

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**Université Mentouri-Constantine
Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Département de Génie Mécanique**

**N° d'ordre :...../Doc/2010
Série :/GM/2010**

THESE

Présentée pour obtenir le Diplôme de Doctorat en Sciences

Option

Energétique

**Etude Numérique de la Convection Mixte Turbulente dans des
Cavités Ventilées**

Par :

Bouaraour Kamel

Soutenue le : ... /.../ 2011

Devant le jury :

PRESIDENT	Nemouchi Z.	Professeur	Université Mentouri- Constantine
RAPPORTEUR	Boudebous S.	Professeur	Université Mentouri- Constantine
EXAMINATEUR	Si Ameur M.	Professeur	Université El Hadj Lakhdar- Batna
EXAMINATEUR	Mezaache E.	Professeur	Université 20 Août 1955- Skikda
EXAMINATEUR	Boufendi T.	Maître des Conférences	Université Mentouri- Constantine
INVITE	Kholai O.	Maître des Conférences	Université Mentouri- Constantine

Table des matières

Remerciements	
Nomenclature	
Abstract	
Résumé	
Introduction	01
Chapitre 1 : Etude Bibliographique	
1-1) La convection laminaire dans les cavités ventilées	04
1-2) Les approches numériques de la turbulence	05
1-2-1) Approche DNS	06
1-2-2) Approche LES	06
1-2-3) Approche RANS	07
1-3) La convection forcée turbulente dans les cavités ventilées	08
1-4) La convection mixte turbulente dans les cavités ventilées	09
Chapitre 2 : Modélisation Mathématique	
2-1) Configuration Géométrique	13
2-2) Modèle Mathématique	13
2-3) Hypothèses Simplificatrices	13
2-4) Modèle de turbulence	15
2-4-1) Les modèles LRN $k-\varepsilon$	15
2-4-2) Le modèle LRN $k-\varepsilon$ de Launder et Sharma	15
2-4-2-1) <i>Equation d'énergie cinétique turbulente</i>	16
2-4-2-2) <i>Equation de dissipation de l'énergie cinétique turbulente</i>	16
2-4-3) Le choix du C_3	17
2-5) Conditions initiales et aux limites	18
2-6) Forme adimensionnelle des équations du modèle mathématique	19
2-7) Forme adimensionnelle des conditions aux limites	20
Chapitre 3 : Etude Numérique	
3-1) Méthode de Résolution	21
3-2) Maillage	21

3-3) Discrétisation des équations.....	23
3-3-1) Discrétisation spatiale	23
3-3-2) Discrétisation temporelles	24
3-4) Stockage des variables.....	24
3-5) Détails de discrétisation.....	26
3-5-1) Equation de continuité.....	26
3-5-2) Equation de conservation suivant X.....	26
3-5-3) Equation de conservation suivant Y.....	28
3-5-4) Equation de la température.....	29
3-5-5) Equation de l'énergie cinétique turbulente.....	30
3-5-6) Equation de dissipation de l'énergie cinétique turbulente.....	32
3-6) Sources des équations discrétisées	34
3-7) Obtention d'une équation de discrétisation de pression.....	35
3-8) Equation de pression.....	36
3-9) Equation de correction de pression.....	37
3-10) Solution des systèmes d'équations de discrétisation par la méthode de balayage.....	38
3-11) Critère de convergence.....	38
3-12) Séquence de l'algorithme SIMPLER de calcul.....	38

Chapitre 4 : Validation des Résultats

4-1) Convection naturelle turbulente	40
4-1-1) Introduction	40
4-1-2) Formulation mathématique	40
4-1-3) Formulation Numérique	42
4-1-4) Résultats et Discussion	43
4-1-4) Conclusion	47
4-2) Convection forcée turbulente	47
4-2-1) Introduction	47
4-2-2) Modélisation mathématique	48
4-2-3) Résultats et discussion	48
4-2-4) Conclusion	50
4-3) Convection mixte turbulente	50
4-3-1) Introduction	50
4-3-2) Formulation Mathématique	51
4-3-3) Résultats et discussion	52
4-3-4) Conclusion	55

Chapitre 5 : Résultats et Discussions

5-1) Indépendance du maillage	56
5-2) Evolution spatio-temporelle de l'écoulement.....	56
5-3) Lignes de courant.....	58
5-4) Profils de la vitesse verticale moyenne.....	60
5-5) Coefficient de frottement.....	62
5-6) Distribution de la température.....	63
5-7) Nombre du Nusselt local.....	65
5-8) Nombre du Nusselt moyen.....	66
5-9) Energie cinétique turbulente.....	69
5-10) Distribution de la viscosité turbulente.....	72
5-11) Contraintes normales de Reynolds.....	74
5-12) Flux de chaleur turbulent	76
5-13) Contraintes de Reynolds.....	77
5-14) Production de l'énergie cinétique turbulente.....	79
5-14-1) Production sous l'effet de la poussée thermique	79
5-14-2) Production sous l'effet des contraintes turbulentes	80
5-15) Dissipation de l'énergie cinétique turbulente	82
5-16) Profils de l'énergie cinétique turbulente	83
5-17) Effet de l'intensité de turbulence à l'entrée.....	84
5-17-1) Effet de l'intensité sur l'énergie cinétique turbulente.....	85
5-17-2) Effet de l'intensité sur le flux de chaleur turbulent.....	87
Conclusion	89
Références Bibliographiques	92
Annexe A	98
Annexe B	103
– K^{ω}	108

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma reconnaissance et mes remerciements au :

Professeur **Boudebous Saadoun**, rapporteur avisé et courageux. Je le remercie de m'avoir permis de réaliser cette thèse dans de telles conditions, aussi bien humainement que professionnellement parlant. Je lui suis évidemment très reconnaissant de m'avoir ainsi fait confiance.

Membres du jury qui m'ont fait l'honneur de juger ce modeste travail :

Professeur : Nemouchi Zoubir, président du jury,

Professeur : M. Si Ameer de l'université de Batna

Professeur : E. Mezaache de l'université de Skikda

Maitre des conférences : O. Kholai de l'université de Constantine

Maitre des conférences : T. Boufendi de l'université de Constantine

Mes remerciements les plus sincères s'adressent tout naturellement à toutes les personnes que j'ai eu la chance de découvrir durant ce long périple de cinq années.

Mes remerciements s'adressent aussi aux enseignants du centre universitaire de Ghardaïa, surtout ceux appartenant au département des sciences de la nature et de la vie.

Nomenclature

x, y : Coordonnées suivant les directions horizontales et verticales respectivement (m)

u, v : Composantes instantanées horizontale et verticale de la vitesse (m/s)

V_{in} : Vitesse verticale à l'entrée (m/s)

k_{in} : Energie cinétique turbulente à l'entrée (m^2/s^2)

ϵ_{in} : Dissipation de l'énergie cinétique turbulente à l'entrée (m^2/s^3)

θ : Température ($^{\circ}C$)

k : Energie cinétique turbulente (m^2/s^2)

ϵ^* : Dissipation de l'énergie cinétique turbulente (m^2/s^3)

p : Pression (Pa)

g : Gravité (m/s^2)

ρ : Masse volumique (kg/m^3)

ρ_0 : Masse volumique à la température de référence (kg/m^3)

ν : Viscosité cinématique (m^2/s)

ν_t : Viscosité cinématique turbulente (m^2/s)

h : Largeur de l'ouverture (m)

L : Longueur du coté de la cavité (m)

θ_0 : Température de référence ($^{\circ}C$)

θ_p : Température de la paroi chaude ($^{\circ}C$)

t : Temps (s)

β : Coefficient d'expansion thermique ($1/^{\circ}C$)

α : Diffusivité thermique (m^2/s^2)

$\overline{u_i u_j}$: Tenseur de Reynolds (m^2/s^2)

I_0 : Intensité de la turbulence

Variables adimensionnelles

X, Y : Coordonnées suivant les directions horizontales et verticales

U, V : Composantes moyennes horizontale et verticale de la vitesse

T : Température moyenne

H : Hauteur de la cavité dans le cas de la convection forcée turbulente

K : Energie cinétique turbulente moyenne

P : Pression moyenne

P_K : Production de l'énergie cinétique turbulente

ν^* : Viscosité cinématique

ν_t^* : Viscosité cinématique turbulente
 ε : Dissipation de l'énergie cinétique turbulente
 h^* : Largeur de l'ouverture
 T_0 : Température de référence
 T_p : Température de la paroi chaude
 τ : Temps adimensionnel
 $\Delta\tau$: Pas de temps de la simulation
 δ : Épaisseur de la couche limite
 Φ : Entité de l'équation de conservation
 Γ_Φ : Coefficient de diffusion de Φ
 S_Φ : terme source de Φ

Les constantes du modèle k- ε

$$C_\mu=0.09$$

$$C_1=1.44$$

$$C_2=1.92$$

$$C_3=0.7$$

$$C_\theta=0.15$$

$$\sigma_k=1.0$$

$$\sigma_\varepsilon=1.0$$

LRN: Low Reynolds Number

LES: Large Eddy Simulation

CFD: Computer Fluid Dynamic

RANS: Reynolds Average Navier-Stokes

TDMA: Tri-Diagonal Matrix Algorithm

RSM : Reynolds Stress Model

QUICK : Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics

SIMPLER: Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation Revised

SIMPLEC: Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation Consistent

Nombres adimensionnels

$$\text{Nombre de Prantdl} \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

$$\text{Nombre de Richardson} \quad Ri = \frac{Gr}{Re^2}$$

Nombre de Reynolds $Re = \frac{V_{in} h}{\nu}$

Nombre de Reynolds turbulent $Re_t = \frac{K^2}{\nu \mathcal{E}}$

Nombre de Grashof $Gr = \frac{g \beta \Delta T h^3}{\nu^2}$

Nombre de Nusselt local $Nu = - \frac{L}{T_p - T_0} \frac{\partial T}{\partial n}$

Nombre de Rayleigh $Ra = \frac{g \beta H^3 \Delta T}{\nu^2}$

Nombre de Nusselt moyen \overline{Nu}

Nombre de Prandtl turbulent $\sigma_t = 1.0$

RESUME

Dans cette étude, nous nous sommes intéressés à la simulation numérique bidimensionnelle de la convection mixte turbulente dans une cavité carrée ventilée. La cavité est équipée par une fente de soufflage située au coin inférieur gauche et une fente de reprise située au coin supérieur gauche. La largeur de la fente représente le 1/10 du côté de la cavité. Les parois de la cavité considérée sont maintenues adiabatiques à l'exception de la paroi verticale gauche qui est portée à une température plus élevée que la température ambiante. Les équations gouvernantes sont discrétisées en utilisant la méthode des volumes finis. La turbulence est modélisée par le modèle LRN k- ϵ de Launder et Sharma, et la technique du balayage ligne par ligne avec l'algorithme de Thomas (TDMA) est employée pour la résolution itérative des équations discrétisées. Les paramètres de contrôle de notre étude sont : le nombre de Grashof basé sur la différence de température entre la paroi chaude et la température du jet d'air vertical à l'entrée qui est fixé à 10^9 , le nombre de Prandtl de l'air pris égal à 0.71 et le nombre de Reynolds qui varie de telle sorte que le nombre de Richardson prend les valeurs suivantes : 0.1, 0.5, 1, 2, 5, 10, 20 et 40. Après l'exécution du programme de calcul élaboré sous langage Fortran, un régime stationnaire est obtenu pour tous les nombres de Richardson considérés. Les lignes de courant montrent un écoulement caractérisé par la présence de deux cellules contrarotatives pour $0.1 \leq Ri \leq 5$, dont la taille et la forme dépendent du nombre de Richardson. En augmentant le nombre de Richardson, plusieurs cellules de formes irrégulières prennent naissance dans la partie supérieure de la cavité pour $Ri=10$, $Ri=20$ et $Ri=40$, où nous avons constaté une stratification thermique stable. La variation du nombre du Nusselt moyen en fonction du nombre de Reynolds, montre que le transfert de chaleur chute brusquement lorsque la convection forcée est dominante ($0.1 \leq Ri < 2$). Cependant pour des nombres de Reynolds moins élevés ($5 \leq Ri \leq 40$), les caractéristiques du transfert thermique changent, indiquant une diminution presque linéaire du nombre du Nusselt moyen. La zone adjacente à la paroi chaude est le siège de développement des couches limites thermiques et dynamiques, où des gradients importants de température et de vitesse ont été constaté, influant par la suite les profils des quantités turbulentes telles que les contraintes de Reynolds, la production et la dissipation de l'énergie cinétique turbulente. La variation de l'intensité de turbulence à l'entrée de : $I_0=1\%$ à $I_0=4\%$ et $I_0=8\%$, n'a pas donné une grande influence sur le champ de vitesse moyenne et de température moyenne, cependant une faible influence est signalée pour les quantités turbulentes.

Mots clés : Cavité ventilée, convection mixte turbulente, modèle k- ϵ de Launder et Sharma, nombre de Richardson.

ABSTRACT

In this study, we are interested by the two-dimensional numerical simulation of turbulent mixed convection in a ventilated square cavity. The cavity is equipped with a slot entrance located in the bottom left corner and a slot exit located at the upper left corner of the cavity. The width of the slot is 1/10 of the side of the cavity. The considered cavity walls are maintained adiabatic, except the vertical left wall which is heated to a higher temperature than the ambient temperature. The governing equations are discretized using the finite volume method. Turbulence is modelled by the LRN k - ϵ model of Launder and Sharma, and the line by line technique with the Thomas algorithm (TDMA) is employed for solving iteratively the discretized equations. The control parameters of our study are: the Grashof number based on the difference between the temperature of the hot wall and the temperature of the vertical air stream at the entrance that is set to 10^9 , Prandtl number of air taken equal to 0.71 and the Reynolds number which vary as the Richardson number takes the following values: 0.1, 0.5, 1, 2, 5, 10, 20 and 40. After running the calculation program developed under FORTRAN language, a steady state solution is obtained for all considered Richardson numbers. Streamlines show a flow characterized by the presence of two contra-rotating cells for $0.1 \leq Ri \leq 5$, whose size and shape depend on the Richardson number. By increasing the Richardson number, more cells with irregular shapes are formed in the upper part of the cavity for $Ri = 10$, $Ri = 20$ and $Ri = 40$, where we found a stable thermal stratification. The variation of average Nusselt number as a function of Reynolds number, shows that the heat transfer drops sharply when the forced convection is dominant ($0.1 \leq Ri < 2$). However, for lower Reynolds numbers ($5 \leq Ri \leq 40$), the heat transfer characteristics change, indicating an almost linear decrease of the average Nusselt number. The region adjacent to the heated wall is the place where thermal and dynamic boundary layers are developed, and as a consequence important values of temperature and velocity are detected, influenced the turbulent quantities profiles, as the Reynolds stresses, the production and the dissipation rate of the turbulent kinetic energy. The variation of the turbulence intensity at the entrance from: $I_0 = 1\%$ to $I_0 = 4\%$ and $I_0 = 8\%$ did not have a large influence on the velocity and temperature fields; however, a small impact is reported on the turbulent quantities.

Keywords: ventilated cavity, mixed turbulent convection, k - ϵ model of Launder and Sharma, Richardson number.

INTRODUCTION

Introduction

La simulation numérique en mécanique des fluides (C.F.D : Computational Fluid Dynamics) est devenue un outil indispensable dans les processus de développement de systèmes innovants dans divers domaines de l'industrie (énergie, chimie des procédés, hydraulique, pollution et environnement...). Cet outil n'a cessé de se développer durant les cinquante dernières années ce qui a permis un essor considérable, non seulement des connaissances théoriques des phénomènes physiques, mais aussi des applications pratiques dans les domaines déjà cités. Cette progression est due essentiellement au développement simultané des méthodes numériques et des moyens informatiques.

Le phénomène de la convection mixte en régime turbulent se produisant dans des milieux confinés ou semi confinés bénéficie, actuellement, d'une attention particulière de la part de nombreux chercheurs. Les études expérimentales relatives à ce phénomène sont souvent difficiles à réaliser, très longues et coûtent très chers, par contre, les simulations numériques, sont devenues incontournables pour la résolution des écoulements très complexes rencontrés dans la plus part des domaines industriels.

Ces écoulements sont majoritairement turbulents et leurs principales caractéristiques sont bien connues au jour d'aujourd'hui, bien qu'il n'existe pas une définition universelle du phénomène de la « turbulence ». D'une manière générale, en présence de sources de chaleur dans un écoulement, le régime de celui-ci ne dépend plus du nombre de Reynolds mais dépend du nombre de Grashof (ou du nombre de Rayleigh). A partir d'une valeur critique de ce dernier, l'écoulement passe du régime laminaire au régime turbulent. Le fluide est alors animé de mouvements tourbillonnaires aléatoires, il est brassé dans toutes les directions et il n'y a plus d'écoulement stratifié. Dans ce type d'écoulement tous les échanges (thermiques, massiques...) sont favorisés par les fluctuations des entités physiques telles que la vitesse, température..., et il n'est plus possible de connaître la vitesse et la température du fluide en tout point, mais seulement sa vitesse et sa température moyenne. La complexité de la dynamique de ces écoulements peut conduire à envisager différentes approches de modélisation de leur formulation mathématique.

L'une des approches la plus fréquente dans l'étude des écoulements turbulents utilise le modèle à deux équations de fermeture ; l'une d'elles traduit le transport de l'énergie cinétique turbulente k et l'autre son taux de dissipation ϵ . Cependant, la version standard de ce modèle a des difficultés à prédire correctement la physique « proche paroi » surtout en ce qui concerne le phénomène de la convection. On peut identifier plusieurs phénomènes physiques qui peuvent être mal capturés par

les modèles de turbulence classiques et qui pourraient expliquer les écarts observés entre calculs et mesures. Afin d'adapter ce modèle à des situations variées, en particulier aux écoulements impliquant un transfert thermique près des parois, de nombreuses modifications lui ont été apportées. Celles-ci constituent la famille des modèles appelée « LRN $k-\epsilon$ » (Low Reynolds Number). Actuellement ces modèles sont les plus répandus dans les codes RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes).

Le présent travail consiste à déterminer numériquement le champ thermique et dynamique ainsi que les différentes quantités turbulentes à l'intérieur d'une cavité ventilée. Afin de conférer un maximum de clarté à ce document, le plan qui a été adopté est articulé autour de cinq chapitres :

Dans le premier chapitre, nous exposons les différentes études numériques et expérimentales traitant les problèmes de convection laminaire et turbulente dans les compartiments ventilés. Nous avons cité les différentes approches numériques, qui diffèrent par leurs degrés de complexité, et par les équations supplémentaires qu'il faut résoudre.

Le deuxième chapitre de notre travail s'attache à décrire la configuration géométrique du problème étudié, ainsi que les équations mathématiques régissant le phénomène de la convection mixte turbulente dans une cavité ventilée. Pour se situer dans le cadre de la convection mixte, les parois de la cavité carrée ventilée sont adiabatiques, à l'exception de la paroi verticale gauche, qui est portée à une température supérieure à la température ambiante, et qui est parcourue par un jet d'air turbulent entrant par une ouverture située dans le coin inférieur gauche, et sortant par une autre située dans le coin supérieur gauche. Cette configuration est la même que celle étudiée par Angirasa [1], en considérant seulement le cas du régime est laminaire. Le modèle LRN $k-\epsilon$ de Launder et Sharma a été utilisé pour la fermeture du système d'équations gouvernant le phénomène de la convection en régime turbulent.

Dans le troisième chapitre, nous nous sommes intéressés à la formulation numérique du problème étudié. La méthode des volumes finis est utilisée pour la discrétisation des équations gouvernant l'écoulement à l'intérieur de la cavité. Les termes temporels sont discrétisés à l'aide d'un schéma implicite d'ordre deux, et le schéma de la loi des puissances est adopté pour la discrétisation spatiale. Le couplage vitesse-pression, est traité grâce à l'algorithme SIMPLER. L'algorithme de Thomas à double balayage est employé pour la résolution itérative des systèmes des équations discrétisées.

Le quatrième chapitre est consacré à la validation de notre code de calcul établi en langage Fortran. Nous avons alors considéré l'étude numérique de la convection en régime turbulent pour trois configurations géométriques différentes. Il s'agit des problèmes suivants : la convection

naturelle turbulente dans une cavité carrée, la convection forcée turbulente dans une cavité ventilée et la convection mixte turbulente dans une cavité ventilée. Les résultats numériques obtenus sont confrontés respectivement aux résultats expérimentaux de : Tian et Karayiannis [2], Nielson [3] et de Blay, Mergui et Niculae [4]. La comparaison de ces résultats montre un accord acceptable qui nous permet d'adapter ce programme pour le sujet considéré dans cette thèse.

Dans le dernier chapitre, nous discutons les résultats des différentes simulations numériques obtenues. Nous avons fixé le nombre de Grashof à 10^9 , et nous avons fait varier progressivement le nombre de Reynolds de telle sorte qu'on passe du régime de la convection forcée turbulente à la convection naturelle turbulente passant par le régime de la convection mixte. Nous avons aussi considéré l'influence de certains paramètres sur la morphologie générale de l'écoulement dans la cavité, et sur les quantités physiques calculées.

CHAPITRE 1 :

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Depuis toujours, les écoulements convectifs présentent un aspect permanent de la vie quotidienne car ils sont largement rencontrés dans plusieurs détails de notre environnement. La convection dans des espaces rectangulaires est un sujet d'investigation de grande importance, vue sa présence dans différentes applications industrielles tels que : le refroidissement des composants électroniques, les pertes de chaleur dans les collecteurs solaires et la ventilation des locaux.

1-1) Convection laminaire dans les cavités ventilées

Sefcik et al [5], ont étudié numériquement la convection naturelle dans des cavités ventilées verticalement. Une telle cavité est telle que l'écoulement flottant et le transfert de chaleur sont conditionnés par des événements au sommet et au plancher des parois de la cavité. Les équations de conservation sont résolues numériquement par la technique des différences finies avec les conditions aux limites appropriées de pression aux événements. Les résultats révèlent un transfert thermique local non uniforme le long des parois isothermes du fait de blocage à l'entrée. Un maximum local et un minimum du transfert thermique apparaissent dans la moitié inférieure de la cavité. Les prédictions du champ d'écoulement révèlent que ces extrema sont attribuables à une zone de recirculation proche de l'événement d'entrée et au recollement de l'écoulement primaire le long de la paroi chauffée. Les résultats montrent un comportement asymptotique au cas classique des plaques verticales parallèles lorsque la largeur de l'événement d'entrée s'approche de celle de la cavité.

Pour décrire le mouvement d'air induit par une flamme dans une enceinte ventilée, Abib et Jaluria [6], ont placé une source de chaleur dans l'un des coins inférieurs d'une cavité rectangulaire. Cette dernière est équipée par une seule ouverture vers le milieu ambiant. Ils ont trouvé un régime cellulaire, caractérisé par une zone de recirculation principale dans la partie inférieure, et une faible cellule en contra-rotation près de la paroi supérieure. Ils ont trouvé aussi que dans le cas bidimensionnel des configurations ventilées l'effet de la taille de l'ouverture [7] n'est pas important pour les faibles nombres de Rayleigh, contrairement aux grands nombres de Rayleigh. La même idée de placer une source de chaleur dans une cavité est aussi utilisée par Papanicolau et Jaluria [8] pour une cavité carrée ventilée à parois adiabatiques.

Une étude numérique tridimensionnelle de la convection laminaire dans une cavité ventilée est menée par Yu et Joshi [9]. Le but était de simuler le comportement d'une composante électronique placée dans une cavité équipée par une seule ouverture vers l'extérieur. Pour cela, une source de chaleur est fixée sur l'une des parois verticales de l'enceinte, et l'ouverture de ventilation vers l'extérieur prend différentes positions. Pour des nombres de Rayleigh entre 10^4 et 10^6 , les résultats obtenus montrent que la position et la largeur de l'ouverture de ventilation jouent un rôle important sur la distribution du champ thermique et les valeurs moyennes du nombre de Nusselt.

Dans le cadre de la convection forcée laminaire dans une cavité carrée ventilée, une étude numérique bidimensionnelle est menée par Saeidi et Khodadadi [10]. L'ouverture d'entrée est fixe, tandis que l'ouverture de sortie prend neuf positions sur les quatre cotés. Pour un nombre de Prandtl égal à 5, et pour des nombres de Reynolds égal a : 10, 40, 100 et 500, les auteurs ont examiné 108 cas différents. Ils ont trouvé un régime multicellulaire qui dépend du nombre de Reynolds essentiellement, caractérisé par la présence des vortex en co-rotation ou en contra-rotation. Ces derniers ont une influence notable sur la distribution du champ thermique dans la cavité. Ils ont trouvé aussi que pour minimiser les pertes en pression, les ouvertures d'entrée et de sortie de fluide doivent être parallèles.

Raji et Hasnaoui [11] ont fait l'étude numérique de la convection mixte laminaire dans une cavité rectangulaire ventilée où l'une des parois verticales est soumise à un flux de chaleur constant, et les autres parois sont maintenues adiabatiques. Pour des nombres de Rayleigh entre 10^3 et 10^6 , et des nombres de Reynolds entre 5 et 5000, l'objectif était d'examiner le champ thermique et dynamique afin de proposer des relations de corrélation.

En convection mixte, d'importants travaux ont été réalisés sur des problèmes de refroidissement des composants électroniques. Le recours à ce processus d'évacuation de la chaleur est justifié par son efficacité et également par les faibles coûts qu'il nécessite.

La plupart des écoulements rencontrés en mécanique des fluides sont turbulents, et le principal problème réside dans la connaissance des phénomènes les régissant, la mise en place de modèles statistiques de prédétermination des écoulements aussi précis que possible, notamment pour le monde industriel, en particulier la détermination des tensions de Reynolds apparaissant dans les équations moyennées de Navier Stokes.

1-2) Approches numériques de la turbulence

La turbulence est une propriété d'un écoulement, non du fluide utilisé. Il n'existe pas de véritable définition de la turbulence, mais on la caractérise par ses propriétés. Quand l'écoulement est turbulent, les grandeurs physiques macroscopiques (vitesse, pression) varient de façon rapide et aléatoire. Un écoulement turbulent est nécessairement rotationnel : ainsi, un champ acoustique, même aléatoire, n'est pas turbulent. La turbulence se caractérise aussi par une diffusivité élevée (température, quantité de mouvement, ...). Un écoulement turbulent est donc un écoulement à grand nombre de Reynolds.

La turbulence développée se caractérise par un large spectre de dimensions des tourbillons, les tourbillons les plus grands interagissent entre eux pour former des structures de plus en plus petites.

Cet état désordonné favorise les échanges de chaleur et de masse, qui sont alors beaucoup plus important que pour un écoulement laminaire.

Plusieurs techniques expérimentales ont été élaborées pour répondre aux besoins des calculs des vitesses en écoulements turbulents, comme l'anémomètre à fil chaud, le PIV (vélocimétrie par image des particules) et le LDV (vélocimétrie Laser-Doppler). Parallèlement, il existe plusieurs techniques numériques de calcul de la turbulence plus ou moins simplifiées. Les trois approches les plus répandues sont :

1-2-1) Approche DNS

Dans le cas d'un calcul DNS, aucune hypothèse n'est introduite par rapport aux caractéristiques de l'écoulement, et la simulation consiste à résoudre « brutalement » les équations locales régissant le phénomène physique (équations de Navier-Stokes, de l'énergie, de la concentration en polluants, du rayonnement...). Cette méthode impose de travailler avec des discrétisations très fines afin de capter toutes les échelles spatio-temporelles de l'écoulement, avec typiquement plusieurs millions, voire dizaines de millions de points et nécessite donc des moyens de calculs très importants. Ses principaux domaines d'utilisation à l'heure actuelle concernent des études fondamentales de stabilité mais elle est également utilisée pour tester la validité des modèles de turbulence ou de sous maille, pour des configurations simples. Les limites de temps de calcul et d'occupation de la mémoire des ordinateurs limitent actuellement ce type de résolution numérique à des situations très faiblement turbulentes et à des géométries simples. Puisque l'on peut difficilement résoudre directement la turbulence, il faut la modéliser afin de pouvoir résoudre numériquement le problème initial de manière approchée. Parmi les techniques issues de la mécanique des fluides, deux grandes familles existent :

1-2-2) Approche LES

La simulation des grandes échelles (LES), qui consiste globalement à ne résoudre les échelles turbulentes qu'à partir d'une certaine taille, pour cela les équations de Navier Stocks sont filtrées spatialement, la taille du filtre étant caractéristique de la partie résolue et de la partie modélisée de la turbulence (filtrage spatiale) [12]. L'effet des petites structures (dites de sous-maille) est pris en compte par l'apparition de termes supplémentaires dans les équations filtrées (équations du mouvement, de l'énergie...). Ces nouveaux termes doivent être modélisés afin de fermer le système d'équations. Tout comme précédemment, de nombreux modèles ont été proposés pour représenter l'action des échelles de sous-mailles. Cette méthode permet de conserver de manière naturelle l'aspect instationnaire des écoulements, puisque les équations sont filtrées spatialement et non de

manière temporelle. Les quantités moyennes peuvent ensuite être obtenues par simple analyse statistique des résultats, tout comme pour une expérimentation physique. La LES nécessite globalement des maillages plus fins que ceux employés pour les méthodes RANS, qui sont globalement plus diffusifs, et donc plus stables, du moins avec les modèles de turbulence classiques de type k- ϵ .

L'évolution de la puissance de calcul des ordinateurs rend l'utilisation de la LES de moins en moins marginale dans le cadre des cavités ventilées. L'utilisation du modèle simple de Smagorinsky ne permet pas de prédire correctement les écoulements complexes [13].

1-2-3) Approche RANS

Pour l'approche RANS, on cherche les valeurs moyennées en temps des différentes variables, de manière analogue à ce qui est obtenu à partir d'une analyse statistique de résultats expérimentaux. Les variables instationnaires sont alors décomposées en une partie moyenne et une partie fluctuante (décomposition de Reynolds), et les équations caractéristiques sont obtenues par un filtrage temporel des équations initiales qui permettent de faire apparaître comme variable principale les valeurs moyennes (RANS). Le filtrage des termes non-linéaires fait apparaître des termes supplémentaires, qui nécessitent d'être modélisés afin d'obtenir la fermeture du système d'équations. De nombreux modèles ont été élaborés lors des dernières décennies, depuis les modèles à zéro équation supplémentaire (longueur de mélange de Prandtl), jusqu'à des modèles qui font appel aux équations de bilan des tensions de Reynolds (modèles du 2nd ordre). Le modèle le plus employé pour les applications industrielles est probablement le modèle k- ϵ , qui introduit deux équations supplémentaires, une équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente k, et une équation pour le taux de dissipation de cette énergie ϵ . Ce modèle de base a fait l'objet de nombreuses études et de modifications afin de l'adapter à des situations variées, en particulier aux écoulements de parois, fortement anisotropes (modèles à bas nombre de Reynolds par exemple). Les modèles RANS permettent de traiter des problèmes de grandes tailles, et pour des configurations très compliquées. Cependant, l'expertise de l'utilisateur demeure nécessaire pour l'obtention de résultats satisfaisants.

Lorsque on parle de la turbulence, il est nécessaire d'introduire le nombre de Reynolds turbulent défini par : $Re_t = k^2 / \nu \epsilon$. Etant donné la nature des mouvements d'air dans une cavité, il y'aura toujours des régions pour lesquelles Re_t sera faible, en particulier près des parois. Dans ces régions les effets visqueux sont prédominants sur les effets turbulents, or le modèle k- ϵ standard est développé pour des fluides à grands nombres de Reynolds turbulent.

Il y a trois façons d'utiliser le modèle k- ϵ à bas nombre de Reynolds turbulent :

- L'utilisation des fonctions de paroi.
- L'utilisation des modèles bi-couches.
- L'utilisation d'un modèle k- ϵ modifié pour tenir compte des bas nombres de Reynolds dans l'écoulement.

Ce dernier modèle appelé LRN est une modification du modèle standard afin de rendre ce dernier valide dans une large gamme d'écoulement. Les modifications sont réalisés par l'apport des fonctions d'amortissement et des termes additionnels introduits dans les équations de transport de k et ϵ afin d'atténuer le comportement turbulent.

1-3) Convection forcée turbulente dans les cavités ventilées

La convection forcée turbulente dans les cavités ventilées est étudiée numériquement de manière extensive par Davidson. Dans sa première étude [14], la méthode des différences finies est employée pour simuler le mouvement turbulent d'air dans une cavité bidimensionnelle équipée par une fente de soufflage et une autre de reprise. Le modèle k- ϵ est employé avec plusieurs approches pour l'écoulement proche paroi. Les résultats obtenus sont affrontés avec les données expérimentales de Nielson où une concordance remarquable est signalée pour tous les schémas numériques utilisés à l'exception du cas où le schéma QUICK est adopté. Dans sa deuxième étude [15, 16], la simulation des grandes échelles est employée pour prédire l'écoulement tridimensionnel d'air dans une cavité ventilée. La méthode des volumes finis est utilisée avec deux modèles LES, qui sont le modèle de Smagorinsky et le modèle de sous-maille dynamique. Les résultats numériques sont comparés avec ceux tirés de l'expérience de Restivo [17]. Les conclusions tirées de cette étude défavorise l'utilisation du modèle de Smagorinsky, car les résultats sont très influencés par la constante de ce dernier [13], contrairement aux résultats tirés depuis le deuxième modèle. Une comparaison des différents modèles LES pour simuler la convection forcée turbulente dans des cavités ventilées est donnée dans la référence [18]. Dans sa troisième étude [19], un nouveau modèle dynamique LES à une équation de fermeture est développé, capable de prédire les écoulements avec recirculations dans les cavités ventilées (Les détails se trouvent dans la référence [20]). Ce modèle est testé aussi dans le cas de la turbulence dans des cavités fermées pour un nombre de Rayleigh : $Ra = 4.10^{10}$, où la comparaison avec le modèle de Lam et Bramhorst (1981) a donné des résultats satisfaisants par rapport à l'expérience de Cheesewright et al [21].

L'efficacité des modèles à deux équations de fermeture pour la turbulence pour des écoulements forcés est testée par Peng et al [22]. Ils ont utilisé trois modèles de turbulence qui sont : le modèle k- ϵ , le modèle k- ω , et le modèle k- τ . La comparaison est faite du point de vue précision et efficacité, pour deux configurations, dont l'une présente l'écoulement dans une cavité ventilée, et

l'autre présente l'écoulement avec séparation. Le modèle $k-\omega$ a échoué de prédire le point de séparation bien qu'il est le plus rapide à converger, contrairement au modèle $k-\tau$. Pour les écoulements considérés, le modèle $k-\varepsilon$ semble être le plus convenable. Ce résultat même est trouvé par Chen [23] lors de l'analyse numérique de l'écoulement turbulent d'air dans des cavités. Partant de la turbulence naturelle à la turbulence forcée passant par la turbulence mixte, trois configurations géométriques ont été utilisées, parmi les on trouve une cavité ventilée. La conclusion la plus importante tirée de cette étude, est que le modèle de tension de Reynolds est très compliqué que les modèles à deux équations de fermeture comme le modèle $k-\varepsilon$ par exemple, et par conséquent un effort numérique supplémentaire est nécessaire pour le rendre convenable à des applications pratiques. Les résultats obtenus ont réussi à prédire l'anisotropie et les recirculations secondaires dans les cavités. En plus, ils ont montré un bon accord avec l'expérience pour le champ de la vitesse moyenne, mais concernant les quantités turbulentes la concordance est moins rigoureuse.

Toujours, et concernant la performance des modèles à deux équations de fermeture, une étude numérique sur le refroidissement des pales des turbines à gaz est menée par Bredberg [24] où plusieurs modèles de type $k-\varepsilon$ et $k-\omega$ ont été employés. La méthode des volumes finis employant le schéma HYBRIDE pour la discrétisation des équations de conservation de la quantité de mouvement, et le schéma QUICK pour les quantités turbulentes a été adopté. L'algorithme SIMPLEC est utilisé pour le couplage vitesse-pression, et la résolution des systèmes des équations de discrétisation est faite par la méthode TDMA. Dans le cas bidimensionnel, les résultats numériques sont comparés avec ceux de Kristoffersen et Andersson [25] tirés à partir d'une étude DNS, cependant pour le cas tridimensionnel, la comparaison est faite avec les données expérimentales de Johnston et al [26]. Les résultats numériques obtenus montrent un accord acceptable avec le champ de vitesse moyenne et une légère déviation par rapport à l'expérience pour le champ de la température. Cette étude offre une discussion riche sur l'effet de la force centrifuge et de la force de Coriolis sur les équations de Navier stokes et sur la turbulence.

1-4) Convection mixte turbulente dans les cavités ventilées

Pour réaliser le cas d'une turbulence mixte dans les cavités ventilées, l'une ou plusieurs parois sont portées à des températures différentes, avec un écoulement venant de l'extérieur de la cavité, ou on localise une source de chaleur à l'intérieur de la cavité avec un écoulement extérieur. Le premier cas correspond à l'étude numérique de Humphrey et To [27]. Ils ont étudié la convection turbulente naturelle et mixte d'air, pour une cavité ouverte chauffée à section rectangulaire, et pour des orientations quelconques. Ils ont trouvé que les détails de la convection naturelle sont fortement gouvernés par les caractéristiques des transferts thermiques. Celles-ci, dépendent non seulement du

nombre de Grashof, mais aussi du rapport d'aspect de la cavité et de l'angle d'inclinaison. Le deuxième cas correspond à l'étude de Perrin et al [28], qu'ils ont analysé l'écoulement généré par un barreau chauffé placé dans une cavité soumise à des jets d'air. L'analyse des transferts de chaleur pariétaux sur le barreau chauffant permet de déterminer l'influence de l'impact des jets sur les pertes thermiques de l'élément chauffant, en fonction du nombre de Richardson.

Les outils numériques demeurent pour une importance majeure pour l'étude des phénomènes de transfert de chaleur et de masse dans les cavités ventilées. Il existe un grand nombre de code CFD disponible (plus d'une centaine), qu'ils soient commerciaux, du domaine public ou propre à certaines institutions. Dans l'étude d'Alchakkif [29] le code de champ FLUENT est employé pour étudier le taux de renouvellement d'air d'un local équipé par une grande ouverture vers l'extérieur. Les débits de renouvellement d'air obtenus sont comparés à des valeurs déduites des corrélations empiriques de la littérature. Malgré que l'accord avec l'expérience fût médiocre, une bonne relation de corrélation entre le taux de renouvellement d'air et le nombre de Richardson est établie.

La ventilation naturelle d'un local en simple ou en double exposition est abordée par Regard [30]. L'objectif principal de la ventilation des locaux est d'assurer une condition confortable à l'intérieur d'un local pour leurs occupants avec le moindre coût d'énergie. Ce type d'écoulement a été l'objet de nombreux travaux numériques et expérimentaux. En particulier de nombreuses études ont été consacrées à l'étude de la convection mixte turbulente dans une cavité ouverte chauffée. Cette configuration présente de nombreuses applications, aussi bien industrielles (collecteurs des capteurs solaires, centrales nucléaires) qu'architecturales (rues en U dans les sites urbains). Le but était de préciser les lois liant le renouvellement d'air aux conditions climatiques, en particulier aux conditions de vent et de température, en ayant recours au code de champ FLUENT. Les résultats numériques obtenus concernant essentiellement le champ de vitesse dans la cavité ainsi que les échanges de chaleur entre les parois de la cavité et l'écoulement extérieur, sont confrontés avec des résultats expérimentaux réalisés dans une salle de classe sur site réel. Bien que les résultats numériques n'ont pas tenu compte du caractère tridimensionnel pour des raisons de consommation des ressources informatiques, ils sont en concordance global avec l'expérience, à l'exception du champ de vitesse qui s'est trouvé sous estimé. Dans le même contexte, une étude numérique est considérée par Peng [31], où une concordance remarquable avec l'expérience est trouvée que soit en utilisant les modèles LRN à deux équations de fermeture, ou bien en utilisant la simulation des grandes échelles.

Le taux de renouvellement d'air dans les espaces closes est un sujet d'investigation de grande importance. Les conditions de confort sont généralement liées à la vitesse d'entrée d'air, la température, l'humidité d'air et à l'intensité de la turbulence. Une étude numérique est menée par

Davidson [32] où il a simulé le mouvement turbulent d'air dans des cavités rectangulaires ventilées de rapport de forme égale à 2 et 2.56, en utilisant un modèle de turbulence à deux équations de type k- ϵ avec lois des parois de telle sorte qu'il capte les effets produit par les faibles nombres de Reynolds près des parois. Trois configurations géométriques des cavités ventilées sont testées numériquement, avec différentes positions d'entrée et de sortie de l'air, et différentes conditions aux limites. Le taux de renouvellement d'air calculé pour deux configurations est confronté aux données expérimentales de Larsson [33] d'une part, et de la formule théorique de Sandberg [34] où un bon accord est signalé.

Presque dans le même contexte, où le but était la modélisation des systèmes de ventilation des bâtiments, une étude à la fois numérique et expérimentale est menée par Kuznik [35]. Par rapport à la température intérieure de la cavité ventilée, trois jets d'air ont été testés, commençant par le cas d'un jet isotherme, ensuite un jet chaud et finalement un jet froid, où le nombre de Reynolds prenait respectivement les valeurs suivantes : 11200, 10400 et 13600. Afin de mieux comprendre ce type de jet, un dispositif expérimental est installé, permettant d'obtenir les champs tridimensionnels de vitesse instantanée. Il est constitué d'une cellule teste équipée par un orifice de soufflage et un autre d'extraction. La modélisation en seconde ordre de la turbulence utilisant le modèle k- ϵ réalisé sous le logiciel FLUENT a permis une meilleure prédiction des écoulements considérés à faible coût, et en particulier les champs thermiques et aérauliques moyens.

Une étude à la fois numérique et expérimentale sur le mouvement turbulent tridimensionnel d'air est menée par Moureh et Flick [36]. Le montage expérimental présente une cavité ventilée de rapport de forme (longueur/largeur) égal à 5.4, et dont la section d'entrée et la section de sortie de l'air se trouvent dans la même face. Une comparaison numérique est réalisée grâce au code de champ FLUENT, qui emploie deux modèles de turbulence à deux équations de fermeture, qui sont le modèle standard k- ϵ et le modèle LRN de Lam-Bramhorst, en plus du modèle à tension de Reynolds (RSM). Les résultats obtenus concernant surtout les caractéristiques du champ de vitesse, ont montré la complexité des écoulements confinés, et l'anisotropie de la turbulence surtout près de la paroi affleurée par le jet d'air. Il est trouvé aussi que seule le modèle à tension de Reynolds était capable de détecter les recirculations secondaires.

Le développement des modèles de fermetures est encore de nos jours un sujet d'intenses activités de recherches et de nombreux efforts sont consacrés aux développements de modèles de turbulence susceptibles de répondre aux exigences précédentes. Dont le but est de trouver le modèle de turbulence le plus convenable aux problèmes de la convection mixte dans des cavités ventilées, une étude à la fois numérique et expérimentale est menée par Costa et al [37]. Ils ont examiné neuf modèles de turbulence de type LRN, sur le mouvement turbulent d'air dans une enceinte

rectangulaire carrée. Cette dernière est équipée par deux fentes de soufflage, l'une se trouve au coin inférieur gauche où un jet chaud d'air crée un mouvement vertical, et l'autre fente se situe au coin supérieur gauche où l'air froid entre de façon horizontale. Les parois de la cavité sont portées à la même température. La seule fente de reprise se situe au coin inférieur droit. Les calculs instationnaires tridimensionnels sont grands consommateurs de temps CPU, et nécessitent des maillages raffinés, c'est pourquoi l'étude numérique est considéré comme bidimensionnelle. Les résultats numériques sont obtenus en utilisant la méthode des volumes finis, avec l'algorithme SIMPLEC pour le couplage vitesse-pression. Pour un nombre de Reynolds du jet froid égal à 623 et un nombre de Froude égal à 4.15, ils ont trouvé que le modèle LRN de Nagano et Hishida offre les meilleurs résultats par rapport à l'expérience. Ils ont trouvé aussi que le rapport de forme joue un rôle important sur les caractéristiques physiques du problème étudié [38].

Le nombre des études traitants de la modélisation numérique des écoulements turbulents dans des cavités ventilées prouve l'intérêt de ce problème dans l'histoire de la mécanique des fluides. Les modèles à deux équations de fermeture semblent être les plus utilisables pour prédire l'écoulement.

CHAPITRE 2 :

MODELISATION MATHEMATIQUE

2-1) Configuration Géométrique

On considère une cavité carrée de côté L , équipée par deux petites ouvertures, l'une située au coin inférieur gauche et l'autre se situe au coin supérieur gauche. Les deux ouvertures sont de largeur identique h qui vaut $L/10$. La paroi verticale gauche de la cavité est portée à une température θ_p supérieur à la température ambiante θ_0 , et les autres parois sont maintenues adiabatiques.

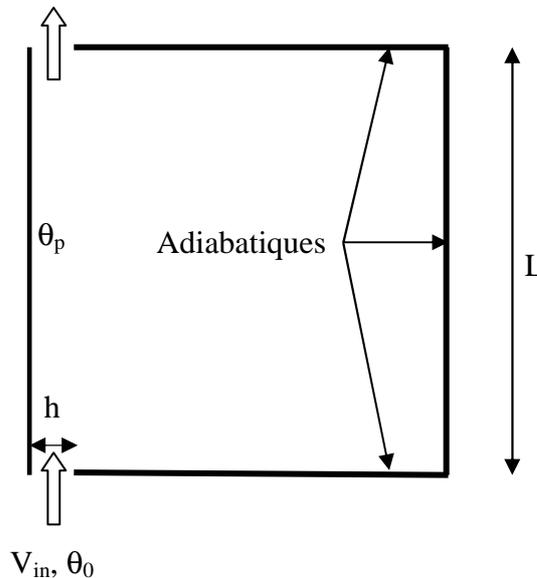


Figure 1.1 : Configuration Géométrique

2-2) Modèle Mathématique

L'écoulement turbulent d'air dans la cavité de la figure 1.1, obéit aux lois physiques de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie.

2-3) Hypothèses Simplificatrices

Les équations de conservation de masse, et d'énergie de notre modèle mathématique sont simplifiées en considérant les hypothèses suivantes :

- L'écoulement est considéré comme bidimensionnel.
- Le fluide est supposé newtonien, et incompressible
- Absence de source de chaleur
- Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable.
- La dissipation de la chaleur par frottement visqueux est négligée
- L'approximation de Boussinesq est considérée c'est à dire que la masse volumique ρ est prise constante dans tous les termes des équations du modèle mathématique sauf dans le terme générateur de la convection naturelle où ses variations induisent directement des forces de poussée d'Archimède (buoyancy force).

- Toutes les autres caractéristiques du fluide ($\nu, \alpha, \beta, \dots$) sont supposées peu dépendantes de la température.

Ces équations sont écrites sous la forme générale suivante :

Equation de conservation de la masse (Equation de continuité) :

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1)$$

Equation de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j U_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \beta (\theta - \theta_0) \quad (2.2)$$

Equation de la conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_i \theta)}{\partial x_i} = -\frac{1}{C_p} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (2.3)$$

Dans ces équations, t représente le temps, ρ la masse volumique, U_i la composante du vecteur vitesse suivant la direction i , θ et θ_0 sont respectivement la température et la température ambiante, P la pression, q_i : le flux thermique suivant la direction i , β le coefficient de dilatation et C_p la chaleur spécifique.

Le premier problème est la définition d'une moyenne, en effet les variations sont trop rapides pour être décrites finement en temps et en espace : on va donc ne s'intéresser qu'à la moyenne de la variable dépendante. En pratique, il est plus judicieux, de faire une moyenne temporelle. Reynolds fait la convention que la valeur de la quantité f égale à une valeur moyenne plus une valeur fluctuante.

Remarque 1 : Les calculs détaillés de la décomposition de Reynolds des équations (2.1), (2.2) et (2.3) se trouvent dans l'annexe A.

En tenant compte de toutes les hypothèses considérées, on aboutit aux équations de Navier-Stokes moyennés (RANS) sous ses formes dimensionnelles exprimant la conservation de la masse, de la quantité de mouvement suivant (OX) et (OY) respectivement, et de l'énergie dans un système de coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u.u) + \frac{\partial}{\partial y}(v.u) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x}(p + \frac{2}{3}\rho_0 k) + \frac{\partial}{\partial x} \left[2(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u.v) + \frac{\partial}{\partial y}(v.v) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y}(p + \frac{2}{3}\rho_0 k) + \frac{\partial}{\partial x} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[2(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + g\beta(\theta - \theta_0) \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u.\theta) + \frac{\partial}{\partial y}(v.\theta) = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] \quad (2.10)$$

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(\theta - \theta_0)] \quad (2.11)$$

2-4) Modèle de turbulence

Il existe différents modèles de turbulence qui se distinguent par leurs degrés de complexité, c'est-à-dire le nombre des équations supplémentaires pour les quantités turbulentes qu'il faut ajouter pour fermer le problème. Les modèles de turbulence les plus utilisés à l'heure actuelle sont les modèles à deux équations surtout ceux qui appartiennent à la famille $k-\varepsilon$.

Lauder et Spalding [39] ont examiné trois différents modèles de turbulence à deux équations, qui sont : le modèle $k-kl$, le modèle $k-\omega$ et le modèle $k-\varepsilon$. Ils ont trouvé que le modèle $k-\varepsilon$ est le modèle le plus simple qui est capable de prédire les écoulements cisailés et les écoulements libres, et son utilisation conduit à des résultats plus précises pour les écoulements avec recirculations comme pour les écoulements en couches limites, sans ajustement spécial pour les constantes ou les fonctions qui appartiennent à ce modèle.

2-4-1) Modèles LRN $k-\varepsilon$

L'hypothèse d'isotropie de la turbulence n'est plus valable au voisinage des parois. L'observation expérimentale montre l'existence au voisinage de la paroi d'une couche dont laquelle l'effet de la viscosité moléculaire devient prépondérant devant celui de la turbulence. C'est la sous-couche laminaire ou la sous-couche visqueuse. Dans cette sous-couche la contrainte de cisaillement totale se limite à la contrainte due à la viscosité moléculaire, et le profil de la vitesse longitudinale est linéaire.

Les modèles LRN sont des modèles de turbulence à deux équations de fermeture, ils constituent une version améliorée du modèle $k-\varepsilon$ standard. Ils ont l'avantage d'éviter une modélisation particulière pour le voisinage des parois en particulier par le biais de lois de paroi, puisqu'il s'étend aux régions dites à bas nombre de Reynolds. Il est suggéré par Lauder [40] que l'utilisation des fonctions des parois n'est plus nécessaire du point de vue de l'économie de temps de calcul et dans beaucoup de cas elles peuvent être remplacées avantageusement par un traitement à grille serrée. Des exemples sont donnés pour trois écoulements fréquemment explorés, où l'abandon de l'approche par une fonction de la paroi conduit à une amélioration marquée dans la prévision du flux thermique convectif.

2-4-2) Modèle LRN $k-\varepsilon$ de Lauder et Sharma

Le modèle de turbulence qui a été employé dans cette étude, est le modèle $k-\varepsilon$ à deux équations de Lauder et Sharma (1974) [41], qui représente une légère modification du modèle de Jones et Lauder (1972) [42-43]. Patel et al [44], ont examiné la performance de huit modèles de turbulence sur les écoulements externes vis-à-vis de l'expérience. Ils ont trouvé que le modèle de Lauder et Sharma est parmi les trois modèles seulement qui ont réussi à capter convenablement les

caractéristiques de la couche limite sur une plaque plane. Henkes et Hoogendoorn [45] ont employé plusieurs modèles k-ε pour décrire l'écoulement en couches limites de la convection naturelle, et ils ont atteint les mêmes résultats que Patel et al. Pour les écoulements internes, il a été examiné pour plusieurs configurations : l'écoulement turbulent dans une conduite cylindrique avec flux de chaleur uniforme sur les parois [46], l'écoulement naturel turbulent dans une cavité fermée partiellement chauffée [47], et d'autres types d'écoulement plus complexes [48], c'est pourquoi le modèle de Launder et Sharma est choisi. D'après ce modèle, la forme dimensionnelle de l'équation d'énergie cinétique turbulente et l'équation de sa fonction de dissipation sont exprimées par les relations suivantes :

2-4-2-1) Equation d'énergie cinétique turbulente

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u.k) + \frac{\partial}{\partial y}(v.k) = \frac{\partial}{\partial x}\left(v + \frac{v_t}{\sigma_k}\right) \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(v + \frac{v_t}{\sigma_k}\right) \frac{\partial k}{\partial y} + P_k + G_k - \varepsilon^* - D \quad (2.12)$$

2-4-2-1) Equation de dissipation de l'énergie cinétique turbulente

$$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u.\varepsilon^*) + \frac{\partial}{\partial y}(v.\varepsilon^*) = \frac{\partial}{\partial x}\left(v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon}\right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon}\right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y} + C_1 f_1 \frac{\varepsilon^*}{k} (P_k + C_3 G_k) - C_2 f_2 \frac{\varepsilon^{*2}}{k} + E \quad (2.13)$$

P_k et G_k représente respectivement les termes de production d'énergie cinétique turbulente par cisaillement et par la force de poussée. Ces expressions sont les suivantes :

$$P_k = 2v_t \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + v_t \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (2.14)$$

$$G_k = -g\beta \frac{v_t}{\sigma_t} \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (2.15)$$

L'écriture de G_k sous cette forme, montre que le flux de chaleur turbulent est exprimé par la

$$\text{relation : } \overline{\theta' u_i'} = -\frac{v_t}{\sigma_t} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \quad (2.16)$$

Remarque 2

Le calcul détaillé pour arriver à la forme des équations (2.12) et (2.13) se trouvent dans l'annexe B.

En suivant les hypothèses **SGD** (Simple Gradient Diffusion), le flux de chaleur turbulent dans ce cas est proportionnel au gradient de température, cette modélisation est la plus ancienne, mais elle est fréquemment utilisée dans les études numériques à cause de sa simplicité. Pour le rendre plus précise, Peng et Davidson [49], ont ajouté récemment une fonction d'amortissement supplémentaire à l'expression (2.15). Cependant le flux de chaleur peut être écrit sous autres formes comme le **GGD** (Generalized Gradient Diffusion) proposé pour la première fois par Daily et Harlow (1970)

$$[50]: \overline{\theta' u_i'} = -C_\theta \frac{k}{\varepsilon^*} \overline{u_i u_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \quad (2.17)$$

Où $C_\theta=0.15$.

Une autre formule du flux de chaleur est donnée par **AFM** (Algebraic Flux Model), proposé par Hanjalic et Vasic [51], une formule plus complexe que les deux précédentes.

La viscosité turbulente est reliée à l'énergie cinétique turbulente et sa fonction de dissipation par la relation de Prandtl-Kolmogorov :

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{K^2}{\varepsilon} \quad (2.20)$$

Le Reynolds turbulent local est défini comme suit : $R_{et} = \frac{K^2}{\nu \varepsilon}$ (2.21)

Les constantes de ce modèle sont :

C_μ	σ_t	σ_K	σ_ε	C_1	C_2	C_3
0.09	1	1	1.3	1.44	1.92	0.70

$$f_1 = 1 \quad (2.22)$$

$$f_2 = 1 - 0.3 \exp(-R_{et}^2) \quad (2.23)$$

$$f_\mu = \exp \left[\frac{-3.4}{\left(1 + \frac{R_{et}}{50}\right)^2} \right] \quad (2.24)$$

L'explication des valeurs des constantes : C_μ , C_1 et C_2 se trouve dans l'annexe B. Il existe de nombreux modèles LRN k- ε (Jones et Launder, Nagano, ...). Les différences majeures entre eux résident dans les constantes et les fonctions d'amortissement utilisées.

2-4-3) Le choix du C_3

Les constantes : C_μ , σ_t , σ_K , σ_ε , C_1 et C_2 sont déterminées d'après Launder et Spalding [39], cependant C_3 peut prendre plusieurs valeurs qui méritent d'être discuter. La valeur de C_3 est déterminée pour une surface isolée verticale ($C_3=1.44$) et horizontale ($C_3=0.288$) par Rodi [52]. La valeur exacte pour une paroi d'une orientation quelconque n'est pas connue. Dans la plupart des études numériques des écoulements à l'intérieur des cavités [53-54], on néglige le terme de la dissipation due à la poussée ($C_3=0$). Henkes et Hoogendoorn [55] ont proposé la valeur $C_3=\tanh(v/u)$. Cependant, Fraikin et al [56] ont utilisé $C_3=0.7$ dans leurs études numériques, mais aucunes de ces dernières n'ont affronté le cas où les parois sont inclinées. Dans le but de déterminer la valeur appropriée pour une orientation quelconque, trois valeurs sont employées (0.7, 0.9, 1.1). La valeur 0.9 est presque la valeur intermédiaire entre les valeurs citées plus haut pour une paroi adiabatique horizontale et une paroi adiabatique verticale. Il est trouvé que les quantités turbulentes comme k et ε , ainsi que le flux de chaleur turbulent sont diminués lorsqu'on fait augmenter la

valeur de C_3 . Le nombre de Nusselt calculé en employant $C_3=0.7$, était 8.3 % supérieur à celui obtenu lorsque on emploie $C_3=1.1$. Donc parmi les valeurs testées, la valeur $C_3=0.7$ donne le meilleur accord avec les résultats expérimentaux de Humphrey et al [57,58], si pourquoi nous avons utilisé cette valeur.

Comme d'autres modèles de turbulence à bas nombre de Reynolds, ce modèle est caractérisé par l'addition du terme supplémentaire (D) au niveau de l'équation d'énergie cinétique turbulente, et l'autre terme (E) au niveau de l'équation de dissipation. L'expression de ces deux termes est la suivante :

$$D = 2\nu \left[\left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (2.18)$$

$$E = 2\nu\nu_t \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 \right] \quad (2.19)$$

La viscosité exerce une influence notable au niveau de l'équation de k et ε de deux manières : la première à travers la diffusion laminaire qui devient de plus en plus importante lorsqu'on rapproche de la paroi, et la deuxième à travers les extra termes introduits, qui ont des significations dans la région visqueuse et dans la région de transition.

Le terme D est introduit dans l'équation de transport de k pour des raisons de calcul plutôt que pour des raisons physiques [40]. Il est vérifié expérimentalement que le rapport de la dissipation de l'énergie cinétique turbulente est constant à la région immédiatement voisine de la paroi. Normalement nous devons appliquer une condition aux limites de type Neuman pour ε . Cependant Jones et Launder [42] ont trouvé que cela peut entraîner des difficultés de calcul. En revanche ils ont imposé une valeur nulle de ε à la paroi et introduit l'extra terme D dans l'équation de k , qui est exactement la valeur de ε à la zone immédiatement voisine de la paroi.

L'extra terme E est introduit dans notre étude pour satisfaire la variation de k près de la paroi. On peut trouver aussi un terme appelé correction de Yap [59] proposé par Yap (1987), qui est une quantité fonction de k , ε et la distance proche paroi, ajouté à la source au niveau de l'équation de ε . Il est trouvé que l'inclusion de la correction de Yap est efficace pour prédire correctement le profil de vitesse horizontale et verticale, mais le nombre de Nusselt moyen est beaucoup mieux représenté par le modèle sans cette correction [60].

2-5) Conditions initiales et aux limites

Les conditions aux limites influent énormément sur la résolution numérique du problème. Les conditions d'entrée d'air et d'extraction sont imposées loin de l'entrée de l'air effectif dans la pièce afin d'éviter d'avoir à faire des hypothèses. La vitesse, la température ainsi que les grandeurs

turbulentes sont alors imposées à des sections telles que l'on peut y supposer l'écoulement pleinement développé.

Pour la résolution des équations gouvernantes le phénomène étudié, nous avons choisi les conditions initiales suivantes :

$$u=v=0, \theta=\theta_0, k=10^{-3}, \varepsilon^*=10^{-3} \text{ dans tout le domaine.}$$

Les conditions initiales pour k et ε^* sont suffisamment petites, de telle sorte qu'ils ne doivent pas influencer l'état final de l'écoulement.

Pour les conditions aux limites, on adopte les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{À } y=0 : u=0, v=V_{in}, \theta=\theta_0, k_{in} &= \frac{3}{2}(v_{in} I_0)^2, \varepsilon^*_{in}=(k_{in}^{3/2})/\ell & 0 < x < h \\ \text{À } y=0 : u=v=0, \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 0, k=0, \varepsilon^*=0 & h < x < L \\ \text{À } y=L : \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 0, \frac{\partial k}{\partial y} = 0, \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y} = 0 & 0 < x < h \\ \text{À } y=L : u=v=0, \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 0, k=0, \varepsilon^*=0 & h < x < L \\ \text{À } x=0 : u=v=0, \theta=\theta_p, k=0, \varepsilon^* &= 0 & 0 < y < L \\ \text{À } x=L : u=v=0, \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0, k=0, \varepsilon^*=0 & 0 < y < L \end{aligned} \quad (2.25)$$

I_0 représente l'intensité de la turbulence et ℓ une longueur caractéristique de la dissipation prise égale dans cette étude à $h/2$.

2-6) Forme adimensionnelle des équations du modèle mathématique

On introduit les variables adimensionnelles et les paramètres adimensionnels suivants pour rendre :

$X=x/L$	pour la distance horizontale
$Y=y/L$	pour la distance verticale
$U= u/V_{in}$	pour la vitesse horizontale
$V=v/V_{in}$	pour la vitesse verticale
$\tau= t.V_{in} /L$	pour le temps
$P= (p-p_0)/\rho V_{in}^2$	pour la pression
$T=(\theta-\theta_0)/(\theta_p-\theta_0)$	pour la température
$K=k/V_{in}^2$	pour l'énergie cinétique turbulente
$\varepsilon =\varepsilon^* / v. (V_{in}/L)^2$	pour la dissipation de l'énergie cinétique turbulente
$Re=V_{in}h/ v$	nombre de Reynolds
$Gr = g\beta(\theta_p-\theta_0)h^3/v^2$	nombre de Grashof

Pr= v/α

nombre de Prandtl

On obtient ainsi les équations sous ses formes adimensionnelles ainsi que leur conditions initiales et aux limites :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial X}(UU) + \frac{\partial}{\partial Y}(VU) = -\frac{\partial}{\partial X}\left(P + \frac{2}{3}K\right) + \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial X} \left[2(1+v_i^*) \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right) \right] + \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[(1+v_i^*) \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right] \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial X}(UV) + \frac{\partial}{\partial Y}(VV) = -\frac{\partial}{\partial Y}\left(P + \frac{2}{3}K\right) + \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial X} \left[(1+v_i^*) \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right] + \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[2(1+v_i^*) \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] + RiT \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial X}(UT) + \frac{\partial}{\partial Y}(VT) = \frac{h^*}{\text{RePr}} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(1 + \text{Pr} \frac{v_i^*}{\sigma_i} \right) \frac{\partial T}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \left(1 + \text{Pr} \frac{v_i^*}{\sigma_i} \right) \frac{\partial T}{\partial Y} \right] \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial X}(U.K) + \frac{\partial}{\partial Y}(V.K) = \frac{h^*}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(1 + \frac{v_i^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \left(1 + \frac{v_i^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial Y} \right] + \frac{h^*}{\text{Re}} \left[2v_i^* \left(\left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 \right) \right] + \quad (2.30)$$

$$v_i^* \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 - \varepsilon - 2 \left(\left(\frac{\partial \sqrt{K}}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sqrt{K}}{\partial Y} \right)^2 \right) - Ri \frac{v_i^*}{\sigma_i} \frac{\partial T}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial X}(U.\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial Y}(V.\varepsilon) = \frac{h^*}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(1 + \frac{v_i^*}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \left(1 + \frac{v_i^*}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial Y} \right] + \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{\varepsilon}{K} \left[2C_1 v_i^* \left(\left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 \right) \right] + \quad (2.31)$$

$$C_1 v_i^* \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 - C_2 \varepsilon - 2v_i^* \left(\left(\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right)^2 \right) - C_1 C_3 Ri \frac{v_i^*}{\sigma_i} \frac{\partial T}{\partial Y}$$

2-7) Forme adimensionnelle des conditions aux limites

La forme adimensionnelle des conditions aux limites est la suivante :

$$\text{À } Y=0 : \quad U=0, V=1, T=0, K_{in} = \frac{3}{2}(I_{in})^2, \varepsilon_{in} = \frac{2\text{Re}}{(h^*)^2} K_{in}^{3/2} \quad 0 \leq X \leq h^*$$

$$\text{À } Y=0 : \quad U=0, V=0, \frac{\partial T}{\partial Y} = 0, K=0, \varepsilon=0 \quad h^* \leq X \leq 1$$

$$\text{À } Y=1 : \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = 0, \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \frac{\partial T}{\partial Y} = 0, \frac{\partial K}{\partial Y} = 0, \frac{\partial \varepsilon}{\partial Y} = 0 \quad 0 \leq X \leq h^* \quad (2.32)$$

$$\text{À } Y=1 : \quad U=0, V=0, \frac{\partial T}{\partial Y} = 0, K=0, \varepsilon=0 \quad h^* \leq X \leq 1$$

$$\text{À } X=0 : \quad U=0, V=0, T=1, K=0, \varepsilon=0 \quad 0 \leq Y \leq 1$$

$$\text{À } X=1 : \quad U=0, V=0, \frac{\partial T}{\partial X} = 0, K=0, \varepsilon=0 \quad 0 \leq Y \leq 1$$

CHAPITRE 3 :

ETUDE NUMERIQUE

3-1) Méthode de Résolution

Dans cette étude, nous avons employé la méthode numérique des volumes finis qui consiste à discrétiser le domaine physique étudié en un domaine de calcul qui se compose d'un nombre fini des volumes contigus entourant chacun un nœud. Le choix de la forme du volume de contrôle est conditionné par la géométrie du domaine d'étude, dans notre cas la forme rectangulaire est plus judicieuse. Un volume de contrôle centré en **P** dans un maillage non uniforme est représenté sur la figure 3.1, où les lignes continues joignent les nœuds, et les lignes en pointillés représentent les faces des volumes de contrôle.

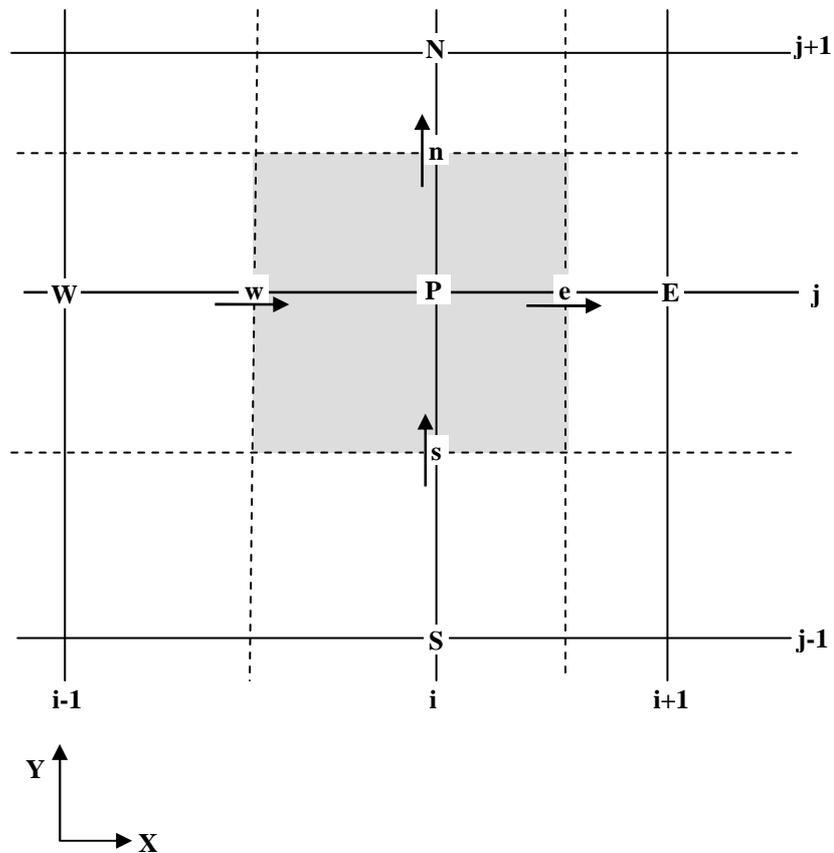


Figure 3.1 : Volume de contrôle typique

3-2) Maillage

Les dimensions du maillage employé dans cette étude est IL nœuds suivant la direction horizontale et JL nœuds suivant la direction verticale. Le maillage utilisé est non uniforme, il suit la relation suivante :

$$\frac{X(i)}{L} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\tanh\left[\alpha_1 \left(\frac{i}{IL} - \frac{1}{2}\right)\right]}{\tanh\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)} \right], i=0, \dots, IL \tag{3.1}$$

$$\frac{Y(i)}{L} = \frac{j}{JL} - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi \frac{j}{JL}), j=0, \dots, JL \quad (3.2)$$

Où α_1 est donné par la relation suivante :

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{\sinh(\alpha_1)} \quad (3.3)$$

La figure 3.2 montre ce maillage non uniforme à l'intérieur de la cavité. Il est plus fin près des parois où le gradient des variables physiques est important.

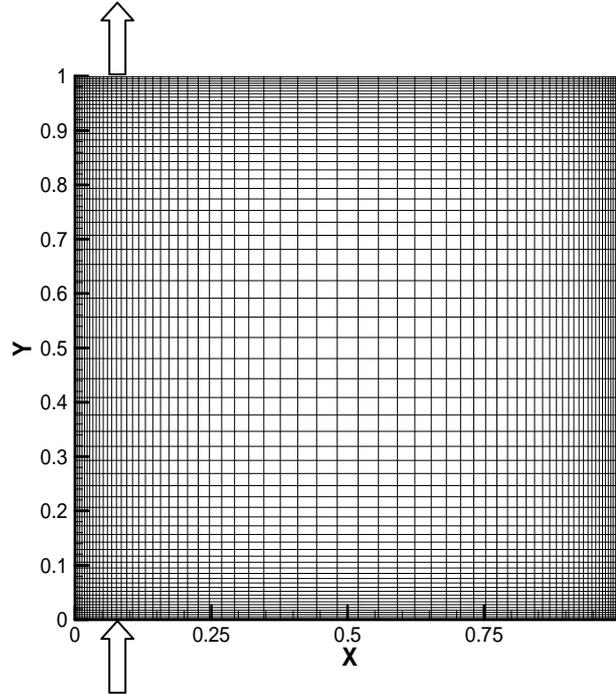


Figure 3.2 : Maillage non uniforme à l'intérieur de la cavité

L'utilisation des petites valeurs de α_2 conduit à un espacement de plus en plus étroit entre les nœuds. Ce type de maillage est employé par Henkes et Hoogendoorn [61] dans le cas de la convection naturelle turbulente dans une cavité carrée partiellement chauffée. La relation (3.2) est employée pour les deux directions par Kuyper et al [62] dans le cas de la convection naturelle dans une cavité carrée inclinée pour le régime laminaire et le régime turbulent. De même, les nœuds sont repartis selon la relation (3.1) suivant la direction horizontale par Papanicolaou et Jaluria [8] pour le problème de la convection mixte turbulente dans une cavité ventilée, et suivant les deux directions, horizontale et verticale par Agrawal et al [63] pour le problème de la convection mixte laminaire et turbulente dans une cavité carrée.

La répartition du maillage suivant la direction horizontale et la direction verticale est représentée sur les figures 3.3 et 3.4 respectivement.

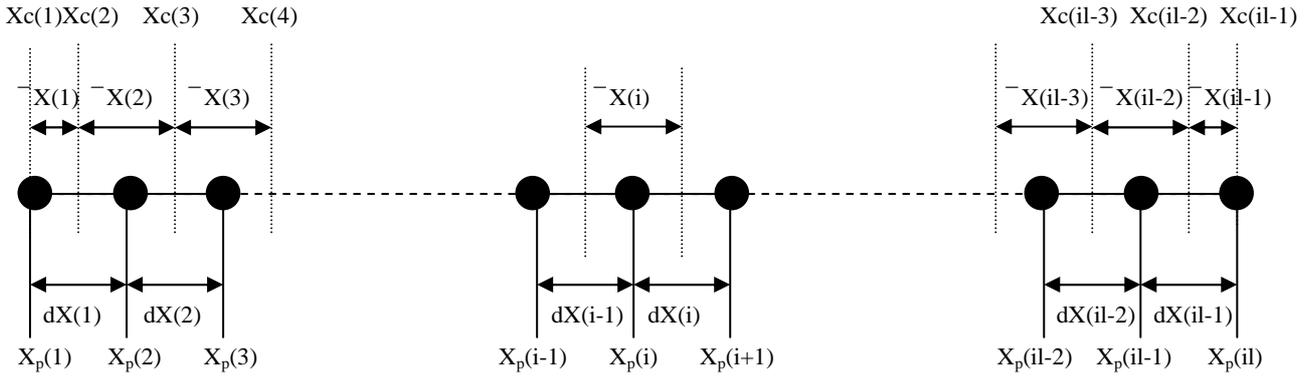


Figure 3.3 : Répartition du maillage dans la direction horizontale

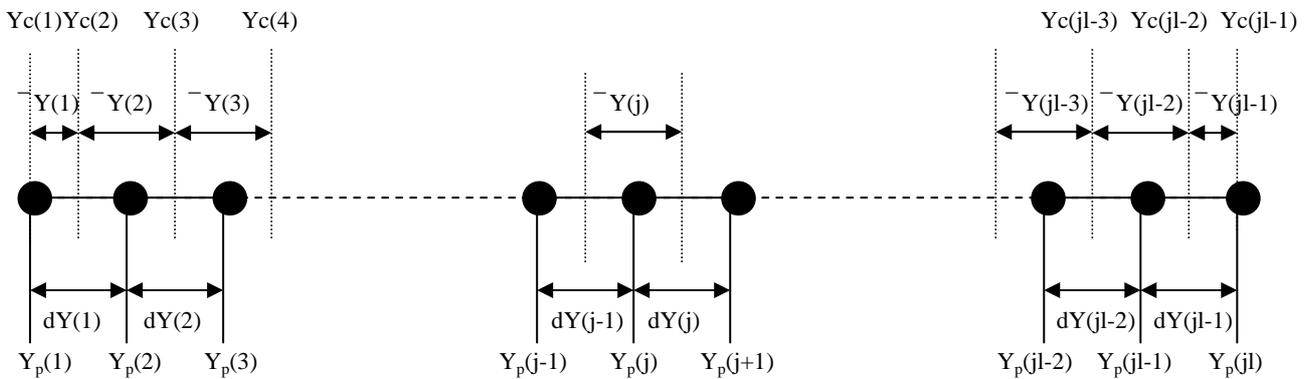


Figure 3.4 : Répartition du maillage dans la direction verticale

3-3) Discrétisation des équations

Les équations de conservation de la quantité de mouvement, l'équation de l'énergie et les deux équations de fermeture du modèle k-ε, peuvent être écrites sous la forme générale suivante :

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial\tau}}_1 + \underbrace{\frac{\partial(\rho U_j\phi)}{\partial X_j}}_2 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial X_j} \left[\Gamma_\phi \frac{\partial\phi}{\partial X_j} \right]}_3 + \underbrace{S_\phi}_4 \quad (3.4)$$

Le premier terme (1) de cette équation est un terme transitoire qui représente l'accumulation de ϕ dans le temps. Le second terme (2) représente le transport de ϕ par convection. Dans le second membre de cette équation, le premier terme (3) correspond au transport de ϕ par diffusion, et le dernier terme (4) est le terme source.

3-3-1) Discrétisation spatiale

Il est nécessaire d'avoir recours à une méthode d'interpolation pour se ramener à une équation où seule la valeur de la variable ϕ au centre de volume du contrôle intervient :

$$A_P\phi_P = A_E\phi_E + A_W\phi_W + A_N\phi_N + A_S\phi_S + S_\phi \quad (3.5)$$

Le résultat de cette interpolation dépend de la nature de l'écoulement caractérisé par le nombre de Peclet Pe qui indique l'importance relative de la convection et de la diffusion :

$$Pe = \frac{\rho u L}{\Gamma_\phi} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} A_E &= D_E \max\left[0, (1 - 0.5|Pe_E|^5)\right] + \max(-F_E, 0) \\ A_W &= D_W \max\left[0, (1 - 0.5|Pe_W|^5)\right] + \max(F_W, 0) \\ A_N &= D_N \max\left[0, (1 - 0.5|Pe_N|^5)\right] + \max(-F_N, 0) \\ A_S &= D_S \max\left[0, (1 - 0.5|Pe_S|^5)\right] + \max(F_S, 0) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Le schéma de la loi de puissance et plus précise que les autres schémas, il est souvent employé dans les codes CFD commerciaux comme Fluent pour résoudre numériquement les problèmes de mécanique des fluides.

3-3-2) Discrétisation temporelles

La discrétisation des termes transitoires dans toutes les équations suit un schéma du second ordre. Si on considère ϕ comme variable dépendante du temps ; un développement limité en série de Taylor au deuxième ordre des variables ϕ^τ et $\phi^{\tau-\Delta\tau}$ est :

$$\phi^\tau = \phi^{\tau+\Delta\tau} - \Delta\tau \frac{\partial\phi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial t} + \frac{(\Delta\tau)^2}{2} \frac{\partial^2\phi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial t^2} + o(\Delta\tau)^2 \quad (3.8)$$

$$\phi^{\tau-\Delta\tau} = \phi^{\tau+\Delta\tau} - 2\Delta\tau \frac{\partial\phi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial t} + \frac{(2\Delta\tau)^2}{2} \frac{\partial^2\phi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial t^2} + o(\Delta\tau)^2 \quad (3.9)$$

On multiplie la relation (3.8) par 4, et on fait la différence entre le produit et la relation (3.9) pour obtenir :

$$4\phi^\tau - \phi^{\tau-\Delta\tau} = 3\phi^{\tau+\Delta\tau} - 2\Delta\tau \frac{\partial\phi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial t} + o(\Delta\tau)^2, \text{ d'où :}$$

$$\frac{\partial\phi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial t} = \frac{3\phi^{\tau+\Delta\tau} - 4\phi^\tau + \phi^{\tau-\Delta\tau}}{2\Delta\tau} + o(\Delta\tau)^2$$

Il est clair que l'erreur de troncature est de l'ordre de $(\Delta\tau)^2$. Toutes les dérivées temporelles sont discrétisées comme suit :

$$\frac{\partial\phi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial t} \approx \frac{3\phi^{\tau+\Delta\tau} - 4\phi^\tau + \phi^{\tau-\Delta\tau}}{2\Delta\tau} \quad (3.10)$$

3-4) Stockage des variables

Les variables scalaires (la pression, la température, l'énergie cinétique turbulente et la dissipation de l'énergie cinétique turbulente) sont stockées dans les nœuds du maillage, et la

discrétisation de leurs équations se fait dans le volume de contrôle typique. Cependant, les composantes du champ de vitesse (U et V) sont stockées aux centres des faces des volumes de contrôle et la discrétisation des équations de conservation de la quantité de mouvement se fait dans les volumes de contrôle décalés respectivement suivant X et Y. Ce type de maillage dit intercalé permet une meilleure estimation du flux convectif, ainsi une bonne estimation de la force de pression dans les équations de mouvement, en plus il offre une grande stabilité numérique.

Le maillage non uniforme est construit de telle sorte qu'on place les nœuds en premier, en respectant les relations : (3.1) et (3.2), puis on place les faces des volumes de contrôles, où chaque face se trouve à mi-distance entre deux nœuds consécutifs [64]. Par conséquent, la dérivée spatiale d'une variable sur une face commune est la différence des valeurs de la variable des nœuds en amont et en aval de l'interface divisée par la distance qui les sépare, comme le montre l'exemple du maillage suivant la direction horizontale (figure 3.5).

$$\phi_e = \frac{\phi_P + \phi_E}{2} \quad \phi_w = \frac{\phi_P + \phi_W}{2} \tag{3.11}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{dX_e} \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_w = \frac{\phi_P - \phi_W}{dX_w} \tag{3.12}$$

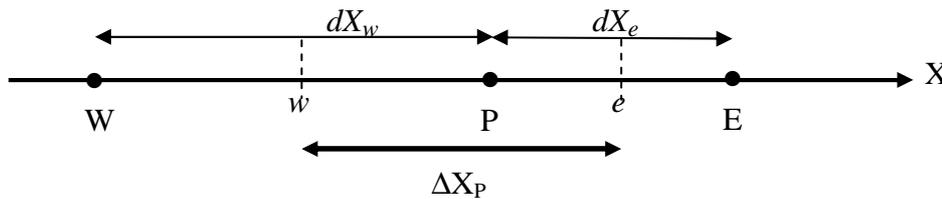


Figure 3.5 : Maillage non uniforme suivant la direction horizontale

La même analogie peut être faite pour une variable suivant la direction verticale, d'où on obtient :

$$\phi_n = \frac{\phi_P + \phi_N}{2} \quad \phi_s = \frac{\phi_P + \phi_S}{2} \tag{3.13}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right|_n = \frac{\phi_N - \phi_P}{dY_n} \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right|_s = \frac{\phi_P - \phi_S}{dY_s} \tag{3.14}$$

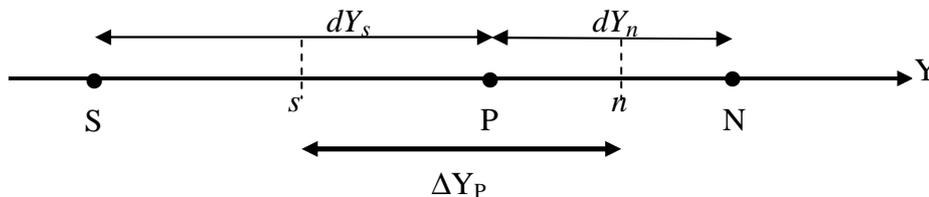


Figure 3.6 : Maillage non uniforme suivant la direction verticale

Cette façon de traiter les dérivées permet d'assurer une meilleure stabilité du schéma, en évitant d'éventuelles instabilités numériques engendrées par l'utilisation des grands nombres de Reynolds.

3-5) Détails de discrétisation

Dans l'ensemble des équations de mouvement, l'équation de continuité et l'équation d'énergie :

- Toutes les variables (U, V, T, K, ε) dont l'exposant est 0, désignent celles évaluées au temps $\tau - \Delta\tau$.
- Toutes les variables (U, V, T, K, ε) dont l'exposant est 1, désignent celles évaluées au temps τ .
- Toutes les variables (U, V, T, K, ε) qui ne possèdent aucun exposant, désignent celles évaluées au temps $\tau + \Delta\tau$.
- Les variables avec le sous indice u indiquent des quantités décalées suivant la direction des X positifs.
- Les variables avec le sous indice v indiquent des quantités décalées suivant la direction des Y positifs.

3-5-1) Equation de continuité

L'équation de continuité (2.26) est intégrée dans le volume de contrôle typique (figure 3.1) terme par terme comme suit :

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{s-w}^n \int_w^e \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) dXdYd\tau = 0$$

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{s-w}^n \int_w^e \frac{\partial U}{\partial X} dXdYd\tau = (U_e - U_w) \Delta Y_p \Delta \tau$$

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{s-w}^n \int_w^e \frac{\partial V}{\partial Y} dXdYd\tau = (V_n - V_s) \Delta X_p \Delta \tau$$

Par la division des deux termes par $\Delta\tau$, on obtient :

$$(U_e - U_w) \Delta Y_p + (V_n - V_s) \Delta X_p = 0 \quad (3.13)$$

3-5-2) Equation de quantité de mouvement suivant X

L'équation de la quantité du mouvement suivant la direction horizontale (2.27), est intégrée terme par terme dans le volume du contrôle décalé suivant les X positifs comme suit :

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{s-wu}^n \int_w^{eu} \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial X} (U.U) + \frac{\partial}{\partial Y} (V.U) \right) dXdYd\tau = \int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{s-wu}^n \int_w^{eu} \left[-\frac{\partial}{\partial X} \left(P + \frac{2}{3} K \right) + \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial X} \left[2(1+v_i^*) \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right) \right] + \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[(1+v_i^*) \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right] \right] dXdYd\tau$$

$$\begin{aligned} \int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{s-wu}^n \int_w^{eu} \frac{\partial U}{\partial \tau} dXdYd\tau &= \int_{s-wu}^n \int_w^{eu} \frac{3U_{Pu} - 4U_{Pu}^1 + U_{Pu}^0}{2} dXdY \\ &= \frac{3U_{Pu} - 4U_{Pu}^1 + U_{Pu}^0}{2} dX_e \Delta Y_p \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s \int_{wu}^{eu} \frac{\partial}{\partial X} (U.U) dXdYd\tau = (U_{eu}^1 U_{eu} - U_{wu}^1 U_{wu}) \Delta Y_p \Delta \tau \quad (3.15)$$

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s \int_{wu}^{eu} \frac{\partial}{\partial Y} (V.U) dXdYd\tau = (V_{nu}^1 U_{nu} - V_{su}^1 U_{su}) dX_e \Delta \tau \quad (3.16)$$

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s \int_{wu}^{eu} -\frac{\partial}{\partial X} \left(P + \frac{2}{3} K \right) dXdYd\tau = [(P_p - P_E) + \frac{2}{3} (K_p - K_E)] \Delta Y_p \Delta \tau \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s \int_{wu}^{eu} \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial X} \left[2(1+v_t^*) \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right) \right] dXdYd\tau &= 2 \frac{h^*}{\text{Re}} \left[(1+v_{teu}^*) \frac{\partial U}{\partial X} \Big|_{eu} - (1+v_{twu}^*) \frac{\partial U}{\partial X} \Big|_{wu} \right] \Delta Y_p \Delta \tau \\ &= 2 \frac{h^*}{\text{Re}} \left[(1+v_{teu}^*) \frac{U_{Eu} - U_{Pu}}{dX_{eu}} - (1+v_{twu}^*) \frac{U_{Pu} - U_{Wu}}{dX_{wu}} \right] \Delta Y_p \Delta \tau \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s \int_{wu}^{eu} \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[(1+v_t^*) \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right] dXdYd\tau &= \frac{h^*}{\text{Re}} \left[(1+v_{mu}^*) \frac{\partial U}{\partial Y} \Big|_{mu} - (1+v_{isu}^*) \frac{\partial U}{\partial Y} \Big|_{su} + (1+v_{mu}^*) \frac{\partial V}{\partial X} \Big|_{mu} - (1+v_{isu}^*) \frac{\partial V}{\partial X} \Big|_{su} \right] dX_e \Delta \tau \\ &= \frac{h^*}{\text{Re}} \left[(1+v_{mu}^*) \frac{U_{Nu} - U_{Pu}}{dY_{nu}} - (1+v_{isu}^*) \frac{U_{Pu} - U_{Su}}{dY_{su}} + (1+v_{mu}^*) \frac{V_{Nu} - V_{Pu}}{dX_{nu}} - (1+v_{isu}^*) \frac{V_{Pu} - V_{Su}}{dX_{su}} \right] dX_e \Delta \tau \end{aligned} \quad (3.19)$$

On regroupe tous les termes précédents pour obtenir une équation de discrétisation finale sous la forme suivante :

$$A_p U_{Pu} = A_E U_{Eu} + A_W U_{Wu} + A_N U_{Nu} + A_S U_{Su} + S_U \quad (3.20)$$

dont les termes convectifs et diffusifs de l'équation de discrétisation, sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} F_E &= -\frac{1}{2} U_{eu}^1 \Delta Y_p & D_E &= 2(1+v_{teu}^*) \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{\Delta Y_p}{dX_{eu}} \\ F_W &= \frac{1}{2} U_{wu}^1 \Delta Y_p & D_W &= 2(1+v_{twu}^*) \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{\Delta Y_p}{dX_{wu}} \\ F_N &= -\frac{1}{2} V_{nu}^1 dX_e & D_N &= (1+v_{mu}^*) \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{dX_e}{dY_{nu}} \\ F_S &= \frac{1}{2} V_{su}^1 dX_e & D_S &= (1+v_{isu}^*) \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{dX_e}{dY_{su}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$A_p = A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{3}{2\Delta\tau} dX_e \Delta Y_p \quad (3.22)$$

Les coefficients dans la relation (3.90) sont tous positifs ou nuls, car ils ne dépendent que des paramètres du maillage et du nombre de Reynolds, et donc l'une des règles de la méthode des volumes finis (exigeant le même signe pour tous les coefficients de l'équation de discrétisation) est vérifiée, et il n'y a pas de risque d'obtenir des résultats physiquement inacceptables.

D'après la relation (3.22), on constate que le coefficient A_p est positif, et supérieur à la somme des autres coefficients, et cela conduit à la satisfaction de la deuxième règle de la méthode des volumes finis exigeant la dominance diagonale de la matrice des coefficients de l'équation de discrétisation qui assure une grande stabilité numérique.

3-5-3) Equation de quantité de mouvement suivant Y

L'équation de la quantité de mouvement suivant la direction verticale (2.28), est intégrée terme par terme dans le volume du contrôle décalé suivant les Y positifs (figure 3.7) comme suit :

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{sv}^{nv} \int_w^e \left(\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial X}(U.V) + \frac{\partial}{\partial Y}(V.V) \right) dXdYd\tau = \int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{sv}^{nv} \int_w^e \left[-\frac{\partial}{\partial Y} \left(P + \frac{2}{3}K \right) + \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial X} \left[(1+v_t^*) \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right] + \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[2(1+v_t^*) \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] + Ri.T \right] dXdYd\tau$$

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{sv}^{nv} \int_w^e \frac{\partial V}{\partial \tau} dXdYd\tau = \int_{sv}^{nv} \int_w^e \frac{3V_{P_v} - 4V_{P_v}^1 + V_{P_v}^0}{2} dXdY$$

$$= \frac{3V_{P_v} - 4V_{P_v}^1 + V_{P_v}^0}{2} \Delta X_p \Delta Y_n \quad (3.23)$$

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{sv}^{nv} \int_w^e \frac{\partial}{\partial X}(U.V) dXdYd\tau = (U_{ev}^1 V_{ev} - U_{wv}^1 V_{wv}) \Delta Y_n \Delta \tau \quad (3.24)$$

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{sv}^{nv} \int_w^e \frac{\partial}{\partial Y}(V.V) dXdYd\tau = (V_{nv}^1 V_{nv} - V_{sv}^1 V_{sv}) \Delta X_p \Delta \tau \quad (3.25)$$

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{sv}^{nv} \int_w^e -\frac{\partial}{\partial Y} \left(P + \frac{2}{3}K \right) dXdYd\tau = \left[(P_p - P_n) + \frac{2}{3}(K_p - K_n) \right] \Delta X_p \Delta \tau \quad (3.26)$$

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{sv}^{nv} \int_w^e \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial X} \left[(1+v_t^*) \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right] dXdYd\tau = \frac{h^*}{\text{Re}} \left[(1+v_{tev}^*) \frac{\partial U}{\partial Y} \Big|_{ev} - (1+v_{twv}^*) \frac{\partial U}{\partial Y} \Big|_{wv} + (1+v_{tev}^*) \frac{\partial V}{\partial X} \Big|_{ev} - (1+v_{twv}^*) \frac{\partial V}{\partial X} \Big|_{wv} \right] \Delta Y_n \Delta \tau$$

$$= \frac{h^*}{\text{Re}} \left[(1+v_{tev}^*) \frac{U_{ev} - U_{P_v}}{dY_{ev}} - (1+v_{twv}^*) \frac{U_{P_v} - U_{wv}}{dY_{wv}} + (1+v_{tev}^*) \frac{V_{ev} - V_{P_v}}{dX_{ev}} - (1+v_{twv}^*) \frac{V_{P_v} - V_{wv}}{dX_{wv}} \right] \Delta Y_n \Delta \tau \quad (3.27)$$

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{sv}^{nv} \int_w^e \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[2(1+v_t^*) \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] dXdYd\tau = 2 \frac{h^*}{\text{Re}} \left[(1+v_{tnv}^*) \frac{\partial V}{\partial Y} \Big|_{nv} - (1+v_{tsv}^*) \frac{\partial V}{\partial Y} \Big|_{sv} \right] \Delta X_p \Delta \tau$$

$$= 2 \frac{h^*}{\text{Re}} \left[(1+v_{tnv}^*) \frac{V_{Nv} - V_{P_v}}{dY_{nv}} - (1+v_{tsv}^*) \frac{V_{P_v} - V_{Sv}}{dY_{sv}} \right] \Delta X_p \Delta \tau \quad (3.28)$$

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{sv}^{nv} \int_w^e Ri.T dXdYd\tau = Ri.T_{P_v} \Delta X_p \Delta Y_n \Delta \tau \quad (3.29)$$

On regroupe tous les termes discrétisés pour l'obtention d'une équation de discrétisation finale sous la forme standard :

$$A_p V_{P_v} = A_E V_{E_v} + A_W V_{W_v} + A_N V_{N_v} + A_S V_{S_v} + S_V \quad (3.30)$$

dont les termes convectifs et diffusifs de l'équation de discrétisation sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 F_E &= -\frac{1}{2}U_{ev}^1 dY_n & D_E &= (1+v_{ev}^*) \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{dY_n}{dX_{ev}} \\
 F_W &= \frac{1}{2}U_{wv}^1 dY_n & D_W &= (1+v_{wv}^*) \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{dY_n}{dX_{wv}} \\
 F_N &= -\frac{1}{2}V_{nv}^1 \Delta X_p & D_N &= 2(1+v_{nv}^*) \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{\Delta X_p}{dY_{nv}} \\
 F_S &= \frac{1}{2}V_{sv}^1 \Delta X_p & D_S &= 2(1+v_{sv}^*) \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{\Delta X_p}{dY_{sv}}
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

$$A_p = A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{3}{2\Delta\tau} \Delta X_p dY_n \tag{3.32}$$

Le même commentaire peut être dit sur le signe des termes convectifs et diffusifs, et sur la dominance du coefficient A_p sur les autres coefficients que pour l'équation de mouvement suivant la direction horizontale.

3-5-4) Equation de la température

L'équation de la température (2.29) est intégrée dans le volume de contrôle typique (figure 3.1) comme suit :

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^n \left(\frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial X}(U.T) + \frac{\partial}{\partial Y}(V.T) \right) dXdYd\tau = \int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^n \frac{h^*}{\text{Re.Pr}} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(1 + \text{Pr} \frac{v_t^*}{\sigma_t} \right) \frac{\partial T}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \left(1 + \text{Pr} \frac{v_t^*}{\sigma_t} \right) \frac{\partial T}{\partial Y} \right] dXdYd\tau$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^n \frac{\partial T}{\partial \tau} dXdYd\tau &= \int_s^e \int_w^n \frac{3T_p - 4T_p^1 + T_p^0}{2} dXdY \\
 &= \frac{3T_p - 4T_p^1 + T_p^0}{2} \Delta X_p \Delta Y_p
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \frac{\partial}{\partial X}(U.T) dXdYd\tau = (U_e T_e - U_w T_w) \Delta Y_p \Delta \tau \tag{3.34}$$

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \frac{\partial}{\partial Y}(V.T) dXdYd\tau = (V_n T_n - V_s T_s) \Delta X_p \Delta \tau \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{h^*}{\text{Re.Pr}} \int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^n \frac{\partial}{\partial X} \left(1 + \text{Pr} \frac{v_t^*}{\sigma_t} \right) \frac{\partial T}{\partial X} dXdYd\tau &= \frac{h^*}{\text{Re.Pr}} \left(\left(1 + \text{Pr} \frac{v_{te}^*}{\sigma_t} \right) \frac{\partial T}{\partial X} \Big|_e - \left(1 + \text{Pr} \frac{v_{tw}^*}{\sigma_t} \right) \frac{\partial T}{\partial X} \Big|_w \right) \Delta Y_p \Delta \tau \\
 &= \frac{h^*}{\text{Re.Pr}} \left[\left(1 + \text{Pr} \frac{v_{te}^*}{\sigma_t} \right) \frac{T_e - T_p}{dX_e} - \left(1 + \text{Pr} \frac{v_{tw}^*}{\sigma_t} \right) \frac{T_p - T_w}{dX_w} \right] \Delta Y_p \Delta \tau
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned} \frac{h^*}{\text{Re.Pr}} \int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{s-w}^s \int_{e-n}^e \frac{\partial}{\partial Y} (1 + \text{Pr} \frac{v_t^*}{\sigma_t}) \frac{\partial T}{\partial Y} dXdYd\tau &= \frac{h^*}{\text{Re.Pr}} \left((1 + \text{Pr} \frac{v_m^*}{\sigma_t}) \frac{\partial T}{\partial Y} \Big|_n - (1 + \text{Pr} \frac{v_{ts}^*}{\sigma_t}) \frac{\partial T}{\partial Y} \Big|_s \right) \Delta X_p \Delta \tau \\ &= \frac{h^*}{\text{Re.Pr}} \left[(1 + \text{Pr} \frac{v_m^*}{\sigma_t}) \frac{T_N - T_P}{dY_n} - (1 + \text{Pr} \frac{v_{ts}^*}{\sigma_t}) \frac{T_P - T_S}{dY_s} \right] \Delta X_p \Delta \tau \end{aligned} \quad (3.37)$$

Le regroupement des termes précédents conduit à l'équation de discrétisation de la température suivante :

$$A_P T_P = A_E T_E + A_W T_W + A_N T_N + A_S T_S + S_T \quad (3.38)$$

Les termes convectifs et diffusifs de l'équation de discrétisation de la température sont :

$$\begin{aligned} F_E &= U_e^1 \Delta Y_p & D_E &= \frac{h^*}{\text{Re.Pr}} (1 + \text{Pr} \frac{v_{te}^*}{\sigma_t}) \frac{\Delta Y_p}{dX_e} \\ F_W &= U_w^1 \Delta Y_p & D_W &= \frac{h^*}{\text{Re.Pr}} (1 + \text{Pr} \frac{v_{tw}^*}{\sigma_t}) \frac{\Delta Y_p}{dX_w} \\ F_N &= V_n^1 \Delta X_p & D_N &= \frac{h^*}{\text{Re.Pr}} (1 + \text{Pr} \frac{v_m^*}{\sigma_t}) \frac{\Delta X_p}{dY_n} \\ F_S &= V_s^1 \Delta X_p & D_S &= \frac{h^*}{\text{Re.Pr}} (1 + \text{Pr} \frac{v_{ts}^*}{\sigma_t}) \frac{\Delta X_p}{dY_s} \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{3}{2\Delta\tau} \Delta X_p \Delta Y_p \quad (3.40)$$

3-5-5) Equation de l'énergie cinétique turbulente

L'équation de l'énergie cinétique turbulente (2.30) est intégrée dans le volume de contrôle typique (figure 3.1) comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{s-w}^s \int_{e-n}^e \left(\frac{\partial K}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial X} (U.K) + \frac{\partial}{\partial Y} (V.K) \right) dXdYd\tau &= \int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{s-w}^s \int_{e-n}^e \frac{h^*}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(1 + \frac{v_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \left(1 + \frac{v_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial Y} \right] dXdYd\tau + \\ \int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{s-w}^s \int_{e-n}^e \frac{h^*}{\text{Re}} \left[2v_t^* \left(\left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 \right) + v_t^* \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 - \varepsilon - 2 \left(\left(\frac{\partial \sqrt{K}}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sqrt{K}}{\partial Y} \right)^2 \right) - \text{Ri} \frac{v_t^*}{\sigma_t} \frac{\partial T}{\partial Y} \right] dXdYd\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{s-w}^s \int_{e-n}^e \frac{\partial K}{\partial \tau} dXdYd\tau &= \int_{s-w}^s \int_{e-n}^e \frac{3K_P - 4K_P^1 + K_P^0}{2} dXdY \\ &= \frac{3K_P - 4K_P^1 + K_P^0}{2} \Delta X_p \Delta Y_p \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{s-w}^s \int_{e-n}^e \frac{\partial}{\partial X} (U.K) dXdYd\tau = (U_e K_e - U_w K_w) \Delta Y_p \Delta \tau \quad (3.42)$$

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{s-w}^s \int_{e-n}^e \frac{\partial}{\partial Y} (V.K) dXdYd\tau = (V_n K_n - V_s K_s) \Delta X_p \Delta \tau \quad (3.43)$$

$$\frac{h^*}{\text{Re}} \int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{s-w}^s \int_{e-n}^e \frac{\partial}{\partial X} \left(1 + \frac{v_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial X} dXdYd\tau = \frac{h^*}{\text{Re}} \left(\left(1 + \frac{v_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial X} \Big|_e - \left(1 + \frac{v_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial X} \Big|_w \right) \Delta Y_p \Delta \tau$$

$$= \frac{h^*}{\text{Re}} \left[\left(1 + \frac{V_{te}^*}{\sigma_k}\right) \frac{K_E - K_P}{dX_e} - \left(1 + \frac{V_{tw}^*}{\sigma_k}\right) \frac{K_P - K_W}{dX_w} \right] \Delta Y_p \Delta \tau \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{h^*}{\text{Re}} \int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{w-s}^{w+s} \int_{n-s}^{n+s} \frac{\partial}{\partial Y} \left(1 + \frac{V_t^*}{\sigma_k}\right) \frac{\partial K}{\partial Y} dXdYd\tau &= \frac{h^*}{\text{Re}} \left(\left(1 + \frac{V_m^*}{\sigma_k}\right) \frac{\partial K}{\partial Y} \Big|_n - \left(1 + \frac{V_{ts}^*}{\sigma_k}\right) \frac{\partial K}{\partial Y} \Big|_s \right) \Delta X_p \Delta \tau \\ &= \frac{h^*}{\text{Re}} \left[\left(1 + \frac{V_m^*}{\sigma_k}\right) \frac{K_N - K_P}{dY_n} - \left(1 + \frac{V_{ts}^*}{\sigma_k}\right) \frac{K_P - K_S}{dY_s} \right] \Delta X_p \Delta \tau \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{w-s}^{w+s} \int_{n-s}^{n+s} 2 \frac{h^*}{\text{Re}} V_t^* \left(\left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 \right) dXdYd\tau = 2 \frac{h^*}{\text{Re}} V_{tP}^* \left[\left(\frac{U_e - U_w}{\Delta X_p} \right)^2 + \left(\frac{V_n - V_s}{\Delta Y_p} \right)^2 \right] \Delta X_p \Delta Y_p \Delta \tau \quad (3.46)$$

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{w-s}^{w+s} \int_{n-s}^{n+s} V_t^* \frac{h^*}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 dXdYd\tau = \frac{h^*}{\text{Re}} V_{tP}^* \left(\frac{U_n - U_s}{\Delta Y_p} + \frac{V_e - V_w}{\Delta X_p} \right)^2 \Delta X_p \Delta Y_p \Delta \tau \quad (3.47)$$

Les vitesses U_n , U_s , V_e et V_w ne sont pas connues, il faut donc les interpoler en fonction des valeurs connues sur les faces des volumes de contrôle (voir figure 3.7) :

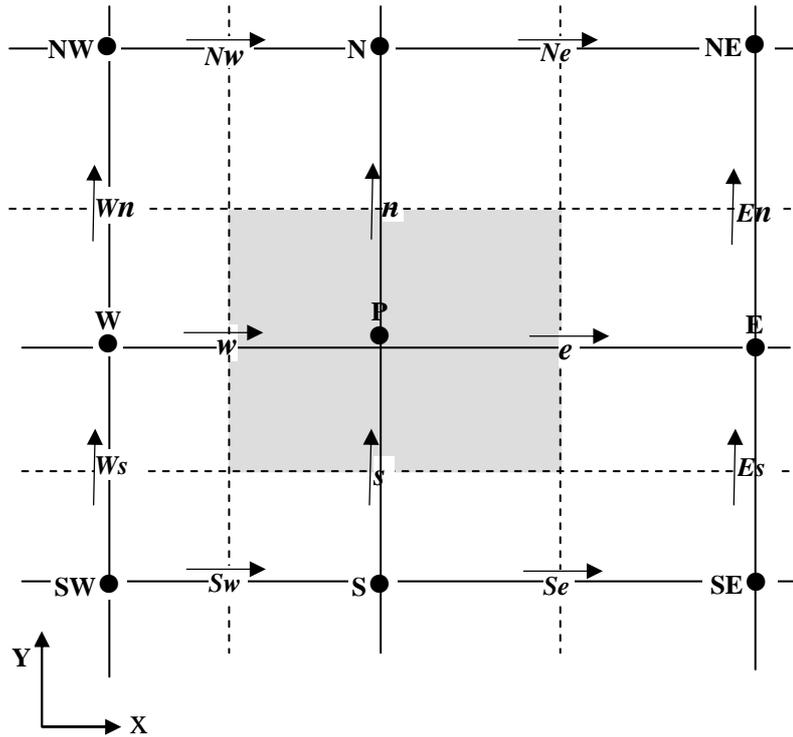


Figure 3.7 : Interpolation des vitesses

$$U_n = \frac{U_e + U_{Ne} + U_w + U_{Nw}}{4}$$

$$U_s = \frac{U_e + U_{Se} + U_w + U_{Sw}}{4}$$

$$V_e = \frac{V_n + V_{En} + V_s + V_{Es}}{4}$$

$$V_w = \frac{V_n + V_{Wn} + V_s + V_{Ws}}{4}$$

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{w_s}^e \int_s^n -\frac{h^*}{\text{Re}} \varepsilon dXdYd\tau = -\frac{h^*}{\text{Re}} \varepsilon_p \Delta X_p \Delta Y_p \Delta \tau$$

$$= -\frac{h^*}{\text{Re}} \frac{K_p}{K_p^1} \varepsilon_p \Delta X_p \Delta Y_p \Delta \tau \quad (3.48)$$

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{w_s}^e \int_s^n -2 \frac{h^*}{\text{Re}} \left(\left(\frac{\partial \sqrt{K}}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sqrt{K}}{\partial Y} \right)^2 \right) dXdYd\tau = -2 \frac{h^*}{\text{Re}} \left(\left(\frac{\sqrt{K_e} - \sqrt{K_w}}{\Delta X_p} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{K_n} - \sqrt{K_s}}{\Delta Y_p} \right)^2 \right) \Delta X_p \Delta Y_p \Delta \tau$$

$$= -2 \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{K_p}{K_p^1} \left(\left(\frac{\sqrt{K_e} - \sqrt{K_w}}{\Delta X_p} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{K_n} - \sqrt{K_s}}{\Delta Y_p} \right)^2 \right) \Delta X_p \Delta Y_p \Delta \tau \quad (3.49)$$

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{w_s}^e \int_s^n -\frac{h^*}{\text{Re}} Ri \frac{v_t^*}{\sigma_t} \frac{\partial T}{\partial Y} dXdYd\tau = -\frac{h^*}{\text{Re}} Ri \frac{v_t^*}{\sigma_t} (T_n - T_s) \Delta X_p \Delta \tau \quad (3.50)$$

Le regroupement des termes précédents conduit à l'équation de discrétisation de l'énergie cinétique turbulente suivante :

$$A_p K_p = A_E K_E + A_W K_W + A_N K_N + A_S K_S + S_K \quad (3.51)$$

Les termes convectifs et diffusifs de l'équation de discrétisation sont :

$$F_E = U_e^1 \Delta Y_p \quad D_E = \frac{h^*}{\text{Re}} (1 + \text{Pr} \frac{v_{te}^*}{\sigma_k}) \frac{\Delta Y_p}{dX_e}$$

$$F_W = U_w^1 \Delta Y_p \quad D_W = \frac{h^*}{\text{Re}} (1 + \text{Pr} \frac{v_{tw}^*}{\sigma_k}) \frac{\Delta Y_p}{dX_w} \quad (3.52)$$

$$F_N = V_n^1 \Delta X_p \quad D_N = \frac{h^*}{\text{Re}} (1 + \text{Pr} \frac{v_{tn}^*}{\sigma_k}) \frac{\Delta X_p}{dY_n}$$

$$F_S = V_s^1 \Delta X_p \quad D_S = \frac{h^*}{\text{Re}} (1 + \text{Pr} \frac{v_{ts}^*}{\sigma_k}) \frac{\Delta X_p}{dY_s}$$

Si $\frac{\partial T}{\partial Y} > 0$:

$$A_p = A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{h^*}{\text{Re}} Ri \frac{v_t^*}{\sigma_t K_p^1} (T_s - T_n) \Delta X_p + \left(\frac{3}{2\Delta\tau} + \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{\varepsilon_p^1}{K_p^1} + 2 \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{K_p}{K_p^1} \left(\left(\frac{\sqrt{K_e} - \sqrt{K_w}}{\Delta X_p} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{K_n} - \sqrt{K_s}}{\Delta Y_p} \right)^2 \right) \right) \Delta X_p \Delta Y_p \quad (3.53)$$

Si non :

$$A_p = A_E + A_W + A_N + A_S + \left(\frac{3}{2\Delta\tau} + \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{\varepsilon_p^1}{K_p^1} + 2 \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{K_p}{K_p^1} \left(\left(\frac{\sqrt{K_e} - \sqrt{K_w}}{\Delta X_p} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{K_n} - \sqrt{K_s}}{\Delta Y_p} \right)^2 \right) \right) \Delta X_p \Delta Y_p \quad (3.54)$$

3-5-6) Equation de dissipation de l'énergie cinétique turbulente

L'équation de la dissipation de l'énergie cinétique turbulente (2.31) est intégrée dans le volume de contrôle typique (figure 3.1) comme suit :

$$\begin{aligned}
& \int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial X} (U \cdot \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial Y} (V \cdot \varepsilon) \right) dXdYd\tau = \int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e \frac{h^*}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(1 + \frac{v_t^*}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \left(1 + \frac{v_t^*}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial Y} \right] dXdYd\tau + \\
& \int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{\varepsilon}{K} \left[2C_1 v_t^* \left(\left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 \right) + C_1 v_t^* \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 - C_2 \varepsilon - 2v_t^* \left(\left(\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right)^2 \right) - C_1 C_3 Ri \frac{v_t^*}{\sigma_t} \frac{\partial T}{\partial Y} \right] dXdYd\tau \\
& \int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} dXdYd\tau = \int_s^e \int_w^e \frac{3\varepsilon_p - 4\varepsilon_p^1 + \varepsilon_p^0}{2} dXdY \\
& = \frac{3\varepsilon_p - 4\varepsilon_p^1 + \varepsilon_p^0}{2} \Delta X_p \Delta Y_p \tag{3.55}
\end{aligned}$$

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial}{\partial X} (U \cdot \varepsilon) dXdYd\tau = (U_e \varepsilon_e - U_w \varepsilon_w) \Delta Y_p \Delta \tau \tag{3.56}$$

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial}{\partial Y} (V \cdot \varepsilon) dXdYd\tau = (V_n \varepsilon_n - V_s \varepsilon_s) \Delta X_p \Delta \tau \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}
\frac{h^*}{\text{Re}} \int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^e \frac{\partial}{\partial X} \left(1 + \frac{v_t^*}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} dXdYd\tau &= \frac{h^*}{\text{Re}} \left(\left(1 + \frac{v_t^*}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} \Big|_e - \left(1 + \frac{v_t^*}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} \Big|_w \right) \Delta Y_p \Delta \tau \\
&= \frac{h^*}{\text{Re}} \left[\left(1 + \frac{v_{te}^*}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\varepsilon_e - \varepsilon_p}{dX_e} - \left(1 + \frac{v_{tw}^*}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_w}{dX_w} \right] \Delta Y_p \Delta \tau \tag{3.58}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{h^*}{\text{Re}} \int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^e \frac{\partial}{\partial Y} \left(1 + \frac{v_t^*}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial Y} dXdYd\tau &= \frac{h^*}{\text{Re}} \left(\left(1 + \frac{v_t^*}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial Y} \Big|_n - \left(1 + \frac{v_t^*}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial Y} \Big|_s \right) \Delta X_p \Delta \tau \\
&= \frac{h^*}{\text{Re}} \left[\left(1 + \frac{v_{tn}^*}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_p}{dY_n} - \left(1 + \frac{v_{ts}^*}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_s}{dY_s} \right] \Delta X_p \Delta \tau \tag{3.59}
\end{aligned}$$

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{\varepsilon}{K} 2C_1 v_t^* \left(\left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 \right) dXdYd\tau = 2C_1 \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{\varepsilon_p^1}{K_p} v_{tp}^* \left[\left(\frac{U_e - U_w}{\Delta X_p} \right)^2 + \left(\frac{V_n - V_s}{\Delta Y_p} \right)^2 \right] \Delta X_p \Delta Y_p \Delta \tau \tag{3.60}$$

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{\varepsilon}{K} C_1 v_t^* \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 dXdYd\tau = C_1 \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{\varepsilon_p^1}{K_p} v_{tp}^* \left(\frac{U_n - U_s}{\Delta Y_p} + \frac{V_e - V_w}{\Delta X} \right)^2 \Delta X_p \Delta Y_p \Delta \tau \tag{3.61}$$

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e -2v_t^* \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{\varepsilon}{K} \left(\left(\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right)^2 \right) dXdYd\tau = \int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e -2v_t^* \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{\varepsilon}{K} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right)^2 dXdYd\tau + \int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e -2v_t^* \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{\varepsilon}{K} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right)^2 dXdYd\tau \tag{3.62}$$

Le premier terme à droite de l'équation (3.62) est calculé comme suit :

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e -2v_t^* \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{\varepsilon}{K} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right)^2 dXdYd\tau = -2 \frac{h^*}{\text{Re}} v_{tp}^* \frac{\varepsilon_p}{K_p} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \Big|_n - \frac{\partial U}{\partial Y} \Big|_s \right)^2 \Delta X_p \Delta \tau \tag{3.63}$$

Le deuxième terme à droite de l'équation (3.60) est calculé comme suit :

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e -2v_t^* \frac{h^*}{\text{Re}} \frac{\varepsilon}{K} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right)^2 dXdYd\tau = -2 \frac{h^*}{\text{Re}} v_{tp}^* \frac{\varepsilon_p}{K_p} \left(\frac{\partial V}{\partial X} \Big|_e - \frac{\partial V}{\partial X} \Big|_w \right)^2 \Delta Y_p \Delta \tau \tag{3.64}$$

$$\int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^n -\frac{h^*}{\text{Re}} C_1 C_3 Ri \frac{V_t^*}{\sigma_t} \frac{\varepsilon}{K} \frac{\partial T}{\partial Y} dXdYd\tau = -\frac{h^*}{\text{Re}} C_1 C_3 Ri \frac{V_{tp}^*}{\sigma_t} \frac{\varepsilon_p}{K_p} (T_n - T_s) \Delta X_p \Delta \tau \quad (3.65)$$

Le regroupement des termes précédents conduit à l'équation de discrétisation de la fonction de dissipation de l'énergie cinétique turbulente suivante :

$$A_p \varepsilon_p = A_E \varepsilon_E + A_W \varepsilon_W + A_N \varepsilon_N + A_S \varepsilon_S + S_\varepsilon \quad (3.66)$$

Les coefficients de l'équation de discrétisation et la source sont :

$$\begin{aligned} F_E &= U_e^1 \Delta Y_p & D_E &= \frac{h^*}{\text{Re}} (1 + \text{Pr} \frac{V_{te}^*}{\sigma_\varepsilon}) \frac{\Delta Y_p}{dX_e} \\ F_W &= U_w^1 \Delta Y_p & D_W &= \frac{h^*}{\text{Re}} (1 + \text{Pr} \frac{V_{tw}^*}{\sigma_\varepsilon}) \frac{\Delta Y_p}{dX_w} \\ F_N &= V_n^1 \Delta X_p & D_N &= \frac{h^*}{\text{Re}} (1 + \text{Pr} \frac{V_{tn}^*}{\sigma_\varepsilon}) \frac{\Delta X_p}{dY_n} \\ F_S &= V_s^1 \Delta X_p & D_S &= \frac{h^*}{\text{Re}} (1 + \text{Pr} \frac{V_{ts}^*}{\sigma_\varepsilon}) \frac{\Delta X_p}{dY_s} \end{aligned} \quad (3.67)$$

Si $\frac{\partial T}{\partial Y} > 0$:

$$\begin{aligned} A_p &= A_E + A_W + A_N + A_S + \left(\frac{3}{2\Delta\tau} + C_2 \frac{h^* \varepsilon_p^1}{\text{Re} K_p^1} \right) \Delta X_p \Delta Y_p + 2 \frac{h^*}{\text{Re} K_p} V_{tp}^* \left(\frac{U_{Ne} + U_{Nw} - U_e - U_w}{2dY_n} - \frac{U_e + U_w - U_{Se} - U_{Sw}}{2dY_s} \right)^2 \Delta X_p \\ &+ 2 \frac{h^*}{\text{Re} K_p} V_{tp}^* \left(\frac{V_{En} + V_{Es} - V_n - V_s}{2dX_e} - \frac{V_n + V_s - V_{Wn} - V_{Ws}}{2dX_w} \right)^2 \Delta Y_p + \frac{h^*}{\text{Re}} C_1 C_3 Ri \frac{V_{tp}^*}{\sigma_t} (T_n - T_s) \Delta X_p \end{aligned} \quad (3.68)$$

Si non :

$$\begin{aligned} A_p &= A_E + A_W + A_N + A_S + \left(\frac{3}{2\Delta\tau} + C_2 \frac{h^* \varepsilon_p^1}{\text{Re} K_p^1} \right) \Delta X_p \Delta Y_p + 2 \frac{h^*}{\text{Re} K_p} V_{tp}^* \left(\frac{U_{Ne} + U_{Nw} - U_e - U_w}{2dY_n} - \frac{U_e + U_w - U_{Se} - U_{Sw}}{2dY_s} \right)^2 \Delta X_p \\ &+ 2 \frac{h^*}{\text{Re} K_p} V_{tp}^* \left(\frac{V_{En} + V_{Es} - V_n - V_s}{2dX_e} - \frac{V_n + V_s - V_{Wn} - V_{Ws}}{2dX_w} \right)^2 \Delta Y_p \end{aligned} \quad (3.69)$$

3-6) Sources des équations discrétisées

Les sources des équations discrétisées sont données dans le tableau ci-dessous :

S_u	$[(P_p - P_E) + \frac{2}{3}(K_p - K_E)] \Delta Y_p + \frac{4U_{Pu}^1 - U_{Pu}^0}{2\Delta\tau} dX_e \Delta Y_p + \frac{h^*}{\text{Re}} \left[(1 + v_{mu}^*) \frac{V_{Nu} - V_{Pu}}{dX_{mu}} - (1 + v_{su}^*) \frac{V_{Pu} - V_{Su}}{dX_{su}} \right] dX_e$
S_v	$[(P_p - P_N) + \frac{2}{3}(K_p - K_N)] \Delta X_p + \frac{4V_{Pv}^1 - V_{Pv}^0}{2\Delta\tau} \Delta X_p dY_n + Ri \left(\frac{T_{nv}^1 + T_{sv}^1}{2} \right) \Delta X_p dY_n + \frac{h^*}{\text{Re}} (1 + v_{ev}^*) \frac{U_{Ev} - U_{Pv}}{dY_{ev}} - (1 + v_{wv}^*) \frac{U_{Pv} - U_{Wv}}{dY_{wv}} dX_n$
S_T	$\frac{4T_p^1 - T_p^0}{2\Delta\tau} \Delta X_p \Delta Y_p$

S_K si : $\frac{\partial T}{\partial Y} > 0$	$\frac{4K_p^1 - K_p^0}{2\Delta\tau} \Delta X_p \Delta Y_p + 2 \frac{h^*}{Re} V_{ip}^* \left[\left(\frac{U_e - U_w}{\Delta X_p} \right)^2 + \left(\frac{V_n - V_s}{\Delta Y_p} \right)^2 \right] \Delta X_p \Delta Y_p + \frac{h^*}{Re} V_{ip}^* \left(\frac{U_n - U_s}{\Delta Y_p} + \frac{V_e - V_w}{\Delta X_p} \right)^2 \Delta X_p \Delta Y_p$
S_K si : $\frac{\partial T}{\partial Y} < 0$	$\frac{4K_p^1 - K_p^0}{2\Delta\tau} \Delta X_p \Delta Y_p + \frac{h^*}{Re} Ri \frac{V_t^*}{\sigma_t} (T_s - T_n) \Delta X_p + 2 \frac{h^*}{Re} V_{ip}^* \left[\left(\frac{U_e - U_w}{\Delta X_p} \right)^2 + \left(\frac{V_n - V_s}{\Delta Y_p} \right)^2 \right] \Delta X_p \Delta Y_p + \frac{h^*}{Re} V_{ip}^* \left(\frac{U_n - U_s}{\Delta Y_p} + \frac{V_e - V_w}{\Delta X_p} \right)^2 \Delta X_p \Delta Y_p$
S_ε si : $\frac{\partial T}{\partial Y} > 0$	$\frac{4\varepsilon_p^1 - \varepsilon_p^0}{2\Delta\tau} \Delta X_p \Delta Y_p + C_1 V_{ip}^* \frac{h^*}{Re} \frac{\varepsilon_p^1}{K_p} \left[2 \left(\left(\frac{U_e - U_w}{\Delta X_p} \right)^2 + \left(\frac{V_n - V_s}{\Delta Y_p} \right)^2 \right) + \left(\frac{U_n - U_s}{\Delta Y_p} + \frac{V_e - V_w}{\Delta X_p} \right)^2 \right] \Delta X_p \Delta Y_p$
S_ε si : $\frac{\partial T}{\partial Y} < 0$	$\frac{4\varepsilon_p^1 - \varepsilon_p^0}{2\Delta\tau} \Delta X_p \Delta Y_p + C_1 V_{ip}^* \frac{h^*}{Re} \frac{\varepsilon_p^1}{K_p} \left[2 \left(\left(\frac{U_e - U_w}{\Delta X_p} \right)^2 + \left(\frac{V_n - V_s}{\Delta Y_p} \right)^2 \right) + \left(\frac{U_n - U_s}{\Delta Y_p} + \frac{V_e - V_w}{\Delta X_p} \right)^2 \right] \Delta X_p \Delta Y_p - \frac{h^*}{Re} C_1 C_3 Ri \frac{V_{ip}^*}{\sigma_t} \frac{\varepsilon_p^1}{K_p} (T_n - T_s) \Delta X_p$

3-7) Obtention d'une équation de discrétisation de pression

Les équations discrétisées des quantités de mouvement sont réécrites sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 A_e U_e &= \sum_i A_i U_i + b_u + a_e (P_E - P_P) \\
 A_w U_w &= \sum_i A_i U_i + b_u + a_w (P_P - P_W) \\
 A_n V_n &= \sum_i A_i V_i + b_v + a_n (P_N - P_P) \\
 A_s V_s &= \sum_i A_i V_i + b_v + a_s (P_P - P_S)
 \end{aligned}
 \tag{3.70}$$

b_u et b_v contiennent les termes des sources des équations discrétisés horizontale et verticale autres que les termes de pression.

Le système (3.70) est réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
 U_e &= \hat{U}_e + d_e (P_E - P_P) \\
 U_w &= \hat{U}_w + d_w (P_P - P_W) \\
 V_n &= \hat{V}_n + d_n (P_N - P_P) \\
 V_s &= \hat{V}_s + d_s (P_P - P_S)
 \end{aligned}
 \tag{3.71}$$

Où les pseudo-vitesses $\hat{U}_e, \hat{U}_w, \hat{V}_n, \hat{V}_s$ sont données par les expressions suivantes :

$$\hat{U}_e = \frac{\sum A_i U_i + b_u}{A_e}$$

$$\begin{aligned}\hat{U}_w &= \frac{\sum A_i U_i + b_u}{A_w} \\ \hat{V}_n &= \frac{\sum A_i V_i + b_v}{A_n} \\ \hat{V}_s &= \frac{\sum A_i V_i + b_v}{A_s}\end{aligned}\quad (3.72)$$

Les coefficients d_e , d_w , d_n et d_s sont données par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}d_e &= \frac{a_e}{A_e} \\ d_w &= \frac{a_w}{A_w} \\ d_n &= \frac{a_n}{A_n} \\ d_s &= \frac{a_s}{A_s}\end{aligned}\quad (3.73)$$

3-8) Equation de pression

L'introduction du champ de vitesse (3.71) dans l'équation de continuité discrétisée (3.10), nous donne la possibilité d'obtenir une équation algébrique de pression sous la forme :

$$a_p P_p = a_n P_n + a_s P_s + a_e P_e + a_w P_w + b \quad (3.74)$$

Avec:

$$\begin{aligned}a_n &= d_n \Delta X_p \\ a_s &= d_s \Delta X_p \\ a_e &= d_e \Delta Y_p \\ a_w &= d_w \Delta Y_p\end{aligned}\quad (3.75)$$

$$a_p = a_n + a_s + a_e + a_w$$

$$b = (\hat{U}_n - \hat{U}_s) \Delta Y_p + (\hat{V}_n - \hat{V}_s) \Delta X_p \quad (3.76)$$

Avec un champ estimé de vitesse utilisé dans la source (3.76), la résolution de l'équation de pression (3.74), permet l'obtention de la pression en chaque nœud du domaine. Cependant, cette pression n'est qu'une estimation notée P^* . L'introduction de cette pression estimée P^* dans les équations de Navier Stokes, nous donne une estimation du champ de vitesse noté (U^*, V^*) .

$$\begin{aligned}A_e U_e^* &= \sum A_i U_i^* + b_u + a_e (P_e^* - P_p^*) \\ A_w U_w^* &= \sum A_i U_i^* + b_u + a_w (P_p^* - P_w^*) \\ A_n V_n^* &= \sum A_i V_i^* + b_v + a_n (P_n^* - P_p^*) \\ A_s V_s^* &= \sum A_i V_i^* + b_v + a_s (P_p^* - P_s^*)\end{aligned}\quad (3.77)$$

Les estimations, nécessitent des corrections :

$$\begin{aligned} U &= U^* + u' \\ V &= V^* + v' \end{aligned} \quad (3.78)$$

où : u', v', p' représentent respectivement les corrections de la vitesse horizontal, vertical et la correction de pression.

3-9) Equation de correction de pression

On fait soustraire le système (3.77) du système (3.70) et on obtient les systèmes d'équations des corrections :

$$\begin{aligned} A_e u'_e &= \sum A_i u'_i + a_e (p'_E - p'_P) \\ A_w u'_w &= \sum A_i u'_i + a_w (p'_P - p'_W) \\ A_n v'_n &= \sum A_i v'_i + a_n (p'_N - p'_P) \\ A_s v'_s &= \sum A_i v'_i + a_s (p'_P - p'_S) \end{aligned} \quad (3.79)$$

Les termes $\sum A_i u'_i, \sum A_i v'_i$ sont éliminés pour éviter de résoudre un système linéaire des équations des corrections et suivant Patankar [65] on redéfinit des corrections des vitesses qui ne sont fonctions que des corrections des pressions :

$$\begin{aligned} u'_e &= d_e (p'_E - p'_P) \\ u'_w &= d_w (p'_P - p'_W) \\ v'_n &= d_n (p'_N - p'_P) \\ v'_s &= d_s (p'_P - p'_S) \end{aligned} \quad (3.80)$$

et par conséquent le champ de vitesse corrigé s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} U_e &= U_e^* + d_e (p'_E - p'_P) \\ U_w &= U_w^* + d_w (p'_P - p'_W) \\ V_n &= V_n^* + d_n (p'_N - p'_P) \\ V_s &= V_s^* + d_s (p'_P - p'_S) \end{aligned} \quad (3.81)$$

Le champ de vitesse dans le système (3.81) doit satisfaire l'équation de continuité. En introduisant ce champ de vitesse dans la relation (3.10), on obtient l'équation de correction de pression discrétisée suivante :

$$a_p p'_P = a_n p'_N + a_s p'_S + a_e p'_E + a_w p'_W + b' \quad (3.82)$$

Les coefficients : a_p, a_n, a_s, a_e et a_w sont les mêmes que ceux de l'équation de pression (3.74), mais la source b' est différente:

$$b' = (U_e^* - U_w^*) \Delta Y_p + (V_n^* - V_s^*) \Delta X_p \quad (3.83)$$

La correction de la pression est obtenue par la résolution de l'équation (3.82), qui permet par la suite de corriger le champ de vitesse.

3-10) Solution des systèmes d'équations de discrétisation par la méthode de balayage

Le système des équations discrétisées peut se mettre sous la forme matricielle suivant : $[A] \cdot \{\Phi\} = [B]$ (3.84)

Où $[A]$: représente une matrice heptagonale, car la fonction Φ dans un nœud dans le domaine est lié aux quatre nœuds adjacents; en notation indicielle le système se présente sous la forme :

$$A_p(i,j)\Phi_{i,j} = A_e(i,j) \Phi_{i+1,j} + A_w(i,j) \Phi_{i-1,j} + A_n(i,j) \Phi_{i,j+1} + A_s(i,j) \Phi_{i,j-1} + S(i,j) \quad (3.85)$$

avec: $1 \leq i \leq IL$, $1 \leq j \leq JL$

A cause de la taille de la matrice des coefficients, une méthode itérative doit être adoptée pour résoudre le système. La technique de balayage utilisant l'algorithme de Thomas est utilisée pour la solution itérative.

3-11) Critère de convergence

Afin de satisfaire le principe de la conservation de masse et d'énergie à chaque pas du temps, le critère de convergence suivant doit d'être vérifié pour chaque variable :

$$\frac{\text{Max}|\Phi_{i,j}^{k+1} - \Phi_{i,j}^k|}{|\Phi_{ref}|} \leq 10^{-4} \quad (3.86)$$

Où k représente le nombre d'itérations. Φ_{ref} représente une valeur de référence, non nulle et de même ordre de grandeur pour éviter la division sur zéro.

La convergence est aussi contrôlée par visualisation de la variation temporelle des variables de l'écoulement. Elle est supposée atteinte lorsque les grandeurs visualisées atteignent une asymptote horizontale.

3-12) Séquence de l'algorithme SIMPLER de calcul

1. Donner un champ initial comme première estimation pour la vitesse et la température au temps τ et $\tau - \tau$.
2. Calculer les coefficients des équations discrétisées pour déterminer les pseudo- vitesses.
3. Utiliser les pseudo-vitesses pour calculer la source de l'équation de pression.
4. Résoudre l'équation discrétisée de la pression et trouver la pression estimée P^* .
5. Calculer le champ de vitesse estimé (U^*, V^*) , en utilisant la pression estimée.
6. Calculer la source pour l'équation de correction de pression.
7. Résoudre l'équation de correction de pression et corriger le champ de vitesse au temps $\tau + \tau$.

8. Résoudre l'équation de discrétisation d'énergie et obtenir le champ de température.
9. Résoudre l'équation de discrétisation d'énergie cinétique turbulente.
10. Résoudre l'équation de discrétisation de dissipation de l'énergie cinétique turbulente.
11. Calculer la viscosité turbulente par la relation de Prandtl-Kolmogorov.
12. Arrêter le calcul dans le cas d'atteinte d'un régime permanent ou d'un régime transitoire établi ou bien considérer les champs trouvés comme des estimations au temps τ et ceux du temps $\tau - \bar{\tau}$ et retourner à l'étape 2....

CHAPITRE 4 :

VALIDATION DES RESULTATS

Afin d'adopter notre code de calcul réalisé sous langage Fortran, il est validé en utilisant les résultats expérimentaux de Tian et Karayiannis (2000) [2] pour le cas de la convection naturelle turbulente dans une cavité carré partiellement chauffée, en plus il est validé en utilisant les données expérimentales de Nielson (1990) [3] concernant le cas de la turbulence forcée dans une cavité ventilée équipée d'une fente de soufflage en partie haute et une autre de reprise en partie basse. Le cas de la convection mixte turbulente est aussi validé, en confrontant les résultats numériques à ceux de Blay, Mergui et Niculae [4].

4-1) Convection naturelle turbulente

4-1-1) Introduction

Plusieurs études numériques et expérimentales, ont été concentrées sur la convection dans des cavités rectangulaires, vue leurs simplicités géométriques et leurs présences dans plusieurs applications industrielles telles que : le refroidissement des composants électroniques, les pertes de chaleur dans les collecteurs solaires et la ventilation des constructions.

Les études réalisées, ne concernent pas seulement le régime laminaire, mais s'étalent au régime turbulent, qui est le régime d'écoulement le plus souvent rencontré dans la nature. En plus des travaux expérimentaux de Cheesewright et al (1986) [21], rapporté par Davidson (1990) [66] pour des cavités à rapport d'aspect égal à 5, on signale ceux de Tian et Karayiannis (2000) [2], et ceux de Betts et Bokhari (2000) [67], pour des cavités à rapports d'aspects égal respectivement à 1 et 28.68. Ces exemples sont souvent employés pour valider les modèles numériques de turbulence dans des cavités.

La présente étude a pour objectif la détermination des caractéristiques thermiques et dynamiques à l'intérieur d'une cavité carrée (figure 4.1), dont les parois horizontales sont adiabatiques, et les parois verticales sont portées à des températures uniformes et différentes. L'effet de la poussée thermique est seulement apparent dans l'équation de la quantité du mouvement suivant la direction verticale.

4-1-2) Formulation mathématique

Les équations gouvernantes l'écoulement sont les mêmes que ceux cités dans la thèse. Les grandeurs caractéristiques suivantes ont été adoptées pour rendre le système d'équations adimensionnel :

L : Pour les longueurs horizontales et verticales.

$V_0 = \sqrt{g\beta L(T_h - T_c)}$: Pour les vitesses horizontales et verticales.

$\frac{L}{V_0}$: Pour le temps.

$\rho_0 V_0^2$: Pour la pression.

V_0^2 : Pour l'énergie cinétique turbulente.

$\frac{V_0^2 \nu}{L^2}$: Pour la fonction de dissipation.

La température adimensionnelle est définie par : $T = (T^* - T_c) / (T_h - T_c)$

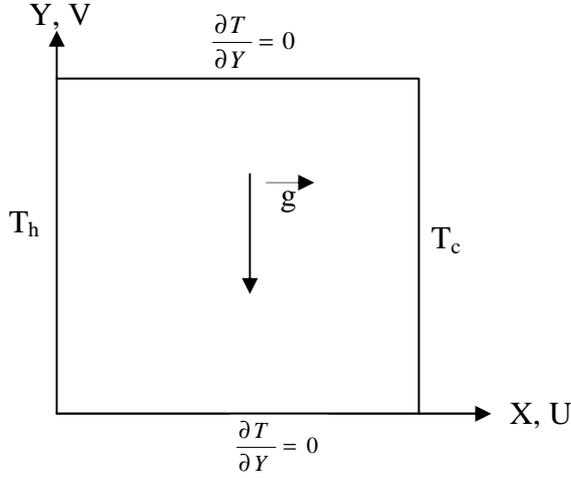


Figure 4.1 : La Cavité carrée de Tian et Karayiannis

Les équations mathématiques exprimant la conservation de la masse, de la quantité de mouvement suivant X et Y et l'équation de l'énergie, sous ces formes adimensionnelles, sont représentées respectivement ci-dessous :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial X}(U.U) + \frac{\partial}{\partial Y}(V.U) = -\frac{\partial P}{\partial X} + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial X} \left[2\nu_i^* \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right) - \frac{2}{3} K \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[\nu_i^* \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial X}(U.V) + \frac{\partial}{\partial Y}(V.V) = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial X} \left[\nu_i^* \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[2\nu_i^* \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right) - \frac{2}{3} K \right] + T$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial X}(U.T) + \frac{\partial}{\partial Y}(V.T) = \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{1}{\text{Pr}} + \frac{\nu_i^*}{\sigma_t} \right) \frac{\partial T}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{1}{\text{Pr}} + \frac{\nu_i^*}{\sigma_t} \right) \frac{\partial T}{\partial Y} \right]$$

Le modèle de la turbulence employé dans cette étude est le modèle LRN à deux équations de fermeture de Launder et Sharma. Les équations de ce modèle exprimant la conservation de l'énergie cinétique turbulente et son taux de dissipation sont les suivantes :

Equation d'énergie cinétique turbulente

$$\frac{\partial K}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial X}(U.K) + \frac{\partial}{\partial Y}(V.K) = \frac{\partial}{\partial X} \left(\nu + \frac{\nu_i}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\nu + \frac{\nu_i}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial Y} + 2\nu_i \left[\left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 \right] + \nu_i \left(\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 - \varepsilon - D$$

Equation de dissipation de l'énergie cinétique turbulente

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial X}(U.\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial Y}(V.\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial X} \left(\nu + \frac{\nu_i}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\nu + \frac{\nu_i}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial Y} + 2\nu_i C_1 f_1 \frac{\varepsilon}{K} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 \right] + \nu_i C_1 f_1 \frac{\varepsilon}{K} \left(\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 - C_2 f_2 \frac{\varepsilon^2}{K} + E$$

Dans les équations précédentes $Ra = \frac{g\beta H^3 \Delta T}{\nu^2}$ est le nombre de Rayleigh, $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ est le nombre de Prandtl et σ_t est le nombre de Prandtl turbulent.

Pour la résolution des équations régissant le phénomène étudié nous avons adopté les conditions initiales et aux limites suivantes :

à $\tau=0$: $U=V=0$, $T=T_c$, $K=10^{-3}$, $\varepsilon=10^{-3}$ dans tous le domaine.

Pour les conditions aux limites à $\tau>0$:

$$X=0 : U = V = 0, T = T_h, K=0, \varepsilon = 2 \left(\frac{\partial \sqrt{K}}{\partial X} \right)^2$$

$$X=1 : U = V = 0, T = T_c, K=0, \varepsilon = 2 \left(\frac{\partial \sqrt{K}}{\partial X} \right)^2$$

$$Y=0 : U = V = 0, \frac{\partial T}{\partial Y} = 0, K=0, \varepsilon = 2 \left(\frac{\partial \sqrt{K}}{\partial Y} \right)^2$$

$$Y=1 : U = V = 0, \frac{\partial T}{\partial Y} = 0, K=0, \varepsilon = 2 \left(\frac{\partial \sqrt{K}}{\partial Y} \right)^2$$

Les constantes de ce modèle sont regroupées dans le tableau ci-dessous :

C_μ	σ_t	σ_K	σ_ε	C_1	C_2
0.09	1	1	1.3	1.44	1.92

4-1-3) Formulation Numérique

La méthode des volumes finis a été utilisée pour la discrétisation des équations régissant le phénomène de la convection naturelle turbulente dans la cavité, ainsi que leurs conditions initiales et aux limites. La discrétisation temporelle est semi-implicite et en second ordre, suivant la relation :

$$\frac{\partial \phi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial t} \approx \frac{3\phi^{\tau+\Delta\tau} - 4\phi^\tau + \phi^{\tau-\Delta\tau}}{2\Delta\tau}$$

La discrétisation des termes convectifs et non linéaires, suit le schéma explicite d'Adam-Bashforth :

$$(U \cdot \nabla) \phi|^{\tau+\Delta\tau} \approx 2(U \cdot \nabla) \phi|^\tau - (U \cdot \nabla) \phi|^{\tau-\Delta\tau}$$

La discrétisation temporelle des termes diffusifs et des termes des gradients de pression dans l'ensemble des équations modélisantes est totalement implicite. La discrétisation temporelle de la poussé thermique axiale, dans l'équation d'énergie, suit le schéma d'Adams-Bashforth.

Pour la discrétisation spatiale, on utilise le schéma des différences centrées, ayant une erreur de troncature d'ordre deux (avec une précision du seconde ordre).

Pour le couplage vitesse- pression, nous avons utilisé l'algorithme SIMPLER (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations Revised). La méthode de balayage, avec l'algorithme de Thomas est utilisée pour la résolution itérative des systèmes d'équations.

Le maillage adopté dans cette étude est uniforme suivant la direction verticale, et non uniforme suivant la direction horizontale, il est plus fin près des parois, où on prévoit un changement important des variables physiques de l'écoulement. Deux maillages non uniformes et différents (70x70 et 80x80) ont été utilisés pour déterminer leurs influences sur les résultats. L'erreur relative aux valeurs des nombres de Nusselt moyens, entre les deux maillages est inférieure à 8% et inférieur à 1% pour le maximum de la vitesse verticale et la viscosité turbulente. Dans toutes les simulations, la grille 80x80 a été choisie.

4-1-4) Résultats et Discussion

Après exécution du programme, nous avons obtenus un régime stationnaire après un temps non dimensionnel de $\tau=150$. La figure 4.2 montre la distribution de la température moyenne dans la cavité considérée. Nous constatons une stratification thermique stable suivant la direction verticale, et une très faible variation (presque nulle) suivant la direction horizontale, à l'exception des zones adjacentes aux parois chaude et froide, où nous notons un gradient important de température.

La figure 4.3 illustre la distribution de l'énergie cinétique turbulente à l'intérieur de la cavité. Nous avons constaté que les maxima sont situés près des parois verticales. Dans le reste de la cavité, nous avons relevé une très faible variation, que soit suivant la direction horizontale ou verticale.

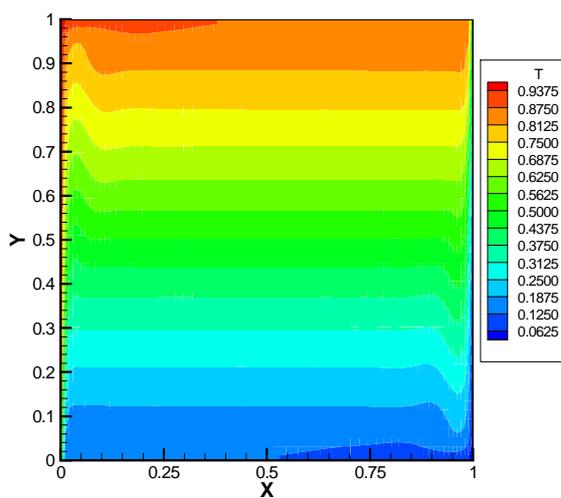


Figure 4.2 : Distribution de la température moyenne

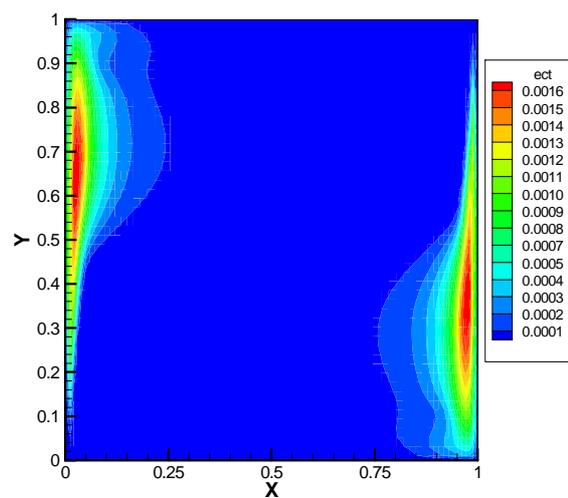


Figure 4.3 : Distribution de l'énergie cinétique turbulente

La figure 4.4 représente la distribution de la dissipation de l'énergie cinétique turbulente, où nous avons remarqué le même aspect qualitatif que celui de l'énergie cinétique turbulente. Sous l'effet de la poussée thermique suivant la direction verticale, les particules fluide près de la paroi chaude sont obligés de se déplacer vers le haut, et ceux près de la paroi froide se déplacent vers le bas, par conséquent les lignes de courant montre une zone de recirculation dans le sens horaire.

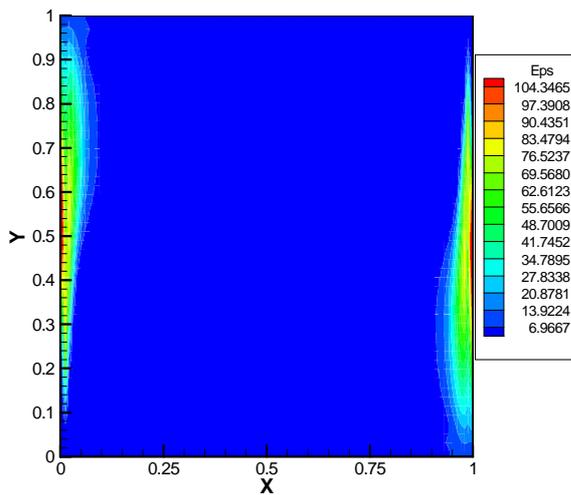


Figure 4.4 : Distribution de la dissipation de l'énergie cinétique turbulente

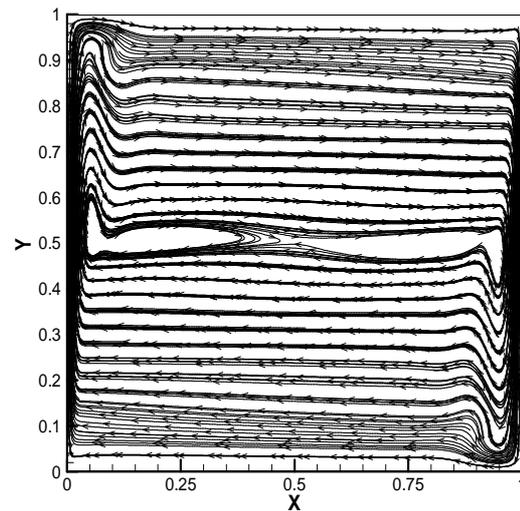


Figure 4.5 : Lignes de courant

En examinant la figure 4.5 qui représente les lignes de courant de l'écoulement considéré nous avons noté la présence de deux petits vortex près des parois verticales qui s'étalent vers le centre de la cavité.

Pour plus de détail, nous avons représenté sur les figures 4.6 et 4.7 les profils de la température moyenne et de la vitesse verticale moyenne à mi-hauteur de la cavité ($Y=0.5$). En allant de la paroi chaude vers la paroi froide, le profil de la température moyenne montre une diminution brusque de la température près de la paroi chaude, ensuite une stabilisation et à nouveau, une diminution rapide près de la paroi froide. Les chutes de la température se font à l'intérieur des couches limites qui se développent au voisinage des parois verticales. Contrairement à la température moyenne, nous constatons une augmentation rapide de la vitesse verticale moyenne près de la paroi chaude, et une diminution brusque de celle-ci près de la paroi froide. Dans le reste de la cavité, la vitesse est uniforme. On signale un maximum de 0.22 qui est très proche de celui trouvé par l'expérience [2].

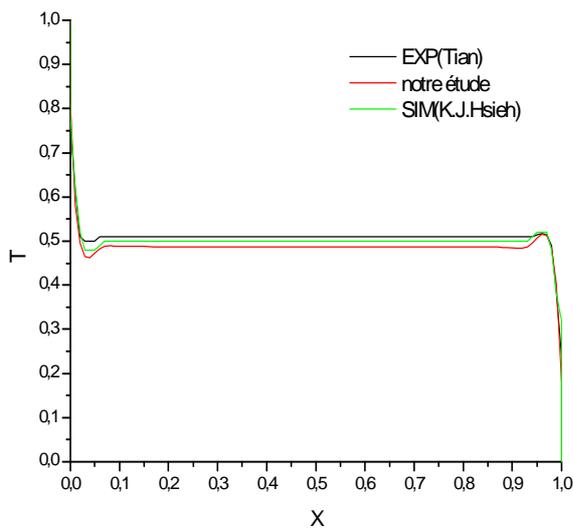


Figure 4.6 : Profil de la température moyenne
à $Y=0.5$

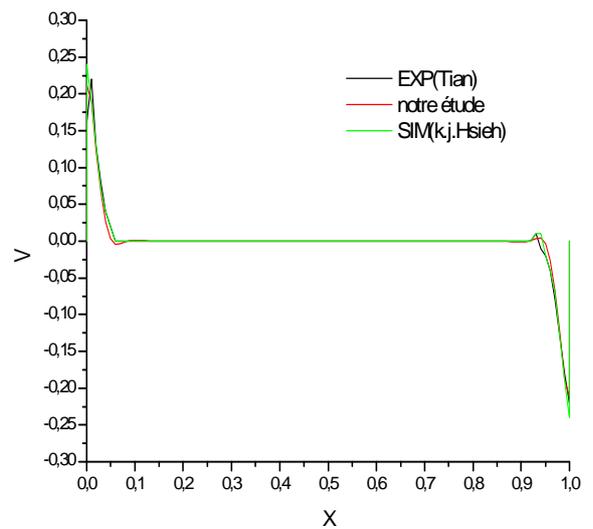


Figure 4.7 : Profil de la vitesse verticale
moyenne à $Y=0.5$

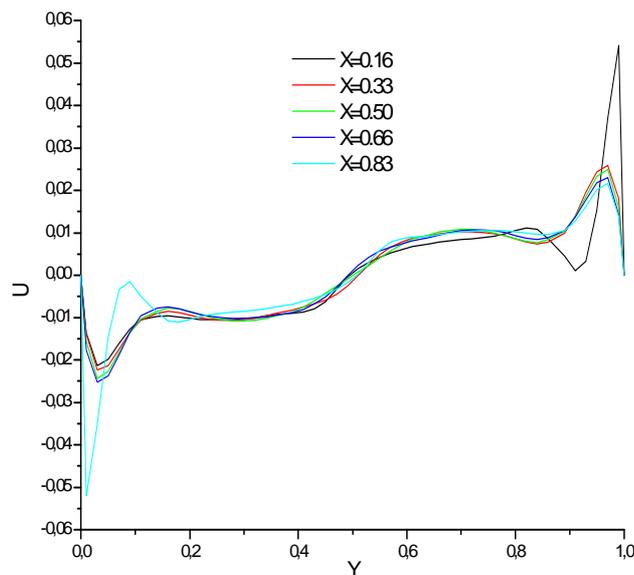


Figure 4.8 : Profil de la vitesse horizontale moyenne pour différentes valeurs de X

La figure ci-dessus (figure 4.8), montre le profil de la vitesse horizontale pour différentes valeurs de X arbitrairement choisies. Il est clair que les vitesses les plus élevées sont situées près de la paroi chaude adjacente à la paroi horizontale supérieure, et les vitesses les plus faibles se situent près de la paroi froide adjacente à la paroi horizontale inférieure. A l'intérieur de la cavité, et à cause de la stratification thermique stable, les valeurs des vitesses sont plus au moins comparables dans les différentes positions choisies.

La figure ci-dessous (figure 4.9), montre la distribution de la viscosité turbulente normalisée à l'intérieur de la cavité. Il est clair que les valeurs maximales se trouvent à proximité du coin supérieur gauche et inférieur droit. La viscosité turbulente est dix fois supérieure à la viscosité moléculaire.

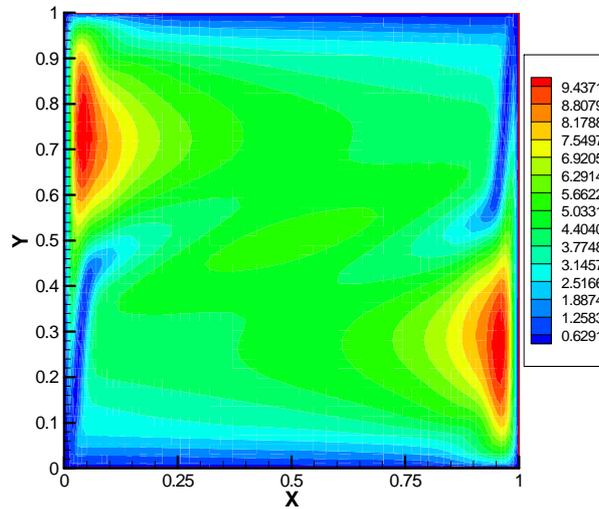


Figure 4.9 : Distribution de la viscosité turbulente normalisée

Le nombre de Nusselt local qui caractérise le transfert de chaleur au niveau des parois actives, est défini comme suit :

$$Nu = - \frac{L}{T_h - T_c} \frac{\partial T}{\partial n} \quad \text{Où } n \text{ représente le vecteur normal à la surface.}$$

Le nombre de Nusselt moyen est donné par la relation :

$$\overline{Nu} = - \frac{\int_0^H Nu .dy}{H} \quad (\text{Dans notre cas } H=L)$$

Le tableau suivant compare les valeurs du nombre de Nusselt moyen relevées depuis la littérature [2,68] avec celles de la présente étude.

Expérience	\overline{Nu} Paroi chaude	\overline{Nu} Paroi froide
Tian (2000)	64.00	65.3
Hsieh (2003)	54.68	54.52
Présente Étude	68.34	68.93

Les valeurs obtenues se rapproches plus de celles de Tian [2] que celles de Hsieh [68]. Malgré ca, une surestimation du nombre de Nusselt moyen de moins de 5% est trouvée par rapport à l'expérience. La relation de corrélation souvent adoptée pour les problèmes de turbulence naturelle dans les cavités est : $\overline{Nu} = C . Ra^{1/3}$

Où C représente un coefficient qui dépend essentiellement du rapport d'aspect ($A=H/L$), et qui varie généralement entre 0.043 et 0.047. Pour notre cas, la valeur $C=0.047$ donne une meilleur approche.

4-1-4) Conclusion

Dans cette étude, la méthode des volumes finis ayant une précision d'ordre deux dans l'espace et dans le temps est employée pour la résolution du problème de la convection naturelle turbulente dans une cavité carrée. L'algorithme SIMPLER est utilisé pour le couplage vitesse-pression, et la méthode du balayage avec l'algorithme TDMA est utilisée pour la résolution itérative des systèmes d'équations discrétisées. Pour un nombre de Rayleigh : $Ra = 1.58 \cdot 10^9$, les résultats numériques obtenus montrent un accord favorable avec les résultats expérimentaux de Tian et Karayiannis (2000), et les résultats numériques de Hsieh (2003), concernant le champ de la vitesse, et les quantités turbulentes. Cependant, une surestimation du nombre du Nusselt moyen de 5% est trouvée. De point de vue numérique, la méthode en seconde ordre dans l'espace et dans le temps à réussi de prédire correctement l'évolution des variables physiques à l'intérieur de la cavité pour ce nombre de Rayleigh, cependant pour des nombres de Reynolds $> 10^{10}$, cette méthode commence à perdre son exactitude.

4-2) Convection forcée turbulente

4-2-1) Introduction

Depuis toujours, les écoulements convectifs présentent un aspect permanent de la vie quotidienne car ils sont largement rencontrés dans plusieurs détails de notre environnement. Cependant la majorité de ces écoulements sont souvent turbulents, et ont des caractéristiques complexes, si pourquoi ils méritent d'être exploré.

Un souci majeur pendant l'étude de la turbulence, est la modélisation convenable de l'écoulement près des parois où les effets visqueux sont prédominants, pour cela une étude numérique de la convection forcée turbulente est menée par Davidson et Fontaine [14]. Il est montré que l'utilisation de l'un des modèles LRN k- ϵ de la turbulence, donne des résultats légèrement plus précises que l'implantation des fonctions de paroi dans le cas où l'on emploi le modèle standard.

La présente étude consiste à examiner numériquement le champ de la vitesse à l'intérieur d'une cavité rectangulaire ventilée (figure ci-dessous).

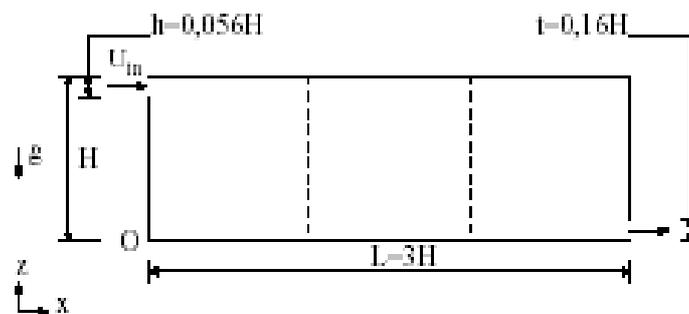


Figure 4.10 : La cavité de Nielson

La ventilation est assurée par le mouvement turbulent d'air entrant par une ouverture au coin supérieur gauche, et sortant par une autre au coin inférieur droit, afin de comparer nos résultats numériques avec ceux tirés d'après la littérature.

La vitesse d'entrée d'air, est choisie de telle sorte que le nombre de Reynolds basé sur la hauteur de l'ouverture d'entrée doit être égal à **5000**. Cette valeur correspond à la simulation numérique bidimensionnelle de Müller et Davidson [69], et à l'étude expérimentale de Restivo [17].

4-2-2) Modélisation mathématique

Les équations mathématiques gouvernant l'écoulement à l'intérieur de la cavité sont les mêmes que ceux employés dans la thèse sans introduire bien entendu l'équation de la chaleur, et le terme de la poussée dans l'équation de conservation suivant la direction verticale, la seule différence réside dans les conditions aux limites :

à $\tau=0$: $U=V=0$, $K=10^{-3}$, $\varepsilon=10^{-3}$ dans tout le domaine.

Pour les conditions aux limites à $\tau>0$:

à $X=0$: $U = V = 0$, $K=0$, $\varepsilon=0$ $0 < Y < H-h$

à $X=0$: $U = U_{in}$, $V=0$, $K=1.5(I_0 U_{in})^2$, $\varepsilon=10 \frac{K^{1.5}}{h}$ $H-h < Y < H$

à $X=L$: $U = U_{out}$, $V = 0$, $\frac{\partial K}{\partial X} = 0$, $\frac{\partial \varepsilon}{\partial X} = 0$ $0 < Y < t$

à $X=L$: $U = V = 0$, $K=0$, $\varepsilon=0$ $t < Y < H$

à $Y=0$: $U = V = 0$, $K=0$, $\varepsilon=0$ $0 < X < L$

à $Y=H$: $U = V = 0$, $K=0$, $\varepsilon=0$ $0 < X < L$

4-2-3) Résultats et discussion

Pour un pas de temps de 10^{-4} , nous avons obtenu un régime permanent après un temps adimensionnel de 150. L'écoulement à l'intérieur de la cavité est gouverné par la présence de trois vortex (voir figure 4.11). Le plus grand occupe la totalité de la cavité et tourne dans le sens horaire, et les deux autres ont des tailles comparables, et sont situés l'un au coin inférieur gauche, et l'autre au coin supérieur droit. Les deux derniers vortex tournent dans le sens anti-horaire.

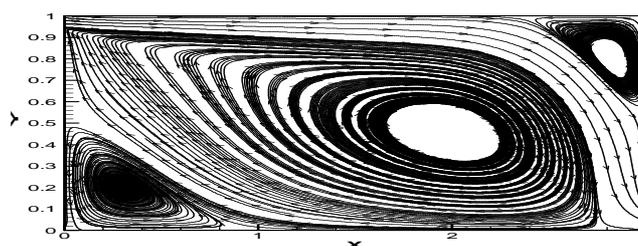


Figure 4.11 : Lignes de courant à l'intérieur de la cavité.

Le profil de la vitesse horizontale moyenne à $X=2H$ est représenté sur la figure 4.12. On voit que les résultats obtenus montrent un accord acceptable que soit avec l'expérience de Restivo, ou avec l'étude numérique de Davidson, surtout dans la partie supérieure de la cavité.

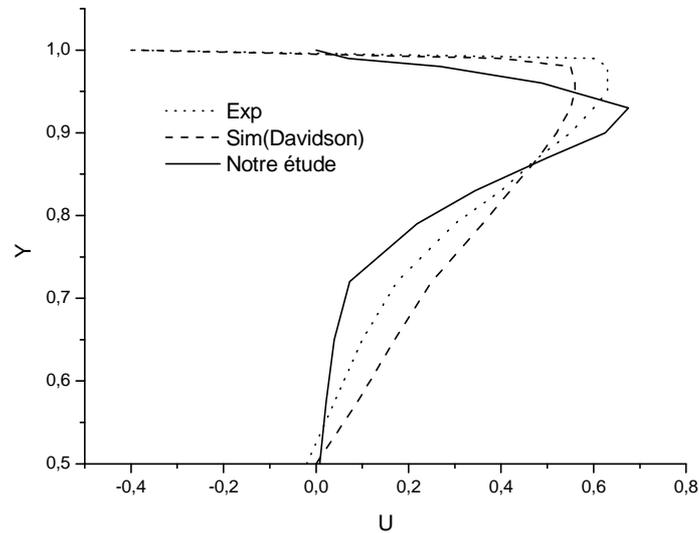


Figure 4.12 : Profils de la vitesse horizontale moyenne à $X=2H$

Les profils de la vitesse horizontale sont examinés pour deux positions suivant la direction verticale. La première correspond à mi-hauteur de l'ouverture à l'entrée, et la deuxième correspond à la sortie. Les figures 4.13 et 4.14 présentent une comparaison directe entre les profils de la vitesse horizontale moyenne obtenus par Restivo et Davidson, et ceux tirés à partir de notre étude numérique pour deux positions suivant la direction verticale.

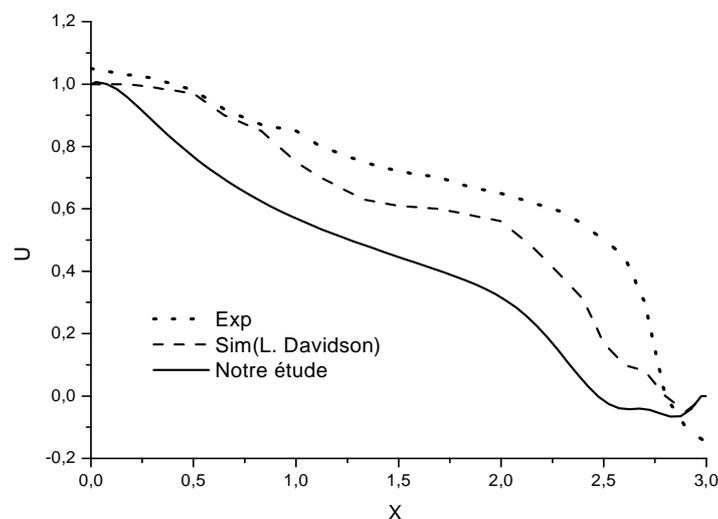


Figure 4.13 : Profils de la vitesse horizontale moyenne à $Y=H-h/2$

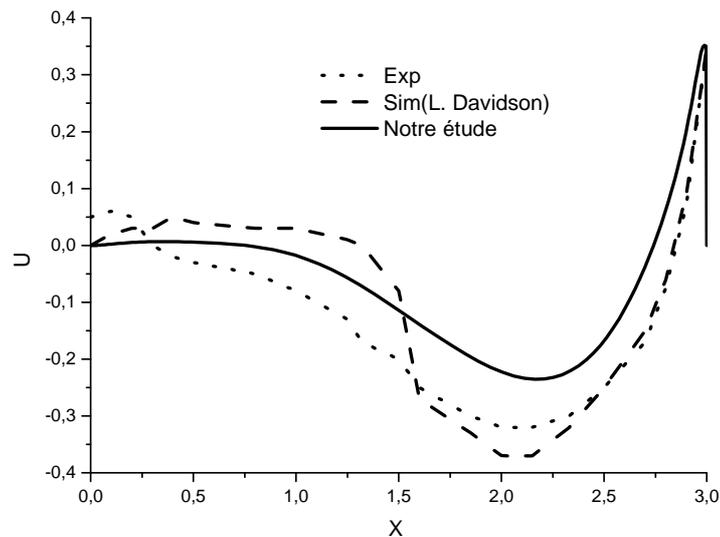


Figure 4.14 : Profils de la vitesse horizontale moyenne à $Y=h/2$

4-2-4) Conclusion

Dans la présente étude, le problème de la convection forcée turbulente dans une cavité ventilée est résolu numériquement par la méthode des volumes finis. Pour le cas étudié, le modèle de turbulence qui prend en considération l'effet des parois (LRN), a donné des résultats encourageants. Nous avons tracé les profils de la vitesse horizontale à plusieurs sections, où un accord acceptable est trouvé entre nos résultats et les résultats numériques de Davidson et les résultats expérimentaux de Restivo.

4-3) Convection mixte turbulente

4-3-1) Introduction

La convection de chaleur induite par la différence de température est un phénomène apparent dans plusieurs domaines de l'industrie tel que le refroidissement des composants électroniques et la ventilation des locaux.

Le présent travail consiste à examiner le champ thermique et dynamique ainsi que les différentes quantités turbulentes à l'intérieur d'une cavité carrée ventilée, partiellement chauffée. La ventilation est assurée par le mouvement turbulent d'air entrant par une ouverture au coin supérieur gauche, et sortant par une autre au coin inférieur droit. La configuration géométrique est la même étudiée par Blay Mergui et Niculae [4], elle est donnée par la figure 4.15.

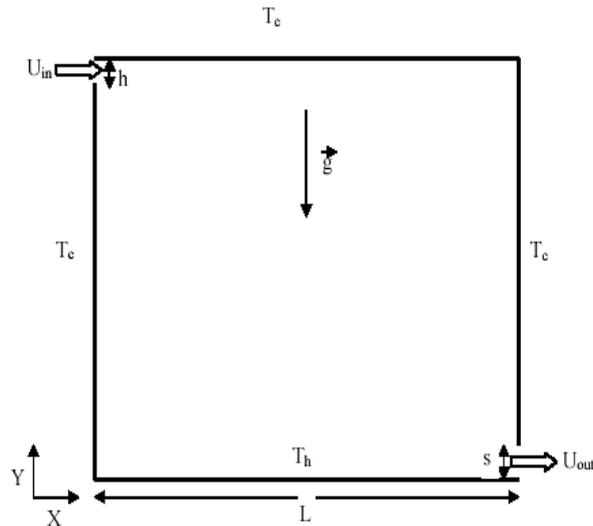


Figure 4.15 : La cavité ventilée de Blay, Mergui et Niculae

4-3-2) Formulation Mathématique

Les équations régissant le phénomène de la convection mixte à l’intérieur de la cavité sont les mêmes que ceux cités dans la thèse. Concernant la turbulence, Deux modèles de turbulence de la famille LRN k-ε ont étaient employés dans cette étude, qui sont le modèle de Jones et Launder (1972) et le modèle de Launder et Sharma (1974). La seule différences entre les deux modèles employés, est dans l’expression de la fonction d’amortissement f_μ , qui vaut :

$$f_\mu = \exp\left[\frac{-2.5}{\left(1 + \frac{R_{et}}{50}\right)}\right] \quad \text{d'après Jones et Launder}$$

$$f_\mu = \exp\left[\frac{-3.4}{\left(1 + \frac{R_{et}}{50}\right)^2}\right] \quad \text{d'après Launder et Sharma.}$$

Cependant un changement est introduit concernant les conditions aux limites, vu la géométrie de la cavité :

à $t=0$: $U=V=0, K=10^{-3}, \epsilon=10^{-3}$ dans tout le domaine.

Pour les conditions aux limites à $t>0$:

à $X=0$: $U =V= 0, T=T_f, K=0 , \epsilon=0$ $0<Y<L-h.$

à $X=L$: $U =U_{in} , V=0, T=T_f, K=0.00125 , \epsilon=10\frac{K^{1.5}}{h}$ $L-h<Y<L.$

$$\begin{aligned} \text{à } X=L : U = U_{\text{out}}, V = 0, \frac{\partial T}{\partial X} = 0, \frac{\partial K}{\partial X} = 0, \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} = 0 & \quad 0 < Y < s. \\ \text{à } X=L : U = V = 0, T = T_f, K = 0, \varepsilon = 0 & \quad s < Y < L. \\ \text{à } Y=0 : U = V = 0, T = T_c, K = 0, \varepsilon = 0 & \quad 0 < X < L. \\ \text{à } Y=L : U = V = 0, T = T_f, K = 0, \varepsilon = 0 & \quad 0 < X < L. \end{aligned}$$

4-3-3) Résultats et discussion

Les paramètres de contrôle du problème sont les suivants : le nombre de Reynolds basé sur la vitesse de l'air à l'entrée et la hauteur de l'ouverture à l'entrée est **Re=678**, le nombre de Richardson qui indique l'importance relative entre la convection libre et la convection forcée est **Ri=0.036** et le nombre de Prandtl de l'air à la température de référence est **Pr=0.71**. Ces paramètres sont choisis de telle sorte qu'on puisse faire une comparaison directe avec l'étude expérimentale de Blay, Mergui et Niculae [4].

Le maillage hyperbolique permette une meilleure lecture de la physique près des parois. Il est plus fin près des parois où on prévoit un changement important des variables physiques. Pratiquement 10 nœuds sont localisés à l'ouverture d'entrée d'air, et 16 nœuds au niveau de la section de sortie. Pour tester l'indépendance des résultats obtenus vis-à-vis le maillage, deux maillages différents ont été utilisés (60x60 et 70x70). Le tableau ci-dessous présente l'influence du raffinement du maillage sur la viscosité turbulente normalisée et sur le maximum de la vitesse verticale pour les deux modèles de turbulence utilisés.

	Modèle de Jones et Launder		Modèle de Launder et Sharma	
	V_{max}	$V_t^*_{\text{max}}$	V_{max}	$V_t^*_{\text{max}}$
60x60	0.173	77.34	0.180	77.44
70x70	0.182	72.30	0.179	72.46
Erreur relative	4.94 %	6.97 %	0.55 %	6.87 %

Dans toutes les simulations la grille 70x70 a été choisie.

Pour un pas de temps de 10^{-4} , nous avons obtenu un régime permanent après un temps adimensionnel de 200. L'écoulement à l'intérieur de la cavité est gouverné par la présence de trois vortex, comme le montre les lignes de courant (voir figure 4.16).

Le plus grand occupe la totalité de la cavité, et tourne dans le sens horaire, et les deux autres ont des tailles comparables, et sont situés l'un au coin inférieur gauche, et l'autre au coin supérieur droit. Ces deux derniers petits vortex tournent dans le sens anti-horaire.

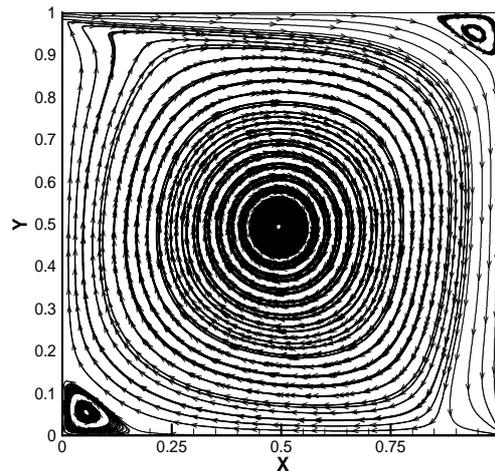


Figure 4.16 : Lignes de courant

Les profils de la vitesse horizontale normalisée, la racine carrée de l'énergie cinétique turbulente normalisée et la température non dimensionnelle à $X=0.5$ sont examinés pour le cas étudié. Les figures 4.17, 4.18 et 4.19 présentent une comparaison directe entre les profils obtenus d'après notre étude numérique, et ceux tirés à partir de l'expérience de Blay, Mergui et Niculae [4] d'une part, et d'après l'étude numérique de Zhang et Chen [70] utilisant la simulation des grandes échelles d'une autre part. Pour la vitesse horizontale normalisée, on remarque que les résultats numériques sont très proches de l'expérience dans la région voisine de la paroi horizontale dans un intervalle entre : $0.4 < Y < 0.5$. Dans les autres endroits, le profil expérimental est un petit peu éloigné de nos résultats numériques, surtout dans la partie inférieure à $Y < 0.4$.

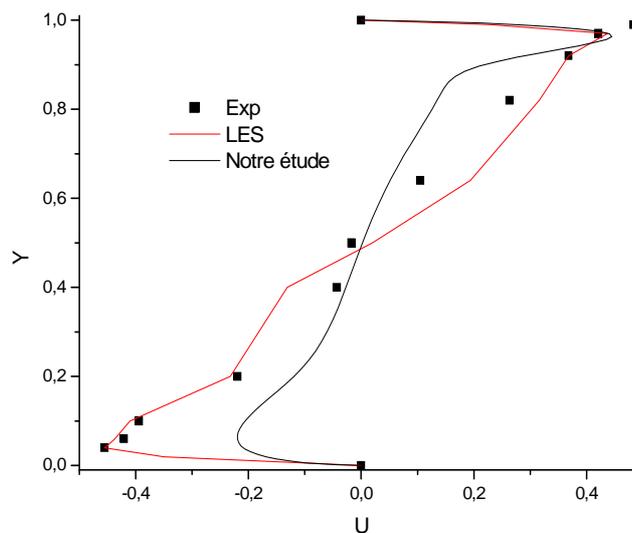


Figure 4.17 : Profil de la vitesse horizontale moyenne à $X=0.5$

Pour l'énergie cinétique turbulente normalisée, le même commentaire peut être dit comme dans le cas de la vitesse.

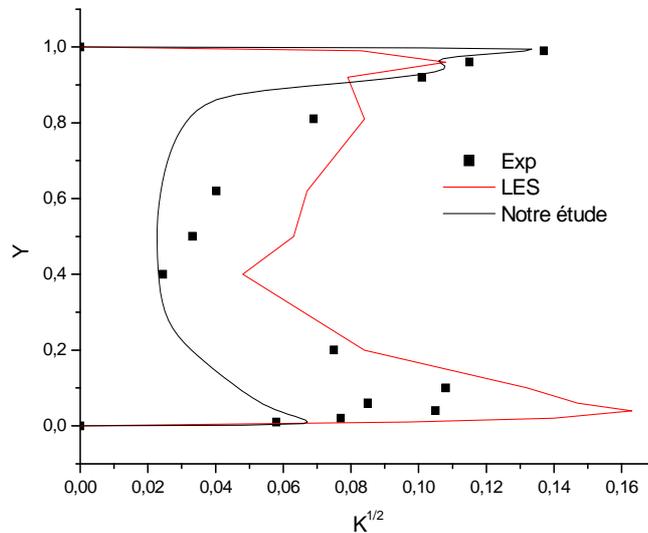


Figure 4.18 : Profil de $K^{1/2}$ à $X=0.5$

Pour le profil de la température adimensionnelle à cette position, on constate une chute brusque près de la paroi verticale gauche jusqu'au $T=0.2$, ensuite une stabilisation jusqu'au $Y=0.85$, et finalement une diminution presque linéaire dans l'intervalle $0.9 < Y < 1$. Nos résultats numériques sont plus proches des valeurs expérimentales, mieux que ceux obtenues d'après l'étude numérique de Zhang et Chen utilisant la simulation des grandes échelles, notamment aux zones adjacentes à la paroi horizontale supérieure où se trouve l'entrée d'air à $Y=1$, et aussi aux zones adjacentes à la paroi horizontale inférieure où se trouve la sortie. Cela est dû essentiellement au raffinement du maillage près des parois.

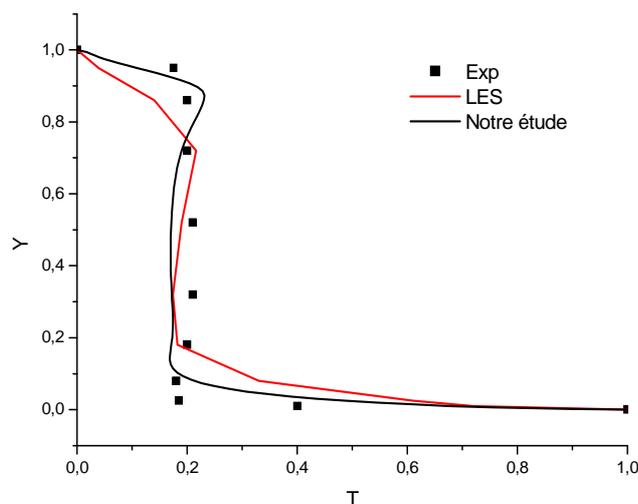


Figure 4.19 : Profil de la température moyenne à $X=0.5$

4-3-4) Conclusion

Dans le présent travail, la méthode des volumes finis est employée pour résoudre numériquement le problème de la convection mixte turbulente dans une cavité carré ventilée. Deux modèles k- ϵ de turbulence ont été utilisés dans cette étude, le premier est le modèle de Jones et Launder, et le second est celui de Launder et Sharma. L'algorithme SIMPLER est utilisé pour le couplage vitesse-pression, et la méthode du balayage avec l'algorithme de Thomas sont employés pour la résolution du système final des équations de discrétisation. Les paramètres géométriques et dynamiques de la cavité sont choisis de telle sorte qu'on fait référence à l'étude expérimentale de Blay, Mergui et Niculae [4].

Les résultats numériques obtenus d'après les deux modèles sont presque semblables avec une légère supériorité pour le modèle de Launder et Sharma. Ils montrent en effet, un accord acceptable avec les résultats de l'expérience d'une part, et les résultats numériques de Zhang et Chen utilisant la simulation des grandes échelles (LES) d'une autre part.

CHAPITRE 5 :

RESULTATS ET DISCUSSION

5-1) Indépendance du maillage

Nous avons testé trois maillages non uniformes différents pour s'assurer que nos résultats numériques sont indépendants du maillage choisi. Les maillages choisis sont caractérisés respectivement par : 70x70 nœuds, 80x80 nœuds et 100x100 nœuds suivant les deux directions : horizontale et verticale. L'erreur relative maximum entre les trois maillages pour trois variables est donnée par le tableau ci-dessous :

Erreur relative	Entre : 70x70 et 80x80	Entre : 80x80 et 100x100
Maximum de la vitesse verticale	1.8%	1.2%
Maximum de la viscosité turbulente	4.2%	2.3%
Le nombre du Nusselt moyen	10.4%	2.4%

Nous avons pensé que l'erreur relative est acceptable vu notre moyens de calcul, et donc le maillage 100x100 est adopté pour tous les cas considérés dans cette étude.

5-2) Evolution spatio-temporelle de l'écoulement

Les paramètres de contrôle du problème étudié sont les suivants : un nombre de Grashof fixé à 10^9 , le nombre de Reynolds basé sur la largeur de l'ouverture à l'entrée et la vitesse à l'entrée, prend différentes valeurs de telle sorte que le nombre de Richardson qui indique l'importance relative entre la convection naturelle et la convection forcée prend les valeurs suivantes : **Ri=0.1, Ri=0.5, Ri=1, Ri=2, Ri=5, Ri=10, Ri=20 et Ri=40.**

Pour chaque nombre de Richardson, le calcul itératif commence à partir de $\tau=0$ avec un pas de temps de 10^{-5} . Nous avons obtenus un régime stationnaire après un temps adimensionnel moyen de $\tau=30$ pour chaque cas, comme le montre l'évolution temporelle de la vitesse horizontale moyenne, la vitesse verticale moyenne, la température moyenne et la viscosité turbulente pour quelques points à l'intérieur de la cavité arbitrairement choisis. Ces points sont choisis de telle sorte qu'ils représentent la totalité du domaine de calcul (voir les figures : 5.1- 5.4). Les points choisis sont définis par leurs coordonnées dans le maillage non uniforme utilisé, caractérisé par 100 nœuds suivant chaque direction.

Comme l'évolution temporelle conduit au même résultat (régime stationnaire) pour tous les nombres de Richardson, nous avons décidé de la représentée pour le cas : Ri=40 seulement, pour ne pas alourdir la thèse.

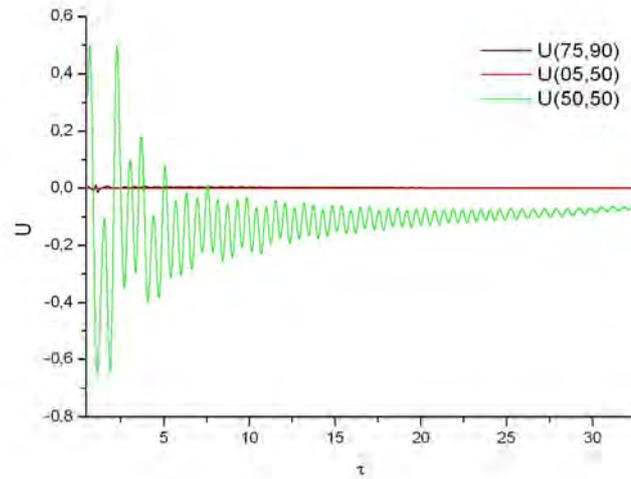


Figure 5.1 : Evolution temporelle de la vitesse horizontale moyenne pour $Ri=40$

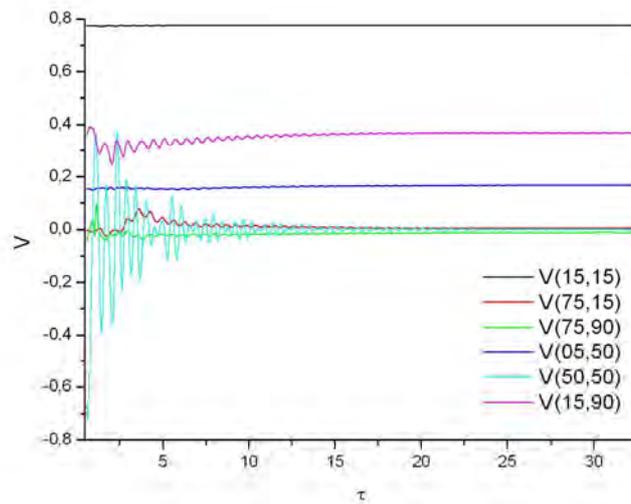


Figure 5.2 : Evolution temporelle de la vitesse verticale moyenne pour $Ri=40$

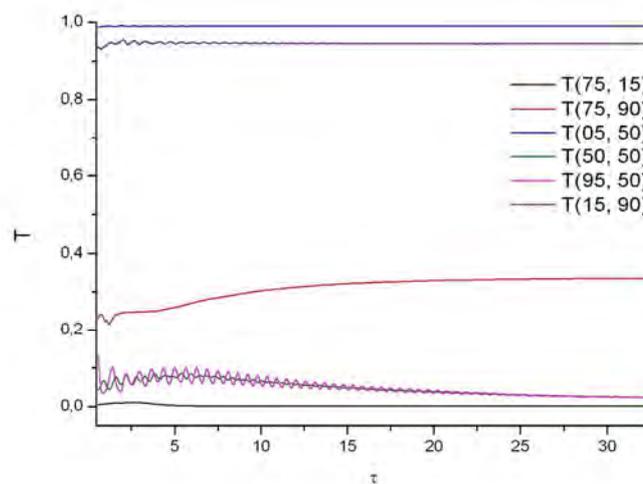


Figure 5.3 : Evolution temporelle de la température moyenne pour $Ri=40$

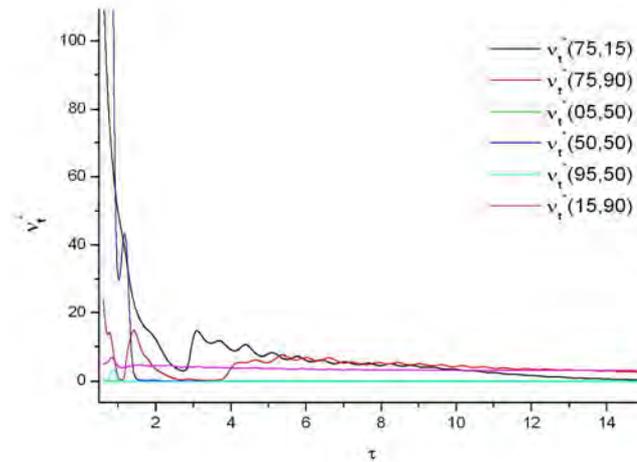


Figure 5.4 : Evolution temporelle de la viscosité turbulente pour $Ri=40$

5-3) Lignes de courant

Le mode résultant est caractérisé par une structure tourbillonnaire qui se change avec l'augmentation du nombre de Richardson, comme le montre les lignes de courant sur la figure 4.5.

Pour $Ri=0.1$, on remarque la présence de deux vortex à droite du jet d'air vertical qui traverse la cavité de bas vers le haut en contact avec sa paroi chaude. Le vortex le plus grand tourne dans le sens horaire, et l'autre de taille moindre se trouve allongé et tourne dans le sens antihoraire. Ce dernier regroupe deux cellules qui ont le même sens de rotation. Suivant ce mouvement, la turbulence porte donc l'air froid éloigné près de la paroi chaude. Ce mécanisme est toujours utilisé dans les échangeurs de chaleur à plaques ou à réseaux de tube ou à ailettes, permettant ainsi des échanges de chaleur très importants.

Quand le nombre de Richardson augmente progressivement, la taille du vortex qui tourne dans le sens antihoraire devient de plus en plus importante, et par conséquent la taille de celui qui tourne dans le sens horaire est affaiblie considérablement. En plus, on note que les centres des vortex sont déplacés vers la moitié inférieure de la cavité, et que la structure tourbillonnaire est de plus en plus déformée, donnant ainsi une forme elliptique pour les deux vortex. On remarque aussi que pour $0.1 \leq Ri \leq 5$, les lignes de courant sont presque parallèles le long de la paroi verticale gauche dans une bande de l'épaisseur de l'ouverture h , indiquant une prédominance de l'effet de la convection forcée par rapport à la convection naturelle. A partir de $Ri=10$, quand la convection naturelle prédomine, on constate l'apparition des petites cellules qui ont des formes irrégulières et qui ont des sens de rotation différents, jusqu'à ce qu'elles envahissent la moitié supérieure de la cavité pour un nombre de Richardson égale 20, et par conséquent, la taille des deux vortex cités plus haut est réduit considérablement.

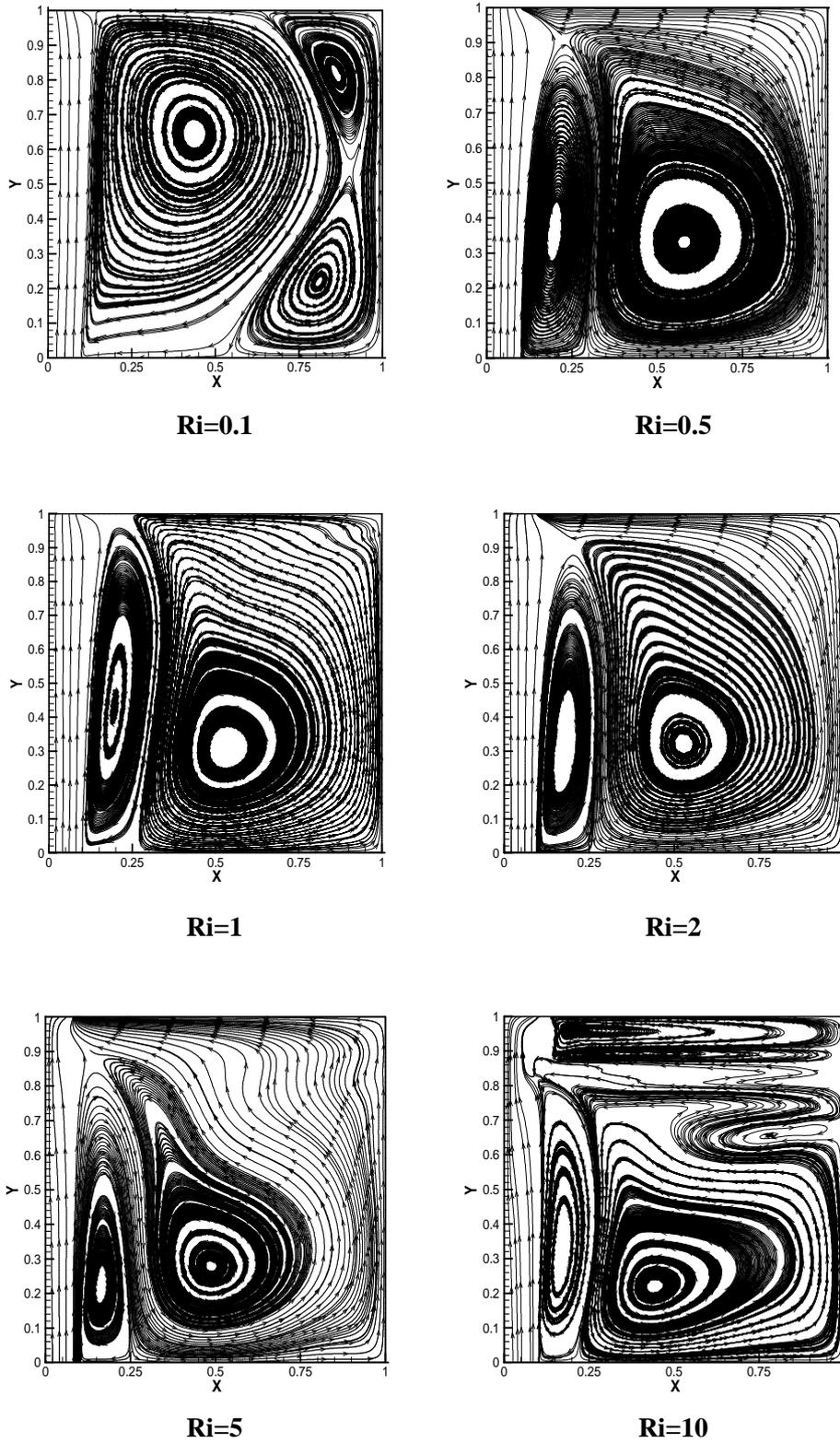


Figure 5.5 : Lignes de courant

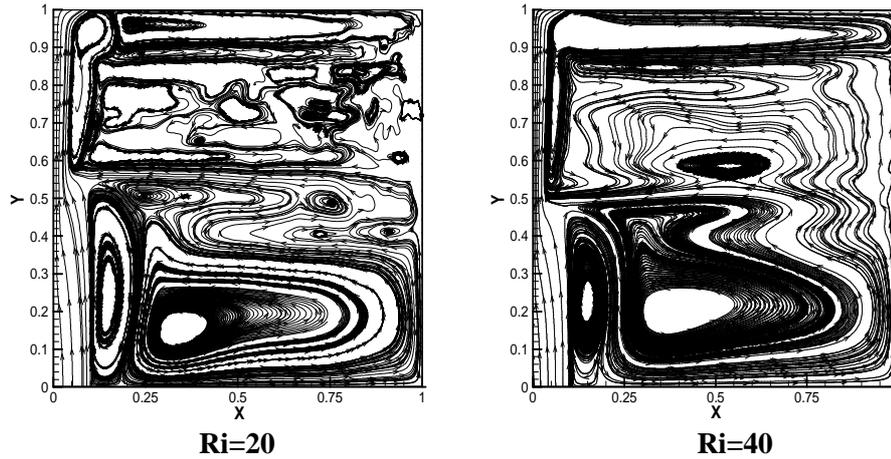


Figure 5.5 : Lignes de courant (suite)

Cette situation qui se caractérise par un large spectre de dimension des tourbillons, résulte de l'interaction entre les plus grands tourbillons pour former des structures de plus en plus petites. Cet état désordonné favorise les échanges de chaleurs et de masse, qui sont alors beaucoup plus importantes que dans le cas laminaire. Pour $Ri=40$, on remarque que le nombre des cellules est réduit considérablement dans la partie supérieure de la cavité.

5-4) Profils de la vitesse verticale moyenne

Les profils de la vitesse verticale moyenne à l'intérieur de la cavité pour les trois positions arbitrairement choisies qui sont : $Y=0.14$, $Y=0.5$ et $Y=0.86$ sont représentés respectivement sur les figures 5.6, 5.7 et 5.8.

Pour $Y=0.14$, on remarque le même aspect qualitatif pour tous les cas étudiés. Une augmentation brusque à partir de la valeur nulle imposée à la paroi vers un maximum qui se trouve très proche de la paroi chaude, suivi par une diminution rapide. Les maxima se localisent à l'intérieur des couches limites, et ils sont proportionnels aux nombres de Richardson. Cette observation peut s'expliquer par l'intensification de l'effet de la convection naturelle qui joue le rôle d'un accélérateur du fluide suivant la direction verticale à l'intérieur de la couche limite. Pour des nombres de Prandtl inférieurs à l'unité comme dans notre étude, les valeurs de la vitesse peuvent dépasser ceux trouvés à l'extérieur de la couche limite pour une plaque plane verticale chauffée [71]. Dans l'intervalle $0 < X < 0.1$, la vitesse est presque constante correspond à celle imposée à l'entrée de la cavité pour tous les nombres de Richardson considérés. A partir de $X=0.1$, une diminution progressive est rencontrée jusqu'à atteindre les valeurs minimales entre $X=0.1$ et $X=0.5$. Dans le reste de l'intervalle, les profils sont presque indiscernables, indiquant une valeur presque nulle. Cela est dû à la prédominance de la vitesse horizontale sur la vitesse verticale dans la partie inférieure de la cavité suite à l'aplatissement des vortex de base.

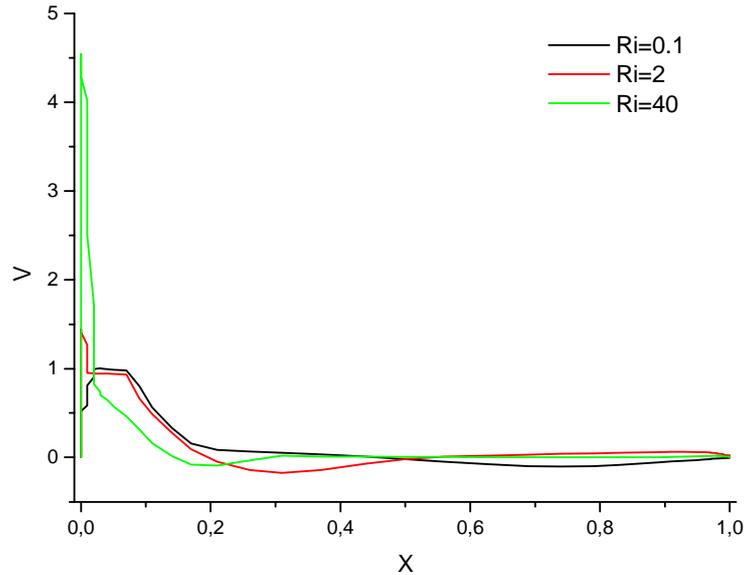


Figure 5.6 : Profils de la vitesse verticale moyenne à $Y=0.14$

Pour $Y=0.5$: le profil de la vitesse verticale moyenne montre le même aspect qualitatif que pour $Y=0.14$ pour tous les nombres de Richardson choisis. Cependant, les maxima sont un petit peu éloignés de la paroi chaude, et cela est dû à l'effet intensifié de la poussée thermique suivant la direction ascendante. La couche limite s'épaissit vers l'aval, d'abord faiblement par diffusion visqueuse dans la zone laminaire, puis de façon beaucoup plus rapide sous l'effet des fluctuations latérales de vitesse dans la zone turbulente. L'épaisseur de la couche limite développée sur une plaque plane dans le cas laminaire et turbulent est donnée respectivement par les relations :

$$\delta \approx 4.92 \frac{x}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (5.1)$$

$$\delta \approx 0.37 \frac{x}{(\text{Re}_x)^{1/5}} \quad (5.2)$$

où le Re_x est le nombre de Reynolds basé sur la longueur x [72].

A partir de ces maxima, une diminution progressive de la vitesse verticale moyenne est notée jusqu'à atteindre des valeurs minimales entre $X=0.15$ et $X=0.45$ pour $\text{Ri}=0.5, 1, 2, 5, 10, 20$ et 40 . Cependant, les valeurs minimales pour $\text{Ri}=0.1$ sont rencontrées dans l'intervalle $0.45 < X < 0.85$. Ces valeurs indiquent les endroits où les particules fluides suivent les lignes de courant en mouvement descendant.

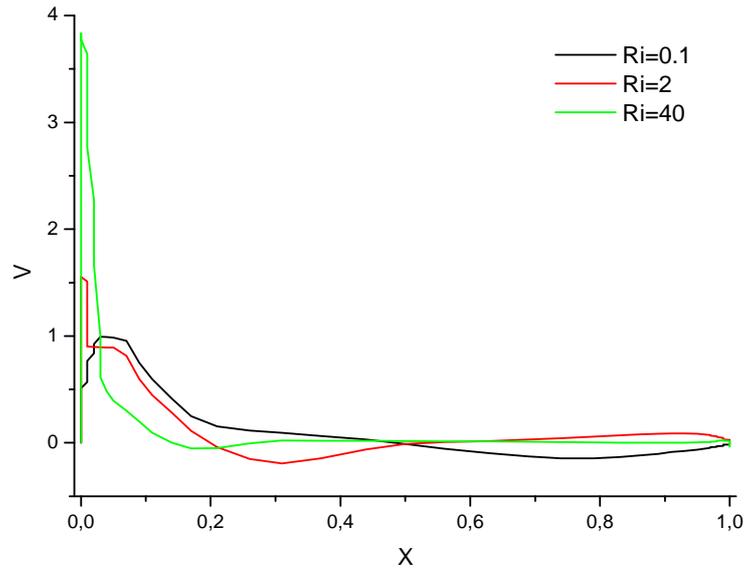


Figure 5.7 : Profils de la vitesse verticale moyenne à $Y=0.5$

Pour $Y=0.86$, les mêmes remarques peuvent être notées que pour la position $Y=0.5$. Cependant les endroits qui correspondent à un mouvement descendant des particules fluides sont rapprochés d'avantage vers la paroi chaude pour tous les nombres de Richardson considérés.

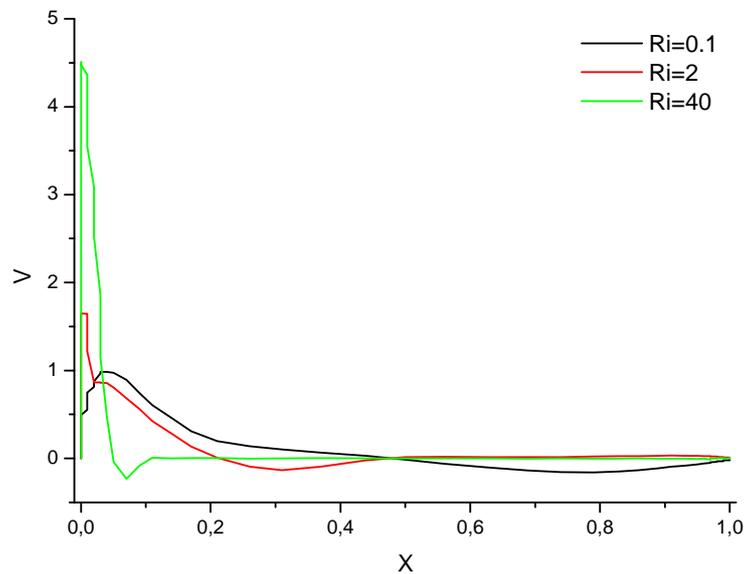


Figure 5.8 : Profils de la vitesse verticale moyenne à $Y=0.86$

5-5) Coefficient de frottement

En présence d'une paroi, le frottement pariétal augmente nettement par rapport au cas laminaire, car la turbulence impose un brassage latéral intense. La contrainte pariétale est alors plus importante et, par conséquent le coefficient de frottement C_f est également plus élevé :

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho V_{in}^2} \quad (5.3)$$

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (5.4)$$

La figure 8, montre la variation du coefficient de frottement en fonction du nombre de Reynolds pour la paroi chaude de la cavité.

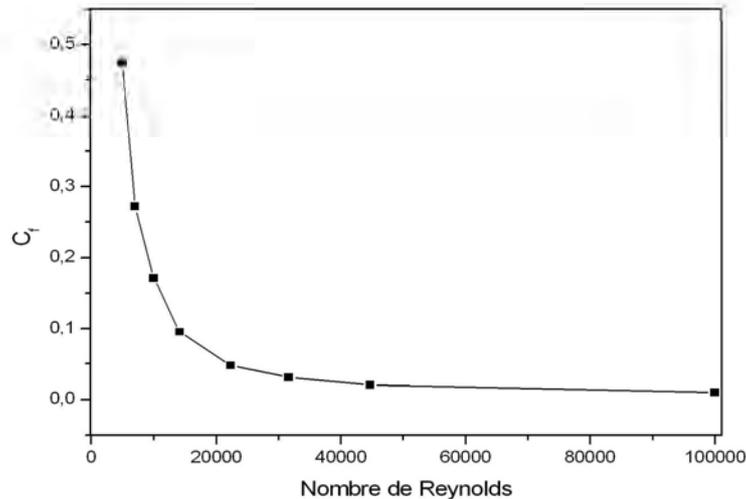


Figure 5.9 : Le coefficient de frottement

En remarque que l'évolution de coefficient de frottement est presque linéaire dans l'intervalle $0.1 \leq Ri \leq 2$. À partir de $Ri=2$, une augmentation brusque est signalée suite à l'amplification de la vitesse verticale moyenne due à l'effet combiné de la convection naturelle et forcée au voisinage de la paroi chauffée.

5-6) Distribution de la température

La distribution de la température pour chaque nombre de Richardson est représentée sur la figure 5.10. Pour que la légende soit lisible, seulement 15 niveaux sont représentés pour la température dans la zone voisine de la paroi chaude. Les figures indiquant la distribution des variables physiques à l'intérieur de la cavité sont réalisées par le logiciel **TecPlot 9.0**, ceux représentant les profils des différentes quantités sont réalisées par **Origin 6.0**. On remarque que les températures élevées sont localisées dans des espaces étroits au voisinage de la paroi chaude, qui correspondent à l'épaisseur des couches limites thermiques, et qui sont largement influencées par le nombre de Richardson. Loin de la paroi chaude, les gradients de la température sont faibles. On remarque aussi l'absence de la stratification thermique dans la cavité pour $0.1 \leq Ri \leq 5$. La

stratification thermique ne commence à apparaître qu'à partir de $Ri=10$ où la convection naturelle turbulente est dominante. Cette stratification est surtout apparente dans la partie supérieure de la cavité.

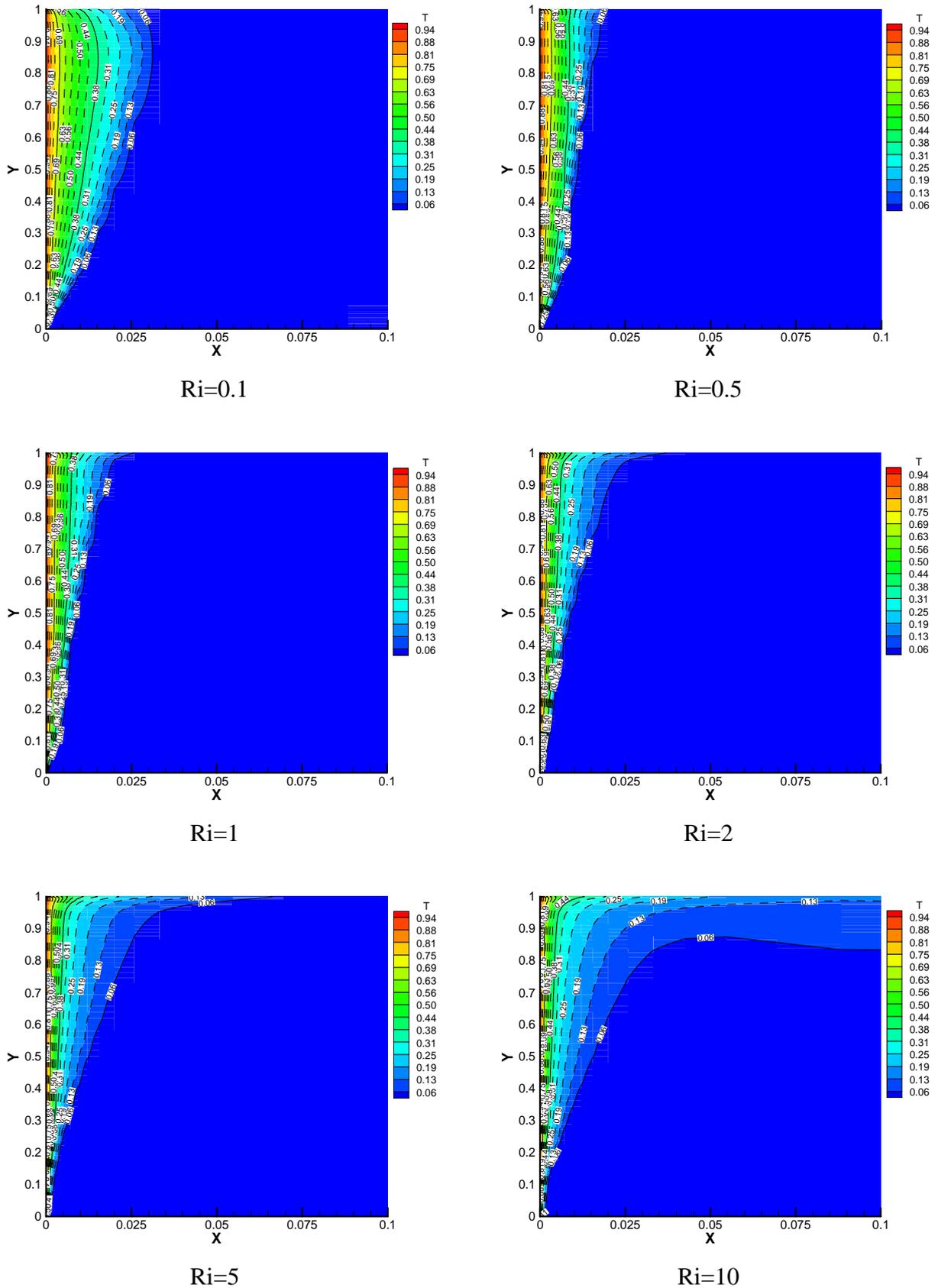


Figure 5.10 : Distribution de la température

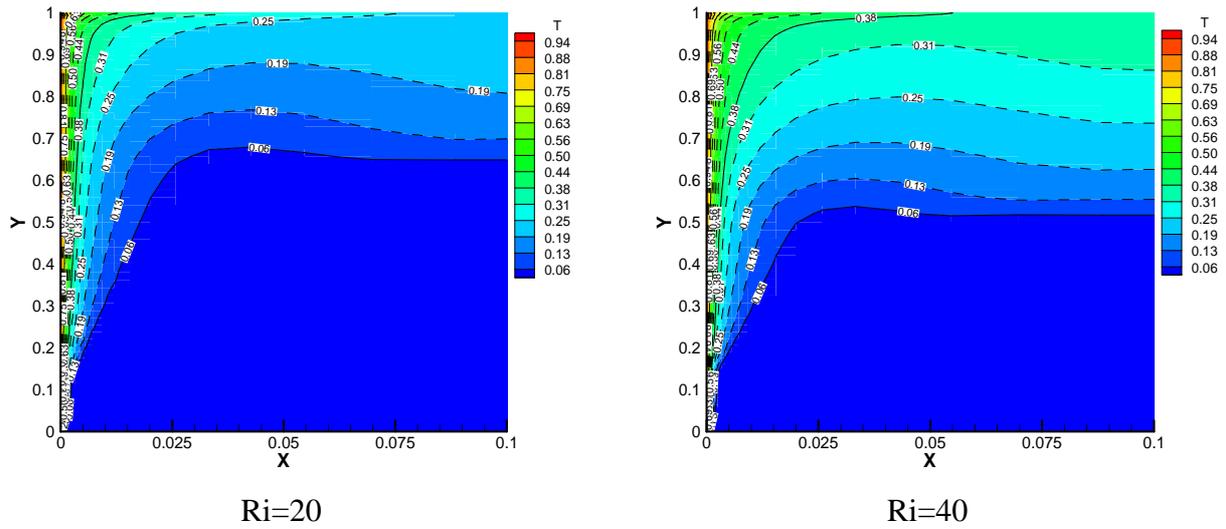


Figure 5.10 : Distribution de la température (suite)

5-7) Nombre du Nusselt local

Le transfert de chaleur au niveau de la paroi verticale chaude est exprimé par le nombre du Nusselt local :

$$Nu = - \frac{L}{T_p - T_0} \frac{\partial T}{\partial n} \tag{5.5}$$

Où T_p et T_0 désignent respectivement la température locale dimensionnelle de la paroi chaude et celle du jet d'air vertical, et n représente la normale à la surface. La variation du nombre du Nusselt local pour la paroi verticale gauche est représentée sur la figure 5.11.

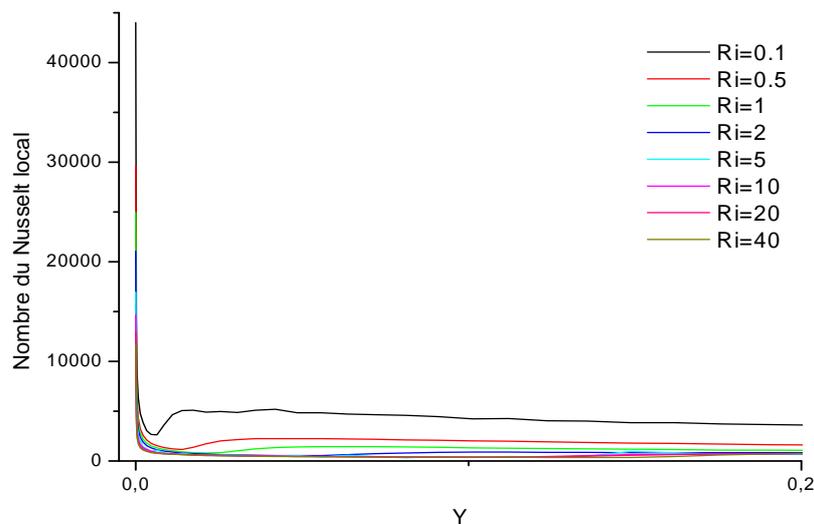


Figure 5.11 : Nombre du Nusselt local

5-8) Nombre du Nusselt moyen

Après avoir établi un bilan d'énergie au voisinage de la paroi chaude, entre le flux de chaleur convectif et le flux de chaleur diffusif, le transfert de chaleur moyen à travers la paroi chaude est évalué par le nombre du Nusselt moyen, exprimé par la relation suivante :

$$\overline{Nu} = - \frac{\int_0^L Nu . dy}{L} \quad (5.6)$$

L'évolution temporelle du nombre du Nusselt moyen pour les nombres de Richardson : $Ri=0.1$, 0.5 , 1 , 2 et 5 est donnée par la figure 5.12. Pour voir l'ordre de grandeur des oscillations dans le cas où la convection naturelle est dominante, nous avons met l'évolution temporelle des cas restants sur un graphe séparé (figure 5.13). On remarque que les temps de la convergence ne sont pas les mêmes pour tous les nombres de Richardson. Les cas où la convection naturelle prédomine ($Ri=10$, 20 et 40) mettent plus de temps pour converger que pour les autres cas, en plus le régime est devenu de plus en plus oscillatoire. Nous avons cru au début qu'il s'agit d'un mode dépendant du temps, mais la diminution du pas de temps de $\Delta\tau=10^{-5}$ à $\Delta\tau=5.10^{-6}$ à partir de $\tau=25$ a montré que les oscillations sont d'origine numérique, et ne sont pas d'origine physique.

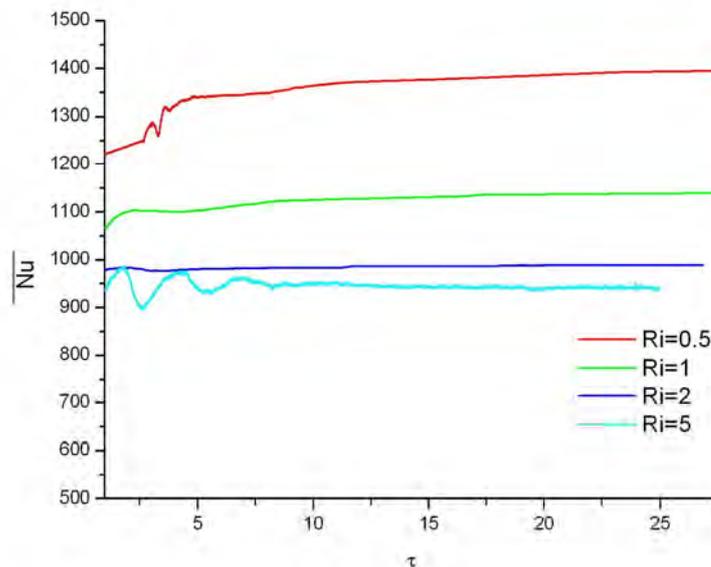


Figure 5.12 : variation temporelle du nombre du Nusselt moyen

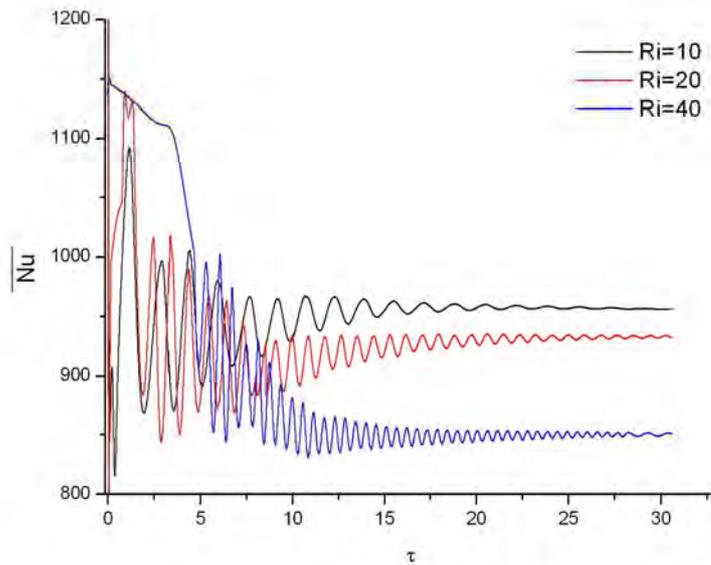


Figure 5.13 : variation temporelle du nombre de Nusselt moyen

La variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Richardson est représentée sur la figure 5.14.

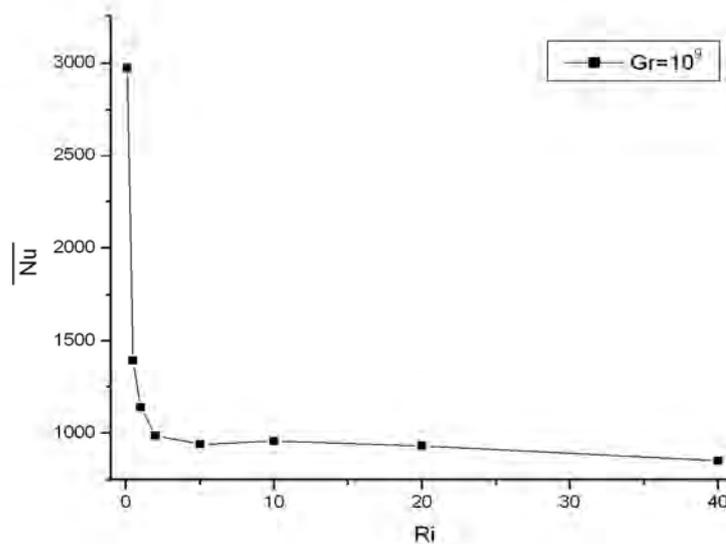


Figure 5.14 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Richardson

Nous remarquons une chute brusque du nombre de Nusselt moyen lorsque la convection forcée est dominante ($0.1 \leq Ri \leq 1$). À partir de la valeur 1 du nombre de Richardson, le nombre de Nusselt moyen varie d'une manière presque linéaire. Lorsque la convection naturelle prédomine ($Ri \geq 10$), les effets induits par la température de la paroi chaude n'a aucune influence sur le nombre de Nusselt moyen, celui-ci reste presque constant lorsque le nombre de Richardson continue à augmenter.

Pour une plaque plane maintenue à température constante et placée dans un écoulement qui lui est parallèle, le nombre de Nusselt comparant le flux de chaleur à la paroi à un transfert par conduction est donné par l'expression empirique suivante en régime turbulent [72] :

$$Nu_x \approx 0.0292(Re_x)^{4/5} Pr^{1/3} \quad (5.7)$$

L'expression dépend du nombre de Reynolds basée sur la distance x , et le nombre de Prandtl. Une variation de ce dernier de 0.9 à 1, a conduit à une sous-estimation de flux de chaleur de 5% dans le cas d'étude des couches limites sur une plaque plane dans le cadre de la turbulence naturelle [45].

Le nombre de Nusselt tiré d'après l'expression 5.7 est représenté dans un même graphe avec les valeurs des nombres du Nusselt moyen tirés à partir de notre étude numérique (figure 5.15).

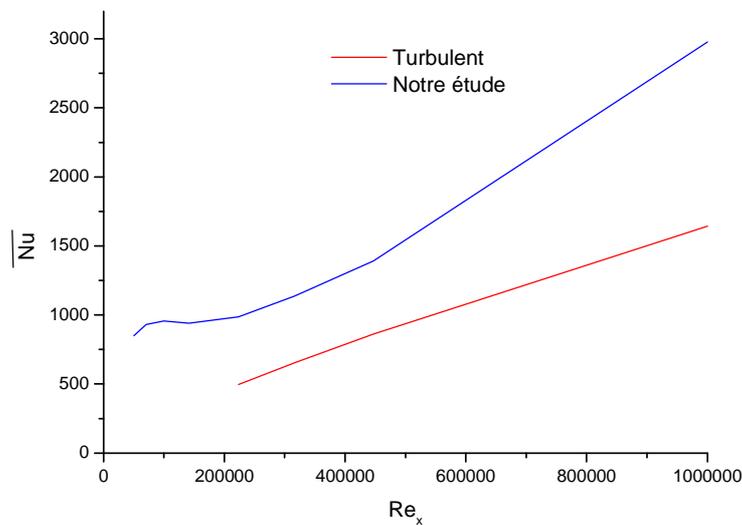


Figure 5.15 : Variation du nombre du Nusselt moyen en fonction du nombre de Reynolds

On remarque que le nombre de Nusselt varie beaucoup plus rapidement en fonction du nombre de Reynolds que pour une plaque plane dans un écoulement turbulent traduisant des échanges thermiques plus importants. On ne peut pas comparer bien entendu les caractéristiques thermiques d'une cavité ventilée à ceux d'une plaque plane soumise à un écoulement parallèle. Bien que le modèle de Launder et Sharma soit choisi parmi les meilleurs modèles à bas nombre de Reynolds par ERCOFTAC (European Research Community On Flow Turbulence And Combustion), il conduit souvent à des sous estimations des transferts thermiques. Ce résultat est évoqué par d'autres auteurs : [60] et [72].

5-9) Energie cinétique turbulente

La distribution de l'énergie cinétique turbulente est représentée sur la figure 5.15. Elle est définie comme l'énergie cinétique des fluctuations de la vitesse :

$$K = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \tag{5.8}$$

On voit d'une manière générale que l'énergie cinétique turbulente est d'autant plus importante que le nombre de Richardson est important. Cela est dû comme nous avons vu à l'augmentation de la vitesse verticale moyenne, suite aux effets combinés de la convection naturelle et forcée suivant la direction verticale, qui induit une augmentation des fluctuations de vitesse, et par conséquent une augmentation de l'énergie cinétique turbulente. La figure 5.15 montre aussi que les maxima sont toujours situés à coté de l'ouverture de sortie pour : Ri=0.1, 0.5, 1 et 2. Cela peut s'expliquer par la prédominance de la convection forcée, surtout quand le jet atteint la paroi opposée. Les effets d'impact du jet sont toujours remarquables, dans ce cas il sera obligé de se retourner le long de la paroi horizontale, et un mouvement d'air en retour est observable dans la cavité. A partir de Ri=5, les maxima commencent à s'approcher vers l'aval de la paroi chaude. Loin de la paroi chaude, les niveaux de l'énergie cinétique turbulente sont très faibles.

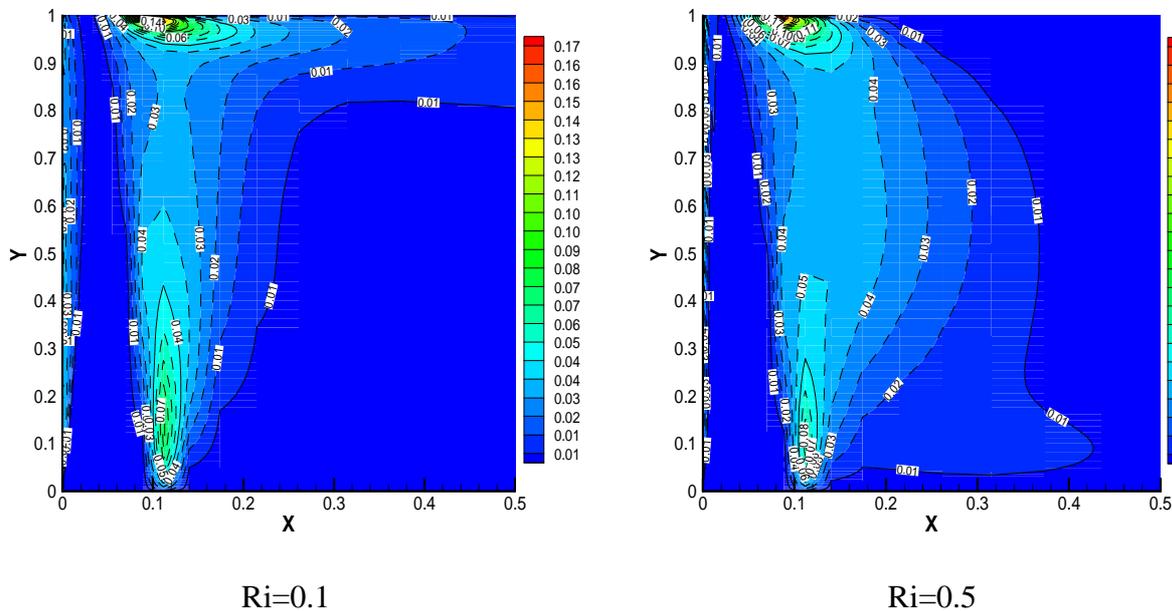


Figure 5.15 : Distribution de l'énergie cinétique turbulente

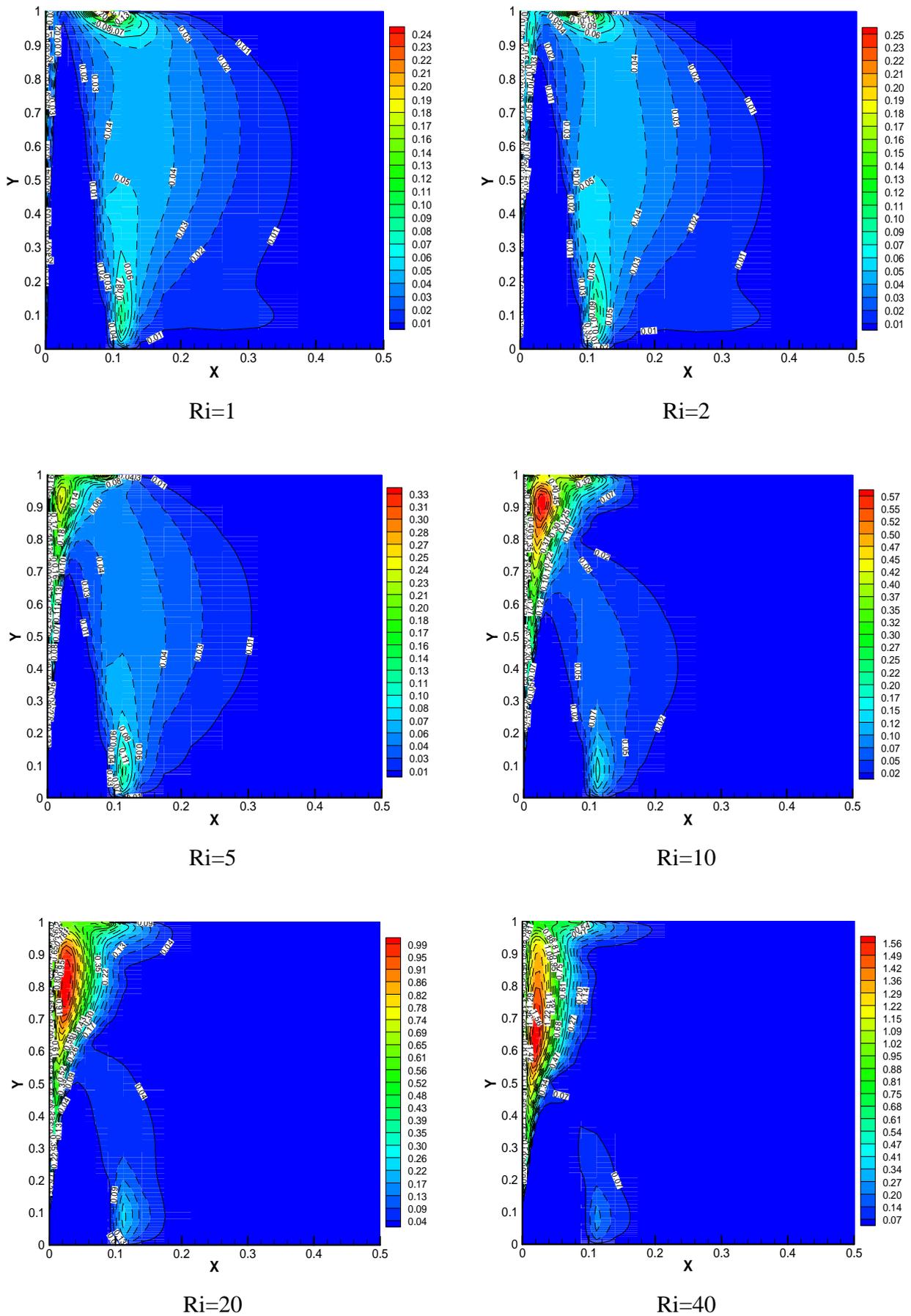


Figure 5.15 : Distribution de l'énergie cinétique turbulente (suite)

Le profil de l'énergie cinétique turbulente normalisée à $X=0.5$ est représenté sur la figure 5.16. Pour le cas avec $Ri=0.1$, on remarque que le maximum est très proche de la paroi supérieure. À partir de ce maximum, on note une diminution jusqu'au $Y \approx 0.52$, ensuite une faible augmentation puis une nouvelle diminution vers la valeur nulle imposée sur la paroi supérieure. Pour $1 \leq Ri \leq 5$, on voit clairement une augmentation du K depuis sa valeur nulle imposée à la paroi inférieure jusqu'à atteindre un maximum, dont la position et l'amplitude dépendent du nombre de Richardson. L'énergie cinétique turbulente K diminue progressivement jusqu'à ce qu'elle s'annule à nouveau sur la paroi supérieure. Dans le cas où la convection naturelle devient dominante ($Ri \geq 10$), le profil de l'énergie cinétique turbulente montre le même aspect qualitatif, néanmoins avec des amplitudes plus faibles que dans les cas précédents. Ceci peut être expliqué à partir des graphes représentant les lignes de courant. En effet, pour un nombre de Richardson égale à 0.1 (convection forcée), les lignes de courant sont concentrées dans la partie supérieure près de la paroi, ce qui signifie des gradients de vitesse assez importants et donc une production de l'énergie cinétique K conséquente.

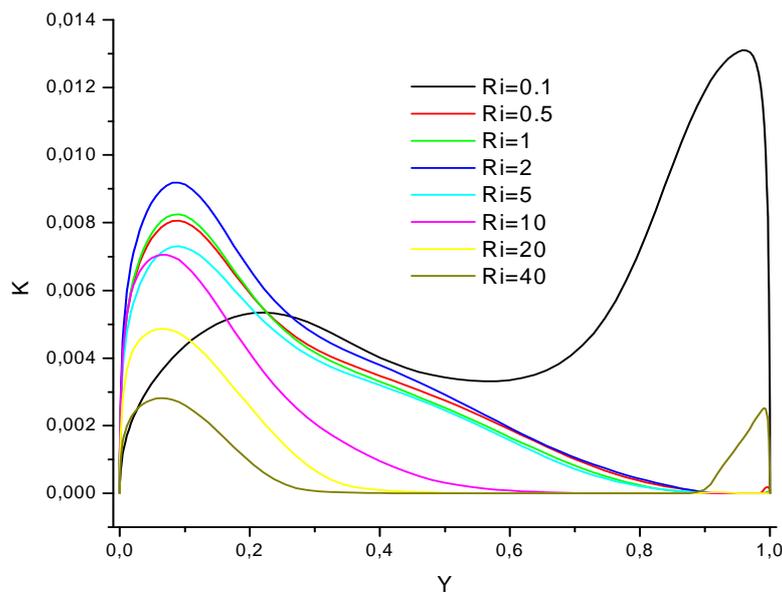


Figure 5.16 : Profil d'énergie cinétique turbulente normalisée à $X=0.5$

Lorsque le nombre de Richardson augmente, les lignes de courant deviennent plus concentrées cette fois-ci dans la partie inférieure de la cavité alors que pour un nombre de Richardson égale à 10, l'écoulement présente plusieurs cellules avec des lignes de courant non concentrées qui entraîne un taux de cisaillement assez faible et donc une production de l'énergie cinétique turbulente moins importante que pour les cas précédents.

5-10) Distribution de la viscosité turbulente

La distribution de la viscosité turbulente est donnée par la figure ci-dessous. D’après le modèle de Launder et Sharma adopté dans cette étude, la viscosité turbulente est défini par la relation (2.20) dans le chapitre 2.

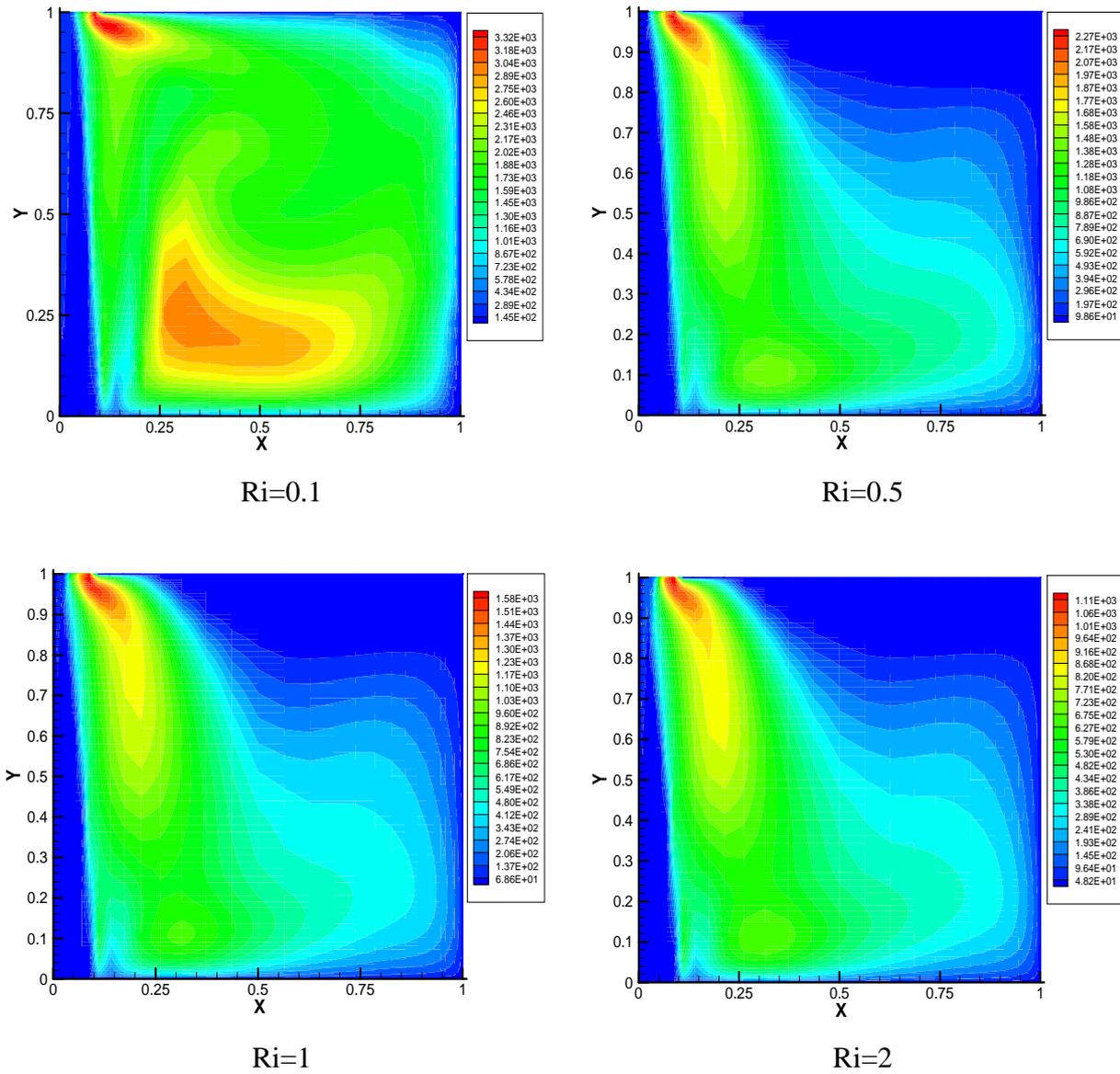


Figure 5.17 : Distribution de la viscosité turbulente

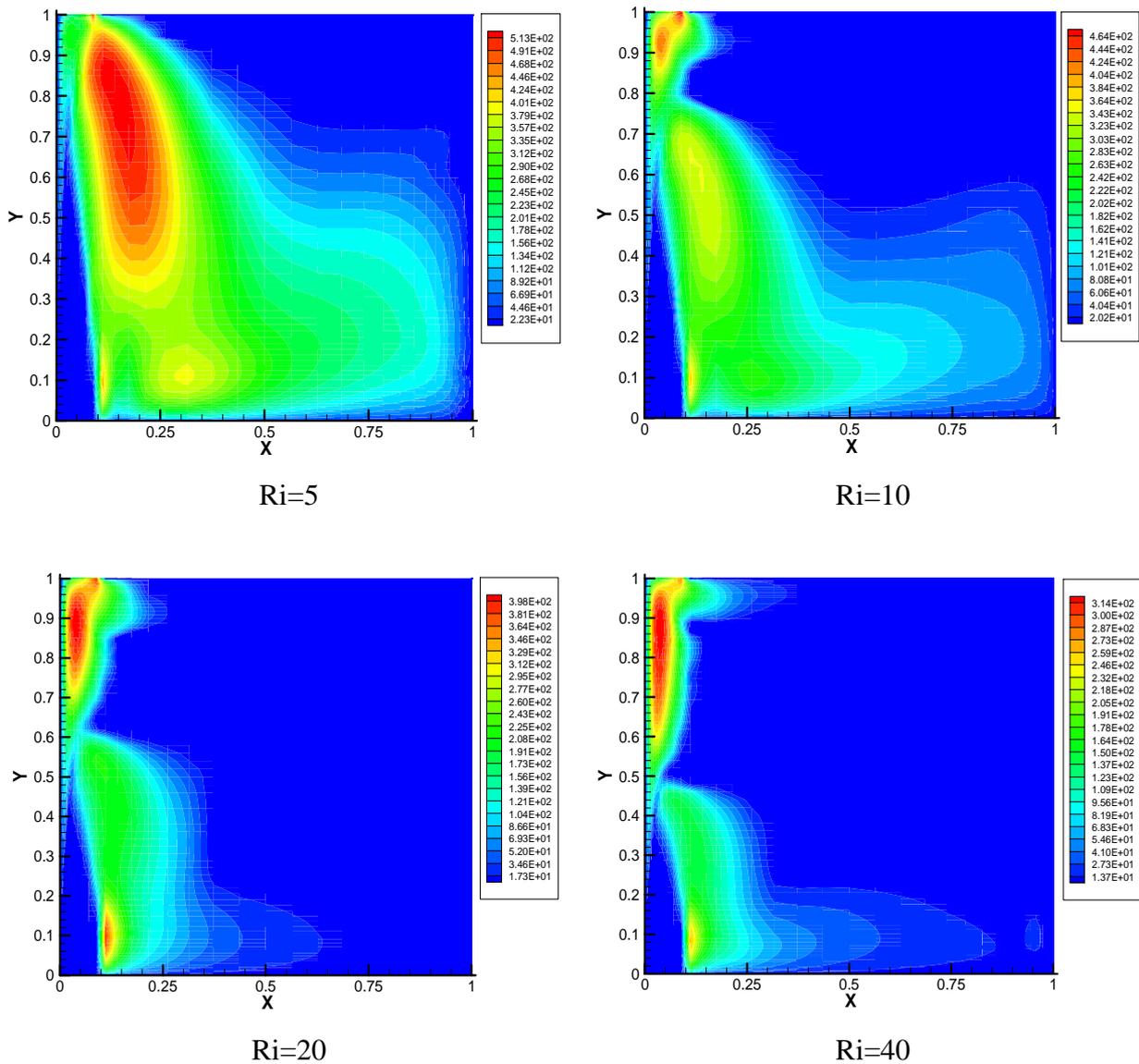


Figure 5.17 : Distribution de la viscosité turbulente (suite)

Pour les faibles nombres de Richardson, on remarque que les grandes valeurs se trouvent proche de la sortie d’air dans la partie supérieure de la cavité. Cela est dû à l’effet de blocage de l’écoulement par la paroi horizontale qui conduit à des recirculations secondaires proche de la sortie, et par conséquent une augmentation de l’énergie cinétique turbulente. La variation de cette dernière influe sur la viscosité turbulente car les deux sont proportionnelles.

En augmentant le nombre de Richardson ($Ri=20$ et $Ri=40$), les maxima s’approchent de plus vers la paroi chaude suite à l’intensification de l’effet de convection naturelle suivant la direction verticale. La création des mouvements secondaires dans ce cas est due non seulement au effet de blocage, mais aussi à l’effet Coanda (l’écoulement ne reste pas parallèle à la paroi) qui se manifeste lorsque les vitesses sont très élevées. Loin de la paroi chaude, la viscosité turbulente est faible surtout pour les grands nombres de Richardson.

5-11) Contraintes normales de Reynolds

Les profils des contraintes normales de Reynolds $\overline{u'^2}$ sont représentés dans la figure 5.18. Ces contraintes sont définies par la relation suivante :

$$\overline{u'^2} = \frac{2}{3} K \quad (5.9)$$

On remarque que les maxima de $\overline{u'^2}$ à $X=0.5$ sont proches de la paroi inférieure, à l'exception du cas avec $Ri=0.1$, où le maximum est très proche de la paroi supérieure. On remarque aussi que les maxima sont proportionnels au nombre de Richardson lorsque $1 \leq Ri \leq 5$, mais inversement proportionnels lorsque $10 \leq Ri \leq 20$ tout comme pour le profil de l'énergie cinétique turbulente à $X=0.5$.

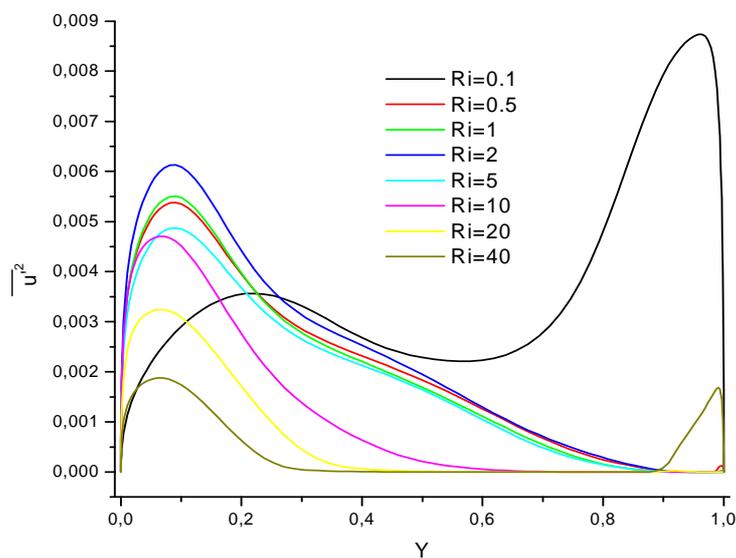


Figure 5.18 : Profils des contraintes turbulentes normales $\overline{u'^2}$ à $X=0.5$

L'expression des contraintes de Reynolds est donnée par la relation suivante :

$$\overline{v'^2} = \frac{2}{3} K \quad (5.10)$$

Une représentation des profils de $\overline{v'^2}$ pour les nombres de Richardson $Ri=0.1, 0.5, 1$ et 2 est donnée sur la figure 5.19. Un agrandissement du profil de $\overline{v'^2}$ dans l'intervalle $0 \leq X \leq 0.1$ est donné par la figure 5.20. Pour les nombres de Richardson restants, les profils de $\overline{v'^2}$ sont représentés sur la figure 5.21 pour l'intervalle $0 \leq X \leq 0.3$, car la variation en dehors de cet intervalle est insignifiante.

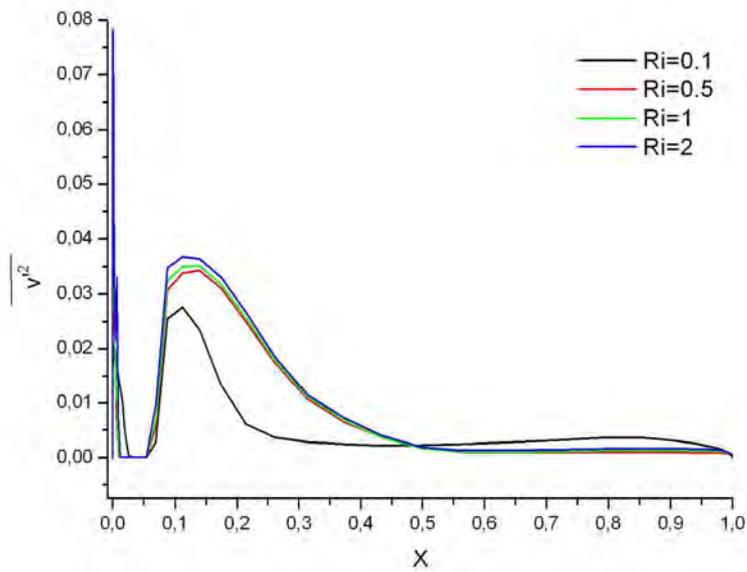


Figure 5.19 : Profils des contraintes turbulentes normales $\overline{v'^2}$ à $Y=0.5$

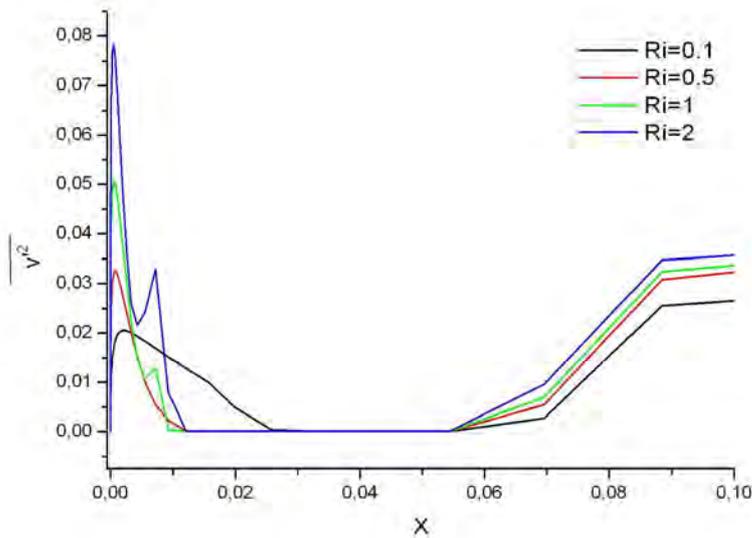


Figure 5.20 : Profils des contraintes turbulentes normales $\overline{v'^2}$ à $Y=0.5$

Pour chaque nombre de Richardson dans l'intervalle $5 \leq Ri \leq 40$, on remarque la présence de deux pics dans un espace très étroit proche de la paroi chaude. Pour les autres nombres de Richardson, on note la présence d'un seul pic. Les amplitudes des fluctuations sont proportionnelles au nombre de Richardson suite à l'intensification de l'effet de la convection naturelle turbulente qui renforce le jet d'air vertical. Loin de la paroi chaude, les fluctuations sont très faibles.

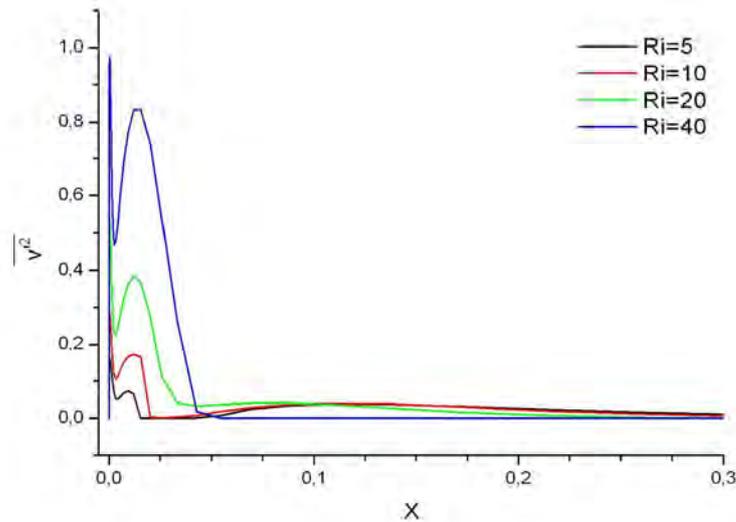


Figure 5.21 : Profils des contraintes turbulentes normales $\overline{v'^2}$ à $Y=0.5$

5-12) Flux de chaleur turbulent

Les profils du flux de chaleur turbulent suivant la direction horizontale sont représentés sur la figure 5.22. Le flux turbulent de chaleur est relié au gradient de température moyenne par la viscosité turbulente et le nombre de Prandtl turbulent comme suit :

$$\overline{\theta'u'} = -\frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (5.11)$$

Pour les trois positions arbitrairement choisies qui sont : $Y=0.14$, $Y=0.5$ et $Y=0.86$, les profils montrent un aspect commun pour tous les nombres de Richardson, est que le flux de chaleur est d'autant plus important en allant de bas vers le haut de la cavité. Cela est dû, essentiellement au développement des couches limites thermiques proche de la paroi chaude, qui commence laminaire et deviennent turbulente en allant en sens ascendant, et par conséquent un accroissement du taux de transfert thermique. Suite aux conditions aux limites imposées, le transfert de chaleur est très important proche de la paroi chaude, pour les cas considérés. Cela peut s'expliquer par la vitesse élevée du jet ascendant dans le cas où la convection forcée est prépondérante, qui contribue au refroidissement de l'espace adjacent à la paroi chaude, et comme conséquence directe, un gradient de température important.

Loin de la paroi chaude, le transfert de chaleur est presque nul pour les trois positions choisies, et pour tous les nombres de Richardson considérés. Dans le cas où la convection naturelle turbulente prédomine ($Ri=20$ et $Ri=40$), les niveaux du transfert turbulent sont rapprochés l'un à l'autre à cause de la stratification thermique stable.

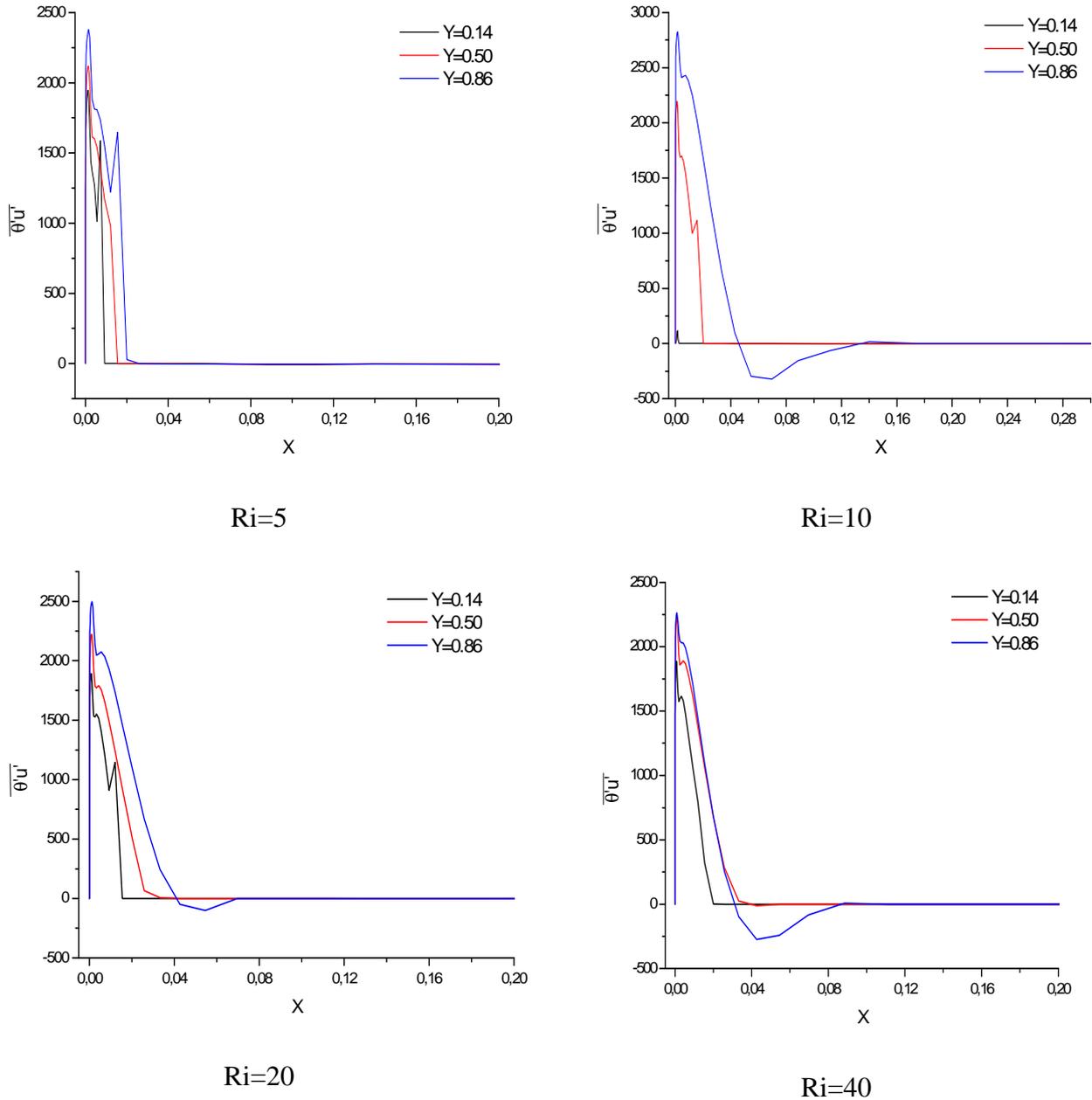


Figure 5.22 : Profils du flux de chaleur turbulent suivant la direction horizontale

5-13) Contraintes de Reynolds

Les profils des contraintes moyennes de Reynolds définis par :

$$\overline{u'v'} = -\nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (5.12)$$

Sont représentés pour les trois positions citées plus haut dans la figure 5.25. Pour tous les nombre de Richardson, les variations les plus importantes se manifestent toujours près de la paroi chaude, où plusieurs pics sont rencontrés. De façon générale, le taux de cisaillement turbulent est proportionnel au nombre de Richardson, est cela est dû à l'amplification des fluctuations de vitesse,

suite à l'élévation de la vitesse verticale, à cause de l'effet combiné de la convection naturelle et forcée à proximité de la paroi chaude suivant ce sens.

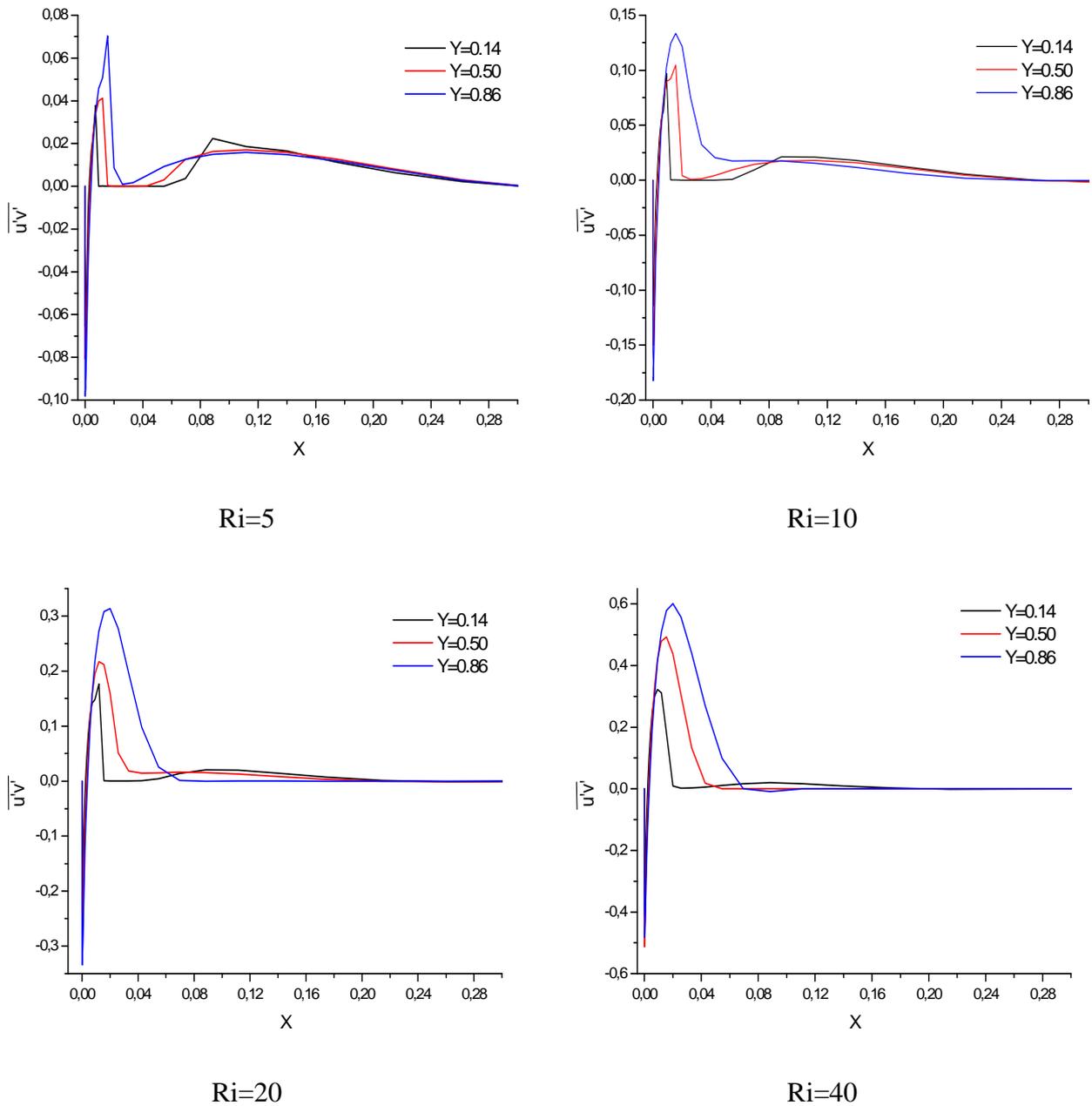


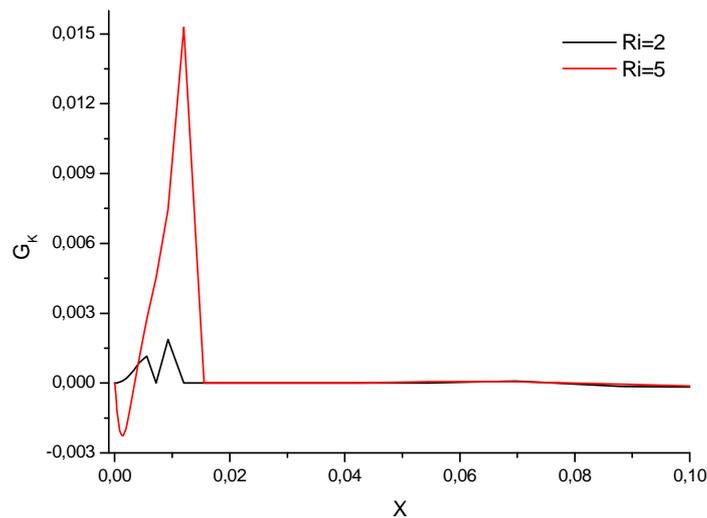
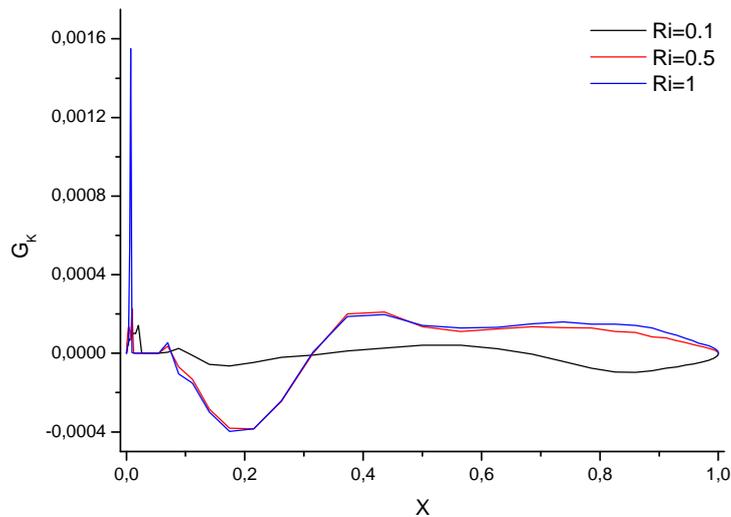
Figure 5.23 : Profils des contraintes turbulentes de Reynolds

Les profils sont répartis de telle sorte qu'ils indiquent un niveau croissant du taux de cisaillement en allant vers le haut de la cavité. Loin de la paroi chaude, la variation est insignifiante, surtout lorsque la convection naturelle est prépondérante où la stratification thermique atténue les fluctuations de la vitesse.

5-14) Production de l'énergie cinétique turbulente

5-14-1) Production sous l'effet de la poussée thermique

Les profils de la production de l'énergie cinétique turbulente sous l'effet de la poussée thermique G_K à mi-hauteur de la cavité sont représentés sur la figure 5.24. Pour que la comparaison y aie une signification, les profils pour $Ri=0.1$, $Ri=0.5$ et $Ri=1$ sont représentés dans un graphe séparé de celui pour $Ri=2$ et $Ri=5$. La production sous l'effet de la poussée thermique est calculée d'après la relation (2.15) définie dans le chapitre 2.



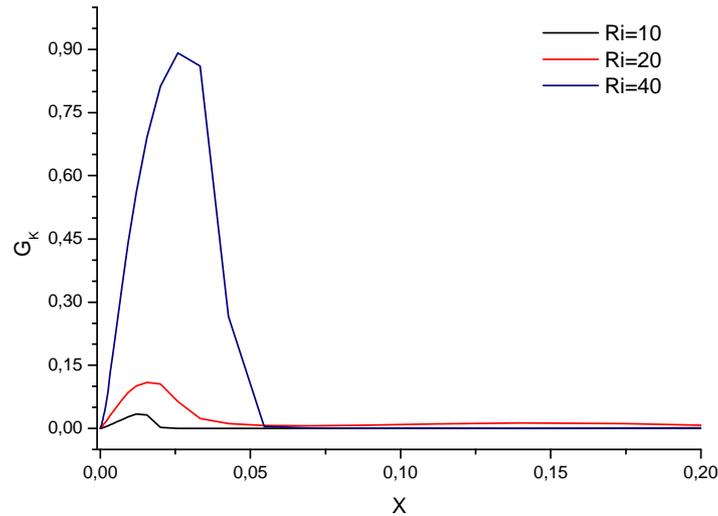


Figure 5.24 : Variation de G_K en fonction du nombre de Richardson à $Y=0.5$

Une remarque générale pour ces cas, est qu'il y a des intervalles où G_K est négative. Ces intervalles correspondent aux endroits où le gradient de température est positif. Ce cas est trouvé par Davidson [66] dans le cas de la turbulence dans une cavité fermée partiellement chauffée avec rapport d'aspect égal à 5. On remarque aussi que plus le nombre de Richardson est important, plus la production due à l'effet de poussée est importante. Loin de la paroi, la production est presque nulle. Pour $Ri=10$, 20 et 40 , le profil de G_K montre un seul pic, dont la position s'éloigne de la paroi avec l'augmentation du nombre de Richardson. Les maxima pour ces trois derniers cas sont incomparables avec les autres cas, c'est pourquoi nous avons choisi de les représentés dans un graphe séparé. Cela est dû à l'intensification de l'effet de la poussée thermique exprimée par le gradient vertical important de la température qui conduit à une stratification thermique, même à des distances très proches de la paroi chaude.

5-14-2) Production sous l'effet des contraintes turbulentes

Les profils de la production sous l'effet des contraintes turbulentes à mi-hauteur de la cavité sont représentés sur les figures 5.25 et 5.26. La production sous l'effet des contraintes turbulentes sont calculées d'après la relation (2.14) définie dans le chapitre 2. Nous l'avons mis sur deux graphes pour voir l'ordre de grandeur pour puisse les comparés à ceux de la production due à la poussée thermique. Tous les profils montrent le même aspect qualitatif, une augmentation brusque vers un maximum qui se trouve à une distance très proche de la paroi chaude, puis une diminution progressive vers une valeur presque nulle loin de la paroi. Les maxima et la vitesse de diminution sont proportionnelles au nombre de Richardson. Les gradients de vitesse sont très importants dans les couches limites, se qui entraine des fluctuations importantes que soit pour le champ de vitesse

ou bien pour le champ de température, et c'est à cause de l'effet combiné de la poussée ascendante et de la vitesse imposé du jet d'air, qui agit dans le même sens.

La production de l'énergie cinétique turbulente due à l'effet de la poussée thermique est pratiquement négligeable devant celle due à l'effet des tensions de Reynolds. Le résultat même est trouvé par Hsieh et Lien [68] pour le cas d'une cavité fermée partiellement chauffée, et aussi par Tiezen et al [73] pour une plaque plane chauffée.

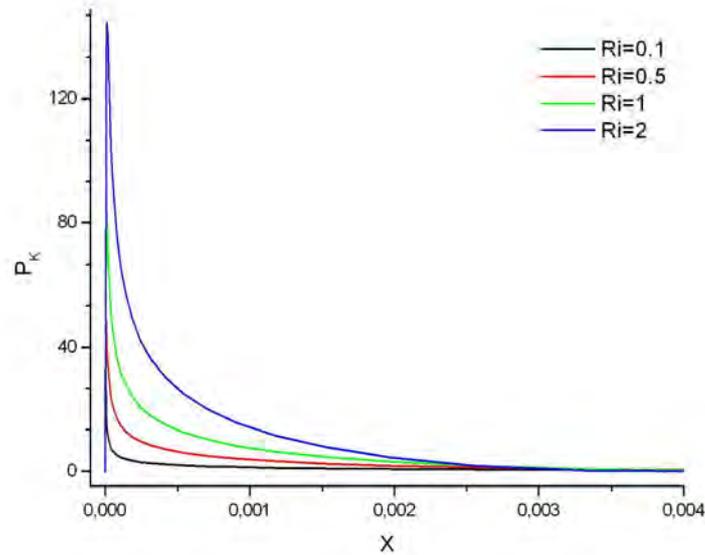


Figure 5.25 : Variation de P_K en fonction du nombre de Richardson à $Y=0.5$

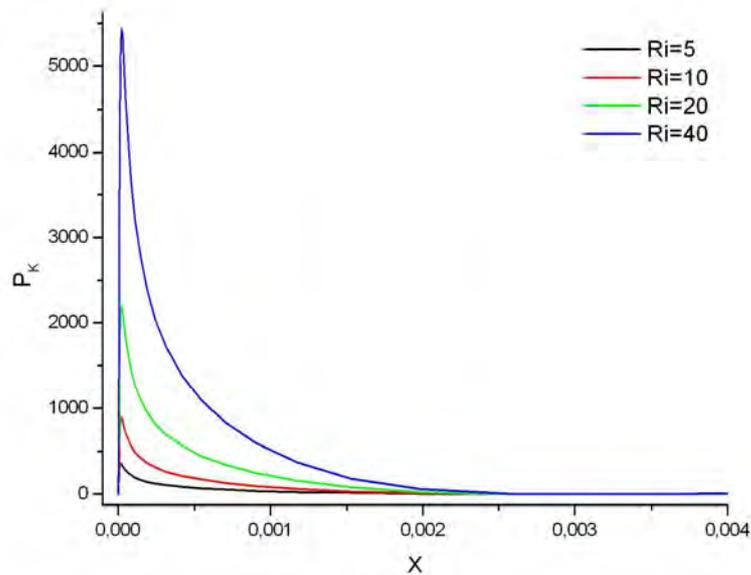


Figure 5.26 : Variation de P_K en fonction du nombre de Richardson à $Y=0.5$

5-15) Dissipation de l'énergie cinétique turbulente

Les profils de la dissipation turbulente à mi-hauteur sont représentés sur les figures 5.27 et 5.28. Le même aspect qualitatif est remarqué pour tous les nombres de Richardson, une diminution brusque à partir de la valeur zéro imposée à la paroi jusqu'à atteindre une valeur minimale puis une augmentation progressive dans une région très étroite près de la paroi chaude. Les valeurs minimales sont proportionnelles au nombre de Richardson. Loin de la paroi, la dissipation est presque nulle pour tous les nombres de Richardson.

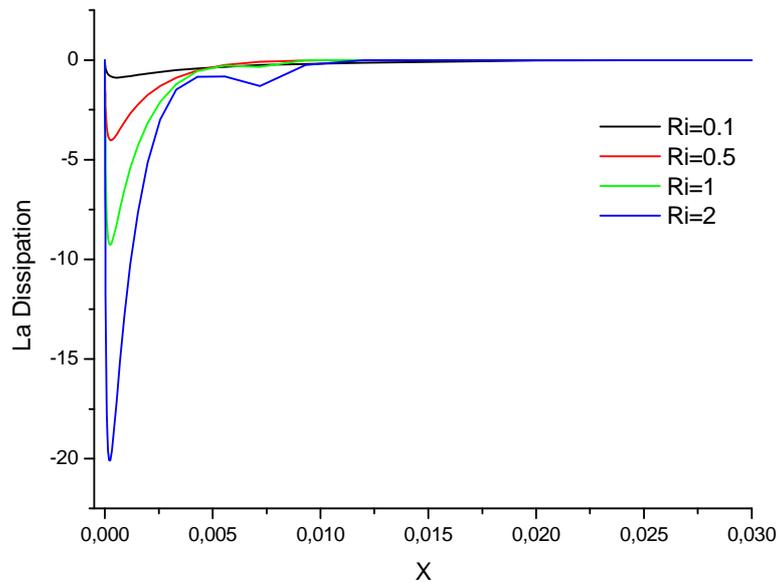


Figure 5.27 : Profils de la dissipation en fonction du nombre de Richardson à $Y=0.5$

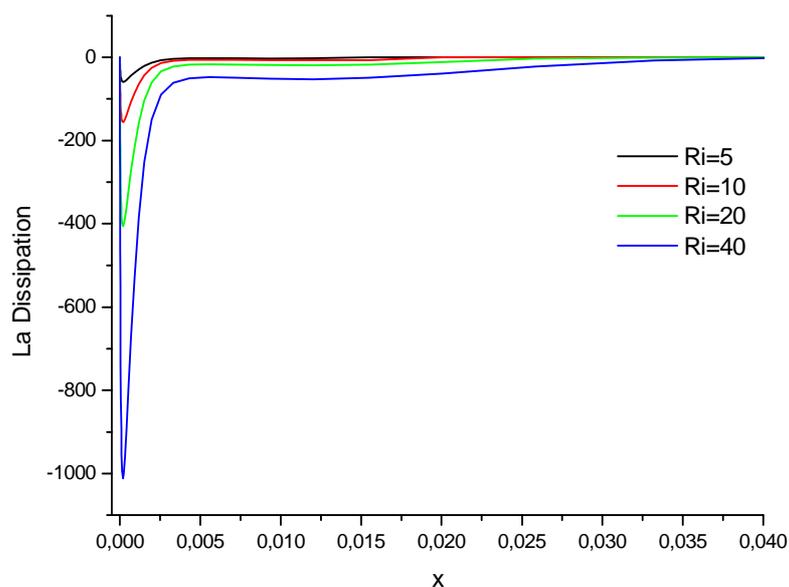


Figure 5.28 : Profils de la dissipation en fonction du nombre de Richardson à $Y=0.5$

Un problème souvent rencontré par les numériciens pour les modèles LRN $k-\epsilon$, est l'implantation du terme supplémentaire E au niveau de l'équation de dissipation de l'énergie cinétique turbulente dans le cas tridimensionnel, qui n'est pas le cas dans notre étude. Ce terme est très sensible au raffinement du maillage près des parois solides.

5-16) Profils de l'énergie cinétique turbulente

Pour voir la variation de l'énergie cinétique turbulente suivant le sens ascendant de l'écoulement, les profils de K en fonction du nombre de Richardson sont représentés dans la figure 5.29. Pour les trois positions arbitrairement choisies, les profils de K montrent un ou plusieurs pics dans la zone à proximité de la paroi chaude.

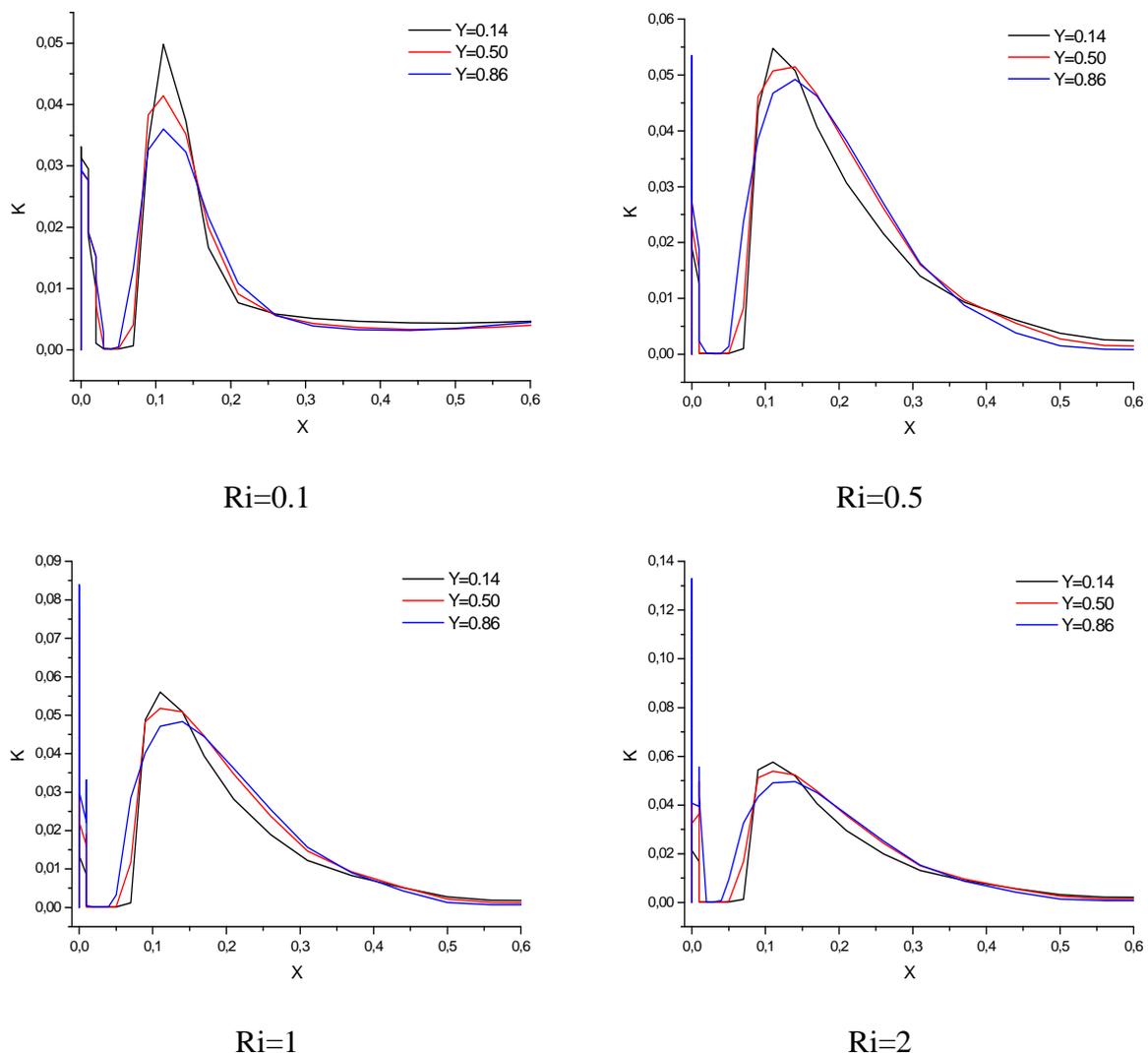


Figure 5.29 : Profils de K en fonction du nombre de Richardson.

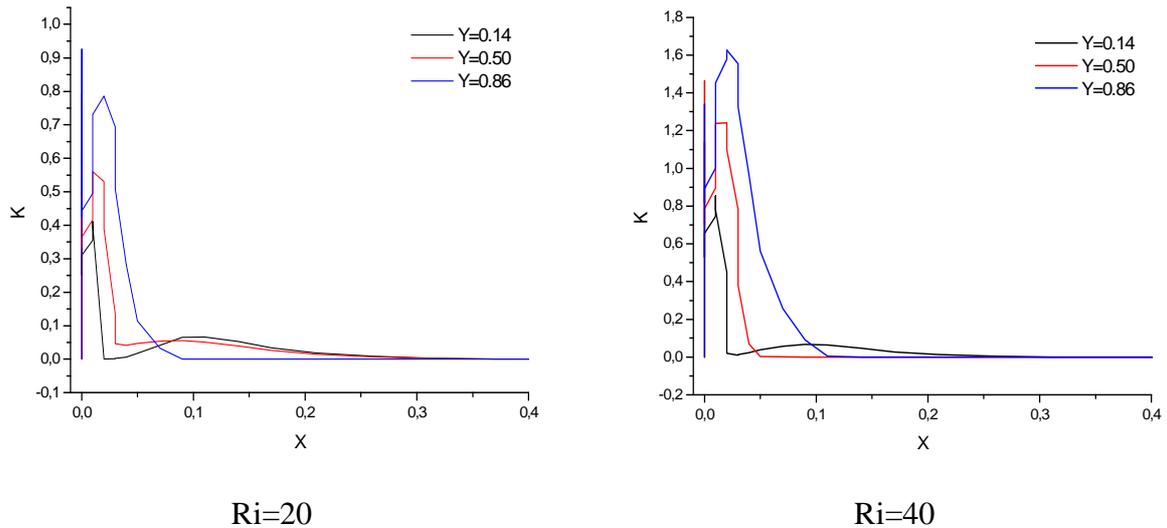


Figure 5.29 : Profils de K en fonction du nombre de Richardson (suite).

Les pics qui se situent dans la section de l'entrée d'air montrent que les maxima de l'énergie cinétique turbulente sont toujours rencontrés pour $Y=0.86$. Pour les faibles nombres de Richardson ($Ri \leq 2$), les pics qui se trouvent en dehors de la section d'entrée d'air, indiquent un niveau croissant en allant du bas vers le haut de la cavité, pour tous les nombres de Richardson considérés. Cependant, pour les grands nombres de Richardson, les valeurs les plus élevées sont trouvées pour $Y=0.86$. Cela est due essentiellement au blocage de l'écoulement par la paroi horizontale comme nous avons vu plus haut, surtout que la section de sortie ne représente que 1/10 du côté de la cavité. Loin de la paroi chaude, on remarque que la diminution de K est plus rapide lorsque le nombre de Richardson est important.

5-17) Effet de l'intensité de la turbulence

L'effet de l'intensité de la turbulence à l'entrée sur la morphologie de l'écoulement à l'intérieur de la cavité est examiné pour quatre nombres de Richardson ($Ri=0.1, 1, 10$ et 20). Ces nombres sont choisis de telle sorte qu'ils seront éloignés l'un à l'autre.

Expérimentalement, quand on dit qu'un écoulement est turbulent à 4 %, cela signifie simplement que l'écart-type des fluctuations de vitesse est de 4 % de la vitesse moyenne. Les intensités sont : $I_0=1\%$, 4% et 8%. Ces valeurs sont souvent rencontrées dans la littérature pour les configurations ventilées. L'intensité de la turbulence n'a jamais dépassé le 10%. Nous avons commencé les calculs à partir de zéro, avec les nouvelles intensités de turbulence. Aucuns changements radicaux sur la structure de l'écoulement ne sont trouvés, cependant une légère variation est rencontrée pour les maxima des variables de l'écoulement. L'effet de l'intensité est

surtout apparent sur les quantités turbulentes telles que l'énergie cinétique turbulente, le flux de chaleur turbulent et les contraintes turbulentes.

5-17-1) Effet de l'intensité sur l'énergie cinétique turbulente

L'effet de la variation de l'intensité de la turbulence sur l'énergie cinétique turbulente est examiné pour les quatre nombres de Richardson cités plus haut et pour trois positions arbitrairement choisies. On remarque les mêmes évolutions globales de l'énergie cinétique turbulente pour les trois intensités choisies pour chaque nombre de Richardson : la présence de deux pics, l'un situé très proche de la paroi chaude et l'autre à $X = 0.1$.

Pour $Y=0.14$, on remarque que les maxima de K sont toujours rencontrés pour $I_0=1\%$. Les maxima pour $I_0=4\%$ et $I_0=8\%$ sont très rapprochés les uns des autres. Pour cette position, les maxima sont proportionnels aux nombres de Richardson. Loin de la paroi chaude, les profils sont presque indiscernables pour toutes les intensités (figure 5.30).

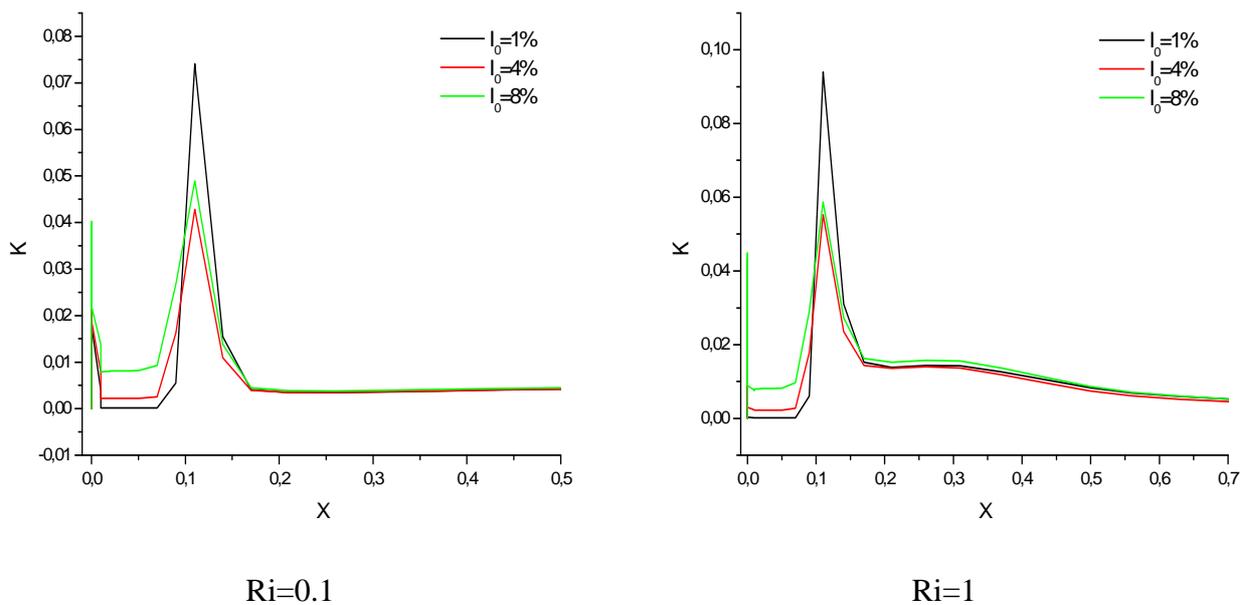


Figure 5.30 : Effet de l'intensité de la turbulence sur K à $Y=0.14$

Pour $Y=0.50$, les profils de K sont rapprochés les uns des autres, indiquant un effet négligeable de la variation de l'intensité de la turbulence sur l'énergie cinétique turbulente. Concernant l'ordre des grandeurs, nous avons constaté que pour cette position, les maxima sont inférieurs à ceux trouvés pour la position précédente pour le même nombre de Richardson (figure : 5.31). Loin de la paroi, le même aspect est trouvé que pour les profils précédents.

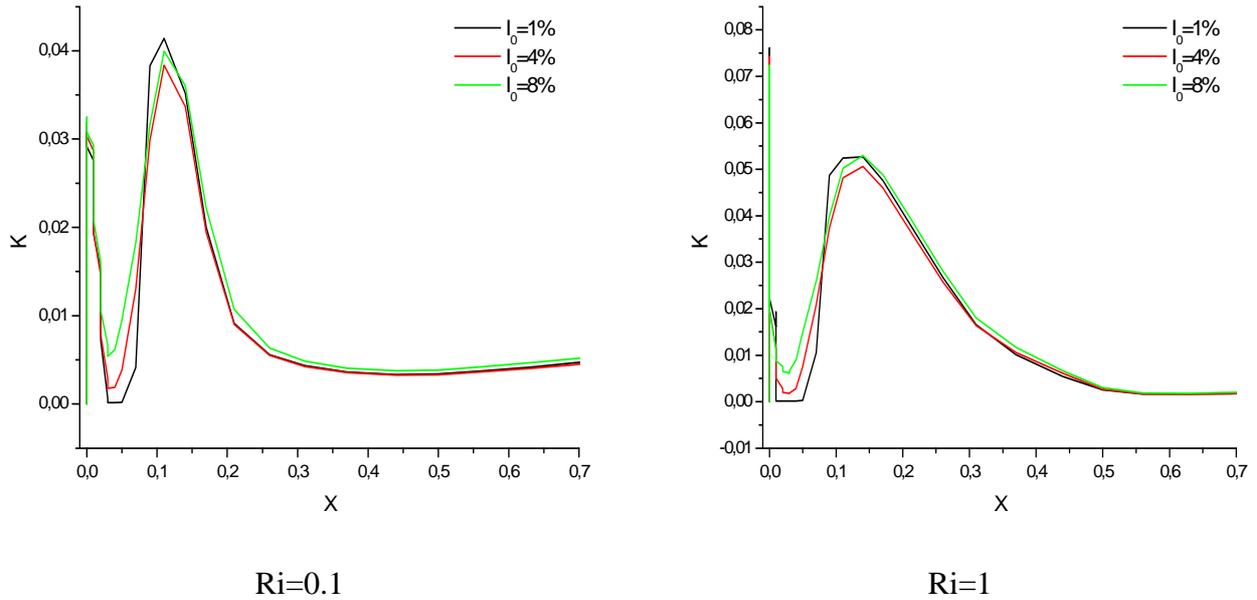


Figure 5.31 : Effet de l'intensité de la turbulence sur K à Y=0.50

Pour Y=0.86, les profils sont presque indiscernables pour les nombres de Richardson choisis, indiquant un effet très négligeable sur l'énergie cinétique turbulente (figure 5.32). Loin de la paroi, l'énergie cinétique turbulente est presque nulle pour tous les nombre de Reynolds et pour toutes les positions choisies.

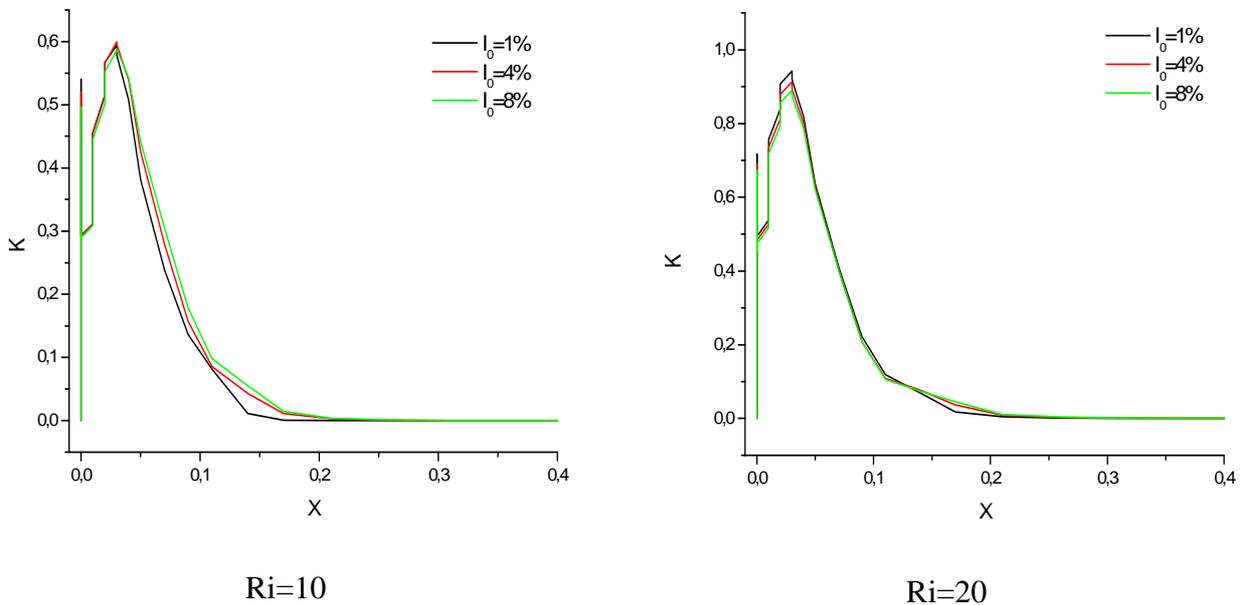


Figure 5.32 : Effet de l'intensité de la turbulence sur K à Y=0.86

5-17-2) Effet de l'intensité sur transfert de chaleur turbulent

L'effet de la variation de l'intensité de la turbulence I_0 sur le flux de chaleur turbulent est examiné pour les trois positions citées précédemment suivant la direction verticale. Nous avons

limité la représentation des profils sur l'intervalle voisin de la paroi chaude, car il est le siège des gradients les plus importants des variables physiques. Pour $Y=0.14$, les profils montrent le même aspect qualitatif : une augmentation rapide vers un maximum qui se trouve très proche de la paroi chaude, puis une diminution brusque vers des valeurs presque nulles. On remarque que les valeurs les plus élevées du flux de chaleur turbulent sont signalées pour les faibles nombres de Richardson. On remarque aussi que le maximum pour $I_0=8\%$ est légèrement supérieur que pour le maximum pour les autres intensités, comme montre la figure : 5.33.

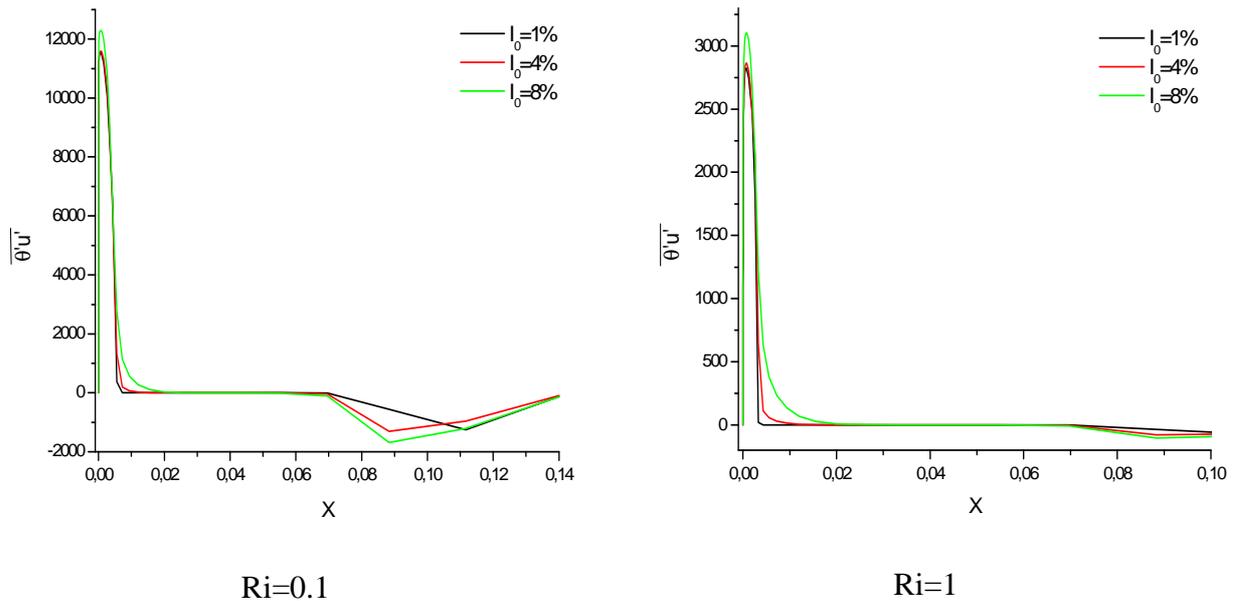


Figure 5.33 : Effet de l'intensité de la turbulence sur le flux de chaleur turbulent à $Y=0.14$

On constate que la variation de l'intensité de la turbulence n'a pas une influence notable sur le flux de chaleur turbulent, et les profils sont presque indiscernables pour les nombres de Richardson considérés.

A mi-hauteur de la cavité, les niveaux du flux de chaleur turbulent sont diminués pour le même nombre de Richardson, mais les profils gardent toujours le même aspect qualitatif. On voit aussi que la diminution est devenue progressive (Voir figure : 5.34)

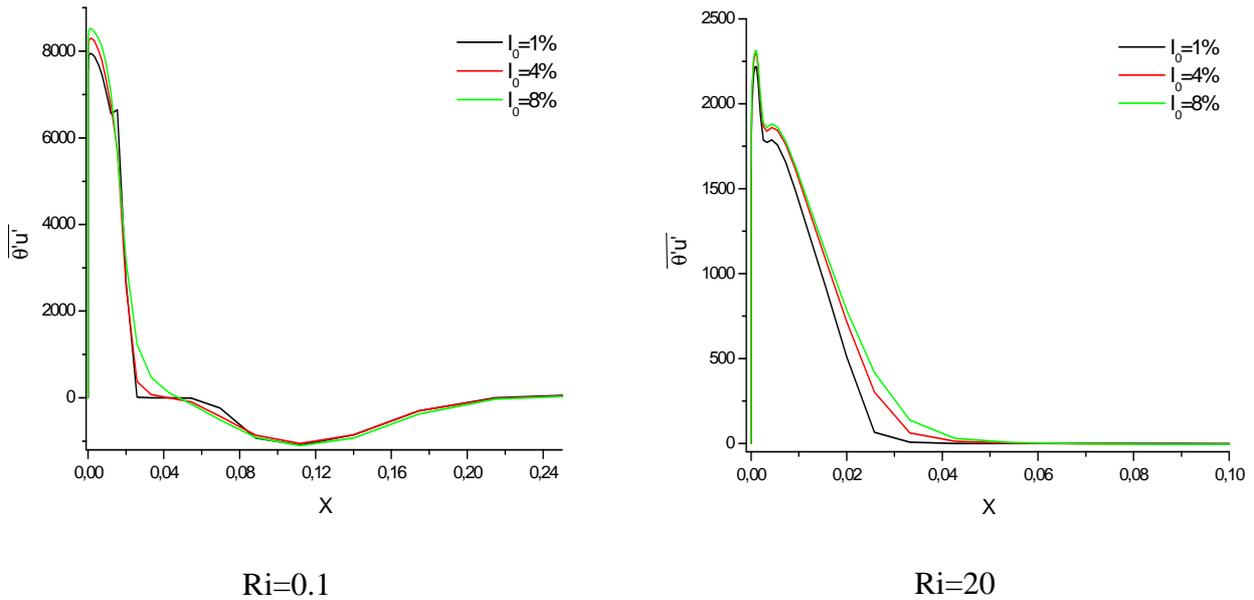


Figure 5.34 : Effet de l'intensité de la turbulence sur le flux de chaleur turbulent à $Y=0.50$

Pour $Y=0.86$, le même aspect qualitatif est signalé que pour les figures précédentes. On remarque que la diminution est devenue de plus en plus progressive, et que les profils sont presque indiscernables malgré que l'écart soit grand entre les nombres de Richardson (voir figure 5.35). Loin de la paroi chaude, l'évolution du transfert de chaleur turbulent est insignifiante pour les trois positions choisies, et pour tous les nombres de Richardson considérés.

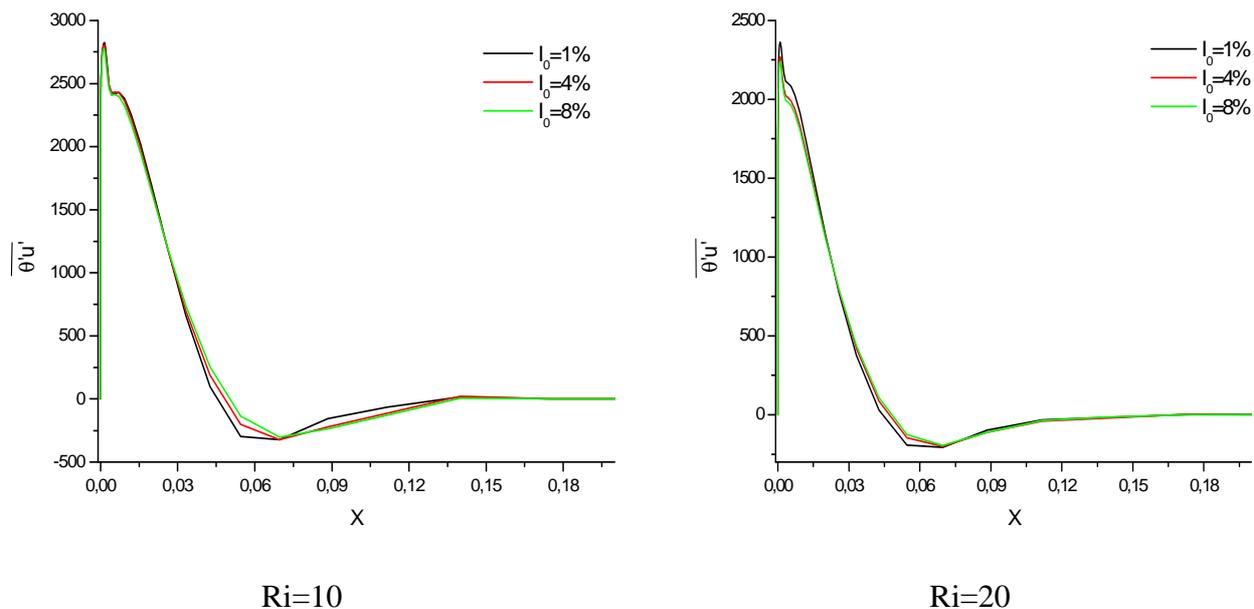


Figure 5.35 : Effet de l'intensité de la turbulence sur le flux de chaleur turbulent à $Y=0.86$

CONCLUSION

CONCLUSION

L'étude de la convection est depuis toujours un domaine d'investigation de grande importance vue les questions fondamentales qu'elles soulèvent d'une part, et sa présence dans les applications industrielles diversifiées d'une autre part.

Dans le présent travail, la méthode des volumes finis est utilisée pour résoudre numériquement le problème de la convection mixte turbulente dans une cavité carrée ventilée.

La cavité est équipée par une fente de soufflage située au coin inférieur gauche et une autre de reprise située au coin supérieur du même côté. La largeur de la fente représente 1/10 du côté de la cavité. Les parois de la cavité sont maintenues adiabatiques à l'exception de la paroi gauche qu'est portée à une température supérieure à la température ambiante. La ventilation est assurée par un jet d'air turbulent qui traverse la cavité depuis l'entrée jusqu'à la sortie.

Le modèle de Launder et Sharma à bas nombre de Reynolds, est employé pour explorer les caractéristiques thermiques et dynamiques ainsi que les différentes quantités turbulentes de l'air à l'intérieur de la cavité. Ce modèle qui représente une modification du modèle standard k- ϵ pour tenir compte des effets proches de la paroi, est testé pour trois types des écoulements dans des configurations géométriques différentes :

La première configuration correspond au mode de la convection naturelle turbulente dans une cavité carrée fermée partiellement chauffée. Pour un nombre de Rayleigh $Ra=1.58*10^9$ les résultats numériques obtenus montrent un accord acceptable avec les résultats expérimentaux de Tian et Karayiannis d'une part et les résultats numériques de Hsieh d'une autre part. Cependant, pour des nombres de Rayleigh supérieurs à 10^{10} , la méthode en seconde ordre dans l'espace et dans le temps employée dans cette étude commence à perdre son exactitude.

La deuxième configuration correspond au mode de la convection forcée turbulente dans une cavité ventilée de rapport de forme (longueur/hauteur) égal à trois. Les paramètres de contrôle sont choisis de telle sorte qu'on peut réaliser une comparaison avec la simulation numérique bidimensionnelle de Müller et Davidson [69], et à l'étude expérimentale de Restivo [17], où un accord favorable est signalé que soit pour la morphologie de l'écoulement à l'intérieur de la cavité, ou pour les profils de la vitesse à plusieurs sections.

La troisième configuration correspond au mode de la convection mixte turbulente à l'intérieur d'une cavité carrée ventilée. Les parois de la cavité sont maintenues à une température uniforme à l'exception de la paroi de base qui s'est portée à une température plus élevée. Pour un nombre de Richardson faible ($Ri=0.036$), deux modèles de la turbulence sont employés qui sont le modèle de Launder et Sharma (1974) et le modèle de Jones et Launder (1972). Une comparaison est faite avec

l'étude expérimentale de Blay, Mergui et Niculae [4], et l'étude numérique de Zhang et Chen [70] utilisant la simulation des grandes échelles (LES) où les résultats numériques obtenus sont presque semblables, avec une légère supériorité pour le modèle de Launder et Sharma.

Dans notre étude, la discrétisation des termes instationnaires dans l'ensemble des équations de discrétisation suit un schéma en second ordre, et pour la discrétisation spatiale, nous avons utilisé la loi des puissances. L'algorithme SIMPLER est utilisé pour le couplage vitesse-pression, et la méthode de balayage ligne par ligne avec l'algorithme de Thomas est employée pour la résolution itérative des systèmes des équations de discrétisation. Après un test de trois maillages non uniformes et différents, un maillage hyperbolique non uniforme est adopté, caractérisé par 100 nœuds suivant la direction horizontale et de même suivant la direction verticale.

Le nombre de Grashof qu'est calculé à partir de la différence de température entre la température de la paroi chauffée et la température du jet traversant la cavité, est fixé à 10^9 . Le nombre de Reynolds varie de telle sorte que le nombre de Richardson qui indique l'importance relative entre la convection naturelle induite par la paroi chaude, et la convection forcée provoquée par le jet d'air, prend les valeurs suivantes : 0.1, 0.5, 1, 2, 5, 10, 20 et 40. Ces valeurs sont choisies de telle sorte qu'on commence les calculs par le mode de convection forcée, et on fait diminuer le nombre de Reynolds jusqu'à atteindre le mode de convection naturelle passant par l'intervalle de la convection mixte.

Pour chaque nombre de Richardson, le calcul itératif commence à partir de $\tau=0$ avec un pas de temps $\Delta t=10^{-5}$. Après un temps adimensionnel moyen de $\tau=25$ pour chaque cas, qui signifie 2.5 millions d'itérations. Les résultats numériques obtenus montrent un régime d'écoulement stationnaire multicellulaire, dont la taille et la forme de cellules tournantes dépend fortement du nombre de Richardson. La zone voisine de la paroi chaude est le siège de formation des couches limites thermiques est dynamiques, où nous avons rencontré un gradient important des variables physiques comme la vitesse verticale moyenne et les vitesses fluctuantes. Cela est dû à l'intensification de l'écoulement ascendant proche de la paroi chaude à cause de l'effet combiné de la convection naturelle et forcée, qu'il influe également sur les autres paramètres comme le coefficient de frottement, la production de l'énergie cinétique turbulente, la dissipation de l'énergie cinétique turbulente et le transfert de chaleur turbulent. La variation du transfert de chaleur exprimé par la variation du nombre du Nusselt moyen, en fonction du nombre de Richardson montre une chute brusque quand la convection forcée est dominante ($0.1 \leq Ri \leq 1$). Cependant pour des valeurs importantes du nombre de Reynolds ($Ri \geq 5$), celui-ci diminue d'une manière monotone et linéaire.

La variation de l'intensité de la turbulence à l'entrée de la cavité de $I_0=1\%$ à $I_0=4\%$ et ensuite à $I_0=8\%$ n'a pas un effet sur la morphologie de l'écoulement à l'intérieur de la cavité, ni sur les paramètres de l'écoulement, comme le champ de vitesse moyenne et de température moyenne. Cependant un effet modeste est signalé pour l'énergie cinétique turbulente, et un effet très négligeable pour le transfert de chaleur turbulent.

Pour terminer, il est à noter que la modélisation des écoulements dans les espaces ventilés est un enjeu important, comme le montre le nombre des publications sur le sujet. En effet, la CFD permet aussi bien de prédire le confort des occupants vis-à-vis des systèmes de ventilation innovants (diminution du coût énergétique) que des problèmes liés aux transports des polluants.

Il existe une multitude de modèles de turbulence, cependant notre choix s'est porté sur le modèle LRN du premier ordre de Launder et Sharma. Le modèle du premier ordre est du type $k-\varepsilon$, qui permet de prédire le mieux l'écoulement pour notre étude. La modélisation au second ordre nécessite de résoudre plus d'équations que la modélisation au premier ordre, mais elle permet également de mieux prédire l'anisotropie de la turbulence.

Bien qu'un accord complet avec l'expérience ne soit pas encore obtenu, on prouve qu'un tel modèle de turbulence avec ce niveau minimal de complexité permettra seulement une modélisation universelle des structures de turbulence près de la paroi communément réalisées dans les équipements thermiques.

Références Bibliographiques

- [1] D. Angirasa, Mixed convection in a vented enclosure with an isothermal vertical surface, *Fluid Dynamics Research* 26: 219-233, 2000.
- [2] Y. S. Tian and T. G. Karayiannis, Low turbulence natural convection in an air filled square cavity. Part I: The thermal and fluid flow fields, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 43: 849-866, 2000.
- [3] P. V. Nielsen, Specification of a two-dimensional test case. Report, ISSN 0902-7513 R9040, Department of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg Universitetscenter, Aalborg, 1990.
- [4] D. Blay, S. Mergui and C. Niculae, Confined turbulent mixed convection in the presence of a horizontal buoyant wall Jet, *fundamentals of mixed convection*, ASME HTD, 213, 65-72, 1992.
- [5] D. M. Sefcik, B. W. Webb and H. S. Heaton, Analysis of natural convection in vertically-vented enclosures, *International Journal of Heat Mass Transfer* 34, N°= 12: 3037-3046, 1991.
- [6] A. B. Abib and Y. Jaluria, Turbulent penetrative and recirculating flow in a compartment fire, *Heat and Mass Transfer in Fire and Combustion Systems* 223: 11-19, 1992.
- [7] A. B. Abib and Y. Jaluria, Numerical simulation of induced buoyancy induced-flow in partially open enclosure, *Numerical Heat Transfer* 14: 235-254, 1988.
- [8] E. Papanicolaou and Y. Jaluria, Computation of turbulent flow in mixed convection in a cavity with a localized heat source, *Journal of Heat Transfer* 117: 649-658, 1995.
- [9] E. Yu and Y. Joshi, A numerical study of three-dimensional laminar natural convection in a vented enclosure , *International Journal of Heat and Fluid Flow* 18: 600-612, 1997.
- [10] S. M. Saeidi and J. M. Khodadadi, Forced convection in a square cavity with inlet and outlet ports, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 49: 1896-1906, 2006.
- [11] A. Raji et M. Hasnaoui, Corrélation en convection mixte dans des cavités ventilées, *Revue Générale de Thermique* 37, 874-884, 1998.
- [12] P. Sagaut, *Large eddy simulation for incompressible flows*, Berlin, Springer, 2002.
- [13] L. Davidson, Implementation of a large eddy simulation method applied to recirculating flow in a ventilated room, Technical Report, ISSN: 1395-7953 R9611, 1996.
- [14] L. Davidson and J. R. Fontaine, Calculation of the flow in a ventilated room using different finite-difference schemes and different treatment of the walls, *Proceeding CLIMA2000*, Sarajevo, 219-225, 1989.
- [15] L. Davidson, P. V. Nielsen and C. Topp, Low Reynolds effects in ventilated rooms: a numerical study, *Air Distributions in Rooms ROOMVENT*, 307-312, 2000.

- [16] L. Davidson and P. V. Nielsen, Large eddy simulations of the flow in a three-dimensional Ventilated Room, 5th International Conference on Air Distributions in Rooms ROOMVENT, July 17-19, 2: 161-168, Yokohama, Japan, 1996.
- [17] A. Restivo, Turbulent flow in ventilated Rooms, PhD thesis, University of London, Imperial College of Science and Technology, Mechanical Engineering Department, 1979.
- [18] L. Davidson, Comparison of different subgrid turbulence models and boundary conditions for large eddy simulation of room air flows, 7th International Conference on Air Distribution in Rooms, ROOMVENT, 301-306, 2000.
- [19] L. Davidson, Numerical simulation of turbulent flow in ventilated rooms, Thesis of Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden, 1989.
- [20] L. Davidson, LES of recirculating flow without any homogeneous direction: a dynamic one equation subgrid model, International Symposium on Turbulence Heat and Mass Transfer, Delft University Press 481-490, 1997.
- [21] R. Cheesewright, J. R. King and S. Ziai, Experimental data for the validation of computer codes for the prediction of two-dimensional buoyant cavity flows, ASME Winter Annual Meeting, Hemisphere HTD 60, 75-81, 1986.
- [22] S. H. Peng, L. Davidson and S. Holmberg, Performance of two equation models for numerical simulation of ventilation flows, 5th International Conference on Air Distribution in Rooms, ROOMVENT, July 17-19, 2: 153-160, Yokohama, Japan, 1996.
- [23] Q. Chen, Prediction of room air motion by Reynolds-Stress models, Building and Environment 31, N^o= 3, 233-244, 1996.
- [24] J. Bredberg, Prediction of flow and heat transfer inside turbine blades using EARSM, k- ϵ and k- ω turbulence models, Thesis of Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden, 1999.
- [25] R. Kristofferson and H. I. Andersson, Direct simulation of low Reynolds number turbulent flow in a rotating channel, Journal of Fluid Mechanics, 256: 163-197, 1993.
- [26] J. P. Johnston, R. M. Halleen and D. K. Lezius, Effects of spanwise rotation on the structure of two-dimensional fully developed turbulent channel flow, Journal of Fluid Mechanics 56: 533-557, 1972.
- [27] J. A. C. Humphrey and W. M. To, Numerical simulation of buoyant turbulent Flow-II: Free and mixed convection in a heated cavity, International Journal of Heat Mass Transfer 29, N^o= 4: 593-510, 1986.
- [28] L. Perrin, P. Reulet, F. Micheli et P. Millan, Caractérisation expérimentale des écoulements turbulents de convection mixte en espace confiné, ONERA, Tiré à Part 2007-84.

- [29] M. Regard, Alchakkif, C. Francois-Rémi and C. Guarracino, Ventilation naturelle d'un local par une grande ouverture extérieure : calcul à l'aide d'un code de champ, *Revue Générale de Thermique* 37, 137-147, 1997.
- [30] M. Regard, Contribution à l'étude des mouvements d'air dans le bâtiment à l'aide d'un code de champ : application à la ventilation naturelle d'un local par une ou deux grandes ouvertures, Thèse de Doctorat, N° d'ordre : 96 ISAL 0127, INSA de Lyon, 1998.
- [31] S. H. Peng, Modeling of turbulent flow and heat transfer for building ventilation, Chalmers University of Technology, Thesis: ISBN 91-7197-646-9, ISSN 0346-718x, Gothenburg, Sweden, 1998.
- [32] L. Davidson and E. Olsson, A numerical simulation of a local age and a local purging flow rate in two-dimensional ventilated rooms, ROOMVENT, Stockholm, Sweden, 1987.
- [33] M. Larsson, Prediction of buoyancy influenced flow in ventilated industrial halls, *Proceeding of Heat Transfer in Buildings*, Dubrovnik, 1977.
- [34] M. Sandberg and M. Sjoberg, The use of moments for assessing air quality, *Building and Environment* 18, 181-197, 1983.
- [35] F. Kuznik, Etude expérimentale des jets axisymétriques anisothermes horizontaux se développant près d'une paroi : application à la modélisation numérique des cavités ventilées, Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2005.
- [36] J. Moureh and D. Flick, Airflow characteristics within a slot-ventilated enclosure, *International Journal of Heat and Fluid Flow* 26, 12-24, 2005.
- [37] J. J. Costa, L.A. Oliveira and D. Blay, Test of several versions for the k- ϵ type turbulence modelling of internal mixed convection flows, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 42: 4391-4409, 1999.
- [38] J. J. Costa, L.A. Oliveira and D. Blay, Turbulent airflow in a room with a two-jet heating-ventilation system: a numerical parametric study, *Energy and Buildings* 32: 327-343, 2000.
- [39] B. E. Launder and D. B. Spalding, The numerical computation of turbulent flows, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 3: 269-289, 1974.
- [40] B. E. Launder, Numerical computation of convective heat transfer in complex turbulent flows: time to abandon wall functions, *International Journal of Heat Mass Transfer* 27, N°= 9, 1485-1491, 1984.
- [41] B. E. Launder and B. I. Sharma, Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of the flow near a spinning disc, *Letters in Heat Mass Transfer* 1: 131-138, 1974.
- [42] W. P. Jones and B. E. Launder, The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence, *International Journal of Heat Mass Transfer* 15: 301-314, 1972.

- [43] W. P. Jones and B. E. Launder, The calculations of low Reynolds number phenomena with a two-equation model of turbulence, *International Journal of Heat Mass Transfer* 16: 1119-1130, 1973.
- [44] V. C. Patel, W. Rodi and G. Scheuerer, Turbulence models for near wall and low Reynolds number flows, a review, *AIAA J* 23: 1308-1319, 1985.
- [45] R. A. W. M. Henkes and C. J. Hoogendoorn, Comparison of turbulence models for the natural convection boundary layer along a heated vertical plate, *International Journal of Heat Mass Transfer* 32: 157-169, 1989.
- [46] A. Behzadmehr, N. Galanis and C.T. Nguyen, Predicted effects of inlet turbulent intensity on mixed convection in vertical tubes with uniform wall heat flux, *International Journal of Thermal Sciences* 45: 433-442, 2006.
- [47] N. Z. Ince and B. E. Launder, On the computation of buoyancy-driven turbulent flows in rectangular enclosures, *International Journal of Heat and Fluid Flow* 10, N°= 2, 1989.
- [48] R. Consul, C. D. Pérez Seggara, J. Cadafalsh and K. Claramunt, Numerical experiments on turbulent forced convection using low-Reynolds-number two equation models, *Proceedings of the 5th ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference*, Barcelona, 2000.
- [49] S. H. Peng and L. Davidson, Computation of turbulent buoyant flows in enclosures with low-Reynolds-number k- ϵ Models, *International Journal of Heat Mass Transfer*, 20: 172-184, 1999.
- [50] B. J. Daly and F.H. Harlow, Transport equations in turbulence, *Physics of Fluids* 13, N°=11, 2634-2649, 1970.
- [51] K. Hanjalic and S. Vasic, Computation of natural turbulent convection in rectangular enclosures with an algebraic flux model, *International Journal of Heat Mass Transfer* 36, 3603-3624, 1993.
- [52] W. Rodi, Influence of buoyancy and rotation on equations for the turbulent length scale, *proc. 2nd Symposium on Turbulent Shear Flows*, London, 10.37-10.42, 1979.
- [53] N. C. Markatos, M. R. Malin and G. Cox, Mathematical modeling of buoyancy-induced smoke flow in enclosure, *International Journal of Heat Mass Transfer* 25, 6375, 1982.
- [54] K. Sagara, Calculation of turbulent gravity flow, *Trans. of the Architectural Institut of Japan*, N°=305, 88-96, 1981.
- [55] R. A. W. M. Henkes and C. J. Hoogendoorn, Comparison exercise for computational turbulence natural convection in enclosures, *Numerical Heat Transfer, Part B*, 28: 59-78, 1995.
- [56] M. P. Fraikin, J. J. Portier and C. J. Fraikin, Application of the k- ϵ turbulent model to an enclosed driven recirculating flow, *ASME Paper N°=80-HT-68*. Presented at the Joint ASME/AIChE National Heat Transfer Conference, Orlando, Florida 1980.

- [57] J. A. Humphrey, F. S. Sherman and K. Chen, Experimental study of free and mixed convective flow of air in a heated cavity, Contractor Report N° Sand84-8192, Sandia National Laboratories, Livermore, California 1985.
- [58] K. S. Chen, J. A. Humphrey and F. S. Sherman, Free and mixed convective flow of air in a heated cavity of variable rectangular cross-section and orientation, *Phil. Trans. R. Soc. A* 316, 57-84, 1985.
- [59] C. R. Yap, Turbulent heat and moment transfer in recirculating and impinging flows, PhD Thesis, University of Manchester, Institute of Science and Technology, 1987.
- [60] K. J. Hsieh and F. S. Lien, Numerical modeling of buoyancy-driven turbulent flows in enclosures, *International Journal of Heat and Fluid Flow* 25: 659-670, 2004.
- [61] R. A. W. M. Henkes and C. J. Hoogendoorn, Scaling of the turbulent natural convection in a heated square cavity, *Journal of Heat Transfer* 116, 400-408, 1994.
- [62] R. A. Kuyper, Van Der Meer, H. TH, C. J. Hoogendoorn and R. A. W. M. Henkes, Numerical study of laminar and turbulent convection in an inclined square cavity, *International Journal of Heat Mass Transfer*, 33, N°=11, 2899-2911, 1993.
- [63] L. Agrawal, J. C. Mandal and A. G. Marathe, Computations of laminar and turbulent mixed convection in a driven cavity using pseudo-compressibility approach, *Computers and Fluids* 30, 607-620, 2001.
- [64] H. K. Versteeg and W. Malalasekera, *An introduction to computational fluid dynamics*, John Wiley and Sons, New York, 1995.
- [65] S. V. Patankar, *Numerical heat transfer and fluid flow*, Mac Graw Hill, New York, 1980.
- [66] L. Davidson, Second-order corrections of the k- ϵ model to account for non-isotropic effects due to buoyancy, *International Journal of Heat Mass Transfer* 33: N°=12, 2599-2608, 1990.
- [67] P. L. Betts and I. H. Bokhari, Experiments on turbulent natural convection in an enclosed tall cavity, *International Journal of Heat and Fluid Flow* 21: 675-683, 2000.
- [68] K. J. Hsieh and F. S. Lien, Numerical modeling of buoyancy-driven turbulent flows in enclosures, *International Journal of Heat and Fluid Flow* 25: 659-670, 2004.
- [69] D. Muller and L. Davidson, Comparison of different subgrid turbulence models and boundary conditions for large eddy simulation of room air, 7th International Conference on Air Distribution in Rooms ROOMVENT, 301-306, 2000.
- [70] W. Zhang and Q. Chen, Large eddy simulation of natural and mixed convection airflow indoors with two simple filtered dynamic subgrid scale models, *Numerical Heat Transfer, Part A*, 37: 447-463, 2000.

- [71] T. Cebeci and P. Bradshaw, Physical and computational aspects of convective heat transfer, Springer-Verlag, 1997.
- [72] C. Bailly and G. Compte-Bellot, Turbulence, CNRS édition, Paris 2003.
- [73] S. Tieszen, A. Ooi, P. Durbin, and M. Behnia, Modeling of natural convection heat transfer, proceedings for the Summer Program, Center for Turbulence Research, Stanford University, 287-302, 1998.
- [74] L. Davidson, An introduction to turbulence models, Chalmers University of Technology, Publication 97/2, Goteborg, Sweden, November 2003.
- [75] W. Rodi and N. N. Mansour, Low Reynolds number k- ϵ modeling with the aid of direct numerical simulation, Journal of Fluid Mechanics 250: 509-529, 1993.

ANNEXE A

Décomposition de Reynolds

Le premier problème est la définition d'une moyenne, en effet les variations sont trop rapides pour être décrites finement en temps et en espace : on va donc ne s'intéresser qu'à la moyenne de la vitesse. Les détails de la vitesse sont perdus ; on ne va essayer de ne décrire que l'évolution du champ moyen. La moyenne d'ensemble est la plus satisfaisante théoriquement ; on fait n fois l'écoulement et on moyenne l'ensemble des réalisations. En pratique, il est plus judicieux, de faire une moyenne temporelle.

Reynolds fait la convention que la valeur de la quantité f égale à une valeur moyenne plus une valeur fluctuante :

$$f = \bar{f} + f' \quad (\text{A.1})$$

D'après Reynolds (1895), on fait la moyenne temporaire d'une quantité f comme suit :

$$\bar{f} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f dt \quad (\text{A.2})$$

Par définition, la valeur moyenne d'une fluctuation est nulle :

$$\overline{f'} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f' dt = 0 \quad (\text{A.3})$$

D'après cette relation, on peut conclure que :

$$\overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g} \quad (\text{A.4})$$

$$\overline{f g'} = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\overline{f g} = \bar{f} \cdot \bar{g} \quad (\text{A.6})$$

$$\overline{\alpha f + \beta g} = \alpha \bar{f} + \beta \bar{g} \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} \quad (\text{A.10})$$

où α et β sont des constantes.

1. Equation de continuité

La projection de l'équation (2.1) sur les axes X et Y, nous donne :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.10})$$

On fait la décomposition suivante : $u = \bar{u} + u'$, $v = \bar{v} + v'$, $\theta = \bar{\theta} + \theta'$; on obtient :

$$\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v} + v')}{\partial y} = 0$$

On fait la moyenne par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v} + v')}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y} = 0$$

Cette équation peut être simplifiée en utilisant les relations (A.3) :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad \text{C'est bien l'équation (2.7)}$$

$$\tau_{ij} : \text{représente le tenseur des contraintes, définit comme : } \tau_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right]$$

Le dernier terme s'annule suite à la condition d'incompressibilité, et par conséquent :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{xx} = 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

2. Equation de quantité de mouvement suivant X

La projection de l'équation (2.2) sur l'axe des X, nous donne :

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u.u)}{\partial x} + \frac{\partial(u.v)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \quad (\text{A.11})$$

On fait une décomposition en valeur moyenne et une valeur fluctuante, on obtient :

$$\rho \left[\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u} + u')(\bar{u} + u')}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u} + u')(\bar{v} + v')}{\partial y} \right] = -\frac{\partial}{\partial x}(\bar{p} + p') + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \left(\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{v} + v')}{\partial x} \right) \right]$$

On fait la moyenne par rapport au temps, on obtient :

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right]$$

En appliquant la règle (A.4) sur l'équation précédente, on obtient :

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}'}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{u}')}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}'\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}'\bar{u}')}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v}')}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u}'\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u}'\bar{v}')}{\partial y} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{p}'}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} \right) \right] + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}'}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial x} \right) \right]$$

Par application des règles : (A.3) et (A.5) sur l'équation précédente, on obtient l'équation suivante :

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u}'\bar{u}')}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}'\bar{v}')}{\partial y} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right]$$

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho \bar{u}'\bar{u}' \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \rho \bar{u}'\bar{v}' \right] \quad (\text{A.12})$$

On a fait apparaître un terme supplémentaire, c'est le terme de tension de Reynolds ou terme de tension turbulente: $-\overline{\rho u'_i u'_j}$. L'interprétation de ce tenseur est le transport de quantité de mouvement par les fluctuations de vitesse. On peut ensuite représenter un nouveau tenseur des contraintes défini par :

$$\tau_{ij}^{tot} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \overline{\rho u'_i u'_j} \quad (\text{A.13})$$

Les tensions de Reynolds représentent un tenseur symétrique. Selon l'approximation de Boussinesq (1877) :

$$\overline{\rho u'_i u'_j} = -\mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \rho K \delta_{ij} \quad (\text{A.14})$$

Sont appelées les tensions de Reynolds.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \text{Symbole de Kronecker}$$

μ_t : Représente la viscosité dynamique turbulente.

K : L'énergie cinétique turbulente.

On remplace par (A.14) dans (A.13), ensuite on fait la projection de l'équation résultante sur les axes X et Y, on obtient :

$$\begin{aligned} \tau_{yx} &= \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \overline{\rho u'v'} = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) = (\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \\ \tau_{xx} &= 2\mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) - \overline{\rho u'u'} = 2\mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + 2\mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \rho K = 2(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \rho K \end{aligned}$$

L'introduction de ces deux expressions dans l'équation (A.12), nous donne :

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{u}\bar{v})}{\partial y} \right] &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \rho K \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{u}\bar{v})}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(p + \frac{2}{3} K \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[2(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] \end{aligned}$$

c'est l'équation (2.5)

3. Equation de quantité de mouvement suivant Y

La projection de l'équation (2.2) sur l'axe des Y, nous donne :

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial (u.v)}{\partial x} + \frac{\partial (v.v)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho g \beta (\theta - \theta_0) \quad (\text{A.15})$$

On fait une décomposition en valeur moyenne et une valeur fluctuante, on obtient :

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial (\bar{v} + v')}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u} + u')(\bar{v} + v')}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{v} + v')(\bar{v} + v')}{\partial y} \right] &= -\frac{\partial}{\partial y} (\bar{p} + p') + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mu \left(\frac{\partial (\bar{v} + v')}{\partial y} \right) \right] + \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{v} + v')}{\partial x} \right) \right] &+ \rho g \beta ((\bar{\theta} + \theta') - \theta_0) \end{aligned}$$

On fait la moyenne par rapport au temps, on obtient :

$$\rho \left[\frac{\partial(\bar{v}+v')}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}+u')(\bar{v}+v')}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}+v')(\bar{v}+v')}{\partial y} \right] = -\frac{\partial}{\partial y}(\bar{p}+p') + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mu \left(\frac{\partial(\bar{v}+v')}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{v}+v')}{\partial x} \right) \right] + \rho g \beta (\bar{\theta} + \theta') - \theta_0$$

En appliquant la règle (A.4) sur l'équation précédente, on obtient :

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v}')}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}'\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}'\bar{v}')}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{v}')}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{v}'\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{v}'\bar{v}')}{\partial y} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{p}'}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y} \right) \right] + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}'}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial x} \right) \right] + \rho g \beta (\bar{\theta} + \theta') - \theta_0$$

Par application des règles : (A.3) et (A.5) sur l'équation ci-dessus, on obtient l'équation suivante :

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u}'\bar{v}')}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}'\bar{v}')}{\partial y} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right] + \rho g \beta (\bar{\theta} - \theta_0)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{v})}{\partial y} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \rho \bar{v}'\bar{v}' \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \rho \bar{u}'\bar{v}' \right] + \rho g \beta (\bar{\theta} - \theta_0) \quad (\text{A.16})$$

Suivant la même analogie comme avec l'équation de conservation suivant X, on obtient des nouvelles composantes du tenseur des contraintes qui sont :

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \rho \bar{u}'\bar{v}' = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \mu_r \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) = (\mu + \mu_r) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) - \rho \bar{v}'\bar{v}' = 2(\mu + \mu_r) \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \rho K$$

L'introduction de ces deux expressions dans l'équation (A.16), nous donne :

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{v})}{\partial y} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[2(\mu + \mu_r) \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \rho K \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[(\mu + \mu_r) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] + \rho g \beta (\bar{\theta} - \theta_0)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{v})}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[2(\mu + \mu_r) \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[(\mu + \mu_r) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] + g \beta (\bar{\theta} - \theta_0)$$

C'est l'équation (2.6)

4. Equation de la température

L'introduction de l'expression du flux thermique définit par : $q_i = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_i}$ dans l'équation (2.3), et

la projection ensuite sur les axes correspondants, nous donne :

$$\rho \left[\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(u\theta)}{\partial x} + \frac{\partial(v\theta)}{\partial y} \right] = \frac{\lambda}{C_p} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.17})$$

On fait une décomposition en valeur moyenne et une valeur fluctuante, on obtient :

$$\rho \left[\frac{\partial(\bar{\theta} + \theta')}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u} + u')(\bar{\theta} + \theta')}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v} + v')(\bar{\theta} + \theta')}{\partial y} \right] = \frac{\lambda}{C_p} \left[\frac{\partial^2(\bar{\theta} + \theta')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bar{\theta} + \theta')}{\partial y^2} \right]$$

On fait la moyenne par rapport au temps, on obtient :

$$\rho \left[\frac{\partial(\bar{\theta} + \theta')}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u} + u')(\bar{\theta} + \theta')}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v} + v')(\bar{\theta} + \theta')}{\partial y} \right] = \frac{\lambda}{C_p} \left[\frac{\partial^2(\bar{\theta} + \theta')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bar{\theta} + \theta')}{\partial y^2} \right]$$

$$\rho \left[\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial\theta'}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{\theta})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\theta')}{\partial x} + \frac{\partial(u'\bar{\theta})}{\partial x} + \frac{\partial(u'\theta')}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{\theta})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{v}\theta')}{\partial y} + \frac{\partial(v'\bar{\theta})}{\partial y} + \frac{\partial(v'\theta')}{\partial y} \right] = \frac{\lambda}{C_p} \left[\frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\theta'}{\partial y^2} \right]$$

En appliquant la règle (A.4) sur l'équation précédente, on obtient :

$$\rho \left[\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial\theta'}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{\theta})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\theta')}{\partial x} + \frac{\partial(u'\bar{\theta})}{\partial x} + \frac{\partial(u'\theta')}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{\theta})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{v}\theta')}{\partial y} + \frac{\partial(v'\bar{\theta})}{\partial y} + \frac{\partial(v'\theta')}{\partial y} \right] = \frac{\lambda}{C_p} \left[\frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\theta'}{\partial y^2} \right]$$

Par application des règles (A.3) et (A.5) sur l'équation précédente, on obtient l'équation suivante :

$$\rho \left[\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{\theta})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{\theta})}{\partial y} \right] = \frac{\lambda}{C_p} \left[\frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial y^2} \right]$$

$$\rho \left[\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{\theta})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{\theta})}{\partial y} \right] = \frac{\lambda}{C_p} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x} - \rho(u'\theta') \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial y} - \rho(v'\theta') \right) \right] \quad (\text{A.18})$$

On a fait apparaître un terme supplémentaire, qui est le terme de transfert de chaleur turbulent :

$-\rho\overline{u'\theta'}$. L'interprétation de ce terme est le transport de chaleur par les fluctuations turbulentes. On peut ensuite représenter un nouveau flux thermique défini par :

$$Q_i = -\lambda \frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_i} + \rho C_p \overline{u'_i \theta'}$$

L'expression du flux thermique turbulent selon la loi de Fourier est donné par :

$$\rho\overline{u'_i \theta'} = -\frac{\mu_t}{\sigma_t} \frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_i} \quad (\text{A.19})$$

L'introduction de l'expression dans l'équation (A.18), on obtient :

$$\rho \left[\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{\theta})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{\theta})}{\partial y} \right] = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\lambda}{C_p} \frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x} + \frac{\mu_t}{\sigma_t} \frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\lambda}{C_p} \frac{\partial\bar{\theta}}{\partial y} + \frac{\mu_t}{\sigma_t} \frac{\partial\bar{\theta}}{\partial y} \right) \right]$$

$$\rho \left[\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{\theta})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{\theta})}{\partial y} \right] = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\lambda}{C_p} + \frac{\mu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\lambda}{C_p} + \frac{\mu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial\bar{\theta}}{\partial y} \right]$$

$$\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{\theta})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{\theta})}{\partial y} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu}{\text{Pr}} + \frac{\nu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu}{\text{Pr}} + \frac{\nu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial\bar{\theta}}{\partial y} \right]$$

C'est bien l'équation (2.10).

ANNEXE B

Equation des contraintes turbulentes

Le traitement statistique des équations locales instantanées a donc permis d'écrire les équations aux grandeurs moyennes, en contrepartie, il a fait apparaître des inconnues nouvelles provenant de la non linéarité des équations de Navier-Stokes, les contraintes turbulentes (Annexe A). La fermeture de l'équation de quantité de mouvement moyenne nécessite donc la connaissance de ces contraintes turbulentes et c'est ce que nous nous proposons de faire dans un premier temps dans cette annexe en établissant les équations de transport des contraintes turbulentes [31].

$$\frac{\partial(\overline{u'_i u'_j})}{\partial t} + u_k \frac{\partial(\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_k} = - \left(\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) + \beta (g_i \overline{u'_i \theta'} + g_j \overline{u'_j \theta'}) + \frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) - 2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[- \overline{u'_i u'_j u'_k} - \frac{p'}{\rho} (\overline{u'_i \delta_{jk}} + \overline{u'_j \delta_{ik}}) + \nu \frac{\partial(\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_k} \right] \quad (\text{B.1})$$

Les équations de transport de l'énergie cinétique turbulente et du taux de dissipation turbulente sont par la suite développées.

Equation de l'énergie cinétique turbulente k

L'énergie cinétique turbulente k est défini par : $k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$

L'équation de l'énergie cinétique turbulente est obtenu par contraction des indices (mettre $i=j$) dans l'équation (B.1) et de diviser ensuite les deux parts de l'équation par deux :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = - \underbrace{\left(\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)}_{P_k} + \underbrace{\beta g_j \overline{u'_j \theta'}}_{G_k} - \underbrace{\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}}_{\varepsilon} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{u'_j \left(\frac{u'_i u'_j}{2} + \frac{p'}{\rho} \right)} \right]}_{DT} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_j}}_D$$

P_K et G_K : représentent les termes de production.

ε : Le terme de dissipation, avec son signe moins, il est toujours négatif.

D : le terme de diffusion visqueuse.

DT : le terme de diffusion turbulente, la première partie représente la diffusion due aux fluctuations de vitesse et le seconde représente la diffusion due aux fluctuations vitesse-pression [74].

On remplace par l'expression du flux de chaleur turbulent ; on obtient :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \beta g_j \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_j} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (\text{B.2})$$

Où ε est le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente, défini comme la demi-trace du

tenseur de dissipation : $\varepsilon = \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}$

En remplace par les expressions des contraintes turbulentes correspondantes, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial k}{\partial y} &= \nu_t \left[2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right] - \beta g \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] \\ \frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial k}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + \underbrace{\nu_t \left[2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right]}_{P_k} - \\ &\underbrace{\beta g \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}}_{G_k} - \varepsilon \end{aligned}$$

On ajoute à la partie droite de l'équation le terme D qui est souvent employé pour les modèles LRN k-ε, on aboutit à l'équation (2.12)

Equation de dissipation de l'énergie cinétique turbulente ε

Il est nécessaire d'ajouter une équation de transport de taux de dissipation afin de fermer la modélisation du tenseur. Toujours par manipulations des équations de Navier-Stokes et prise la moyenne, l'équation exacte de la dissipation est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} &= -2\nu \underbrace{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_{P_1} - 2\nu \underbrace{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}}_{P_2} - 2\nu \underbrace{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_k}}_{P_3} - 2\nu \underbrace{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}_{P_3} + 2\nu \beta g_i \frac{\partial \bar{\theta}'}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} - 2 \underbrace{\left(\nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2}_{\Phi_\varepsilon} \\ &+ \underbrace{\nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_k \partial x_k}}_{D_\varepsilon} - \underbrace{\nu \frac{\partial}{\partial x_k} (u'_k \varepsilon)}_{T_\varepsilon} - \underbrace{\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{2}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right)}_{\Pi_\varepsilon} \end{aligned}$$

Les différents termes ont les significations suivantes [24]:

P_1 : Terme de production moyen et mixte.

P_2 : Terme de gradient de production.

P_3 : Production turbulente

Φ_ε : Terme de destruction

D_ε : Terme de diffusion visqueuse.

T_ε : Terme de diffusion turbulente.

Π_ε : Terme de diffusion par fluctuations de pression. Les termes en fluctuation de pression sont souvent négligés, car ils sont difficiles à mesurer d'une part et son influence près de paroi est très faible d'une autre part. Les termes précédents sont modélisés suivant les relations suivantes :

$$P_3 = \frac{\varepsilon}{k} \left[C_1 f_1 \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_3 \beta g \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right]$$

$$P_2 = 2\nu v_t \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} \right) = E$$

$$D_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right)$$

$$T_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right)$$

D'après Rodi et Mansour [75], les termes P_1 et P_2 doivent s'ajoutés au terme de destruction, ils sont

$$\text{modélisés par : } P_1 + P_2 - \Phi_\varepsilon = C_2 f_2 \frac{\varepsilon^2}{k}$$

En remplace par ses termes, on obtient :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = -\frac{\varepsilon}{k} \left(C_1 f_1 \bar{u}'_i \bar{u}'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + C_3 \beta g_j \frac{v_t}{\sigma_t} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} \right) - C_2 f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + E$$

En remplace par les expressions des contraintes turbulentes correspondantes, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} &= \frac{\varepsilon}{k} \left(C_1 f_1 \nu_t \left[2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right] - C_3 \beta g \frac{v_t}{\sigma_t} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right) - C_2 f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\nu + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + E \end{aligned}$$

C'est l'équation (2.13)

Remarque :

Pour des raisons de simplicité, nous avons omet les barres droites indiquant la valeur moyenne des variables dans le chapitre 2.

Rappels sur les propriétés de la couche limite turbulente incompressible

Le principe de base du traitement de paroi repose sur l'existence bien établie des couches limites turbulentes bidimensionnelles incompressibles, d'une relation universelle reliant la vitesse à la distance à la paroi par l'intermédiaire du frottement pariétal. On introduit la vitesse de paroi et la longueur de paroi, paramètres adimensionnés par les échelles de paroi :

$$U^+ = \frac{U}{u_\tau} \qquad y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu_w} \qquad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

Selon l'importance relative des composantes laminaires et turbulentes de tenseur des contraintes, la région interne de la couche limite se sépare en trois zones distinctes :

La sous couche visqueuse $y^+ < 5$

Il s'agit d'une couche de faible épaisseur où l'action de la viscosité prédomine. Dans ce film visqueux, le profil de vitesse de paroi suit une loi linéaire : $U^+ = y^+$

La zone de turbulence développée

Dans cette région les effets turbulents prédominent sur les effets visqueux. Il est difficile de déterminer avec précision l'étendue de cette région, son épaisseur varie en fonction du nombre de Reynolds et du gradient de pression. Le profil de vitesse dans cette zone suit une loi logarithmique :

$$U^+ = \frac{1}{K_A} \ln(y^+) + C$$

Les constantes sont déterminées expérimentalement. $C \approx 5.25$ et $K_A = 0.41$ est la constante de Von Karman. Cette zone est appelée aussi la zone logarithmique.

La couche tampon

C'est la zone de raccord entre les deux régions précédentes, où coexistent les propriétés de la sous couche visqueuse et la zone logarithmique.

Constantes C_μ , C_1 et C_2 du modèle k-ε

La détermination des constantes qui apparaissent dans les équations de fermeture pour le modèle k-ε réside dans l'analyse des couches limites turbulentes bidimensionnelles sur une plaque plane. La viscosité cinématique turbulente est reliée à l'énergie cinétique turbulente k et son taux de dissipation ε d'après les modèles LRN par la relation :

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (\text{B.4})$$

Dans la zone logarithmique, l'équation de modélisation de l'énergie cinétique turbulente peut être

$$\text{écrite : } 0 = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - \rho \varepsilon \quad (\text{B.5})$$

Et les contraintes à la paroi τ_w ont le même ordre de grandeur que les contraintes turbulentes, on

$$\text{peut écrire donc : } \tau_w = -\rho \overline{u'v'} = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (\text{B.6})$$

$$\text{On emploie la définition de la contrainte à la paroi, on obtient : } \tau_w = \rho u_\tau^2 \quad (\text{B.7})$$

u_τ : est la vitesse de frottement. On remplace par les expressions (B.4) et (B.6) dans l'équation

$$\text{(B.5), on trouve : } C_\mu = \left(\frac{u_\tau^2}{k} \right)^2 \quad (\text{B.8})$$

Dans la zone logarithmique, l'expérience a confirmé que pour une couche limite : $\frac{u_\tau^2}{k} \approx 0,3$

d'où : $C_\mu = 0.09$.

On suppose que loin de la paroi les gradients de la vitesse sont négligeables, se qui conduit à $P_k=0$.

On peut par la suite réécrire les équations pour k et ε respectivement comme :

$$\rho u \frac{dk}{dx} = -\rho \varepsilon \quad (\text{B.9})$$

$$\rho u \frac{d\varepsilon}{dx} = -\rho C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{B.10})$$

On considère que k est une fonction décroissante proportionnelle à : x^{-m} et par conséquent la variation de k est proportionnelle à : $-mx^{-m-1}$. Par insertion de cette dernière relation dans l'équation (B.9), on trouve :

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = -m(-m-1)x^{-m-2} \quad (\text{B.11})$$

On fait remplacer (B.11) dans (B.10), on trouve : $C_2 = \frac{m}{m+1}$. L'expérience a montré que :

$m=1.25 \pm 0.06$ et la valeur : $C_2=1.92$ est choisi.

D'une manière identique par rapport à l'équation de k , on peut négliger les termes convectifs dans l'équation de dissipation pour la zone logarithmique, et faisant l'approximation que les termes de production et de dissipation ont le même ordre de grandeur : $P_k = \rho \varepsilon$, on peut écrire donc :

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \left[\underbrace{\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}}_{D_\varepsilon} \right] + (C_2 - C_1) \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{B.12})$$

Les termes de production et de dissipation sont respectivement : $P_k = \rho \frac{u_\tau^3}{K_A y}$ et $\varepsilon = \frac{k^{3/2}}{\ell}$ où ℓ :

représente l'échelle de la longueur pour la couche limite.

Faisant l'égalité : $P_k = \rho \varepsilon$, on obtient : $\ell = K_A C_\mu^{-3/4} y$ (B.13)

On remplace par l'expression (B.13) et $\varepsilon = \frac{k^{3/2}}{\ell}$ dans (B.12), on trouve :

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \left[\underbrace{\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k^{3/2}}{K_A C_\mu^{-3/4} y} \right)}_{D_\varepsilon} \right] + (C_2 - C_1) \frac{k^2}{\ell^2} \quad \text{D'où : } C_1 = C_2 - \frac{K_A^2}{\sqrt{C_\mu \sigma_\varepsilon}} \text{ est donc : } C_1=1.44.$$

