

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES FRÈRES MENTOURI CONSTANTINE

FACULTÉ DES SCIENCES DE LA TECHNOLOGIE

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

OPTION : CONSTRUCTION MÉCANIQUE

N° Code : 121/DS/2015  
N° d'ordre : 11/Meca/2015

N° attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--

# CONTRIBUTION À L'ANALYSE BAYÉSIENNE EN FIABILITÉ ET MAINTENABILITÉ DES SYSTÈMES MÉCANIQUES

Thèse de Doctorat en Sciences

*Présentée et soutenue publiquement par*

**Salima BELEULMI**

Le 10 / 01/ 2016, devant le jury composé de

<b>ALI BOUCHOUCHA</b>	Président	Professeur à l'Université Frères Mentouri - Constantine
<b>AHMED BELLAOUAR</b>	Rapporteur	Professeur à l'Université Frères Mentouri - Constantine
<b>MOHAMMED LACHI</b>	Co-rapporteur	Professeur à l'Université Champagne Ardenne Reims- France
<b>SMAIL BENISSAAD</b>	Examineur	Professeur à l'Université Frères Mentouri - Constantine
<b>ELIAS HADJAJ AOUL</b>	Examineur	Professeur à l'Université Badji Mokhtar - Annaba
<b>AZZEDINE BOUZAOUT</b>	Examineur	MCA à l'Université du 20 Août 1955- Skikda
<b>JEAN PAUL DRON</b>	Invité	Professeur à l'Université Champagne Ardenne Reims - France

*À la mémoire de mes parents,  
À tous les êtres chers dont le soutien m'a été indispensable.*

## Remerciements

*Je témoigne que*

*C'est par la grâce de Dieu le tout puissant et miséricordieux, d'aide incessante, qu'il m'a porté et d'orientation imminente qu'il m'a accordé pour achever ce travail.*

*Il m'a été très difficile d'écrire cette page par souci d'oublier les nombreuses personnes qu'il me faut citer pour leur aide, leur soutien... !*

*Qu'elles soient toutes assurées de ma plus profonde reconnaissance même si leur nom n'y figure pas !*

*Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à monsieur Ahmed BELLAOUAR qui fut pour moi un directeur de thèse attentif et disponible malgré ses responsabilités nombreuses. Je lui suis très reconnaissante pour la liberté qu'il a bien voulu me laisser. Sa compétence, sa clairvoyance, son humanisme, m'ont beaucoup appris.*

*Mes remerciements s'adressent à Monsieur Mohammed LACHI, mon Co-encadreur, professeur à l'université champagne Ardenne Reims, pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et ses encouragements.*

*Je remercie Monsieur Jean Paul DRON, Professeur à l'université champagne Ardenne Reims, France, pour son accueil à son laboratoire. Je le remercie d'avoir accepté notre invitation.*

*Je remercie Monsieur Ali BOUCHOUCHA, Professeur à l'Université Frères Mentouri ainsi que Monsieur Smail BENISSAAD, Professeur à l'Université Frères Mentouri, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail et pour avoir accepté de prendre part au jury.*

*Mes remerciements s'adressent également à Monsieur Elias HADJAJ AOUL, Professeur à l'Université Badji Mokhtar - Annaba, ainsi qu'à Monsieur Azzedine BOUZAOUIT, Maître de conférence l'Université du 20 Août 1955- Skikda, pour avoir accepté de prendre part au jury.*

*Et bien sûr, ceux sans qui je ne serais rien : ma famille et tous mes amis d'enfance qui me supportent et soutiennent depuis toujours.*

## **Résumé**

### **Intitulé: "Contribution à l'analyse Bayésienne en fiabilité et maintenabilité des systèmes mécaniques"**

La démarche Bayésienne est une méthode statistique, elle permet d'effectuer des études de tendances sur le comportement des matériels entre deux périodes ou à la suite d'une rupture dans la vie de ces matériels. Elle intègre naturellement la prise en compte d'informations partiellement incertaines pour les prendre en charge dans la modélisation du problème. La méthode est donc particulièrement adaptée à l'analyse des systèmes mécaniques ou électroniques présentant une complexité. Les techniques Bayésiennes sont utilisées pour réduire la taille des essais d'estimation, améliorer l'estimation des paramètres de la fiabilité du produit par l'intégration du passé (données disponibles sur le produit concerné) et traiter le cas « zéro » défaillance observée, difficile à traiter avec une approche statistique classique. Le travail repose sur l'analyse et le choix d'une distribution à priori d'un système ou d'une entité afin de définir, sans faire d'essais accélérés ou aggravés, le comportement à posteriori par le calcul de la densité de probabilité. Les tests de fiabilité sont très coûteux et très longs surtout dans le cas où les composants présentent une fiabilité élevée. La modélisation considérera les distributions les plus pratiques pour l'approche Bayésienne (discrètes ou continues) en faisant appliquer des tests virtuels ainsi que l'intégration d'avis d'experts avec un certain taux de confiance.

**MOTS CLÉS:** Modèle bayésien, Fiabilité, maintenabilité, a priori, a posteriori, Taux de défaillance.

## **Abstract**

### **Entitled "Contribution to the Bayesian analysis in reliability and maintainability of mechanical systems"**

The Bayesian approach is a statistical method; it allows trend studies on the behavior of materials between periods or after a break in the life of these materials. It naturally includes consideration of information partially uncertain for support in modeling problem. The method is therefore particularly suited to the analysis of systems having mechanical and electronic complexity. The Bayesian techniques are used to reduce the size of estimation trials, improve the estimation of the parameters of product reliability by integrating the past (data available on the product concerned) and treat the case "zero" failure observed difficult to treat with conventional statistical approach. The work is based on the analysis and the choice of a prior distribution system or entity to define, without testing accelerated or aggravated behavior posteriori by calculating the probability density. The reliability tests are very expensive and very long especially if the components have a high reliability. Modeling considered the most practical distributions for the Bayesian (discrete or continuous) approach by applying virtual testing and the integration of expert opinions with a certain level of confidence.

**KEYWORDS:** Bayesian Model, Reliability, Maintainability, a priori, a posteriori, Failure rate.

## ملخص

### عنوان المذكرة "المساهمة في تحليل النظرية الافتراضية في الموثوقية والصيانة للأنظمة

#### الميكانيكية"

المقاربة النظرية الافتراضية هي طريقة إحصائية، تسمح بإجراء دراسات الاتجاه على سلوك الأجهزة بين فترات أو بعد فاصل من حياة هذه الأجهزة. ويشمل بطبيعة الحال النظر في المعلومات الغير مؤكدة جزئيا لدعمهم في نمذجة المشكلة. ولذلك يناسب هذا أسلوب خاص لتحليل النظم الميكانيكية أو الإلكترونية المعقدة. تستخدم تقنيات النظرية الافتراضية للحد من حجم تقدير الاختبار، وتحسين تقدير معلمات الموثوقية للمنتج من خلال دمج الماضي (البيانات المتاحة على المنتج المعني) وعلاج حالة الحظ "صفر" الفشل أو العطب، يصعب علاجه مع المنهج الإحصائي التقليدي. العمل على أساس تحليل واختيار التوزيع المسبق لنظام أو كيان التعريف، دون أن تسارع أو التشدد الاختبار، في مرحلة ما بعد السلوك حسب حساب كثافة الاحتمال. اختبارات الموثوقية عالية جدا وطويلة جدا قبل كل شيء في حالة لديها مكونات درجة أعلى من الموثوقية. تعتبر نمذجة التوزيعات الأكثر عملية للنهج ببيز (Bayes) (منفصلة أو مستمرة) من خلال تطبيق اختبار افتراضي ودمج آراء الخبراء مع مستوى معين من الثقة.

**الكلمات المفتاحية:** النظرية الافتراضية النموذجية، الموثوقية، والصيانة، بدهاء، البعدية، ومعدل العطب.

# Table des matières

Dédicace.....	i
Remerciements.....	ii
Résumé Abstract.....	iii
Table des matières.....	v
Nomenclature.....	vii
Acronymes.....	viii
Liste des figures.....	ix
Liste des tableaux.....	x
<b>Chapitre 1 : Introduction générale</b>	
1.1. Contexte.....	1
1.2. Objectifs.....	6
1.3. Contenu de la thèse.....	7
<b>Chapitre 2 : Concept de base et revue de littérature</b>	
2.1. Introduction.....	10
2.2. Évolution historique de la fiabilité et de la maintenabilité.....	10
2.3. Concept de base de la fiabilité et de la maintenabilité.....	11
2.3.1. Définitions.....	11
2.3.2. Grandeurs associées.....	14
2.3.3. La courbe en baignoire.....	16
2.4. Corpus mathématique de la fiabilité et de la maintenabilité.....	20
2.4.1. Approche de la fiabilité par la probabilité.....	20
2.4.1.1. Taux de défaillance et fonctions de fiabilité.....	22
2.4.1.2. Temps moyen de fonctionnement.....	24
2.4.2. Taux de réparation et fonction de maintenabilité.....	24
2.4.2.1. Fonction de densité de probabilité de réparation.....	24
2.4.2.2. Temps moyen de réparation.....	25
2.4.3. Principales lois de probabilité.....	25
2.5. Spécificité des systèmes mécaniques.....	26
2.5.1. Complexité du système .....	26
2.5.2. Complexité des Mécanismes de dégradations .....	29
2.6. Fiabilité des systèmes mécaniques .....	29
2.6.1. La fiabilité tout au long du cycle de vie.....	30
2.6.2. Modélisation de la fiabilité des systèmes mécaniques...	33
2.6.3. Recueil de données de fiabilité.....	36
2.7. Généralité sur les méthodes d'évaluation.....	37
2.8. Conclusion.....	40
<b>Chapitre 3 : Approche Bayésienne pour la Fiabilité</b>	
3.1. Introduction.....	43
3.2. Présentation de l'approche bayésienne.....	44
3.2.1. Intérêt de la démarche bayésienne.....	47
3.2.2. Les difficultés de la démarche bayésienne.....	48
3.3. Principe de conjugaison.....	50
3.4. Développement bayésien pour des lois conjuguées.....	52

3.4.1.	Fonction de vraisemblance exponentielle.....	53
3.4.1.1.	Connaissances a priori non informatives.....	55
3.4.1.2.	Connaissances a priori informatives.....	62
3.4.2.	Fonction de vraisemblance binomiale.....	66
3.4.2.1.	Connaissances a priori non informatives.....	67
3.4.2.2.	Connaissances a priori informatives.....	70
3.5.	Développement bayésienne pour les paramètres de fiabilité variables avec le temps .....	75
3.5.1.	Démarche bayésienne par la loi de Weibull .....	75
3.5.2.	Démarche bayésienne par la loi de Weibull pour les paramètres de forme et d'échelle inconnus.....	78
3.6.	Évaluation de la maintenabilité.....	79
3.7.	Conclusion.....	80
 <b>Chapitre 4 : Résultats et discussion</b>		
4.1.	Introduction.....	83
4.2.	Techniques bayésiennes et analyse fréquentielle .....	83
4.2.1.	Données complètes.....	84
4.2.2.	Données incomplètes.....	87
4.2.3.	Synthèse.....	89
4.3.	Estimation bayésienne du taux de défaillance.....	89
4.4.	Modélisation de la connaissance a priori.....	97
4.5.	Conclusion.....	107
 <b>Conclusion générale et perspectives</b>		
5.1.	Conclusion.....	109
5.2.	Perspectives.....	112
 <b>Bibliographie.....</b>		
<b>Annexe.....</b>		
<b>Annexe A</b>		
1.	Bases de données de fiabilité et maintenabilité .....	121
2.	Détails sur les bases de données de fiabilité disponibles pour des composants mécaniques. ....	123
3.	Limite d'utilisation des bases de données mécaniques.....	125
4.	Exemple de Base de données mécaniques.....	126
<b>Annexe B</b>		
1.	Distributions utiles en analyse Bayésienne (Lois de probabilité pour la fiabilité). ....	128
2.	Tables statistiques.....	135
<b>Annexe C</b>		
1.	Synthèse des approches de la Fiabilité. ....	141
<b>Glossaire.....</b>		
		146

## Nomenclature

$E(x)$	Espérance mathématique de la variable aléatoire $x$
$E(t)$	Espérance mathématique de la variable aléatoire $t$
$F(t)$	Fonction cumulée des défaillances
$f(t)$	Fonction de densité des défaillances
$F(x)$	Fonction cumulée de la variable aléatoire $x$
$f(x)$	Fonction de densité de la variable aléatoire $x$
$\alpha$ ( <i>alpha</i> )	Niveau de signification/ Niveau de confiance
$\beta$ ( <i>bêta</i> )	paramètre de forme de la loi de Weibull
$\gamma$ ( <i>gamma minusc.</i> )	Décalage d'origine de la loi Weibull
$\Gamma$ ( <i>gamma majusc.</i> )	Fonction gamma
$\lambda$ ( <i>lambda</i> )	taux de défaillance constant.
$\lambda(t)$	taux de défaillance instantané.
$\mu$ ( <i>mu</i> )	Taux de réparation (inverse de la MTTR).
$\eta$ ( <i>êta</i> )	Paramètre d'échelle de la loi de Weibull.
$\chi_n^2$ ( <i>khi-deux</i> )	khi-deux à $n$ ddl
$F_\alpha(v_1, v_2)$	Fisher-Snedecor
$R(t)$	vient de Reliability, Fiabilité dépendant du temps $t$ .
$1-\alpha$	niveau de confiance.
$B(a; b)$	distribution Bêta de paramètres $a$ et $b$ .
$G(\alpha; \beta)$	distribution Gamma de paramètres $\alpha$ et $\beta$ .
$W(\beta; \eta)$	distribution de Weibull de paramètres $\beta$ et $\eta$ .
$g_0(\theta)$	fonction de densité de probabilité a priori du paramètre inconnu $\theta$ .
$f(X/\theta)$	fonction de vraisemblance du vecteur $X$ connaissant $\theta$ .
$g(\theta/X)$	fonction de densité de probabilité a posteriori du paramètre inconnu $\theta$ connaissant $X$ .
$\Theta$	Paramètre de durée de vie
$K$	Nombre de défaillances observées
$M(t)$	vient de Maintenabilité, maintenabilité dépendant du temps $t$ .
$r(t)$	Failure rate ou taux de panne
$h(t)$	Fonction de densité des réparations

## Acronymes

AMDEC	Analyse des Modes de Défaillance, de leurs Effets et de leur Criticité
APD	Analyse préliminaire des risques
AdD	Arbre de Défaillance
AE	Arbre d'événement
DF	Diagramme de Fiabilité
RdP	Réseaux de Petri
MTTF	vient de Mean Time To Failure, moyenne des temps jusqu'à la défaillance (systems non réparés)
MDT	vient de Mean down Time, moyenne des Temps d'Arrêts
MDV	Maximum De Vraisemblance
MTBF	vient de Mean Time Between Failure, moyenne des temps entre panne
MTTR	vient de Mean Time to Repair, moyenne des temps de réparation
MUT	vient de Mean Up Time (moyenne des temps de bon fonctionnement)
REX	Retour d'expérience

## Liste des Figures

### Chapitre 2

Figure 2.1	Probabilité de défaillance au cours du temps.....	14
Figure 2.2	Probabilité de réparation au cours du temps.....	14
Figure 2.3	Représentation des temps moyens.....	16
Figure 2.4	Évolution du taux de défaillance (panne) en courbe « baignoire »....	17
Figure 2.5	Allures caractéristiques du taux de défaillance.....	17
Figure 2.6	La courbe du taux de défaillance en mécanique.....	19
Figure 2.7	La courbe du taux de défaillance en électronique.....	19
Figure 2.8	La fiabilité décroissante avec le temps.....	21
Figure 2.9	Fonction de distribution et de répartition.....	21
Figure 2.10	Définition des concepts de fiabilité.....	22
Figure 2.11	les différentes configurations de système.....	28
Figure 2.12	Élaboration de la fiabilité.....	30
Figure 2.13	Position des méthodes et outils dans le cycle de développement d'un produit.....	32
Figure 2.14	Réducteur de vitesses.....	34
Figure 2.15	Modélisation du réducteur en schéma bloc.....	34
Figure 2.16	Évolution de la fiabilité.....	36
Figure 2.17	Rapprochement entre l'axe du déroulement des événements et les modes d'analyse du système.....	39

### Chapitre 3

Figure 3.1	Principe de la démarche Bayésienne.....	44
Figure 3.2	Représentation des densités de probabilité du théorème de Bayes...	47
Figure 3.3	Différents types d'observations.....	52
Figure 3.4	Paramètre de fiabilité : le recueil EIReDA, 2000.....	54

### Chapitre 4

Figure 4.1	Méthodes d'évaluation du taux de défaillance.....	90
Figure 4.2	Taux de défaillance sous l'angle bayésien.....	93
Figure 4.3	Évolution du $\lambda^{-1}$ avec le temps.....	96
Figure 4.5	Distribution a priori, vraisemblance et a posteriori pour $K_0 = 1$ .....	99
Figure 4.6	Distribution en % a priori, vraisemblance et a posteriori pour $K_0 = 1$ ..	99
Figure 4.7	Distribution a priori, vraisemblance et a posteriori pour $K_0 = 2$ .....	100
Figure 4.8	Distribution en % a priori, vraisemblance et a posteriori pour $K_0 = 2$ ..	101
Figure 4.9	Distribution a priori, vraisemblance et a posteriori pour $K_0 = 3$ .....	102
Figure 4.10	Distribution en % a priori, vraisemblance et a posteriori pour $K_0 = 3$	102
Figure 4.11	Distribution a priori, vraisemblance et a posteriori pour $K_0 = 1$ .....	104
Figure 4.12	Distribution a priori, vraisemblance et a posteriori pour $K_0 = 2$ .....	105
Figure 4.13	Distribution a priori, vraisemblance et a posteriori pour $K_0 = 3$ .....	106

## Liste des Tableaux

### Chapitre 2

Tableau 2.1. Les mesures associées à la fiabilité .....	23
Tableau 2.2. La Fiabilité, Maintenabilité et mesures associées.....	25
Tableau 2.3. Les lois de probabilité.....	26
Tableau 2.4. Paramètres de la loi de défaillance des éléments du réducteur .....	35
Tableau 2.5: Principales méthodes et démarche de la fiabilité.....	38

### Chapitre 3

Tableau 3.1. : Principales lois conjuguées.....	51
Tableau 3.2. : Distributions non informatives de Jeffreys.....	55

### Chapitre 4

Tableau 4.1 Données complètes du retour d'expérience.....	83
Tableau 4.2 Tabulation de $\alpha_0$ à des risques 80% et 90%.....	85
Tableau 4.3 Tabulation de $b_0$ à des risques 80% et 90%.....	86
Tableau 4.4 Données partielles du retour d'expérience.....	87
Tableau 4.5 Résultat de l'essai de vieillissement.....	95
Tableau 4.6 Les Résultats pour $K_0=1$ .....	98
Tableau 4.7 Les Résultats pour $K_0=2$ .....	100
Tableau 4.8 Les Résultats pour $K_0=3$ .....	101
Tableau 4.9 Les Résultats pour $K_0=1$ à 90%.....	103
Tableau 4.10 Les Résultats pour $K_0=2$ à 90%.....	104
Tableau 4.11 Les Résultats pour $K_0=3$ à 90%.....	105

# CHAPITRE I

## Introduction Générale

### Sommaire

---

- 1.1 Contexte
  - 1.2 Objectif de la thèse
  - 1.3 Contenu de la thèse
-

## Introduction générale

### 1.1. Contexte

La fiabilité est un vaste domaine contribuant à la compréhension, à la modélisation et à la prédiction des mécanismes de dégradation et de vieillissement susceptible de conduire le composant à la défaillance et le système à la panne. La connaissance des relations entre les limites physiques, les défauts intrinsèques, les imperfections technologiques et les contraintes environnementales et internes constitue la substance même de cette activité vaste et complexe. La conservation de la fiabilité concerne la maintenabilité, un autre aspect important des performances du système. Elle s'occupe de ce qu'il faut faire pour qu'un produit soit ramené dans des conditions aussi proches que possible de celles prévues au début de son fonctionnement.

Le but de la fiabilité et de la maintenabilité est de garantir un usage prévu du produit au coût total minimal pendant la période spécifiée, dans des conditions d'entretien et de réparation précises.

Fiabilité et maintenabilité sont des mesures importantes de l'efficacité des systèmes ou produits. Une façon de définir la différence entre la fiabilité et la maintenabilité est que, bien que la fiabilité soit la probabilité qu'une panne ne se produira pas dans un moment donné, la maintenabilité est la probabilité qu'une maintenance sera nécessairement menée à bien en une période de temps donnée. Maintenabilité est une caractéristique de conception qui affecte la précision, la facilité, et les exigences de temps des actions de maintenance. Elle peut être mesurée en combinant des facteurs tels que la fréquence de la maintenance, les coûts de maintenance et les temps de maintenance : les heures de travail ou de réparations écoulées. Ces mesures permettent l'évaluation quantitative de la maintenabilité des produits ou systèmes. Le but principal des mesures de la maintenabilité est d'influencer la conception et par la suite avoir un produit (système) fin plus rentable et maintenable.

La difficulté dans l'évaluation de la fiabilité provient de la nature incertaine des phénomènes mis en jeu. Outre, la présence d'incertitude peut être caractérisé seulement en termes de probabilité. Dans la terminologie de l'ingénierie, cette probabilité est appelée fiabilité.

En mécanique, l'analyse de la fiabilité est un paramètre clé de la qualité et d'aide à la décision, aussi une phase indispensable dans toute étude de sûreté de fonctionnement. Une fois que la sécurité ou la disponibilité d'un système est mise en défaut, on incrimine sa fiabilité.

L'analyse de fiabilité est donc l'évaluation probabiliste du risque ou de la défaillance d'un système sur certaines limites spécifiées dans le projet [1]. Selon [2], la fiabilité est la probabilité rapportée à la parfaite opération d'un système structural donné durant un certain temps appelé temps de vie utile, en des conditions normales d'opération. L'ingénieur fiabiliste cherche à déduire de l'évolution temporelle de cette fiabilité une future stratégie de maintenance.

Un des principaux objectifs de l'analyse de la fiabilité dans le domaine de la mécanique est de caractériser le comportement du produit dans les différentes phases de vie, mesurer l'impact des modifications de conception sur l'intégralité du produit, qualifier un nouveau produit et améliorer ses performances.

Ainsi, pour évaluer la fiabilité de n'importe quel produit (destiné à l'automobile, au nucléaire, à l'aviation, au ferroviaire, etc.), tous ces secteurs de l'ingénierie doivent mettre en œuvre des méthodes d'évaluation appropriées :

- À partir de banques de données de fiabilité de composants connaissant l'architecture du système, et éventuellement de la simulation de son fonctionnement. Cette méthode donne de bons résultats dans le domaine de l'électronique mais de plus mauvais résultats dans le domaine de la mécanique, d'autant que certains composants ne figurent pas dans les recueils de données disponibles [3- 7].
- À partir de l'existant : ou retours de garantis, Cette méthode permet d'obtenir une bonne estimation de la fiabilité mais uniquement sur des produits similaires déjà opérationnels (en vente) ; (fiabilité opérationnelle). On ne peut corriger les fautes qu'a posteriori, ce qui peut donner une mauvaise image de l'entreprise. Ce retour d'expérience riche en information, peut servir par contre pour le développement de futurs produits, pour éliminer les défaillances constatées sur les produits antérieurs mais également dans l'évaluation du niveau de fiabilité prévisionnelle.
- À partir de l'avis d'experts quand on n'a aucune connaissance sur la fiabilité d'un nouveau composant ou système. En effet, à défaut d'autres informations utiles, ces

experts donnent par exemple un intervalle approximatif contenant le taux de défaillance ou le temps moyen avant la première défaillance du matériel, désigné par le MTTF ou encore émettent un avis sur son fonctionnement ou pas au bout d'une période donnée [8],....

- En réalisant des essais de qualification ou de détermination sur le nouveau produit afin de vérifier ses performances avant de lancer la production. Si le nombre d'essais est suffisant, cette méthode permet d'obtenir une bonne estimation de la fiabilité. Cependant le contexte économique actuel ne permet pas de tester suffisamment de produits et de consacrer suffisamment de temps pour observer des défaillances de moins en moins probables. Les industriels ne peuvent plus se permettre de tels coûts financiers. À l'extrême, certains systèmes se fabriquent à l'unité, ce qui rend les politiques d'essai difficiles. Ainsi, cette problématique a été la source, pour la communauté scientifique, de nombreuses voies de recherche ([9 - 18]),

D'une manière générale, l'analyse de la fiabilité constitue une phase indispensable dans toute étude de sûreté de fonctionnement. L'analyse de la fiabilité est appliquée pour évaluer la performance d'une structure (systèmes ou composants), ou pour optimiser la géométrie d'une structure en respectant un certain niveau de fiabilité ou de coût espéré. De plus, la fiabilité des structures est un outil d'aide à la décision pour établir un plan de maintenance et d'inspection.

Dans le domaine mécanique, il est avéré qu'il est plus difficile, plus long et plus coûteux de déterminer la fiabilité d'un système que dans le domaine électronique [19], et ce pour plusieurs raisons:

- Les modes de défaillances sont complexes;
- Les facteurs de contrainte (variables exprimant la sévérité de l'usage) sont difficiles à prévoir;
- Les durées de vie sont plus longues face à l'obsolescence des systèmes électroniques; on peut citer comme exemple la différence entre les durées de vie des téléphones (plutôt de 2 ans) et celles des automobiles (plutôt de 15 ans);
- On dispose de très peu de bases de données : NPRD, NSWC, les recueils de données de fiabilité les plus connus sont donnés en annexe (Annexe A).

- En mécanique les propriétés des systèmes ne dépendent pas uniquement des composants ou du matériau, mais aussi de la géométrie, des différents traitements de la matière (ex. traitement de surface), des assemblages, des procédés de fabrication (ex. soudure, emboutissage, . . .), etc. alors qu'en électronique les bases de données : norme MIL-HDBK-217F, FIDES..., (annexe A), existent et sont conséquentes, validées et prouvées depuis de nombreuses années. Elles permettent une évaluation simple de la fiabilité d'un système à partir des données de ses composants, issues des recueils, et donc de réduire le volume d'essais au vue de la connaissance déjà établie;
- Enfin, les prix des essais et des prototypes sont plus élevés et entraînent des coûts de développement plus importants.

La fiabilité d'un système se traduit à travers deux notions : la fiabilité de mission et la fiabilité intrinsèque du système. Dans le premier cas, c'est la description de l'architecture système qui détermine la fiabilité, Chaque redondance étant considérée comme " fusible ", elle représente une des solutions de repli en cas de dysfonctionnement et de réduction des risques. [20, 21]. Cette première notion est principalement utilisée en sûreté de fonctionnement. Dans le second cas, toute défaillance d'un composant du système est prise en compte et considérée comme une panne, c'est-à-dire nécessitant une maintenance [22]. La fiabilité du système est alors directement dépendante du maillon le plus faible.

Dans la littérature, Il existe de nombreux travaux traitant les méthodes de modélisation, d'évaluation et d'amélioration de la fiabilité (et/ou de maintenabilité) des systèmes. Que le système soit simple ou complexe, qu'il s'agisse d'une automobile ou d'une centrale nucléaire (exemple: réacteur), la connaissance des caractéristiques de fiabilité est essentielle : elle conditionne la maintenance, les durées de vie et un niveau de sécurité acceptable. Par exemple citons les travaux de thèse de [23- 26], les auteurs proposent la prise en compte de la fiabilité et /ou de la maintenabilité des systèmes, au stade de la conception. Ils ont développés une méthodologie permettant l'amélioration de la fiabilité d'un système pour répondre ainsi à une problématique importante de l'industrie (prolongement de la durée de vie, développement durable). En ce qui concerne la maintenabilité, des outils ont été mis en place pour prendre en compte les exigences de maintenabilité (accessibilité, modularité, testabilité...), d'estimer une moyenne des temps techniques de réparation du système (MTTR).

Pour les bases de l'estimation bayésienne sont mises en place dans les années 40. Cependant, elles seront réellement développées dans les années 70 à travers plusieurs travaux comme ceux de [27- 31]. Dans ces travaux, les auteurs expliquent la théorie de modélisation bayésienne et sa relation avec les autres méthodes statistiques.

Pour les travaux concernant les applications des techniques bayésienne à la fiabilité, l'un des premiers auteurs à avoir utilisé l'estimation bayésienne du taux de défaillance de composants électroniques est Ringler en 1981[32]. Ce travail a mené à des changements sur la courbe classique en baignoire du taux de défaillance.

Beaucoup de développements ont été faite, dans la littérature on trouve plusieurs travaux traitant la modélisation par l'approche bayésienne des systèmes réparables et non réparable. Dans le premier cas, les travaux réalisés se focalisent sur la recherche d'une loi a priori possédant de bonnes propriétés lorsque peu d'information est disponible (lois non informatives) ou proposent des lois a priori conjuguées (voir § 3.3. utilisation des lois conjuguées), celles-ci permettent de faciliter le calcul de l'a posteriori en définissant l'a priori et les données dans la même famille de lois. Nous pouvons citer à titre d'exemples l'étude réalisée par Maurizio Guida et Gianpaolo Pulcini [33]. Les auteurs ont développés une procédure Bayésienne basée sur l'information a priori, afin de permettre à la connaissance technique sur le processus de dégradation (défaillance) d'être intégrée à la procédure d'inférence et d'en améliorer la précision. L'estimation a postérieure des quantités d'intérêt (tel que l'intervalle optimal de remplacement) est prévu, ainsi que la prévision du temps d'attente à l'échec suivant et sur le nombre de défaillances dans un futur intervalle de temps est donné. Enfin, des exemples numériques sont donnés pour illustrer la procédure d'inférence proposée. La modélisation des matériels non-réparables avec approche bayésienne a été traitée plusieurs fois dans la littérature. On peut citer par exemple, les travaux de Nicolas Bousquet qui abordent les approches bayésienne sous plusieurs aspects:

- Les auteurs Bousquet et al. s'intéressent dans [34] à la méthodologie d'interrogation des experts pour synthétiser l'information a priori en ayant pour objectif que cette dernière soit informative. L'étude évolue dans un contexte ayant des échantillons censurés et de petite taille (raisons motivant l'utilisation des approches Bayésienne dans l'article).

- Ces mêmes auteurs [35], traitent de la pertinence de l'information a priori par rapport à l'information issue des données observées. Ils proposent une définition statistique de la cohérence a priori-données et la formalisent.

Dans ce travail de thèse, nous mettons à contribution les méthodes bayésiennes afin de joindre plusieurs sources d'informations. Dans notre situation, les données disponibles sont limitées. Disposer d'une source d'information additionnelle se révèle être souhaitable si l'on veut déduire les caractéristiques d'un système en fonctionnement. Cette raison nous conduit à mener une analyse statistique bayésienne du comportement des matériels car cette approche s'avère être le seul recours, pour intégrer de l'information a priori disponible. À ce titre, l'auteur Robert dans son ouvrage [36] considère cet argument comme étant l'une des raisons justifiant l'utilisation des approches bayésiennes, dès lors qu'il considère les lois a priori comme des outils qui résument l'information disponible ainsi que l'incertitude qui l'entoure.

## 1.2. Objectifs de la thèse

Le premier objectif fixé en début de ma thèse est de bien comprendre le contexte industriel et théorique de la fiabilité et de la maintenabilité, la spécification des systèmes mécaniques du point de vue fiabilité. Les méthodes et outils employés pour l'estimation et l'évaluation de la fiabilité. Après, nous passons en revue les principales méthodes d'évaluation de la fiabilité mécanique.

Au final, mon travail de thèse constituera:

- Un rappel de l'ensemble des outils et méthodes destinés à l'estimation et l'évaluation de la fiabilité (ou durée de vie), dès la phase de conception des systèmes mécaniques par comparaison à d'autres systèmes: électroniques et logiciels.
- Une étude de l'approche bayésienne qui permet de fusionner plusieurs sources d'informations. Cette démarche rigoureuse sur le plan mathématique est plus pratique dans l'analyse du risque industriel que la démarche statistique fréquentielle conventionnelle. Cette dernière n'utilise qu'une seule source d'information : le retour d'expérience. Dans la démarche bayésienne et pour l'estimation des durées de vie, dont le taux de défaillance d'un équipement pour la période suivante (appelé taux de défaillance a posteriori), on se base sur les données de défaillances collectées

(appelées données de vraisemblance) et l'avis d'expert (appelé *a priori*). On va donc devoir effectuer le produit de deux densités pour joindre la densité *a priori* et la fonction de vraisemblance afin de déterminer la densité *a posteriori* de l'estimateur recherché.

- Un guide sur les différentes formes de modélisation des densités *a priori* pour tenir compte de l'information disponible et les connaissances relatives à l'expertise.
- Une source de profit non négligeable car l'analyse de la fiabilité des systèmes par la démarche bayésienne et grâce au principe de conjugaison, qui va permettre de joindre des densités de probabilité appartenant à une même famille mathématique, permet de simplifier les calculs, en absence de logiciel.

### 1.3. Contenu de la thèse

Le manuscrit est organisé de la manière suivante:

Ce chapitre introductif est consacré au cadre de l'étude. Ainsi, l'état de l'art du sujet de recherche est décrit par rapport aux principaux aspects considérés pour le développement de la thématique abordée. On a recensé un panorama des développements récemment atteints tels qu'ils sont rapportés dans la littérature. Le chapitre met aussi en évidence les objectifs du travail de recherche et décrit la façon dont ce mémoire de thèse est structuré.

Au Chapitre 2 est présenté un rappel des principaux concepts de la fiabilité et de la maintenabilité ainsi que les principales notions utilisées. L'accent sera mis sur l'estimation des indices de fiabilité, les différentes phases du cycle de vie d'une entité du point de vue de la fiabilité, les recueils des données de la fiabilité des composants mécaniques ainsi qu'une analyse des caractéristiques des systèmes mécaniques qui ont un effet direct sur l'évaluation de leur fiabilité. On aborde également quelques concepts nécessaires à l'étude de l'analyse de survie, tels les fonctions de survie et de risque, les différents types de données censurées.

Dans Le Chapitre 3, on introduit la démarche bayésienne, son intérêt, et ses difficultés dont les principales sont le recueil et la modélisation de l'expertise, et les calculs pour joindre les informations *a priori* et les informations du retour d'expérience, particulièrement lorsque les paramètres de fiabilité dépendent du temps. On traite respectivement des problèmes de recueil et de modélisation de

l'expertise, et de l'évaluation des paramètres de fiabilité des matériels lorsqu'ils sont constants : taux de défaillance et probabilité de fonctionnement à la sollicitation. On verra que les calculs " bayésien " ne présentent aucune difficulté dans ces conditions grâce au principe de conjugaison qui permet de joindre très facilement des densités de probabilité appartenant à une même famille mathématique.

Le chapitre 4 est consacré au cas d'application où l'on estime l'efficacité de la méthode Bayésienne. Des exemples d'illustration sont traités, la méthode utilise les données de pannes ou défaillances, mais aussi l'avis des experts. On démontre principalement que les estimations par l'inférence Bayésienne donnent de bons résultats par rapport aux méthodes classiques.

Finalement une conclusion générale et perspective: une conclusion générale et les extensions envisagées. Ensuite, on a regroupé une bibliographie assez riche mais non exhaustive, de livres et d'articles se rapportant au sujet.

Enfin, plusieurs annexes pouvant apporter des informations complémentaires sur certaines notions mentionnées dans le manuscrit.

Un glossaire est inséré à la fin du mémoire pour aider le lecteur à mieux comprendre certains termes techniques et statistiques.

# Chapitre II

## Concepts de base et revue de littérature

### Sommaire

---

- 2.1. Introduction
  - 2.2. Évolution historique de la fiabilité et de la maintenabilité
  - 2.3. Concept de base de la fiabilité et de la maintenabilité
    - 2.3.1. Définitions
    - 2.3.2. Grandeurs associés
    - 2.3.3. La courbe en baignoire
  - 2.4. Corpus mathématique de la fiabilité et de la maintenabilité
    - 2.4.1. Approche de la fiabilité par les probabilités
    - 2.4.2. Taux de réparation et fonction de Maintenabilité
    - 2.4.3. Principale lois de probabilité
  - 2.5. Spécificité des systèmes mécaniques
    - 2.5.1. Complexité du système
    - 2.5.2. Complexité des mécanismes de dégradation
  - 2.6. La fiabilité des systèmes mécaniques
    - 2.6.1. la fiabilité tout au long du cycle de vie
    - 2.6.2. Modélisation de la fiabilité des systèmes mécaniques
    - 2.6.3. Recueils de données et limites d'utilisation
  - 2.7. Généralités sur les méthodes d'évaluation
  - 2.8. Conclusion
-

## Concepts de base et revue de littérature

### 2.1. Introduction

Fiabilité et maintenabilité sont des mesures importantes de l'efficacité des systèmes ou produits. Dans le processus industriel, les études de fiabilité et la maintenance se complètent pour garantir un niveau élevé de service et de sécurité malgré le vieillissement, l'usure, les dégradations inhérents à tout système technique. Dans ce chapitre, on fait un rappel des principaux concepts et définitions utiles dans une étude de fiabilité et maintenabilité. On présentera les différents mécanismes de défaillance. On détaillera la problématique propre aux systèmes mécaniques et décrirons différentes approches et outils utilisés à ce jour pour évaluer une fiabilité ainsi que la maintenabilité.

### 2.2. Évolution historique de la fiabilité et de la maintenabilité

Dès que les hommes ont inventé les premiers instruments, ils sont devenus dépendants de leur bon fonctionnement. La fiabilité est ressentie comme un besoin urgent. Avant la seconde guerre mondiale, le concept de fiabilité été avant tout qualitative et subjective. Elle est alors vue comme un savoir-faire, basé sur l'expérience et l'intuition de l'ingénieur, et auquel on associe un concept de qualité des équipements.

Qualité et fiabilité sont des termes qui sont souvent utilisés indifféremment alors que fortement liés, ils ne sont pas les même. En terme simple :

- La qualité est la conformité aux spécifications ;
- La fiabilité est la conformité aux spécifications au cours du temps.

La maintenabilité est une caractéristique ou aptitude d'un système et sa mesure se base essentiellement sur l'appréciation du déroulement des activités de maintenance. La prise de la maintenabilité comme une discipline identifiable remonte au début du 20<sup>ème</sup> siècle.

Par la suite, les évaluations quantifiées, probabilisées ont vu le jour récemment d'abord pour de grands systèmes, militaire, spatial, nucléaire, puis l'automobile et les biens d'équipements.

C'est dans les années 1950-1960 que la fiabilité a émergé en tant que discipline à part entière. Dans les années 60, considéré dans le secteur du transport aérien [18], le mot

fiabilité a acquis un sens technique pour caractériser la sûreté de fonctionnement des équipements.

Les besoins de la technologie moderne, en particulier les systèmes complexes utilisés dans les militaires et dans les programmes spatiaux, conduit à l'approche quantitative, basée sur la modélisation mathématique et l'analyse [37]. Ce sont les américains, les premiers à avoir compris que la fiabilité et la maintenabilité représentaient une limite à la complexité des systèmes. Le *Department of Défense Américain* lance alors des études de fiabilité et de maintenabilité sur les équipements militaires, et en particulier l'électronique. Et c'est en 1962 que la première méthode de prévision de fiabilité est apparue sous forme d'un "Military Hand Book" MIL-HDBK-217 [7]. La théorie de la fiabilité a augmenté à un rythme très rapide et surtout depuis l'apparition du livre classique sur la théorie mathématique de la fiabilité [38].

Pour la maintenabilité, c'est dans la dernière partie des années 1960 que de nombreux documents militaires sont apparus: MIL-STD-470 (first Ed.1966) [39], MIL-STD-471 (maintenabilité : démonstration, évaluation) [40], MIL-HDBK-472 (Prévision de la maintenabilité) [41], et MIL-STD-721B (définition des termes de la fiabilité et de maintenabilité) [42].

Au cours du temps, de nombreux autres développements dans les domaines de la fiabilité et de la maintenabilité ont eu lieu, Elle peut être vu par le grand nombre d'ouvrages, de journaux scientifiques, et d'articles de revues qui on parut et consacrés sur ces sujets.

## **2.3. Concepts de Fiabilité et de Maintenabilité**

### **2.3.1. Définitions**

Les définitions sont d'après la norme NF EN 13306 [43].

- **Fiabilité**

Le mot fiabilité est aujourd'hui à la mode. La définition adoptée pour le néologisme fiabilité traduction du terme anglo-saxon *Reliability* : «l'aptitude d'un bien à accomplir une fonction requise dans des conditions données, durant un intervalle de temps donné ». Le bien désigne au sens large un composant, un système, un réseau, entité ou même un logiciel.

$$R(t) = P [E \text{ non défaillante sur } [0, t]] \quad (2.1)$$

La fiabilité est une caractéristique du système au même titre que les caractéristiques dimensionnelles [44]. Le point le plus important de cette définition est de comprendre que la fiabilité doit tenir compte de quatre aspects fondamentaux :

- **Concept 1:** La fiabilité s'exprime par une probabilité (grandeur comprise entre 0 et 1) et qui rend compte du caractère aléatoire de l'accomplissement de la fonction.
- **Concept 2:** La fonction requise (*Required function* : fonction ou ensemble de fonctions nécessaires pour fournir un service donné) implique un seuil d'admissibilité en dessous duquel la fonction n'est plus remplie.
- **Concept 3:** Les conditions d'utilisation renvoient à l'environnement et ses variations, les contraintes mécaniques, etc.
- **Concept 4:** La période de temps donne la durée de la mission en unités d'usage, c'est le temps de bon fonctionnement.

- **Durée de vie T**

T est une variable aléatoire caractérisant le passage aléatoire d'un système d'un état de fonctionnement à un état de défaillance selon une loi de probabilité qui peut être connue ou inconnue. Une autre définition : c'est la durée pendant laquelle une entité (bien) accomplit une fonction requise dans des conditions d'utilisation et de maintenance, jusqu'à ce qu'un état limite soit atteint.

- **Maintenabilité**

La maintenabilité (*Maintenability*) : « dans des conditions données d'utilisation, aptitude d'un bien à être maintenu ou rétabli dans un état où il peut accomplir une fonction requise lorsque la maintenance est assurée dans des conditions données, en utilisant des moyens prescrits ».

On notera que la norme américaine MIL-STD-721C est presque identique dans sa formalisation mais inclut le niveau requis de qualification des personnels : « la maintenabilité est la mesure de l'aptitude d'un dispositif ("item") à être maintenu ou remis dans des conditions spécifiées lorsque la maintenance de celui-ci est réalisée par des agents

ayant les niveaux spécifiés de compétence, utilisant les procédures et les ressources prescrites, à tous les niveaux prescrits de maintenance et de réparation ».

$$M(t) = P [E \text{ est réparée sur } [0, t]] \quad (2.2)$$

Cette définition indique que la maintenabilité est une caractéristique ou aptitude d'un système et que sa mesure se base essentiellement sur l'appréciation du déroulement des activités de maintenance. La maintenance désigne l'ensemble des activités destinées à maintenir ou à rétablir un système dans un état spécifié ou dans des conditions données de sûreté de fonctionnement, pour accomplir une fonction requise.

**Durée de réparation** : Comme la durée de vie pour la fiabilité, la durée de réparation lors de la maintenance d'un système est une variable aléatoire.

- **Défaillance**

C'est la cessation d'une aptitude à accomplir une fonction requise, c'est le passage de l'état de fonctionnement à l'état de panne. On distinguera sa cause (circonstances ayant entraîné la défaillance), son mécanisme (processus ayant entraîné la défaillance) et son taux  $\lambda(t)$  qui représente la proportion de dispositifs qui, ayant vécu un temps  $t$ , ne sont plus en vie à  $t+dt$ .

- **Taux de défaillance**

Généralement, on admet que la probabilité de défaillance d'un composant dépend principalement de l'âge du composant. En début de vie se posent une série de problèmes de maladies de jeunesse liées à des erreurs de conception ou de fabrication. Au bout de quelques temps, toutes les erreurs ont été détectées et les composants encore en vie présentent un taux de défaillance relativement constant. En fin de vie, on assiste à une augmentation de la probabilité de défaillance, suite aux phénomènes de fatigue et d'usure. La figure 2.1 représente l'évolution du taux de défaillance d'un composant au cours de sa vie

- **Taux de réparation**

La probabilité de réparation d'un composant est principalement fonction du temps écoulé depuis l'instant de défaillance. Il existe un certain délai avant que le composant puisse être réparé. Ce délai comprend le temps de détection et le temps mis pour qu'une équipe de réparation arrive sur place. Il s'y ajoute le temps de réparation proprement dit.

La figure 2.2 donne l'allure de la probabilité de réparation d'un composant tombé en panne en  $t=0$ .

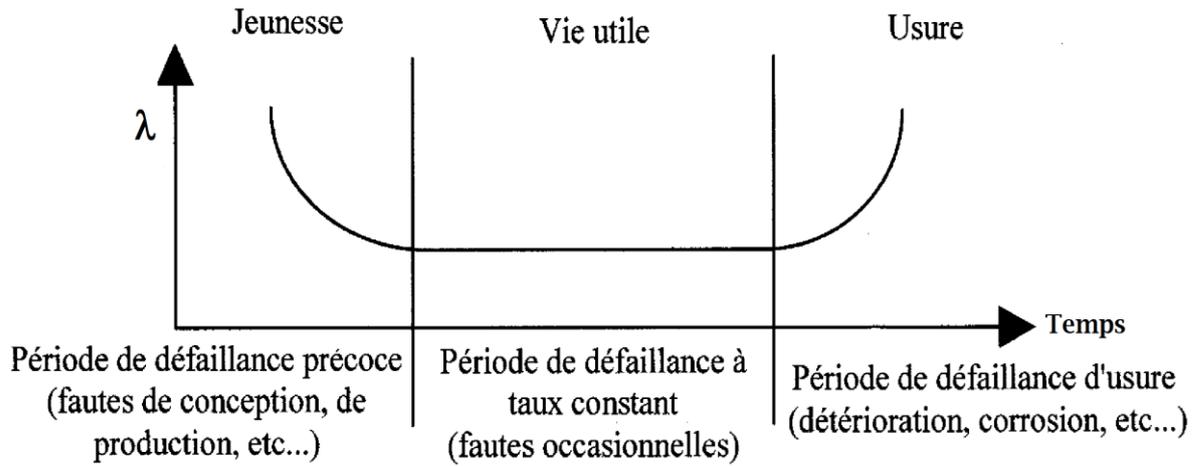


Figure 2.1 : Évolution du taux de défaillance au cours du temps

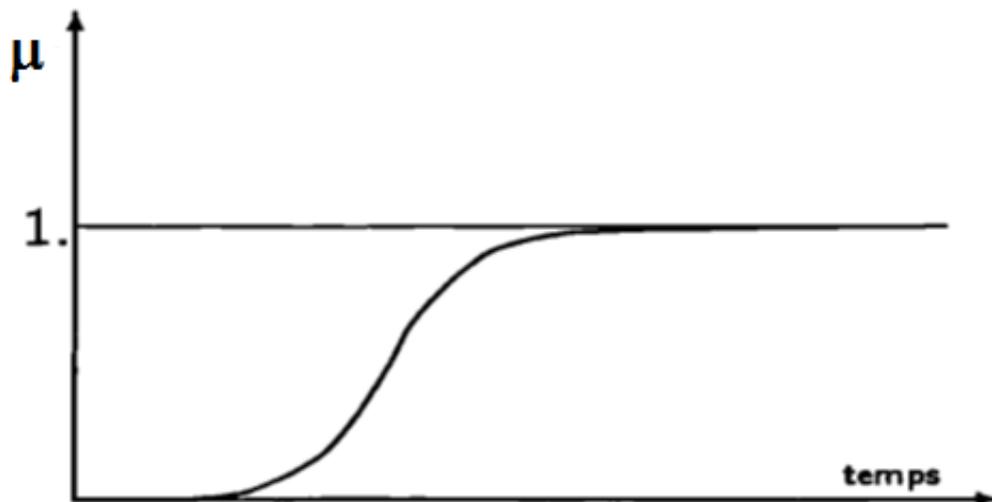


Figure 2.2 : Évolution du taux de réparation au cours du temps.

### 2.3.2. Grandeurs associées

Des grandeurs associées à la fiabilité et à la maintenabilité peuvent être calculées à partir des mesures de probabilité. Ces grandeurs suivantes caractérisent des durées moyennes [18]. Elles représentent des transitions majeure de la vie d'un système : il passe de l'état de panne, puis est en réparation, avant d'être à nouveau en service : on parle alors de MDT, MUT, MTTR et MTBF (M pour Mean).

- Le **MTTF** (*Mean Time To Failure*) : la durée moyenne de fonctionnement avant la première défaillance est l'estimation de la durée moyenne s'écoulant entre la mise en service du système et la survenance de la première panne. La définition du MTTF est :

$$MTTF = \int_0^{\infty} R(t)dt \quad (2.3)$$

- Le **MTTR** (*Mean Time To Repair*) : Durée moyenne de réparation. Cet indicateur représente le temps moyen d'immobilisation entre la détection et la remise en service de l'équipement.

$$MTTR = \int_0^{\infty} [1 - M(t)]dt \quad (2.4)$$

- Le **MDT** (*Mean Down Time*) : la durée moyenne d'indisponibilité est le temps moyen séparant la survenance d'une panne et la remise en état opérationnel du système. Elle se décompose en plusieurs phases :
  - la durée de détection de la panne (1),
  - la durée de diagnostic de la panne (2),
  - la durée d'intervention jusqu'au début de la réparation (3),
  - la durée de la réparation, **MTTR** (*Mean Time To Repair*) représente le temps moyen pour remettre un composant ou un système défectueux en fonctionnement (4),
  - la durée de remise en service du système (5).
- Le **MUT** (*Mean Up Time*) : le temps moyen qui sépare une remise en service opérationnelle du système de la survenance de la panne suivante.

Ces deux derniers indicateurs ne sont pertinents que dans le cas de systèmes réparables. Leur somme MUT+MDT représente le temps moyen qui sépare deux pannes consécutives du système. On le note **MTBF**, comme (*Mean Time Between Failures*).

Si  $MTTR \ll MTBF$ , alors on peut utiliser l'approximation  $MUT = MTBF$  :

$$MUT = \int_{-\infty}^{+\infty} R(t). dt \quad (2.5)$$

Les définitions de ces différents indicateurs sont illustrées par la figure 2.3 suivante :

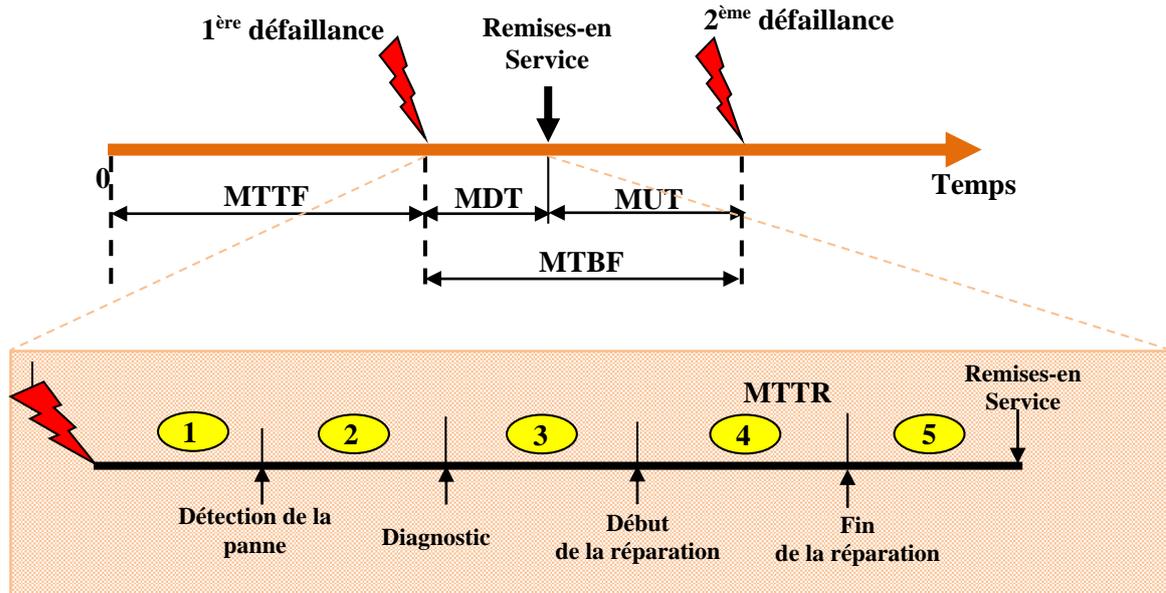


Figure 2.3 : Représentation des temps moyens

### 2.3.3. La courbe en baignoire

Le comportement temporel du taux de défaillance (ou panne) [Failure rate :  $r(t)$  ou  $\lambda(t)$ ] est représenté par la courbe «en baignoire » de la Figure 2.4. Cette courbe représente les différentes phases du cycle de vie d'un produit et comporte trois phases pour lesquelles on détaille les causes potentielles et les actions à entreprendre pour améliorer le comportement du système [23]. La phase de mortalité infantile où le taux de panne est décroissant. Il s'agit de la phase de rodage du système ; la phase de la vie active où les défaillances sont aléatoires avec un taux de panne constant et la phase de vieillissement dont le taux de panne est croissante.

La période de jeunesse concerne les défaillances précoces dues à des problèmes de conception (mauvais dimensionnement d'un composant, ...) ou de production (dérive d'un process de fabrication,...),

La période utile, plus ou moins importante selon le type de matériel (plus pour l'électronique et moins pour la mécanique), est caractéristique des défaillances aléatoires, La période d'usure ou de vieillissement correspond aux défaillances dues à des phénomènes d'usure, de vieillissement.

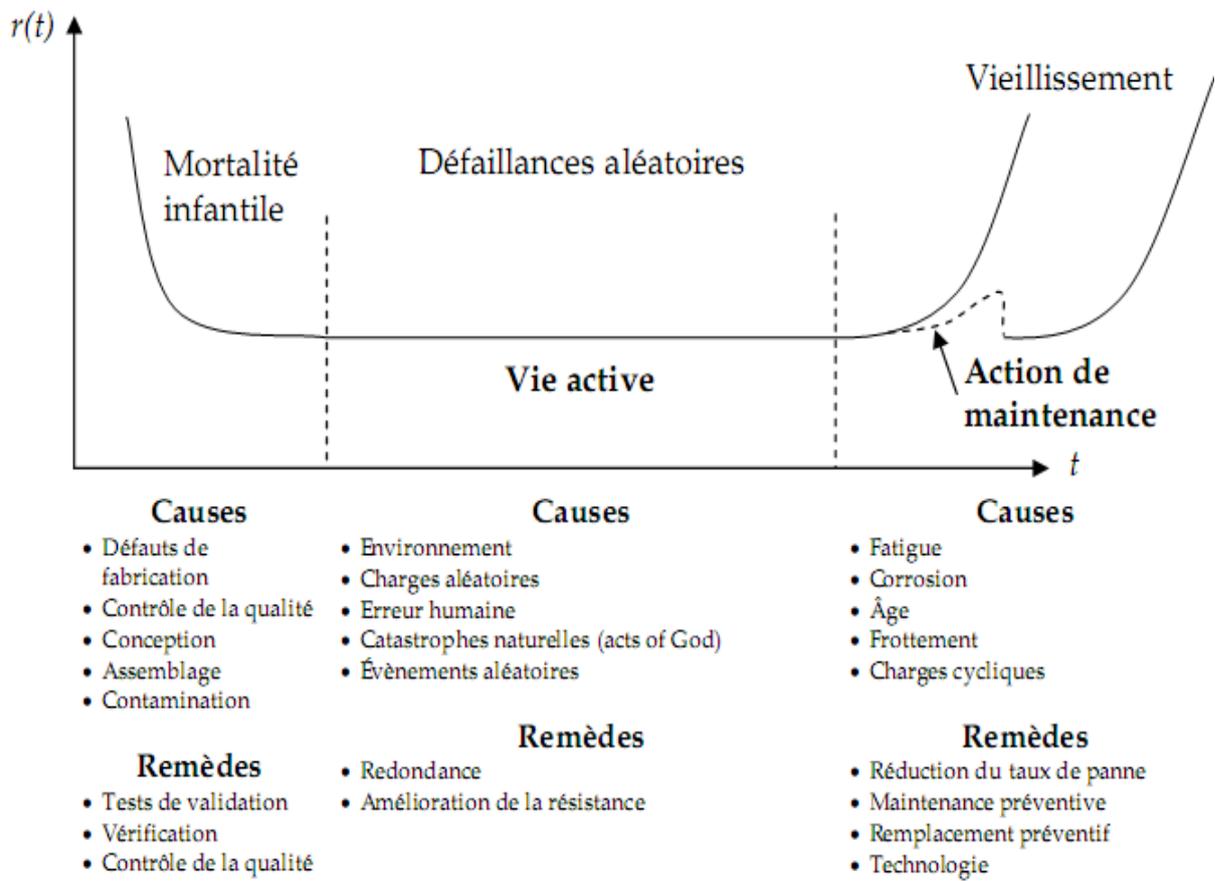


Figure 2.4 Évolution du taux de défaillance (panne) en courbe « baignoire » [45]

Le taux de panne ou de défaillance est l'un des indicateurs de fiabilité les plus utilisés. Il évolue dans le temps, Selon le type de produit (électronique, informatique ou mécanique), l'allure de la courbe peut changer. Plusieurs types de courbes en baignoire [46], sont présentés à la Figure 2.5.

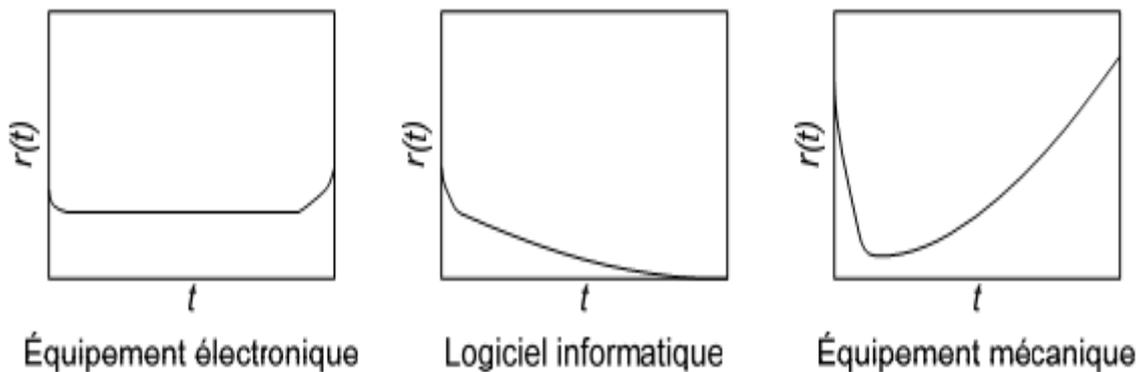


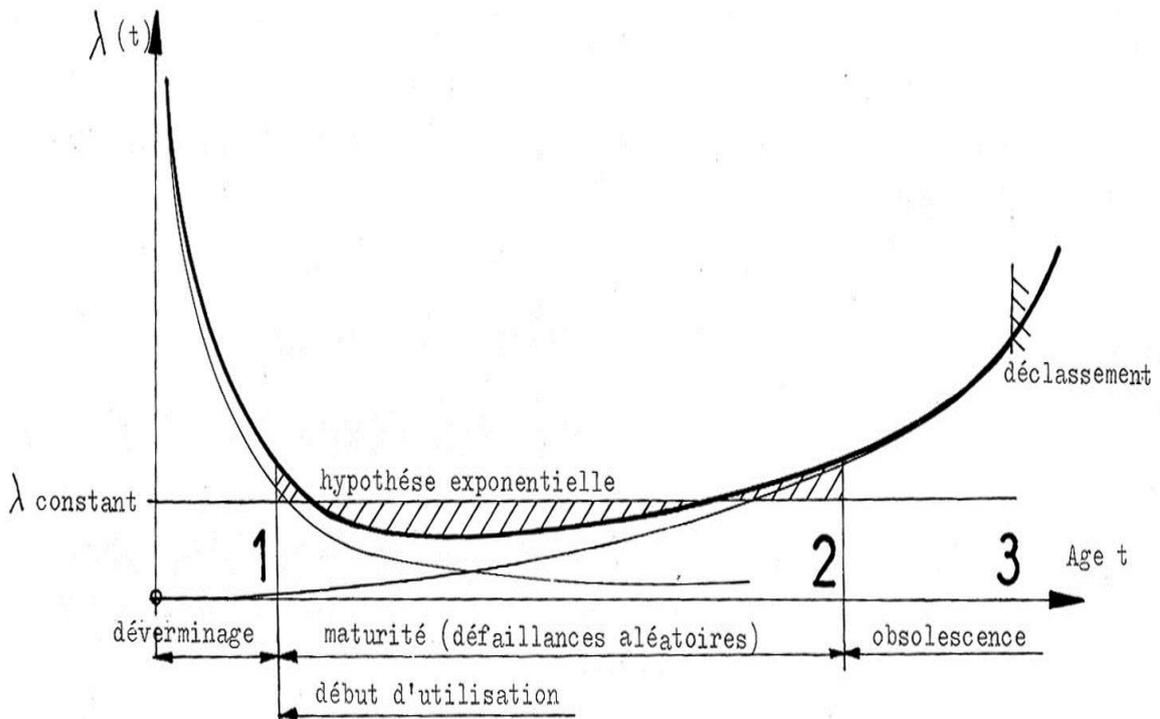
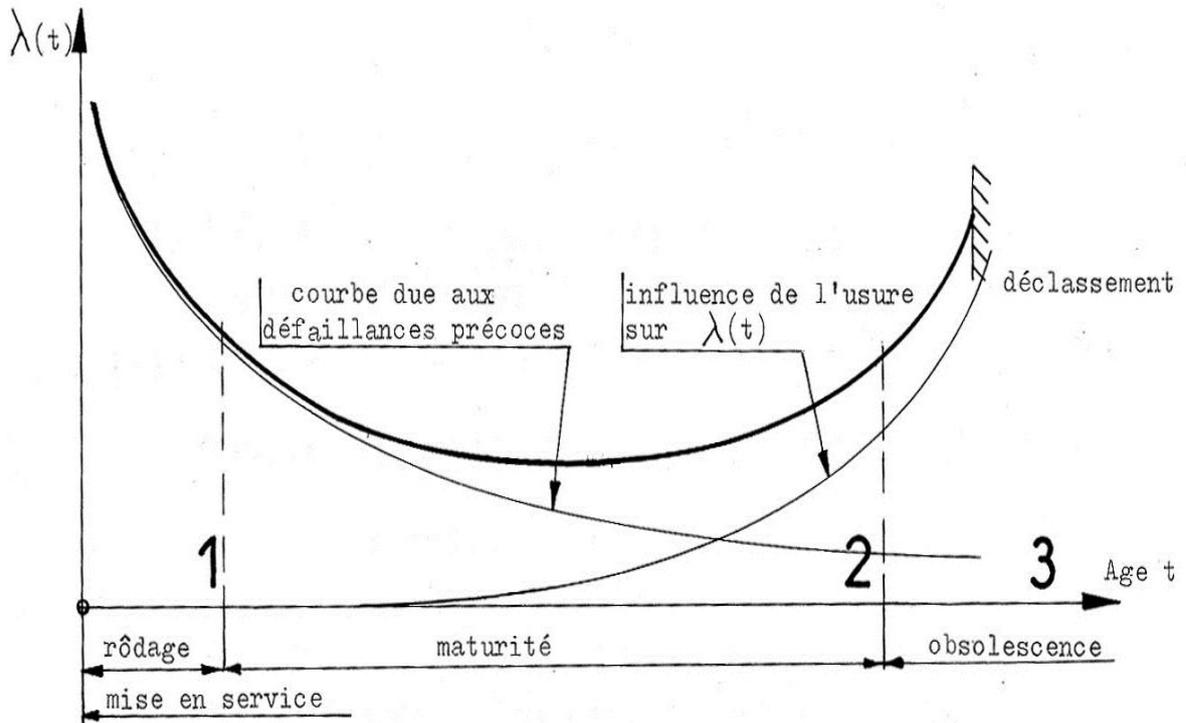
Figure 2.5 : Allures caractéristiques du taux de défaillance [46]

Les composants mécaniques sont soumis, dès le début de leur vie, au phénomène d'usure ou de vieillissement. Si on trace la courbe du taux de défaillance, en fonction du temps, on obtient une courbe qui ne présente pas le plateau de la figure 2.4; la période de vie utile (taux de défaillance constant) n'existe pas ou elle est réduite. Le taux de défaillance du dispositif est une fonction non linéaire du temps et ceci dans chaque phase de sa vie (voir figure 2.6),

- La première phase définit la période de mortalité infantile. C'est une durée de vie en principe très courte. Elle est décrite par une décroissance progressive du taux de défaillance avec le temps dû à une amélioration des caractéristiques internes (caractéristiques de défauts) et des interfaces, par un rodage préalable des pièces. Par conséquent il n'est pas souhaitable de tester les composants mécaniques dans cette période de leur vie. Parmi les distributions de probabilité pour ces conditions, la loi de Weibull ( $\beta < 1$ ) et loi lognormale ( $\sigma > 1$ ) sont les plus utilisées.
- La dernière phase définit la période de vieillissement qui recouvre la majorité de la vie du dispositif. Elle est caractérisée par une augmentation progressive du taux de défaillance. Les pièces mécaniques sont soumises à des phénomènes de vieillissement multiples souvent complexes, d'origines variées (fatigue, fluage, fissuration, usure, corrosion/oxydation, désagrégation) [3, 47, 48]. Les distributions de probabilité utilisées pour ces conditions sont la loi de Weibull ( $\beta > 1$ ) et la loi lognormale ( $\sigma < 1$ ).

Pour les composants électroniques la courbe, représentant le taux de défaillance, a la même allure que la courbe en baignoire (figure 2.4). Elle est donc composée de trois phases nettement distinctes : Les composants électroniques présentent des mécanismes de dégradation complexes telles que les charges de surface, la polarisation, le décollement de fils de connexion, la migration métallique, l'électromigration, le défaut de silicium, ... [49, 50].

Autre présentation de la courbe en baignoire plus illustrative de la littérature sont présentées ci-dessous (figures 2.6 ;2.7) [51].



## 2.4. Corpus mathématique de la fiabilité et de la maintenabilité

Si l'ingénieur définit la fiabilité comme "l'aptitude d'un dispositif à accomplir une fonction requise dans des conditions données et pour une période de temps donné", le mathématicien transforme cette définition en parlant de "probabilité d'accomplir une fonction requise". La conservation de la fiabilité concerne la maintenabilité, un autre aspect important des performances du système.

Ce paragraphe introduit les principaux fondements mathématiques. La modélisation de la fiabilité et de la maintenabilité s'articule sur les mêmes types de relations : lorsque l'on a décrit l'une, l'autre s'en déduit par analogie. Cette présentation s'appuie sur de nombreuses publications, entre autres ouvrages on peut citer les travaux [52, 53, 54] ou encore le livre référence de Villemeur [18].

### 2.4.1. Approche de la fiabilité par les probabilités

La fiabilité d'un groupe d'éléments à un instant  $t$  est donc la probabilité de fonctionnement sans défaillance pendant la période  $[0, t]$ , donc la probabilité que l'instant de première défaillance  $T$  soit supérieur à  $t$ :

$$R(t) = \text{Prob}(T > t) \quad (2.6)$$

Cette fonction de fiabilité, ou de survie, c'est le rapport :

$$R(t) = \frac{\text{Nbre d'élément en vie à l'instant } t}{\text{Nbre d'élément au total}} \quad (2.7)$$

On notera  $R(t)$  la probabilité de fonctionnement à l'instant  $t$ . le symbole  $R$  provient de l'anglais *Reliability*.

L'aptitude contraire est la probabilité de défaillance de l'entité  $E$ , quelquefois nommée «défiabilité» et notée  $F(t)$ . Elle est le complément à 1 de la fiabilité.

$$F(t) = 1 - R(t) \quad (2.8)$$

La fiabilité est une fonction décroissante du temps (Figure 2.8), de telle manière que :  
 $R(t_1) > R(t_2)$  si  $t_1 < t_2$ .

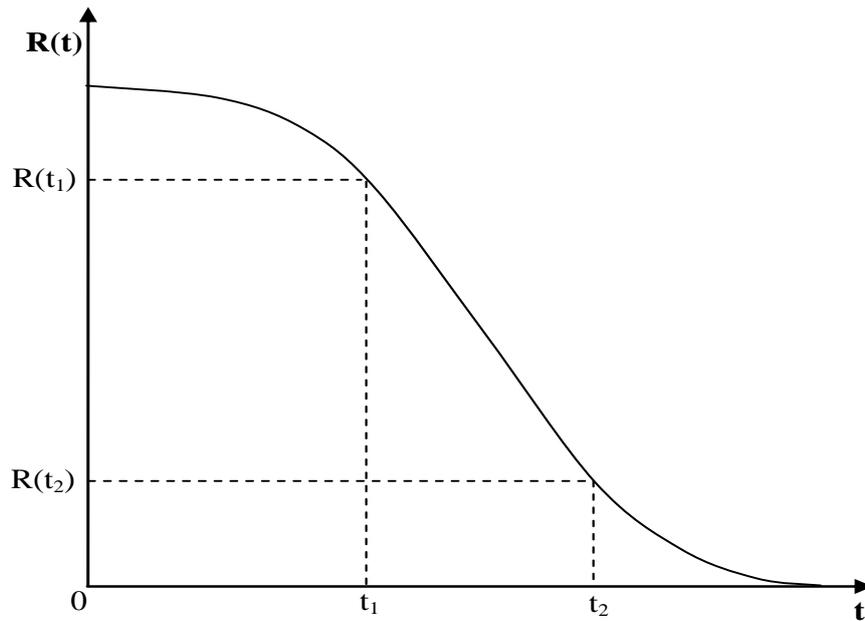


Figure 2.8 : La fiabilité décroissante avec le temps

La durée de vie  $T$  d'un système est une variable aléatoire non négative, à partir de laquelle la loi de dégradation du système peut être déterminée. On définit la fonction  $f(t)$ , à savoir la densité de probabilité de la variable  $T$ . Cette fonction multipliée par  $dt$  peut être interprétée comme la probabilité de défaillance entre  $t$  et  $t + dt$ . On la définit comme suit :

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt} = \text{prob}\{t < T < t + dt\} \quad (2.9)$$

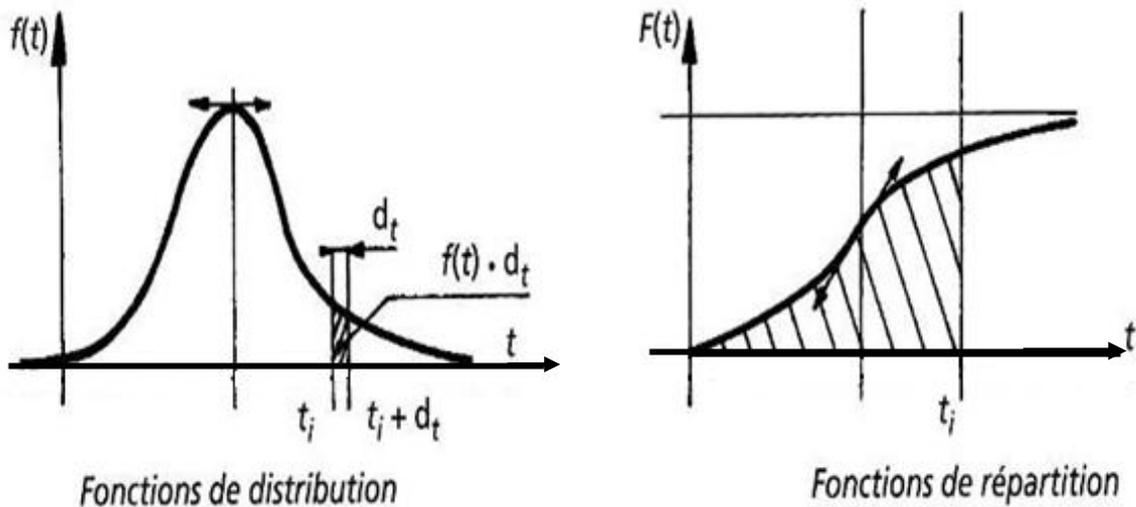


Figure 2.9 : Fonction de distribution et de répartition.

### 2.4.1.1 Taux de défaillance et fonctions de fiabilité

Un système qui ne peut pas remplir sa fonction est dit défaillant ou en panne.

Aït-Kadi [45] définit la défaillance comme étant la "cessation d'une entité à accomplir la fonction pour laquelle elle a été conçue", c'est le passage de l'état de fonctionnement à l'état de panne. Chaque défaillance est caractérisée par sa cause (circonstance ayant entraîné la défaillance) de son mécanisme (processus ayant entraîné la défaillance) et du mode de panne associé (un des états possibles d'une entité en panne pour une fonction requise), (Figure 2.10).

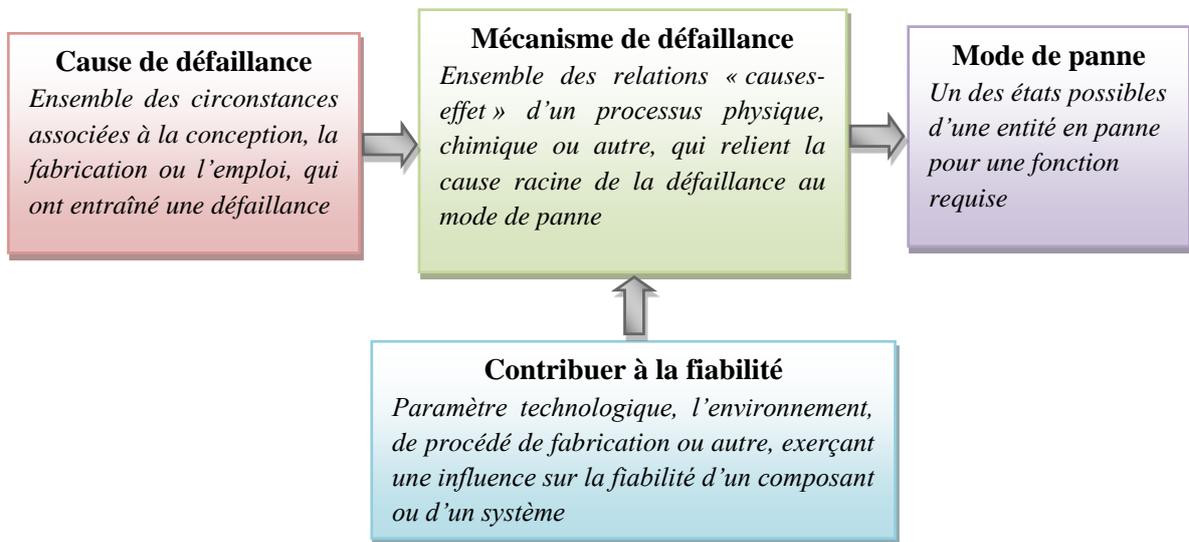


Figure 2.10 : Définition des concepts de fiabilité

Le taux de défaillance est la fréquence d'apparition de la défaillance d'un élément, par périodes individuelles successives, après que l'élément ait fonctionné normalement jusqu'à un certain moment [43]. Le taux de défaillance représente la proportion de dispositifs qui, ayant vécu un temps  $t$ , ne sont plus en vie à  $t + dt$ . Il s'agit de la probabilité conditionnelle suivante :

$$\lambda(t) = \frac{\text{Prob}(t \leq T < t+dt)}{\text{Prob}(T \geq t)} = \frac{\text{Nombre de défaillants au cours de } dt}{\text{Nombre d'éléments total}} \quad (2.10)$$

L'écriture mathématique du taux de défaillance à l'instant  $t$ , noté  $\lambda(t)$ , est la suivante :

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{R(t) - R(t+\Delta t)}{R(t)} \right) \quad (2.11)$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = -\frac{R'(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1-F(t)} \quad (2.12)$$

Physiquement le terme  $\lambda(t)\Delta t$ , mesure la probabilité qu'une défaillance d'un dispositif se produise dans l'intervalle de temps  $[t, t+\Delta t]$  sachant que ce dispositif a bien fonctionné jusqu'à l'instant  $t$ .

Les relations précédentes permettent donc de trouver  $\lambda(t)$  si l'on connaît  $F(t)$  ou  $R(t)$ . Inversement, si l'on connaît  $\lambda(t)$ , on peut obtenir  $R(t)$  (respectivement  $F(t)$ ) comme solution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{R'(t)}{R(t)} = -\lambda(t), \text{ [Respectivement } \frac{F'(t)}{1-F(t)} = -\lambda(t)] \quad (2.13)$$

On a alors :

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(x)dx} \text{ et } F(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(x)dx} \quad (2.14)$$

En résumé, le tableau 2.1 présente les mesures associées à la fiabilité :

Mesures	Équivalence	Définitions
$F(t)$	$= 1 - R(t)$	<b>la fonction cumulée de défaillance</b> est la fonction qui représente la probabilité d'avoir au moins une défaillance avant le temps. C'est la "défiabilité" (la probabilité de défaillance du système) ou la probabilité complémentaire à 1 de la fiabilité $R(t)$
$R(t)$	$= 1 - F(t)$	<b>La fonction de fiabilité</b> , appelée aussi fonction de survie, représente la probabilité de fonctionnement sans défaillance pendant la période $[0, t]$
$f(t)$	$= \frac{dF(t)}{dt}$	<b>la fonction de densité de probabilité</b> représente la probabilité de défaillance d'un élément à l'instant $t$ .
$\lambda(t)$	$= \frac{f(t)}{R(t)} = -\frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR(t)}{dt}$	<b>Taux de défaillance instantané</b> est la probabilité d'être défaillant pendant un instant $\Delta t$ à condition de ne pas l'avoir été jusqu'à $t$ .

### 2.4.1.2 Temps moyen de bon fonctionnement

Le temps moyen de bon fonctionnement (ou de défaillance ou de panne) correspond à l'espérance de la durée de vie  $T$ , on le note MTTF (en anglais *Mean Time To Failure*):

$$MTTF = E(t) = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) dt = \int_0^{\infty} R(u) du \quad (2.15)$$

Par définition le MTTF est la durée de vie moyenne du système.

### 2.4.2. Taux de réparation et fonction Maintenabilité

Le concept analogue au taux de défaillance est le taux de réparation  $\mu$  ou  $\mu(t)$  suivant qu'il est constant ou variables au court du temps. Par conséquent de la même manière que pour le taux de défaillances, on établit que le taux de réparation à un instant est défini comme la probabilité d'être réparé pendant un instant  $\Delta t$  à condition de ne pas l'avoir été jusqu'à  $t$ , ce qui s'écrit :

$$\mu(t) dt = \frac{dM(t)}{1-M(t)} \quad (2.16)$$

$M(t)$  : probabilité d'être réparé au temps «  $t$  ».

$T$  est défini comme la variable aléatoire « durée de réparation »

$$D'où : M(t) = Prob(T \leq t) \text{ et } \bar{M}(t) = Prob(T > t) \quad (2.17)$$

$$\text{Puis: } M(t) = 1 - \bar{M}(t) \quad (2.18)$$

#### 2.4.2.1 Fonction de densité de probabilité de réparation $h(t)$

Si on considère que  $T_r$  est la variable aléatoire associée à la durée de réparation et que  $h(\cdot)$  est sa fonction de densité alors, la probabilité que cette durée de vie soit comprise entre  $t$  et  $(t+\Delta t)$  est donnée par :

$$h(t)\Delta t = Prob(t < T_r \leq (t + \Delta t)) \quad (2.19)$$

La fonction de distribution associée aux durées de réparation est :

$$H(t) dt = Prob(T_r \leq t) = \int_0^t h(u) du \quad (2.20)$$

où  $h(t)$  la fonction densité de probabilité de réparation.

### 2.4.2.2 Temps moyen de réparation

La moyenne des temps de réparation, MTTR, (en anglais *Mean Time To Repair*) qui est une des principales mesures de la maintenabilité, est calculée à partir de l'expression (2.22).

$$MTTR = E(t) = \int_0^{+\infty} t \cdot h(t) dt = \int_0^{+\infty} (1 - M(t)) dt \quad (2.21)$$

Si les durées de réparation  $h(t)$  suivent une loi exponentielle avec un taux de réparation constant,  $\mu$ , on a :  $h(t) = \mu e^{(-\mu t)}$  (2.22)

$$MTTR = \frac{1}{\mu} \quad (2.23)$$

En résumé, le tableau 2.2 présente la Fiabilité, Maintenabilité et mesures associées

Attribut	probabilité	Taux instantané	Indicateurs temporels
Fiabilité	$R(t) = e^{\int_0^t \lambda(x) dx}$	$\lambda(t) = \frac{-\frac{dR(t)}{dt}}{R(t)}$	$MTTF = \int_0^{+\infty} R(t) dt$
Maintenabilité	$M(t) = 1 - e^{\int_0^t \mu(x) dx}$	$\mu(t) = \frac{\frac{dM(t)}{dt}}{1 - M(t)}$	$MTTR = \int_0^{+\infty} [1 - M(t)] dt$

### 2.4.3. Principales lois de probabilité

Parmi les lois de probabilité les plus utilisées en fiabilité et maintenabilité, les lois de probabilité discrète ou continue. Voir tableau (2.3).

- **les lois de probabilité discrètes** sont utilisées, par exemple, lorsqu'il s'agit de quantifier la défaillance à la sollicitation [55], qui se produit lorsqu'une entité refuse de changer d'état lorsque cela lui est demandé [56].
- **les lois de probabilité continues** sont associées aux variables aléatoires continues, par exemple, lorsqu'il s'agit de quantifier la durée de bon fonctionnement d'une entité [56].

Pour plus de détails à leur sujet et à leur caractéristiques, on pourra se reporter à l'annexe B.

Tableau 2.3 : les lois de probabilité.

Type de variable aléatoire	Nom de loi	Application
Discrète	<i>Loi binomiale</i>	<i>Défaillance à la sollicitation</i>
	<i>Loi de Poisson</i>	<i>défaillance à la sollicitation, lorsque le nombre d'expériences est élevé et quand l'espérance mathématique de la variable aléatoire est constante Continue</i>
Continue	<i>Loi de Weibull</i>	<i>Taux de défaillance décroissant, croissant ou constant</i>
	<i>Loi exponentielle</i>	<i>Taux de défaillance constant</i>
	<i>Loi normale</i>	<i>Incertitude liée à des mesures, fabrication</i>
	<i>Loi Log-Normale</i>	<i>Données de maintenabilité et défaillances dues à la fatigue</i>
	<i>Loi gamma</i>	<i>Très générale</i>

## 2.5. Spécificité des systèmes mécanique

Dans ce paragraphe, nous aborderons la spécificité des systèmes et/ou de ces composants mécaniques dans les études des durées de vie avant d'entamer leurs fiabilités. Nous mettons en évidence la complexité des systèmes ainsi que la complexité des phénomènes physique de leurs dégradations.

### 2.5.1. Complexité du système

De nombreuses définitions ont été données dans la littérature scientifique et dans différents domaines pour établir la notion de système. Un système étant présenté comme un ensemble déterminé d'éléments discrets [57] (composants, constituants) interconnectés ou en interaction, qui opèrent pour réaliser une mission prédéterminée [58]. Cette définition a l'avantage d'une certaine généralité et peut être étendue pour exprimer la complexité du système. Formé d'éléments en interaction dynamique, un système correspond à une portion d'entité réelle, définie par une frontière établie en fonction d'un but, qui se distingue de son contexte ou de son milieu tout en procédant à des échanges

avec son environnement [59]. Un système peut être défini aussi comme un ensemble de composants interdépendants, conçus pour réaliser une fonction donnée, dans des conditions données et dans un intervalle de temps donné. Pour chaque système, il importe de définir clairement les éléments qui le caractérisent, à savoir : la fonction, la structure, les conditions de fonctionnement, les conditions d'exploitation et l'environnement dans lequel il est appelé à opérer.

Généralement les industriels s'intéressent à la fiabilité de systèmes complexes formés de plusieurs composants élémentaires (joints, roulement, arbres, soupape garniture d'étanchéité mécanique,...). L'étude d'un système passe par sa décomposition en composants élémentaire. On étudie ensuite la fiabilité de chaque composant élémentaire et on déduit la fiabilité du système. La détermination de la fiabilité d'un système nécessite de connaître la loi de la fiabilité (ou la loi de défaillance) de chacun des composants intervenant dans le système [58, 17].

Un système complexe peut former différentes configurations en matière d'analyse de la fiabilité. Plus la complexité du système augmente, plus la fiabilité de celui-ci diminue, à moins que des mesures compensatoires soient prises (la redondance). Une modélisation fonctionnelle sous forme de schéma bloc de ces systèmes permet d'en déterminer la fiabilité. Chaque bloc représente un composant ou mode de défaillance [60]. Les configurations les plus couramment rencontrées sont les associations série, parallèle, série parallèle. D'autres types de configurations sont envisageables, notamment pour modéliser une redondance ou un élément de secours (redondances actives  $m$  parmi  $n$  et les redondances passives).

Le plus souvent, les systèmes mécaniques sont considérés à configuration série ou en combinaison parallèles séries.

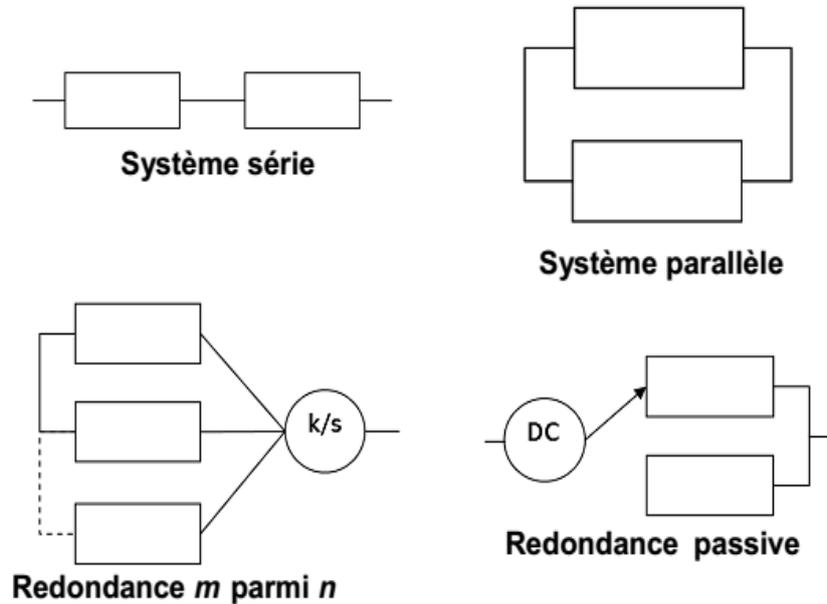


Figure 2.11 : les différentes configurations de système.

**a. Système série**

Dans ce cas, chaque composant est indispensable au fonctionnement du système, la défaillance de n'importe lequel entraîne la défaillance de tout le système. La fiabilité du système est exprimée de la manière suivante :

$$R(t)_{système} = \prod_{i=1}^n R(t)_{composant\ i}$$

On démontre aisément à partir de la formule précédente l'expression du taux de défaillance instantanée du système en fonction de ceux des composants :

$$\lambda(t)_{système} = \sum_{i=1}^n \lambda(t)_{composant\ i}$$

**b. Système parallèle**

Dans ce cas le système comprend i composant, la défaillance du système n'a lieu que si tous les composants sont défaillants. Le système présente alors une ou plusieurs redondances.

La fonction cumulée de défaillance du système s'exprime alors en fonction des fonctions cumulées de défaillance des composants :

$$F(t)_{système} = \prod_{i=1}^n F(t)_{composant i}$$

On en déduit la fiabilité du système :

$$R(t)_{système} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R(t)_{composant i})$$

### 2.5.2. Complexité des mécanismes de dégradation

Les composants mécaniques sont caractérisés par des mécanismes de dégradation souvent complexes, d'origines variées (fatigue, fluage, fissuration, usure, corrosion/oxydation, désagrégation, électro migration) [3], [47], [48].

La fatigue consiste dans la dégradation ou la modification des propriétés mécaniques des matériaux, suite à l'application répétée d'un chargement cyclique ou d'une vibration, conduisant à une rupture. La fatigue est la plus importante source de défaillance pour les composants mécaniques comme, par exemple, les roulements à billes.

Les effets dus au fluage, à l'usure et à la corrosion peuvent être maîtrisés par des dimensionnements de pièces correctes et des traitements de surfaces appropriés. Les problèmes majeurs de la fiabilité en mécanique proviennent essentiellement des contraintes trop élevées et des phénomènes de fatigue. Par conséquent l'analyse de la fiabilité des structures et des systèmes mécaniques devient de plus en plus une procédure complexe [3], [47], [61].

## 2.6. Fiabilité des systèmes mécaniques

Le processus d'élaboration de la fiabilité et de la maintenabilité des systèmes (produit) mécaniques doit être mis en place dès le début d'un projet de conception. Les systèmes mécaniques sont soumis aux phénomènes d'usure ou de vieillissement dès le début de leur vie. Les calculs de la fiabilité se font essentiellement dès les premières étapes de la conception. Ils ont pour objectif la définition de la fiabilité puis sa confirmation et sa vérification en exploitation [62], Ainsi plusieurs outils ont été développés.

### 2.6.1. La fiabilité tout au long du cycle de vie

De nombreux industriels travaillent à l'évaluation et l'amélioration de la fiabilité de leurs produits (systèmes) au cours de leur cycle de développement, afin de développer leurs connaissances sur le rapport Coût/Fiabilité et maîtriser les sources de défaillance. La dégradation de la fiabilité d'un produit est directement liée aux mécanismes de dégradation du système et/ou de ses composants cités ci-dessus. La fiabilisation d'un système (produit) fait appel à diverses méthodes et outils.

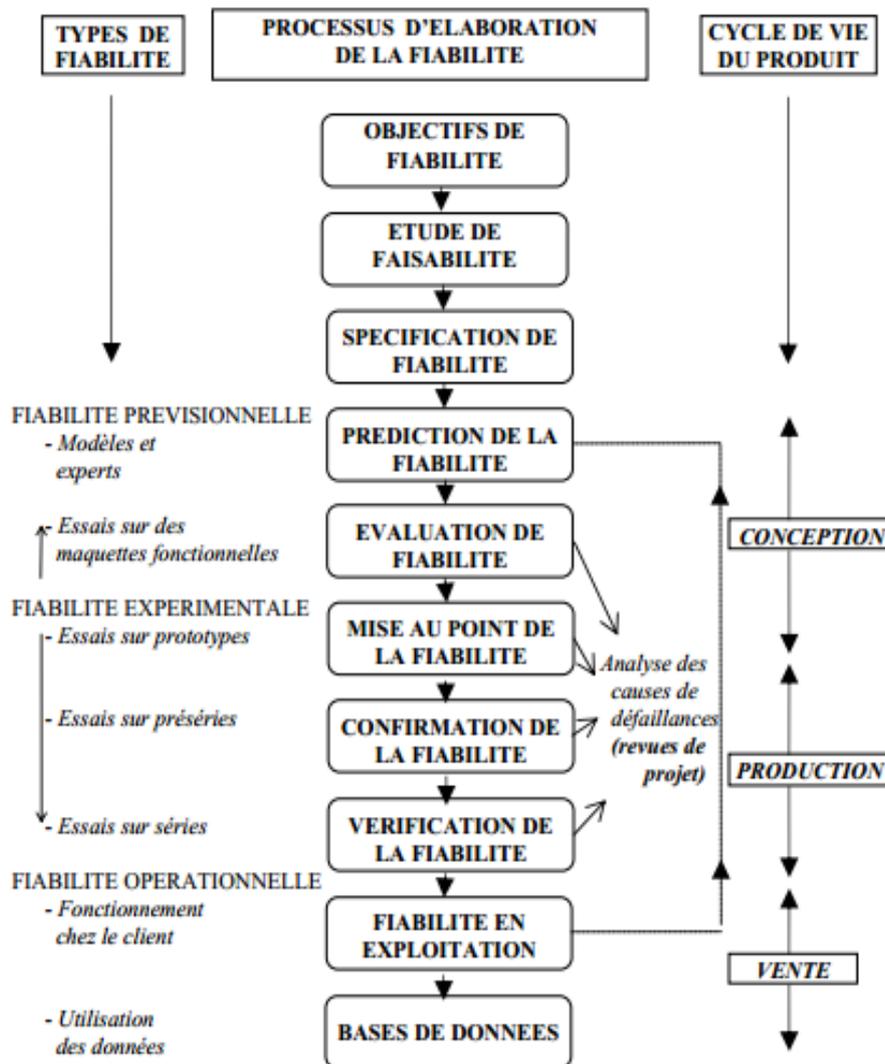


Figure 2.12 : Élaboration de la fiabilité [62].

Le processus d'élaboration de la fiabilité est un processus continu, la Figure 2.12 représente les différents éléments de la fiabilité. Dans cette démarche, il apparaît trois formes de fiabilité :

- La fiabilité prévisionnelle
- La fiabilité expérimentale
- La fiabilité opérationnelle

Dans les trois phases de fiabilité, on utilise plusieurs méthodes et outils d'évaluation, [24], [63] [64] (voir figure 2.13):

- **Évaluation prévisionnelle de la fiabilité** : cette phase consiste dès le début du projet à étudier la fiabilité à travers des analyses qualitatives (APR, AMDEC, ...) et quantitatives (AdD, DF, ...), en intégrant les différents recueils de données. Pour des systèmes complexes, il est possible de modéliser la fiabilité par des réseaux de Petri (RdP) ou chaînes de Markov. La fiabilité prévisionnelle permet de prendre des orientations optimales en matière de conception.
- **Évaluation expérimentale de la fiabilité** : cette phase intervient dès que le développement du produit est suffisamment avancé et que l'on dispose des premiers prototypes, il est possible de réaliser des essais de robustesse (appelés également essais aggravés) afin de connaître les faiblesses et les marges de conception. Une fois que le produit est mature (marges suffisantes), une campagne d'essais peut être menée pour estimer la fiabilité. Lors de la production, l'élimination des défauts de jeunesse (dérive process, composant faible, ...) est opérée par des essais de déverminage.
- **Évaluation opérationnelle de la fiabilité** : une fois que le produit est en exploitation, une estimation de la fiabilité est réalisée à partir des données de REX. Elle se pratique dès les premières mises en service et permet ainsi de corriger des défauts de conception et de fabrication/réalisation.

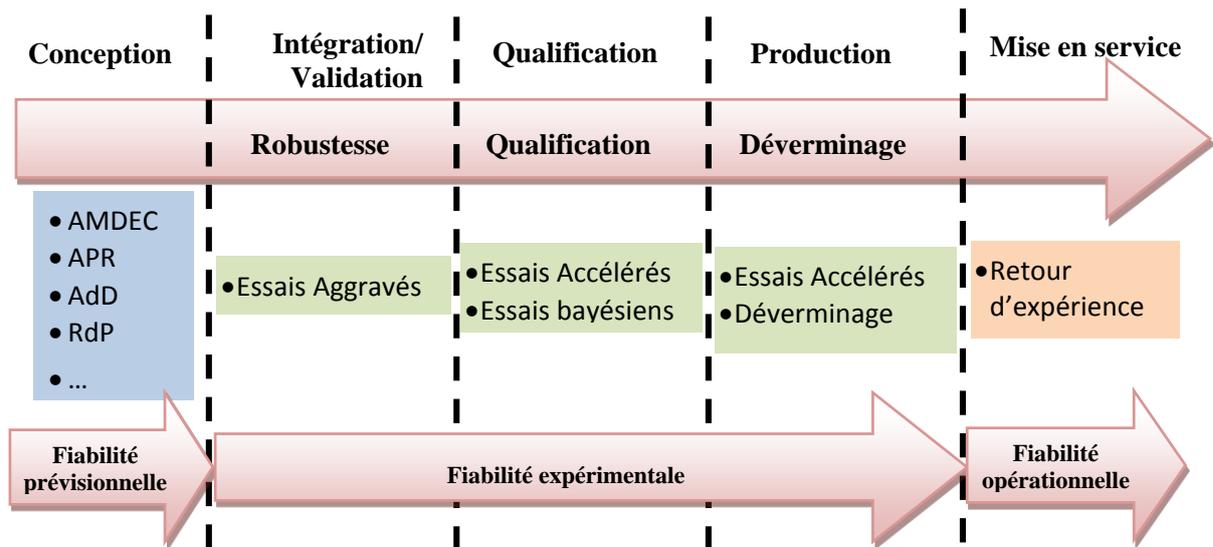


Figure 2.13 : Position des méthodes et outils dans le cycle de développement d'un produit.

Les trois démarches de la fiabilité ont fait objet de nombreux travaux. En phase de conception, les démarches de fiabilité prévisionnelles et expérimentales sont utilisées pour l'évaluation et l'optimisation d'un système en termes de fiabilité. Ces approches sont choisies sur la base des moyens et des informations disponibles, des temps de développement alloués, du niveau de fiabilité recherché, etc. Les approches employées sont [63, 62, 64] :

- l'approche déterministe du dimensionnement "résistance-sollicitation",
- l'approche par essais,
- l'approche par données d'exploitation,
- l'approche par retour d'expériences analogues,
- l'approche probabiliste du dimensionnement "résistance-sollicitation".

Plus de détails sur ces approches sont présentées en annexe (annexe C).

La fiabilité opérationnelle concerne l'ensemble des opérations de fiabilité menées sur le système (produit) lors de son utilisation. Cette étape permet de confirmer les différentes hypothèses prises (mécanismes de défaillance influents, lois de fiabilité,...) et de capitaliser cette information à travers des recueils de données ou pour servir comme

information a priori dans le cadre de démarches Bayésiennes pour futures versions du produit.

Dans le cadre de la thèse, nous nous sommes intéressés à la démarche bayésienne, cette méthode sera largement présentée dans le chapitre suivant.

### **2.6.2. Modélisation de la fiabilité des systèmes mécaniques**

L'industrie mécanique s'intéresse particulièrement à la fiabilité, pour assurer le bon fonctionnement de ses systèmes et gérer au mieux leurs maintenances. La détermination de la fiabilité d'un système mécanique (ou autre) nécessite tout d'abord de connaître la loi de la fiabilité (ou loi de défaillance) de chacun des composants. Pour les systèmes mécaniques, étant généralement complexe, la fiabilité du système repose sur la fiabilité de quelques composants élémentaires responsables de son dysfonctionnement, dit composants "responsables" ou "critiques" (parfois un seul), contribuant presque totalement à la probabilité de défaillance de l'ensemble [3].

Un modèle illustratif (réducteur de vitesse), dont les caractéristiques fiabilistes ont été empruntées à [65], servira d'exemple, permettant de déterminer la fiabilité d'un système mécanique à partir de ces composants.

#### ***Procédure d'illustration***

Pour la construction du modèle correspondant à ce réducteur (figure 2. 14), On est amené à s'interroger sur ses composants et sur les modes de défaillance de ceux-ci. Une analyse des modes de défaillance montre que certains éléments ont un risque de défaillance pratiquement nul, c'est à dire ceux dimensionnés pour une longévité quasiment infinie n'étant soumis ni à l'usure, ni à la fatigue (par exemple le carter).

#### ***Modélisation***

Par conséquent, les composants pris en compte, et considérer critiques vis-à-vis de la fiabilité sont les suivant : 1 arbre d'entrée, 1 arbre de sortie, 2 roues dentées, 4 roulements et 2 joints à lèvres, (le carter et les quatre couvercles ne figurent pas dans le modèle). Sachant que si l'un des composants était défaillant, le réducteur ne serait plus viable. Ceci sous-entend que le réducteur est modélisé en association série, comme présenté à la figure 2.15.

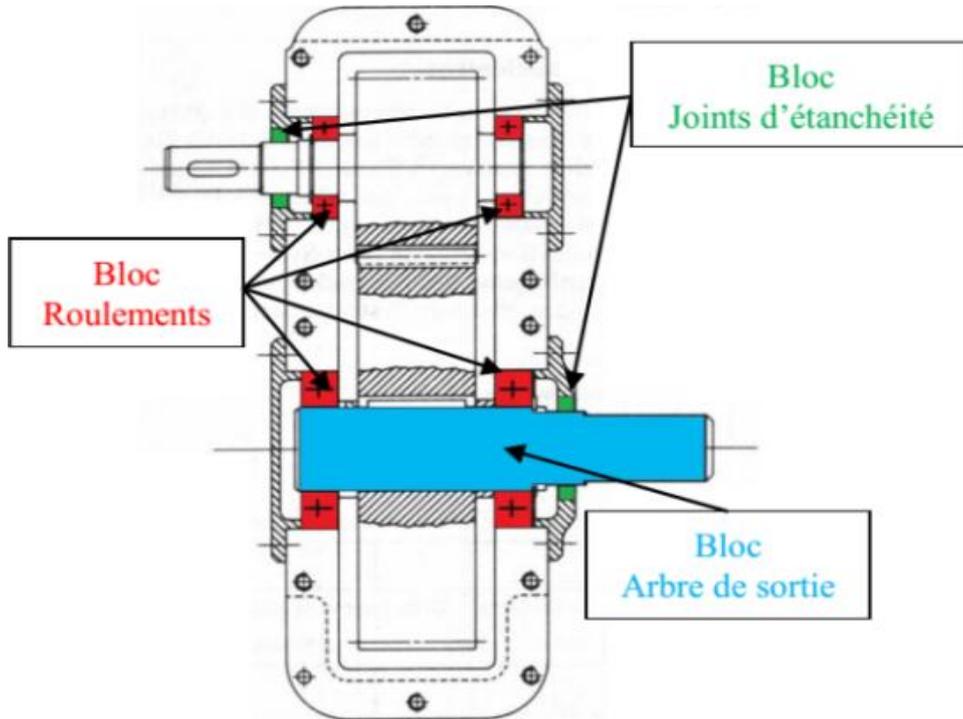


Figure 2.14 : Réducteur de vitesses

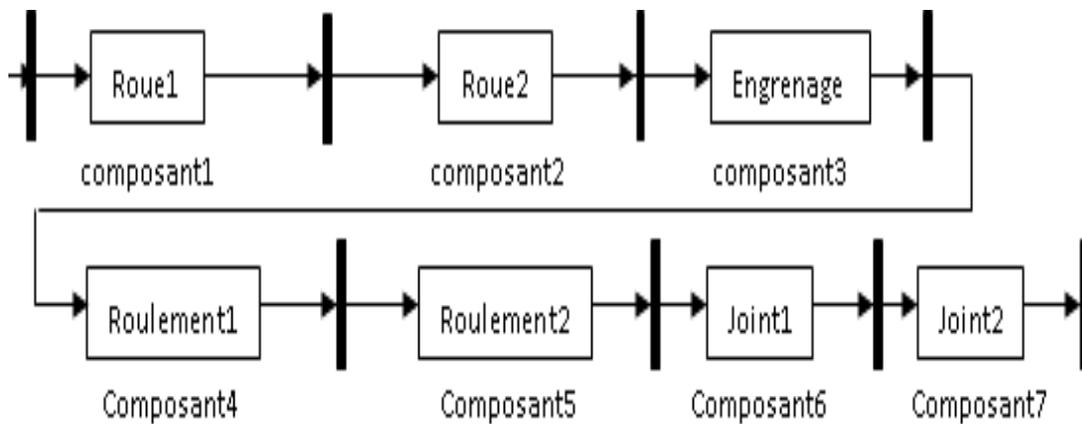


Figure 2.15 : Modélisation du réducteur en schéma bloc

### Calcul et résultat

Les auteurs [65] proposent d'associer à chaque élément une loi de défaillance selon la distribution de Weibull dont les paramètres figurent dans le tableau 2.4. Rappelons

l'expression de la fonction de fiabilité de la distribution de Weibull ainsi que la signification de ses paramètres:

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta} \text{ pour } t \geq \gamma$$

$$R(t) = 1 \text{ pour } t < \gamma$$

Avec

- $t$  Le temps
- $\beta > 0$  Paramètre de forme
- $\eta > 0$  Paramètre d'échelle (tours d'arbre d'entrée)
- $\gamma \geq 0$  Paramètre de position ou décalage à l'origine (tours d'arbre d'entrée)

La fiabilité du système est calculée en fonction des fiabilités de ses sept composants selon l'expression suivante :

$$R(t)_{sys} = \prod_{i=1}^7 R(t)_i \text{ où } R(t)_i = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta_i}\right)^{\beta_i}} \text{ } t \geq 0 \text{ } i = 1, \dots, 7$$

Tableau 2.4 : Paramètres de la loi de défaillance des éléments du réducteur (distribution de Weibull)

Composant		$\eta$	$\beta$
composant 1	Roue dentée 1	38000	1,4
composant 2	Roue dentée 2	70500	1,8
composant 3	Engrenage	1966600	13
composant 4	Roulement 1	9100000	1,11
composant 5	Roulement 2	15200000	1,11
composant 6	joint à lèvres radial 1	66000000	1,0
composant 7	joint à lèvres radial 2	6000000	1,0

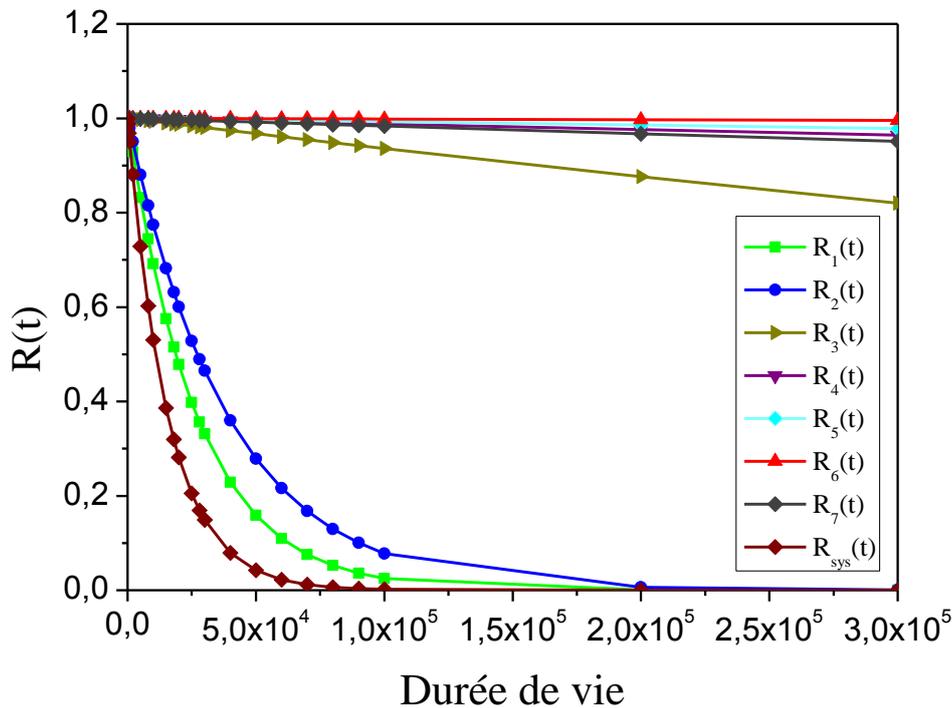


Figure 2.16 : Évolution de la fiabilité

La présentation graphique des résultats est illustrée à la figure 2.16; le graphique représente l'évolution de la fiabilité du système et la fiabilité de chaque composant. Cela permet de trouver facilement les composants critiques du système. Nous remarquons que c'est la roue dentée 1 qui dégrade le plus la fiabilité du réducteur (un système mécanique dépend principalement de la fiabilité d'un ou deux composants).

À partir de cet exemple simple, il est montré que la fiabilité mécanique consiste principalement en l'étude des composants.

### 2.6.3. Recueil de données de fiabilité

Sans des données fiables, il est difficile d'évaluer la fiabilité dans un délai raisonnable. Au fil des années de la pratique de la fiabilité, l'activité de collecte des données de fiabilité avait atteint son apogée dans les années 1980. Elle a malheureusement diminué en intensité dans les années 1990 et depuis cette période, la majorité des bases de données publiées n'a plus été mise à jour [66].

Les recueils de données de fiabilité sont fondés soit sur des résultats d'exploitation ou des résultats d'essais en laboratoire. Le processus de dégradation des équipements (modes, mécanismes et causes de défaillance), les conditions d'utilisation et l'évolution des technologies sont des paramètres nécessaires pour le calcul des taux de défaillance et l'élaboration des modèles prévisionnels de la fiabilité, or il est difficile de les prendre tous en considération. Les données sont souvent inappropriées aux systèmes et environnements réels.

Par conséquent, aucune de ces sources ne fournit des données parfaites pour une évaluation plus précise de la fiabilité, les informations recueillies ne permettent qu'une exploitation partielle des données, cependant elles restent toujours utiles pour de nouvelles conceptions.

Les recueils de données de fiabilité les plus connus en mécanique sont présentés en annexe A [Annexe A]. Ces recueils sont mis à jour régulièrement pour tenir compte des évolutions technologiques. La durée de vie de ces recueils contrairement à l'électronique, est plus longue et varie entre 30 et 40 ans.

## **2.7. Généralité sur les Méthodes d'évaluation**

Les méthodes d'analyse de la fiabilité d'un système complexe sont nombreuses. La littérature [17, [18], [67], [68], [69], distingue un certain nombre de méthodes permettant d'évaluer la fiabilité en cours de développement.

Trois modes de classification de ces approches sont couramment rencontrés :

1. Approches qualitatives ou quantitatives
2. Approches inductives ou déductives
3. Approches statistiques/ dynamiques

Le tableau 2.5, détaille chaque démarche ou méthode selon ces trois critères et selon aussi les objectifs recherchés. Ainsi, une méthode particulière peut être choisie en fonction des buts de l'étude ou en fonction du type de résultats, qui peut être quantitatif, qualitatif ou combiner les deux aspects.

Tableau 2.5: Principales méthodes et démarche de la fiabilité.

Méthode	Inductive/ déductive	Qualitative/ quantitative	Statique/ dynamique	Objectifs visés
<b>Analyse Préliminaire des Risques/ Danger (ARR/APD)</b>	<i>Inductive</i>	<i>Qualitative</i>	<i>Statique</i>	<i>Identifier les scénarios d'accident en présence de danger. (Repérer a priori les risques à étudier)</i>
<b>Analyse des Modes de Défaillance de leurs Effets et de leurs Criticité (AMDEC)</b>	<i>Inductive</i>	<i>Qualitative</i>	<i>Statique</i>	<i>Identifier les effets des modes de défaillance des composants sur le fonctionnement du système.</i>
<b>Arbre de Défaillance (AdD)</b>	<i>Déductive</i>	<i>Qualitative Quantitative</i>	<i>Statique</i>	<i>Représenter de façon synthétique l'ensemble des combinaisons d'événements qui peuvent engendrer un événement redouté.</i>
<b>Diagramme de succès ou de fiabilité (DS/ DF)</b>	<i>Déductive</i>	<i>Qualitative Quantitative</i>	<i>Statique</i>	<i>Modéliser le fonctionnement puis évaluer la fiabilité d'un système en considérant que le service global de ce système résulte d'une mise et/ ou en parallèle des services élémentaire.</i>
<b>Arbre des conséquences ou Arbre d'Événement (ACQ/ AE)</b>	<i>Inductive</i>	<i>Qualitative Quantitative</i>	<i>Statique</i>	<i>Représenter sous forme de scénarios les conséquences potentielles d'un événement initiateur, d'une défaillance.</i>
<b>Méthode du Diagramme Causes - Conséquences (DCC)</b>	<i>Inductive et Déductive</i>	<i>Qualitative Quantitative</i>	<i>Statique</i>	<i>Décrire les scénarios d'événements redoutés à partir d'événement initiateurs.</i>
<b>Table de Vérité/ Décision (TV/TD)</b>	<i>Inductive</i>	<i>Qualitative Quantitative</i>	<i>Statique</i>	<i>Identifier tous les états (fonctionnement ou panne) du système à partir des comportements binaires de ses composants.</i>
<b>Réseau de Pétri</b>	<i>Inductive</i>	<i>Qualitative Quantitative</i>	<i>Dynamique</i>	<i>Repérer le passage par les états de défaillance sur le fonctionnement du système.</i>
<b>Chaînes de Markov ou Méthode de l'espace des États (EE).</b>	<i>Inductive</i>	<i>Qualitative Quantitative</i>	<i>Dynamique</i>	<i>Repérer le passage par les états de défaillance sur le fonctionnement du système.</i>
<b>Réseaux Bayésien dynamique</b>	<i>Inductive</i>	<i>Qualitative Quantitative</i>	<i>Dynamique</i>	<i>Identification de l'évolution du système dans les états bon fonctionnement, dégradé, panne</i>

- méthodes inductives ou déductives;
- L'application de ces méthodes fait appel au raisonnement par induction et par déduction. La figure 2.17 resitue les deux démarches par rapport au mode d'analyse du système et au déroulement des événements dans le temps.
- méthodes quantitatives ou qualitatives;
- Les méthodes qui offraient une possibilité importante de quantification sont qualifiées de quantitatives, et de qualitatives les méthodes qui excluaient, ou dans lesquelles cet aspect est marginal.

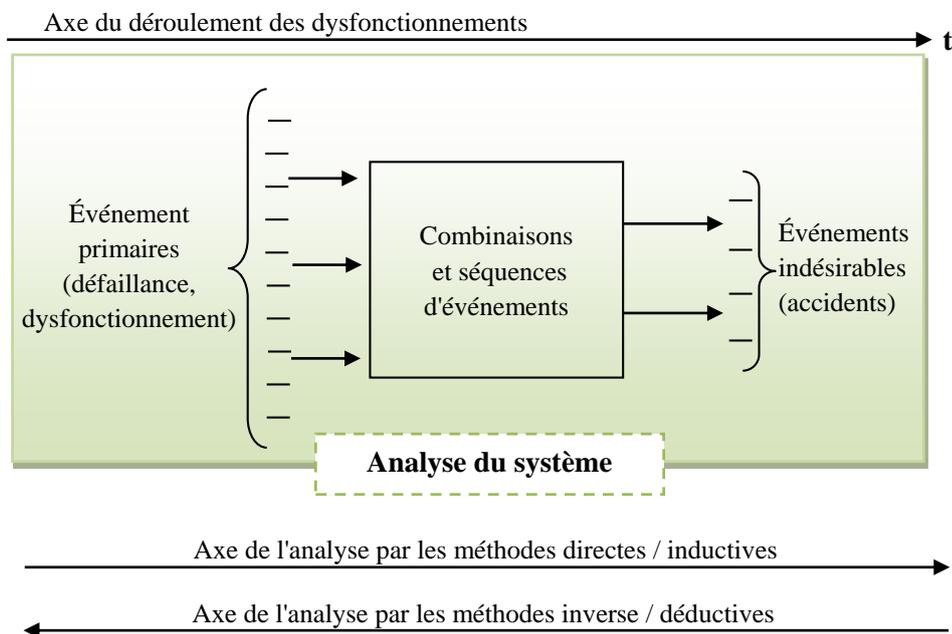


Figure 2.17 Rapprochement entre l'axe du déroulement des événements et les modes d'analyse du système

Les méthodes statiques se distinguent des méthodes dynamiques. Les méthodes statiques ne prennent pas en compte l'évolution du système dans le temps, sept méthodes statiques sont répertoriées dans le tableau 2.5. Les trois dernières méthodes, concernent le traitement de problèmes stochastiques, c'est-à-dire des problèmes aléatoires dépendant du temps nommée méthodes dynamiques.

## **2.8. Conclusion**

Dans ce chapitre, on a défini la fiabilité, la maintenabilité ainsi que les grandeurs qui les caractérisent. La fiabilité des systèmes et des composants est souvent décrite par la courbe caractéristique dite en "baignoire" qui décrit l'évolution du taux de défaillance instantanée d'où on a souligné la particularité des composants mécaniques dans l'analyse de la fiabilité. On a abordé la spécificité des composants mécaniques dans les études des durées de vie, qui mettent en évidence la complexité des phénomènes physiques de dégradation qui ont une influence sur l'évaluation de leur fiabilité.

Pour un système mécanique complexe, son taux de défaillance peut être calculé en fonction de ses composants et leurs implications respectives dans le mécanisme de défaillance incriminé. Il a été déduit par un exemple, que la fiabilité du système repose sur la fiabilité de quelques composants élémentaires responsables de son dysfonctionnement parfois un seul.

Les méthodes utilisées dans chaque étape du cycle de vie de développement des systèmes complexes ont été présentées pour analyser la fiabilité. L'ensemble de ces méthodes constitue un processus à part entière : processus de fiabilité.

Les analyses de fiabilité peuvent être réparties en trois composantes complémentaires qui sont la fiabilité prévisionnelle et la fiabilité expérimentale. Ces deux démarches sont utilisées en phase de conception pour l'évaluation et l'optimisation d'un système en termes de fiabilité, elles sont choisies sur la base des informations disponibles. Enfin la fiabilité opérationnelle qui permet d'évaluer le système dans son environnement par rapport aux objectifs initiaux, de valider l'ensemble des démarches de fiabilité prévisionnelle et expérimentale, d'identifier les défaillances inconnues, de créer ou affiner des outils et d'avoir une référence pour fixer des objectifs des systèmes ou produits futures.

Il a été abordé aussi l'existence de nombreux recueils de données de fiabilité, qui représentent des outils incontournables et indispensables pour le développement des systèmes. En mécanique, l'utilisation de ces recueils est plus récente comparée au domaine électronique, où le calcul de la fiabilité est pratiqué depuis de nombreuses années, et dont les bases de données sont disponibles et nombreuses.

En revanche, en mécanique, il y a une certaine difficulté à constituer ces recueils, compte tenu de la complexité des composants, en plus, les données sont difficiles à obtenir parce qu'elles ne sont pas communiquées ou publiées et, dans la plupart des cas, elles sont

exploitées confidentiellement. Néanmoins, en pratique les recueils sont de plus en plus utilisés.

L'analyse de la fiabilité par la démarche bayésienne, est une autre approche qui contribue également à l'évaluation de la fiabilité des systèmes. Basée sur l'information a priori issue de diverses sources (recueils de donnée, avis d'experts ou historique des systèmes identiques ou similaires...), les techniques bayésiennes s'appliquent aux problèmes industriels dont le but est d'estimer ou maîtriser la fiabilité.

Après avoir discuté les principales notions de fiabilité, maintenabilité et les différentes méthodes de l'évaluation de la fiabilité. On considère dans ce qui suit les aspects fondamentaux de l'approche bayésienne, sujet de notre étude.

# Chapitre III

## L'Approche Bayésienne Pour la fiabilité

### Sommaire

---

- 3.1.** Introduction
  - 3.2.** Présentation de l'approche Bayésienne
    - 3.2.1. Intérêt de la démarche bayésienne
    - 3.2.2. Les difficultés de la démarche bayésienne
  - 3.3.** Principe de conjugaison.
  - 3.4.** Développement bayésienne pour des lois conjuguées.
    - 3.4.1. Fonction de vraisemblance exponentielle
      - 3.4.1.1. Connaissances a priori non informative
        - 3.4.1.1.1. Distribution a priori de Jeffreys
        - 3.4.1.1.2. Distribution a priori uniforme tronqué
      - 3.4.1.2. Connaissances a priori informative
        - 3.4.1.2.1. Distribution Gamma
    - 3.4.2. Fonction de vraisemblance binomiale
      - 3.4.2.1. Connaissances a priori non informative
        - 3.4.2.1.1. Distribution a priori uniforme
      - 3.4.2.2. Connaissances a priori informative
        - 3.4.2.2.1. Distribution Bêta
  - 3.5.** Développement bayésienne pour les paramètres de fiabilité variables avec le temps
    - 3.5.1.1. Approche Bayésienne de la loi de Weibull
    - 3.5.1.2. Approche Bayésienne de la loi de Weibull lorsque les paramètres de forme et d'échelle sont inconnus
  - 3.6.** Évaluation de la maintenabilité
  - 3.7.** Conclusion
-

## L'Approche Bayésienne Pour la fiabilité

### 3.1. Introduction

Pour fournir des données de fiabilité (durées de vie, intervalles de confiance...), il est nécessaire d'effectuer des inférences statistiques à partir des données récoltées. Cependant on remarque que les "composants" sont de plus en plus fiables ce qui a pour conséquence de diminuer le nombre d'informations. On arrive ainsi au paradoxe suivant: plus la fiabilité d'un composant est élevée, plus son évaluation est difficile. Cette difficulté réside dans le fait que les méthodes statistiques classiques pour l'estimation de paramètres nécessitent un nombre important de données (le retour d'expérience : REX).

Ces méthodes sont essentiellement basées sur l'approche fréquentielle ou fréquentistes exprimant la convergence de la fréquence des événements vers leur probabilité d'occurrence, lorsque le nombre des observations tend vers l'infini. Ainsi, l'information sera d'autant plus précise que l'échantillon sera grand (*le futur a des chances d'être l'image du passé lorsque le retour d'expérience est important*). Ces méthodes sont applicables pour des composants faisant l'abondance des données, mais deviennent vite difficilement applicable au cas de composants coûteux et à durée de vie élevée pour lesquels le retour d'expérience est faible, ou lorsque des modifications de conception, d'exploitation ou de maintenance risquent de perturber (dans le bon sens) le comportement futur des systèmes.

Une alternance à la limite de ces méthodes en termes de précision d'estimation, est les techniques bayésiennes. L'utilisation de la démarche subjective bayésienne s'avère plus appropriée, puisqu'elle permet d'avoir un maximum d'information à partir de très peu de données issues du retour d'expérience ou d'essais. Elle considère que la probabilité est un concept "personnalisé", dépendant à la fois des connaissances initiales dites a priori de l'analyste et (ou) d'expert, ou des connaissances issues d'un retour d'expérience passé, qui vont être "corrigées" (infirmées ou validées), et actualisées par l'acquisition de nouvelles informations issues du retour d'expérience [70]. Ces nouvelles informations qui vont être jointes aux connaissances a priori constituent ce que l'on appelle la fonction de vraisemblance dans la démarche bayésienne. Ainsi, ces techniques mettent en œuvre un raisonnement bien adapté à la logique expérimentale, se basant sur l'enrichissement dynamique de la connaissance par les informations du terrain [71].

Dans ce chapitre on introduit la démarche bayésienne, son intérêt, et ses difficultés dont les principales sont le recueil et la modélisation de l'expertise et le principe de conjugaison qui permet de joindre les informations a priori et les informations du retour d'expérience, particulièrement lorsque les paramètres de fiabilité dépendent du temps.

### 3.2. Présentation de l'approche Bayésienne

Le théorème de Bayes (1702-1761) permet de fusionner deux types d'information [17], [36], [52], [72], [73] : la connaissance initiale dite a priori de l'analyste (ou experts) ou la connaissance issues d'un retour d'expérience passé, et la vraisemblance qui représente les observations du retour d'expérience (REX) pour obtenir une connaissance enrichie, dont l'incertitude est plus faible : La probabilité a posteriori représentant ainsi la nouvelle connaissance de l'analyste. Notons que le résultat a posteriori peut devenir l'information a priori si de nouvelles informations issues du retour d'expérience sont disponibles. Ceci représente le principe d'actualisation dynamique des connaissances utilisé particulièrement pour les banques de donnés.

L'application de la démarche bayésienne pour l'étude de fiabilité envisagée d'un système consiste à appliquer l'inférence bayésienne représentée dans la figure 3.1. Le passage de la distribution a priori à la distribution a posteriori des paramètres du modèle statistique, exprimé par la formule de Bayes, peut être alors interprété comme une mise à jour de la connaissance, sur la base des observations.

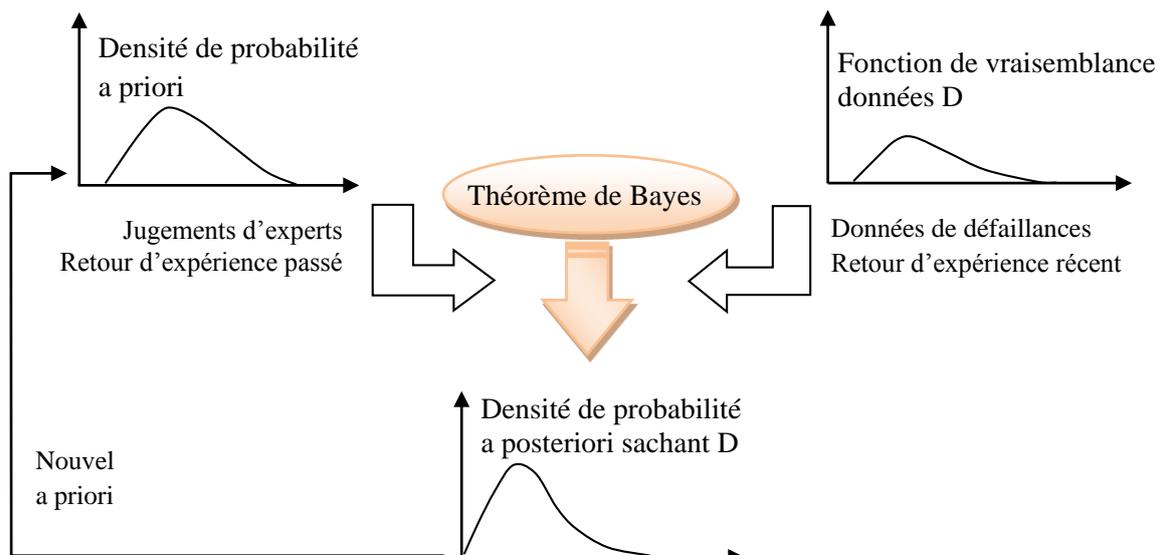


Figure 3.1 : Principe de la démarche Bayésienne

Cette lecture de la formule de Bayes est à la base de l'origine de la distinction entre les statisticiens dits fréquentistes et les bayésiens.

Grace au théorème de Bayes, il est possible de combiner l'information subjective et l'information objective (déterminée par l'échantillon).

Deux formulations principales du théorème de Bayes peuvent être proposées, une formulation discrète, et une autre continue. En fiabilité, c'est la formulation continue du théorème de Bayes qui est la plus utilisée.

**Formulation discrète (cas des événements discrets) :**

$$P(A/B) = \frac{P(A) \cdot P(B/A)}{\sum [P(A) \cdot P(B/A)]} \quad (3.1)$$

*Qui se lit la : probabilité conditionnelle de réalisation d'un événement A sachant que l'événement B s'est produit, est proportionnelle (à un facteur de normalisation près) à la probabilité (a priori) de A (probabilité avant que l'on observe B) multipliée par la probabilité d'observer B sachant A.*

Où :

- $A$  : événement étudié,
- $B$  : événement(s) observé(s),
- $P(A)$  : probabilité a priori de réalisation de l'événement A,
- $P(B/A)$  : vraisemblance de l'occurrence de l'événement A sachant que B a été observé,
- $P(A/B)$  : probabilité a posteriori de réalisation de l'événement A sachant que B a été observé.

Le dénominateur de cette expression est le facteur de normalisation correspondant à la somme de tous les résultats possibles que l'on aurait pu observer (probabilité que A se réalise + probabilité que A ne se réalise pas).

**Formulation continue (cas de variables continues):**

$$g(\theta/X) = \frac{f(X/\theta) \cdot g(\theta)}{\int_{D(\theta)} f(X/\theta) \cdot g(\theta) d\theta} \quad (3.2)$$

La fonction de densité de probabilité a postérieure de  $\theta$ , conditionnée par les observations  $x_i : g(\theta/X)$ , est alors par application du théorème de Bayes, le produit de densité a priori de  $\theta$  par la fonction de vraisemblance des observations, divisé par le facteur de normalisation de Bayes.

Le domaine d'intégration (D) est limité au domaine de variation possible de la variable  $\theta$ .

Où :

$\theta$	: paramètre étudié,
$X = (x_1 \dots, x_n)$	: observation de la variable aléatoire X,
$g(\theta)$	: densité de probabilité a priori,
$f(X/\theta)$	: distribution de probabilité conditionnelle de X sachant $\theta$ , fonction de vraisemblance de l'occurrence de l'échantillon observé,
$g(\theta/X)$	: densité de probabilité a postérieure de $\theta$ sachant qu'on ait observé X
$D(\theta)$	: domaine d'intégration du paramètre $\theta$ étudié.

Le dénominateur de l'équation est, comme on l'a vu, une constante normative représentant l'ensemble des résultats possibles que l'on aurait pu observer dans le domaine de variation possible de la variable  $\theta$ .

La figure 3.2 montre un exemple de représentation de ces différentes distributions.

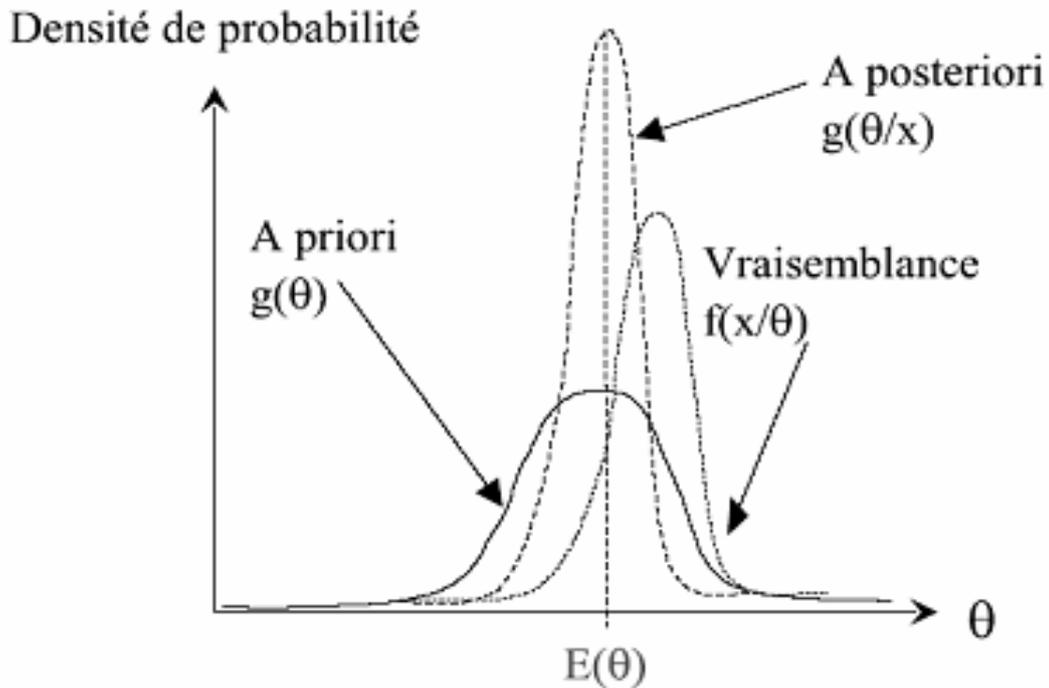


Figure 3.2 : Représentation des densités de probabilité du théorème de Bayes.

### 3.2.1. Intérêt de la démarche Bayésienne

Les principales différences de l'approche bayésienne comparées à l'approche classique ou fréquentielle qui font son intérêt et les raisons de son utilisation sont les suivantes :

- La vision subjective des probabilités, à la base de l'approche Bayésienne, est plus cohérente que les théories fréquentistes qui interprètent la probabilité comme une portion limitée déterminée sur la base d'une séquence infinie d'expériences [74].
- L'interprétation bayésienne de la probabilité [75, 76] est associée à une notion de *pari rationnel* : la probabilité attribuée à un événement est définie par les conditions auxquelles un individu rationnel est prêt à parier sur la réalisation de tel événement. La rationalité de l'individu, est nécessaire pour éviter que la définition de la probabilité soit arbitraire et est décrite par certaines règles de comportement, face à l'incertitude [77].
- la formule de Bayes est l'instrument qui permet de combiner les informations (ou la vision) subjective du modélisateur et l'évidence des résultats expérimentaux. Vu que dans la pratique, on est souvent confronté à des données peu représentatives ou incohérentes mais en revanche on dispose de l'avis technique des experts qui, sur la

base de leur expérience et savoir-faire, sont capables de donner des informations complémentaires de grande utilité, qu'il serait dommage de ne pas prendre en compte [78], [79].

- L'analyse bayésienne fournit des résultats d'interprétation plus directe que ceux de la démarche fréquentielle. Pour les bayésiens, l'estimateur de la probabilité a posteriori est un intervalle dit de crédibilité avec un taux de confiance  $(1-\alpha)$ . On l'appelle intervalle de crédibilité car ses limites sont fixes et contiennent le paramètre avec une probabilité donnée. Par exemple l'intervalle de crédibilité a posteriori à 95% est typiquement celui délimité inférieurement par le percentile d'ordre 2.5% et supérieurement par le percentile d'ordre 97.5%. Dans l'inférence classique, l'intervalle de confiance fréquentiel a des bornes aléatoires.
- Dans l'inférence classique cette assertion n'est plus vraie parce que le paramètre (inconnu) du modèle n'est pas une variable aléatoire mais une grandeur constante. L'interprétation correcte de l'intervalle de confiance est que, si on imagine l'ensemble des échantillons aléatoires pouvant être obtenus à partir du modèle, paramétré par  $\theta$ , 95% des intervalles de confiance calculés (sur la base des différents échantillons) contiennent la vraie valeur du paramètre. L'interprétation bayésienne, décidément plus naturelle, est d'ailleurs celle de la plupart des praticiens qui font de l'inférence bayésienne sans le savoir [80].
- Les résultats de l'inférence bayésienne sont plus riches que les estimateurs fournis par les techniques classiques d'inférences [81]. Les techniques bayésiennes permettent d'obtenir la loi jointe des paramètres du modèle et donc de prendre en compte simultanément l'effet de l'incertitude globale sur l'ensemble des paramètres inconnus sur les prévisions futures du comportement du système étudié et sur les décisions suggérées par ce comportement [82].

### 3.2.2. Difficulté de la démarche Bayésienne

La démarche bayésienne a été formalisée et relancée au 20<sup>ème</sup> siècle dans les années 1930 [70]. Les difficultés algorithmiques sont maintenant résolues grâce au développement du calcul intégral puis de logiciels dédiés et à l'emploi des ordinateurs [70]. Mais les difficultés majeures liées à la démarche bayésienne restent :

- Le choix d'une distribution de probabilité a priori appropriée à l'état des connaissances initiales, est une démarche complexe, qui peut laisser place à une appréciation subjective dont il est difficile de spécifier une loi a priori précise pour les modéliser. Malgré latitude dans le choix de la loi a priori, on souhaite lui associer les propriétés suivantes :
  - Le calcul de la densité jointe a posteriori à partir du produit des distributions a priori et celle de l'échantillon d'observation doit être aussi simple que possible ;
  - La distribution a posteriori doit être de préférence du même type que la distribution a priori afin de permettre un calcul d'actualisation itératif ;

Dans le domaine de la fiabilité des systèmes et pour des raisons de conjugaison des lois (voir tableau 3.1), les principales distributions utilisées sont :

- La loi exponentielle qui est directement associée au processus poissonnien et qui est représentative de la durée de vie de matériels qui ont un taux de défaillance aléatoire constant,
  - La loi de Weibull qui généralise la loi exponentielle mais dont le taux de défaillance varie dans le temps,
  - La loi Log-Normale représentative en particulier des temps de réparation des matériels et enfin la loi Gamma.
- La distribution a priori doit pouvoir représenter un grand nombre de situations ou de phénomènes physiques ;
  - Elle doit être paramétrable, et les paramètres doivent pouvoir être interprétés physiquement.
- L'informativité des connaissances a priori a un impact sur la densité a posteriori (résultat). La probabilité a posteriori est une moyenne pondérée entre l'information fournie a priori et les observations du retour d'expérience (la fonction de vraisemblance) : intuitivement elle sera attirée par la distribution qui apportera le plus d'informations, donc celle qui sera la plus précise par rapport à sa valeur moyenne. Pour la fiabilité des systèmes mécaniques, les données disponibles avant (a priori) la collecte d'un retour d'expérience (la fonction de vraisemblance) sont principalement de deux formes:

- informations objectives: Ce sont des données opérationnelles, issues d'essais ou de retour d'expérience (REX) auprès des fabricants ou des recueils de données connues.
- informations subjectives: Ce sont des données représentant l'avis d'un ou de plusieurs experts.

Ainsi, en fonction du type de distribution choisie pour modéliser l'information a priori qui peut être plus ou moins informative vis-à-vis des observations, donc plus ou moins d'impact sur la densité de probabilité a posteriori.

### 3.3. Principe de conjugaison

Le principe de conjugaison utilisé dans la démarche Bayésienne consiste à choisir une loi a priori de même nature que la fonction de vraisemblance afin d'aboutir à une distribution a posteriori connue. En effet, si la densité a priori est conjuguée à la fonction de vraisemblance, la détermination de la distribution jointe a posteriori, est simplifiée, puisque ses paramètres sont tout simplement égaux à la somme des paramètres de la densité a priori et de la fonction de vraisemblance.

Le produit de deux distributions conjuguées est une distribution elle-même conjuguée aux deux autres. Dans ces conditions, le calcul ne présente aucune difficulté et peut se réaliser manuellement.

Il est démontré que les familles de lois dites conjuguées ne se contentent pas uniquement de simplifier les calculs mais surtout que ce type de lois que l'on peut le mieux maîtriser pour pondérer à volonté le pouvoir relatif entre les données et la connaissance a priori dans la détermination de la loi a posteriori. On peut ainsi minimiser l'impact de la loi a priori si le REX est fiable, ou au contraire le favoriser dans le cas où le système a subi des modifications [70]. L'impact des modifications est alors estimé par l'expertise a priori.

Le tableau 3.1 présente les principales distributions conjuguées de lois fréquemment utilisées en fiabilité [52, 70, 71].

Tableau 3.1. : Principales lois conjuguées

Vraisemblance Lois des observations $f(X/\theta)$	Distribution a priori $g(\theta)$	Distribution a posteriori $g(\theta/X)$
<b>Poisson</b> $P(\theta), x$	Gamma $g(\alpha, \beta)$	Gamma $g(\alpha + x, \beta + 1)$
<b>Exponentielle</b> $f(k, t/\lambda)$	Gamma $g(\alpha, \beta)$	Gamma $g(\alpha + k, \beta + t)$
<b>Gamma</b> $g(k, t)$	Gamma $g(\alpha, \beta)$	Gamma $g(\alpha + k, \beta + t)$
<b>Binomial</b> $bi(a, b, n)$	Bêta $b(\alpha, \beta)$	Bêta $b(\alpha + a, \beta + n - a)$
<b>Bêta</b> $b(\alpha, x)$	Exponentielle $exp(\lambda)$	Exponentielle $exp(\lambda - \ln(1 - x))$
<b>normale</b>	normale	normale
<b>normale</b>	gamma	gamma

Avant d'aborder le développement bayésien, il est nécessaire de voir la typologie des données disponibles. Elles sont de deux formes :

⇒ **données objectives** : Ce sont des données opérationnelles issues d'origines diverses:

- Données des essais sur le matériel,
- Données du retour d'expérience.

La plupart des cas d'analyse de fiabilité utilisent comme données les instants de défaillance résultant d'essais ou de l'exploitation. Dans ce cas on peut avoir quatre types de données recueillies (figure3.3) :

- **Données complètes** : Les défaillances survenant à la fin d'observation constituent un échantillon de données complètes, c'est le cas le plus informatif.
- **Données censurées à droite** : les survies constatées en fin d'observation représentent les censures à droite. L'essai est arrêté avant l'apparition de toutes les défaillances, on a seulement l'information  $t_d < t$ ,
- **Données censurées à gauche** : la défaillance est constatée après son apparition lors d'une inspection par exemple. On ne sait pas si des défaillances sont survenues avant le début du suivi des matériels : on a seulement l'information  $t < t_g$ ,

- **censure par intervalle** : le suivi est effectué pendant seulement une période du temps total d'observation, la défaillance est apparue entre deux instants d'inspection (temps de censure par intervalle), on a l'information  $t_d < t < t_g$ ,

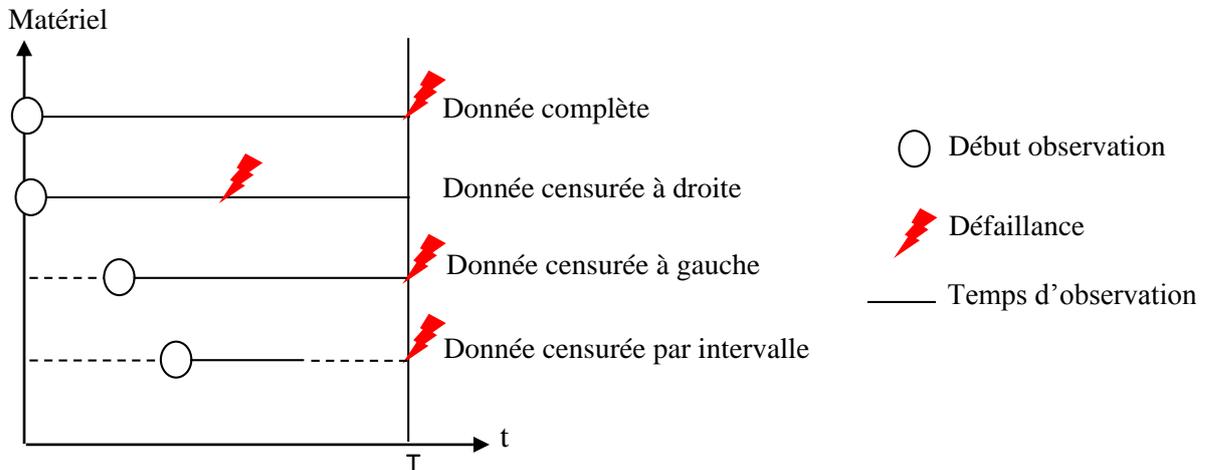


Figure 3.3 : Différents types d'observations.

Pour plus d'information sur les différents types de censures, voir la référence [83].

Dans le cas du retour d'expérience, on a le plus souvent à faire à des données censurées à droite; c'est le fruit des opérations de maintenance préventive (remplacement de "composants" avant leur défaillance, à une date programmée),

⇒ **données subjectives** : Ce sont des données représentant le degré de croyance exprimé par un expert connaissant parfaitement le matériel étudié. Il faut noter que des données objectives sur un matériel similaire, deviennent des données subjectives pour le matériel étudié. Ces informations sont souvent données sous forme d'intervalle de confiance avec un certain niveau de confiance.

### 3.4. Développement bayésien pour de distributions conjuguées

Comme évoqué précédemment, une des difficultés de l'approche bayésienne est le calcul de la loi a posteriori. Ce calcul est facilité lorsque loi a priori et loi a posteriori ont la même forme. Dans ce cas, on parle de loi a priori conjuguée (tableau 3.1). Dans la suite est présenté les développements des deux principales familles de distributions conjuguées

généralement utilisées en sûreté de fonctionnement et particulièrement dans le domaine de la fiabilité des systèmes.

### 3.4.1. Fonction de vraisemblance Exponentielle

La loi exponentielle est la plus utilisée dans les études de fiabilité pour sa facilité d'emploi et son interprétation très simple. Elle représente la distribution de la durée de vie moyenne  $T$  d'un système, dont le taux de défaillance  $\lambda$  est constant avec le temps.

En mécanique, on considère que les temps de défaillance de matériels en fonctionnement suivent une loi exponentielle : dans la phase de conception (le taux de défaillance doit être prévu constant pendant la durée de mission du système), ou dans la phase d'exploitation (la maintenance a pour but de maintenir le taux de défaillance constant). Ceci est vérifié dans les banques de données de fiabilité pour les systèmes réparables car ces derniers subissent une politique de maintenance préventive bien adaptée à leur durée de vie potentielle. À titre indicatif, une fiche extraite de la banque de données EIREDA (**E**uropean **I**ndustry **R**eliability **D**ata **B**ank) (voir figure 3.4), montre les paramètres de fiabilité d'un cas (robinet pneumatique) où on constate que pratiquement le taux de défaillance a gardé la même valeur en vingt ans, et il en est de même pour l'intervalle de confiance. (Le taux de défaillance de ce robinet était de  $3,6 \cdot 10^{-6}/h$ , au cours des années 1977/1987, et de  $3,36 \cdot 10^{-6}/h$  au cours des années 1988/1998, soit pratiquement la même valeur en vingt ans).

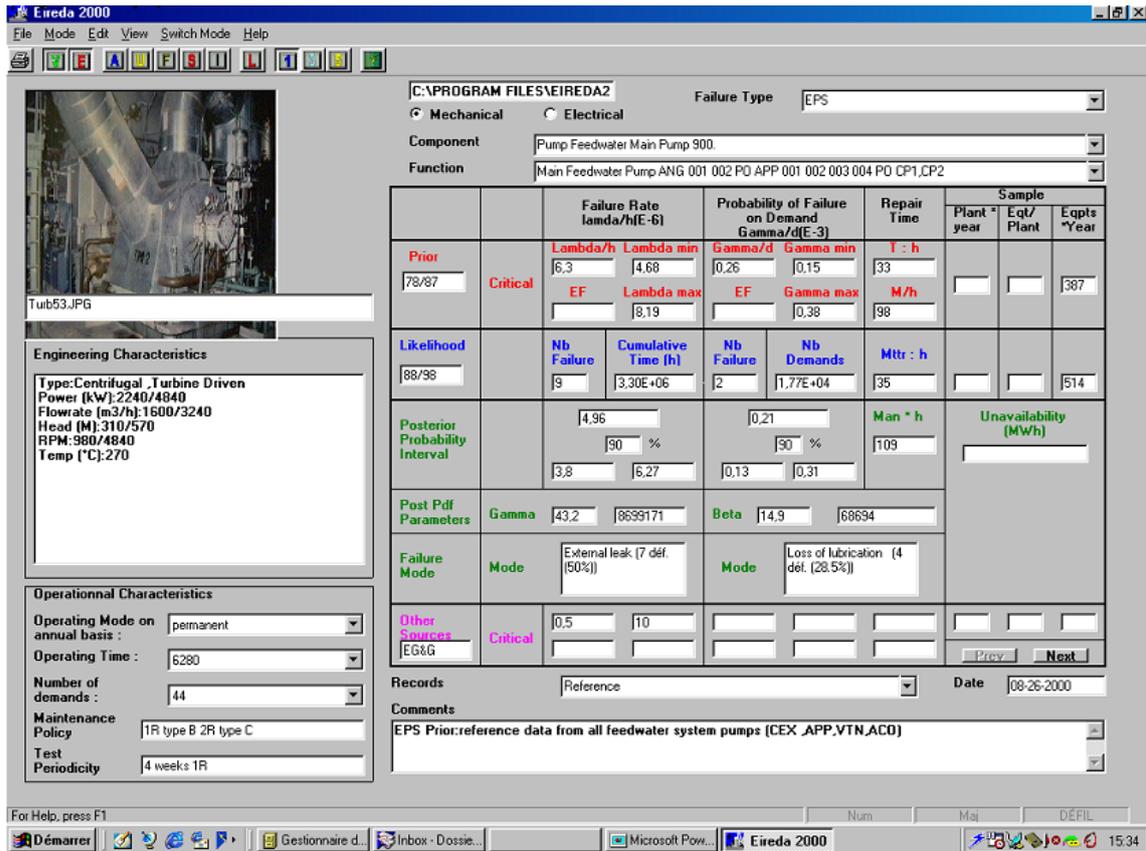


Figure 3.4 : Paramètre de fiabilité : le recueil EIREDA, 2000

Soit la fonction de fiabilité au temps  $t$ ,  $R(t)$ , étant :

$$R(t) = e^{-\lambda t} \quad (3.3)$$

On cherche à estimer le taux de défaillance  $\lambda$  sachant que  $t$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . Sa densité de probabilité est:

$$f(t/\lambda) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} \quad (3.4)$$

Dans la démarche bayésienne, et pour déterminer le paramètre : taux ou temps de défaillance lorsque le retour d'expérience (vraisemblance) est de type exponentiel, on est devant deux considérations:

- ✓ L'information a priori est vague donc non informative
- ✓ L'information a priori plus précise donc informative

Dans la suite et par l'application de l'approche bayésienne à la fiabilité des systèmes dont la distribution des temps de défaillance est modélisée par une loi exponentielle, les deux modèles utilisés pour exprimer la connaissance a priori sera développé.

### 3.4.1.1. Connaissances a priori non-informatives

Le choix de fusionner une loi a priori non informative à un REX (vraisemblance), conduit à l'obtention d'une densité a posteriori informative dominée par le retour d'expérience.

Les distributions a priori très peu informatives sont:

- la loi non informative de Jeffreys, Le tableau 3.2 donne les distributions a priori non informatives des principales fonctions de vraisemblance.

Tableau 3.2. : Distributions non informatives de Jeffreys

Fonction de vraisemblance	Densité a priori de Jeffrey
Exponentielle	$\frac{1}{\lambda}$
Poisson	$\lambda^{-1/2}$
Binomiale	$p^{-1/2}(1-p)^{-1/2}$
Normale	$\frac{1}{\sigma^2}$

- la loi uniforme [0,1], est la densité la moins informative qui soit, puisque toutes les valeurs entre 0 et 1 ont la même chance de présenter le paramètre inconnu.
- la loi uniforme tronquée par deux valeurs extrêmes que peut prendre un taux de défaillance ou une probabilité de défaillance à la sollicitation. cette loi apporte un peu plus d'information que la précédente.

#### 3.4.1.1.1. Distribution a priori « non informatives » de Jeffreys

Pour un retour d'expérience exponentiel, et dans le cas d'une connaissance a priori vague, le modèle utilisé pour exprimer la connaissance a priori est la distribution non informative de Jeffreys, son expression sur le taux de défaillance  $\lambda$  est :

$$g(\lambda) = \frac{1}{\lambda} = \lambda^{-1} \quad (3.5)$$

- **Fonction de vraisemblance**

La fonction de vraisemblance si l'on observe k défaillances au cours d'un temps cumulé t, est dans ce cas :

$$f(k/\lambda) = \lambda^k \cdot e^{-\lambda \cdot t} \quad (3.6)$$

En utilisant le théorème de Bayes et en joignant les informations précédentes, la distribution a posteriori pour déterminer le taux de défaillance est :

- **Densité a posteriori**

La distribution a posteriori est donnée de la manière suivante:

$$\begin{aligned} g(\lambda/k) &= \frac{\lambda^{-1} \cdot \lambda^k \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{\int_0^\infty \lambda^{-1} \cdot \lambda^k \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot d\lambda} \\ &= \frac{\lambda^{k-1} \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{\int_0^\infty \lambda^{k-1} \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot d\lambda} \quad (3.7) \end{aligned}$$

Posons  $I = \int_0^\infty \lambda^{k-1} \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot d\lambda$  et  $u = \lambda \cdot t$

On a alors :  $\lambda = \frac{u}{t}$ ,  $d\lambda = \frac{du}{t}$

L'intégrale I devient :  $I = \int_0^\infty \frac{u^{k-1}}{t^{k-1}} \cdot e^{-u} \frac{du}{t}$

Sachant que la fonction gamma complète est définie par:

$$\int_0^\infty t^{a-1} \cdot e^{-t} dt = \Gamma(a) \quad (3.8)$$

D'où :  $I = \frac{\Gamma(k)}{t^k}$

D'où finalement l'expression de la densité a posteriori, déduite par l'application de la règle de conjugaison est égale à :

$$g(\lambda/k) = \frac{t^k}{\Gamma(k)} \cdot \lambda^{k-1} \cdot e^{-\lambda t} \quad (3.9)$$

C'est une distribution Gamma qui a pour paramètres  $[k + 0; t + 0]$  soit  $G[k; t]$ .

L'Espérance mathématique de la loi Gamma a posteriori est le rapport entre le facteur de forme et le facteur d'échelle de cette loi qui correspond respectivement au nombre de défaillance  $k$  et le temps cumulé de fonctionnement, soit:

$$\hat{\lambda} = \frac{k}{t} \quad (3.10)$$

#### 3.4.1.1.2. Distribution a priori uniforme « peu » informative

On absence de toute connaissance sur l'allure de la distribution a priori, les experts sont interrogés sur les valeurs extrêmes et fournit une valeur minimal et une valeur maximale que peut prendre le paramètre. La cause de la défaillance est modélisée par une loi uniforme qui ne laisse aucune préférence pour une valeur particulière de probabilité comprise entre ces deux bornes. Pour l'évaluation d'un taux de défaillance, le choix d'une distribution uniforme bornée est justifié. La densité a priori est de la forme:

$$g(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_0}; & \text{pour } \lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1 \\ 0; & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.11)$$

Où  $\lambda_0$  et  $\lambda_1$  étant respectivement les valeurs minimale et maximale que peut prendre la variable  $\lambda$ .

- **Fonction de vraisemblance**

La fonction de vraisemblance si l'on observe  $k$  défaillances au cours d'un temps cumulé  $t$ , est déterminée de la même manière précédente, c'est-à-dire à partir de l'expression :

$$f(k/\lambda) = \lambda^k \cdot e^{-\lambda \cdot t} \quad (3.6)$$

- **Densité a postérieure**

L'obtention de la distribution a postérieure de  $\lambda$  compte tenu du principe de conjugaison et de l'application du théorème de bayes est alors :

$$g(\lambda/k) = \frac{\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_0} \cdot \lambda^k \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_0} \cdot \lambda^k \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot d\lambda} \quad (3.12)$$

Ce qui donne :

$$g(\lambda/k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \lambda^k \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot d\lambda} \quad (3.13)$$

En effectuant les mêmes changements de variable que précédemment,

On obtient :

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \lambda^k e^{-\lambda t} d\lambda = \int_{\lambda_0 t}^{\lambda_1 t} \frac{u^k e^{-u}}{t^{k+1}} du = \frac{1}{t^{k+1}} \int_{\lambda_0 t}^{\lambda_1 t} u^k e^{-u} du \quad (3.14)$$

Sachant que le dénominateur du théorème de bayes est une fonction gamma incomplète. La définition d'une fonction Gamma incomplète bornée entre  $[0, z]$  est définie par :

$$F(a, z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^z u^{a-1} e^{-u} du = \Gamma(a, z) \quad (3.15)$$

En effectuant les changements de variable que précédemment, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0 t}^{\lambda_1 t} \frac{u^k}{t^{k+1}} e^{-u} du &= \frac{1}{t^{k+1}} \left[ \int_0^{\lambda_1 t} u^k e^{-u} du - \int_0^{\lambda_0 t} u^k e^{-u} du \right] \\ &= \frac{1}{t^{k+1}} [\Gamma(k + 1; \lambda_1 t) - \Gamma(k + 1; \lambda_0 t)] \quad (3.16) \end{aligned}$$

En rapportant dans l'expression (3.13), la distribution a posteriori devient alors:

$$g(\lambda/k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \lambda^k \cdot e^{-\lambda t} \cdot d\lambda}$$

$$= \frac{t^{k+1}}{\Gamma(k+1; \lambda_1 \cdot t) - \Gamma(k+1; \lambda_0 \cdot t)} \cdot \lambda^k \cdot e^{-\lambda t} \quad (3.17)$$

A partir de  $g(\lambda/k)$  on peut obtenir les inférences statistiques suivantes :

➤ L'estimateur bayésien

L'espérance mathématique de la densité de probabilité a posteriori (3.17) correspond à l'estimateur ponctuel bayésien du taux de défaillance :

$$E(\lambda) = \hat{\lambda} = \int_{\lambda} \lambda \cdot g(\lambda/k) d\lambda \quad (3.18)$$

En effectuant les changements de variable que précédemment, on obtient :

$$E(\lambda) = \hat{\lambda} = \frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \lambda \lambda^k \cdot e^{-\lambda \cdot t} d\lambda}{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \lambda^k \cdot e^{-\lambda t} \cdot d\lambda}$$

$$= \frac{\Gamma(K+2, \lambda_1 \cdot t) - \Gamma(K+2, \lambda_0 \cdot t)}{t \cdot [\Gamma(k+1; \lambda_1 \cdot t) - \Gamma(k+1; \lambda_0 \cdot t)]} \quad (3.19)$$

D'où on en déduit la fiabilité du système :

$$E(\lambda) = \hat{\lambda} \Rightarrow R(t) = e^{-\hat{\lambda}t} \quad (3.20)$$

➤ L'intervalle de crédibilité

Un intervalle de crédibilité symétrique avec un certain niveau de confiance  $100(1 - \alpha)\%$  pour l'estimateur de la probabilité a posteriori peut être déterminé à l'aide des relations :

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\lambda_{inf}} g(\lambda/k) d\lambda &= \frac{\alpha}{2}, \\ \int_{\lambda_{sup}}^{\infty} g(\lambda/k) d\lambda &= \frac{\alpha}{2}, \end{aligned} \right\} (3.21)$$

Ce qui donne :

$$\left. \begin{aligned} \frac{t^{k+1}}{\Gamma(k+1; \lambda_1 \cdot t) - \Gamma(k+1; \lambda_0 \cdot t)} \int_0^{\lambda_{inf}} \lambda^k \cdot e^{-\lambda t} d\lambda &= \frac{\alpha}{2}, \\ \frac{t^{k+1}}{\Gamma(k+1; \lambda_1 \cdot t) - \Gamma(k+1; \lambda_0 \cdot t)} \int_{\lambda_{sup}}^{\infty} \lambda^k \cdot e^{-\lambda t} d\lambda &= \frac{\alpha}{2}. \end{aligned} \right\} (3.22)$$

Ainsi, l'intervalle de crédibilité symétrique défini par  $[\lambda_{inf}, \lambda_{sup}]$  au taux  $(1 - \alpha)\%$  est déduit en résolvant le système d'équations (3.22). L'utilisation d'un logiciel pour l'évaluation de cet intervalle est nécessaire, mais éventuellement on peut utiliser l'approximation de la loi du Chi deux  $\chi^2$  (voir annexe B), on résolvant le système d'équations (3.23) :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{inf} &= \frac{\chi_{\alpha/2}^2(2k)}{2t} \\ \lambda_{sup} &= \frac{\chi_{(1-\alpha/2)}^2(2k)}{2t} \end{aligned} \right\} (3.23)$$

### Illustration

L'exemple suivant inspiré de la référence [84], va éclaircir la procédure d'évaluation d'un taux de défaillance pour une distribution a priori uniforme bornée et un retour d'expérience exponentiel. Ce REX est relatif à des robinets pneumatiques de régulation. Il est donné que l'on observe un nombre de défaillances  $k = 5$  sur un temps cumulé de fonctionnement égal à  $t = 160000$  heures.

Deux valeurs limites fournies par les experts que peut prendre le taux de défaillance de ce matériel sont les suivantes :  $1,4 \cdot 10^{-5}/h$  et  $5 \cdot 10^{-5}/h$ .

Donc par hypothèse a priori, on a :  $\lambda_0 = 1,4 \cdot 10^{-5}/h \leq \hat{\lambda} \leq \lambda_1 = 5 \cdot 10^{-5}/h$ .

### Démarche pour l'évaluation du taux de défaillance a posteriori :

- Modélisation de l'expertise

Les connaissances a priori des experts sont représentées par une densité de probabilité uniforme  $g(\lambda)$ , bornée par les valeurs  $\lambda_0$  et  $\lambda_1$ , soit :

$$g(\lambda) = \frac{1}{5 \cdot 10^{-5}/h - 1,4 \cdot 10^{-5}/h} = \frac{10^5}{3,6}$$

- Modélisation de la vraisemblance (Retour d'expérience)

Les observations du retour d'expérience sont modélisées par une fonction de vraisemblance qui sera une loi exponentielle ayant pour densité de probabilité :

$$f(k/\lambda) = \lambda^k \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$f(k/\lambda) = \lambda^5 \cdot e^{-160\,000 \cdot \lambda}$$

- Obtention de la distribution a posteriori

Compte tenu du principe de conjugaison et de l'application du théorème de Bayes, la densité a posteriori du taux de défaillance :

$$g(\lambda/k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \lambda^k \cdot e^{-\lambda t} \cdot d\lambda} = \frac{t^{k+1}}{\Gamma(k+1; \lambda_1 \cdot t) - \Gamma(k+1; \lambda_0 \cdot t)} \cdot \lambda^k \cdot e^{-\lambda t}$$

$$g(\lambda/k) = \frac{t^6 \cdot \lambda^5 \cdot e^{-160\,000 \cdot \lambda}}{\Gamma(6; 8) - \Gamma(6; 2,4)}$$

- L'estimateur bayésien a posteriori du taux de défaillance

$$\hat{\lambda} = \frac{\Gamma(K + 2; \lambda_1 \cdot t) - \Gamma(K + 2; \lambda_0 \cdot t)}{t \cdot [\Gamma(k + 1; \lambda_1 \cdot t) - \Gamma(k + 1; \lambda_0 \cdot t)]}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{\Gamma(7; 8) - \Gamma(7; 2,4)}{160\,000 \cdot [\Gamma(6; 8) - \Gamma(6; 2,4)]}$$

$$\hat{\lambda} = 3,3 \cdot 10^{-5} / h$$

- L'intervalle à 90% peut être calculé en utilisant la loi du Chi deux et en reportant dans le système d'équations (3.23) :

$$\lambda_{inf} = \frac{\chi_{0.05}^2(10)}{2 \cdot 160\,000} = 1,23 \cdot 10^{-5} / h ,$$

$$\lambda_{sup} = \frac{\chi_{0.95}^2(10)}{2t} = 5,72 \cdot 10^{-5} / h .$$

### 3.4.1.2. Connaissances a priori informatives

Lorsque les experts disposent d'un certain degré de connaissance sur le matériel considéré, il faudra choisir pour distribution a priori une loi non uniforme. Dans ce cas, la modélisation de la connaissance a priori sera par une loi informative favorisant la valeur la plus probable du paramètre considéré. Sachant que le retour d'expérience est de type exponentiel, la loi a priori la plus convenable est la loi gamma. Ces deux lois appartiennent à la même famille mathématique. Dans ces conditions, les calculs bayésiens ne présentent aucune difficulté grâce au principe de conjugaison, le produit de la loi gamma et de la loi exponentielle du REX appelée fonction de vraisemblance est une densité a posteriori qui est loi gamma.

### 3.4.1.2.1. Distribution a priori Gamma

Lorsque les connaissances disponibles sont informatives, le taux de défaillance a priori est modélisé par une distribution Gamma de paramètre  $\alpha_0$  et  $\beta_0$ , soit :

$$g(\lambda; \alpha_0, \beta_0) = \frac{1}{\beta_0^{\alpha_0} \Gamma(\alpha_0)} \cdot \lambda^{\alpha_0-1} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\beta_0}} \quad (3.24)$$

- **Fonction de vraisemblance**

La fonction de vraisemblance si l'on observe  $k$  défaillances au cours d'un temps cumulé  $t$ , est déterminée de la même manière précédente, c'est-à-dire à partir de l'expression :

$$f(k/\lambda) = \lambda^k \cdot e^{-\lambda \cdot t} \quad (3.6)$$

- **Densité a posteriori**

On remplace  $g(\lambda)$  et la vraisemblance par leur expression, l'obtention de la distribution a posteriori de  $\lambda$  compte tenu du principe de conjugaison et de l'application du théorème de Bayes est alors :

$$g(\lambda; k, \alpha_0 \beta_0) = \frac{\frac{1}{\beta_0^{\alpha_0} \Gamma(\alpha_0)} \cdot \lambda^{\alpha_0-1} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\beta_0}} \cdot \lambda^k \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{\int_0^{\infty} \frac{1}{\beta_0^{\alpha_0} \Gamma(\alpha_0)} \cdot \lambda^{\alpha_0-1} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\beta_0}} \cdot \lambda^k \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot d\lambda} \quad (3.25)$$

Soit après simplification :

$$g(\lambda; k, \alpha_0 \beta_0) = \frac{\lambda^{\alpha_0+k-1} \cdot e^{-\lambda \left( \frac{1}{\beta_0} + t \right)}}{\int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha_0+k-1} \cdot e^{-\lambda \left( \frac{1}{\beta_0} + t \right)} d\lambda} \quad (3.26)$$

Posons

$$I = \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha_0+k-1} \cdot e^{-\lambda \left( \frac{1}{\beta_0} + t \right)} d\lambda \quad \text{et} \quad X = \lambda \cdot \left( \frac{1}{\beta_0} + t \right)$$

On a alors

$$\lambda = \frac{X}{\left(\frac{1}{\beta_0} + t\right)} \text{ et } d\lambda = \frac{dX}{\left(\frac{1}{\beta_0} + t\right)}$$

Il s'écrit donc

$$I = \int_0^{+\infty} \left[ \frac{X}{\left(\frac{1}{\beta_0} + t\right)} \right]^{\alpha_0+k-1} \cdot e^X \cdot \frac{dX}{\left(\frac{1}{\beta_0} + t\right)}$$

$$I = \frac{1}{\left(\frac{1}{\beta_0} + t\right)^{\alpha_0+k}} \int_0^{+\infty} X^{\alpha_0+k-1} \cdot e^X \cdot dX$$

or

$$\int_0^{+\infty} X^{\alpha_0+k-1} \cdot e^X \cdot dX = \Gamma(\alpha_0 + k)$$

D'où

$$I = \frac{\Gamma(\alpha_0 + k)}{\left(\frac{1}{\beta_0} + t\right)^{\alpha_0+k}}$$

Ainsi on obtient finalement la densité de probabilité a posteriori :

$$g(\lambda; k, \alpha_0 \beta_0) = \frac{\left(\frac{1}{\beta_0} + t\right)^{\alpha_0+k}}{\Gamma(\alpha_0 + k)} \lambda^{\alpha_0+k-1} \cdot e^{-\lambda \left(\frac{1}{\beta_0} + t\right)} \quad (3.27)$$

La loi  $g(\lambda; k, \alpha_0 \beta_0)$  ainsi obtenue est une loi Gamma de paramètres :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{post} &= \alpha_0 + k \\ \beta_{post} &= \frac{1}{\beta_0} + t \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

où  $\alpha_{post}$  représente le nombre cumulé de défaillances,  
 $\beta_{post}$  représente le temps cumulé de fonctionnement.

Les inférences statistiques déduites à partir de la distribution a posteriori  $g(\lambda; k, \alpha_0\beta_0)$  sont les suivantes:

- Espérance mathématique:

L'espérance mathématique de la densité de probabilité a posteriori (3.27) correspond à l'estimateur ponctuel bayésien du taux de défaillance :

$$E(\lambda_p/t; k, \alpha_0, \beta_0) = \hat{\lambda} = \int_{\lambda} \lambda \cdot g(\lambda; k, \alpha_0\beta_0) d\lambda$$

$$\hat{\lambda}_p = \frac{\alpha_{post}}{\beta_{post}} = \frac{\alpha_0 + k}{\frac{1}{\beta_0} + t} = \frac{\beta_0 \cdot (\alpha_0 + k)}{\beta_0 \cdot t + 1} \quad (3.29)$$

$\hat{\lambda}_p$  est l'estimateur du taux de défaillance a postériori

- La Variance :

$$V(\lambda_p/t; k, \alpha_0, \beta_0) = \frac{\alpha_{post}}{\beta_{post}^2} = \frac{\beta_0^2 \cdot (\alpha_0 + k)}{(\beta_0 \cdot T_c + 1)^2} \quad (3.30)$$

- L'intervalle de crédibilité bayésien

Un intervalle de crédibilité symétrique bayésien qui contient au moins  $(1 - \alpha)\%$  de la vraie valeur de  $\lambda$  peut être calculé respectivement à l'aide des relations :

$$\left. \begin{aligned} P[\lambda \leq \lambda_{inf}] &\leq \frac{\alpha}{2} = \int_0^{\lambda_{inf}} g(\lambda; k, \alpha_0\beta_0) d\lambda, \\ P[\lambda \geq \lambda_{sup}] &\leq \frac{\alpha}{2} = \int_{\lambda_{sup}}^{\infty} g(\lambda; k, \alpha_0\beta_0) d\lambda \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

Ce qui donne en utilisant l'approximation du Chi deux, par défaut de logiciel spécifique:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{\min} &= \frac{\beta_0}{2(\beta_0 t + 1)} \chi_{\alpha/2}^2(2\alpha_0 + 2k), \\ \lambda_{\sup} &= \frac{\beta_0}{2(\beta_0 t + 1)} \chi_{(1-\alpha/2)}^2(2\alpha_0 + 2k). \end{aligned} \right\} (3.32)$$

À partir de ces deux expressions, il est possible d'évaluer l'intervalle de crédibilité à 80%, 90% ....d'un taux de défaillance en fonctionnement.

### 3.4.2. Fonction de vraisemblance Binomiale

Dans le domaine de la sûreté de fonctionnement, La loi Binomiale est utilisée pour déterminer la probabilité de défaillances à la sollicitation de matériels non actifs (en attente) ou subissant des essais d'endurance ou de fiabilité. Pour une revue plus complète, citons les ouvrages [36, 84- 86].

Si on réalise n essais indépendants et que l'on constate k occurrences d'un événement de probabilité élémentaire p (survie ou défaillance), on obtient un échantillon de retour d'expérience de type binomial. C'est le cas correspondant aux problèmes de défaillance de matériels à la sollicitation.

En fiabilité, le paramètre p est la probabilité de défaillance à la sollicitation (probabilité de non fonctionnement du système), c'est le paramètre que l'on cherche à estimer.

Dans de telles conditions (n essais, k défaillances, probabilité élémentaire p), la fonction de vraisemblance est par hypothèse une distribution binomiale de paramètre (k, n), k étant le paramètre de forme et n le paramètre d'échelle, dont la densité de probabilité :

$$f(k/p) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \text{ avec } C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!} \quad (3.33)$$

Sachant que la probabilité élémentaire de défaillance d'un matériel est p, 1 - p représente la probabilité qu'un matériel survive à un test ou à un temps de mission t :  
 $R(t) = 1 - p.$

Pour l'estimation bayésienne, on va établir la densité de probabilité de défaillance a priori pour modéliser la connaissance initiale, en prenant des lois apriori peu informative puis informative.

### 3.4.2.1. Connaissance a priori peu informative

En absence de connaissances préalables, on choisira une distribution a priori très peu informative, qui reflète exactement ce manque de connaissance. Parmi les lois peu informatives citées précédemment, on va développer le cas de la loi uniforme[0, 1]. Cette densité est la moins informative qui soit, puisque elle ne favorise aucune valeur potentielle du paramètre.

#### 3.4.2.1.1. Densité a priori uniforme

Cette distribution est utilisée lorsque toutes les valeurs possibles de la probabilité aient autant de chances d'être vraies, ceci caractérise l'information vague. Cet état de la connaissance se modélise par une loi uniforme non informative sur l'intervalle [0,1] et est donnée par la formule:

$$\left. \begin{array}{l} g(p) = 1; \quad 0 \leq p \leq 1 \\ g(p) = 0; \quad \text{ailleurs} \end{array} \right\} \quad (3.34)$$

Sachant que la distribution bêta peut prendre une grande variété de formes, elle dépend de deux paramètres  $\alpha_0$  et  $\beta_0$ . Pour le cas particulier de la loi bêta de paramètres (1;1) on obtient une loi uniforme entre 0 et 1. C'est donc une loi conjuguée à la loi binomiale.

- **Densité a posteriori**

La densité a priori étant égale à 1 ainsi, le théorème de Bayésienne nous permet de déduire la fonction a posteriori  $g(p/k)$  à un échantillon équivalent de n essais dont k défaillant:

$$\begin{aligned} g(p/k) &= \frac{1 \cdot C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}{\int_0^1 1 \cdot C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} dp} \\ &= \frac{p^k \cdot (1-p)^{n-k}}{\int_0^1 p^k \cdot (1-p)^{n-k} dp} \quad (3.35) \end{aligned}$$

Sachant que:

$$I = \int_0^1 p^k \cdot (1-p)^{n-k} dp = \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}, \text{ est une constante d'Euler } \Gamma(u) = \int_0^{+\infty} x^{u-1} \cdot e^{-x} \cdot dx \text{ et } \Gamma(u) = (u-1)! \quad \forall u \text{ entier positif}$$

On obtient :

$$I = \int_0^1 p^k \cdot (1-p)^{n-k} dp = \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{\Gamma(k+1) \cdot \Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+2)}$$

On a finalement pour la densité a posteriori:

$$g(p/k) = \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(k+1) \cdot \Gamma(n-k+1)} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad (3.36)$$

Ou on peut l'écrire aussi sous la forme d'une loi bêta suivante:

$$\begin{aligned} g(p/k) &= \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!} \cdot p^{(k+1)-1} \cdot (1-p)^{(n-k+1)-1} \\ &= \text{Bêta}(\alpha_{post}; \beta_{post}) \quad (3.37) \end{aligned}$$

C'est la distribution a posteriori qui correspond à une densité Bêta de paramètres  $(k+1; n+2)$  soit:

$$\text{Beta}(\alpha_{post}; \beta_{post}) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{post} = k + 1 \\ \beta_{post} = n - k + 1 \end{cases}$$

Les inférences statistiques faites à partir de  $g(p/k)$  sont les suivantes:

- Espérance mathématique

L'estimateur ponctuel bayésien de la probabilité de non fonctionnement  $p$  est l'espérance mathématique de la loi beta a posteriori, est le rapport entre le paramètre de forme et la somme des paramètres de forme et d'échelle:

$$E(p/k) = \hat{p} = \frac{\alpha_{post}}{\alpha_{post} + \beta_{post}} = \frac{k + 1}{n + 2} \quad (3.38)$$

- Variance a posteriori est:

$$V(p/k) = \frac{(k + 1) \cdot (n - k + 1)}{(n + 2)^2(n + 3)} \quad (3.39)$$

Il est également possible de calculer un intervalle de crédibilité de  $p$  à un niveau de confiance  $(1-\alpha)$  par intégration de la loi bêta a posteriori tel que :

$$\frac{\alpha}{2} = \int_0^{p_{\lambda_{inf}}} Beta(\alpha; \beta) dp = \int_0^{p_{inf}} Beta(k + 1; n - k + 1) dp$$

$\Rightarrow$  la valeur de  $p_{inf}$

(3.40)

$$\frac{\alpha}{2} = \int_{p_{sup}}^1 Beta(k + 1; n - k + 1) dp \Rightarrow \text{la valeur de } p_{sup}$$

En absence de logiciel bayésien ou d'outil d'intégration de la loi bêta a posteriori, l'utilisation de l'approximation par la loi de Fisher-Snedecor dénommée loi du F (annexe B) est indispensable. Ceci permet d'obtenir les expressions suivantes:

$$\hat{p}_{inf} = \frac{k + 1}{(k + 1) + (n - k + 1)F_{(1-\frac{\alpha}{2})}[2(n - k + 1), 2(k + 1)]}$$

(3.41)

$$\hat{p}_{sup} = \frac{(k + 1)F_{(1-\frac{\alpha}{2})}[2(k + 1), 2(n - k + 1)]}{(n - k + 1) + (k + 1)F_{(1-\frac{\alpha}{2})}[2(k + 1), 2(n - k + 1)]}$$

Où,  $F_{\alpha}(v_1, v_2)$  est le 100.  $\alpha$  quantile de la distribution du F avec les degrés de liberté  $v_1$  du numérateur et  $v_2$  du dénominateur, dont la valeur est déterminé a partir des tables (annexe B).

### 3.4.2.2. Distribution a priori informative

Dans le cas où la connaissance est disponible (on dispose d'un retour d'expérience passé, d'informations en provenance de banques de données ou d'essais, des avis d'experts), On utilise principalement des lois de probabilité paramétrées qui, en fonction de la valeur de leurs paramètres, peuvent prendre un très grand nombre d'allures. La loi bêta ( $\alpha_0; \beta_0$ ) a priori, conjuguée de la loi binomiale est utilisée.

#### 3.4.2.2.1. Distribution a priori Bêta

En présence de connaissance initiale précise et informative, et pour un retour d'expérience binomiale, la loi a priori qui modélise cette connaissance dans ces conditions est une densité Bêta de la forme:

$$g(p) = \frac{1}{B(\alpha_0, \beta_0)} \cdot p^{\alpha_0-1} \cdot (1-p)^{\beta_0-1} \quad (3.42)$$

Avec :

$$B(\alpha_0, \beta_0) = \frac{\Gamma(\alpha_0) \cdot \Gamma(\beta_0)}{\Gamma(\alpha_0 + \beta_0)}$$

D'où :

$$g(p) = \frac{\Gamma(n_0)}{\Gamma(\alpha_0) \cdot \Gamma(\beta_0)} \cdot p^{\alpha_0-1} \cdot (1-p)^{\beta_0-1} \quad (3.43)$$

Avec :

$\alpha_0$  : Nombre de défaillances espérées au cours de  $n_0$  essais, correspond au facteur de forme  
 $n_0 = (\alpha_0 + \beta_0)$  : Nombre total équivalent d'essais a priori, correspond au facteur d'échelle.

- **Densité a posteriori**

La formalisation Bayésienne de l'a posteriori  $g(p/k)$  compte tenu du principe de conjugaison et de l'application du théorème de Bayes est une loi Bêta, soit:

$$g(p/k) = \frac{\frac{\Gamma(\alpha_0 + \beta_0)}{\Gamma(\alpha_0) \cdot \Gamma(\beta_0)} \cdot p^{\alpha_0-1} \cdot (1-p)^{\beta_0-1} \cdot C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}{\int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha_0 + \beta_0)}{\Gamma(\alpha_0) \cdot \Gamma(\beta_0)} \cdot p^{\alpha_0-1} \cdot (1-p)^{\beta_0-1} \cdot C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} dp} \quad (3.44)$$

D'où

$$g(p/k) = \frac{p^{\alpha_0+k-1} \cdot (1-p)^{\beta_0+n-k-1}}{\int_0^1 p^{\alpha_0+k-1} \cdot (1-p)^{\beta_0+n-k-1} \cdot dp} \quad (3.45)$$

Or:

$$\int_0^1 p^{\alpha_0+k-1} \cdot (1-p)^{\beta_0+n-k-1} \cdot dp = \frac{\Gamma(\alpha_0 + k) \cdot \Gamma(\beta_0 + n - k)}{\Gamma(\alpha_0 + \beta_0 + n)}$$

On obtient finalement:

$$g(p/k) = \frac{\Gamma(\alpha_0 + \beta_0 + n)}{\Gamma(\alpha_0 + k) \cdot \Gamma(\beta_0 + n - k)} p^{\alpha_0+k-1} \cdot (1-p)^{\beta_0+n-k-1} \quad (3.46)$$

C'est une loi Bêta de paramètres  $\begin{cases} \alpha = \alpha_0 + k \\ \beta = \beta_0 + n - k \end{cases}$

L'estimateur bayésien de la probabilité de non fonctionnement  $p$  à la sollicitation est l'espérance mathématique de la loi bêta a posteriori  $g(p/k)$ :

- Espérance mathématique:

$$E(p) = \hat{p} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha_0 + k}{\alpha_0 + \beta_0 + n} \quad (3.47)$$

- La Variance de  $p$  est :

$$V(p/k) = \frac{(\alpha_0 + k) \cdot (\beta_0 + n - k)}{(\alpha_0 + \beta_0 + n + 1) \cdot (\alpha_0 + \beta_0 + n)^2} \quad (3.48)$$

De même qu'au paragraphe précédent, il est possible de calculer un intervalle de crédibilité de la probabilité de défaillance à la sollicitation à un niveau de confiance  $(1-\alpha)$  en tenant compte de la règle de conjugaison et en utilisant la loi du F.

$$\hat{p}_{inf} = \frac{k + \alpha_0}{(k + \alpha_0) + (n + \beta_0 - k) F_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}[2(n - k + \beta_0), 2(k + \alpha_0)]}$$

$$\hat{p}_{sup} = \frac{(k + \alpha_0) F_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}[2(n - k + \beta_0), 2(k + \alpha_0)]}{(n - k + \beta_0) + (k + \alpha_0) F_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}[2(n - k + \beta_0), 2(k + \alpha_0)]}$$

### Cas d'application

Dans le but d'illustrer la méthodologie d'application de la démarche bayésienne pour estimer la fiabilité, et selon la nature des informations disponibles, Prenons l'exemple fictif où l'on cherche à évaluer la fiabilité d'un AIR-BAG (dans ce cas la probabilité de défaillance à la sollicitation correspond à un non fonctionnement de l'AIR-BAG lors d'une simulation de chocs).

Supposons que l'on dispose des résultats des trois séries d'essais suivantes :

N: nombre de test effectués	K: nombre de défaillances observées
20	3
10	0
50	1

La probabilité de défaillance de l'airbag correspond au résultat d'un essai binomial. On prendra donc une loi beta (conjuguée) pour modéliser les observations a priori.

→ Si l'on considère la loi a priori uniforme non informative  $(U(0,1))$ , les résultats sont:

$$\hat{p} = E(p/k) = \frac{k + 1}{n + 2} = 0.060976$$

Pour l'intervalle de crédibilité au niveau  $\alpha = 90\%$  pour cet estimateur avec l'approximation du F:

$$\hat{p}_{inf} = \frac{k + 1}{(k + 1) + (n - k + 1)F_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}[2(n - k + 1), 2(k + 1)]}$$

$$= 0.024635$$

$$\hat{p}_{sup} = \frac{(k + 1)F_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}[2(k + 1), 2(n - k + 1)]}{(n - k + 1) + (k + 1)F_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}[2(k + 1), 2(n - k + 1)]}$$

$$= 0.109448$$

D'où:

$$0.024635 \leq p_{95\%} \leq 0.109448$$

avec pour paramètres de la loi beta a posteriori:

$$Beta(\alpha_{post}; \beta_{post}) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{post} = 5 \\ \beta_{post} = 77 \end{cases}$$

→ Si maintenant l'on considère une loi beta de paramètres (1 ; 70), définie à partir d'avis d'experts, comme a priori. Par application du principe de conjugaison, les paramètres de forme et d'échelle de la loi a posteriori sont dans ce cas:

$$Beta(\alpha_{post}; \beta_{post}) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{post} = 5 \\ \beta_{post} = 146 \end{cases}$$

L'estimateur, qui est l'espérance de la probabilité de défaillance à la sollicitation est:

$$\hat{p} = E(p/k) = \frac{\alpha_0 + k}{\alpha_0 + \beta_0 + n} = 0.033113$$

L'intervalle de crédibilité avec l'approximation du F:

$$\hat{p}_{inf} = \frac{k + \alpha_0}{(k + \alpha_0) + (n + \beta_0 - k)F_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}[2(n - k + \beta_0), 2(k + \alpha_0)]}$$

$$= 0.013224$$

$$\hat{p}_{sup} = \frac{(k + \alpha_0) F_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}[2(n - k + \beta_0), 2(k + \alpha_0)]}{(n - k + \beta_0) + (k + \alpha_0)F_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}[2(n - k + \beta_0), 2(k + \alpha_0)]}$$

$$= 0.080471$$

$$0.013224 \leq p_{95\%} \leq 0.080471$$

On peut conclure que :

1. dans les deux cas, la distribution a posteriori est une loi beta, conjuguée de la loi binomiale. Ceci va permettre de simplifier les calculs en se limitant, dans la pratique, à des additions sur les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ .
2. l'estimateur bayésien de  $p$  est plus faible dans le deuxième cas, la connaissance a priori a été intégrée dans le calcul comme un équivalent à une série d'essais supplémentaires.

L'intervalle de crédibilité, à un niveau de confiance donné, est moins large dans le deuxième cas, la fonction de distribution est moins dispersée. La quantité d'informations étant plus importante et plus riche, il est normal que les résultats soient plus précis. Dans la pratique, la forme des distributions pourra fournir une information qualitative sur la richesse des données utilisées.

### 3.5. Développement bayésien pour les paramètres de fiabilité variables avec le temps

Dans la démarche bayésienne, le choix de distributions conjuguées est intéressant, mais toutefois pas toujours possible, comme dans le cas du vieillissement d'un système ou équipement, où les paramètres sont variables.

Le mécanisme de dégradation dû au vieillissement représente l'origine la plus probable d'une panne. Peuvent s'y ajouter diverses causes accidentelles, telles qu'une erreur humaine ou une fabrication défectueuse. De nombreux autres contextes industriels se révèlent adaptés à ce cadre d'étude. La plus célèbre des modélisations statistiques du vieillissement est la loi de Weibull. Cette loi a l'avantage d'être souple et est très utilisée pour déterminer la fiabilité dans le domaine mécanique [70, 87, 88].

Dans ce qui suit on se limite à la présentation générale des distributions a priori et a posteriori de cette loi suivant le théorème de Bayes.

#### 3.5.1. Approche Bayésienne de la loi de Weibull

L'approche Bayésienne de la loi de Weibull à deux paramètres est souvent utilisée dans les applications de modélisation de la fiabilité des différents systèmes et particulièrement mécaniques à cause de sa grande flexibilité. L'application de cette démarche est complexe lorsque les deux paramètres d'échelle ( $\eta$ ), et de forme ( $\beta$ ) de la loi de Weibull sont inconnus. La loi de Weibull ne fait pas partie des familles des lois gamma. Elle n'a donc pas de loi conjuguée, ce qui exige d'effectuer une intégration numérique lorsqu'il s'agira de joindre une densité relative à un retour d'expérience de type Weibull, à une densité a priori quelconque dans la démarche bayésienne.

La loi de Weibull à deux paramètres, a pour:

→ fonction de fiabilité  $R(t)$ :

$$R(t) = e^{\left(-\frac{t}{\eta}\right)^\beta} \quad (3.50)$$

→ et pour densité de probabilité de défaillances

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} \quad (3.51)$$

En pratique, il est souvent fréquent de disposer des connaissances sur le paramètre de forme, soit parce que le phénomène physique étudié a fait l'objet de nombreux essais de vieillissement, soit parce que les experts possédant une grande expérience, ont une bonne connaissance de la valeur de ce paramètre. Dans ces conditions, on se trouve dans la configuration d'un seul paramètre inconnu comme dans le cas exponentiel. On peut alors déterminer le paramètre d'échelle par une analogie avec le cas des paramètres de fiabilité constants.

La fonction de fiabilité devient analogue à une fonction de fiabilité exponentielle:

$$R(t) = e^{-\lambda\omega} \quad (3.51)$$

En posant:

$$\eta = \lambda^{-1/\beta}$$

$$\omega = t^\beta$$

$\lambda$ : est appelé le pseudo taux de défaillance.

$\omega$ : est le pseudo temps cumulé de défaillance.

On va maintenant définir successivement la densité de probabilité a priori du pseudo taux de défaillance déduite des expertises, la fonction de vraisemblance du retour d'expérience, et la densité a posteriori.

- **Fonction de vraisemblance**

Si on observe  $k$  défaillances au cours du pseudo temps d'essai  $\omega$ , la fonction de vraisemblance correspondante est:

$$f(k/\lambda) = \lambda^k \cdot e^{-\lambda \cdot \omega} \quad (3.52)$$

- **Densité a priori**

Connaissant  $\beta$ , il reste à estimer le paramètre d'échelle  $\eta$  de la loi de Weibull. Les distributions a priori appropriées aux connaissances initiales sont la loi uniforme tronquée (bornée) et la loi non informative de Jeffreys, quand ces connaissances sont faibles et que l'on souhaite favoriser l'impact du retour d'expérience dans le résultat final, ou la loi conjuguée gamma, dans le cas contraire. On va se limiter au traitement du cas où la distribution a priori est uniforme bornée par deux valeurs extrêmes de ce paramètre  $((\eta_{0.5})_0, (\eta_{0.5})_1)$ .

Par analogie avec le cas exponentiel, les calculs sont réalisés à partir du pseudo taux de défaillance. La loi a priori uniforme sur le taux de défaillance moyen

$$g(\lambda) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_0} \quad (3.53)$$

- **Densité a posteriori**

Par l'application de théorème de Bayes, la distribution a posteriori,  $g(\lambda/k)$ , est dans ce cas:

$$g(\lambda/k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda \cdot \omega}}{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \lambda^k \cdot e^{-\lambda \omega} \cdot d\lambda} \quad (3.54)$$

Toujours par analogie avec la loi exponentielle, en faisant le changement de variable  $y = \lambda \omega$ , on obtient la densité de probabilité a posteriori du taux de défaillance moyen, soit:

$$g(\lambda/k) = \frac{\omega^{k+1}}{\Gamma(k+1; \lambda_1 \cdot \omega) - \Gamma(k+1; \lambda_0 \cdot \omega)} \cdot \lambda^k \cdot e^{-\lambda \omega} \quad (3.55)$$

L'estimateur du taux de défaillance moyen a posteriori est

$$\hat{\lambda}_{p(0.5)} = \frac{\Gamma(k+2, \lambda_1 \omega) - \Gamma(k+2, \lambda_0 \omega)}{\omega \cdot [\Gamma(k+1; \lambda_1 \omega) - \Gamma(k+1; \lambda_0 \omega)]} \quad (3.56)$$

On en déduit à partir du pseudo taux de défaillance, l'espérance de la durée de vie moyenne a posteriori:

$$\hat{\eta}_{p(0.5)} = \hat{\lambda}_{p(0.5)}^{-1/\beta} \quad (3.57)$$

Ainsi le paramètre caractéristique a posteriori de la loi de Weibull  $\hat{\eta}_p$  est obtenu grâce à la relation exprimant le lien entre le paramètre d'échelle de la loi de Weibull et sa valeur médiane

$$\hat{\eta}_p = \frac{\hat{\eta}_{p(0.5)}}{(\ln 2)^{1/\beta}} \quad (3.58)$$

Lorsque les deux paramètres de la loi de Weibull sont inconnus, la démarche bayésienne s'impose pour déterminer les paramètres de la loi de Weibull. Comme il n'existe pas de familles de lois continues conjuguées pour les distributions a priori des paramètres de la loi de Weibull, Dans ces conditions, on est amené à effectuer un calcul numérique de la densité a posteriori, d'où une grande complexité des calculs, et des logiciels spécifiques sont alors nécessaires.

### 3.5.2. Approche Bayésienne de la loi de Weibull lorsque les paramètres de forme et d'échelle sont inconnus

L'approche Bayésienne de la loi de Weibull à deux paramètres est souvent utilisée lorsque des modifications ont été réalisées sur les systèmes (action de maintenance préventive ou corrective, modification de conception ou de fonctionnement) [70].

Dans ce qui suit on se limite à la présentation générale des distributions a priori, vraisemblance et a postérieure de cette loi suivant le théorème de Bayes.

La fonction de vraisemblance des observations à partir d'une distribution de Weibull est :

$$l(\beta, \eta; x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\beta n} \beta^n \prod_{i=1}^n x_i^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\beta} x_i^{\beta}\right) \quad (3.59)$$

Selon la méthode non-informative [89], la distribution a priori des paramètres de la distribution de Weibull  $\eta$  et  $\beta$  est :

$$\pi(\beta, \eta) \propto \frac{1}{\beta\eta} \quad (3.60)$$

La distribution a posteriori conjointe est donc :

$$\pi(\beta, \eta | x_1, x_2 \dots x_n) = \frac{(1/\eta)^{\beta n+1} \beta^{n-1} \prod_{i=1}^n x_i^{\beta-1} \exp(-(1/\eta)^\beta x_i^\beta)}{\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (1/\eta)^{\beta n+1} \beta^{n-1} \prod_{i=1}^n x_i^{\beta-1} \exp(-(1/\eta)^\beta x_i^\beta) d\beta d\eta} \quad (3.61)$$

Les distributions marginales a posteriori des paramètres  $\beta$  et  $\eta$ , sont respectivement:

$$\pi(\beta | D) = \int_0^{+\infty} \pi(\beta, \eta) d\eta = \frac{\int_0^{+\infty} (1/\eta)^{\beta n+1} \beta^{n-1} \prod_{i=1}^n x_i^{\beta-1} \exp(-(1/\eta)^\beta x_i^\beta) d\eta}{\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (1/\eta)^{\beta n+1} \beta^{n-1} \prod_{i=1}^n x_i^{\beta-1} \exp(-(1/\eta)^\beta x_i^\beta) d\beta d\eta} \quad (3.62)$$

$$\pi(\eta | D) = \int_0^{+\infty} \pi(\beta, \eta) d\beta = \frac{\int_0^{+\infty} (1/\eta)^{\beta n+1} \beta^{n-1} \prod_{i=1}^n x_i^{\beta-1} \exp(-(1/\eta)^\beta x_i^\beta) d\beta}{\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (1/\eta)^{\beta n+1} \beta^{n-1} \prod_{i=1}^n x_i^{\beta-1} \exp(-(1/\eta)^\beta x_i^\beta) d\beta d\eta} \quad (3.63)$$

Les valeurs attendues des paramètres  $\beta$  et  $\eta$  sont, respectivement,

$$\hat{\beta} = \int_0^{+\infty} \pi(\beta | D) \beta d\beta = \frac{\int_0^{+\infty} \beta \int_0^{+\infty} (1/\eta)^{\beta n+1} \beta^{n-1} \prod_{i=1}^n x_i^{\beta-1} \exp(-(1/\eta)^\beta x_i^\beta) d\eta d\beta}{\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (1/\eta)^{\beta n+1} \beta^{n-1} \prod_{i=1}^n x_i^{\beta-1} \exp(-(1/\eta)^\beta x_i^\beta) d\beta d\eta} \quad (3.64)$$

$$\hat{\eta} = \int_0^{+\infty} \pi(\eta | D) \eta d\eta = \frac{\int_0^{+\infty} \eta \int_0^{+\infty} (1/\eta)^{\beta n+1} \beta^{n-1} \prod_{i=1}^n x_i^{\beta-1} \exp(-(1/\eta)^\beta x_i^\beta) d\eta d\beta}{\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (1/\eta)^{\beta n+1} \beta^{n-1} \prod_{i=1}^n x_i^{\beta-1} \exp(-(1/\eta)^\beta x_i^\beta) d\beta d\eta} \quad (3.65)$$

La fonction de mise à jour de la fiabilité de la distribution de Weibull devient alors :

$$R(t/D) = \frac{\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^{\beta-1} (1/\eta)^{\beta n+\beta+1} \beta^n \prod_{i=1}^n x_i^{\beta-1} \exp(-(1/\eta)^\beta (x_i^\beta + x^\beta)) d\eta d\beta dx}{\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (1/\eta)^{\beta n+1} \beta^{n-1} \prod_{i=1}^n x_i^{\beta-1} \prod_{i=1}^n x_i^{\beta-1} \exp(-(1/\eta)^\beta x_i^\beta) d\eta d\beta} \quad (3.66)$$

Compte tenu des expressions citées, le calcul nécessite l'utilisation des logiciels pour résoudre numériquement l'intégration d'intégrales doubles.

### 3.6. Évaluation de la maintenabilité

Comme pour la fiabilité, la probabilité et les statistiques jouent un rôle important dans la mesure de la maintenabilité. Divers distributions de probabilités peuvent être utilisées pour

présenter les données de temps de réparation effectuées sur des systèmes qui sont en service depuis un certain temps. La fonction de maintenabilité est utilisée pour prédire la probabilité qu'une réparation commençant à l'instant  $t=0$  sera accomplie en un temps  $t$ .

Il existe une analogie forte entre les notions de fiabilité et de maintenabilité, ainsi les démarches d'analyse sont donc semblables.

### 3.7. Conclusion

En conclusion, ce chapitre a donné un aperçu de l'utilisation de la démarche bayésienne utilisée dans le domaine de fiabilité des systèmes ou équipement. L'application de cette démarche a un intérêt :

- d'une part, elle permet d'obtenir une connaissance enrichie, dont l'incertitude est plus faible : la probabilité a posteriori représentant la nouvelle connaissance de l'analyste;
- d'autre part, la démarche bayésienne par ces applications industrielles présente le principe d'actualisation dynamique des connaissances, utilisé en particulier pour l'actualisation des banques de données de fiabilité.

Nous venons de voir que les techniques bayésiennes nous permettent d'utiliser toutes formes de connaissances. Ces connaissances sont modélisées à l'aide de plusieurs lois mathématiques. Ce qui permet de chercher la loi la plus favorable compte tenu de la nature des informations disponibles. On a vu aussi que les calculs bayésien grâce au principe de conjugaison qui permet de joindre très facilement des densités de probabilité appartenant à une même famille mathématique, ne présentent aucune difficulté. On a vu aussi que l'évaluation des paramètres de fiabilité variables avec le temps, et dans le cas où l'on connaît le paramètre de forme de la loi de Weibull représentative du phénomène de vieillissement, ne présente pas de difficulté de calculs bayésien.

Par contre, lorsque les observations du retour d'expérience sont rares et que l'on ne peut disposer d'une expertise sur la cinétique de vieillissement et sur la durée de vie moyenne des systèmes ou matériels, la démarche bayésienne s'impose pour déterminer les deux paramètres de la loi de Weibull, dans ce cas, l'utilisation d'un logiciel est nécessaire pour les déterminer de façon analytique.

Ainsi, ce chapitre comporte les aspects théoriques à partir desquels sont élaborées des méthodes destinées à l'étude de cas réels dans le domaine de la prédiction de la fiabilité des systèmes.

Par ailleurs, dans notre étude, on n'a pas détaillé les aspects de la maintenabilité qui sont souvent estimés d'une manière analogique à la fiabilité.

# Chapitre IV

## Résultats et Discussion

### Sommaire

---

- 4.1. Introduction
  - 4.2. Techniques bayésienne et analyse fréquentielle
    - 4.2.1. Données complètes
    - 4.2.2. Données incomplètes
    - 4.2.3. Synthèse
  - 4.3. Estimation bayésienne du taux de défaillance
  - 4.4. Modélisation de l'a priori
  - 4.5. Conclusion
-

## Résultats et discussion

### 4.1. Introduction

La fiabilité comporte des aspects théoriques à partir desquels sont élaborées des méthodes destinées à l'étude de cas industriel réels. Au chapitre précédent, on a mis l'accent sur les méthodes d'estimation bayésienne utilisées dans le domaine de la fiabilité. On a montré comment opèrent ces méthodes, On a décrit de façon ponctuelle l'approche Bayésienne, la diversité des sujets et des mathématiques intervenant dans cette grande discipline.

Les résultats exposés dans ce chapitre expriment des cas d'application où l'approche Bayésienne est utilisée comme outil stochastique de la modélisation de la fiabilité des systèmes. Ainsi, l'analyse de la fiabilité par cette approche permet de contrôler la dérive éventuelle des paramètres de fiabilité des systèmes dans le but de maîtriser les risques industriels. Cette analyse basée sur la théorie de Bayes permet d'intégrer les connaissances subjectives des experts et ainsi d'obtenir un processus décisionnel portant sur des événements rares ou incertains.

### 4.2. Techniques bayésiennes et analyse fréquentielle

Avant d'aborder les applications industrielles de la démarche bayésienne, traitons dans cet exemple, des capacités comparées des traitements classiques (fréquentiels) et bayésienne, d'où la puissance de la méthode bayésienne dans le cas de données de vraisemblance nombreuses ou peu-nombreuses.

Présentons les données d'un système dont les applications industrielles sont nombreuses. Il s'agit d'un générateur de vapeur ou échangeur bouilleur. Pour ce matériel les défaillances se manifestent sous forme de fuites dues à l'effet néfaste des vibrations ou de la corrosion [89]. Les données de retour d'expérience sont répertoriées dans Le tableau 4.1:

Tableau 4.1: Données complète du retour d'expérience.

Historique des défaillances	
TBF (h)	k
2065	5
4427	9
4458	11
7524	34
23435	13

On dispose également de données subjectives issues de banques de données qui sont relatives à un échangeur tout à fait similaire [89]:

$$\lambda \in [2,3 \cdot 10^{-5}; 2,8 \cdot 10^{-5}] \text{ déf. /h à 80\%}$$

Le but est de déterminer un intervalle de confiance du taux de défaillance à 80%. On considère dans un premier temps la totalité des données de retour d'expérience, dans un deuxième temps, une partie seulement des données pour en déduire l'intérêt que présente les méthodes bayésiennes.

#### 4.2.1. Données complètes

Pour une première illustration prenons l'intégralité des données disponibles et procédons à la résolution par les deux méthodes : fréquentielle et bayésienne.

##### a. Résolution classique (fréquentiel)

$$\lambda_{moy} = \frac{k}{T_c}$$

Où

$k$  Nombre total de défaillances,

$T_c$  Temps total cumulé de fonctionnement

On a :

$$k=72$$

$$T_c = 659677\text{h}$$

$$\text{D'où } \lambda_{moy} = 10,9 \cdot 10^{-5} \text{ déf./h}$$

On estime l'intervalle de confiance bilatéral à 80% du taux de défaillance, les deux bornes de l'intervalle sont données par:

$$\lambda_{inf} = \frac{\chi_{\alpha/2}^2(2k)}{2T_c} = \frac{\chi_{0,1}^2(144)}{2T_c} = 9,3 \cdot 10^{-5} \text{ déf./h}$$

$$\lambda_{sup} = \frac{\chi_{(1-\alpha/2)}^2(2k + 2)}{2T_c} = \frac{\chi_{0,9}^2(146)}{2T_c} = 12,7 \cdot 10^{-5} \text{ déf./h}$$

**b. Résolution par la méthode Bayésienne**

Les données de retour d'expérience proviennent d'échangeurs en fonctionnement. On suppose alors que les temps de défaillance suivent une loi exponentielle qui s'applique aux matériels subissant des défaillances brutales et aléatoires. Ainsi la fonction de vraisemblance est une distribution exponentielle dont la densité:

$$f(k/\lambda) = \lambda^k \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Avec:  $k=72$  et  $T_c = 659677h$

Cette densité représente la fonction de vraisemblance issue du retour d'expérience. Pour l'**a priori**, on utilise une distribution gamma car on dispose de trois informations: les taux de défaillances, minimal et maximal qui sont évalués avec un taux de confiance de 80%. On a vu au chapitre précédent la densité a priori du taux de défaillance (équation (3.24)) de paramètres  $\alpha_0$  et  $\beta_0$  qui seront déterminés en utilisant les graphes de Martz et Waller. La distribution du paramètre de forme  $\alpha_0$  est tabulée en fonction de:  $\log_{10} \left[ \frac{\lambda_{sup}}{\lambda_{inf}} \right]$  pour un niveau de confiance  $(1 - \alpha)$  égal à 80% (voir tableau 4.2)

Tableau 4.2. : Tabulation de  $\alpha_0$  à des risques 80% et 90%

$\log_{10} \left[ \frac{\lambda_{sup}}{\lambda_{inf}} \right]$	$(1 - \alpha) = 80\%$	$(1 - \alpha) = 90\%$
0.4	8	10
0.5	5	8
0.6	4	6
0.7	3	5
0.8	2	4
0.9	2	3
1	2	2
1.1	1	2

$$\log_{10} \left[ \frac{\lambda_{sup}}{\lambda_{inf}} \right] = 1.08$$

D'où on obtient:  $\alpha_0 = 1.2$  pour  $(1 - \alpha) = 80\%$

La distribution du paramètre  $b_0$  est tabulée en fonction du  $\alpha_0$  trouvé pour un niveau de confiance  $(1 - \alpha)$  égal à 80% (voir tableau 4.3)

Tableau 4.3: tabulation de  $b_0$  à des risques 80% et 90%

$\alpha$	$(1 - \alpha) = 80\%$	$(1 - \alpha) = 90\%$
1	100000	50000
2	500000	350000
3	1100000	770000
4	1700000	1350000
5	2500000	2000000
6	3200000	2500000
7	3940000	3350000
8	4600000	4000000
9	5540000	4800000
10	6200000	5200000

On obtient:  $b_0 = 180000$ , d'où  $\beta_0 = \frac{\lambda_{inf}}{b_0}$

Ainsi les paramètres de la distribution Gamma a priori sont donc:

$$\alpha_0 = 1.2; \beta_0 = 1.28 \cdot 10^{-5}$$

La densité a posteriori est obtenue en appliquant la règle de conjugaison. On obtient une loi gamma a posteriori dont les paramètres sont égaux à la somme des paramètres de la densité a priori et ceux de la fonction de vraisemblance (voir équation 3.28):

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{post} &= \alpha_0 + k = 73.2 \\ \beta_{post} &= \frac{1}{\beta_0} + t = 667490h \end{aligned} \right\}$$

Les inférences statistiques recherchées en appliquant les équations: 3.29 et 3.32, on obtient:

$$\lambda_{moy} = \frac{\alpha_{post}}{\beta_{post}} = 10.96 \cdot 10^{-5} \text{ déf./h}$$

$$\lambda_{inf} = \frac{\chi_{\alpha/2}^2(2k)}{2T_c} = \frac{\chi_{0,1}^2(146.4)}{2(667490)} = 9,36 \cdot 10^{-5} \text{ déf./h}$$

$$\lambda_{sup} = \frac{\chi_{(1-\alpha/2)}^2(2k + 2)}{2T_c} = \frac{\chi_{0,9}^2(148.4)}{2(667490)} = 12,8 \cdot 10^{-5} \text{ déf./h}$$

### Comparaison

	$\lambda_{moy}$ (déf./h)	$\lambda_{inf}$ (déf./h)	$\lambda_{sup}$ (déf./h)
<b>Classique</b>	$10,9 \cdot 10^{-5}$	$9,3 \cdot 10^{-5}$	$12,7 \cdot 10^{-5}$
<b>Bayésien</b>	$10,96 \cdot 10^{-5}$	$9,36 \cdot 10^{-5}$	$12,8 \cdot 10^{-5}$

### Commentaire

On remarque que les résultats sont assez proches, l'utilisation de la méthode Bayésienne, n'augmente pas dans ce cas la précision de l'encadrement de  $\lambda$ . Ceci est dû au fait que le nombre d'observations est très élevé.

#### 4.2.2. Données incomplètes

Reprenons le même raisonnement que précédemment avec seulement une partie de données:

Tableau 4.4: Données partielles du retour d'expérience.

Historique des défaillances	
TBF (h)	k
2065	5
4427	9
23435	13

##### a. Résolution classique

Par l'analyse classique et pour ces données partielles, on obtient:

$$\lambda_{moy} = \frac{27}{354826} = 7.6 \cdot 10^{-5}$$

$$\lambda_{inf} = \frac{\chi_{0,1}^2(54)}{2T_c} = 5,8 \cdot 10^{-5} \text{ déf./h}$$

$$\lambda_{sup} = \frac{\chi_{0,9}^2(56)}{2T_c} = 9,85 \cdot 10^{-5} \text{ déf./h}$$

### b. Résolution par la méthode Bayésienne

Les données a priori reste inchangé, par contre la fonction de vraisemblance correspondant aux observations du retour d'expérience (équation 3.6) est modifiée vu que les données soient incomplètes:  $k=27$  et  $T_c = 354823$  h

Les paramètres a posteriori sont donc les suivants:

$$\begin{cases} \alpha_{post} = 28.2 \\ \beta_{post} = 362636 \text{ h} \end{cases}$$

On obtient les inférences suivantes:

$$\lambda_{moy} = \frac{28.5}{362636} = 7.86 \cdot 10^{-5}$$

$$\lambda_{inf} = \frac{\chi_{0,1}^2(56.4)}{2T_c} = 5,97 \cdot 10^{-5} \text{ déf./h}$$

$$\lambda_{sup} = \frac{\chi_{0,9}^2(58.4)}{2T_c} = 10,1 \cdot 10^{-5} \text{ déf./h}$$

### Comparaison

	$\lambda_{moy}$ (déf./h)	$\lambda_{inf}$ (déf./h)	$\lambda_{sup}$ (déf./h)
<b>Classique</b>	$7.6 \cdot 10^{-5}$	$5,8 \cdot 10^{-5}$	$9,85 \cdot 10^{-5}$
<b>Bayésien</b>	$7.86 \cdot 10^{-5}$	$5,97 \cdot 10^{-5}$	$10,1 \cdot 10^{-5}$

### Commentaires

L'écart entre l'évaluation classique et bayésienne de l'estimation du taux de défaillance a sensiblement augmenté. On en déduit que l'utilisation de la méthode bayésienne est plus intéressante lorsque les données du retour d'expérience disponibles sont peu nombreuses.

#### 4.2.3. Synthèse

À travers cet exemple, on a montré comment les techniques bayésiennes pouvaient se révéler plus performantes que les techniques classiques dans le cas de données sur le matériel faibles et peu nombreuses d'où l'intérêt de la démarche. Dans le cas de données nombreuses, les résultats obtenus par les deux méthodes sont similaires et il n'est pas nécessaire d'utiliser les techniques bayésiennes.

On remarque que les approches fréquentielle et bayésienne ne sont pas à l'opposée. L'alternative à cette dernière est adaptée à l'évaluation de la probabilité d'événements rares. L'approche bayésienne s'avère plus appropriée puisqu'elle permet de prendre en compte toute la connaissance disponible et en particulier, les avis d'experts, seuls susceptibles de considérer toute dérive entre le passé et le futur et de relever la faiblesse du REX, du fait de la grande fiabilité des systèmes ou matériels de très haute technologie.

### 4.3. Estimation bayésienne du taux de défaillance

De manière sous-jacente à sa formulation mathématique le taux de panne traduit, sur un plan physique, la capacité plus au moins grande d'un composant ou d'un type déterminé de composant à résister avec succès aux différentes contraintes d'environnement auxquelles il est susceptible d'être soumis. Sur un plan formel, le taux de défaillances des fiabilistes doit être étroitement associé au problème de la survivance d'un mécanisme pris au sens large ; composants mécaniques ou électroniques complexes, chaînes cinématiques, dispositifs

électroniques complexes, etc. Le taux de défaillance exprime en d'autres termes une probabilité d'avarie instantanée pouvant conduire à tout moment à un risque majeur.

Dans l'organigramme de la figure 4.1 sont présentées les approches d'estimation du taux de défaillance.

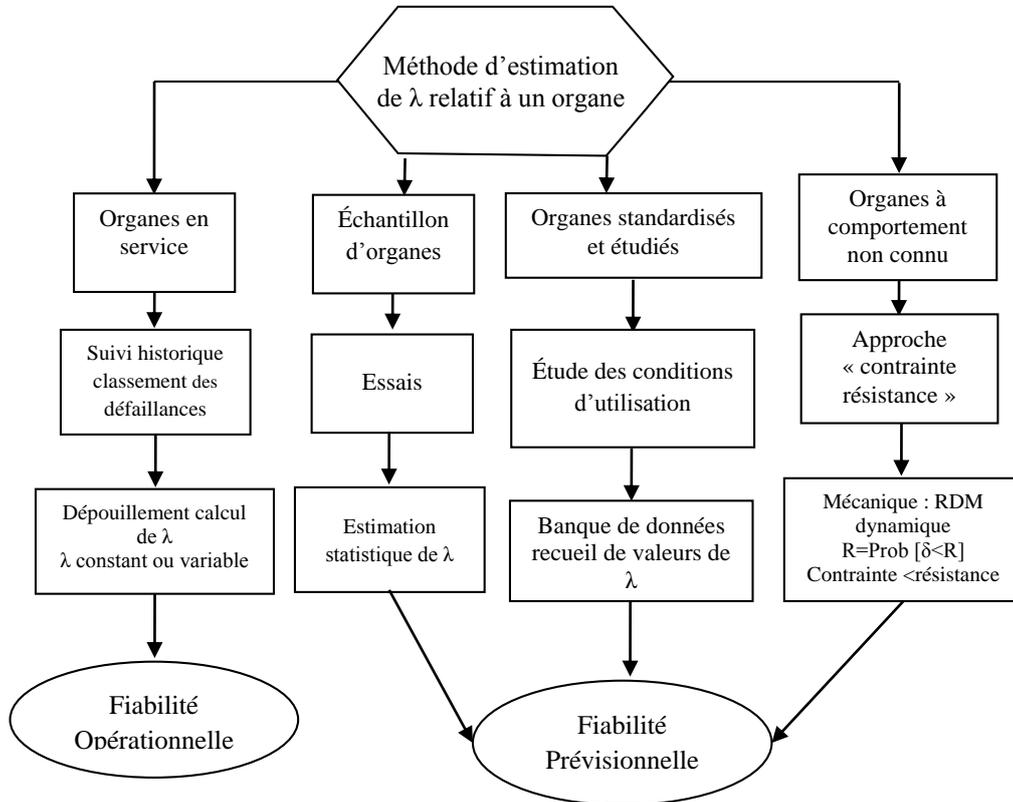


Figure 4.1. Méthodes d'estimation du taux de défaillance

La modélisation du taux de défaillance en fiabilité sous un angle bayésien est une approche stochastique ayant pour objectif de prédire la postériori du taux partant d'un état apriori en injectant certaines informations d'experts. La difficulté majeur dans ce type de modélisation est de mettre en évidence la distribution à priori. Une modélisation Bayésienne du taux de défaillance est défini par :

- $f(t/\lambda)$  la densité de probabilité de l'instant de panne d'un composant ayant un taux de défaillance égal à  $\lambda$
- $f(t)$  la distribution inconditionnelle de l'instant d'une panne portant sur l'ensemble des composants du lot ou de l'échantillon considéré.

Sur la base de ces définitions, l'expression de la distribution inconditionnelle  $f(t)$  peut être établie, en suivant la méthode Bayésienne, comme étant une probabilité marginale de l'instant de panne portant sur l'ensemble des valeurs des  $\lambda$ , c'est-à-dire, a priori, entre zéro et l'infini, d'où :

$$f(t) = \int_0^{\infty} f(t/\lambda)g(\lambda)d\lambda \quad (4.1)$$

Comme dans toute approche Bayésienne, la difficulté majeure réside dans le bon choix de la distribution a priori ( $g_0(\lambda)$ ). On considère comme distribution initiale des  $\lambda$  du lot la fonction :

$$g_0(\lambda) = \frac{e^{-\lambda/\beta} \lambda^{\alpha}}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha + 1)} \quad (4.2)$$

Où  $\Gamma(\alpha + 1)$  : la fonction gamma incomplète pour la valeur  $\alpha+1$  de la variable.

De plus, nous admettrons que cette distribution gamma initiale est celle des  $\lambda$  d'un lot dont les composants ont préalablement été éliminés par certain nombre de contrôles préliminaires (contrôles visuels, tests électriques, etc.).

En tenant compte de l'hypothèse de mortalité exponentielle pouvant s'appliquer à un composant bien défini, on peut écrire :

$$f(t/\lambda) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (4.3)$$

Expression dans laquelle  $\lambda$  représente le taux de défaillance propre au composant considéré.

La distribution inconditionnelle de l'instant de panne au niveau de l'ensemble des composants du lot peut donc s'écrire, d'après (4.1) :

$$f(t) = \int_0^{\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda t} e^{-\lambda/\beta} \lambda^{\alpha}}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha + 1)} d\lambda$$

Après intégrations par partie successives, il vient :

$$f(t) = \frac{(\alpha + 1)\beta}{(1 + \beta t)^{\alpha+2}} \quad (4.4)$$

En désignant par  $R(t)$  la fiabilité inconditionnelle sur le lot à l'instant  $t$ , on peut encore écrire :

$$R(t) = 1 - \int_0^t f(u) du = \int_t^\infty \frac{(\alpha + 1)\beta}{(1 + \beta u)^{\alpha+2}} du = \left(\frac{1}{1 + \beta t}\right)^{\alpha+1} \quad (4.5)$$

Enfin, si l'on désigne par  $\lambda(t)$  le taux de défaillance inconditionnel sur le lot à l'instant  $t$ , on a :

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

D'après (4. 4) et (4. 5), on a:

$$\lambda(t) = \frac{(\alpha + 1)\beta}{1 + \beta t} \quad (4.6)$$

Ce dernier résultat est très important. Il montre en effet que, sous l'angle bayésien et dans l'hypothèse d'une distribution a priori de type gamma, le taux de défaillance inconditionnel décroît hyperboliquement avec le temps de fonctionnement. La figure (4.2) exprime le taux de défaillance sous l'angle Bayésien.

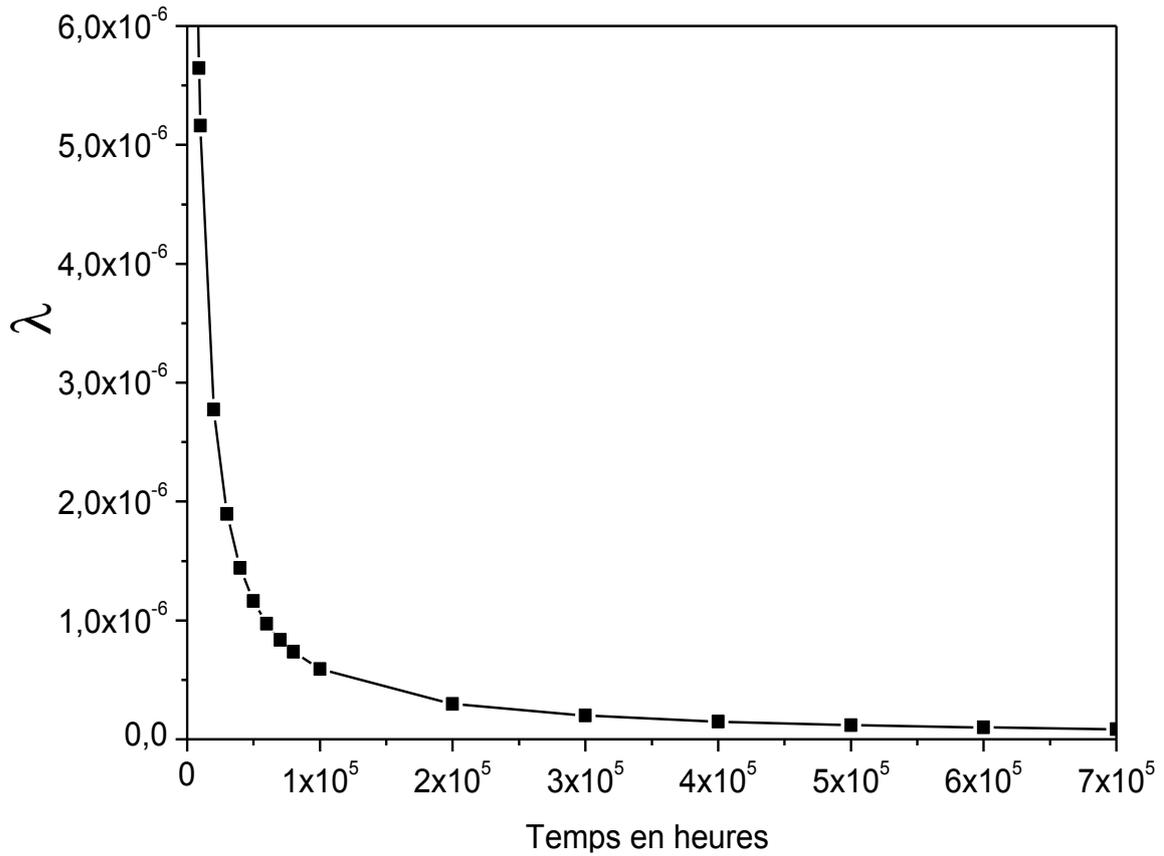


Figure 4.2. Taux de défaillance sous l'angle Bayésien

Si on tient compte du phénomène ceci pourrait conduire à un modèle général, quel que soit  $t$ , du taux de défaillance inconditionnel ayant pour forme :

$$h(t) = \frac{(\alpha + 1)\beta}{1 + \beta t} e^{\gamma t} \quad (4.7)$$

Le facteur exponentiel, dans lequel la constante  $\gamma$  est nettement inférieure à  $10^{-4}$  pour la majorité des types de composants, étant reconnu comme représentant assez bien l'effet du vieillissement sur le taux de défaillance.

Il est aisé de démontrer, enfin, que la décroissance du taux de défaillance inconditionnel  $\lambda(t)$  traduit bien le déplacement vers la gauche de la distribution a priori  $g_0(\lambda)$ . Soit, en effet,  $g(\lambda/t)$  la distribution des taux de défaillance des composants encore en vie à l'instant  $t$ .

Cette distribution a pour expression, en vertu du théorème de Bayes :

$$g(\lambda/t) = \frac{g_0(\lambda) \cdot e^{-\lambda t}}{\int_t^\infty g_0(\lambda) e^{-\lambda t} dt} = \frac{e^{-\left(\frac{1}{\beta}+t\right)\lambda} \lambda^\alpha}{\int_0^\infty e^{-\lambda\left(\frac{1}{\beta}+t\right)} \lambda^\alpha d\lambda} \quad (4.8)$$

La distribution  $g(\lambda/t)$  est une distribution de type gamma dont les paramètres  $\alpha'$  et  $\beta'$  sont tels que :

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha \\ \frac{1}{\beta'} = \frac{1}{\beta} + 1 \end{cases}$$

L'espérance mathématique  $E(\lambda)$  de cette nouvelle distribution n'est autre que le taux de défaillance inconditionnel à l'instant  $t$ . On peut en effet vérifier que :

$$E(\lambda) = \beta'(\alpha' + 1) = \frac{(\alpha + 1)\beta}{1 + \beta t} = \frac{E_0(\lambda)}{1 + \beta t}$$

Avec  $E_0(\lambda)$  la valeur moyenne de la distribution initiale  $g_0(\lambda)$ .

Le déplacement dans le temps vers la gauche de la distribution  $g(\lambda/t)$  peut donc être mesuré par la quantité  $1+\beta t$  : rapport entre les moyennes des distributions  $g(\lambda/t)$  et  $g_0(\lambda)$ .

Comme illustration numérique, on considère un test sur un lot de capteurs électroniques suivant les conditions de l'essai :

- durée totale de l'essai : 5000 heures
- température 25°C
- Nombre d'éléments conformes à  $t=0$  : 893

Le tableau 4. 5 présentes les résultats de l'essai de vieillissement.

Intervalles de temps ( $t_1, t_2$ )	Temps moyen ( $t_m$ )	Nombres de composants défaillants (C)	Nombres de composants survivants (N)	$\hat{\lambda}^{-1}$ instantané x $10^4$ (heures)
<b>0h-500h</b>	250h	19	893	2.35
<b>500-1000h</b>	750h	9	874	4.86
<b>1000h-2000h</b>	1500h	17	857	5.04
<b>2000h-3000h</b>	2500h	12	845	7.04
<b>3000h-5000h</b>	4000h	18	827	9.19

On y fait apparaître les informations suivantes:

- Les cinq tranches de temps successives ( $t_1, t_2$ ) comprises entre les points de relevés.
- Les temps milieux :  $t_m = \frac{t_1+t_2}{2}$
- Le nombre de composants trouvés défectueux dans chaque tranche ( $t_1, t_2$ ) : C
- Le nombre de composants survivants en début de chaque tranche ( $t_1, t_2$ ) : n
- L'inverse de l'estimateur du taux de défaillance instantané au temps  $t_m$  :

$$\hat{\lambda}^{-1} = \frac{n. (t_1 - t_2)}{c}$$

Les résultats de cet essai peuvent se corréler avec l'approche théorique menée précédemment. On a vu que, lorsqu'on prend pour distribution a priori des taux de défaillance une loi gamma, le taux de panne inconditionnel au niveau du lot est fonction hyperbolique du temps. Si l'on reprend l'expression (4. 6), on voit que l'inverse du taux de panne inconditionnel s'écrit :

$$\hat{h}^{-1}(t) = \frac{1}{(\alpha + 1)\beta} + \frac{t}{\alpha + 1}$$

Autrement dit,  $h^{-1}(t)$  est une fonction linéairement croissante avec le temps. Dans le système d'axe ( $t, h^{-1}$ ), la droite  $h^{-1}(t)$  peut être définie par les deux caractéristiques suivantes :

- ordonnée à l'origine :  $a = \frac{1}{(\alpha+1)\beta}$

- pente :  $b = \frac{1}{\alpha + 1}$

Si on parvient à évaluer expérimentalement les deux caractéristiques a et b dans un essai de vieillissement d'un lot de composants déterminé, on voit que les estimateurs des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  de la distribution gamma a priori peuvent être obtenu par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\alpha} = \frac{1-b}{b} \\ \hat{\beta} = \frac{b}{a} \end{array} \right.$$

Cette méthode de calcul ayant été choisie dans notre exemple de calcul, on a tracé sur la figure 4. 3, la droite (D) s'ajustant le mieux avec les cinq points expérimentaux.

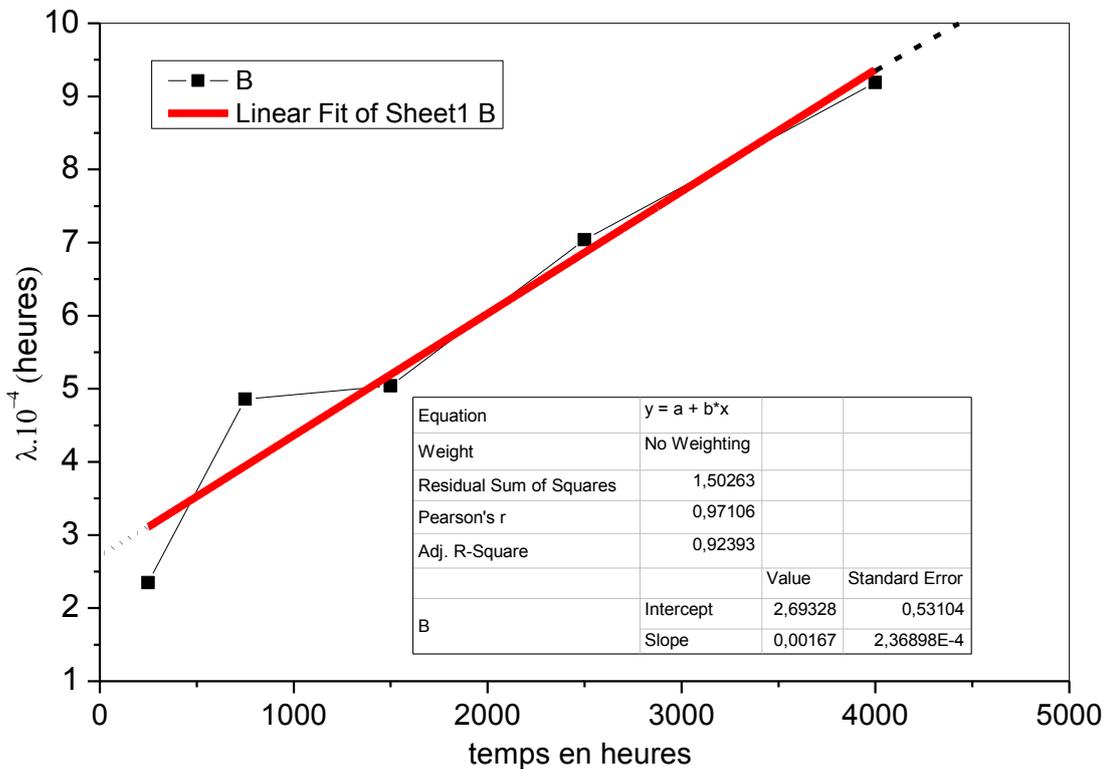


Figure 4.3 : Évolution de  $\lambda^{-1}$  avec le temps.

Les résultats obtenus sont les suivantes :

- Coefficient de corrélation :  $r = 0.971$
- Ordonnée de (D) à l'origine :  $a = 26,339$  (heures)

- Pente (D) :  $b = 19.682$

On peut remarquer une très bonne corrélation entre la droite théorique et les résultats expérimentaux. Les estimateurs  $\alpha$  et  $\beta$  ont ici pour valeurs :  $\hat{\alpha} = -0.940$  et  $\hat{\beta} = 6,19 \cdot 10^{-4}$

Le taux de défaillance instantané aura donc l'expression suivante :

$$h(t) = \frac{3,71 \cdot 10^{-5}}{1 + 6,19 \cdot 10^{-4}t}$$

Dans la limite de validité de ce modèle, on obtiendrait par extrapolation les valeurs du taux de défaillances à :

- 10000 heures :  $\lambda(10000) = 5,16 \cdot 10^{-6}$
- à 50000 heures :  $\lambda(50000) = 1,16 \cdot 10^{-6}$  heures
- à 100000 heures :  $\lambda(100000) = 5,9 \cdot 10^{-7}$  heures

En conclusion, l'approche Bayésienne qui vient d'être appliquée permet de réduire le nombre de tests qui peuvent être très coûteux. On constate une excellente corrélation entre la droite théorique et les résultats expérimentaux ; ce qui démontre le bien-fondé de la loi gamma comme distribution a priori d'où la validité du modèle.

#### 4.4. Modélisation de la connaissance a priori

L'application considérée dans les tests est relative à 84 capteurs de proximité inductive installés dans la remontée mécanique de Constantine (Téléphérique) ; de série 19-302-3BBPKG/SS-000-K/PG36 ont été mis en test pendant 1 an. Un seul est tombé en panne après 0,3 ans. Le taux de défaillance à 60% de confiance que ce test permet de justifier correspond à la borne supérieure de l'intervalle de confiance unilatéral au risque  $\alpha = 40\%$ . La modélisation fait intervenir l'approximation par la loi khi-deux.

Basée sur la formule de Bayes, la loi conjuguée (a postérieure) donne la densité de probabilité :

$$g(\lambda/k, T) = \frac{\lambda^k T^{k+1} e^{-\lambda T}}{k!}$$

Dans le cas où  $k$  défaillances sont survenues pendant la durée cumulée  $T$ .

Avec :  $k = k_0 + k_1$

$$T = T_0 + T_1$$

$k_0$  : nombre de défaillance a priori

$k_1$  : nombre de défaillance observé

Le taux de défaillance à  $(1-\alpha)\%$  de confiance correspond à la borne supérieure de l'intervalle de confiance est obtenu par l'approximation de la loi khi deux :

$$\lambda_{sup} = \frac{\chi_{(1-\alpha)}^2(2k + 2)}{2T}$$

Le même résultat peut s'obtenir par intégration de la loi conjuguée gamma :

$$Probabilité(\lambda \leq \lambda_{sup}) = 1 - \alpha = \int_0^{\lambda_{sup}} g(\lambda/k, T) d\lambda$$

On considère une série de tests sur la distribution a priori, en faisant varier le nombre de défaillance ainsi que les temps cumulés de fonctionnement dans le but de prédire la distribution a posteriori avec différents intervalles de confiance.

### CAS 1 : intervalle de confiance 60 %

Les résultats pour  $K_0=1$  sont présentés dans le tableau 4.6 :

Tableau 4.6: Taux de défaillance à 60 % de confiance.

$K_0=1$	Intégration loi Gamma	Khi-deux inverse	
$\lambda_{60\%}$ A priori	$2,000 \cdot 10^{-6}$	$2,022 \cdot 10^{-6}$	$h^{-1}$
$\lambda_{60\%}$ Vraisemblance	$2,800 \cdot 10^{-6}$	$2,771 \cdot 10^{-6}$	$h^{-1}$
$\lambda_{60\%}$ A posteriori	$1,800 \cdot 10^{-6}$	$1,795 \cdot 10^{-6}$	$h^{-1}$

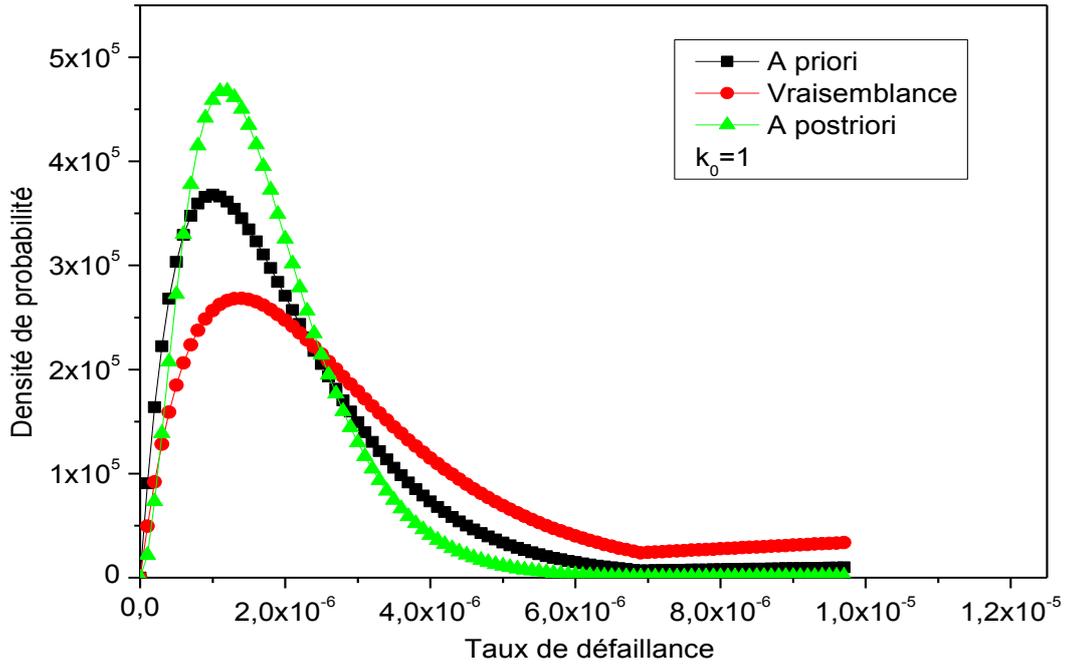


Figure 4.5: Distribution a priori, vraisemblance et a posteriori pour  $K_0= 1$

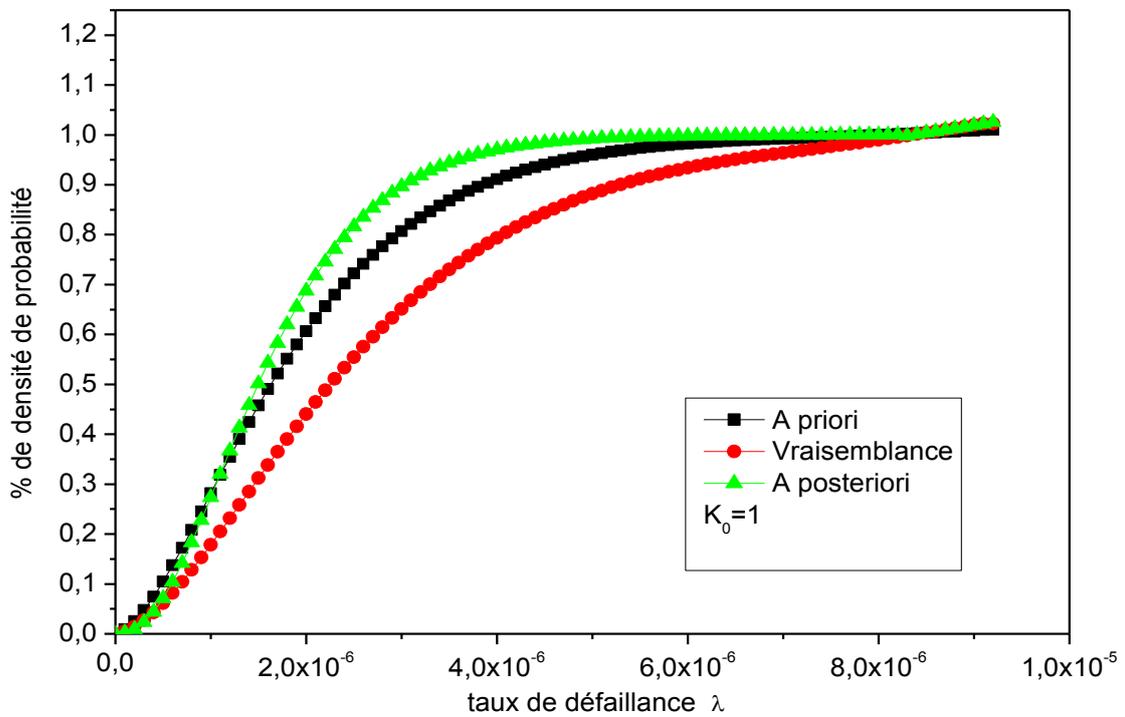


Figure 4.6: Les Distribution en % des a priori, vraisemblance et a posteriori  
 Pour un nombre de défaillance  $K_0= 2$ , le tableau 4.7 si après présente les résultats :

Tableau 4.7: Taux de défaillance à 60 % de confiance.

$K_0=2$	Intégration loi Gamma	Khi-deux inverse	
$\lambda_{60\%}$ a priori	$1,600.10^{-6}$	$1,553.10^{-6}$	$h^{-1}$
$\lambda_{60\%}$ Vraisemblance	$2,800.10^{-6}$	$2,771.10^{-6}$	$h^{-1}$
$\lambda_{60\%}$ A posteriori	$1,500.10^{-6}$	$1,530.10^{-6}$	$h^{-1}$

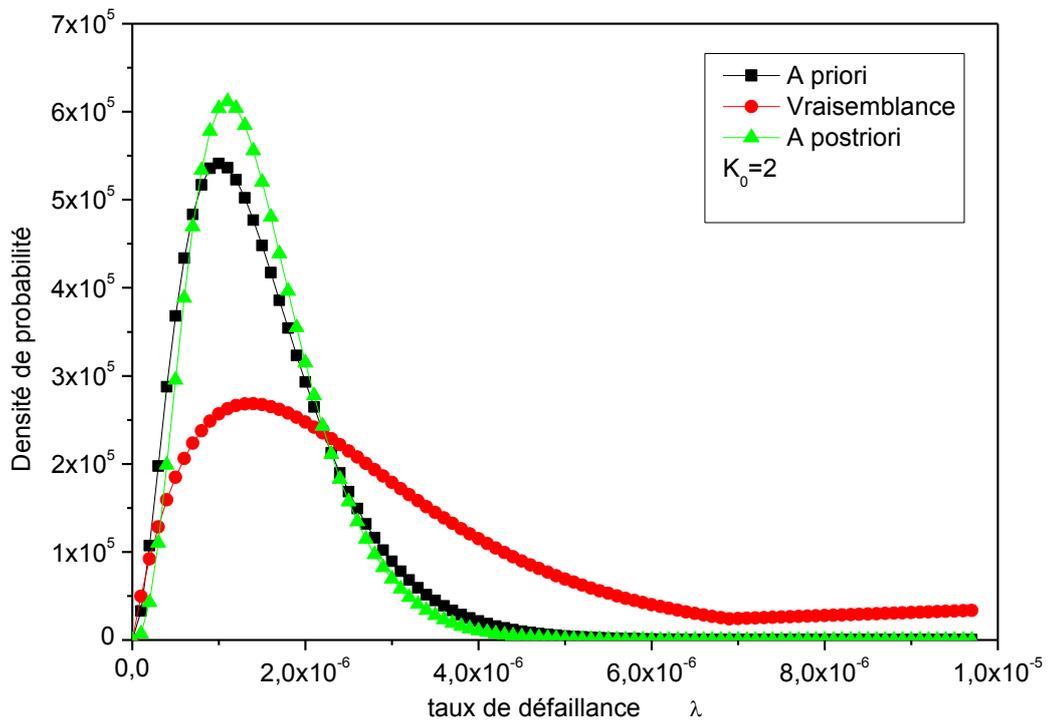


Figure 4.7: Distribution a priori, vraisemblance et a posteriori pour  $K_0= 2$

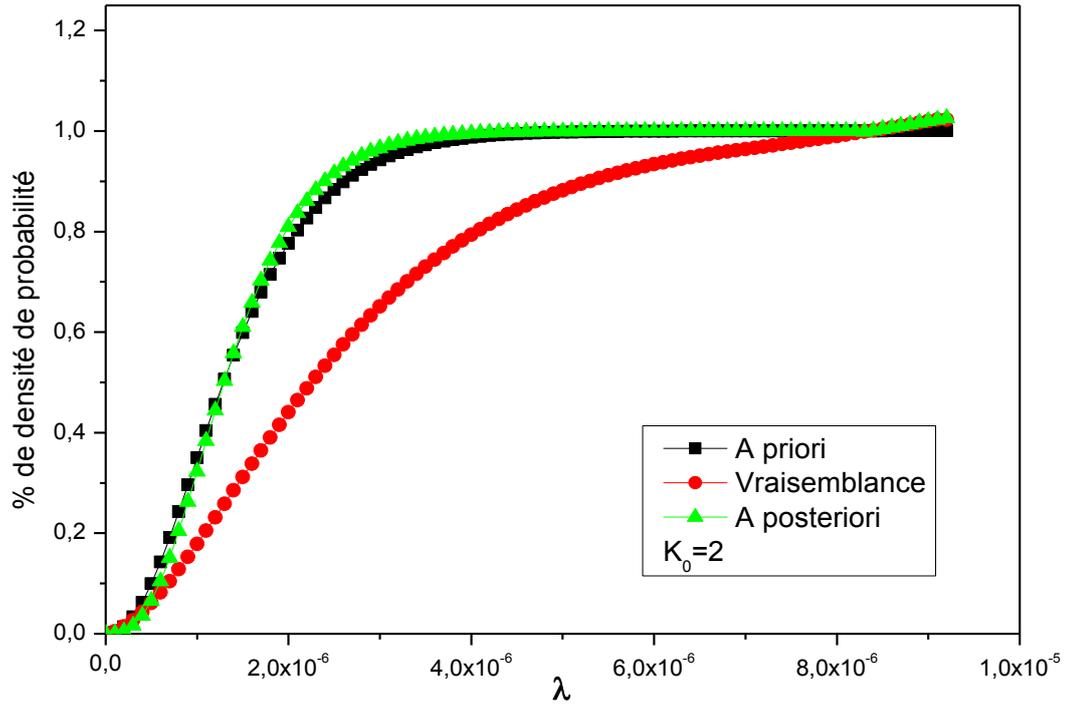


Figure 4.8: Les Distribution en % des a priori, vraisemblance et a posteriori

Pour de défaillance de  $K_0= 3$ , le tableau 4.8 si après les résultats.

Tableau 4.8: Taux de défaillance à 60 % de confiance.

$K_0=3$	Intégration loi Gamma	Khi-deux inverse	
$\lambda_{60\%}$ a priori	$1,400.10^{-6}$	$1,392.10^{-6}$	$h^{-1}$
$\lambda_{60\%}$ vraisemblance	$2,800.10^{-6}$	$2,771.10^{-6}$	$h^{-1}$
$\lambda_{60\%}$ A posteriori	$1,400.10^{-6}$	$1,404.10^{-6}$	$h^{-1}$

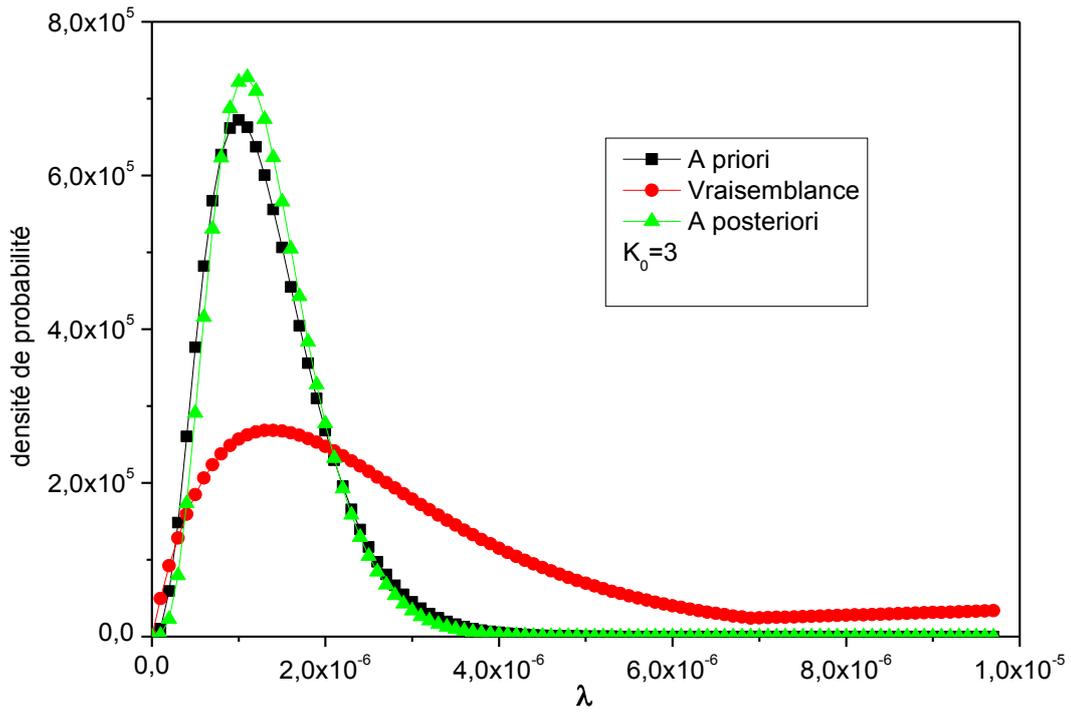


Figure 4.9: Distribution a priori, vraisemblance et a posteriori pour  $K_0=3$

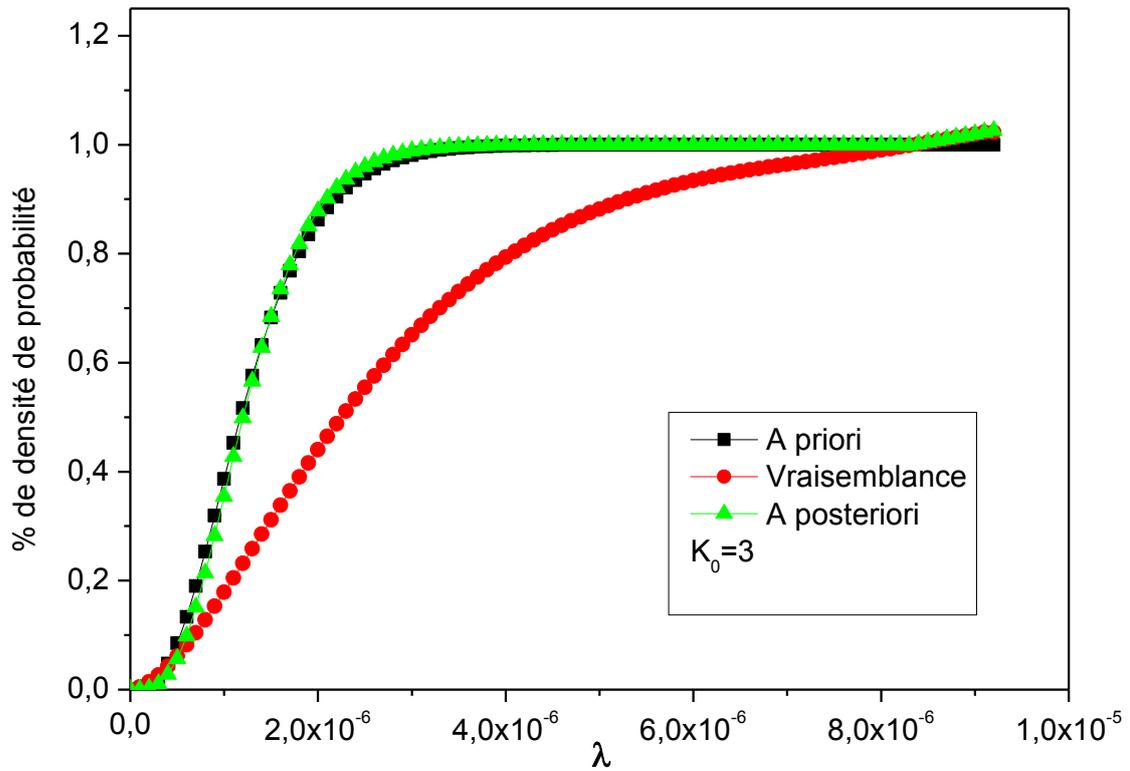


Figure 4.10: Les Distribution en % des a priori, vraisemblance et a posteriori.

Les courbes des figures de 4.5 à 4.10 représentent les distributions a posteriori, a priori et la fonction de vraisemblance pour différents cas de situation de l'a priori en rapport avec le nombre de défaillance.

On remarque que les densités de probabilité a priori et a posteriori deviennent de plus en plus cohérentes. Le taux de défaillance à 60% de confiance correspondant à la borne supérieure de l'intervalle de confiance est obtenu avec des valeurs assez proches que les défaillances deviennent assez importantes.

Traitant maintenant le cas si les experts considèrent les mêmes données mais avec un intervalle de confiance plus élevé.

**CAS 2: Intervalle de confiance 90 %**

Les résultats pour  $K_0=1 ; 2 ; 3$  sont présentés ci-après :

Le tableau 4. 9 présentes les résultats pour  $K_0=1$ .

Tableau 4.9: Taux de défaillance à 90 % de confiance.

$K_0=1$	Intégration loi Gamma	Khi deux inverse	
$\lambda_{90\%}$ A priori	$4,000.10^{-6}$	$3,890.10^{-6}$	$h^{-1}$
$\lambda_{90\%}$ vraisemblance	$9,000.10^{-6}$	$9,007.10^{-6}$	$h^{-1}$
$\lambda_{90\%}$ A posteriori	$3,800.10^{-6}$	$3,717.10^{-6}$	$h^{-1}$

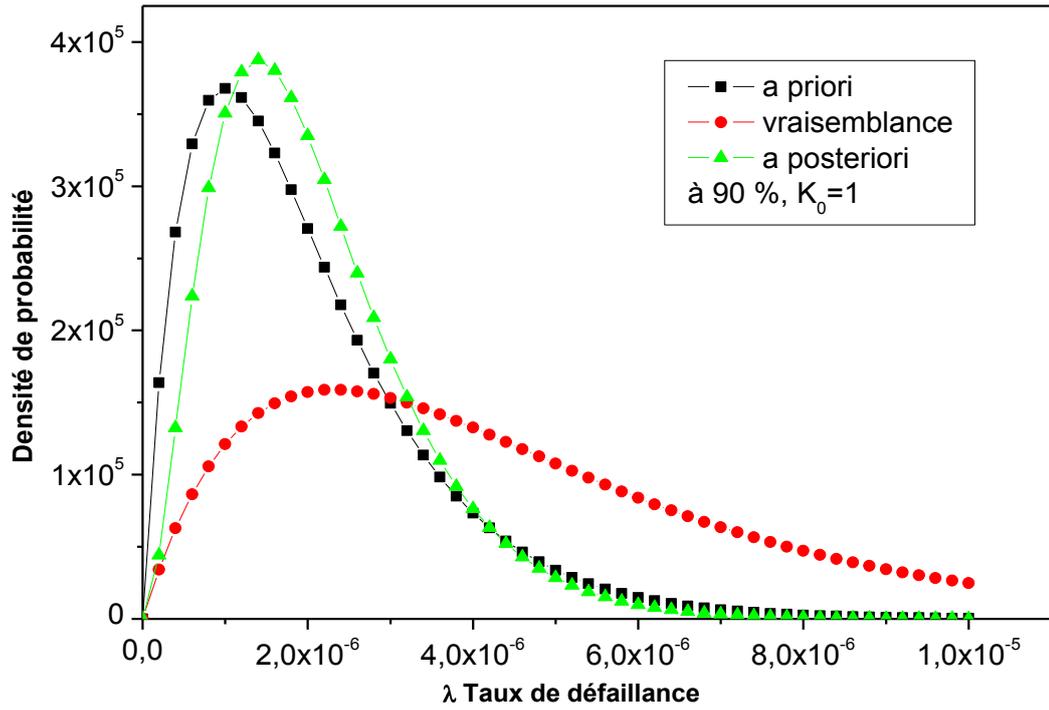


Figure 4.11: Distribution a priori, vraisemblance et a posteriori pour  $K_0=1$

Le tableau 4. 10 présentes les résultats pour  $K_0=2$ .

Tableau 4.10: Taux de défaillance à 90 % de confiance.

$K_0=2$	Intégration loi Gamma	Khi deux inverse	
$\lambda_{90\%}$ A priori	$2,600.10^{-6}$	$2,661.10^{-6}$	$h^{-1}$
$\lambda_{90\%}$ vraisemblance	$9,000.10^{-6}$	$9,007.10^{-6}$	$h^{-1}$
$\lambda_{90\%}$ A posteriori	$2,800.10^{-6}$	$2,747.10^{-6}$	$h^{-1}$

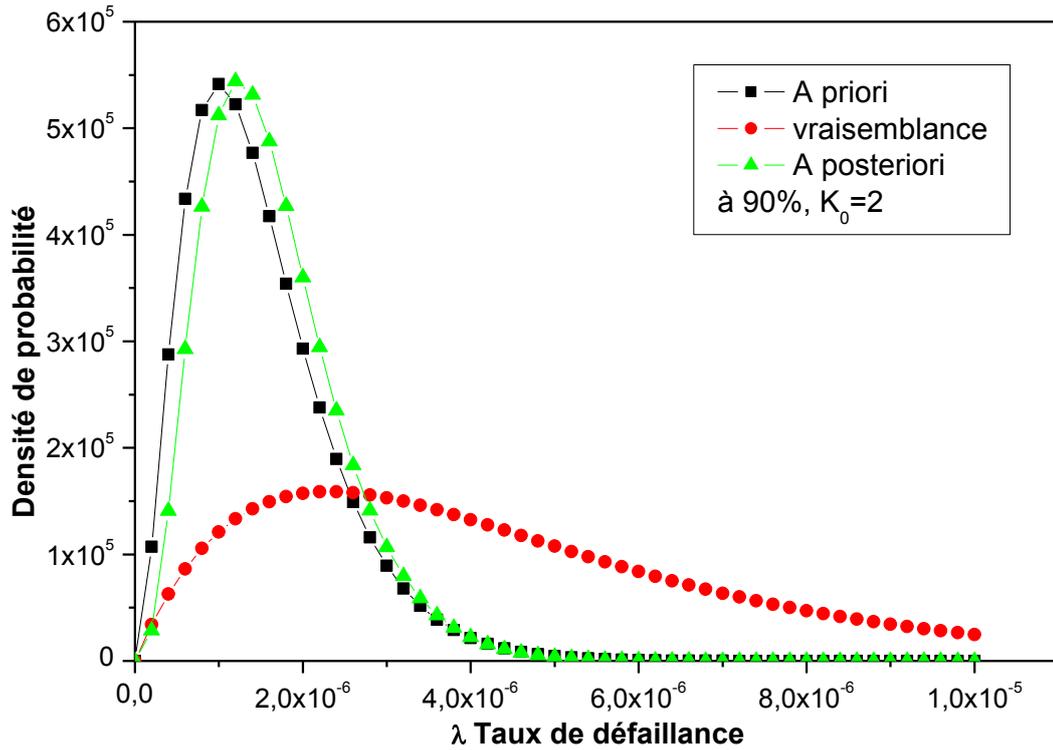


Figure 4.12: Distribution a priori, vraisemblance et a posteriori pour  $K_0=2$

Le tableau 4. 11 présentes les résultats pour  $K_0=3$ .

Tableau 4.11: Taux de défaillance à 90 % de confiance.

$K_0=3$	Intégration loi Gamma	Khi deux inverse	
$\lambda_{90\%}$ A priori	$2,200.10^{-6}$	$2,227.10^{-6}$	$h^{-1}$
$\lambda_{90\%}$ vraisemblance	$9,000.10^{-6}$	$9,007.10^{-6}$	$h^{-1}$
$\lambda_{90\%}$ A posteriori	$2,400.10^{-6}$	$2,329.10^{-6}$	$h^{-1}$

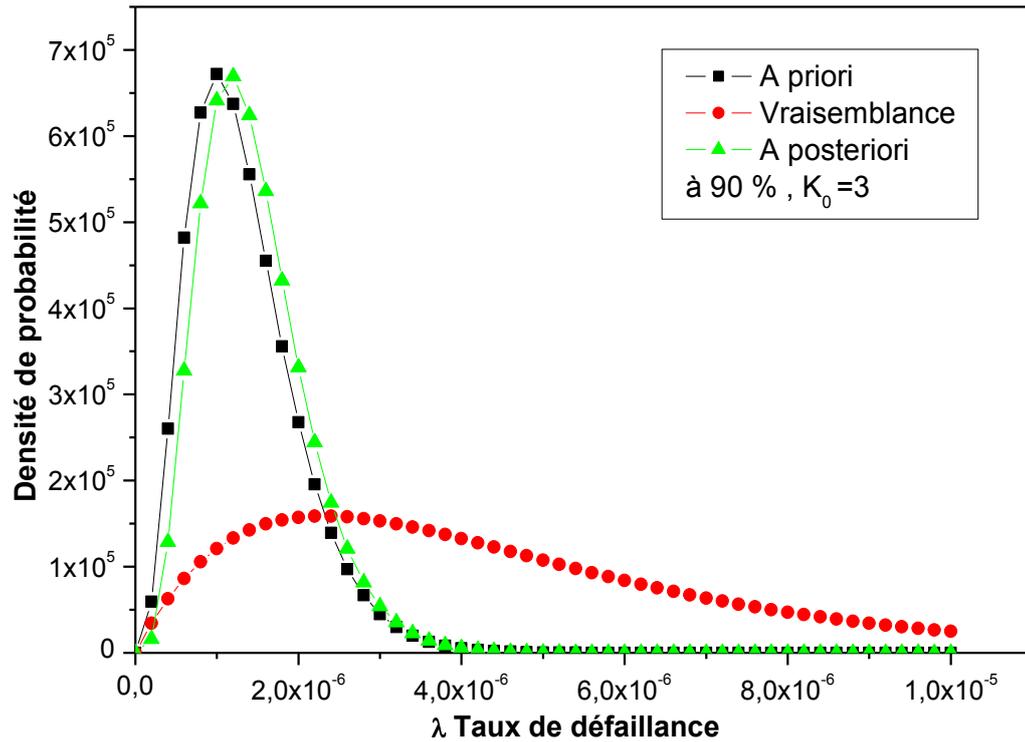


Figure 4.13: Distribution a priori, vraisemblance et a posteriori pour  $K_0=3$

L'édition des courbes des densités a priori, vraisemblance et a posteriori permet en particulier de vérifier leur cohérence, ainsi si on compare les figures des trois densités pour un taux de confiance à 90% et ceux à 60%, on remarque que la dispersion est plus grande. On observe aussi que la distribution de la fonction de vraisemblance a moins d'impact sur la distribution a posteriori.

### Synthèse

Dans les cas précédents, la distribution a posteriori est une moyenne pondérée entre l'information disponible a priori et les données du retour d'expérience (la vraisemblance). Ainsi, intuitivement cette densité de probabilité a posteriori sera attirée par la distribution qui apportera le plus d'information, donc par celle qui sera la plus précise par rapport à sa valeur moyenne.

La distribution a posteriori est une loi gamma, conjuguée bayésienne de la distribution exponentielle. Lorsque l'on dispose de la connaissance a priori elle est modélisée par une loi informative favorisant une valeur particulière de probabilité.

## 4.5. Conclusion

On peut conclure que lorsque les densités de la distribution a priori et de la fonction de vraisemblance étaient conjuguées la distribution a posteriori est-elle même conjuguée aux précédentes. Les estimations faites par les experts sont modélisées par des distributions de probabilité plus ou moins informatives: loi uniforme ou loi de Jeffrey, pour les moins informatives, loi gamma, loi exponentielle, loi beta, loi binomiale, pour modéliser des informations plus précises.

Les méthodes bayésiennes sont ainsi indispensables. Elles seules permettent de fusionner retour d'expérience et expertise, d'utiliser toute l'information disponible pour prendre une décision. Elles ont pour objet la détermination de la fiabilité d'un système, tout en utilisant le concept de la probabilité. L'utilisation des lois conjuguée est très intéressent, permet de présenter l'information a priori que l'on a sur les paramètres et qui se combine remarquablement avec la fonction de vraisemblance dans la formule de bayes, pour donner a posteriori une loi sur les paramètres du modèle qui appartienne à la même famille.

# Conclusion générale et Perspectives

## Sommaire

---

- 5.1. Conclusion
  - 5.2. Perspectives
-

## Conclusion générale et perspectives

### 5.1. Conclusion

La Fiabilité et la Maintenabilité sont deux notions fondamentales parallèles de même importance. Cependant complémentaires, une maintenabilité optimale sera particulièrement recherchée là où la fiabilité est douteuse. Ainsi l'estimation et l'optimisation de la fiabilité a pour but de concevoir des systèmes de plus en plus performants et de maîtriser les risques industriels. La prise en compte de l'évolution de la fiabilité dans le temps permet aussi d'optimiser les stratégies de maintenance et d'améliorer les performances des systèmes.

Il n'y pas de méthode unique ou normalisée pour calculer la fiabilité des systèmes mécaniques. Le choix de la méthode à appliquer se fait en fonction des objectifs fixés et des outils disponibles. En effet, deux philosophies sont possibles dans l'évaluation de la fiabilité des systèmes industriels : la démarche déterministe traditionnelle, où chaque paramètre est caractérisé par une valeur unique, et les méthodes probabilistes, où chaque paramètre est caractérisé par une distribution de probabilité.

Pour la fiabilité, l'analyse consiste à évaluer la probabilité d'occurrence d'un évènement redouté, c'est à dire la défaillance d'un composant ou d'un système. Le taux de défaillance est donc l'indicateur de fiabilité (défiabilité) le plus souvent utilisé.

Après une étude bibliographique approfondie qui a fait l'objet du premier chapitre, nous avons présenté l'approche de la fiabilité par les probabilités. On a étudié les principales caractéristiques et spécificité des systèmes mécaniques qui ont un effet direct sur l'évaluation de la fiabilité. On a mis en évidence les paramètres pouvant influencer cette évaluation à savoir les cinq facteurs essentiels :

1. Le système mécanique est de plus en plus complexe et performant.
2. La notion du taux de défaillance constant n'existe pas : Les composants mécaniques sont soumis dès le début de leur vie au phénomène d'usure ou de vieillissement et même au rodage. Le taux de défaillance est une fonction non linéaire du temps dans chaque phase de la vie du dispositif.
3. Le recueil de l'information de fiabilité est plus difficile : La fiabilité des systèmes mécaniques peut être déterminée à partir des modèles de taux de défaillance développés dans des bases de données. C'est l'approche la plus simple et la plus directe.

Néanmoins, les sources de données sur les taux de défaillance de composants mécaniques ne sont pas très nombreuses et aucune d'elles ne fournit des données parfaites pour une évaluation plus précise de la fiabilité. Les informations recueillies ne permettent qu'une exploitation partielle des données. Cependant, elles restent toujours utiles pour de nouvelles conceptions.

4. Les défaillances ont des origines particulières : Les composants mécaniques sont caractérisés par de multiples mécanismes de dégradation souvent complexes, d'origines variées (Fissuration, Fluage, Usure, Fissuration par Fatigue, etc.). Ces modes de dégradation font intervenir plusieurs paramètres et être en interaction. Les problèmes majeurs de la fiabilité en mécanique proviennent essentiellement des contraintes trop élevées et des phénomènes de fatigue. Par conséquent l'analyse de la fiabilité des systèmes mécaniques devient de plus en plus une procédure complexe.
5. Le choix de la méthode à appliquer pour une évaluation précise de la fiabilité. En effet, deux méthodes sont possibles dans l'évaluation de la fiabilité des systèmes industriels : la démarche fréquentielle classique, où chaque paramètre est caractérisé par une valeur unique, et les méthodes probabilistes, où chaque paramètre est caractérisé par une distribution de probabilité.

On a longtemps utilisé la démarche classique statistique fréquentielle. Dans cette démarche, le paramètre que l'on recherche est une quantité fixe dont la valeur est inconnue. Le degré de croyance attribué à cette valeur est élaboré à partir de l'analyse de la fréquence des observations du retour d'expérience. Pour cette raison, elle est considérée comme une approche objective. Mais cette démarche a ses limites. D'une part elle nécessite le recueil d'un nombre important d'observations afin de limiter l'incertitude sur la probabilité recherchée, d'autre part, elle suppose que le futur est l'image du passé, elle n'est donc pas représentative des installations qui subissent des modifications.

Le troisième chapitre a été consacré à La démarche bayésienne, quant à elle, est basée sur le principe de la probabilité subjective. Elle prend en compte toutes les connaissances disponibles pour réaliser une étude de risque: le retour d'expérience bien entendu, mais aussi, et, en particulier, l'expertise qui peut amender, confirmer ou infirmer les observations statistiques. Dans ces conditions il n'est plus nécessaire qu'elles soient nombreuses pour les exploiter, et il devient possible de prendre en compte l'effet des éventuelles modifications. C'est aussi une démarche décisionnelle dans ces principes. Elle

ne présente aucun problème de calcul lorsque les paramètres de fiabilité recherchés sont constants, grâce au principe de conjugaison. Par contre elle nécessite l'utilisation de logiciels lorsque ces paramètres sont variables avec le temps. Une autre difficulté consiste à recueillir, analyser et modéliser l'expertise.

Toutefois, Les techniques bayésiennes constituent un outil statistique performant à diverses étapes de la démarche fiabilité. La méthode développée permet de mieux appréhender les principes d'estimation de la fiabilité.

Dans ce chapitre, nous avons proposé une procédure visant à faciliter la formalisation des connaissances disponibles sur le composant ou système. L'utilisation de toute forme de connaissance permettra la détermination des distributions de probabilités a priori et de vraisemblance. Pour ce qui concerne la vraisemblance des observations faites, on a utilisé plusieurs types de distributions conditionnelles:

- La loi exponentielle, on utilise la distribution exponentielle pour présenter des événements aléatoires dont l'occurrence survient après un des temps sensiblement constants.
- la loi binomiale, pour présenter la probabilité de défaillance à la sollicitation des systèmes.
- la loi de Weibull, quant à elle, est utilisée pour des événements caractérisés par des taux de défaillance qui varient avec le temps.

Pour l'a priori, trois distributions sont utilisées pour modéliser les connaissances a priori :

- La loi Gamma, que l'on joint à la distribution exponentielle (ces deux lois sont conjuguées, ils appartiennent à la même famille mathématique: famille gamma).
- la loi bêta, que l'on joint avec la loi binomiale pour évaluer une probabilité de défaillance à la sollicitation.
- La loi uniforme pour exprimer une connaissance vague de la part des experts, donc non informative

Lorsque l'a priori est modélisé par la loi de Weibull: il n'existe pas de familles de lois conjuguées pour les distributions a priori des paramètres de la loi de Weibull. L'utilisation de logiciel spécifique s'impose pour la détermination des paramètres de la loi de Weibull.

Le quatrième chapitre nous l'avons consacré à la présentation des résultats d'application de la démarche bayésienne. On a montré tout d'abord l'intérêt et la capacité de la démarche bayésienne pour l'évaluation des paramètres de fiabilité lorsque le REX est faible. L'estimation bayésienne du taux de défaillance selon l'angle bayésien a été développée, la période de déverminage pour les systèmes électriques et du rodage pour les systèmes mécanique est aperçue comme un essai de vieillissement artificiel d'une durée telle qu'au bout de l'opération, les composants survivants aient atteint un niveau de fiabilité compatible avec un objectif requis.

Pour la modélisation de l'a priori, qui représente l'intérêt principal de la démarche bayésienne puisque elle permet l'utilisation de toute information possible.

C'est donc ce qui va imposer le choix d'une distribution a priori appropriée à l'ensemble des connaissances disponibles.

En conclusion, Cette étude a permis de montrer que la théorie de bayes pour la fiabilité peut être efficacement appliquée aux systèmes mécaniques. Cette approche offre la souplesse nécessaire pour les industriels à répondre à leurs exigences de performance spécifiques et les contraintes financières d'où le grand intérêt industriel et économique. L'emploi des techniques bayésienne est favorable pour plusieurs raisons. Ces techniques vont nous permettre de:

- utiliser toutes formes de connaissances
- utiliser les expressions conjuguées
- utiliser l'inférence bayésienne
- utiliser le nombre et la nature des données du retour d'expérience
- prendre en compte des modifications d'équipement
- prendre en compte le risque associé à chaque décision de maintenance.

## **5.2. Perspectives**

En termes de perspective, nous envisageons plusieurs voies de développement dans le cadre de la "Sûreté de fonctionnement des systèmes". Les principales extensions envisagées sont les suivantes :

- Le développement d'une méthodologie d'évaluation et d'optimisation des autres composantes de la Sdf à savoir la maintenabilité et la disponibilité des systèmes.
- Pour la démarche bayésienne, La prise en compte d'autres lois de dégradation (Weibull, log-normale, ...)
- Construction d'une distribution a priori à partir des études préliminaires de Sdf.
- En utilisant la fiabilité comme une mesure de la performance, les décisions relatives à la réactualisation des programmes de maintenance.

# **Bibliographie**

## Bibliographie

- [1] A. Haldar, S. Mahadevan, "Probability, Reliability and Statistical Methods in Engineering Design", Jon Wiley & sons, Inc., New York, 2000.
- [2] R.E. Meelchers. "Structural Reliability; Analysis and Prediction". Ellis Horwood Ltd., West Sussex, England, 1987.
- [3] R. Doyle. "Mechanical reliability". In IEEE Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium, Tutorial notes, USA. 1992.
- [4] M.-L. Leemis. "Probabilistic models and statistical methods in reliability". In IEEE Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium, Tutorial notes, USA. 1994.
- [5] Handbook for Reliability Data. BritishTelecommunication, 1995.
- [6] The European Industry Reliability Data bank. Ed Europstat. 1998.
- [7] Military Handbook-Reliability Prediction of Electronic Equipment. United States Department of Defense, notice2. 1995. Downloaded from <http://www.everyspec.com>
- [8] A. Lannoy, and H. Procaccia. "L'utilisation du jugement d'expert en sûreté de fonctionnement". Ed. TEC&DOC. 2001.
- [9] Afnor, Association française pour le contrôle industriel de la qualité (AFCIQ), Groupe fiabilité, " Guide d'évaluation de la fiabilité mécanique". Ed Afnor-Ute. 1981.
- [10] Afnor, Recueil de normes françaises : " Fiabilité, Maintenabilité et Disponibilité". Ed Afnor-Ute. 1988.
- [11] A. Birolini. "Quality and reliability of technical systems". Ed Springer, 1997.
- [12] W. Nelson. "Accelerated Testing: Statistical Models, Test Plans and Data Analysis". Ed. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. 1990.
- [13] D. Crowe, and A. Feinberg. "Design for reliability". Ed CRC Press. 2001.
- [14] ASTE. "Le rôle des essais dans la maîtrise de la fiabilité", Ed ASTE. 1993.
- [15] P. O'Connor, "Testing for reliability". Quality and Reliability Engineering international, vol 19:73-84. 2003.
- [16] J.-C. Ligeron, A. Delage et M. Neff. "La fiabilité en exploitation : Organisation et traitement des données". Ed Techniques et Documentation, Lavoisier. 1984.
- [17] A. Pages, and M. Gondran. "Fiabilité des systèmes". Ed Eyrolles. 1980.
- [18] A. Villemeur, "Sûreté de fonctionnement des systèmes industriels : Fiabilité, Facteurs humains et Informatisation". Collection EdF - Ed Eyrolles. 1988.
- [19] F. Brissaud, B. Lanternier, D. Charpentier and P. Lyonnet, "Modélisation des taux de défaillance en mécanique". Performances et Nouvelles Technologies en Maintenance. 2007.
- [20] S.Beleulmi, A. Bellaouar, R.Chaib et M. Benidir. "Modélisation de la Fiabilité d'un Système Mécanique à redondance", journées d'Etudes Nationales de Mécanique, JENM'2011, Ouargla, Algérie, 07-08 Mars, 2011.
- [21] Guangbin Yang, "Life Cycle Reliability Engineering". John Wiley & Sons, Inc. ISBN: 978-0-471-71529-0, 2007.
- [22] P.Guesdon, G. Renie. "Méthodes d'allocation d'objectifs de disponibilité et de fiabilité". Paris : ISDF 1998. Pages 61-70. 1210 Pages, 1998.
- [23] X. Zwingmann. "Modèle d'évaluation de la fiabilité et de la maintenabilité au stade de la conception". Thèse de doctorat en cotutelle : Université Laval Québec et Université Louis-Pasteur Strasbourg, France, 2005.

- 
- [24] A. G. Mihalache. "Modélisation et évaluation de la fiabilité des systèmes mécatroniques: application sur système embarque. Thèse de doctorat, Institut des Sciences et Techniques de l'Ingénieur d'Angers, 2007.
- [25] J. B. Menye. "Validation de la maintenabilité et de la disponibilité en conception d'un système multi-composants. Thèse de doctorat en cotutelle : Université Laval Québec et Université Louis-Pasteur Strasbourg, France, 2009.
- [26] F. Turgis. "Amélioration de la fiabilité d'un système complexe -Application ferroviaire: accès voyageurs. Thèse de doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 2013.
- [27] B. Efron, and C. Morris. "Empirical Bayes on vector observations: An extension of Stein's method." *Biometrika* 59(2), pp. 335-347, 1972.
- [28] J. Deely, and D. Lindley. "Bayes empirical bayes." *Journal of the American Statistical Association* 76(376): 833-841., 1981.
- [29] C. N. Morris. "Parametric empirical Bayes inference: theory and applications." *Journal of the American Statistical Association* 78(381): 47-55, 1983.
- [30] G. Casella. "An introduction to empirical Bayes data analysis." *The American Statistician* 39(2): 83-87. , 1985.
- [31] R. E. Kass, and D. Steffey. "Approximate Bayesian inference in conditionally independent hierarchical models (parametric empirical Bayes models)." *Journal of the American Statistical Association* 84(407): 717-726, 1989.
- [32] J. Ringler. "Une modélisation bayésienne du taux de défaillance en fiabilité." *Revue de Statistique Appliquée* 29(1): 43-56, 1981.
- [33] Maurizio Guida, Gianpaolo Pulcini. "Bayesian analysis of repairable systems showing a bounded failure intensity ", *Journal of Reliability Engineering & System Safety*, vol. 91, no. 7, pp. 828-838, 2006. DOI:10.1016/j.res.2005.08.008.
- [34] N. Bousquet, F. Celeux, and E. Rémy, "A protocol for integrating FED and expert data in a study of durability organization Workshop on the use of Expert Judgement for decision-making», CEA Cadarache year , 2005
- [35] N. Bousquet, G. Celeux, F. Billy, and E. Rémy. Cohérence bayésienne entre connaissance a priori et données observées". *Lambda Mu* 15. Lille, France, 2006.
- [36] C. Robert. "The Bayesian Choice: From Decision-Theoretic Foundations to Computational Implementation". Springer Verlag, 2<sup>ème</sup> edition, 2006.
- [37] Wallace R. Blischke, D. N. Prabhakar Murthy. "Case studies in reliability and maintenance". Wiley series in probability and statistics, 2003.
- [38] R. E. Barlow, F. Proschan and L. C. Hunter. "Mathematical Theory of Reliability". Wiley, New York, 1965.
- [39] MIL-STD-470B, Maintainability program for system and equipment. United States Department Of Defense, 1989. Downloaded from <http://www.everyspec.com>
- [40] MIL-STD-471A, Maintainability: verification/ demonstration/ evaluation. Department Of Defense, notice 1, 1975. Downloaded from <http://www.everyspec.com>
- [41] MIL-HDBK-472, Maintainability prediction. Department Of Defense, Washington, DC 1966.
- [42] MIL-STD-721C, Definition of terms of reliability and maintainability. Department Of Defence, Washington, DC 1981.
- [43] NF EN13306, "Terminologie de la maintenance" AFNOR, Octobre 2010.
- [44] Elsayed, E. A. "Reliability engineering", Wiley Publishing, 2012.
- [45] D. Aït-Kadi, "La fiabilité des systèmes". Notes de cours, Département de génie mécanique, Université Laval, Québec, Canada, 2007.

- 
- [46] E.E. Lewis, "Introduction to Reliability Engineering ". John Wiley & Sons, New York, 1987.
- [47] C. Lalanne, "Vibrations et chocs mécaniques", Tome 4: Dommage par fatigue. Hermes Science Publications, Paris., 1999
- [48] H. W. Grünling, K. Schneider et L. Singheiser, "Mechanical properties of coated systems". Materials Science and Engineering, 88:177–189, 1987.
- [49] W. Nelson, W. "Accelerated Testing: Statistical Models, Test Plans and Data Analyses". John Wiley & Sons, 1990.
- [50] L. Bechou, Y. Danto, J. Deletage, et F. Verdier, "Nouvelles approches d'évaluation de la fiabilité: Perspectives pour les nanotechnologies". In Journées scientifiques du CNFRS "Nanosciences et Radioélectricité", Paris. 2007.
- [51] F. Monchy, J. P. Vernier, "Maintenance : Méthodes et organisations" 3<sup>ème</sup> édition l'usine Nouvelle, Dunod.ISBN978-2-10-055061-6, 2010. [www.hubertfaigner.com](http://www.hubertfaigner.com).
- [52] H. Procaccia, L. Piepszownik, and C. Clarotti. "Fiabilité des équipements et théorie de la décision statistique fréquentielle et bayésienne". Ed Eyrolles. 1992.
- [53] P. Lyonnet, M. Thomas et R. Toscano, " Fiabilité, Diagnostic et Maintenance". Paris : Ed Lavoisier –Tec &Doc, 2012.
- [54] B.S. Dhillon, "Engineering Maintainability". Elsevier Science & Technology Books, 1999.
- [55] P. Lyonnet, " Ingénierie de la fiabilité". Paris, France. Tec & Doc Lavoisier. ISBN 9782743008239, 2006.
- [56] A. Villemeur, "Reliability, Availability, Maintainability and Safety Assessment". New York, USA. John Wiley & Sons ltd. ISBN 9780471930488, 1991.
- [57] W.E. Vesely, F.F. Goldberg, N.H. Roberts et D.F. Haasl, "Fault tree Handbook". U.S. Nuclear Regulatory Commission, Washington, USA, 1981.
- [58] C. Cocozza- Thivent, "Processus stochastique et fiabilité des systèmes", Edition Springer. ISBN3-540-63390-1, 1997.
- [59] B. Walliser, "Systèmes et modèles. Introduction critique à l'analyse de systèmes". Éditions du Seuil, 1977.
- [60] O. Basile, P. Dehombreux, "Overview of reliability estimation methods of mechanical system under operating conditions" 2006
- [61] J.C. Ligeron, " La fiabilité en mécanique". Edition Desforges, 1979.
- [62] M. Pillet, "Document de synthèse de l'activité de recherche". Habilitation à diriger les recherches, Université de Savoie.
- [63] O. Tebbi, "Estimation des lois de fiabilité en mécanique par les essais accélérés". Thèse de doctorat, Institut des Sciences et Techniques de l'Ingénieur d'Angers, 2005.
- [64] S. Z. Fatemi, "Planification des essais accélérés : optimisation, robustesse et analyse". Thèse de doctorat, ISTIA, Université d'Angers, 2012.
- [65] B. Bertsche, G. Lechner, "Zuverlässigkeit im Maschinenbau". Edition Springer, 1999
- [66] D. J. Smith, "Reliability, Maintainability and Risk: Practical Methods for Engineers including Reliability Centred Maintenance and Safty-Related Systems", 7th Edition, Elsevier/ Butterworth-Heinemann, ISBN: 0750666943, 2005.
- [67] Y. Mortureux. "La sûreté de fonctionnement : méthodes pour maîtriser les risques". Techniques de l'ingénieur, octobre 2001.
- [68] P. D. T. O'connor, A. Kleyner. "Practical reliability engineering", Fifth Edition, Wiley, 2012
- [69] J. Gaudibleux, "Contribution à l'évaluation de sûreté de fonctionnement des architectures de surveillance/diagnostic embarquées. Application au transport

- ferroviaire». Thèse de doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 2013.
- [70] H. Procaccia. "Introduction à l'analyse probabiliste des risques industriels". Editions Tec & Doc, ISBN : 978-2-7430-1100-7, Lavoisier 2009.
- [71] C. Suhner, " Utilisation de l'analyse bayésienne pour optimiser la démarche de fiabilité ". Thèse de l'Université de Nancy I, 1994.
- [72] J. Ringler, "Utilisation des techniques bayésienne dans le cas de système complexe. Revue de Statistique Appliquée", vol XXVII n°2. 1979.
- [73] C. Robert, "L'analyse statistique bayésienne". Edition ECONOMICA, 1992.
- [74] R. Von Mises, H. Geiringer, "The mathematical theory of probability and statistics". Academic Press, 1984.
- [75] B. De Finetti, "La prévision : ses lois logiques, ses sources subjectives". Annales de l'Institut Henri Poincaré, vol. 7, pp 86-133, 1937. <http://www.rumdam.org/item ?id-AIHP-1937-7-1-1-0>.
- [76] B. De Finetti, "Theory of probability, a critical introductory treatment". Vol.1. John Wiley & Sons, 1974.
- [77] L.J. Savage, "The foundations of statistics". 2ème édition, Dover Publications, 1972.
- [78] A.C. Cullen. H.C. Frey, "Probabilistic techniques in exposure assessment". Plenum Press, 1999.
- [79] J. Bernier, E. Parent, J.J. Boreux, "Statistiques pour l'environnement". Traitement Bayésien des Incertitudes. Tec & Doc, 2000.
- [80] B. Lecoutre, J. Poitevineau, "Traitement statistique des données expérimentales : des pratiques traditionnelles aux pratiques bayésiennes. CISIA-CERESTA, 1996.
- [81] J.O. Berger, "Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis", 2ème édition Springer-Verlag, 1985.
- [82] R. Krzysztofowicz, "Why should a forecaster and a decision maker use Bayes Theorem". Water Resources Research, vol. 19, n°2, pp 327-336, 1983.
- [83] J.F. Lawless, "Statistical Models and Methods for Life time Data", Willy édition New-York, 1982.
- [84] H.F. Marts, R. A. Walter, "Bayesian reliability analysis". Krieger Publishing company, 1991.
- [85] H.F. Marts, R. A. Walter, "Bayesian reliability analysis of series system of Binomial subsystems and components". Technometrics, Vol. 30, N°2, May 1988.
- [86] F. Guérin, B. Dumon, E. Usureau, "Reliability Estimation by Bayesian Method: definition of prior distribution using dependability study". Reliability Engineering and system Safty 82, Pg 299-306, 2003.
- [87] N. D. Singpurwalla , M. S. Song, "Reliability Analysis using Weibull lifetime data and expert opinion", IEEE Trans. Reliab., Vol. 37, NO. 3, pp. 340 -347, Aug. 1988.
- [88] M. P. Kaminskiy , V. V. Krivtsov, "A Simple Procedure for Bayesian Estimation of the Weibull Distribution " , IEEE Trans. Reliab., Vol. R-54, N° 4, pp. 612 - 616, 2005.

- [89] C. Cremona, Y. Gao, The possibilistic reliability theory: theoretical aspects and applications, *Struct. Saf.* 19 (2) (1997) 173–201].
- [90] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, "The Finite Element Method", vol. 1 & 2, Prentice Hall, 1989.

# Annexes

## Annexe A

1. Bases de données de fiabilité
2. Détails sur les bases de données de fiabilité disponibles pour des composants mécaniques.
3. Limite d'utilisation des bases de données mécaniques
4. Exemple de Base de données mécaniques

## Annexe B

1. Distributions utiles en analyse Bayésienne (Lois de probabilité pour la fiabilité).
2. Tables statistiques

## Annexe C

1. Synthèse des approches de la Fiabilité.

## **1. Bases de données de fiabilité**

### **A1.Introduction :**

L'activité de collecte des données de fiabilité avait atteint son apogée dans les années 1980. Elle a malheureusement diminué en intensité dans les années 1990 et depuis cette période, la majorité des bases de données publiées n'a plus été mise à jour (Smith, 2005) [66]. Les bases de données disponibles peuvent être classées en trois catégories :

- Les bases de données spécifiques à une entreprise ou à un site industriel : ce sont des données collectées des équipements similaires, utilisés dans des conditions similaires par une entreprise ;
- Les bases de données spécifiques à une industrie : les données sont issues d'un secteur d'activité donné (télécommunication, nucléaire, militaire, etc.)
- Les bases de données génériques : les données proviennent de plusieurs secteurs d'activités et de plusieurs sources. Ces bases de données présentent souvent des expressions mathématiques qui sont des modèles de régression pour l'estimation des taux de panne, par exemple.

Les informations disponibles supposent généralement que les taux de pannes sont constants dans les conditions spécifiées. Le tableau A.1 présente quelques bases de données de fiabilité et leur auteur. Les taux de pannes des composants sont les principales informations contenues dans ces bases de données.

Tableau A.1 Quelques bases de données de fiabilité

Base de données (dernière mise à jour)	Auteur	Catégorie et remarques
<b>NRPD-5, Non-Electronic parts Reliability Data(1995)</b>	RIAC (Reliability Information Analysis Center), USA	- Générique (composants électromécaniques, mécaniques, hydraulique et pneumatiques) - Quelques modes de défaillances.
<b>Handbook of Reliability Prediction for Mechanical Equipment(2007)</b>	<b>NSWC (Naval Surface Warfare Center), USA</b>	- <b>Générique (composants mécaniques)</b> - <b>Modes de défaillances</b> - <b>Expressions des taux de panne.</b>
<b>OREDA, Offshore Reliability Data(1997)</b>	Consortium de neuf compagnies pétrolières (BP, Elf, Agip, Shell, Total, etc.)	- Spécifique à l'industrie pétrolière - Modes de défaillances détaillés. - MTTR <sub>i</sub> .
<b>TECHNIS</b>	Technis,UK	- Générique et industrie. - Plusieurs modes de défaillances - Quelques temps de réparation
<b>UKAEA, United Kingdom Atomic Energy Authority</b>	SRD (System Reliability Department) of UKAEA	- Générique et industrie nucléaire - Plusieurs modes de défaillance
<b>ANSI/IEEE500 (1991)</b>	IEEE	- Spécifique réacteurs nucléaires - Temps de réparations.
<b>NUCLAAR, Nuclear Computerized Library for Assessing Reactor Reliability</b>	NRC (Nuclear Regulatory Commission), USA	- Spécifique réacteurs nucléaires - Taux de pannes logiciels - Infos sur les erreurs humaines
<b>EIREDA European Industry Reliability Data(1997)</b>	EDF, France	- Spécifique à la production d'énergie électrique (composants mécaniques et électriques).
<b>EPRI</b>	EPRI (Electric Power Research Institute), USA	- Spécifique à la production d'énergie électrique (turbines à gaz).
<b>GADS (Generating Availability Data System)</b>	NERC ( North American Electric Reliability Council	- Spécifique à la production d'énergie électrique - Données (statistiques) annuelles - Ouvert à d'autres producteurs d'électricité du monde entier depuis 2004.
<b>US Military Handbook of 217 (1992)</b>	RIAC (Reliability Information Analysis Center), USA Department of Defence	- Générique (composants électriques) - Expressions des taux de pannes.
<b>HRD5, Handbook of Reliability Data (1994)</b>	British Telecom, UK	- Spécifique à l'industrie des télécommunications.
<b>Recueil de Données de Fiabilité</b>	CENT (Centre National d'Etudes des Télécommunications), France	- Spécifique à l'industrie des télécommunications. - Expressions des taux de pannes.
<b>BELLCORE5, Reliability Prediction Procedure for Electronic Equipment (1995)</b>	BELL (compagnie téléphonique), USA	- Spécifique à l'industrie des télécommunications.
<b>EPRD-97 Electronic Parts Reliability Data (1997)</b>	RIAC (Reliability Information Analysis Center), USA	- Générique (composants électriques).

## A.2. Données de fiabilité pour des composants mécaniques

Les recueils de données de fiabilité les plus connus pour des dispositifs mécaniques sont présentés dans le tableau A.2 suivant :

Tableau A.2 - Recueils de données de fiabilité en mécanique.

Source	Titre	Editeur	Dernière version
<b>AVCO</b>	"Failure Rates"	D.R. Earles & M.F. Eddins AVCO Corporation, USA.	Avril 1962.
<b>FARADA</b>	Failure Rates Data	GIDEP-Government Industry Data Exchange Program(USA)	Mil-STD-1556B, 24 février 1986
<b>NPRD</b>	Nonelectronic Parts Reliability Data	Reliability Analysis Center, RAC, New York, USA.	NPRD 97, 1997.
<b>NSWC</b>	Handbook of Reliability Prediction Procedures for Mechanical Equipment	Carderok Division, Naval surface Warfare Center, United States Navy.	NSWC-98/LE1, 1998.
<b>EIREDA</b>	European Reliability Industry Data Handbook	European Commission and Electricité de France CRETE UNIVERSITY PRESS	1998

Ces recueils sont mis à jour régulièrement pour tenir compte des évolutions technologiques. En mécanique, la durée de vie des données fournies par les recueils est plus longue (de 30 à 40 ans) comparait à celle des composants électroniques qui est relativement courte (de 3 à 6 ans).

## 2. Détails sur les bases de données de fiabilité disponibles pour des composants mécaniques

### AVCO

L'AVCO est un manuel américain très ancien regroupant des tables de données de fiabilité pour des composants mécaniques : des durées de vie moyennes, des taux de défaillance génériques sous forme de nombre de défaillances par million d'heures et par million de cycles en fonction des conditions d'environnement (généralement, on trouve des intervalles  $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$  avec un certain niveau de confiance).

---

## **FARADA**

Le FARADA (Failure Rate Data) fournit des données de fiabilité pour des composants de toute nature : une estimation des taux de défaillance, nombre de pannes observées, type de pièce, mode d'utilisation, etc.

## **NPRD**

Le NPRD est un rapport du centre RAC "Reliability Analysis Center" très utilisé pour évaluer la fiabilité des composants et dispositifs non électroniques, c'est un complément du MIL-HDBK-217. Il fournit des taux de défaillance moyens pour une large variété de composants non couverts par le MIL-HDBK-217 (plus de 25000 composants): des composants mécaniques, électromécaniques ou physico-chimiques.

Les données collectées, depuis l'année 1970 jusqu'à 1994, sont représentées par des tableaux contenant : une présentation du composant, son niveau de qualité (militaire, commercial ou inconnu), des conditions d'environnement et d'utilisation du composant, des sources de données, des taux de défaillance moyen par millions d'heures ainsi que des intervalles de confiances, des nombres de pannes observées, le nombre d'heures de fonctionnement (en million), etc.

L'hypothèse d'une loi exponentielle pour les temps de défaillance n'est pas souvent adoptée car la majorité des composants présentés dans le manuel ont une distribution de durée de vie Weibull ou Log-normale. Le manuel présente des méthodes qui permettent de calculer les paramètres des lois considérées.

## **NSWC**

Le NSWC est un catalogue publié par la Marine des États-Unis "Naval Surface Warfare Center", il fournit des modèles de taux de défaillance, supposés constant, pour des classes fondamentales de composants mécaniques tels que les ressorts, les moteurs, les freins, les embrayages, etc.

Les modèles du taux de défaillance incluent des facteurs pouvant avoir un impact sur la fiabilité des composants. Ces facteurs tiennent compte des modes de défaillance et des paramètres qui les engendrent, par exemple les caractéristiques matériaux, les conditions d'environnement, les forces appliquées, etc. Ces paramètres constituent des données d'entrée pour les modèles de taux de défaillance.

---

Le NSWC est une norme relativement nouvelle et seule dans son genre. Néanmoins l'un de ces inconvénients est dû au fait que les modèles présentés exigent une quantité suffisante de données d'entrée, ce qui n'est pas toujours disponible.

### **EIREDA**

Le manuel EIREDA (European Reliability Industry Data Handbook) donne des taux de défaillance, supposés constants, pour des produits mécaniques et électroniques en fonctionnement et en sollicitation, à l'usage des centrales nucléaires.

### **3. Limite d'utilisation des bases de données mécaniques**

La comparaison de ces cinq recueils de données de fiabilité pour des composants mécaniques mène à quelques résultats intéressants :

Le NPRD-97 est le plus utilisé, il offre plus d'information nécessaire à une évaluation simple de la fiabilité. Ses données proviennent de l'utilisation réelle des composants, c'est pour cette raison qu'elles sont jugées bonnes, néanmoins elles sont toutes données en nombre de défaillance par million d'heures, ce qui n'est pas une mesure adéquate pour certains équipements (de durées de vie cycliques).

Le NSWC-98 présente des données plus récentes, comparé aux autres manuels, il peut offrir une alternative plus précise si les données d'entrées sont de plus en plus disponibles.

Le document AVCO contient des données de vie pour des composants utilisés dans des environnements divers. Néanmoins, ces données datent de 1962, or depuis l'évolution des technologies n'ont pas cessé d'avancer, en particuliers dans le domaine de la science des matériaux, et la performance des systèmes augmente de plus en plus.

Ces recueils de données de fiabilité sont fondés soit sur des résultats d'exploitation ou des résultats d'essais en laboratoire. Le processus de dégradation des équipements (modes, mécanismes et causes de défaillance), les conditions d'utilisation et l'évolution des technologies sont des paramètres nécessaires pour le calcul des taux de défaillance et l'élaboration des modèles prévisionnels de la fiabilité, or il est difficile de les prendre tous en considération. Les données sont souvent inappropriées aux systèmes et environnements réels.

Par conséquent, aucune de ces sources de données ne fournit des données parfaites pour une évaluation plus précise de la fiabilité, les informations recueillies ne permettent qu'une exploitation partielle des données, cependant elles restent toujours utiles pour de nouvelles conceptions.

#### 4. Exemple de Base de données mécaniques

A titre d'illustration, le tableau A.3 et la figure A.1 donnent un extrait du RAC NPRD 97 concernant les disjoncteurs. Sur le tableau A.3, sont donnés quelques ordres de grandeurs du taux de défaillance et du MTTF de quelques composants. Sur la figure A.1, on a une répartition des différents modes de défaillances, on lit par exemple que 34 % des défaillances constatées sont des refus de fermeture. Le tableau A.3 donne une estimation de la valeur du taux de défaillance (point estimate) en ce qui concerne la fonction thermique (thermal) des disjoncteurs.

On lit successivement :

- L'environnement : ici GF = Ground Fixed = au sol conditions industrielles,
- L'estimation du taux de défaillance : il faut lire  $0,335.10^{-6} h^{-1}$ ,
- Les bornes d'un intervalle de confiance tel que la probabilité que le taux de défaillance s'y trouve est de 0,6 (c'est-à-dire 0,8 - 0,2),
- Le nombre de recueils utilisés pour le calcul : ici 2,
- Le nombre de défaillances observées : ici 3,
- Le nombre d'heures de fonctionnement observées :  $8,944.10^6$  h.

La connaissance du taux de défaillance global et de la répartition par mode de défaillance permet de chiffrer la probabilité des différents événements par une simple règle de trois.

Par exemple, pour le mode de défaillance « refus de fermeture », on obtient :

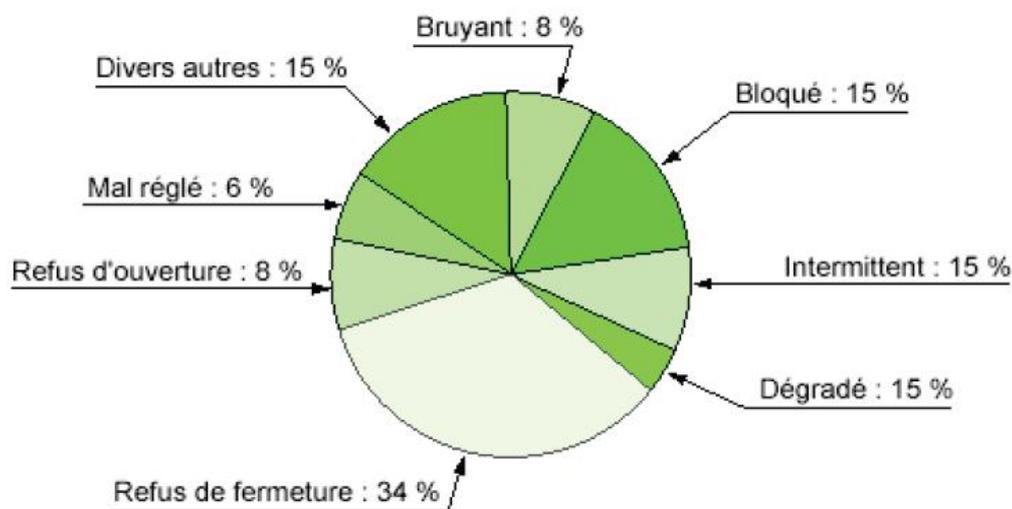
$$0,335.10^{-6} \cdot (34/100) = 1,17.10^{-7} h^{-1}$$

Une autre approche est parfois plus pertinente : on considère un nombre de manœuvres au lieu de considérer le temps de fonctionnement. Dans ce cas un test portant sur un échantillon de quelques dizaines de produits permet de chiffrer la fiabilité (loi de Weibull).

Le choix dépend du type de défaillances que l'on désire étudier, l'usure des contacts est liée au nombre de manœuvres alors que la corrosion est liée au temps. Le type d'utilisation et les conditions d'environnement sont toujours déterminants.

	Résistances	Micro processeur	Fusible et disj. forte intensité, transfos, câbles (100m) jeu de barres (10 départs)	Générateurs	Coupures brèves EDF
$\lambda(h)$	$10^{-9}$	$10^{-6}$	Entre $10^{-7}$ et $10^{-6}$	Entre $10^{-7}$ et $10^{-6}$	$10^{-3}$
MTTF	1000 siècles	100 ans	Entre 100 et 1000 ans	10 ans	40 jours

Tableau A.3. Ordre de grandeur du taux de défaillance et MTTF de quelques éléments.



Component part type	APPL ENV	User code	Point estimate	60 % upper single-side	20 % lower internal	80 % upper internal	% of recs	% of fail	Operating HRS (E6)
Thermal	GF	M	0,335	-	0,171	0,621	2	3	8,944

Figure A.1. Mode de défaillances et données de fiabilité des disjoncteurs.

## **B.1. Distributions utiles en analyse Bayésienne**

### **Introduction**

Dans cette annexe plus technique, on présentera quelques résultats mathématiques de base utiles en analyse bayésienne et on rappellera les propriétés de base des lois de probabilités les plus souvent rencontrées en analyse bayésienne. On verra des lois discrètes et des lois continues.

#### **1. Les lois de probabilité utilisées en fiabilité**

La fiabilité est, de plus en plus fréquemment, une grandeur quantitative et nécessite la connaissance des distributions de durée de vie afin de l'estimer. Dans ce paragraphe, nous présenterons quelques distributions de vie qui interviennent le plus fréquemment dans l'analyse des données de vie et qui sont communes à plusieurs disciplines. Nous parlerons en particuliers des lois continues. Nous énoncerons les principales propriétés de ces lois (densité de probabilité, fonctions fiabilité et taux de défaillance) ainsi que leur application en fiabilité ([10], [11], [4], [17], [18]), Il y a également d'autres lois de fiabilité spécifiques à un domaine particulier.

##### **1.1 La loi exponentielle**

Cette loi a de nombreuses applications dans plusieurs domaines. Elle décrit la vie des matériels qui subissent des défaillances brutales. La loi exponentielle est la plus couramment utilisée en fiabilité électronique pour décrire la période durant laquelle le taux de défaillance des équipements est considéré comme constant (défaillance aléatoire). Elle décrit le temps écoulé jusqu'à une défaillance, ou l'intervalle de temps entre deux défaillances.

C'est une loi continue définie par un seul paramètre le taux de défaillance  $\lambda$ . (C'est un cas particulier de la loi de Poisson ( $K=1$ )).

Elle est caractérisée par :

- La fiabilité :  $R(t) = e^{-\lambda t}$
- La densité de probabilité :  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$
- Le taux de défaillance :  $\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \lambda$

Le taux de défaillance est donc constant, ce qui signifie que la loi exponentielle modélise les durées de vie de systèmes qui ne s'usent pas et qui ne s'améliorent pas.

Une propriété principale de la loi exponentielle est d'être sans mémoire ou "Memory less property" en anglais [4], ce qu'on exprime de la façon suivante : si le système n'est pas encore tombé en panne à l'instant  $t$ , c'est comme s'il était neuf à cet instant. Mathématiquement, cela s'écrit :

$$P(T \geq t + \Delta t / T \geq t) = \frac{e^{-\lambda.(t+\Delta t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda.\Delta t} = P(T \geq \Delta t) \quad t > 0, \Delta > 0$$

Comme l'indique la figure 2.5, ce résultat montre que la loi conditionnelle de la durée de vie d'un dispositif qui a fonctionné sans tomber en panne jusqu'à l'instant  $t$  est identique à la loi de la durée de vie d'un nouveau dispositif. Ceci signifie qu'à l'instant  $t$ , le dispositif est considéré comme neuf (ou "as good as new" en anglais), de durée de vie exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

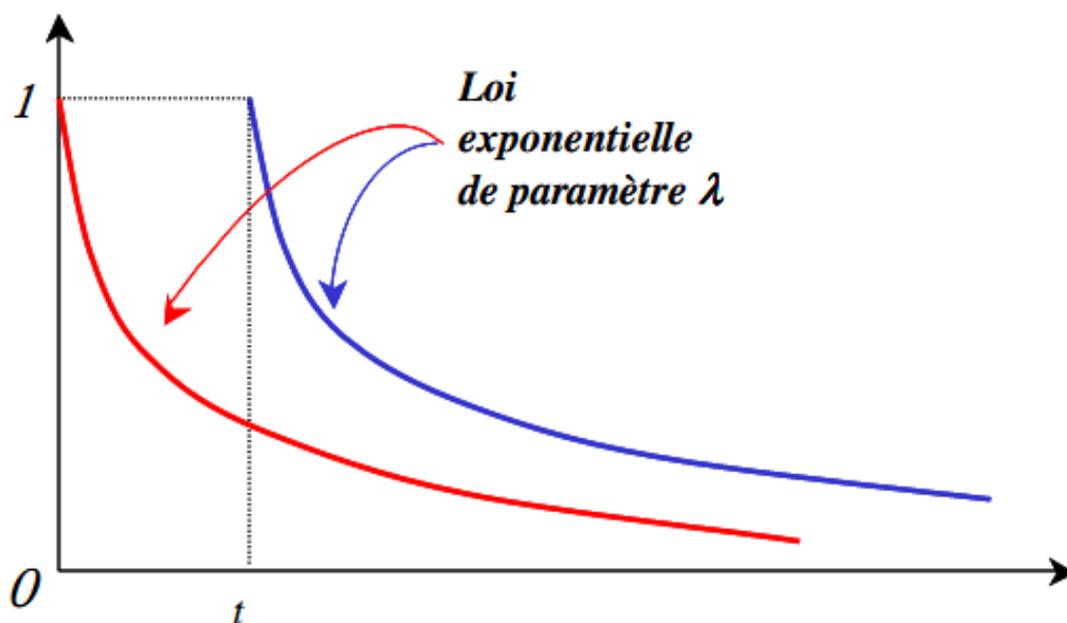


Figure B.1.1. Propriété sans mémoire de la loi exponentielle

## 1.2 La loi de Weibull

La loi de Weibull, est souvent utilisée en mécanique ; elle caractérise bien le comportement du produit dans les trois phases de vie selon la valeur du paramètre de forme  $\beta$  : période de jeunesse ( $\beta < 1$ ), période de vie utile ( $\beta = 1$ ) et période d'usure ou vieillissement ( $\beta > 1$ ). La loi de Weibull est définie par deux paramètres  $\eta$  (paramètre d'échelle) et  $\beta$  (paramètre de forme).

Elle est caractérisée par :

- La fiabilité :  $R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}$
- La densité de probabilité :  $f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}$
- Le taux de défaillance :  $\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}$

Le taux de défaillance de la loi de Weibull est donc une puissance du temps, ce qui permet de modéliser de nombreuses situations. En particulier :

- si  $\beta < 1$ ,  $\lambda$  est décroissant donc le système s'améliore ;
- si  $\beta > 1$ ,  $\lambda$  est croissant donc le système s'use ;
- si  $\beta = 1$ ,  $\lambda$  est constant et on retrouve la loi exponentielle comme cas particulier de la loi de Weibull.

La figure 2.6 donne les graphes des taux de défaillance de la loi de Weibull pour  $\beta \in \{0.5, 1, 1.5, 3\}$ .

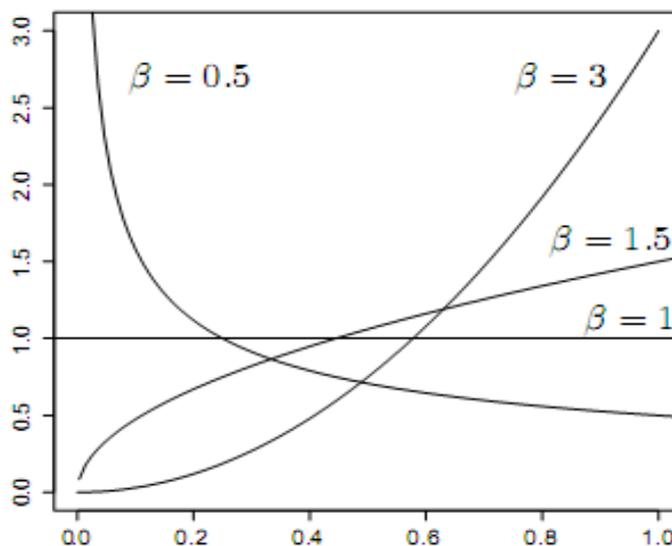


Figure B.1.2. Taux de défaillance de la loi Weibull

### 1.3 La loi normale ou la loi de Laplace-Gauss

La loi normale est très répandue parmi les lois de probabilité car elle s'applique à de nombreux phénomènes. En fiabilité, la distribution normale est utilisée pour représenter la distribution des durées de vie de dispositifs en fin de vie (usure) car le taux de défaillance est toujours croissant. On ne l'utilisera que si la moyenne des durées de vie est supérieure à 3 fois l'écart type. En effet,  $t$  est toujours positif, alors que la variable normale est définie de  $-\infty$  à  $+\infty$ ; la restriction imposée réduit la probabilité théorique de trouver une durée de vie négative à environ 0.1 %. La densité de probabilité d'une loi normale de moyenne  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma$  s'écrit :

- La densité de probabilité d'une loi normale de moyenne  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma$  s'écrit :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- La fonction de répartition :  $F(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$

- La fiabilité est donnée par :  $R(t) = 1 - \Phi((t - \mu)/\sigma)$

Où  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée ( $\mu=0$ ) réduite ( $\sigma=1$ ) :

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

### 1.4 La loi Log-Normale ou loi de Galton ou loi de Gibrat.

Une variable aléatoire continue et positive  $T$  est distribuée selon une loi Log-Normale si son logarithme népérien est distribué suivant une loi normale. Cette distribution est largement utilisée pour modéliser des données de vie, en particulier les défaillances par fatigue en mécanique.

La loi Log-Normale a deux paramètres positifs  $\mu$  et  $\sigma$  :

- La fiabilité :

$$R(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\log(t) - \mu}{\sigma}\right)$$

- La densité de probabilité :

$$f(t) = \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(t)-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- Le taux de défaillance :  $\lambda(t) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(t)-\mu}{\sigma}\right)^2}}{t \int_0^{\infty} \sigma \sqrt{2\pi} f(t) dt}$
- Le MTTF vaut :  $MTTF = e^{\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right)}$

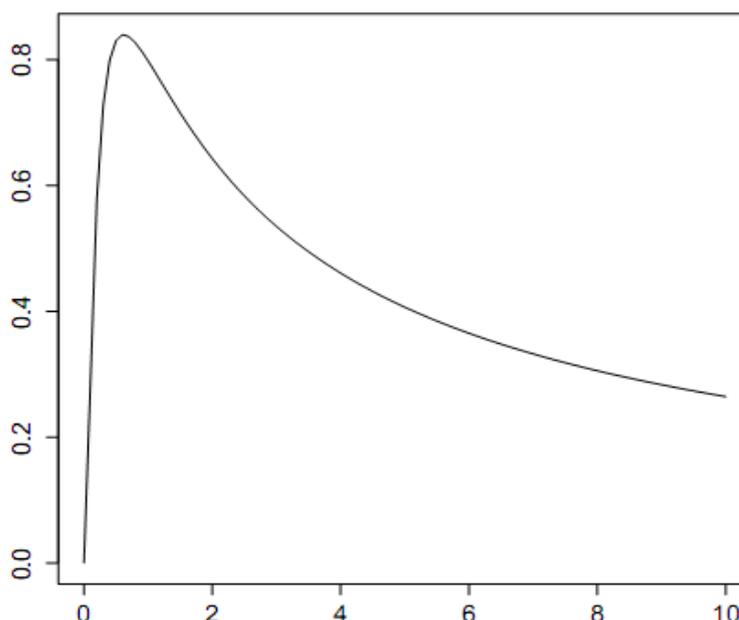


Figure B.1.3. Taux de défaillance de la loi lognormale

On peut vérifier que le taux de défaillance croît puis décroît en tendant vers 0 (voir la figure 2.7). Ceci peut modéliser des situations réelles : un système qui se détériore puis se met à s'améliorer au bout d'un moment. En fait l'expérience montre que la loi lognormale est plus à même de modéliser des durées de réparation que des durées de bon fonctionnement.

### 1.5 La loi Gamma

La loi Gamma est souvent utilisée pour modéliser les temps de défaillance d'un matériel et peut, par conséquent, être employée comme distribution a priori dans l'analyse de la fiabilité bayésienne. Elle est conjuguée avec la loi Exponentielle, ce qui facilite singulièrement leur intégration.

Comme la loi de Weibull, la loi Gamma peut représenter toutes les phases de la vie d'un matériel, mais elle est cependant plus simple car elle est décrite par deux paramètres au lieu de trois pour la loi de Weibull.

La loi Gamma peut représenter une grande variété de distribution et est un modèle naturel d'échantillonnage exponentiel.

Elle s'applique particulièrement

- ☞ à la théorie des files d'attente, utilisée pour le comptage de l'arrivée d'un nombre aléatoire  $N$  d'événements, lorsque le taux d'occurrence espéré reste constant et qu'un seul événement puisse survenir pendant un intervalle de temps  $dt$  : exemple, le nombre de matériels défectueux réalisé par une usine de production,
- ☞ aux tests de durée de vie des matériels.

Elle représente la loi de probabilité d'occurrence de  $\alpha$  événements dans un processus Poissonien. Par exemple si  $t_i$  est le temps entre les défaillances successives d'un système, et que  $t_i$  suive une distribution exponentielle, le temps cumulé d'apparition de  $\alpha$  défaillances suit une loi Gamma :

– la densité de probabilité

$$f(t) = \frac{t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{\beta}}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}$$

– le taux de défaillance

$$\lambda(t) = \frac{t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{\beta}}}{\beta^\alpha \int_t^\infty \Gamma(\alpha) f(u) du}$$

### 1.6 Loi du Khi-deux notée $\chi^2$ ou loi de Pearson.

La loi du Khi-deux, ou loi de Pearson est un cas particulier de la loi Gamma, ne sert pas à modéliser directement la fiabilité, mais essentiellement au calcul des limites de confiance lors des estimations par intervalle de confiance. Elle est caractérisée par un paramètre positif  $\nu$  appelé degrés de liberté et définie que pour des valeurs positives.

La densité de probabilité d'une loi de Khi-deux à  $\nu$  degrés s'écrit :

$$f(t) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} t^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} \quad t \geq 0$$

La loi du Khi-deux est décrite par une table statistique. Cette loi tabulée est très utilisée pour déterminer un intervalle de confiance d'un taux de défaillance.

La moyenne est:  $E(\chi^2) = \nu$

La variance est:  $Var(\chi^2) = 2\nu$

### 1.7 La loi uniforme

C'est une loi utilisée dans l'approche Bayésienne pour modéliser l'avis d'experts face à une situation donnée. La densité de probabilité et la fiabilité d'une loi uniforme sur  $[0, a]$  sont données par les formules suivantes:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{si } 0 \leq t \leq a \\ 0 & \text{si } t > a \end{cases}$$

Plus généralement, la distribution de probabilité d'une loi uniforme sur  $[a, b]$  s'écrit:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

### 1.8 La loi de Fisher Snedecor

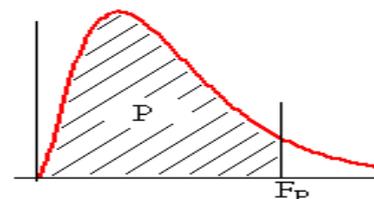
Le rapport de probabilité  $\alpha$ , de deux variables aléatoire indépendante, distribuées selon des lois du khi deux pondérées chacune par leur nombre respectif de degrés de liberté  $\nu_1$  ;  $\nu_2$  suit une loi de Fisher-Snedecor:

$$F_{\alpha}(\nu_1, \nu_2) = \frac{\frac{\chi_{\alpha}^2(\nu_1)}{\nu_1}}{\frac{\chi_{\alpha}^2(\nu_2)}{\nu_2}}$$

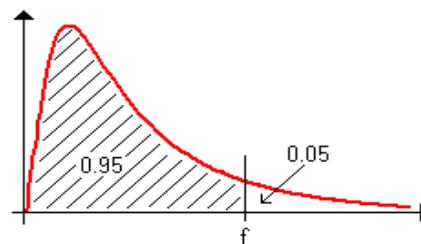
## B.2. Tables statistiques

### Table de la loi du $\chi^2(v)$

Cette table donne les fractiles  $F_p$  de la loi de khi-deux à  $v$  degrés de liberté :  $P = \text{Probabilité} (\chi^2 < F_p)$



$v \ p$	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.3	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
1	0.000	0.001	0.004	0.016	0.064	0.148	0.455	0.708	1.074	1.642	2.706	3.841	6.635
2	0.020	0.040	0.103	0.211	0.446	0.713	1.386	1.833	2.408	3.219	4.605	5.991	9.210
3	0.115	0.185	0.352	0.584	1.005	1.424	2.366	2.946	3.665	4.642	6.251	7.815	11.345
4	0.297	0.429	0.711	1.064	1.649	2.195	3.357	4.045	4.878	5.989	7.779	9.488	13.277
5	0.554	0.752	1.145	1.610	2.343	3.000	4.351	5.132	6.064	7.289	9.236	11.070	15.086
6	0.872	1.134	1.635	2.204	3.070	3.828	5.348	6.211	7.231	8.558	10.645	12.592	16.812
7	1.239	1.564	2.167	2.833	3.822	4.671	6.346	7.283	8.383	9.803	12.017	14.067	18.475
8	1.647	2.032	2.733	3.490	4.594	5.527	7.344	8.351	9.524	11.030	13.362	15.507	20.090
9	2.088	2.532	3.325	4.168	5.380	6.393	8.343	9.414	10.656	12.242	14.684	16.919	21.666
10	2.558	3.059	3.940	4.865	6.179	7.267	9.342	10.473	11.781	13.442	15.987	18.307	23.209
11	3.053	3.609	4.575	5.578	6.989	8.148	10.341	11.530	12.899	14.631	17.275	19.675	24.725
12	3.571	4.178	5.226	6.304	7.807	9.034	11.340	12.584	14.011	15.812	18.549	21.026	26.217
13	4.107	4.765	5.892	7.041	8.634	9.926	12.340	13.636	15.119	16.985	19.812	22.362	27.688
14	4.660	5.368	6.571	7.790	9.467	10.821	13.339	14.685	16.222	18.151	21.064	23.685	29.141
15	5.229	5.985	7.261	8.547	10.307	11.721	14.339	15.733	17.322	19.311	22.307	24.996	30.578
16	5.812	6.614	7.962	9.312	11.152	12.624	15.338	16.780	18.418	20.465	23.542	26.296	32.000
17	6.408	7.255	8.672	10.085	12.002	13.531	16.338	17.824	19.511	21.615	24.769	27.587	33.409
18	7.015	7.906	9.390	10.865	12.857	14.440	17.338	18.868	20.601	22.760	25.989	28.869	34.805
19	7.633	8.567	10.117	11.651	13.716	15.352	18.338	19.910	21.689	23.900	27.204	30.144	36.191
20	8.260	9.237	10.851	12.443	14.578	16.266	19.337	20.951	22.775	25.038	28.412	31.410	37.566
21	8.897	9.915	11.591	13.240	15.445	17.182	20.337	21.992	23.858	26.171	29.615	32.671	38.932
22	9.542	10.600	12.338	14.041	16.314	18.101	21.337	23.031	24.939	27.301	30.813	33.924	40.289
23	10.196	11.293	13.091	14.848	17.187	19.021	22.337	24.069	26.018	28.429	32.007	35.172	41.638
24	10.856	11.992	13.848	15.659	18.062	19.943	23.337	25.106	27.096	29.553	33.196	36.415	42.980
25	11.524	12.697	14.611	16.473	18.940	20.867	24.337	26.143	28.172	30.675	34.382	37.652	44.314
26	12.198	13.409	15.379	17.292	19.820	21.792	25.336	27.179	29.246	31.795	35.563	38.885	45.642
27	12.878	14.125	16.151	18.114	20.703	22.719	26.336	28.214	30.319	32.912	36.741	40.113	46.963
28	13.565	14.847	16.928	18.939	21.588	23.647	27.336	29.249	31.391	34.027	37.916	41.337	48.278
29	14.256	15.574	17.708	19.768	22.475	24.577	28.336	30.283	32.461	35.139	39.087	42.557	49.588
30	14.953	16.306	18.493	20.599	23.364	25.508	29.336	31.316	33.530	36.250	40.256	43.773	50.892
31	15.655	17.042	19.281	21.434	24.255	26.440	30.336	32.349	34.598	37.359	41.422	44.985	52.191
32	16.362	17.783	20.072	22.271	25.148	27.373	31.336	33.381	35.665	38.466	42.585	46.194	53.486
33	17.073	18.527	20.867	23.110	26.042	28.307	32.336	34.413	36.731	39.572	43.745	47.400	54.775
34	17.789	19.275	21.664	23.952	26.938	29.242	33.336	35.444	37.795	40.676	44.903	48.602	56.061
35	18.509	20.027	22.465	24.797	27.836	30.178	34.336	36.475	38.859	41.778	46.059	49.802	57.342
36	19.233	20.783	23.269	25.643	28.735	31.115	35.336	37.505	39.922	42.879	47.212	50.998	58.619
37	19.960	21.542	24.075	26.492	29.635	32.053	36.336	38.535	40.984	43.978	48.363	52.192	59.893
38	20.691	22.304	24.884	27.343	30.537	32.992	37.335	39.564	42.045	45.076	49.513	53.384	61.162
39	21.426	23.069	25.695	28.196	31.441	33.932	38.335	40.593	43.105	46.173	50.660	54.572	62.428
40	22.164	23.838	26.509	29.051	32.345	34.872	39.335	41.622	44.165	47.269	51.805	55.758	63.691
41	22.906	24.609	27.326	29.907	33.251	35.813	40.335	42.651	45.224	48.363	52.949	56.942	64.950
42	23.650	25.383	28.144	30.765	34.157	36.755	41.335	43.679	46.282	49.456	54.090	58.124	66.206
43	24.398	26.159	28.965	31.625	35.065	37.698	42.335	44.706	47.339	50.548	55.230	59.304	67.459
44	25.148	26.939	29.787	32.487	35.974	38.641	43.335	45.734	48.396	51.639	56.369	60.481	68.710

**Table : Loi de Fisher-Snedecor**Valeur  $f$  de la variable de Fisher-Snedecor $F(v_1 ; v_2)$  ayant la probabilité 0.05 d'être dépassée $v_1$  : degrés de liberté du numérateur $v_2$  : degrés de liberté du dénominateur

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	242.98	243.90	244.69	245.36	245.95
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.40	19.41	19.42	19.42	19.43
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74	8.73	8.71	8.70
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91	5.89	5.87	5.86
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.70	4.68	4.66	4.64	4.62
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.98	3.96	3.94
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57	3.55	3.53	3.51
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28	3.26	3.24	3.22
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07	3.05	3.03	3.01
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91	2.89	2.86	2.85
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79	2.76	2.74	2.72
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69	2.66	2.64	2.62
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60	2.58	2.55	2.53
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51	2.48	2.46
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48	2.45	2.42	2.40
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42	2.40	2.37	2.35
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38	2.35	2.33	2.31
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.31	2.29	2.27
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31	2.28	2.26	2.23
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28	2.25	2.22	2.20
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.28	2.25	2.22	2.20	2.18
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.26	2.23	2.20	2.17	2.15
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.24	2.20	2.18	2.15	2.13
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.22	2.18	2.15	2.13	2.11
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.20	2.16	2.14	2.11	2.09
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15	2.12	2.09	2.07
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.17	2.13	2.10	2.08	2.06
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12	2.09	2.06	2.04
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.14	2.10	2.08	2.05	2.03
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09	2.06	2.04	2.01
32	4.15	3.29	2.90	2.67	2.51	2.40	2.31	2.24	2.19	2.14	2.10	2.07	2.04	2.01	1.99
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.29	2.23	2.17	2.12	2.08	2.05	2.02	1.99	1.97
36	4.11	3.26	2.87	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15	2.11	2.07	2.03	2.00	1.98	1.95
38	4.10	3.24	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14	2.09	2.05	2.02	1.99	1.96	1.94
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00	1.97	1.95	1.92
42	4.07	3.22	2.83	2.59	2.44	2.32	2.24	2.17	2.11	2.06	2.03	1.99	1.96	1.94	1.91
44	4.06	3.21	2.82	2.58	2.43	2.31	2.23	2.16	2.10	2.05	2.01	1.98	1.95	1.92	1.90
46	4.05	3.20	2.81	2.57	2.42	2.30	2.22	2.15	2.09	2.04	2.00	1.97	1.94	1.91	1.89
48	4.04	3.19	2.80	2.57	2.41	2.29	2.21	2.14	2.08	2.03	1.99	1.96	1.93	1.90	1.88
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.99	1.95	1.92	1.89	1.87
55	4.02	3.16	2.77	2.54	2.38	2.27	2.18	2.11	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.88	1.85
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.92	1.89	1.86	1.84
65	3.99	3.14	2.75	2.51	2.36	2.24	2.15	2.08	2.03	1.98	1.94	1.90	1.87	1.85	1.82
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02	1.97	1.93	1.89	1.86	1.84	1.81
75	3.97	3.12	2.73	2.49	2.34	2.22	2.13	2.06	2.01	1.96	1.92	1.88	1.85	1.83	1.80
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95	1.91	1.88	1.84	1.82	1.79
85	3.95	3.10	2.71	2.48	2.32	2.21	2.12	2.05	1.99	1.94	1.90	1.87	1.84	1.81	1.79
90	3.95	3.10	2.71	2.47	2.32	2.20	2.11	2.04	1.99	1.94	1.90	1.86	1.83	1.80	1.78
95	3.94	3.09	2.70	2.47	2.31	2.20	2.11	2.04	1.98	1.93	1.89	1.86	1.82	1.80	1.77
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93	1.89	1.85	1.82	1.79	1.77

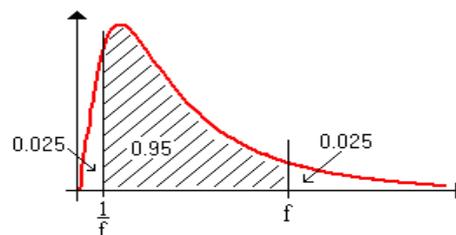
**Exemple :** $v_1 = 5$  d.d.l. et  $v_2 = 10$  d.d.l.  $P(F_{5, 10} \leq f) = 0.95 \iff f = 3.33$

**Table : Loi de Fisher-Snedecor**

Valeur  $f$  de la variable de Fisher-Snedecor  
 $F(v_1 ; v_2)$  ayant la probabilité 0.025 d'être dépassée

$v_1$  : degrés de liberté du numérateur

$v_2$  : degrés de liberté du dénominateur



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	647.79	799.48	864.15	899.60	921.83	937.11	948.20	956.64	963.28	968.63	973.03	976.72	979.84	982.55	984.87
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.41	39.42	39.43	39.43
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.37	14.34	14.30	14.28	14.25
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.79	8.75	8.72	8.68	8.66
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.57	6.52	6.49	6.46	6.43
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.41	5.37	5.33	5.30	5.27
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.71	4.67	4.63	4.60	4.57
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.24	4.20	4.16	4.13	4.10
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.91	3.87	3.83	3.80	3.77
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.66	3.62	3.58	3.55	3.52
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.47	3.43	3.39	3.36	3.33
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.32	3.28	3.24	3.21	3.18
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.20	3.15	3.12	3.08	3.05
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.09	3.05	3.01	2.98	2.95
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	3.01	2.96	2.92	2.89	2.86
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.93	2.89	2.85	2.82	2.79
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.87	2.82	2.79	2.75	2.72
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.81	2.77	2.73	2.70	2.67
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.76	2.72	2.68	2.65	2.62
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.72	2.68	2.64	2.60	2.57
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.68	2.64	2.60	2.56	2.53
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.65	2.60	2.56	2.53	2.50
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.62	2.57	2.53	2.50	2.47
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.59	2.54	2.50	2.47	2.44
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.56	2.51	2.48	2.44	2.41
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.54	2.49	2.45	2.42	2.39
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.51	2.47	2.43	2.39	2.36
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.37	2.34
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.48	2.43	2.39	2.36	2.32
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.31
32	5.53	4.15	3.56	3.22	3.00	2.84	2.71	2.62	2.54	2.48	2.43	2.38	2.34	2.31	2.28
34	5.50	4.12	3.53	3.19	2.97	2.81	2.69	2.59	2.52	2.45	2.40	2.35	2.31	2.28	2.25
36	5.47	4.09	3.50	3.17	2.94	2.78	2.66	2.57	2.49	2.43	2.37	2.33	2.29	2.25	2.22
38	5.45	4.07	3.48	3.15	2.92	2.76	2.64	2.55	2.47	2.41	2.35	2.31	2.27	2.23	2.20
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.33	2.29	2.25	2.21	2.18
42	5.40	4.03	3.45	3.11	2.89	2.73	2.61	2.51	2.43	2.37	2.32	2.27	2.23	2.20	2.16
44	5.39	4.02	3.43	3.09	2.87	2.71	2.59	2.50	2.42	2.36	2.30	2.26	2.22	2.18	2.15
46	5.37	4.00	3.42	3.08	2.86	2.70	2.58	2.48	2.41	2.34	2.29	2.24	2.20	2.17	2.13
48	5.35	3.99	3.40	3.07	2.84	2.69	2.56	2.47	2.39	2.33	2.27	2.23	2.19	2.15	2.12
50	5.34	3.97	3.39	3.05	2.83	2.67	2.55	2.46	2.38	2.32	2.26	2.22	2.18	2.14	2.11
55	5.31	3.95	3.36	3.03	2.81	2.65	2.53	2.43	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.11	2.08
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.22	2.17	2.13	2.09	2.06
65	5.26	3.91	3.32	2.99	2.77	2.61	2.49	2.39	2.32	2.25	2.20	2.15	2.11	2.07	2.04
70	5.25	3.89	3.31	2.97	2.75	2.59	2.47	2.38	2.30	2.24	2.18	2.14	2.10	2.06	2.03
75	5.23	3.88	3.30	2.96	2.74	2.58	2.46	2.37	2.29	2.22	2.17	2.12	2.08	2.05	2.01
80	5.22	3.86	3.28	2.95	2.73	2.57	2.45	2.35	2.28	2.21	2.16	2.11	2.07	2.03	2.00
85	5.21	3.85	3.27	2.94	2.72	2.56	2.44	2.35	2.27	2.20	2.15	2.10	2.06	2.02	1.99
90	5.20	3.84	3.26	2.93	2.71	2.55	2.43	2.34	2.26	2.19	2.14	2.09	2.05	2.02	1.98
95	5.19	3.84	3.26	2.92	2.70	2.54	2.42	2.33	2.25	2.19	2.13	2.08	2.04	2.01	1.98
100	5.18	3.83	3.25	2.92	2.70	2.54	2.42	2.32	2.24	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00	1.97

**Exemples :**

$v_1 = 5$  d.d.l. et  $v_2 = 10$  d.d.l.  $P(F_{97.5\%} ; 5, 10 \leq f) = 0.975 \iff f = 4.24$

$P(F_{2.5\%} ; 5, 10 \leq f) = 0.025$

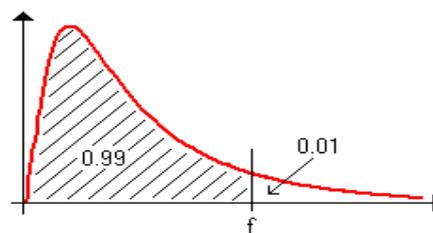
$P(F_{97.5\%} ; 10, 5 \leq f) = 0.975 \iff f = 6.62 \iff f' = 1/f = 1/6.62 = 0.151$

**Table : Loi de Fisher-Snedecor**

Valeur  $f$  de la variable de Fisher-Snedecor  
 $F(v_1 ; v_2)$  ayant la probabilité 0.01 d'être dépassée

$v_1$  : degrés de liberté du numérateur

$v_2$  : degrés de liberté du dénominateur



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	4052.18	4999.34	5403.53	5624.26	5763.96	5858.95	5928.33	5980.95	6022.40	6055.93	6083.40	6106.68	6125.77	6143.00	6156.97
2	98.50	99.00	99.16	99.25	99.30	99.33	99.36	99.38	99.39	99.40	99.41	99.42	99.42	99.43	99.43
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.13	27.05	26.98	26.92	26.87
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.45	14.37	14.31	14.25	14.20
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.96	9.89	9.82	9.77	9.72
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79	7.72	7.66	7.60	7.56
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.54	6.47	6.41	6.36	6.31
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.73	5.67	5.61	5.56	5.52
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11	5.05	5.01	4.96
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.77	4.71	4.65	4.60	4.56
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.46	4.40	4.34	4.29	4.25
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.22	4.16	4.10	4.05	4.01
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02	3.96	3.91	3.86	3.82
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80	3.75	3.70	3.66
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67	3.61	3.56	3.52
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.62	3.55	3.50	3.45	3.41
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52	3.46	3.40	3.35	3.31
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.43	3.37	3.32	3.27	3.23
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.36	3.30	3.24	3.19	3.15
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.29	3.23	3.18	3.13	3.09
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.24	3.17	3.12	3.07	3.03
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.18	3.12	3.07	3.02	2.98
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.14	3.07	3.02	2.97	2.93
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.09	3.03	2.98	2.93	2.89
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	3.06	2.99	2.94	2.89	2.85
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	3.02	2.96	2.90	2.86	2.81
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.99	2.93	2.87	2.82	2.78
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.96	2.90	2.84	2.79	2.75
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.93	2.87	2.81	2.77	2.73
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.91	2.84	2.79	2.74	2.70
32	7.50	5.34	4.46	3.97	3.65	3.43	3.26	3.13	3.02	2.93	2.86	2.80	2.74	2.70	2.65
34	7.44	5.29	4.42	3.93	3.61	3.39	3.22	3.09	2.98	2.89	2.82	2.76	2.70	2.66	2.61
36	7.40	5.25	4.38	3.89	3.57	3.35	3.18	3.05	2.95	2.86	2.79	2.72	2.67	2.62	2.58
38	7.35	5.21	4.34	3.86	3.54	3.32	3.15	3.02	2.92	2.83	2.75	2.69	2.64	2.59	2.55
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.73	2.66	2.61	2.56	2.52
42	7.28	5.15	4.29	3.80	3.49	3.27	3.10	2.97	2.86	2.78	2.70	2.64	2.59	2.54	2.50
44	7.25	5.12	4.26	3.78	3.47	3.24	3.08	2.95	2.84	2.75	2.68	2.62	2.56	2.52	2.47
46	7.22	5.10	4.24	3.76	3.44	3.22	3.06	2.93	2.82	2.73	2.66	2.60	2.54	2.50	2.45
48	7.19	5.08	4.22	3.74	3.43	3.20	3.04	2.91	2.80	2.71	2.64	2.58	2.53	2.48	2.44
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78	2.70	2.63	2.56	2.51	2.46	2.42
55	7.12	5.01	4.16	3.68	3.37	3.15	2.98	2.85	2.75	2.66	2.59	2.53	2.47	2.42	2.38
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.56	2.50	2.44	2.39	2.35
65	7.04	4.95	4.10	3.62	3.31	3.09	2.93	2.80	2.69	2.61	2.53	2.47	2.42	2.37	2.33
70	7.01	4.92	4.07	3.60	3.29	3.07	2.91	2.78	2.67	2.59	2.51	2.45	2.40	2.35	2.31
75	6.99	4.90	4.05	3.58	3.27	3.05	2.89	2.76	2.65	2.57	2.49	2.43	2.38	2.33	2.29
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.64	2.55	2.48	2.42	2.36	2.31	2.27
85	6.94	4.86	4.02	3.55	3.24	3.02	2.86	2.73	2.62	2.54	2.46	2.40	2.35	2.30	2.26
90	6.93	4.85	4.01	3.53	3.23	3.01	2.84	2.72	2.61	2.52	2.45	2.39	2.33	2.29	2.24
95	6.91	4.84	3.99	3.52	3.22	3.00	2.83	2.70	2.60	2.51	2.44	2.38	2.32	2.28	2.23
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59	2.50	2.43	2.37	2.31	2.27	2.22

**Exemples :**

$v_1 = 5$  d.d.l. et  $v_2 = 10$  d.d.l.  $P(F_{5, 10} \leq f) = 0.99 \iff f = 5.64$

## **C.1. Les approches de la Fiabilité**

### **Introduction**

En phase de conception, ce sont donc les démarches de fiabilité prévisionnelles et expérimentales qui sont utilisées pour l'évaluation et l'optimisation d'un produit en termes de fiabilité. Ces approches sont choisies sur la base des moyens et des informations disponibles, des temps de développement alloués, du niveau de fiabilité recherché, etc. Les principales approches employées sont :

- ✓ l'approche déterministe du dimensionnement "résistance-sollicitation",
- ✓ l'approche par essais,
- ✓ l'approche par données d'exploitation,
- ✓ l'approche par retour d'expériences analogues,
- ✓ l'approche probabiliste du dimensionnement "résistance-sollicitation".

Elles sont présentées ci-après de manière succincte.

### **1. L'approche déterministe du dimensionnement "résistance-sollicitation"**

Le dimensionnement déterministe des structures est la démarche traditionnellement utilisée en conception mécanique. Elle est née au milieu du 19<sup>ième</sup> siècle avec l'avancée des connaissances en mécanique des milieux continus et en résistance des matériaux, avec notamment les travaux de Navier, Maxwell, Castigliano, etc. La conception est validée au travers d'un modèle analytique rendant compte de l'état du système (pour chaque mode de défaillance) en fonction des variables de conception (chargement, géométrie, matériaux, conditions aux limites, etc.). Ces modèles, peuvent être présentés de manière simple sous la forme de relations mathématiques entre la sollicitation  $S$  appliquée au système et sa résistance  $R$ , ces deux quantités étant généralement exprimées fonctions des paramètres de

conception du système évoqués ci-dessus. Le dimensionnement de la structure est alors réalisé de manière à ce que la variable de résistance reste supérieure à la variable de sollicitation :

$$R > S$$

L'un des problèmes que pose cette approche réside dans le fait que les variables mises en jeu, sont prises constantes, alors qu'elles présentent dans la réalité des variabilités parfois importantes. Leurs dispersions peuvent par conséquent conduire à la non vérification de la relation si dessus, et donc à l'échec du dimensionnement, avec les catastrophes que cela peut entraîner. Ces incertitudes peuvent avoir pour origine :

- les aléas dans la modélisation du système, dus par exemple aux simplifications géométriques et dans les lois de comportement, ou encore au maillage et les approximations au niveau élémentaire dans le cas de modèles de calculs par la Méthode des Éléments Finis (MÉF) [90], etc.,
- les aléas liés à la modélisation des conditions aux limites, dus entre autre à l'idéalisation des interactions avec le milieu extérieur comme les fixations mécaniques, les contacts mécaniques ou thermiques, etc.,
- les aléas sur la sollicitation,
- les aléas sur les méthodes numériques de résolution, le plus souvent itératives avec des critères d'acceptation sources d'imprécisions.

Pour tenir compte des incertitudes liées à cette démarche, les concepteurs introduisent généralement un coefficient de sécurité  $k$  souvent compris entre 1 et 10, en dimensionnant le système de manière à ce que :

$$R > k.S$$

Procédant d'un vocabulaire positif et rassurant, ce coefficient masque en réalité toute l'ignorance et les incertitudes du concepteur en permettant de se prémunir contre les modes de défaillance envisageables sur une structure durant sa durée de vie. Il est le plus souvent imposé par des réglementations et des normes, ou établi sur la base de l'expérience ou l'intuition d'experts. C'est une approche qui mène souvent pour des raisons arbitraires, à des surdimensionnements pouvant s'avérer problématiques lorsqu'il faut optimiser le poids ou le volume du système comme c'est le cas dans l'aéronautique.

## 2. Méthode d'Estimation de la fiabilité par les essais

Cette méthode est basée sur un Traitement Statistique des Données de Vie (voir [9], [10], [14]), [11],[16], [17], [18]), afin de les ajuster à une distribution de vie théorique pour évaluer la probabilité de défaillance. On désigne par  $T$  la variable aléatoire positive représentant la durée de vie du produit étudié. Comme c'est indiqué par la figure c.1, pour un niveau de contrainte donné, la probabilité de défaillance à la date  $t$  est ainsi représentée par la fonction de répartition  $F$  :

$$P(T < t) = F(t)$$

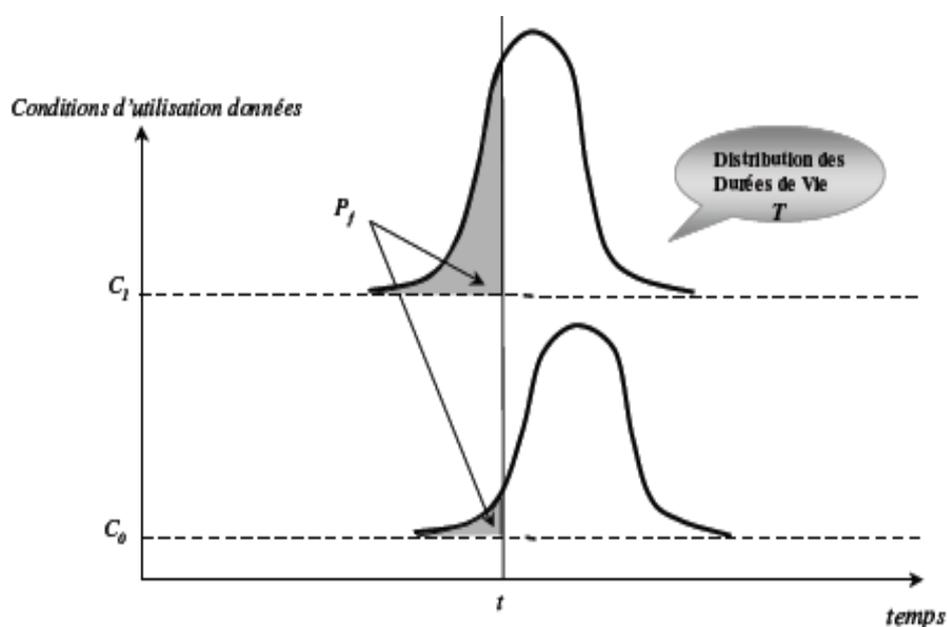


Figure c.1. Évaluation de la probabilité de défaillance instantanée d'un composant mécanique.

La fiabilité, qui représente la probabilité de non-défaillance jusqu'à l'instant  $t$ , se caractérise aussi par le taux de défaillance  $\lambda(t)$  et elle s'écrit :

$$R(t) = P(T > t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(s) ds\right)$$

Ainsi, les produits au cours de leur exploitation verront leur taux de défaillance évoluer dans le temps.

Suivant la nature des données disponibles, des méthodes d'estimation et d'analyse statistique sont proposées. Les données statistiques utilisées proviennent soit d'essais en laboratoires (Essais de Fiabilité) ou de résultats d'exploitation (bases de données

---

disponibles, retour d'expériences, etc..). Or l'un des problèmes que l'on rencontre lors de l'évaluation de la fiabilité mécanique est le manque de bases de données mécaniques.

L'introduction des essais de fiabilité dans le processus de développement de produits nouveaux permet d'améliorer la fiabilité opérationnelle, avant de disposer des données du retour d'expérience.

Un autre objectif principal des essais de fiabilité est d'obtenir des données de vie pour des produits mécaniques (instants de défaillance, nombre de cycles à la rupture,..) en phase de conception, dans des délais raisonnables afin d'ajuster des lois de probabilité pour évaluer et améliorer la fiabilité du produit tout au long de sa vie (de la conception à la mise en service).

Parmi les essais de fiabilité les plus utilisés, on cite les essais accélérés, les essais aggravés, les essais bayésiens etc.

### **3. L'approche par les données d'exploitation**

L'analyse de fiabilité à partir de données d'exploitation est similaire à l'approche par les essais présentée ci-dessus en termes de méthode d'analyse de défaillance et de fiabilité. Le fait qu'elle s'appuie sur des données d'exploitation conduit théoriquement à de meilleures estimations de fiabilité puisque les données utilisées tiennent compte des conditions réelles d'utilisation du produit analysé.

L'analyse des modes de défaillance observés fournit de précieuses informations pour l'optimisation de la conception du produit et l'actualisation des hypothèses faites en phase de fiabilité prévisionnelle.

L'identification des modèles paramétriques de fiabilité ou de taux de défaillance permet de faire des projections de fiabilité sur la durée d'utilisation allouée, et de définir les éventuelles améliorations à apporter au produit.

Ceci étant, cette approche présente l'inconvénient d'induire d'importants coûts de collecte des données de défaillances, en raison des moyens importants à mettre en œuvre pour le suivi des équipements en utilisation. Les concepteurs sont la plupart du temps confrontés à des déficits de données correctes. Des approches bayésiennes peuvent alors être exploitées pour améliorer la précision et le niveau de confiance des estimations de fiabilité. Elles présentent aussi l'inconvénient de n'être utilisables que lors d'études d'amélioration de conception de produits déjà en service.

---

#### **4. L'approche par le retour d'expérience analogue**

Les analyses de fiabilité par retour d'expérience analogue [55] sont généralement basées sur l'hypothèse de la constance du taux de défaillance.

Pour un système constitué de sous-ensembles, son taux peut être calculé en fonction de celui de ses composants élémentaires et de leurs implications respectives dans le mécanisme de défaillance incriminé. Ces implications peuvent être mises en évidence à l'aide d'outils d'analyse de défaillance (AMDEC, arbres de défaillances, etc.). Ensuite, à partir des diagrammes de fiabilité (par exemple sous forme d'un schéma bloc) et en fonction de leurs architectures, le taux de défaillance du système, puis sa fiabilité peuvent être calculés et comparés aux spécifications du cahier des charges.

Ces taux de défaillance sont disponibles dans de nombreux référentiels où ils sont déterminés soit à partir de résultats d'essais, soit à partir de retours d'expérience.

Il existe de nombreux recueils de modèles de prédiction pour les composants élémentaires que sont les résistances, condensateurs, circuits intégrés, etc., pour l'électronique, ou les roulements, joints, engrenages, etc. pour la mécanique. Ils diffèrent dans le niveau de sophistication avec lequel ils modélisent ces taux de défaillance en fonction des conditions d'utilisation (température, humidité, pression, vibration, etc...), des domaines d'utilisation, des types et gammes des composants couverts. Ils sont périodiquement mis à jour pour tenir compte des nouvelles technologies de composants.

#### **5. L'approche probabiliste du dimensionnement**

L'approche probabiliste du dimensionnement peut être considérée comme une probabilisation de la démarche déterministe "résistance-sollicitation". Elle a été développée pour un traitement plus rationnel des incertitudes lors du dimensionnement des structures mécaniques. Elle permet d'évaluer la probabilité que la structure analysée puisse être dans une configuration considérée comme défaillante sur sa période d'utilisation, en prenant en compte le caractère aléatoire des différentes variables qui la régit. Elle s'appuie sur un modèle mathématique du système étudié, capable de prendre en compte l'aléa des données, pour le scénario de défaillance incriminé.

En plus de permettre l'estimation de la fiabilité du dispositif étudié, cette approche présente l'intérêt de permettre la quantification du poids des différentes variables de conception dans la fiabilité. Elle offre ainsi uniquement sur la base de calculs, la possibilité d'optimiser sa conception, ou de savoir parmi les variables contrôlables, celles qui peuvent raisonnablement faire l'objet d'investigations spécifiques. Elle constitue en ce sens un outil adéquat pour l'aide à la décision en phases de conception, voire de maintenance.

# **Glossaire**

Dans cette partie, on rappelle les définitions de certains termes cités nécessaire pour mieux comprendre. Tout terme mentionné dans le glossaire ci-dessous est consacré à la Fiabilité et à la sûreté de fonctionnement et est extrait des normes Afnor [11] ou de la référence [18].

### **Fiabilité**

Aptitude d'une entité à accomplir une fonction requise, dans des conditions données, pendant une durée donnée.

### **Maintenabilité**

Dans des conditions données d'utilisation pour lesquelles il a été conçu, aptitude d'un bien à être maintenu ou rétabli dans un état dans lequel il peut accomplir une fonction requise, lorsque la maintenance est accomplie dans des conditions données, avec des procédures et des moyens prescrits.

### **Maintenance**

Ensemble des actions permettant de maintenir ou de rétablir une entité dans un état spécifié ou en mesure d'assurer un service déterminé.

### **Sûreté de fonctionnement**

La sûreté de fonctionnement est l'aptitude d'une entité à satisfaire une ou plusieurs fonctions requises dans des conditions données. La sûreté de fonctionnement se caractérise généralement par les paramètres suivants : Fiabilité, Maintenabilité, Disponibilité et Sécurité. On retrouve dans les initiales de ces concepts, le nom de FMDS parfois donné à la sûreté de fonctionnement.

### **Qualité**

Degré (ou mesure) avec lequel un produit convient aux besoins du client. La qualité totale est fonction de la qualité du projet, qui mesure la valeur intrinsèque du projet par rapport aux besoins du client, et de la qualité de fabrication, qui mesure la fidélité avec laquelle le produit fabriqué est conforme au projet.

### **Entité**

Tout élément, composant, sous-système, système, dispositif, équipement, unité fonctionnelle que l'on peut considérer individuellement.

### **Panne**

État d'une entité inapte à accomplir une fonction requise, dans des conditions données d'utilisation.

### **Défaillance**

Cessation de l'aptitude d'une entité fonctionnelle à accomplir une fonction requise. Une défaillance est un passage d'un état à un autre, par opposition à une panne qui est un état. On entend par "unité fonctionnelle" soit un système complet, soit l'un quelconque de ses éléments.

### **Composant**

Un composant est une partie d'un système (matériels ou évènements), non décomposable dans le cadre de l'étude, et pour laquelle on dispose d'informations qualitatives (conditions de fonctionnement, modes de défaillance, ...) et quantitatives (fréquences d'apparitions des pannes, durées de bon fonctionnement, ...) suffisantes. Le type de composants, leurs quantités, leur qualité et leur manière dont ils sont disposés ont un effet direct sur la fiabilité du système.

### **Cycle de vie du système**

Modifications au plan du développement que subit un système depuis sa conception jusqu'à la fin de son utilisation. Désigne les différentes phases de vie d'un produit, par exemple: conception, production, distribution, consommation (utilisation, entretien, recyclage) et élimination

### **Mode de défaillance**

Effet par lequel une panne est observée.

### **Réparable (entité)**

Entité susceptible techniquement et/ou économiquement d'être réparée.

### **Non-réparable (entité)**

Entité non susceptible techniquement et/ou économiquement d'être réparée.

### **Taux de panne**

Probabilité d'apparition d'une panne dans un intervalle donné, sachant qu'aucune panne n'ait été observée avant, par unité de temps.

### **Temps de réparation**

Temps pendant lequel les opérations de maintenance corrective sont effectivement réalisées sur l'entité, tous les temps annexes étant exclus.

### **Temps de fonctionnement avant la première panne (MTTF)**

Durée cumulée des temps de fonctionnement d'une entité depuis l'instant de sa première mise en service jusqu'à l'apparition de la première panne.

### **Temps moyen de bon fonctionnement (MTBF)**

Temps moyen entre deux pannes consécutives d'une entité réparée à neuf.

### **Distribution**

L'objectif principal dans toute analyse des données de vie, est d'obtenir une distribution statistique qui décrit le mieux la durée de vie d'un système (ou composant) et ses propriétés. L'observation de l'évolution des pannes du système permet d'avoir des informations sur les lois de probabilité des différentes défaillances. Les principales lois continues utilisées en fiabilité sont : loi exponentielle, loi de Weibull, la loi normale et la loi log-normale.

## Résumé

### Intitulé: "Contribution à l'analyse Bayésienne en fiabilité et maintenabilité des systèmes mécaniques"

La démarche Bayésienne est une méthode statistique, elle permet d'effectuer des études de tendances sur le comportement des matériels entre deux périodes ou à la suite d'une rupture dans la vie de ces matériels. Elle intègre naturellement la prise en compte d'informations partiellement incertaines pour les prendre en charge dans la modélisation du problème. La méthode est donc particulièrement adaptée à l'analyse des systèmes mécaniques ou électroniques présentant une complexité. Les techniques Bayésiennes sont utilisées pour réduire la taille des essais d'estimation, améliorer l'estimation des paramètres de la fiabilité du produit par l'intégration du passé (données disponibles sur le produit concerné) et traiter le cas « zéro » défaillance observée, difficile à traiter avec une approche statistique classique. Le travail repose sur l'analyse et le choix d'une distribution à priori d'un système ou d'une entité afin de définir, sans faire d'essais accélérés ou aggravés, le comportement à posteriori par le calcul de la densité de probabilité. Les tests de fiabilité sont très coûteux et très longs surtout dans le cas où les composants présentent une fiabilité élevée. La modélisation considérera les distributions les plus pratiques pour l'approche Bayésienne (discrètes ou continues) en faisant appliquer des tests virtuels ainsi que l'intégration d'avis d'experts avec un certain taux de confiance.

**MOTS CLÉS:** Modèle bayésien, Fiabilité, maintenabilité, a priori, a posteriori, Taux de défaillance.

### عنوان المذكرة "المساهمة في تحليل النظرية الافتراضية في الموثوقية والصيانة للأنظمة

#### الميكانيكية"

المقاربة النظرية الافتراضية هي طريقة إحصائية، تسمح بإجراء دراسات الاتجاه على سلوك الأجهزة بين فترات أو بعد فاصل من حياة هذه الأجهزة. ويشمل بطبيعة الحال النظر في المعلومات الغير مؤكدة جزئياً لدعمهم في نمودجة المشكلة. ولذلك يناسب هذا أسلوب خاص لتحليل النظم الميكانيكية أو الإلكترونية المعقدة. تستخدم تقنيات النظرية الافتراضية للحد من حجم تقدير الاختبار، وتحسين تقدير معلمات الموثوقية للمنتج من خلال دمج الماضي (البيانات المتاحة على المنتج المعني) وعلاج حالة الحظ "صفر" الفشل أو العطب، يصعب علاجه مع المنهج الإحصائي التقليدي. العمل على أساس تحليل واختيار التوزيع المسبق لنظام أو كيان التعريف، دون أن تسارع أو التشدد الاختبار، في مرحلة ما بعد السلوك حسب حساب كثافة الاحتمال. اختبارات الموثوقية عالية جداً وطويلة جداً قبل كل شيء في حالة لديها مكونات درجة أعلى من الموثوقية. تعتبر نمودجة التوزيعات الأكثر عملية للنهج بيبز (Bayes) (منفصلة أو مستمرة) من خلال تطبيق اختبار افتراضي ودمج آراء الخبراء مع مستوى معين من الثقة.

**الكلمات المفتاحية:** النظرية الافتراضية النمودجية، الموثوقية، والصيانة، بداهة، البعدية، ومعدل العطب.