



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES FRÈRES MENTOURI – CONSTANTINE

FACULTÉ DES SCIENCES DE LA TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE



N° de Série :.....

N° d'ordre :...../2017

THÈSE

Présentée pour obtenir le diplôme de Doctorat 3^{ème} Cycle LMD
En Génie Mécanique

Détermination de la Périodicité Optimale pour le Remplacement Préventif

OPTION : Maintenance Industrielle

Par : **BERREHAL Ryma**

Soutenue le : 02/07/2017

Devant le jury composé de :

Président :	M. BOUCHOUCHA Ali	Prof. Univ. des Frères Mentouri–Constantine
Rapporteur :	M. BENISSAAD Smail	Prof. Univ. des Frères Mentouri–Constantine
Examineurs:	M. CHERFIA Abdelhakim	MC _A Univ. des Frères Mentouri–Constantine
	M. MAHFOUDI Chawki	Prof. Univ. Larbi Ben Mhidi–Oum El Bouaghi
	M. BELAZIZIA Abdennacer	MC _A Univ. Larbi Tebessi–Tébessa

Dédicaces

À mes parents.

À mon mari.

À mes enfants.

À mes frères et sœurs.

À mes beaux parents.

À ma famille.

À mes amis.

Remerciements

En tout premier lieu, je remercie le Bon Dieu, Tout Puissant, de m'avoir donné la force pour survivre ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés.

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.

Je voudrais tout d'abord adresser toute ma gratitude à Monsieur Smail BENISSAAD, mon directeur de thèse, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter mes réflexions.

Mes profonds remerciements vont à Monsieur M. BOUCHOUCHA Ali, Professeur à l'Université des Frères Mentouri – Constantine, ainsi que Monsieur M. CHERFIA Abdelhakim, Maître de conférences à l'Université des Frères Mentouri – Constantine, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail et d'avoir accepté de prendre part à mon jury d'examen.

Je remercie Monsieur MAHFOUDI Chawki Professeur à l'Université Larbi Ben M'hidi – Oum El Bouaghi, ainsi que Monsieur BELAZIZIA Abdennacer, Maître de conférences à l'Université Larbi Tebessi – Tébessa, pour avoir accepté de prendre part à mon jury d'examen.

Mes vifs remerciements s'adressent à Monsieur Djebbara BENZERGA Professeur à l'Université des Sciences et de la Technologie d'Oran ainsi qu'à Madame Fethia BOUAKSA, Maître de conférences à l'Université des Sciences et de la Technologie d'Oran, pour l'aide qu'ils m'ont apporté lors de la soumission de mon article jusqu'à sa publication dans la revue Mechanika.

Résumé

Détermination de la périodicité optimale pour le remplacement préventif

La complexité des phénomènes de défaillances nous amène à rechercher des moyens d'améliorer les stratégies et les politiques de maintenance pour permettre aux équipements de remplir adéquatement les fonctions pour lesquelles ils ont été conçus. La théorie de fiabilité en ingénierie joue un rôle très important dans la maintenance de tels équipements.

Ainsi, les méthodes mathématiques de maintenance préventive, ont été développées principalement dans le domaine de la recherche afin de générer des programmes de maintenance préventive efficace. Le problème le plus important dans les méthodes mathématiques de maintenance est de concevoir une maintenance planifiée avec deux options de maintenance : remplacement préventif et remplacement correctif. Dans le cas du remplacement préventif, le système ou appareil est remplacé par un nouveau avant qu'il ne tombe en panne. Alors que, dans le cas d'un remplacement correctif c'est l'unité ou la pièce défaillante qui est remplacée. La détermination de la périodicité optimale pour le remplacement de pièces mécaniques, de composants, de modules ou de sous-ensembles pose toujours un problème économique et de rentabilité, surtout lorsque les installations sont similaires ou les machines sont identiques. Ce problème économique peut être résolu par la connaissance de la fiabilité opérationnelle et la détermination du moment le plus avantageux pour effectuer cette opération de remplacement préventif. La périodicité optimale pour le remplacement préventif peut être obtenue selon deux modèles mathématiques : le modèle de remplacement par bloc et le modèle de remplacement basée sur l'âge. Chaque modèle peut donner lieu à plusieurs variantes.

Dans ce travail nous avons étudié analytiquement et numériquement deux modèles simplifiés de remplacement préventif à savoir : le remplacement par bloc, c'est-à-dire que nous avons supposé qu'entre deux remplacements préventifs, il ne peut y avoir qu'une seule panne, qu'est le cas le plus courant en pratique ; Le remplacement basé sur l'âge, c'est-à-dire que l'âge de chaque pièce est connu et on change la pièce dès que son âge atteint cette valeur. Le principe consiste à calculer le coût total moyen par

pièce et par unité de temps, à chercher son minimum et prendre la période correspondant à ce minimum comme période optimale pour effectuer la maintenance préventive. Ce coût est composé du coût de maintenance préventive et de celui de la maintenance corrective pondérée de la probabilité de défaillances. Une étude analytique réalisée dans le cas d'une loi de Weibull, a permis de résoudre les équations différentielles résultantes sous certaines conditions mathématiques. Ensuite ces équations sont résolues numériquement pour les différents paramètres de ce problème qui sont le rapport des coûts de maintenance, le paramètre d'échelle et le paramètre de forme.

Les résultats obtenus ont été analysés et discutés ; leurs applications à des cas réelles peuvent fournir au service de maintenance un élément clef pour choisir la période la plus appropriée pour effectuer la maintenance préventive au coût minimum.

Mots-clés : périodicité optimale, maintenance préventive, maintenance corrective, défaillance, rapport des coûts de maintenance, loi de Weibull.

Abstract

Determining of optimal periodicity for preventive replacement

The complexity of the phenomena of failures leads us to seek means of improving the strategies and the policies of maintenance to make it possible the equipment to adequately fulfill the functions for which they were conceived. The theory of reliability in engineering plays a very important part in the maintenance of such equipment.

Thus, the mathematical methods of preventive maintenance were developed mainly in the field of research in order to generate programs of effective preventive maintenance. The most important problem in the mathematical methods of maintenance is to conceive maintenance planned with two options of maintenance: preventive replacement and corrective replacement. In the case of the preventive replacement, the system or apparatus is replaced by new before it breaks down. Whereas, in the case of a corrective replacement it is the unit or the failing part which is replaced. The determination of the optimal periodicity for the replacement of machine elements, components, modules or subsets always poses an economic problem and of profitability, especially when the installations are similar or the machines are identical. This economic problem can be solved by the knowledge of the operational reliability and the determination of the most advantageous moment to carry out this operation of preventive replacement. The optimal periodicity for the preventive replacement can be obtained according to two mathematical models: the model of replacement per block and the model of replacement based on the age. Each model can give place to several alternatives.

In this work we studied analytically and numerically two simplified models of preventive replacement namely: the replacement by block, i.e. we supposed that between two preventive replacements, it can break down only one there, that is the case more running in practice; The replacement based on the age, i.e. the age of each part is known and one changes the part as soon as its age reaches this value. The principle consists in calculating the average total costs by part and unit of time, to seek its minimum and to take the period corresponding to this minimum like optimal period to carry out the preventive maintenance. This cost is composed of the cost of preventive maintenance and that of the balanced corrective maintenance of the probability of

failures. An analytical study carried out in the case of a law of Weibull, made it possible to solve the resulting differential equations under certain mathematical conditions. Then these equations are solved numerically for the various parameters of this problem which are the maintenance costs ratio, the shape parameter and the scale parameter.

The results obtained were analyzed and discussed; their applications to cases real can provide to the service maintenance a key element to choose the most suitable period to carry out the preventive maintenance at the minimum cost.

Keywords: optimal periodicity, preventive maintenance, corrective maintenance, failure, maintenance ratio cost, Weibull law.

ملخص

تحديد الزمن الأمثل للاستبدال الوقائي

إن تعقيد ظاهرة العطب يقودنا إلى البحث عن سبل لتحسين استراتيجيات وسياسات صيانة لتمكين المعدات للوفاء على نحو كاف بالوظائف التي صممت من أجلها. لهذا فإن نظرية الهندسة الموثوقية تلعب دورا هاما جدا في صيانة هذه المعدات.

وهكذا قد وضعت الطرق الرياضية للصيانة الوقائية بشكل رئيسي في مجال البحوث لتوليد برامج صيانة وقائية فعالة. و أكبر مشكلة في صيانة الطرق الرياضية هي تصميم مخطط للصيانة لها مع خيارين: الاستبدال الوقائي و الاستبدال التصحيحي. في حالة استبدال وقائي، فإن النظام أو جهاز يتم استبداله بأخر جديد قبل أن يصاب بالعطب. بينما في حالة الاستبدال التصحيحي يتم استبدال الوحدة أو الجزء المعطوب. إن تحديد الوتيرة الأمثل لاستبدال الأجزاء الميكانيكية، والمكونات، وحدات أو النظم الفرعية يطرح دائما مشكلة اقتصادية وربحية، وخصوصا عندما تكون المرافق و الآلات متشابهة أو متطابقة. ويمكن حل هذه المشكلة الاقتصادية من خلال المعرفة من الموثوقية التشغيلية وتحديد الوقت الأكثر فائدة لتنفيذ هذه العملية لعملية الاستبدال الوقائية. تحديد الفترة الأمثل للاستبدال الوقائي يمكن الحصول وفقا للنموذجين رياضيين: نموذج كتلة استبدال ونموذج بديل على أساس السن. كل نموذج يمكن أن يؤدي إلى عدة أنواع.

في هذا العمل درسنا تحليليا وعدديا اثنين من نماذج مبسطة من الاستبدال الوقائي وهي كتلة استبدال، مما يعني أننا نفترض أن بين تغييرين وقائيين، يمكن أن يكون هناك عطب واحد فقط، وهي الحالة الأكثر شيوعا في الممارسة؛ و النموذج الثاني الاستبدال القائم على أساس السن، و هو ما يعني أن عمر كل قطعة معروف، ونقوم بتغيير القطعة عندما تصل قيمة عمرها. والمبدأ المتبع هو حساب متوسط التكلفة الكلية للقطعة الواحدة و لكل وحدة زمن، للحصول على الحد الأدنى، ونعتبر الوقت الموافق للحد الأدنى للتكلفة الصيانة على أنه الوقت الأمثل لإجراء الصيانة الوقائية. وتشمل هذه التكلفة تكلفة الصيانة الوقائية وكذلك الصيانة التصحيحية المرجحة لاحتمال العطب. أجرينا دراسة تحليلية في حالة توزيع ويبل، لحل المعادلات التفاضلية الناتجة تحت بعض الظروف الرياضية. ثم قمنا بحل هذه المعادلات حسابيا آخذين بعين الاعتبار العوامل التالية: نسبة تكاليف الصيانة، عامل الشكل وعامل المقياس.

و قد تم تحليل النتائج ومناقشتها، حيث يمكن تطبيقاتها في حالات حقيقة من توفير عنصرا أساسيا لخدمة الصيانة و اختيار أنسب وقت لإجراء الصيانة الوقائية بأقل تكلفة.

كلمات البحث: الفترة المثلى، الصيانة الوقائية، الصيانة التصحيحية، العطب، نسبة تكلفة الصيانة، قانون ويبل.

Table de matières

Dédicaces	i
Remerciements	ii
Résumé.....	iii
Abstract.....	v
Table de matières	viii
Nomenclature.....	xi
1. REVUE BIBLIOGRAPHIQUE ET ÉTAT DE L'ART.....	2
1.1 Introduction	2
1.2 Contenu	3
1.3 État de l'art.....	4
2. CONCEPTS DE BASE ET LOIS DE FIABILITÉ.....	20
2.1 Politiques et stratégies de maintenance.....	20
2.1.1 Introduction	20
2.1.2 Définitions et concepts.....	21
2.1.3 Différents types de prévisions de maintenance.....	22
2.1.3.1 Prévisions à court terme.....	22
2.1.3.2 Prévisions à moyen terme.....	22
2.1.4 Moyens impliqués et objectifs recherchés	23
2.1.5 Processus de mise en place d'une stratégie de maintenance	23
2.2 Concepts de fiabilité	31
2.2.1 Généralités	31
2.2.2 Fiabilité et conditions de fonctionnement.....	32
2.2.3 Fiabilité intrinsèque	33
2.2.3.1 Fiabilité des éléments.....	33
2.2.3.2 Le projet ou la conception	33
2.2.3.3 La réalisation	34
2.2.4 Fiabilité opérationnelle.....	35

2.2.5	Conséquences techniques et économiques de la fiabilité	35
2.3	Définitions	37
2.3.1	Système.....	37
2.3.2	Défaillance	37
2.3.3	Fiabilité.....	38
2.4	Modèle mathématique pour la fiabilité.....	38
2.4.1	Variable aléatoire	38
2.4.2	Fiabilité	38
2.4.3	Probabilité de défaillances (défiabilité) : fonction de répartition	39
2.4.4	Densité de probabilité de défaillance	39
2.4.5	Taux de défaillance instantané	39
2.4.6	Expression générale de la fiabilité.....	41
2.4.7	MTBF	41
2.5	Classement des matériels selon le taux de défaillance	42
2.6	Notions de probabilité de survie avec conditions	44
2.6.1	Loi de probabilité de survie d'un matériel non neuf	44
2.6.2	Loi de probabilité de survie avec limite de fonctionnement	45
2.7	La loi exponentielle.....	46
2.7.1	Définition	46
2.7.2	Remarque	47
2.8	La loi de Weibull	47
2.8.1	Caractéristiques	47
2.8.2	Signification des paramètres du modèle de Weibull	49
2.8.2.1	Paramètre de forme β	49
2.8.2.2	Paramètre de position γ	49
2.8.2.3	Paramètre d'échelle réelle η	49
2.8.3	Allure du taux de défaillance en fonction du paramètre β	50
2.8.4	Analyse et propriétés du taux de défaillance	50
2.8.5	Détermination des paramètres η , β et γ	51
3.	MODÈLES MATHÉMATIQUES ET RÉOLUTION NUMÉRIQUE.....	54

3.1	Introduction	54
3.2	Modélisation mathématique	55
3.2.1	Modèles de remplacements par block.....	55
3.2.1.1	Modèle I :	55
3.2.1.2	Modèle II.....	61
3.2.1.3	Modèle III	61
3.2.2	Modèles de remplacements basés sur l'âge : l'âge de chaque pièce est connu et on change la pièce dès que son âge atteint la valeur T_0	62
3.2.3	Cas où les remplacements se font à des instants aléatoires, t_1, t_2, \dots, t_n choisies de telle sorte que ces remplacements soient pratiques et économiques	67
3.2.4	Choix entre réparation et remplacement avant terme	72
3.2.4.1	Introduction	72
3.2.4.2	Résolution du problème.....	74
3.3	Résolution numérique.....	75
4.	RÉSULTATS ET DISCUSSIONS	78
4.1	Introduction	78
4.2	Cas où toutes les pièces sont changées avec la même périodicité $T_0=C^{te}$ quelque soit l'âge de la pièce.....	78
4.2.1	Effet du rapport des coûts.....	78
4.2.2	Effet du paramètre d'échelle η	87
4.2.3	Effet de l'augmentation des coûts de maintenance C_p et C_f	89
4.3	Cas où l'âge de chaque pièce est connu et on change la pièce dès que son âge atteint la valeur T_0	90
4.3.1	Validation du code calcul.....	90
4.3.2	Effet du rapport des coûts.....	94
4.3.3	Effet du paramètre d'échelle η	100
	Conclusion générale et perspectives	102
	Références bibliographiques.....	104

Nomenclature

C_r	Rapport des coûts de maintenance = C_p/C_f
C_f	Coût de remplacement correctif d'une pièce défaillante, [D.A]
C_p	Coût de remplacement préventif d'une pièce en bon état, [D.A]
C	Coût total par pièce, [D.A]
$C(t)$	Coût total moyen prévu par pièce et par unité de temps, [D.A/h]
C_m	Coût minimal, [D.A/h]
$F(t)$	Probabilité de défaillance (défiabilité)
$f(t)$	Densité de probabilité de défaillance
$M(t_0)$	Nombre moyen de défaillances durant la période du temps
$P(t)$	Probabilité
$R(t)$	Fiabilité (probabilité de bon fonctionnement)
T	variable aléatoire, [h]
t	Temps, [h]
T_0	Période de remplacement optimale, [h]
$y(\mu)$	Fonction du rapport des coûts

Symboles Grecs

β	Paramètre de forme
γ	Paramètre de position (d'origine des temps), [h]
η	Paramètre d'échelle, [h]
μ	Variable aléatoire = $\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta$
μ_0, μ_1	Racines de $y(\mu)$
ε	Fraction temporel, [h]

Abréviation

MP	Maintenance préventive
MDT	Mean Down Time (temps moyen d'indisponibilité)
MP	Maintenance Préventive
FRW	Free Repair Warranty (Réparation de garantie gratuite)
PRW	Prorata Repair Warranty (Réparation de garantie au prorata)
MTBF	Mean Time To Failure (Moyenne des temps de bon fonctionnement)
MUT	Mean Up Time (temps moyen de disponibilité)

CHAPITRE I

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE ET ÉTAT DE L'ART

1. REVUE BIBLIOGRAPHIQUE ET ÉTAT DE L'ART

1.1 Introduction

De nos jours, de nombreux systèmes deviennent de plus grande envergure et plus compliqués influençant grandement notre société, tels que les centrales nucléaires, les centrales électriques, les complexes industriels, les avions, les réseaux informatiques, etc. Ces installations et équipements tendent à se détériorer dans le temps sous l'action de causes multiples telles que l'usure, la fatigue, la déformation due au fonctionnement ou l'action des agents corrosifs (agents chimiques, atmosphères, etc.). Ces détériorations peuvent provoquer l'arrêt de fonctionnement, diminuer les capacités de production, mettre en péril la sécurité des biens et des personnes, provoquer des rébus ou diminuer la qualité, augmenter les coûts de fonctionnement (augmentation de la consommation d'énergie, etc.) ou diminuer la valeur marchande de ces moyens.

Ainsi, la complexité des phénomènes de défaillances nous amène à rechercher des moyens d'améliorer les stratégies et les politiques de maintenance pour permettre à l'équipement de remplir adéquatement les fonctions pour lesquelles il a été conçu. La théorie de fiabilité en ingénierie joue un rôle très important dans la maintenance de tels systèmes.

Traditionnellement, les activités de maintenance peuvent être classées en deux principaux types : la maintenance corrective et la maintenance préventive. La maintenance corrective est la maintenance qui survient après la défaillance des systèmes. La maintenance préventive y compris les inspections et les remplacements systématiques, est effectuée avant la défaillance des systèmes, afin de conserver les équipements dans un état spécifié. Habituellement, dans la planification de la maintenance préventive, le but est d'améliorer quelques critères importants d'évaluation de la performance tels que les coûts de réparation, la fiabilité et la disponibilité.

Ainsi, les méthodes mathématiques de maintenance préventive, ont été développées principalement dans le domaine de la recherche afin de générer des programmes de maintenance préventive efficace. Le problème le plus important dans les méthodes mathématiques de maintenance est de concevoir une maintenance planifiée

avec deux options de maintenance : remplacement préventif et remplacement correctif. Dans le cas du remplacement préventif, le système ou appareil est remplacé par un nouveau avant qu'il ne tombe en panne. Alors que, dans le cas d'un remplacement correctif c'est l'unité ou la pièce défectueuse qui est remplacée.

Le but de ce travail est la détermination de la périodicité optimale pour le remplacement des pièces mécaniques, des sous-ensembles ou d'autres systèmes qui peuvent poser des problèmes économiques. Ces problèmes peuvent être résolus par la connaissance de la fiabilité opérationnelle et la détermination du moment le plus avantageux pour effectuer cette opération de remplacement préventif.

1.2 Contenu

Le contenu de cette thèse est constitué de quatre chapitres.

Ce premier chapitre présente l'ensemble des travaux antérieurs théoriques ou numériques traitant le problème de la détermination de la période optimale pour le remplacement des pièces mécaniques et les différents modèles proposés dans le domaine de la planification de maintenance préventive.

Le deuxième chapitre décrit en détail les modèles mathématiques employés pour l'obtention de la périodicité optimale selon que toutes les pièces sont changées avec la même périodicité quelque soit l'âge de la pièce, ou bien l'âge de chaque pièce est connu et on change la pièce dès que son âge atteint la valeur optimale, ou bien alors les remplacements se font à des instants aléatoires choisies de telle sorte que ces remplacements soient pratiques et économiques.

Le troisième chapitre est consacré à l'exposition des méthodes numériques utilisées pour résoudre les équations différentielles modélisantes. Il s'agit de méthodes itératives directes permettant d'obtenir les racines de ces équations.

Le quatrième chapitre expose les différents résultats obtenus dans les deux cas selon que toutes les pièces sont changées avec la même périodicité quelque soit l'âge de la pièce (remplacement par bloc), ou bien que l'âge de chaque pièce est connu et on change la pièce dès que son âge atteint la valeur optimale (remplacement basé sur l'âge).

Enfin, la conclusion générale résume les principaux résultats obtenus et quelques perspectives préconisées pour les éventuelles futures études.

1.3 État de l'art

Les opérations de maintenance sont devenues de plus en plus importantes en raison de leur rôle primordial dans le maintien et l'amélioration de la qualité du produit, les questions de sécurité, la disponibilité de la pièce de rechange, etc. Les dépenses de maintenance constituent donc une part importante du budget de fonctionnement dans les entreprises manufacturières. Al-Najjar et Alsyouf [1] ont montré que les dépenses de maintenance varient selon le type d'industrie, les chiffres généralement rencontrés sont de l'ordre de 15 à 40 % des coûts de production. Par conséquent, il est nécessaire d'accorder plus d'attention à ce domaine important. Parmi les paramètres qui influencent le coût de ces opérations, c'est le choix de la périodicité la plus avantageuse ou le moment le plus approprié de leur exécution, dans le but d'obtenir des coûts optimaux de maintenance préventive.

La détermination de la périodicité optimale pour le remplacement préventif des pièces mécaniques ou des composants électroniques se compose de deux types : le modèle de remplacement d'âge et le modèle de remplacement par bloc.

Le remplacement par bloc consiste à faire des remplacements préventifs par un équipement neuf aux instants T , $2T$, $3T$, ..., indépendamment de l'âge et de l'état de l'équipement. Si une défaillance se produit entre deux instants de remplacement préventif, on doit remplacer l'équipement défaillant par l'équipement neuf.

Le remplacement basé sur l'âge consiste à faire un remplacement préventif seulement lorsque l'équipement a atteint l'âge T soit la période de remplacement préventif choisie. La durée de T est déterminée de façon à effectuer un remplacement préventif un peu avant le moment où on estime que l'équipement risque de tomber en panne. Toutefois, si une panne survient avant l'âge T , un remplacement correctif est effectué. Les instants de panne, qu'on représente par des distributions de probabilité telle que la loi de Weibull, arrivent de façon aléatoire.

De nombreux travaux expérimentaux et numériques ont été développés sur la détermination du moment le plus avantageux pour effectuer cette opération de remplacement préventif. À cet effet, différents modèles ont été proposés dans le domaine de la planification de maintenance préventive pour trouver des politiques optimales de remplacement.

Les politiques de remplacement périodique comptent parmi les politiques de maintenance préventive les plus connues. Une de ces stratégies proposée par Barlow et Porschan [2] consiste à remplacer périodiquement le produit par un produit identique neuf à des instants prédéterminés kT_0 ($k = 1, 2, 3, \dots$). Si une défaillance se produit entre deux remplacements consécutifs alors le système subit une réparation minimale. Ainsi, des programmes complets de maintenance ont été mis en place pour divers systèmes dans lesquels la maintenance préventive (MP) est un élément clé. Toutefois, la maintenance est souvent un processus d'affaires qui n'a pas été optimisé et donc considéré comme une responsabilité des opérations commerciales (Jardine et Tsang [3]). Comme cela a été souligné par Tu *et al.* [4], un contrôle efficace des coûts de maintenance peut être utilisé comme un avantage concurrentiel sur les autres concurrents.

Au fil des ans, de nombreux modèles de MP ont été développés, fondés sur l'économie, la fiabilité et les considérations opérationnelles (Tam *et al.* [5], Lai *et al.* [6]). Les calendriers optimaux de maintenance ont été obtenus en utilisant des techniques de renouvellement fondamentales (Barlow et Proschan [2], Jardine [7], Shum et Gong [8], Ilgin et Tunali [9], Robert et Shahabudeen [10], Marsequerra *et al.* [11]).

Dans ces modèles, l'un des facteurs décisifs est l'intervalle de temps après lequel la MP doit être effectuée. Par exemple, l'enquête menée par Wang [12] révèle que le thème central dans la plupart des publications de recherche est de déterminer l'intervalle optimal de MP dans les différentes politiques de maintenance. Les paramètres communs à ces modèles de MP sont le coût de remplacement préventif, C_p et le coût de défaillance C_f . C_p est généralement facile à quantifier car il se compose généralement du coût du nouveau composant de remplacement et le coût d'installation. Mais, C_f ne peut être facilement déterminée car il est lié au coût de perte de production, au retard en aval, etc. En conséquence, il a souvent une valeur estimée à partir des données sur les coûts de réparation. Une autre source d'imprécision provient du modèle de temps inter-défaillance et ses paramètres.

Dans la plupart de la littérature actuelle, on suppose que ces paramètres sont connus. À titre d'illustration, on suppose que le temps inter-défaillance suit une distribution de Weibull à deux paramètres qui sont des paramètres estimés. Mais, dans la pratique, ils doivent être estimés à partir des données de défaillance. En conséquence,

l'intervalle optimal de MP calculé est exposé au risque d'échantillonnage que le coût de la réparation et l'insuffisance des données utilisées pour l'estimation ne sont que des incidents rencontrés jusqu'à présent. Dans de nombreuses situations pratiques, ces données sont hautement censurées en raison de problèmes liés à la collecte des données et de défaillances latentes. Heureusement, ce risque d'échantillonnage peut être convenablement résolu par l'utilisation de l'intervalle de confiance statistique dans lequel l'incertitude des estimations de coûts et les paramètres sont transmis à travers les plages de valeurs possibles, aussi connu comme les estimations d'intervalle, pour le coût et les paramètres inconnus. En principe, les variations d'échantillonnage des coûts et des estimations de paramètres sont transmises à celle de l'intervalle optimal de MP et celui-ci peut être calculé à partir de celles de l'ancien.

Les publications traitant de l'effet de la variabilité d'échantillonnage sur l'intervalle optimal de remplacement sont rares. Leger et Cleroux [13] ont utilisé la méthode bootstrap d'Efron [14] pour construire un intervalle de confiance pour le coût réel de l'utilisation d'une estimation non paramétrique de donnée de la stratégie de remplacement de l'âge optimal. Gaver *et al.* [15] ont abordé la question de la variabilité des paramètres de Weibull en effectuant des études de sensibilité sur les coûts moyens à long terme du système. Jusqu'à présent, il semble n'y avoir aucun travail qui dérive l'intervalle de confiance de l'intervalle optimal de MP, compte tenu de la variabilité impliquée dans l'estimation des paramètres d'entrée requis. L'intervalle de confiance de l'intervalle optimal de MP à partir de deux politiques de remplacement commune, à savoir la politique de remplacement d'âge et la politique de remplacement par bloc a été décrite par Wang [12] et Yoo et Gong [16]. Basé sur le concept de l'ensemble d'équivalence (Lehmann [17]), l'intervalle de confiance de l'intervalle optimal de MP est construit à partir de celles des paramètres intervenant dans la détermination de l'estimation ponctuelle de l'intervalle de MP. Comme l'intervalle de confiance est dépendent de la taille de l'échantillon et de la distribution d'échantillonnage des statistiques utilisées dans l'estimation des paramètres, il ne capte que la variabilité due à l'estimation, et n'aborde pas l'erreur possible dans le choix du modèle. Il existe de nombreuses applications liées à l'utilisation de l'intervalle de confiance pour l'intervalle optimal de MP. Par exemple, à partir des intervalles de confiance, une stratégie simple de MP opportuniste pour des systèmes à composants multiples peut être facilement déterminée.

Puisque le mécanisme qui cause la défaillance dans presque tous les systèmes réels complexes peut être considéré comme incertain et aléatoire, la technique mathématique pour faire face à des problèmes de maintenance devrait être fondée sur la théorie des probabilités. Si nous sommes intéressés par le comportement dynamique de défaillance du système en fonction du temps, les problèmes sont essentiellement réduits à l'étude des processus stochastiques présentant des phénomènes à la fois sur la défaillance et le remplacement. En fait, depuis la théorie des processus stochastiques dépend fortement la théorie de gestion mathématique. En d'autres termes, afin de concevoir un programme de maintenance efficace, à la fois le processus stochastique sous-jacent qui régit le mécanisme de défaillance et le rôle des options de maintenance effectués sur le processus doivent être analysé avec soin. En ce sens, la théorie mathématique de la maintenance est l'un des éléments les plus importants dans la modélisation des probabilités appliquées.

Jusqu'à présent, un grand nombre de méthodes de remplacement ont été proposées dans la littérature. Concernant la maintenance préventive, des objectifs et des approches ont été examinées. Certaines recherches [18-20] ont étudié la politique de maintenance basée sur la fiabilité et la disponibilité du système. Vaurio [21], Bris [22], Samrout *et al.* [23], Chelbi et Kadi [24], El-Amin *et al.* [25], Chien [26] et Jones *et al.* [27] se sont concentrés sur les coûts de maintenance. D'autres recherches [22, 28-33] ont proposé des politiques pour la maintenance et le remplacement des équipements basé sur la durée de vie des pièces. Aussi, Kapur *et al.* [34], Koshimae *et al.* [35] et Yun et Bai [36] ont prêté une attention aux contraintes du budget et du temps au moment de la maintenance et du remplacement. Low *et al.* [37] et Berrichi *et al.* [38] ont étudié les problèmes communs de la planification de la maintenance et de la production. Mais, contrairement à la plupart des recherches mentionnées, dans la pratique, l'efficacité d'une maintenance préventive doit être évaluée à partir de différents points de vue.

Dans le domaine de modèles de maintenance d'évaluation multicritères, Chareonsuk *et al.* [39] ont proposé une approche multicritères pour la sélection des intervalles de maintenance préventive. Ils ont décrit l'approche traditionnelle d'une fonction à un seul objectif pour ce type de problème et quelques-uns des inconvénients de prendre une telle approche à objectif unique. Ensuite, ils ont présenté un nouveau modèle intégrant de multiples-critères. Quan *et al.* [40] ont proposé un programme

multi-objectifs de maintenance préventive, compte tenu de la main-d'œuvre qui effectue des opérations de maintenance. Ils ont utilisé un algorithme évolutionnaire pour résoudre leur problème. Bashiri *et al.* [41] ont proposé une approche interactive qui utilise des critères quantitatifs et qualitatifs pour classer les stratégies de maintenance. Leur approche a été basée sur la méthode d'affectation linéaire.

Lapa *et al.* [42] ont présenté une nouvelle méthodologie pour l'évaluation de la politique de maintenance préventive basée sur un modèle de coût et de fiabilité, ce qui permet l'utilisation d'intervalles flexibles entre les interventions de maintenance. Dekker [43] a classé les objectifs de maintenance en quatre rubriques : assurer le bon fonctionnement du système ; assurer la vie du système ; assurer la sécurité et assurer le bien être humain. Comme il l'a expliqué, ces évolutions impliquent de nouveaux modèles qui contiennent différents critères et objectifs comme la fonction de la productivité, la fiabilité et la disponibilité de l'équipement, ainsi que des contraintes différentes.

Récemment, Yeh *et al.* [44] ont analysé l'effet d'une stratégie de garantie de type FRW (Free Repair Warranty) sur la politique de remplacement périodique. Ils ont cherché à déterminer la période optimale de remplacement périodique qui minimise le coût total moyen par unité de temps pour un produit réparable vendu avec une garantie. Leur étude a montré que le consommateur aurait intérêt à faire coïncider le premier instant de remplacement préventif du produit avec l'instant de la fin de la période de garantie.

Nosoohi et Hejazi [45] ont proposé un nouveau modèle multi-objectifs pour le remplacement préventif d'une pièce sur un horizon de planification. Le modèle proposé considère différents objectifs et des questions pratiques, tels que le remplacement correctif et ses conséquences, la durée de vie résiduelle et le type de l'indice de la productivité. En outre, le modèle détermine le nombre de pièces de rechange nécessaires pour le remplacement de la partie défectueuse, qui doivent être fournies au début de la période de planification. Le modèle multi-objectifs est applicable aux machines ou aux équipements qui sont réparés en remplaçant leur pièce défaillante par une nouvelle pièce de rechange. Pour résoudre le modèle multi-objectifs, en ce qui concerne la capacité de la méthode ε -contrainte pour générer différentes solutions optimale de Pareto, une procédure est développée sur la base de cette méthode. La procédure montre comment la méthode ε -contrainte peut être utilisée pour trouver la

solution privilégiée dans les situations où il n'y a pas accès aux décideurs. Les auteurs ont illustré ce modèle et la procédure de solution par un exemple numérique.

Maaroufi *et al.* [46] ont réalisé une étude portant sur la détermination de la stratégie optimale de remplacement périodique pour des produits vendus avec et sans garantie. Le type de garantie considéré, dans cette étude, consiste à la prise en charge par le vendeur de toutes les réparations durant la période de garantie (Free-Repair Warranty). Chaque réparation survenant suite à une défaillance aléatoire du produit consiste à remettre celui-ci en marche dans un état intermédiaire entre l'état 'as good as new' et l'état 'as bad as old' ce qui correspond à une réparation imparfaite. Le processus de quasi-renouvellement est utilisé pour modéliser la maintenance imparfaite. Dans ce contexte et pour les deux cas avec et sans garantie, les auteurs ont établi les conditions d'existence et d'unicité d'une stratégie optimale de remplacement minimisant le coût total moyen par unité de temps sur un horizon infini. Ils ont présenté un exemple numérique pour illustrer leur démarche et ont discutés et comparé les résultats obtenus avec d'autres déjà parus dans la littérature considérant des réparations minimales suite aux pannes et non pas des réparations imparfaites.

Habituellement, le temps moyen entre défaillances est caractérisé par la distribution de durée de vie dans laquelle les paramètres sont estimés à partir des données historiques. Mais, dans la plupart des cas, les études réalisées se concentrent sur la détermination du calendrier de remplacement optimal en supposant que les paramètres du modèle sont constants. Halim et Tang [47] ont étudié les questions soulevées par l'utilisation de paramètres estimés. Ils ont proposé, une approche graphique, dans laquelle les temps inter-défaillance suivent une distribution de Weibull à deux paramètres, pour obtenir les limites de confiance pour le moment optimal de remplacement, compte tenu des paramètres clés des deux modèles de remplacement, à savoir le modèle de remplacement d'âge et le modèle de remplacement par bloc (Barlow et Hunter [33]). Les auteurs ont présenté les applications de l'intervalle de confiance proposée, à savoir la détermination de la fenêtre d'opportunité pour un coût minimal, le calendrier de maintenance à la demande imprévisible de la clientèle et la maintenance opportuniste pour les systèmes multi-composants. Ils ont appliqué les résultats obtenus au remplacement opportuniste.

Chien *et al.* [48] ont considéré un modèle de remplacement d'âge avec réparation minimale basée sur une limite des coûts de réparation cumulatifs et du délai aléatoire pour effectuer un remplacement. Une politique de réparation avec une limite des coûts de réparation cumulatifs utilise des informations sur toute l'histoire du coût de la réparation d'un système pour décider si le système sera réparé ou remplacé. Un modèle général de coûts est développé pour le coût moyen par unité de temps basée sur le comportement stochastique du système supposé, reflétant les coûts de stockage à la fois une pièce de rechange et de l'arrêt du système. L'âge optimal pour le remplacement préventif afin de minimiser ce coût unitaire est dérivé, son existence et son unicité sont montrés, et les propriétés structurelles sont présentées. Divers cas particuliers sont inclus et un exemple numérique est donné à titre d'illustration. Parce que le cadre et l'analyse sont d'ordre général, le modèle proposé s'étend sur plusieurs résultats existants.

Sheu *et al.* [49] ont étudié un système d'exploitation soumis à des chocs aléatoires qui arrivent selon un processus de Poisson non homogène et provoquent la défaillance du système. Les défaillances du système peuvent être divisées en deux catégories : une défaillance mineur de type I, rétablie par une réparation minimale, ou une défaillance catastrophique de type II qui nécessite un remplacement. Un modèle de remplacement d'âge a été étudié en considérant à la fois une limite du coût cumulé de réparation et tout l'historique du coût de réparation du système. En vertu d'une telle politique, le système est remplacé à l'âge T , ou à la $k^{\text{ème}}$ défaillance du type I à laquelle le coût cumulé de réparation dépasse la limite préétablie, ou à toute défaillance de type II, selon l'éventualité leur apparition. Les auteurs ont étudié analytiquement la politique de remplacement du coût minimal pour montrer son existence, son unicité et ses propriétés structurelles. Le modèle proposé fournit un cadre général pour l'analyse des politiques de maintenance, et présente plusieurs exemples numériques à des fins d'illustration.

Aghezzaf *et al.* [50] ont étudié un système de production qui est sujet à des défaillances aléatoires en supposant que toute action de maintenance effectuée sur le système, dans une période, réduit la capacité de production disponible pendant cette période. L'objectif de ce travail est de trouver une stratégie de maintenance préventive et de lotissement intégré du système qui répond à la demande pour tous les éléments

sur toute la période sans retour à l'exploitant sans backlogging (accumulation de retards) et qui minimise la somme escomptée des coûts de maintenance et de production. Ils ont montré comment ce problème peut être formulé et résolu comme un problème de lotissement multi-points sur un système qui est renouvelée périodiquement et peu être réparé quand il tombe en panne. Ils ont fourni également un exemple illustratif qui montre les étapes pour obtenir une stratégie optimale de maintenance de production intégrée.

Chien [51] a étudié le problème de la politique de remplacement d'âge des produits sous une nouvelle stratégie de garantie, qui combine un remplacement entièrement gratuit renouvelable, avec une politique de garantie au prorata (appelée politique FRW/PRW entièrement renouvelable). Pour cette stratégie de garantie combinée, chaque fois qu'un produit tombe en panne pendant la période de garantie, il est remplacé par un nouveau et une nouvelle garantie est émise. En attendant, si la panne survient pendant le premier intervalle de temps (c'est-à-dire l'intervalle garantie du remplacement gratuit (FRW)), le remplacement est effectué sans frais pour l'acheteur, mais si la panne survient pendant le deuxième intervalle de temps (c'est-à-dire l'intervalle garantie au prorata (PRW)), le remplacement se fait à un coût au prorata de l'acheteur. En divisant le remplacement d'âge en trois périodes distinctes : dans FRW, pendant PRW et post-garantie, alors, étant donné que le remplacement d'âge est dans un certain intervalle, le modèle du coût du point de vue de l'utilisateur/l'acheteur est développé, et le remplacement d'âge optimal et local correspondant est dérivé de telle sorte que le taux de coût attendu de long terme est réduit au minimum. Par la suite, le remplacement d'âge optimal et global est déterminé. Les propriétés structurales de ces politiques optimales sont obtenues et présentées et des cas particuliers du modèle sont discutées. Enfin, un exemple numérique est donné à titre d'illustration.

Chien [52] a considéré un modèle général de remplacement d'âge qui incorpore des réparations minimales, remplacement planifiés et non planifiés, pour les produits en vertu d'une politique de garantie gratuite de remplacement renouvelable. Pour les deux produits garanti et non garanti, les modèles de coûts du point de vue de l'utilisateur sont mis au point, et les âges correspondants de remplacement optimaux sont dérivés tels que le taux du coût prévu à long terme est réduit au minimum. Les incidences d'une garantie de produit sur le modèle optimal de remplacement sont étudiées

analytiquement. En outre, l'auteur montre que l'âge optimal de remplacement pour un produit garanti est plus proche de la fin de la période de garantie que pour un produit non-garanti. Enfin, des exemples numériques sont donnés à titre d'illustration.

Zhang et Wang [53] ont étudié un système dégénératif simple (c'est-à-dire un système à un seul composant dégénératif avec un réparateur) avec $k + 1$ états, incluant k états de défaillance et un état de fonctionnement. Ils ont supposé que le système après la réparation n'est pas "as good as new", et la dégénérescence du système est stochastique. Sous ces hypothèses, ils ont considéré une nouvelle période de remplacement T basée sur l'âge du système. Le problème est de déterminer une période de remplacement optimale T^* tel que le taux de coût moyen (à savoir le coût moyen à long terme par unité de temps) du système est réduit au minimum. Une fois que l'expression explicite du taux de coût moyen est obtenu, la politique de remplacement optimale correspondante peut être déterminée, l'expression explicite du taux de coût moyen minimum peut être trouvée et sous certaines conditions l'existence et l'unicité de la politique optimale T^* peuvent être prouvées, aussi. En outre, les auteurs ont montré que le modèle de réparation pour le système multi-états constitue un modèle général de réparation de processus monotone qui inclut le modèle de réparation de processus géométrique comme un cas particulier. Ils ont également montré que le modèle de réparation est équivalent à un modèle de réparation du processus géométrique pour un système simple dégénérative à deux états dans le sens où ils ont le même taux de coût moyen et la même politique optimale. Enfin, un exemple numérique est donné pour illustrer les résultats théoriques de ce modèle.

Yuan et Xu [54] ont étudié un système réparable en attente avec deux composants différents et un réparateur qui peut prendre plusieurs congés. S'il ya un composant qui tombe en panne et le réparateur est en congé, le composant défectueux attendra jusqu'à ce que le réparateur sera disponible pour réparation. Dans ce système, on suppose que le composant 1 a la priorité dans l'utilisation. Après réparation, le composant 1 suit une réparation de processus géométrique, tandis que le composant 2 peut être réparé comme neuf après défaillances. Sous ces hypothèses, une politique de remplacement basée sur le nombre N des temps de défaillance du composant 1 est étudiée. Le système sera remplacé si les temps de défaillance du component 1 atteignent un nombre N . L'expression explicite du taux du coût attendu est proposée, de sorte que le nombre de

remplacement optimal N^* est déterminé. Enfin, un exemple numérique est donné pour illustrer les résultats théoriques du modèle.

Boschian *et al.* [55] ont effectué la comparaison entre deux stratégies pour l'exploitation d'un système de production composé de deux machines travaillant en parallèle et un inventaire en aval fournissant une ligne d'assemblage. Les deux machines, qui sont sujettes à des défaillances aléatoires, subissent des opérations de maintenance préventive et corrective. Ces opérations d'une durée aléatoire rendent les machines indisponibles. En outre, au cours des opérations de sous-traitance régulières, une de ces machines devient indisponible pour fournir l'inventaire en aval. Dans la première stratégie, on suppose que la périodicité des opérations de maintenance préventive et de la vitesse de production de chaque appareil sont indépendantes. La deuxième stratégie suggère une interaction entre les périodes d'indisponibilité et les taux de production des deux machines afin de minimiser les pertes de production durant ces périodes. Un modèle de simulation pour chaque stratégie est développée de manière à pouvoir les comparer et de déterminer simultanément la synchronisation d'une maintenance préventive sur chaque machine compte tenu du coût total moyen par unité de temps que le critère de performance. La deuxième stratégie est alors considérée, et une analyse multi-critères est adoptée pour atteindre le meilleur rapport coût-disponibilité compromis.

Jung et Park [56] ont développé des politiques de maintenance préventive à périodicité optimales après l'expiration de la garantie. Ils ont considéré deux types de politiques de garantie pour discuter de ces politiques de maintenance optimales : la garantie de renouvellement et la garantie de non-renouvellement. Du point de vue de l'utilisateur, le produit est maintenu à titre gratuit ou à un coût proportionnel en cas de défaillance au cours de la période de garantie. Cependant, les utilisateurs auront à réparer ou à remplacer le produit défectueux à leurs propres frais pendant la période post-garantie. Compte tenu de la structure du coût à l'utilisateur au cours du cycle du produit, les auteurs ont tiré les expressions pour les coûts de maintenance prévus pour la maintenance préventive périodique suivant l'expiration de la garantie lors de l'application des deux types de politiques de garantie. Ils ont obtenu le nombre optimal et la période optimale pour cette politique de maintenance de post-garantie en minimisant les coûts de maintenance attendus à long terme par unité de temps. Des

solutions explicites pour la maintenance préventive périodique optimale sont présentées à titre indicatif.

Tsai *et al.* [57] ont développé une stratégie de maintenance pour les produits réparables qui combine les actions de maintenance imparfaite à la période préprogrammée et les mesures de réparation minimales pour les défaillances. En vertu d'un processus en loi de puissance de défaillances, un coût total prévu est développé qui implique la somme du coût total de maintenances préventives imparfaites et le coût total prévu des réparations minimales. Par ailleurs, une procédure de recherche est prévue pour déterminer le programme de maintenance optimale dans un laps de temps fini de garantie. Lorsque les paramètres du processus en loi de puissance sont inconnus, l'exactitude des programmes de maintenance prévisionnelle est évaluée sur la base des données à travers une partie supérieure asymptotique lié à la différence du vrai coût total prévu et son estimation. Le procédé proposé est appliqué à un exemple en ce qui concerne la maintenance de transformateurs de puissance et les performances de la méthode proposée sont étudiées grâce à une étude numérique. Les résultats numériques montrent que la stratégie de maintenance proposée pourrait réduire les coûts si une action de maintenance imparfaite ou l'action de maintenance parfaite est mis en œuvre.

Chien [58] a présenté un modèle permettant de déterminer le nombre optimal de réparations minimales avant de commander de rechange pour le remplacement préventif. En introduisant les coûts de commande, de réparation, du temps d'arrêt, de remplacement et la valeur résiduelle d'un système non-défectueux, les taux de coûts attendus à long terme et la rentabilité sont déterminés. L'auteur montre que, sous certaines conditions, le nombre optimal de réparations minimales, ce qui réduit le taux de coût ou maximise l'efficacité des coûts, est donné par une unique solution de l'équation. Un exemple numérique est également donné à titre d'illustration du modèle proposé.

Chang *et al.* [59] ont considéré un modèle de remplacement avec réparation minimale basée sur une politique de limitation du coût de réparation cumulatif, où l'information de tous les frais de réparation est utilisée pour décider si le système est réparé ou remplacé. Quand une défaillance se produit, le système subit l'un des deux types de défaillances : une panne de type I (réparable) avec la probabilité q , rétablie par une réparation minimale, ou d'une défaillance de type II (non réparable) avec une probabilité $p (=1 - q)$ qui nécessite un remplacement. Grâce à cette politique, le système

est remplacé de manière anticipée à la $n^{\text{ième}}$ défaillance de type I ou à la $k^{\text{ième}}$ défaillance de type I ($k < n$) à laquelle le coût de la réparation cumulé dépasse le seuil prédéterminé, ou de toute défaillance de type II, selon la première éventualité. L'objet de ce travail est de trouver le nombre optimal de réparations minimales avant le remplacement qui minimise le coût prévu à long terme par unité de temps. Ce modèle est une généralisation de plusieurs modèles classiques de la littérature de maintenance et un exemple numérique est présenté à titre d'illustration.

Chien et Chen [60] ont présenté une politique de commande de rechange pour le remplacement préventif avec réparation minimale dépendant de l'âge et de considération de la valeur de récupération. L'unité de rechange pour le remplacement est disponible seulement par ordre et le délai pour fournir la pièce de rechange en raison d'ordonnancement régulier, ou accéléré, suit des distributions générales. Pour analyser la politique de la commande, le processus de rupture est modélisé par un processus de Poisson non homogène. En introduisant les coûts dus à la commande, aux réparations, aux remplacements et aux temps d'arrêt, ainsi que la valeur résiduelle d'un système non défaillant, la rentabilité attendue sur le long terme est calculée comme un critère d'optimalité. Ils ont montré, sous certaines conditions, qu'il existe un temps de commande optimale finie et unique qui maximise la rentabilité attendue. Enfin, des exemples numériques sont donnés à titre d'illustration.

Nakagawa et Kowada [61] ont introduit une nouvelle stratégie où l'équipement est changé soit à des instants T , prédéterminés ou à la $k^{\text{ième}}$ panne. Pour les autres pannes une réparation minimale est effectuée pour remettre l'équipement défaillant en état d'opération sans affecter son taux de défaillance. Ils ont proposé, une approche graphique, dans laquelle les temps inter-défaillance suivent une distribution de Weibull à deux paramètres, pour obtenir les limites de confiance pour le moment optimal de remplacement, compte tenu des paramètres clés des deux modèles de remplacement, à savoir le modèle de remplacement d'âge et le modèle de remplacement par bloc (Barlow et Hunter [33]).

Flehinger [62] a réalisé les premières investigations liées à la stratégie de maintenance de type remplacement par bloc. Tandis que Hanscom et Cléroux [63] ont utilisé des méthodes graphiques pour déterminer T_0 dans le cas où la fiabilité serait une distribution normale tronquée, Gamma ou Weibull. Alors que Cox [64] a établi les

conditions suffisantes d'existence d'une solution unique T_0 finie pour toute distribution non concentrée en zéro et de variance finie avec $T > 0$.

La politique de remplacement basée sur l'âge d'équipement est très performante lorsqu'elle est appliquée à un système simple ayant un taux de panne croissant sur un horizon infini. Barlow et Proschan [2] ainsi que Berg et Epstein [65] ont montré que l'efficacité de cette politique est réduite lorsqu'on l'applique à un système constitué de plusieurs sous-systèmes. Par contre, les stratégies de remplacement périodique de type bloc sont les plus avantageuses maintenances si les sous systèmes sont identiques stochastiquement et économiquement.

Gharbi *et al.* [66] ont traité la politique de maintenance de type âge qui vise à minimiser les coûts moyens de remplacement d'un système sujet à des défaillances aléatoires. L'expression analytique du coût moyen de remplacement a déjà été développée pour cette stratégie dans la littérature. Les conditions d'existence et d'unicité d'un optimum ont aussi déjà été établies. Des simulations utilisant les distributions de probabilité des pannes normale tronquée ou log-normale sont effectuées. Elles ont permis de vérifier et de valider les résultats analytiques des coûts optimaux établis précédemment. Des plans d'expérience sont ensuite utilisés pour étudier le comportement du coût moyen de remplacement dans la zone autour du temps de remplacement optimal. Une zone optimale pour le temps de remplacement au lieu d'une valeur unique, permettrait de mieux planifier les activités d'entretien et ainsi de moins perturber la production. La stratégie optimale est définie par la détermination de l'âge optimal de remplacement préventif T_0 qui minimise le coût total moyen par unité de temps sur un horizon infini. Le modèle mathématique de cette stratégie a déjà été développé par Barlow et Proschan [2], sous certaines hypothèses : l'équipement ne peut être qu'en deux états, en opération ou en panne, les pannes sont détectées instantanément, les temps des actions préventives et correctives sont négligeables, suite à une intervention l'équipement est remis à neuf et le coût de remplacement préventif est inférieur au coût correctif.

Le modèle développé est difficile à résoudre analytiquement. Il est résolu à l'aide de méthodes numériques. Barlow et Proschan [2], ont démontré que si le taux de panne du système est une fonction monotone croissante, alors il existe une stratégie optimale

finie et unique définie par T_0 . Il est intéressant de noter que le coût total d'une telle stratégie est toujours inférieur à une stratégie de maintenance purement corrective.

La politique de maintenance de type âge semble être préférable, d'un point de vue économique, à celle du type bloc qui consiste à remplacer les composants défectueux aux instants kT_0 ($k = 1, 2, 3, \dots$). En effet, la politique de type âge est basée sur l'utilisation effective de l'équipement. Elle permet donc d'éviter le remplacement d'un équipement neuf après une courte période de la date de son installation. Cependant, plusieurs auteurs s'accordent sur le fait que la politique de type âge est plus difficile à administrer que celle de type bloc, car elle nécessite à la fois une surveillance continue et un enregistrement de l'information sur l'utilisation de l'équipement (Cléroux et Ait-kadi [67]).

Différentes caractéristiques de la politique de type âge ont été analysées par Barlow et Hunter [33], Barlow et Proschan ([2], et Nachlas [68]. L'équipement analysé peut avoir un cycle de travail variable de telle sorte que le remplacement préventif soit impossible ou impraticable. Dans ce cas, la politique de maintenance devrait être aléatoire pour profiter du temps d'inactivité de l'équipement pour effectuer le remplacement (Flehinger [62]). Idéalement, on devrait développer des modèles qui traitent simultanément de la gestion de la production et de la maintenance.

La détermination de la périodicité optimale pour le remplacement de pièces mécaniques, de composants, de modules ou de sous-ensembles pose toujours un problème économique et de rentabilité, surtout lorsque les installations sont similaires ou les machines sont identiques. Ce problème économique peut être résolu par la connaissance de la fiabilité opérationnelle et la détermination du moment le plus avantageux pour effectuer cette opération de remplacement préventif. À cet effet, différents modèles ont été proposés dans le domaine de la planification de maintenance préventive pour trouver des politiques optimales de remplacement notamment le modèle de remplacement par bloc et le modèle de remplacement basé sur l'âge.

La propriété principale du remplacement par bloc est qu'il est facile à gérer en générale, puisque le temps de remplacement préventif est programmé à l'avance et on n'a pas besoin de surveiller l'âge du système.

Concernant les modèles de remplacement basé sur l'âge, on remarque, en général, que dans ce cas, $C_f > C_p$. Ces modèles jouent un rôle fondamental dans tous les modèles de remplacement, puisque l'optimal du modèle de remplacement d'âge a été prouvé.

Dans ce travail, nous avons choisi donc d'étudier ces deux modèles de remplacement préventif à savoir le modèle de remplacement par bloc correspondant au cas où la pièce défaillante est remplacée instantanément au moment de la défaillance et le modèle de remplacement basé sur l'âge correspondant au cas où l'âge de chaque pièce est connu et on change la pièce dès que son âge atteint cette valeur.

CHAPITRE II

CONCEPTS DE BASE ET LOIS DE FIABILITÉ

2. CONCEPTS DE BASE ET LOIS DE FIABILITÉ

2.1 Politiques et stratégies de maintenance

2.1.1 Introduction

Tous les équipements d'une installation industrielle sont soumis à des mécanismes de dégradation pouvant causer l'apparition des modes de défaillance des matériels, entraînant ainsi leur panne et d'éventuels effets sur le fonctionnement de l'installation (Remy [69]).

Les mécanismes de dégradation peuvent être de plusieurs types : usure, fatigue, vieillissement, altérations physico-chimiques diverses, etc. Leur cinétique d'évolution (fonction du temps de fonctionnement, du temps calendaire ou encore du nombre de sollicitations) peut dépendre de plusieurs facteurs influents (conditions d'environnement et de fonctionnement, dégradation d'autres matériels, tâche de maintenance défiabilisante, etc.) (Zille [70]).

Les modes de défaillance décrivent le dysfonctionnement d'un matériel par la fonction qu'il ne remplit plus. Cinq modes de défaillance génériques sont définis (IEC [71]) : perte de la fonction, fonctionnement intempestif, refus de s'arrêter, refus de démarrage, fonctionnement dégrade.

Face à la diversité des matériels d'une installation et de leurs comportements les responsables de maintenance doivent envisager de véritables stratégies. Ils peuvent décider de pratiquer une maintenance corrective à la suite de la défaillance d'un matériel, mais cela ne permet pas d'éviter les conséquences des pannes sur le fonctionnement du système. Une attitude plus offensive consiste à mettre en œuvre une maintenance préventive systématique selon laquelle la décision d'intervenir précède l'apparition du dysfonctionnement. Cela permet de diminuer le nombre de défaillances et induit un gain économique substantiel, conséquence de la différence entre les coûts générés par l'intervention et la disponibilité qu'elle occasionne.

En limitant, voire en empêchant, les défaillances de cette manière, on court toutefois le risque de dépenses excessives et d'indisponibilités pour maintenance inutile.

Il est donc nécessaire de régler les paramètres de la politique de manière adéquate (Cordier *et al.* [72]).

Enfin, on peut associer à la maintenance préventive les notions de visite et révision qui consistent en un regroupement de tâches de maintenance préventive afin de redonner au matériel un potentiel d'usage pour une durée déterminée tout en limitant le nombre d'interventions sur le matériel et donc son indisponibilité pour maintenance.

La diversité des alternatives fait de la maintenance un processus caractérisé par des choix d'exécution pour la définition des stratégies de maintenance. L'importance de son impact sur les performances du système considéré rend nécessaire son optimisation (Lyonnet [73]).

2.1.2 Définitions et concepts

Les politiques de maintenance vont de l'absence totale à des définitions très élaborées. Souvent le responsable est abandonné à sa seule initiative, la consigne étant que les machines tournent au moindre frais. La prévision est inconnue : on voit des révisions générales stoppées parce qu'on remplace la machine, et des machines laissées à l'abandon alors qu'elles vont être très sollicitées. Dans d'autres cas la direction fixe à la maintenance et en accord avec elle des objectifs précis ainsi que les moyens nécessaires, ceci pour un temps déterminé. À échéance on fait le point et on révise les objectifs. Le responsable de maintenance connaît donc la ligne à suivre et conserve le maximum de liberté dans les décisions d'action prises à son niveau. Les politiques de maintenance sont ordinairement issues de l'expérience, de façon assez empirique. Relativement peu d'entreprises disposent de politiques écrites de maintenance. L'uniformité et la continuité de ces politiques tendent à manquer, car elles existent surtout dans la tête des chefs de la maintenance.

Une véritable politique ou stratégie de maintenance doit combiner des moyens d'intervention, techniques, économiques, financiers et humains. Elle est fondée sur la rentabilité. Elle tient compte des moments. Tantôt on recherchera le coût minimum en période d'austérité, tantôt le maximum de disponibilité en période de croissance. Des études de fiabilité permettent de définir les probabilités de panne donc les moyens nécessaires. Un contrôle de gestion permet de vérifier que la maintenance se trouve au voisinage de l'optimum, et que les choix sont effectués en fonctions des gains escomptés

: une dépense importante peut être plus rentable qu'une dépense moindre s'il y a gain de délai, ou de durée de vie, ou de disponibilité ou de qualité sur le produit. Dans cette politique on doit s'attacher à la prévision des pannes aléatoires pour les études d'inspection faites à partir de relevés méthodiques et périodiques. On étudie la vie du matériel sur plusieurs années. Ces études de fiabilité vont servir à la détermination des probabilités de pannes, donc à la consommation des pièces détachées et des différentes charges. Ce n'est qu'à partir de ces données qu'on peut élaborer les prévisions et le budget de maintenance. Avec une politique de maintenance et une bonne stratégie on ne subit plus la panne car elle est prévue et le contrôle budgétaire reste un contrôle normal, car dans la stratégie, on aura à calculer la probabilité d'apparition des pannes et leurs conséquences et l'on cherchera à rentabiliser toute action de maintenance.

2.1.3 Différents types de prévisions de maintenance

2.1.3.1 Prévisions à court terme

Dans ce cas le service de maintenance s'efforcera à réduire les durées d'immobilisation du matériel et les coûts de ses interventions. Sachant que les réductions des coûts et d'immobilisation ne sont possibles que si le matériel et les interventions ont fait l'objet d'une étude préalable, il est donc nécessaire de préparer le travail et d'étudier les conditions de fonctionnement, les défaillances possibles et les conditions d'exécution des interventions. Le service technique lié à cette fonction doit fournir toutes les informations qualitatives et quantitatives susceptibles d'influencer les politiques particulières de l'entreprise.

2.1.3.2 Prévisions à moyen terme

La volonté de maintenir le potentiel d'activité de l'entreprise conduit à veiller à l'immobilisation des matériels à des moments qui perturbent le moins possible le programme de fabrication. Dès lors il faut fournir nécessairement et suffisamment tôt le calendrier des interventions de maintenance. Celle-ci ayant une influence sur l'ordonnancement des fabrications.

2.1.3.3 Prévisions à long terme

Elles sont liées à la politique de l'entreprise et permettent l'ordonnancement des charges, des stocks, des investissements en matériel et des renouvellements des équipements.

2.1.4 Moyens impliqués et objectifs recherchés

La politique de maintenance implique la prise de décision sous forme de compromis entre les quatre pôles : humain, économique, financier et technique. Sa mise en place vise à des objectifs de divers aspects. Parmi les objectifs recherchés on peut citer, à titre indicatif :

- Accroître la disponibilité des matériels de production.
- Réduire les coûts de maintenance des matériels de production.
- Permettre une production de haute qualité.
- Diminuer les pertes de production.
- Augmenter la productivité du personnel de maintenance.
- Réduire les stocks liés à la maintenance.
- Définir les conditions de renouvellement ou d'investissement.
- Optimiser la répartition entre la maintenance corrective et la maintenance préventive.
- Choisir la méthode de maintenance la mieux adaptée à un matériel donné.

Une fois un objectif est clairement défini, nous devons encore raisonner en termes de choix. En posant, par exemple, les questions suivantes :

- Quelle est la méthode à mettre en œuvre ? Préventive ou corrective ? Quel est le niveau de maintenance préventive ? A quelle périodicité intervenir ?
- Quand remplacer un équipement ? Quand faut-il cesser la maintenance ?
- Comment introduire une politique de maintenance efficace ?

2.1.5 Processus de mise en place d'une stratégie de maintenance

Les activités de maintenance sont d'une importance fondamentale pour la sûreté et la productivité des installations industrielles. Depuis l'apparition des travaux de McCall [74] et Barlow et Proschan [2] de nombreuses publications proposent des modèles mathématiques permettant de définir la politique de maintenance optimale à adopter. Généralement ces approches consistent à établir, puis à optimiser une fonction en prenant en compte les coûts de réparation, l'indisponibilité et la fiabilité du système pour une politique de maintenance définie (Lyonnet [73]). Les variables de décision dépendent des modèles appliqués.

Les premiers modèles de maintenance, synthétisés par Valdez-Flores et Feldman [75], considèrent des systèmes mono-composants et des politiques de maintenance basées sur des structures simples. De telles approches impliquent des hypothèses de modélisation fortes entraînant une perte de réalisme, et donc d'intérêt, au niveau industriel pour des systèmes complexes. C'est pourquoi l'optimisation de la maintenance continue à faire l'objet de très nombreux travaux de recherche, avec le développement de nouveaux modèles et l'approfondissement de modèles existants, pour une meilleure prise en compte de la réalité et de la complexité induite par les systèmes et les politiques de maintenance étudiées.

On remarque qu'avec l'amélioration des techniques de calcul, les travaux ne considèrent plus seulement des systèmes mono-composants, mais des systèmes multi-composants (Cho et Parlar [76]). Par ailleurs, avec la complexification des stratégies de maintenance, de nouveaux modèles sont développés, notamment en ce qui concerne la maintenance préventive conditionnelle (Scarf [77]). Enfin, la prise en compte d'aspects tels que le soutien logistique ou l'effet des interventions vise à se rapprocher d'une modélisation plus réaliste de la maintenance. Les modèles de maintenance se sont développés en accord avec les pratiques de maintenance industrielle et avec la complexification des stratégies de maintenance, de nouvelles approches sont donc proposées.

La maintenance préventive vient en soutien à des tâches de réparations correctives, avec l'avantage de prévenir l'apparition des défaillances des matériels par leur remise en état, (Gertsbakh [78]). À l'origine, ces tâches étaient réalisées de manière systématiques, c'est-à-dire à un instant prévu ou selon une périodicité donnée. Avec le développement des méthodes basées sur la maintenance basée sur la fiabilité (Rausand [79]), le recours à la maintenance préventive conditionnelle est de plus en plus courant. Elle présente en effet l'avantage d'intégrer dans le processus de décision de maintenance des informations sur l'état courant du système. De ce fait, les réparations sont réalisées seulement si l'état du système le nécessite. Cette évolution des pratiques de maintenance se retrouve au sein des travaux de modélisation qui peuvent être divisés en deux catégories : les modèles élémentaires, basés sur le temps de fonctionnement du matériel, et les modèles de maintenance préventive conditionnelle, basés sur son état de dégradation.

Les modèles élémentaires sont associés à des politiques de remplacements pures, où la seule règle de décision est le remplacement préventif du système. Les modèles de maintenance préventive conditionnelle considèrent quant à eux la détérioration du matériel et son observation pour la prévention des défaillances. Les spécificités de ces politiques conduisent à développer des approches statiques, basées sur des informations à priori, pour lesquelles les décisions sont prises sur la base d'informations de surveillance en ligne ou à partir d'un état estimé du système maintenu.

2.1.5.1 Les modèles élémentaires des stratégies de maintenance

Les interventions de maintenance préventive systématique consistent en des remplacements et sont décidées et planifiées en fonction du temps. Les modèles dédiés à ce type de maintenance cherchent à trouver la date de remplacement optimale, optimisant les critères de coût et de disponibilité définis. Parmi les politiques de maintenance basées sur la seule connaissance du temps de fonctionnement du système, on distingue les politiques basées sur l'âge et les politiques de blocs (Gertsbakh [78]). Les modèles associés reposent sur la représentation de l'apparition des défaillances du système, et plus précisément l'instant auquel l'événement survient. Pour cela, ce sont essentiellement des modèles de durée de vie qui sont utilisés (Meeker et Escobar [80]).

2.1.5.1.1 Modèles basés sur l'âge

Les politiques de maintenance basées sur l'âge, prévoient le remplacement du système par un système neuf dans deux situations : après sa défaillance ou après une durée de temps T_0 . En remplaçant le système avant qu'il ne soit défaillant, on limite ses pannes, et donc les coûts liés à son indisponibilité fortuite et à la réalisation de réparations correctives. Ainsi, l'optimisation des politiques basées sur l'âge repose généralement sur la détermination du paramètre de décision T_0 qui minimise le coût de maintenance (Rausand et Hoyland [81]). Dans ce cas, les interventions de maintenance permettent de prévenir l'apparition d'une défaillance tout en évitant de remplacer un système encore en état de marche à la date de l'intervention. La politique de remplacement strictement périodique est considérée comme la meilleure des politiques où la périodicité de remplacement est une variable de décision. Néanmoins, l'hypothèse faite d'un remplacement à neuf n'est pas totalement réaliste, de même, la structure de la politique empêche une planification sur le long terme puisque chaque défaillance décale les interventions suivantes.

Le déroulement de la stratégie dans le temps est illustré par la figure 2.1 [82].

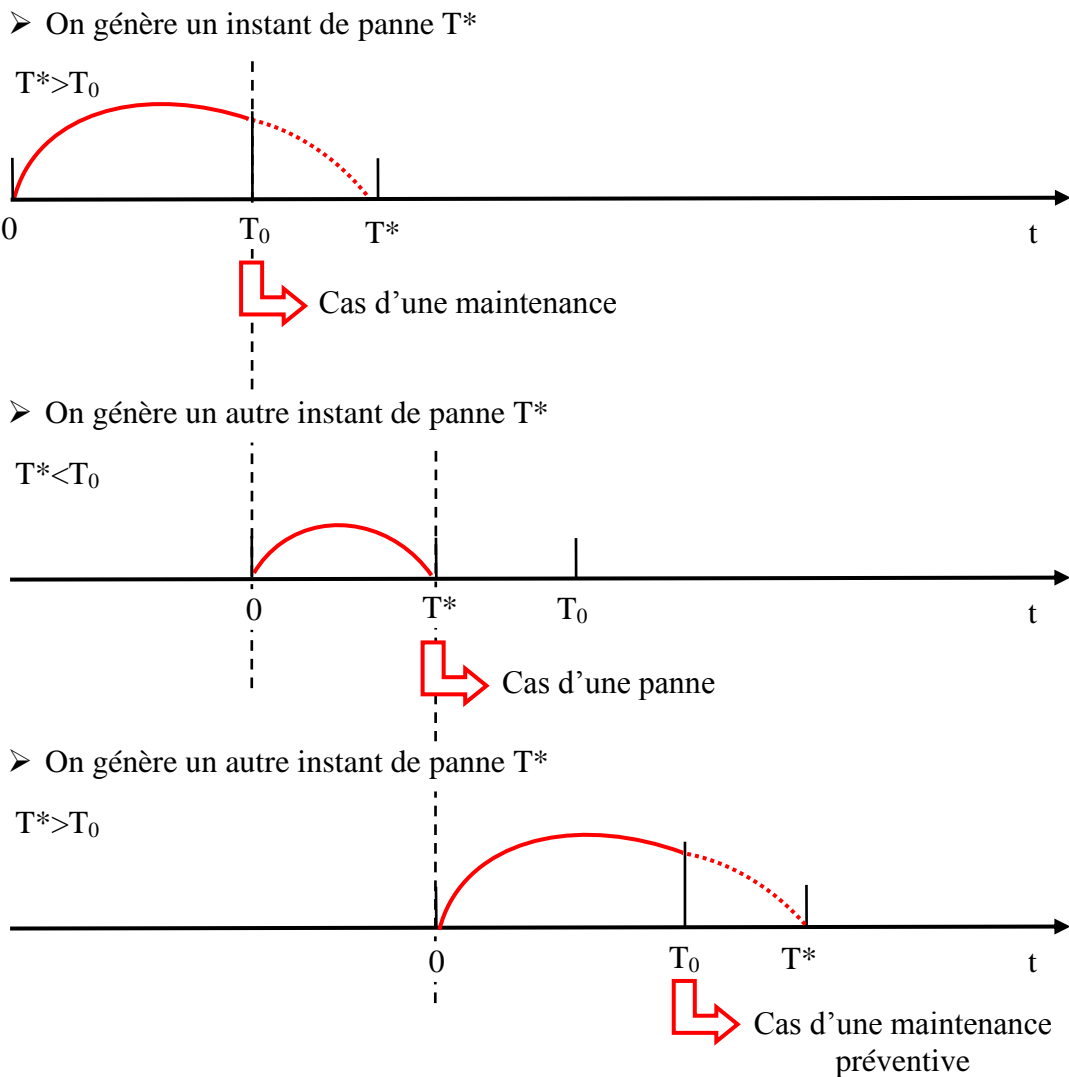


Figure 2.1 : Séquence d'événements pour la stratégie de maintenance de type âge [82].

Le diagramme suivant (fig. 2.2.) illustre le processus utilisé pour modéliser le calcul du coût moyen par unité de temps de la stratégie de type âge [82].

2.1.5.1.2 Modèles de remplacement par blocs

Dans le cadre des politiques de remplacement par blocs, la règle de décision pour le remplacement du système n'est pas réinitialisée après un remplacement, contrairement aux politiques de type age-based replacement. Le système est remplacé par un système neuf, de manière périodique, suivant un planning de la forme T , $2T$, $3T$, etc. (Nachlas [68]). La défaillance du système entraîne son remplacement mais n'engendre aucune modification du programme préventif. Les interventions sont réalisées aux dates prévues, quel que soit le temps de fonctionnement du système.

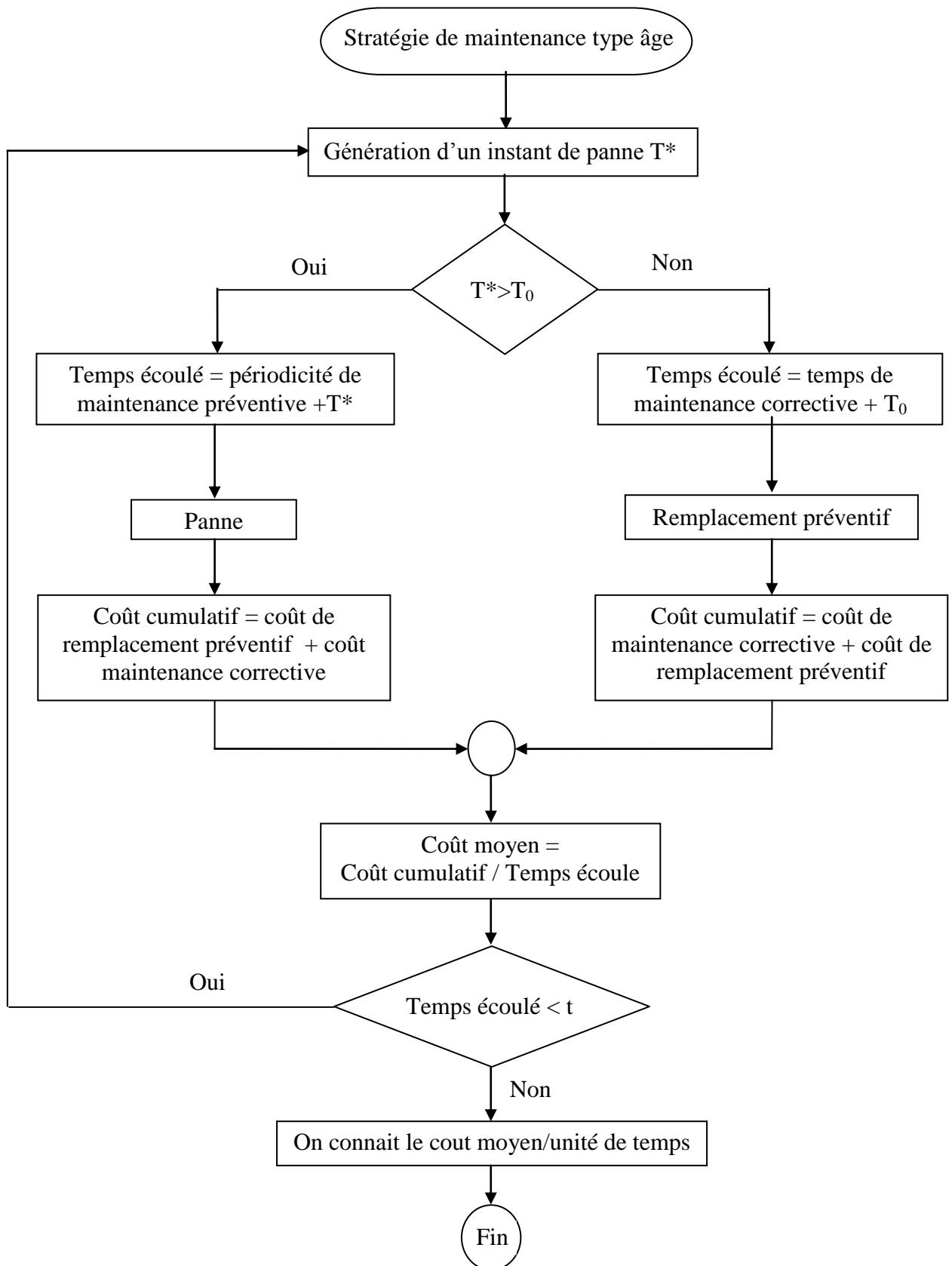


Figure 2.2 : Algorithme du coût de la stratégie de maintenance de type âge [82].

Cette politique est plus simple à gérer qu'une politique de remplacement basée sur l'âge mais présente le risque de remplacer des systèmes presque neufs. Toutefois, elle peut être étendue avec la prise en compte de réparations minimales suite à une défaillance, et non plus uniquement un remplacement par un système neuf (Barlow et Hunter [33]). Son optimisation peut se faire selon un critère de coût et/ou de disponibilité en faisant varier la durée de la période T_0 et le type de réparations effectuées (Rausand et Hoyland [81]).

Le déroulement de la stratégie dans le temps est illustré à la figure 2.3 [82]

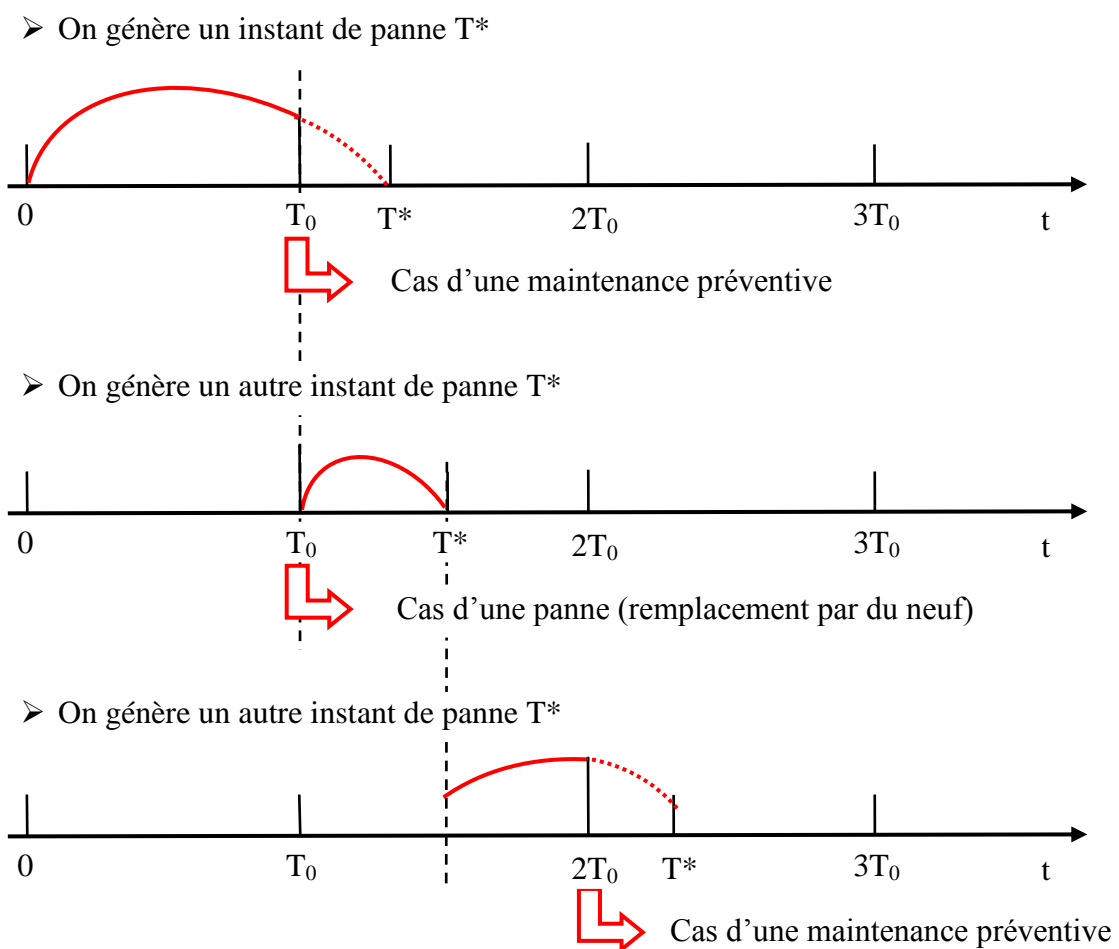


Figure 2.3 : Séquence d'événements pour la stratégie de maintenance de type bloc [82].

Le diagramme suivant (fig. 2.4) illustre le processus utilisé pour modéliser le calcul du coût moyen par unité de temps de la stratégie de type bloc.

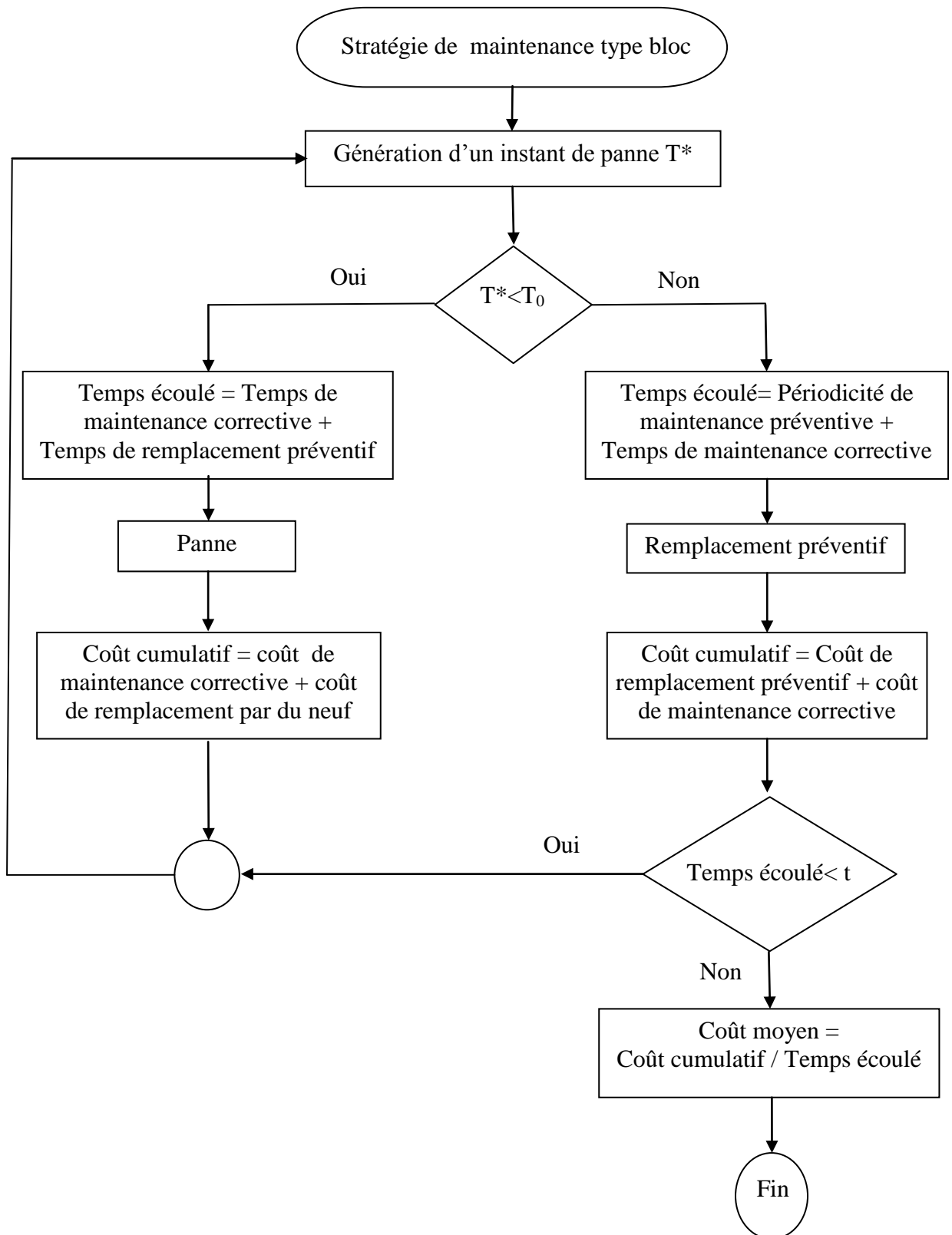


Figure 2.4 : Algorithme du coût de la stratégie de maintenance de type bloc.

2.1.5.2 Les modèles de maintenance conditionnelle

Avec l'application des méthodes basées sur la maintenance basée sur la fiabilité (Reliability Centered Maintenance), les politiques de maintenance ne consistent plus en des remplacements purs mais s'intéressent à l'état du système. On parle alors de maintenance préventive conditionnelle, et les décisions de maintenance sont prises en fonction du niveau de dégradation du système (Lyonnet [73]).

Le principal avantage est de limiter les remises en état non nécessaires. Les gains substantiels qui sont associés la rendent objet de nombreux travaux de modélisation de maintenance (Pierskalla et Voelker [83]). Ce type de modélisation passe par la représentation du processus de dégradation qui définit la prévision de l'évolution de l'état du système (Bloch-Mercier [85]) et il se prête particulièrement au cas de systèmes passifs difficiles d'accès (Dieulle *et al.* [85]).

2.1.5.2.1 Les politiques à limite de contrôle

Au sein des modèles de maintenance conditionnelle, ce sont les informations décrivant l'état de dégradation du système, comme par exemple la profondeur d'une fissure, qui sont à l'origine de la décision de remise en état du système (Rao [86]). On considère de ce fait les politiques de maintenance préventive conditionnelle comme des politiques à limite de contrôle (Kopnov [87]).

En effet, des tâches d'observation sont réalisées pour connaître le niveau de dégradation du système et ce dernier est remplacé si l'observation révèle que le niveau de dégradation est supérieur à un seuil de remplacement préventif fixe, ou si une défaillance apparaît.

On peut noter le cas particulier des tests qui concerne essentiellement des systèmes en attente ou de secours, voire des éléments de remplacements (Newby [88]). Ces tâches qui détectent l'apparition d'une défaillance cachée et à la suite desquelles des réparations conditionnelles peuvent être décidées. Dans ce cas, la limite de contrôle n'est plus équivalente à un seuil de dégradation mais correspond à l'apparition ou non de la défaillance.

2.1.5.2.2 La surveillance

Dans la littérature, le terme de surveillance est utilisé de manière générale pour l'observation de l'état de dégradation du système (Grall *et al.* [89]), mais également de sa défaillance dans certaines approches (Fouladirad *et al.* [90]).

L'objectif de ce type de travaux est de définir le seuil de remplacement préventif ainsi que la fréquence des tâches de surveillance du système qui optimisent les performances du système, en termes de coûts et de disponibilité. Ils reposent sur la modélisation de l'évolution de la dégradation du système jusqu'à sa probable défaillance, et non plus uniquement sur l'occurrence de la défaillance comme dans les modèles de remplacements purs.

Par ailleurs, les interventions de surveillance ou inspections, sont prévues de manière périodique ou séquentielle en fonction des approches.

2.2 Concepts de fiabilité

2.2.1 Généralités

Si le terme de fiabilité est relativement récent, et si celle-ci est devenue une technique de la plus haute importance, il n'en est pas moins vrai que, de tous les temps, les fabricants ont recherché et les utilisateurs ont exigé la sécurité d'emploi des engins de plus en plus perfectionnés qui sont mis en service. Les méthodes permettant d'assurer cette sécurité relevaient plutôt d'un art que d'une technique scientifique ; on se contentait le plus souvent de renforcer très largement les pièces que l'on croyait critiques.

A partir du milieu du 20^{ème} siècle sont apparus des équipements de plus en plus complexes et onéreux, pour lesquels les conséquences d'une panne peuvent être considérées comme catastrophiques (avions gros-porteurs, lanceurs spatiaux, équipements de contrôle d'installations importantes : centrales nucléaires, usines de production, etc.) et pour lesquels il est de plus en plus difficile de corriger un défaut de fonctionnement par l'intervention humaine. Le comportement de ces équipements, construits et contrôlés suivant les anciennes méthodes, s'est révélé désastreux.

Pour quantifier un paramètre, jusqu'alors évalué qualitativement, il a fallu rénover les techniques antérieures de conception, de réalisation et de contrôle, et créer ainsi la fiabilité. La mise en place de ces ensembles complexes a été principalement liée au développement de l'électronique dans tous les secteurs de l'activité économique. C'est ce qui explique, en partie, pourquoi la fiabilité a été introduite en électronique avant de l'être dans les autres domaines, la mécanique par exemple, où elle a posé de gros problèmes.

La fiabilité n'est pas une caractéristique que l'on peut ajouter à un système après qu'il a été conçu, fabriqué et contrôlé. La préoccupation de la fiabilité doit intervenir tout au long du processus d'élaboration d'un équipement ou d'un système nouveau, au stade du projet (prévision de la fiabilité) et au stade de la production (maintien et amélioration de la fiabilité prévue).

Les exigences de fiabilité s'imposent à l'évidence, en fait, chaque fois que l'on se préoccupe du fonctionnement économiquement optimal d'un système, chaque fois que l'on s'intéresse au prix de revient global d'une mission, car on est amené, pour évaluer ce dernier, à prendre en considération non plus le seul prix d'achat (ou le premier investissement), mais également le coût de maintenance, les pertes ou manques à gagner dus aux pannes, etc.

Aujourd'hui, pour un avion gros-porteur ou un ordinateur complexe, il est impensable que la fiabilité n'intervienne pas dès la définition du produit, au même titre que les caractéristiques fonctionnelles essentielles : vitesse, capacité, consommation s'il s'agit d'un avion ; rapidité de calcul et capacité de mémoire dans le cas d'un ordinateur.

Pour la plupart des biens de consommation durables, les répercussions d'une panne ne sont pas à priori considérables ; mais, la fiabilité est devenue une caractéristique à laquelle on prête de plus en plus d'attention (équipements électroménagers et audiovisuels, automobiles, équipements informatique, etc.). D'ailleurs, la notion de fiabilité correspond à la confiance de l'utilisateur dans l'appareil qu'il utilise ou qui lui est proposé.

2.2.2 Fiabilité et conditions de fonctionnement

Les conditions de fonctionnement, introduites dans la définition même de la fiabilité, englobent à la fois l'environnement physique dans lequel est appelé à fonctionner le système et son environnement technique. Tout équipement devra subir, en dehors des contraintes électriques, mécaniques et thermiques relatives à son propre fonctionnement, un certain nombre de contraintes d'origine extérieure dues à son transport, son installation, sa manipulation et enfin aux conditions d'environnement.

On désigne par « environnement physique » l'ensemble des conditions mécaniques et climatiques (chocs, accélérations, vibrations, cycles de température et d'humidité, pression, corrosion du milieu, moisissures) imposées à l'équipement par le milieu où il se trouve placé. L'« environnement technique » correspond à l'ensemble des consignes

de maintenance données aux utilisateurs directs de l'équipement et aux éventuelles politiques de contrôles préventifs mises en place.

Dans la notion de fiabilité d'un équipement, on distingue la caractéristique fiabilité propre à l'équipement lui-même, parfois appelée fiabilité intrinsèque lorsqu'il est amené à fonctionner dans des conditions bien définies et précises (physiques et techniques), et un coefficient d'exploitation caractérisant les écarts entre les conditions physiques et techniques réelles et celles théoriques et précises correspondant à la définition du système étudié. Le produit de ces deux termes est appelé fiabilité opérationnelle.

2.2.3 Fiabilité intrinsèque

La fiabilité intrinsèque est fonction de la fiabilité des éléments, du projet ou de la conception, et enfin de la réalisation technique du système.

2.2.3.1 Fiabilité des éléments

La configuration élémentaire d'un équipement qui correspond à la solution technique la plus simple est la configuration série. La fiabilité d'un ensemble « série » $R(t)$ est égale, au produit des fiabilités $R_i(t)$ de ses éléments. Lorsque les exigences de fiabilité imposées à un ensemble ne peuvent être atteintes par une configuration série, compte tenu des faibles valeurs des fiabilités des éléments, on doit modifier le projet de l'équipement pour satisfaire aux exigences formulées. Lorsque la modification du projet amène à compliquer la configuration, pour introduire des redondances par exemple, la fiabilité de l'ensemble dépend toujours mathématiquement de celle des composants qui constituent l'ensemble.

2.2.3.2 Le projet ou la conception

Puisqu'une configuration série (celle des maillons d'une chaîne, par exemple) peut ne pas correspondre aux besoins, il faut faire un choix : soit renforcer chaque maillon (si l'on conserve l'exemple de la chaîne) en utilisant un autre métal plus résistant ou en augmentant le diamètre du maillon ; soit doubler tout ou partie de la chaîne, c'est-à-dire utiliser deux chaînes ou doubler plusieurs maillons. Par des astuces de conception, mais aux dépens d'autres caractéristiques, il est toujours possible, avec les composants (maillons) dont on dispose, d'obtenir un ensemble aussi fiable qu'on le désire. Pour ce faire, on utilise soit des facteurs de charge (rapport entre la contrainte appliquée et la contrainte limite admissible) faibles pour les éléments, soit des redondances.

Pour certains ensembles mécaniques ou électroniques, une part importante des pannes peut être due aux usures ou aux dérives des composants. Il convient alors d'étudier soigneusement le projet pour que de sensibles variations des caractéristiques des éléments n'affectent pas le fonctionnement de l'ensemble. Enfin, au cours des études critiques d'un projet, on examine avec une attention particulière les « points chauds », c'est-à-dire les éléments les plus exposés aux contraintes (température, pression...).

C'est également au moment de la conception que doivent intervenir les choix fondamentaux relatifs à l'accessibilité des différents organes en cas de réparation ou de remplacement. Le responsable d'une étude doit sans cesse faire un choix : perdre sur la fiabilité ou gagner sur la facilité d'entretien et de réparation ; améliorer l'aptitude à la maintenance conduit en effet souvent à compliquer l'installation par des signalisations, par l'utilisation de modules aisément démontables... qui généralement amènent une baisse de fiabilité. C'est tout au long du déroulement de l'étude que le responsable devra comparer avec les objectifs fixés les résultats des calculs prévisionnels effectués.

2.2.3.3 La réalisation

La fabrication du système ou de l'ensemble complexe est enfin le troisième facteur important pour la fiabilité intrinsèque.

Il importe de souligner que la préoccupation de la fiabilité n'est pas réservée aux seuls domaines exigeant une haute fiabilité (espace, aéronautique). Ainsi son étude peut se justifier pour un bien de consommation durable (vêtement, chaussures...), dans la mesure où elle permet un allègement de processus de fabrication qui se révéleraient mal adaptés car trop coûteux pour l'objectif visé. Fiabilité et analyse de valeur ont fréquemment de nombreux points communs ; mais l'idéal reste de pouvoir intégrer la première parmi les paramètres de l'analyse de la valeur. Le plus souvent, toutefois, c'est seulement lorsque la fiabilité doit être élevée qu'on lui assigne un objectif numérique. Dans ces conditions, le souci essentiel du responsable de la fabrication sera de faire en sorte que la fiabilité potentielle, c'est-à-dire celle qui a été prévue par le bureau d'études, ne soit pas dégradée par les ateliers. On doit traiter certains composants à très haute fiabilité comme des objets précieux : les ateliers devront être dépoussiérés, climatisés, certains processus de fabrication devront être soigneusement contrôlés afin de vérifier qu'aucune variation nuisible n'intervient. L'ensemble des spécifications de fabrications classiques est alors susceptible d'être modifié.

Dans toute la mesure du possible, et lorsque le produit étudié est fabriqué en série, on procède sur le prototype et sur les têtes de série à des essais de fiabilité qui tentent de simuler l'utilisation la plus vraisemblable du système. C'est l'analyse du comportement lors des essais qui permettra de vérifier le bien-fondé des prévisions faites en cours d'étude, des choix de composants et des précautions prises dans les ateliers.

2.2.4 Fiabilité opérationnelle

La fiabilité opérationnelle est le produit de la fiabilité intrinsèque, par le coefficient d'exploitation. En fait, il est pratiquement impossible de déterminer à priori ce dernier autrement que par analogie avec des systèmes semblables antérieurement étudiés et exploités. L'ensemble des résultats obtenus en exploitation pour des systèmes identiques utilisés dans des conditions différentes permettra seul, à posteriori, l'évaluation des coefficients propres à chaque exploitation.

On peut trouver des exemples très simples de l'influence des environnements sur la fiabilité dans la vie courante : la fiabilité d'une même automobile varie suivant que celle-ci est utilisée sous un climat tempéré ou au Sahara, suivant qu'elle l'est quotidiennement en ville ou seulement le dimanche sur autoroute, suivant qu'elle est régulièrement graissée, contrôlée ou qu'elle ne l'est pas, enfin suivant le conducteur.

2.2.5 Conséquences techniques et économiques de la fiabilité

L'apparition de la fiabilité dans la définition des équipements a eu de nombreuses répercussions dans plusieurs domaines : technique, économique et psychologique, en particulier dans les relations entre client et fournisseur.

Ainsi, dans le domaine technique, lorsqu'un objectif de fiabilité numériquement exprimé a été imposé à un système dont on a entrepris l'étude, le bureau d'études possède des méthodes et des outils lui permettant de mieux gérer son projet tout au long de son élaboration et d'en suivre, en les qualifiant, les améliorations introduites. De même l'atelier de fabrication pourra être sensibilisé aux points délicats d'un montage et aux précautions à prendre pour ne pas altérer la fiabilité potentielle.

Dans le domaine économique, on peut désormais départager différents produits censés répondre aux mêmes besoins. Il sera logique qu'au produit le plus fiable corresponde le prix d'achat le plus élevé. Enfin, dans les relations entre clients et

fournisseurs, doivent s'instaurer inéluctablement des liens de collaboration plus étroits et souvent nouveaux. Dans toute la mesure du possible, le fournisseur s'efforcera d'aider les clients à exprimer en termes clairs et réalistes les objectifs qu'ils cherchent à atteindre ; ils seront amenés à étudier ensemble le « profil de mission » de l'équipement considéré et à évaluer les répercussions financières des pannes, à choisir d'un commun accord les solutions de compromis entre fiabilité, aptitude à la maintenance, poids, prix, délais, etc. C'est toute une dynamique de la gestion de projets qui est ainsi instaurée.

Par ailleurs, les calculs prévisionnels de fiabilité, qui sont un des outils fondamentaux de l'étude, ne pourront être corrects que dans la mesure où les données de base (taux de défaillance des composants et leur durée de vie, variations de ces taux avec les contraintes...) seront elles-mêmes correctes. C'est pourquoi il importe que soit effectuée une analyse fine de tous les résultats d'essais de simulation réalisés en laboratoire et de tous les incidents survenus, par la suite, au cours de l'exploitation des matériels considérés.

Progressivement se constituent de la sorte des banques de données, qui, par cumul de résultats de nature diverse, permettent de mieux cerner les caractéristiques de fiabilité des divers composants et par-là d'améliorer les prévisions ultérieures. Des fichiers d'après-vente (ou des fiches historiques) sont ainsi constitués, auxquels collaborent client, fournisseur et service de maintenance.

Peu à peu pénétrant les différents secteurs de l'économie, stratégiques ou simplement commerciaux, la fiabilité a ouvert la voie aux conquêtes spatiales et a permis notamment les développements de l'informatique.

D'une manière générale les conséquences d'une fiabilité insuffisante sont les suivantes :

- Conséquence sur les coûts :
 - le coût de la pièce hors d'usage,
 - le coût des dégradations secondaires : un exemple limite peut être le coût occasionné par la destruction d'une fusée par une simple panne d'un transistor ou par la défaillance d'un joint d'étanchéité (comme c'était le cas en 1987 de la navette spatiale américaine Challenger).

- Les frais occasionnés par la nécessité d'avoir un stock de pièces détachées important : coût de stockage, coût des dégradations des pièces en stock.
- Conséquence sur la sécurité du personnel et des utilisateurs.

2.3 Définitions

2.3.1 Système

Un système est un ensemble d'éléments reliés entre eux d'une manière bien déterminée. Il a pour objectif d'assurer une fonction très précise. Comme système, on peut citer l'exemple d'un moteur à combustion dont la fonction essentielle est de fournir la puissance nécessaire pour le déplacement d'un véhicule, ou d'un ordinateur dont la fonction exigée est par exemple de permettre l'écriture d'un texte ou le traitement de données à travers un programme informatique.

Lors de l'exécution de sa fonction, le système est sujet à des phénomènes de dégradations qui vont altérer son fonctionnement. Lorsqu'il fonctionne d'une manière normale on dit que le système est en état de bon fonctionnement ou en état de fonctionnement tout court. Tandis que s'il ne peut pas assurer sa fonction, on dit qu'il est en état de panne. Tout autre état se trouvant entre l'état de bon fonctionnement et l'état de panne est un état de défaillance.

Pour évaluer la fiabilité d'un système et mettre en place une stratégie de préservation de son état de bon fonctionnement, afin d'en tirer un meilleur profit, il est indispensable de comprendre et de maîtriser les phénomènes de dégradations qui le conduisent à l'état de panne. Les phénomènes de dégradations ou défaillances peuvent être classés selon un certain nombre de critères tels que la rapidité d'apparition, le degré d'importance, les causes, les conséquences, etc.

2.3.2 Défaillance

La défaillance est la cessation de l'aptitude d'un système, équipement ou élément, à accomplir sa fonction. La fonction est celle spécifiée dans le cahier des charges. Cette cessation de l'aptitude, se traduit par une perte partielle ou totale ou par une modification des propriétés essentielles de l'équipement. Lorsqu'il y'a une perte partielle ou une modification des propriétés essentielles de l'équipement, on parle souvent de défaut, tandis que si la perte est totale on parle alors de panne. Dans cette thèse, on considère que les termes défaillance, défaut, panne et avarie sont synonymes.

2.3.3 Fiabilité

La définition adoptée par la plupart des spécialistes s'énonce en ces termes : « la fiabilité est la caractéristique d'un système exprimée par la probabilité que ce système accomplisse une fonction requise dans des conditions d'utilisation prévues et pour une période de temps déterminée ».

La fonction est celle qui est spécifiée dans le cahier des charges de l'utilisateur et les conditions sont celles de l'environnement dans lequel l'équipement est mis en fonctionnement (température, humidité, poussières, bruits, corrosion du milieu, etc.).

2.4 Modèle mathématique pour la fiabilité

2.4.1 Variable aléatoire

On appelle variable aléatoire T une variable telle qu'à chaque valeur t de T on puisse associer une probabilité. La correspondance entre une variable aléatoire et la probabilité qui lui est associée établit une loi de probabilité.

On distingue deux types de variables aléatoires : continues et discrètes.

- Exemple de variable aléatoire continue : intervalle de temps entre défaillances consécutives.
- Exemple de variable aléatoire discrète : nombre de défaillances d'un matériel sur une période donnée ou pour une quantité fabriquée.

2.4.2 Fiabilité $R(t)$

Le caractère aléatoire des défaillances nous permet de définir mathématiquement la fiabilité, probabilité de bon fonctionnement, par la relation suivante :

$$R(t) = \text{Prob}(T > t) \quad (2.1)$$

Où : T est l'instant d'apparition de la première défaillance et $[0, t]$ est la durée de fonctionnement de l'équipement.

$R(t)$ est aussi communément désignée par la probabilité de survie. C'est la fonction complémentaire de la fonction de répartition (probabilité de défaillances).

La fiabilité $R(t)$ est une fonction monotone décroissante car, au fur et à mesure que le système fonctionne, il sera soumis à des phénomènes de dégradation et par conséquent, sa fiabilité diminue de plus en plus.

2.4.3 Probabilité de défaillances (défiabilité) : fonction de répartition $F(t)$

D'une manière complémentaire, on définit la probabilité de défaillance d'un équipement ou d'un système par la relation :

$$F(t) = 1 - R(t) = \text{Prob}(T \leq t) \quad (2.2)$$

Elle représente la probabilité de défaillance dans l'intervalle de temps $[0, t]$.

Qu'on peut aussi écrire sous la forme suivante :

$$F(t) + R(t) = 1 \quad (2.3)$$

C'est-à-dire :

Probabilité de fonctionnement $R(t)$ + Probabilité de non fonctionnement $F(t) = 1$

2.4.4 Densité de probabilité de défaillance $f(t)$

La densité de probabilité de défaillance $f(t)$ est la probabilité de voir le système cesser de fonctionner entre t et $t + dt$. Elle est définie par :

$$f(t) = \lim_{dt \rightarrow \infty} \frac{\text{Prob}(t < T < t + dt)}{dt} \quad (2.4a)$$

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{-dR(t)}{dt} \quad (2.4b)$$

2.4.5 Taux de défaillance instantané $\lambda(t)$

Il représente la probabilité de défaillance d'un système entre deux instants t et $t + dt$, sachant que le système considéré est en fonctionnement à l'instant t . Il s'agit donc d'une densité de probabilité conditionnelle de défaillance.

Les éléments d'un système ne sont pas en général spécifiés par leur fiabilité, mais par leur taux de défaillance instantané ou risque de panne, qui est la probabilité ramenée à l'unité de temps, pour que l'élément tombe en panne entre les instants t et $t + dt$, sachant qu'il a fonctionné jusqu'à l'instant t . Autrement dit, comme le système est composé d'éléments, son taux de défaillance sera la probabilité de tomber en panne au cours de l'unité de temps qui suit la durée de bon fonctionnement. Ceci est défini en procédant comme suit :

Soient : N_0 le nombre de dispositifs (systèmes) fonctionnant à l'instant $t_0 = 0$,

$N(t)$ le nombre de dispositifs fonctionnant à l'instant t ,

$N(t + \Delta t)$ le nombre de dispositifs fonctionnant à l'instant $t + \Delta t$.

$\frac{N(t)}{N_0}$ est un estimateur de la fiabilité.

$$N(t) - N(t + \Delta t) = \Delta N > 0 \quad (2.5a)$$

Le signe moins ; car $N(t)$ décroît. À l'instant $t + \Delta t$ il reste :

$$N(t + \Delta t) - N(t) = -\Delta N \quad (2.5b)$$

Si Δt tend vers 0, l'estimateur tend vers une limite qui est le taux de défaillance instantanée. En effet, en divisant la relation (2.5b) par $N(t) \cdot dt$, on obtient :

$$\frac{dN}{N(t)dt} = -\frac{\Delta N}{N(t)dt} \quad (2.5c)$$

Le terme $\frac{\Delta N}{N(t)dt}$ n'est autre que le taux de défaillance instantané. On obtient donc :

$$\lambda(t)dt = -\frac{dN}{N(t)} \quad (2.5d)$$

$\lambda(t)dt$ est une probabilité conditionnelle de défaillances sur $[t, t + \Delta t]$, car elle ne s'applique qu'aux survivants à l'instant t .

On applique le théorème des probabilités conditionnelles :

$Prob$ (d'avoir une panne entre t et dt) = $Prob$ (de survivre à t). $\lambda(t) \cdot dt$

$$f(t) \cdot dt = R(t) \cdot \lambda(t) \cdot dt \rightarrow \lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (2.6a)$$

$$\text{Ou encore : } \lambda(t) = \frac{-dR(t)}{R(t)dt} \quad (2.6b)$$

L'analyse des valeurs numériques du taux de défaillance des différents éléments donnera au service de maintenance une idée sur les éléments qui sont susceptibles de tomber en panne en premier, ce qui leur fera gagner du temps pour la recherche de pannes. L'évolution de $\lambda(t)$ en fonction du temps conduit à la courbe en baignoire (fig. 2.5).

2.4.6 Expression générale de la fiabilité

On intègre l'expression (2.5d) entre 0 et t :

$$-\int_0^t \lambda(t) dt = \ln N(t) + k' \quad (2.7a)$$

$$N(t) = k \cdot e^{-\int_0^t \lambda(t) dt} \quad (2.7b)$$

$$\text{Pour } t = 0, N(t) = N_0 \text{ d'où } k = N_0 \rightarrow N(t) = N_0 \cdot e^{-\int_0^t \lambda(t) dt} \quad (2.7c)$$

$$\frac{N(t)}{N_0} = e^{-\int_0^t \lambda(t) dt} \quad (2.7d)$$

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t) dt} \quad (2.7e)$$

C'est la relation fondamentale de la fiabilité.

En combinant les relations (2.4), (2.6b) et (2.7e) on obtient l'expression :

$$f(t) dt = \lambda(t) R(t) = \lambda(t) e^{-\left(\int_0^t \lambda(t) dt\right)} \quad (2.8a)$$

Le terme entre parenthèses est défini comme étant le taux de défaillance cumulé :

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(t) dt \quad (2.8b)$$

$$\text{On aura donc : } R(t) = e^{-\Lambda(t)} \quad (2.9)$$

2.4.7 MTBF

La MTBF (Mean Time Between Failure) est définie comme étant le temps moyen entre deux défaillances. Lorsque le temps moyen d'indisponibilité MDT (Mean Down Time) est négligeable devant le temps moyen de disponibilité MUT (Mean Up Time), il y a quasi-identité entre MUT et MTBF qui représente dans ce cas la « moyenne des temps de bon fonctionnement » et on peut alors l'évaluer en prenant la valeur moyenne de $R(t)$:

$$MTBF = \int_0^{\infty} R(t) dt \quad (2.10)$$

C'est aussi l'espérance mathématique de la variable aléatoire T : $MTBF = E(T)$.

L'espérance de T est la moyenne pondérée des valeurs que T peut prendre, donc :

- Dans le cas d'une variable discrète :

$$MTBF = E(T) = \sum_{i=1}^n t_i P(t_i) \quad (2.11)$$

- Dans le cas d'une variable continue :

$$MTBF = \int_0^{+\infty} t f(t) dt = \int_0^{+\infty} R(t) dt \quad (2.12)$$

Si le taux d'avarie instantané est constant et égal à λ_0 alors :

$$MTBF = \frac{1}{\lambda_0} \quad (2.13)$$

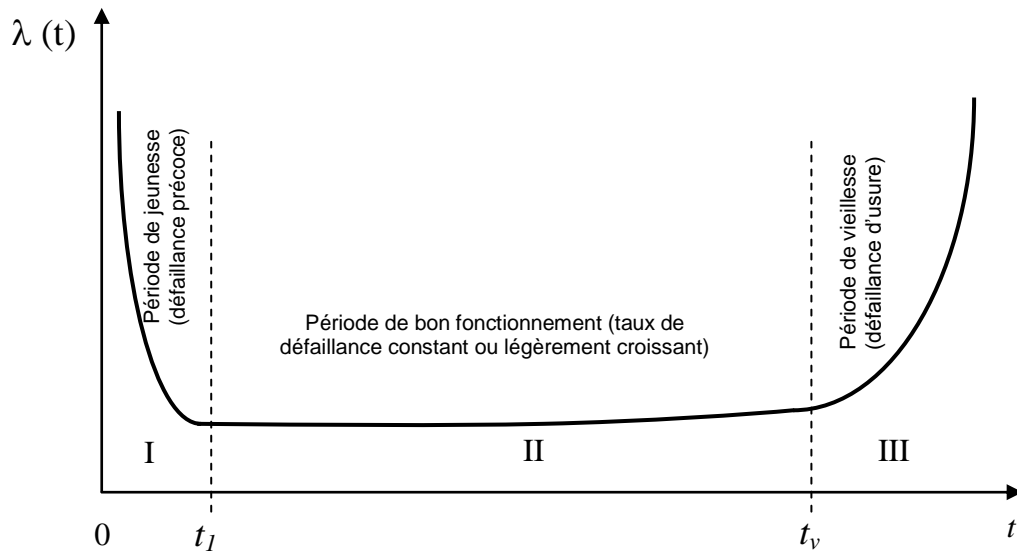
2.5 Classement des matériels selon le taux de défaillance

D'une manière générale, le taux de défaillance $\lambda(t)$ d'une variable aléatoire T représentant la durée de vie d'un matériel a la forme suivante (dite en baignoire) (fig. 2.5).

La première période correspond à la période des « maladies infantiles ». On a un taux de défaillance décroissant. Dans la pratique et afin que cette période se produise avant la vente du matériel, le fabricant procèdera à un rodage de son matériel.

La deuxième période est la période de bon fonctionnement. Les défaillances surviennent de manière aléatoire et ne peuvent être prévues par un examen technologique du matériel.

La troisième période est la période d'usure du matériel. Elle est constatée par un examen technologique simple.



- Zone de défaillances de jeunesse I : défaillances de réglages et de mise au point.
- Zone de défaillances aléatoires II : défaillances accidentelles ne dépendant pas de l'âge du système.
- Zone de défaillances d'usure III : les défaillances dépendent du temps, le processus de détérioration pour cause d'usure est commencé.

Figure 2.5. Allure du taux de défaillance en fonction du temps (courbe en baignoire).

• **Remarque :**

Si on excepte la période de jeunesse, les matériels se répartissent en deux classes :

- Les matériels à taux de défaillance constant : c'est un matériel de fatigue. Dans ce cas la durée de vie suit une loi exponentielle $R(t) = e^{-\lambda_0 t}$. C'est le cas de beaucoup d'élément simple en électronique et électricité (fig. 2.6).

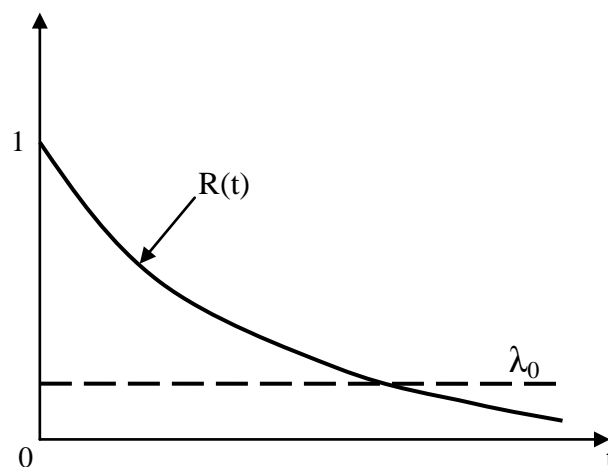


Figure 2.6 : Loi exponentielle

- Les matériels à taux de défaillance croissant. La durée de vie suit en général une loi de Weibull $R(t) = e^{-\frac{(t-\gamma)^\beta}{\eta}}$; $t \geq \gamma$; $\beta > 1$; $\eta > 0$. C'est le cas de nombreux composants simples (ou pris comme tels) en mécanique : engrenages, roulements à billes, etc. (fig. 2.7).

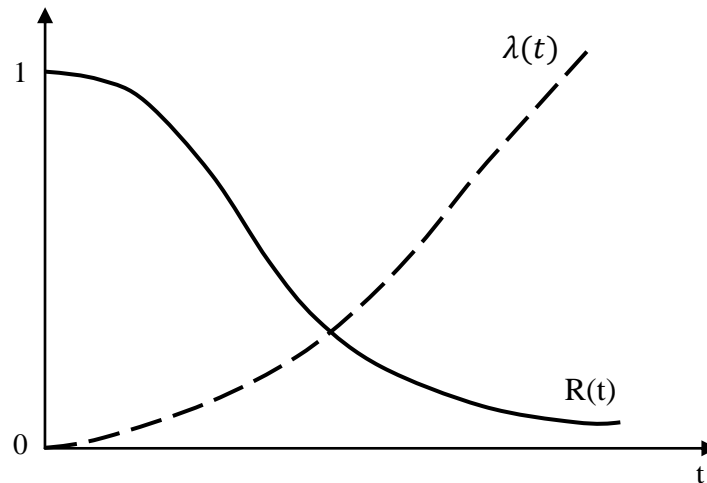


Figure 2.7 : Loi de Weibull

2.6 Notions de probabilité de survie avec conditions

2.6.1 Loi de probabilité de survie d'un matériel non neuf (fig. 2.8)

Soit $R(t)$ la probabilité de survie d'un matériel de durée de vie T . La probabilité de survie de ce même matériel lorsqu'il a déjà survécu pendant une durée a est donnée par :

$$R_a(t) = \frac{R(a+t)}{R(a)} \quad (2.14)$$

C'est la probabilité que la durée de vie soit supérieure à $(a + t)$ sachant qu'elle est supérieure à (a) .

Graphiquement, le graphe de $R_a(t)$, s'obtient d'après la relation (2.14), en décalant la courbe de $R(t)$ d'une valeur a et en le multipliant par $\frac{1}{R(a)}$ (fig. 2.8).

$$\text{Donc : } R(t) = R_a(t)$$

En conséquence un matériel qui suit une loi exponentielle ne vieillit pas.

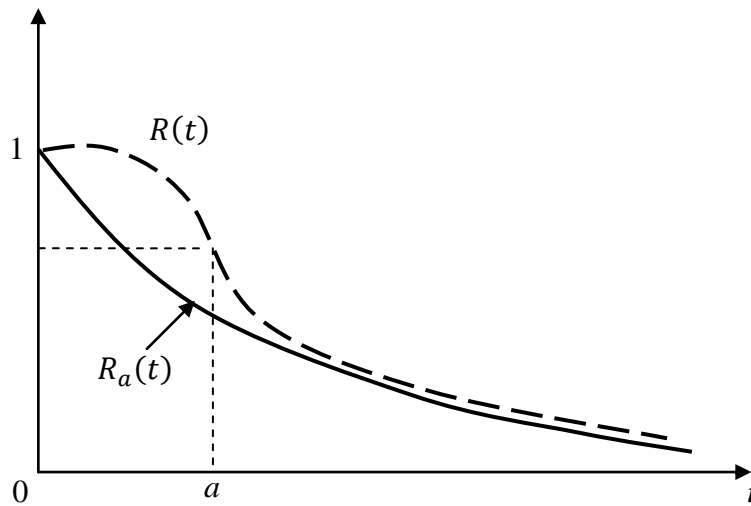


Figure 2.8 : Allure de la probabilité de survie d'un matériel non neuf.

2.6.2 Loi de probabilité de survie avec limite de fonctionnement (fig. 2.9)

On se donne une limite de fonctionnement θ et on remplace le matériel systématiquement à l'âge θ s'il a atteint cet âge.

La durée de vie T a une probabilité de survie définie par :

$$\left. \begin{aligned} R(\theta, t) &= R(t) : \text{si } 0 \leq t < \theta \\ R(\theta, t) &= 0 : \text{si } t \geq \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

La densité de probabilité de défaillance :

$$\left. \begin{aligned} f(\theta, t) &= f(t) : \text{si } 0 \leq t < \theta \\ f(\theta, t) &= \delta(t - \theta).R(\theta) : \text{si } t \geq \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

$\delta(t)$ est la fonction de Dirac.

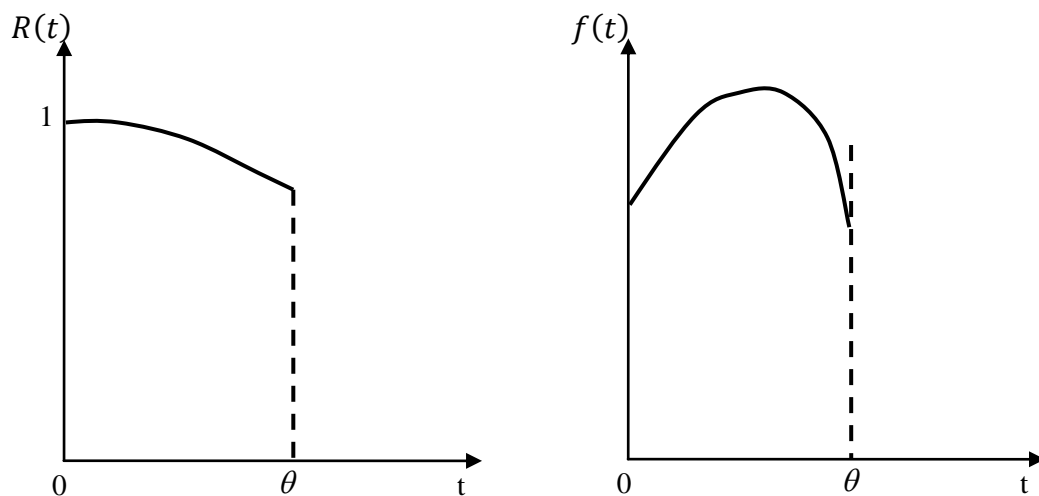


Figure 2.9 : Probabilité de survie et densité de probabilité de défaillance avec limite de fonctionnement.

2.7 La loi exponentielle

2.7.1 Définition

Cette loi est applicable pour la période à taux de défaillance λ_0 constant. Tous les matériels sont concernés pendant une partie de leur vie (vie utile) et les matériels électroniques pendant toute leur durée de vie.

Si la durée de vie T d'un matériel suit une loi exponentielle on a :

a- La probabilité de survie (fiabilité) est :

$$R(t) = P(t < T) = e^{-\lambda_0 t} ; \lambda_0 \geq 0, t \geq 0 \quad (2.17)$$

λ_0 : est le paramètre de la loi exponentielle.

b- La densité de probabilité de défaillance est :

$$f(t) = \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} ; \lambda_0 \geq 0, t \geq 0 \quad (2.18)$$

c- La probabilité de défaillance (défiabilité ou fonction de réparation) est :

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda_0 t} ; \lambda_0 \geq 0, t \geq 0 \quad (2.19)$$

d- L'espérance mathématique de T (ou M.T.B.F.) est :

$$E(t) = MTBF = \int_0^{+\infty} t f(t) dt = \int_0^{+\infty} \lambda_0 t e^{-\lambda_0 t} dt = \frac{1}{\lambda_0} \quad (2.20)$$

e- Le taux d'avarie est :

$$\lambda_0 = \frac{1}{MTBF} \quad (2.21)$$

f- Graphiquement on a (fig. 2.10) :

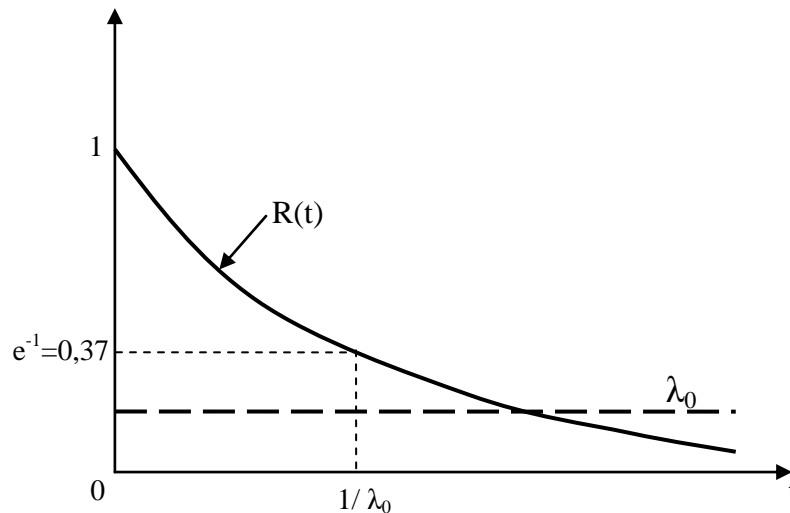


Figure 2.10 : Représentation graphique de la loi exponentielle

2.7.2 Remarque

La loi de survie exponentielle $R(t) = e^{-\lambda_0 t}$ est la plus utilisée, puisqu'elle rend compte des cas très général où le taux de défaillance est constant ; c'est-à-dire du palier de la courbe en baignoire. C'est le seul cas où la moyenne des temps de bon fonctionnement sans défaillances ait une signification car elle ne dépend pas alors de l'intervalle considéré (étant égale à l'inverse du taux de défaillance constant).

2.8 La loi de Weibull

La loi de Weibull est un modèle statistique particulièrement bien adapté à l'étude statistique des défaillances. Waloddi Weibull (mathématicien suédois) a donné au taux d'avarie $\lambda(t)$ une formule générale dépendant de trois paramètres η , β et γ .

2.8.1 Caractéristiques

Si la durée de vie T d'un type de pièce suit une loi de Weibull, on a :

a- La probabilité de survie (fiabilité) est :

$$R(t) = P(t < T) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta} \text{ si } t > \gamma \text{ et } R(t) = 1 \text{ si } t \leq \gamma \quad (2.22)$$

- γ : est le paramètre de position (ou paramètre de décalage de l'origine du temps).
- η : est le paramètre d'échelle homogène à un temps.
- β : est le paramètre de forme.

On remarque que pour $\gamma = 0$ et $\beta = 1$, on a une loi exponentielle.

b- La densité de probabilité de défaillance est :

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta} \text{ si } t > \gamma \text{ et } f(t)=0 \text{ si } t \leq \gamma \quad (2.23)$$

c- La fonction de répartition (probabilité de défaillance) est :

$$F(T) = 1 - e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta} \quad (2.24)$$

d- L'espérance mathématique de T est :

$$\text{MTBF} = E(t) = \gamma + \eta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad (2.25)$$

Γ : Fonction gamma de la forme $\Gamma(x)$ avec $x = 1 + \frac{1}{\beta}$.

La fonction Γ est calculée par intégration numérique :

$$\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = \int_0^1 \left(\text{Log} \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\beta}} dt \quad (2.26)$$

Les valeurs de Γ sont aussi données par des tables (annexe).

e- Le taux d'avarie est :

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} \text{ si } t > \gamma \text{ et } \lambda(t) = 0 \text{ si } t \leq \gamma \quad (2.27)$$

f- Le taux d'avarie cumulé est :

$$\Lambda(t) = \frac{(t - \gamma)^\beta}{\eta} \text{ pour } t > \gamma \quad (2.28)$$

2.8.2 Signification des paramètres du modèle de Weibull

2.8.2.1 Paramètre de forme β

C'est un nombre sans dimension. Il définit l'allure de la distribution de Weibull (figs. 2.11 et 2.12).

2.8.2.2 Paramètre de position γ

Appelé aussi paramètre de décalage, il a la dimension d'un temps, souvent il est égal à zéro, cela correspond à la loi de Weibull à deux dimensions. Ce paramètre indique une survie totale du lot entre 0 et γ ainsi qu'une fréquence ou densité de probabilité de défaillance nulle durant cette période. Lorsque γ est négatif cela signifie que, dès l'origine des temps, des éléments sont déjà détruits ; il faut faire un changement d'origine. Lorsque γ est positif cela signifie que la distribution des défaillances a son origine après $t = \gamma$.

2.8.2.3 Paramètre d'échelle réelle η

Il a la dimension d'un temps. Ce paramètre exprime l'échelle de l'abscisse des temps d'une distribution de Weibull. Il donne l'ordre de grandeur de la durée de vie moyenne.

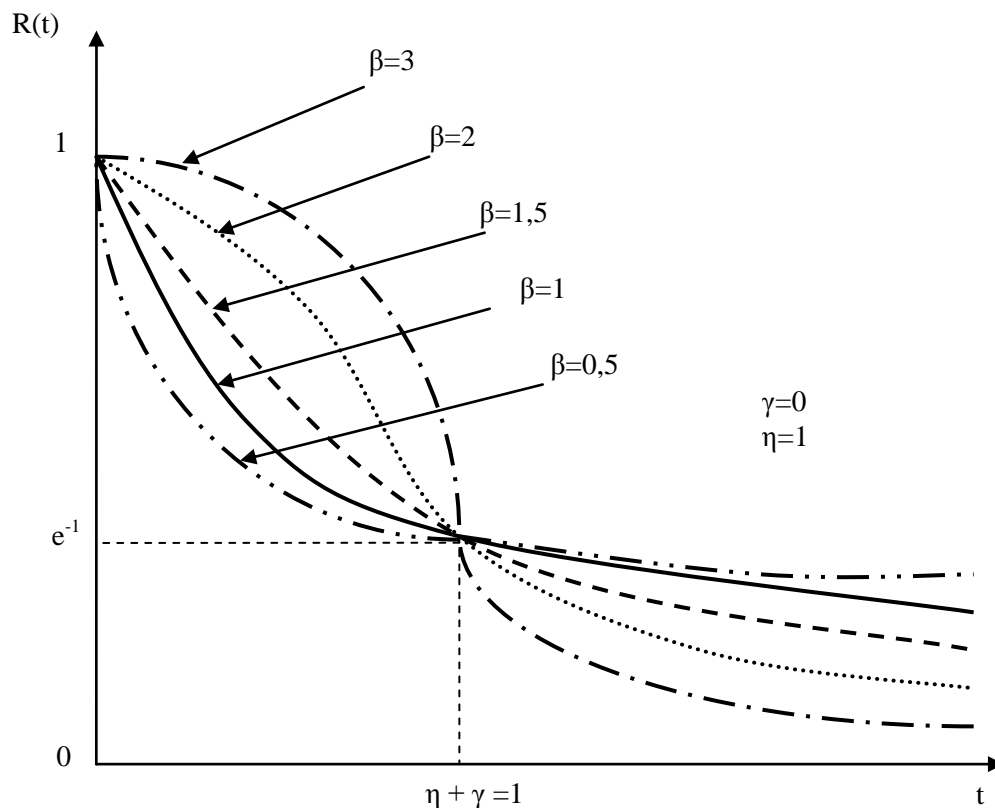


Figure 2.11 : Allure de $R(t)$ en fonction de β .

2.8.3 Allure du taux de défaillance en fonction du paramètre β (fig. 2.8)

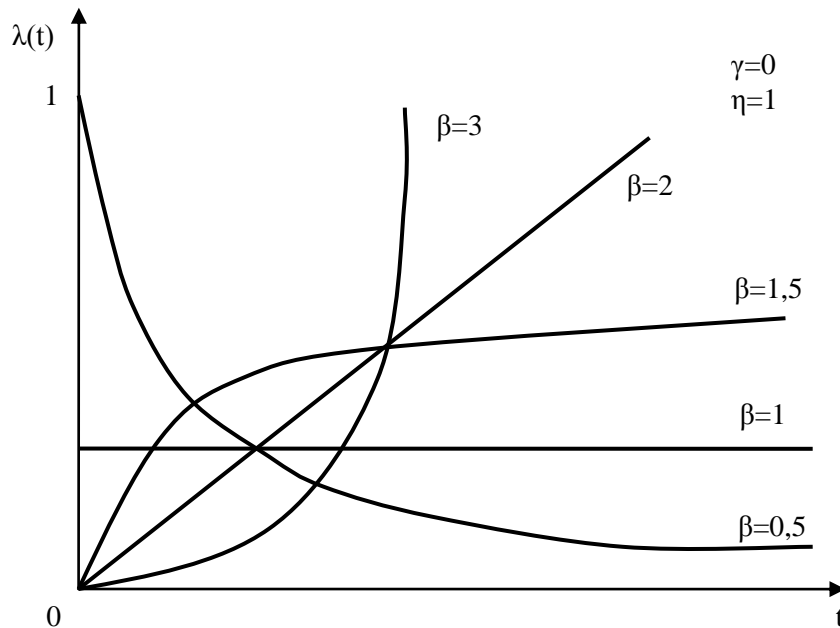


Figure 2.12 : Allure de $\lambda(t)$ en fonction de β .

2.8.4 Analyse et propriétés du taux de défaillance (fig. 2.13)

- $\beta < 1$: correspond à la zone de décroissance rapide. C'est la période de mise en place et du rodage de l'installation. Les défaillances sont dues à des anomalies ou des imperfections de montage ou à la méconnaissance de la conduite du matériel de la part des opérateurs.
- $\beta = 1$: correspond à la zone où le taux d'avarie est pratiquement constant. En effet :

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} = \frac{1}{\eta} \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{1-1} = \frac{1}{\eta} \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^0 = \frac{1}{\eta} \quad (2.29)$$

C'est la période des défaillances aléatoires qui ne présentent généralement aucun symptôme de dégradation préalable. C'est la période la plus longue, ce fonctionnement à taux de défaillance constant ou légèrement croissant correspond au rendement optimal de l'équipement.

- $\beta > 1$: correspond à la zone de croissance rapide. C'est la période du vieillissement provoqué par l'usure mécanique, les vibrations répétées, les chocs ou les érosions qui modifient la structure des métaux. Tous ces effets étant amplifiés par la variation des contraintes.

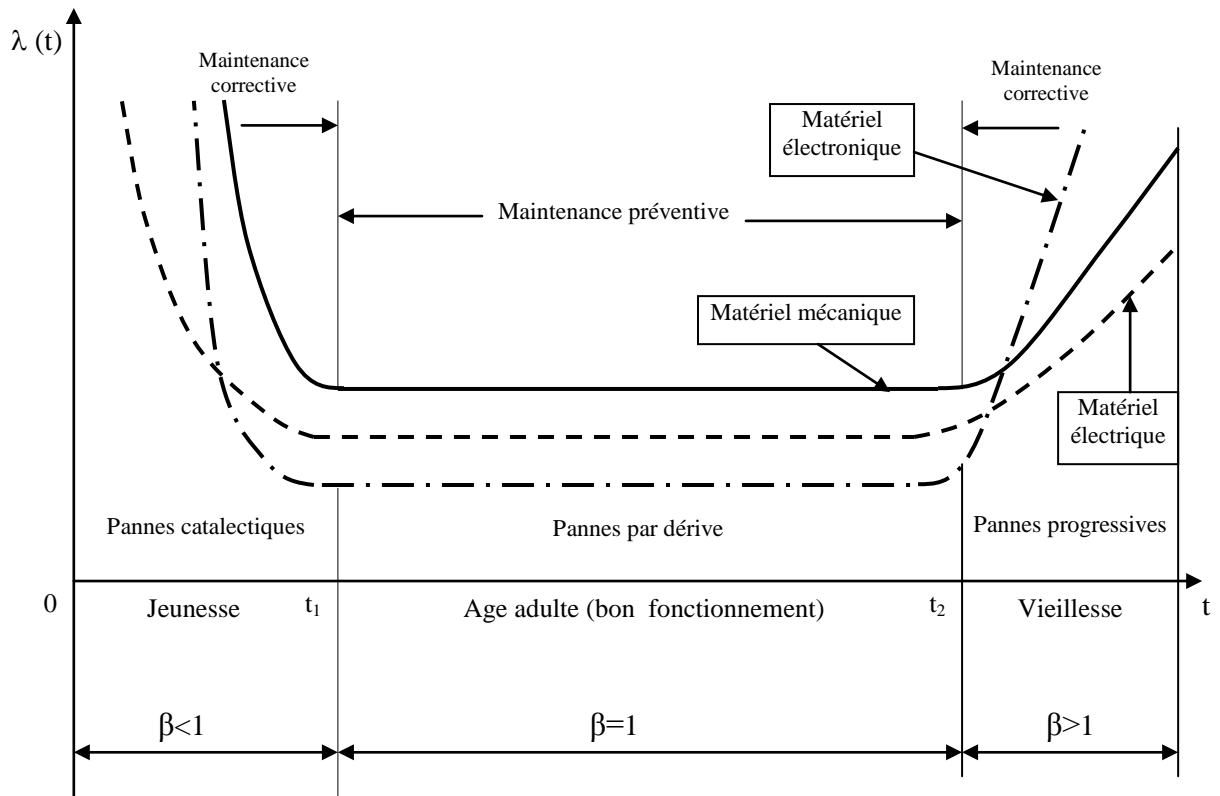


Figure 2.13 : Variation du taux de défaillance (courbe en baignoire).

• Remarque

La vieillesse existe aussi pour les matières plastiques. Celles-ci sont très utilisées en électronique et évoluent lentement avec le temps : elles se transforment chimiquement. Les transformations chimiques sont accélérées par la chaleur au cours du fonctionnement. L'humidité, par contre, intervient au stockage et des précautions sont nécessaires pour que la fiabilité ne se dégrade pas.

2.8.5 Détermination des paramètres η , β et γ

Un des problèmes essentiels de la loi de Weibull est l'estimation des paramètres β , η , γ de cette loi. Pour cela, nous disposons de deux méthodes :

- Une entièrement par le calcul, qui fait intervenir les équations différentielles difficiles à résoudre, de ce fait elle est peu utilisée.
- L'autre graphique, qui utilise un papier à échelle fonctionnelle dit papier « loi de Weibull » ou graphique d'Allan Plait. Cette méthode est la plus utilisée. Weibull propose alors :

- 1) De calculer, d'après l'historique des pannes survenues sur un lot d'équipement, la fréquence cumulée d'avarie $F(t)$ ou la fiabilité $R(t) = 1 - F(t)$.
- 2) De porter ces valeurs de $F(t)$ ou de $R(t)$ sur un papier graphique spécial de Weibull gradué comme suit :
 - en abscisse : $\text{Ln}(t)$
 - en ordonnée : $\text{Ln}\left[\text{Ln}\left(\frac{1}{1 - F(t)}\right)\right] = \text{Ln}\left[\text{Ln}\left(\frac{1}{R(t)}\right)\right]$ (2.30)

Le graphique nous donne les valeurs de η , β et γ .

- 3) De rechercher le coefficient lié à β (la fonction Γ) par l'intermédiaire d'une table (annexe 1) pour calculer la M.T.B.F. si nécessaire.
- 4) De calculer $R(t)$; $\lambda(t)$; $F(t)$ et $f(t)$ si nécessaire.

CHAPITRE III

MODÈLES MATHÉMATIQUES ET RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

3. MODÈLES MATHÉMATIQUES ET RÉOLUTION NUMÉRIQUE

3.1 Introduction

Il s'agit de déterminer la périodicité T_0 avec laquelle on doit effectuer une maintenance préventive, pour minimiser le coût de l'opération.

Considérons un type de pièces présent sur n systèmes. On notera C_p le coût de remplacement d'une pièce en bon état et C_f le coût de remplacement d'une pièce défectueuse.

Barlow et Hunter [33] ont proposé deux modèles mathématiques pour la détermination de la politique de remplacement optimal minimisant le coût de l'opération du système de production. Ces modèles s'appellent :

- a- Les modèles de remplacement par bloc (Block Replacement Models) : appelés aussi politique de remplacement à intervalle constant ou politique de type I.
- b- Les modèles de remplacement basé sur l'âge des pièces (Basic Age Replacement Models) : ou remplacement préventive basé sur le temps appelé aussi politique de type II.

Pour les modèles de remplacement par bloc, la maintenance préventive est exécutée périodiquement à des périodes spécifiées kT_0 ($T_0 \geq 0$) ou kN ($N = 0, 1, 2, \dots$), ($k = 1, 2, 3, \dots$). Si le système tombe en panne durant l'intervalle du temps $[(k-1)T_0, kT_0]$ ou $[(k-1)N, kN]$, alors la maintenance corrective est exécutée au moment de la défaillance.

La propriété principale du remplacement par bloc est qu'il est facile à gérer en générale, puisque le temps de remplacement préventif est programmé à l'avance et on n'a pas besoin de surveiller l'âge du système.

Pour ce modèle, trois variantes peuvent être envisagés :

- La pièce défectueuse est remplacée instantanément au moment de la défaillance (modèle I).

- La pièce défaillante restera inutilisable jusqu'à l'arrivée du prochain remplacement planifié (modèle II).
- La pièce défaillante subie des réparations mineures (modèle III).

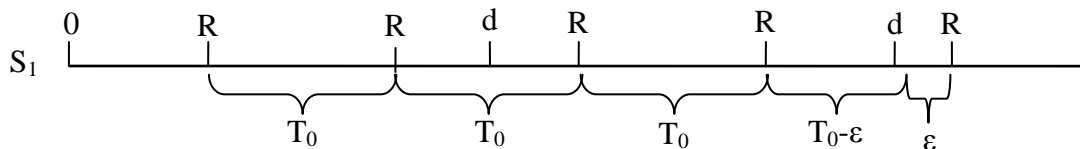
Concernant les modèles de remplacement basé sur l'âge, comme il est bien connu, dans ces modèles, si la pièce ne tombe pas en panne jusqu'au temps T_0 ($T_0 \geq 0$) ou N ($N=1, 2, 3, \dots$), alors elle est remplacée par une nouvelle pièce à la date prévue, sinon, elle est remplacée au moment de la défaillance. On remarque, en général, que dans ce cas, $C_f > C_p$. Par ailleurs, ces modèles jouent un rôle fondamental dans tous les modèles de remplacement, puisque l'optimal du modèle de remplacement d'âge a été prouvé par Bergman [91] si le remplacement par une pièce nouvelle est la seule option de maintenance (c'est-à-dire si la réparation n'est pas considérée comme option).

3.2 Modélisation mathématique

3.2.1 Modèles de remplacements par block

3.2.1.1 Modèle I : Toutes les pièces sont changées avec la même périodicité $T_0 = Cte$ quelque soit l'âge de la pièce.

Toutes les pièces sont changées avec la même périodicité T_0 quelque soit l'âge de la pièce et une pièce défaillante est remplacée instantanément au moment de la défaillance (fig. 3.1).



S_1 : système 1
 R : remplacement
 d : défaillance
 T_0 : périodicité de remplacement

Figure 3.1 : Remplacement à période fixe T_0 .

Le cas limite étant celui d'une pièce changée à $T_0 - \varepsilon$ pour défaillance et remplacée à T_0 pour maintenance préventive ($\varepsilon \ll T_0$).

Le coût de l'opération sera C_p auquel s'ajoute le coût de remplacement éventuelle dû à une défaillance de la pièce pendant la durée T_0 , c'est-à-dire :

$$C_f \times P(T \leq T_0) = C_f \times F(T_0) \quad (3.1)$$

Le coût total de l'opération est donc :

$$C_T(T) = C_p + C_f \times [1 - R(T_0)] \quad (3.2)$$

On a un calcul optimiste car on n'a considéré qu'une seule défaillance durant la période du temps $[0, T]$. C'est le cas le plus courant en pratique.

Le coût total par pièce et par unité de temps sera :

$$C(T) = \frac{C_p + C_f \times (1 - R(T_0))}{T_0} \quad (3.3)$$

La périodicité de changement préventif sera la valeur T_0 de T pour laquelle $C(T)$ est minimum. Posons $T_0 = T$ et cherchons à annuler la dérivée première de $C(T)$:

$$C_m(T) = C'(T) = \frac{Tf(T)C_f - (C_p + C_f(1 - R(T)))}{T^2} \quad (3.4)$$

Car : $\frac{d(1 - R(T))}{dt} = \frac{dF(T)}{dt} = \frac{-dR(T)}{dt} = f(T)$: qui est la densité de probabilité de T .

$$C_m(T) = 0 \Leftrightarrow C_f(T \cdot f(T) + R(T)) = C_p + C_f \quad (3.5)$$

$$T \cdot f(T) + R(T) = 1 + \frac{C_p}{C_f} \quad (3.6)$$

On pose : $\frac{C_p}{C_f} = C_r$; on obtient alors :

$$T \cdot f(T) + R(T) = 1 + C_r \quad (3.7)$$

Dans le cas de loi de Weibull avec $\gamma = 0$ (qui est le cas le général : le matériel est mis en service à $t = 0$) ; alors : $R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}$ et l'équation (3.7) devient :

$$t \cdot \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} + e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} = 1 + C_r \quad (3.8)$$

Ou bien :

$$\beta \cdot \left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta \cdot e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} + e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} = 1 + C_r \quad (3.9)$$

$$\text{On pose : } \left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta = \mu \quad (3.10)$$

On obtient alors :

$$\beta \mu e^{-\mu} + e^{-\mu} = 1 + C_r \Leftrightarrow e^{-\mu} (\beta \mu + 1) - 1 = C_r$$

$$\text{On pose : } y(\mu) = e^{-\mu}(\beta\mu + 1) - 1 = C_r \quad (3.11)$$

• **Étude de $y(\mu)$**

$$y(0) = 0 \quad (3.12a)$$

$$y(+\infty) = -1 \quad (3.12.b)$$

$$y'(\mu) = -e^{-\mu}(\beta\mu + 1) + \beta e^{-\mu} = e^{-\mu}(-\beta\mu + \beta - 1) \quad (3.13)$$

$$y'(\mu) = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{\beta - 1}{\beta} \quad (3.14)$$

a- **Cas de : $0 < \beta < 1$** (fig. 3.2)

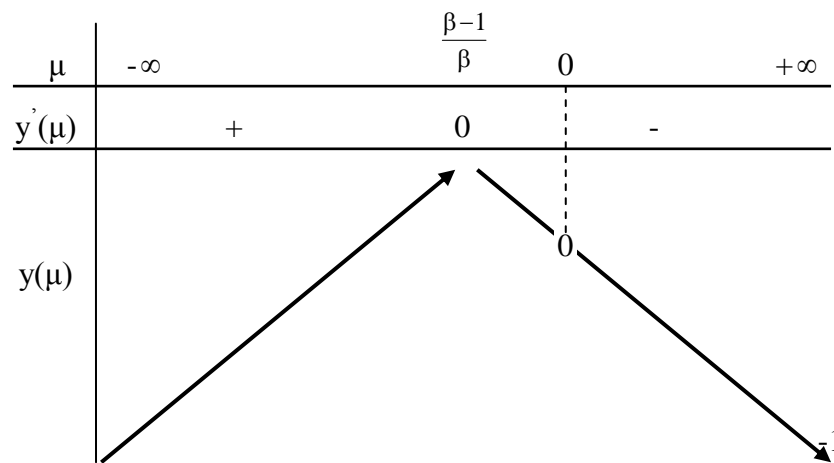


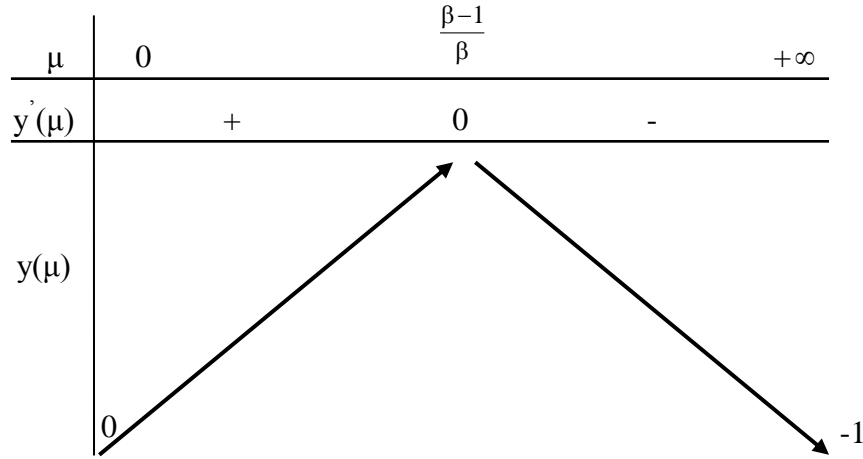
Figure 3.2 : Cas de $0 < \beta < 1$.

Pour $0 < \beta < 1$, l'équation (3.11) : $y(\mu) = C_r > 0$ n'a pas de solution, puisque $-1 < y(\mu) \leq 0$ pour $0 \leq \mu \leq +\infty$.

Ce cas n'a pas d'intérêt pratique puisque le matériel est en période de jeunesse $\beta < 1$.

b- Cas de : $\beta = 1$

Dans le cas d'une loi exponentielle ($\lambda_0 = 1/\eta$), c'est-à-dire pour un matériel de fatigue, ce type de maintenance préventive n'a pas d'intérêt car la seule solution de l'équation (3.11) : $y(\mu) = e^{-\mu} (\beta \mu + 1) - 1 = C_r$ est : $\mu = 0$ et $C_p = 0$.

c- Cas de : $\beta > 1$ (fig. 3.3)Figure 3.3 : Cas de : $\beta > 1$.

En remplaçant μ (éq. 3.14) par son expression dans l'équation (3.11) on aura :

$$y(\mu) = \beta e^{-\left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)} - 1 = C_r \quad (3.15)$$

Alors d'après la figure (3.3), pour $0 \leq \mu \leq \frac{\beta-1}{\beta}$: $0 < y(\mu) < \beta e^{-\left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)} - 1$, donc :

$$0 < C_r < \beta e^{-\left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)} - 1 \quad (3.16)$$

ainsi l'équation (3.11) : $y(\mu) = C_r$ a deux solutions μ_0 et μ_1 (fig. 3.4). D'où :

$$T_0 = \eta \mu_0^{1/\beta} \quad (3.17.a)$$

$$T_1 = \eta \mu_1^{1/\beta} \quad (3.17.b)$$

$$\text{Or : } C_m(t) = \frac{C_p (t \cdot f(t) + R(t)) - (C_p + C_f)}{t^2} \quad (3.18)$$

$$\text{Donc : } C_m(t) = C_f \frac{(t \cdot f(t) + R(t) - 1 - C_r)}{t^2} \quad (3.18b)$$

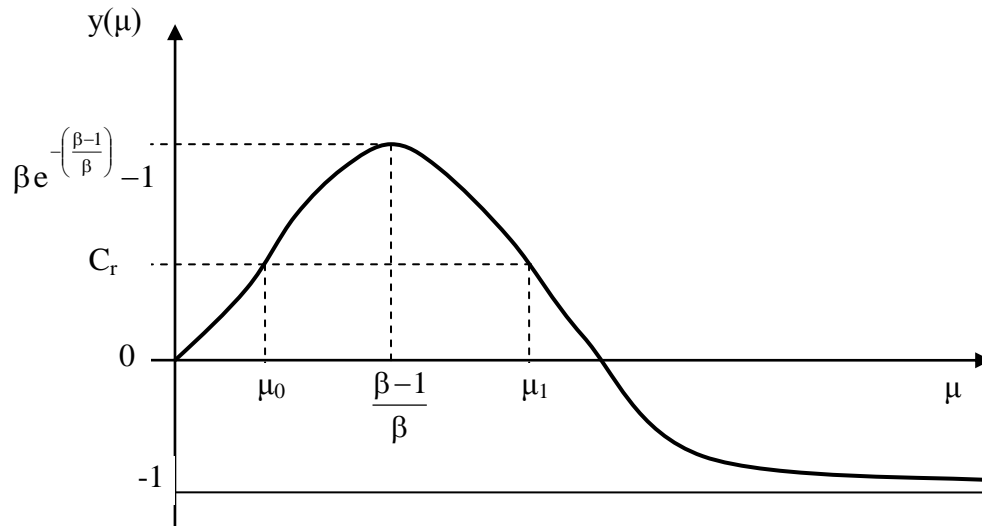


Figure 3.4 : Allure de $y(\mu)$ dans le cas de $\beta > 1$.

D'après l'expression de $y(\mu)$ (éqs. 3.9 et 3.11) on a :

$$C_m(t) = C_f \frac{(y(\mu) - C_r)}{t^2} \tag{3.19}$$

On constate alors que pour (fig. 3.4) :

$$0 < \mu < \mu_0 : C_m(t) < 0 \tag{3.20.a}$$

$$\mu_0 < \mu < \mu_1 ; y(\mu) > C_r : C_m(t) > 0 \tag{3.20.b}$$

$$\mu > \mu_1 ; y(\mu) < C_r : C_m(t) < 0 \tag{3.20.c}$$

On obtient le tableau des variations suivant (fig. 3.5)

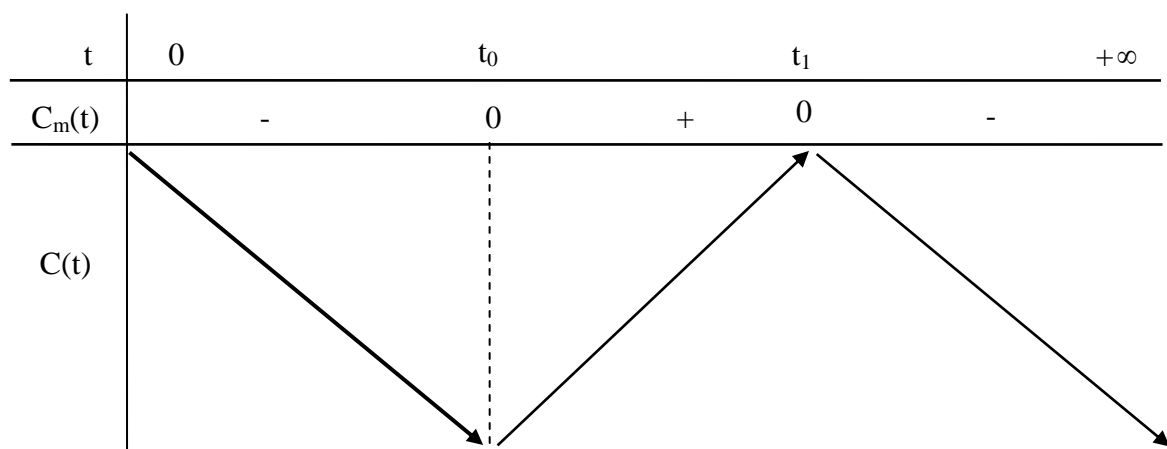


Figure 3.5 : Variation du coût total moyen C en fonction du temps t .

On obtient alors le graphe suivant de $C(t)$ (fig. 3.6). La solution sera donc :

$$T_0 = \eta \mu_0^{1/\beta} \quad (3.21)$$

Dans le cas où C_r est égal au maximum de $y(\mu) = \beta e^{-\left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)\mu} - 1$, la solution n'est pas un extremum pour $C(t)$ et ce cas de maintenance n'a pas d'intérêt.

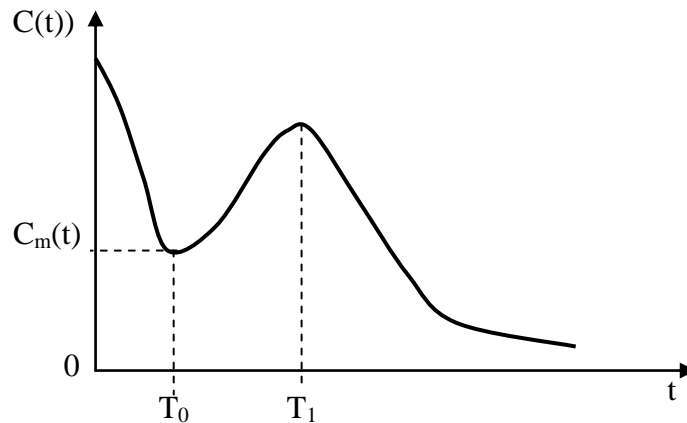


Figure 3.6 : Allure de $C(t)$ dans le cas de : $\beta > 1$.

• **Remarque :**

Dans le cas général, quand on considère qu'il peut y avoir plus d'une défaillance durant la période du temps $[0, T]$, le coût moyen total prévu par unité de temps est donné dans ce cas par l'expression générale suivante :

$$C(t) = \frac{C_p + C_f \times M(T_0)}{T_0} \quad (3.23)$$

où $M(T_0) = \sum_{k=1}^{\infty} F^k(t)$ est le nombre moyen de défaillances durant la période du temps $[0, T]$.

Afin de simplifier l'expression de $M(T_0)$, nous avons considéré dans ce travail, que nous avons à faire une seule défaillance entre deux remplacement préventifs consécutifs. Alors on aura dans ce cas :

$$M(T_0) = F(T) \quad (3.24)$$

3.2.1.2 Modèle II

Pour le premier modèle, nous avons supposé qu'une pièce défailante est détectée instantanément juste après la défaillance. Ceci implique qu'un dispositif de détection surveille l'unité d'exploitation. Étant donné que ce cas ne soit pas toujours général, cependant, on suppose que la défaillance est détectée seulement à KT_0 ($T_0 \geq 0$) ou kN ($N = 0, 1, 2, \dots$), ($K = 1, 2, 3, \dots$) (Osaki [92]). Par conséquent, dans le modèle II, une unité est toujours remplacé à KT_0 ou kN , mais, elle n'est pas remplacé au moment de la défaillance et l'appareil reste inopérant pendant la durée de l'apparition de la défaillance jusqu'à la détection de la panne (qui n'est pas détectable intensément).

Dans le modèle à temps continu, étant donné que la durée prévue de l'apparition d'une défaillance jusqu'à sa détection par cycle est donnée par :

$$\int_0^{T_0} (T_0 - t) dF(t) = \int_0^{T_0} F(t) dt \quad (3.25)$$

Donc le coût prévu par pièce et par unité de temps est :

$$C_f(T_0) = \frac{C_f \int_0^{T_0} F(t) dt + C_p}{T_0} \quad (3.26)$$

3.2.1.3 Modèle III

Dans le dernier modèle, nous supposons que la réparation minimale est effectuée quand une unité tombe en panne et le taux de défaillance ne soit pas perturbé par chaque réparation. Si l'on considère un processus stochastique $\{N(t), t \geq 0\}$ en ce que $N(t)$ représente le nombre de réparations minimales jusqu'au temps t , le processus $\{N(t), t \geq 0\}$ est régié par un processus de Poisson non homogène avec une fonction de valeur moyenne :

$$\Lambda(t) = \int_0^t r(x) dx \quad (3.27)$$

qui est aussi appelé la fonction de risque (c'est le taux de défaillance cumulé), où la fonction :

$$r(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} \quad (3.28)$$

est appelée le taux de défaillance ou le taux de risque. Dans le cas général on a :

$$\bar{\psi}(x) = 1 - \psi(x) \quad (3.29)$$

Donc : $r(x) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{f(t)}{R(t)} = \lambda(t)$ qui le taux de défaillance.

Constatant ce fait, Barlow et Hunter [33] ont donné le coût prévu par pièce et par unité de temps pour ce modèle par l'expression suivante :

$$C(t) = \frac{C_m \Lambda(t) + C_p}{T_0} \quad (3.30)$$

Où : C_m exprime le coût de réparation minimal par pièce au moment de la défaillance.

3.2.2 Modèles de remplacements basés sur l'âge : l'âge de chaque pièce est connu et on change la pièce dès que son âge atteint la valeur T_0 (fig. 3.7)

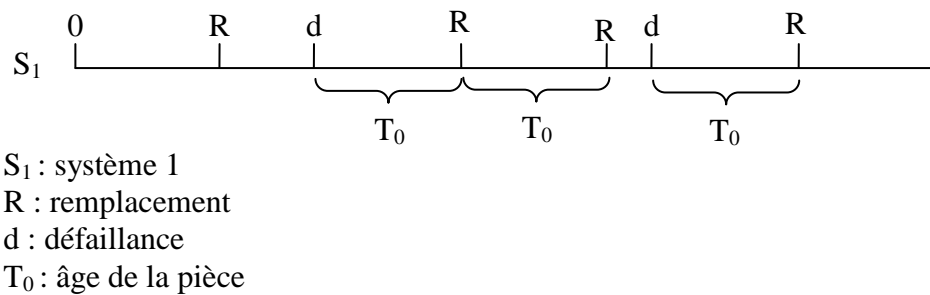


Figure 3.7 : Remplacement lorsque l'âge de la pièce T_0 est atteint.

Cette étude consiste à faire un remplacement préventif lorsque l'équipement a atteint l'âge T_0 soit la période de remplacement préventif choisie. La durée de la période T_0 a été déterminée de façon à effectuer un remplacement préventif un peu avant le moment où on estime que l'équipement risque de tomber en panne. Cela permet de minimiser les coûts. Si toutefois une panne survient, l'équipement défaillant est remplacé par du neuf.

La génération des instants de pannes est faite par une fonction aléatoire. Une des fonctions souvent utilisée est la loi de distribution de Weibull. Cette dernière est intéressante compte tenu de sa souplesse et le grand nombre de lois qu'elle peut recouvrir simplement en variant les paramètres (loi normale, loi exponentielle, etc.).

Les différences par rapport au cas précédent sont les suivants :

- Le nombre de pièces à changer est réduit car on ne risque pas de changer une pièce qui vient d'être défaillante et remplacée.

- Il faut connaître l'âge de chaque pièce, ce qui nécessite une organisation spéciale.
- Les échanges préventifs sont plus coûteux car ils ne portent que sur une pièce à chaque fois.

Ce cas se place dans le cas d'une durée de vie avec limite de fonctionnement (§ 2.6.2).

Donc nous allons raisonner ce cas en procédant de la manière suivante.

Si $R(t)$ est la probabilité de survie de la pièce sans limite de fonctionnement, nous aurons dans notre cas :

$$R(t, T_0) = R(t) ; \text{ pour : } 0 \leq t \leq T_0 \text{ et } R(t, T_0) = 0 ; \text{ pour : } t > T_0 \quad (3.31a)$$

$$f(t, T_0) = f(t) ; \text{ pour : } 0 \leq t \leq T_0 \text{ et } f(t, T_0) = R(T_0) \cdot \delta(t - T_0) ; \text{ pour : } t > T_0 \quad (3.31b)$$

δ est la fonction de Dirac.

Le coût moyen par dispositif et par unité de temps sera :

$$C(t_0) = \frac{E(C)}{E(T)} \quad (3.32)$$

avec $E(C)$ espérance du coût et $E(T)$ espérance de la durée de vie.

$$E(C) = \int_{-\infty}^{+\infty} C \cdot f(t, T_0) dt = \int_0^{T_0} C \cdot f(t) dt + \int_{T_0}^{+\infty} C \cdot R(T_0) \cdot \delta(t - T_0) dt \quad (3.33a)$$

$$E(C) = C_f \int_0^{T_0} f(t) dt + C_p \int_{T_0}^{+\infty} R(T_0) \cdot \delta(t - T_0) dt \quad (3.33b)$$

On pose : $u = t - T_0$ donc $dt = du$; donc :

$$E(C) = C_f (1 - R(T_0)) + C_p \int_0^{+\infty} R(T_0) \cdot \delta(u) du \quad (3.34)$$

$$\text{Or : } \int_0^{+\infty} g(t) \cdot \delta(t) dt = g(0) \text{ et } \int_a^{+\infty} g(t) \cdot \delta(t - a) dt = g(a) \quad (3.35)$$

$$\text{Donc : } E(C) = C_f (1 - R(T_0)) + C_p \cdot R(T_0) \quad (3.36)$$

$(C_p \cdot R(T_0))$ est le coût de l'opération et $C_f (1 - R(T_0))$ est le coût de remplacement éventuelle dû à une défaillance de la pièce pendant la durée T_0 .

$$E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f(t, T_0) dt = \int_0^{T_0} t \cdot f(t) dt + \int_{T_0}^{+\infty} t \cdot R(T_0) \cdot \delta(t - T_0) dt \quad (3.37a)$$

$$\int_0^{T_0} t \cdot f(t) dt = [t - R(t)]_0^{T_0} + \int_0^{T_0} R(t) dt = -T_0 R(T_0) + \int_0^{T_0} R(t) dt \quad (3.37b)$$

$$\int_{T_0}^{+\infty} t \cdot R(T_0) \cdot \delta(t - T_0) dt = \int_0^{+\infty} (u + T_0) R(T_0) \delta(u) du = T_0 R(T_0) \quad (3.37c)$$

$$\text{Donc : } E(T) = \int_0^{T_0} R(t) dt \quad (3.38)$$

$$\text{Donc : } C(T_0) = \frac{C_f (1 - R(T_0)) + C_p \cdot R(T_0)}{\int_0^{T_0} R(t) dt} \quad (3.39)$$

Donc, la valeur T_0 qui correspond à la périodicité de maintenance préventive est celle qui minimise $C(t)$.

$$C(t) = \frac{C_f (1 - R(t)) + C_p \cdot R(t)}{\int_0^t R(u) du} \quad (3.40)$$

$$C'(t) = \frac{[C_f f(t) - C_p f(t)] \int_0^t R(u) du - [C_f (1 - R(t)) + C_p R(t)] R(t)}{\left(\int_0^t R(u) du \right)^2} \quad (3.41a)$$

$$C'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[f(t) \int_0^t R(u) du \right] (C_f - C_p) - R(t) [C_f - R(t)(C_f - C_p)] = 0 \quad (3.41b)$$

$$C_f R(t) = (C_f - C_p) \left[f(t) \int_0^t R(u) du + R(t)^2 \right] \quad (3.41c)$$

$$\frac{1}{1 - \frac{C_p}{C_f}} = \frac{f(t) \int_0^t R(u) du + R(t)^2}{R(t)} \quad (3.41d)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 - C_r} = \lambda(t) \int_0^t R(u) du + R(t) \quad (3.42)$$

Dans le cas de loi de Weibull avec $\gamma = 0$ (qui est le cas le général : le matériel est mis en service à $t = 0$) ; alors : $R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}$ et l'équation (3.42) devient alors :

$$\frac{1}{1 - C_r} = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta} \right)^{\beta-1} \int_0^t e^{-\left(\frac{u}{\eta}\right)^\beta} du + e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} \quad (3.43)$$

$$\text{On pose : } y(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \int_0^t e^{-\left(\frac{u}{\eta}\right)^\beta} du + e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} = \frac{1}{1-C_r} \quad (3.44)$$

$$y'(t) = \frac{\beta}{\eta} \frac{(\beta-1)}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-2} \int_0^t e^{-\left(\frac{u}{\eta}\right)^\beta} du + \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} - \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} \quad (3.45)$$

$$y'(t) = \beta \frac{(\beta-1)}{\eta^2} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-2} \int_0^t e^{-\left(\frac{u}{\eta}\right)^\beta} du \quad (3.46)$$

a- Cas de : $0 < \beta < 1$

Pour $t > 0$; $y'(t) < 0$ et $0 < y(t) < 1$.

L'équation $y(t) = \frac{1}{1-C_r}$ n'a pas de solution car $C_r \notin]0, 1[$ (fig. 3.8).

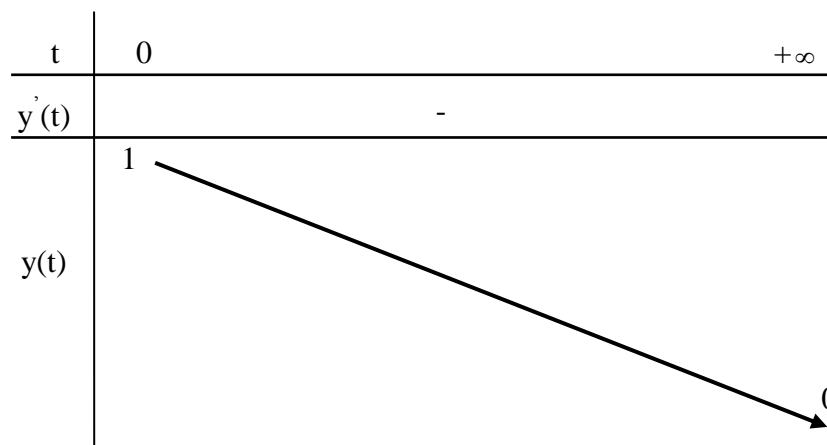


Figure 3.8 : Cas de $0 < \beta < 1$.

Pour un matériel en période de jeunesse ($\beta < 1$) ce type de maintenance préventive n'a pas d'intérêt pratique.

b- Cas de : $\beta = 1$

$$y(t) = \frac{1}{\eta} \int_0^t e^{-\left(\frac{u}{\eta}\right)} du + e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)} = \left[-e^{-\left(\frac{u}{\eta}\right)} \right]_0^t + e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)} = 1 \quad (3.47)$$

L'équation : $y(t) = \frac{1}{1-C_r}$ est équivalente à : $1 = \frac{1}{1-C_r} \Leftrightarrow C_r = 0$

Pour $\beta = 1$, ce type de maintenance préventive n'a pas d'intérêt.

c- Cas de : $\beta > 1$

$y'(t) > 0; \forall t > 0$ (fig. 3.9).

L'équation : $y(t) = \frac{1}{1 - C_r}$ a une solution unique pour $0 < C_r < 1$.

Vérifions que la solution de l'équation correspond à un minimum pour le coût.

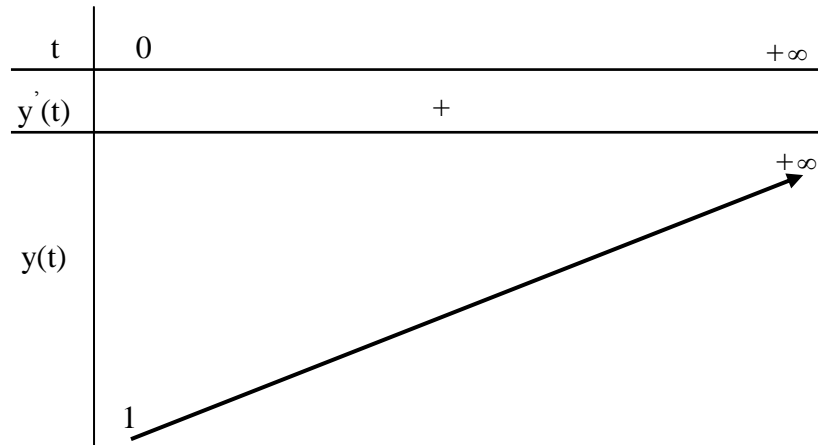


Figure 3.9 : Cas de $\beta > 1$.

On étudie la limite de : $\lim_{t \rightarrow 0} C(t)$ quand $t \rightarrow 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow 0} C(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{C_f (1 - R(t))}{\int_0^t R(u) du} + \frac{C_p R(t)}{\int_0^t R(u) du} \right) \tag{3.48}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - R(t)}{\int_0^t R(u) du} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{R(t)} = 0 \tag{3.49a}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(t)}{\int_0^t R(u) du} = +\infty \tag{3.49b}$$

Donc : $\lim_{t \rightarrow 0} C(t) = +\infty$ (3.50)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{C_f (1 - R(t))}{\int_0^t R(u) du} + \frac{C_p R(t)}{\int_0^t R(u) du} \right) \tag{3.51}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(1 - v(t))}{\int_0^t v(u) du} = \frac{1}{\eta \Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)} \tag{3.52a}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{R(t)}{\int_0^t R(u) du} = 0 \tag{3.52b}$$

$$\text{Donc : } \lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \frac{C_f}{\eta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)} \tag{3.53}$$

Dans ce cas, le coût moyen $C(t)$ a l'allure qui est représentée sur la figure 3.10.

Dans le cas d'un matériel d'usure ($\beta > 1$), ce type de maintenance préventive possède un intérêt $\forall C_r \in]0, 1[$.

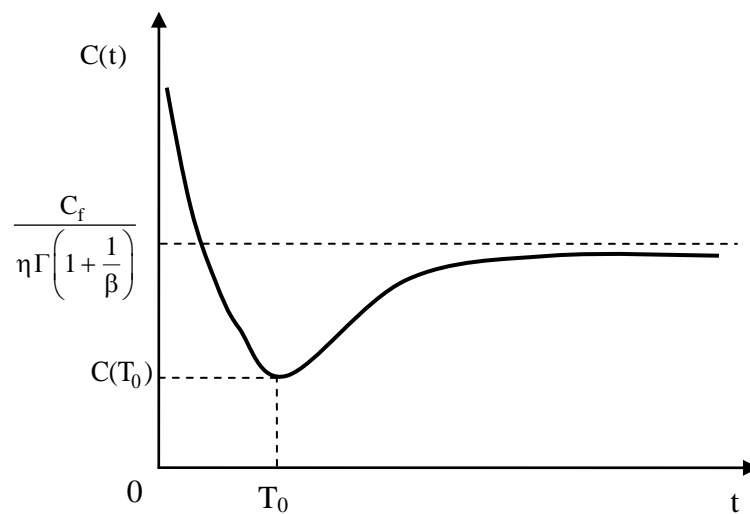
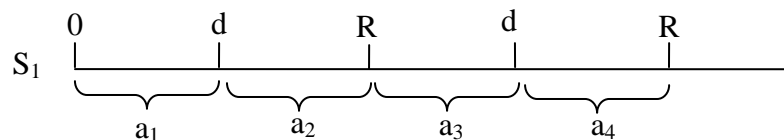


Figure 3.10 : Allure de $C(t)$ dans le cas de $\beta > 1$.

3.2.3 Cas où les remplacements se font à des instants aléatoires, t_1, t_2, \dots, t_n choisies de telle sorte que ces remplacements soient pratiques et économiques (fig. 3.11)



- S_1 : système 1
- R : remplacement
- d : défaillance
- a_1, a_2, \dots, a_i : âges de la pièce

Figure 3.11 : Remplacement à des périodicités favorables.

- t_1 : Première instant favorable au remplacement.
- t_2 : Deuxième instant favorable au remplacement.
- t_i : $i^{\text{ème}}$ instant favorable au remplacement. Etc.

Notons a_i l'âge de la pièce lorsque arrive l'instant t_i favorable au remplacement et déterminons les causes favorable au remplacement :

- immobilisation du matériel pour panne ;
- immobilisation du matériel pour maintenance préventive (1^{er} et 2^{ème} cas) ;
- période d'inutilisation du matériel, par exemple durant le congé annuel on procèdera à l'échange de toutes les pièces ayant dépassées un certain âge.

La condition à déterminer pour savoir si on doit changer la pièce au temps t_i est complexe. On va utiliser une approximation construite à partir du raisonnement suivant.

Prenons une pièce parmi celles susceptible d'être changées à l'instant t_i . La durée de vie est alors a_i et sa probabilité de survie est donnée par : (probabilité de survie d'un matériel non neuf (§ 2.6.1))

$$R_{a_i}(t) = \frac{R(a_i + t)}{R(a_i)} \quad (3.54)$$

La densité de probabilité de durée de vie est :

$$f_{a_i}(t) = \frac{f(a_i + t)}{R(a_i)} \quad (3.55)$$

Enfin, la MTBF d'un matériel ayant déjà vécu jusqu'à l'âge a_i va être donnée par :

$$MTBF_{a_i} = \int_0^{+\infty} t \cdot f_{a_i}(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{t \cdot f(a_i + t)}{R(a_i)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{(x - a_i) \cdot f(x)}{R(a_i)} dx \quad (3.56)$$

(avec : $x = a_i + t$)

A l'instant t_i on aura l'évènement favorable à un remplacement, on aura alors le problème suivant :

- changer la pièce et alors payer C_P coût d'un remplacement préventif pour une durée de vie moyenne égale à : $MTBF - MTBF_{a_i}$.

- Ne pas changer la pièce et payer alors C_f coût d'une défaillance pour une durée de vie moyenne égale à : MTBF.

Dans le premier cas, le coût moyen par pièce et par unité de temps sera alors :

$$\frac{C_p}{\text{MTBF} - \text{MTBF}_{a_i}}$$

Dans le deuxième cas, le coût moyen par pièce et par unité de temps sera : $\frac{C_f}{\text{MTBF}}$

On procèdera au remplacement préventif dès que :

$$\frac{C_p}{\text{MTBF} - \text{MTBF}_{a_i}} \leq \frac{C_f}{\text{MTBF}} \quad (3.57)$$

$$\text{MTBF}_{a_i} \leq \text{MTBF}(1 - C_r) \quad (3.58)$$

• Étude de l'inégalité

Cas de la loi de Weibull avec $\gamma = 0$: $R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}$

$$\text{MTBF}_{a_i} = \int_{a_i}^{+\infty} (x - a_i) \frac{f(x)}{R(a_i)} dx = \frac{1}{R(a_i)} \int_{a_i}^{+\infty} (x - a_i) \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta} dx \quad (3.59)$$

L'inégalité donne l'expression suivante :

$$\int_{a_i}^{+\infty} (x - a_i) \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta} dx \leq e^{-\left(\frac{a_i}{\eta}\right)^\beta} \eta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) (1 - C_r) \quad (3.60a)$$

$$\int_{a_i}^{+\infty} \beta \left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta} dx - \int_{a_i}^{+\infty} a_i \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1} \frac{\beta}{\eta} e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta} dx \leq e^{-\left(\frac{a_i}{\eta}\right)^\beta} \eta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) (1 - C_r) \quad (3.60b)$$

$$\int_{a_i}^{+\infty} \beta \left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta} dx + \left[a_i e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta} \right]_{a_i}^{+\infty} \leq e^{-\left(\frac{a_i}{\eta}\right)^\beta} \eta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) (1 - C_r) \quad (3.60c)$$

$$\int_{a_i}^{+\infty} \beta \left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta} dx \leq e^{-\left(\frac{a_i}{\eta}\right)^\beta} \left[\eta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) (1 - C_r) + a_i \right] \quad (3.60d)$$

$$\begin{aligned} \int_{a_i}^{+\infty} \beta \left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta} dx &= \int_0^{+\infty} \beta \left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta} dx - \int_0^{a_i} \beta \left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta} dx \\ &= \text{MTBF} - \int_0^{a_i} \beta \left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta} dx = \eta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) - \int_0^{a_i} \beta \left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta} dx \end{aligned} \quad (3.60e)$$

$$\int_0^{a_i} \beta \left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta} dx \geq -e^{-\left(\frac{a_i}{\eta}\right)^\beta} \left[\eta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)(1 - C_r) + a_i \right] + \eta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad (3.60f)$$

On pose : $k = \frac{x}{\eta}$; $k_i = \frac{a_i}{\eta}$ \Rightarrow

$$\int_0^{k_i} \beta k^\beta e^{-k^\beta} dk \geq -e^{-k_i^\beta} \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)(1 - C_r) + k_i \right] + \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad (3.61a)$$

$$\int_0^{k_i} \beta k^\beta e^{-k^\beta} dk \geq \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \left[1 - (1 - C_r) e^{-k_i^\beta} \right] - k_i e^{-k_i^\beta} \quad (3.61b)$$

$$\text{On pose : } y(u) = \int_0^u \beta k^\beta e^{-k^\beta} dk - \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \left[1 - (1 - C_r) e^{-u^\beta} \right] + u e^{-u^\beta} \quad (3.62)$$

Et on étudiera les solutions de : $y(u) \geq 0$

a- Cas de : $0 < \beta < 1$ (fig. 3.12)

$$y'(u) = e^{-u^\beta} \left[1 - \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \beta u^{\beta-1} (1 - C_r) \right] \quad (3.63)$$

$$y'(u) = 0 \Leftrightarrow u_1^{\beta-1} = \frac{1}{\beta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) (1 - C_r)} \quad (3.64)$$

Pour : $0 < u < u_1$; $u_1^{\beta-1} < u^{\beta-1}$, car $0 < \beta < 1$ et $y'(u) < 0$

Pour : $u > u_1$; $u^{\beta-1} < u_1^{\beta-1}$, et $y'(u) > 0$

L'inégalité $y(u) \geq 0$ n'a pas de solution si $0 < \beta < 1$. Ce type de maintenance préventive n'a pas d'intérêt dans le cas d'un matériel en période de jeunesse.

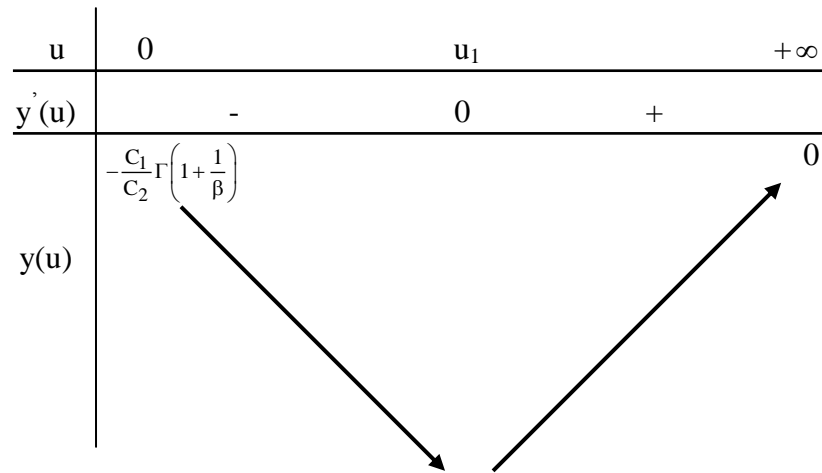


Figure 3.12 : Cas de $0 < \beta < 1$.

b- Cas de : $\beta = 1$

On considère l'inégalité : $MTBF_{ai} \leq MTBF(1 - C_r)$

Dans le cas d'une loi exponentielle, on a vu que :

$$R_{a_i}(t) = \frac{R(a_i + t)}{R(a_i)} = R(t) \tag{3.65}$$

donc $MTBF_{ai} = MTBF$.

L'inégalité implique : $1 \leq 1 - C_r \Leftrightarrow C_r = 0 \Rightarrow$

Ce type de maintenance préventive n'a pas d'intérêt dans le cas d'un matériel de fatigue.

c- Cas de : $\beta > 1$ (Fig. 3.13 et 3.14)

$$y'(u) = 0 \Leftrightarrow u_1^{\beta-1} = \frac{1}{\beta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)(1 - C_r)} \tag{3.66}$$

Pour : $0 < u < u_1 \Rightarrow u^{\beta-1} < u_1^{\beta-1}$, donc : $y'(u) > 0$

Pour : $u_1 < u ; \Rightarrow u_1^{\beta-1} < u^{\beta-1}$, donc : $y'(u) < 0$

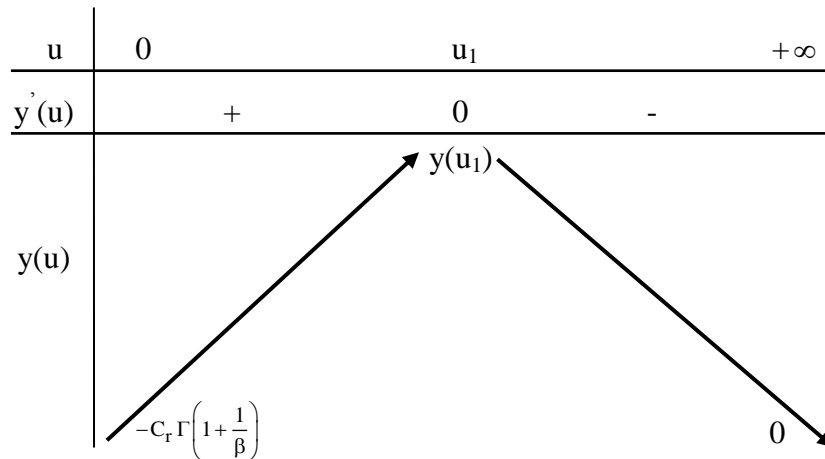


Figure 3.13 : Cas de $\beta > 1$.

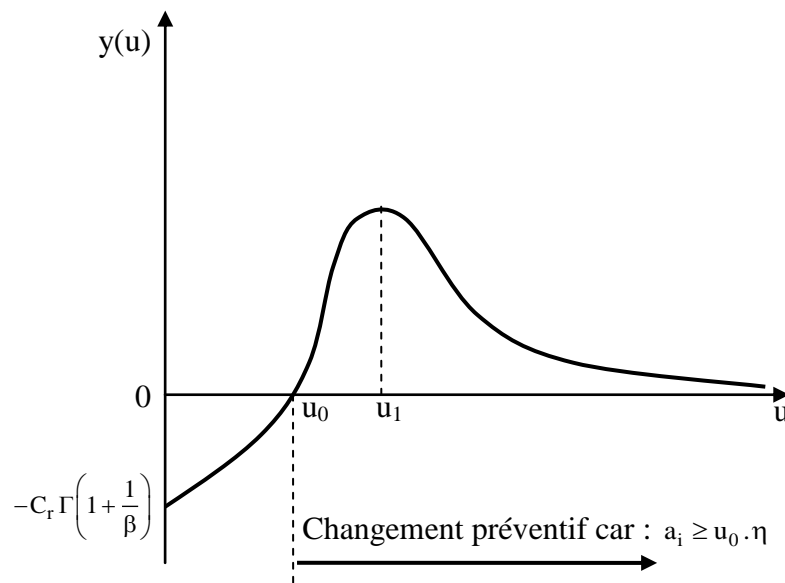


Figure 3.14 : Allure de $y(u)$ dans le cas de $\beta > 1$.

• **Remarque**

L'approximation utilisée dans ce 3^{ème} cas est excellente à condition que l'intervalle de temps $t_i - t_{i-1}$ entre deux aléatoires propices au changement soit notablement supérieur à la MTBF de la pièce.

3.2.4 Choix entre réparation et remplacement avant terme

3.2.4.1 Introduction

Pour tout système complexe, il existe une date limite appelée date L de réforme du système. Cette date L résulte des phénomènes de fatigue agissant sur l'ensemble du système. Elle est déterminée par des essais au banc de fatigue et à partir de statistiques

effectuées en temps réel sur un échantillon. Il intervient également dans la détermination de L des facteurs de sécurité et des considérations économiques.

Les défaillances relevées au cours d'utilisation du système conduiront à la réfection du système ou à sa réforme avant terme.

La réfection (remise en état ou réparation) se présente sous les deux aspects suivants :

- Les réparations mineures : se sont des retouches ou remplacements d'éléments simples.
- Les réparations majeures : elles conduisent à reconstruire complètement les éléments autour de l'élément pour lequel la durée de vie est fixée à L .

La réforme se présente sous les aspects suivants :

- Dans le cas du matériel surchargé au delà des tolérances permises ou accidenté et reconnue irréparable après expertise.
- Dans le cas où la limite L est arrivée.
- Dans le cas d'un système qui pourrait être réparé mais dont le temps restant à utiliser est trop faible pour qu'économiquement l'opération soit rentable.

Le problème est alors de déterminer t_1 et t_2 c'est-à-dire l'âge auquel il convient de ne plus effectuer de réparation majeure et mineure pour que le prix de revient majeur par système et par unité de temps soit mineur (fig. 3.15).

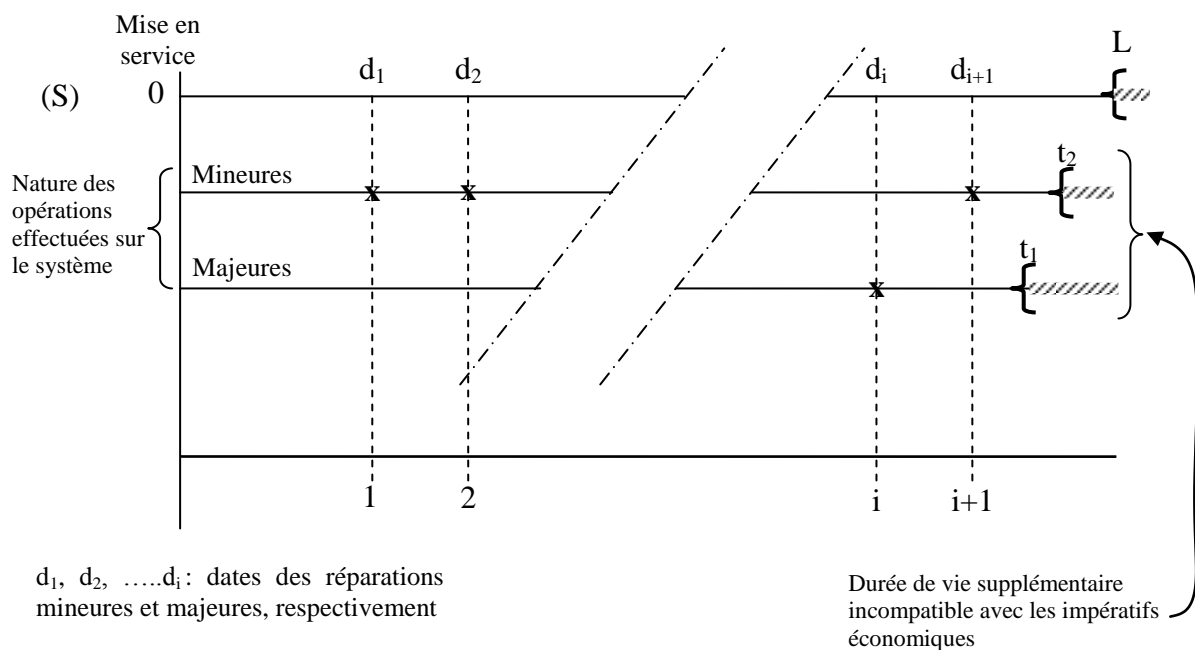


Figure 3.15. Schéma représentatif d'un remplacement avant terme pour un système (S).

3.2.4.2 Résolution du problème

Nous notons T_m la durée de vie aléatoire du système entre deux réparations mineurs, T_M la durée de vie aléatoire du système entre deux réparations majeurs, T_r la durée de vie du système jusqu'à réforme.

Les relevés statistiques d'exploitations des réparations mineures, majeures et des réformes, obtenues à partir des fiches historiques, conduisent à la détermination des lois de probabilité de T_m , T_M et T_r . Ces lois seront, en général, des lois de Weibull (ou approchées par des lois de Weibull).

- **Remarque**

La détermination de la loi de probabilité de T_r est effectuée en ne considérant que les avaries pour lesquelles la réparation est impossible.

On notera :

- $R_m(t) = P(t < T_m)$ et $\Lambda_m(t)$: la probabilité de survie et le taux d'avarie cumulé pour les réparations mineures, respectivement.
 - $R_M(t) = P(t < T_M)$ et $\Lambda_M(t)$: la probabilité de survie et le taux d'avarie cumulé pour les réparations majeures, respectivement.
 - $R_r(t) = P(t < T_r)$ et $\Lambda_r(t)$: la probabilité de survie et le taux d'avarie cumulé pour les réformes, respectivement.
- **Rappel** : le taux d'avarie cumulé d'une variable aléatoire T lorsque $R(t)$ est continue est défini par : $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(t) dt$ et on a donc : $R(t) = e^{-\Lambda t}$.
 - $\lambda_m(t)$, $\lambda_M(t)$ et $\lambda_r(t)$ les taux d'avarie des réparations mineurs, majeures et réformes, respectivement.

La détermination de t_1 et t_2 peut se faire à l'aide d'une formule établie à partir du raisonnement suivant :

Pour le système (S) :

- $0 \leq t \leq t_1$: la réforme arrive au taux $\lambda_r(t)$, le taux de réparation sera $\lambda_m(t) + \lambda_M(t)$.

- $t_1 \leq t \leq t_2$: les réformes surviennent aux taux $\lambda_r(t) + \lambda_M(t)$, le taux de réparation est alors $\lambda_m(t)$.

- $t_2 \leq t \leq L$: les réformes surviennent aux taux d'avarie $\lambda_r(t) + \lambda_M(t) + \lambda_m(t)$.

- Nous aurons donc pour $R(t)$ probabilité de survie du système l'expression suivante :

$$- 0 \leq t \leq t_1 : R(t) = e^{-(\Lambda_r(t_1) - \Lambda_r(0))} = e^{-\int_0^{t_1} \lambda_r(t) dt} \quad (3.67a)$$

$$- t_1 \leq t \leq t_2 : R(t) = e^{-(\Lambda_r(t_1) - \Lambda_r(0)) - (\Lambda_M(t_2) - \Lambda_M(t_1))} = e^{-\int_0^{t_1} \lambda_r(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \lambda_M(t) dt} \quad (3.67b)$$

$$- t_2 \leq t \leq L : R(t) = e^{-(\Lambda_r(t_1) - \Lambda_r(0)) - (\Lambda_M(t_2) - \Lambda_M(t_1)) - (\Lambda_m(L) - \Lambda_m(t_2))} \quad (3.67c)$$

$$R(t) = e^{-\int_0^{t_1} \lambda_r(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \lambda_M(t) dt - \int_{t_2}^L \lambda_m(t) dt} \quad (3.68)$$

Si on note P_m (respectivement P_M) le prix d'une réparation mineure (respectivement le prix de réparation majeure) et P_A le prix d'achat d'un système, alors le prix de revient moyen P_r d'un système est donné par la formule suivante :

$$P_r(t_1, t_2) = P_A + P_M \int_0^{t_1} \lambda_M(t) \cdot R(t) dt + P_m \int_0^{t_2} \lambda_m(t) \cdot R(t) dt \quad (3.69)$$

La MTBF sera donnée par :

$$\begin{aligned} \text{MTBF}(t_1, t_2) &= \int_0^L R(t) dt = \int_0^{t_1} e^{-(\Lambda_r(t) - \Lambda_r(0))} dt + \\ &\quad \int_{t_1}^{t_2} e^{-(\Lambda_r(t) - \Lambda_r(0)) - (\Lambda_M(t) - \Lambda_M(t_1))} dt + \\ &\quad \int_{t_2}^L e^{-(\Lambda_r(t) - \Lambda_r(0)) - (\Lambda_M(t) - \Lambda_M(t_1)) - (\Lambda_m(t) - \Lambda_m(t_2))} dt \end{aligned} \quad (3.70)$$

Le prix de revient par système et par unité de temps est donnée par :

$$\bar{P}_r(t_1, t_2) = \frac{P_r(t_1, t_2)}{\text{MTBF}(t_1, t_2)} \quad (3.71)$$

Les valeurs de t_1 et t_2 sont celles qui minimisent l'expression : $\bar{P}_r(t_1, t_2)$.

3.3 Résolution numérique

Pour trouver les racines μ_0 et μ_1 de l'équation (3.13) et en déduire la périodicité optimale de remplacement T_0 nous devons résoudre soit directement l'équation (3.10)

et obtenir les racines T_0 et T_1 ou bien résoudre l'équation (3.13) et obtenu μ_0 et μ_1 à partir desquelles on peut en déduire T_0 et T_1 .

La résolution analytique de ces équations différentielles est très difficile voir même impossible.

Pour cela, nous faisons appel à des méthodes numériques pour trouver les racines de ces équations différentielles et obtenir la valeur de T_0 . Il existe plusieurs méthodes pour déterminer les racines d'une équation. Parmi ces méthodes on peut citer :

- La méthode de Bissection.
- La méthode des points fixes.
- La méthode de Newton.
- La méthode de la sécante.

Cependant, dans, ce travail nous avons, choisi d'employer une méthode directe pour obtenir les racines de l'équation (3.3) permettant de défini T_0 correspondant au coût minimal tout en respectant la condition (3.16) dans le cas où toutes les pièces sont changées avec la même périodicité $T_0=C^{te}$ quelque soit l'âge de la pièce et de l'équation (3.40) dans le cas où l'âge de chaque pièce est connu et on change la pièce dès que son âge atteint la valeur T_0 .

Le cas particulier où les remplacements se font à des instants aléatoires, t_1, t_2, \dots, t_n choisies de telle sorte que ces remplacements soient pratiques et économiques, ainsi que la détermination des valeurs de t_1 et t_2 qui minimisent l'expression : $\bar{P}_r(t_1, t_2)$ (3.71) afin de choisir entre réparation et remplacement avant terme, ne seront pas résolus dans cette thèse et feront l'objet d'autres travaux.

CHAPITRE IV

RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

4. RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats obtenus par la résolution numérique des équations différentielles (3.3) et (3.40) qui expriment le coût total moyen par unité de temps et par pièce dans le cas de la loi de Weibull avec $\gamma=0$.

Ces résultats concernent l'effet du rapport des coûts C_r , du paramètre de forme β , du paramètre d'échelle η des valeurs de C_p et C_f sur la valeur de la périodicité de remplacement optimal T_0 . Donc dans chaque situation, nous varions un paramètre, tandis que les autres paramètres seront maintenus fixes.

Comme cela a été mentionné précédemment, cette étude concerne deux cas :

- le cas où toutes les pièces sont changées avec la même périodicité $T_0=C^{te}$ quelque soit l'âge de la pièce (équation 3.3).
- le cas où l'âge de chaque pièce est connu et on change la pièce dès que son âge atteint la valeur T_0 (équation 3.40).

Les résultats obtenus sont validés par confrontation avec les études analytiques réalisées au chapitre 3 et avec les résultats numériques disponibles dans la littérature.

4.2 Cas où toutes les pièces sont changées avec la même périodicité $T_0=C^{te}$ quelque soit l'âge de la pièce

4.2.1 Effet du rapport des coûts

Généralement, le coût d'un remplacement correctif C_f est plus élevé que le coût d'un remplacement préventif C_p . En effet, le coût d'une opération de maintenance préventive programmée est moins élevé que celui d'une opération corrective, en raison des coûts de perte de production dans le cas de cette dernière. Néanmoins, nous avons décidé de varier le rapport des coûts ($C_r=C_p/C_f$) de 0.25 à 1.75 dans le but d'examiner le cas particulier où C_p sera supérieur à C_f .

La figure 4.1 représente la variation du Coût Total Moyen par unité de temps et par pièce C_m en fonction du temps dans le cas où $C_r=0.25$ pour différentes valeurs du paramètre de forme β . Dans ce cas, nous constatons la présence d'un coût minimal de C_m

correspondant à la période la plus appropriée pour effectuer l'opération de MP. Ce coût est sensiblement dépendant de la valeur du rapport de forme β . Il varie de 2.28 pour $\beta=7$ à 4.09 pour $\beta=2.5$ et la période de remplacement optimal correspondant varie de 1110h pour $\beta=2.5$ à 1280h pour $\beta=7$ (tableau 4.1). Il en ressort, dans ce cas, que les opérations de MP sont très bénéfiques au fur et à mesure que les valeurs de β seront élevées, ce qui correspond en réalité à un taux de défaillance fortement croissant (période d'usure et de vieillesse). Cette période T_0 , correspondant au coût minimal, peut être légèrement différée, en cas de nécessité. Mais, en cas d'un retard excessif, le coût de l'opération augmente rapidement. Par exemple, dans le cas de $\beta=7$, ce coût qui est de 2.2 quand $T_0=1280h$, peut atteindre 5.13 quand $T=2315h$.

La figure 4.2 représente la variation du Coût Total Moyen par unité de temps et par pièce C en fonction du temps dans le cas où $C_r=0.5$ pour différentes valeurs du paramètre de forme β . Nous constatons ici qu'on n'a pas de solution optimale pour $\beta < 3$. Pour $\beta=3$, on constate que la période de MP commence au delà de $T=1535h$ où C est minimal (=5.62) et il constituera de l'être à partir de ce moment. Tandis que, pour les autres valeurs de β , la valeur du coût minimal C_m correspondant à la période de MP varie de 4.13 pour $\beta=7$ à 5.35 pour $\beta=3.5$, et la période de remplacement optimal correspondant varie de 1395h pour $\beta=3.5$ à 1420h pour $\beta=7$ (tableau 4.2). De manière analogue, on constate pour les valeurs élevées de β , que la variation de C en fonction de la période remplacement choisie peut être importante. Par exemple, dans le cas de $\beta=7$, ce coût qui est de 4.13 quand $T_0=1420h$, peut atteindre 6.21 quand $T=2280h$.

À partir de la figure 4.3, nous pouvons retenir les mêmes constatations que le cas précédent (figure 4.2). Nous constatons ici qu'on n'a pas de solution optimale pour $\beta < 4$. Nous remarquons, que pour $\beta=4$, la période de MP commence à partir de $T=1600h$ où C est minimal (=6.78) et il constituera de l'être à partir de ce moment jusqu'à $T=1800h$, où il commencera à croître avant de décroître à $T=2300h$. Tandis que, pour les autres valeurs de β , la valeur du coût minimal C_m correspondant à la période de MP varie de 5.83 pour $\beta=7$ à 6.59 pour $\beta=4.5$ et la période de remplacement optimal correspondante varie de 1600h pour $\beta=4$ à 1520h pour $\beta=7$ (tableau 4.3). C_m varie de 5.83 dans le cas de $\beta=7$ correspondant à $T_0=1520$, à 7.78 quand $T=2250h$.

Quand à la variation de C_m en fonction de la période remplacement, on constate que l'augmentation de C_r engendre une faible variation de C . Dans le cas où $C_r=0.75$, elle est moins importante que dans les deux cas précédents ($C_r=0.25$; 0.5).

La variation du coût total par unité de temps et par pièce C en fonction du temps dans le cas où $C_r=1$ (c'est-à-dire $C_p=C_f$) et pour différentes valeurs du paramètre de forme β est représentée sur la figure 4.4. Ce cas est relativement semblable au précédent (cas où $C_r=0.75$). Nous constatons ici qu'on n'a pas de solution optimale pour $\beta < 4.5$. Alors que, pour $\beta=4.5$, la période de MP commence à partir de $T=1745h$ où C est minimal et égal à 8.12 et ce coût restera constant jusqu'à $T=2200h$, valeur à partir de laquelle il commence à décroître. Tandis que, pour les autres valeurs de β , la valeur du coût minimal C_m , correspondant à la période de MP, varie de 7.43 pour $\beta=7$ à 8.12 pour $\beta=4.5$ et la période de remplacement optimale correspondante varie de 1600h pour $\beta=7$ à 1745h pour $\beta=4.5$ (tableau 4.4). La variation de C_m en fonction de la période remplacement a diminué davantage. Dans ce cas ($C_r=1$), elle est moins importante que dans les trois cas précédents. C_m varie de 7,43 dans le cas de $\beta=7$ correspondant à $T_0=1600h$, à 8.44 quand $T=2215h$.

Quand le coût de MP devient supérieur au coût de M_f ($C_p > C_f$), la MP n'a plus d'intérêt économique. Les figures 4.5, 4.6 et 4.7 représentent la variation de C dans le cas où $C_r=1.25$; 1.5 et 1.75 . Nous remarquons d'après ces graphes que C ne possède plus un minimum permettant de déterminer T_0 , quelque soit la valeur du paramètre de forme β . Mais, C atteint sa valeur minimale et continuera à décroître à partir d'une valeur déterminée de T . Dans le cas de $C_r=1.25$, cette valeur de T est de 1750h. Alors que, pour $C_r=1.5$, la valeur de T est de 1820h et dans le cas de $C_r=1.75$, T est égale à 1890h. Ceci nous permet de confirmer, du point de vue économique, que la MP ne doit pas être programmée lorsque son coût devient supérieur à celui de la MC.

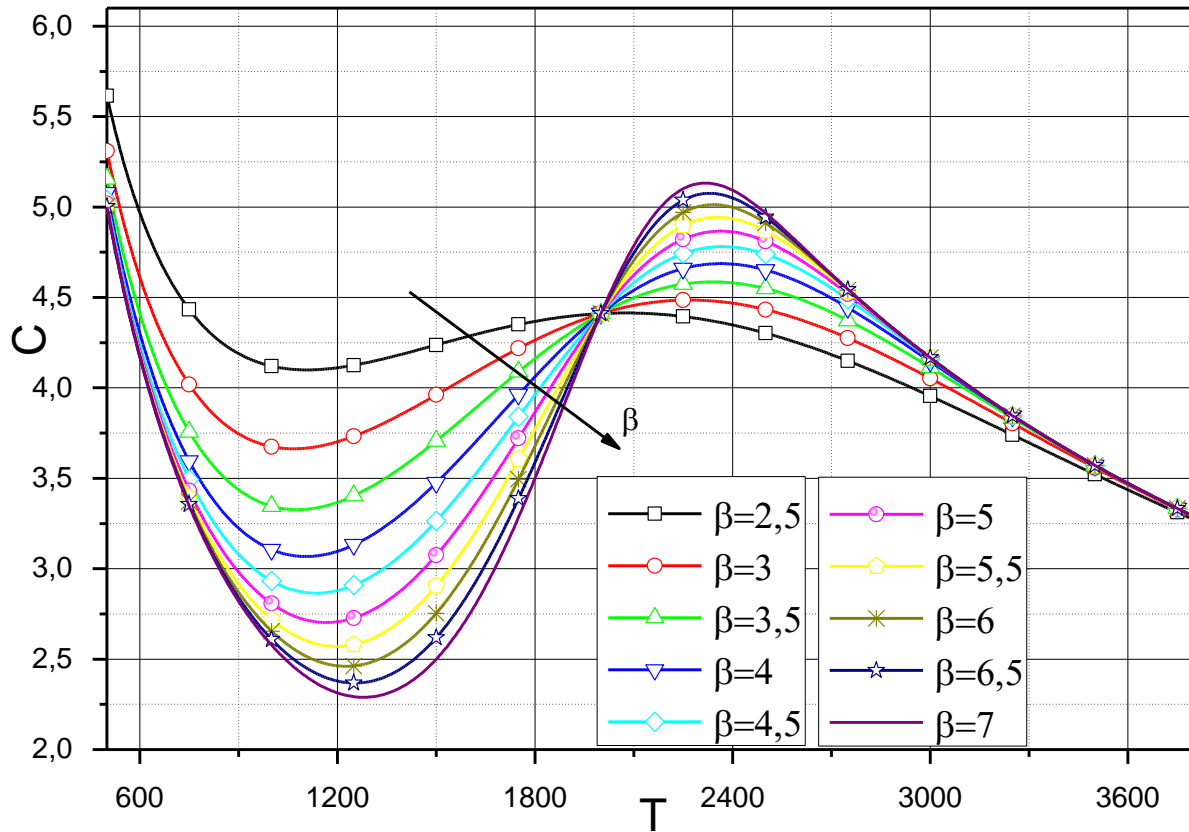


Figure 4.1 : Variation de C en fonction du temps dans le cas où $\eta=2000$ et $C_r=0.25$ pour différentes valeurs du paramètre de forme β .

Tableau 4.1 : Variation de C_m et de T_0 en fonction de β dans le cas où $\eta=2000$ et $C_r=0.25$.

β	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
C_m	4,099	3,663	3,526	3,067	2,864	2,702	2,570	2,460	2,3682	2,289
T_0	1110	1065	1080	1105	1135	1166	1195	1225	1255	1280

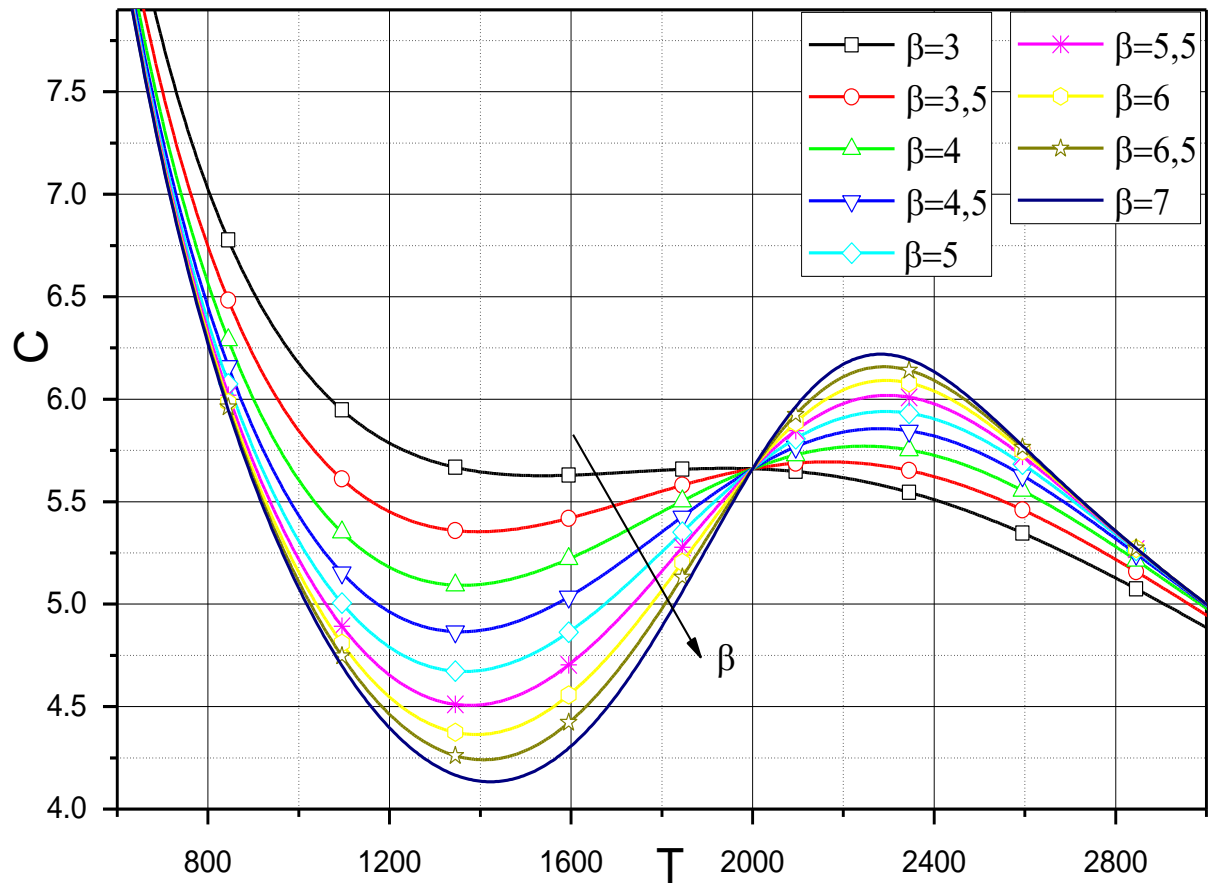


Figure 4.2 : Variation de C en fonction du temps dans le cas où $\eta=2000$ et $C_r=0.5$ pour différentes valeurs du paramètre de forme β .

Tableau 4.2 : Variation de C_m et de T_0 en fonction de β dans le cas où $\eta=2000$ et $C_r=0.5$.

β	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
$C(t)_{\min}$	5,626	5,353	5,091	4,865	4,671	4,506	4,363	4,240	4,133
T_0	1535	1395	1360	1355	1365	1375	1390	1405	1420

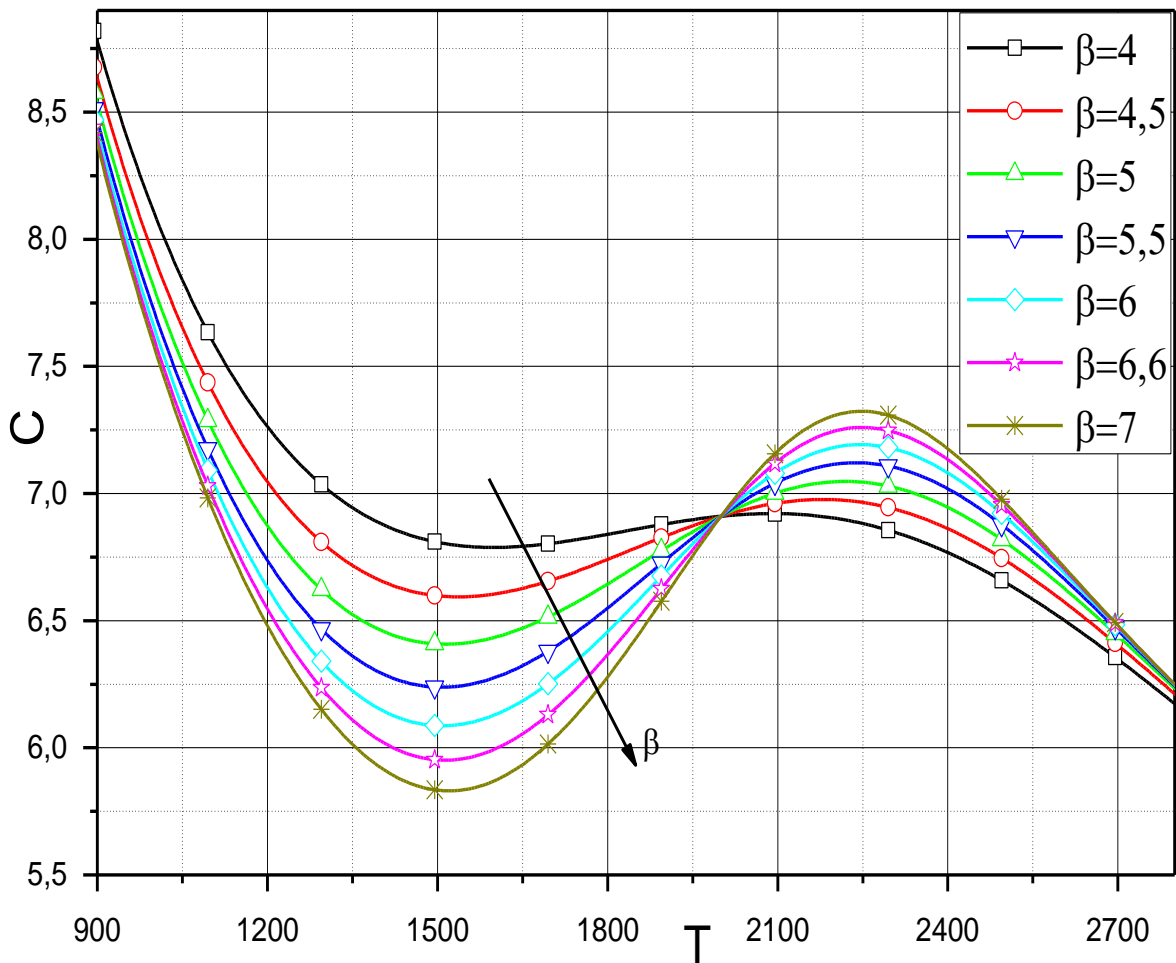


Figure 4.3 : Variation de C en fonction du temps dans le cas où $\eta=2000$ et $C_r=0.75$ pour différentes valeurs du paramètre de forme β .

Tableau 4.3 : Variation de C_m et de T_0 en fonction de β dans le cas où $\eta=2000$ et $C_r=0.75$

β	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
C_m	6,78803	6,59367	6,40752	6,23824	6,0866	5,95132	5,83048
T_0	1600	1535	1515	1505	1510	1515	1520

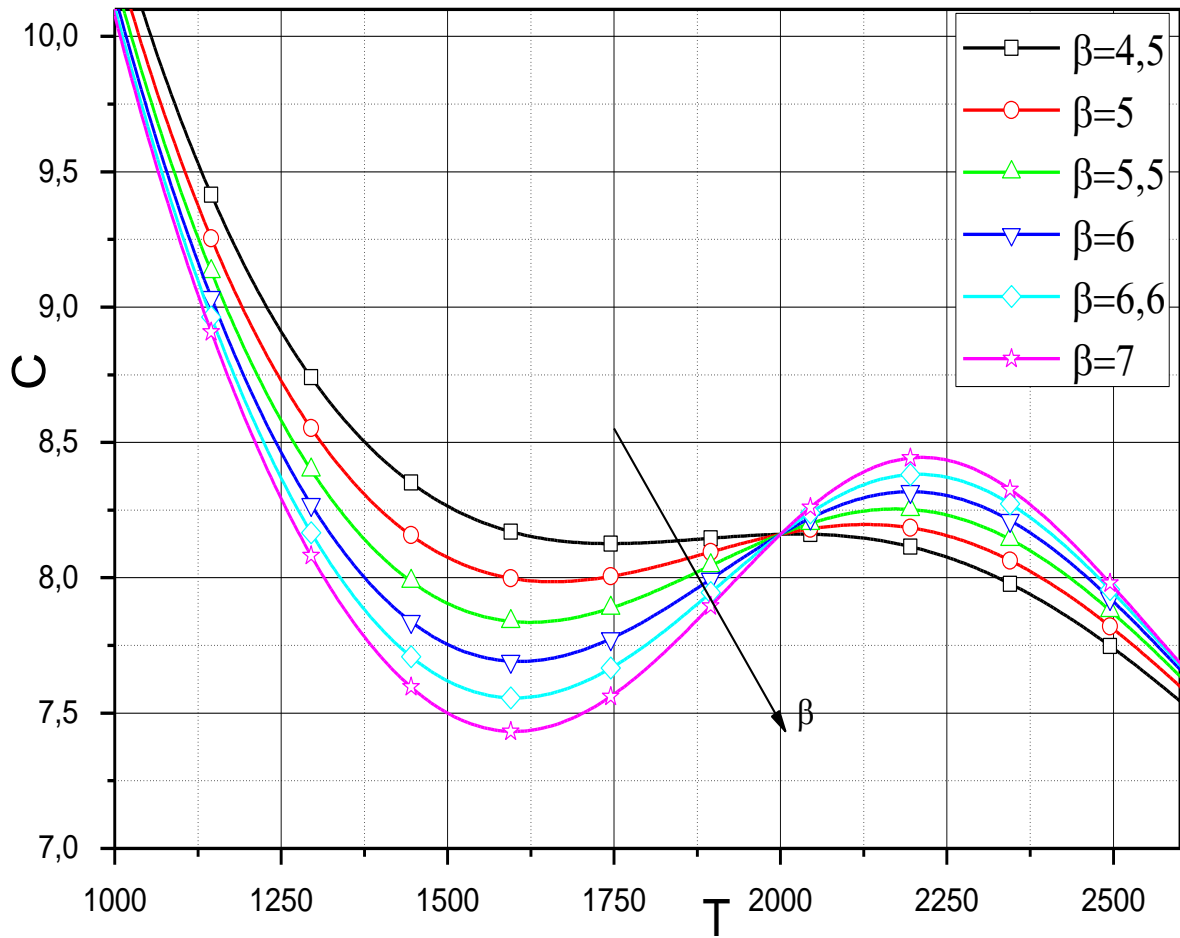


Figure 4.4 : Variation de C en fonction du temps dans le cas où $\eta=2000$ et $C_r=1$ pour différentes valeurs du paramètre de forme β .

Tableau 4.4 : Variation de C_m et de T_0 en fonction de β dans le cas où $\eta=2000$ et $C_r=1$.

β	4,5	5	5,5	6	6,5	7
C_m	8,126	7,985	7,835	7,69	7,556	7,432
T_0	1745	1660	1625	1610	1600	1600

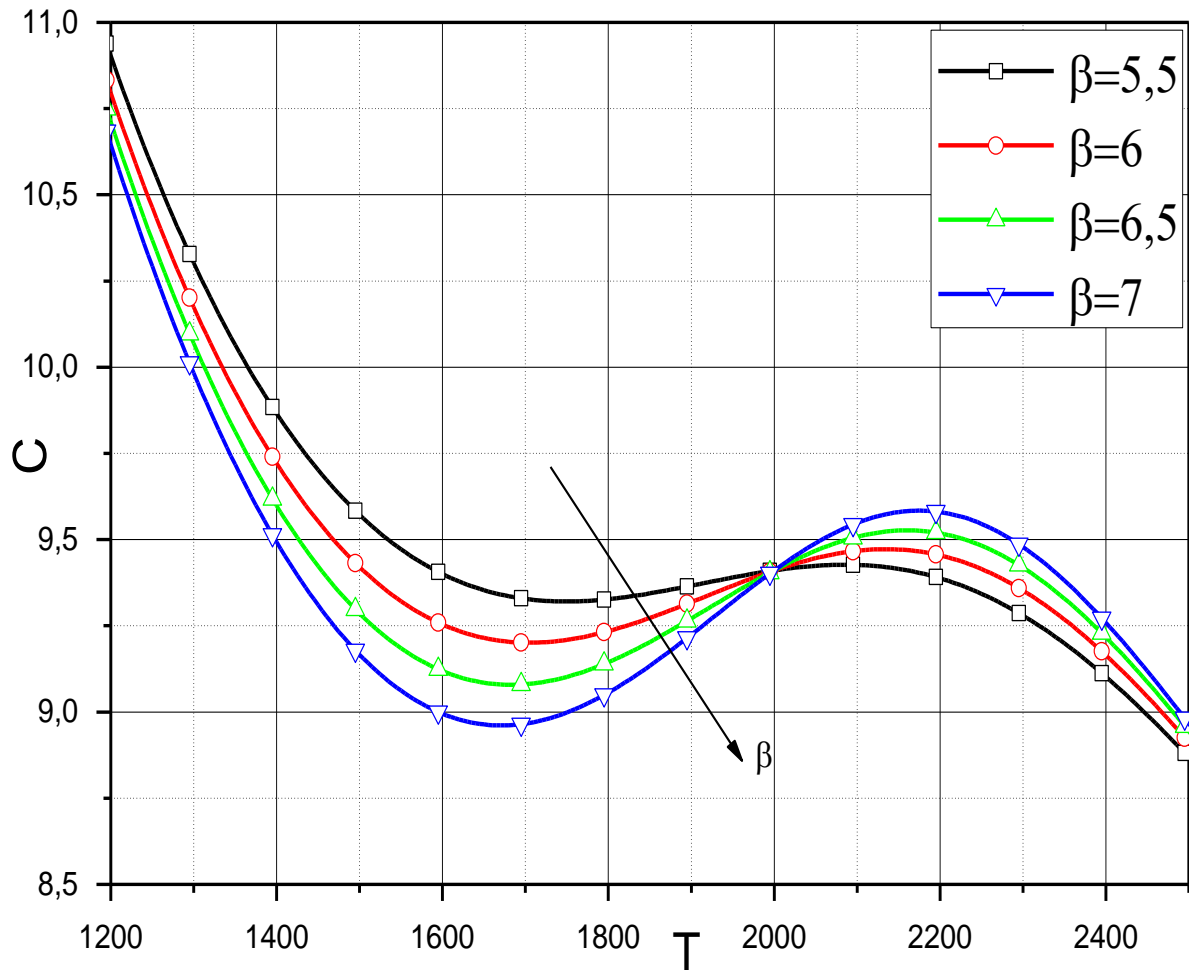


Figure 4.5: Variation de C en fonction du temps dans le cas où $\eta=2000$ et $C_r = 1.25$ pour différentes valeurs du paramètre de forme β .

Tableau 4.5 : Variation de C_m et de T_0 en fonction de β dans le cas où $\eta=2000$ et $C_r = 1,25$

β	5,5	6	6,5	7
$C(t)_{min}$	9,320	9,200	9,079	8,961
T_0	1750	1705	1685	1670

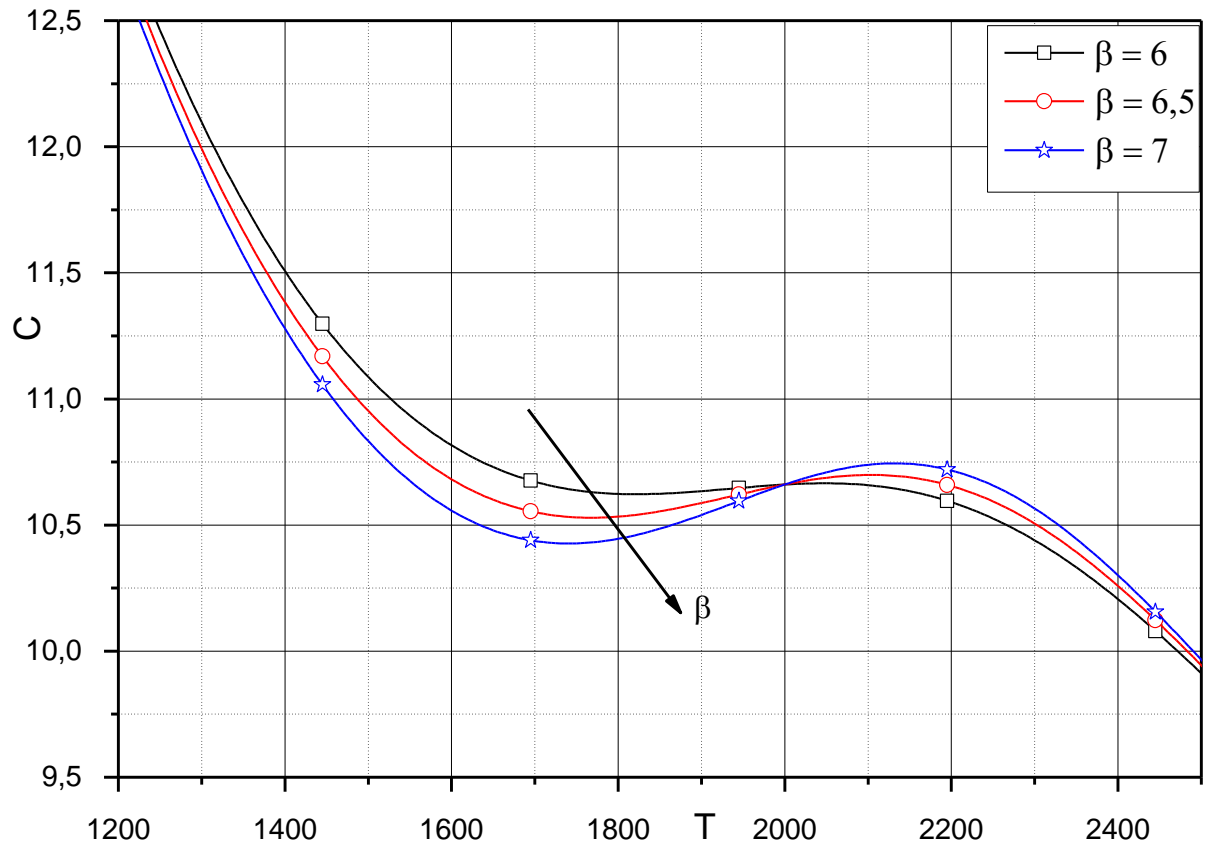


Figure 4.6: Variation de C en fonction du temps dans le cas où $\eta=2000$ et $C_r = 1.5$ pour différentes valeurs du paramètre de forme β .

Tableau 4.6 : Variation de C_m et de T_0 en fonction de β dans le cas où $\eta=2000$ et $C_r = 1.5$.

β	6	6,5	7
C_m	10,622	10,529	10,426
T_0	1820	1770	1740

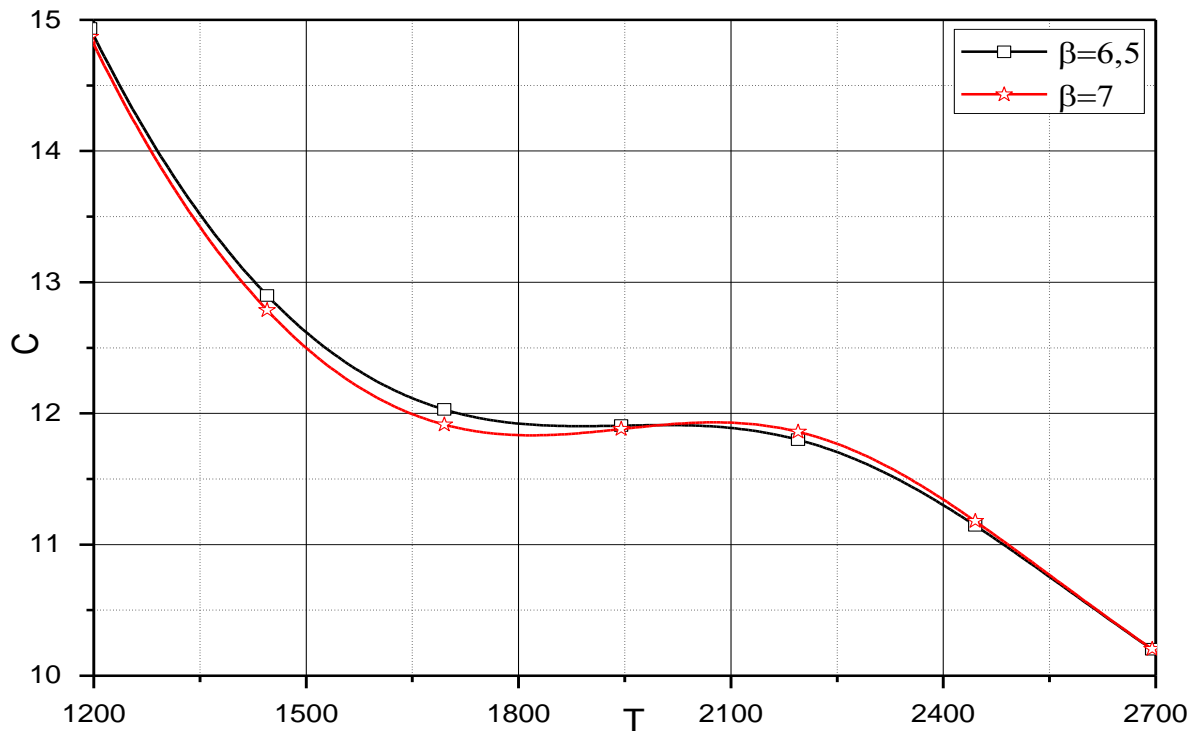


Figure 4.7: Variation de C en fonction du temps dans le cas où $\eta=2000$ et $C_r =1.75$ pour différentes valeurs du paramètre de forme β .

Tableau 4.7: Variation de C_m et de T_0 en fonction de β dans le cas où $\eta=2000$ et $C_r =1.75$

β	6,5	7
C_m	11,902	11,832
T_0	1890	1820

4.2.2 Effet du paramètre d'échelle η

La figure 4.8 représente la variation de cout total moyen C en fonction du temps pour le cas de $C_r =0.5$ et pour différentes valeurs du paramètre d'échelle η . Nous constatons que C diminue avec l'augmentation des valeurs de η , alors que la période optimal de coût de remplacement T_0 augmente. Ainsi pour $\eta=1500$; $C_m=6.2$ et $T_0= 1000$, tandis que pour $\eta=5000$; $C_m=1.9$ et $T_0=3500$ (tableau 4.8).

Sachant que le paramètre d'échelle η représente une valeur approchée de MTBF, cette évolution de C est tout à fait logique. En effet, pour un type de pièce ayant une MTBF relativement faible, sa durée d'exploitation est aussi petite et C est relativement élevé. Alors que pour une pièce qui a une MTBF relativement élevée, sa durée d'exploitation est grande et C est minimal.

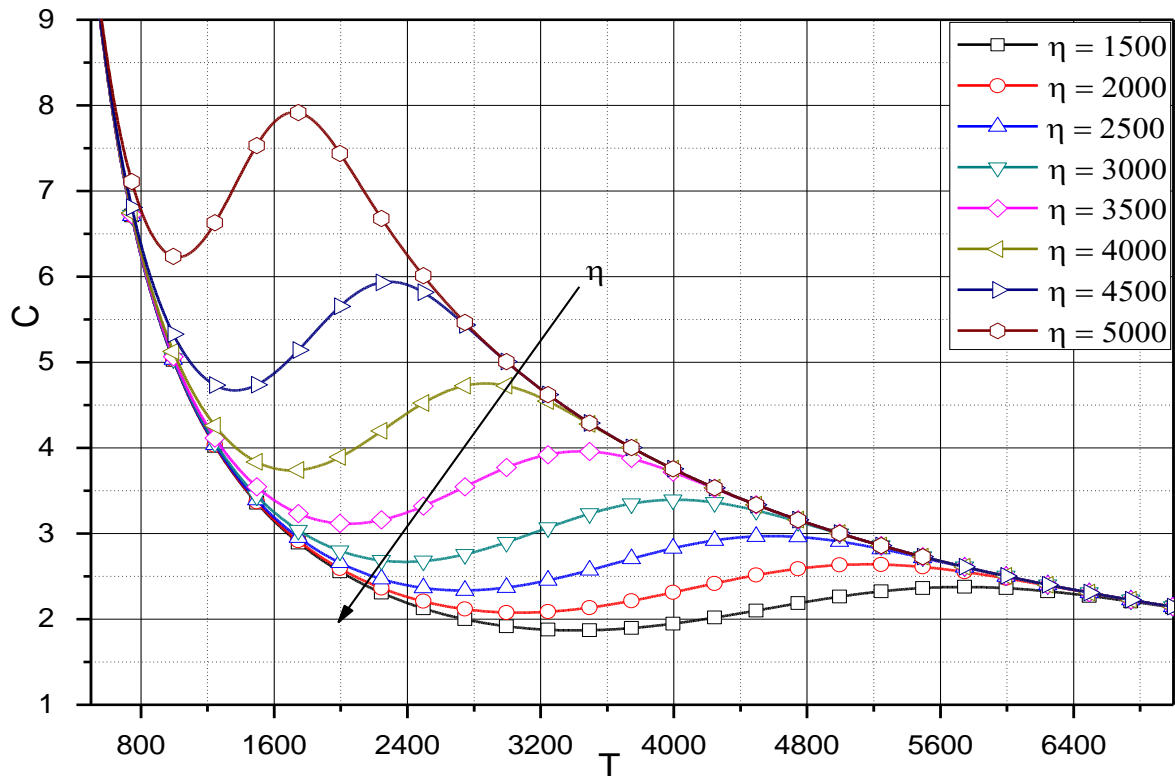


Figure 4.8 : Variation de C en fonction du temps dans le cas où $\beta=5$ et $C_r=0.5$ pour différentes valeurs du paramètre d'échelle η .

Tableau 4.8 : Variation de C_m et de T_0 en fonction de η dans le cas où $\beta=5$ et $C_r = 0.5$

η	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000
C_m	6,228	4,671	3,737	3,114	2,669	2,335	2,076	1,868
T_0	1025	1365	1705	2045	2390	2725	3070	3410

4.2.3 Effet de l'augmentation des coûts de maintenance C_p et C_f

La figure 4.9 représente la variation de cout total moyen C en fonction du temps pour le cas de $C'_p = 10C_p$ et $C'_f = 10C_f$ pour différentes valeurs du paramètre de forme β . Nous constatons que l'effet de cette augmentation de C_p et C_f sur C se traduit par l'élévation de ce dernier de la même valeur ; c'est-à-dire dix fois la valeur de C obtenue dans le cas de la figure 4.1 (tableau 4.9). Ainsi par exemple pour $\beta=3$; $C_m=56,2$ et $T_0=1535h$ (l'augmentation de C_p et $0C_f$ n'a pas d'influence sur T_0) ([93] ; [94]).

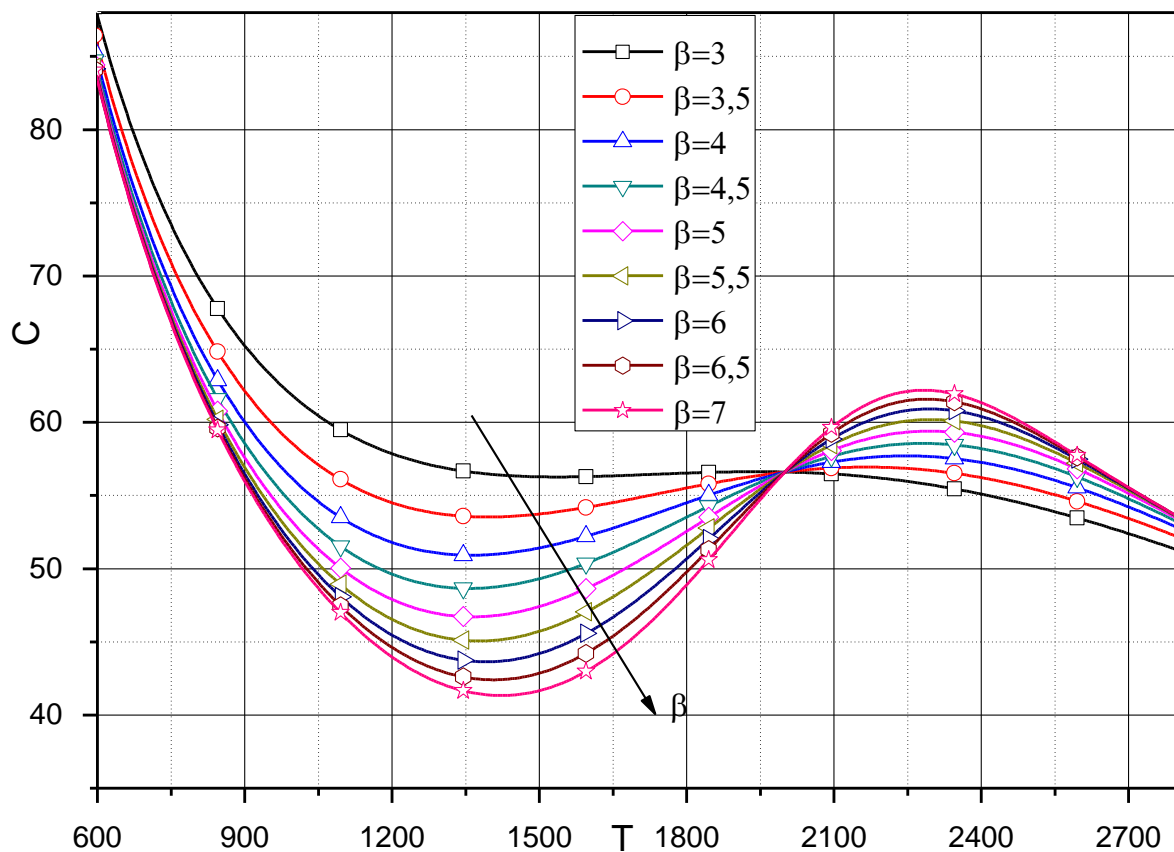


Figure 4.9 : Variation de C en fonction du temps dans le cas où $\eta=2000$; $C'_p = 10C_p$ et $C'_f = 10C_f$ et pour différentes valeurs de forme β .

Tableau 4.9: Variation de C_m et de T_0 en fonction de β dans le cas où $\eta=2000$; $C'_p = 10C_p$ et $C'_f = 10C_f$

β	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
C_m	56,2677	53,5329	50,9192	48,650	46,713	45,06	43,638	42,408	41,333
T_0	1535	1395	1360	1355	1365	1375	1390	1405	1420

4.3 Cas où l'âge de chaque pièce est connu et on change la pièce dès que son âge atteint la valeur T_0

Dans ce chapitre, Nous présentons, alors, les résultats obtenus par la résolution numérique de l'équation différentielle (3.40) qui exprime le coût total moyen par unité de temps et par pièce dans le cas de la loi de Weibull avec $\gamma=0$.

Le coût moyen qu'on cherche devrait se trouver dans un intervalle, nous nous sommes donc intéressés au comportement de la variable coût aux alentours de sa valeur optimale. Ainsi, on pourra déterminer si la période optimale fait partie d'un intervalle de temps pour lequel le coût est approximativement uniforme.

4.3.1 Validation du code calcul

Les résultats obtenus sont validés, en premier lieu, par confrontation avec l'étude analytique suscitée.

Une autre validation a été effectuée par comparaison aux résultats analytiques disponibles dans la littérature [95], dans le cas de $\eta=50$, $C_r=0,1$ et pour différentes valeurs de β .

Nous constatons que les résultats obtenus numériquement par nos calculs (figs. 4.10a et 4.11a) sont en très bonne concordance avec ceux obtenus analytiquement par Manzini *et al.* [95] (figs. 4.10b et 4.11b) à l'exception des cas où les valeurs de $\beta < 1$, principalement pour $\beta=0,2$. À cet effet, nous rappelons, d'une part, que ce cas ($\beta < 1$) n'a pas d'intérêt pratique, puisque le matériel est en période jeunesse, donc, il n'y a pas des changements préventifs à effectuer dans cette période de la durée de vie du matériel. D'autre part, nous pensons que le résultat obtenu, dans le cas de $\beta=0,2$, est acceptable et raisonnable (C tend vers zéro), car le matériel est en état neuf; donc le coût des remplacements préventifs sont pratiquement inexistant.

Par ailleurs les vérifications analytiques réalisées en utilisant l'équation (3.53) :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \frac{C_f}{\eta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}$$

grandes valeurs, donnent les résultats suivants (tableau 4.10).

La confrontation des résultats obtenus analytiquement avec ceux obtenus numériquement confirment la validité de notre code numérique. De même ces résultats sont en bonne concordance avec les résultats de Manzini *et al.* [95] à l'exception de ceux des valeurs obtenues pour le cas de ($\beta < 1$) qui nécessite, à notre avis, d'être revérifiées et réexpliquées.

Tableau 4.10 : Comparaison des valeurs limites de C(t) en fonction de β dans le cas où $\eta=50h$, $C_f=1000$ D.A et $T = 200h$.

β	$\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$ Annexe 1	C(t)		
		Résultats analytiques	Résultats numériques	Résultats de Manzini <i>et al.</i> [95]
0,2	120	0,16	0,22	≈ 11
0,5	2	10	10,15	≈ 15
1	1	20	20,03	≈ 20
2	0,8862	22,56	22,57	$\approx 22,5$
3	0,8930	22,31	22,39	$\approx 22,4$
4	0,9064	22,06	22,06	$\approx 22,3$

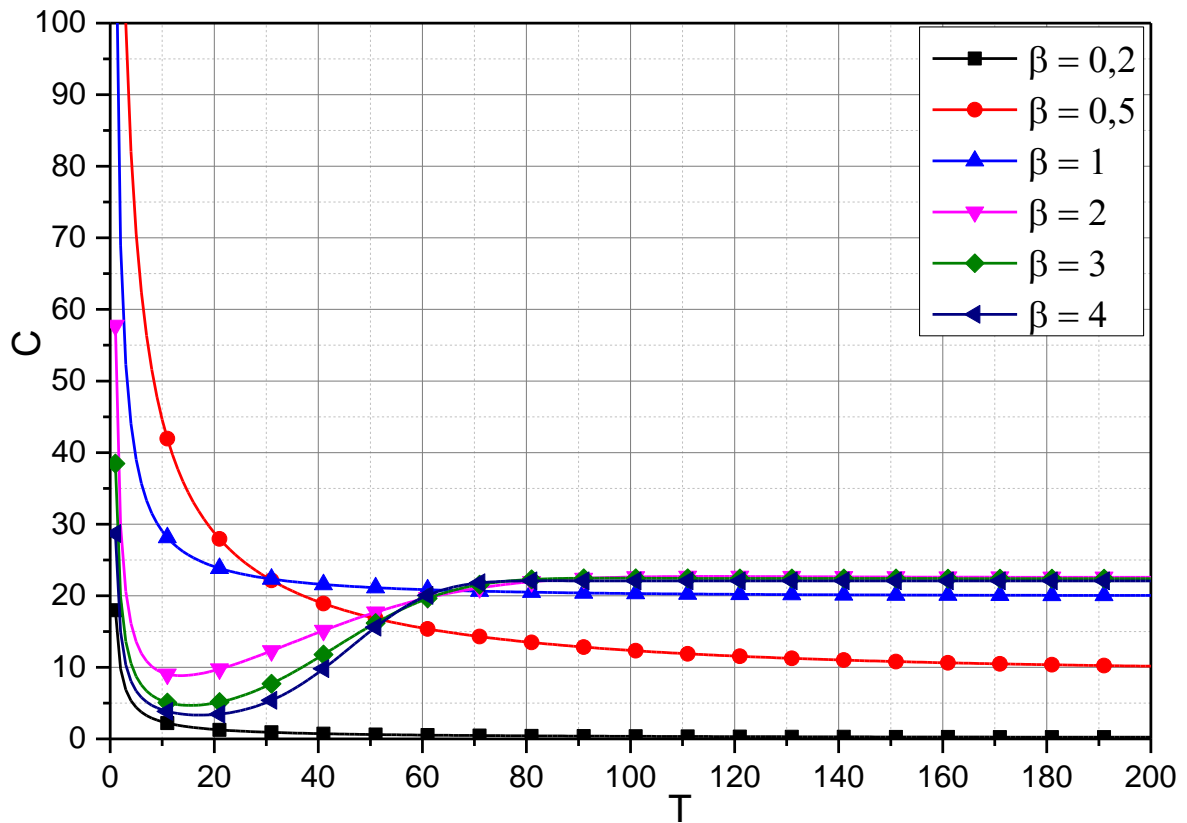


Figure 4.10a : Variation de C en fonction du temps pour différentes valeurs de β : $\eta=50$ et $C_r=0.1$; $C = [0, 100]$ (Présente étude).

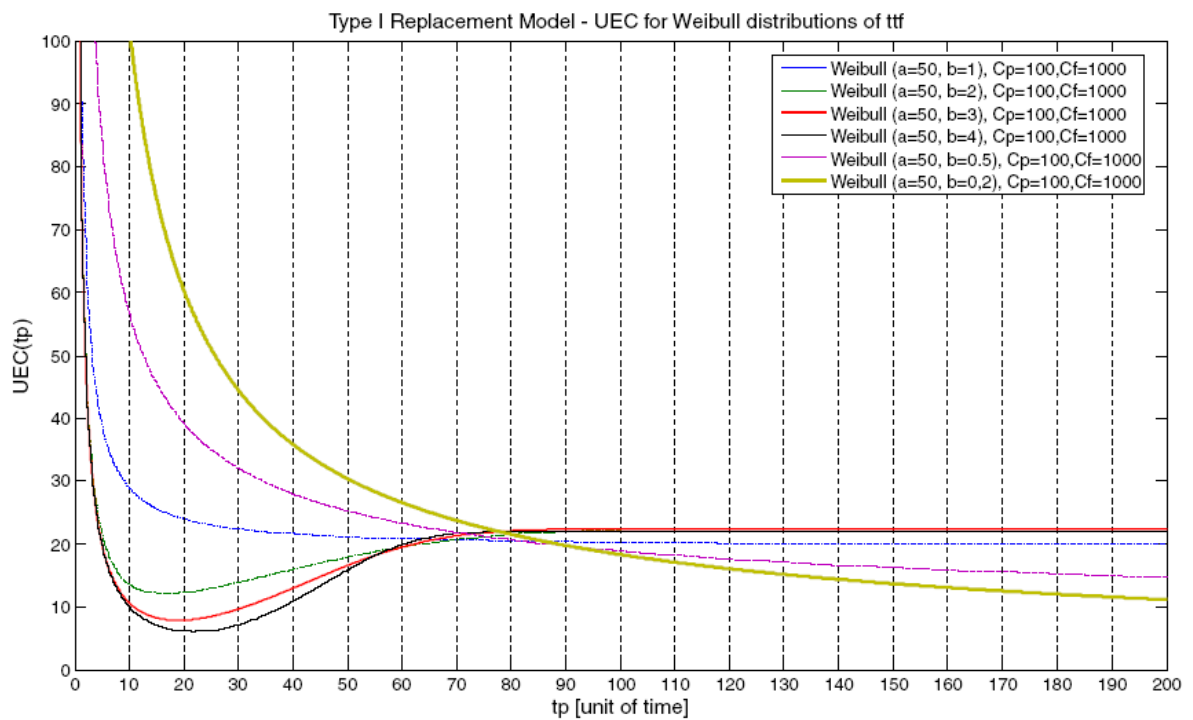


Figure 4.10b : Variation de C en fonction du temps pour différentes valeurs de β : $\eta=50$ et $C_r=0.1$; $C = [0, 100]$ (Manzini *et al.* [95]).

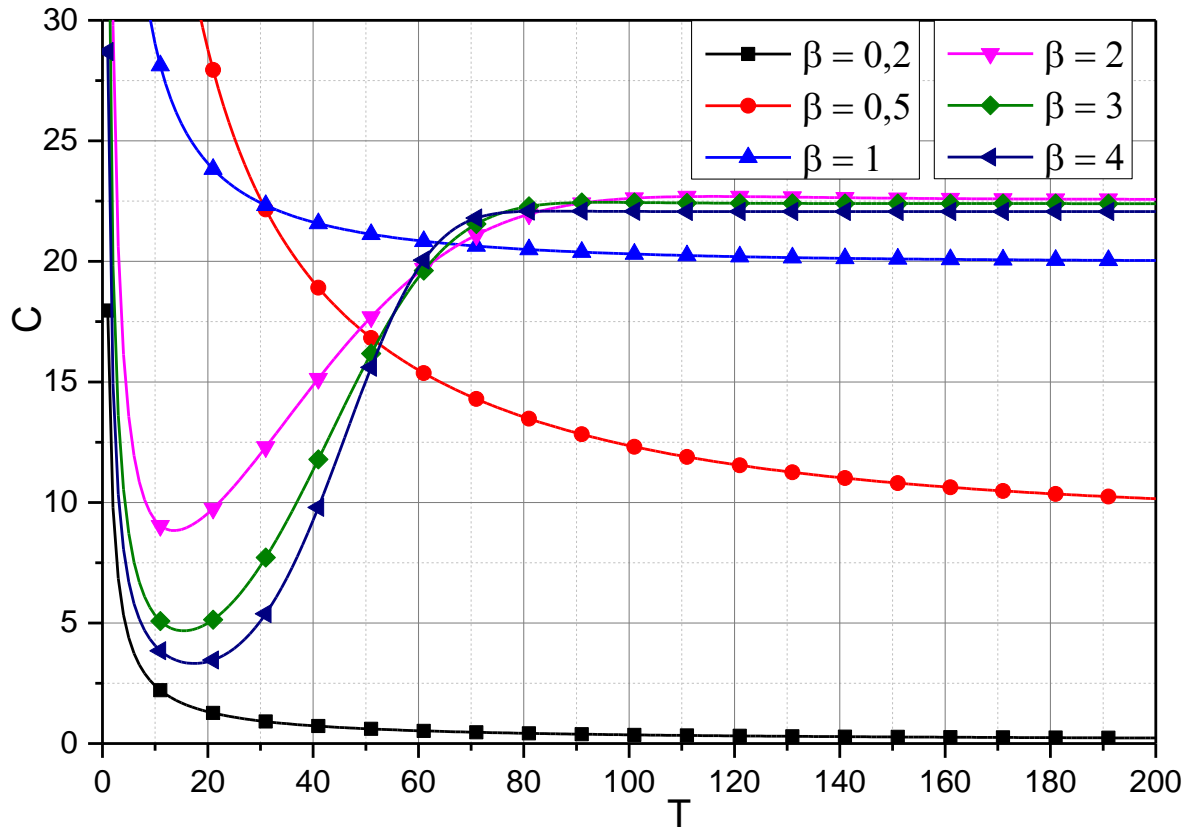


Figure 4.11a : Variation de C en fonction du temps pour différentes valeurs de β : $\eta=50$ et $C_r=0.1$; $C = [0, 30]$ (Présente étude).

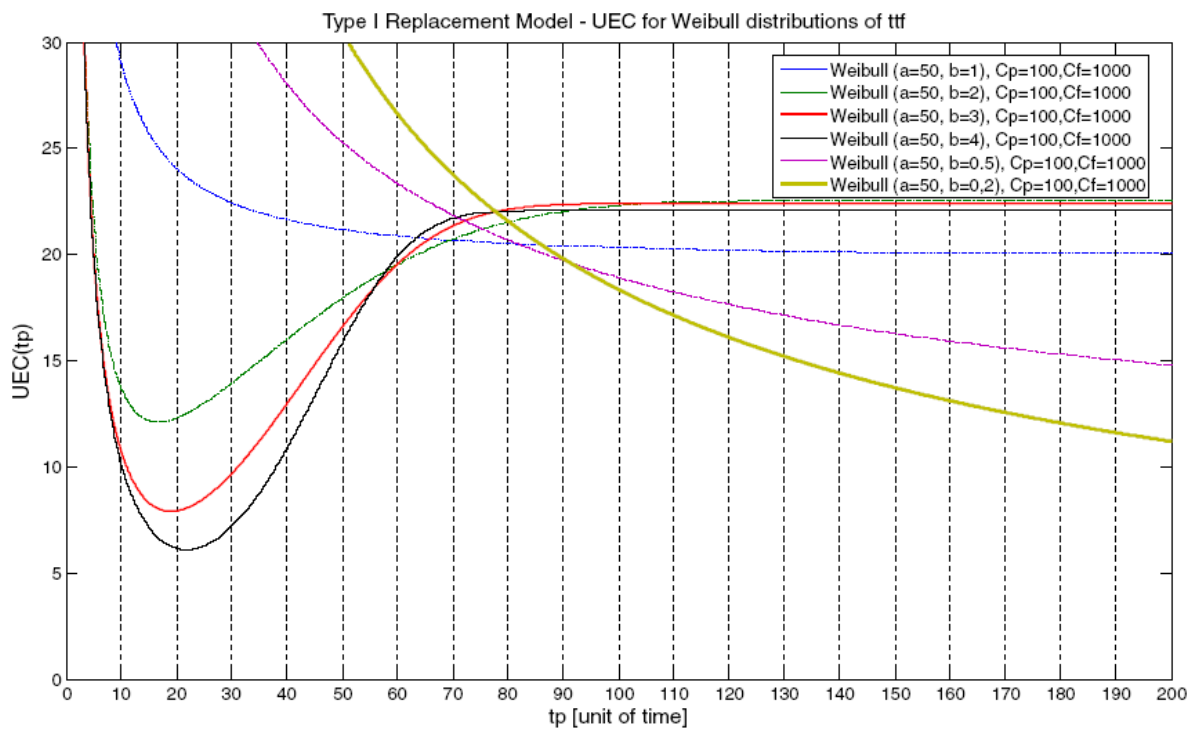


Figure 4.11b : Variation de C en fonction du temps pour différentes valeurs de β : $\eta=50$ et $C_r=0.1$; $C = [0, 30]$ (Manzini *et al.* [95]).

4.3.2 Effet du rapport des coûts

En respectant la condition de $0 < C_r < 1$ et avec $\beta > 1$, Nous avons varié le rapport des coûts de 0.25 à 0.75, c'est-à-dire $C_r = 0.25$; 0.5 et 0.75, correspondant à $C_f = 40000$ D.A et $C_p = 10000$; 20000 et 30000 D.A, respectivement.

L'observation des figures 4.12 a et b représentant le coût total moyen par unité de temps et par pièce C en fonction du temps de remplacement préventif T dans le cas où $\eta=2000$ et $C_r=0.25$ pour différentes valeurs du paramètre de forme β montre qu'autour de l'optimum T_0 le coût semble varier très peu. Dans ce cas, nous constatons la présence d'une valeur minimale de C correspondant à la période la plus appropriée pour effectuer l'opération de MP. Ce coût est sensiblement dépendant de la valeur du paramètre de forme β . Il varie de 5.64 pour $\beta=6.9$ à 14.66 pour $\beta=2$ comme le montre le tableau 4.11.

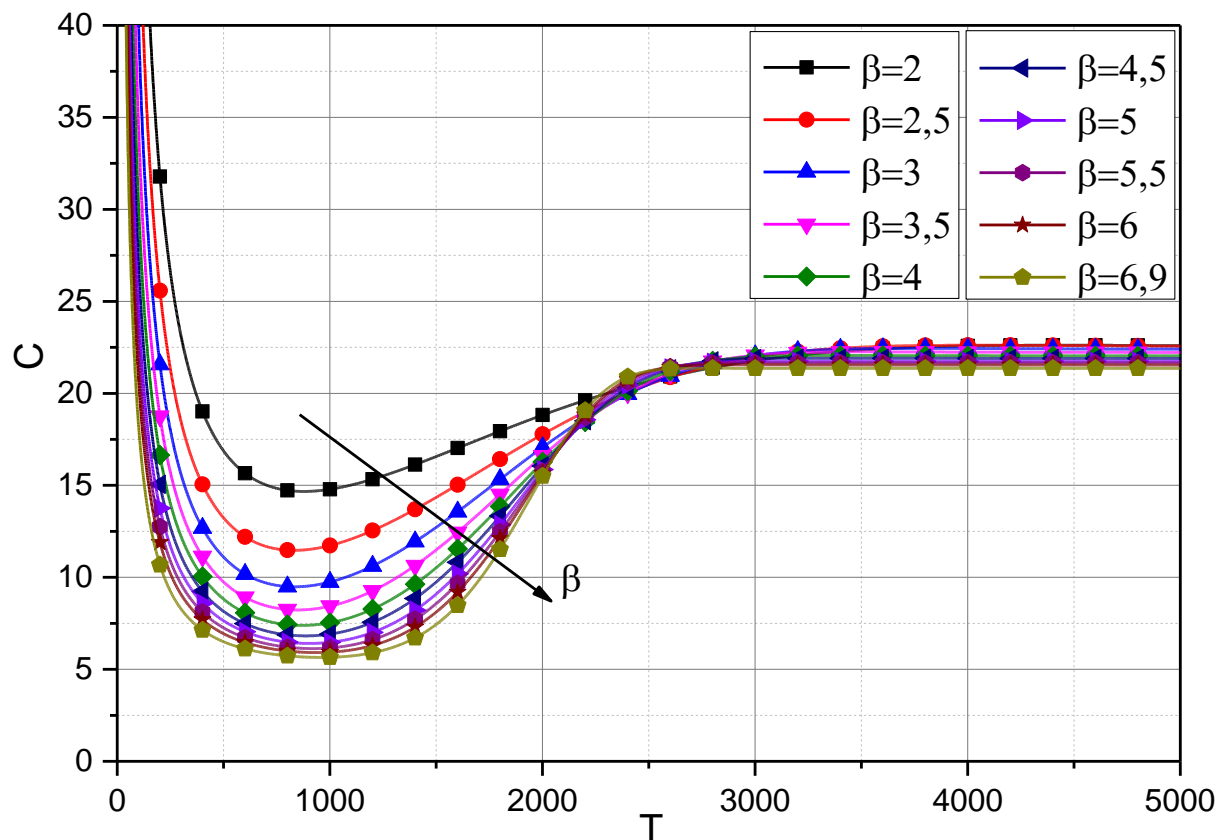


Figure 4.12a : Variation de C en fonction du temps pour différentes valeurs de β :
 $\eta=2000$ et $C_r=0,25$; $C = [0, 40]$; $T = [0, 5000]$.

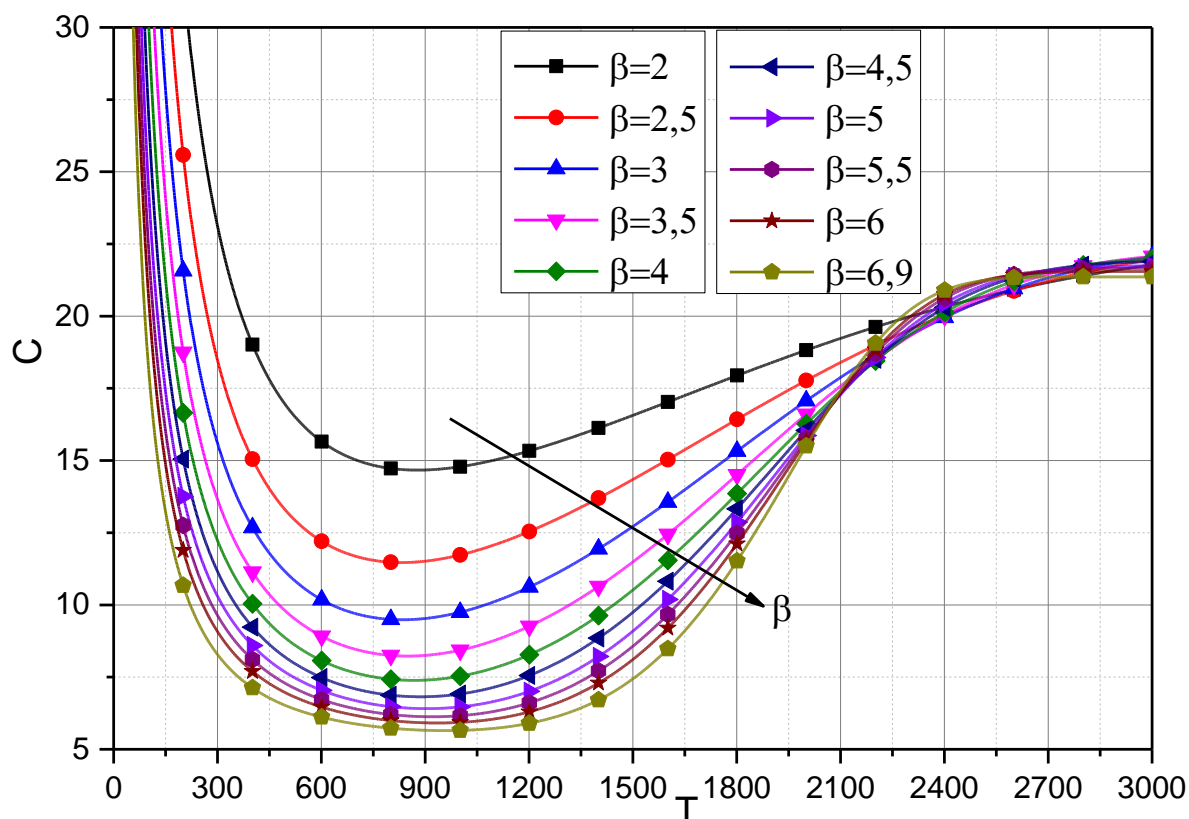


Figure 4.12b : Variation de C en fonction du temps pour différentes valeurs de β : $\eta=2000$ et $C_r=0,25$; $C = [5, 30]$; $T = [0, 3000]$.

Tableau 4.11 : Variation de C_m et T_0 en fonction de β dans le cas où $\eta=2000$ et $C_r=0,25$.

β	C_m	T_0
2	14.668820 (15.002180 ÷ 16.002720)	878 (704 ÷ 1372)
2,5	11.468100 (12.003860 ÷ 13.002750)	832 (631 ÷ 1286)
3	9.486743 (10.000830 ÷ 11.000220)	834 (630 ÷ 1265)
3,5	8.228140 (9.006526 ÷ 10.000500)	849 (587 ÷ 1317)
4	7.387652 (8.003651 ÷ 9.002202)	868 (613 ÷ 1319)
4,5	6.818959 (7.000202 ÷ 8.003901)	887 (732 ÷ 1283)
5	6.408204 (7.001410 ÷ 8.006335)	904 (610 ÷ 1374)
5,5	6.126709 (7.003300 ÷ 8.000292)	921 (542 ÷ 1437)
6	5.911488 (6.001067 ÷ 7.001501)	935 (796 ÷ 1356)
6,9	5.647247 (6.002068 ÷ 7.002192)	958 (642 ÷ 1445)

Les figures 4.13 a et b et le tableau 4.12 représentent la variation du coût total moyen par unité de temps et par pièce C en fonction du temps dans le cas où $\eta=2000$ et $C_r=0.5$ pour différentes valeurs du paramètre de forme β . Pour $\beta = 2$, on constate que la période de MP commence au delà de $T_0=947$ h où C_m est minimal (égal à 22 DA/h) et il constituera de l'être à partir de ce moment jusqu'à $T_0=1890$ h où C_m est minimal (égal à 21 DA/h). Alors que la périodicité optimale correspondant à la valeur minimale de C ($C=20,62$ DA/h) est égale à $T_0=1459$ h. Tandis que, pour les autres valeurs de β , la valeur du coût minimal C_m correspondant à la période de MP varie de 11.09 DA/h pour $\beta=6.9$ à 18,02 DA/h pour $\beta= 2.5$, et la période de remplacement optimal correspondant varie de 1076 h pour $\beta=6.9$ à 1208 h pour $\beta=2.5$. De manière analogue, on constate que C_m et T_0 varient proportionnellement les uns par rapport aux autres en fonction des valeurs de β . Par exemple, dans le cas de $\beta = 3$, $C_m = 15,97$ DA/h et $T_0=1125$ h. Alors que pour dans le cas de $\beta = 6$, $C_m = 11,48$ DA/h et $T_0=1071$ h.

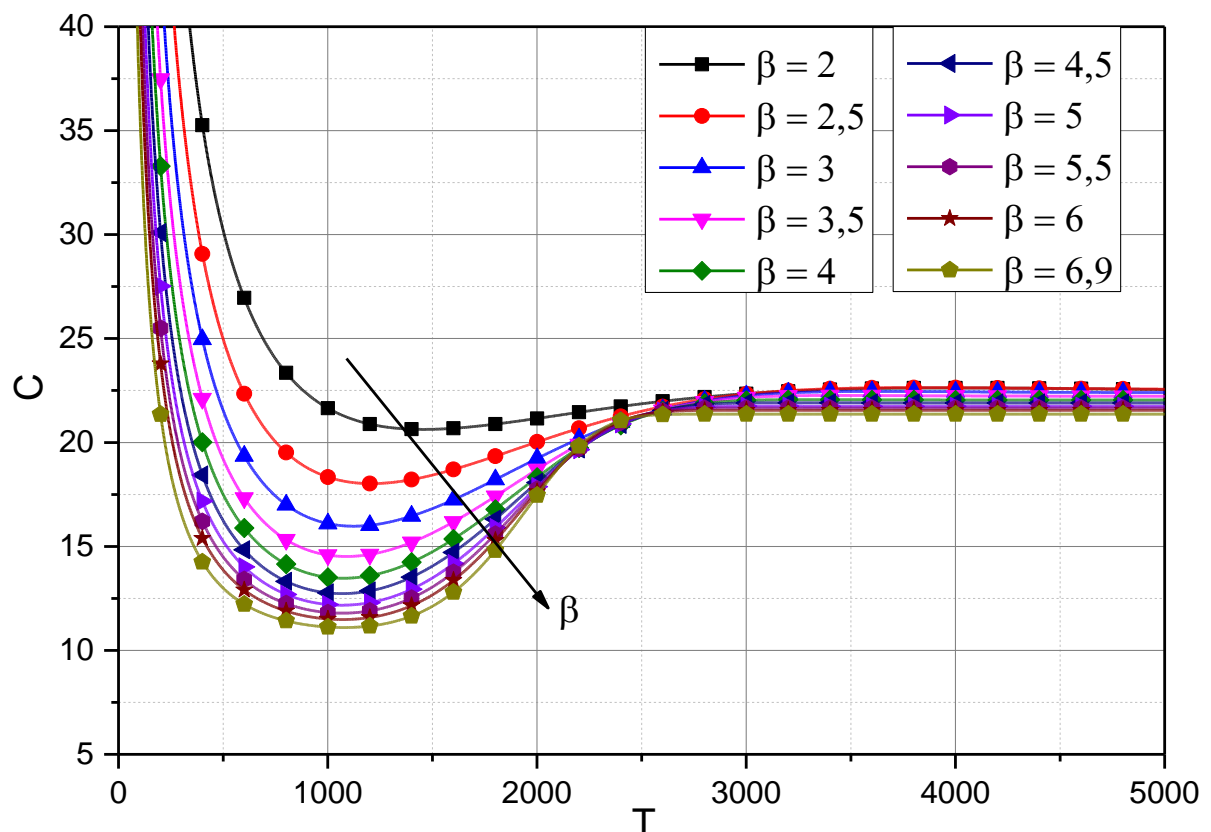


Figure 4.13a : Variation de C en fonction du temps pour différentes valeurs de β :
 $\eta=2000$ et $C_r=0,5$; $C = [5, 40]$; $T = [0, 5000]$.

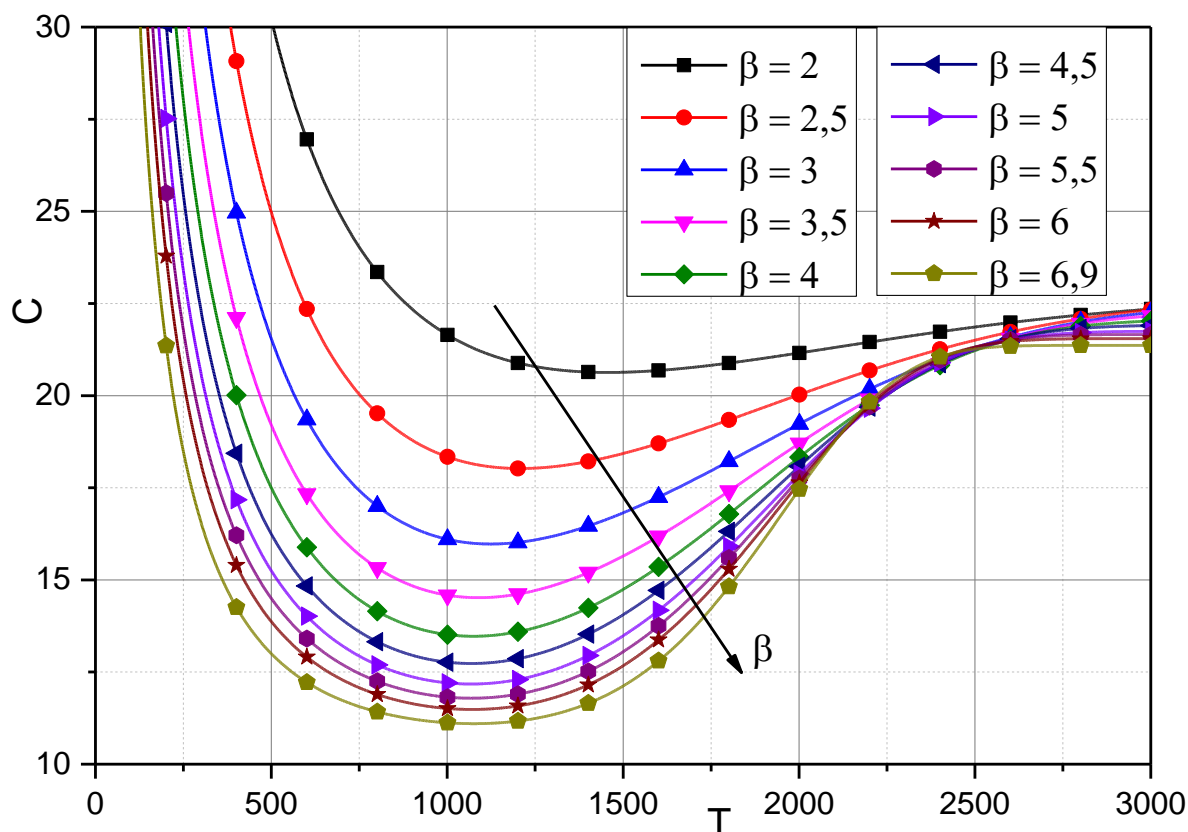


Figure 4.13b : Variation de C en fonction du temps pour différentes valeurs de β : $\eta=2000$ et $C_r=0,5$; $C = [10, 30]$; $T = [0, 3000]$.

Tableau 4.12 : Variation de C_m et de T_0 en fonction de β dans le cas où $\eta=2000$ et $C_r = 0,5$.

β	C_m	T_0
2	20.629220 (22.003040 ÷ 21.000220)	1459 (947 ÷ 1890)
2,5	18.022820 (19.000020 ÷ 19.001340)	1208 (867 ÷ 1698)
3	15.973980 (17.004500 ÷ 17.003680)	1125 (801 ÷ 1545)
3,5	14.517850 (16.002890 ÷ 16.004740)	1089 (713 ÷ 1569)
4	13.470820 (15.011600 ÷ 15.003450)	1075 (681 ÷ 1645)
4,5	12.732100 (14.004670 ÷ 15.001940)	1069 (690 ÷ 1640)
5	12.174540 (14.005950 ÷ 15.004380)	1067 (602 ÷ 1703)
5,5	11.790060 (13.002390 ÷ 14.002460)	1068 (654 ÷ 1632)
6	11.485150 (13.007960 ÷ 14.007640)	1071 (588 ÷ 1675)
6,9	11.099430 (12.004790 ÷ 12.000570)	1076 (640 ÷ 1478)

D'après les figures 4.14 a et b et le tableau 4.13, qui représentent la variation du coût total moyen par unité de temps et par pièce C en fonction du temps dans le cas où $\eta=2000$ et $C_r=0.75$ pour différentes valeurs du paramètre de forme β , nous constatons une augmentation proportionnelle de C_m et T_0 pour toutes les valeurs prise par β . Ceci évidemment peut s'expliquer par l'augmentations du C_f , ce qui implique plus d'action de maintenance corrective et se reflète sur l'augmentation de la périodicité optimale remplacement en préventif T_0 . Ainsi, pour $\beta=2$, on constate que la période de MP commence au delà de $T_0 \geq 2500$ h où C_m est minimal (égal à 22,61 DA/h) et il constituera de l'être à partir de ce moment. Tandis que, pour les autres valeurs de β , la valeur du coût minimal C_m correspondant à la période de MP varie de 16,43 DA/h pour $\beta=6.9$ à 22,25 DA/h pour $\beta=2.5$, et la période de remplacement optimal correspondant varie de 1203 h pour $\beta=6.9$ à 11852 h pour $\beta=2.5$. De manière analogue, on constate que C_m et T_0 varient proportionnellement les uns par rapport aux autres en fonction des valeurs de β . Par exemple, dans le cas de $\beta=3.5$, $C_m = 19.75$ DA/h et $T_0=1399$ h. Alors que pour dans le cas de $\beta=6$, $C_m = 16.86$ DA/h et $T_0=1221$ h.

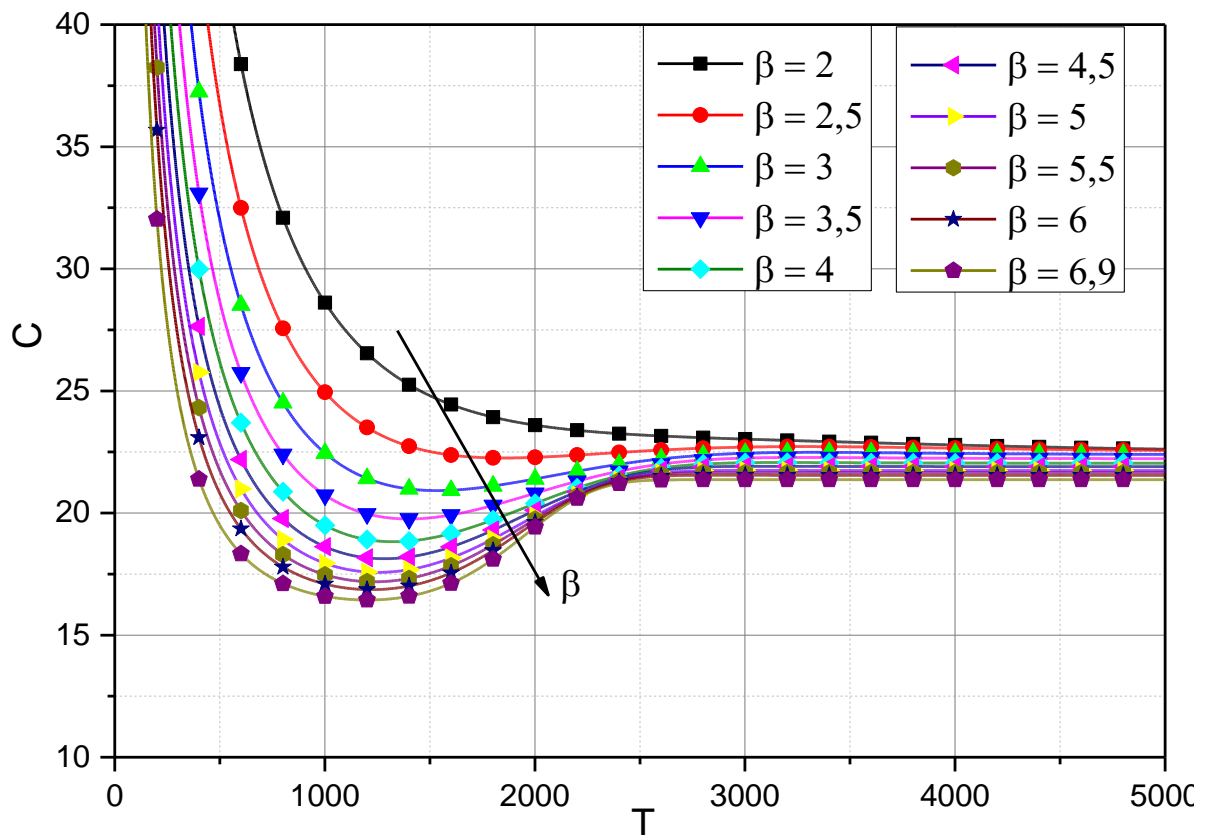


Figure 4.14a : Variation de C en fonction du temps pour différentes valeurs de β :

$\eta=2000$ et $C_r=0,75$; $C = [10, 40]$; $T = [0, 5000]$.

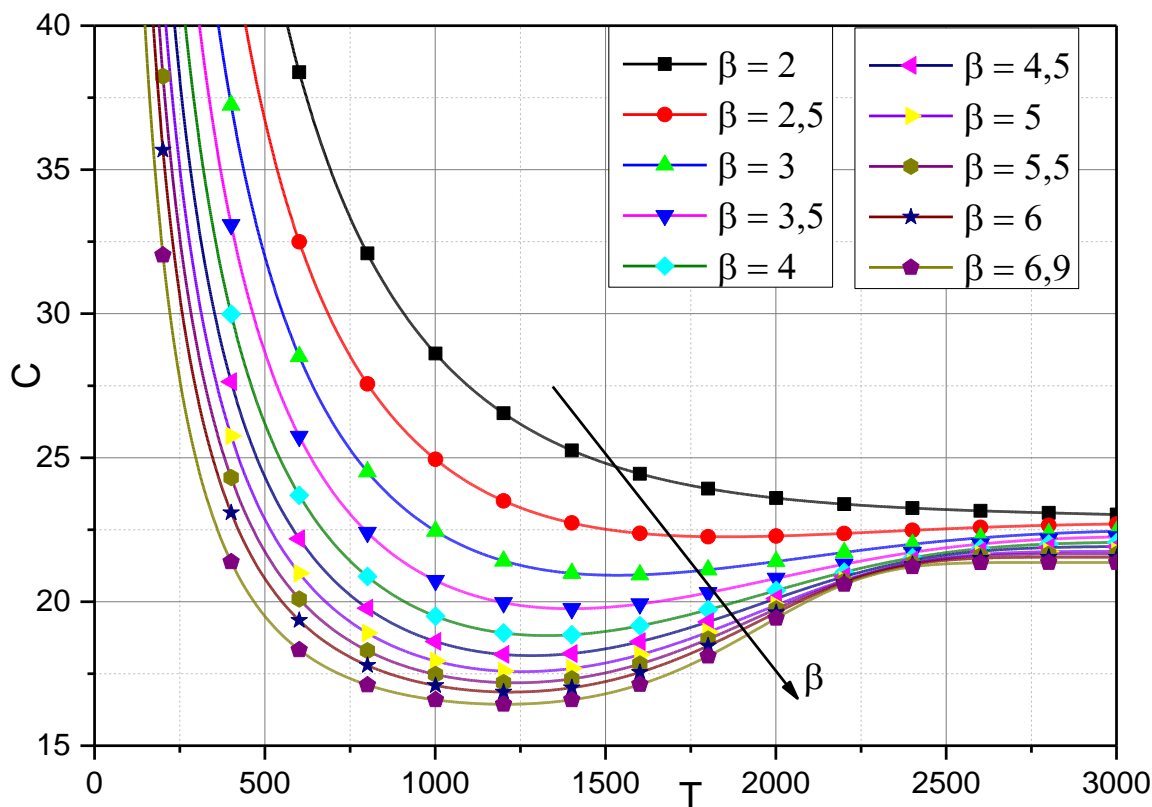


Figure 4.14b : Variation de C en fonction du temps pour différentes valeurs de β : $\eta=2000$ et $C_r=0,75$; $C = [15, 40]$; $T = [0, 3000]$.

Tableau 4.13 : Variation de C_m et T_0 en fonction de β dans le cas où $\eta=2000$ et $C_r = 0,75$.

β	C_m	T_0
2	22.613460	≥ 2500
2,5	22.253220 (23.002090 ÷ 22.565790)	1852 (1315 ÷ 5000)
3	20.918790 (22.000920 ÷ 22.001200)	1534 (1091 ÷ 2405)
3,5	19.757530 (21.001380 ÷ 21.002120)	1399 (958 ÷ 2077)
4	18.824260 (20.000700 ÷ 20.000070)	1328 (910 ÷ 1886)
4,5	18.128540 (19.003630 ÷ 19.001280)	1283 (916 ÷ 1721)
5	17.570580 (18.003040 ÷ 18.500230)	1255 (982 ÷ 1696)
5,5	17.184550 (18.000610 ÷ 18.001050)	1236 (856 ÷ 1645)
6	16.862360 (18.005050 ÷ 17.501050)	1221 (762 ÷ 1588)
6,9	16.438390 (17.501090 ÷ 17.003180)	1203 (717 ÷ 1567)

4.3.3 Effet du paramètre d'échelle η

Étant donné que les valeurs prises par le paramètre d'échelle η , on doit s'attendre à ce que T_0 évolue d'une manière proportionnelle avec η . Ainsi, les figures 4.15 a et b et le tableau 4.14 représentent la variation du coût total moyen C en fonction du temps pour le cas de $\beta=5$, $C_r=0,75$ et pour différentes valeurs du paramètre d'échelle η . Nous constatons que C diminue avec l'augmentation des valeurs de η , alors que la période optimale de remplacement T_0 augmente. Ainsi pour $\eta = 2000$ h ; $C_m=17,57$ DA/h et $T_0=1254$ h, tandis que pour $\eta = 5000$; $C_m=7,02$ D.A/h et $T_0=3135$ h.

Sachant que le paramètre d'échelle η représente une valeur approchée de MTBF, cette évolution de C est tout à fait logique. En effet, pour un type de pièce ayant une MTBF relativement faible, sa durée d'exploitation est aussi petite et C_m est relativement élevé. Alors que pour une pièce qui a une MTBF relativement élevée, sa durée d'exploitation est grande et C est relativement plus faible ([96] ; [97]).

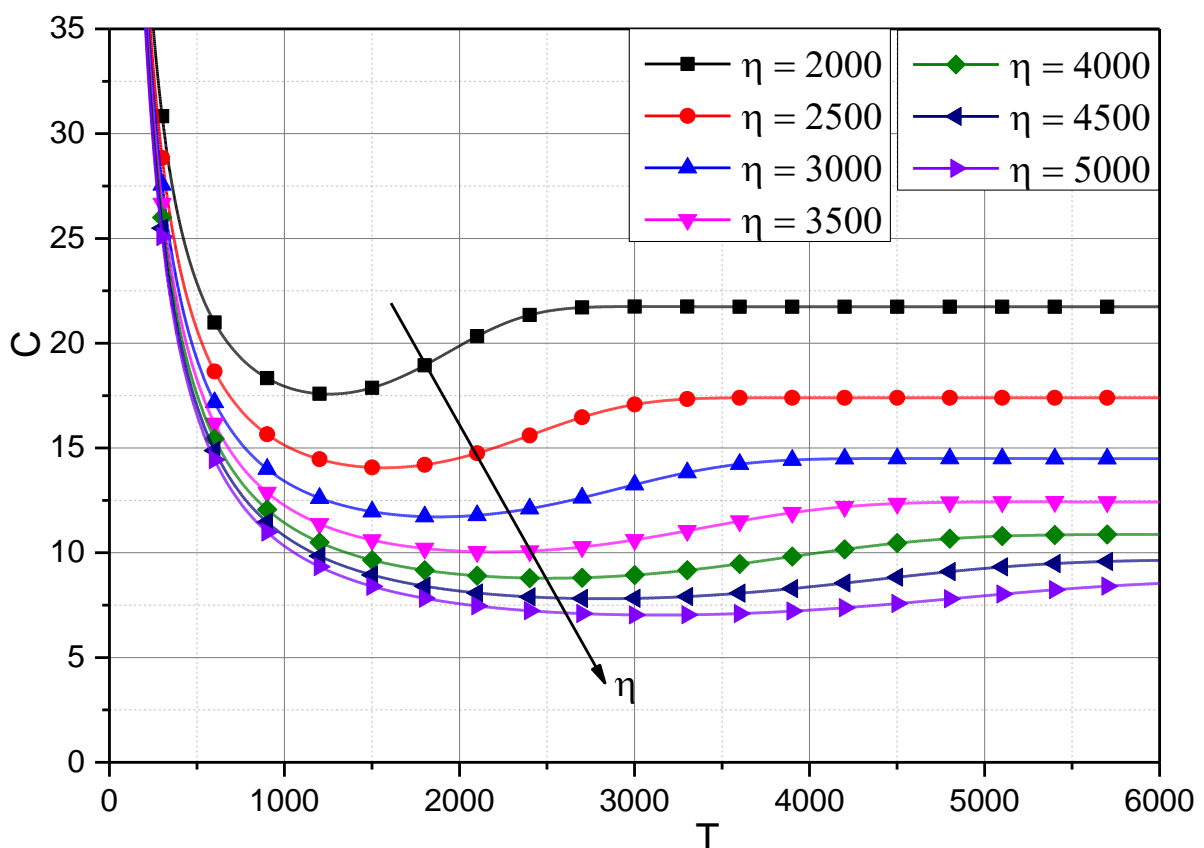


Figure 4.15a : Variation de C en fonction du temps pour différentes valeurs de η : $\beta=5$, $C_r=0,75$; $C = [0, 35]$; $T = [0, 6000]$.

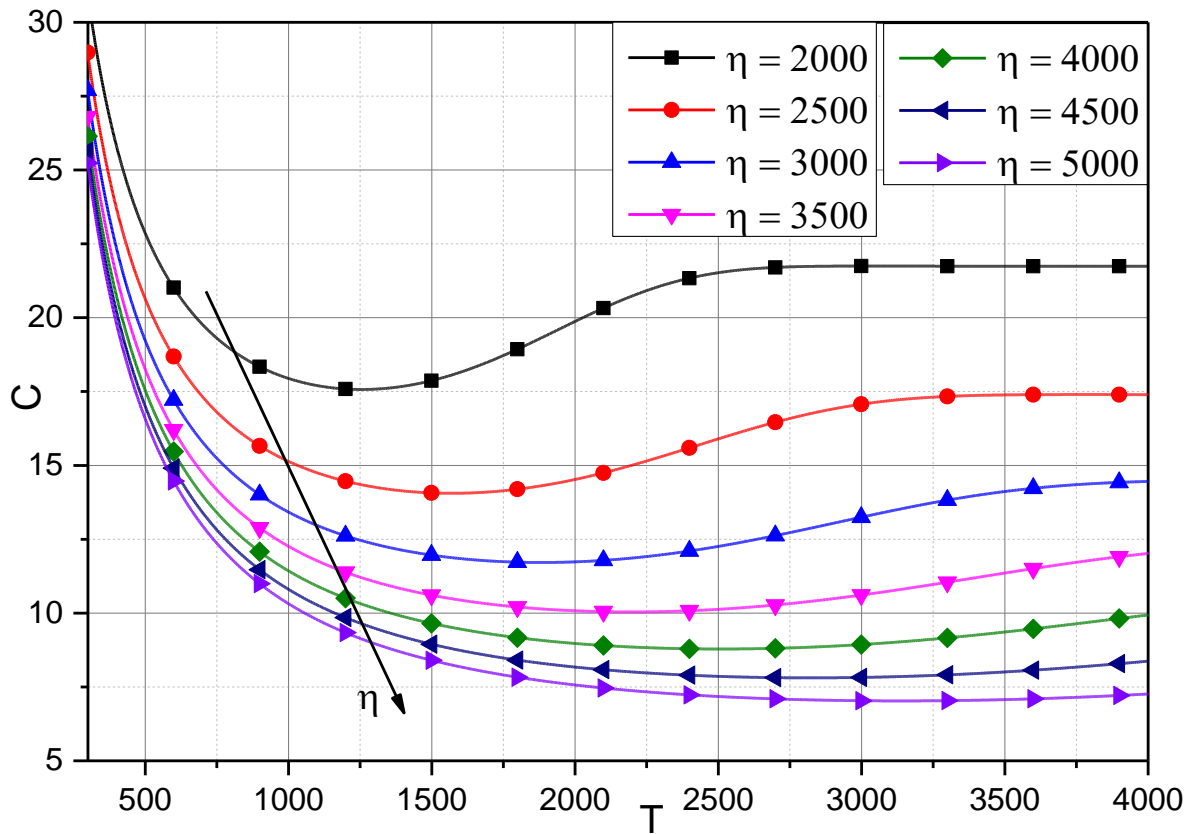


Figure 4.15b : Variation de C en fonction du temps pour différentes valeurs de η : $\beta=5$, $C_r=0,75$; $C = [5, 30]$; $T = [0, 4000]$.

Tableau 4.14 : Variation de C_m et de T_0 en fonction de η dans le cas où $\beta=5$ et $C_r = 0,75$.

η	C_m	T_0
2000	17.570580 (18.003040 ÷ 18.000700)	1254 (982 ÷ 1649)
2500	14.056470 (15.003460 ÷ 15.002420)	1567 (1031 ÷ 2197)
3000	11.713730 (12.500610 ÷ 12.001120)	1881 (1238 ÷ 2324)
3500	10.040330 (11.000170 ÷ 11.001330)	2195 (1324 ÷ 3270)
4000	8.785301 (10.000380 ÷ 10.001010)	2508 (1358 ÷ 4055)
4500	7.809153 (9.001680 ÷ 9.000347)	2828 (1476 ÷ 4685)
5000	7.028248 (8.000303 ÷ 8.000259)	3135 (1695 ÷ 5068)

Conclusion générale et perspectives

Ainsi, la complexité des phénomènes de défaillances nous amène à rechercher des moyens d'améliorer les stratégies et les politiques de maintenance pour permettre à l'équipement de remplir adéquatement les fonctions pour lesquelles il a été conçu. La théorie de fiabilité en ingénierie joue un rôle très important dans la maintenance de tels équipements.

Ainsi, les méthodes mathématiques de maintenance préventive, ont été développées principalement dans le domaine de la recherche afin de générer des programmes de maintenance préventive efficace. Le problème le plus important dans les méthodes mathématiques de maintenance est de concevoir une maintenance planifiée avec deux options de maintenance : remplacement préventif et remplacement correctif. Dans le cas du remplacement préventif, le système ou appareil est remplacé par un nouveau avant qu'il ne tombe en panne. Alors que, dans le cas d'un remplacement correctif c'est l'unité ou la pièce défaillante qui est remplacée.

La détermination de cette périodicité optimale pour le remplacement de pièces mécaniques, de composants, de modules ou de sous-ensembles pose toujours un problème économique et de rentabilité, surtout lorsque les installations sont similaires ou les machines sont identiques. Ce problème économique peut être résolu par la connaissance de la fiabilité opérationnelle et la détermination du moment le plus avantageux pour effectuer cette opération de remplacement préventif. La périodicité optimale pour le remplacement préventif peut être obtenue selon deux modèles mathématiques : le modèle de remplacement par bloc et le modèle de remplacement basée sur l'âge. Chaque modèle peut donner lieu à plusieurs variantes.

Dans ce travail nous avons étudié analytiquement et numériquement deux modèles simplifiés de remplacement préventif à savoir : le remplacement par bloc, c'est-à-dire que nous avons supposé qu'entre deux remplacements préventifs, il ne peut y avoir qu'une seule panne, qu'est le cas le plus courant en pratique ; Le remplacement basé sur l'âge, c'est-à-dire que l'âge de chaque pièce est connu et on change la pièce dès que son âge atteint cette valeur. Le principe consiste à calculer le coût total moyen par pièce et par unité de temps, à chercher son minimum et prendre la période

correspondant à ce minimum comme période optimale pour effectuer la maintenance préventive. Ce coût est composé du coût de maintenance préventive et de celui de la maintenance corrective pondérée de la probabilité de défaillances.

La propriété principale du remplacement par bloc est qu'il est facile à gérer en générale, puisque le temps de remplacement préventif est programmé à l'avance et on n'a pas besoin de surveiller l'âge du système. Tandis que le modèle de remplacement basé sur l'âge joue un rôle fondamental dans tous les modèles de remplacement, puisque l'optimal du modèle de remplacement d'âge a été prouvé, si le remplacement par une pièce nouvelle, est la seule option de maintenance (c'est-à-dire si la réparation n'est pas considérée comme option).

Une étude analytique réalisée dans le cas d'une loi de Weibull, a permis de résoudre les équations différentielles résultantes sous certaines conditions mathématiques.

Ensuite ces équations sont résolues numériquement pour les différents paramètres de ce problème qui sont le rapport des coûts de maintenance, le paramètre d'échelle et le paramètre de forme.

Les résultats obtenus ont été analysés et discutés ; leurs applications à des cas réels peuvent fournir au service de maintenance un élément clef pour choisir la période la plus appropriée pour effectuer la maintenance préventive au coût minimum.

En perspective, nous envisageons la résolution du troisième cas qui est consacré au cas où les remplacements préventif se font à des instants aléatoire choisies de telle sorte que ces remplacement soient pratique et économique, ainsi qu'à d'autres applications tel que le choix entre réparation et remplacement avant terme d'un équipement.

Références bibliographiques

1. B. Al-Najjar, I. Alsyouf, Selecting the most efficient maintenance approach using fuzzy multiple criteria decision making, *Int. J. Prod. Econ.* 84 (2003) 85–100.
2. R.E. Barlow, F. Proschan, *Mathematical theory of reliability*, Wiley, New York (1965).
3. A.K.S. Jardine, A.H.C. Tsang, *Maintenance, replacement, and reliability: theory and applications*. CRC/Taylor & Francis, Florida (2006).
4. P.Y.L. Tu, R.Yam, P. Tse, A.O.W. Sun, An integrated maintenance management system for an advanced manufacturing company, *Int J Adv Manuf Technol* 17(9) (2001) 692–703.
5. A.S.B. Tam, W.M. Chan, J.W.H. Price, Maintenance scheduling to support the operation of manufacturing and production assets, *Int J Adv Manuf Technol* 34 (3/4) (2007) 399–405.
6. M.T. Lai, W. Shih, K.Y. Tang, Economic discrete replacement policy subject to increasing failure rate shock model, *Int J Adv Manuf Technol* 27 (11/12) (2006) 1242–1247.
7. J. Jardine, Equipment reliability and maintenance, *Euro J of Operational Res* 19 (2) (1985) 285–296.
8. Y.S. Shum, D.C. Gong, The application of genetic algorithm in the development of a preventive maintenance analytical model, *Int J Adv Manuf Technol* 32 (1/2) (2007) 169–183.
9. M.A. Ilgin, S. Tunali, Joint optimization of spare parts inventory and maintenance policies using genetic algorithms, *Int J. Adv. Manuf. Technol.* 34 (2006) 594–604.
10. T.P. Robert, P. Shahabudeen, Genetic algorithms for cost effective maintenance of a reactor–regenerator system, *Int J Adv Manuf Technol* 23 (11/12) (2004) 846–856.
11. M. Marsequerra, E. Zio, L. Podofillini, Condition-based maintenance optimization by means of genetic algorithms and Monte Carlo simulation, *Reliab Eng Syst Safe* 77 (2002) 151–166.
12. H. Wang, A survey of maintenance policies of deteriorating systems. *Euro J Operational Res* 139 (3) (2002) 469–489.

13. C. Leger, R. Cleroux, Nonparametric age replacement –Bootstrap confidence-intervals for the optimal cost, *Operations Res.* 40 (1992) 1062–1073.
14. B. Efron, Bootstrap methods: Another look at the Jackknife, *Ann Stat* 7 (1979) 1–26.
15. D. P. Gaver, P.A. Jacobs, D.D. Dudenhofer Failure, repair and replacement analysis of a navy subsystem: case study of a pump, *Appl Stoch Models Data Anal* 13 (1998) 369–376.
16. Y.S. Yoo, D.C. Gong, Optimal joint spare stocking and block replacement policy (cost modelling of spare stocking and block replacement), *Int J Adv Manuf Technol* 18 (12) (2001) 906–909.
17. E.L. Lehmann, *Testing statistical hypotheses*. Wiley, New York (1986).
18. C. Lapa, C. Periera, A.C. Mol, Maximization of a nuclear system availability through maintenance scheduling optimization using a genetic algorithm, *Nucl. Eng. Des.* 196 (2000) 219–231.
19. C.E. Love, R. Guo, Utilizing Weibull failure rates in repair limit analysis for equipment replacement/preventive maintenance decisions, *J. Oper. Res. Soc.* 47 (1996) 1366–1376.
20. A. Monga, M. J. Zou, R. Toogood, Reliability based design of systems considering preventive maintenance and minimal repair, *Int. J. Reliab. Qual. Safe. Eng.* 4 (1997) 55–71.
21. J.K. Vaurio, Availability and cost functions for periodically inspected preventively maintained units, *Reliab. Eng. Syst. Safe.* 63 (1999) 133–140.
22. R. Bris, New method to minimize the preventive maintenance cost of series-parallel systems, *Reliab. Eng. Syst. Safe.* 82 (2004) 247–255.
23. M. Samrout, F. Yalaoui, E. Chatelet, N. Chebbo, New methods to minimize the preventive maintenance cost of series-parallel systems using ant colony optimization, *Reliab. Eng. Syst. Safe.* 89 (2005) 346–364.
24. A. Chelbi, D.A. Kadi, Analysis of a production/inventory system with randomly failing production unit submitted to regular preventive maintenance, *Eur. J. Oper. Res.* 156 (2004) 712–723.
25. I. El-Amin, S. Duffuaa, M. Abbas, A tabu search algorithm for maintenance scheduling of generating units, *Electr. Power Syst. Res.* 54 (2000) 91–99.

26. Y. Chien, A number-dependent replacement policy for a system with continuous preventive maintenance and random lead times, *Appl. Math. Model.* 33 (2009) 1708–1718.
27. B. Jones, I. Jenkinson, J. Wang, Methodology of using delay-time analysis for a manufacturing industry, *Reliab. Eng. Syst. Safe.* 94 (2009) 111–124.
28. M. Kijima, M. Nakagawa, Replacement policies of a shock model with imperfect preventive maintenance, *Eur. J. Oper. Res.* 57 (1992) 100–110.
29. H. Pham, H. Wang, Imperfect maintenance, *Eur. J. Oper. Res.* 94 (1996) 425–438.
30. A. Tahara, T. Nishida, Optimal replacement policy for minimal repair model, *J. Oper. Res. Soc. Jpn.* 18 (1975) 113–124.
31. Y.T. Tsai, K.S. Wang, H.Y. Teng, Optimizing preventive maintenance for mechanical components using genetic algorithms, *Reliab. Eng. Syst. Safe.* 74 (2002) 85–98.
32. N.P. Rachaniotis, C.P. Pappis, Preventive maintenance and upgrade system: optimizing the whole performance system by components' replacement or rearrangement, *Int. J. Prod. Econ.* 112 (2008) 236–244.
33. R.E. Barlow, L.C. Hunter, Optimum preventive maintenance policies, *Oper. Res.* 8 (1960) 90–100.
34. P.K. Kapur, R.B. Garg, N.L. Butani, Some replacement policies with minimal repairs and repair cost limit, *Int. J. Syst. Sci.* 20 (1998) 267–279.
35. H. Koshimae, T. Dohi, N. Kaio, Graphical statistical approach to repair limit replacement problem, *J. Oper. Res. Soc. Jpn.* 39 (2000) 230–246.
36. W.Y. Yun, D.S. Bai, Cost limit replacement policy under imperfect repair, *Reliab. Eng. Syst. Safe.* 19 (1987) 23–28.
37. C. Low, M. Ji, C.J. Hsu, C.T. Su, Minimizing the makespan in a single machine scheduling problems with flexible and periodic maintenance, *Appl. Math. Model.* 34 (2010) 334–342.
38. A. Berrichi, F. Yalaoui, L. Amodeo, M. Mezghiche, Bi-objective ant colony optimization approach to optimize production and maintenance scheduling, *Comput. Oper. Res.* 37 (2010) 1584–1596.
39. A. Chareonsuk, N. Nagarurand, M.T. Tabucanon, A multi criteria approach to the selection of preventive maintenance intervals, *Int. J. Prod. Econ.* 49 (1997) 55–64.

40. G. Quan, G.W. Greenwood, D. Liu, S. Hu, Searching for multiobjective preventive maintenance schedules: combining preferences with evolutionary algorithms, *Eur. J. Oper. Res.* 177 (2007) 1969–1984.
41. M. Bashiri, H. Badri, T.H. Hejazi, Selecting optimum maintenance strategy by fuzzy interactive linear assignment method, *Appl. Math. Model.* 35 (2011) 152–164.
42. C. Lapa, C. Periera, M.P. Barros, A model for preventive maintenance planning by genetic algorithms based on cost and reliability, *Reliab. Eng. Syst. Safe.* 91 (2006) 230–239.
43. R. Dekker, Applications of maintenance optimization models: a review and analysis, *Reliab. Eng. Syst. Safe.* 51 (1996) 229–240.
44. R.H. Yeh, M.Y. Chen, C.Y. Lin, Optimal periodic replacement policy for repairable products under free-repair warranty, *Eur. J. Oper. Res.* 176 (2007) 1678–1686.
45. I. Nosoohi, S.R. Hejazi, A multi-objective approach to simultaneous determination of spare part numbers and preventive replacement times, *Appl. Math. Model.* 35 (2011) 1157–1166.
46. G. Maaroufi, A. Chelbi, S. Samet, Stratégie optimale de remplacement périodique pour des produits vendus avec ou sans garantie avec réparation imparfaite a la panne, 8^{ème} Conférence Internationale de Modélisation et Simulation, MOSIM'10, 10 au 12 mai, Hammamet, Tunisie (2010).
47. T. Halim, L.C. Tang, Confidence interval for optimal preventive maintenance interval and its applications in maintenance planning, *Int J Adv Manuf Technol* 40 (2009) 203–213.
48. Y.H. Chien, C.C. Chang, S.H. Sheu, Optimal age-replacement model with age-dependent type of failure and random lead time based on a cumulative repair-cost limit policy, *Ann Oper Res* 181 (2010) 723–744.
49. S.H. Sheu, C.C. Chang, Y.H. Chien, Optimal age-replacement time with minimal repair based on cumulative repair-cost limit for a system subject to shocks, *Ann Oper Res* 186 (2011) 317–329.
50. E.H. Aghezzaf, M.A. Jamali, D. Ait-Kadi, An integrated production and preventive maintenance planning model, *Eur. J. Oper. Res.* 181 (2007) 679–685.

51. Y.H. Chien, Optimal age for preventive replacement under a combined fully renewable free replacement with a pro-rata warranty, *Int. J. Prod. Econ.* 124 (2010) 198–205.
52. Y.H. Chien, A general age-replacement model with minimal repair under renewing free-replacement warranty, *Eur. J. Oper. Res.* 186 (2008) 1046–1058.
53. Y.L. Zhang, G. J. Wang, An optimal replacement policy for a multistate degenerative simple system, *Appl. Math. Model.* 34 (2010) 4138–4150.
54. L. Yuan, J. Xu, An optimal replacement policy for a repairable system based on its repairman having vacations, *Reliab. Eng. Syst. Safe.* 96 (2011) 868–875.
55. V. Boschian, N. Rezg, A. Chelbi, Contribution of simulation to the optimization of maintenance strategies for a randomly failing production system, *Eur. J. Oper. Res.* 197 (2009) 1142–1149.
56. G.M. Jung, D.H. Park, Optimal maintenance policies during the post-warranty period, *Reliab. Eng. Syst. Safe.* 82 (2003) 173–185.
57. T.R. Tsai, P.H. Liu, Y.L. Lio, Optimal maintenance time for imperfect maintenance actions on repairable product, *Computers & Industrial Engineering* 60 (2011).
58. Y.H. Chien, Optimal number of minimal repairs before ordering spare for preventive replacement, *Appl. Math. Model.* 34 (2010) 3439–3450.
59. C.C. Chang, S.H. Sheu, Y.L. Chen, Optimal number of minimal repairs before replacement based on a cumulative repair-cost limit policy, *Computers & Industrial Engineering* 59 (2010) 603–610.
60. Y.H. Chien, J.A. Chen, Optimal spare ordering policy for preventive replacement under cost effectiveness criterion, *Appl. Math. Model.* 34 (2010) 716–724.
61. T. Nakagawa, T.K. Kowada, Analysis of a system with minimal repair and its application to replacement policy, *Eur. J. Oper. Res.* 12 (1983) 176–182.
62. B.J. Flehinger, A General Model for the Reliability Analysis of Systems under Various Preventive Maintenance Policies, *Annals of Math. Stat.*, 33 (1) (1962) 137–156.
63. M. Hanscom, R. Cléroux, The Block Replacement Problem, *Journal of Statistical Computation and simulation*, 3 (1975) 233–248.
64. D.R. Cox, *Renewal theory*, Methuen, London (1962).

65. M. Berg, B. Epstein, A Modified Block Replacement Policy, *Naval Research Logistic Quarterly*, 23 (1976) 15-24.
66. A. Gharbi, J.P. Kenne, Production and Preventive Maintenance Rates Control for a Manufacturing system: An Experimental Design Approach, *International Journal of Production Economics*, 65 (3) (2000) 275-287.
67. R. Cléroux, D. Ait-Kadi, A Summary of Periodic Replacement Policies with Minimal Repair. *Incestigacion Operativa*, 1 (1) (1988) 43-54.
68. J.A. Nachlas, Availability Distribution Based Preventive Maintenance Strategies", *IASTED Conference on Reliability and Quality Control*, Paris (1987) 29-32.
69. E. Remy, Modèles d'évaluation quantitative de l'effet de la maintenance sur la fiabilité - état des lieux des recherches passées et en cours à EDF R&D. Actes du congrès Lambda-Mu, Avignon (2008).
70. V. Zille, C. Berenguer, A. Grall, A. Despujols, J. Lonchampt, Modeling and performance assessment of complex maintenance programs for multi-component systems. In *ESREDA 32nd Seminar proceedings*, Alghero (2007).
71. IEC 60812, Techniques d'analyse de la fiabilité du système - Procédure d'analyse des modes de défaillances et de leurs effets (AMDE), Ed. 2.0, Commission électrotechnique internationale (2006).
72. R. Cordier, A. Despujols, C. Meuwisse, Sélection des tâches de maintenance - Concepts et définitions. Rapport EDF HP-28/93/029/B (1993).
73. P. Lyonnet, Optimisation d'une politique de maintenance, Tec et Doc - Lavoisier, Paris (1999).
74. J.J. McCall, Maintenance Policies for Stochastically Failing Equipment: a Survey. *Management Science*, 11 (5) (1965) 493-524.
75. C. Valdez-Flores, R.M. Feldman, A survey of preventive maintenance models for stochastically deteriorating single-unit systems. *Naval Research Logistics Quarterly*, 36 (1989) 419-446.
76. D.I. Cho, M. Parlar, A survey of maintenance models for multi-unit systems *European Journal of Operational Research*, 51 (1) (1991) 1-23.
77. P.A. Scarf, On the application of mathematical models in maintenance. *European Journal of Operational Research*, 99 (2) (1999) 493-506.

78. I. Gertsbakh, *Models of Preventive Maintenance*. North-Holland, Amsterdam (1977).
79. M. Rausand, Reliability Centered maintenance. *Reliability Engineering and System Safety*, 60 (1998)121-132.
80. A. Hoyland, M. Rausand, *System reliability theory. Models and statistical methods* (2nd ed.). John Wiley and Sons Inc. London (1995).
81. W.Q. Meeker, L.A. Escobar, *Statistical Methods for Reliability Data*. John Wiley & Sons, Inc., New York (1998).
82. V.M.S. Andriamaharoso, *Intégration des plans d'expérience et de la simulation pour solutionner des problématiques liées à la maintenance de systèmes manufacturiers*. Thèse de maîtrise. École polytechnique supérieure, Université du Québec (1999).
83. W.P. Pierskalla, J.A. Voelker, A survey of maintenance models: the control and surveillance of deteriorating systems. *Naval Research Logistics Quarterly*, 23 (1979) 353-388.
84. S. A. Bloch-Mercier, Preventive maintenance policy with sequential checking procedure for a Markov deteriorating system, *European Journal of Operational Research*, 142 (3) (2002) 548-576.
85. L. Dieulle, C. Berenguer, A. Grall, M. Roussignol, Sequential condition based maintenance scheduling for a deteriorating system. *European Journal of Operational Research*, 150 (2) (2003) 451-461.
86. B.K.N. Rao, *Handbook of condition monitoring*, Elsevier, Amsterdam (1996).
87. V. A. Kopnov, Optimal degradation processes control by two-level policies, *Reliability Engineering and System Safety*, 66 (1999) 1-11.
88. M. Newby, Monitoring and maintenance of spares and one shot devices. *Reliability Engineering and System Safety*, 93 (4) (2008) 588-594.
89. A. Grall, L. Dieulle, C. Berenguer, M. Roussignol, Continuous-Time Predictive-Maintenance Scheduling for a Deteriorating System. *IEEE Transactions on Reliability*, 51 (2) (2002)141-150.
90. M. Fouladirad, A. Grall, L. Dieulle, On the use of on-line detection for maintenance of gradually deteriorating systems. *Reliability Engineering and System Safety*, 93 (12) (2008)1814-1820.

91. B. Bergman, On the optimality of stationary replacement strategies, *J. App. Prob.* 17 (1980) 78-86.
92. S. Osaki, *Stochastic system reliability modeling*. World Scientific. Singapore (1985).
93. R. Berrehal, S. Benissaad, Détermination de la périodicité optimale de remplacement préventif des pièces mécaniques, 2^{ème} Conférence Internationale de Mécanique ICM'2015, Université des Frères Mentouri - Constantine, Algérie (2015).
94. R. Berrehal, S. Benissaad, Determining the optimal periodicity for preventive replacement of mechanical spare parts, *Mechanika*, 22 (2), (2016) 165-161.
95. R. Manzini, A. Regattieri, H. Pham, E. Ferrari, *Maintenance for Industrial Systems*, Springer, London (2010) 314-339.
96. R. Berrehal, S. Benissaad, Determining the preventive replacement period based on the age of spare part, Third International Conference on Energy, Materials, Applied Energetics and Pollution, *ICEMAEP'2016*, October 30-31, 2016, Constantine, Algeria.
97. R. Berrehal, S. Benissaad, Maintenance préventive dans le cas de remplacement basé sur l'âge de la pièce, *Revue des Sciences et Technologie B*, Université des Frères Mentouri - Constantine, Algérie, 44 (2016) 75-81.

LOI DE WEIBULL

Table des valeurs de x et de y

$$\text{MTBF} = E(T) = \gamma + \eta x$$

$$\text{Écart type} : \sigma = \eta y$$

$$x = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad y = \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^2}$$

β	x	y	β	x	y	β	x	y
			1,50	0,9027	0,6129	4,0	0,9064	0,2543
			1,55	0,8994	0,5925	4,1	0,9077	0,2490
			1,60	0,8966	0,5737	4,2	0,9089	0,2440
			1,65	0,8942	0,5564	4,3	0,9102	0,2392
0,20	120,0000	1901,2000	1,70	0,8922	0,5402	4,4	0,9114	0,2345
0,25	24,0000	199,3600	1,75	0,8906	0,5252	4,5	0,9126	0,2301
0,30	9,2605	50,0780	1,80	0,8893	0,5112	4,6	0,9137	0,2258
0,35	5,0291	19,9760	1,85	0,8882	0,4981	4,7	0,9149	0,2217
0,40	3,3234	10,4380	1,90	0,8874	0,4858	4,8	0,9160	0,2178
0,45	2,4786	6,4601	1,95	0,8867	0,4742	4,9	0,9171	0,2140
0,50	2,0000	4,4721	2,0	0,8862	0,4633	5,0	0,9182	0,2103
0,55	1,7024	3,3453	2,1	0,8807	0,4431	5,1	0,9192	0,2070
0,60	1,5046	2,6451	2,2	0,8856	0,4249	5,2	0,9202	0,2034
0,65	1,3663	2,1789	2,3	0,8859	0,4085	5,3	0,9213	0,2001
0,70	1,2608	1,8512	2,4	0,8865	0,3935	5,4	0,9222	0,1969
0,75	1,1930	1,6108	2,5	0,8873	0,3797	5,5	0,9232	0,1938
0,80	1,1380	1,4282	2,6	0,8882	0,3670	5,6	0,9241	0,1908
0,85	1,0880	1,2854	2,7	0,8893	0,3552	5,7	0,9251	0,1879
0,90	1,0522	1,1711	2,8	0,8905	0,3443	5,8	0,9260	0,1851
0,95	1,0234	1,0777	2,9	0,8917	0,3341	5,9	0,9269	0,1824
1,00	1,0000	1,0000	3,0	0,8930	0,3245	6,0	0,9277	0,1798
1,05	0,9808	0,9344	3,1	0,8942	0,3156	6,1	0,9286	0,1772
1,10	0,9649	0,8783	3,2	0,8957	0,3072	6,2	0,9294	0,1747
1,15	0,9517	0,8297	3,3	0,8970	0,2993	6,3	0,9302	0,1723
1,20	0,9407	0,7872	3,4	0,8984	0,2918	6,4	0,9310	0,1700
1,25	0,9314	0,7498	3,5	0,8997	0,2847	6,5	0,9318	0,1677
1,30	0,9236	0,7164	3,6	0,9011	0,2780	6,6	0,9325	0,1655
1,35	0,9130	0,6866	3,7	0,9025	0,2710	6,7	0,9333	0,1633
1,40	0,9114	0,6596	3,8	0,9038	0,2656	6,8	0,9340	0,1612
1,45	0,9067	0,6352	3,9	0,9091	0,2656	6,9	0,9347	0,1592