

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI-CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

N° d'ordre :...../Doct/2009.

Série :...../GM/2009.

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de Doctorat en Science
en Génie Mécanique

STABILITE MAGNETOHYDRODYNAMIQUE
DES ECOULEMENTS DE CONVECTION NATURELLE
DANS DES ENCEINTES

OPTION :

Energétique

Présentée par : Mme BATTIRA Mouna, Née MAACHE

Soutenue le: 07/06/2009

Devant le jury composé de :

Président :	M ^f . A. BOUCHOUCHA	Professeur	Université Mentouri-Constantine
Rapporteur :	M ^f . R. BESSAIH	Professeur	Université Mentouri-Constantine
Examineurs :			
	M ^f . S. BOUGOUL	Professeur	Université El Hadj Lakhdar-Batna
	M ^f . C. BOUGRIOU	M. Conférences A	Université El Hadj Lakhdar-Batna
	M ^f . S. BENISSAAD	M. Conférences A	Université Mentouri-Constantine

A Amar

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier vivement mon directeur de thèse, Mr Rachid BESSAÏH, Professeur à l'Université Mentouri-Constantine, pour l'honneur qu'il m'a accordé en acceptant d'encadrer ce travail de recherche. Je lui suis très reconnaissante pour sa patience, pour son support académique tout au long de ce travail et pour ses précieux conseils qui m'ont été et me seront très utiles. J'ai beaucoup apprécié les années que j'ai passées sous sa supervision et je lui souhaite tout le succès dans ce qu'il entreprend.

Je tiens aussi à exprimer toute ma gratitude à Mr Ali Bouchoucha, Professeur à l'Université Mentouri-Constantine, qui ma honorer en acceptant de présider le jury de cette thèse.

J'exprime ma gratitude à Mr Smail BENISSAAD, Maître de Conférences A à l'Université Mentouri - Constantine, pour son aide et ses encouragements, et pour avoir accepter de faire partie du jury.

Je remercie également Messieurs Chérif BOUGRIOU, Maître de Conférences A et Saâdi BOUGOUL, Professeur à l'Université Elhadj-Lakhdar-Batna, pour avoir accepter de juger et mettre en valeur ce modeste travail.

SOMMAIRE

DEDICACE	i
REMERCIEMENTS	ii
SOMMAIRE	iii
LEGENDE DES FIGURES	v
LEGENDE DES TABLEAUX	x
NOMENCLATURE	xi

CHAPITRE I :

INTRODUCTION	1
I. 1. GENERALITES.....	1
I. 2. TRAVAUX ANTERIEURS.....	1
I. 3. OBJECTIFS.....	17

CHAPITRE II :

MODELE MATHEMATIQUE	19
II. 1. PROBLEME 1	19
II. 1. 1. Géométrie	19
II. 1. 2. Hypothèses Simplificatrices	21
II. 1. 3. Equations Sous Forme Dimensionnelle	21
II. 1. 4. Conditions Initiales et aux Limites Sous Forme dimensionnelle.....	24
II. 1. 5. Equations Sous Forme Adimensionnelle	24
II. 1. 6. Conditions Initiales et aux Limites Sous Forme Adimensionnelle	27
II. 2. PROBLEME 2	28
II. 2. 1. Géométrie	28
II. 2. 2. Hypothèses Simplificatrices	29
II. 2. 3. Equations Sous Forme Dimensionnelle	29
II. 2. 4. Conditions Initiales et aux Limites sous Forme Dimensionnelle.....	30
II. 2. 5. Equations Sous Forme Adimensionnelle	31
II. 2. 6. Conditions Initiales et aux Limites Sous Forme Adimensionnelle.....	33

CHAPITRE III :

SOLUTION NUMERIQUE	34
---------------------------------	----

III. 1. INTRODUCTION.....	34
III. 2. MAILLAGE.....	34
III. 3. DISCRETISATION	39
III. 4. DISCRETISATION DE L'EQUATION DU POTENTIEL ELECTRIQUE.....	43
III. 5. ALGORITHMES DE RESOLUTION.....	45
III. 5. 1. Algorithme SIMPLER [56].....	45
III. 5. 2. Algorithme TDMA	49
III. 6. CRITERE DE CONVERGENCE	51
 CHAPITRE IV :	
RESULTATS ET DISCUSSIONS.....	53
IV. 1. PROBLEME 1	53
IV. 1. 1. Effet du Maillage sur les Solutions Numériques	53
IV. 1. 2. Validation du Code de Calcul.....	55
IV. 1. 3. Structure de l'Ecoulement	57
IV. 1. 4. Champ du Potentiel et Structure du Courant Electrique	76
IV. 1. 5. Structure Thermique	81
IV. 1. 6. Nombres de Nusselt Local et Moyen	81
IV. 2. PROBLEME 2	87
IV. 2. 1. Effet du Maillage sur les Solutions Numériques.....	87
IV. 2. 2. Validation du Code de Calcul.....	90
IV. 2. 3. Champ d'Ecoulement	94
IV. 2. 4. Solution Oscillatoire Sans et Avec Champ Magnétique	96
IV. 2. 5. Diagramme de Stabilité	105
CONCLUSION	107
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	109
ABSTRACT	117
RESUME	118
RESUME EN ARABE	119

LEGENDE DES FIGURES

Figure II. 1: Géométrie du problème 1. Bx et By sont orientés respectivement suivant les directions x et y.....	22
Figure II. 2: Géométrie du problème 2. La partie supérieure de la cavité représente une surface libre.....	29
Figure III. 1: Volume de contrôle sur lequel les équations différentielles aux dérivées partielles sont intégrées	35
Figure III. 2: Volume de contrôle (de l'équation d'impulsion suivant x) du maillage entrelacé pour la composante de vitesse u: (a) vue dans OXY, (b) vue dans OXZ	36
Figure III. 3: Volume de contrôle (de l'équation d'impulsion suivant y) du maillage entrelacé pour la composante de vitesse v: (a) vue dans OYZ, (b) vue dans OYX	37
Figure III. 4: Volume de contrôle (de l'équation d'impulsion suivant z) du maillage entrelacé pour la composante de vitesse w: (a) vue dans OZX, (b) vue dans OZY	38
Figure IV. 1: Effet du maillage pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$ et $Ha=0$ sur la variation de: (a) la vitesse verticale adimensionnelle v par rapport à x aux stations $y=0.5$ et $z=0.65$; (b) la température adimensionnelle par rapport à y aux stations $x=1.8$ et $z=0.3$	54
Figure IV. 2: (a) Positions des sondes des thermocouples dans la cavité (b) définition des différences de température, utilisées dans l'étude expérimentale de Hof et al. [22].....	55
Figure IV. 3: Comparaison entre nos calculs et les résultats expérimentaux [22] pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$ de: (a) la variation de la différence verticale de température $delt_{long}$ avec le nombre de Hartmann, Ha (b) la variation de la différence longitudinale de température $delt_{mid}$ avec le nombre de Hartmann, Ha...	56
Figure IV. 4: Vecteurs vitesses pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$ et $Ha= 0$ (sans champ magnétique) : (a) dans la cavité, (b) dans le plan x-z, (c) dans le plan x-y.....	58
Figure IV. 5: Vecteurs vitesses pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$ et $Ha= 25 (\vec{B} \square B \vec{i})$: (a) dans la cavité, (b) dans le plan x-z, (c) dans le plan x-y.....	59

Figure IV. 6: Vecteurs vitesse pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$ et $Ha=25 (\vec{B} \square B \vec{j})$:
(a) dans la cavité, (b) dans le plan x-z, (c) dans le plan x-y.....60

Figure IV. 7: Vecteurs vitesse pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$ et $Ha=50 (\vec{B} \square B \vec{i})$:
(a) dans la cavité, (b) dans le plan x-z.....61

Figure IV. 8: Vecteurs vitesse pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$ et $Ha=50 (\vec{B} \square B \vec{j})$:
(a) dans la cavité, (b) dans le plan x-z.....62

Figure IV. 9: Vecteurs vitesse pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$ et $Ha=25 (\vec{B} \square B \vec{i})$ dans
le plan x-z à: (a) $y \square \frac{3}{4}$, (b) $y \square \frac{1}{2}$, (c) $y \square \frac{1}{4}$ 64

Figure IV. 10: Vecteurs vitesse pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$ et $Ha=25 (\vec{B} \square B \vec{j})$ dans
le plan x-z à: (a) $y \square \frac{3}{4}$, (b) $y \square \frac{1}{2}$, (c) $y \square \frac{1}{4}$65

Figure IV. 11: Vecteurs vitesse pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$ et $Ha=25 (\vec{B} \square B \vec{i})$ dans
le plan x-y à: (a) $z \square \frac{3}{4}$, (b) $z \square \frac{1}{2}$, (c) $z \square \frac{1}{4}$ 66

Figure IV. 12: Vecteurs vitesse pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$ et $Ha=25 (\vec{B} \square B \vec{j})$ dans
le plan x-y à: (a) $z \square \frac{3}{4}$, (b) $z \square \frac{1}{2}$, (c) $z \square \frac{1}{4}$67

Figure IV. 13: Iso-valeurs de v dans le plan x-z, à $y=1/2$: (a) $Ha=0$, (b) $Ha=25$
 $(\vec{B} \square B \vec{i})$, (c) $Ha=50 (\vec{B} \square B \vec{i})$, (d) $Ha=25 (\vec{B} \square B \vec{j})$, (e) $Ha=50$
 $(\vec{B} \square B \vec{j})$69

Figure IV. 14: Iso-valeurs de w dans le plan x-z, à $z=1/2$: (a) $Ha=0$, (b) $Ha=25$
 $(\vec{B} \square B \vec{i})$, (c) $Ha=50 (\vec{B} \square B \vec{i})$, (d) $Ha=25 (\vec{B} \square B \vec{j})$, (e) $Ha=50$
 $(\vec{B} \square B \vec{j})$70

Figure IV. 15: Représentation vectorielle de la composante w des vecteurs
vitesse pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$ et $Ha=25$: (a) $\vec{B} \square B \vec{i}$,
(b) $\vec{B} \square B \vec{j}$ 72

Figure IV. 16: Représentation vectorielle de la composante w des vecteurs
vitesse pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$ et $Ha=50$: (a) $\vec{B} \square B \vec{i}$,
(b) $\vec{B} \square B \vec{j}$ 73

Figure IV. 17: Suivis de quelques particules pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$ (sans
et avec champ magnétique): (a) sans champ magnétique
(b) $Ha=10, \vec{B} \square B \vec{i}$, (c) $Ha=10, \vec{B} \square B \vec{j}$, (d) $Ha=50$,

(c) $\vec{B} \square B \vec{i}$; (e) $Ha=50, \vec{B} \square B \vec{j}$ 74

Figure IV. 18: Iso-surfaces du potentiel électrique pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$:

(a) $Ha=0$; (b) $Ha=25, \vec{B} \square B \vec{i}$; (c) $Ha=25, \vec{B} \square B \vec{j}$;
 (d) $Ha=50, \vec{B} \square B \vec{i}$; (e) $Ha=50, \vec{B} \square B \vec{j}$ 76

Figure IV. 19: Courants électriques pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$: (a) $Ha=25,$

$\vec{B} \square B \vec{i}$; (b) $Ha=25, \vec{B} \square B \vec{j}$; (c) $Ha=50, \vec{B} \square B \vec{i}$;
 (d) $Ha=50, \vec{B} \square B \vec{j}$ 79

Figure IV. 20: Iso-surfaces de température pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$ (sans

et avec champ magnétique) : (a) sans champ magnétique,
 (b) $Ha=50$; le champ magnétique est orienté dans la direction x
 (c) $Ha=50$; le champ magnétique est orienté dans la direction y.....83

Figure IV. 21: Iso-contours du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude

pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$: (a) sans champ magnétique: $Ha= 0$
 (b) $Ha=45$, le champ magnétique est orienté dans la direction x,
 (c) $Ha=45$, le champ magnétique est orienté dans la direction y.....84

Figure IV. 22: Variation de $u_{max}, v_{max},$ et w_{max} avec le nombre de Ha

pour les différents cas (cas 1: toutes les parois sont électriquement conductrices
 cas 2: seulement les parois verticales sont électriquement conductrices
 cas 3: seulement les parois horizontales sont électriquement conductrices
 cas 4: seulement les parois frontales sont électriquement conductrices)
 (a) $u_{max},$ (b) $v_{max},$ (c) w_{max}85

Figure VI. 23: Variation du nombre de Nusselt moyen Nu_{moy} avec le nombre de Ha

pour différents cas (cas 1: toutes les parois sont électriquement conductrices
 cas 2: seulement les parois verticales sont électriquement conductrices;
 cas 3: seulement les parois horizontales sont électriquement conductrices
 cas 4: seulement les parois frontales électriquement conductrices)
 pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$ 86

Figure IV. 24: Effet du maillage sur la variation de la vitesse verticale dimension-

nelle v^* à $y^*=0.25$ cm et $z^*=7.5$ cm par rapport à x^* 88

Figure IV. 25: Effet du maillage sur la variation de la température dimensionnelle T^*

à $y^*=0.25$ cm et $z^*=7.5$ cm par rapport à x^* 88

Figure IV. 26 : Position des sondes choisies pour capter les instabilités.....89

Figure IV. 27 : Distribution de la température en trois points à $z^* = 7.5$ cm. Comparaison avec l'expérimental et le calcul numérique de [29] pour $Ha=0$	90
Figure IV. 28 : Distribution de température en trois points à $z^* = 7.5$ cm. Comparaison entre nos calculs et les données expérimentales [29] pour le champ magnétique longitudinal (B_z) de 300 Gauss.....	91
Figure IV. 29 : Distribution de la vitesse en magnitude sans champ magnétique $B=0$, à $z^* = 7.5$ cm: (a) $y^* = 0.25$ cm, (b) $y^* = 1.5$ cm. Comparaison entre nos simulations numériques et les données expérimentales [29].....	92
Figure IV. 30 : Distribution de la vitesse en magnitude par rapport à x^* pour le champ magnétique longitudinal (B_z) de 300 Gauss, à $z^* = 7.5$ cm : (a) $y^* = 0.25$ cm, (b) $y^* = 1.5$ cm. Comparaison entre nos simulations numériques et les données expérimentales [29].....	93
Figure IV. 31: Vecteurs vitesses avec $Ha=2.5$ et $Gr \square 7.6 \square 10^6$: (a) champ magnétique transversal B_x (b) champ magnétique longitudinal B_z	95
Figure IV. 32: Evolution temporelle de la température adimensionnelle T pour $Gr=7.6 \times 10^6$ et $Ha=0$	97
Figure IV. 33: Evolutions temporelles pour les deux directions du champ magnétique ($\vec{B} \square B\vec{i}$ et $\vec{B} \square B\vec{k}$) pour $Ha=5$: (a) la vitesse adimensionnelle u , (b) la vitesse adimensionnelle v , (c) la vitesse adimensionnelle w , (d) la température adimensionnelle T	98
Figure IV. 34: Evolutions temporelles de u et de v pour le champ magnétique ($\vec{B} \square B\vec{i}$) pour $Ha=10$ enregistrées à la sonde $S_1 \setminus 15,15,25 \setminus$, $Gr_{crit} \square 7.8 \square 10^6 \setminus$	100
Figure IV. 35: Densité du spectre d'énergie obtenue par transformation de Fourier de la vitesse adimensionnelle u à la sonde $S_1 \setminus 15,15,25 \setminus$ pour $Ha=10$ ($\vec{B} \square B\vec{i}$) $Gr_{crit} \square 7.8 \square 10^6 \setminus$, avec $\lambda t \square 1 \square 10^{15}$ et 2^{14} échantillons.	

Fcr=46.39 représente la fréquence critique dominante	100
Figure IV. 36: Evolutions temporelles de u et de T pour le champ magnétique ($\vec{B} \parallel B\vec{k}$) pour Ha=10 enregistrées à la sonde $S_1(45,15,50)$, $Gr_{crit} \approx 7.9 \times 10^6$	101
Figure IV. 37: Densité du spectre d'énergie obtenue par transformation de Fourier de la vitesse adimensionnelle u à la sonde $S_1(45,15,50)$ pour Ha=10 ($\vec{B} \parallel B\vec{k}$), $Gr_{crit} \approx 7.9 \times 10^6$, avec $\lambda t \approx 1 \times 10^{0.5}$ et 2^{14} échantillons.....	101
Figure IV. 38: Vecteurs vitesses à $z=W/2$: (a) Ha=0, (b) Ha=10 ($\vec{B} \parallel B\vec{i}$), (c) Ha=10 ($\vec{B} \parallel B\vec{k}$).....	103
Figure IV. 39: Influence du nombre de Hartmann sur le nombre de Nusselt moyen de la paroi chaude, pour les deux directions du champ magnétique ($\vec{B} \parallel B\vec{i}$ et $\vec{B} \parallel B\vec{k}$).....	104
Figure VI. 40: Digramme de Stabilité $Gr_{crit}-Ha$ pour les deux directions du champ magnétique (Bx and Bz).....	105

LEGENDE DES TABLEAUX

Tableau II. 1: Propriétés physiques du Gallium [29].....	20
Tableau III. 1. Différentes quantités transportées et leurs termes de transport pour le problème 1.....	40
Tableau III. 2. Différentes quantités transportées et leurs termes de transport pour le problème 2.....	41
Tableau III. 3 : La fonction $A\downarrow P_i\downarrow$ pour les différents types des schémas de la méthode des volumes finis.....	43
Tableau IV. 1: Comparaison entre nos résultats numériques et ceux trouvés Par Tagawa et Ozoe[5], pour $Ra=10^5, Pr=0.025 Ha=100$	82

NOMENCLATURE

A	Rapport d'aspect [-].
$A P _{\tau}$	Fonction d'un schéma numérique en fonction du nombre de Peclet.
\vec{B}	Vecteur densité du flux magnétique adimensionnel.
B	Densité du flux magnétique uniforme, [Tesla].
Bi	Nombre de Biot ($=hL/k$).
b	Terme source dans le système d'équations algébriques discrétisées.
c_p	Chaleur spécifique à pression constante, [J/kg.K].
D	Terme de diffusion dans le système d'équations algébriques discrétisées.
dt	Pas de temps adimensionnel.
dx	Distance entre le nœud P et les nœuds E et W, [m].
dy	Distance entre le nœud P et les nœuds N et S, [m].
dz	Distance entre le nœud P et les nœuds T et B, [m].
F	Terme de convection dans le système d'équations algébriques discrétisées.
\vec{F}	Vecteur force de Lorentz adimensionnelle.
\vec{g}	Accélération de pesanteur, [m/s ²].
Gr	Nombre de Grashof [$Gr = g \uparrow T_h \square T_c \sim L^3 / \square^2 A$) pour le problème 1, et ($Gr = g \uparrow T_h \square T_c \sim L^3 / \square^2$) pour le problème 2].
\vec{e}_b	Vecteur unitaire de la direction de \vec{B} .
H	Hauteur de la cavité, [m].
h	Coefficient de transfert de chaleur convectif, [W / m ² .K].
Ha	Nombre de Hartmann ($= B_0 L \sqrt{-/\mathcal{F}}$).
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	Composantes du vecteur unitaire dans le système de coordonnées Cartésiennes.
\vec{J}	Vecteur densité du courant électrique, [A/m ²].
k	Conductivité thermique du fluide, [W/m.K].
L	Dimension de la cavité suivant x, [m].
Nu	Nombre de Nusselt local.
Nu_{moy}	Nombre de Nusselt moyen.

P	Pression adimensionnelle.
Pr	Nombre de Prandtl ($\frac{\rho \nu}{\mu}$).
Q	flux thermique, [W].
S	Surface des parois chaude et froide $H \times W$, [m^2].
S'	Surface libre pour le problème 2 $L \times W$, [m^2].
S_s	Terme source.
T	Température adimensionnelle.
T_∞	Température ambiante, [K].
t	Temps adimensionnel.
u, v, w	Vitesses adimensionnelles respectivement dans les directions x, y, et z.
\vec{V}	Vecteur vitesse adimensionnelle.
W	Dimension de la cavité suivant z, [m].
x, y, z	Coordonnées cartésiennes adimensionnelles.

SYMBOLES GRECQUES :

α	Diffusivité thermique du fluide, [m^2/s].
β	Coefficient d'expansion thermique du fluide, [K^{-1}].
γ	Variable dépendante générale (représente: la pression, la température et les composantes de la vitesse).
δ	Coefficient de diffusion générale.
λ_t	Incrément du temps, [s].
$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$	Dimensions du volume de contrôle considéré, [m].
η	Viscosité dynamique du fluide, [Pa.s].
ν	Viscosité cinématique du fluide, [m^2/s].
ρ	masse volumique du fluide, [kg/m^3].
σ	Conductivité électrique, [$\Omega^{-1}.m^{-1}$].
ϕ	Potentiel électrique, [V].

INDICES :

B	Point à l'arrière du nœud P.
-----	------------------------------

<i>b</i>	La face arrière du volume de contrôle considérée.
<i>cr</i>	Critique.
<i>c</i>	Froide.
<i>E</i>	Point à l'Est du nœud central P.
<i>e</i>	La face Est du volume de contrôle considéré.
<i>h</i>	Chaude.
<i>N</i>	Point au Nord du nœud P.
<i>n</i>	La face Nord du volume de contrôle considérée.
<i>P</i>	Nœud au centre du volume de contrôle considéré.
<i>S</i>	Point au Sud du nœud P.
<i>s</i>	La face Sud du volume de contrôle considérée.
<i>sl</i>	Surface libre.
<i>T</i>	Point au front du nœud P.
<i>t</i>	La face au front du volume de contrôle considérée.
<i>W</i>	Point à l'Ouest du nœud P.
<i>w</i>	La face Ouest du volume de contrôle considérée.
<i>0</i>	Initial.
□	ambiante.

CHAPITRE I

INTRODUCTION

I. 1. GENERALITES:

La convection naturelle d'un fluide conducteur de l'électricité contenu dans une cavité fermée représente un sujet adéquat de recherche scientifique, à cause de sa présence dans maintes procédés industriels, tels que la géophysique, les systèmes de refroidissement des réacteurs nucléaires, les collecteurs de l'énergie solaire et spécialement lors du processus de croissance cristalline [1]. L'utilisation répandue de ce dernier dans des applications électroniques et optiques a eu, pour conséquence, une recherche étendue envers la compréhension et le contrôle de la convection naturelle dans ces systèmes. Dans ce contexte, la convection est étudiée avec la motivation de l'éviter ou de la réduire, à cause de son rôle important dans la formation des défauts tels que les hétérogénéités de composition dans le cristal.

Avec l'application d'un champ magnétique externe, il est possible d'agir sur les écoulements sans aucun contact physique et ainsi supprimer les fluctuations, contrôler les transferts thermique et massique, et donc améliorer la qualité du cristal. A cet effet, le ralentissement magnétique pour contrôler l'écoulement induit par un gradient de température est devenu un moyen privilégié et a fait l'objet de plusieurs applications industrielles [1-31]. Le problème de la convection naturelle d'un fluide conducteur d'électricité dans une enceinte rectangulaire ou cubique, chauffée uniformément sur un côté vertical et refroidi par le côté opposé, sous l'action d'un champ magnétique externe a été intensivement étudié ces dernières années.

I. 2. TRAVAUX ANTERIEURS:

Fumizawa (1980) [1] a mené une étude expérimentale sur ce problème dans une enceinte rectangulaire utilisant l'eutectique NaK (Na: Sodium et K: Potassium). Le champ magnétique est appliqué horizontalement et parallèle à la paroi verticale uniformément chauffée, il a montré que le taux de transfert de chaleur est remarquablement réduit par l'application d'un champ magnétique modéré.

Ozoe et Okada (1989) [2] ont étudié numériquement la convection naturelle tridimensionnelle du Silicone ($Pr=0,054$) dans une enceinte cubique pour trois champs magnétiques agissant suivant les directions principales, ils ont conclut que la réduction de la convection naturelle des métaux liquides dépend fortement de la direction du champ magnétique appliqué.

Plus tard Okada et Ozoe (1992) [3] ont étudié le même cas expérimentalement pour $Pr=0.024$ et leurs résultats étaient en bon accord avec ceux trouvés numériquement auparavant, ils ont constaté une légère augmentation du transfert thermique sous un faible champ magnétique. Cependant, l'interaction entre le champ magnétique et l'écoulement du fluide électro-conducteur n'a pas été suffisamment clarifiée.

Le travail de Tagawa et Ozoe (1997) [4] a clarifié les théories de base de l'augmentation du transfert thermique sous l'action d'un champ magnétique par une analyse numérique tridimensionnelle pour le même système considéré par Ozoe et Okada (1989) [2], mais pour le champ magnétique horizontale et parallèle aux deux parois chaude et froide, pour un large domaine du nombre de Hartmann. Ils ont attribué la raison physique de l'amélioration du transfert de chaleur aux forces de Lorentz induites près des parois électriquement isolées. Par la suite, ils ont examiné numériquement l'effet de l'électro-conductivité des parois de l'enceinte de zéro à l'infini (1997) [5]. Ils ont conclu que l'effet de suppression de la convection naturelle du champ magnétique diffère énormément entre les deux directions du champ magnétique (x et y) quand l'électro-conductivité adimensionnelle de la paroi est inférieure à l'unité. Cependant, avec l'augmentation de l'électro-conductivité de la paroi, la densité du courant électrique du fluide augmente dans les deux directions du champ magnétique et la force de Lorentz devient efficace sans tenir compte de la direction du champ magnétique. L'augmentation du taux de transfert thermique prédit par Tagawa et Ozoe (1997) [4] est clairement confirmée par des mesures expérimentales de la convection naturelle du Gallium effectuées par eux-mêmes (1998) [6]. Toujours dans le cadre des calculs numériques tridimensionnels, Benhadid et Henry (1997) [7] ont considéré une cavité dont le rapport d'aspect est $4 \times 1 \times 1$, et ont étudié le freinage de l'écoulement stationnaire pour le champ magnétique vertical et longitudinal. Ils ont confirmé les lois de vitesse du centre de l'écoulement prédites par la théorie asymptotique d'Alboussière et al. (1996) [8]. Cependant, contrairement à Okada et Ozoe [3], ils ont trouvé que le champ vertical reporte une plus grande réduction à l'écoulement global que le champ longitudinal.

Braunsfurth et al. (1997) [9] ont présenté les résultats d'une étude combinée numérique et expérimentale des écoulements convectifs stationnaires dans une cavité remplie de Gallium liquide et chauffée par un côté vertical et refroidie par l'autre. Les mesures expérimentales de la distribution de température dans l'écoulement sont

comparées avec les résultats numériques obtenus par un modèle bidimensionnel. Un excellent accord quantitatif est trouvé entre les deux pour des nombres de Grashof faibles, mais une divergence systématique entre les résultats est aperçue quand ce nombre augmente.

Juel et al. (1999) [10] ont présenté les résultats d'une étude numérique tridimensionnelle utilisant une méthode d'élément spectral et une étude expérimentale de l'effet de l'application d'un champ magnétique stationnaire sur la convection du Gallium contenu dans une cavité rectangulaire de section carrée, dont le rapport d'aspect (longueur/hauteur de la cavité) est 4. Le champ magnétique est appliqué dans la direction perpendiculaire à l'écoulement principal. Un excellent accord est constaté entre leurs résultats numériques et expérimentaux, avec l'augmentation du nombre de Hartmann, l'écoulement aperçu dans les calculs devient de plus en plus bidimensionnel.

Bessaih et al. (1999) [11] ont examiné numériquement par la méthode des volumes finis l'effet de la conductivité électrique des parois et la direction du champ magnétique sur l'écoulement induit du Gallium dans une cavité cubique différentiellement. Les résultats enregistrés montrant la variation de vitesse de température et du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Hartmann et du nombre de Rayleigh étaient en bon accord avec les données analytiques et expérimentales trouvées dans la littérature. Une considérable diminution dans l'intensité de la convection quand le champ magnétique augmente était aperçue, spécialement pour les valeurs de Rayleigh situées autour de 10^5 . Leurs calculs ont montré que le champ magnétique dirigé horizontalement (perpendiculaire au plan y-z) est le plus efficace dans le contrôle de l'écoulement. Aussi, la conductivité électrique des parois change la distribution de la force de Lorentz, en l'augmentant dans les régions qui opposent l'écoulement et en la diminuant dans les autres régions où elle est favorable à l'écoulement.

Emery et Lee (1999) [12] ont choisit la méthode des éléments finis pour étudier le problème de convection naturelle dans une cavité carrée avec des parois dont la conductivité et la viscosité dépendent de la température et pour des nombres de Prandtl compris entre 0.01 et 1, ce qui représente les métaux liquide et les gaz, et $Ra \leq 10^6$. Ils ont trouvé que les propriétés variables produisent un changement remarquable dans les champs de température et de vitesse, tandis que le transfert de chaleur total n'a presque

pas changé et a été exactement corrélé en fonction des nombres de Rayleigh et de Prandtl avec les propriétés exprimées à la température moyenne.

Uda et al. (2000) [13] ont examiné expérimentalement la convection naturelle du Lithium sous un champ magnétique. L'expérience faite comprend un bain cylindrique de Lithium, une tige métallique chauffante, fixée au centre du bain, ce dernier est soumis extérieurement à un champ magnétique radial. Ils ont constaté qu'en augmentant le champ magnétique (0.05 T) pour un nombre de Lykoudis ($Ly \geq 50$, $Ly \propto 2Ha^2 / Gr^{0.5}$), le nombre de Nusselt diminue, et qu'avec l'application d'un faible champ magnétique (0.01 T) le profil de température et le profil de circulation de l'écoulement changent radicalement.

Saravanan et Kandaswamy (2000) [14] ont analysé numériquement par le biais d'une méthode bidimensionnelle aux différences finies l'effet de la dépendance de conductivité thermique-température sur la convection induite d'un fluide à faible nombre de Prandtl contenu dans une enceinte carrée. Ils concluent qu'en absence du champ magnétique, une augmentation du coefficient de conductivité thermique réduit les deux modes de transfert de chaleur convectif et conductif et qu'en présence d'un champ magnétique vertical, l'augmentation du coefficient de conductivité thermique produit un grand freinage de la convection (à cause de l'attraction des cellules convectives vers la paroi chaude) et de la conduction.

Alboussière (2001) [15] a formulé un modèle MHD (Magnétohydrodynamique) bidimensionnel pour un champ magnétique non uniforme et pour une cavité de profondeur non uniforme dans la direction du champ magnétique. Dans ce travail, les surfaces caractéristiques apparaissent dans le développement du modèle et y jouent un rôle important. Il a pu décrire pour la première fois les couches limites cisillées se développant le long de certaines surfaces caractéristiques.

Karcher et al. (2002) [16] ont mené une étude expérimentale et numérique de la convection naturelle dans un métal liquide chauffé localement à sa surface supérieure et soumis à un champ magnétique vertical. L'expérience a été conduite dans une cellule de test cylindrique d'un grand rapport d'aspect. En absence du champ magnétique, l'expérience montre qu'il existe une dépendance entre le nombre de Nusselt et le nombre de Rayleigh suivant la loi: $Nu \propto Ra^{0.191}$, et que le nombre de Nusselt et donc les pertes de chaleur convectives peuvent diminuer de 20% quand un champ magnétique modéré

est appliqué (0.1 Tesla). Les résultats de leur simulation numérique bidimensionnelle utilisant la méthode des éléments finis sont qualitativement et quantitativement en bon accord avec leurs observations expérimentales.

Krakov et Nikiforov (2002) [17] ont étudié numériquement l'effet de l'angle entre la direction du gradient de température et du champ magnétique uniforme sur la structure de convection naturelle dans une cavité carrée. Plus tard, par une autre simulation numérique et expérience physique [18]; ils ont découvert numériquement qu'un système de nombreuses structures convectives existe dans le cube et la structure est plus stable; expérimentalement ils ont trouvé une dépendance essentielle entre le transfert de chaleur et le champ magnétique dans les deux directions verticale et horizontale.

Di Piazza et Ciafalo (2002) [19] ont présenté une simulation numérique tridimensionnelle, utilisant la technique des volumes finis, de la convection libre dans une cavité cubique remplie d'un métal liquide mélange Plomb-Lithium et différentiellement chauffée avec un champ magnétique uniforme appliqué perpendiculairement au gradient de température et au vecteur de gravité. Le nombre de Rayleigh est 10^5 et le nombre de Prandtl est 0.0321. Le nombre de Hartmann varie de 10^2 à 10^3 et la conductance électrique de 0 à ∞ . Comme résultats, ils signalent que la suppression des mouvements convectifs due aux interactions magnétohydrodynamiques est importante au centre et un écoulement tridimensionnel complexe (avec des mouvements secondaires) est établi dans le fluide. L'augmentation de la conductance des parois parfaitement isolantes aux parois parfaitement conductrices provoque également une augmentation dans la suppression de la convection. Le même cas a été considéré par les mêmes auteurs (2002) [20], mais avec génération interne de chaleur et avec un nombre de Rayleigh compris entre 10^5 et 10^7 . Dans tous les cas, un écoulement tridimensionnel avec des mouvements secondaires complexes est établi. L'augmentation du nombre de Hartmann tend à supprimer les mouvements convectifs et à rendre la forme de circulation des cellules plus carrée et plus uniforme.

Wang et Wakayama (2002) [21] ont utilisé la méthode des différences finies pour examiner numériquement le freinage magnétique de la convection naturelle tridimensionnelle dans une cavité rectangulaire contenant une solution aqueuse de faible conductivité. Ils ont trouvé qu'il est fortement dépendant du rapport d'aspect de la cavité

et qu'il existe une valeur optimum du rapport d'aspect pour minimiser la convection naturelle et que cette valeur est presque indépendante du nombre de Hartmann et a une tendance à diminuer en augmentant le nombre de Grashof.

Dans le travail de Hof et al. (2003) [22], une étude expérimentale du freinage magnétohydrodynamique de la convection naturelle dans une cavité rectangulaire de dimensions $5 \times 1.3 \times 1$, remplie de Gallium a été menée. Les auteurs ont étudié la suppression de la convection quand un champ magnétique stationnaire est appliqué séparément dans chacune des directions principales de l'écoulement. La plus importante réduction de l'écoulement stationnaire est aperçue pour le champ magnétique vertical, ce qui est en bon accord avec la théorie. Cependant, ils observent que l'application d'un du champ transversal à l'écoulement produit une réduction plus importante que lorsque le champ est longitudinal, ce qui semble être contradictoire avec la théorie disponible.

Aleksandrova et Molokov (2004) [23] ont considéré la convection tridimensionnelle dans une cavité rectangulaire soumise à un gradient de température horizontale et un champ magnétique, par un modèle asymptotique. L'efficacité de l'application du champ magnétique dépend considérablement du rapport d'aspect et de la valeur du nombre de Hartmann. L'analyse du transfert de chaleur convectif pour des faibles valeurs du nombre de Peclet a montré que les deux champs vertical et longitudinal sont plus efficaces dans la réduction du transfert de chaleur convectif.

Krakov et al. (2005) [24] ont étudié expérimentalement et numériquement à l'aide d'une méthode tridimensionnelle basée sur les éléments finis, l'influence du champ magnétique uniforme sur la convection naturelle dans une cavité cubique, ils ont découvert l'existence d'un système de nombreuses structures convectives dans le cube, conduisant au caractère très compliqué de la dépendance entre le transfert de chaleur et les forces magnétiques. Leur expérience a montré une dépendance importante entre le transfert de chaleur et le champ magnétique dans ses deux directions: verticale et horizontale.

Sophy et al. (2005) [25] ont examiné par voie numérique bidimensionnelle l'influence d'un gradient de champ magnétique sur la convection naturelle dans une cavité carrée différentiellement chauffée. Les résultats présentés pour des nombres de Rayleigh allant de 10^3 à 10^5 ont montré une profonde modification de l'écoulement à partir d'une valeur critique du maximum du champ magnétique.

Bednarz et al. (2005) [26] ont étudié expérimentalement et numériquement l'effet d'un important champ magnétique sur la convection naturelle d'un fluide paramagnétique. Les résultats sont en compromis avec ceux trouvés auparavant. Le nombre de Nusselt moyen calculé par voie numérique est en accord avec celui obtenu par l'expérience.

Anwar et al. (2005) [27] ont présenté une étude numérique bidimensionnelle, utilisant la méthode des différences finies, sur l'effet de la tension de surface sur l'écoulement laminaire instationnaire de la convection naturelle d'un fluide électriquement conducteur ($Pr=0.054$) dans une enceinte rectangulaire sous l'action d'un champ magnétique extérieurement imposé avec génération de chaleur interne. La surface supérieure de l'enceinte est supposée libre et la surface inférieure est isolée, tandis que les parois verticales sont chauffées d'un côté et refroidies par l'autre. Ils concluent que le changement de la direction de la force magnétique extérieure de l'horizontal au vertical mène à une diminution de l'intensité de l'écoulement dans les cellules primaires et secondaires et ceci cause une augmentation dans l'effet de la force thermo-capillaire, et que l'augmentation dans la valeur du paramètre de génération de chaleur conduit à une augmentation dans l'intensité de l'écoulement dans les cellules primaires et cause le développement de plus de cellules dans la cavité et provoque aussi une augmentation de la température du fluide dans la cavité et de là la réduction du transfert de chaleur de la surface chauffée.

Kaneda et al. (2006) [28] ont étudié expérimentalement et numériquement la convection naturelle du Gallium sous un champ magnétique uniforme avec un courant électrique externe. Le champ magnétique réduit la convection, mais l'interaction du champ magnétique et le courant électrique additionnel induit la force de Lorentz et modifie la structure de l'écoulement et le taux de transfert thermique de la paroi chaude à la paroi froide.

Xu et al. (2006) [29] ont présenté une étude expérimentale et numérique bidimensionnelle de la convection libre conduite par un gradient de température dans un métal liquide remplissant une cavité rectangulaire à surface libre avec et sans champ magnétique extérieur. Le liquide utilisé est le Gallium. Pour la première fois les champs de température et de vitesse sont mesurés. La structure de l'écoulement reste la même sans et avec champ magnétique. Cependant, la grandeur de vitesse est réduite avec une augmentation dans la valeur du champ magnétique appliqué. La réduction de la

convection est aussi manifestée dans les profils de température mesurés. Leurs résultats expérimentaux se comparent raisonnablement bien avec leurs prédictions numériques. La majorité des modèles mathématiques et numériques cités au dessus proposent de déterminer l'influence de toute combinaison des nombres de Grashof, Reynolds, Prandtl ou Hartmann sur l'écoulement et le transfert de chaleur.

La technique commune dans toutes ces études est la simplification de l'équation d'induction magnétique à travers l'approximation de faible Reynolds magnétique R_m . Sarris et al. (2006) [30] ont étudié numériquement, en utilisant la méthode des volumes finis, l'influence du nombre de Reynolds magnétique R_m sur l'écoulement de la convection MHD et sur le transfert de chaleur et ont évalué les erreurs possibles résultant de l'utilisation de l'approximation de faibles Reynolds magnétique R_m utilisée avant dans toutes les études faites. Les résultats montrent clairement une importante différence entre leurs solutions des équations MHD et l'approximation de faible R_m avec l'augmentation du nombre de Hartmann. Ils montrent aussi que quand le nombre de Prandtl augmente, la différence reste pratiquement faible et constante, tandis que pour les valeurs très faibles de Prandtl (métaux liquides) la différence augmente significativement.

Récemment, Kolsi et al. (2007) [31] ont effectué une étude numérique tridimensionnelle de la convection naturelle dans une cavité cubique différentiellement chauffée pour un nombre de Prandtl égal à 0.045 sous l'action d'un champ magnétique extérieur orthogonal aux parois isothermes, utilisant la méthode des volumes finis. Ils ont observé les effets de freinage et de laminarisation du champ magnétique externe et une organisation de l'écoulement tridimensionnel au centre de la cavité.

Le problème de la bifurcation : transition de l'état stationnaire à l'état oscillatoire des écoulements convectifs à faible nombre de Prandtl dans les cavités rectangulaires différentiellement chauffées a également attiré l'intérêt d'un large nombre de scientifiques, après l'expérience de Hurle et al. (1974) [33], montrant que les oscillations convectives causent une structure réseau du cristal dans le processus de croissance cristalline à partir de la phase liquide.

Roux et Ben Hadid (1989) [34] ont présenté les résultats de deux approches théorique et numérique, montrant l'existence des régimes oscillatoires bidimensionnels dans les couches horizontales différentiellement chauffées. Ces oscillations se produisent aussi pour $Pr=0$, et sont principalement du type hydrodynamique. Le nombre de Grashof critique et la fréquence critique sont qualitativement en bon accord avec les résultats obtenus par Hurlle et al. [33] dans le cas d'une cavité étroite ouverte, et pour un gradient de température horizontal issu des applications de la croissance cristalline dans la technique horizontale de Bridgman.

Afrid et Zebib (1990) [35] ont présenté une étude numérique d'un fluide dont le nombre de Prandtl est zéro, remplissant une cavité rectangulaire avec surface supérieure libre (R-F) de dimensions $(4 \times 1 \times 2)$ et une enceinte fermée (R-R) de dimensions $(4 \times 1 \times 1)$. Ils ont établi un modèle de convection tridimensionnelle basé sur la méthode des volumes finis pour déterminer les valeurs du nombre de Grashof critique auxquels l'écoulement devient instationnaire. Le champ d'écoulement est stationnaire à des nombres de Grashof relativement faible, et est représenté par une seule cellule, contrairement aux écoulements multicellulaires obtenus par la majorité des simulations numériques bidimensionnelles. Ils ont constaté que la transition au régime instationnaire dépend de la géométrie et de la nature de la surface supérieure de la cavité (libre ou fermée). L'écoulement (R-R) est plus stable que l'écoulement (R-F) pour les deux largeurs considérées (1 et 2). La largeur de la cavité a un important effet sur la transition à la convection oscillatoire. La réduction de la largeur de 2 à 1 conduit à un Grashof critique plus grand, ce qui rend les résultats des simulations numériques bidimensionnelles complètement inadéquats.

Gelfgat et Tanasawa (1994) [36] ont analysé l'instabilité oscillatoire des écoulements convectifs stationnaires dans les cavités rectangulaires latéralement chauffées, en utilisant la méthode spectrale de Galerkin et l'analyse de stabilité linéaire. Ils ont considéré la convection de l'eau et de l'air dans une cavité carrée, et la convection d'un fluide à faible nombre de Prandtl dans une cavité carrée et dans une cavité avec un rapport d'aspect (longueur/hauteur) égal à 4. La configuration de la majorité des perturbations instables de la fonction de courant et de la température a été représentée et le mécanisme de l'instabilité oscillatoire a été discuté. Cependant, la dépendance entre la transition stationnaire oscillatoire et le rapport d'aspect n'a pas été examinée.

Gelfgat et al. (1997) [37] ont étudié numériquement l'instabilité oscillatoire des écoulements convectifs dans une cavité rectangulaire latéralement chauffée. La cavité considérée a des parois verticales isothermes et la paroi inférieure adiabatique et une surface supérieure libre. L'étude a été menée pour deux valeurs du nombre de Prandtl: $Pr=0$ et $Pr=0,015$. Ils ont trouvé que la dépendance entre le nombre de Grashof critique et les fréquences des oscillations et le rapport d'aspect de la cavité est très compliquée, et très sensible à de faible changement dans les paramètres de contrôle. Les diagrammes de stabilité ont été faits pour les rapports d'aspect de l'intervalle: $1 \leq A \leq 10$, ils ont montré que l'utilisation des caractéristiques de stabilité pour la prédiction d'autres valeurs des paramètres de contrôle n'est pas toujours possible. En particulier, le transfert de chaleur convectif n'est pas négligeable aux écoulements à faible nombre de Prandtl ($Pr=0.015$). Il a été montré que les systèmes d'instabilité oscillatoire peuvent être considérés comme résultat de la bifurcation de Hopf. Ils trouvent qu'aux deux valeurs considérées de Prandtl l'instabilité est causée par une infinité de petites perturbations dominantes, ce qui signifie que le transfert de chaleur convectif affecte considérablement la stabilité de l'écoulement même pour les cas ayant de faible nombre de Prandtl. Pour les rapports d'aspect supérieurs à $10 \leq A \leq \infty$, pas de comportement asymptotique a été enregistré. Ce qui signifie que dans des situations particulièrement importantes la dimension finie de la cavité et les effets correspondants doivent toujours être pris en compte. Les mêmes auteurs (1999) [38] ont examiné numériquement les écoulements convectifs non symétriques dans les cavités rectangulaires latéralement chauffées, en utilisant deux approches numériques indépendantes basées sur les méthodes de Galerkin globales et la méthode des volumes finis. Ils ont montré que ces techniques numériques peuvent être appliquées pour l'interprétation des résultats expérimentaux sur l'instabilité oscillatoire de la convection du mercure ($Pr=0.026$) dans une cavité, dont le rapport d'aspect est 8 et le rapport de largeur est 8. Par la suite, les mêmes auteurs (1999) [39] ont présenté une étude paramétrique d'un multiple d'états stationnaires, leurs stabilités, le début de l'instabilité oscillatoire et quelques supercritiques régimes instationnaires de l'état convectif du fluide de Boussinesq dans les cavités rectangulaires latéralement chauffées. Les cavités avec quatre parois verticales isothermes et deux parois horizontales parfaitement isolées sont considérées. L'étude numérique a été effectuée avec l'utilisation de deux approches numériques indépendantes basées sur les méthodes de Galerkin globales et la méthode des volumes

finis. Quatre branches distinctes des écoulements stationnaires sont trouvées pour cette configuration. Une étude complète de la stabilité pour chacune des branches (unicellulaire, bicellulaire, tricellulaire et quadrocellulaire) est faite pour un rapport d'aspect de la cavité variant de 1 à 11 et pour deux valeurs de Prandtl: $Pr=0$ et $Pr=0.015$. Pour une meilleure comparaison avec les données expérimentales existants, une autre étude de stabilité pour $0.015 \leq Pr \leq 0.03$ et un rapport d'aspect fixe ($A=4$) a été menée. Il a été montré que la dépendance entre le Grashof critique d'un côté et le rapport d'aspect et le nombre de Prandtl de l'autre côté est très compliquée et une étude paramétrique très détaillée a été nécessaire pour la reproduire correctement. Il a été montré également, qu'il existe de nombreux modes des perturbations dominantes qui se remplacent brusquement quand les paramètres gouvernants varient sans interruption, donc, divers modèles des états oscillatoires peuvent être attendus. La comparaison des résultats de cette étude avec les données expérimentales disponibles pour $A=4$ montre que les résultats de l'analyse de stabilité bidimensionnelle sont en bon accord avec l'expérimental, seulement quand le rapport de largeur (largeur/ hauteur) est suffisamment grand.

Ben Hadid et al. (1997) [40] ont présenté une étude numérique bidimensionnelle de l'effet d'un champ magnétique constant sur l'état d'écoulement, dans une cavité horizontale de Bridgman, différentiellement chauffée, dont le rapport d'aspect est 4. Ils ont présenté également une analyse de stabilité linéaire dans le cas d'une couche horizontale infinie avec une surface supérieure libre. Les résultats de cette analyse ont montré essentiellement que le champ magnétique vertical stabilise l'écoulement par l'augmentation des valeurs du nombre de Grashof critique auquel le système devient instable et modifie la nature de l'instabilité. Le nombre de Grashof critique a été déterminé comme une fonction du nombre de Prandtl jusqu'à Hartmann égal à 5. Ils ont trouvé que le Grashof critique augmente linéairement avec Ha^2 pour les modes longitudinaux et exponentiellement pour les modes transversaux. Ces résultats confirment l'effet de stabilisation du champ magnétique observé par Hurle et al. [33] et Davoust et al. (1995) [41]. Ils ont conclu que pour les nombres de Hartmann importants, des simulations tridimensionnelles sont nécessaires, dans le but de comprendre l'interaction entre le champ magnétique et le champ d'écoulement. Cet aspect tridimensionnel a été traité dans la seconde partie [7], mais sans pour autant examiner le début des instabilités.

Möbner et Müller (1999) [42] présentant la solution numérique de la convection naturelle d'un métal liquide remplissant une cavité cubique, puis une cavité rectangulaire de dimensions $6 \times 3 \times 1$ électriquement isolée. L'écoulement est soumis à un champ magnétique stationnaire extérieur. Pour un gradient de température horizontal, le champ magnétique perpendiculaire aux parois chauffées est le plus efficace dans le freinage de la convection libre. Le champ magnétique horizontal parallèle aux parois chauffées est le moins efficace dans le freinage de la convection libre. Dans le cas du gradient de température vertical, le nombre de cellules de convection dépend des nombres de Rayleigh et de Hartmann. Ils soulignent que les courants électriques court-circuitent la région du centre de l'écoulement sans laisser passer les couches de Hartmann, donc le freinage résultant de l'écoulement est vraiment fort. Ces résultats sont conformes avec ceux trouvés par Davoust et al. [41].

Di Piazza et Ciofalo (2000) [43] ont conduit une simulation numérique bidimensionnelle basée sur la méthode des volumes finis pour l'écoulement convectif libre d'un fluide à faible nombre de Prandtl ($Pr=0.0321$) avec génération de chaleur interne dans une cavité mince (rapport d'aspect égale à 4). Les parois verticales de la cavité sont isothermes et ses parois inférieure et supérieure sont adiabatiques. Le nombre de Grashof varie entre 3.79×10^4 et 1.29×10^9 . En fonction des valeurs de Grashof, différents régimes d'écoulement sont obtenus: état stationnaire, périodique et chaotique. Ceci suggère que lorsque le nombre de Grashof augmente, l'écoulement subit d'abord une bifurcation de Hopf, suivie d'un régime périodique et ensuite la transition au chaos. Pour les faibles valeurs du Grashof (jusqu'à 2×10^5) apparaît une recirculation symétrique des cellules sur les deux côtés de la cavité, ces cellules restent stables et la configuration stationnaire est atteinte. Les solutions périodiques sont obtenues pour $Gr \approx 3.79 \times 10^5$ et $Gr \approx 7.03 \times 10^5$. La bifurcation de Hopf marquant la transition de l'écoulement stationnaire à l'écoulement périodique est accompagnée par la transition de la solution symétrique à la solution instantanément antisymétrique. Pour Grashof $> \sim 10^6$, la périodicité de l'écoulement est perdue et les solutions chaotiques sont obtenues, et le nombre de Nusselt varie comme $Gr^{1/6}$. Par la suite, Arcidiacono et la même équipe de recherche (2001) [44] ont refait le même travail pour une cavité carrée (rapport d'aspect égale à 1) et pour le nombre de Grashof compris entre 10^5 et 10^9 . Pour $10^7 < Gr < 3 \times 10^7$, l'écoulement est stationnaire et présente une symétrie gauche-

droite. Pour $Gr \leq 3 \times 10^7$, la symétrie spatiale est brisée et un écoulement stationnaire asymétrique est obtenu. Pour $3 \times 10^7 < Gr < 5.4 \times 10^7$, l'écoulement asymétrique devient périodique par rapport au temps. La transition de l'écoulement stationnaire à l'écoulement instationnaire se produit à un Grashof, basé sur la hauteur de la cavité, comparable pour les cavités minces et les cavités carrées. Cependant, le mécanisme de transition est considérablement différent [44] [43]. Pour $Gr \leq 10^8$ un écoulement chaotique est prédit. Pour $Gr > \sim 10^6$ le nombre de Nusselt augmente approximativement comme $Gr^{1/7}$. Les mêmes auteurs (2001) [45] ont conduit une étude similaire aux deux études citées ci-dessus pour des cavités peu profondes (rapport d'aspect égal à 0.25) et pour des nombres de Grashof compris entre 10^6 et 10^{11} . L'écoulement est stationnaire pour $3 \times 10^9 < Gr < 10^{10}$, périodique pour $Gr \leq 10^{10}$ et chaotique pour $Gr \geq 3 \times 10^{10}$. Dans les deux régimes stationnaire et périodique, l'écoulement est instantanément asymétrique par rapport à la ligne centrale verticale de la cavité, dans le régime chaotique l'écoulement instantané est asymétrique, mais une symétrie bilatérale est retrouvée dans les champs des vitesses et des températures moyennes. Pour les nombres de Grashof supérieur à 10^7 le nombre de Nusselt augmente approximativement selon la courbe du $Gr^{1/5}$, c'est-à-dire, légèrement plus marqué que pour les rapports d'aspects précédents.

Wakitani (2001) [46] a présenté une étude numérique de la convection naturelle tridimensionnelle à des nombres de Prandtl faibles variant de 0 à 0.027, et dans des cavités rectangulaires avec des parois verticales différentiellement chauffées. Les calculs ont été menés pour des cavités, dont les rapports d'aspect Ar (longueur/ hauteur) sont 2 et 4 et les rapports de largeur Wr (largeur/ hauteur) variant de 0.5 à 4.2. Dans les cas $(Ar, Wr) = (2,1), (2,2)$ et $(4,1)$, le nombre de Grashof critique auquel le début des oscillations se produit dépend largement du nombre de Prandtl. La structure d'écoulement est caractérisée par un comportement cellulaire et des faibles vortex longitudinaux. Quand Wr augmente, le Grashof critique diminue à l'exception d'un court intervalle de Wr dans lequel le changement du Gr_{crit} produit est brusque. Dans les cas où $Pr=0$ et $Pr=0.015$, les structures convectives aux Gr_{crit} sont en général unicellulaires. Cependant, dans le cas où $Pr=0.025$, un comportement bicellulaire est observé pour $Wr \leq 1$ et $Ar = 2$ et pour $Wr \leq 1.4$ et $Ar = 4$, et pour les autres rangs de Wr les structures d'écoulement sont unicellulaires.

Gelfgat and Bar Yoseph (2001) [47] ont présenté une étude numérique bidimensionnelle du même problème avec une cavité dont le rapport d'aspect est 4, en vue de déterminer le début des instabilités oscillatoires, pour un fluide dont le nombre de Prandtl est 0.015, cette fois sous l'action d'un champ magnétique uniforme extérieurement imposé. Le diagramme de stabilité montrant la dépendance entre le nombre de Grashof critique Gr_{cr} et le nombre de Hartmann Ha montre que le champ magnétique vertical produit le plus important effet de stabilisation, et que la multiplicité des états stationnaires est supprimée par l'effet électromagnétique, donc seulement à un certain niveau du champ magnétique l'écoulement unicellulaire reste stable. Cependant, à des magnitudes modérées du champ magnétique considéré $Ha \leq 20$, le comportement des courbes de stabilité marginales $Gr_{cr}(Ha)$ est monotonique, et entraîne plutôt des boucles hystériques où le Gr_{cr} diminue avec une augmentation du nombre de Hartmann. La plus importante conclusion de cette étude, est la possibilité d'une considérable stabilisation de l'écoulement par une augmentation modérée de la magnitude du champ magnétique. Ceci conduit à la question de la magnitude optimale du champ magnétique, qui dépend des paramètres gouvernant le problème. Il est montré également que les perturbations sont supprimées avant qu'une réduction significative de l'écoulement de base ne prenne place. L'effet du champ magnétique sur l'écoulement bicellulaire est totalement différent. A des petites valeurs du nombre de Hartmann, l'effet de stabilisation n'est pas très grand. Cependant, quand la magnitude du champ magnétique augmente, ces écoulements sont déstabilisés et se transforment en des écoulements unicellulaires, soumis à leurs propres propriétés de stabilité. Ceci indique la possibilité de l'utilisation d'un champ magnétique pour contrôler non seulement la stabilité, mais aussi le comportement de l'écoulement par la suppression de la possible multiplicité des états stationnaires. Dans les écoulements unicellulaires, le freinage électromagnétique conduit au développement des couches limites de Hartmann.

Juel et al. (2001) [48] ont présenté une étude numérique et expérimentale de l'écoulement convectif du Gallium dans une cavité rectangulaire différentiellement chauffée de section carrée, dont le rapport d'aspect est 4. La nature tridimensionnelle de l'écoulement a été démontrée par une comparaison quantitative entre les mesures de températures expérimentales, qui donnent une indication sur la grandeur de l'écoulement convectif, et les résultats des simulations numériques. La structure de l'écoulement

tridimensionnelle est caractérisée par des écoulements croisés, qui ont un ordre de grandeur inférieur à celui de l'écoulement principal.

Hof et al. (2004) [49] ont examiné expérimentalement et numériquement le début de la convection oscillatoire du Gallium, remplissant une cavité parallélépipédique latéralement chauffée de dimensions $5 \times 1.3 \times 1$. Cette géométrie est celle considérée par le même groupe de recherche (2003) [22]. Des comparaisons détaillées sont faites entre les observations expérimentales et les calculs à partir de la simulation numérique du modèle tridimensionnel de Boussinesq. Le début de la dépendance du temps prend place à travers les bifurcations supercritiques dans les deux études expérimentale et numérique.

Sarris et al. (2005) [50] ont étudié numériquement la MHD de la convection naturelle bidimensionnelle d'un liquide-métal dans une cavité carrée latéralement et volumétriquement chauffée. L'écoulement est caractérisé par le nombre de Rayleigh extérieur Ra_E ($\propto g \Delta T H^3 / \nu \alpha$), déterminé de la différence de température des parois, et le nombre de Rayleigh intérieur Ra_I ($\propto g \Delta T H^5 / \nu \alpha$), déterminé en fonction du taux de chaleur volumétrique G , et le nombre de Hartmann Ha déterminé à partir de la valeur du champ magnétique imposé. En commençant par des valeurs données de Ra_E et Ha , pour lesquelles l'écoulement a un comportement stationnaire unicellulaire, et en augmentant graduellement le rapport $S \propto Ra_I / Ra_E$, l'écoulement convectif oscillatoire peut se produire. L'écoulement stationnaire unicellulaire initial, pour $S=0$, peut subir la transition à l'écoulement multicellulaire stationnaire et instationnaire jusqu'à un seuil de Ra_I ($Ra_{I,cr}$), dépendant de Ha . Les champs d'écoulement multicellulaires oscillatoires sont observés pour les valeurs de S pouvant arriver jusqu'à la valeur de 100 pour le domaine $10^5 \times 10^6$ des Ra_E étudiés. L'augmentation du rapport S a d'habitude pour résultat une transition de l'écoulement stationnaire à l'écoulement instationnaire, mais il y a aussi des cas où de cette augmentation résulte une transition inverse de l'écoulement instationnaire à l'écoulement stationnaire. Les oscillations de l'écoulement sont réduites ou disparues avec l'augmentation des nombres de Hartmann, dû à l'effet du freinage du champ magnétique, mais la réduction ne se produit pas avec l'augmentation de S . Le transfert de chaleur est amélioré avec l'augmentation de S , mais pas d'effet significatif

du champ magnétique a été observé sur ce transfert, à cause des faibles rangs des nombres de Hartmann étudiés.

Hof et al. (2005) [51] ont présenté les résultats d'une investigation expérimentale de l'effet d'un champ magnétique sur la stabilité de la convection dans un métal liquide. La cavité rectangulaire contenant du Gallium est soumise à un gradient horizontal de température. Cette cavité a les mêmes dimensions $5 \times 1.3 \times 1$ considérées par la même équipe de scientifiques dans les travaux [22] et [49] cités ci-dessus. Le champ magnétique uniforme est appliqué séparément dans les trois principales directions. Ils ont montré que le début des oscillations se produisant dans la convection des fluides des faibles nombres de Prandtl, peut être retardé, en utilisant un champ magnétique d'une magnitude relativement faible. L'efficacité du champ magnétique dépend fortement de sa direction. Les variations exponentielles du point de bifurcation de Hopf sont observées pour les trois directions du champ magnétique. Ces résultats diffèrent clairement de l'analyse bidimensionnelle, et soulignent l'intérêt de la structure tridimensionnelle de l'écoulement. Ils ont observé que la plus importante suppression des oscillations se produit par le champ transversal. Tandis que dans l'analyse de stabilité faite par Kaddeche et al. (2003) [52], la plus grande suppression est produite dans le cas où le champ est vertical et puis quand le champ est transversal.

Bessaïh et Bouabdellah (2008) [53] ont présenté une étude numérique de la convection naturelle oscillatoire pendant la solidification d'un métal liquide contenu dans une cavité rectangulaire, ayant un rapport d'aspect égal à 4, soumise à un champ magnétique uniforme appliqué dans plusieurs orientations. L'approche numérique bidimensionnelle est basée sur l'approximation des volumes finis avec une formulation d'enthalpie. Leurs résultats ont montré que l'écoulement oscillatoire dans la partie liquide de la cavité apparaît par la formation des cellules principales et secondaires, et par des oscillations périodiques dans les champs hydrodynamiques et thermiques. L'effet du champ magnétique avec différentes orientations produit un changement remarquable sur l'écoulement et les structures thermiques. En absence du champ magnétique, l'écoulement est stationnaire pour $Gr < Gr_{cr}$ et devient oscillatoire pour la valeur critique du nombre de Grashof : $Gr_{cr} \approx 1.137 \times 10^5$. L'augmentation du nombre de Hartmann augmente les valeurs du Grashof critique Gr_{cr} et de la fréquence critique

F_{cr} .

Récemment, Henry et al. (2008) [54] ont présenté une étude numérique tridimensionnelle de l'effet de la direction du champ magnétique sur le début de la convection oscillatoire dans une cavité de dimensions $4 \times 2 \times 1$, remplie de Mercure et soumise à un gradient de température horizontal. Le champ magnétique supprime les oscillations plus efficacement quand il est appliqué dans la direction verticale, et moins efficacement quand il est appliqué dans la direction longitudinale. Ces résultats sont conformes avec ceux trouvés par Hof et al. [51]. La variation de l'énergie globale avec le nombre de Hartmann, calculée au seuil pour chacune des trois directions principales du champ magnétique, indique que la transition oscillatoire est dominée par la suppression verticale de l'écoulement longitudinal, et ainsi l'énergie magnétique n'est pas la source dominante de stabilisation, particulièrement, en présence du champ magnétique vertical.

I. 3. OBJECTIFS:

L'objectif de la première partie de cette thèse, consiste à déterminer numériquement les effets combinés de la conductivité électrique des parois et de l'orientation du champ magnétique sur la structure dynamique et thermique de l'écoulement dans la cavité fermée considérée par l'expérience de Hof et al. [22] remplie de Gallium avec $Pr=0.019$. La cavité de section rectangulaire $(H \times W \approx 1 \times 1.3)$ et de rapport d'aspect $A \approx L/H \approx 5$ est soumise à un gradient de température longitudinal et un champ magnétique uniforme orienté une fois suivant la direction verticale (oy) et la deuxième fois suivant la direction longitudinale (ox). L'effet de la direction du champ magnétique sur la stabilisation de l'écoulement est étudié, ainsi que l'effet de la conductivité électrique des parois sur le nombre de Nusselt moyen. Les résultats de cette étude sont discutés dans le contexte de la croissance cristalline de Bridgman [32] et sont comparés aux résultats expérimentaux trouvés dans la littérature.

L'objectif de la seconde partie est la détermination des instabilités hydrodynamiques et thermiques qui naissent dans la cavité parallélépipédique de section carrée à surface libre, considérée par Xu et al. [29] dans leur étude expérimentale. La cavité dont le rapport d'aspect est $A \approx W/H \approx 5$ est remplie de Gallium avec $Pr=0.02$ et sujette à un gradient de température transversal et un champ magnétique uniforme orienté une fois suivant la direction transversale (ox) et la

deuxième fois suivant la direction longitudinale (oz). L'étude a permis de tracer le diagramme de stabilité, montrant la dépendance entre le nombre de Grashof critique Gr_{cr} et la magnitude du champ magnétique exprimée par le nombre de Hartmann Ha $Gr_{cr} \propto f Ha$ [55].

Le mémoire présentant ce travail est organisé en quatre chapitres et une conclusion. Dans le premier chapitre, l'intérêt pratique ainsi qu'une recherche bibliographique sur le thème ont été présentés. Le deuxième chapitre détaille la géométrie des deux cas étudiés et le modèle mathématique, décrivant la convection naturelle dans les enceintes parallélépipédiques est présenté, ainsi que les conditions initiales et aux limites de chaque cas. Dans le troisième chapitre, la méthode numérique des volumes finis pour la résolution des systèmes d'équations différentielles couplées et non linéaires est décrite en conjonction avec le schéma numérique, le maillage et l'algorithme de résolution adopté. Le quatrième chapitre reporte la validation du code de calcul ainsi que les résultats obtenus commentés et récapitulés. Le mémoire est clôturé par une conclusion.

CHAPITRE II

MODELE MATHEMATIQUE

Dans ce chapitre, les géométries des deux configurations considérées sont présentées, ainsi que les équations modélisant le problème traité dans cette thèse. Ces équations mettent en évidence le comportement des fluides conducteurs à faible nombre de Prandtl en convection libre. Elles sont fondées selon les lois physiques: de conservation de masse (continuité), de quantité de mouvement (Navier-Stokes), et d'énergie. En présence d'un champ magnétique, une force apparaît au sein du liquide (force de Lorentz), donc une équation est ajoutée pour compléter le système, ainsi que les conditions initiales et aux limites de chaque cas.

II. 1. PROBLEME 1 :

II. 1. 1. Géométrie :

La géométrie choisie est celle considérée par Hof et al. [22] dans leur étude expérimentale. La représentation schématique de la cavité considérée est montrée dans la **figure II. 1**. La cavité parallélépipédique de dimensions $L/H \square H/H \square W/H \simeq 5 \square 1 \square 1.3$, dont le rapport d'aspect est $A=L/H=5$, est remplie de Gallium liquide dont le nombre de Prandtl est égale à 0.019 et est soumise à une différence de température horizontale contrôlée, qui régit l'écoulement convectif. La paroi gauche est maintenue à une température locale froide T_c et la paroi droite est maintenue à une température locale chaude T_h ($T_h \triangleright T_c$). Les autres parois sont adiabatiques. Le champ magnétique uniforme est extérieurement appliqué dans deux orientations, l'une dite longitudinale (le champ magnétique B_x est parallèle au gradient de température dirigé de la paroi froide vers la paroi chaude), la seconde est verticale (le champ magnétique B_y est parallèle au vecteur de gravité et dirigée vers le haut). Les propriétés physiques du Gallium sont illustrées dans le **tableau II. 1**.

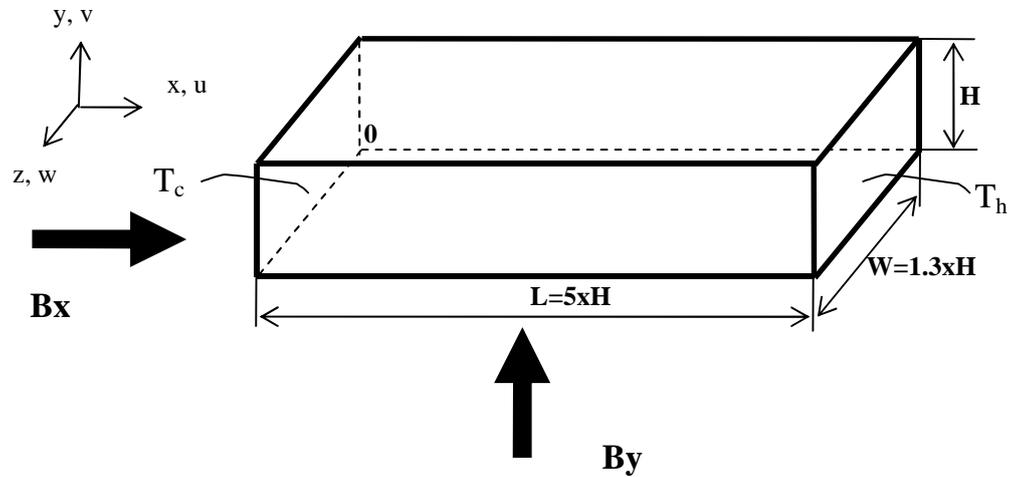


Figure II. 1: Géométrie du problème 1.

B_x et B_y sont orientés respectivement suivant les directions x et y .

Propriétés	Valeur	unité
Masse volumique ρ	6.09×10^3	$kg.m^3$
Viscosité cinématique ν	3.1×10^{-7}	$m^2.s^{-1}$
Conductivité électrique σ	3.68×10^6	$S.m^{-1}$
Conductivité thermique k	31	W/mK
Température de fusion	29	$^{\circ}C$
Température d'ébullition	2227	$^{\circ}C$
Coefficient d'expansion thermique α_p à pression constante	1.27×10^{-4}	K^{-1}
Tension de surface	0.735	$N.m^{-1}$

Tableau II. 1: Propriétés physiques du Gallium [29].

II. 1. 2. Hypothèses Simplificatrices:

Afin de pouvoir résoudre les équations régissant l'écoulement de convection libre d'un métal liquide sous l'action d'un champ magnétique, les hypothèses simplificatrices suivantes sont adoptées:

- Le métal liquide est incompressible $\rho = \text{Cste}$ et Newtonien.
- Le métal liquide est non-magnétisé car la perméabilité magnétique $\mu_m = 1$ [58].
- Le champ magnétique induit est négligeable car le nombre de Reynolds magnétique $R_m \ll 1$ [58].
- L'effet joule est négligeable.
- L'écoulement produit par la convection naturelle est laminaire.
- La dissipation visqueuse est négligée [47].
- Les propriétés physiques du métal liquide μ, k, α et ρ sont constantes.
- L'approximation de Boussinesq est adoptée pour la densité de fluide, c'est-à-dire la masse volumique est considérée comme constante (égale à sa valeur de référence) dans tous les termes des équations de transfert sauf dans le terme gravitationnel, où elle est traitée comme variable en fonction de la température et s'exprime comme suit [60]:

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta_0 (T - T_0)]$$

Où, ρ_0 est la masse volumique de référence et β_0 est le coefficient d'expansion thermique à pression constante.

II. 1. 3. Equations Sous Forme Dimensionnelle:

Après la considération des hypothèses de simplification suscitées, les équations générales régissant l'écoulement du métal liquide dans l'enceinte représentée par la **figure II. 1.** et rapportées à un système de coordonnées Cartésiennes sont données par:

▪ **Equation de continuité:**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

▪ **Equation de quantité de mouvement :**

Suivant x :

$$\begin{aligned} -\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial z} \right) = F_x \end{aligned} \quad (2)$$

Suivant y :

$$\begin{aligned} -\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left(\tau \frac{\partial v}{\partial z} \right) = F_y - \rho g \downarrow \mathcal{T} = T_0 \end{aligned} \quad (3)$$

Avec $T_0 = T_c$

Suivant z :

$$\begin{aligned} -\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left(\tau \frac{\partial w}{\partial z} \right) = F_z \end{aligned} \quad (4)$$

Où : F est la force de Lorenz, exprimée par :

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = \vec{J} \times \vec{B} \quad (5)$$

\vec{J} : le vecteur densité de courant électrique.

\vec{B} : le vecteur champ magnétique.

▪ **Equation d'énergie :**

$$\begin{aligned} -\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

▪ **Equation du potentiel électrique :**

L'interaction entre le champ magnétique et l'écoulement convectif entraîne un courant électrique induit \vec{J} [58]:

$$\vec{J} = -\text{grad} \varphi - \vec{v} \times \vec{B} \tag{7}$$

φ : le potentiel électrique.

L'équation (7) donne :

♦ Quand le champ magnétique est appliqué suivant ox, $\vec{B} = B\vec{i}$:

$$J_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{7-a}$$

$$J_y^* = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial y^*} - w B \tag{7-b}$$

$$J_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - v B \tag{7-c}$$

♦ Quand le champ magnétique est appliqué suivant oy, $\vec{B} = B\vec{j}$:

$$J_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - w B \tag{7-d}$$

$$J_y^* = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial y^*} \tag{7-e}$$

$$J_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - u B \tag{7-f}$$

Puisque le courant électrique est conservé :

$$\text{div} \vec{J} = 0 \Rightarrow \text{grad}^2 \varphi = \text{div} (\vec{v} \times \vec{B}) \tag{8}$$

Remarque: Les variables indiquées avec *astérisques* sont des variables *dimensionnelles*.

II. 1. 4. Conditions Initiales et aux Limites Sous Forme Dimensionnelle:

○ **Conditions initiales :**

- A $t^* = 0$ $u = v = w = 0$ et $T^* = T_0 = T_c$ (9-a)

○ **Conditions aux limites :**

- Pour $t^* > 0$

◆ Pour $0 < y < H$; $0 < z < W$;

$x = 0$; $u = v = w = 0$ $T = T_c$ $\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$ (9-b)

$x = L$; $u = v = w = 0$ $T = T_h$ $\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$ (9-c)

◆ Pour $0 < x^* < L$; $0 < z^* < W$;

$y = 0$; $u^* = v^* = w^* = 0$ $\frac{\partial T^*}{\partial y} = 0$ $\frac{\partial \theta^*}{\partial y} = 0$ (9-d)

$y = H$; $u^* = v^* = w^* = 0$ $\frac{\partial T^*}{\partial y} = 0$ $\frac{\partial \theta^*}{\partial y} = 0$ (9-e)

◆ Pour $0 < x < L$; $0 < y < H$;

$z = 0$; $u^* = v^* = w^* = 0$ $\frac{\partial T^*}{\partial z^*} = 0$ $\frac{\partial \theta^*}{\partial z^*} = 0$ (9-f)

$z = W$; $u^* = v^* = w^* = 0$ $\frac{\partial T^*}{\partial z^*} = 0$ $\frac{\partial \theta^*}{\partial z^*} = 0$ (9-g)

II. 1. 5. Equations Sous Forme Adimensionnelle:

En introduisant les variables adimensionnelles suivantes respectivement pour la longueur, la vitesse, le temps, la température, le courant électrique, la pression, le potentiel électrique et la force de Lorentz :

$x = \frac{x^*}{L}$; $y = \frac{y^*}{L}$; $z = \frac{z^*}{L}$

$u = \frac{u^*}{(\frac{\rho}{L}) Gr^{0.5}}$; $v = \frac{v^*}{(\frac{\rho}{L}) Gr^{0.5}}$; $w = \frac{w^*}{(\frac{\rho}{L}) Gr^{0.5}}$

$$t \square \frac{t^*}{(L^2/\nu)} \quad T \square \frac{T^* - T_c}{T_h - T_c} \quad J \square \frac{J^*}{\nu/L \sim BGr^{0.5}}$$

$$P \square \frac{P^*}{-\nu/L \sim Gr^{0.5}} \quad \theta \square \frac{\theta^*}{\nu BGr^{0.5}} \quad F \square \frac{F^*}{\nu^2/L^3 \sim Gr^{0.5}}$$

Les équations adimensionnelles gouvernant le système s'écrivent donc :

▪ **Equation de continuité:**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{10}$$

▪ **Equation de quantité de mouvement :**

- Suivant x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Gr^{0.5} \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + F_x \tag{11-a}$$

- Suivant y :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + Gr^{0.5} \left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] + \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + Gr^{0.5} T + F_y \tag{11-b}$$

- Suivant z :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + Gr^{0.5} \left[u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + F_z \tag{11-c}$$

Avec $Gr \square \frac{g \beta (T_h - T_c) L^3}{\nu^2 A}$ est le nombre de Grashof, il exprime le rapport des

forces de buoyancy aux forces de viscosité [58].

g : accélération de pesanteur.

β : coefficient d'expansion thermique à pression constante du fluide.

ν : Viscosité cinématique du fluide.

F_x, F_y et F_z sont respectivement les forces de Lorentz adimensionnelles dans les directions x, y et z, dont les expressions sont déduites de l'équation (5) et (7), et s'écrivent :

- Quand le champ magnétique est appliqué suivant ox, $\vec{B} = B \vec{i}$:

$$F_x = 0 \tag{12-a}$$

$$F_y = \frac{\partial v}{\partial z} Ha^2 \tag{12-b}$$

$$F_z = \frac{\partial w}{\partial y} Ha^2 \tag{12-c}$$

- Quand le champ magnétique est appliqué suivant oy, $\vec{B} = B \vec{j}$:

$$F_x = \frac{\partial u}{\partial z} Ha^2 \tag{12-d}$$

$$F_y = 0 \tag{12-e}$$

$$F_z = \frac{\partial w}{\partial x} Ha^2 \tag{12-f}$$

Avec $Ha = BL \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ est le nombre de Hartmann, il exprime le rapport des forces électromagnétiques aux forces de viscosité [58].

▪ **Equation d'énergie :**

$$\frac{\partial T}{\partial t} + Gr^{0.5} \left[u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \tag{13}$$

Avec $Pr = \frac{\rho c_p \nu}{k}$ est le nombre de Prandtl où $\nu = \frac{k}{\rho c_p}$

ν : La diffusivité thermique.

k : La conductivité thermique.

c_p : La chaleur spécifique à pression constante.

▪ **Equation du potentiel électrique :**

L'adimensionnalisation de l'équation (8) donne:

- Si le champ magnétique est appliqué suivant ox, $\vec{B} \parallel B \vec{i}$:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (14-a)$$

- Si le champ magnétique est appliqué suivant oy, $\vec{B} \parallel B \vec{j}$:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (14-b)$$

Les courants électriques adimensionnels dans les directions x, y et z sont respectivement :

◆ Quand le champ magnétique est appliqué suivant ox, $\vec{B} \parallel B \vec{i}$:

$$J_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (15-a)$$

$$J_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \quad (15-b)$$

$$J_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + v \quad (15-c)$$

◆ Quand le champ magnétique est appliqué suivant oy, $\vec{B} \parallel B \vec{j}$:

$$J_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + w \quad (15-d)$$

$$J_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (15-e)$$

$$J_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + u \quad (15-f)$$

II. 1. 6. Conditions Initiales et aux Limites Sous Forme Adimensionnelle:

○ **Conditions initiales:**

$$- \text{A } t = 0, \quad u = v = w = 0; \quad T = 0. \quad (16-a)$$

○ **Conditions aux limites :**

- Pour $t > 0$

♦ Pour $0 < y < 1$; $0 < z < 1.3$;

$$x = 0, \quad u = v = w = 0; \quad T = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0. \quad (16-b)$$

$$x = 5, \quad u = v = w = 0; \quad T = 1; \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0. \quad (16-c)$$

♦ Pour $0 < x < 5$; $0 < z < 1.3$;

$$y = 0, \quad u = v = w = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0. \quad (16-d)$$

$$y = 1, \quad u = v = w = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0. \quad (16-e)$$

♦ Pour $0 < x < 5$; $0 < y < 1$;

$$z = 0, \quad u = v = w = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0. \quad (16-f)$$

$$z = 1.3, \quad u = v = w = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0. \quad (16-g)$$

II. 2. PROBLEME 2 :

II. 2. 1. Géométrie :

Pour le second problème traité dans cette thèse, la géométrie de la cavité ouverte étudiée est celle considérée par Xu et al. dans leur étude expérimentale [29]. La schématisation de la cavité est représentée dans la **figure II. 2**. La cavité est rectangulaire de section carrée, de dimensions $L \times H \times W$, ayant un rapport d'aspect $A \times \frac{W}{H} \times 5$ et soumise à un champ magnétique uniforme B. Le champ magnétique est appliqué séparément dans la direction transversale x puis dans la direction longitudinale z. La paroi gauche est gardée à une température chaude locale T_h et la paroi froide est maintenue à une température froide locale T_c ($T_h \triangleright T_c$). La surface supérieure est libre et les autres parois sont adiabatiques. Le fluide contenu dans cette cavité est le Gallium, dont le nombre de Prandtl est égale à 0.02 (Xu et al. [29]).

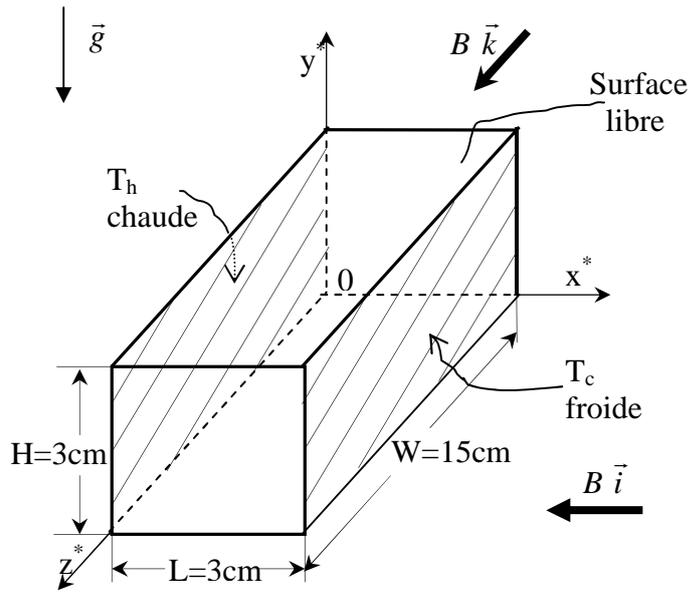


Figure II. 2: Géométrie du problème 2.

La partie supérieure de la cavité représente une surface libre.

II. 2. 2. Hypothèses Simplificatrices:

Les hypothèses simplificatrices adoptées pour le second problème traité dans cette thèse sont celles considérées dans le problème 1. (voir **II. 1. 2.**)

II. 2. 3. Equations Sous Forme Dimensionnelle :

Les équations générales régissant l'écoulement de la convection naturelle du Gallium dans cette cavité sont l'équation de continuité (1), l'équation de quantité de mouvement projetée sur les trois axes donne les équations (2), (3) et (4), l'équation de conservation d'énergie (6) et l'équation du potentiel électrique (7). Toutes les équations sont présentées en détail dans le paragraphe **II. 1. 3.**

♦ Quand le champ magnétique est appliqué suivant ox: $\vec{B} = B\vec{i}$

$$J_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{17-a}$$

$$J_y^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} w^* B \quad (17-b)$$

$$J_z = \frac{\partial \psi}{\partial z} v B \quad (17-c)$$

◆ Quand le champ magnétique est appliqué suivant oy: $\vec{B} = B\vec{k}$

$$J_x = \frac{\partial \psi}{\partial x} v B \quad (17-d)$$

$$J_y^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} u^* B \quad (17-e)$$

$$J_z = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (17-f)$$

II. 2. 4. Conditions Initiales et aux Limites Sous Forme Dimensionnelle:

○ Conditions initiales :

$$- A \quad t^* = 0 \quad u = v = w = 0 \quad \text{et} \quad T^* = T_0 = T_c \quad (18-a)$$

○ Conditions aux limites :

- Pour $t^* > 0$

◆ Pour $0 < y < H ; \quad 0 < z < W ;$

$$A \quad x = 0 ; \quad u = v = w = 0 \quad T = T_h \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (18-b)$$

$$A \quad x = L ; \quad u = v = w = 0 \quad T = T_c \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (18-c)$$

◆ Pour $0 < x^* < L ; \quad 0 < z^* < W ;$

$$A \quad y^* = 0 ; \quad u^* = v^* = w^* = 0 \quad \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = 0 \quad \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} = 0 \quad (18-d)$$

A $y^* = H ;$

$$u^* = v^* = w^* = 0 \quad hT^* = T_0 \sim k \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=H} \quad \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} = 0 \quad (18-e)$$

Avec T_0 est la température ambiante exprimée en K.

◆ Pour $0 < x < L$; $0 < y < H$;

$$A \quad z < 0; \quad u^* < v^* < w^* < 0 \quad \frac{\partial T^*}{\partial z^*} < 0 \quad \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} < 0 \quad (18-f)$$

$$A \quad z < W; \quad u^* < v^* < w^* < 0 \quad \frac{\partial T^*}{\partial z^*} < 0 \quad \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} < 0 \quad (18-g)$$

II. 2. 5. Equations Sous Forme Adimensionnelle :

En introduisant les variables adimensionnelles suivantes respectivement pour la longueur, la vitesse, le temps, la température, le courant électrique, la pression, le potentiel électrique et la force de Lorentz :

$$x < \frac{x^*}{L} ; \quad y < \frac{y^*}{L} ; \quad z < \frac{z^*}{L}$$

$$u < \frac{u^*}{(e/L)} ; \quad v < \frac{v^*}{(e/L)} ; \quad w < \frac{w^*}{(e/L)}$$

$$t < \frac{t^*}{(L^2/e)} \quad T < \frac{T^* - T_c}{T_h - T_c} \quad J < \frac{J^*}{(e/L) \sim B}$$

$$P < \frac{P^*}{(e/L)^2} \quad \psi < \frac{\psi^*}{B} \quad F < \frac{F^*}{(e/L)^3 \sim 0}$$

▪ **Equation de continuité:**

$$\frac{\partial u}{\partial x} < \frac{\partial v}{\partial y} < \frac{\partial w}{\partial z} < 0. \quad (19)$$

▪ **Equation de quantité de mouvement :**

-Suivant x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} < u \frac{\partial u}{\partial x} < v \frac{\partial u}{\partial y} < w \frac{\partial u}{\partial z} < \frac{\partial P}{\partial x} < \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} < F_x \quad (20-a)$$

-Suivant y :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = GrT + F_y \quad (20-b)$$

Où : $Gr = \frac{g \Delta(T_h - T_c) L^3}{\nu^2}$

-Suivant z :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = F_z \quad (20-c)$$

Où : F_x, F_y et F_z sont respectivement les forces de Lorentz adimensionnelles dans les directions x, y et z, dont les expressions sont les suivantes :

- Si le champ magnétique est appliqué suivant ox, $\vec{B} = B \vec{i}$:

$$F_x = 0 \quad (21-a)$$

$$F_y = \frac{\partial v}{\partial z} Ha^2 \quad (21-b)$$

$$F_z = \frac{\partial w}{\partial y} Ha^2 \quad (21-c)$$

- Si le champ magnétique est appliqué suivant oz, $\vec{B} = B \vec{k}$:

$$F_x = \frac{\partial u}{\partial y} Ha^2 \quad (21-d)$$

$$F_y = \frac{\partial v}{\partial x} Ha^2 \quad (21-e)$$

$$F_z = 0 \quad (21-f)$$

▪ **Equation d'énergie :**

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (22)$$

▪ **Equation du potentiel électrique :**

- Si le champ magnétique est appliqué suivant ox, $\vec{B} = B \vec{i}$:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (23-a)$$

- Si le champ magnétique est appliqué suivant oz, $\vec{B} = B \vec{k}$:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (23-b)$$

II. 2. 6. Conditions Initiales et aux Limites Sous Forme Adimensionnelle:

o **Conditions initiales :**

- A t=0 $u = v = w = 0 \quad T = 0$ (24-a)

o **Conditions aux limites :**

- Pour t > 0

- Pour $0 < y < 1$; $0 < z < 5$;

$x = 0, \quad u = v = w = 0; \quad T = 1; \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0.$ (24-b)

$x = 1, \quad u = v = w = 0; \quad T = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0.$ (24-c)

- Pour $0 < x < 1$; $0 < z < 5$;

$y = 0, \quad u = v = w = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0.$ (24-d)

$y = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = v = \frac{\partial w}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = Bi(T = T_0); \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = w$ si $\vec{B} = B \vec{i}$ (24-e)

$\frac{\partial \theta}{\partial y} = u$ si $\vec{B} = B \vec{k}$

- Pour $0 < x < 1$; $0 < y < 1$;

$z = 0, \quad u = v = w = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0.$ (24-f)

$z = 5, \quad u = v = w = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0.$ (24-g)

avec : $Bi = \frac{hL}{k}$ c'est le nombre de Biot, pour ce cas Bi=0.02, et $T_0 = \frac{T_h^* - T_c}{T_h - T_c}$.

CHAPITRE III

SOLUTION NUMERIQUE

III. 1. INTRODUCTION:

Les équations régissant le phénomène étudié sont des équations aux dérivées partielles non-linéaires dont la résolution analytique au moyen d'outils mathématiques est impossible. Cependant, il est possible de les résoudre numériquement tout en les transformant, par une méthode de discrétisation, en un système d'équations algébriques linéaires. Ce dernier est par la suite résolu soit par des méthodes directes ou par itérations. La méthode choisie pour la discrétisation des équations aux dérivées partielles est celle des volumes finis.

Le choix de la méthode des volumes finis est basé sur les arguments suivants:

- ◆ Son idée de base est facile à comprendre et aboutit directement à des interprétations physiques réelles du problème envisagé.
- ◆ Simple à concevoir et précise pour les géométries simples.
- ◆ L'approche d'une solution convergente du problème implique que les intégrales des équations de conservation telles que l'équation de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie sont satisfaites dans le volume de contrôle typique et dans tout le domaine.

La méthode des volumes finis est basée sur l'intégral des équations de transport sur un ensemble de volumes finis adjacents balayant le domaine physique étudié. Les équations de conservation sont appliquées à chaque volume de contrôle (VC). Au centre de chaque VC se trouve un nœud auquel les quantités variables doivent être calculées. L'interpolation est employée pour exprimer des valeurs variables à la surface du volume en termes des valeurs au nœud du VC. Les intégrales de surface et de volume sont approchées en employant des formules de quadrature appropriées.

III. 2. MAILLAGE:

Le domaine physique est divisé en un certain nombre de volumes finis, le volume est limité par six plans, notés par les lettres minuscules correspondant à leur directions (e, w, n, s, t et b) par rapport au nœud central 'P'. E, W, N, S, T et B sont les centres des volumes adjacents situés respectivement à l'Est, Ouest, Nord, Sud, amont et aval de celui contenant P. les quantités scalaires: pression, température et potentiel électrique sont stockées aux centres des volumes finis. Par contre les composantes de la vitesse sont localisées aux faces des volumes finis.

Les incréments Δx , Δy et Δz du maillage utilisé sont irréguliers. Ils ont été choisis selon une progression géométrique de 1.07, ce qui permet un raffinement du maillage près des parois de l'enceinte où de forts gradients de vitesse et de température existent.

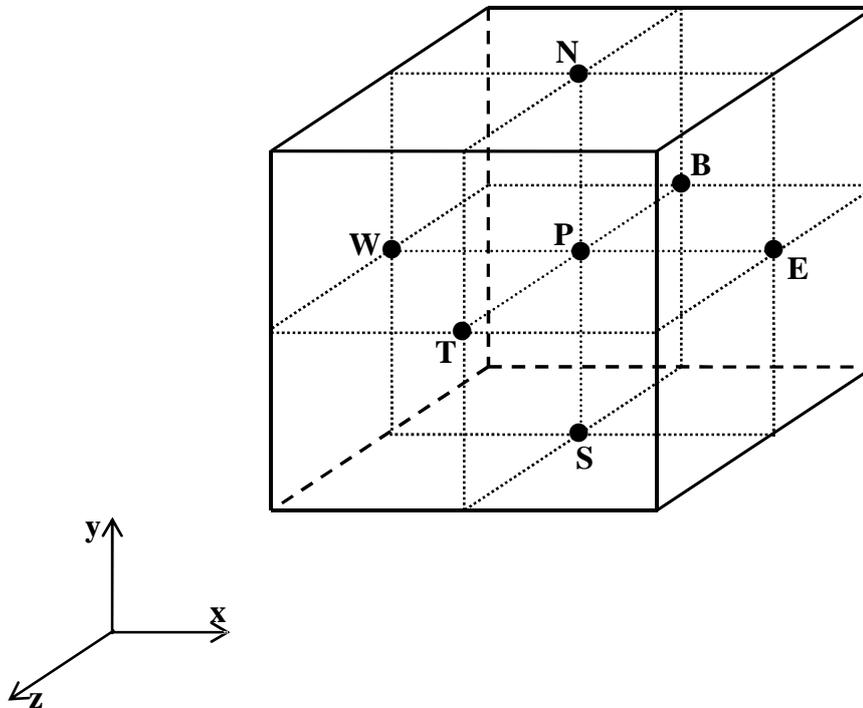
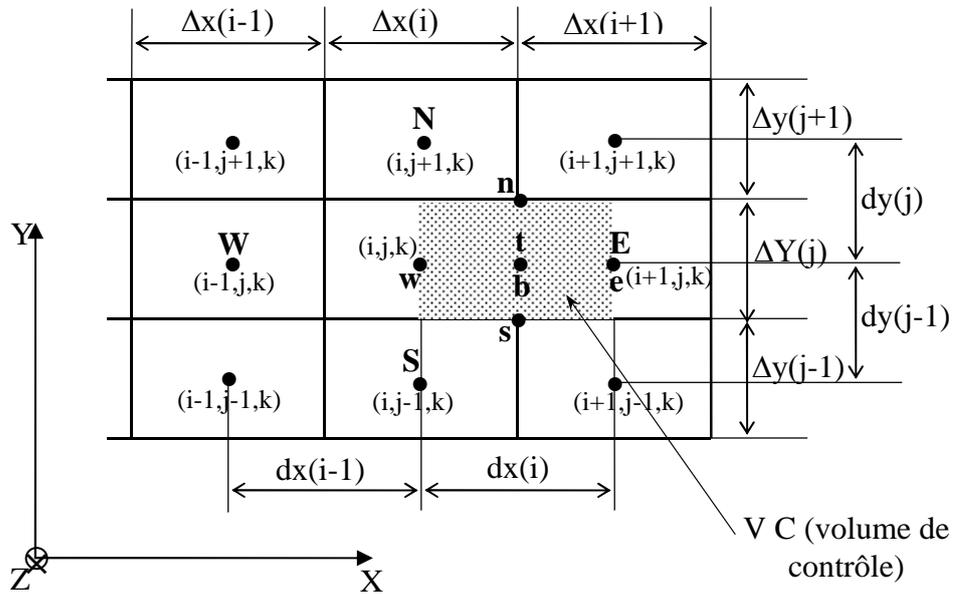
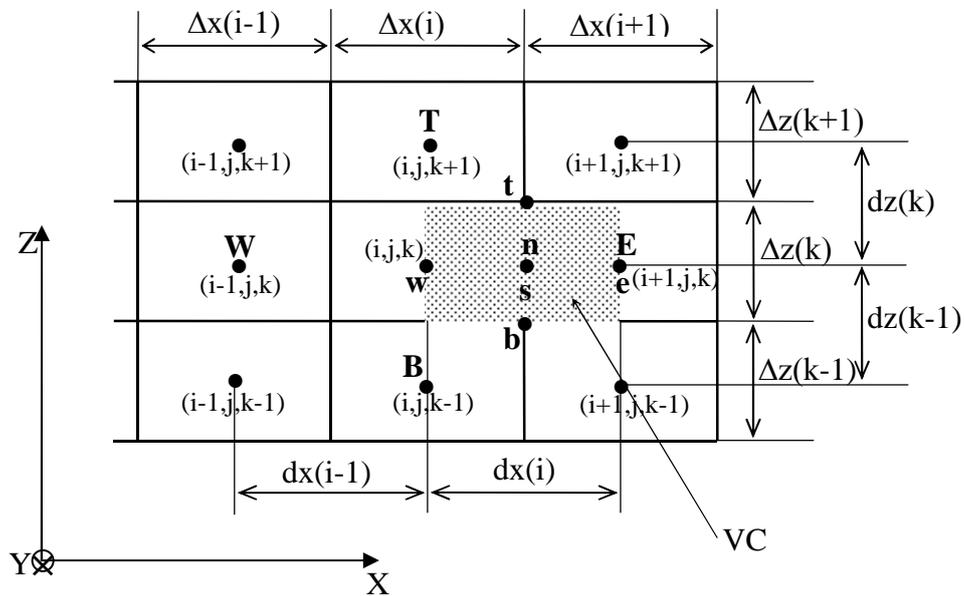


Figure III. 1: Volume de contrôle sur lequel les équations différentielles aux dérivées partielles sont intégrées

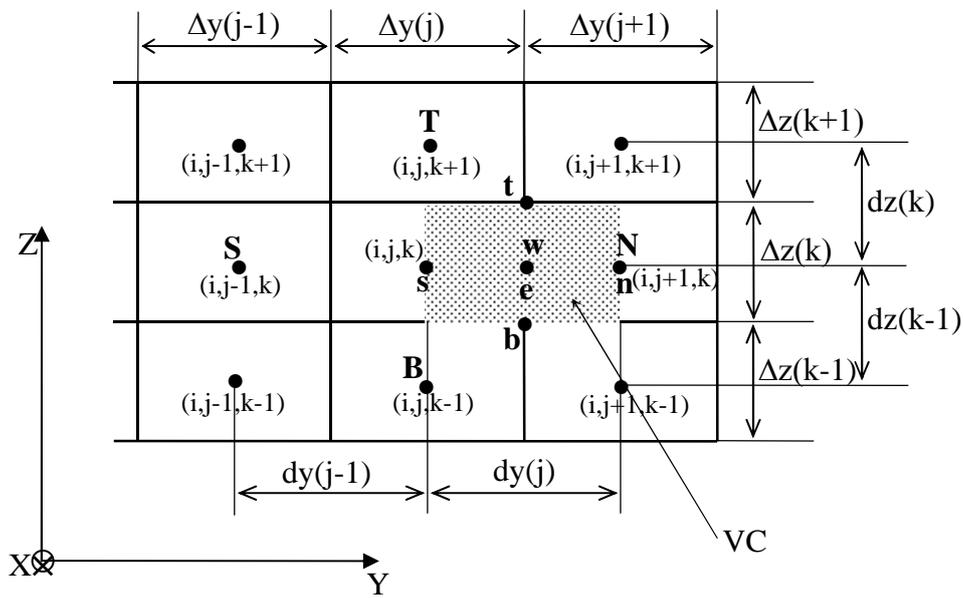


(a)

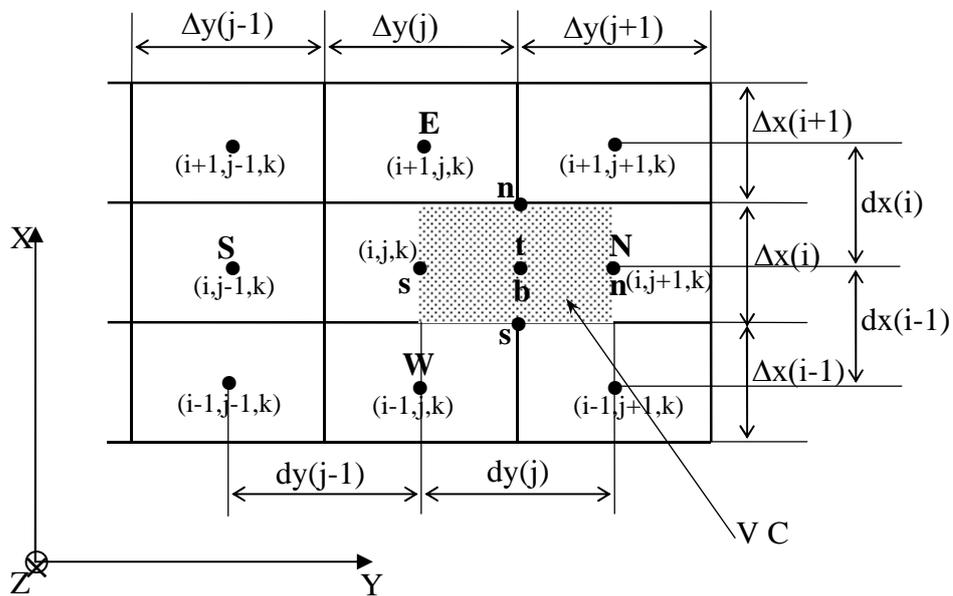


(b)

Figure III. 2: Volume de contrôle (de l'équation d'impulsion suivant x) du maillage entrelacé pour la composante de vitesse u : (a) vue dans OXY , (b) vue dans OXZ .

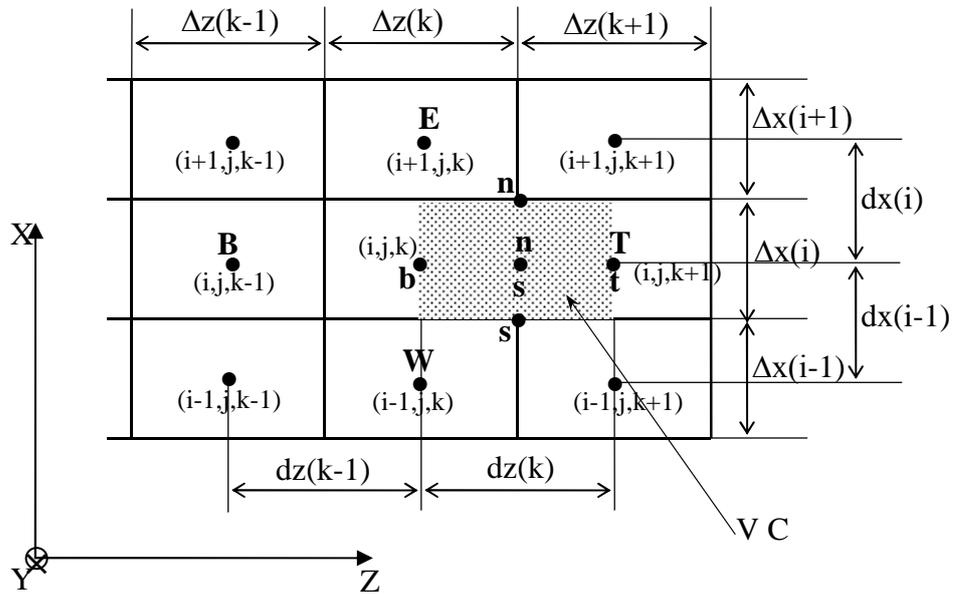


(a)

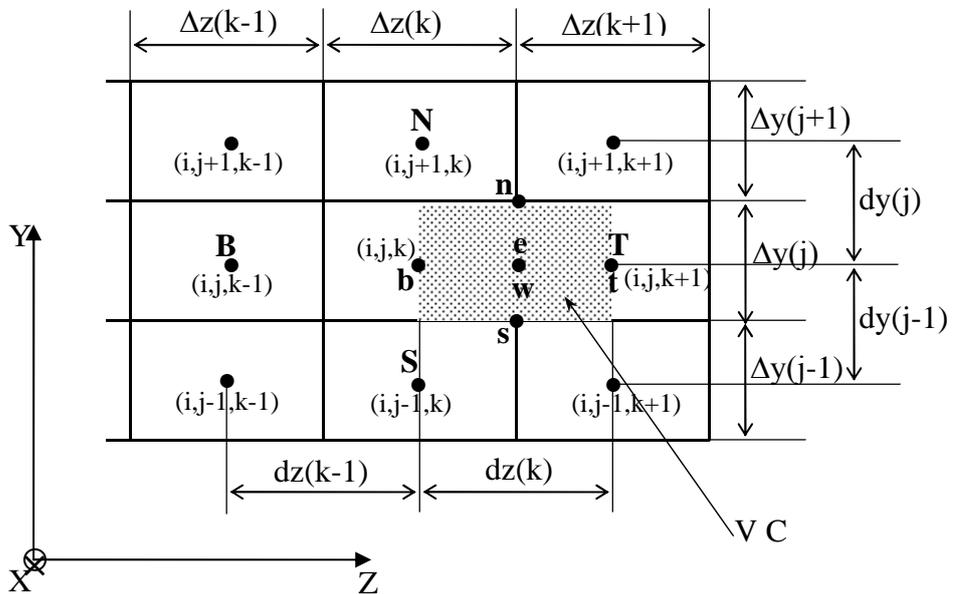


(b)

Figure III. 3: Volume de contrôle (de l'équation d'impulsion suivant y) du maillage entrelacé pour la composante de vitesse v: (a) vue dans OYZ, (b) vue dans OYX.



(a)



(b)

Figure III. 4: Volume de contrôle (de l'équation d'impulsion suivant z) du maillage entrelacé pour la composante de vitesse w: (a) vue dans OZX, (b) vue dans OZY.

III. 3. DISCRETISATION:

Les équations régissant l'écoulement en question peuvent s'écrire selon la forme suivante de l'équation généralisée de transport d'une variable indépendante γ (u, v, w et T) :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u\gamma) + \frac{\partial}{\partial y} (v\gamma) + \frac{\partial}{\partial z} (w\gamma) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) = S_\gamma \quad (25)$$

Où :

$\frac{\partial \gamma}{\partial t}$: représente le terme transitoire.

$\frac{\partial}{\partial x} (u\gamma) + \frac{\partial}{\partial y} (v\gamma) + \frac{\partial}{\partial z} (w\gamma)$: représente le transport par convection de γ .

$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial z} \right)$: représente la diffusion de γ .

S_γ : représente le terme source.

Les tableaux (III. 1) et (III. 2) rassemblent les expressions de la variable dépendante γ , du coefficient de diffusion Γ et du terme source S_γ qui dépend du choix de la direction du champ magnétique, relatives aux équations adimensionnelles écrites auparavant pour chaque problème. Cependant, l'équation du potentiel électrique (14) est du type Poisson, il faut abstraire les termes transitoires et de convection pour pouvoir l'écrire sous forme d'équation de transport générale :

Equation de	γ	\square	S_γ ($\vec{B} \parallel B \vec{i}$ champ magnétique orienté suivant x)	S_γ ($\vec{B} \parallel B \vec{j}$ champ magnétique orienté suivant y)
Continuité	1	0	0	0
Quantité de mouvement x :	$Gr^{0.5}u$	1	$\square \frac{\square P}{\square x}$	$\square \frac{\square P}{\square x} \square \frac{\square \square}{\square z} \square u \square Ha^2$
Quantité de mouvement y :	$Gr^{0.5}v$	1	$\square \frac{\square P}{\square y} \square Gr^{0.5}T$ $\square \frac{\square \square}{\square z} \square v \square Ha^2$	$\square \frac{\square P}{\square y} \square Gr^{0.5}T$
Quantité de mouvement z :	$Gr^{0.5}w$	1	$\square \frac{\square P}{\square z} \square \frac{\square \square}{\square y} \square w \square Ha^2$	$\square \frac{\square P}{\square z} \square \frac{\square \square}{\square x} \square w \square Ha^2$
Energie	$Gr^{0.5}T$	$\frac{1}{Pr}$	0	0
Potentiel électrique	\square	1	$\square \frac{\square w}{\square y} \square \frac{\square v}{\square z}$	$\square \frac{\square u}{\square z} \square \frac{\square w}{\square x}$

Tableau III. 1. Différentes quantités transportées et leurs termes de transport pour le problème 1.

Equation de	γ	\square	S_γ ($\vec{B} \square B \vec{i}$ champ magnétique orienté suivant x)	S_γ ($\vec{B} \square B \vec{k}$ champ magnétique orienté suivant z)
Continuité	1	0	0	0
Quantité de mouvement x :	u	1	$\square \frac{\square P}{\square x}$	$\square \frac{\square P}{\square x} \square \frac{\square \square \square}{\square y} \square u \square Ha^2$
Quantité de mouvement y :	v	1	$\square \frac{\square P}{\square y} \square GrT \square \frac{\square \square \square}{\square z} \square v \square Ha^2$	$\square \frac{\square P}{\square y} \square GrT \square \frac{\square \square \square}{\square x} \square v \square Ha^2$
Quantité de mouvement z :	w	1	$\square \frac{\square P}{\square z} \square \frac{\square \square \square}{\square y} \square w \square Ha^2$	$\square \frac{\square P}{\square z}$
Energie	T	$\frac{1}{Pr}$	0	0
Potentiel électrique	\square	1	$\square \frac{\square w}{\square y} \square \frac{\square v}{\square z}$	$\square \frac{\square v}{\square x} \square \frac{\square u}{\square y}$

Tableau III. 2. Différentes quantités transportées et leurs termes de transport pour le problème 2.

Pour discrétiser l'équation de la variable γ , on intègre l'équation générale de transport sur un volume de contrôle fini de dimensions $\lambda_x \square \lambda_y \square \lambda_z$, on obtient :

$$A_P \gamma_P^{n+1} \square A_E \gamma_E^{n+1} \square A_W \gamma_W^{n+1} \square A_N \gamma_N^{n+1} \square A_S \gamma_S^{n+1} \square A_T \gamma_T^{n+1} \square A_B \gamma_B^{n+1} \square b \tag{26}$$

Où : l'exposant $(n+1)$ désigne l'instant $(t+\Delta t)$.

$$A_E \square D_e A |P_e| \square \max[F_e, 0] \tag{27-a}$$

$$A_W \square D_w A |P_w| \square \max[F_w, 0] \tag{27-b}$$

$$A_N \square D_n A |P_n| \square \max[F_n, 0] \tag{27-c}$$

$$A_S \square D_s A |P_s| \square \max[F_s, 0] \tag{27-d}$$

$$A_T \square D_t A |P_t| \square \max[F_t, 0] \tag{27-e}$$

$$A_B \square D_b A |P_b| \square \max[F_b, 0] \tag{27-f}$$

$$\text{et } b \square \left[S_p \square \frac{\gamma_p^n}{\lambda t} \right] \lambda x \lambda y \lambda z \quad (28)$$

$$A_p \square A_E \square A_W \square A_N \square A_S \square A_T \square A_B \square A_p^n \square S_p \lambda x \lambda y \lambda z \quad (29)$$

$$\text{Où } A_p^n \square \frac{\lambda x \lambda y \lambda z}{\lambda t}. \quad (30)$$

Avec $A_p, A_E, A_W, A_N, A_S, A_T$ et A_B sont respectivement les coefficients correspondants aux nœuds: central (point P), Est, Ouest, Nord, Sud, amont et arrière du volume de contrôle et A_p^n est le coefficient de la variable générale γ à calculer au point P à l'instant t . Le terme source b englobe tous les termes constants dans le volume de contrôle. $D_e, D_w, D_n, D_s, D_t, D_b$ et $F_e, F_w, F_n, F_s, F_t, F_b$ sont respectivement les termes diffusifs et convectifs aux faces Est, Ouest, Nord, Sud, amont et arrière du volume de contrôle, qui sont exprimés par :

$$D_e \square \frac{\Delta_e}{\Delta x_{\gamma_e}} \lambda y \lambda z \quad (31-a)$$

$$D_w \square \frac{\Delta_w}{\Delta x_{\gamma_w}} \lambda y \lambda z \quad (31-b)$$

$$D_n \square \frac{\Delta_n}{\Delta y_{\gamma_n}} \lambda x \lambda z \quad (31-c)$$

$$D_s \square \frac{\Delta_s}{\Delta y_{\gamma_s}} \lambda x \lambda z \quad (31-d)$$

$$D_t \square \frac{\Delta_t}{\Delta z_{\gamma_t}} \lambda x \lambda y \quad (31-e)$$

$$D_b \square \frac{\Delta_b}{\Delta z_{\gamma_b}} \lambda x \lambda y \quad (31-f)$$

$$F_e \square u_e \lambda y \lambda z \quad (32-a)$$

$$F_w \square u_w \lambda y \lambda z \quad (32-b)$$

$$F_n \square v_n \lambda x \lambda z \quad (32-c)$$

$$F_s \square v_s \lambda x \lambda z \quad (32-d)$$

$$F_t \square w_t \lambda x \lambda y \quad (32-e)$$

$$F_b \square w_b \lambda x \lambda y \quad (32-f)$$

P_e, P_w, P_n, P_s, P_t , et P_b sont appelés nombres de Peclet, ils désignent les rapports des flux convectifs aux flux diffusifs aux différentes faces du volume de contrôle, et sont donnés par :

$$P_i = \frac{F_i}{D_i} \quad \text{avec } i = e, w, n, s, t, b \quad (33)$$

Type du schéma numérique	La fonction $A(P_i)$
Schéma aux différences centrées	$1 - 0,5 P_i $
Schéma Upwind	1
Schéma Hybrid	$Max(0, 1 - 0,5 P_i)$
Schéma Power-law	$Max(0, (1 - 0,1 P_i)^5)$
Schéma exponentiel	$ P_i / (\exp P_i + 1)$

Tableau III. 3 : La fonction $A(|P_i|)$ pour les différents schémas numériques [56].

Pour les calculs en régime stationnaire, on a opté pour le schéma power-law [56], et pour capter les instabilités physiques, le schéma des différences centrées[56] a été utilisé, car il est mieux placé pour détecter les instabilités physiques que le schéma Power-law.

III. 4. DISCRETISATION DE L'EQUATION DU POTENTIEL ELECTRIQUE:

- Pour le cas où le champ magnétique est dirigé suivant x ($\vec{B} = B\vec{i}$), on intègre l'équation du potentiel électrique (14-a) sur un volume de contrôle typique de dimensions $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$, on obtient :

$$\int_{b_s w}^{t n e} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) dx dy dz = \int_{b_s w}^{t n e} \left(\frac{w}{y} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (34)$$

Or, on a :

$$\int_{b_s w}^{t n e} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx dy dz = \int_{b_s}^{t n} \left[\frac{\phi}{\Delta x} \right]_w^e dy dz = \left[\frac{\phi}{\Delta x} \right]_e - \left[\frac{\phi}{\Delta x} \right]_w \Delta y \Delta z \quad (35)$$

$$\frac{t n e}{b s w} \frac{2}{y} dx dy dz \square \frac{t e}{b w} \frac{n}{y} dx dz \square \frac{1}{y_n} \frac{1}{y_s} \lambda x \lambda z \quad (36)$$

$$\frac{t n e}{b s w} \frac{2}{z} dx dy dz \square \frac{e n}{w s} \frac{t}{z} dy dx \square \frac{1}{z_t} \frac{1}{z_b} \lambda y \lambda x \quad (37)$$

Pour le terme source, on a :

$$\frac{t n e}{b s w} \frac{w}{y} \frac{v}{z} dx dy dz \square \frac{t n e}{b s w} \frac{w}{y} dx dy dz \square \frac{t n e}{b s w} \frac{v}{z} dx dy dz$$

$$\square \frac{t e}{b w} w_n \square w_s dx dz \square \frac{n e}{s w} v_t \square v_b dx dy$$

$$\square w_n \square w_s \lambda x \lambda z \square v_t \square v_b \lambda x \lambda y \quad (38-a)$$

L'équation linéaire générale du potentiel électrique φ au centre du VC s'écrit donc:

$$A_P \varphi_P \square A_E \varphi_E \square A_W \varphi_W \square A_N \varphi_N \square A_S \varphi_S \square A_T \varphi_T \square A_B \varphi_B \square b \quad (39)$$

Avec :

$$\left. \begin{aligned} A_E &\square \frac{\lambda y \lambda z}{\Delta x_e} \\ A_W &\square \frac{\lambda y \lambda z}{\Delta x_w} \\ A_N &\square \frac{\lambda x \lambda z}{\Delta y_n} \\ A_S &\square \frac{\lambda x \lambda z}{\Delta y_s} \\ A_T &\square \frac{\lambda x \lambda y}{\Delta z_t} \\ A_B &\square \frac{\lambda x \lambda y}{\Delta z_b} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$$A_P \square A_E \square A_W \square A_N \square A_S \square A_T \square A_B \quad (41)$$

$$b \square w_n \square w_s \lambda x \lambda z \square v_t \square v_b \lambda x \lambda y \quad (42-a)$$

- Pour le cas où le champ magnétique est dirigé suivant y ($\vec{B} \square B \vec{j}$), on procède de la même façon et on intègre l'équation du potentiel électrique (14-b), le changement résidera dans le terme source, on trouve donc:

$$\begin{aligned}
 & \int_{b_s}^{t n e} \int_{s w} \frac{u}{z} \frac{w}{x} dx dy dz + \int_{b_s}^{t n e} \int_{s w} \frac{u}{z} dx dy dz + \int_{b_s}^{t n e} \int_{s w} \frac{w}{x} dx dy dz \\
 & \int_{s w}^{n e} u_{\gamma} u_{\beta} dx dy + \int_{b_s}^{t n} w_{\epsilon} w_{\omega} dy dz \\
 & \int u_{\gamma} u_{\beta} \lambda_x \lambda_y + \int w_{\epsilon} w_{\omega} \lambda_y \lambda_z \tag{38-b} \\
 & b u_i + u_b \lambda_x \lambda_y + w_{\epsilon} w_{\omega} \lambda_y \lambda_z \tag{42-b}
 \end{aligned}$$

III. 5. ALGORITHMES DE RESOLUTION:

Pour la résolution des systèmes algébriques avec les conditions aux limites par la méthode de volumes finis, l'utilisation de l'algorithme SIMPLER [56] permet la résolution du couplage vitesse-pression. Le schéma numérique du type différences centrées est utilisé pour évaluer les flux convectifs et diffusifs à l'interface de chaque volume de contrôle. Cette approche a été récemment utilisée par Bessaih et Bouabdellah [53] pour la prédiction du début de la convection oscillatoire dans une cavité rectangulaire remplie avec un métal liquide pur durant le changement de phase. La discrétisation temporelle est du premier ordre et elle est complètement implicite [53]. Finalement, les équations algébriques discrétisées sont résolues par l'algorithme à matrices tridiagonal ligne-par-ligne (TDMA).

III. 5. 1. Algorithme SIMPLER [56] :

L'algorithme SIMPLER est composé des étapes de calcul suivants:

- 1- Initialiser le champ de vitesse.
- 2- Calculer les coefficients des équations de quantité de mouvement et les pseudo-vitesses \hat{u} , \hat{v} et \hat{w} données par les équations suivantes :

$$\left. \begin{aligned}
 \hat{u}_{i,j,k} &= \frac{\int_{nb}^{E,W,N,S,B,T} A_{nb,i,j,k} u_{nb,i,j,k} + b_{i,j,k}^u}{A_{P,i,j,k}} \\
 \hat{v}_{i,j,k} &= \frac{\int_{nb}^{E,W,N,S,B,T} A_{nb,i,j,k} v_{nb,i,j,k} + b_{i,j,k}^v}{A_{P,i,j,k}} \\
 \hat{w}_{i,j,k} &= \frac{\int_{nb}^{E,W,N,S,B,T} A_{nb,i,j,k} w_{nb,i,j,k} + b_{i,j,k}^w}{A_{P,i,j,k}}
 \end{aligned} \right\} \tag{43}$$

$b_{i,j,k}^u$, $b_{i,j,k}^v$ et $b_{i,j,k}^w$ sont les termes sources ne contenant pas les gradients de pression.

Ainsi les vitesses s'écrivent:

$$\left. \begin{aligned} u_{i,j,k} &= \hat{u}_{i,j,k} = P_{u,i,j,k} \mathcal{P}_{i,j,k} = P_{i,j,k} \\ v_{i,j,k} &= \hat{v}_{i,j,k} = P_{v,i,j,k} \mathcal{P}_{i,j,k} = P_{i,j,k} \\ w_{i,j,k} &= \hat{w}_{i,j,k} = P_{w,i,j,k} \mathcal{P}_{i,j,k} = P_{i,j,k} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

où :

$$\left. \begin{aligned} P_{u,i,j,k} &= \frac{\hat{\lambda}_{y-j} \hat{\lambda}_{z-k}}{A_{P,i,j,k}} \\ P_{v,i,j,k} &= \frac{\hat{\lambda}_{x-i} \hat{\lambda}_{z-k}}{A_{P,i,j,k}} \\ P_{w,i,j,k} &= \frac{\hat{\lambda}_{y-j} \hat{\lambda}_{x-i}}{A_{P,i,j,k}} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

3- Calculer les coefficients de l'équation de pression résultante de la substitution des vitesses déterminées à partir des équations (43) dans l'équation de continuité-discrétisée; et la résoudre. Cette équation est:

$$A_{P,i,j,k} P = \sum_{nb \in E,W,N,S,B,T} A_{nb,i,j,k} P_{nb,i,j,k} = b_{i,j,k} \quad (46)$$

4- Considérer le champ de pression obtenu comme une estimation P^\square et l'utiliser pour résoudre les équations de quantité de mouvement discrétisées pour obtenir u^\square , v^\square et w^\square estimées.

$$\left. \begin{aligned} A_{P,i,j,k} u_{i,j,k}^\square &= \sum_{nb \in E,W,N,S,B,T} A_{nb,i,j,k} u_{nb(i,j,k)}^\square = \mathcal{P}_{i,j,k} = P_{i,j,k} \hat{\lambda}_{y-j} \hat{\lambda}_{z-k} \\ &\quad - b_{i,j,k}^u \\ A_{P,i,j,k} v_{i,j,k}^\square &= \sum_{nb \in E,W,N,S,B,T} A_{nb,i,j,k} v_{nb(i,j,k)}^\square = \mathcal{P}_{i,j,k} = P_{i,j,k} \hat{\lambda}_{x-i} \hat{\lambda}_{z-k} \\ &\quad - b_{i,j,k}^v \\ A_{P,i,j,k} w_{i,j,k}^\square &= \sum_{nb \in E,W,N,S,B,T} A_{nb,i,j,k} w_{nb(i,j,k)}^\square = \mathcal{P}_{i,j,k} = P_{i,j,k} \hat{\lambda}_{x-i} \hat{\lambda}_{y-j} \\ &\quad - b_{i,j,k}^w \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

5- Résoudre l'équation discrétisée de la pression P'

6- Corriger le champ des vitesses.

$$\left. \begin{aligned} u_{i,j,k} &= u_{i,j,k} + u'_{i,j,k} \\ v_{i,j,k} &= v_{i,j,k} + v'_{i,j,k} \\ w_{i,j,k} &= w_{i,j,k} + w'_{i,j,k} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Les termes avec prime (') sont les corrections.

7- Résoudre l'équation algébrique discrétisée d'énergie, pour obtenir T.

8- Résoudre l'équation du potentiel électrique pour avoir ϕ .

9- Considérer le champ des vitesses comme une nouvelle estimation et retourner à l'étape 2 jusqu'à convergence.

L'ensemble de ces étapes est récapitulé dans l'organigramme illustré dans la **figure III. 5**.

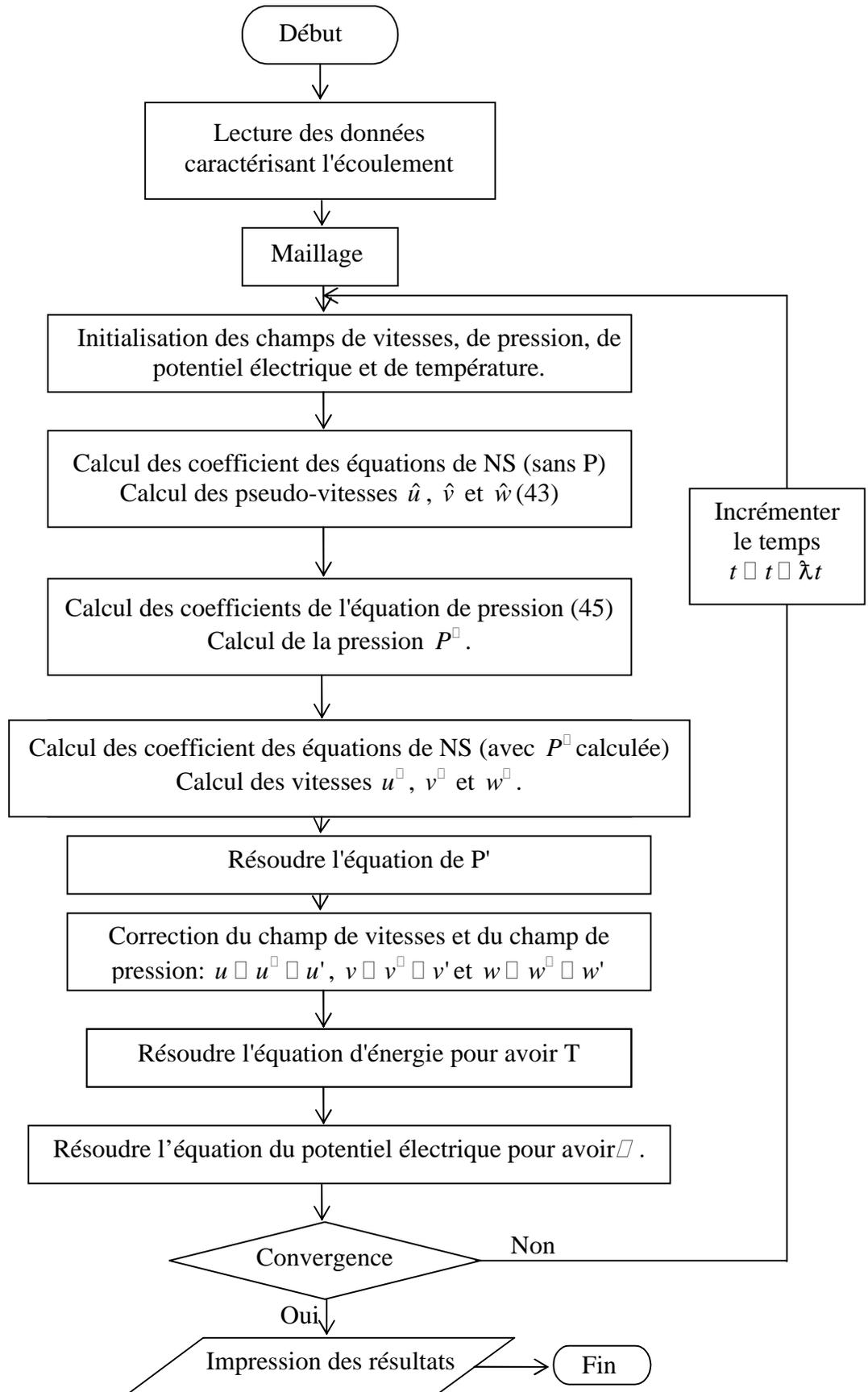


Figure III. 5: Organigramme du code de calcul selon l'algorithme SIMPLER.

III. 5. 2. Algorithme TDMA:

L'équation algébrique s'écrit pour le nœud P du maillage comme suit:

$$A_P \varphi_P \square A_E \varphi_E \square A_W \varphi_W \square A_N \varphi_N \square A_S \varphi_S \square A_T \varphi_T \square A_B \varphi_B \square \bar{S}_\varphi \quad (49)$$

Le système d'équations obtenu s'écrit comme suit:

$$[A] \varphi = \bar{S}_\varphi \quad (50)$$

Avec:

[A]: est une matrice de $jl \times 2 \times jl \times 2$ éléments.

φ : Vecteur des inconnues $\varphi_{i,j,k}$

$i=2, il-1$

$j=2, jl-1$

$k=2, kl-1$

Pour déterminer les valeurs de φ sur une colonne "i" on suppose que les valeurs de cette dernière sont connues sur les colonnes "i-1" et "i+1". L'équation algébrique (49) est donc réduite à une équation qui contient seulement trois inconnues $\varphi_P, \varphi_N, \varphi_S$.

Pour le nœud (i, j, k) du maillage, l'équation peut être écrite sous la forme d'une équation unidimensionnelle:

$$\begin{aligned} & A_S \varphi_{i,j,k} \varphi_S \varphi_{i,j-1,k} \square A_P \varphi_{i,j,k} \varphi_P \varphi_{i,j,k} \square A_N \varphi_{i,j,k} \varphi_N \varphi_{i,j+1,k} \square \\ & A_E \varphi_{i,j,k} \varphi_E \varphi_{i-1,j,k} \square A_W \varphi_{i,j,k} \varphi_W \varphi_{i+1,j,k} \square A_T \varphi_{i,j,k} \varphi_T \varphi_{i,j,k} \square 1 \square \\ & A_B \varphi_{i,j,k} \varphi_B \varphi_{i,j,k} \square 1 \square \bar{S}_\varphi \varphi_{i,j,k} \end{aligned} \quad (51)$$

Et en posant:

$$\left. \begin{aligned} a_j & \square A_P \varphi_{i,j,k} \\ b_j & \square A_N \varphi_{i,j,k} \\ c_j & \square A_S \varphi_{i,j,k} \\ d_j & \square A_E \varphi_{i,j,k} \varphi_E \varphi_{i-1,j,k} \square A_W \varphi_{i,j,k} \varphi_W \varphi_{i+1,j,k} \square \\ & A_T \varphi_{i,j,k} \varphi_T \varphi_{i,j,k} \square 1 \square A_B \varphi_{i,j,k} \varphi_B \varphi_{i,j,k} \square 1 \square \bar{S}_\varphi \varphi_{i,j,k} \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

On trouve alors une équation de la forme:

$$c_j \varphi_{j-1} \square a_j \varphi_j \square b_j \varphi_{j+1} \square d_j \quad (53)$$

Avec:

$$c_1 = 0 \quad \text{et} \quad b_{jl} = 0$$

Pour tous les nœuds $j = 2, j_l = 1$ de la colonne i , l'équation (53) donne un système de la forme:

$$\left. \begin{aligned} c_2 \gamma_1 + a_2 \gamma_2 + b_2 \gamma_3 &= d_2 \\ c_j \gamma_{j-1} + a_j \gamma_j + b_j \gamma_{j+1} &= d_j \\ c_{j_l} \gamma_{j_l-1} + a_{j_l} \gamma_{j_l} + b_{j_l} \gamma_{j_l+1} &= d_{j_l} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Les valeurs de γ_1 et γ_{j_l} sont connue d'après les conditions aux limites.

La matrice associée au système est tri-diagonale. L'algorithme TDMA [56] est utilisé pour sa résolution après réarrangement des équations du système (54), on peut écrire:

$$\gamma_2 = \frac{c_2}{a_2} \gamma_1 + \frac{b_2}{a_2} \gamma_3 + \frac{d_2}{a_2} \quad (55)$$

$$\gamma_j = \frac{c_j}{a_j} \gamma_{j-1} + \frac{b_j}{a_j} \gamma_{j+1} + \frac{d_j}{a_j} \quad (56)$$

$$\gamma_{j_l} = \frac{c_{j_l}}{a_{j_l}} \gamma_{j_l-1} + \frac{b_{j_l}}{a_{j_l}} \gamma_{j_l+1} + \frac{d_{j_l}}{a_{j_l}} \quad (57)$$

Puisque γ_1 est connue, on élimine γ_2 de (55) puis γ_3 de l'équation d'après et γ_j de l'équation (56) et ainsi de suite, on obtient pour γ_j la relation de récurrence suivante:

$$\gamma_j = P_j \gamma_{j-1} + Q_j \quad (58)$$

Pour déterminer P_j et Q_j on procède comme suit:

Pour le nœud $(i, j-1)$, on a:

$$\gamma_{j-1} = P_{j-1} \gamma_j + Q_{j-1} \quad (59)$$

En remplaçant (59) dans (54) on trouve:

$$c_j P_{j-1} \gamma_j + Q_{j-1} + a_j \gamma_j + b_j \gamma_{j+1} = d_j \quad (60)$$

D'où on a:

$$a_j + c_j P_{j-1} \gamma_j = d_j - c_j \gamma_{j+1} - b_j \gamma_{j+1} \quad (61)$$

$$\gamma_j = \frac{b_j}{a_j + c_j P_{j-1}} \gamma_{j+1} + \frac{d_j - c_j \gamma_{j+1}}{a_j + c_j P_{j-1}} \quad (62)$$

De (58) et (62) on a:

$$P_j = \frac{b_j}{a_j + c_j P_{j-1}} \quad (63)$$

$$Q_j = \frac{d_j + c_j \gamma_{j-1}}{a_j + c_j P_{j-1}} \quad (64)$$

Pour $j=1$ on a: $c_j = 0$; et l'équation (62) se réduit à:

$$\gamma_1 = \frac{b_1}{a_1}, \gamma_2 = \frac{d_1}{a_1} \quad (65)$$

Ce qui correspond à la forme de l'équation (56).

Donc on a:

$$P_1 = \frac{b_1}{a_1} \quad \text{et} \quad Q_1 = \frac{d_1}{a_1} \quad (66)$$

Pour $j=jl$ on a: $b_{jl} = 0$, donc $P_{jl} = 0$

Et de l'équation (59) on a:

$$\gamma_{jl} = Q_{jl} \quad (67)$$

L'algorithme de Thomas se résume comme suit:

- ♦ bidiagonaliser la matrice tridiagonale :

1. Calculer P_1 et Q_1 de l'équation (66)
2. Calculer à partir de l'équation (63) et de l'équation (64) les coefficients P_j et Q_j avec: $j=2, jl$.

- ♦ Résolution du système à matrice bidiagonale:

3. On pose $\gamma_{jl} = Q_{jl}$
4. On utilise la relation (58) pour $j=jl-1, jl-2, \dots, 1$ afin d'obtenir les

valeurs $\gamma_{jl-1}, \gamma_{jl-2}, \dots, \gamma_1$.

III. 6. CRITERE DE CONVERGENCE:

Pour le cas stationnaire, les calculs sont effectués jusqu'à satisfaction du critère de convergence, qui consiste à la conservation du flux thermique relatifs traversant les parois de la cavité. En d'autres termes :

- ♦ **Pour le problème 1:**

$$|Q_h - Q_c| \approx 10^{-4} ;$$

Où Q_h est le flux thermique traversant la paroi chaude.

Q_c est le flux thermique traversant la paroi froide.

$$\left| k \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} S - \left| k \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} S \approx 10^{-4}$$

$S = W.H$: Surface d'échange.

et de plus la variation relative des champs des vitesses et de la température entre deux incréments consécutifs (t et $t + \Delta t$) du temps doit être inférieure à 10^{-4} .

♦ **Pour le problème 2:**

$$|Q_h - Q_c - Q_{sl}| \approx 10^{-4} ,$$

Où Q_{sl} est le flux thermique traversant la surface libre du fluide.

$$\left| k \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} S - \left| k \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} S - hS' (T - T_\infty) \approx 10^{-4}$$

$$S = W.H$$

$$S' = L.W$$

Pour le régime permanent, l'incrément de temps adimensionnel utilisé est $\lambda t \approx 10^{-4}$ et pour le régime transitoire on a utilisé $\lambda t \approx 10^{-5}$, $\lambda t \approx 5.10^{-6}$ et $\lambda t \approx 2,5.10^{-6}$.

Les calculs ont été faits à l'aide d'un (PC Pentium 4) dont la vitesse du Processeur est de 3 GHz et avec 512 Mo de RAM. Pour le problème 2, le temps de calcul pour chaque exécution du code de calcul est estimé à 20 heures.

CHAPITRE IV

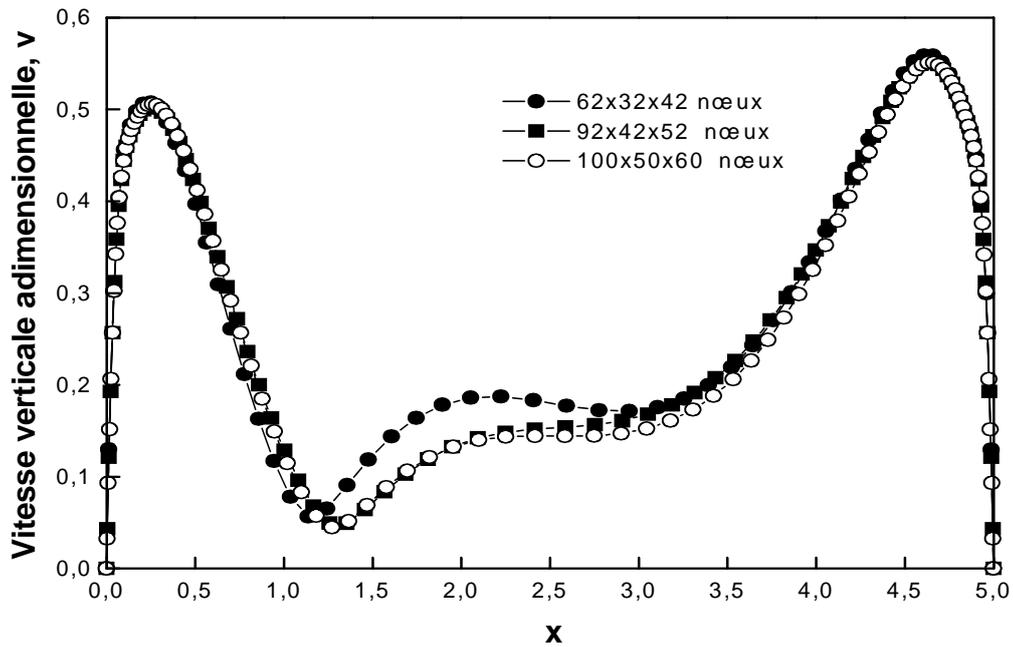
RESULTATS ET DISCUSSIONS

IV. 1. PROBLEME 1:

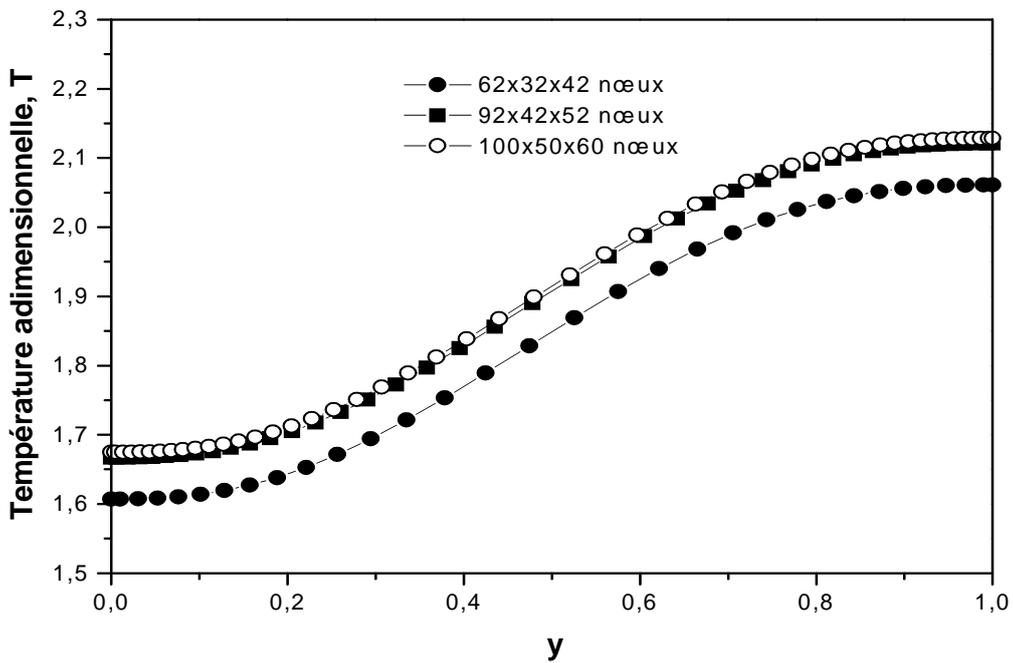
Comme il a été mentionné à la fin du chapitre 1, le problème 1 consiste à déterminer numériquement les effets combinés de la conductivité électrique des parois et de l'orientation du champ magnétique sur la structure dynamique et thermique de l'écoulement dans la cavité fermée considérée par l'expérience de Hof et al. [22] remplie de Gallium avec $Pr=0.019$. La cavité est de section rectangulaire $H/H \square W/H \square 1 \square 1.3$, valeur adimensionnelle, et de rapport d'aspect $A \square L/H \square 5$, elle est soumise à un gradient de température longitudinal. Un champ magnétique est appliqué dans la direction longitudinale: parallèlement au gradient de température. Par la suite, il est appliqué dans la direction verticale (voir figure II. 1). L'effet de la direction du champ magnétique sur la stabilisation de l'écoulement est étudié, ainsi que l'effet de la conductivité électrique des parois sur le nombre de Nusselt moyen est étudié. Les résultats de cette étude sont discutés dans le contexte de la croissance cristalline de Bridgman [32] et sont comparés aux résultats expérimentaux trouvés dans la littérature.

IV. 1. 1. Effet du Maillage sur les Solutions Numériques :

Dans le but d'examiner l'effet du maillage sur la solution numérique, trois maillages ont été considérés pour ce cas: $62 \square 32 \square 42$ nœuds, $92 \square 42 \square 52$ nœuds et $100 \square 50 \square 60$ nœuds. En augmentant la taille du maillage de $92 \square 42 \square 52$ nœuds à $100 \square 50 \square 60$ nœuds, le changement enregistré dans les valeurs calculées est inférieur à 2% (voir **figures IV. 1(a)** et **IV. 1(b)**). Cependant, dans le but de capter les couches limites dynamique et thermique et les couches de Hartmann, et après avoir exécuté les tests de l'indépendance entre la solution numérique et le maillage, le second maillage: $92 \square 42 \square 52$ nœuds a été choisi pour achever tous les calculs. Ce maillage donne également le meilleur compromis entre le coût et la précision des calculs.



(a)

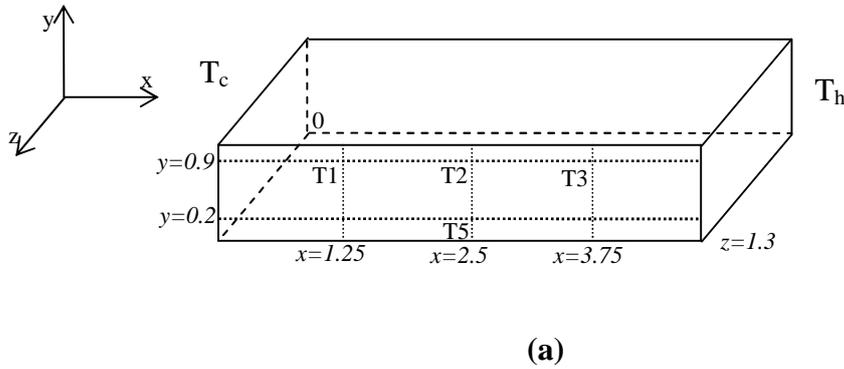


(b)

Figure IV. 1: Effet du maillage pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$ et $Ha=0$ sur la variation de: (a) la vitesse verticale adimensionnelle v par rapport à x aux stations $y=0.5$ et $z=0.65$; (b) la température adimensionnelle par rapport à y aux stations $x=1.8$ et $z=0.3$.

IV. 1. 2. Validation du Code de Calcul :

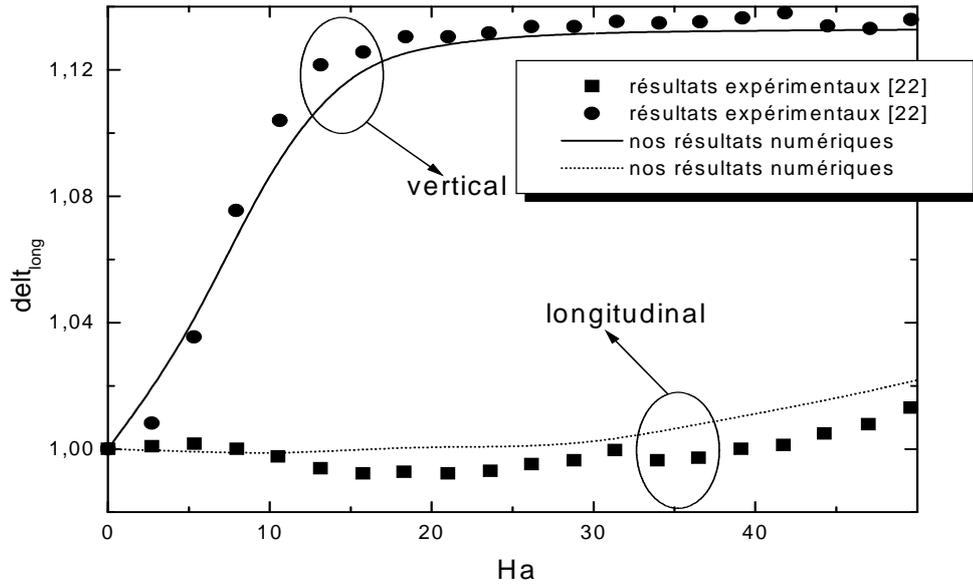
Une comparaison quantitative entre les résultats expérimentaux obtenus par Hof et al. [22] et les résultats de notre simulation numérique est faite, en utilisant la détermination de la différence de température verticale $delt_{mid} = \tilde{\lambda}_{mid} Ha / \tilde{\lambda}_{mid} Ha = 0$, avec $\tilde{\lambda}_{mid} = T2 - T5$ et la différence de température longitudinale $delt_{long} = \tilde{\lambda}_{long} Ha / \tilde{\lambda}_{long} Ha = 0$ avec $\tilde{\lambda}_{long} = T1 - T3$ (**Figure IV. 2**) pour deux orientations du champ magnétique (verticale et longitudinale), avec $Gr = 3.75 \times 10^4$ et $Pr = 0.019$. Comme il est montré sur la **Figure IV. 3**, un bon accord est observé entre les données expérimentaux et nos résultats numériques obtenus.



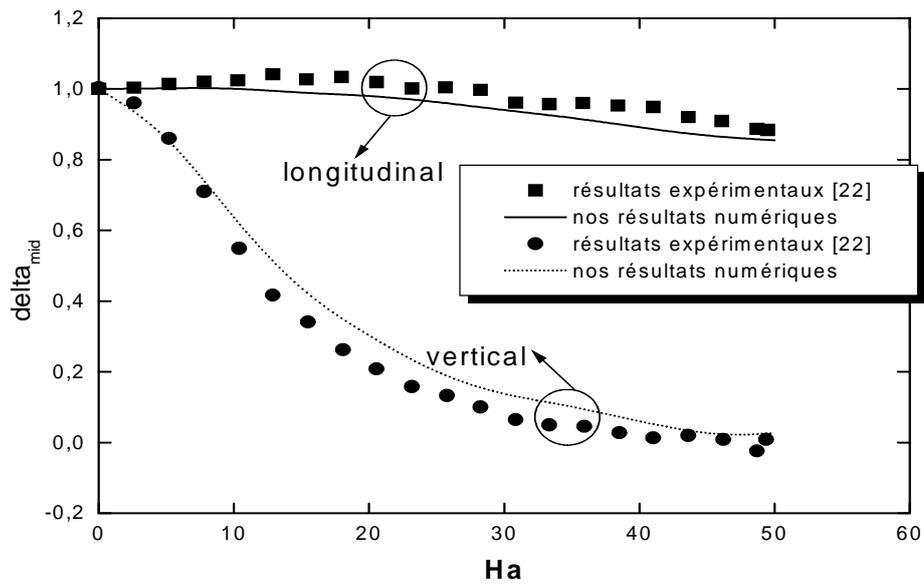
$\tilde{\lambda}_{mid} = T2 - T5$	$delt_{mid} = \tilde{\lambda}_{mid} Ha / \tilde{\lambda}_{mid} Ha = 0$
$\tilde{\lambda}_{long} = T1 - T3$	$delt_{long} = \tilde{\lambda}_{long} Ha / \tilde{\lambda}_{long} Ha = 0$

(b)

Figure IV. 2: (a) Positions des sondes des thermocouples dans la cavité, (b) définition des différences de température, utilisées dans l'étude expérimentale de Hof et al. [22]



(a)



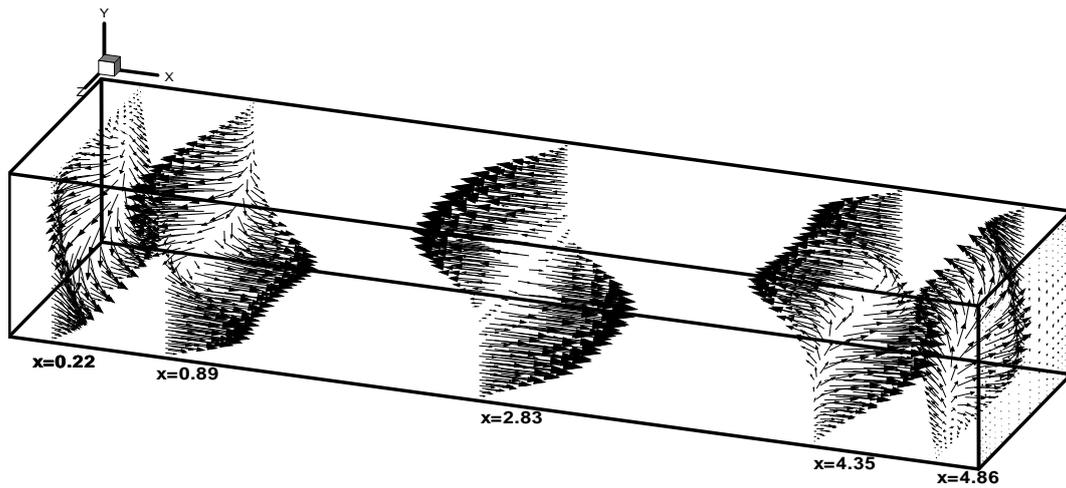
(b)

Figure IV. 3: Comparaison entre nos calculs et les résultats expérimentaux [22] pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$ de: **(a)** la variation de la différence verticale de température $delt_{long}$ avec le nombre de Hartmann, Ha , **(b)** la variation de la différence longitudinale de température $delt_{mid}$ avec le nombre de Hartmann, Ha .

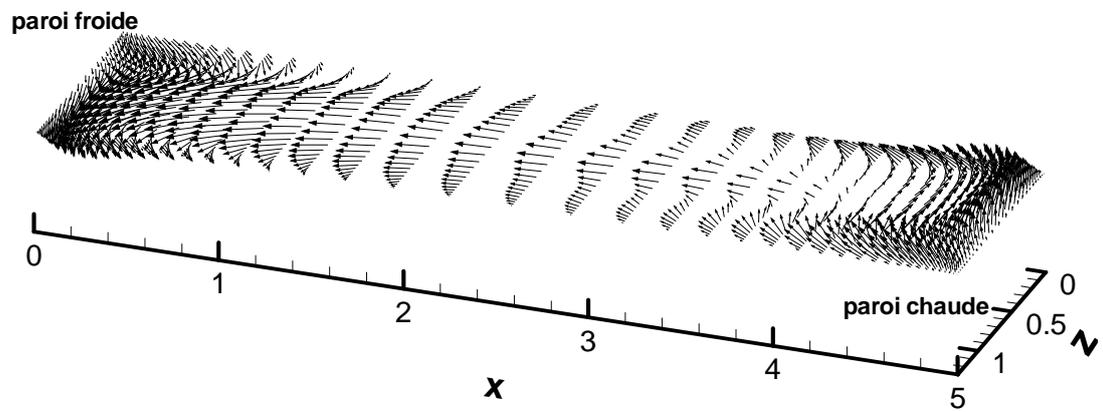
IV. 1. 3. Structure de l'Écoulement:

Les **figures IV. 4, IV. 5 et IV. 6** montrent les vecteurs vitesses, respectivement, pour $Ha=0$ et $Ha=25$ dans le cas où le champ magnétique est longitudinal (B_x) et $Ha=25$ dans le cas où le champ magnétique est vertical (B_y). Les **figures IV. 4(a), IV. 5(a) et IV. 6(a)** représentent les vues perspectives des vecteurs vitesses pour cinq sections transversales de la cavité: $x=0.22$; $x=0.89$; $x=2.83$; $x=4.35$ et $x=4.86$. La même échelle est choisie pour toutes les sections, les flèches indiquent la direction et la magnitude des vecteurs vitesses calculés dans chaque point du maillage dans la région de l'écoulement. En examinant ces figures, il est clair qu'une cellule de convection dans le sens contraire des aiguilles d'une montre est développée dans le système, comme un résultat du gradient thermique imposé et le fluide se déplace vers le bas près de la paroi froide et vers le haut près de la paroi chaude. Les **figures IV. 4(b), IV. 5(b) et IV. 6(b)** montrent l'importante réduction dans l'amplitude des vecteurs vitesses après application du champ magnétique, notamment quand la direction de ce dernier est verticale. Les **figures IV. 4(c), IV. 5(c) et IV. 6(c)** montrent une circulation de base unicellulaire de la paroi froide vers la paroi chaude dans la partie inférieure de la cavité et de la paroi chaude vers la paroi froide dans la partie supérieure de la cavité. L'écoulement montre une symétrie par rapport au centre tout en respectant presque la ligne droite diagonale. Sur chaque côté de la diagonale, un profil de vitesse parabolique est montré dans lequel la vitesse maximale augmente loin des parois isothermes et diminue près d'elles. Ce profil localise le cœur du vortex au milieu de la cavité. Le comportement des profils des vitesses est en bon accord avec celui trouvé par Aleksandrova et Molokov [23].

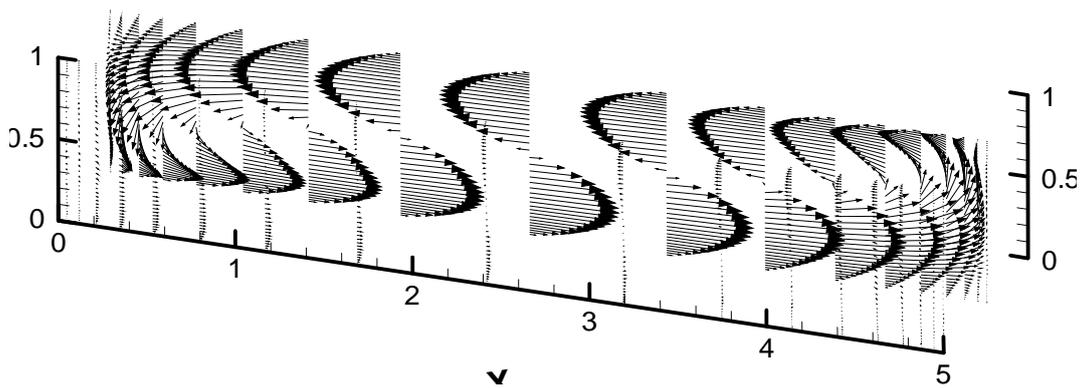
Sur les **figures IV. 7 et IV. 8** le comportement dynamique de l'écoulement est montré pour $Ha=50$ dans le cas où le champ magnétique est longitudinal (B_x) et pour $Ha=50$ dans le cas où le champ magnétique est vertical (B_y). En le comparant avec celui pour $Ha=25$, on constate que le champ des vitesses se réduit fortement en augmentant le champ magnétique. Ceci est dû à l'effet de la force électromagnétique sur les vecteurs vitesses u , v et w .



(a)



(b)



(c)

Figure IV. 4: Vecteurs vitesses pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$ et $Ha=0$ (sans champ magnétique) : (a) dans la cavité, (b) dans le plan x-z, (c) dans le plan x-y.

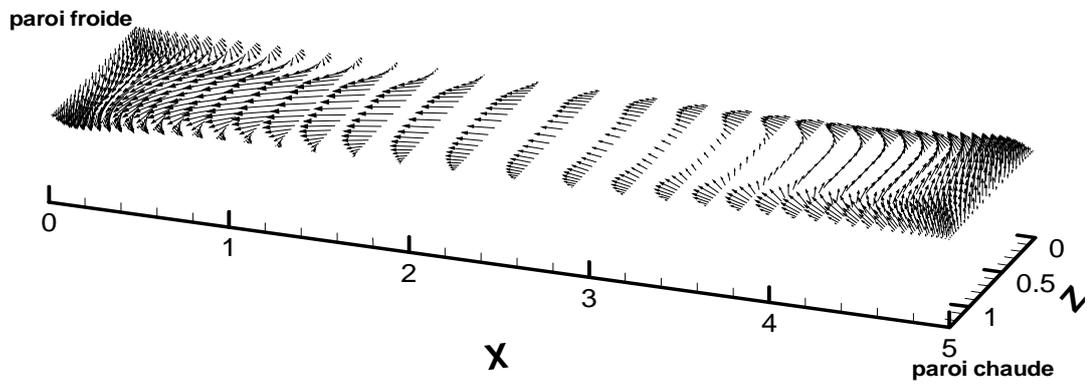
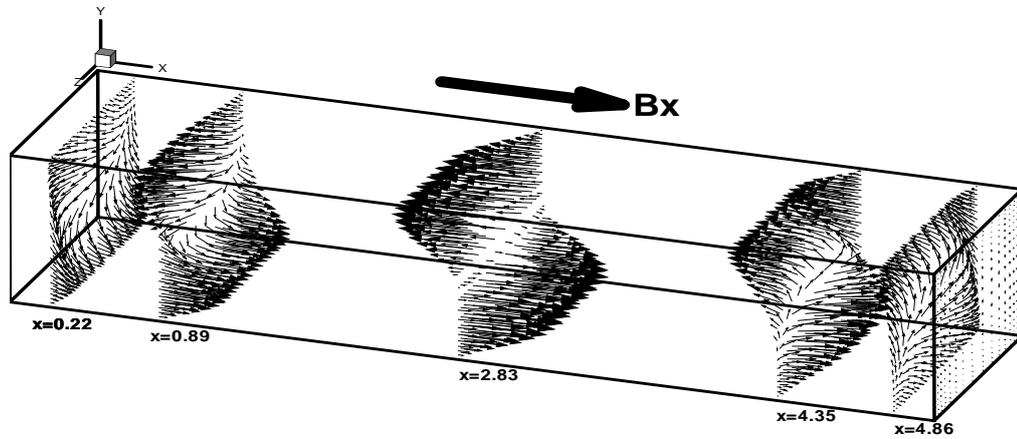
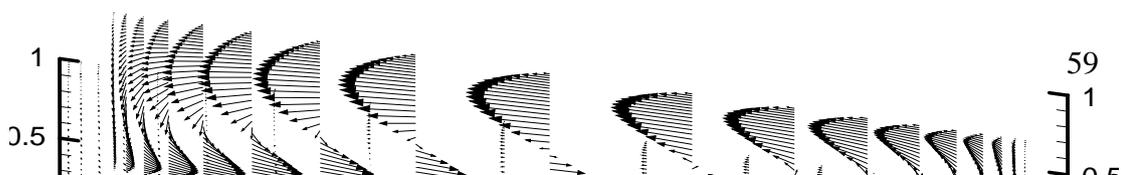


Figure IV. 5: Vecteurs vitesses pour $Gr \approx 3.75 \times 10^4$ et $Ha = 25 (\vec{B} \approx B \vec{i})$:

(a) dans la cavité, (b) dans le plan x-z, (c) dans le plan x-y.



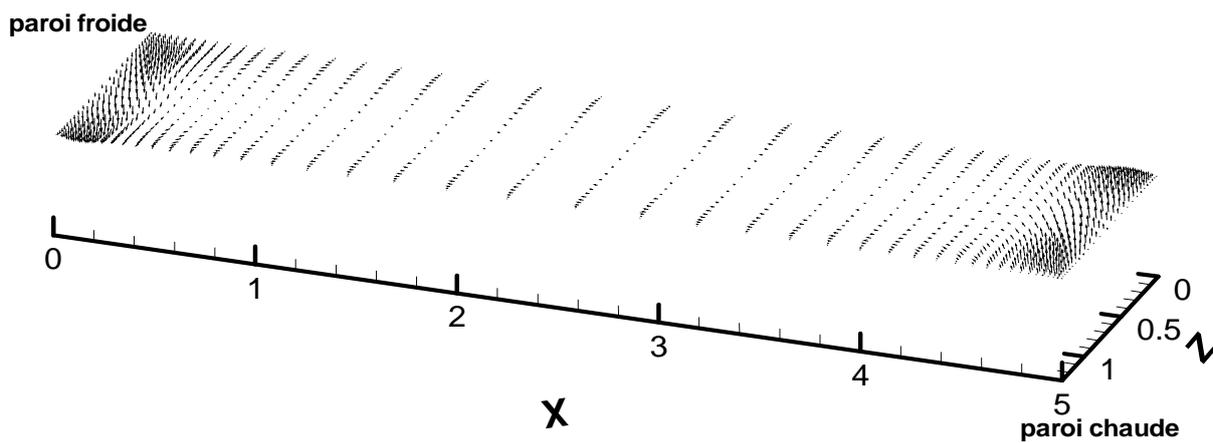
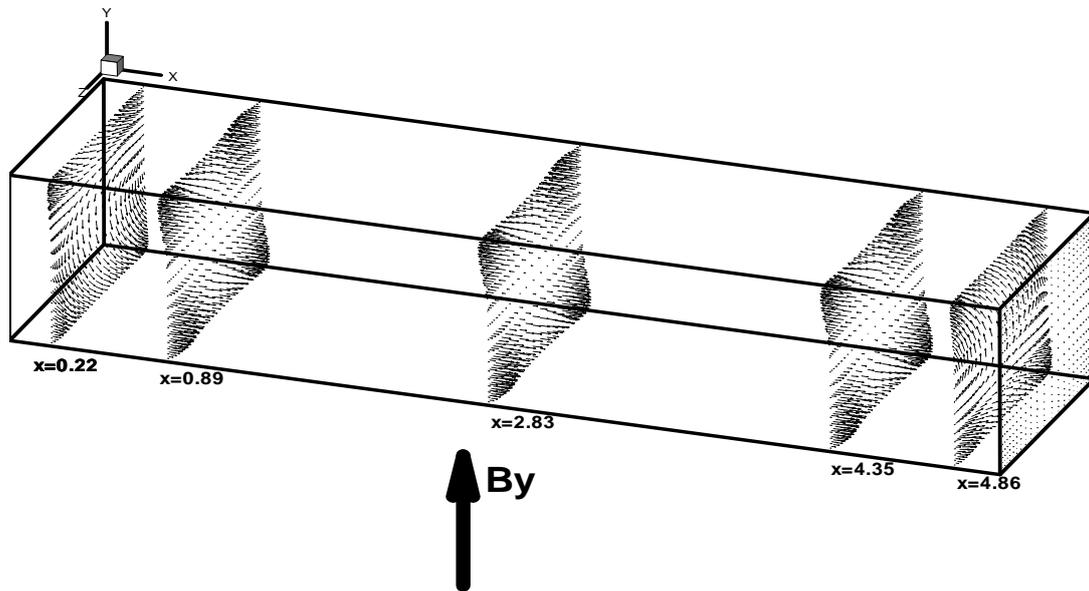
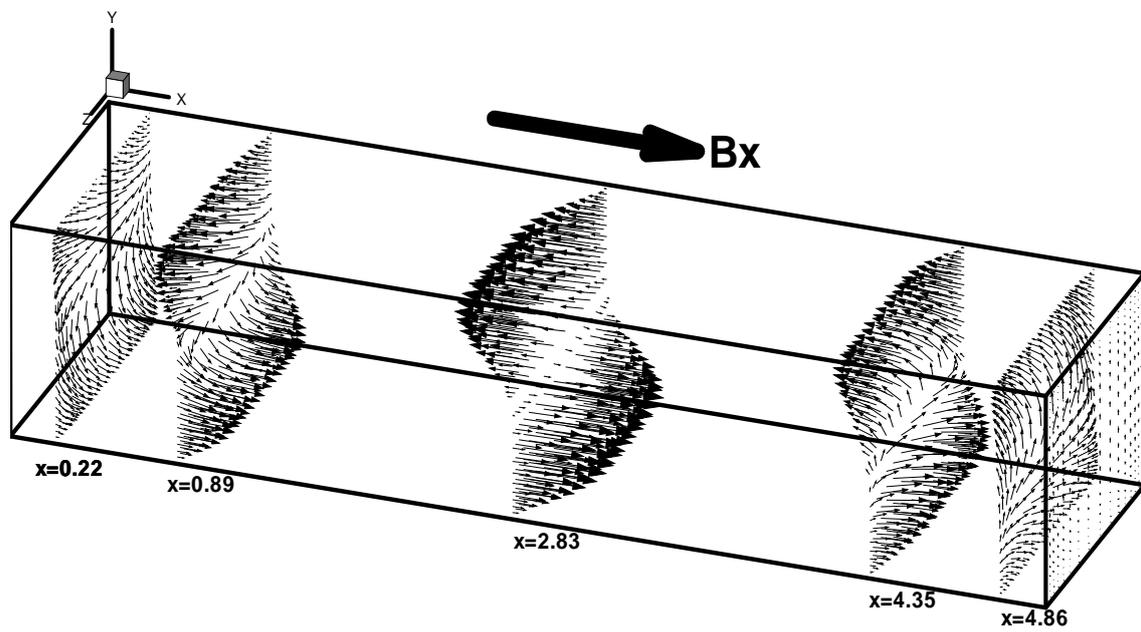
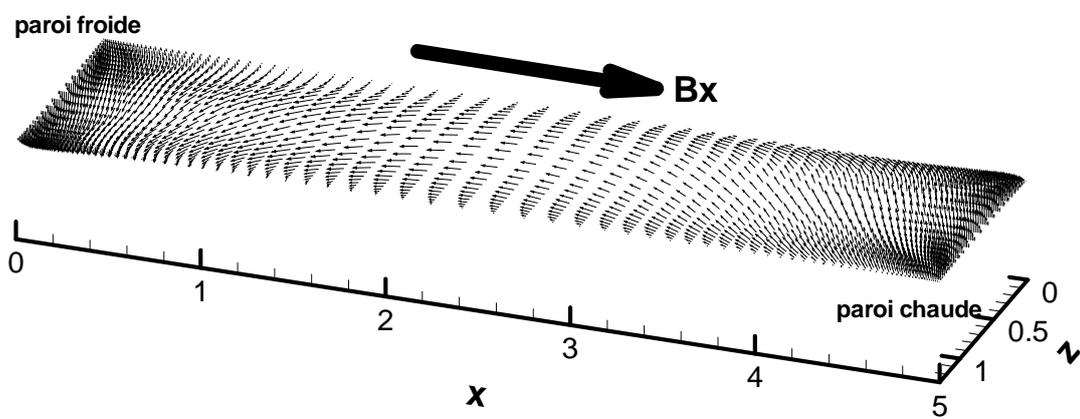


Figure IV. 6: Vecteurs vitesses pour $Gr \approx 3.75 \times 10^4$ et $Ha = 25 (\vec{B} \parallel \vec{B} \hat{j})$:

(a) dans la cavité, (b) dans le plan x-z, (c) dans le plan x-y.



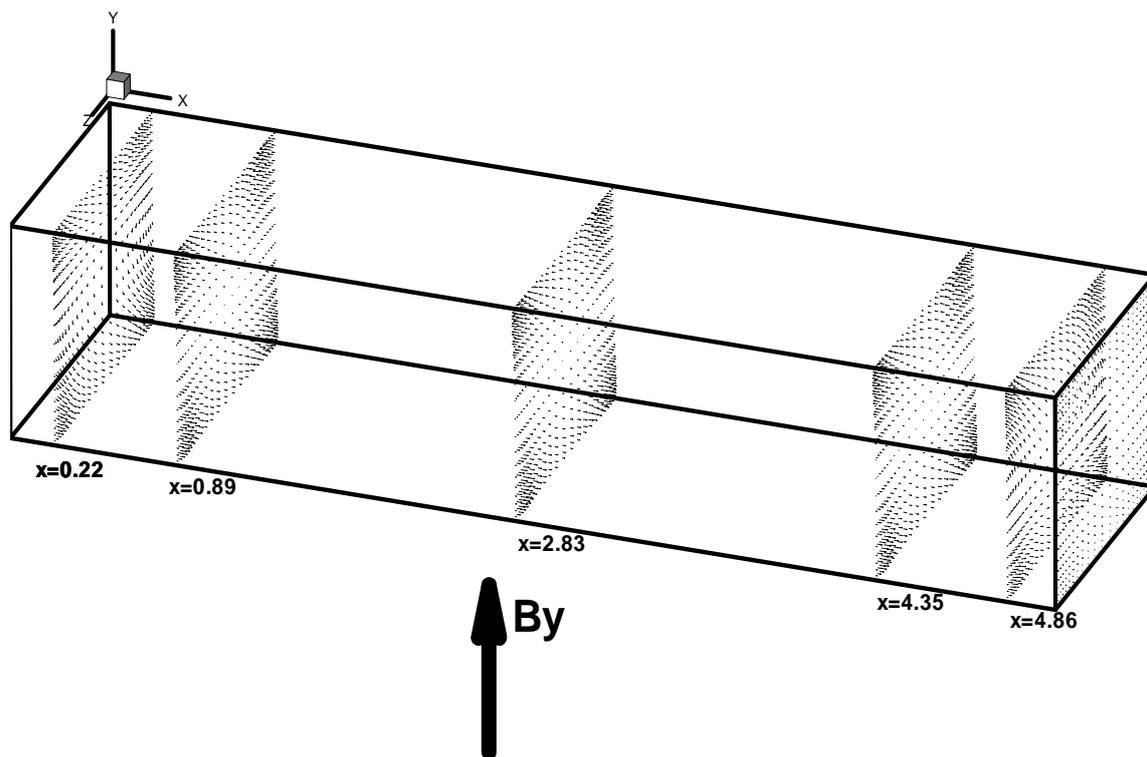
(a)



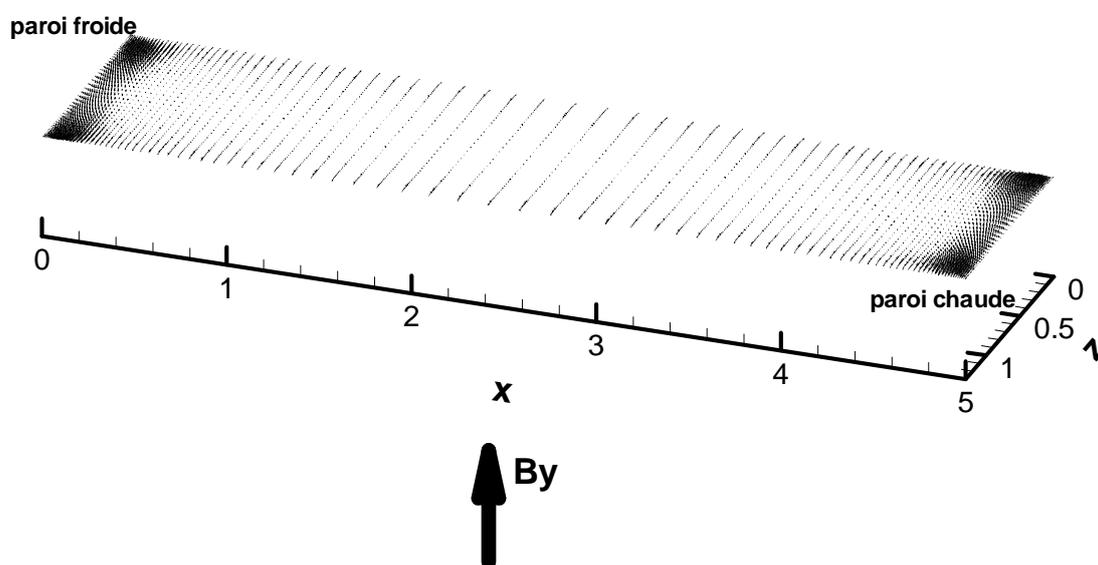
(b)

Figure IV. 7: Vecteurs vitesses pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$ et $Ha= 50 (\vec{B} \square B \vec{i})$:

(a) dans la cavité, (b) dans le plan x-z.



(a)



(b)

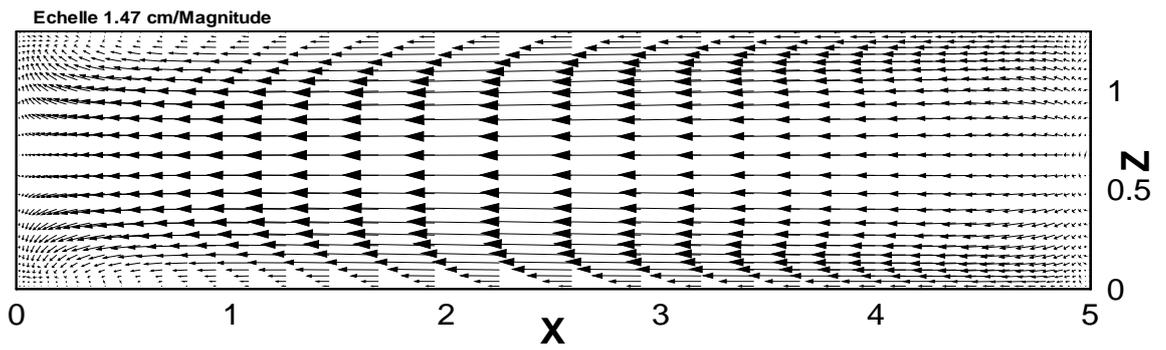
Figure IV. 8: Vecteurs vitesses pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$ et $Ha= 50 (\vec{B} \square B \vec{j})$:

(a) dans la cavité, (b) dans le plan x-z.

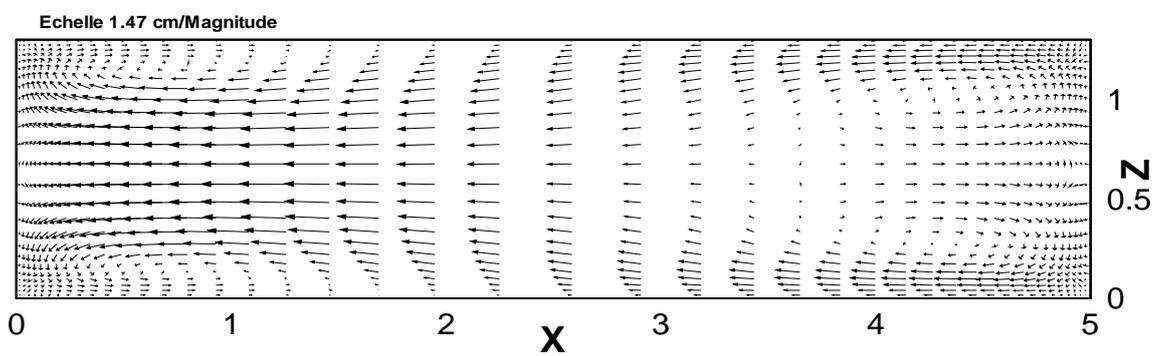
Les vecteurs vitesses dans le plan horizontal x-z pour trois niveaux différents, pour $Ha=25$ sont représentés respectivement sur les **figures IV. 9** et **IV. 10** pour le champ magnétique longitudinal et pour le champ magnétique vertical. On peut remarquer que les valeurs de la vitesse w sont très faibles par rapport à celles de u , spécialement, à $y = \frac{1}{4}$ et à $y = \frac{3}{4}$.

A $y = \frac{1}{2}$ (**figure IV. 9(b)**), quatre petits tourbillons sont formés, et il est clair que l'écoulement n'est pas bidimensionnel dans ce plan. Sur les plans horizontaux au-dessus et au-dessous du plan $y = \frac{1}{2}$, l'écoulement de base longitudinal prédomine sur ces petits tourbillons. En comparant les échelles choisies pour les **figures IV. 9** et **IV. 10**, on constate à quel point la réduction du transfert thermique est plus importante quand la direction du champ magnétique est verticale. On remarque aussi que pour le champ magnétique vertical ($Ha=25$), le cœur central du fluide est pratiquement stagné (**figure IV. 10(b)**).

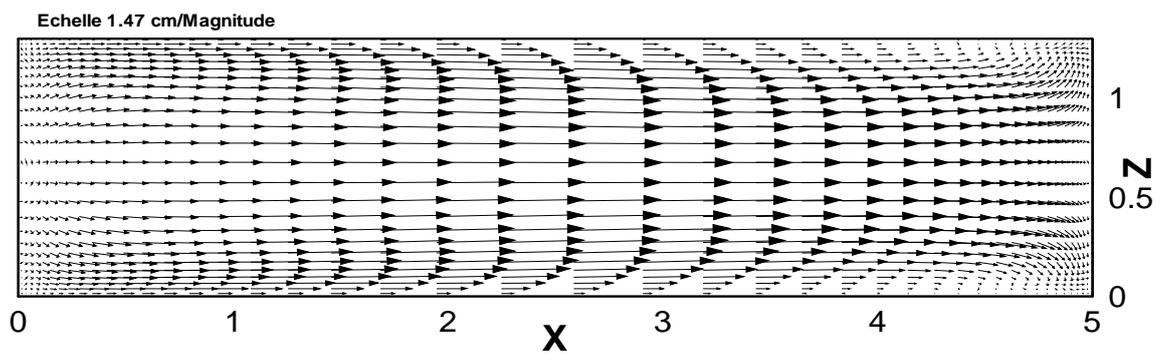
Les vecteurs vitesses dans le plan vertical x-y pour $Ha=25$ sont représentés respectivement sur les **figures IV. 11** pour le champ magnétique longitudinal (B_x) et **IV.12** pour le champ magnétique vertical (B_y), à trois différents niveaux: le quart, le milieu et le trois quart de la profondeur de la cavité. Ces vecteurs vitesses indiquent que la recirculation de l'écoulement est adjacente aux parois, le cœur central du fluide est pratiquement stagné. Entre les trois plans on constate un faible changement dans les valeurs des vitesses. Ceci est peut être dû à l'effet de la vitesse w qui est faible. Par conservation de quantité de mouvement, la direction x du champ magnétique a un effet direct et indirect, respectivement sur les vecteurs vitesses v et u . d'où, les vecteurs vitesses u adjacents aux parois adiabatiques supérieure et inférieure sont plus grands que les vecteurs vitesses v adjacents aux parois chaude et froide. Mais, la direction y du champ magnétique a un effet direct et indirect, respectivement sur les vecteurs vitesses u et v d'où, les vecteurs vitesses v adjacents aux parois chaude et froide sont plus grands que les vecteurs vitesses u adjacents aux parois adiabatiques supérieure et inférieure.



(a)

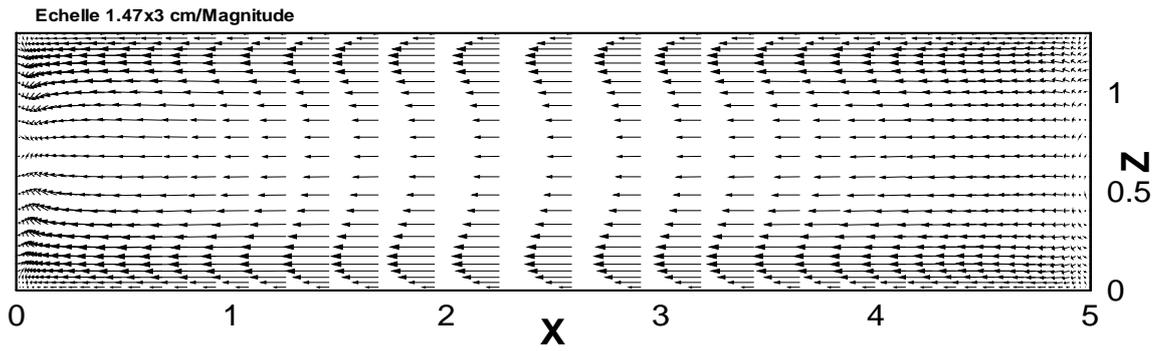


(b)

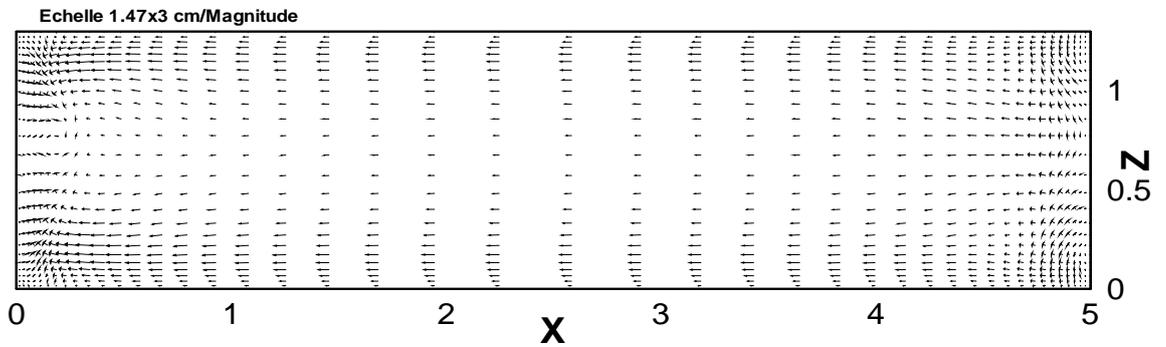


(c)

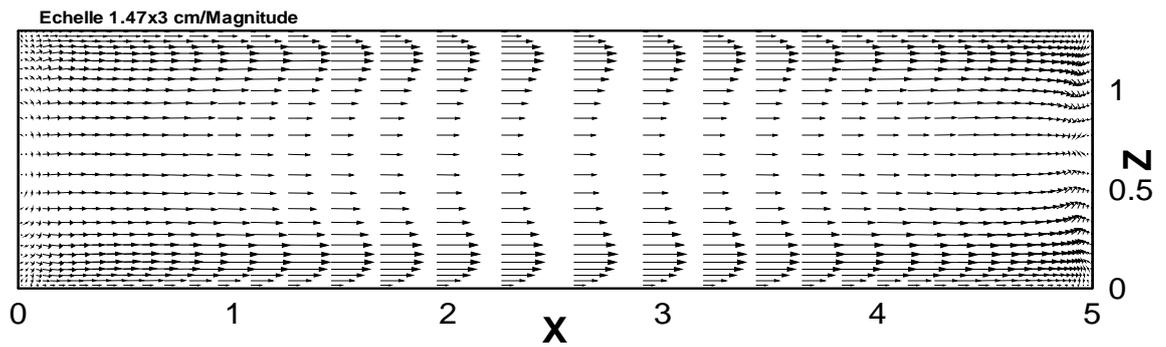
Figure IV. 9: Vecteurs vitesses pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$ et $Ha = 25$ ($\vec{B} \square B \vec{i}$) dans le plan x-z à: (a) $y \square \frac{3}{4}$, (b) $y \square \frac{1}{2}$, (c) $y \square \frac{1}{4}$.



(a)

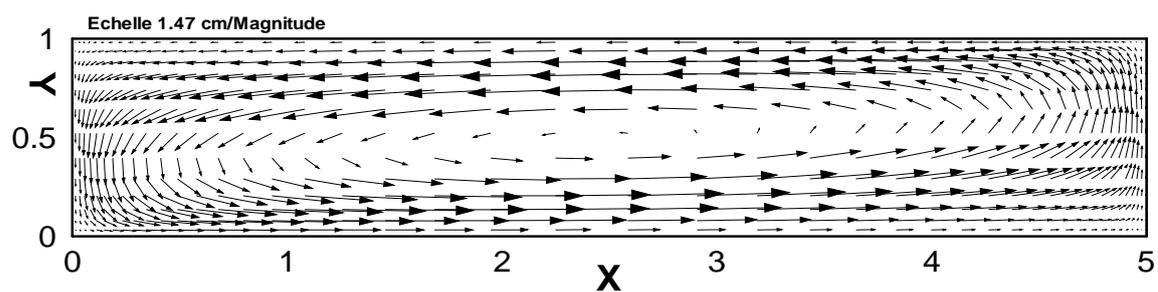


(b)

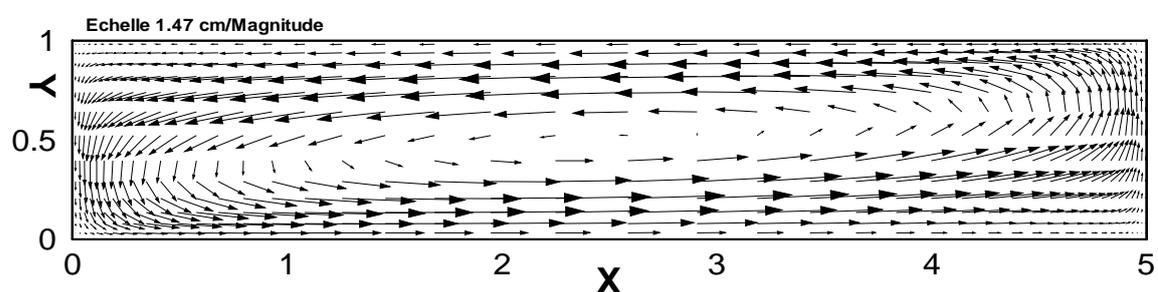


(c)

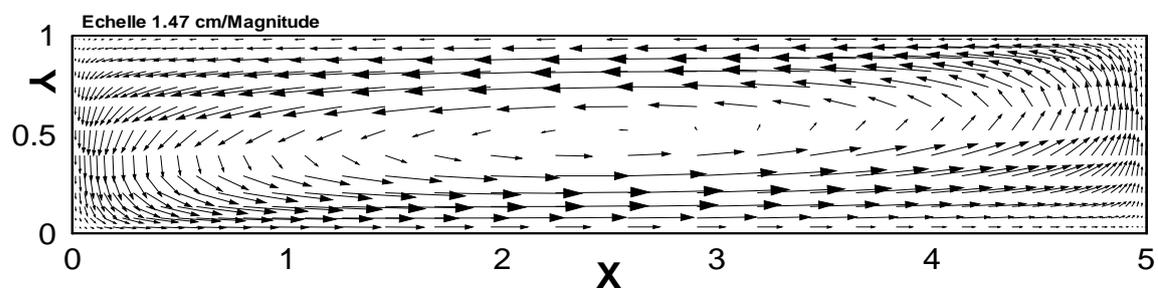
Figure IV. 10: Vecteurs vitesses pour $Gr = 3.75 \times 10^4$ et $Ha = 25$ ($\vec{B} = B \vec{j}$) dans le plan x-z à: (a) $y = \frac{3}{4}$, (b) $y = \frac{1}{2}$, (c) $y = \frac{1}{4}$.



(a)

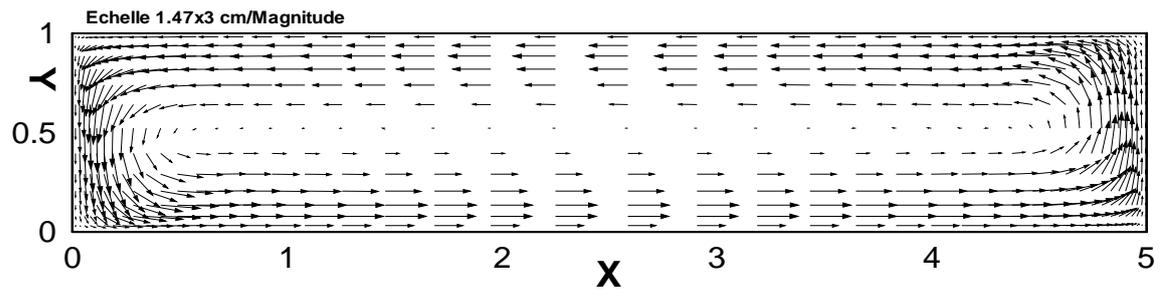


(b)

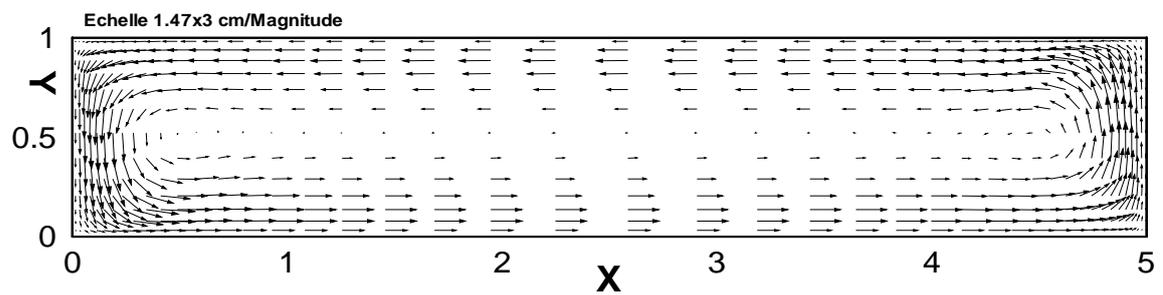


(c)

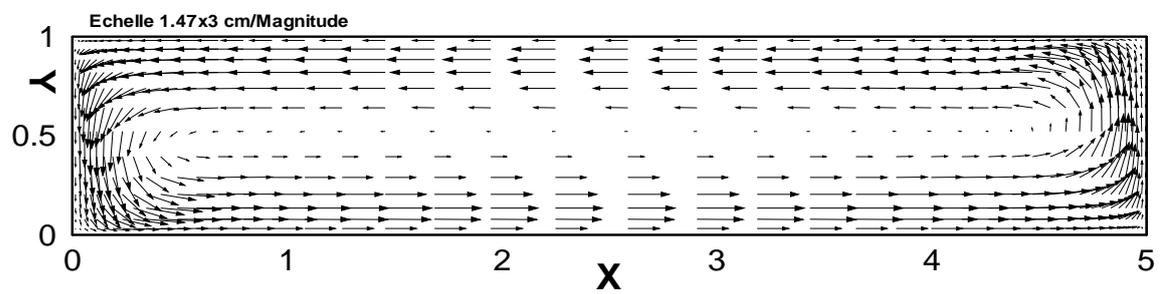
Figure IV. 11: Vecteurs vitesses pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$ et $Ha= 25 (\vec{B} \square B \vec{i})$ dans le plan x-y à: **(a)** $z \square \frac{3}{4}$, **(b)** $z \square \frac{1}{2}$, **(c)** $z \square \frac{1}{4}$.



(a)



(b)



(c)

Figure IV. 12: Vecteurs vitesses pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$ et $Ha= 25 (\vec{B} \square B \vec{j})$ dans le plan x-y à: **(a)** $z \square \frac{3}{4}$, **(b)** $z \square \frac{1}{2}$, **(c)** $z \square \frac{1}{4}$.

La **figure IV. 13** reporte les iso-valeurs de la composante vertical v de la vitesse dans le plan x - z à $y=1/2$, et ceci pour le cas où $Ha=0$ (**fig. IV. 13(a)**) et pour le cas d'un champ magnétique longitudinalement appliqué ($\vec{B} \square B \vec{i}$), avec $Ha=25$ (**fig. IV. 13(b)**) et $Ha=50$ (**fig. IV. 13(c)**), et pour le cas d'un champ magnétique verticalement appliqué ($\vec{B} \square B \vec{j}$), avec $Ha=25$ (**fig. IV. 13(d)**) et $Ha=50$ (**fig. IV. 13(e)**). On remarque qu'avec l'application et l'augmentation du champ magnétique longitudinal, les cellules existant près des parois froide et chaude grandissent de manière graduelle. Par contre, avec l'application et l'augmentation du champ magnétique vertical, ces cellules se rétrécissent graduellement près de ces parois. Les iso-valeurs de v montrent également que le fluide est presque stagné au centre de la cavité.

Pour les iso-valeurs de la composante w de la vitesse dans le plan x - y , au milieu de la cavité ($z=1/2$), représentées sur la **figure IV. 14**, on constate qu'avec l'augmentation de la valeur du champ magnétique longitudinal ($\vec{B} \square B \vec{i}$), de nouvelles cellules se forment près des parois froide et chaude, tout en se déplaçant vers le centre de la cavité, par contre pour le cas du champ magnétique vertical ($\vec{B} \square B \vec{j}$), les cellules se rétrécissent de plus en plus vers les parois chaude et froide.

Les comportements des iso-contours des composantes v et w de vitesse respectivement dans les plans x - z et x - y , sont en bon accord avec ceux trouvé par Di Piazza et Ciofalo [19] et [20], quand le champ magnétique est appliqué suivant x .

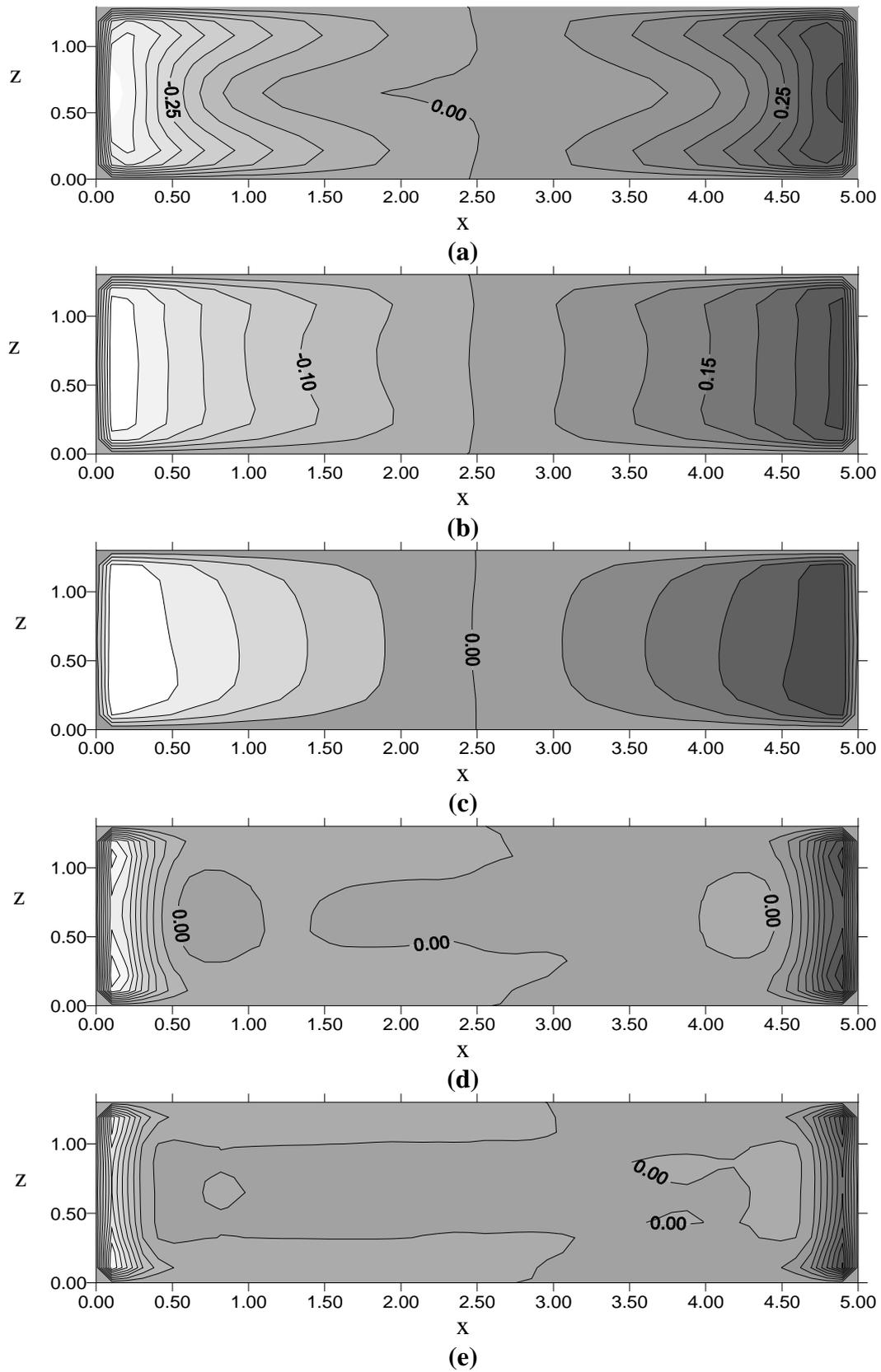
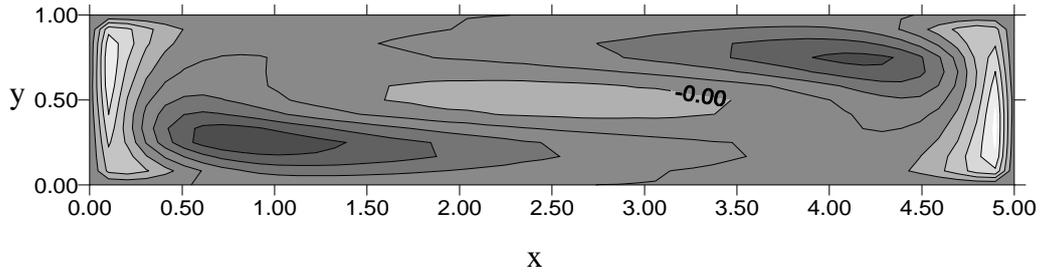
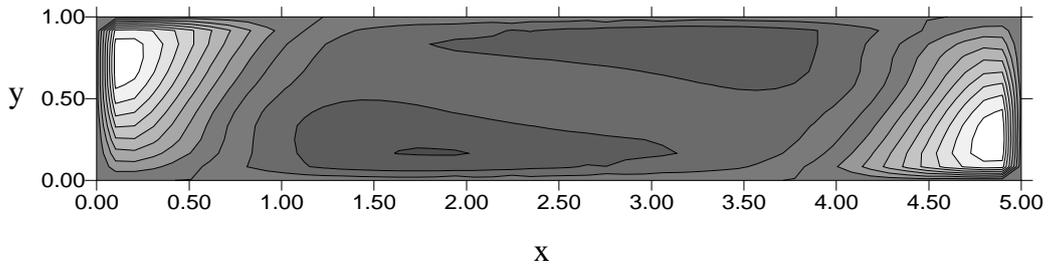


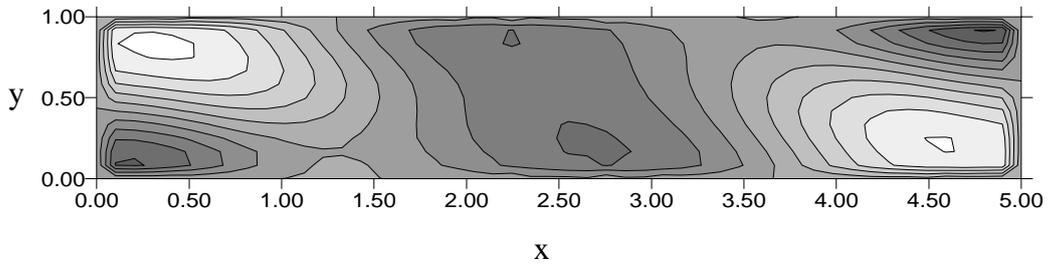
Figure IV. 13: Iso-valeurs de v dans le plan $x-z$, à $y=1/2$: (a) $Ha=0$, (b) $Ha=25$ ($\vec{B} \square B \vec{i}$), (c) $Ha=50$ ($\vec{B} \square B \vec{i}$), (d) $Ha=25$ ($\vec{B} \square B \vec{j}$), (e) $Ha=50$ ($\vec{B} \square B \vec{j}$)



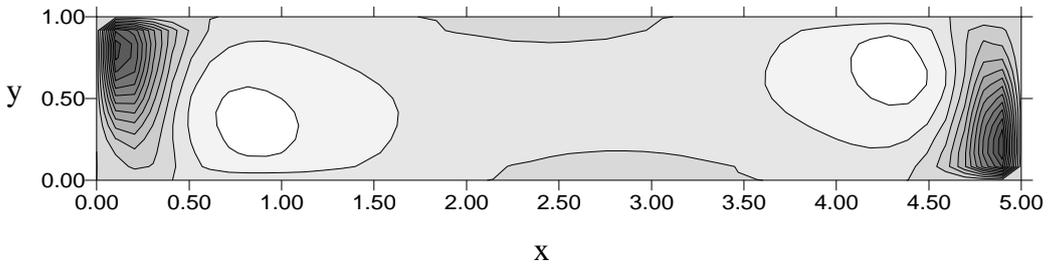
(a)



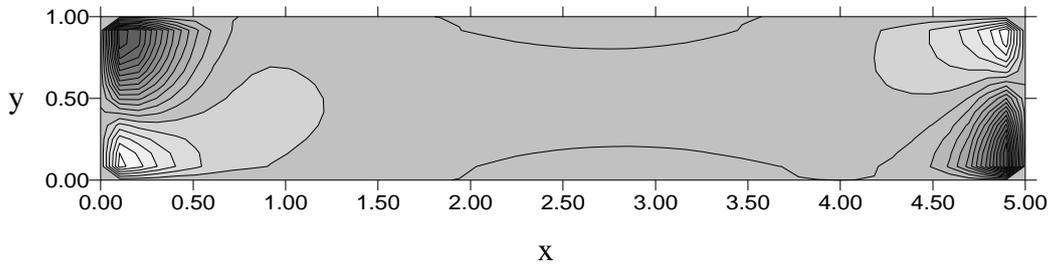
(b)



(c)



(d)



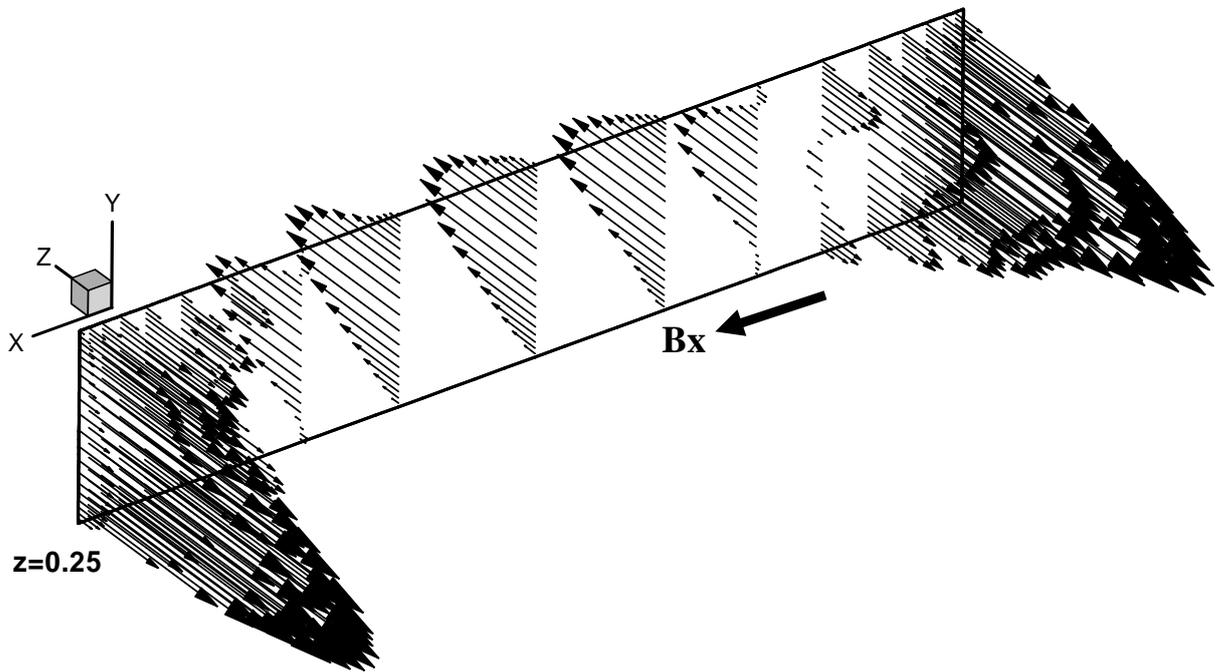
(e)

Figure IV. 14: Iso-valeurs de w dans le plan x - y , à $z=1/2$: (a) $Ha=0$, (b) $Ha=25$ ($\vec{B} \parallel B \vec{i}$), (c) $Ha=50$ ($\vec{B} \parallel B \vec{i}$), (d) $Ha=25$ ($\vec{B} \parallel B \vec{j}$), (e) $Ha=50$ ($\vec{B} \parallel B \vec{j}$)

Les **figures IV. 15** et **figure IV. 16** illustrent respectivement la variation de la composante w de la vitesse dans le plan x - y à $z=0.25$ pour $Ha=25$ et $Ha=50$. La comparaison entre les **figures IV. 15(a)** et **IV. 16(a)** (champ magnétique B_x) d'un côté et les **figures IV. 15(b)** et **IV. 16(b)** (champ magnétique B_y) de l'autre côté montre qu'une modification remarquable de la structure de l'écoulement existe quand la direction du champ magnétique change. Avec le champ magnétique vertical, la composante w de vitesse diminue rapidement dans la région centrale avec l'augmentation de Ha et presque deux maximums asymétriques sont apparents près des parois verticales. Cependant, avec le champ magnétique longitudinal, deux recirculations apparaissent dans la cavité et la magnitude de la vitesse dans le cœur est toujours importante. Dans le but d'obtenir l'effet similaire sur l'écoulement du champ magnétique vertical ($Ha=50$), une valeur plus grande du nombre de Hartmann ($Ha>50$) doit être utilisée quand le champ magnétique est appliqué dans la direction longitudinale. Ceci est en bon accord avec les résultats trouvés par Benhadid et Henry [7], qui montrent que dans le cas d'une cavité dont le rapport d'aspect est $4 \leq 1 \leq 1$, l'effet de l'amortissement pour $Ha=200$ quand le champ magnétique est dans la direction longitudinale est similaire à celui pour $Ha=100$ quand le champ magnétique est dans la direction verticale.

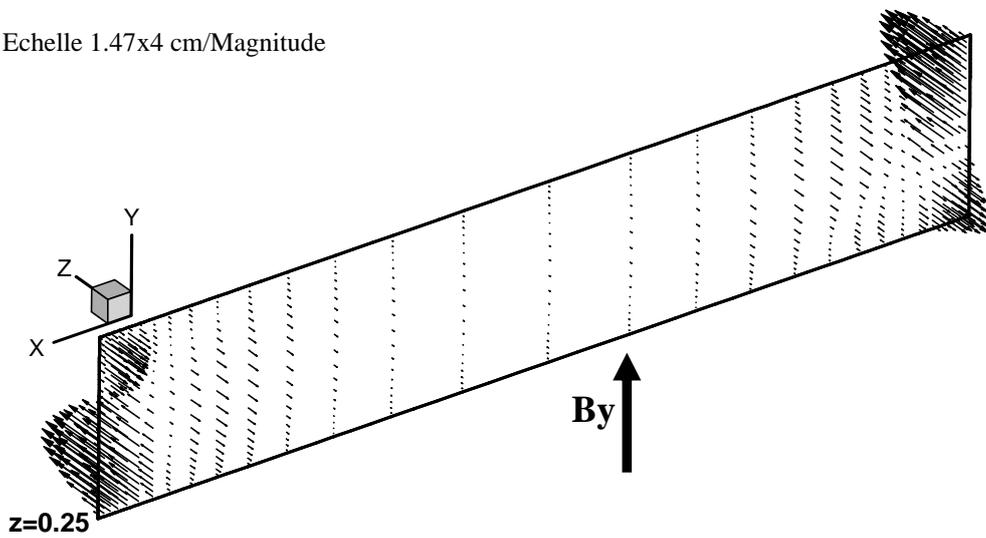
La **figure IV. 17** présente quelques suivis de particules dans la cavité pour des nombres de Hartmann différents. En absence du champ magnétique ($Ha=0$), le comportement de l'écoulement montre un écoulement tridimensionnel irrégulier dû à la convection libre pure (**figure IV. 17(a)**). En augmentant le nombre de Hartmann, l'écoulement tridimensionnel devient plus organisé; en effet, pour $Ha=50$ l'écoulement est plus régulier, tandis que l'important écoulement tangentiel près des parois latérales est approximativement insensible à la direction du champ magnétique. Par conséquent, l'effet de la direction du champ magnétique sur l'écoulement tridimensionnel est essentiellement dans le centre de la cavité.

Echelle 1.47x4 cm/Magnitude



(a)

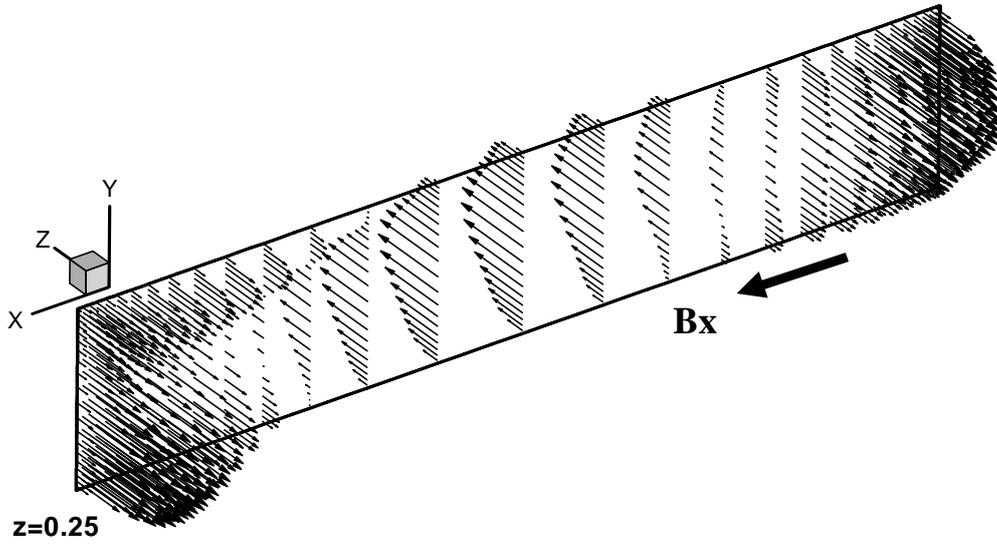
Echelle 1.47x4 cm/Magnitude



(b)

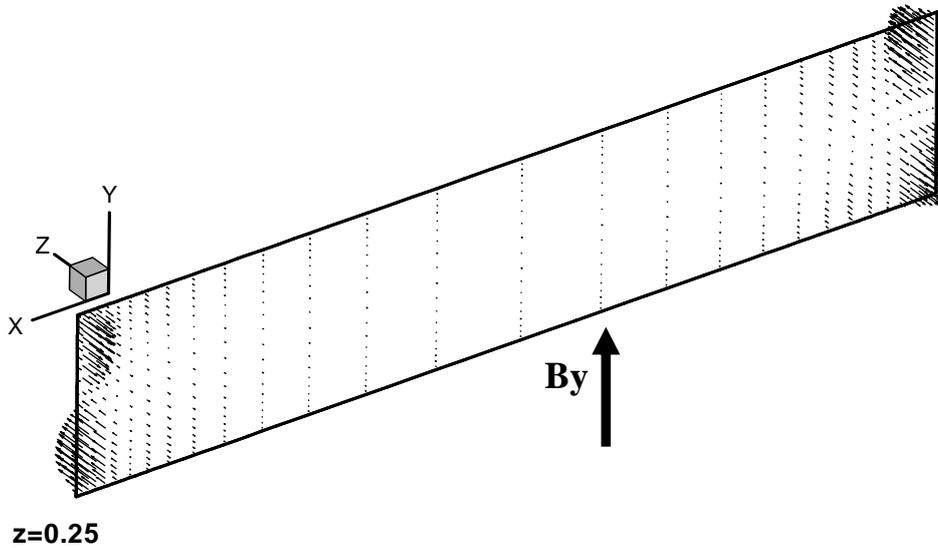
Figure IV. 15: Représentation vectorielle de la composante w des vecteurs vitesses pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$ et $Ha= 25$: (a) $\vec{B} \square B \vec{i}$, (b) $\vec{B} \square B \vec{j}$.

Echelle 1.47x4 cm/Magnitude



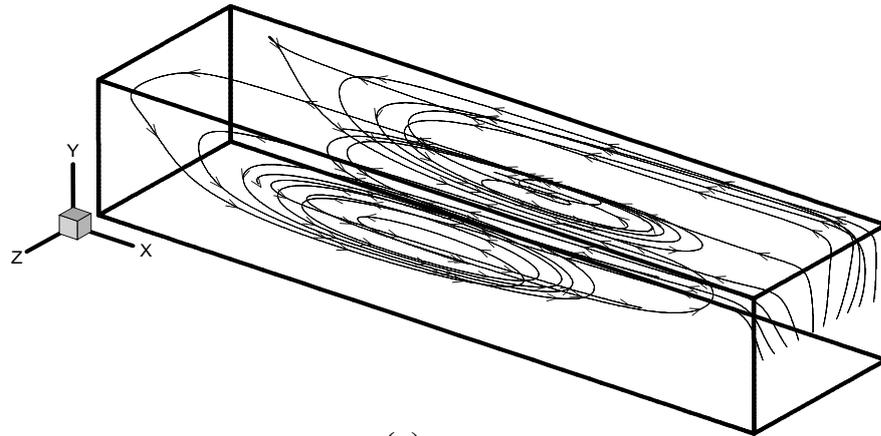
(a)

Echelle 1.47x4 cm/Magnitude

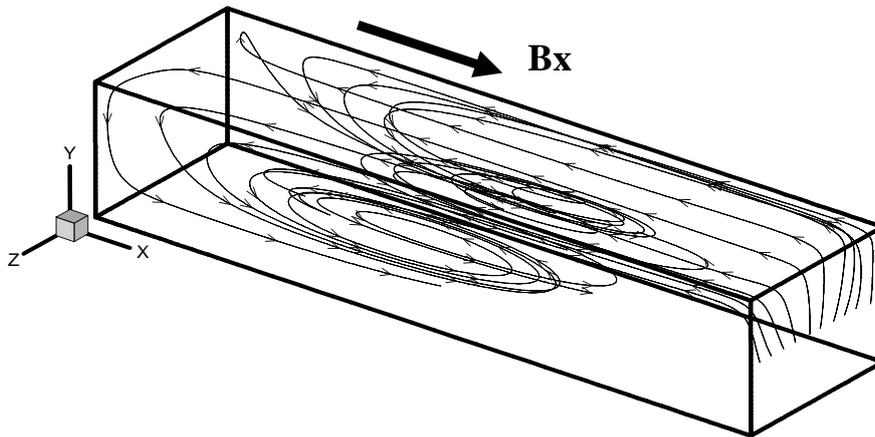


(b)

Figure IV. 16: Représentation vectorielle de la composante w des vecteurs vitesses pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$ et $Ha= 50$: (a) $\vec{B} \square B \vec{i}$, (b) $\vec{B} \square B \vec{j}$.

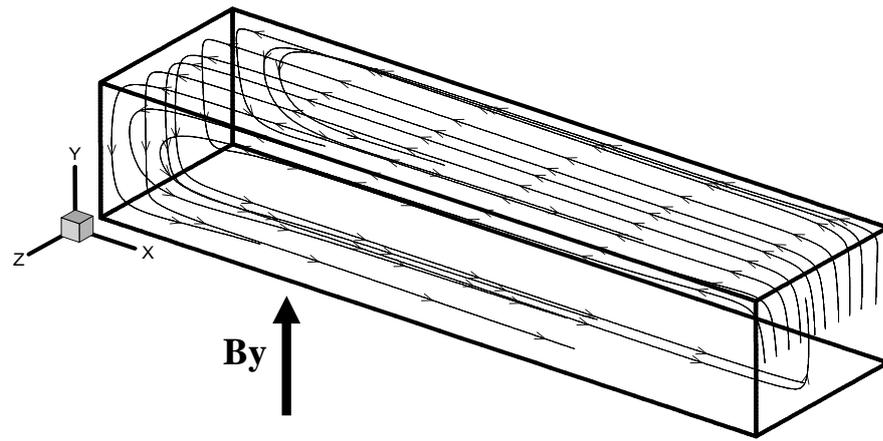


(a)

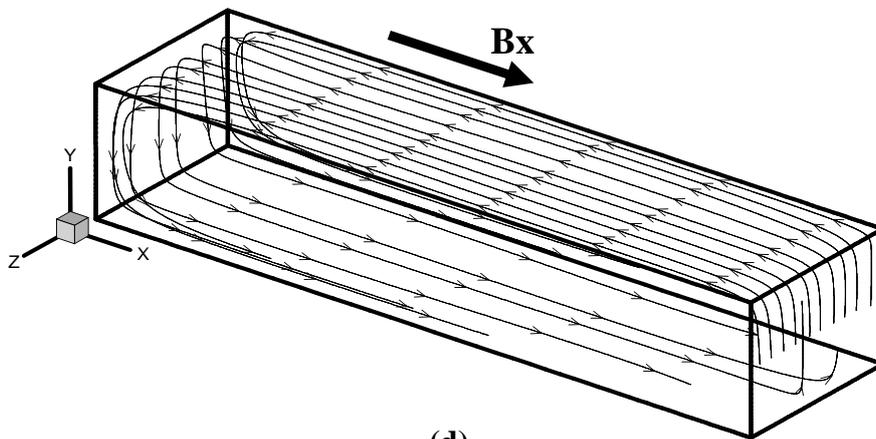


(b)

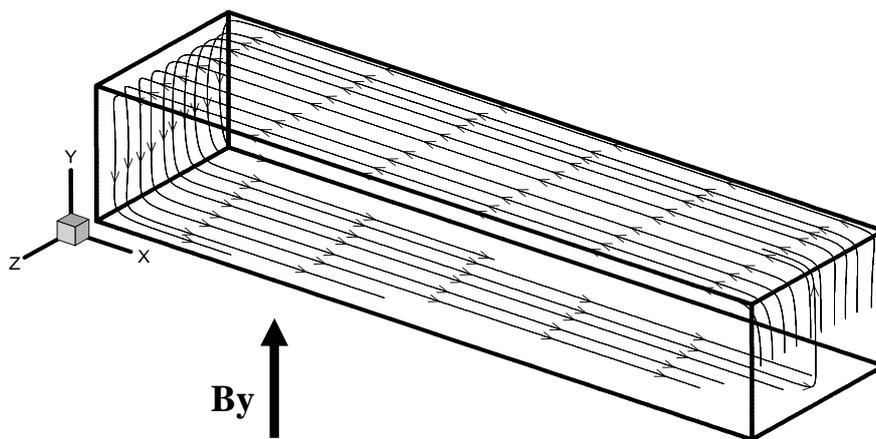
Figure IV. 17: Suivis de quelques particules pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$ (sans et avec champ magnétique) : (a) sans champ magnétique; (b) $Ha=10, \vec{B} \square B \vec{i}$; (c) $Ha=10, \vec{B} \square B \vec{j}$; (d) $Ha=50, \vec{B} \square B \vec{i}$; (e) $Ha=50, \vec{B} \square B \vec{j}$.



(c)



(d)

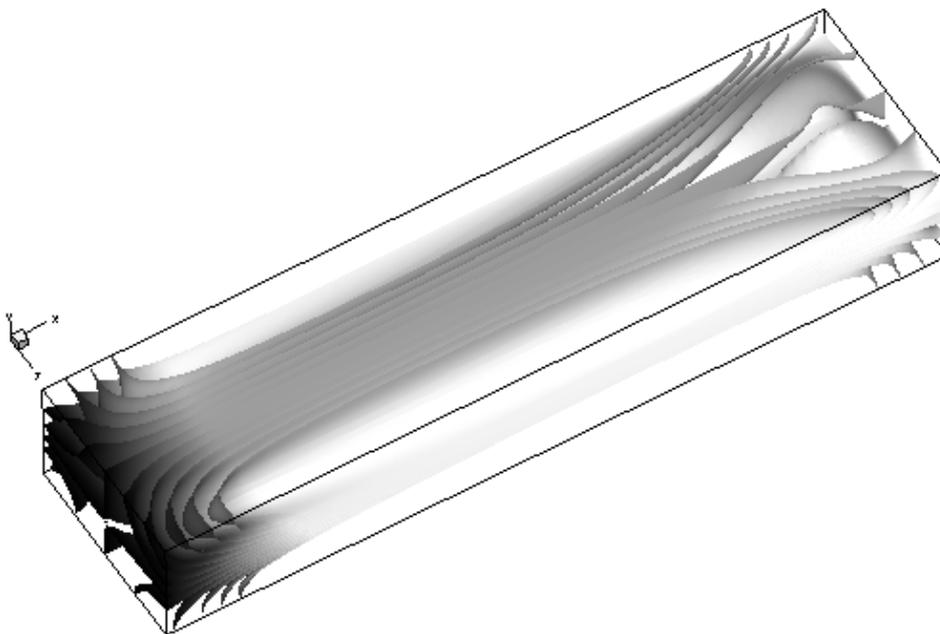


(e)

Figure IV. 17: (suite)

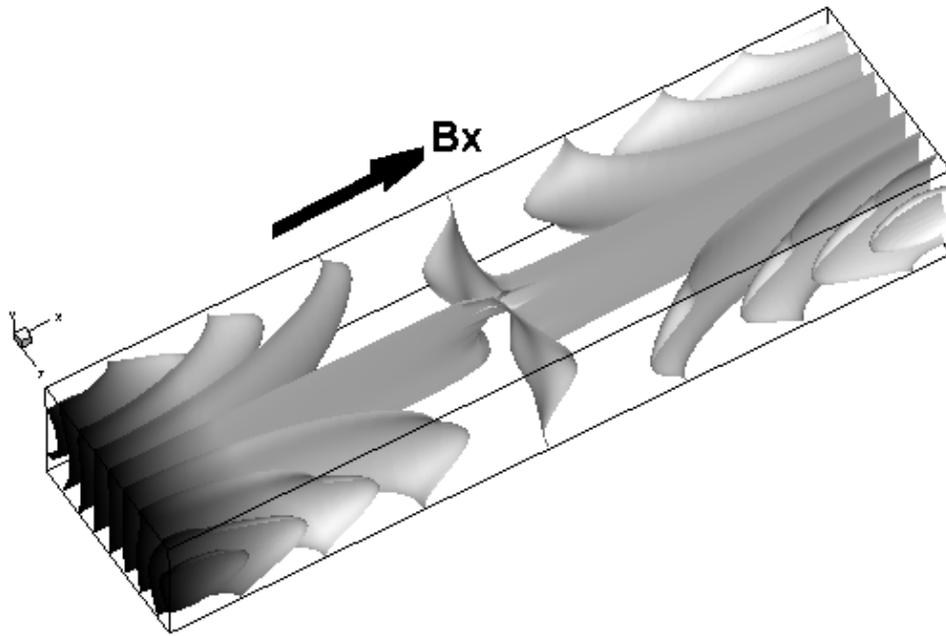
IV. 1. 4. Champ du Potentiel et Structure du Courant Electrique :

La **figure IV. 18(a)** présente le champ du potentiel électrique pour le champ magnétique longitudinal ($Ha=50$). Dans ce cas, le courant électrique directement induit vient principalement de l'interaction avec la composante verticale de la vitesse, spécialement près des parois latérales et des parois longitudinales. Le potentiel est asymétrique par rapport au plan du milieu x-y; il est aussi de signes opposés dans les parties droite et gauche de la cavité. Les **figures IV. 19** présentent les vecteurs densité de courant dans quelques plans y-z pour un champ magnétique vertical. Il ya une circulation tournante du courant crée par des gradients verticaux du potentiel électrique, et ce potentiel crée aussi des courants horizontaux près des coins. Une très bonne similarité peut être observée avec les résultats de Benhadid et Henry [7] et Aleksandrova et Molokov [23].

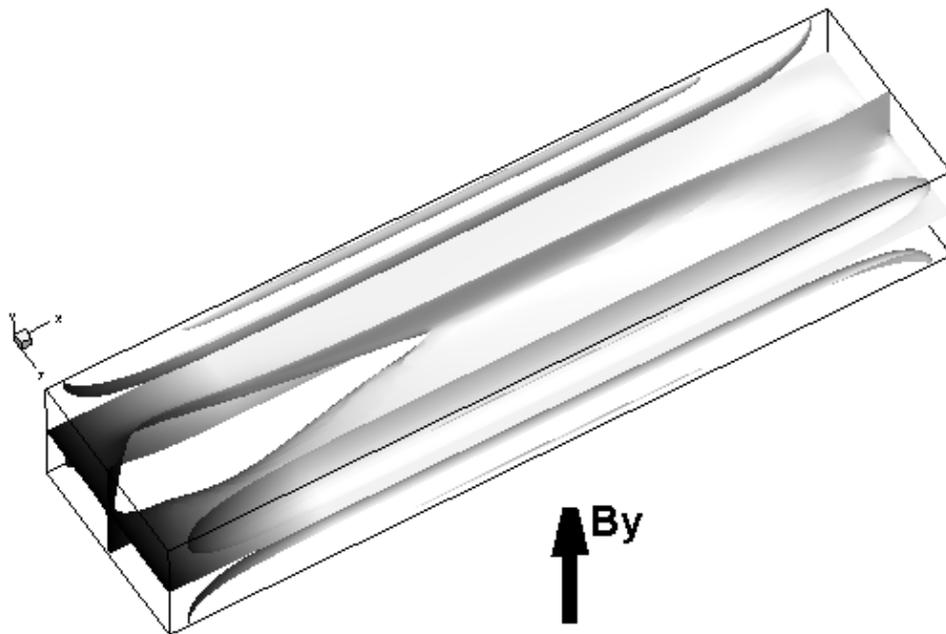


(a)

Figure IV. 18: Iso-surfaces du potentiel électrique pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$: (a) $Ha=5$, $\vec{B} \square B \vec{i}$; (b) $Ha=25$, $\vec{B} \square B \vec{i}$; (c) $Ha=25$, $\vec{B} \square B \vec{j}$; (d) $Ha=50$, $\vec{B} \square B \vec{i}$; (e) $Ha=50$, $\vec{B} \square B \vec{j}$.

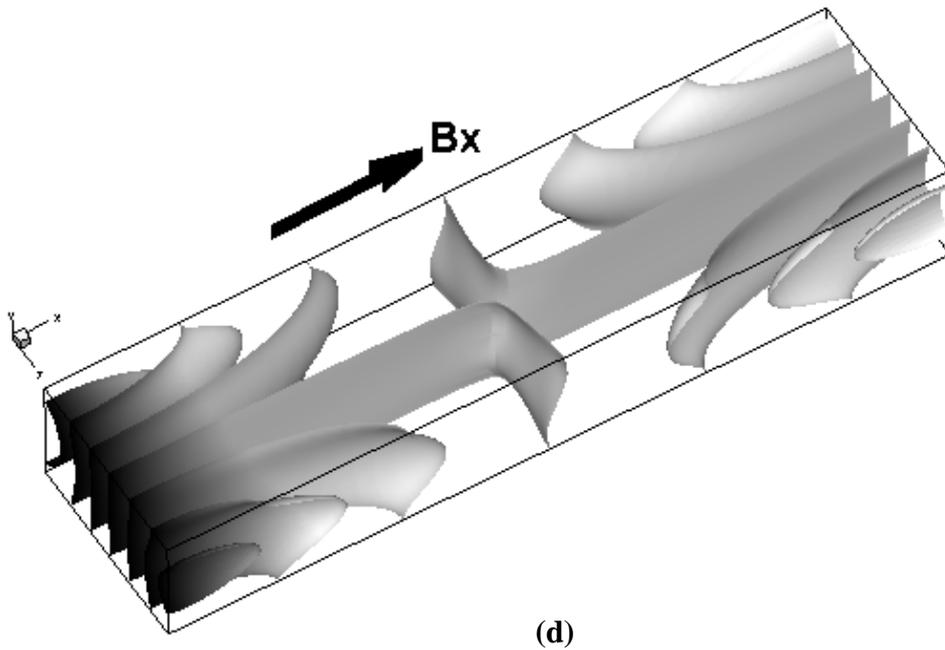


(b)

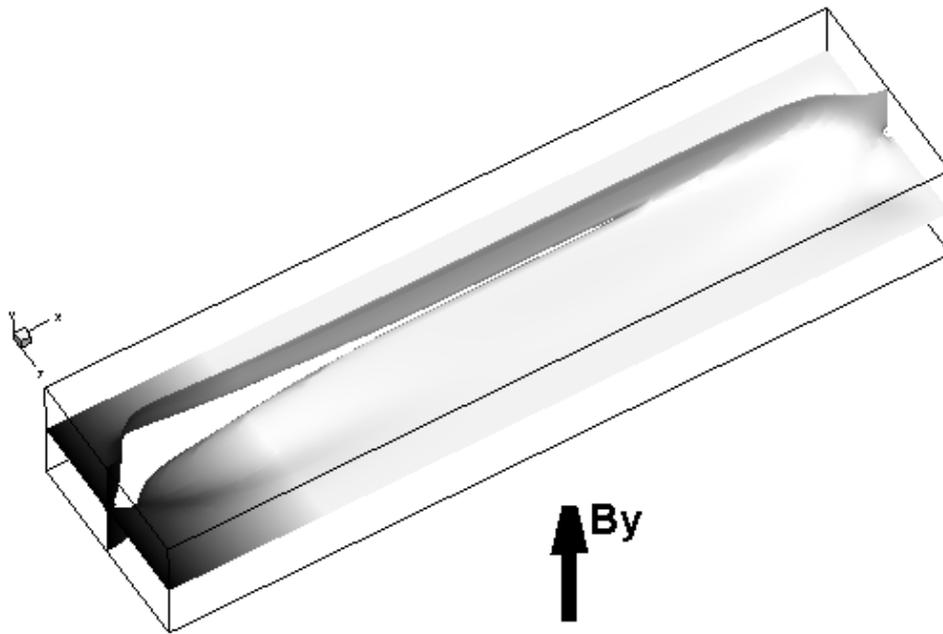


(c)

Figure IV. 18: (suite)



(d)



(e)

Figure IV. 18 : (suite)

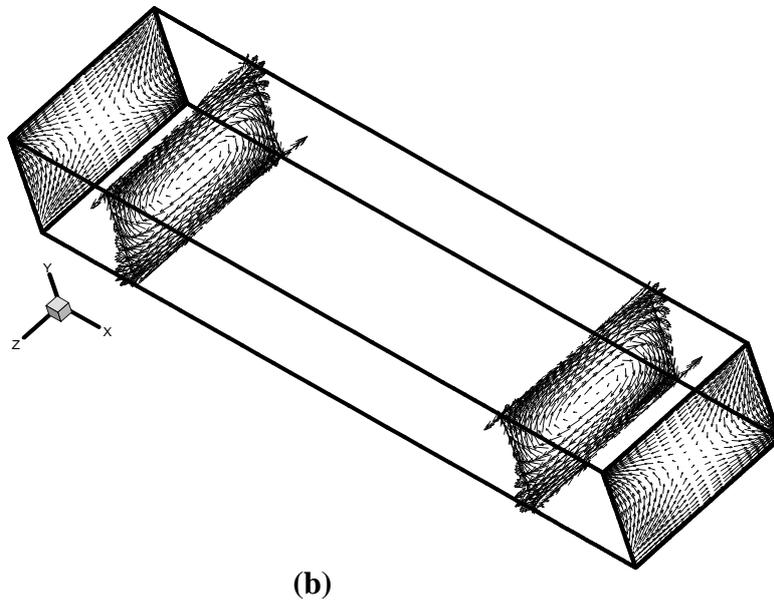
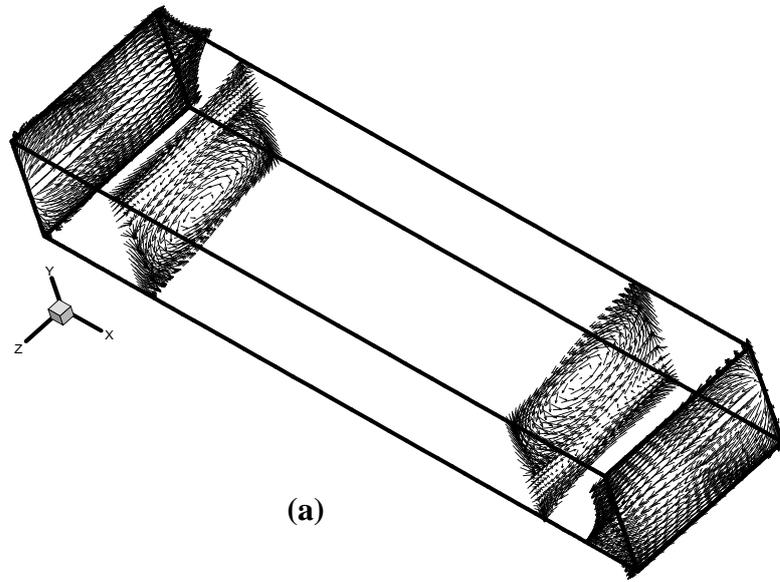


Figure IV. 19: Courants électriques pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$: (a) $Ha=25$, $\vec{B} \square B \vec{i}$;
 (b) $Ha=25$, $\vec{B} \square B \vec{j}$; (c) $Ha=50$, $\vec{B} \square B \vec{i}$; (d) $Ha=50$, $\vec{B} \square B \vec{j}$.

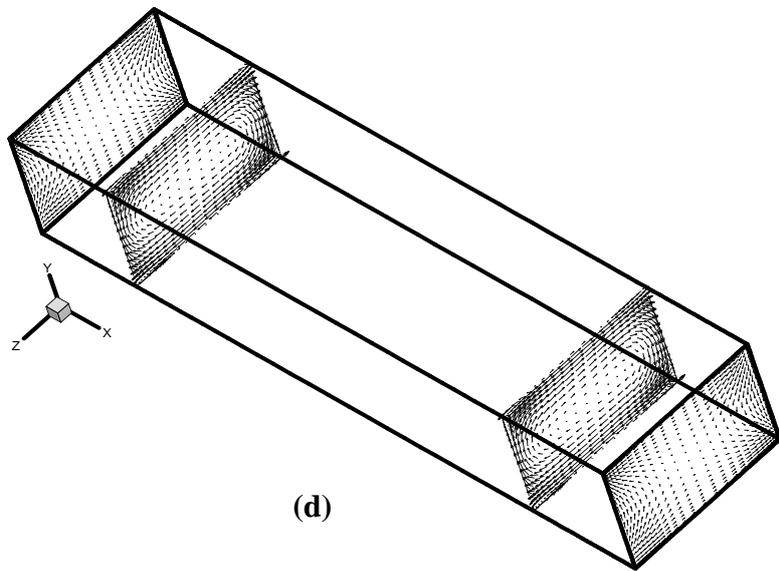
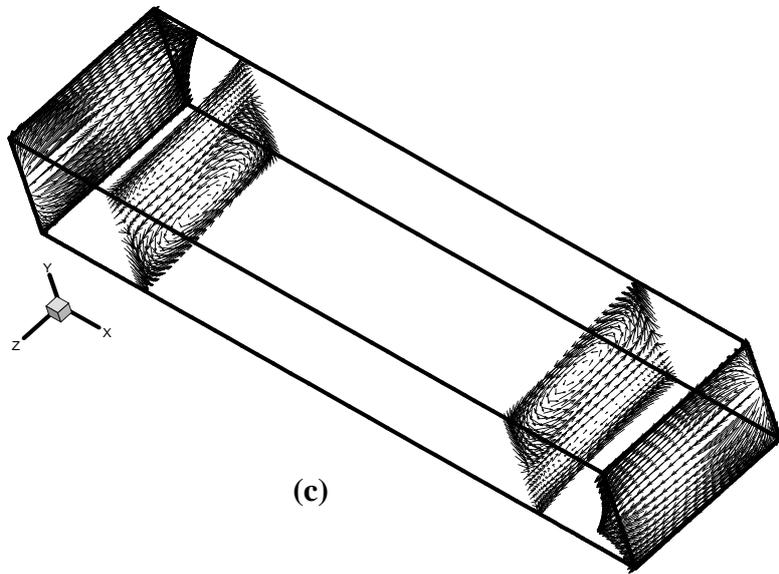


Figure IV. 19: (suite)

Afin de mieux comprendre la physique du changement de la structure de l'écoulement, les vecteurs courant électrique sont représentés sur la **figure IV. 19** pour les deux directions du champ magnétique avec $Ha=25$ et $Ha=50$. Les vecteurs courant électrique sont représentés dans deux sections à l'intérieur de la cavité parallèles au plan y-z, et sur les parois chaude et froide. On peut remarquer facilement, que le sens de rotation de ces vecteurs est antihoraire (**figures IV. 19(a)** et **(c)**) quand le champ magnétique est longitudinal, et horaire quand le champ magnétique est vertical (**figures IV. 19(b)** et **(d)**). La direction du champ magnétique modifie la direction du courant électrique. Au milieu de la cavité, l'intensité du courant j_y et j_z est élevée par rapport à j_x quand le champ magnétique est suivant x. Le couple (j_y et j_z) forme une boucle fermée du courant électrique et qui garantit la conservation du courant.

IV. 1. 5. Structure Thermique:

Les isothermes de l'écoulement dans la cavité sont représentées sur la **figure IV. 20(a)**. Elles sont déformées à l'intérieur de la cavité à cause de l'intensité importante de la convection. Avec l'application du champ magnétique, la couche thermique dans le cœur de la cavité est détruite et les isothermes deviennent parallèles aux parois verticales, indiquant la dominance du régime conductif, comme montré sur les **figures IV. 20(b)** et **20(c)**. Aussi, les isothermes dans le cas d'un champ magnétique orienté verticalement sont les moins déformées en comparant avec le cas où le champ magnétique est longitudinal, impliquant un transfert de chaleur convectif réduit.

IV. 1. 6. Nombres de Nusselt Local et Moyen:

Les iso-contours du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude de la cavité représentés sur la **figure IV. 21**, montrent que les variations par rapport à la direction y sont réduites en présence du champ magnétique. Ceci implique une importante bidimensionnalisation du transfert thermique. Pour $Ha=0$ (**Figure IV. 21a**), la valeur maximum du nombre de Nusselt local ($Nu = \frac{\partial T}{\partial x}$) est 1.80, décroît à 1.4 pour $Ha=45$ quand le champ magnétique est longitudinal (**Figure IV. 21(b)**), et décroît à 1.0 pour $Ha=45$ quand le champ magnétique est vertical (**Figure IV. 21(c)**), ce qui

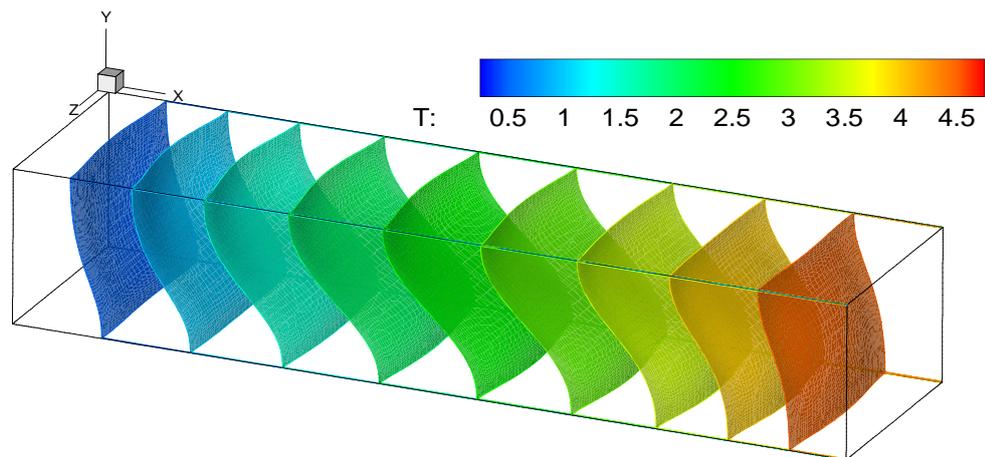
signifie que le champ magnétique vertical réduit le transfert de chaleur plus que le champ magnétique longitudinal, et c'est la même tendance que les observations expérimentales de Xu et al. [29]. Ce résultat est en bon accord avec celui trouvé par Kolsi et al. [31]. Les iso-contours sur la paroi se comparent favorablement avec les mesures expérimentales de Braunsfurth et al. [9].

Quand le champ magnétique est orienté verticalement, les **figures IV. 22(a)-22(c)** montrent les variations des u_{\max} (vitesse horizontale maximale), v_{\max} (vitesse verticale maximale) et w_{\max} (vitesse transversale maximale) et la **figure IV. 23** illustre la variation du nombre de Nusselt moyen Nu_{moy} avec le nombre de Hartmann (Ha) pour quatre cas considérés. Cas 1: toutes les parois sont électriquement isolées; cas 2: seulement les parois verticales ($x=0$ et $x=5$) sont électriquement conductrices, cas 3: seulement les parois horizontales ($y=0$ et $y=1$) sont électriquement conductrices, et le cas 4: seulement les parois frontales ($z=0$ et $z=1.3$) sont électriquement conductrices. On peut constater des **figures IV. 22** et **IV. 23** que la convection est mieux amortie quand les parois frontales ($z=0$ et $z=1.3$) sont électriquement conductrices. Ceci est dû au fait que les parois électriquement conductrices conduisent à une faible source ou à des termes élevés dans les équations de quantité de mouvement, dépendant de la direction de l'écoulement, c-à-d à un amortissement complet de l'écoulement. Par exemple, à $Ha=10$ le nombre de Nusselt moyen est de 1.45 pour le cas 1 et de 1.40 pour le cas 4.

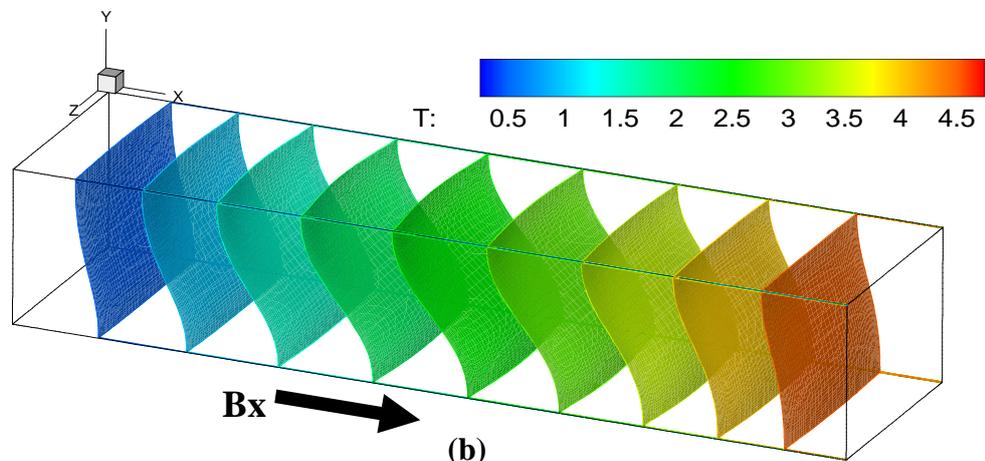
Concernant l'effet de l'électro-conductivité des parois, les valeurs du nombre de Nusselt moyen obtenues dans ce travail et celles trouvées par Tagawa et Ozoe dans leur travail numérique [5] sont montrées dans le **tableau IV. 1**. Une faible différence entre ces valeurs existe. Ici, le champ magnétique est dirigé suivant x et toutes les parois sont électriquement conductrices.

	Nos calculs	Tagawa and Ozoe [5]
Nu_{moy}	1.120	1.235

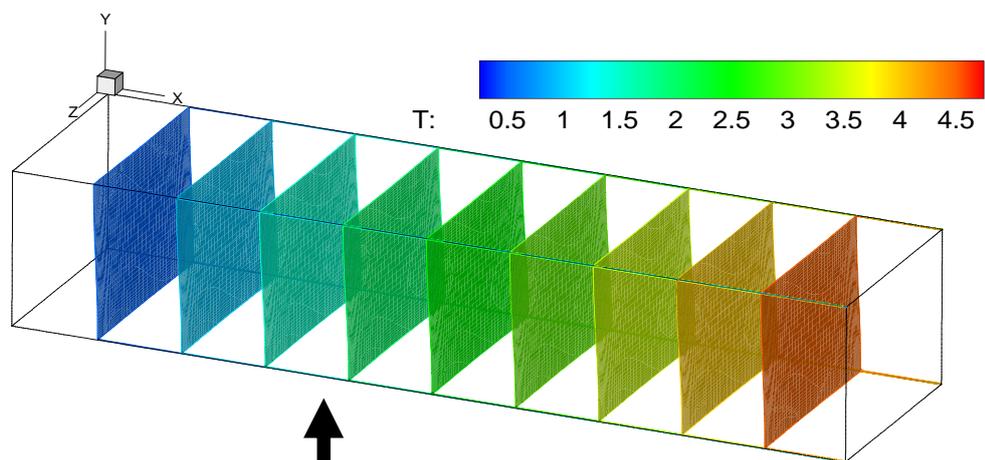
Tableau IV. 1: Comparaison entre nos résultats numériques et ceux trouvés par Tagawa et Ozoe [5], pour $Ra=10^5$, $Pr=0.025$ et $Ha=100$. (Ra est le nombre de Rayleigh).



(a)

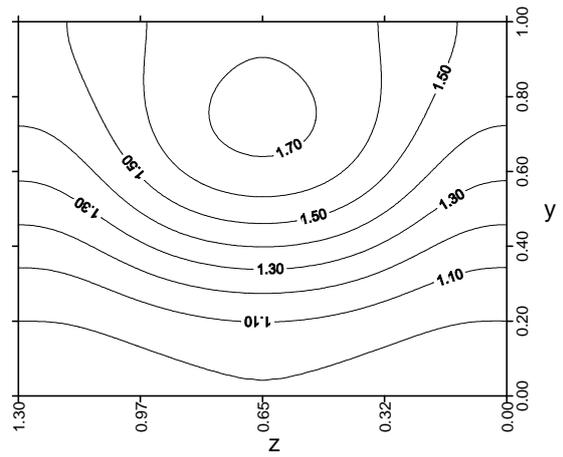


(b)

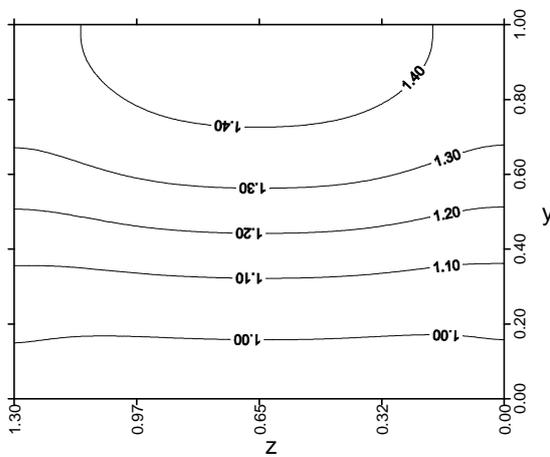


(c)

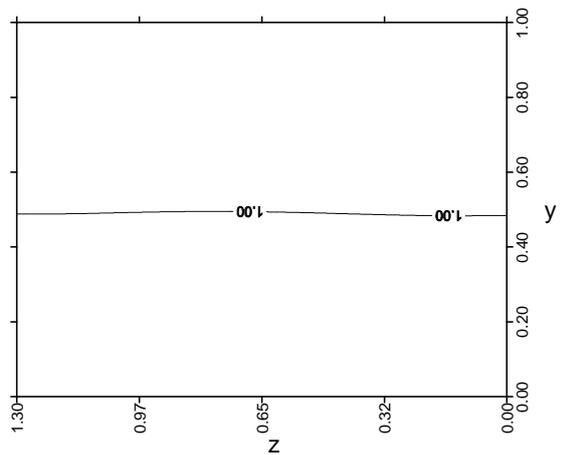
Figure IV. 20: Iso-surfaces de température pour $Gr \approx 3.75 \times 10^4$ (sans et avec champ magnétique) : (a) sans champ magnétique, (b) $Ha=50$; le champ magnétique est orienté dans la direction des x , (c) $Ha=50$; le champ magnétique est orienté dans la direction des y .



(a)

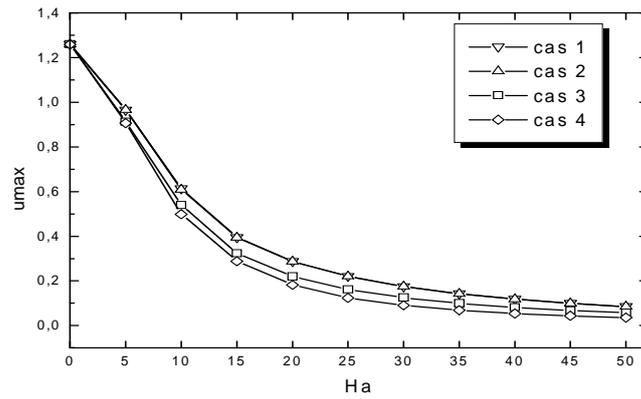


(b)

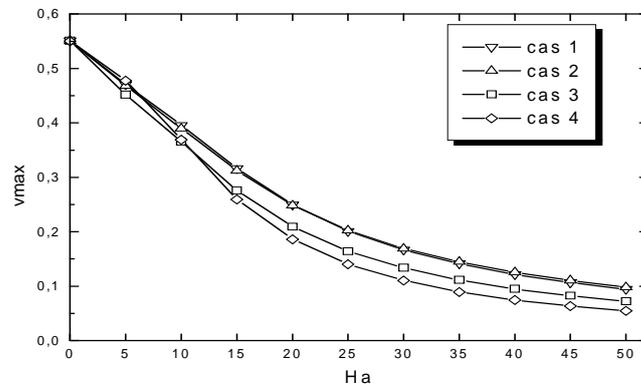


(c)

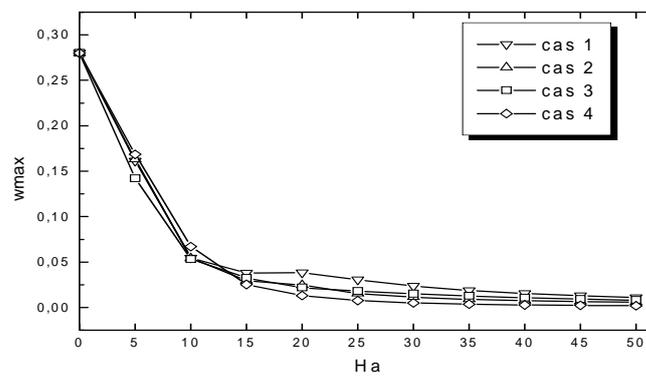
Figure IV. 21: Iso-contours du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$: (a) sans champ magnétique $Ha=0$, (b) $Ha=45$, le champ magnétique est orienté dans la direction des x , (c) $Ha=45$, le champ magnétique est orienté dans la direction des y .



(a)



(b)



(c)

Figure IV. 22: Variation de u_{\max} , v_{\max} , et w_{\max} avec le nombre de Hartmann pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$ pour les différents cas (*cas 1*: toutes les parois sont électriquement isolantes; *cas 2*: seulement les parois verticales sont électriquement conductrices; *cas 3*: seulement les parois horizontales sont électriquement conductrices; *cas 4*: seulement les parois frontales sont électriquement conductrices)

(a) u_{\max} , (b) v_{\max} , (c) w_{\max}

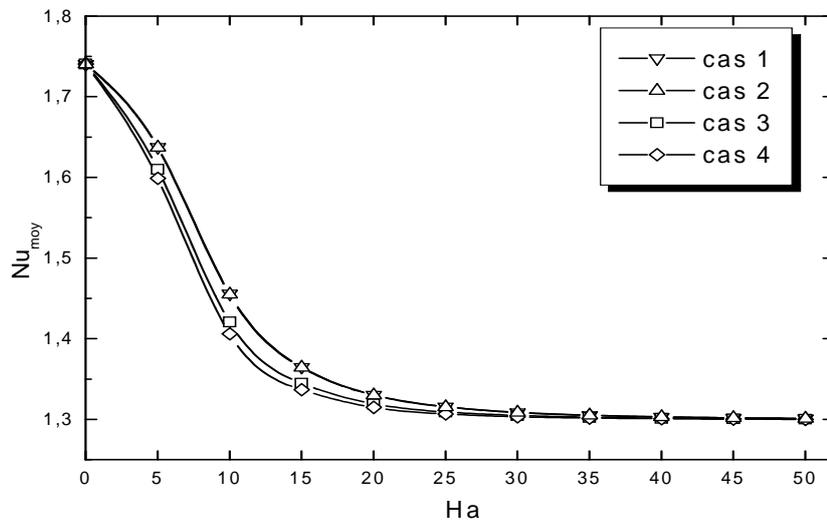


Figure VI. 23: Variation du nombre de Nusselt moyen Nu_{moy} avec le nombre de Hartmann Ha pour différents cas (**cas 1**: toutes les parois sont électriquement isolantes; **cas 2**: seulement les parois verticales sont électriquement conductrices; **cas 3**: seulement les parois horizontales sont électriquement conductrices; **cas 4**: seulement les parois frontales sont électriquement conductrices), pour $Gr \square 3.75 \square 10^4$.

IV. 2. PROBLEME 2:

Le problème 2 consiste, à la détermination des instabilités hydrodynamiques et thermiques qui naissent dans l'enceinte considérée par Xu et al. [29] dans leur étude expérimentale. L'enceinte est rectangulaire de section carrée à surface libre et ayant un rapport d'aspect $A \square W/H \square 5$, remplie d'un fluide conducteur de l'électricité (le Gallium Pr=0.02). La cavité rectangulaire a deux parois opposées soumises à deux différentes températures (chaude et froide). La paroi supérieure est ouverte ; c-à-d la surface supérieure du Gallium est libre. Les autres parois sont adiabatiques. Un champ magnétique est appliqué parallèlement au gradient de température. Par la suite, il est appliqué dans la direction longitudinale (perpendiculaire au gradient de température et au vecteur gravitationnel); voir Figure II. 2, qui est illustrée dans le chapitre II.

Le diagramme de stabilité $Gr_{cr} \square f Ha$ est obtenu pour donner des informations concernant ce type d'écoulement oscillatoire en présence d'un champ magnétique.

IV. 2. 1. Effet du Maillage sur les Solutions Numériques :

Les **figures IV. 24** et **IV. 25** présentent l'effet des trois maillages choisis respectivement sur la variation de la vitesse dimensionnelle verticale v^* [cm/s] à $y^{\square}=0.25$ cm par rapport à x^{\square} [cm] et sur la variation de la température dimensionnelle T^{\square} [K] à $y^{\square}=0.25$ cm par rapport à x^{\square} [cm] pour les trois maillages. . Les maillages considérés sont $32 \square 32 \square 52$ nœuds, $60 \square 60 \square 100$ nœuds et $80 \square 80 \square 150$ nœuds. En augmentant la taille du maillage de $60 \square 60 \square 100$ nœuds à $80 \square 80 \square 150$ nœuds, le changement enregistré dans les valeurs calculées est inférieur à 2% (voir **figures IV. 24** et **IV. 25**). Le maillage $60 \square 60 \square 100$ donne le meilleur compromis entre le coût et la précision des calculs, c'est pourquoi il a été choisi pour achever tous les calculs de cette partie.

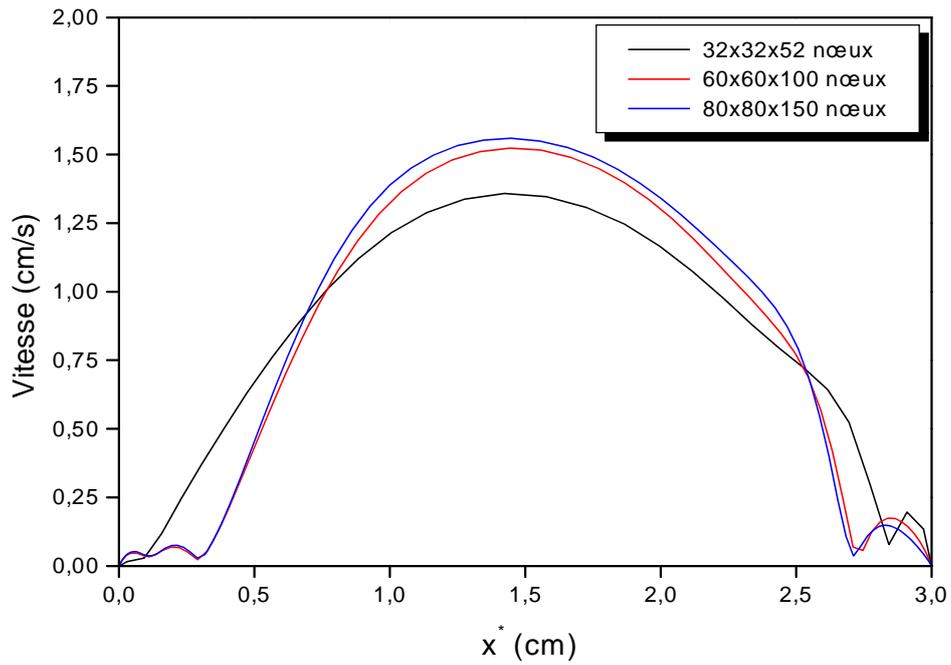


Figure IV. 24: Effet du maillage sur la variation de la vitesse verticale v^* dimensionnelle à $y^* = 0.25$ cm et $z^* = 7.5$ cm par rapport à x^* .

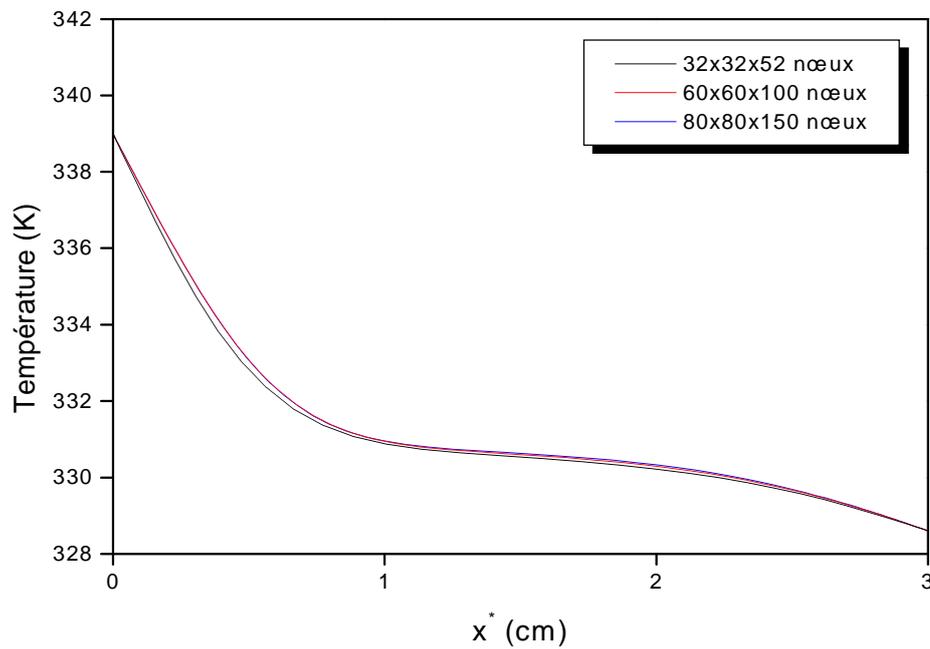


Figure IV. 25: Effet du maillage sur la variation de la température dimensionnelle T^* à $y^* = 0.25$ cm et $z^* = 7.5$ cm par rapport à x^* .

Avec le maillage adopté $n_x \times n_y \times n_z = 60 \times 60 \times 100$ nœuds, les sondes choisies pour capter les instabilités physiques sont illustrées sur la figure suivante :

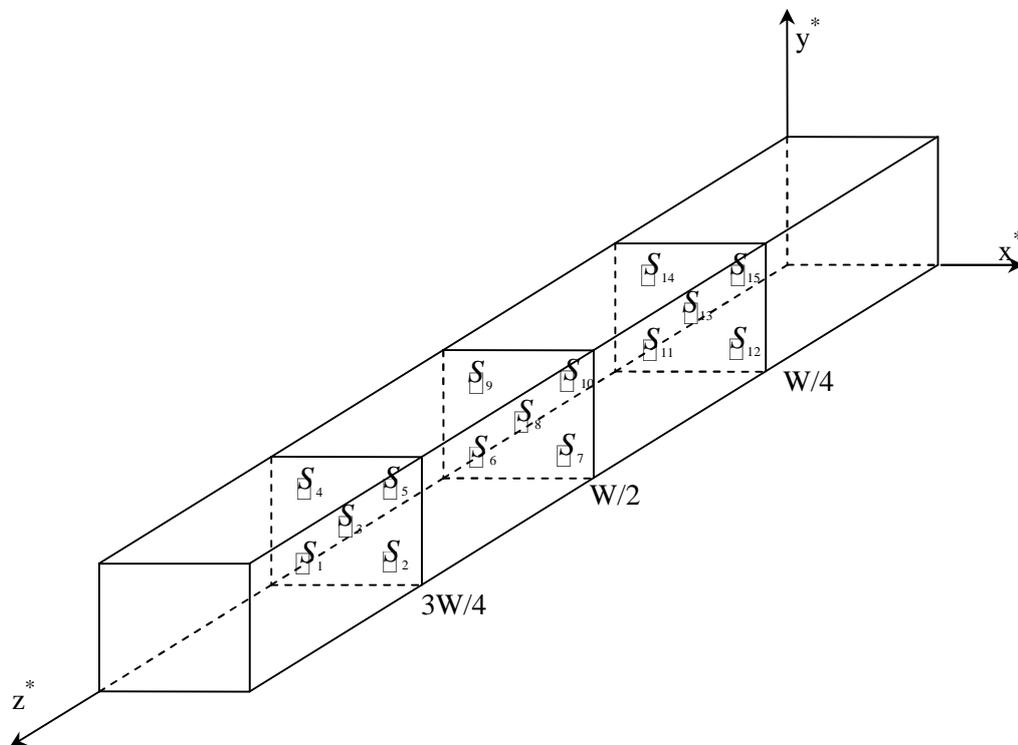


Figure IV. 26 : Position des sondes choisies pour capter les instabilités physiques.

Leurs coordonnées dans le maillage considéré sont:

$S_1 (15,15,25)$; $S_2 (45,15,25)$; $S_3 (30,30,25)$; $S_4 (15,45,25)$; $S_5 (45,45,25)$; $S_6 (15,15,50)$;
 $S_7 (45,15,50)$; $S_8 (30,30,50)$; $S_9 (15,45,50)$; $S_{10} (45,45,50)$; $S_{11} (15,15,75)$; $S_{12} (45,15,75)$;
 $S_{13} (30,30,75)$; $S_{14} (15,45,75)$; $S_{15} (45,45,75)$.

En ces 15 sondes s'enregistre simultanément l'évolution temporelle de la température et des trois composantes de la vitesse.

IV. 2. 2. Validation du Code de calcul:

La phase de validation a consisté à établir quelques comparaisons avec l'investigation expérimentale présentée par Xu et al. [29]. La distribution transversale de la température dimensionnelle T^* par rapport à x^* pour différentes positions de y^* a été comparée avec les mesures expérimentales [29] faites dans les mêmes positions dans une cavité à surface libre et de mêmes dimensions que la cavité considérée dans ce cas. Les valeurs numériquement calculées dans cette étude sont en bon accord avec les mesures [29] et cela en absence d'un champ magnétique (**Figure IV. 27**), et en présence d'un champ magnétique de 300 Gauss appliqué dans la direction longitudinale (**Figure IV. 28**).

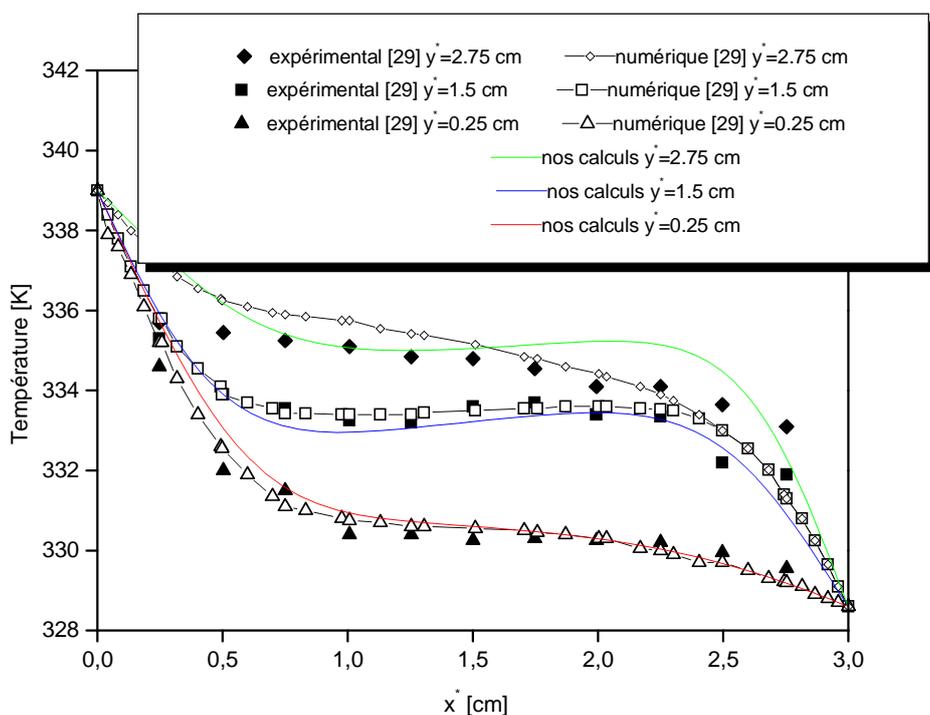


Figure IV. 27 : Distribution de la température en trois points à $z^* = 7.5$ cm. Comparaison avec l'expérimental et le calcul numérique de [29] pour $Ha=0$.

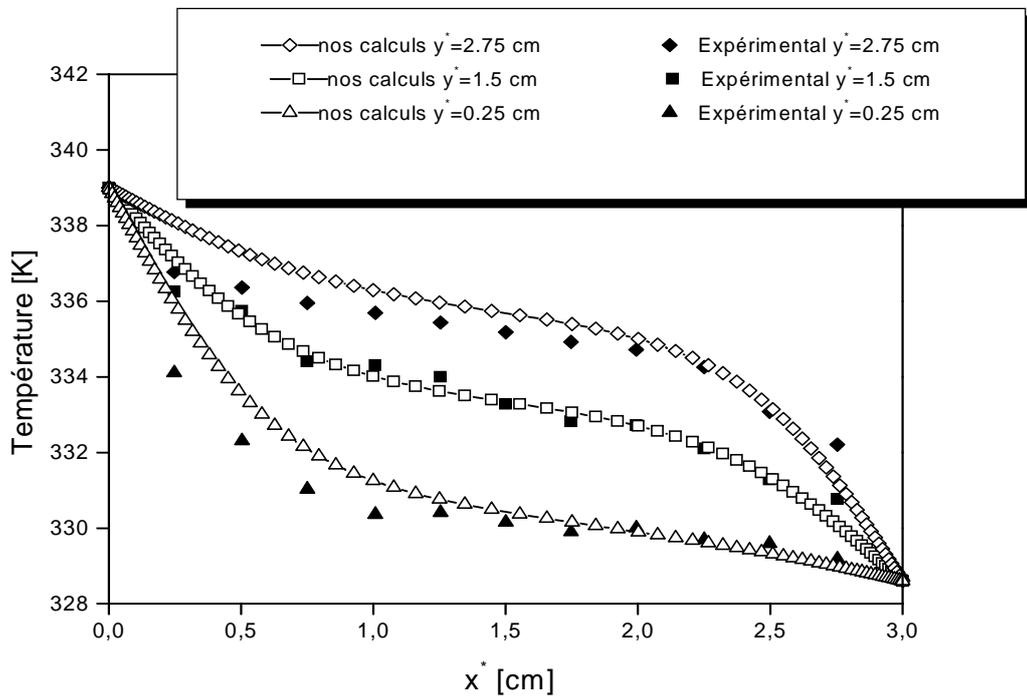
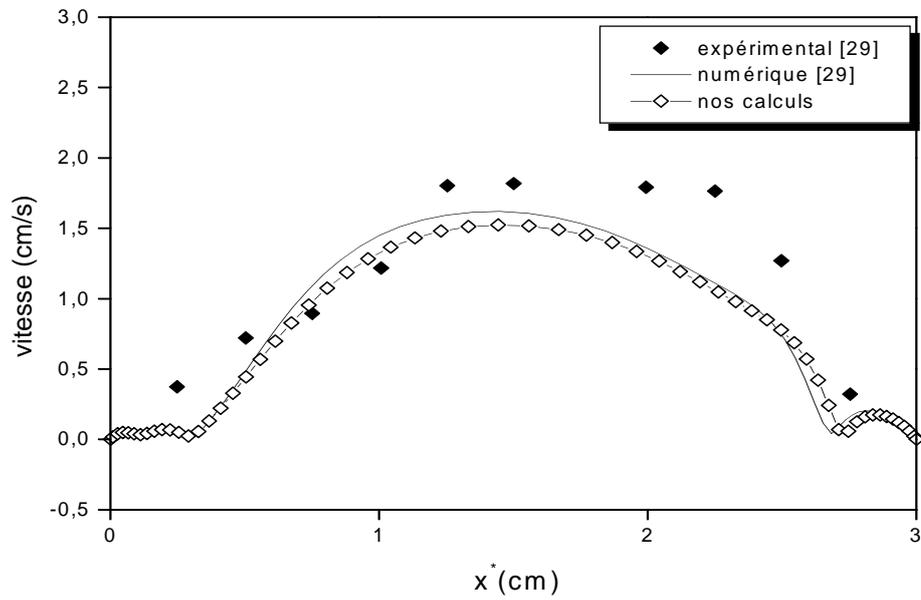
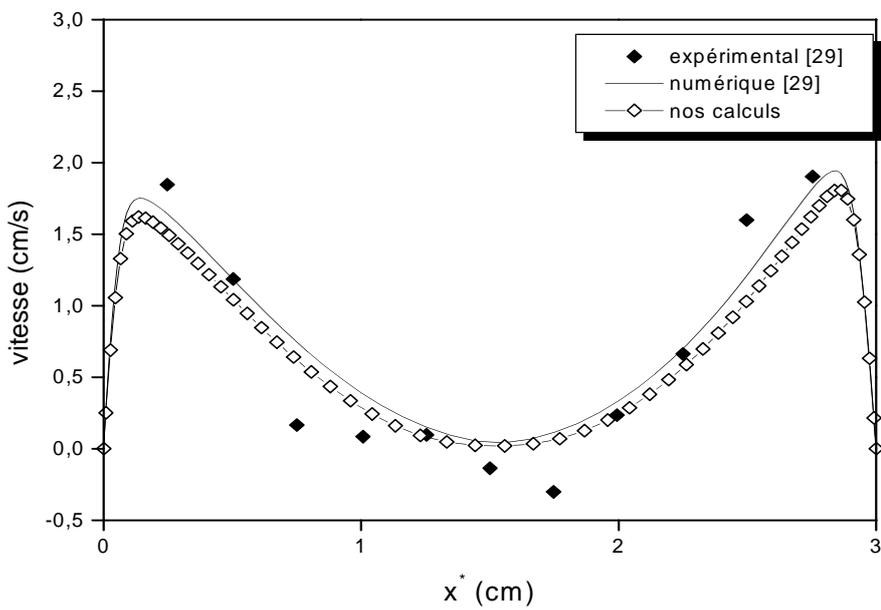


Figure IV. 28 : Distribution de la température en trois points à $z^* = 7.5$ cm. Comparaison entre nos calculs et les données expérimentales [29] pour le champ magnétique longitudinal (B_z) de 300 Gauss.

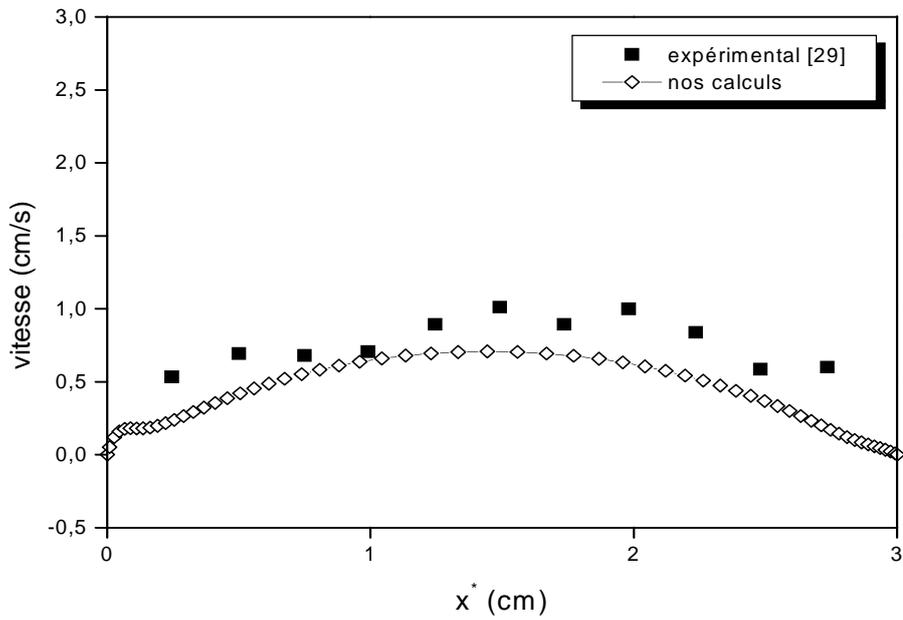


(a)

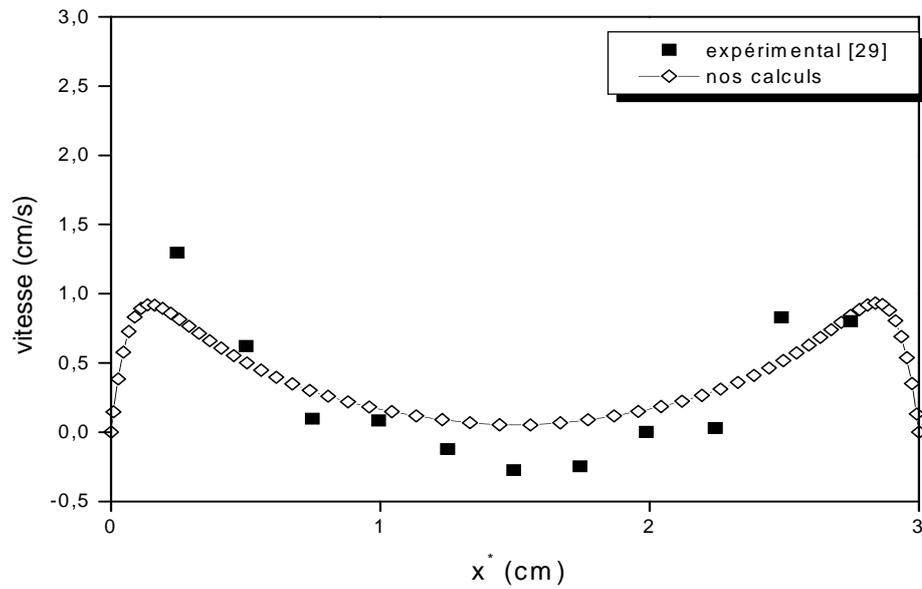


(b)

Figure IV. 29 : Distribution de la vitesse en magnitude sans champ magnétique $B=0$, à $z^* = 7.5$ cm: (a) $y^* = 0.25$ cm, (b) $y^* = 1.5$ cm. Comparaison entre nos simulations numériques et les données expérimentales [29].



(a)

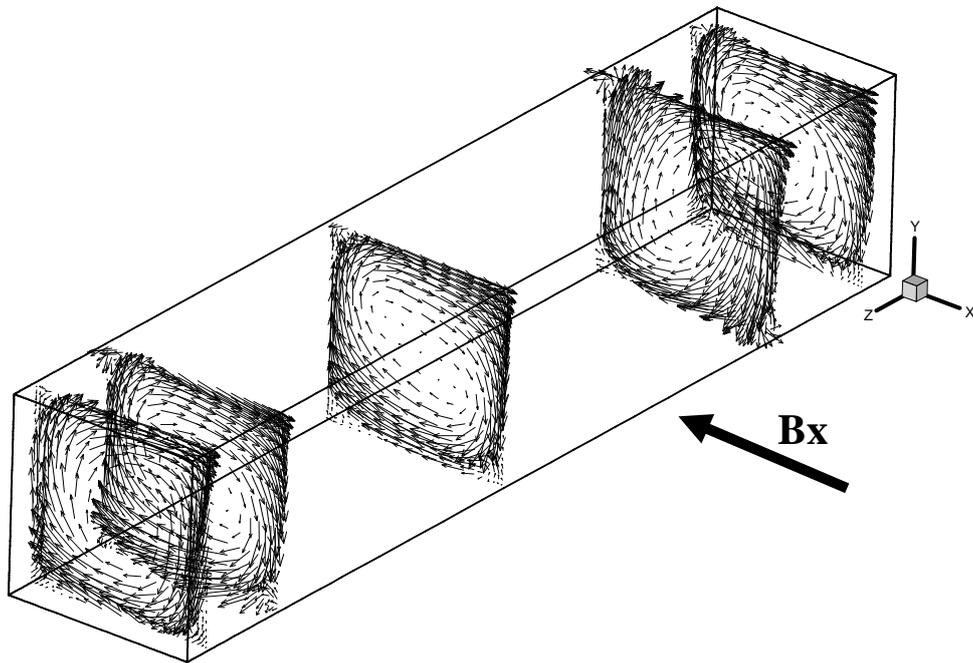


(b)

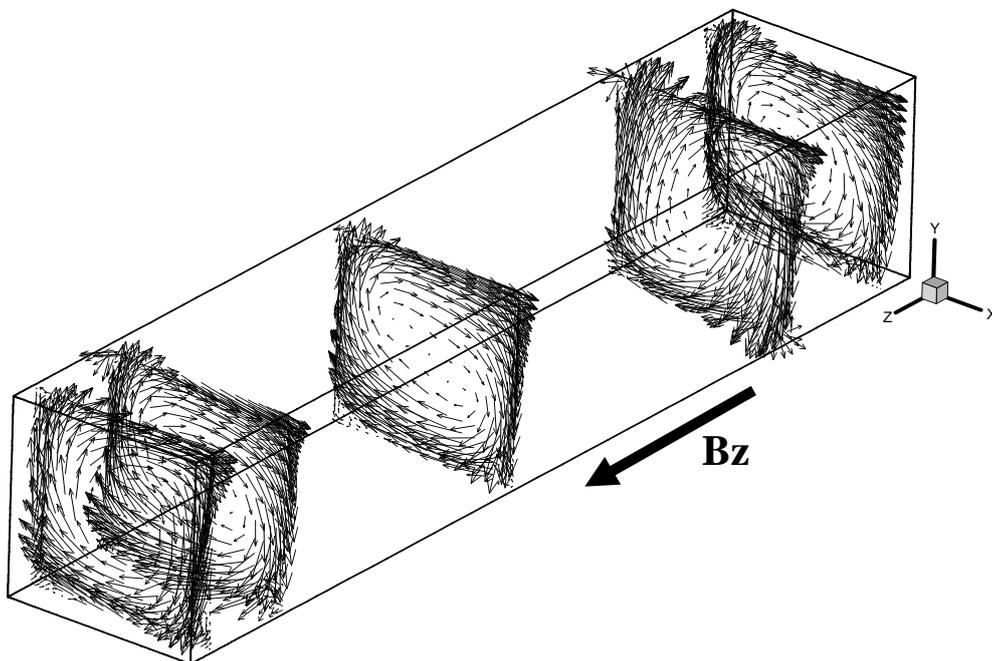
Figure IV. 30 : Distribution de la vitesse en magnitude par rapport à x^* pour le champ magnétique longitudinal (B_z) de 300 Gauss, à $z^* = 7.5$ cm: (a) $y^* = 0.25$ cm, (b) $y^* = 1.5$ cm. Comparaison entre nos simulations numériques et les données expérimentales [29].

IV. 2. 3. Champ d'Écoulement:

Les **figures IV. 31(a)** et **31(b)** montrent le champ des vitesses de l'écoulement dans la cavité rectangulaire pour les deux orientations du champ magnétique. Il est clair que le fluide se déplace de la paroi chaude (à $x=0$) vers la paroi froide (à $x=L$). Au fur et à mesure que le fluide bouge loin de la paroi chaude, la magnitude de la vitesse augmente jusqu'à ce que le fluide approche de la paroi froide. Dans cette région, la magnitude de la vitesse est réduite. Les deux figures montrent une rotation unicellulaire dans le sens horaire. En comparant les magnitudes des vecteurs des deux directions pour la même valeur de Hartmann ($Ha=2.5$) et la même valeur du Grashof $Gr \approx 7.6 \times 10^6$, on peut conclure que pour ce cas l'amortissement est plus important quand la direction du champ magnétique est transversale.



(a)



(b)

Figure IV. 31: Vecteurs vitesses avec $Ha=2.5$ et $Gr \approx 7.6 \times 10^6$: **(a)** champ magnétique transversal B_x , **(b)** champ magnétique longitudinal B_z .

IV. 2. 4. Solution Oscillatoire Sans et Avec Champ Magnétique :

Dans cette section, les instabilités physiques dans l'écoulement de la convection naturelle d'un fluide à faible nombre de Prandtl ($Pr=0.02$), contenu dans une cavité rectangulaire d'un rapport d'aspect $A=5$ sont déterminées. Cet écoulement est soumis à un champ magnétique orienté une fois dans la direction x (parallèle au gradient de température) et une seconde fois dans la direction z (perpendiculaire au gradient de température et au vecteur gravitationnel). La détermination des instabilités physiques est réduite à la détermination de la valeur critique du nombre de Grashof Gr_{crit} caractérisant l'écoulement subjacent, à partir duquel l'écoulement devient oscillatoire. Une série de calculs a été faite en augmentant progressivement la valeur de T_h ce qui entraîne automatiquement l'augmentation du Gr jusqu'à ce que l'écoulement devienne oscillatoire et périodique. Il est à noter que, la solution obtenue à un certain nombre de Grashof donné est successivement utilisée pour les calculs au nombre de Grashof suivant.

Du point de vue systèmes dynamiques, quand un système rentre dans l'instabilité, il présente au début un caractère oscillatoire ou périodique, puis à cause du phénomène de bifurcation, ce système va devenir quasi périodique, et finalement il rentre au chaos (ou turbulence). Les nombres de Grashof critiques caractérisant l'écoulement périodique sont les nombres critiques caractérisant la transition du stationnaire (**figure IV. 32**) à l'écoulement instationnaire (**figures IV. 33(a-d)**).

L'aspect oscillatoire (périodique) des évolutions temporelles des trois composantes de la vitesse adimensionnelle u (**figure IV. 33(a)**), v (**figure IV. 33(b)**), w (**figure IV. 33(c)**) et de la température adimensionnelle T (**figure IV. 33(d)**) enregistrés à une sonde choisie, pour $Ha=5$, indique que les instabilités oscillatoires commencent et l'écoulement bifurque vers un régime instable. Ce comportement oscillatoire des différents paramètres traduit l'existence d'un changement continu des structures de l'écoulement (avec périodicité). Aussi, on remarque clairement que les amplitudes des oscillations de la température (**figure IV. 33(d)**) sont plus petites que celles des trois composantes de vitesse u , v et w (**figure IV. 33(a, b, c)**). Ceci peut être interprété par la domination du régime conductif du transfert de chaleur dans ce type d'écoulement de fluides à faible nombre de Prandtl.

Sur les **figures IV. 33 (a, b, c, d)**, on remarque que pour le même nombre de Hartmann et pour la valeur critique du nombre de Grashof et à la même sonde les amplitudes des oscillations sont clairement plus faible quand le champ magnétique est transversal (B_x) que lorsqu'il est longitudinal (B_z); ce qui indique que dans ce cas la direction transversale du champ magnétique donne une meilleure réduction de la convection que la direction longitudinale.

Dans le but de déterminer les nombres de Grashof critique correspondant aux instabilités physiques, un pas de temps adimensionnel $\lambda t \square 10^5$ a été choisi et pour s'assurer que l'instabilité n'est pas d'origine numérique le pas est réduit à $\lambda t \square 5 \square 10^6$. Si les amplitudes des oscillations restent les mêmes dans toutes les sondes, on peut conclure que cette instabilité est physique, voir **figures IV. 34 et IV. 36**.

Sur ces dernières figures et en comparant les amplitudes des oscillations de la composante de vitesse u , on remarque que ces amplitudes présentent des grandeurs différentes selon les points d'enregistrements.

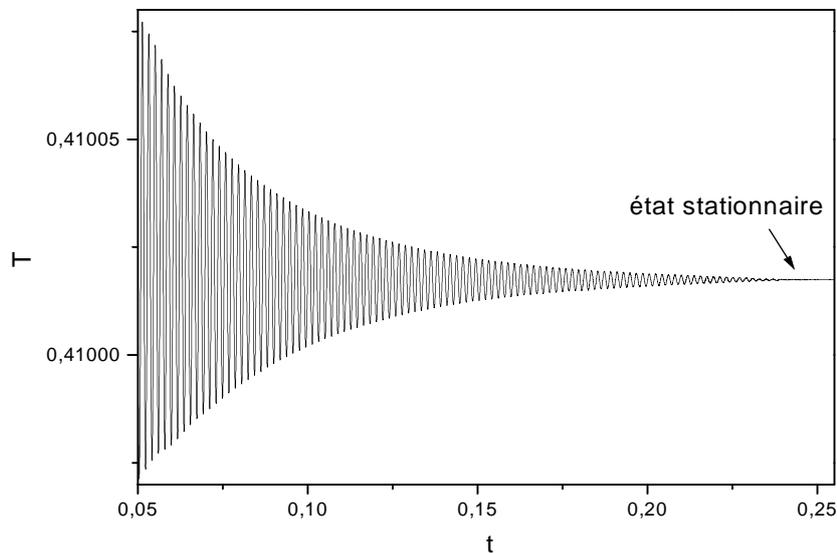
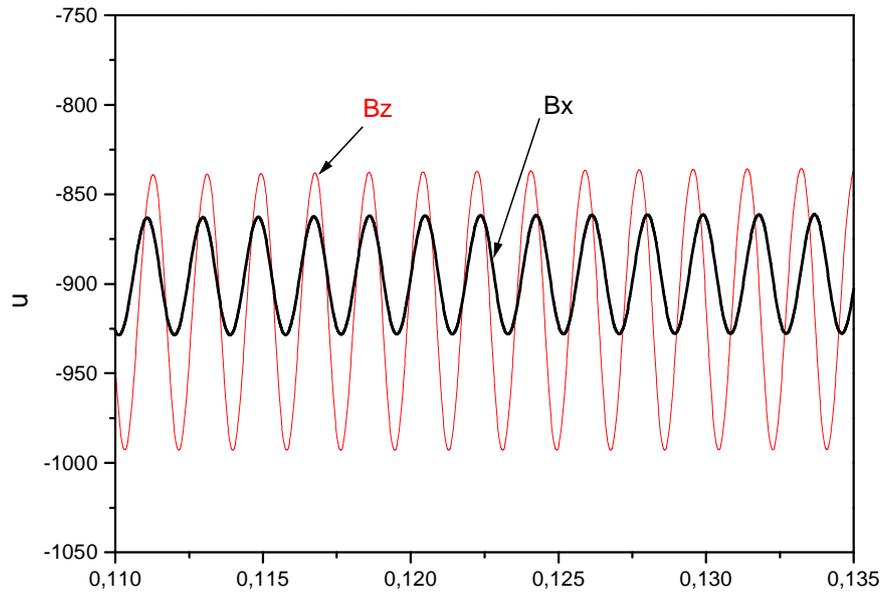
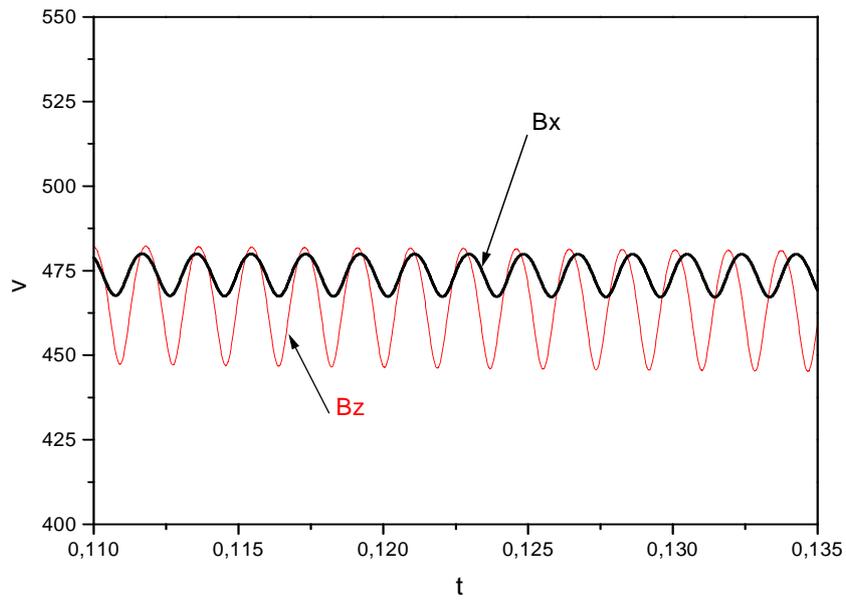


Figure IV. 32: Evolution temporelle de la température adimensionnelle T à la sonde

$$S_1 \text{ (15,15,25)} \text{ pour } Gr \square 7.6 \square 10^6 \text{ et } Ha=0.$$

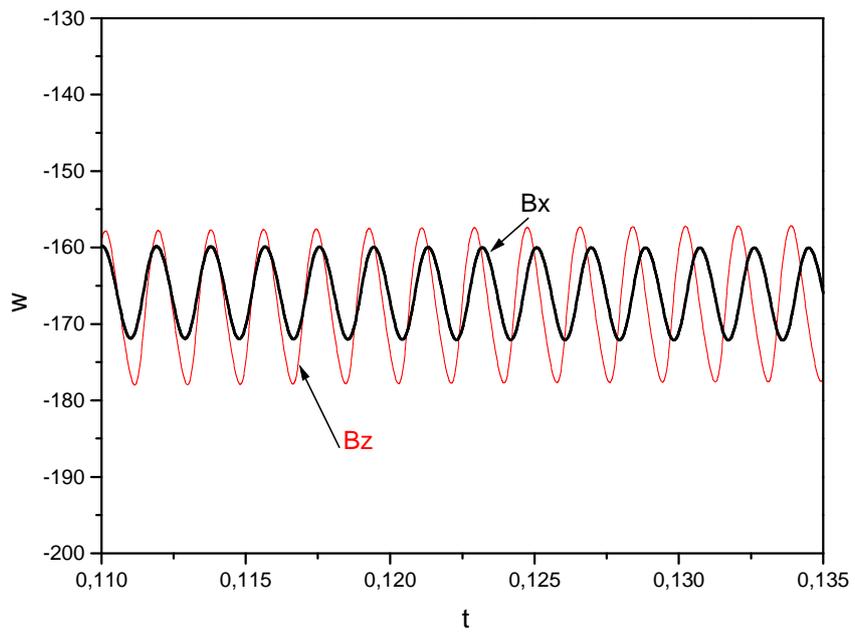


(a)

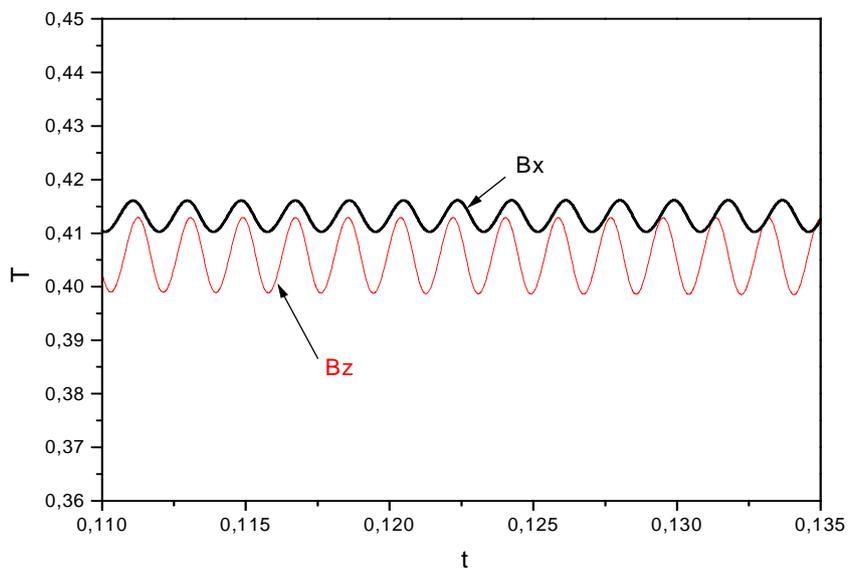


(b)

Figure IV. 33: Evolutions temporelles pour les deux directions du champ magnétique ($\vec{B} \square B\vec{i}$ et $\vec{B} \square B\vec{k}$) pour $Ha=5$ et Gr_{crit} de: **(a)** la vitesse adimensionnelle u , **(b)** la vitesse adimensionnelle v , **(c)** la vitesse adimensionnelle w , **(d)** la température adimensionnelle T .



(c)



(d)

Figure IV. 33: (suite)

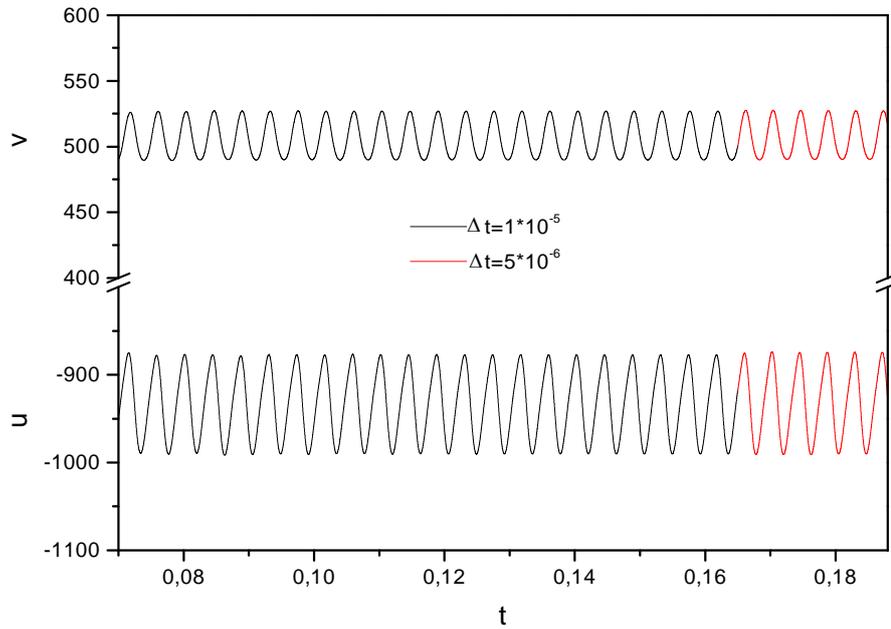


Figure IV. 34: Evolutions temporelles de u et de v pour le champ magnétique ($\vec{B} \parallel \vec{B}_i$) pour $Ha=10$ enregistrées à la sonde $S_{1,15,15,25}$, $Gr_{crit} \approx 7.8 \cdot 10^6$.

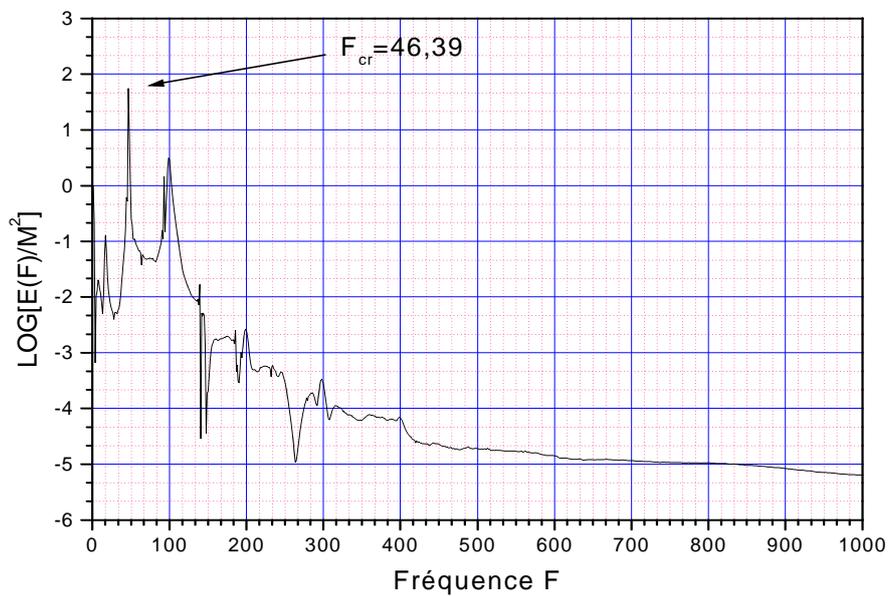


Figure IV. 35: Densité du spectre d'énergie obtenue par transformation de Fourier de la vitesse adimensionnelle u à la sonde $S_{1,15,15,25}$ pour $Ha=10$ ($\vec{B} \parallel \vec{B}_i$) $Gr_{crit} \approx 7.8 \cdot 10^6$, avec $\lambda t \approx 1 \cdot 10^{15}$ et 2^{14} échantillons. $F_{cr}=46.39$ représente la fréquence critique dominante adimensionnelle.

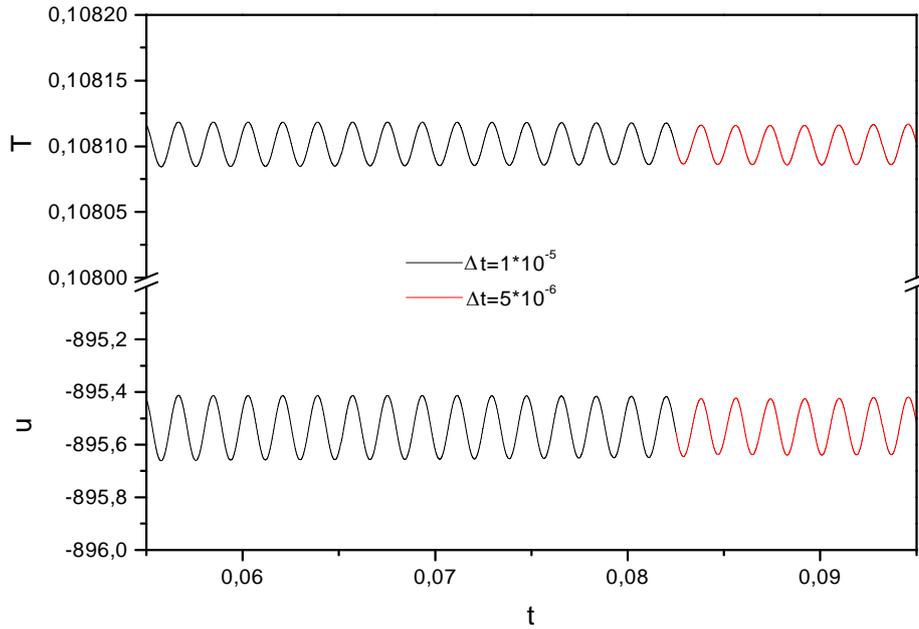


Figure IV. 36: Evolutions temporelles de u et de T pour le champ magnétique ($\vec{B} \parallel B\vec{k}$) pour $Ha=10$ enregistrées à la sonde $S_7(45,15,50)$. $Gr_{crit} \approx 7.9 \times 10^6$

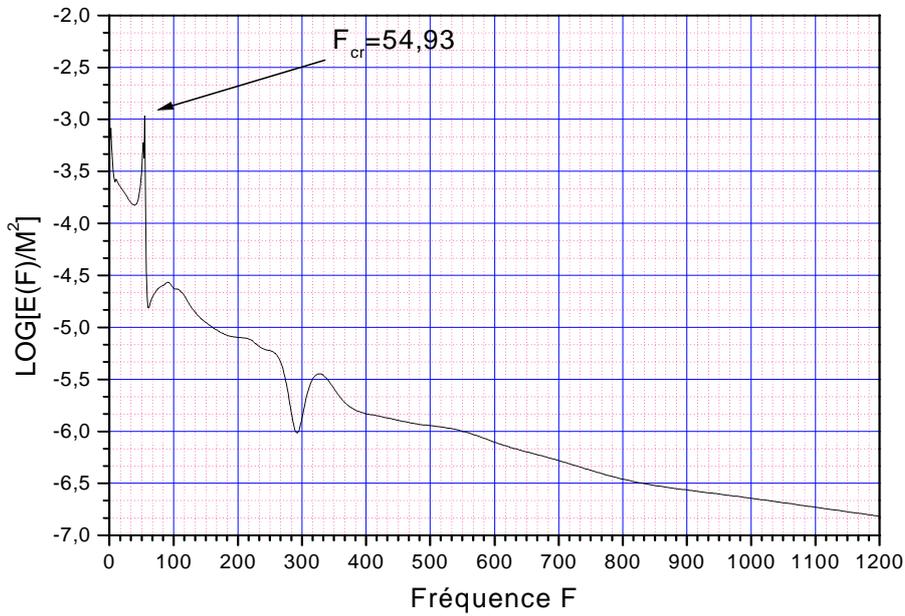
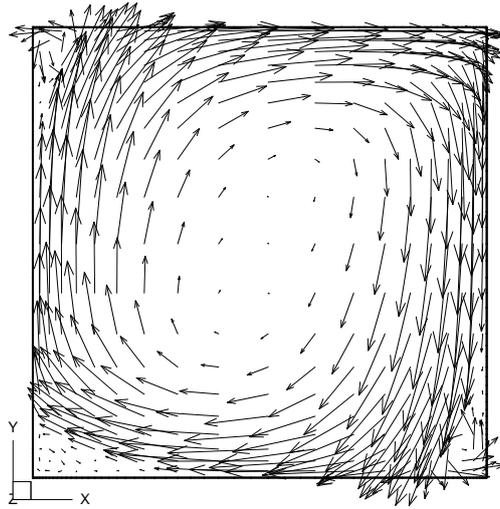


Figure IV. 37: Densité du spectre d'énergie obtenue par transformation de Fourier de la vitesse adimensionnelle u à la sonde $S_7(45,15,50)$ pour $Ha=10$ ($\vec{B} \parallel B\vec{k}$)

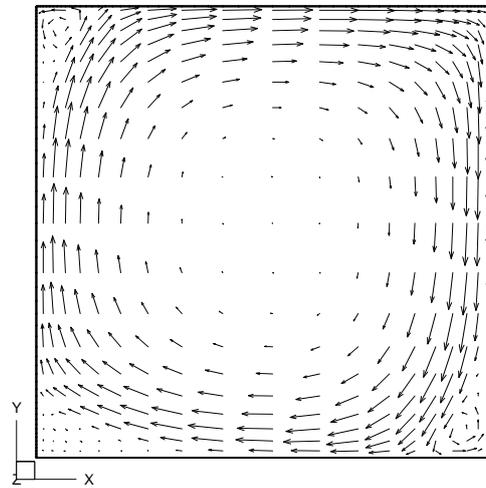
$Gr_{crit} \approx 7.9 \times 10^6$, avec $\lambda t \approx 1 \times 10^{05}$ et 2^{14} échantillons.

Pour déterminer le caractère périodique des oscillations, on analyse le signal temporel de la composante de vitesse u au deux sondes $S_1(15,15,25)$ et $S_7(45,15,50)$. Pour obtenir le spectre d'énergie des oscillations, on utilise la transformée de Fourier [59] d'un nombre M de puissance 2 de valeurs de la variation temporelle de la composante u de vitesse (soit $M = 2^{14} = 16384$). Pour obtenir l'énergie E en fonction des fréquences des oscillations F , définies par: $F = K/M \Delta t$ où $K=1, 2, 3, \dots, M/2$, cette transformée est multipliée par son complexe conjugué divisé par 2. Sur les **figures VI. 35** et **VI. 37** sont présentés les logarithmes décimaux des énergies normalisées par M^2 en fonction des fréquences F . les pics du spectre d'énergie normalisée correspondent aux énergies des fréquences dominantes. On remarque l'aspect périodique de l'écoulement qui correspond à la fréquence dominante.

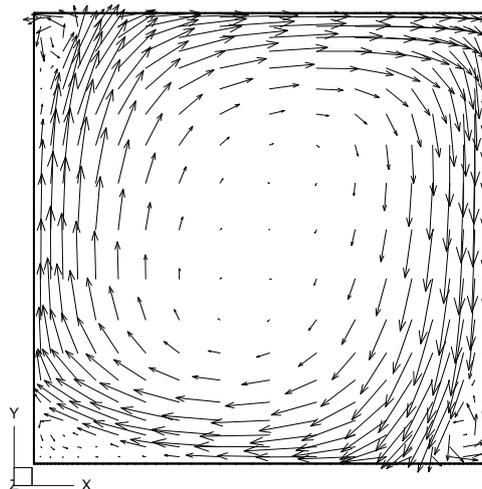
Les vecteurs vitesses dans le plan vertical du milieu de l'enceinte sont représentés sur la **figure VI. 38** pour **(a)** le cas sans champ magnétique: $Ha=0$ et pour un champ magnétique: $Ha=10$ **(b)** dirigé suivant x ensuite **(c)** dirigé suivant z . Les vecteurs vitesses indiquent que la recirculation de l'écoulement est adjacente au parois, le cœur central du fluide est pratiquement stagné. Cependant, les amplitudes des vitesses sont moins importantes dans le cas B_x que dans le cas B_z . Ceci veut dire que l'amortissement de l'écoulement et la réduction du taux de transfert de chaleur est plus important quand la direction est transversale (B_x).



(a)



(b)



(c)

Figure IV. 38: Vecteurs vitesses à $z=1/2$: (a) $Ha=0$, (b) $Ha=10 (\vec{B} \square B\vec{i})$,
(c) $Ha=10 (\vec{B} \square B\vec{k})$.

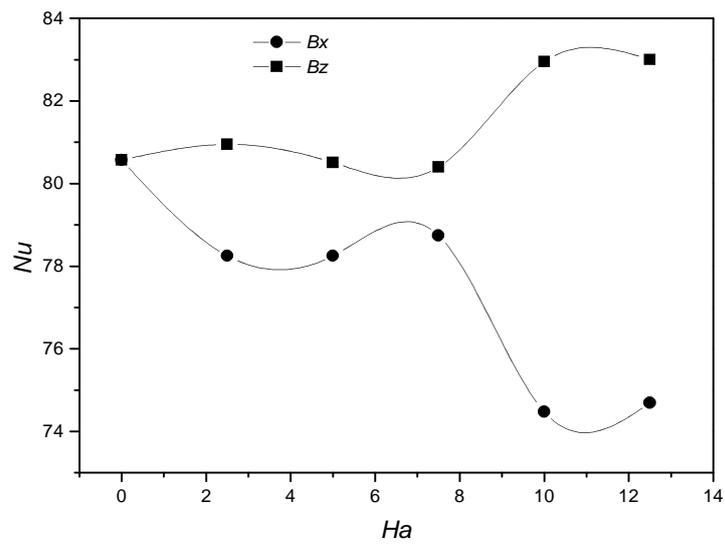


Figure IV. 39: Influence du nombre de Hartmann sur le nombre de Nusselt moyen de la paroi chaude, pour les deux directions du champ magnétique ($\vec{B} \parallel B\vec{i}$ et $\vec{B} \parallel B\vec{k}$).

IV. 2. 5. Diagramme de Stabilité:

Sur la **figure IV. 40**, est représentée la variation du nombre de Grashof critique en fonction du nombre de Hartmann pour les deux directions considérées: longitudinale (Bz) et transversale (Bx). On remarque que la valeur du Gr_{crit} quand le champ magnétique est transversal est nettement inférieur à celle quand le champ est longitudinal. En absence du champ magnétique, le régime oscillatoire débute à la valeur critique du Grashof, $Gr_{crit} \approx 7.7 \times 10^6$. L'augmentation du nombre de Gr_{crit} avec le nombre Hartmann est clairement observée quand le champ magnétique est longitudinal. Dans le cas où le champ magnétique est transversal, une réduction est notée à $Ha=5$, et au delà de cette valeur, le Gr_{crit} augmente avec l'augmentation de Ha .

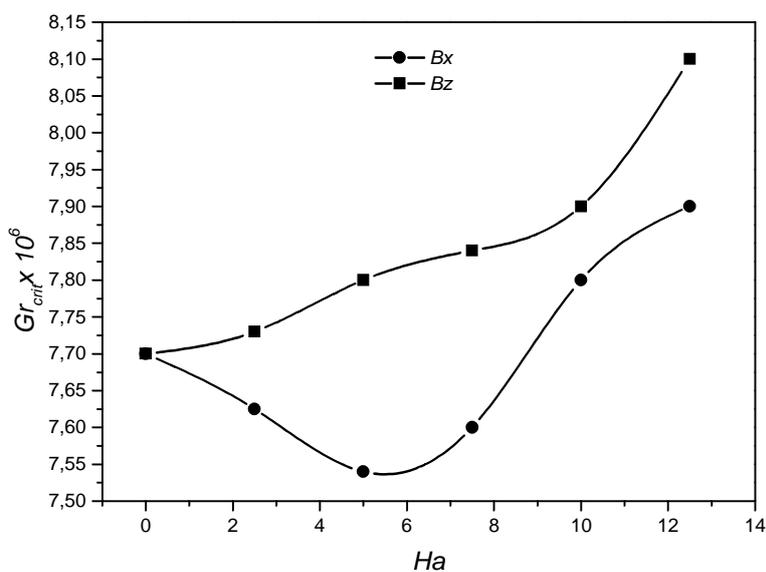


Figure VI. 40: Diagramme de stabilité ($Gr_{crit}-Ha$) pour les deux directions du champ magnétique ($\vec{B} \parallel B\vec{i}$ et $\vec{B} \parallel B\vec{k}$)

CONCLUSION

CONCLUSION

Dans la première partie de ce travail, une étude numérique tridimensionnelle d'un écoulement d'un fluide à faible nombre de Prandtl à l'intérieur d'une cavité rectangulaire sous l'action d'un champ magnétique extérieur appliqué, une fois dans la direction longitudinale et une seconde fois dans la direction verticale, a été présentée. La géométrie considérée dans cette étude est relative à la configuration horizontale de croissance cristalline de Bridgman. La méthode des volumes finis a été utilisée pour discrétiser le modèle mathématique. Les principaux résultats sont :

- ◆ Un bon accord entre nos résultats numériques et les données expérimentales a été enregistré lors de la validation du code.
- ◆ En absence du champ magnétique, la structure de l'écoulement montre une irrégularité tridimensionnelle due à la convection libre pure.
- ◆ En présence du champ magnétique, l'écoulement est plus régulier.
- ◆ Une augmentation dans l'intensité du champ magnétique cause un changement dans la magnitude et la structure de l'écoulement.
- ◆ L'intensité de l'écoulement est réduite dans les deux directions du champ magnétique, donc une régularisation dans l'écoulement tridimensionnel est observée au centre de la cavité.
- ◆ La réduction de l'écoulement est importante quand le champ magnétique est orienté verticalement (transversal au gradient de température) et plus faible quand le champ magnétique est longitudinal (aligné avec le gradient de température).
- ◆ Avec l'application du champ magnétique, la stratification thermique dans le cœur de la cavité est détruite et les isothermes deviennent parallèles aux parois verticales.
- ◆ La convection est plus amortie quand les parois frontales sont électriquement conductrices.

En conclusion, les résultats indiquent que l'écoulement peut être contrôlé à travers un bon choix de la grandeur et de la direction du champ magnétique, plus la conductivité électrique des parois de la cavité.

Dans la seconde partie de ce travail de la stabilité magnétohydrodynamique

tridimensionnelle de l'écoulement oscillatoire de la convection naturelle dans une cavité rectangulaire de section carrée, avec surface libre, remplie d'un métal liquide et soumise à un gradient de température transversal et à un champ magnétique uniforme dirigé suivant la direction transversale puis suivant la direction longitudinale. Les résultats montrent, qu'en absence du champ magnétique, l'écoulement est stationnaire pour $Gr \leq 7.6 \times 10^6$ et devient oscillatoire pour une valeur critique du nombre de Grashof : $Gr_{crit} \approx 7.7 \times 10^6$. Les valeurs du Grashof critique ont également été déterminées en présence du champ magnétique dans les deux directions et ainsi un diagramme de stabilité, montrant la dépendance entre le Grashof critique et la valeur de Hartmann ($Ha=2.5, 5, 7.5, 10, 12.5$) a été dressé. La plus importante stabilité a lieu quand le champ magnétique est longitudinal. Enfin, les résultats de cette étude peuvent permettre aux chercheurs et aux industriels de connaître les modes oscillatoires en présence du champ magnétique dans le but d'améliorer la qualité du cristal.

Les résultats obtenus ont fait l'objet de deux publications internationales [32] et [55], et de plusieurs communications internationales.

REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES:

1. M. FUMIZAWA, "Natural Convection Experiment with Liquid NaK under Transverse Magnetic Field", *Journal of Nuclear Science and Technology*, Vol. 17(2), pp. 98-105, 1980.
2. H. OZOE, K. OKADA, "The Effect of the Direction of an External Magnetic Field on the Three-Dimensional Natural Convection in Cubical Enclosure", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 32, No. 10, pp. 1939-1954, 1989.
3. K. OKADA, H. OZOE, "Experimental Heat Transfer Rates of Natural Convection of Molten Gallium Suppressed Under an External Magnetic Field in Either the x-, y- or z Direction", *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 114, pp. 107-114, 1992.
4. T. TAGAWA, H. OZOE, "Enhancement of Heat Transfer Rate by Application of a Static Magnetic Field During Natural Convection of Liquid Metal in a Cube", *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 119, pp. 265-271, 1997.
5. T. TAGAWA, H. OZOE, "The Natural Convection of Liquid Metal in a Cubical Enclosure with Various Electro-Conductivities of the Wall Under the Magnetic Field", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 41, No 13. pp. 1917-1928, 1998.
6. T. TAGAWA, H. OZOE, "Enhanced Heat Transfer Rate Measured for Natural Convection in Liquid Gallium in a Cubical Enclosure under a Static Magnetic Field", *ASME, Journal of Heat Transfer*, Vol. 120, 1027-1032, 1998.
7. H. BENHADID, D. HENRY, "Numerical Study of Convection in the Horizontal Bridgman Configuration Under the Action of a Constant Magnetic Field. Part 2. Three-Dimensional Flow", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 333, pp. 57-83, 1997.

8. T. ALBOUSSIÈRE, J. GARANDET, R. MOREAU "Asymptotic Analysis and Symmetry in MHD Convection", *Physics of Fluids*, Vol. 8, pp. 2215-2226, 1996.
9. M. G. BRAUNSFURTH, A. C. SKELDON, A. JUEL, T. MULLIN, D. S. RILEY, "Free Convection in Liquid Gallium", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 342, pp. 295-314, 1997.
10. A. JUEL, T. MULLIN, H. BENHADID, D. HENRY, "Magnetohydrodynamic Convection in Molten Gallium", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 378, pp. 97-118, 1999.
11. R. BESSAÏH, M. KADJA, PH. MARTY, "Effect of Wall Electrical Conductivity and Magnetic Field Orientation on Liquid Metal Flow in a Geometry Similar to the Horizontal Bridgman Configuration for Crystal Growth", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 42, pp. 4345-4362, 1999.
12. A. F. EMERY, J. W. LEE, "The effects of Property Variations on Natural Convection in a Square Enclosure", *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 121, pp. 57-62, 1999.
13. N. UDA, M. HAYASE, T. CHIKAOKA, S. INOUE, H. HORIIKE, K. MIKAYAZAKI, "Natural Convective Heat Transfer of Lithium Under Magnetic Field", *Fusion Engineering and Design*, Vol. 51-52, pp. 893-898, 2000.
14. S. SARAVANAN, P. KANDASWAMY, "Natural Convection in Low-Prandtl Number Fluids with a Vertical Magnetic Field", *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 122, pp. 602-606, 2000.
15. T. ALBOUSSIÈRE, "Quasi Characteristic MHD Flows", *Compte Rendu de l'Académie des Sciences. Paris*, Tome 329, Série II b, pp. 767-773, 2001.

16. C. KARCHER, Y. KOLESNIKOV, O. ANDREEV, A. THESS, "Natural Convection in a Liquid Metal Heated from Above and Influenced by a Magnetic Field", *European Journal of Mechanics B/Fluids*, Vol. 21, pp. 75-90, 2002.
17. M. S. KRAKOV, I. V. NIKIFOROV, "To the Influence of Uniform Magnetic Field on Thermomagnetic Convection in Square Cavity", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 252, pp. 209-211, 2002.
18. M. S. KRAKOV, I. V. NIKIFOROV, A.G. REKS, "Influence of the Uniform Magnetic Field on Natural Convection in Cubic Enclosure: Experiment and Numerical Simulation", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 289, pp. 272-274, 2005.
19. I. DI PIAZZA, M. CIOFALO, "MHD Free Convection in a Liquid-Metal Filled Cubic Enclosure. I. Differential Heating", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 45, pp. 1477-1492, 2002.
20. I. DI PIAZZA, M. CIOFALO, "MHD Free Convection in a Liquid-Metal Filled Cubic Enclosure. II. Internal Heating", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 45, pp. 1493-1511, 2002.
21. L. B. WANG, N. I. WAKAYAMA, "Dependence of Aspect Ratio on Magnetic Damping of Natural Convection in Low-Conducting Aqueous Solution in a Rectangular Cavity", *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 23, pp. 92-95, 2002.
22. B. HOF, A. JUEL, T. MULLIN, "Magnetohydrodynamic Damping of Convective Flows in Molten Gallium", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 482, pp. 163-179, 2003.
23. S. ALEKSANDROVA, S. MOLOKOV, "Three-Dimensional Buoyant Convection in a Rectangular Cavity with Differentially Heated Walls in a Strong Magnetic Field", *Fluid Dynamics Research*, Vol. 35, pp.37-66, 2004.

24. M. S. KRAKOV, I. V. NIKIFOROV, A. G. REKS, "Influence of the Uniform Magnetic Field on Natural Convection in Cubic Enclosure: Experiment and Numerical Simulation", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 289, pp. 272-274, 2005.
25. T. SOPHY, H. SADAT, L. GBAHOUE, "Convection Thermomagnétique dans une Cavité Différentiellement Chauffée", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 32, pp. 923-930, 2005.
26. T. BEDNARZ, E. FORNALIK, T. TAGAWA, H. OZOE, J. S. SZMYD, "Experimental and Numerical Analyses of Magnetic Convection of Paramagnetic Fluid in a Cube Heated and Cooled from Opposing Verticals Walls", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 44, pp. 933-943, 2005.
27. M. ANWAR HOSSAIN, M.Z. HAFIZ, D.A.S. REES, "Buoyancy and Thermocapillary Driven Convection Flow of an Electrically Conducting Fluid in an Enclosure with Heat Generation", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 44, pp. 676-684, 2005.
28. M. KANEDA, T. TAGAWA, H. OZOE, "Natural Convection of Fluid Metal Under a Magnetic Field with an Electric Current Supplied from Outside", *Experimental Thermal and Fluid Science*, Vol. 30, pp. 243-252, 2006.
29. B. XU, B. Q. LI, D. E. STOCK, "An Experimental Study of Thermally Induced Convection of Molten Gallium in Magnetic Fields", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 42, pp. 2009-2019, 2006.
30. I. E. SARRIS, G. K. ZIKOS, A. P. GRECOS, N. S. VLACHOS, "On the Limits of Validity of the Low Magnetic Reynolds Number Approximation in MHD Natural-Convection Heat Transfer", *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 50, pp. 157-180, 2006.

31. L. KOLSI, A. ABIDI, M. N. BORJINI, N. DAOUS, H. BEN AISSA, "Effect of an External Magnetic Field on the 3-D Unsteady Natural Convection in a Cubical Enclosure", *Numerical Heat Transfer, Part A*, Vol. 51, pp.1003-1021, 2007.
32. M. BATTIRA, R. BESSAIH, "Three- Dimensional Natural Convection in the Horizontal Bridgman Configuration Under Various Wall Electrical Conductivity and Magnetic Field", *Numerical Heat Transfer, part A*, Vol. 55, pp. 58-76, 2009.
33. D. T. J. HURLE, E. JAKEMAN, C. P. JONSON, "Convective Temperature Oscillations in Molten Gallium", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 64, Part 3, pp. 565-576, 1974.
34. B. ROUX, H. BEN HADID, "Numerical Simulation of Oscillatory Convection in Semiconductor Melts", *Journal of Crystal Growth*, Vol. 97, pp. 201-216, 1989.
35. M. AFRID, A. ZEBIB, "Oscillatory Three-Dimensional Convection in Rectangular Cavities and Enclosures", *Physics of Fluids*, Vol. A2 (8), pp. 1318-1327, 1990.
36. A. YU. GELFGAT, I. TANASAWA, "Numerical Analysis of Oscillatory Instability of Buoyancy Convection with the Galerkin Spectral Method", *Numerical Heat Transfer, Part A*, Vol. 25, pp. 627-648, 1994.
37. A. YU. GELFGAT, P. Z. BAR-YOSEPH, A. L. YARIN, "On Oscillatory Instability of Convective Flows at Low Prandtl Number", *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 119, pp. 823-830, 1997.
38. A. YU. GELFGAT, P. Z. BAR-YOSEPH, A. L. YARIN, "Non-Symmetric Convective Flows in Laterally Heated Rectangular Cavities", *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, Vol. 11, pp. 216-273, 1999.

39. A. YU. GELFGAT, P. Z. BAR-YOSEPH, A. L. YARIN, "Stability of Multiple Steady States of Convection in Laterally Heated Cavities", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 388, pp. 315-334, 1999.
40. H. BENHADID, D. HENRY, "Numerical Study of Convection in the Horizontal Bridgman Configuration Under the Action of a Constant Magnetic Field. Part 1. Two-Dimensional Flow", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 333, pp. 23-56, 1997.
41. L. DAVOUST, R. MOREAU, R. BOLCATO, T. ALBOUSSIÈRE, A. C. NEUBRAND, J. P. GARANDET, "Influence of a Vertical Magnetic Field on Convection in the Horizontal Bridgman Crystal Growth Configuration", *Magnetohydrodynamics*, Vol. 31, pp. 218-227, 1995.
42. R. MÖBNER, U. MÜLLER, "A Numerical Investigation of Three-Dimensional Magnetoconvection in Rectangular Cavities", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 42, pp. 1111-1121, 1999.
43. I. DI PIAZZA, M. CIOFALO, "Low-Prandtl Number Natural Convection in Volumetrically Heated Rectangular Enclosures I. Slender Cavity, AR=4", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 43, pp. 3027-3051, 2000.
44. S. ARCIDIACONO, I. Di PIAZZA, M. CIOFALO, "Low-Prandtl Number Natural Convection in Volumetrically Heated Rectangular Enclosures II. Square Cavity, AR=1", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 44, pp. 537-550, 2001.
45. S. ARCIDIACONO, I. Di PIAZZA, M. CIOFALO, "Low-Prandtl Number Natural Convection in Volumetrically Heated Rectangular Enclosures III. Shallow Cavity, AR=0.25", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 44, pp. 3053-3065, 2001.

46. S. WAKITANI, "Numerical Study of Three-Dimensional Oscillatory Natural Convection at Low-Prandtl Number in Rectangular Enclosures", *ASME, Journal of Heat Transfer*, Vol. 123, pp. 77-83, 2001.
47. A. YU. GELFGAT, P. Z. BAR YOSEFH, "The Effect of an External Magnetic Field on Oscillatory Instability of Effective Flows in a Rectangular Cavity", *Physics of Fluids*, Vol. 13, pp. 2269-2278, 2001.
48. A. JUEL, T. MULLIN, H. BEN HADID, D. HENRY, "Three-Dimensional Free Convection in Molten Gallium", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 436, pp. 267-281, 2001.
49. B. HOF, A. JUEL, L. ZHAO, D. HENRY, H. BENHADID, T. MULLIN, "Onset of Oscillatory Convection in Molten Gallium", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 515, pp. 391-413, 2004.
50. I. E. SARRIS, S.C. KAKARANTZAS, A.P. GRECOS, N.S. VLACHOS, "MHD Natural Convection in a Laterally and Volumetrically Heated Square Cavity", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 48, pp. 3443-3453, 2005.
51. B. HOF, A. JUEL, T. MULLIN, "Magnetohydrodynamic Damping of Oscillations in Low-Prandtl Number Convection", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 545, pp. 193-201, 2005.
52. S. KADDECHE, D. HENRY, H. BEN HADID, "Magnetic Stabilization of the Buoyant Convection Between Infinite Horizontal Temperature Gradient", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 480, pp. 185-216, 2003.
53. R. BESSAIH, S. BOUABDALLAH, "Numerical Study of Oscillatory Natural Convection During Solidification of a Liquid Metal in a Rectangular Enclosure with and without Magnetic Field", *Numerical Heat Transfer, Part A*, Vol. 54, pp.331-345, 2008.

54. D. HENRY, A. JUEL, H. BEN HADID, S. KADDECHE, "Directional Effect of a Magnetic Field on Oscillatory Low-Prandtl-Number Convection", *Physics of Fluids*, Vol. 20, 034104-1, 2008.
55. M. BATTIRA and R. BESSAIH, "Magnetohydrodynamic Damping of Natural Convection Flows in a Rectangular Enclosure", *International Journal of Fluid and Thermal Engineering*, 1; 2 www.waset.org, Spring 2008.
56. S.V. PATANKAR, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Taylor & Francis, Hemisphere, Washington DC, 1980.
57. S. CHANDRASEKHAR, "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability", Dover Publications, Inc. New York, 1961.
58. R. MOREAU, "Magnetohydrodynamics", Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1990.
59. S. BENISSAAD, "Stabilité de la Convection Naturelle à Double Diffusion", Thèse de Doctorat d'Etat, Université Mentouri – Constantine, 2003.
60. A. BEJAN, "Convection Heat Transfer", 2nd Edition, John Wiley & Sons, New-York, 1995.

ABSTRACT

In the first part of this work, a numerical investigation of the three-dimensional natural convection of a liquid metal contained in the horizontal Bridgman configuration and submitted to a controlled horizontal temperature difference and an external magnetic field in either the longitudinal or vertical direction, is presented. The numerical approach is based on the finite-volume approximation. The effect of a magnetic field provides a notable change on the flow and thermal structures. The strongest stabilization of the convection flow is found when the magnetic field is oriented vertically. Also, the effect of the wall electrical conductivity on the average Nusselt number was studied.

In the second part of this work, we numerically study the three-dimensional magnetohydrodynamics (MHD) stability of oscillatory natural convection flow in a rectangular cavity with square section, with free top surface, filled with a liquid metal and subjected to a transversal temperature gradient and a uniform magnetic field oriented in either the longitudinal or transversal direction. The finite volume method was used in order to solve the equations of continuity, momentum, energy, and potential. The stability diagram obtained in this study highlights the dependence of the critical value of the Grashof number Gr_{crit} , with the increase of the Hartmann number Ha for two orientations of the magnetic field. This study confirms the possibility of stabilization of a liquid metal flow in natural convection by application of a magnetic field, and shows that the flow stability is more important when the direction of magnetic field is longitudinal than when the direction is transversal.

Key words: Natural convection, Magnetic field, Oscillatory, Rectangular cavity, Liquid metal.

RESUME

Dans la première partie de ce travail, une investigation numérique de la convection libre tridimensionnelle d'un métal liquide contenu dans la configuration horizontale de Bridgman et soumise à une différence de température horizontale contrôlée et à un champ magnétique externe appliqué une fois verticalement et une seconde fois longitudinalement est présentée. L'approche numérique choisie est basée sur l'approximation des volumes finis. L'effet du champ magnétique produit un changement remarquable de l'écoulement et des structures thermiques. La plus importante stabilisation de l'écoulement convectif est enregistrée quand le champ magnétique est orienté verticalement. Aussi, l'effet de la conductivité électrique des parois de l'enceinte sur le nombre de Nusselt moyen a été étudié.

Dans la seconde partie de ce travail, une étude numérique de la stabilité magnétohydrodynamique tridimensionnelle de l'écoulement oscillatoire de la convection naturelle dans une cavité rectangulaire de section carrée, avec surface libre, remplie d'un métal liquide et soumise à un gradient de température transversal et à un champ magnétique uniforme dirigé suivant la direction transversale puis suivant la direction longitudinale. La méthode des volumes finis a été utilisée pour la résolution des équations de continuité, de quantité de mouvement, d'énergie et du potentiel électrique. Le diagramme de stabilité obtenu dans cette étude souligne la dépendance de la valeur du nombre de Grashof critique Gr_{crit} , avec l'augmentation du nombre de Hartmann pour les deux directions du champ magnétique. Cette étude confirme la possibilité de stabilisation le l'écoulement du métal liquide dans la convection libre par application d'un champ magnétique uniforme externe, et montre que la stabilité de l'écoulement est plus importante quand la direction du champ magnétique est longitudinale que lorsqu'elle est transversale.

Mots clés : Convection naturelle, Champ magnétique, Oscillations, Cavité rectangulaire Métal liquide.

ملخص

في الجزء الأول من هذا العمل، قدمت دراسة عددية للحمل الطبيعي ثلاثي الأبعاد لسائل معدني يملأ حيزاً مغلقاً أفقياً لـ "بريدجمان" خاضع لفرق أفقي في درجات الحرارة وتحت تأثير مجال مغناطيسي خارجي، مطبق مرة عمودياً ومرة أخرى طولياً. المقاربة العددية المستعملة هي طريقة الحجم المنتهية. تطبيق المجال المغناطيسي ينتج تغيراً واضحاً على الإنسياب وعلى التركيبات الحرارية. الدراسة بينت أن المجال المغناطيسي العمودي هو الذي يؤدي إلى أكبر استقرار للإنسياب. درس كذلك تأثير التوصيل الكهربائي لجدران الحيز على عدد "نوسالت" (Nusselt).

في الجزء الثاني من هذا العمل، أنجزت دراسة عددية لاستقرار الإنسياب التذبذبي ثلاثي الأبعاد للحمل الطبيعي داخل حيز مفتوح متوازي السطوح ذو مقطع مربع مملوء بسائل معدني وخاضع لفرق في درجات الحرارة وتحت تأثير مجال مغناطيسي خارجي منتظم. المجال المغناطيسي مطبق في اتجاهين مختلفين، الأول طولي والثاني عرضي. استعملت طريقة الحجم المنتهية لحل معادلات الإستمرارية، كمية الحركة، الطاقة والكمون الكهربائي. أنجز الرسم البياني للإستقرار والذي أكد ارتباط عدد "غراشوف" الحرج (Grashof critique) مع عدد "هارتمان" (Hartmann) بالنسبة لاتجاهي المجال المغناطيسي. هذه الدراسة أكدت إمكانية إخماد إنسيابات الحمل الحراري للسوائل المعدنية بتطبيق مجال مغناطيسي خارجي، وتبين أن إخماد الإنسيابات يكون عندما يكون اتجاه المجال المغناطيسي طولي أقوى منه عندما يكون الاتجاه عرضي.

كلمات أساسية:

حمل طبيعي ، مجال مغناطيسي ، تذبذبات ، حيز متوازي الأسطح ، سائل معدني.