

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

No d'ordre :
Série :

THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

En Génie Mécanique

Option : Construction Mécanique

**ANALYSE NUMERIQUE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE
DE STRUCTURES COMPOSITES A RENFORCEMENT FIBREUX**

Par **BOUYAYA Lynda**

Soutenue le : 09 /11 / 2011

Devant le jury :

Président :	H. BOUGHOUAS	Prof.	Université Mentouri Constantine
Rapporteur :	F. MILI	Prof.	Université Mentouri Constantine
Examineurs:	A. BELLAOUAR	Prof.	Université Mentouri Constantine
	L. KHOCHEMANE	M.C.	Université 20 aout 1955 Skikda
	K. KHOUNFAIS	M.C	Université 20 aout 1955 Skikda

ANNEE UNIVERSITAIRE 2010/2011

Remerciements

Cette thèse est le fruit de près de sept années de recherche passées

J'aimerais remercier tout particulièrement mon directeur de thèse F.MILI professeur à l'université Mentouri de Constantine pour avoir rendu possible cette aventure, mais aussi pour sa confiance, pour son soutien, pour sa rigueur scientifique et pour tous les moments de discussion et d'échange que l'on a passé sur la méthode des éléments finis et d'autres sujets tout aussi passionnants. M'ayant donné une liberté de travail presque totale durant toute cette thèse, il m'a également appris que l'on pouvait travailler sans compter, avec passion, tout en gardant le sourire aux lèvres.

Je souhaite également remercier chaleureusement Monsieur H. Boughouas professeur à l'université Mentouri, qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury. Je tiens à lui exprimer ma plus profonde gratitude.

Je suis également extrêmement reconnaissante à Monsieur A. Bellaouar professeur à l'université Mentouri de Constantine ainsi qu'aux Messieurs L. Khochemane et K. Khounfais, maîtres de conférences à l'université de Skikda, qui m'ont fait l'honneur de participer au jury et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail en acceptant de l'examiner.

J'exprime mes remerciements aussi à tout l'ensemble de mes collègues enseignants aux universités de Constantine, Skikda et Oran, avec lesquels j'ai eu de nombreuses et enrichissantes conversations qui m'ont permis d'élargir l'horizon de cette recherche.

Finalement, je voudrais encore remercier mes proches, mes amis et toute ma famille pour m'avoir supporté, dans tous les sens du terme, durant ces années de travail sans horaire et sans limite, où souvent je me transformais en courant d'air.

DÉDICACE

A DIEU SEUL...

A MON *PÈRE*, POUR TOUT LE SOUTIEN MORAL ET MATÉRIEL
QU'IL A EU À M'APPORTER, POUR MA RÉUSSITE.

A MA *MÈRE*, POUR LA GRANDE AMBITION QU'ELLE A
TOUJOURS NOURRIE EN MOI, AUSSI BIEN POUR MES ÉTUDES
QUE POUR MA PROPRE ÉDUCATION.

AUX MEMBRES DE MA *FAMILLE*, MES FRÈRES, MES SŒURS
ET AUX MES *AMIS*, POUR LES BONNES RELATIONS QUE NOUS
AVONS EU À ENTREtenir, TOUTES CES ANNÉES DURANT.

RESUME

L'utilisation des matériaux composites fibreux dans des applications industrielles nécessite une connaissance précise et une caractérisation poussée de leur comportement mécanique et en particulier vibratoire. Dans cet axe, ce travail de thèse a pour objet d'analyser le comportement statique et dynamique de plaques composites stratifiées minces et épaisses par des formulations et discrétisations numériques de certains modèles et théories.

En statique et vibrations libres, nous avons développé un code de calcul pour décrire le comportement de stratifiés symétriques et antisymétriques à séquences d'empilement croisés, équilibrés et quelconques. Ce programme est basé sur une formulation d'éléments finis de forme rectangulaire à 4 nœuds et 5 ddl/nœud que nous avons établie par extension de la théorie des stratifiés pour l'analyse linéaire statique et dynamique des structures en plaques composites multicouches. Les éléments finis développés sont basés sur la théorie linéaire du premier ordre (théorie de Reissner/Mindlin). Les matrices de rigidité et de géométrie sont déterminées en se basant sur formulation variationnelle. Cette formulation est établie par variation de certains paramètres géométriques et élastiques pour déterminer l'évolution de la réponse verticale des plaques et de leurs pulsations propres. Les comparaisons des résultats avec ceux issus de la littérature valide ainsi la méthode des éléments finis utilisée.

Nous avons ensuite étendu notre étude au développement numérique du comportement de plaques multicouches épaisses soumises à des charges impulsives et à un amortissement de type Rayleigh, en utilisant la même méthode des éléments finis développée dans cette étude. L'intégration des équations de mouvement est obtenue par la méthode d'intégration directe de Newmark. Les fréquences et les déplacements transverses ont été déterminés. Ainsi, il a été résulté que l'amortissement et la prise en compte du cisaillement transverse, dans le cas des plaques épaisses, influent sur les résultats obtenus.

Mots clés :

Composite, stratifiés, statique, vibrations libres, amortissements, modélisation par éléments finis, validation.

ABSTRACT

The use of the fibrous composite materials in industrial applications need a precise knowledge and a pushed characterization by their mechanical behavior, particular in the vibratory. In this axis, this work of thesis has for object to analyze the static and dynamic behavior of thin and thick laminated composite plates by formulations and numerical discretizations of some models and theories.

In static and vibration free, we have developed a calculated code to describe the behavior of symmetric and antisymmetric laminates with various sequences of layers. This program is based on finite element formulation in rectangular form with 4 nodes and 5 DOF/node. This formulation is initiated by variation of some geometric and elastic parameters to determine the vertical response evolution of plates and their pulsations. The Comparisons of the results with those derived from the literature validates the used finite element method.

We have then extended our study to the numerical development of the behavior of thick multilayer plates subject to impulsive loads and Rayleigh damping, using the finite element method developed in this study. The integration of the equations of motion is obtained by the Newmark direct integration method. The frequencies and the transversal displacements have been determined.

Key words :

Composite, laminates, statics, free vibrations, damping, modeling by finite elements, validation.

ملخص

انّ استعمال المواد المركبة، المدعّمة بألياف، في التطبيقات الصناعية يستوجب معرفة دقيقة و تحديد عالي لتصرفها الميكانيكي و بخاصة الاهتزازي. في هذا المحور، الهدف الرئيسي لهذه الاطروحة يتمثل في تحليل التصرف الساكن و الديناميكي للصفائح المركبة متعددة الطبقات، الرقيقة و السميقة وذلك بواسطة العلاقات الرياضية و العديدية لبعض النظريات و النماذج.

في التصرفات الساكنة و الاهتزازات الحرة، قمنا بعرض برنامج رقمي حسابي من اجل فهم التصرف الخاص بالصفائح المتناظرة و الغير متناظرة ذات الترتيب المتقاطع، المنتظم و الغيرمحدد. يعتمد هذا البرنامج على طريقة العناصر المنتهية ذات الشكل المستطيلي مع 4 عقد و 5 درجات حرية لكل عقدة. هذه الطريقة تعتمد على النظرية الخطية ذات الرتبة الأولى (رسنار/ميدلان). الهدف من هذه الطريقة هو التوصل إلى فهم كيفية تغير الاستجابة العمودية للصفائح و تواترها الطبيعي. مقارنة النتائج مع تلك الموجودة في المصادر المرجعية تسمح بالتأكد من مدى صحة طريقة العناصر المنتهية المستعملة.

فيما بعد، قمنا بتمديد هذه الدراسة عن طريق تطويرها العددي لشرح تصرف الصفائح متعددة الطبقات السميقة تحت تأثير القوى التحريضية و تخمد رايليغ و هذا باستخدام نفس طريقة العناصر المنتهية المستعملة خلال هذه الدراسة. تكامل علاقات الحركة يتم باستعمال طريقة التكامل المباشر لنيومارك. و بهذا تمكنا من تعيين التواترات و الإزاحات العمودية. من خلال ذلك، استنتجنا أنّ وجود التخامد و القص العمودي في حالة الصفائح السميقة يؤثر على النتائج المتحصل عليها.

الكلمات المفتاحية:

مركب، صفائح، تصرف ساكن، اهتزازات حرة، تخامد، طريقة العناصر المنتهية، تحاكي.

Notations

Seules les notations les plus importantes sont reprises ici.

A	Aire d'une plaque
a, b	Dimensions d'une plaque
$[A]$	Matrice de rigidité en membrane
$[B]$	Matrice de couplage membrane-courbure
B_i	Force volumique
\bar{c}	Amplitude des vibrations
$[C]$	Matrice d'amortissement
$[k]$	Matrice de courbure
E_c^e	Energie cinétique de l'élément
E_c	Energie cinétique de la structure
E_i	Module d'Young suivant la direction $i=1, 2, 3$
$\{F\}$	Vecteur des forces nodales extérieures
G_{ij}	Module de cisaillement dans le plan (i, j) ($i, j= 1, 2, 3$)
h	Epaisseur de la plaque
$[K]$	Matrice de rigidité globale
$[M]$	Matrice de masse globale
$\{M\}$	Résultantes des moments
$[N]$	Matrice des fonctions de forme
$\{N\}$	Résultantes des contraintes
T_i	Forces de traction
t	Temps
$P(x, y, t)$	Force extérieure
q	Charge sinusoïdale
u, v, w	Déplacements
U_d^e	Energie de déformation de l'élément
U_d	Energie de déformation de la structure
v	Volume de la plaque
W_{int}	Travail interne
W_{ext}	Travail extérieur
$\{\delta^e\}$	Vecteur des déplacements nodaux
$\{\varepsilon\}$	Déformation globale
ν	Coefficient de Poisson
ρ	Masse volumique
σ_{xy}	Contrainte normale adimensionnelle
τ_{xy}	Contrainte de cisaillement adimensionnelle
$\theta_x \theta_y$	Rotations
$\bar{\omega}$	Fréquence propre adimensionnelle

$\{\phi_b\}$	Modes propres
β et δ	Coefficients de Newmark
ξ	Facteur d'amortissement

Table des figures

CHAPITRE 1

INTRODUCTION GENERALE

Figure 1.1 Cinématique de Love-Kirchhoff _____	6
Figure 1.2 Cinématique de Reissner-Mindlin _____	7
Figure 1.3 Cinématique d'ordre supérieur _____	8
Figure 1.4 Champ de déplacements des modèles couches discrètes _____	11
Figure 1.5 Champ de déplacements des modèles Zig-Zag _____	11
Figure 1.6 Champ de déplacements des modèles Zig-Zag du premier ordre _____	12
Figure 1.7 Champ de déplacements des modèles Zig-Zag d'ordre supérieur _____	13
Figure 1.8 Élément sinus triangulaire 6 nœuds à continuité c^1 _____	16
Figure 1.9 Élément triangulaire 3 nœuds à continuité c^1 _____	17
Figure 1.10 Élément triangulaire 16 nœuds à continuité c^1 _____	18
Figure 1.11 Élément quadrilatère de type Lagrange à 9 nœuds _____	19
Figure 1.12 Élément quadrilatère de type Lagrange à 8 nœuds _____	19
Figure 1.13 Élément quadrilatère de type Lagrange à 16 nœuds _____	20
Figure 1.14 Éléments triangulaire couches discrètes à 6 nœuds _____	23
Figure 1.15 Éléments finis 3D pour déterminer les contraintes inter-laminaires _____	24
Figure 1.16 Raffinement du maillage 3D pour les plaques trouées _____	24
Figure 1.17 Élément brique à 20 nœuds _____	25
Figure 1.18 Élément singulier à 5 nœuds _____	25
Figure 1.19 Etude du problème de bord libre par EF-3D _____	26
Figure 1.20 Élément brique mixte à 18 nœuds _____	26
Figure 1.21 Élément d'interface _____	26

CHAPITRE 2

PRINCIPE DE TOPOLOGIE DES ELEMENTS DE BASE DES STRUCTURES

Figure 2.1 Élément réel à deux nœuds _____	28
Figure 2.2 Élément de référence _____	29
Figure 2.3 Élément réel _____	30

Figure 2.4 Elément de référence _____	30
Figure 2.5 Elément linéaire à trois nœuds (type P) _____	31
Figure 2.6 Elément réel _____	32
Figure 2.7 Elément de référence _____	32
Figure 2.8 Elément réel _____	33
Figure 2.9 Elément de référence _____	33
Figure 2.10 Elément de référence _____	34
Figure 2.11 Elément réel Q4 _____	35
Figure 2.12 Elément de référence _____	35
Figure 2.13 Elément réel Q8 _____	39
Figure 2.14 Elément de référence _____	39
Figure 2.15 Elément réel Q9 _____	41
Figure 2.16 Elément de référence _____	41

CHAPITRE 3

ANALYSE NUMERIQUE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES PLAQUES STRATIFIEES

Figure 3.1 Déformation en flexion dans le cas de la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse _____	44
Figure 3.2 Elément fini à quatre nœuds _____	45

CHAPITRE 5

ANALYSE COMPARATIVE ET VALIDATION DU MODELE ELEMENT FINI CONSIDERE : ETUDE DE CAS

Figure 5.1 L'élément Shell 99 _____	61
Figure 5.2 Le maillage uniforme dans le plan de 6×6 _____	62
Figure 5.3 Le maillage uniforme dans le plan de 6×6 et conditions aux limites d'une plaque en appuis simples _____	62
Figure 5.4 Géométrie et orientation des couches _____	63
Figure 5.5 Variation de la fréquence propre d'un stratifié symétrique (0/90/90/0) en fonction du rapport a/h _____	64
Figure 5.6 Variation de la fréquence propre adimensionnelle du stratifié symétrique $(45/-45)_{2s}$ en fonction du rapport longueur/ largeur a/b (a/h=10) _____	65
Figure 5.7 Variation de la fréquence propre adimensionnelle du stratifié symétrique $(45/-45)_{2s}$ en fonction du rapport longueur/largeur a/b (a/h=30) _____	66
Figure 5.8 Variation de la fréquence propre adimensionnelle du stratifié _____	

symétrique $(45/-45)_s$ en fonction du rapport longueur sur largeur a/b ($a/h=100$)	66
Figure 5.9 Variation de la fréquence propre d'un stratifié antisymétrique $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ)$ en fonction du rapport E_1/E_2 ($a/h=20$)	67
Figure 5.10 Variation de la fréquence propre d'un stratifié antisymétrique $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ)$ en fonction du rapport E_1/E_2 ($a/h=100$)	68
Figure 5.11 Variation de la fréquence propre d'un stratifié antisymétrique $(45/-45/45/-45)$ en fonction du rapport a/b ($a/h=10, 30$ et 50)	69
Figure 5.12 Comparaison de la fréquence propre fondamentale adimensionnelle pour une plaque antisymétrique $(0^\circ/90^\circ)_1$	71
Figure 5.13 Comparaison de la fréquence propre fondamentale adimensionnelle pour une plaque antisymétrique $(0^\circ/90^\circ)_2$	72
Figure 5.14 Comparaison de la fréquence propre fondamentale adimensionnelle pour une plaque antisymétrique $(0/90)_3$	72
Figure 5.15 Comparaison de la fréquence propre fondamentale adimensionnelle des différents modèles d'une plaque multicouche antisymétrique $(45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ)$. ($a/h=10$)	74
Figure 5.16 Comparaison de la fréquence propre fondamentale adimensionnelle des différents modèles d'une plaque multicouche antisymétrique $(45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ)$. ($a/h=20$)	75
Figure 5.17 Comparaison de la fréquence propre fondamentale adimensionnelle des différents modèles d'une plaque multicouche antisymétrique $(45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ)$. ($a/h=30$)	75
Figure 5.18 Comparaison de la fréquence propre fondamentale adimensionnelle des différents modèles d'une plaque multicouche antisymétrique $(45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ)$. ($a/h=40$)	76
Figure 5.19 Comparaison de la fréquence propre fondamentale adimensionnelle des différents modèles d'une plaque multicouche antisymétrique $(45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ)$. ($a/h=50$)	76
Figure 5.20 Premier mode de vibration des stratifiés antisymétriques $(0^\circ/90^\circ)_n$ ($n=1, \dots, 3$), minces (à droite) et épaisses (à gauche) en appuis simples.	77
Figure 5.21 Trois modes propres d'une plaque croisée antisymétrique $(0/90/0/90)$, épaisse (à gauche) et mince (à droite) en appuis simples	78
Figure 5.22 Trois modes propres d'une plaque croisée symétrique $(0/90/90/0)$ mince (à droite) et épaisse (à gauche) en appuis simples.	79
Figure 5.23 Trois modes propres d'une plaque croisée antisymétrique $(45/-45/45/-45)$, mince (à droite) et épaisse (à gauche) en appuis simples.	80
Figure 5.24 Trois modes propres d'une plaque croisée symétrique $(45/-45/-45/45)$, mince (à droite) et épaisse (à gauche) en appuis simples.	81
Figure 5.25 Effet de l'orientation des fibres θ et de la séquence d'empilement sur les fréquences naturelles adimensionnelles d'une plaque carrée à appuis simples ($a/b = 1, a/h = 100$).	83
Figure 5.26 Effet de l'orientation des fibres θ et de la séquence d'empilement sur les fréquences naturelles non-dimensionnelles d'une plaque rectangulaire en appuis simples ($a/b = 0.6, a/h = 100$)	83
Figure 5.27 Plaque carrée composite à 3 couches simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal.	85
Figure 5.28 Plaque rectangulaire ($a=3b$) composite à 3 couches simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal.	86
Figure 5.29 Plaque carrée composite à 9 couches simplement supportée sous	

chargement doublement sinusoïdal.	86
Figure 5.30 Déformée suivant le plan xy des plaques croisées à 3 et 9 couches (premier mode de flexion).	87
Figure 3.31 Contraintes normales suivant les directions x et y et z. Plaque (0/90/0) épaisse (a/h=10).	88
Figure 5.32 Contraintes de cisaillement transversal xy, yz, xz dans le plan xy. Plaque (0/90/0) épaisse (a/h=10).	89
Figure 5.33 Contraintes normales suivant les directions x, y et z. Plaque (0/90/0) mince (a/h=100).	90
Figure 5.34 Contraintes de cisaillement transversal xy, yz, xz dans le plan xy. Plaque (0/90/0) mince (a/h=100).	91
Figure 5.35 Contraintes normales suivant les directions x, y et z. Plaque (0/90/0/90/0/90/0/90/0) épaisse (a/h=10).	92
Figure 5.36 Contraintes de cisaillement transversal xy, yz, xz dans le plan xy. Plaque (0/90/0/90/0/90/0/90/0) épaisse (a/h=10).	93
Figure 5.37 Contraintes normales suivant les directions x, y et z. Plaque (0/90/0/90/0/90/0/90/0) mince (a/h=100).	94
Figure 5.38 Contraintes de cisaillement transversal xy, yz, xz dans le plan xy. Plaque (0/90/0/90/0/90/0/90/0) mince (a/h=100).	95
Figure 5.39 Maillage et conditions aux limites d'un stratifié carré simplement supporté.	97
Figure 5.40 Réponse dynamique d'une plaque composite graphite/époxyde (0/90/90/0) non amortie. (a=b=0.24m, h=0.001m) ($\alpha = 0, \beta = 0$)	98
Figure 5.41 Réponse dynamique d'une plaque composite graphite/époxyde (0/90) _{2s} non amortie. (a=b=0.24m, h=0.01m) ($\alpha = 0, \beta = 0$)	98
Figure 5.42 Réponse dynamique de la plaque composite mince (0/90) _{2s} sous chargement constant. ($\alpha = 0$) et ($\beta = 10^{-3}$ pour $F_0 = 5 \text{ N/m}^2$)	99
Figure 5.43 Réponse dynamique de la plaque composite mince (0/90) _{2s} sous chargement constant. ($\alpha = 0$) et ($\beta = 10^{-4}$ pour $F_0 = 10 \text{ N/m}^2$)	100
Figure 5.44 Réponse dynamique de plaque composite épaisse (0/90) _{2s} sous chargement constant. ($\alpha = 0$) et ($\beta = 10^{-3}$ pour $F_0 = 5 \text{ N/m}^2$)	100
Figure 5.45 Réponse dynamique d'une plaque composite épaisse (0/90) _{2s} sous chargement constant. ($\alpha = 0$) et ($\beta = 10^{-4}$ pour $F_0 = 10 \text{ N/m}^2$)	101

Liste des tableaux

CHAPITRE 2

PRINCIPE DE TOPOLOGIE DES ELEMENTS DE BASE DES STRUCTURES

Tableau 2.1 Fonctions d'interpolation de type H de l'élément linéique à trois nœuds _____	31
--	----

CHAPITRE 4

ANALYSE DYNAMIQUE DES PLAQUES COMPOSITES PAR INTEGRATION NUMERIQUE

Tableau 4.1 Algorithme complet de la méthode de NEWMARK _____	59
---	----

CHAPITRE 5

ANALYSE COMPARATIVE ET VALIDATION DU MODELE ELEMENT FINI CONSIDERE : ETUDE DE CAS

Tableau 5.1 caractéristiques Géométriques et élastiques de la plaque multicouche (0°/90°/90°/0°) _____	63
Tableau 5.2 Tableau 5.2 Caractéristiques élastiques et géométriques des plaques multicouches symétriques (45°/-45°) _{2s} _____	70
Tableau 5.3 Fréquences propres des plaques multicouches symétriques (0°/90°) _{2s} _____	71
Tableau 5.4 : Propriétés géométriques et caractéristiques élastiques des plaques _____	84
Tableau 5.5 : Propriétés élastiques des matériaux des plaques (0/90) _{2s} _____	96

Table des matières

CHAPITRE 1

INTRODUCTION GENERALE

1.1 Motivations et objectifs	1
1.2 Analyse bibliographique	4
1.2.1 Modèles de structures multicouches	5
<i>1.2.1.1 Approche monocouche équivalente</i>	6
1.2.2 Approche par couche	10
<i>1.2.2.1 Les modèles Zig-Zag</i>	11
<i>1.2.2.2 Les modèles couches discrètes</i>	13
1.3 Modèle éléments finis de structure de multicouche	15
1.3.1 Modèle éléments finis 2D	15
1.3.2 Modèle éléments finis 3D	23

CHAPITRE 2

PRINCIPE DE TOPOLOGIE DES ELEMENTS DE BASE DES STRUCTURES

2.1 Introduction	27
2.2 Propriétés des éléments	27
2.2.1 Élément linéique	27
<i>2.2.1.1 Interpolation linéaire</i>	27
<i>2.2.1.2 Interpolation quadratique</i>	29
2.2.2 Élément triangulaire	31
<i>2.2.2.1 Élément triangulaire à trois nœuds</i>	31
<i>2.2.2.2 Élément triangulaire à six nœuds</i>	32
<i>2.2.2.3 Élément triangulaire à dix nœuds</i>	33
2.2.3 Élément rectangulaire	35
<i>2.2.3.1 Élément rectangulaire à quatre nœuds</i>	35
<i>2.2.3.2 Élément rectangulaire à huit nœuds</i>	39
<i>2.2.3.1 Élément rectangulaire à neuf nœuds</i>	40
2.3 Justification du choix de l'élément Q4	41

CHAPITRE 3

FORMULATION DE LA THEORIE DES STRATIFIES PAR LA METHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

3.1 Introduction	42
3.2 Principe de la méthode des éléments finis	43
3.3 Formulation des éléments finis dans le cadre de la théorie des stratifiés	43
3.3.1 Champ des déplacements	43
3.3.2 Comportement en membrane	46
3.3.3 Comportement en flexion	46
3.3.4 Comportement en cisaillement transverse	47
3.3.5 Formulation des contraintes	48
3.3.6 Formulation de l'énergie.....	49
3.3.6.1 <i>Energie de déformation</i>	49
3.3.6.2 <i>Energie cinétique</i>	50
3.3.6.3 <i>Travail des charges extérieures</i>	51
3.4 Formulation par éléments finis de l'équation de la dynamique.	52
3.4.1 Introduction	52

CHAPITRE 4

ANALYSE DYNAMIQUE DES PLAQUES COMPOSITES PAR INTEGRATION NUMERIQUE

4.1 Introduction	53
4.1.1 Introduction de l'amortissement dans le modèle numérique	53
4.1.1.1 <i>Amortissement de Rayleigh</i>	53
4.2 Résolution du problème dans le domaine temporel	55
4.2.1 Analyse modale	56
4.2.2 Analyse de la réponse fréquentielle.....	56
4.2.2 Analyse de la réponse transitoire.....	56
4.3 Analyse dynamique par intégration numérique	57
4.3.1 Méthode d'intégration directe de Newmark.....	58

CHAPITRE 5

ANALYSE COMPARATIVE ET VALIDATION DU MODELE ELEMENT FINI CONSIDERE : ETUDE DE CAS

5.1 Introduction	60
5.1.1 Modélisation par le logiciel ANSYS	60
5.2 Vibration libre des plaques multicouches	63
5.2.1 Plaque composite symétrique	65
5.2.1.1 <i>Effet du rapport a/h (cas de la plaque (0/90)_{2s})</i>	65
5.2.1.2 <i>Effet de la géométrie de la plaque (cas de la plaque (45/-45)_{2s})</i>	66
5.2.2 Plaque composite antisymétrique	69
5.2.2.1 <i>Effet du rapport E₁/E₂ (cas de la plaque (0/90/0/90))</i>	69
5.2.2.2 <i>Effet de la géométrie de la plaque (cas de la plaque (45/-45/-45/45))</i>	70
5.2.3 Etude comparative à des modèles analytiques et numériques	71
5.2.4 Plaques à empilements (θ/0°)_{2s} et (0°/θ)_{2s}	84
5.3 Etude du comportement statique des multicouches	84
5.3.1 Plaques composites croisées sous chargement doublement sinusoïdal	84
5.4 Evolution temporelle du déplacement transversal	96
5.4.1 Caractéristiques des plaques et paramètres de modélisation	96
CONCLUSION ET PERSPECTIVE	102
Annexes	105
Annexe A	105
Annexe B	110
Annexe C	112
BIBLIOGRAPHIE	115

Chapitre 1

INTRODUCTION GENERALE

1.1 Motivations et objectifs

De nos jours, les matériaux composites fibreux sont de plus en plus couramment utilisés comme alternative aux matériaux conventionnels, principalement en raison de leur haute résistance et rigidité spécifique, mais aussi à cause de leurs propriétés mécaniques ajustables dans des grandes proportions. Pour ces raisons, les experts avaient prévu depuis les années 70 une généralisation rapide de leur emploi par des remplacements principaux des matériaux métalliques traditionnels. Ainsi on utilise le plus souvent ces matériaux composites dans les domaines de l'aérospatial, du naval et même en industrie des articles de sport et de loisir. L'utilisation de ces matériaux composites dans un environnement inchangé (les sollicitations extérieures demeurent les mêmes qu'auparavant) nécessite une meilleure connaissance possible de leur comportement mécanique surtout en terme vibratoire.

En domaine de la mécanique, les vibrations sont également présentées dans les machines tournantes. Dans un souci d'améliorer de plus en plus leur rendement, ces machines tendent actuellement à fonctionner à de très grandes vitesses. Ceci augmente inéluctablement le niveau des forces excitatrices et conduit à des vibrations importantes. Ces vibrations sont indésirables à cause du bruit, des contraintes dynamiques qui peuvent conduire à la fatigue et la défaillance de la structure, de la perte d'énergie et de la réduction de la performance. Il est donc essentiel de procéder à une analyse des vibrations de tout projet de construction lors de l'étape de conception pour que les modifications nécessaires puissent être facilement faites pour éliminer les vibrations, ou au moins pour les réduire autant que possible. Il est généralement beaucoup plus facile d'analyser et de modifier une structure à la phase de conception que de la modifier après qu'elle ait été construite. Cependant, la réduction des vibrations, des structures existantes, provoquées par l'insuffisance de la conception initiale, peuvent être procédée par la modification des conditions environnementales et, par conséquent, les techniques de l'analyse des vibrations structurales choisies doivent être applicables aux structures existantes.

Parmi les structures les plus utilisées nous rencontrons les composites minces caractérisés par leur légèreté et leurs propriétés aérodynamiques. L'industrie mécanique et en particulier en domaine des transports, l'aéronautique, et l'automobile utilise aujourd'hui de plus en plus les composants minces (plaques ou coques) afin d'assurer le souci économique (le coût des matières premières) mais également pour une raison environnementale (moins d'énergie utilisée pour se déplacer). L'utilisation de tels éléments dans un environnement inchangé (les sollicitations extérieures demeurent les mêmes qu'auparavant) nécessite une étude plus explicite de leur comportement et surtout en domaine vibratoire.

En revanche, certaines applications industrielles nécessitent l'utilisation des structures épaisses induisant une difficulté principale pendant leur analyse dynamique. L'optimisation fine de ces structures composites doit mettre en place des outils de modélisation du comportement mécanique de plus en plus sophistiqués et prenant en compte les spécificités de ces matériaux-structure.

Ce travail s'inscrit donc dans l'optique de définir des outils numériques afin de déterminer efficacement et rapidement les réponses vibratoires de structures composites (minces ou épaisses). D'un point de vue pratique, les méthodes numériques, notamment les calculs par la méthode des éléments finis sont indispensables pour le dimensionnement des structures composites simples et complexes. A cet effet, la simulation numérique constitue un formidable outil d'aide à la conception et à la compréhension de nombreux phénomènes physiques. Dans l'ingénierie par exemple, elle a permis de réaliser de grands progrès en mécanique des solides et de nombreuses innovations technologiques peuvent en témoigner.

Le calcul par la méthode des éléments finis consiste d'une part à déterminer le déplacement des points de la structure sous diverses sollicitations, et d'autre part à bien formuler la variation de l'énergie, ce qui permet de déduire les contraintes et les déformations. Ainsi, les chercheurs ont étudié le choix du champ de déplacement et la formulation de la variation de l'énergie. Dans ce sens, plusieurs théories ont été dégagées. Le premier choix du champ de déplacement est basé sur la théorie, la plus ancienne, celle de Kirchhoff [Dhatt 69] qui annule l'effet de cisaillement transversal. Elle ne peut en conséquence être appliquée qu'aux structures très minces. Ensuite, Mindlin [Mindlin 51] a proposé la théorie du premier ordre, il fût l'un des premiers à énoncer ses bases et introduit les effets du cisaillement transversal à

travers l'épaisseur de la plaque. Par la suite différents modèles d'ordre supérieur ont été proposés, ils s'avèrent plus précis que les modèles du premier ordre.

Dans le cadre de cette thèse, nous avons adopté une étude du comportement statique, vibration libre et en dynamique forcé des structures composites (plaques minces et épaisses). Nous avons développé deux modèles d'éléments finis isoparamétriques à 4 nœuds pour l'analyse des plaques composites multicouches. Le premier est rectangulaire à 6ddl/nœud et utilise les hypothèses de Kirchhoff-Love. Ce modèle est consacré à l'étude des stratifiés multicouches minces pour l'analyse linéaire statique et dynamique (vibration libre). Le second modèle à 5ddl/nœud, développe une formulation en cisaillement transverse. Cette formulation est basée sur la théorie du premier ordre de Mindlin. Dans le but d'investiguer le comportement de la plaque sous l'effet des charges transitoires, la méthode des éléments finis basée sur le second modèle est appliquée. La méthode implicite de Newmark pas à pas permet ensuite d'analyser la plaque en domaine temporel.

Afin d'atteindre ces objectifs, Le présent document est organisé en cinq chapitres :

Le premier chapitre est consacré à une analyse bibliographique détaillée permettant de présenter les axes principaux de cette contribution et les différentes étapes suivies durant cette étude. Elle tente aussi de recenser les modèles appartenant de près ou de loin au modèle classique d'éléments finis de formulation en déplacement qui nous intéresse. Afin d'aboutir à ces résultats, nous définissons les différentes approches classiques de comportement mécanique des plaques multicouches avec une précision de leurs avantages et inconvénients.

On a réservé le deuxième chapitre à la présentation d'une topologie des éléments utilisés dans la modélisation par éléments finis. Les éléments finis développés sont de forme linéaire, triangulaire et rectangulaire. On donne quelques rappels de notions mathématiques élémentaires portant sur les tenseurs et les changements de systèmes de coordonnées qui sont d'une grande utilité dans l'étude des équations aux dérivées partielles. Une connaissance des méthodes d'analyse numérique élémentaire est requise et en particulier des notions d'interpolation de Lagrange et d'intégration numérique de Gauss qui sont également rappelées.

Par ailleurs, le troisième chapitre s'intéresse à la modélisation des structures épaisses de formes plaques. Nous développons ainsi un modèle d'éléments finis plaque à 5ddl/nœud pour

l'étude des plaques stratifiées amorties, soumises à des charges impulsives. On introduit alors l'effet du cisaillement transverse et de l'amortissement dans le système d'équations discrétisé final.

Dans le quatrième chapitre, on a introduit les méthodes de discrétisation en fonction du temps pour résoudre le problème dynamique. La discrétisation temporelle, dédiée à la modélisation des phénomènes de dynamique rapide, se traduit par une approche incrémentale pour intégrer sur le temps les équations différentielles relatives au système discrétisé par éléments finis. L'intégration des équations dynamiques du mouvement est obtenue par la méthode d'intégration directe de Newmark- β . Les résultats des analyses par cette méthode permettent d'évaluer la réponse dynamique de la plaque.

En fin, le dernier chapitre est consacré à la validation numérique du modèle de plaque que nous avons développé au chapitre précédent proposé sur des cas-tests standards de plaques stratifiées, en statique et en vibration libre et forcée. Des comparaisons sont effectuées avec plusieurs modèles numériques et analytiques existants dans la littérature pour les plaques multicouches croisées $(0/90)_n$, et équilibrées $(45/-45)_{2s}$ et $(\theta/0)_{ns}$ simplement appuyée, sous un chargement sinusoïdal ou uniforme.

En résumé, un code de calcul a été établi pour la simulation numérique des différents comportements statiques et vibrations. Ce dernier est basé sur une formulation éléments finis que nous avons mis en œuvre suivant les conditions de comportement en appuyant sur la théorie des stratifiés et sur la méthode d'intégration directe de Newmark. Nous avons choisi des cas de plaques à différentes séquences d'empilement et nous avons varié certains paramètres géométriques et élastiques afin de valider les formulations entrepris. Les résultats obtenus ont été représentés graphiquement, interprétés et sont comparés à ceux issus de différents modèles et théories trouvés dans la littérature.

1.2 Analyse bibliographique

Dans un premier temps, on présente les différents modèles de structure multicouche existants. Leurs hypothèses de base, leurs avantages et inconvénients sont ainsi décrits. Ensuite, on aborde les développements des éléments finis issus de ces modèles analytiques. Leurs variables principales, leurs méthodes de formulation et leurs difficultés numériques de l'implémentation sont également discutées.

1.2.1 Modèles de structures multicouches :

Une structure composite multicouche peut être considérée comme un corps hétérogène constitué d'un nombre fini de couches homogènes anisotropes collées. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions. La modélisation des structures multicouches modernes caractérisées par une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwiches) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. On trouve dans [Noor 89a], [Kapania 89], [Kant 00] et [Carrera 00] des explications complètes sur les différents modèles existants de type élasticité tridimensionnelle ou de type plaque.

L'intérêt de la considération d'une approche tridimensionnelle réside dans l'obtention de résultats exacts tridimensionnels, utiles notamment comme référence. L'adoption d'une approche tridimensionnelle ne présente toute fois d'utilité que dans la mesure où les équations différentielles établies peuvent être résolues. L'approche tridimensionnelle (3D) est donc limitée de certains cas de géométrie, empilement et chargement simple [Pagano 69], [Pagano 70], [Srinivas 70], [Srinivas 73b].

De même, la prise en compte des endommagements spécifiques aux stratifiés (délaminage, fissure transverse, . . .) exige une bonne description des champs au voisinage des interfaces, sites privilégiés de ces endommagements. Pour cette raison, une approche 3D peut fournir des informations dans certaines conditions (bord libre droit, plaque trouée . . .) mais il est préférable d'envisager des démarches bidimensionnelles (2D) de type plaque plus opératoires. Dans la suite ce sont ces approches 2D qui seront prises en considération.

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses ou des endommagements. Ils peuvent être distingués en fonction du type d'approche adopté :

- Approche monocouche équivalente
- Approche par couche
- Approche développement asymptotique

1.2.1.1 Approche monocouche équivalente :

Le nombre d'équations dans ce cas d'approche ne dépend pas du nombre de couche. La plaque multicouche est considérée homogène et se comporte comme une seule couche. Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développés des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles :

- Les modèles classiques Love-Kirchhoff

Les modèles sont basés sur une distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur [Reissner 61], [Yang 66]. L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff [Kirchhoff 50] de contraintes planes et les déformations dues aux cisaillements transverses sont négligées. Une droite normale à la surface moyenne reste droite et perpendiculaire à la surface moyenne après déformation et gardera la même longueur (Fig. 1.1).

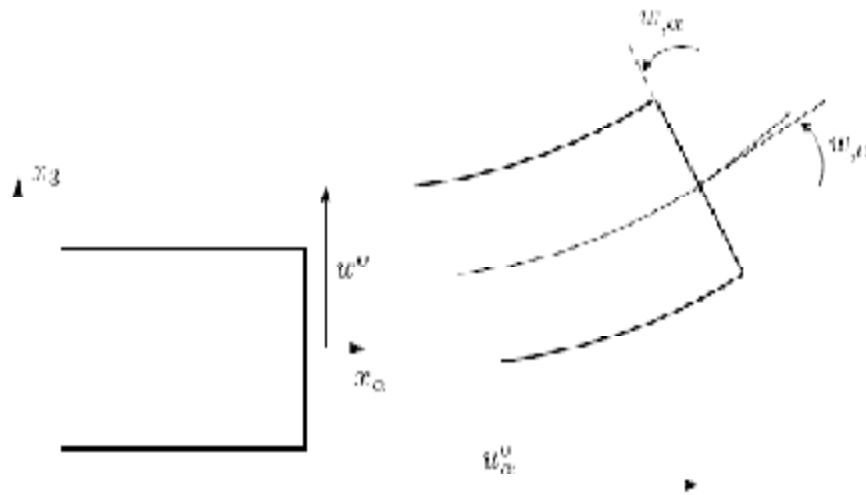


Fig.1.1 Cinématique de Love-Kirchhoff

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors,

$$u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - z w_{,\alpha}(x_1, x_2) \quad , \alpha = 1,2$$

$$u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \quad (1.1)$$

Avec,

u_α^0 : le déplacement de membrane dans la direction α .

w : la flèche de la plaque.

$w_{,\alpha}$: la rotation due à la flexion (sans cisaillement).

- Les modèles Reissner-Mindlin

Pour introduire l'effet du cisaillement transverse, l'hypothèse cinématique [Mindlin 51] est adoptée : la normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée (Fig. 1.2).

Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) + z\phi_\alpha(x_1, x_2)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2)$$

(1.2)

Avec

ϕ_α : la rotation de la normale au plan moyen autour des axes x .

$\gamma_\alpha^0 = (w_{,\alpha} + \phi_\alpha)$: la déformation en cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen.

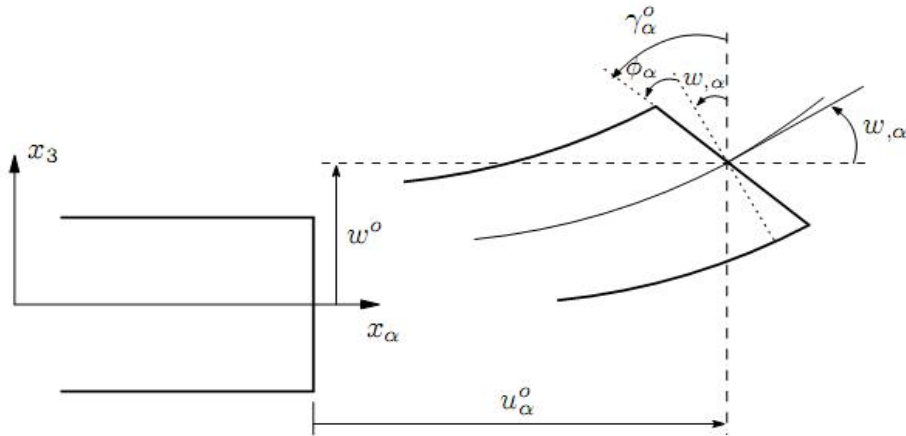


Fig1.2 Cinématique de Reissner-Mindlin

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales sont constantes en z . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes dans chaque couche et discontinues entre les couches. Cette mauvaise description oblige à introduire des coefficients

correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets de cisaillement transversal [Whitney 73]. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des composites épais, reste aléatoire par ce type d'approche cinématique.

- **Les modèles d'ordre supérieur**

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement dans l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (Fig. 3) [Liberscu 67, Whitney 73, Nelson 74, Lo 77a, Lo 77b, Touratier 91, Kant 02, Swaminathan 04].

La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'expriment suivant les directions $i \in \{1,2,3\}$ comme :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + Z\phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + Z^2\phi_i^{0(2)}(x_1, x_2) + Z^3\phi_i^{0(3)}(x_1, x_2) + \dots \quad (1.3)$$

Dans le cas des théories du premier ordre Reissner-Mindlin, on a $\phi_i^{0(j)} = \mathbf{0}$ pour $j= 2, 3, 4$ et $\phi_3^{0(1)} = \mathbf{0}$.

Hildebrand et al. [Hildebrand 49] sont les premiers à introduire ces raffinements avec $\phi_i^{0(4)} = \phi_i^{0(3)} = \mathbf{0}$. Le même développement est utilisé par Nelson et Lorch [Nelson 74] en introduisant des coefficients de correction. Lo et al. [Lo 77b] proposent un modèle qui prend en compte également l'effet de déformation normale : $\phi_i^{0(4)} = \phi_3^{0(3)} = \mathbf{0}$. Les solutions analytiques de différents modèles d'ordre supérieur sont comparées dans [Kant 02].

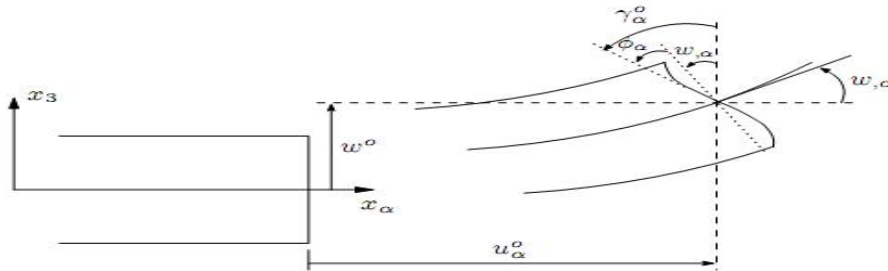


Fig.1. 3 Cinématique d'ordre supérieur

En principe, ces modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision est augmentée avec l'ordre du développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacements indépendantes dépasse celui des modèles classiques (trois dans le modèle Love-Kirchhoff et cinq pour le modèle Reissner-Mindlin). Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées. Souvent on impose les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transversal aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement de (1.3) est utilisé avec : $\phi_i^{0(4)} = \phi_i^{0(2)} = \phi_3^{0(3)} = \phi_3^{0(1)} = \mathbf{0}$

L'expression de (1.3) devient alors:

$$\begin{aligned} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) &= u_\alpha^0 - z w_{,\alpha} + f(z) \gamma_\alpha^0(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) &= w(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{1.4}$$

On représente ci-dessous quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui diffèrent par la fonction de cisaillement $f(z)$:

- [Ambartsumyan 69] : $f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{z^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$;

- [Reissner 45], [Panc 75] et [Kaczkowski 80] : $f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$;

- [Levinson 80], [Murthy 81] et [Reddy 84] : $f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$;

h étant l'épaisseur du multicouche.

Dans le modèle de [Reddy 84], le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Touratier [Touratier 91, Idlbi 97] propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction

trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme :

$$f(Z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi Z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi Z}{h}\right)^{2n+1} = Z \left(1 - \frac{\pi^2 Z^2}{3! h^2} + \frac{\pi^4 Z^4}{5! h^4} - \frac{\pi^6 Z^6}{7! h^6} + \dots\right).$$

Les différents termes du développement correspondent aux différents modèles cités précédemment. Suivant la troncature choisie, on obtient la théorie Love-Kirchhoff, la théorie Reissner-Mindlin ou les modèles d'ordre supérieur (aux coefficients près). Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de [Reddy 84].

Récemment, Afaq et al. [Afaq 03b] propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante : $f(Z) = Ze^{-2\left(\frac{Z}{h}\right)^2}$. Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance paires et impaires de la variable z alors que la fonction "sinus" [Touratier 91] ne permet qu'un développement en puissances impaires.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente présentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .).

1.2.2 Approche par couche :

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés [Srinivas 73b, Pagano 78, Seide 80, Di Sciuva 84, Di Sciuva 86, Murakami 86, Reddy 87, Chabot 97, Ossadzow 01, Carreira 02, Diaz Diaz 02, Afaq 03a]. Le multicouche est subdivisé en sous-structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous-structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur. Les modèles de ce type sont relativement coûteux (le nombre de variables dépend du nombre de couche), mais permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes : les modèles couches discrètes où chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacement ou en contrainte aux interfaces et les modèles zig-zag où la cinématique satisfait à priori les conditions de contact et est indépendante du nombre de couches (Figs.1.4 et 1.5).

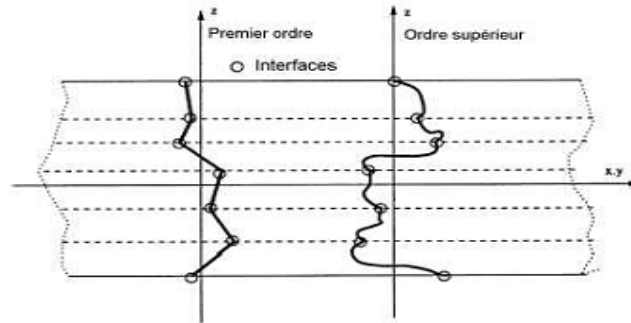


Fig. 1.4 Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique

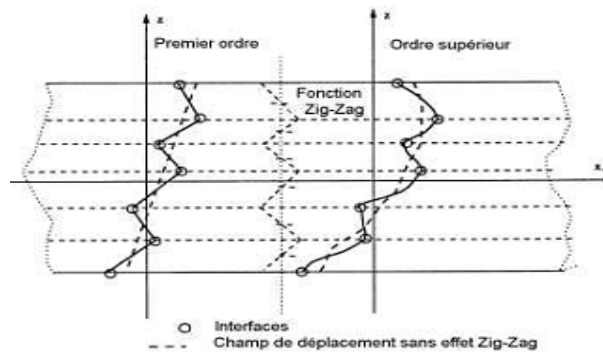


Fig. 1.5 Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique.

1.2.2.1 Les modèles zig-zag :

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, Di Sciuva est le premier à proposer le modèle zig-zag du premier ordre [Di Sciuva 84, Di Sciuva 86, Di Sciuva 87]. Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside). La fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continué en z mais sa dérivée première est discontinuée à l'interface (Fig. 1.6). Les déformations transversales sont donc discontinuées et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.

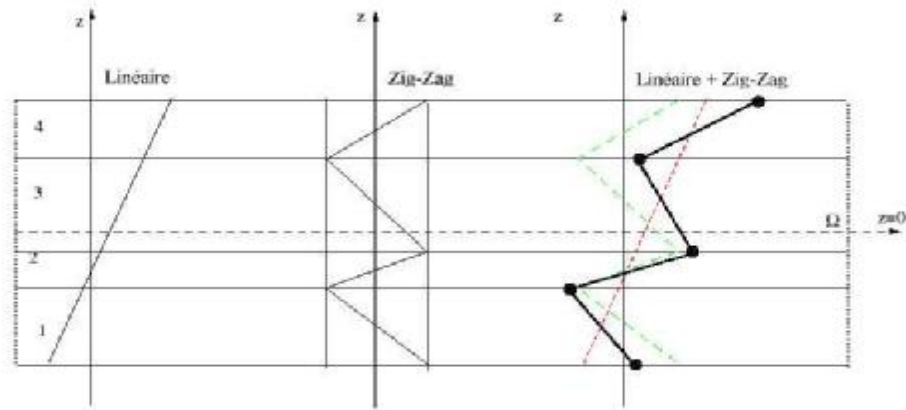


Fig.1. 6 Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre.

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour le cisaillement transverse est évité.

En se basant sur le concept de [Di Sciuva 84], plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag [Murakami 86, Cho 93, Averill 94, He 94, Icardi 01a, Icardi 01b, Carrera 04]. L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre supérieur (souvent cubique) (Fig. 1.7). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres.

Dans les travaux de [Ossadzow 96, Karama 98, Ossadzow 01], la fonction "sinus" de [Touratier 91] est combinée avec la fonction zig-zag pour raffiner les effets de cisaillement. Récemment, Afaq et al. [Afaq 03a, Afaq 03b] ont combiné le modèle exponentiel avec l'effet zig-zag pour une cinématique plus riche.

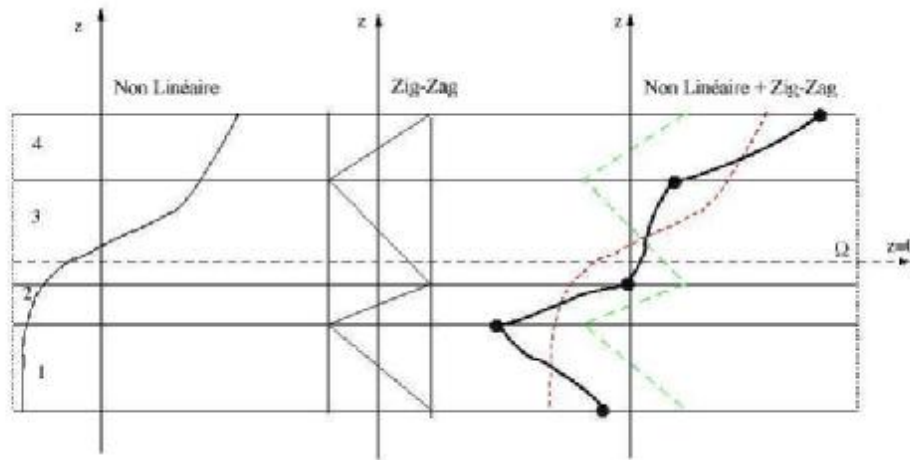


Fig. 1.7 Champ de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur.

Les résultats numériques de tous ces travaux montrent que le modèle zig-zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le coût de calcul. Néanmoins, les modèles zig-zag ont des limites de validation dans l'analyse du délaminage. En effet rien de physique ne pousse à penser que ces modèles connus par "artificiels" peuvent prévoir les délaminages, par exemple. Le calcul des contraintes de cisaillement transverse par les équations constitutives des modèles zig-zag devient moins précis quand le rapport d'élancement diminue [Icardi 01a]. Un autre inconvénient des modèles zig-zag, tout comme pour les modèles d'ordre supérieur est la continuité de type C^1 demandée qui complique leur implémentation numérique.

1.2.2.2 Les modèles couches discrètes :

Les modèles couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur ou zig-zag puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale. En fait, avec les modèles couches discrètes, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (objets 2D) couplés par des efforts d'interface. Les conditions de continuité aux interfaces sont ainsi assurées. Le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couche de la plaque composite.

Dans les travaux de [Srinivas 73a, Seide 80, Reddy 87, Naciri 98, Tahani 03], on postule une cinématique du premier ordre ou d'ordre supérieur par couche. Les équations fondamentales

par couche sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Les conditions aux limites sont également données couche par couche.

D'une manière alternative, les travaux de [Ren 86a, Kassapoglou 86, Kassapoglou 87] et [Yin 94a, Yin 94b] utilisent une approximation des champs de contraintes par couche ou un mixte contrainte-cinématique. Ainsi [Ren 86a] utilise un champ de contrainte dont la composante de cisaillement transversal est quadratique par couche et les déplacements sont considérés cubiques par couche et continus aux interfaces. Dans [Kassapoglou 86, Kassapoglou 87], le champ de contrainte est construit sous la forme d'un produit de fonctions à variables séparées, par couche, à partir de l'équilibre des forces et moments. Les contraintes planes sont supposées constantes dans l'épaisseur. Dans [Yin 94a, Yin 94b], les fonctions de contraintes de Lekhnitskii [Lekhnitskii 63] sont utilisées par couche pour déterminer les contraintes interlaminaires. Elles sont approximées de façon polynomiale dans l'épaisseur.

Nous passons à présent à une famille de modèle couches discrètes particulières, les modèles multiparticulaires. Le premier travail semble être celui de Pagano qui propose le modèle local dans [Pagano 78]. Le modèle local a été construit à partir de la formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner et d'une approximation polynomiale des champs de contraintes par couche. Les polynômes sont du premier degré pour les contraintes membranaires, quadratique pour les contraintes de cisaillement et donc cubique pour les contraintes normales.

La formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner restreinte aux approximations de ces champs de contraintes conduit à une cinématique du multicouche à $7n$ champs en $(x; y)$ (n étant le nombre de couche de la plaque). Ces champs cinématiques contiennent des composantes correspondantes à des moments du second ordre qui n'ont pas un sens physique très clair.

La formulation mixte d'Hellinger-Reissner permet de déduire le comportement élastique linéaire généralisé du modèle. Ce modèle pose quelques difficultés au niveau des conditions aux limites et reste assez lourd compte tenu du nombre élevé de champs cinématiques intervenants.

Les différents travaux de [Caron 97, Chabot 97, Naciri 98, Hadj-Ahmed 01, Diaz Diaz 01 et Carreira 02] réalisés ont aboutit à la formulation complète d'une famille de modèles

multiparticulaires dits M4 (Modèles Multiparticulaires des Matériaux Multicouches), à partir de la méthode d'approximation d'Hellinger-Reissner. Le modèle le plus complet est identique au modèle local de Pagano et on déduit à partir de celui-ci les autres modèles moyennant des approximations successives. Dans cette famille de modèles, on trouve les modèles $M4-7n$, $M4-5n$, $M4-2n+1$ qui comportent respectivement une cinématique du multicouche à $7n$, $5n$ et $2n+1$ champs en $(x; y)$ (n étant le nombre de couche de la plaque). Le modèle $M4-5n$ approche chaque couche par une membrane. Le $7n$ est trop riche pour être utilisé simplement. Les deux modèles font apparaître des efforts d'interface dans leurs efforts généralisés.

1.3 Modèle éléments finis de structure multicouche

Les solutions analytiques fournies par les approches décrites précédemment ne concernent que des cas de géométrie, chargement et empilement simples. Pour les cas complexes, plusieurs méthodes numériques ont été développées. On ne s'intéresse ici qu'aux méthodes des éléments finis, outil d'ingénierie dominant pour l'analyse des structures.

Les éléments finis sont généralement classés suivant le type de description géométrique (2D, 3D), la méthode de construction et le choix du type d'inconnues principales du modèle (déplacements, contraintes, mixte, hybride). Ci-dessous, nous présentons de différentes contributions éléments finis relatives à des modèles mécaniques décrits précédemment.

1.3.1 Modèle éléments finis 2D :

Les premiers éléments finis multicouches sont construits en se basant sur les théories du premier ordre, notamment les modèles Reissner-Mindlin avec facteurs de correction [Pryor 71, Reddy 80, Engblom 86, Hamdallah 90, Ganapathi 97]. Ces éléments finis possèdent 5 degrés de liberté par nœuds. L'intégration numérique réduite est souvent utilisée pour éviter le phénomène de blocage en cisaillement transverse. Grâce à leurs avantages numériques (formulation simple, continuité C^0 , les degrés de liberté et les conditions aux limites physiquement facile à interpréter, convergence rapide. . .) et leurs précisions en estimant des champs globaux, les éléments finis Reissner-Mindlin restent les plus utilisés et sont présents dans tous les codes de calcul commerciaux. Un des inconvénients majeur de ce type d'élément réside dans l'estimation des facteurs de correction [Noor 89a]. On trouve dans [Noor 89b, Sze 00] une procédure en deux phases pour l'estimation correcte de ces facteurs correctifs. Les contraintes de cisaillement transverse calculées par les équations constitutives

sont moins précises et discontinues aux interfaces. On intègre donc l'équation d'équilibre 3D pour mieux les estimer [Noor 89b, Rolfes 97, Rolfes 98a, Rolfes 98b, Sze 00].

Un large volume consacré au développement des éléments finis multicouches concerne des éléments finis d'ordre supérieur. Comme déjà discute ci-dessus, les théories d'ordre supérieur impliquent souvent la dérivée seconde des déplacements transversaux. Cela demande une continuité de type C^1 pour des fonctions de déplacement des éléments finis correspondants. Non seulement les déplacements transversaux w mais encore leurs dérivées normales $\partial w / \partial n$ doivent être continus à travers des frontières inter-éléments [Phan 85, Ren 86b, Beakou 93, Polit 97, Reddy 99, Raghuram 99, Polit 00, Ganapathi 00, Subramanian 01, Polit 02].

Dans [Phan 85, Ren 86b], un élément de continuité C^1 basé sur le modèle cubique de [Reddy 84] est proposé. Cet élément contient 7 degrés de liberté par nœud. Les contraintes de cisaillement transverse sont paraboliques dans l'épaisseur et l'élément est libre du blocage de cisaillement transverse.

En se basant sur le modèle « sinus » de [Touratier 91], différents éléments finis quadrilatère et triangulaire de continuité C^1 sont développés [Beakou 93, Polit 97, Ganapathi 00, Mistou 00, Polit 00, Polit 02]. L'élément triangulaire développé par Polit et al. est capable d'étudier divers problèmes linéaires et non linéaires. L'élément possède 6 nœuds. La continuité des champs aux interfaces et les conditions limites aux surfaces supérieures et inférieures sont assurées. La géométrie de l'élément est présentée sur la Fig. 1.8.

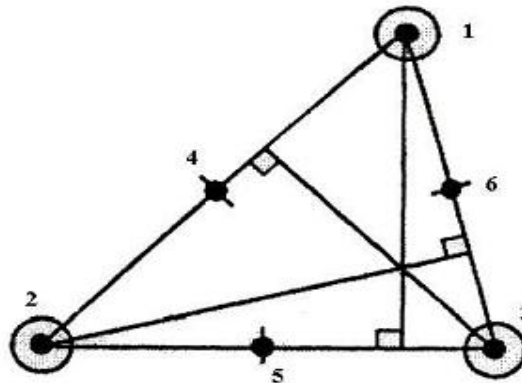


Fig. 1.8 Élément « sinus » triangulaire à 6 nœuds de continuité C^1 [Polit 97]

Pour un nœud l au coin (l = 1 ; 2 ; 3), le vecteur de déplacement nodal est exprimé par :

$$\delta_l^T = \langle u \ u_{,x} \ u_{,y} \ v \ v_{,x} \ v_{,y} \ w \ w_{,x} \ w_{,y} \ w_{,xx} \ w_{,yy} \ w_{,xy} \ \theta_x \ \theta_{x,x} \ \theta_{x,y} \ \theta_y \ \theta_{y,x} \ \theta_{y,y} \rangle \quad (1.5)$$

Pour un nœud m à mi-côte (m = 4 ; 5 ; 6), le vecteur de déplacement nodal est :

$$\delta_m^T = \langle u \ u_{,n} \ v \ v_{,n} \ w_{,n} \ \theta_x \ \theta_{x,n} \ \theta_y \ \theta_{y,n} \rangle \quad (1.6)$$

Les contraintes hors-plan σ_{xz} , σ_{yz} , σ_{zz} sont déterminées en intégrant dans l'épaisseur les équations d'équilibre appropriées.

Raghuram et al. [Raghuram 99] propose un élément triangulaire de continuité C^1 à 18 degrés de liberté par nœud (Fig. 1.9). Le champ de déplacement adopté est :

$$\begin{aligned} u &= u^0 - Z w_{,x} - \frac{Z^2}{2} w_{1,x} \\ v &= v^0 - Z w_{,y} - \frac{Z^2}{2} w_{1,y} \\ w &= w^0 + Z w_1 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Le terme w_1 est pris en considération pour tenir compte de la déformation de compression dans l'épaisseur.

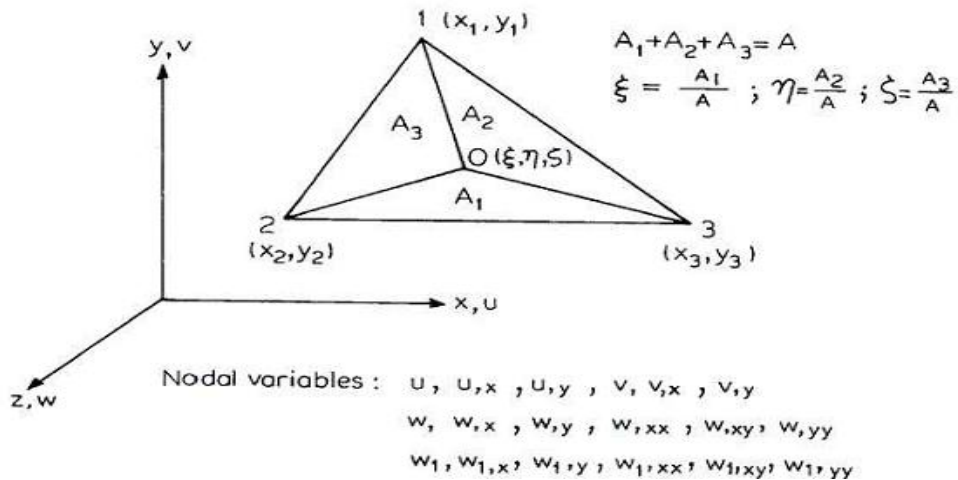


Fig. 1.9 Élément triangulaire à 3 nœuds de continuité de C^1 [Raghuram 99]

Récemment, Sheikh et al. [Sheikh 02a, Sheikh 02b] proposent un élément triangulaire à 16 nœuds. Dans cet élément, un polynôme d'ordre quatre complet est utilisé pour le déplacement transversal w . Les déplacements membranaires (u et v) et les rotations (θ_x et θ_y) sont décrits par des polynômes cubiques. Avec une substitution appropriée des composants de déplacements aux différents nœuds, les 55 inconnues dans ces 5 polynômes sont exprimés en termes de 55 déplacements nodaux (Fig. 1.10). Cet élément est ensuite utilisé pour l'étude des plaques multicouches de différentes géométries.

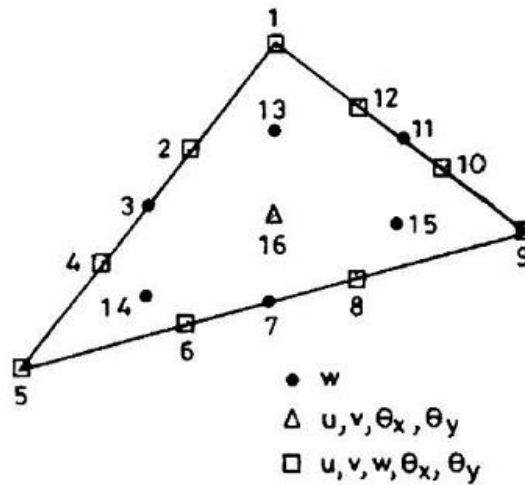


Fig. 1.10 Élément triangulaire à 16 nœuds [Sheikh 02a]

Pour éviter les difficultés numériques imposées par les continuités C^1 des modèles éléments finis excédents, certains auteurs introduisent le concept de fonction « penalty » [Pandya 88a, Pandya 88b, ukunaga 01, Hu 02] pour développer un élément quadrilatère Lagrangien à 9 nœuds (Fig. 1.11).

En se basant toujours sur le modèle cubique de [Reddy 84], ils introduisent des degrés de liberté additionnels en rassurant les contraintes cinématiques par les fonctions penalty. Le vecteur χ suivant est introduit : $\chi = \langle \chi_x, \chi_y \rangle^T = \langle \partial w / \partial x, \partial w / \partial y \rangle^T$.

Les contraintes cinématiques $\phi_x = \chi_x - \partial w / \partial x = \mathbf{0}$ et $\phi_y = \chi_y - \partial w / \partial y = \mathbf{0}$ sont introduites dans l'expression des travaux virtuels grâce aux fonctions penalty. En effet le terme ajouté est $\phi^T D^P \phi$, où $\phi = \langle \phi_x, \phi_y \rangle^T$ et D^P est la matrice de penalty qui peut être

exprimée par : $D^p = \begin{pmatrix} \alpha_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \alpha_y \end{pmatrix}$, où α_x et α_y sont des paramètres de penalty qui prennent expérimentalement une valeur qui vaut 10^3 à 10^5 fois la valeur absolue maximale des termes de la matrice de rigidité normale.

Certains auteurs proposent une formulation mixte pour obtenir des éléments à continuité C^0 . Putcha et al. [Putcha 86] utilise le principe vibrationnel mixte de Reissner pour introduire indépendamment les déplacements et les moments. L'élément déduit contient 11 degrés de liberté (3 déplacements, 2 rotations et 6 moments résultants) par nœud. Dans [Wu 93a, Wu 93b], les déplacements et les contraintes interlaminaires (σ_{xz} , σ_{yz} , σ_{zz}) sont approchés indépendamment. Un élément quadrilatère à 9 nœuds, de continuité C^0 est utilisé dans la formulation (Fig. 1.11). Les variables nodales sont les 3 déplacements, les 3 rotations, 5 fonctions d'ordre supérieur et 3 contraintes interlaminaires. L'avantage principal de cette formulation est que les contraintes interlaminaires sont des variables principales. Elles peuvent, donc être déterminées précisément et facilement sans avoir recours aux calculs supplémentaires.

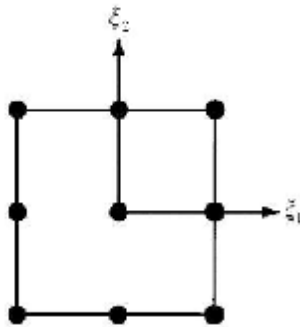


Fig. 1.11 Élément quadrilatère de type Lagrange à 9 nœuds.

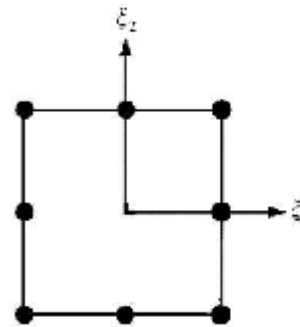


Fig. 1.12 Élément quadrilatère de type Serendip à 8 nœuds.

Les travaux de [Barboni 90, Manjunatha 92, Kant 94, Shankara 96, Khare 04] ont pour objectif de développer une famille d'éléments d'ordre supérieur à continuité C^0 . Plusieurs éléments quadrilatères de type Lagrange à 9 et 16 nœuds sont proposés (Figs. 1.11 et 1.13). Ils diffèrent par l'ordre du développement de série de Taylor adopté pour le champ de déplacement :

- Cas d'un empilement symétrique

Si les éléments sont à 5 degrés de liberté par nœud, le champ de déplacement sera :

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= z\theta_x(x, y) + z^3\theta_x^*(x, y) \\
v(x, y, z) &= z\theta_y(x, y) + z^3\theta_y^*(x, y) \\
w(x, y, z) &= w_0(x, y)
\end{aligned}
\tag{1.8}$$

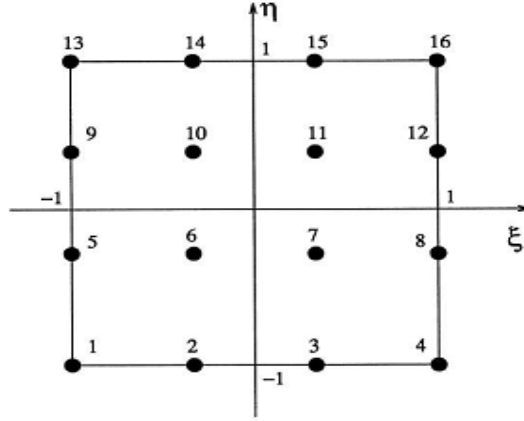


Fig.1.13 Élément quadrilatère de type Lagrange à 16 nœuds.

Si les éléments sont à 6 degrés de liberté par nœud, le champ de déplacement sera :

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= z\theta_x(x, y) + z^3\theta_x^*(x, y) \\
v(x, y, z) &= z\theta_y(x, y) + z^3\theta_y^*(x, y) \\
w(x, y, z) &= w_0(x, y) + z^2w_0^*(x, y)
\end{aligned}
\tag{1.9}$$

Cas d'un empilement non symétrique

Si les éléments sont à 7 degrés de liberté par nœud, le champ de déplacement sera :

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) + z^3\theta_x^*(x, y) \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) + z^3\theta_y^*(x, y) \\
w(x, y, z) &= w_0(x, y) + z^2w_0^*(x, y)
\end{aligned}
\tag{1.10}$$

Si les éléments sont à 9 degrés de liberté par nœud, le champ de déplacement sera :

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) + z^2u_0^*(x, y) + z^3\theta_x^*(x, y) \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) + z^2v_0^*(x, y) + z^3\theta_y^*(x, y) \\
w(x, y, z) &= w_0(x, y)
\end{aligned}
\tag{1.11}$$

Si les éléments sont à 11 degrés de liberté par nœud, le champ de déplacement sera :

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) + z^2u_0^*(x, y) + z^3\theta_x^*(x, y) \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) + z^2v_0^*(x, y) + z^3\theta_y^*(x, y) \\
w(x, y, z) &= w_0(x, y) + z\theta_z(x, y) + z^2w_0^*(x, y)
\end{aligned}
\tag{1.12}$$

Si les éléments sont à 12 degrés de liberté par nœud, le champ de déplacement sera:

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) + z^2u_0^*(x, y) + z^3\theta_x^*(x, y) \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) + z^2v_0^*(x, y) + z^3\theta_y^*(x, y) \\
w(x, y, z) &= w_0(x, y) + z\theta_z(x, y) + z^2w_0^*(x, y) + z^3\theta_z^*(x, y)
\end{aligned}
\tag{1.13}$$

Sadek [Sadek 98] quand à lui propose une famille d'élément rectangulaire de type Serendip à 8 nœuds (Fig. 12). Les éléments se distinguent encore par l'ordre du développement adopté pour le champ de déplacement :

Si les éléments sont à 7 degrés de liberté par nœud, le champ de déplacement sera :

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\xi_x(x, y) + z^2\xi_x(x, y) \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\xi_y(x, y) + z^2\xi_y(x, y) \\
w(x, y, z) &= w_0(x, y)
\end{aligned}
\tag{1.14}$$

Si les éléments sont à 9 degrés de liberté par nœud, le champ de déplacement sera :

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\xi_x(x, y) + z^2\xi_x(x, y) + z^3\phi_x(x, y) \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\xi_y(x, y) + z^2\xi_y(x, y) + z^3\phi_y(x, y) \\
w(x, y, z) &= w_0(x, y)
\end{aligned}
\tag{1.15}$$

Si les éléments sont à 11 degrés de liberté par nœud, le champ de déplacement sera :

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\xi_x(x, y) + z^2\xi_x(x, y) + z^3\phi_x(x, y) \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\xi_y(x, y) + z^2\xi_y(x, y) + z^3\phi_y(x, y) \\
w(x, y, z) &= w_0(x, y) + z\xi_z(x, y) + z^2\xi_z(x, y)
\end{aligned}
\tag{1.16}$$

Récemment, les modèles zig-zag ont suscité une attention toute particulière car ils assurent un bon compromis entre la précision et le coût de calcul. Dans [Carrera 96, Averill 96, Cho 97, Carrera 97, Carrera 98], les auteurs proposent des éléments finis du type zig-zag du premier ordre. En fait, la cinématique du modèle est le résultat de la superposition de la cinématique Reissner-Mindlin et des fonctions zig-zag (Fig.1. 6). Les travaux de Carrera [Carrera 96,

Carrera 97, Carrera 98] ont abouti à un élément quadrilatère à 9 nœuds, de continuité C^0 . Cet élément possédant 7 degrés de liberté par nœud est utilisé pour étudier les plaques multicouches ainsi que les panneaux sandwich.

Quand aux travaux de [Makhecha 01, Patel 02], les auteurs combinent un développement Taylor d'ordre trois et les fonctions zig-zag. L'élément résultant est de type Serendip à 8 nœuds, de continuité C^1 avec 13 degrés de liberté par nœud. Pourtant les conditions limites aux surfaces supérieures et inférieures ne sont pas satisfaites. Pour assurer ces conditions, Di Sciuva utilise la cinématique cubique de [Reddy 84]. Il propose un élément quadrilatère à 4 nœuds et un élément triangulaire à 3 nœuds [Di Sciuva 93a, Di Sciuva 95a]. Les éléments sont de continuité C^1 et possèdent 10 degrés de liberté par nœud. Plus tard, il propose un élément zig-zag conforme 8 nœuds à continuité C^2 [Di Sciuva 95b, Icardi 98]. Pour un nœud l au coin, le vecteur de déplacement nodal est :

$$\delta_l^T = \langle u \quad v \quad w \quad \theta_x \quad \theta_y \quad w_{,x} \quad w_{,y} \quad w_{,xx} \quad w_{,xy} \quad w_{,yy} \rangle \quad (1.17)$$

Pour un nœud m à mi-côte, le vecteur de déplacement nodal est :

$$\delta_m^T = \langle u \quad v \quad \theta_x \quad \theta_y \rangle \quad (1.18)$$

A l'heure actuelle, malgré ses discutés d'implémentation numérique cet élément est connu comme le plus précis parmi les modèles éléments finis zig-zag.

Pour aller plus loin il faut utiliser des modèles couches discrètes, et accepter les coûts de calcul car ils sont avec les éléments finis 3D les seuls modèles capable d'étudier localement des champs. Cependant, jusqu'à maintenant, très peu de travaux sont destinés au développement des éléments finis couches discrètes.

Les premiers développement numériques concernant ces modèles sont les travaux de [Mau 72, Spilker 77, Spilker 82, Liou 87, Sun 89]. Le principe variationnel de Pian [Pian 64] est utilisé pour formuler les éléments quadrilatères hybrides à 4 et 8 nœuds. Dans cette formulation, une approximation des contraintes est postulée pour assurer l'équilibre à l'intérieur de l'élément. Les paramètres de contraintes inconnues sont écrits en fonction des variables de déplacement nodal grâce au principe variationnel [Pian 64]. Les inconnues principales sont donc des déplacements nodaux ordinaires. Ce sont les déplacements

membranaires au niveau des interfaces et le déplacement transverse w constant dans l'épaisseur soit $2(n+1)+1$ degrés de liberté par nœud. La continuité C^0 est assurée.

Seide et Chaudhuri [Chaudhuri 87, Seide 87, Chaudhuri 04] développent un élément triangulaire 6 nœuds (Fig. 1.14) à continuité C^0 en se basant sur le modèle couche discrète de [Seide 80]. Les déplacements nodaux sont les déplacements membranaires au niveau des interfaces et le déplacement transverse w constant dans l'épaisseur soit $2(n + 1) + 1$ degré de liberté par nœud.

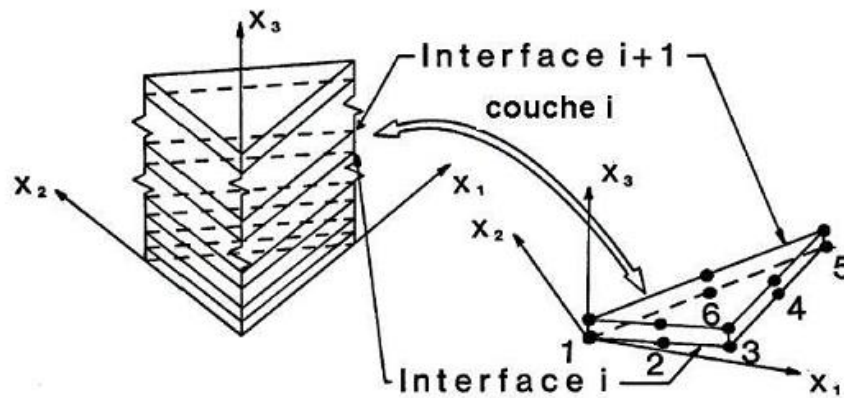


Fig. 1.14 Élément triangulaire couches discrètes à 6 nœuds de continuité C^0 [Chaudhuri 87].

Tous les modèles éléments finis couches discrètes cités ci-dessus adoptent un champ de déplacement linéaire par couche. Dans [Gaudenzi 95, Kimpara 98] on trouve des éléments quadrilatères à 8 nœuds de continuité C^0 avec une cinématique d'ordre supérieur (cubique) par couche.

On termine cette brève revue des éléments finis 2D sur un type d'élément particulier : les éléments finis semi analytiques proposés par [Sheng 02a, Sheng 02b, Ye 04]. Il s'agit d'une approche mixte dont les contraintes et les déplacements à la surface supérieure sont déterminés par des éléments finis classiques tandis que leurs distributions dans l'épaisseur sont calculées par la méthode de fonction initiale [Sheng 02a]. En effet, les champs dans l'épaisseur sont calculés de manière récursive.

1.3.2 Modèle éléments finis 3D :

Les analyses 3D conduisent à un large système d'équations. Cela nécessite donc un grand espace de stockage qui réserve la modélisation 3D pour l'étude locale des champs dans les zones critiques.

Les éléments briques iso-paramétrique 20 nœuds sont couramment utilisés pour étudier les champs près des bords libres [Wang 77a, Wang 77b, Raju 81, Icardi 95, Lessard 96, Chen 96, Carreira 98]. Un maillage typique pour l'analyse des contraintes d'interface est présenté sur la Fig. 1.15.

Dans [Raju 82, Ericson 84, Lucking 84, Kim 91, Hu 97, Carreira 98], la plaque multicouche trouée est étudiée avec un maillage 3D raffiné aux interfaces (Fig. 1.16). A cause du grand nombre de degrés de liberté on doit avoir recours à la technique de sous-structuration pour résoudre le problème.

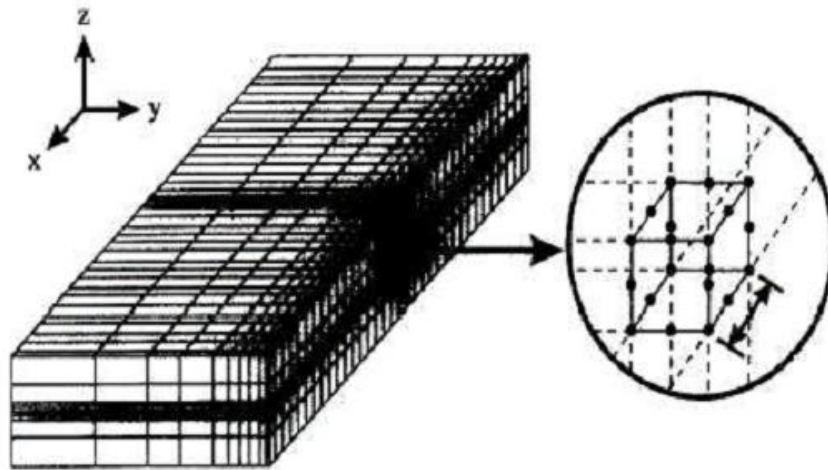


Fig. 1.15 Éléments finis 3D pour déterminer les contraintes inter-laminaires [Wang 77a].

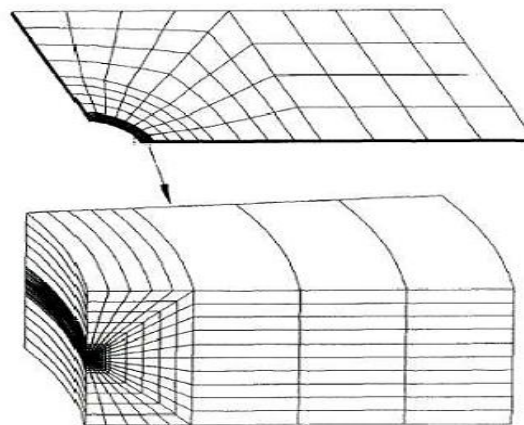


Fig. 1.16 Raffinement du maillage 3D pour l'étude des plaques trouées [Lessard 96]

Icardi et al. [Icardi 95] étudient la singularité des contraintes au bord libre en utilisant un élément brique 20 nœuds (Fig. 1.17) et un élément singulier 15 nœuds (Fig. 1.18) généré à partir d'un élément de brique 20 nœuds. Une procédure de calcul à deux phases « prédicateur-correcteur » est utilisée pour assurer les conditions de contact aux interfaces. Le maillage utilisé est présenté sur la Fig. 1.19.

Cho et al. [Cho 00] développe un élément fini brique zig-zag à 8 nœuds. Suivant l'épaisseur, chaque couche est modélisée par un élément qui adopte une cinématique de type zig-zag du premier ordre. Dans [Ramtekkar 02, Ramtekkar 03, Desai 03] un élément mixte à 18 nœuds est proposé (Fig. 1.20). Les variables nodales sont les 3 déplacements et les trois contraintes hors plan. Chaque élément à l'épaisseur d'une couche et les contraintes déterminées aux nœuds sont les contraintes interlaminaires.

Dans [Bui 99, Bui 00] les interfaces sont modélisées par un élément typique à l'épaisseur zéro. Cet élément d'interface est formulé en dégénérant continuellement vers zéro l'épaisseur d'un élément de plaque mince (Fig. 1.21). Les couches sont modélisées par des éléments finis volumiques ordinaires.

La dernière méthode évite un écueil classique des approches 3D. Compte tenu du fait que les contraintes sont calculées dans l'élément et non sur sa frontière, l'estimation des contraintes d'interface par les éléments finis 3D nécessite souvent un travail de post-processeur pour relocaliser et calculer les valeurs précises aux interfaces. En plus, les contraintes obtenues aux voisinages des bords libres sont singuliers et dépendent du raffinement du maillage.

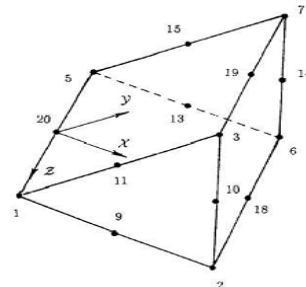
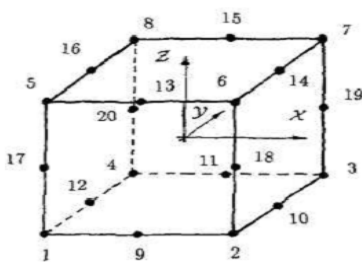


Fig. 1.17 Élément brique à 20 nœuds. Fig. 1.18 Élément singulier à 15 nœuds [Icardi 95].

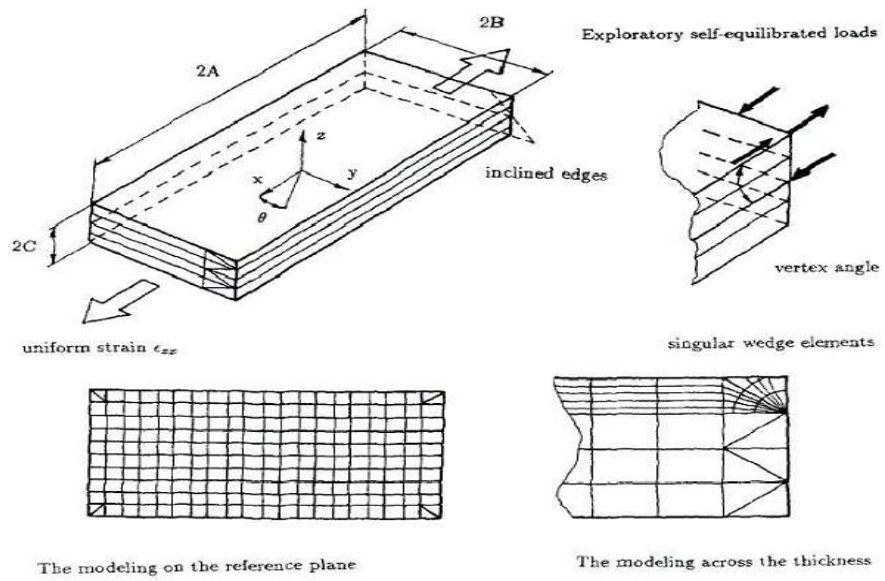


Fig. 1.19 Etudes du problème de bord libre par EF- 3D [Icardi 95].

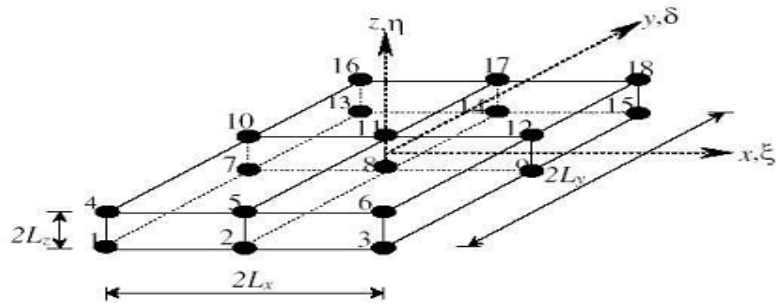


Fig. 1.20 Élément brique mixte à 18 nœuds [Ramtekkar 02]

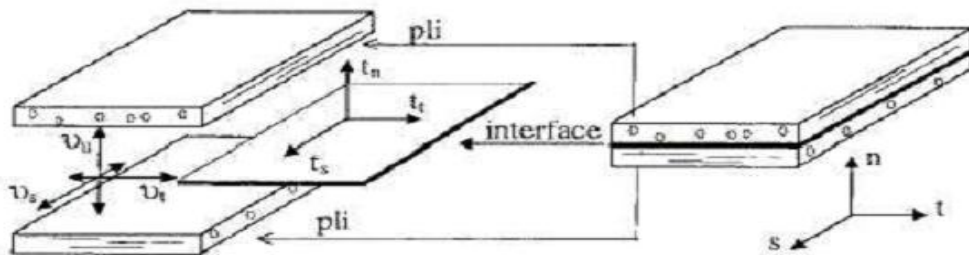


Fig. 1.21 Élément d'interface [Bui 99]

Chapitre 2

PRINCIPE DE TOPOLOGIE DES ELEMENTS DE BASE DES STRUCTURES

2.1 Introduction

La méthode des éléments finis est un outil de résolution de problèmes aux dérivées partielles avec conditions aux limites imposées ; par exemple, l'équation du quatrième ordre pour le déplacement caractéristique de la flexion d'une plaque mince.

Cependant, la M.E.F. n'est pas basée sur la forme différentielle de l'équation aux dérivées partielles mais sur une formulation intégrale de type projectif ou variationnel. Dans ce dernier cas, il est important de noter qu'il ya équivalence entre résoudre un problème différentiel et rendre stationnaire une fonctionnelle (formulation intégrale)

L'obtention d'une solution exacte étant aussi difficile en formulation intégrale qu'en formulation différentielle, une solution approchée est recherchée sous la forme de fonctions d'approximation (généralement polynomiales) propres à des morceaux du domaine complet. Ces sous-domaines, à la taille relativement réduite et aux formes topologiquement simples, sont les éléments. Les coefficients des fonctions évoquées sont déterminés en utilisant les valeurs de ces fonctions en des points particuliers des éléments : les nœuds.

2.2 Propriétés des éléments

2.2.1 Élément linéique :

a/ Type H

Suivant le nombre de nœuds dont dispose l'élément, on a deux types d'interpolation [Dhatt 84] :

2.2.1.1 Interpolation linéaire (iso paramétrique):

L'élément considéré est ici linéaire à deux nœuds.

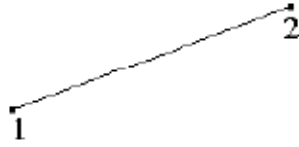


Fig. 2.1 Elément réel à deux nœuds



Fig. 2.2 Elément de référence

La position x d'un point quelconque de l'élément de référence est définie par :

$$x(\xi) = \bar{N}_1 \times x_1 + \bar{N}_2 \times x_2 \quad (2.1)$$

Ainsi :

$$x(\xi) = [\bar{N}] \times \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \text{ et } y(\xi) = [\bar{N}] \times \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

x_i, y_i : sont les coordonnées des nœuds. N_i sont les fonctions d'interpolation bilinéaires classiques données par :

$$[\bar{N}] = [\bar{N}_1 \quad \bar{N}_2] \quad (2.3)$$

Et vérifient la condition :

$$\bar{N}_1 + \bar{N}_2 = 1 \quad \text{pour } \forall \xi \in [-1 \quad 1]$$

On peut écrire aussi :

$$[\bar{N}] = [G] \times [C]^{-1} = \left[\frac{1}{2}(1 - \xi) \quad \frac{1}{2}(1 + \xi) \right] \quad (2.4)$$

Avec

$$[G] = [1 \quad \xi] \text{ et } [C] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

La relation entre les déformations à l'intérieur de l'élément et les déplacements aux nœuds nous permet de définir la matrice $[B]$:

$$[\varepsilon_e] = [L] \times [\bar{N}] \{u_n\} \quad (2.6)$$

On pose :

$$[B] = [L] \times [\bar{N}] \quad (2.7)$$

où $\{u_n\}$ est le vecteur de déplacements aux noeuds et $[L]$ est ici une matrice en fonction des dérivées par rapport à x et y ($\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$).

2.2.1.2 Interpolation quadratique :

Elément possède 3 noeuds.

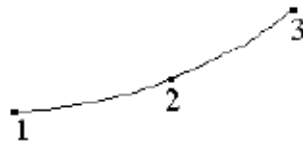


Fig. 2.3 Elément réel



Fig. 2.4 Elément de référence

Les fonctions d'interpolation N_i sont déterminées à partir de la relation suivante :

$$[N] = \left[\frac{\xi}{2}(1 - \xi) \quad 1 - \xi^2 \quad \frac{1}{2}(1 + \xi)\xi \right] = [G] \times [C]^{-1} \quad (2.8)$$

Avec :

$$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] ; \quad (2.9)$$

$$[G] = [1 \quad \xi \quad \xi^2] ; \quad [C] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad (2.10)$$

$$N_1 = \frac{\xi}{2}(1 - \xi); \quad N_2 = 1 - \xi^2; \quad N_3 = \frac{1}{2}(1 + \xi)\xi \quad \forall \xi \in [-1 \quad 1] \quad (2.11)$$

Ce qui peut se résumer par le tableau ci-après :

Tableau2.1 : Fonctions d'interpolation de type H de l'élément linéaire à trois nœuds

i	N_i	$N_{i,\xi} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi}$
1	$N_1 = \frac{\xi}{2}(1 - \xi)$	$\frac{1}{2}(2\xi - 1)$
2	$N_2 = 1 - \xi^2$	-2ξ
3	$N_3 = \frac{1}{2}(1 + \xi)\xi$	$\frac{1}{2}(2\xi + 1)$

La position x d'un point quelconque de l'élément de référence est définie par :

$$x(\xi) = [N] \times \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad y(\xi) = [N] \times \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

b/ Type P

On ne considère que l'élément à une dimension, à nœud central et à degré de liberté variable.

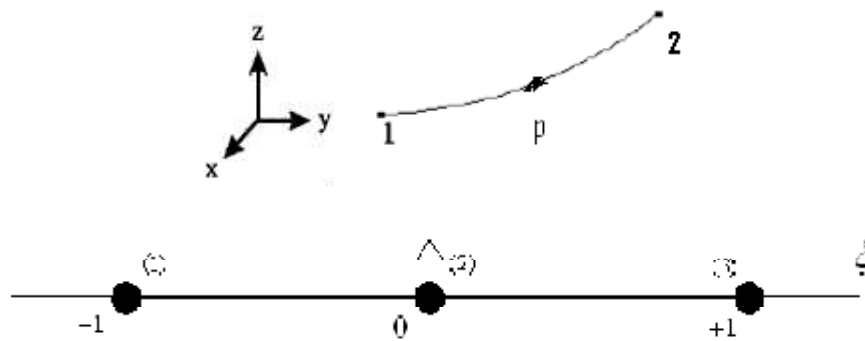


Fig. 2.5 Élément linéaire à trois nœuds (Type P)

Les fonctions d'interpolation N_i pour ce type d'élément sont données par :

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad \text{et} \quad N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

$$N_i(\xi) = \phi_{i-1}(\xi) \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \dots, p+1 \quad (2.13)$$

$$\phi_j(\xi) = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^{\xi} P_{j-1}(t) dt ; j=1, 2, 3, \dots, p+1 \quad (2.14)$$

P_{j-1} est un polynôme de Legendre, solution de l'équation différentielle suivante :

$$(1 - x^2) \times y'' - 2 \times x \times y' + n \times (n + 1) \times y = 0 \quad (2.15)$$

Certaines de ces solutions sont ici données pour différentes valeurs de n :

$$P_0(x) = 1, \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_1(x) = x, \quad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \quad P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5) \quad (2.16)$$

2.2.2 Élément triangulaire :

2.2.2.1 Élément triangulaire à trois nœuds :

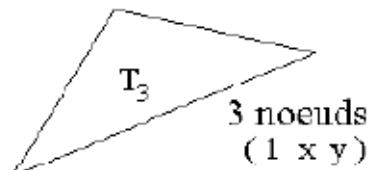
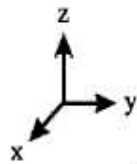


Fig. 2.6 Élément réel

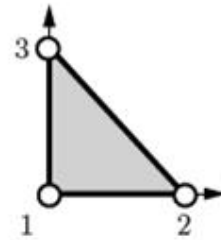


Fig. 2.7 Élément de référence

Les fonctions d'interpolation pour cet élément sont données par :

$$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] = [1 - \xi - \eta \quad \xi \quad \eta] \quad (2.17)$$

Considérant les degrés de liberté u et v au niveau de chaque nœud (cas membranaire), on a les déformations dans le plan xy qui s'écrivent :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix} = [B_e] \{u_n\} \quad (2.18)$$

Avec:

$$\{u_n\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}, \quad [B_e] = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} y_3 - y_2 & \mathbf{0} & y_1 - y_3 & \mathbf{0} & y_2 - y_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & x_2 - x_3 & \mathbf{0} & x_3 - x_1 & \mathbf{0} & x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 & y_3 - y_2 & x_3 - x_1 & y_1 - y_3 & x_1 - x_2 & y_2 - y_1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Le déterminant de la matrice jacobienne de transformation s'écrit :

$$|J| = (y_1 - y_3)(x_1 - x_2) - (x_1 - x_3)(y_1 - y_2) \quad (2.20)$$

La matrice de rigidité est définie par:

$$[k_e] = [B_e]^T \left(\int_0^1 \int_0^{1-\xi} [H_m] d\eta d\xi \right) [B_e] |J| \quad (2.21)$$

Et la matrice de masse est :

$$m = \rho_m \frac{|J|}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

2.2.2.2 Élément triangulaire à six nœuds :

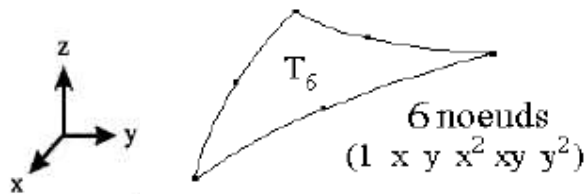


Fig. 2.8 Élément réel

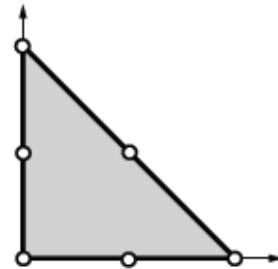


Fig. 2.9 Élément de référence

Pour ce type d'élément, on définit les deux matrices $[G]$ et $[C]$ comme suit:

$$[G] = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \eta\xi \quad \eta^2]; \quad (2.23)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$\text{On a : } [N] = [G][C]^{-1} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5] \quad (2.25)$$

Alors, les fonctions d'interpolation s'écrivent :

$$N_1 = (1 - \xi - \eta);$$

$$N_2 = 4\xi(1 - \xi - \eta);$$

$$N_3 = \xi(2\xi - 1);$$

$$N_4 = 4\xi\eta;$$

$$N_5 = \eta(2\eta - 1);$$

$$N_6 = 4\eta(1 - \xi - \eta)$$

(2.26)

2.2.2.3 Elément triangulaire à dix nœuds :

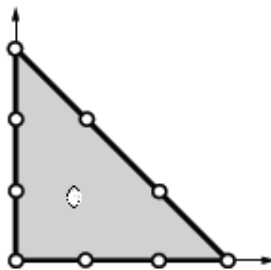


Fig. 2.10 Elément de référence

Pour l'élément triangulaire à dix nœuds, on définit la matrice des fonctions d'interpolation :

$$[N] = [G] [C]^{-1} \quad (2.27)$$

Avec :

$$[G] = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \eta\xi \quad \eta^2 \quad \xi^3 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \quad \eta^3] \quad (2.28)$$

Et

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 & \frac{1}{27} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{8}{27} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{8}{27} & \frac{4}{27} & \frac{2}{27} & \frac{1}{27} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{27} & \frac{2}{27} & \frac{4}{27} & \frac{8}{27} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{4}{9} & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{27} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{27} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Soit,

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2} (1 - \xi - \eta) (2 - 3\xi - \eta) (1 - 3\xi - 3\eta) & N_6 &= \frac{9}{2} \xi \eta (3\eta - 1) \\ N_2 &= \frac{9\xi}{2} (1 - \xi - \eta) (2 - 3\xi - 3\eta) & N_7 &= \frac{1}{2} \eta (9\eta^2 - 9\eta + 2) \\ N_3 &= \frac{9\xi}{2} (1 - \xi - \eta) (3\xi - 1) & N_8 &= \frac{9\eta}{2} (1 - \xi - \eta) (2 - 3\xi - 3\eta) \\ N_4 &= \frac{\xi}{2} (3\xi - 1) (3\xi - 2) & N_9 &= \frac{9\eta}{2} (1 - \xi - \eta) (2 - 3\xi - 3\eta) \\ N_5 &= \frac{9}{2} \xi \eta (3\xi - 1) & N_{10} &= 27\xi\eta (1 - \xi - \eta) \end{aligned} \quad (2.30)$$

2.2.3 Élément rectangulaire :

a/ Type H

2.2.3.1 Élément rectangulaire à quatre nœuds : interpolation linéaire

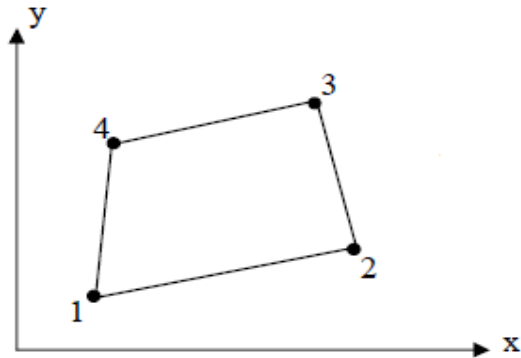


Fig. 2.11 Élément réel Q4

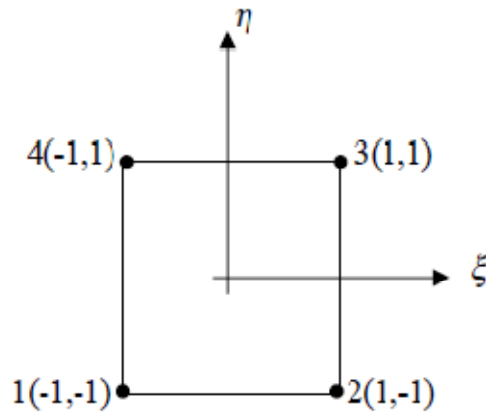


Fig. 2.12 Élément de référence

Pour l'élément rectangulaire Q4, la matrice des fonctions d'interpolation est donnée par :

$$[N] = \left[\frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \quad \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \quad \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \quad \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \right] \quad (2.31)$$

Soit,

$$[N] = [G] [C]^{-1} = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta] \times \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Par suite, on peut définir la matrice $[C]$:

$$[C] = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Et

$$[G] = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta] \quad (2.34)$$

Il s'agit ici de trouver la matrice $[B_e]$ reliant les déformations $\{\varepsilon\}$ de l'élément à ses déplacements nodaux $\{u_n\}$. cette relation est exprimée par :

$$\{\varepsilon\} = [B_e] \{u_n\} \quad (2.35)$$

$$\text{Dans ce cas, on a : } [B_e] = [L] \times [N_e] \quad (2.36)$$

Avec :

$$[N_e] = \begin{bmatrix} \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}, 0, 0, 0, 0, \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}, 0, 0, 0, 0, \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}, 0, 0, 0, 0, \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}, 0, 0, 0, 0 \\ 0, \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}, 0, 0, 0, 0, \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}, 0, 0, 0, 0, \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}, 0, 0, 0, 0, \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}, 0, 0, 0, 0, \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}, 0, 0, 0, 0, \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}, 0, 0, 0, 0, \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}, 0, 0, 0, 0, \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}, 0, 0, 0, 0, \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}, 0, 0, 0, 0, \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}, 0 \\ 0, 0, 0, 0, \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}, 0, 0, 0, 0, \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}, 0, 0, 0, 0, \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}, 0, 0, 0, 0, \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$[L]$ est ici en fonction de $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$, alors que N_1 , N_2 , N_3 et N_4 sont fonction de ξ et η . Donc,

la définition d'une matrice dite jacobienne s'impose. Elle est donnée par :

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Avec :

$$\begin{aligned} x_{,\xi} = J_{11} &= [N_{,\xi}]^T \{x_n\} \quad ; \quad x_{,\eta} = J_{21} = [N_{,\eta}]^T \{x_n\} \\ y_{,\xi} = J_{12} &= [N_{,\xi}]^T \{x_n\} \quad ; \quad x_{,\xi} = J_{22} = [N_{,\eta}]^T \{y_n\} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Soit,

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{(\eta - 1)}{4} x_1 + \frac{(1 - \eta)}{4} x_2 + \frac{(\eta + 1)}{4} x_3 - \frac{(\eta + 1)}{4} x_4 \\ J_{12} &= \frac{(\eta - 1)}{4} y_1 + \frac{(1 - \eta)}{4} y_2 + \frac{(\eta + 1)}{4} y_3 - \frac{(\eta + 1)}{4} y_4 \\ J_{21} &= \frac{(\xi - 1)}{4} x_1 + \frac{(\xi + 1)}{4} x_2 + \frac{(\xi + 1)}{4} x_3 - \frac{(1 - \xi)}{4} x_4 \\ J_{22} &= \frac{(\xi - 1)}{4} y_1 + \frac{(\xi + 1)}{4} y_2 + \frac{(\xi + 1)}{4} y_3 - \frac{(1 - \xi)}{4} y_4 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Sous forme matricielle, la matrice jacobienne s'écrit:

$$\begin{aligned} [J] &= \begin{bmatrix} \frac{(\eta - 1)}{4} x_1 + \frac{(1 - \eta)}{4} x_2 + \frac{(\eta + 1)}{4} x_3 - \frac{(\eta + 1)}{4} x_4 & \frac{(\eta - 1)}{4} y_1 + \frac{(1 - \eta)}{4} y_2 + \frac{(\eta + 1)}{4} y_3 - \frac{(\eta + 1)}{4} y_4 \\ \frac{(\xi - 1)}{4} x_1 + \frac{(\xi + 1)}{4} x_2 + \frac{(\xi + 1)}{4} x_3 - \frac{(1 - \xi)}{4} x_4 & \frac{(\xi - 1)}{4} y_1 + \frac{(\xi + 1)}{4} y_2 + \frac{(\xi + 1)}{4} y_3 - \frac{(1 - \xi)}{4} y_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.41)$$

$|J|$ est le déterminant de la matrice jacobienne. Il est donné par :

$$\begin{aligned}
|J| = & -\frac{1}{8}x_3\eta y_1 - \frac{1}{8}x_4\xi y_1 + \frac{1}{8}x_4y_1\eta + \frac{1}{8}x_2y_3\xi + \frac{1}{8}x_2y_1\eta + \frac{1}{8}x_3y_1\xi - \frac{1}{8}x_3y_2\xi - \frac{1}{8}x_2y_4\eta \\
& - \frac{1}{8}x_1y_2\eta + \frac{1}{8}x_3y_4\xi + \frac{1}{8}x_1y_3\eta - \frac{1}{8}x_1y_3\xi + \frac{1}{8}x_1y_4\xi\eta - \frac{1}{8}x_2y_4\xi\eta \\
& + \frac{1}{8}x_3y_4\xi\eta + \frac{1}{8}x_4y_1\xi\eta + \frac{1}{8}x_4y_2\xi\eta - \frac{1}{8}x_4y_2 + \frac{1}{8}x_4y_3 - \frac{1}{8}x_1y_2 + \frac{1}{8}x_2y_1 \\
& - \frac{1}{8}x_1y_4 + \frac{1}{8}x_4y_4
\end{aligned} \tag{2.42}$$

$\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ sont respectivement les vecteurs abscisses et ordonnées des nœuds.

$$\text{On a : } \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{2.43}$$

où $[J]^{-1}$ est l'inverse de la matrice jacobienne.

On peut ainsi effectuer le calcul de $[B_e]$:

$$[B_e] = [A] \begin{bmatrix} \eta - 1 & 0 & 1 - \eta & 0 & 1 + \eta & 0 & -1 - \eta & 0 \\ \xi - 1 & 0 & -1 - \xi & 0 & 1 + \xi & 0 & 1 - \xi & 0 \\ 0 & \eta - 1 & 0 & 1 - \eta & 0 & 1 + \eta & 0 & -1 - \eta \\ 0 & \xi - 1 & 0 & -1 - \xi & 0 & 1 + \xi & 0 & 1 - \xi \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

Avec

$$\begin{aligned}
[A] = & \left[\frac{1}{4}(\eta - 1)x_1 + \frac{1}{4}(1 - \eta)x_2 + \frac{1}{4}(\eta + 1)x_3 - \frac{1}{4}(\eta + 1)x_4, \frac{1}{4}(\eta - 1)y_1 + \frac{1}{4}(1 - \eta)y_2 + \frac{1}{4}(\eta + 1)y_3 \right. \\
& \left. - \frac{1}{4}(\eta + 1)y_4, 0, 0 \right] \\
& \left[0, 0, \frac{1}{4}(\xi - 1)x_1 - \frac{1}{4}(1 + \xi)x_2 + \frac{1}{4}(\xi + 1)x_3 - \frac{1}{4}(1 - \xi)x_4, \frac{1}{4}(\xi - 1)y_1 - \frac{1}{4}(1 + \xi)y_2 + \frac{1}{4}(\xi + 1)y_3 \right. \\
& \left. - \frac{1}{4}(1 - \xi)y_4 \right] \\
& \left[\frac{1}{4}(\xi - 1)x_1 - \frac{1}{4}(1 + \xi)x_2 + \frac{1}{4}(\xi + 1)x_3 - \frac{1}{4}(1 - \xi)x_4, \frac{1}{4}(\xi - 1)y_1 - \frac{1}{4}(1 + \xi)y_2 + \frac{1}{4}(\xi + 1)y_3 \right. \\
& \left. - \frac{1}{4}(1 - \xi)y_4, \frac{1}{4}(\eta - 1)x_1 + \frac{1}{4}(1 - \eta)x_2 + \frac{1}{4}(\eta + 1)x_3 - \frac{1}{4}(\eta + 1)x_4, \frac{1}{4}(\eta - 1)y_1 \right. \\
& \left. + \frac{1}{4}(1 - \eta)y_2 + \frac{1}{4}(\eta + 1)y_3 - \frac{1}{4}(\eta + 1)y_4 \right]
\end{aligned} \tag{2.45}$$

2.2.3.2 Élément rectangulaire à huit nœuds : interpolation quadratique

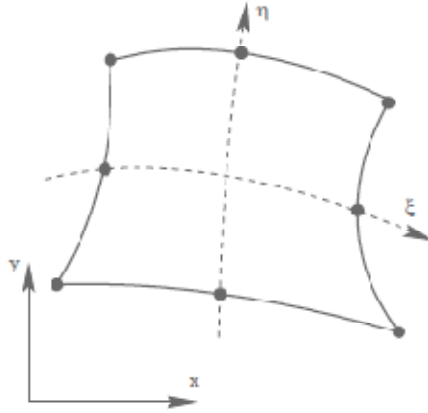


Fig. 2.13 Élément réel Q8

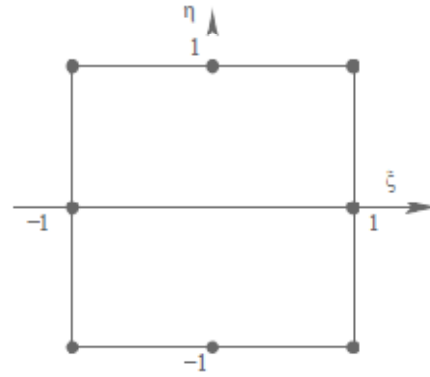


Fig. 2.14 Élément de référence

En utilisant un élément paramétrique bidimensionnel à 8 nœuds (Fig.2.13), Les fonctions d'interpolation sont données par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4}(-1 - \xi - \eta)(1 - \eta)(1 - \xi) & N_5 &= \frac{1}{4}(-1 + \xi + \eta)(1 + \eta)(1 + \xi) \\
 N_2 &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) & N_6 &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \\
 N_3 &= \frac{1}{4}(-1 + \xi - \eta)(1 - \eta)(1 + \xi) & N_7 &= \frac{1}{4}(-1 - \xi + \eta)(1 + \eta)(1 - \xi) \\
 N_4 &= \frac{1}{2}(1 + \eta^2)(1 + \xi) & N_8 &= \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 - \xi)
 \end{aligned}
 \tag{2.46}$$

On peut ainsi écrire la matrice des fonctions d'interpolation :

$$[N] = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2][C]^{-1}
 \tag{2.47}$$

Avec :

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -1 & -\frac{4}{3} & 1 & 1 & \frac{4}{3} & -1 & -1 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & -\frac{4}{3} & 1 & -1 & \frac{4}{3} & -1 & 1 \\ \frac{4}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & \frac{2}{3} & 1 & 1 & \frac{4}{3} & 1 & 1 \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -1 & \frac{2}{3} & 1 & -1 & \frac{4}{3} & 1 & -1 \\ \frac{4}{3} & -1 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

2.2.3.3 Élément rectangulaire à neuf nœuds : interpolation quadratique

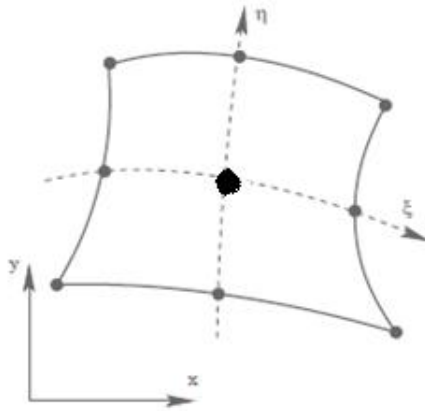


Fig. 2.15 Élément réel Q9

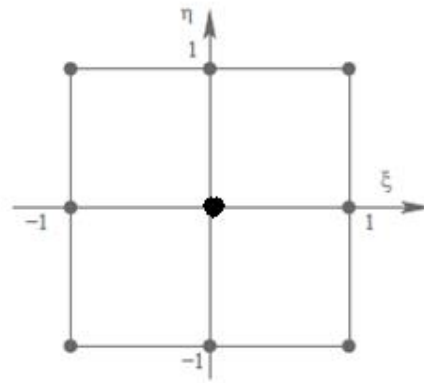


Fig. 2.16 Élément de référence

Les coordonnées paramétriques sont notées ξ et η . Les coordonnées $x(\xi, \eta)$ et $y(\xi, \eta)$ d'un point quelconque (ξ, η) sont définies par :

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^9 N_i \cdot x_i \quad (2.49)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^9 N_i \cdot y_i \quad (2.50)$$

où $(x_i; y_i)$ sont les coordonnées du nœud i , et les fonctions d'interpolation quadratique sont données par :

$$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6 \quad N_7 \quad N_8 \quad N_9] \quad (2.51)$$

Soit,

$$[N] = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \quad \xi^2\eta^2][C]^{-1} \quad (2.52)$$

Avec :

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

2.3 Justification du choix de l'élément rectangulaire Q4

Il a été prouvé, lors de recherches récentes, que les éléments les plus efficaces pour traiter le problème des plaques (isotropes, orthotropes et anisotropes) sont les éléments Q4 (interpolations quadratique). Il faut noter que, les Q9 et Q16 (interpolations quadratique et cubique) donnent également de bons résultats pour ce type de problème. Cependant, ces derniers se détériorent dès qu'il y a introduction d'une distorsion dans le maillage [Dhatt 90] ou lorsque les nœuds internes sont légèrement décalés de leur position de référence [Bathe et al. 80]. D'où l'intérêt, si toutefois on veut s'attendre à de bons résultats de la part de ces éléments, de veiller à ce qu'aucune distorsion ne soit présente dans le maillage. C'est là, une condition nécessaire pour éviter le phénomène du verrouillage numérique (ou blocage en cisaillement transversal).

Chapitre 3

FORMULATION DE LA THEORIE DES STRATIFIES PAR LA METHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

3.1 Introduction

La détermination des propriétés dynamiques d'un matériau a pour objectif d'aboutir aux caractéristiques des constituants permettant d'aborder l'évaluation du comportement dynamique des structures composites. Seul un faible nombre de problèmes d'élasticité linéaire peuvent être traités par l'établissement de solutions exactes. Dans le cas des poutres et de plaques non amorties soumises à des conditions aux limites quelconques, la méthode de Rayleigh Ritz permet d'obtenir des solutions approchées, qui s'améliorent avec le nombre de termes considérés.

Dans le cas des structures amorties, ayant une géométrie complexe, l'analyse des problèmes de dynamique nécessite d'utiliser la méthode des éléments finis. Cette méthode peut être considérée comme une extension de la méthode de Ritz. L'analyse du comportement dynamique des structures en matériaux composites a été développée récemment dans un ouvrage de synthèse développé par Berthelot [Berthelot 96].

Dans le présent travail, après rappel des principaux éléments de la méthode des éléments finis, nous exposons les différentes conditions appliquées à cette méthode afin d'analyser la réponse dynamique de structures composites stratifiés. Dans cette partie nous cherchons à développer et intégrer un modèle d'élément fini, utilisant la théorie des plaques de Mindlin avec déformation en cisaillement du premier ordre, qui permet de simuler le comportement des plaques composites épaisses, notamment les effets de déformation en cisaillement transverse. A travers cette théorie, seules les dérivées premières interviennent dans le calcul de la déformation. La conformité des éléments finis qui prennent en compte le cisaillement transverse est donc plus facile à obtenir puisque la compatibilité aux interfaces n'exige alors qu'une continuité C^0 , et nécessitent l'utilisation de cinq degrés de liberté par nœud.

3.2 Principe de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis consiste à mailler la structure à étudier en un certain nombre d'éléments finis de géométrie simple (segment de droite ou arc pour une structure linéique ; triangle ou quadrangle pour une structure surfacique ; tétraèdre, prisme ou hexaèdre pour une structure volumique, etc.). Le champ des déplacements en un point quelconque est ensuite évalué par interpolation des valeurs des déplacements aux nœuds du maillage, qui constituent les variables nodales du problème. Les équations de l'élasticité permettent ensuite d'exprimer en fonction des variables nodales l'énergie de déformation, l'énergie cinétique et le travail des actions mécaniques exercées sur la structure. L'application du théorème de l'énergie potentielle totale conduit enfin au système d'équations dont les variables nodales sont solutions.

3.3 Formulation des éléments finis dans le cadre de la théorie des stratifiés

3.3.1 Champ des déplacements :

Nous considérons ici l'analyse par éléments finis dans le cas où le comportement mécanique est décrit par la théorie des stratifiés du premier ordre, prenant en compte le cisaillement transverse. Cette théorie exprime les déplacements $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$ et $w(x, y, z, t)$ sous la forme [Berthelot 96] :

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y) \\v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) \\w(x, y, z) &= w_0(x, y)\end{aligned}\tag{3.1}$$

Les fonctions $u_0(x, y, t)$, $v_0(x, y, t)$ et $w_0(x, y, t)$ sont les déplacements du plan moyen. Les fonctions φ_x et φ_y sont liées aux rotations β_x et β_y de la normale au plan moyen avant et après déformation respectivement dans les plans (x, z) et (y, z) (Fig. 3.1).

$$\theta_x = \beta_y \quad \text{et} \quad \theta_y = -\beta_x\tag{3.2}$$

Les fonctions φ_x et φ_y sont données par :

$$\begin{aligned}\varphi_x(x, y) &= -\beta_x(x, y) = \theta_y(x, y) \\ \varphi_y(x, y) &= -\beta_y(x, y) = -\theta_x(x, y)\end{aligned}\tag{3.3}$$

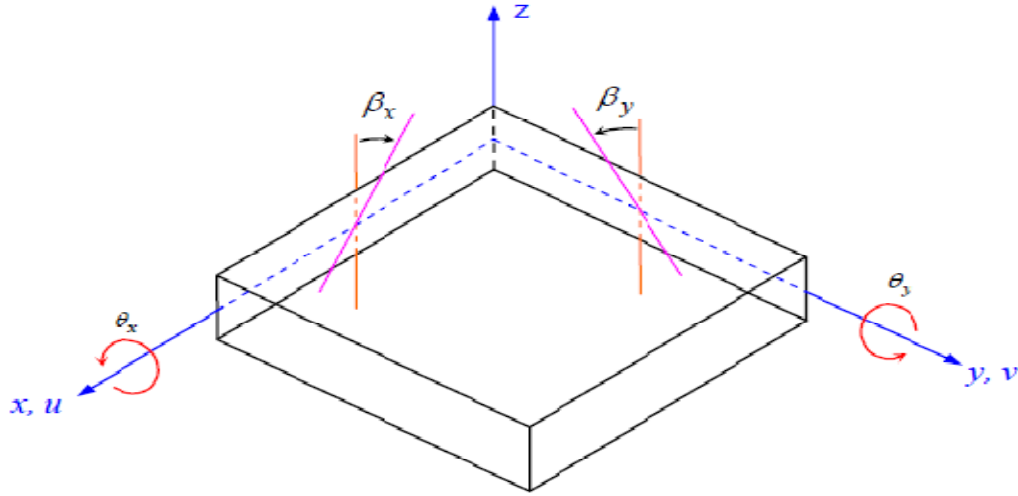


Fig. 3.1 Déformations en flexion dans le cas de la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse

D'après l'équation (3.1), le champ des déplacements s'écrit ensuite sous la forme :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z\beta_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z\beta_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

Ou bien :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\theta_y(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z\theta_x(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

Le problème de comportement des stratifiés avec prise en compte du cisaillement transverse est alors un problème à cinq degrés de liberté : u_0 , v_0 , w_0 , θ_x et θ_y .

Dans le cas où la structure est maillée en des éléments stratifiés à quatre nœuds (Fig. 3.2), le champ des déplacements en membrane et des rotations en un point est exprimé par interpolation en fonction de ces degrés de liberté aux quatre nœuds :

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y, t) &= h_1(x, y)u_1(t) + h_2(x, y)u_2(t) + h_3(x, y)u_3(t) + h_4(x, y)u_4(t) \\
 v_0(x, y, t) &= h_1(x, y)v_1(t) + h_2(x, y)v_2(t) + h_3(x, y)v_3(t) + h_4(x, y)v_4(t) \\
 w_0(x, y, t) &= h_1(x, y)w_1(t) + h_2(x, y)w_2(t) + h_3(x, y)w_3(t) + h_4(x, y)w_4(t) \\
 \theta_x(x, y, t) &= h_1(x, y)\theta_x^1(t) + h_2(x, y)\theta_x^2(t) + h_3(x, y)\theta_x^3(t) + h_4(x, y)\theta_x^4(t) \\
 \theta_y(x, y, t) &= h_1(x, y)\theta_y^1(t) + h_2(x, y)\theta_y^2(t) + h_3(x, y)\theta_y^3(t) + h_4(x, y)\theta_y^4(t)
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

où $u_1, v_1, \dots, \theta_y^1, \dots, u_4, \dots, \theta_y^4$, sont respectivement les déplacements généralisés des nœuds $P1, P2, P3$ et $P4$; et $h1, h2, h3$ et $h4$ sont les fonctions d'interpolation.

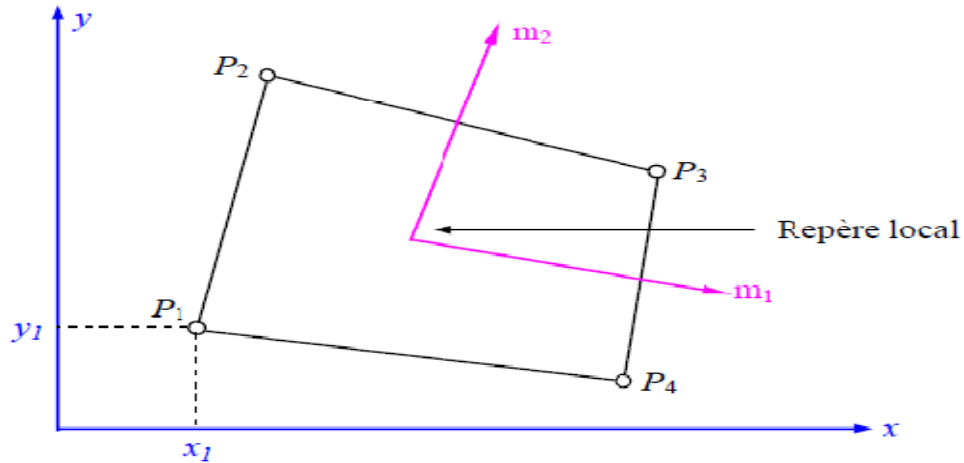


Fig. 3.2 Elément fini Q4 à quatre nœuds

Il en résulte que le champ des déplacements généralisés dans l'élément peut s'exprimer sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & 0 & h_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_x^1 \\ \theta_y^1 \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \\ \theta_x^4 \\ \theta_y^4 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

La relation (3.7) peut s'écrire pour l'élément e , sous la forme :

$$\mathbf{U}(x, y, t) = \mathbf{N}_e(x, y) \mathbf{u}_e(t) \quad (x, y) \in \text{élément } e, \quad (3.8)$$

où $\mathbf{U}(x, y, t)$ est le vecteur des déplacements en membrane et rotations, $\mathbf{N}_e(x, y)$ est la matrice des fonctions de forme de l'élément e et $\mathbf{u}_e(t)$ est le vecteur des degrés de liberté de l'élément e .

La matrice des déplacements et des rotations en un point sont donnés par :

$$\mathbf{U}^t(x, y, t) = [u_0 \ v_0 \ w_0 \ \theta_x \ \theta_y] \quad (3.9)$$

La matrice des fonctions de forme pour l'élément e s'écrit :

$$N_e = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_4 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Le vecteur des degrés de liberté de l'élément e est donné par :

$$u_e^t = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_x^1 \quad \theta_y^1 \quad \dots \quad w_4 \quad \theta_x^4 \quad \theta_y^4] \quad (3.11)$$

3.3.2 Comportement en membrane :

Pour le comportement en membrane, le champ des déformations s'écrit sous la forme :

$$\varepsilon_m = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

En considérant l'expression (3.7), les déformations en membrane peuvent donc être exprimées par :

$$\varepsilon_m(x, y) = \mathbf{B}_m(x, y) \mathbf{u}_e(t), \quad (3.13)$$

où \mathbf{B}_m est la dérivée de la matrice des fonctions de forme, obtenue comme :

$$B_m = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \frac{\partial h_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial y} & \frac{\partial h_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

3.3.3 Comportement en flexion :

Le comportement hors du plan du stratifié est déduit de l'expression des déformations en flexion. En considérant l'équation (3.3), on obtient :

$$\varepsilon_f = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^f \\ \varepsilon_{xy}^f \\ \varepsilon_{xy}^f \end{bmatrix} = zk(x, y, t) \quad (3.15)$$

où κ est la matrice de courbure, soit :

$$k(x, y, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial x} - \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

En considérant l'expression (3.7), la matrice de courbure s'écrit :

$$\kappa(x, y, t) = \mathbf{B}\kappa(x, y) \mathbf{u}e(t), \quad (3.17)$$

où la matrice $\mathbf{B}\kappa$ est exprimée par :

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial h_2}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial h_3}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial h_4}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial h_4}{\partial x} & \frac{\partial h_4}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

3.3.4 Comportement en cisaillement transverse :

Les déformations en cisaillement transverse sont données par la relation suivante :

$$\gamma_c = \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} - \theta_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_y \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

En introduisant la matrice des fonctions d'interpolation (3.7), les déformations en cisaillement transverse sont exprimées par :

$$\gamma_c(x, y) = \mathbf{B}\gamma(x, y) \mathbf{u}e(t), \quad (3.20)$$

où la matrice $\mathbf{B}\gamma$ s'écrit comme :

$$B_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial x} & -h_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x} & -h_2 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x} & -h_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial x} & -h_4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & h_1 & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial y} & 0 & h_2 & 0 & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial y} & 0 & h_3 & 0 & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial y} & 0 & h_4 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

3.3.5 Formulation des contraintes :

L'état des contraintes dans la couche k du stratifié correspond à un état de contraintes planes pour lequel $\sigma_{zz} = 0$. Les contraintes dans la couche k du stratifié sont données dans le repère structurel par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \hat{Q}_{11} & \hat{Q}_{12} & \hat{Q}_{16} \\ \hat{Q}_{12} & \hat{Q}_{22} & \hat{Q}_{26} \\ \hat{Q}_{16} & \hat{Q}_{26} & \hat{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \hat{Q}_{11} & \hat{Q}_{12} & \hat{Q}_{16} \\ \hat{Q}_{12} & \hat{Q}_{22} & \hat{Q}_{26} \\ \hat{Q}_{16} & \hat{Q}_{26} & \hat{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} k_x \\ k_x \\ k_y \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

ou sous la forme réduite suivante :

$$\sigma_m^k(x, y, z, t) = \hat{Q}_k \varepsilon_m(x, y, t) + z \hat{Q}_k k(x, y, t) \quad (3.23)$$

\hat{Q}_k est la matrice de rigidité réduite de la couche rapportée aux axes géométriques de l'élément finis. Les éléments de la matrice de rigidité réduite \hat{Q}_{ij} peuvent être exprimés en fonction des rigidités dans les axes du matériau Q_{ij} . En utilisant les relations (3.8) et (3.11) les contraintes dans la couche k auront la forme suivante :

$$\sigma_m^k(x, y, z, t) = [\hat{Q}_k B_m(x, y, t) + z \hat{Q}_k B_k(x, y, t)] u_e(t) \quad (3.24)$$

De même, les contraintes de cisaillement transverse s'écrivent dans la couche k par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{44} & C'_{45} \\ C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

où les coefficients C'_{ij} sont les rigidités en cisaillement transverse explicités par les relations :

$$\begin{aligned} C'_{44} &= G_{TT'} \cos^2 \theta + G_{LT'} \sin^2 \theta \\ C'_{45} &= (G_{LT'} - G_{TT'}) \sin \theta \cos \theta \\ C'_{55} &= G_{TT'} \sin^2 \theta + G_{LT'} \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (3.26)$$

où $G_{TT'}$ et $G_{LT'}$ sont les modules de cisaillement dans les plans principaux respectifs (T, T') et (L, T') de la couche k . θ est l'angle que font les directions principales de la couche avec les directions géométriques du stratifié. Finalement, la relation (3.25) s'écrit sous la forme :

$$\sigma_c^k(x, y, z, t) = C'_k \gamma_c(x, y, t) \quad (3.27)$$

σ^k est la matrice des contraintes de cisaillement transverse dans la couche k et C'_k est la matrice des coefficients de rigidité en cisaillement transverse de la couche k .

Enfin, la relation (3.27) s'exprime par :

$$\sigma_c^k(x, y, z, t) = C'_k B_\gamma(x, y, t) u_e(t) \quad (3.28)$$

4.3.6 Formulation de l'énergie :

4.3.6.1 Énergie de déformation :

L'énergie de déformation de l'élément fini e d'un stratifié est déterminée par l'expression suivante :

$$U_d^e = \frac{1}{2} \iiint_e \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{xy}] dx dy dz + \frac{1}{2} \iiint_e \begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} [\gamma_{yz} \quad \gamma_{xz}] dx dy dz \quad (3.29)$$

où $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy})$ est le champ des déformations.

Dont son expression peut être réduite à :

$$U_d^e = \frac{1}{2} u_e^t K_e u_e \quad (3.30)$$

où \mathbf{K}_e est la matrice de rigidité de l'élément e exprimée par :

$$K_e = \iint_e B_m^t Q'_k B_m dx dy + \iint_e z B_m^t Q'_k B_k dx dy + \iint_e z B_k^t Q'_k B_m dx dy + \iint_e z^2 B_k^t Q'_k B_k dx dy + \iint_e B_\gamma^t C'_k B_\gamma dx dy \quad (3.31)$$

L'énergie de déformation de la structure est ensuite obtenue par assemblage sur l'ensemble des éléments. Soit :

$$U_d = \frac{1}{2} U^t K U \quad (3.32)$$

où \mathbf{K} est la matrice de rigidité globale de la structure. Elle est construite par assemblage des matrices de rigidité relatives de chacun des éléments. Ces matrices sont appelées matrices de rigidité élémentaires. Soit :

$$K = \sum_e K_e \quad (3.33)$$

3.3.6.2 Énergie cinétique :

En négligeant l'énergie cinétique de rotation, l'énergie cinétique d'un élément est donnée par :

$$E_c^e = \frac{1}{2} \int_e \rho_e (\dot{u}_0^2 + \dot{v}_0^2 + \dot{w}_0^2) dv_e \quad (3.34)$$

où \dot{u}_0^2, \dot{v}_0^2 et \dot{w}_0^2 sont les vitesses de déplacement du plan moyen de l'élément e , et ρ_e est la masse volumique de l'élément e .

D'après l'expression (3.7), le déplacement de l'élément e s'écrit sous la forme :

$$u_0(x, y, t) = H_u^e(x, y)u_e(t) \quad (3.35)$$

H_u^e est la matrice d'interpolation de l'élément soit :

$$H_u^e = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

D'où l'expression de l'énergie cinétique de l'élément :

$$E_c^e = \frac{1}{2} \dot{u}_e^t M_e \dot{u}_e \quad (3.37)$$

en introduisant la matrice masse de l'élément :

$$M_e = \int_e \rho_e H_u^{et} H_u^e dv \quad (3.38)$$

L'énergie cinétique de la structure sera obtenue par assemblage sur l'ensemble des éléments.

Soit :

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{U}^t M \dot{U} \quad (3.39)$$

où \mathbf{M} est La matrice de masse global. Elle est construite de la même manière que la matrice de rigidité \mathbf{K} . Soit:

$$M = \sum_e M_e \quad (3.40)$$

3.3.6.3 Travail des charges extérieures :

La fonction énergie des charges transverses réparties exercées sur l'élément e s'écrit :

$$W_f^e = \int_{S_e} q_e w_0 dS_e \quad (3.41)$$

où $q_e(x, y, t)$ est la charge transverse exercée par unité de surface. A noter que, l'intégrale est étendue sur toute la surface de l'élément e . w_0 est le déplacement transverse déduit de l'équation (3.7) et exprimé par:

$$w_0(x, y, t) = H_w^e(x, y)u_e(t) \quad (3.42)$$

La matrice H_w^e est la matrice des fonctions de forme limitée au déplacement transverse, elle est donnée par :

$$H_w^e = [0 \quad 0 \quad h_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad h_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad h_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad h_4 \quad 0 \quad 0] \quad (3.43)$$

La fonction énergie des charges transverses s'écrit sous la forme :

$$W_f^e = u_e^t F_e \quad (3.44)$$

où F_e est le vecteur des charges généralisées de l'élément e . Il est exprimé par :

$$F_e = F_e(t) = \int_{S_e} H_w^{et} q_e dS_e \quad (3.45)$$

La fonction énergie des charges transverses de l'ensemble de la structure s'obtient par assemblage sur l'ensemble des éléments :

$$W_f^e = U^t F \quad (3.46)$$

où $F = F(t)$ est le vecteur des charges généralisées de la structure. Il est construit de la même manière que les matrices M et K . Soit :

$$F = \sum_e F_e \quad (3.47)$$

3.4 Formulation par éléments finis de l'équation de la dynamique

3.4.1 Introduction :

L'équation dynamique de la structure est obtenue en supposant que l'énergie totale est stationnaire. Soit :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \dot{U}^t M \dot{U} - \frac{1}{2} U^t K U \right) dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} U^t F dt = 0 \quad (3.48)$$

Ce qui conduit à l'équation usuelle :

$$M \ddot{U} + K U = F \quad (3.49)$$

où \ddot{U} est la matrice accélération de la structure. Les matrices \mathbf{K} , \mathbf{M} , et le vecteur \mathbf{F} sont respectivement exprimés par les équations (3.33), (3.40) et (3.47).

Dans le cas où les phénomènes d'amortissement sont décrits par un amortissement de type visqueux, il est possible de caractériser l'amortissement par une fonction énergie de dissipation de forme quadratique :

$$U_a = \frac{1}{2} \dot{U}^t C \dot{U} \quad (3.50)$$

où \mathbf{C} est la matrice d'amortissement, symétrique et non négative. L'équation de la dynamique de la structure (3.49), sera alors modifiée à:

$$M \ddot{U} + C \dot{U} + K U = F \quad (3.51)$$

Où M représente la matrice de masse de la structure, \ddot{U} le vecteur d'accélération nodale, C est la matrice d'amortissement de la structure, \dot{U} est le vecteur de vitesse nodale, K est la matrice de rigidité de la structure, U est le vecteur de déplacement nodale et F est le vecteur de la charge nodale appliquée.

Chapitre 4

ANALYSE DYNAMIQUE DES PLAQUES COMPOSITES PAR INTEGRATION NUMERIQUE

4.1 Introduction

Lorsqu'une structure est soumise à un chargement instantané, il est raisonnable d'admettre que sa réponse varie aussi avec le temps. Dans ce cas, une analyse dynamique doit être menée. Si cependant, la fréquence du chargement est basse comparée avec la fréquence naturelle de la structure, alors la réponse donnée par l'analyse statique sous la charge instantanée peut suffire. Cette hypothèse est généralement appliquée quand la fréquence est inférieure à un tiers de la fréquence naturelle la plus basse.

Si la charge appliquée varie rapidement, donc une variété de techniques de solution peut être employée en tenant en compte de l'effet de l'inertie dû aux effets de la masse et de l'amortissement.

4.1.1. Introduction de l'amortissement dans le modèle numérique :

4.1.1.1 Amortissement de Rayleigh

En dynamiques des structures, l'amortissement joue un rôle important. Toutefois, dû au manque d'informations sur sa valeur, la meilleure façon de le traiter est d'approximer la valeur de l'amortissement par l'amortissement de Rayleigh. La définition de cet amortissement consiste à définir deux paramètres α et β de sorte à introduire à l'équation d'équilibre [Indrajit] une matrice d'amortissement [C] telle que :

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (4.1)$$

Où [M] et [K] sont respectivement les matrices de masse et de rigidité.

Pour un mode de vibration donné, l'amortissement s'exprime par :

$$\xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2} \quad (4.2)$$

Où ω_i est la fréquence naturelle associée au mode i .

La grande difficulté qui peut être rencontrée est de déterminer les valeurs des coefficients α et β réalistes qui représentent au mieux l'amortissement d'un système, c'est-à-dire pour tous les modes, étant donné que le coefficient d'amortissement ξ augmente avec la fréquence naturelle [Indrajit].

$$\xi_i = \frac{\xi_m - \xi_1}{\omega_m - \omega_1} (\omega_i - \omega_1) + \xi_1 \quad (4.3)$$

L'analyse de l'équation (4.2) met en évidence le fait que pour les systèmes n'ayant pas de fréquences naturelles très basses, le coefficient d'amortissement augmente linéairement avec la fréquence naturelle. Ainsi au lieu d'utiliser un coefficient d'amortissement constant, on peut commencer par une valeur très faible pour le premier mode et ensuite la faire accroître jusqu'à la valeur souhaitée

Indrajit propose une méthode d'obtention des coefficients α et β [Indrajit]. Si m est le nombre de modes significatifs du système, on choisit $2,5m$ modes et on procède comme suit :

- Sélectionner ξ_1 , le coefficient d'amortissement pour le premier mode;
- Sélectionner ξ_m , le coefficient d'amortissement pour le m^{ieme} mode;
- Pour les modes intermédiaires i , où $1 < i < m$, calculer ξ_i à l'aide de (4.3);
- Pour les modes i , où i est plus grand que m , calculer ξ_i à l'aide de l'équation suivante:

$$\xi_i = \frac{\xi_m - \xi_1}{\omega_m - \omega_1} (\omega_i - \omega_m) + \xi_1 \quad (4.4)$$

- Sélectionner une série de données ξ_1, ξ_m, ω_1 et ω_m
- A l'aide de cette série de données, calculer β comme suit:

$$\beta = \frac{2\xi_1\omega_1 - 2\xi_m\omega_m}{\omega_1^2 - \omega_m^2} \quad (4.5)$$

- Afin d'obtenir la valeur de α , substituer la valeur β dans l'expression:

$$2\xi_1\omega_1 = \alpha + \beta\omega_1^2 \quad (4.6)$$

- Sélectionner une autre série de données, $\xi_1, \xi_{2.5m}, \omega_1$ et $\omega_{2.5m}$ et obtenir, à partir de cette série, α et β à l'aide des équations (4.5) et (4.6).
- Enfin, faire une moyenne des α et β obtenues dans les étapes précédentes.

4.2 Résolution du problème dans le domaine temporel

La majorité des analyses dynamiques résout l'équation générale de mouvement suivante :

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F \quad (4.7)$$

Où

$[M]$ Est la matrice de masse de La structure,

$[C]$ La matrice d'amortissement de La structure,

$[K]$ La matrice de rigidité de La structure,

$\{F(t)\}$ Le vecteur de la charge nodale appliquée,

$\{U\}, \{\dot{U}\}$ et $\{\ddot{U}\}$ respectivement les vecteurs nodales, de déplacement, de vitesse et d'accélération.

Elle permet s'exprimer la réponse temporelle de chaque point nodal dans la structure par l'introduction des forces d'inertie et des forces d'amortissement dans l'équation. Les forces d'inertie sont le produit de la masse par l'accélération et les forces d'amortissement sont le produit du coefficient d'amortissement par la vitesse.

L'équation (4.7) est une série d'équations différentielles en forme matricielle exprimant la réponse dynamique d'une structure modélisée avec un nombre fini de degrés de liberté.

Cependant, la solution de cette série d'équations prises avec incrémentation du temps nécessite des milliers de solutions statiques pour obtenir une réponse temporelle complète de la structure. Cela peut être impraticable pour n'importe quel cycle de durée importante. Donc, il est important d'examiner la réponse vibrationnelle pour quelques excitations spécifiques.

Les trois types les plus communs d'analyses sont :

- Analyse *modale*.
- Analyse de la *réponse fréquentielle harmonique*.

- Analyse *dynamique transitoire*.

4.2.1. Analyse Modale :

Dans plusieurs applications d'ingénierie, les recherches des fréquences naturelles de vibration sont d'un grand intérêt. C'est le type d'analyse dynamique le plus commun aux différents chercheurs dans ce domaine et est comme étant l'analyse aux valeurs propres. En second position, les fréquences, les formes modales de vibration qui apparaissent avec les fréquences naturelles se classe aussi parmi les résultats les plus recherchés. Ils représentent la réponse de vibration libre sans amortissement de La structure causée par une perturbation initiale de la position d'équilibre statique. Cette solution dérive de l'équation générale en annulant l'amortissement et les termes de la force appliquée.

4.2.2. Analyse de la réponse fréquentielle :

Ce type d'analyse est très intéressant surtout lorsque la réponse est exigée pour un état stable d'une structure qui est sous excitation d'une force harmonique avec une fréquence donnée. La réponse peut être nécessaire pour une série de fréquences.

Dans une analyse de la réponse fréquentielle, la réponse à une excitation harmonique est aussi harmonique et se produit à la même fréquence.

Aussi et pour des raisons de simplification de la solution, l'amortissement peut souvent être ignoré puisque la plupart des structures sont légèrement amortis. Cela permet de calculer toutes les fréquences sauf les fréquences naturelles. Si une fréquence naturelle est utilisée comme une excitation, et aucun amortissement n'est considéré, la solution échoue en raison de problèmes numériques rencontrés.

4.2.3. Analyse de la réponse transitoire :

Si la fonction d'excitation n'est pas harmonique, mais elle est arbitraire dépendante du temps, alors une analyse de la réponse transitoire doit être utilisée. Dans ce cas, l'équation générale de mouvement est résolue mais, dans ce cas, l'échelle de temps du chargement doit être pris en considération surtout lorsque les effets d'amortissement ou d'inertie sont importants.

On fait appel à ce type d'analyse pour déterminer les déplacements, les déformations et les contraintes qui varient avec le temps, dans une structure soumise à une charge transitoire. Il y a deux approches de base pour l'analyse transitoire. La première approche est connu sous le nom de la méthode de superposition modale [Craveur 96] (voir annexe C), qui admet que la réponse de la structure peut être représentée par les fréquences inférieures naturelles

fondamentales de la structure. Donc la réponse complète, est l'addition des fractions correctes des formes modales des fréquences les plus basses. Mathématiquement, cela implique une transformation de l'équation à partir de coordonnées des déplacements nodaux en une série de coordonnées modales. Cela aboutit à beaucoup moins d'équations, mais des résultats d'une solution approximative étant obtenus.

La deuxième approche utilisée procède à la résolution des systèmes d'équations par intégration directe qui implique la totalité des systèmes d'équations et exige beaucoup de pas de temps avec une solution complète dans chaque pas. Cependant, il a été prouvé que cette dernière est suffisamment adéquate pour la résolution des problèmes dynamiques les plus structurels.

4.3. Analyse dynamique par intégration numérique

L'approche la plus générale pour résoudre la réponse dynamique des systèmes structurels est l'intégration numérique directe des équations dynamiques d'équilibre. Cela implique la tentative de satisfaire l'équilibre dynamique à des points discrets dans le temps, après que la solution ait été définie au temps zéro. La plupart des méthodes emploient des Intervalles de temps égaux à $\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, n\Delta t$.

Cependant, toutes les approches peuvent fondamentalement être classifiées comme méthodes d'intégration explicites ou bien implicites.

- Les méthodes explicites n'impliquent pas la solution d'une série d'équations linéaires à chaque pas de temps. Essentiellement, ces méthodes emploient l'équation différentielle au temps "t" pour prévoir une solution au temps "t+ Δt ". Pour les structures les plus réelles, qui contiennent des éléments rigides, un très petit pas de temps est exigé pour obtenir une solution stable. Donc, toutes les méthodes explicites sont conditionnellement stables vis-à-vis de la taille du pas de temps.

- Les méthodes implicites essayent de satisfaire l'équation différentielle au temps "t" après que la solution au temps " Δt " ait été trouvée. Ces méthodes exigent la solution d'une série d'équations linéaires en chaque pas de temps. Cependant, de plus grands pas de temps peuvent être employés.

Les méthodes implicites peuvent être conditionnellement ou inconditionnellement stables. Plusieurs méthodes à pas multiples précises et d'ordre plus élevé, ont été développées pour la solution numérique d'équations différentielles. En se basant sur un grand nombre

d'expériences, seulement les méthodes implicites à un pas et inconditionnellement stables doivent être utilisées pour l'analyse dynamique des Structures à un seul pas.

4.3.1 Méthode d'intégration directe de Newmark :

Après discrétisation par éléments finis, nous avons obtenu dans la relation (4.7) un système stationnaire dont sa résolution numérique est obtenue en utilisant un schéma de discrétisation temporelle.

Parmi une grande variété de schémas existants pour la résolution de ce type de système, celui de Newmark permet de donner les meilleures approximations.

La méthode de Newmark (tableau 4.1), est implicite permettant de construire la solution à l'instant $t+\Delta t$ à partir des vecteurs connus $\{U_t\}$, $\{\dot{U}_t\}$, $\{\ddot{U}_t\}$. Elle utilise les hypothèses suivantes :

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + \Delta t[(1 - \beta_1)\ddot{U}_t + \beta_1\ddot{U}_{t+\Delta t}] \quad (4.8)$$

$$U_{t+\Delta t} = U_t + \Delta t\dot{U}_t + \Delta t^2[(1 - \delta)\ddot{U}_t + \delta\ddot{U}_{t+\Delta t}] \quad (4.9)$$

Où β_1 et δ sont des paramètres qui sont déterminés pour obtenir l'exactitude et la stabilité du schéma d'intégration.

En fait, le paramètre δ contrôle la variation de l'accélération pendant l'incrément de temps Δt . À l'instant $t=0$, les conditions initiales du problème sont utilisées comme valeurs initiales pour démarrer le processus de récurrences. Les paramètres β_1 et δ contrôlent la précision et la stabilité de la méthode. On choisit en général: $\beta_1 = \frac{1}{2}$ et $\delta = \frac{1}{4}$ conformément à la proposition de Newmark pour un schéma inconditionnellement stable. Afin de trouver la solution des déplacements, vitesses, et accélérations aux temps $t+\Delta t$, on doit considérer, en plus des équations (4.8) et (4.9), les équations de l'équilibre dynamique au temps $t+\Delta t$.

$$M\ddot{U}_{t+\Delta t} + C\dot{U}_{t+\Delta t} + KU_{t+\Delta t} = P_{t+\Delta t} \quad (4.10)$$

En utilisant les équations (4.8) et (4.9), on peut aboutir aux dérivées $\ddot{U}_{t+\Delta t}$ et $\dot{U}_{t+\Delta t}$, en fonction des déplacements inconnus $U_{t+\Delta t}$; après substitution de ces deux relations dans l'équation du mouvement au temps $(t+\Delta t)$, on obtient :

$$\check{K}.U_{t+\Delta t} = \check{P}_{t+\Delta t} \quad (4.11)$$

où

$$\check{K} = K + a_0M + a_1C$$

$$\begin{aligned} \check{P} = P_{t+\Delta t} + M. [a_0 U_t + a_2 \dot{U}_t + a_3 \ddot{U}_t] \\ + C. [a_1 U_t + a_4 \dot{U}_t + a_5 \ddot{U}_t] \end{aligned} \quad (4.12)$$

Avec

$$\begin{aligned} a_0 = \frac{1}{\delta \cdot \Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{\delta}{\delta \cdot \Delta t}, \quad a_2 = \frac{1}{\delta \cdot \Delta t}, \quad a_3 = \frac{1}{2\delta} - 1 \\ a_4 = \frac{\beta_1}{\delta} - 1, \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\beta_1}{\delta} - 2 \right), \quad a_6 = \Delta t \cdot (1 - \beta_1), \quad a_7 = \beta_1 \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (4.13)$$

Tableau 4.1 Algorithme complet de la méthode de **NEWMARK**

a) initialisation

- 1) conditions initiales U_0, \dot{U}_0 et \ddot{U}_0
- 2) choix de Δt , β_1 et δ et calcul des coefficients a_0, \dots, a_7 (cf ci-dessus)
- 3) assembler les matrices de raideur \mathbf{K} , de masse \mathbf{M} et d'amortissement \mathbf{C}
- 4) former la matrice de rigidité effective $\check{K} = K + a_0 M + a_1 C$
- 5) factoriser \check{K}

b) à chaque pas de temps

- 1) calculer le chargement effectif \check{P}

$$\check{P} = P_{t+\Delta t} + C. [a_1 U_t + a_4 \dot{U}_t + a_5 \ddot{U}_t] + M. [a_0 U_t + a_2 \dot{U}_t + a_3 \ddot{U}_t]$$

- 2) résoudre $\check{K} U_{t+\Delta t} = \check{P}_{t+\Delta t}$
- 3) calculer les vitesses et accélérations au temps $t + \Delta t$

$$\begin{aligned} \ddot{U}_{t+\Delta t} &= a_0 (U_{t+\Delta t} - U_t) - a_1 \dot{U}_t - a_3 \ddot{U}_t \\ \dot{U}_{t+\Delta t} &= \dot{U}_t + a_6 \ddot{U}_t + a_7 \ddot{U}_{t+\Delta t} \end{aligned}$$

- 4) calcul du pas de temps suivant : retour en b)1)
-

Chapitre 5

ANALYSE COMPARATIVE ET VALIDATION DU MODELE ELEMENT FINI CONSIDERE : ETUDE DE CAS

5.1 Introduction

L'objectif du présent chapitre est d'appliquer la modélisation développée au chapitre 2 à l'analyse des matériaux composites stratifiés, dans le cas statique et dynamique (vibration libre). Cette modélisation permet d'établir l'équation (2.92) des vibrations libres en flexion transversale de la structure. Sa résolution conduit ensuite aux calculs des fréquences propres. L'analyse par éléments finis évalue également le champ de déplacement de la structure considérée. Par la suite, la méthode utilisée est comparée et validée à partir des travaux issus de la bibliographie et du code de calcul ANSYS 11.

5.1.1 Modélisation par le logiciel ANSYS :

ANSYS est un logiciel de simulation multi-physique commercial, basé sur la méthode des éléments finis. Il permet de résoudre, entre autre, des problèmes de thermique, d'électrostatique, de mécanique. Grâce à la mise en place du module .Multi-physiques, ce logiciel est donc capable de mener des analyses couplées telles que mécanique+électrostatique ou mécanique+thermique. ANSYS possède une bibliothèque d'éléments finis très étendue. Le choix de l'élément fini à utiliser va dépendre du problème. Nos simulations sont limitées à modéliser des plaques multicouches au moyen de l'élément SHELL99. Cet élément est formé de 8 nœuds et 6 ddl par nœud. Les variables nodales sont les trois composantes cartésiennes du champ de déplacements et les trois rotations autour des axes globaux ($U, V, W, \theta_x, \theta_y, \theta_w$). L'utilisation du logiciel ANSYS a permis de visualiser les modes de vibration associés aux différentes plaques.

Une évaluation du modèle dans ANSYS prend un temps de « 3,02 s » pour le calcul de la première fréquence d'une plaque composite (0/90)₃.

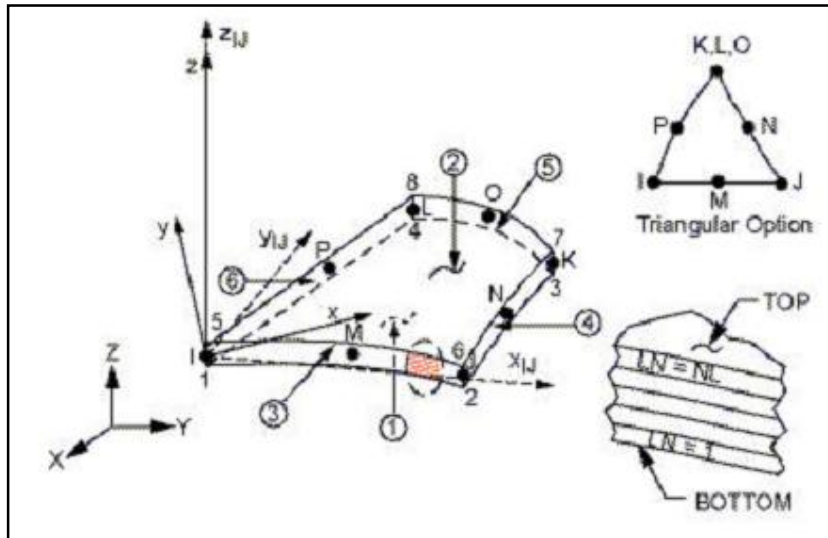


Fig. 5.1 L'élément *Shell 99*

5.2 Vibration libre des plaques multicouches

On utilise un programme écrit en langage Fortran 90 pour le calcul des fréquences propres. Cette partie est consacrée à la comparaison des résultats obtenus à l'aide de l'application du modèle élément fini présenté avec ceux de la littérature. Pour démontrer l'efficacité de la formulation, on a considéré différentes plaques multicouches, à appuis simples. Un maillage uniforme de 6×6 est effectué pour mailler la plaque multicouche (Fig. 3.2). Les résultats sont comparés au modèle analytique 3D [Noor 72], numérique en utilisant le code de calcul ANSYS et aux modèles d'autres théories existantes dans la littérature. Les valeurs rapportées pour la comparaison sont la fréquence propre adimensionnelle obtenue pour le premier mode de vibration. Durant cette étude, on discute l'effet du degré d'orthotropie (qui est défini par le rapport des modules d'Young de deux directions différentes E_1/E_2), de la séquence d'empilement, de l'épaisseur des plaques, du nombre et de l'angle d'orientation des couches.

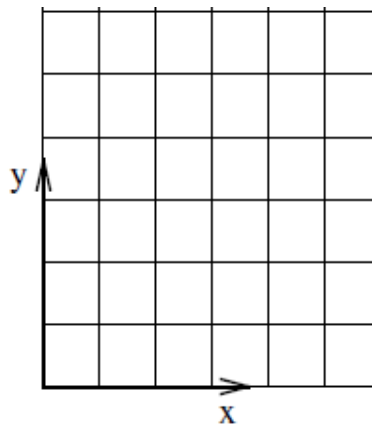


Fig. 5.2 Le maillage uniforme dans le plan de 6×6 utilisé pour calculer les valeurs propres des plaques multicouches

On impose sur toutes les plaques le même maillage ainsi que les mêmes conditions aux limites, (appuis simples) (Fig.5.3).

Les caractéristiques mécaniques de ce matériau sont données suivant la direction des fibres (notée L ou 1) et la direction transverse (notée T ou 2) (Fig.5.4).

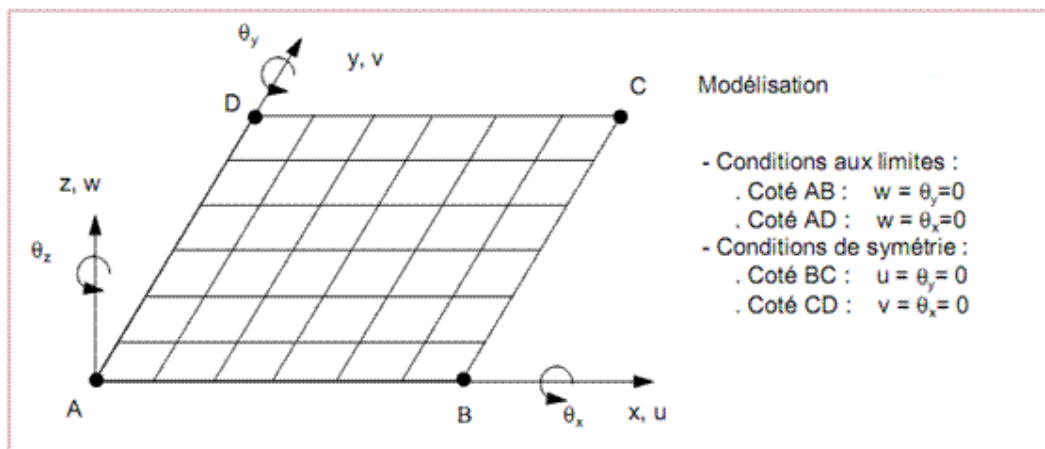


Fig. 5.3 Le maillage uniforme dans le plan de 6×6 et conditions aux limites d'une plaque en appuis simples

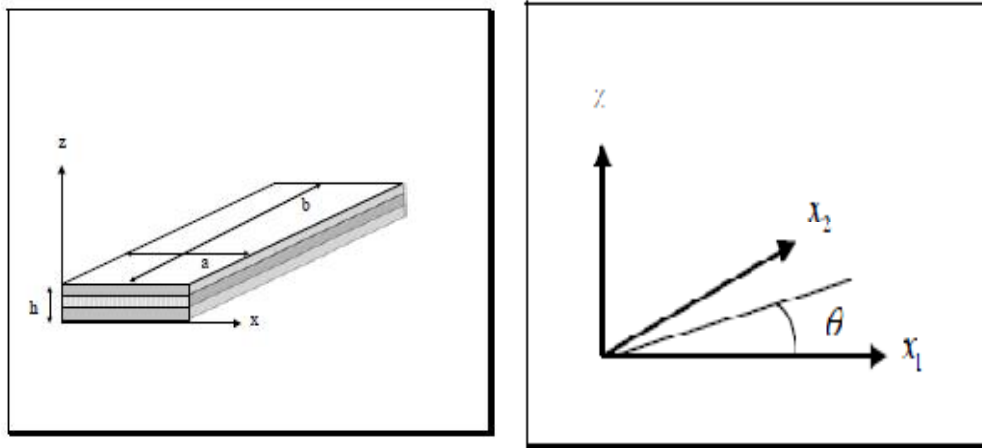


Fig. 5.4 Géométrie et orientation des couches

5.2.1 Plaques composites symétriques :

5.2.1.1 Effet du rapport longueur/épaisseur (cas de la plaque multicouche $(0^\circ/90^\circ)_{2s}$):

Tout d'abord, nous considérons une plaque multicouche symétrique d'empilement croisé $(0^\circ/90^\circ)_{2s}$ et de géométrie carrée. On cherche dans ce cas, l'effet du rapport entre sa longueur et son épaisseur (a/h) pour calculer ses fréquences propres. Ce rapport varie de 4 à 100, autrement dit, de la plaque très épaisse à la plaque très mince. Les caractéristiques géométriques et élastiques de chaque couche composant la plaque sont résumées dans le tableau 5.1.

Tableau 5.1 Caractéristiques géométriques et élastiques de la plaque multicouche
 $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$

Module d'Young	$E_1/E_2=40,$	$E_2=E_3$
Module de cisaillement	$G_{12}=G_{13}=0.6E_2,$	$G_{23} = 0.5 E_2$
Coefficient de Poisson	$\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}=0.25$	
Epaisseur de la plaque	$a/h=4, 10, 20, 50, 100$	

L'évolution des fréquences naturelles en fonction du rapport longueur sur épaisseur a/h de la plaque est représentée sur la figure 5.5 en utilisant la méthode des éléments finis développée dans ce travail et le code ANSYS. Rappelons que le modèle EF utilisé et celui utilisé dans ANSYS appartient à la famille de la théorie du premier ordre. On constate que les fréquences propres augmentent avec le rapport a/h .

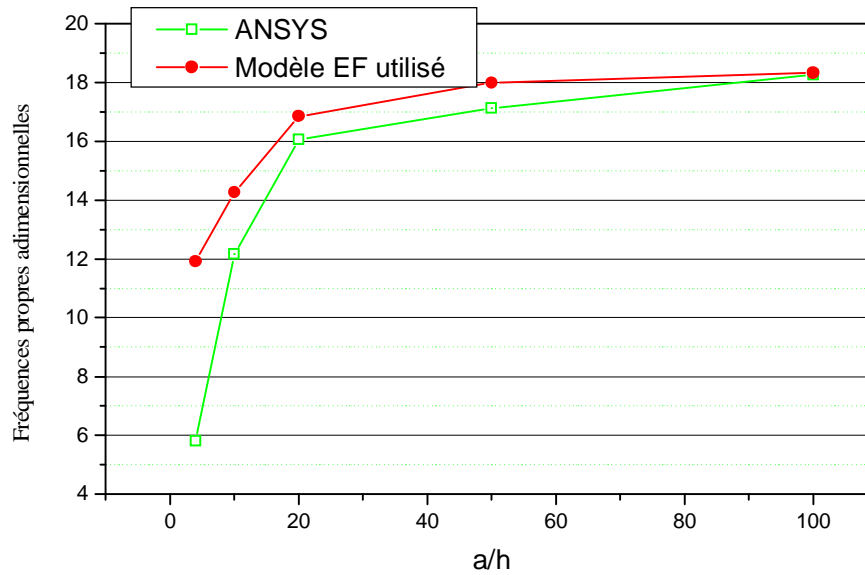


Fig.5.5 Variation de la fréquence propre d'un stratifié symétrique ($0^{\circ}/90^{\circ}/90^{\circ}/0^{\circ}$) en fonction du rapport longueur sur épaisseur de la plaque a/h

5.2.1.2 Effet de la géométrie de la plaque (cas de la plaque multicouche équilibrée (45 /- 45)2s) :

Afin de mieux interpréter l'effet de la géométrie de la plaque composite et de l'orientation des fibres, on a pris en considération le cas des plaques symétriques équilibrées rectangulaires réguliers (45/-45)2s. On étudie alors les effets des rapports longueur/épaisseur, longueur/largeur et de l'orientation des fibres des couches composantes sur le comportement vibratoire libre des plaques composites (fréquence propre fondamentale adimensionnelle).

Les caractéristiques élastiques du matériau orthotrope de chaque couche de la plaque et leurs propriétés géométriques sont résumées dans le tableau 5.2.

On a représenté sur les figures 5.6 à 5.8 la variation de la fréquence propre adimensionnelle en fonction des rapports géométriques a/b et a/h . Pour valider nos résultats, on a fait appel au code numérique ANSYS. Une bonne corrélation avec les résultats obtenus par ANSYS est en effet observée.

On constate que les fréquences propres adimensionnelles augmentent avec l'augmentation du rapport géométrique a/b , quelque soit le rapport a/h .

Tableau 5.2 Caractéristiques élastiques et géométriques des plaques multicouches symétriques

$(45^\circ/-45^\circ)_{2s}$

Module d'Young	$E_1/E_2=40,$	$E_2=E_3$
Module de cisaillement	$G_{12}=G_{13}=0.6E_2,$	$G_{23}=0.5 E_2$
Coefficient de Poisson	$\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}=0.25$	
Epaisseur de la plaque	$a/h=10, 30 \text{ et } 100$	
Rapport de deux côtés	$a/b=0.2,0.6,0.8,1.0,1.2,1.6,2.0$	

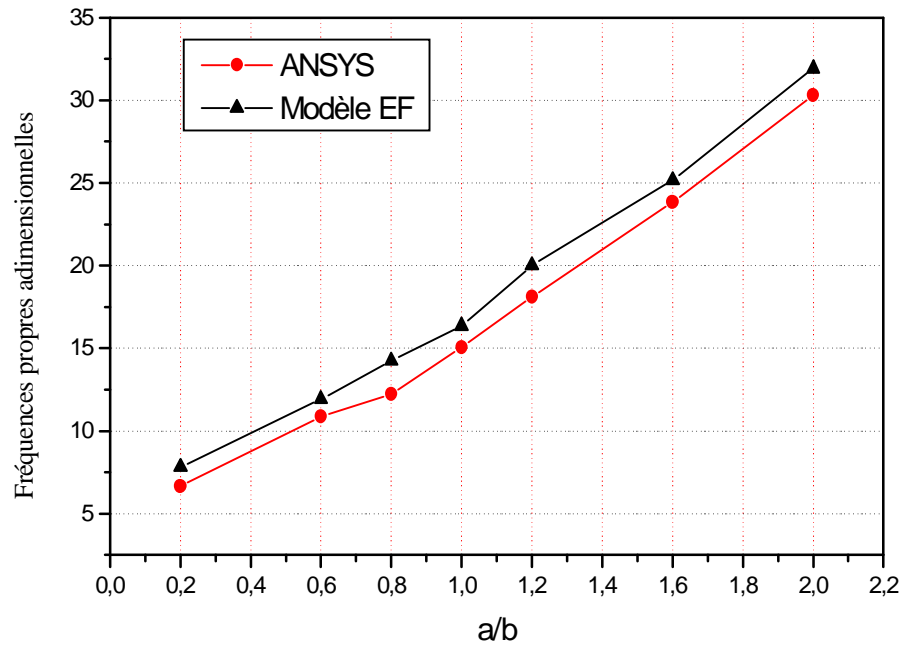


Fig.5.6 Variation de la fréquence propre adimensionnelle du stratifié symétrique $(45 / -45)_{2s}$ en fonction du rapport longueur/ largeur a/b ($a/h=10$)

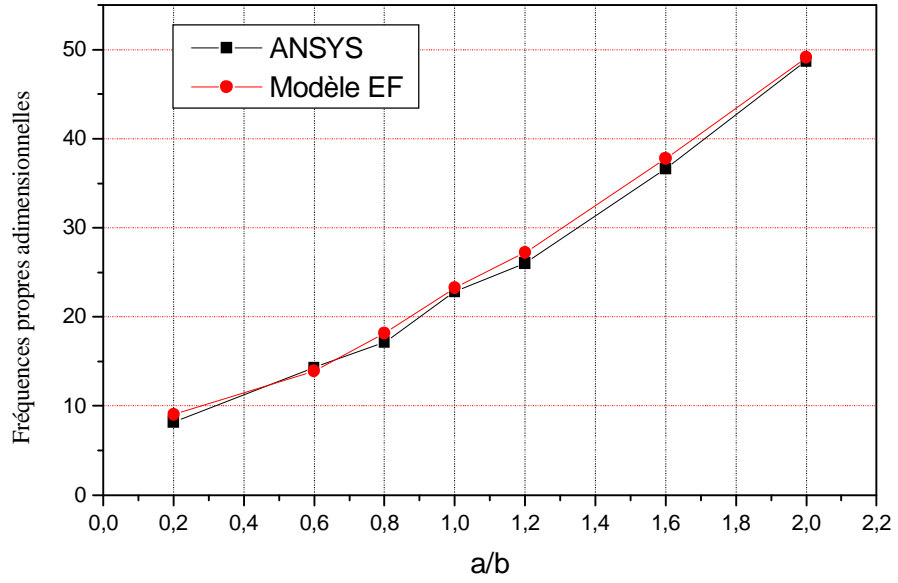


Fig.5.7 Variation de la fréquence propre adimensionnelle du stratifié symétrique $(45 / -45)_{2s}$ en fonction du rapport longueur/largeur a/b ($a/h=30$)

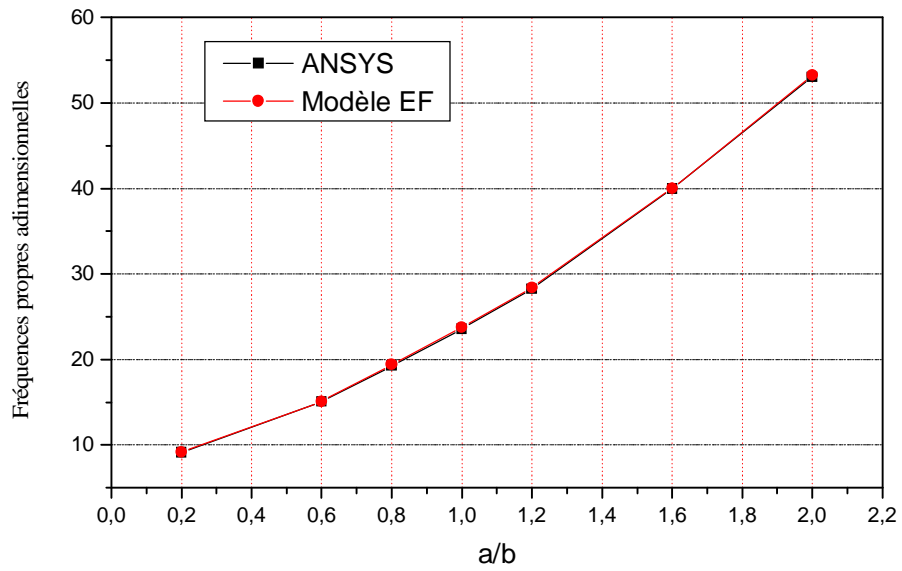


Fig. 5.8 Variation de la fréquence propre adimensionnelle du stratifié symétrique $(45 / -45)_{2s}$ en fonction du rapport longueur sur largeur a/b ($a/h=100$)

5.2.2 Plaques composites antisymétriques :

5.2.2.1 Effet du rapport d'orthotropie E_1/E_2 (cas de la plaque multicouche $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ)$) :

Les données du problème sont similaires à celles de l'exemple précédent, nous avons utilisé un maillage 6x6 pour un empilement croisé $(0/90/0/90)$ constitué de 4 couches d'épaisseurs égales. On considère dans ce cas, la condition aux limites d'appuis simples. Pour des raisons de symétrie, nous avons modélisé uniquement le quart de la plaque.

Le rapport entre sa longueur et son épaisseur a/h est choisi égal à 20 et 100. Le degré d'orthotropie est considéré variable en fonction du rapport des modules d'Young suivant les deux directions du matériau E_1/E_2 .

La variation de la fréquence propre en fonction de différents valeurs du rapport d'orthotropie E_1/E_2 du stratifié antisymétrique $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ)$ est présentée sur les figure 5.9 et 5.10. Les résultats sont obtenus par la méthode des éléments finis utilisée et le code de calcul ANSYS. On remarque très clairement l'influence du degré d'orthotropie du matériau. Au fur et à mesure que le rapport E_1/E_2 est important, la valeur de la pulsation propre fondamentale s'accroît.

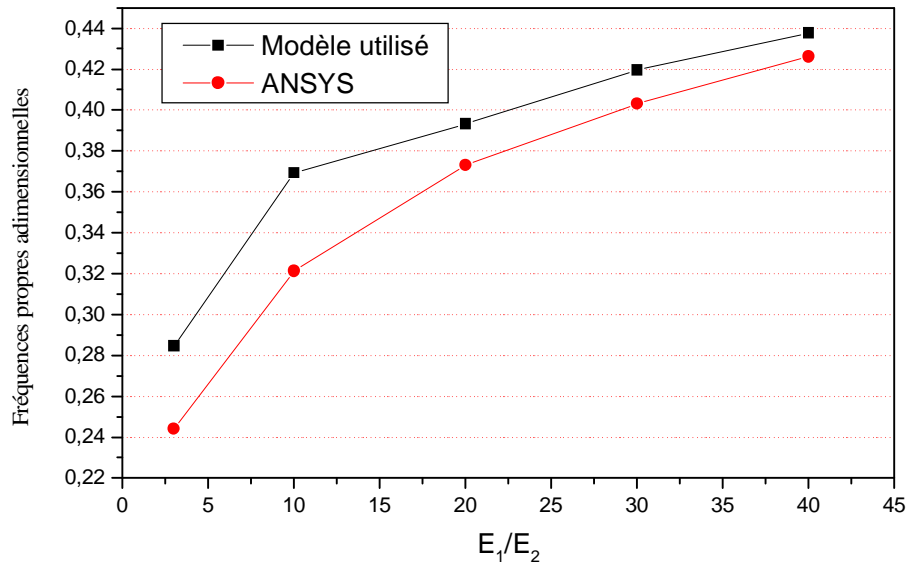


Fig.5.9 Variation de la fréquence propre d'un stratifié antisymétrique $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ)$ en fonction du rapport E_1/E_2 ($a/h=20$)

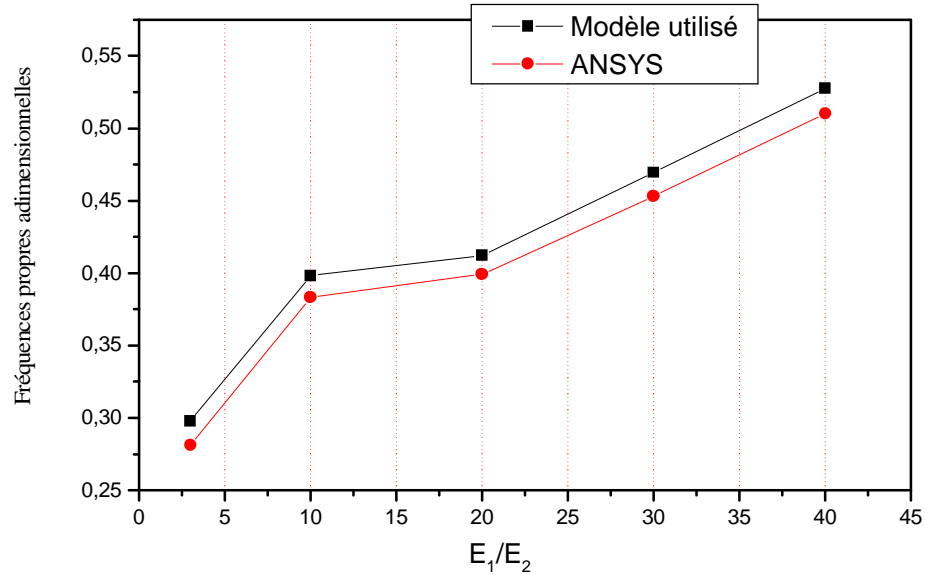


Fig.5.10 Variation de la fréquence propre d'un stratifié antisymétrique ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$) en fonction du rapport E_1/E_2 ($a/h=100$)

L'étude comparative entre les deux méthodes (Modèle EF utilisé et le Logiciel ANSYS) a permis de déduire les conclusions suivantes :

- pour les plaques moins épaisses et faiblement orthotropes ($a/h = 20$, $E_1/E_2 < 20$), le modèle EF ne permet pas d'obtenir des résultats précis pour ce type de plaques mais peut suffire pour des applications courantes.
- pour les plaques moins épaisses ($a/h = 20$) et fortement orthotropes ($E_1/E_2 > 20$), le modèle élément fini est capable de donner de meilleurs résultats.
- le modèle EF considéré permet d'obtenir une bonne précision même dans le cas des plaques minces ($a/h=100$).

5.2.2.2 Effet de la géométrie de la plaque (cas de la plaque multicouche (45/-45/45/-45) :

La variation de la fréquence propre en fonction de différents valeurs des rapports a/b et a/h du stratifié antisymétrique (45/-45/45/-45) est présentée sur la figure 5.11. Les résultats sont obtenus par la méthode des éléments finis utilisée et le code de calcul ANSYS.

Pour les différents dimensions de composites stratifiés antisymétriques ($45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ$) on remarque tout d'abord que la fréquence propre adimensionnelle augmente lorsque le rapport longueur sur largeur (a/b) augmente et diminue lorsque la plaque devient plus épaisse

($a/h \leq 30$). On peut conclure que, le cisaillement transversal a pour effet d'assouplir la structure et par conséquent, de baisser les fréquences propres.

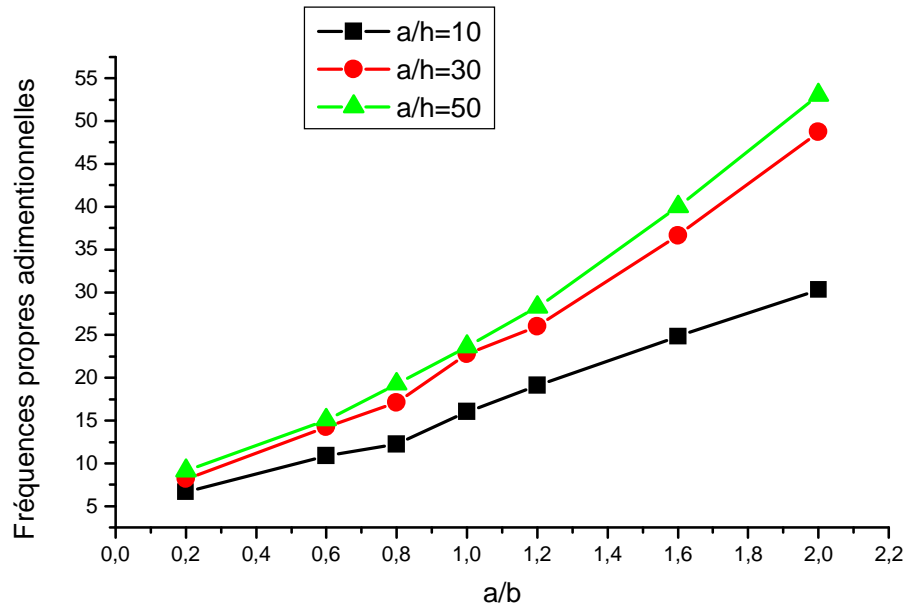


Fig.5.11 Variation de la fréquence propre d'un stratifié antisymétrique (45/-45/45/-45) en fonction du rapport a/b ($a/h=10, 30$ et 50).

5.2.3 Etude comparative à des modèles analytiques et numériques :

Afin de s'assurer de la précision du modèle EF développé, une validation basée sur des méthodes analytiques ou purement numériques réalisées pour traiter de tels problèmes d'analyse modale de structures en stratifiés composites. L'étude comparative s'effectue sur la variation des fréquences propres fondamentales de plaques minces ou épaisses de formes carrées travaillant dans des conditions d'appui simple.

Une autre validation du modèle développé est considérée en cette étape mais sera plus détaillée. Dans un premier temps, des résultats semi-analytiques issus d'une étude modale de plaques en composites stratifiés sont utilisés comme référence de comparaison avec notre modèle. La principale difficulté rencontrée lors de cette étape est de trouver dans la littérature des méthodes capables d'être reproductibles. Parmi les références récentes, nous avons choisi

de comparer notre modèle d'élément fini avec les résultats obtenus par de différents modèles de plaques composites stratifiés qui sont présentés par Carrera [Carrera 00].

En se fondant sur la théorie du premier ordre de la plaque (FOST - First Order Shear Theory), beaucoup d'études consistent à calculer des valeurs propres. [Noor 72] a analysé des vibrations libres des laminés, constitués de couches anisotropes croisées (cross-ply). [Reddy 79] a réalisé un code éléments finis basé sur la théorie de Yang-Norris-Stavsky et validé pour des laminés asymétriques. [Khare et al. 04] ont construit une méthode éléments finis et l'ont utilisée pour des plaques épaisses isotropes, des laminés croisés, des laminés asymétriques et des sandwichs. Cependant, la FOST néglige le gauchissement de la section transversale de la plaque qui modifie le comportement de cisaillement transverse. Une famille de théories 2D raffinées a alors été développée et appelée les théories de l'ordre supérieur (HOST - Higher Order Shear Theory). La HOST propose un développement d'ordre supérieur pour la déformation de la section transversale grâce à l'extension du développement de la série de Taylor pour le déplacement dans l'épaisseur. [Kant et al. 00] ont formulé une théorie appartenant à la HOST et ont également présenté une solution analytique dans [Kant et al. 01]. [Reddy et al. 86] ont considéré des composites croisés et équilibrés (angle-ply).

Malgré le fait que les solutions analytiques 3D n'existent que pour les cas très simples et très classiques, elles sont utilisées pour l'estimation de la contrainte et du déplacement dans l'épaisseur. Srinivas a proposé une solution exacte pour la vibration libre d'une plaque homogène, isotrope sur appuis simples, une plaque épaisse rectangulaire et une plaque épaisse rectangulaire orthotrope sur appuis simples [Srinivas et al. 70]. [Noor 72] a pris la théorie élastique 3D pour obtenir des résultats de plaques isotropes. [Noor et Burton 90] ont présenté des solutions pour les plaques multicouches anisotropes.

-Durant cette étude, la première fréquence propre adimensionnelle $\bar{\omega}$ obtenue par la méthode EF utilisée dans ce travail est validée par comparaison avec celle de la théorie 3D (solution analytique de la théorie d'élasticité en 3D) [Noor 72] et le code élément fini proposé par Khare-Kant (modèle de premier ordre FOST et le modèle d'ordre supérieur HOST) [Khare 04] et Putchu-Reddy (modèle d'ordre supérieur HOST) [Reddy 86]. Les résultats sont représentés sur les figures 5.12 à 5.14.

Dans ce cas, on fait varier le rapport d'orthotropie E_1/E_2 des stratifiés croisés antisymétriques $(0^\circ/90^\circ)_n$ dont le nombre de couches composant est pris égal à 2, 4 et 6. Le rapport entre la longueur de la plaque et son épaisseur a/h est choisi égal à 10.

Les solutions de la théorie 3D sont données sous forme adimensionnelle. Il s'agit de la fréquence propre adimensionnelle :

$$\bar{\omega} = \omega(\rho h^2/E_2)^{1/2} \quad (5.1)$$

Les résultats obtenus montrent alors que l'augmentation du degré d'orthotropie produit un accroissement des valeurs de la fréquence fondamentale.

De plus, on peut remarquer aussi que chaque fois que le rapport E_1/E_2 est important plus l'écart de calcul entre les résultats de notre modèle et ceux des autres théories devient grand. Par contre, cet écart diminue avec l'augmentation du nombre de couches. Dans le cas où $n = 2$ et $E_1/E_2 = 40$, l'écart de calcul atteint 0.03. Dans le cas où $n = 3$ et $E_1/E_2 = 40$, l'écart trouvé par rapport à la solution analytique 3D atteint 0.0284.

A travers cet exemple, on résulte que, lors du calcul des valeurs propres des plaques multicouches avec le modèle élément fini de premier ordre avec cisaillement transverse, et lorsque le degré d'orthotropie est important, l'écart obtenu par les différentes méthodes est acceptable. Cet écart est alors non influencé par le changement du degré d'anisotropie même lorsque le nombre de couches est assez grand.

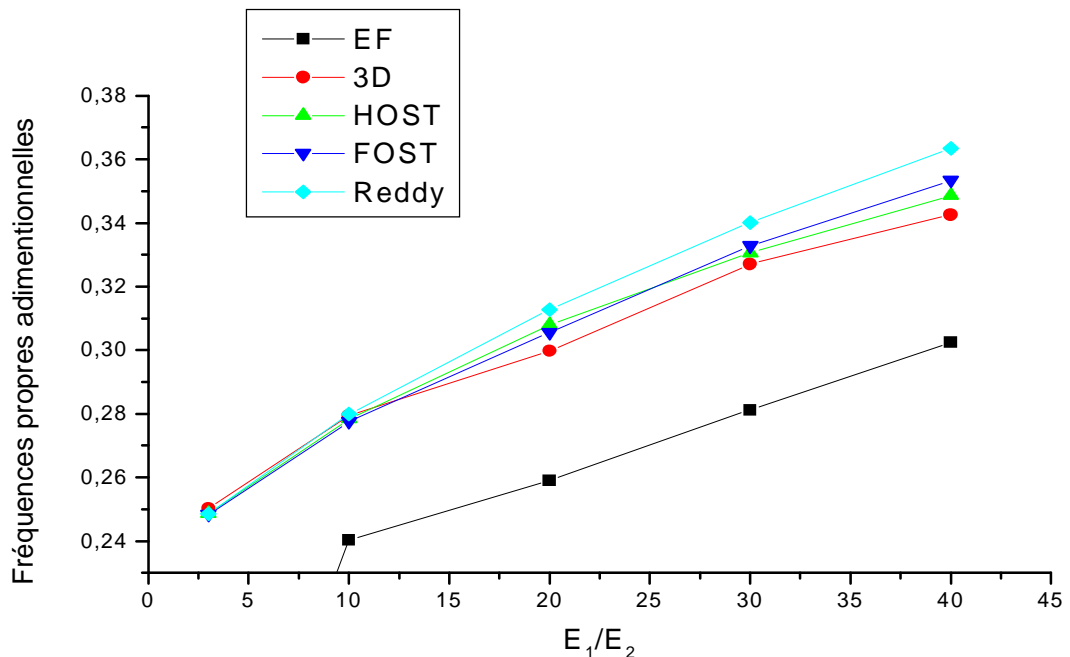


Fig.5.12 Comparaison de la fréquence propre fondamentale adimensionnelle pour une plaque antisymétrique $(0^\circ/90^\circ)_1$

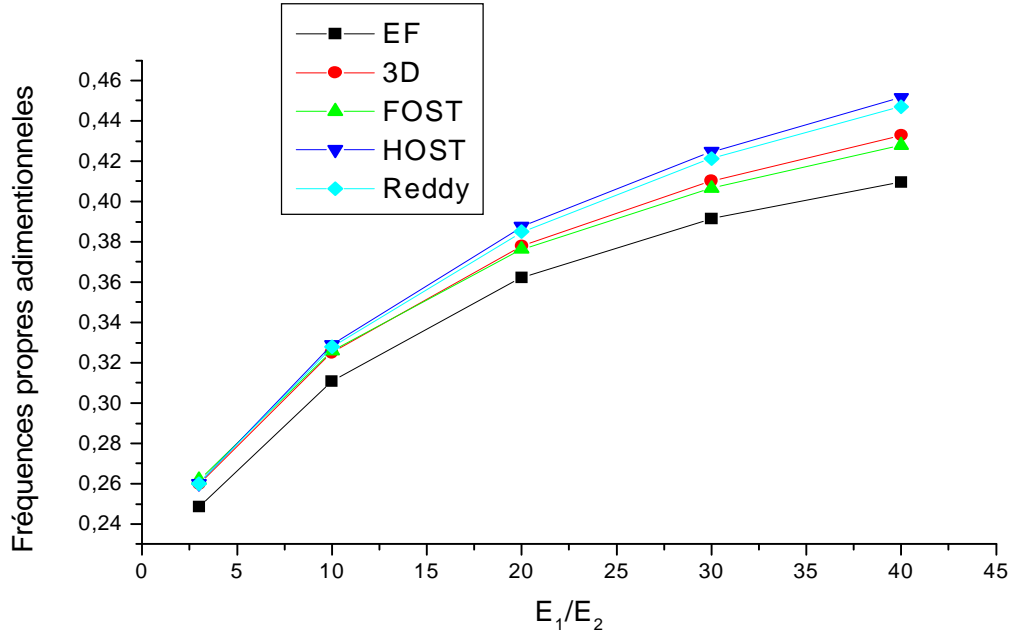


Fig.5.13 Comparaison de la fréquence propre fondamentale adimensionnelle pour une plaque antisymétrique $(0^\circ/90^\circ)_2$

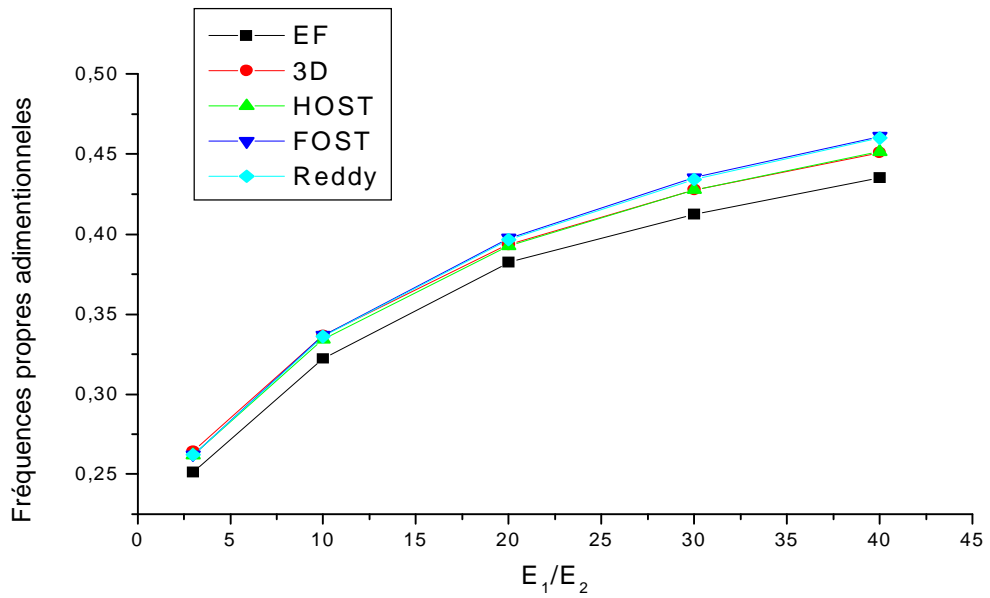


Fig.5.14 Comparaison de la fréquence propre fondamentale adimensionnelle pour une plaque antisymétrique $(0/90)_3$

-Les premières fréquences propres adimensionnelles d'une plaque multicouche symétrique ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$), calculées par la méthode des éléments finis développée dans cette étude sont comparées à celles obtenues par [Kant 01]. Le modèle qui est proposé par Kant appartient à la famille des théories d'ordre supérieur (HOST). Les résultats numériques sont présentés dans le tableau 5.3.

Tableau 5.3 Fréquences propres des plaques multicouches symétriques ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$)

Source	a/h				
	4	10	20	50	100
Kant-HOST	9.287	15.104	17.647	18.672	18.835
Notre modèle	6.923	13.260	16.842	17.989	18.323

On remarque que l'écart entre les résultats des deux méthodes est plus grand pour les plaques les plus épaisses, plus particulièrement dans le cas où $a/h = 4$. Par contre, chaque fois que la plaque est mince, l'écart devient de plus en plus faible.

-Les résultats obtenus à partir du modèle EF utilisé dans cette étude pour le cas de stratifiés antisymétriques ($45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ$) sont comparés à ceux de Reddy [Reddy 79], de Khare et Kant [Khare 04], de Bert et Chen [Bert 78]. En effet, ces derniers ont proposé des modèles de la famille des théories du premier ordre FOST et d'ordre supérieur HOST. Les figures 5.15 à 5.19 présentent une comparaison de notre modèle basé sur la théorie classique des stratifiés avec ceux de FOST et de HOST. On remarque à travers toutes les applications que les résultats issus du modèle de Khare-HOST sont toujours très proches de ceux de notre modèle. L'écart trouvé est de l'ordre de 1.0845 et il décroît avec la diminution de l'épaisseur de la plaque. Le modèle EF utilisé dans cette étude permet d'obtenir une bonne précision dans une plage du rapport a/h variant de 30 à 50 (plaque mince), mais fournit un résultat légèrement moins précis dans le cas des plaques épaisses ($a/h = 10$).

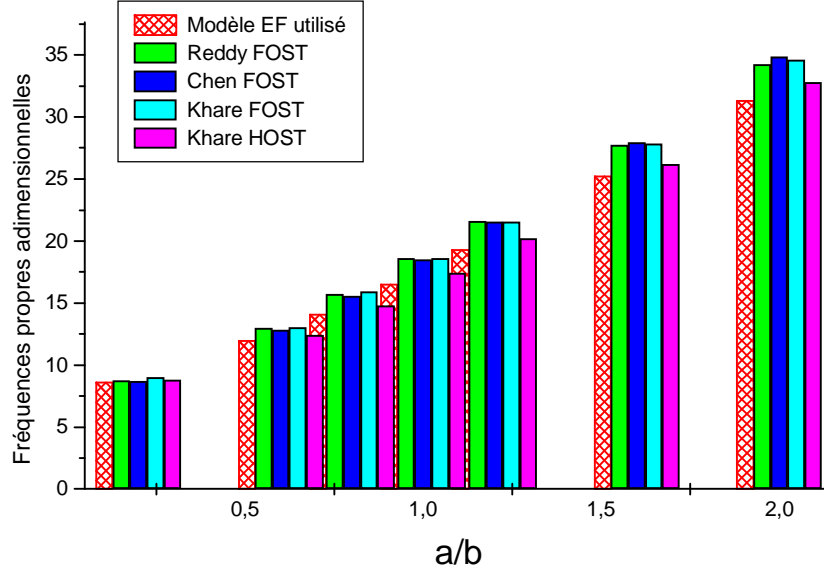


Fig.5.15 Comparaison de la fréquence propre fondamentale adimensionnelle des différents modèles d'une plaque multicouche antisymétrique ($45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ$). ($a/h=10$)

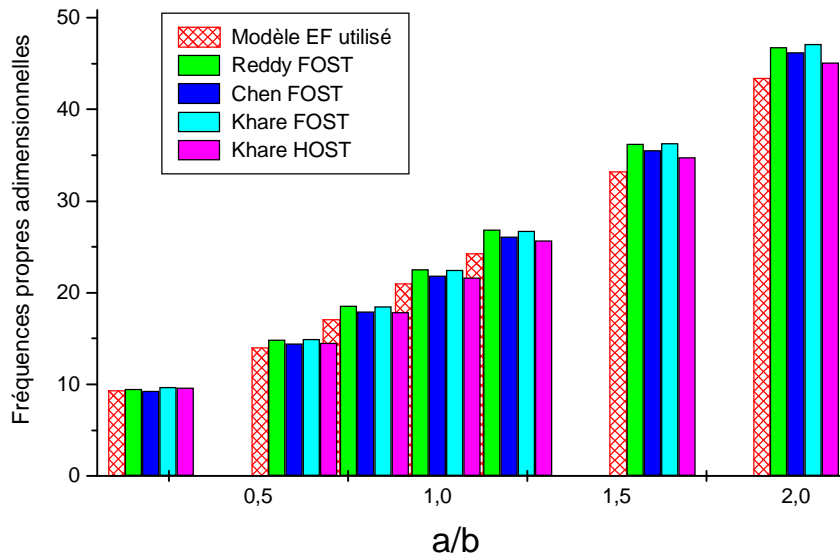


Fig.5.16 Comparaison de la fréquence propre fondamentale adimensionnelle des différents modèles d'une plaque multicouche antisymétrique ($45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ$). ($a/h=20$)

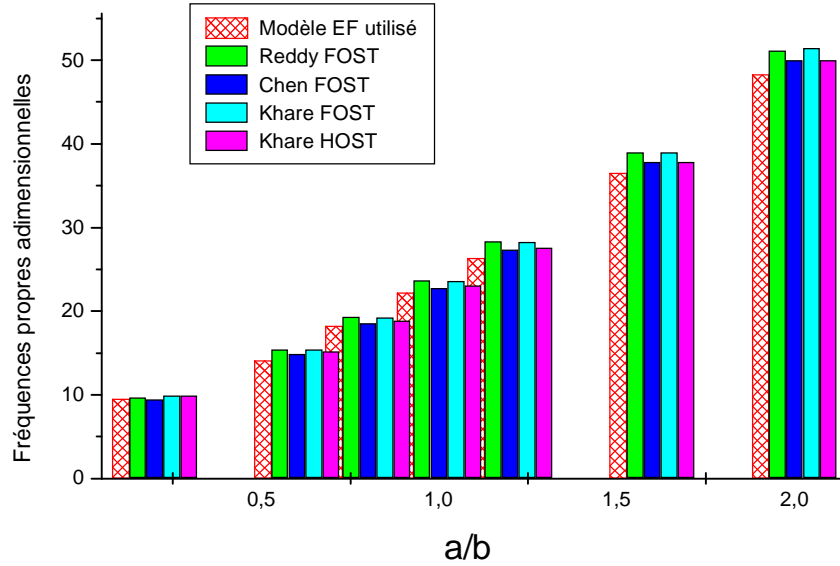


Fig. 5.17 Comparaison de la fréquence propre fondamentale adimensionnelle des différents modèles d'une plaque multicouche antisymétrique ($45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ$). ($a/h=30$)

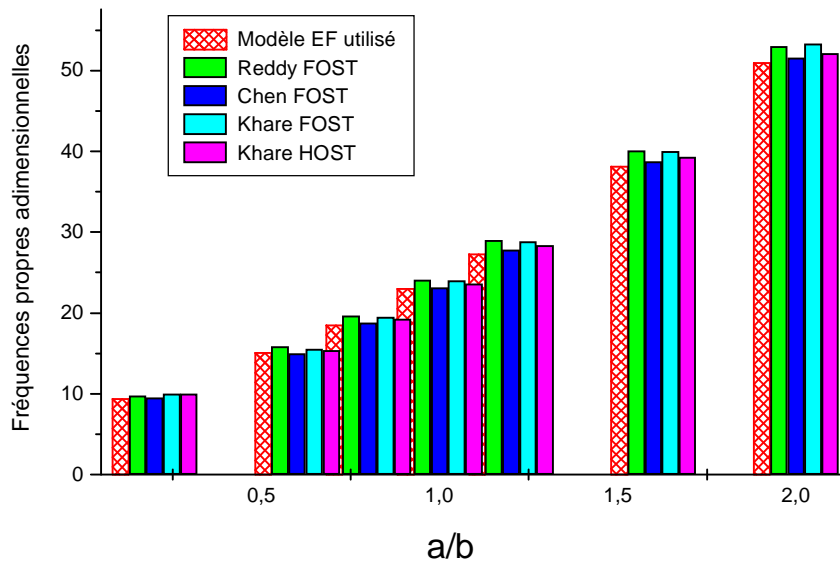


Fig.5.18 Comparaison de la fréquence propre fondamentale adimensionnelle des différents modèles d'une plaque multicouche antisymétrique ($45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ$). ($a/h=40$)

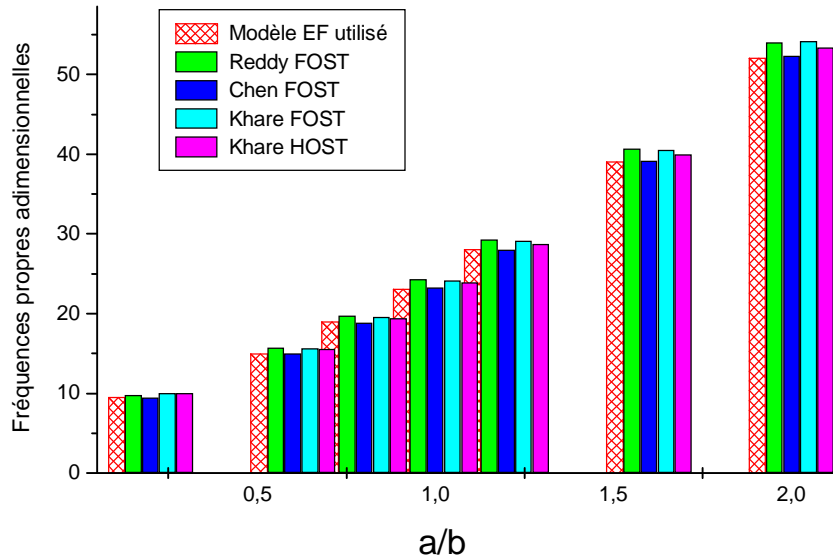


Fig.5.19 Comparaison de la fréquence propre fondamentale adimensionnelle des différents modèles d'une plaque multicouche antisymétrique ($45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ$). ($a/h=50$)

-Par le biais du logiciel ANSYS et afin d'avoir l'allure des modes structuraux associés au mode principal des stratifiés antisymétriques $(0^\circ/90^\circ)_n$ ($n=1,..3$), on a représenté sur la figure 5.20 les formes de tels modes. Au premier vu, une alternance de modes de flexion, suivis de modes de torsion est observé quelque soit le nombre de couches composant les stratifiés. Le changement du nombre de couches alternées favorise une variation de l'amplitude de leurs vibrations libres.

En revanche, lors de la considération des stratifiés symétriques $(0/90)_n$ ($n=1,..3$), on observe d'après la figure 5.22 l'apparition de déformations structurales de la plaque associées aux trois premiers modes propres de vibration : présence d'une flexion et apparition de torsion dès le second mode de vibration. C'est la séquence d'empilement croisée symétrique qui est responsable de l'apparition de modes de flexion et de torsion plus prononcés.

Afin de mieux détailler ces comportements, on s'est intéressé aux empilements équilibrés alternés à $+45^\circ/-45^\circ$. Les figures 5.23 et 5.24 nous permet de visualiser respectivement le trois premiers modes de vibration d'une plaque carrée à empilement antisymétrique ($45/-45/45/-45$) et symétrique ($45/-45/-45/45$). On observe une torsion plus importante que dans le cas d'un stratifié croisé (Fig. 5.20 et 5.21).

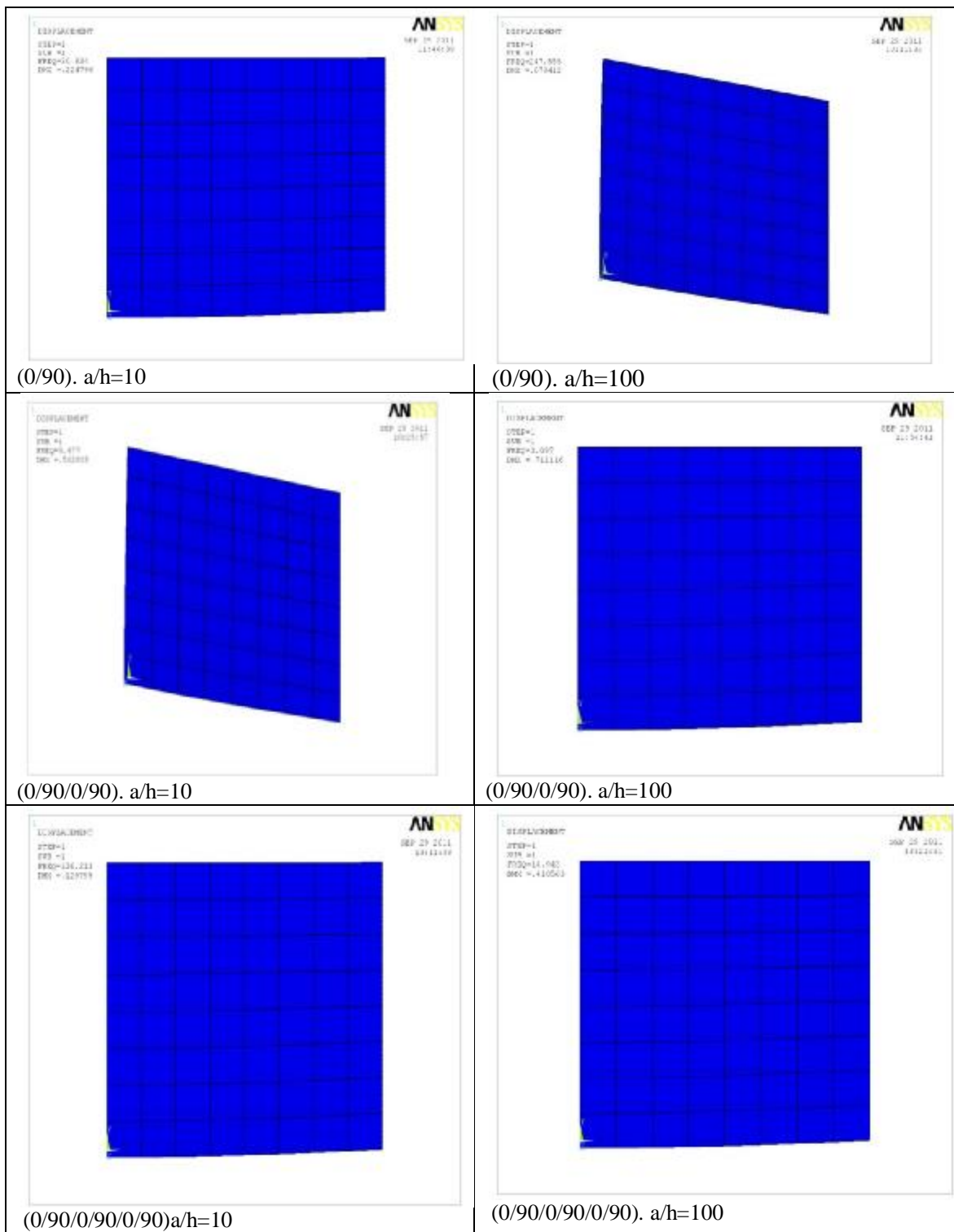


Fig. 5.20 : Premier mode de vibration des stratifiés antisymétriques $(0^\circ/90^\circ)_n$ ($n=1, \dots, 3$), minces (à droite) et épais (à gauche) en appuis simples.

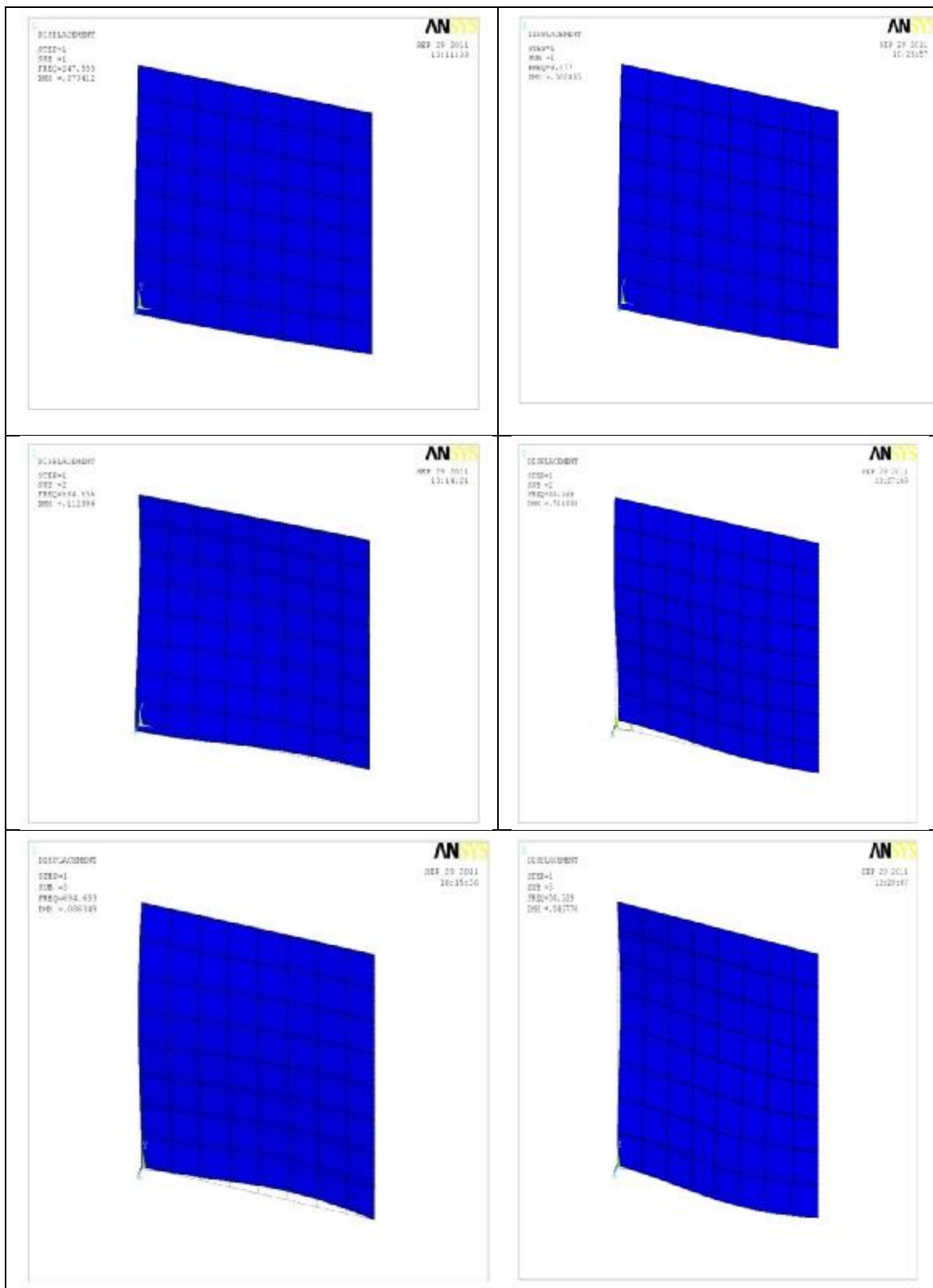


Fig. 5.21 Trois modes propres d'une plaque croisée antisymétrique (0/90/0/90), épaisse (à gauche) et mince (à droite) en appuis simples.

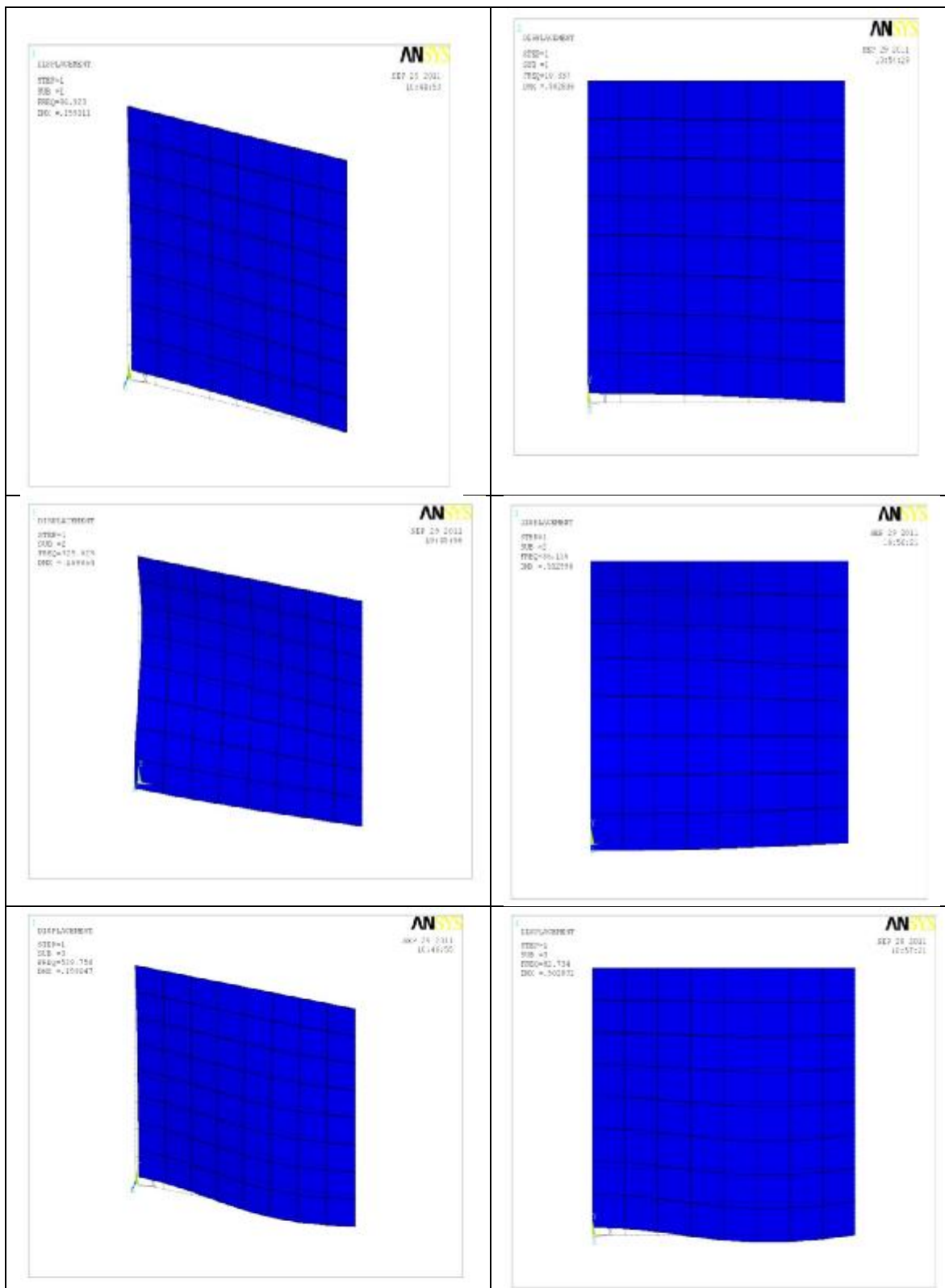


Fig. 5.22 Trois modes propres d'une plaque croisée symétrique (0/90/90/0) mince (à droite) et épaisse (à gauche) en appuis simples.

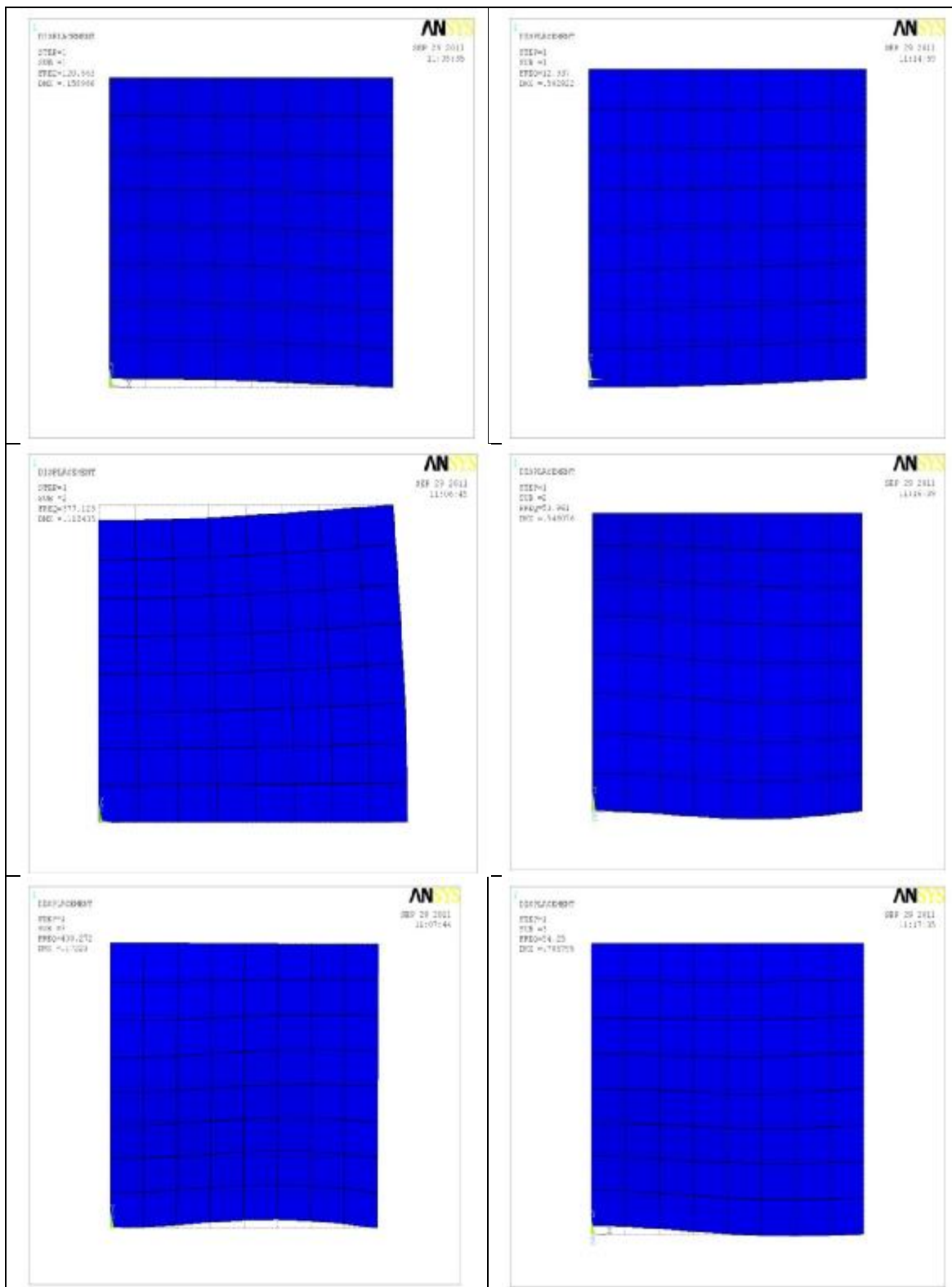


Fig. 5.23 Trois modes propres d'une plaque équilibrée antisymétrique (45/-45/45/-45), mince (à droite) et épaisse (à gauche) en appuis simples.

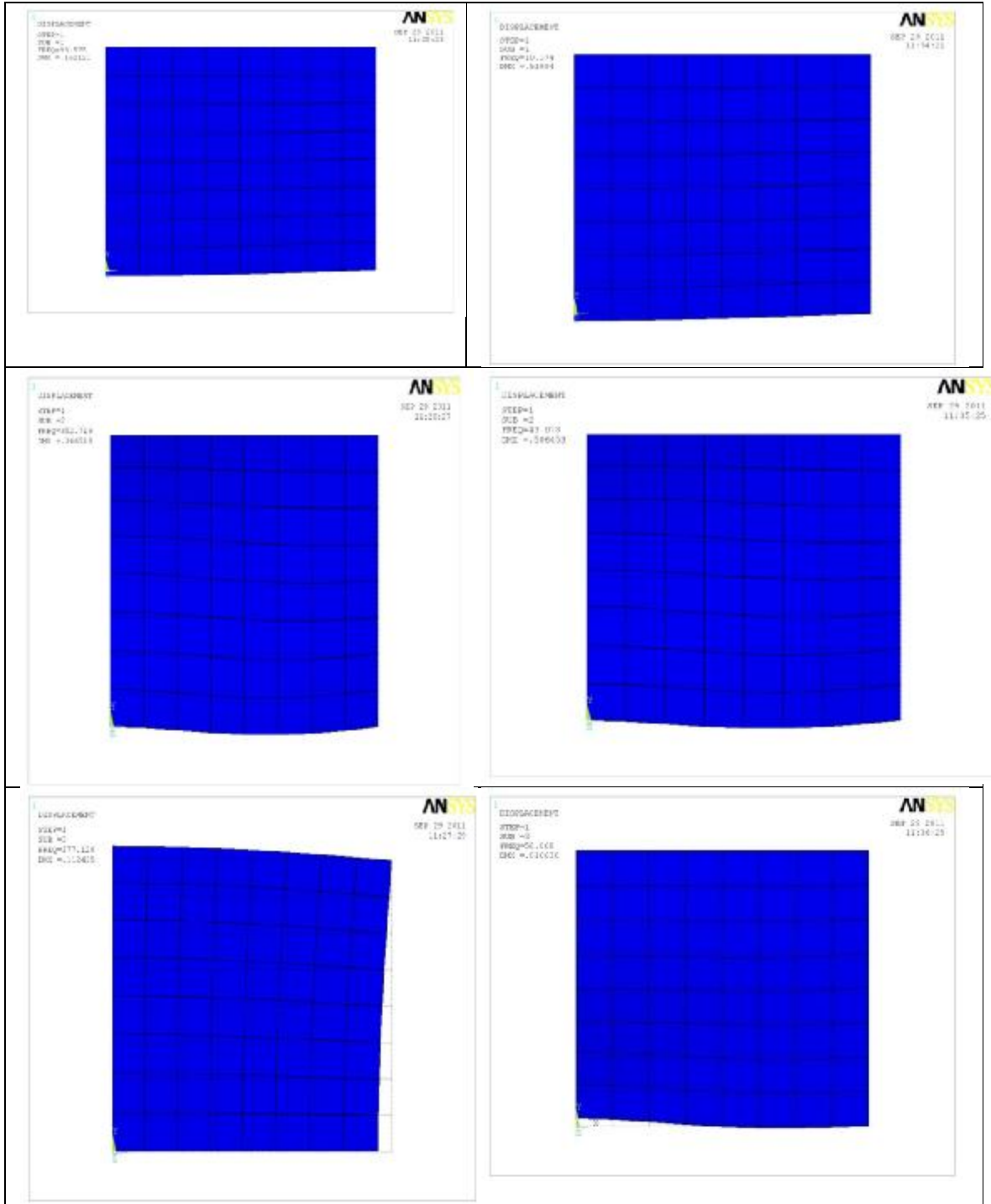


Fig. 5.24 Trois modes propres d'une plaque équilibrée symétrique (45/-45/-45/45), mince (à droite) et épaisse (à gauche) en appuis simples.

5.2.4 Plaques à empilements $(\theta/0^\circ)_{2s}$ et $(0^\circ/\theta)_{2s}$:

Après avoir étudié le cas des plaques stratifiées minces croisée et équilibrées, on a constaté que chacun d'elles possède un comportement vibratoire différent, surtout dans le cas des empilement antisymétriques, en variant certains paramètres géométriques et élastiques. A présent on change d'empilement pour généraliser nos constats et nos conclusions en choisissant des plaques stratifiées symétriques minces $(\theta/0^\circ)_{2s}$ et $(0^\circ/\theta)_{2s}$ dont l'orientation θ varie de 0° à 90° .

On étudie alors l'effet de l'orientation des fibres et de la séquence d'empilement sur les fréquences fondamentales des stratifiés carrés et rectangulaires avec un rapport $a/h=100$ (Figs.5.25 et 5.26). Les caractéristiques élastiques du matériau de la plaque et le maillage (6×6) sont celles utilisées dans les cas précédents.

Tout d'abord, on prend en considération le cas des plaques carrées, nous constatons que la fréquence propre fondamentale atteint une valeur maximum à $\theta=45^\circ$. Cependant, pour la plaque rectangulaire la fréquence propre fondamentale est maximale à l'orientation $\theta = 60^\circ$. Cette différence est dû au changement de la forme géométrique dont la largeur a est devenue dans le second cas égal à $0.6b$ et influant par la suite sur le changement de caractéristiques élastiques (une symétrie par rapport aux axes géométriques est obtenue dans le cas de la plaque carrée).

Au vu des résultats, on peut constater aussi que la fréquence naturelle dans les plaques carrées d'empilement $(\theta/0^\circ)_{2s}$ est plus grande que celle des stratifiés à empilement $(0^\circ/\theta)_{2s}$. c'est l'orientation 0° des couches extérieures qui favorisent l'augmentation de la rigidité du matériau et par suite la fréquence naturelle du stratifié. En revanche, dans le cas plaques rectangulaires, la forme géométrique ($a=0.6b$) provoque l'augmentation de la rigidité du stratifié $(\theta/0^\circ)_{2s}$ et devient supérieure à celle du $(0^\circ/\theta)_{2s}$.

Cette différence vient du fait de la distance entre la surface neutre du stratifié et les fibres à θ° qui est plus grande dans le cas des stratifiés $(0^\circ/\theta/\theta/0^\circ)$.

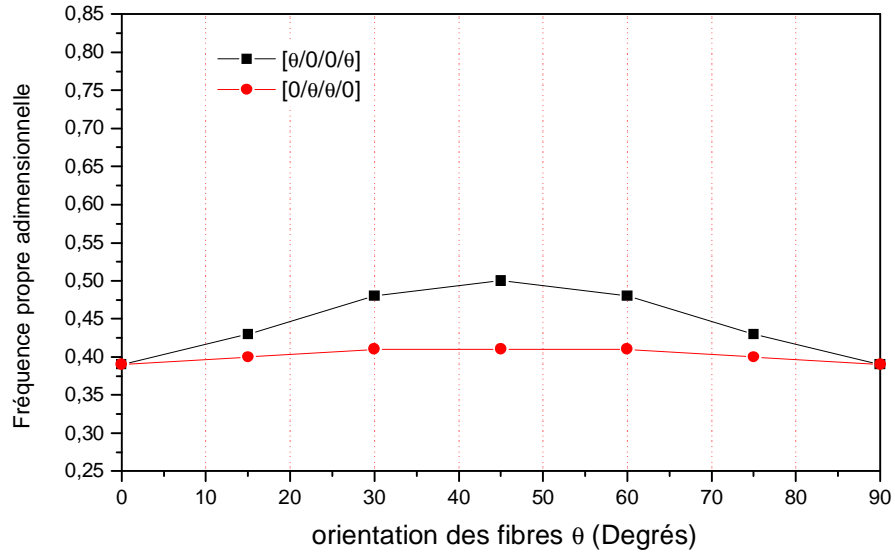


Fig.5.25 Effet de l'orientation des fibres θ et de la séquence d'empilement sur les fréquences naturelles adimensionnelles d'une plaque carrée à appuis simples ($a/b = 1$, $a/h = 100$).

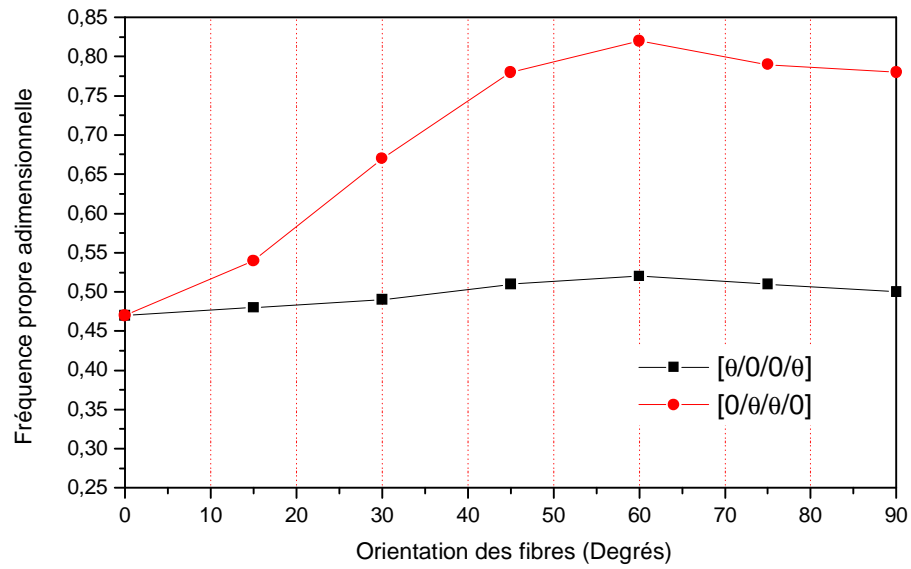


Fig.5.26 Effet de l'orientation des fibres θ et de la séquence d'empilement sur les fréquences naturelles non-dimensionnelles d'une plaque rectangulaire en appuis simples ($a/b = 0.6$, $a/h = 100$)

5.3 Etude du comportement statique des multicouches

5.3.1 Plaques composites croisées sous chargement doublement sinusoïdal :

Il s'agit de plaques carrées et rectangulaires stratifiées à respectivement 3 et 9 couches [(0/90)_{2s} et (0/90)_{5s}]. Elles sont simplement supportées par un chargement doublement sinusoïdal $q=q_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/a)$. On procède, durant cette étude, au changement du rapport longueur/épaisseur a/h . Les résultats obtenus à partir de notre modèle élément fini utilisé seront comparés au modèle analytique 3D de Pagano et al. [Pagano 72], concernant le déplacement adimensionnel transversal \bar{w} calculé au centre de la plaque.

Dans les deux cas des plaques, les épaisseurs des couches orientées à 0° et 90° sont égales, et celles de même orientation ont toutes la même épaisseur. Le type de maillage considéré est (8 x 8) Pour des raisons de symétrie, seul le quart de la plaque est maillé. Pour une validation de nos résultats, on a aussi effectué des comparaisons avec ceux obtenus avec le logiciel ANSYS 11.

Les solutions exactes de Pagano [Pagano 72], sont présentées sous forme adimensionnelle. Il s'agit respectivement pour les deux types de plaques du déplacement transversal et du chargement sinusoïdal :

-Pour une plaque carrée

$$\bar{w} = \frac{\pi^4 w Q}{12 q_0 a^4 / h^3} \text{ avec } Q = 4G_{12} + \frac{[E_1 + E_2(1 + 2\nu_{23})]}{(1 + \nu_{12} \nu_{21})} \quad (5.2)$$

$$q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \quad (5.3)$$

-Pour une plaque rectangulaire

$$\bar{w} = \frac{\pi^4 w E_2}{12 q_0 h s^4} \text{ avec } s = \frac{a}{h} \quad (5.4)$$

$$q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (5.5)$$

Tableau 5.4 : Propriétés géométriques et caractéristiques élastiques des plaques

Géométrie : $a=1000$ et $h=250, 100, 20$ mm
Matériau (orthotrope) : $E_1=25\text{GPa}$, $E_2=1\text{GPa}$, $E_3=E_2$, $G_{12}=0.5\text{ GPa}$, $G_{13}= 0.5\text{ GPa}$, $G_{23}=0.2\text{ GPa}$, $\nu = 0.25$
Conditions aux limites :
 $w = \theta_x = 0$ sur AB ; $\theta_x = 0$ sur BC ; $\theta_y = 0$ sur CD ; $w = \theta_x = 0$ sur DA
Chargement double sinusoïdal : $q=q_0 \sin(\frac{\pi x}{a}) \sin(\frac{\pi y}{a})$; $q_0=0.01\text{ N/m}^2$

Les résultats du déplacement transversal w au centre de plaque, comparés avec ceux obtenus par ANSYS (élément en déplacement de premier ordre) et par la solution analytique tridimensionnelle de Pagano sont illustrés sur les figures 5.27 à 5.29 en fonction du rapport d'épaisseur a/h (ratio entre la longueur a et l'épaisseur h) de la plaque étudiée. On remarque qu'au fur et à mesure que le rapport $a/h > 10$, nos résultats sont conformes à ceux obtenus par le logiciel ANSYS surtout dans le cas des formes carrés et que l'effet du cisaillement transverse devient sans aucune importance. Par contre, l'étude 3D menée par Pagano et al [Pagano 72] montre que la structure n'est pas sensible à cet effet lorsque le nombre de couches augmente (Fig. 5.29).

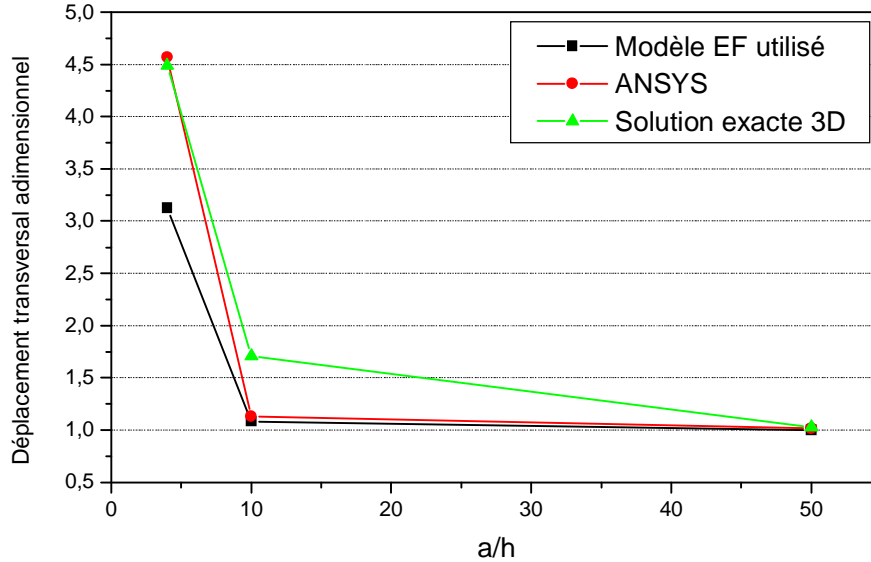


Fig. 5.27 Plaque carrée composite à 3 couches simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal.

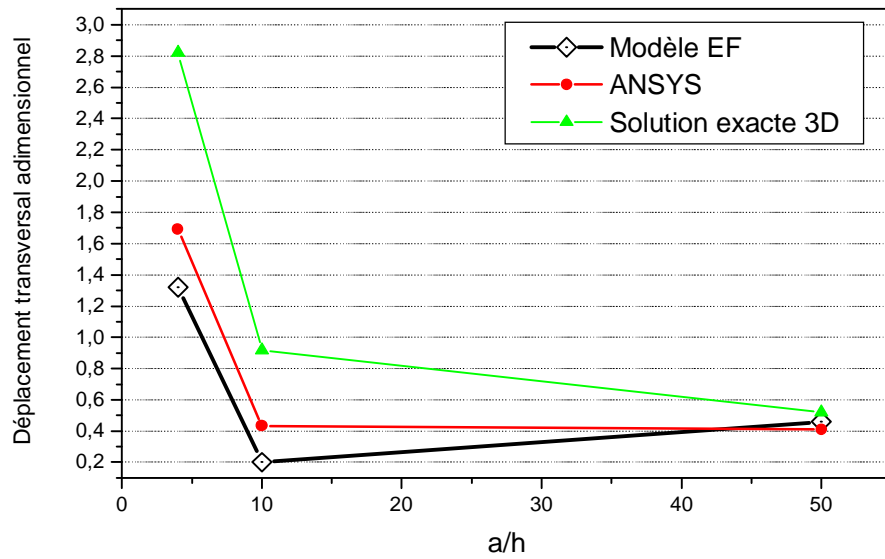


Fig. 5.28 Plaque rectangulaire ($a=3b$) composite à 3 couches simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal.

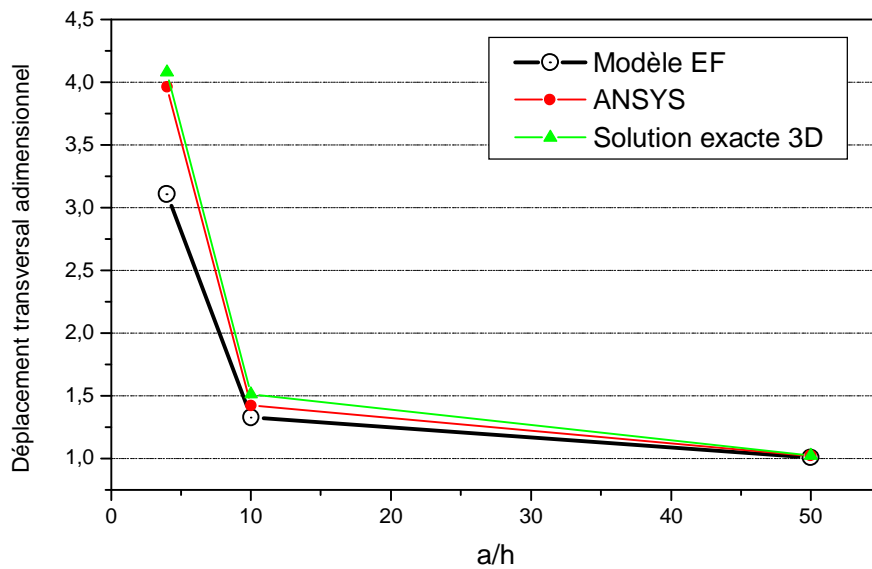


Fig. 5.29 Plaque carrée composite à 9 couches simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal.

Après comparaison et validation, on constate que notre modèle peut être appliqué aux plaques minces. Lorsque les stratifiés deviennent plus épais, notre modèle peut être validé à condition que le nombre de couches soit augmenté.

Afin d'étudier en détails les effets du cisaillement transverse, on représente sur les figures 3.31 à 3.38 la distribution des contraintes planes axiales σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{zz} et contraintes de cisaillement transversal τ_{xy} , τ_{zy} , et τ_{xz} dans le plan xy. Les plaques considérées sont minces et épaisses à 3 et 9 couches. Nous constatons que plus le nombre de couches est grand, moins la structure est sensible à l'effet de cisaillement transversal.

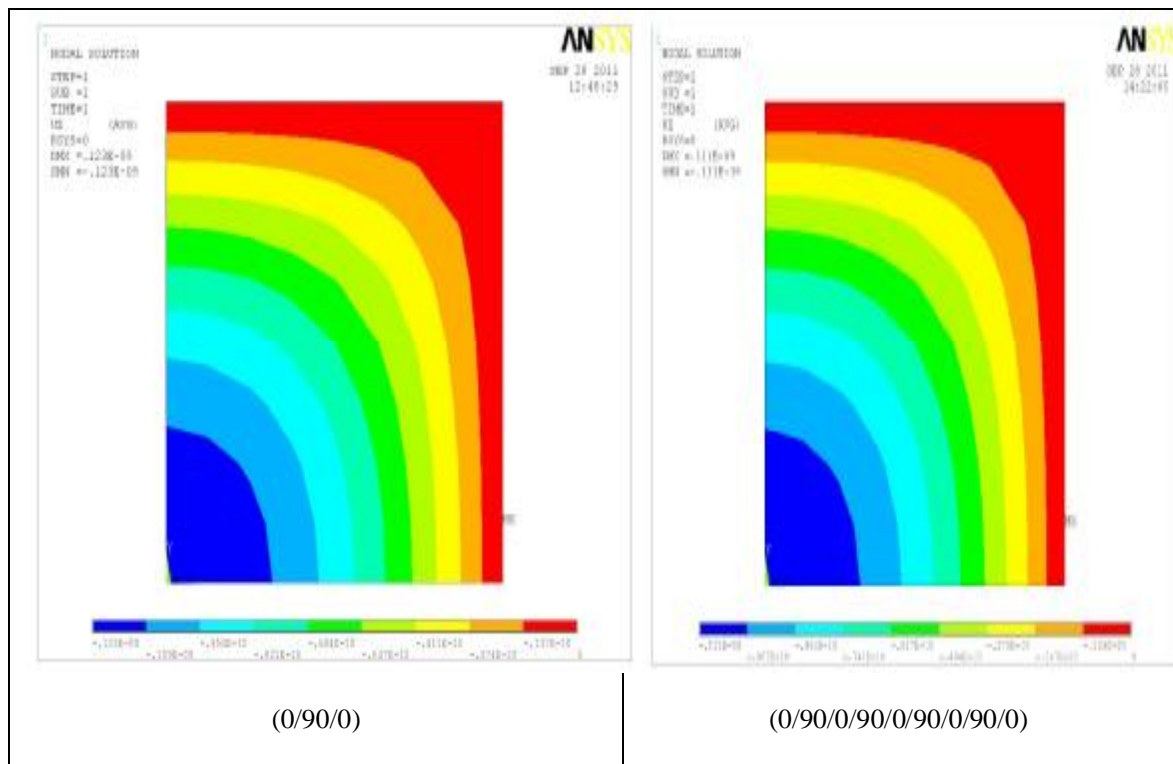


Fig.5.30 Déformée suivant le plan xy des plaques croisées à 3 et 9 couches. (Premier mode de flexion).

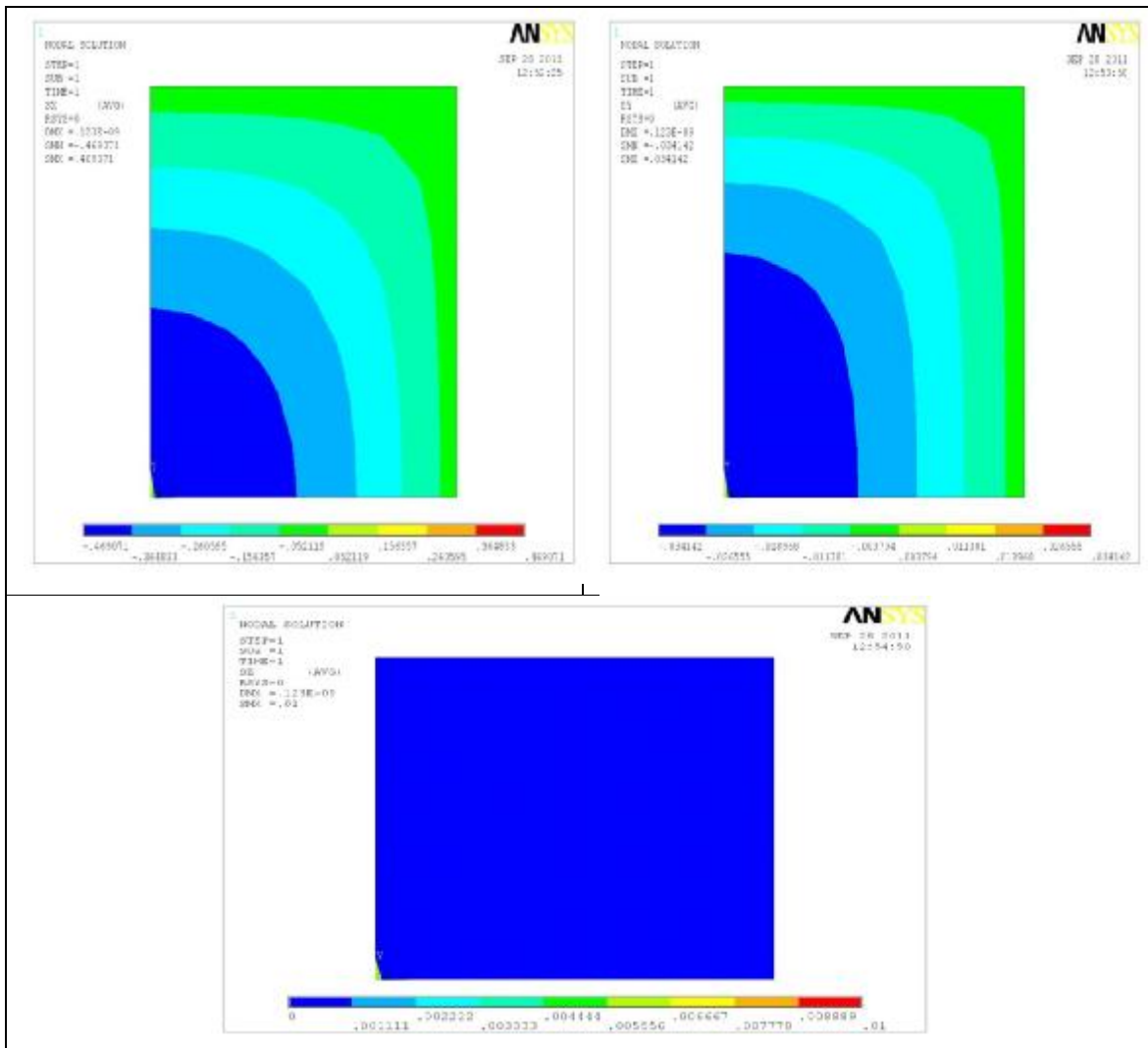


Fig.5.31 Contraintes planes axiales suivant les directions x et y et z.
Plaque (0/90/0) épaisse (a/h=10).

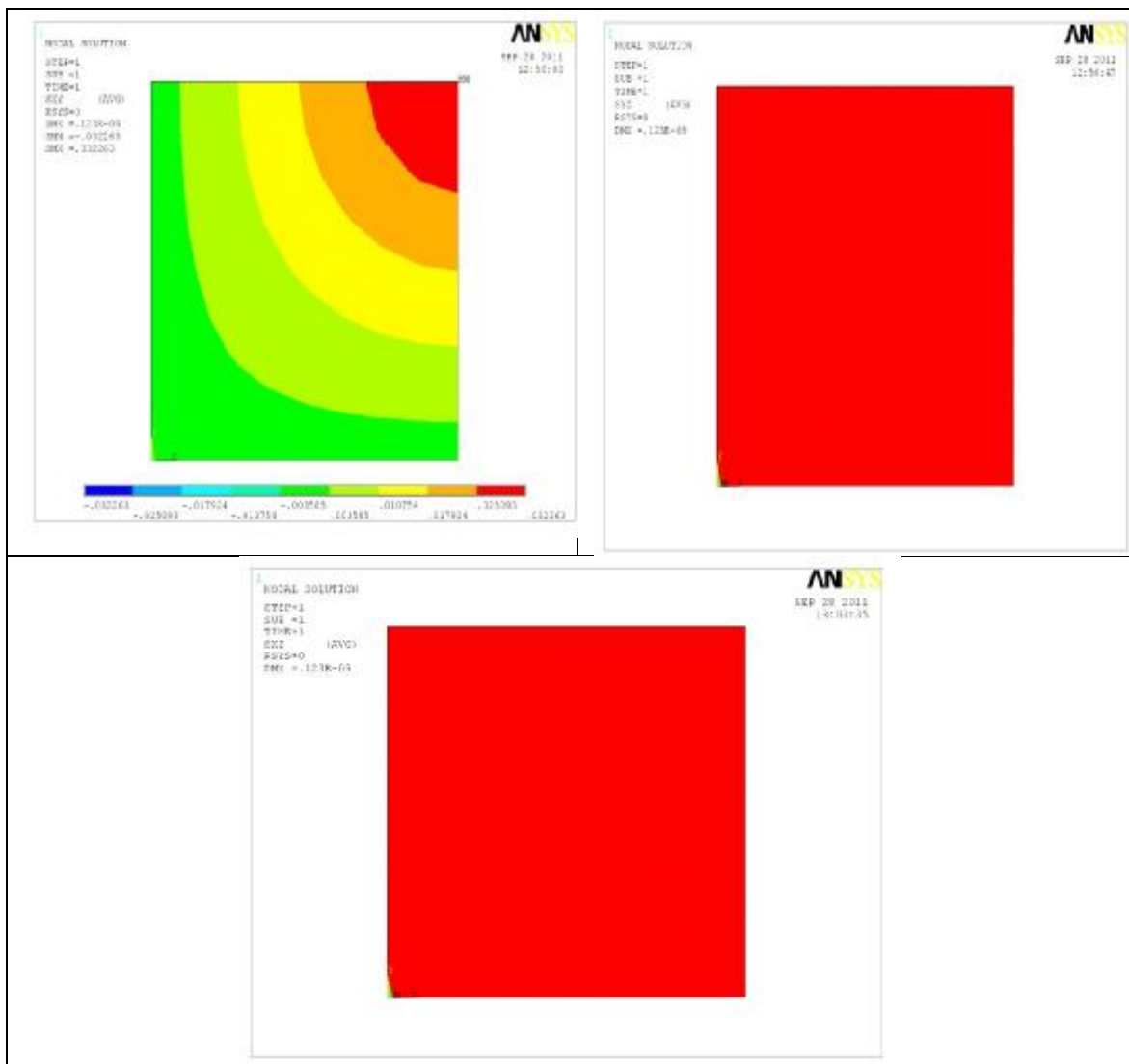


Fig.5.32 Contraintes de cisaillement plan (xy) et transversal (yz, xz).
 Plaque (0/90/0) épaisse (a/h=10).

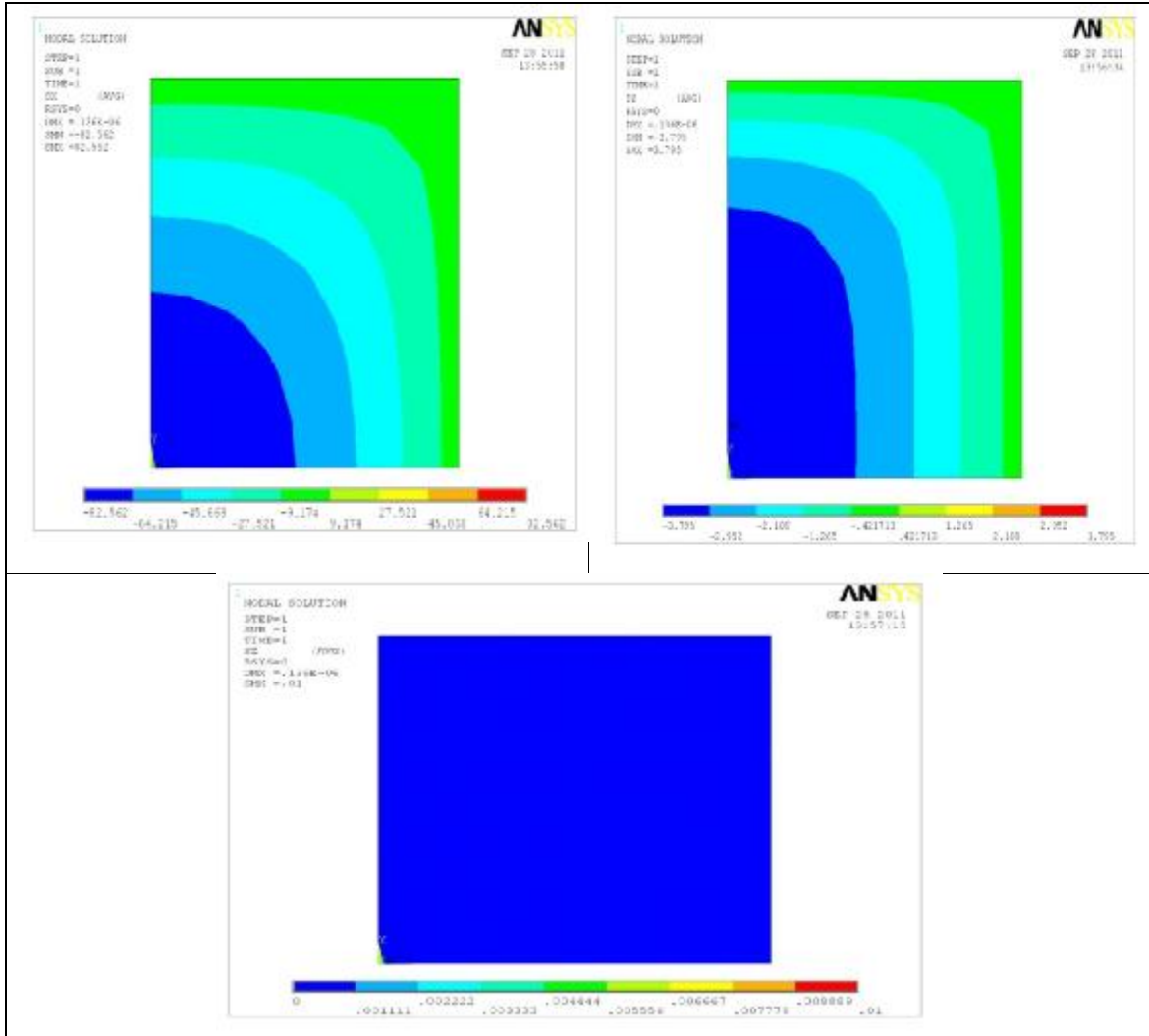


Fig.5.33 Contraintes planes axiales suivant les directions x, y et z.
Plaque (0/90/0) mince (a/h=100).

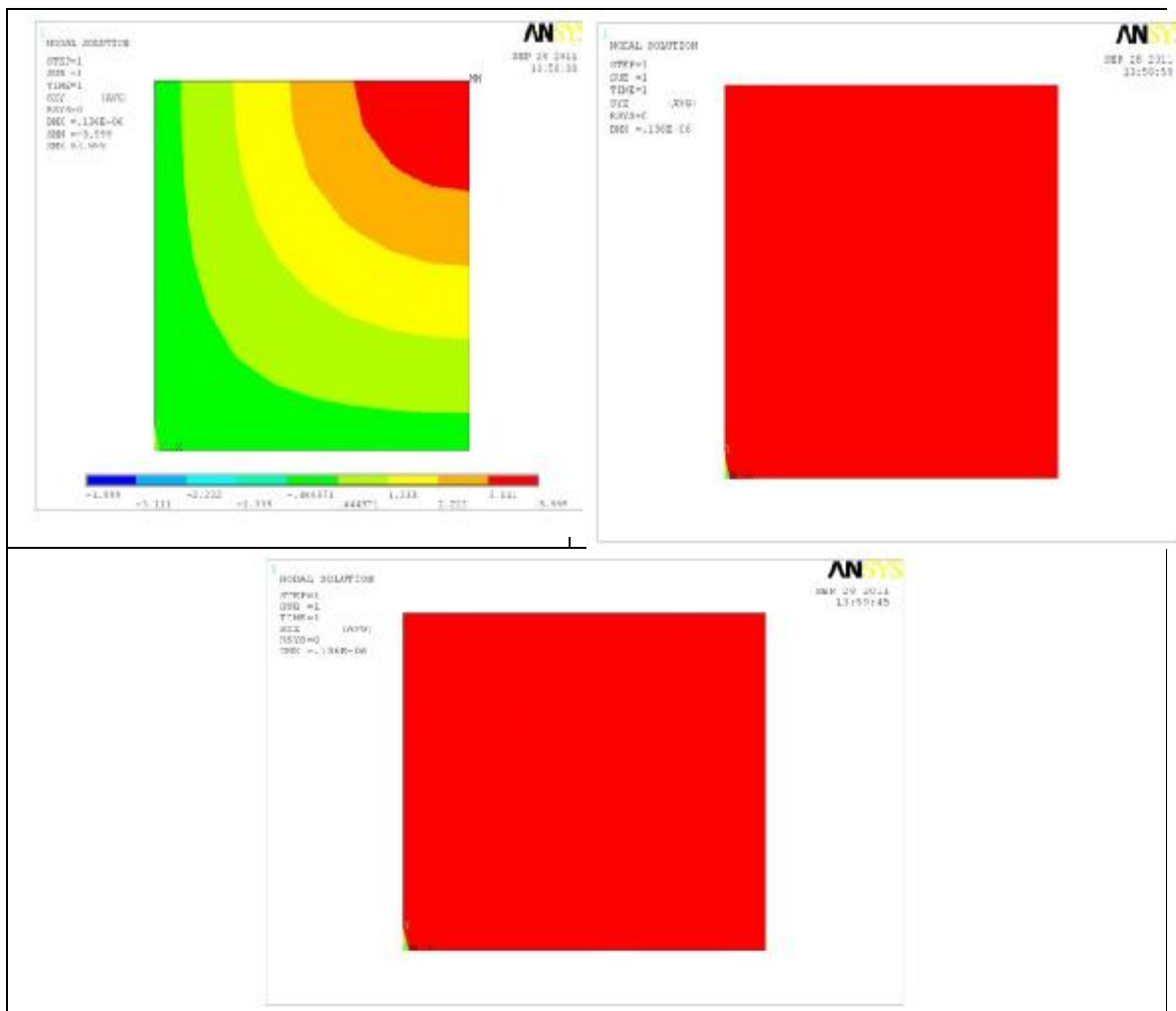


Fig.5.34 Contraintes de cisaillement plan (xy) et transversal (yz, xz).
 Plaque (0/90/0) mince (a/h=100).

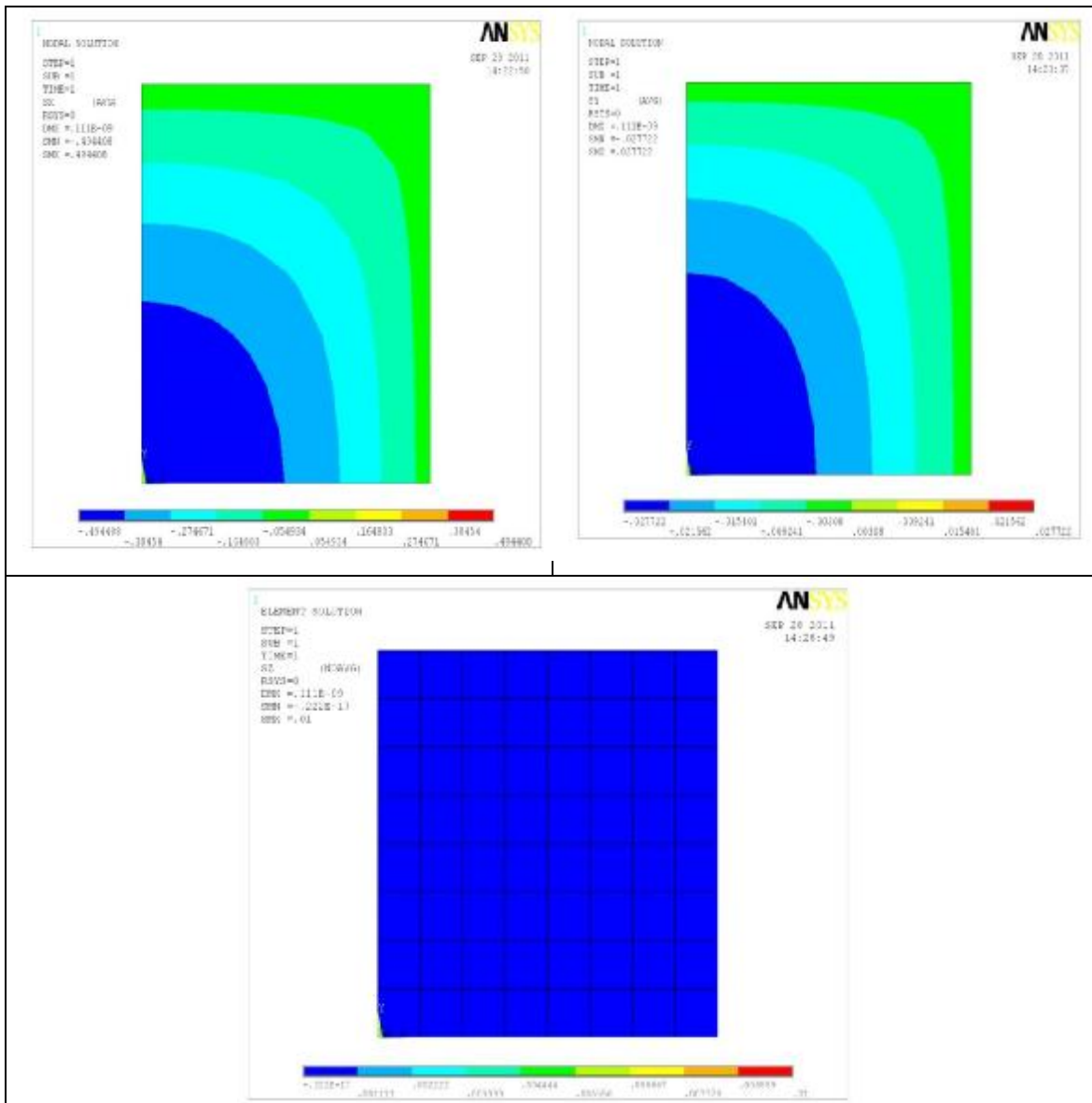


Fig.5.35 Contraintes planes axiales suivant les directions x, y et z.
 Plaque (0/90/0/90/0/90/0/90/0) épaisse (a/h=10).

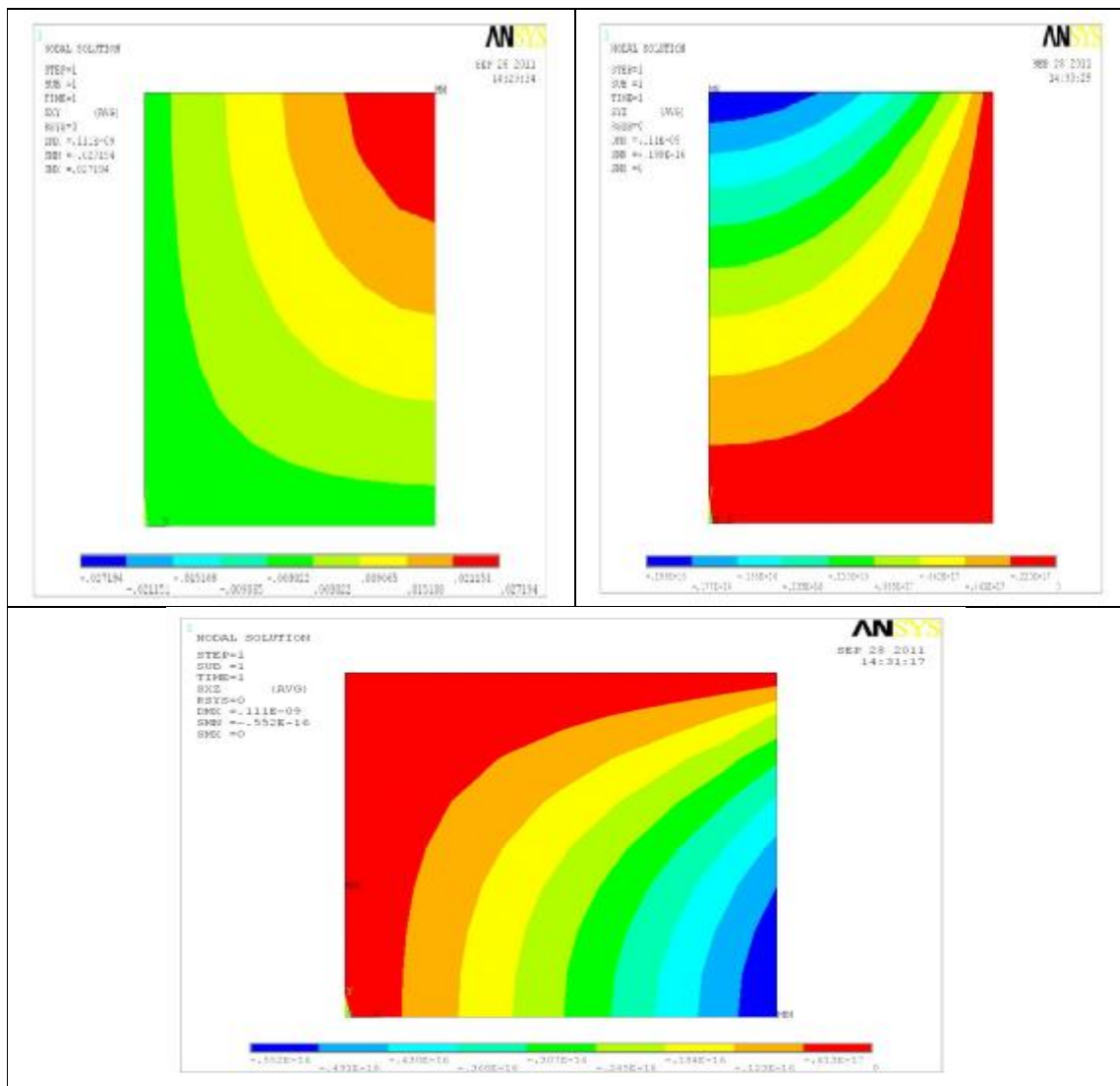


Fig.5.36 Contraintes de cisailment plan (xy) et transversal (yz, xz).
 Plaque (0/90/0/90/0/90/0/90/0) épaisse (a/h=10).

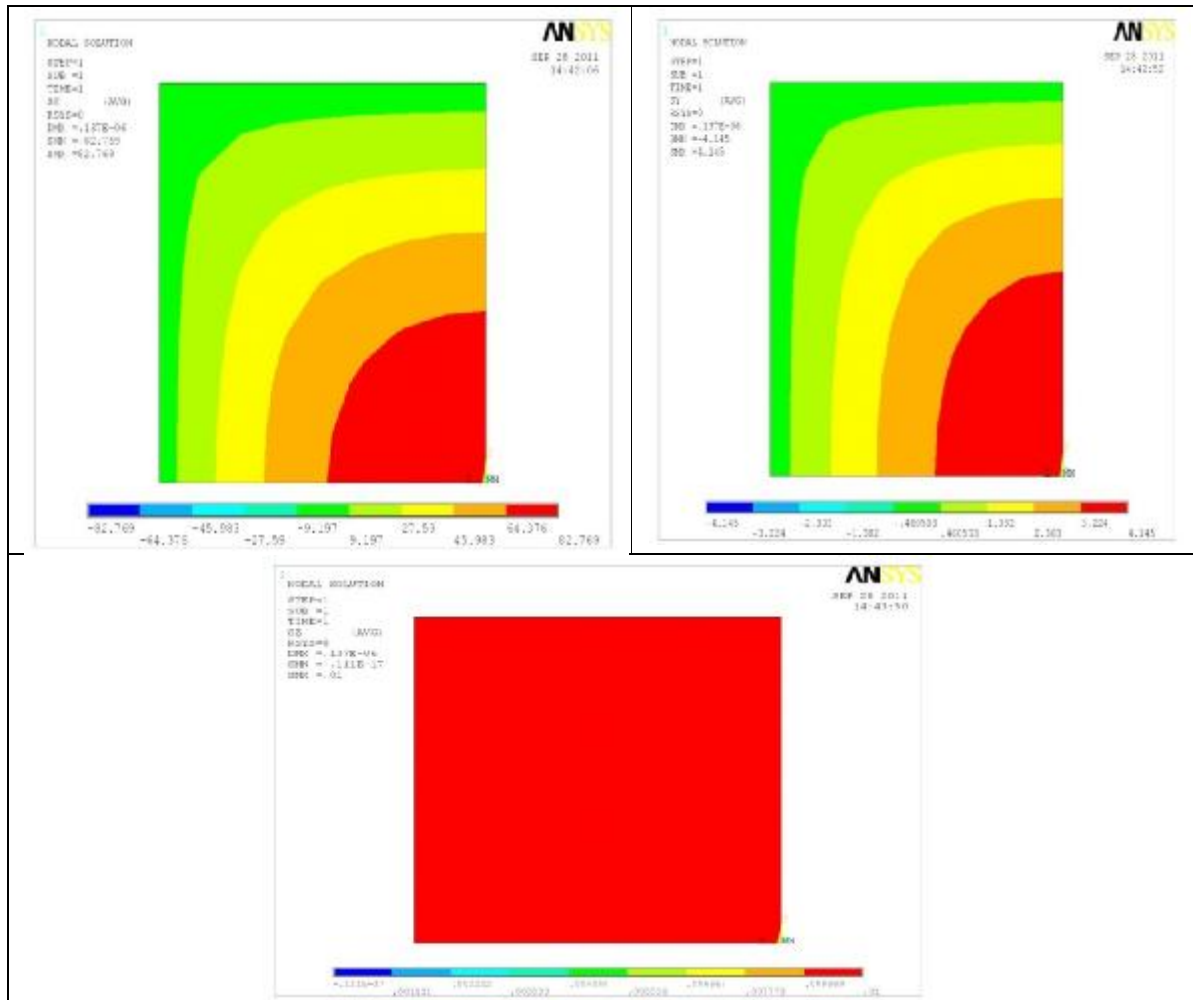


Fig.5.37 Contraintes planes axiales suivant les directions x, y et z.
 Plaque (0/90/0/90/0/90/0/90/0) mince (a/h=100).

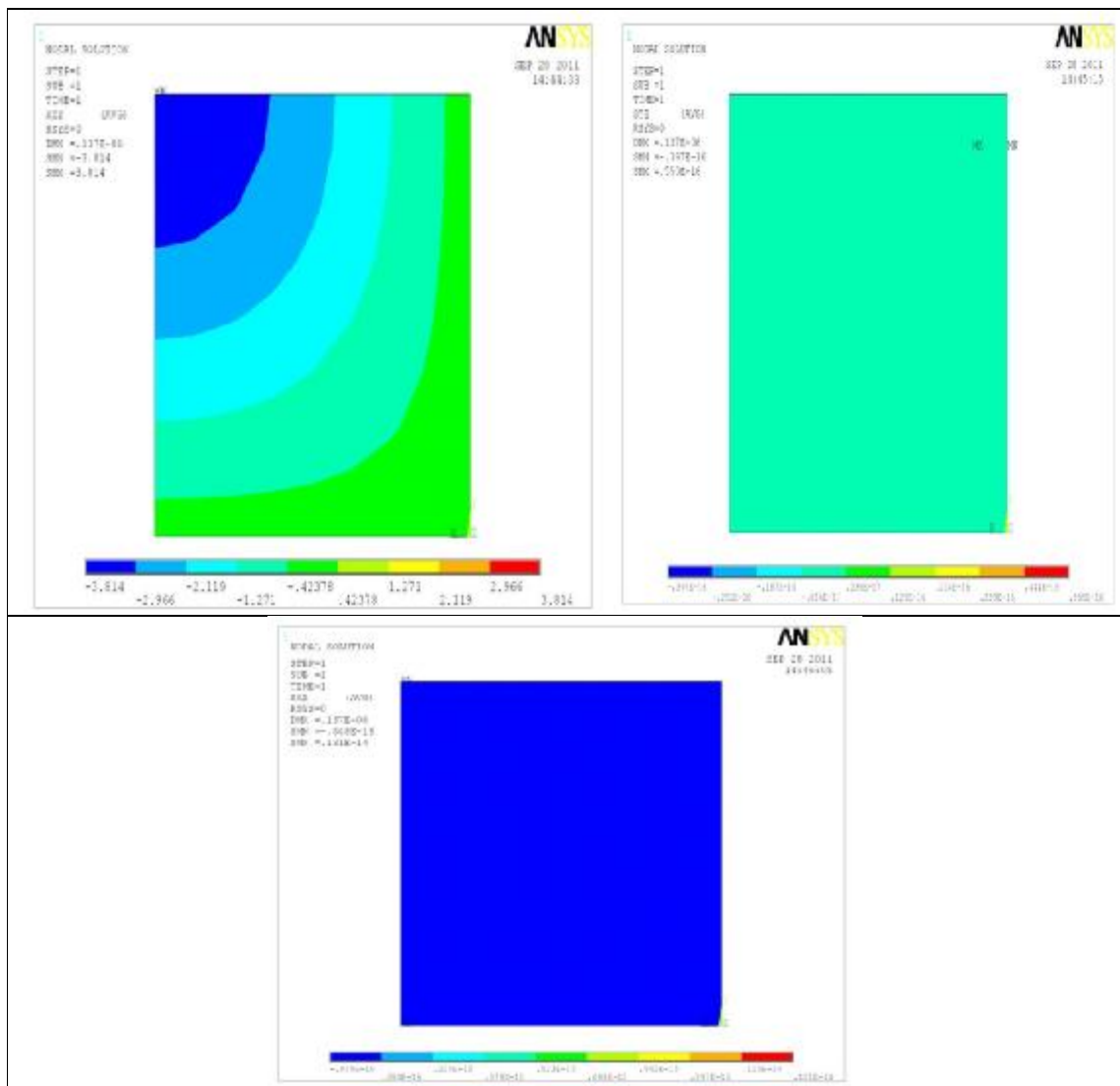


Fig.5.38 Contraintes de cisaillement plan (xy) et transversal (yz, xz).
Plaque (0/90/0/90/0/90/0/90/0) mince ($a/h=100$).

5.4 Evolution temporelle du déplacement transversal

Le but de ce calcul est la détermination de la réponse de la plaque soumise à des forces d'excitation impulsives. La réponse est obtenue par résolution de l'équation dynamique en utilisant la méthode de Newmark concernant la variation du déplacement central transversal de la plaque en fonction du temps t .

L'analyse a été conduite en considérant une plaque à empilement croisé symétrique $(0/90)_{2s}$, soumise à une charge impulsive constante $F(t)$ d'amplitude F_0 répartie sur toute sa surface supérieure (équation 5.6). La plaque est supposée au repos (sans conditions initiales) au moment de l'application de la charge F_0 .

La réponse dynamique de cette plaque a été évaluée par une formulation basée sur la M.E.F., dont l'intégration des équations dynamiques du mouvement a été obtenue par la méthode de Newmark- β . Le pas de temps a été choisi après avoir calculé la fréquence fondamentale de la plaque.

$$F(t) = \begin{cases} F_0 & \text{pour } t \leq t_d \\ \mathbf{0} & \text{pour } t \geq t_d \end{cases} \quad (5.6)$$

5.4.1 Caractéristiques des plaques et paramètres de modélisation

Dans cette section, nous considérons des plaques composites stratifiées $(0^\circ/90^\circ)_{2s}$ simplement appuyées sur leurs bords, constituées de 4 couches en matériaux composites à renforcement unidirectionnel (Graphite/époxyde et en Bore/époxyde).

Les plaques sont de géométrie carrée $(0,24 \times 0,24)$, d'épaisseur h et sont soumises à une excitation impulsive transversale $F(t)$ uniformément répartie sur leur surface supérieure à $z = +h/2$ (par rapport au plan moyen de la plaque). Les caractéristiques élastiques des plaques sont résumées respectivement dans le tableau 5.5.

Tableau 5.5 : Propriétés élastiques des matériaux des plaques $(0/90)_{2s}$

	Graphite/époxyde	Bore/époxyde
$E_{11} = E_{22}$ (GPa)	139.0	211.0
$E_{12} = E_{13}$ (GPa)	11.0	24.6.9
$G_{12} = G_{13}$ (GPa)	6.05	6.9
G_{23} (GPa)	3.78	6.9
$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23}$	0.313	0.36
ρ (kg/m ³)	1578.0	1967.0

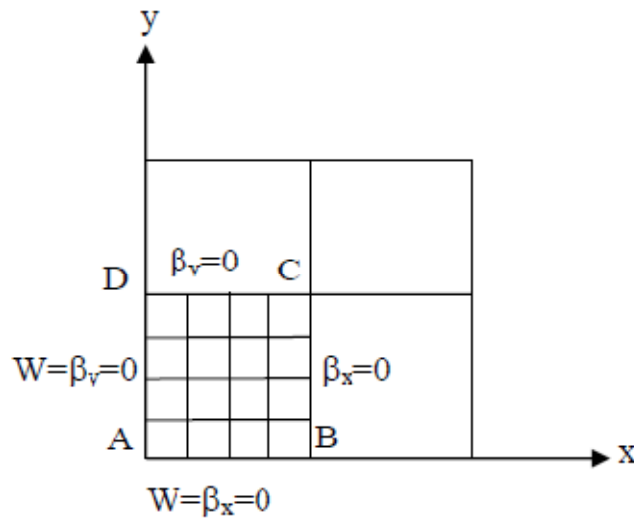


Fig. 5.39 Maillage et conditions aux limites d'un stratifié carré simplement supporté

Par l'utilisation de la méthode d'intégration pas à pas de Newmark, on a résolu l'équation dynamique du mouvement amorti. Les paramètres β_1 et γ de la méthode d'intégration étaient pris respectivement égaux à 1/2 et 1/4.

La matrice d'amortissement est calculée par la méthode de Rayleigh :

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (5.7)$$

Afin de souligner l'influence de l'amortissement et du cisaillement transversal sur la réponse dynamique de la plaque, nous analysons des plaques minces et épaisses en considérant plusieurs coefficients d'amortissement.

On représente respectivement sur les figures 5.40 et 5.41 l'évolution de l'amplitude du déplacement transversal du centre de deux plaques mince et épaisse sur son épaisseur (w_{max}/h) pour un temps total $t = 0.35s$. Le pas de temps a été choisi après avoir calculé la fréquence fondamentale des plaques. La valeur de la fréquence fondamentale ($m = n = 1$) des plaques est égale à $\omega_1 = 412.37 \text{ rad/s}$ et la période fondamentale est $T_1 = 0.0152 \text{ s}$. On a choisi pour l'analyse des plaques un pas de temps égal à $\Delta t = 0.00125 \text{ s}$, avec une durée totale de chargement $t_d = 0.010 \text{ s}$.

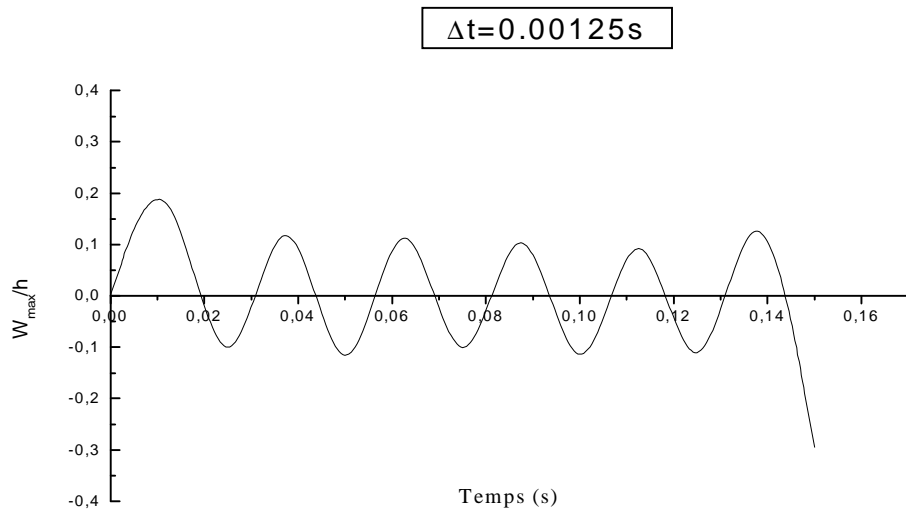


Fig. 5.40 Réponse dynamique d'une plaque composite graphite/époxyde (0/90/90/0) non amortie. (a=b=0.24m, h=0.001m) ($\alpha = 0, \beta = 0$)

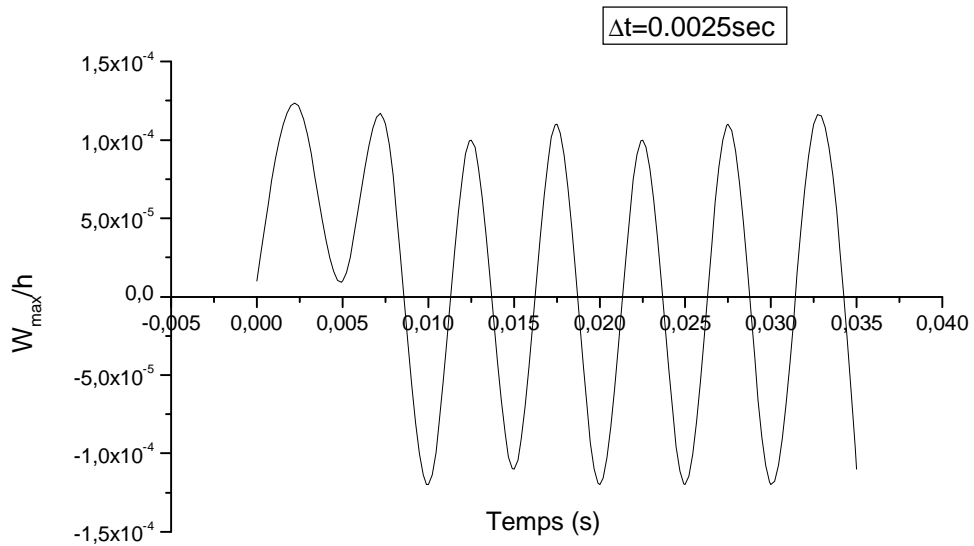


Fig. 5.41 Réponse dynamique d'une plaque composite graphite/époxyde (0/90)_{2s} non amortie. (a=b=0.24m, h=0.01m) ($\alpha = 0, \beta = 0$)

Les figures 5.40 et 5.41 présentent respectivement l'évolution de la réponse dynamique d'une plaque en fonction du temps sans et avec cisaillement transverse. Elles illustrent une influence significative du cisaillement transversal sur le déplacement transverse. Dans le cas de la plaque mince, le rapport w_{max}/h est au voisinage de 0.327 au cours du temps de chargement. En revanche, le rapport w_{max}/h de la plaque épaisse atteint une valeur de 1.2×10^{-4} pendant le temps de chargement. Cette différence est due à l'augmentation de l'épaisseur de la dernière plaque entraînant ainsi une diminution de sa flexibilité. L'effet du cisaillement transversal dans ce cas influe beaucoup sur le comportement vibratoire des plaques épaisses.

Sur les figures 5.42 à 5.45, on a représenté la réponse temporelle au centre des plaques composites pour les deux types de matériaux considérée. On montre l'évolution des amplitudes maximales de la réponse de la plaque concernant les deux cas de plaques minces et épaisses. Le temps de chargement considéré est de $t_d = 0.10s$ et le pas est égal à $\Delta t = 0.025s$. Nous remarquons que le rapport w_{max}/h est influencé par la valeur de la constante d'amortissement β et par l'intensité de la charge appliquée. Cette influence est indépendante du type de matériau et de l'intensité de la charge. Chaque fois que la plaque est amortie, l'amplitude de sa réponse sous l'action du chargement impulsif diminue progressivement. Les plaques minces apparaissent plus stables durant tout le temps t_d . Lorsque le chargement est important, le rebondissement des plaques diminue du fait de l'augmentation de leur rigidité flexionnelle.

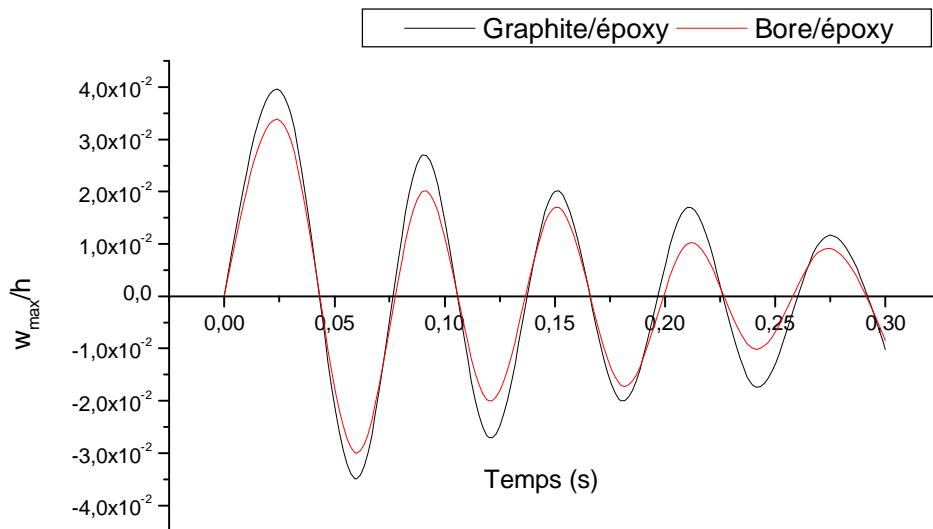


Fig. 5.42 Réponse dynamique de la plaque composite mince $(0/90)_{2s}$ sous chargement constant. ($\alpha = 0$) et $\beta = 10^{-3}$ pour $F_0 = 5 \text{ N/m}^2$

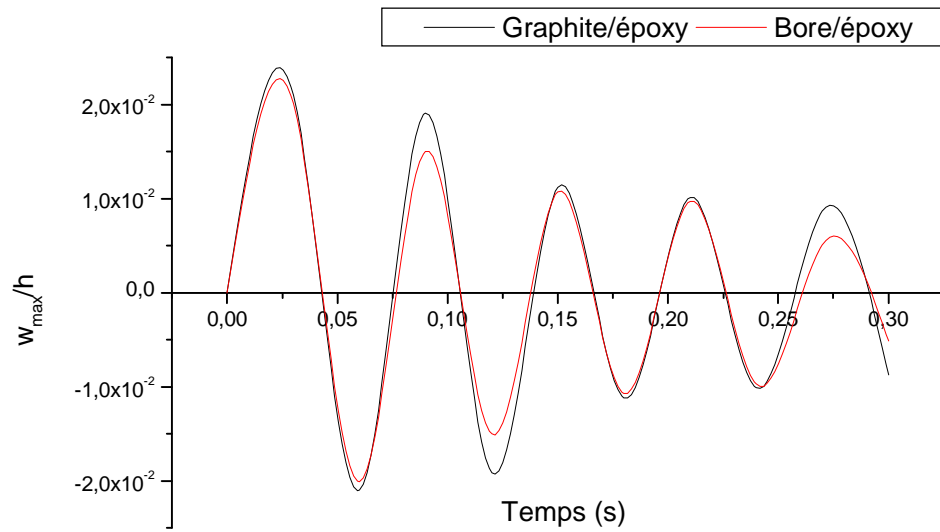


Fig. 5.43 Réponse dynamique de la plaque composite mince $(0/90)_{2s}$ sous chargent constant. $(\alpha = 0)$ et $(\beta = 10^{-4})$ pour $F_0 = 10 \text{ N/m}^2$

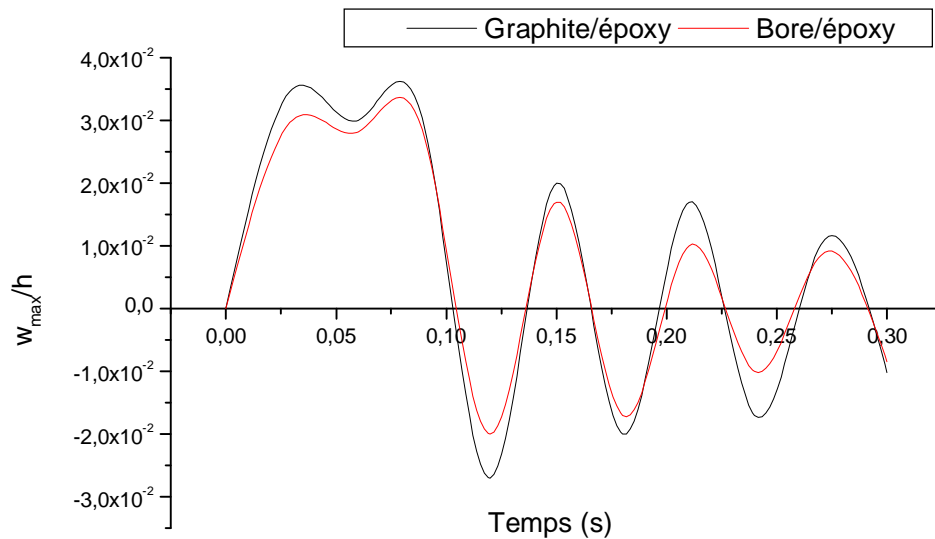


Fig. 5.44 Réponse dynamique de plaque composite épaisse $(0/90)_{2s}$ sous chargement constant. $(\alpha = 0)$ et $(\beta = 10^{-3})$ pour $F_0 = 5 \text{ N/m}^2$

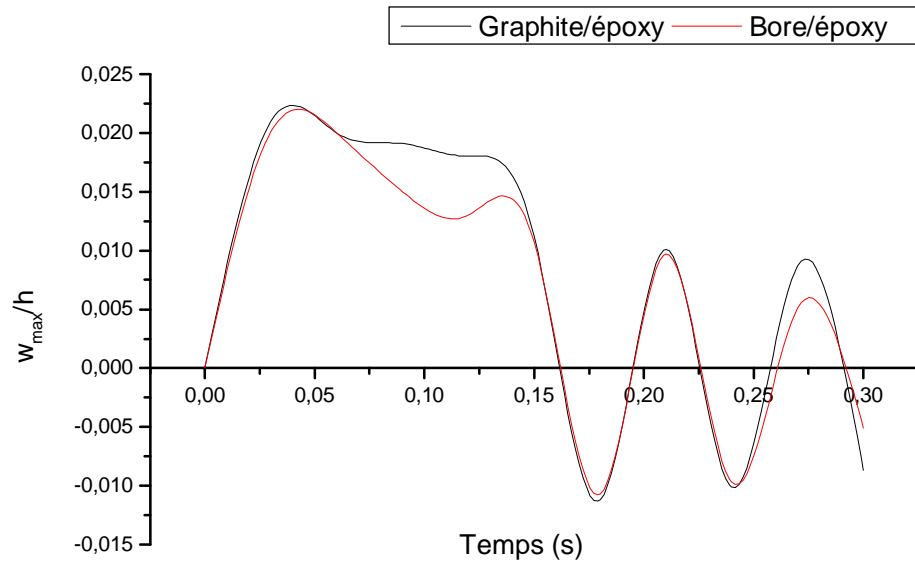


Fig. 5.45 Réponse dynamique d'une plaque composite épaisse $(0/90)_2$ s sous chargement constant. ($\alpha = 0$) et ($\beta = 10^{-4}$ pour $F_0 = 10 \text{ N/m}^2$)

Conclusions et perspectives

Dans ce travail que nous venons de réaliser, deux codes de calcul ont été développés respectivement pour la simulation numérique du comportement statique et en vibration libre, et forcé (sans et avec amortissement). Ils sont basés sur une formulation éléments finis basée sur la théorie des stratifiés et la méthode d'intégration directe de Newmark.

Dans toutes les simulations effectuées, les maillages utilisés étaient de forme quadrilatérale possédant 4 nœuds et 5 degrés de liberté par nœud. Ce choix est justifié par les suggestions de la littérature qui stipulent que les éléments d'ordre plus élevé ne se comportent guère mieux pour résoudre les discontinuités. De plus, pour la formulation numérique de tels comportements semblent être plus prometteuses grâce à leur simplicité d'utilisation.

Nous avons choisi d'étudier les comportements considérés selon un ordre de difficultés croissantes pour la mise au point du code de calcul. Ainsi, le cas de vibrations libres et comportement statique des plaques composites ont d'abord été abordé avant de s'intéresser aux vibrations forcées. L'étude de la théorie des stratifiés, qui possède une solution analytique, a servi de point de départ pour la tâche que nous nous sommes assignés. Les autres comportements ont été étudiés par la suite.

Dans le cas des vibrations forcées, nous avons choisi une approche temporelle qui est très souvent utilisée pour résoudre un problème d'évolution en temps. La résolution numérique du problème discrétisé de dynamique passe par une discrétisation en espace et en temps de celui-ci. Cette dernière nous a permis de bien décrire les mouvements avec ou sans amortissements. Les aspects mathématiques de cette méthode ainsi que d'autres applications pourront alors être développés lors de futurs travaux.

Nous avons choisi de nous limiter aux séquences d'empilement symétriques et antisymétriques des plaques composites stratifiées. Ces dernières sont choisies minces ou épaisses et leurs formes géométriques sont sous différentes conditions aux limites.

Les paramètres considérés à varier pour évaluer le comportement vibratoire de nos structures étaient les dimensions des plaques, leurs épaisseurs, changement de séquence d'empilement et du degré d'orthotropie du matériau.

Le bilan global que nous faisons sur le travail accompli est le suivant :

Dans le cas des vibrations libres, les résultats numériques obtenus ont été comparés à ceux issus du logiciel ANSYS ainsi qu'aux modèles de FOST, HOST et Reddy. Nous avons constaté que nos résultats corroborent ceux des autres modèles surtout lorsque les plaques sont minces. Notons aussi que l'effet du cisaillement transverse n'a pratiquement pas produit des résultats différents. Les stratifiés symétriques croisés et alternés $0^\circ/90^\circ$ présentent un comportement caractérisé par une flexion lors des trois premiers modes de vibration. En revanche, la séquence d'empilement équilibré antisymétrique alternée à 45° présente une torsion plus importante comparée à l'empilement à 90° .

Pour ce qui l'étude statique, nous avons considéré des chargements doublement sinusoïdaux et nous avons pu tester la capacité de notre formulation par rapport à la solution analytique tridimensionnelle de Pagano et aussi les résultats obtenus par l'intermédiaire du logiciel ANSYS. La comparaison des déplacements transversaux obtenus ainsi que la bonne stabilité de notre solution numérique pour le cas des plaques de faibles épaisseurs ($a/h > 10$) montre bien la validité d'une telle formulation.

Dans le cas du comportement dynamique des plaques composites soumises à des excitations transversales, les structures considérées ont été semi-discrétisées en espace en utilisant des éléments finis plaques à cinq degrés de liberté, basé sur les hypothèses de Mindlin et prenant en compte l'effet du cisaillement transversal. La réponse dynamique des plaques sous charge impulsive est obtenue par la méthode d'intégration pas à pas de Newmark.

La discrétisation temporelle, dédiée à la modélisation des phénomènes de dynamique rapide, se traduit par une approche incrémentale pour intégrer sur le temps les équations différentielles relatives au système discrétisé par éléments finis. On s'est intéressé à deux aspects liés à l'intégration temporelle. Le premier aspect concerne le choix du schéma d'intégration le mieux adapté au problème de la dynamique transitoire des structures composites. Le second aspect concerne le choix de l'échelle de temps qui doit être également adaptée à ce type de problème.

A la lumière des résultats obtenus concernant la recherche de l'influence des facteurs d'amortissement et de certains paramètres géométriques sur le comportement dynamique des plaques, il a été confirmé que la réponse verticale de ces dernières décroît avec l'augmentation de leurs épaisseurs. Cette méthode d'intégration en temps introduit un amortissement numérique qui dépend directement du pas de temps choisi. La réponse de la plaque à un chargement impulsif uniformément réparti sur sa surface supérieure épouse l'allure de la charge durant le temps de l'application de la charge. Lorsque la charge extérieure s'annule, la plaque est en mouvement de vibrations libres ($t > t_d$ temps de chargement).

Perspectives

En guise des résultats obtenus, on peut déjà affirmer que le travail qui vient d'être accompli semble que son idée pourrait être exploitée de plusieurs autres façons.

- 1- Analyser les structures de formes plus complexes telles que les coques cylindriques multicouches dans le domaine linéaire, pour le calcul des vibrations transversales.
- 2- Elaborer une démarche à la modélisation des coques sphériques de forme arbitraire discrétisées par éléments finis avec prise en compte du cisaillement transversal. Il est essentiel de commencer par développer les aspects géométriques, cinématiques et mécaniques d'une coque de forme quelconque.

Finalement, l'avantage dans l'utilisation et le raisonnement que nous en avons faits et suivis est que la formulation engendrée ressemble à des modèles et théories éprouvés et qu'ils peuvent être un guide pour d'autres travaux plus approfondis et pour d'autres cas de structures plus compliqués.

ANNEXES

Annexe A- Formulation de la méthode des éléments finis directe

A.1 Introduction

A.1.1 Rappels sur la formulation par la méthode des éléments finis :

Pour l'étude de mécanismes industriels, étant donnée la complexité de la géométrie des pièces mécaniques, seules les techniques numériques d'approximation basées sur une discrétisation du milieu continu permettent la formulation de l'équilibre statique et la résolution du phénomène. Parmi les méthodes utilisées, on fait appel à celle des éléments finis (M.E.F.). On peut citer quelques méthodes de formulation des éléments :

- Ø La méthode directe
- Ø La méthode variationnelle (de l'énergie)
- Ø La méthode de résidus pondérés.

A.2 Méthode directe

La méthode directe consiste à formuler directement les trois systèmes d'équations élastiques : les équations d'équilibre, les équations déformations-déplacements et les équations intrinsèques du matériau. Cette méthode est pratiquement utile pour préciser les rapports fondamentaux existants entre l'approximation par éléments finis et la structure réelle. De plus, la méthode directe présente des caractéristiques connues permettant de toutes les manières d'envisager la formulation des éléments en particulier les transformations de contraintes à forces et de déplacements à déformations.

A.3 Approximation des déplacements

On considère un élément fini rectangulaire ($a \times b$) à 4 nœuds de haute précision de type Hermite. Les nœuds sont placés à chaque angle du rectangle possédant chacun six degrés de liberté (Fig. A.1).

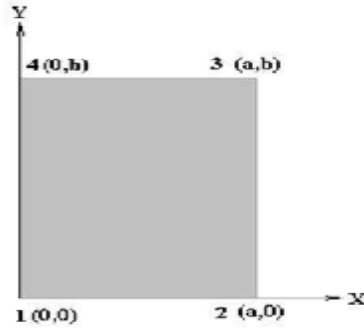


Fig. A.1 Système de coordonnées et numérotation des nœuds d'un élément fini

Les inconnues du problème ou degrés de liberté désignent les déplacements de nœuds du maillage. Le vecteur déplacement total à chaque nœud est défini par:

$$\left\{ w_0 \quad \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial xy} \quad u_0 \quad v_0 \right\}^T \quad (\text{A.1})$$

A.3.1 Fonctions de forme de l'élément fini :

On choisit une fonction de déplacement qui définit l'état de déplacement de tous les points de l'élément. Ce modèle peut être représenté de façon commode par une expression polynômiale.

Le champ de déplacement transversal peut s'exprimer comme :

$$w_0(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9y^3 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3 + a_{13}x^2y^2 + a_{14}x^3y^2 + a_{15}x^2y^3 + a_{16}x^3y^3 \quad (\text{A.2})$$

Le déplacement suivant l'axe x s'écrit sous la forme :

$$u_0(x, y) = b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy \quad (\text{A.3})$$

Le déplacement suivant l'axe y peut également s'écrire sous la forme :

$$v_0(x, y) = b_5 + b_6x + b_7y + b_8xy \quad (\text{A.4})$$

Introduisant les coordonnées nodales convenables pour chaque nœud dans cette dernière équation, il en résulte que le champ de déplacement transversal généralisé dans l'élément s'exprime sous la forme :

$$\begin{pmatrix} w_{0,1} \\ \frac{\partial w_{0,1}}{\partial x} \\ \frac{\partial w_{0,1}}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_{0,1}}{\partial x \partial y} \\ \vdots \\ w_{0,4} \\ \frac{\partial w_{0,4}}{\partial x} \\ \frac{\partial w_{0,4}}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_{0,4}}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2a & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 & a^3b & ab^3 & a^2b^2 & a^3b^2 & a^2b^3 & a^3b^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & b & 0 & 3a^2 & 2ab & b^2 & 0 & 3a^2b & b^3 & 2ab^2 & 3a^2b^2 & 2ab^3 & 3a^2b^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 2b & 0 & a^2 & 2ab & 3b^2 & a^3 & 3ab^2 & 2a^2b & 2a^3b & 3a^2b^2 & 3a^3b^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2a & 2b & 0 & 3a^2 & 3b^2 & 4ab & 6a^2b & 6ab^2 & 9a^2b^2 \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 & 0 & 3b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 & 3b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \\ a_{15} \\ a_{16} \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

De façon similaire, on peut définir le vecteur de déplacements en membrane par :

$$\begin{pmatrix} u_{0,1} \\ v_{0,1} \\ u_{0,2} \\ v_{0,2} \\ u_{0,3} \\ v_{0,3} \\ u_{0,4} \\ v_{0,4} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

A.4 Approximation des déformations

Pour un point ne se trouvant pas dans le plan moyen, la déformation associée de Green-Lagrange varie linéairement avec l'épaisseur z :

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z \{k\} \quad (\text{A.7})$$

En utilisant les relations précédentes, la déformation en un point quelconque de l'épaisseur est déterminée par l'expression suivante :

$$\{\varepsilon\} = [B_m]\{w_m\} + z[B_b]\{w_b\} \quad (\text{A.8})$$

A.5 Approximation des efforts et des moments sur un élément

Par commodité, on utilise les résultantes des contraintes et des moments plutôt que les contraintes directes en théorie des stratifiés. Les résultantes des contraintes $\{N\}$ et des moments $\{M\}$ sur l'élément sont définies comme suit :

Les résultantes en membrane :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} &= [A]\{\varepsilon^0\} + [B]\{k\} \\ &= [A][B_m]\{w_m\} + [B][B_b]\{w_b\} \\ &= [N_m] + [N_b] \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

et les moments de flexion et de torsion :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} &= [B]\{\varepsilon^0\} + [D]\{k\} \\ &= [B][B_m]\{w_m\} + [D][B_b]\{w_b\} \\ &= [M_m] + [M_b] \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Dans ce cas de la flexion statique, le travail virtuel des forces d'accélération est nul, soit :

$$\delta w = \delta(w_{int} - w_{ext}) = 0 \quad (\text{A.11})$$

où δw_{int} est le travail virtuel des efforts intérieurs et δw_{ext} est celui des efforts extérieurs.

Le travail virtuel des efforts intérieurs s'écrit :

$$\delta w_{int} = \int_v \sigma_j \delta \varepsilon_j \, dv = \int_A (\{\delta \varepsilon^0\}^T \{N\} + \{\delta k\}^T \{M\}) \, dA \quad (\text{A.12})$$

où (A) est la surface de l'élément.

L'intégrale (A.13) nous permet de déterminer les matrices de raideur suivantes :

-une matrice de raideur de flexion :

$$[k_b] = \int_A [B_b]^T [D] [B_b] dA \quad (\text{A.13})$$

-une matrice de raideur de membrane :

$$[k_m] = \int_A [B_m]^T [A] [B_m] dA \quad (\text{A.14})$$

-deux matrices de raideur de couplage membrane/flexion :

$$[k_{mb}] = [k_{bm}]^T = \int_A [B_m]^T [B] [B_b] dA \quad (\text{A.15})$$

Le travail élémentaire des forces extérieures s'écrit :

$$\delta w_{\text{ext}} = \int_A \mathbf{T}_i \delta \mathbf{u}_i d\mathbf{s} = \int_A \{\delta w \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} d\mathbf{A} \quad (\text{A.16})$$

Où $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est la résultante des forces extérieures (en direction z) appliquée sur la plaque qui s'exprime:

$$\{\mathbf{P}_b\} = \int_A [N_w]^T \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{A} \quad (\text{A.17})$$

Dans le cas de la flexion dynamique, le travail virtuel des quantités d'accélération n'est pas nul. La formulation de la matrice masse élémentaire est nécessaire pour évaluer le comportement des plaques multicouches en vibrations libres ou forcées. Nous l'avons développé à partir de l'expression suivante du travail élémentaire des forces extérieures:

$$\delta w_{\text{ext}} = \int_A \mathbf{T}_i \delta \mathbf{u}_i d\mathbf{A} + \int_v \mathbf{B}_i \delta \mathbf{u}_i d\mathbf{v} = \int_A \left\{ \delta w_0 \left\{ -\rho \mathbf{h} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \right\} + \delta u_0 \left\{ -\rho \mathbf{h} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right\} + \delta v_0 \left\{ -\rho \mathbf{h} \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \right\} \right\} d\mathbf{A} \quad (\text{A.18})$$

où \mathbf{B}_i sont les forces de volume par unité de volume, \mathbf{T}_i les tractions appliquées sur la surface (A) de l'élément e par unité de surface et $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t})$ sont les forces extérieures, ρ est la masse volumique de l'élément e par unité de longueur et h est l'épaisseur totale de l'élément e.

On définit alors les matrices élémentaires de masse en flexion, soit:

$$[M_b] = \rho h \int_A [N_w]^T [N_w] dA \quad (\text{A.19})$$

$$[M_m] = \rho h \int_A ([N_u]^T [N_u] + [N_v]^T [N_v]) dA \quad (\text{A.20})$$

En utilisant les relations précédentes, le principe des travaux virtuels, nous donne finalement l'équation d'équilibre élémentaire:

$$\begin{bmatrix} [M_b] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [M_m] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{w}_b\} \\ \{\ddot{w}_m\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [k_b] & [k_{bm}] \\ [k_{mb}] & [k_m] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w_b\} \\ \{w_m\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{p_b\} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

Annexe B - Évaluation de l'amortissement d'une plaque à l'aide de la méthode de Ritz

Il est bien connu que l'identification et la modélisation de l'amortissement sont parmi les problèmes les plus compliqués à traiter en dynamique des structures. De plus, l'amortissement provient généralement de différentes sources. Pour le cas des plaques, on peut distinguer quatre types de dissipations : l'amortissement interne provenant de la dissipation dans le matériau ; l'amortissement structural provenant du frottement entre différentes surfaces en contact (on peu citer le cas des parties tournantes des accouplements) ; l'amortissement hydrodynamique et aérodynamique provenant des structures vibrants dans un liquide ou un gaz.

La méthode de Rayleigh-Ritz consiste à rechercher le déplacement transverse sous la forme d'une double série, c'est à dire:

$$w_0(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (\text{B.1})$$

Les fonctions $X_m(x)$ et $Y_n(y)$ doivent être des fonctions admissibles, vérifiant l'essentiel des conditions aux frontières, imposées sur les côtés $x=0$, $x=a$ et $y=0$, $y=b$ de la plaque. Les coefficients A_{mn} sont ensuite déterminés par les conditions de stationnarité de la fonction énergie.

L'énergie de déformation U peut être explicitée en fonction des énergies dissipées dans les axes du matériau comme :

$$U = U_1 + U_2 + U_6 \quad (\text{B.2})$$

Dont les énergies de déformation U_1 , U_2 et U_6 s'expriment par :

$$U_1 = U_{11} + U_{12} \quad (\text{B.3})$$

avec

$$U_{11} = \frac{1}{2} \iiint Q_{11} \varepsilon_1^2 dx dy dz \quad (\text{B.4})$$

$$U_{12} = \frac{1}{2} \iiint Q_{12} \varepsilon_1 \varepsilon_2 dx dy dz \quad (\text{B.5})$$

$$U_2 = U_{21} + U_{22} \quad (\text{B.6})$$

avec

$$U_{22} = \frac{1}{2} \iiint Q_{22} \varepsilon_2^2 dx dy dz \quad (\text{B.7})$$

$$U_{21} = U_{12} \quad (\text{B.8})$$

L'énergie dissipée par amortissement du matériau s'écrit ensuite sous la forme :

$$\Delta U = \psi_{11} U_{11} + 2\psi_{12} U_{12} + \psi_{22} U_{22} + \psi_{66} U_6 \quad (\text{B.9})$$

où

$$U_6 = \frac{1}{2} \iiint Q_{22} \gamma_6 \varepsilon_6 dx dy dz \quad (\text{B.10})$$

Dont les coefficients d'amortissement ψ_{11} , ψ_{12} , ψ_{22} et ψ_{66} associés respectivement aux énergies de déformation seront introduits. A savoir que l'énergie de déformation U_{12} est généralement négative, du fait du couplage entre les déformations ε_1 et ε_2 par effet de type Poisson. L'énergie dissipée correspondante doit être prise positive. Cette énergie est en fait négligeable devant les autres énergies dissipées. L'amortissement ψ_x dans la direction x est ensuite évalué par la relation :

$$\psi_x = \Delta U / U \quad (\text{B.11})$$

Annexe C- Équation dynamique par la méthode de superposition modale

C.1 Équation dynamique en absence d'amortissement

En absence d'amortissement, l'équation de mouvement s'écrit, en l'absence de charges, sous la forme :

$$M\ddot{U} + KU = \mathbf{0} \quad (\text{C.1})$$

Les solutions recherchées pour cette équation, dans le cas de vibrations libres, sont de types harmoniques :

$$U = \mathbf{X} (A \cos\omega t + B \sin\omega t) \quad (\text{C.2})$$

où \mathbf{X} est un vecteur d'ordre n , et ω est la pulsation des vibrations harmoniques. Les constantes A et B sont déterminées à partir des conditions initiales à $t = 0$.

Compte tenu de l'expression (C.2), l'équation (C.1) associée aux vibrations libres de la structure devient :

$$K \mathbf{X} = \omega^2 M \mathbf{X} \quad (\text{C.3})$$

Vu la nature des matrices structurales, ce système homogène de n équations linéaires admet n solutions : $(\omega_1^2, \mathbf{X}_1), (\omega_2^2, \mathbf{X}_2), \dots, (\omega_n^2, \mathbf{X}_n)$.

où $\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_n^2$, sont les valeurs propres et $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$, sont les vecteurs propres. L'orthogonalité des vecteurs modaux conduit à :

$$X_i^t M X_j = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } i = j \\ \mathbf{0} & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

Les valeurs propres du système sont ensuite données suivant :

$$0 \leq \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_n^2 \quad (\text{C.5})$$

C.2 Équation dynamique en présence d'amortissement

Les vecteurs propres du système non amorti sont notés \mathbf{X}_i et nous appelons ω_i^2 les valeurs propres correspondantes. Nous cherchons les solutions de (C.1) en les décomposant en série des modes normaux \mathbf{X}_i du système conservatif associé, sous la forme :

$$U = \sum_i^n \phi_i(t) X_i(x, y) = X(x, y) \phi(t) \quad (\text{C.6})$$

où $\mathbf{X}(x, y)$ est la matrice des modes propres normés par rapport à la masse :

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 \ \mathbf{X}_2 \ \dots \ \mathbf{X}_n] \quad (\text{C.7})$$

et $\boldsymbol{\varphi}(t)$ est le vecteur de la déformée modale, c'est à dire le vecteur des déplacements en coordonnées modales normales :

$$\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1(t) \ \varphi_2(t) \ \dots \ \varphi_n(t)] \quad (\text{C.8})$$

En reportant l'expression (C.7) dans l'équation (C.6) et en multipliant les deux membres par \mathbf{X}^t , puis en utilisant les conditions d'orthogonalité des modes \mathbf{X}_i par rapport aux matrices masse \mathbf{M} et rigidité \mathbf{K} , nous obtenons :

$$\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\varphi}} + \boldsymbol{\Omega}^2 \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{X}^t \mathbf{F} \quad (\text{C.9})$$

avec

$$\mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{M}\mathbf{X}\boldsymbol{\Omega}^2, \quad \mathbf{X}^t \mathbf{K}\mathbf{X} = \boldsymbol{\Omega}^2 \quad \text{et} \quad \mathbf{X}^t \mathbf{M}\mathbf{X} = \mathbf{I} \quad (\text{C.10})$$

où $\boldsymbol{\Omega}^2$ est la matrice diagonale des valeurs propres :

$$\boldsymbol{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \omega_2^2 & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.11})$$

et \mathbf{A} est la matrice des coefficients d'amortissement explicitée par :

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}^t \mathbf{C}\mathbf{X} \quad (\text{C.12})$$

En écrivant l'expression (C.9) pour chaque coordonnée modale, nous obtenons :

$$\ddot{\varphi}_i(t) + \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{\varphi}_j(t) + \omega_i^2 \varphi_i(t) = f_i(t) \quad i = 1, 2 \dots n \quad (\text{C.13})$$

où $f_i(t)$ est la composante modale du mode i , définie par :

$$f_i(t) = \mathbf{X}_i^t \mathbf{F}(t) \quad (\text{C.14})$$

Les coefficients d'amortissement A_{ij} sont exprimés par :

$$A_{ij} = \mathbf{X}_i^t \mathbf{C}\mathbf{X}_j \quad (\text{C.15})$$

L'équation (C.13) pose problème car la décomposition modale ne peut pas être réalisée par la procédure décrite précédemment car les coefficients d'amortissement créent un couplage supplémentaire dans l'équation de mouvement. Plusieurs méthodes numériques sont utilisables pour résoudre ce problème. Il est par exemple possible d'exprimer la matrice d'amortissement comme une combinaison linéaire de la matrice masse et de la matrice de rigidité :

$$\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K} \quad (\text{C.16})$$

Bibliographie

- [Afaq 03a] K.S. Afaq. Développement d'un nouveau modèle pour les structures composites "multicouches et sandwichs" avec prise en compte du cisaillement transverse et des effets de bord. PhD thesis, Université Toulouse III - Paul Sabatier, 2003.
- [Afaq 03b] K.S. Afaq, M. Karama & S. Mistou. Un nouveau modèle raffiné pour les structures multicouches. In Comptes-rendus des 13 èmes Journées Nationales sur les Composites, pages 289-292. Strasbourg, March 2003.
- [Allix 89] O. Allix. Modélisation du comportement des composites stratifiés : application à analyse du délaminage. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1989.
- [Ambartsumyan 69] S.A. Ambartsumyan. Theory of anisotropic plate. Technomic Publishing Co, 1969.
- [Averill 94] R.C. Averill. Static and dynamic response of moderately thick laminate beams with damage. Composite Eng., vol. 4, pages 381-395, 1994.
- [Averill 96] R.C. Averill & Y.C. Yip. Development of simple, robust finite elements based on refined theories for thick laminated beams. Computers and Structures, vol. 59, no. 3, pages 529-546, 1996.
- [Barboni 90] R. Barboni, P. Gaudenzi & S. Carlini. A three-dimensional analysis of edge effects in composite laminates with circular holes. Composite Structures, vol. 15, pages 115-136, 1990.
- [Batoz 90] J.L. Batoz & G. Dhatt. Modélisation des structures par éléments finis, volume 2. Hermès, 1990.
- [Beakou 93] A. Beakou & M. Touratier. A rectangular finite element for analysing composite multilayered shallow shells in statics, vibration and buckling. Int. J. Numer. Meth. Engng., vol. 36, pages 627-653, 1993.
- [Bert 95b] Bert, C.W. , Kim, C.D. , Whirling of composite material driveshafts including bending-twisting coupling and transverse shear deformation. Journal of Vibration and Acoustics. Vol. 117, pages 17-21, 1995
- [Berthelot 96] Berthelot J-M, "Matériaux composites, comportement mécanique et analyses des structures", 2ème Edition, Masson, Paris, 1996,
- [Bui 99] V.Q. Bui, E. Marechal & H. Nguyen-Dang. Imperfect interlaminar interfaces in laminated composites : bending, buckling and transient responses. Composites Science and Technology, vol. 59, pages 2269-2277, 1999.
- [Bui 00] V.Q. Bui, E. Marechal & H. Nguyen-Dang. Imperfect interlaminar interfaces in laminated composites : interlaminar stresses and strain-energy release rates. Composites Science and Technology, vol. 60, pages 131-143, 2000.
- [Caron 97] J.F. Caron & A. Ehrlacher. Modelling the kinetics of transverse cracking in composite laminates. Composites Science and Technology, vol. 57, pages 1261-1270, 1997.
- [Caron 99] J.F. Caron, R.P. Carreira & A. Diaz Diaz. Critères d'initiation de délaminage dans les stratifiés. Académie des sciences, vol. 327, page 1291, 1999.
- [Caron 00] J.F. Caron & A. Ehrlacher. Un modèle pour les composites épais. In Comptes-rendus des 12 èmes Journées Nationales sur les Composites. Cachan, Nov 2000.
- [Caron 01] J.F. Caron & K. Sab. Un nouveau modèle de plaque multicouche épaisse. Académie des sciences, vol. 329, pages 595-600, 2001.

- [Caron 03] J.F. Caron & R.P. Carreira. Interface behaviour in laminates with simplified model. *Composites Science and Technology*, vol. 63, pages 633-640, 2003.
- [Carreira 98] R.P. Carreira. Validations par éléments finis des Modèles Multiparticulaires de Matériaux Multicouches M4. PhD thesis, ENPC, 1998.
- [Carreira 02] R.P. Carreira, J.F. Caron & A. Diaz Diaz. Model of multilayered materials for interface stresses estimation and validation by finite element calculations. *Mechanics of Materials*, vol. 34, pages 217-230, 2002.
- [Carrera 96] E. Carrera. Co Reissner-Mindlin multilayered plate elements including zig-zag and interlaminar stresses continuity. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, vol. 39, pages 1797-1820, 1996.
- [Carrera 97] E. Carrera & B. Kroplin. Zig-zag and interlaminar equilibria effects in large deflection and postbuckling analysis of multilayered plates. *Mechanics of Composite Materials and Structures*, vol. 4, pages 69-94, 1997.
- [Carrera 98] E. Carrera. A refined multilayered finite element model applied to linear and non-linear analysis of sandwich plates. *Composites Science and Technology*, vol. 58, pages 1553-1569, 1998.
- [Carrera 00] E. Carrera. An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. *Composite structures*, vol. 50, pages 183-198, 2000.
- [Carrera 04] E. Carrera. On the use of Murakami's zig-zag function in the modeling of layered plates and shells. *Computers and Structures*, vol. 82, pages 541-554, 2004.
- [Chabot 97] A. Chabot. Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches. PhD thesis, ENPC, 1997.
- [Chaudhuri 87] R.A. Chaudhuri & P. Seide. Triangular finite element for analysis of thick laminated plates. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol. 24, pages 1203-1204, 1987.
- [Chaudhuri 04] R.A. Chaudhuri. Analysis of laminated shear-exible angle-ply plates. *Composite Structures* (Article in press), 2004.
- [Chen 96] D.J. Chen, D.K. Shah & W.S. Chan. Interfacial stress estimation using least- square extrapolation and local stress smoothing in laminated composites. *Comput. Struct.*, vol. 58, no. 4, pages 765-774, 1996.
- [Cho 93] M. Cho & R.R. Parmerter. Efficient higher order composite plate theory for general lamination configuration. *AIAA J.*, vol. 31, pages 1299-1306, 1993.
- [Cho 97] Y.B. Cho & R.C. Averill. An improved theory and finite-element model for laminated composite and sandwich beams using first-order zig-zag sublaminar approximations. *Composite Structures*, vol. 37, no. 3-4, pages 281-298, 1997.
- [Cho 00] Y.B. Cho & R.C. Averill. First-order zig-zag sublaminar plate theory and finite element model for laminated composite and sandwich panels. *Composite Structures*, vol. 50, pages 1-15, 2000.
- [Desai 03] Y.M. Desai, G.S. Ramtekkar & A.H. Shah. Dynamic analysis of laminated composite plates using a layer-wise mixed finite element model. *Composite Structures*, vol. 59, pages 237-249, 2003.
- [Destuynder 80] P. Destuynder. Sur une justification des modèles de plaques et de coques par les méthodes asymptotiques. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1980.
- [Dhatt 69] G. Dhatt . Numerical analysis of thin shells by curved triangular elements based on discrete Kirchoff hypothesis. *Proc. ASCE Symp. On Application of FEM in civil engineering*, Vanderbilt Univ., Nashville, Tenn., pages 255-278, 1969.
- [Dhatt 84] G. Dhatt & G. Touzot. Une présentation de la méthode des éléments finis. 2^e édition, 1984.
- [Dhatt 84] G. Dhatt and G. Touzot. Une Présentation de la Méthode des Eléments Finis. Maloine S.

A., 1984

- [Di Sciuva 84] M. Di Sciuva. A refined transverse shear deformation theory for multilayered anisotropic plates. *Atti. Accad. Sci. Torino*, vol. 118, pages 279-295, 1984.
- [Di Sciuva 86] M. Di Sciuva. Bending, vibration and buckling of simply supported thick multi-layered orthotropic plates. An evaluation of a new displacement model. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 105, no. 3, pages 425-442, 1986.
- [Di Sciuva 87] M. Di Sciuva. An improved shear-deformation theory for moderately thick multi-layered anisotropic shells and plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 54, pages 589-596, 1987.
- [Di Sciuva 93a] M. Di Sciuva. A general quadrilateral multilayered plate element with continuous interlaminar stresses. *Computers and Structures*, vol. 47, no. 1, pages 91-105, 1993.
- [Di Sciuva 93b] M. Di Sciuva & U. Icardi. Discrete-layer models for multilayered shells accounting for interlayer continuity. *Meccanica*, vol. 28, pages 281-291, 1993.
- [Di Sciuva 95a] M. Di Sciuva. A third-order triangular multilayered plate finite element with continuous interlaminar stresses. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, pages 1-26, 1995.
- [Di Sciuva 95b] M. Di Sciuva & U. Icardi. Analysis of thick multilayered anisotropic plates by a higher order plate element. *AIAA J.*, vol. 33, no. 12, pages 2435-2437, 1995.
- [Diaz Diaz 01] A. Diaz Diaz. *Délamination des matériaux multicouches : Phénomènes, Modèles et Critères*. PhD thesis, ENPC, 2001.
- [Diaz Diaz 02] A. Diaz Diaz, J.F. Caron & R.P. Carreira. Software application for evaluating interfacial stresses in inelastic symmetrical laminates with free edges. *Composite Structures*, vol. 58, pages 195-208, 2002.
- [Engblom 86] J.J. Engblom & O.O. Ochoa. Finite element formulation including interlaminar stress calculations. *Comput. Struct.*, vol. 23, pages 241-249, 1986.
- [Engrand 82] D. Engrand. Calcul des contraintes de bords libres dans les plaques composites symétriques avec ou sans trou, comparaison avec l'expérience. In *Comptes rendus des 3^{èmes} Journées Nationales sur les Composites*, pages 289-297, Septembre 1982.
- [Ericson 84] K. Ericson, M. Persson, L. Carlsson & A. Gustavsson. On the prediction of the initiation of delamination in a (0/90)_s laminate with a circular hole. *Journal of Composite Materials*, vol. 18, pages 495-506, 1984.
- [Fredrichs 61] K.O. Fredrichs & R.F. Dressler. A boundary layer theory for elastic plates. *Comm. on Pure Applied Mathematics*, vol. 14, pages 1-33, 1961.
- [Fukunaga 01] H. Fukunaga, N. Hu & G.X. Ren. FEM modeling of adaptive composite structures using a reduced higher-order plate theory via penalty functions. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, pages 8735-8752, 2001.
- [Ganapathi 97] M. Ganapathi & M. Touratier. A study on thermal postbuckling behaviour of laminated composite plates using a shear-exible finite element. *Finite Element in Analysis and Design*, vol. 28, pages 115-135, 1997.
- [Ganapathi 00] M. Ganapathi, B.P. Patel, P. Boisse & M. Touratier. Non-linear dynamic stability characteristics of elastic plates subjected to periodic in-plane load. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 35, pages 467-480, 2000.
- [Garret 77] K.W. Garret & J.E. Bailey. Multiple transverse fracture in 90 cross ply laminates of glass fibre-reinforced polyester. *Journal of Materials Science*, vol. 12, 1977.
- [Gaudenzi 95] P. Gaudenzi, R. Barboni & A. Mannini. A finite element evaluation of single-layer and multi-layer theories for the analysis of laminated plates. *Composite Structures*, vol. 30, pages 427-440, 1995.
- [Goldenveizer 62] A.L. Goldenveizer. Derivation of an approximate theory of bending of plate by the method of asymptotic integration of the equations of the theory of elasticity. *Prikl. Mat. Mech.*, vol. 26, no. 4, pages 668-686, 1962.

- [Goldenveizer 65] A.L. Goldenveizer & A.V. Kolos. On the derivation of two dimensional equations in the theory of thin elastic plates. *Prik. Mat. Mech.*, vol. 29, no. 1, pages 141-155, 1965.
- [Hadj-Ahmed 01] R. Hadj-Ahmed, G. Foret & A. Ehrlacher. Stress analysis in adhesive joints with a multiparticle model of multilayered materials (M4). *International Journal of Adhesion and Adhesives*, vol. 21, pages 297-307, 2001.
- [Hamdallah 90] J.M. Hamdallah & J.J. Engblom. Finite element plate formulation including transverse shear effects for representing composite shell structures. *J. Reinforced Plastic and Comp.*, vol. 9, no. 3, pages 226-239, 1990.
- [He 94] L.H. He. A linear theory of laminated shell accounting for continuity of displacement and transverse shear stresses at layer interfaces. *Int J Solids Structures*, vol. 31, no. 5, pages 613-627, 1994.
- [Hildebrand 49] F.B. Hildebrand, E. Reissner & G.B. Thomas. Note on the foundations of the theory of small displacements of orthotropic shells. NACA TN-1833, 1949.
- [Hinton 77] E. Hinton & D.R.J. Owen. *Finite element programming*. Academic press, 1977.
- [Hirai 84] I. Hirai, B.P. Wang & W.D. Pilkey. An efficient zooming method for finite element analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 20, pages 1671-1683, 1984.
- [Hirai 85] I. Hirai, B.P. Wang & W.D. Pilkey. An exact zooming method. *Finite elements Anal. Des.*, vol. 1, pages 61-68, 1985.
- [Hu 97] F.Z. Hu, C. Soutis & E.C. Edge. Interlaminar stresses in composite laminates with a circular hole. *Composite Structures*, vol. 37, pages 223-232, 1997.
- [Hu 02] N. Hu, H. Fukunaga, M. Kameyama, Y. Aramaki & F.K. Chang. Vibration analysis of delaminated composite beams and plates using a higher-order finite element. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 44, pages 1479-1503, 2002.
- [Hughes 00] Thomas J. R. Hughes. *The finite element method: Linear static and dynamic finite element analysis*. Dover, 2000.
- [Icardi 95] U. Icardi & A.M. Bertetto. An evaluation of the influence of geometry and of material properties at free edges and at corners of composite laminates. *Comput. Struct.*, vol. 57, no. 4, pages 555-571, 1995.
- [Icardi 98] U. Icardi. Eight-noded zig-zag element for deflection and stress analysis of plates with general lay-up. *Composites Part B : Engineering*, vol. 29, no. 4, pages 425-441, 1998.
- [Icardi 01a] U. Icardi. Higher-order zig-zag model for analysis of thick composite beams with inclusion of transverse normal stress and sublaminates approximations. *Composites : Part B*, vol. 32, pages 343-354, 2001.
- [Icardi 01b] U. Icardi. A three-dimensional zig-zag theory for analysis of thick laminated beams. *Composite Structures*, vol. 52, pages 123-135, 2001.
- [Idlbi 97] A. Idlbi, M. Karama & M. Touratier. Comparaison of various laminated plate theories. *Composite Structures*, vol. 37, pages 173-784, 1997.
- [Indrajit] Chowdhury and Shambhu P. Dasgupta, "Computation of Rayleigh Damping Coefficients for Large Systems", *The Electronic Journal of Geotechnical Engineering*, Volume 8, Bundle 8C.
- [Johnson 71] M.W. Johnson & O.E. Widera. An asymptotic theory for the vibration of non-homogeneous plates. *Acta. Mech.*, vol. 12, no. 1, pages 131-142, 1971.
- [Kaczkowski 80] S.A. Kaczkowski. *Platy obliczenia statyczne*. Arkady, 2 édition, 1980.
- [Kant 94] T. Kant & B.S. Manjunatha. On accurate estimation of transverse stresses in multilayer laminates. *Comput. Struct.*, vol. 50, no. 3, pages 351-365, 1994.
- [Kant 00] T. Kant & K. Swaminathan. Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites a selective review and survey of current developments. *Composite structures*, vol. 49, pages 65-75, 2000.

- [Kant 02] T. Kant & K. Swaminathan. Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. *Composite Structures*, vol. 56, pages 329-344, 2002.
- [Kapania 89] R. K. Kapania & S. Raciti. Recent advances in analysis of laminated beams and plates, Part I : Shear effects and buckling. *AIAA Journal*, vol. 27, no. 7, pages 923-934, 1989.
- [Karama 98] M. Karama, B. Abou Harb, S. Mistou & S. Caperaa. Bending, buckling and free vibration of laminated composite with a transverse shear stress continuity model. *Composite Part B*, vol. 29, no. 3, pages 223-234, 1998.
- [Kassapoglou 86] C. Kassapoglou & P.A. Lagace. An efficient method for the calculation of interlaminar stresses in composite materials. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 53, pages 774-750, 1986.
- [Kassapoglou 87] C. Kassapoglou & P.A. Lagace. Closed form solutions for the interlaminar stress field in angle-ply and cross-ply laminates. *Journal of Composite Materials*, vol. 27, pages 292-308, 1987.
- [Khare 04] R.K. Khare, T. Kant & A.K. Garg. Free vibration of composite and sandwich laminates with a higher-order facet shell element. *Composite Structures*, vol. 65, pages 405-418, 2004.
- [Kim 91] J.Y. Kim & C.S. Hong. Three-dimensional finite element analysis of interlaminar stresses in thick composite laminates. *Computers and Structures*, vol. 40, pages 1395-1404, 1991.
- [Kimpara 98] I. Kimpara, K. Kageyama & K. Suzuki. Finite element stress analysis of interlayer based on selective layerwise higher-order theory. *Composites Part A*, vol. 29, pages 1049-1056, 1998.
- [Ladeveze 88] P. Ladeveze. Les modèles classiques et leurs extension pour le calcul des plaques, volume 2 of *Calcul de Structures et Intelligence Artificielle*. Pluralis, 1988.
- [Lecuyer 91] F. Lecuyer. Etude des effets de bord dans les structures minces multicouches. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1991.
- [Lekhnitskii 63] S.G. Lekhnitskii. *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*. Holden Day, San Francisco, 1963.
- [Lessard 96] L.B. Lessard, A.S. Schmidt & M.M. Shokrieh. Three-dimensional stress analysis of free-edge effects in a simple composite cross-ply laminate. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 33, no. 15, pages 2243-2259, 1996.
- [Levinson 80] M. Levinson. An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates. *Mechanics Research Communication*, vol. 7, pages 343-350, 1980.
- [Liberscu 67] L. Liberscu. On the theory of anisotropic elastic shell and plates. *Int J Solids Structures*, vol. 3, pages 53- 68, 1967.
- [Limam 03] O. Limam, G. Foret & A. Ehrlacher. RC beam strengthened with composite material : a limit analysis approach and experimental study. *Composite Structures*, vol. 59, pages 467- 472, 2003.
- [Liou 87] W.J. Liou & C.T. Sun. A three-dimensional hybrid stress isoparametric element for the analysis of laminated composite plates. *Computers and Structures*, vol. 25, no. 2, pages 241-249, 1987.
- [Lo 77a] K.H. Lo & R.M. Christensen. A high-order theory of plate deformation. Part1 : Homogeneous plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 44, no. 4, pages 663-668, 1977.
- [Lo 77b] K.H. Lo & R.M. Christensen. A high-order theory of plate deformation. Part 2 : laminated plates. *J. Applied Mechanics*, vol. 44, pages 669-676, 1977.
- [Lucking 84] W.M. Lucking, S.V. Hoa & T.S. Sankar. The effect of geometry on interlaminar stresses of (0/90)s composite laminates with circular holes. *Journal of Composite Materials*, vol. 17, page 188, 1984.

- [Makhecha 01] D.P. Makhecha, M. Ganapathi & B.P. Patel. Dynamic analysis of laminated composite plates subjected to thermal/mechanical loads using an accurate theory. *Composite Structures*, vol. 51, no. 3, pages 221-236, 2001.
- [Manjunatha 92] B.S. Manjunatha & T. Kant. A comparison of 9 and 16 node quadrilateral elements based on higher-order laminate theories for estimation of transverse stresses. *J. Reinforced Plastic and Comp.*, vol. 11, no. 9, pages 968-1002, 1992.
- [Mau 72] S.T. Mau, P. Tong & T.H.H Pian. Finite element solutions for laminated thick plates. *J. Composite Materials*, vol. 6, pages 304-311, 1972.
- [Mindlin 51] R.D. Mindlin. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, pages 31-38, 1951.
- [Mistou 00] S. Mistou. Développement d'un élément fini de coque composite à double courbure pour l'implémentation d'une application orientée objet. PhD thesis, Université Bordeaux I, 2000.
- [Murakami 86] H. Murakami. Laminated composite plate theory with improved in-plane responses. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 53, pages 661-666, 1986.
- [Murthy 81] M.V.V. Murthy. An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plate. Rapport technique, NASA, 1981.
- [Naciri 98] T. Naciri, A. Ehlacher & A. Chabot. Interlaminar stress analysis with a new Multiparticle Modelization of Multilayered Materials (M4). *Composites Science and Technology*, vol. 58, page 337, 1998.
- [Nelson 74] R.B. Nelson & D.R. Lorch. A refined theory for laminated orthotropic plates. *ASME J. Appl. Mech.*, vol. 41, pages 177-183, 1974.
- [Nguyen 03] V.T. Nguyen, J.F. Caron & K. Sab. Un modèle itératif pour des multicouches épais. In *Comptes-rendus des 13èmes Journées Nationales sur les Composites*, pages 255-264. Strasbourg, March 2003.
- [Noor 89a] A. K. Noor & W. S. Burton. Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates. *Appl Mech Rev*, vol. 42, no. 1, pages 1-12, 1989.
- [Noor 89b] A.K. Noor & W.S. Burton. Stress and free vibration analyses of multilayered composite plates. *Composite Structures*, vol. 11, pages 183-204, 1989.
- [Ossadzow 96] C. Ossadzow. Modélisation de coques composites multicouches. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1996.
- [Ossadzow 01] C. Ossadzow & M. Touratier. An improved shear-membrane theory for multilayered shells. *Composite Structures*, vol. 52, pages 85-95, 2001.
- [Pagano 69] N.J. Pagano. Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. *J. Comp. Mat.*, vol. 3, pages 398-411, 1969.
- [Pagano 70] N.J. Pagano. Exact solutions for rectangular bidirectional composite and sandwich plates. *J. Comp. Mat.*, vol. 4, pages 2035, 1970.
- [Pagano 78] N.J. Pagano. Stress Fields in composite laminates. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 14, page 385, 1978.
- [Pagano 83] N.J. Pagano & S.R. Soni. Global-local variational model. *Int. J. Solids Structures*, vol. 19, pages 207-228, 1983.
- [Panc 75] V. Panc. Theories of elastic plates. Noordhoff, Leyden, Netherlands, 1975.
- [Pandya 88a] B.N. Pandya & T. Kant. Flexural analysis of laminated composites using refined higher-order Co plate bending elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 66, pages 173-198, 1988.
- [Pandya 88b] B.N. Pandya & T. Kant. A refined higher-order generally orthotropic Co plate bending element. *Computers & Structures*, vol. 28, pages 119-133, 1988.

- [Patel 02] B.P. Patel, M. Ganapathi & D.P. Makhecha. Hygrothermal effects on the structural behaviour of thick composite laminates using higher-order theory. *Composite Structures*, vol. 56, pages 25-34, 2002.
- [Phan 85] N.D. Phan & J.N. Reddy. Analysis of laminated composite plates using a higher-order shear deformation theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 21, pages 2201-2219, 1985.
- [Philippe 99] M.H. Philippe, T. Naciri & A. Ehrlacher. A tri-particle model of sandwich panels. *Composites Science and Technology*, vol. 59, pages 1195-1206, November 1999.
- [Pian 64] T.H.H. Pian. Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions. *AIAA Journal*, vol. 2, page 1333, 1964.
- [Pipes 70] R.B. Pipes & N.J. Pagano. Interlaminar stresses in composite laminates under uniform axial extension. *Journal of Composite Materials*, pages 538-548, 1970.
- [Polit 97] O. Polit & M. Touratier. A new laminated triangular finite element assuring interface continuity for displacements and stresses. *Composite Structures*, vol. 38, pages 37-44, 1997.
- [Pryor 71] C.W. Pryor & R.M. Barker. A finite-element analysis including transverse shear effects for applications to laminated plates. *AIAA Journal*, vol. 9, no. 5, pages 912-917, 1971.
- [Puppo 70] A.H. Puppo & H.A. Evensen. Interlaminar shear in laminated composites under generalized plane stress. *Journal of Composite Materials*, vol. 4, pages 204-220, 1970.
- [Putcha 86] N.S. Putcha & J.N. Reddy. Stability and natural vibration analysis of laminated plates by using a mixed element on a refined plate theory. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 104, no. 2, pages 285-300, 1986.
- [Raghuram 99] P.V. Raghuram & A.V. Krishna Murty. A high precision coupled bending extension triangular finite element for laminated plates. *Computers and Structures*, vol. 72, no. 6, pages 763-777, 1999.
- [Raju 81] I.S. Raju & J.H. Crews. Interlaminar stress singularities at a straight free edge in composite laminates. *Comput. Struct.*, vol. 14, page 21-1981.
- [Raju 82] I.S. Raju & J.H. Crews. Three-dimensional analysis of (0/90)_s and (90/0)_s laminates with a central circular hole. *Composites Technology Review*, vol. 4, no. 4, pages 116-124, 1982.
- [Ramtekkar 02] G.S. Ramtekkar, Y.M. Desai & A.H. Shah. Mixed finite element model for thick composite laminated plates. *Mech. Adv. Mater. Struct.*, vol. 9, pages 133-156, 2002.
- [Ramtekkar 03] G.S. Ramtekkar, Y.M. Desai & A.H. Shah. Application of a three-dimensional mixed finite element model to the flexure of sandwich plate. *Computers and Structures*, vol. 81, pages 2183-2198, 2003.
- [Ransom 90] J.B. Ransom & Jr.N.F. Knight. Global/local stress analysis of composite panels. *Computers and Structures*, vol. 37, no. 4, pages 375-395, 1990.
- [Reddy 80] J.N. Reddy. A penalty plate-bending element for the analysis of laminated anisotropic composite plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 15, pages 1187-1206, 1980.
- [Reddy 84] J.N. Reddy. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 51, pages 745-752, 1984.
- [Reddy 87] J.N. Reddy. A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates. *Commun. Appl. Numer. Methods*, vol. 3, pages 173-180, 1987.
- [Reddy 89] J.N. Reddy, E.J. Barbero & J.L. Teply. A plate bending element based on a generalized laminate plate theory. *Int J Numer Meth Eng*, vol. 28, pages 2275-2292, 1989.
- [Reddy 99] A.R.K Reddy & R. Palaninathan. Free vibration of skew laminates. *Computers and Structures*, vol. 70, no. 4, pages 415-423, 1999.

- Reissner 45] E. Reissner. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.*, vol. 12, pages 69-77, 1945.
- [Reissner 50] E. Reissner. On a variational theorem in elasticity. *J. Math. Phys.*, vol. 29, pages 90-95, 1950.
- [Reissner 61] E. Reissner & Y. Stavsky. Bending and stretching of certain types of heterogeneous anisotropic elastic plate. *J. Appl. Mech.*, vol. 28, pages 402-408, 1961.
- [Reissner 72] E. Reissner. A consistent treatment of transverse shear deformation in laminated anisotropic plates. *AIAA J.*, vol. 10, pages 716-718, 1972.
- [Reissner 84] E. Reissner. On a certain mixed variational theorem and a proposed application. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 20, pages 1366-1368, 1984.
- [Ren 86a] J.G. Ren. A new theory of laminated plate. *Composite Science and Technology*, vol. 26, pages 225-239, 1986.
- [Ren 86b] J.G. Ren & E. Hinton. The finite element analysis of homogeneous and laminated composite plates using a simple higher-order theory. *Communications in Applied Numerical Methods*, vol. 2, pages 217-228, March/April 1986.
- [Robbins 93] D.H. Robbins & J.N. Reddy. Modeling of thick composite using a layerwise laminate theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, pages 655-677, 1993.
- [Rolfes 97] R. Rolfes & K. Rohwer. Improved transverse shear stresses in composite finite elements based on first order shear deformation theory. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol. 40, pages 51-60, 1997.
- [Rolfes 98a] R. Rolfes, A.K. Noor & H. Sparr. Evaluation of transverse thermal stresses in composite plates based on first-order shear deformation theory. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 167, pages 355-368, 1998.
- [Rolfes 98b] R. Rolfes, K. Rohwer & Ballerstaedt. Efficient linear transverse normal stress analysis of layered composite plates. *Computers and Structures*, vol. 68, pages 643-652, 1998.
- [Rybicki 78] E.F. Rybicki & D.W. Schmeuser. Effect of stacking sequence and lay-up angle on free edge stresses around a hole in a laminated plate under tension. *Journal of Composite Materials*, vol. 12, page 300-1978.
- [Sadek 98] E.A. Sadek. Some serendipity finite element for the analysis of laminated plates. *Computers and Structures*, vol. 69, pages 37-51, 1998.
- [Seide 80] P. Seide. An improved approximate theory for the bending of laminated plates. *Mech Today*, vol. 5, pages 451-466, 1980.
- [Seide 87] P. Seide & R.A. Chaudhuri. Triangular finite element for analysis of thick laminated plates. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol. 24, pages 1563-1579, 1987.
- [Shankara 96] C.A. Shankara & N.G.R. Iyengar. A Co element for the free vibration analysis of laminated composite plates. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 191, no. 5, pages 721-738, 1996.
- [Sheikh 02a] A.H. Sheikh, S. Haldar & D. Sengupta. A high precision shear deformable element for the analysis of laminated composite plates of different shapes. *Composite Structures*, vol. 55, pages 329-336, 2002.
- [Sheikh 02b] A.H. Sheikh, S. Haldar & D. Sengupta. Vibration of plates in different situations using a high-precision shear deformable element. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 253, no. 2, pages 329-345, 2002.
- [Sheng 02a] H.Y. Sheng & J.Q. Ye. A semi-analytical finite element for laminated composite plates. *Composite Structures*, vol. 57, pages 117-123, 2002.
- [Sheng 02b] H.Y. Sheng & J.Q. Ye. A state space finite element for laminated composite plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 191, pages 4259-4276, 2002.

- [Smaoui 96] M. Smaoui. Nouvelle modelisation multiparticulaire pour l'analyse des efforts dans les plaques composites multiocouches impactees. PhD thesis, ENPC, 1996.
- [Spilker 77] R.L. Spilker, S.C. Chou & O. Orringer. Alternate hybrid-stress elements for analysis of multilayer composite plates. *J. Composite Materials*, vol. 11, pages 51-70, 1977.
- [Spilker 82] R.L. Spilker. Hybrid-stress eight-node element for thin and thick multilayer laminated plates. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, vol. 18, pages 801- 828, 1982.
- [Srinivas 70] S. Srinivas & A. K. Rao. Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates. *Int J Solids Structures*, vol. 6, pages 1463-1481, 1970.
- [Subramanian 01] P. Subramanian. Flexural analysis of symmetric laminated composite beams using C1 finite element. *Composite Structures*, vol. 54, no. 1, pages 121-126,2001.
- [Sun 89] C.T. Sun & W.J. Liou. Investigation of laminated composite plates under impact dynamic loading using a three-dimensional hybrid stress finite element method. *Computers and Structures*, vol. 33, no. 3, pages 879-884, 1989.
- [Swaminathan 04] K. Swaminathan & D. Ragounadin. Analytical solutions using a higher-order reffined theory for the static analysis of antisymmetric angle-ply composite and sandwich plates. *Composite Structures*, vol. 64, pages 405-417, 2004.
- [Sze 00] K.Y. Sze, L.W. He & Y.K. Cheung. Predictor-corrector procedures for analysis of laminated plates using standard Mindlin finite element models. *Composite Structures*, vol. 50, pages 171-182, 2000.
- [Tahani 03] M. Tahani & A. Nosier. Edge effect of uniformly loaded cross-ply composite laminate. *Material and Design*, vol. 24, pages 647-658, 2003.
- [Tang 75] S. Tang. A boundary layer theory. Part 1 : laminated composites in plane stress. *J. Compos. Mater.*, vol. 9, pages 33-41, 1975.
- [Thomson 90] D.M. Thomson & Jr.OH. Griffin. 2D to 3D global/local finite element analysis of cross ply composite laminates. *J. Reinforced Plastics and Comp.*, vol. 9, no. 5, pages 492-502, 1990.
- [Thomson 92] D.M. Thomson & Jr.OH. Griffin. Verification of a 2D to 3D global/local finite element method for symmetric laminates. *J. Reinforced Plastics and Comp.*, vol. 11, no. 8, pages 910-931, 1992.
- [Touratier 91] M. Touratier. An efficient standard plate theory. *Engng Sci*, vol. 29, no. 8, pages 901-916, 1991.
- [Tran 04] Q.D. Tran. Modèle simplifié pour les chaussées fissurées multicouches. PhD thesis, ENPC, 2004.
- [Wang 77a] A.S.D. Wang & F.W. Crossman. Edge effects on thermally induced stresses in composite laminates. *Journal of Composite Materials*, vol. 11, page 300, 1977.
- [Wang 77b] A.S.D. Wang & F.W. Crossman. Some new results on edge effect in symmetric composite laminates. *Journal of Composite Materials*, vol. 11, page 92, 1977.
- [Whitney 70] J.M. Whitney & N.J. Pagano. Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates. *J. Applied Mechanics*, vol. 37, pages 1031-1036, 1970.
- [Whitney 73] J.M. Whitney. Shear correction factors for orthotropic laminates under static load. *J. Applied Mechanics*, vol. 40, pages 302-304, 1973.
- [Widera 70] O.E. Widera. An asytmotic theory for the motion of elastic plates. *Acta. Mech.*, vol. 9, pages 54-66, 1970.
- [Wilkins 83] D.J. Wilkins. A preliminary damage tolerance methodology for composite structures. In *Proc. NASA Workshop on Failure Analysis and Mechanisms of Failure of Fibrous Composite Structures*, pages 61-93, 1983.

- [Wu 93a] C.P. Wu & H.C. Kuo. An interlaminar stress mixed finite element method for the analysis of thick laminated composite plates. *Composites and Structures*, vol. 24, no. 1, pages 29-42, 1993.
- [Wu 93b] C.P. Wu & C.B. Yen. Interlaminar stress mixed finite element analysis of unsymmetrically laminated composite plates. *Computers and Structures*, vol. 49, no. 3, pages 411-419, 1993.
- [Yang 66] P.C. Yang, C.H. Norris & Y. Stavsky. Elastic wave propagation in heterogeneous plate. *Int. J. Sol. Struct.*, vol. 2, pages 665-684, 1966.
- [Ye 04] J.Q. Ye, H.Y. Sheng & Q.H. Qin. A state space finite element for laminated composites with free edges and subjected to transverse and in-plane loads. *Composite Structures*, vol. 82, pages 1131-1141, 2004.
- [Yin 94a] W.L. Yin. Free-edge effects in anisotropic laminated under extension, bending and twisting, Part I : A stress function Based variational approach. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 61, page 410, 1994.
- [Yin 94b] W.L. Yin. Interlaminar stress analysis of composite laminates using a sublaminate/layer model. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 31, no. 11, pages 1549-1564, 1994.
- [Yin 97] W.L. Yin. The effect of temperature gradient on the free-edge interlaminar stresses in multi-layered structures. *Journal of Composite Materials*, vol. 31, no. 24, pages 2460-2477, 1997.
- [Zienkiewicz 92] O.C. Zienkiewicz & J.Z. Zhu. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: the recovery technique. *Int. J. Numer Meth Eng*, vol. 33, pages 1331-1364, 1992.