

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE CONSTANTINE I

FACULTE DES SCIENCES DE LA TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

N° d'ordre :...../Doct/2013.

Série :...../GM/2013.

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de Doctorat en Sciences
en Génie Mécanique

Stabilité des Ecoulements Tournants de Convection Mixte
sous Champ Magnétique

OPTION :

Energétique

Par : **MAHFOUD Brahim**

Soutenue le: 16 /05 /2013

Devant le jury composé de :

Président : M^r. A. BOUCHOUCHA

Professeur

Université Constantine I

Rapporteur : M^r. R. BESSAIH

Professeur

Université Constantine I

Examineurs :

M^r. M. KADJA

Professeur

Université Constantine I

M^r. C. BOUGRIOU

Professeur

Université Hadj Lakhdar-Batna

M^r. S. BOUGOUL

Professeur

Université Hadj Lakhdar-Batna

Remerciements

En préambule, je souhaite rendre grâce à Dieu, le clément et le miséricordieux de m'avoir donné la force et la patience de mener à bien ce modeste travail

Je tiens évidemment à débiter ces remerciements en témoignant de ma profonde reconnaissance envers Monsieur Rachid BESSAÏH , Professeur à l'Université de Constantine 1 pour m'avoir encadré et dirigé ce travail avec patience.

Je remercie vivement Monsieur Ali. BOUCHOUCHA Professeur à l'Université de Constantine 1, qui m'a fait l'honneur de présider le jury, ainsi que pour sa contribution à ma formation.

*Je veux exprimer mes remerciements aux membres de jury,
Monsieur Mahfoud. KADJA , Professeur à l'Université Constantine 1
Monsieur Chrif. BOUGRIOU , Professeur à l'Université Hadj Lakdar-Batna.
Monsieur Saadi.BOUGOUL , Professeur à l'Université Hadj Lakdar-Batna.*

Mes remerciements s'adressent aussi à tous les enseignants du département de Génie Mécanique de l'Université Mentouri-Constantine.

Je remercie ma famille, spécialement mes parents ma femme et mes filles de leur soutien inconditionnel, sans oublier mes frères et proches amis qui ont été si présent, et n'ont jamais cessé de m'encourager.

Résumé

Nous présentons une étude numérique d'un écoulement engendré par deux disques tournants en Co/contre-rotation, à l'intérieur d'une enceinte cylindrique, dont le rapport d'aspect $H/R=2$, remplie d'un fluide à faible nombre de Prandtl ($Pr=0.015$), soumise à un gradient de température et un champ magnétique orienté verticalement. L'étude est divisée en deux parties.

La première partie de cette étude est consacrée à l'écoulement axisymétrique, un code de calcul basé sur la méthode des volumes finis, a été utilisé pour résoudre numériquement les équations gouvernantes le phénomène étudié. Cet écoulement est très instable et fait apparaître une grande richesse de structures. Nous avons présenté le cas stable, en faisant la comparaison entre l'écoulement engendré par la co-rotation des disques d'extrémités et la contre-rotation de ces derniers. Dans le cas du régime transitoire, nos simulations numériques ont été présentées pour différentes valeurs du nombre de Hartmann ($Ha=0, 5, 10, 20$ et 30) et différentes valeurs du nombre de Richardson ($Ri=0, 0.5, 1, 2, 4$). Nous présentons leurs effets sur la valeur du nombre de Reynolds critique Re_{cr} et de la fréquence d'oscillation critique, F_{cr} . Des diagrammes de stabilité ont été établis pour mettre en évidence la dépendance du nombre de Reynolds critique avec l'augmentation du nombre de Hartmann Ha , pour différentes valeurs du Richardson Ri .

La deuxième partie de cette étude présente les résultats numériques de l'écoulement tridimensionnel obtenu par le code CFD Fluent pour la même configuration. En co-rotation, l'écoulement présente des instabilités de couche limite donnant lieu à des motifs axisymétriques où spirales. L'état de base axisymétrique déstabilisé par une perturbation de mode $m=1$, à cause de l'effet d'une différence de température entre les disques supérieur (chaud) et inférieur (froid). Quand le nombre de Reynolds est augmenté, ce mode stationnaire cède la place à une deuxième bifurcation oscillatoire périodique. En contre-rotation l'écoulement est plus instable et présente une grande richesse dans les structures engendrées, avec notamment l'apparition de mode $m=3$ pour $Ha=20$. Dans le cas de convection forcé ($Ri=0$), le mode le plus instable est le mode $m = 1$, appelé "mode mixte" (M). Quand le nombre de Reynolds est augmenté, ce mode stationnaire cède la place à une onde propagative modulée, puis à des quasi-cycles hétéroclines, pour aboutir enfin à une nouvelle solution stationnaire $m = 2$, appelée "mode pur" (P). En augmentant le nombre de Richardson ($Ri=0.5, 1$ et 2), l'écoulement subit une première bifurcation stationnaire avec $m=10$. Enfin des diagrammes de stabilité ont été établis.

Toutefois, en présence d'un champ magnétique vertical, l'écoulement en co/contre-rotation garde sa stabilité axisymétrique jusqu'à des valeurs du nombre de Reynolds plus grande.

Abstract

We present a numerical study of swirling flows with heat transfer generated by two rotating end disks (co- and counter-rotating) inside a cylindrical enclosure having an aspect ratio equals to 2, filled with a liquid metal, and submitted to a vertical temperature gradient and an axial magnetic field, is studied. The study is divided into two parts.

The first part of this study concerns the axisymmetric flow, the governing Navier-Stokes, energy, and potential equations along with appropriate boundary conditions are solved by using the finite-volume method. The flow and temperature fields are presented by stream function and isotherms, respectively. This flow is very unstable and reveals a great richness of structures. In oscillatory regime, results are presented for various values of the Hartmann number, $Ha=0,5, 10, 20$ and 30 , and Richardson numbers, $Ri=0, 0.5, 1, 2$ and 4 , in order to see their effects on the value of the critical Reynolds number, Re_{cr} . Stability diagrams are established according to the numerical results of this investigation. These diagrams put in evidence the dependence of Re_{cr} with the increase of Ha for various values of Ri .

The second part, presents the numerical results of the three-dimensional flow, which were obtained by Fluent for the same configuration. The flow produced by co-rotating, when Re is increased, the axisymmetric basic state loses stability to circular patterns of axisymmetric vortices and spiral waves. In mixed convection, we have found that, the first instabilities to non-axisymmetric flow have azimuthal wavenumber $m=1$. In counter-rotation case, when Re is increased, the axisymmetric basic state loses stability and different complex flows appear successively: steady states with an azimuthal wavenumber of 1 (called M), traveling waves (TW), near-heteroclinic cycles (Het), and steady states with an azimuthal wavenumber of 2 (P). With in particular the appearance of mode $m=3$ for $Ha=20$. The branch of steady states with $m = 1$ is the first to bifurcate from the basic state in mixed convection as Re increases. The flow between co-rotating end disks is very different as the flow between counter-rotating end disks. Finally, a stability diagrams have been established, and this study confirms the possibility of stabilization of a liquid metal flow by application of an axial magnetic field.

Sommaire

Remerciements.....	ii
Résumé.....	iii
Abstract.....	iv
Nomenclature.....	vii
Liste des figures.....	x
Liste des tableaux.....	xvii
Introduction générale	1
Chapitre I : Généralités et revue bibliographique.....	3
I.1 Généralités :.....	3
I.1.1 Phénomène de pompage d'Ekman dans l'écoulement tournant:	4
I.1.2 Instabilités de couche limite :	5
I.1.3 Instabilités de cisaillement :.....	5
I.1.4 Ecoulement MHD	5
I.2 Revue bibliographique.	6
Chapitre II : Géométries-modèles mathématiques, et méthode numérique	17
II.1 Ecoulement axisymétrique:	17
II.1.1 Hypothèses simplificatrices :.....	18
II.1.2 Equations de transport:	19
II.1.3 Formes adimensionnelles des équations.....	21
II.1.4 Les conditions initiales et aux limites	23
II.1.5 Outils d'analyse de l'écoulement axisymétrique.....	25
II.2 Ecoulement non-axisymétrique:	26
II.2.1 Equations de transport tridimensionnelles:	27
II.2.2 Les conditions initiales et aux limites à l'état non-axisymétrique	28
II.3 Méthode numérique	30
II.3.1 Maillage.....	30
II.3.2 Discrétisation implicite de l'équation de transport à l'état axisymétrique	33

II.3.3	Algorithmes de résolution	36
Chapitre III	: Résultats et discussion de la première partie	42
III.1	Effet du maillage :	42
III.2	Validation du code :	44
III.3	Etats stationnaires :	47
III.3.1	Convection forcée ($Ri=0$):.....	47
III.3.2	Effet du gradient de température sur l'écoulement ($Ri=1$) :	48
III.4	Etats oscillatoires sans champ magnétique.....	49
III.4.1	Structure de l'écoulement	54
III.4.2	Diagramme de stabilité	58
III.5	Etats oscillatoires avec champ magnétique	60
III.5.1	Cas de co-rotation	65
III.5.2	Cas de contre-rotation	66
III.5.3	Diagrammes de stabilités	70
III.6	Conclusion de la première partie	74
Chapitre IV	: Résultats et discussion de la deuxième partie.....	76
IV.1	Introduction	76
IV.2	Validation des résultats.....	78
IV.3	Écoulement de base	81
IV.4	Dynamique de la convection en Co-rotation des disques d'extrémités.....	85
IV.4.1	Sans champ magnétique.....	85
IV.4.2	Avec champ magnétique.....	96
IV.5	Dynamique de la convection en Contre-rotation des disques d'extrémités.....	109
IV.5.1	Sans champ magnétique.....	109
IV.5.2	Avec champ magnétique.....	124
IV.6	Conclusion de la deuxième partie.....	141
Conclusion générale		143
Bibliographie		146

Nomenclature

a	: Coefficients dans le système d'équations algébriques discrétisées.
$A(p_i)$: Fonction d'un schéma numérique en fonction du nombre de Peclet.
B	: Champ magnétique (Tesla).
b	: Terme source dans le système d'équations algébriques discrétisées.
C_p	: Chaleur spécifique à pression constante ($\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$).
D	: Terme de diffusion dans le système d'équations algébriques discrétisées.
\vec{E}	: Champ électrique local [V]
$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$: Les vecteurs unitaires respectivement des directions radiale, axiale et azimutale
F	: Fréquence adimensionnelle.
F_{cr}	: Fréquence critique adimensionnelle.
F	: Terme de convection dans le système d'équations algébriques discrétisées.
$f'_{Lr}, f'_{Lz}, f'_{L\theta}$: Les composantes de la force électromagnétique de Lorentz respectivement radiale, axiale et azimutale (N. m^{-3})
$F_{Lr}, F_{Lz}, F_{L\theta}$: Les forces de Lorentz adimensionnelles respectivement dans les directions radiale, axiale et azimutale
g	: Accélération de pesanteur (m. s^{-2}).
Gr	: Nombre de Grashof. ($=\beta(T_h-T_c)gR^3/\nu^2$)
H	: Hauteur du cylindre (m)
Ha	: Nombre de Hartmann ($=BR\sqrt{\sigma/\rho\nu}$)
\vec{j}	: Densité volumétrique de courant (A. m^{-3}).
J_r, J_z, J_θ	: Les courants électriques adimensionnels respectivement dans les directions radiale, axiale et azimutale
N	: Paramètre d'interaction ($=\frac{Ha^2}{Re}$)
Nu	: Nombre de Nusselt local ($=-\gamma\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)_{z=0}$)
\overline{Nu}	: Nombre de Nusselt moyen ($=\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}Nu(r)rd\theta dr$)
m	: mode azimutal
p'	: La pression (N. m^{-2}).
p	: La pression adimensionnelle.

P_i	: Nombre de Péclet ($= \frac{F_i}{D_i}$).
Pr	: Nombre de Prandtl ($= \nu / \alpha$)
r'	: Direction radiale (m).
R	: Rayon du cylindre (m).
r	: Rayon adimensionnelle du cylindre
Ra	: Nombre de Rayleigh, ($= Pr \cdot Gr$)
Re	: Nombre de Reynolds ($= \Omega R^2 / \nu$)
Re_{cr}	: Nombre de Reynolds critique
Ri	: Nombre de Richardson. ($= Gr/Re^2$)
R_m	: Nombre de Reynolds magnétique ($= \mu_0 \sigma \Omega R$)
s	: Rapport de la vitesse angulaire du disque supérieur à celle du disque de fond
S_ϕ	: Terme source.
T	: Température(K).
t	: Temps (s).
T_c	: Température de disque froid (K).
T_h	: Température de disque chaud (K).
u'	: Composante de la vitesse suivant la direction radiale (m. s ⁻¹).
u	: Composante de la vitesse radiale adimensionnelle.
\vec{V}	: Vecteur de la vitesse dans le plan méridien.
v'	: Composante de la vitesse suivant la direction axiale (m. s ⁻¹).
v	: Composante de la vitesse axiale adimensionnelle.
VC	: Volume de contrôle (m ³)
w'	: Composante de la vitesse suivant la direction azimutale (m. s ⁻¹).
w	: Composante de la vitesse azimutale adimensionnelle.
z'	: Direction axiale (m).
z	: Hauteur adimensionnelle.

Symboles grecs

α	: Diffusivité thermique du liquide (m ² .s ⁻¹)
β	: Coefficient d'expansion thermique à pression constante (K ⁻¹)
γ	: Rapport d'aspect.

$\delta r_e, \delta z_n, \delta r_w, \delta z_s, \delta r_e$: Sont respectivement les distances entre le nœud considéré P et les nœuds (E, W, N, S)

δ_t : Epaisseur de la couche limite thermique(m)

θ : Direction azimutale (rad).

μ_m : Perméabilité magnétique ($H. m^{-1}$)

μ : Viscosité dynamique ($kg. m^{-1}.s^{-1}$)

μ_0 : Perméabilité magnétique du vide ($H. m^{-1}$).

ν : Viscosité cinématique ($m^2.s^{-1}$)

ρ : Masse volumique ($kg. m^{-3}$)

σ : Conductivité électrique ($\Omega^{-1}.m^{-1}$)

τ : Temps adimensionnel.

λ : Conductivité thermique ($W. m^{-1}. K^{-1}$).

φ : Potentiel électrique (V)

ω : Vorticité adimensionnelle

$\Delta\tau$: Incrément adimensionnel du temps

$\Delta r, \Delta z$: Dimensions du volume de contrôle considéré.

ψ : Fonction de courant adimensionnelle.

Ω : Vitesse angulaire ($rad. s^{-1}$).

Φ : Potentiel électrique adimensionnel

Θ : Température adimensionnelle.

ϕ : Variable dépendante.

Γ_ϕ : Coefficient de diffusion.

ζ : Rapport de rotation.

Indices

P : Nœud considéré du maillage

E, W, N, S : Nœud considéré du côté Est, Ouest, Nord, Sud, respectivement du nœud P

e, w, n, s : Les faces Est, West, Nord, Sud, respectivement du volume de contrôle considéré.

Liste des figures

Figure I-1 : Le frottement du fluide sur le fond de la tasse	4
Figure I-2 : Couche limite de fluide en rotation d'après Moisy et al.,2004.....	4
Figure I-3 : Ecoulement entre deux disques, avec le disque supérieur tournant.....	4
Figure I-4 : Schéma de l'écoulement entre disques en contre-rotation , δt et δb sont les épaisseurs de couches limites du disque supérieur (rapide) et inférieur (lent) . Les flèches indiquent l'écoulement méridien, séparé en deux cellules de recirculation (Moisy et Pasutto ,2002).....	5
Figure I-5 : Diagramme de stabilité obtenu expérimentalement par Escudier (1984).....	6
Figure I-6 : Dessin schématique d'expérience (Escudier et Cullen ,1996).....	7
Figure I-7 : Perspective tridimensionnelle des valeurs paramétriques successive, nombres de Reynolds Re et le rapport d'aspect γ (2750,1.58) ;(2800, 2.90) ;(2150,3.5) , d'après Lopez et al. (2002).....	8
Figure I-8 : Dessin de domaine d'écoulement d'après Okulov et al. (2005).....	8
Figure I-9 : Ecouements tridimensionnels avec une bulle axisymétrique de vortex breakdown fixée à la surface ,d'après Serre et Bontoux (2007).....	9
Figure I-10 : Configuration d'écoulement et conditions aux limites (Kakarantzas et al. ,2009).	16
Figure II-1 : Géométrie du problème axisymétrique.....	18
Figure II-2 : Schématisation des conditions aux limites du problème adimensionnel. Les parois de l'enceinte cylindrique sont électriquement isolantes.....	24
Figure II-3 : Géométrie du problème non-axisymétrique	26
Figure II-4 : Maillages bidimensionnels axisymétrique et nœuds du maillage.....	31
Figure II-5 :Volume de contrôle typique.....	31
Figure II-6 : Volume de contrôle décalés pour u et v dans un maillage entrelacé.....	32
Figure II-7 : Maillage utilisé avec raffinement près des parois (a) pour le cas axisymétrique avec ($n_r \times n_z=80 \times 160$), (b) pour le cas tridimensionnel non-axisymétrique	33
Figure II-8 : Volume de contrôle de l'équation de continuité.....	38
Figure III-1 : Distributions (a) axiale de vitesse u à $r=0.89$ et (b) radiale de la vitesse v à $z=1.02$ obtenues avec différentes densités de maillage pour le cas co-rotation, $Re=600$, $Ri=2$	43
Figure III-2 : Comparaisons avec Escudier (1984) des résultats expérimentales de contours des lignes de courant dans un cylindre de rapport $\gamma=H/R=2$, (a) $Re=1854$, (b) $Re=1002$, (c) $Re=1492$, (d) $Re=1449$	45

Figure III-3 : Contours de (a-d) lignes de courant, (b-e) température Θ , (c-f) vitesse azimutale w , pour le cas stable d, e, f représente la simulation avec Fluent, avec $Re=900$ et $Ri=1$ (co-rotation).....	45
Figure III-4 : Comparaison avec les résultats de Karcher et al.,2002 ; Kakarantzas et al.,2009 et nos résultats	45
Figure III-5 : Comparaison avec les résultats numériques obtenus par Gelfgat et al. (1996), dans le cas instable, qui présente l'évolution temporelle au cours d'une période complet $T=13.01$ des lignes de courant hydrodynamique pour le cas de $Re=3845$ et $\gamma=1.5$ (co-rotation).....	46
Figure III-6 : Contours de (a-a') lignes de courant, (b-b') température Θ , (c-c') vitesse azimutale w avec $Re=2000$ et $Ri=0$	48
Figure III-7 : Contours de (a-a') lignes de courant, (b-b') température Θ , (c-c') vitesse azimutale w avec $Re=900$ et $Ri=1$	48
Figure III-8 : Evolutions temporelles de composantes de vitesse axial v dans le cas de co-rotation $r=0.5$, $z=0.97$ pour $Ri=1$, $Re=900$ et $Re=926$ (cas stable) et $Re_{cr}=929$ (cas oscillatoire).....	50
Figure III-9 : Evolution temporelle de u , v , w , and Θ au point ($r=0.493$, $z=0.413$).....	51
Figure III-10 : Densité du spectre d'énergie obtenue par transformation de Fourier de la composante de vitesse u au point ($r=0.493, z=0.975$), pour (a) $Re_{cr}=2645$ et $Ri=0$, (co-rotation) avec $\Delta\tau=10^{-4}$ et $N_{ech}=2^{20}$ (b) $Re_{cr}=928$ et $Ri=1$,co-rotation) avec $\Delta\tau=10^{-3}$ et $N_{ech}=2^{19}$	52
Figure III-11 : Cycles limites pour tracée des composantes de vitesse oscillatoires (a) plan de phase (u, v) au point ($r=0.201, z=0.975$) pour $Re_{cr}=448$ et $Ri=4$ (co-rotation).(b) plan de phase (v, w) au point ($r=0.493, z=0.413$) pour $Re_{cr}=944$, $Ri=1$ (contre-rotation).....	53
Figure III-12 : Evolution temporelle de composante de vitesse u au point ($r=0.493, z=0.413$) avec des temps choisis (a, b, c, d, e, f et g) pour visualiser les divers topologies de l'écoulement à $Re_{cr}=928, Ri=1$ (co-rotation).....	56
Figure III-13 : Evolution temporelle des contours (Ψ, Θ et w) aux temps $\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d, \tau_e, \tau_f$ et τ_g pour $Re_{cr}=928$ et $Ri=1$ (co-rotation).....	56
Figure III-14 : Evolution temporelle de au point ($r=0.493, z=0.975$) avec des temps choisis (a, b, c, d, e, f et g) pour visualiser les divers topologies de l'écoulement à $Re_{cr}=944$ et $Ri=1$	57
Figure III-15 : Evolution temporelle des contours (Ψ, Θ et w) aux temps $\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d, \tau_e, \tau_f$ et τ_g pour $Re_{cr}=944$ et $Ri=1$ (contre-rotation).....	57
Figure III-16 : Diagrammes de stabilité.....	59
Figure III-17 : atténuation de la variation temporelle de vitesse et de Nusselt moyen (au niveau des deux disques) par un champ magnétique axiale au point ($r=0.493, z=0.975$) , à $Re=1038$, $Ri=1$ pour quatre valeur du nombre de Hartmann, $Ha=3, 8, 10$ et $Ha_{cr}=10.4$	62

Figure III-18: Contours de (a) lignes de courant, (b) température Θ , (c) vitesse azimutale w (d) vecteur vitesse $(u-v)$ et (e) contour de courant électrique $(jr-jz)$ pour le cas stable $Re=1038$, $Ri=1$ et $Ha_{cr}=10.4$	62
Figure III-19: Contours de (a) lignes de courant, (b) température Θ , (c) vitesse azimutale w , (d) vecteur vitesse $(u-v)$ et (e) courant électrique $(jr-jz)$ pour le cas stable $Re=2395$, $Ri=0$ et $Ha=5$	63
Figure III-20 : Cas de $Ri=1$ et $Ha=10$, avec $Re_{cr}=1034$ (co-rotation) et $Re_{cr}=1129$ (contre-rotation), (a-b): Densité du spectre d'énergie (PSD) de la composante de vitesse v au point $(r=0.493, z=0.975)$, (c-d): Cycles limites pour tracée des composantes de vitesse oscillatoires dans le plan de phase (u, v) au point $(r=0.201, z=0.975)$	64
Figure III-21: Evolution temporelle des contours $(\Psi$ et $\Theta)$ aux temps $\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d, \tau_e, \tau_f$ et τ_g , pour le cas de co-rotation avec deux nombre de Hartmann $Ha=5$ et $Ha=30$	68
Figure III-22: Evolution temporelle des contours $(\Psi$ et $\Theta)$ aux temps $\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d, \tau_e, \tau_f$ et τ_g pour le cas de contre-rotation avec deux nombre de Hartmann $Ha=5$ et $Ha=30$	69
Figure III-23 : Diagramme de stabilité $Re_{cr}-Ri$	72
Figure III-24 : Diagramme paramétrique de stabilité $(Re_{cr}-Ha)$	73
Figure IV-1 : Résultats obtenus (bas) comparé avec Nore et al.2004 (haut) à l'état mixte M pour $Re=355$, près de la bifurcation à $Re_M=349$. Isocontours de la vitesse verticale à, (a) $z=-\gamma/6$, (b) $z=0$, (c) $z=\gamma/6$	79
Figure IV-2 : Comparaison des contours axisymétriques des composantes de vorticity (a) axiale (b) radiale (c) azimutale avec les résultats numériques (adroite de chaque figure) obtenue par Lopez, 2012, pour le cas de $Re=2300$ et $H/R=3.5$	79
Figure IV-3 : comparaison avec Gelfgat et al.2001 (adroite) et notre résultat simulé par Fluent (côté gauche) Contours de (a) lignes de courant, (b) température Θ , le cas de $Ha=30$, $Pr=0.015$ et $Gr=3.02 \times 10^6$	80
Figure IV-4 : Comparaison de potentiel électrique, densité de courants et champ magnétique induits à l'ordre 1 avec les données numériques (b) figurées dans Bourgoïn et al., 2004 pour le cas de contre-rotation des disques d'extrémités et champ magnétique axial.....	80
Figure IV-5 : comparaison des (a) lignes de courant Ψ (b) température Θ , calculées par Kakarantzas et al.2009 avec nos résultats numériques (c) ,(d) respectivement correspondants, pour le cas $Pr=0.0321, \gamma=1, Ra=10^5$ et $Ha=10$	80
Figure IV-6 : Géométrie et symétries : (a) Schémas des symétries, d'après Nore et al.,(2004) . Contours des vecteurs du champ méridien (b) co-rotation à $Re = 1900$, (c) contre-rotation à $Re = 300$	81

Figure IV-7 : Etat de base pour $\gamma=2$ à $Re=1000$. Isocontours et isosurfaces de vitesse (a) radiale (b) axiale et (c) azimutale, noter que u et w sont invariant au cours de la réflexion en z tandis que v change de signe. Les valeurs positives indiquées par des lignes continues et les valeurs négatives par des lignes pointillées.....	83
Figure IV-8 : Etat de base pour le cas contre-rotation à $Re=300$. Isocontours et isosurfaces de vitesse (a) radiale (b) axiale et (c) azimutale, noter que u est invariant au cours de la réflexion en z tandis que v et w changent de signe. les valeurs positives indiquées par des lignes continues et les valeurs négatives par des lignes pointillées.....	84
Figure IV-9 : Vues de dessus des différents motifs d'écoulement : $z=-0.5$ (à droite) , $z=0$ (au milieu) et $z=0.5$ (à gauche).....	87
Figure IV-10 : champ de vecteurs (v, w) à $z=-0.5$ (à droite) , (b) $z=0$ (au milieu), $z=+0.5$ (à droite) , pour le cas de $Re=2200$ et $Ri=0$	88
Figure IV-11 : Etat de base axisymétrique à $Re=1915$. Isosurfaces de vitesse (a) radiale (b) azimutale, noter que u et w sont invariant au cours de la réflexion en z . Les valeurs positives indiquées par le rouge et les valeurs négatives par le bleu.....	88
Figure IV-12 : $Re=1925$, près de la bifurcation à $Re=1920$: Contours de la vitesse azimutale (haut), vecteurs du champ méridien (milieu), les isosurfaces de la vitesse radiale montrant un tourbillon (vortex) à $r=0.70$ et champ de vecteurs vitesse (v, w) à $r=0.70$ (bas).....	89
Figure IV-13 : Isocontours de la vitesse axiale de l'état stationnaire correspondant (a) à l'état axisymétrique stationnaire (b) à la naissance d'instabilité au milieu de cylindre (milieu) de cylindre (c) au mode azimutal $m = 1$ complètement développé (à gauche).....	91
Figure IV-14 : Isocontours de la vitesse axiale v , à $z=-0.5$ (à droite), (b) $z=0$ (au milieu), $z=+0.5$ (à droite) correspondant au changement d'état en augmentant le nombre de Re avec $Ri=1$	91
Figure IV-15 : isocontours de la vitesse radiale (à gauche), axiale (au milieu) et azimutale (à droite), tracées au plan méridien à $r=0$ et la vue de dessus à $z=0$ correspondant à chaque composante de vitesse.....	92
Figure IV-16 : champ conductif de température à $Re=200$, $Ri=0.5$ et convectif à $Re=250$ et $Ri=0.5$	93
Figure IV-17 : Diagramme de stabilité $Re-Ri$	95
Figure IV-18 : isocontours de la vitesse radiale (haut) ; axiale (milieu) et azimutale (bas), tracées au plan méridien à $r=0$ et la vue de dessus à $z=0$ pour le cas de $Re=2300$, $Ri=0$ et $Ha=0$; 5 et 20.....	98
Figure IV-19 : Contours des vecteurs du champ méridien à $r=0$ pour le cas de $Re=2300$, $Ri=0$ avec $Ha=0, 5$ et 20.....	99

Figure IV-20 : Distribution radiale de vitesse axiale, v à $z=0$ $\theta=0$ (échelle 1/10) avec $Re=2300$, $Ri=0$ et $Ha=0, 5, 20$	99
Figure IV-21 : L'effet de l'intensité du champ magnétique sur les nombres de Nusselt locaux au disque inferieur chaud du cylindre (échelle 1/10) avec (a) $Re=200$ $Ri=1$ et $Ha=5 ;20$ (b) $Re=410$, $Ri=0.5$ et $Ha=5 ;10$	99
Figure IV-22 : Isosurfaces et Isocontours de la vitesse axiale pour le cas $Re=2300$, $Ri=0.5$ et $Ha=20$, appliqué Horizontalement (à droite) , appliqué verticalement (à gauche), les isocontours tracées à $z=-0.8, z=0$ et $z=0.8$	100
Figure IV-23 : champ (a) convectif de température à $Re=300$ et $Ri=2$ et $Ha=10$ (b) conductif à $Re=300$, $Ri=2$ et $Ha=30$	100
Figure IV-24 : Champ vectoriel des courants électriques (J_r-J_z) au plan méridien $r=0$ (haut) et champ vectoriel des courants électriques (J_z-J_θ) à $r=0.7$ (bas) au sein du fluide conducteur pour $Re=2300$, $Ri=0$ et $Ha=5 ;20$	101
Figure IV-25 : Isocontours au plan $r=0$ (à droite) et isosurfaces (à gauche) de potentiel électrique infecté par la co-rotation des disques d'extrémités et gradient de la température, la couleur bleue correspond aux valeurs négatives, la couleur rouge correspond aux valeurs positives.....	103
Figure IV-26 : Diagrammes de stabilité $Re-Ha$ pour le cas $Ri=0$ (haut) et $Ri=0.5$ (bas)....	106
Figure IV-27 : Diagrammes de stabilité $Re-Ri$ pour le cas $Ri=1$ (haut) et $Ri=2$ (bas).....	107
Figure IV-28 : Diagramme paramétrique de stabilité ($Re_{cr}-Ha$).....	108
Figure IV-29 : L'état de réflexion symétrique pour $Re=300$, $Ri=0$ (contre-rotation).....	112
Figure IV-30 : Diagramme de bifurcation théorique en fonction de Re . Les solutions stables sont indiquées en trait continu, les instables en tiré et les pseudo-cycles hétéroclines en zone hachurée. Les lignes en point-tiré sont les branches non calculées	112
Figure IV-31 : Le mode mixte (M) à $Re=380$, $Ri=0$, la vue de dessus des isocontours de la vitesse axiale à $z=-0.33, 0, +0.33$ (haut), contours de la vitesse azimutale (milieu) et vecteurs du champ méridien (bas).....	113
Figure IV-32 : Mode Mixte (M) à $Re=380$, $Ri=0$ (a) Isosurfaces de la vitesse axiale (b) les isosurfaces de la vitesse radiale montrant le vortex monopole (tourbillon radiale) à $r=0.75$ centré autour du point elliptique près de $\theta=\pi, z=0$ et diamétralement opposé au point hyperbolique près de $\theta=0, z=0$ (c) isocontours de la vitesse radiale à $r=0.75$ présente la position du vortex monopole qui caractérise le mode mixte.....	114
Figure IV-33 : Contours de la vitesse axiale à $z=-0.33, z=0, z=0.33$ présente les ondes tournante (TW) à $Re=415, Ri=0$,.....	114

Figure IV-34 :Evolution temporelle d'un signal numérique de vitesse verticale pour (a) les ondes tournantes modulées à $Re = 427.35$, (b) les pseudo-cycles hétéroclines à 4 plateaux à $Re = 430$, (c) les pseudo-cycles à 2 plateaux à $Re = 435$. D'après Nore et al. (2003).....	114
Figure IV-35 : Le mode Pur (P) à $Re=500$, $Ri=0$, la vue de dessus des isocontours de la vitesse axiale à $z=-0.33, 0, +0.33$ (haut), contours de la vitesse azimutale (milieu) et vecteurs du champ méridien (bas).....	115
Figure IV-36 : Mode Pur (P) à $Re=500$, $Ri=0$ avec $m=2$ (a) Isosurfaces de la vitesse axiale (b) les isosurfaces de la vitesse radiale montrant une paire de tourbillons co-rotatifs (une paire vortex) à $r=0.75$ centré autour du point elliptique près de $\theta=\pi$, $z=0$ et diamétralement opposé au point hyperbolique près de $\theta=0$, $z=0$ (c) isocontours de la vitesse radiale à $r=0.75$ présente la position du paire vortex qui caractérise le mode pur.....	116
Figure IV-37 : Diagramme de bifurcation en fonction de Re , présente les différentes modes à $z=-0.5$, (haut) $z=0$ (milieu) et $z=0.5$ (bas)	116
Figure IV-38 : Le mode mixte (M) à $Re=280$, $Ri=0.5$, (a) la vue de dessus des isocontours de la vitesse axiale à $z=-0.5, 0, +0.5$ (b) contours de la vitesse azimutale (c) isocontours de la vitesse axiale, v (d) isocontours de la vitesse radiale, u et (e) vecteurs vitesses du champ méridien (u, v)	119
Figure IV-39 : Mode mixte (M) à $Re=280$, $Ri=0.5$ avec $m=1$ (a) Isosurfaces de la vitesse axiale (b) les isosurfaces de la vitesse radiale montrant un tourbillon (vortex) à $r=0.70$ de forme hélicoïdale (c) isocontours de la vitesse radiale à $r=0.75$ présente la position de vortex (d) champ de vecteurs vitesses (v, w) à $r=0.7$	120
Figure IV-40 : Les nombres de Nusselt locaux au disque inferieur chaud du cylindre avec (a) $Re=280$ $Ri=0.5$ (b) champ conductif de température à $Re=280$, $Ri=0.5$	120
Figure IV-41 : Le mode $m=1$ à $Re=450$, $Ri=0.5$, la vue de dessus des isocontours de la vitesse axiale à $z=-0.5, 0, +0.5$ (haut), contours de la vitesse axiale et vecteurs vitesses du champ méridien (u, v) (bas).....	121
Figure IV-42 : Mode $m=1$ à $Re=450$, $Ri=0.5$ (a) Isosurfaces de la vitesse axiale (b) les isosurfaces de la vitesse radiale montrant un tourbillon (vortex) à $r=0.70$ (c) champ de vecteurs vitesses (v, w) à $r=0.70$	121
Figure IV-43 : (a) la vue de dessus des isocontours de la vitesse axiale au milieu de cylindre, $z=0$ (b) les isosurfaces de la vitesse radiale montrant un tourbillon (vortex) à $r=0.70$ (c) champ de vecteurs vitesses (v, w) à $r=0.70$ (d) champ de température.....	122
Figure IV-44 : Diagramme de stabilité $Re-Ri$ pour le cas $Ha=0$ (contre-rotation).....	123

Figure IV-45 : mode $m=2$ à $Re=506, Ri=0$ et $Ha=5$ (a) Isosurfaces de la vitesse axiale et la vue de dessus des isocontours de la vitesse axiale à $z=-0.5, 0$ et $+0.5$, (b) les isosurfaces de la vitesse radiale montrant un deux tourbillon (vortex) co-rotatif à $r=0.70$ (c) champ de vecteurs vitesses méridien (u, v) (d) champ de vecteurs vitesse (v, w) à $r=0.70$ (e) potentiel électrique (f) Champ vectoriel des courants électriques (J_r-J_z) au plan $r=0$ (g) Champ vectoriel des courants électriques (J_z-J_θ) à $r=0.7$	127
Figure IV-46 : mode $m=2$ à $Re=955, Ri=0$ et $Ha=10$ (a) Isosurfaces de la vitesse axiale et la vue de dessus des isocontours de la vitesse axiale à $z=-0.5, 0$ et $+0.5$, (b) les isosurfaces de la vitesse radiale montrant un deux tourbillon (vortex) co-rotatif à $r=0.70$ (c) champ de vecteurs vitesses méridien (u, v) (d) champ de vecteurs vitesse (v, w) à $r=0.70$ (e) potentiel électrique (f) Champ vectoriel des courants électriques (J_r-J_z) au plan $r=0$ (g) Champ vectoriel des courants électriques (J_z-J_θ) à $r=0.7$	128
Figure IV-47 : mode $m=3$ à $Re=2300, Ri=0$ et $Ha=20$ (a) Isosurfaces de la vitesse axiale et la vue de dessus des isocontours de la vitesse axiale à $z=-0.5, 0$ et $+0.5$, (b) les isosurfaces de la vitesse radiale montrant un deux tourbillon (vortex) co-rotatif à $r=0.70$ (c) champ de vecteurs vitesses méridien (u, v) (d) champ de vecteurs vitesse (v, w) à $r=0.70$ (e) potentiel électrique (f) Champ vectoriel des courants électriques (J_r-J_z) au plan $r=0$ (g) Champ vectoriel des courants électriques (J_z-J_θ) à $r=0.7$	129
Figure IV-48 : mode $m=3$ à $Re=4000, Ri=0$ et $Ha=30$ (a) Isosurfaces de la vitesse radiale (b) isosurfaces de la vitesse axiale (c) isosurfaces de la vitesse tangentielle	130
Figure IV-49 : mode $m=3$ à $Re=4000, Ri=0$ et $Ha=30$ (a) contours de la vitesse radiale et lignes de courant tracée à la surface montrant trois vortex (a) la vue de face (b) la vue de droite.....	130
Figure IV-50 : mode $m=1$ avec $Re=360, Ri=0.5$ et $Ha=5$ (a) la vue de dessus des isocontours de la vitesse axiale à $z=-0.5, 0$ et $+0.5$, (b) les isosurfaces de la vitesse radiale à $r=0.70$ (c) potentiel électrique (d) Champ de température.....	134
Figure IV-51 : mode $m=1$ avec $Re=400, Ri=0.5, Ha=5$ (a) la vue de dessus des isocontours de la vitesse axiale à $z=-0.5, 0$ et $+0.5$, (b) les isosurfaces de la vitesse radiale à $r=0.70$ (c) potentiel électrique (d) Champ de température.....	134
Figure IV-52 : mode $m=1$ avec $Ha=20$ (a) les iso-lignes de la vitesse verticale dans le plan horizontal central de la géométrie cylindrique ($z=0$) (b) les isosurfaces de la vitesse radiale à $r=0.70$ (c) potentiel électrique (d) champ de température.....	135
Figure IV-53 : Diagrammes de stabilité $Re-Ha$ pour le cas $Ri=0$ (haut) et $Ri=0.5$ (bas).....	138
Figure IV-54 : Diagrammes de stabilité $Re-Ha$ pour le cas $Ri=1$ (haut) et $Ri=2$ (bas).....	139
Figure IV-55 : Diagramme paramétrique de stabilité ($Re_{cr}-Ha$) pour le cas contre-rotation...	140

Liste des tableaux

Tableau II-1 : Différentes quantités transportées et leurs termes de transport.....	34
Tableau III-1 : Influence des densités de maillage sur les valeurs maximales et minimales de la fonction de courant Ψ , pour différents valeurs de Re à la proximité du nombre de Reynolds critique (transition vers un régime oscillatoire).	43
Tableau III-2 : Comparaison avec des études numériques précédentes, l'influence de la grille et le rapport d'aspect sur le nombre de Reynolds critique Re_{cr}	46
Tableau III-3 : Fréquences critiques correspondantes aux Reynolds critiques trouvés pour $Ha=0$ et différentes valeurs de Ri ($=0, 0.5, 1,2$ et 4).....	58
Tableau III-4 : Fréquences critiques correspondantes aux Reynolds critiques trouvés pour Ha ($=5, 10, 20,30$) et différentes valeurs de Ri ($=0, 0.5, 1,2$ et 4).....	71
Tableau IV-1 : propriétés physique de l'Aluminium liquide d'après Davidson (2001).....	77
Tableau IV-2 : Reynolds critiques trouvés en co-rotation pour $Ha=0$ et différentes valeurs de Ri ($=0, 0.5, 1$ et 2)	95
Tableau IV-3 : Reynolds critiques trouvés en co-rotation pour Ha ($=5, 10, 20,30$) et différentes valeurs de Ri ($=0, 0.5, 1,2$ et 4).....	105
Tableau IV-4 : Reynolds critiques trouvés en contre-rotation pour $Ha=0$ et différentes valeurs de Ri ($=0, 0.5, 1$ et 2).....	123
Tableau IV-5 : Reynolds critiques trouvés en contre-rotation pour Ha ($=0, 5, 10, 20,30$) et différentes valeurs de Ri ($=0, 0.5, 1,2$ et 4).....	140

Introduction générale

L'étude d'un écoulement laminaire en régime de convection mixte à faible nombre de Prandtl (métaux liquides) dans une géométrie cylindrique a fait l'objet de nombreuses recherches théoriques et expérimentales au cours des dernières années du fait de ses nombreuses applications industrielles, telles que le pompage des métaux liquides à hautes températures de fusion, la production des cristaux par le procédé de tirage Czochralski. Elles mettent en évidence la complexité de l'instabilité d'un tel écoulement. Les travaux théoriques portant sur ce sujet reposent sur une approche linéaire et numérique du problème. Cette instabilité se traduit par un changement topologique au voisinage de la solution stationnaire étudiée, obtenue à partir des équations de Navier-Stokes du système associé, lorsque certains des paramètres sans dimension pertinents du problème franchissent un seuil donné (Su et al., 2000 ; Chen et al., 1996). En outre, si l'écoulement n'est pas stable, des défauts dans le cristal formé apparaissent (des problèmes d'impureté et non-homogénéité des métaux liquides). Pour obtenir des cristaux de haute qualité, il est utile de contrôler la convection dans le fluide. Puisqu'un champ magnétique influe l'écoulement du fluide électriquement conducteur, il est suggéré que le mouvement du fluide peut être contrôlé en cultivant un cristal en présence d'un champ magnétique. Sans oublier que le comportement hydrodynamique du métal liquide joue un rôle principal dans la détermination de la qualité du cristal.

- **Objectif de l'étude**

Dans la première partie, notre effort se concentrera sur l'éclaircissement de l'effet d'un champ magnétique sur l'écoulement, et la détermination des instabilités oscillatoires (Bifurcation de Hopf), qui naissent dans l'écoulement à l'état axisymétrique engendré par deux disques tournants en Co/contre-rotation, à l'intérieur d'une enceinte cylindrique fixe remplie d'un fluide à faible nombre de Prandtl ($Pr=0.015$), soumise à un champ magnétique orienté verticalement et à un gradient de température. Avec la compréhension qu'elle fournisse cette configuration, des mécanismes qui contrôlent la physique du mouvement, en faisant la comparaison entre l'écoulement en co-rotation et ce en contre-rotation des disques d'extrémités avec et sans champ magnétique et l'effet du gradient vertical de température. Pour cela on va déterminer la valeur critique du nombre de Reynolds Re_{cr} , pour chaque valeur de Richardson, $Ri= 0, 0.5, 1, 2$ et 4 , et du nombre de Hartmann, $Ha=0$ (absence du champ magnétique), $5, 10, 20, 30$ (présence du champ magnétique).

Dans la deuxième partie, nous montrons que l'axisymétrie de l'écoulement est brisée par une bifurcation régulière dont nous présentons les seuils en fonction du nombre de Richardson et l'intensité du champ magnétique (donnant ainsi les limites d'existence de la solution axisymétrique). Enfin, nous présentons l'aspect d'un écoulement pleinement tridimensionnel, en utilisant le code de simulation Fluent

- **Organisation du mémoire**

Le premier chapitre est consacré à l'intérêt pratique du thème, résidant derrière l'importance primordiale d'étudier la stabilité des écoulements tournants confinés avec et sans champ magnétique, et l'effet du gradient vertical de température. Ainsi, une étude bibliographique est rapportée sur les instabilités hydrodynamiques et thermiques de convection forcée et mixte des métaux liquides dans des configurations similaires à celle traitée dans notre étude et les écoulements MHD.

Le deuxième chapitre détaille la géométrie, le modèle mathématique décrivant la convection mixte des écoulements axisymétriques en régime transitoire et non-axisymétrique en régime stable et la méthode numérique des volumes finis pour la résolution des systèmes d'équations différentielles partielles couplées et non-linéaires.

Le troisième chapitre présente la validation du code de calcul, et les résultats obtenus commentés et visuellement récapitulés de la première partie concernant l'écoulement axisymétrique suivi d'une conclusion.

Le quatrième chapitre présente les résultats de la deuxième partie obtenus à l'aide de CFD Fluent de l'écoulement tridimensionnel non-axisymétrique, suivi d'une conclusion générale.

Chapitre I : Généralités et revue bibliographique

Ce chapitre est consacré à la littérature sur la stabilité des écoulements tournants. Il sera divisé en deux parties. Nous verrons d'abord des notions sur les différentes formes d'instabilités et les écoulements MHD. Puis les principales étapes de l'histoire de l'étude des écoulements tournants de convection mixte avec et sans champ magnétique.

I.1 Généralités :

Nous constatons, après avoir remué le thé ou la tisane, que les débris de feuilles ou autres petits résidus solides plus denses que l'eau étaient ramenés vers le centre de la tasse. Nous attendons à les voir au contraire repoussés vers l'extérieur sous l'effet de la force centrifuge. Ce paradoxe s'explique par le frottement du fluide sur le fond de la tasse, qui diminue la vitesse de rotation du fluide. La force centrifuge, variant comme le carré de la vitesse de rotation, est donc plus faible au fond de la tasse que sur le reste de la hauteur. Ce déséquilibre induit un écoulement de recirculation vers le centre au fond de la tasse et, par conservation de la masse, vers l'extérieur dans le reste de la hauteur (voir la Figure I-1). Cette circulation centripète du fluide porte le nom de couche de Bödewadt (1940), du nom du mécanicien des fluides allemand qui a décrit la situation idéalisée d'un fluide en rotation uniforme au-dessus d'une paroi immobile infinie. La zone de fluide ralentie par le frottement sur la paroi porte le nom de *couche limite*, et joue un rôle clé en mécanique des fluides (Fig. I-2). Son épaisseur, notée δ , est la distance sur laquelle la rotation imposée Ω est diffusée sous l'effet de la viscosité dans les couches intermédiaires du fluide. Dans le cas idéalisé d'un fluide en rotation au-dessus d'une paroi infinie, on peut montrer que $\delta \approx (\nu/\Omega)^{1/2}$ (où ν est la viscosité cinématique du fluide), qui est une constante sur toute la surface du disque, et dans laquelle n'intervient pas en particulier la distance r à l'axe de rotation (Moisy et al., 2004). La stabilité des écoulements en rotation est un sujet très vaste, lié à un grand nombre d'applications. Ce problème de stabilité des écoulements tournants est très délicat, du fait de deux effets antagonistes: - Un effet stabilisant, lié à une décroissance des perturbations selon la direction de l'axe de rotation ; ainsi la rotation tend à bidimensionnaliser l'écoulement. - Des effets déstabilisants, liés à un déséquilibre des forces centrifuges, à cause par exemple du frottement aux parois (comme dans le cas de la tasse de thé); on parle alors d'instabilités centrifuges. Ces difficultés rendent quasiment impossible la recherche de solutions exactes. Dans ce contexte, les expériences ou les simulations numériques s'avèrent indispensables pour étudier la stabilité des écoulements tournants, en s'appuyant sur une analyse en termes de mécanismes

physiques élémentaires. Ce domaine de recherche est particulièrement actif, tant du point de vue numérique qu'expérimental,

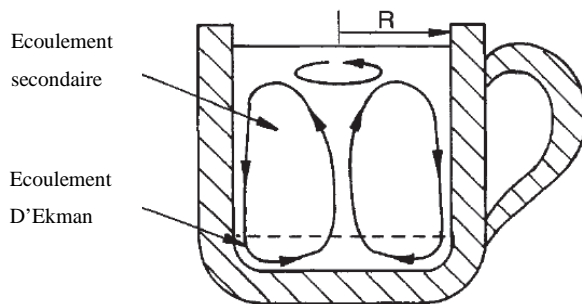


Figure I-1 : Le frottement d'un fluide sur le fond de la tasse

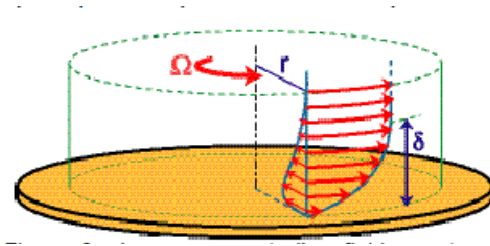


Figure I-2 : Couche limite d'un fluide en rotation d'après Moisy et al.,2004.

I.1.1 Phénomène de pompage d'Ekman dans l'écoulement tournant:

Ce phénomène se produit chaque fois qu'il y a un écoulement d'un fluide visqueux en contact avec un disque tournant infini. Le disque tournant exerce sur le fluide une force d'attraction le long de la région centrale (au voisinage de l'axe de rotation), et l'accélère radialement en le dirigeant vers l'extérieur dans une couche limite d'épaisseur $(1/\sqrt{Re})$ dite couche d'Ekman (Fig. I-3). Près de la paroi latérale du cylindre, le fluide tourne et suit des spirales en se dirigeant vers l'autre extrémité du cylindre, alors en dehors des zones pariétales (loin des parois) génèrera un équilibre entre les forces centrifuges et le gradient radial de pression, et a comme conséquence ; la présence d'un écoulement secondaire qui est la recirculation méridienne (Davidson ,2001).

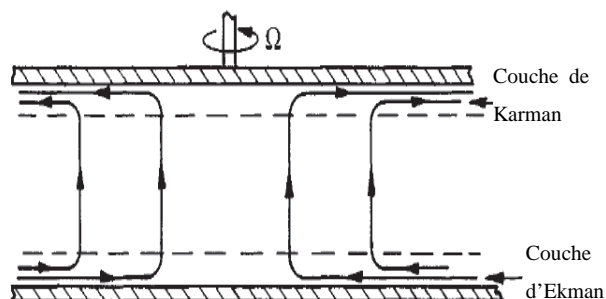


Figure I-3 : Ecoulement entre deux disques, avec le disque supérieur tournant

I.1.2 Instabilités de couche limite :

L'instabilité de couche limite présente, sous forme de motifs axisymétriques ou spiralés (**Gauthier et al. ,1999**). Ces instabilités sont présentes dans la configuration rotor-stator, ou lorsque les deux disques tournent dans la même direction (co-rotation)

I.1.3 Instabilités de cisaillement :

Cette nouvelle instabilité, propre à l'écoulement contre-rotation, s'explique par la particularité de l'écoulement de base dans cette configuration, schématisé en figure (1-4). En effet, à rapport de contre-rotation suffisamment élevé, chaque disque tend à développer une couche limite centrifuge. L'écoulement sortant associé au disque rapide donne lieu à une recirculation centripète à la périphérie du disque lent du fait du confinement latéral. De la compétition entre les couches limites centrifuge et centripète sur le disque lent résulte un cercle de stagnation, provoquant le décollement de la couche limite centripète et donnant naissance à une couche de cisaillement libre dans l'épaisseur inter-disque. Cette couche de cisaillement peut éventuellement, à suffisamment haut nombre de Reynolds, devenir instable (**Daube et al.,2002 ; Hide et Titman, 1967 ; Rabaud et Couder, 1983 ; Moisy et Pasutto ,2002**).

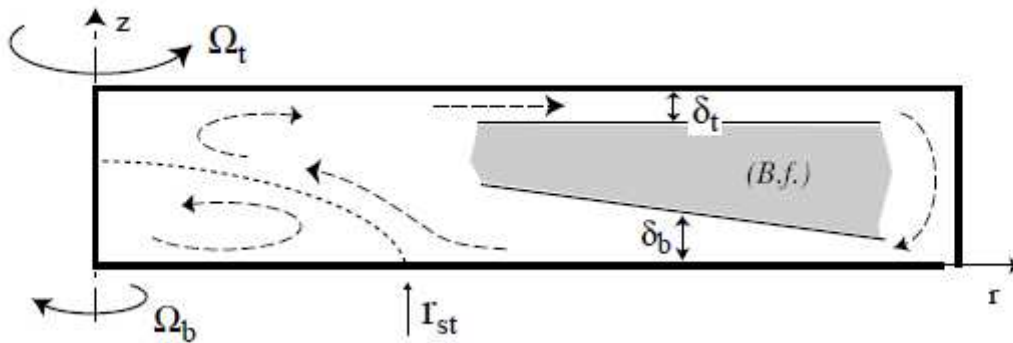


Figure I-4: Schéma de l'écoulement entre disques en contre-rotation, δ_t et δ_b sont les épaisseurs de couches limites du disque supérieur (rapide) et inférieur (lent). Les flèches indiquent l'écoulement méridien, séparé en deux cellules de recirculation (**Moisy et Pasutto ,2002**)

I.1.4 Écoulement MHD

Les écoulements des fluides conducteurs en présence d'un champ magnétique sont nommés des écoulements magnétohydrodynamiques (MHD en abrégé). Un écoulement MHD peut différer significativement d'un écoulement hydrodynamique ordinaire équivalent. Le mouvement du métal fondu à travers des lignes de champ magnétique produit un courant électrique qui agit

réciproquement avec le champ magnétique pour produire une force motrice électromagnétique (EM), qui s'oppose au mouvement du liquide. Même un champ magnétique faible fournit assez de force EM d'amortissement pour éliminer la turbulence et l'instabilité dans la plupart du mouvement concerné, éliminant ainsi beaucoup de micro-défauts dans le cristal. Le taux d'amortissement dépendra en vertu de la force du champ magnétique appliqué aussi bien que son orientation en ce qui concerne la circulation convective (Bessaïh et al. ,1999).

I.2 Revue bibliographique.

Plusieurs études numériques ont été menées sur la stabilité des écoulements tournants, **Escudier** (1984) a utilisé la technique dite Laser-induced fluorescence (fluorescence induite par laser) pour visualiser l'écoulement tourbillonnaire d'un fluide (glycérine/eau) occupant toute le volume d'une enceinte cylindrique avec un fond tournant ,il a découvert le comportement de l'écoulement avec une , deux, et trois bulles du vortex breakdown et établissait un diagramme de stabilité (rapport d'aspect du cylindre H/R et le nombre de Reynolds en rotation $\Omega R^2/\nu$), voir la figure (I-5). Les limites du nombre de Reynolds au delà desquelles l'écoulement est oscillatoire et même pour les grands nombres de Reynolds sont présentées sur ce diagramme, où le vortex breakdown peut se manifester avec une, deux ou trois bulles stationnaires successivement. Une autre observation qu'apportaient les expériences d'Escudier est la perte négligeable de la symétrie axiale au sein de l'écoulement permanent, ce qui justifie notre hypothèse de l'axisymétrie de l'écoulement en question.

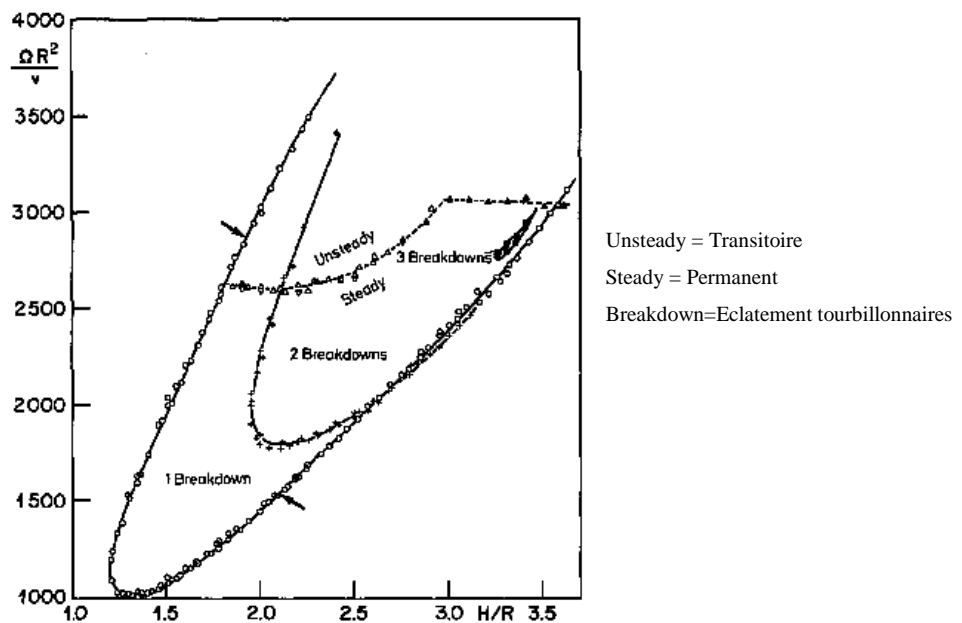


Figure I-5: Diagramme de stabilité obtenu expérimentalement par Escudier (1984)

Dans un autre article **Escudier et Cullen** (1996) ont utilisé la technique dite laser-induced fluorescence d'un liquide viscoélastique pour visualiser l'écoulement tourbillonnaire, stationnaire occupant complètement le volume d'une enceinte cylindrique avec un fond tournant (Fig. I-6). Ils ont observé qu'un vortex intense s'est produit à proximité du fond tournant avec l'écoulement qui se développe en spirale à l'extérieur au dessus du fond lui même, ce vortex conduit un deuxième vortex qui circule en contre rotation avec une intensité plus basse dans la région du fond stationnaire. Ils ont observé aussi dans quelque circonstance un gicleur axial de fluide s'éloigner du fond tournant avec une structure de double vortex dans l'écoulement des liquides viscoélastiques légers et des liquides élastiques avec faible nombre de Reynolds.

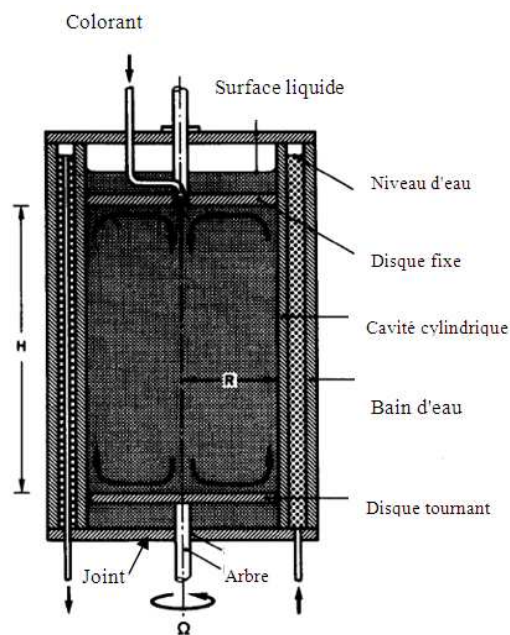


Figure I-6: Dessin schématique d'expérience (Escudier et Cullen ,1996)

Gelfgat et al. (1996) ont étudié l'influence de la rotation des deux disques d'extrémités qui tournent et le début des instabilités oscillatoires puis, ils ont détaillé des états stables et le début des instabilités oscillatoires, de l'écoulement tournant axisymétrique du fluide Newtonien incompressible confiné dans un cylindre droit, avec deux disques au sommet et au fond qui tournent indépendamment l'un par rapport à l'autre.

Lopez et al. (2002) ont utilisé la méthode spectral-Galerkin pour résoudre les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles d'un écoulement incompressible dans une enceinte cylindrique avec un fond tournant (Fig. I-7). Ils ont avec succès appliqué un code numérique où ils ont obtenu plusieurs états tridimensionnels bifurqués, avec un comportement spatial et temporel complexe, en bon accord avec les expériences.



Figure I-7 : Perspective tridimensionnelle des valeurs paramétriques successive, nombres de Reynolds Re et le rapport d'aspect γ (2750,1.58) ;(2800, 2.90) ;(2150,3.5), d'après Lopez et al. (2002)

Okulov et al. (2005) ont étudié numériquement la création de recirculation de bulles dans un écoulement stationnaire du fluide visqueux, confiné dans une enceinte cylindrique avec Co/contre-rotation des disques d'extrémités, (Fig. I-8), .Ils ont varié le nombre de Reynolds et le rapport d'aspect H/R , avec divers régimes d'écoulement axisymétrique. Ils ont observé que la topologie des structures de vortex est associée à un changement de la symétrie hélicoïdale des lignes de vortex. Les calculs prouvent que les changements de symétrie dus à l'augmentation du nombre de Reynolds, et que l'inversion d'écoulement sur l'axe de symétrie est associée à une croissance du paramètre de torsion de la ligne de vortex. Pour tous les cas étudiés d'écoulement, indépendamment du rapport d'aspect et du nombre de Reynolds, ils ont observé que le paramètre de torsion du vortex central (l'axe de symétrie) atteint une valeur- seuil de $K=0.6$ (où K est le paramètre adimensionnel local de torsion des lignes de vortex) au point où l'inversion d'écoulement a lieu.

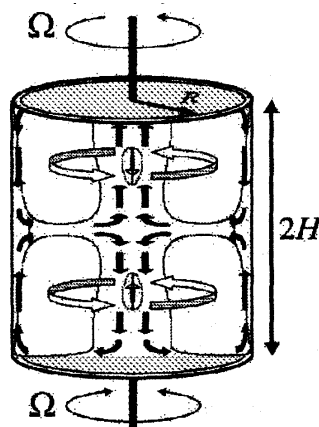


Figure I-8 : Dessin du domaine d'écoulement d'après Okulov et al. (2005)

Le vortex breakdown et le régime transitoire est une étude numérique menée par **Serre et Bontoux** (2007) qui ont montré comment en changeant les conditions en amont ou en aval, il est possible de changer et contrôler l'écoulement d'un fluide dans une enceinte cylindrique d'un rapport aspect ($\gamma = H/R=4$) induit par la rotation de disque inférieur, l'autre extrémité est une surface libre (Fig. I-9). La dynamique d'écoulement est explorée par la solution numérique en résolvant les équations de Navier-Stokes transitoire tridimensionnels basés sur des approximations spectrales d'ordre élevé. Ils ont montré que l'existence d'une surface libre favorise le début de la périodicité, avec un nombre de Reynolds critique, environ 15 fois inférieur que dans le cas avec une couverture rigide et les bifurcations se produisent sur une chaîne beaucoup plus courte des nombres de Reynolds et mènent rapidement à un régime multifréquence avec plus de cinq différentes fréquences. Dans le régime instable, le vortex breakdown est caractérisé par une zone ovale et asymétrique de recyclage attachée à la surface libre autour de l'axe du récipient, en augmentant la rotation, la ligne circulaire de stagnation sur la surface libre prend une forme plus irrégulière et commence à se déplacer autour de l'axe du cylindre dans le même sens que le disque rotatif. Ils prouvent que la couche limite verticale contrôle le processus de vortex breakdown et la transition à l'instabilité.

Surface libre

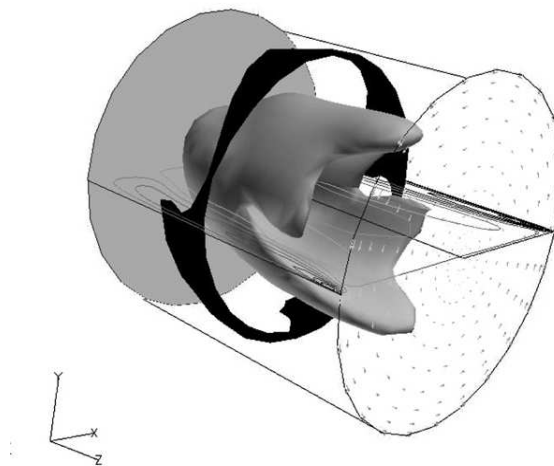


Figure I-9 : Ecoulements tridimensionnels avec une bulle axisymétrique de vortex breakdown fixée à la surface ,d'après Serre et Bontoux (2007)

Les premières études sur le comportement dynamique d'une couche de fluide chauffée par le bas remonte au début du XXème siècle. Dans un premier temps, Bénard a mis expérimentalement en évidence l'apparition de structures convectives, puis Lord Rayleigh quelques années plus tard, a développé la formule mathématique permettant de prédire et expliquer le processus de déclenchement de ce mouvement. On parle depuis, lorsqu'on s'intéresse à un système fluide chauffé par le bas, de configuration de Rayleigh-Bénard. L'origine du mouvement convectif est la poussée d'Archimède résultant des inhomogénéités de densité du fluide telles que celles dues à la dilatation thermique. Lorsqu'une couche de fluide au repos est chauffée par le bas, il se crée une stratification verticale de température. Cette dernière induit une stratification de densité telle que du fluide lourd surmonte du fluide plus léger. Cette situation est potentiellement instable dans la mesure où une fluctuation de température au sein d'une particule fluide se verra amplifiée par la poussée d'Archimède résultant sur celle-ci. En effet toute augmentation (diminution) de température entraînera une diminution (augmentation) de la densité de la particule et donc un mouvement ascendant (descendant) de celle-ci vers des zones froides (chaudes). Dans ces dernières, les contrastes de densité entre la particule et le milieu seront plus importants et intensifieront donc d'autant le déplacement de celle-ci. Cette force motrice déstabilisante est cependant sujette à deux phénomènes d'amortissement :

1. La relaxation des gradients de vitesse due à la friction visqueuse.
2. La relaxation des gradients de température due à la diffusion de la chaleur.

On se trouve ainsi dans une situation d'effet à seuil :

-Soit le gradient de densité induit par la différence de température ΔT entre le bas et le haut du système est insuffisant et le fluide reste au repos (dans un état dit conducteur puisqu'il se comporte comme un solide qui transmet la chaleur qui lui est fournie par conduction thermique),

-Soit le gradient de densité est suffisamment important (il dépasse une valeur critique) et il y a naissance d'un mouvement convectif qui permet de transporter la chaleur du bas vers le haut de la couche de fluide plus efficacement que la conduction seule.

Les études qui font coupler l'écoulement de fluide avec le transfert de chaleur, ont été théoriquement étudiées par **Barcilon et Pedlosky** (1997). Une autre étude détaillée dirigée par **Iwatsu** (2004) qui avait examiné numériquement les motifs des lignes de courant et les caractéristiques de transfert de chaleur de l'écoulement tourbillonnant du fluide visqueux incompressible et axisymétrique engendré par la rotation constante du

couvercle supérieur dans une enceinte cylindrique sous l'hypothèse de Boussinesq, et la différence fixe des températures imposées entre les disques supérieure et inférieure ($T_0+\Delta T/2$) et ($T_0-\Delta T/2$) respectivement avec des parois latérales adiabatiques. Ces résultats sont obtenus pour Reynolds $10^2 \leq Re \leq 3.10^3$, le nombre de Richardson $0 \leq Ri \leq 1.0$, pour un fluide ayant un nombre de Prandtl $Pr = \nu/\alpha = 1.0$, confiné dans un cylindre de rapport d'aspect $\gamma = H/R = 1.0$. Diverses tracés des isothermes exposent la transition de la solution dominée par convection vers la solution dominée par conduction si Ri est augmenté. Alors, il était remarqué que quand Ri est augmenté, une structure de couche horizontale apparaît dans la moitié inférieure avec une distribution verticalement linéaire de la température, et pour des valeurs intermédiaires de Ri , ($0 \leq Ri \leq 1.0$), des séparatrices apparaissent dans l'écoulement sur le disque de fond en fonction des valeurs de Re et Ri . Ainsi qu'une classification en plusieurs types différents des motifs des écoulements dans le plan (Ri, Re) avait été donnée. Dans un autre article, **Iwatsu** (2005) étudie numériquement des écoulements stables tourbillonnants de fluide visqueux incompressible dans l'enceinte cylindrique, conduit par la rotation du disque de fond à une vitesse angulaire constante avec surface libre, où il a supposé l'axisymétrie de l'écoulement. Les mêmes paramètres avec l'étude précédente ($\gamma = H/R = 1$). Il avait présenté aussi un diagramme dans le plan (γ, Re) et une comparaison avec les études précédentes expérimentales et numériques.

Omi et Iwatsu (2005) ont dirigé une étude numérique d'un écoulement de fluide Boussinesq, tourbillonnant confiné dans une enceinte cylindrique avec Co-ou contre-rotation des disques d'extrémités, avec un gradient de température verticalement stable et paroi latérale supposé adiabatique et un rapport d'aspect $\gamma = 2$ et un nouveau paramètre ($s = \Omega_s / \Omega$) introduit, qui est le rapport de la vitesse angulaire du disque supérieur à celle du disque de fond. Pour le cas $Ri \sim 0$ et Re élevé, le fluide intérieurement confiné tourne dans le même sens. Ils ont récapitulé les cas étudiés de l'écoulement considéré sous forme de diagrammes dans les plans (s, Re) et (s, Ri).

Bordja et al. (2010) ont effectué une étude de l'écoulement axisymétrique dans un cylindre de rapport d'aspect $\gamma = 1$, les disques supérieur et inférieur sont maintenus à différentes températures et tournant à la même vitesse angulaire dans des sens opposés. Dans ce problème Rayleigh-Bénard/Von Kármán, le gradient de température imposé est mesuré par le nombre de Rayleigh Ra et la vitesse angulaire par le nombre de Reynolds Re . La transition vers un état stationnaire se produit pour $Re < 95$, et vers des oscillations pour $Re > 95$. Les cycles limites apparaissent par une bifurcation de Hopf et disparaissent par une bifurcation globale, de période infinie, ils ont présenté des portraits de phase et des diagrammes de bifurcations détaillés.

Le procédé le plus adapté dans le domaine industriel pour contrôler les écoulements tournants est l'utilisation d'un champ magnétique pour stabiliser l'écoulement du conducteur. Nombreuses études qui présentent l'effet du champ magnétique sur l'écoulement tournant ont été réalisées on peut citer **Ben Hadid et al.** (1997) qui ont employé une méthode numérique spectrale afin de résoudre directement les équations de Navier-stokes de l'écoulement tridimensionnel oscillatoire d'un métal liquide conducteur confiné dans une cavité cylindrique horizontal de longueur modérée, ainsi, ils examinaient les signaux temporels, les propriétés de symétrie et les bilans d'énergie caractérisant les oscillatoires de l'écoulement, et l'amortissement des écoulement oscillatoires par un champ magnétique vertical jusqu'à la stabilisation de cet écoulement. L'écoulement incité par un champ magnétique tournant, d'un métal liquide remplissant une enceinte cylindrique avait sa part dans le champ des études des procédés de stabilisations des écoulements industriels, telle que l'étude entreprise par **Marty et al.** (1999) pour connaître les détails de l'interaction du champ magnétique tournant avec l'écoulement du fluide étudié. Ils ont montré que l'application d'un champ magnétique en rotation très modéré à un mouvement convectif du fluide au commencement instable est capable de reconstituer la stabilité de l'écoulement. Des travaux expérimentaux et numériques récents soutiennent (**Juel et al. ,1999 ; Juel et al. ,2001; Bessaïh ,2000**), en montrant l'effet d'un champ magnétique orthogonal à la direction principale de l'écoulement du Gallium liquide en convection tridimensionnelle. Une fois le champ magnétique est appliqué, la convection sera réduite aussi que les oscillations trouvées aux gradients élevés de température peuvent être supprimées, tandis que sans application de champ magnétique, l'écoulement est amené à une structure complexe qui soutient la transition observée à la convection oscillante.

Talmage et al. (2000) ont publié un article présentant une étude plus approfondie du mouvement de rotation du métal liquide pendant la production de cristaux de silicium par le procédé de Czochralski avec un champ magnétique élevé, uniforme et vertical . Cet article traitait spécialement les effets d'inertie dans la couche limite avec la résolution numérique des équations non-linéaires gouvernantes, et les équations de transport pour la vitesse primaire azimutale et pour la vorticité de l'écoulement secondaire avec la méthode de prédiction-correction d'Adams-Bashforth-Moulton de quatrième ordre. Ils ont discuté les effets d'inertie sur le mouvement de métal liquide, et ont prévu une compréhension plus claire du mouvement du liquide (silicium fondu), sans laquelle des cristaux plus propres seront difficiles de se produire sur une base cohérente.

Kaddeche et al. (2003) ont effectué une étude numérique basée sur la théorie de la stabilité linéaire afin de déterminer l'influence d'un champ magnétique horizontal sur les modes

marginaux se développant dans une couche fluide soumise à un gradient de température horizontal. Un intérêt particulier est porté sur l'influence de l'orientation du champ magnétique sur la nature et les valeurs des seuils critiques des modes instables. Les calculs montrent, que lorsqu'il est soumis à un champ magnétique incliné dans le plan horizontal, ce type d'écoulement dit de Hadley, peut présenter des ondes obliques, jusqu'alors inexistantes aussi bien lorsqu'aucun champ magnétique n'est appliqué que pour des champs magnétiques verticaux, transversaux ou longitudinaux. Il en est de même pour l'effet stabilisant qui connaît un comportement asymptotique inédit.

Bessaïh et al. (2003) ont dirigé une étude numérique et analytique d'un écoulement laminaire stable engendré par un disque tournant au sommet d'un cylindre ayant un rapport d'aspect $H/R=1$, rempli d'un métal liquide et soumis à un champ magnétique axial, en résolvant les équations régissant l'écoulement par la méthode des volumes finis. Ils donnaient différentes formules analytiques de vitesse et avaient montré qu'en présence d'un champ magnétique, les profils analytiques de vitesse proches des disques aux extrémités obtenus pour une valeur élevée du paramètre d'interaction magnétique N , présentant un excellent accord avec ceux obtenus par des simulations numériques. Ainsi, ils ont mis en évidence l'importance de la conductivité électrique des parois du conducteur (les deux disques et la paroi latérale) dans le contrôle de l'écoulement. Dans un autre article, **Bessaïh et al.** (2003) ont effectué une étude combinée numérique et analytique du même écoulement déjà mentionné. Ils ont montré la forte dépendance de structure de l'écoulement et le transfert de chaleur avec le champ magnétique et la conductivité électrique des parois constituant l'enceinte cylindrique, pour des écoulements à Pr élevé, afin de montrer l'analogie avec le problème du transfert de masse. En absence du champ magnétique, le nombre de Nusselt suit une dépendance semblable à celle trouvée pour un réservoir cylindrique mélangé avec une turbine à aubes. En présence du champ magnétique, un amortissement important du transfert de chaleur était observé. La méthode alternative d'amortir la convection en cultivant les cristaux en présence d'un champ magnétique reste largement utilisée et la plus récemment discutée en matière d'expérience et simulations numériques (**Hof et al., 2003 ; Balikci et al., 2004 et Yesilyurt et al., 2004**).

Yu et Gelfgat (2004) ont mesuré les vitesses azimutales d'un écoulement RMF (Rotating Magnétique Field) de fluide confiné dans un conteneur cylindrique, par deux expériences différentes pour des rapports d'aspect différents et diverses magnitudes du champ magnétique (différentes valeurs du nombre de Hartmann Ha). Ils avaient expliqué quantitativement la dépendance entre la vitesse angulaire moyenne (normalisée) et le nombre de Hartmann, et même la vitesse moyenne angulaire en fonction du rapport d'aspect. Les résultats expérimentaux

annoncés montrent que la rotation moyenne du liquide augmente plus rapidement avec l'augmentation de la hauteur relative de l'enceinte cylindrique ($H/R \geq 1$), au-delà de la valeur $H/R=1$, la croissance est linéaire.

Kharicha et al. (2004) ont utilisé le code commercial Fluent V. 5 pour avoir une solution numérique du modèle de l'écoulement MHD laminaire, permanent conduit par un disque tournant au sommet d'une cavité cylindrique remplie d'un métal liquide. Les effets du champ magnétique, des conductivités électriques des parois et l'épaisseur pariétale sont examinées. Les paramètres appropriés par ce type d'écoulements ont été variés comme $Re \geq 100$ et le nombre de Hartmann $0 \leq Ha \leq 100$, ce qui correspond à une gamme de paramètre d'interaction $0 \leq Ha^2/Re \leq 100$. Malgré la supposition d'un très petit nombre de Reynolds magnétique R_m , le champ magnétique incité par ce petit R_m a été tenu en compte dans la formulation de leur problème. Leur étude est destinée à prédire l'influence d'un champ magnétique sur le taux de corrosion d'un métal liquide sur une paroi métallique. Ils ont résolu l'équation de concentration pour le produit de corrosion et ont montré que le transfert de masse évolue avec le Hartmann Ha , et pour une valeur de Ha fixe, le transfert de matière est plus élevé pour des parois électriquement conductrice que des parois isolantes.

Ma et al. (2004a) ont étudié numériquement le processus de croissance cristalline de bromure de potassium (KBr) dans une configuration verticale de Bridgman, en employant un modèle intégré qui combine une formulation globale de transfert de chaleur et des tensions thermiques. La distribution globale de température dans le cylindre, les formes des lignes de courant dans le métal liquide, et les effets de la convection naturelle aux fronts de croissance ont été examinés. Dans un autre article **Ma et al.** (2004b) ont présenté une analyse de la stabilité linéaire de la convection thermocapillaire dans un pont liquide limité par deux interfaces liquide-solide planes, maintenue à la même température et par une surface cylindrique avec une entrée axisymétrique de chaleur, les deux frontières solides sont mises en rotation à la même vitesse angulaire dans une direction azimutale et un champ magnétique tournant est appliqué dans l'opposé de la direction azimutale. Les valeurs critiques du nombre de Reynolds pour la convection thermocapillaire et les fréquences de mode critique sont présentées comme les fonctions du nombre de Reynolds pour la vitesse angulaire des frontières solides.

Volz et Mazuruk (2004) ont montré que la force de Lorentz incitée par un champ magnétique en mouvement TMF (Travelling Magnétique Field) dans une enceinte cylindrique peut être employée pour contrôler l'écoulement des métaux fondus, électriquement conducteurs et la direction de l'écoulement résultant de l'application du champ magnétique peut être

complètement changée. Un champ TMF peut être employé pour éviter partiellement l'écoulement conduit par les forces de buoyancy.

Kharicha et al. (2005) ont effectué une autre investigation expérimentale de l'écoulement MHD laminaire dans le cas permanent induit par la rotation d'un disque au sommet d'une cavité cylindrique remplie d'eau ou de mercure. Ils ont analysé les distributions de vitesse en employant la technique de mesure par ultrasons (UPV). Leurs mesures ont été comparées avec des résultats obtenus par un modèle numérique.

Mittal et al. (2005) ont présenté une simulation numérique pour analyser la convection naturelle bidimensionnelle des métaux liquides soumis au champ magnétique transversal. Dans leurs étude spatio-temporelle, ils avaient montré que l'écoulement oscillant change vers un écoulement stable avec l'augmentation de l'intensité du champ magnétique appliqué pour une gamme du nombre de Rayleigh (Ra) entre 10^5 et 10^8 , même pour cette gamme de Ra , la magnitude du champ magnétique amortie significativement l'amplitude des vitesses, et les amplitudes des oscillations aperiodiques de n'importe quelle variable dynamique. Alors, ils ont analysé l'interaction des forces de buoyancy et les forces électromagnétiques sur le développement et la formation spatio-temporelle des motifs de courant. Pour comprendre cette interaction, ils ont varié l'intensité du champ magnétique appliqué via la variation du nombre de Chandrasekhar Q ($Q = \sigma H^2 B_0^2 / \rho_0 \nu = Ha^2$) pour une gamme de Ra , en résolvant numériquement les équations bidimensionnelles de Navier-Stokes, de l'énergie et de la MHD pour des métaux liquides à faible nombre de Prandtl ($Pr=0.015$, cas des semi-conducteurs), confinés dans des cavités carrées de profondeur H . Ils ont aussi effectué une analyse spectrale pour montrer qu'avec l'augmentation de Q , le spectre des énergies (PSD) correspondant aux fréquences dominantes diminue, et le nombre de fréquences se réduit aussi en raison d'élimination des basses fréquences.

Bessaïh et al. (2009) ont étudié la stabilité magnétohydrodynamique d'un écoulement tournant dans un cylindre qui contient du métal liquide ($Pr=0.015$) ayant un rapport d'aspect égal à 2 et soumis à un gradient vertical de température et un champ magnétique. La méthode des volumes finis a été utilisée afin de résoudre les équations de continuité, de quantité de mouvement, d'énergie et du potentiel électrique. Ils ont trouvé qu'en absence de champ magnétique, le nombre de Reynolds critique est une fonction décroissante du nombre de Richardson (pour les valeurs du nombre de Reynolds critiques ($Re_{cr} = 2575, 924, 802$ et 606), correspondant respectivement aux valeurs du nombre de Richardson ($Ri=0, 0.5, 1.0$ et 2.0)). Ils ont trouvé aussi en présence d'un champ magnétique vertical, la stabilité de l'écoulement est conservée pour des valeurs supérieures du nombre de Reynolds. Ils ont établi un diagramme de

stabilité d'après les résultats numériques de cette investigation. Ce diagramme met en évidence la dépendance du nombre de Reynolds critique avec l'augmentation du nombre de Hartmann, Ha , pour différentes valeurs du nombre de Richardson. En conclusion, cette étude confirme la possibilité de stabilisation d'écoulement du métal liquide en convection mixte par application d'un champ magnétique axial.

Kakarantzas et al. (2009) ont effectué une série de simulations numériques afin d'étudier la convection naturelle d'un écoulement MHD pour des métaux liquides dans un récipient cylindrique vertical avec un fond tournant et une distribution sinusoïdale de la température à la paroi supérieure, tandis que la paroi latérale est adiabatique, (Fig. I-10). À partir du cas hydrodynamique de base, ils ont évalué l'effet des champs magnétiques verticaux et horizontaux. Ils ont observé des écoulements à l'aide des paramètres (nombres de Rayleigh et Hartmann, axisymétrie), ils prouvent que l'augmentation du nombre de Rayleigh favorise le transfert thermique par la convection tandis que l'augmentation du nombre de Hartmann favorise la conduction de la chaleur. Le champ magnétique vertical diminue le nombre de Nusselt local. Les modèles de circulation pour les cas les plus convecteurs sont confinés près du coin supérieur du récipient avec la formation simultanée d'un d'écoulement secondaire au coin inférieur, alors que pour les cas plus conducteurs seulement un modèle de circulation existe couvrant le domaine entier.

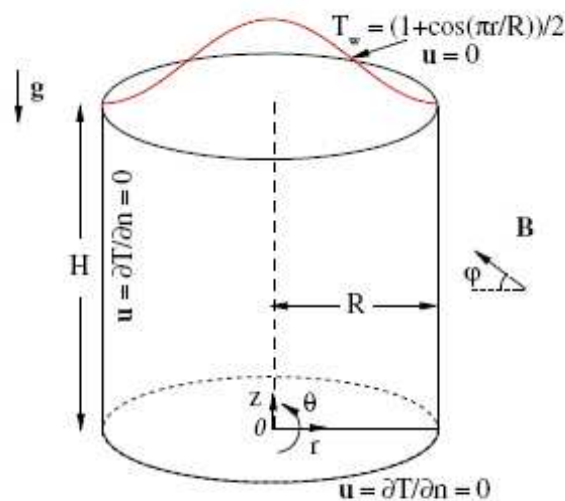


Figure I-10 : Configuration d'écoulement et conditions aux limites (Kakarantzas et al. ,2009)

Chapitre II : Géométries-modèles mathématiques, et méthode numérique

Nous présentons dans ce chapitre, les équations modélisant le problème traité dans ce mémoire. Ces équations mettent en évidence le comportement des fluides conducteurs (tel le cas des métaux liquides) en convection laminaire mixte (naturelle et forcée). Elles sont fondées selon les lois physiques : de conservation de masse (continuité), de quantité de mouvement (Navier-Stokes), et d'énergie. Mais en présence d'un champ magnétique, l'apparition d'une nouvelle force (force de Lorentz) au sein du liquide (écoulement MHD), ajoute une autre équation pour compléter le système. Les démonstrations nécessaires à l'obtention des équations susmentionnées décrivant la dynamique de l'écoulement de fluide laminaire avec transfert de chaleur sont bien expliquées, et illustrées dans beaucoup d'ouvrages de mécanique des fluides et de transferts thermiques par exemple (**Lienhard IV, 2005**)

II.1 Ecoulement axisymétrique:

La géométrie de la configuration considérée (Fig. II-1) est une enceinte cylindrique de rayon R et de hauteur H , dont le rapport d'aspect fixe ($\gamma = H/R = 2$). L'enceinte contient de l'aluminium liquide caractérisé par un faible nombre de Prandtl ($Pr=0.015$). Le couvercle (disque inférieur) est en rotation à la vitesse angulaire constante Ω et maintenu à la température T_h , l'autre extrémité (disque supérieur) en Co/contre -rotation et maintenu à la température T_c , ($T_h > T_c$) (on appelle co-rotation l'écoulement obtenu lorsque les deux disques tournent dans le même sens avec la même vitesse de rotation, l'écoulement contre-rotation, lorsque les deux disques tournent en sens opposé à la même vitesse de rotation). La paroi latérale rigide est adiabatique. L'ensemble peut être soumis à un champ magnétique B de magnitude constante, uniforme et orienté verticalement vers le haut. Les parois de l'enceinte cylindrique sont électriquement isolées.

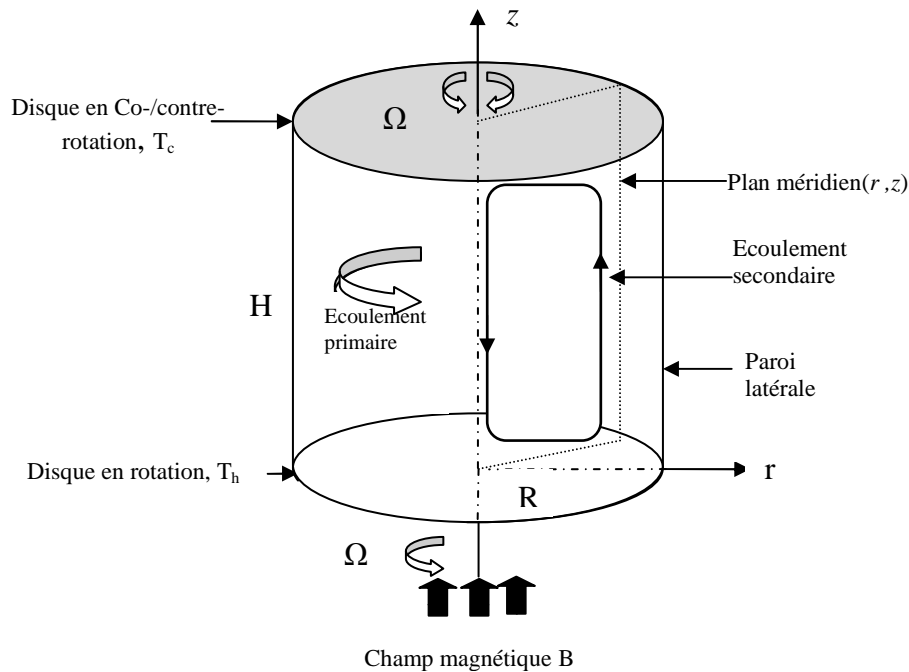


Figure II.1 : Géométrie du problème axisymétrique

II.1.1 Hypothèses simplificatrices :

Afin d'aborder la résolution des équations régissant la convection mixte MHD d'un métal liquide, relatif à la géométrie déjà montrée, on va adopter les hypothèses de simplifications suivantes:

- L'écoulement avec tourbillon (swirl), laminaire et axisymétrique.
- Le métal liquide est incompressible ($\rho = Cste$) et Newtonien.
- L'effet Joule est négligeable.
- La dissipation visqueuse est négligeable.
- Le métal liquide est non-magnétisé puisque la perméabilité magnétique $\mu_m = 1$ (Bessaïh,2000)
- L'écoulement n'affecte pas le champ magnétique, c.-à-d. le nombre de Reynolds magnétique est très petit ($R_m = \mu_0 \sigma \Omega R \ll 1$) (Bessaïh et al.,2009)
- Les propriétés physiques du métal liquide (σ , λ , α et ν) sont supposées constantes.
- L'approximation de Boussinesq est valide : Si la variation de densité n'est pas large, on peut considérer la densité comme constante dans les termes transitoire et convectif, et la

traiter comme variable seulement dans le terme gravitationnel suivant z' , en sachant qu'elle est exprimée par la formule : $(\rho - \rho_0)g = -\rho_0 g \beta (T - T_0)$ (**Lienhard IV, 2005**)

Où ρ_0 est la masse volumique de référence, et β est le Coefficient d'expansion thermique à pression constante.

II.1.2 Equations de transport:

Après l'application des hypothèses de simplification susmentionnées, les équations générales régissant l'écoulement secondaire du métal liquide (Fig. II.1) dans le plan méridien, en considérant les forces de buoyancy (phénomène de convection mixte). Ces équations rapportées à un système de coordonnées cylindriques (r', z', θ) sont données selon la description Eulérienne par:

- **Equation de Continuité :**

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial(r'u')}{\partial r'} + \frac{\partial v'}{\partial z'} = 0 \quad (\text{II.1})$$

- **Equation de quantité de mouvement radiale :**

$$\rho \left(\frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial r'} + v' \frac{\partial u'}{\partial z'} - \frac{w'^2}{r'} \right) = -\frac{\partial P'}{\partial r'} + \mu \left(\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial u'}{\partial r'} \right) + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} - \frac{u'}{r'^2} \right) + f'_{Lr'} \quad (\text{II.2})$$

- **Equation de quantité de mouvement axiale :**

$$\rho \left(\frac{\partial v'}{\partial t} + u' \frac{\partial v'}{\partial r'} + v' \frac{\partial v'}{\partial z'} \right) = -\frac{\partial P'}{\partial z'} + \mu \left(\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial v'}{\partial r'} \right) + \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} \right) + \rho g \beta (T - T_c) + f'_{Lz'} \quad (\text{II.3})$$

- **Equation de quantité de mouvement azimutale (Equation de swirl) :**

$$\rho \left(\frac{\partial w'}{\partial t} + u' \frac{\partial w'}{\partial r'} + v' \frac{\partial w'}{\partial z'} + \frac{u'w'}{r'} \right) = \mu \left(\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial w'}{\partial r'} \right) + \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2} - \frac{w'}{r'^2} \right) + f'_{L\theta} \quad (\text{II.4})$$

Où u', v', w' représentent respectivement les composantes de la vitesse radiale, axiale et azimutale, g est l'accélération de la pesanteur, ρ est la masse volumique du fluide et $f'_{Lr}, f'_{Lz}, f'_{L\theta}$ sont respectivement les composantes de la force électromagnétique de Lorentz radiale, axiale et azimutale, cette force EM est donnée par la formule (**Bessaïh et al. , 2003**):

$$\vec{f}'_L = \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (\text{II.5})$$

On note que pour l'écoulement secondaire (Fig. II.1), la situation est purement bidimensionnelle (conséquence de l'axisymétrie)

- **Equation de l'énergie :**

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u' \frac{\partial T}{\partial r'} + v' \frac{\partial T}{\partial z'} = \alpha \left(\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r} \left(r' \frac{\partial T}{\partial r'} \right) + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z'^2} \right) \right) \quad (\text{II.6})$$

Où $\alpha = \lambda / \rho C_p$, est la diffusivité thermique du liquide, λ est sa conductivité thermique et C_p sa chaleur spécifique à pression constante.

- **Equation du potentiel électrique :**

Cette équation est introduite au système d'équations gouvernant, lors de la présence du champ magnétique axial pour compléter ce système vis-à-vis l'apparition d'une nouvelle force de volume (Force de Lorentz), dont les composantes sont les termes f'_{Lr} , f'_{Lz} , $f'_{L\theta}$ ajoutés aux équations de Navier-Stokes (Eqs. (II.2-II.4)).

En supposant que la conductivité électrique σ du fluide est isotrope, la loi d'Ohm sera:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (\text{II.7})$$

Où \vec{j} est la densité volumique de courant et \vec{E} le champ électrique local. Suivons dans son mouvement un élément fluide; dans un repère absolu, la dernière équation s'écrit :

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (\text{II.8})$$

Où $\vec{V} = u' \vec{e}_r + v' \vec{e}_z + w' \vec{e}_\theta$ désigne le vecteur vitesse dans le plan méridien et $\vec{B} = B \vec{e}_z$ (axial): le vecteur du champ magnétique, tandis que $\vec{e}_r, \vec{e}_z, \vec{e}_\theta$ sont les vecteurs unitaires respectivement des directions radiale, axiale et azimutale dans le repère absolu.

Aussi puisque, le courant électrique est conservé :

$$\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{E} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi \quad (\text{II.9})$$

Et

$$\text{div} \vec{j} = 0 \quad (\text{II.10})$$

C.-à-d.: le courant électrique dérive d'un potentiel électrique φ .

En substituant les équations (II.9) et (II.10) dans l'équation (II.8), on obtient :

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} \varphi + \vec{V} \wedge \vec{B}) = 0 \Rightarrow \Delta \varphi = \text{div}(\vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (\text{II.11})$$

Et explicitement en coordonnées cylindriques, l'équation du potentiel électrique φ s'écrit :

- **Champ magnétique axial**

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial \varphi}{\partial r'} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2} = B \left(\frac{w'}{r'} + \frac{\partial w'}{\partial r'} \right) \quad (\text{II.12})$$

Les composantes du vecteur densité de courant électrique :

$$j_r = \sigma \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial r'} + w' B \right) \quad (\text{II.13a})$$

$$j_z = \sigma \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial z'} \right) \quad (\text{II.13b})$$

$$j_\theta = \sigma (-u' B) \quad (\text{II.13c})$$

Les composantes de la force EM $f'_{Lr}, f'_{Lz}, f'_{L\theta}$

$$f'_{Lr} = -\sigma u' B^2 \quad (\text{II.14a})$$

$$f'_{Lz} = 0 \quad (\text{II.14b})$$

$$f'_{L\theta} = \sigma B \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r'} - w' B \right) \quad (\text{II.14c})$$

Ces formules sont exprimées en termes de quantités dimensionnelles.

II.1.3 Formes adimensionnelles des équations

Les études expérimentales des écoulements sont souvent effectuées sur des modèles et les résultats sont montrés dans une forme sans dimensions, permettant ainsi des mesures échelonnées vers les conditions réelles des écoulements. La même approche peut être aussi entreprise dans des études numériques. Les équations gouvernantes peuvent être transformées à la forme sans dimensions en employant la normalisation appropriée.

En introduisant les variables adimensionnelles suivantes respectivement pour le temps, la longueur, la vitesse, la pression, la température et le potentiel électrique:

$$\tau = \frac{t}{(1/\Omega)}, \quad r = \frac{r'}{R}, \quad z = \frac{z'}{R}, \quad u = \frac{u'}{(\Omega R)}, \quad v = \frac{v'}{(\Omega R)},$$

$$w = \frac{w'}{(\Omega R)}, \quad P = \frac{P'}{\rho(\Omega R)^2}, \quad \Theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}, \quad \Phi = \frac{\varphi}{(\Omega R^2 B)}.$$

Les équations adimensionnelles gouvernant le système s'écrivent alors :

- **Equation de Continuité :**

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.18})$$

- **Equation de quantité de mouvement radiale :**

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{w^2}{r} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right) + NF_{Lr} \quad (\text{II.19})$$

- **Equation de quantité de mouvement axiale :**

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + Ri \cdot \Theta + NF_{Lz} \quad (\text{II.20})$$

- **Equation de quantité de mouvement azimutale (Equation de swirl) :**

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + u \frac{\partial w}{\partial r} + v \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{uw}{r} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{w}{r^2} \right) + NF_{L\theta} \quad (\text{II.21})$$

- **Equation de l'énergie :**

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \Theta}{\partial r} + v \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right) \right) \quad (\text{II.22})$$

- **Equation du potentiel électrique :**

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{w}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (\text{II.23})$$

Avec: Le nombre de Prandtl : $\text{Pr} = \frac{\mathbf{v}}{\alpha}$. Le nombre de Reynolds : $\text{Re} = \frac{\Omega R^2}{\mathbf{v}}$. Le nombre de

Richardson: $Ri = \frac{Gr}{\text{Re}^2} = \frac{\beta g (T_h - T_c)}{\Omega^2 R}$, où $Gr = \frac{\beta (T_h - T_c) g R^3}{\mathbf{v}^2}$ est le nombre de Grashof, qui exprime

le rapport des forces de buoyancy aux forces de viscosité. Le nombre de Rayleigh,

$Ra = \text{Pr} \cdot Gr$. Le paramètre d'interaction : $N = \frac{Ha^2}{\text{Re}} = \frac{\sigma B^2}{\rho \Omega}$, qui représente le ratio entre les

forces électromagnétiques et celles d'inertie, et $Ha = BR\sqrt{\sigma/\rho\mathbf{v}}$ est le nombre de Hartmann, qui définit le rapport des forces électromagnétiques aux forces de viscosité.

Dans les équations de quantité de mouvement (Eqs. (II.19-II.21)), F_{Lr} , F_{Lz} , $F_{L\theta}$ sont respectivement les forces de Lorentz adimensionnelles dans les directions radiale, axiale et azimutale, dont les expressions sont obtenues après normalisation des composantes dimensionnelles f'_{Lr} , f'_{Lz} , $f'_{L\theta}$

- **Champ magnétique axial**

$$F_{Lr} = -u \quad (\text{II.24a})$$

$$F_{Lz} = 0 \quad (\text{II.24b})$$

$$F_{L\theta} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} - w \quad (\text{II.24c})$$

Les courants électriques adimensionnels dans les directions r, z et θ sont respectivement:

$$J_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} + w \quad (\text{II.25a})$$

$$J_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (\text{II.25b})$$

$$J_\theta = -u \quad (\text{II.25c})$$

II.1.4 Les conditions initiales et aux limites

Les conditions initiales et aux limites :

- **Les conditions initiales :**

Les conditions initiales sont prises pour chaque lancement de calculs comme étant la solution obtenue par le calcul antécédent (les répartitions de u, v, w, P, Φ et Θ dans le fluide). Toutefois, pour la première exécution, on a supposé que le liquide soit au repos et la répartition de température soit nulle, ainsi qu'un champ de potentiel électrique partout nul dans le volume de contrôle. Alors à $\tau = 0$ on aura:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \Theta = 0, \quad \Phi = 0 \quad (0 < r < 1, \quad 0 < z < \gamma) \quad (\text{II.26})$$

- **Les conditions aux limites :**

Les conditions aux limites des quantités adimensionnelles pour l'écoulement de swirl avec transfert de chaleur et un champ magnétique sont, pour un instant $\tau > 0$,

- Sur l'axe de symétrie:

$$u = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad (r = 0, \quad 0 \leq z \leq \gamma) \quad (\text{II.27a})$$

- A la paroi latérale adiabatique et électriquement isolée :

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad (r = 1, \quad 0 \leq z \leq \gamma) \quad (\text{II.27b})$$

- Au disque inférieur chaud et en rotation

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = r, \quad \Theta = 1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (z = 0, \quad 0 \leq r \leq 1) \quad (\text{II.27c})$$

• Au disque supérieur froid, en Co/contre-rotation :

• Co-rotation

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = r, \quad \Theta = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (z = \gamma, \quad 0 \leq r \leq 1) \quad (\text{II.27d})$$

• Contre-rotation

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = -r, \quad \Theta = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (z = \gamma, \quad 0 \leq r \leq 1) \quad (\text{II.27e})$$

En récapitulation, ces conditions aux limites sont visualisées schématiquement sur la figure (II-2).

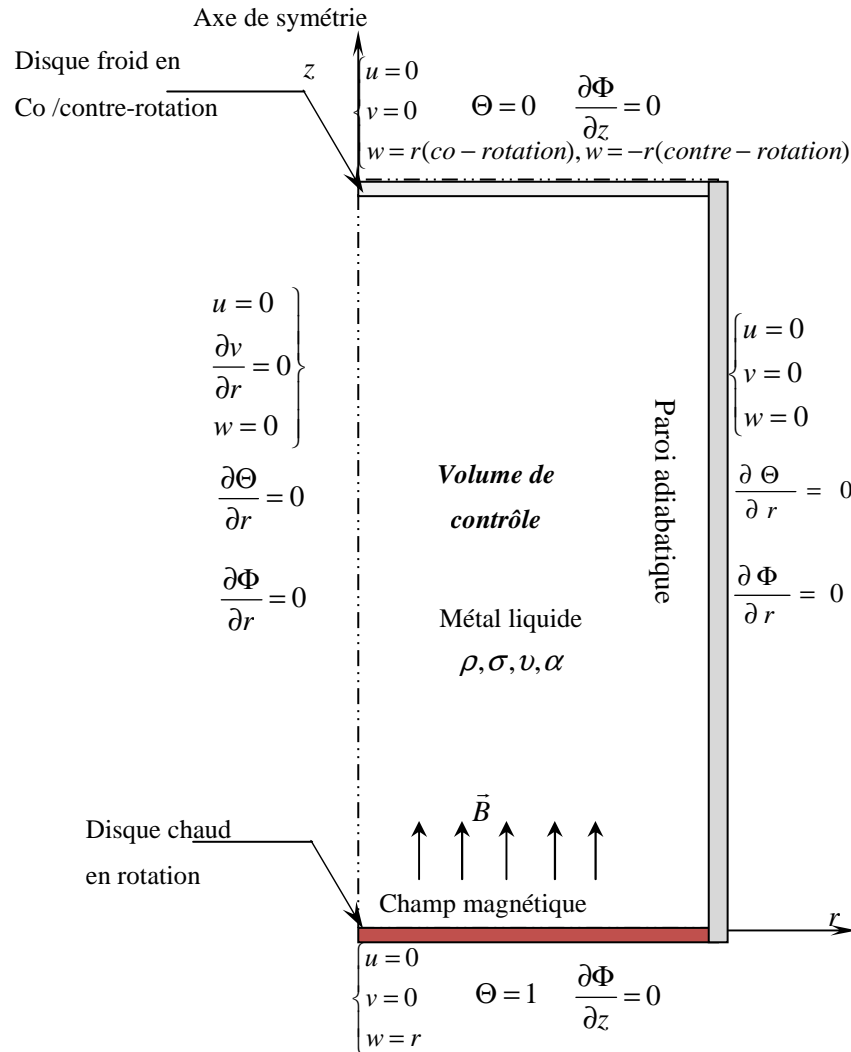


Figure II-2 : Schématisation des conditions aux limites du problème adimensionnel. Les parois de l'enceinte cylindrique sont électriquement isolantes.

II.1.5 Outils d'analyse de l'écoulement axisymétrique

Après la résolution des équations régissant la convection mixte de la cavité cylindrique remplie du métal liquide considéré, les six inconnues u, v, w, P, Φ et Θ donnent quantitativement une vue sur le phénomène étudié mais, ils existent d'autres paramètres qui peuvent attribuer aux solutions plus de clarté et substantialité quantitativement et qualitativement, et facilitent l'analyse du phénomène étudié. Quelques paramètres dont la nature peut différer (critère adimensionnel, fonction mathématique, ...etc.), sont utilisés dans ce travail pour éclaircir la vision physique du problème.

- **La fonction de courant :**

Nous utilisons cet intelligent dispositif seulement pour identifier les lignes de courant hydrodynamique, et les débits d'écoulement. La fonction de courant ψ (dite de Stokes) est définie en coordonnées cylindriques pour un écoulement incompressible, axisymétrique (c.-à-d. sans variation azimutale ($\partial/\partial\theta = 0$)) par :

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad v = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (\text{II.28})$$

Ici les lignes $\psi(r, z) = Cste$ sont les lignes de courant, et le débit entre deux lignes de courant est :

$$Q_{1 \rightarrow 2} = 2\pi(\psi_2 - \psi_1) \quad (\text{II.29})$$

- **La vorticité :**

Un autre outil, la vorticité qui est associée au vecteur vitesse local $\vec{V} = (u, v, w)$, est définie par :

$$\omega = \overrightarrow{Rot \vec{V}} \quad (\text{II.30})$$

Mais dans les calculs on s'intéresse seulement à la composante azimutale de la vorticité, en la nommant vorticité elle-même :

$$\omega = \omega_\theta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \quad (\text{II.31})$$

- **Le nombre de Nusselt :**

Cet outil est un nombre adimensionnel, aide à analyser les transferts thermiques par convection aux frontières, puisque il est inversement proportionnel à l'épaisseur δ_t de la couche limite thermique, et défini localement comme (**Bessaïh et al. , 2003**):

$$Nu(r) = -\frac{\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \Big|_{z=0}}{\lambda \frac{T_h - T_c}{H}} = -\gamma \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} \quad (\text{II.32})$$

Aussi, nous utilisons le nombre de Nusselt moyen calculé pour chaque disque d'extrémité de l'enceinte cylindrique:

$$\overline{Nu} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} Nu(r) r d\theta dr \quad \text{Donc} \quad \overline{Nu} = 2 \int_0^1 Nu(r) r dr \quad (\text{II.33})$$

II.2 Ecoulement non-axisymétrique:

On va traiter la même configuration étudiée dans l'état de l'écoulement axisymétrique, on utilise les mêmes conditions de l'écoulement et la même géométrie mais on va d'écarter les axes au milieu de cylindre pour familiarisé avec le CFD Fluent (Fig. II-3) on prend en considération l'état tridimensionnelle c.-à-d. on tient compte de la variation azimutale ($\partial/\partial\theta \neq 0$). Il faut noter que l'axe de rotation utilisé dans nous calcule est z et x pour s'adapter avec les équations employer par Fluent.

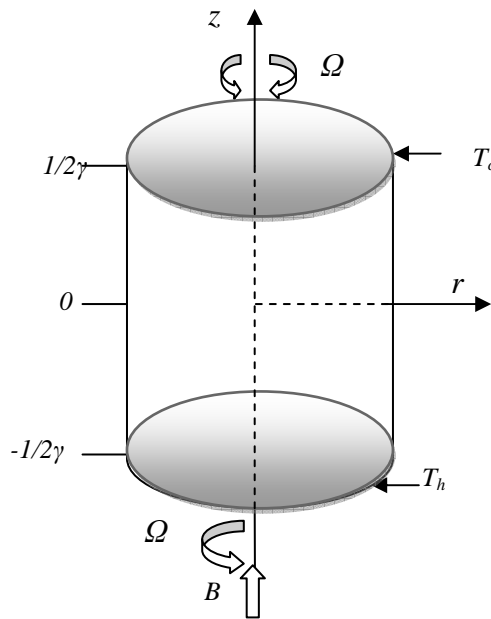


Figure II.3 : Géométrie du problème non-axisymétrique

II.2.1 Equations de transport tridimensionnelles:

On applique les mêmes hypothèses de simplification que l'état précédente, mais on ne tient pas compte l'hypothèse de l'axisymétrie. Les équations adimensionnelles régissant l'écoulement tridimensionnelle rapportées à un système de coordonnées cylindriques (r, z, θ) sont données par:

- **Equation de Continuité :**

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.34})$$

- **Equation de quantité de mouvement radiale :**

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + v \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{w^2}{r} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \\ \frac{1}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + NF_{Lr} \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

- **Equation de quantité de mouvement axiale :**

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + v \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \\ \frac{1}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + Ri\Theta + NF_{Lz} \end{aligned} \quad (\text{II.36})$$

- **Equation de quantité de mouvement azimutale (Equation de swirl) :**

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \tau} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + v \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{uw}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \\ \frac{1}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{w}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + NF_{L\theta} \end{aligned} \quad (\text{II.37})$$

De même que la section précédente u, v, w représentent respectivement les composantes de la vitesse radiale, axiale et azimutale, g est l'accélération de la pesanteur, ρ est la masse volumique du fluide et $F_{Lr}, F_{Lz}, F_{L\theta}$ sont respectivement les composantes de la force électromagnétique de Lorentz radiale, axiale et azimutale.

- **Equation de l'énergie :**

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + v \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{1}{Re Pr} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.38})$$

- **Equation du potentiel électrique suivie par un champ magnétique axial (B_z):**

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial (rw)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (\text{II.39})$$

Les composantes du vecteur densité de courant électrique :

$$J_r = \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial r} + w \right) \quad (\text{II.40a})$$

$$J_z = \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \quad (\text{II.40b})$$

$$J_\theta = \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - u \right) \quad (\text{II.40c})$$

Les composantes de la force EM $F_{Lr}, F_{Lz}, F_{L\theta}$

$$F_{Lr} = \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - u \right) \quad (\text{II.41a})$$

$$F_{Lz} = 0 \quad (\text{II.41b})$$

$$F_{L\theta} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} - w \right) \quad (\text{II.41c})$$

II.2.2 Les conditions initiales et aux limites à l'état non-axisymétrique

- **Les conditions initiales :**

Toutefois, pour la première exécution, on a supposé que le liquide soit au repos et la répartition de température soit nulle, ainsi qu'un champ de potentiel électrique partout nul dans le volume de contrôle. Alors à $\tau = 0$ on aura:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \Theta = 0, \quad \Phi = 0 \quad (\text{II.42})$$

- **Les conditions aux limites :**

Les conditions aux limites des quantités adimensionnelles pour l'écoulement de tournant tridimensionnelles avec transfert de chaleur et un champ magnétique sont, pour un instant $\tau > 0$.

- Sur l'axe de cylindre:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = 0 \quad (r=0, 0 \leq z \leq \gamma) \quad (\text{II.43a})$$

- A la paroi latérale adiabatique et électriquement isolée :

$$u=0, \quad v=0, \quad w=0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial r}=0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r}=0 \quad (r=1, -1/2\gamma \leq z \leq 1/2\gamma) \quad (\text{II.43b})$$

- Au disque inférieur chaud et en rotation

$$u=0, \quad v=0, \quad w=r, \quad \Theta=1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z}=0 \quad (z=-1/2\gamma) \quad (\text{II.43c})$$

- Au disque supérieur froid, en Co/contre-rotation :

- Co-rotation

$$u=0, \quad v=0, \quad w=r, \quad \Theta=0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z}=0 \quad (z=1/2\gamma,) \quad (\text{II.43d})$$

- Contre-rotation

$$u=0, \quad v=0, \quad w=-r, \quad \Theta=0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z}=0 \quad (z=1/2\gamma) \quad (\text{II.43e})$$

- condition de périodicité

$$u(r, \theta, z) = u(r, \theta + 2\pi, z) \quad (\text{II.44a})$$

$$w(r, \theta, z) = w(r, \theta + 2\pi, z) \quad (\text{II.44b})$$

$$v(r, \theta, z) = v(r, \theta + 2\pi, z) \quad (\text{II.44c})$$

II.3 Méthode numérique

Les équations régissant le phénomène étudié sont des équations aux dérivées partielles (EDP) non-linéaires, dont la résolution analytique ne peut être possible au moyen des outils d'analyse mathématique contemporain. Mais, une solution numérique peut être possible en transformant ces équations différentielles en systèmes d'équations algébriques linéaires par une méthode de discrétisation avant de résoudre ce système par des méthodes directes ou par itérations. Pour notre présente étude, nous avons choisi la méthode des volumes finis pour discrétiser les équations du modèle mathématique.

Pour déterminer le champ de la variable dépendante ϕ dans un domaine d'étude par la méthode des volumes finis, les étapes à suivre sont essentiellement :

- Bien définir le domaine d'étude et le décomposer en de petits sous domaines appelés volumes finis.
- Intégrer l'équation de transport sur chaque volume fini obtenant ainsi une équation de bilan (Taux d'accumulation de ϕ dans le volume = flux entrant net de ϕ à travers les faces du volume + taux de production net de ϕ dans le volume).
- Discrétiser les différents termes de la forme intégrée de l'équation de transport (transformer l'équation différentielle ponctuelle en un système d'équations algébriques).
- Incorporer les conditions initiales et aux limites appropriées.
- Résoudre le système algébrique final par une méthode de résolution (itérative ou semi-itérative ou directe) pour un champ approché de ϕ dans des points discrets du domaine considéré.

Un avantage attirant de la méthode des volumes finis est qu'elle satisfait le bilan intégral de ϕ exactement sur chaque volume fini et donc sur tout le domaine. Cette méthode peut accommoder n'importe quel type de maillage, même pour les géométries complexes. Le maillage définit seulement les frontières de volume de contrôle et n'a pas besoin d'être rapporté à un système de coordonnées. L'approche par volumes finis est peut-être la plus simple à comprendre et à programmer. Tous les termes qui doivent être approchés ont la signification physique c'est pourquoi cette méthode est choisie

II.3.1 Maillage : pour la première partie nous avons utilisé un code développé par professeur Bessaïh traitant le cas axisymétrique. Rappelant que ce maillage est pour l'état axisymétrique, car en deuxième partie nous avons utilisé une configuration tridimensionnelle et nous avons recours au code CFD **Fluent**.

Le domaine physique est divisé en un certain nombre de volumes finis. Sur la figure (II-4 à gauche), on montre un ensemble de volumes de contrôle bidimensionnels typiques

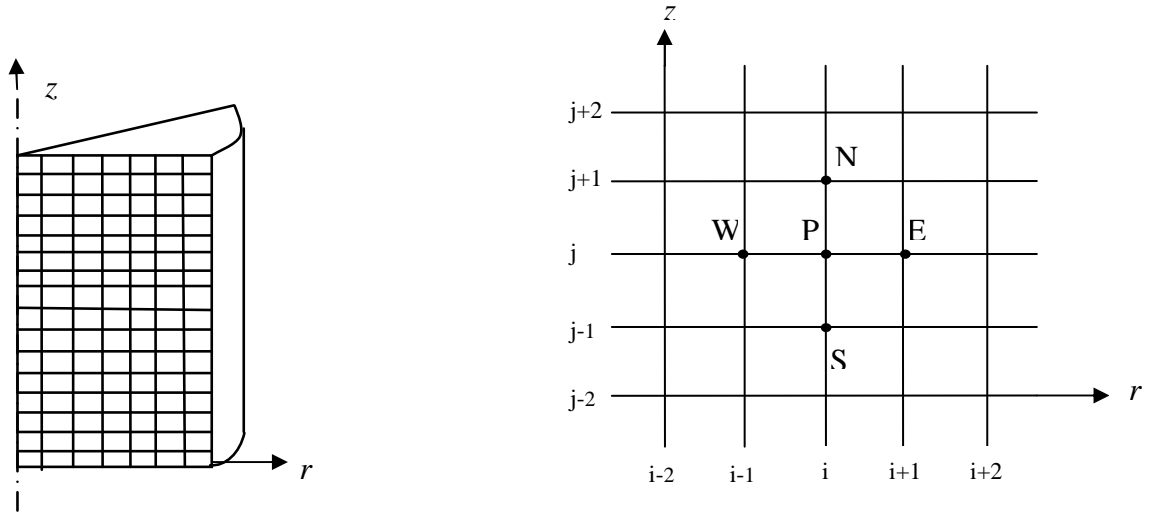


Figure II-4 : Maillages bidimensionnels et nœuds du maillage

Les variables dépendantes sont stockées dans des points discrets appelés nœuds (points d'intersection des lignes du maillage) voir figure (II-4 à droite). Les nœuds sont numérotés de 1 à N_i , suivant r le nœud (i, j) est appelé P, il est entouré par les nœuds E (Est), N (Nord), W (West) et S (Sud). À chaque nœud est associé un volume fini (Fig. II-5), les faces du volume sont situées au milieu entre les nœuds, la surface de VC consiste en quatre plans, notés par des lettres minuscules correspondant à leur direction e, w, n et s (Exemple : la face w est au milieu entre les nœuds W et P).

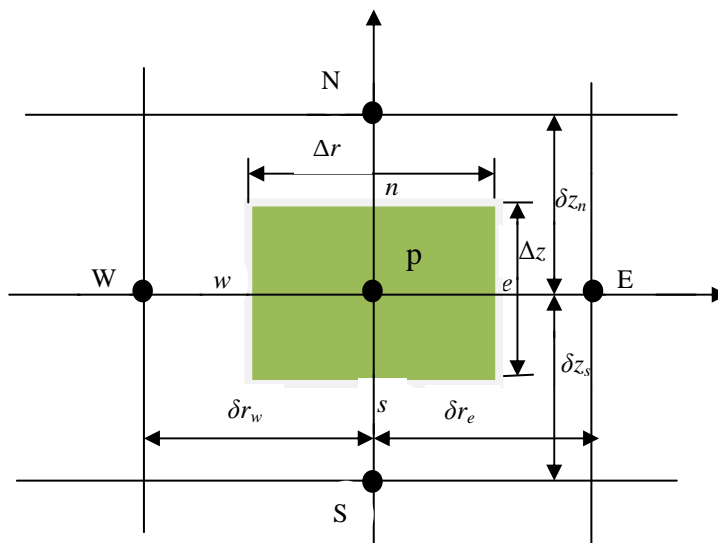


Figure II-5 : Volume de contrôle typique

Les incréments de distance Δr , Δz , δr_e , δz_n , δr_w , δz_s sont définis sur la (Fig. II-5). Les scalaires ϕ (composantes de vitesse azimutale w , pression p , température Θ et potentiel électrique Φ) sont stockés au nœud central. Les composantes de vitesse u et v sont stockées dans des nœuds décalés, (Fig. II-6) l'emploi de tels maillages entrelacés permet le calcul des gradients de pression dans les équations de quantité de mouvement, sans interpolation des pressions et le calcul des flux convectifs dans les équations sans interpolations des vitesses, et d'éviter l'instabilité bien connue « *checkerboard* » (Michelson, 1986) dans lequel des cellules de réseau supplémentaires montrent des solutions complètement différentes.

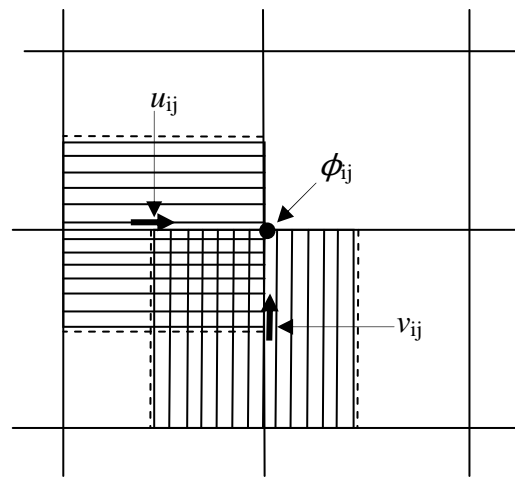


Figure II-6 : Volume de contrôle décalé pour u et v dans un maillage entrelacé

Dans les écoulements MHD, les couches limites de Hartmann se développent et diffèrent de celles ordinaires présentes en situation purement hydrodynamique. Aux parois perpendiculaires au champ magnétique, les couches limites de Hartmann sont caractérisées par une décroissance exponentielle de la vitesse vers la paroi (Kharicha et al, 2004 ; Bessaih et al, 2003), Aux parois parallèles au champ magnétique, une couche appelée couche parallèle existe, et cela engendre d'importants gradients de vitesse et de température. Dans le but de comprendre ce qu'il s'est produit aux couches de Hartmann et parallèles, en prenant en considération la loi de variation de leurs épaisseurs, dans le cas axisymétrique on a raffiné le réseau de maillage près des parois selon une progression géométrique de raison 1.05 dans la direction r et 1.05 dans la direction z (Fig. II-7à droite).

Dans la deuxième partie c.à.d. le cas tridimensionnel, on a dans un premier temps essayé d'utiliser un maillage aux pas d'espace non réguliers, mais les résultats n'étaient pas très satisfaisants. La création de la géométrie ainsi que le maillage s'est fait sous le logiciel GAMBIT. Le choix s'est porté sur un maillage structuré (hexaédriques) et constitué d'environ

434160 cellules (figure. II.7b). Les résultats numériques sont obtenus en utilisant le code de simulation Fluent basé sur la méthode des volumes finis pour la discrétisation des équations du problème.

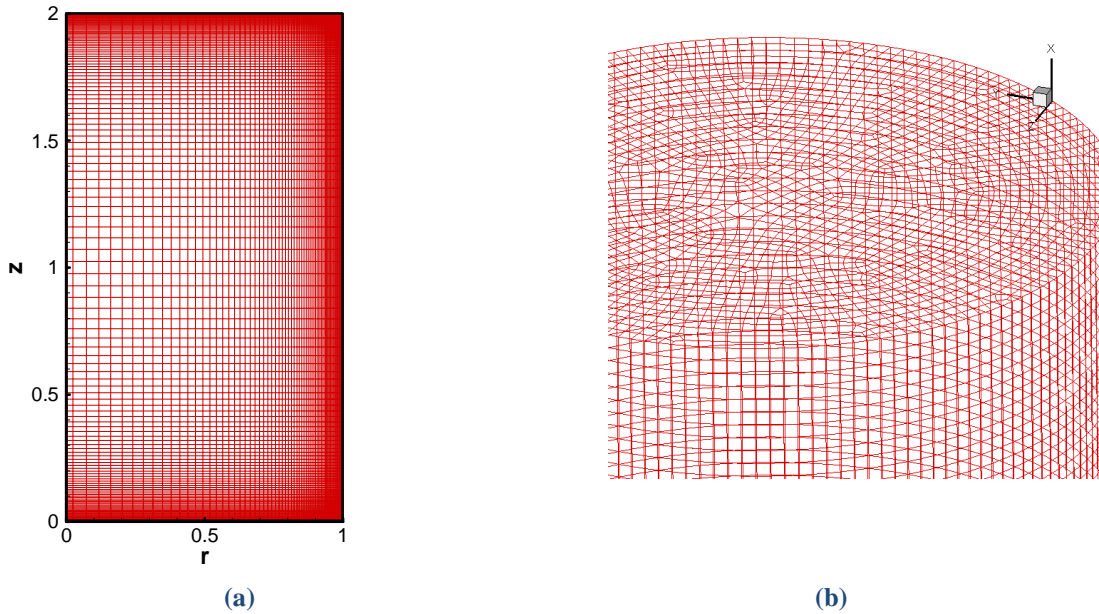


Figure II-7 : Maillage utilisé (a) pour le cas axisymétrique avec raffinement près des parois ($n_r \times n_z = 80 \times 160$), (b) pour le cas tridimensionnel non-axisymétrique constitué d'environ 434160 cellules

II.3.2 Discrétisation implicite de l'équation générale de transport à l'état axisymétrique :

Les équations locales instantanées régissant l'écoulement en question peuvent s'écrire selon la suivante forme de l'équation généralisée de transport d'une variable dépendante ϕ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{\partial(u\phi)}{\partial r} + \frac{\partial(v\phi)}{\partial z} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right) + S_\phi \quad (\text{II.45})$$

Où :

$\frac{\partial \phi}{\partial \tau}$: représente le terme transitoire.

$\frac{\partial(u\phi)}{\partial r} + \frac{\partial(v\phi)}{\partial z}$: représente le transport par convection de ϕ .

$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right)$: représente la diffusion de ϕ .

S_ϕ : représente le terme source.

Le tableau suivant rassemble les expressions de la variable dépendante ϕ , du coefficient de diffusion Γ_ϕ et du terme source S_ϕ concernant les équations adimensionnelles citées au précédent chapitre (Eqs. (II.18-II.22)). Toutefois, pour l'équation du potentiel électrique (Eq. II.23), elle est du type Poisson bien connu, et représente la loi de comportement pour la quantité Φ en régime stationnaire, et nous faisons abstraction des termes transitoire et de convection pour l'écrire sous la forme de transport générale (Eq. II.45).

Equation de	ϕ	Γ_ϕ	S_ϕ
Continuité	1	0	$-u/r$
Quantité de mouvement radiale	u	$\frac{1}{\text{Re}}$	$-\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{u}{r^2} - \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}} u + \frac{w^2}{r}$
Quantité de mouvement axiale	v	$\frac{1}{\text{Re}}$	$-\frac{\partial P}{\partial z} + \text{Ri} \cdot \Theta$
Quantité de mouvement azimuthale	w	$\frac{1}{\text{Re}}$	$-\frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{w}{r^2} + \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} - w \right) - \frac{uw}{r}$
L'énergie	Θ	$\frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}}$	0
Potentiel électrique	Φ	1	$-\frac{w}{r} - \frac{\partial w}{\partial r}$

Tableau II-1 Différentes quantités transportées et leurs termes de transport.

Pour obtenir l'équation de discrétisation de la variable dépendante ϕ , on intègre l'équation générale de transport (II.45) suivant r et z après multiplication par r sur un volume fini de contrôle typique de dimensions $\Delta r \times \Delta z$ par unité de profondeur (pour plus de détail voir **Liehard et al.** (2005) on obtient la forme algébrique finale suivante :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (\text{II.46})$$

Les coefficients multiplicatifs (a_P, a_E, a_W, a_N, a_S) de la variable dépendante ϕ ainsi que le terme b de l'équation (II.46) sont décrits en détail dans **Patankar** (1980) et sont rappelés ci-dessous:

$$a_E = D_e A(|P_e|) + \max[-F_e, 0] \quad (\text{II.47a})$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + \max[F_w, 0] \quad (\text{II.47b})$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + \max[-F_n, 0] \quad (\text{II.47c})$$

$$a_S = D_s A(|P_s|) + \max[F_s, 0] \quad (\text{II.47d})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_{P^0} \quad (\text{II.47e})$$

$$b = \left(\bar{S}_\phi + \frac{\phi^0}{\Delta \tau} \right) r_P \cdot \Delta r \cdot \Delta z \quad (\text{II.47f})$$

Avec a_P, a_E, a_W, a_N et a_S sont respectivement les coefficients correspondants aux noeuds central (point P), Est, Ouest, Nord et Sud du volume fini de contrôle et A_{P^0} est le coefficient de la variable générale ϕ à calculer au point P en un instant précédent par :

$$a_{P^0} = \frac{r_P \cdot \Delta r \cdot \Delta z}{\Delta \tau} \quad (\text{II.47g})$$

Et b : appelé terme source, qui englobe tous les termes supposés être constants dans le volume de contrôle. D_e, D_w, D_n, D_s et F_e, F_w, F_n, F_s sont respectivement les termes diffusifs et convectifs aux faces Est, Ouest, Nord et Sud. Leurs expressions sont :

$$D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta r_e} r_e \cdot \Delta z \quad (\text{II.48a})$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{\delta r_w} r_w \cdot \Delta z \quad (\text{II.48b})$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n}{\delta z_n} r_n \cdot \Delta r \quad (\text{II.48c})$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s}{\delta z_s} r_s \cdot \Delta r \quad (\text{II.48d})$$

$$F_e = u_e \cdot r_e \cdot \Delta z \quad (\text{II.48e})$$

$$F_w = u_w \cdot r_w \cdot \Delta z \quad (\text{II.48f})$$

$$F_n = v_n \cdot r_p \cdot \Delta r \quad (\text{II.48g})$$

$$F_s = v_s \cdot r_p \cdot \Delta r \quad (\text{II.48h})$$

Et P_e, P_w, P_n, P_s sont :

$$P_i = F_i / D_i \quad ; i = e, w, n, s \quad (\text{II.49})$$

Ces nombres appelés nombres du Peclet, désignent les rapports des flux convectifs aux flux diffusifs aux différentes faces du volume fini de contrôle. Les coefficients a_p, a_E, a_W, a_N et a_S dépendent du schéma numérique choisi et du nombre de Peclet.

Dans tous nos calculs, on a utilisé le schéma numérique de différences centrées (**Patankar ,1980**) Ce choix est motivé par le fait que ce schéma soit le plus usuellement utilisé dans la littérature pour découvrir les instabilités physiques. Ce schéma est donné par la fonction suivante :

$$A(|P_i|) = 1 - 0.5|P_i| \quad ; i = e, w, n, s \quad (\text{II.50})$$

Cependant la résolution de l'équation (II.46) fait apparaître deux difficultés :

- les coefficients des équations discrètes dépendent des valeurs des variables, le système n'est donc pas linéaire.
- Les termes source des équations de quantité de mouvement font intervenir le gradient de pression.

II.3.3 Algorithmes de résolution:

Pour résoudre les systèmes d'équations algébriques résultants des discrétisations des équations régissant le mouvement par la méthode VF, il faut remédier aux deux difficultés mentionnées à la fin de la section précédente. Pour cette raison, on a fait appel à l'algorithme SIMPLER (**Patankar ,1980**) pour construire les coefficients formant les systèmes des équations algébriques. Puis on les résout par l'algorithme TDMA (**Patankar ,1980**) qui est plus approprié à ce genre de systèmes algébriques.

- **Algorithme SIMPLER (Patankar ,1980):**

La résolution des équations de quantité de mouvement et l'équation de continuité donne en principe le champ des vitesses et le champ de pression. La question est : comment peut-on obtenir les pressions de l'équation de continuité si les vitesses sont obtenues des équations de

quantité de mouvement? L'algorithme SIMPLER (Semi Implicit Method for Pressure-Linked Equation Revised) est une méthode itérative qui permet justement le calcul des vitesses et la pression. Après convergence de la solution, les champs de vitesse et de pression doivent satisfaire simultanément l'équation de continuité et l'équation de quantité de mouvement.

Après intégration sur un volume fini et discrétisation des différents termes on aboutit à la forme algébrique des équations de quantité de mouvement :

$$\left. \begin{aligned} a_e u_e &= \sum_{i=E,W,N,S} a_i u_i + b_u + (P_P - P_E).A_e \\ a_n v_n &= \sum_{i=E,W,N,S} a_i v_i + b_v + (P_P - P_N).A_n \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-50})$$

Sur la base d'un champ de pression estimée P^* , ces équations donnent un champ de vitesses u^* et v^* qui ne satisfont pas l'équation de continuité. On a les relations :

$$\left. \begin{aligned} a_e u_e^* &= \sum_{i=E,W,N,S} a_i u_i^* + b_u + (P_P^* - P_E^*).A_e \\ a_n v_n^* &= \sum_{i=E,W,N,S} a_i v_i^* + b_v + (P_P^* - P_N^*).A_n \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-51})$$

Pour aboutir à des champs corrects de vitesse et de pression u , v et P il faut corriger u^* et v^* et P^* Comme suit :

$$\begin{aligned} u &= u^* + \tilde{u} \\ v &= v^* + \tilde{v} \\ P &= P^* + \tilde{P} \end{aligned}$$

Comment déterminer les corrections de vitesse \tilde{u} , \tilde{v} et la pression \tilde{P} ?

Soustrayons (II-14) de (II-13) on obtient :

$$\left. \begin{aligned} a_e \tilde{u}_e &= \sum_{i=E,W,N,S} a_i \tilde{u}_i + (\tilde{P}_P - \tilde{P}_E).A_e \\ a_n \tilde{v}_n &= \sum_{i=E,W,N,S} a_i \tilde{v}_i + (\tilde{P}_P - \tilde{P}_N).A_n \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-52})$$

A ce stade les termes $\sum_{i=E,W,N,S} a_i \tilde{u}_i$ et $\sum_{i=E,W,N,S} a_i \tilde{v}_i$ sont omis. A noter que la solution finale des champs de vitesse et de pression ne contiendra pas d'erreur due à cette omission puisque tous les termes de ces équations tendent vers zéro. On obtient donc, pour les 4 faces e, w, n, s du volume central.

$$\left. \begin{aligned} u_e &= u_e^* + d_e (\tilde{P}_P - \tilde{P}_E) \quad \text{ou} \quad d_e = A_e / a_e \\ u_w &= u_w^* + d_w (\tilde{P}_W - \tilde{P}_P) \quad d_w = A_w / a_w \\ v_n &= v_n^* + d_n (\tilde{P}_P - \tilde{P}_N) \quad d_n = A_n / a_n \\ v_s &= v_s^* + d_s (\tilde{P}_S - \tilde{P}_P) \quad d_s = A_s / a_s \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-53})$$

$$A_e = A_w : \text{Surface } (\Delta z \times 1)$$

$$A_n = A_s : \text{Surface } (\Delta r \times 1)$$

En effet les vitesses peuvent être corrigées à condition que l'on ait une estimation du champ des corrections des pressions. C'est l'équation de continuité qui va être transformée pour donner une équation des corrections de pression.

L'intégration et la discrétisation de l'équation de continuité par rapport à un volume de contrôle central (pour un fluide compressible) donne.

$$\frac{(\rho_P - \rho_P^0)\Delta r\Delta z}{\Delta \tau} + [(\rho u)_e - (\rho u)_w]\Delta z + [(\rho v)_n - (\rho v)_s]\Delta r = 0 \quad (\text{II-54})$$

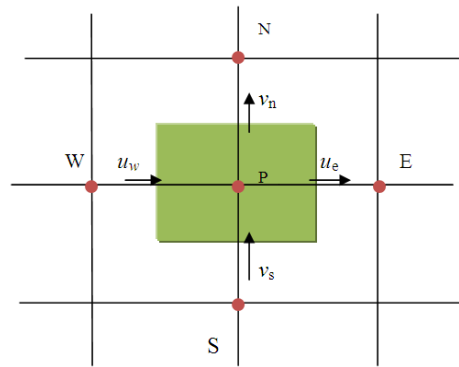


Figure II-8 : Volume de contrôle de l'équation de continuité .

Substituons maintenant à la place des vitesses les expressions reliant les corrections de pression $\tilde{P}_P, \tilde{P}_E, \tilde{P}_W, \tilde{P}_N, \tilde{P}_S$:

$$\left. \begin{aligned} a_P \tilde{P}_P &= a_E \tilde{P}_E + a_W \tilde{P}_W + a_N \tilde{P}_N + a_S \tilde{P}_S + b_m \\ a_E &= \rho d_e \Delta z, a_W = \rho d_w \Delta z, a_N = \rho d_n \Delta r, a_S = \rho d_s \Delta r \\ a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-55})$$

$$b_m = \frac{(\rho_P - \rho_P^0)\Delta r\Delta z}{\Delta \tau} + [(\rho u^*)_w - (\rho u^*)_e]\Delta z + [(\rho v^*)_s - (\rho v^*)_n]\Delta r \quad (\text{II-56})$$

• Equation de la pression

L'équation utilisée pour obtenir le champ de pression et interprétée comme suite :

L'équation de mouvement (II-13) (pour le coté Est) peuvent s'écrire :

$$a_e = \sum_{i=E,W,N,S} \frac{(a_i u_i + b_e)}{a_e} + b_e (P_P - P_E) \quad (\text{II-57})$$

Où d_e donner par l'équation (II-53)

Maintenant nous définissons les pseudo-vitesses \hat{u} et \hat{v} donnée par les équations

$$\hat{u}_e = \sum_{i=E,W,N,S} \frac{(a_i u_i + b_e)}{a_e} \quad (\text{II-58a})$$

$$\hat{u}_w = \sum_{i=E,W,N,S} \frac{(a_i u_i + b_w)}{a_w} \quad (\text{II-58b})$$

$$\hat{v}_n = \sum_{i=E,W,N,S} \frac{(a_i v_i + b_n)}{a_n} \quad (\text{II-58c})$$

$$\hat{v}_s = \sum_{i=E,W,N,S} \frac{(a_i v_i + b_s)}{a_s} \quad (\text{II-58d})$$

Ici b_e , b_w , b_n et b_s sont les termes de source ne contenant pas les gradients de pression.

Ainsi les vitesses s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} u_e &= \hat{u}_e + d_e (P_P - P_E) \\ u_w &= \hat{u}_w + d_w (P_W - P_P) \\ v_n &= \hat{v}_n + d_n (P_P - P_N) \\ v_s &= \hat{v}_s + d_s (P_S - P_P) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-59})$$

Il est facile de voir la similitude entre ces équations et (II-53)). Ici \hat{u} et \hat{v} apparaissent au lieu de u^* et v^* et la pression P lui-même remplace \tilde{P} , une équation pour la pression résulte :

$$a_P P_P = a_E P_E + a_W P_W + a_N P_N + a_S P_S + b \quad (\text{II-60})$$

Avec a_E, a_W, a_N, a_S et a_P donner par Eq (II-55)

$$b = \frac{(\rho_P - \rho_P^0) \Delta r \Delta z}{\Delta \tau} + [(\rho \hat{u})_w - (\rho \hat{u})_e] \Delta z + [(\rho \hat{u})_s - (\rho \hat{u})_n] \Delta r \quad (\text{II-61})$$

La séquence des opérations essentielles constituant l'algorithme SIMPLER est la suivante :

- 1- Deviner un champ de vitesse

- 2- Calculer les coefficients de l'équation de quantité de mouvement et par conséquent calculer les pseudo-vitesses \hat{u} et \hat{v} donnée par les équations :(II-58a)-(II-58d)
- 3- calculer les coefficients de l'équation de pression (II-60), et on la résoudre pour obtenir le champ de pression
- 4- Considérer le champ de pression comme estimation P^* , et résoudre l'équation de mouvement pour obtenir u^* et v^* .
- 5- Calculer le terme source b_m (Eq. II-56) et par conséquent résoudre l'équation de correction de pression \tilde{P} .
- 6- Corriger le champ de vitesse en utilisant l'équation (II-52), mais ne pas corriger la pression.
- 7- Résoudre : - l'équation de swirl, et obtenir w .
 - l'équation de l'énergie, pour obtenir Θ .
 - l'équation de potentiel électrique Φ en utilisant les valeurs de w déjà obtenues.
- 8- Retourner à l'étape 2, avec le nouveau champ de vitesse jusqu'à convergence.

- **Algorithme TDMA :**

Dans le but de résoudre le système d'équations algébriques bidimensionnelles résultant on effectuera un double balayage qui consiste à déterminer les valeurs de la variable ϕ sur chaque ligne du domaine de calcul indépendamment des autres lignes, en conséquence, le système se transforme en un système unidimensionnel, et on considère les termes des autres dimensions comme des constantes en les ajoutant au terme source de la dimension dont-on veut résoudre son système. Le système d'équations en vertu du balayage est constitué d'une matrice tridiagonale qui peut être résolu par l'algorithme de TDMA, **Patankar (1980)**.

Pour le nœud (i, j) du maillage, l'équation (II-45) peut être écrite sous la forme d'une équation unidimensionnelle.

$$a_i\phi_i = b_i\phi_{i+1} + c_i\phi_{i-1} + d_i \quad ; \quad i \text{ variant de } 1 \text{ à } N \quad (\text{II-62})$$

En réécrivant cette équation pour $i=i+1$ et en combinant les deux formes on peut écrire une relation liant uniquement ϕ_i et ϕ_{i+1}

$$\phi_i = G_i\phi_{i+1} + Q_i \quad (\text{II-63})$$

Où G et Q sont deux tableaux de forme :

$$G_i = \frac{b_i}{a_i - c_i G_{i-1}} ; \quad Q_i = \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i G_{i-1}} \quad (\text{II-64})$$

L'équation (II-62) pour $i=1$ (bord gauche) donne :

$$a_1 \phi_1 = b_1 \phi_2 + d_1 \quad (\text{II-65})$$

Naturellement il n'y a pas de point en $(i-1)$ étant donné que l'on est au bord.

Maintenant pour $i=N$ (bord droit) on a :

$$a_N \phi_N = b_N \phi_{N-1} + d_N \quad (\text{II-66})$$

De même que précédemment, il n'y a pas cette fois de point à droite en $i+1$.

Le calcul de G et Q en ces deux points donne :

$$\left. \begin{array}{l} i=1 \quad G_1 = \frac{b_1}{a_1} ; \quad Q_1 = \frac{d_1}{a_1} \\ i=N \quad G_N = 0 ; \quad Q_N = \frac{d_N + c_N Q_{N-1}}{a_N - c_N G_{N-1}} \end{array} \right\} \quad (\text{II-67})$$

Étant donné les relations (II-64) liant G_i et Q_i à G_{i-1} et Q_{i-1} la séquence de calcul est la suivante

- a) calcul de G_1 et Q_1
- b) pour $i=2$ à N calcul des G_i et Q_i
- c) Au point N , la relation (II-63) donne directement : $\phi_N = Q_N$
- d) Le calcul des ϕ_i s'effectue en « redescendant » :

Pour $i=N-1$ à 1 calcul des ϕ_i par la relation (II-63).

Cet algorithme permet donc la résolution d'un système de N équations à N inconnues, en évitant l'utilisation de matrices. Le surcoût de stockage est uniquement de deux tableaux de dimension N .

Chapitre III : Résultats et discussion de la première partie

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux présentations et discussion des résultats obtenus en simulant numériquement l'écoulement tournant axisymétrique confiné dans la cavité cylindrique, de convection mixte sans et avec présence du champ magnétique, dont l'importance dans les applications industrielles a été présentée au premier chapitre. Les résultats figurant dans ce qui suit, sont tous obtenus pour un rapport d'aspect $\gamma=2$ et $Pr = 0.015$ (c'est le cas des métaux liquides), et sont visualisés graphiquement sous plusieurs formes appropriées pour chaque paramètre (des lignes de courant, iso-valeurs des vitesses, des isothermes, potentiel et courant électriques, ...etc.). Ce chapitre se divise en deux parties: La première partie concerne la situation de la convection mixte en absence du champ magnétique, et la deuxième partie présente le comportement de l'écoulement avec l'application d'un champ magnétique axial de diverses intensités via la variation du nombre de Hartmann Ha (5, 10, 20,30). Toutefois, dans les deux parties l'ultime objectif est la détermination des nombres de Reynolds critiques Re_{cr} (la transition d'un régime stable à un régime oscillatoire ou bifurcation de Hopf) et leurs correspondants en fréquences critiques F_{cr} pour différentes valeurs du nombre de Richardson Ri (0,0.5, 1, 2,4) , et cela pour la même configuration décrite au chapitre II. En essayant de mettre en évidence l'effet d'un champ magnétique sur la stabilité hydrodynamique et thermique en régime transitoire pour ce type d'écoulement.

III.1 Effet du maillage :

Plusieurs maillages non uniformes resserrés près des parois de l'enceinte où de forts gradients de vitesse et de température existent ont été utilisés. . Avec différentes grilles de maillage on a calculé les valeurs Max et Min pour Ψ ($u = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}$), Les résultats de l'effet de maillage sont présentés dans le tableau (III-1) et la figure (III-1)

En examinant le tableau (III-1) qui regroupe les valeurs maximales et minimales de la fonction de courant Ψ on peut constater aisément que l'erreur numérique relative dans les valeurs, Ψ_{max} et Ψ_{min} différente de 0.04% et 0.065% respectivement entre la grille fine ($n_r \times n_z = 90 \times 180$) et celle la moins dense (60×120), les différences entre la grille moyenne ($n_r \times n_z = 80 \times 160$) et la plus dense sont seulement de 0.042% et 0.056% pour Ψ_{max} et Ψ_{min} respectivement. Aussi, les profils de vitesse radiale et axiale présentés dans la figure (III-1), nous informent sur la qualité de la solution approchée qu'apportent ces différentes grilles de maillage dans quelques régions du domaine de calcul. Selon le résultat de cet essai le maillage

choisi pour achever les calculs nécessaires à la résolution du problème considéré, est celui avec un nombre moyen de point de discrétisation, c.-à-d. la grille de ($n_r \times n_z=80 \times 160$) pour capter bien les couches de Hartmann et présente le meilleur compromis entre temps de calcul et précision. Le calcul jusqu'à convergence d'une grille de 80×160 points prend environ 3 heures loin du seuil et entre 5 heures et deux jours proche du seuil de transition vers un régime oscillatoire périodique pour un cas stable avec un micro-ordinateur à deux processeurs (Core 2 Duo 1.60 GHz).

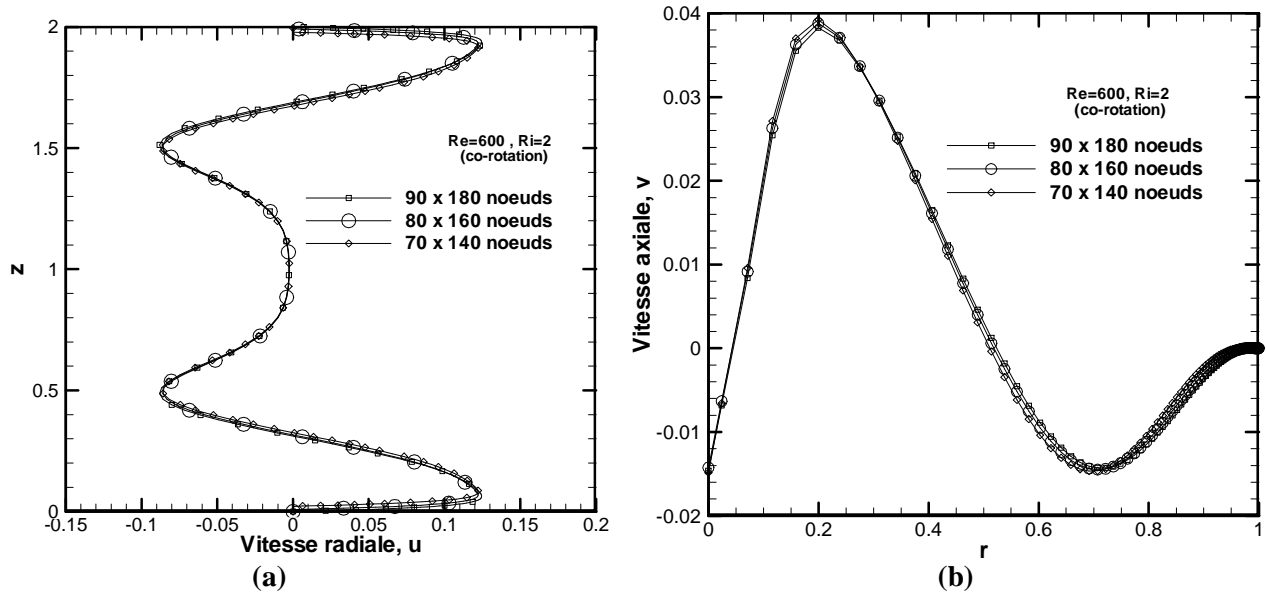


Figure III-1: Distributions (a) axiale de vitesse radiale u à $r=0.89$ et (b) radiale de la vitesse axiale v à $z=1.02$ obtenues avec différentes densités de maillage pour le cas co-rotation, $Re=600$, $Ri=2$

$n_r \times n_z$			grille moins dense		grille moyenne		grille fine	
	Ri	Re	70×140 nœuds		80×160 nœuds		90×180 nœuds	
			min	max	min	max	min	Max
Co-rotation	0	2640	-0.00738	0.00737	-0.00737	0.00739	-0.00736	0.00737
	0.5	1472	-0.03965	0.03964	-0.03963	0.03964	-0.03968	0.03967
	1	925	-0.04369	0.04368	-0.04338	0.04345	-0.04355	0.04395
	2	640	-0.04816	0.04813	-0.04818	0.04816	-0.04815	0.04816
	4	440	-0.05633	0.05631	-0.05635	0.05634	-0.05632	0.05633
Contre-rotation	0	2280	-0.00727	0.00727	-0.00728	0.00728	-0.00726	0.00726
	0.5	1270	-0.00689	0.00690	-0.00688	0.00695	-0.00689	0.00693
	1	940	-0.06154	0.06153	-0.06156	0.06156	-0.06159	0.06158
	2	640	-0.07475	0.07470	-0.07471	0.07472	-0.07476	0.07476
	4	440	-0.07513	0.07513	-0.07515	0.07514	-0.07518	0.07516

Tableau III-1 : Influence des densités de maillage sur les valeurs maximales et minimales de la fonction de courant Ψ , pour différentes valeurs de Re à la proximité du nombre de Reynolds critique (transition vers un régime oscillatoire)

III.2 Validation du code :

Pour donner plus de confiance aux résultats de nos simulations numériques, on a établi quelques comparaisons quantitatives et qualitatives avec d'autres investigations expérimentales et numériques présentées dans la littérature.

Premièrement la comparaison est faite avec les résultats expérimentaux d'**Escudier** (1984) qui a utilisé la technique dite "Laser-induced fluorescence" pour visualiser les contours des lignes de courant dans un enceinte cylindrique avec un fond tournant, de rapport $\gamma=H/R=2$ pour $Re=1854$, $Re=1002$, $Re=1492$ et $Re=1449$ (Fig. III-2) nos résultats sont présentés adroites de chaque figure (a, b, c, d).

Dans la figure (III-3), nous avons utilisé le CFD Fluent pour la comparaison avec notre étude numérique (avec le même maillage). Nous avons présenté des contours de la fonction de courant, vitesse azimutale et les isothermes, pour le nombre de Richardson $Ri=1$, Reynolds $Re=900$ et (co-rotation). En examinant ces figures, nous pouvons constater que nos résultats numériques obtenue par notre code sont en bon accord avec les résultats numériques obtenue avec Fluent. Pour la validation avec un champ magnétique on a considéré la configuration d'une cavité cylindrique de rapport de forme $\gamma=1$ proposée par **Karcher et al.** (2002) ; **Kakarantzas et al.**(2009) concernant l'écoulement de convection naturelle confiné dans la cavité cylindrique. pour le cas $Pr=0.0321$, $Ra=10^5$ (Fig. III-4) .

Le tableau (III-2) représente nos résultats numériques comparé a celle obtenus par **Gelfgat et al.**(1996) ; **Lopez** (1995) ; **Iwatsu** (2005) et **Brøns et al.**(2001) , le tableau regroupe les valeurs de Reynolds critique Re_{cr} (la transition de l'état stable vers un état instable), on constate que la déviation entre les valeur ne dépasse pas 6%.

Dans le cas instable, nous comparons nos résultats (Fig.III-5) avec l'étude numérique de **Gelfgat et al.** (1996), ils ont présenté l'évolution temporelle au cours d'une période complet $T=13.01$ des lignes de courant hydrodynamique de l'écoulement méridienne au cours des temps égaux d'intervalle $0.1 T$ avec $Re=3845$ et $\gamma=1.5$ (cas de co-rotation).

Toutes ces comparaisons valident notre code de calcul en l'attribuant la confiance désirée pour l'utilisation.

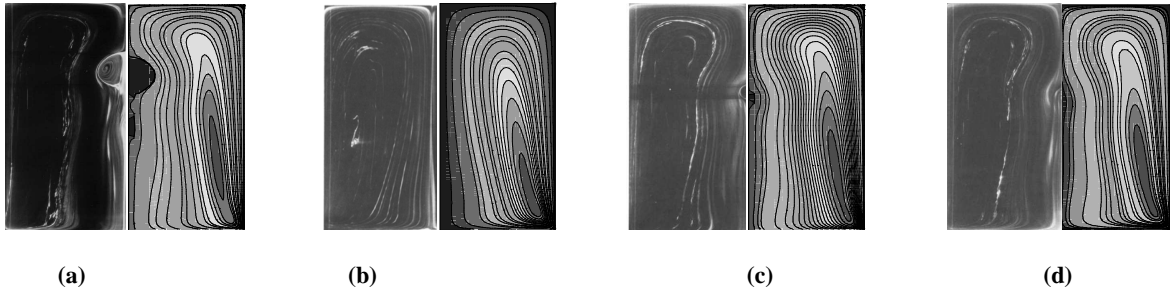


Figure III-2 : Comparaisons avec Escudier (1984) des résultats expérimentaux de contours des lignes de courant dans un cylindre de rapport $\gamma=H/R=2$, (a) $Re=1854$, (b) $Re=1002$, (c) $Re=1492$, (d) $Re=1449$

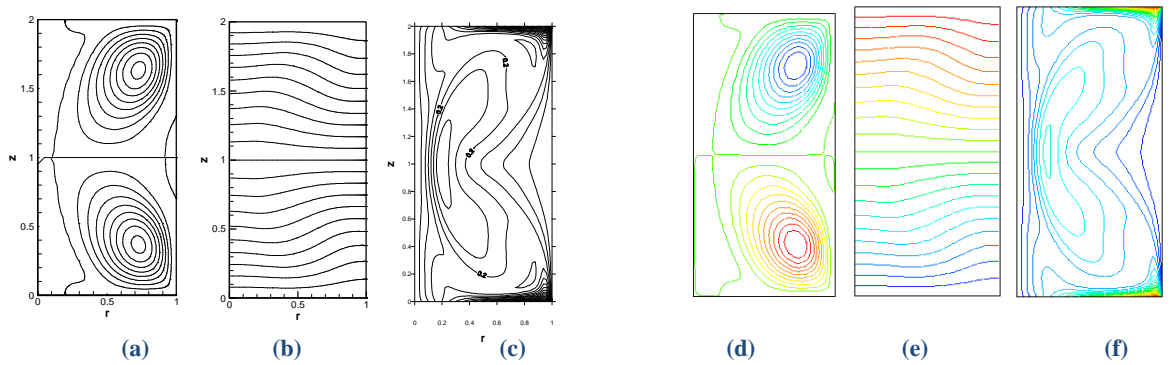


Figure III-3 : Contours de (a-d) lignes de courant, (b-e) température Θ , (c-f) vitesse azimutale w , pour le cas stable d, e, f représente la simulation avec Fluent, pour le cas de $Re=900$ et $Ri=1$ (co-rotation)

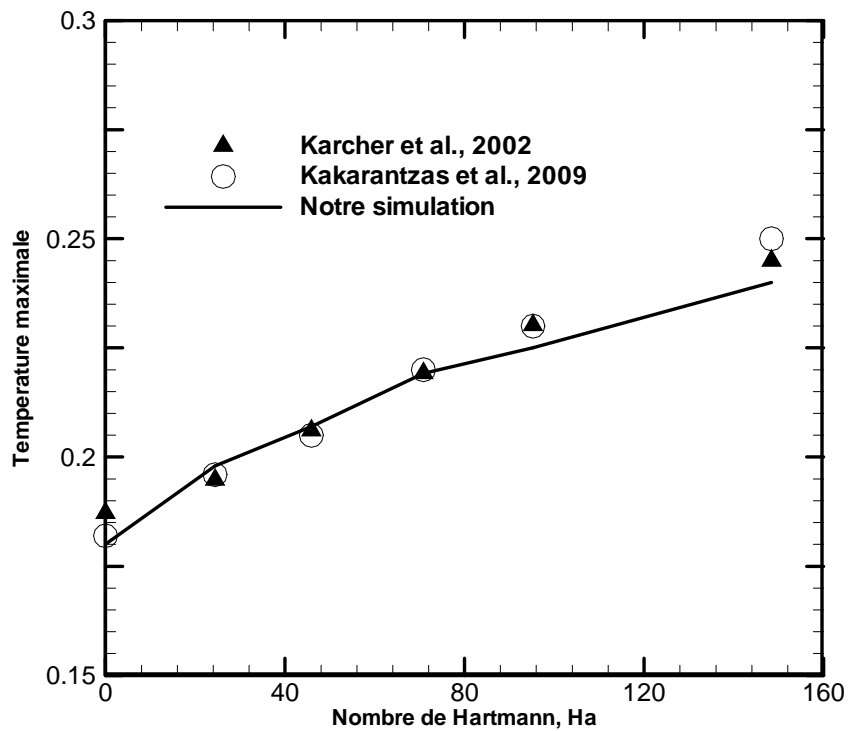


Figure III.4 : Comparaison avec les résultats de Karcher et al.,2002 ; Kakarantzas et al.,2009 et nos résultats

	Gelfgat <i>et al.</i> (1996)	Lopez (1995)	Brons <i>et al.</i> (2001)	Iwatsu (2005)	Présente étude
$n_r \times n_z$	30×30	101×151	$100/\gamma \times 100$ $100 \times 100/\gamma$	161×161 161×321	80×160
$\gamma=0.5$	6745		6246	4248	
$\gamma=0.75$	3846		3714	3812	
$\gamma=1.0$	2567		2564	2384	2406
$\gamma=1.5$	2663	2640	2636	2674	2750
$\gamma=2.0$			2921	2555	2605
$\gamma=2.5$			2725	2697	2715
$\gamma=3.0$			3046	2977	2995
$\gamma=3.5$			3316	3315	
$\gamma=4.0$			3659	3635	3640

Tableau III-2: Comparaison avec des études numériques précédentes, l'influence de la grille et le rapport d'aspect sur le nombre de Reynolds critique Re_{cr}

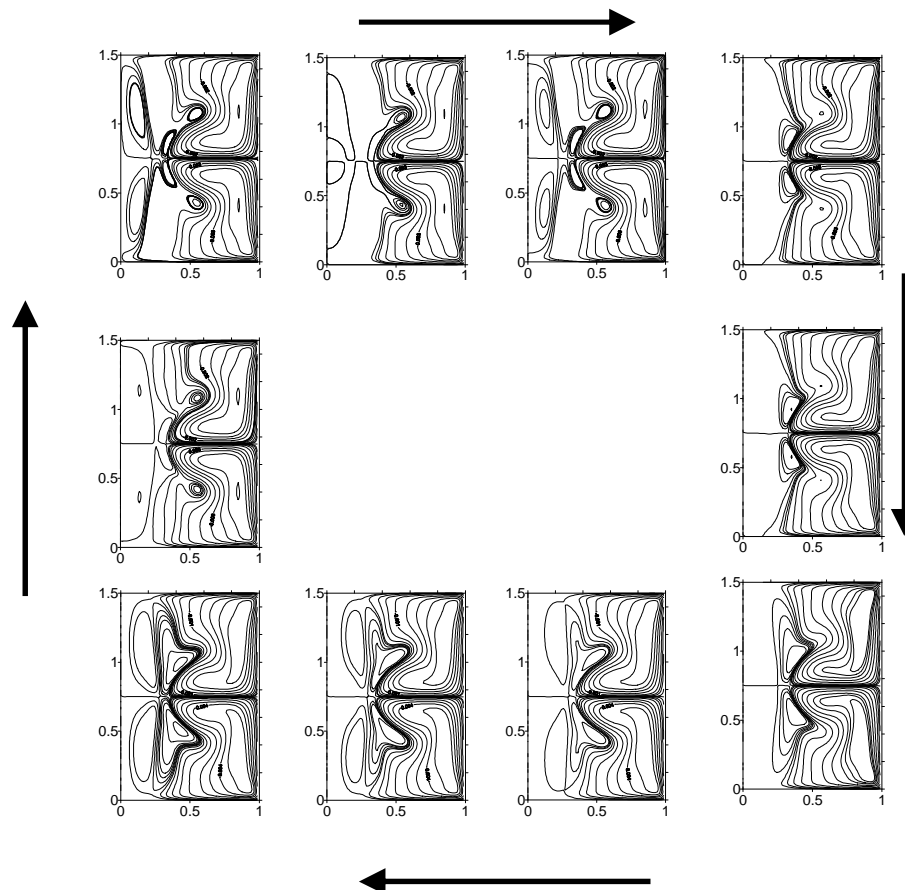


Figure III.5: Comparaison avec les résultats numériques obtenus par Gelfgat *et al.* (1996), dans le cas instable, qui présente l'évolution temporelle au cours d'une période complet $T=13.01$ des lignes de courant hydrodynamique pour le cas de $Re=3845$ et $\gamma=1.5$ (co-rotation).

III.3 Etats stationnaires :

On va faire une comparaison entre deux cas stables, un en co-rotation des disques d'extrémités et l'autre en contre-rotation de ces derniers, ainsi que l'effet du gradient de température sur l'écoulement. Pour cela on va considérer deux cas $Ri=0$ et $Ri=1$ pour éclaircir la vision physique du problème en régime permanent, on va comparer entre quelques paramètres d'écoulement, exemple les contours des lignes de courant, les composantes de vitesse azimutale w et la température Θ

III.3.1 Convection forcée ($Ri=0$):

En examinant attentivement les résultats présentés au Figure (III-6) qui présente le cas de co-rotation des disques d'extrémités avec $Re=2000$ et $Ri=0$, on peut remarquer qu'en raison de la symétrie géométrique, les contours de (ψ , w et Θ) sont symétriques par rapport au mi-plan ($z=H/2=1$). Dans le cas où les deux disques tournent avec la même vitesse angulaire Ω dans la même direction le fluide dans la majeure partie du cylindre tourne quasi-rigidement avec une vitesse intermédiaire des disques d'extrémités, c.à.d. $(\Omega + \Omega)/2 = \Omega$. L'écoulement de type de Batchelor est réalisé (deux couches limites séparant une zone centrale en rotation solide) avec la couche d'Ekman d'épaisseur $O(Re^{-1/2})$ sur les disques d'extrémité et la couche de Stewartson (couche limite unique) avec la double structure $(Re^{-1/4}, Re^{-1/3})$ sur la paroi latérale. L'écoulement axial presque uniforme apparaît à proximité de l'axe tournant en raison du pompage d'Ekman (Fig.III-6a), ce phénomène est toujours présent dans ce type d'écoulement, conduit par rotation des parois du cylindre quelque soit le régime d'écoulement stable ou transitoire. Le cas où les deux disques tournent avec la même vitesse angulaire Ω dans le sens opposé c.-à-d. contre-rotation des disques d'extrémités pour $Re=2000$ et $Ri=0$, on obtient une situation dans la quelle chaque disque tend à entraîner une demi épaisseur de fluide à vitesse angulaire relative, Ω et $-\Omega$, un écoulement de cisaillement inter-disque est créé (Fig. III-6a'). Ces résultats sont en accord avec les résultats obtenu par **Moisy et al.** (2002) et **Omi et Iwatsu** (2005) avec la création de la recirculation méridienne. La figure (III-6a) représente les contours de lignes de courant où exposent une paire des cellules secondaires symétriques près à l'axe de rotation à mi-plan ($z=1$), les mécanismes physiques qui induisent ces cellules sont discutés dans les littératures (**Valentine et Jahnke,1994**). En observant les lignes isothermes dans le plan (r, z) (Figs. III-6b ;6b') on constate bien que l'échange de chaleur se manifeste où la convection domine le transfert thermique.

III.3.2 Effet du gradient de température sur l'écoulement ($Ri=1$) :

L'écoulement avec gradient de la température est décrit dans le cas $Ri=1$ et $Re=900$ (Fig. III-7). On remarque aussi que les couches limites sont formées sur les deux disques rotatifs en raison de l'inhibition du mouvement vertical par l'effet de la force de buoyancy. Le pompage d'Ekman disparaît à l'intérieur du récipient, la couche limite de la paroi latérale disparaît au milieu du cylindre de $z=0.5$ à $z=1.5$, (Figs. III-7a ;7a'). Dans le cas de co-rotation le fluide dans le volume indépendamment des disques rotatif tourne en bloc avec une vitesse angulaire intermédiaire des disques d'extrémités (Fig. III-7c). Dans le cas de contre-rotation le fluide tourne à la même vitesse angulaire Ω dans le sens opposé, où chaque disque tend à entrainer une demi épaisseur de fluide à vitesse angulaire relative, Ω et $-\Omega$, un écoulement de cisaillement inter-disque est créé (Fig. III-7c'). La convection domine le transfert de chaleur comme il est clairement montré dans les contours des isothermes, (Figs. III-7b ;7b')

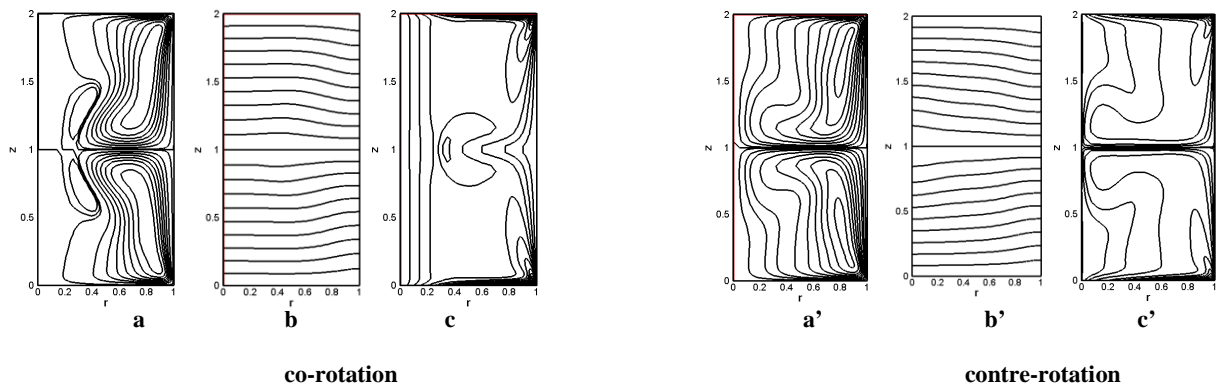


Figure III-6 : Contours de (a-a') lignes de courant, (b-b') température Θ , (c-c') vitesse azimutale w avec $Re=2000$ et $Ri=0$.

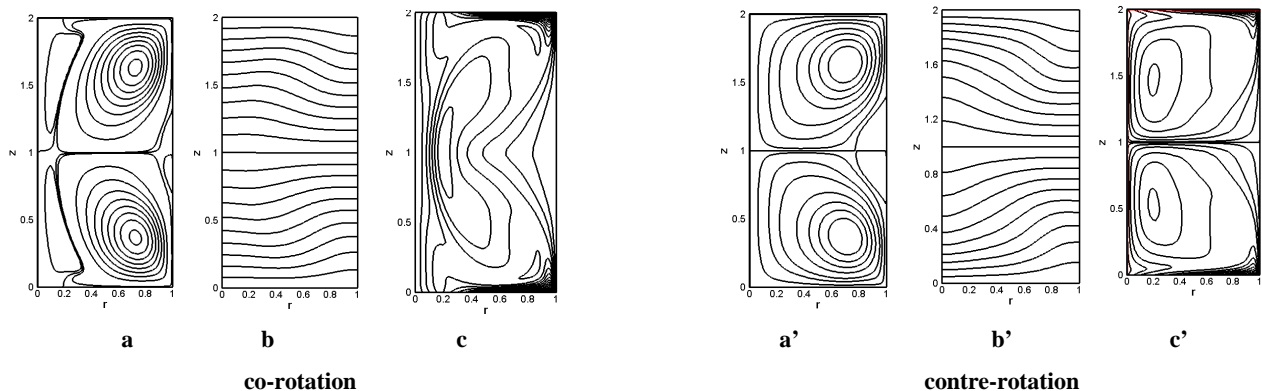


Figure III-7 : Contours de (a-a') lignes de courant, (b-b') température Θ , (c-c') vitesse azimutale w avec $Re=900$ et $Ri=1$

III.4 Etats oscillatoires sans champ magnétique

Nous intéressons dans ce paragraphe à l'influence de Co/contre-rotation des disques d'extrémités sur la transition de l'état stable à l'état oscillatoire. Nous faisons la comparaison au même temps avec la co-rotation et la contre-rotation des disques d'extrémités de divers paramètres d'écoulement on déterminant le seuil de transition (Reynolds critique, Re_{cr} et la fréquence critique, F_{cr}). Alors seules les équations (II.18-II.22) vont être résolues numériquement, sans prendre en compte des termes des forces de Lorentz F_{Lr} , F_{Lz} , $F_{L\theta}$ (ajoutés aux équations de Navier-stokes).

Dans les systèmes dynamiques, quand un système rentre dans l'instabilité il présente au début un caractère oscillatoire ou périodique, puis en raison du phénomène de bifurcation ce système deviendra aperiodique, et en fin il rente dans la turbulence. Le seuil de la transition vers un régime oscillatoire caractérisé par le nombre de Reynolds critique (le début d'instabilité oscillatoire). Pour détecter les instabilités physiques on va effectuer une succession de calculs numériques, en augmentant le nombre de Reynolds dans des intervalles prédéterminés. Pour chaque rapport de Richardson $Ri=0, 0.5, 1, 2, 4$, on va découvrir le nombre de Reynolds critique Re_{cr} marquant le début des instabilités. Les instabilités trouvées pour un pas du temps adimensionnel $\Delta\tau$ peuvent être numériques (non physiques), alors pour éliminer ces instabilités numériques, on recalcule la solution obtenue avec les mêmes paramètres de l'écoulement mais avec un pas du temps $\Delta\tau/2$, si les amplitudes des oscillations restent les mêmes après réduction du pas de temps, cette instabilité sera physique. Par exemple la figure (III-8) présente l'évolution temporelle de composantes de vitesse axiale u dans le cas de co-rotation au point $r=0.5, z=0.97$ pour $Ri=1$, juste avant le seuil de transition ($Re=900$ et $Re=926$) et le début d'instabilité oscillatoire pour $Re_{cr}=928$.

Les résultats correspondant pour les différentes valeurs du rapport de Richardson $Ri=0, 0.5, 1, 2$ et 4 , sont récapitulés à la fin de cette section dans le tableau (III-3), ainsi que deux diagrammes de dépendance ($Re_{cr}-Ri$) et ($F_{cr}-Ri$). Nous faisons la comparaison au même temps avec la co-rotation et la contre-rotation des disques d'extrémités, représenté dans la figure (III-16). L'écoulement primaire est représenté en utilisant la composante azimutale w , Tandis que l'écoulement secondaire est illustré avec des composantes méridiennes u et v et les lignes de courant hydrodynamiques tracées à l'aide de la fonction de courant.

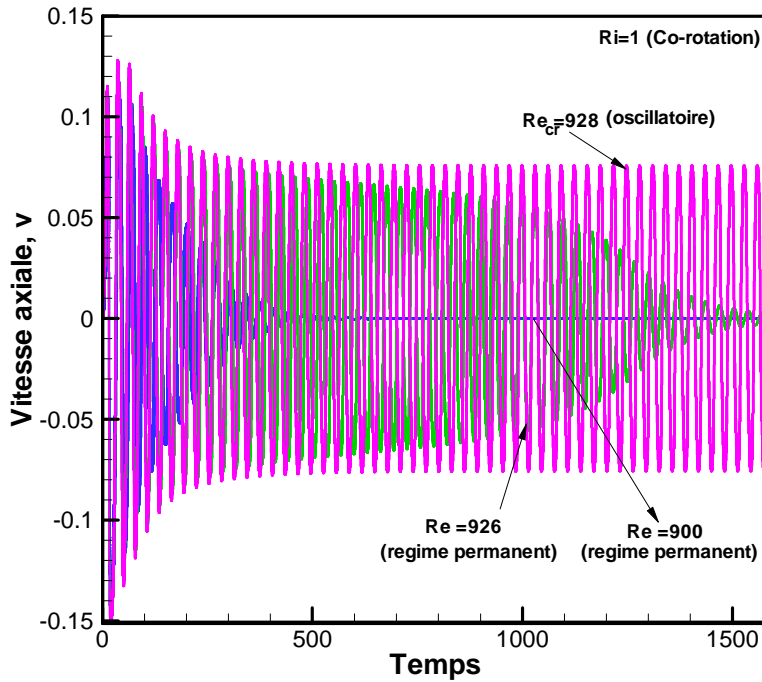
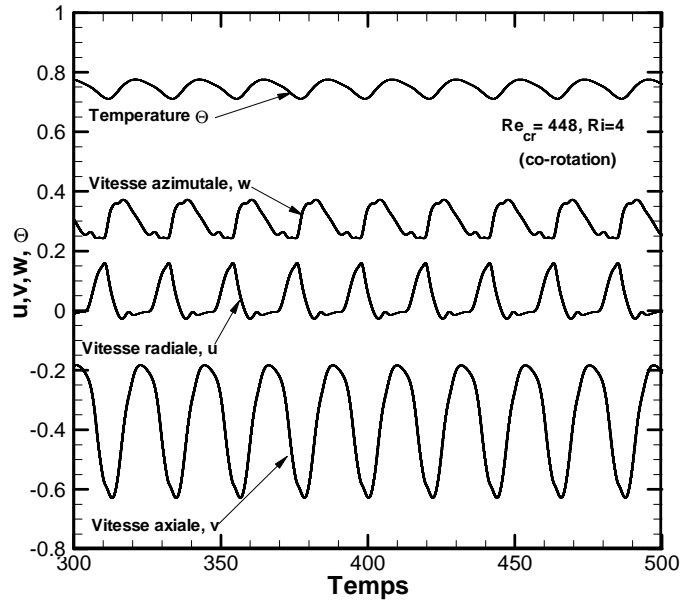


Figure III-8: Evolutions temporelles de composantes de vitesse axial v dans le cas de co-rotation $r=0.5$, $z=0.97$ pour $Ri=1$, $Re=900$ et $Re=926$ (cas stable) et $Re_{cr}=928$ (cas oscillatoire)

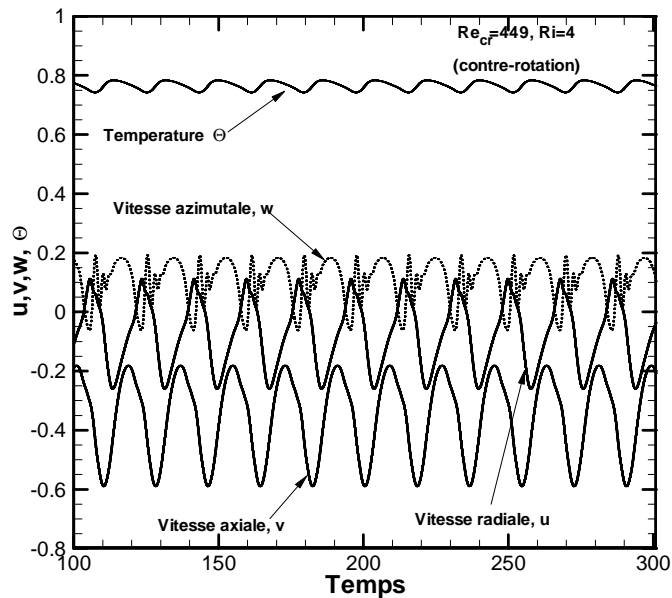
L'aspect oscillatoire des évolutions temporelles de composantes de vitesse axial v , enregistrés au point $r=0.5$, $z=0.97$ (Fig. III-8) indique que les instabilités oscillatoires commencent, et l'écoulement bifurque vers un régime instable. Ce comportement oscillatoire des différents paramètres signale l'existence d'un changement continu des structures de l'écoulement. En comparant les amplitudes des paramètres en oscillation, on peut remarquer que ces amplitudes présentent des grandeurs différentes pour les différents points d'enregistrements historiques, cela conduit à conclure que les amplitudes des oscillations dépendent des positions des particules dans le cylindre. Aussi on remarque clairement que les amplitudes des oscillations de la température sont plus petites que celles des vitesses radiales et axiales (Fig. III-9), ceci peut être interprété par la domination de la conduction en transfert de chaleur dans ce type d'écoulement de fluides à faible nombre de Prandtl. Tandis que les fréquences d'oscillations sont les mêmes partout (dans le fluide), ce qui justifie la périodicité ($1/F$) où F représente la fréquence d'oscillation régnant au sein de l'écoulement en global, cette définition de la périodicité a été utilisée par Lopez et Perry (1992).

Afin d'obtenir le spectre d'énergie des oscillations, on a utilisé la transformée rapide de Fourier (FFT) d'un nombre (N_{ech} , une certaine puissance de 2) d'échantillons, extraits des valeurs des variations temporelles des différents paramètres adimensionnels. Cette transformée est multipliée par son complexe conjugué et divisée par 2 pour obtenir la densité de spectre d'énergie PSD (Power Spectrum Density) en fonction des fréquences des oscillations F , définies

par : $F = \overline{k/(N_{ech} \times \Delta \tau)}$, où $\Delta \tau$ l'incrément du temps et $k=1$, $N_{ech}/2$, l'énergie est normalisée par N_{ech}^2 . Les valeurs de PSD en fonction de F présentent diverses échelles de grandeurs allant des très petites $O(10^{-25})$ aux élevées $O(10^{-5})$. Cette analyse spectrale concernera les évolutions temporelles des grandeurs adimensionnées.



(a) $Re_{cr}=448$ and $Ri=4$ (co-rotation)



(b) $Re_{cr}=449$ and $Ri=4$ (contre-rotation).

Figure III-9: Evolution temporelle de u , v , w , and Θ au point ($r=0.493$, $z=0.413$).

Les fréquences prédominantes adimensionnelles (les plus grands pics) sont considérées comme celle jouant le rôle principale dans l'oscillation des l'écoulement et donc l'échange de l'énergie cinétique et thermique, mais puisqu'on est entrain d'un phénomène de bifurcation, elles peuvent exister plusieurs d'autres fréquences qui sont les multiplicateurs de celle prédominante. Cette multitude de fréquences d'oscillations dans l'écoulement signifie qu'il est multicellulaire, en d'autre terme c'est le vortex breakdown (ou éclatement tourbillonnaire), où elles existent une ou plusieurs zones de recirculation, chacune est séparée de l'autre et de l'écoulement secondaire par une ligne de courant n'ayant aucun débit $\Psi=0$ (line séparatrice) donc il ya plusieurs modes linéaires les plus instables de la perturbation qui deviennent successivement dominant avec un changement continu, et l'instabilité oscillatoire peut mener à une apparence et coexistence de plus qu'une bulle séparatrice du vortex. Ceci est en accord avec l'analyse de la stabilité linéaire de **Gelfgat et al.**(1996). La figure III-10 présente l'analyse spectrale résultant de l'application de FTT aux évolutions temporelles de quelques paramètres, en indiquant les fréquences prédominantes pour chaque cas, qui correspond à l'harmonique où elle a une énergie spectrale maximale. Ces fréquences critiques sont regroupées au tableau (III-3) avec les nombres de Reynolds critiques correspondants pour les différentes valeurs du nombre de Richardson $Ri=0, 0.5, 1, 2$ et 4

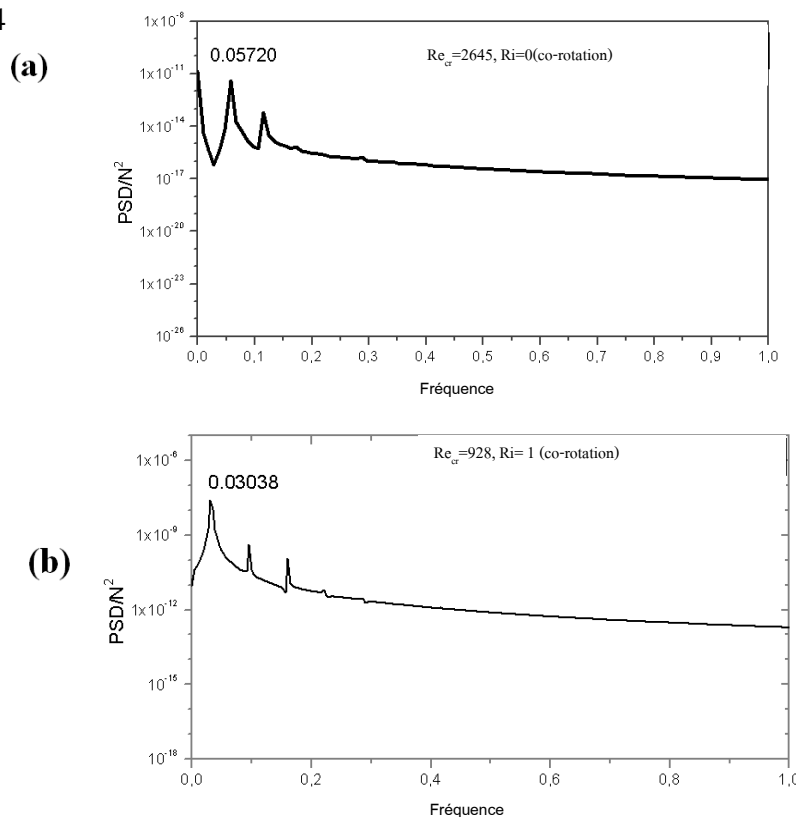


Figure III-10 : Densité du spectre d'énergie obtenue par transformation de Fourier de la composante de vitesse u au point $(r=0.493, z=0.975)$, pour (a) $Re_{cr}=2645$ et $Ri=0$, (co-rotation) avec $\Delta\tau=10^{-4}$ et $N_{ech}=2^{20}$ (b) $Re_{cr}=928$ et $Ri=1$, co-rotation avec $\Delta\tau=10^{-3}$ et $N_{ech}=2^{19}$

Les tracées des composantes adimensionnelles de vitesse dans les plan de phase, sont présentées au (Fig. III-11), ces diagrammes qu'on les appelle portraits de phase sont des boucles fermées avec des harmoniques dominantes ce qui signifie que le régime d'écoulement quasi-périodique est atteint. Les portraits de phase sont utilisés pour inspecter d'une façon intuitive et fiable sur le régime d'un mouvement, puisqu'ils présentent un point limite lorsque le régime est permanent ou un cycle limite dans le cas d'un régime oscillatoire, ou par un tore si le mouvement est apériodique, et par un attracteur étrange (strange attractor) dans le cas du régime chaotique, plus les détails voir **Stevens et al. (1999)**. D'autre part, on a utilisé les portraits de phase durant les calculs pour s'assurer que les amplitudes sont uniformes ou en d'autres termes les évolutions temporelles ont le caractère sinusoïdal. On peut apercevoir ce caractère périodique derrière les cycles limites.

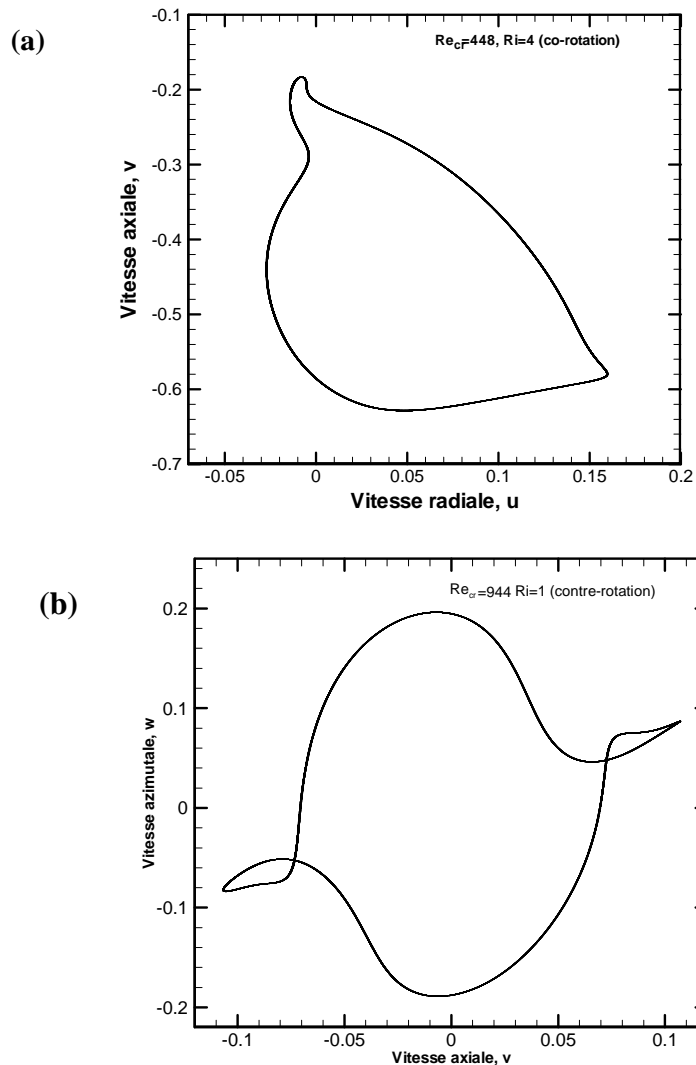


Figure III-11 : Cycles limites pour tracée des composantes de vitesse oscillatoires (a) plan de phase (u, v) au point ($r=0.201, z=0.975$) pour $Re_{cr}=448$ et $Ri=4$ (co-rotation). (b) plan de phase (v, w) au point ($r=0.493, z=0.413$) pour $Re_{cr}=944, Ri=1$ (contre-rotation)

III.4.1 Structure de l'écoulement

Dans le but de comprendre la nature oscillatoire des différents paramètres de l'écoulement pour le cas de co-rotation des disques d'extrémités, on a choisi l'évolution temporelle au cours d'une période de la de la vitesse radiale adimensionnelle u au point ($r=0.493, z=0.413$) pour le cas de $Re_{cr}=928$ et $Ri=1$ (Fig. III-12) ,pour explorer la structure de l'écoulement pendant des laps de temps adimensionnelles $\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d, \tau_e, \tau_f$ et τ_g .Les lignes de courant hydrodynamique au cours des temps adimensionnelles sont présenté dans la première ligne du figure (III-13). A premier instant $\tau_a= 23.6$, l'existence de deux cellule principale avec la domination de la cellule de coté disque inferieur. L'instabilité de couche limite brise la symétrie déjà observé dans le cas de régime stable et les couches d'Ekman se forment sur les deux disques rotatifs. La structure a l'instant τ_a semblable a celle de l'instant $\tau_g=55.11$ se que signifie que l'écoulement s'effectue d'une manière périodique pendant une période d'environ $1/0.03038 \approx 32.91$, pour les autres l'instant les dimensions des cellules se changent, en subissant un élargissement et un rétrécissement pour l'instant $\tau_b =26.65$ un structure oppose à celle enregistré à l'instant $\tau_f = 49.91$.On observe un détachement de cellule pour les instants τ_c et τ_d . Une divination important des lignes isothermes cotées disque chaud où la convection domine le transfert thermique, observé sur la deuxième line de la figure (III-13). Pour les contours de vitesses azimutales représentées dans la troisième ligne, on remarque clairement ici que la couche limite est instable.

Dans le cas de l'écoulement en contre-rotation des disques d'extrémités, chaque disque tend à entrainer une demi épaisseur de fluide à vitesse angulaire relative, un écoulement de cisaillement inter-disque est crée, pour comprendre la nature oscillatoire des différents paramètres de l'écoulement nous avons représenté les structures historiques pour le cas de $Re_{cr}=944, Ri=1$ (Fig. III-14) au cours des laps des temps indiqués par $\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d, \tau_e, \tau_f$ et τ_g sur le tracé de l'évolution temporelle de la température adimensionnelle Θ au point ($r=0.493, z=0.975$) . Les lignes de courant hydrodynamiques de l'écoulement méridien sont représentées sur la première ligne de la figure (III-15).Au premier instant $\tau_a= 121.16$, l'existence de deux cellules principales .On remarque aussi que la symétrie par rapport au mi plan $z=1$ est disparue, et les couches d'Ekman se forment sur les deux disques rotatifs, pour l'instant $\tau_b =125.04$ un structure oppose à celle enregistré à l'instant $\tau_f = 143.10$ (même observation dans le cas de co-rotation), pour les autres l'instant les dimensions des cellules se changent, en subissant un élargissement pour celle de coté disque supérieur et un rétrécissement de coté disque inferieur, à l'instant $\tau_g =147.02$, la structure de la fonction de courant est parfaitement semblable à celle de l'instant τ_a se que

signifie que l'écoulement s'effectue d'une manière périodique pendant une période d'environ $1/0.03781 \approx 26.448$. En découvrant les lignes isothermes dans le plan (r, z) dans la deuxième ligne, on constate bien que l'échange de chaleur se manifeste mais avec une domination de la convection, spécialement dans les régions près des deux disques inférieur et supérieur. Pour les contours de vitesses azimutales représenté dans la troisième ligne de la figure (III-15), on remarque clairement la que les couches limites sont formées sur les deux disques rotatifs et la couche limite de la paroi latérale disparaît au milieu de cylindre. Les couches limites sont formées sur les deux disques rotatifs en raison de l'inhibition du mouvement vertical par l'effet de force de buoyancy ($Ri=1$). Et la couche limite de la paroi latérale disparaît au milieu de cylindre.

On peut se demander quel est le mécanisme d'instabilité responsable de ces structures, s'agit-il d'une instabilité de couche limite, comme pour le cas de co-rotation, ou plutôt d'un nouveau mécanisme selon **Moisy et al.**(2004) et **Gauthier et al.**(2002) , il s'agit d'instabilité de cisaillement (spirales négatives). L'instabilité de cisaillement azimutale responsable de l'apparition des spirales négatives, où l'écoulement de base peut être vue comme une couche de cisaillement séparant deux demi-espaces de rotation opposée. Cette couche se déstabilise selon une modulation azimutale et s'enroule selon les flèches circulaires (**Moisy et al. ,2004**). L'origine de cette instabilité et aussi a été étudiée par **Nore et al. (2003)** ils on observé que l'état de base axisymétrique devient instable par une instabilité de Kelvin-Helmholtz.

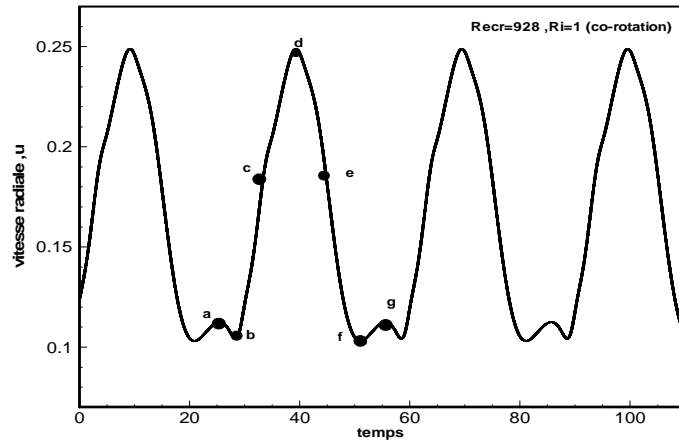


Figure III-12: Evolution temporelle de composante de vitesse u au point $(r=0.493, z=0.413)$ avec des temps choisis (a, b, c, d, e, f et g) pour visualiser les divers topologies de l'écoulement à $Re_{cr}=928, Ri=1$ (co-rotation).

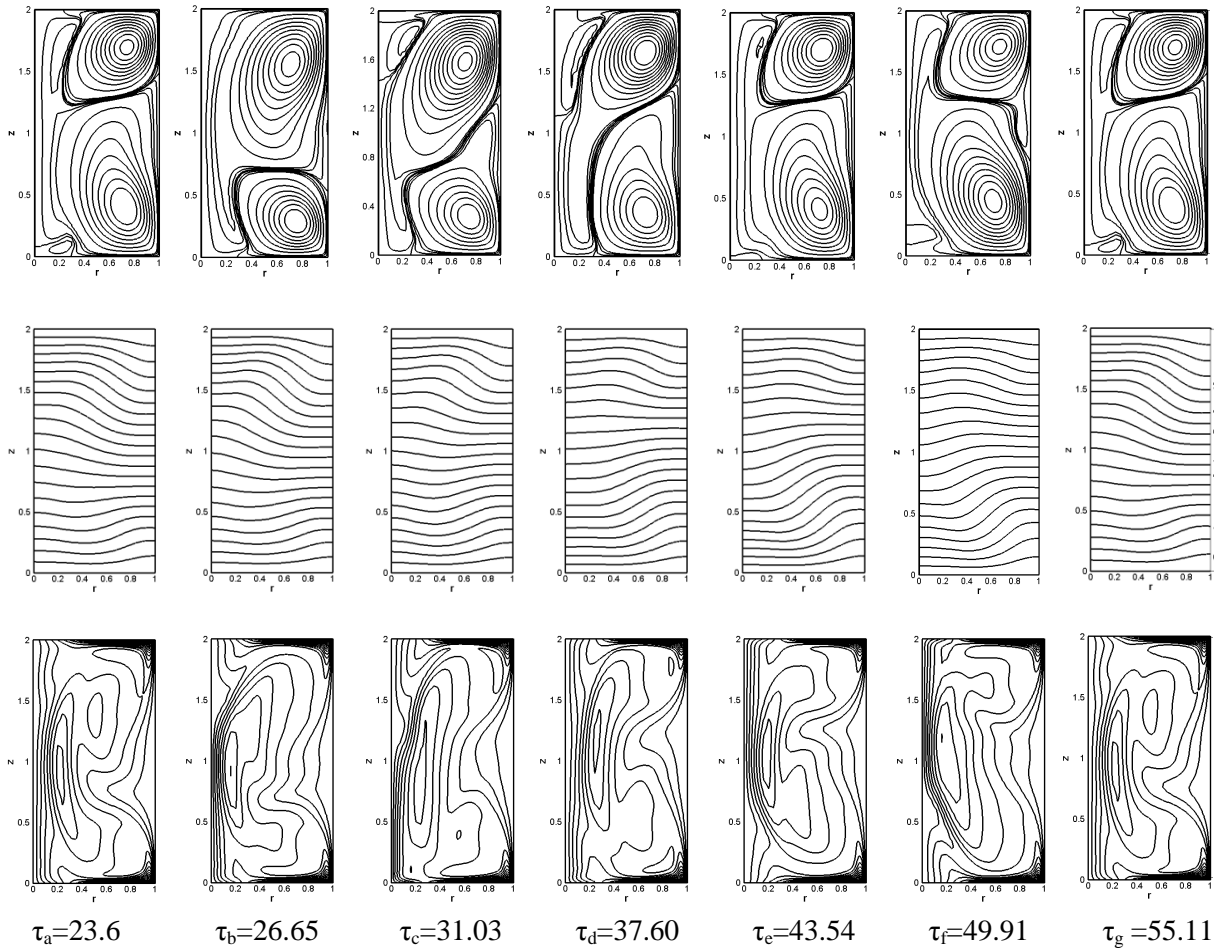


Figure III-13: Evolution temporelle des contours $(\Psi, \Theta \text{ et } w)$ aux temps $\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d, \tau_e, \tau_f$ et τ_g pour $Re_{cr}=928$ et $Ri=1$ (co-rotation)

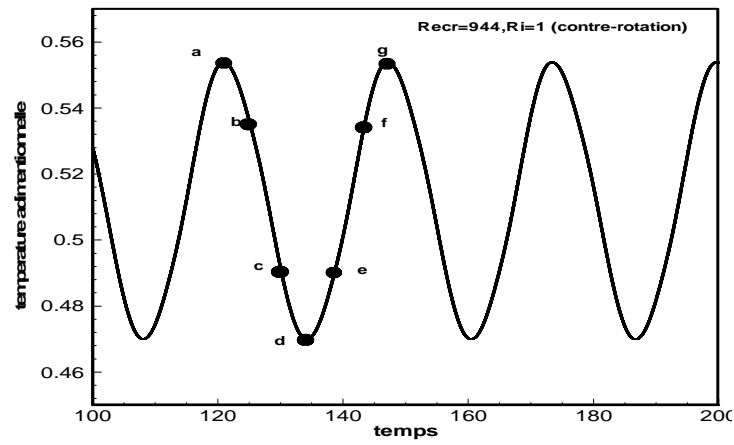


Figure III-14: Evolution temporelle au point ($r=0.493, z=0.975$) avec des temps choisis (a, b, c, d, e, f et g) pour visualiser les divers topologies de l'écoulement à $Re_{cr}=944$ et $Ri=1$ (contre-rotation)

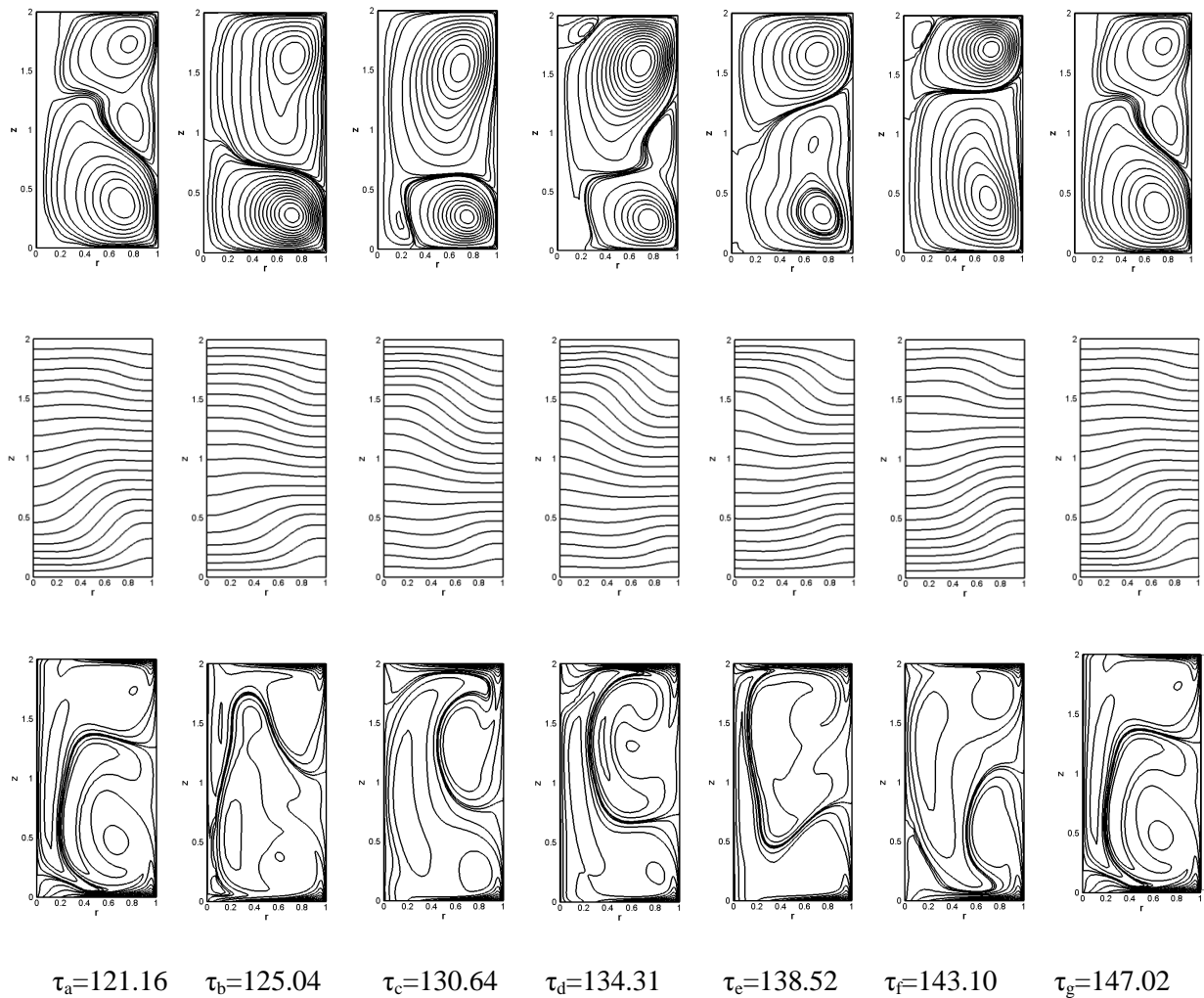


Figure III-15: Evolution temporelle des contours (Ψ, Θ et w) aux temps $\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d, \tau_e, \tau_f$ et τ_g pour $Re_{cr}=944$ et $Ri=1$ (contre-rotation)

III.4.2 Diagrammes de stabilité

Nous présentons dans le tableau (III-3), les nombres de Reynolds critiques Re_{cr} dans les deux cas de rotation avec leurs fréquences d'oscillations prédominantes F_{cr} , correspondant pour les différentes valeurs du rapport de Richardson $Ri=0, 0.5, 1, 2$ et 4 . Les diagrammes de stabilité présentés à la figure (III-16a ;b) mettent en évidence la variation du nombre de Reynolds critique Re_{cr} et la fréquence critique F_{cr} d'oscillation en fonction du rapport de Richardson Ri .

Nous constatons que l'augmentation du nombre de Richardson provoque la diminution du nombre de Reynolds critique, c.-à-d. que l'augmentation des valeurs de Ri déstabilise l'écoulement aux mêmes valeurs de Reynolds. Nous constatons aussi que l'écoulement de contre-rotation pour les valeurs du nombre de Richardson inférieur de la valeur 1 est plus instable que l'écoulement en co-rotation les mêmes résultats sont obtenu expérimentalement. Pour les valeurs de Ri supérieures où égale 1 les nombres de Reynolds critiques Re_{cr} dans les deux cas de rotations presque sont égaux (sont proche), qu'on peut interpréter par l'effet de la stratification thermique est substantiel.

Ri	Co-rotation					Contre-rotation				
	0	0.5	1	2	4	0	0.5	1	2	4
Re_{cr}	2645	1475	928	644	448	2284	1278	944	648	449
F_{cr}	0.05720	0.03232	0.03038	0.03975	0.04558	0.01906	0.02456	0.03781	0.04557	0.05688

Tableau III-3: Fréquences critiques correspondantes aux Reynolds critiques trouvés pour $Ha=0$ et différentes valeurs de Ri ($=0, 0.5, 1, 2$ et 4).

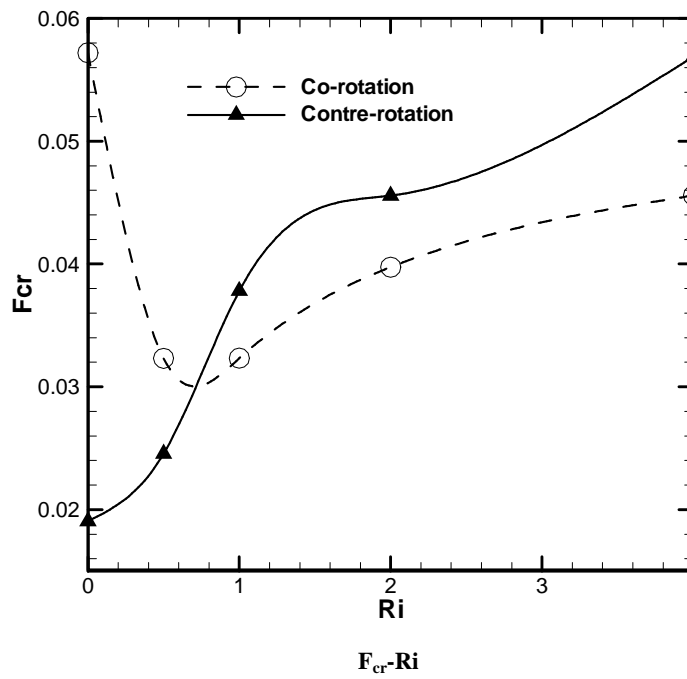
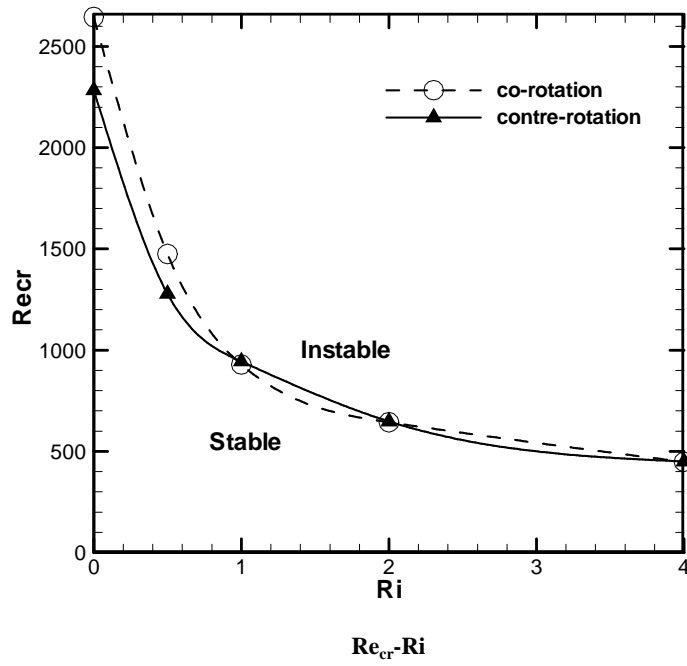


Figure III-16: Diagrammes de stabilité

III.5 Etats oscillatoires avec champ magnétique

Dans la cette section, nous intéressons à la situation en présence du champ magnétique appliqué verticalement à la configuration étudiée en régime transitoire, donc on a résolu numériquement le système d'équations EDP figurant au deuxième chapitre, y compris l'équation du potentiel électrique (Equations II.18-II.23).

L'application d'un champ magnétique vertical est reconnue sur la stabilité des écoulements convectifs (**Bessaïh et al. ,2009 ; Kakarantzas et al. , 2009 et Mittal et al. ,2005**). Quand un champ magnétique (axial) vertical est imposé, on observe quelques changements intéressants sur le mouvement du fluide et sur le transfert thermique, en cas d'écoulement turbulent, la présence du champ magnétique a comme conséquence la stabilisation de l'écoulement la tournant à laminaire et axisymétrique. En générale le champ magnétique supprime le mouvement du liquide et réduit le taux de transfert thermique . Les écoulements en MHD subissent en général un amortissement dès lors qu'on applique un champ magnétique. Celui-ci est plus important au centre que sur les parois de l'écoulement. Cela provoque l'apparition de fines couches où le gradient de vitesse est très élevé. Celles-ci sont appelées couches limites de Hartmann (**Kakarantzas et al., 2009**) . Il a été trouvée également qu'après que le champ magnétique dépasse une certaine valeur le type d'instabilité change, c.à.d. l'instabilité oscillante de l'écoulement (bifurcation de Hopf) est remplacée par une bifurcation stable axisymétrique ou stable asymétrique (**Gelfgat et al., 2001**).

De même que dans la section précédente (état oscillatoire sans champ magnétique), l'écoulement primaire est représenté en utilisant la composante azimutale w . Tandis que l'écoulement secondaire est étudié au moyen des composantes méridiennes u et v et les lignes de courant hydrodynamiques tracées à l'aide de la fonction de courant de Stokes Ψ , ainsi que quelques représentations des lignes méridiennes du potentiel et du champ électriques.

Les résultats pour les diverses intensités du champ magnétique ($Ha=5, 10, 20$ et 30), et les différents cas du nombre de Richardson ($Ri=0, 0.5, 1, 2$ et 4) sont présentés dans quatre diagrammes de stabilités (Fig. III-23). Dans le tableau (III-4) sont récapitulés les résultats quantitatifs de la présente étude numérique avec champ magnétique, qui sont les différentes valeurs de Reynolds critiques Re_{cr} dans les deux cas traités (écoulement avec la Co/contre-rotation des disques d'extrémité). Ces valeurs sont visualisées graphiquement dans le plan ($Re_{cr}-Ha$) sous forme de courbes paramétriques aux différentes valeurs du nombre de Richardson Ri (Fig. III-24).

Pour voir l'effet du champ magnétique sur l'écoulement, on s'intéresse tout d'abord à la configuration axisymétrique chauffée par le bas avec $Ri=1$, en absence de champ magnétique $Ha=0$, la transition vers une solution oscillatoire de période 25.15 est obtenue pour un nombre de Reynolds $Re_{cr}=928$ avec $Ri=1$, nous avons observé que l'écoulement est caractérisé par deux grandes cellules et les dimensions des cellules se changent, en subissant un élargissement et un rétrécissement. Prenons le cas de $Re=1038$ et $Ri=1$, au dessus de seuil de la transition, on applique un champ magnétique dans la direction axiale, le nombre de Hartmann est augmenté progressivement de 3 à 10.4. Cet accroissement de l'intensité du champ magnétique entraîne une diminution de l'amplitude des perturbations associée à une augmentation de la période d'oscillation (Fig. III-17). La fréquence diminue de $F=0.0474$ pour $Ha=3$ à $F=0.02438$ pour $Ha=10$. Au-delà d'une valeur critique estimée à $Ha_{cr}=10.4$, l'écoulement se stabilise sous l'effet du champ magnétique et redevient stationnaire. L'écoulement présente deux grandes cellules de recirculation avec même structure que l'écoulement de base. Les isothermes dans le plan (r, z) présenté au figure (III-18b), on peut constater la déviation importante des isothermes près de coté disque inférieur et disque supérieur, ce que indique que le régime du transfert thermique est essentiellement convectif dans ces régions. Pour les contours de vitesse azimutale, la vorticité et champ de vecteur vitesse $(u-v)$ représenté respectivement dans la figure (III-18c ;d et e). Sur la figure (III-18f) sont présentés les vecteurs de courant méridien J_r et J_z ( quations II-25a et II-25b), où on peut remarquer les vecteurs de courant électriques se concentrent sur les deux disques rotatifs et à la paroi latérale. Puisque le fluide est entouré d'un milieu totalement isolant et les lignes de courant électrique doivent nécessairement se refermer au sein du fluide. Les couches de Hartmann situées sous le disque inférieur en rotation et sur le disque supérieur en co-rotation, dans les quelle se referment les lignes de courant électriques ou l'équilibre azimutale est assuré par un équilibre entre les forces visqueuses et les forces électromagnétiques.

Un autre exemple de contre-rotation là où l'écoulement présente la même structure que l'état de base initialement obtenu à $Ri=0$, $Ha=0$ (convection forcé), Pour $Ha=5$ on obtient un état stationnaire avec $Re=2395$ au dessus de seuil de transition vers l'état oscillatoire (Fig. III-19). On retrouve en particulier la symétrie de réflexion, avec deux grandes cellules de recirculations symétriques par rapport au plan méridien $z=1$.

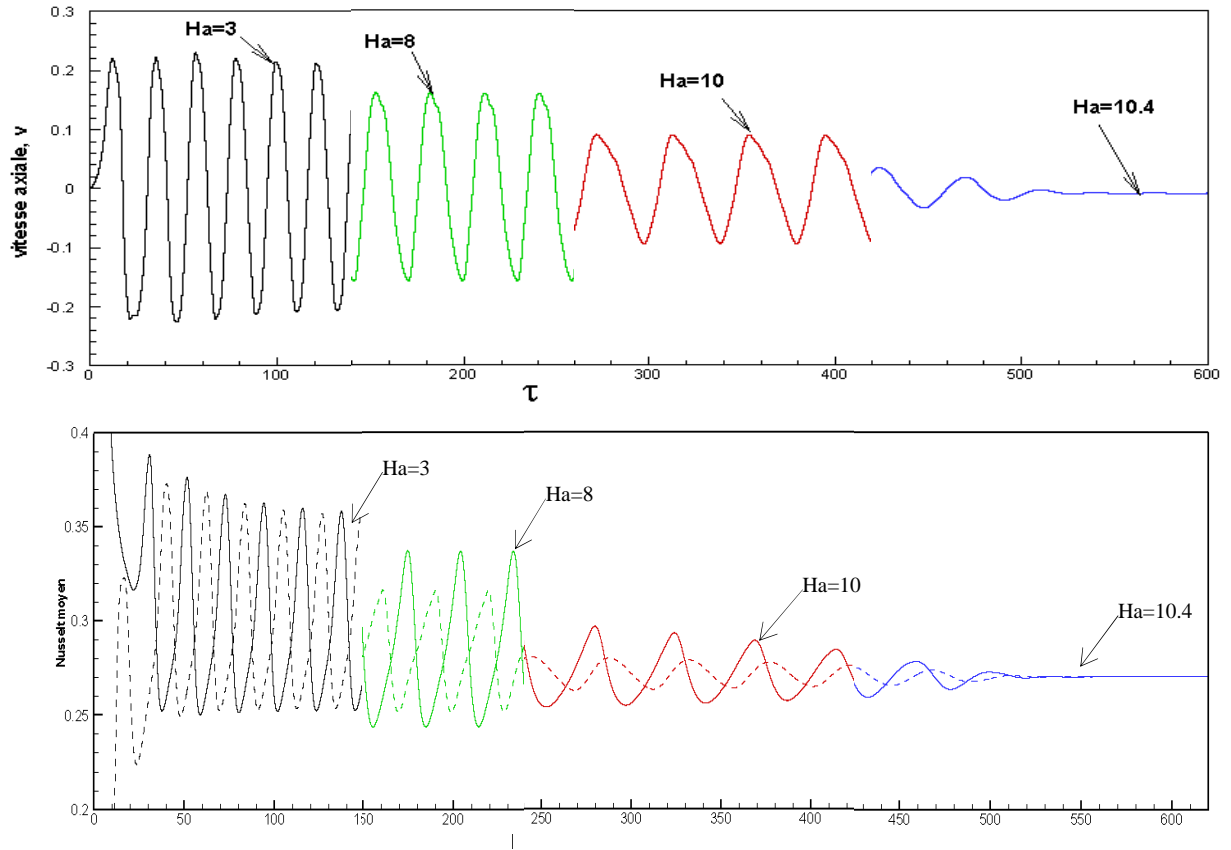


Figure III-17: Atténuation de la variation temporelle de vitesse et de Nusselt moyen (au niveau des deux disques) par un champ magnétique axiale au point ($r=0.493, z=0.975$), à $Re=1038, Ri=1$ pour quatre valeurs du nombre de Hartmann, $Ha=3, 8, 10$ et $Ha_{cr}=10.4$

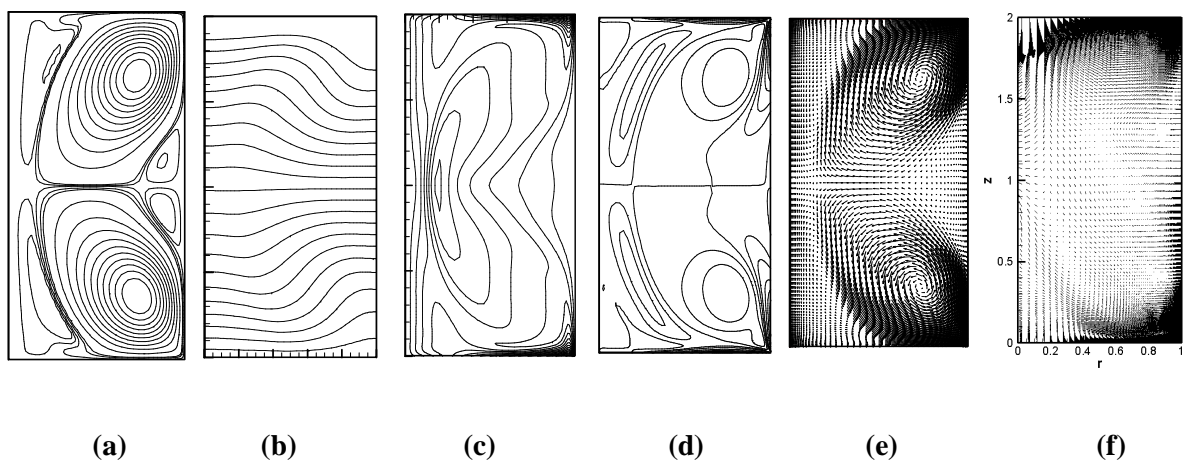


Figure III-18: Contours de (a) lignes de courant, (b) température Θ , (c) vitesse azimutale w (d) vorticité ω (e) vecteur vitesse $(u-v)$ (f) contour de courant électrique (j_r-j_z) dans le cas stable avec $Re=1038, Ri=1$ (co-rotation) et $Ha_{cr}=10.4$

Même dans la situation où le champ magnétique est présent, l'augmentation des valeurs des nombres de Reynolds Re , de l'écoulement au-delà de celles critiques engendrera une bifurcation de l'écoulement vers le régime instable, ainsi qu'une multiplicité des fréquences d'oscillations dans l'écoulement aura lieu. Ceci est illustré sur la figure (III-20a ;b), qui montre les fréquences d'oscillation prédominantes pour quelques cas de l'écoulement oscillatoire. Cette analyse spectrale est le résultat de l'application de la transformée de Fourier rapide aux évolutions temporelles de quelques paramètres. Les fréquences critiques pour tous les cas investigués dans cette partie (avec champ magnétique) sont regroupées au tableau (III-4) pour faciliter la comparaison entre les deux cas de rotation, les nombres de Reynolds critiques correspondant pour les différentes valeurs du nombre de Hartmann $Ha = 0, 5, 10, 20, 30$ et différentes valeurs du nombre de Richardson $Ri = 0, 0.5, 1, 2.0$ et 4 sont présentés au tableau (III-4).

Les figures (III-20c-d) montrent quelques portraits de phase des composantes adimensionnelles de vitesse en quelques sondes dans l'écoulement oscillatoire instable. Nous pouvons remarquer que ces portraits de phase sont des cycles limites comme nous avons déjà parlé dans la section III-4, présentant parfois des boucles avec deux feuilles, ce qui justifie le caractère oscillatoire déjà vu sur les courbes des évolutions temporelles. Aussi, on peut avoir une idée sur l'ordre des amplitudes d'oscillations des composantes de vitesse en remarquant les intervalles englobant ces cycles limites.

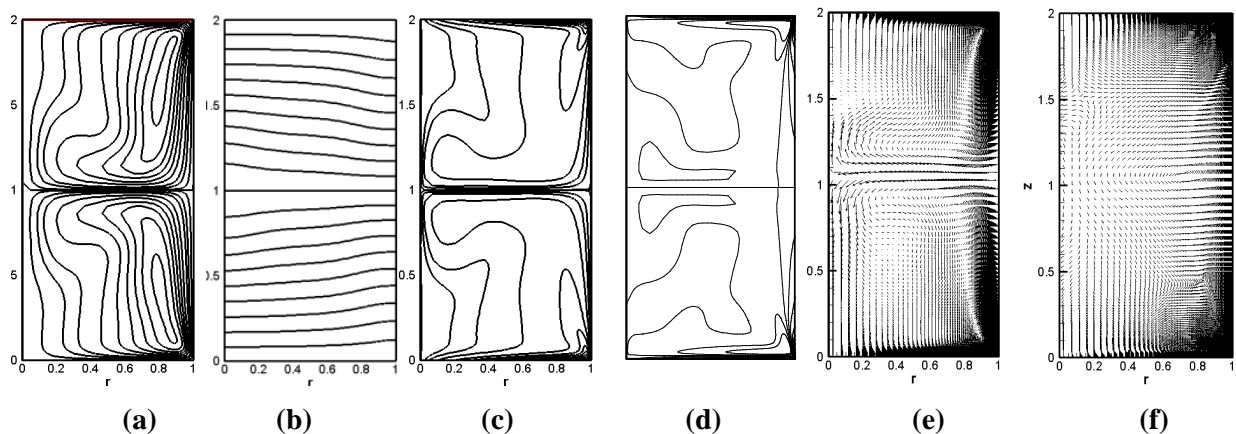


Figure III-19: Contours de (a) lignes de courant, (b) température Θ , (c) vitesse azimutale w , (d) vorticité ω (e) vecteur vitesse $(u-v)$ (f) contour de courant électrique (j_r-j_z) dans le cas stable avec $Re=2395$, $Ri=0$ et $Ha=5$ (contre-rotation)

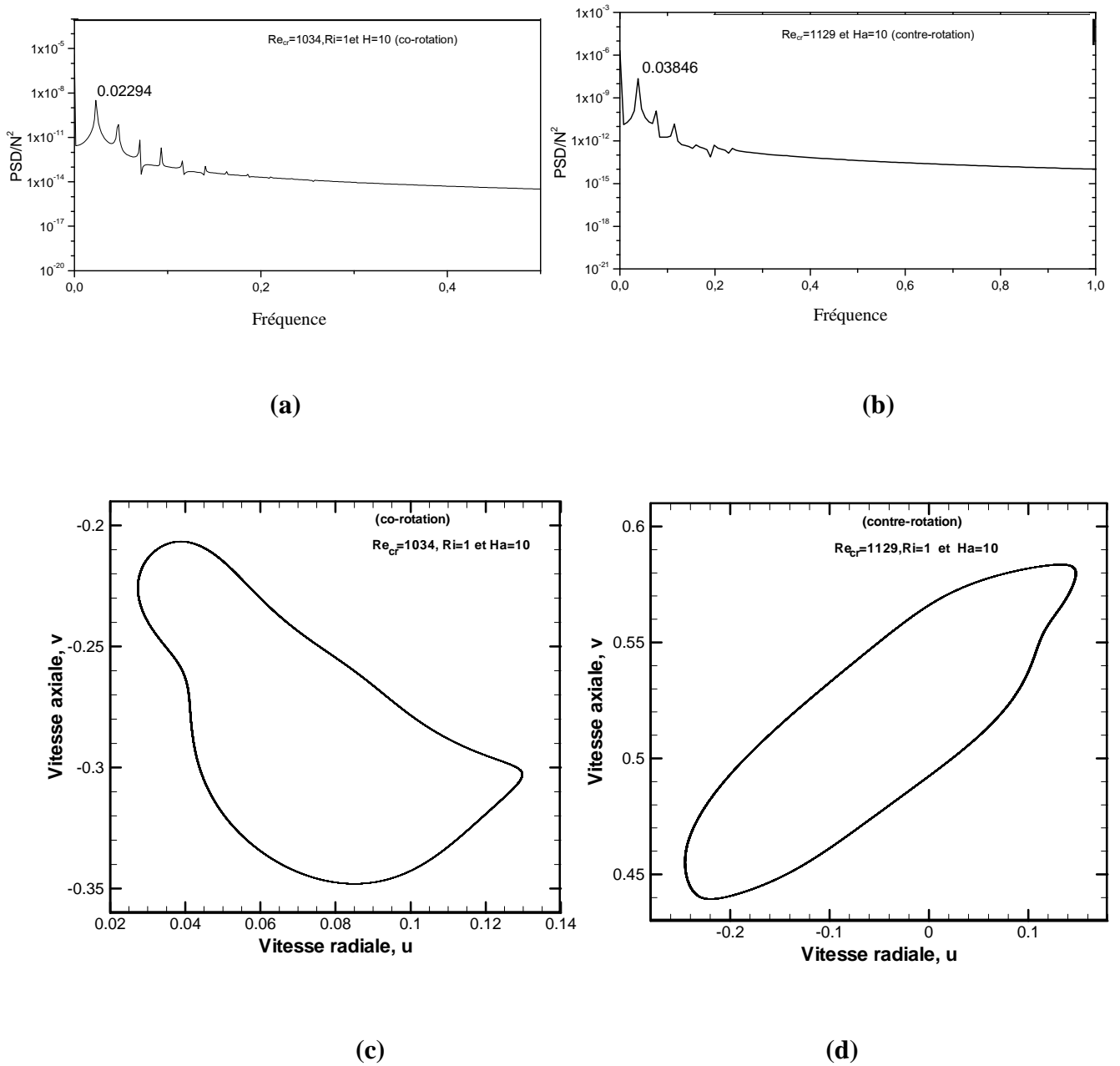


Figure III-20 :Cas de $Ri=1$ et $Ha=10$, avec $Re_{cr}=1034$ (co-rotation) et $Re_{cr}=1129$ (contre-rotation), (a-b) : Densité du spectre d'énergie (PSD) de la composante de vitesse v au point ($r=0.493, z=0.975$), (c-d) : Cycles limites pour tracée des composantes de vitesse oscillatoires dans le plan de phase (u, v) au point ($r=0.201, z=0.975$)

III.5.1 Cas de co-rotation

Afin de montrer l'effet du champ magnétique sur la structure d'écoulement, nous comparons entre les deux cas de la rotation avec différents nombres de Hartmann. Nous avons choisie deux cas de Reynolds critiques, en changeant le nombre de Richardson Ri et le nombre de Hartmann Ha pour comprendre la nature oscillatoire des différents paramètres de l'écoulement en co-rotation. Les lignes de courant hydrodynamiques de l'écoulement méridien et les isothermes pour le cas de $Re_{cr}=476$, $Ri=4$ et $Ha=5$ sont représentées au Figure (III-21a). Les instants successifs choisis pour visualiser cet écoulement sont indiqués par : τ_a , τ_b , τ_c , τ_d , τ_e , τ_f et τ_g sur le tracé de l'évolution temporelle de la composante radiale de la vitesse u enregistrée à au point $(r=0.493, z=0.975)$. La co-rotation des disques d'extrémités engendre deux cellules de recirculation opposée et subit des changements graduels dans ses dimensions, alors les particule fluides meuvent dans le sens antihoraire coté disque supérieure et sens horaire coté disque inferieur. Remarquons qu'au premier instant $\tau_a = 1.62$, la structure de la fonction de courant est parfaitement semblable à celle de l'instant $\tau_g = 23.56$, ce qui prouve que l'écoulement s'effectué d'une manière périodique, pendant une période de $1/0.0455=21.94$. Au instants τ_a , τ_c et τ_g nous observons des vortex méridiens qui se développent prés du coin de cylindre inférieur, mais pour les instants τ_d et τ_f le vortex change la position vers le coin supérieur du cylindre. La couche intermédiaire entre les deux cellules est instable avec une brisure de la symétrie par rapport au mi-plan ($z = 1$) enregistré dans le cas stable. La figure (III-21a) illustre aussi les changements aux différents instants indiqués par : τ_a , τ_b , τ_c , τ_d , τ_e , τ_f et τ_g . Outre la périodicité du champ thermique qui règne pendant l'écoulement, on peut constater la courbure importante des isothermes dans la région centrale du domaine du calcule, ce indique que le régime du transfert thermique est essentiellement convectif dan cette région.

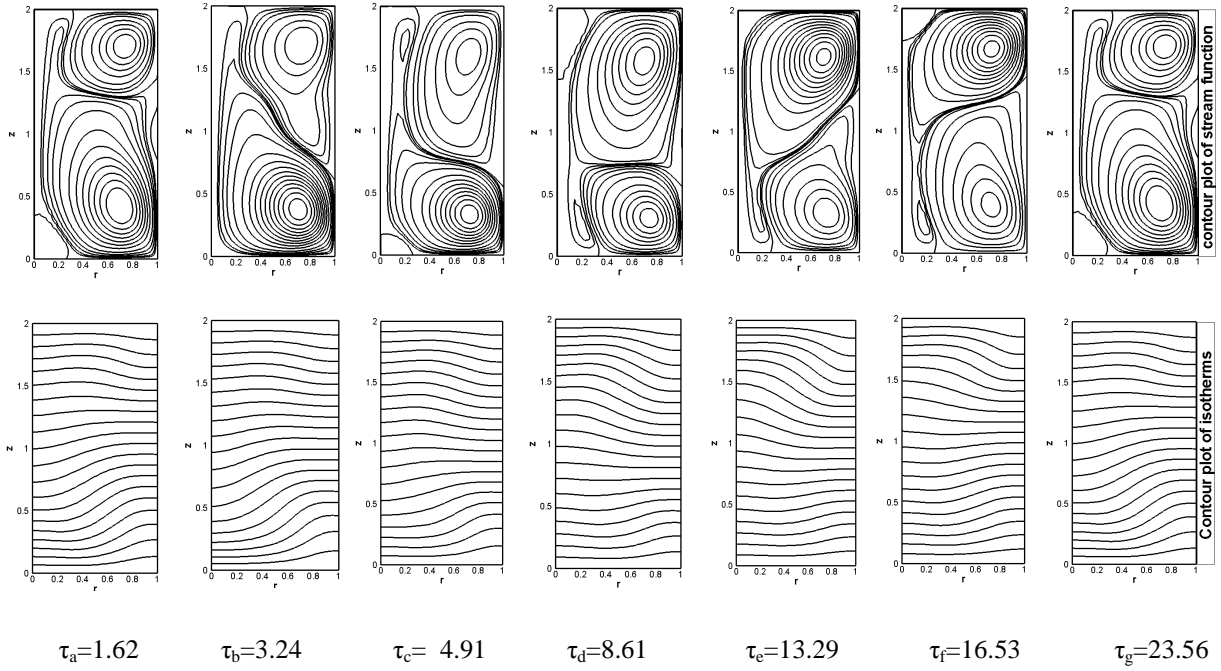
L'autre cas dont nous avons choisi de représenter les structures périodiques est celui avec un nombre de Hartmann modéré, c'est le cas de $Re_{cr}=704$, $Ri=4$ et $Ha=30$, pour montrer la physique résidant derrière les oscillations apparentes aux évolutions temporelles des différents paramètres aux instants successifs indiqués par : τ_a , τ_b , τ_c , τ_d , τ_e , τ_f et τ_g sur la courbe d'évolution temporelle de la composante azimutale de la vitesse w enregistrée au point $(r=0.493, z=0.975)$. Les motifs de la fonction de courant hydrodynamique Ψ de l'écoulement méridien sont représentées sur la figure (III-21b), dans les différents instants de la période balayée. Aussi, comme le cas cité par avant, une zone de recirculation antihoraire existe au dessous de disque tournant inferieur, mais dans ce cas ses dimensions ont été élargies axialement jusqu'au disque supérieur en couvrant presque toute la région centrale le long de

l'axe de symétrie du cylindre. L'autre zone de recirculation horaire avec de petit dimensions naissant près de la paroi latérale du coté disque supérieur (Fig. III-21b). À l'instant $\tau_d=33.05$, cette zone de recirculation se contracte au maximum. Remarquons qu'au premier instant $\tau_a = 24.68$, la structure de la fonction de courant est parfaitement semblable à celle de l'instant $\tau_g = 39.32$, l'écoulement s'effectué d'une manière périodique, pendant une période de $1/0.068=14.7$. On peut constater la courbure importante des isothermes dans la région de coté disque inférieur, ce qui indique que le régime du transfert thermique est essentiellement convectif dans cette région. Donc, l'effet du champ magnétique est bien observé dans ce cas.

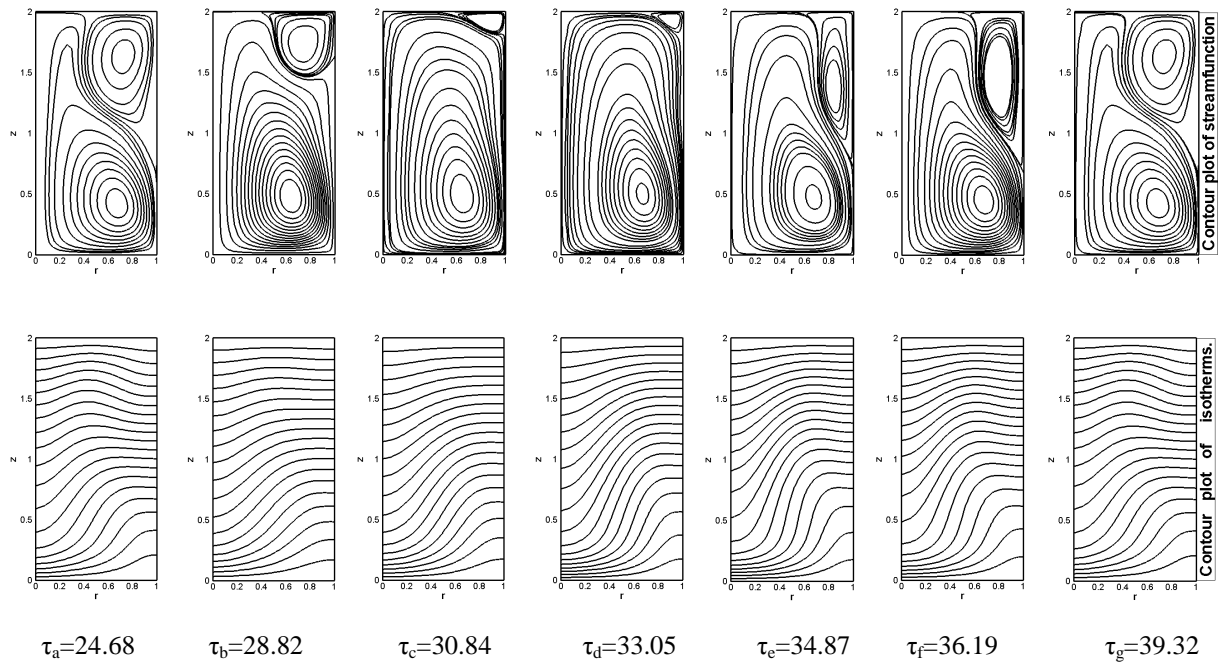
III.5.2 Cas de contre-rotation

Le scénario précédent (co-rotation) se trouve quelque peu modifié dès lors qu'on s'intéresse à un régime contre-rotation, pour lequel un nouveau type de structure fait son apparition. La première observation remarquable concernant cet écoulement est la détermination précise des Reynolds critiques est une tâche très délicate qui nécessite beaucoup de patience, et des ordinateurs plus puissants capables de calculer l'évolution temporelle de ce type d'écoulement en contre-rotation. Nous avons vu dans le cas de contre-rotation dans laquelle chaque disque tend à entraîner une demi-épaisseur de fluide à vitesse angulaire relative Ω , à vitesse suffisamment élevé la couche de cisaillement entre les deux disque peut devenir instable, et s'enrouler selon des lignes de tourbillon orientées radialement (Moisy et al.,2002). Le champ magnétique va pouvoir amortir la perturbation, pour ça, on va voir la structure de l'écoulement dans deux cas avec différentes nombre de Hartmann. La figure (III-22a) expose les instants successifs choisis ($\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d, \tau_e, \tau_f$, et τ_g), pour visualiser l'écoulement dans le cas de $Re_{cr}=988$, $Ri=1$ et $Ha=5$, indiqués par le tracé de l'évolution temporelle de la composante radiale de la vitesse u enregistrée au point $(r=0.493, z=975)$. Les lignes de courant hydrodynamiques de l'écoulement présenté à la première ligne de la figure (III-22a), on remarque l'apparition de deux cellules qui subit un élargissement puis un rétrécissement au cours d'une période de $1/0.037=27.02$, remarquons aussi qu'au premier instant $\tau_a =45.2$, la structure ressemble à celle enregistré à l'instant $\tau_g = 71.45$. L'écoulement présente deux cellules, la petite cellule située sous le disque tournant supérieur, ou le sens de mouvement méridien des particules confinées dans la cellule est horaire et l'autre avec des dimensions plus grandes avec recirculation antihoraire se trouve sur le disque inférieur en contre-rotation. La courbure importante des isothermes dans la région près des deux disques inférieur et supérieur, indique que le régime du transfert thermique est essentiellement convectif dans cette région.

Autre cas présenté sur la figure (III-22b), est celui avec un nombre de Hartmann modéré, c'est le cas : $Re_{cr}=1841$, $Ri=1$ et $Ha=30$, les instants successifs choisis pour visualiser cet écoulement sont indiqués par : τ_a , τ_b , τ_c , τ_d , τ_e , τ_f , et τ_g , sur le tracé de l'évolution temporelle de la vitesse radiale u enregistrée au point ($r=0.493$, $z=975$). Les lignes de courant hydrodynamiques de l'écoulement méridien pour ce cas de contre-rotation des disques d'extrémités présente deux cellules, la petite cellule située sous le disque tournant supérieur et l'autre avec des dimensions plus grande se trouve sur le disque inférieur en contre-rotation, au cours du temps chaque cellule se rétrécit en diminuant sa dimension axiale et s'agrandit dans la même direction. La déviation importante des isothermes près de la paroi latérale, coté disque inférieur, indique que le régime du transfert thermique est essentiellement convectif dans cette région.

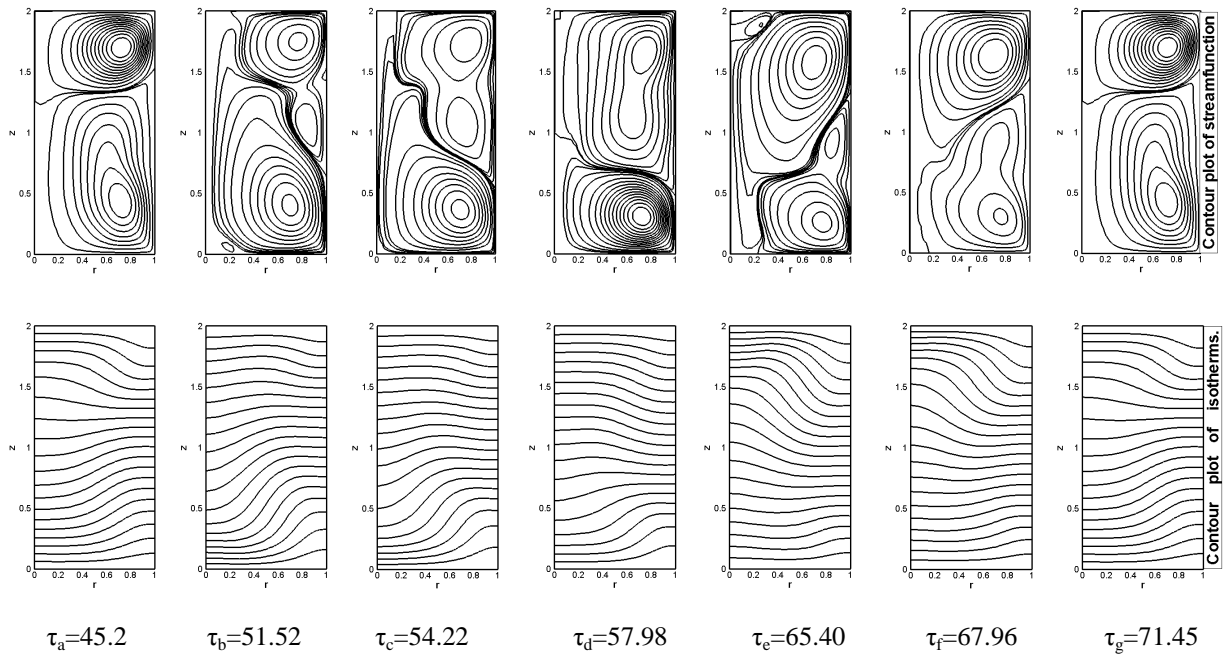


(a) $Re_{cr}=476$, $Ri=4$ et $Ha=5$

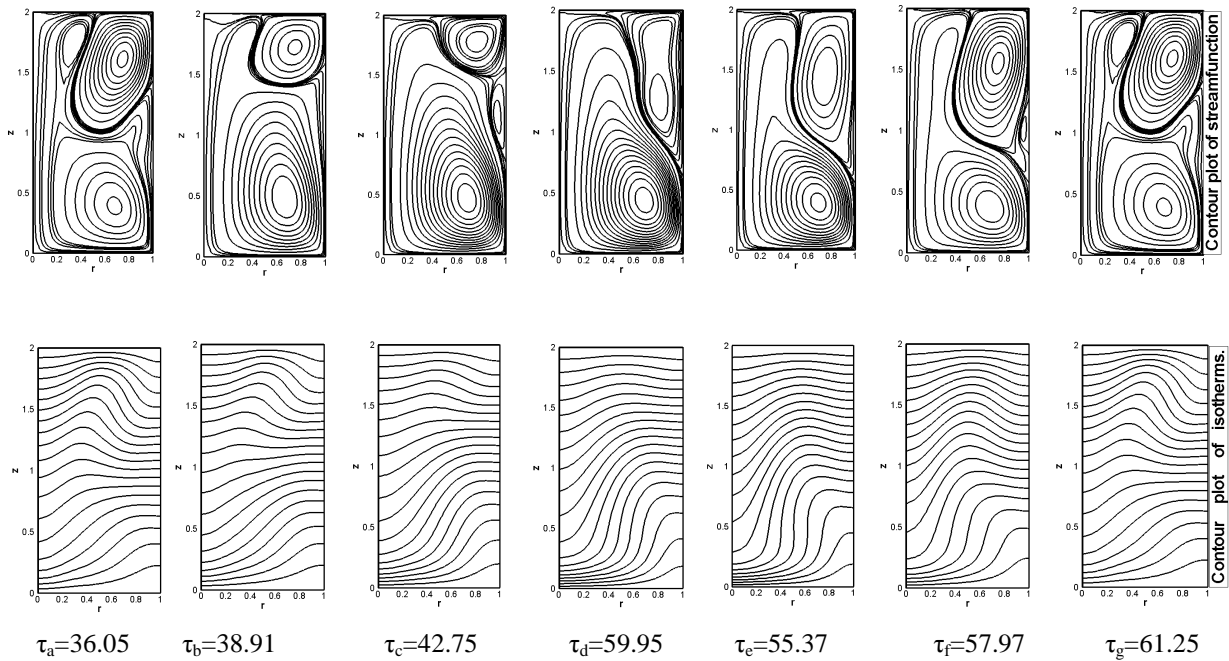


(b) $Re_{cr}=704$, $Ri=4$ et $Ha=30$

Figure III-21: Evolution temporelle des contours (Ψ et Θ) aux temps $\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d, \tau_e, \tau_f$ et τ_g , pour le cas de co-rotation avec deux nombre de Hartmann $Ha=5$ et $Ha=30$



(a) $Re_{cr}=988$, $Ri=1$ et $Ha=5$



(b) $Re_{cr}=1841$, $Ri=1$ et $Ha=30$

Figure III-22: Evolution temporelle des contours (Ψ et Θ) aux temps τ_a , τ_b , τ_c , τ_d , τ_e , τ_f et τ_g pour le cas de contre-rotation avec deux nombre de Hartmann $Ha=5$ et $Ha=30$

III.5.3 Diagrammes de stabilités

Dans le tableau (III-4) sont récapitulés les résultats quantitatifs de la présente étude qui sont les différentes valeurs de Reynolds critiques Re_{cr} dans les deux cas traités (écoulement avec la co-rotation des disques d'extrémité et la contre-rotation de ces derniers) et leurs fréquences d'oscillations prédominantes F_{cr} correspondant pour les différentes valeurs du rapport de Richardson $Ri=0, 0.5, 1, 2$ et 4 et de $Ha= 5, 10, 20, 30$, respectivement.

Les diagrammes de stabilité présentés au figure (III-23) , mettent en évidence la variation du nombre de Reynolds critique Re_{cr} en fonction du rapport de Richardson Ri . Nous constatons que l'augmentation du nombre de Richardson provoque la diminution du nombre de Reynolds critique, c.-à-d. que l'augmentation des valeurs de Ri déstabilise l'écoulement aux mêmes valeurs de Reynolds. Nous constatons aussi que l'écoulement de contre-rotation avec $Ha=5.0$ pour les valeurs du nombre de Richardson $Ri < 1$ est plus instable que l'écoulement en co-rotation. Pour $1 \leq Ri \leq 2$ on constate un petit décalage entre les deux courbes. Pour les valeurs de $Ri \geq 2$, les courbes des nombres de Reynolds critiques Re_{cr} dans les deux cas de rotations presque confondent. Si nous faisons une comparaison entre l'état de l'écoulement sans champ magnétique ($Ha=0$) et l'état de l'écoulement ou $Ha=5$ on remarque la croissance de Re_{cr} . Pour $Ha=10$, on remarque un changement, car l'écoulement de co-rotation pour les valeurs du nombre de Richardson $Ri < 2$ est plus instable que l'écoulement en contre-rotation. Pour les valeurs de $Ri \geq 2$ les deux courbes se confondent. Pour $Ha=20$, l'écoulement en co-rotation pour $Ri < 1$ est plus instable que l'écoulement en contre-rotation des disques d'extrémités, pour $Ri \geq 1$ les nombres des Reynolds critiques sont presque égaux. Pour $Ha=30$, l'écoulement en co-rotation est plus instable que l'écoulement en contre-rotation jusqu'à $Ri=2$ à partir de ça les courbes se confondent.

Les résultats quantitatifs présents dans le tableau (III-4), sont visualisés graphiquement dans les plans ($Re_{cr}-Ha$) sous forme de courbes paramétriques aux différentes valeurs du nombre de Richardson Ri (Fig. III-24). Ces courbes donnent les limites de stabilité c.-à-d. que pour des valeurs du nombre de Reynolds Re et de Hartmann Ha , situées sous chaque courbe l'écoulement reste laminaire stable, pour les deux cas de rotation. La croissance de Re_{cr} avec l'augmentation de Ha , est clairement vue dans les courbes de stabilité ($Re_{cr}-Ha$) pour les deux cas de rotation. Cette croissance est monotone sauf dans le cas $Ha=30$ et $Ri=1, 2, 4$ (co-rotation), où il ya une légère diminution du nombre de Re_{cr} , ce cas a été aussi obtenu par **Gelfgat et al.**(2004) et **Bessaïh et al.** (2009), par contre dans le cas de contre-rotation aucune diminution n'a été observée.

Ri	Co-rotation					Counter-rotation				
	0	0.5	1	2	4	0	0.5	1	2	4
(Ha=5)										
Re _{cr}	3010	1503	938	661	476	2399	1360	988	681	476
F _{cr}	0.055	0.030	0.029	0.031	0.045	0.019	0.028	0.038	0.045	0.058
(Ha=10)										
Re _{cr}	4050	1589	1034	787	551	5520	1634	1129	782	550
F _{cr}	0.049	0.022	0.022	0.041	0.051	0.019	0.030	0.038	0.051	0.061
(Ha=20)										
Re _{cr}	8310	1716	1501	1066	747	11120	2160	1509	1039	716
F _{cr}	0.054	0.026	0.038	0.053	0.068	0.018	0.041	0.043	0.053	0.063
(Ha=30)										
Re _{cr}	11560	2122	1437	996	704	14175	2608	1841	1004	713
F _{cr}	0.053	0.028	0.038	0.050	0.068	0.013	0.030	0.039	0.050	0.068

Tableau III-4: Fréquences critiques correspondantes aux Reynolds critiques trouvés pour Ha (=5, 10, 20,30) et différentes valeurs de Ri (=0, 0.5, 1,2 et 4).

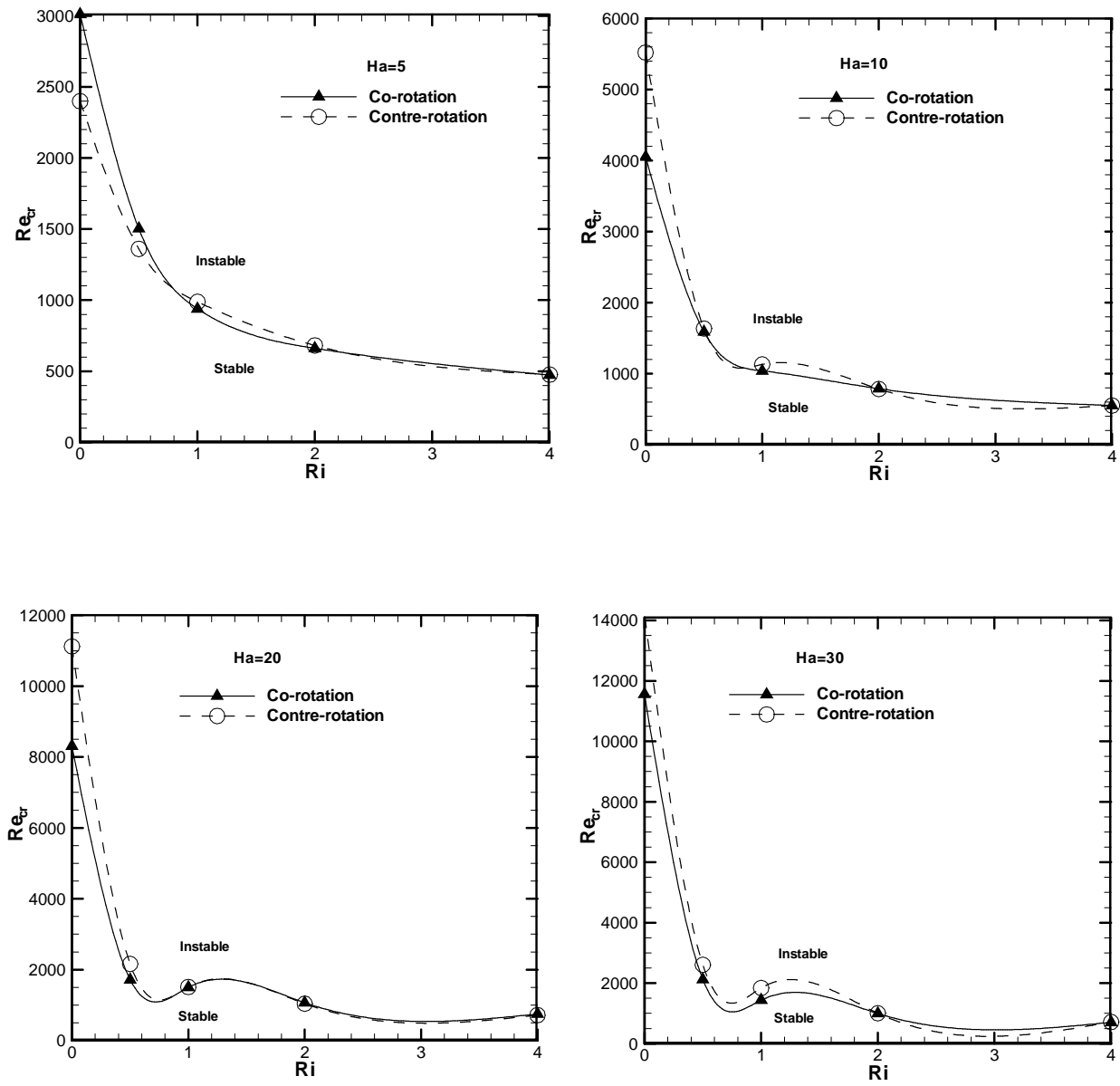
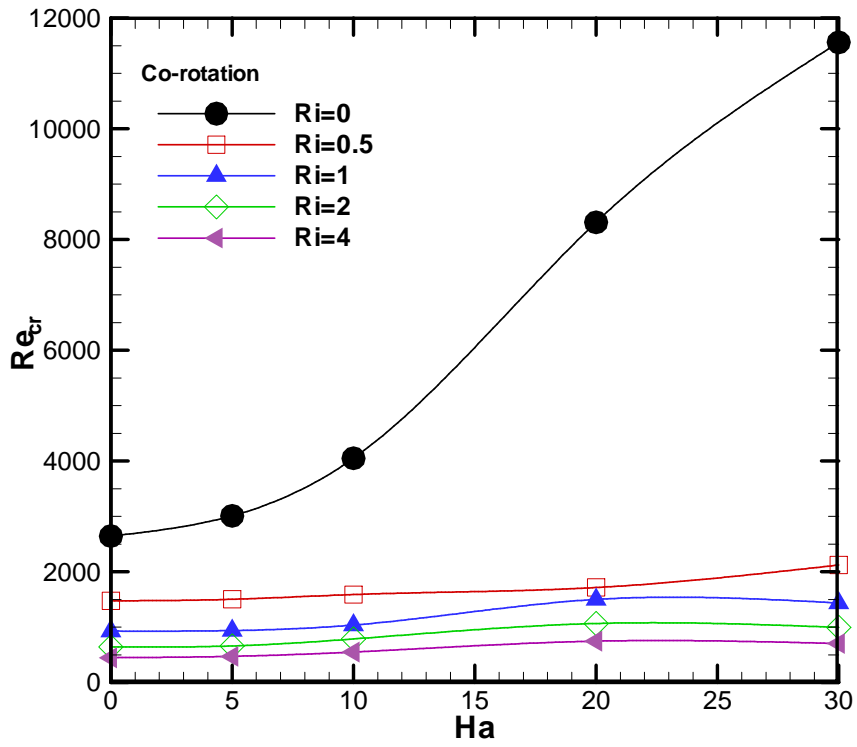
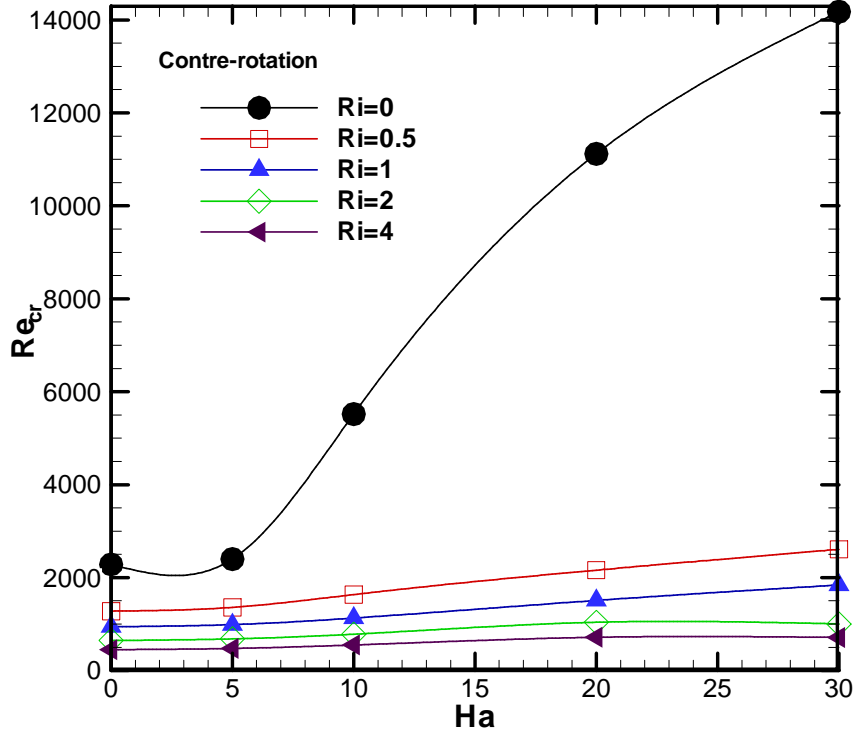


Figure III-23 : Diagrammes de stabilités Re_{cr} - Ri



(a) co-rotation



(b) contre-rotation

Figure III-24 : Diagrammes paramétriques de stabilités (Re_{cr} - Ha)

III.6 Conclusion de la première partie

Une étude numérique d'un écoulement axisymétrique engendré par deux disques tournants en Co/contre-rotation, à l'intérieur d'une enceinte cylindrique remplie d'un fluide à faible nombre de Prandtl ($Pr=0.015$), soumise à un gradient de température et un champ magnétique orienté verticalement, a été faite.

- Un code de calcul basé sur la méthode des volumes finis a été utilisé pour résoudre numériquement les équations gouvernantes le phénomène étudié.
- Une validation du code de calcul a été faite, par comparaisons de ces résultats avec des mesures expérimentales et des données numériques trouvées dans la littérature. De même, un excellent accord est apprécié entre les mesures expérimentales et numériques et les résultats du code de calcul.
- Les résultats obtenus pour le cas de l'écoulement axisymétrique stable (régime permanent) ont montré l'existence du phénomène de pompage d'Ekman, dans le cas où les deux disques tournent avec la même vitesse angulaire Ω dans la même direction, le fluide dans la majeure partie du cylindre tourne quasi-rigidement avec une vitesse intermédiaire des disques d'extrémités et les champs d'écoulement et les isothermes sont symétriques par rapport au mi-plan ($z=1$). Pour le cas de contre-rotation on obtient une situation antisymétrique dans laquelle chaque disque tend à entraîner une demi-épaisseur de fluide à vitesse angulaire relative $+\Omega$ et $-\Omega$, respectivement, avec la création d'un écoulement de cisaillement inter-disque.
- Les résultats obtenus montrent qu'en absence du champ magnétique ($Ha=0$), l'écoulement créé par la contre-rotation des deux disques était très différent de celui en configuration co-rotation. Au-delà d'une certaine vitesse (Re_{cr}), l'écoulement perd sa symétrie temporelle due à l'instabilité du couche limite pour la co-rotation et à l'instabilité de cisaillement dans le cas de contre-rotation, ainsi que l'écoulement dans les deux cas de rotation est périodique. Nous avons observé aussi que l'écoulement de contre-rotation est plus instable et présente des structures différentes pour $Ri < 1$. Pour les valeurs de $Ri \geq 1$, les nombres de Reynolds critiques Re_{cr} dans les deux cas de rotations sont proches. Nous avons constaté que l'augmentation du nombre de Richardson provoque la diminution du nombre de Reynolds critique.
- Nos simulations numériques avec champ magnétique ont été présentées pour différentes valeurs du nombre de Hartmann ($Ha=5, 10, 20$ et 30) et différentes valeurs du nombre de

Richardson ($Ri=0, 0.5, 1.0, 2.0, 4.0$), afin de voir leurs effets sur la valeur du nombre de Reynolds critique, Re_{cr} et de la fréquence d'oscillation critique, F_{cr} . L'influence de champ magnétique est observée à partir de $Ha=10$ où la co-rotation est au contraire, plus déstabilisante pour $Ri < 2$, mais pour $Ri \geq 2$ les nombres des Reynolds critiques sont presque égaux dans les deux cas de rotation (les deux courbes se confondent).

- Toutefois, en présence du champ magnétique vertical, le fluide continue son écoulement stable jusqu'aux valeurs des nombres de Reynolds plus grandes que celles prévisibles d'avoir des instabilités oscillatoires bien que l'application d'un champ magnétique provoque un changement remarquable de la structure du champ d'écoulement et du transfert de chaleur. Les résultats obtenus dans cette étude mettent en évidence la fiabilité de la technique de stabiliser les écoulements industriels de convection mixte, par l'application d'un champ magnétique vertical.

Ces résultats ont fait l'objet, de:

Publication dans un journal de renommé « Numerical Heat Transfer, Part A, 61: 463–482, 2012 » (Mahfoud et Bessaïh)

Intitulé « Stability of swirling flows with heat transfer in a cylindrical enclosure with co/counter-rotating end disks »

Publication dans un journal de renommé « Fluid Dynamics & Materials Processing, Vol. 8, No. 1, pp. 1-26, 2011 » (Mahfoud et Bessaïh)

Intitulé « Oscillatory swirling flows in a cylindrical enclosure with co-/counter-rotating end disks submitted to a vertical temperature gradient »

Communication : SFT 2010 (Mahfoud et Bessaïh), JITH 2011 (Mahfoud et Bessaïh), ICM2010, (Mahfoud et Bessaïh), CNMF (2012) (Mahfoud et Bessaïh).

Chapitre IV : Résultats et discussion de la deuxième partie

IV.1 Introduction

Les résultats numériques présentés dans ce chapitre ont été obtenus à l'aide du code commercial Fluent version 6.3 basé sur la méthode numérique des volumes finis, cette méthode est bien exposée dans le chapitre III. Ces résultats concernent l'écoulement tridimensionnel incompressible dans une enceinte cylindrique avec co/contre-rotation des disques d'extrémités, chauffée par le bas et soumise à un champ magnétique axial, avec une paroi latérale adiabatique. L'effet du champ magnétique sur la première et la deuxième bifurcation, et l'évolution du seuil de transition en variant le nombre de Reynolds et le nombre de Richardson $Ri=0,0.5, 1$ et 2 avec un fluide ayant un nombre de Prandtl $Pr=\nu/\alpha=0.015$, confiné dans un cylindre de rapport d'aspect $\gamma=H/R=2$ sont présentés. L'écoulement dépend principalement de quatre paramètres de contrôle: le nombre de Reynolds de rotation, $Re=\Omega R^2/\nu$ basé sur le rayon du disque, le rapport d'aspect de la cavité γ , le gradient de température et l'intensité de champ magnétique.

Le schéma "PRESTO" (Pressure Staggering Option) d'interpolation de la pression est approprié pour cet écoulement tourbillonnaire à vitesse de rotation, où les écoulements dans des domaines fortement courbés. Le schéma au "Second Ordre" peut être utilisé pour améliorer la précision en écoulements incompressibles. Avec un maillage en 3D hexaédriques le couplage vitesse-pression est calculé selon l'algorithme SIMPLE développée par Spalding et Patankar.

Dans le code "Fluent", les variables stockées au centre de la cellule doivent être interpolées aux faces du volume de contrôle. Il est possible de choisir entre différents schémas de discrétisation pour les termes convectifs des équations gouvernantes, alors que les termes visqueux sont automatiquement discrétisés au second ordre pour plus de précision. Il reste que la discrétisation au premier ordre procure une meilleure convergence, alors que le "Second Order Upwind Scheme" est de rigueur pour les écoulements non alignés au maillage. Aussi, il existe d'autres schémas de discrétisation comme le schéma "QUICK" (Quadratic Upwind Interpolation for Convective Kinetics) : il procure une meilleure précision que le schéma au second ordre pour les écoulements rotationnels et tourbillonnaires (Swirling) avec un maillage régulier (ce schéma est utilisé dans notre étude). Cependant, il n'est pas recommandé par un maillage triangulaire.

Dans le code "Fluent", on peut choisir entre plusieurs formulations du solveur: La formulation "Segregated", ou isolée (implicite) : Cette formulation résout les équations de continuité, de quantité de mouvement et quand c'est nécessaire celle de l'énergie,

séquentiellement, c'est-à-dire isolées les unes des autres (implicite par défaut). Le solveur isolé est classiquement employé pour les écoulements incompressibles à modérément compressibles

Comme l'utilisation de CFD Fluent exige des valeurs dimensionnelles nous avons utilisé les propriétés physiques de l'Aluminium liquide indiqué sur le tableau (IV-1) selon **Davidson** (2001), pour ajuster le nombre de Prandtl, Pr et Richardson, Ri.

Le teste de plusieurs maillages aide à choisir un maillage structuré (hexaédriques) et constitué d'environ 434160 cellules qui présente le meilleur compromis entre temps de calcul et précision.

propriété	symbole	valeur	Unité
Conductivité thermique	λ	95	$\text{w. m}^{-1} \cdot \text{C}^{-1}$
Viscosité cinématique	ν	0.6×10^{-6}	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Masse volumique	ρ	2400	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Conductivité électrique	σ	4.1×10^6	$\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$
Chaleur spécifique à pression constante	C_p	989.6	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Diffusivité	α	0.4×10^{-4}	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Coefficient d'expansion thermique à pression constante	β	4×10^{-5}	K^{-1}
Point de fusion	T_{fusion}	660	$^{\circ}\text{C}$
Température de référence	T_0	700	$^{\circ}\text{C}$

Tableau IV-1 : propriétés physique de l'Aluminium liquide d'après Davidson (2001)

IV.2 Validation des résultats

Nous procédons à la validation des résultats de la simulation obtenue à l'aide du logiciel FLUENT en comparant avec ceux obtenus par d'autres auteurs.

La première comparaison des résultats a été faite sur une configuration hydrodynamique en contre-rotation des disques d'extrémités dans une cavité cylindrique de rapport de forme $\gamma=2$ étudié par **Nore et al.** (2004). La figure (IV-1) représente les isocontours de la vitesse verticale dans différents plans ($z=-\gamma/6$, $z=0$ et $z=\gamma/6$) pour $Re=355$, près de la bifurcation à $Re_M=349$, il montre que les états mixtes M conservent la symétrie, les valeurs numériques obtenues de la composante axiale de la vitesse sont identiques avec les résultats de **Nore et al.** (2004)

La deuxième comparaison a été faite avec les résultats numériques et expérimentaux obtenus récemment par **Lopez** (2012), qui a étudié l'instabilité dans les cylindres plus grands. Les simulations ont une très bonne concordance avec des expériences récentes, La figure (IV-2) présente la vorticité axiale, radiale et azimutale. Nous avons présenté nos simulations à gauche de chaque figure, pour le cas de d'un fluide de viscosité ν dans une enceinte cylindrique de rapport de forme $\gamma=3.5$, dont le disque inférieur est en rotation, avec $Re=2300$.

Pour la validation avec un champ magnétique on a considéré la configuration d'une cavité cylindrique de rapport de forme $\gamma=2$ proposée par **Gelfgat et al.** (2001), avec $Ha=30$, $Pr=0.015$ et $Gr=3.02 \times 10^6$, avec un profile de température au paroi latérale $T=z(1-z/\gamma)$. La représentation des lignes de courant montre une grande cellule qui occupe toute la cavité (Fig. IV-3). La valeur maximale des lignes de courant obtenue dans la présente étude $\Psi=132.8$ est identique à celle de **Gelfgat et al.** (2001).

La Figure (IV-4) présente la comparaison avec une structure spatiale du potentiel électrique, de densité de courant et du champ magnétique induit à l'ordre 1 d'un écoulement de von Kármán étudiée par **Bourgoin et al.** (2004).

La Comparaison a  t e faite aussi avec les résultats numériques obtenus par **Kakarantzas et al.** (2009), concernant l'écoulement de convection naturelle confiné dans la cavité cylindrique remplie d'un fluide ($Pr=0.0321$), ayant un rapport d'aspect $\gamma=1$, avec une distribution sinusoïdale de la température au disque supérieur fixe ($T=1/2(1+\cos(\pi r))$) et un champ magnétique axiale, la figure (IV-5) présente le cas de $Ra=10^5$ et $Ha=10$.

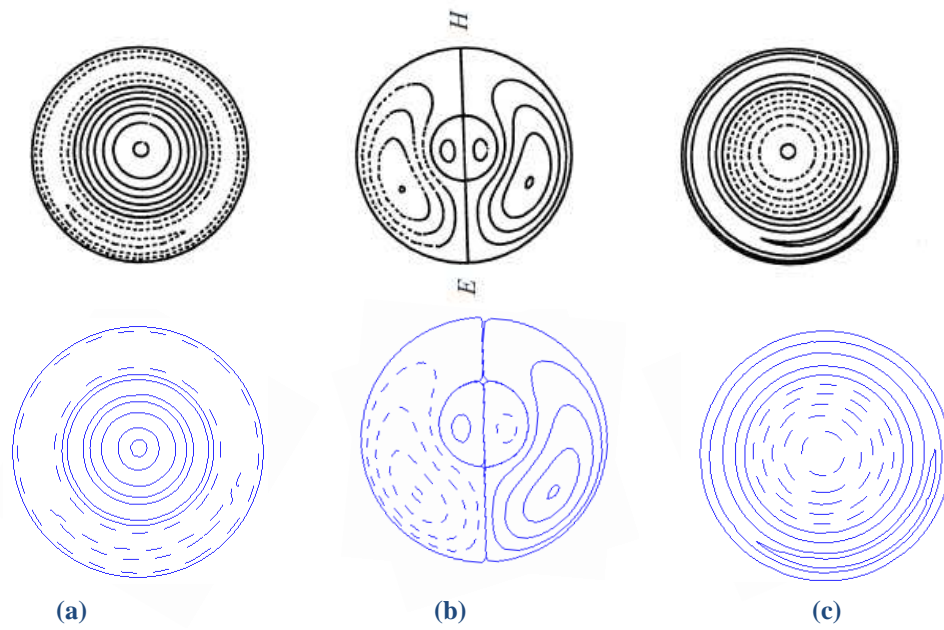


Figure IV-1 : Résultats obtenus (bas) comparé avec Nore et al.2004 (haut) à l'état mixte M pour $Re=355$, près de la bifurcation à $Re_M=349$. Isocontours de la vitesse verticale à, (a) $z=-\gamma/6$, (b) $z=0$, (c) $z=\gamma/6$

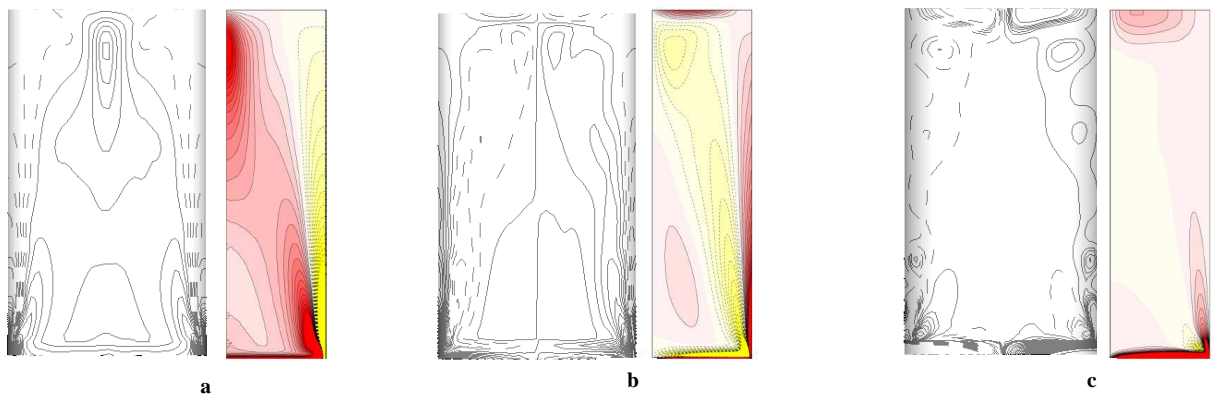


Figure IV-2 : Comparaison des contours axisymétriques des composantes de vorticity (a) axiale (b) radiale (c) azimutale avec les résultats numériques (adroite de chaque figure) obtenue par Lopez, 2012, pour le cas de $Re=2300$ et $H/R=3.5$

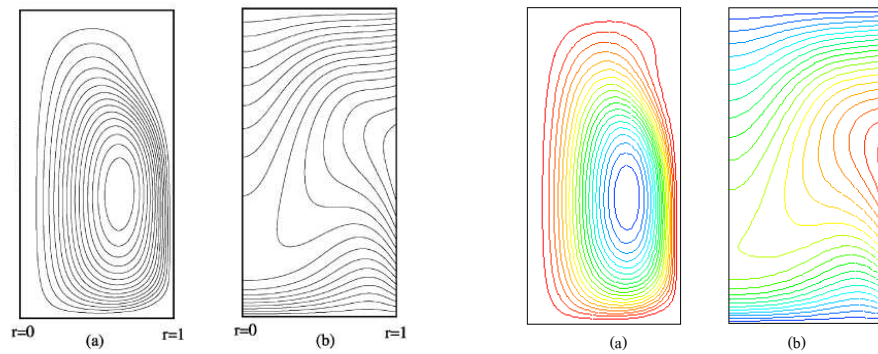


Figure IV-3 : Comparaison avec Gelfgat et al.2001 (à droite) et notre résultat simulé par Fluent (à gauche) Contours de (a) lignes de courant, (b) température Θ , le cas de $Ha=30$, $Pr=0.015$ et $Gr=3.02 \times 10^6$.

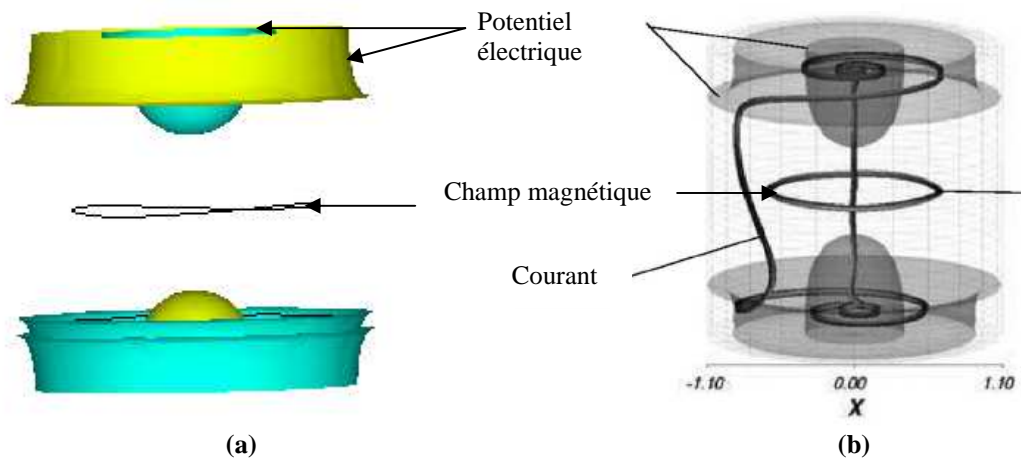


Figure IV-4 : Comparaison de potentiel électrique, densité de courants et champ magnétique induits à l'ordre 1 avec les données numériques (b) figurées dans Bourgoïn et al.(2004), pour le cas de contre-rotation des disques d'extrémités et champ magnétique axial

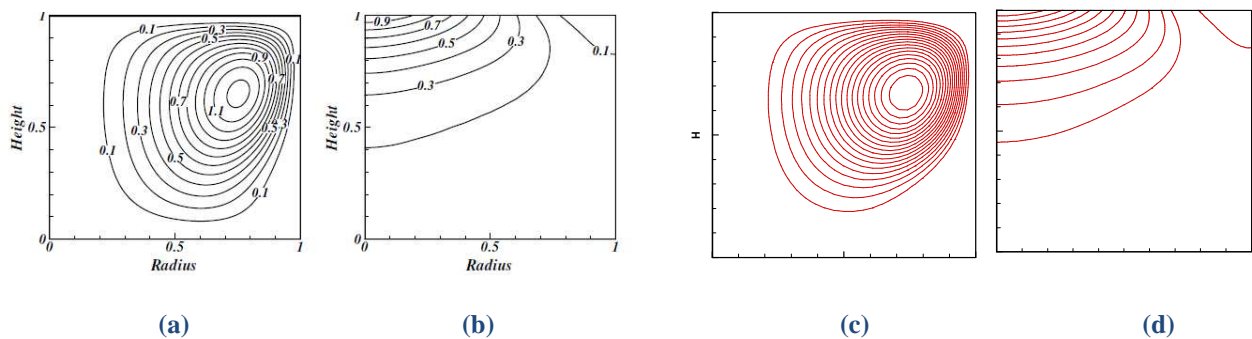


Figure IV-5 : Comparaison des (a) lignes de courant Ψ (b) température Θ , calculées par Kakarantzis et al.(2009) avec nos résultats numériques (c) ,(d) respectivement correspondants, pour le cas $Pr=0.0321, \gamma=1$, $Ra=10^5$ et $Ha=10$.

IV.3 Écoulement de base

A faibles vitesses de rotation, les visualisations du dessus ne sont pas différentes que l'on soit en Co ou en contre-rotation. L'écoulement est alors axisymétrique stationnaire. La configuration étudiée est invariante par rotation autour de l'axe vertical désignée par S_θ et par rotation d'angle π autour d'un axe horizontal arbitraire $R_\pi(\theta_0)$ (Fig. IV-6a). Ces deux groupes de symétrie confèrent la symétrie $O(2)$ au système pour tout rapport de forme, d'après **Nore et al.** (2005). Les disques en rotation entraînent dans leur mouvement les couches de fluide immédiatement adjacentes du fait de viscosité. Cela crée une couche de cisaillement de vitesse azimuthale prédit par **Nore et al.** (2004), sous l'effet de la force centrifuge, les particules sont rejetées vers le centre à une hauteur. Ces mouvements créent des zones de recirculation d'amplitude plus faible selon un schéma appelé pompage d'Ekman. Le long de l'axe, le flux est dirigé vers le disque tournant et compense ainsi la perte de masse qui existait à ce niveau du fait l'expulsion des particules. Dans le cas où les deux disques tournent avec la même vitesse angulaire Ω dans la même direction le fluide dans la majeure partie du cylindre tourne quasi-rigidement avec une vitesse intermédiaire des disques d'extrémités. L'écoulement caractérisé par deux couches limite séparant une zone centrale en rotation solide avec la couche d'Ekman sur les disques d'extrémités et la couche de Stewartson sur la paroi latérale. L'écoulement axial presque uniforme apparaît à proximité de l'axe tournant en raison du pompage d'Ekman (Fig.III-6b). Dans le cas contre-rotation l'écoulement caractérisé par la juxtaposition de deux tourbillons contre-rotatifs séparés par une couche de transition (Fig.III-6c) La contre-rotation des deux disques crée une couche de mélange azimuthale équatoriale. Chaque disque tournant donne lieu à une couche d'Ekman.

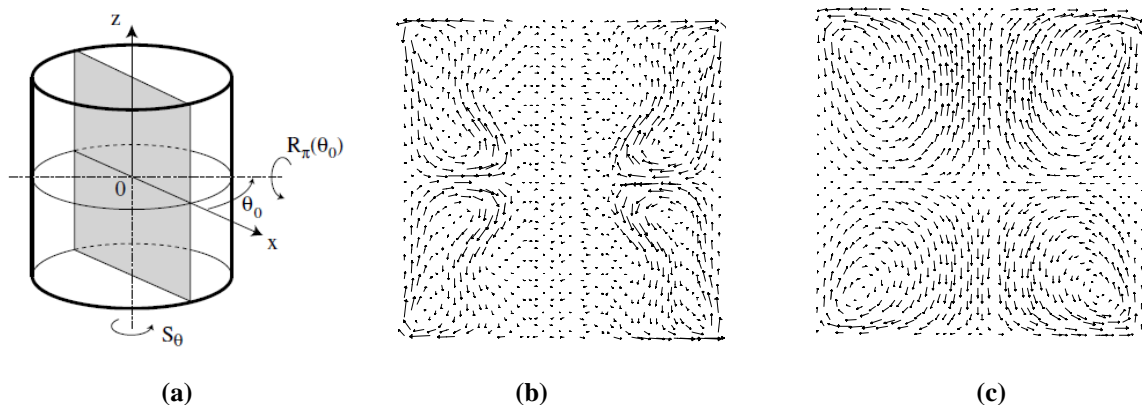


Figure IV-6 : Géométrie et symétries : (a) Schémas des symétries, d'après Nore et al.,(2004) . Contours des vecteurs du champ méridien (b) co-rotation à $Re = 1900$, (c) contre-rotation à $Re = 300$.

l'écoulement de von Kármán présente une symétrie de réflexion combinée en z et en θ . la notée $R_\pi(\theta_0)$ de 180 par rapport à un axe horizontale passant à mi-hauteur du cylindre laisse l'écoulement invariant . Le problème de convection mixte présente ainsi la symétrie qui combine la réflexion en z , θ et Θ . l'état de réflexion-symétrique s'il est invariable sous l'opérateur de réflexion défini dans les deux formulations par :

Co-rotation

$$S_{\theta_0} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \Theta \end{pmatrix} (r, z, \theta) \cong \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \Theta \end{pmatrix} ..(r, z, \theta + \theta_0)$$

$$R_\pi \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \Theta \end{pmatrix} (r, z, \theta) \cong \begin{pmatrix} u \\ -v \\ w \\ 1-\Theta \end{pmatrix} ..(r, -z, -\theta)$$

Contre-rotation

$$S_{\theta_0} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \Theta \end{pmatrix} (r, z, \theta) \cong \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \Theta \end{pmatrix} ..(r, z, \theta + \theta_0)$$

$$R_\pi \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \Theta \end{pmatrix} (r, z, \theta) \cong \begin{pmatrix} u \\ -v \\ -w \\ 1-\Theta \end{pmatrix} ..(r, -z, -\theta)$$

Pour le cas de co-rotation u et w sont invariants au cours de la réflexion en z tandis que v change de signe (Fig. IV-7). Pour le cas de contre rotation u est invariant au cours de la réflexion en z tandis que v et w changent de signe (Fig. IV-8). Noté que les valeurs positives indiquées par des lignes continues et les valeurs négatives par des lignes pointillées

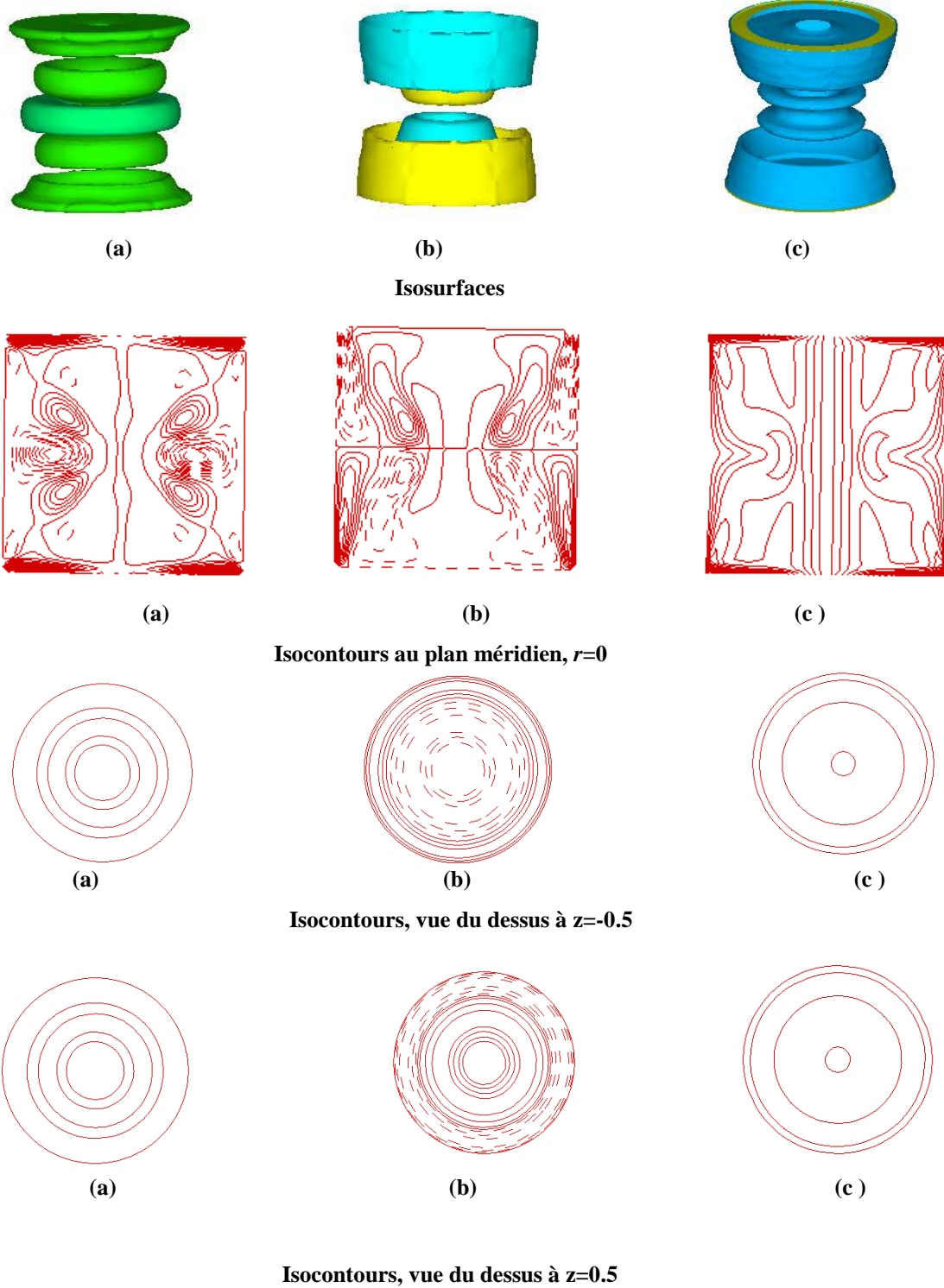
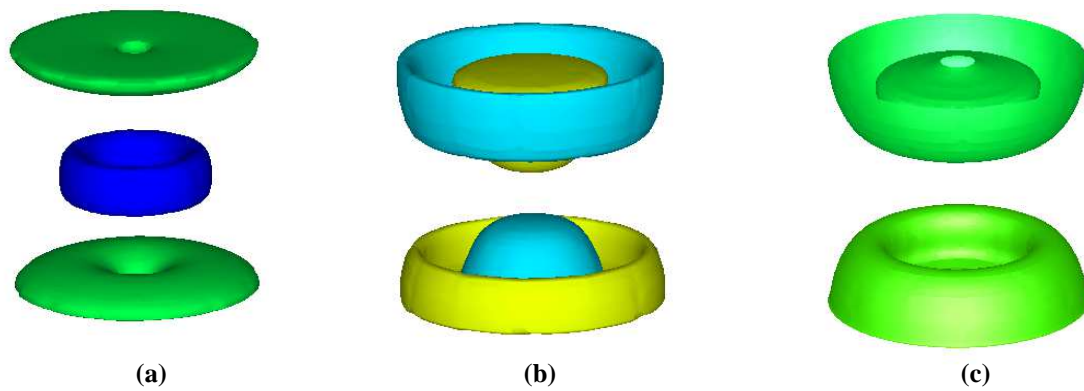
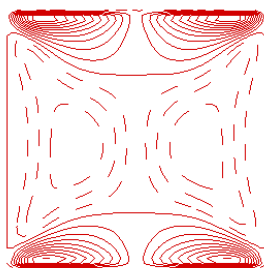


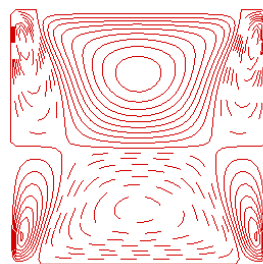
Figure IV-7 : Etat de base pour $\gamma=2$ à $Re=1000$, co-rotation .Isocontours et isosurfaces de vitesse (a) radiale (b) axiale et (c) azimutale, noté que u et w sont invariant au cours de la réflexion en z tandis que v change de signe. Les valeurs positives indiquées par des lignes continues et les valeurs négatives par des lignes pointillées.



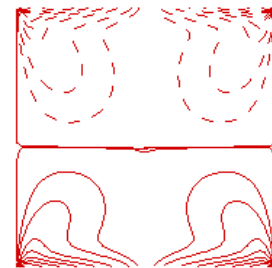
Isosurfaces



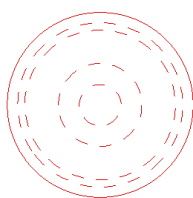
(a)



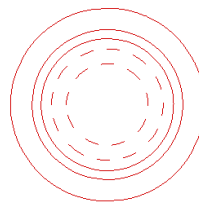
(b)



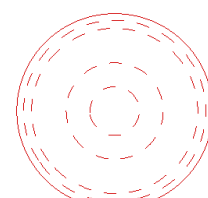
(c)

Isocontours au plan méridien, $r=0$ 

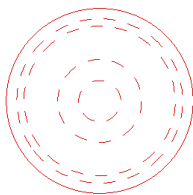
(a)



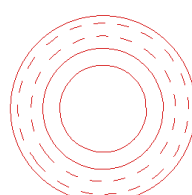
(b)



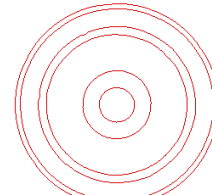
(c)

Isocontours, vue du dessus à $z=-0.5$ 

(a)



(b)



(c)

Isocontours, vue du dessus à $z=0.5$

Figure IV-8 : Etat de base pour le cas contre-rotation à $Re=300$. Isocontours et isosurfaces de vitesse (a) radiale (b) axiale et (c) azimutale, noté que u est invariant au cours de la réflexion en z tandis que v et w changent de signe. Les valeurs positives indiquées par des lignes continues et les valeurs négatives par des lignes pointillées.

IV.4 Dynamique de la convection en Co-rotation des disques d'extrémités

IV.4.1 Sans champ magnétique

La manière dont la convection va se développer va dépendre des symétries du système. Les symétries des équations et conditions aux limites présentées dans notre cavité cylindrique en co-rotation des disques d'extrémités correspond au groupe $O(2)$, ce dernier étant généré par les rotations autour de l'axe vertical z et les réflexions par rapport aux plans verticaux contenant cet axe. Ces symétries sont également celles de l'état diffusif.

Ces propriétés d'invariance par rotation font que les modes propres qui apparaissent autour de la solution diffusive et dont certains vont déstabiliser cette solution et déclencher un mouvement sont des modes azimutaux, dont la dépendance selon l'angle azimutal peut être exprimé sous la forme $e^{im\phi}$ d'après **El galfaf** (2010). Les bifurcations axisymétriques qui correspondent à un mode $m = 0$ et gardent la symétrie $O(2)$ du système seront des bifurcations trans-critiques associées à une unique valeur propre critique. Ces bifurcations trans-critiques génèrent un état super-critique distinct de son homologue sous-critique sous la forme de deux branches de solutions différentes (**El galfaf**, 2010). Concernant les bifurcations liées au mode $m = 1$, l'invariance par rotation sera brisée et il y aura conservation d'une unique symétrie de réflexion par rapport à un plan vertical. La bifurcation associée au mode $m = 1$ génère ainsi un nombre infini de solutions équivalentes définies à une rotation près. Cette bifurcation est appelée bifurcation fourche circulaire et est associée à une valeur propre double. Enfin, pour la dynamique liée au mode $m = 2$, l'invariance par rotation est également brisée, mais deux symétries de réflexion par rapport à deux plans verticaux perpendiculaires sont conservées. Nous obtenons encore une bifurcation fourche circulaire, également associée à une valeur propre double.

Dans le cas de convection forcé, la co-rotation fait apparaître un nouveau motif constitué des ondes propagatives axisymétriques pour l'état de base (Fig. IV-9), avec $Re=300$ jusqu'à $Re=1915$ qui présente la branche des ondes propagatives axisymétrique. En augmentant le nombre de Reynolds, l'écoulement subit une première bifurcation stationnaire à $Re=1920$. L'état de base perd la stabilité au mode non-axisymétrique $m=1$. La figure (IV-9) représente la vitesse axiale, v dans différents plans ($z=-0.5, 0, 0.5$). Un nouveau motif apparaît, contient des spirales positives qui s'enroulent vers le centre. Si on augmente le nombre de Reynolds jusqu'à $Re=2000$, on compte deux bras spiraux. Elles se déplacent essentiellement radialement vers le centre, les

bras en rouges représentent les valeurs positives et les bras en bleus représentent les valeurs négatives. En augmentant le nombre de Reynolds jusqu'à $Re=2300$, le domaine radiale d'existence des spirales augmente, leur nombre augmente à 4 (on obtient quatre bras spiraux avec $m=2$), leur vitesse radiale et leur angle d'inclinaison augmentent également. Les seuils d'apparition et de disparition des spirales positives sont en rapport avec les nombres de Reynolds plus faibles ou l'inverse. La figure (IV-10) présente champ de vecteurs (v, w) à $z=-0.5$ (à droite), (b) $z=0$ (au milieu), $z=0.5$ (à droite), pour le cas de $Re=2200$, où les vecteurs s'enroulent vers le centre. Dans la configuration rotor-stator, ou lorsque les deux disques tournent dans la même direction, l'écoulement présente des instabilités de couche limite donnant lieu à des motifs axisymétriques où spirales (Moisy et al., 2004).

La branche des ondes propagatives axisymétrique perd la stabilité à $Re=1920$, on peut observer la symétrie des ondes propagatives, dans la figure (IV-11) qui montre les isosurfaces de vitesse radiale et azimutale à l'état de base axisymétrique avec $Re=1915$, noter que u et w sont invariant au cours de la réflexion en z . La branche des spirales positives avec $m=1$ peut être comme résultat de la première instabilité correspond à une modulation azimutale de la couche de équatoriale à $z=0$, qui donne naissance à un tourbillon radial stationnaire (Fig. IV-12 haut). Chaque disque tournant donne lieu à une couche d'Ekman (Fig. IV-12milieu). Le champ de vecteur (u, v) et le contour de w sont symétriques par rapport au mi-plan dans le plan méridien $\theta=0, \pi$; mais sont déformé à $\theta=\pi/2, 3\pi/2$. La structure de la vitesse radiale présentée sur la Figure (IV-12bas) comprend des tourbillons de la couche de mélange équatoriale à $r=0.75$, sur la même figure nous présentons le champ de vecteurs vitesses (v, w) à $r=0.7$.

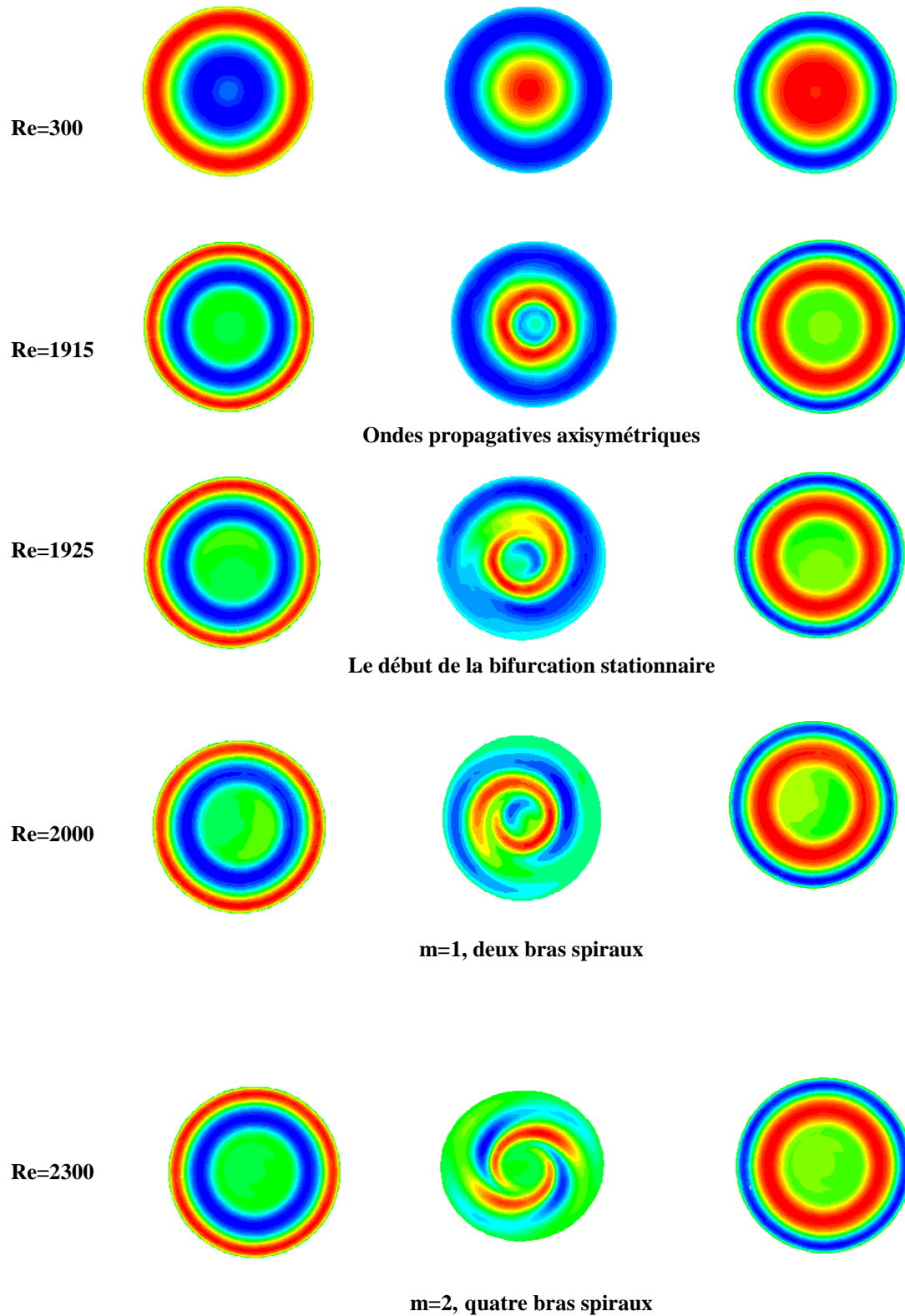


Figure IV-9 : Vues de dessus des différents motifs d'écoulement : $z=-0.5$ (à droite) , $z=0$ (au milieu) et $z=0.5$ (à gauche)

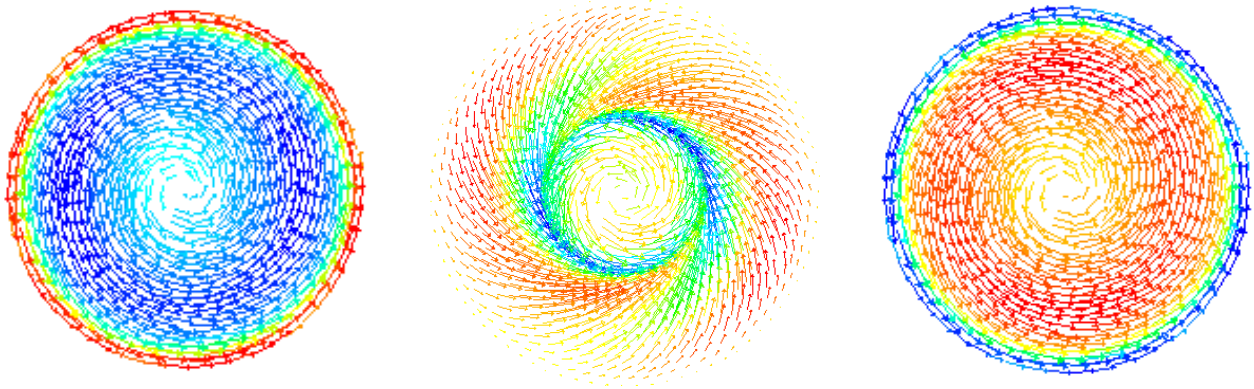


Figure IV-10 : Champ de vecteurs (v, w) à $z=-0.5$ (à droite) , (b) $z=0$ (au milieu), $z=+5$ (à droite) ,pour le cas de $Re=2200$ et $Ri=0$.

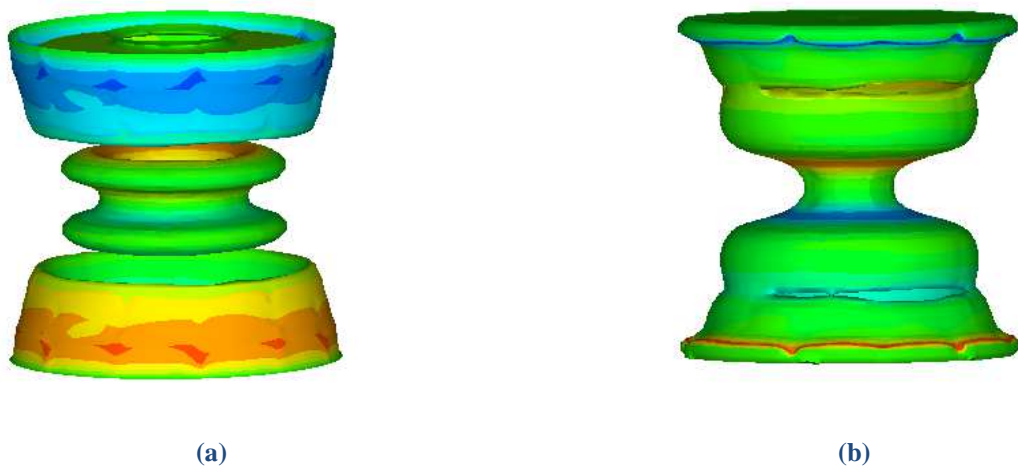


Figure IV-11 : Etat de base axisymétrique à $Re=1915$. Isosurfaces de vitesse (a) radiale (b) azimutale, noter que u et w sont invariant au cours de la réflexion en z . Les valeurs positives indiquées par le rouge et les valeurs négatives par le bleu.

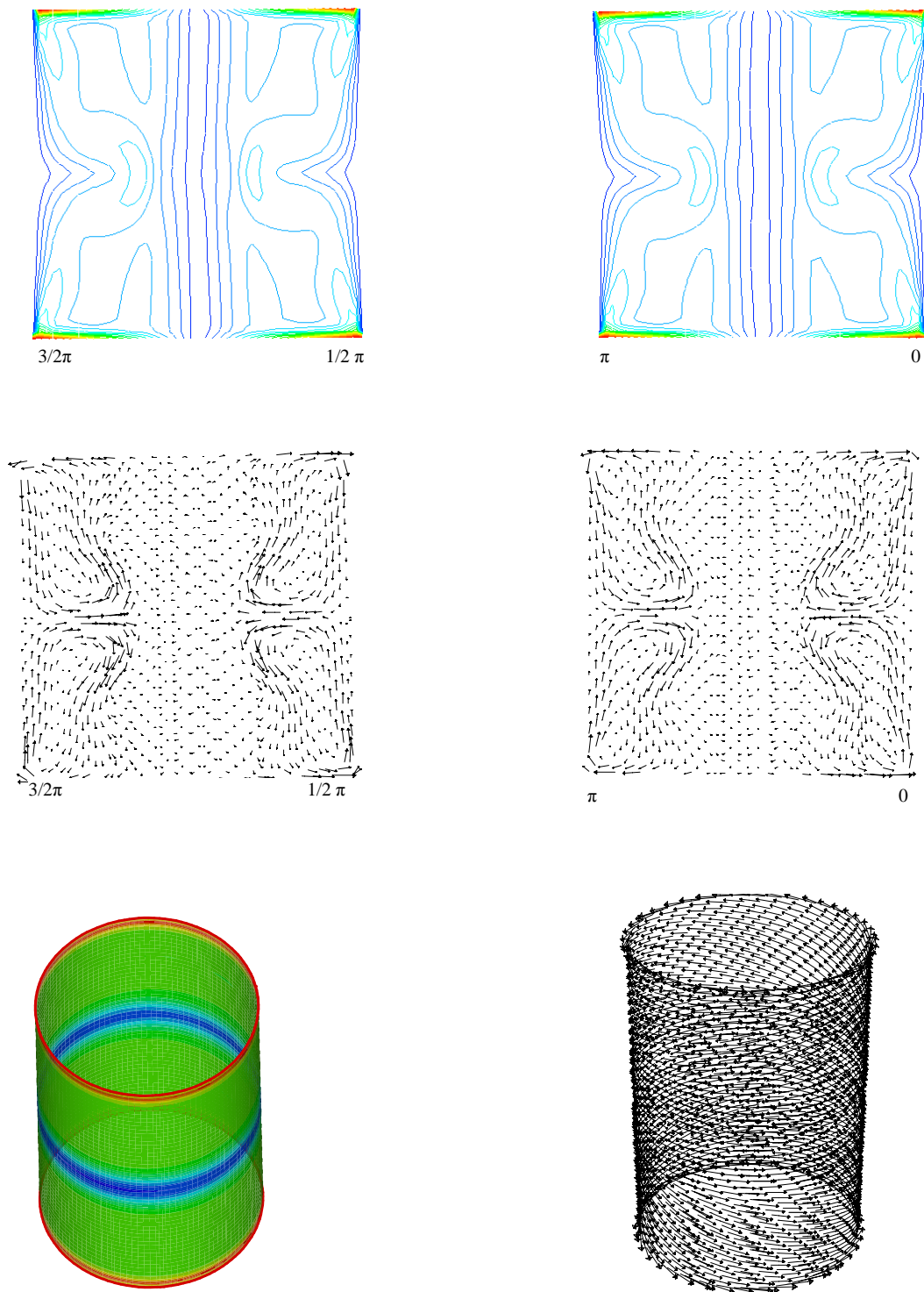


Figure IV-12 : $Re=1925$, près de la bifurcation à $Re=1920$: Contours de la vitesse azimutale (haut) ,vecteurs du champ méridien (milieu) ,les isosurfaces de la vitesse radiale montrant un tourbillon (vortex) à $r=0.70$ et champ de vecteurs vitesse (v, w) à $r=0.70$ (bas).

- **L'effet de gradient de la température sur l'écoulement en co-rotation**

En augmentant le nombre de Richardson ($Ri=0.5$), l'écoulement change la structure, il subit une première bifurcation stationnaire à $Re=292$, correspondant au mode azimutal $m = 1$. La figure (IV-13) montre les plans des isocontours de la vitesse axiale enveloppés dans le cylindre aux positions, $z=-0.8$, $z=0$, $z=0.8$ respectivement pour les trois cas : $Re=280$, 295 et 380 , on remarque que la brise de l'axisymétrie commence au milieu du cylindre et que bifurcation stationnaire correspondant au mode azimutal $m = 1$. La remarque la plus importante si la disparition des spirales au milieu du cylindre et l'apparition du mode $m=1$. Une autre remarque aussi que la branche de mode mixte avec $m=1$ décroît chaque fois en augmentant Ri .

La figure (IV-14) expose les isocontours de la vitesse axiale à $z=-0.5$, $z=0$ et $z=0.5$ dans les différents états pour $Ri=1$, nous présentons premièrement l'état de base pour le cas de $Re=200$ l'écoulement de base possède toutes les symétries du problème, il est donc stationnaire et axisymétrique, puis l'état de base perd sa stabilité aux modes non-axisymétrique $m = 1$ à $Re=220$ et pour $Re=250$ l'écoulement complètement asymétrique dans le cylindre.

La figure (IV-15) présente les isocontours de la vitesse radiale, axiale et azimutale, tracées au plan méridien à $r=0$ et la vue de dessus à $z=0$ correspondant à chaque composante de vitesse, pour le cas de $Ri=2$, nous avons choisis de représenter le cas de $Re=162$ correspondant au début de la bifurcation stationnaire, les plans méridiens de différentes composantes de la vitesse sont présentés au premier rang à $r=0$, au dessous de chaque figure se trouve la représentation de la vitesse au plan (r, θ) . La symétrie de l'état de base est brisée, ainsi que le contour $v=0$ est remplacé par des courbures dans le cas $Ri=0.5$, 1 et 2 .

Enfin, pour la dynamique liée au mode $m = 1$, (cas $Re=162$, $Ri=2$) l'invariance par rotation est également brisée, mais deux symétries de réflexion par rapport à deux plans verticaux perpendiculaires sont conservées. Pour le cas $Re=200$, $Ri=2$ l'invariance par rotation est brisée et il y aura conservation d'une unique symétrie de réflexion par rapport à un plan vertical.

Au voisinage de la bifurcation stationnaire la température varie linéairement dans la direction verticale, pour $Re=200$ et $Ri=0.5$, la solution est de type conductif. L'isotherme augmente progressivement des droites horizontales du profil conductif. On obtient aussi une solution de type convectif pour le cas de $Re=250$ et $Ri=0.5$ (Fig. IV-16).

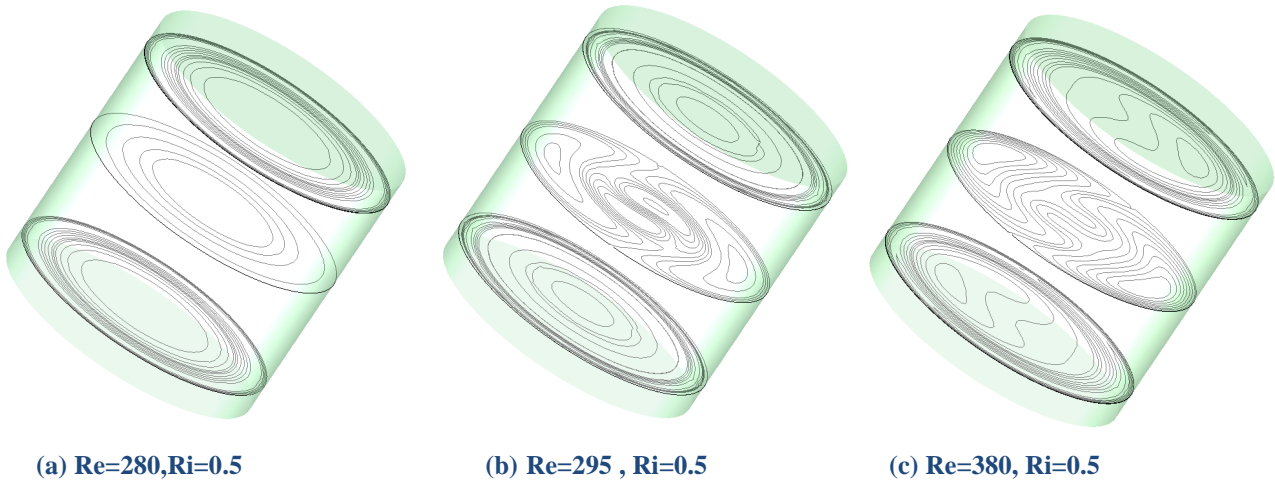


Figure IV-13 : Isocontours de la vitesse axiale de l'état stationnaire correspondant (a) à l'état axisymétrique stationnaire (b) à la naissance d'instabilité au milieu de cylindre (au milieu de cylindre (c) au mode azimutal $m = 1$ complètement développé (à gauche)

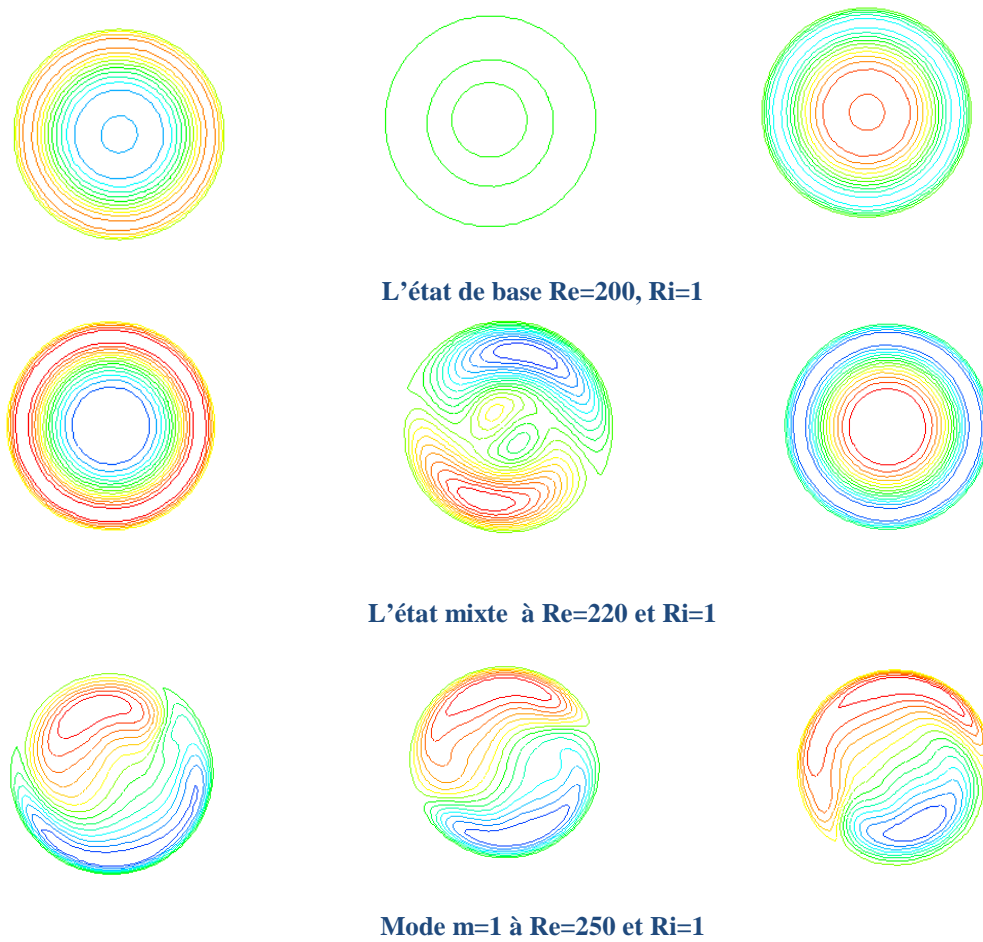


Figure IV-14 : Isocontours de la vitesse axiale v , à $z=-0.5$ (à droite), (b) $z=0$ (au milieu), $z=+0.5$ (à droite) correspondant au changement d'état en augmentant le nombre de Re avec $Ri=1$

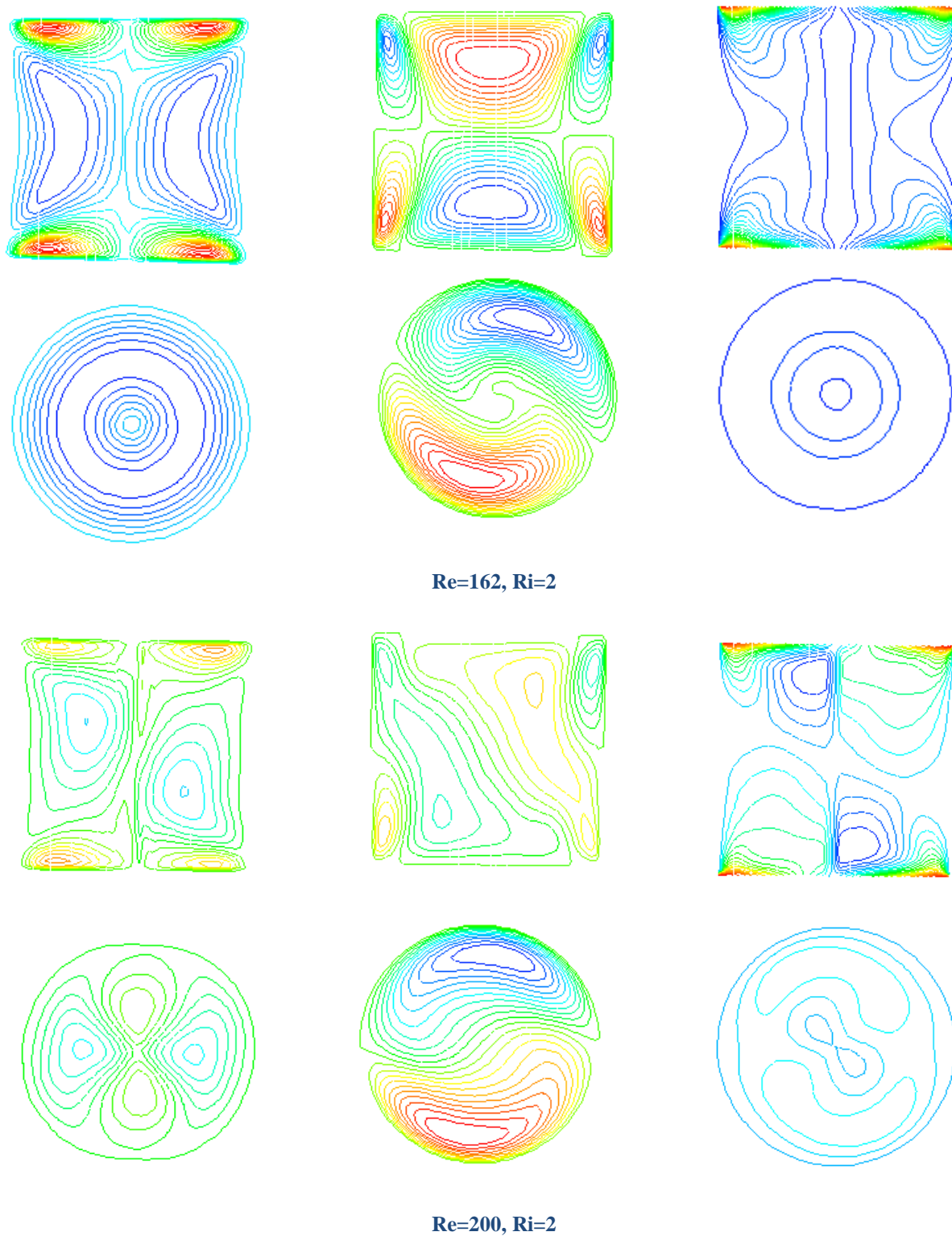
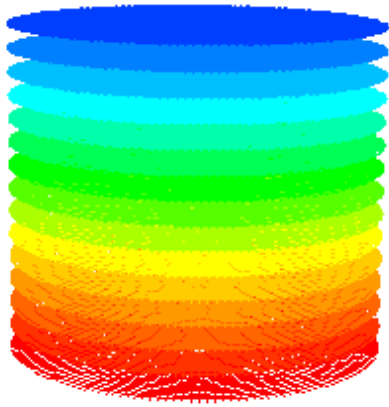
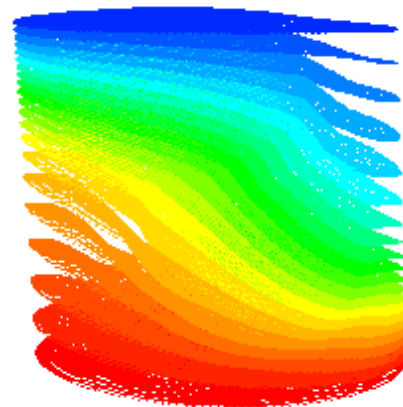


Figure IV-15 : Isocontours de la vitesse radiale (à gauche) axiale (au milieu) et azimuthale (à droite), tracées au plan méridien à $r=0$ et la vue de dessus à $z=0$ correspondant à chaque composante de vitesse.



Re=200, Ri=0.5



Re=250, Ri=0.5

Figure IV-16: Champ conductif de température à Re=200 , Ri=0.5 et convectif à Re=250 et Ri=0.5

- **Diagrammes de stabilité**

Nous déterminons les nombres de Reynolds critiques auxquels l'état de base axisymétrique perd la stabilité. L'écoulement subit une première bifurcation stationnaire avec $m=1$ suivie par un autre état de mode avec $m = 2$.

La convection forcée fait apparaître un nouveau motif constitué des ondes propagatives axisymétriques pour l'état de base. En augmentant le nombre de Reynolds, l'écoulement subit une première bifurcation stationnaire à $Re=1920$. L'état de base perd la stabilité au mode non-axisymétrique $m=1$.

Les résultats obtenus dans le cas de la convection mixte, en augmentant le nombre de Richardson, l'écoulement subit une première bifurcation stationnaire ($m=1$) pour les valeurs du nombre de Reynolds critiques $Re_{cr} = 292, 221$ et 162 , correspondant respectivement aux valeurs du nombre de Richardson $Ri=0.5, 1$ et 2 .

Quand le nombre de Richardson Ri est petit, l'effet de Buoyancy est négligeable, et des spirales se développent dans le milieu du cylindre (couche intermédiaire à $z=0$), quand on augmente la valeur de Ri l'effet de la stratification thermique est substantiel, et le régime d'écoulement change la structure au milieu et au frontière, la bifurcation brise la symétrie déjà enregistrée dans l'état de base

Les résultats quantitatifs présentés dans le tableau (IV-2), sont visualisées graphiquement dans le plan ($Re-Ri$) sous forme de courbe de bifurcation aux différentes valeurs du nombre de Richardson Ri .

Le diagramme de stabilité présenté sur la figure (IV-17), donnant l'évolution du seuil correspondant au mode azimutale $m=1$ en fonction du rapport de Richardson Ri . Avec les différentes structures de l'écoulement (bras spirale pour $Ri=0$). Ainsi, nous présentons au dessus de la courbe la vitesse axiale à $z=0$ (la vue de dessus). Pour les figures situées sous la courbe, ils présentent l'état de base axisymétrique, à gauche de la courbe nous présentons les différents motifs constitué d'ondes propagatives axisymétriques et les spirales pour le cas de $Ri=0$. Nous constatons que l'augmentation du nombre de Richardson provoque la diminution du nombre de Reynolds critique, c.-à-d. que l'augmentation des valeurs de Ri déstabilise l'écoulement de base aux mêmes valeurs de Reynolds.

Ri	0	0.5	1	2
Ha=0	1920	292	221	162

Tableau IV-2: Reynolds critiques trouvés en co-rotation pour Ha=0 et différentes valeurs de Ri (0, 0.5, 1 et 2)

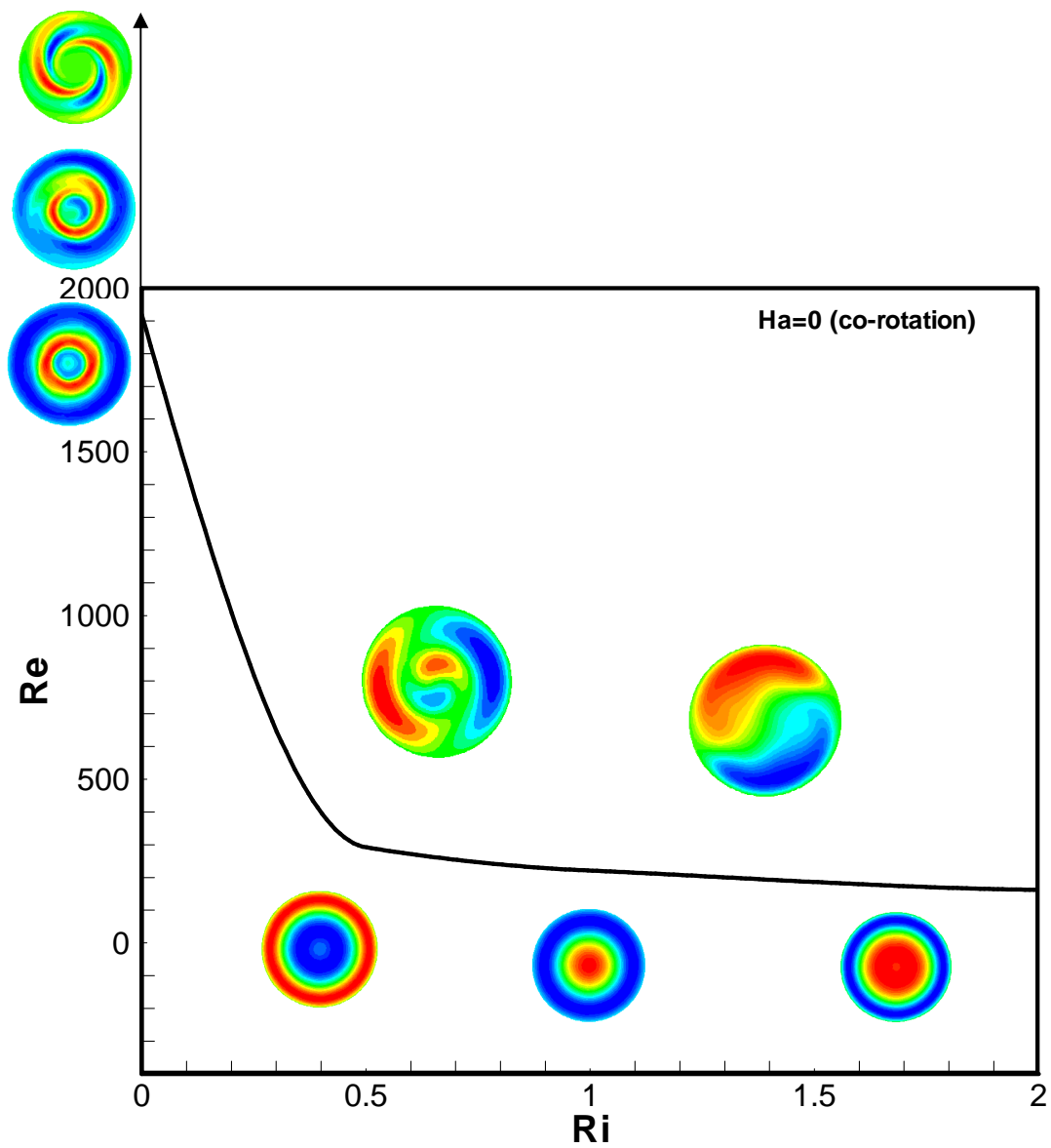


Figure IV-17 : Diagramme de stabilité Re-Ri

IV.4.2 Avec champ magnétique

Dans cette section, on s'intéresse à la situation en présence du champ magnétique appliqué verticalement à la configuration étudiée. L'application d'un champ magnétique vertical est reconnue sur la stabilité des écoulements convectifs comme déjà mentionné à la première partie. Quand un champ magnétique (axial) vertical est imposé, on observe quelques changements intéressants sur le mouvement du fluide et sur le transfert thermique, l'écoulement se stabilise sous l'effet du champ magnétique, nous présentons sur la figure (IV-18) le cas de convection forcée ($Ri=0$) avec $Re=2300$, sans champ magnétique ($Ha=0$), l'état de bifurcation stationnaire enregistrée au milieu de cylindre à $z=0$ (des bras spiraux). L'application du champ magnétique d'intensité $Ha=5$ provoque un changement dans la structure de l'écoulement et trouve la même structure que l'état de base initialement obtenue à $Re<1998$. L'effet de champ magnétique est essentiellement sur la vitesse axiale, v et l'écoulement retrouve en particulier la symétrie de réflexion ; par contre la vitesse radiale et azimutale ne subit aucun changement. On augmentant l'intensité de champ magnétique à la valeur $Ha=20$, on remarque que le changement est plus important au centre que sur les parois de l'écoulement avec un changement dans la structure de la vitesse radiale et azimutale cette fois.

Les écoulements MHD subissent en général un amortissement dès lors qu'on applique un champ magnétique. Celui-ci est plus important au centre que sur les parois de l'écoulement. Cela provoque l'apparition de fines couches où le gradient de vitesse est très élevé. Celles-ci sont appelées couches limites de Hartmann (**Kakarantzias et al. , 2009**). La figure (IV.19) représente l'effet de champ magnétique sur le champ de vecteur (v, w) surtout au centre de cavité cylindrique dans le cas de $Re=2300$, $Ri=0$ et $Ha=20$ comparais à l'état sans champ magnétique $Ha=5$ et $Ha=0$.

On montre sur la figure (IV-20) la distribution radiale de vitesse axiale le long de $z=0$, correspondant à l'effet d'un champ magnétique axial sur la bifurcation de fourche, en fonction du nombre de Hartmann, Ha . On observe la diminution importante de la vitesse axiale lorsque le nombre de Hartmann augmente, la vitesse axiale augmente de zéro près des parois à une valeur maximale de 0.01 à $Ha=0$. Pour une valeur modérée de nombre de Hartmann, le profil de vitesse axiale devient de plus en plus linéaire, avec une valeur maximale de 0.001. En général le champ magnétique supprime le mouvement du liquide et réduit le taux de transfert thermique, ce que traduit la figure (IV-21), qui présente Nusselt locale au disque inférieur chaud pour le cas de $Re=200$, $Ri=1$ et $Ha=5$ et une autre valeur plus élevée, $Ha=20$. On peut constater aisément que le transfert thermique est intense sous disque tournant chaud à $r=0$ pour les deux cas $Ha=5$ et

$Ha=20$, provoqué par la recirculation méridienne. Si on fait la comparaison entre le cas $Ha=5$ et $Ha=20$ on voit bien que l'échange thermique à $Ha=5$ bien élevée au niveau du disque inférieur chaud, contrairement le taux de transfert thermique est réduit à $Ha=20$, et les valeurs du nombre Nusselt pour les deux cas se rapprochent du côté de la paroi latérale.

Concernant l'effet de l'orientation du champ magnétique sur l'hydrodynamique et le transfert de chaleur, on choisit de faire une comparaison entre deux cas. En premier cas nous avons orienté le champ magnétique axialement d'intensité $Ha=20$ pour le cas de $Re=2300$ et $Ri=0$, nous obtenons un régime d'écoulement stable axisymétrique. En deuxième cas, nous avons orienté le champ magnétique horizontalement avec la même intensité, $Ha=20$ et le même cas $Re=2300$ et $Ri=0$, on remarque cette fois que l'écoulement bifurque vers un régime instable (Fig. IV-22). On se limite ici à l'étude du champ magnétique orienté axialement car l'orientation radiale du champ magnétique plus déstabilisante et produit des structures complexes, apparemment parce que l'étude contient deux disques qui tournent en Co/ contre rotation.

Pour envisager l'effet du champ magnétique sur le transfert de chaleur on a testé deux cas avec deux différentes intensité du champ magnétique, $Ha=10$ et 30 , avec $Re=300$, $Ri=2$. A l'état stationnaire axisymétrique avec $Ha=10$, on observe une déviation importante des isothermes près de la paroi latérale, indique que le régime du transfert thermique est essentiellement convectif dans cette région, où le fluide chaud est poussé vers le haut à partir du disque inférieur. En augmentant le nombre de Hartmann à $Ha=30$, on voit que la température varie linéairement dans la direction verticale et la solution est de type conductif, voir la figure (IV-23).

Sur la figure (IV-24) sont présentés les vecteurs de courant méridien J_r et J_z au plan méridien $r=0$ et le champ vectoriel des courants électriques ($J_z-J\theta$) à $r=0.7$ en bas de la figure au sein du fluide conducteur pour $Re=2300$, $Ri=0$ et $Ha=5, 20$ respectivement. On peut remarquer que les vecteurs de courant électriques se concentrent sur les deux disques rotatifs et à la paroi latérale. Puisque le fluide est entouré d'un milieu totalement isolant et les lignes de courant électrique doivent nécessairement se refermer au sein du fluide. Les couches de Hartmann situées sous le disque inférieur en rotation et sur le disque supérieur en co-rotation, dans les quelle se referment les lignes de courant électrique où l'équilibre azimutale est assuré par un équilibre entre les forces visqueuses et les forces électromagnétiques.

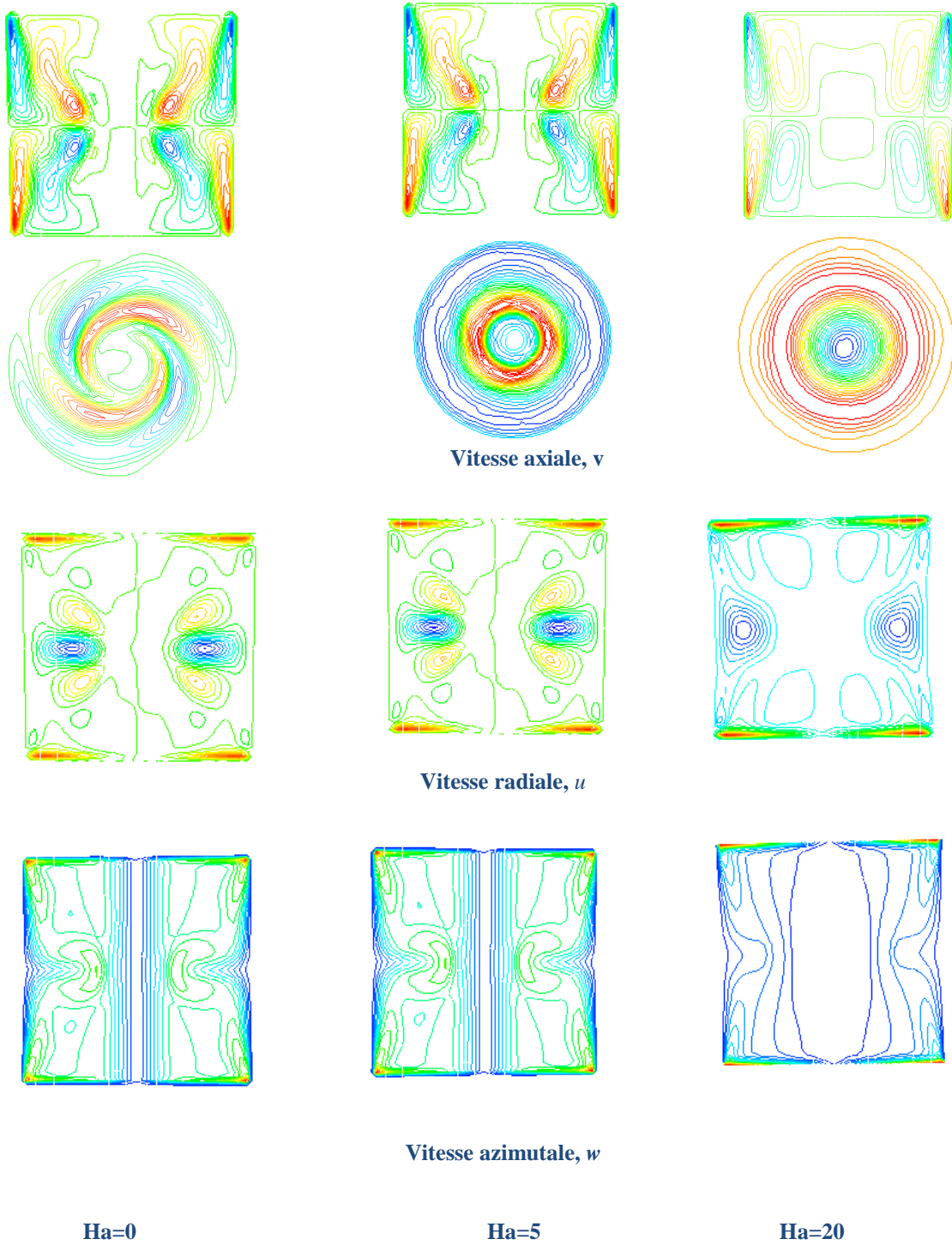


Figure IV-18 : Isocontours de la vitesse radiale (haut) ; axiale (milieu) et azimutale (bas), tracés au plan méridien à $r=0$ et la vue de dessus à $z=0$ pour le cas de $Re=2300$, $Ri=0$ et $Ha=0$; 5 et 20. La couleur bleu correspond aux valeurs négatives, la couleur rouge correspond aux valeurs positives

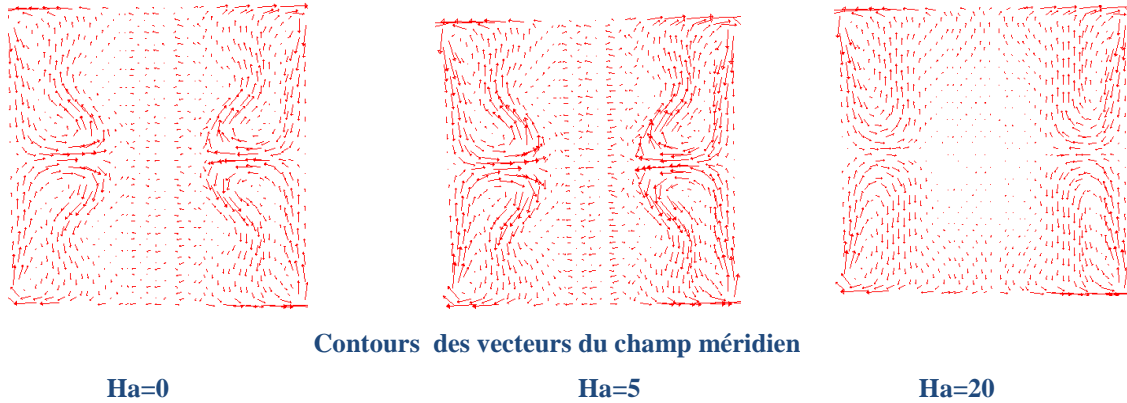


Figure IV-19 : Contours des vecteurs du champ méridien à $r=0$ pour le cas de $Re=2300, Ri=0$ avec $Ha=0, 5$ et 20

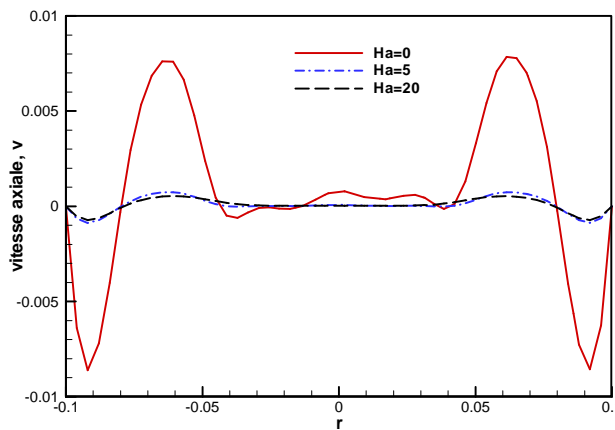
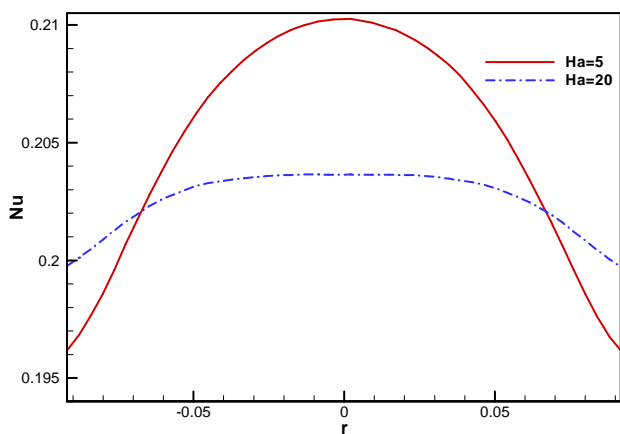
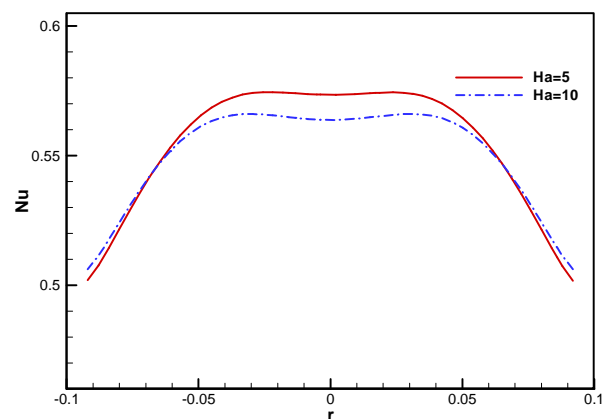


Figure IV-20 : Distribution radiale de vitesse axiale, v à $z=0, \theta=0$ (échelle 1/10) avec $Re=2300, Ri=0$ et $Ha=0, 5, 20$



(a) $Re=200, Ri=1$



(b) $Re=410, Ri=0.5$

Figure IV-21 : L'effet de l'intensité du champ magnétique sur les nombres de Nusselt locaux au disque inférieur chaud du cylindre (échelle 1/10) avec (a) $Re=200, Ri=1$ et $Ha=5 ; 20$; (b) $Re=410, Ri=0.5$ et $Ha=5 ; 10$

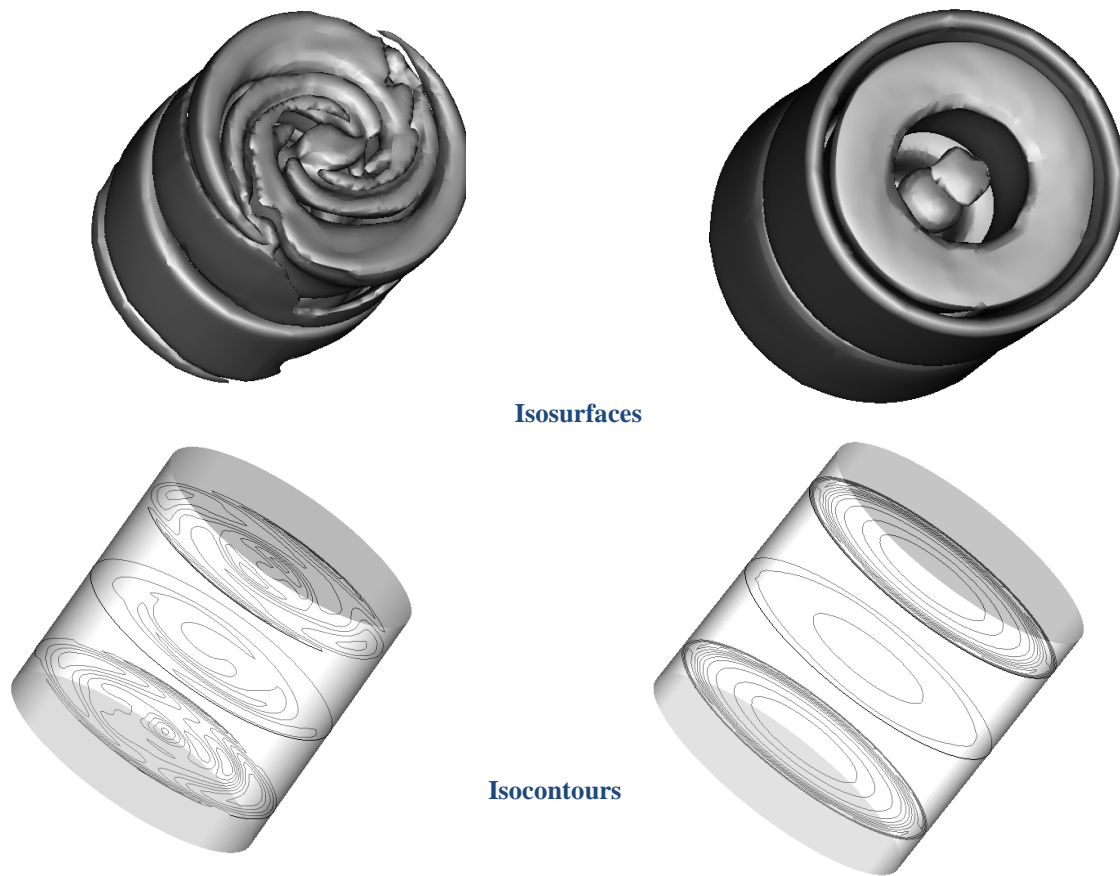


Figure IV-22 : Iso-surfaces et Iso-contours de la vitesse axiale pour le cas $Re=2300$, $Ri=0.5$ et $Ha=20$, appliqué Horizontalement (à droite), appliqué verticalement (à gauche), les isocontours tracées à $z=-0.8, z=0$ et $z=0.8$

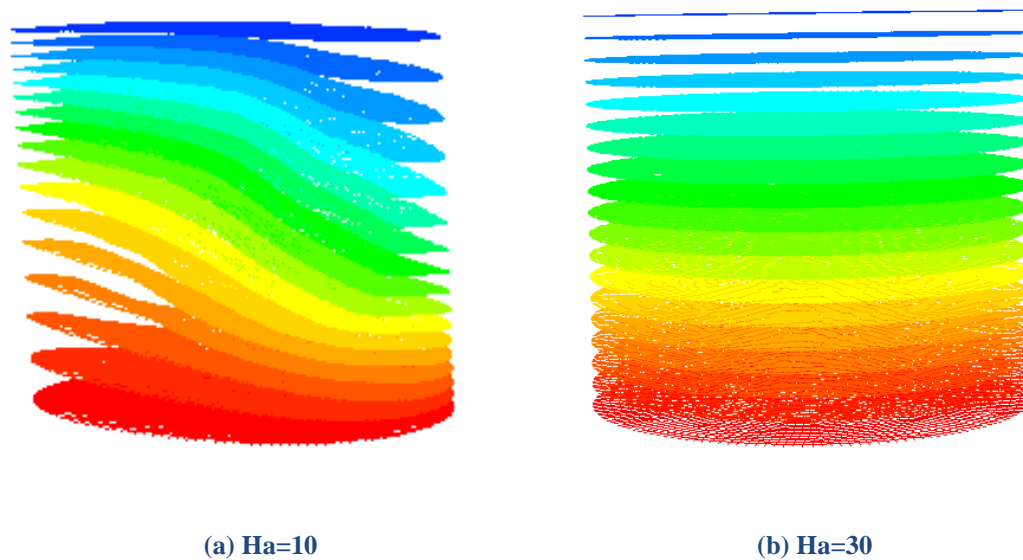


Figure. IV-23: Champ (a) convectif de température à $Re=300$ et $Ri=2$ et $Ha=10$
(b) conductif à $Re=300$, $Ri=2$ et $Ha=30$.

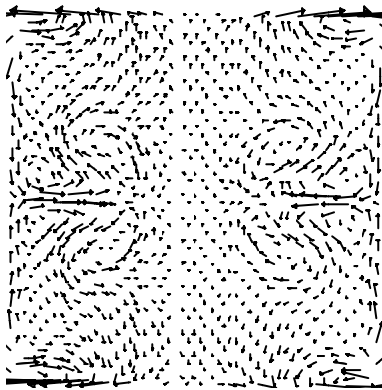
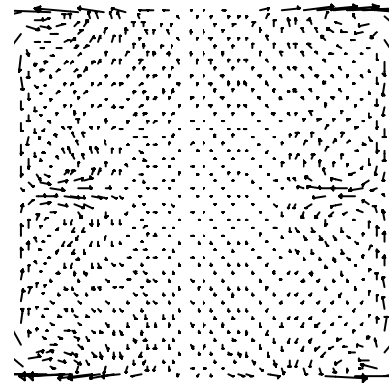
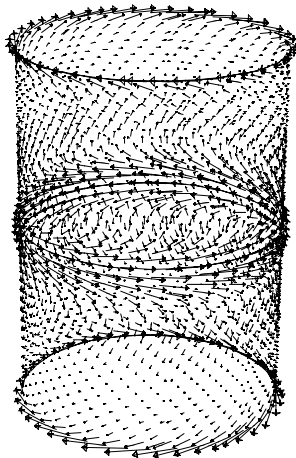
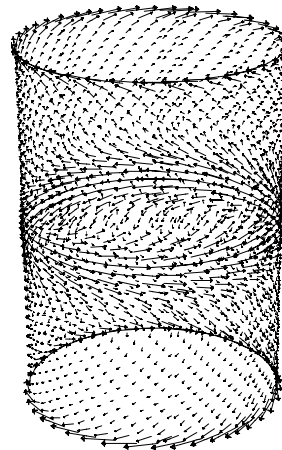
**Ha=5****Ha=20****Ha=5****Ha=20**

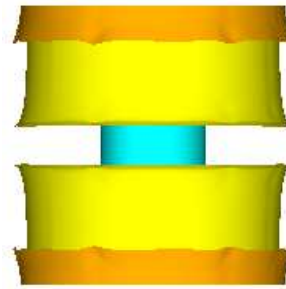
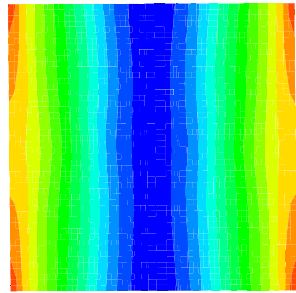
Figure IV-24 : Champ vectoriel des courants électriques (J_r - J_z) au plan méridien $r=0$ (haut) et champ vectoriel des courants électriques (J_z - J_θ) à $r=0.7$ (bas) au sein du fluide conducteur pour $Re=2300$, $Ri=0$ et $Ha=5 ; 20$

En vue d'une meilleure compréhension de l'influence d'un champ magnétique sur l'écoulement, on analyse le courant induit qui peut être écrit par :

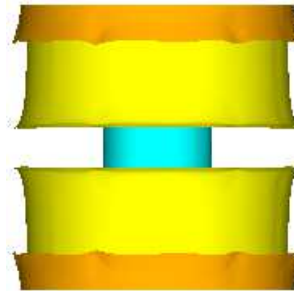
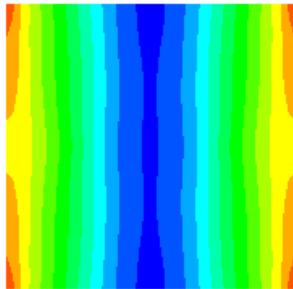
$$\vec{j} = \sigma(-\nabla\varphi + \vec{V} \wedge \vec{B}) \quad \text{Où } \vec{V} = u\vec{e}_r + v\vec{e}_z + w\vec{e}_\theta$$

La première contribution, $\vec{j}_1 = \sigma(\vec{V} \wedge \vec{B})$, est appelée le courant induit continu, résultats de l'interaction entre l'écoulement du fluide et le champ magnétique B. La deuxième contribution, $\vec{j}_2 = \sigma(-\nabla\varphi)$, est le résultat d'un champ de potentiel φ , quelques règles générales peuvent être données : j_1 est créé le premier par le mouvement du fluide. Si j_1 n'est pas conservé, $\text{div} \vec{j} \neq 0$, les charges électriques conduites par j_1 s'accumulent dans quelques parties de l'écoulement créant un champ de potentiel électrique global, φ . Ce potentiel électrique produit par j_2 permet alors au courant électrique global j d'être conservé, j_2 s'oppose généralement à j_1 dans les zones où j_1 est fort, diminuant de ce fait l'effet freinant. Mais dans les zones où j_1 est petit, car il assure la conservation du courant, j_2 créera également très souvent des boucles de courant, en particulier pour les parois électriquement isolantes ou la conservation du courant doit se produire à l'intérieur du fluide. Pour telles parois, le potentiel électrique φ ; est alors prévu pour jouer un plus grand rôle que pour les parois électriquement conductrices où le courant peut circuler à l'intérieur des parois. Ainsi le freinage de l'écoulement devrait être plus faible.

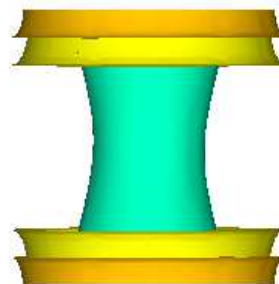
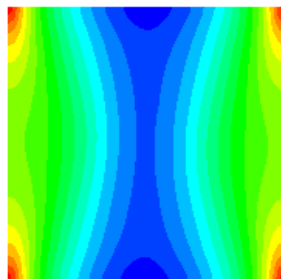
Le potentiel électrique sous l'effet de co-rotation des deux disques d'extrémités étant à symétrie de révolution reliée à la composante azimutale de la vitesse, d'une côté B étant purement axiale, sur la figure (IV-25) deux branches, la région de potentiel positif aux périphériques et à la région des valeurs négatives (Bleus) au centre, avec des branches en cascade près des disques d'extrémités. On augmente l'intensité de nombre de Hartmann de $Ha=5$ à $Ha=10$ pour le cas de $Re=2600$ et $Ri=0$, présenté sur la figure (IV-25), on remarque que la région de potentiel négatif (bleus) devient étroite et les branches de valeurs positives aux périphériques, l'effet de gradient de température est bien présenté pour le cas de $Re=300$, $Ri=1$ avec $Ha=5$, la région des valeurs négatives est retirée au milieu du cylindre à $z=0$, en augmentant l'intensité du champ magnétique à $Ha=20$, on observe que la région des valeurs négatives (bleus) apparaissent au milieu de la cavité, presque la même taille de haut vers le bas, ainsi que la région des valeurs positives (rouges) s'accumulent près de la paroi latérale. La densité d'énergie du champ se trouve expulsée du centre du cylindre vers la paroi. Le maximum de la vitesse axiale est diminué et son lieu est déporté vers la paroi, on voit que le champ magnétique est connecté par la rotation des disques.



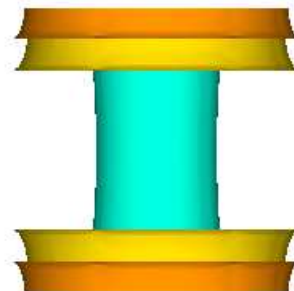
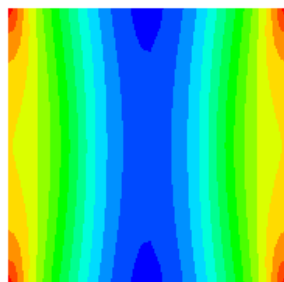
$Re=2600, Ri=0$ et $Ha=5$



$Re=2600, Ri=0$ et $Ha=10$



$Re=300, Ri=1$ et $Ha=5$



$Re=300, Ri=1$ et $Ha=20$

Figure IV-25 : Isocontours au plan $r=0$ (à droite) et isosurfaces (à gauche) de potentiel électrique infecté par la co-rotation des disques d'extrémités et gradient de la température, la couleur bleue correspond aux valeurs négatives, la couleur rouge correspond aux valeurs positives

- **Diagrammes de stabilité**

Les diagrammes de stabilité donnant l'évolution du seuil correspondant au mode azimutal $m=1$, pour $Ri > 0$ c.à.d. lorsque l'axisymétrie est brisée à la couche intermédiaire à $z=0$, car cette couche est la première qui bifurque à l'état stationnaire asymétrique, puis si on augmente le nombre de Reynolds on obtient un état asymétrique dans la totalité du cylindre. Notons que pour $Ri=0$ le seuil de transition est l'apparition des spirales à la couche intermédiaire à $z=0$. Les résultats pour les diverses intensités du champ magnétique ($Ha=5, 10$ et 20), et les différents cas du nombre de Richardson ($Ri=0, 0.5, 1$ et 2) sont présentés dans quatre diagrammes de stabilités (Figs. IV-26 ;27).

Les résultats obtenus en absence du champ magnétique ($Ha = 0$) confirment la conclusion précédente, annonçant que l'augmentation du rapport de Richardson, Ri , l'écoulement bifurque à l'état stationnaire correspondant au mode azimutal $m = 1$. Alors, l'application du champ magnétique a pour effet de stabiliser l'écoulement et le rendre axisymétrique.

La courbe illustrée dans la figure (IV-26 haut) donne le seuil de transition au mode $m=1$ (l'apparition des spirales pour le cas de $Ri=0$) c.-à-d. que pour des valeurs du nombre de Reynolds Re et de Hartmann Ha , situées sous chaque courbe l'écoulement reste laminaire, stable et axisymétrique

La courbe illustrée dans la figure (IV-26bas) pour le cas de $Ri=0.5$ donnant le seuil de transition au mode 1 et les différents états rencontrés chaque fois en augmentant, Ha . Ainsi, nous présentons au dessus de la courbe la vitesse axiale à $z=0$ (la vue de dessus) et une figure de la vitesse axiale au plan méridien qui représente la bifurcation qui brise la symétrie, pour les figures situées sous la courbe ils montrent la représentation méridien de la vitesse axiale à $r=0$ et l'effet du champ magnétique croissant. Nous avons vu déjà que les profils de la vitesse deviennent de plus en plus linéaires pour des croissances du nombre de Hartmann, pour des valeurs modérées de Ha , les contours de la vitesse axiale au milieu du cylindre disparaissent. Notons aussi que l'écoulement est axisymétrique stationnaire sous la courbe sauf pour la couche intermédiaire à $z=0$, pour $Ri>0$ seulement.

La figure (IV-27) représente les courbes tracées pour $Ri=1$ et $Ri=2$, nous constatons que l'augmentation du nombre de Richardson provoque la diminution du nombre de Reynolds critique, c.-à-d. que l'augmentation des valeurs de Ri favorise la transition de mode $m=0$ au mode $m=1$. On remarque que tous ces seuils sont croissants avec Ha , ce qui confirme le phénomène de stabilisation de l'écoulement par le champ magnétique.

D'une façon générale, pour la convection forcée $Ri=0$ et au-dessus du seuil, l'état de base axisymétrique perd la stabilité et fait apparaître un nouveau motif constitué de spirales tournant vers le centre de rotation. **Gauthier et al.** (2002) ont montré que le cas co-rotation ou faible contre-rotation donne des instabilités similaires au cas rotor-stator. Pour $Ri>0$ l'état de base axisymétrique déstabilisé par une perturbation de mode $m=1$.

Les résultats quantitatifs présentés dans le tableau (IV-3), sont visualisées graphiquement dans le plan ($Re-Ha$) sous forme des courbes paramétriques aux différentes valeurs du nombre de Hartmann Ha (Fig. IV-28) . Cette figure montre que pour des valeurs du nombre de Reynolds Re et de Richardson Ri , situées sous chaque courbe l'écoulement reste laminaire stable et axisymétrique et au dessus de la courbe sont représentées les iso-lignes de la vitesse verticale dans le plan horizontal central ($z=0$) de la géométrie cylindrique, les modes propres ($m=1$) évalués au voisinage des points de bifurcation primaire.

Ri	0	0.5	1	2
$Ha=0$	1920	292	221	162
$Ha=5$	2348	409	292	202
$Ha=10$	3156	582	387	258
$Ha=20$	5997	877	561	386

Tableau IV-3: Reynolds critiques trouvés en co-rotation pour Ha ($=5, 10, 20,30$) et différentes valeurs de Ri ($=0, 0.5, 1,2$ et 4).

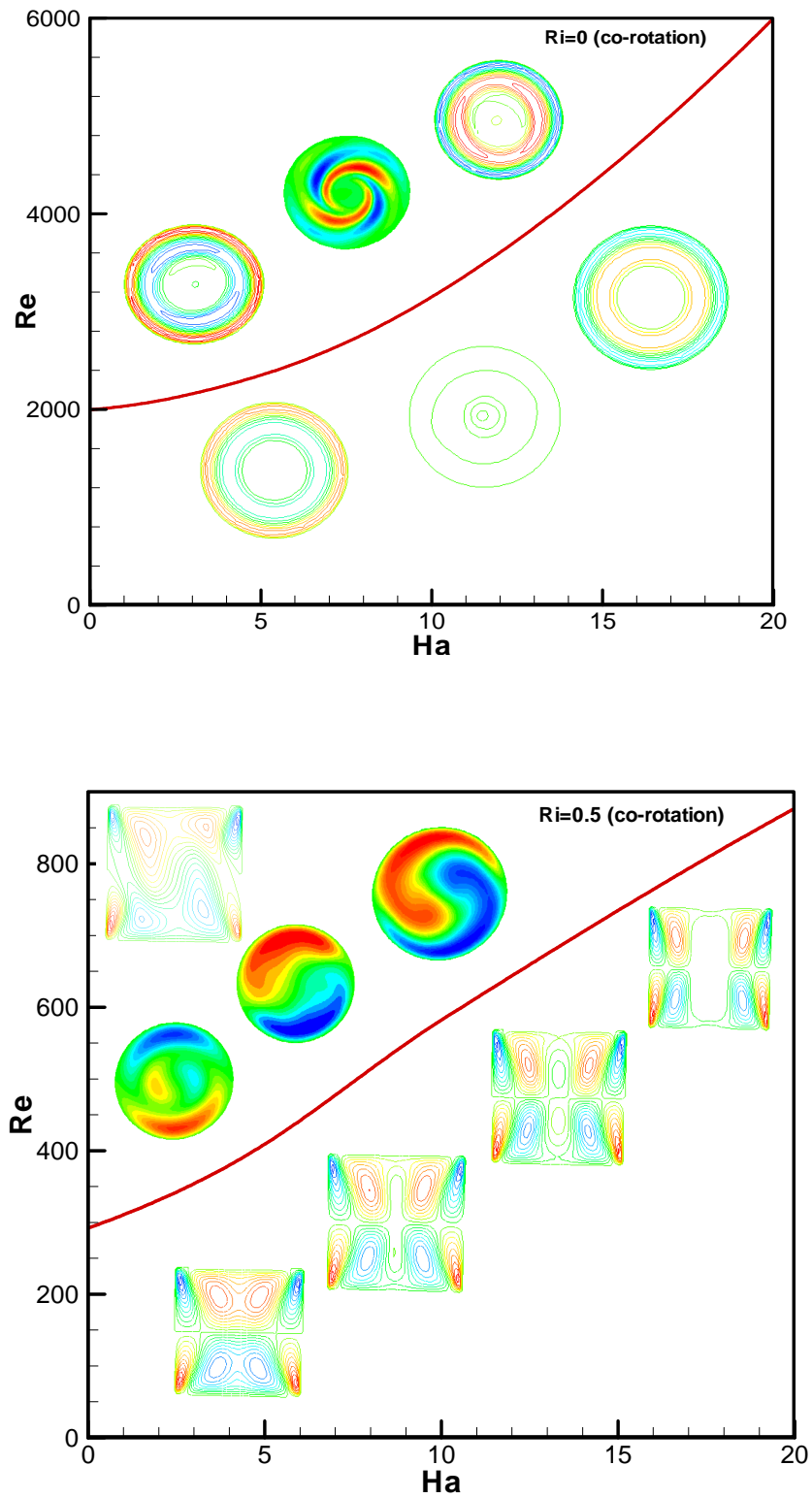


Figure IV-26 : Diagrammes de stabilité Re - Ha pour le cas $Ri=0$ (haut) et $Ri=0.5$ (bas)

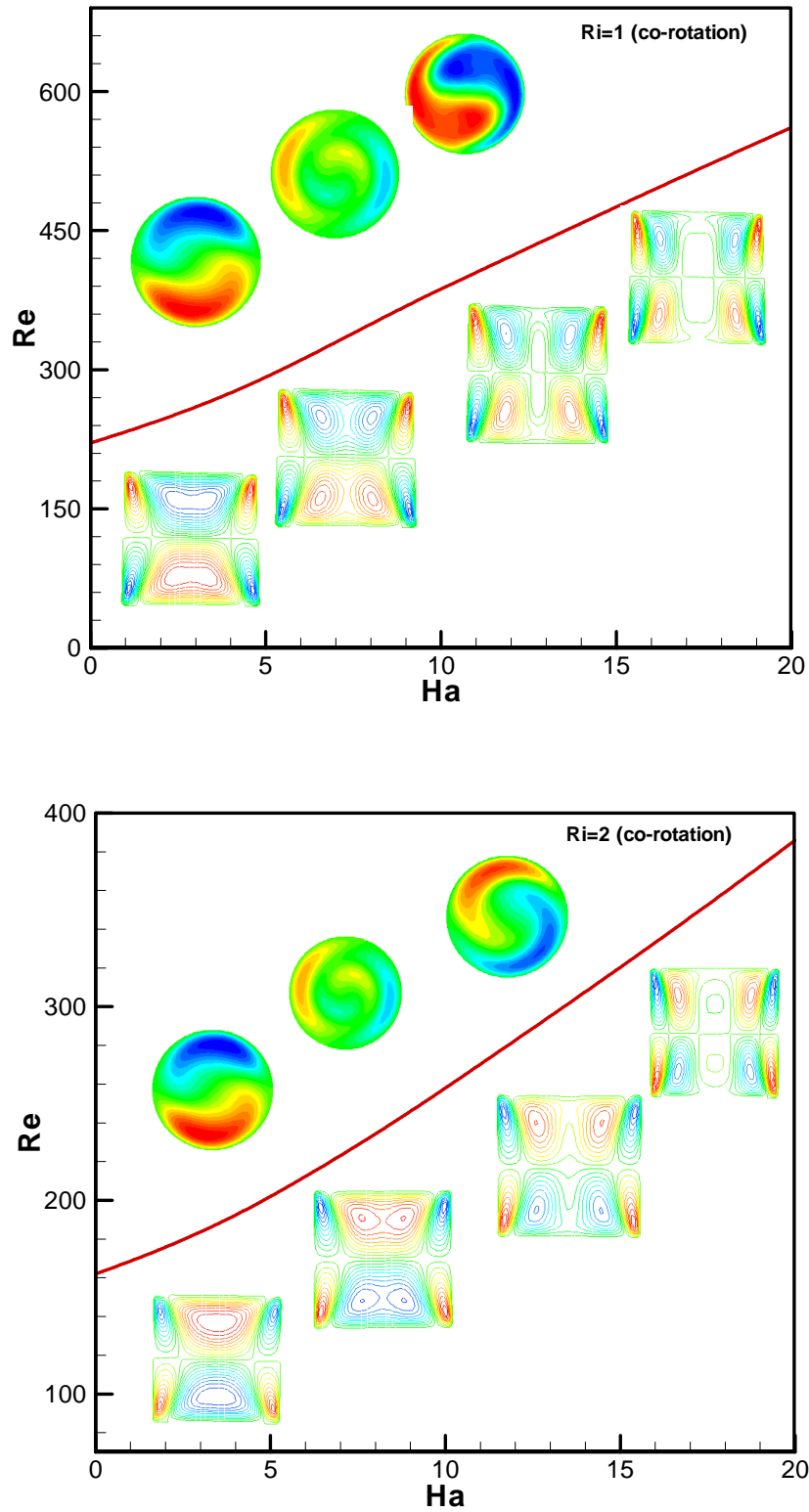


Figure IV-27 : Diagrammes de stabilité Re-Ri pour le cas Ri=1 (haut) et Ri=2(bas)

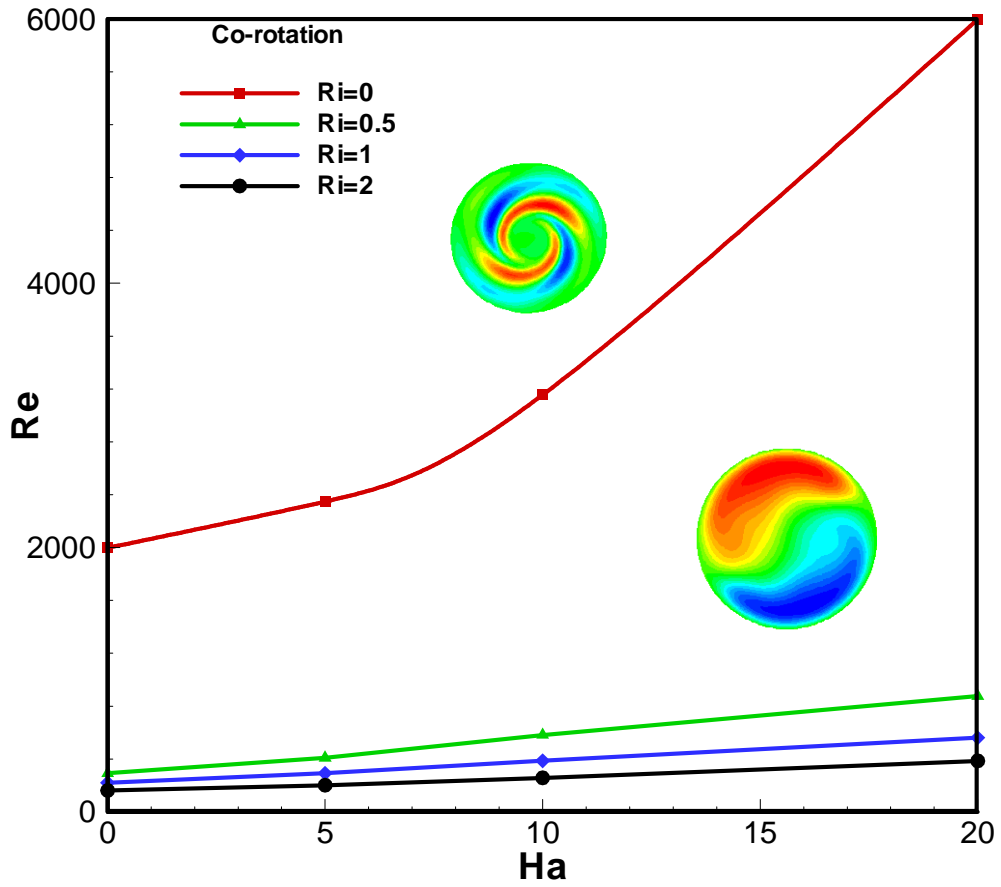


Figure IV-28 : Diagramme paramétrique de stabilité (Re_{cr} - Ha),

IV.5 Dynamique de la convection en Contre-rotation des disques d'extrémités

IV.5.1 Sans champ magnétique

Si l'écoulement en co-rotation est assez similaire à l'écoulement rotor-stator, l'écoulement en Contre-rotation présente de nouvelles structures. Dans le cas de convection forcée avec configuration de contre-rotation, l'écoulement présente une couche de cisaillement horizontale séparant deux cellules de recirculation associées à la rotation de chaque disque. Cette couche de cisaillement est de même nature que la couche décollée. Tout comme précédemment, cette couche de cisaillement est sujette à une instabilité de type Kelvin-Helmholtz, donnant lieu à des tourbillons radiaux co-rotatifs.

La nature des bifurcations susceptibles d'intervenir dans les écoulements en cavité axisymétrique dépend du détail des symétries des conditions aux limites. Tandis que l'écoulement de base hérite de toutes les symétries du forçage, les différentes bifurcations sont classiquement associées à des brisures successives de ces symétries, l'écoulement bifurqué ne possédant alors que des symétries issues d'un sous-groupe des symétries initiales.

En plus de la symétrie axiale (invariance par rotation S_θ d'angle θ quelconque), l'écoulement en contre-rotation présente une symétrie supplémentaire. En effet, cette géométrie est invariante par rotation d'un angle π autour de n'importe quel axe horizontal dans le plan médian, noté $R_\pi(\theta_0)$, où θ_0 est l'angle de l'axe par rapport à une direction de référence arbitraire (**Nore et al., 2005**). Le fait que les rotations S_θ et $R_\theta(\theta_0)$ ne commutent pas confère à cette configuration un groupe de symétrie plus général, noté $O(2)$ (Fig. IV-29). Ces symétries jouent un rôle fondamental dans la richesse du diagramme de bifurcation de cette configuration (Fig. IV-30), qui a été caractérisé en détail par **Nore et al.** (2003, 2004). Pour des nombres de Reynolds au-delà de la courbe de stabilité marginale, l'écoulement devient bien plus compliqué, avec notamment l'apparition de solutions instationnaires. Si l'on se concentre sur le cas particulier $H/R = 2$, dont le diagramme de bifurcation complet est représenté en figure (IV-30) le mode le plus instable est le mode $m = 1$, appelé "mode mixte" (M) présenté sur la figure (IV-31). A mesure que le nombre de Reynolds est augmenté, ce mode stationnaire cède la place à une onde propagative modulée, puis à des quasi-cycles hétéroclines, pour aboutir enfin à une nouvelle solution stationnaire $m = 2$, appelée "mode pur" (P). Les termes "mixte" et "pur" sont liés aux harmoniques excitées par les non-linéarités : le mode mixte combine des harmoniques paires et

impaires, tandis que le mode pur ne fait intervenir que des harmoniques paires. Ces solutions instationnaires sont issues de la compétition entre les modes stationnaires $m=1$ et $m=2$.

Pour le cas de convection forcée ($Ri=0$), l'état de base perd la stabilité aux modes non-axisymétrique $m=1$ et $m=2$ à nombre de Reynolds $Re_M = 349$ et $Re_P = 401$, respectivement

- **mode mixte" (M) :** La branche de mode mixte bifurque de l'état de base à $Re_M \approx 349$ et perd la stabilité à $Re=412$ et cesse d'exister à $Re_{MP} = 418.4$, on peut observer la symétrie de mode mixte (M) dans la figure (IV-31) qui montre la vitesse axiale v , à $z=-0.33$, $z=0$ et $z=0.33$. Les contours de v au plan $z=0$ est particulièrement utile dans la description des écoulements non-axisymétrique, puisque $v=0$ à ce plan pour l'état de base axisymétrique. On remarque que le mode mixte conserve la symétrie, R_π .

Physiquement, l'état de mode mixte M peut être comme résultat de la première instabilité correspond à une modulation azimuthale de la couche de cisaillement équatoriale qui donne naissance à un tourbillon radial stationnaire (fig. IV-31milieu). Chaque disque tournant donne lieu à une couche d'Ekman (Fig. IV-31bas). Le champ de vecteur (u, v) et le contours de w sont symétriques par rapport au mi-plan dans le plan méridien $\theta=0, \pi$; mais sont déformé à $\theta=\pi/2, 3\pi/2$ (Fig. IV-31milieu). Les isosurfaces de la vitesse axiale dans la figure (IV-32a) montre l'axisymétrie en dehors de la couche de cisaillement à $z=0$, les isosurfaces de la vitesse radiale montre que le vortex monopole à $r=0.75$ est centré autour du point elliptique près de $\theta=\pi, z=0$ et diamétralement opposé au point hyperbolique près de $\theta=0, z=0$ (Fig. IV-32b). Les isocontours de la vitesse radiale à $r=0.75$ présente la position du vortex monopole qui caractérise le mode mixte. Les contours de la vorticité et la vitesse radiale, u sont presque les mêmes ce qui prouve que le jet d'écoulement est maximum au centre du vortex (Fig. IV-32c)

La branche de mode mixte est détruite par l'intermédiaire d'une bifurcation de fourche, qui mène à la branche de mode pur à $Re_{MP} = 418$, en accord avec l'analyse de **Nore et al.** (2004), le mode mixte évolue de $m=1$ harmonique contenu à $Re_M=349$, à $m=2, 4\dots$ harmoniques à $Re_{MP} = 418$, justifié la nomenclature du mode mixte.

- **ondes tournantes**

Ces solutions deviennent instables à $Re_{TW} = 412$ et se transforment en ondes tournantes, droites ou gauches, on peut remarquer que la symétrie est brisé; car il n'existe pas un contour droite de valeur zéro au plan $z=0$ (Fig. IV-33). Ces ondes sont elles-mêmes instables à Re_{MWH} vis à vis d'ondes modulées représentées en figure (IV-34a) existes sur une très petite gamme de Reynolds $427.3 \leq Re \leq 427.4$. Le régime le plus exotique apparaît à Re_{Het} où le système oscille

entre deux modes $m = 2$ se déduisant l'un de l'autre par une rotation de $\pi/2$. **Nore et al**, (2004) ont observé deux types de pseudo-cycles hétéroclines : des cycles à deux plateaux et d'autres à quatre plateaux (Fig. IV-34b et c). Ces cycles sont détruits à Re_{MP} où la branche de solutions devient celle des modes $m = 2$ correspondant à deux tourbillons radiaux co-rotatifs (Fig. IV-34b).

- **mode pur (P).**

La branche mode pur est créée à une bifurcation de fourche-cercle à $m=2$ à $Re=401$, puisque la branche de base est instable à $m=1$ à ce nombre de Reynolds. La branche de mode pur est instable à la première apparition à $Re=401$. La branche de mode pur devient stable à $Re_{MP} = 452$ par l'intermédiaire d'une séquence de bifurcations, l'état stable de mode pur à $Re = 500$ est montré dans la figure (IV-35). Les états stable de mode purs à des nombres de Reynolds inférieurs ressemblent à ceux montrés sur la figure (IV-35), l'état présente une symétrie de réflexion et invariante par rotation R_π , comme illustré dans la figure (IV-35milieu).

La structure comprend des tourbillons de la couche de cisaillement équatoriale, sous forme de deux vortex co-rotatif (Fig IV-35). Par conséquent, le long du cercle équatorial il ya deux point elliptiques autour des quelles le fluide tourne, séparé par deux points hyperboliques. Ces vortex sont confinés près de la paroi latérale et sont manifestés dans le volume comme caractère onduleux dans la couche de cisaillement. La force centripète s'est associé aux zones de recyclage, le champ de vecteur (u, v) et les contours de w sont déformés par rapport au mi-plan dans le plan méridien $\theta=0, \pi$ et $\theta=\pi/2, 3\pi/2$ (Fig IV-35milieu). Les isosurfaces de la vitesse axiale dans la figure (IV-36a) montrent le mode $m=2$, les isosurfaces de la vitesse radiale montrent deux vortex à $r=0.75$ sont centrés autour du point elliptique près de $\theta=\pi, z=0$ et diamétralement opposés au point hyperbolique près de $\theta=0, z=0$ (Fig. IV-36b). Les isocontours de la vitesse radiale à $r=0.75$ présentent la position du paire vortex qui caractérise le mode pur avec mode azimutale $m=2$, ainsi que le jet d'écoulement et maximum au centre de vortex (Fig. IV-36c). Chaque mode propre qui brise l'axisymétrie, comme il est mentionné par **Nore et al**. (2004), il possède un axe horizontal de symétrie dont on peut choisir l'orientation tel que le mode soit symétrique suivant R_π . Mais dans le cas de convection mixte cet axe est remplacé par des courbures. On conclusion pour le cas de contre-rotation et sans effet de température le diagramme de bifurcation en fonction de Re présenté dans la figure (IV-37), donne les différentes structures de la vitesse axiale au différents plans $z=-0.5, 0$ et 0.5 , trouvées chaque fois en augmentant le nombre de Reynolds.

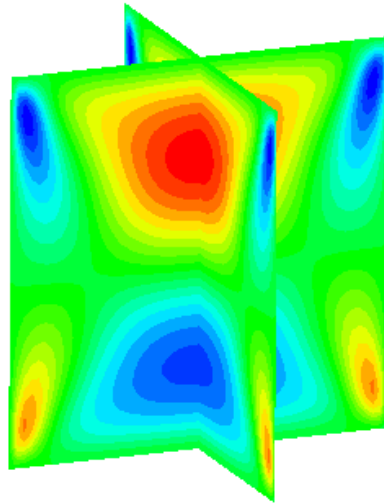


Figure IV-29 : L'état de réflexion symétrique pour $Re=300$, $Ri=0$ (contre-rotation)

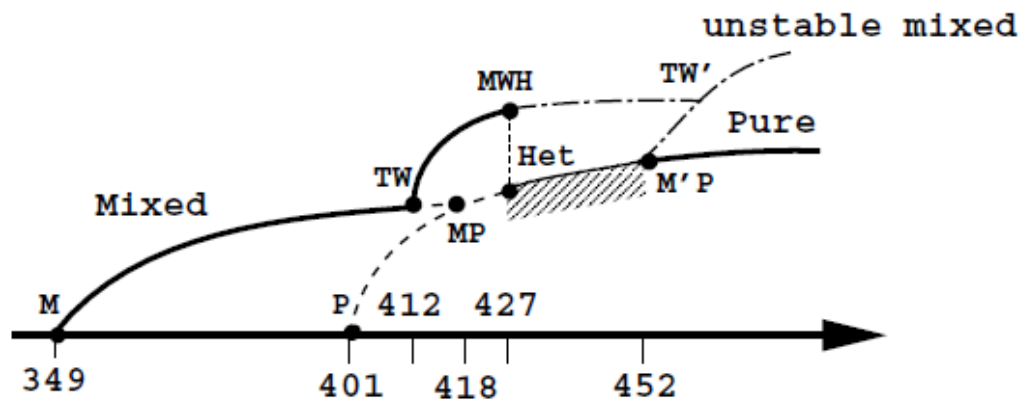


Figure IV-30 : Diagramme de bifurcation théorique en fonction de Re . Les solutions stables sont indiquées en trait continu, les instables en tiré et les pseudo-cycles hétéroclines en zone hachurée. Les lignes en point-tiré sont les branches non calculées. Les seuils sont indiqués par des points: $Re_M=349$, $Re_P=401$, $Re_{TW}\approx 412$, $Re_{MP}\approx 418$, $Re_{MWH}=427.3$, $Re_{Het}=427.4$, $Re_{M'P}\approx 452$. D'après Nore et al. (2004)

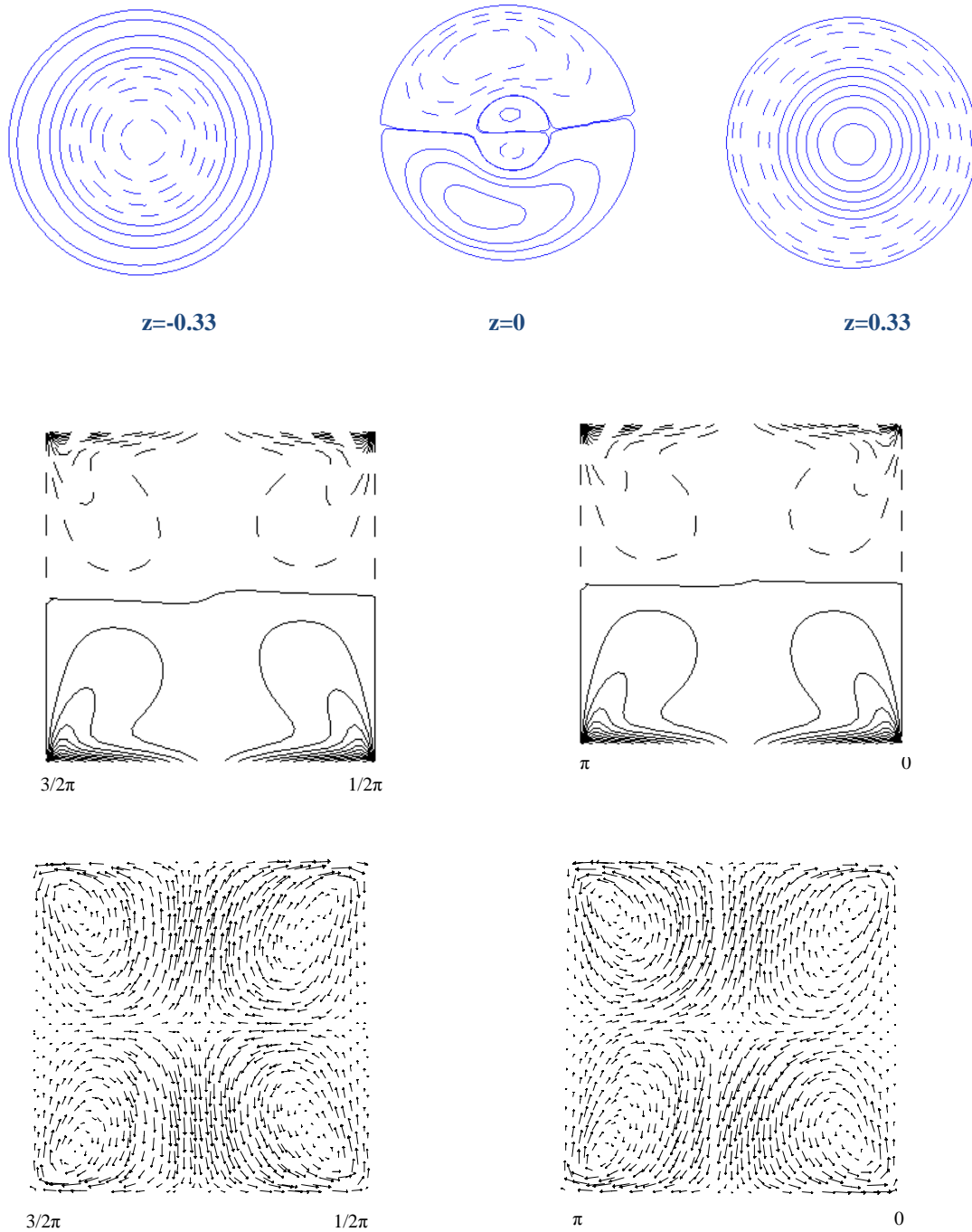


Figure IV-31 : Le mode mixte (M) à $Re=380$, $Ri=0$, la vue de dessus des isocontours de la vitesse axiale à $z=-0.33, 0, +0.33$ (haut), contours de la vitesse azimutale (milieu) et vecteurs du champ méridien (bas)

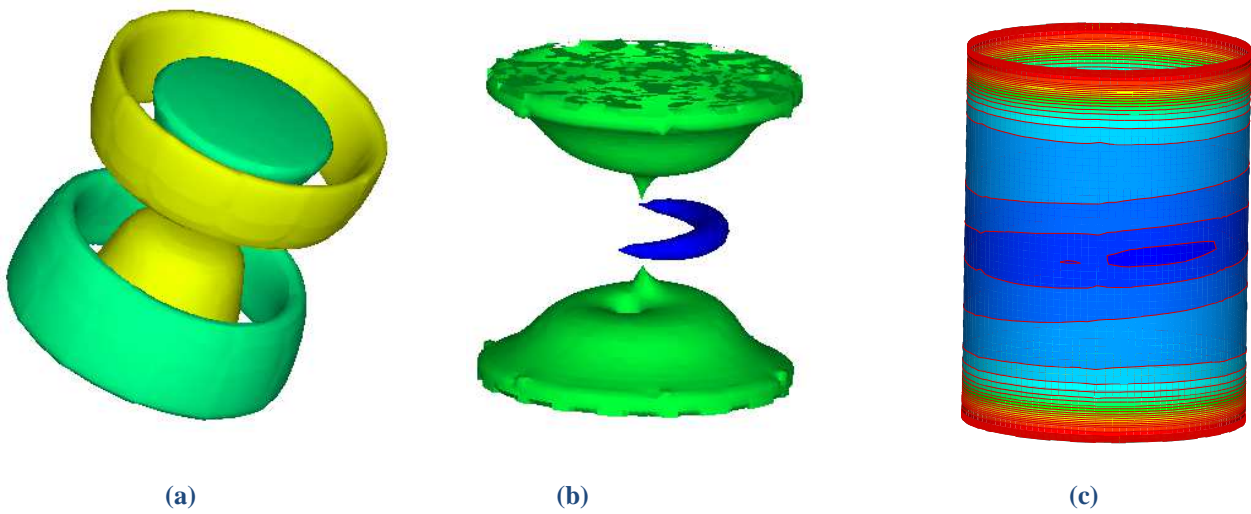


Figure IV-32 : Mode Mixte (M) à $Re=380$, $Ri=0$ (a) Isosurfaces de la vitesse axiale (b) les isosurfaces de la vitesse radiale montrant le vortex monopole (tourbillon radiale) à $r=0.75$ centré autour du point elliptique près de $\theta=\pi$, $z=0$ et diamétralement opposé au point hyperbolique près de $\theta=0$, $z=0$ (c) isocontours de la vitesse radiale à $r=0.75$ présente la position du vortex monopole qui caractérise le mode mixte.

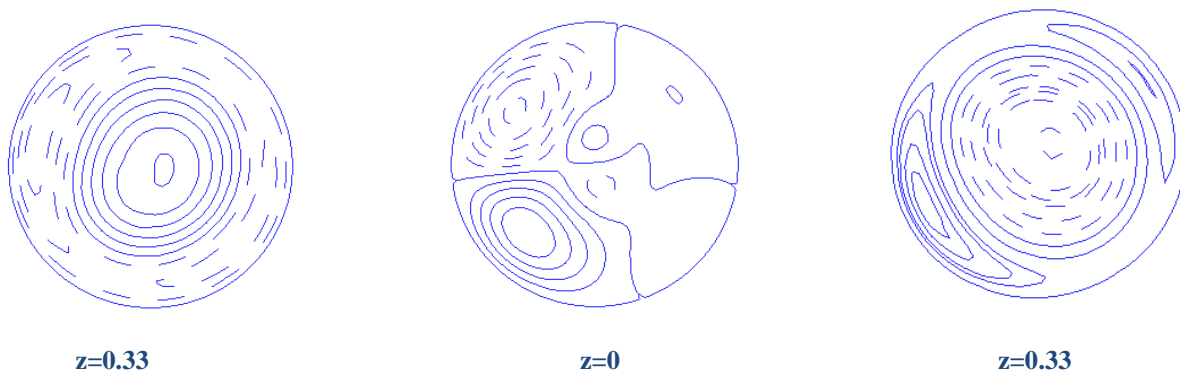


Figure IV-33 : Contours de la vitesse axiale à $z=-0.33$, $z=0$, $z=0.33$ présente les ondes tournante (TW) à $Re=415$, $Ri=0$, la symétrie est prisé car le contour droite avec $v=0$ n'existe pas à $z=0$

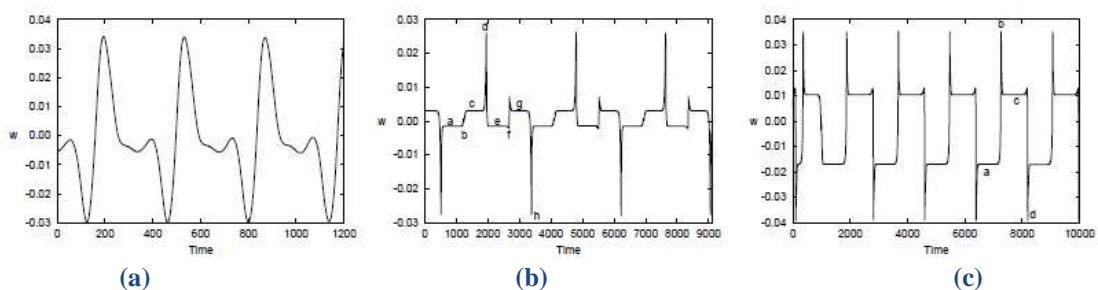


Figure IV-34 : Evolution temporelle d'un signal numérique de vitesse verticale pour (a) les ondes tournantes modulées à $Re = 427.35$ (b) les pseudo-cycles hétéroclines à 4 plateaux à $Re = 430$ (c) les pseudo-cycles à 2 plateaux à $Re = 435$. D'après Nore et al. (2003)

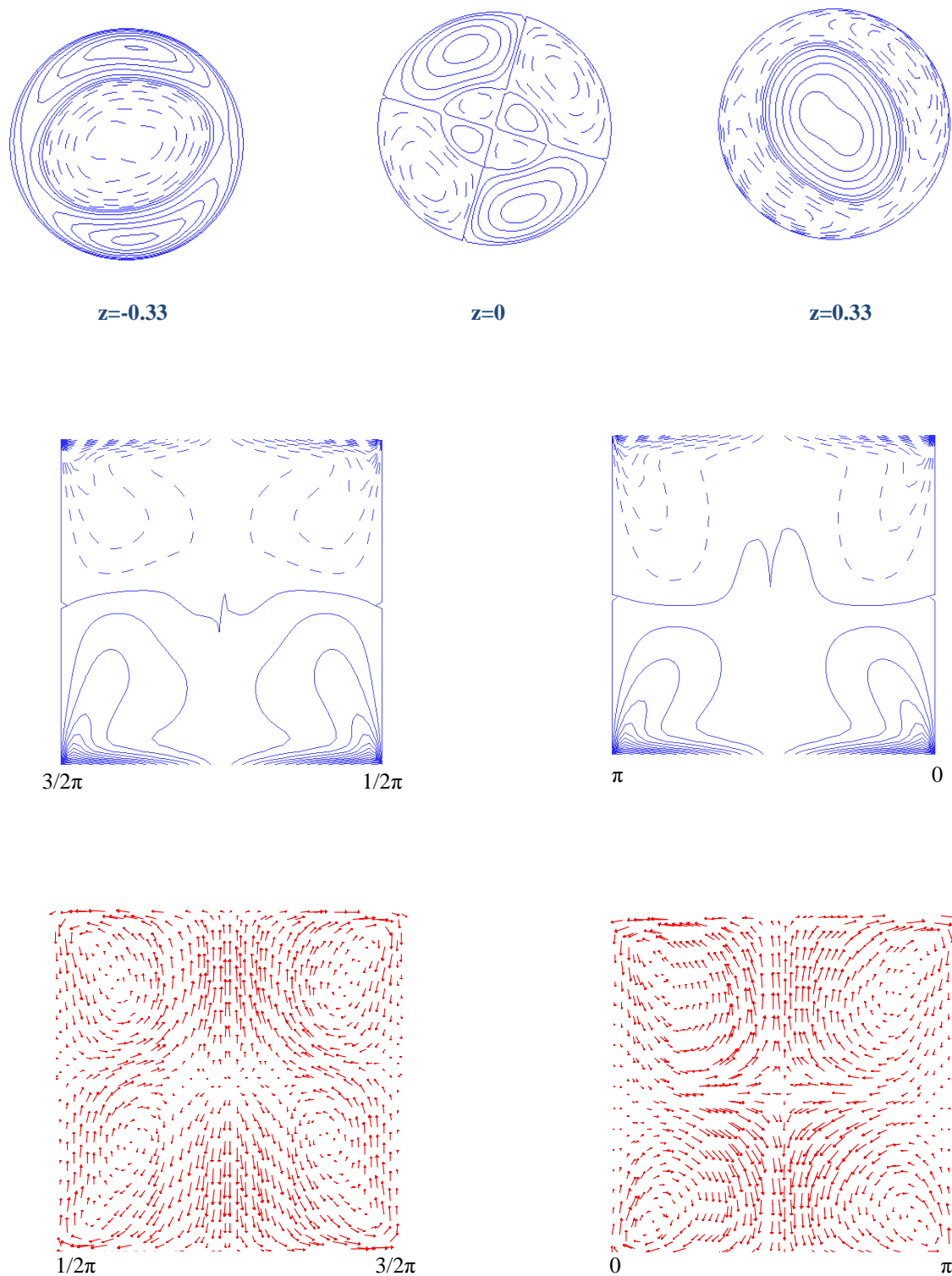


Figure IV-35 : Le mode Pur (P) à $Re=500$, $Ri=0$, la vue de dessus des isocontours de la vitesse axiale à $z=-0.33$, 0 , $+0.33$ (haut), contours de la vitesse azimutale (milieu) et vecteurs du champ méridien (bas)

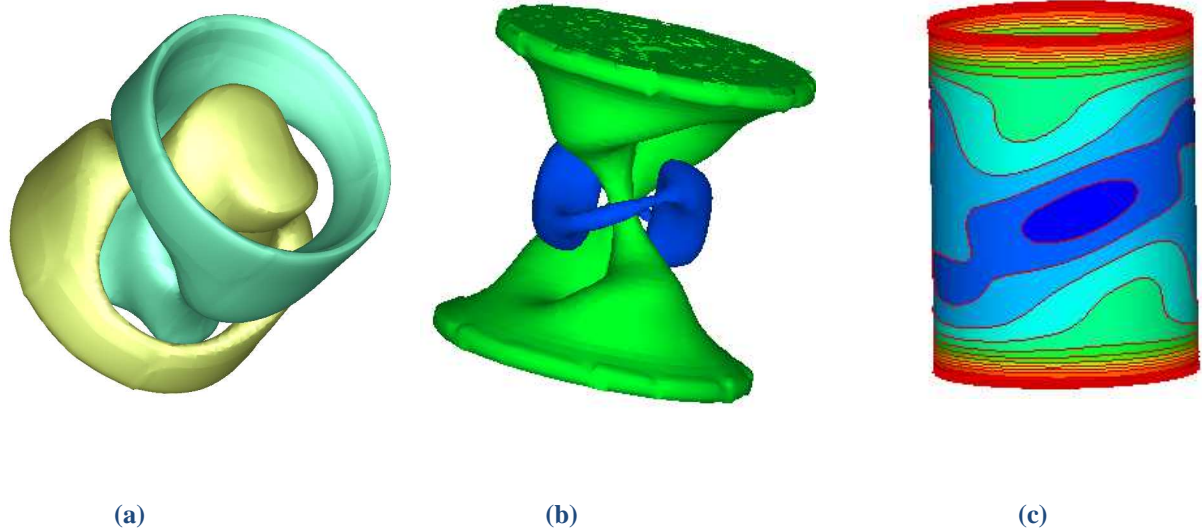


Figure IV-36 : Mode Pur (P) à $Re=500$, $Ri=0$ avec $m=2$ (a) Isosurfaces de la vitesse axiale (b) les isosurfaces de la vitesse radiale montrant une paire de tourbillons co-rotatifs (une paire vortex) à $r=0.75$ centré autour du point elliptique près de $\theta=\pi$, $z=0$ et diamétralement opposé au point hyperbolique près de $\theta=0$, $z=0$ (c) isocontours de la vitesse radiale à $r=0.75$ présente la position du paire vortex qui caractérise le mode pur

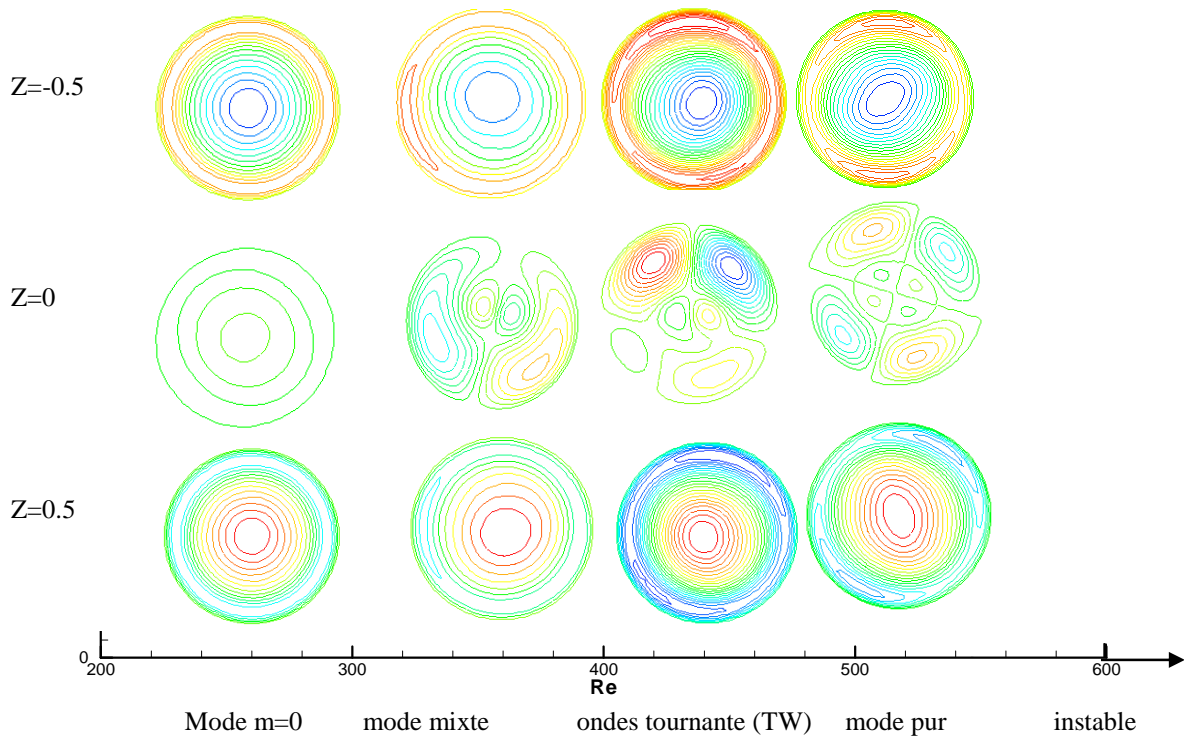


Figure IV-37: Diagramme de bifurcation en fonction de Re , présente les différentes modes à $z=-0.5$, (haut) $z=0$ (milieu) et $z=0.5$ (bas)

- **L'effet de gradient de la température sur l'écoulement en contre-rotation**

Un gradient de température provoque une structure différente à celle de l'écoulement de base si on augmente le nombre de Richardson ($Ri=0.5$) l'écoulement change de structure, et la couche de cisaillement horizontale séparant deux cellules de recirculation associées à la rotation de chaque disque. Cette couche de cisaillement à mi-plan $z=0$, est la première qui supportera le changement de structure.

L'écoulement subit une première bifurcation stationnaire à $Re=275$, $Ri=0.5$. Les résultats de la figure (IV-38a) représentant v dans différents plans ($z=-0.5, 0, +0.5$) pour le cas de $Re=280$, $Ri=0.5$, près de la bifurcation, il montre que l'état de l'écoulement conserve la symétrie. En effet, à l'équateur du cylindre $z=0$, les contours négatifs pour $0<\theta<\pi$ correspondent aux contours positifs pour $\pi<\theta<2\pi$. Le contour $v=0$ dans ce plan est une droite. L'action de symétrie reliant les isocontours de $z=-0.5$ et $z=0.5$. La bifurcation brisant la symétrie est nécessairement une bifurcation de fourche, car l'état de l'écoulement est stationnaire. Les contours de w sont déformés par rapport au mi-plan dans le plan méridien $\theta=0, \pi$ et $\theta=\pi/2, 3\pi/2$ (Fig. IV-38b). La figure (IV-38c et d) expose les isocontours de la vitesse axiale, v et radiale, u où la bifurcation brise la symétrie de la réflexion en z . Chaque disque tournant donne lieu à une couche d'Ekman, le champ de vecteur (u, v) montré au figure (IV-38e) perd la symétrie par rapport au mi-plan dans le plan méridien $\theta=0, \pi$, les vecteurs remontent le long de la paroi avant d'être redirigées vers le centre à une autre hauteur, ces mouvements créent des zones de recirculation. Les isosurfaces de la vitesse axiale dans la figure (IV-39a) montre le mode $m=1$, pour le même cas ($Re=280$, $Ri=0.5$), on remarque que la structure de la vitesse radiale comprend des tourbillons de la couche de cisaillement équatoriale à $r=0.75$ avec une forme hélicoïdale (Fig. IV-39b et c). Sur la figure (IV-39d), nous présentons le champ de vecteurs vitesses (v, w) à $r=0.7$, qui traduit le cisaillement à $z=0$.

La figure (IV-40a), présente Nusselt locale au disque inférieur chaud pour le cas de $Re=280$, $Ri=0.5$. On peut constater aisément que le transfert thermique est intense sous disque tournant chaud à $r=0$, provoqué par la recirculation méridienne et les valeurs du nombre Nusselt dans ce cas diminué près de la paroi latérale. On voit sur la figure (IV-40b) que la température varie linéairement dans la direction verticale, à $Re=280$, $Ri=0$ la solution est de type conductif.

En augmentant le nombre de Reynolds jusqu'à $Re=450$ pour le même nombre Richardson c.à.d. $Ri=0.5$, la structure continue le changement avec toujours le mode $m=1$ à l'équateur du cylindre $z=0$, les contours négatifs pour $0<\theta<\pi$ correspondent aux contours positifs pour $\pi<\theta<2\pi$.

Le contour $v=0$ dans ce plan est une droite. L'action de symétrie reliant les isocontours de $z=-0.5$ et $z=0.5$ (Fig. IV-41haut). Les contours de v sont déformés par rapport à l'axe z dans le plan méridien $\theta=0, \pi$ (Fig. IV-41bas). On observe que les vecteurs vitesses du champ méridien (u, v) présentent au milieu un tourbillon géant, les vecteurs vitesse tournent autour d'elles-mêmes.

La figure (IV-42) expose le mode $m=1$ à $Re=450, Ri=0.5$ et un tourbillon (vortex) à $r=0.70$ et le champ de vecteurs vitesses (v, w) à $r=0.70$, respectivement. A la valeur critique du nombre de Reynolds estimée à $Re \approx 592$, l'écoulement subit une deuxième bifurcation oscillatoire périodique.

L'effet du gradient de température est observé à l'aide de la figure (IV-43), où nous présentons la vue de dessus des isocontours de la vitesse axiale au milieu du cylindre, $z=0$, les isosurfaces de la vitesse radiale montrant un tourbillon (vortex) à $r=0.70$, le champ de vecteurs vitesses (v, w) à $r=0.70$ et le champ de température, pour $Re=231$ et $Ri=1$, $Re=250$ et $Ri=1$, $Re=200$ et $Ri=2$ respectivement. Le tourbillon est une fonction de nombre de Reynolds et le champ de température est une fonction de nombre de Richardson et Reynolds. La solution est de type conductif lorsque $Re=231$ et $Ri=1$, mais pour $Re=250$ et $Ri=1$, la solution est de type convectif. En augmentant le nombre de Richardson ($Ri=2$) et en diminuant le nombre de Reynolds ($Re=200$), la solution redevient de type convectif.

On remarque à l'équateur du cylindre $z=0$, le contour $v=0$ dans ce plan est une droite. Cette droite change la direction chaque fois que nous varions Re et Ri .

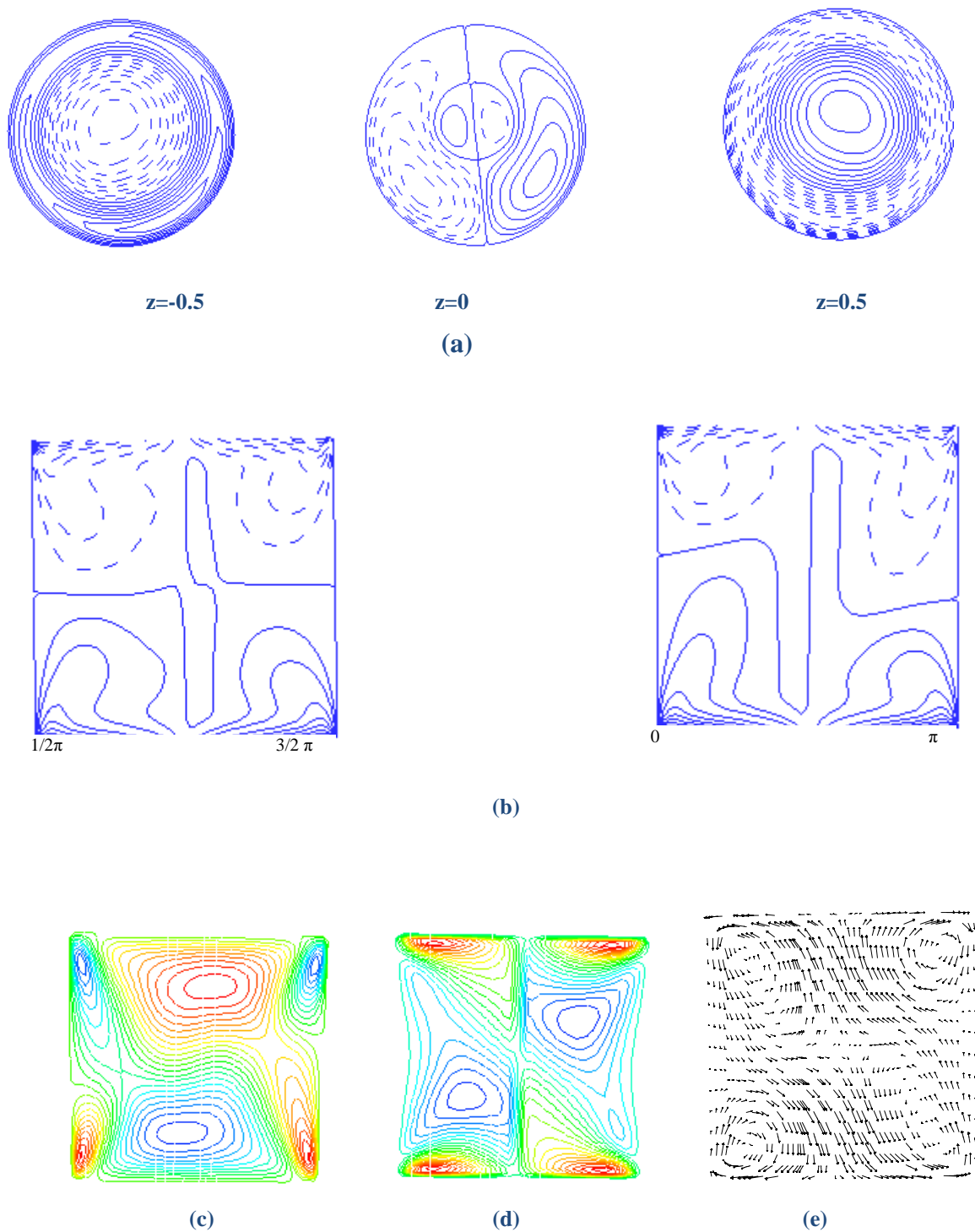


Figure IV-38 : Le mode mixte (M) à $Re=280$, $Ri=0.5$, (a) la vue de dessus des isocontours de la vitesse axiale à $z=-0.5, 0, +0.5$ (b) contours de la vitesse azimutale (c) isocontours de la vitesse axiale, v (d) isocontours de la vitesse radiale, u et (e) vecteurs vitesses du champ méridien (u, v)

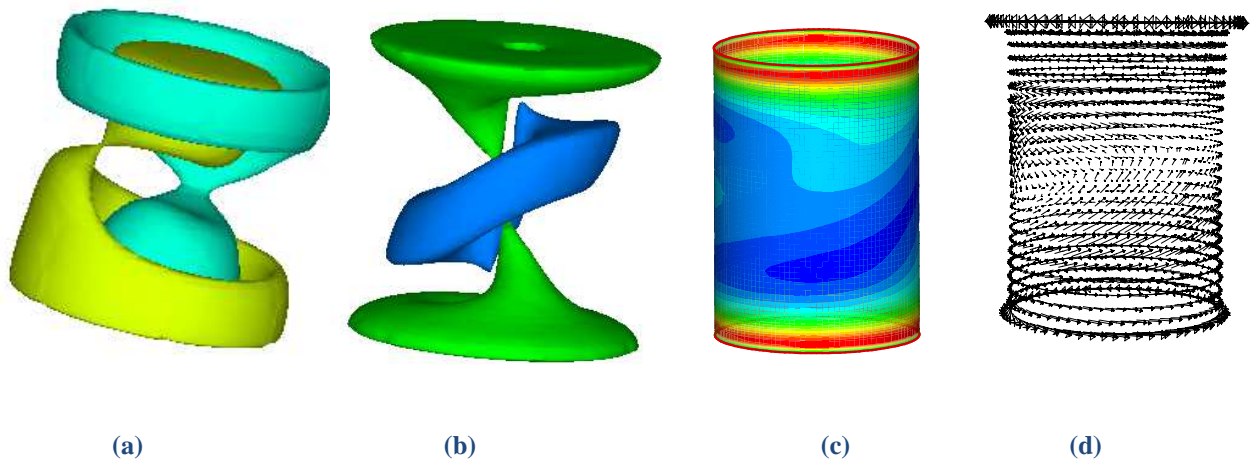


Figure IV-39 : Mode mixte (M) à $Re=280$, $Ri=0.5$ avec $m=1$ (a) Isosurfaces de la vitesse axiale (b) les isosurfaces de la vitesse radiale montrant un tourbillon (vortex) à $r=0.70$ de forme hélicoïdale (c) isocontours de la vitesse radiale à $r=0.75$ présente la position de vortex (d) champ de vecteurs vitesses (v, w) à $r=0.7$

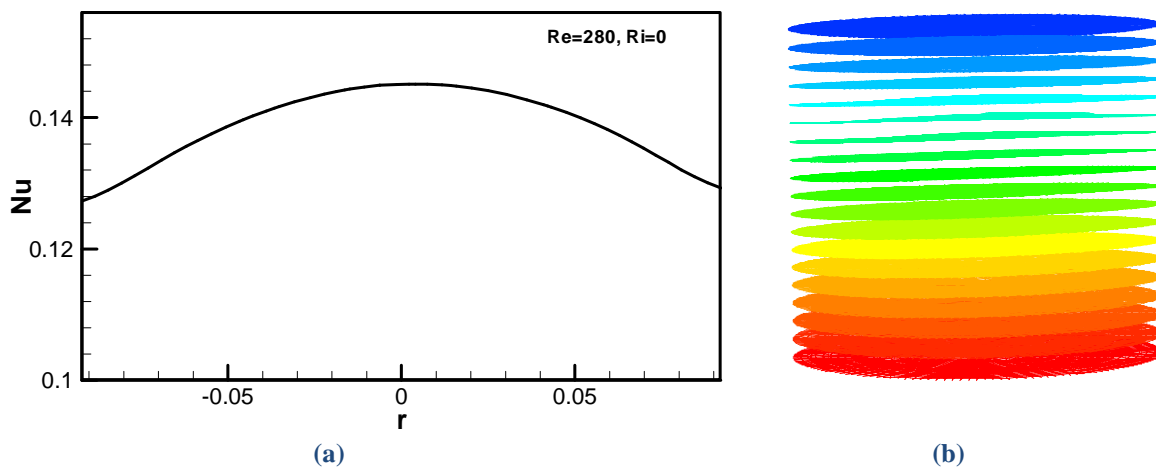


Figure IV-40 : Les nombres de Nusselt locaux au disque inférieur chaud du cylindre avec (a) $Re=280$ $Ri=0.5$ (b) champ conductif de température à $Re=280$, $Ri=0.5$

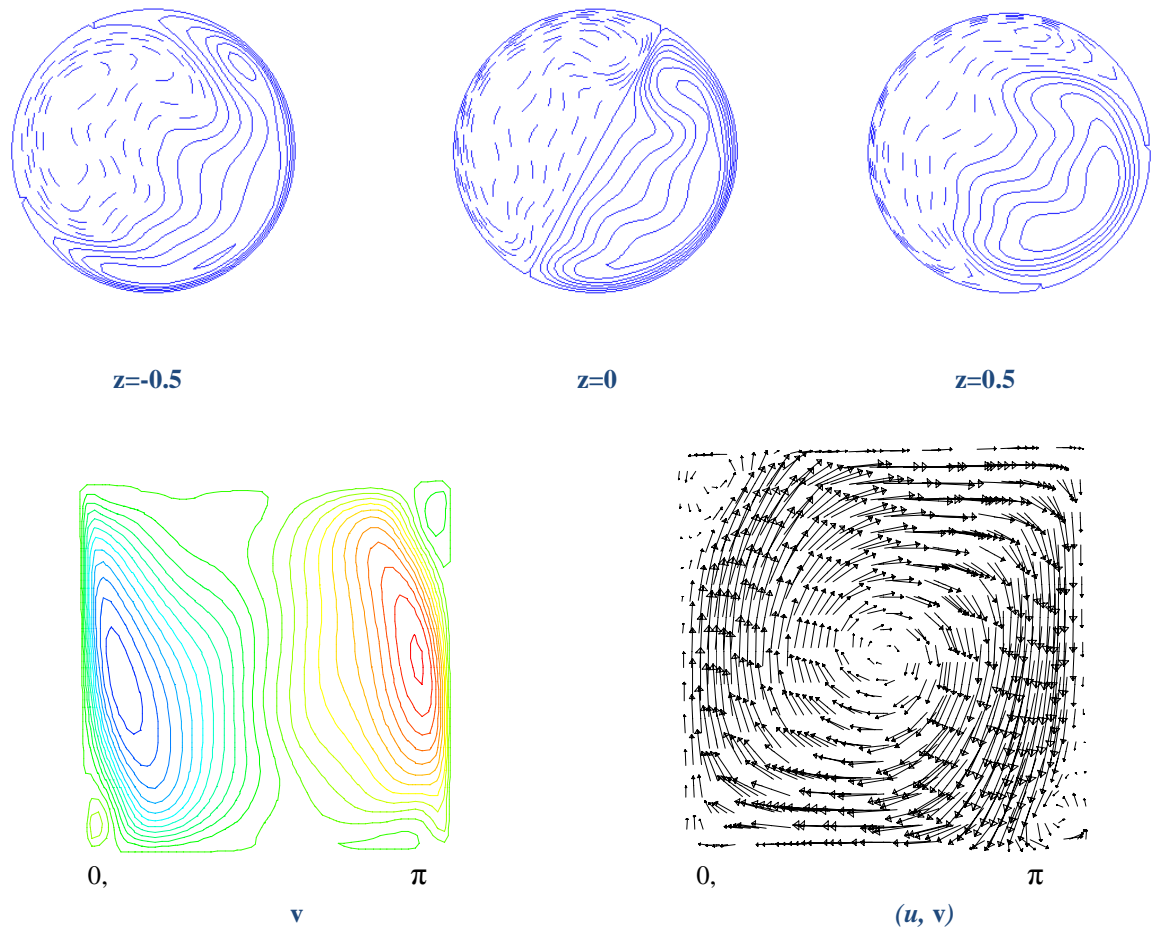


Figure IV-41 : Le mode $m=1$ à $Re=450$, $Ri=0.5$, la vue de dessus des isocontours de la vitesse axiale à $z=-0.5$, 0 , $+0.5$ (haut), contours de la vitesse axiale et vecteurs vitesses du champ méridien (u, v) (bas)

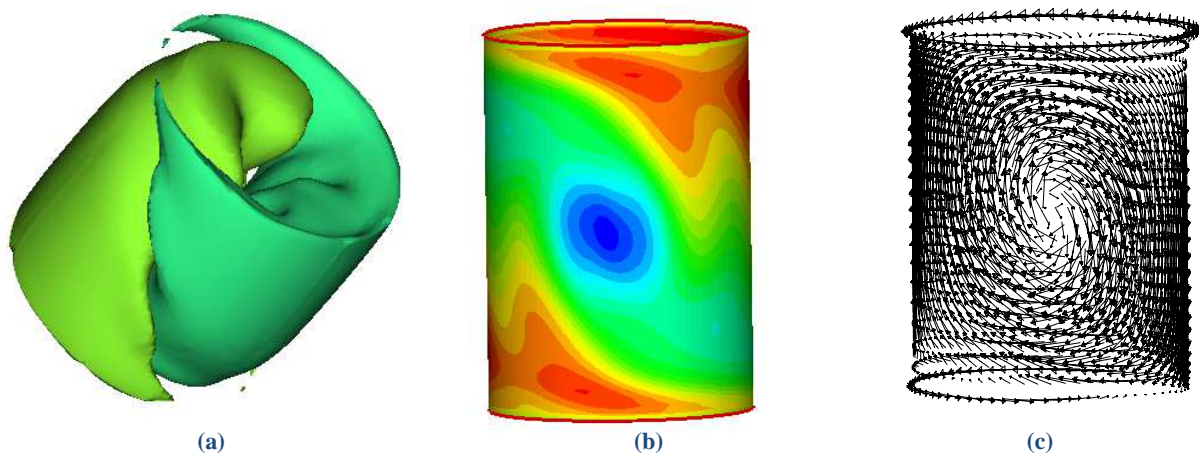


Figure IV-42 : Mode $m=1$ à $Re=450$, $Ri=0.5$ (a) Isosurfaces de la vitesse axiale (b) isocontours de la vitesse radiale montrant un tourbillon (vortex) à $r=0.70$ (c) champ de vecteurs vitesses (v, w) à $r=0.70$.

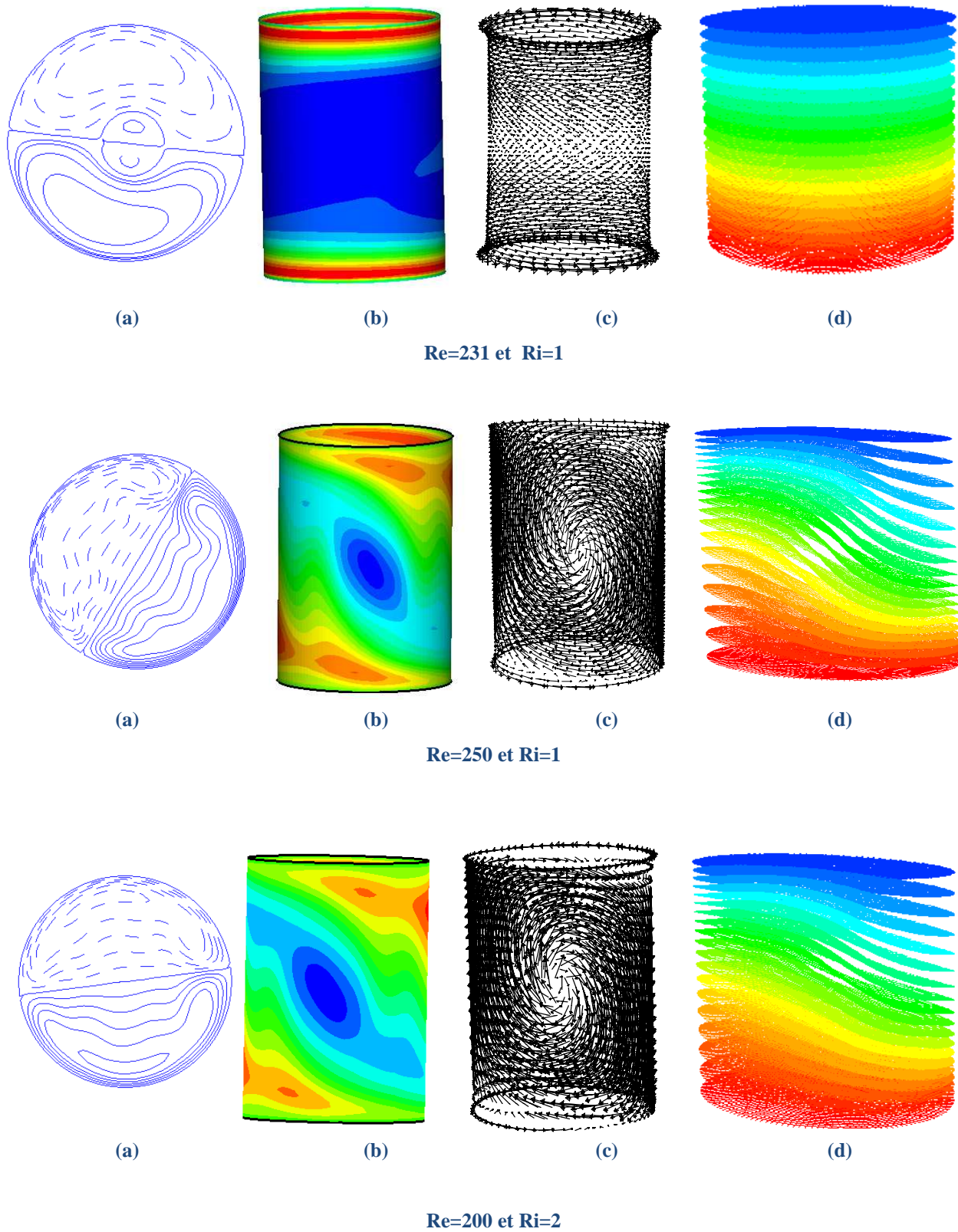


Figure IV-43 : (a) la vue de dessus des isocontours de la vitesse axiale au milieu du cylindre, $z=0$ (b) les isosurfaces de la vitesse radiale montrant un tourbillon (vortex) à $r=0.70$ (c) champ de vecteurs vitesses (v, w) à $r=0.70$ (d) champ de température.

• Diagrammes de stabilité

Le diagramme de stabilité donne le seuil de transition de l'état de base aux modes non-axisymétriques $m = 1$. Les résultats quantitatifs présentés dans le tableau (IV-4), sont visualisées graphiquement dans le plan (Re-Ri) sous forme de courbe aux différentes valeurs du nombre de Richardson $Ri=0,0.5,1$ et 2 (Fig. IV-44), en absence du champ magnétique $Ha=0$. Cette figure montre que pour des valeurs du nombre de Reynolds Re et de Richardson Ri , situées sous la courbe l'écoulement reste laminaire stable axisymétrique et au dessus de la courbe sont représentées les iso-lignes de la vitesse verticale dans le plan horizontal central ($z=0$), en bas ($z=-0.5$) et haut ($z=0.5$) de la géométrie cylindrique, les modes propres ($m=1$) évalués au voisinage des points de bifurcation primaire.

Ri	0	0.5	1	2
Ha=0	349	275	220	164

Tableau IV-4: Reynolds critiques trouvés en contre-rotation pour $Ha=0$ et différentes valeurs de Ri (=0, 0.5, 1 et 2)

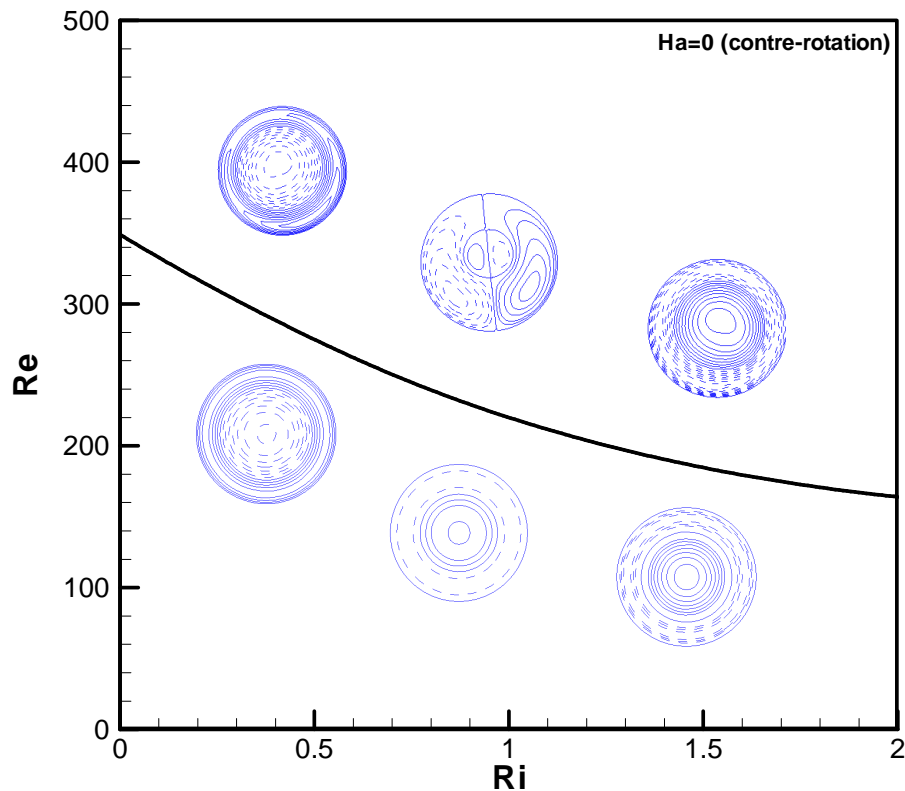


Figure IV-44 : Diagramme de stabilité Re-Ri pour le cas $Ha=0$ (contre-rotation)

IV.5.2 Avec champ magnétique

Au delà d'une valeur critique du nombre de Reynolds l'écoulement devient périodique. Si on applique un champ magnétique l'écoulement se stabilise et redevient stationnaire et retrouve la symétrie de réflexion comme déjà mentionné dans le cas de co-rotation. Quand un champ magnétique (axial) vertical est imposé, on observe quelques changements intéressants sur le mouvement du fluide et sur le transfert thermique, l'écoulement se stabilise sous l'effet du champ magnétique, et le seuil de transition décale au Reynolds plus élevé par rapport à l'état sans champ magnétique

Pour le cas de convection forcée ($Ri=0$), l'état de base perd la stabilité aux modes non-axisymétrique $m = 2$ au nombre de Reynolds $Re=506$; $Ha=5$ et $Re=910$; $Ha=10$ respectivement (Fig. IV-45). Ainsi que l'état de base perd la stabilité aux modes non-axisymétriques $m = 3$ au nombre de Reynolds $Re = 2150$ et $Ha=20$. L'état de mode $m=1$ peut être comme résultat de la première instabilité correspond à $Ri>0$ en augmentant le nombre de Hartmann, $Ha=5,10$ et 20 .

La branche de mode mixte pour le cas de $Re=506$, $Ri=0$ et $Ha=5$ cesse d'exister, on remarque que l'état de base bifurque directement au mode $m=2$, on peut observer la symétrie de mode $m=2$ (Mode pur), dans la figure (IV-45a) qui montre les isosurfaces de la vitesse axiale et la vue de dessus des contours de la vitesse axiale v , à $z=-0.5$, $z=0$ et $z=0.5$. Les états stables de mode pur à des nombres de Reynolds inférieurs ressemblent à ceux montré à la figure (IV-45), l'état présente une symétrie de réflexion et invariante par rotation R_π .

La structure comprend des tourbillons de la couche de cisaillement équatoriale. Sous forme de deux vortex co-rotatif à $r=0.75$ (IV.45-b). Par conséquent, le long du cercle équatorial il ya deux point elliptique autour le quelle fluide tourne, séparé par deux points hyperbolique. Ces vortex sont confinés près de la paroi latérale et sont manifestés dans le volume comme caractère onduleux dans la couche de cisaillement. La force centripète s'est associée aux zones de recyclage, le champ de vecteur vitesse méridien (u, v) est décalé vers le coté droit dans le plan méridien $\theta=0, \pi$ (Fig. IV-45c). Le champ de vecteurs vitesse (v, w) à $r=0.70$ comprend des tourbillons de la couche de cisaillement équatoriale, illustrées dans la figure (IV-45d), nous présentons aussi la structure spatiale du potentiel électrique sous l'effet de la rotation suivi par un champ magnétique axial et la figure (IV-45e) montre le cas de $Ha=5$. Le potentiel électrique sous l'effet de contre-rotation des deux disques d'extrémités étant à symétrie de révolution reliée à la composante azimutale de la vitesse, d'une coté B_0 étant purement axiale, on observe des branches en cascade à la région de potentiel positif à coté du disque inferieur (selon l'orientation de B_0 de bas vers le haut) et des branches en cascade à la région des valeurs

négatives (Bleus) à coté du disque supérieur, la zone au milieu du cylindre présente une petite déformation. L'interaction du courant électrique avec le champ magnétique appliqué ainsi que l'isolation électrique des parois sont expliquées par la conservation du courant qui est garantie par la fermeture des lignes des courants électriques (**Benhadid et Henry,1997**).

La figure (IV-45f et g) expose les vecteurs de courant méridien J_r et J_z et le champ vectoriel de courants électriques ($J_z - J_\theta$) à $r=0.7$, respectivement, où on peut remarquer que les vecteurs de courant électriques se concentrent aux voisinages des disques tournants (la couche d'Ekman) et crée deux zones de recirculation c.à.d, deux tourbillons juxtaposés presque au milieu du cylindre. Puisque le fluide est entouré d'un milieu totalement isolant et les lignes de courant électrique doivent nécessairement se refermer au sein du fluide. Les couches de Hartmann situées sous les disques tournants, dans lesquelles se referment les lignes de courants électriques et où l'équilibre azimutal est assuré par un équilibre entre les forces visqueuses et les forces électromagnétiques (**Bessaih, 2000**).

Un autre cas dont nous avons représenté les différentes structures est celui pour le mode $m=2$ à $Re=955$, $Ri=0$ et $Ha=10$ représentées sur la figure (IV-46). Les isosurfaces de la vitesse axiale présentent bien cette fois la situation du mode azimutale $m=2$ et l'état présente une symétrie de réflexion et invariante par rotation R_π , (Fig. IV-46a). Deux vortex co-rotatifs à $r=0.75$ sont montré sur la Figure (IV-46b), le champ de vecteur vitesse méridien (u, v) est décalé cette fois vers la gauche dans le plan méridien $\theta=0, \pi$ (Fig. IV-46c). Le champ de vecteurs vitesse (v, w) à $r=0.70$ comprend des tourbillons de la couche de cisaillement équatoriale, illustrées dans la figure (IV-46d).

La structure spatiale du potentiel électrique sous l'effet de la contre-rotation suivi par un champ magnétique axial présenté sur la figure (IV-46e) montre le cas de $Ha=10$, on observe des branches en cascade à la région du potentiel positif (rouge) et à la région de potentiel négatives (bleus) avec une déformation des branches en cascade en s'approchant au milieu de cylindre. Cette déformation peut être à cause de l'intensité du champ magnétique qui augmente ($Ha=10$).

Deux tourbillons juxtaposés presque au milieu du cylindre, qui sont montrés sur la figure (IV-46f et g), où nous présentons les vecteurs de courant méridien J_r et J_z , et le champ vectoriel des courants électriques ($J_z - J_\theta$) à $r=0.7$, respectivement. Dans le plan méridien on observe deux zones de recirculation c.à.d, deux tourbillons juxtaposés presque au milieu du cylindre.

Le troisième cas concernant le mode $m=3$ à $Re=2300$, $Ri=0$ et $Ha=20$, en augmentant l'intensité du champ magnétique à 20, la branche de solutions devient celle des modes $m = 3$

correspondant à trois tourbillons radiaux co-rotatifs (Fig. IV-47a). Lorsqu'on augmente le nombre de Reynolds au-dessus du seuil, la région de forte vorticité subit une modulation azimutale, conduisant à une forme polygonale, aux coins de la quelle apparaissent des tourbillons de vorticité de signes opposées. Ces champs de vitesse suggèrent que le mécanisme responsable de l'apparition de ces motifs est une instabilité de cette couche de cisaillement (**Moisy et al.,2004**).

La figure (IV-47 b) présente les isosurfaces de la vitesse radiale à $r=0.7$, il montre trois tourbillons radiaux co-rotatifs ce qui caractérise le mode $m=3$. La contre-rotation des deux disques crée une couche de mélange azimutale équatoriale, chaque disque tournant donne lieu à une couche d'Ekman (Fig. IV-47c). Le champ de vecteurs vitesse (v, w)    $r=0.70$, comprend des tourbillons de la couche de cisaillement équatoriale, illustrées dans la figure (IV-47d), nous présentons aussi la structure spatiale du potentiel électrique sous l'effet de la contre-rotation suivi par un champ magnétique axial et la figure (IV-47e) montre le cas de $Ha=20$, on observe des branches en cascade à la région du potentiel avec des valeurs positifs (rouges)    coté du disque inférieur et des branches en cascade à la région des valeurs négatives (bleus)    coté disque supérieur, la zone au milieu du cylindre présente une déformation des cascades.

Toujours la même remarque avec les cas précédent ($Ha=5$ et $Ha=10$) où deux tourbillons juxtaposés presque au milieu du cylindre, qui sont montrés sur la figure (IV-47f et g).

Le champ magnétique agit surtout sur la vitesse axiale comme nous avons montré par avant, si on augmente l'intensité du champ magnétique le seuil de transition augmente aussi et le régime périodique décale vers des Reynolds plus élevés.

Prenant un autre cas, c'est celui avec un nombre de Hartmann modéré, $Re=4000$, $Ri=0$ et $Ha=30$, concernant le mode 3, on a choisi de présenter les isosurfaces de la vitesse radiale, de la vitesse axial et de la vitesse tangentielle on voit que les modes sur la figure (IV-48) situés au milieu du cylindre nous avons choisi de présenter une seule coté des valeurs positifs, la figure (IV-48a) de la vitesse radiale présente la position des trois tourbillons co-rotatifs au milieu de la géométrie étudiée.

La figure (IV-49) présente la vue de face et la vue de droite des contours de la vitesse radiale suivi par les lignes de courant tracées sur la surface du cylindre à $r=0.7$ pour le cas de mode $m=3$    $Re=4000, Ri=0$ et $Ha=30$, montrant trois vortex co-rotatifs, quelques'un sont la source des lignes de courant.

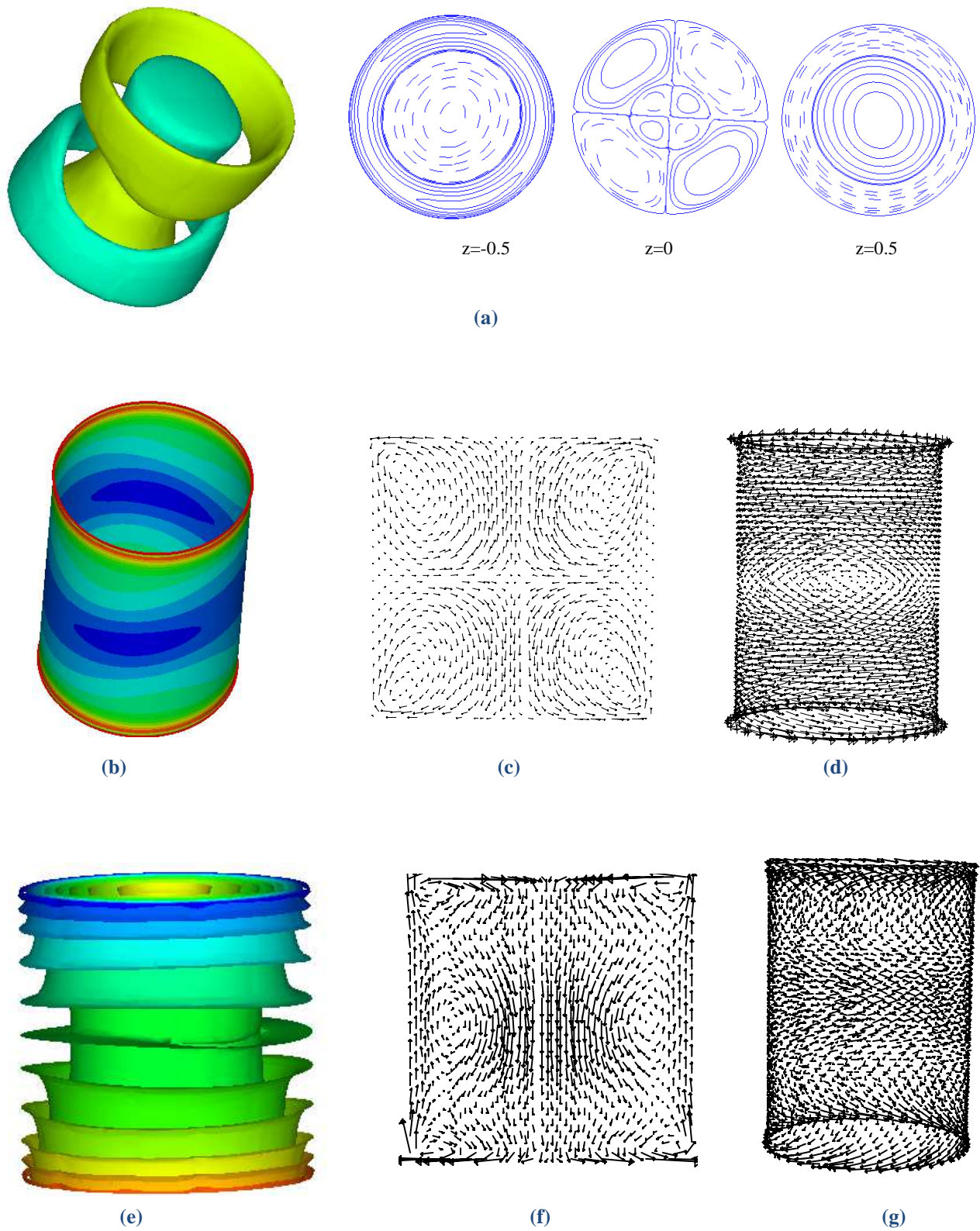


Figure IV-45 : Mode $m=2$ à $Re=506, Ri=0$ et $Ha=5$ (a) Isosurfaces de la vitesse axiale et la vue de dessus des isocontours de la vitesse axiale à $z=-0.5, 0$ et $+0.5$, (b) les isosurfaces de la vitesse radiale montrant deux tourbillon (vortex) co-rotatif à $r=0.70$ (c) champ de vecteurs vitesses méridien (u, v) (d) champ de vecteurs vitesse (v, w) à $r=0.70$ (e) potentiel électrique (f) champ vectoriel des courants électriques $(J_r - J_z)$ au plan $r=0$ (g) champ vectoriel des courants électriques $(J_z - J_\theta)$ à $r=0.7$.

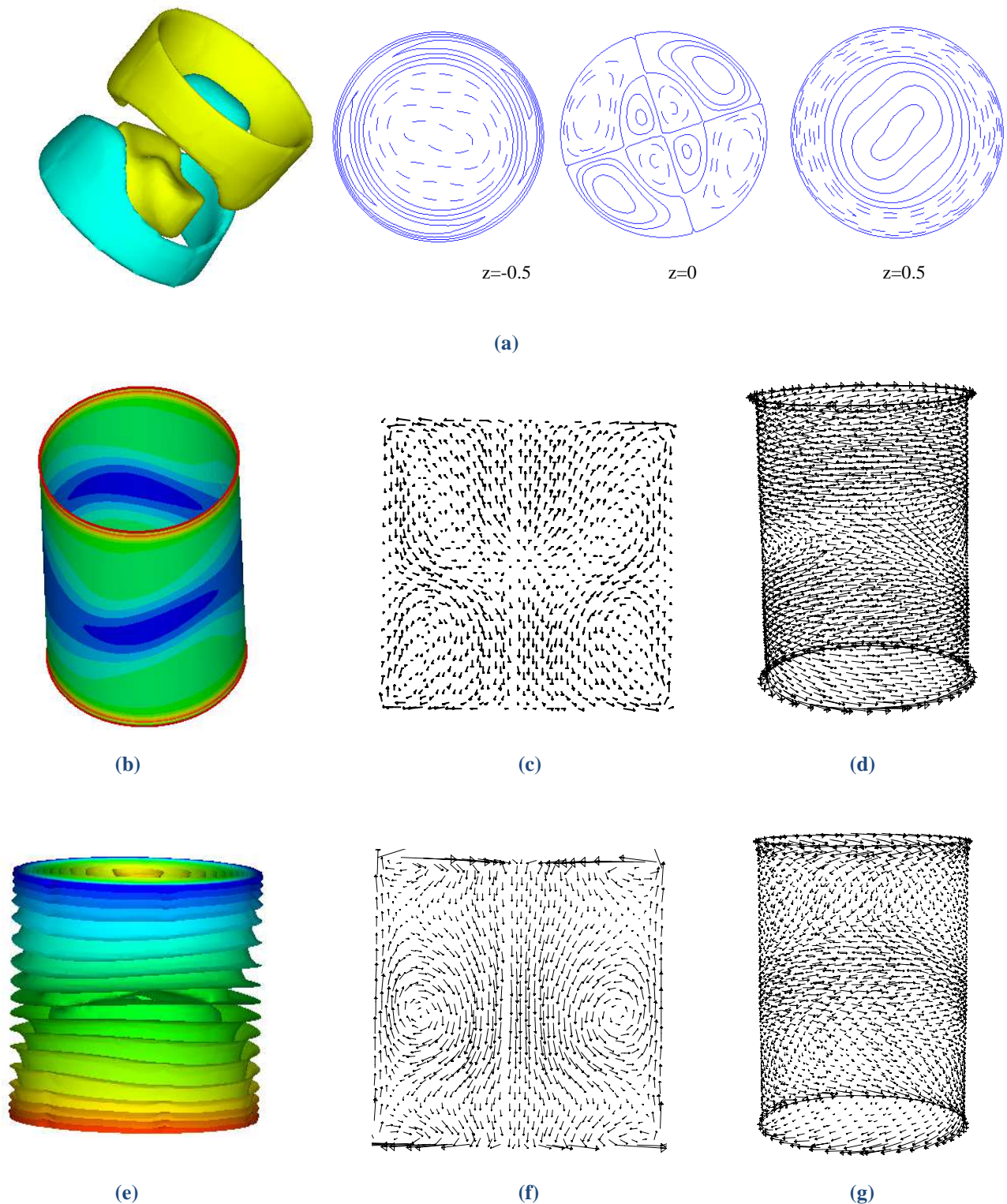


Figure IV-46 : Mode $m=2$ à $Re=955, Ri=0$ et $Ha=10$ (a) Isosurfaces de la vitesse axiale et la vue de dessus des isocontours de la vitesse axiale à $z=-0.5, 0$ et $+0.5$, (b) les isosurfaces de la vitesse radiale montrant un deux tourbillon (vortex) co-rotatif à $r=0.70$ (c) champ de vecteurs vitesses méridien (u, v) (d) champ de vecteurs vitesse (v, w) à $r=0.70$ (e) potentiel électrique (f) Champ vectoriel des courants électriques (J_r, J_z) au plan $r=0$ (g) Champ vectoriel des courants électriques (J_z, J_θ) à $r=0.7$

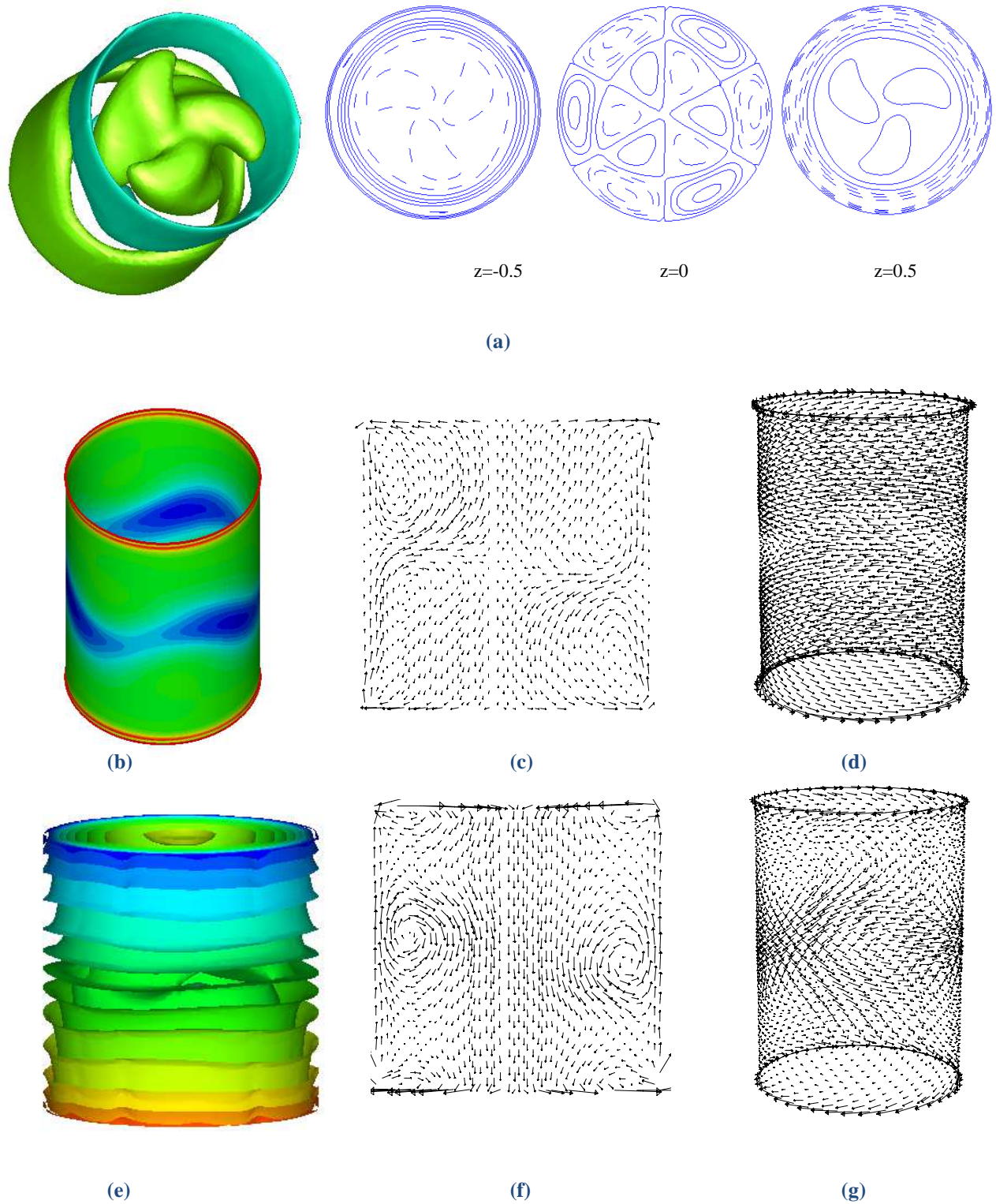


Figure IV-47 : Mode $m=3$ à $Re=2300, Ri=0$ et $Ha=20$ (a) Isosurfaces de la vitesse axiale et la vue de dessus des isocontours de la vitesse axiale à $z=-0.5, 0$ et $+0.5$, (b) les isosurfaces de la vitesse radiale montrant un deux tourbillon (vortex) co-rotatif à $r=0.70$ (c) champ de vecteurs vitesses méridien (u, v) (d) champ de vecteurs vitesse (v, w) à $r=0.70$ (e) potentiel électrique (f) Champ vectoriel des courants électriques (J_r-J_z) au plan $r=0$ (g) Champ vectoriel des courants électriques (J_z-J_0) à $r=0.7$

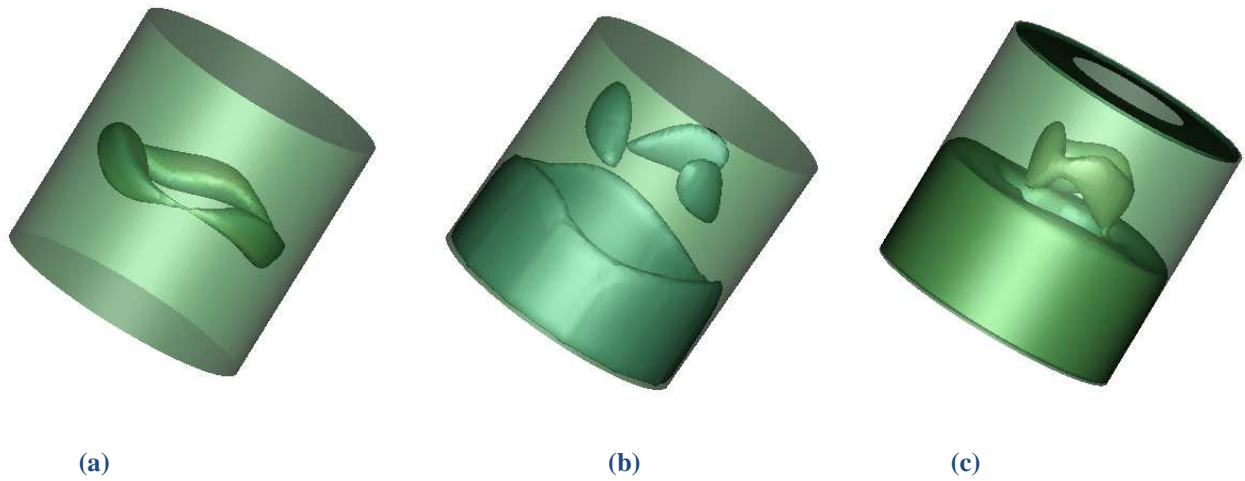


Figure IV-48 : Mode $m=3$ à $Re=4000, Ri=0$ et $Ha=30$ (a) Isosurfaces de la vitesse radiale (b) isosurfaces de la vitesse axiale (c) isosurfaces de la vitesse tangentielle

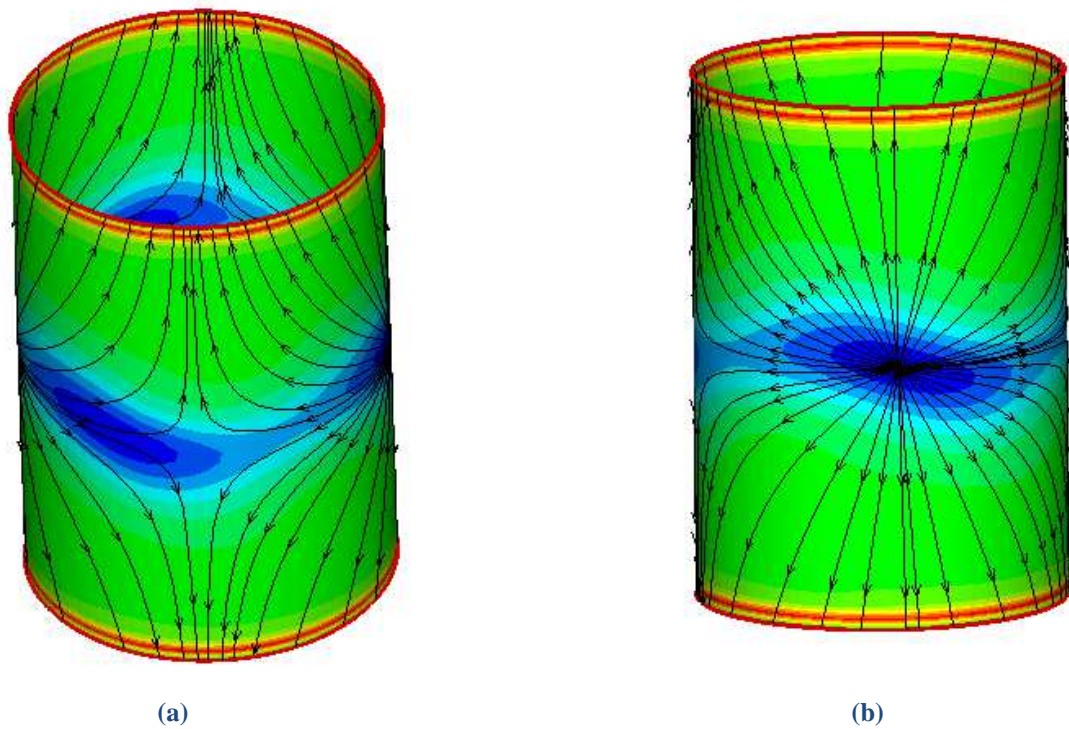


Figure IV-49 : Mode $m=3$ à $Re=4000, Ri=0$ et $Ha=30$ (a) contours de la vitesse radiale et lignes de courant tracée à la surface montrant trois vortex (a) la vue de face (b) la vue de droite.

Selon **Omi et Iwatsu** (2005), lorsqu'une couche de fluide au repos est chauffée par le bas, il se crée une stratification verticale de température. Cette dernière induit une stratification de densité telle que du fluide lourd surmonte du fluide plus léger. Cette situation est potentiellement instable dans la mesure où une fluctuation de température au sein d'une particule fluide se verra amplifiée par la poussée d'Archimède résultant sur celle-ci. En effet toute augmentation (diminution) de température entraînera une diminution (augmentation) de la densité de la particule et donc un mouvement ascendant (descendant) de celle-ci vers des zones froides (chaudes). Dans ces dernières, les contrastes de densité entre la particule et le milieu seront plus importants et intensifieront donc d'autant le déplacement de celle-ci. Cette force motrice déstabilisante est cependant sujette à deux phénomènes d'amortissement :

1. La relaxation des gradients de vitesse due à la friction visqueuse.
2. La relaxation des gradients de température due à la diffusion de la chaleur.

On se trouve ainsi dans une situation d'effet à seuil :

-Soit le gradient de densité induit par la différence de température ΔT entre le bas et le haut du système est insuffisant et le fluide reste au repos (dans un état dit conductif puisqu'il se comporte comme un solide qui transmet la chaleur qui lui est fournie par conduction thermique).

-Soit le gradient de densité est suffisamment important (il dépasse une valeur critique) et il y a naissance d'un mouvement convectif qui permet de transporter la chaleur du bas vers le haut de la couche de fluide plus efficacement que la conduction seule.

Dans le but de comprendre l'effet de gradient de température sur l'écoulement en contre-rotation avec champ magnétique on va présenter quelques états en variant le nombre de Richardson, le nombre de Hartmann et le nombre de Reynolds.

En augmentant le nombre de Richardson ($Ri=0.5$) l'écoulement change la structure, l'écoulement subit une première bifurcation stationnaire pour $Ha=5$ et $Ri=0.5$ à $Re=347$, l'état stationnaire correspondant au mode azimutal $m = 1$ (mode mixte). A la valeur critique du nombre de Reynolds $Re \approx 690$, avec les mêmes paramètres d'écoulement ($Ri=0.5$ et $Ha=5$) l'écoulement subit une deuxième bifurcation oscillatoire périodique. La figure (IV-50a) montre les isocontours de la vitesse axiale aux positions, $z=-0.5$, $z=0$, $z=0.5$ respectivement, près de la bifurcation stationnaire ($Re=360$ et $Ri=0.5$ et $Ha=5$). On remarque que l'écoulement perd sa stabilité de l'état de base via une bifurcation de fourche dominée par le mode azimutal $m=1$, ce dernier est responsable de la brisure de la symétrie (axisymétrie). En effet à l'équateur du

cylindre $z=1$, les contours négatifs pour $0 < \theta < \pi$ correspondent aux contours positifs pour $\pi < \theta < 2\pi$. Le contour $v=0$ dans ce plan est une droite et l'action de symétrie reliant les isocontours de $z=-0.5$ et $z=0.5$.

La figure (IV-50b) expose la structure spatiale du potentiel électrique sous l'effet de la contre-rotation suivi par un champ magnétique axial, pour le cas de $Ha=5$, on observe des branches en cascade, avec une légère déformation des branches en cascade en approchant au milieu de cylindre, parce que le champ magnétique appliquée n'est pas intense ($Ha=5$).

Les isocontours de la vitesse radiale présentés sur la figure (IV-50c) montrent ce qu'on appelle le début de la naissance des tourbillons puisque nous sommes juste près de la bifurcation.

Au voisinage de la bifurcation stationnaire la température varie linéairement dans la direction verticale, pour ce cas de $Re=360$ et $Ri=0.5$ et $Ha=5$, la solution est de type conductif. L'isotherme augmente progressivement sous formes de droites horizontales du profil conductif, (Fig. IV-50d)

Enfin, la structure de la branche du mode mixte change en augmentant le nombre de Reynolds, mais elle reste stationnaire ceci est présenté dans le cas de $Re=400$, $Ri=0.5$ et $Ha=5$ (Fig. IV-51), où nous présentons la vue de dessus de la vitesse axiale aux différents plans ($z=-0.5, 0, 0.5$) avec toujours $v=0$ dans ce plan est une droite et l'action de symétrie reliant les isocontours de $z=-0.5$ et $z=0.5$.

La structure spatiale du potentiel électrique présentée sur la figure (IV-51b) expose deux régions de potentiel positif et des régions de potentiel négatif déformés à cause de l'intensité du champ magnétique et la vitesse de rotation cette fois est plus élevée que le cas précédent ($Re=360$, $Ri=0$ et $Ha=5$). Sur les contours de la vitesse radiale expose un grand vortex monopole à $r=0.7$ (Fig. IV-51c), caractérise le mode non-axisymétrique $m=1$. Cette fois la solution est de type convectif (Fig. IV-51d), où le gradient de densité induit par la différence de température ΔT est suffisamment important (il dépasse une valeur critique) et il y a naissance d'un mouvement convectif qui permet de transporter la chaleur du bas vers le haut de la couche du fluide plus efficacement que la conduction seule.

Pour voir l'effet du champ magnétique sur l'écoulement avec différence de température entre le bas et le haut, on augmente cette fois l'intensité du champ magnétique jusqu'à $Ha=20$ (Fig. IV-52), avec deux nombre de Reynolds, un près de la première bifurcation ($Re=750$) et le deuxième à la proximité de la fin de la branche du mode mixte ($Re=800$), en fixant le nombre de Richardson à la valeur $Ri=0.5$. La figure (IV-52haut) montre le premier cas, où l'action de symétrie reliant les isocontours de la vitesse axiale aux plans $z=-0.5$ et $z=0.5$. Le début de la

naissance des tourbillons, puisque nous sommes juste près de la bifurcation. La structure spatiale uniforme de potentiel électrique et enfin la conduction domine le transport de la chaleur du bas vers le haut. Le deuxième cas de $Re=800$, juste avant la deuxième bifurcation oscillatoire périodique (Fig. IV-52 milieu), où la structure de vitesse axiale change, mais conserve la symétrie avec le contour $v=0$ dans le plan $z=0$ est une droite. Les isocontours de la vitesse radiale à $r=0.7$ exposent un énorme vortex qui se divise en deux. Une déformation dans la structure du potentiel électrique parce que la vitesse de rotation plus élevée que le cas précédent et la convection domine le transfert de chaleur.

Pour le cas de $Ri=2$ avec $Re=400$ et $Ha=20$, exposé sur la figure (IV-52bas), on observe aussi quelque changement dans la structure concernant le détachement du vortex en deux et toujours la déformation de la structure du potentiel. L'état est convectif et les isothermes sont déviées vers la mi-hauteur pendant que le fluide chaud est poussé vers le haut à partir du disque inférieur.

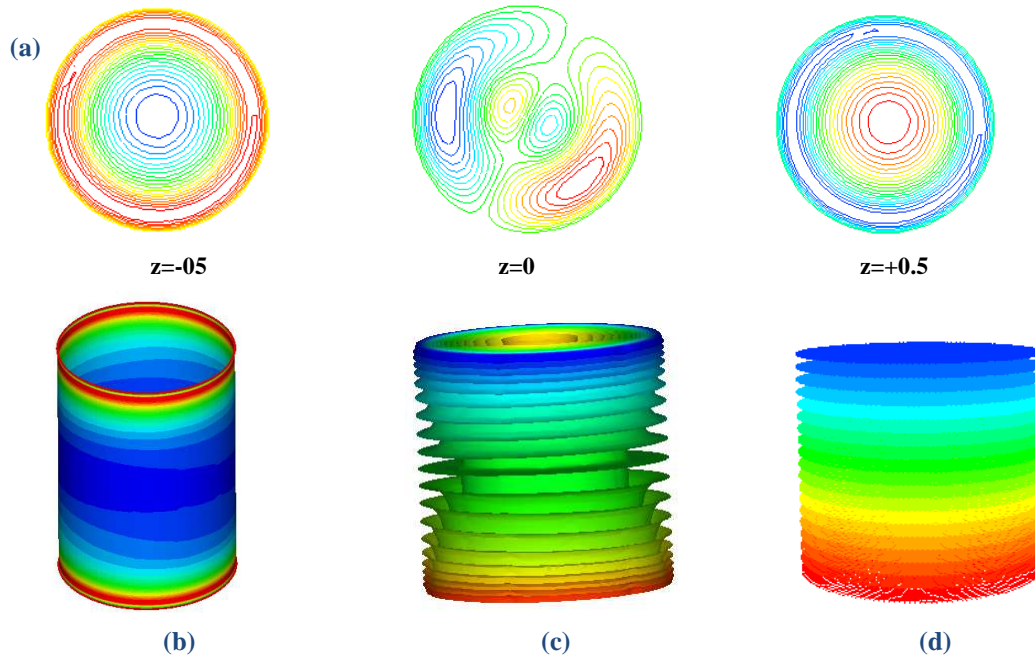


Figure IV-50: Mode $m=1$ avec $Re=360$, $Ri=0.5$ et $Ha=5$ (a) la vue de dessus des isocontours de la vitesse axiale à $z=-0.5$, 0 et $+0.5$, (b) les isosurfaces de la vitesse radiale à $r=0.70$ (c) potentiel électrique (d) Champ de température

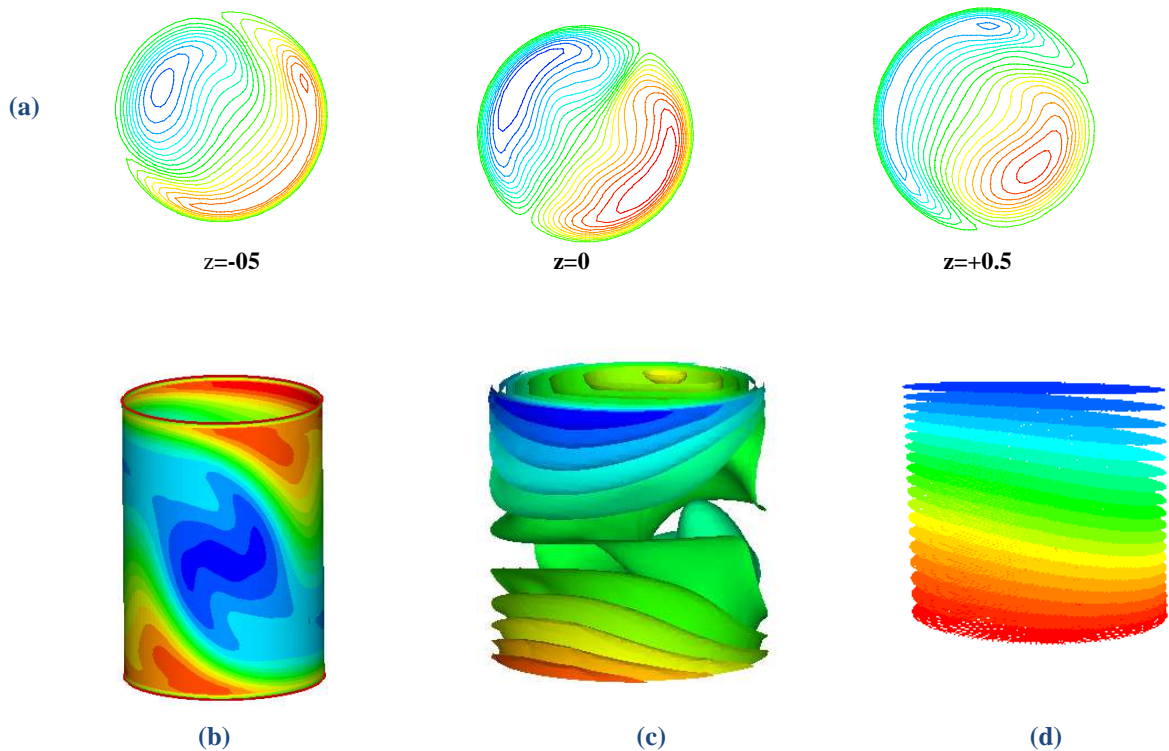


Figure IV-51: Mode $m=1$ avec $Re=400$, $Ri=0.5$ et $Ha=5$ (a) la vue de dessus des isocontours de la vitesse axiale à $z=-0.5$, 0 et $+0.5$, (b) les isosurfaces de la vitesse radiale à $r=0.70$ (c) potentiel électrique (d) Champ de température.

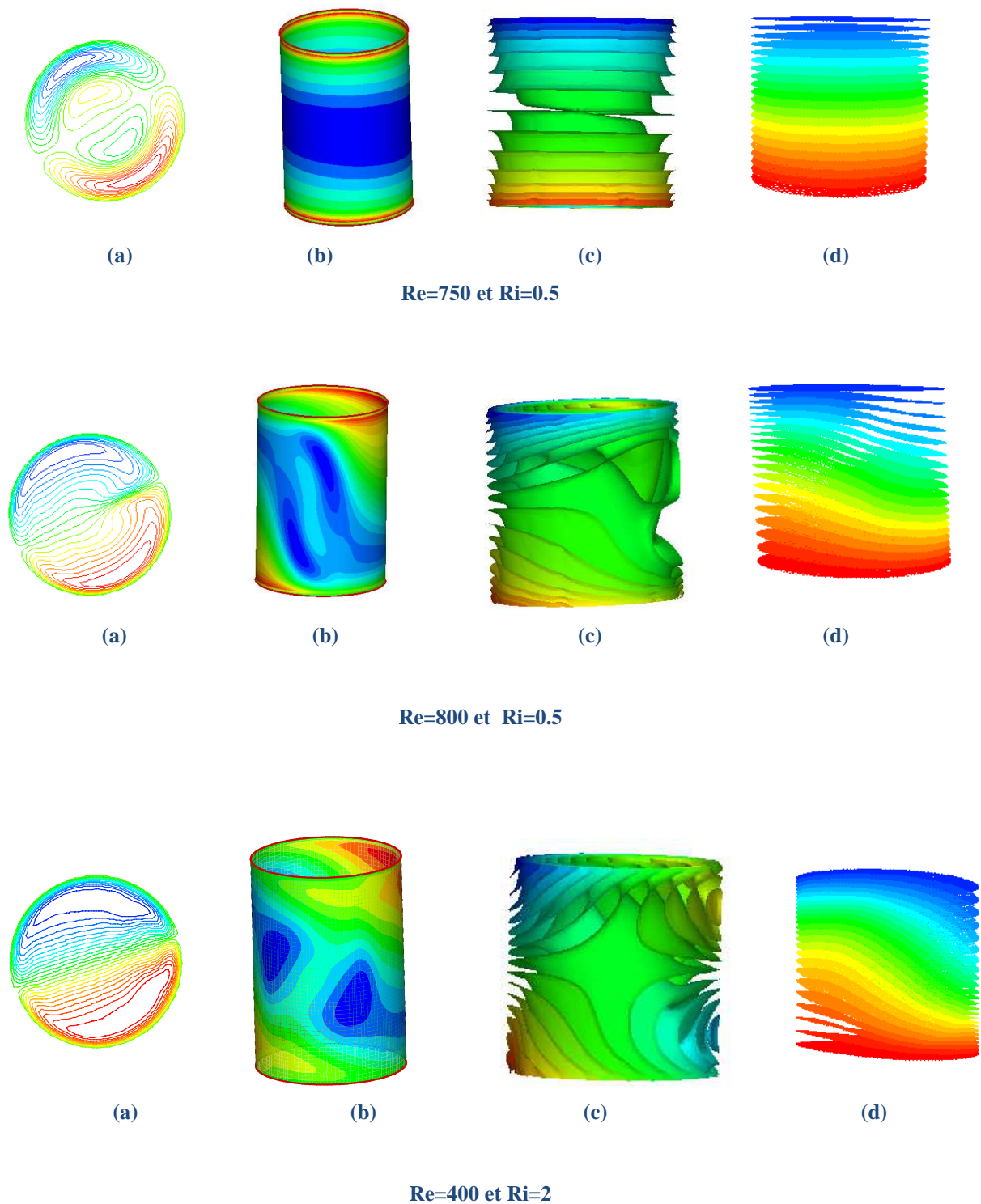


Figure IV.52: Mode $m=1$ avec $Ha=20$ (a) les iso-lignes de la vitesse verticale dans le plan horizontal central de la géométrie cylindrique ($z=0$) (b) les isosurfaces de la vitesse radiale à $r=0.70$ (c) potentiel électrique (d) champ de température.

- **Diagrammes de stabilité**

Les diagrammes de stabilité donnant l'évolution du seuil correspondant au mode azimutal $m=1,2$ et 3 pour $Ri=0, 0.5, 1$ et 2 et $Ha=0, 5, 10$ et 20 c.à.d. lorsque l'état de base perd sa stabilité aux modes non-axisymétriques $m=1, 2$ et 3 . La courbe illustrée dans la figure (IV-53haut) donne le seuil de transition au mode $m=1, 2$ et 3 dans le cas de $Ri=0$.

Pour le cas de convection forcé ($Ri=0$), on a déjà vu que l'état de base perd la stabilité aux modes non-axisymétriques $m=1$ et $m=2$ à nombre de Reynolds $Re_M=349$ et $Re_P=401$, respectivement

Pour $Ha=5$ le mode mixte n'existe pas et l'état de base perd sa stabilité directement aux modes non-axisymétriques $m=2$

Pour $Ha=10$ la même observation où le mode mixte c.à.d. mode $m=1$ n'existe pas et l'état de base perd sa stabilité directement aux modes non-axisymétrique $m=2$

Pour $Ha=20$ la structure change et l'état de base perd sa stabilité directement aux modes non-axisymétriques $m=3$ (c.à.d. ni le mode $m=1$ ni le mode $m=2$ existe)

Ainsi, nous présentons au dessus de la courbe la vitesse axiale à $z=0$ (la vue de dessus). Pour les figures situées sous la courbe ils exposent la vitesse axiale au plan méridien ($r=0$) et l'effet du champ magnétique chaque fois qu'on augmente le nombre de Hartmann. Nous avons vu déjà que les profils de la vitesse deviennent de plus en plus linéaire pour des croissances du nombre de Hartmann, pour des valeurs modérés de Ha , les contours de la vitesse axiale au milieu du cylindre autour de l'axe de disparaissent. Notons aussi que l'écoulement est axisymétrique stationnaire sous la courbe (Fig. IV-53haut)

Pour $Ri=0.5$ (Fig. IV-53bas) l'état de base axisymétrique déstabilisé par une perturbation de mode $m=1$, la branche de mode mixte ($m=1$) change la structure chaque fois en augmentant le nombre de Reynolds. A mesure que le nombre de Reynolds est augmenté, ce mode stationnaire cède la place à une deuxième bifurcation oscillatoire périodique à la valeur critique du nombre de Reynolds estimée à $Re \approx 592$ dans le cas de $Ri=0.5$ et $Ha=0$.

Pour $Ri=1$ et 2 la même remarque l'état de base axisymétrique ($m=0$) est détruite par l'intermédiaire d'une bifurcation de fourche, qui mène à la branche du mode mixte ($m=1$), les deux courbes illustrées dans la figure (IV-54) donnent le seuil de transition au mode $m=1$, au dessous de la courbe l'écoulement est stationnaire axisymétrique où figure la vitesse axiale au plan méridien à $r=0$, en remarquant l'effet de la croissance du champ magnétique.

Les résultats quantitatifs de l'écoulement en contre-rotation avec gradient de température et soumis à un champ magnétique B de magnitude constante, uniforme et orienté verticalement vers le haut, présentés dans le tableau (IV-5), sont visualisées graphiquement dans les plans ($Re-Ha$) sous forme de courbes paramétriques aux différentes valeurs du nombre de Richardson, Ri (Fig. IV-55). Cette figure montre que pour des valeurs du nombre de Reynolds Re et de Hartmann Ha , situées sous la courbe l'écoulement reste laminaire stable axisymétrique et au dessus de la courbe l'écoulement est asymétrique, où on représente les iso-lignes de la vitesse verticale dans le plan horizontal central ($z=0$) de la géométrie cylindrique, pour $Ri > 0$ les modes ($m=1$) évalués au voisinage des points de bifurcation primaire. Pour la courbe $Ri=0$ nous avons représenté les différents modes ($m=1, 2, 3$) au dessus de la courbe (vue de dessus de la vitesse axiale à $z=0$). Les modes $m=2$ et 3 apparaissent pour des valeurs de $Ha \geq 5$.

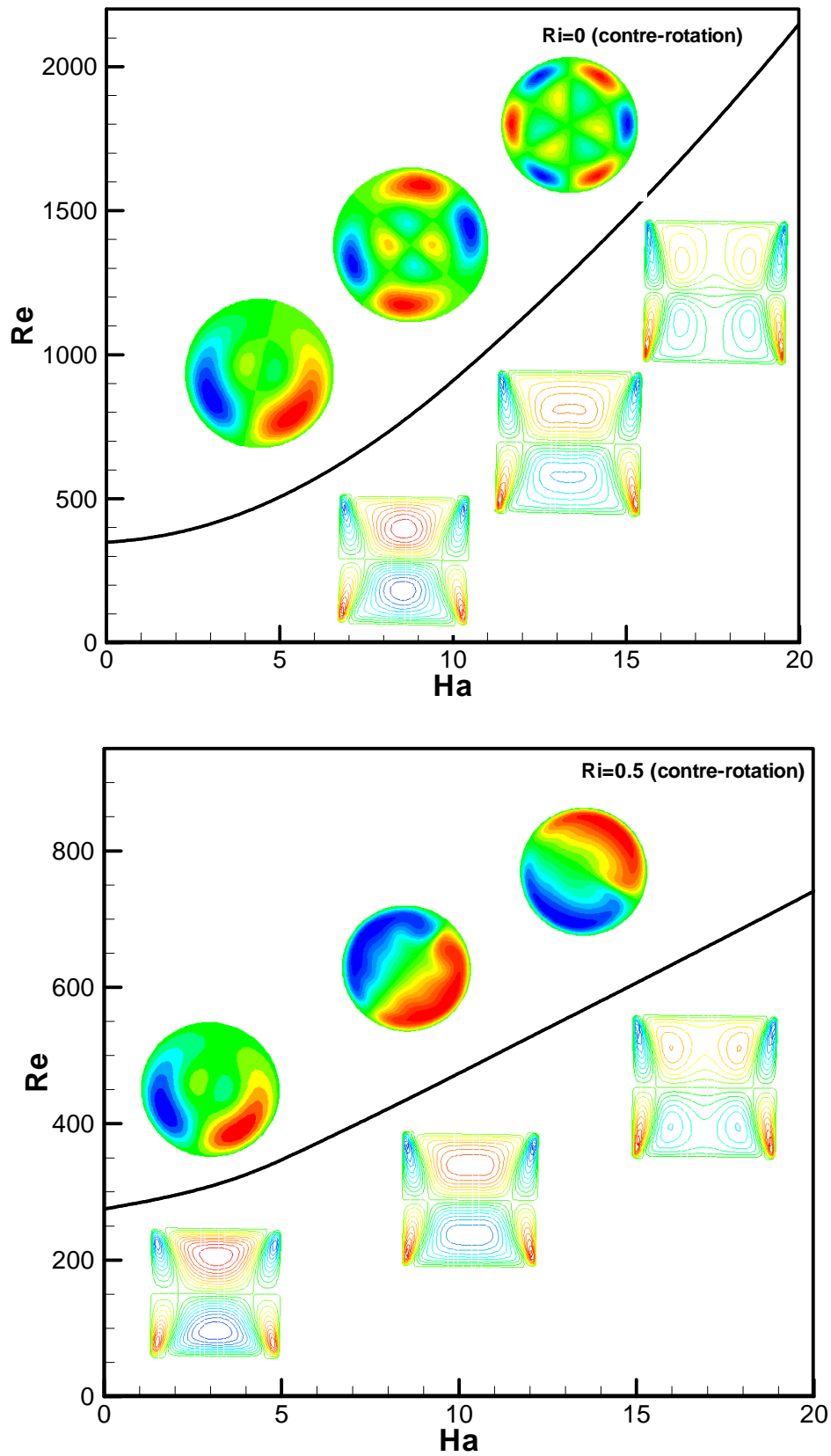


Figure IV-53 : Diagrammes de stabilité Re-Ha pour le cas Ri=0 (haut) et Ri=0.5 (bas)

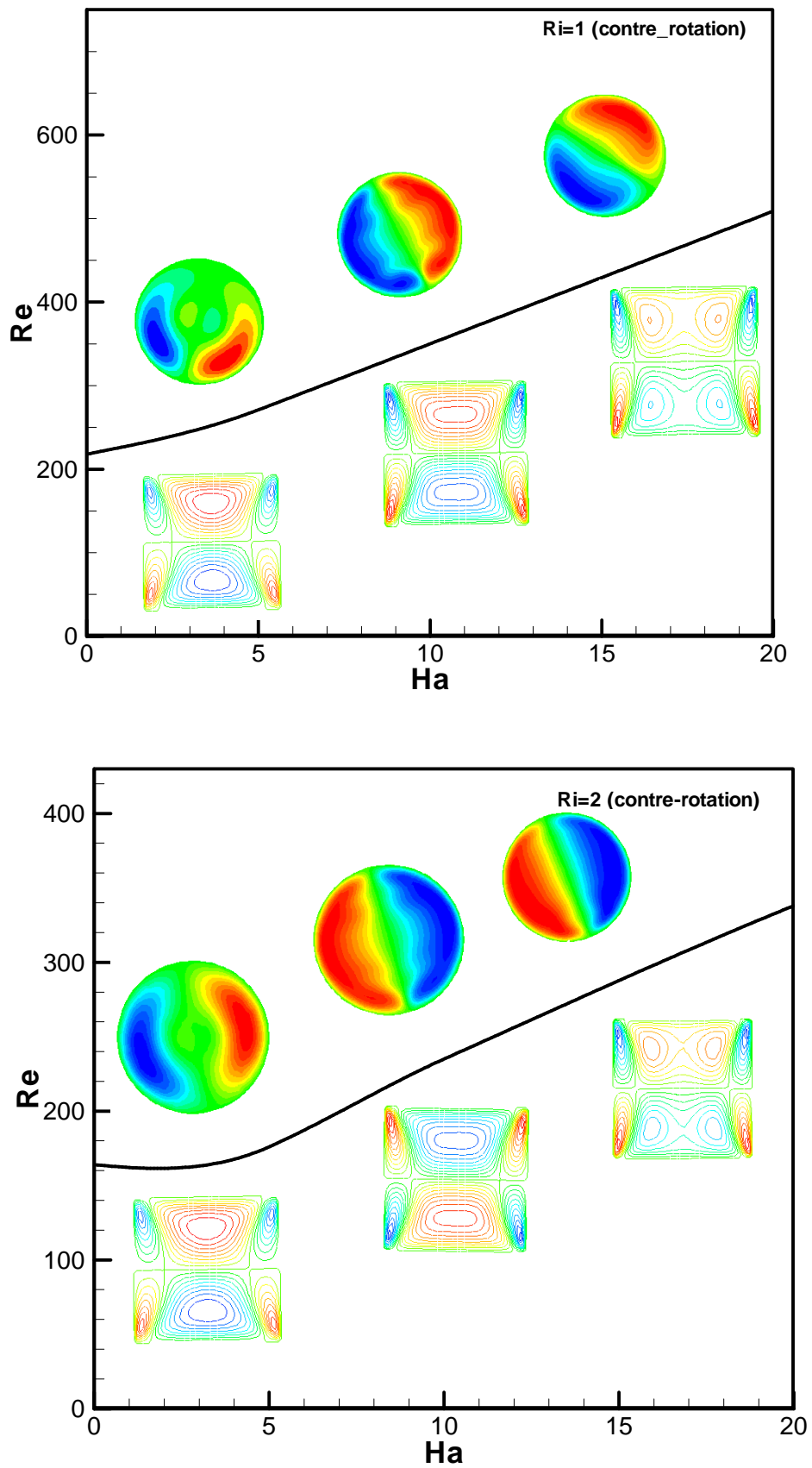


Figure IV-54 : Diagrammes de stabilité Re-Ha pour le cas $Ri=1$ (haut) et $Ri=2$ (bas)

Ri	0	0.5	1	2
Ha=0	349	275	218	164
Ha=5	506	347	271	176
Ha=10	910	474	350	235
Ha=20	2150	741	509	338

Tableau IV-5: Reynolds critiques trouvés pour différentes valeurs de Ri (=0, 0.5, 1 et 2) et Ha=0, 5, 10 et 20

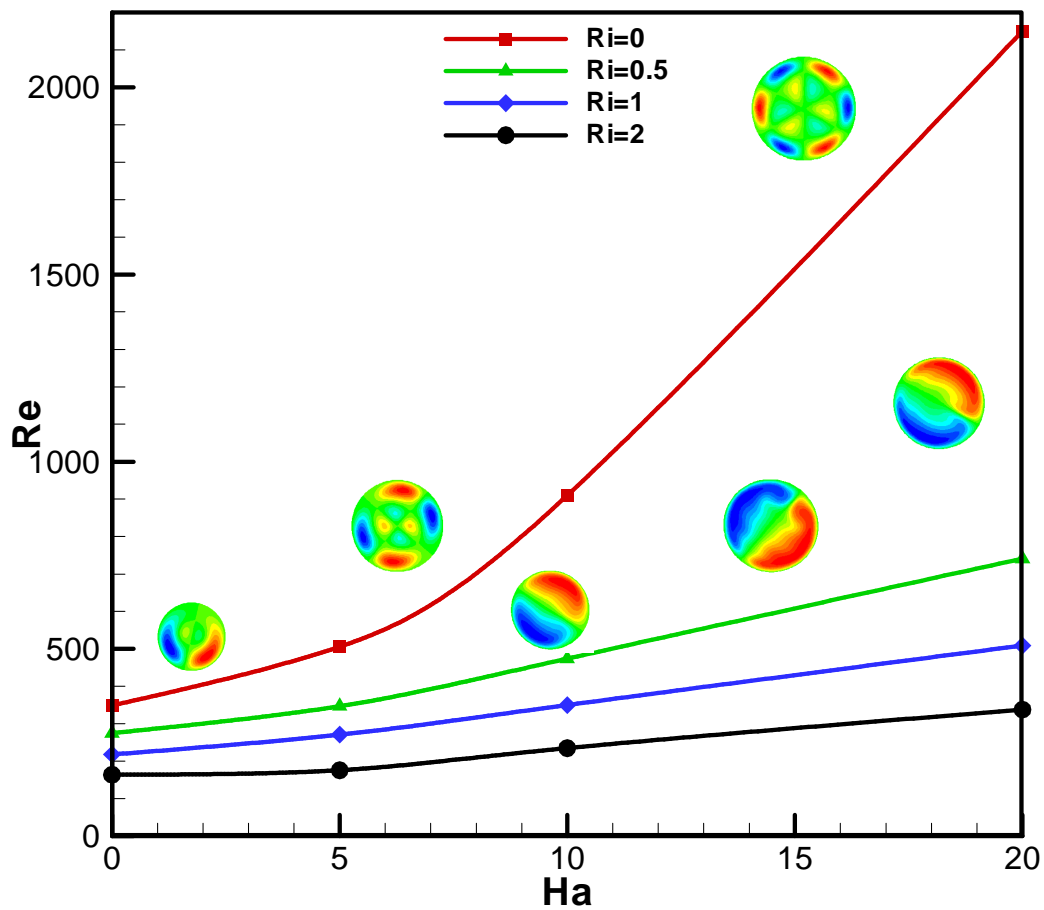


Figure IV-55 : Diagramme paramétrique de stabilité (Re_{cr} - Ha) pour le cas contre-rotation

IV.6 Conclusion de la deuxième partie

Dans cette deuxième partie, nous avons utilisé le code CFD **Fluent**, afin d'étudier l'écoulement tridimensionnel engendré par deux disques tournants en Co/contre-rotation, à l'intérieur d'une enceinte cylindrique remplie d'un fluide à faible nombre de Prandtl ($Pr=0.015$), soumise à un gradient de température et un champ magnétique orienté verticalement

- Une validation des résultats a été faite, par comparaisons avec des mesures expérimentales et des données numériques trouvées dans la littérature.
- Dans le cas de co-rotation et d'une façon générale, pour la convection forcée $Ri=0$ et au-dessus du seuil, l'état de base axisymétrique perd la stabilité et fait apparaître un nouveau motif constitué de spirales tournantes vers le centre de rotation avec $m=1$ et 2 . Pour $Ri>0$, l'état de base axisymétrique déstabilisé par une perturbation de mode $m=1$. A mesure que le nombre de Reynolds est augmenté, ce mode stationnaire cède la place à une deuxième bifurcation oscillatoire périodique.
- Dans le cas de co-rotation, l'augmentation du nombre de Richardson provoque la diminution du nombre de Reynolds critique, c.à.d. le seuil de transition de l'état axisymétrique ($m=0$) à l'état non-axisymétrique ($m=1$). En présence du champ magnétique verticale le fluide continue son écoulement stable axisymétrique jusqu'aux valeurs du nombre de Reynolds plus grandes que celles prévisibles d'avoir subi une première bifurcation stationnaire, bien que l'application d'un champ magnétique provoque un changement remarquable de la structure du champ d'écoulement et du transfert de chaleur.
- Nos simulations numériques avec et sans champ magnétique ont été présentées pour différentes valeurs du nombre de Hartmann ($Ha=0, 5, 10$ et 20) et différentes valeurs du nombre de Richardson ($Ri=0, 0.5, 1$ et 2 .) afin de voir leurs effets sur la valeur du nombre de Reynolds critique, Re_{cr} .
- L'écoulement de base obtenu par la contre-rotation des deux disques était très différent de celui en configuration co-rotation. Nous montrons ici que l'écoulement de contre-rotation est plus instable et présente une grande richesse dans les structures engendrées, avec notamment l'apparition du mode $m=3$ pour $Ha=20$. L'écoulement de base en contre-rotation hérite de toutes les symétries du forçage. La couche de cisaillement en contre-rotation des disques d'extrémités est sujette à une instabilité de type Kelvin-Helmholtz, donnant lieu à des tourbillons radiaux co-rotatifs. Les différentes bifurcations sont

classiquement associées à des brisures successives de ces symétries. Dans le cas de convection forcé ($Ri=0$) le mode le plus instable est le mode $m = 1$, appelé “mode mixte” (M). A mesure que le nombre de Reynolds est augmenté, ce mode stationnaire cède la place à une onde propagative modulée, puis à des quasi-cycles hétéroclines, pour aboutir enfin à une nouvelle solution stationnaire $m = 2$, appelée “mode pur” (P).

- L'écoulement en contre-rotation avec un léger gradient de température provoque une structure différente à celle de l'écoulement de base si en augmentant le nombre de Richardson ($Ri=0.5$) l'écoulement change de structure, et la couche de cisaillement horizontale séparant deux cellules de recirculation associées à la rotation de chaque disque. Cette couche de cisaillement à mi-plan $z=0$, est la première qui supportera le changement de structure. L'écoulement subit une première bifurcation stationnaire pour les valeurs du nombre de Reynolds critiques $Re=275$, 220 , et 164 , correspondant respectivement aux nombre de Richardson $Ri=0.5$, 1 et 2 . L'écoulement subit une deuxième bifurcation oscillatoire périodique à des valeurs croissantes du nombre de Reynolds.
- Toutefois, en présence d'un champ magnétique vertical, l'écoulement en contre-rotation garde sa stabilité jusqu'à des valeurs du nombre de Reynolds plus grandes. Pour le cas de convection forcé ($Ri=0$), l'état de base perd la stabilité aux modes non- axisymétrique $m = 2$ à nombre de Reynolds $Re = 506$; $Ha=5$ et $Re=910$; $Ha=10$ respectivement. Ainsi que l'état de base perd la stabilité aux modes non- axisymétrique $m = 3$ à nombre de Reynolds $Re = 2150$ et $Ha=20$. L'état de mode $m=1$ peut être comme le résultat de la première instabilité correspond à $Ri=0.5, 1$ et 2 en augmentant le nombre de Hartmann, $Ha=5, 10$ et 20 . En conséquence, un champ magnétique plus fort est nécessaire pour garder l'écoulement stable axisymétrique pour certaines valeurs élevées du nombre de Reynolds.
- Les résultats de la deuxième partie fait l'objet, de:

La communication : **CIEME'2012** Khemis Miliana, 02-03 Décembre, 2012 (Mahfoud et Bessaïh)

Intitulé « Instabilités tridimensionnelles de l'écoulement entre disques co/contre-rotatifs soumise à un gradient de température et un champ magnétique »

Conclusion générale

Une étude numérique de la convection mixte dans une enceinte cylindrique remplie d'un fluide à faible nombre de Prandtl ($Pr=0.015$), soumise à un champ magnétique orienté verticalement, a été faite. Notre étude est divisée en deux parties : la première partie est une étude axisymétrique de l'écoulement en figure a pour but de mettre en évidence les instabilités oscillatoires (bifurcation de Hopf). La deuxième partie, une étude tridimensionnelle en configuration co/contre-rotation des disques d'extrémités, met en évidence la première instabilité stationnaire (bifurcation de fourche) c.à.d. la transition de l'écoulement axisymétrique stationnaire à l'écoulement non-axisymétrique. La grande diversité des structures que nous venons d'observer est remarquable en regard de l'apparente simplicité de notre géométrie. Cette situation est générique des systèmes gouvernés par des équations non-linéaires, dans la classe laquelle entrent les écoulements des fluides : aux solutions de bases, en général, simples car possédant un grand nombre de symétries, se substituent des motifs beaucoup plus variés, pouvant parfois coexister entre eux. L'écoulement engendré par deux disques en co/contre-rotation avec une paroi latérale immobile, d'une grande utilité pratique dans plusieurs domaines d'engineering tels que le pompage des métaux liquides à hautes températures de fusion, la production des cristaux par le procédé de tirage Czochralski,.

Dans la première partie, la méthode des volumes finis a été utilisée pour résoudre numériquement les équations de transports gouvernantes le phénomène étudié. Dans le but de donner plus de confiance aux résultats que produisait notre code de calcul, une validation de celui-ci a été faite, par comparaisons de ces résultats avec des mesures expérimentales et des données numériques présentes dans la littérature. De même, un excellent accord est apprécié entre les mesures expérimentales et numériques et les résultats du code de calcul. Nos simulations numériques ont été présentées pour différentes valeurs du nombre de Hartmann ($Ha=0, 5, 10, 20$ et 30) et différentes valeurs du nombre de Richardson ($Ri=0, 0.5, 1.0, 2.0, 4.0$) afin de voir leurs effets sur la valeur du nombre de Reynolds critique, Re_{cr} et de la fréquence d'oscillation critique, F_{cr} . Les résultats obtenus montrent :

- En absence du champ magnétique ($Ha=0$), l'écoulement de contre-rotation est plus instable et présente des structures différentes pour $Ri < 1$. Pour les valeurs de $Ri \geq 1$, les nombres de Reynolds critiques Re_{cr} dans les deux cas de rotations sont proches. Nous avons constaté que l'augmentation du nombre de Richardson provoque la diminution du nombre de Reynolds critique.

- En présence de champ magnétique et à partir de $Ha=10$ l'écoulement en co-rotation est au contraire, plus déstabilisante pour $Ri < 2$, mais pour $Ri \geq 2$ les nombres de Reynolds critiques sont presque égaux dans les deux cas de rotation (les deux courbes se confondent). Toutefois, en présence du champ magnétique vertical, le fluide continue son écoulement stable jusqu'aux valeurs de nombre de Reynolds plus grandes que celles prévisibles d'avoir des instabilités oscillatoires.

Dans la deuxième partie, nous avons utilisé le code CFD **Fluent** basé sur la méthode des volumes finis. Une validation des résultats a été faite, par comparaisons avec des mesures expérimentales et des données numériques trouvées dans la littérature. Nos simulations numériques avec et sans champ magnétique ont été présentées pour différentes valeurs du nombre de Hartmann ($Ha=0, 5, 10$ et 20) et différentes valeurs du nombre de Richardson ($Ri=0, 0.5, 1$ et 2 .) afin de voir leurs effets sur la valeur du nombre de Reynolds critique, Re_{cr} . Nous montrons ici que l'écoulement :

- En co-rotation expose un nouveau motif d'instabilité. Ce motif consiste en une chaîne circulaire de tourbillons quasi-verticaux, dont les extrémités s'enroulent en spirales par advection dans les couches limites ("spirales positives"). Pour $Ri=0.5, 1$ et 2 , l'état de base axisymétrique est déstabilisé par une perturbation de mode $m=1$. A mesure que le nombre de Reynolds augmente, ce mode stationnaire cède la place à une deuxième bifurcation oscillatoire périodique. Dans ce cas, l'augmentation du nombre de Richardson provoque la diminution du nombre de Reynolds critique. En présence du champ magnétique vertical, le fluide continue son écoulement stable axisymétrique jusqu'aux valeurs de nombre de Reynolds plus grandes que celles prévisibles d'avoir subi une première bifurcation stationnaire.
- En contre-rotation l'écoulement est plus instable et présente une grande richesse dans les structures engendrées, avec notamment l'apparition de mode $m=3$ pour $Ha=20$. Dans le cas de convection forcé ($Ri=0$) le mode le plus instable est le mode $m = 1$, appelé "mode mixte" (M). A mesure que le nombre de Reynolds augmente, ce mode stationnaire cède la place à une onde propagative modulée, puis à des quasi-cycles hétéroclines, pour aboutir enfin à une nouvelle solution stationnaire $m = 2$, appelée "mode pur" (P). En augmentant le nombre de Richardson ($Ri=0.5, 1$ et 2), l'écoulement subit une première bifurcation stationnaire avec $m=1$. Toutefois, en présence d'un champ magnétique vertical, l'écoulement en contre-rotation garde sa stabilité jusqu'à des valeurs du nombre de

Reynolds plus grande .Pour le cas de convection forcée ($Ri=0$), l'état de base perd la stabilité au mode non- axisymétrique $m = 2$ à partir de $Ha=5$ et au mode non-axisymétrique $m = 3$ à nombre de Reynolds $Re = 2150$ et $Ha=20$

- En conséquence, un champ magnétique plus fort est nécessaire pour garder l'écoulement stable axisymétrique pour certaines valeurs élevées du nombre de Reynolds. Les résultats obtenus dans cette étude mettent en évidence la fiabilité de la technique de stabiliser les écoulements industriels de convection mixte, par l'application d'un champ magnétique vertical. De plus, ces résultats permettront aux expérimentateurs et industriels de connaître les régimes oscillatoires naissant durant les écoulements des métaux liquides afin d'améliorer la qualité de la production.
- Il est recommandé dans les futurs travaux d'étudier les instabilités de l'écoulement engendré par deux disques tournants en configuration tridimensionnelle, soumise à un champ magnétique orienté horizontalement pour découvrir les structures engendrées.

Bibliographie

- Balikci,E., Deal, A. et Abbaschian, R. (2004)** : Antimony-doped germanium single crystals grown from the melt by the axial heat processing (AHP) technique, *Journal of Crystal Growth*, vol. 262, pp. 581-593.
- Barcilon, V. et Pedlosky, J.(1967)**: Linear theory of rotating stratified fluid motions, *J.Fluid Mech.* vol.29, pp.1-16.
- Ben Hadid, H., Henry, D. et Touihri, R. (1997)**: Unsteady three-dimensional buoyancy-driven convection in a circular cylindrical cavity and its damping by magnetic field, *Journal of Crystal Growth*, vol. 180, pp. 433-441.
- Bessaïh ,R., Boukhari, A. et Marty, Ph. (2009)**:Magnetohydrodynamics stability of a rotating flow with heat transfer, *International Communications in Heat and Mass Transfer*,vol 36, pp. 893-901.
- Bessaïh, R., Kadja, M., Eckert, K. et Marty. Ph(2003)**: Numerical and analytical study of rotating flow in an enclosed cylinder under an axial magnetic field, *Acta Mechanica*, vol. 164, pp. 175-188.
- Bessaïh, R.(2000)** : Etude de la convection naturelle laminaire et turbulente dans des enceintes, Thèse de doctorat d'état, *Université Mentouri – Constantine*
- Bessaïh, R., Marty, Ph. et Kadja, M. (1999)**: Numerical study of disk driven rotating MHD flow of a liquid metal in a cylindrical enclosure, *Acta Mechanica*, vol. 135, pp. 153-167, 1999.
- Bessaïh, R., Marty, Ph. et Kadja, M.(2003)**: Hydrodynamics and heat transfer in disk driven rotating flow under axial magnetic field, *International Journal of Transport Phenomena*, vol. 5, pp. 259-278.
- Bordja,L., Tuckerman, L.S., Witkowski, L.M., Navarro,.M.C., Barkley,D. et Bessaïh,R. (2010)**: Influence of counter-rotating von Kármán flow on cylindrical Rayleigh-Bénard convection, *Physical Review E* 81, 036322
- Chen, Y.C., Chung, J.N. (1996)**: Linear stability of mixed convection in a vertical channel flow, *J.Fluid Mech.*, vol 325, p 29-51
- Daube, O. Le Quéré, P., Moisy, F. et Rabaud, M. (2002)**: Numerical and Experimental investigation of the stability of the 3D flow between two counter-rotating disks, *Proceeding 2nd International Conference on Computational Fluid Dynamics*.
- Davidson, P.A. (2001)** :An Introduction to Magnetohydrodynamics, *Cambridge University Press*
- El Gallaf (2010)** : Etude de la dynamique non-linéaire des écoulements chauffés et soumis à des champs magnétiques, thèse de doctorat, *l'école centrale de Lyon*.

-
- Escudier, M. P.(1984)** :Observations of the flow produced in a cylindrical container by a rotating end wall, *Experiments in Fluids*, vol. 2, pp. 189-196.
- Escudier, M. P. et Cullen, L. M. (1996)**:Flow of a Shear-Thinning Liquid in a Cylindrical Container with A Rotating End Wall , *Experimental Thermal and Fluid Science* , vol.12,pp. 381-387.
- Gauthier, G., Gondret, P., Moisy, F. et Rabaud, M.(2002)**: Instabilities in the flow between co and counterrotating disks, *J. Fluid Mech*
- Gelfgat, A. Yu., Bar-Yoseph, P. Z. et Solan, A. (1996)** :Steady states and oscillatory instability of swirling flow in a cylinder with rotating top and bottom, *Physics of Fluids*, vol. 8, n°10, pp. 2614-2625.
- Gelfgat, A. Yu, Bar-Yoseph. P. Z. et Solan, A. (2001)**: Effect of axial magnetic field on three-dimensional instability of natural convection in a vertical Bridgman growth configuration, *Journal of Crystal Growth* , vol.230 , pp.63–72
- Gelfgat, Yu. M. et Gelfgat,. A.Yu. (2004)**: experimental and numerical study of rotating magnetic field driven flow in cylindrical enclosures with different aspect ratios, *Magnetohydrodynamics*, vol. 40, No. 2, pp. 147–160.
- Hide, R. et Titman, C.W.(1967)**: Detached shear layers in a rotating fluid, *J. Fluid. Mech* , vol. 29, pp.39–60.
- Hof, B., Juel, A. et Mullin, T. (2003)**:Magnetohydrodynamic damping of convective flows in molten gallium, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 482, pp. 163–179.
- Iwatsu, R. (2004)**: Flow pattern and heat transfer of swirling flows in cylindrical container with rotating top and stable temperature gradient, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 47, pp. 2755–2767.
- Iwatsu, R. (2005)**: Numerical Study of Flows in a Cylindrical Container with Rotating Bottom and Top Flat Free Surface , *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 74, N° 1, pp. 333-344.
- Juel, A., Mullin,T., Ben Hadid, H. et Henry, D. (1999)** :Magnetohydrodynamic convection in molten gallium ,*Journal of Fluid Mechanics*,vol. 378, pp.97-118.
- Juel, A., Mullin,T., Ben Hadid, H. et Henry, D. (2001)**: Three-dimensional free convection in molten gallium, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 436, pp. 267-281.
- Kaddeche,S. , Gharbi,A. , Henry,D. , Ben Hadid, H., Lili,T. (2003)** : Effet of the orientation of a horizontal magnetic field on the stability of Hadley flow, *Comptes Rendus Mécanique*, vol 331 - N° 6 pp 431-436
-

-
- Kakarantzas, S.C, Sarris, I.E., Grecos, A.P. et Vlachos, N.S. (2009):** Magnetohydrodynamic natural convection in a vertical cylindrical cavity with sinusoidal upper wall temperature,, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 52, pp.250–259.
- Kharicha, A., Alemany, A. et Bornas. D. (2004):** Influence of the magnetic field and the conductance ratio on the mass transfer rotating lid driven flow, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 47, pp. 1997–2014.
- Kharicha, A., Alemany, A. et Bornas, D (2005):** Hydrodynamic study of a rotating MHD flow in a cylindrical cavity by ultrasound Doppler shift method, *International Journal of Engineering Science*, vol. 43, pp. 589–615.
- Lienhard IV. J. H et Lienhard V. J. H (2005):** A Heat Transfer Textbook, 3rd Ed., *Cambridge, MA: Phlogiston Press.*
- Lopez, J. M., Hart, J. E., Marques, F. ,Kittelman, S. et Shen, J. (2002) :**Instability and mode interactions in a differentially-driven rotating cylinder, *J. Fluid Mech.* vol.462, pp.383–409.
- Lopez, J. M. Marques, F. et Jie Shen (2002):** An Efficient Spectral-Projection Method for the Navier–Stokes Equations in Cylindrical Geometries, *Journal of Computational Physics*, vol.176, pp.384-401.
- Lopez, J. M. et Perry, A. D. (1992) :**Axisymmetric vortex breakdown. Part 3: Onset of periodic flow and chaotic advection, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 234, pp. 449-471
- Lopez,. J. M. (2012):** Three-dimensional swirling flows in a tall cylinder driven by a rotating
- Ma, N. , Walker,J. S. et Witkowski, L. M. (2004a):** Combined effects of rotating magnetic field and rotating system on the thermocapillary instability in the floating zone crystal growth process, *Transactions of the ASME, Journal of Heat Transfer*, vol. 126, pp.230-235.
- Ma, N., Hui Zhang, R., Larson, D. J. et Mandai, K. C. (2004b):** Dynamics of melt-crystal interface and thermal stresses in rotational Bridgman crystal growth process, *Journal of Crystal Growth*, vol. 266, pp. 216-223.
- Marty, Ph., Witkowski, L. M., Trombetta, P. et Tomasino, T. (1999):**On The Stability of Rotating MHD Flows , *Transfer Phenomena in Magnetohydrodynamic and Electroconducting Flows*, pp. 327-343, 1999.
- Michelson, J. A. (1986):** Modelling of laminar incompressible rotating fluid flow, AFM 86-05, Ph. D. Dissertation. Dept of Fluid Mechanics, Tech. Univ. of Denmark.
- Michelson, J. A. (1986):** Modeling of laminar incompressible rotating fluid flow, AFM 86-05, Ph. D. Dissertation. *Dept of Fluid Mechanics, Tech. Univ. of Denmark.*
- Mittal, V., Baig, M. F. et Kant Khan, B. (2005) :**Buoyancy-driven convection in liquid metals
-

subjected to transverse magnetic fields, *Journal of Indian Institute of Science*, vol. 85, pp. 119–129.

Moisy, F., Pasutto, T. et Rabaud, M. (2002): Instability patterns between counter-rotating disks, Nonlinear, *Processes in Geophysics*, Ed. G.W. Fröh

Moisy, F., Doaré, O., Pasutto, T. Daube, O. et Rabaud, M. (2004): Experimental and numerical study of the shear-layer instability between two-counter-rotating disks, *J. Fluid Mech*, vol.507, pp.175-202.

Moisy, F. et Pasutto, T. (2002): Etude des instabilités de l'écoulement entre disques contra-rotatifs par PIV, *Laboratoire FAST, Bat. 502, F-91405 Orsay Cedex*

Nore, C. Tuckerman, L.S., Daube, O. et Xin, S. (2003): 1:2 mode interaction in exactly counter-rotating von Kármán swirling flow, *J. Fluid Mech*, vol. 477, pp. 51-88.

Nore, C., Moisy, F. et Quartier, L. (2005) : Experimental observation of near-heteroclinic cycles in the Von Kármán swirling flow, *physics of Fluids*

Nore, C., Tartar, M. Daube, O. et Tuckerman, L.S. (2004): Survey of instability thresholds of flow between exactly counter-rotating disks, *J. Fluid Mech*, vol.511, pp.45–65.

Okulov, V. L., Sorensen, J. N. et Voigt, L.K. (2005): Vortex scenario and Bubble generation in a cylindrical cavity with rotating top and bottom, *European journal of Mechanics B/Fluids* . vol.24, pp.137-148.

Omi, Y. et Iwatsu, R. (2005): Numerical study of swirling flows in a cylindrical container with co-/counter-rotating end disks under stable temperature difference, *International Journal of Heat and Mass Transfer* ,vol. 48, pp. 4854-4866.

Patankar, S. V. (1980) : Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, *McGraw-Hill*.

Rabaud, M. et Couder, Y. (1983): Instability of an annular shear layer, *J. Fluid. Mech.* vol.136, pp.291–319.

Serre, E. et Bontoux, P. (2007): Vortex breakdown in a cylinder with a rotating bottom and a flat stress-free surface, *Journal of Heat and Fluid Flow*. vol.28, pp 229-248

Stevens, J.L., Lopez, J.M. et Cantwell, B.J. (1999) : Oscillatory flow states in an enclosed cylinder with a rotating end wall, *Journal of Fluid Mechanics*, vol.389, pp.101-118.

Su, Y.C., Chung, J.N. (2000): Linear stability analysis of mixed convection flow in a vertical pipe, *J. Fluid Mech*, vol. 422, pp. 141-166

Talmage, G., Shyu, S. H., Lopez, J. M. et Walker, J. S. (2000): Inertial effects in the rotationally driven melt motion during the Czochralski growth of silicon crystals with a strong axial magnetic field, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, vol. 51, pp. 267-289

Valentine, D. T. et Jahnke, C. C.(1994) :Flows induced in a cylinder with both end walls rotating, *Physics of Fluids*, vol. 6, pp. 2702-2710

Volz, M. P. et Mazuruk, K. (2004) :Lorentz body force induced by travelling magnetic fields, *Magnetohydrodynamics*, vol. 40, pp. 117-126.

Yesilyurt, S. Motakef, S. Grugel, R. et Mazuruk,K. (2004): The effect of the traveling magnetic field (TMF) on the buoyancy-induced convection in the vertical Bridgman growth of semiconductors, *Journal of Crystal Growth*, vol. 263, pp. 80-89.

ملخص

يمثل هذا العمل دراسة رقمية لسريان سائل معدني ناتج عن دوران الغطاء السفلي و العلوي لاسطوانة مملوءة، حيث عدد برنولد يساوي ($Pr=0.015$) ونسبة الطول بنسبة للعرض هي 2، توضع الاسطوانة تحت تأثير حمل حراري وحقل مغناطيسي موجه من الأسفل لأعلى ، الدراسة قسمت إلى جزئين الجزء الأول من هذه الدراسة اهتم بالسريان المتناظر بالنسبة لمحور الدوران، من اجل حل المعادلات التفاضلية التي تتحكم في هذه الظاهرة استعملنا طريقة الأحجام المنتهية. بما أن سريان المائع غير ثابت و يحتوي على تركيبات مختلفة، قمنا بمقارنة في وضعية الحل الثابت (ليس هناك تغير مع الزمن) بين سريان المائع في حالة الدوران في نفس الاتجاه وفي حالة الدوران في عكس الاتجاه. في حالة الحل الغير الثابت(الحل يتغير مع مرور الزمن) ومن اجل مختلف قيم عدد هارتمان ($Ha=0, 5, 10, 20, 30$) ومن اجل مختلف قيم عدد ريتشاردسون ($Ri=0, 0.5, 1, 2, 4$) أوضحننا تأثيره على عدد رينولدز الحرج Re_{cr} و التواتر الاهتزازي F_{cr} . أنجزنا مخططات توضح العلاقة بين عدد رينولدز الحرج وعدد هارتمان مع تغير عدد ريتشاردسون وكذلك مخططات تبين المقارنة للدوران في نفس الاتجاه والدوران في عكس الاتجاه للغطاء العلوي والسفلي للاسطوانة. في الجزء الثاني من الدراسة يقدم النتائج المتحصل عليها في حالة الدراسة بثلاث أبعاد لسريان المائع باستعمال البرنامج التجاري "فلونت". في حالة دوران الغطاء السفلي والعلوي في نفس الاتجاه يظهر في سريان المائع اضطرابات لطبقة المحددة وتصيح ساحة لأشكال متناظرة أو أشكال حلزونية، الحالة الأساسية أو القاعدية تصيح غير ثابتة بفعل اضطراب من طراز $m=1$ بسبب الفرق في درجة الحرارة بين الغطاء العلوي الساخن والغطاء السفلي البارد. إذا رفعنا من قيمة العدد رينولدز هذا الطراز الثابت يترك المكان لتفرع ثاني تنبذبي دوري. في حالة دوران الغطاء السفلي والعلوي في عكس الاتجاه، يكون السريان أكثر اضطراب و يثري بالأشكال المتكونة مع بروز الطراز $m=3$ من اجل $Ha=20$. في حالة الحمل الحراري المصطنع (بالقوة) ($Ri=0$) الطراز الأكثر اضطراب هو $m=1$ (الطراز المختلط) ، إذا رفعنا من جديد في قيمة رينولدز هذا الطراز الثابت يترك المكان لموجة متذبذبة وبعد ذلك متساويات الدور "هتيروكلين" وفي الأخير نحصل على حل جديد ثابت $m=2$ يسمى الطراز الصرف، لرفع من قيم عدد ريتشاردسون ($Ri=0, 0.5, 1, 2, 4$) يتأثر السريان بواسطة تفرع أولي ثابت حيث $m=1$. أنجزنا مخططات توضح العلاقة بين عدد رينولدز الحرج وعدد هارتمان مع تغير عدد ريتشاردسون. من نتائج هذا العمل وجدنا أن حركة الدوران في نفس الاتجاه مختلفة تماما عن الحركة في اتجاه متعاكس، نلاحظ أيضا أن سريان السائل المعدني يتأثر بالحقل المغناطيسي العمودي ويتجه نحو الثبات.

Résumé : Nous présentons une étude numérique d'un écoulement engendré par deux disques tournants en Co/contre-rotation, à l'intérieur d'une enceinte cylindrique, dont le rapport d'aspect $H/R=2$, rempli d'un fluide à faible nombre de Prandtl ($Pr=0.015$), soumise à un gradient de température et un champ magnétique orienté verticalement. L'étude est divisée en deux parties. La première partie de cette étude est consacrée à l'écoulement axisymétrique, un code de calcul basé sur la méthode des volumes finis a été utilisé pour résoudre numériquement les équations gouvernant le phénomène étudié. Cet écoulement est très instable et fait apparaître une grande richesse de structures. Nous avons présenté le cas stable, en faisant la comparaison entre l'écoulement engendré par la co-rotation des disques d'extrémités et la contre-rotation de ces derniers. Dans le cas de régime transitoire, nos simulations numériques ont été présentées pour différentes valeurs du nombre de Hartmann ($Ha=0, 5, 10, 20$ et 30) et différentes valeurs du nombre de Richardson ($Ri=0, 0.5, 1, 2, 4$). Nous présentons leurs effets sur la valeur du nombre de Reynolds critique Re_{cr} et de la fréquence d'oscillation critique, F_{cr} . Des diagrammes de stabilité ont été établis pour mettre en évidence la dépendance du nombre de Reynolds critique avec l'augmentation du nombre de Hartmann Ha , pour différentes valeurs du Richardson Ri . La deuxième partie de cette étude présente les résultats numériques de l'écoulement tridimensionnel qui ont été obtenus par le code CFD Fluent de la même configuration. En co-rotation l'écoulement présente des instabilités de couche limite donnant lieu à des motifs axisymétriques où spirales. L'état de base axisymétrique déstabilisé par une perturbation de mode $m=1$, à cause de l'effet d'une différence de température entre les disques supérieur (chaud) et inférieur (froid). A mesure que le nombre de Reynolds est augmenté, ce mode stationnaire cède la place à une deuxième bifurcation oscillatoire périodique. En contre-rotation l'écoulement est plus instable et présente une grande richesse dans les structures engendrées, avec notamment l'apparition de mode $m=3$ pour $Ha=20$. Dans le cas de convection forcée ($Ri=0$), le mode le plus instable est le mode $m=1$, appelé "mode mixte" (M). A mesure que le nombre de Reynolds est augmenté, ce mode stationnaire cède la place à une onde propagative modulée, puis à des quasi-cycles hétéroclines, pour aboutir enfin à une nouvelle solution stationnaire $m=2$, appelée "mode pur" (P). En augmentant le nombre de Richardson ($Ri=0.5, 1$ et 2), l'écoulement subit une première bifurcation stationnaire avec $m=1$, enfin des diagrammes de stabilité ont été établis. Toutefois, en présence d'un champ magnétique vertical, l'écoulement en co/contre-rotation garde sa stabilité axisymétrique jusqu'à des valeurs du nombre de Reynolds plus grande.

Abstract: We present a numerical study of swirling flows with heat transfer generated by two rotating end disks (co- and counter-rotating) inside a cylindrical enclosure having an aspect ratio equals to 2, filled with a liquid metal, and submitted to a vertical temperature gradient and an axial magnetic field, is studied. The study is divided into two parts. The first part of this study concerns the axisymmetric flow, the governing Navier-Stokes, energy, and potential equations along with appropriate boundary conditions are solved by using the finite-volume method. The flow and temperature fields are presented by stream function and isotherms, respectively. This flow is very unstable and reveals a great richness of structures. In oscillatory regime, results are presented for various values of the Hartmann number, $Ha=0, 5, 10, 20$ and 30 , and Richardson numbers, $Ri=0, 0.5, 1, 2$ and 4 , in order to see their effects on the value of the critical Reynolds number, Re_{cr} . Stability diagrams are established according to the numerical results of this investigation. These diagrams put in evidence the dependence of Re_{cr} with the increase of Ha for various values of Ri . The second part, present the numerical results of the three-dimensional flow which were obtained by Fluent of the same configuration. The flow produced by co-rotating, when Re is increased, the axisymmetric basic state loses stability to circular patterns of axisymmetric vortices and spiral waves. In mixed convection we have found that, the first instabilities to non-axisymmetric flow have azimuthal wavenumber $m=1$. In counter-rotation case, when Re is increased, the axisymmetric basic state loses stability and different complex flows appear successively: steady states with an azimuthal wavenumber of 1 (called M), traveling waves (TW), near-heteroclinic cycles (Het), and steady states with an azimuthal wavenumber of 2 (P). With in particular the appearance of mode $m=3$ for $Ha=20$. The branch of steady states with $m=1$ is the first to bifurcate from the basic state in mixed convection as Re increases. The flow between co-rotating end disks is very different as the flow between counter-rotating end disks. Finally, a bifurcation diagrams are established and this study confirms the possibility of stabilization of a liquid metal flow by application of an axial magnetic field.