

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MENTOURI – CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE**

N° d'ordre :/...../.....

N° de série :...../...../.....

THESE

Présentée pour l'obtention du titre de

DOCTEUR en Sciences

En Génie Mécanique

Par

BENKAFADA FAOUZIA

THEME

**Contribution à l'étude de transfert de masse et de
chaleur dans un canal Poreux**

Soutenue le : / / 2008

Devant le Jury composé de :

Président	: Prof. BOUCHOUCHA Ali	Université Mentouri-Constantine
Rapporteur	: Dr. TALBI Kamel(M.C)	Université Mentouri-Constantine
Examineurs	: Prof. AFRID Mohamed	Université Mentouri-Constantine
	Dr. ZIDANI Kamel (M.C.)	Université de Batna
	Dr. BENKOUSSAS BOUZID (M.C.)	ENPA

DÉDICACE

A Mon Père et à ma Mère

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de recherche, le Docteur TALBI Kamel pour m'avoir soutenu et guidé tout au long de cette thèse.

Je tiens également à adresser mes remerciements aux membres du jury de ma thèse, les professeurs BOUCHOUCHA Ali, AFRID Mohamed, Dr. ZIDANI Kamel et Dr. BENKOUSSAS Bouzid pour avoir accepté d'être des membres jury de ma thèse.

SOMMAIRE

Dédicace

Remerciements

Sommaire

Nomenclature

<i>Introduction générale</i>	1
<i>Partie 1</i>	
<i>Chapitre1</i> : Introduction.....	4
<i>Chapitre2</i> : Modélisation mathématique.....	17
2.1. Modèle d'écoulement dans les milieux poreux.....	17
2.2. Transfert thermique dans un milieu poreux.....	17
2.3. Transfert de matière dans un milieu poreux.....	18
2.4. La combinaison du transfert thermique et de masse.....	18
2.5. Cas de la convection forcée.....	19
L'équation de continuité.....	20
L'équation de la quantité de mouvement suivant x.....	20
L'équation de la quantité de mouvement suivant y.....	20
L'équation d'énergie.....	20
L'équation de transfert de matière.....	20
2.6. Cas de la convection mixte.....	21
L'équation de continuité.....	22
L'équation de la quantité de mouvement suivant x.....	22
L'équation de la quantité de mouvement suivant y.....	22
L'équation d'énergie.....	22
L'équation de transfert de matière.....	22

Chapitre 3 : Résolution numérique.....	24
3.1. Discrétisation du domaine physique.....	24
3.2. Maillage typique et décalé.....	26
3.3. Discrétisation numérique.....	27
3.4. Discrétisation des équations.....	28
Discrétisation temporelle en second ordre.....	28
Discrétisation spatiale en second ordre.....	29
Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement suivant x.....	30
Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement suivant y.....	33
Discrétisation de l'équation de l'énergie.....	35
Discrétisation de l'équation de transfert de matière.....	38
Résolution du système des équations de vitesse.....	40
Discrétisation de l'équation de continuité.....	40
Discrétisation de l'équation de la pression.....	44
3.5. Méthode de résolution.....	47
3.6. La solution séquentielle des systèmes d'équations de discrétisation.....	47
L'algorithme SIMPLER.....	47
3.7. Détails numériques.....	48
Chapitre 4 : Résultats et discussions.....	49
4.1. La convection forcée.....	49
4.1.1. Le cas d'un nombre de Darcy Faible: $Da=10^{-9}$	49
Le champ d'écoulement.....	49
Le Champ thermique.....	50
Le nombre de Nusselt.....	51
Le champ de concentration.....	53
Le nombre de Sherwood.....	55

4.1.2. Le cas d'un nombre de Darcy relativement élevé: $Da=10^{-2}$	56
Le champ d'écoulement.....	56
Le Champ thermique.....	59
Le champ de matière.....	63
4.2. La convection mixte.....	66
 Partie 2	
Chapitre1 : Introduction.....	71
Chapitre2 : Modélisation mathématique.....	75
2.1. Cas de refroidissement.....	75
L'équation de continuité.....	75
L'équation de la quantité de mouvement suivant x.....	76
L'équation de la quantité de mouvement suivant y.....	76
L'équation d'énergie.....	76
Les conditions initiales et aux limites.....	77
Les paramètres de contrôle.....	77
Chapitre 3 : Résolution numérique.....	78
Chapitre 4 : Résultats et discussions.....	79
4.1. Le cas où le canal n'est pas rempli d'une matière poreuse.....	79
4.2. Le cas du canal rempli avec une matière poreuse.....	81
4.2.1. Le cas de Darcy égal à 10^{-9}	81
4.2.2. Le cas de Darcy égal 10^{-2}	84
Conclusion générale	89
 Références	
 Résumés	

Nomenclature

- C : Concentration non dimensionnelle = $\frac{C^* - C_e^*}{C_p^* - C_e^*}$.
- C_f : Coefficient dans le terme de Forchheimer = 0.55.
- c_p : Chaleur spécifique du fluide à pression constante.
- D : Coefficient de diffusion binaire de la vapeur d'eau dans l'air.
- Da : Nombre de Darcy = $\frac{k}{H^2}$
- C^* : Concentration dimensionnelle (Kg / m^3)
- g : Accélération de la pesanteur = 9.81 m/s^2 .
- Gr_c : Nombre de Grashof solutal = $\frac{g\beta_c (C_p^* - C_e^*)H^3}{\nu^2}$.
- Gr_t : Nombre de Grashof thermique = $\frac{g\beta_t (T_e^* - T_p^*)H^3}{\nu^2}$
- H : Hauteur du canal (m)
- h_c : Coefficient de transfert de matière local.
- h_t : Coefficient de transfert de chaleur local.
- K_p : Permiabilité du milieu poreux.
- K^* : Rapport des conductivités thermiques = $\frac{K_m}{K_f}$.
- k : Perméabilité du milieu poreux.
- L : Longueur du conduit (m)
- l : Length of the blocks = H
- Nu : Nombre de Nusselt local = $\frac{2h_t H}{K_f}$
- P^* : Pression.
- P : Pression non dimensionnelle = $\frac{P^* - P_r^*}{\rho_r U_e^{*2}}$.
- Q : Génération volumétrique de chaleur uniforme.
- Pr : Nombre de Prandtl = $\frac{\nu}{\alpha}$.

- Re : Nombre de Reynolds $= \frac{U_e^* H}{\nu}$.
- Sc : Nombre de Schmidt $= \frac{D}{\nu}$.
- Sh : Nombre de Sherwood $= \frac{2h_c H}{\rho_r D}$
- T^* : Température dimensionnelle ($^{\circ}K$)
- T : Température non dimensionnelle $= \frac{T^* - T_p^*}{T_e^* - T_p^*}$.
- t^* : Temps dimensionnel (s)
- t : Temps non dimensionnel $= \frac{t^*}{H / U_e^*}$.
- U^* : Vitesse horizontale dimensionnelle (m/s).
- U : Vitesse horizontale non dimensionnelle $= \frac{U^*}{U_e^*}$
- V^* : Vitesse verticale (m/s)
- V : Vitesse verticale non dimensionnelle $= \frac{V}{U_e^*}$
- x^* : Coordonnée axiale dimensionnelle (m).
- x : Coordonnée cartésienne horizontale $= \frac{x^*}{H}$
- y^* : Coordonnée verticale dimensionnelle (m).
- y : Coordonnée cartésienne verticale $= \frac{y^*}{H}$

Lettres grecques

- α : Coefficient de diffusion thermique $= \frac{K_f}{\rho_r c_p}$
- β_c : Coefficient d'expansion solutale.
- β_t : Coefficient d'expansion thermique.
- ν : Viscosité cinématique du fluide.
- φ : Porosité du milieu poreux.

Exposants

* : Valeur dimensionnelle

Indices

e : A l'entrée du canal.

f : Fait référence au fluide.

m : Fait référence au milieu poreux.

matter : matière (fluide, solide ou milieux poreux).

r : Valeur de référence.

p : Fait référence aux parois du canal.

s : Fait référence aux blocs solides.

1. Introduction

Un milieu poreux est une matrice solide rigide qui comporte des vides (pores) qui peuvent communiquer entre eux et contenir une ou plusieurs phases fluides (gaz ou liquide) pouvant s'écouler et, éventuellement, échanger entre elles et/ou avec le solide de la matière et/ou de l'énergie. Un milieu poreux peut se présenter généralement sous les deux formes suivantes:

- Milieu poreux non consolidé dans lequel la phase solide est formée de grains ou de fibres non soudés entre eux (graviers, sable, billes de verre et d'acier, limons, matériaux divers).
- Milieu poreux consolidé dans lequel la phase solide est formée de grains cimentés (roches calcaires, grès, argiles, bois, céramiques, poudres frittées, tissus végétaux et animaux...)[1].

1.1. Propriétés du milieu poreux

L'étude des écoulements et du transfert de polluants en milieu poreux repose sur la détermination des propriétés du milieu : la porosité et la perméabilité. Ces grandeurs apparaissent dans les équations d'écoulement et du transport qui sont définies pour un milieu continu. Il faut donc les définir sur des volumes suffisamment grands, macroscopiques, pour pouvoir considérer le milieu continu parce que les propriétés du milieu poreux dépendent d'échelle de description considérée[2].

1.1.1. Porosité.

La porosité, est le paramètre principal décrivant un milieu poreux[3], elle est définie par le rapport entre le volume occupé par les pores (vides) et le volume total du milieu: $\varphi = \text{Volume des vides} / \text{Volume total}$. Elle varie entre 0 (solides pleins) et 1 (volume complètement vide). En général, les vides (pores) ne sont pas uniformes dans leur distribution et leur forme à travers la matrice poreuse. Cette uniformité peut avoir un rôle significatif sur l'écoulement et le transfert de chaleur près des frontières (paroi solide ou surface libre).

1.1.2. Perméabilité.

Elle est définie comme étant l'aptitude de circulation qu'offre un milieu poreux à un fluide lors de son écoulement à travers les pores de ce milieu. La perméabilité $K [L^2]$ est une

propriété intrinsèque du milieu poreux, indépendamment des caractéristiques du fluide et dépend essentiellement de la porosité et du diamètre des particules[2].

1.2. Changement d'échelle en milieu poreux

En raison de la complexité géométrique de l'espace des pores, les méthodes qui sont traditionnellement utilisées en mécanique des milieux continus pour les expressions locales des lois de conservation, ne peuvent toutefois être mise en pratique qu'après un changement d'échelle. Par opposition avec l'échelle du milieu continu classique, dite microscopique, telle qu'elle est proposée en mécanique des milieux continus, l'échelle du milieu continu fictif équivalent au milieu poreux réel est dite macroscopique. En général, l'établissement des équations, auxquelles obéissent les phénomènes à l'échelle macroscopique, est formellement obtenu à partir des équations microscopiques de la *thermodynamique des milieux continus* auxquelles sont appliquées des procédures spécifiques de changement d'échelle, telles que l'homogénéisation et les moyennes volumiques[1]. Parmi ces dernières, l'une des plus classiquement utilisées consiste à obtenir la description macroscopique par *prise de moyenne volumique* des équations microscopiques sur un volume élémentaire représentatif (*VER*) (voir § (1.4)). Une fois établi, le système d'équations macroscopiques ne nécessite, pour sa résolution, que la connaissance des conditions aux limites sur les frontières du milieu poreux. Et, en effet, la complexité géométrique de la matrice et de l'espace se trouve incluse dans les coefficients des équations macroscopiques traduisant, au sein du *VER*, les interactions entre phases. Pour fermer le système, ces coefficients doivent être préalablement déterminés par voie expérimentale, numérique ou théorique[1].

1.3. Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R.).

En vu que les équations du mouvement dans les milieux poreux sont moyennées à travers des volumes, en introduisant la notion du volume élémentaire représentatif (*V.E.R*) qui consiste à associer à un point mathématique les propriétés d'un volume suffisamment représentatif pour définir ou mesurer les propriétés moyennes du milieu (*Baer, 1972*). Le *V.E.R* peut-être défini comme le fait de *Marsily (1981)* : Il est suffisamment grand pour contenir un grand nombre de pores, de façon que l'on puisse y définir une propriété moyenne globale, et il est suffisamment petit pour que les variations de paramètres d'un domaine au domaine voisin puissent être approchées par des fonctions continues. La taille du *VER* reste assez arbitraire[2]. Les dimensions caractéristiques de ce volume seront grandes par rapport à l'échelle de la taille des pores mais petites par rapport à

l'encombrement de la matrice solide [1]. La figure (1.1) illustre la taille intermédiaire l du volume élémentaire représentatif (V.E.R) entre la taille du milieu poreux à l'échelle macroscopique L et à l'échelle des pores d [4].

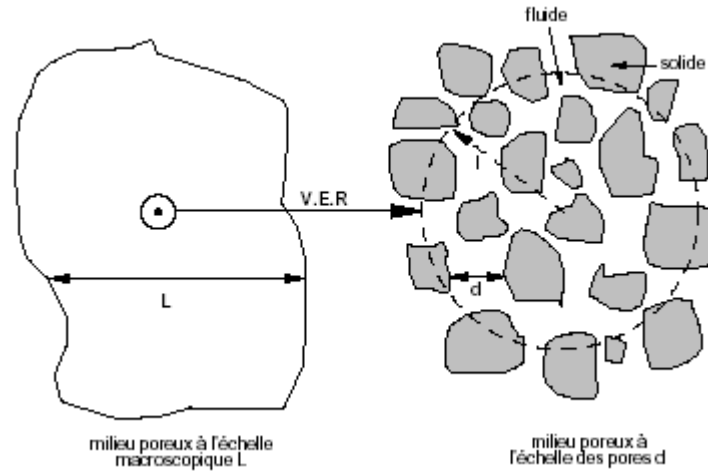


Figure 1.1 : Représentation schématique du volume élémentaire représentatif

1.4. Description générale de matériau poreux utilisé

Le matériau que nous avons étudié est un matériau très poreux et avec des pores connectés pour permettre le passage d'un écoulement. On a utilisé une matière poreuse avec une porosité égale à $\varphi = 0.8$ et une conductivité thermique effective égale à 5.77 fois celle de l'air.

Partie 1

1. introduction

Le but de ce travail de thèse est la contribution à l'étude des transferts de masse et de chaleur dans un canal plan bidimensionnel, rempli d'une matière poreuse saturé par un mélange d'air et de la vapeur d'eau. Dans un premier chapitre, qui est la présente introduction, on met en revue une recherche bibliographique sur les transferts couplés dans les milieux poreux, en général, et la convection d'écoulement canalisé en particulier.

Dans ce travail, nous présentons quelque exemple de la littérature ayant une relation avec l'écoulement de la convection forcée dans un canal horizontal plan rempli d'une matière poreuse. Dans ce qui suit, nous mentionnons des références de la bibliographie liée au phénomènes de transfert dans les milieux poreux.

L'ouvrage de Nield et Bejan [4], qui est une référence de base, présente la physique essentielle des phénomènes de transfert couplés dans les canaux remplis de matière poreuse.

L'exemple de G. Degan et. al [5] illustre théoriquement le phénomène de la convection forcée d'un écoulement laminaire dans un canal poreux saturé anisotrope par un fluide visqueux incompressible entre des plaques parallèles imperméables et adiabatiques. Les auteurs ont utilisé le modèle de Darcy-Brinkmann et ils ont trouvé que les paramètres d'anisotropie ont une grande influence sur l'écoulement et le transfert de chaleur en milieu de faible porosité.

L'étude de K. Sundaravadivelu et. al [6] traite théoriquement la convection forcée en milieux poreux hétérogènes dans des conditions de viscosité variable. En utilisant le modèle de Darcy, les auteurs ont trouvé que la croissance de la perméabilité, dans le cas de la variation de la viscosité, réduit le transfert de chaleur.

F.C. Chou et. al [7] ont étudié numériquement et expérimentalement la convection forcée non-Darcian dans des canaux carrés. Parmi leurs résultats, les valeurs du nombre de Nusselt sont influencées par l'effet channeling pour des petits nombres de Peclet.

Chou et. al [8] ont étudié la convection mixte non Darcian dans un canal horizontal de section carrée rempli des sphères emballées. Ses résultats montrent que la flottabilité affecte significativement l'écoulement secondaire et le transfert de chaleur si le nombre de Peclet est petit. Pour des nombres de Reynolds données, l'effet de flottabilité est supprimé avec l'augmentation du nombre de Peclet. La valeur du nombre de Nusselt dans la région développé est dépend du nombre de Rayleigh, du nombre de Peclet et du rapport des diamètres du canal et de la sphère.

Alexandre Delache et. al [9] ont étudié la naissance de la convection mixte dans une couche poreuse isotrope, saturée, horizontale et infinie, de section droite rectangulaire (de hauteur H et de largeur aH) ; chauffé par le bas. Ils nous montrent que l'influence de l'inertie poreuse et que la nature des structure convectives naissantes dépend de la valeur prise par le rapport de forme a .

S. Ben nassralah et. al [10] ont étudié numériquement la convection naturelle dans un cylindre rempli d'un milieu poreux, ouvert à ses deux extrémités et dont la paroi est chauffé par une densité du flux de chaleur constant avec $Bio = 2000$ et $Pr = 0.123$. Ils ont travaillé par deux modèles : un modèle à deux température et un modèle à une température. Ils ont utilisés la méthode des volumes finis. Les résultats obtenus ont mis en évidence l'existence de deux classes d'écoulement selon les valeurs du nombre de Rayleigh et le facteur de forme. Pour $Ra=2000$ et $A=1$ (des nombres élevés) l'écoulement pariétal apparaît d'une recirculation descente dans la zone centrale. Pour $Ra=200$ et $A=0.1$ (des valeurs assez petites) l'écoulement est ascendant dans la totalité du cylindre et la vitesse radiale et pratiquement nulle dans tout le domaine. L'augmentation du nombre de Bio et l'approche entre les valeurs des conductivités thermiques effectives des deux phases solide et fluide diminuent les écarts entre les valeurs du débit volumique et du flux de chaleur quittant la surface supérieure du cylindre obtenues par le modèle à une température et le modèle à deux température.

Manuel Marceau et. al [11] ont étudié la naissance de la convection thermosolutale dans une cellule rectangulaire poreuse soumise à des flux de chaleur et de masse imposés au niveau des parois verticales pour $N = R_{as} / R_{at} = -1$ (rapport des forces de volumed'origine solutale et thermique). Ils ont étudié la stabilité linéaire de la solution de double diffusion

pure. Ils ont utilisés d'une part, un code aux volumes finis et d'autre part un code basé sur une méthode spectrale avec le schéma des différences finis d'ordre 2. Ils ont trouvés avec un très bon accord les valeurs de R_{ac} (Nombre de Rayleigh critique) obtenues par l'étude de la stabilité linéaire pour plusieurs valeurs de A (le rapport d'aspect de la cellule variant de 1 à ∞ où le principe d'échangé de stabilité est supposé satisfait).

Dans ce travail, on se propose d'étudier l'écoulement de la convection forcée dans un canal horizontal plan rempli d'une matière poreuse. Le cas d'écoulement d'air incompressible, bidimensionnel, en régime laminaire est considéré dans cette étude. Les parois du canal sont maintenues isothermes et à concentrations constantes. L'espèce diffusée dans l'air est la vapeur d'eau.

Dans un premier chapitre, c-à-d, ce chapitre qui est introductif, on met en revue une recherche bibliographique sur les transferts couplés dans les milieux poreux, en général, et la convection d'écoulement canalisé en particulier. Des études théoriques, numériques et expérimentales, nous permettrons d'assimiler les concepts fondamentaux du ce sujet.

A partir de ces notions de base, nous présentons, dans un deuxième chapitre notre modèle mathématique après la citation du modèle d'écoulement de Darcy - Brinkman - Forchheimer, qui a été le plus utilisé dans les premiers travaux de ce sujet, par un système d'équations différentielles aux dérivés partielles, de conservation de la masse, de quantité de mouvement, de l'énergie et de la matière, qui sera résolu par l'une des méthodes numériques que nous les connues tel que la méthode des volumes finis à savoir la discrétisation spatiotemporelle du second ordre et la méthode de résolution qu'elles sont toutes exposées dans le troisième chapitre.

Dans le quatrième chapitre, nous interprétons les résultats obtenus en deux classes, la première partie concerne le cas de la convection forcée dans un canal horizontal plan rempli d'une matière poreuse. Et la deuxième, concerne le cas de la convection mixte bi diffusive dans un canal plan rempli d'une matière poreuse avec la comparaison des deux modes de convection, forcée et mixte.

2. Modélisation mathématique

2.1. Modèle d'écoulement dans les milieux poreux

On utilise un modèle continu d'un milieu poreux basé sur le concept du volume élémentaire représentatif pour bien décrire le bilan de quantité de mouvement d'un fluide visqueux Newtonien en milieu poreux. Le modèle est de *Darcy- Brinkma -Forchheimer* (*Vafai et Tien*, 1980, 1981, *Hsu et Cheng*, 1990)[4].

L'équation vectorielle de conservation de la quantité de mouvement à travers un milieu poreux s'écrit :

$$\rho_f \underbrace{\left[\frac{1}{\varphi} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\varphi} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{v}\vec{v}}{\varphi} \right) \right]}_{(a)} = \underbrace{-\frac{1}{\varphi} \vec{\nabla}(\varphi P)}_{(b)} + \underbrace{\rho_f \vec{g}}_{(c)} + \underbrace{\frac{\mu}{\varphi \rho_f} \nabla^2 \vec{v}}_{(d)} - \underbrace{\frac{\mu}{K} \vec{v}}_{(e)} - \underbrace{\frac{C_F \rho_f}{K^{1/2}} |\vec{v}| \vec{v}}_{(f)} \quad (2.1)$$

\vec{v} Une quantité moyennée à travers un volume élémentaire.

- (a) Forces inertielles macroscopiques.
- (b) Gradient de pression.
- (c) Forces de volumes.
- (d) Terme visqueux de *Brinkman*.
- (e) Terme de *Darcy*.
- (f) Terme de *Forchheimer* (Forces inertielles microscopiques).

2.2. Transfert thermique dans un milieu poreux

L'équation d'énergie

On concentre sur l'équation qui exprime la première loi de la thermodynamique dans un milieu poreux isotropique où les effets radiatifs, la dissipation visqueuse et le travail d'échange de pression sont négligeables avec un équilibre thermique local : $T_s = T_f = T$. On suppose aussi que la conduction dans les phases solide et fluide se produit en parallèle, et la conductivité thermique du milieu est la moyenne arithmétique des conductivités des phases solide et fluide. Dans notre cas, le milieu poreux est isotrope donc la conductivité est un scalaire[4].

Pour tout le milieu, on a l'équation d'énergie suivante :

$$(\rho c)_m \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c_p)_f \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \vec{\nabla} \cdot (k_m \vec{\nabla} T) + q_m''' \quad (2.2)$$

$$(\rho c)_m = (1 - \varphi)(\rho c)_s + \varphi(\rho c_p)_f \quad (2.3)$$

$$k_m = (1 - \varphi)k_s + \varphi k_f \quad (2.4)$$

$$q_m''' = (1 - \varphi)q_s''' + \varphi q_f''' \quad (2.5)$$

2.3. Transfert de matière dans un milieu poreux

Le terme "transfert de matière" signifie le transport de substance qui implique comme une composante (constituant, espèce,...) dans le mélange du fluide. En général, le transfert de matière est analogue à celui de la chaleur. On applique le principe de la conservation de la matière à chaque composant dans le mélange et puisque la diffusivité est un scalaire [4], on a :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{\varphi} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} C) = D \Delta C \quad (2.6)$$

2.4. La combinaison du transfert thermique et de matière

Dans la convection mixte bidiffusive, le couplage du transfert de chaleur et de matière est nécessaire parce que la densité du mélange de fluide dépend de la température et de la concentration. On a approximativement :

$$\rho_f(T, C) = \rho_f(T_r, C_r) [1 - \beta_T (T - T_r) - \beta_C (C - C_r)] \quad (2.7)$$

Où :

$\rho_f(T_r, C_r)$ est la masse volumique à la température T_r et à la concentration C_r .

β_C et β_T sont présentées respectivement comme suit :

$$\beta_T = \frac{-1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{P,C} \quad (2.8)$$

$$\beta_C = \frac{-1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_{P,T} \quad (2.9)$$

2.5. Cas de la convection forcée

L'écoulement de la convection forcée dans un canal plan rempli d'une matière poreuse est considéré avec les hypothèses suivantes :

- L'écoulement dans le canal est incompressible, visqueux et laminaire.
- Le fluide est Newtonien.
- Les propriétés thermophysiques (autres que la masse volumique) sont supposées constantes.
- On néglige la dissipation visqueuse dans l'équation d'énergie.
- L'approximation de Boussinesq s'applique (cette approximation est en général valable si la différence maximale de la température dimensionnelle dans le canal divisée par la température maximale dimensionnelle est inférieure à 1/3 et aussi si la différence maximale de la concentration dimensionnelle dans le canal divisée par la concentration maximale dimensionnelle est inférieure à 1/3)

Considérons un écoulement d'air dans un canal horizontal plan rempli d'une matière poreuse; avec transfert de chaleur et de matière. Les parois du canal sont maintenues isothermes et à concentrations constantes. Supposons que l'espèce diffusée dans l'air est la vapeur d'eau. La géométrie du problème est illustrée dans la figure (2.1).

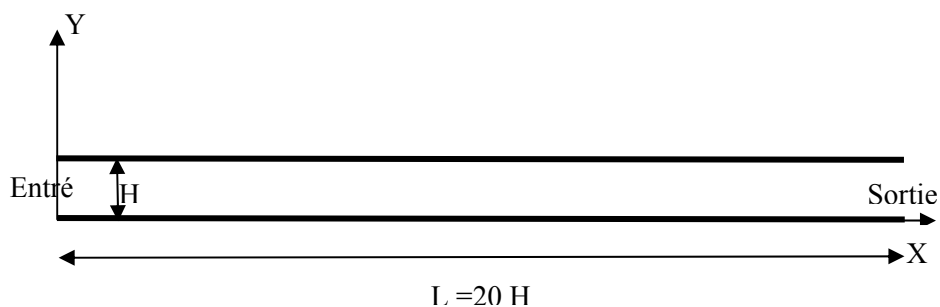


Figure (2.1) : Le schéma du problème considéré

Avec les propriétés thermo-physiques constantes, la convection est modélisée par les équations suivantes :

L'équation de continuité :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (2.10)$$

L'équation de la quantité de mouvement suivant x:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\phi^2} \frac{\partial(UU)}{\partial x} + \frac{1}{\phi^2} \frac{\partial(VU)}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{U}{\text{Re}Da} - Cf \frac{\sqrt{U^2 + V^2} U}{\sqrt{Da}} \\ + \frac{1}{\text{Re}\phi} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

L'équation de la quantité de mouvement suivant y:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\phi^2} \frac{\partial(UV)}{\partial x} + \frac{1}{\phi^2} \frac{\partial(VV)}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{V}{\text{Re}Da} - Cf \frac{\sqrt{U^2 + V^2} V}{\sqrt{Da}} \\ + \frac{1}{\text{Re}\phi} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

L'équation d'énergie:

$$(2.13) \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial[U T]}{\partial x} + \frac{\partial[V T]}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}Pr} \frac{\partial}{\partial x} \left[K^* \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{1}{\text{Re}Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left[K^* \frac{\partial T}{\partial y} \right]$$

L'équation de transfert de matière:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial(U C)}{\partial x} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial(V C)}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}Sc} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial C}{\partial x} \right] + \frac{1}{\text{Re}Sc} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial C}{\partial y} \right] \quad (2.14)$$

Les équations différentielles modélisantes sont résolues avec les conditions aux limites suivantes:

$$\text{A } t = 0, U = 1, V = 0, T = 0 \text{ et } C = 0$$

Pour $t > 0$,

$$\text{A } x = 0, U = 1, V = 0, T = 1, C = 0$$

$$\text{A } x = L/H, \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0$$

$$\text{A } y = 0, U = 0, V = 0, T = 0, C = 1$$

$$\text{A } y = 1, U = 0, V = 0, T = 0, C = 1$$

Les paramètres de contrôle du problème sont:

L/H Le rapport d'aspect,

$Re = U_0 H / \nu$ Le nombre de Reynolds,

$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ Le nombre de Prandtl,

$Sc = \frac{\nu}{D}$ Le nombre de Schmidt,

$Da = \frac{k}{H^2}$ Le nombre de Darcy,

La porosité, $\phi = \frac{\text{Volume des pores du milieu poreux}}{\text{Volume total du milieu poreux}}$

La solution du problème non dimensionnel dépend des valeurs de tous ces paramètres et des conditions initiales et aux limites.

2.6. Cas de la convection mixte

L'écoulement de la convection mixte bi diffusive dans un canal plan rempli d'une matière poreuse est considéré par les mêmes hypothèses précédentes utilisées dans le cas de la convection forcée.

La géométrie du problème dans ce cas est illustrée dans la figure (2.2).

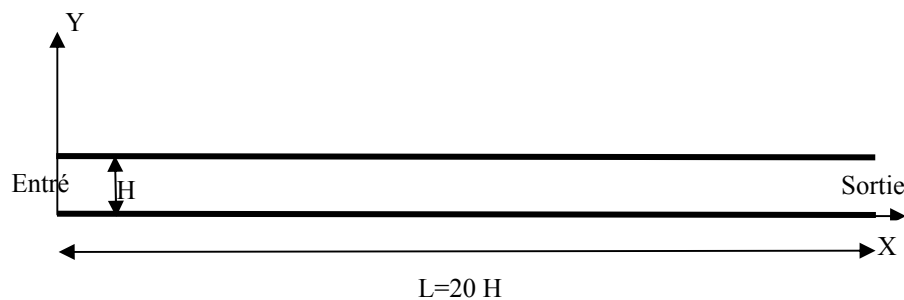


Figure (2.2) : Le schéma du problème considéré

Avec les propriétés thermo-physiques constantes, les équations (non dimensionnelles) du mouvement de fluide avec transfert de chaleur et transfert de matière dans le milieu poreux sont:

L'équation de continuité :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (2.15)$$

L'équation de la quantité de mouvement suivant x :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\phi^2} \frac{\partial(UU)}{\partial x} + \frac{1}{\phi^2} \frac{\partial(VU)}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{U}{\text{Re} Da} - C_f \frac{\sqrt{U^2 + V^2} U}{\sqrt{Da}} \\ + \frac{1}{\text{Re} \phi} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

L'équation de la quantité de mouvement suivant y :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\phi^2} \frac{\partial(UV)}{\partial x} + \frac{1}{\phi^2} \frac{\partial(VV)}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{V}{\text{Re} Da} - C_f \frac{\sqrt{U^2 + V^2} V}{\sqrt{Da}} \\ + \frac{1}{\text{Re} \phi} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) \right] + \frac{Gr_t}{\text{Re}^2} T - \frac{Gr_c}{\text{Re}^2} C \end{aligned} \quad (2.17)$$

L'équation d'énergie:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial[U T]}{\partial x} + \frac{\partial[V T]}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re} \text{Pr}} \frac{\partial}{\partial x} \left[K^* \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{1}{\text{Re} \text{Pr}} \frac{\partial}{\partial y} \left[K^* \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (2.18)$$

L'équation de transfert de matière:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial(UC)}{\partial x} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial(VC)}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re} \text{Sc}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial C}{\partial x} \right] + \frac{1}{\text{Re} \text{Sc}} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial C}{\partial y} \right] \quad (2.19)$$

Les équations différentielles modélisantes sont résolues avec les conditions aux limites suivante:

$$\text{A } t = 0, U = 1, V = 0, T = 0 \text{ et } C = 0$$

Pour $t > 0$,

$$\text{A } x = 0, U = 1, V = 0, T = 1, C = 0$$

$$\text{A } x = L/H, \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0$$

$$\text{A } y = 0, U = 0, V = 0, T = 0, C = 1$$

$$A \quad y=1, U=0, V=0, T=0, C=1$$

Les paramètres de contrôle du problème sont:

Le rapport d'aspect, L/H

$Re = U_0 H / \nu$ Le nombre de Reynolds,

$$Gr_t = \frac{g \beta_T (T_1 - T_2) H^3}{\nu^2} \text{ Le nombre de Grashof thermique,}$$

$$Gr_c = \frac{g \beta_c (C_1 - C_2) H^3}{\nu^2} \text{ Le nombre de Grashof solutal,}$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \text{ Le nombre de Prandtl,}$$

$$Sc = \frac{\nu}{D} \text{ Le nombre de Schmidt,}$$

$$Da = \frac{K}{H^2} \text{ Le nombre de Darcy,}$$

$$\phi = \frac{\text{Volume des pores du milieu poreux}}{\text{Volume total du milieu poreux}} \text{ La porosité,}$$

La solution du problème non dimensionnel dépend des valeurs de tous ces paramètres et des conditions initiales et aux limites.

3. Résolution numérique

Dans ce chapitre on va exposer la méthode numérique qu'on a été utilisés pour la résolution des équations adimensionnelles modélisantes qui ne possèdent pas de solutions analytiques. Et dans ce sens, on exposera aussi la discrétisation du domaine de calcul et l'algorithme utilisé pour résoudre le système d'équations discrétisées obtenues.

On a choisi la méthode des volumes finis en vue de la géométrie du problème et les capacités de calcul. Cette méthode a été développée pour résoudre les problèmes de transfert de chaleur et d'écoulement des fluides, elle est décrites en détailles dans le livre de *S.V.Patankar* [12]. Son principe est de fractionner le domaine physique en un nombre de volumes dits volume finis, ensuite d'intégrer les équations de conservation dans chaque volume. Le résultat de cette intégration, est l'obtention des équations algébriques, dites équations discrétisées. Elle est intensivement employée dans les mécanismes liquides, la météorologie, l'électromagnétisme, la simulation de dispositif de semi-conducteur, les modèles des processus biologiques et beaucoup d'autres secteurs de technologie régis par les systèmes conservateurs qui peuvent être écrits sous la forme intégrale du volume de commande. Les avantages primaires de cette méthode sont la robustesse numérique par l'obtention des principes (minimum) maximum discrets, l'applicabilité sur les mailles non structurées très générales et les propriétés locales intrinsèques de conservation des arrangements résultants[12].

3.1. Discrétisation du domaine physique

Le domaine physique est divisé en un certain nombre de volumes finis aux centres desquels sont placés les points intérieurs du maillage (voir la figure (3.1)). Les points limites sont centrées aux faces limites. Bien qu'il ne soit pas nécessaire que le maillage soit uniforme, l'uniformité des dimensions des volumes finis suivant chaque direction facilite l'obtention de certaines approximations numériques avec des erreurs de troncature d'un certain ordre désirable comme il sera démontré plus tard.

Pour rendre le nombre des volumes finis égal à celui des points du maillage, on considère que les points sur les limites, gauche et droite, du domaine de calcul sont centrés dans des volumes finis ayant des dimensions horizontales nulles. Aussi, les points sur les limites,

inférieure et supérieure, du domaine de calcul sont centrés dans des volumes avec des dimensions verticales nulles.

Le centre d'un volume fini typique est dénommé P. Chaque volume fini à l'intérieur du domaine de calcul est adjacent à quatre volumes finis voisins. Les centres des volume finis voisins à l'est, à l'ouest, au nord et au sud du volume fini typique sont noté E, W, N et S, respectivement. Les positions des faces séparant le volume fini typique de ses voisins, à l'est, à l'ouest, au nord et au sud, sont notées e, w, n et s, respectivement.

Les dimensions horizontales des volumes finis sont dénommées Δx . Ainsi, les dimensions horizontales des volumes finis englobant les points P, N et S sont notées Δx_P , et celles des volumes finis englobant les points E, W sont notées Δx_E et Δx_W , respectivement. Les dimensions verticales des volumes finis sont appelées Δy . Et donc, les dimensions verticales des volumes finis englobant les points P, E et S sont notées Δy_P , et celles des volumes finis englobant les points N, S sont notées Δy_N et Δy_S , respectivement. Les distances entre les points du maillage apparaissant plus tard dans les équations de discrétisation et donc leurs déterminations sont nécessaires. On appelle les distances entre le point P et les points E, W, N et S, dx_e , dx_w , dy_n et dy_s , respectivement.

Dans un système de coordonnées cartésiennes, l'abscisse du point typique P est notée x_P et elle est égale à l'abscisse du point N (x_N) et à celle du point S (x_S). Aussi, l'ordonnée du point P est notée y_P et elle est égale à l'ordonnées du point E (y_E) et à celle du point W (y_W). Les abscisses des faces gauche et droite du volume fini autour du point P sont notées x_w et x_e , respectivement. Les ordonnées des faces sud et nord du volume fini autour du point P sont notées y_s et y_n , respectivement.

La détermination de toutes les dimensions des volumes finis, toutes les distances entre les points centrés dans ces volumes, les coordonnées de ces points et les coordonnées des faces des volumes finis, complète les spécifications géométriques du maillage qui s'avéreront nécessaires pour la discrétisation des équations différentielles dans les volumes finis et pour la représentation graphique des résultats.

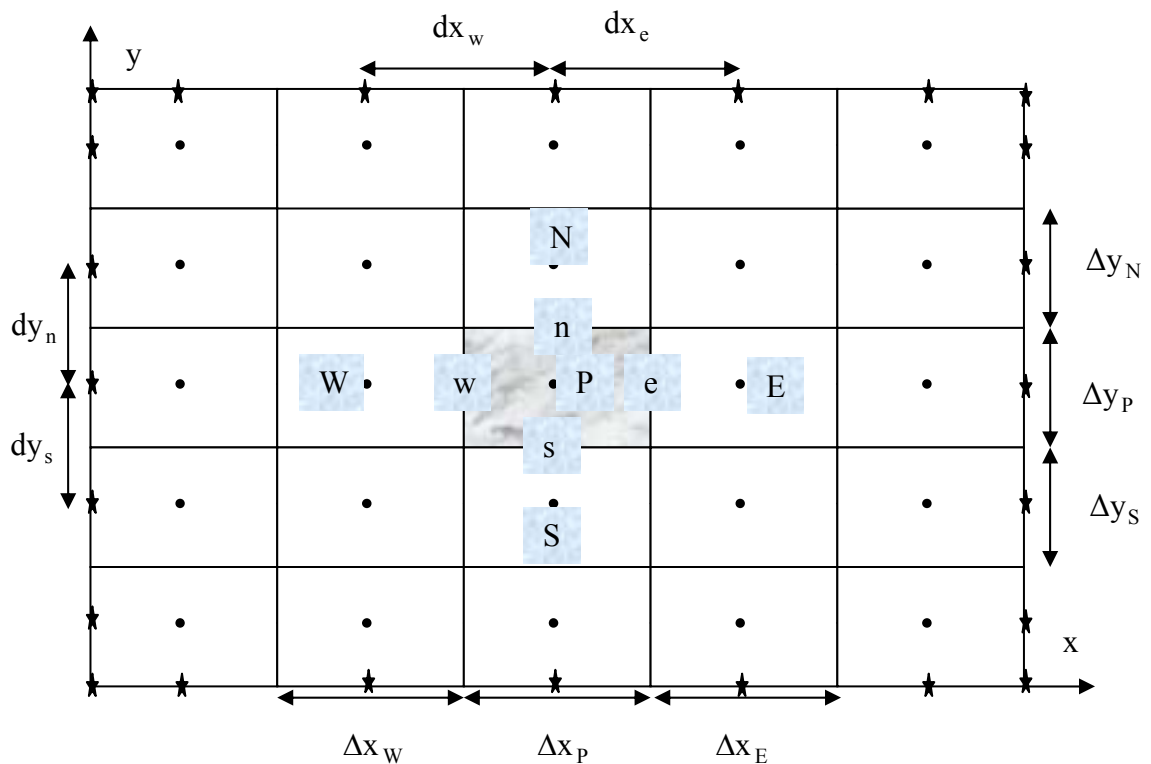


Figure (3.1): Exemple d'un maillage uniforme suivant x et suivant y.

3.2. Le maillage typique et décalé

Le maillage typique décrit sera utilisé pour la discrétisation des équations des variables dépendantes scalaires: la pression, la température et la concentration. Cependant pour les variables dépendantes vectorielles (les composantes du vecteur de vitesse) il est nécessaire et recommandé d'utiliser des maillages décalés. Le décalage du maillage améliore la représentation locale de certaines intégrales de discrétisation et évite la satisfaction des équations de discrétisation par des solutions numériques spatialement oscillatoires et physiquement inacceptables. Ainsi le maillage de la composante horizontale de la vitesse est décalé à droite par rapport au maillage typique; et le maillage de la composante verticale de la vitesse est décalé vers le haut par rapport au maillage typique. Le résultat de ces décalages est l'emplacement des composantes horizontales des vitesses aux milieux des faces verticales des volumes finis typiques; et l'emplacement des composantes verticales des vitesses aux milieux des faces horizontales des volumes finis typiques. Une telle configuration est illustrée dans la figure (3.2).

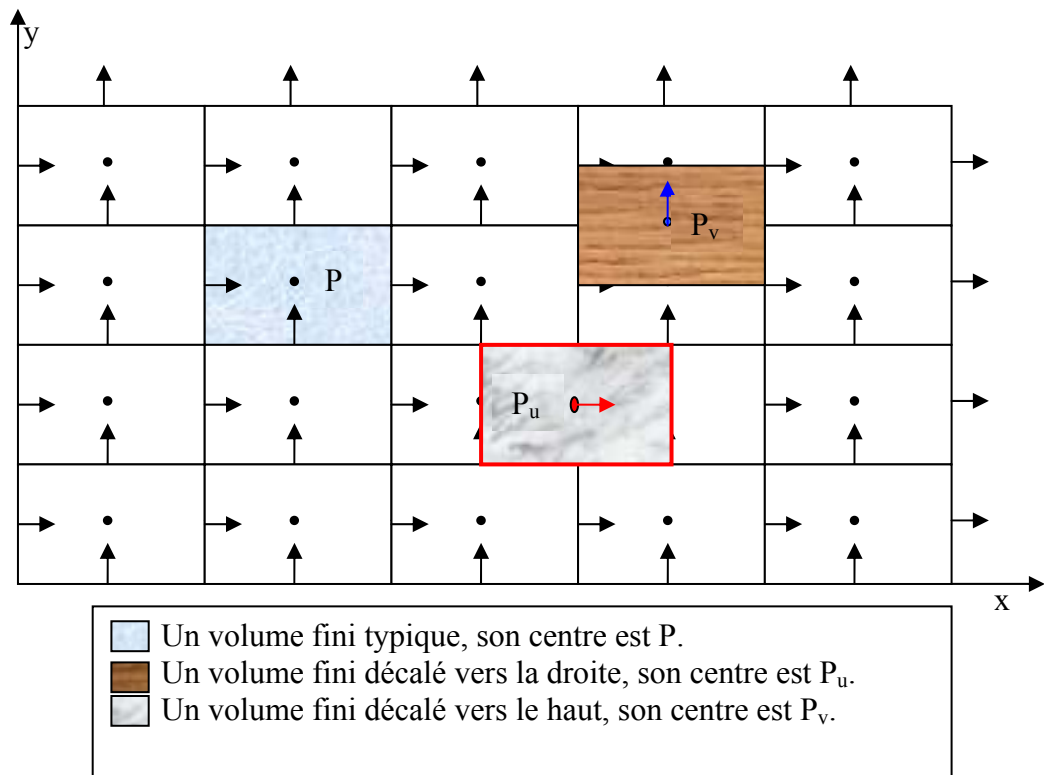


Figure (3.2): Maillage typique et maillages décalés.

3.3. Discrétisation numérique

Pour l'obtention d'une solution numérique précise qui peut reproduire un résultat expérimental, il faut faire attention à la complétude du modèle mathématique et à la précision de la méthode numérique. Concernant la complétude du modèle mathématique, ce dernier doit inclure les termes modélisant tous les phénomènes physiques présents dans le problème et leurs variations spatio-temporelles appropriées. Toute hypothèse simplificatrice du modèle doit être sérieusement justifiée.

Concernant la précision de la méthode numérique, elle dépend de la consistance et la stabilité du schéma de cette méthode et de la minimisation de toutes les erreurs introduites par le calcul numérique. Il est établi que seule une méthode numérique basée sur un schéma consistant et stable, peut donner une solution, qualitativement, physiquement acceptable. Le théorème de Lax nous apprend qu'une condition nécessaire et suffisante de la convergence d'un schéma numérique consistant est sa stabilité. Quantitativement, la précision de la méthode numérique s'améliore avec la minimisation des erreurs du calcul numériques. La méthode numérique est intrinsèquement approximative et on peut

améliorer sa précision par la minimisation de ses erreurs de troncature. Cette minimisation est possible par l'augmentation de l'ordre des erreurs et la réduction des pas numériques des variables indépendantes. En effet, une méthode numérique avec une erreur de troncature d'ordre $(\Delta x)^2$ est certainement meilleure qu'une autre avec erreur de troncature d'ordre (Δx) , supposant que $\Delta x \ll 1$. Aussi, l'erreur diminue avec la réduction de la valeur de (Δx) . L'expérience numérique nous a montré que les méthodes numériques basées sur des schémas avec des erreurs de troncature d'ordre un, sont des fois incapables de donner des solutions physiquement observables dans une expérience. Aussi, l'expérience numérique nous a montré que certains résultats s'améliorent par un affinage du maillage et/ou la réduction du pas du temps. Une autre erreur numérique affectant la précision numérique est l'accumulation des erreurs d'arrondi pendant le calcul numérique. Cette accumulation peut être dangereuse pour la solution numérique et donc lors de la programmation du calcul numérique, il faut éviter tous les algorithmes de calcul susceptibles aux erreurs d'arrondi.

L'introduction précédente contient les éléments qui nous motivent à choisir une méthode de discrétisation numérique d'ordre deux. Cette méthode avec un maillage spatiotemporel suffisamment affiné et un calcul sans susceptibilité aux erreurs d'arrondi, peuvent donner des solutions qui sont à la fois, qualitativement physiquement acceptables et quantitativement assez précises.

3.4. Discrétisation des équations

La discrétisation temporelle en second ordre

Considérons le développement en séries de Taylor d'une variable ϕ dépendante du temps:

$$\phi^t = \phi^{t+\Delta t} - \frac{\Delta t}{1!} \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{t+\Delta t} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|^{t+\Delta t} - \frac{(\Delta t)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3} \right|^{t+\Delta t} + O(\Delta t)^4 \quad (3.1)$$

Aussi,

$$\phi^{t-\Delta t} = \phi^{t+\Delta t} - \frac{(2\Delta t)}{1!} \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{t+\Delta t} + \frac{(2\Delta t)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|^{t+\Delta t} - \frac{(2\Delta t)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3} \right|^{t+\Delta t} + O(\Delta t)^4 \quad (3.2)$$

Si l'équation (3.2) est diminuée de l'équation (3.1) multipliée par 4, on obtient:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{t+\Delta t} \approx \frac{3\phi^{t+\Delta t} - 4\phi^t + \phi^{t-\Delta t}}{2\Delta t} + O(\Delta t)^2 \quad (3.3)$$

Et donc, une discrétisation de la variation temporelle locale, avec une erreur de troncature d'ordre deux, $(\Delta t)^2$ est :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{3\phi^{t+\Delta t} - 4\phi^t + \phi^{t-\Delta t}}{2 \Delta t} \quad (3.4)$$

Cette discrétisation est appelée: Second Order Euler Backward

Aussi, si on multiplie l'équation (3.1) par 2 et on retranche du produit l'équation (3.2), on obtient:

$$\phi^{t+\Delta t} \approx 2\phi^t - \phi^{t-\Delta t} + O(\Delta t)^2 \quad (3.5)$$

Et donc, une approximation temporelle, avec une erreur de troncature d'ordre deux, d'une variable $\phi^{t+\Delta t}$ est :

$$\phi^{t+\Delta t} = 2\phi^t - \phi^{t-\Delta t} \quad (3.6)$$

Cette discrétisation est celle d'Adam-Bashforth.

La discrétisation spatiale en second ordre

Nous allons démontrer que le schéma des différences centrées, utilisé pour la discrétisation des dérivées spatiales d'une variable, est d'ordre deux si le maillage est uniforme. Il suffit de faire cette démonstration pour les valeurs de ϕ et une de ses dérivées premières à l'interface d'un volume fini. Soit ϕ_n la valeur de ϕ et $\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_n$ la valeur de sa dérivée première à l'interface n au milieu de la distance entre les points P et N (suivant l'axe y). Cette distance est ci-après dénommée dy_n (voir la figure (3.3) ci-dessous).

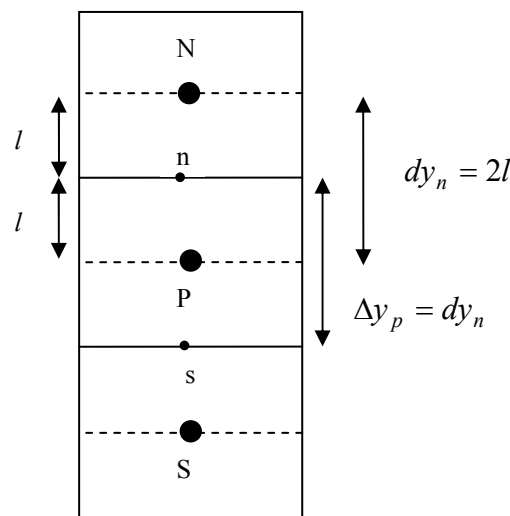


Figure (3.3) : L'interface n entre les points P et N dans un maillage uniforme suivant y

Considérons les développements, en série de Taylor, suivant

$$\phi_P = \phi_n - \frac{l}{1!} \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_n + \frac{l^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \Big|_n - \frac{l^3}{3!} \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \Big|_n + \dots \quad (3.7)$$

$$\phi_N = \phi_n + \frac{l}{1!} \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_n + \frac{l^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \Big|_n + \frac{l^3}{3!} \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \Big|_n + \dots \quad (3.8)$$

En retranchant l'équation (3.7) de (3.8), on trouve:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_n = \frac{\phi_N - \phi_P}{dy_n} - \frac{1}{24} \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \Big|_n (dy_n)^2 + \dots \quad (3.9)$$

Et donc,

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_n = \frac{\phi_N - \phi_P}{dy_n}, \text{ avec une erreur de troncature d'ordre } (dy_n)^2. \quad (3.10)$$

Aussi, l'addition des équations (3.7) et (3.8) donne:

$$\phi_n = \frac{\phi_N + \phi_P}{2} - \frac{1}{16} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \Big|_n (dy_n)^2 + \dots \quad (3.11)$$

Et donc,

$$\phi_n = \frac{\phi_P + \phi_N}{2}, \text{ avec une erreur de troncature d'ordre } (dy_n)^2.$$

Dans ce qui suit, on utilise une discrétisation temporelle avec une erreur de troncature de l'ordre de Δt^2 et une discrétisation spatiale avec une erreur de troncature de l'ordre de $(\Delta x)^2, (\Delta y)^2$.

Concernant la discrétisation temporelle, les dérivées temporelles seront discrétisées comme précisé par l'équation (3.4); tous les termes advectifs et non linéaires seront approchés par la discrétisation d'Adam-Bashforth précisée par l'équation (3.6); tous les gradients de pression et tous les termes diffusifs seront évalués, sans approximation, au temps $(t + \Delta t)$; les termes des poussées, thermique et solutale, seront approchés par la discrétisation d'Adam-Bashforth.

Concernant la discrétisation spatiale, le schéma des différences centrées sera utilisé.

Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement suivant x:

Tous les termes de l'équation de la quantité de mouvement suivant x sont multipliés par $dx dy$ et double intégrés entre les limites du volume fini décalé vers la droite. Ces limites sont ci-après dénommés comme suit:

La position de la face est (suivant x): e_u

La position de la face ouest (suivant x): w_u

La position de la face nord (suivant y): n_u

La position de la face sud (suivant y): s_u

Le centre du volume fini décalé est dénommé: P_u

Le volume fini considéré est adjacent à quatre volumes finis.

Le centre du volume fini à l'est de celui considéré est: E_u

Le centre du volume fini à l'ouest de celui considéré est: W_u

Le centre du volume fini au nord de celui considéré est: N_u

Le centre du volume fini au sud de celui considéré est: S_u

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{1}{\phi} \frac{\partial U}{\partial t} \Big|^{t+\Delta t} dx dy = \frac{1}{\phi} \left[\frac{3U_{P_u}^{t+\Delta t} - 4U_{P_u}^t + U_{P_u}^{t-\Delta t}}{2 \Delta t} \right] dx_e \Delta y_P$$

$$\begin{aligned} \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{1}{\phi^2} \frac{\partial(UU)}{\partial x} \Big|^{t+\Delta t} dx dy &= 2 \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{1}{\phi^2} \frac{\partial(UU)}{\partial x} \Big|^t dx dy - \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{1}{\phi^2} \frac{\partial(UU)}{\partial x} \Big|^{t-\Delta t} dx dy \\ &= \frac{1}{\phi^2} \left[2(U_{e_u}^t U_{e_u}^t - U_{w_u}^t U_{w_u}^t) - (U_{e_u}^{t-\Delta t} U_{e_u}^{t-\Delta t} - U_{w_u}^{t-\Delta t} U_{w_u}^{t-\Delta t}) \right] \Delta y_P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{1}{\phi^2} \frac{\partial(VU)}{\partial y} \Big|^{t+\Delta t} dx dy &= 2 \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{1}{\phi^2} \frac{\partial(VU)}{\partial y} \Big|^t dx dy - \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{1}{\phi^2} \frac{\partial(VU)}{\partial y} \Big|^{t-\Delta t} dx dy \\ &= \frac{1}{\phi^2} \left[2(V_{n_u}^t U_{n_u}^t - V_{s_u}^t U_{s_u}^t) - (V_{n_u}^{t-\Delta t} U_{n_u}^{t-\Delta t} - V_{s_u}^{t-\Delta t} U_{s_u}^{t-\Delta t}) \right] dx_e \end{aligned}$$

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \left(-\frac{\partial P}{\partial x} \right) \Big|^{t+\Delta t} dx dy = (p_P^{t+\Delta t} - p_E^{t+\Delta t}) \Delta y_P$$

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{1}{\text{Re} \phi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) \Big|^{t+\Delta t} dx dy = \frac{1}{\text{Re} \phi} \left(\frac{U_{E_u}^{t+\Delta t} - U_{P_u}^{t+\Delta t}}{\Delta x_E} - \frac{U_{P_u}^{t+\Delta t} - U_{W_u}^{t+\Delta t}}{\Delta x_P} \right) \Delta y_P$$

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{1}{\text{Re} \phi} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \Big|^{t+\Delta t} dx dy = \frac{1}{\text{Re} \phi} \left(\frac{U_{N_u}^{t+\Delta t} - U_{P_u}^{t+\Delta t}}{dy_n} - \frac{U_{P_u}^{t+\Delta t} - U_{S_u}^{t+\Delta t}}{dy_s} \right) \Delta x_P$$

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{-U}{\text{Re} Da} \Big|^{t+\Delta t} dx dy = \frac{-U_{P_u}^{t+\Delta t}}{\text{Re} Da} dx_e \Delta y_P$$

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{-\sqrt{U^2 + V^2} U}{\sqrt{Da}} \Big|^{t+\Delta t} dx dy = -2 \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{-\sqrt{U^2 + V^2} U}{\sqrt{Da}} \Big|^t dx dy + \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{-\sqrt{U^2 + V^2} U}{\sqrt{Da}} \Big|^{t-\Delta t} dx dy$$

$$= \left[\frac{-2\sqrt{U_{P_u}^t{}^2 + V_{P_u}^t{}^2} U_{P_u}^t}{\sqrt{Da}} + \frac{\sqrt{U_{P_u}^{t-\Delta t}{}^2 + V_{P_u}^{t-\Delta t}{}^2} U_{P_u}^{t-\Delta t}}{\sqrt{Da}} \right] dx_e \Delta y_P$$

Les résultats des intégrales sont réarrangés sous la forme standard d'une équation de discrétisation algébrique:

$$A_P U_{P_u}^{t+\Delta t} = A_E U_{E_u}^{t+\Delta t} + A_W U_{W_u}^{t+\Delta t} + A_N U_{N_u}^{t+\Delta t} + A_S U_{S_u}^{t+\Delta t} + S_U$$

Avec:

$$A_E = \frac{1}{\text{Re } \phi} \frac{\Delta y_P}{\Delta x_E},$$

$$A_W = \frac{1}{\text{Re } \phi} \frac{\Delta y_P}{\Delta x_P}$$

$$A_N = \frac{1}{\text{Re } \phi} \frac{dx_e}{dy_n}$$

$$A_S = \frac{1}{\text{Re } \phi} \frac{dx_e}{dy_s}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{dx_e \Delta y_P}{\text{Re } Da} + \frac{3}{2} \frac{dx_e \Delta y_P}{\Delta t}$$

$$S_U = (p_P^{t+\Delta t} - p_E^{t+\Delta t}) \Delta y_P + \frac{1}{\phi} \left[\frac{4U_{P_u}^t - U_{P_u}^{t-\Delta t}}{2 \Delta t} \right] dx_e \Delta y_P$$

$$- \frac{1}{\phi^2} \left[2 \left(U_{e_u}^t U_{e_u}^t - U_{w_u}^t U_{w_u}^t \right) - \left(U_{e_u}^{t-\Delta t} U_{e_u}^{t-\Delta t} - U_{w_u}^{t-\Delta t} U_{w_u}^{t-\Delta t} \right) \right] \Delta y_P$$

$$- \frac{1}{\phi^2} \left[2 \left(V_{n_u}^t U_{n_u}^t - V_{s_u}^t U_{s_u}^t \right) - \left(V_{n_u}^{t-\Delta t} U_{n_u}^{t-\Delta t} - V_{s_u}^{t-\Delta t} U_{s_u}^{t-\Delta t} \right) \right] dx_e$$

$$+ \left[\frac{-2\sqrt{U_{P_u}^t{}^2 + V_{P_u}^t{}^2} U_{P_u}^t}{\sqrt{Da}} + \frac{\sqrt{U_{P_u}^{t-\Delta t}{}^2 + V_{P_u}^{t-\Delta t}{}^2} U_{P_u}^{t-\Delta t}}{\sqrt{Da}} \right] dx_e \Delta y_P$$

On remarque que A_P, A_E, A_W, A_N et A_S sont toujours positifs (nous savons qu'une bonne discrétisation est celle qui assure le même signe pour tous les coefficients) et que A_P est supérieur à la somme des autres coefficients (ce qui assure une dominance diagonale de la

matrice des coefficients, un avantage favorisant la convergence des calculs des solutions itératives).

Cependant, la sources S_U , composée de la somme algébrique de plusieurs termes, peut être positive, négative ou nulle; mais cela ne pose aucun problème sachant que $U_{P_u}^{t+\Delta t}$ peut être positive, négative ou nulle.

Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement suivant y

Tous les termes de l'équation de la quantité de mouvement suivant y sont multipliés par $dx dy$ et double intégrés entre les limites du volume fini décalé. Ces limites sont ci-après dénommés comme suit:

La position de la face est (suivant x): e_v

La position de la face ouest (suivant x): w_v

La position de la face nord (suivant y): n_v

La position de la face sud (suivant y): s_v

Le centre du volume fini décalé est dénommé: P_v

Le volume fini considéré est adjacent à six volumes finis.

Le centre du volume fini à l'est de celui considéré est: E_v

Le centre du volume fini à l'ouest de celui considéré est: W_v

Le centre du volume fini au nord de celui considéré est: N_v

Le centre du volume fini au sud de celui considéré est: S_v

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{1}{\phi} \frac{\partial V}{\partial t} \Big|^{t+\Delta t} dx dy = \frac{1}{\phi} \left[\frac{3V_{P_v}^{t+\Delta t} - 4V_{P_v}^t + V_{P_v}^{t-\Delta t}}{2 \Delta t} \right] \Delta x_p dy_n$$

$$\begin{aligned} \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{1}{\phi^2} \frac{\partial(UV)}{\partial x} \Big|^{t+\Delta t} dx dy &= 2 \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{1}{\phi^2} \frac{\partial(UV)}{\partial x} \Big|^t dx dy - \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{1}{\phi^2} \frac{\partial(UV)}{\partial x} \Big|^{t-\Delta t} dx dy \\ &= \frac{1}{\phi^2} \left[2(U_{e_v}^t V_{e_v}^t - U_{w_v}^t V_{w_v}^t) - (U_{e_v}^{t-\Delta t} V_{e_v}^{t-\Delta t} - U_{w_v}^{t-\Delta t} V_{w_v}^{t-\Delta t}) \right] dy_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{1}{\phi^2} \frac{\partial(VV)}{\partial y} \Big|^{t+\Delta t} dx dy &= 2 \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{1}{\phi^2} \frac{\partial(VV)}{\partial y} \Big|^t dx dy - \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{1}{\phi^2} \frac{\partial(VV)}{\partial y} \Big|^{t-\Delta t} dx dy \\ &= \frac{1}{\phi^2} \left[2(V_{n_v}^t V_{n_v}^t - V_{s_v}^t V_{s_v}^t) - (V_{n_v}^{t-\Delta t} V_{n_v}^{t-\Delta t} - V_{s_v}^{t-\Delta t} V_{s_v}^{t-\Delta t}) \right] dy_n \end{aligned}$$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \left(-\frac{\partial P}{\partial y} \right)^{t+\Delta t} dx dy = (p_P^{t+\Delta t} - p_N^{t+\Delta t}) \Delta x_p$$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{1}{\text{Re} \phi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^{t+\Delta t} dx dy = \frac{1}{\text{Re} \phi} \left(\frac{V_{E_v}^{t+\Delta t} - V_{P_v}^{t+\Delta t}}{dx_e} - \frac{V_{P_v}^{t+\Delta t} - V_{W_v}^{t+\Delta t}}{dx_w} \right) dy_n$$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{1}{\text{Re} \phi} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^{t+\Delta t} dx dy = \frac{1}{\text{Re} \phi} \left(\frac{V_{N_v}^{t+\Delta t} - V_{P_v}^{t+\Delta t}}{\Delta y_N} - \frac{V_{P_v}^{t+\Delta t} - V_{S_v}^{t+\Delta t}}{\Delta y_P} \right) \Delta x_p$$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{-V}{\text{Re} Da} \Big|^{t+\Delta t} dx dy = \frac{-V_{P_v}^{t+\Delta t}}{\text{Re} Da} \Delta x_p dy_n$$

$$\begin{aligned} \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{-\sqrt{U^2 + V^2} V}{\sqrt{Da}} \Big|^{t+\Delta t} dx dy &= -2 \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{-\sqrt{U^2 + V^2} V}{\sqrt{Da}} \Big|^t dx dy + \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{-\sqrt{U^2 + V^2} V}{\sqrt{Da}} \Big|^{t-\Delta t} dx dy \\ &= \left[\frac{-2\sqrt{U_{P_v}^t{}^2 + V_{P_v}^t{}^2} V_{P_v}^t}{\sqrt{Da}} + \frac{\sqrt{U_{P_v}^{t-\Delta t}{}^2 + V_{P_v}^{t-\Delta t}{}^2} V_{P_v}^{t-\Delta t}}{\sqrt{Da}} \right] \Delta x_p dy_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_w}^{n_v} \frac{Gr_t}{\text{Re}^2} T \Big|^{t+\Delta t} dx dy &= 2 \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_w}^{n_v} \frac{Gr_t}{\text{Re}^2} T \Big|^t dx dy - \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_w}^{n_v} \frac{Gr_t}{\text{Re}^2} T \Big|^{t-\Delta t} dx dy \\ &= 2 \frac{Gr_t}{\text{Re}^2} \left[\frac{T_P^t + T_N^t}{2} \right] \Delta x_p dy_n - \frac{Gr_t}{\text{Re}^2} \left[\frac{T_P^{t-\Delta t} + T_N^{t-\Delta t}}{2} \right] \Delta x_p dy_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_w}^{n_v} \frac{Gr_c}{\text{Re}^2} C \Big|^{t+\Delta t} dx dy &= 2 \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_w}^{n_v} \frac{Gr_c}{\text{Re}^2} C \Big|^t dx dy - \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_w}^{n_v} \frac{Gr_c}{\text{Re}^2} C \Big|^{t-\Delta t} dx dy \\ &= 2 \frac{Gr_c}{\text{Re}^2} \left[\frac{C_P^t + C_N^t}{2} \right] \Delta x_p dy_n - \frac{Gr_c}{\text{Re}^2} \left[\frac{C_P^{t-\Delta t} + C_N^{t-\Delta t}}{2} \right] \Delta x_p dy_n \end{aligned}$$

Les résultats des intégrales sont réarrangés sous la forme standard d'une équation de discrétisation algébrique:

$$A_P V_{P_v}^{t+\Delta t} = A_E V_{E_v}^{t+\Delta t} + A_W V_{W_v}^{t+\Delta t} + A_N V_{N_v}^{t+\Delta t} + A_S V_{S_v}^{t+\Delta t} + S_V$$

Avec:

$$A_E = \frac{1}{\text{Re} \phi} \frac{dy_n}{dx_e},$$

$$A_W = \frac{1}{\text{Re} \phi} \frac{dy_n}{dx_w}$$

$$A_N = \frac{1}{\text{Re} \phi} \frac{\Delta x_p}{\Delta y_N}$$

$$A_S = \frac{1}{\text{Re } \phi} \frac{\Delta x_p}{\Delta y_p}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{\Delta x_p dy_n}{\text{Re } Da} + \frac{3}{2} \frac{\Delta x_p dy_n}{\Delta t}$$

$$\begin{aligned} S_V = & (p_P^{t+\Delta t} - p_N^{t+\Delta t}) \Delta x_p + \frac{1}{\phi} \left[\frac{4V_{P_v}^t - V_{P_v}^{t-\Delta t}}{2 \Delta t} \right] \Delta x_p dy_n \\ & - \frac{1}{\phi^2} \left[2 \left(U_{e_v}^t V_{e_v}^t - U_{w_v}^t V_{w_v}^t \right) - \left(U_{e_v}^{t-\Delta t} V_{e_v}^{t-\Delta t} - U_{w_v}^{t-\Delta t} V_{w_v}^{t-\Delta t} \right) \right] dy_n \\ & - \frac{1}{\phi^2} \left[2 \left(V_{n_v}^t V_{n_v}^t - V_{s_v}^t V_{s_v}^t \right) - \left(V_{n_v}^{t-\Delta t} V_{n_v}^{t-\Delta t} - V_{s_v}^{t-\Delta t} V_{s_v}^{t-\Delta t} \right) \right] \Delta x_p \\ & + \left[\frac{-2 \sqrt{U_{P_v}^t{}^2 + V_{P_v}^t{}^2} V_{P_v}^t}{\sqrt{Da}} + \frac{\sqrt{U_{P_v}^{t-\Delta t}{}^2 + V_{P_v}^{t-\Delta t}{}^2} V_{P_v}^{t-\Delta t}}{\sqrt{Da}} \right] \Delta x_p dy_n \\ & + \left[2 \frac{Gr_t}{\text{Re}^2} \left[\frac{T_P^t + T_N^t}{2} \right] \Delta x_p dy_n - \frac{Gr_t}{\text{Re}^2} \left[\frac{T_P^{t-\Delta t} + T_N^{t-\Delta t}}{2} \right] \Delta x_p dy_n \right] \\ & - \left[2 \frac{Gr_c}{\text{Re}^2} \left[\frac{C_P^t + C_N^t}{2} \right] \Delta x_p dy_n - \frac{Gr_c}{\text{Re}^2} \left[\frac{C_P^{t-\Delta t} + C_N^{t-\Delta t}}{2} \right] \Delta x_p dy_n \right] \end{aligned}$$

On remarque que A_P, A_E, A_W, A_N et A_S sont toujours positifs et que A_P est supérieur à la somme des autres coefficients

Cependant, la sources S_V , composée de la somme algébrique de plusieurs termes, elle peut être positive, négative ou nulle; mais cela ne pose aucun problème sachant que $V_{P_v}^{t+\Delta t}$ peut être positive, négative ou nulle

Discrétisation de l'équation de l'énergie

Tous les termes de l'équation de l'énergie sont multipliés par $dx dy$ et triple intégrés entre les limites d'un volume fini typique. Ces limites sont ci-après dénommés comme suit:

La position de la face est (suivant x): e

La position de la face ouest (suivant x): w

La position de la face nord (suivant y): n

La position de la face sud (suivant y): s

Le centre du volume fini typique est dénommé: P

Le volume fini considéré est adjacent à six volumes finis.

Le centre du volume fini à l'est de celui considéré est: E

Le centre du volume fini à l'ouest de celui considéré est: W

Le centre du volume fini au nord de celui considéré est: N

Le centre du volume fini au sud de celui considéré est: S

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial T}{\partial t} \Big|^{t+\Delta t} dx dy = \left[\frac{3T_P^{t+\Delta t} - 4T_P^t + T_P^{t-\Delta t}}{2 \Delta t} \right] \Delta x_p \Delta y_p$$

$$\begin{aligned} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial(UT)}{\partial x} \Big|^{t+\Delta t} dx dy &= 2 \int_w^e \int_s^n \frac{\partial(UT)}{\partial x} \Big|^{t-\Delta t} dx dy - \int_w^e \int_s^n \frac{\partial(UT)}{\partial x} \Big|^{t-\Delta t} dx dy \\ &= \left[2(U_e^t T_e^t - U_w^t T_w^t) - (U_e^{t-\Delta t} T_e^{t-\Delta t} - U_w^{t-\Delta t} T_w^{t-\Delta t}) \right] \Delta y_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial(VT)}{\partial y} \Big|^{t+\Delta t} dx dy &= 2 \int_w^e \int_s^n \frac{\partial(VT)}{\partial y} \Big|^{t-\Delta t} dx dy - \int_w^e \int_s^n \frac{\partial(VT)}{\partial y} \Big|^{t-\Delta t} dx dy \\ &= \left[2(V_n^t T_n^t - V_s^t T_s^t) - (V_n^{t-\Delta t} T_n^{t-\Delta t} - V_s^{t-\Delta t} T_s^{t-\Delta t}) \right] \Delta x_p \end{aligned}$$

$$\int_w^e \int_s^n \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{\partial}{\partial x} \left(K^* \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|^{t+\Delta t} dx dy = \frac{1}{\text{Re Pr}} \left(K_e^* \frac{T_E^{t+\Delta t} - T_P^{t+\Delta t}}{dx_e} - K_w^* \frac{T_P^{t+\Delta t} - T_W^{t+\Delta t}}{dx_w} \right) \Delta y_p$$

$$\int_w^e \int_s^n \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|^{t+\Delta t} dx dy = \frac{1}{\text{Re Pr}} \left(K_n^* \frac{T_N^{t+\Delta t} - T_P^{t+\Delta t}}{dy_n} - K_s^* \frac{T_P^{t+\Delta t} - T_S^{t+\Delta t}}{dy_s} \right) \Delta x_p$$

Les résultats des intégrales sont réarrangés sous la forme standard d'une équation de discrétisation algébrique:

$$A_P T_P^{t+\Delta t} = A_E T_E^{t+\Delta t} + A_W T_W^{t+\Delta t} + A_N T_N^{t+\Delta t} + A_S T_S^{t+\Delta t} + S_T$$

Avec:

$$A_E = \frac{K_e^*}{\text{Re Pr}} \frac{\Delta y_p}{dx_e},$$

$$A_W = \frac{K_w^*}{\text{Re Pr}} \frac{\Delta y_p}{dx_w}$$

$$A_N = \frac{K_n^*}{\text{Re Pr}} \frac{\Delta x_p}{dy_n}$$

$$A_S = \frac{K_s^*}{\text{Re Pr}} \frac{\Delta x_p}{dy_s}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{3}{2} \frac{\Delta x_p \Delta y_p}{\Delta t}$$

$$S_T = \left[\frac{4T_p^t - T_p^{t-\Delta t}}{2 \Delta t} \right] \Delta x_p \Delta y_p \\ - \left[2 \left(U_e^t T_e^t - U_w^t T_w^t \right) - \left(U_e^{t-\Delta t} T_e^{t-\Delta t} - U_w^{t-\Delta t} T_w^{t-\Delta t} \right) \right] \Delta y_p \\ - \left[2 \left(V_n^t T_n^t - V_s^t T_s^t \right) - \left(V_n^{t-\Delta t} T_n^{t-\Delta t} - V_s^{t-\Delta t} T_s^{t-\Delta t} \right) \right] \Delta x_p$$

On remarque que A_P, A_E, A_W, A_N et A_S sont toujours positifs et que A_P est supérieur à la somme des autres coefficients. Cependant, la source S_T , composée de la somme algébrique de plusieurs termes, elle peut être positive, négative ou nulle; mais cela peut poser un problème si $T_p^{t+\Delta t}$ ne peut être que positive ou nulle. Autrement dit, une source négative peut donner une valeur négative pour $T_p^{t+\Delta t}$, ce qui est inacceptable. Et donc il faut trouver une reformulation de l'équation de discrétisation pour que les valeurs de $T_p^{t+\Delta t}$ ne soient que positives ou nulles. Une telle reformulation est présentée dans ce qui suit.

Notons que la source S_T , qui est positive, négative ou nulle, peut être écrite comme la différence de deux termes positifs ou nuls:

$$S_T = |S_T| - \max(-2S_T, 0),$$

$\max(-2S_T, 0)$ est le maximum des valeurs $-2S_T$ et 0.

Notons que $|S_T|$ est positive est donc elle est maintenue comme une source, alors que $-\max(-2S_T, 0)$ est réécrit sous la forme:

$$-\max(-2S_T, 0) = - \left[\frac{\max(-2S_T, 0)}{T_p^{t+\Delta t}} \right] T_p^{t+\Delta t},$$

Ce terme est négatif et il est considéré comme un coefficient multiplié par $T_p^{t+\Delta t}$; ce terme est donc ramené à gauche de l'équation de discrétisation qui devient:

$$\left[A_P + \frac{\max(-2S_T, 0)}{T_p^{t+\Delta t}} \right] T_p^{t+\Delta t} = A_E T_E^{t+\Delta t} + A_W T_W^{t+\Delta t} + A_N T_N^{t+\Delta t} + A_S T_S^{t+\Delta t} + |S_T| \text{ ou,}$$

$$\left[A_P^* \right] T_p^{t+\Delta t} = A_E T_E^{t+\Delta t} + A_W T_W^{t+\Delta t} + A_N T_N^{t+\Delta t} + A_S T_S^{t+\Delta t} + |S_T|$$

Avec:

$$A_P^* = A_P + \frac{\max(-2S_T, 0)}{T_p^{t+\Delta t}}$$

Notons qu'à droite de la nouvelle équation de discrétisation, la source est toujours positive ou nulle. Cependant à gauche de cette équation on a un problème:

Le coefficient A_p^* contient une inconnue qui est la variable calculée $T_p^{t+\Delta t}$, cette dernière peut être remplacée par l'approximation $T_p^{t+\Delta t} = 2T_p^t - T_p^t$, seulement la différence $2T_p^t - T_p^t$ peut être négative pendant le calcul et donc peut causer un problème! Pour éviter ce problème, on envisage une solution itérative de l'équation de discrétisation non linéaire:

$$\left[A_p + \frac{\max(-2S_T, 0)}{T_p^{t+\Delta t}} \right] T_p^{t+\Delta t} = A_E T_E^{t+\Delta t} + A_W T_W^{t+\Delta t} + A_N T_N^{t+\Delta t} + A_S T_S^{t+\Delta t} + |S_T|$$

Durant la première itération de la solution de cette équation, on considère sa forme linéarisée comme suit:

$$\left[A_p + \frac{\max(-2S_T, 0)}{T_p^t} \right] T_p^{t+\Delta t} = A_E T_E^{t+\Delta t} + A_W T_W^{t+\Delta t} + A_N T_N^{t+\Delta t} + A_S T_S^{t+\Delta t} + |S_T| \text{ C'est comme si}$$

T_p^t représente une initialisation pour $T_p^{t+\Delta t}$.

Durant les autres itérations, on considère la solution de l'équation:

$$\left[A_p + \frac{\max(-2S_T, 0)}{(T_p^{t+\Delta t})^*} \right] T_p^{t+\Delta t} = A_E T_E^{t+\Delta t} + A_W T_W^{t+\Delta t} + A_N T_N^{t+\Delta t} + A_S T_S^{t+\Delta t} + |S_T|$$

Où, $(T_p^{t+\Delta t})^*$ est la valeur de $T_p^{t+\Delta t}$ obtenue de l'itération précédente. On espère qu'avec plusieurs itérations, on obtient la valeur de $T_p^{t+\Delta t}$ qui satisfait l'équation non linéaire.

Cependant la procédure décrite n'est pas sans problème: si, durant le calcul itératif, T_p^t (ou $(T_p^{t+\Delta t})^*$) est égale à 0 ou très proche de 0, on peut avoir une division par 0 ou par un très petit nombre dans le coefficient de $T_p^{t+\Delta t}$! Mais on peut éviter ce problème par une initialisation non nulle (dans les conditions initiales) du champ de T dans tout le domaine de calcul. Aussi, si dans une certaine zone, $T_p^{t+\Delta t}$ est très proche de 0, ses voisines le sont aussi est sa sources est certainement très proche de 0 est ne pose pas de problème.

Discrétisation de l'équation de transfert de matière

Tous les termes de l'équation de transfert de matière sont multipliés par $dx dy$ et double intégrés entre les limites d'un volume fini typique. Ces limites sont ci-après dénommés comme suit:

La position de la face est (suivant x): e

La position de la face ouest (suivant x): w

La position de la face nord (suivant y): n

La position de la face sud (suivant y): s

Le centre du volume fini typique est dénommé: P

Le volume fini considéré est adjacent à six volumes finis.

Le centre du volume fini à l'est de celui considéré est: E

Le centre du volume fini à l'ouest de celui considéré est: W

Le centre du volume fini au nord de celui considéré est: N

Le centre du volume fini au sud de celui considéré est: S

$$\int_w^e \int_s^n \left. \frac{\partial C}{\partial t} \right|^{t+\Delta t} dx dy = \left[\frac{3C_P^{t+\Delta t} - 4C_P^t + C_P^{t-\Delta t}}{2\Delta t} \right] \Delta x_P \Delta y_P$$

$$\begin{aligned} \int_w^e \int_s^n \left. \frac{1}{\phi} \frac{\partial(UC)}{\partial x} \right|^{t+\Delta t} dx dy &= 2 \int_w^e \int_s^n \left. \frac{1}{\phi} \frac{\partial(UC)}{\partial x} \right|^t dx dy - \int_w^e \int_s^n \left. \frac{1}{\phi} \frac{\partial(UC)}{\partial x} \right|^{t-\Delta t} dx dy \\ &= \frac{1}{\phi} \left[2(U_e^t C_e^t - U_w^t C_w^t) - (U_e^{t-\Delta t} C_e^{t-\Delta t} - U_w^{t-\Delta t} C_w^{t-\Delta t}) \right] \Delta y_P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_w^e \int_s^n \left. \frac{1}{\phi} \frac{\partial(VC)}{\partial y} \right|^{t+\Delta t} dx dy &= 2 \int_w^e \int_s^n \left. \frac{1}{\phi} \frac{\partial(VC)}{\partial y} \right|^t dx dy - \int_w^e \int_s^n \left. \frac{1}{\phi} \frac{\partial(VC)}{\partial y} \right|^{t-\Delta t} dx dy \\ &= \frac{1}{\phi} \left[2(V_n^t C_n^t - V_s^t C_s^t) - (V_n^{t-\Delta t} C_n^{t-\Delta t} - V_s^{t-\Delta t} C_s^{t-\Delta t}) \right] \Delta x_P \end{aligned}$$

$$\int_w^e \int_s^n \left. \frac{1}{\text{Re Sc}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right) \right|^{t+\Delta t} dx dy = \frac{1}{\text{Re Sc}} \left(\frac{C_E^{t+\Delta t} - C_P^{t+\Delta t}}{dx_e} - \frac{C_P^{t+\Delta t} - C_W^{t+\Delta t}}{dx_w} \right) \Delta y_P$$

$$\int_w^e \int_s^n \left. \frac{1}{\text{Re Sc}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right) \right|^{t+\Delta t} dx dy = \frac{1}{\text{Re Sc}} \left(\frac{C_N^{t+\Delta t} - C_P^{t+\Delta t}}{dy_n} - \frac{C_P^{t+\Delta t} - C_S^{t+\Delta t}}{dy_s} \right) \Delta x_P$$

Les résultats des intégrales sont réarrangés sous la forme standard d'une équation de discrétisation algébrique:

$$A_P C_P^{t+\Delta t} = A_E C_E^{t+\Delta t} + A_W C_W^{t+\Delta t} + A_N C_N^{t+\Delta t} + A_S C_S^{t+\Delta t} + S_C$$

Avec:

$$A_E = \frac{1}{\text{Re Sc}} \frac{\Delta y_P}{dx_e},$$

$$A_W = \frac{1}{\text{Re Sc}} \frac{\Delta y_P}{dx_w}$$

$$A_N = \frac{1}{\text{Re Sc}} \frac{\Delta x_P}{dy_n}$$

$$A_S = \frac{1}{\text{Re Sc}} \frac{\Delta x_p}{dy_s} A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{3}{2} \frac{\Delta x_p \Delta y_p}{\Delta t}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{3}{2} \frac{\Delta x_p \Delta y_p}{\Delta t}$$

$$S_C = \left[\frac{4C_P^t - C_P^{t-\Delta t}}{2 \Delta t} \right] \Delta x_p \Delta y_p \\ - \left[2 \left(U_e^t C_e^t - U_w^t C_w^t \right) - \left(U_e^{t-\Delta t} C_e^{t-\Delta t} - U_w^{t-\Delta t} C_w^{t-\Delta t} \right) \right] \Delta y_p \\ - \left[2 \left(V_n^t C_n^t - V_s^t C_s^t \right) - \left(V_n^{t-\Delta t} C_n^{t-\Delta t} - V_s^{t-\Delta t} C_s^{t-\Delta t} \right) \right] \Delta x_p$$

On remarque que A_P, A_E, A_W, A_N , et A_S sont toujours positifs et que A_P est supérieur à la somme des autres coefficients. Cependant, la source S_C , composée de la somme algébrique de plusieurs termes, elle peut être positive, négative ou nulle; mais cela peut poser un problème si $C_P^{t+\Delta t}$ ne peut être que positive ou nulle (suivant certaines définitions de sa forme non dimensionnelle). Autrement dit, une source négative donne une valeur négative pour $C_P^{t+\Delta t}$, ce qui est inacceptable. Pour éviter ce problème, on suit la même reformulation décrite pour le cas de l'équation de la température.

Résolution du système des équations de vitesse

Pour résoudre les systèmes d'équations de discrétisation de $U_{P_u}^{t+\Delta t}$ et $V_{P_v}^{t+\Delta t}$, il est nécessaire de connaître les valeurs de la pression aux points du maillage typique, apparaissantes dans les sources des équations de discrétisation citées. Et donc, il nous faut une équation de discrétisation de la pression à chaque point intérieur du maillage typique. L'obtention d'une telle équation est possible avec l'utilisation des équations de discrétisation des vitesses et de continuité.

Discrétisation de l'équation de continuité

$$\int_s^n \int_w^e \left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right]^{t+\Delta t} dx dy = \left[U_e^{t+\Delta t} - U_w^{t+\Delta t} \right] \Delta y_p + \left[V_n^{t+\Delta t} - V_s^{t+\Delta t} \right] \Delta x_p = 0$$

Nous avons déjà obtenu l'équation de discrétisation de $U_{P_u}^{t+\Delta t}$

$$A_P U_{P_u}^{t+\Delta t} = A_E U_{E_u}^{t+\Delta t} + A_W U_{W_u}^{t+\Delta t} + A_N U_{N_u}^{t+\Delta t} + A_S U_{S_u}^{t+\Delta t} + S_U$$

Avec:

$$A_E = \frac{1}{\text{Re } \phi} \frac{\Delta y_P}{\Delta x_E},$$

$$A_W = \frac{1}{\text{Re } \phi} \frac{\Delta y_P}{\Delta x_P}$$

$$A_N = \frac{1}{\text{Re } \phi} \frac{dx_e}{dy_n}$$

$$A_S = \frac{1}{\text{Re } \phi} \frac{dx_e}{dy_s}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{dx_e \Delta y_P}{\text{Re } Da} + \frac{3}{2} \frac{dx_e \Delta y_P}{\Delta t}$$

$$\begin{aligned} S_U &= (p_P^{t+\Delta t} - p_E^{t+\Delta t}) \Delta y_p + \frac{1}{\phi} \left[\frac{4U_{P_u}^t - U_{P_u}^{t-\Delta t}}{2 \Delta t} \right] dx_e \Delta y_p \\ &\quad - \frac{1}{\phi^2} \left[2 \left(U_{e_u}^t U_{e_u}^t - U_{w_u}^t U_{w_u}^t \right) - \left(U_{e_u}^{t-\Delta t} U_{e_u}^{t-\Delta t} - U_{w_u}^{t-\Delta t} U_{w_u}^{t-\Delta t} \right) \right] \Delta y_p \\ &\quad - \frac{1}{\phi^2} \left[2 \left(V_{n_u}^t U_{n_u}^t - V_{s_u}^t U_{s_u}^t \right) - \left(V_{n_u}^{t-\Delta t} U_{n_u}^{t-\Delta t} - V_{s_u}^{t-\Delta t} U_{s_u}^{t-\Delta t} \right) \right] dx_e \\ &\quad + \left[\frac{-2 \sqrt{U_{P_u}^t{}^2 + V_{P_u}^t{}^2} U_{P_u}^t}{\sqrt{Da}} + \frac{\sqrt{U_{P_u}^{t-\Delta t}{}^2 + V_{P_u}^{t-\Delta t}{}^2} U_{P_u}^{t-\Delta t}}{\sqrt{Da}} \right] dx_e \Delta y_p \end{aligned}$$

L'équation de discrétisation peut être réécrite sous la forme:

$$A_P U_{P_u}^{t+\Delta t} = A_E U_{E_u}^{t+\Delta t} + A_W U_{W_u}^{t+\Delta t} + A_N U_{N_u}^{t+\Delta t} + A_S U_{S_u}^{t+\Delta t} + B_U + (p_P^{t+\Delta t} - p_E^{t+\Delta t}) \Delta y_p$$

Avec :

$$S_U = B_U + (p_P^{t+\Delta t} - p_E^{t+\Delta t}) \Delta y_p$$

Aussi, on remarque que la position P_u du maillage décalé est confondue avec la position

e du maillage typique. Et donc, l'équation de discrétisation de $U_{P_u}^{t+\Delta t} = U_e^{t+\Delta t}$ devient:

$$A_P U_e^{t+\Delta t} = A_E U_{E_u}^{t+\Delta t} + A_W U_{W_u}^{t+\Delta t} + A_N U_{N_u}^{t+\Delta t} + A_S U_{S_u}^{t+\Delta t} + B_U + (p_P^{t+\Delta t} - p_E^{t+\Delta t}) \Delta y_p$$

Cette équation est réécrite comme suit:

$$U_e^{t+\Delta t} = \frac{A_E U_{E_u}^{t+\Delta t} + A_W U_{W_u}^{t+\Delta t} + A_N U_{N_u}^{t+\Delta t} + A_S U_{S_u}^{t+\Delta t} + B_U + (p_P^{t+\Delta t} - p_E^{t+\Delta t}) \Delta y_p}{A_P}$$

$$U_e^{t+\Delta t} = \hat{U}_e^{t+\Delta t} + d_e (p_P^{t+\Delta t} - p_E^{t+\Delta t})$$

Avec:

$$\hat{U}_e^{t+\Delta t} = \frac{A_E U_{E_u}^{t+\Delta t} + A_W U_{W_u}^{t+\Delta t} + A_N U_{N_u}^{t+\Delta t} + A_S U_{S_u}^{t+\Delta t} + B_U}{A_P}, \text{ cette variable est appelée la}$$

pseudo vitesse suivant la direction x .

$$d_e = \frac{\Delta y_P}{A_P}$$

Si au point e , on a l'équation:

$$U_e^{t+\Delta t} = \hat{U}_e^{t+\Delta t} + d_e (p_P^{t+\Delta t} - p_E^{t+\Delta t}),$$

Certainement au point w , on peut obtenir une équation similaire:

$$U_w^{t+\Delta t} = \hat{U}_w^{t+\Delta t} + d_w (p_W^{t+\Delta t} - p_P^{t+\Delta t})$$

Nous avons aussi obtenu l'équation de discrétisation de $V_{P_v}^{t+\Delta t}$:

$$A_P V_{P_v}^{t+\Delta t} = A_E V_{E_v}^{t+\Delta t} + A_W V_{W_v}^{t+\Delta t} + A_N V_{N_v}^{t+\Delta t} + A_S V_{S_v}^{t+\Delta t} + S_V$$

Avec:

$$A_E = \frac{1}{\text{Re } \phi} \frac{dy_n}{dx_e},$$

$$A_W = \frac{1}{\text{Re } \phi} \frac{dy_n}{dx_w}$$

$$A_N = \frac{1}{\text{Re } \phi} \frac{\Delta x_p}{\Delta y_N}$$

$$A_S = \frac{1}{\text{Re } \phi} \frac{\Delta x_p}{\Delta y_P}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{\Delta x_p}{\text{Re } Da} \frac{dy_n}{\Delta t} + \frac{3}{2} \frac{\Delta x_p}{\Delta t} \frac{dy_n}{\Delta t}$$

$$\begin{aligned}
S_V = & (p_P^{t+\Delta t} - p_N^{t+\Delta t}) \Delta x_p + \frac{1}{\phi} \left[\frac{4V_{P_v}^t - V_{P_v}^{t-\Delta t}}{2 \Delta t} \right] \Delta x_p dy_n \\
& - \frac{1}{\phi^2} \left[2 \left(U_{e_v}^t V_{e_v}^t - U_{w_v}^t V_{w_v}^t \right) - \left(U_{e_v}^{t-\Delta t} V_{e_v}^{t-\Delta t} - U_{w_v}^{t-\Delta t} V_{w_v}^{t-\Delta t} \right) \right] dy_n \\
& - \frac{1}{\phi^2} \left[2 \left(V_{n_v}^t V_{n_v}^t - V_{s_v}^t V_{s_v}^t \right) - \left(V_{n_v}^{t-\Delta t} V_{n_v}^{t-\Delta t} - V_{s_v}^{t-\Delta t} V_{s_v}^{t-\Delta t} \right) \right] \Delta x_p \\
& + \left[\frac{-2\sqrt{U_{P_v}^t{}^2 + V_{P_v}^t{}^2} V_{P_v}^t}{\sqrt{Da}} + \frac{\sqrt{U_{P_v}^{t-\Delta t}{}^2 + V_{P_v}^{t-\Delta t}{}^2} V_{P_v}^{t-\Delta t}}{\sqrt{Da}} \right] \Delta x_p dy_n \\
& + \left[2 \frac{Gr_t}{Re^2} \left[\frac{T_P^t + T_N^t}{2} \right] \Delta x_p dy_n - \frac{Gr_t}{Re^2} \left[\frac{T_P^{t-\Delta t} + T_N^{t-\Delta t}}{2} \right] \Delta x_p dy_n \right] \\
& - \left[2 \frac{Gr_c}{Re^2} \left[\frac{C_P^t + C_N^t}{2} \right] \Delta x_p dy_n - \frac{Gr_c}{Re^2} \left[\frac{C_P^{t-\Delta t} + C_N^{t-\Delta t}}{2} \right] \Delta x_p dy_n \right]
\end{aligned}$$

L'équation de discrétisation est réécrite sous la forme:

$$A_P V_{P_v}^{t+\Delta t} = A_E V_{E_v}^{t+\Delta t} + A_W V_{W_v}^{t+\Delta t} + A_N V_{N_v}^{t+\Delta t} + A_S V_{S_v}^{t+\Delta t} + B_V + (p_P^{t+\Delta t} - p_N^{t+\Delta t}) \Delta x_p$$

Avec:

$$S_V = B_V + (p_P^{t+\Delta t} - p_N^{t+\Delta t}) \Delta x_p$$

Aussi on remarque que la position P_v du maillage décalé vers le haut est confondue avec la position n du maillage typique. Et donc on peut écrire:

$$A_P V_n^{t+\Delta t} = A_E V_{E_v}^{t+\Delta t} + A_W V_{W_v}^{t+\Delta t} + A_N V_{N_v}^{t+\Delta t} + A_S V_{S_v}^{t+\Delta t} + B_V + (p_P^{t+\Delta t} - p_N^{t+\Delta t}) \Delta x_p$$

Qui peut être aussi écrite sous la forme:

$$V_n^{t+\Delta t} = \frac{A_E V_{E_v}^{t+\Delta t} + A_W V_{W_v}^{t+\Delta t} + A_N V_{N_v}^{t+\Delta t} + A_S V_{S_v}^{t+\Delta t} + B_V + (p_P^{t+\Delta t} - p_N^{t+\Delta t}) \Delta x_p}{A_P}$$

$$V_n^{t+\Delta t} = \hat{V}_n^{t+\Delta t} + d_n (p_P^{t+\Delta t} - p_N^{t+\Delta t})$$

Avec:

$$\hat{V}_n^{t+\Delta t} = \frac{A_E V_{E_v}^{t+\Delta t} + A_W V_{W_v}^{t+\Delta t} + A_N V_{N_v}^{t+\Delta t} + A_S V_{S_v}^{t+\Delta t} + B_V}{A_P}, \text{ cette variable est appelée la}$$

pseudo vitesse suivant la direction y .

$$d_n = \frac{\Delta x_p}{A_P}$$

Si on a obtenu à la position n l'équation:

$$V_n^{t+\Delta t} = \hat{V}_n^{t+\Delta t} + d_n (p_P^{t+\Delta t} - p_N^{t+\Delta t})$$

On peut obtenir à la position s , l'équation:

$$V_s^{t+\Delta t} = \hat{V}_s^{t+\Delta t} + d_s (p_S^{t+\Delta t} - p_P^{t+\Delta t})$$

Maintenant, nous allons remplacer les quatre équations:

$$U_e^{t+\Delta t} = \hat{U}_e^{t+\Delta t} + d_e (p_P^{t+\Delta t} - p_E^{t+\Delta t}),$$

$$U_w^{t+\Delta t} = \hat{U}_w^{t+\Delta t} + d_w (p_W^{t+\Delta t} - p_P^{t+\Delta t})$$

$$V_n^{t+\Delta t} = \hat{V}_n^{t+\Delta t} + d_n (p_P^{t+\Delta t} - p_N^{t+\Delta t})$$

$$V_s^{t+\Delta t} = \hat{V}_s^{t+\Delta t} + d_s (p_S^{t+\Delta t} - p_P^{t+\Delta t})$$

Dans l'équation de discrétisation de continuité:

$$\left[U_e^{t+\Delta t} - U_w^{t+\Delta t} \right] \Delta y_P + \left[V_n^{t+\Delta t} - V_s^{t+\Delta t} \right] \Delta x_P = 0$$

Et on obtient:

$$\begin{aligned} & \left[\hat{U}_e^{t+\Delta t} + d_e (p_P^{t+\Delta t} - p_E^{t+\Delta t}) \right] \Delta y_P - \left[\hat{U}_w^{t+\Delta t} + d_w (p_W^{t+\Delta t} - p_P^{t+\Delta t}) \right] \Delta y_P \\ & \left[\hat{V}_n^{t+\Delta t} + d_n (p_P^{t+\Delta t} - p_N^{t+\Delta t}) \right] \Delta x_P - \left[\hat{V}_s^{t+\Delta t} + d_s (p_S^{t+\Delta t} - p_P^{t+\Delta t}) \right] \Delta x_P = 0 \end{aligned}$$

Discrétisation de l'équation de la pression

L'équation dernière est réécrite sous la forme d'une équation de discrétisation de la pression:

$$A_P p_P^{t+\Delta t} = A_E p_E^{t+\Delta t} + A_W p_W^{t+\Delta t} + A_N p_N^{t+\Delta t} + A_S p_S^{t+\Delta t} + S_P$$

Avec:

$$A_E = d_e \Delta y_P$$

$$A_W = d_w \Delta y_P$$

$$A_N = d_n \Delta x_P$$

$$A_S = d_s \Delta x_P$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S$$

$$S_P = \left[\hat{U}_w^{t+\Delta t} - \hat{U}_e^{t+\Delta t} \right] \Delta y_P + \left[\hat{V}_s^{t+\Delta t} - \hat{V}_n^{t+\Delta t} \right] \Delta x_P = 0$$

A chaque point intérieur du maillage typique on a une équation algébrique de discrétisation de pression. La solution de l'ensemble des équations de discrétisation (des pressions des points) nous donne la pression aux points du maillage typique. Cependant, la solution du

système d'équations de discrétisation de la pression nécessite la connaissance des pseudo vitesses présentes dans les sources des équations citées. La source de chaque équation de discrétisation de pression est fonction des pseudo vitesses qui sont fonctions des vitesses voisinant le point considéré. Et donc, on constate que pour résoudre les équations de discrétisation des vitesses il nous faut la pression (qui n'est pas connue) et pour résoudre l'équation de discrétisation de la pression il nous faut les vitesses (qui ne sont pas connues). Ce couplage des équations de discrétisation des vitesses et de pression nécessite une solution simultanée et itérative de ces équations. La solution commence par des estimations qui doivent être corrigées.

On définit les variables correctes comme des sommes des variables estimées plus des corrections:

$$U = U^* + U'$$

$$V = V^* + V'$$

$$p = p^* + p'$$

Les variables étoilées sont les estimations et les variables primées sont les corrections.

Si on utilise ces définitions dans les équations de discrétisation des vitesses:

$$A_P U_{P_u}^{t+\Delta t} = A_E U_{E_u}^{t+\Delta t} + A_W U_{W_u}^{t+\Delta t} + A_N U_{N_u}^{t+\Delta t} + A_S U_{S_u}^{t+\Delta t} + B_U + (p_P^{t+\Delta t} - p_E^{t+\Delta t}) \Delta y_p$$

$$A_P V_{P_v}^{t+\Delta t} = A_E V_{E_v}^{t+\Delta t} + A_W V_{W_v}^{t+\Delta t} + A_N V_{N_v}^{t+\Delta t} + A_S V_{S_v}^{t+\Delta t} + B_V + (p_P^{t+\Delta t} - p_N^{t+\Delta t}) \Delta x_p$$

On obtient les équations de discrétisation des estimations:

$$A_P U_{P_u}^{*t+\Delta t} = A_E U_{E_u}^{*t+\Delta t} + A_W U_{W_u}^{*t+\Delta t} + A_N U_{N_u}^{*t+\Delta t} + A_S U_{S_u}^{*t+\Delta t} + B_U + (p_P^{*t+\Delta t} - p_E^{*t+\Delta t}) \Delta y_p$$

$$A_P V_{P_v}^{*t+\Delta t} = A_E V_{E_v}^{*t+\Delta t} + A_W V_{W_v}^{*t+\Delta t} + A_N V_{N_v}^{*t+\Delta t} + A_S V_{S_v}^{*t+\Delta t} + B_V + (p_P^{*t+\Delta t} - p_N^{*t+\Delta t}) \Delta x_p$$

Ces équations montrent qu'avec une estimation de la pression on ne peut obtenir qu'une estimation des vitesses.

Les équations de discrétisation des corrections sont:

$$A_P U_{P_u}'^{t+\Delta t} = A_E U_{E_u}'^{t+\Delta t} + A_W U_{W_u}'^{t+\Delta t} + A_N U_{N_u}'^{t+\Delta t} + A_S U_{S_u}'^{t+\Delta t} + (p_P'^{t+\Delta t} - p_E'^{t+\Delta t}) \Delta y_p$$

$$A_P V_{P_v}'^{t+\Delta t} = A_E V_{E_v}'^{t+\Delta t} + A_W V_{W_v}'^{t+\Delta t} + A_N V_{N_v}'^{t+\Delta t} + A_S V_{S_v}'^{t+\Delta t} + (p_P'^{t+\Delta t} - p_N'^{t+\Delta t}) \Delta x_p$$

On constate que les corrections des vitesses à un point sont fonctions des corrections de la pression et des corrections des vitesses aux points voisins. Donc si on a la correction de la pression, on peut résoudre les deux systèmes d'équations de discrétisation des corrections des vitesses pour obtenir ces dernières. Cependant on peut s'affranchir de la solution des

deux systèmes cités si on redéfinit les corrections des vitesses seulement en fonction de la correction de la pression:

$$A_P U_{P_u}^{t+\Delta t} = (p_P^{t+\Delta t} - p_E^{t+\Delta t}) \Delta y_P$$

$$A_P V_{P_v}^{t+\Delta t} = (p_P^{t+\Delta t} - p_N^{t+\Delta t}) \Delta x_P$$

Avec ces définitions, si on a la correction de la pression, on calcule directement les corrections des vitesses. Maintenant il est temps de discuter la détermination de la correction de la pression. On peut démontrer facilement que:

$$U_e^{t+\Delta t} = U_e^{*t+\Delta t} + U_e^{t+\Delta t} = U_e^{*t+\Delta t} + d_e (p_P^{t+\Delta t} - p_E^{t+\Delta t})$$

$$U_w^{t+\Delta t} = U_w^{*t+\Delta t} + U_w^{t+\Delta t} = U_w^{*t+\Delta t} + d_w (p_W^{t+\Delta t} - p_P^{t+\Delta t})$$

$$V_n^{t+\Delta t} = V_n^{*t+\Delta t} + V_n^{t+\Delta t} = V_n^{*t+\Delta t} + d_n (p_P^{t+\Delta t} - p_N^{t+\Delta t})$$

$$V_s^{t+\Delta t} = V_s^{*t+\Delta t} + V_s^{t+\Delta t} = V_s^{*t+\Delta t} + d_s (p_S^{t+\Delta t} - p_P^{t+\Delta t})$$

On utilise ces quatre définitions dans l'équation de discrétisation de continuité:

$$\left[U_e^{t+\Delta t} - U_w^{t+\Delta t} \right] \Delta y_P + \left[V_n^{t+\Delta t} - V_s^{t+\Delta t} \right] \Delta x_P = 0$$

Et on obtient:

$$\left[U_e^{*t+\Delta t} + d_e (p_P^{t+\Delta t} - p_E^{t+\Delta t}) \right] \Delta y_P - \left[U_w^{*t+\Delta t} + d_w (p_W^{t+\Delta t} - p_P^{t+\Delta t}) \right] \Delta y_P$$

$$\left[V_n^{*t+\Delta t} + d_n (p_P^{t+\Delta t} - p_N^{t+\Delta t}) \right] \Delta x_P - \left[V_s^{*t+\Delta t} + d_s (p_S^{t+\Delta t} - p_P^{t+\Delta t}) \right] \Delta x_P = 0$$

Cette équation est réécrite sous la forme d'une équation de discrétisation de la correction de la pression:

$$A_P p_P^{t+\Delta t} = A_E p_E^{t+\Delta t} + A_W p_W^{t+\Delta t} + A_N p_N^{t+\Delta t} + A_S p_S^{t+\Delta t} + S_{P'}$$

Avec:

$$A_E = d_e \Delta y_P$$

$$A_W = d_w \Delta y_P$$

$$A_N = d_n \Delta x_P$$

$$A_S = d_s \Delta x_P$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S$$

$$S_{P'} = \left[U_w^{*t+\Delta t} - U_e^{*t+\Delta t} \right] \Delta y_P + \left[V_s^{*t+\Delta t} - V_n^{*t+\Delta t} \right] \Delta x_P = 0$$

Et donc l'équation de discrétisation de la correction de la pression est similaire à celle de la pression; la différence est que la source de l'équation de discrétisation de la correction de la pression contient les estimations des vitesses alors que la source de l'équation de discrétisation de la pression contient les pseudo vitesses.

3.5. Méthode de résolution

Les méthodes de résolution des systèmes d'équations algébriques peuvent classées en deux classes, directes (inversement d'une matrice, Gauss, Gauss Jordan avec Pivot; L.U.avec substitution) et indirectes ou itératives (Jacobi; Gauss- Seidel; méthode de Balayage). Bien sur, le plus souvent sont les méthodes itératives surtout pour les problèmes non linéaires ; d'autre coté ; les méthodes directes exigent une mémoire énorme et un temps de calcul plus grand. Pour notre cas, nous utilisons la méthode de solution par balayage (*Sweeping*) dite ligne by ligne (L B L) expliquée par *S.V.Patankar*, avec l'algorithme de *Thomas*, qui est appelé aussi **TDMA** (*Tri Diagonal Matrix Algorithm*)[12].

3.6. La solution séquentielle des systèmes d'équations de discrétisation

Pour résoudre l'ensemble des systèmes d'équations discrétisées et déterminer la distribution des vitesses, de la pression, de la température et de la concentration en chaque point du domaine; et aussi déduire les nombres de *Nusselt* et *Sherwood*, on suit l'algorithme *SIMPLER*[12].

L'algorithme *SIMPLER*

L'algorithme *SIMPLE* est extensivement utilisé et bien servie dans les calculs d'écoulement des fluides. Cependant, dans les tentatives d'améliorer son taux de convergence, une nouvelle version a été établie et appelée l'algorithme *SIMPLER* qui est une version révisée de l'algorithme *SIMPLE* (Patankar, 1979a) (**Semi-Implicit-Method-Pressure-Linked-Equation-Revised**)[12]. L'utilisation de l'équation de la correction de pression seulement pour corriger les vitesses et la fourniture de quelques autres moyens afin d'obtenir un champ amélioré de la pression, construit un algorithme plus efficace. C'est l'essence de l'algorithme *SIMPLER*.

L'ordre des opérations peut être énoncé comme suit :

- On commence par une initialisation du champ des vitesses U, V, P, T et C .

- On calcul les coefficients des équations de moment de U , V et avec le champ de vitesse initial, on calcule les pseudo vitesses : \hat{U} et \hat{V} .
- On calcul les coefficients de l'équation de la pression et avec les pseudo vitesses, on peut calculer la source de cette équation et résoudre (par la méthode itérative de balayage) son système pour obtenir une estimation de la pression : p^*
- L'estimation de la pression est utilisée dans les équations de discrétisation des vitesses. Alors, ses systèmes sont résolus (par la méthode itérative de balayage) et on obtient les estimations des vitesses : U^* et V^* .
- On calcul d'abord la source de l'équation de la correction de la pression et avec les estimations des vitesses, on peut résoudre (par la méthode itérative de balayage) son système et obtenir une estimation de la correction de la pression : p'
- Avec la correction de la pression, on calcule les corrections des vitesses U' et V' et on corrige le champ de vitesse utilisant la correction de la pression avec la définition des variables correctes.
- On résout le système d'équations de discrétisation de la température (par la méthode itérative de balayage) et on obtient le champ de température T .
- On résout le système d'équations de discrétisation de la concentration (par la méthode itérative de balayage) et on obtient le champ de concentration C .
- On vérifie l'atteinte du régime permanent (stationnaire) pour arrêter le calcul, sinon on augmente le temps du pas et avec le champ de vitesse corrigé comme une nouvelle initialisation, on retourne à l'étape 2, jusqu'à la convergence.

Notre critère de convergence est que le bilan global de la chaleur et de la matière soit satisfait.

3.7. Détails numériques :

Un code de calcul basé sur l'algorithme précédent en langage *Fortran* a été utilisé et réalisé sur un micro-ordinateur personnel disposant d'un processeur *Pentium (R)* ??? , ??? GHz, ??? Mo de RAM. Les essais numériques ont été effectués pour un maillage de (202x82) avec un pas du temps de 10^{-3} . Six cas différents ont été étudiés, nécessite plus de ??? heures du temps de calcul.

4. Résultats

Dans ce chapitre on représente les résultats de la convection forcée et mixte dans un canal plan rempli d'une matière poreuse.

4.1. La convection forcée.

4.1.1. Le cas d'un nombre de Darcy Faible: $Da=10^{-9}$

Le champ d'écoulement

Avec les paramètres suivantes : $Re=50$, $Da=10^{-9}$, $\phi = 0.8$, $Grt=0$, $Grc=0$, $Pr=0.7$ et $Sc=0.65$.

L'écoulement obtenu est uniforme. La vitesse horizontale est constante et maintient sa valeur d'entrée (égale à 1). La vitesse verticale est partout nulle. La chute de pression est axiale mais la pression ne subit aucune variation verticale (voir la figure (4.1)). On a constaté et vérifié que le régime de Darcy est dominant c'est-à-dire que le champ de vitesse

vérifie l'équation différentielle non dimensionnelle: $\frac{1}{Re Da} \vec{V} = -\nabla P$.

L'écoulement uniforme du régime de Darcy est dû à la faible valeur du nombre de Darcy. Ainsi, suivant la direction de l'écoulement, les termes convectifs, le terme de Forchheimer et les termes de Brinkman sont très faibles par rapport aux termes de Darcy et de gradient de pression. Lorsque le régime stationnaire est établi, la variation temporelle est nulle et les termes de Darcy et de gradient de pression s'équilibrent.

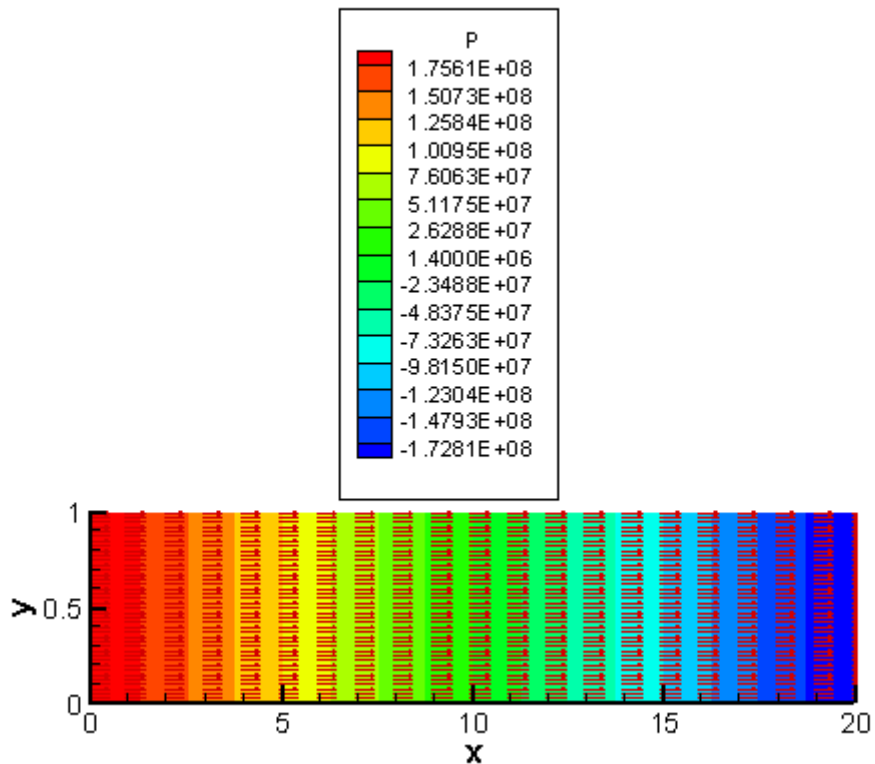
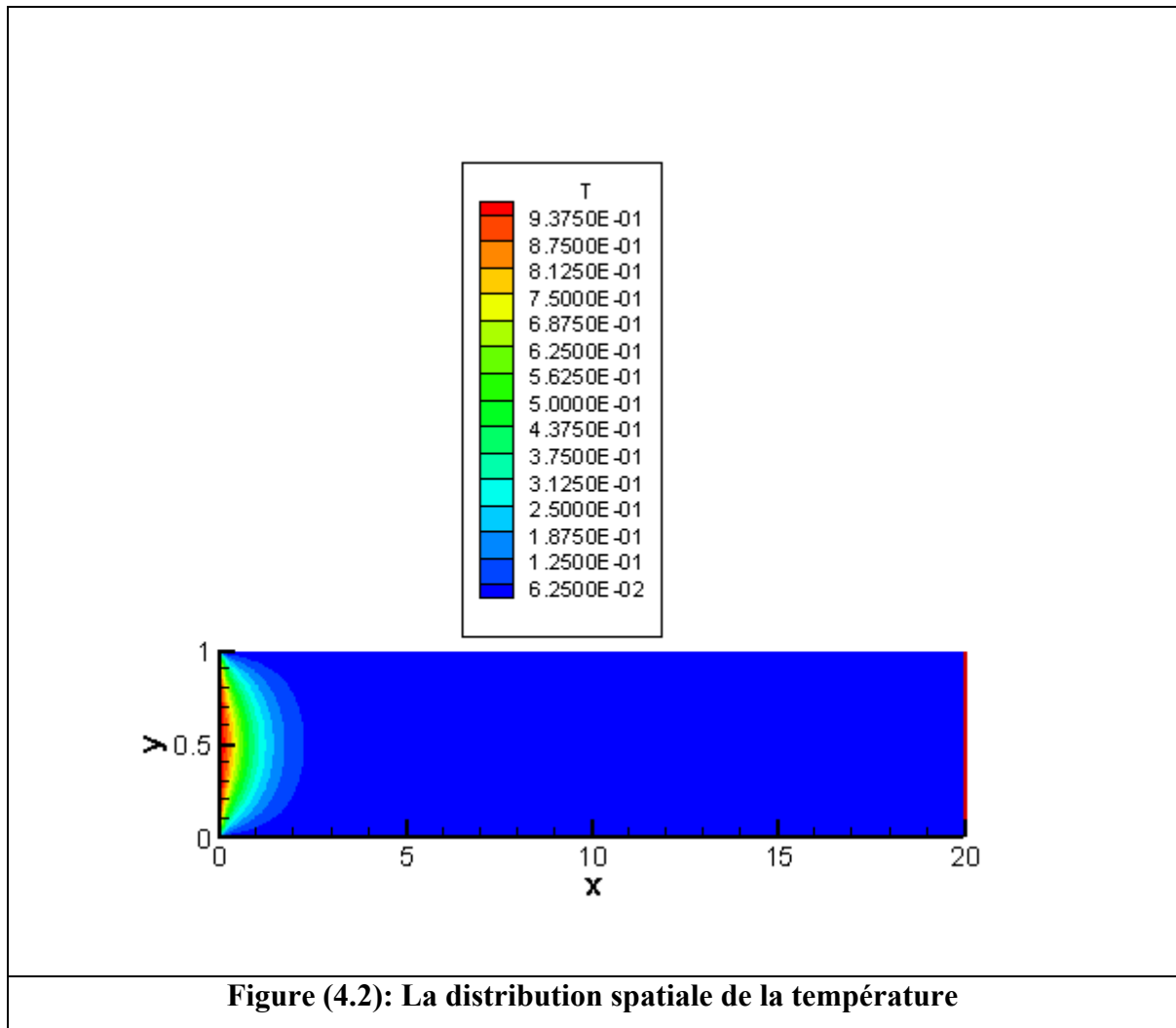


Figure (4.1): Ecoulement uniforme et chute axiale de la pression

Le champ thermique.

L'air chaud à l'entrée subit un refroidissement axial et transversal rapide. Ceci est dû à l'effet convectif axial de l'écoulement uniforme combiné à la diffusion de chaleur transversale augmentée par la conductivité thermique du milieu poreux (égale à 5.77 fois celle du fluide). La température d'entrée, égale à 1, chute axialement et s'approche asymptotiquement de celle des parois (égale à 0), à partir de la position axiale $x = 5$ (voir la figure (4.2)).



Dans la figure (4.3), on présente la variation axiale de la température moyenne défini par:

$$T_m(x) = \frac{\int_0^1 U(x, y) T(x, y) dy}{\int_0^1 U(x, y) dy}$$

proche de zéro à partir de $x = 5$.

Le nombre de Nusselt

La figure (4.4) illustre la variation axiale du nombre de Nusselt local de la paroi inférieure du canal défini par:

$$Nu(x) = 2 \frac{K_m \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}}{T_m - T \Big|_{y=0}} = \frac{2}{T_m} 5.77 \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{11.54}{T_m} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

Ce nombre de Nusselt est basé sur la conductivité thermique non dimensionnelle du milieu poreux égale à 5.77. La valeur asymptotique de ce nombre est 56.94. Si on définit le nombre de Nusselt avec la conductivité thermique non dimensionnelle du fluide (égale à 1), la valeur asymptotique du nombre de Nusselt est 9.86. Cette valeur est celle publiée dans la bibliographie pour l'écoulement uniforme de la convection forcée dans un canal plan avec des parois isothermes. Le nombre de Nusselt local de la paroi supérieure du canal est égal à celui de la paroi inférieure.

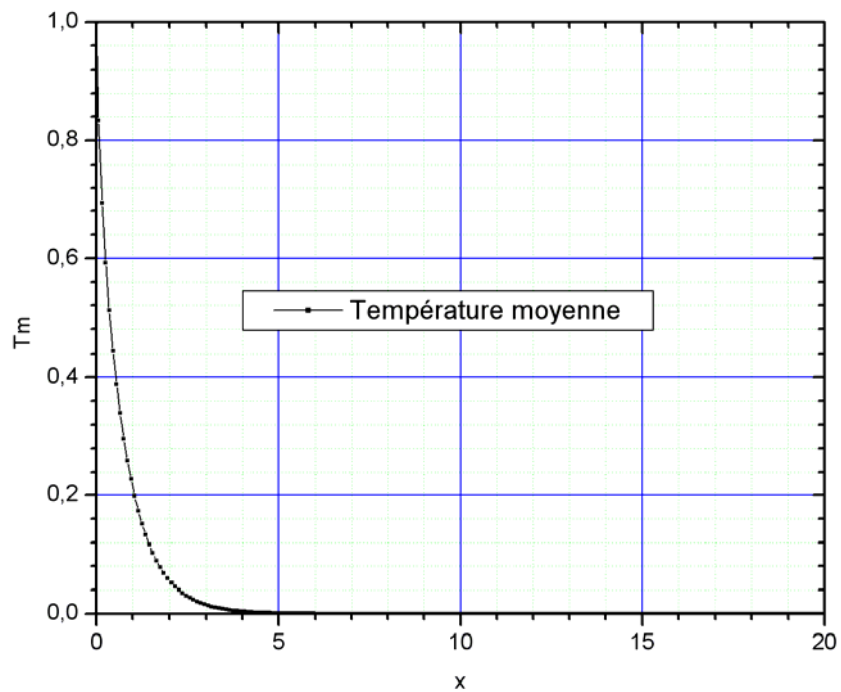


Figure (4.3): La variation axiale de la température moyenne

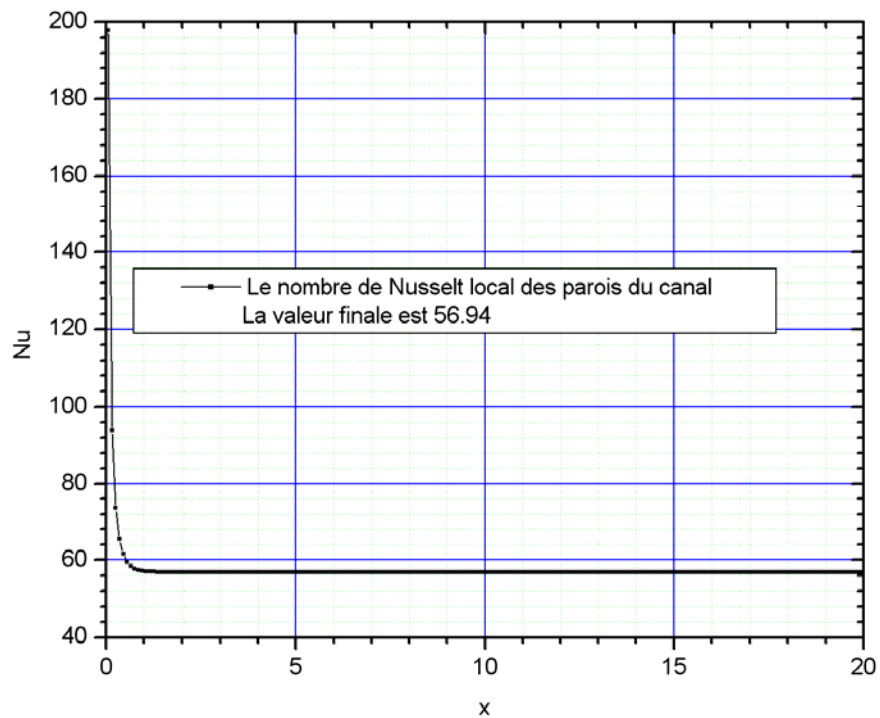


Figure (4.4) : Le nombre de Nusselt local

Le champ de concentration

La figure (4.5) représente la variation spatiale de la concentration. On remarque une augmentation axiale et transversale importante de la concentration dans la zone $x < 10$. Pour $x > 10$, la variation de la concentration est faible et sa valeur s'approche de celle de la concentration des parois (égale à 1).

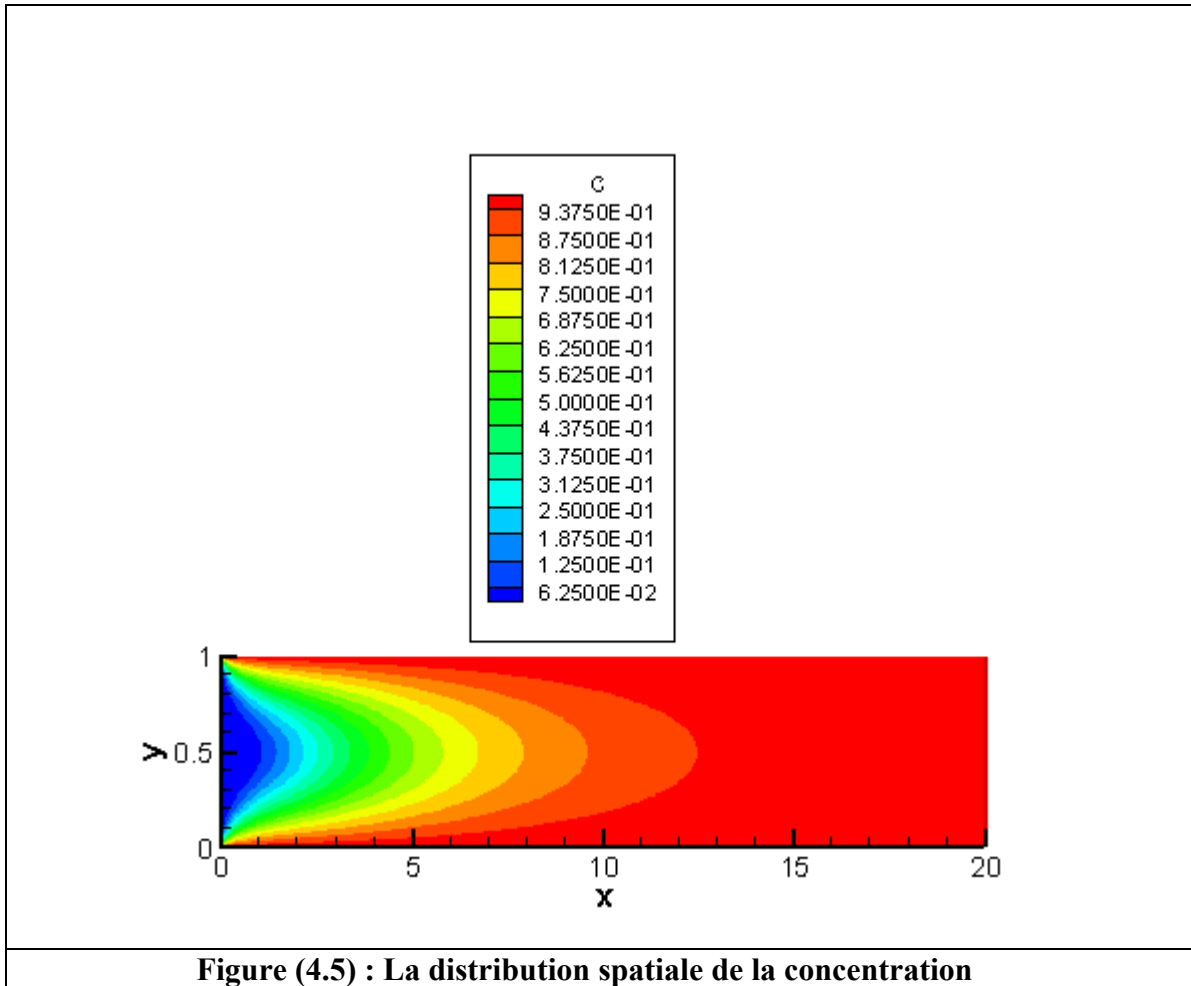


Figure (4.5) : La distribution spatiale de la concentration

Dans la figure (4.6), on représente l'augmentation de la concentration moyenne avec la distance axiale; on voit qu'au voisinage de la sortie du conduit, la concentration moyenne s'approche asymptotiquement de celle des parois.

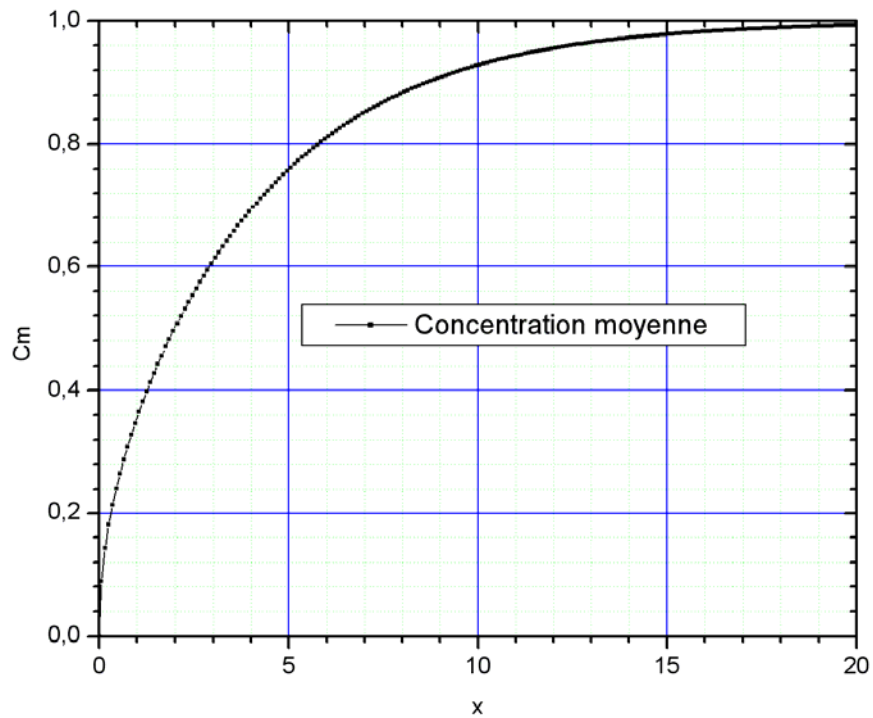


Figure (4.6): L'augmentation axiale de la concentration moyenne

Le nombre de Sherwood

La figure (4.7) illustre la variation axiale du nombre de Sherwood local de la paroi inférieure du canal défini par:

$$Sh(x) = 2 \frac{-\left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_{y=0}}{C|_{y=0} - C_m} = 2 \frac{-\left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_{y=0}}{1 - C_m}$$

La valeur asymptotique de ce nombre est 9.86. Cette valeur est celle publiée dans la bibliographie pour l'écoulement uniforme de la convection forcée dans un canal plan avec des parois à concentration constante. Le nombre de Sherwood local de la paroi supérieure du canal est égal à celui de la paroi inférieure.

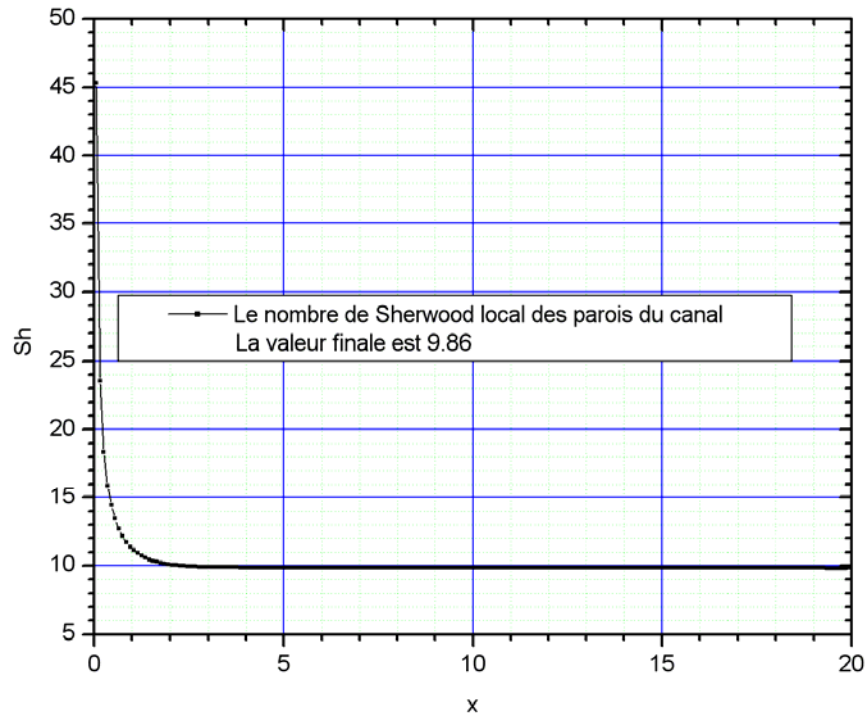


Figure (4.7) : Le nombre de Sherwood local

4.1.2. Le cas d'un nombre de Darcy relativement élevé: $Da=10^{-2}$

Pour déterminer l'effet d'un nombre de Darcy relativement élevé, nous avons considéré le cas d'un nombre de Darcy relativement très élevé: $Da=10^{-2}$. Cette valeur est choisie pour rendre les termes de Forchheimer et de Brinkman importants dans les équations du mouvement.

Le champ d'écoulement.

Avec les paramètres $Re=50$, $Da=10^{-2}$, $Cf = 0.55$, $\phi = 0.8$, $Grt=0$, $Grc=0$, $Pr=0.7$ et $Sc=0.65$, on obtenu l'écoulement présenté dans la figure (4.8). L'écoulement est symétrique par rapport à la demi hauteur du canal. Loin de l'entrée, l'écoulement est développé suivant la direction horizontale à partir de $x=1$ (voir la figure (4.9)). L'écoulement développé est unidirectionnel (avec une vitesse totalement horizontale) et uni dimensionnel parce que cette vitesse ne dépend que de la coordonnée verticale. Suivant la direction verticale, la vitesse horizontale est nulle aux parois. En s'éloignant de ces dernières, la vitesse horizontale augmente rapidement et devient uniforme à partir d'une distance égale à 0.2 de chaque paroi. La valeur uniforme de la vitesse est $U = 1.1$ (voir la figure (4.9)).

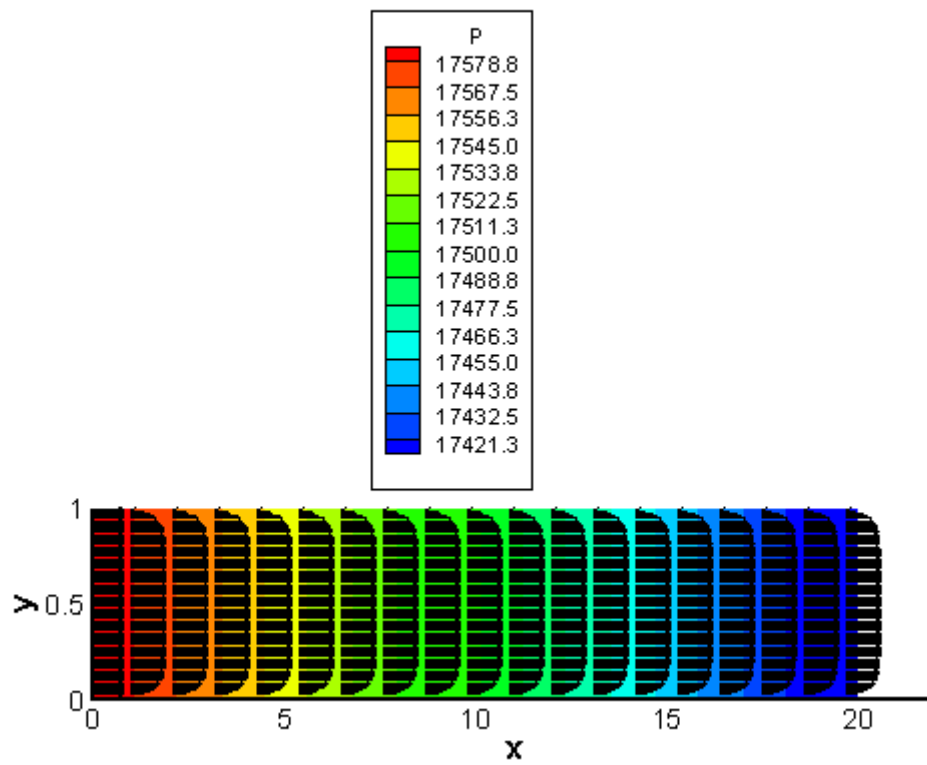


Figure (4.8): Ecoulement et variation de pression

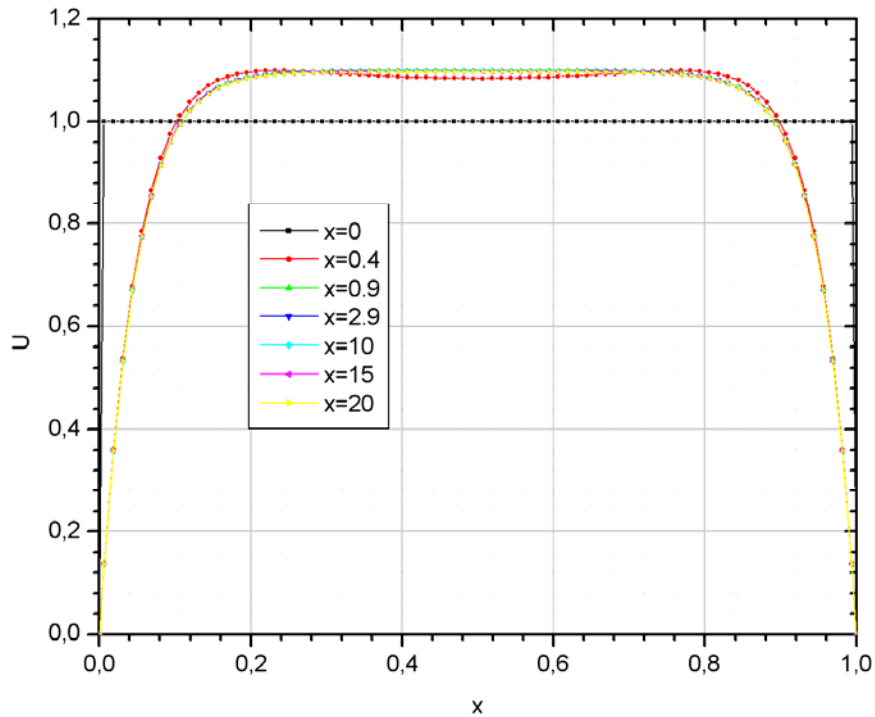


Figure (4.9): Profil transversal de la composante horizontale de la vitesse

Avec le nombre de Darcy $Da=10^{-2}$, loin de l'entrée du canal, la vitesse verticale est nulle et l'écoulement permanent et développé est modélisé par la somme des termes de Darcy, de Forchheimer, de gradient de pression et de Brinkman:

$$-\frac{1}{Re Da} U - \frac{Cf \sqrt{U^2}}{\sqrt{Da}} U - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{Re \phi} \frac{d^2 U}{dy^2} = 0$$

L'effet du terme de Brinkman est la variation de la vitesse près des parois et l'effet du terme de Forchheimer est l'aplatissement du profil de vitesse loin des parois (voir la figure (4.10)). La pression chute continuellement suivant la direction horizontale du canal; mais ne subit aucune variation verticale. Cependant, le gradient horizontal de la pression est très inférieur à celui du cas avec le nombre de Darcy $Da=10^{-9}$.

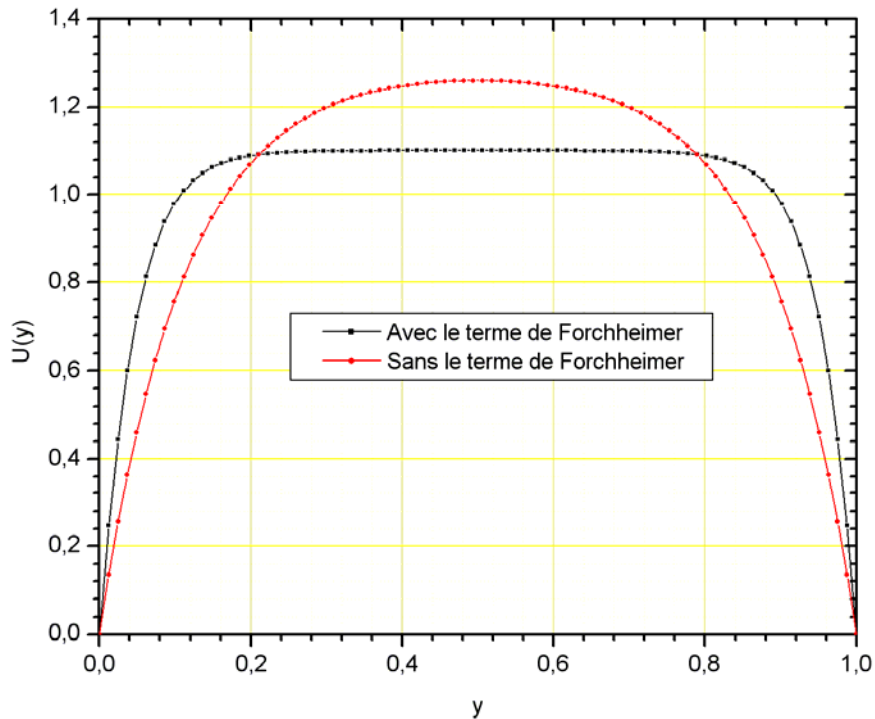


Figure (4.10) : L'effet du terme de Forchheimer sur le profil transversal de la vitesse horizontale

Le champ thermique

Dans la figure (4.11), on présente la variation spatiale de la température. La distribution de la température est qualitativement similaire à celle du cas avec $Da = 10^{-9}$. On remarque aussi que la température du fluide se rapproche asymptotiquement de celle des paroi à partir de $x = 5$; ceci est illustré par la variation axiale de la température moyenne présentée dans la figure (4.12). Dans la figure (4.13), on a tracé la variation horizontale du nombre de Nusselt local des parois. On voit une chute axiale rapide du nombre de Nusselt à partir de l'entrée. La valeur asymptotique du nombre de Nusselt local est 52.2 qui est inférieure à celle de l'écoulement obtenu avec $Da = 10^{-9}$ qui est égale à 56.94. Cette diminution du nombre de Nusselt du cas de $Da = 10^{-2}$ s'explique par la réduction du brassage aux niveaux des parois: Avec $Da = 10^{-9}$, l'écoulement est uniforme jusqu'aux parois alors qu'avec $Da = 10^{-2}$, la vitesse de l'écoulement diminue en s'approchant des parois ce qui réduit le brassage convectif de chaleur et donc diminue le nombre de Nusselt local.

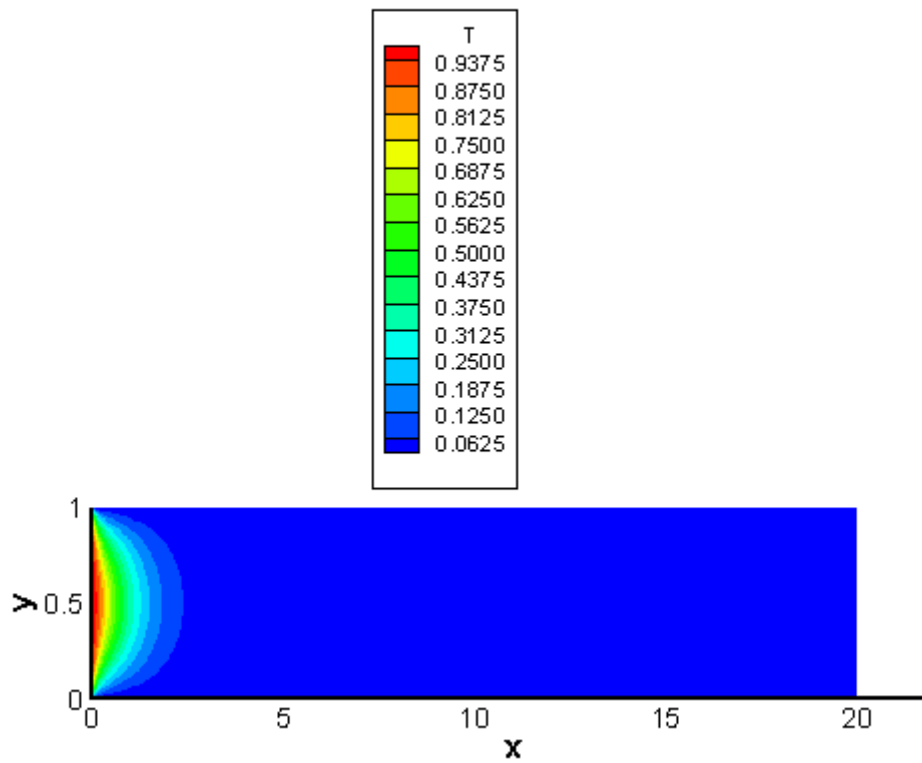


Figure (4.11): La distribution spatiale de la température

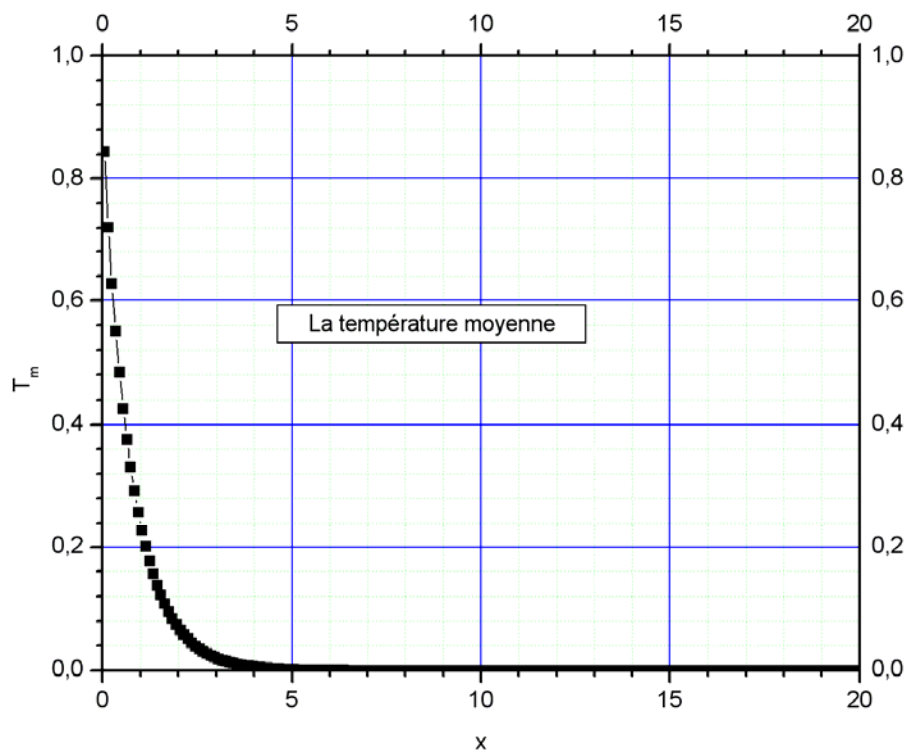


Figure (4.12): La variation axiale de la température moyenne

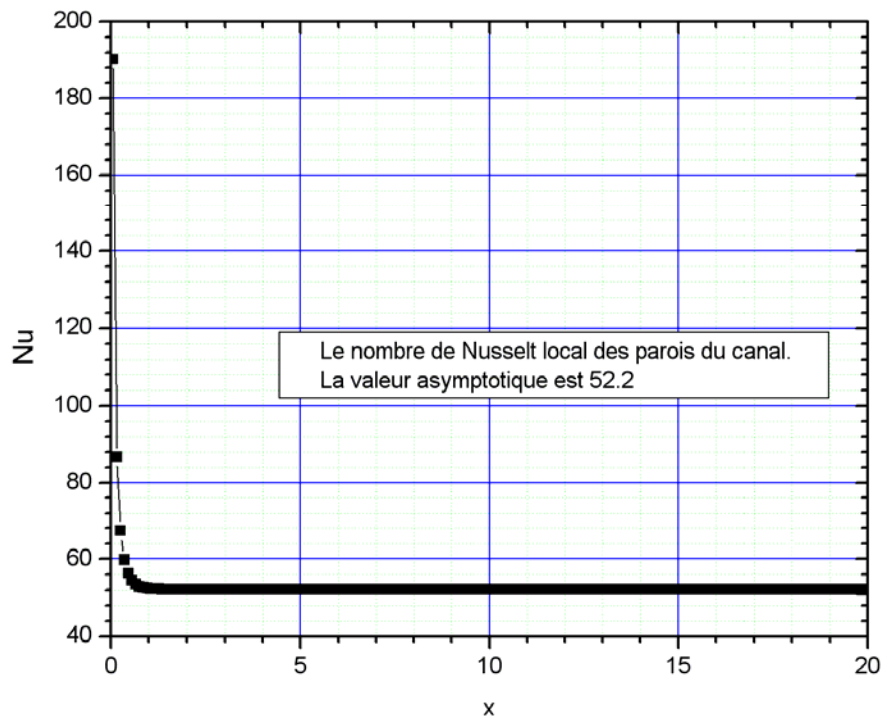


Figure (4.13): Le nombre de Nusselt local

Le champ de matière

La figure (4.14) représente la variation spatiale de la concentration qui est qualitativement similaire à celle obtenue avec le cas $Da = 10^{-9}$. On remarque aussi que les augmentations, axiale et transversale, importantes de la concentration sont dans la zone $x < 10$.

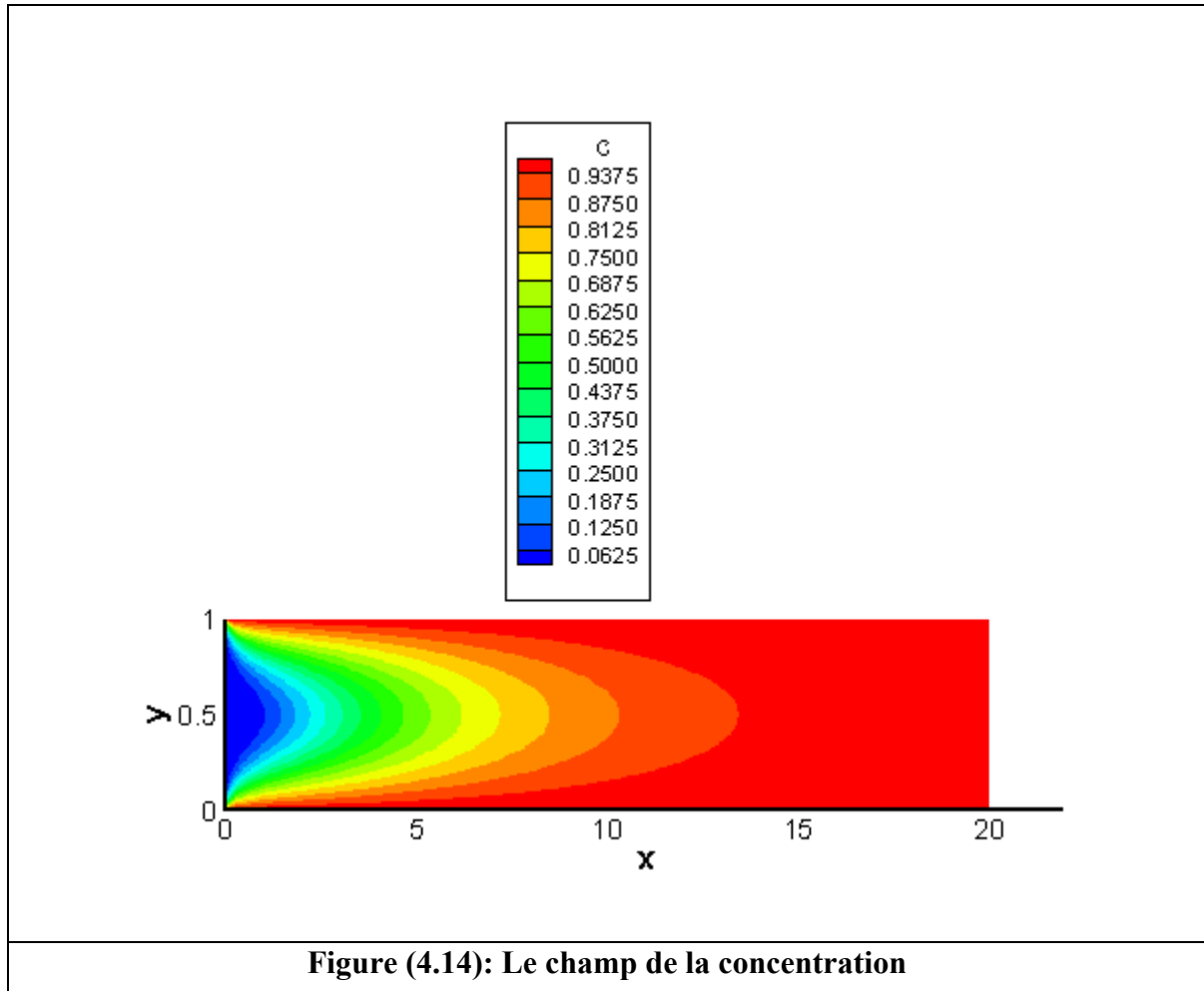


Figure (4.14): Le champ de la concentration

Dans la figure (4.15), on représente la croissance monotone de la concentration moyenne avec la distance axiale. On voit aussi, qu'au voisinage de la sortie du conduit, la concentration moyenne s'approche asymptotiquement de celle des parois.

Le nombre de Sherwood.

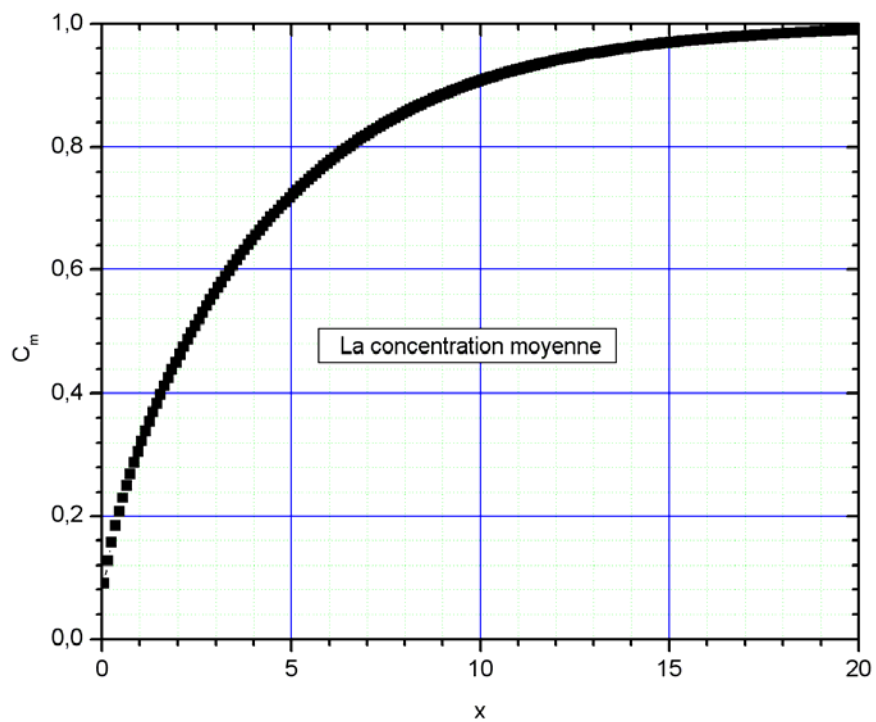


Figure (4.15) : La variation axiale de la concentration moyenne

La figure (4.16) illustre la variation axiale du nombre de Sherwood local de la paroi inférieure du canal. La valeur asymptotique de ce nombre est 9; elle est inférieure à la valeur obtenue avec $Da = 10^{-9}$, est la diminution est aussi à cause de la réduction du brassage convectif aux niveaux des parois du canal, qui réduit le transfert de matière.

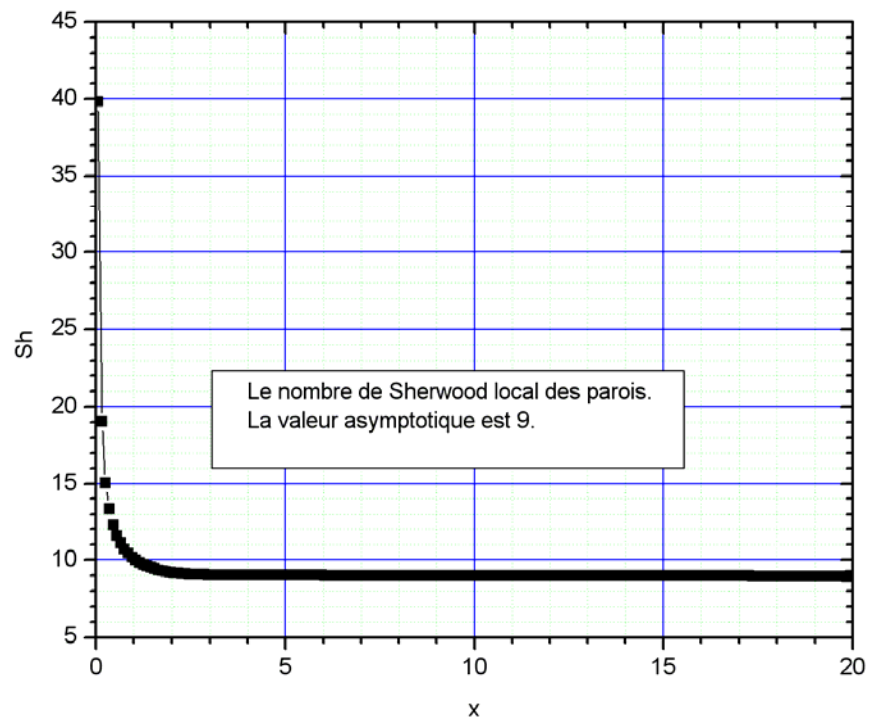
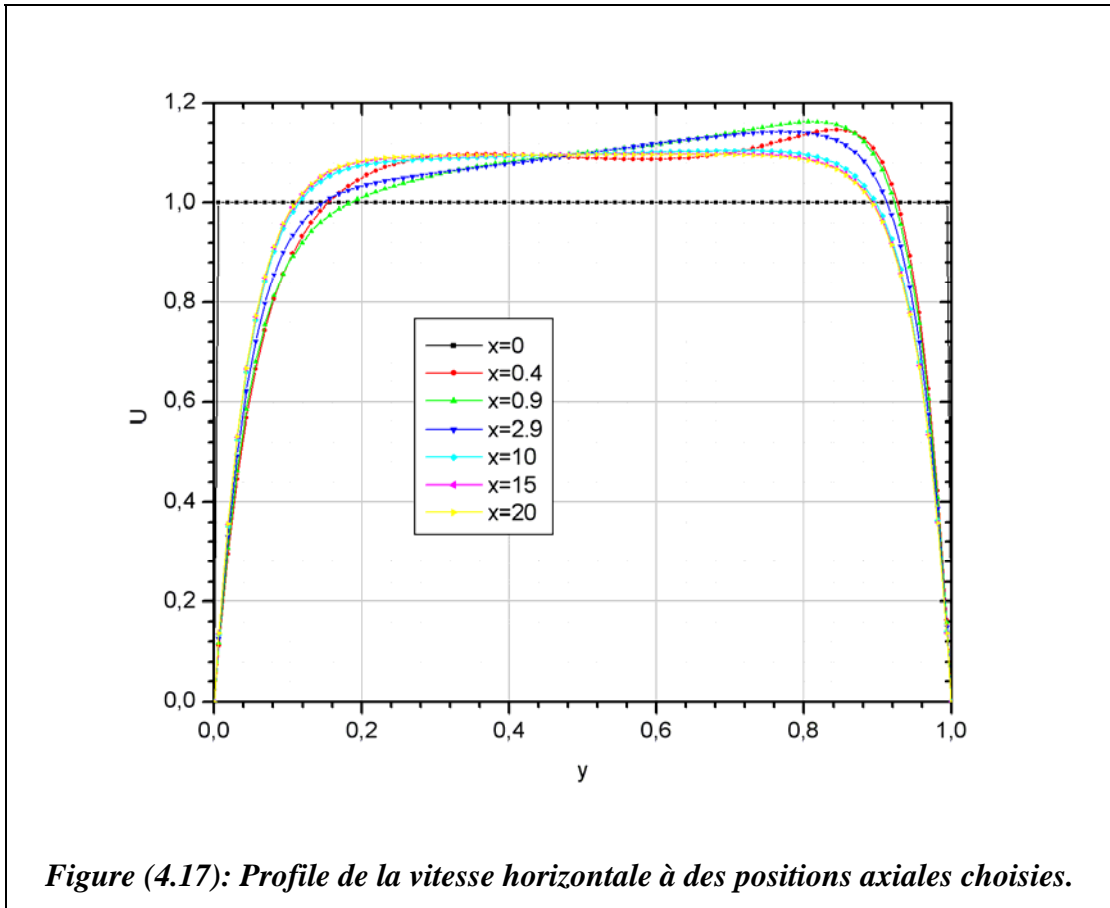


Figure (4.16) : Le nombre de Sherwood local

4.2. La convection mixte

Le cas de la convection mixte est résolu avec les paramètres suivants: $Re=50$, $Da=10^{-2}$, $Cf = 0.55$, $\phi = 0.8$, $Gr_t=0$, $Pr = 0.7$ et $Sc=0.65$. Les valeurs considérées du nombre de Grashof solutal Gr_c sont: $2.5 \cdot 10^3$, 10^4 et $5 \cdot 10^4$. On a trouvé que pour les valeurs de Gr_c jusqu'à 10^4 , il n'y a pas de différence considérable entre les résultats de la convection forcée et la convection mixte: la très faible différence ne peut pas être représentée graphiquement. Lorsque Gr_c est augmenté à $5 \cdot 10^4$, nous avons trouvé une petite différence entre les résultats de la convection forcée et la convection mixte. L'effet de la poussée solutale devient apparent dans la zone entre l'entrée et la demi longueur du canal où les gradients de la concentration sont importants. A l'aval de cette zone, ces gradients sont très faibles et l'effet de la poussée est sérieusement atténué. Dans la figure (4.17), on représente le profile transversal de la vitesse horizontale à des stations axiale arbitrairement, arbitrairement choisies, de la convection mixte avec $Gr_c=5 \cdot 10^4$. Il est clair qu'entre l'entrée et la demi longueur du canal, le profile est asymétrique par rapport à la demi hauteur ($y = 0.5$). La vitesse est relativement supérieure dans la moitié supérieure du canal. Ce constat s'explique par le fait que dans cette moitié du canal la stratification verticale de la concentration est instable: le fluide plus dense (sa concentration est relativement plus grande) superpose le fluide moins dense (sa concentration est relativement plus faible). Cependant, dans la moitié inférieure du conduit, la stratification verticale de la concentration est stable. Et donc, l'effet de la poussée solutale dans la moitié supérieure du conduit, induit une certaine accélération axiale de l'écoulement. Cette augmentation relative de la vitesse axiale dans la moitié supérieure du conduit doit être compensée par une diminution relative de la même vitesse dans la moitié inférieure du conduit pour conserver le débit constant de l'écoulement. Ceci explique l'asymétrie du profile de la vitesse horizontale dans la région où la poussée solutale est importante.



L'asymétrie de la vitesse affecte le transfert de chaleur et de matière. Dans la figure (4.18), on représente la variation axiale des nombres de Nusselt locaux des parois (supérieure et inférieure) du conduit dans le cas de la convection mixte avec $Gr_c=5.10^4$. Ces nombres sont comparés avec celui de la convection forcée. Pour la clarté graphique, un agrandissement de cette figure est illustré dans la figure (4.19).

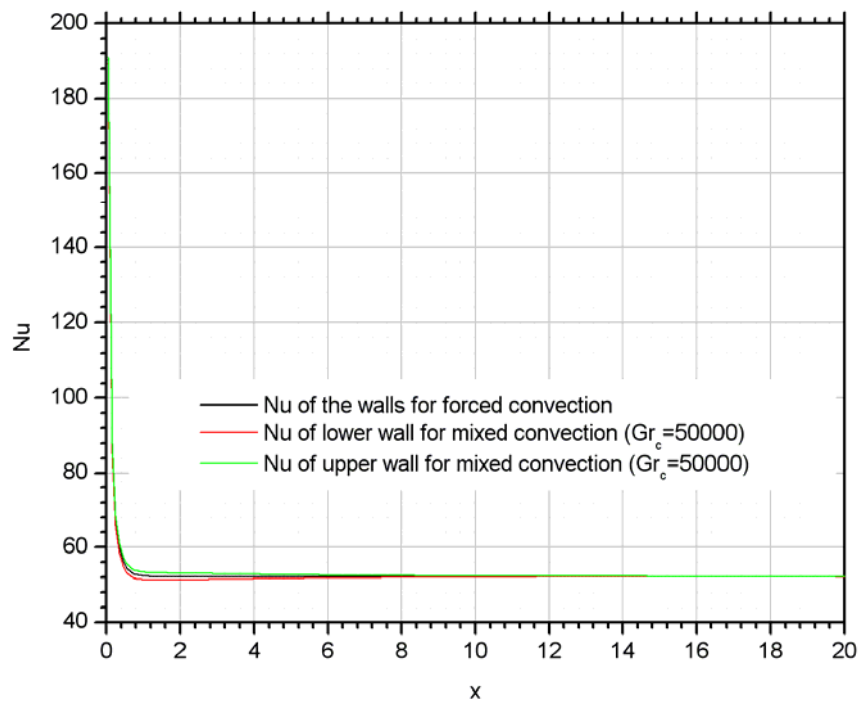


Figure (4.18): Nombres de Nusselt locaux des convections, forcée et mixte.

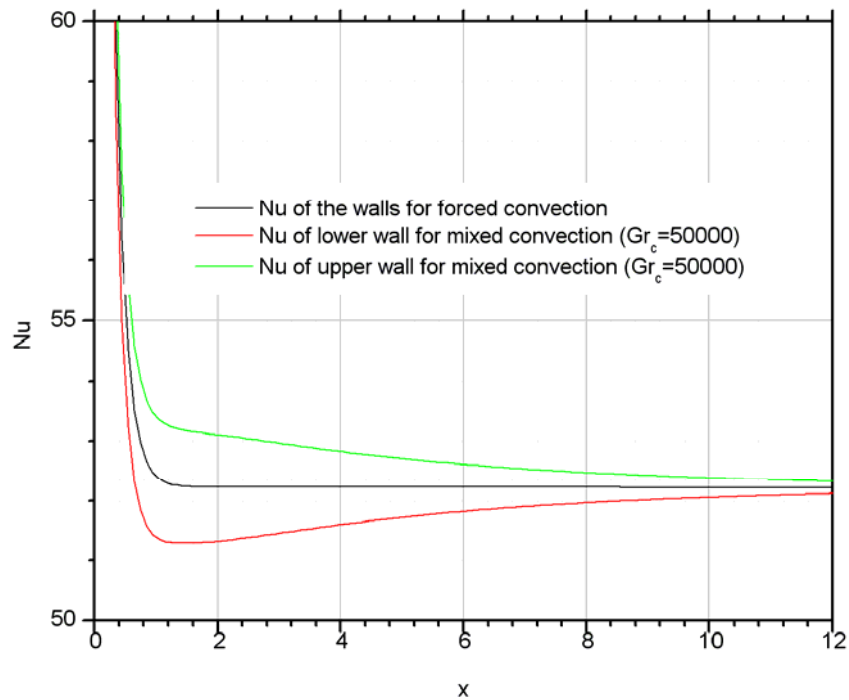


Figure (4.19): agrandissement de la variation axiale des nombres de Nusselt locaux.

Dans la figure (4.20), on représente la variation axiale des nombres de Sherwood locaux des parois (supérieure et inférieure) du conduit dans le cas de la convection mixte avec $Gr_c=5.10^4$. Ces nombres sont aussi comparés avec celui de la convection forcée. Aussi, pour la clarté graphique, un agrandissement de cette figure est illustré dans la figure (4.21). Il est constaté qu'entre l'entrée et la demi longueur du conduit, les nombres de Nusselt et de Sherwood locaux de la paroi supérieure du canal sont supérieurs à ceux de la paroi inférieure. Ceci est à l'effet convectif : augmentation relative de la vitesse dans la moitié supérieure du conduit et la diminution relative de la vitesse dans la moitié inférieure. Le transfert de chaleur et de matière est un peu amélioré au niveau de la paroi supérieure. Dans le cas de la convection mixte avec $Gr_c=5.10^4$, les nombres de Nusselt et de Sherwood locaux de la paroi supérieure sont légèrement supérieurs à ceux de la convection forcée; par contre, les nombres de Nusselt et de Sherwood locaux de la paroi inférieure sont légèrement inférieure à ceux de la convection forcée.

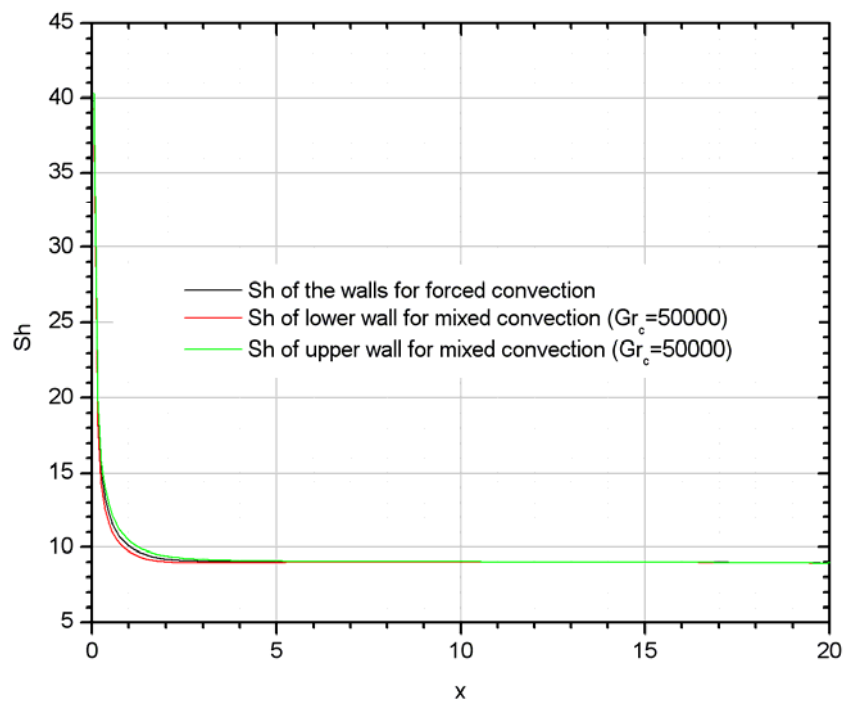


Figure (4.20): Nombres de Sherwood locaux des convections, forcée et mixte

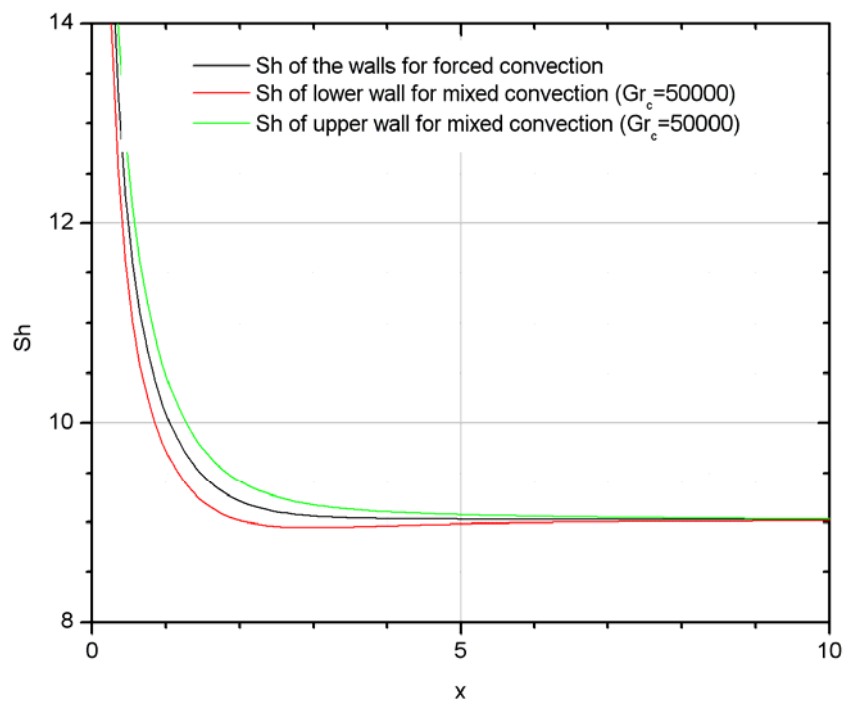


Figure (4.21): agrandissement de la variation axiale des nombres de Sherwood locaux

Partie 2

1. Introduction

L'étude du refroidissement convectif des blocs solides montés sur les parois des canaux et des plaques est un domaine de recherche d'actualité. L'intérêt de l'étude de ce problème découle de ses importantes applications. Il simule les cas du refroidissement des composants électroniques montés sur les cartes électroniques et de certains composants d'échange de chaleur. Un intérêt permanent est l'amélioration du refroidissement des petits composants chauffés à l'intérieur desquels l'apport de chaleur volumétrique est de plus en plus important. Un moyen d'amélioration du refroidissement des blocs solides chauffés montés sur la paroi d'un canal est accompli par l'utilisation d'une matière poreuse dans le canal (si possible et pratique). Dans ce qui suit, on présente quelques exemples des études du refroidissement des blocs solides, chauffés et montés sur les parois des canaux, impliquant l'utilisation des milieux poreux.

P.C. Huang et. al [13] ont étudié numériquement l'amélioration du refroidissement par convection forcée des blocs solides dans un canal plan avec couverts poreux ci-joints la bande de sources de chaleur à la paroi inférieure. Ils ont utilisé le modèle du Darcy-Brinkman-Forchheimer dans la région poreuse. Ils ont trouvé que la circulation causée par les couverts poreux améliore le transfert de chaleur sur les faces supérieures et droites des blocs à l'aval du premier. En outre, ils sont démontrés que des choix spécifiques de certains paramètres, tels que la taille ou la perméabilité du couvert poreux, et de la fréquence et l'amplitude des pulsations externes peut produire une profonde amélioration de transfert de chaleur sur le refroidissement des sources de chaleur. La distribution de température pour un écoulement pulsé avec le couvert poreux est plus uniforme que celle d'écoulement pur. La méthode combinant la pulsation d'écoulement avec une taille finie des fibres poreux d'un dissipateur de chaleur peut être considéré comme un outil de transfert de chaleur amélioré pour le refroidissement des appareils électroniques.

Y. Ould-Amer et. al [14] ont étudié numériquement le refroidissement par la convection forcée laminaire des blocs montés sur la paroi d'un canal. Ils ont trouvé que l'insertion d'une matrice poreuse entre les blocs chauffés améliore le transfert de chaleur sur les parois verticales des blocs et réduit le niveau de la température à l'intérieur de ces blocs.

S.C. Tzeng [15] a étudié le transfert de chaleur convectif dans un canal rempli de bronze fritté et de blocs chauffés qui sont périodiquement espacés. Il a constaté l'absence de recirculation dans les régions entre les blocs où le transfert thermique convectif est faible. Il a aussi trouvé que le nombre de Nusselt des blocs diminue suivant la direction de l'écoulement jusqu'à l'atteinte de sa valeur totalement développée.

S. Chikh et. al [16] ont étudié numériquement la convection forcée dans un canal avec des blocs poreux chauffés et intermittents. Ils ont trouvé que pour des blocs avec une faible perméabilité, des zones de recirculation apparaissent entre les blocs et empêchent l'écoulement à travers les blocs voisins. Ils ont aussi trouvé que l'insertion des blocs solides entraîne une réduction de la température de la paroi qui peut atteindre 90%.

A. Korichi et. al [17] ont étudié le transfert thermique dans un canal rectangulaire avec deux blocs sur la paroi inférieure et un bloc sur la paroi supérieure. Les blocs sont chauffés par un flux de chaleur constant. Un de leurs résultats est la réduction de la différence de température entre les blocs lorsque le nombre de Reynolds est augmenté.

M. Najam et. al [18] ont étudié numériquement la convection mixte laminaire dans un canal horizontal bidimensionnel contenant des blocs chauffés périodiquement montés sur sa paroi inférieure tandis que sa paroi supérieure froide est maintenue à une température constante. L'écoulement est supposé être complètement développé. Les paramètres du problème sont le nombre de Reynolds ($0.1 \leq Re \leq 200$), le nombre de Rayleigh ($10^4 \leq Ra \leq 10^6$) et la hauteur relative des blocs ($0.25 \leq B = h' / H' \leq 0.5$). L'effet de l'écoulement forcé sur la convection naturelle des cellules est étudié pour différentes valeurs de paramètres utilisées. Les conditions correspondant au déplacement de ces cellules et de l'instabilité de l'écoulement sont déterminées. Le développement complet d'écoulement forcé réduit considérablement le transfert de chaleur par la surface froide du canal à un nombre de Reynolds relativement élevé.

M.M. Mohamed [19] a étudié expérimentalement les caractéristiques de refroidissement d'air des dispositifs électroniques d'un dissipateur de chaleur avec différentes rangées de modules carrés. La vitesse d'écoulement d'air est entre 3.24-6.84 (m/s), un canal de 0.1 m de largeur et de 0.02 ou 0.03 m de hauteur. Une rangée de modules de blocs d'Aluminium

a été faite avec une température de base de modules entre 40-1000°C. Les résultats indiquent que le coefficient de transfert de chaleur peu augmenté avec l'augmentation de la température de la rangée des modules, mais l'augmentation a été nettement plus élevée avec l'augmentation des vitesses de l'écoulement d'air. L'augmentation du module de rapport hauteur du canal augmente le coefficient du transfert de chaleur.

D. Helel et. al [20] ont simulé les transferts bidimensionnels de chaleur et de masse au cours du séchage d'un milieu poreux non saturé et indéformable exposé à un écoulement convectif forcé laminaire d'air humide dans un canal horizontal. Le modèle utilisé tient compte d'une part des approximations des couches limites dynamiques, thermiques et massiques et d'autre part de la variabilité des coefficients des transferts thermiques et massiques. Les résultats obtenus, nous ont permis d'évaluer l'influence de la hauteur du canal sur le processus de séchage et sur les comportements spatio-temporels de la température, de la saturation en eau et de la pression du mélange gazeux.

H.J. Sung et. al [21] ont étudié numériquement l'écoulement et les caractéristiques de transfert de chaleur par convection forcée dans un canal partiellement rempli d'un milieu poreux. Les parois du canal sont adiabatiques. Ils ont utilisés le modèle du Darcy-Brinkman-Forchheimer. Les principaux paramètres sont : le nombre de Reynolds de 10 à 500, le nombre de Darcy ($10^{-6} \leq Da \leq \infty$), l'épaisseur du substrat poreux S ($0 \leq S \leq 1$), et le rapport de la conductivité thermique ($0.1 \leq R_k \leq 10$). Deux types de l'emplacement du bloc poreux sont prendre en compte, (a) à la paroi extrados verticalement au dessus de la zone thermique et (b) à la paroi du fond de la zone thermique. Ils ont utilisé la méthode des volumes finis. En raison de la chute de pression, l'utilisation d'un substrat poreux plus épais (S est plus grand) et plus dense (Da est plus petit) dans un équipement de refroidissement électronique est moins souhaitable.

P.X. Jiang et. al [22] ont étudié expérimentalement le transfert thermique par convection forcée dans un canal plan rempli de verre, de particules sphériques d'acier inoxydable ou de bronze. La section d'essai était de (58×80×5mm) avec l'eau comme un fluide du fonctionnement. La distribution de la température locale du mur a été mesurée avec les températures de fluide et les pressions d'entrée et de sortie. Les médias poreux ont considérablement augmenté le coefficient de transfert thermique bien que la résistance

hydraulique ait été augmentée encore plus. Les effets du diamètre de particules, de la conductivité thermique de particules et de la vitesse du fluide ont été examinés pour un éventail de conductivités thermiques (de 75.3 W/(mK) pour le bronze à 0.744 W/(mK) pour le verre) et pour trois dimensions particulières nominales (0.278, 0.428 et 0.7mm). Le taux d'écoulement d'eau refroidi dans le canal poreux s'est étendu de 0.01568 à 0.1992 kg/s. Nu et le coefficient de transfert thermique accrus avec la diminution de diamètre de particule en bronze, diminués avec la diminution de diamètre de particule de verre, et augmentés avec l'augmentation de la conductivité thermique du matériau.

Dans ce travail, on se propose d'étudier le refroidissement convectif des blocs solides montés sur les parois d'un canal plan qui est soit rempli par une matière poreuse ou non, avec une porosité homogène et constante. Six blocs solides semblables sont montés sur la paroi inférieure. Chaque bloc est uniformément chauffé par une génération volumétrique de chaleur. Un écoulement froid et uniforme est imposé à l'entrée du canal. Les parois du canal sont statiques, imperméables et adiabatiques. A la sortie du canal, l'écoulement est développé et le flux de chaleur axial est constant. Les propriétés physiques du fluide, du milieu poreux et des blocs sont supposées constantes. Le fluide est Newtonien et l'écoulement est supposé laminaire. La dissipation visqueuse et la dispersion thermique sont supposées négligeables.

Dans un premier chapitre, on met en revue une recherche bibliographique, des études théoriques, numériques et expérimentales sur le refroidissement des composants électroniques par des blocs solides ou poreux, en général, et l'amélioration du refroidissement des blocs montés sur les parois des canaux par l'utilisation d'une matière poreuse dans le canal.

Dans un deuxième chapitre, nous présentons notre modèle mathématique par un système d'équations différentielles aux dérivés partielles, de conservation de la masse, de quantité de mouvement, de l'énergie et de la matière, qui sera résolu par la méthode des volumes finis à savoir la discrétisation spatiotemporelle du second ordre et la méthode de résolution qu'elles sont toutes exposées dans le troisième chapitre de la première partie de cette thèse. Dans le quatrième chapitre, nous interprétons les résultats obtenus en deux classes, la première partie concerne le cas d'un canal non rempli d'une matière poreuse, considéré comme un cas de référence. Et la deuxième, concerne le cas d'un canal rempli d'une matière poreuse avec deux valeurs du nombre de Darcy 10^{-2} et 10^{-9} .

2. Modélisation mathématique

2.1. Cas de refroidissement:

On considère un canal plan qui a une longueur égale à 20 fois sa hauteur H (la figure (2.1)). Six blocs solides semblables sont montés sur la paroi inférieure. Chaque bloc a une longueur l égale à H et une hauteur h égale à $0.25 H$. la face gauche du premier bloc est à distance égale à $5,6 H$ à partir de l'entrée. La distance entre deux blocs consécutifs est H . Chaque bloc est uniformément chauffé par une génération volumétrique de chaleur Q . Le canal est soit rempli par une matière poreuse ou non. La porosité de la matière poreuse est considérée homogène et constante. Un écoulement froid et uniforme est imposé à l'entrée du canal. Les parois du canal sont statiques, imperméables et adiabatiques. A la sortie du canal, on suppose que l'écoulement est développé et le flux de chaleur axial et diffusif est constant. Les propriétés physiques du fluide, du milieu poreux et des blocs sont supposées constantes. Le fluide est Newtonien et l'écoulement est supposé laminaire. La dissipation visqueuse et la dispersion thermique sont supposées négligeables.

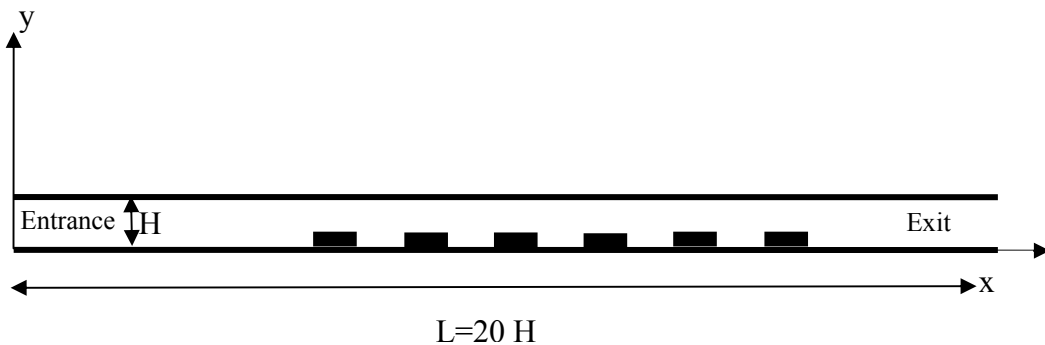


Figure (2.1): le schéma du problème considéré

L'écoulement et le transfert thermique conjugué sont modélisés par le même modèle utilisé dans la première partie, comme suit :

L'équation de continuité :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

L'équation de la quantité de mouvement suivant x :

$$\frac{1}{\phi} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\phi^2} \frac{\partial(UU)}{\partial x} + \frac{1}{\phi^2} \frac{\partial(VU)}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{U}{\text{Re} Da} - \frac{C_f \sqrt{U^2 + V^2} U}{\sqrt{Da}} + \frac{1}{\text{Re} \phi} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \right] \quad (2.2)$$

L'équation de la quantité de mouvement suivant y :

$$\frac{1}{\phi} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\phi^2} \frac{\partial(UV)}{\partial x} + \frac{1}{\phi^2} \frac{\partial(VV)}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{V}{\text{Re} Da} - \frac{C_f \sqrt{U^2 + V^2} V}{\sqrt{Da}} + \frac{1}{\text{Re} \phi} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) \right] \quad (2.3)$$

L'équation d'énergie :

$$\frac{\partial[CT]}{\partial t} + \frac{\partial[UT]}{\partial x} + \frac{\partial[VT]}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re} \text{Pr}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] + S \quad (2.4)$$

Où,

$$C = \begin{cases} 1 & \text{pour le fluide} \\ \frac{[\rho C_p]_m}{[\rho C_p]_f} & \text{pour le milieu poreux} \\ \frac{[\rho C_p]_s}{[\rho C_p]_f} & \text{pour le solide} \end{cases} \quad (2.5)$$

Comme il se trouve toujours une solution stable pour tous les cas dans cette étude, la valeur de C n'a pas d'importance, car elle est multipliée par le dérivé de température par rapport au temps qui tend à zéro à l'état stable. Ainsi, cette constante est égale à 1. En outre, dans les blocs solides ou e massif, la vitesse est toujours égale à zéro.

$$S = \begin{cases} 0 & \text{à l'extérieur des blocs} \\ \frac{(K_s / K_f)}{\text{Re} \text{Pr}} & \text{dans les blocs} \end{cases} \quad (2.7)$$

$$K = \begin{cases} 1 & \text{pour le fluide} \\ (K_m / K_f) = 5.77 & \text{pour le milieu poreux} \\ (K_s / K_f) = 500 & \text{pour les blocs solides} \end{cases} \quad (2.8)$$

Les conditions initiales et aux limites:

A $t = 0$, $U = 1$ (sauf aux blocs solides où $U = 0$), $V = 0$ et $T = 0$

Pour $t > 0$

A $x = 0$, $U = 1$, $V = 0$, $T = 0$

$$\text{A } x = 20, \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

$$\text{A } y = 0, U = 0, V = 0, \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

$$\text{A } y = 1, U = 0, V = 0, \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

Les paramètres de contrôle :

Si le canal n'est pas rempli du milieu poreux:

Le rapport d'aspect $L / H = 20$,

Nombre de Reynolds $Re = U_e^* H / \nu = 100$

$$\text{Nombre de Prandtl } Pr = \frac{\nu}{\alpha} = 0.7$$

Si le canal est rempli du milieu poreux, on ajoute les paramètres suivants:

$$\text{Nombre de Darcy } Da = \frac{k}{H^2} = 10^{-9} \text{ ou } 10^{-2}.$$

Porosité du milieu poreux $\phi = 0.8$

Notez que, si le canal n'est pas rempli d'une matière poreuse, les équations de Navier-Stokes sont obtenues en supprimant les termes contenant le nombre de Darcy (Da) et réglant de la porosité à 1. Le coefficient C_f dans le terme de Forchheimer est égal à 0,55.

3. Résolution numérique

Dans ce chapitre on va exposer la méthode numérique qu'on a été utilisés pour la résolution des équations adimensionnelles modélisantes. Et dans ce sens, on exposera aussi la discrétisation du domaine de calcul et l'algorithme utilisé pour résoudre le système d'équations discrétisées obtenues. On a choisi la méthode des volumes finis en vue de la géométrie du problème et les capacités de calcul. Cette méthode a été développée pour résoudre les problèmes de transfert de chaleur et d'écoulement des fluides.

La discrétisation du domaine physique, la discrétisation numérique des équations modélisantes, la discrétisation temporelle en second ordre, la discrétisation spatiale en second ordre, la résolution du système des équations de vitesse, la discrétisation de l'équation de pression, la méthode de résolution, la solution séquentielle des systèmes d'équations de discrétisation et l'algorithme SIMPLER. Tout ça est décrit en détailles dans le chapitre de la résolution numérique dans la première partie de cette thèse.

4. Résultats

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats obtenus concernant le refroidissement amélioré des blocs chauffés montés sur la paroi d'un canal non poreux dans le premier cas, et d'un canal rempli d'une matière poreuse avec : $Da=10^{-2}$ et $Da=10^{-9}$ comme un deuxième cas.

4.1. Le cas où le canal n'est pas rempli d'une matière poreuse (c'est le cas de référence)

C'est le cas du refroidissement des blocs par la convection d'air. Il est considéré le cas de référence qui sera comparé avec celui du cas où le canal est rempli avec une matière poreuse. Le champ d'écoulement est obtenu et illustré dans la figure (4.1). Loin de l'entrée, l'écoulement commence à se développer comme un simple écoulement dans un canal; cependant, son développement est perturbé par la présence des blocs. L'écoulement devient axialement périodique dans la région entre le premier et le dernier bloc, avec une période spatiale égale à deux fois la dimension axiale d'un bloc. Dans les espaces entre les blocs, qui ont la forme de cavité, le module de la vitesse est petit et l'effet visqueux diffusif est plus important que l'effet convectif, entraînant la généralisation de tourbillons rotatifs dans le sens horaire. Au dessus des blocs, le fluide s'écoule axialement. A l'aval l'écoulement recommence son développement jusqu'à la sortie du canal. La variation de pression est surtout axiale; il y a de petites variations de pression verticale dans l'espace entre les blocs. Le champ thermique est représenté dans la figure (4.2). L'écoulement froid de l'entrée est maintenu jusqu'à la proche du premier bloc. A partir de cet endroit, l'écoulement commence à s'échauffer axialement par les six blocs. Il y a un chauffage axial continu de l'écoulement parce que plus que de chaleur est rajouté par chaque bloc traversé. Du premier bloc jusqu'à la sortie la température décroît verticalement entre les blocs et la paroi

supérieure du canal. La température au milieu du premier bloc est 15.01 et celle au milieu du dernier bloc est 30.40. Cependant l'élévation de température entre deux blocs consécutifs décroît axialement: la différence de température entre le premier et le deuxième bloc est 4,99; et entre le sixième et le cinquième bloc est 1,953. Dans l'espace entre blocs, le transfert de chaleur dans les tourbillons est principalement accompli par diffusion ce qui réduit le transfert thermique lorsque le dernier bloc est dépassé, la chaleur est distribuée principalement par la convection axiale et la diffusion transversale jusqu'à la sortie du bloc.(Les figures (4.1) et (4.2)).

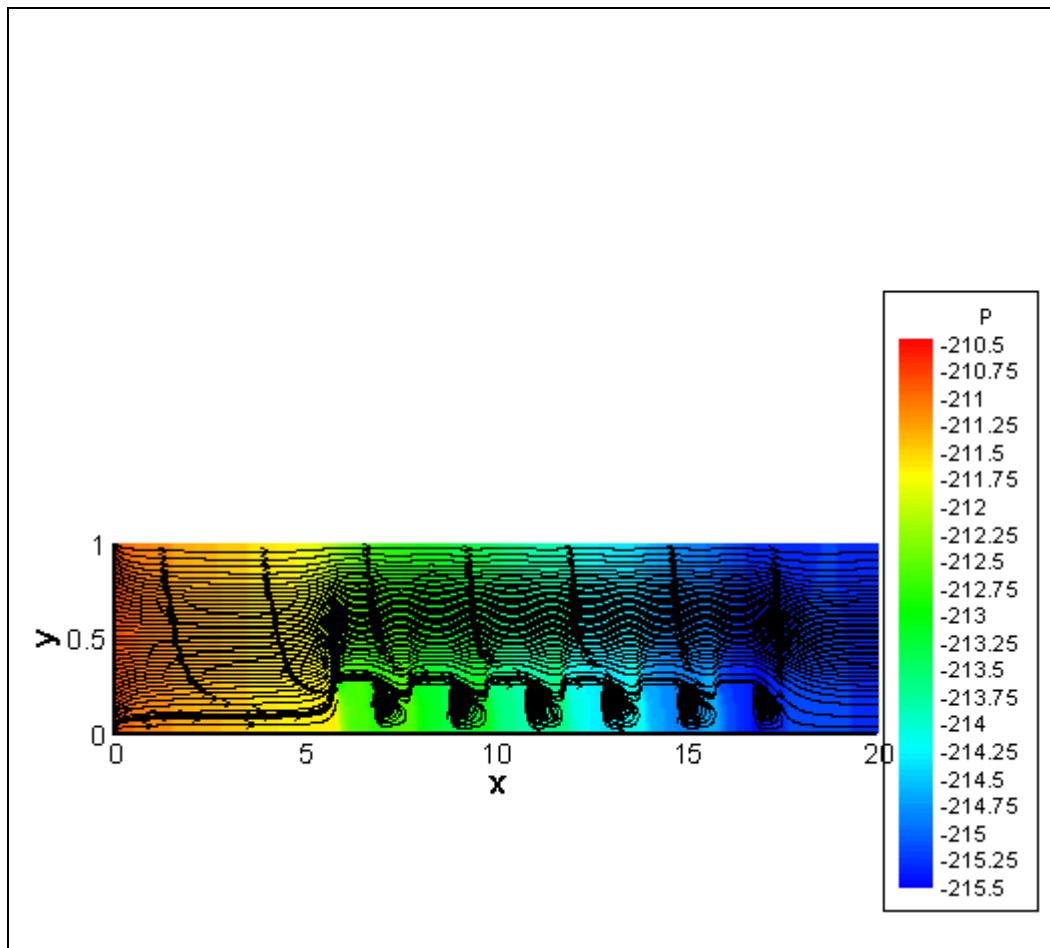


Figure (4.1) : Le champ d'écoulement et la distribution de pression

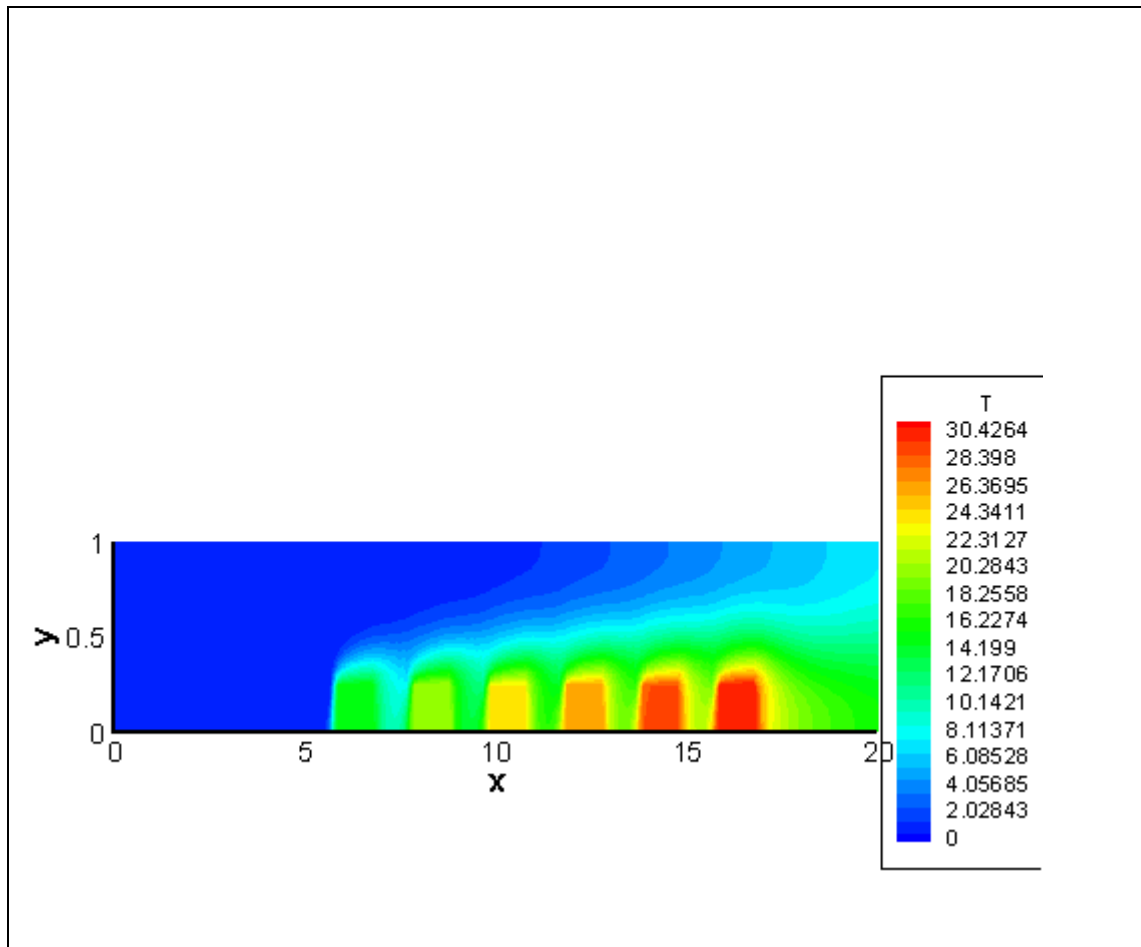


Figure (4.2): Le champ thermique et la distribution de la température

4.2. Le cas du canal rempli avec une matière poreuse.

4.2.1. Le cas de Darcy égal à 10^{-9} .

C'est le cas du canal rempli avec une matière poreuse avec un nombre de Darcy relativement faible. L'écoulement est figuré dans (la figure (4.3)). Cet écoulement est remarquablement différent de celui de l'état de référence. Une différence majeure est l'absence des tourbillons dans les espaces entre les blocs. L'écoulement contourne les blocs sans formation de tourbillons. Ce-ci est dû à l'effet négligeable des termes visqueux dans les équations des quantités de mouvement. Les termes dominant dans ces équations sont les termes de pression et de Darcy. L'équilibre de ces termes détermine le profil de l'écoulement à chaque section du canal. L'écoulement est aussi spatialement périodique

entre le premier et le dernier bloc. Le niveau de la vitesse axiale est le plus grand entre les faces supérieures des blocs et la paroi supérieure du canal. Le niveau de vitesse est réduit entre les parois du canal, dans l'espace entre les blocs. Ceci est dû à la conservation axiale du débit: lorsque la section d'écoulement est réduite le niveau de la de la vitesse augmente. La chute de pression axiale à travers le canal est très supérieure à celle de l'état de référence. Et ce ci est un grand inconvénient si on considère la puissance nécessaire pour ventiler l'écoulement à travers le canal.

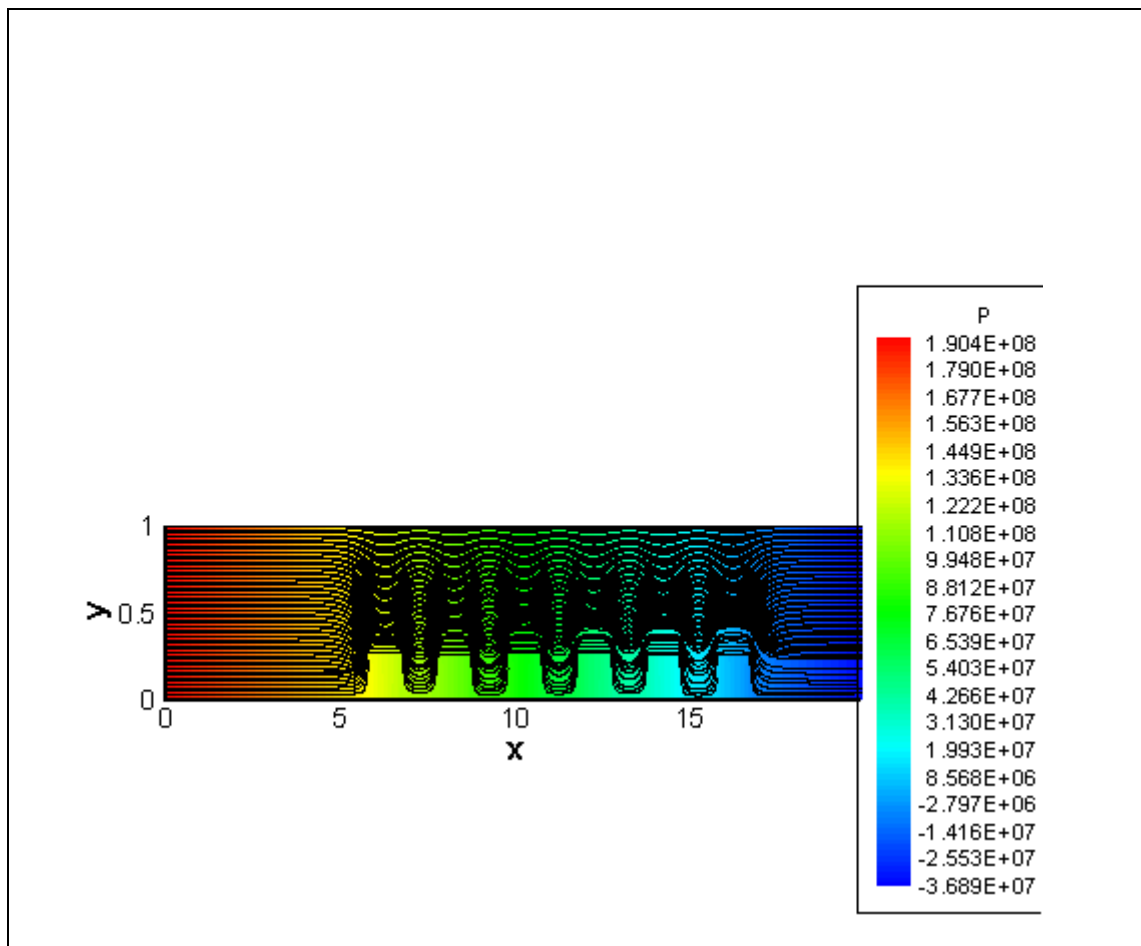


Figure (4.3) : le champ d'écoulement et la distribution de pression

La distribution de la température est représentée dans (la figure (4.4)). Le champ thermique est nettement différent de celui de l'état de référence L'amélioration axiale et transversale du transfert thermique est apparent. Le niveau de température est bien inférieur à celui de l'état de référence. Le température au niveau du premier bloc est 4,02.et celle au milieu du dernier bloc est 13,45. 3 facteurs majeurs contribuent à un meilleur refroidissement des blocs montés dans un canal rempli d'une matière poreuse. Le premier facteur est l'absence des tourbillons dans les espaces entre bloc; et donc la convection avec un important niveau de vitesse est très influente des ces régions. Le deuxième facteur est le fait que l'effet visqueux est négligeable; la vitesse près des parois supérieure des blocs est élevé et donc elle améliore le refroidissement axiale convectifs de ces surfaces. Le troisième facteur est celui de la conductivité thermique: la conductivité thermique du milieu poreux est 5,77 celle de l'air et ceci entraîne une meilleur conduction de chaleur dans le milieu poreux.

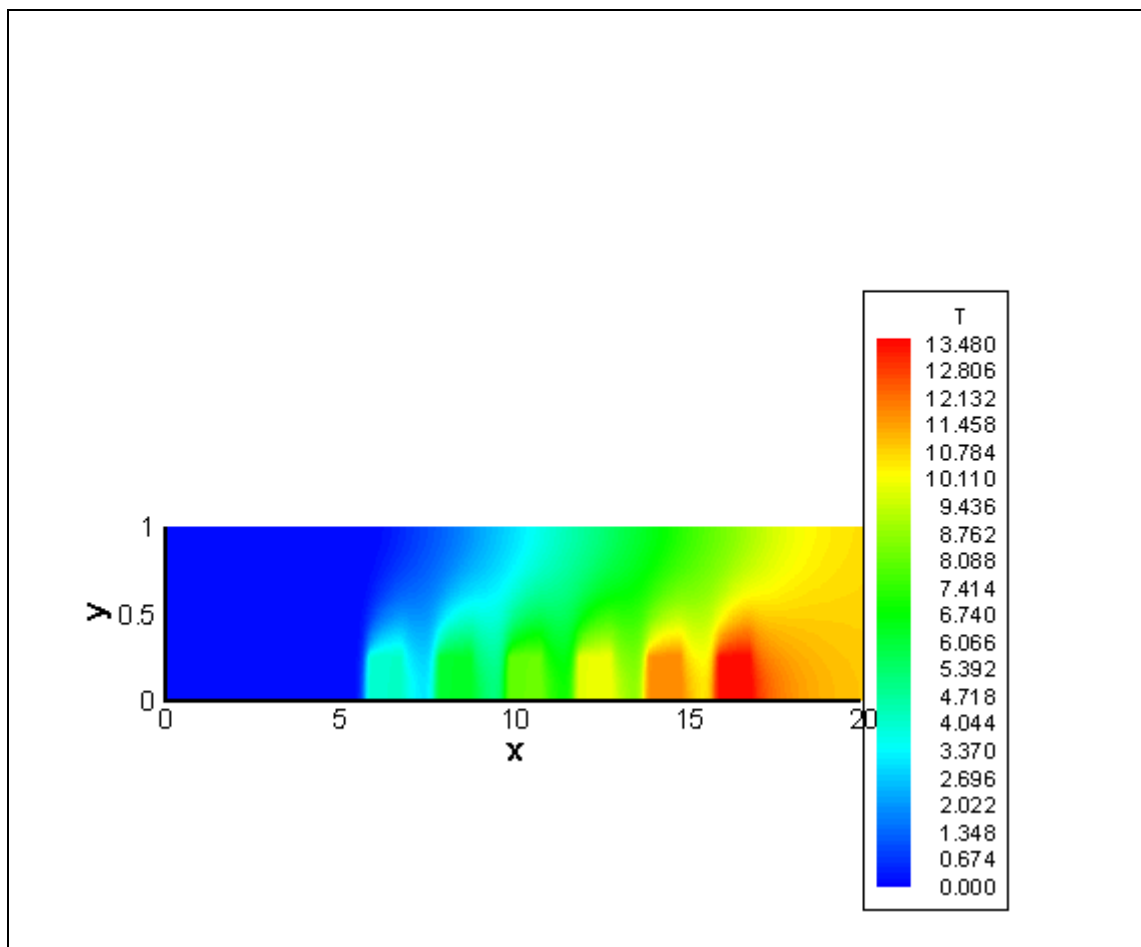


Figure (4.4): Le champ thermique et la distribution de la température

4.2.2. Le cas de Darcy égal 10^{-2}

Lorsque le nombre de Darcy est augmenté jusqu'à Da égal 10^{-2} , on obtient l'écoulement illustré dans la figure (4.5); qui est globalement similaire à celui obtenu avec Darcy égal 10^{-9} . Avec le Darcy égale à 10^{-2} , le profil de la vitesse axiale est déterminé de l'équilibre des termes de pression, de Darcy, et des termes visqueux. Tous ces termes sont importants. L'effet du terme visqueux de Brinkman est surtout la variation de la vitesse suivant la direction normale au surface solide; la variation de la vitesse près des parois est limité à une petite distance (couche). Le long de cette petite distance est relativement important. L'effet du terme de Forchheimer est l'aplatissement du profil de la vitesse axiale loin des parois du canal. Sans ce terme, la vitesse peut varier continuellement suivant la direction transversale sans aplatissement. Il est constaté qu'avec le nombre de darcy élevé il n'y a pas de tourbillon dans l'espace entre les blocs, comme dans l'écoulement obtenu avec le nombre de darcy faible la raison de l'absence des tourbillons est expliquée comme suit: bien que les termes visqueux de Brinkman ne sont pas négligeable, ils ne sont pas assez fort pour induire la génération de tourbillon (de vortex). L'effet combiné de pression, de darcy, et de Forchheimer empêche la formation de ces tourbillons et donne un profil d'écoulement contournant les blocs comme dans le cas de l'écoulement avec le nombre de Darcy égal à 10^{-9} . La chute de pression axiale obtenue avec le nombre de Darcy élevé 10^{-2} est très inférieur à celui obtenu avec darcy égal à 10^{-9} .

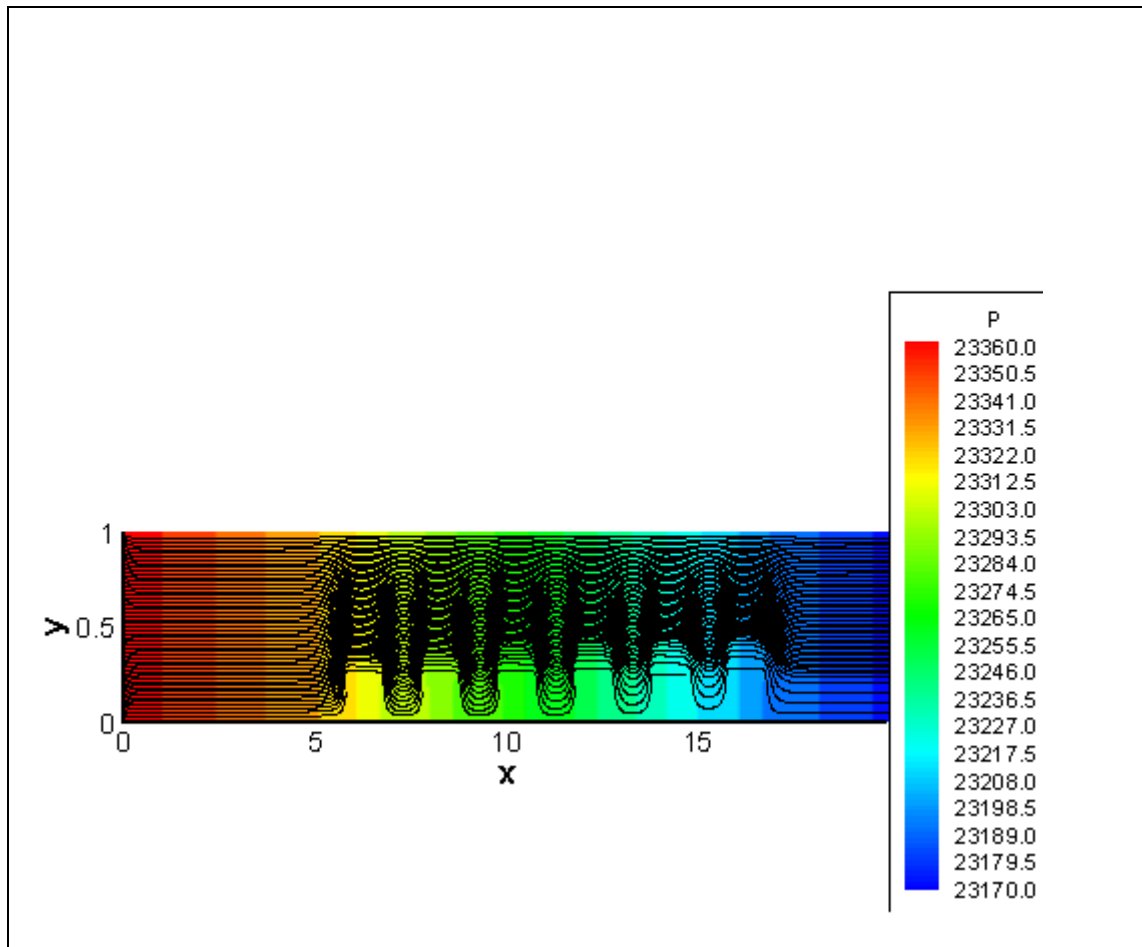


Figure (4.5) : le champ d'écoulement et la distribution de pression

La distribution de la température obtenue avec Darcy 10^{-2} est illustrée dans la figure (4.6). Elle est qualitativement et quantitativement proche de darcy égal à 10^{-9} . Le profil axial de la température à la distance verticale $y = 1,10625$ passant à travers les blocs est représenté, pour les deux nombres de Darcy, dans la figure (4.7). Cette représentation montre que les deux profils sont très proches.

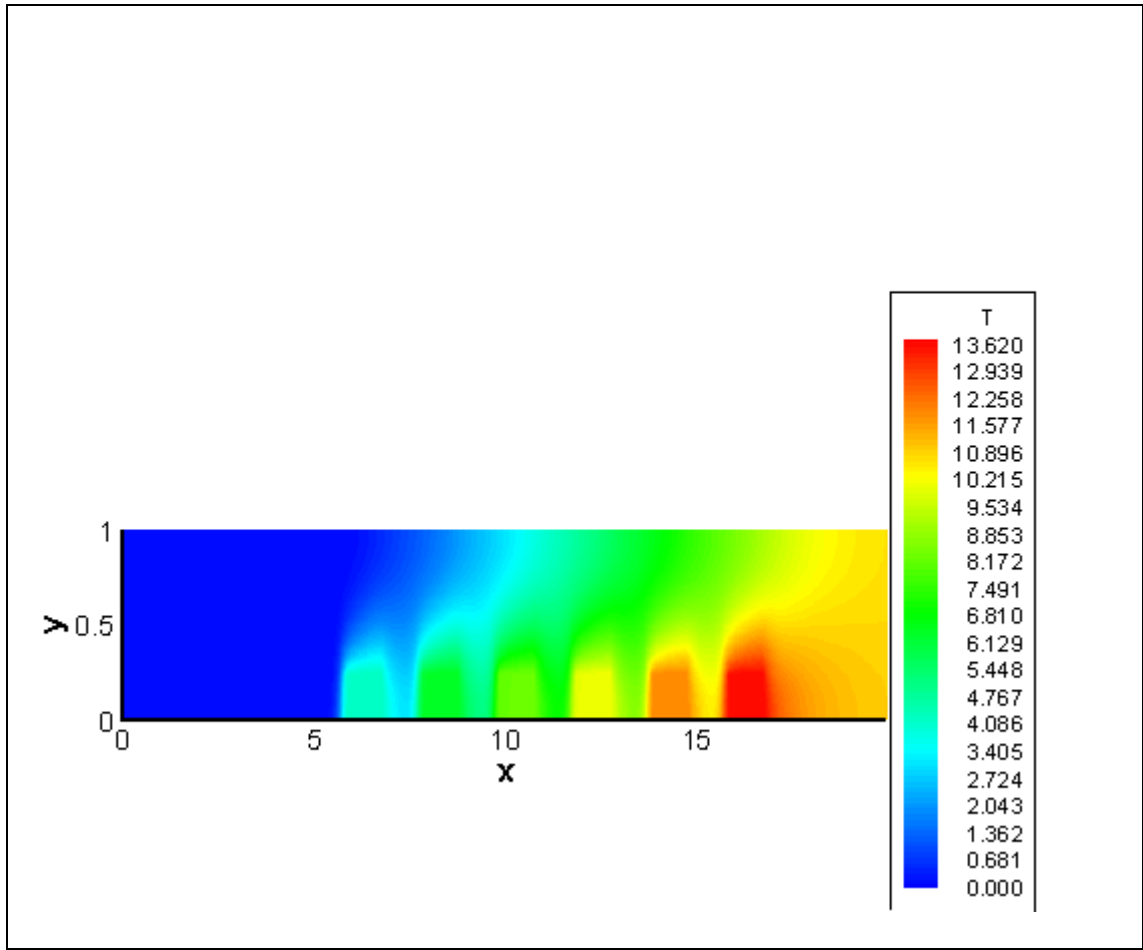


Figure (4.6): Le champ thermique et la distribution de la température

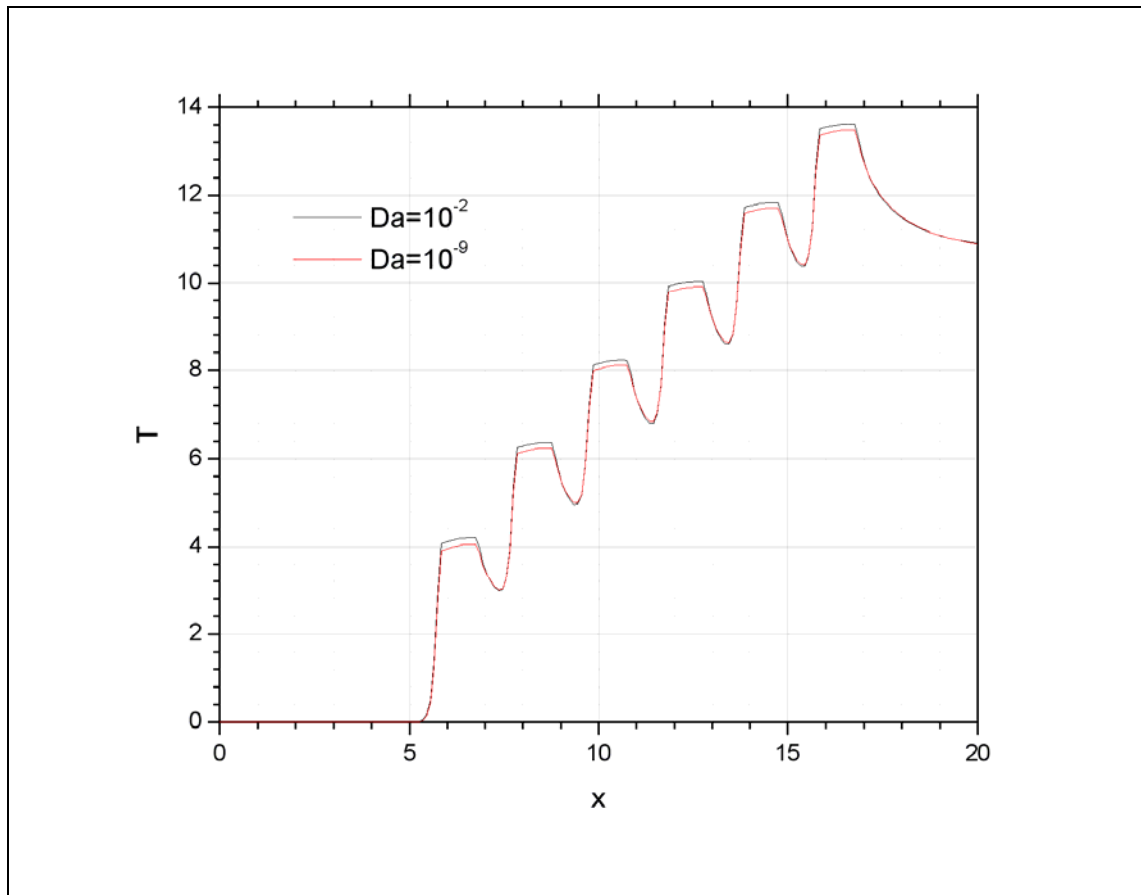


Figure (4.7): Le profil axial de la température à la distance verticale $y = 1,10625$ passant à travers les blocs pour les deux nombres de Darcy.

Dans la figure (4.8), c'est même profil sont comparé avec celui de l'état de référence. De cette figure il est clair, que les profils de température des deux nombres de Darcy sont qualitativement bien inférieurs à celui de l'état de référence. La similarité des champs de température des deux nombres de darcy est expliquée dans ce qui suit : Premièrement les deux milieux poreux ont la porosité et la même conductivité thermique. Deuxièmes lorsque l'écoulement contourne les blocs les niveaux de la vitesse d'écoulement sont similaire près des faces verticales des blocs. Troisièmement près des faces supérieures (horizontal) des blocs le niveau de la vitesse avec darcy égal à 10^{-2} est un peu inférieur à celui avec darcy 10^{-9} . Et ceci explique le fait que la température obtenue avec darcy égala à 10^{-2} est un peu supérieure à celle obtenue avec darcy égal 10^{-9} . Il est avantageux d'utiliser, si possible un

milieu poreux pour améliorer le refroidissement du bloc. Cependant si considération est donnée à la puissance de ventilation d'écoulement, un milieu poreux avec un nombre de Darcy élevé et une conductivité thermique élevée est recommandé.

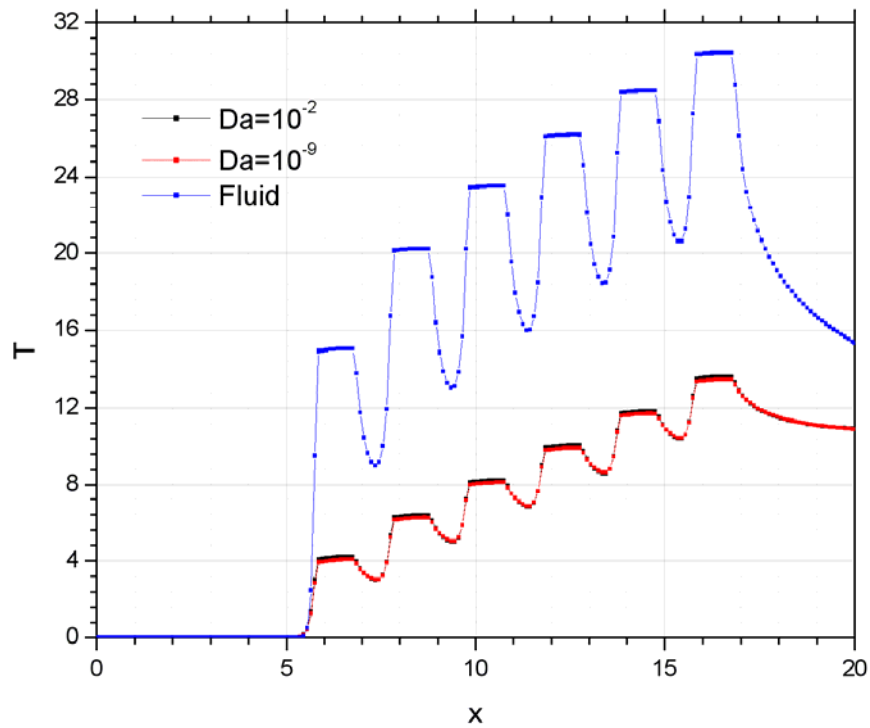


Figure 9.

Figure (4.8): Comparaison du même profil précédent avec celui de l'état de référence

Conclusion

La contribution à l'étude des transferts de masse et de chaleur dans un canal plan bidimensionnel, rempli d'une matière poreuse saturé par un mélange d'air et de la vapeur d'eau est l'objectif principal de notre étude. Pour cela, on a divisé notre travail en deux parties, la première concernant l'écoulement de la convection forcée et la convection mixte bi diffusive dans un canal horizontal plan rempli d'une matière poreuse. Et la deuxième, concernant le refroidissement convectif des blocs solides montés sur les parois du canal.

Pour la première partie, nous considérons un écoulement d'air dans un canal horizontal plan rempli d'une matière poreuse, avec transfert de chaleur et de matière. Les parois du canal sont maintenues isothermes et à concentrations constantes. Supposons que l'espèce diffusée dans l'air est la vapeur d'eau.

Ce problème bidimensionnel est modélisé par les équations de conservation de la masse, de quantité de mouvement, de l'énergie et de la matière. Elles ont été résolues par la méthode numérique des volumes finis par une discrétisation spatiotemporelle du second ordre. Le schéma d'Adam-Bashforth est utilisé pour la discrétisation des termes convectifs et non linéaires et les termes de poussées thermiques et solutales. Le schéma des différences centrées d'ordre deux a été choisi pour la discrétisation des dérivées spatiales. Les termes diffusifs et de pression ont été évalués au temps $t + \Delta t$. Le système des équations discrétisées ou algébriques a été résolu par la méthode itérative de balayage. La solution séquentielle du système des équations de discrétisation est suivie par l'algorithme SIMPLER.

Pour la convection forcée on trouve qu'avec le nombre de Darcy faible considéré (10^{-9}), l'écoulement dans le canal est uniforme et peut être modélisé par les termes de Darcy et des gradients de pression. L'écoulement uniforme dans le canal rempli du milieu poreux augmente le transfert thermique et le transfert de matière mais au prix d'une grande chute axiale de la pression. Avec le nombre de Darcy relativement élevé (10^{-2}), les termes de Forchheimer et de Brinkmann sont influents et doivent être considérés dans la modélisation de l'écoulement. Pour ce nombre de Darcy, les transferts de chaleur et de matière sont légèrement inférieurs à ceux du nombre de Darcy égal à 10^{-9} , mais la chute de pression axiale est très inférieure à celle obtenue avec le nombre de Darcy égal à 10^{-9} . Pour la

simulation numérique de la convection mixte dans la géométrie considérée et avec les paramètres de contrôle spécifiés a révélé les conclusions suivantes: Avec le faible nombre de Darcy 10^{-9} , et des nombres de Grashof jusqu'à 5.10^4 , les résultats des convections, forcée et mixte, sont les mêmes. Avec le nombre de Darcy relativement élevé 10^{-2} , et des nombres de Grashof jusqu'à 10^4 , les résultats des convections, forcée et mixte, sont les mêmes. La différence des résultats des convections, forcée et mixte, devient apparente avec le nombre de Grashof solutal 5.10^4 .

Pour la simulation numérique bidimensionnelle du refroidissement convectif de six blocs semblables chauffés et montés sur la paroi inférieure d'un canal plan horizontal. Chaque bloc est uniformément chauffé par une génération volumétrique de chaleur. Un écoulement froid et uniforme est imposé à l'entrée du canal. Les parois du canal sont statiques, imperméables et adiabatiques. A la sortie du canal, l'écoulement est développé et le flux de chaleur axial est constant. Les propriétés physiques du fluide, du milieu poreux et des blocs sont supposées constantes. Le fluide est Newtonien et l'écoulement est supposé laminaire. La dissipation visqueuse et la dispersion thermique sont supposées négligeables.

Ce problème bidimensionnel est modélisé par les équations de conservation de la masse, de quantité de mouvement et de l'énergie. Elles ont été résolues par la méthode numérique des volumes finis par une discrétisation spatiotemporelle du second ordre. Le schéma d'Adam-Bashforth et le schéma des différences centrées d'ordre deux sont utilisés. Le système des équations discrétisées a été résolu par la méthode itérative de balayage. La solution séquentielle du système des équations de discrétisation suit l'algorithme SIMPLER.

On a abouti aux conclusions suivantes, qui sont limitées à la géométrie utilisée et aux paramètres thermique et dynamique utilisés. Si le canal est rempli d'une matière poreuse, l'écoulement contourne les blocs sans formation de tourbillons dans les espaces entre les blocs. La chute de pression axiale est très élevée lorsque le nombre de Darcy est faible si la porosité et la conductivité thermique du milieu poreux sont fixées le refroidissement du bloc ne semble pas être sensible à la variation du nombre de Darcy de 10^{-9} à 10^{-2} . Le refroidissement dans le milieu poreux est meilleur que celui dans l'air.

Références

1. S. Bories, M. Prat, Transferts de chaleur dans les milieux poreux, Techniques de l'ingénieur, Traité Génie Energétique, B8 250, 2005, pp.1-32.
2. C. Danquigny, Etude expérimentale du transfert de masse en milieu poreux hétérogène, Thèse doctorat de l'université de Louis Pasteur de Strasbourg, 2003.
3. M. Nicolas, Ecoulements dans les milieux poreux, Thèse doctorat de l'université de Provence, Marseille, 2003.
4. D.A. Nield, A. Bejan, Convection in porous media, 2nd ed, Springer-Verlag, New York, 1999.
5. G. Degan, S. Zouhoun, P. Vasseur, Forced convection in horizontal porous channels with hydrodynamic anisotropy, International Journal of Heat and Mass Transfer, 2002, Vol. 45, pp. 3181-3188.
6. K. Sundaravadivelu, C.P. Tso, Flow through two types of heterogeneous porous media with isoflux boundary condition, International Journal of Heat and Mass Transfer 46, 2003, pp. 2329–2339.
7. F. C. Chou, W. Y. Lien, S. H. Lin, Analysis and experiment of non-Darcian convection in horizontal square packed-sphere channels, 1- Forced convection, International Journal of Heat and Mass Transfer, 1992, Vol. 35, Issue 1, pp. 195-205.
8. F. C. Chou, C. J. Cheng, W. Y. Lien, Analysis and experiment of non-Darcian convection in horizontal square packed-sphere channels, 2- Mixed convection. International Journal of Heat and Mass Transfer, 1992, Vol. 35, Issue 5, pp. 1197-1207.
9. A. Delache, Etude analytique et numérique des instabilités spatio-temporelles des écoulements de convection mixte en milieu poreux : comparaison avec l'expérience, Thèse doctorat de l'université des Sciences et Technologie de Lille, 2005.
10. S. Ben Nassralah, Convection naturelle instationnaire dans un cylindre rempli de grains ouvert à ses extrémités et dont la paroi est chauffée par un flux de chaleur constant : validité de l'hypothèse de l'équilibre thermique local, International Journal of Heat and Mass Transfer, 1997, Vol. 40, No. 5, pp. 1155-1168.
11. M. Marcoux, Naissance de la convection thermosolutale dans une cellule rectangulaire poreuse soumise à des flux de chaleur et de masse, International Journal of Thermal Sciences, 1999, pp. 258-266.

12. S. Patankar, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, McGraw Hill, New York, 1980.
13. P.C. Huang, C.F. Yang, J.J Huang, M.T. Chiu, Enhancement of forced – convection cooling of multiple heated blocks in a channel using porous covers, International Journal of Heat and Mass Transfer 48, 2005, pp. 647-664.
14. Y. Ould-Amer, S. Chikh, K. Bouhadeif, G. Lauriat, Forced convection cooling enhancement by use of porous materials, International Journal of Heat Fluid 19,1998, pp. 251-258.
15. S.C. Tzeng, Convective heat transfer in a rectangular channel filled with sintered bronze beads and periodically spaced heated blocks. Journal of Heat, Vol. 128, Issue5, pp. 453-464.
16. S. Chikh, A. Boumediene, K. Bouhadeif, G. Lauriat, Analysis of fluid flow and heat transfer in a channel with intermittent heated porous blocks, Heat and Mass transfer 33, 1998, pp. 405-413.
17. . Korichi, L. Oufer, Numerical heat transfer in a rectangular channel with mounted obstacles on upper and lower walls. International Journal of Thermal Sciences, Vol. 44, Issue 7, 2005, pp. 644-655.
18. M. Najam, A. Amahmid, M. Hasnaoui, M. El Alami, Unsteady mixed convection in a horizontal channel with rectangular blocks periodically distributed on its lower wall, International Journal of Heat and Fluid Flow 24, 2003, pp. 726–735.
19. M.M. Mohamed, Air cooling characteristics of a uniform square modules array for electronic device heat sink, Applied Thermal Engineering 26, 2006, pp.486– 493.
20. D. Helel, N. Boukadida, Transfert de chaleur et de masse dans un milieu poreux non sature soumis à une convection forcée laminaire, 13èmes Journées Internationales de Thermique, France 2007.
21. H.J. Sung, S.Y. Kim, J.M. Hyun, Forced convection from an isolated heat source in a channel with porous medium, International Journal Heat Fluid Flow, Vol. 16, No. 6, 1995, pp. 527-535.
22. P.X. Jiang, Z. Wang, Z.P. Ren, B.X. Wang, Experimental research of fluid flow and convection heat transfer in plate channels filled with glass or metallic particles, Experimental Thermal and Fluid Science, 1999, Vol. 20, Issue.1, pp.45-54.

Résumé

Notre travail consiste à étudier des phénomènes de transfert de chaleur et de masse dans un canal rempli d'une matière poreuse. Dans la première partie, on se propose d'étudier l'écoulement de la convection forcée et mixte dans un canal horizontal plan rempli d'une matière poreuse. L'écoulement d'air est incompressible, bidimensionnel et laminaire. Les parois du canal sont maintenues isothermes et à concentrations constantes. L'espèce diffusée dans l'air est la vapeur d'eau. Les paramètres de contrôle sont le rapport d'aspect géométrique, le nombre de Reynolds, le nombre de Schmidt, le nombre de Prandtl, le coefficient de Forchheimer et le nombre de Darcy. Le système des équations modélisantes est résolu numériquement par la méthode des volumes finis. Le nombre de Darcy est le seul paramètre de contrôle variable. Les résultats sont groupés en deux classes. La première concerne les résultats de la convection forcée obtenus avec un nombre de Darcy égal 10^{-9} . Avec ce nombre, le modèle de l'écoulement est dominé par les termes de Darcy et de gradient de pression. Pour un nombre de Darcy relativement très élevé, égal à 10^{-2} . Les termes de Forchheimer et de Brinkmann rendre importants dans les équations du mouvement. Le modèle d'écoulement de la convection forcée est dominé par les termes de Darcy, de gradient de pression, de Forchheimer et de Brinkman. La deuxième classe concerne l'écoulement de la convection mixte bi diffusive dans un canal horizontal poreux par les mêmes conditions thermiques et hydrodynamiques. Les paramètres de contrôle sont le rapport d'aspect géométrique, le nombre de Reynolds, le nombre de Grashof thermique, le nombre de Grashof solutal, le nombre de Schmidt, le nombre de Prandtl, le coefficient de Forchheimer et le nombre de Darcy. Le système des équations est résolu numériquement par un développement d'un code numérique en utilisant la méthode des volumes finis. Les résultats sont groupés en deux parties à savoir : La première partie concerne les résultats de convection, forcées et mixte, obtenus avec un nombre de Darcy égal 10^{-9} . Avec ce nombre, les résultats des convections forcée et mixte sont semblables et le modèle de l'écoulement est dominé par les termes de Darcy et de gradient de pression. La deuxième partie des résultats est obtenue avec un nombre de Darcy relativement très élevé, égal à 10^{-2} . Avec ce nombre, le modèle de l'écoulement de la convection mixte est dominé par les termes cités pour l'écoulement de la convection forcée plus les termes du poussées thermique et solutales, pour un nombre de Darcy égal 10^{-2} , nous avons trouvé certaines différence entre les résultats des convection forcée et mixte.

L'originalité dans notre travail est la simulation numérique bidimensionnelle du refroidissement par la convection forcée de l'air de six blocs montés sur la paroi inférieure d'un canal plan horizontal rempli (ou non rempli) d'une matière poreuse. Les blocs sont équidistants et uniformément chauffés par un apport de chaleur volumétrique. Le but de l'étude est la détermination de l'amélioration du refroidissement des blocks lorsque le canal est rempli d'une matière poreuse. Le problème est modélisé par les équations de continuité, des quantités de mouvement et d'énergies, avec leurs conditions, initiales et aux limites, appropriées. Lorsque le canal est rempli d'une matière poreuse, le modèle Darcy-Forchheimer-Brinkman est utilisé pour la modélisation de l'écoulement. Les équations modélisantes sont résolues par la méthode des volumes finis avec une précision du second ordre. Les résultats montrent que l'écoulement du canal rempli avec la matière poreuse est très différent de celui du canal qui ne contient pas la matière poreuse. Une différence majeure est l'apparence des tourbillons entre les blocs lorsque la matière poreuse est inexistante. Cette différence des écoulements favorise l'amélioration du transfert thermique convectif de l'écoulement du canal rempli de la matière poreuse. En plus, la conductivité thermique effective de la matière poreuse considérée est supérieure à celle du fluide. Ces deux facteurs entraînent un refroidissement amélioré des blocs montés dans le canal rempli de la matière poreuse. Et donc, l'utilisation des milieux poreux lorsqu'elle est possible, est recommandée parce qu'elle améliore le refroidissement des blocs montés dans les canaux.

Mots clés: Canal, Milieux poreux, Refroidissement des blocs chauffés, Transfert, Masse, Chaleur, Volumes finis, Convection forcée, Convection mixte, Darcy, Brinkman, Forchheimer.

Abstract

Our goal is to study phenomena of heat transfer and mass in a channel filled with a porous material. In the first part, we propose to study the flow of forced and mixed convection in a horizontal plane channel filled with a porous material. The air flow is incompressible, two-dimensional and laminar. The canal walls are insulated and maintained at constant concentrations. The species diffused in the air is the water vapor. The control parameters are the geometric aspect ratio, the Reynolds number, the Schmidt number, the Prandtl number, the Forchheimer coefficient and the Darcy number. The system of equations modelling is solved numerically using the finite volume method. The Darcy number is the only variable control parameter. The results are grouped into two classes. The first concerns the results of the forced convection obtained with a Darcy number equal 10^{-9} . With this number, the model of the flow is dominated by the Darcy terms and pressure gradient. For a Darcy number relatively high, equal to 10^{-2} . The Forchheimer and Brinkman terms make significant in the motion equations. The model flow of forced convection is dominated by the Darcy, gradient pressure, Brinkman and Forchheimer terms. The second class concerns the flow of mixed bidiffusive convection in a horizontal porous channel by the same thermal and hydrodynamic conditions. The control parameters are the geometric aspect ratio, the Reynolds number, the thermal Grashof number, the Grashof solutal number, the Schmidt number, the Prandtl number, the Forchheimer coefficient and the Darcy number. The system of equations is solved numerically by developing a numerical code using the finite volume method. The results are grouped into two parts as follows: The first part concerns the results of forced and mixed convection, obtained with a Darcy number equal 10^{-9} . With this number, the results of forced and mixed convection are similar and the flow model is dominated by the Darcy and pressure gradient terms. The second part of the results obtained with a Darcy number relatively high, equal to 10^{-2} . With this number, the flow model of mixed convection is dominated by the terms cited in the forced convection flow with the terms of thermal and solutal pushes for a Darcy number equal 10^{-2} ; we found some differences between the results of forced and mixed convection. The originality in our study is the two-dimensional numerical simulation of cooling by forced convection of air for a six blocks mounted on the lower wall of a horizontal channel filled (or not filled) with a porous material. The blocks are equally and evenly heated by a volumetric heat. The purpose of the study is the

determination of the improving of the cooling of the blocks when the channel is filled with a porous material. The problem is modelled by the continuity, movement and energy equations, with their appropriate, initial and limited conditions. When the channel is filled with a porous material, the Darcy-Forchheimer-Brinkman model is used for modelling the flow. The equations model is solved by the finite volume method with a second order accuracy. The results show that the flow channel filled with the porous material is very different from the channel that does not contain the material. A major difference is the appearance of eddies between the blocks when the material is non-existent. This difference of the flows promotes improved convective heat transfer of the flow in a channel filled with the material. In addition, the effective thermal conductivity of porous material is considered superior to that of the fluid. Both factors lead to improved cooling blocks fitted into the channel filled with the material. And therefore, the use of porous media when it is possible is recommended because it improves the cooling blocks mounted in the channels.

Keywords: Channel, Porous medium, Cooling of the heated blocks, Transfer, Mass, Heat, Finite volume, Forced convection, Mixed convection, Darcy, Brinkman, Forchheimer.

تلخيص

مهمتنا هي دراسة الظواهر من نقل الحرارة والكتلة في قناة مملوئة بمادة نافذة ، في الجزء الأول ، نقترح دراسة تدفق الحمل الحراري القسري و المختلط في قناة أفقية مملوئة بمادة نافذة. تدفق الهواء ينضغط ، ثنائي الأبعاد و رقائقي. جدران القناة معزولة وذات تراكيز ثابتة. العنصر المنتشر في الهواء هو بخار الماء. وسائط التحكم هي نسبة الجانب الهندسي ، عدد رينولدز ، عدد شميت، عدد برونديل ، معامل فورخايمر وعدد دارسي. الحل العددي لنظام المعادلات النموذجية يتم بطريقة الحجم المحدودة. عدد دارسي هو فقط الوسيط المتغير. النتائج مقسمة إلى فئتين. الأولى تتعلق بنتائج الحمل الحراري القسري مع عدد دارسي يساوي 10^9 . مع هذه القيمة ، نموذج التدفق يهيمن عليه عبارتي دارسي و تدرج الضغط. بالنسبة لعدد دارسي كبير نسبيا، يساوي 10^2 ، مدلول عبارتي فورخايمر و برينكمان كبير في معادلات الحركة. نموذج التدفق الحراري القسري يهيمن عليه كل من عبارة دارسي ، تدرج الضغط ، برينكمان و فورخايمر. وتعلق الفئة الثانية بتدفق الحمل الحراري المختلط في قناة أفقية مملوئة بالمادة النافذة بنفس الشروط الحرارية والمائية السابقة. وسائط التحكم هي نسبة الجانب الهندسي، عدد رينولدز، عدد غراشوف الحراري، عدد غراشوف المادي، عدد شميت، عدد برونديل، معامل فورخايمر وعدد دارسي. الحل العددي لنظام المعادلات النموذجية يتم بطريقة الحجم المحدودة. النتائج مقسمة إلى جزئين على النحو التالي : الجزء الأول يتعلق بنتائج الحمل الحراري المختلط بعدد دارسي يساوي 10^9 . مع هذا العدد ، نتائج الحمل الحراري و القسري متماثلة والتدفق يهيمن عليه عبارتي دارسي الضغط و تدرج الضغط. الجزء الثاني من النتائج التي تم التوصل إليها كانت بعدد دارسي كبير نسبيا، يساوي 10^2 . مع هذا العدد ، تدفق الحمل الحراري المختلط يهيمن عليه العبارات المذكورة في الحمل الحراري القسري زائد عبارتي الدفع الحراري و المادي. بعدد دارسي يساوي 10^2 ، وجدنا بعض الفرق بين نتائج الحمل الحراري القسري و المختلط. الجانب الأصلي في عملنا هو المحاكاة العددية ثنائية الأبعاد للتبريد عن طريق الحمل الحراري القسري لست قطع صلبة موضوعة في الجدار الأسفل لقناة أفقية مملوئة بالمادة النافذة (أو لا). القطع ذات شكل متساو و مسخنة بواسطة حرارة حجمية. الغرض من هذه الدراسة هو تحديد وتحسين تبريد هذه القطع عند قناة مملوئة بالمادة النافذة. توضع معادلات الاستمرارية، كمية الحركة و الطاقة، مع الشروط الابتدائية و الحدية المناسبة. عندما تكون القناة مملوئة بالمادة النافذة، فإن النموذج دارسي- فورخايمر- برينكمان يستخدم لنمذجة التدفق. نظام المعادلات يحل عدديا بطريقة الحجم المحدودة بدقة من الدرجة الثانية. تبين النتائج أن تدفق قناة مملوئة بالمادة النافذة مختلف جدا عنه في قناة لا تحتوي على تلك المادة. هناك فرق كبير يتمثل في ظهور الدوامات بين القطع عندما تكون القناة لا تحتوي على المادة النافذة. هذا الفرق في الجريان السطحي يساعد على تحسين نقل الحرارة بالحمل في قناة مملوئة بالمادة النافذة. بالإضافة إلى ذلك، فعالية الموصلية الحرارية للمادة النافذة يعتبر أقوى منها في السوائل. كل هذه العوامل تؤدي إلى تحسين تبريد القطع المجهزة في قناة مملوئة بالمادة النافذة. بالتالي، فإن استخدام المواد النافذة عند الإمكان، يوصى به لتحسين تبريد القطع الموضوعة في القنوات.

الكلمات المفتاحية : قناة، وسط نافذ، تبريد القطع الساخنة، نقل حراري، مادة، حرارة، حجم محدود، حمل حراري قسري ، حمل حراري مختلط، دارسي، برينكمان، فورخايمر.