

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère De L'Enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique

UNIVERSITE MENTOURI – CONSTANTINE

Faculté Des Sciences De L'Ingénieur

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

Ecole Doctorale Nationale de Mécanique de Construction

M E M O I R E

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister en Génie Mécanique
Option : Construction Mécanique
« **MECANIQUE APPLIQUEE EN ENGINEERING** »

Intitulé :

**ETUDE DE L'EFFET DU CISAILLEMENT TRANSVERSE
SUR LE COMPORTEMENT MECANIQUE
DE POUTRES COMPOSITES**

Présentée par :

KASKAS SALIHA

Soutenu le : 29 Avril 2010, Devant le Jury :

Président :	<i>B.NECIB</i>	Professeur.	Université de Constantine
Rapporteur :	<i>F.MILI</i>	Professeur.	Université de Constantine
Examineur:	<i>H.BOUGHOUAS</i>	Professeur.	Université de Constantine
Examineur:	<i>A.BELLAOUAR</i>	Professeur.	Université de Constantine

Remerciements

Le remerciement infini avant tous est à dieu le plus puissant qui m'a comblé des bienfaits de l'Islam et de la Science.

J'exprime mes profonds remerciements à Monsieur F. MILI, Professeur à l'Université de Constantine, encadreur de ce mémoire, pour son aide précieuse, sa confiance, ses encouragements, sa patience et son soutien favorable pour l'aboutissement de ce travail.

Je tiens aussi à adresser, mes vifs remerciements à Monsieur B.NECIB, Professeur à l'Université de Constantine, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance de ce mémoire.

Je désire aussi adresser mes remerciements les plus respectueux à Monsieur H.BOUGHOUAS, Professeur à l'université de Constantine, qui m'a fait l'honneur de bien vouloir juger ce travail.

Mes remerciements vont également à Monsieur A. BELLAOUAR, Professeur à l'Université de Constantine, d'avoir accepté d'examiner ce mémoire et d'être membre de jury.

Sans oublier de remercier vivement tous les enseignants de l'EDNMC qui ont contribué à la formation, et spécialement le Directeur de l'école Monsieur T.BOUKHAROUBA professeur à l'université des Sciences et de la Technologie « USTHB » de Bab EZZOUAR/Alger.

Je remercie également Mr Nouara Radouane, d'avoir été l'ami dont l'aide m'a été précieuse, ainsi que tous les étudiants de Constantine, Annaba, Alger, Guelma, Batna et Skikda de ma promotion pour toute l'aide et l'entente procurée.

Ma reconnaissance va à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin pour que cette œuvre soit achevée ; qu'ils trouvent ici l'expression de ma gratitude.

Résumé

L'objectif de ce mémoire est d'effectuer une étude sur l'effet du cisaillement transverse sur le comportement mécanique des poutres composites chargées en flexion. Les poutres considérées sont des stratifiées en verre-E/époxyde de séquences d'empilement croisées: $[0_4/90_2/0_4]$, $[0_3/90_4/0_3]$, $[0/90]_{5s}$, $[90_4/0_2/90_4]$, $[90_3/0_4/90_3]$, $[90/0]_{5s}$; et équilibrées : $[45_4/-45_2/45_4]$, $[45_3/-45_4/45_3]$, $[45/-45]_{5s}$. Le comportement mécanique des poutres stratifiées est déterminé par l'utilisation d'approches mathématiques basées sur la formulation des équations d'équilibre et le développement de la théorie classique simplifiée des stratifiés. La recherche de l'effet du changement de l'ordre de disposition des couches dans le stratifié et de leur nombre ainsi que les dimensions de la poutre et de l'orientation du renfort fibreux permet de déterminer l'évolution de la résistance des poutres et de leurs déformations ainsi que le calcul des contraintes à travers l'épaisseur de chaque couche de la poutre stratifiée. Afin d'atteindre ces objectifs, on a appliqué la théorie classique des poutres stratifiées pour modéliser les déformations de cisaillement transverse approprié pour les poutres considérées. Les différents résultats obtenus ont montré que le matériau composite stratifié verre-E/époxyde à couches extérieures d'orientation 0° et de coefficient de cisaillement élevé résiste mieux à la flexion lors de la considération de la déformation de cisaillement transverse. Le choix adéquat du matériau des constituants du stratifié, l'orientation des fibres, le nombre et la séquence d'empilement des plis nous permet d'assurer donc un comportement meilleur de la poutre composite stratifiée. L'accroissement de la résistance et du module spécifiques font de tels matériaux composites stratifiés à matrice polymère un candidat prometteur aux structures à haute performance. Sauf que la réduction du module de cisaillement en comparaison avec les matériaux conventionnels devient une question majeure dans l'analyse des structures faites de tels matériaux.

Mots Clés : Poutre stratifiée, Flexion, Cisaillement transverse, Résistance, Déformations, Coefficient de Cisaillement.

Abstract

The objective of this memory is to make a study on the effect of transverse shear on the mechanical behavior of the composite beams loaded in bending. The considered beams are the laminate made by E-glass/epoxy of cross stacking sequence: $[0_4/90_2/0_4]$, $[0_3/90_4/0_3]$, $[0/90]_{5s}$, $[90_4/0_2/90_4]$, $[90_3/0_4/90_3]$, $[90/0]_{5s}$; and balanced: $[45_4/-45_2/45_4]$, $[45_3/-45_4/45_3]$, $[45/-45]_{5s}$. The mechanical behavior of the laminated beams is determined by the use of mathematical approaches based on the formulation of the equilibrium equations and the development of the simplified classical theory of laminates. The research of the change effect of the arrangement order of layers in the laminate and their number like the dimensions of the beam and the orientation of the fibrous reinforcement allow to determine the evolution of the strength of beams and their strains like the calculation of the stresses through the thickness of every layer component of the laminated beam. In order to achieve these goals, we applied the classical theory of the laminated beams to model the transverse shear strain appropriate for beams considered. The various results obtained showed that the E-glass/epoxy laminate composite material, with the orientation 0° in outside layer and a high shear coefficient, resist better to the bending with transverse shear deformation. The adequate choice of component laminate material, the fiber orientation, the number and stacking sequence of the plies assure a better behavior of such laminated composite beam. High specific strength and modulus makes the polymer-matrix composites a promising candidate for high performance structures. The low value of shear modulus of composites as compared to conventional materials becomes a major issue in the analysis of the structures made out of such materials.

Key Words: laminate beam, Bending, transverse shear, Strength, Strain, Shear Coefficient.

ملخص

الهدف من مذكرتنا هو دراسة تأثير القص العرضي على التصرف الميكانيكي للعارضات المركبة المعرضة للانحناء. العارضات المعنية هي عبارة عن مركبات منضدة زجاج/ايوكسي حيث يكون تسلسل التراص فيها من الشكل المتقاطع: $[0_4/90_2/0_4]$ ، $[0_3/90_4/0_3]$ ، $[0/90]_{5s}$ ، $[90_4/0_2/90_4]$ ، $[90_3/0_4/0_3]$ ، $[90/0]_{5s}$ و المتوازن: $[45_4/45_2]$ ، $[45_3/45_4/45_3]$ ، $[45/45]_{5s}$. إن معرفة التصرف الميكانيكي لصفائح العارضات المنضدة تكون باستعمال المقاربات الرياضية التي تعتمد على صياغة معادلات التوازن و تطوير النظرية الكلاسيكية المبسطة للصفائح المنضدة الرفيعة. البحث عن تأثير تغيير ترتيب وضعية الصفائح و عددها ، كذلك الأبعاد الهندسية للعارضات و اتجاه الألياف المقوية لمستودعات الصفائح تسمح بتعيين تطور مقاومة العارضات و توضيح التشوهات من جهة، و من جهة أخرى حساب و تعيين تأثير الإجهادات في سمك كل طبقة من العارضة. مما جعلنا نقوم بتطبيق النظرية الكلاسيكية للعارضات المنضدة لتمثيل تشوهات القص العرضية للعارضات المعنية. النتائج المختلفة المحصلة عليها بينت أن المواد المركبة المنضدة زجاج/ايوكسي التي تكون طبقاتها الخارجية ذات التوجيه 0° و معامل قصها مرتفع، تقاوم بشكل أحسن عند تعرضها للانحناء لما نأخذ بعين الاعتبار القص العرضي. إن الاختيار المناسب للمواد المكونة للعارضة، اتجاه الألياف، عدد و تسلسل تراص الطبقات تضمن التصرف الأحسن للعارضة. إن ارتفاع المقاومة الخاصة و ثابت المرونة الخاص يجعل من المواد المركبة صفائح منضدة ومن نوع ذات المستودعات المصنوعة من مادة اللدائن كعنصر واعد في تكوين الهياكل ذات الجودة العالية. إلا أن انخفاض مرونة القص مقارنة بالمواد الكلاسيكية تصبح مسألة جد هامة في تحليل و دراسة الهياكل المكونة من مثل هذه المواد.

المصطلحات الأساسية: العارضة المركبة، الانحناء، القص العرضي، المقاومة،

التشوهات، معامل القص.

SOMMAIRE

Introduction Générale	1
Chapitre I : Définition des Matériaux Composites Stratifiés et de leurs Applications	4
I-1 Introduction.....	5
I-2 Présentation Générale des Matériaux Composites.....	6
I-2.1 Définition d'un Composite	6
I-2.2 Conception des Matériaux Composites.....	9
I-2.3 Caractéristiques des matériaux composites.....	10
I-2.4 Mise en œuvre des matériaux composites.....	11
I-2.5 Architecture des matériaux composites.....	13
I-3 Définition d'une poutre composite.....	15
I-4 Techniques d'assemblage des matériaux stratifiés.....	16
I-5 Domaines d'Application des Matériaux composites.....	17
I-5.1 Les composites dans l'industrie automobile.....	17
I-5.2 Les composites dans l'aérospatiale.....	18
I-5.3 Les composites dans la construction navale.....	19
Chapitre II : Principales Lois de Comportement Elastique Des Milieux Matériels	20
II.1 Introduction.....	21
II.2 Etat de contraintes et de déformations dans un solide.....	21
II.2.1 Tenseur des contraintes.....	21
II.2.2 Tenseur des déformations.....	22
II.2.3 Equations de Compatibilité.....	22
II.2.4 Matrice de Rigidité.....	23
II.2.5 Matrice de Souplesse (ou de complaisance).....	24
II.3 Matériaux Anisotropes.....	25
II.3.1 Introduction.....	25
II.3.2 Matériau Monoclinique.....	25
II.3.3 Matériau orthotrope.....	26
II.3.4 Matériau isotrope transverse.....	26

II.4 Matériaux Isotropes.....	29
II.4.1 Introduction.....	29
II.4.2 Relation d'élasticité.....	30
II.5 Equations d'équilibre pour un Milieu matériel.....	32
Chapitre III : Introduction au Comportement Mécanique d'un	
Matériau Composite.....	34
III.1 Introduction.....	35
III.2 Loi de comportement d'un pli composite UD.....	35
III.2.1 Equation de comportement mécanique d'un pli composite.....	36
III.3 Théorie classique simplifiée des stratifiés.....	42
III.3.1 Des déformations en membrane.....	44
III.3.2 Des déformations en flexion et torsion.....	44
III.3.3 Champ de contraintes pour une couche k.....	45
III.4 Loi de comportement d'un matériau composite Stratifié.....	46
III 4.1 Comportement en Membrane.....	46
III 4.2 Comportement en flexion et torsion.....	49
Chapitre IV : Comportement en Flexion des Poutres Composites sans	
Considération de L'effet du Cisaillement Transverse.....	53
IV.1 Introduction.....	54
IV.2 Equations de comportement en flexion de poutres composites	
Stratifiées.....	54
IV.2.1 Types de poutres.....	55
IV.2.2 Types de charges.....	57
IV.2.3 Lois de comportement.....	58
IV.3 Moments de flexion.....	58
IV.4 Contraintes et Déformations.....	59
IV.4.1 Flexion 3-Points.....	66
IV.4.2 Flexion 4-Points.....	69
Chapitre V : Comportement en Flexion des Poutres Composites avec	
Considération de L'effet du Cisaillement Transverse.....	73
V.1 Introduction.....	74
V.2 Equations de Comportement en Flexion en tenant Compte du Cisaillement	
Transverse.....	74

V.2.1 Relation Contrainte-Déformation.....	74
V.2.2 Résultantes en moment fléchissant.....	75
V.2.3 Résultantes en Cisaillement.....	77
V.2.4 Contraintes de flexion.....	80
V.2.4 Contraintes de cisaillement.....	80
V.3 Flexion 3-Points.....	81
V.4 Flexion 4-Points.....	83
Chapitre VI : Etude Comparative du Comportement Mécanique des	
Poutres Composites Sous L'effet de Cisaillement Transverse	
VI.1 Introduction.....	87
VI.2 Présentation des Matériaux Constitutifs Utilisés.....	88
VI.3 Caractéristiques techniques des Matériaux Utilisés.....	89
VI.4 Etapes de Calcul de la Poutre Stratifiée.....	90
VI.4.1 Description du Programme CMPCSECT.....	95
VI.4.2 Description du Programme CMPCAECT.....	97
VI.5 Discussion des Résultats Obtenus.....	99
VI.5 -1 Variation de la flèche en flexion 3-points.....	100
1-a Effet de la séquence d'empilement dans le stratifié.....	100
1-b Effet de la variation de l'épaisseur de la couche du stratifié.....	104
1-c Effet de la variation du nombre de couches d'un stratifié.....	106
1-d Effet de l'introduction de la couche d'orientation +45°.....	108
1-e Effet du coefficient de cisaillement.....	109
VI.5 -2 Influence de la séquence d'empilement sur la variation des	
Contraintes.....	110
VI.5 -3 Variation de la flèche en flexion 4-points.....	113
Conclusion.....	115
Références Bibliographiques.....	117

Introduction Générale

Les matériaux composites stratifiés ou sandwichs sont des matériaux à hautes performances mécaniques, façonnables à volonté au gré du concepteur et donc doué d'un potentiel approprié. Les poutres en composite stratifiées se développent aujourd'hui dans pratiquement tous les domaines et sont à l'origine de formidables challenges dans diverses réalisations de haute technologie. De plus en plus utilisés dans la conception et la fabrication de pièces mécaniques pour les structures aéronautiques, aérospatiales, maritime, et construction.... grâce à leurs excellentes propriétés mécaniques, sont soumis à des sollicitations mécanique et/ou thermique sévères.

De nombreux travaux de recherche ont traité le comportement mécanique des poutres composites stratifiées. Bezazi et al. [1] ont réussi de mettre en évidence l'influence du type de renfort sur les valeurs de la charge et du déplacement à la rupture des stratifiés croisés et l'endommagement au cours du chargement en flexion 3-points en statique et en fatigue de ses stratifiés croisés constituées de fibres de verre, de Kevlar et résine époxyde, ainsi que l'analyse des résultats des essais de fatigue menés sur trois types de stratifiés montre l'influence de la séquence d'empilement et de l'amplitude sur le comportement et la durée de vie du matériau. Un modèle de durabilité permettant de prédire la cinétique de perte de raideur de poutres composites à renfort verre soumises à des sollicitations de flexion en environnement humide a été développée et validé par Pauchard et al. [2]. Le développement de ce modèle a été restreint aux stades initiaux de l'endommagement, pendant lesquels ils ont considéré que la perte de raideur provenait essentiellement de l'accumulation, à l'échelle microscopique, de ruptures différées de fibres sous l'action conjuguée de la contrainte et de l'humidité. L'élargissement de la validation de la théorie des poutres Timoshenko a été proposé par Costa [3] et appliqué aux poutres composites en vibration dynamique à l'échelle nano, et en particulier des nanotubes en fibre de carbone en utilisant un coefficient de correction de cisaillement et comparant les résultats à celles obtenus par les méthodes numériques. Un nouveau modèle zig-zag qui déterminant de nouvelles fonctions de déplacement dans le cas d'analyse des vibrations libres des poutres épaisses en composites stratifiées a été présenté par Arya [4]. Afin que la théorie d'élasticité exacte des poutres homogènes ou composites soit

largement et économiquement utilisée, El Fatmi et Zenzri [5] ont introduit une méthode numérique pour le calcul des opérateurs complexes de comportement structural unidimensionnel des poutres et la solution saint-venant en trois dimensions tels que les coefficients de cisaillement, la rigidité en torsion....etc.

Une solution analytique permettant de déterminer les fréquences naturelles en flexion des poutres composites stratifiées et sandwiches basée sur la théorie d'ordre élevé a été effectuée par Kant et al. [6]. Elle décrit aussi les composantes des déformations axiales cubiques et de cisaillement transverse du quatrième ordre qui permettent de modéliser le gauchissement des sections transverses avec une certaine précision tout en éliminant le besoin de déterminer le coefficient de cisaillement transverse. En revanche Huang et al. [7] ont procédé, par une solution approchée à l'analyse dynamique des poutres composites et au calcul du couplage entre les déformations mécaniques et des équations de charge électrostatique par l'utilisation de Matlab. En utilisant des indicateurs piézoélectriques.

Une étude réalisée par Dong et al. [8] pour la détermination des caractéristiques des vibrations de poutres étagées Timoshenko en composites stratifiées par la théorie des déformations de cisaillement du 1^{er} ordre dans le but de calculer la rigidité en flexion et en cisaillement transverse et montrer l'effet de la déformation due au cisaillement et à l'inertie rotationnelle des poutres étagées ou à variables sections. Par contre Christian [9] a vu nécessaire et même important d'éclaircir l'influence du délaminage entre les couches sur les fréquences naturelles et les déformées modales des poutres composites stratifiées encastées-libres et encastées-encastées. La référence [10] s'intéresse au développement d'un élément de poutre stratifiée à trois nœuds hétérosis en flexion cylindrique par l'adoption de l'hypothèse à double superposition de Li et Liu qui déduit les déplacements dans le plan des stratifiés des déplacements locaux d'un pli unidirectionnel pour éviter l'augmentation du nombre de degrés de liberté en statique avec le nombre de plis du stratifié.

Notre travail consiste à traiter l'étude comparative du comportement mécanique des structures composites soumises à la flexion pure (l'effort tranchant est nul) et à la flexion en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse. Cette étude est réalisée sur des poutres en matériaux composite stratifiés symétriques croisés et équilibrés constituées de dix plis réguliers. Les

poutres considérées, renforcées par la fibre en verre du type « E » et dans une résine en époxyde, travaille à la flexion 3-points. On cherche alors, à déterminer l'effet de la séquence d'empilement, de l'orientation des fibres, de l'épaisseur du pli et du coefficient de cisaillement transverse sur le comportement mécanique des poutres composites croisées: $[0_4/90_2/0_4]$, $[0_3/90_4/0_3]$, $[0/90]_{5s}$, $[90_4/0_2/90_4]$, $[90_3/0_4/90_3]$ et $[90/0]_{5s}$; et équilibrées $[45_4/-45_2/45_4]$, $[45_3/-45_4/45_3]$ et $[45/-45]_{5s}$. Dans ce contexte, en dehors de l'introduction et la conclusion générales, cette étude se décompose en six chapitres. Le premier chapitre est consacré aux généralités sur les matériaux composites et en particulier les poutres stratifiées et les sandwiches, la mise en œuvre, les techniques de conception et d'assemblage et leurs domaines d'application. Avant de procéder au comportement mécanique des matériaux composites, on a vu important de développer au deuxième chapitre les principales lois de comportement élastique des milieux matériels. Le troisième chapitre présente la théorie classique simplifiée des stratifiés et les lois de comportement de ces matériaux et leurs différence des matériaux classiques. Dans le quatrième chapitre, on a abordé les principes fondamentaux relatifs à la théorie des poutres nécessaires à la formulation des équations de comportement en flexion sans prise en considération de l'effet de cisaillement transverse. De même dans le cinquième chapitre, on a aussi décrit les lois définissant les contraintes et les déformations dans les poutres stratifiées chargées en flexion 3-points et en flexion 4-points en prenant en compte le cisaillement transverse. Enfin dans le dernier chapitre on a informatisé les différentes étapes de calculs des poutres composites stratifiées pour effectuer une étude comparative de leur comportement mécanique en flexion pure et lorsqu'on tient en compte l'effet de cisaillement transverse. En assimilant la pièce mécanique étudiée à une poutre stratifiée constituée de dix plis en verre-E/époxyde, l'analyse et la discussion des résultats obtenus a fait sortir une conclusion sur l'influence de la nature du matériau des constituants, le choix de l'empilement et plus particulièrement l'ordre des orientations et le nombre des couches composantes sur le comportement des poutres composites stratifiées symétriques.

CHAPITRE I

DEFINITION DES MATERIAUX COMPOSITES STRATIFIES ET LEURS APPLICATIONS

I.1 Introduction :

La résistance des matériaux a toujours été un critère d'importance majeure dans la conception des pièces des structures développées par les industries de construction. C'est la première qualité attendue pour le plancher d'une automobile, pour le tablier d'un pont ou pour le fuselage d'un avion. Avec l'augmentation du coût des hydrocarbures liée à leur raréfaction, un autre critère a pris une grande importance : celui de la légèreté des matériaux qui permet de dépenser moins d'énergie pour déplacer les objets qu'ils constituent. Les propriétés mécaniques d'un objet dépendent bien sûr de sa forme et de la nature de ses constituants mais également de la façon dont ces derniers sont structurés et assemblés. Les progrès des matériaux de construction proviennent aussi bien des recherches relatives à leurs compositions chimiques que celles qui concernent les procédés de fabrication. À titre d'exemple, l'aluminium est de plus en plus utilisé car c'est un métal léger. Comme il est peu résistant aux contraintes mécaniques, il faut souvent l'associer à des pièces d'acier mais il s'avère difficile de faire adhérer solidement ces deux métaux l'un à l'autre.

L'emploi de matériaux plus légers sans perte de solidité et sans augmentation importante des coûts de production est devenu le principal enjeu de la compétition actuelle entre Boeing et Airbus. Cet objectif est en bonne partie à l'origine de la création récente des ensembles métalliques et composites complexes, à cette fin, les chercheurs et les ingénieurs tendent à remplacer progressivement les pièces métalliques par des pièces hétérogènes dans lesquelles des fibres de carbone sont noyées dans une matrice en polymère. La présence des fibres renforce la résistance mécanique du matériau le long de son axe principal ; la présence de polymère assure à la fois la cohésion de l'ensemble et la résistance du matériau à des sollicitations transverses.

I.2 Présentation Générale des Matériaux Composites :

Contrairement aux matières premières classiques dont on connaît à l'avance les caractéristiques mécaniques, celles des composites ne sont réellement connues qu'après fabrication, car on réalise, en même temps, le matériau et le produit. Actuellement, les composites à matrice organique représentent la majorité des matériaux composites; toutefois, il existe également des composites à matrice inorganique (métallique ou céramique) dont la diffusion reste encore marginale.

L'analyse du comportement des matériaux composites et la prévision de leurs propriétés vont faire intervenir les caractéristiques de la matrice, celles des fibres, des problèmes d'interface et des conditions de fabrication. En effet, les propriétés mécaniques des composites sont très dépendantes des fibres employées : nature, répartition, taux, longueurs, diamètres, ensimages... Toutefois, les propriétés mécaniques, électriques, chimiques, photochimiques, thermiques sont largement affectées par celles de la matrice (en particulier par les températures de transition et de fusion pour les thermoplastiques) et cela d'autant plus que la fibre est plus courte et en plus faible proportion. Une bonne connaissance des plastiques renforcés doit donc être fondée sur celle des renforts et des matrices.

1.2.1 Définition d'un composite

Un composite est un matériau artificiel moderne dont la structure est composée de deux constituants ou plus, combinés à une échelle microscopique, et qui ne sont pas solubles entre eux. L'un des constituants est appelé « Renfort » noyé dans l'autre constituant appelé « Matrice ». La phase de renforcement du matériau doit être sous la forme de fibres, particules, ou paillettes. La phase matrice du matériau est généralement continue.

- **La matrice :**

Pour des raisons de facilité de mise en œuvre sans pression, ce sont les polymères transformés à l'état liquide qui ont été initialement choisis pour servir de matrices et qui continuent à être le plus souvent employés. Aussi on trouve des matrices en métaux, céramique ou carbone selon le domaine d'utilisation. Les objectifs de l'utilisation de la matrice sont multiples, les plus importants sont :

- Support et protection chimique des fibres ou particules ;
- Répartition et transfert de charges.
- donner la forme désirée au produit final.

- **Le renfort :**

Ce sont des particules d'environ 50 microns de diamètre. Il existe des renforts fibre courte (de l'ordre du mm), des renforts fibre moyenne ou mi-longue (de l'ordre du cm) et des renforts fibre longue (où les fibres font environ la taille de l'échantillon). Il représente l'armature, squelette, il assure la tenue mécanique (rigidité, résistance à la rupture, dureté, etc.). Souvent de nature filamentaire (des fibres organiques ou inorganiques), les fibres les plus utilisées dans l'industrie.

Fibre de verre obtenue à partir de silice et d'additifs. Le verre est coulé en fusion à 1500°C à travers une filière en platine-rhodium ; après refroidissement, les filaments sont étirés pour obtenir des fibres continues de 3 à 20mm. Suivant l'application auxquelles elles sont destinées, les fibres de verre sont réparties en trois qualités :

Fibre E pour les composites grandes diffusions (GD) ;

Fibre D pour les applications dans la construction électrique ;

Fibre R pour les composites hautes performances (HP).

Les fibres de verre constituent le principal renfort, utilisé dans plus de 90% des matériaux composites, et plus particulièrement pour les produits de grande diffusion (GD). Elles offrent, pour un prix raisonnable:

- une bonne adhérence entre fibres et résines (matrices) ;
- de bonnes propriétés mécaniques, mais inférieures à celles de la fibre de carbone;
- des propriétés d'isolation électrique acceptables pour la plupart des applications.

En Europe, les fibres de verre sont utilisées principalement dans :

- la plupart des composites « GD » (automobile, construction.....)
- certains composites « HP » avec des fibres de verre « R »

L'utilisation des fibres de verre dans les composites est principalement limitée par une rigidité insuffisante pour certaines applications comme les pièces de structure primaire en aéronautique ; et un vieillissement accéléré au contact prolongé de l'eau, des rayonnements UV ou de températures élevées.

Les fibres de verre utilisées dans les composites ont un diamètre de l'ordre de 10 micromètres, nettement supérieur au diamètre critique (de l'ordre de 3 micromètres) pour que la fibre ne présente pas de risque respiratoire et ne puisse engendrer des cancers.

Fibre de Carbone : les fibres de carbone possèdent de très bonnes caractéristiques mécaniques (spécialement une excellente tenue en température), une faible masse volumique, et une bonne conductibilité.

L'utilisation de la fibre de carbone reste limitée aux secteurs de l'aéronautique et des sports et loisirs, à cause du prix.

Cependant, les fibres de carbone souffrent aussi de certains handicaps techniques qui limitent également leur utilisation pour des structures composites tels que:

l'allongement à la rupture est insuffisant (inférieur à 2%) comparé à celui des fibres de verre et d'aramide (3 à 4%) ; et aussi une caractérisation encore insuffisante pour permettre une conception fiable à Prix modéré.

Fibre Aramide 'Kevlar' : ces fibres sont des Polyamides aromatiques, ces fibres ont une mauvaise tenue en compression, mais une bonne résistance au choc et à la fatigue. La fibre d'aramide (on la nomme souvent « **Kevlar** », qui est la marque de son créateur, (Dupont de Nemours.) utilisée dans les protections balistiques gilets pare-balles.

En plus de ces deux constituants de base, il faut rajouter : une interface qui assure la compatibilité renfort-matrice, qui transmet les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif. Bonne adhérence en couche fine. Des produits chimiques (charges et additifs) entrent aussi dans la composition du composite, l'interphase etc. ... qui peuvent jouer sur le comportement mécanique, mais n'interviennent pratiquement jamais dans le calcul de la structure composite.

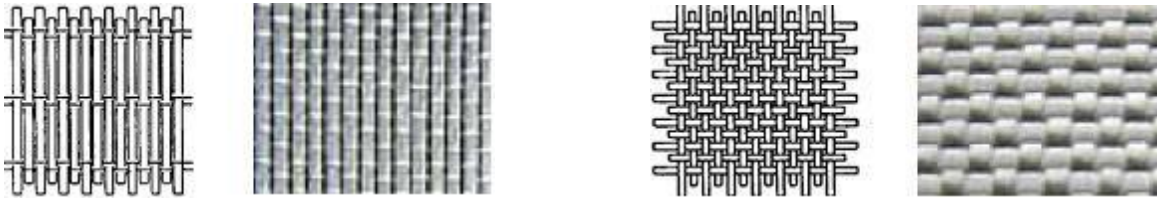
I.2.2 Conception des matériaux composites :

On conçoit un composite en fonction du type d'application, de chargement ; ce qui est différent des matériaux classiques où on adapte la conception d'une structure en fonction du matériau constitutif.

Pour un composite, on construit sa structure à la demande :

- la nature, la texture, la forme du renfort et son orientation (Figure 1.1)
- le taux de renforcement
- la nature de la résine et des charges ou additifs
- la qualité de l'interface renfort-matrice
- la géométrie de la pièce à réaliser
- le procédé de mise en œuvre utilisé

On cherchera toujours à orienter au mieux les renforts en fonction des efforts auxquels la structure est soumise pour optimiser le comportement mécanique dans une direction déterminée.



Armure unidirectionnelle

Armure toile ou taffetas

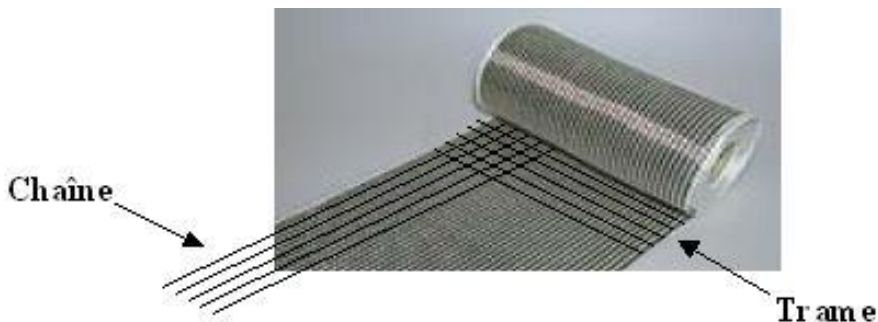


Figure1.1 Ruban unidirectionnel carbone / verre sur lequel sont mis en évidence la chaîne et la trame

I.2.3 Caractéristiques des matériaux composites :

Les matériaux composites se caractérisent des matériaux classiques par un module élevé, une masse volumique faible, une bonne tenue en fatigue, une absence de corrosion, et ne se plastifient pas. De plus, les formes complexes sont aisément réalisables par moulage, ils vieillissent sous l'action de l'humidité et la chaleur, ils sont insensibles aux produits chimiques courants de la mécanique comme les graisses, huiles, liquides hydrauliques, peintures, solvants, pétrole (sauf les décapants de peinture attaquent les résines époxydes), mais ils ont une tenue aux impacts et aux chocs très moyenne/matériaux métalliques.

I-2.4 Mise en œuvre des matériaux composites :

Les méthodes de mise en œuvre spécifiques aux matières plastiques renforcées ont contribué à l'évolution des termes utilisés pour désigner ces matériaux depuis leur origine, c'est-à-dire depuis une cinquantaine d'années.

Des techniques originales ont été élaborées pour la mise en œuvre de composites à fibres longues. La description de ces méthodes spécifiques occupe évidemment une place importante dans la rubrique « Composites ».

Trois opérations sont indispensables (Figure 1.2) :

- 1- Imprégnation du renfort par le système résineux.
- 2- Mise en forme à la géométrie de la pièce.
- 3- Durcissement du système.

Soit par polycondensation et réticulation (ou polymérisation) pour les matrices thermodurcissables, Soit par simple refroidissement pour les matières thermoplastiques. Il existe différentes techniques mais la plus utilisée est par moulage :

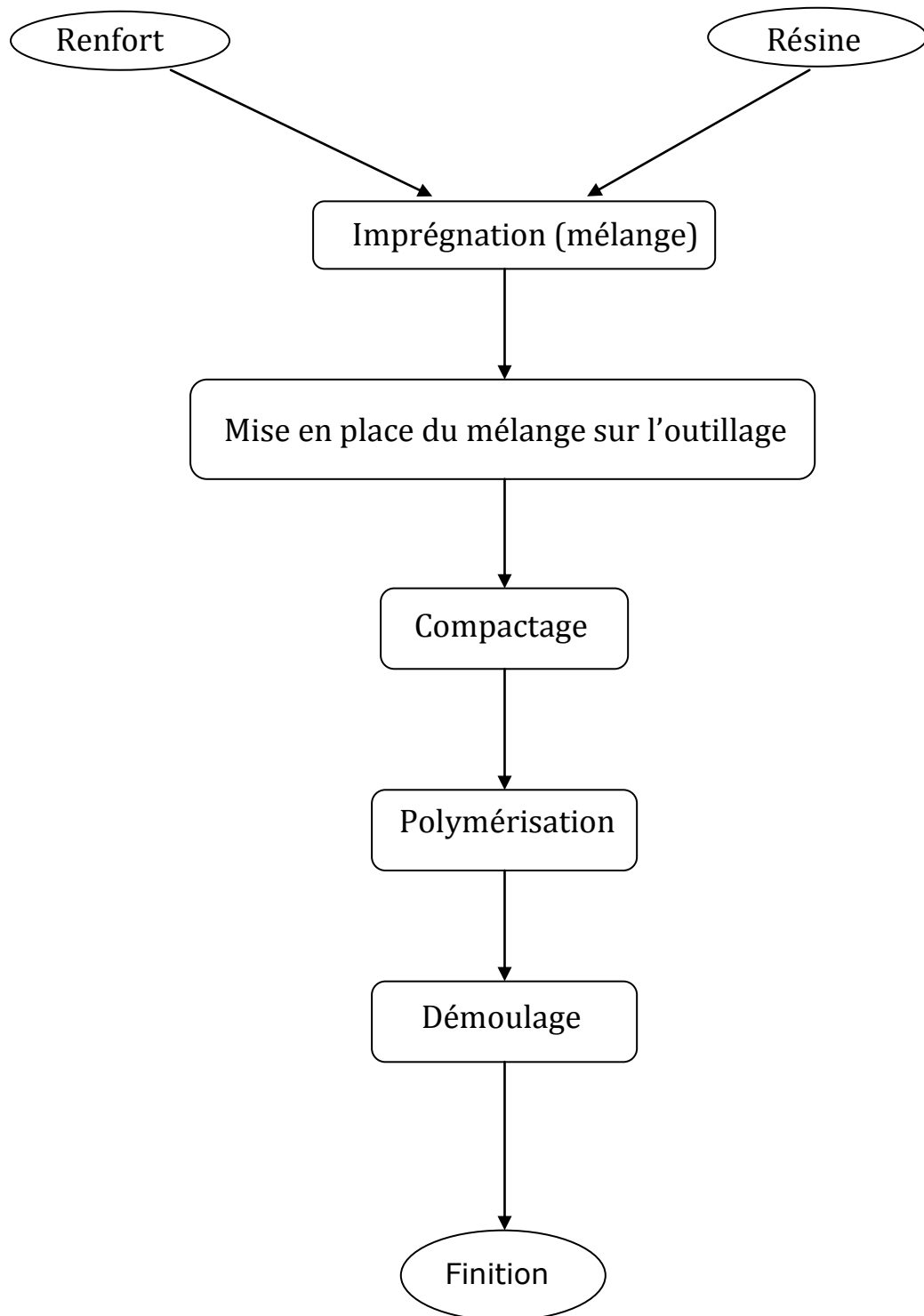


Figure 1.2 Différents étapes de formage par moulage d'un matériau composite

Les procédés les plus importants sont :

Les procédés d'obtention de pièces composites les plus répandues sont :

1. Fabrication par Moulage
2. Pultrusion
3. Pultrusion Thermoplastique
4. Injection des Thermoplastiques Renforcés
5. Enroulement Filamentaire
6. Enroulement Filamentaire Thermoplastique
7. Centrifugation
8. Moulage des TRE

I.2.5 Architecture des matériaux composites :

a- Monocouches :

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes.

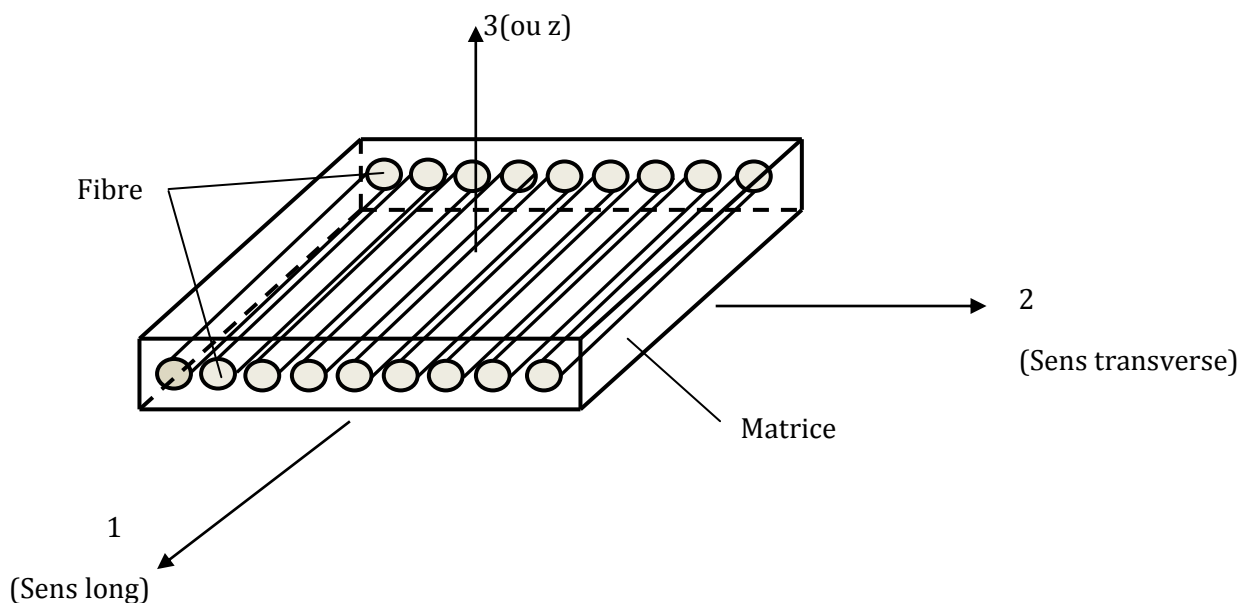


Figure 1.3 : Pli à Renforcement unidirectionnel

b- Stratifiés :

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacune une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches, et désigné comme le référentiel du stratifié (Figure 1.4).

Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques. On pourra avoir des stratifiés du type :

1. Equilibré : stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction $+\theta$ que de couches orientées suivant la direction $-\theta$.
2. Symétrique : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.
3. Antisymétrique : stratifié comportant des couches disposées non symétriquement par rapport à un plan moyen.
4. Croisé : stratifié comportant autant de couches à 0° que de couches à 90° .
5. Hybride : les couches successives comportent des fibres de natures différentes, il s'agit d'un stratifié hybride.

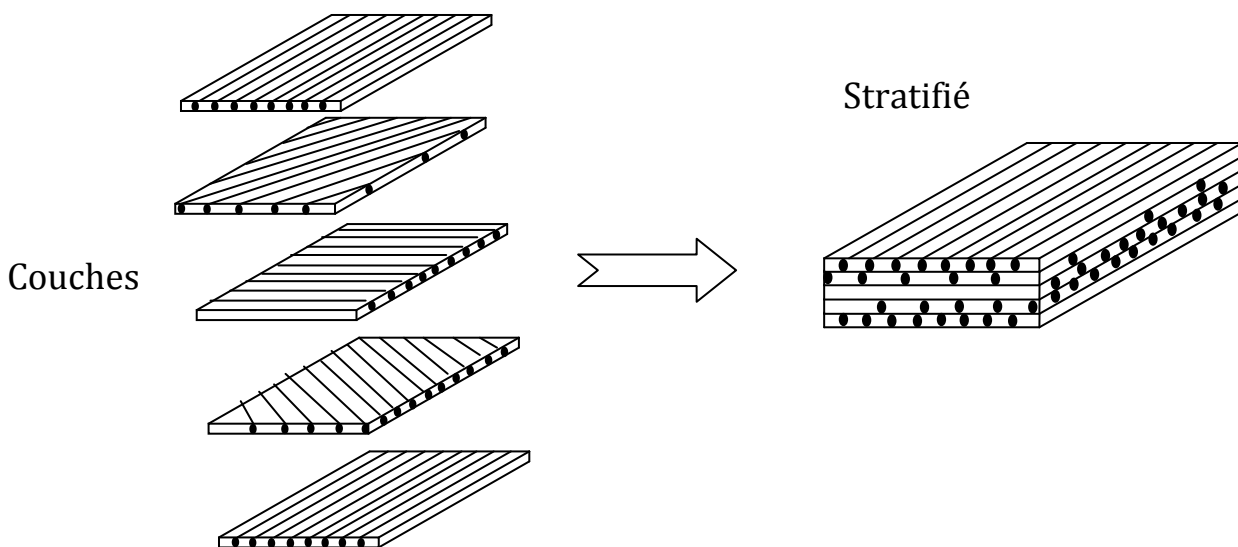


Figure 1.4 : Constitution d'un stratifié

c- Sandwich :

Les matériaux sandwichs résultent généralement de l'association de deux semelles ou peaux de faible épaisseur, constituées de matériaux à haute résistance et haut module et d'une âme beaucoup plus épaisse et de faible densité (Fig 1.5). Ils ont pour avantages: une grande rigidité, une résistance à la rupture élevée associées à un faible poids par unité de surface. Malgré une activité de recherche et de développement sur ces matériaux, le comportement au cours de l'endommagement reste peu connu. Le matériau sandwich possède une grande légèreté en flexion et c'est un excellent isolant thermique.

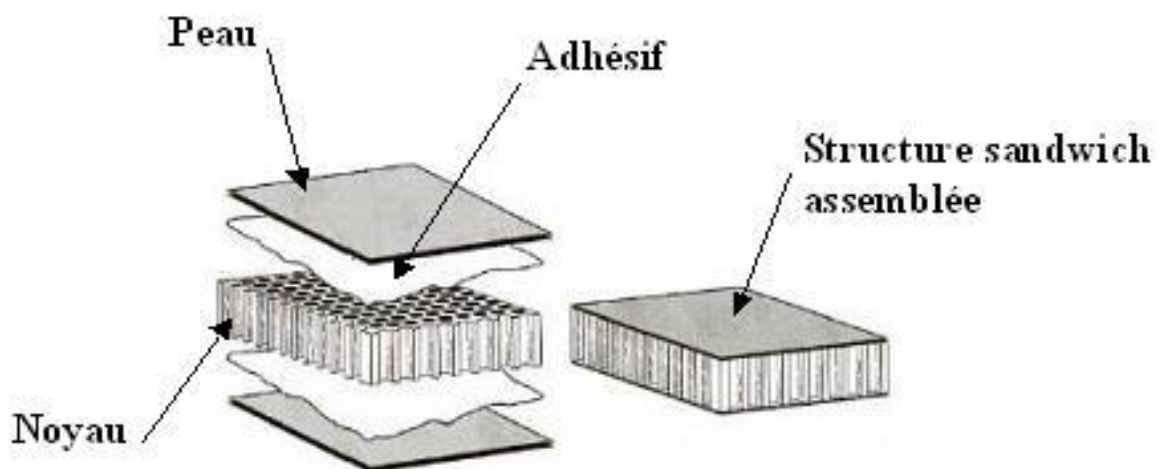


Figure 1.5 : Constitution d'un sandwich

I.3 Définition d'une poutre composite :

Le terme de « poutre » désigne un objet dont la longueur est grande par rapport aux dimensions transverses (section fine). Une poutre est un élément de structure utilisée pour la construction dans les bâtiments, les navires et autres véhicules, les rails de chemin de fer, les ponts d'aérospatiale, la robotique et dans la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines conditions (Figure 1.6). En

ingénierie moderne, une poutre classique est remplacée par une poutre composite pour sa légèreté et sa résistance.



Figure 1.6 : Exemple d'une Poutre composite en I

I.4 Techniques d'assemblage des matériaux stratifiés :

Le collage est une technique d'assemblage courante consiste en l'adhésion par attraction moléculaire entre deux parties à coller et un adhésif interposé qui doit assurer la transmission des efforts.

On peut citer pour principaux avantages de ce mode d'assemblage des couches d'un stratifié :

- La répartition des contraintes de liaison sur une surface importante
- La possibilité d'optimiser la géométrie et les dimensions du collage
- La légèreté de l'assemblage
- Les propriétés d'isolation et d'étanchéité de l'adhésif.

I.5 Domaines d'Application des Poutres composites :

Les poutres composites entrent aujourd'hui dans pratiquement tous les domaines d'applications possibles : Piscines, bassins, bâtiments... Les transports aériens, maritime, routier, ferroviaire... Sports et loisirs,etc.

Pour beaucoup d'applications structurales, comme sur les plates-formes pétrolières offshore, les composites à matrice polymère apparaissent comme de sérieux concurrents des métaux, du fait principalement de leur légèreté. Pourtant, l'industrialisation de solutions composites est délicate, car les avantages compétitifs sont amoindris par les surcoûts induits, et surtout, par la difficulté à prévoir l'évolution des propriétés d'usage de ce type de matériaux, notamment sous sollicitations environnementales et mécaniques couplées [11].

I.5.1 Les composites dans l'industrie automobile :

Les matériaux organiques composites à matrices thermoplastiques ou thermodurcissables renforcées par des fibres, généralement de verre, courtes ou longues ont fait leur apparition dans l'automobile durant les années 60-70. Même s'ils sont aujourd'hui utilisés presque exclusivement pour satisfaire certaines fonctions, leur taux d'utilisation ne dépasse pas 10 à 15 % selon les véhicules. Généralement, l'habitacle (habillage intérieur) d'un véhicule est essentiellement constitué de matériaux polymères et de composites, qui à eux seuls représentent environ 50 % de la quantité utilisée sur un véhicule tant en Europe qu'aux États-Unis :

- 48 % pour les véhicules nord-américains en 1994
- 50 à 60 % (y compris les insonorisant) pour l'ensemble de la gamme actuelle Renault. Les principales applications concernent : la planche de bord et le poste de conduite, les ébénisteries et les habillages de portes, les garnitures de toit, les sièges, la tablette arrière, les tapis de sol et les textiles.

Les principales applications concernent aussi les accessoires tels que: les peaux de boucliers, les calandres, les grilles d'auvent, les enjoliveurs de roues, les rétroviseurs, les feux de signalisation, les bras d'essuie-vitre, les baguettes, les becquets, les ailerons, les poignées de porte, etc. [12]

I.5.2 Les composites dans l'aérospatiale :

Les constructeurs aéronautiques font de plus en plus appel aux matériaux composites du type matrice polymère/fibres de carbone continues pour réduire la masse des avions. La pénétration de ces matériaux est passée de 20 % pour l'Airbus A340 à plus de 50 % pour le futur Boeing B787. La réduction des coûts de fabrication à qualité mécanique constante passe par une intégration forte des phases de conception et de fabrication : sélection concomitante des constituants, semi-produits et modes d'assemblage. La prévision des performances doit être souple pour une gamme de solutions données. Un essai représentatif du mode de sollicitation considéré comme le plus pénalisant permet une approche quantitative réaliste dans un contexte industriel. L'essai peut lui-même être en phase de développement lorsqu'il s'agit d'un système original [13]. Les poutres composites à base de fibres occupent une place de plus en plus importante dans la construction d'avions, d'hélicoptères, de missiles, de lanceurs et de satellites, avec, en tête, les composites renforcés par des fibres de carbone (CFRP), dont la masse est composée à 60 % de fibres et à 40 % de résine. Mais il existe également des structures sandwichs et alvéolaires, les stratifiés fibres-métal, les composites à fibres de verre, sans oublier les fibres céramiques destinés notamment aux environnements à température très élevées tels que les moteurs de fusées. Le GLARE composé principalement d'aluminium et de fibre de verre est utilisé en aéronautique. Les composites ont fait leur entrée chez Airbus en 1972 lorsque l'avionneur décide de les utiliser pour les bords d'attaque de la dérive de l'A300B. En 1982, très en avance sur le reste de l'industrie, l'avionneur européen étend leur présence aux déporteurs de sol et aux gouvernes de profondeur et de direction de l'A310-200. Les premières structures primaires, notamment de la dérive de l'A310-300 et de l'empennage horizontal et des volets de l'A320 suivent en 1987. Puis, c'est le tour de la gamme long-courrier avec l'empennage horizontal et vertical –

qui servent également de réservoirs de carburant, les gouvernes de profondeur et de direction, les volets, les ailerons, les déporteurs, les trappes d'atterrisseur ainsi que divers éléments de carénage de l'A340. Et la série des innovations révolutionnaires continue ensuite, par exemple avec le développement d'un support de quille en CFRP pour l'A340-500/-600, et surtout avec le bouclier de pressurisation pour ce même modèle, première pièce composite destinée à la partie pressurisée d'un fuselage [14].

I.5.3 Les composites dans la construction navale:

D'après la littérature, la première apparition des matériaux composites en construction navale se situerait en 1946. L'US NAVY réalise à cette époque des embarcations de 28 pieds, destinées au transport de personnels, suivant deux techniques : le moulage sous pression et l'injection sous vide avec des taux de fibres modestes (de l'ordre de 25 %). Progressivement la technique de stratification au contact en voie humide s'impose pour les applications navales. A partir de 1955, l'apparition des tissés de roving ainsi que de nouvelles techniques de moulage entraîne une croissance rapide des applications des matériaux composites, toujours limitées à de petites unités (jusqu'à 57 pieds) : vedettes de patrouilles Côtières, transports de personnels, navires de débarquement... [15].

Afin de remplacer le bois, putrescible, par des matériaux insensibles à la corrosion marine et à l'eau de mer, tout en assurant une excellente flottabilité, en permettant de réaliser des volumes creux importants et solides à bas prix. Pour les bateaux de taille moyenne (bateaux de plaisance, de pêche, grands catamarans de compétition et aussi les petits navires commerciaux ou les chasseurs de mines qui ne doivent pas avoir de coques métalliques) on construit donc des coques volumineuses en stratifiés polyester-verre, sur lesquelles on assemble les membrures, poutres et renforts longitudinaux et couples, qui sont aussi réalisés en matériaux composites, qui peuvent être collés ou assemblés par stratification [16].

CHAPITRE II

PRINCIPAUX LOIS DE COMPORTEMENT ELASTIQUE DES MILIEUX MATERIELS

II.1 Introduction :

Un ensemble de lois de comportement a donc pour objectif de caractériser une classe limitée (même si elle est vaste) de milieux matériels soumis à certaines sollicitations extérieures d'origine mécanique ou thermique. Ces lois sont évidemment déduites de l'expérience. Toutefois, leur forme ne peut être totalement arbitraire. Une des premières exigences qu'on leur impose est de faire en sorte que le second principe de la thermodynamique soit satisfait [17].

Il sera également demandé aux lois de comportement de respecter les symétries du milieu matériel étudié et de vérifier des conditions liées à la stabilité des équilibres.

II.2 Etat de contraintes et de déformations dans un solide :

La notion de déformation d'un milieu continu naît de la comparaison entre une configuration dite « initiale » et une configuration qualifiée de « finale ». Ce chapitre présente quelques notions générales portant sur les lois de comportement des milieux anisotropes et plus particulièrement des matériaux orthotropes et isotropes transverses parmi lesquels figurent les composites unidirectionnels.

II.2.1 Tenseur des contraintes :

En tout point P d'un milieu continu, l'état des contraintes est entièrement déterminé par la connaissance du tenseur des contraintes, noté σ_{ij} et représenté par la matrice :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

Par définition le tenseur des contraintes σ_{ij} est symétrique c.à.d.

$$\sigma_{21} = \sigma_{12}, \quad \sigma_{31} = \sigma_{13}, \quad \sigma_{32} = \sigma_{23}$$

II.2.2 Tenseur des déformations :

Le tenseur des déformations est un tenseur symétrique défini par la théorie de linéarité (dite des petites déformations) par la formule :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.2)$$

D'où : $\vec{u}(p)$ est le vecteur de déplacement du point p.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), & \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, & \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right), \end{aligned}$$

Le tenseur des déformations s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

II.2.3 Equations de Compatibilité :

Le champ des déplacements correspondant à un état de déformation donné est obtenu par intégration des équations données par la relation (2.2). Soit au total six équations pour déterminer les trois composantes (u_1, u_2, u_3) du vecteur de déplacement. Pour que la solution soit unique, les composantes du tenseur des déformations doivent vérifier les six relations de compatibilité [17]:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial^2 x_j^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial^2 x_i^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad i \neq j \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} \right), \quad i \neq j \neq k$$

avec $i, j, k = 1, 2, 3$

II.2.4 Matrice de Rigidité :

La relation d'élasticité linéaire est décrite par la loi de Hooke généralisée :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (2.5)$$

Elle s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.6)$$

$C_{ijkl} = C_{klij}$ quand l'énergie de déformation est considérée,

D'où : $C = [C_{ij}]$ est la matrice de Rigidité symétrique de 21 composantes indépendantes, exprimée dans la base $(\vec{e}) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Dans le cas de changement de base, la matrice de rigidité C devient $C' = [C'_{ij}]$, exprimée dans la nouvelle base $(\vec{e}') = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$.

Donc :

$$\text{Dans la base } (\vec{e}): \quad \sigma = C \varepsilon. \quad (2.7)$$

$$\text{Dans la base } (\vec{e}'): \quad \sigma' = C' \varepsilon'. \quad (2.8)$$

$$\text{Sachant que : } \sigma' = T_\sigma \sigma \quad \text{et} \quad \varepsilon' = T_\varepsilon \varepsilon. \quad (2.9)$$

D'où : T_σ et T_ε sont respectivement les matrices de changement de base (appelé aussi matrice de transformation) des contraintes et des déformations.

$$\sigma' = T_\sigma \sigma = T_\sigma C \varepsilon = T_\sigma C T_\varepsilon^{-1} \varepsilon' \quad (2.10)$$

A partir des deux relations (2.7) et (2.9), on peut exprimer le changement de base de la matrice de rigidité :

$$C' = T_\sigma C T_\varepsilon^{-1} \quad (2.11)$$

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$[T_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

II.2.5 Matrice de Souplesse (ou de complaisance) :

La relation d'élasticité linéaire (2.4) peut être écrite sous la forme inverse, comme :

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad \text{ou} \quad \varepsilon = S \sigma \quad (2.14)$$

La matrice S est la matrice inverse de la matrice de rigidité C , et s'écrit dans le cas général comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.15)$$

Avec :

$$S = C^{-1} \quad (2.16)$$

Les coefficients S_{ij} sont appelés constantes de souplesse ou de complaisance.

La relation de changement de base de la matrice de souplesse s'exprime par :

$$S' = T_\varepsilon S T_\sigma^{-1} \quad (2.17)$$

II.3 Matériaux Anisotropes

II.3.1 Introduction :

L'anisotropie se dit d'un corps dont les propriétés varient suivant la direction ; par exemple, en optique cristalline, dans un cristal anisotrope (ou biréfringent), la vitesse de la lumière est fonction de sa direction de propagation. Sous le microscope optique, ce phénomène se traduit par l'apparition de couleurs.

Les matériaux composites sont généralement des anisotropes par opposition aux matériaux métalliques qui sont des isotropes. Par exemple, pour une nappe unidirectionnelle, la résistance et la rigidité sont beaucoup plus grandes dans le sens des fibres que dans les autres directions. La prise en compte de l'anisotropie est essentielle pour la conception et le dimensionnement d'une structure en matériaux composites car son comportement sera très différent de celui d'une structure isotrope de géométrie identique. Grâce à l'anisotropie on peut disposer les matériaux en fonction des états de chargement en chaque point, ce qui permet une réduction importante de la quantité en matière et donc du poids, critère vital en aéronautique et dans le domaine spatial.

II.3.2 Matériau Monoclinique :

Un matériau monoclinique est un matériau qui possède un seul plan de symétrie. La forme de la matrice de rigidité (ou de souplesse) doit être telle qu'un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce plan ne modifie pas la matrice. Dans le cas où le plan de symétrie est le plan (1,2), l'exploitation des changements de base conduit à une relation d'élasticité linéaire de la forme [17]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.18)$$

La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 13.

II.3.3 Matériau orthotrope :

Un matériau orthotrope possède trois plans de symétrie, perpendiculaires deux à deux. Il est à noter que l'existence de deux plans de symétrie perpendiculaires implique l'existence du troisième : la forme de la matrice de rigidité est donc obtenue en ajoutant au matériau monoclinique un plan de symétrie perpendiculaire au précédent. L'invariance de la matrice dans un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce deuxième plan conduit à une relation d'élasticité linéaire de la forme [18]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.19)$$

La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 9.

II.3.4 Matériau isotrope transverse:

Un matériau isotrope transverse est un matériau orthotrope possédant de plus un axe de révolution et admet le plan (2,3) comme plan d'isotropie. Il en résulte qu'un changement de base effectué par rotation quelconque autour de cet axe doit laisser inchangée la matrice de rigidité(ou de souplesse). D'où un matériau composite unidirectionnel qui peut être considéré comme un matériau isotrope transverse (Figure 2.1).

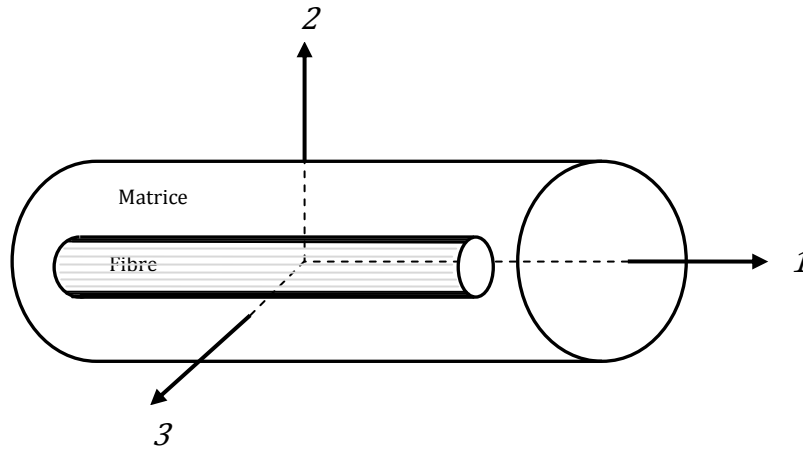


Figure 2.1 Matériau composite unidirectionnel

Si le plan (2, 3) est un plan d'isotropie, les modules d'élasticité de mêmes indices dans les deux bases $R (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $R' (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ qui sont définies par les relations suivantes :

$$\vec{e}'_1 = \vec{e}_1$$

$$\vec{e}'_2 = \cos \alpha \vec{e}_2 + \sin \alpha \vec{e}_3 \quad (2.20)$$

$$\vec{e}'_3 = -\sin \alpha \vec{e}_2 + \cos \alpha \vec{e}_3$$

Ont la même valeur quel que soit l'angle α (Fig 2.2).

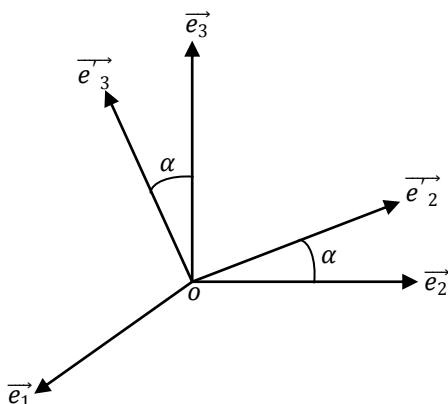


Figure 2.2 plan d'isotropie transverse

La matrice de passage de la base (R) à la base (R') est sous la forme :

$$[\beta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

a pour composantes non nulles :

$$\beta_{11} = 1.$$

$$\beta_{22} = \beta_{33} = \cos \alpha \quad (2.22)$$

$$\beta_{32} = -\beta_{23} = \cos \alpha$$

Dans le cas particulier où $\alpha = \frac{\pi}{2}$, les composantes non nulles de β sont:

$$\beta_{11} = 1, \quad \beta_{32} = 1, \quad \beta_{23} = -1$$

La formule de changement de base :

$$C'_{ijkl} = \beta_{pi} \beta_{qj} \beta_{rk} \beta_{sl} C_{pqrs} \quad (2.23)$$

Le développement de la relation (2.22) conduit à :

$$C_{33} = C_{22}, \quad C_{13} = C_{12}, \quad C_{55} = C_{66} \quad (2.24)$$

et

$$S_{33} = S_{22}, \quad S_{13} = S_{12}, \quad S_{55} = S_{66} \quad (2.25)$$

Compte tenu des relations (2.23) et (2.24), la matrice de rigidité est composée de 6 constantes indépendantes :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.26)$$

et la matrice de souplesse :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.27)$$

Pour un angle α quelconque, on a :

$$\beta_{11} = 1.$$

$$\beta_{22} = \cos \alpha, \quad \beta_{23} = -\sin \alpha \quad (2.28)$$

$$\beta_{32} = \sin \alpha, \quad \beta_{33} = \cos \alpha$$

On obtient après développement des relations (2.28) donc :

$$2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha C_{22} = 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha (C_{23} + 2C_{44}).$$

Cette relation est vérifiée quel que soit l'angle α si on a :

$$C_{22} = C_{23} + 2C_{44} \quad \text{d'où} \quad C_{44} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) \quad (2.29)$$

De ce fait, un matériau isotrope transverse est caractérisé par 5 constantes d'élasticité indépendantes. Ainsi la relation d'élasticité linéaire s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.30)$$

et la matrice de souplesse :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.31)$$

II.4 Matériaux Isotropes :

II.4.1 Introduction :

Un matériau est dit isotrope si ses propriétés sont indépendantes du choix de ses axes de référence. Les matériaux usuels ou bien classiques (excepté le bois) répondent généralement à cette modélisation établie à l'échelle macroscopique.

Il n'existe alors pas de directions privilégiés ou plans de symétrie, et la matrice de rigidité (ou de souplesse) doit être invariante dans tout changement de bases orthonormées. L'application de cette propriété au matériau unidirectionnel conduit aux relations :

$$C_{22} = C_{11}, \quad C_{23} = C_{12}, \quad C_{66} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \quad (2.32)$$

II.4.2 Relation d'élasticité :

Un milieu isotrope est caractérisé par 2 constantes d'élasticité indépendantes C_{11} et C_{12} qui seront exprimées en introduisant les coefficients de Lamé λ et μ [16] :

$$C_{12} = \lambda, \quad \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) = \mu \quad (2.33)$$

$$d'où: \quad C_{11} = \lambda + 2\mu \quad (2.34)$$

La matrice de rigidité devient comme suit :

$$\begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

La relation d'élasticité linéaire (2.4) dans un milieu isotrope sera exprimée en fonction des constantes de lamé par:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (2.36)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kk} &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} && \text{Dilatation Volumique} \\ \delta_{ij} &= \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} && \text{le tenseur de Kronecker} \end{aligned}$$

Les contraintes normales ($i=j$) s'écrivent alors :

$$\sigma_{ii} = \lambda \delta_{ii} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ii}, \quad (2.37)$$

Et les contraintes tangentielles (de cisaillement) ($i \neq j$) :

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (2.38)$$

De la relation (2.35), nous déduisons :

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = (3\lambda + 2\mu)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}),$$

Ou bien :

$$\sigma_{kk} = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{kk} \quad (2.39)$$

Les déformations en fonction des contraintes s'obtiennent facilement à partir des relations (2.35) et (2.37) :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right), \quad (2.40)$$

Les déformations normales (i=j) s'écrivent alors :

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ii} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ii} \sigma_{kk} \right), \quad (2.41)$$

Et les déformations tangentielles :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}, \quad (2.42)$$

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}, \quad (2.43)$$

De ce fait, on peut exprimer la matrice de rigidité et la matrice de souplesse d'un matériau isotrope en fonction de E et ν par :

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G,$$

La détermination de la matrice de souplesse S fait intervenir le calcul de la matrice inverse de C donnée par la relation (2.34) :

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = \frac{(\lambda + 2\mu)^2 - \lambda^2}{4\mu^2(3\lambda + 2\mu)} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} = \frac{1}{E}$$

$$S_{12} = S_{13} = S_{23} = \frac{\lambda(\lambda + 2\mu) - \lambda^2}{4\mu^2(3\lambda + 2\mu)} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} = -\frac{\nu}{E}$$

$$S_{44} = S_{55} = S_{66} = \frac{1}{\mu} = 2 \frac{1 + \nu}{E}$$

La matrice de souplesse s'écrit dans toute base comme:

$$\left[\begin{array}{cccccc} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \frac{1+\nu}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \frac{1+\nu}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \frac{1+\nu}{E} \end{array} \right], \quad (2.43)$$

II.5 Equations d'équilibre pour un Milieu matériel :

L'équation d'équilibre pour la dynamique s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + P_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + P_1 = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + P_2 = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + P_3 = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}$$

L'équation d'équilibre pour la statique s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + P_i = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.45)$$

Sous l'effet des actions imposées (forces volumiques et conditions aux limites), un ensemble ou un corps se déforme. Le problème de la mécanique des solides déformables consiste à rechercher le champ des déplacements $\vec{u}(M, t)$ et le champ des contraintes $\sigma(M, t)$ en tout point M de cet ensemble, vérifiant [19]:

- 1- la relation fondamentale d'équilibre soit pour la dynamique, ou soit pour la statique.
- 2- Les relations déformations-déplacements dans le cas de petites déformations.
- 3- Les conditions de compatibilité.
- 4- Les conditions aux frontières.
- 5- La loi de comportement du matériau $\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{kl})$.

CHAPITRE III

INTRODUCTION AU COMPORTEMENT MECANIQUE D'UN MATERIAU COMPOSITE

III.1 Introduction :

Les recherches menées durant les vingt dernières années permettent de mieux décrire le comportement des matériaux composites à matrice céramique ou organique. De nouvelles lois de comportements permettent de prendre en compte l'évolution de l'endommagement dans les structures industrielles et donc de prévoir leurs défaillances.

III.2 Loi de comportement d'un pli composite à renforcement unidirectionnel (UD) :

Un composite à renfort unidirectionnel est constitué de fibres parallèles continues orientées dans une direction (sens longitudinal) afin de supporter des efforts importants. Lorsque les fibres sont disposées dans un plan (Figure 3.1), elles constituent un pli (ou monocouche, ou strate, ou encore nappe). Ce type de matériau constitue la configuration de base des matériaux composites à fibres, d'où l'importance de son étude.

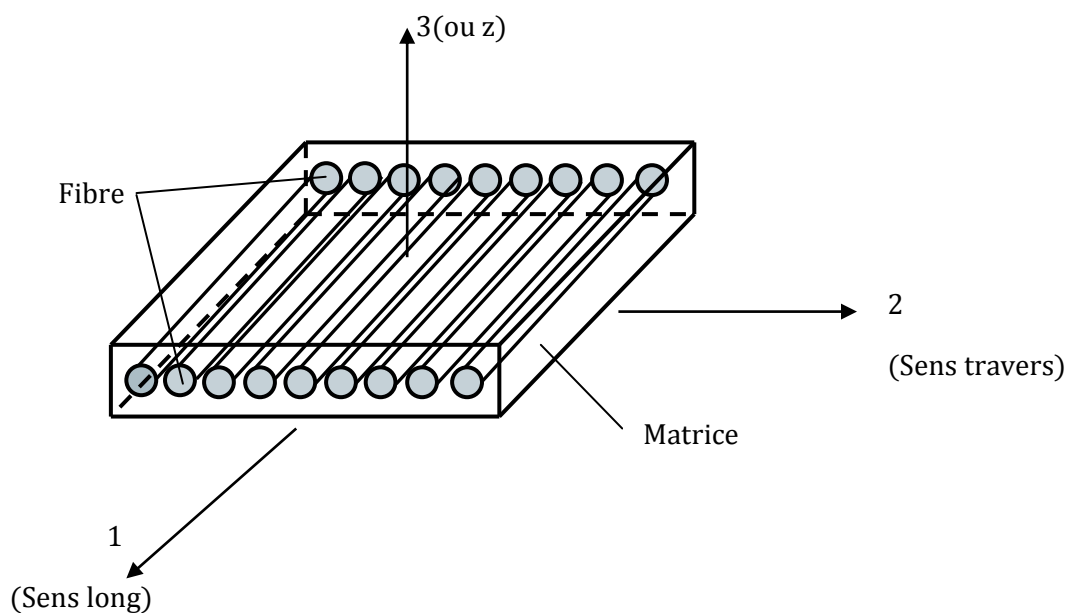


Figure 3.1 Pli à Renforcement unidirectionnel

III.2.1 Equation de comportement mécanique d'un pli composite

On prend une cellule élémentaire constituée d'une fibre entourée d'un cylindre de matrice (Figure 3.2), le composite est considéré comme étant isotrope transverse.

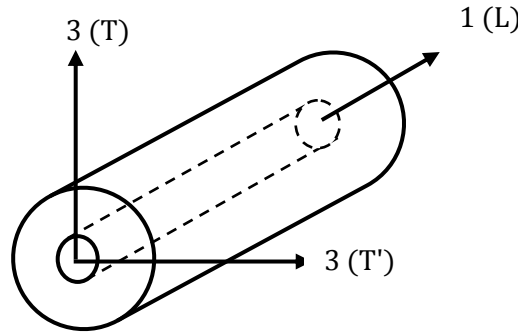


Figure 3.2 Cellule élémentaire

Le comportement élastique d'un matériau composite UD est décrit par la relation (2.30) à (2.31) du chapitre 2. La loi de Hooke s'écrit suivant la forme indicielle:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix}, \quad (3.1)$$

Ou la forme inverse donne:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix}, \quad (3.2)$$

Les matrices de rigidité et de souplesse sont inverses l'une de l'autre, et le comportement élastique d'un matériau composite UD est donc caractérisé par 5 coefficients indépendants :

$$C_{11}, \quad C_{12}, \quad C_{22}, \quad C_{23}, \quad C_{66}$$

Ou :

$$S_{11}, \quad S_{12}, \quad S_{22}, \quad S_{23}, \quad S_{66}$$

Ces constantes de rigidité et de souplesse sont interprétées par les modules de l'ingénieur : les modules d'Young E_{11} et E_{22} , le module de cisaillement G_{12} et les coefficients de poisson ν_{12} et ν_{23} , qui sont mesurés dans des essais simples tels que : les essais de traction uni axiale, ou de cisaillement pur.

Les coefficients de souplesse sont liés aux constantes de l'ingénieur par des relations plus simples que celles exprimant les constantes de rigidité, d'où les lois de comportement des matériaux composites sont basées sur l'utilisation des constantes de souplesse dont les relations s'écrivent :

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_{11}} \quad , & S_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} = -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} \\ S_{22} &= \frac{1}{E_{22}} \quad , & S_{23} &= -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} \\ S_{66} &= \frac{1}{G_{12}} \quad , & & \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ce type de matériau est isotrope dans le plan normal à la direction des fibres. Il se comporte comme un matériau isotrope transverse pour lequel tout plan passant par un axe privilégié est un plan de symétrie mécanique. La loi de comportement s'écrit en fonction des modules de l'ingénieur comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{22}} & 2(1+\nu_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{23})}{E_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix}, \quad (3.4)$$

C'est pour le cas d'un état de contraintes planes appliqué à un pli orthotrope unidirectionnel défini dans le plan 1-2, comme indiqué sur la (Figure 3.2)

Un état de contraintes à deux dimensions est caractérisé par un tenseur des contraintes de la forme :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ou bien:

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & 0 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3.5)

Avec :

$$\begin{aligned} \sigma_i &= 0 & \text{si} & & i &= 3,4,5 \\ \sigma_i &\neq 0 & \text{si} & & i &= 1,2,6 \end{aligned}$$

En chaque point M du matériau, la contrainte σ_{zz} ou σ_i est la contrainte principale avec une valeur nulle. Usuellement, un tel état de contraintes est dit état de contraintes planes.

La relation (3.5) donnant les composantes du tenseur de déformations en fonction du tenseur des contraintes se réduit à :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}, \quad (3.6)$$

Son inverse nous permet d'obtenir la matrice de rigidité réduite $[Q]$:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}, \quad (3.7)$$

Les constantes de rigidité réduites Q_{ij} sont exprimées par la relation (3.8).

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, & Q_{22} &= \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, \\ Q_{12} &= \frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, & Q_{66} &= \frac{1}{S_{66}}, \end{aligned}$$

Les relations précédentes permettent d'exprimer les constantes de rigidité réduites en fonction des modules d'élasticité dans les axes principaux :

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (3.9)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12},$$

- Lorsque l'orientation des fibres ne coïncide pas avec le système d'axe de symétrie matérielle du composite x et y (Figure 3.3), les états de contraintes et de déformations sur deux repères orthonormés différents seront définis par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

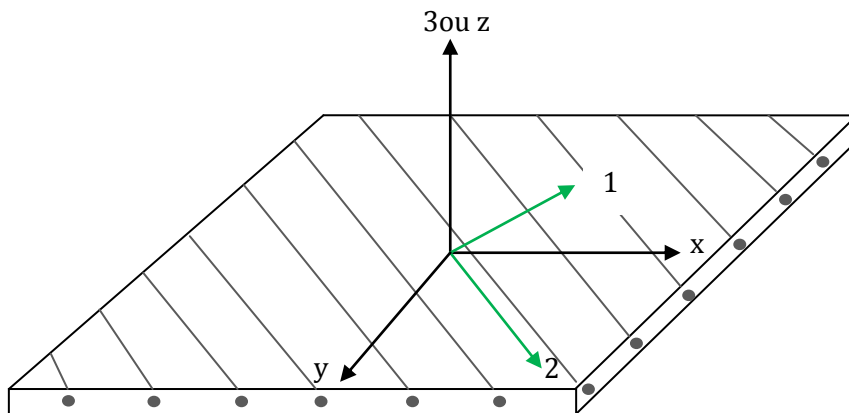


Figure 3.3 Pli composite UD en-dehors de ses axes principaux

Les équations de transformation de base des contraintes (3.10) et des déformations (3.11) peuvent être réécrites comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]_{\sigma}^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [T]_{\varepsilon}^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix},$$

La substitution de la relation (3.10) et (3.11) dans les équations contraintes-déformations (3.7), permet d'exprimer la loi de comportement d'un pli composite à renforcement unidirectionnel dans le système d'axes arbitraires x et y.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (3.12)$$

avec :
$$[\bar{Q}] = [T]_{\sigma}^{-1} [Q] [T]_{\varepsilon}$$

La relation (3.12) devient :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (3.13)$$

Dont les rigidités réduites transformées \bar{Q}_{ij} sont données par la relation (3.14):

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta,$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta),$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta,$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta,$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta$$

$$\bar{Q}_{66} = [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta),$$

Par inversion, on peut déterminer la matrice de souplesses transformées $[\bar{S}]$ exprimée toujours dans le système d'axes arbitraires x et y.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

Dont les souplesses réduites transformées \bar{S}_{ij} sont données par la relation (3.16):

$$\begin{aligned} \bar{S}_{11} &= S_{11} \cos^4 \theta + S_{22} \sin^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\ \bar{S}_{12} &= (S_{11} + S_{22} - Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{12}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta), \\ \bar{S}_{16} &= (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta - (2S_{22} + 2S_{12} - Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta, \\ \bar{S}_{22} &= S_{11} \sin^4 \theta + S_{22} \cos^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\ \bar{S}_{26} &= (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{S}_{66} &= 2[2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66}] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{66}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta), \end{aligned}$$

Le comportement élastique d'un pli dans le système d'axes arbitraires x et y, fait intervenir de nouvelles expressions des souplesses réduites transformées \bar{S}_{ij} :

$$\begin{aligned} \bar{S}_{11} &= \frac{1}{E_x}, & \bar{S}_{12} &= -\frac{\nu_{xy}}{E_x} = -\frac{\nu_{yx}}{E_y} \\ \bar{S}_{22} &= \frac{1}{E_y}, & \bar{S}_{16} &= \frac{\eta_{xy,x}}{E_x} = \frac{\eta_{x,xy}}{G_{xy}} \\ \bar{S}_{66} &= \frac{1}{G_{xy}}, & \bar{S}_{26} &= \frac{\eta_{xy,y}}{E_y} = \frac{\eta_{y,xy}}{G_{xy}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Avec : $\eta_{i,ij} = \frac{\varepsilon_i}{\gamma_{ij}}$ pour $\tau_{ij} \neq 0$

$\eta_{i,ij}$ est un coefficient de couplage non classique caractérisant une déformation linéaire dans la direction i causée par un cisaillement dans le plan i-j.

Et : $\eta_{ij,i} = \frac{\gamma_{ij}}{\varepsilon_i}$ pour $\sigma_{ij} \neq 0$

$\eta_{ij,i}$ est un coefficient de couplage non classique caractérisant une distorsion angulaire dans le plan i-j causée par une contrainte normale dans la direction i.

III.3 Théorie classique simplifiée des stratifiés :

L'hypothèse de base de la théorie classique des stratifiés est appliquée aux plaques par l'expression des déplacements en tout point M d'une plaque, de coordonnées (x, y, z) , sous la forme de polynôme en z , généralement limités au degré 3, et de coefficients dépendant de (x, y) .

Le champ des déplacements simplifié (donné par la théorie de Kirchhoff-Love) [20].

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y, 0) + z\varphi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y, 0) + z\varphi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y, 0), \end{aligned} \quad (3.18)$$

Sachant que les coordonnées u_0, v_0 et w_0 est Le champ de déplacement du point $M_0(x, y, z)$, Le champ des déformations est exprimé en coordonnées cartésiennes par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \\ \gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}, \\ \gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ce champ de déformations est celui d'un schéma du premier degré avec prise en compte du cisaillement transverse.

La théorie classique simplifiée des stratifiés fait l'hypothèse que la déformation est continue à travers l'épaisseur du stratifié afin d'empêcher le glissement d'un pli par rapport à un autre. Le stratifié se comporte comme une seule couche (afin d'éviter le délaminage) mais avec des caractéristiques élastiques très spéciales.

Alors toute droite normale à la surface moyenne avant déformation restera droite et normale et gardera une longueur constante après déformation, on ignore donc les distorsions angulaires (Figure 3.4):

$$\gamma_{xz} = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_{yz} = 0$$

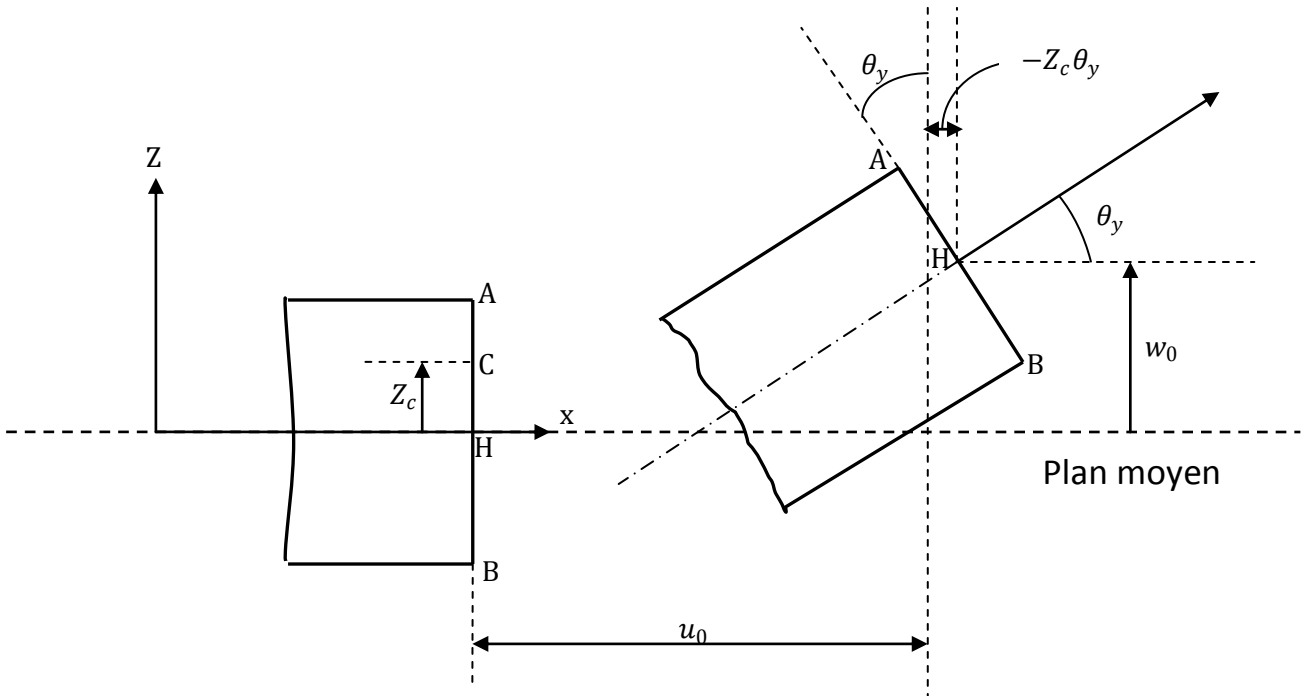


Figure 3.4 Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des stratifiés

Cette hypothèse implique que:

$$\varphi_x(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \varphi_y(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$$

En tenant compte de ces deux relations, Le champ des déformations sera alors exprimé par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

Qui peuvent être réécrites sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

L'état de déformation $\{\varepsilon\}$, en tout point du stratifié, peut être calculé à partir de la déformation plane $\{\varepsilon^0\}$ et de la courbure $\{k\}$ du plan moyen.

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z\{k\} \quad (3.22)$$

Le champ de déformations est la superposition de :

III.3.1 Déformations en membrane :

Les déformations en membranes obtenues de la relation (3.20) ne dépendent que des coordonnées (x, y) du point H du plan moyen du stratifié:

$$\{\varepsilon^0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

S'expriment exclusivement en fonction des déplacements (u_0, v_0) dans le plan (Oxy) des points de ce plan.

II.3.2 Déformations en flexion et torsion :

Les déformations en flexion et torsion ou courbures sont aussi obtenues de la relation (3.20), et ne dépendent que des coordonnées (x, y) du point H du plan moyen du stratifié:

$$\{k\} = \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

S'expriment en fonction des angles de rotation de la déformée du plan moyen et de la cote z du point M . La matrice $k(x, y)$ est appelée matrice des courbures de la poutre sollicitée en flexion.

Le champ des déformations s'écrit alors :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_m(M) + \varepsilon_f(M)$$

Ou

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon^0_x \\ \varepsilon^0_y \\ \varepsilon^0_{xy} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (3.25)$$

Sous forme abrégée, le champ des déformations s'écrit donc :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon(x, y, z) = \varepsilon_m(x, y) + zk(x, y) \quad (3.26)$$

Les déformations en membrane $\varepsilon_m(x, y)$ et courbures $k(x, y)$ ne dépendent que des coordonnées (x, y) du point H du plan moyen du stratifié.

III.3.3 Champ de contraintes pour une couche k :

Les contraintes dans la couche k s'expriment par la relation générale (3.13) sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k, \quad (3.27)$$

L'utilisation des relations (3.25) et (3.27), nous aide à récrire cette dernière expression sous une forme plus explicite (3.28):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon^0_x \\ \varepsilon^0_y \\ \varepsilon^0_{xy} \end{Bmatrix} + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

Ou bien:

$$\sigma_k(M) = \sigma_k(x, y, z) = \bar{Q}_k \varepsilon^0(x, y) + z \bar{Q}_k k(x, y). \quad (3.29)$$

La matrice $\sigma_k(M)$ représente la matrice des contraintes dans la couche k : $h_{k-1} \leq z \leq h_k$. la matrice de rigidité réduite \bar{Q}_k varie d'une couche à l'autre. Il en

résulte donc une discontinuité du champ des contraintes entre couches successives.

III-4 Loi de comportement d'un matériau composite Stratifié :

Le comportement élastique d'un pli constitue la base avec laquelle le comportement du stratifié est décrit, en tenant compte des caractéristiques indépendantes de chaque pli.

Dans ce paragraphe, on va étudier le comportement du stratifié lorsqu'il est soumis à un ensemble de sollicitations, cette étude est indispensable si l'on désire que la déformation du stratifié ne soit pas trop importante, ou bien que les contraintes conservent des valeurs admissibles.

III.4.1 Comportement en Membrane :

Nous considérons dans ce qui suit un stratifié plan pourvu de la symétrie miroir. L'épaisseur totale du stratifié est noté h . il est constitué de n plis. Le pli numéro k a une épaisseur notée e_k . Le plan (x-y) est le plan de symétrie (ou plan moyen).

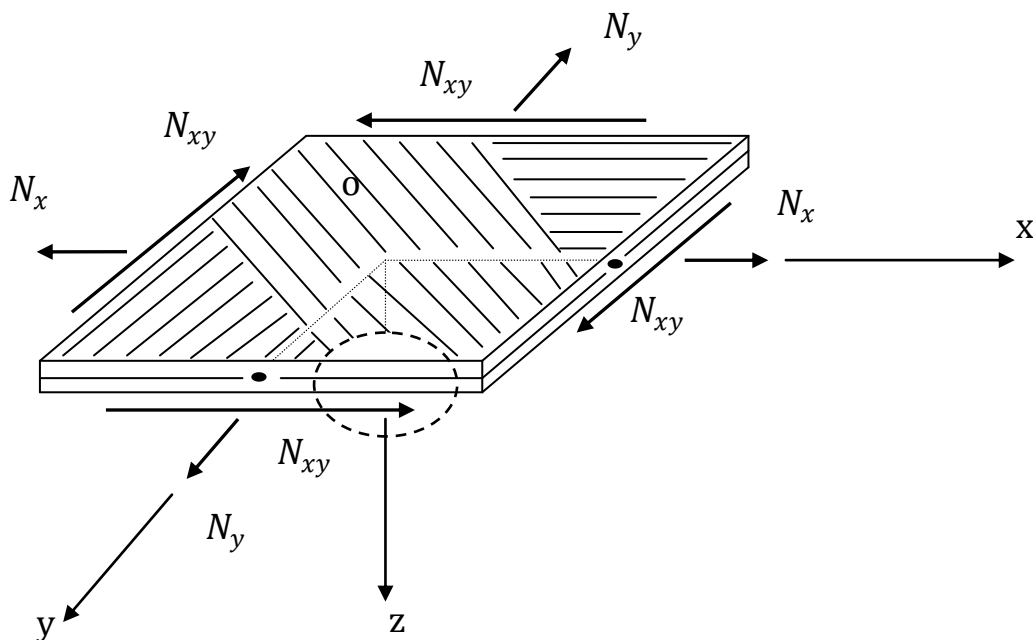


Figure 3.5 Efforts de membrane appliqués sur un stratifié

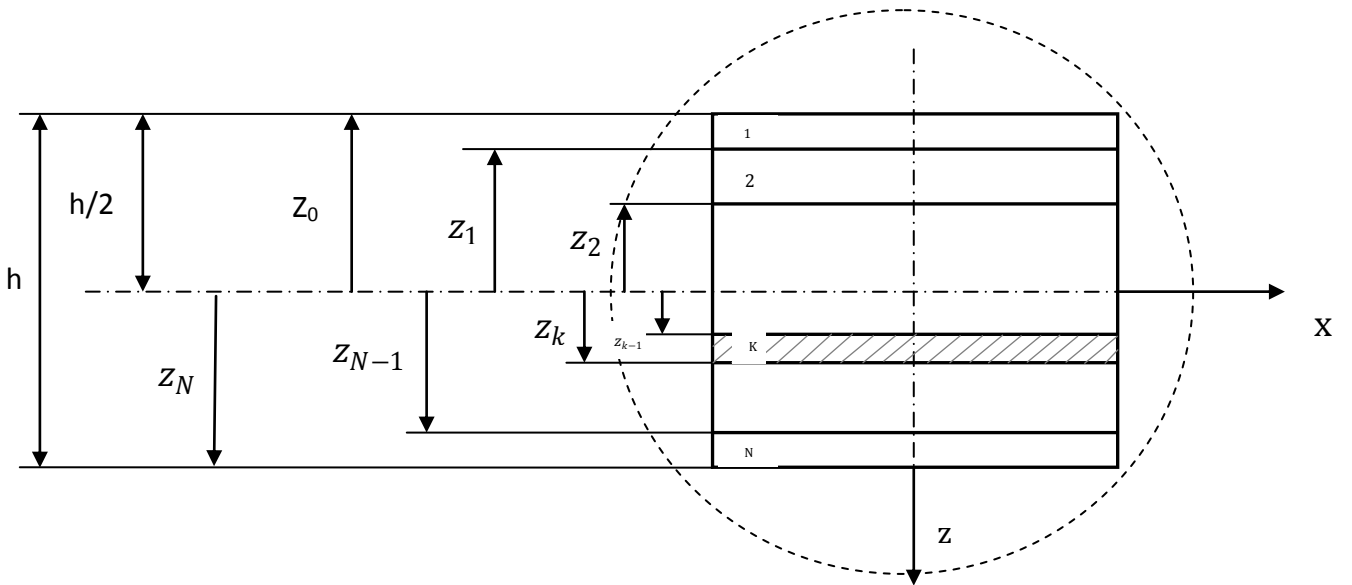


Figure 3.6 Géométrie des N-couches du stratifié

Le composite stratifié est soumis à des sollicitations dans son plan, qui sont notées N_x, N_y, N_{xy} (ou N_{yx}) par unité d'envergure suivant la direction y ou la direction x (Figure 3.5). Il s'agit là d'efforts dits de membrane, ou éléments de réduction pour les contraintes, ou encore flux d'efforts dans le stratifié.

Les efforts de membrane sont obtenus par intégration des contraintes par unité d'envergure de chaque couche à travers l'épaisseur du stratifié.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (3.30)$$

N_x : Effort résultant dans la direction x par unité de longueur suivant y.

N_y : Effort résultant dans la direction y par unité de longueur suivant x.

N_{xy} : Cisaillement de membrane par unité de largeur suivant la direction y.

Dans le cas du stratifié, on a une répartition continue des contraintes dans une couche, mais discontinue d'une couche à une autre.

Les efforts en membranes seront exprimés sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \quad (3.31)$$

Où z_{k-1} et z_k sont respectivement les coordonnées de la couche d'ordre k et $k-1$ dans la direction perpendiculaire au stratifié définies par la Figure 3.6.

La substitution de l'équation (3.28) dans l'équation (3.31) nous donne :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left[\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \right] dz \quad (3.32)$$

Puisque la matrice $[\bar{Q}]_k$ n'étant pas en fonction de la distance z , $[\varepsilon^0]$ et $[k]$ sont indépendantes de z et de l'ordre de la disposition des couches dans le stratifié, la relation (3.32) peut alors être écrite comme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

Dont les coefficients A_{ij} sont appelés les rigidités de membrane :

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) \bar{\mathbf{Q}}_k$$

$$\mathbf{A} = [A_{ij}] \quad ; \quad A_{ij} = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) (\bar{Q}_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k e_k \quad (3.34)$$

Les coefficients B_{ij} sont appelés les rigidités de couplage :

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_{k-1}^2) \bar{\mathbf{Q}}_k$$

$$\mathbf{B} = [B_{ij}] \quad ; \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_{k-1}^2) (\bar{Q}_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k e_k z_k \quad (3.35)$$

L'intégration des deux premières équations d'équilibre (2.44), suivant l'épaisseur du stratifié, conduit aux relations fondamentales de mouvement relatives aux résultantes en membrane :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \quad (3.37)$$

D'où :

$$F_x = \int_{-h/2}^{h/2} p_x dz \quad \text{et} \quad F_y = \int_{-h/2}^{h/2} p_y dz$$

Les contraintes de cisaillement exercées sur les faces supérieures et inférieures du stratifié sont :

$$\begin{aligned} \tau_{1x} &= \sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right) & \text{et} & & \tau_{2x} &= \sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right) \\ \tau_{1y} &= \sigma_{yz} \left(\frac{h}{2} \right) & \text{et} & & \tau_{2y} &= \sigma_{yz} \left(-\frac{h}{2} \right) \end{aligned}$$

La masse surfacique du stratifié au point (x,y) :

$$\rho_s = \sum_{k=1}^N \int_{-h_{k-1}}^{h_k} \rho_k dz = \sum_{k=1}^N \rho_k (h_k - h_{k-1}), \quad (3.38)$$

$$R = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \rho_k (h_k^2 - h_{k-1}^2), \quad (3.39)$$

III- 4.2 Comportement en flexion et torsion :

- Résultantes en flexion :

Les relations fondamentales des stratifiés font également intervenir les moments résultants des contraintes sur un élément du stratifié. Les moments de flexion et de torsion sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k z dz \quad (3.40)$$

Les composantes M_x et M_y sont les moments de flexion suivant les directions x et y , respectivement, et la composante M_{xy} est le moment de torsion. Ces composantes sont schématisées sur la figure (3.7)

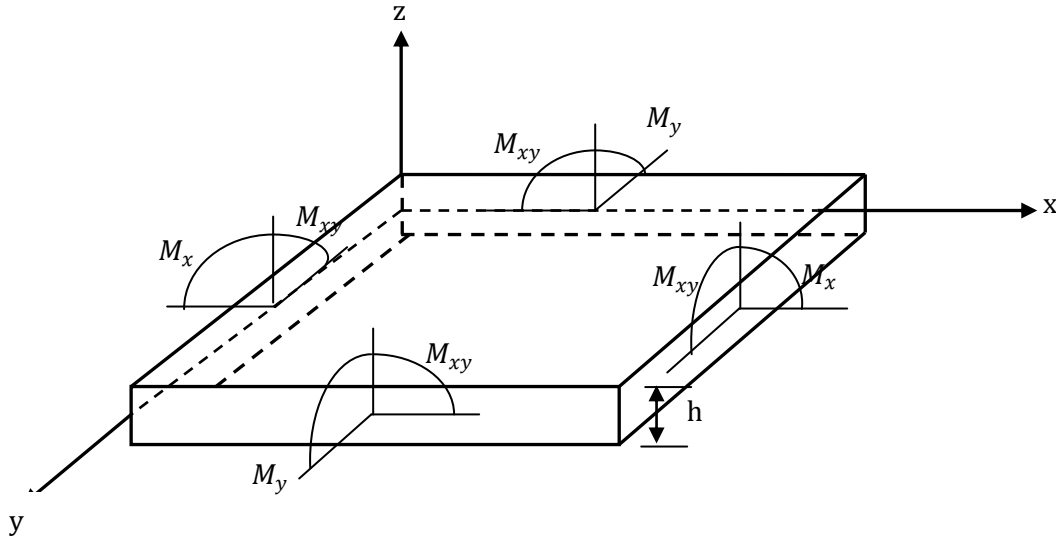


Figure 3.7 Schématisation des moments de flexion et de torsion

- **Résultantes en cisaillement :**

Les résultantes en cisaillement sont définies par unité de longueur du stratifié :

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}_k dz \quad (3.41)$$

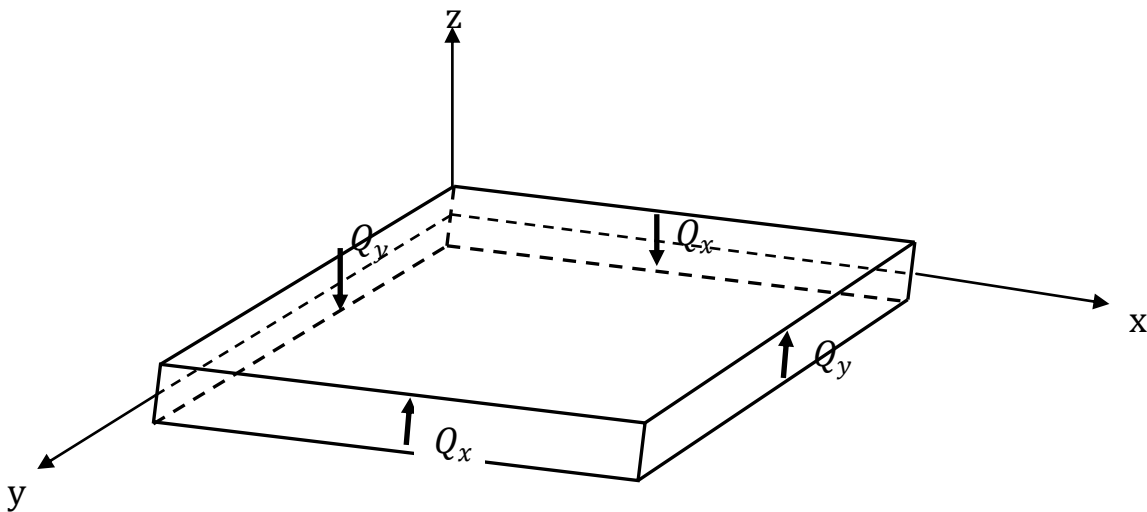


Figure 3.8 Schématisation des résultantes en cisaillement

Comme les résultantes en membranes et les résultantes en flexion, les résultantes en cisaillement sont définies par unité de longueur du stratifié.

La multiplication des deux premières équations d'équilibre (2.44) par z puis les intégrer suivant l'épaisseur du stratifié, conduit aux relations fondamentales de mouvement relatives aux résultantes en flexion :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2} (\tau_{1x} + \tau_{2x}) + P_x - Q_x = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}, \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2} (\tau_{1y} + \tau_{2y}) + P_y - Q_y = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}, \quad (3.43)$$

Avec P_x et P_y les composantes des moments des forces volumiques exercées :

$$P_x = \int_{-h/2}^{h/2} z p_x dz \quad \text{et} \quad P_y = \int_{-h/2}^{h/2} z p_y dz$$

La grandeur I_{xy} est le moment d'inertie par rapport au plan moyen (oxy) du stratifié localisé aux points (x, y) et ayant des côtés égaux à l'unité, et s'écrit :

$$I_{xy} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k^3 - h_{k-1}^3), \quad (3.44)$$

L'intégration suivant l'épaisseur du stratifié de la troisième des équations (2.44) conduit à :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + F_z = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}. \quad (3.45)$$

D'où : q est la différence entre les composantes de pression exercées sur chaque face du stratifié : $\sigma_{zz} \left(\frac{h}{2} \right)$ et $\sigma_{zz} \left(-\frac{h}{2} \right)$

Avec :

$$F_z = \int_{-h/2}^{h/2} f_z dz$$

Une relation indépendante des résultantes de cisaillement suivant notée (3.46):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q \\ = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + R \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) + I_{xy} \left(\frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \varphi_y}{\partial y \partial t^2} \right) \end{aligned}$$

Dans la plupart des cas, les termes d'inertie de rotation peuvent être négligés et, en l'absence de forces volumiques et de contraintes de cisaillement sur les faces, l'équation (3.46) se simplifie à :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (3.47)$$

CHAPITRE IV

COMPORTEMENT EN FLEXION DES POUTRES COMPOSITES SANS CONSIDERATION DE L'EFFET DU CISAILLEMENT TRANSVERSE

IV.1 Introduction :

L'analyse d'une structure composite est plus complexe que celle d'une structure en matériaux traditionnels, métalliques par exemple. Cela est dû au caractère hautement anisotrope des propriétés mécaniques du matériau de base, tant sur les plans raideur que résistance, qui sont concentrées dans la direction des fibres. L'importance de développer une analyse sur le comportement en flexion des poutres est liée d'une part à l'utilisation des poutres comme élément de base dans la réalisation des structures, et d'autre part à la caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux stratifiés et à partir d'essais de flexion réalisés sur des éprouvettes en forme de poutres [21].

IV.2 Equations de comportement en flexion de poutres composites Stratifiés :

Une poutre est une membrane mince soumise à des charges transversales généralement normales à son axe. La poutre est l'élément structural le plus répandu, puisqu'elle fait partie intégrante de la plupart des ouvrages de construction ou des pièces machines.

En réaction aux charges appliquées, des forces et des moments internes se développent dans la poutre pour maintenir l'équilibre. On appelle effort tranchant T la force interne transversale et moment fléchissant M le moment interne. Dans ce chapitre, nous étudierons ces forces et ces moments; nous allons voir de quelle façon ils varient d'une zone à l'autre le long de la poutre et où sont situées les zones les plus sollicitées afin de pouvoir déterminer le type de poutre à utiliser.

IV.2.1 Types de poutres

A. Poutre simple

C'est une poutre reposant sur deux supports; l'appui double et l'appui simple. Les points d'appui sont articulés de façon à ce que les extrémités puissent se mouvoir librement pendant la flexion. La figure 4.1 montre une poutre simple.

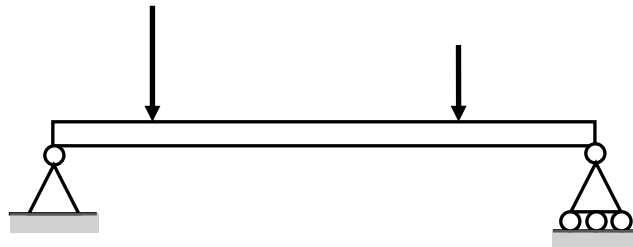


Figure.4.1 Cas d'une Poutre Simple

B. Poutre console

C'est une poutre encastrée dans un mur à une l'extrémité. L'extrémité encastrée ne bouge pas pendant la flexion, tandis que l'autre extrémité est entièrement libre. On appelle aussi cette poutre, poutre en porte-à-faux ou poutre encastrée à une extrémité. La figure 4.2 montre une poutre console.

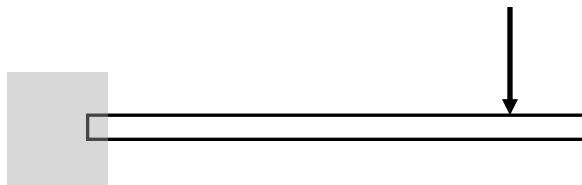


Figure.4.2 Cas d'une Poutre Console

C. Poutre avec porte-à-faux

C'est une poutre qui repose sur deux appuis (un simple et l'autre double) et a une ou deux extrémités qui dépassent de façon appréciable les appuis (porte-à-faux). On appelle aussi cette poutre; poutre en porte-à-faux (Figure 4.3).

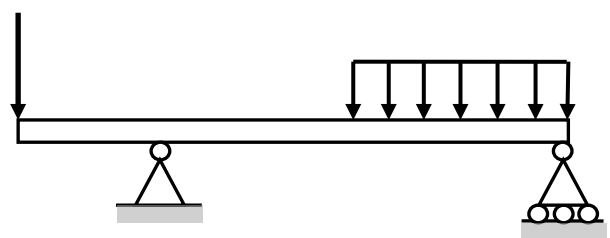


Figure.4.3 Cas d'une Poutre avec Porte à Faux

Les Poutres sont classées suivant leurs appuis. Les trois types de poutres précédentes entrent dans la catégorie des poutres statiquement déterminées (poutre isostatique), puisqu'elles possèdent trois inconnues reliées aux trois degrés de liberté et par le fait même aux trois équations d'équilibre [21].

D. Poutre encastrée et supportée

C'est une combinaison des types A et B. On note que la poutre est liée quatre fois (4 inconnues), c'est donc une poutre en équilibre hyperstatique. La figure 4.4 nous présente une poutre encastrée et supportée.

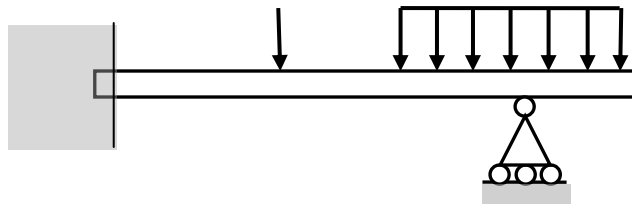


Figure.4.4 Cas d'une Poutre Encastrée et Supportée

E. Poutre continue

C'est une poutre supportée par plus de deux supports, c'est donc une poutre en équilibre hyperstatique. La figure 4.5 nous montre une poutre continue.

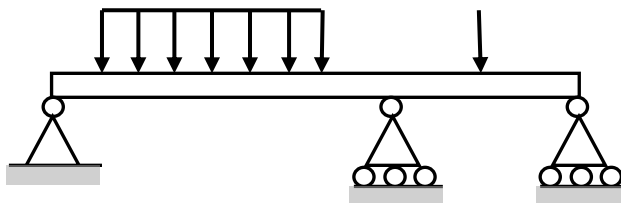


Figure.4.5 Cas d'une Poutre Continue

F. Poutre à double encastrement

C'est une poutre supportée par deux encastrement, c'est donc une poutre en équilibre hyperstatique. La figure 4.6 nous schématise une poutre à double encastrement.

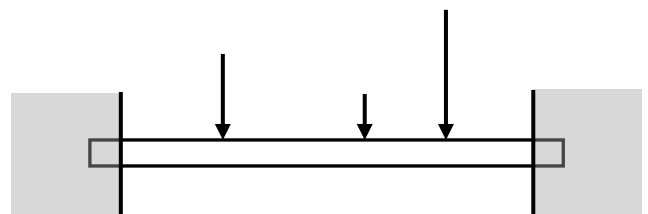


Figure.4.6 Cas d'une Poutre à Double Encastrement

G. Poutre supportée à double encastrement

C'est une poutre soutenue par deux encastresments et supportée par un ou plusieurs supports, c'est donc une poutre en équilibre hyperstatique. La figure 4.7 nous montre une poutre supportée à double encastrement.

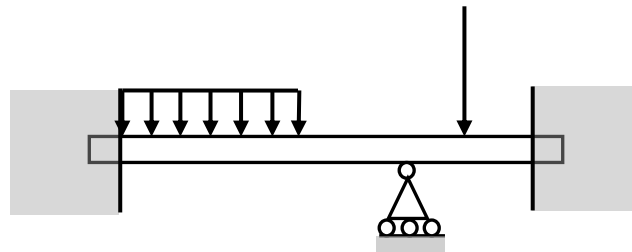


Figure 4.7 Cas d'une Poutre Supportée à Double

Les poutres D à G sont des poutres hyperstatiques. Elles ont plus de fixations ou supports que nécessaires. Cependant, ces supports augmentent la capacité portante de la poutre. Les équations de la statique ne suffisent pas pour analyser ces poutres. On a recourt à différentes méthodes.

IV.2.2 Types de charges

On peut distinguer les différentes charges suivantes :

- Charge concentrée
- Charge uniformément répartie
- Charge non uniformément répartie
- Couples

Dans les charges concentrées, il y a aussi les charges axiales et les charges obliques ou inclinées par rapport à l'axe. Dans la pratique, on peut rencontrer l'un ou l'autre des types de charges ou une combinaison de plusieurs types de charges. Il est bon de pouvoir les reconnaître et les identifier [21].

IV.2.3 Lois de comportement

On a besoin de revoir les concepts et relations données par la résistance des matériaux appliquées aux poutres isotropes (en matériaux classiques), La théorie des poutres considère que la longueur L de la poutre est très supérieure à sa largeur b [19].

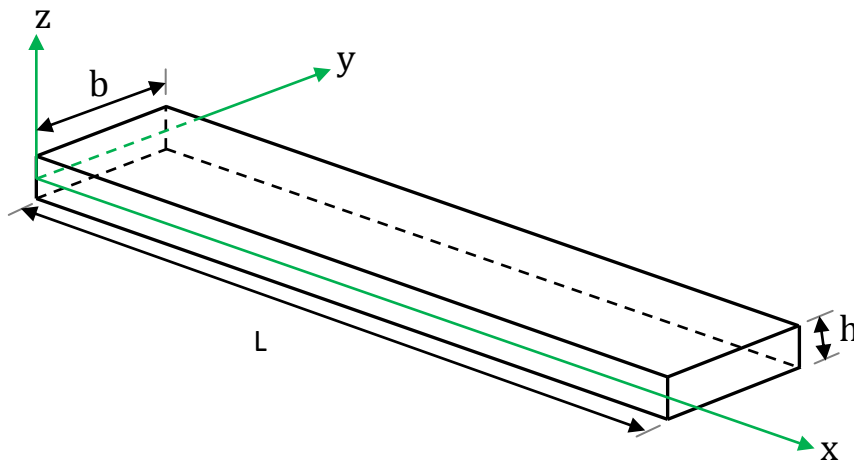


Figure 4.8 Élément Poutre

L'objectif de ce chapitre est de schématiser le comportement mécanique des poutres stratifiées sollicitées à la flexion pure, pour simplifier au mieux l'analyse de la structure, nous verrons que cette simplification consiste à ramener le problème initialement à trois dimensions (x, y, z) à un problème à deux dimension (x, y) de difficulté moindre.

IV.3 Moments de flexion

Le champ des moments s'explique en introduisant l'expression (3.28) des contraintes dans la relation (3.40), soit :

$$M_f(x, y) = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left[z \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \right] dz \quad (4.1)$$

Puisque la matrice $[\bar{Q}]_k$ n'étant pas en fonction de la distance z , $[\varepsilon^0]$ et $[k]$ sont indépendantes de z et de l'ordre de la disposition des couches dans le stratifié, la relation (4.1) peut alors être écrite comme :

$$M_f(x, y) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_{k-1}^2) \bar{Q}_k \right] \varepsilon^0(x, y) + \frac{1}{3} \left[\sum_{k=1}^n (z_k^3 - z_{k-1}^3) \bar{Q}_k \right] k(x, y) \quad (4.2)$$

La matrice des moments de flexion s'écrit donc suivant :

$$M_f(x, y) = \mathbf{B}\varepsilon^0(x, y) + \mathbf{D}k(x, y), \quad (4.3)$$

En introduisant les matrices de rigidité en flexion \mathbf{D} et la matrice de couplage membrane-flexion-torsion \mathbf{B} :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (z_k^3 - z_{k-1}^3) \bar{Q}_k, \quad (4.4)$$

$$D = [D_{ij}]; \quad D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (z_k^3 - z_{k-1}^3) (\bar{Q}_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k \left(e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right).$$

L'expression développée des moments s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \varepsilon^0_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

Les moments de flexion et de torsion sont donc fonctions des courbures en flexion et en torsion, mais sont également fonctions des déformations en membranes.

IV.4 Contraintes et Déformations:

Un stratifié est dit symétrique si le plan moyen est un plan de symétrie.

Deux couches symétriques ont :

- La même matrice de rigidité $[\bar{Q}_{ij}]_k$,
- La même épaisseur e_k ,

- Des cotes opposées z_k et $-z_k$

Il en résulte que les coefficients B_{ij} de la matrice de rigidité du stratifié sont nuls.

L'équation (4.5) se réduit à :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

Il n'existe donc pas de couplage membrane-flexion dans le cas des stratifiés symétriques. Il en résulte que le comportement des stratifiés symétriques est plus simple à analyser que celui des stratifiés présentant un couplage membrane-flexion/torsion. En outre, les stratifiés symétriques ne présentent pas une tendance au gauchissement due aux déformations (contractions) induites lors du refroidissement consécutif au processus de mise en œuvre des matériaux [19].

Les poutres stratifiées symétriques sont donc largement utilisés, à moins que des conditions spécifiques nécessitent un stratifié non symétrique. Par exemple, en stratifié utilisé comme bouclier thermique, et exposé à une source thermique sur une seule de ses faces, sera conçu suivant une structure non symétrique.

comme : k_x, k_y et k_{xy} sont définis dans les relations (3.24) :

$$\begin{aligned} k_x &= -\frac{\partial^2 w_0(x, y)}{\partial x^2} \\ k_y &= -\frac{\partial^2 w_0(x, y)}{\partial y^2} \\ k_{xy} &= -2\frac{\partial^2 w_0(x, y)}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (4.7)$$

L'équation (4.6) peut être écrite sous la forme inverse suivante :

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^*_{11} & D^*_{12} & D^*_{16} \\ D^*_{12} & D^*_{22} & D^*_{26} \\ D^*_{16} & D^*_{26} & D^*_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Où D^*_{ij} sont les éléments de la matrice inverse de $[D_{ij}]$ matrice de rigidité en flexion donnés par la relation (4.6) :

$$D^*_{11} = \frac{1}{\Delta} (D_{22}D_{66} - D_{26}^2),$$

$$D^*_{12} = -\frac{1}{\Delta} (D_{12}D_{66} - D_{16}D_{26}),$$

$$D^*_{16} = \frac{1}{\Delta} (D_{12}D_{26} - D_{16}D_{22}),$$

$$D^*_{22} = \frac{1}{\Delta} (D_{11}D_{66} - D_{16}^2),$$

$$D^*_{26} = -\frac{1}{\Delta} (D_{11}D_{26} - D_{16}D_{12}),$$

$$D^*_{66} = \frac{1}{\Delta} (D_{11}D_{22} - D_{12}^2),$$

Δ est le déterminant de la matrice $[D_{ij}]$:

$$\Delta = D_{11}D_{22}D_{66} + 2D_{12}D_{16}D_{26} - D_{11}D_{26}^2 - D_{22}D_{16}^2 - D_{12}^2D_{66}$$

Dans le cas d'une flexion suivant l'axe x , les moments de flexion et de torsion M_y et M_{xy} sont supposés nuls. Ainsi que la flèche w_0 ne dépend que de x :

$$M_y = 0, \quad M_{xy} = 0 \quad (4.9)$$

$$w_0 = w_0(x) \quad (4.10)$$

Donc les équations (4.7) et (4.8) conduisent à :

$$k_x = -\frac{\partial^2 w_0(x)}{\partial x^2} = D^*_{11} M_x$$

$$k_y = -\frac{\partial^2 w_0(x)}{\partial y^2} = D^*_{12} M_x \quad (4.11)$$

$$k_{xy} = -2\frac{\partial^2 w_0(x)}{\partial x \partial y} = D^*_{16} M_x$$

L'équation (4.11) montre que les courbures k_y et k_{xy} sont fonctions du moment de flexion M_x , et ce qui explique aussi que la flèche w_0 dépend à priori de la variable y .

Cet effet est particulièrement important dans le cas d'éprouvettes de flexion de laboratoire, de forme plus proche d'une lame que d'une poutre. Il en résulte que la flexion et la torsion induites par les termes D^*_{12} et D^*_{16} dans les équations (4.11) tendent à produire un décollement partiel de la poutre sur ses supports [22].

Cet effet est toutefois négligeable dans le cas où le rapport longueur sur largeur (L/b) est suffisamment élevé.

Suite à l'hypothèse (4.10), les équations (4.11) s'écrivent :

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} = -D^*_{11} M_x \quad (4.12)$$

Connaissant la formule de la flèche d'une poutre en flexion:

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} = -\frac{M}{E_x I_{xy}} \quad (4.13)$$

En introduisant la formule du module d'élasticité longitudinale E_x

$$D_{11} = \frac{h^3 E_x}{12} = \frac{1}{D^*_{11}}$$

$$E_x = \frac{12}{D^*_{11} h^3} \quad (4.14)$$

Le moment quadratique I de la section droite de la poutre par rapport au plan (x,y) :

$$I = I_{xy} = \frac{bh^3}{12}, \quad (4.15)$$

Le moment de flexion total M (par unité de largeur b) :

$$M = bM_x \quad (4.16)$$

Compte tenu des hypothèses faites, l'équation (3.49) de flexion des poutres sans l'effet de cisaillement transverse et dans le cas des problèmes de statique se réduit à :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + q = 0. \quad (4.17)$$

En tenant compte de (4.12) et (4.13), cette équation s'écrit :

$$\frac{d^4 w_0}{dx^4} = -D^*_{11} \frac{d^2 M_x}{dx^2} = D^*_{11} q \quad (4.18)$$

En posant :

$$p = bq$$

On a :

$$\frac{d^4 w_0}{dx^4} = \frac{p}{E_x I'} \quad (4.19)$$

Dans la plupart des cas, les termes d'inertie de rotation peuvent être négligés et, en l'absence de forces volumiques et de contraintes de cisaillement sur les faces :

$$\frac{dM_x}{dx} = Q_x \quad (4.20)$$

ou bien:

$$\frac{dM}{dx} = Q \quad (4.21)$$

En posant :

$$Q = bQ_x$$

Les contraintes dans la couche k du stratifié s'écrivent :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

C'est à dire :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} D^*_{11} & D^*_{12} & D^*_{16} \\ D^*_{12} & D^*_{22} & D^*_{26} \\ D^*_{16} & D^*_{26} & D^*_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^k &= z(\bar{Q}_{11}^k D_{11}^* + \bar{Q}_{12}^k D_{12}^* + \bar{Q}_{16}^k D_{16}^*) M_x, \\ \sigma_{yy}^k &= z(\bar{Q}_{12}^k D_{11}^* + \bar{Q}_{22}^k D_{12}^* + \bar{Q}_{26}^k D_{16}^*) M_x, \\ \sigma_{xy}^k &= z(\bar{Q}_{16}^k D_{11}^* + \bar{Q}_{26}^k D_{12}^* + \bar{Q}_{66}^k D_{16}^*) M_x, \end{aligned} \quad (4.23)$$

Sachant que :

$$\begin{cases} M_x = \frac{M}{b} \\ b = \frac{12 I}{h^3} \end{cases} \quad \text{alors} \quad M_x = \frac{h^3 M}{12 I} \quad (4.24)$$

Les expressions de ces contraintes peuvent être réécrites sous la forme :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^k &= \frac{h^3}{12} (\bar{Q}_{11}^k D_{11}^* + \bar{Q}_{12}^k D_{12}^* + \bar{Q}_{16}^k D_{16}^*) \frac{M}{I} z, \\ \sigma_{yy}^k &= \frac{h^3}{12} (\bar{Q}_{12}^k D_{11}^* + \bar{Q}_{22}^k D_{12}^* + \bar{Q}_{26}^k D_{16}^*) \frac{M}{I} z, \\ \sigma_{xy}^k &= \frac{h^3}{12} (\bar{Q}_{16}^k D_{11}^* + \bar{Q}_{26}^k D_{12}^* + \bar{Q}_{66}^k D_{16}^*) \frac{M}{I} z, \end{aligned} \quad (4.25)$$

En posant :

$$\begin{aligned} a_{xx}^k &= \frac{h^3}{12} (\bar{Q}_{11}^k D_{11}^* + \bar{Q}_{12}^k D_{12}^* + \bar{Q}_{16}^k D_{16}^*) \\ a_{yy}^k &= \frac{h^3}{12} (\bar{Q}_{12}^k D_{11}^* + \bar{Q}_{22}^k D_{12}^* + \bar{Q}_{26}^k D_{16}^*) \\ a_{xy}^k &= \frac{h^3}{12} (\bar{Q}_{16}^k D_{11}^* + \bar{Q}_{26}^k D_{12}^* + \bar{Q}_{66}^k D_{16}^*) \end{aligned}$$

Les équations (4.40) deviennent :

$$\sigma_{xx}^k = a_{xx}^k \frac{M}{I} z, \quad (4.26)$$

$$\sigma_{yy}^k = a_{yy}^k \frac{M}{I} z, \quad (4.27)$$

$$\sigma_{xy}^k = a_{xy}^k \frac{M}{I} z, \quad (4.28)$$

Les expressions précédentes des contraintes ne sont correctes qu'à une distance assez éloignée ($>h$) des bords de la poutre. Ils ne sont donc applicables qu'au cas de poutres ayant un rapport b/h assez élevé.

Puisque la poutre est supposée de longueur L assez élevé par rapport à sa largeur b , on peut négliger la déformation dans la direction y , soit :

$$\varepsilon_{yy} = 0, \quad \gamma_{xy} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0.$$

D'autre part, les contraintes, déformations et déplacements ne sont fonction que de x et z .

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}^k}{\partial z} = 0 \quad (4.29)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{xz}^k}{dz} &= -\frac{d\sigma_{xx}^k}{dx} = -a_{xx}^k \frac{1}{I} \frac{dM}{dx} z. \\ \sigma_{xz}^k &= -a_{xx}^k \frac{Q}{2I} (z^2 + C_k). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Les constantes C_k dans chaque couche sont déterminées en annulant σ_{xz} sur les faces supérieures et inférieures, et en assurant la continuité de σ_{xz} entre chaque couche. Dans le cas de la flexion des poutres, la prise en compte du cisaillement transverse ne modifie pas la répartition des contraintes dans le stratifié.

IV.3.1 Flexion 3-Points :

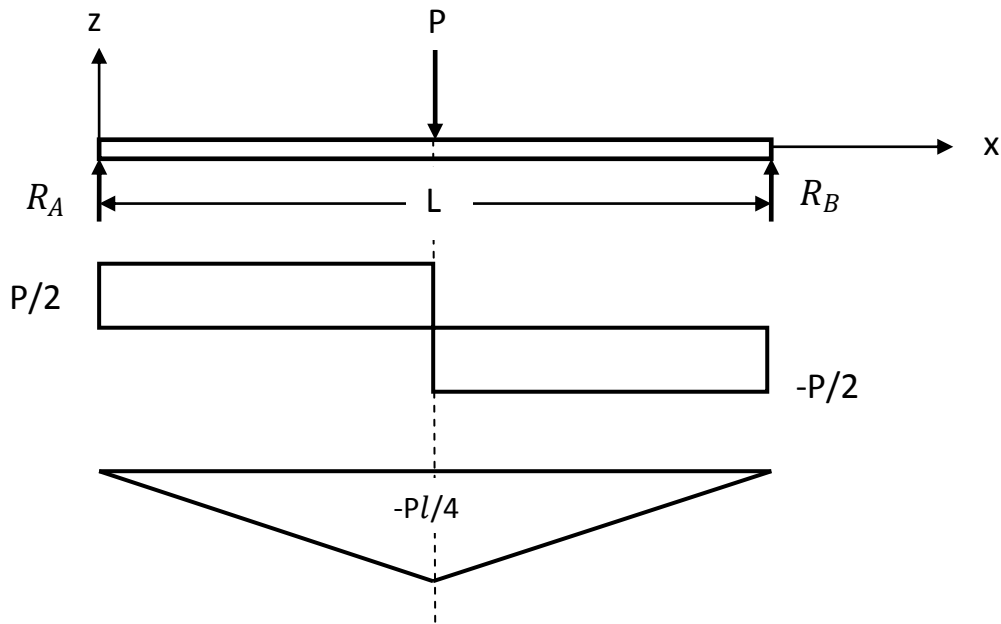


Figure 4.9 Sollicitation d'une poutre en flexion 3-points

Nous considérons une poutre en flexion 3-points. La symétrie du problème conduit à ne considérer qu'une moitié de poutre. Le moment de flexion s'exprime comme suit :

1- Détermination des Réactions aux Appuis :

$$\sum M_A = 0 : R_B = \frac{P}{2}$$

$$\sum M_B = 0 : R_A = \frac{P}{2}$$

On va considérer le tronçon $(0 \leq x \leq \frac{l}{2})$:

$$M + R_A x = 0 \Rightarrow M = -R_A x$$

$$M = -\frac{Px}{2} \quad (4.31)$$

Où P est la charge totale exercée au milieu de la poutre. En reportant cette dernière expression dans (4.13), il vient :

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} = -\frac{M}{E_x I} = \frac{Px}{2E_x I}, \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \quad (4.32)$$

Dans le cas des appuis simples, les conditions aux frontières sont pour $x=0$:

$$M = 0, \quad w_0 = 0 \quad (4.33)$$

D'autre part, la symétrie impose que, pour $x = l/2$:

$$\frac{dw_0}{dx} = 0. \quad (4.34)$$

On intègre la relation (4.32) pour obtenir la flèche :

$$\begin{aligned} \frac{dw_0}{dx} &= \int \frac{Px}{2E_x I} dx = \frac{Px^2}{4E_x I} + C_1 \\ w_0 &= \int \left(\frac{Px^2}{4E_x I} + C_1 \right) dx \\ w_0 &= \frac{Px^3}{12E_x I} + C_1 x + C_2 \end{aligned} \quad (4.35)$$

Pour déterminer les constantes C_1 et C_2 , on applique les conditions aux limites (4.33) et (4.34) :

$$\begin{aligned} \text{pour } x = 0 \quad w_0 &= \frac{Px^3}{12E_x I} + C_1 x + C_2 = 0, \quad C_2 = 0 \\ \text{pour } x = l/2 \quad \frac{dw_0}{dx} &= \frac{P \left(\frac{l}{2} \right)^2}{4E_x I} + C_1 = 0, \quad C_1 = -\frac{Pl^2}{16E_x I} \end{aligned}$$

2- Détermination de la flèche :

La flèche w_0 s'écrit :

$$w_0 = \frac{Px^3}{12E_x I} - \frac{Pl^2}{16E_x I} x = -\frac{Pl^2}{48E_x I} x \left[3 - \left(\frac{2x}{l} \right)^2 \right]. \quad (4.36)$$

La flèche maximum w_{max} de la poutre est déterminée pour $x = l/2$:

$$w_{max} = \frac{Pl^3}{48E_x I} = \frac{Pl^3}{48b} D_{11}^* \quad (4.37)$$

Cette relation peut être utilisée pour déterminer soit le module de flexion de la poutre, soit le coefficient D_{11}^* , connaissant la flèche w_{max} au centre pour une charge imposée P :

$$E_x = \frac{Pl^3}{48Iw_{max}} = \frac{Pl^3}{4bh^3w_{max}}, \quad (4.38)$$

$$D_{11}^* = \frac{48bw_{max}}{Pl^3}, \quad (4.39)$$

3- Détermination des Contraintes :

Les contraintes dans la couche k s'écrivent d'après (4.26) à (4.28) :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^k &= -6a_{xx}^k \frac{Px}{bh^3} z, \\ \sigma_{yy}^k &= -6a_{yy}^k \frac{Px}{bh^3} z, \\ \sigma_{xy}^k &= -6a_{xy}^k \frac{Px}{bh^3} z, \end{aligned} \quad (4.40)$$

Ces contraintes sont maximales pour $x = l/2$, soit :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^k &= -3a_{xx}^k \frac{Pl}{bh^3} z, \\ \sigma_{yy}^k &= -3a_{yy}^k \frac{Pl}{bh^3} z, \\ \sigma_{xy}^k &= -3a_{xy}^k \frac{Pl}{bh^3} z, \end{aligned} \quad (4.41)$$

IV.4.2 Flexion 4-Points :

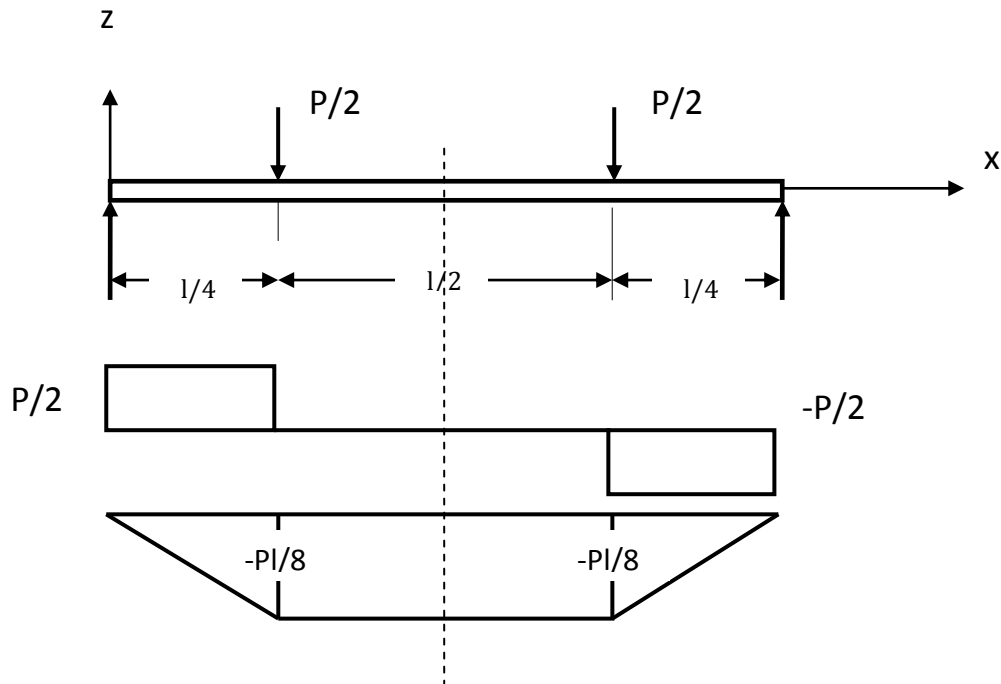


Figure 4.10 Sollicitation d'une poutre en flexion 4-points

Nous considérons une poutre en flexion 4-points, chargée avec deux charges $P/2$ exercées aux quarts de la longueur entre appuis. La symétrie du problème conduit à ne considérer qu'une moitié de la poutre. Le moment de flexion s'exprime comme suit :

1- Détermination des Réactions aux Appuis :

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_B l - \frac{3lP}{8} - \frac{lP}{8} = 0 \Rightarrow R_B = \frac{P}{2}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -R_A l + \frac{3lP}{8} + \frac{lP}{8} = 0 \Rightarrow R_A = \frac{P}{2}$$

- Pour le tronçon $(0 \leq x \leq \frac{l}{4})$:

$$M + R_A x = 0 \Rightarrow M = -\frac{P}{2}x \quad (4.42)$$

- Pour le tronçon $(\frac{l}{4} \leq x \leq \frac{l}{2})$:

$$M + R_A x - \frac{P}{2}\left(x - \frac{l}{4}\right) = 0 \Rightarrow M = -\frac{Pl}{8} \quad (4.43)$$

2- Détermination de la flèche :

P est la charge totale exercée au milieu de la poutre, en reportant cette expression dans (4.29), il vient :

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} = \frac{d^2 w_1}{dx^2} = -\frac{M}{E_x I} = \frac{Px}{2E_x I}, \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{4} \quad (4.44)$$

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} = \frac{d^2 w_2}{dx^2} = -\frac{M}{E_x I} = \frac{Pl}{8E_x I}, \quad \frac{l}{4} \leq x \leq \frac{l}{2} \quad (4.45)$$

En introduisant :

$$w_0 = w_1 \quad \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{l}{4}$$

$$w_0 = w_2 \quad \text{pour } \frac{l}{4} \leq x \leq \frac{l}{2}$$

Dans le cas des appuis simples, les conditions aux frontières sont pour $x=0$:

$$M = 0, \quad w_1 = 0 \quad (4.46)$$

La symétrie impose que la pente de la déformée s'annule au centre de la poutre, soit pour $x = l/2$:

$$\frac{dw_2}{dx} = 0. \quad (4.47)$$

Comme, la continuité de la flèche et de la pente de la déformée doit être assurée pour $x = l/4$:

$$w_1 = w_2, \quad \frac{dw_1}{dx} = \frac{dw_2}{dx}. \quad (4.48)$$

En intégrant les relations (4.44) et (4.45), on obtient la flèche :

$$w_1 = -\frac{Pl^2}{192E_x I} x \left[9 - 16 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right], \quad (4.49)$$

$$w_2 = -\frac{Pl^3}{768E_x I} x \left[1 - 48 \frac{x}{l} + 48 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right], \quad (4.50)$$

Ces expressions permettent de déterminer la flèche w_q au point $x = l/4$ et la flèche w_c au centre $x = l/2$:

$$w_q = \frac{Pl^3}{96E_x I} = \frac{Pl^3}{96b} D_{11}^*, \quad (4.51)$$

$$w_c = \frac{11Pl^3}{768E_x I} = \frac{11Pl^3}{768b} D_{11}^*, \quad (4.52)$$

Ces relations peuvent être utilisées pour déterminer soit le module de flexion de la poutre, soit le coefficient D_{11}^* à partir de la mesure des flèches w_q ou w_c .

$$E_x = \frac{Pl^3}{96Iw_q} = \frac{Pl^3}{8bh^3w_q}, \quad (4.53)$$

$$E_x = \frac{11Pl^3}{768Iw_c} = \frac{11Pl^3}{64bh^3w_c}, \quad (4.54)$$

Et :

$$D_{11}^* = \frac{96bw_q}{Pl^3} = \frac{768bw_c}{11Pl^3} \quad (4.55)$$

3- Détermination des Contraintes :

Les contraintes dans la couche k s'écrivent d'après (4.26) à (4.28) :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^k &= -6a_{xx}^k \frac{Px}{bh^3} z, \\ \sigma_{yy}^k &= -6a_{yy}^k \frac{Px}{bh^3} z, \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{4} \\ \sigma_{xy}^k &= -6a_{xy}^k \frac{Px}{bh^3} z, \end{aligned} \quad (4.56)$$

Et :

$$\sigma_{xx}^k = -\frac{3}{2} a_{xx}^k \frac{Pl}{bh^3} z,$$

$$\begin{aligned}\sigma_{yy}^k &= -\frac{3}{2} a_{yy}^k \frac{Pl}{bh^3} z, & \frac{l}{4} \leq x \leq \frac{l}{2} \\ \sigma_{xy}^k &= -\frac{3}{2} a_{xy}^k \frac{Pl}{bh^3} z,\end{aligned}\tag{4.57}$$

La comparaison avec les relations (4.41) explique que pour le tronçon $(0 \leq x \leq \frac{l}{4})$ les contraintes sont exprimées par des relations identiques à celles trouvées dans le cas de la flexion 3-points.

D'autre part, la comparaison entre les relations (4.56) et (4.57) montre que les contraintes maximales se produisent pour x compris entre $L/4$ et $L/2$, Les contraintes étant indépendantes de x dans cet intervalle.

CHAPITRE V

COMPORTEMENT EN FLEXION DES POUTRES COMPOSITES AVEC CONSIDERATION DE L'EFFET DU CISAILLEMENT TRANSVERSE

V.1 Introduction :

Dans le chapitre précédent, on a pu décrire les champs de contraintes et déformations dans les poutres composites stratifiées peu épaisses, excepté dans les régions peu étendues près des bords des stratifiés. Dans le cas d'une structure sollicitée en flexion, la rigidité et la résistance en flexion augmentent rapidement avec l'épaisseur des stratifiés constituant la structure. Toutefois, pratiquement seules les couches externes supportent les charges imposées à la structure.

Par contre dans le cas des stratifiés épais (rapport largeur sur épaisseur inférieur à 10), la théorie des poutres Euler-Bernoulli devient assez mal adaptée à la description du comportement mécanique : flèche du stratifié, répartition des contraintes, etc. Dans le cas où le cisaillement transverse est pris en compte, une introduction des facteurs de correction aux modules de cisaillement transverse du stratifié devient nécessaire. Cette analyse a été initialement développée par la théorie de Timoshenko [23].

V.2 Equations de comportement en Flexion en tenant compte du Cisaillement Transverse:

V.2.1 Relation Contrainte-Déformation :

La relation entre les contraintes et les déformations dans une couche k s'exprime comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma^0_{yz} \\ \gamma^0_{xz} \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

Le champ des contraintes est constitué des contraintes en membrane : $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ et des contraintes en cisaillement transverse : τ_{yz}, τ_{xz} , et on peut

aussi remarquer à partir de la relation (5.1) que ces deux champ sont découplés. Les rigidités réduites transformées \bar{Q}_{ij} sont données par la relation (3.13) et les coefficients C'_{ij} sont donnés par :

$$\begin{aligned} C'_{44} &= C_{44} \cos^2 \theta + C_{55} \sin^2 \theta, \\ C'_{45} &= (C_{55} - C_{44}) \sin \theta \cos \theta, \\ C'_{55} &= C_{44} \sin^2 \theta + C_{55} \cos^2 \theta, \end{aligned} \quad (5.2)$$

Les contraintes en membrane dans la couche k sont données par la même relation (3.31):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \varepsilon^0_{xy} \end{Bmatrix} + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

Les contraintes en cisaillement transverse dans la couche k s'expriment par :

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{44} & C'_{45} \\ C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma^0_{yz} \\ \gamma^0_{xz} \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

V.2.2 Résultantes en moment fléchissant :

L'équation constitutive d'un stratifié symétrique en flexion pure, tenant compte du cisaillement transverse s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

Les coefficients D_{ij} ont été introduit dans la théorie classique des stratifiés par la relation (4.20).

L'équation des moments (5.4) a une forme identique à celle des moments (4.22) de la théorie classique des stratifiés, d'où les expressions des courbures k_x, k_y, k_{xy} :

$$k_x = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x},$$

$$k_y = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y},$$

$$k_{xy} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}$$

L'équation des moments (5.4) peut être écrite sous la forme inverse suivante :

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^*_{11} & D^*_{12} & D^*_{16} \\ D^*_{12} & D^*_{22} & D^*_{26} \\ D^*_{16} & D^*_{26} & D^*_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

Où les coefficients D^*_{ij} sont les éléments de la matrice inverse de $[D_{ij}]$ donnés par la relation (4.25).

La déformation en flexion ε_{xx} est donnée par :

$$\varepsilon_{xx} = z \frac{d\varphi_x}{dx}, \quad (5.6)$$

Nous nous plaçons dans l'hypothèse où les fonctions φ_x et w_0 sont indépendantes de la variable y , c'est-à-dire :

$$\varphi_x = \varphi_x(x), \quad w_0 = w_0(x). \quad (5.7)$$

De l'équation (5.5), nous tirons la relation donnant le moment M_x :

$$k_x = \frac{d\varphi_x}{dx} = D^*_{11} M_x, \quad (5.8)$$

L'hypothèse (4.9) de la flexion des poutres est également appliquée à la théorie prenant en compte le cisaillement transverse.

$$M_y = 0, \quad M_{xy} = 0. \quad (5.9)$$

V.2.3 Résultantes en Cisaillement :

Compte tenu des expressions (3.44) et (5.3), l'équation des résultantes en cisaillement s'écrit :

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

Avec :

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) (C'_{ij})_k, \quad i, j = 4, 5 \quad (5.11)$$

Les coefficients F_{ij} ont la même forme que les coefficients A_{ij} (3.37). Ils sont différents par l'utilisation des coefficients C'_{ij} de rigidité en cisaillement transverse au lieu des coefficients \bar{Q}_{ij} de rigidité réduite (3.13).

Les déformations en cisaillement transverse sont données par la relation :

$$\gamma_{yz}^0 = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y$$

$$\gamma_{xz}^0 = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x$$

L'équation des résultantes en cisaillement (5.5) est découplée, et peut être écrite sous la forme inverse suivante :

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^*_{44} & F^*_{45} \\ F^*_{45} & F^*_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

Où les coefficients F^*_{ij} sont exprimés dans le cadre de la théorie initiale du cisaillement transverse :

$$\begin{aligned} F^*_{44} &= \frac{F_{55}}{\Delta F}, \\ F^*_{45} &= \frac{F_{45}}{\Delta F}, \\ F^*_{55} &= \frac{F_{44}}{\Delta F}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

avec :

$$\Delta F = F_{44}F_{55} - F_{45}^2$$

La déformation en cisaillement moyenne γ_{xz}^0 sont alors données par les expressions :

$$\gamma_{xz}^0 = \varphi_x + \frac{dw_0}{dx}, \quad (5.14)$$

Dans le cas d'une flexion pure, les relations fondamentales (3.45) à (3.48) des plaques se réduisent à :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0. \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0. \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0. \quad (5.17)$$

En reportant la relation (5.9) dans l'équation d'équilibre (5.17), nous trouvons que la résultante en cisaillement Q_y est nulle :

$$Q_y = 0. \quad (5.18)$$

De l'équation (5.12), nous tirons :

$$\gamma_{xz}^0 = \varphi_x + \frac{dw_0}{dx} = F_{55}^* Q_x, \quad (5.19)$$

En reportant les expressions (5.8) et (5.19) dans l'équation (5.16), nous obtenons :

$$\frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} - \frac{D_{11}^*}{F_{55}^*} \left(\varphi_x + \frac{dw_0}{dx} \right) = 0 \quad (5.20)$$

En introduisant le module de Young E_x de la poutre donné par la relation (4.30) :

$$E_x = \frac{12}{D_{11}^* h^3}$$

Et le module de cisaillement G_{xz} de la poutre sera exprimé par:

$$G_{xz} = \frac{1}{h F_{55}^*}. \quad (5.21)$$

L'équation (5.20) devient alors:

$$\frac{d^2\varphi_x}{dx^2} - \frac{bh G_{xz}}{I E_x} \left(\varphi_x + \frac{dw_0}{dx} \right) = 0 \quad (5.22)$$

De même, en reportant l'expression (5.19) dans l'équation (5.15), nous obtenons :

$$\frac{d^2w_0}{dx^2} + \frac{d\varphi_x}{dx} + F^*_{55}q = 0, \quad (5.23)$$

En prenant compte de la relation (5.21) et de la charge : $p = bq$, on aura :

$$\frac{d^2w_0}{dx^2} + \frac{d\varphi_x}{dx} + \frac{1}{hG_{xz}}p = 0, \quad (5.24)$$

On peut conclure que les équations (5.20) et (5.23), ou (5.22) et (5.24), constituent les équations fondamentales des poutres en flexion de stratifiés symétriques, tenant compte de la déformation en cisaillement.

Comme le moment de flexion total M (par unité de largeur b) est donné par la relation (4.32) : $M = bM_x$, la relation (5.8) s'écrit comme:

$$\frac{d\varphi_x}{dx} = D^*_{11}M_x = \frac{M}{E_x I} \quad (5.25)$$

Après avoir reporté l'équation (5.21) dans l'équation (5.22). On compare la dérivée de l'équation (5.25) avec l'équation (5.26) afin d'obtenir une nouvelle équation fondamentale des poutres en flexion de stratifiés symétriques, tenant compte de la déformation en cisaillement:

$$\frac{dM_x}{dx} = \frac{1}{F^*_{55}} \left(\varphi_x + \frac{dw_0}{dx} \right), \quad (5.26)$$

Ou bien :

$$\frac{dM}{dx} = bhG_{xz} \left(\varphi_x + \frac{dw_0}{dx} \right), \quad (5.27)$$

V.2.4 Contraintes de flexion:

Les contraintes dans la couche k du stratifié s'écrivent :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.28)$$

Ou sous la forme explicite:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} D^*_{11} & D^*_{12} & D^*_{16} \\ D^*_{12} & D^*_{22} & D^*_{26} \\ D^*_{16} & D^*_{26} & D^*_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^k &= z(\bar{Q}_{11}^k D_{11}^* + \bar{Q}_{12}^k D_{12}^* + \bar{Q}_{16}^k D_{16}^*) M_x, \\ \sigma_{yy}^k &= z(\bar{Q}_{12}^k D_{11}^* + \bar{Q}_{22}^k D_{12}^* + \bar{Q}_{26}^k D_{16}^*) M_x, \\ \tau_{xy}^k &= z(\bar{Q}_{16}^k D_{11}^* + \bar{Q}_{26}^k D_{12}^* + \bar{Q}_{66}^k D_{16}^*) M_x, \end{aligned} \quad (5.29)$$

Les expressions de ces contraintes peuvent être réécrites, en introduisant M, I et les relations (4.25) donnant a_{xx}^k , a_{yy}^k , a_{xy}^k :

$$\sigma_{xx}^k = a_{xx}^k \frac{M}{I} z, \quad (5.30)$$

$$\sigma_{yy}^k = a_{yy}^k \frac{M}{I} z, \quad (5.31)$$

$$\tau_{xy}^k = a_{xy}^k \frac{M}{I} z, \quad (5.32)$$

Il en résulte que les expressions des contraintes dans la couche k du stratifié où le cisaillement transverse est pris en compte sont les mêmes obtenues avec la théorie classique des stratifiés en flexion pure.

V.2.5 Contraintes de cisaillement:

La contrainte de cisaillement σ_{xz} dans les couches se déduit des relations fondamentales des poutres (2.44), soit :

$$\frac{\partial \sigma^k_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma^k_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (5.33)$$

$$\frac{\partial \sigma^k_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma^k_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (5.34)$$

D'où :

$$\frac{d\sigma^k_{xz}}{dz} = -\frac{d\sigma^k_{xx}}{dx} = -a^k_{xx} \frac{1}{I} \frac{dM}{dx} z. \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial \sigma^k_{yz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma^k_{yy}}{\partial y} = -a^k_{yy} \frac{1}{I} \frac{dM}{dx} z. \quad (5.36)$$

$$\sigma^k_{xz} = -a^k_{xx} \frac{Q}{2I} (z^2 + C_k). \quad (5.37)$$

$$\sigma^k_{yz} = -a^k_{yy} \frac{Q}{2I} (z^2 + C'_k). \quad (5.38)$$

Les constantes C_k et C'_k dans chaque couche sont déterminées en annulant σ_{xz} et σ_{yz} sur les faces supérieures et inférieures, et en assurant la continuité de σ_{xz} et σ_{yz} entre chaque couche.

Dans le cas de la flexion des poutres, la prise en compte du cisaillement transverse ne modifie pas la répartition des contraintes normales ou de flexion dans le stratifié.

V.3 Flexion 3-Points :

Dans le cas d'une poutre en flexion 3-points, le moment de flexion est exprimé par la relation (4.46). En reportant cette expression dans la relation (5.8), nous obtenons :

$$\varphi_x = -\frac{P}{4E_x I} x^2 + c, \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \quad (5.39)$$

La symétrie du chargement implique que $u(l/2) = 0$. Il résulte de (3.16) que cette condition se traduit ici par :

$$\varphi_x \left(\frac{l}{2} \right) = 0. \quad (5.40)$$

Cette condition introduite dans (5.39) conduit à :

$$\varphi_x = \frac{Pl^2}{16E_x I} \left[1 - 4 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right], \quad (5.41)$$

Ou

$$\varphi_x = \frac{Pl^2}{16b} D_{11}^* \left[1 - 4 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right], \quad (5.42)$$

En reportant l'expression (4.46) du moment M dans l'équation (5.14), nous en déduisons l'expression de la flèche w_0 en fonction de φ_x , soit :

$$\frac{dw_0}{dx} = - \left(\varphi_x + \frac{P}{2bhG_{xz}} \right), \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \quad (5.43)$$

Il est intéressant de noter que, d'après ce résultat, la pente de la déformée ne s'annule pas au centre de la poutre. En effet puisque $\varphi_x(l/2) = 0$, elle vaut :

$$\frac{dw_0}{dx} \left(\frac{l}{2} \right) = - \frac{P}{2bhG_{xz}}, \quad (5.44)$$

Après substitution de φ_x , l'intégration de l'équation (5.43) conduit en tenant compte de $w_0(0) = 0$ à :

$$w_c = \frac{Pl^2}{4bh^3 E_x} x \left[4 \left(\frac{x}{l} \right)^2 - 3 - 2S \right], \quad (5.45)$$

On peut aussi définir le coefficient de cisaillement S par :

$$S = \frac{E_x}{G_{xz}} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \quad (5.46)$$

A partir duquel, on peut remarquer que l'effet de la déformation en cisaillement transverse dépend donc du rapport d'élanement l/h de la poutre, et du rapport E_x/G_{xz} des modules de la poutre.

IV.4 Flexion 4-Points :

Nous considérons une poutre en flexion 4-points, soumise aux deux charges $P/2$ exercées aux quarts de la longueur entre appuis. La symétrie du problème conduit à ne considérer qu'une moitié de la poutre. Le moment de flexion s'exprime comme suit :

1- Détermination des Réactions aux Appuis :

$$\sum M_A = 0 \quad , \quad R_B = \frac{P}{2}$$

$$\sum M_B = 0 \quad , \quad R_A = \frac{P}{2}$$

- Pour le tronçon $(0 \leq x \leq \frac{l}{4})$:

$$M + R_A x = 0 \quad \Rightarrow \quad M = -\frac{P}{2} x \quad (5.47)$$

$$\frac{d\varphi_x}{dx} = \frac{M}{E_x I} = -\frac{P}{2E_x I} x$$

$$\varphi_x = \varphi_1 = -\frac{P}{4E_x I} x^2 + C_1 \quad (5.48)$$

- Pour le tronçon $(\frac{l}{4} \leq x \leq \frac{l}{2})$:

$$M + R_A x - \frac{P}{2} \left(x - \frac{l}{4}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad M = -\frac{Pl}{8} \quad (5.49)$$

$$\frac{d\varphi_x}{dx} = \frac{M}{E_x I} = -\frac{Pl}{8E_x I}$$

$$\varphi_x = \varphi_2 = -\frac{Pl}{8E_x I} x + C_2 \quad (5.50)$$

La symétrie du chargement conduit à :

$$\text{Pour } x = \frac{l}{2} \quad ; \quad \varphi_2(l/2) = -\frac{Pl^2}{16E_x I} + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{Pl^2}{16E_x I}$$

Donc pour le tronçon $(\frac{l}{4} \leq x \leq \frac{l}{2})$, la pente φ_x s'écrit comme suit :

$$\varphi_x = \varphi_2 = \frac{Pl^2}{16E_x I} \left(1 - 2\frac{x}{l}\right) \quad (5.51)$$

La continuité des déplacements pour $x = l/4$ impose que :

$$\varphi_1(l/4) = \varphi_2(l/4).$$

$$\text{D'où : } C_1 = \frac{3Pl^2}{64 E_x I}$$

Donc pour le tronçon $(0 \leq x \leq \frac{l}{4})$, la pente φ_x s'écrit comme suit :

$$\varphi_x = \varphi_1 = \frac{Pl^2}{64E_x I} \left[3 - 16\left(\frac{x}{l}\right)^2\right] \quad (5.52)$$

La combinaison des relations (4.40), (4.41) et (5.14) conduit à :

$$\frac{dw_0}{dx} = \frac{dw_1}{dx} = -\left(\varphi_1 + \frac{P}{2bhG_{xz}}\right), \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{4} \quad (5.53)$$

$$\frac{dw_0}{dx} = \frac{dw_2}{dx} = -\varphi_2, \quad \frac{l}{4} \leq x \leq \frac{l}{2} \quad (5.54)$$

On substitue la relation (5.52) dans la relation (5.53), et puis on intègre on aura :

$$w_1 = \frac{Pl^2}{192E_x I} x \left[16\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 9 - 8S\right], \quad (5.55)$$

Où $S = \frac{E_x}{G_{xz}} \left(\frac{h}{l}\right)^2$ est le coefficient de cisaillement défini par la relation (5.46).

De même on obtient la flèche w_2 pour le tronçon $(\frac{l}{4} \leq x \leq \frac{l}{2})$.

$$w_2 = \frac{Pl^2}{16E_x I} x \left(1 - \frac{x}{l}\right) + C_3, \quad (5.56)$$

La constante C_3 est déterminée en exprimant la continuité de la flèche en $l/4$:

$$w_1(l/4) = w_2(l/4) \quad (5.57)$$

Nous obtenons :

$$w_2 = \frac{Pl^3}{768E_x I} \left[1 - 48\frac{x}{l} + 48\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 8S\right]. \quad (5.58)$$

La flèche au centre est déterminée à partir de l'expression précédente, et s'écrit :

$$w_c = \frac{Pl^3}{768E_x I} (11 + 8S). \quad (5.59)$$

Ou bien :

$$w_c = \frac{Pl^3}{768b} D_{11}^* \left(11 + 8 \frac{F_{55}^*}{D_{11}^*} \frac{1}{l^2} \right). \quad (5.60)$$

Pour des valeurs de la flèche au centre de la poutre w_c et des valeurs de la charge P , on peut déterminer les coefficients D_{11}^* et F_{55}^* en fonction de la distance l entre les appuis de la poutre.

On peut aussi exprimer la flèche de la poutre w_c en fonction de la flèche $w_c(0)$ donnée par la relation (4.50) en l'absence de cisaillement.

$$w_c(S) = \left(1 + \frac{8}{11} S \right) w_c(0), \quad (5.61)$$

En remplaçant le coefficient de cisaillement S par sa valeur donnée par la relation (5.46) dans la relation (5.61), on obtient:

$$w_c(S) = \left(1 + \frac{8}{11} \frac{E_x}{G_{xz}} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \right) w_c(0), \quad (5.62)$$

Les relations (5.61) et (5.62) montrent que la flèche au centre de la poutre accroît en prenant compte de la déformation en cisaillement.

CHAPITRE VI

ETUDE COMPARATIVE DU COMPORTEMENT MECANIQUE DES POUTRES COMPOSITES SOUS L'EFFET DE CISAILLEMENT TRANSVERSE

VI.1 Introduction :

Une poutre, ou un élément de flexion, est fréquemment rencontré dans des structures et des machines et son analyse élémentaire de contraintes constitue une des plus importantes études de la mécanique des matériaux. Une poutre est un élément soumis aux charges appliquées transversalement à sa longueur, qui provoque sa flexion et son cisaillement transverse. Par exemple, une poutre simplement appuyée à ses extrémités et soumise à une charge appliquée à son centre appelée « Poutre flexion 3-Points » se déformera et se pliera suivant son plan neutre et peut même se cisailer dans les plans perpendiculaires à son plan neutre.

Si les poutres composites sont aujourd'hui d'utilisation courante dans des secteurs tels que l'aéronautique ou l'automobile, leurs applications dans le domaine du bâtiment et du génie civil restent embryonnaires. Elles se heurtent aux conditions de mise en œuvre, aux exigences de durée de vie des bâtiments ainsi qu'à de fortes contraintes en termes de coût (du fait de la concurrence des matériaux dits traditionnels). Deux familles de composites peuvent toutefois trouver des débouchés dans le secteur de la construction : les composites à matrice organique, et les composites cimentaires [20].

En effet, le but de notre travail consiste à étudier le comportement mécanique d'une poutre stratifiée soumise à la flexion avec prise en compte ou non de l'effet du cisaillement transverse. Nous considérons le cas des matériaux composites stratifiés dont les plis sont composés d'un renfort en verre du type E et d'une matrice en époxyde.

Cette étude est effectuée sur des poutres en matériaux composites connues sous le nom de poutres stratifiées. Plus particulièrement nous nous intéressons aux poutres stratifiées symétriques (pour lesquels il y a absence de couplage flexion-membrane et présence du couplage flexion-torsion) dont les

orientations des plis sont symétriques par rapport au plan médian. Les poutres considérées constituées de dix plis réguliers d'épaisseurs identiques et de même nature, et avec des orientations propres à chaque pli.

VI.2 Présentation des Matériaux Constitutifs Utilisés :

Afin de choisir la nature du matériau de la fibre à considérer, on est contraint à différents critères de résistance. Par exemple, il faut savoir que la fibre de carbone est plus rigide que la fibre de verre, mais qu'elle n'autorise pas les mêmes facilités. Avec le carbone, la moindre bulle provoque un point faible, et en surface, une bulle se voit comme le nez au milieu de la figure. Il est donc préférable de commencer la manipulation des fibres par du verre, le carbone viendra après. Notez que le kevlar s'ajoute au carbone pour obtenir des qualités exceptionnelles. Ensuite il faut choisir un grammage. A savoir simplement que plus le grammage est petit, plus le nombre de plis sera important, et plus la rigidité sera importante.

Pratiquement invisible, la fibre de verre est pourtant présente partout. Dans le mobilier d'un bureau design et dans le pare-chocs des automobiles. Au fil des vagues et sur les pistes de montagne, aux pieds des skieurs et dans la carrosserie des téléphériques. Elle prend l'avion avec Concorde et le train en TGV. Dans le domaine du sport, elle est à l'origine des meilleures performances de saut à la perche, et les amateurs de courses en mer savent bien tout le bénéfice qu'ils peuvent en tirer [20]. Très résistante à la traction, elle est l'armature idéale des matériaux plastiques, le renfort principal des plastiques, désignés souvent sous le nom général de matériaux composites. Ses multiples fonctions et la facilité de sa mise en œuvre expliquent tous ses succès dans la recherche de performances supérieures, en vitesse et en aérodynamisme. Et cela dans les meilleures conditions de compétitivité. Comme tous les matériaux de pointe, c'est dans l'aéronautique, le sport et l'automobile de compétition

que les matériaux armés de fibre de verre ont fait leur première apparition à la suite d'essais sévères. Les grandes séries n'ont été atteintes qu'après des études complètes permettant de tirer le meilleur parti des propriétés particulières pouvant assurer plusieurs fonctions. A tous les niveaux, la fibre de verre est une fibre performante.

Lors du choix du matériau de la matrice, c'est la résine qui domine les différentes applications industrielles. Selon le tableau 6.1, on a le choix entre les résines époxyde et polyester [25].

Tableau 6.1 Critères de Choix entre les résines Epoxyde et Polyester

	Résine époxyde	Résine polyester
Prix	Plus cher	Moins cher
Rigidité	Meilleure	Moins bonne
Résistance aux vibrations	Très bonne	Bonne
Fibres de verre	Très bon résultat	Bon résultat
Fibres de carbone	Excellent résultat	Déconseillé
Fibres de carbone / kevlar	Le top du top	Très déconseillé

Pour le cas de notre étude, on a opté pour la résine époxyde.

VI.3 Caractéristiques techniques des Matériaux Utilisés :

Afin d'étudier et d'éclaircir par des applications numériques le comportement mécanique d'une poutre composite de section rectangulaire en verre/époxyde sollicitée à la flexion 3-points. On a considéré des poutres stratifiées symétriques d'où implique la symétrie des contraintes, et empêche ainsi l'apparition des déformations de l'ensemble de la pièce : voilement et gauchissement. On a pris en considération les orientations les plus fréquemment utilisées telles que les Croisés : $[0_4/90_2/0_4]$, $[0_3/90_4/0_3]$, $[90_4/0_2/90_4]$, $[90_3/0_4/90_3]$, les croisés alternés $[0/90]_{5s}$, $[90/0]_{5s}$ et les équilibrés $[45_4/-45_2/45_4]$, $[45_3/-45_4/45_3]$ et $[45/-45]_{5s}$. Ces poutres sont constituées par un empilement de dix plis de fibres de verre unidirectionnelle et de résine époxyde de mêmes propriétés mécaniques et caractéristiques élastiques, et de

mêmes épaisseurs. Ces poutres stratifiées sont renforcés à 60%. Le tableau 6.2 est un récapitulatif des caractéristiques techniques du matériau composite verre/époxyde considéré et de ses constituants [22] :

Tableau 6.2 Caractéristiques Techniques du matériau composite Verre E/Époxyde considéré et de ses constituants:

Composant		Masse Volumique	Module d'élasticité longitudinal	Module de Cisaillement	Coefficient Poisson	
		ρ Kg/m ³	E Mpa	G Mpa	ν	
Renfort	Verre E (Application Courantes)	2 600	74 000	30 000	0.25	
Résine	époxyde	1 200	4 500	1 600	0.4	
Matériau composite		Module d'élasticité Longitudinal	Module d'élasticité Transversal	Module de Cisaillement Longitudinal	Coefficient Poisson Longitudinal	Contrat à la rupture
		E_{11} Mpa	E_{22} Mpa	G_{12} Mpa	ν_{12}	τ_r Mpa
Verre/Epoxy		45 000	12 000	4 500	0.3	63

VI.4 Etapes de Calcul de la Poutre Stratifiée:

Afin de décrire le comportement mécanique d'une poutre en matériau composite stratifié travaillant à la flexion pure, il faut supposer que la longueur de la poutre L est assez importante par rapport à sa largeur b et sa hauteur h .

Ensuite on va prendre en considération l'effet de cisaillement transverse (poutre courte et épaisse) pour établir une comparaison entre les contraintes et déformations engendrés dans les deux cas, et appliquer les relations données dans les chapitres précédents.

Pour cette raison, on a établi deux programmes informatiques qui illustrent les étapes d'analyse et de calcul de la poutre stratifiée soumise à une charge concentrée statique P . La variation de la disposition des plis constitutifs et l'effet de leur nombre total sont pris en considération. En général, on a essayé

de varier différents facteurs et observer l'influence de ces derniers sur le comportement mécanique de la poutre stratifiée, d'où on va voir les résultats obtenus dans ce qui suit.

Afin d'aboutir au calcul de ces différents paramètres, on donne dans la figure 6.1 un exemple de la géométrie d'empilements de la poutre stratifiée $[0_2/90_6/0_2]$. A partir duquel on a procédé à établir les programmes des étapes de calcul nécessaires écrites en Fortran pour déterminer les contraintes dans chaque pli de la poutre stratifiée ainsi que la flèche dans le cas d'une flexion 3-points et 4-points, Le programme s'applique quel que soit le nombre de plis et de la nature des matériaux constitutifs.

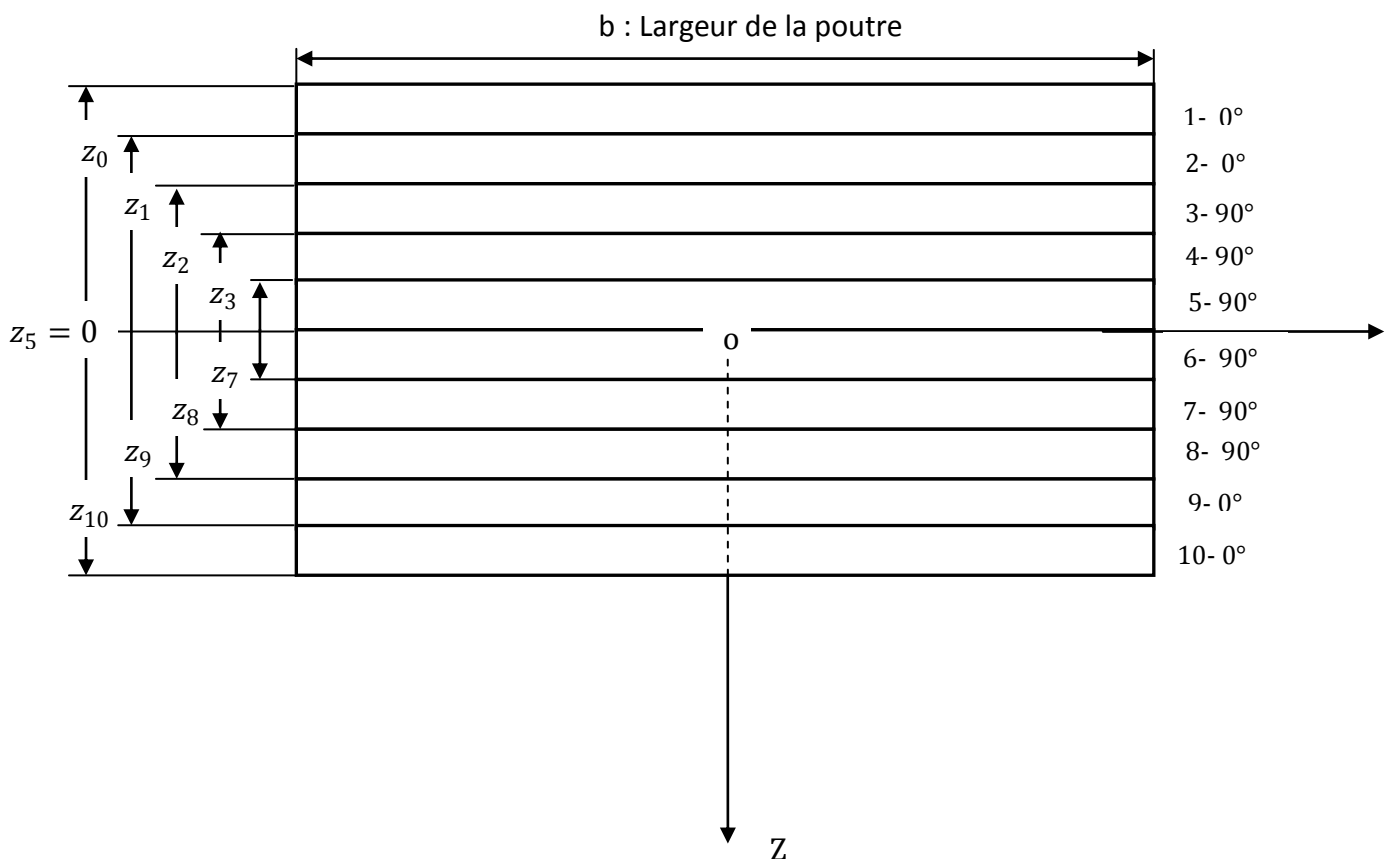


Figure 6.1 : Schématisation d'une Poutre Stratifiée Symétrique dont La séquence d'empilement est $[0_2/90_6/0_2]$

On a établi deux programmes informatiques CMPCSECT et CMPCAECT pour le calcul de la variation de la flèche sur la demi-longueur L de la poutre à cause de

la symétrie, et la détermination de la variation des contraintes à travers l'épaisseur de chaque pli de la poutre.

Le premier programme concerne seulement le cas du comportement de la poutre stratifiée symétrique sans prise en considération de l'effet du cisaillement transverse et le deuxième programme est celui du comportement de la poutre stratifiée symétrique avec prise en considération de l'effet du cisaillement transverse.

Sur la figure 6.2 et 6.3, on a représenté les deux programmes informatiques par des organigrammes explicites schématisant le déroulement des étapes. Leur établissement est suivi par l'analyse, le traitement des données et le calcul des résultats obtenus, avec une représentation graphique de la variation des contraintes et de la flèche.

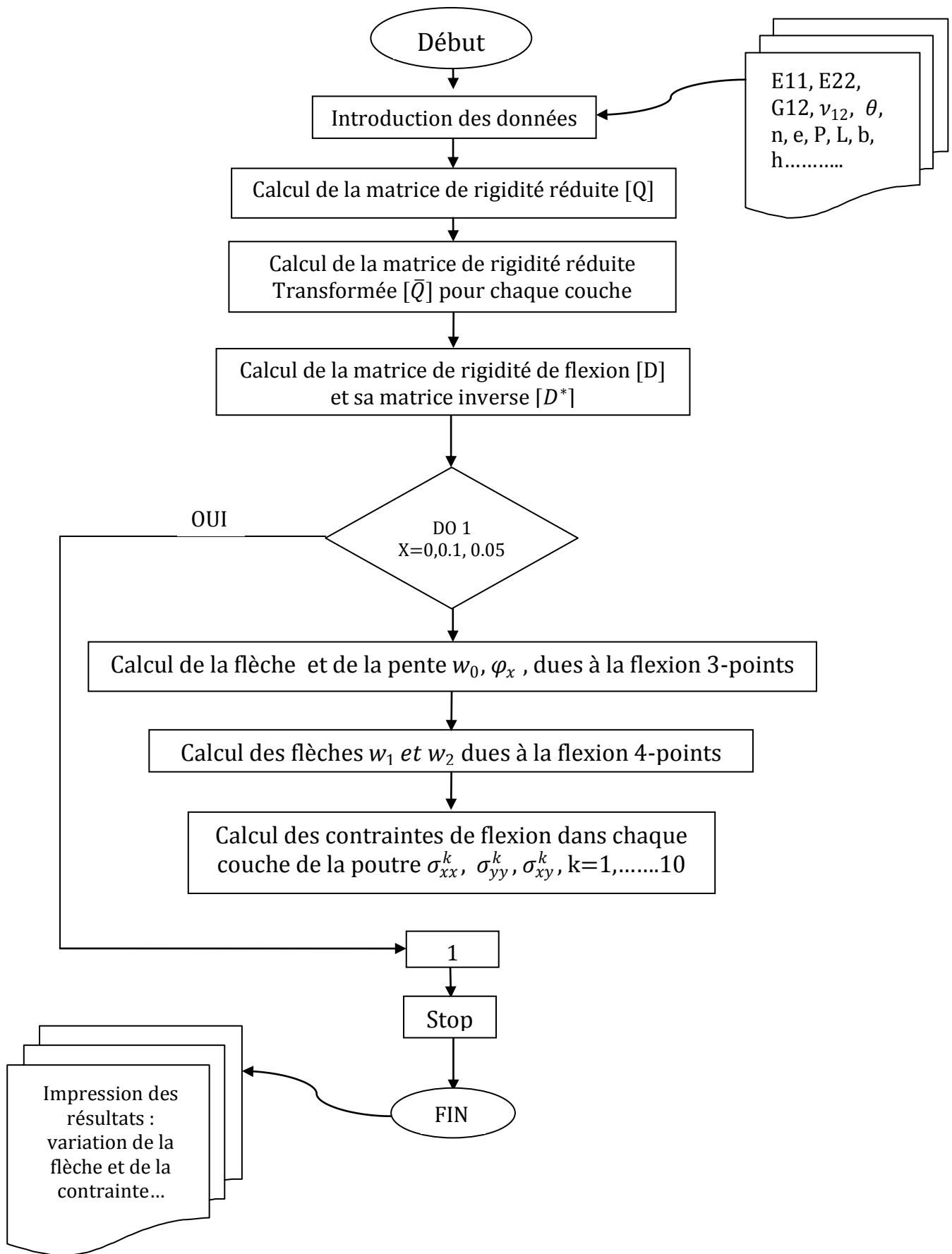


Figure 6.2 : Etapes Principales du Comportement Mécanique d'une Poutre Composite en Flexion sans l'Effet de Cisaillement Transverse (CMPCSECT)

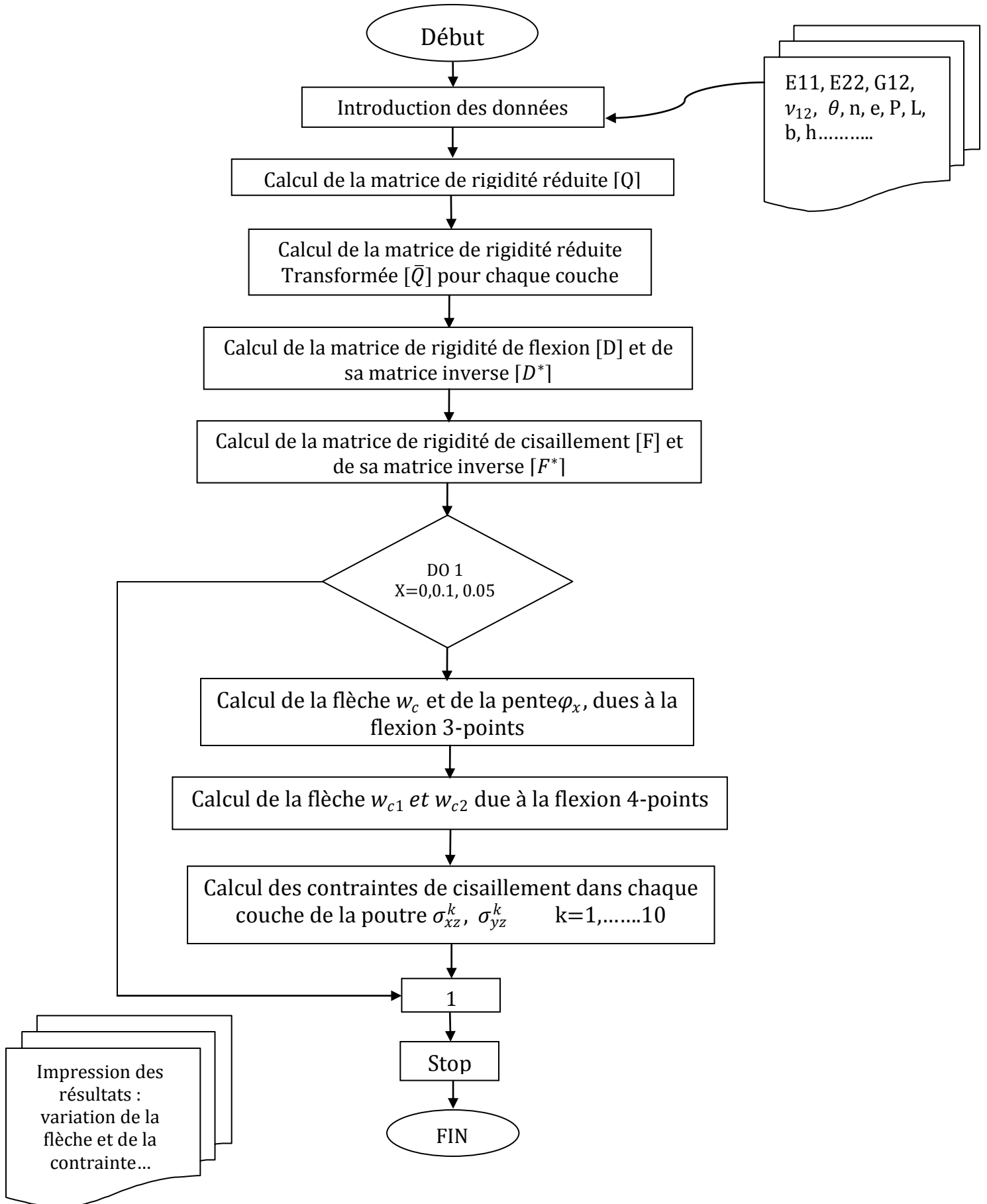


Figure 6.3 : Etapes Principales du Comportement Mécanique d’une Poutre Composite en Flexion sans l’Effet de Cisaillement Transverse (CMPCAECT)

VI.4.1 Description du Programme CMPCSECT

En premier lieu, on a introduit les constantes élastiques du matériau, les dimensions géométriques de la poutre, la charge appliquée et les positions des couches constituant le matériau par rapport au plan neutre et suivant l'axe Z avec les angles d'orientation des couches, et on a déclaré toutes les variables d'entrée et de sortie.

On a utilisé les relations (3.9) et (3.14) pour calculer les coefficients de la matrice de rigidité réduite $[Q_{ij}]$, et les coefficients de la matrice de rigidité réduite transformée $[\bar{Q}_{ij}]$ pour chaque angle d'orientation de la couche.

Pour le calcul de la matrice de rigidité en flexion $[D_{ij}]$, on a utilisé la relation (4.4), et on a déduit sa matrice inverse $[D_{ij}^*]$.

Afin de décrire le comportement mécanique des poutres composites stratifiées travaillant à la flexion pure ($L \gg h$) sans prise en compte de l'effet de cisaillement transverse, on a pris une poutre simple, chargée transversalement par une force P appliquée au centre de la poutre, elle a été choisie comme égale à 500N.

Flexion 3-points :

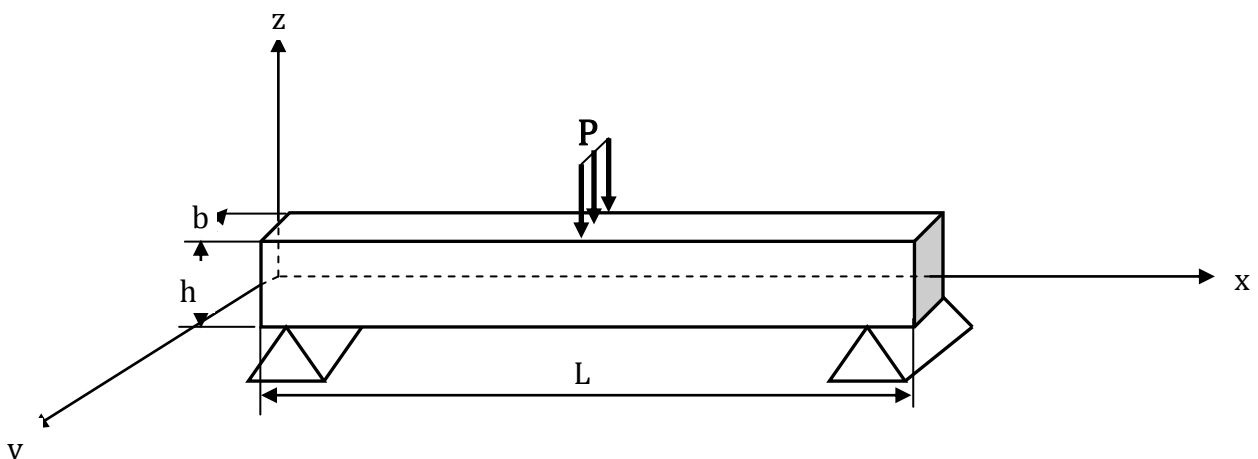


Figure.6.4 : Poutre composite sollicitée à la flexion 3-points

D'après les résultats obtenus au chapitre 4, la flèche w_0 et la pente φ_x de la flexion 3-points sont exprimées comme suit (Figure 6.4) :

$$w_0 = -\frac{Pl^2}{48E_x I} x \left[3 - \left(\frac{2x}{l} \right)^2 \right]$$

$$\varphi_x = \frac{Pl^2}{16E_x I} \left[1 - \left(\frac{2x}{l} \right)^2 \right]$$

On calcule les contraintes de flexion maximales pour $x = l/2$, à chaque couche dans la poutre sollicitée à la flexion 3-points :

$$\sigma_{xx}^k = -2a_{xx}^k \sigma_0 \frac{z}{h} \quad ,$$

$$\sigma_{yy}^k = -2a_{yy}^k \sigma_0 \frac{z}{h} \quad ,$$

Avec : $\sigma_0 = \frac{3Pl}{2bh^2}$ est la contrainte de traction maximale (ou contrainte conventionnelle à la rupture) atteinte sur la face inférieure ($z=-h/2$) dans le cas d'une poutre en matériau homogène.

Flexion 4-points :

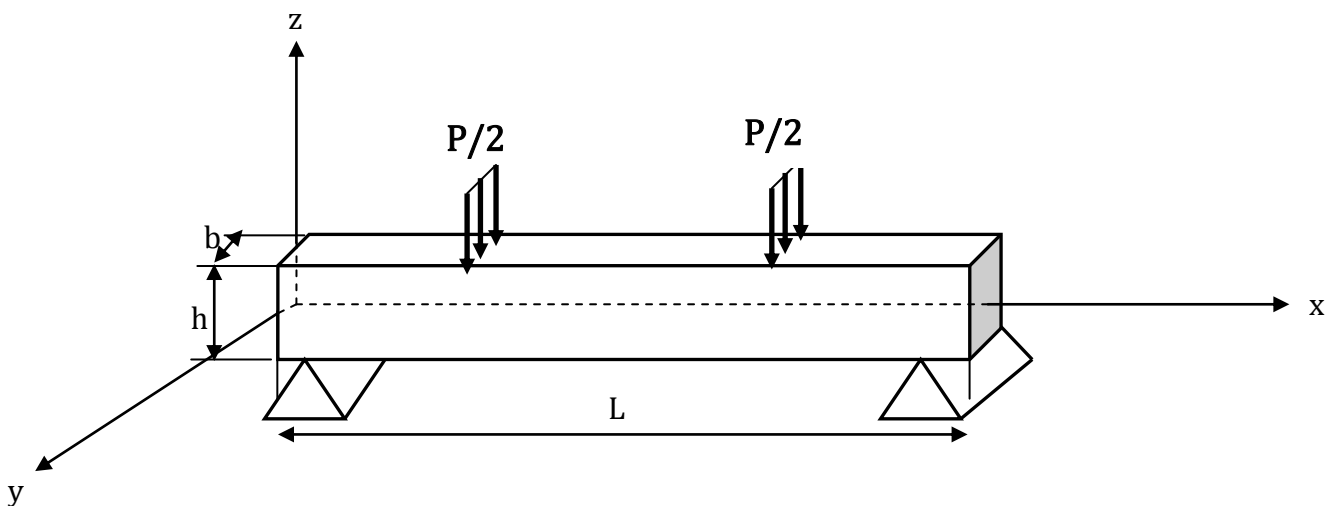


Figure 6.5 : Poutre composite sollicitée à la flexion 4-points

La flèche w_1 pour le tronçon $\left(0 \leq x \leq l/4\right)$ est exprimée comme suit :

$$w_1 = -\frac{Pl^2}{192E_x I} x \left[9 - 16 \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right],$$

La flèche w_2 pour le tronçon $\left(l/4 \leq x \leq l/2\right)$ est exprimée comme suit :

$$w_2 = -\frac{Pl^3}{768E_x I} x \left[1 - 48 \frac{x}{l} + 48 \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right],$$

On calcule les contraintes normales maximales pour x compris entre $l/4$ et $l/2$ pour chaque couche dans la poutre sollicitée à la flexion 4-points (figure 6.5) :

$$\sigma_{xx}^k = -2a_{xx}^k \sigma_m \frac{z}{h},$$

$$\sigma_{yy}^k = -2a_{yy}^k \sigma_m \frac{z}{h},$$

avec : $\sigma_m = \frac{3Pl}{4bh^2}$ est la contrainte de traction maximale atteinte sur la face inférieure ($z=-h/2$) dans le cas d'une poutre en matériau homogène.

VI.4.2 Description du Programme CMPCAECT

On a suivi les mêmes étapes utilisées par le programme CMPSSSECT pour le calcul du comportement d'une poutre composite à la flexion avec considération de l'effet de cisaillement transverse. De plus, on a calculé les coefficients de rigidité en cisaillement $[F_{ij}]$, on a utilisé la relation (5.6), et on a déduit sa matrice inverse $[F_{ij}^*]$.

Afin de décrire le comportement mécanique des poutres composites stratifiées travaillant à la flexion simple (poutre courte et épaisse) avec prise en compte de l'effet de cisaillement transverse. On a pris une poutre simple, chargée transversalement par une force P appliquée au centre de la poutre choisie, égale à 500N. D'après les résultats obtenus au chapitre 5, la flèche w_c et la pente φ_x de la flexion 3-points sont exprimées comme suit :

$$w_c = \frac{Pl^2}{48E_x I} x \left[4 \left(\frac{x}{l}\right)^2 - 3 - 2S \right],$$

Avec S est le coefficient de cisaillement donné par la relation (5.47) :

$$S = \frac{E_x}{G_{xz}} \left(\frac{h}{l} \right)^2$$

Et la pente de la déformée donnée par la relation (5.42) :

$$\varphi_x = \frac{Pl^2}{16E_x I} \left[1 - 4 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right]$$

La flèche au centre de la poutre (à $x=l/2$) est maximale, elle est déterminée par :

$$w_c(S) = \frac{Pl^3}{48E_x I} (1 + S),$$

On peut l'écrire en fonction de la flèche $w_c(0)$ au centre de la poutre sans prise en considération de l'effet de cisaillement transverse :

$$w_c(S) = (1 + S)w_c(0),$$

La flèche w_{s1} pour le tronçon $\left(0 \leq x \leq l/4 \right)$ et w_{s2} pour le tronçon $\left(l/4 \leq x \leq l/2 \right)$ de la flexion 4-points sont exprimées respectivement par les relations (5.56) et (5.59) comme suit :

$$w_{s1} = \frac{Pl^2}{192E_x I} x \left[16 \left(\frac{x}{l} \right)^2 - 9 - 8S \right],$$

$$w_{s2} = \frac{Pl^3}{768E_x I} \left[1 - 48 \frac{x}{l} + 48 \left(\frac{x}{l} \right)^2 - 8S \right],$$

Les contraintes de cisaillement sont données par les relations suivantes :

$$\sigma^k_{xz} = -a_{xx}^k \tau_0 \left[4 \left(\frac{z}{h} \right)^2 + d_k \right]. \quad (5.38)$$

$$\sigma^k_{yz} = -a_{yy}^k \tau_0 \left[4 \left(\frac{z}{h} \right)^2 + d_k \right]. \quad (5.39)$$

Avec τ_0 est la contrainte de cisaillement maximale obtenu pour $z=0$,

$$\tau_0 = -\frac{3P}{4bh}$$

Où d_k est une constante d'intégration correspondant à $k^{\text{ème}}$ couche avec $k=1, \dots, 10$. Pour déterminer les valeurs de d_k , on doit assurer la continuité entre chaque pli et annuler σ^k_{xz} sur la face supérieure. On obtient alors les contraintes dans les cinq couches qui sont égales à :

$$\sigma^{(1)}_{xz} = -a_{xx}^k \tau_0 \left[4 \left(\frac{z}{h} \right)^2 - 0.25 \right]$$

$$\sigma^{(2)}_{xz} = -a_{xx}^k \tau_0 \left[4 \left(\frac{z}{h} \right)^2 - 0.16 \right]$$

$$\sigma^{(3)}_{xz} = -a_{xx}^k \tau_0 \left[4 \left(\frac{z}{h} \right)^2 - 0.09 \right]$$

$$\sigma^{(4)}_{xz} = -a_{xx}^k \tau_0 \left[4 \left(\frac{z}{h} \right)^2 - 0.04 \right]$$

$$\sigma^{(5)}_{xz} = -a_{xx}^k \tau_0 \left[4 \left(\frac{z}{h} \right)^2 - 0.01 \right]$$

Dont la valeur de z est considérée dans cette étude au milieu de chaque couche. À cause de la symétrie de la poutre stratifiée, la répartition des contraintes dans les couches inférieures par rapport au plan moyen sont les mêmes.

VI.5 Discussion des Résultats Obtenus:

Afin de décrire le comportement mécanique des poutres composites à plis unidirectionnels de différentes orientations et séquences d'empilements. Ces poutres composites stratifiées sont soumises à la flexion.

Notre objectif majeur est d'établir une comparaison entre leur comportement sans effet de cisaillement transverse et le cas où l'effet du cisaillement transverse est pris en considération. Il est donc nécessaire, de mettre en évidence des facteurs et des paramètres contribuant à la variation des déformations et des contraintes. Avant de procéder donc à cette étude comparative du comportement d'une poutre stratifiée symétrique travaillant à la flexion, on doit prendre compte de l'effet des éléments suivants : le nombre et l'ordre de la disposition des plis d'orientation dans la poutre stratifiée,

l'orientation de la couche extérieure ainsi que son épaisseur, la variation du coefficient de cisaillement S et l'effet de l'augmentation du nombre de couches d'orientation $\pm 45^\circ$ par rapport à l'ensemble du stratifié.

On a d'abord commencé par la représentation sur la figure 6.6, la variation de la flèche maximale calculée au centre d'une couche à renforcement unidirectionnel en fonction de l'angle d'orientation θ afin de déterminer

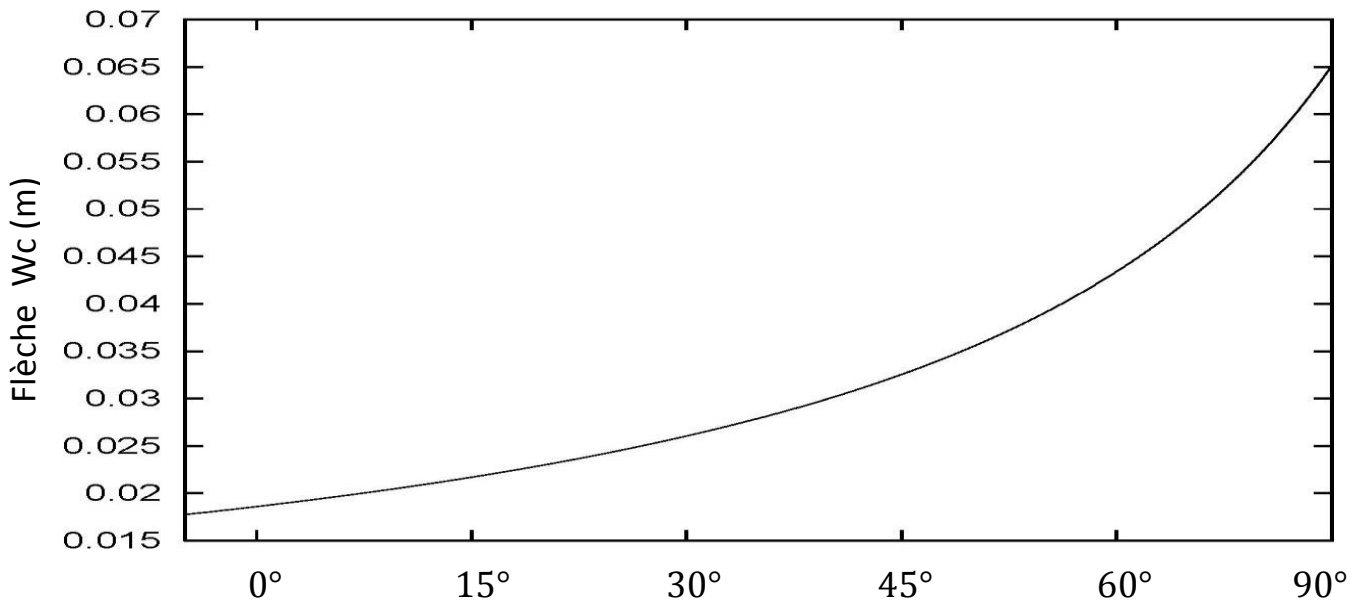


Figure 6.6 : Variation de la flèche maximale en fonction De l'orientation des fibres d'une couche composant une poutre l'orientation de la couche constitutive de la poutre stratifiée qui contribue le plus à l'amélioration de la résistance et de la rigidité de la poutre d'orientation θ quelconque. On constate alors pour des orientations au voisinage de l'angle 0° , la poutre résiste mieux et au fur et à mesure qu'en s'éloigne de cette orientation et on s'approche de 90° , la poutre devient faible et moins résistante.

VI.5 -1 Variation de la flèche en flexion 3-points

1-a Effet de la séquence d'empilement dans le stratifié :

On a représenté sur les figures 6.7 et 6.8 la variation respective des flèches $w_0(x)$ et $w_c(x)$ sans l'effet du cisaillement transverse et avec prise en considération de l'effet du cisaillement transverse en fonction de la variation

de la demi-longueur de la poutre L pour une séquence d'empilement du stratifié. On a choisi une poutre de dimensions $100 \times 20 \times 2 \text{ mm}^3$, qui est constituée de dix plis, dont on varie l'ordre de disposition de ces plis dans le stratifié, et par symétrie du problème on travaille seulement sur la moitié des poutres considérées: $[0_4/90_2/0_4]$, $[0_3/90_4/0_3]$ et $[0/90]_{5s}$ et aussi $[90_4/0_2/90_4]$, $[90_3/0_4/90_3]$ et $[90/0]_{5s}$. On constate que les courbes des deux figures ont la même allure et que pour les flèches $w_0(x)$ et $w_c(x)$ sont presque confondues. Ce qui implique que pour des couches minces dont leurs épaisseurs est de $e=0.2 \text{ mm}$ (dont $h=2 \text{ mm}$) constituant la poutre de verre/époxyde, l'effet de cisaillement transverse est négligeable. Dans ce qui suit on va considérer cet effet lorsque l'épaisseur totale h de la poutre augmente progressivement. On constate aussi que la flèche s'annule au point ($x=0$ et $x=l$), et prend sa valeur maximale au point ($x=l/2$) de la poutre dont sa valeur égale à $\frac{Pl^3}{48 E_x I}$.

La valeur maximale de la flèche dépend donc du module de flexion E_x , autrement dit de l'orientation des fibres θ . On remarque aussi que la flèche augmente progressivement au fur et à mesure que le nombre de plis de la couche extérieure d'orientation ($\theta = 0^\circ$) diminue dans cet ordre des stratifiés croisés : $[0/90]_{5s}$, $[0_3/90_4/0_3]$ et $[0_4/90_2/0_4]$.

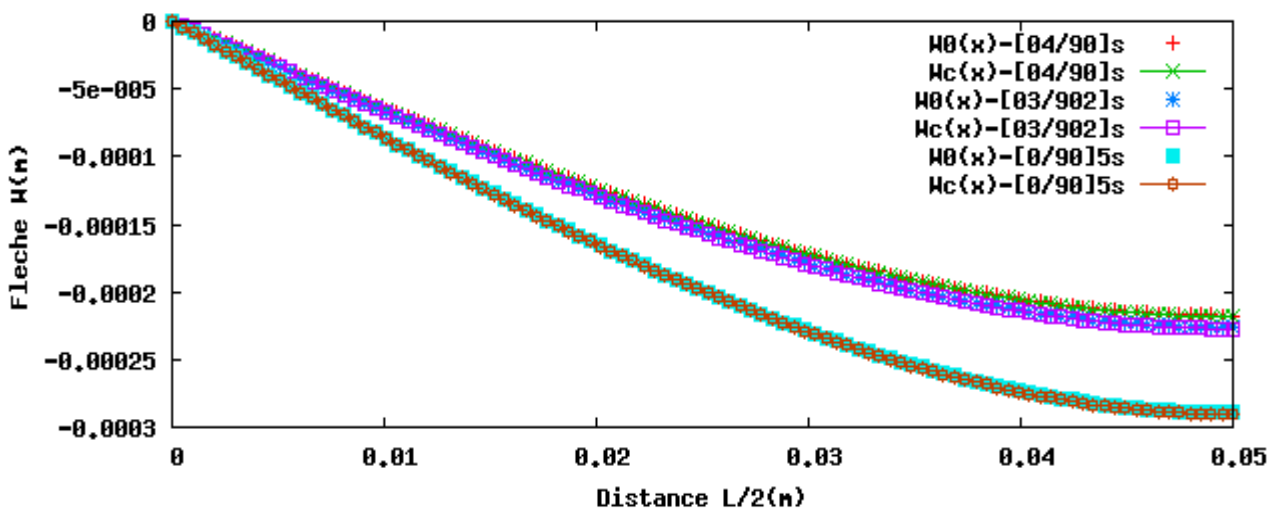


Figure 6.7 : variation des flèches $w_0(x)$ et $w_c(x)$ des poutres stratifiées Croisées symétriques $[0_4/90_2/0_4]$, $[0_3/90_4/0_3]$ et $[0/90]_{5s}$

Par contre dans le cas où les couches extérieures sont d'orientation 90° composant les stratifiés : $[90_4/0_2/90_4]$, $[90_3/0_4/90_3]$ et $[90/0]_{5s}$, la flèche croît plus rapidement avec l'augmentation du nombre de ces couches.

Par comparaison, les poutres stratifiées croisées $[0_4/90_2/0_4]$, $[0_3/90_4/0_3]$ et $[0/90]_{5s}$ dont le nombre de couches extérieures d'orientation 0° est supérieur ou égale à celles d'orientation 90° résistent mieux à la flexion que le reste des autres cas des stratifiés.

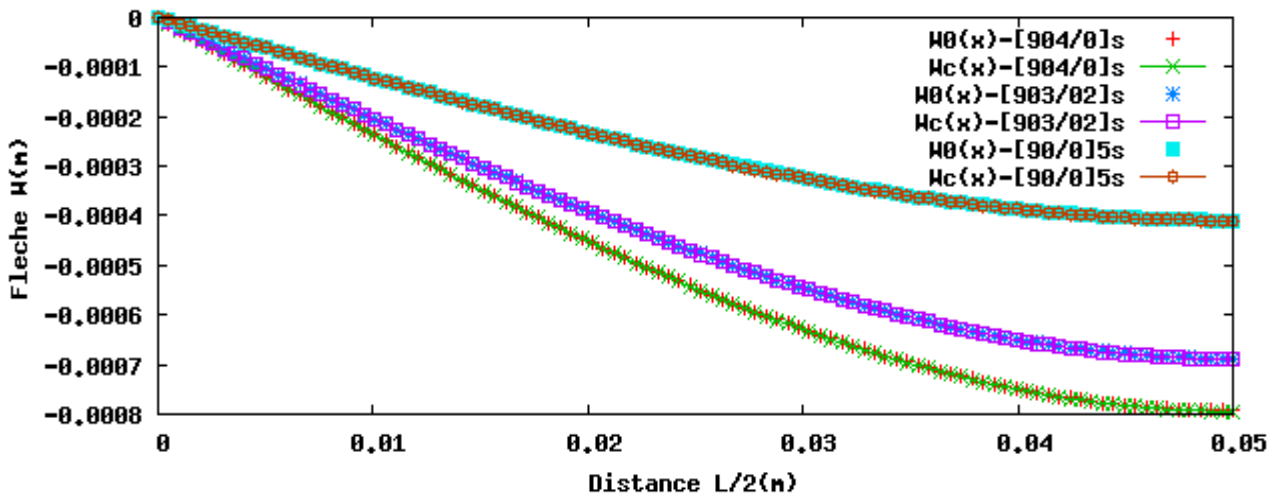


Figure 6.8 : variation des flèches $w_0(x)$ et $w_c(x)$ des poutres stratifiées Croisées symétrique $[90_4/0_2/90_4]$, $[90_3/0_4/90_3]$ et $[90/0]_{5s}$

Ces résultats sont validés par ceux de la pente φ_x , due à la flexion de la poutre qui sont représentées par les figures 6.9 et 6.10.

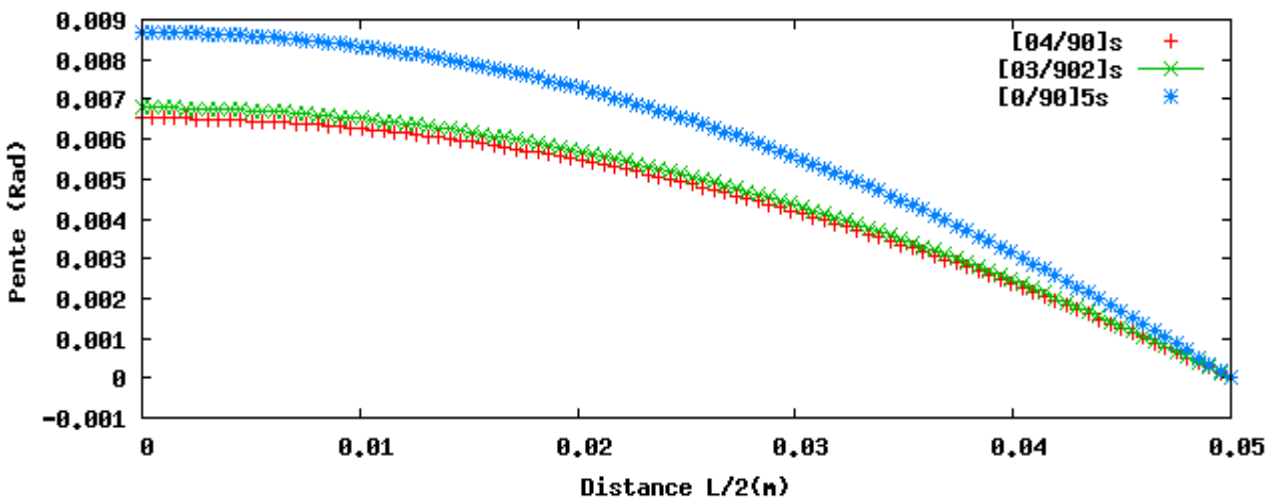


Figure 6.9 : variation de la pente φ_x des poutres stratifiées croisées Symétriques $[0_4/90_2/0_4]$, $[0_3/90_4/0_3]$ et $[0/90]_{5s}$

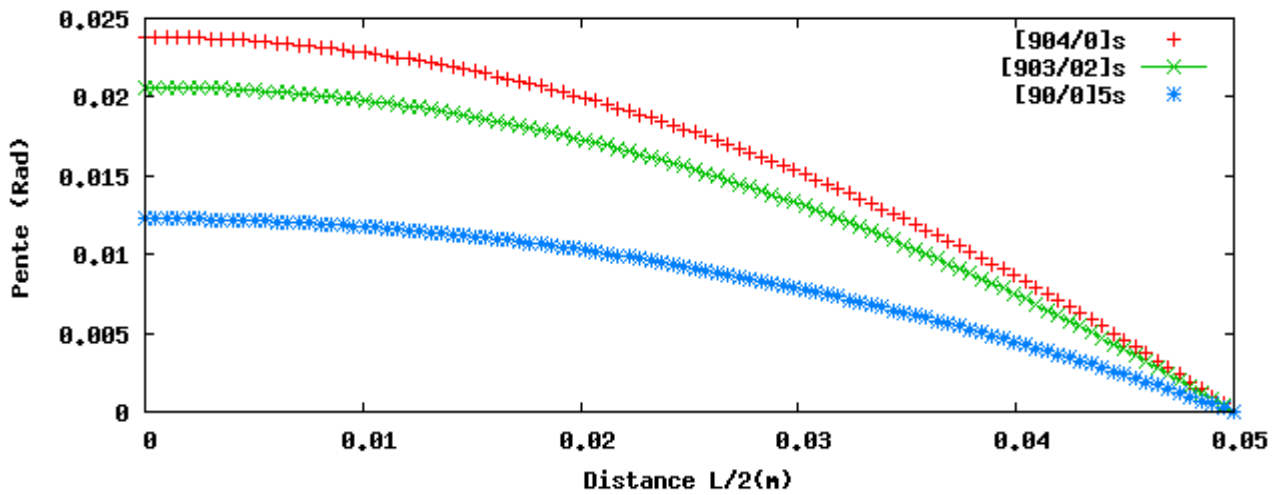


Figure 6.10 : variation de la pente φ_x des poutres stratifiées croisées Symétriques $[90_4/0_2/90_4]_s$, $[90_3/0_4/90_3]_s$ et $[90/0]_{5s}$

Dans le cas des poutres stratifiées équilibrées d'orientation $\theta = 45^\circ$, on a représenté successivement sur les figures 6.11, 6.12 la variation des flèches $w_0(x)$ et $w_c(x)$ et l'évolution de la pente φ_x en fonction de la variation de la longueur L des poutres pouvant atteindre jusqu'à 0.1m.

Contrairement aux stratifiés croisés, on constate que la poutre à empilement équilibré est caractérisée par une flèche qui accroît progressivement à l'ordre des millièmes, avec l'augmentation du nombre de couches orientées à $+45^\circ$.

Donc on peut conclure que la disposition équilibrée des couches dans un stratifié, ne contribue pas beaucoup à la variation de la flèche.

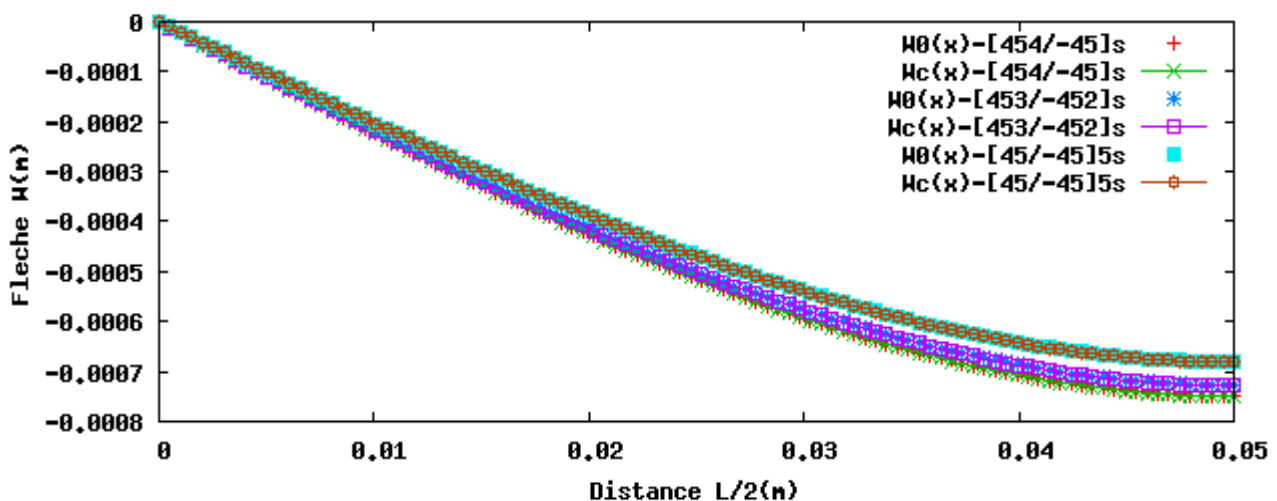


Figure 6.11 Variation des flèches $w_0(x)$ et $w_c(x)$ des poutres stratifiées Équilibrées symétriques $[45_4/-45/45_4]_s$, $[45_3/-45_4/45_3]_s$, $[45/-45]_{5s}$

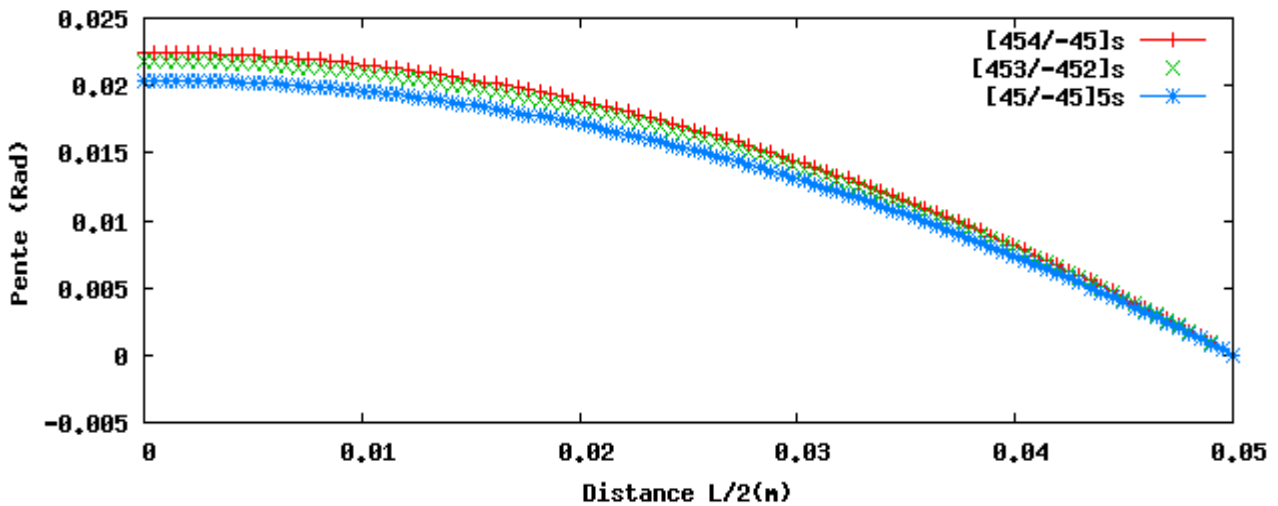


Figure 6.12 Variation de la pente φ_x des poutres stratifiées équilibrées Symétriques $[45_4/-45/45_4]$, $[45_3/-45_4/45_3]$, $[45/-45]_{5s}$

Un tel empilement équilibré provoque l'amélioration de la résistance par comparaison au stratifié croisé dont le nombre de couches extérieures renforcées par des fibres d'orientation 90° augmente.

1-b Effet de la variation de l'épaisseur du pli du stratifié :

Après avoir déterminé l'effet du cisaillement transverse sur la variation de la flèche des poutres stratifiées croisées et équilibrées en changeant le nombre de plis constituant la couche extérieure et l'orientation de cette couche et en maintenant la même épaisseur du pli d'ordre d'empilement k dans les stratifiés considérés. Dans ce qui suit, on essaie d'augmenter la valeur de l'épaisseur du pli composant le stratifié à 10 plis et voir l'influence de cet augmentation sur le comportement de la flèche en considérant l'effet du cisaillement transverse.

De cette façon, on a représenté sur les figures 6.13 et 6.14, la variation des flèches $w_0(x)$ et $w_c(x)$ le long de la longueur $L/2$ de la poutre stratifiée croisée $[0_4/90_2/0_4]$ et puis de la poutre stratifiée équilibrée alternée $[45/-45]_{5s}$. Chaque fois, une valeur différente de la hauteur h de la poutre est considérée.

Dans le cas du stratifié croisé $[0_4/90_2/0_4]$, on constate que la flèche croît légèrement lorsqu'on prend l'effet du cisaillement transverse en considération, et reste constante (variation égale à zéro) pour un stratifié équilibré alterné

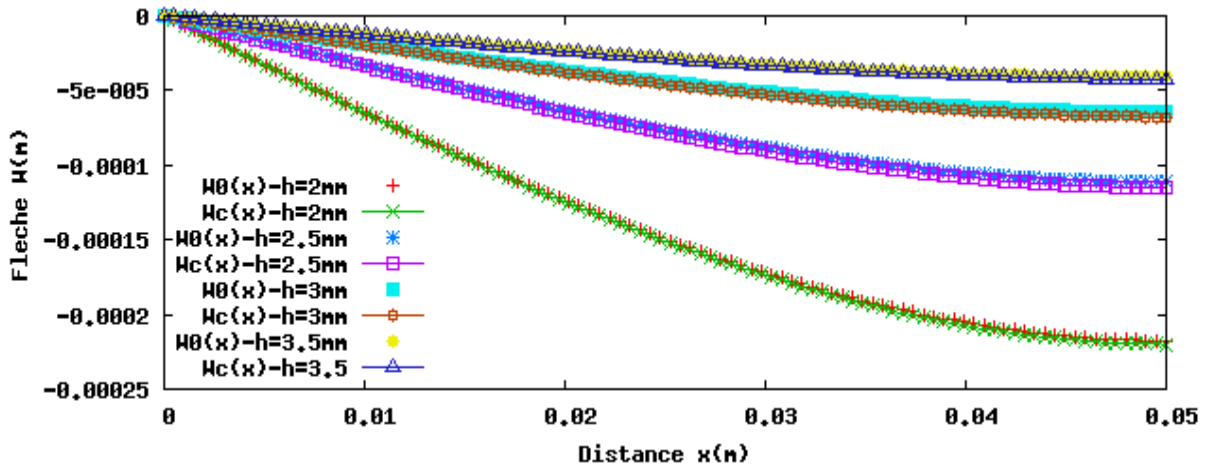


Figure 6.13 : variation des flèches $w_0(x)$ et $w_c(x)$ de la poutre stratifiée Croisée $[0_4/90_2/0_4]$ en fonction de l'épaisseur h

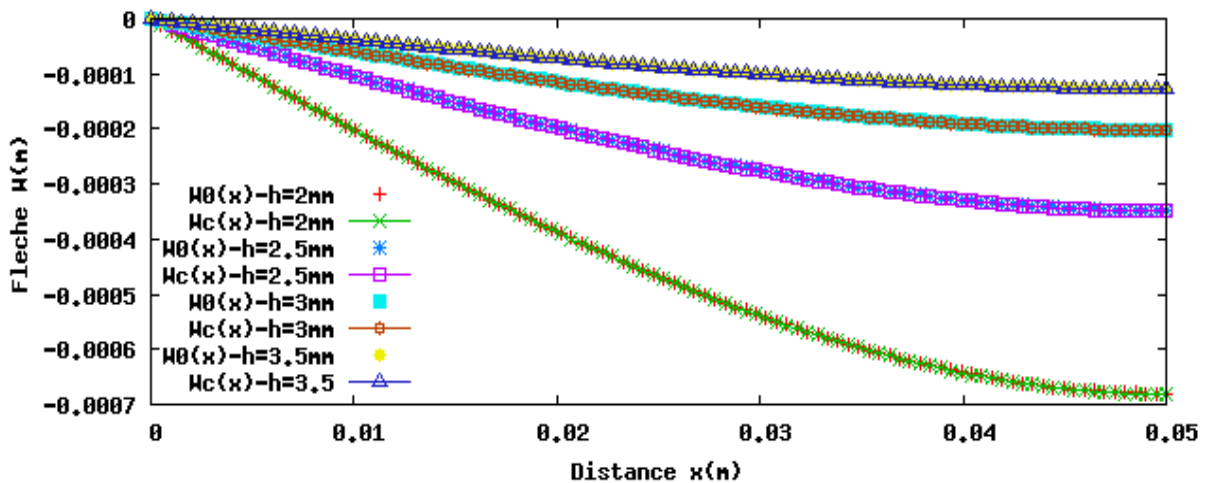


Figure 6.14 : variation des flèches $w_0(x)$ et $w_c(x)$ de la poutre stratifiée Équilibrée alternée $[45/-45]_{5s}$ en fonction de l'épaisseur h

$[45/-45]_{5s}$. Par contre, on remarque que la flèche diminue rapidement pour les deux cas des stratifiés $[0_4/90_2/0_4]$ et $[45/-45]_{5s}$ avec l'accroissement de l'épaisseur du pli. Donc, on peut conclure que l'augmentation de l'épaisseur du pli ne contribue pas à la variation des flèches $w_0(x)$ et $w_c(x)$. En revanche, elle améliore la résistance du matériau.

1-c Effet de la variation du nombre de plis d'un stratifié :

Afin d'étudier l'effet du nombre de plis sur le comportement mécanique de la poutre composite stratifiée soumise à la flexion, on renforce notre structure par un rajout de couches d'orientation 0° et 45° de mêmes épaisseurs et propriétés mécaniques aux stratifiés croisé et équilibré les moins résistants $[90_4/0_2/90_4]$ et $[45_4/-45_2/45_4]$. Les stratifiés considérés sont ceux : $[90_5/0_2/90_5]$, $[90_6/0_2/90_6]$, $[90_4/0_4/90_4]$, $[90_4/0_6/90_4]$, $[45_5/-45_2/45_5]$, $[45_6/-45_2/45_6]$, $[45_4/-45_4/45_4]$ et $[45_4/-45_6/45_4]$.

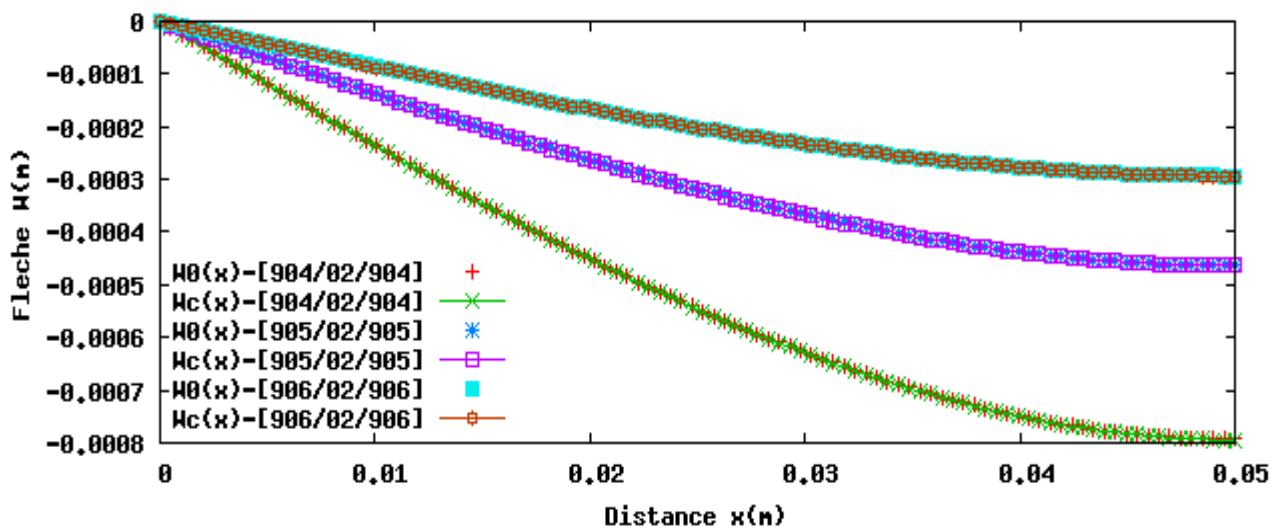


Figure 6.15 : variation des flèches $w_0(x)$ et $w_c(x)$ des poutres stratifiées Croisées $[90_4/0_2/90_4]$, $[90_5/0_2/90_5]$, $[90_6/0_2/90_6]$

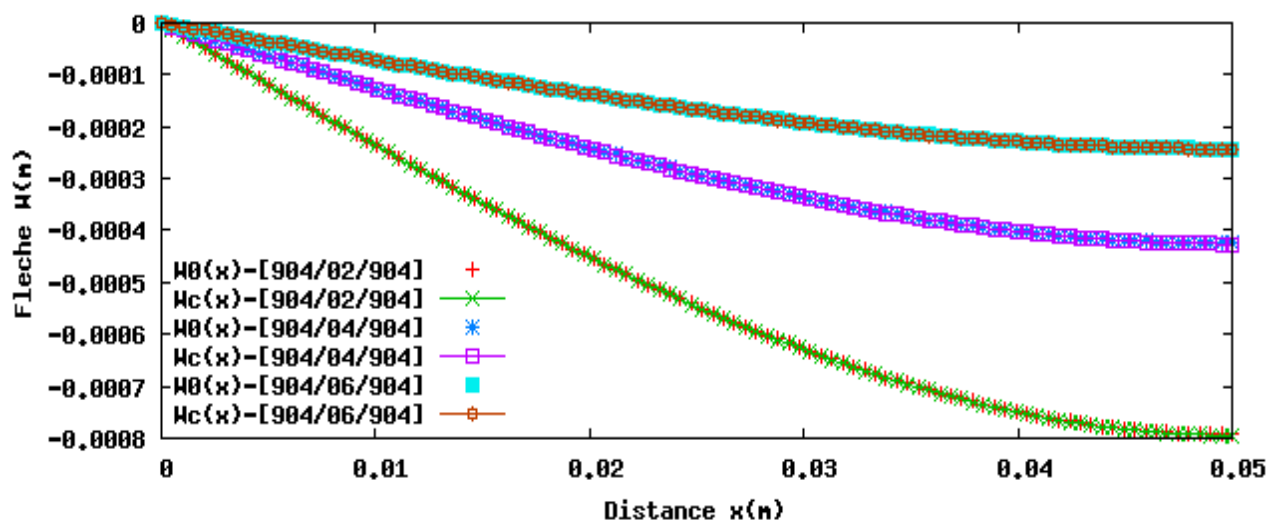


Figure 6.16 : variation des flèches $w_0(x)$ et $w_c(x)$ des poutres stratifiées Croisées $[90_4/0_2/90_4]$, $[90_4/0_4/90_4]$, $[90_4/0_6/90_4]$

A partir des figures 6.15 au 6.16, on constate alors que l'augmentation du nombre de couches renforce plus la structure, et la flèche diminue rapidement pour n'importe quelle séquence d'empilement croisé ou équilibré.

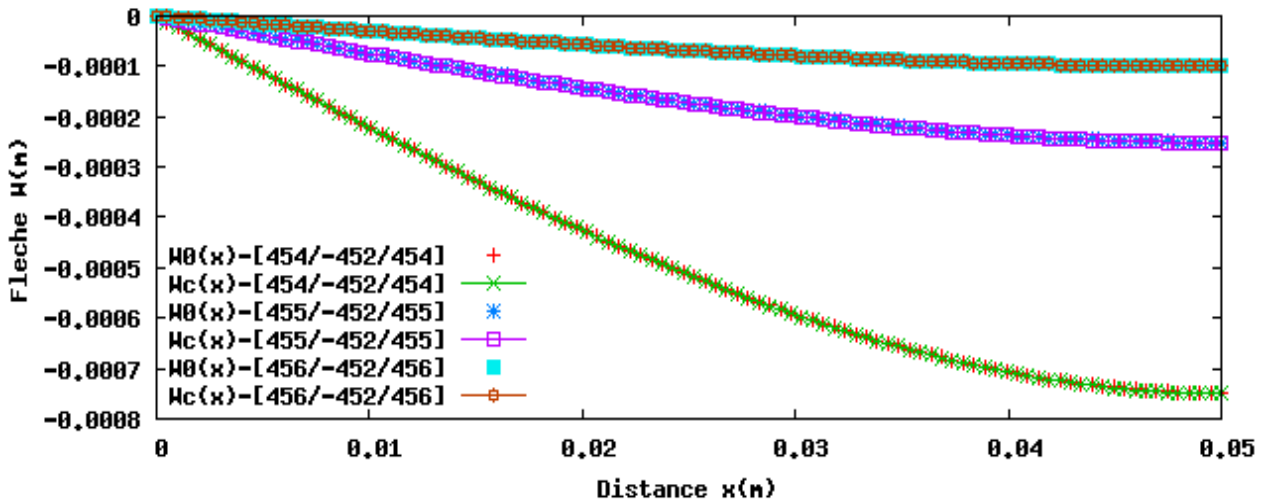


Figure 6.17: variation des flèches $w_0(x)$, $w_c(x)$ des poutres stratifiées Équilibrées $[45_4/-45_2/45_4]$, $[45_5/-45_2/45_5]$, $[45_6/-45_2/45_6]$

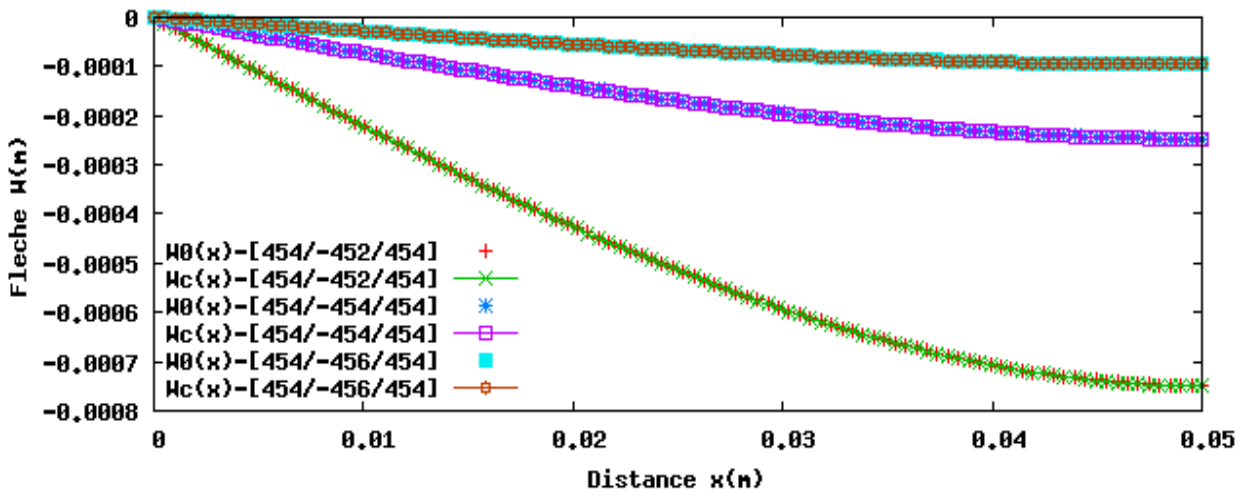


Figure 6.18: variation des flèches $w_0(x)$, $w_c(x)$ des poutres stratifiées Équilibrées $[45_4/-45_2/45_4]$, $[45_4/-45_4/45_4]$, $[45_4/-45_6/45_4]$

Dans ce cas, on constate aussi que l'introduction de la couche d'orientation 45° à un stratifié fait diminuer la flèche rapidement par rapport aux deux autres stratifiés. Donc, cette orientation des fibres renforce mieux le matériau.

1-d Effet de l'introduction de la couche d'orientation +45°:

Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques. Par comparaison des résistances des stratifiés croisés et équilibrés, on a remarqué à partir des résultats précédents que la présence d'une couche d'orientation +45° dans un stratifié améliore ses propriétés mécaniques tels que la résistance et la rigidité de la poutre.

Pour cette raison, on a fait introduire progressivement des couches d'orientation +45° dans le stratifié croisé $[0_4/90_2/0_4]$ composé de 10 plis et on a calculé le rapport des flèches $W_c(s)/W_0(0)$ au centre de la poutre, due au cisaillement transverse et celle due à la flexion pure, en fonction du rapport d'élanement de la poutre h/l . Tout d'abord, on remarque à partir de la figure 6.19, que la flèche due au cisaillement croît avec l'augmentation de l'épaisseur de la poutre. L'introduction seulement d'une couche à deux plis d'orientation +45° a fait diminuer le rapport des flèches de 11 à 7.8 pour un rapport d'élanement égal à 1 ; donc la flèche due au cisaillement transverse a diminué. On peut alors conclure que la présence des couches d'orientation +45° entraîne l'amélioration des propriétés mécaniques de la poutre et leur présence dans la conception d'un matériau composite est nécessaire.

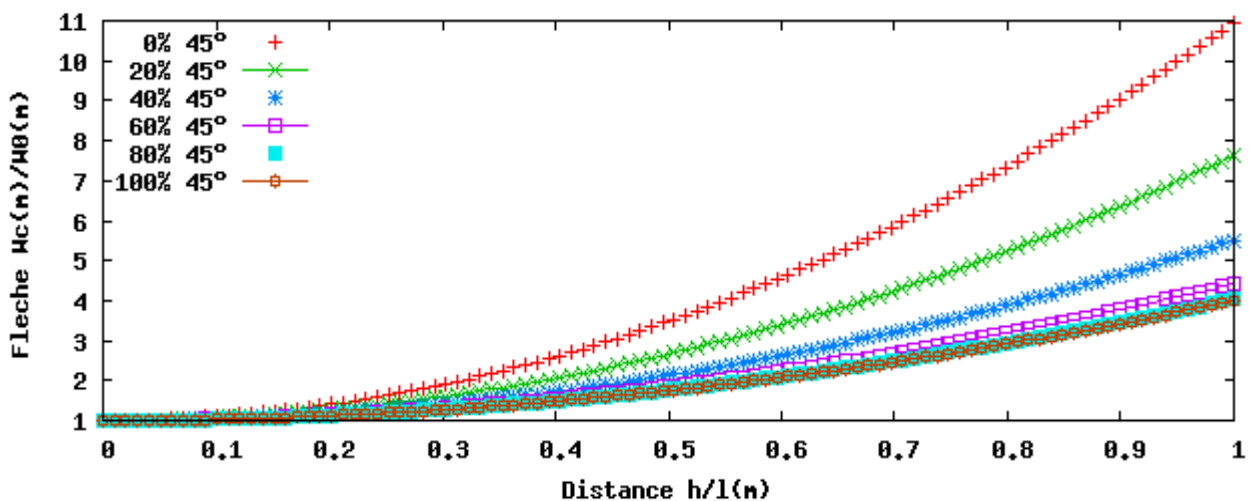


Figure 6.19: l'influence de l'orientation +45° sur l'évolution du rapport des flèches d'une poutre stratifiée croisée en fonction du rapport d'élanement

1-e Effet du coefficient de cisaillement :

La flèche $w_c(S)$ calculée au centre de la poutre avec prise en considération de l'effet de cisaillement transverse peut être déduite en fonction de la flèche au centre de la poutre $w_0(0)$ en absence du cisaillement transverse et le coefficient de cisaillement S . Ce coefficient dépend du rapport d'élancement h/l de la poutre, et du rapport des modules de la poutre E_x/G_{xz} . Il croît alors avec l'augmentation de ses deux rapports. On a rapporté sur la figure 6.20, la variation du coefficient de cisaillement S en fonction de l'élancement de la poutre h/l . On constate que l'augmentation du rapport des modules conduit à une augmentation considérable du coefficient de cisaillement en l'occurrence avec l'épaisseur de la poutre.

Dans ce cas, le coefficient de cisaillement prend de grandes valeurs pour une poutre dont le module d'élasticité longitudinal en flexion est assez important, qui implique une bonne rigidité de la poutre et une faible valeur de la flèche due au cisaillement transverse.

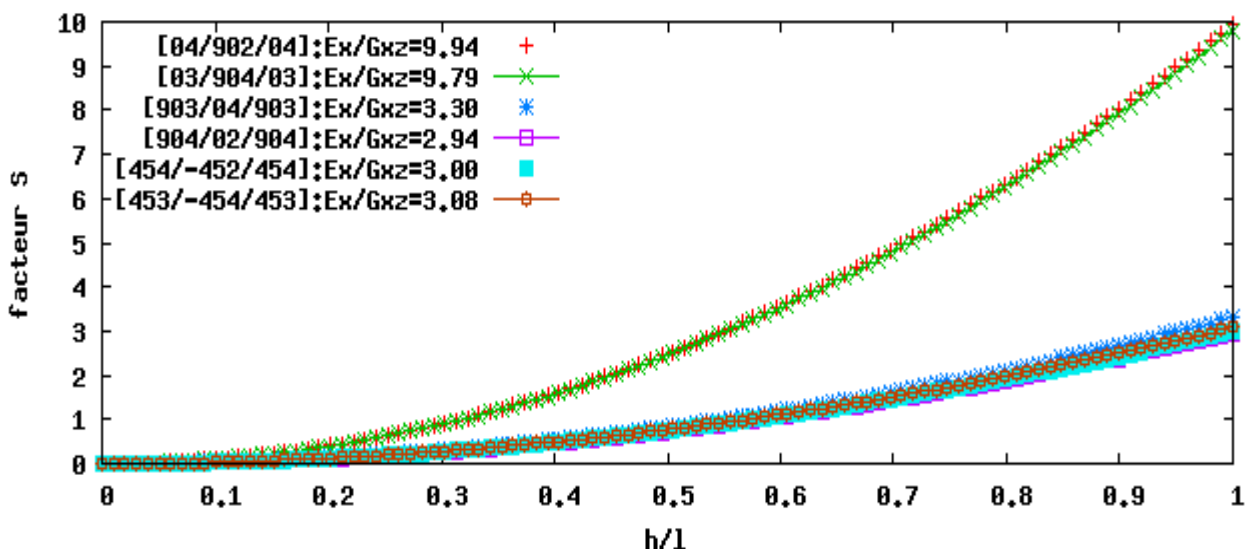


Figure 6.20: Variation du coefficient de cisaillement d'une poutre Stratifiée en fonction du rapport d'élancement

VI.5-2 Influence de la séquence d'empilement sur la variation des Contraintes

Après avoir étudié et représenté la variation de la flèche de la poutre composite stratifiée, on s'intéressera dans la figure 6.21 à la variation de la contrainte normale $\sigma_{xx}^{(k)}$ à travers l'épaisseur e de la couche d'ordre d'empilement k du stratifié symétrique croisé $[0_4/90_2/0_4]$ et équilibré $[45/-45]_{5s}$.

On constate alors que le rapport de la contrainte normale σ_{xx} et de la contrainte maximale σ_0 augmente en partant des couches intérieures jusqu'aux couches extérieures dans le cas des deux stratifiés, seulement que ce rapport est plus grand dans le stratifié croisé par rapport à celui dans le stratifié équilibré.

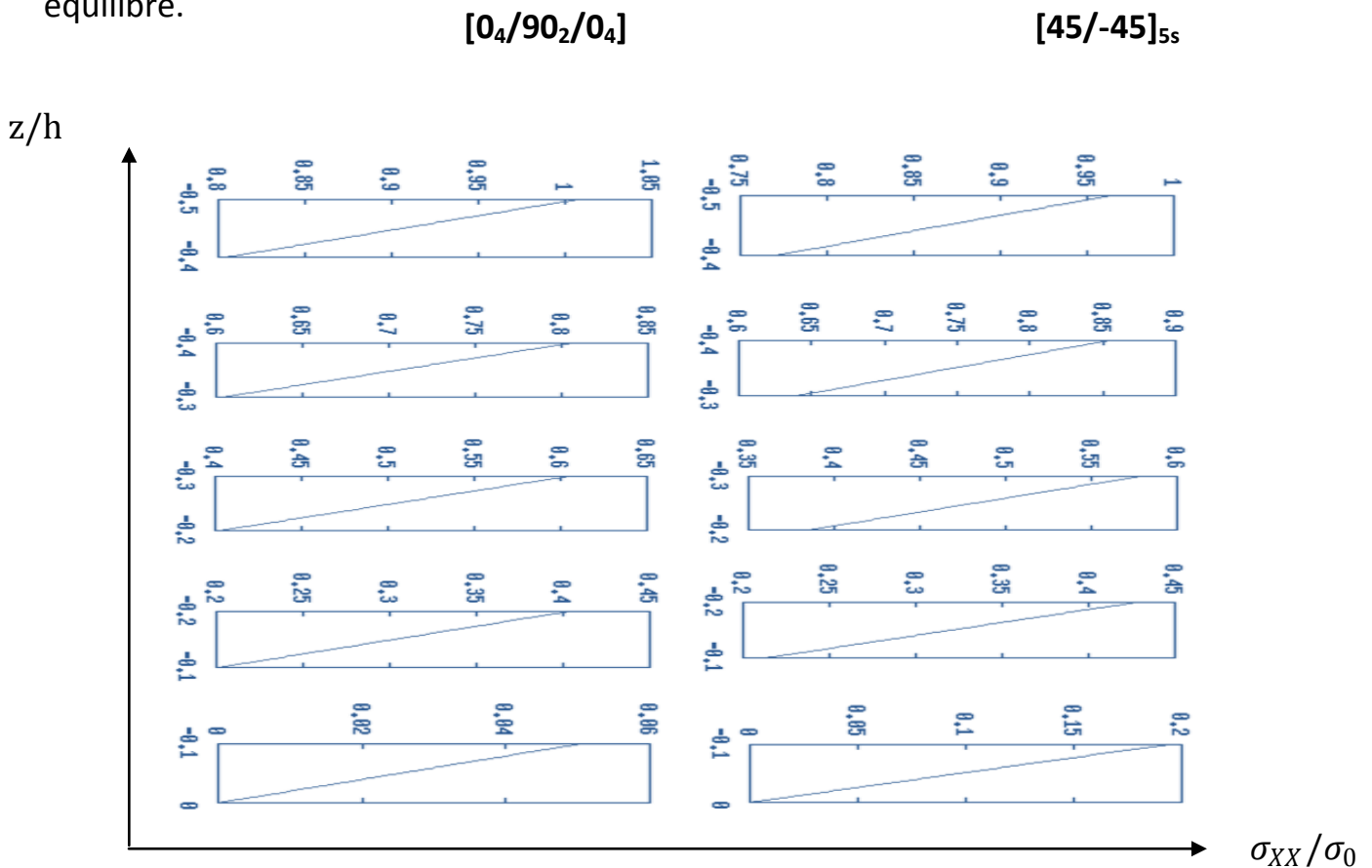


Figure 6.21 : Influence de la séquence d'empilement sur la répartition Des Contraintes σ_{xx} dans l'épaisseur des stratifiés

Les résultats obtenus mettent clairement en évidence l'influence de la séquence d'empilement des couches. Dans le cas du stratifié croisé, la contrainte maximale n'est atteinte dans la couche externe lorsque les couches orientées à 0° sont externes. Il en résulte que la charge à la Rupture sera fortement influencée par l'empilement. Sur la figure 6.22, on a rapporté la variation de la contrainte $\sigma_{yy}^{(k)}$ à travers l'épaisseur de la poutre stratifiée croisée $[0_4/90_2/0_4]$ et équilibrée $[45/-45]_{5s}$ dans la direction de l'axe y.

Dans le cas où le chargement est orthogonal au plan de stratification, on constate que la contrainte $\sigma_{yy}^{(k)}$ exercée dans la direction de l'axe y est négligeable, et prend des valeurs infiniment petites.

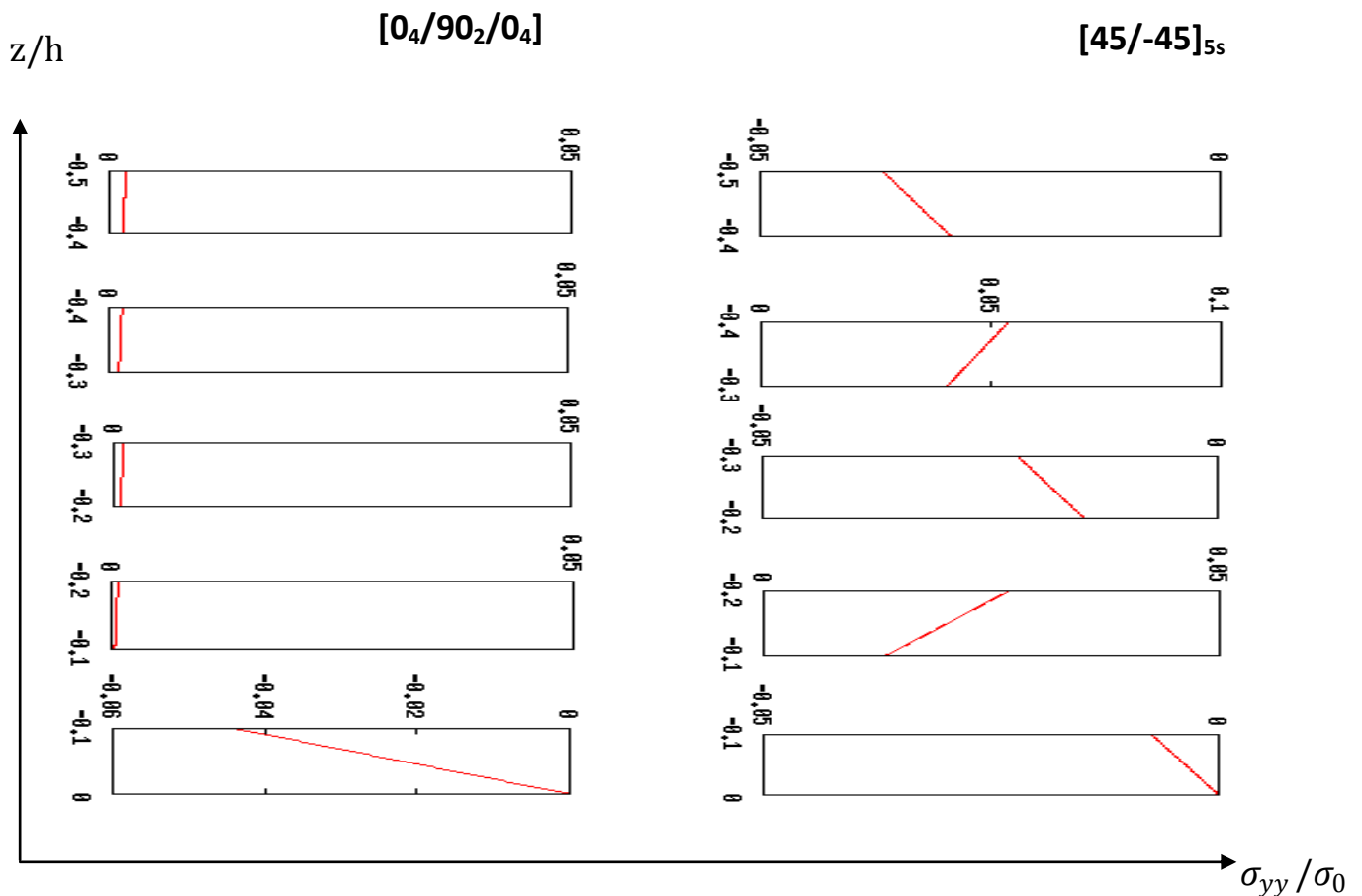


Figure 6.22: Influence de la séquence d'empilement sur la répartition des Contraintes σ_{yy} dans l'épaisseur des stratifiés

L'influence de l'empilement des couches sur la variation de la contrainte de cisaillement $\sigma_{xz}^{(k)}$ à travers l'épaisseur des stratifiés $[0_4/90_2/0_4]$ et $[45/-45]_{5s}$, représentés sur la figure 6.23, décrit l'évolution des contraintes au milieu de chaque couche de la poutre stratifiée en verre/époxyde chargée à la flexion 3-points en fonction de la distance x suivant la longueur de la poutre.

On remarque aussi que les courbes représentant les contraintes sur les cinq couches, ont une forme parabolique et que le rapport de la contrainte de cisaillement σ_{xz} et de la contrainte de cisaillement maximale τ_0 s'accroît progressivement de la 5eme couche à la 1ère couche où elle atteint les 75% de la contrainte maximale τ_0 .

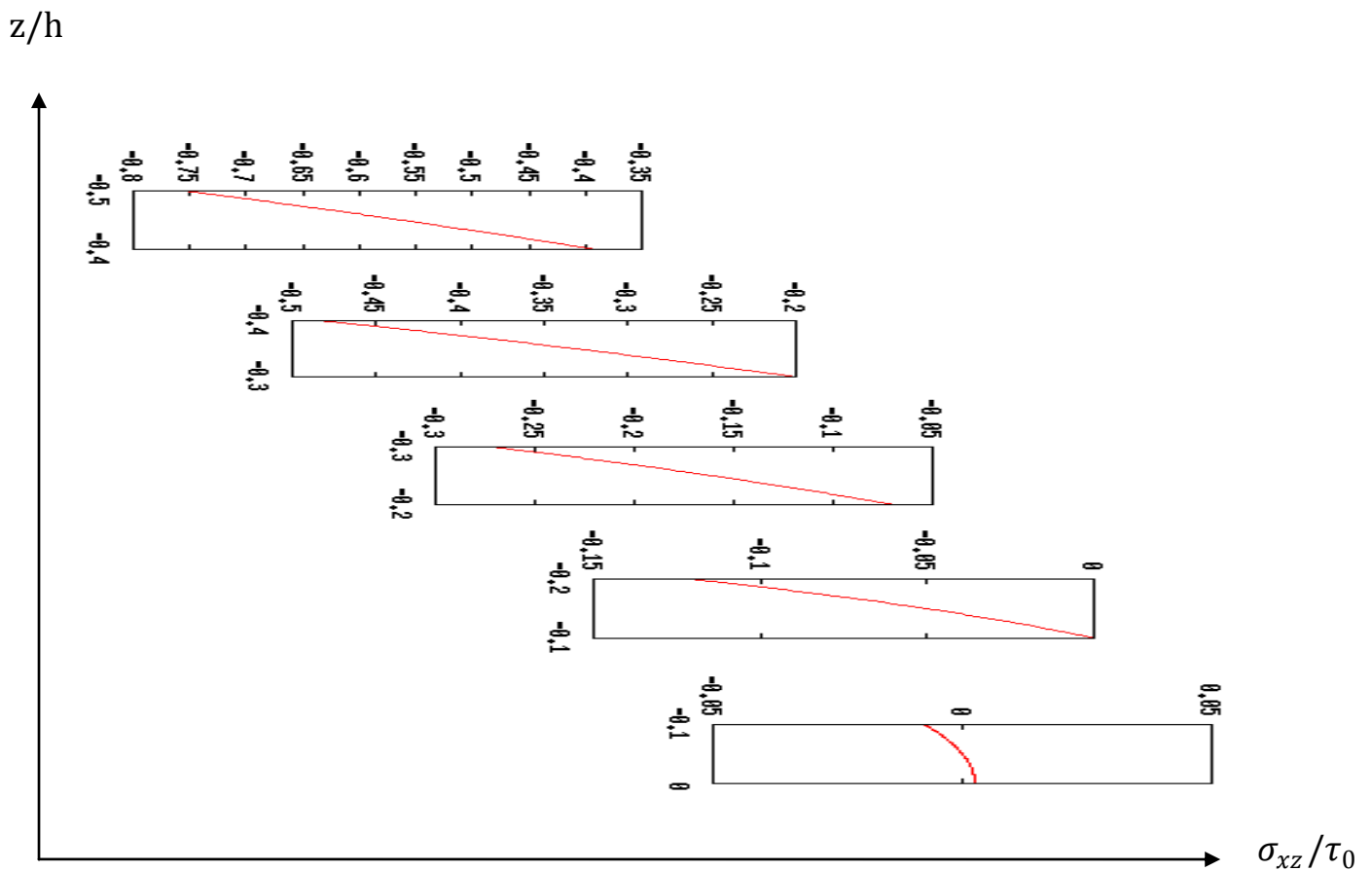


Figure 6.23: Influence de la séquence d'empilement sur la répartition des Contraintes σ_{xz} dans l'épaisseur des stratifiés

VI.5 -3 Variation de la flèche en flexion 4- points :

Pour une meilleure compréhension du comportement mécanique général des poutres composites, on va s'intéresser au cas de la flexion 4-point d'une poutre composite stratifiée et de la comparer avec son comportement en flexion 3-points. On va considérer les mêmes caractéristiques géométriques de la poutre et aussi les mêmes propriétés mécaniques du matériau utilisé lors de l'étude du comportement de la poutre en flexion 3-points.

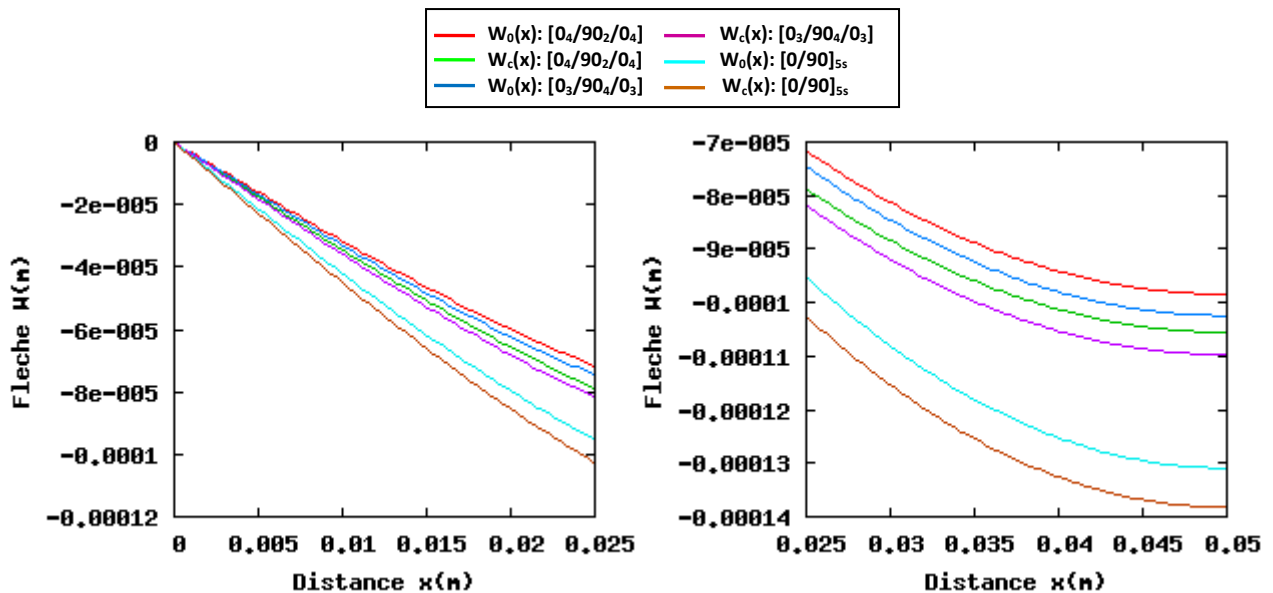


Figure 6.24 : variation des flèches $w_0(x)$ et $w_c(x)$ de différentes poutres stratifiées croisées symétriques dans les tronçons $0 \leq x \leq l/4$ et $l/4 \leq x \leq l/2$

Ainsi dans le cadre de la flexion 4-points, la poutre présente deux zones mécaniques, pour $0 < x < L/4$ et $L/2 < x < L$: deux zones symétriques en couplage flexion-cisaillement, et pour $L/4 < x < L/2$ la zone médiane est en flexion pure.

La poutre est de dimensions $100 \times 20 \times 10 \text{ mm}^3$ chargée symétriquement par deux charges $P/2$. Par symétrie du problème on considère seulement la moitié de la poutre. On constate à partir de la figure 6.24 que l'augmentation de la flèche en flexion 3-points s'effectue plus lentement qu'en 4-points, et en comparant leurs valeurs, on trouve que l'application de la charge en deux points différents (cas de la flexion 4-points) fait augmenter la flèche et rendre la structure moins

résistante. De plus, la prise en considération du cisaillement transverse fait accroître la flèche et affaiblit le matériau.

Dans le cas des stratifiés symétriques équilibrés, on a montré sur la figure 6.25, que la flèche atteint sa valeur maximale au milieu de la poutre et devient nulle aux deux appuis. On constate que le stratifié $[45/-45]_{5s}$ résiste mieux que les deux autres stratifiés équilibrés.

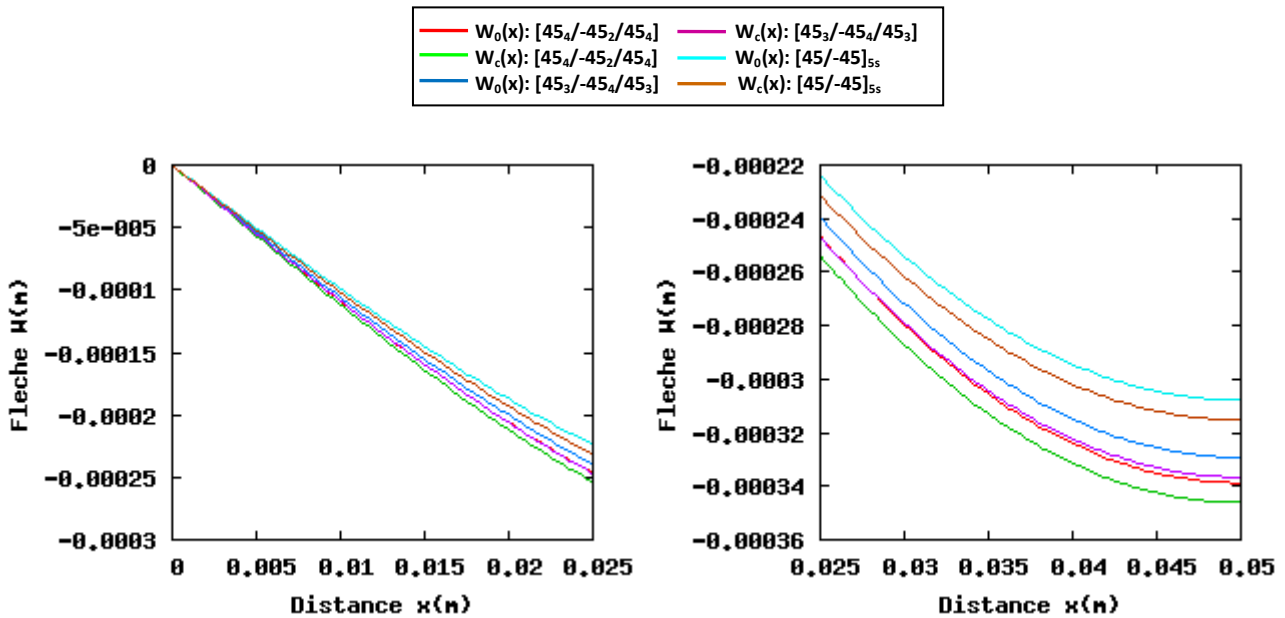


Figure 6.25 : variation des flèches $w_0(x)$ et $w_c(x)$ de différentes poutres stratifiées équilibrées symétriques dans les tronçons $0 \leq x \leq l/4$ et $l/4 \leq x \leq l/2$. En comparant les figures 6.24 et 6.25, on peut conclure que le stratifié équilibré $[45/-45]_{5s}$ est la séquence d'empilement optimale capable de résister mieux à la flexion 3-point et 4-points sous l'effet du cisaillement transverse.

La variation de la contrainte normale peut être représentée par les mêmes figures que dans le cas des stratifiés en la flexion 3-points, seulement que les contraintes maximales se produisent pour x compris entre $L/4$ et $L/2$. Par contre la contrainte du cisaillement transverse est nulle pour x compris entre $L/4$ et $L/2$. Donc la variation de la contrainte de cisaillement dans l'épaisseur du stratifié, pour x compris entre 0 et $L/4$ est donc identique à celle obtenue en flexion 3-points pour x compris entre 0 et $L/2$.

Conclusion

L'objectif de notre travail a consisté en l'étude de l'effet du cisaillement transverse sur le comportement mécanique des poutres composites chargées à la flexion. La mise en évidence de l'effet du cisaillement transverse dans cette étude a permis de décrire avec une bonne précision les champs des contraintes et des déformations induites.

Les travaux entrepris dans ce mémoire essaient de répondre à la question: comment des poutres constituées de plis unidirectionnelles peuvent elles présenter une résistance assez importante en flexion trois ou quatre points que les matériaux classiques et spécialement dans le cas où les déformations du cisaillement transverse sont considérables. Nous avons effectué une étude sur des poutres composites stratifiées à matrice époxyde et à fibres de verre du type E dont l'empilement des dix plis forme des stratifiés croisés symétriques $[0_4/90_2/0_4]$, $[0_3/90_4/0_3]$, $[90_4/0_2/90_4]$, $[90_3/0_4/90_3]$, équilibrés $[45_4/-45_2/45_4]$, $[45_3/-45_4/45_3]$ et alternés $[0/90]_{5s}$, $[90/0]_{5s}$, $[45/-45]_{5s}$ renforcés à 60% de leurs volumes.

Ce travail porte principalement sur l'étude de l'effet du cisaillement transverse au sein de poutres stratifiées. On propose alors une solution analytique au problème de la flexion trois points et la flexion quatre points dans laquelle le gauchissement des sections s'annule progressivement au centre, contrairement aux théories de poutres classiques de type Timoshenko. On en déduit alors une expression modifiée de la flèche, des déformations et des contraintes. L'analyse des valeurs des flèches et des contraintes maximales obtenues pour des poutres stratifiées chargées à la flexion a montré que les couches orientées à 0° présentent une flèche minimale et qu'elles résistent mieux que celles orientées à des angles supérieures. L'étude de l'influence de la séquence d'empilement et des orientations 0° ou 90° sur le comportement mécanique d'une poutre stratifiée composée de dix plis minces a montré que les stratifiés croisés dont les couches extérieures sont orientées à 0° résistent mieux à la flexion. Dans ce cas d'empilement, l'effet du cisaillement transverse n'influe pas beaucoup sur le comportement du matériau. De plus, l'étude du comportement mécanique des poutres stratifiées équilibrées a montré que l'ordre de la disposition des couches ne contribue pas beaucoup à la variation de la flèche, et qu'un stratifié équilibré résiste mieux qu'un stratifié croisé dont les couches extérieures sont orientées à 90° . L'introduction des couches

d'orientation $+45^\circ$ dans l'empilement du stratifié croisé améliore ses propriétés mécaniques tels que sa résistance et sa rigidité lors de la considération du cisaillement transverse de la poutre.

Afin d'étudier l'influence du nombre de plis et la variation de l'épaisseur sur le comportement de la poutre, on a ajouté des couches extérieures à une poutre stratifiée croisé $[0_4/90_2/0_4]$, et équilibrée $[45_4/-45_2/45_4]$. L'augmentation de l'épaisseur et l'ajout des couches ont pu renforcer plus le matériau. L'augmentation aussi du rapport des modules conduit à une élévation considérable du coefficient de cisaillement en l'occurrence avec l'épaisseur totale de la poutre.

L'évolution des contraintes à travers l'épaisseur de la couche est caractérisée par une forme linéaire pour les contraintes normales ou de flexion et par une forme parabolique pour les contraintes de cisaillement. Les résultats obtenus mettent clairement en évidence l'influence de la séquence d'empilement des plis. La valeur des contraintes s'accroît successivement de la 5^{ème} couche jusqu'à atteindre sa valeur maximale dans la 1^{ère} couche du stratifié. La contrainte maximale n'est atteinte dans la couche externe que dans le cas où les couches extérieures sont orientées à 0° . Il en résulte que la charge à la rupture sera fortement influencée par l'empilement.

Enfin, on a constaté que le comportement d'une poutre stratifiée sollicitée à la flexion 4-points, quand la charge est appliquée à deux points différents de la poutre, présente une résistance moins importante et leur adoption fait augmenter les déformations dues au cisaillement transverse.

L'ensemble des résultats obtenus a montré que le cisaillement transverse n'a pas beaucoup d'effet sur le comportement en flexion des poutres composites, soient croisés ou équilibrés. Le changement de certains paramètres tels que : la séquence d'empilement, le nombre de plis composants du stratifié, le rapport des modules ne contribue pas assez bien à l'augmentation du facteur de cisaillement transverse. En revanche, son degré peut être mieux diminué si l'orientation 45° est présente dans l'empilement de la poutre composite stratifiée, cette étude peut être développée dans le futur par des analyses numériques et validée par des résultats expérimentaux.

Références Bibliographiques

- [1] **A.Bezazi, A.E.Mahi, J.M.Berthelot**, « Analyse de L'endommagement des Stratifiés en Flexion 3-Points Influence de la Séquence d'Empilement », XVème Congrès français de Mécanique, France, 2001.
- [2] **V.Pauchard, H.B.Campion, F.Grosjean, P.Odru, A.Chateauminois**, « Développement d'un modèle de durabilité de poutres composites Unidirectionnelles Renforcées par des fibres de verre », Oil & Gas Science and Technology – Rev. IFP, Vol. 56, No. 6, pp. 581-595, (15), France, 2001.
- [3] **F.P.Costa**, « On Timoshenko's Beams Coefficient of Sensibility to Shear Effect », TEMA Tend. Mat. Apl. Comput, 9, No. 3, pp. 447-457 (11), Brazil, 2008.
- [4] **H.Arya**, « A new zigzag model for laminated composite beams, free vibration Analysis », Journal of Sound and Vibration 264, 485–490, (6), India, 2003.
- [5] **R.E.Fatmi, H.Zenri**, « A numerical method for the exact elastic beam theory. Applications to homogeneous and composite beam », International Journal of Solids and Structures 41, 2521–2537, (17), Tunisia, 2004.
- [6] **T.Kant, S.R.Marur, G.S.Rao**, « Analytical solution to the dynamic analysis of laminated beams using higher order refined theory », Composite Structures Vol. 40, No. 1, pp. 1-9, (9), 1998.
- [7] **D.Huang, B.H.Sun**, « Approximate Solution on Smart Composite Beam By using Matlab », Composite Structures 54, pp. 197-205, (9), Sud Afrique, 2001.
- [8] **X.J.Dong, G.Meng, H.G.Li, L.Y2**, « Vibration analysis of a stepped laminated composite Timoshenko beam », Mechanics Research Communications 32, pp. 572–581, (10), Australia, 2005.
- [9] **C.N.Della, D.Shu**, « Free vibration analysis of composite beams with overlapping delaminations », European Journal of Mechanics A/Solids 24, pp. 491–503, (13), Singapore, 2005.
- [10] **K.Y.Sze, R.Chen, Y.K.Cheung**, « Finite element model with continuous transverse shear stress for composite laminates in cylindrical bending », Finite Elements in Analysis and Design 31, pp. 153-164, (12), Hong Kong, 1998.
- [11] **M.Chatain**, « Présentation Générale des Matériaux Composites », Techniques de l'ingénieur, traité Plastique et Composites, AM 5 000.

- [12] **A.Giocosa**, «Les composites dans l'industrie automobile», Techniques de l'ingénieur, traité Plastique et Composites, A 5 600.
- [13] **J.Molimard, A.Vautrin, J.M.Béraud, P.Henrat**, «contribution à la conception d'une structure en matériaux composites en milieu industriel», 18^{ème} Congrès Français de Mécanique, Grenoble, 27-31 août 2007.
- [14] **J.Cinquain**, «Les composites en aérospatiale», Techniques de l'ingénieur, traité Plastique et Composites, A 5 645.
- [15] **P.Parneix, J.Liu, D.Lucas**, «Les matériaux composites en construction navale militaire», Communication présentée lors de la réunion des spécialistes RTO AVT sur «Les structures composites à bas coût», Norvège, 2001.
- [16] **P.Parneix, D.Lucas**, «Les matériaux composites en construction navale militaire», Techniques de l'ingénieur, traité Plastique et Composites, A 5 660.
- [17] **J.COIRIER**, «Mécanique des Milieux Continus», Dunod, Paris, 2001.
- [18] **V.Vasiliev, E.Morosov**, «Mechanics and Analysis of Composite Materials », Elsevier Science.Ltd, Oxford-UK, 2001.
- [19] **J.M.BERTHELOT**, Matériaux Composites « Comportement mécanique et analyse des structures », Tec & Doc, Paris, 2005.
- [20] **C.DECOLON**, Structures Composites « Calcul des Plaques et des Poutres Multicouches », Hermes Science, Paris, 2000.
- [21] **J.Courbon, J.Theillout**, « Résistance des Matériaux », Techniques de l'ingénieur, traité Construction, C 2 060.
- [22] **D.GAY**, «Matériaux Composites», Hermes Science, Paris, 2005.
- [23] **A.K. KAW**, «Mechanics of Composite Materials» Taylor & Francis Ltd, London, 2006.
- [24] **R. M.JONES**, «Mechanics of Composite Materials», Taylor & Francis Ltd, London, 1998.
- [25] **L.C.Bank**, Composites for Construction « Structural Design with FRP Materials», John Wiley & Sons, Inc., Canada, 2006.
- [26] **P.Odru**, «Calcul et conception des structures composites», Techniques de l'Ingénieur, traité Plastiques et Composites, A 7 792.
- [27] **V.K.Goyala, R.K.Kapania**, «A shear-deformable beam element for the analysis of laminated composites », Finite Elem. Anal. Des, pp. 1-15 (15), USA, 2006.

- [28] **R.L.Deuis, C.Subramanian, J.M.Yellup**, «Abrasive wear of composite coatings in a saline sand slurry environment », Elsevier Science B.V, Vol. 203-204, pp. 119-128 (10), Australia, 1997.
- [29] **Z.Li, M.J.Crocker**, « Effects of thickness and delamination on the damping in honeycomb–foam sandwich beams», Journal of Sound and Vibration 294, pp. 473–485 (13), USA, 2006.
- [30] **J.F.Zhu, Y.Gu, L.Tong**, « Formulation of reference surface element and its applications in dynamic analysis of delaminated composite beams», Composite Structures 68, pp. 481–490 (10), Australia, 2005.
- [31] **L.C.Bank**, « Shear Coefficient for Thin-Walled Composite Beams», Composite Structures 8, pp. 47-61 (15), USA, 1987.
- [32] **A.Merdas, N.Chikh**, «Développement d'un Logiciel d'Analyse et de Calcul des poutres en Béton Renforcées par Composites », 1^{ère} Conférence Internationale sur la durabilité des Constructions et l'Environnement des Infrastructures dans les Pays Développés, ENSET Oran Algérie, Octobre 12-14, 2009.