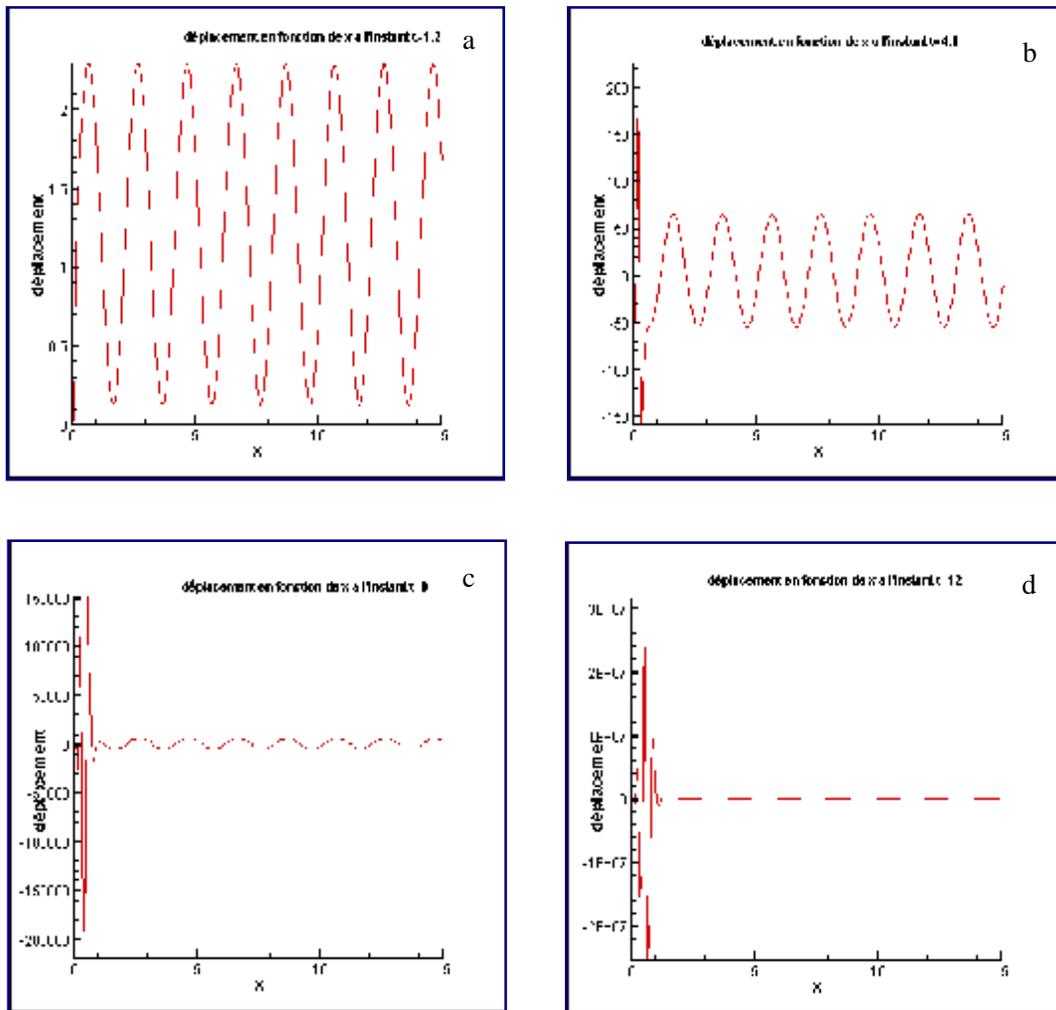


Fig.5-VII Norme du déplacement en fonction de  $x$  à l'instant  $t = 0$  à  $t = 12$ ,  $g(x) = 1$

$$\emptyset \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x) = g(x) = 5$$

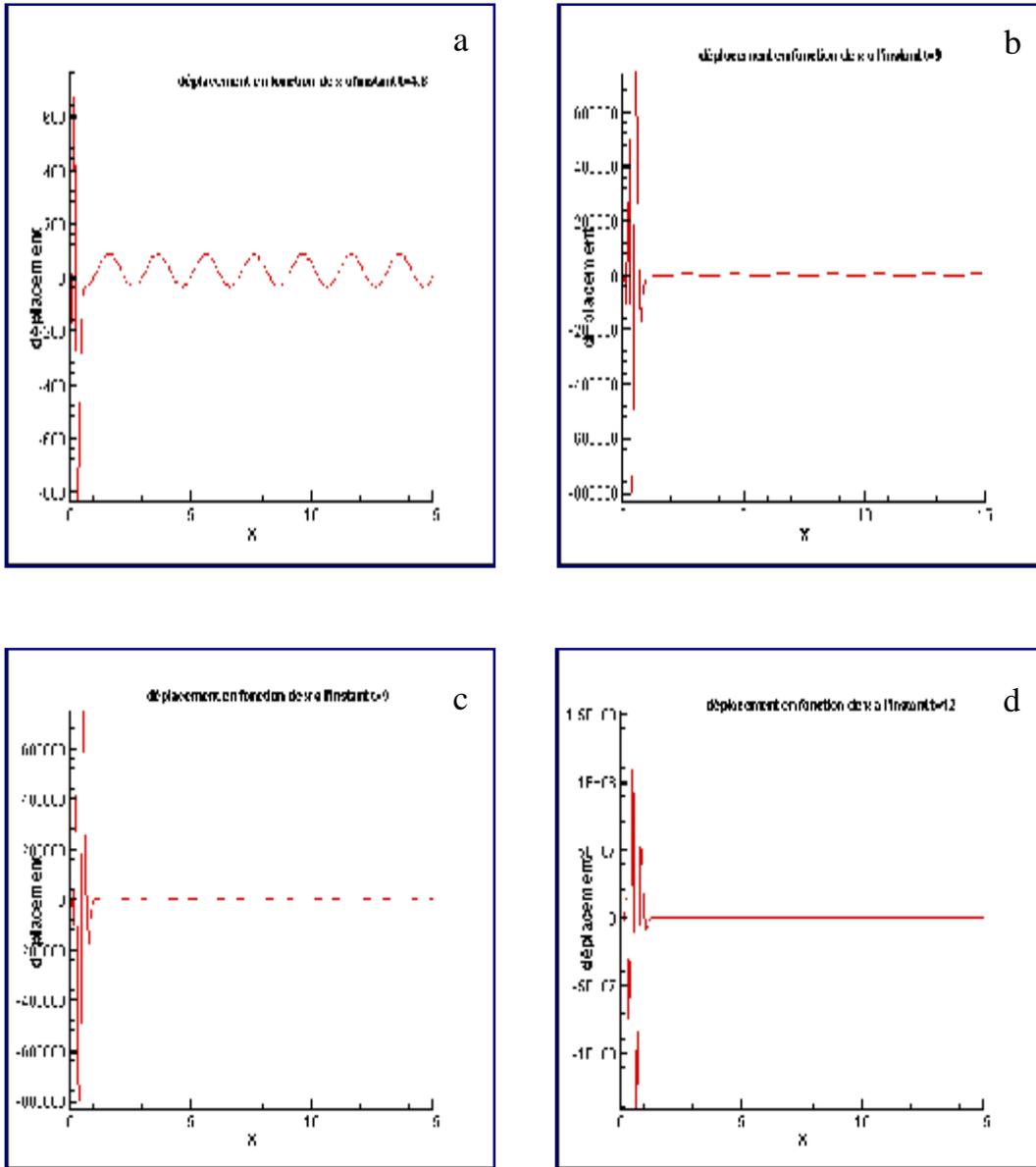


Fig.5-VIII Norme Du Déplacement En Fonction De  $x$  A L'instant  $t = 0$  A  $t = 12$  ,  $g(x) = 5$

$$\emptyset \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x) = g(x) = 20$$

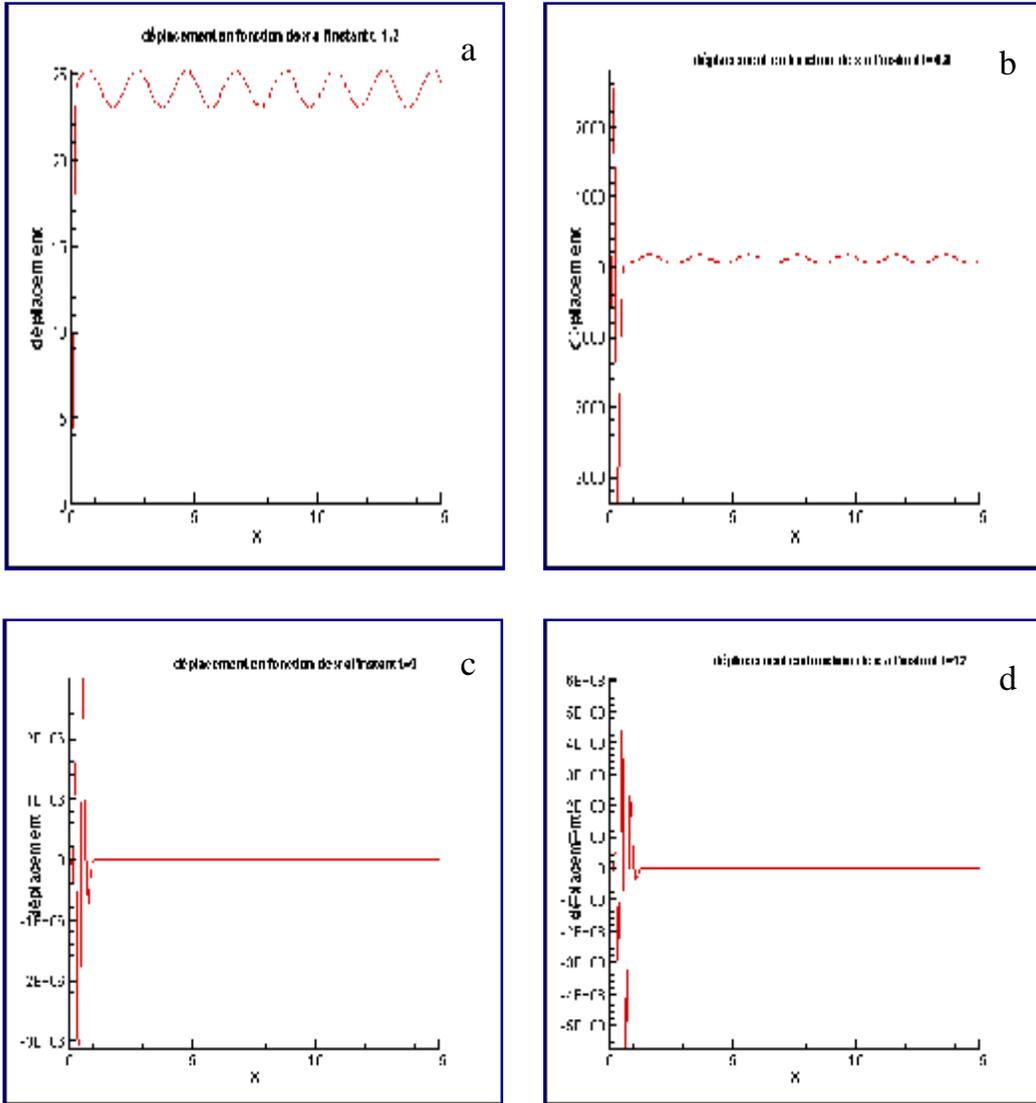


Fig.5-IX Norme du déplacement en fonction de  $x$  à l'instant  $t = 0$  A  $t = 12$ ,  $g(x) = 20$

## Conclusion et Perspectives

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'étude de la propagation d'ondes dans les milieux isotropes et viscoélastiques isotropes.

Dans la première partie de ce travail nous avons présenté le cas général pour la propagation des ondes élastiques dans les milieux isotropes. Sur le plan théorique l'analyse mathématique de ces problèmes a été faite afin de voir les propriétés de propagation des ondes dans les solides. L'analyse par l'onde plane, pour le cas 3 D nous a permis de conclure qu'on est en présence de deux types d'ondes en régime harmonique, l'onde transversal et l'onde longitudinal. Elles se propagent dans les solides isotropes homogènes avec deux vitesses différentes. Cette conclusion est bien explicite dans le deuxième chapitre par les équations de la propagation découplées. Une autre analyse par onde plane harmoniques (problème en fréquence) a été faite où on a supposé que la forme de ces ondes sont des harmoniques simples et cela, pour une raison de simplifier les calculs. Dans cette dernière on a trouvé, pour l'onde qui se propage dans une membrane, que les particules se mouvoir dans une direction longitudinale est transversal avec deux vitesses différentes.

Le but de cette analyse mathématique est la recherche de la solution exacte des équations de l'onde.

Sur le plan analyse numérique, nous avons présenté une approximation de ces équations pour les deux cas unidimensionnel et bidimensionnel, en appliquant la méthode des différences finies où nous avons supposé un cas simple pour le cas unidimensionnel sans tenir compte des forces extérieures. Plusieurs testes numériques ont été réalisés afin, d'étudier les propriétés de ces ondes dans un milieu isotrope homogène. Cette étude nous a permis de comprendre le comportement des ondes et l'effet de la vitesse sur les deux types d'ondes, ainsi que l'effet des conditions aux limites considérées. Pour le cas bidimensionnel nous avons pris un cas simple avec un maillage régulier et deux jeux de conditions, en traçons la norme du déplacement en fonction de  $x$  a chaque instant.

Dans la deuxième partie nous avons proposé deux modèles de propagation en milieux viscoélastiques, on considère le cas général des milieux viscoélastique isotrope, un modèle unidimensionnel de Zener qui découle du cas général et son extension aux cas bidimensionnel et tridimensionnel. Sur le plan théorique (analyse mathématique) nous avons étudié les deux modèles dans un cadre assez général (dimension 2 et 3).

L'analyse par onde plane du modèle de zener pour les milieux homogènes isotropes, nous a permis de comprendre le comportement des ondes dans ces milieux. L'influence des temps de relaxation sur la vitesse de propagation et la qualité d'atténuation pour les milieux viscoélastiques.

Sur le plan analyse et approximation numérique, nous avons proposé des schémas aux différences finies pour le cas unidimensionnel, où plusieurs testes numériques ont été faites pour apprécier l'effet du temps de relaxation sur le comportement de ces ondes dans ce type de milieux.

Donc le domaine de la simulation des ondes dans les milieux viscoélastiques en trouve plusieurs voies de recherches :

- Ø La modélisation des milieux viscoélastiques fissurés. Un premier travail dans ce sens a été réalisé par Scarella [7] dont lequel elle a généralisé la méthode aux milieux fissurés en introduisant la méthode des domaines fictifs au niveau de la fissure.

Pour le traitement des modèles plus complexes. Il serait intéressant d'étudier :

1. La prise en compte de l'atténuation des ondes dans les milieux poreux par l'introduction des termes viscoélastiques (milieux poro-viscoélastiques).
2. L'introduction de modèles multiphasiques (c'est-à-dire des milieux avec plusieurs phases fluides). C'est le cas des milieux poreux avec des fissures qui contiennent du pétrole, du gaz ou de l'eau.

Les recherches actuelles dans le domaine de la propagation des ondes dans les solides sont orientées vers des cas complexes, surtout pour les milieux hétérogènes de forme irrégulière dans le cas tridimensionnel, où les méthodes numériques classiques ne donnent pas des résultats précis, c'est pour ça on trouve un très grand développement des méthodes numériques adaptées pour ces domaine, tel que les éléments finis mixtes spectraux, la méthode des différences finis d'ordre élevé et la méthode des domaines fictifs .

---

## Références Bibliographique

- [1] Wave motion in Elastic Solids. K.ARLT. GRAFF. Ohio state University press 1975.
- [2] Introduction à l'analyse mathématique de la propagation d'ondes en harmonique. JOLY Patrick INRIA (institut national de recherche en informatique et automatique) Rocquencourt .Année 1994-95.
- [3] Le palpeur acoustique : un nouvel outil d'investigation des tissus biologique. Thèse de doctorat / M.Jean-Luc Gennisson.Année 2003.
- [4] Méthodes variationnelles, domaines fictifs et conditions aux limites artificielles pour des Problèmes hyperboliques linaires. Thèse de doctorat / Eliane Bécache. Mai 2003 université paris DAUPHINE.
- [5] Eléments finis mixtes spectraux et couches absorbantes parfaitement adaptées pour la Propagation d'ondes élastiques en régime transitoire .Thèse de doctorat / Sandrine Fauveux. Centre national de recherche scientifique Paris. 6 février 2003.
- [6] Modélisation de la propagation d'ondes dans les milieux viscoélastiques linéaires. I. Analyse mathématique. Eliane Bécane-Abdelàzize Ezziane-patrick Joly, INRIA (institut national de recherche en informatique et automatique) Université Paris Dauphine, 08 Février 2005.
- [7] Etude théorique et numérique de la propagation d'ondes en présence de contact unilatéral dans un milieu fissuré. Thèse de doctorat /Gilles Scarella, INRIA (institut national de recherche en informatique et automatique) Université Paris IX- Dauphine, 01 03 2004.
- [8] Modélisation mathématique de procédés d'usinage : abrasion et mouillage. Thèse de doctorat /Adrien Petrov. Centre national de recherche scientifique Paris.29 novembre 2002.
- [9] Analyse et approximation mathématique de modèles de propagation d'ondes. Partie I. Analyse mathématique. INRIA (institut national de recherche en informatique et automatique) Rocquencourt Patrick Joly 2001-2002.
- [10] Ondes élastiques dans les solides. Tome I. Propagation libre et guidée. Pierre-Gilles. Edition MASSON.1996
- [11] Interférométrie - Speckle ultrasonore : Application a la mesure d'élasticité. Thèse de doctorat / Stefan Catheline. UNIVERSITE PARIS VII.10 novembre 1998.
- [12] Approche microscopique des ondes en milieux complexes : des micro-ondes aux ondes sismiques. Thèse de doctorat / Nicolas Trégourés. Université de Joseph Fourier Grenoble I ,24 septembre 2001.

- [13] Éléments finis d'ordre élevé avec condensation de masse pour l'équation des ondes en dimension 1. Gary Cohen, Patrick Joly, Nathalie Tordjman. INRIA (institut national de recherche en informatique et automatique) Rocquencourt. Août 1994.
- [14] Résumé du cours du professeur J.T Master, section de physique EPFL. Ecole polytechnique de Lausanne.
- [15] Schéma numérique pour la résolution de l'équation des ondes. E.Bécache. ENSTA .Ecole Nationale Supérieure Des Techniques Avancées Paris. Septembre 2003.
- [16] Background on nonlinear elasticity. R.W.Ogden. 2001.International publisher and information provider Amsterdam and London stock exchanges.
- [17] Introduction to elasticity and viscoelasticity. Jean Lemaitre. 2001. International publisher and information provider Amsterdam and London stock exchanges.
- [18] J. M. Carcione, D. Koslo, and R. Koslo. Wave propagation simulation in a linear Viscoélastic medium Geophysics. J. Roy. Astr. Soc., 93 :393(407, 1988).International Journal for Numerical Methods in Engineering.
- [19] J. M. Carcione. Seismic modeling in viscoelastic media. Geophysics, 58:110{120, 1995. International Journal for Numerical Methods in Engineering.
- [20] J. M. Carcione, D. Koslo\_, and R. Koslo\_. Wave propagation simulation in a viscoélastic medium. Geophysics. J. Roy. Astr. Soc., 95 :597{611, 1988. International Journal for Numerical Methods in Engineering.
- [21] J. O. A. Robertsson, J. O. Blanch, and W. W. Symes. Viscoelastic finite difference Modelling. Geophysics, 59(9) :1444{1456, 1994.International Journal for Numerical Methods in Engineering.
- [22] Laurence CAMPAGNE. Modélisation et simulation de la viscoplasticité et de l'endommagement en grandes vitesses de déformation .Institut national des sciences et techniques nucléaire.
- [23] Projet –team ondes Modélisation et simulation de phénomènes de propagation d'ondes INRIA (institut national de recherche en informatique et automatique) Projet Ondes Rocquencourt, Année 2003-2005.
- [24] Résolution numérique des équations aux dérivés partielles : méthodes des différences finis cours et exercice résolus M.KADJA première édition 1999.
- [25] Approche méicroscopique des ondes en milieu complexe des micro-ondes aux ondes sismique thèse de doctorat de l'université joseph Fourier –grenoble 1 auteur Nicolase TREGOURES, Année 2003.

- [26] Modélisation numérique de la propagation des ondes acoustiques et élastiques en présence d'interfaces Bruno LOMBARD le 4 janvier 2002. centre nationale de recherche scientifique Paris.
- [27] Résolution numérique de l'équation des ondes par une méthode d'éléments finis d'ordre élevé sur ordinateur parallèle Pascal Havé —Michel Kern —Christophe Lemuét. INRIA (institut national de recherche en informatique et automatique) Rocquencourt. février 2002.
- [28] Equations de transport non linéaires et systèmes hyperboliques Théorie et méthodes numériques Benoit Perthame .INRIA (institut national de recherche en informatique et automatique) Rocquencourt. 2003-2004
- [29] Dossier: Equations aux dérivées partielles G. Winckelmans. unité de Mathématique Appliquée Université De Louvain –La-Neuve October 11, 2005
- [30] Propagation des ondes élastiques dans les matériaux non linéaires aperçue des résultats de laboratoire obtenus sur les roches et des applications possibles en géophysique P. RASOLOFOSAON et B. ZINSZNER, Institut français du pétrole
- [31] Analyse et approximation de modèles de propagation d'ondes partie 1 analyse mathématique Patrick JOLY .INRIA (institut national de recherche en informatique et automatique) Rocquencourt. Année 2001-2002
- [32] Introduction a l'analyse mathématique de la propagation d'ondes en régime harmonique JOLY Patrick Année 1994-95
- [33] PMLS for the numerical simulation of harmonic diffracted waves in an elastic plate E. Bécachey, A. S. Bonnet-Ben Dhia INRIA ROCQUENCOURT, Projet Ondes, UMR 27-06 CNRS-INRIA-ENSTA, France ENSTA, SMP, UMR 27-06 CNRS-INRIA-ENSTA, France
- [34] École Centrale Paris Mathématiques 2 D. Verwaerde et P. Laurent-Gengoux Analyse des équations aux dérivées partielles P. Laurent-Gengoux Année 2005-2006
- [35] Modélisation et équations aux dérivées partielles Anna Désilles. IMA. Informatique et mathématique appliquées. Année scolaire 2004/2005

## Résumé

Dans ce travail on s'intéresse, à l'étude de la propagation des ondes élastiques dans les milieux isotropes, et les milieux viscoélastiques isotropes. La première partie est consacrée à la formulation mathématique du phénomène de propagation des ondes dans les solides isotropes. Les différentes méthodes de résolution des équations qui régissent la propagation de l'onde ont été présentées avec des simulations numériques pour quelques exemples. Cela nous a permis de voir l'effet de la vitesse et des conditions aux limites sur la propagation de ces ondes pour le cas unidimensionnel et bidimensionnel. La deuxième partie, a été consacré aux milieux viscoélastiques homogènes, en suivant la même démarche que précédemment. L'analyse mathématique nous a permis de mieux comprendre le comportement de propagation des ondes dans ces types de milieu, et l'influence du temps de relaxation et la vitesse de propagation, ainsi que la qualité d'atténuation de ces ondes. Ensuite sur le plan analyse numérique, nous avons présenté une simulation du premier cas unidimensionnel en prenant le modèle rhéologique de Zener avec les conditions initiales de Cauchy, pour différentes valeurs de temps de relaxation.

**Mots Cles :** onde élastique, ondes planes, analyse de Fourier, formule de d'Alembert, condition de Cauchy, viscoélastique, fonction de green.

## Abstract

In this work, we are interested in the study of the propagation of elastic waves in isotropic solids, and isotropic viscoelastic mediums. The first part is devoted to a mathematical study of the phenomenon of the wave propagation in isotropic solids. For a better understanding of this phenomenon various resolution methods of the wave propagation governing equations were presented along with some simulations for given examples. This has allowed a better view of the effect of the velocity and boundary conditions on the wave propagation for one-dimensional and two-dimensional cases (1D, 2D). The second part of the work concerns the homogeneous viscoelastic mediums. Following the same steps as before, the mathematical analysis enabled us to better understand the behavior of wave propagation in these types of mediums, and the influence of the relaxation time and the propagation velocity, as well as the quality of attenuation of these waves. Then from a numerical analyzes point of view, we presented a simulation for first case (1D) by taking the rheological model of Zener with the initial conditions of Cauchy, for various value of the relaxation time.

**Key Words:** elastic wave, plane waves, analyzes of Fourier, formula of Alembert, condition of Cauchy, viscoelastic, function of green.

## ملخص

في هذا العمل نهتم بدراسة انتشار الأمواج المرنة في الأوساط الممتدة المتجانسة و الأوساط اللزجة المرنة يتلخص الجزء الأول من هذه الدراسة في عرض المعادلات الرياضية لظاهرة انتشار الأمواج في الأوساط الممتدة، الطرق المختلفة لحل معادلات انتشار الموجة متلثة بالمحاكاة العددية من أجل بعض الأمثلة، و هذا لمعرفة تأثير سرعة الانتشار و الشروط الحدية في الحالتين ذاته بعد واحد و بعدين.

الجزء الثاني من هذه الدراسة يهتم بدراسة انتشار الأمواج في الأوساط اللزجة المرنة المتجانسة و ذلك باتباع نفس خطوات الجزء الأول، التحليل الرياضي سمع لنا بالفهم الجيد لسلوك و مدى تأثير معامل التخماد و سرعة الانتشار و زمن الاسترخاء. أما على مستوى التحليل العددي فقد قدمنا

محاكاة محكية لنموذج زينر ذو بعد واحد من أجل الشروط الابتدائية من أجل مدة قيم لزمن  
الاسترخاء