

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

Université MENTOURI –CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

No D'ORDRE:.....

Série:.....

MEMOIRE

PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE MAGISTER EN
GENIE MECANIQUE

Intitulé:

**Analyse dynamique des plaques minces et épaisses:
Application aux matériaux homogènes et non
homogènes**

Option:

Mécanique appliquée en engineering

PAR:

Mme **CHERIDI HOUDA**

SOUTENU LE :.....

Devant le jury :

Président: B. NECIB prof Uni. Constantine

Rapporteur: T. BENMANSOUR MC. Uni. Constantine

Examineurs: I.BENISSAAD MC. Uni. Constantine

H. BOUGHOUAS MC. Uni. Constantine

M. MIMOUNE prof. Uni. Constantine

Dédicace

Je dédie ce travail à la mémoire de ma mère et mon père

A mon très chère marie Mourad

A mes frères et soeurs.

A mes beaux parents

A mes beaux frères et belles sœurs

A mes amies

A mes nièces: Marwa, Aya, Lina, Yousra, Amel , Rayenne,
Tawba, Abla, Rayenne

A les petits : Oussama et Ahmed Mahdi

Remerciements.

Je tiens a remercier très chaleureusement mon encadreur Mr : T.BENMANSOUR pour son aide, sa disponibilité et ses conseils au long de se travail.

Je remercier également Mr: B.NECIB professeur a l'université de Constantine et directeur de laboratoire (génie mécanique) de m'avoir fait l'honneur et le plaisir de présider mon jury.

Ma gratitude va également a Mr: H.BOUGHOUAS, maître de conférence a l'institut de génie mécanique pour son aide durant toutes mes années d'études, et aussi d'avoir accepter d'être un membre de jury.

Ainsi je remercie vivement monsieur: I. BENISSAAD maître de conférence et directeur de l'institut de génie mécanique de l'université de Constantine de m'avoir fait l'honneur et le plaisir de participer a mon jury de mémoire.

Je remercie Mr: M. MIMOUNE professeur de l'université Mentouri-Constantine département génie civil de faire l'honneur d'être un membre de jury de cette thèse.

Je remercie aussi et particulièrement Mr: M. KADJA professeur de l'université Mentouri Constantine département génie mécanique pour, son aide, son soutien et ses conseils.

Enfin je remercie mon mari MOURAD pour sa compréhension son soutien et son encouragement qui m'ont aides a bien terminer ce mémoire

Un grand remerciement a tous les enseignants du département de Génie mécanique.

SOMMAIRE

RMERCIEMENTS

DEDICACE

RESUMER

ABSTRACT

Introduction	1
1. Les théories des plaques	1
1.1. Les plaques minces	1
1.1.1. Définition	1
1.1.2 Cinématique de déformation	3
1.1.3 Expression des déformations	4
1.1.4 Relations contraintes déformations	4
1.1.5 Définition des courbes	5
1.1.6. Relations moments – courbures	6
1.1.7. Lois de changement de repère pour les moments	7
1.1.8. Calcul de l'énergie de déformation	7.
1.1.9 L'énergie cinétique	9.
1.1.10. Equation de la plaque.....	10
1.2 .Les plaques épaisses	12
1.2.1. Introduction	12.
1.2.2. La théorie de Mindlin	12.
1. 2.3. Champ de déplacement	12
1.2.4. Relations contraintes – déformations.....	13
1. 2.5. Fonction d'énergies.....	14
1. 2.6. Equation du mouvement.....	15
1.2.7. Interprétation et calcul de K^2	17
2. Comportement dynamique des plaques isotropes mines et épaisses.18
2.1. Introduction.....	18
2.2. Méthodes analytique solution exacte	18
2.2.1. La plaque simplement appuyée sur son contour.....	19
2.3. Les méthodes énergétiques.....	20
2.3.1. La méthode de Rayleigh	20
2.3.2. Méthode de Rayleigh Ritz	
.....	21

2.3.2.1. Principe de la méthode.....	21
2.4. Formulation des éléments finis	23
2.5 Méthode numérique approché (bolotin).....	24
2.5.1. Présentation de la méthode	24
2.5.2. Analyse mathématique.....	24
2.5.3. Application à la théorie de Mindlin.....	27
3. généralités des matériaux composites.....	28
3.1. Introduction.....	28
3.2. Définitions de base.....	28
3.3. Les composants.....	29
3.3.1. Le renfort.....	29
3.3.2. La matrice.....	29
3.4. Avantages des matériaux composites.....	29
3.5. Les renforts	30
3.5.1. Les fibres.....	30
3.5.2. Principaux matériaux de renfort.....	30
3.5.3. Principe caractéristiques des fibres de base.....	31
3.6. Les matrices	31
3.6.1. Critères essentiels des matrices TD et TP.....	31
3.7. Les matières composites structuraux.....	32
3.7.1. Monocouches	33
3.7.2. Stratifiés.....	33
3.7.3. Matériaux sandwichs.....	34
3.8. Mise en œuvre, procédés.....	34
3.8.1. Les procédés les plus importants sont.....	36
4. Théorie générale des plaques composites	37
4.1. Loi de Hooke	37
4.2. Matériaux orthotrope.....	37
4.3. Matériaux isotrope transverse.....	38
4.4 Matériaux isotrope.....	39
4.5. Contraintes planes	39
4.6. Théorie simplifié des stratifiés	42
4.6.1. Comportement en membrane.....	42

4.6.2. Description des efforts	44
4.6.3. Relation entre les éléments de réduction et les déformations	45
4.6.4. Rigidité d'une couche isotrope.....	47
4.6.5. Rigidité d'une couche spécialement orthotrope.....	47
4.6.6. Rigidité d'une couche généralement orthotrope.....	48
4.7. Comportement dynamique des plaques composites	50
4.7.1. Equation d'équilibre.....	50
4.7.2. Formation énergétique de la théorie de stratifiés.....	51
4.7.2.1. Energie de déformation d'un stratifié	51
4.7.2.2. Énergie cinétique d'un stratifié.....	52
4.7.3. Vibration des plaques orthotropes	53
4.7.3.1. Introduction	53
4.7.3.2. Equation du mouvement	53
4.7.3.3. Détermination des fréquences d'une plaque orthotrope Rectangulaire.....	54
4.7.3.4. La méthode approximative pour déterminer les fréquences	55
4.7.3.5. Détermination de la fréquence pour la première approximation.....	56
4.7.4. Analyse dynamique libre des plaques rectangulaires (Méthode qualitative).....	56
5. Analyse comparative et discussion des résultats.....	60
5.1. Introduction.....	60
5.2. Comportement des plaques isotropes.....	60
5.2.1. Influence des dimensions.....	60
5.2.1.1. Plaque rectangulaire encastrée approximation Par des polynômes.....	60
5.2.1.2. Plaque rectangulaire simplement appuyée.....	62
5.2.2. Influence des conditions aux limites.....	68
5.2.3. Influence de séquence modales.....	72
5.2.4. Influence du matériau (matériau orthotrope).....	77.

5.2.4.1. la première fréquence de la plaque orthotrope.....	79.
5.2.4.2. Calculs approximatifs des fréquences supérieures pour les plaques Orthotrope.....	88.
5.2.5 Influence de l'épaisseur de la plaque.....	112
Conclusion.....	

Introduction

L'utilisation des plaques comme élément de résistance au choc et vibration est courante dans toutes les filières d'ingénieur en structure: mécanique, aéronautique, aérospatiale, civile, navale, matériel de sport et militaire. Devant ce vaste et important éventail de domaine d'applications, il est aisé de comprendre l'intérêt et la demande urgente de s'impliquer dans l'analyse du comportement dynamique des plaques. Celles-ci interviennent pour la plus part des cas comme éléments de résistance déterminantes. Leur rôle essentiel est de parer à l'action dynamique des sollicitations extérieures et assurer ainsi les performances mécaniques souhaitées et désirable en faveur de la structure porteuse.

Dans ce modeste travail nous nous impliquons donc à ce vaste et important domaine, afin de s'initier à quelques aspects du comportement dynamique libre des plaques minces et épaisses homogènes et non homogène. L'étude est effectuée sur des structures essentiellement en élément plaques minces isotropes et orthotropes sollicitées à l'action de la dynamique linéaire libre. Une introduction sur la théorie des plaques épaisses est aussi observée. Le comportement orthotrope peut être généré de l'utilisation des matériaux anisotrope, mais aussi du procédé métallurgique qui peut altérer les caractéristiques d'isotropies le long des directions perpendiculaires, ou de l'utilisation de poutres de renforcement couplées avec une plaque isotrope.

L'analyse dynamique des structures consiste en une série de tâches et d'investigation successives partant de la structure physique réellement existante ou en projet d'élaboration et de conception, à partir de laquelle il faut ensuite identifier le modèle analytique (hypothèses, schémas, données, ...) afin d'identifier les caractéristiques dynamiques de la structure objet et obtenir ainsi les modèles mathématiques (Equations différentielles), puis on peut déduire le comportement dynamique (Solution de l'équation différentielle). Suivant la phase et l'objet de l'analyse les méthodes d'investigation sont plus ou moins élaborées.

NOTRE APPROCHE:

Dans le cadre de notre travail l'analyse dynamique libre des plaques élastiques isotropes et orthotropes rectangulaires est effectuée utilisant la théorie flexionnelle des plaques mince (Hypothèse de KIRCHOFF), une présentation de la théorie des plaques épaisses (Hypothèse MINDLIN-REISSNER) est ensuite initiée afin de rendre compte des phénomènes supplémentaires mis en jeu, tel que l'effet d'effort tranchant et de l'inertie rotatoire, ce qui permet de raffiner la solution de l'analyse. Une fois présentées ces théories, on peut déduire les fréquences et les modes propres de vibration. Mais on ne connaît de solutions exactes satisfaisant à la fois les conditions aux limites et les équations différentielles des différentes théories des plaques que dans de très rares cas particuliers. Pour tous les autres cas, il faut avoir recours à des méthodes numériques approchées. Parmi toutes les méthodes numériques existantes, nous avons choisis la méthode de Rayleigh-Ritz, qui possède l'avantage d'être relativement simple à employer et simple à programmer sur ordinateur utilisant dans notre cas le logiciel MAPLE. Afin de tenir compte des hypothèses d'après Mindlin on utilise la méthode analytique de Bolotin qui se distingue par sa simplicité à employer pour l'analyse des vibrations libres des plaques rectangulaire.

Dans ce travail nous proposons aussi une méthode pratique basée sur une double stratégie d'analyse qualitative et quantitative du comportement dynamique des plaques isotropes et orthotropes. La problématique consiste à répondre à un besoin réel de développer une méthode qualitative et quantitative pour permettre aux ingénieurs de conception et chercheur, afin de les aider pendant leurs investigations lors de l'analyse vibratoire des structures complexes, ou lors du travail de pré-dimensionnement de la structure d'étude, ainsi que dans le cadre d'un travail d'expertise de la qualité des réponses dynamiques que l'on obtient aux moyens de codes de calcul sophistiqués.

Méthode qualitative d'analyse dynamique des plaques rectangulaires:

La méthode qualitative se base sur la théorie des plaques allongées (infinies), dont le comportement est dominé par le sens privilégié du petit sens de la plaque rectangulaire. La plaque se comporte alors comme une poutre équivalente, reposant sur ses deux appuis le long des bords allongés de la plaque. Par simple observation et sur la base des conditions de fixités ainsi que du rapport des dimensions (l_x/l_y), on peut rapidement apprécier l'étude comparative des rigidités inférieur et supérieur et par conséquent le seuil extrême des fréquences inférieurs et supérieurs, ce qui permet de caller les réponses dynamiques dans des limites admissibles et de ce fait juger de la qualité des résultats que l'on obtient d'après une analyse plus élaborée.

Méthode quantitative approximative d'analyse dynamique des plaques rectangulaires:

Dans ce travail le problème d'évaluation approximative des fréquences pour les plaques orthotropes est investit. En se basant sur une formule générale approximative de la fréquence, telle que proposée par Hearmon, il est montré comment calculer le mode fondamentale d'une plaque rectangulaire orthotrope avec différentes conditions de fixité, utilisant **les coefficients propres** des valeurs qui existent déjà dans la littérature scientifique []. D'autre part pour les modes supérieurs des fréquences modales, une forme particulière de la méthode de Rayleigh est proposée, conduisant à une simple procédure pour le calcul de la fréquence fondamentale []. En fait le calcul des fréquences supérieurs est réduit à **l'évaluation de la fréquence fondamentale d'une plaque spécifique équivalente associé à la plaque réelle d'origine.**

Dans tous les cas l'investigation dynamique est basée sur quelques critères d'évaluation notamment l'effets des conditions limites, l'effet du rapport des dimensions de la plaque, l'effet du matériau, l'effet du numéro du mode, ainsi que l'effet de l'épaisseur de la plaque.

Afin de vérifier le degré de précision de la méthode proposée une confrontation avec la méthode des éléments finis SAP2000 et de la littérature ANSY est effectuée.

Définition du problème ;

Dans le cadre de ce mémoire et lors de l'étude du comportement vibratoire des plaques ,on s'est intéressé plus spécialement à l'épaisseur de la plaque ,les dimensions de la plaque ,nombre de couches dans le cas d'une plaque non homogène,les configurations géométriques, l'anisotropie les déplacements de la plaque sont considérés uniformes et l'effet de cisaillement est considéré pour les plaques épaisses et a été négligé les plaques minces il est été développé que les déplacements et les accélérations doivent être calculés en tout point . l'équilibre dynamique est régi par un système d'équations aux dérivées partielles soit par une formulation directe (la seconde loi de Newton) toute fois la modélisation d'une structure peut permettre des simplifications importantes représentent une approximation suffisante d'un point de vue pratique de la solution exacte du problème.

Articulation du mémoire ;

Ce mémoire est composé de cinq chapitres, le premier chapitre présente la théorie des plaques, permet de mettre leur définition, déplacements, déformations, le second chapitre décrit les modes et les formulations des équations d'équilibre des systèmes, les méthodes de résolution de ces équations seront également exposées ainsi que la méthode de RITZ. Ainsi le 3^{ème} chapitre présente une vue générale sur les matériaux composites, et les matériaux multicouches. Le 4^{ème} chapitre traite les problèmes de vibrations des plaques stratifiées.

Enfin le dernier chapitre sera sur l'étude comparative entre les différents modèles des plaques et discussion des résultats.

Chapitre 1

Les théories des plaques

1. Les théories des plaques :

1.1 Les plaques minces :

1.1.1 définitions.

Une plaque est un milieu continu ayant une dimension très petite par rapport aux deux autres.

Considérons un élément de plaque rectangulaire d'épaisseur h constante, de longueur dx et de largeur dy , les axes Ox et Oy sont choisis pour contenir la surface moyenne supposée initialement horizontale.

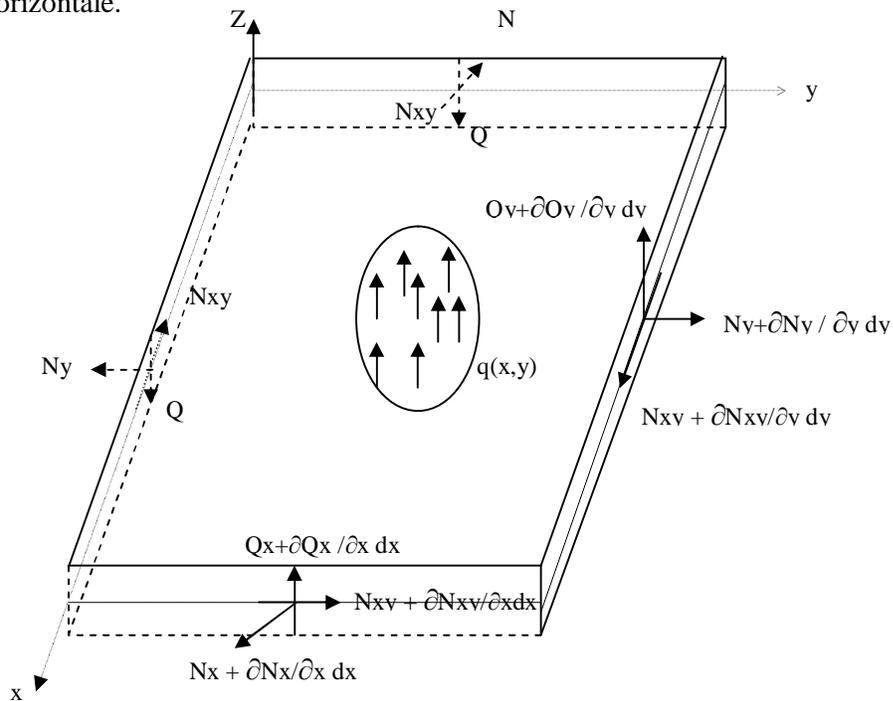


Fig1 : Forces agissant sur l'élément de plaque

Q_x, Q_y : les intensités des efforts tranchants

N_x, N_y : les intensités des efforts normaux

$N_{xy} = N_{yx}$: les intensités de l'effort de cisaillement

$q = q(x, y)$: l'effort extérieure transversal appliqué à la plaque par unité de surface

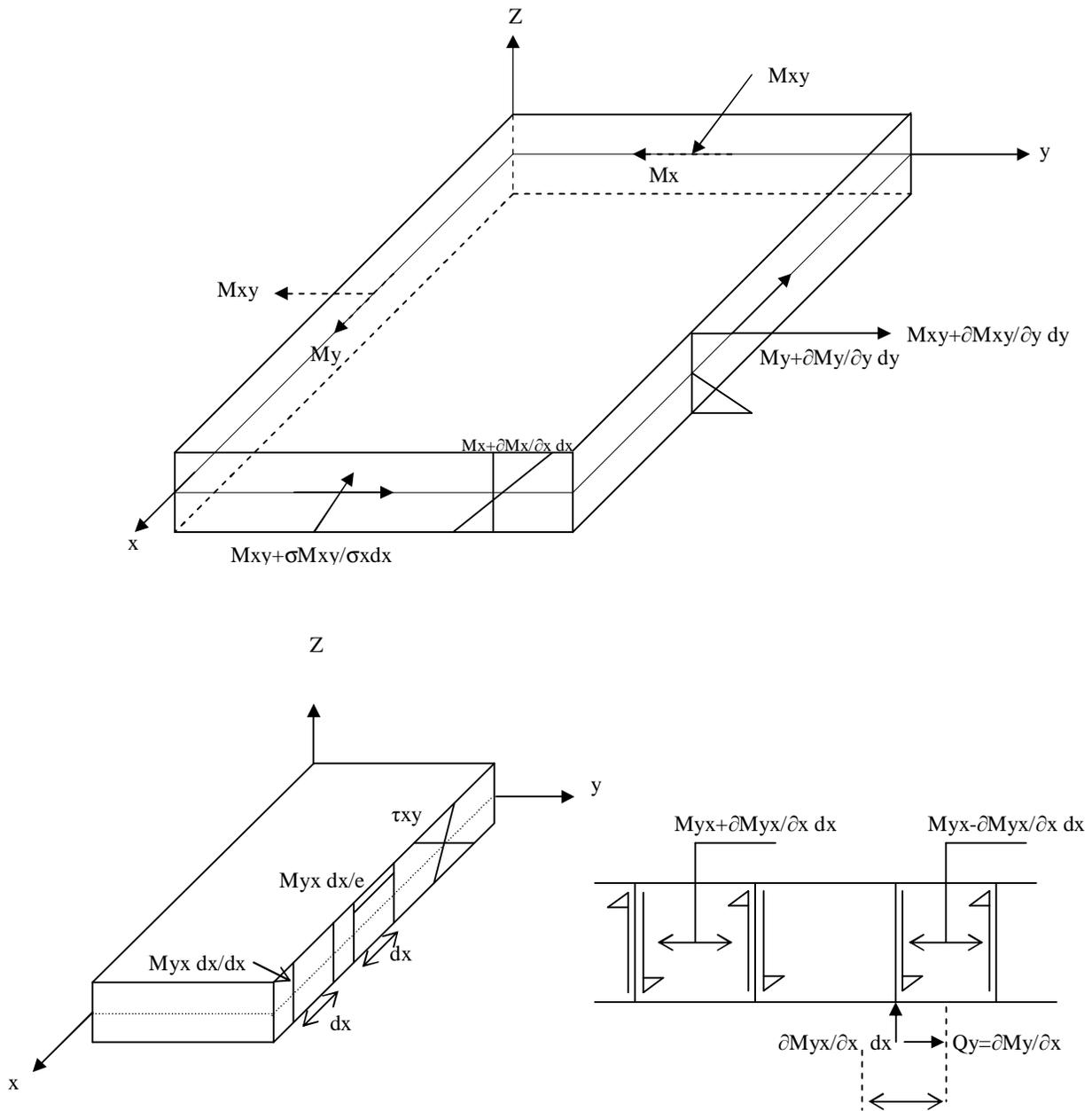


Fig2 : moments agissant sur l'élément de plaque

1.1.2 Cinématique de déformation :

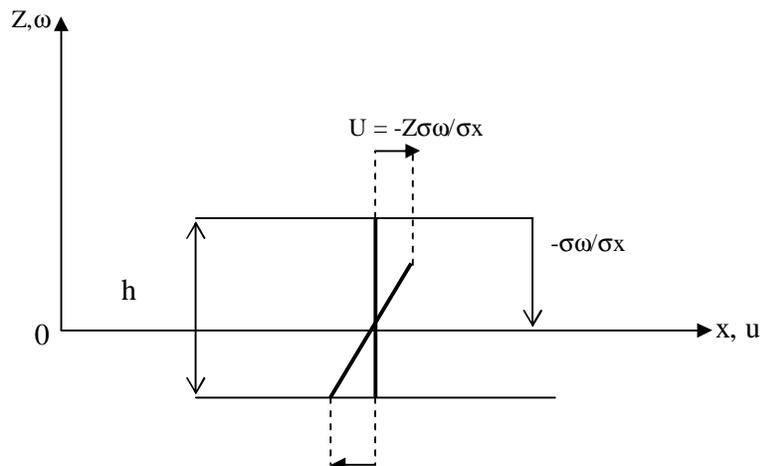


Fig. 3: déformations suivant x

U : le déplacement longitudinal dû aux efforts normaux suivant Ox :

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces par **Kirchhoff** généralisent à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformations à l'effort tranchant [3] :

- 1) la plaque est mince d'épaisseur h et possède un plan moyen. les faces extérieures de la plaque sont les plans $Z = \pm \frac{1}{2} h$.
- 2) seul le déplacement transversal ω est considéré.
- 3) Les sections droites, initialement normales au plan moyen en restent planes et normales à celui-ci, ce qui implique que la déformation en cisaillement transverse est négligé.
- 4) La contrainte σ_z dans la direction transversale est nulle. Elle doit en effet s'annuler sur les faces extérieures et du fait que la plaque est mince, il est naturel d'admettre qu'elle est nulle en tout z .
- 5) Les déplacements u et v dans le plan Oxy , résultent de deux effets :
 - un champ de déplacement initial et uniforme selon l'épaisseur résultant d'un chargement de la plaque dans son plan (comportement en extension, ou membranaire),
 - le champ de déplacement dû à la rotation de la section droite.
- 6) Les termes non linéaires du déplacement sont négligés, en particulier, l'inertie de rotation est négligé.

Elles conduisent aux hypothèses sur les déplacements

$$u = u_0(x, y) - Z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1.1)$$

$$\sigma = \nu_0(x, y) - Z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1.2)$$

$$\omega = \omega(x, y) \quad (1.3)$$

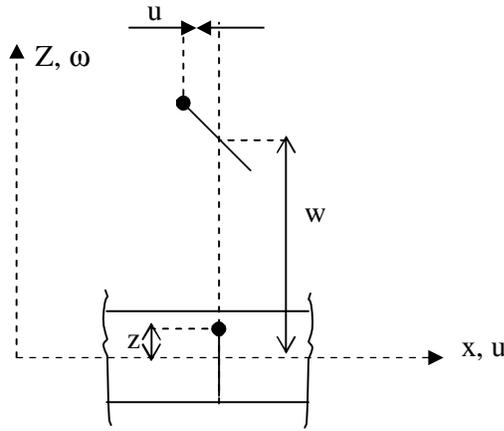


Fig4 .présentation de déplacements u,w

1.1.3 Expression des déformations :

Les déformations de la plaque mince ont pour expressions :

$$\epsilon_x = -Z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -Z X_x \quad (1.4)$$

$$\epsilon_y = -Z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -Z X_y \quad (1.5)$$

$$\gamma_{xy} = -2Z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -Z X_{xy} \quad (1.6)$$

$$\begin{cases} \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial Z} = 0 \\ \gamma_{xz} = 2\epsilon_{xz} = 0 \\ \gamma_{yz} = 2\epsilon_{yz} = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

1.1.4 Relations contraintes déformations:

Les contraintes dans le matériau linéaire et isotrope à partir de la loi hooke.

$$\begin{cases} e_x = \frac{1}{E} [s_x - \nu(s_y + s_z)] \\ e_y = \frac{1}{E} [s_y - \nu(s_x + s_z)] \\ g_{xy} = \frac{1}{G} t_{xy} \end{cases} \quad (1.8)$$

Avec ($s_z = 0$)

L'élasticité permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{E}{1-u^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \end{array} \right. \quad (1.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_y = \frac{E}{1-u^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \end{array} \right. \quad (1.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xy} = G \gamma_{xy} \end{array} \right. \quad (1.11)$$

Avec la définition du module l'élasticité en cisaillement

$$G = \frac{E}{2(1+u)} \quad (1.12)$$

On peut écrire $\sigma = H\epsilon$

Avec la définition de la matrice uni colonne des contraintes :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

Et l'expression de la matrice des coefficients classiques

$$H = \frac{E}{1-u^2} \begin{bmatrix} 1 & u & 0 \\ u & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-u}{2} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

1.1.5 Définition des courbes :

On définit la matrice des courbes

$$c = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

Les deux premiers termes représentent les courbes principales de la plaque dans les directions x et y , et le troisième correspond à la courbure croisée engendrée par la torsion de la plaque. Les déformations de la plaque liées aux termes linéaires de flexion et les contraintes associées sont liées par :

$$\epsilon = ZX$$

Et $\sigma = H\epsilon$

1.1.6 Relations moments – courbures :

Les moments de flexions par unité de longueur dans la plaque sont calculés par intégration des contraintes sur l'épaisseur.

$$M = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} Z \sigma dz = \int_{-h/2}^{h/2} Z H \epsilon dz \quad (1.16)$$

$$= \int_{-h/2}^{h/2} Z^2 H X dz$$

Et en obtient les expressions:

$$M_x = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (1.17)$$

$$M_y = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (1.18)$$

$$M_{xy} = -D (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1.19)$$

Avec la définition de la rigidité flexionnelle de la plaque

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} E h^3 \quad (1.20)$$

Avec ν : coefficient de poisson

E : module d'Young du matériau constituant la plaque

On peut les écrire sous forme matricielle (1.21)

$$M = H^* \epsilon$$

Avec la matrice des coefficients élastique intégrés sur l'épaisseur

$$H^* = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

Alors on peut écrire:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.23)$$

1.1.7 Lois de changement de repère pour les moments

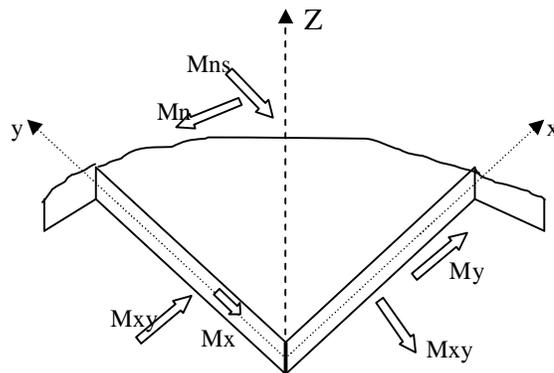


Fig. 5.changement de repère pour les moments.

Soit une plaque de contour Γ quelconque, les moments sur le contour Γ de la quelque sont M_n , M_s représentant respectivement :

M_n : Le moment de flexion dans le plan onz . définit tangentiellment au bord,

M_s : Le moment de flexion dans la direction perpendiculaire

M_{ns} : le moment de torsion autour de la normale au contour

On peut remarquer au passage que les moments et courbes obeissent aux lois de transformation des tenseurs, c'est à dire lors d'une transformation d'axes de xy à ns par une rotation α on trouve :

$$M_n = M_x \cos^2\alpha + M_y \sin^2\alpha + 2M_{xy} \sin\alpha \cos\alpha = -D(X_n + \nu X_s) \quad (1.24a)$$

$$M_s = M_x \sin^2\alpha + M_y \cos^2\alpha - 2M_{xy} \sin\alpha \cos\alpha = -D(X_s + \nu X_n) \quad (1.24b)$$

$$M_{ns} = (M_y - M_x) \sin\alpha \cos\alpha + M_{xy} (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -D(1 - \nu) X_{ns} \quad (1.24c)$$

1.1.8 Calcul de l'énergie de déformation :

L'énergie de déformation de la plaque est calculée par intégration sur le volume de la densité d'énergie de déformation

$$U_{int} = \int \epsilon_{ij} c_{ijkl} \epsilon_{kl} dv \quad (1.25)$$

Si l'on adopte une loi de comportement de type matériau isotrope sous «état de contraintes planes » le tenseur des coefficients élastiques s'écrit :

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-u^2} & \frac{uE}{1-u^2} & \frac{uE}{1-u^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{uE}{1-u^2} & \frac{E}{1-u^2} & \frac{uE}{1-u^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{uE}{1-u^2} & \frac{uE}{1-u^2} & \frac{E}{1-u^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+u)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+u)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+u)} \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

On tenant compte du fait que $\epsilon_{31}, \epsilon_{32}, \epsilon_{33} = 0$, et en tenant compte des propriétés de symétrie de ϵ_{ij} et C_{ijkl} on a :

$$U_{int} = \int_n (1/2 C_{1111} \epsilon_{11}^2 + 1/2 C_{2222} \epsilon_{22}^2 + 2 \cdot 1/2 C_{2121} \epsilon_{21} + \epsilon_{11} \epsilon_{22}) dv$$

$$U_{int} = \int_{A-h/2}^{h/2} \int 1/2 (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dh dA$$

$$U_{int} = \int_A 1/2 (M_x X_x + M_y X_y + M_{xy} X_{xy}) dA$$

$$U_{int} = \iint \frac{1}{2} D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2u \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-u) \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \cdot d_x d_y \quad (1.27)$$

Avec des notations matricielles :

$$U = \int_{A-h/2}^{h/2} \int 1/2 S t e d h d A$$

$$U = \int_A 1/2 M t X d A$$

$$U = \int_A 1/2 X t H x d A \quad (1.28)$$

1.1.9 L'énergie cinétique :

L'énergie cinétique T est calculée par intégration de l'énergie cinétique de l'élément de volume :

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho (u^2 + v^2 + \omega^2) dv \quad (1.29)$$

En termes des approximations

$$T = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_s \rho \left\{ \dot{w}^2 + Z^2 + z^2 \left[\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} ds dz \quad (1.30)$$

On a :

- La masse par unité de surface $m = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz$

- le moment d'inertie massique par unité de surface

$$mr^2 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2 dz$$

Ce qui donne l'expression de l'énergie cinétique suivante :

$$T = \frac{1}{2} \int_s m \left\{ \dot{w}^2 + r^2 \left[\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} ds \quad (1.31)$$

Le premier terme de l'expression représente l'énergie cinétique de translation de la plaque et les deux termes suivants représentent celle de rotation, on néglige les termes d'énergie cinétique oratoire car ils ne deviennent significatifs que lorsque l'énergie de déformation en cisaillement elle-même ne peut plus être négligée. Alors pour une plaque mince on utilisera l'expression approchée suivante :

$$T = \frac{1}{2} \int_s m \dot{w}^2 ds \quad (1.32)$$

1.1.10 Équation de la plaque:

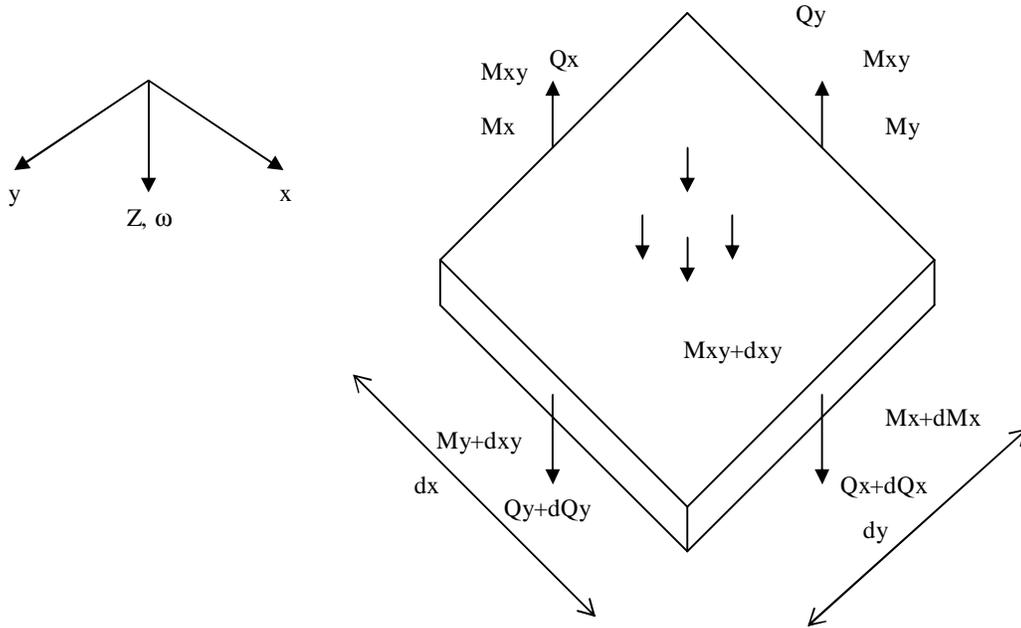


Fig. 6 équilibre de l'élément de plaque

L'équilibre verticale de l'élément plaque (dx, dy) donne lieu à la relation

$$dQ_x dy + dQ_y dx + (P - m \omega) dx dy = 0 \tag{1.33}$$

Soit :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - m \omega + P = 0 \tag{1.34}$$

Tandis que les efforts tranchants résultent de l'équilibre de rotation de la plaque autour de Ox et Oy respectivement au premier ordre on obtient :

- autour de Oy :

$$dM_x dy + dM_{xy} dx - Q_x dx dy = 0$$

- autour de Ox :

$$dM_y dx + dM_{xy} dy - Q_y dx dy = 0$$

D'où les relations

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \\ Q_y &= \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \end{aligned} \tag{1.35}$$

La substitution de (1.35) dans (1.34) permet d'écrire l'équilibre vertical en termes des moments.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + P - m \ddot{w} = 0 \quad (1.36)$$

Et d'autre part l'introduction des expressions suivantes

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + u \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (1.37)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + u \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (1.38)$$

$$M_{xy} = -D(1-u) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1.39)$$

Dans l'équation d'équilibre (1.36) donne :

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + m \ddot{w} - P = 0 \quad (1.40)$$

L'équation à la dérivée partielle vérifiée par le déplacement vertical

Soit encore en termes de l'opérateur Laplacien

$$\nabla^2 = \Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

L'expression plus compacte : $D \Delta \Delta w + m \ddot{w} - P = 0 \quad (1.41)$

On a obtenu ainsi l'équation classique de la théorie des plaques, qui pour la majorité des applications techniques est suffisante pour l'étude des problèmes de flexion.

1.2 Les plaques épaisses:

1.2.1 Introduction

La principale limitation de la théorie classique de **love-kirchhoff** est que l'on néglige les effets dus aux efforts tranchants et à l'inertie de rotation, or dans la pratique les plaques ont des épaisseurs significatives et il devient nécessaire de tenir compte de ces effets pour décrire leur comportement dynamique. D'autre part, la théorie classique ne peut rendre compte des problèmes de contact incluant des plaques et des problèmes de plaques laminées. Ces limitations ont conduit plusieurs auteurs à proposer des modèles plus raffinés [4]. L'un des premiers fut **Reissner**, suivi par **Mindlin** et par d'autres. Ces nouvelles théories sont généralement obtenues à partir des équations de l'élasticité tridimensionnelle soit par intégration de ces équations sur l'épaisseur, c'est-à-dire le long des fibres de la plaque, soit par des hypothèses, sur les déplacements et les contraintes faites à l'intérieure de la plaque. Toutes ces théories découpent toujours les effets de flexion et de contrainte plane.

1.2.2. La théorie de Mindlin :

Cette théorie proposée par Mindlin [4], en 1951, prend en compte les déformations dues à l'effort tranchant et l'effet dû à l'inertie de rotation. Cette approche plus fine du problème des plaques repose également sur une autre cinématique de la déformation, et donc une autre expression des conditions aux limites.

Pour les hypothèses de Mindlin, reprennent les points (1) et (4) celle de kirchhoff, les points 2 et 3 des précédentes hypothèses ne sont plus retenus afin de prendre en compte les deux nouveaux effets.[3]

12.3. Champ de déplacement :

Dans la théorie des plaques de Reissner-Mindlin les composants des champs de déplacement sont définies comme :

$$U(x, y, z, t) = -Z\Psi_x(x, y, t) \quad (1.42)$$

$$V(x, y, z, t) = -Z\Psi_y(x, y, t) \quad (1.43)$$

$$W(x, y, z, t) = \omega(x, y, t) \quad (1.43)$$

Où t représente la variable temps, u et v sont les déplacements dans le plan de la plaque, w est le déplacement transverse et enfin Ψ_x , Ψ_y les rotations en flexion de normales transverses aux axes x et y .

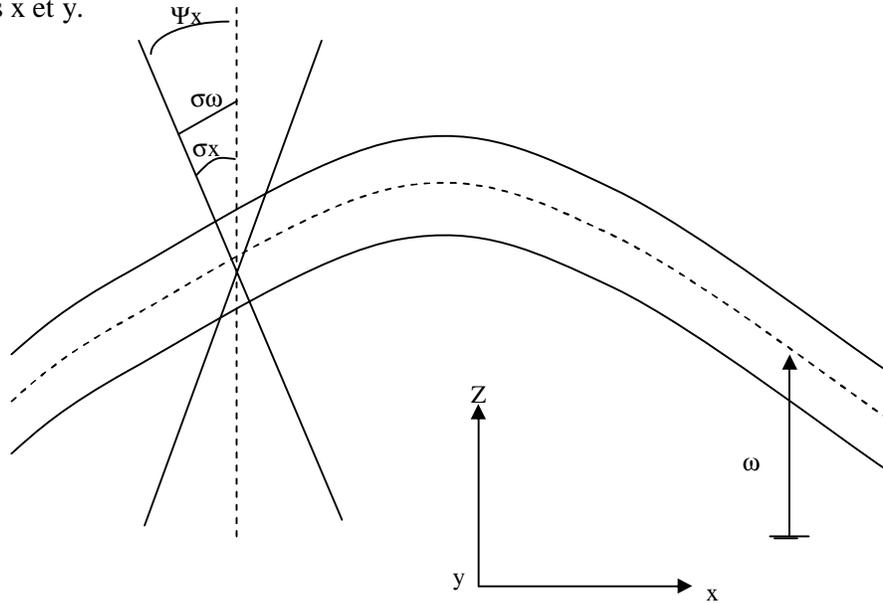


Fig 7. Schéma du déplacement pour la théorie des plaques de Mindlin

1.2.4. Relations contraintes – déformations:

Les expressions linéaires des déformations sont

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -Z \frac{\partial y_x}{\partial x} \\ e_{zz} = \frac{\partial v}{\partial y} = -Z \frac{\partial y_y}{\partial y} \\ e_{yy} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ t_{xy} = 2e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -Z \left(\frac{\partial y_x}{\partial y} + \frac{\partial y_y}{\partial x} \right) \\ t_{xy} = 2e_{xz} = \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -y_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ t_{yz} = 2e_{yz} = \frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -y_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right. \quad (1.44)$$

1.2.5 Fonction d'énergies :

L'énergie de déformation due à au mouvements de flexion de la plaque est donnée en fonction des tensions de contraintes \mathbf{s} et de déformation \mathbf{e} :

$$T = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{s} \mathbf{e} dv \quad (1.45)$$

Soit en utilisant les relations contraintes déformations précédentes, les hypothèses de champs de déformations et la loi constitutive de Hooke pour un matériaux isotrope et homogène [3] :

$$u = \frac{1}{2} \int_A \left[D \left\{ \left(\frac{\partial y_x}{\partial x} + \frac{\partial y_y}{\partial y} \right)^2 - 2(1-u) \left[\frac{\partial y_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial y_y}{\partial y} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\partial y_x}{\partial y} + \frac{\partial y_y}{\partial x} \right)^2 \right] + \right. \right. \\ \left. \left. K^2 Gh \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial y} - y_x \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - y_y \right)^2 \right\} \right\} dA \quad (1.46)$$

K^2 est le facteur correcteur de cisaillement.

L'énergie cinétique de la plaque s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} \int_V r \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dv \quad (1.47)$$

En explicitant les champs de déformation et en intégrant sur l'épaisseur h de la plaque, on obtient finalement :

$$T = \frac{rh}{2} \int_A \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \frac{h^2}{12} \left\{ \left(\frac{\partial y_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_y}{\partial t} \right)^2 \right\} \right] dA \quad (1.48)$$

1.2.6. Equation du mouvement :

On peut exprimer les moments en fonction de Ψ_x , Ψ_y et ω .

$$M_x = D \left(\frac{\partial y_x}{\partial t} + u \frac{\partial y_y}{\partial y} \right) \quad (1.49)$$

$$M_y = D \left(\frac{\partial y_y}{\partial y} + u \frac{\partial y_x}{\partial x} \right) \quad (1.50)$$

$$M_{xy} = \frac{1-u}{2} D \left(\frac{\partial y_y}{\partial x} + \frac{\partial y_x}{\partial y} \right) \quad (1.51)$$

Et les efforts tranchant :

$$Q_x = K^2 Gh \left(\frac{\partial w}{\partial x} + y_x \right) \quad (1.52)$$

$$Q_y = K^2 Gh \left(\frac{\partial w}{\partial y} + y_y \right) \quad (1.53)$$

Reprenons maintenant les équations d'équilibre de l'élasticité tridimensionnelle

$$s_{ij,j} = r \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1.54)$$

Et multiplions les deux premières équations de (1.54) par z et intégrons sur l'épaisseur de la plaque:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_x = \frac{rh^3}{12} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = \frac{rh^3}{12} \cdot \frac{\partial^2 y_y}{\partial t^2} \end{array} \right. \quad (1.55)$$

Et la troisième équation de $\sigma_{ij} = \rho \partial^2 u_i / \partial t^2$ pour sa part intégrée directement par rapport à z

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = rh \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1.56)$$

Où $(\sigma_{zz})_{z=h/2} = q(x, y, t)$ effort extérieure appliqué à la plaque par unité de surface.

Dans les équations (1.55) et (1.56) remplaçons les moments et les efforts Q_x et Q_y par leur expressions données, on obtient alors trois nouvelles équations :

$$\bullet \frac{D}{2} \left[(1-u) \nabla^2 y_x + (1+u) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial y_x}{\partial x} + \frac{\partial y_y}{\partial y} \right) \right] - K^2 Gh \left(y_x - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{rh^3}{12} \cdot \frac{\partial^2 y_x}{\partial t^2} = 0 \quad (1.57)$$

$$\bullet \frac{D}{2} \left[(1-u) \nabla^2 y_y + (1+u) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial y_x}{\partial x} + \frac{\partial y_y}{\partial y} \right) \right] - K^2 Gh \left(y_x - \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{rh^3}{12} \cdot \frac{\partial^2 y_y}{\partial t^2} + q = 0 \quad (1.58)$$

$$\bullet K^2 Gh \left(\nabla^2 w - \frac{\partial y_x}{\partial x} - \frac{\partial y_y}{\partial y} \right) - rh \frac{\partial w}{\partial t^2} + q = 0 \quad (1.59)$$

Où les termes $\frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2}$ ($i=x,y$) des équations (1.57) et (1.58) représentent les termes d'inertie de rotation.

Les fonctions inconnues Ψ_x et Ψ_y peut être éliminées en différenciant (1.57) par rapport à x et (2.18), par rapport à y et en additionnent les deux expressions obtenues, il vient :

$$\left(D \nabla^2 - K^2 Gh - \frac{rh^3}{12} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial y_x}{\partial x} + \frac{\partial y_y}{\partial y} \right) = K_2 Gh \nabla^2 w \quad (1.60)$$

Il ne reste plus alors qu'à éliminer $\left(\frac{\partial y_x}{\partial x} + \frac{\partial y_y}{\partial y} \right)$ à l'aide de (1.60) pour obtenir l'équation des plaques de Mindlin:

$$\left(\nabla^2 - \frac{r}{K^2 G} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\nabla^2 - \frac{rh^3}{12} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) w + rh \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \left(1 - \frac{\partial \nabla^2}{K^2 Gh} + \frac{rh^3}{12 K^2 G} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) q \quad (1.61)$$

Dans l'équation (2.21), les termes contenant K^2 représentent le mouvement dû à l'effort tranchant et ceux contenant $\left(\frac{rh^3}{12} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)$ l'effet de l'inertie de rotation. Si on néglige les

contributions de ces termes dans l'équation (1.61), on trouve l'équation classique d'une plaque mince.

$$D \cdot \nabla^4 w + rh \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1.62)$$

1.2.7. Interprétation et calcul de K^2 :

K^2 (ou K suivant les auteurs) est un facteur corrigeant l'hypothèse de contraintes de cisaillement σ_{zx} et σ_{zy} constantes sur l'épaisseur de la plaque dans la théorie de Mindlin, en contradiction avec la condition de contrainte de cisaillement nulles sur les surfaces libres[3].

Pour déterminer K^2 , Mindlin[4] considère le problème de la propagation des ondes dans une plaque infinie, problème pour lequel on connaît une solution exacte par la théorie de l'élasticité tridimensionnelle.

Mindlin trouve ce facteur dépendant du coefficient de poisson ν et les valeurs les plus généralement admises pour K^2 varient linéairement de 0,76 pour $\nu = 0$ à 0,91 pour $\nu = 0,5$ dans le cas d'un matériau isotrope.

En suivant cette observation et en choisissant k^2 de façon à égaler la fréquence du premier mode antisymétrique de cisaillement d'une plaque isotrope, infinie déterminés par l'exacte théorie de l'élasticité et la théorie de Mindlin, on peut montrer que le facteur K^2 est solution d'une équation polynomiale d'ordre 3.....telle que :

$$K^2 = 0,86 \quad \text{si } \sigma = 0,3 \quad \text{et} \quad K^2 = \pi/12 \quad \text{si } \sigma = 0,176$$

Wittricken 1987 [4..] propose une approximation de k^2 dans le cas d'une plaque simplement supportée :

$$K^2 = 5/(6-\nu)$$

On peut noter qu'en composant les résultats de Mindlin et Reissner [.5.], qui suppose une variation parabolique de la distribution des contraintes de cisaillement, on obtient pour expression de $K^2=5/6$.

A ce jour le facteur K^2 , lorsqu'il est utilisé, est toujours sujet à discussion l'ensemble des auteurs s'accordent cependant pour juger son influence sur les résultats.

Chapitre 2

Comportement dynamique des plaques isotropes minces et épaisses.

2. Comportement dynamique des plaques isotropes minces et épaisses.

2.1. Introduction :

Cette étude porte sur la modélisation du comportement des plaques en vibrations, alors l'objectif de ce travail basé sur l'identification des caractéristiques dynamiques (fréquences propres, modes propres...) de vibration, mais on ne connaît de solutions exactes satisfaisant à la fois les conditions aux limites et les équations différentielles des différents théories des plaques dans de très rares cas particuliers.

La résolution de façon exacte du problème des plaques en vibration n'est possible que pour des cas simples de chargements, de géométrie et de symétrie, et surtout de conditions aux limites. Dans les autres cas on doit en l'état actuel des connaissances de contenez de solutions approchées.

Il existe essentiellement quatre types de méthodes approchées : les méthodes énergétiques, les méthodes itératives, les éléments finis et les différences finies. Parmi toutes ces méthodes que l'on trouve dans la littérature concernant les plaques en vibration, nous on a sélectionné deux que d'après beaucoup d'auteurs de très bons résultats.

2.2. Méthodes analytique (solution exacte) :

L'hypothèses de vibration libre (mouvement harmonique charge extérieure p nulle) donc les seules forces transversales agissant sur la plaque sont les forces d'inertie dues à la masse ρ_e par unité de surface, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4} = - \frac{re}{D} \cdot \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

En utilisant la séparation des variables et en prenant une variation temporelle harmonique.

$$w(x, y, t) = W(x, y)(A \sin \omega t + B \cos \omega t) \quad (2.2)$$

Et on a :

$$\frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial y^4} - \frac{w^2 rh}{D} W(x, y) = 0 \quad (2.3)$$

Utilisant ∇^2

$$\nabla^2 \nabla^2 W - \frac{w^2 rh}{D} W = 0 \quad (2.4)$$

Pour établir la forme de sa solution générale posons :

$$\beta^4 = \omega^2 \cdot \frac{re}{D} \quad / \quad \rho e = m \text{ (la masse)} \quad (2.5)$$

L'équation (2.4) peut être mise sous la forme

$$(\nabla^2 + \beta^2) \cdot (\nabla^2 - \beta^2)\omega = 0 \quad (2.6)$$

Et on définit les deux fonctions ω_1 et ω_2 telles que

$$(\nabla^2 - \beta^2)\omega_1 = 0 \quad \text{et} \quad (\nabla^2 + \beta^2)\omega_2 = 0 \quad (2.7)$$

Il est alors aisé de vérifier que la solution générale de (2.6) peut s'écrire

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \quad (2.8)$$

En effet, par substitution de (2.8) dans (2.6) on a :

$$(\nabla^2 + \beta^2)(\nabla^2 - \beta^2)(\omega_1 + \omega_2) = -2\beta^2(\nabla^2 + \beta^2)\omega_2 = 0 \quad (2.9)$$

Pour la partie ω_1 , la solution générale est de la forme exponentielle :

$$\omega_1 = e^{\alpha x} e^{\gamma y} \quad (2.10)$$

Auquel cas la solution générale de la partie ω_2 prend la forme complexe associée.

$$\omega_2 = e^{i\alpha x} e^{\gamma y} \quad \text{avec} \quad \alpha^2 + \gamma^2 = \beta^2 \quad (2.11)$$

En tenant compte des signes possibles pour les constantes α et γ , la solution complète peut être réécrite en termes de fonctions hyperboliques et trigonométriques

$$\begin{aligned} \omega(x,y) = & A_1 \sin \alpha x \cdot \sin \gamma y + A_2 \cos \alpha x \cdot \sin \gamma y + A_3 \sin \alpha x \cdot \cos \gamma y + A_4 \cos \alpha x \cdot \sin \gamma y \\ & + A_5 \operatorname{sh} \alpha x \cdot \operatorname{sh} \gamma y + A_6 \operatorname{ch} \alpha x \cdot \operatorname{sh} \gamma y + A_7 \operatorname{sh} \alpha x \cdot \operatorname{ch} \gamma y + A_8 \operatorname{ch} \alpha x \cdot \operatorname{ch} \gamma y \end{aligned} \quad (2.12)$$

La valeur des constantes A_i et celles des paramètres α et β résultent de l'application des conditions aux limites.

2.2.1. La plaque simplement appuyée sur son contour

Le seul cas qui possède une solution analytique exacte est celui de la plaque rectangulaire simplement appuyée sur tout son pourtour.

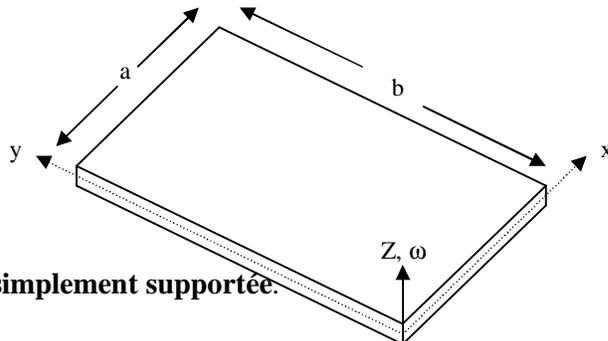


Fig.8 .plaque simplement supportée.

Soient a et b les dimensions de la plaques selon x et y les conditions aux limites ont pour expression.

$$\omega = 0 \quad \text{et} \quad M_y = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{en } x = 0 \text{ et } = a \quad (2.13)$$

$$\omega = 0 \quad \text{et} \quad M_x = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{en } y = 0 \text{ et } = b$$

Leur application à la solution générale (2.12) conduit à la solution

$$\omega(x,y) = A \sin\alpha x. \sin\gamma y \quad (2.14)$$

Avec les conditions additionnelles

$$\sin\alpha a = 0 \quad \text{et} \quad \sin\gamma b = 0$$

D'où les valeurs possibles des constantes

$$\alpha_m = m\pi/a \quad \text{et} \quad \gamma_n = n\pi/b \quad \text{pour } m, n = 1, 2, \dots, \infty \quad (2.15)$$

Il est en résulte les fréquences propres de la plaque simplement appuyée

$$\omega_{mn} = \beta_{mn}^2 \sqrt{\frac{D}{re}} = \pi^2 [(m/a)^2 + (n/b)^2] \sqrt{\frac{D}{re}} \quad (2.16)$$

Et les modes propres correspondants

$$W_{mn}(x,y) = A_{mn} \cdot \sin m(\pi x/a) \cdot \sin n(\pi y/b) \quad (2.17)$$

En cas de réponse forcée, il faudrait travaillé par superposition modale

$$\omega(x,y,t) = \sum_m \sum_n (A_{mn} \sin\omega_{mnt} + \beta_{mn} \cos\omega_{mnt}) \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \quad (2.18)$$

Les coefficients A_{mn} et β_{mn} étant fonction de la charge et/ou des conditions initiales

2.3. Les méthodes énergétiques :

Ces méthodes donnent d'assez bons résultats de façon générale, même lorsque les conditions aux limites ne sont pas simples seulement la précision de la solution trouvée dépend pour beaucoup du choix des fonctions cinématiquement admissibles, il faut que ces fonctions satisfissent les conditions aux limites mais aussi respectent la géométrie et approchent les modes de vibration.[4]

2.3.1. La méthode de Rayleigh :

Cette méthode consiste à calculer les énergies U et T en utilisant pour w des fonctions de forme vérifiant les conditions aux limites et approchant la géométrie des modes réels de vibration. Si le système en vibration est conservatif (aucune énergie n'est perdue ou ajoutée), le maximum de l'énergie cinétique doit être égale au maximum de l'énergie de déformation.

$$\text{Soit } U_{\max} = T_{\max} \quad (2.19)$$

La déflexion W s'écrit :

$$w(x,y,t = W(x,y).\sin\omega t \quad (2.20)$$

où $W(x,y)$ est la fonction de forme et ω la pulsation inconnue.

Remplaçant W par (2.20) dans l'expression des énergies :

$$T = \omega^2/2.\cos^2\omega t \int_0^a \int_0^b \rho h W^2(x,y).dxdy = \left(\frac{W}{2}\right)F.\cos^2\omega t \quad (2.21)$$

L'énergie cinétique sera à son maximum lorsque la vitesse de la plaque sera son maximum donc lorsque : $\sin\omega t = 0$

D'où l'expression de :

$$T_{\max} = \omega^2/2 \int_0^a \int_0^b \rho h W^2(x,y)dxdy \quad (2.22)$$

D'autre part l'énergie de flexion U sera maximum quand la déflexion de la plaque sera maximale, donc lorsque : $\sin\omega t=1$ d'où l'expression de :

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right\} dxdy \quad (2.23)$$

On en déduit alors la pulsation ω d'après (2.19) :

$$\omega^2 = \frac{2U_{\max}}{\int_0^a \int_0^b \rho h W(x,y)dxdy} \quad (2.24)$$

2.3.2. Méthode de Rayleigh-Ritz :

La méthode de Rayleigh-Ritz commença en 1870 avec l'étude des problèmes de vibrations par Lord Rayleigh. L'approximation du champ de déplacement était toutefois limitée à une seule fonction (méthode de Rayleigh) en 1909, Ritz généralisa la méthode de Rayleigh en construisant une approximation du champ à partir de plusieurs fonctions, chacune satisfaisant séparément les conditions aux limites essentielles (c'est-à-dire les conditions aux limites de type cinématique) et à chacune d'elles étant associé un degré de liberté. [12]

2.3.2.1. Principe de la méthode :

La méthode de Rayleigh-Ritz consiste à chercher une approximation des modes de vibration dans un espace de dimensions N engendré par N fonction Φ_i ... c'est-à-dire qu'on cherche des solutions de la forme :

$$W(x,y,z) = \sum_{i=1}^N q_i \Phi_i(x,y,z) = \{q\}^T \{\Phi\} \quad (2.25)$$

Avec: $\{q\} = \begin{Bmatrix} q1 \\ \vdots \\ qN \end{Bmatrix}$ et $\{\Phi\} = \begin{Bmatrix} f1 \\ \vdots \\ fN \end{Bmatrix}$

Les fonctions Φ_i étant connues, le quotient de Rayleigh d'une telle forme dépend uniquement des paramètres q_i et peut être mis sous la forme :

$$R(w) = R(q_1, \dots, q_N) = \frac{\{q^T\} K \{q\}}{\{q\}^T M \{q\}} \quad (2.26)$$

Où k est appelée matrice de raideur

M matrice de masse

La minimisation du quotient de Rayleigh par rapport aux paramètres q_i donne le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial R}{\partial q_N} \end{array} \right. \quad \text{Noté } \frac{\partial R}{\partial \{q\}} = 0 \quad (2.27)$$

Qui correspond après développement à :

$$\frac{K\{q\}\{q\}^T M\{q\} - \{q\}^T K\{q\}M\{q\}}{(\{q\}^T M\{q\})^2} = 0 \quad (2.28)$$

Et notant :

$$\omega^2 = \frac{\{q\}^T K\{q\}}{\{q\}^T M\{q\}} \quad (2.29)$$

La minimisation donne :

$$\frac{K\{q\} - \omega^2 M\{q\}}{\{q\}^T M\{q\}} = 0 \quad (2.30)$$

Les quantités ω_i qui assurent le minimum du quotient de Rayleigh sont donc les termes qui annulent le déterminant $|k - \omega^2 M| = 0$

On peut montrer que ω_i est une approximation par l'excès de la i ème fréquence propre du système.

Les valeurs $\{q_i\}$, associés aux ω_i qui sont solution du problème aux valeurs propres :

$$|k - \omega^2 M| \{q\} = 0$$

Donnent les composantes dans la base des fonctions Φ_i d'approximation des N premiers modes du système.

De manière générale, on peut faire les remarques suivant sur la qualité d'une approximation pour la méthode de Rayleigh Ritz :

- la qualité de l'approximation des pulsations et meilleurs que celle de l'approximation des modes.
- La qualité de l'approximation augmente avec la dimension de la base N.
- La qualité de l'approximation augmente avec la dimension de la base.

2.4.. Formulation des éléments finis

L'équation du mouvement de la plaque en vibration libre peut être obtenue du principe de Hamilton, lequel est une généralisation de principe des déplacements dans la dynamique des corps déformables, l'équation différentielle d'équilibre du mouvement est obtenues en utilisant le principe de Hamilton comme suit :

$$\delta \int_1^2 L dt = d \int_1^2 (T - pp) dt = 0 \quad (2.31)$$

Où δ est l'opérateur variationnel, L est la fonction de Lagrange de la plaque, t_1 et t_2 sont les bornes artichautières du temps. T est l'énergie cinétique, πp_i est l'énergie potentielle les équations de Lagrange deviennent :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \{\dot{w}_i\}_e} \right] - \frac{\partial T}{\partial \{w_i\}_e} + \frac{\partial p_p}{\partial \{w_i\}_e} = \{0\} \quad i=1,2 \dots \quad (2.32)$$

Où $\{w_i\}$ et $\{\dot{w}_i\}$ sont les vecteurs de déplacement et vitesses des coordonnées généralisées pour l'analyse de la vibration libre, les équations différentielles pour une plaque isotrope s'écrit :

$$[[k]-\omega^2[M]]\{w\} = \{0\} \quad (2.33)$$

Où :

[k]: Matrice rigidité globale de la rigidité obtenue par assemblage les matrices élémentaires.

[M]: Matrice masse rigidité obtenue par assemblage élémentaire

$\{w\}$: le vecteur global de déplacements

2.5 Méthode numérique approché (BOLOTIN) :

2.5.1. Présentation de la méthode

C'est en 1961 que **Bolotin** proposa cette méthode simple pour l'analyse des vibrations libres de corps élastiques occupant des régions rectangulaires de l'espace .cette méthode est donc moins générale que les autres car elle impose une géométrie au solide considéré, mais elle s'adopte parfaitement problème d'une plaque[4] .

Dans cette méthode les modes propres de vibration sont initialement approchés par des fonctions solutions exactes de l'équation différentielle des plaques et dépendant de deux paramètres qui sont déterminés par l'introduction de termes correctifs pour représenter la forme des modes sans chacune des directions Ox et Oy,et l'écriture des conditions aux limites du problème.

Cette méthode a été très utilisé à cause de sa grande simplicité dans son application et du peu de calculs qu'elle nécessite.

2.5.2. Analyse mathématique :

La méthode classique donne l'équation

$$D\nabla^4 w - \rho h \omega^2 = 0 \quad (2.34)$$

Nous choisissons l'origine des axes au milieu de la plaque pour distinguer un mode symétrique et un mode antisymétrique et on fait l'analyse mathématique sur une plaque rectangulaire encastrée.

Les conditions aux limites

$$W = \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots x = \pm a/2$$

(2.35)

$$W = \frac{\partial W}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots y = \pm a/2$$

(2.36)

Une solution exacte de (2.34) peut s'écrire sous la forme :

$$W = A \sin(k_1 x - \epsilon_1) \cdot \sin(k_2 y - \epsilon_2)$$

(2.37)

La substitution de (2.37) dans l'équation (2.34) donne la relation des pulsations ω en fonction des nombres d'ondes k_1 et k_2 qui sont les inconnus du problème.

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{h}} (k_1^2 + k_2^2) \tag{2.38}$$

Pour obtenir la forme d'un mode dans la direction Ox et Oy cherchera la fonction $\Phi(x)$, $\Psi(y)$ respectivement telles que :

$$W = \Phi(x) \sin(k_2 y - \epsilon_2) \tag{2.39}$$

$$W = \Psi(y) \sin(k_1 x - \epsilon_1) \tag{2.40}$$

Soit également des solutions de l'équation différentielle une fois déterminées Φ et Ψ , c'est l'écriture des conditions aux limites qui ne donnera les valeurs de k_1 et k_2 .

Pour déterminer ces deux derniers nous remplaçons l'expression de w donnée par (2.39) dans (2.34) ce qui nous donne l'équation différentielle vérifiée par Φ :

$$\frac{d^4 F}{dx^4} - 2k_2^2 \frac{d^2 F}{dx^2} + \left(k_2^4 - \frac{rhw^2}{D} \right) F = 0 \tag{2.41}$$

La solution générale est donc :

$$\Phi(x) = A \cos k_1 x + B \sin k_1 x + C \cosh p_1 x + D \sinh p_1 x \tag{2.42}$$

$$\text{Avec: } P_1 = \sqrt{k_1^2 + 2k_2^2} \quad (2.43)$$

Si l'on cherche les modes symétrique en x on considère

$$\Phi(x) = A \cos k_1 x + C \operatorname{ch} p_1 x \quad (2.44)$$

L'écriture des conditions aux limites $\Phi = \partial\Phi/\partial x = 0$

Pour $x = \pm a/2$ conduit au système

$$\begin{cases} A \cos k_1 \frac{a}{2} + C \operatorname{ch} p_1 \frac{a}{2} = 0 \\ -k_1 A \sin k_1 \frac{a}{2} + C \operatorname{ch} p_1 \frac{a}{2} = 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

Le déterminant soit nul et donc que l'on ait :

$$\operatorname{tg} h_1 \frac{a}{2} = -\frac{p_1}{k_1} \operatorname{th} \left(\frac{p_1 a}{2} \right) \quad (2.46)$$

$$\text{Avec: } P_1 = \sqrt{k_1^2 + 2k_2^2} \quad (2.47)$$

Méthode de résolution des équations en k_1 et k_2 :

On va chercher les nombres d'ondes k_1 et k_2 sous la forme

$$K_{1, nm} = (m + \delta_{1, nm})\pi \quad (2.48)$$

$$K_{2, mn} = (n + \delta_{2, mn})\pi$$

Avec (m, n) impaire pour les modes symétrique et pair pour les modes antisymétriques par rapport à l'axe Ox (Oy).

Pour la résolution, on considérera que les expressions en th sont voisines de l'unité :

On a donc :

$$K_1 = 2/a \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + 2h_2^2}} \right) + m\pi/a \quad (2.49)$$

$$K_2 = 2/b \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{h_2}{\sqrt{h_2^2 + 2h_1^2}} \right) + n\pi/a$$

Ce système se résout par substitutions successives dans les équations (2.49) en commençant par :

$$K_1 = m\pi/a$$

$$(2.50)$$

$$K_2 = n\pi/b$$

Dans quelques cas particuliers, on peut exprimer les pulsations ω à partir de (2.38) directement en fonction de n et de m.

Dans le cas d'une plaque carrée et pour n=m nous avons $k_1=k_2$ soit :

$$K_1 = \frac{2}{a} \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{mP}{a} = \left(m + \frac{1}{3}\right) \frac{P}{a} \quad (2.51)$$

Ce qui nous donne la formule générale dans le cas particulier

$$\omega_{mn} = 2 \left(m + \frac{1}{3}\right)^2 \frac{P^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{rh}} \quad (2.52)$$

Dans le cas si nous faisons tendre b vers l'infinie

$$K_2 = 0, \quad k_1 = (m + 1/2) \frac{P}{a}$$

On trouve alors l'expression donnant les fréquences d'une plaque infinie dans la direction oy :

$$\omega^2 = (m + \frac{1}{2})^2 \frac{P^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{rh}} \quad (2.53)$$

On peut aussi exprimer les modes propres de vibrations comme les fonctions $\Phi(x)$ et $\Psi(y)$ satisfont chacune les conditions aux limites l'une suivant Ox et l'autre suivant Oy, leur produit satisfait l'ensemble des conditions au limites et donc il forme une solution approchée des modes réels.

On aura donc :

$$W(x,y) = \Phi(x) \cdot \Psi(y) \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \cosh k_1 x - [\cos(k_1 a/2) / \text{ch}(P_1 a/a)] \text{ch} P_1 x && \text{symétrique} \\ \Phi(x) &= \sinh k_1 x - [\sin(k_1 a/2) / \text{sh}(P_1 a/2)] \text{sh} P_1 x && \text{anti-symétrique} \\ \Psi(y) &= \cosh k_2 y - [\cos(k_2 b/2) / \text{ch}(P_2 b/2)] \text{ch} P_2 y && \text{symétrique} \\ \Psi(y) &= \sinh k_2 y - [\sin(k_2 b/2) / \text{sh}(P_2 b/2)] \text{sh} P_2 y && \text{anti-symétrique} \end{aligned} \quad (2.55)$$

2.5.3. Application à la théorie de Mindlin :

L'introduction des nombres d'ondes k_1 et k_2 dans les équations différentielles nous donne :

- pour la théorie de Mindlin

$$\frac{rhw^2}{D} \left(1 + \left(\frac{D}{m'h} + \frac{h^2}{12} \right) (k_1^2 + k_2^2) \right) = (k_1^2 + k_2^2)^2 \quad (2.56)$$

Que l'on peut également écrire en faisant une légère approximation

$$w^2 = \frac{D}{rh} (k_1^2 + k_2^2) \left[1 - \left(\frac{D}{m'h} + \frac{h^2}{12} \right) (k_1^2 + k_2^2) \right] \quad (2.57)$$

Chapitre 3

Généralités des matériaux composites

3. généralités des matériaux composites

3.1. Introduction :

Il existe différentes familles de matériaux : les métaux, les plastiques, les composites...etc.

Le principal intérêt de l'utilisation des composites provient de ses excellentes caractéristiques spécifiques (module divisé par la masse volumique)

Un matériau composite résulte de l'association intime d'au moins deux matériaux non miscibles on obtient un matériau hétérogène, en distingue deux types :

Les composites grandes diffusions (GD) et les composites hautes performance (HP).

- Les GD représentent 95% des composites utilisés. C'est en général des plastiques armés ou de plusieurs renforts, le taux de renfort avoisinant 30%. Dans 90% des cas, l'anisotropie n'existe pas ou n'est pas maîtrisée car les renforts sont des fibres courtes, les principaux constituants de bases sont les résines polystyrénées (95% des résines thermodurcissables) avec des fibres de verre + de 99% des renforts utilisées). Renforts et matrices sont à de courts voisins.
- Les HP, principalement utilisés dans l'aéronautique sont d'un coût élevé, les renforts sont plutôt des fibres longues, le taux de renfort est supérieur à 50%, et ce sont les renforts qui influent sur le coût les propriétés mécaniques (résistance mécanique et rigidité) sont largement supérieures à celles des métaux.

Il faudra toujours tenir compte du fait que l'élaboration de la structure est liée à celle du matériau, que pour les pièces travaillantes, on utilisera plutôt des composites à fibres longues et à matrice organique et pour les garnitures, capotage on utilisera des plastiques renforcés.

3.2. Définitions de base :

- Homogène : mêmes propriétés en tout point du matériau.
- Hétérogène : en 2 points différentes, propriétés différentes
- Isotrope : même propriété dans toutes les directions
- Isotrope transverse: il existe un axe de symétrie par rapport à une droite.
- Orthotrope: propriétés symétriques par rapport à deux plans orthogonaux.
- Anisotrope : les propriétés sont différentes selon les différentes directions

3.3. Les composants :

Matériau composite plastique : association de deux constituants.

3.3.1. Le renfort : armature, squelette il assure la tenue mécanique (résistance à la traction et réticule) souvent de nature filamentaire (des fibres organiques ou inorganiques).

3.3.2. La matrice : Lie les fibres renforts répartis les efforts (résistance à la compression ou à la flexion). Assure la protection chimique par définition c'est un polymère ou une résine organique.

En plus de ces deux constituants de base, il faut rajouter : une interface qui assure la compatibilité renfort- matrice, qui transmet les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif. Bonne adhérence en couche fine (μ). Des produits chimiques entrent aussi dans la composition du composite, l'interphase etc.. qui peuvent jouer sur le comportement mécanique, mais n'interviennent pratiquement jamais dans le calcul de structure composite.

Pour les composites, on construit sa structure à la demande.

- la nature, la texture et la forme du renfort
- le taux de renforcement
- la nature de la résine et des charges ou additifs
- la qualité de l'interface renfort-matrice
- la géométrie de la pièce réaliser
- la procède de mise en œuvre utilisée.

3.4. Avantages des matériaux composites :

- grande résistance à la fatigue
 - faible vieillissement sous l'action de l'humidité de la chaleur, de la corrosion (sauf alu carbone).
 - insensibles aux produits chimiques « mécaniques » comme les graisse, huiles, liquides hydrauliques, peintures, solvants, pétrole.
1. Association fibre-matrice : la liaison entre fibre-matrice est créée pendant la phase d'élaboration influence fondamentale sur les propriétés mécaniques du composite.
 2. les différents types des constituants de base.

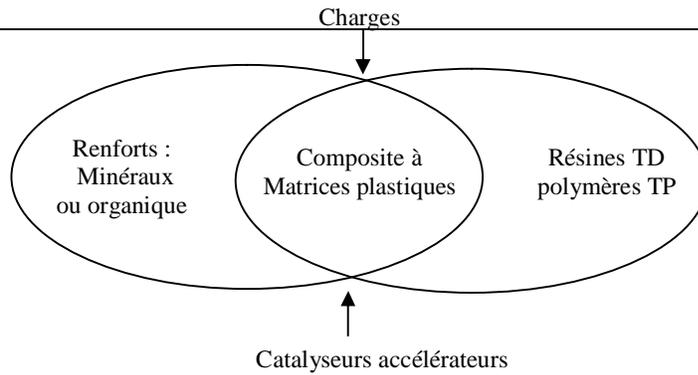


FIG.9 Principaux constituants des matériaux composites

3.5. Les renforts

3.5.1. Les fibres :

- Constituées par plusieurs centaines/milliers de filaments de diamètres variant de 5 à 15µm.
- Traitement sur machines textiles (mèches).

On les commercialise essentiellement sous forme de :

- fibre courtes : quelques centimètres ou millimètres, ce sont les feutres et les mats utilisés en moulage
- fibre longues : coupées au moment de la fabrication du matériaux composite utilisées telles quelles ou bien tissées.

3.5.2. Principaux matériaux de renfort :

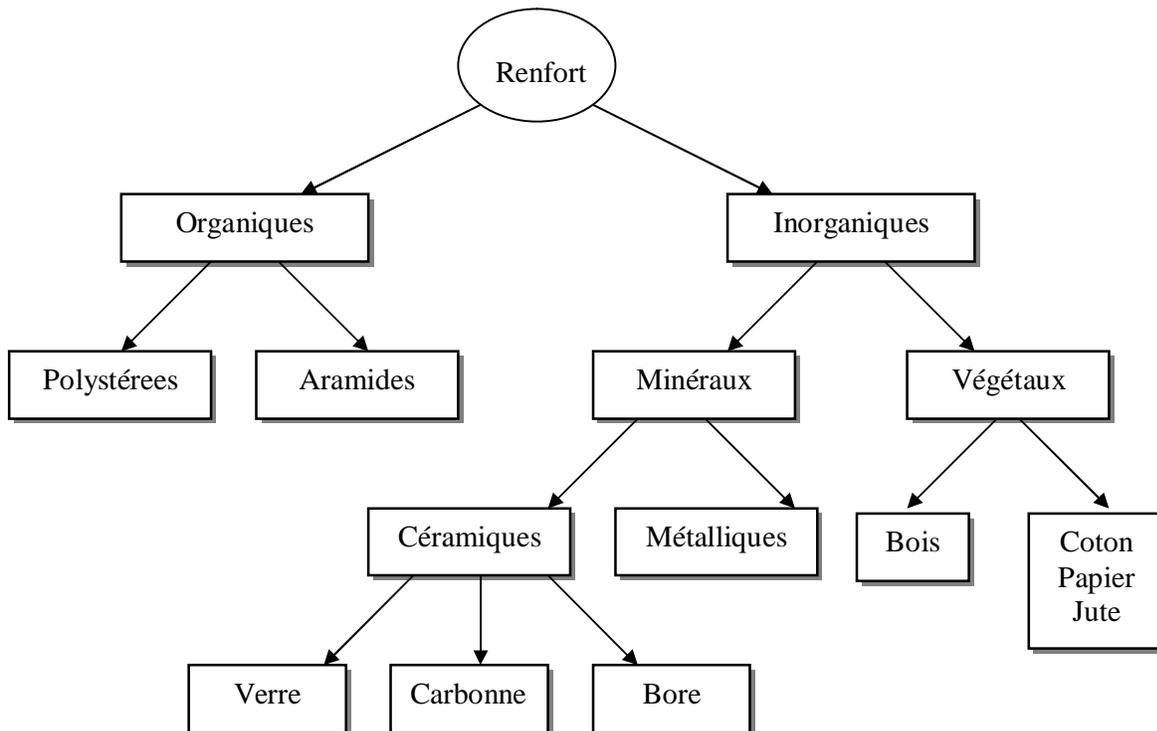


Fig10 : Les différents types de renfort de base

3.5.3. Principe caractéristiques des fibres de base :

Fibre	Densité (kg/m ³)	Charge de rupture en traction en (MPa)	Charge de rupture en composition MPa	Allongement à la rupture (%)	Module d'élasticité long(MPa)	Diamètre des filament élémentaires
Verre E	2,54	3400	1200	4,8	73000	3-30
Verre R	2,48	4400	1300	5,4	86000	3-30
Aramide bas module	1,45	3100	500	2	70000	12
Aramide haute module	1,45	3100	500	1	130000	12
Carbone haute module	1,8	2200	1300	1	400000	8
Carbone haute ténacité	1,78	2800	1800	0,5	200000	8
bore	2,63	3500	3500	0,8	400000	100-200

3.6. Les matrices

La matrice lie les fibres renfort, repartit les efforts, donne la forme voulue et apporte la tenue chimique de la structure.

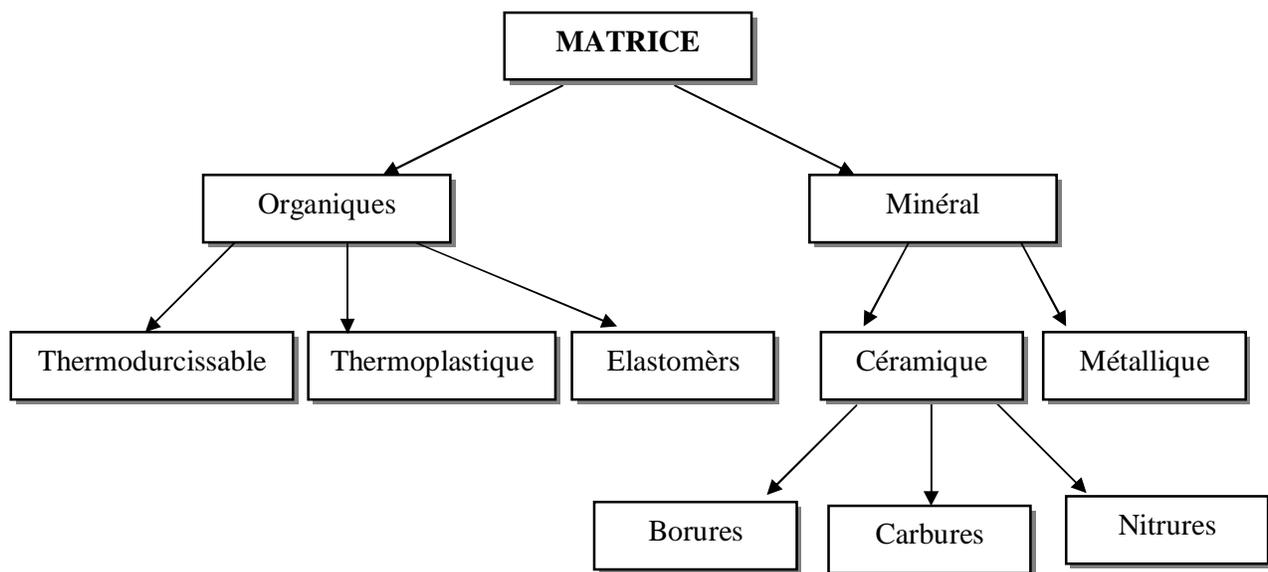


FIG.11 Les différentes familles de matrice

Les résines les plus employées dans les matériaux composites sont les résines thermo durcissables et les résines thermoplastiques.

1) Résine thermoplastique :

Polymère pouvant être alternativement ramollie par chauffage et durci par refroidissement dans un intervalle de température spécifique de polymère étudié les résines thermoplastiques présentent l'aptitude à l'état ramolli, de se mouler aisément par plasticité.

2) résine thermodurcissable :

Polymère transformé en un produit essentiel infusible et insoluble après traitement thermique (chaleur, radiation) ou physico-chimique (catalyse, durcisseur).

3.6.1. Critères essentiels des matrices TD et TP :

	Thermoplastiques	Thermodurcissable
Etat de base	Solide (prêt à emploi polymérisé)	Liquide visqueux a polymériser
Stockage matière de base	Illimité	Temps réduit (précaution à prendre)
Mouillabilité des renforts	Difficile	Aisée
Moulage	Chauffage (fusion/ramollissement +refroidissement de fixation)	Chauffage continu
Cycle	Court	Plus long (polymérisation)
Critères spécifiques	Assez bonne	Limitée
Tenue de choc	Réduite sauf nouveaux TP thermostables)	Meilleure
Tenue thermique	recyclables	Perdus

Tableau 1

Il existe d'autres catégories des résines telles que les résines thermostables dont leur usinage reste spécifique et la mise en œuvre de pièces mécaniques reste limitée.

3.7. Les matières composites structuraux :

3.7.1. Monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement) à fibres tissées à fibres courtes.



Fig. 12 : pli unidirectionnelle

3.7.2. Stratifiés :

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié.

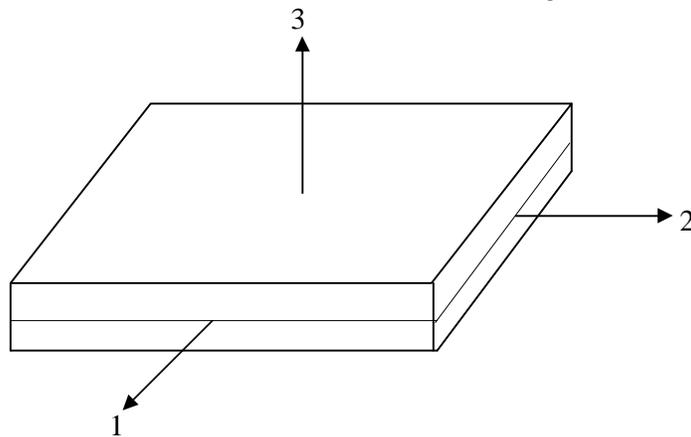


Fig. 13: schématisation d'un composite stratifié

Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques on pourra avoir des stratifiés de type.

1. **Equilibre** : Stratifié comportant autant de couches orientée suivant la direction $+\theta$ que de couches orientée suivant la direction $-\theta$.
2. **Symétrique** : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.
3. **orthogonal** : stratifié comportant autant de couches) 0° que de couches à 90° .

3.7.3. Matériaux sandwichs :

Matériaux composés de deux semelles (coupeaux) de grande rigidité et de épaisseur enveloppant une âme (ou cour) de forte épaisseur et faible résistance. L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté en flexion et c'est un excellent isolant thermique.

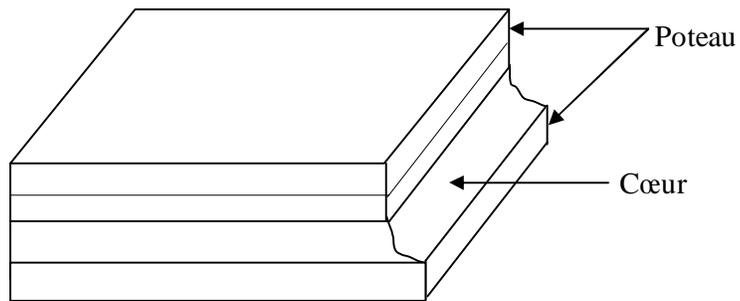


Fig. 14 : schéma d'un sandwich

3.8. Mise en œuvre, procédés :

Trois opérations sont indispensables :

- 1) Imprégnation du renfort par le système résineux
- 2) Mise en forme à la géométrie de la pièce
- 3) Durcissement du système
 - Soit par polycondensation et réticulation pour les matrices thermodurcissable
 - Soit par simple refroidissement pour les matières thermoplastiques.

Il existe différentes techniques mais la plus utilisé est par moulage.

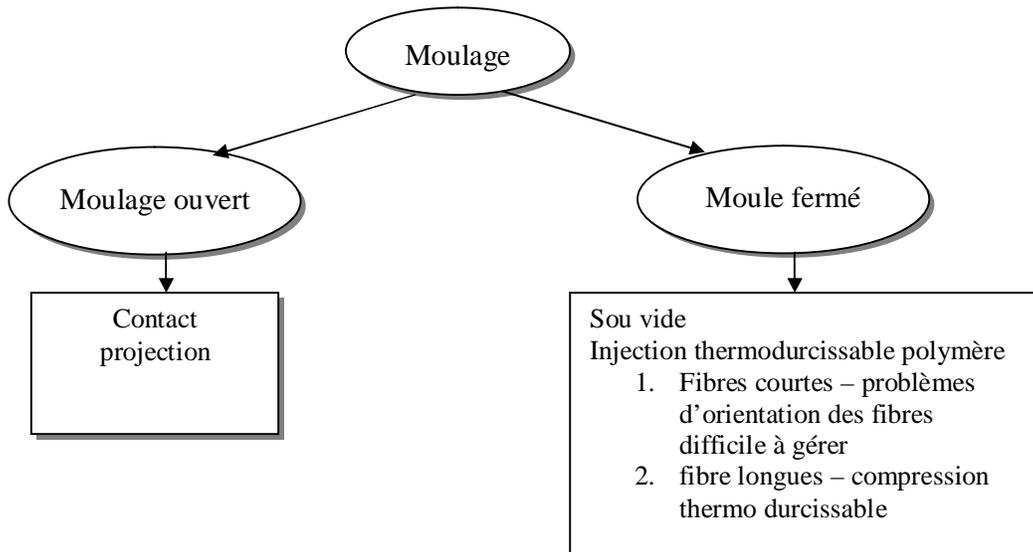


Fig. 15 techniques de moulage

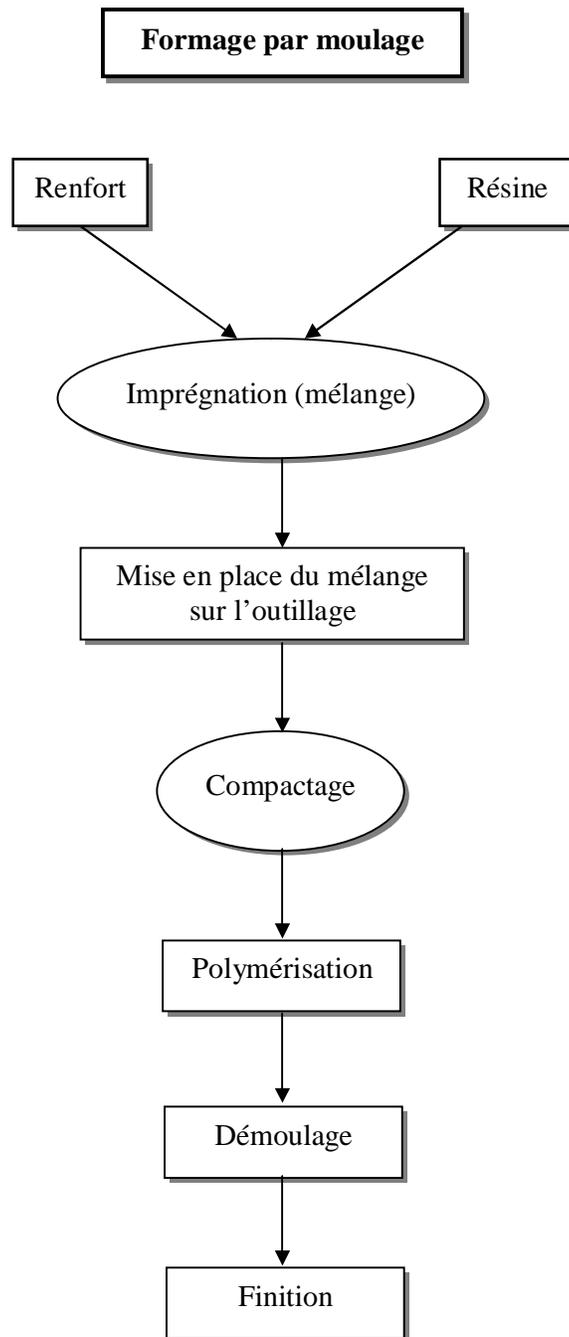


Fig.16.Principales étapes d'un procédé par moulage.

3.8.1. Les procédés les plus importants sont :

1. Moulage au contact

Technologie de réalisation de pièces prototypes ou de simulation, le principe consiste à imprégner manuellement les renforts disposés dans un moule, c'est peu onéreux et de des pièces de formes quelconques peuvent être réalisées mais cadence très faible.

2. Moulage par projection simultanée :

Technologie similaire mais les fibres coupées projetées au pistolet.

3. Injection thermodurcissable BMC :

Procède discontinu haute pression (100 bars). Alimentation et dosage du compound, injection pression, maintien et polymérisation, puis éjection les avantages sont : réalisation de grande série, faible coût matière peu de finition, temps de cycle.

Les limites sont : le taux et la longueur des renforts et les propriétés mécaniques du composite obtenu.

4. Compression thermodurcissable SMC :

Le principe consiste à déposer des feuilles de pré imprégnés dans un contre moule chauffé de comprimer le matériaux avec un moule chauffé polymérisation puis éjection de la pièce. Avantage : coût, matière, propriétés mécaniques et thermiques, les limites sont l'aspect, le dimensionnement des presses et la finition.

5. Pultrusion :

Utilisation pour les composites hautes performances industrielles, le principe est : tirage, mise en forme et polymérisation de fibres continues imprégnées.

Les avantages sont la production en continue, possibilité de réaliser les sections très complexes, et d'avoir un taux de renfort élevé, les limites sont la lenteur du procédé, uniquement des profiles droits à section constante.

6. Enroulement filamentaire (ou bobinage) :

Technologie pour les HP, le principe consiste en un enroulement sous tension sur un mandrin tournant autour de son axe de fibres continues préalablement imprégnées d'un liant, les avantages sont la disposition optimales des renforts, les très bonne propriétés mécaniques, possibilité de réaliser des pièces de grandes dimensions avec des surfaces lisses, les limites sont que formes uniquement convexes et investissements importants.

Limitation : taille de pièces = tailles des moules.

Chapitre 4

Théorie générale des plaques composites

4. Théorie générale des plaques composites

4.1. Loi de Hooke :

Pour un milieu élastique linéaire la loi de comportement va relier les deux tenseurs de contraintes et déformations.

La loi que nous considérons est la forme $\mathbf{S} = \mathbf{k.e}$, ou \mathbf{k} une fonction linéaire.

Alors la loi de Hooke généralisée s'écrit :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad ij = 1,2,\dots,6 \quad (4.1)$$

C : la matrice de rigidité du matériau

La relation (1) peut être écrite sous la forme inverse :

$$\epsilon_{ij} = S_{ij}\sigma_j \quad ij = 1,2,\dots,6 \quad (2)$$

La matrice S est appelée matrice de souplesse ou de flexibilité à la même forme que la matrice de rigidité.

Les deux tenseurs σ et ϵ sont des matrices 3x3 symétriques et dont chacun à 6 coefficients indépendants, donc \mathbf{k} comporte 36 coefficients qui lient la matrice de rigidité (ou de souplesse) est déterminée par 21 constantes indépendantes, ce cas correspond à un matériau possédant aucune propriété de symétrie si le matériau possède un plan de symétrie, le nombre de constantes indépendantes est réduit à 13.

4.2. Matériaux orthotrope :

Définition :

On appelle matériaux orthotrope un matériaux élastique homogène présentant en tout point deux symétries du comportement mécanique, chacune par rapport à un plan les deux plans étant orthogonaux [8].

Alors le nombre de constantes élastique indépendantes est réduit à 9 la loi de comportement exprimée dans les axes dits « d'orthotropes » définit au moyens du trièdre construit sur les deux plans orthogonaux et leur intersection peut s'écrire sous la forme suivante, appelée notation ingénieur car elle fait apparaître modules d'élasticité et coefficients de poisson.

$$\begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ g_{23} \\ g_{13} \\ g_{12} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{u_{21}}{E_2} & -\frac{u_{13}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{u_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u_{13}}{E_1} & -\frac{u_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ s_{33} \\ s_{23} \\ s_{13} \\ s_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

E_i . E_1, E_2, E_3 sont les modules d'élasticité longitudinaux

G_i . G_1, G_2, G_3 sont les modules de cisaillement

u_{ij} . $\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}, \gamma_{21}, \gamma_{31}, \gamma_{32}$ sont les coefficients de plus la symétrie de la matrice de la de comportement ci-dessus entraîne les égalités :

$$\frac{u_{21}}{E_2} = \frac{u_{12}}{E_1} \quad , \quad \frac{u_{31}}{E_3} = \frac{u_{13}}{E_1} \quad , \quad \frac{u_{32}}{E_3} = \frac{u_{23}}{E_2} \quad (4.4)$$

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ t_{23} \\ t_{31} \\ t_{12} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ g_{23} \\ g_{31} \\ g_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

$\epsilon_1, \epsilon_2,$ et ϵ_3 représentent les déformations normales

γ_{23}, γ_{31} et γ_{12} représentent les distorsions angulaires

$$\gamma_{23} = 2 \epsilon_{23} \quad , \quad \gamma_{31} = 2 \epsilon_{31} \quad , \quad \gamma_{12} = 2 \epsilon_{12} \quad (4.6)$$

4.3. Matériaux isotrope transverse :

Définition : matériaux possédant une direction privilège, c'est dire qu'il existe un axe de symétrie.

Si on suppose que la direction 3 est de symétrie la réalisation de comportement s'écrit alors :

$$\begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ g_{23} \\ g_{13} \\ g_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{u_{21}}{E_1} & -\frac{u_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & -\frac{u_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u_{12}}{E_1} & -\frac{u_{32}}{E_1} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1+u_{12}}{E_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ s_{33} \\ s_{23} \\ s_{13} \\ s_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

Il ne reste donc que 6 coefficients distincts

4.4 Matériaux isotrope :

Les propriétés élastiques sont indépendantes des systèmes d'axes (il y a le même comportement dans toutes les directions). Le matériau possède ainsi une infinité de plans de symétrie, et le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est donc réduit à 2 :

$$G_{12} = G_{13} = G_{23} = \frac{E}{2(1+u)} \quad (4.8)$$

$$E_1 = E_2 = E$$

$$v_{12} = v_{23} = v_{13} = \gamma$$

4.5. Contraintes planes :

Un état de contraintes planes est un état de contraintes à deux dimensions pour lequel les composants du tenseur des contraintes sont indépendants de la coordonnée Z les relations suivantes sont indiqués pour un pli unidirectionnel ou un pli tissu.

Pour un état de contrainte plane on a :

$$\sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{31} = 0 \quad (4.9)$$

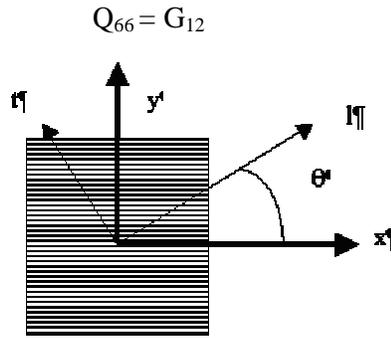
Pour un état de contraintes déformation du pli dans son repère d'orthotrope (1, 2, 3) s'écrit suivant :

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ g_2 \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

Avec :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - u_{12}u_{21}} \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - u_{12}u_{21}} \quad (4.11)$$

$$Q_{12} = \frac{u_{12}E_2}{1 - u_{12}u_{21}}$$



Axes principaux (1,2,3) d'une couche de stratifié et axes de références (1',2',3') du stratifié.
Les matrices de rigidité c'est de souplesse s'exprimée dans la base (1',2',3') sont obtenues en appliquant les relations de changement de base suivantes :

$$C' = T^{-1}_{\sigma} C T_{\varepsilon} \quad (4.12)$$

$$S' = T^{-1}_{\varepsilon} S T_{\sigma} \quad (4.13)$$

$$T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ 2sc & 2sc & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$T_s = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & 2sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -2sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -sc & sc & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$C = \text{Cos}\theta \quad \text{et } S = \text{sin } \theta \quad (4.16)$$

T^{-1}_ε et T^{-1}_σ sont respectivement les matrices inverses de T_ε et T_σ les relations d'élasticité peuvent s'écrire dans le repère (xy) sous l'une des deux formes.

$$\begin{Bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ g'_{12} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{26} \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} s'_1 \\ s'_2 \\ t'_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

Ou

$$\begin{Bmatrix} s'_1 \\ s'_2 \\ t'_{12} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ g'_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

Les coefficients $[Q'_{ij}]$ et $[S'_{ij}]$ sont exprimées respectivement comme suivant :

$$\begin{aligned} Q'_{11} &= Q_{11} \cos^4\theta + Q_{22}\sin^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2\theta\cos^2\theta \\ Q'_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}(\cos^4\theta + \sin^4\theta) \\ Q'_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2\theta\cos^3\theta - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos\theta \sin^3\theta \\ Q'_{22} &= Q_{11} \sin^4\theta + Q_{22}\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2\theta\cos^2\theta \\ Q'_{66} &= [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}(\cos^4\theta + \sin^4\theta) \\ Q'_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3\theta\cos\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin\theta \cos^3\theta \end{aligned} \quad (4.19)$$

Les coefficients de souplesse transformés S'_{ij} :

$$\begin{aligned} S'_{11} &= S_{11} \cos^4\theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2\theta\cos^2\theta + S_{22}\sin^4\theta \\ S'_{22} &= S_{11} \sin^4\theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2\theta\cos^2\theta + S_{22} \cos^4\theta \\ S'_{12} &= (S_{11} + S_{22} - S_{66}) \sin^2\theta\cos^2\theta + S_{12}(\sin^4\theta + \sin^4\theta) \\ S'_{66} &= 2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66}) \sin^2\theta\cos^2\theta + S_{66}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \end{aligned} \quad (4.20)$$

4.6. Théorie simplifiée des stratifiés

On appelle stratifié ce qui résulte de plusieurs couches (ou pli) de nappes unidirectionnelle ou de tissus avec des orientations propres à chaque pli.

4.6.1. Comportement en membrane :

Soit un stratifié à symétrie miroir (les empilement des plis de part et d'autre du plan moyen sont identiques ($\pm\theta$)).

Pour un état plan de contraintes les hypothèses des faibles déformations (hypothèses de Love Kirchhoff) [34].

- l'élément plaque est constitué par un nombre arbitraire de plis parfaitement liés les uns aux autres et dont les axes naturels ne coïncident pas obligatoirement avec les axes de références.
- L'épaisseur de l'élément est très faible par rapport aux deux autres dimensions (longueur et largeur)
- Les déplacements U,V,W. sont faibles par rapport à l'épaisseur de h de l'élément.
- Les déformations ϵ_x , ϵ_y et γ_{xy} sont faibles
- Les déformations de cisaillement γ_{xz} et γ_{yz} sont négligeable
- Les déplacements U et V sont des fonctions linaires de z
- La déformation ϵ_z est négligeable.
- Les relations σ - ϵ dans chacun des plis sont conformes à la loi de Hooke
- L'épaisseur h de l'élément est constante
- Z_{xz} et Z_{yz} sont nulles à la surface de l'élément ($z = \pm h/2$)

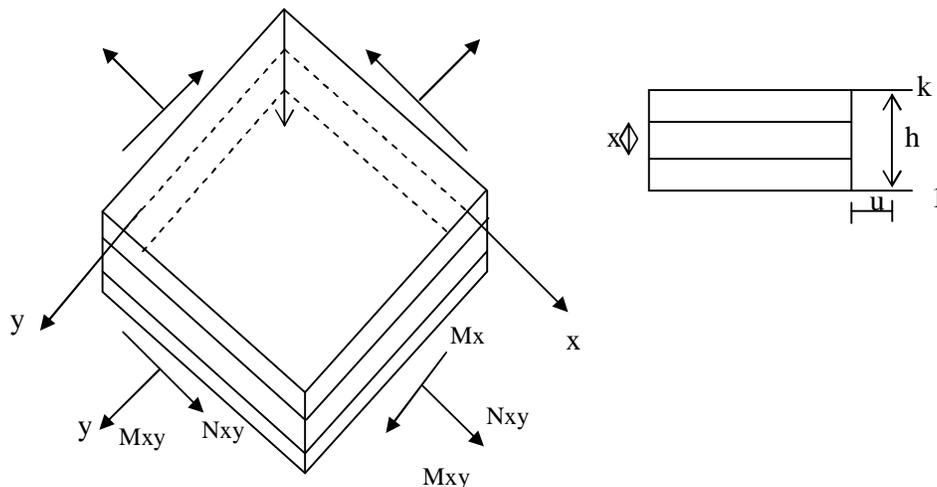


Fig. 17 : Système de coordonnées et les éléments de réduction

U_0, V_0 : composant du déplacement dans le plan moyen et k indice de chaque pli .

$$\begin{cases} \epsilon_x^o = \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ e_y^o = \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ g_{xy}^o = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{cases} \quad (4.21)$$

On est en hypothèse des petites déformations on a alors une relation entre l'angle de rotation de la section et le déplacement suivant l'axe z notée w :

$$\omega = \frac{\partial w}{\partial x}$$

Pour un point ne se trouvant pas dans le plan moyen on aura comme déformation :

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u_0 - z \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4.22a)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(v_0 - z \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \quad (4.22b)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \text{courbure de la plaque} \quad (4.22c)$$

La déformation de cisaillement va s'écrire

$$g_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = g_{xy}^o - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4.23)$$

Que l'on peut mettre sous la forme

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ g_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x^o \\ e_y^o \\ g_{xy}^o \end{bmatrix} + Z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Avec :

$$\bullet \quad k_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4.25)$$

$$\bullet \quad k_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (4.26)$$

$$\bullet \quad k_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4.27)$$

Ce qui permet d'écrire les contraintes dans un pli du composite stratifié sous la forme :

$$[\sigma] = [Q]_k [\varepsilon_0] + Z[Q_k] [k] \quad (4.28)$$

Un stratifié uniquement soumis à des sollicitations dans son plan par unité de longueur :

$$N_x, N_y, T_{xy} = T_{yx}$$

Ce sont des efforts de membrane (ou éléments de réduction pour des contraintes ou encore flux d'efforts dans le stratifié)

4.6.2. Description des efforts

N_x : effort dans la direction x par unité de longueur suivant la direction y

N_y : effort résultant dans la direction y, par unité de largeur suivant la direction

$N_{xy} = n_{xy}$: Cisaillement de membrane par unité de largeur suivant la direction y :

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} s_x dz \quad (4.29)$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} s_y dz \quad (4.30)$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} t_{xy} dz \quad (4.31)$$

L'unité de mesure utilisée pour les N_{ij} est donc une force par unité de largeur N/mm ou Mpa -mm .

Les relations précédentes peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (4.32)$$

Les moments résultants de flexion ou de torsion on pour expression [12]

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} s_x z dz \quad (4.33)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} s_y z dz \quad (4.34)$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} t_{xy} z dz \quad (4.36)$$

L'unité de mesure utilisée pour les M_{ij} est une force multipliée par unité de largeur :
 $Nmm/mm = \text{Nou Mpa} - mm^2$.

4.6.3. Relation entre les éléments de réduction et les déformations

Dans le k^e plan on a les relations suivantes :

$$\{\epsilon_k\} = \{\epsilon^o_k\} + Z \{K_k\} \quad (4.37)$$

Multipliant les deux membranes de l'équation (4.37) par $[Q'ij]_k$

$$[Q'ij]_k \{\epsilon_k\} = [Q'ij]_k (\{\epsilon^o_k\} + Z\{K_k\}) \quad (4.38)$$

L'état de contrainte dans le k^c plis s'écrit:

$$\{\sigma\}_k = [Q'ij]_k \{\epsilon^o_k\} + Z[Q'ij]\{K_k\} \quad (4.39)$$

Les contraintes résultantes du stratifié peuvent être obtenues à l'aide des relations entre les contraintes dans un pli et les contraintes résultantes.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{bmatrix} dz = \int_{-h/2}^{+h/2} [Q'ij]_k \{e^o\} dz + \int_{-h/2}^{+h/2} [Qij']_k \{k\} z dz \quad (4.40)$$

En considérant que :

$\{\epsilon^o_k\}$ et $\{k\}$ du plan moyen géométrique sont indépendants de Z :

$$\int_{-h/2}^{+h/2} [Q'ij]_k \{e^o\} dz = \int_{-h/2}^{+h/2} \{[Q']_k dz\} \{e^o\} \text{ et } \int_{-h/2}^{+h/2} [Qij']_k \{k\} z dz = \int_{-h/2}^{+h/2} \{[Q']_h z dz\} \{k\} \quad (4.41)$$

Les intégrales sont :

$$\int_{z_{k-1}}^{z_k} dz = Z_k - Z_{k-1} \quad (4.42a)$$

$$\int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz = 1/2(Z_k^2 - Z_{k-1}^2) \quad (4.42b)$$

On obtient:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n [Qij']_k (Z_k - Z_{k-1}) \{e^o\} + 1/2 \sum_{k=1}^n [Qij']_k (Z_k^2 - Z_{k-1}^2) \{k\} \quad (4.43)$$

Ou :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} e_x^0 \\ e_y^0 \\ g_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.44)$$

Avec :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k (Z_k - Z_{k-1}) \quad (4.45)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k (Z_k^2 - Z_{k-1}^2) \quad (4.46)$$

[A] est la matrice en rigidité en membrane

[B] est la matrice de couplage membrane-flexion-torsion.

Ces équations montrent que dans le cas d'un stratifié les résultantes en membranes (N_x, N_y, N_{xy}) ne sont pas seulement fonction des déformations en membrane ($\epsilon_x^o, \epsilon_y^o, \epsilon_{xy}^o$).

(Comme dans le cas des plaques homogènes) mais sont également fonctions des courbures en flexion et en torsion (k_x, k_y, k_{xy}).

Les moments de flexion et de torsion sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \int_{-h/2}^{h/2} [Q_{ij}]_k \{e^o\} z^2 dz + \int_{-h/2}^{h/2} [Q'_{ij}]_k \{k\} z^2 dz \quad (4.47)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [Q'_{ij}]_k (Z_k^2 - Z_{k-1}^2) \{e^o\} + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [Q_{ij}]_k (Z_k^3 - Z_{k-1}^3) \{k\} \quad (4.48)$$

Soit :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} e_x^0 \\ e_y^0 \\ g_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.49)$$

Avec :

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k (Z_k^2 - Z_{k-1}^2) \quad (4.50)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k (Z_k^3 - Z_{k-1}^3) \quad (4.51)$$

[D] est la matrice de rigidité en flexion et torsion.

Donc les relations entre les éléments de réduction et les déformations du plan moyen géométrie peuvent s'écrire :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x^0 \\ e_y^0 \\ g_{xy}^0 \\ kx \\ ky \\ kxy \end{Bmatrix} \quad (4.52)$$

La matrice intervenant dans cette expression est la matrice de rigidité du stratifié décrivant le comportement élastique macroscopique du stratifié au point $M_0(x,y) = M(x,y,0)$.

B est la matrice de couplage membrane-flexion-torsion. Elle résulte de la structure en couches de matériaux de caractéristiques différentes, le couplage est nul ($B_{ij}=0$). Seulement dans la cas d'un stratifié symétrique. La symétrie implique une symétrie des propriétés des couches de leurs cotes et de leurs orientations [22].

4.6.4 Rigidité d'une couche isotrope:

Pour une seule couche $\bar{z}_k = 0$, alors $B_{ij} = 0$, par conséquent il n'existe pas de couplage membrane- flexion /torsion.[18]

Pour une couche isotrope on a : $[Q'_{ij}] = [Q_{ij}]$, $Q_{11} = Q_{22}$, $Q_{16} = Q_{26} = 0$ et $Q_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)}$

La matrice de rigidité pour un stratifié constitué d'une seule couche isotrope s'écrit:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

4.6.5 Rigidité d'une couche orthotrope

Les axes principaux de la couche (axes d'orthotropie) sont confondus avec les axes de référence du stratifié .les fibres sont orientées suivant la direction x

Dans ce cas : $[Q_{IJ}] = [Q'_{ij}]$ et $Q_{16} = Q_{26} = 0$ mais $Q_{66} \neq \frac{E}{2(1+u)}$

Et les coefficients de rigidité $B_{ij}=0$, $A_{ij}=Q_{ij} h$, $D_{ij}=Q_{ij} \frac{h^3}{12}$

h :est l'épaisseur totale de stratifie

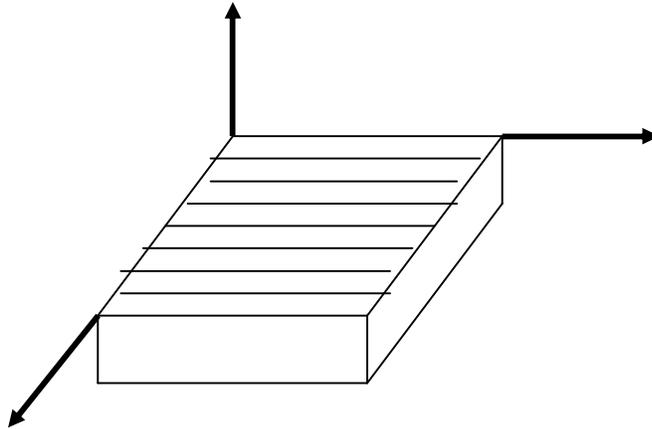


Fig. 18 couche spécialement orthotrope

La matrice de rigidité s'écrit donc comme suit:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

4.6.6 Rigidité d'une couche généralement orthotrope

Dans le cas où les axes principaux de la couche ne coïncident pas avec les axes de référence du stratifié, les fibres sont orientées suivant un angle du rapport α à l'axe x (figure 19). Pour ce type on a :

$$[Q_{ij}] \neq [Q'_{ij}] \text{ et } Q_{16} = Q_{26} \neq 0 \text{ mais } Q_{11} = Q_{22} \text{ et } Q_{66} \neq \frac{E}{2(1+\nu)}$$

D'où les coefficients de rigidité :

$$B_{ij}=0$$

$$A_{ij} = Q'_{ij} \frac{h^3}{12} \quad ij=11,12,22,16,26,66$$

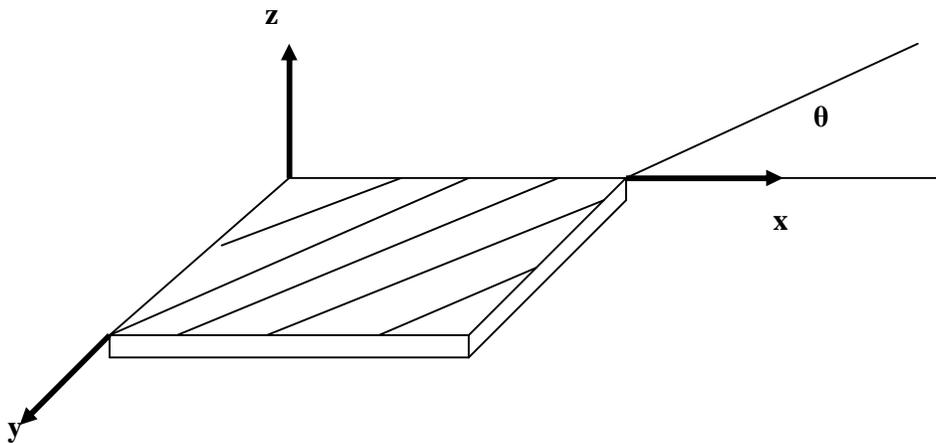


Fig. 19 couche généralement orthotrope

La matrice de rigidité s'écrit donc

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

4.7. Comportement dynamique des plaques composantes :

4.7.1. Equation d'équilibre :

Les relations fondamentales des plaques en l'absence de cisaillement transversal, sont [18] :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = r_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \quad (4.56)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = r_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q = r_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (4.58)$$

Avec :

- N_x, N_y, n_{xy} : Les résultantes des forces en membrane
- M_x, M_y, M_{xy} : Les moments de flexion et de torsion
- U_0, v_0, w_0 : les déplacements du plan moyen géométrique suivant les directions respectives x, y, et z.
- q : la charge transversale
- ρ_0 : la densité surfacique de la plaque.

En introduisant l'équation (4.56) dans (4.58) et en tenant compte des relations déformations-déplacements (4.21) nous obtenons les trois relations fondamentales de la théorie classique des stratifiés :

$$\begin{aligned} 1. \quad & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{16}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - \\ & B_{11} \frac{\partial^3 W_0}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 W_0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 W_0}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 W_0}{\partial y^3} = r_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4.59)a$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{16} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{16} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} - \\ & (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} = r_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4.59)b$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad & D_{11} \frac{\partial^4 W_0}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 W}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{26}) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 W}{\partial x \partial y^3} + \\
 & 2D_{12} \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} - B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} - \\
 & (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} = q - r_0 \frac{\partial^2 W_0}{\partial t^2} \quad (4.59)c
 \end{aligned}$$

4.7.2. Formation énergétique de la théorie de stratifiés :

4.7.2.1. Energie de déformation d'un stratifié

L'énergie de déformation d'un stratifié est donnée par la formule suivante [34]

$$U_d = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\int_0^h \int_0^b \int_0^a \left\{ Q_{11}^k e_{xx}^2 + 2Q_{12}^k e_{xx} e_{yy} + 2Q_{16}^k e_{xx} g_{xy} + 2Q_{26}^k e_{yy} g_{xy} + 2Q_{22}^k e_{yy}^2 + Q_{66}^k g_{xy}^2 \right\} dx dy dz \right] \quad (4.60)$$

k: numéro de la couche

n: nombre totale des couches

Connaissons le champ des déformations qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} ex \\ ey \\ g_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_x^0 \\ e_y^0 \\ g_{xy}^0 \end{Bmatrix} + Z \begin{Bmatrix} kx \\ ky \\ kxy \end{Bmatrix} \quad (4.59)$$

En intégrant en Z suivant, l'épaisseur du stratifié, la relation (4.60) et en tenant compte de (4.59) nous obtenons l'énergie de déformations sous la forme explicite suivante :

$$\begin{aligned}
 U_d = & \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left\{ A_{11} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} \right]^2 + 2A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + 2 \left(A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \right. \\
 & A_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 - 2B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial W_0^2}{\partial y^2} - 2B_{16} \left[\frac{\partial^2 W_0}{\partial x} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \right] - \\
 & 2B_{26} \left[\frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \right] - 4B_{66} \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + D_{11} \\
 & \left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \right)^2 + 4 \cdot \\
 & \left. \left(D_{16} \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \right\} dx dy
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

4.7.2. Energie cinétique d'un stratifié:

$$E_C = \frac{1}{2} \iiint_V r \left[\left[\frac{\partial U}{\partial t} \right]^2 + \left[\frac{\partial V}{\partial t} \right]^2 + \left[\frac{\partial W}{\partial t} \right]^2 \right] dx dy dz \tag{4.61}$$

La substitution du champ des déplacements dans l'expression (4.61) donne :

$$E_C = \iiint_V r \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial t \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial t \partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz \tag{4.62}$$

En négligeant les dérivées par rapport au temps des relations, puis en intégrant suivant Z l'équation (4.62) se réduit à :

$$E_C = \frac{1}{2} \iiint_V r_0 \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy \tag{4.63}$$

$r_0 \rho_0$: la masse surfacique (kg/m²)

4.7.3. Vibration des plaques orthotropes :

4.7.3.1. Introduction :

L'emploi des matériaux orthotrope a augmenté durant les trois derniers siècles, et particulièrement en génie civil et aérospatiale, le besoin d'utiliser des matériaux composites pour les structures des plaques à intensifié la recherche et de trouver des solutions simples pour les vibrations libre qui prédire exactement les fréquences des plaques orthotropes. La méthode d'élément fini a été appliquée au vibration libre des plaques en supposant un model avec déplacement qui satisfait les critères de convergences. Ce model mènes à calculer les valeurs proche dans un sens numérique, les résultats de l'application de cette technique peut être obtenu seulement supposition un grand nombre d'éléments pour désigner (un model plan), il est toujours préféré d'avoir une idée concernant la période, la structure du plaque avant de faire l'estimation des quantité maximums comme les charges ou les efforts qui peut être développé quand la plaque est exposé à des charges extrêmes.

L'étude de la vibration libre des plaques orthotrope n'est plus un nouveau sujet. Warburton [1] présente une série de solutions complètes et détaillée pour les plaques rectangulaires dernièrement un revue complet de la vibration des plaques est présenté . Bert (27] a dérivé des expressions approximatives pour des fréquences fondamentales des plaques orthotrope avec une épaisseur constante et une forme arbitraire et conditions aux limites. Leissa [2] à présenté un excellent revue littérature concernant la vibration des plaques et elle a montrée le besoin d'un travail systématique que les paramètres de la fréquence naturelles des plaques rectangulaires orthotrope[10].

4.7.3.2. Equation du mouvement :

$$\left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \right) dx dy = \frac{hg}{g} dx dy \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (4.64)$$

Où :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{g}{hg} \left[D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 W}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{11} + D_{16}) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{16} \frac{\partial^4 W}{\partial x \partial y^3} + 4D_{22} \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right] = 0 \quad (4.65)$$

Pour une plaque orthotrope on obtient :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{g}{hg} \left(D_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) = 0 \quad (4.66)$$

On introduit l'opérateur L (pour la simplicité)

$$L = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (4.67)$$

L'équation (4.66) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{g}{hg} LW = 0 \quad (4.68)$$

La solution de cette équation est représentée sous la forme d'un produit :

$$W = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) W(x, y) \quad (4.69)$$

Avec : $P = 2\pi/T$

T : Période

Substituant (4.69) dans (4.68) on obtient l'équation suivante pour W :

$$LW - \frac{w^2 hg}{g} W = 0 \quad (4.70)$$

On a besoin d'une solution de l'équation (4.70) qui satisfait les conditions aux limites. Cette expression contiendra des constante arbitraires nous obtenons un système des équations homogènes pour un constant inconnu. Ce système a des solutions qui différent à zéro dans le cas quand son déterminant $\Delta(\omega)$ est égal 0, alors l'équation de fréquence :

$$\Delta(\omega) = 0$$

Cette équation aura un nombre infini des solutions qui constitue le spectre de la fréquence pour une plaque donnée. On générale la fréquence la plus basse est appelée la fréquence de la mode fondamentale et toutes les autres fréquences est appelé les fréquences de plus hauts harmonique.

La solution de l'équation (4.68) est la somme de tous les équations de type (4.69).

Les déplacements initiales est donné par[10] :

$$W_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cdot W_{mn} \quad (4.71)$$

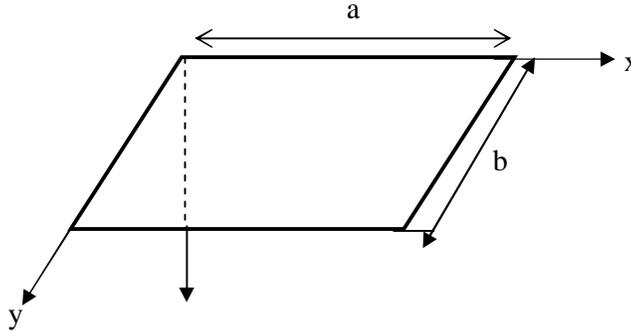
$$V_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \cdot W_{mn} \quad (4.72)$$

Il est possible de déterminer les coefficients α_{mn} , β_{mn} et après et après la détermination des constants A et B présente aucun difficultés en conséquence nous obtenons

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{mn} \cos \omega_{mn} t + (\beta_{mn} / P_{mn}) \sin \omega_{mn} t) W_{mn} \quad (4.73)$$

4.7.3.3. Détermination des fréquences d'une plaque orthotrope rectangulaire :

Une plaque rectangulaire homogène orthotrope est donné par les principes directions d'élasticité ceux qui parallèles à son cotés.



Pour une plaque orthotrope simplement supportés sur les quatre côtés, la fonction W (6) devez satisfaire les conditions :

$$\text{Appuis } x = 0, x = a \quad W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + u_2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \quad (4.83)$$

$$\text{Appuis } y = 0, y = b \quad W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + u_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad (4.84)$$

L'expression suivante satisfera les conditions

$$W_{mn} = \sin m\pi/a \quad \sin n\pi/b \quad (4.85)$$

L'expression (4.85) devrait être une solution de l'équation alors pour une plaque orthotrope est :

$$D_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - \frac{w^2 h g}{g} W = 0 \quad (4.86)$$

On substituant la fonction (4.85) dans (4.86) nous obtenons.

$$D_1 \left(\frac{mp}{a} \right)^4 + 2D_3 \left(\frac{mnp^2}{ab} \right)^2 + D_2 \left(\frac{np}{b} \right)^4 - \frac{w^2 hg}{g} = 0 \quad (4.87)$$

De ceci nous trouvons les fréquences $w = w_{mn}$

$$W_{mn} = \pi^2/b^2 \sqrt{\frac{g}{hg} \sqrt{D_1(m/c)^4 + 2D_3 n^2(m/c) + D_2 n^4}} \quad (4.88)$$

$C = a/b$ le rapport (longueur /largeur) de la plaque

La fréquence fondamentale correspond à $m = n = 1$ s'exprime suivant :

$$W_{11} = \pi^2/a^2 \sqrt{\frac{g}{hg} \sqrt{D_1 + 2D_3 C^2 + D_2 C^4}} \quad (4.89)$$

En particulier pour une plaque carré d'une cote a :

$$W_{mn} = \pi^2/a^2 \sqrt{D_1 m^4 + 2D_3 n^2 m^2 D^2 n^4} \quad (4.90)$$

Pour le premier mode $n = m = 1$

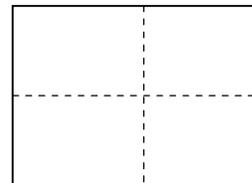
$$W_{11} = \pi^2/a^2 \sqrt{\frac{g}{hg} \sqrt{D_1 + 2D_3 + D_2}} \quad (4.91)$$

Dans le cas d'une plaque isotrope ($D_1 = D_2 = D_3 = D$) où D est le module de flexion de la plaque isotrope :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)}$$

En reportant ces rigidités dans l'expression des fréquences propres (4.90), nous obtenons :

$$W_{mn} = \frac{p^2}{b^2} \sqrt{\frac{gD}{hg} \left[\left(\frac{m}{c} \right)^2 + n^2 \right]} \quad (4.92)$$



W_{11}

W_{21}

W_{22}

4.7.3.4. La méthode approximative pour déterminer les fréquences :

La détermination précise des fréquences implique des difficultés considérables dans la quatrième équation de l'ordre (7) où (13). Du point de vue d'application pratique les méthodes approximatives de détermination de la mode fondamentale pourraient être utiles. Ces méthodes seront analogues à ceux utilisés dans l'étude de vibrations de poutre. Il y a plusieurs méthodes approximatives utilisées pour les vibrations rapides de fréquences. Sans intégrer les équations différentielles. Ces méthodes aussi peuvent être généralisées facilement dans le cas des plaques. Nous considérons maintenant une de ces méthodes, la méthode de Rayleigh Ritz, dans cette méthode c'est nécessaire à considérer un corps élastique qui subit le système avec un degré de liberté à l'état de n'importe temps qui déterminée par un importe temps est sous la forme suivante[10].

$$W = q(t)W(x,y) \tag{4.93}$$

L'étape suivante est écrire l'équation du mouvement de système et on utilisons les équations de Lagrange. Dans ce cas seulement une équation est obtenue (le nombre est correspond au degré de liberté, lequel est :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial T} = 0 \tag{4.94}$$

T : énergie cinétique

V : énergie potentielle

Pour des plaques homogènes orthotrope.

$$T = \frac{q'^2}{2} \frac{hg}{g} \iint W^2 dx dy \tag{4.95}$$

$$V = \frac{q^2}{2} \iint \left[D_1 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_1 u_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + D_2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_k \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \tag{4.96}$$

V : poids spécifique

H : épaisseur

V sera écrit sous la forme

$$V = q^2 \iint V^-(w) dx dy \tag{4.97}$$

L'équation de Lagrange devient comme suit après avoir introduit les expressions dT et V :

$$q'' + \omega^2 q = 0 \quad (4.98)$$

Où ω est la fréquence lequel déterminer de la formule

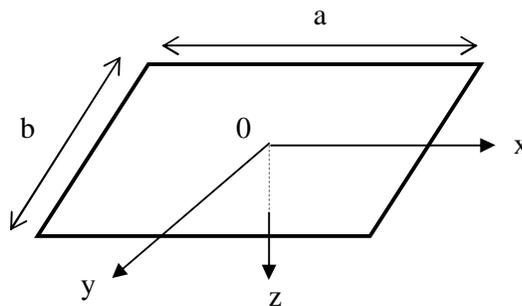
$$\omega^2 = \frac{2g}{h} \frac{\iint V(w) dx dy}{\iint W^2 dx dy} \quad (4.99)$$

L'expression pour le déplacement sera :

$$W = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) w \quad (4.100)$$

4.7.3.5. Détermination de la fréquence pour la première approximation :

- Plaque rectangulaire encadrée



La fonction de forme

$$W_{mn} = \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) \left(y^2 - \frac{b^4}{4} \right) x^n y^n \quad (4.101)$$

Les conditions aux bords

$$x = \pm a/2 \quad : \quad w_{mn} = \frac{\partial W_{mn}}{\partial x} = 0 \quad (4.102)$$

$$y = \pm a/2 \quad : \quad w_{mn} = \frac{\partial W_{mn}}{\partial y} = 0$$

Nous prenons seulement le premier terme de l'addition (29) comme la première approximation.

$$W = A \left(x^4 - \frac{a^2}{4} \right) \cdot \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) \quad (4.103)$$

Après la substitution de W dans (2.7) et après intégration on obtient :

$$W_{11} = 22,45/a^2 \sqrt{g/h} \sqrt{D_1 + 0,571D_3C^2 + D_2C^4} \quad (4.104)$$

Particulièrement pour une plaque carrée orthotrope avec rigidité D on a :

$$W_{11} = \frac{36}{a^2} \sqrt{\frac{gD}{hg}} \quad (4.105)$$

Il est possible d'utiliser une autre expression pour Wmn :

$$W_{mn} = \left[1 - (-1)^m \cos \frac{2mpx}{a} \right] \cdot \left[1 - (-1)^n \cos \frac{2npy}{b} \right] \quad (4.106)$$

Pour le premier mode :

$$W = A \left(1 + \cos \frac{2px}{a} \right) \left(1 + \cos \frac{2py}{b} \right) \quad (4.107)$$

Donc:

$$\omega_{11} = 22,79/a^2 \sqrt{\frac{g}{hg}} \sqrt{D_1 + 0,667D_3C^2 + D_2C^4}$$

Pour une plaque carré isotrope:

$$w_{11} = \frac{37,2}{a^2} \sqrt{\frac{gD}{hg}} \quad (4.108)$$

4.7.4 Analyse dynamique libre des plaques rectangulaire

Méthode qualitative

Notre contribution consiste à étendre cette investigation aux plaques orthotropes allongées (longueur infinie), dont l'analyse est dominée par le comportement poutre, c'est-à-dire à confirmer la tendance à limiter l'analyse dynamique à l'étude de bandes unitaires ($b=1$) de la plaque allongée, considérée suivant le petit sens. Les conditions de fixités de la plaque seront alors ceux des bords allongés.

Les plaques étudiées se distinguent par le type de condition de fixité:

Cas d'appuis homogène

- Plaque rectangulaire simplement appuyée AAAA
- Plaque rectangulaire totalement encastrée EEEE

Dans ces cas quelque soit le rapport des dimensions de la plaque rectangulaire (a/b), on aboutit toujours à des bandes poutres de portée égale à la petite longueur, avec respectivement les conditions de fixité AA pour le premier cas, et EE pour le deuxième cas

Cas d'appuis non homogènes:

- Plaque rectangulaire AEAE
- Plaque rectangulaire AAEE
- Plaque rectangulaire AAAE
- Plaque rectangulaire EEEA

Suivant le rapport des dimensions de la plaque on aboutit pour chaque cas de plaque à deux types de poutres avec des conditions de fixité différentes.

-plaque rectangulaire AEAE:

1. si le rapport $[(lx=a)/(ly=b)] > 1$, on aboutit à la poutre de longueur $l=ly$ avec les conditions de fixités du type EE.
2. si le rapport $[(lx=a)/(ly=b)] < 1$, on aboutit à la poutre de longueur $l=lx$ avec les conditions de fixités du type AA

-plaque rectangulaire AAEE:

3. si le rapport $[(lx=a)/(ly=b)] > 1$, on aboutit à la poutre de longueur $l=ly$ avec les conditions de fixités du type AE.
4. si le rapport $[(lx=a)/(ly=b)] < 1$, on aboutit à la poutre de longueur $l=lx$ avec les conditions de fixités du type AE

pour les deux cas d'hypothèses on aboutit à la même bande de poutre caractérisée par les conditions de fixité du type AE. Pour ce type de plaque on a même type de comportement vibratoire, quelque soit l'orientation de l'allongement de la plaque. ce cas s'identifie à celui du cas homogène $(\omega_{AAEE} = \omega_{AE})_{xx}$ et $(\omega_{AAEE} = \omega_{AE})_{yy}$

-plaque rectangulaire AAAE

5. si le rapport $[(lx=a)/(ly=b)] > 1$, on aboutit à la poutre de longueur $l=ly$ avec les conditions de fixités du type AE.
6. si le rapport $[(lx=a)/(ly=b)] < 1$, on aboutit à la poutre de longueur $l=lx$ avec les conditions de fixités du type AA

On voit que le premier cas de la plaque allongée suivant l'axe (x-x), développe une bande de poutre AE plus rigide que celui du deuxième cas de la plaque allongée suivant l'axe(y-y), qui aboutit à une bande de poutre AA . de ce fait on peut comprendre que la plaque rectangulaire allongée d'après le premier cas ($a/b > 1$), développe un niveau de fréquence supérieure à celui du deuxième cas ($a/b < 1$) ,de ce fait on peut déduire le sens physique pour le comportement vibratoire de la plaque rectangulaire allongée suivant l'un (x-x),ou l'autre (y-y),des deux sens avec $(\omega_{AEAE} = \omega_{EE})_{xx} > (\omega_{AEAE} = \omega_{AA})_{yy}$

7. si le rapport $[(l_x=a)/(l_y=b) > 1]$, on aboutit à la poutre de longueur $l=l_y$ avec les conditions de fixités du type EA.
8. si le rapport $[(l_x=a)/(l_y=b) < 1]$, on aboutit à la poutre de longueur $l=l_x$ avec les conditions de fixités du type EE

On voit que le premier cas de la plaque allongée suivant l'axe (x-x), développe une bande de poutre EA moins rigide que celui du deuxième cas de la plaque allongée suivant l'axe(y-y), qui aboutit à une bande de poutre EE . de ce fait on peut comprendre que la plaque rectangulaire allongée d'après le premier cas ($a/b > 1$), développe un niveau de fréquence supérieure à celui du deuxième cas ($a/b < 1$) ,de ce fait on peut déduire le sens physique pour le comportement vibratoire de la plaque rectangulaire allongée suivant l'un (x-x),ou l'autre (y-y),des deux sens avec $(\omega_{AEAE} = \omega_{EE})_{xx} < (\omega_{AEAE} = \omega_{AA})_{yy}$

Stratégie pour une analyse qualitative et quantitative du comportement dynamique des plaques isotropes et orthotropes

La problématique consiste à un besoin réel de développer une méthode qualitative et quantitative pour permettre aux ingénieurs de conception et chercheur, afin de les aider pendant leurs investigations lors de l'analyse vibratoire des structures complexes, ou lors du travail de pré- dimensionnement de la structure d'étude, ainsi que dans le cadre d'un travail d'expertise de la qualité des réponses dynamiques que l'on obtient aux moyens de codes de calcul sophistiqués. Le risque d'erreur pouvant affecté la qualité des réponses pendant une investigation dynamique peut se situer à différents niveaux:

- identification du modèle idéal (analytique) représentatif de la structure réelle (le niveau des hypothèses injectées dans le modèle analytique, varie suivant la phase de conception allant d'hypothèses simplifier permettant de développer une première impression du comportement pour des fins de pré- dimensionnement, jusqu'à des modèles de plus en plus élaborés nécessitant des logiciels de plus en plus performant, faisant intervenir le recours à des experts hautement qualifiés).
- Pour chaque type de modèle analytique on obtient des modèles mathématiques correspondre plus ou moins sophistiqués:
 - un modèle continu nécessite des équations différentielles partielles
 - un modèle discret nécessite des équations différentielles ordinaires
 - un modèle élément finis
- Les solutions aux problème pour chaque type de modèle adopté et chaque équation correspondante, nécessitent une méthode spécifique: .
(Méthodes exactes, méthodes numériques)

Les méthodes exactes nécessitent beaucoup d'effort de calcul parfois non justifiés par rapport l'objectif, d'autre part les solutions restent limitées et accessible seulement aux expert. Les méthodes numériques cumulent aussi des risques d'erreurs potentielles.

- La confrontation avec l'analyse expérimentale peut engendrer des dispersions par rapport aux réponses obtenues d'après la simulation numérique. Dans ce cas une expertise est nécessaire au niveau de chaque phase d'investigation précédemment d'écrite. L'inconvénient pour l'analyse expérimentale n'est toujours pas accessible, au commun des ingénieurs et cela en plus du coups excessif de l'investigation expérimentale. D'autre part même si les moyens sont disponibles pour effectuer les tests, il est toujours raisonnable de s'assurer suffisamment par les calculs qualitatifs et quantitatifs préalable avant de s'engager dans le voie expérimentale.

Notre travail consiste alors à faire appel à une double stratégie pour l'analyse vibratoire des plaques isotropes et orthotropes. Une analyse qualitative précédemment discutée, d'autre part une méthode approchée qui permet de donner les réponses dynamiques de la structure réelle avec un degré de précision suffisant.

Chapitre 5

*Analyse comparative et discussion
des résultats*

5. Analyse comparative et discussion des résultats :

5.1. Introduction :

Les fréquences propres de vibration d'une structure dépendant des rigidités du matériaux constitutif toutefois la recherche systématique des modes n'est pas aisée car la déformée d'une plaque résulte de la superposition des déformées de différentes modes. Dans tous les cas les vibrations mettent en jeu un échange permanent entre l'énergie cinétique et l'énergie de déformation des éléments de la plaque.

L'énergie cinétique est associée à la vitesse vibratoire et la masse des éléments déformés Alors que la déformation est associée au contraintes dynamiques liées à la rigidité des éléments déformés par le mouvement vibratoire.

Le but est consisté de calculer à investir l'analyse des paramètres fréquentiels naturelles d'une plaque rectangulaire isotrope mince et épaisses) et les plaques orthotropes avec différente fixité sur les quatre bords. Les fréquences circulaires des plaques sont déterminées par la méthode de Rayleigh Ritz, la solution du problème aux valeurs propres est obtenue d'après une déformé de fonction de forme qui vérifier les conditions aux limites de la plaque.

Dans ce chapitre nous étudions l'effet de certains paramètres fondamentaux tels que les conditions aux limites, les dimensions de la plaque, l'épaisseur de la plaque et la nature de matériau. Les différents étapes de calcul des caractéristiques dynamiques d'une plaque travaillant en flexion et la recherche de l'influence de toutes ces derniers paramètres sur la fréquence propre des différents plaques sont illustrées par un programme de calcul (MAPLE 9). les résultats obtenues seront représentés par des courbes de comportement.

5.2 Comportement des plaques isotrope (mince)

5.2.1. Influence de dimensions (longueur, largeur):

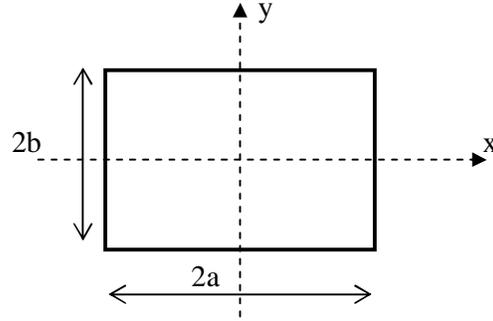
5.2.1.1 Plaque rectangulaire encastré approximation par des polynômes :

Pour étudier le premier mode de vibration on choisit comme fonction de comparaison.

$$W(x, y) = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \quad (5.1)$$

Qui possède bien des dérivées jusqu'à l'ordre $2P = 4$ et satisfait aux conditions.

$$\begin{aligned} W = 0 \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad \text{en } x = \pm a \\ W = 0 \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial y} = 0 \quad \text{en } x = \pm b \end{aligned} \quad (5.2)$$



En substituant (5.1) dans la formule de l'énergie de déformation (1.27) on trouve:

$$U_{\text{int}} = \int_{-b-a}^{+b+a} \int_{-b-a}^{+b+a} \frac{1}{2} D \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2u \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2(1-u) \cdot \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \cdot d_x d_y$$

Et aussi pour l'énergie cinétique de référence (1.32). L'expression (2.24) elle permet de trouver ou calculer le quotient de Rayleigh (la fréquence naturelle)

$$W^2 = \frac{U_{\text{int}}}{T_{\text{max}}} \tag{5.3}$$

On utilisant le programme de calcul Maple 9 pour calculer la fréquence ω .

$$\omega^2 = \frac{256/3.5.12/5 D(a/b^2 + b/a^3 + 4/7.1/a.b)}{(256/315)^2 r h a b} = 31.5 D \frac{a^4 + b^4 + 4/7 a^2 b^2}{r h a^4 b^4}$$

$$W = \sqrt{\frac{D}{r h}} (5.61)^2 \sqrt{\frac{1}{b^4} + \frac{1}{a^4} + \frac{0.571}{a^2 b^2}} \tag{5.4}$$

Le paramètre fréquentiel $\lambda_{EEEE} = (5.61)^2 \sqrt{\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{0.571}{a^2 b^2}} = a^2 w \sqrt{\frac{r h}{D}}$ (5.5)

Pour une plaque carrée de coté 2c, on trouve

$$\omega^2 = 1296 D/mc^4 \quad / m = r h$$

$$w = \frac{36}{c^2} \sqrt{\frac{D}{r h}}$$

a/b	0.4	0.66	1	1.5	2.5
I_{EEEE}	33.68	37.74	50.46	85.30	207.73

Tableau 5.1 Paramètre fréquentiel de la plaque EEEE

5.2.1.2 Plaque rectangulaire simplement appuyée :

La fonction de forme :

$$W(x,y) = \sin\left(\frac{px}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{py}{b}\right) \quad (5.6)$$

Les conditions aux limites

$$W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + u \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } x = \pm a \quad (5.7)$$

$$W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + u \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } x = \pm b$$

La détermination des fréquences propres est obtenue par la substitution de la fonction de forme (5.6) qui satisfait les conditions aux limites(5.7) de la plaque isotrope AAAA dans les expressions de l'énergie de déformation et l'énergie cinétique

$$U_{\max} = \frac{D}{2} \int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-u) \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right] dx dy \quad (5.8)$$

$$T_{\max} = \frac{W^2}{2} \int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} g(x, y) W^2(x, y) dx dy \quad (5.9)$$

$$W^2 = \frac{U_{\max}}{T_{\max}} = \frac{2U_{\max}}{\int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} g(x, y) w^2 dx dy}$$

(5.10)

$$w^2 = \frac{p^4 D}{rh} \frac{[b^4 + a^4 + 2a^2 b^2]}{a^4 b^4} \quad (5.11)$$

$$w = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{rh} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} = \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{D}{rh} \left[p^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) \right]} \quad (5.12)$$

Le paramètre fréquentiel

$$I_{AAAA} = p^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) \quad (5.13)$$

$$I_{AAAA} = wa^2 \sqrt{\frac{rh}{D}} \quad (5.14)$$

a/b	1	1,5	2	2,5	3
$\omega a^2 \sqrt{\frac{rh}{D}}$	19,74	32,07	49,34	71,55	98,69

a/b	1	1/1.5	1/2	1/2.5	1/3
$\omega b^2 \sqrt{\frac{rh}{D}}$	19,74	14,25	12,33	11,44	10,96

Tableau5.2 : le paramètre fréquentiel pour la plaque AAAA

Nous considérons une plaque rectangulaire (a×b), et nous déterminons la variation de la fréquence naturelle pour le premier mode en fonction de dimensions de la plaque (le rapport longueur/largeur).

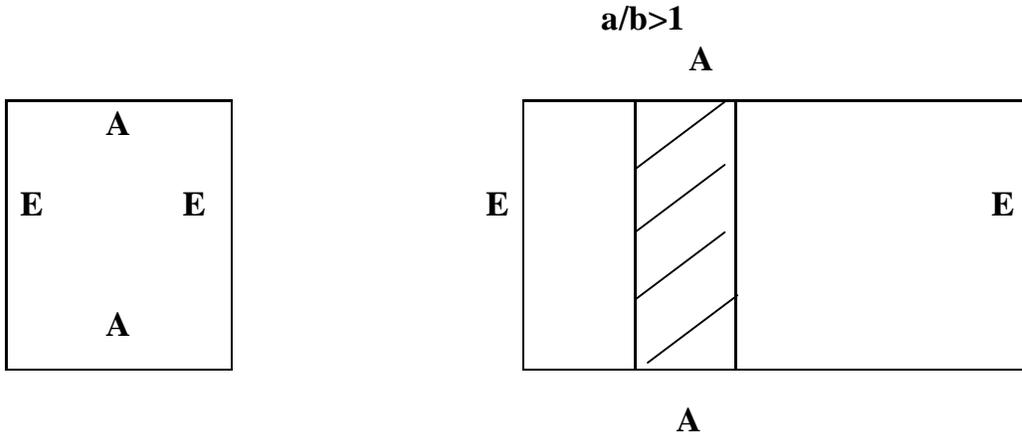
Les figures 5.1 et 5.2 représentent la variation des fréquences naturelles fondamentales en fonction du rapport (a/b) dans les deux cas (a/b>1 et a/b<1) pour deux types de plaque (AAAA et EAEA). Nous observons une influence croissante du rapport des dimensions sur l'accroissement des courbes pour les deux cas de fixités .Les fréquences sont plus importantes dans le cas ou le rapport (a/b>1)

La figure 5.3 présente la double influence du rapport des dimensions (a/b) et l'influence des conditions aux limites qui est observée en comparant dans le sens verticale la dispersion des deux courbes.

La figure 5.4 montre l'évolution de paramètre fréquentiel ou la fréquence fondamentale d'une plaque encastree sur les quatre cotes (EEEE) en fonction du rapport de dimensions(a/b).la courbe supérieure présente le paramètre fréquentiel d'après la méthode approchée et en utilisant l'équation 5.5.

Discussion

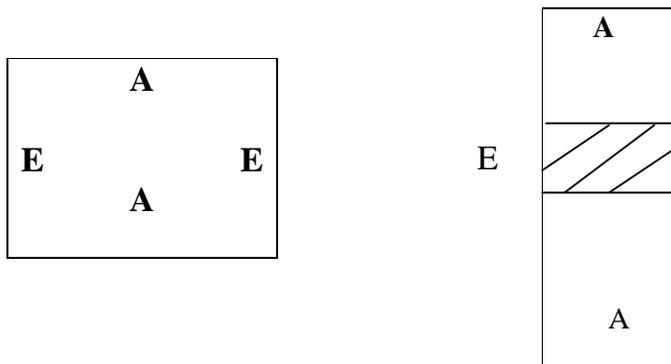
On considère une plaque isotrope du type **AEAE** (on trouve dans le sens antihoraire) on fait l'analyse dynamique libre de ce plaque suivant deux hypothèses : 1° hypothèse on suppose que l'allongement de la plaque (a/b) va dans le sens de la dimensions ($lx=a$) ,c'est-à-dire que ($a/b > 1$) .



La plaque évolue donc vers un comportement d'une poutre ($ly=b$) de type **AA**, car le petit sens se développe au fur et a mesure vers le cote $ly=b$.

2°Hypothèse : on suppose l'inverse de premier cas c'est-à-dire que l'allongement de la plaque va dans le sens de la dimension $ly=b$, nous avons donc ($b/a > 1$) la plaque dans ce cas évolue vers un comportement d'une poutre $lx=a$ du type **EE**, car le petit sens se développe au fur et a mesure.

Alors la discussion de la figure 5.2 montre que la courbe représentative du paramètre fréquentiel pour les deux cas d'hypothèses évoluent en demi parabole dans le sens décroissant au fur et a mesure de l'accroissement du rapport des dimensions (a/b ou b/a) l'étude comparative des deux courbes confirme les phénomènes vibratoire connue, c'est-à-dire



le point de convergence entre les deux courbes s'effectue pour le cas du rapport $a/b=1$ c'est-à-dire ou le cas de la plaque carrée ,ce fait est évident car le paramètre fréquentiel est dans le

cas identique pour les deux sens .D'autre part la courbe représentative de la plaque EAEA ($b=ly$) est largement supérieure a celle du cas EAEA ($lx=a$) .pour les points extrêmes ($a/b=3$ ou $b/a=3$) la différence est de 50 % ces deux point extrêmes explique aussi l'évidence de résultat observe,car le point extrême

Supérieure (EAEA avec $b=ly$) s'aligne avec le cas du comportement de la poutre $lx=a$ définie par les conditions de fixités EE qui donne une période inférieure par rapport au cas (EAEA avec le comportement poutre $ly=b$ définie par les conditions de fixités AA

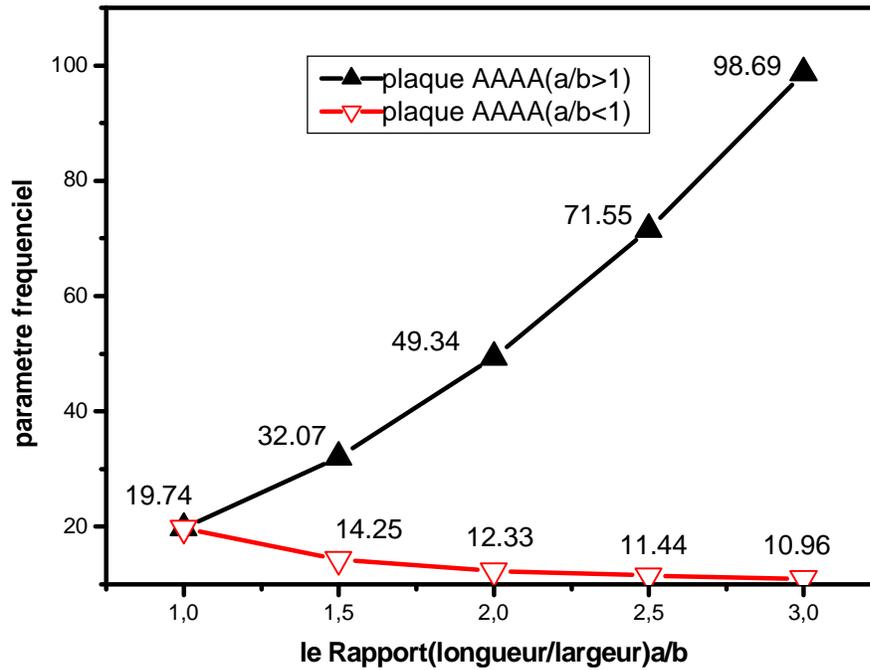


Fig.5.1: Effet de rapport des dimensions (a/b) sur l'évolution du paramètre fréquentiel De la plaque AAAA

Pour vérifier la consistance des résultats obtenus d'après la méthode actuelle (approchée), on utilise la méthode analogique qui associe le comportement plaque au comportement poutre .Les plaques être allongée dans un sens ou un autre ($a/b \gg 1$ ou $b/a \gg 1$).les plaques allongée distingue par leurs comportement vibratoire du type poutre orientée suivant la direction privilégiée du petit sens qui domine le mouvement vibratoire.

Le mouvement vibratoire de la plaque s'identifie donc avec le mouvement de la poutre orientée suivant le petit sens avec les conditions de fixité des deux bords allongés.

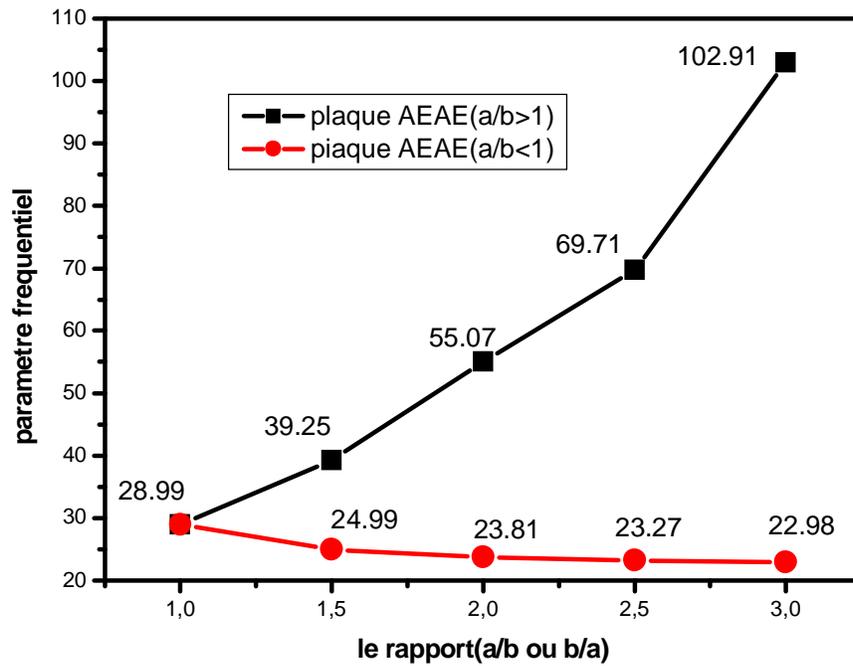


Fig.5.2 *influence de rapport (a/b) sur l'évolution de paramètre fréquentiel de la plaque EAEA dans les deux cas (a>b et b>a)*

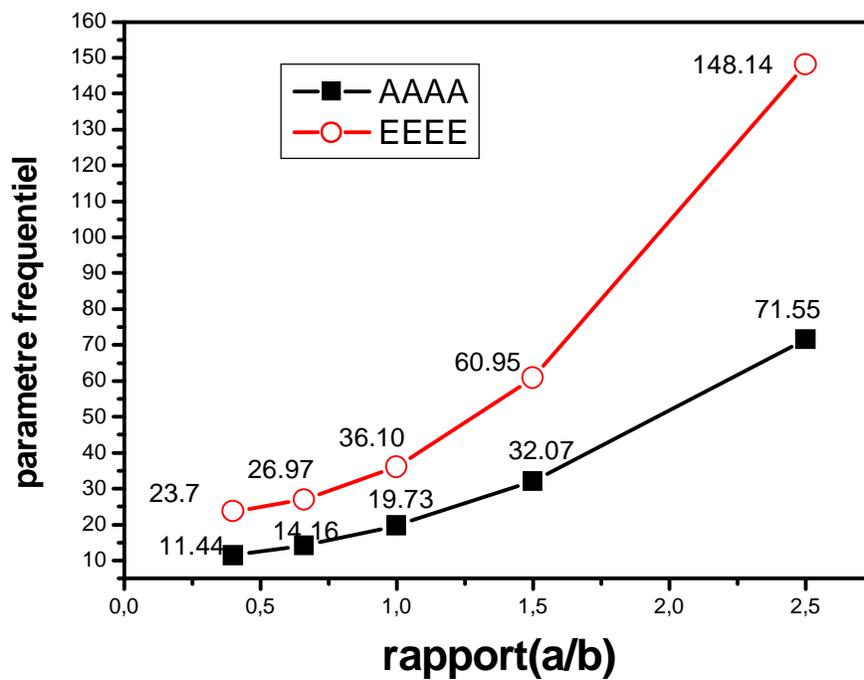


FIG 5.3 *influence de rapport (a/b) sur l'évolution du paramètre fréquentiel des plaques
Simply appuyé (AAAA) et encastre (EEEE)*

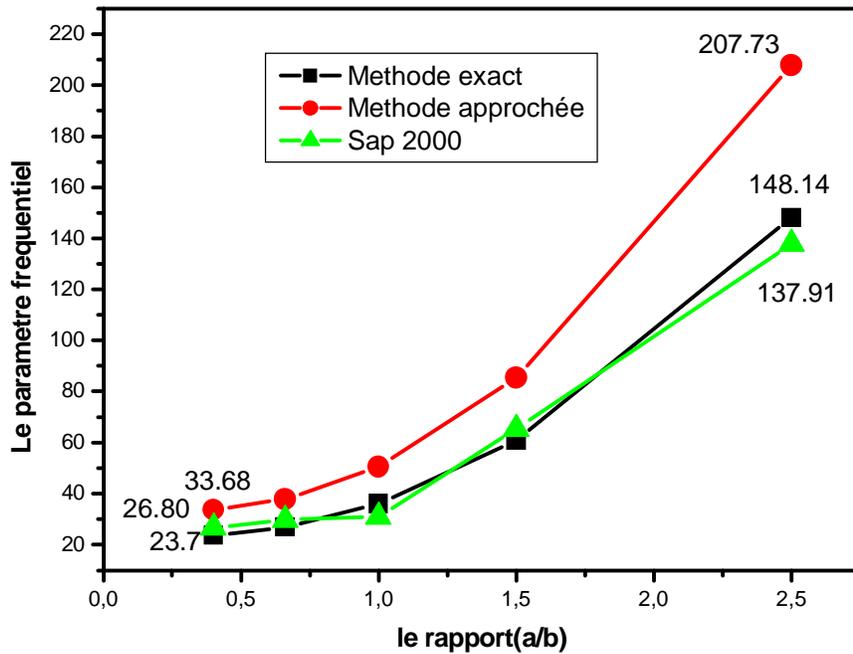


Fig5.4 *Influence de rapport (a/b) sur l'évolution du paramètre fréquentiel de la plaque EEEE
d'après trois méthodes*

Les caractéristiques mécaniques du matériau isotrope qui sont utilisées pour le programme MEF(SAP2000)

ρ (kg/m ³)	7800
Propriétés Mécanique	ISO
Ex (MPa)	1 E+10
Ey (Mpa)	1 E+10
ν_{xy}	0.2
Gxy (MPa)	4.17 E+09

Tableau5.3

caractéristiques mécaniques du matériau isotrope

5.2.2 Influence des conditions aux limites

Forme générale pour le calcul des fréquences pour les plaques isotropes avec différents Conditions aux limites (tableau 5.3)

$$w = I \sqrt{\frac{D}{rh}} \quad (5.15)$$

D: la rigidité de la plaque

h épaisseur de la plaque

ρ : la masse volumique

λ : le paramètre fréquentiel.

$$\text{Avec } I = \sqrt{\left(\frac{A}{a^4} + \frac{B}{b^4} + \frac{C}{a^2b^2} \right)} \quad (5.16)$$

D'après le tableau (5.3) les coefficients A, B, C sont identifiés suivant les conditions aux limites par exemple pour le cas d'une plaque simplement appuyée sur les quatre cotés AAAA on trouve $A=\pi$, $B=\pi$, $C=2\pi$ la fréquence est calculée avec la formule suivante

$$w = p^2 \sqrt{\frac{D}{rh}} \sqrt{\left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{2}{a^2b^2} \right)}$$

Pour une plaque isotrope encastree sur les quatre cotés EEEE

$$I = (4.73)^2 \sqrt{\left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{0.605}{a^2b^2} \right)}$$

$A=4.73$, $B=4.73$, $C=4.73 \times 0.604$

Identification des coefficients A, B, C : cas des plaques rectangulaires avec des conditions aux limites hétérogènes.

Par exemple plaque EEAE

$$I = (4.73)^2 \sqrt{\frac{0.475}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{0.566}{a^2b^2}}$$

$A=4.73 \times 0.475$

B=4.73
C=4.73×0.566

Tableau 5.4: les conditions de fixités.

Les conditions de fixités	le paramètre λ [20]	le paramètre λ [Ritz]
<input type="text"/>	AAAA $I = p^2 \sqrt{\left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{2}{a^2b^2}\right)}$	$p^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$
<input type="text"/>	EEEE $I = (4.730)^2 \sqrt{\left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{0.605}{a^2b^2}\right)}$	$(5.61)^2 \sqrt{\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{0.571}{a^2b^2}}$
<input type="text"/>	EAAE $I = (4.730)^2 \sqrt{\left(\frac{0.475}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{0.566}{a^2b^2}\right)}$	$(5.61)^2 \sqrt{\frac{0.436}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{0.549}{a^2b^2}}$
<input type="text"/>	AEAE $I = (4.730)^2 \sqrt{\left(\frac{1}{a^4} + \frac{0.195}{b^4} + \frac{0.485}{a^2b^2}\right)}$	$(5.61)^2 \sqrt{\frac{1}{a^4} + \frac{0.189}{b^4} + \frac{0.463}{a^2b^2}}$
<input type="text"/>	AAEE $I = (3.927)^2 \sqrt{\left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1.115}{a^2b^2}\right)}$	$(4.257)^2 \sqrt{\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1.107}{a^2b^2}}$
<input type="text"/>	AAEA $I = p^2 \sqrt{\left(\frac{1}{a^4} + \frac{2.441}{b^4} + \frac{2.333}{a^2b^2}\right)}$	$p^2 \sqrt{\frac{1}{a^4} + \frac{2.441}{b^4} + \frac{2.333}{a^2b^2}}$

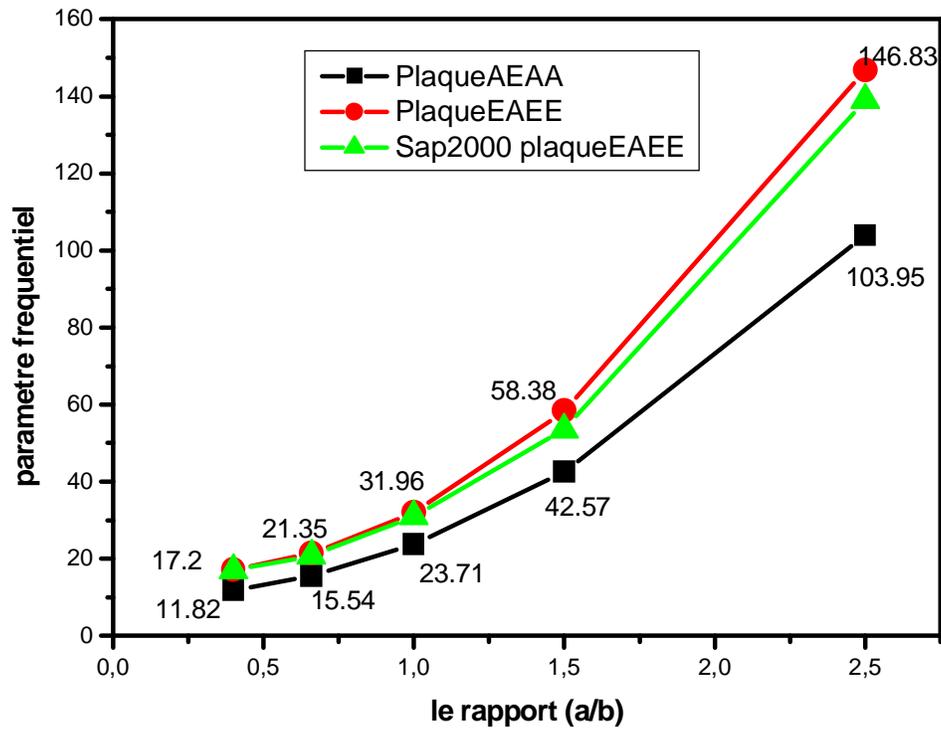


Fig. 5.5 influence du rapport des dimensions (a/b) et des conditions aux limites AEAA et EAEE sur l'évolution de paramètre fréquentiel d'une plaque isotrope

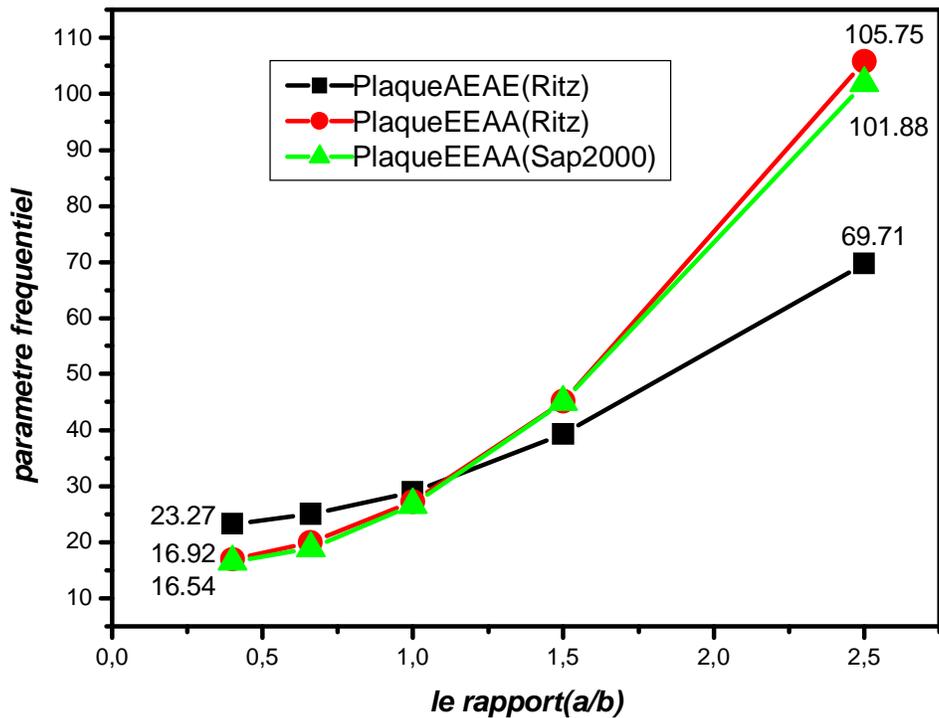


Fig5.6 *influence du rapport (a/b) et les conditions de fixités AEAE et EEAA sur l'évolution du paramètre fréquentiel d'une plaque isotrope*

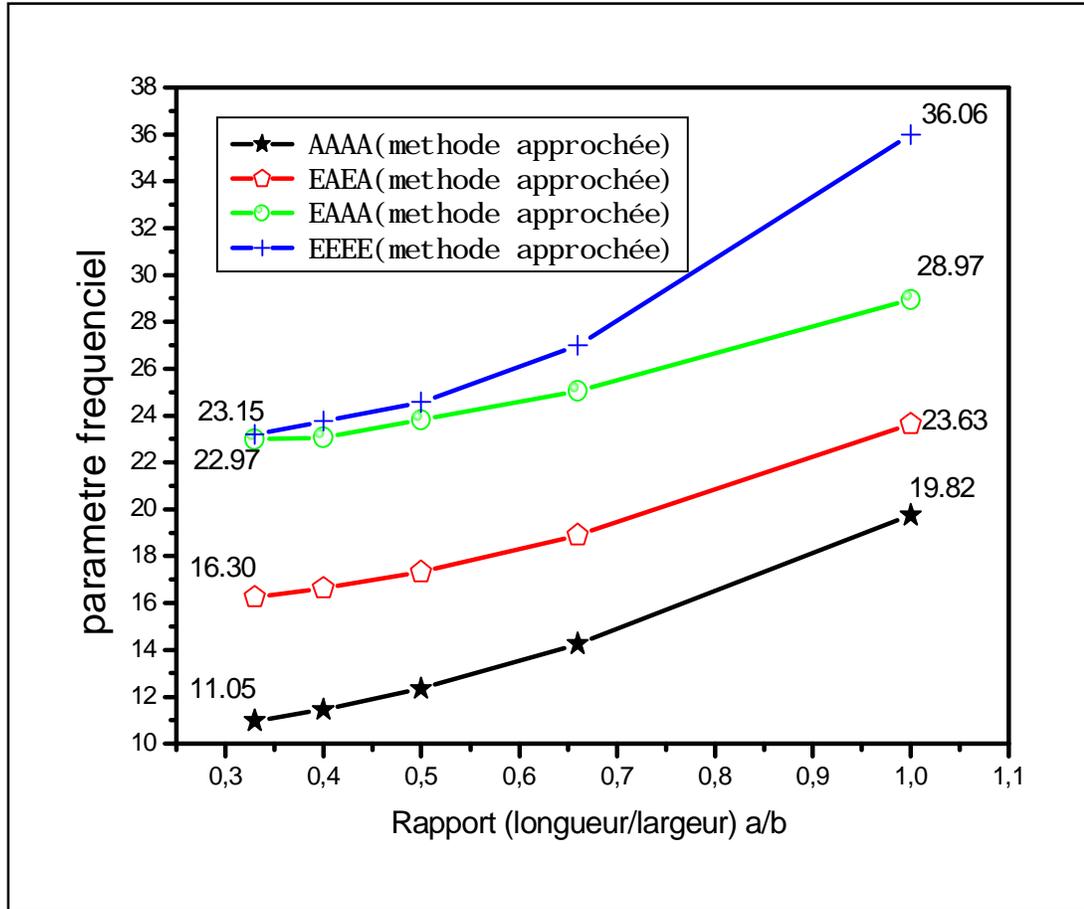


Fig. 5.7 *influence des conditions aux limites sur le paramètre fréquentiel d'une plaque rectangulaire isotrope*

Dans ces graphes on voit l'influence croissante du rapport de dimensions sur l'accroissements des courbes pour les deus cas de fixités AEAA et EAEE (fig. 5.5) ,d'autre part l'influence des conditions aux limites est observée en comparant dans le sens vertical la dispersion des deux courbes .cette constatation est confirmée par l'analyse qualitative car la plaque évolue dans le petit sens du comportement poutre (EAEE→EA) et (AEAA→AA),la rigidité de la poutre EA étant plus grande que celle de la poutre AA explique l'écart supérieure des fréquences ω_{EAEE} Par rapport à ω_{AEAA} .ce résultat est bien en accord avec celui obtenu par MEF (sap2000).

Les mêmes observations sont confirmées pour la figure (5.6) qui représente l'accroissement des courbes pour les deux cas de fixités EAEA et EEAA, on remarque que suivant le rang du rapport ($a/b=1.10$) qui donne un paramètre fréquentiel commun égale sensiblement à 31.61 ce qui correspond à un même type de comportement malgré les conditions de fixités qui sont différents.

La figure 5.7 montre que le paramètre fréquentiel de la plaque EEEE est plus grand que les autres plaques car elle est plus rigide .le paramètre fréquentiel est réduit de 20 0/0

5.2.3. Influence de séquence des modes

Nous considérons une plaque rectangulaire isotrope ($a*b$), a partir de l'équation (4.92) nous déterminons la variation de la fréquence pour le premier mode et les autres modes élevées.

$$W_{11}, W_{12}, W_{21}, W_{22}, W_{31}, W_{32}$$

La figures 5.8 représente l'évolution de la fréquences en fonction de numéro de mode pour une plaque rectangulaire et encastree sur les quatre bords.

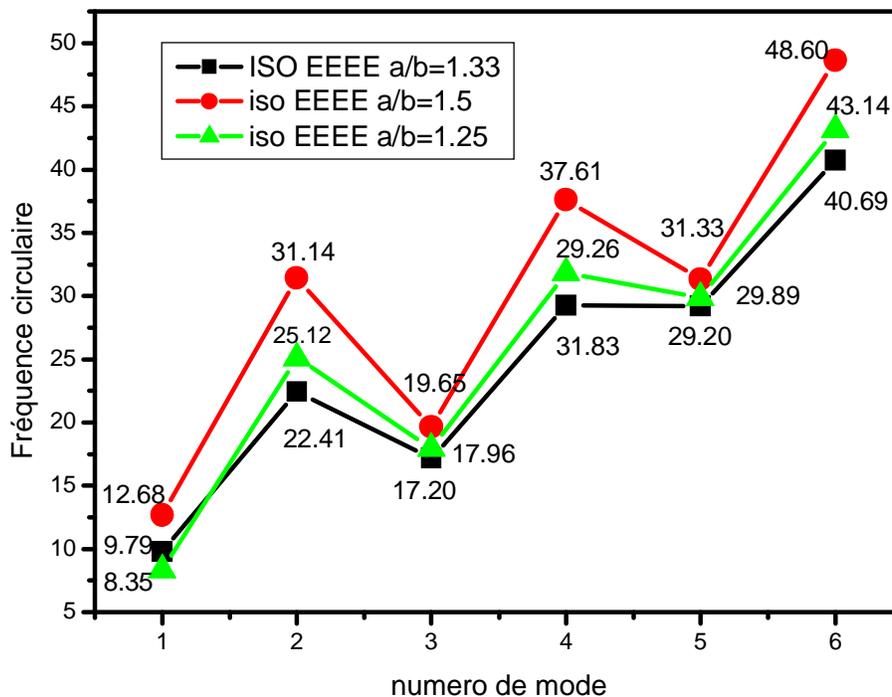


Fig5.8. influence de la fréquence circulaire en fonction du numéro de mode de la plaque Rectangulaire isotrope AAAA

Cette figure montre que la croissance du la fréquence circulaire liée aux numéros de mode

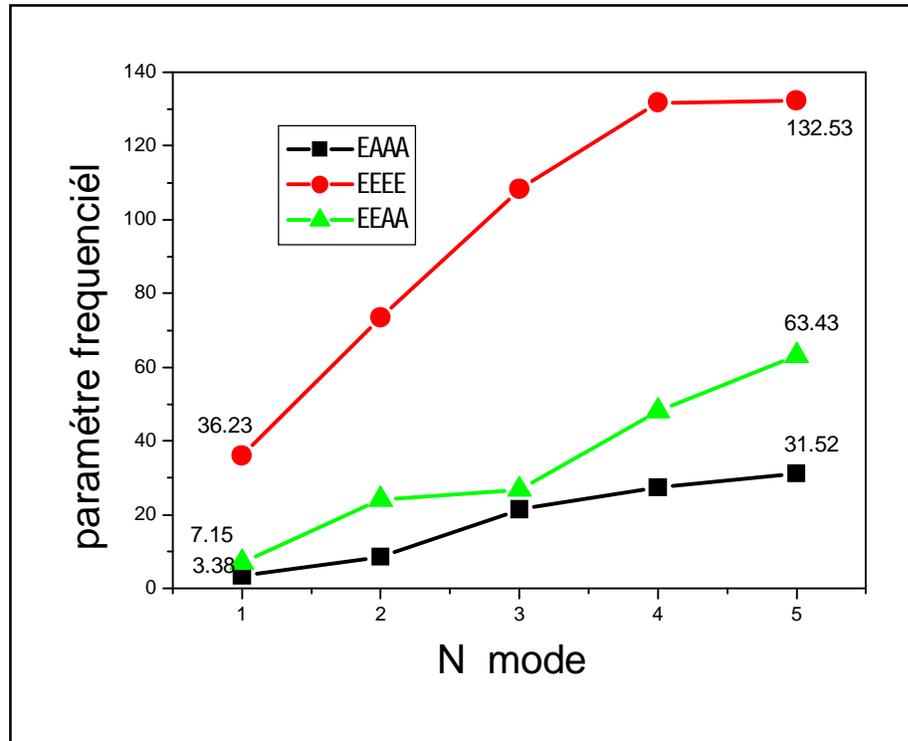


fig. 5.9 .Variation du paramètre fréquentiel d'une plaque rectangulaire isotrope a différentes Fixités dans les premiers modes de vibration

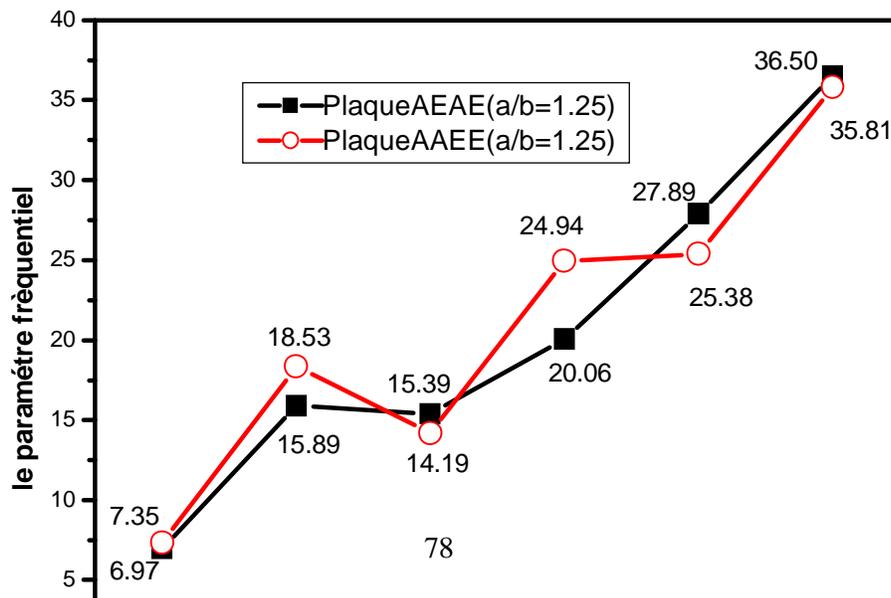


fig5.10 *variation du paramètre fréquentiel en fonction du numéro de mode de deux type de plaque AEAE et AEEE*

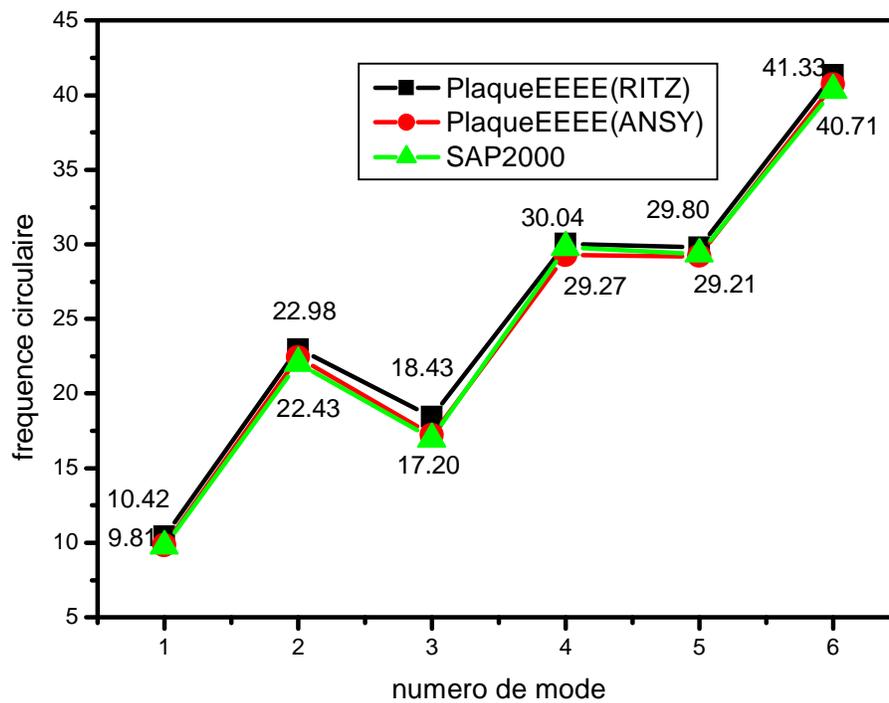


Fig. 5.11 *effet du numéro de mode sur la fréquence circulaire d'une plaque rectangulaire (a/b=1.25)*

Discussion de l'influence de l'effet combiné du rapport des dimensions (a/b), et du numéro du mode N sur le comportement vibratoire libre de la plaque rectangulaire isotrope.

Dans ces graphes on étudie l'évolution du facteur des fréquences naturelles () sous la double l'influence du rapport des dimensions et du numéro du mode.

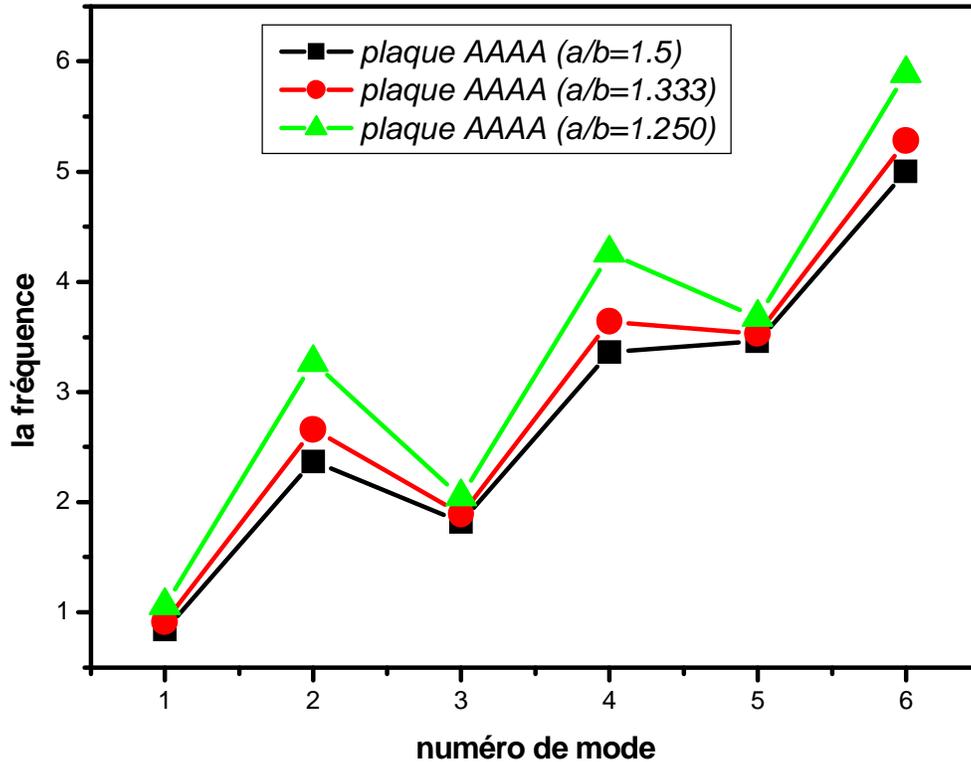


FIG.5.12. Evolution du facteur de fréquence en fonction du numéro modale ($N_1[\omega_{11}]$, $N_2[\omega_{12}]$, $N_3[\omega_{21}]$, $N_4[\omega_{22}]$, $N_5[\omega_{23}]$, $N_6[\omega_{32}]$).

Conclusion

Cette application montre la croissance du terme correctif liée aux numéros des modes, d'autre part on voit l'effet du rapport de dimension qui donne pour la plus grand valeur du rapport (a/b)=1.5 une enveloppe inférieure, ce qui est conforme avec l'analyse qualitative qui explique que pour ce même rapport le comportement de la plaque a tendance à rejoindre celui d'une poutre AA, et perd ainsi le soutien des rigidités du deuxième sens, qui est par contre conservé pour les autres rapports inférieurs notamment pour le plus petit rapport (a/b)=1.25 dont le facteur de fréquence correspond à l'enveloppe supérieure c'est-à-dire au comportement

vibratoire qui se rapproche à celui d'une plaque carrée qui bénéficie de l'apport des rigidités des deux sens. On doit satisfaire alors la condition de cohérence qualitative [$(\omega_{AAAA} \approx \omega_{AA})$, pour $(a/b)=1.5] < [(\omega_{AAAA}$, pour $(a/b)=1.25]$.

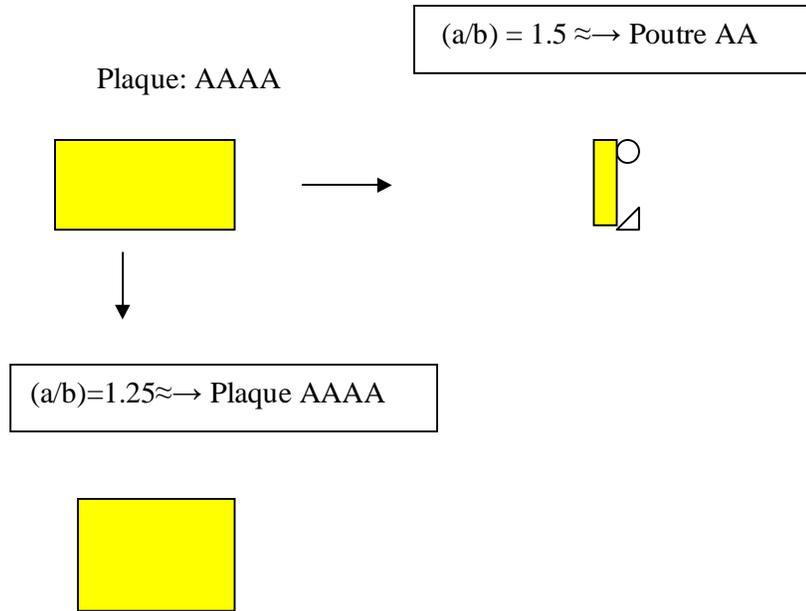


FIG.5.13. Analyse vibratoire qualitative d'une plaques rectangulaires AAAA d'après le concept des plaques allongées.

5.2.4. Influence du matériau (matériau orthotrope):

Les modèles mathématiques ainsi que les solutions correspondantes au cas spécifique d'une plaque simplement appuyée sur ses quatre bords sont rappelées d'après la théorie classique puis quelques méthodes numériques sont considérées pour traiter la solution des autres cas de condition limites. La détermination précise des fréquences en dehors du cas simplement appuyé implique des difficultés pour l'intégration de l'équation différentielle du mouvement dynamique du 4^{ème} ordre. C'est pourquoi le recours aux méthodes approximatives pour les besoins pratique du calcul des fréquences est nécessaire:

Pour cette raison dans ce travail une méthode simplifiée pour évaluer les fréquences naturelles d'une plaque orthotrope est investie. La méthode est basée sur une formule approximative élaborée sous une forme générale, utilisant et puisant les résultats obtenus par les chercheurs qui ont approchés le problème dans les dernières décennies. En se basant sur l'expression générale de la fréquence fondamentale d'une plaque, suggérée par Hearmon [1] et basée sur trois coefficients qui tiennent compte des conditions limites, il est possible d'accéder aux fréquences modales supérieurs, au moyen d'une procédure numérique qui utilise une formulation particulière de la méthode de Rayleigh. Ceci réduit le problème d'évaluation de n'importe quelle fréquence d'une plaque orthotrope sur la base de la fréquence fondamentale d'une plaque équivalente associée à la plaque réelle. Un matériau orthotrope est caractérisé par le fait que les propriétés mécaniques élastiques ont deux plans de symétries. A cause de cette condition seulement quatre constantes élastiques indépendantes notamment E_1 , E_2 , G_{12} , ν_{12} . Le coefficient ν_{12} peut être déterminé utilisant l'équation

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{n_{12}}{n_{21}} \quad (5.17)$$

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12 m}, \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12 m}, \quad D_{12} = \frac{G_{12} h^3}{12} \quad (5.18)$$

$$m = 1 - n_{12} n_{21}, \quad 2H = n_{21} D_1 + n_{12} D_2 + 4 D_{12}$$

En faisant appel aux hypothèses de Love- Kirchhoff, qui néglige l'effet d'effort tranchant et de l'inertie rotatoire, l'équation du mouvement s'obtient

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, y, t) + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}(x, y, t) + D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}(x, y, t) + \quad (5.19)$$

$$r h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, y, t) = 0$$

Considérons une solution de forme générale

$$w = W(x, y)(A \cos w t + B \sin w t) \quad (5.20)$$

Il est possible d'obtenir à partir de l'équation précédente l'expression en fonction de deux variables seulement

$$D_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4}(x, y) + 2H \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2}(x, y) + D_1 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4}(x, y) + \Lambda^4 W = 0 \quad (5.21)$$

$$\text{Avec} \quad \Lambda^2 = w \sqrt{r h} \quad (5.22)$$

L'équation. (5.21) doit être solutionné sous les conditions limites ci-dessous

M=0; R=0 pour coté libre (L)

M=0; W=0 pour coté simple (A)

W=0, $\partial W/\partial x$ (ou $\partial W/\partial y$)=0 pour coté encasté (E)

Exemple de fonction de forme W(x,y)

- Plaque du type AAAA

$$\left\{ \begin{aligned} W_{mn} &= \left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right)^2 \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right)^2 [x^m y^n] \\ W_{mn} &= (1 - [-1]^m \cos \frac{2m\pi x}{a})(1 - [-1]^n \cos \frac{2n\pi y}{b}) \end{aligned} \right. \quad (5.23)$$

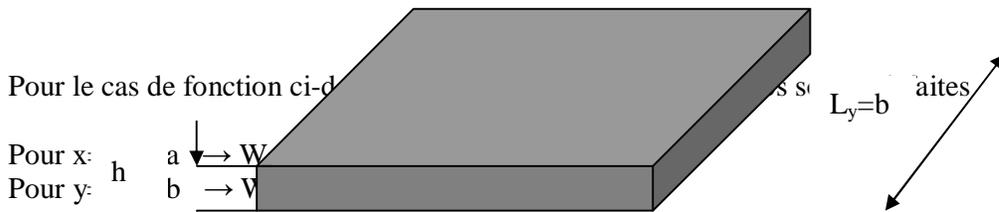
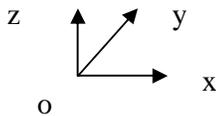
Pour les deux cas de fonction possibles les conditions limites sont satisfaites

$$\begin{aligned} x = \pm L_x/2 &\rightarrow W_{mn} = \partial W_{mn} / \partial x \\ y = \pm L_y/2 &\rightarrow W_{mn} = \partial W_{mn} / \partial y \end{aligned}$$

Le rapport des modes fondamentaux d'après la méthode approchée et pour les deux types de fonction est $([\omega_{11}]_{fct1} / [\omega_{11}]_{fct2}) \approx (36/37.2) \rightarrow \% 3.5$ par rapport à la petite valeur.

- Plaque du type EEEE

$$W_{mn} = \left(\sin \frac{2m\pi x}{a}\right) \left(\sin \frac{2n\pi y}{b}\right) \quad (5.24)$$



5.2.4.1. La première fréquence naturelle des plaques orthotropes:

Pour calculer la fréquence naturelle des plaques rectangulaires orthotropes **Hearmon** [21] propose cette formule

$$w = \sqrt{\frac{1}{rh} \sqrt{\frac{D_1 A}{a^4} + \frac{D_2 B}{b^4} + \frac{HC}{a^2 b^2}}} \quad (5.25)$$

On peut monter l'équivalence avec le cas générale des plaques isotropes avec différent cas de fixités

$$w = l \sqrt{\frac{D}{rh}} \quad (5.26)$$

Il suffit de poser :

$$D_{eq} = \frac{AD_1b^4 + BD_2a^4 + HCa^2b^2}{Ab^4 + Ba^4 + Ca^2b^2} \quad (5.27)$$

Les coefficients A, B, C sont calculés par Hearmon sur la base de la méthode Rayleigh utilisant les fonctions admissibles d'après [22]

Le facteur Deq dépend des conditions de fixités et du numéro de mode, il est donc spécifique. La substitution de (5.27) dans (5.26) donne la formule générale de la fréquence naturelle pour une plaque orthotrope rectangulaire

$$w = l \sqrt{\frac{D_{eq}}{rh}} \quad (5.28)$$

Nous considérons une plaque spécialement orthotrope rectangulaire donc on a

$$H = \sqrt{D_1D_2} \quad (5.29)$$

Pour faire les calculs numériques nous choisissons trois type de matériau orthotrope avec les caractéristiques mécaniques suivantes:

Tableau 5.5 Propriétés Mécanique [20]

Propriétés Mécanique	ISO	ORTHO2	ORTHO2	ORTHO3
Ex (MPa)	1 E+10	1 E+10	1 E+10	1 E +10
Ey (Mpa)	1 E+10	5 E+09	5 E+09	6.67 E+09

ν _{xy}	0.2	0.2	0.24	0.25
G _{xy} (MPa)	4.17 E+09	3.1 E + 09	2. 05 E +09	3.04 E + 09
ρ (kg/m ³)	7800	7800	7800	7800

Les rigidités D_1 , D_2 , H peut être calculés à partir de (5.17), (5.18) et (5.29)

Par exemple pour le matériau orthotrope 1 les rigidités sont:

$$D_1 = 850.340 Nmm, D_2 = 425.170 Nmm, D_{12} = H = 258.167 Nmm \quad (5.30)$$

Les figures (5.12),(5.14) et(5.16) représentent respectivement l'évolution du facteur d'influence naturelle I qui est déterminé d'après la formule suivante:

$$I = \sqrt{\frac{D_1 A}{a^4} + \frac{D_2 B}{b^4} + \frac{HC}{a^2 b^2}} \quad (5.31)$$

Les coefficients A, B, C sont calculés par le tableau (5.3).

- **Influence de l'orthotropie:**

Discussion de l'influence de l'effet combiné du rapport des dimensions (a/b), et des conditions de fixités sur le comportement vibratoire libre de la plaque rectangulaire orthotrope.

Dans ces graphes on étudie l'évolution du facteur des fréquences naturelles (5.31) sous la double l'influence du rapport des dimensions et des conditions de fixités.

Plaques orthotropes soumises aux conditions limites du type :

- Cas : AAAA
- Cas : EEEE

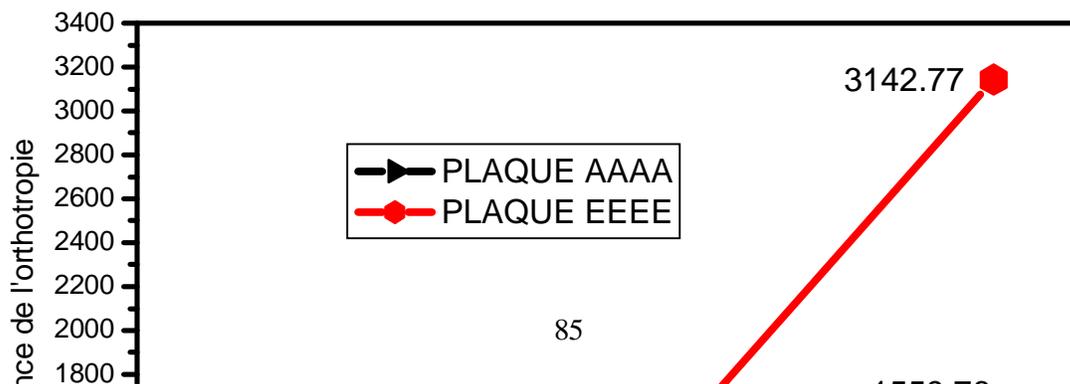


FIG.5.14 *Influence du rapport des dimensions (a/b) et des conditions de fixités AAAA et EEEE sur l'évolution du facteur des fréquences d'une plaque rectangulaire orthotrope.*

Conclusion :

Dans ces graphes on voit l'influence croissante du rapport des dimensions sur l'accroissement des courbes pour les deux cas de **fixités AAAA et EEEE**, d'autre part l'influence **des conditions** limites est observée en comparant dans le **sens vertical** la dispersion des deux courbes. Cette constatation est confirmée par l'analyse qualitative car la plaque encastree est plus rigide par rapport à la plaque simplement appuyée. Le rapport du facteur des fréquences pour les deux limites inférieurs et **supérieur** est **égal à 2**, et de ce fait les bords encastres **EEEE** ont pour effet de doubler le seuil des fréquences.

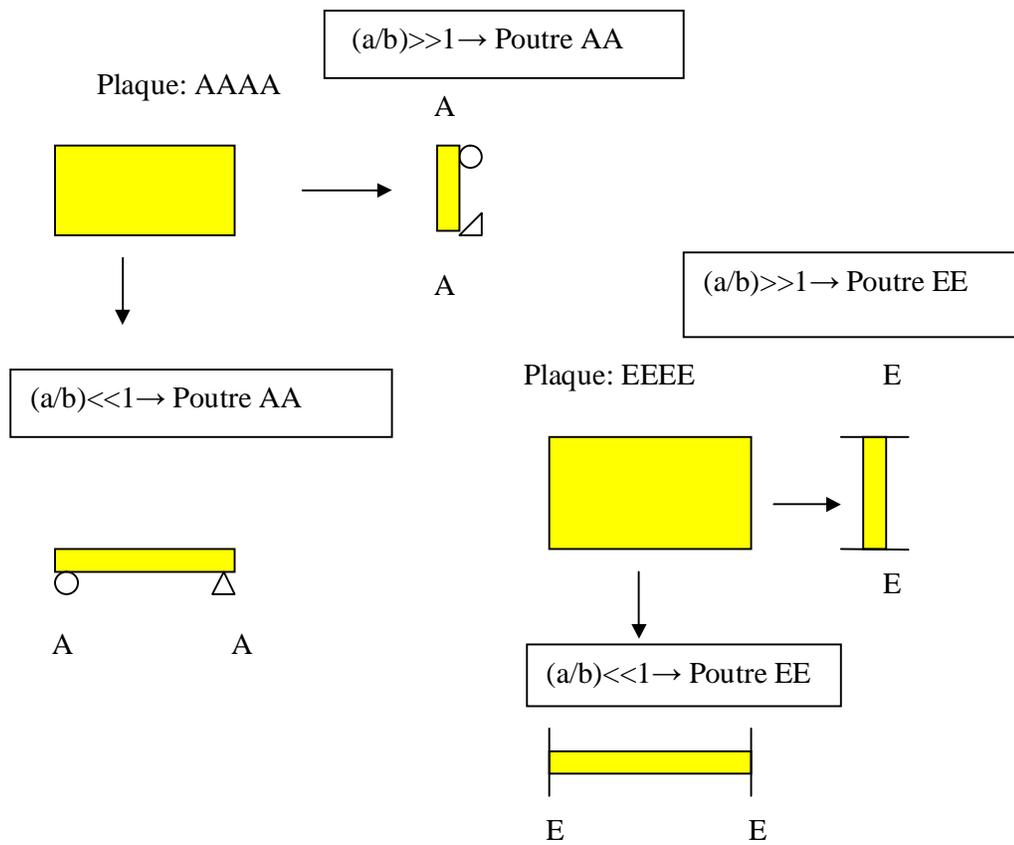


FIG .5.15 Analyse vibratoire qualitative des plaques rectangulaires AAAA et EEEE
D'après le concept des plaques allongées.

Plaques orthotropes soumises aux conditions limites du type :

- Cas : EEEA
- Cas : EAAA

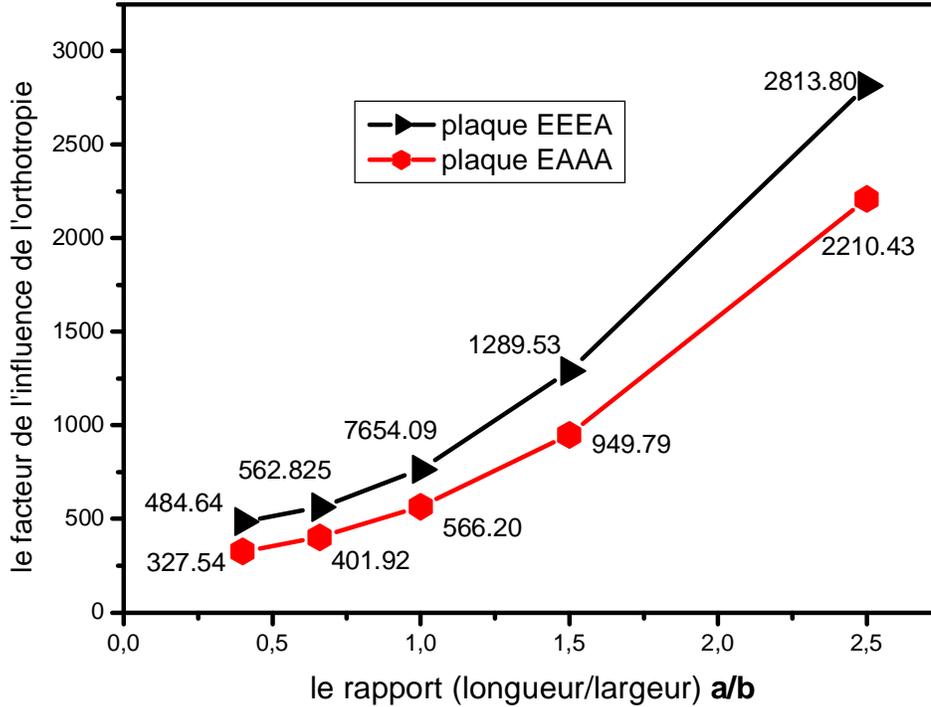


FIG. 5.16 *Influence du rapport des dimensions (a/b) et des conditions de fixités AAAA et EEEA sur l'évolution du facteur des fréquences d'une plaque rectangulaire orthotrope.*

Conclusion :

Dans ces graphes on voit l'influence croissante du rapport des dimensions sur l'accroissement des courbes pour les deux cas de **fixités EEEA et EAAA**, d'autre part l'influence **des conditions** limites est observée en comparant dans le **sens vertical** la dispersion des deux courbes. Cette constatation est confirmée par l'analyse qualitative car la plaque évolue dans le sens du comportement poutre dominé par le petit sens ($l_x=a$) avec les conditions de fixités (EEEA→EA) et (EAAA→AA), la rigidité de la poutre EA étant plus grande que celle de la poutre AA explique l'écart supérieur des fréquences ω_{EEEE} par rapport à ω_{EAAA} ($\omega_{EEEE} > \omega_{EAAA}$). Le rapport du facteur des fréquences pour les deux limites inférieurs et **supérieur** varie respectivement de 1.47 à 1.27, cette diminution de l'écart des fréquences s'explique par

le rapprochement du comportement des deux cas de plaques vers celui des poutres qui réduit l'effet des quatre bords à celui de l'effet d'un même bord appuyé (A) pour les deux cas d'une part, et celui d'un bord encasté et appuyé d'une autre part.

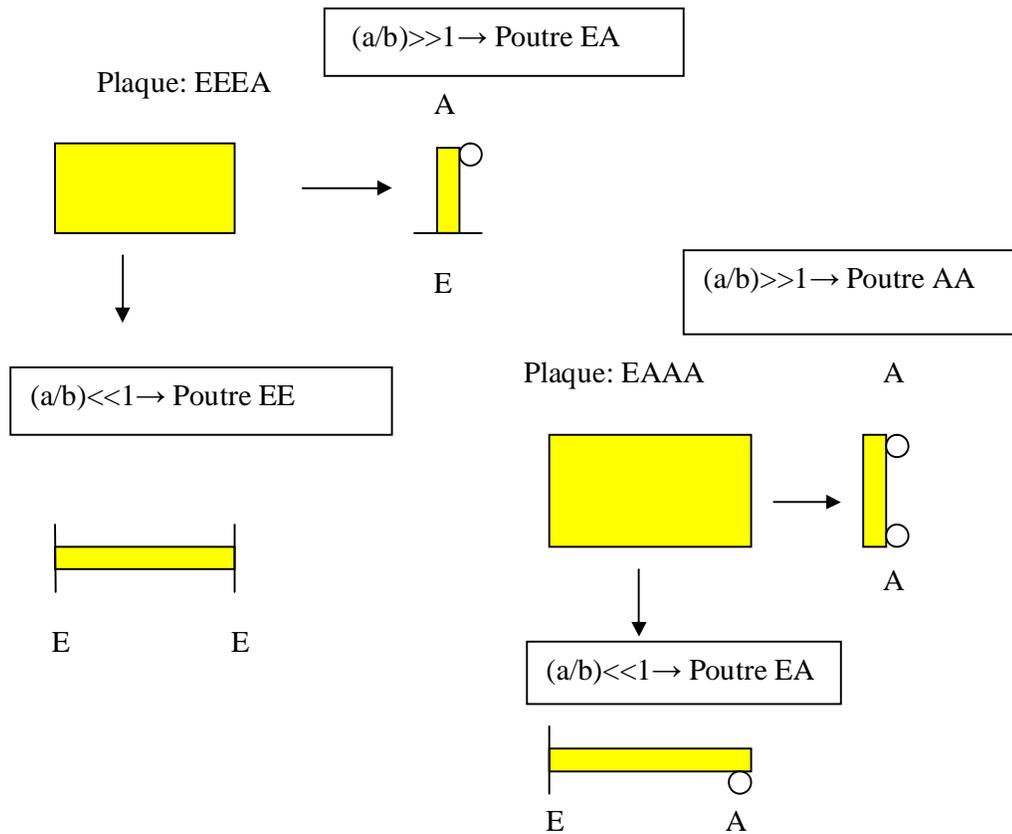


FIG 5.17 Analyse vibratoire qualitative des plaques rectangulaires EEEA et EAAA
D'après le concept des plaques allongées.

Plaques orthotropes soumises aux conditions limites du type :

- Cas : EAEA
- Cas : AAEE

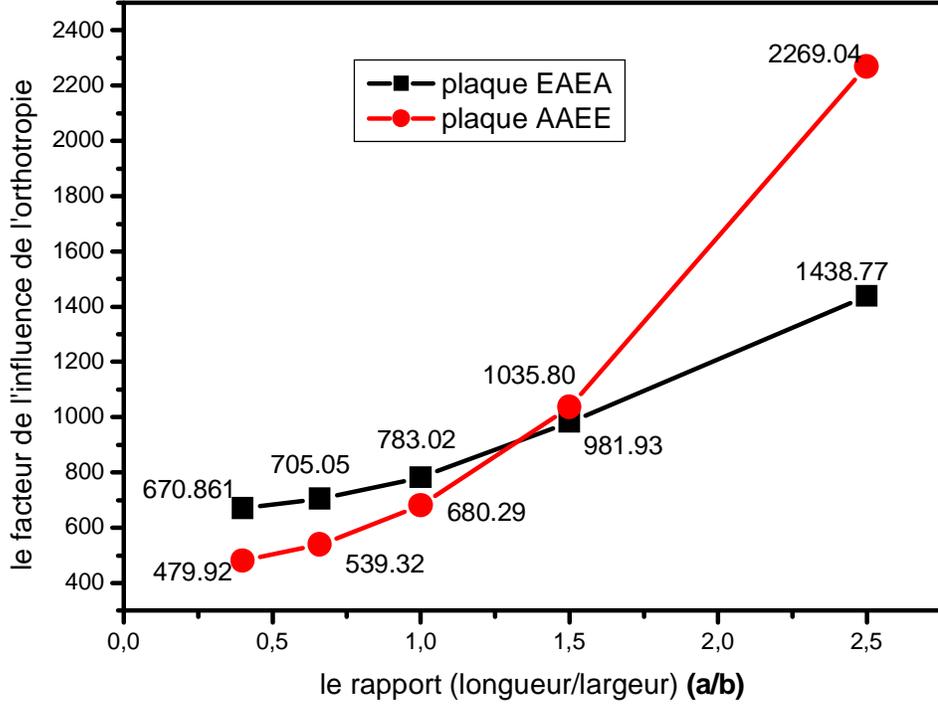


FIG.5.18. *Influence du rapport des dimensions (a/b) et des conditions de fixités AAAA et EEEE sur l'évolution du facteur des fréquences d'une plaque rectangulaire orthotrope.*

Conclusion :

Dans ces graphes on voit l'influence croissante du rapport des dimensions sur l'accroissement des courbes pour les deux cas de fixités **EAEA et AAEE**, d'autre part l'influence des conditions aux limites est observée en comparant dans le **sens vertical** la dispersion des deux courbes. On remarque que suivant le rang du rapport des dimensions (a/b) le niveau des courbes de fréquence est renversé à partir d'un certain rapport commun [(a/b)≈1.4] qui donne un facteur de fréquence commun égale sensiblement à 944,8 ce qui correspond à un même type de comportement malgré les conditions de fixités qui sont différents pour les cas de plaques. Cette constatation intéressante signifie qu'il existe une limite du rapport a/b pour laquelle les deux types de plaques rectangulaires EAEA et AAEE restent insensible à l'effet des conditions limites et se comportent identiquement. D'un autre coté on observe deux rangs pour le rapport (a/b) suivant que l'on va dans le sens des valeurs inférieurs ou supérieurs du rapport [(a/b)≈1.4], en effet d'une part les courbes de fréquences sont respectivement

constituées d'une limite supérieur pour le cas EAEA et d'une limite inférieur pour le cas AAEE, d'autre part une redistribution renversant le niveau des courbes qui donne l'effet inverse c'est-à-dire respectivement au rapport de dimension commun 1.4, on observe une limite inférieur pour le cas EAEA et d'une limite supérieur pour le cas AAEE. Cette constatation est confirmée par l'analyse qualitative car la plaque évolue dans le sens du comportement poutre dominé par le petit sens [($l_x=a$) ou (l_y)] suivant le rapport (a/b). L'analyse comparative des deux cas de plaques EAEA et AAEE pour une évolution croissante du rapport [(a/b)>>1.4] donne un comportement vibratoire qui s'identifie à celui correspondant à deux types de poutres équivalentes avec respectivement les conditions de fixités (EAEA→AA) et (AAEE→EA), cette observation qualitative prouve bien que le niveau des fréquences subit la condition

($\omega_{AAEE} = \omega_{AE} < \omega_{EAEA} = \omega_{AA}$) et confirme de ce fait les donnés du graphes. Pour le cas du rapport[(a/b)<<1.4] on aboutit aux cas des poutres équivalentes avec respectivement les conditions de fixités (EAEA→EE) et (AAEE→AE).

($\omega_{AAEE} = \omega_{AE} < \omega_{EAEA} = \omega_{EE}$) ce qui confirme encore les donnés du graphe.

Cette analyse permet de constater non seulement l'effet du rapport des dimensions de la plaque rectangulaire et de l'effet des conditions d'appuis, mais celui aussi de la distribution de ces mêmes conditions d'appuis. En effet deux types de fixités sont utilisés E et A, cependant répartis différemment, ce qui donne les observations précédemment discutées.

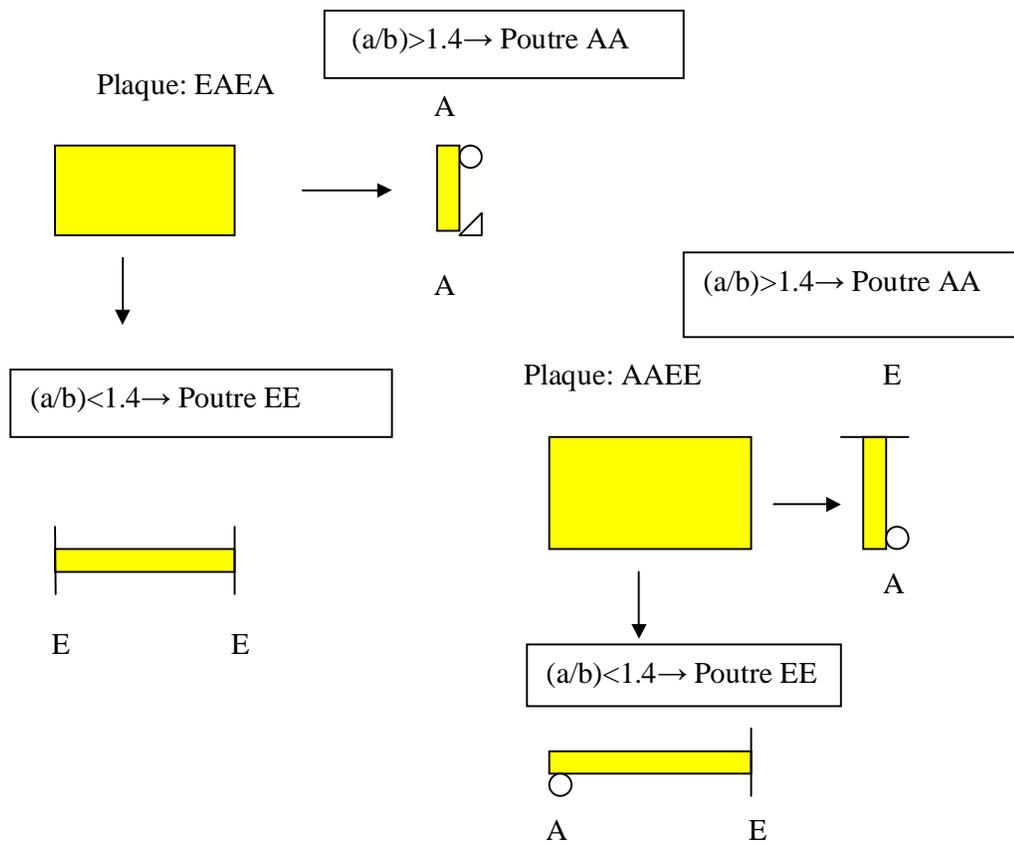


FIG.5.19 Analyse vibratoire qualitative des plaques rectangulaires EAEA et AAEE
D'après le concept des plaques allongées.

5.2.4.2 Calculs approximatifs des fréquences supérieures pour les plaques orthotropes:

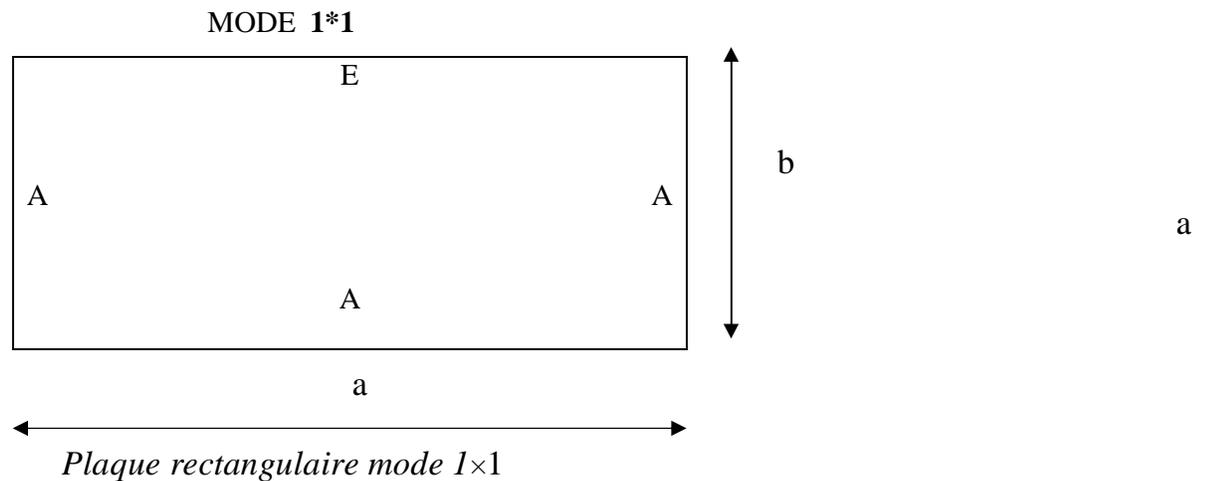
On montre que pour les plaques rectangulaires que:

- Les lignes nodales sont rectilignes et perpendiculaires
- Elles divisent la plaque en parties rectangulaires qui vibrent à la même fréquence.
- Les lignes nodales présentent des déplacements nulles.

Procédure pour le calcul des modes supérieurs

On, prend le cas de la plaque orthotrope du type AAEA et en chercher les fréquences 1×1, 2×1, 1×2, 2×2, 3×1, 3×2.

1) Mode i=1, j=1 (le mode fondamentale)



L'équation de la fréquence naturelle s'écrit:

$$w_{1*1} = \left(\sqrt{\frac{1}{rh}} \right) \sqrt{\left(\frac{D_1 A}{a^4} + \frac{D_2 B}{b^4} + \frac{HC}{a^2 b^2} \right)} \quad (5.32)$$

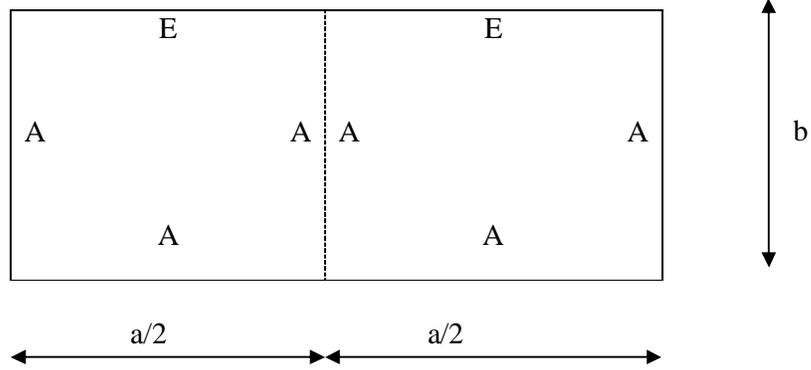
Avec A=1, B=2.441, C=2.333 (pour le cas de conditions aux limites de la plaque AAEA)

$$w_{1*1} = \left(\sqrt{\frac{1}{rh}} \right) \sqrt{\left(\frac{DA_1}{a^4} + \frac{2.441D_2}{b^4} + \frac{2.333H}{a^2 b^2} \right)} \quad (5.33)$$

2) Mode 2 (W_{21}):

Nous avons deux ondes ($i=2$) suivant l'axe OX et une seule onde ($j=1$) suivant l'axe OY

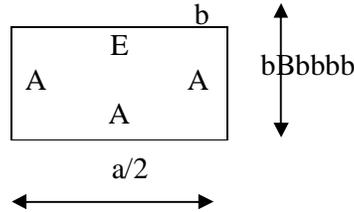
MODE 2*1



Plaque rectangulaire mode 1x2

Le trait pointillé qui divise la plaque en deux c'est la ligne nodale neutre ($w=0$)

On a la symétrie à cause on obtient 2 plaques du type AAEA avec les dimensions respectives pour chaque des conditions aux limites du type AA symétrique.

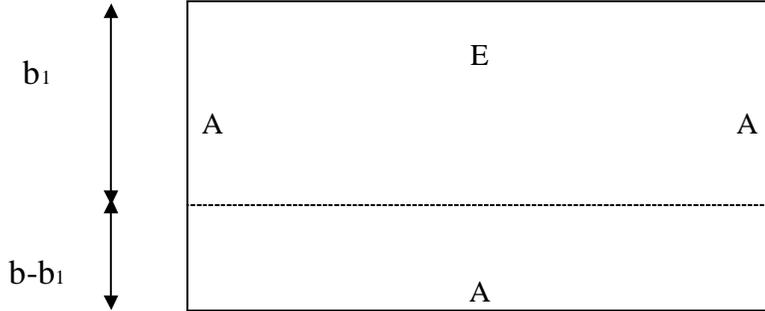


Pour le mode W_{21} , la plaque développe deux sous plaques rectangulaires avec les conditions aux limites AAEA et qui vibrent à la fréquence d'après la formule suivante:

$$w_{2*1} = \left(\sqrt{\frac{1}{rh}} \right) \sqrt{\left(\frac{D_1}{\left(\frac{a}{2}\right)^4} + \frac{2.441D_2}{b^4} + \frac{2.333H}{\left(\frac{a}{2}\right)^2 b^2} \right)} \quad (5.34)$$

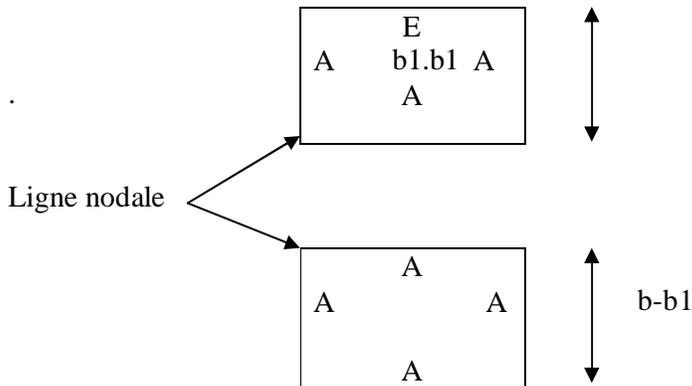
MODE $W_{12} : (i=1, j=2)$

Nous avons une onde (i=1) suivant le sens de l'axe (x) d'autre part suivant le sens de l'axe (y) ,se développe 2 ondes ,ce qui donne une naissance a deux sous plaques ayant différent conditions aux limites .



La position de la ligne modale n'est pas symétrique car les conditions aux limites suivant le sens y ne sont pas homogène c'est-à-dire asymétrique. $b_1 \neq b-b_1$

On calcul la position de la ligne modale en imposant une condition que les deux sous plaques AAEA et AAAA vibrent a la même fréquence.



Cas de la plaque AAEA:

$$w = \left(\sqrt{\frac{1}{rh}} \right) \sqrt{\left(\frac{D_1}{(a)^4} + \frac{2.441D_2}{b_1^4} + \frac{2.333H}{(a)^2 b_1^4} \right)} \quad (5.35)$$

Cas de la plaque AAAA:

$$w = \sqrt{\left(\frac{1}{rh}\right)} \sqrt{\left(\frac{D_1}{a^4} + \frac{D_2}{(b-b_1)^4} + \frac{2H}{a^2(b-b_1)^2}\right)} \quad (5.36)$$

La valeur de b_1 est calculée en imposant que les parties de la plaques vibre a la même fréquence, c'est-à-dire qu'a partir de l'équation (6) du tableau(5.3) on obtient;

$$\frac{D_1}{a^4} + \frac{2.441D_2}{b_1^4} + \frac{2.333H}{a^2b_1^2} = \frac{D_1}{a^4} + \frac{D_2}{(b-b_1)^4} + \frac{2H}{a^2(b-b_1)^2}$$

Et la fréquence s'obtient à partir de l'équation

$$w = \sqrt{\left(\frac{1}{rh}\right)} \sqrt{\left(\frac{D_1}{a^4} + \frac{2.441D_2}{b_1^4} + \frac{2.333H}{a^2b_1^2}\right)} \quad (5.37)$$

Analyse vibratoire d'une plaque rectangulaire avec les cas de fixité:

- Cas N°1: AEAE

Application de la nouvelle méthode sur la base des coefficients A,B,C, tel que obtenue par le tableau pour les valeur du facteur λ .

Plaque orthotrope AEAE

Mode 1*1

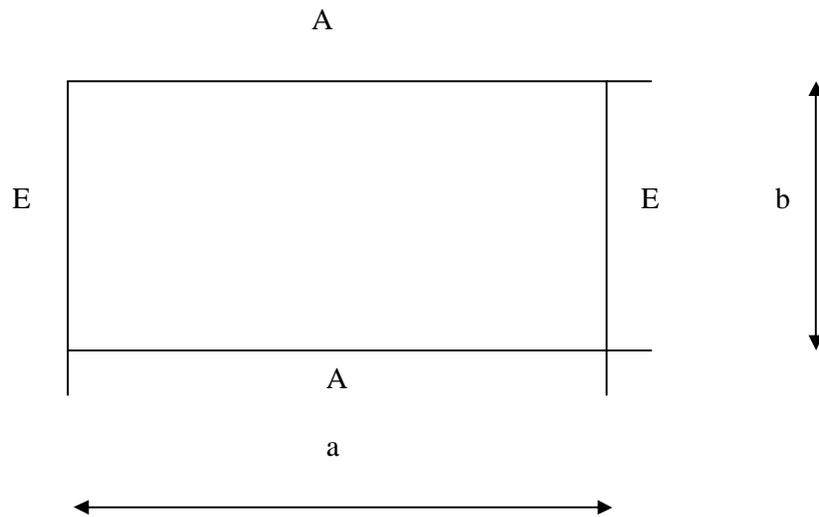


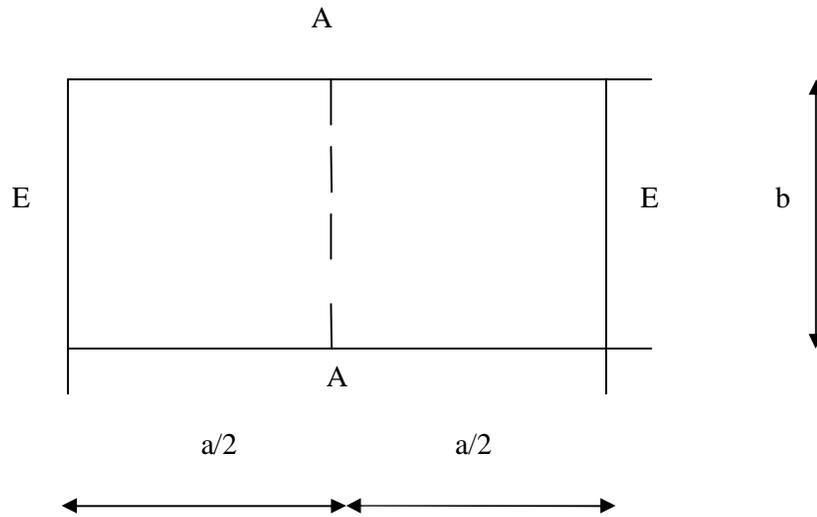
FIG. 1x1 mode pour la condition de fixité AEAE

La fréquence circulaire pour le premier mode 1*1 s'obtient par l'équation

$$w_{1*1} = \left(\sqrt{\frac{1}{r h}} \right) \left[(4.73)^2 \sqrt{\frac{D_1}{a^4} + \frac{0.195 D_2}{b^4} + \frac{0.485 H}{a^2 b^2}} \right] \quad (5.38)$$

Plaque orthotrope AEAE

Mode 2*1



Mode 2x1 pour la condition de fixité AEAE

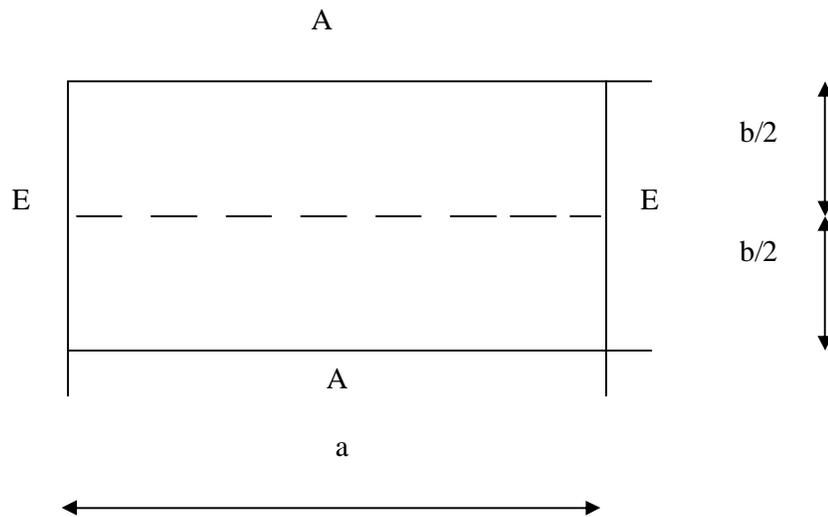
La plaque développe une séquence modale avec deux sous plaques AAAE et AEAA ou la position de la ligne nodale est symétrique à cause de la symétrie des appuis extrêmes EE.

La fréquence circulaire pour le mode 2*1 s'obtient par l'équation (5.39)

$$w_{2*1} = \left(\sqrt{\frac{1}{r h}} \right) \left[(p)^2 \sqrt{\frac{D_1}{\left(\frac{a}{2}\right)^4} + \frac{0.195 D_2}{b^4} + \frac{0.485 H}{\left(\frac{a}{2}\right)^2 b^2}} \right]$$

PLaques orthotropes AEAE

Mode 2*1



Mode 1x2 pour la condition de fixité AEAE

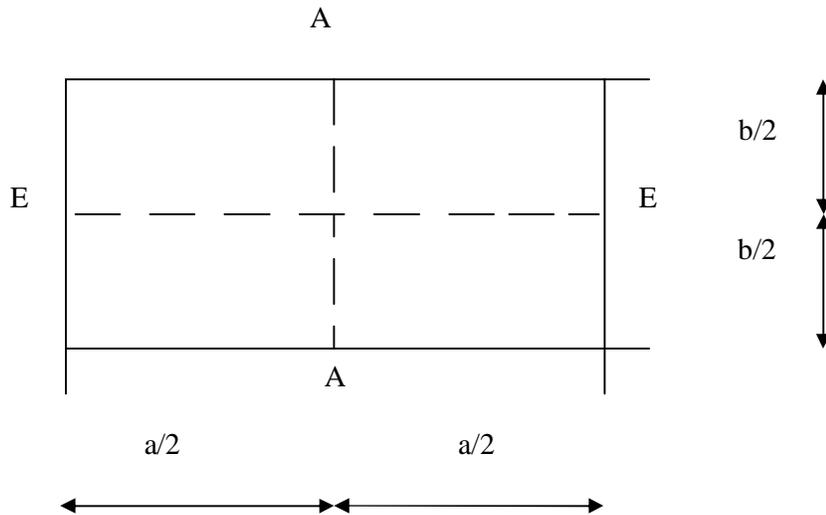
La plaque développe une séquence modale avec deux sous plaques AEAE et AEAE ou la position de la ligne nodale est symétrique à cause de la symétrie des appuis extrêmes AA.

La fréquence circulaire pour le mode 1*2 s'obtient par l'équation

$$w_{1*2} = \left(\sqrt{\frac{1}{r h}} \right) \left[(4.73)^2 \sqrt{\frac{D_1}{(a)^4} + \frac{0.195 D_2}{\left(\frac{b}{2}\right)^4} + \frac{0.485 H}{(a)^2 \left(\frac{b}{2}\right)^2}} \right] \quad (5.40)$$

PLque orthotrope AEAE

Mode 2*2



Mode. 2x2 pour la condition de fixité AEAE

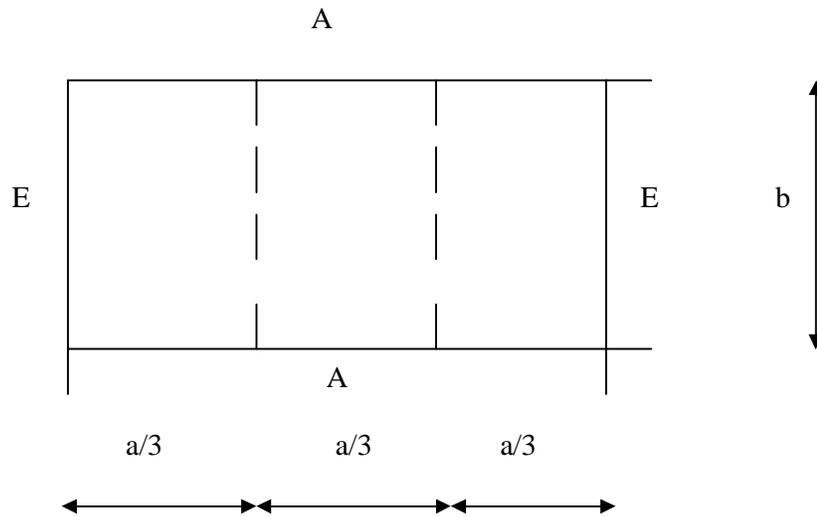
La plaque développe une séquence modale avec quatre sous plaques 2*(AAAE et AEAA), ou les positions des deux lignes nodales conservent leurs symétrie à cause de la symétrie des appuis extrêmes EE et AA.

La fréquence circulaire pour le mode 2*2 s'obtient par l'équation

$$w_{2 \times 2} = \left(\sqrt{\frac{1}{r h}} \right) \left(p \right)^2 \sqrt{\frac{D_1}{\left(\frac{a}{2}\right)^4} + \frac{2 \cdot 441 D_2}{\left(\frac{b}{2}\right)^4} + \frac{2 \cdot 333 H}{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \left(\frac{b}{2}\right)^2}} \quad (5.41)$$

Plaque orthotrope AEAE

Mode 3*1



Mode3x1 pour la condition de fixité AEAE

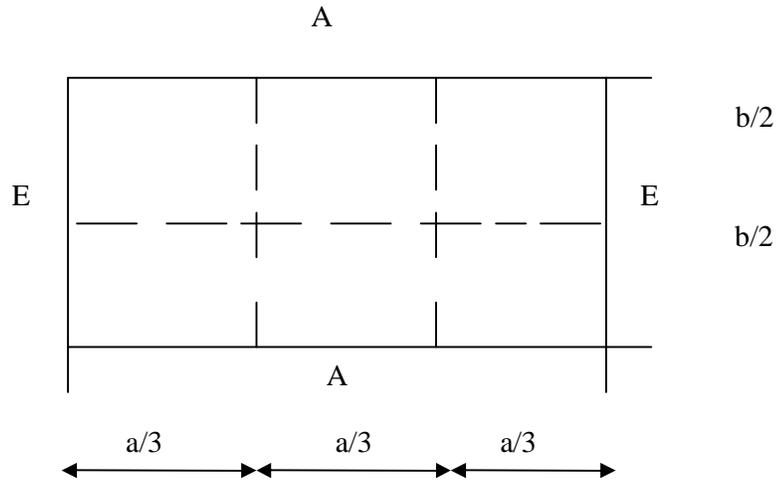
La plaque développe une séquence modale avec trois sous plaques (AAAE, AAAA, AEAA) ou les positions des deux lignes nodales conservent leur symétrie à cause de la symétrie des appuis extrêmes EE.

La fréquence circulaire pour le mode 3*1 s'obtient par l'équation

$$w_{3*1} = \left(\sqrt{\frac{1}{r h}} \right) \left[(p)^2 \sqrt{\frac{D_1}{\left(\frac{a}{3}\right)^4} + \frac{D_2}{(b)^4} + \frac{2 H}{\left(\frac{a}{3}\right)^2 (b)^2}} \right] \quad (5.42)$$

Plaque orthotrope AEAE

Mode 3*2



Mode3x2 pour la condition de fixité AEAE

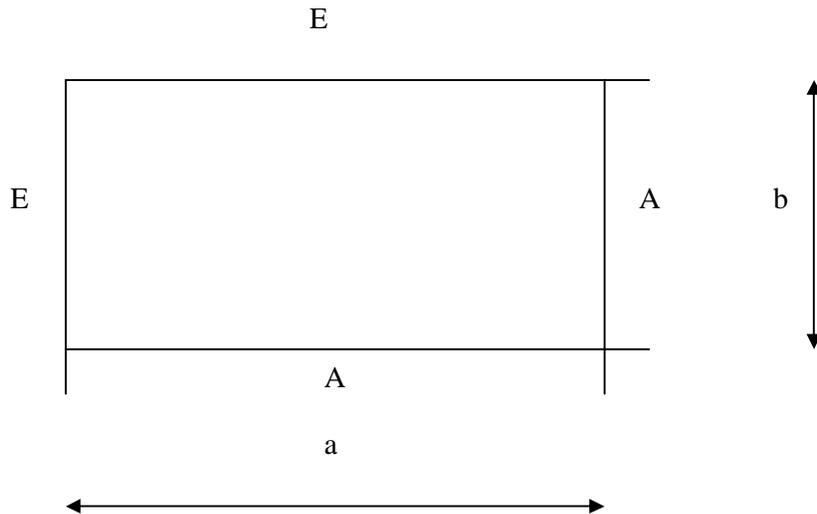
La plaque développe une séquence modale avec six sous plaques 2*(AAAE, AAAA, AEAA) ,ou les positions des deux lignes nodales conservent leurs symétrie à cause de la symétrie des appuis extrêmes EE.

La fréquence circulaire pour le mode 3*1 s'obtient par l'équation

$$w_{3*1} = \left(\sqrt{\frac{1}{r h}} \right) \left(p \right)^2 \sqrt{\frac{D_1}{\left(\frac{a}{3}\right)^4} + \frac{D_2}{\left(\frac{a}{3}\right)^4} + \frac{2 H}{\left(\frac{a}{3}\right)^2 \left(\frac{b}{3}\right)^2}} \quad (5.43)$$

Plaque orthotrope AAEE

Mode 1*1



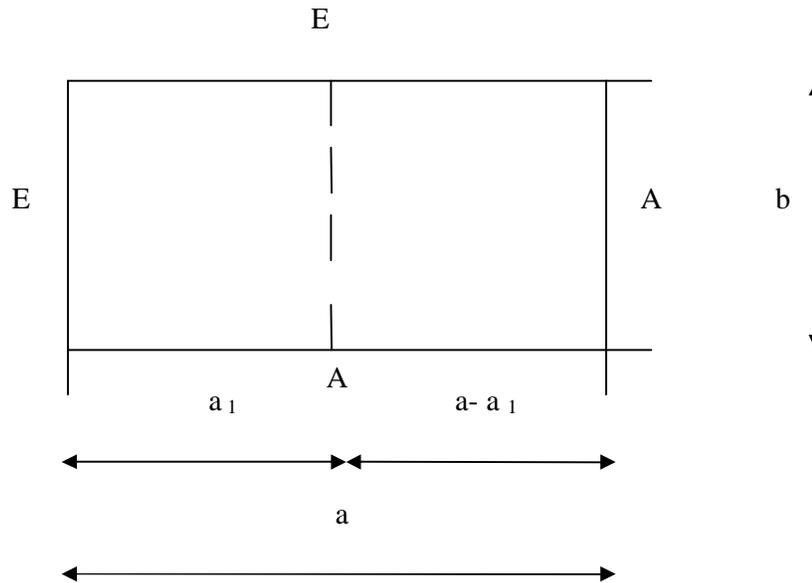
mode 1*1 pour la condition de fixité AAEE

La fréquence circulaire pour le premier mode 1*1 s'obtient par l'équation

$$w_{1*1} = \left(\sqrt{\frac{1}{r h}} \right) \left[(3.927)^2 \sqrt{\frac{D_1}{a^4} + \frac{D_2}{b^4} + \frac{1.115 H}{a^2 b^2}} \right]$$

Plaque orthotrope AAEE

Mode 2*1



mode2*1 pour la condition de fixité AAEE

La plaque développe une séquence modale avec deux sous plaques AAEE&AAEA, La fréquence circulaire pour le mode 2*1 s'obtient par l'une des deux équations:

Sous plaque AAEE

$$w_{2*1} = \left(\sqrt{\frac{1}{r h}} \right) \left[(3.927)^2 \sqrt{\frac{D_1}{(a_1)^4} + \frac{D_2}{b^4} + \frac{1.115 H}{(a_1)^2 b^2}} \right]$$

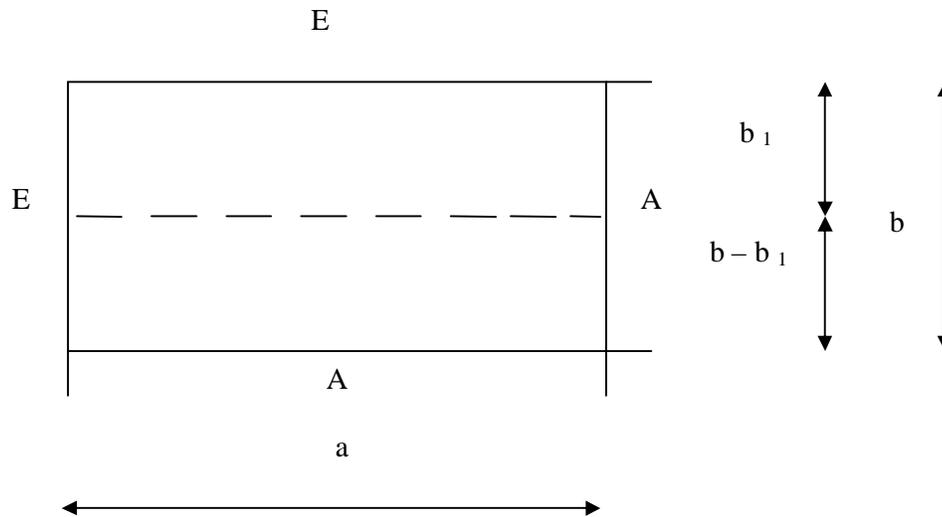
Sous plaque AAEA

$$w_{2*1} = \left(\sqrt{\frac{1}{r h}} \right) \left[(p)^2 \sqrt{\frac{D_1}{(a - a_1)^4} + \frac{2.441 D_2}{b^4} + \frac{2.333 H}{(a - a_1)^2 b^2}} \right]$$

La position de la ligne nodale n'est pas symétrique car les appuis aux bords extrêmes sont dissymétriques du type E-A. La valeur a_1 est calculée en imposant que les deux sous plaques vibrent à la même fréquence $\omega_{2*1(AAEE)} = \omega_{2*1(AAEA)}$.

Plaque orthotrope AAEE

Mode 1*2



mode1*2 pour la condition de fixité AAEE

La plaque développe une séquence modale avec deux sous plaques AAAE&AAEE

La fréquence circulaire pour le mode 1*2 s'obtient par l'une des deux équations:

Sous plaque AAEE

$$w_{1*2} = \left(\sqrt{\frac{1}{r h}} \right) \left[(3.927)^2 \sqrt{\frac{D_1}{a^4} + \frac{D_2}{b_1^4} + \frac{1.115 H}{a^2 b_1^2}} \right]$$

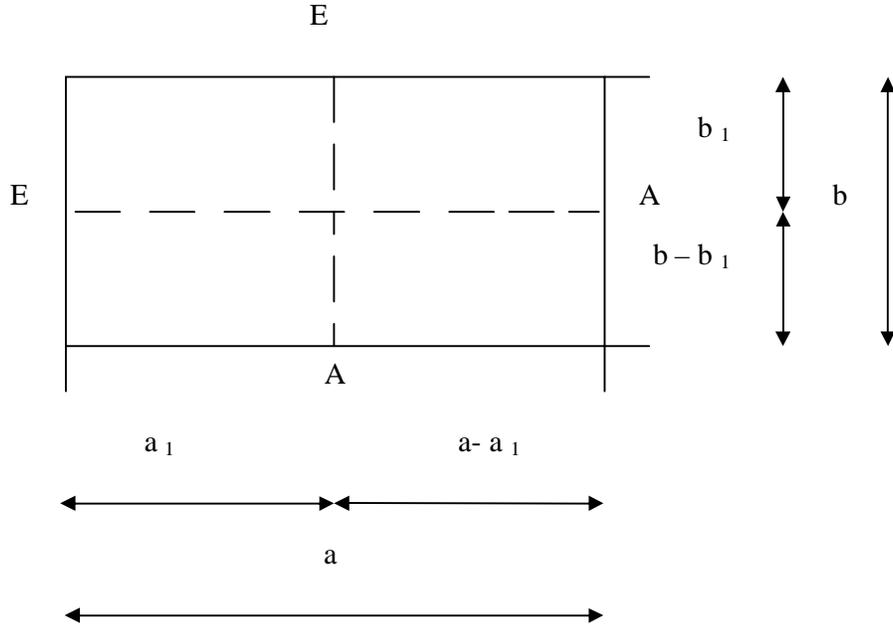
Sous plaque AAAE

$$w_{1*2} = \left(\sqrt{\frac{1}{r h}} \right) \left[(p)^2 \sqrt{\frac{D_1}{(a)^4} + \frac{2.441 D_2}{(b - b_1)^4} + \frac{2.333 H}{(a)^2 (b - b_1)^2}} \right]$$

La position de la ligne nodale n'est pas symétrique car les appuis aux bords extrêmes sont dissymétriques du type A-E. La valeur b₁ est calculée en imposant que les deux sous plaques vibrent à la même fréquence $\omega_{1*2(AAEE)} = \omega_{1*2(AAAE)}$.

Plaque orthotrope AAEE

Mode 2*2



mode2*2 pour la condition de fixité AAEE

La plaque développe une séquence modale avec quatre sous plaques AAAE, AAEE, AAAA & AAEA.

La fréquence circulaire pour le mode 2*2 s'obtient par l'une des 3 équations:

Sous plaque AAEE

$$w_{2*2} = \left(\sqrt{\frac{1}{r h}} \right) \left[(3.927)^2 \sqrt{\frac{D_1}{a_1^4} + \frac{D_2}{b_1^4} + \frac{1.115 H}{a_1^2 b_1^2}} \right]$$

Sous plaque AAEA

$$w_{2*2} = \left(\sqrt{\frac{1}{r h}} \right) \left[(p)^2 \sqrt{\frac{D_1}{(a - a_1)^4} + \frac{2.441 D_2}{(b_1)^4} + \frac{2.333 H}{(a - a_1)^2 (b_1)^2}} \right]$$

Sous plaque AAAA

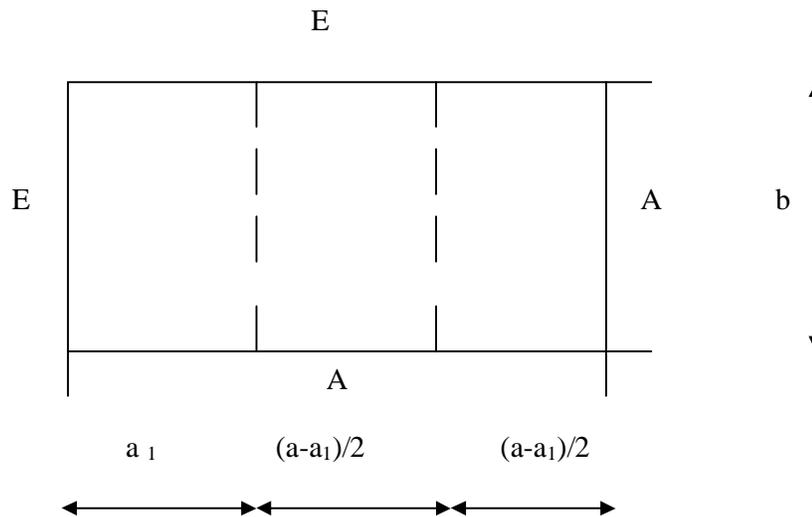
$$w_{2*2} = \left(\sqrt{\frac{1}{r h}} \right) \left[(p)^2 \sqrt{\frac{D_1}{(a - a_1)^4} + \frac{D_2}{(b - b_1)^4} + \frac{2 H}{(a - a_1)^2 (b - b_1)^2}} \right]$$

Les positions des lignes nodales ne sont pas symétriques car les appuis aux bords extrêmes de part et d'autre sont dissymétriques du type E-A&A-E. Les valeurs a_1 & b_1 sont calculées en imposant que les 4 sous plaques vibrent à la même fréquence $\omega_{2*2(AAEE)} = \omega_{2*2(AAEA)}$

$$= \omega_{2*2(AAAA)} = \omega_{2*2(AAAE)}$$

Plaque orthotrope AAEE

Mode 3*1



mode3*1 pour la condition de fixité AAEE

La plaque développe une séquence modale avec trois sous plaques AAEE & 2*(AAEA)

La fréquence circulaire pour le mode 3*1 s'obtient par l'une des deux équations:

Sous plaque AAEE

$$w_{3*1} = \left(\sqrt{\frac{1}{r h}} \right) \left[(3.927)^2 \sqrt{\frac{D_1}{(a_1)^4} + \frac{D_2}{(b)^4} + \frac{1.115 H}{(a_1)^2 (b)^2}} \right]$$

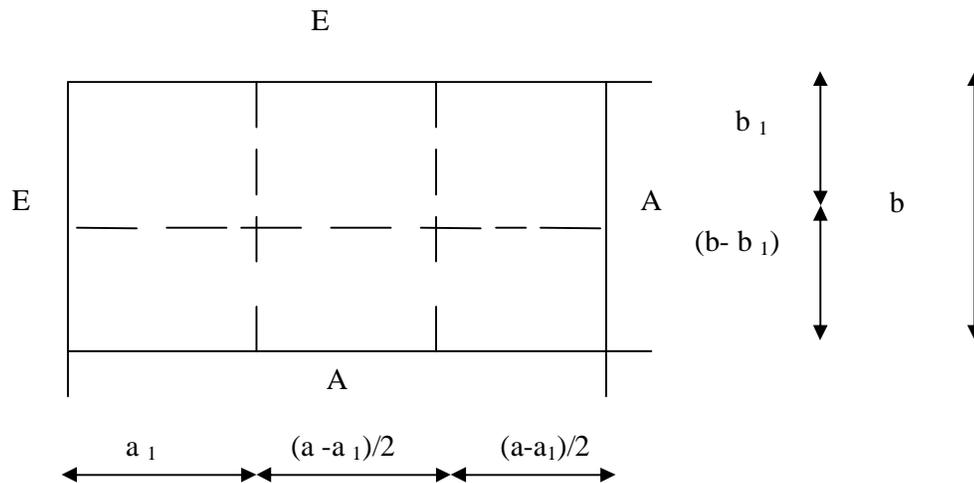
Sous plaque AAEA

$$w_{3*1} = \left(\sqrt{\frac{1}{r h}} \right) \left[(p)^2 \sqrt{\frac{D_1}{\left(\frac{a - a_1}{2}\right)^4} + \frac{2.441 D_2}{(b)^4} + \frac{2.333 H}{\left(\frac{a - a_1}{2}\right)^2 (b)^2}} \right]$$

La position de la ligne nodale n'est pas symétrique car les appuis aux bords extrêmes sont dissymétriques du type E-A. La valeur a_1 est calculée en imposant que les deux sous plaques AAEE&AAEA, vibrent à la même fréquence $\omega_{3*1(AAEE)} = \omega_{3*1(AAEA)}$.

Plaque orthotrope AAEE

Mode 3*1



mode 3*2 pour la condition de fixité AAEE

La plaque développe une séquence modale avec six sous plaques dont la partie supérieure [AAEE & 2*(AAEA)] et la partie inférieure [AAAE & 2*AAAA]. La fréquence circulaire pour le mode 3*2 s'obtient par l'une des 3 équations:

Sous plaque AAEE

$$w_{3*2} = \left(\sqrt{\frac{1}{r h}} \right) \left[(3.927)^2 \sqrt{\frac{D_1}{a_1^4} + \frac{D_2}{b_1^4} + \frac{1.115 H}{a_1^2 b_1^2}} \right]$$

Sous plaque AAEA

$$w_{3*2} = \left(\sqrt{\frac{1}{r h}} \right) \left[(p)^2 \sqrt{\frac{D_1}{(a-a_1)^4} + \frac{2.441 D_2}{(b_1)^4} + \frac{2.333 H}{(a-a_1)^2 (b_1)^2}} \right]$$

Sous plaque AAAA

$$w_{3*1} = \left(\sqrt{\frac{1}{r h}} \right) \left[(p)^2 \sqrt{\frac{D_1}{(a-a_1)^4} + \frac{D_2}{(b-b_1)^4} + \frac{2 H}{(a-a_1)^2 (b-b_1)^2}} \right]$$

Les positions des lignes nodales ne sont pas symétriques car les appuis aux bords extrêmes de part et d'autre sont dissymétriques du type E-A&A-E. Les valeurs a_1 & b_1 sont calculées en imposant que les 6 sous plaques vibrent à la même fréquence.

Discussion de l'influence de l'effet combiné du numéro du mode N, et des conditions de fixités sur le comportement vibratoire libre de la plaque rectangulaire orthotrope.

Dans ces graphes on étudie l'évolution du facteur des fréquences naturelles sous la double l'influence du numéro du mode et des conditions de fixités.

Plaques orthotropes 1 soumises aux conditions limites du type :

- Cas EAEE
- Cas AAEA

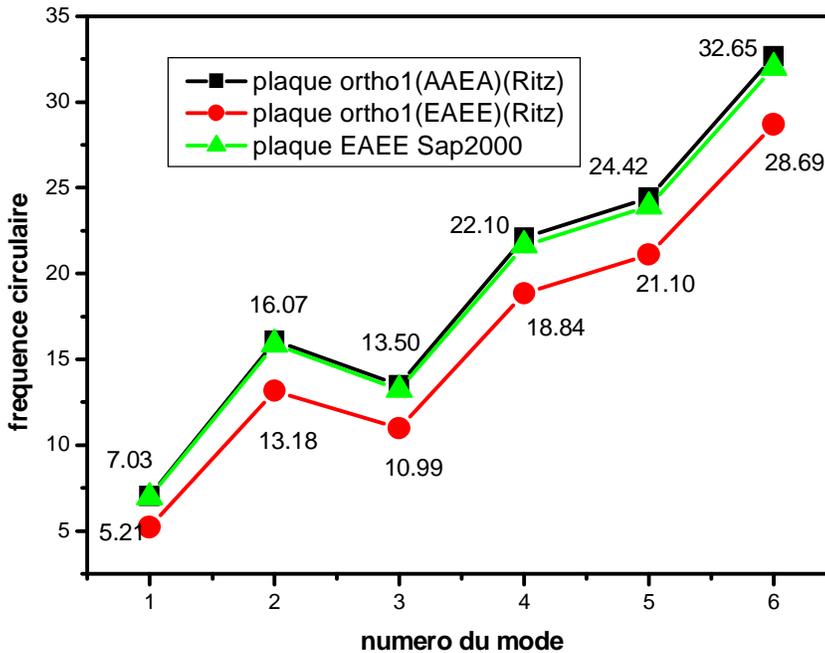


FIG5.20 Evolution du facteur de fréquence en fonction du numéro modale ($N_1[\omega_{11}]$, $N_2[\omega_{12}]$, $N_3[\omega_{21}]$, $N_4[\omega_{22}]$, $N_5[\omega_{23}]$, $N_6[\omega_{32}]$, et des conditions de fixités des plaques EAEE et AAEA. ($a/b=1.25$)

Conclusion:

Cette application montre la croissance du terme correctif liée aux numéros des modes, d'autre part l'effet des conditions de fixités qui démarque la courbe supérieur de la plaque rigide

AEEE par rapport à la courbe inférieure de celle moins rigide AAEA.

Plaques orthotropes 2 soumises aux conditions limites du type :

- Cas EAEE
- Cas AAEA

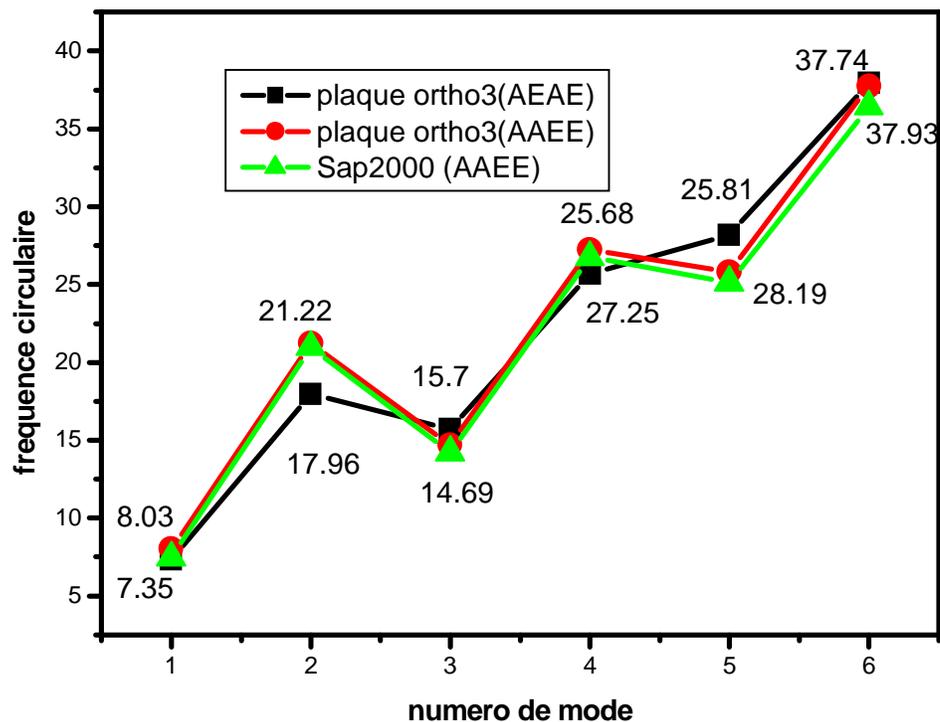


FIG.5.21 Evolution du facteur de fréquence en fonction du numéro modale ($N_1[\omega_{11}]$, $N_2[\omega_{12}]$, $N_3[\omega_{21}]$, $N_4[\omega_{22}]$, $N_5[\omega_{23}]$, $N_6[\omega_{32}]$, et des conditions de fixités des plaques EAEE et AAEA.

Conclusion:

Les mêmes observations sont confirmées indépendamment de l'écart de dispersion du au changement du rapport de dimension de la plaque.

Cette application montre la croissance du terme correctif liée aux numéros des modes, d'autre

part l'effet des conditions de fixités qui démarque la courbe supérieur de la plaque rigide AEEE par rapport à la courbe inférieure de celle moins rigide AAEA.

Plaques orthotropes 3 soumises aux conditions limites du type:

- Cas EAEE
- Cas AAEA

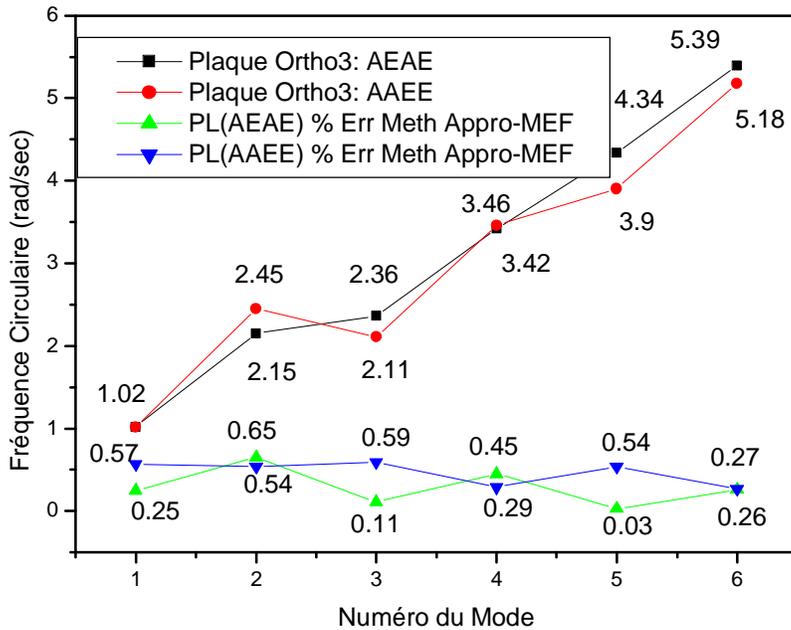


FIG. 5.22 Evolution du facteur de fréquence en fonction du numéro modale ($N_1[\omega_{11}]$, $N_2[\omega_{12}]$, $N_3[\omega_{21}]$, $N_4[\omega_{22}]$, $N_5[\omega_{31}]$, $N_6[\omega_{32}]$, et des conditions de fixités des plaques EAEE et AAEA.

Conclusion:

Cette application montre pour les deux cas de courbes de fréquences la croissance du terme correctif liée aux numéros des modes, d'autre part les deux plaques amorce la même valeur pour le mode fondamentale $N_1(\omega_{11}=1.02)$, ce qui est observée par l'analyse vibratoire qualitative (FIG. 5.21) concernant l'influence du rapport des dimensions pour $[(a/b)=1.5]$, d'autre part on remarque un renversement alterné des facteurs de fréquences au fur et à mesure de l'évolution croissante pour les numéros modales N_2, N_3, N_4, N_5 . Afin de justifier ce

comportement on fait appelle à l'analyse qualitative en exploitant aussi la méthode approchée d'après Hearmon qui est aussi utile pour les modes supérieurs.

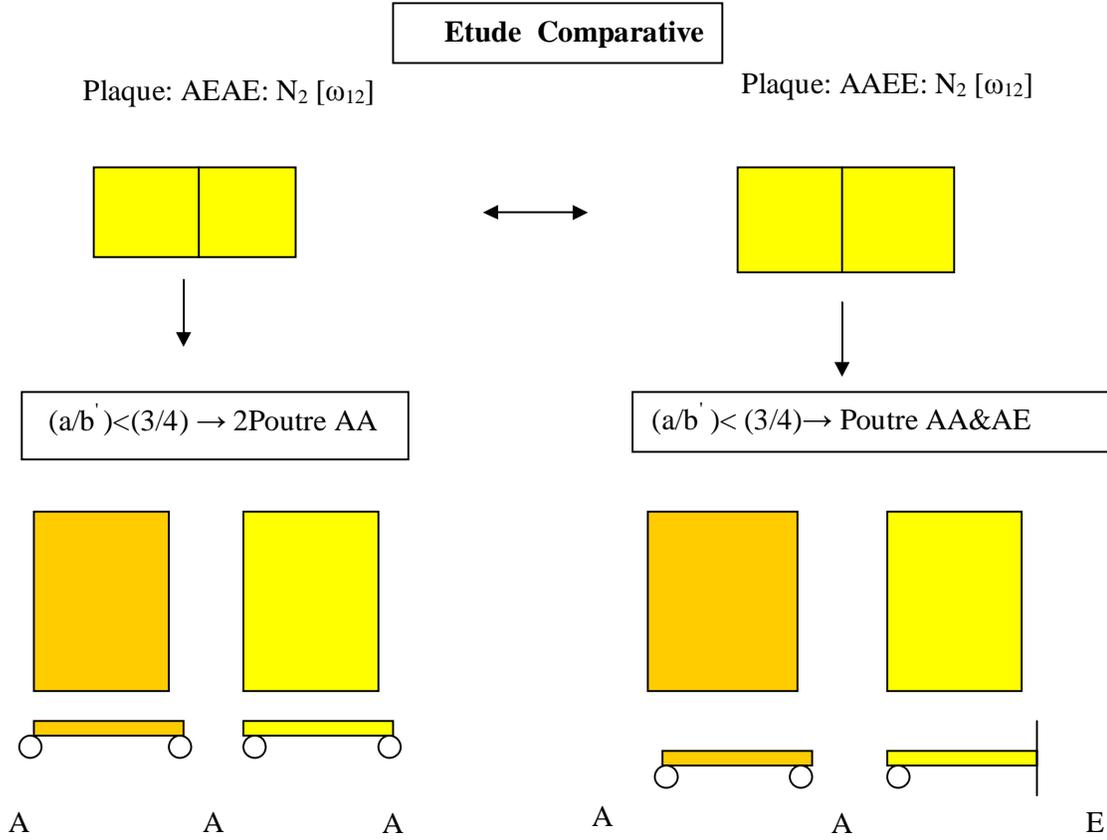


FIG.5.23 Analyse vibratoire qualitative comparative des plaques rectangulaires EAEA et AAEE d'après le concept des plaques allongées.

Justification du mode $N_2[\omega_{12}]$:

On voit d'après le graphe de l'analyse qualitative pour le mode $N_2[\omega_{12}]$, pour les deux cas de plaques AEAE&AAEE, développent respectivement pour la première une séquence vibratoire dominées par un double comportement de poutres du types simplement appuyée AA, par contre pour la deuxième une séquence vibratoire contrôlée par une comportement dominé par la contribution combinée de deux effets poutres du types AA&AE, les rigidité pour cette séquence modale sont donc supérieure par rapport à celle de la plaque AEAE. C'est ce fait qui confirme le pic supérieur inférieure ($[\omega_{21}]_{AAEE}=2.45$)> ($[\omega_{21}]_{AEAE}=2.15$).

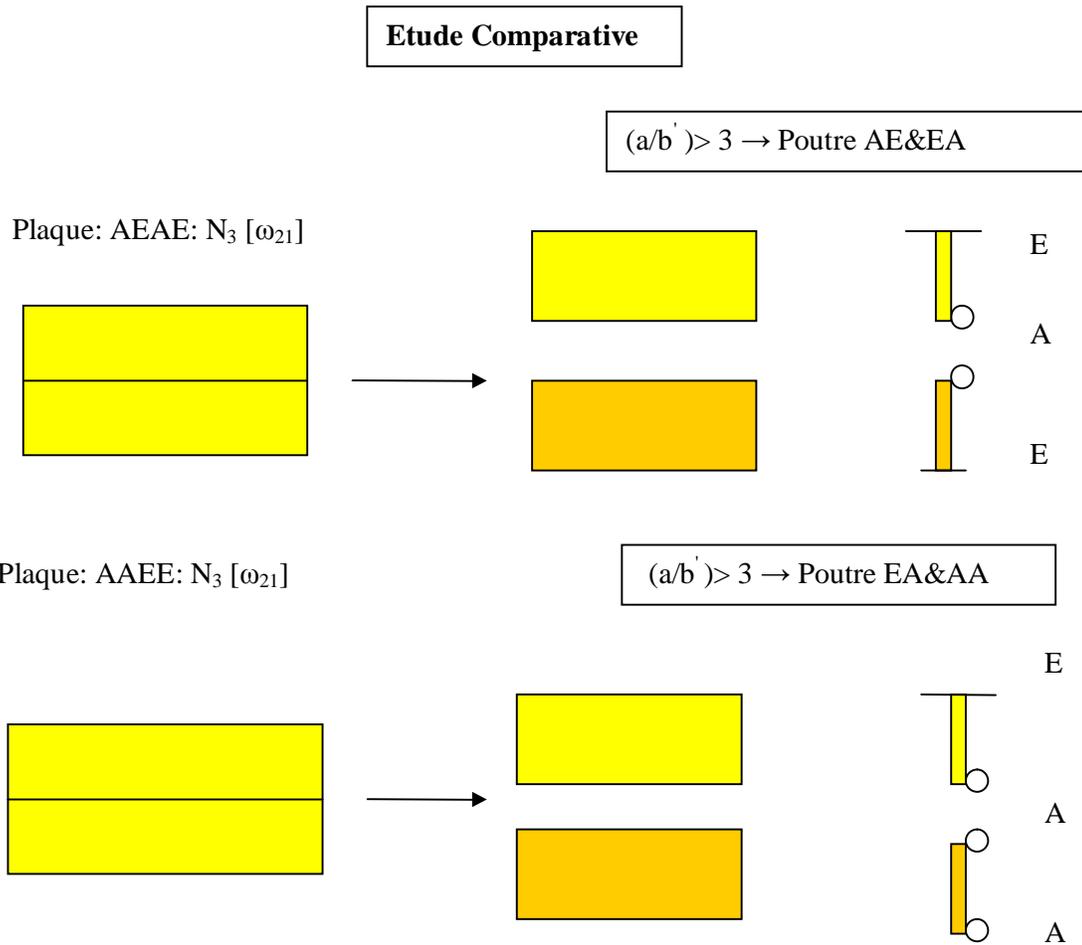


FIG.5.24 Analyse vibratoire qualitative comparative des plaques rectangulaires EAEA et AAEE d'après le concept des plaques allongées.

Justification du mode $N_3 [\omega_{21}]$:

On voit d'après le graphe de l'analyse qualitative pour le mode $N_3 [\omega_{21}]$, pour les deux cas de plaques AEAE & AAEE, développent respectivement pour la première une séquence vibratoire dominées par un double comportement de poutres du types appuyée -encastree AE&EA, par contre pour la deuxième une séquence vibratoire contrôlée par une comportement dominé par la contribution combinée de deux effets poutres du types AA&AE, les rigidité pour cette séquence modale sont donc inférieure par rapport à celles de la plaque AEAE. C'est ce fait qui confirme le pic inférieure ($[\omega_{21}]_{AAEE}=2.11$) < ($[\omega_{21}]_{AEAE}=2.36$).

Discussion du % d'erreur:

Les résultats d'après la méthode approchée sont confrontés par rapport au résultats numérique d'après la MEF d'après la relation

$$Erreur = \frac{(W_{MEF} - W_{APPR})}{W_{MEF}} \cdot 100$$

Les erreurs d'après la méthode approximative sont surestimées par rapport à ceux obtenues par la MEF, cependant le pic maximum est de 0.65%.

Discussion de quelques résultats

Méthode MEF

Les réponses d'après l'analyse MEF sont basées sur quelques modèles de maillage rectangulaire avec (20x20) (40x40), et (80x80). Le cas 80 x80 est pris comme référence de comparaison [20]. L'investigation concernant la précision de la méthode est basée sur l'étude d'une plaque constituée d'un matériau isotrope et de 3 matériaux orthotropes. L'étude comparative montre que la méthode approchée d'après Hearmon est plus conservatrice vis-à-vis de la MEF. On remarque cependant que le niveau des erreurs est acceptable ($\approx -0.7\%$).

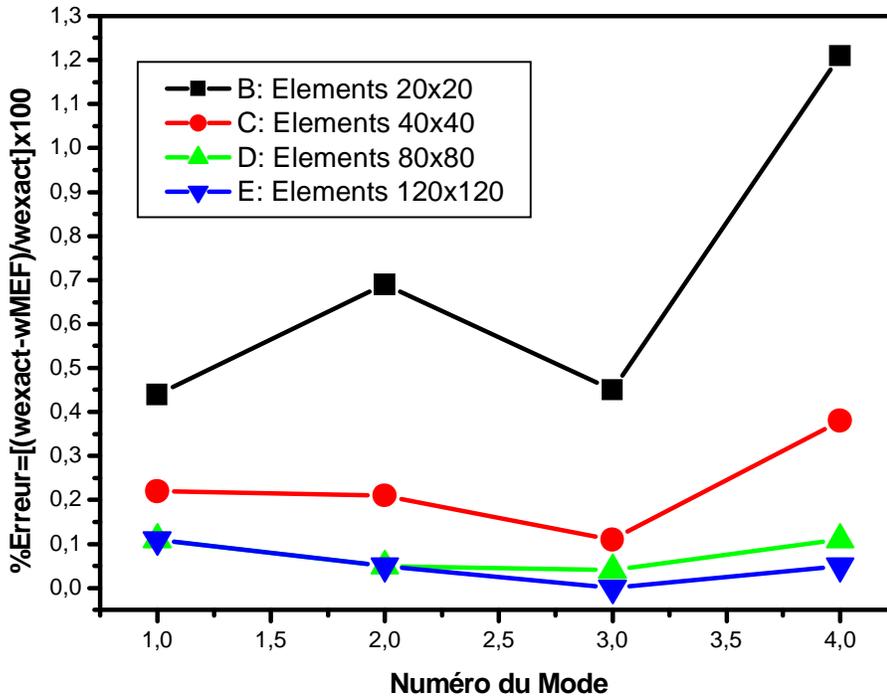


FIG.5.25 Evolution du facteur de fréquence en fonction du numéro modale ($N_I[\omega_{11}]$),

$N_2[\omega_{12}], N_3[\omega_{21}], N_4[\omega_{22}], N_5[\omega_{23}], N_6[\omega_{32}]$.
 Plaque rectangulaire du type AAAA, avec le rapport de dimension (a/b)

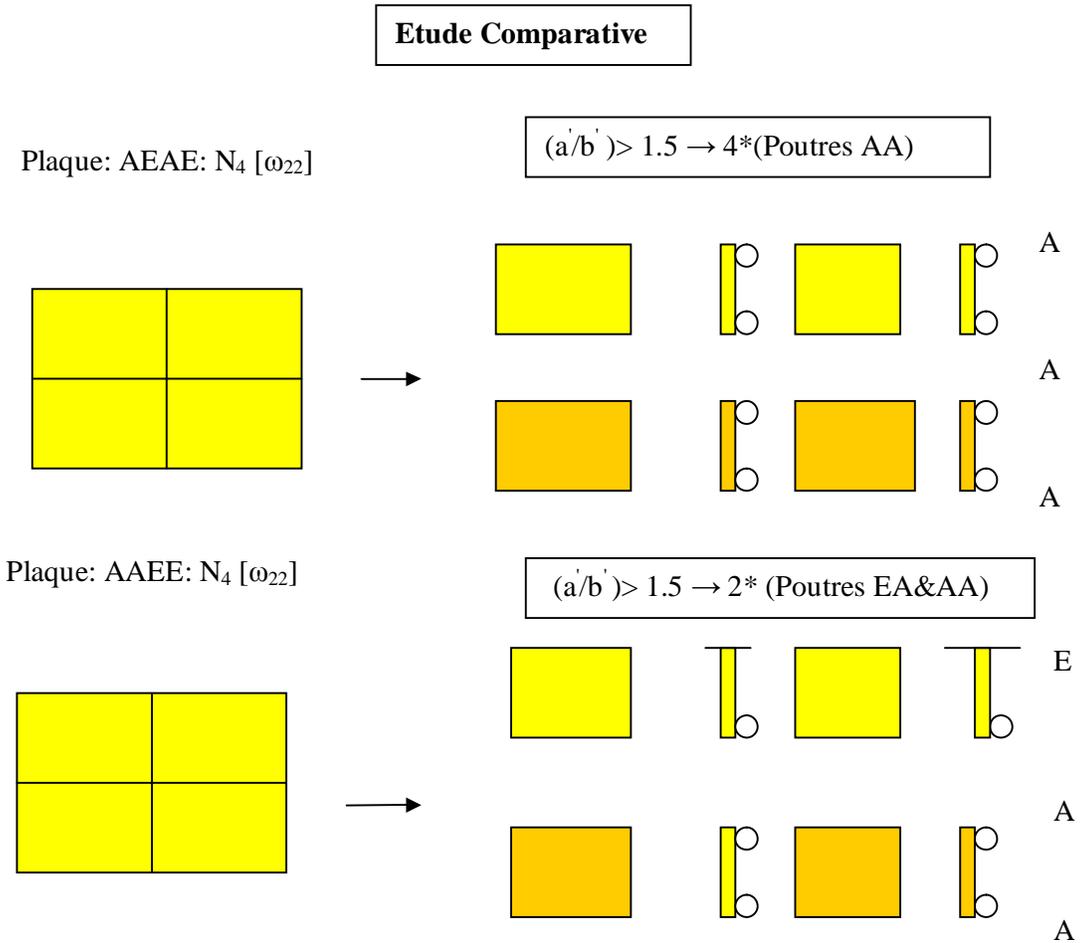


Fig. 5.26 analyse vibratoire qualitative comparative des plaques rectangulaire AEAE et AAEE d'après le concept des plaques allongées

Justification du mode $N_4 [\omega_{22}]$:

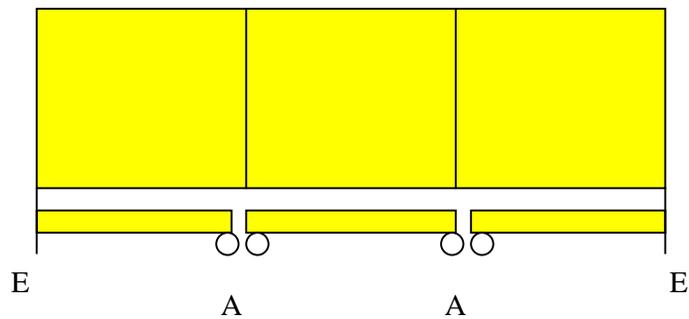
La plaque AEAE développe 4 sous plaques dans le même rapport $(a/b)=(a'/b')=1.5$, leurs comportement s'identifie avec celui de 4 poutres équivalentes la rigidité d'ensemble résulte de l'effet de fixité de 4E & 4A. On remarque la même chose pour le cas de la plaque AAEE. On

obtient ainsi 4 sous plaques dont le comportement s'identifie avec celui de quatre poutres équivalentes et développe une rigidité d'ensemble de $2E & 6A$. Ceci concorde avec les pics obtenus d'après le graphe précédent. ($[\omega_{21}]_{AAEE}=3.42 < [\omega_{21}]_{AEAE}=3.46$).

Etude Comparative

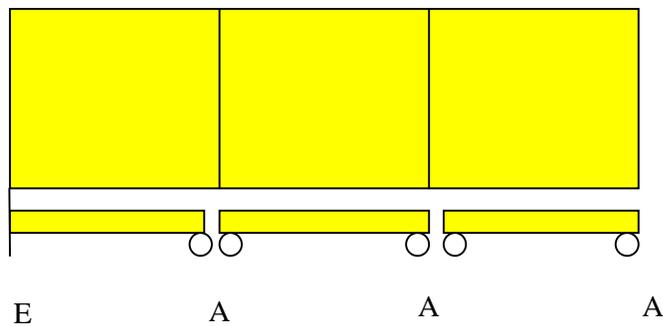
Plaque: AEAE: $N_5 [\omega_{31}]$

$(a/b) < 0.5 \rightarrow 2 \text{ *(Poutres EA) \& 1 Poutre AA}$



Plaque: AAEE: $N_5 [\omega_{31}]$

$(a/b) < 0.5 \rightarrow 2 \text{ *(Poutres AA) \& 1 Poutre AE}$



Justification du mode $N_5 [\omega_{31}]$:

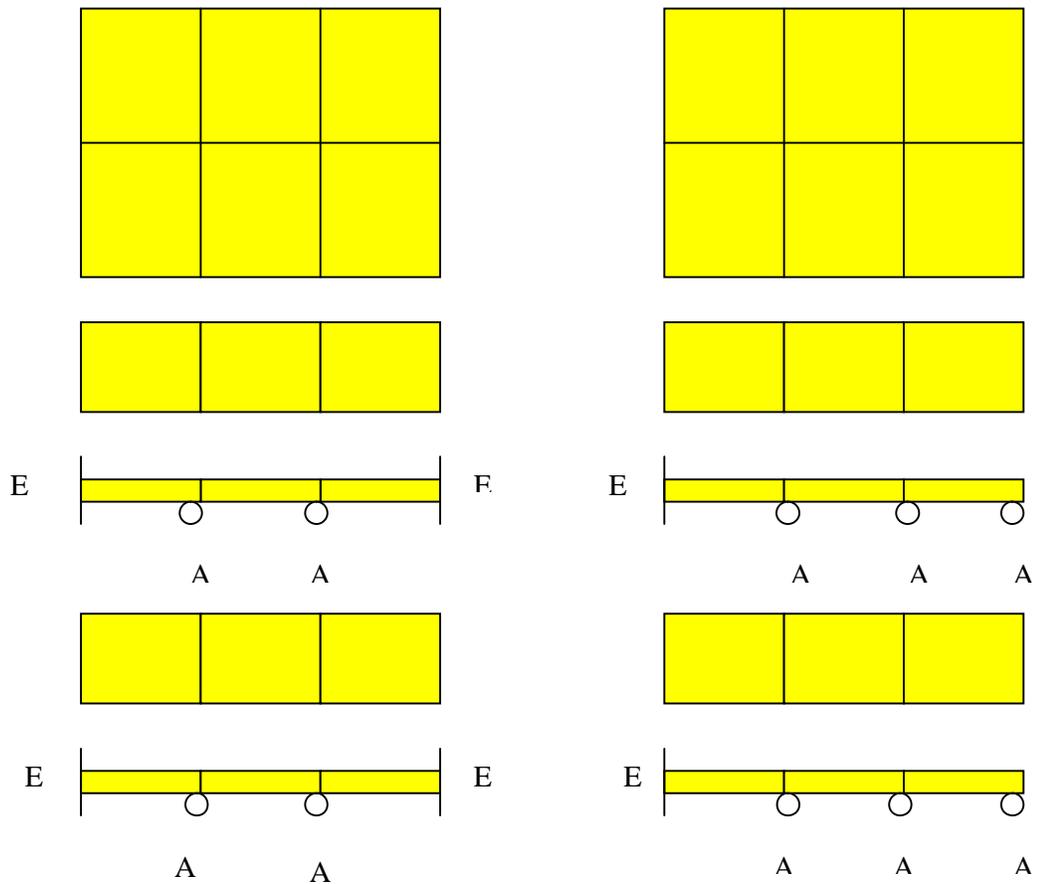
La plaque AEAE développe 3 sous plaques dans le rapport $(a/b)=(a/b)=0.5$, leurs comportements s'identifient avec celui de 3 poutres équivalentes la rigidité d'ensemble résulte de l'effet de fixité de $4A & 2E$. On remarque la même chose pour le cas de la plaque AAEE. On

obtient ainsi 3 sous plaques dont le comportement s'identifie avec celui de 3 poutres équivalentes et développe une rigidité d'ensemble de $5A \& 1E$. Ceci concorde avec les pics obtenus d'après le graphe précédent. ($[\omega_{21}]_{AAEE}=3.9) < ([\omega_{21}]_{AEAE}=4.34)$.

Etude Comparative

Plaque: AEAE: $N_6 [\omega_{32}]$

Plaque: AAEE: $N_6 [\omega_{32}]$



Justification du mode $N_6 [\omega_{32}]$:

La plaque AEAE développe 6 sous plaques dans le rapport $(a/b)=(a'/b')=1 < 1.5$, cette diminution a pour effet de faire basculer le comportement de l'ensemble de la plaque vers le sens porteur ($l_y=b$). Le comportement des sous plaques s'identifie avec celui de 6 poutres équivalentes dont la rigidité d'ensemble résulte de l'effet de fixité $4E \& 8A$. On remarque la

même chose pour le cas de la plaque AAEE. On obtient ainsi 6 sous plaques dont le comportement s'identifie avec celui de 6 poutres équivalentes et développe une rigidité d'ensemble de $10A \& 2E$. On peut observer donc ($[\omega_{32}]_{AAEE} = f(4 E \& 8A) < ([\omega_{32}]_{AEAE} = f(2 E \& 10A))$).

Ceci concorde avec les pics obtenus d'après le graphe précédent ($[\omega_{32}]_{AAEE} = 5.18 < ([\omega_{32}]_{AEAE} = 5.39)$).

5.2.4 Influence de l'épaisseur de la plaque:

Nous considérons une plaque rectangulaire isotrope épaisse (application de la théorie de Mindlin) et en prend en compte les déformations dues à l'effort tranchant et l'effet du a l'inertie de rotation. La méthode approchée de **Bolotin** donne l'expression des fréquences (2.38)

$$w = \sqrt{\frac{D}{rh}} (k_1^2 + k_2^2)$$

D: Rigidité de la plaque

r : la masse volumique

h: épaisseur de la plaque

k_1, k_2 : Coefficients de la fréquence

Pour le cas particulier d'une plaque carrée et pour le mode fondamentale ($n=m=1$), nous avons d'après [4]

$$k_1 = k_2 = \frac{2}{a} \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{mp}{a} = (m+1)\frac{p}{a}$$

Et dans le cas d'une plaque rectangulaire infinie ($b \rightarrow \infty$) on a

$$k_2 = 0 \text{ et } k_1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{p}{a}$$

Avec une légère approximation l'équation de la fréquence ω pour la théorie de Mindlin est donnée par (2.57)

$$w^2 = \frac{D}{rh} (k_1^2 + k_2^2) \left[1 - \left(\frac{D}{m'h} + \frac{h^2}{12} \right) (k_1^2 + k_2^2) \right]$$

Avec m' : coefficient de cisaillement

Application numérique

Pour le matériau de la plaque on utilise les caractéristiques mécaniques du tableau (5.3)

$\nu' = 0.80$ d'après Mindlin[4]. ($\nu' = K^2$)

$h = 50\text{mm}$

Conclusion Générale

L'établissement et la solution des équations du mouvement dynamique dans les solides tridimensionnels sont difficiles. C'est pourquoi les ingénieurs sont toujours en quête de modèles idéals destinés à leurs faciliter le travail. Les plaques constituent une idéalisation bidimensionnelle de solides dont une dimension est nettement plus petite que les autres.

Dans ce travail on s'intéresse à l'analyse vibratoire libre des plaques isotropes et orthotropes. Le comportement orthotrope peut être généré de l'utilisation des matériaux anisotrope, mais aussi du procédé métallurgique qui peut altérer les caractéristiques d'isotropies le long des directions perpendiculaires, ou encore de l'utilisation de poutres de renforcement couplées avec une plaque isotrope.

L'analyse vibratoire libre est effectuée d'après la théorie flexionnelle basée sur les déplacements transversaux $w(x,y)$ qui sont supposés faible vis à vis de l'épaisseur de la plaque, d'autre part la surface moyenne de la plaque ne subit aucune déformation sensible dans son plan (c'est-à-dire qu'il n'apparaît aucun effort membranaire), et peut être considérée comme une surface neutre. L'analyse vibratoire est basée essentiellement sur les hypothèses des plaques minces (Théorie de KIRCHHOF) basée sur la détermination des réponses fréquentielles et des modes naturelles.

Une introduction aux hypothèses des plaques épaisses (MINDLIN-REISSNER) est aussi considérée.

Une investigation complète de la dynamique libre des plaques devrait conduire au calcul des flèches pour n'importe quelle position spatiale et n'importe quel moment. Cependant la partie importante de l'analyse du problème consiste en premier lieu en la détermination des réponses fréquentielles et des modes naturelles.

Les modèles mathématiques ainsi que les solutions correspondantes au cas spécifique d'un plaque simplement appuyée sur ses quatre bords sont rappelées d'après la théorie classique puis quelques méthodes numériques sont considérées pour traiter la solution des autres cas de condition limites. La détermination précise des fréquences en dehors du cas simplement appuyé implique des difficultés pour l'intégration de l'équation différentielle du mouvement dynamique du 4^{ème} ordre. C'est pourquoi le recours aux méthodes approximatives pour les besoins pratique du calcul des fréquences est nécessaire.

Nous avons choisis la méthode de Rayleigh-Ritz, que l'on utilise en exploitant un programme software (MAPLE9) pour le calcul des fréquences naturelles pour le mode fondamentale ainsi que ceux des modes supérieurs. Les fonctions admissibles considérées d'après la littérature sont compatible avec les condition limites des différents cas étudiés.

L'investigation dynamique est basée sur quelques facteurs d'évaluation dont l'effet du rapport des dimensions, l'effet des conditions limites, l'effet du type de matériau, l'effet de l'épaisseur de la plaque, et l'effet des séquences modales. L'analyse d'après ces facteurs a permis d'appréhender quelques aspect du comportement vibratoire des plaques notamment l'influence des conditions limites sur le seuil croissant des courbes de fréquences naturelles avec l'augmentation des liaison supplémentaires. On note aussi la croissance du terme correctif des fréquences liée aux numéros des modes. L'influence de l'accroissement du rapport des dimensions (l_x/l_y) indique une croissance parabolique. L'allongement des plaques dans un sens ou dans un autre et

indépendamment du matériau et réduit la contribution des rigidités dans le sens de la longueur ce qui réduit le comportement vibratoire à celui d'une poutre reposant sur les deux bord allongées ayant les conditions de fixités de ces mêmes bords et de portée le petit sens.

Nous avons aussi proposé une méthode dynamique originale qualitative et quantitative basée sur le concept des plaques allongées qui sont dominées par le comportement poutre orientée selon le petit sens de la plaque rectangulaire supposée infinie. Cette méthode qualitative aide à mieux s'imprégner pour développer les premières impressions concernant l'appréciation du comportement dynamique des plaques rectangulaires isotropes et orthotrope ayant des conditions limites non homogènes. Suivant le rapport des dimensions de la plaque (I_x/I_y), les conditions de fixité de la poutre équivalente représentative de la plaque d'étude, correspondent à ceux des deux bords allongés.

Une solution approximative pour l'analyse vibratoire libre des plaques rectangulaire isotropes et orthotropes est ensuite introduite. En se basant sur une formulation générale approximative de la fréquence proposée par Hearmon, il est montré comment calculer le mode fondamentale d'une plaque rectangulaire orthotrope soumise à différentes conditions de fixités

En utilisant les coefficients déjà disponibles dans la littérature scientifique.

D'autre part pour les modes supérieurs, une forme particulière de la méthode de Rayleigh est considérée, conduisant à une procédure simple pour le calcul des fréquences fondamentales. En fait, le calcul des fréquences est réduit à l'évaluation de la fréquence fondamentale d'une plaque spéciale associée à celle existante d'origine.

Afin de tester la précision des résultats obtenus à partir des méthodes analytiques ainsi qu'approximatives, Une investigation aux éléments finis est effectuée utilisant le programme SAP2000. Quelques réponses utilisées d'après la littérature (ANSY code) sont aussi considérées comme références de comparaison. Les réponses d'après l'analyse MEF sont basée sur quelque modèles de maillage rectangulaire avec (20x20) (40x40), et (80x80). Le cas 80 x80 est pris comme référence de comparaison. L'investigation concernant la précision de la méthode est basée sur l'étude une plaque constituée d'un matériau isotrope et de 3 matériaux orthotropes. L'étude comparative montre que la méthode approchée d'après Hearmon est plus conservative vis-à-vis de la MEF. On remarque cependant que le niveau des erreurs est acceptable ($\approx -0.7\%$).

La méthode qualitative a permis d'appuyer la qualité des résultats obtenus des différents graphes d'analyse des fréquences. L'utilisation complémentaire du principe de la méthode de Hearmon et de la méthode qualitative a permis aussi de remonter avec succès, l'évaluation pour les modes supérieurs. Cette procédure combinée constitue une stratégie d'analyse vibratoire des plaques isotropes et orthotropes, permet d'une part de satisfaire les besoins de conception préliminaires de la structure faisant l'objet, mais aussi une méthode d'investigation et d'expertise de qualité des réponses dynamique.

Pour les recommandations futures l'analyse forcée ainsi que libre étendue à d'autre cas de fixités pourrai constituée un sujet d'étude intéressante.

Références bibliographiques

- [1]. G.B. Warburton, « the vibration of rectangular plates », proceeding of the institute
- [2]. A.W.Leissa, “Vibration of plates”, Nasa SP-160, Washington DC, 1969.
- [3].Juc Jaouen:"Vibration de flexion des plaques" , Rapport de recherché/ Université de Sherbrooke , 2002
- [4].Philippe Mestat "Etude critique des modelisations de plaques encastrées en vibration" ,Travail de fin d'etudes (Memoire de DEA) , 2juin 1981
- [5]. A.W.Leissa, “Plate vibration Research”, classical theory, shok vibration or simply supported Edgas”, journal of Applied Mechanics (1959)
- [6]. R.F.S Hearmon, “The frequency of flexural vibration of rectangular plates with clamped or simply supportes Edges”, journal of applied mechanics, (1959), 26, 537-540.
- [7]. I.E Harik. X. Liu and N. malakrishnan, “Analytical solution to free vibration of rectangular plates”, Journal of sound and vibration, (1992), 153(1), 51-62.
- [8].Daniel Gay : "Materiaux Composites" , Hermès ,1997
- [9]. O.Kopmaz and S.Telli, “Free vibration of rectangular plate carrying a distributed mass”, Journal of sound and vibration, (2001), 251 (1), 39-97..
- [10].Timoshenko ,S. P , "Theory of vibration in engineering -GTTI, 1931 section56, p. 308tr.from English.
- [11]. Jae.Hoon Kang. Hysin-Justim, “Exact solutions for the force vibration of rectangular plates having in-plane moments acting on two simply supported Edges”. Journal of sound and vibration, (2003), 273, 933-948.
- [12].Laroze S. ,Barrau J.J : "Mecaniques des structures-solides élastiques-plaques et coques" ,Eyrollres/Masson ,1988
- [13]. K.M Liew, S. Kitipornchar, A.Y.T. Leang, C W. Li, “Analysis of the free vibration of rectangular plates with central cu-outs using the Discrete Ritz Method”, international journal of mechanical sciences (2005), 45, 941-959.
- [14]. Mihir Chandra Monna, “Free vibration analysis of isotropic rectangular plates usinf a high-order triangular finite element with shear”, Journal of sound and vibration, (2005) 281,235,295.
- [15]. R.F.S. Hearman, The frequency of flexural vibration of rectangular orthotropic xith clamped or supportd edges, Journal of applied mechanics 26 (1959) 537-540.
- [16]. J.N. reddy, Areview of the literature on final element mode lling of laminated composite plates and sells, shock and vibration digest 17 (4) (1985) 3-8.

- [17]. Berthlot J.M. : "Matériaux Composites- Comportement Mécanique et analyse des structures" , Technologie & documents , Paris, 1999.
- [18]. Whitney , J .M , "Structred Analysis of Laminated Anisotropic Plates" , technnomic publishing CO , Lancaster , PA (1987)
- [19]. C.W. Bert, Recent research in composite, and sandwich plate dynamics, shock and vibration Digest 14(10) (1982) 17-34.
- [20]. M .E .Biancolini ,C . Butti ,L. Reccia, "Approximation solution for free vibration of thin orthotrope rectangular plates" journal of sound and vibration 2005
- [21]. V.S. Gumenyuk, determination of the lowest (fundamental frequency of free vibration of orthotropic plates Prikladnaya Mekhnika.
- [22]. D. Young , R.P. Felgar jr ., "Tables of characteristic functions representing normal modes of vibration of a beam" the university of texas publication, no.4913, Bureau of engineering research, Engineering research series no.44, 1994 (cited by Hearmon)
- [21]. Laroze S.Barrau J.J: "Mécanique des structures – calcul des structures en matériaux composites", Eyrolles/Masson, 1987.
- [22]. Plusquellec J : « Vibration », technique de l'ingénieur (A410)
- [23]. Timoshenko, Stephen P., James M. Gere : "Théories of elastic stability", MC Graw-Hill, Newyork, 1961.
- [24]. Daniel Gay : "matériaux composites", hermes, 1997.
- [25]. Lalane. M., Bethier P., Hagopain J.D, « Mécanique des vibration linéaires ».
- [26]. Lin Y.K : « Force vibration of continuous skin-stringer panels », Applied mechanics vol 27,45 pp 669-681, 1960
- [27]. C.W.Bert, Research on dynamics of composite and sandwich plates-Part 5 ,Shock and vibration 17(11)(1985)3-25
- [28]. Ready J.N: "Dynamic analysis of layered amisotropic composite materials plates", Numerical method in enginuring, vol 19, pp 237-255, 1983.
- [29]. Cours sur sites internet: [htt://w.w.w.duport.ca](http://w.w.w.duport.ca) et [htt.industrie.guv.fr](http://industrie.guv.fr).
- [30]. Cours sur sites internet : « matériaux composites », [htt://w.w.w.NadiaBahlouli.fr](http://w.w.w.NadiaBahlouli.fr).
- [31]. Young D : « Vibration of rectangular plates by Ritz method », Applied machanics, vol. 17, PP449-453, 1950.
- [32]. C.L. Elliot, G.C Moys and P.D.smith. the protection of building against terrorism and disorder. Proc-instmciv. Engrs structs and Bldgs, 1992, 94, Aug, 287-297.
- [33]. D. redekop. Dynamique response of a toroidal shell panel to blast leading, compus and

structures, vol 51 n°3 235-239 (1994)

[34]. S.G.Lekhnitskii, Anisotropic plates, Gordon & Breach, Science Publisher,Ltd, 8 Bloomsbury Way London, W, C, I (1968).

[35]. Laroze S . "Mécanique des structures-theories des pouters", Eyrolles/Masson, 1988

[36].S .G .Lekhnitski , E D .Gorden &Breach "Anistropic plates" 1968.

[37]. G.Harris ,"choc and vibration" ,1987

ANALYSE DYNAMIQUE DES PLAQUES MINCES ET EPAISSES APPLICATION AUX MATERIAUX HOMOGENES ET NON HOMOGENES

RESUMER

L'analyse libre d'une plaque rectangulaire isotrope et orthotrope observer utilisant les hypothèse pour les plaques minces (théorie de kirchhof) basse sur la détermination des réponses fréquentielles et des modes naturelles. Une introduction aux hypothèses des plaques épaisses (Mindlin Reissner) est aussi considérée. Les méthodes mathématiques ainsi que les solutions correspondantes au cas spécifique d'un plaque simplement appuyée sur ces cotes quatre bords sont rappelées d'après la théorie classique puis quelques méthodes numériques sont considérées pour traiter la solution des autres cas de condition limites .Nous choisis la méthode de Rayleigh Ritz, que l'on utilise en exploitant un programme software (MAPLE9) afin de résoudre l'investigation dynamique base sur quelques critère d'évaluation dont l'effet du rapport des dimensions ,l'effet des condition aux limites ;l'effet du type de matériau ,l'effet de l'épaisseur de la plaque ,l'effet des séquences modales. Nous avons aussi propose une méthode dynamique originale qualitative et quantitative base sur le concept des plaques allongées qui sont dominées par le comportement poutre orientée selon le petit sens de la plaque rectangulaire supposée infinie .Cette méthode qualitative aide a mieux s'imprégner pour développer les premières impressions concernant l'appréciation du comportement dynamique des plaques rectangulaires isotrope et orthotrope ayant des conditions aux limites non homogènes .Suivant le rapport des dimensions de la plaque (a/b) ,les conditions de fixité de la poutre équivalente représentative de la plaque d'étude,correspondent a ceux de deux bords allonges .une solution approximative pour l'analyse vibratoire libre des plaques rectangulaires isotropes et orthotropes est ensuite introduite .En se basant sur une formulation générale approximative de la fréquence proposée par Hearmon, il est montre comment calculée le mode fondamentale d'une plaque rectangulaire orthotrope soumise a différentes conditions de fixités .En utilisant les coefficients déjà disponibles dans la littérature scientifique,d'autre part pour les modes supérieures,une forme particulière de la méthode de Rayleigh est considère,conduisant a une procédure simple pour le calcul des fréquences fondamentales .En fait,le calcul des fréquences est réduit a l'évolution de la fréquences fondamentale d'une plaque spéciale associée a celle existante d'origine .Afin de tester la précision des résultats obtenus a partir des méthodes analytiques ainsi qu'approximatives,une investigation aux éléments finis est effectuée utilisant le programme SAP 2000.Quelques réponses utilises d'après la littérature (ANSYcode) sont aussi considérées comme références de comparaison.

The dynamic analysis of thin and thick plates: application to homogeneous and non homogeneous materials

Abstract

Free vibration analysis of isotropic and orthotropic rectangular plate is performed using thin plates assumptions (Kirchhoff theory) based on the determination of frequencies responses and the natural modes. An introduction to thick plate assumptions (Mindlin-Reissner) is also considered. Mathematical model and exact specific solution are reminded for simply restrained plate from basic theory then numerical methods are introduced to provide solution for cases of boundary limits conditions. We have chosen the Rayleigh-Ritz method, then we used software programmer (Maple9) to perform the necessary investigation based on a great number of influential factors to understand clearly the dynamic behaviour of structures, that is the edge ratio effect, different restraint conditions effect, material type effect, thickness of the plate and modal sequence effect. We also proposed an original qualitative dynamic method of analysis based on infinite plate concept which is dominated by equivalent beam behavior oriented along short sides of the infinite rectangular plate, this qualitative dynamic method helps to get in to the first feeling about the dynamic behavior of rectangular isotropic and orthotropic plate having non homogeneous boundary limits. Depending on the ratio of the two sides of rectangular plate (a/b), the boundary condition of equivalent beam will be taken from those corresponding to the longer rectangular plate side. Approximate quantitative solution for free vibration of thin isotropic and orthotropic rectangular plate is also investigated, starting from a general approximate formula for the frequency, proposed by Hearmon, it is shown how to calculate the fundamental mode of an orthotropic rectangular plate with different restraint conditions using the proper coefficient values already available in the scientific literature. For the higher modal frequencies, a particular form of the Raleigh method is proposed, leading to a simple procedure to calculate the fundamental frequency. In fact the frequency calculation is reduced to the evaluation of the fundamental frequency of a special equivalent plate associated to the real one. In order to test the accuracy of the results obtained from the analytic and approximate methods a finite element investigation was carried out using SAP 2000 programme. The responses taken from literature (Ansys code) are also considered. The numerical results obtained show good concordance.