

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES DE L' INGENIEUR
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

N° Ordre : ...20 /TE/ 2007....

Série : ...02 /GM/ 2007...

Thèse

Présenté pour obtenir le diplôme de
Doctorat d'état

En Génie Mécanique

Etude de la convection forcée tridimensionnelle
turbulente dans des conduites à sections variables

Option : Energétique

Par :

Kholai Omar

Soutenue le : 04 /04/ 2007

Devant le Jury :

Président	: Z. NEMOUCHI	Professeur	Université Mentouri Constantine
Rapporteur	: M. KADJA	Professeur	Université Mentouri Constantine
Examineurs :	E. MEZAACHE	Professeur	Université de Skikda
	K. TALBI	Maître de conférence	Université Mentouri Constantine
	A. BELLAOUAR	Maître de conférence	Université Mentouri Constantine
	K. ZIDANI	Maître de conférence	Université de Batna
Invité	: H. T. Mai	Professeur	Université Reims, France

A mes parents

A ma femme NADIA

A mes enfants SALSABILE et AMINE

A mes frères et sœurs

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du laboratoire d'énergétique appliquée et de pollution (LEAP) de la Faculté des Sciences de l'Ingénieur, Université Mentouri- Constantine et du laboratoire de thermomécanique de l'université de Reims.

*Je remercie tout d'abord M^r **Mahfoud. KADJA**, professeur à l'Université Mentouri-Constantine, pour son aide dans cette thèse en m'accueillant et en mettant à ma disposition tous les moyens du laboratoire je le remercie d'avoir accepté de diriger cette thèse, pour son soutien au cours de ces années.*

*Je remercie vivement M^r **Zoubir. NEMOUCHI**, professeur à l'Université Mentouri-Constantine, pour son analyse fructueuse de ce travail. Ses nombreuses remarques m'auront permis d'améliorer la qualité de ce mémoire. Je lui est gré d'avoir accepté d'être le président de Jury de cette thèse.*

*M^r **A. BELLAOUAR**, maître de conférence à l'Université Mentouri- Constantine. Je le remercie vivement pour m'avoir fait l'honneur et le plaisir de participer à mon jury de mémoire.*

*Je remercie M^r **K. TALBI**, maître de conférence à l'Université Mentouri- Constantine, pour m'avoir fait l'honneur et le plaisir de participer à mon jury de mémoire.*

*Je remercie également M. **E. MEZAACHE** professeur à l'Université de Skikda et M. **K. ZIDANI**, maître de conférence à l'Université de Batna qui ont accepté de consacrer de leur temps à l'examen de cette thèse.*

*Je tiens à remercier M^r **H. T. Mai** professeur à l'Université de Reims, France, pour son aide dans cette thèse le long de mon séjour à Reims.*

*Merci à tous mes collègues qui ont contribué directement ou indirectement à ce travail : **B. NECIB, S. BOUDEBOUZ, M.S. BOULAHLIB** et tous les autres.*

Table des matières

Introduction	1
Chapitre I	4
Etude bibliographique	4
I.1. Ecoulement turbulent à travers un échelon	4
I.1.1. Modèles de turbulence	4
I.1.2. Les modèles de k-e	5
I.1.3. Ecoulement à travers un échelon	6
I.2. Etude de la convection mixte tridimensionnelle	7
I.2.1. Études théoriques et numériques	7
I.2.2. Études expérimentales	9
I.3. Etude de la convection mixte en régime transitoire	11
Chapitre II	15
Modélisation de la turbulence	15
II.1. Equations	15
II.2. Fermeture des équations	17
II.3. Modèles de turbulence	20
II.4. Modèles de premier ordre	22
Chapitre III	26
Modèle k-ε	26
III.1. Energie cinétique de turbulence	26
III.2. Taux de dissipation	28
III.3. Modèle complet	32
III.4. Constantes	33
III.5. Conditions aux limites	36
III.5.1. Paroi	36
III.5.2. Entrée du fluide	39
III.5.3. Sortie du fluide	39
III.5.4. Axe de symétrie	39
Chapitre IV	41
Méthode numérique	41
IV.1. Introduction	42

IV.2. Notions générales sur la méthode des volumes finis	43
IV.2.1. Distribution des volumes de contrôle	43
IV.2.2. Discrétisation des équations en volumes finis	44
IV.3. Méthode de résolution	51
IV.4. Couplage Vitesse Pression	51
VI.5. Détails numériques	55
VI.5.1. La sous relaxation:	56
IV.5.2. Critère de convergence	57
IV.5.2. Discrétisation temporelle	57
IV.6. Implémentation de conditions aux limites	57
 <i>Chapitre V :</i>	 67
 <i>Application I :</i>	 68
<i>Écoulement turbulent à travers un échelon</i>	68
V.1. Problème et géométrie	68
V.2. Résultats et discussion	69
V.2.1. Maillage	69
V.2.2. Structure de l'écoulement	70
V.2.3. pression et paramètres de la turbulence	71
V.2.4. Comparaisons avec les résultats expérimentaux	75
 <i>Application II :</i>	 83
<i>Étude de la convection mixte en 3D : Effet de l'inclinaison et du nombre de Grashof</i>	83
V.3. Problème et formulation mathématique	83
V.4. Résultats et discussion	87
V.4.1. Structure de l'écoulement secondaire et du champ thermique	87
V.4.2. Développement des profils de la vitesse axiale	94
V.4.3 Evolution axiale du nombre de Nusselt moyen et la contrainte de cisaillement moyenne	95
 <i>Application III :</i>	 102
<i>Étude de la convection mixte en régime transitoire</i>	102
V.5. Problème et formulation mathématique	102
V.6. Conditions initiales et conditions aux limites	104
V.7. Résultats et discussion	105
V.7.1. Structure de l'écoulement et du champ thermique ($DT > 0$)	105
V.7.2. Influence de la diffusivité	106
V.7.3. Structure de l'écoulement et du champ thermique ($DT < 0$)	107
V.7.4. Température interfaciale	108

Conclusion : _____ **111**

Références bibliographiques : _____ **113**

Nomenclatures

a	: Coefficient de l'équation discrétisée
b	: Terme source de l'équation discrétisée
C	: Constante
C_p	: Chaleur spécifique, Coefficient de pression
D	: Coefficient de diffusion - Longueur caractéristique – Diamètre du tube
E	: Facteur de rugosité (loi logarithmique)
f	: Force à distance (instantanée)
F	: Force à distance (moyenne) - Coefficient de convection
F_p	: Facteur de pondération (rencontre de deux parois)
G_k	: Production de k par les forces à distance
Gr	: Nombre infini - Nombre de Grashof
H	: Hauteur de l'échelon
J	: Flux généralisé
k	: Energie cinétique de turbulence
l	: longueur quelconque
ℓ	: Echelle de longueur
Nu	: Nombre de Nusselt
p	: Pression instantanée
P	: Pression moyenne - Fonction de Jayatilleke.
P_k	: Production de l'énergie cinétique de turbulence
Pe	: Nombre de Peclet
Pr	: Nombre de Prandtl
q	: Source de chaleur (instantanée) – Flux de chaleur
Q	: Source de chaleur (moyenne)
r	: Direction de l'espace
R	: Rayon du tube
Re	: Nombre de Reynolds
S	: Terme source généralisé
t	: Température instantanée
T	: Période de temps - Température moyenne
u	: Vitesse instantanée
U	: Composante suivant une direction donnée de la vitesse moyenne
V	: Vitesse moyenne suivant la direction transversale
W	: Vitesse moyenne suivant la direction angulaire
x	: Direction de l'espace
X_r	: Longueur de rattachement
Y	: Direction transversale de l'écoulement
z	: Direction de l'espace

Lettres grecques

α	: Angle d'inclinaison du tube - Diffusivité thermique - Coefficient de sous relaxation
β	: Coefficient d'expansion volumétrique
Γ	: Coefficient généralisé de diffusion
δ_{ij}	: Delta de Kroneker
δ_x, δ_y	: Distances internodales
$\Delta x, \Delta y$: Dimensions du volume de contrôle
λ	: Conductivité thermique
κ	: Constante de Von Karman
μ	: Viscosité dynamique
ν	: Viscosité cinématique
ε	: Taux de dissipation de k
ϕ	: Variable instantanée généralisée - Flux de chaleur
Φ	: Variable moyenne généralisée
σ	: Constante (nombre de Prandtl)
θ	: Angle - Température adimensionnelle - Direction de l'espace
η	: Micro-échelle de longueur
ρ	: Masse volumique
τ	: Temps - tension de frottement

Indices

0	: Position de référence
f	: Fluide
f	: Frontière
fh	: Frontière horizontale
fv	: Frontière verticale
i,j,k	: Indices d'axe
k	: Relatif à l'énergie cinétique de turbulence
n	: Direction normale
e,w,n,s	: Faces du volume de contrôle
E,W,N,S	: Noeuds voisins
P	: Noeud courant
s	: Solide
t	: Turbulent - Relatif à la température
x, y, z	: Relatif aux directions spatiales
ε	: Relatif au taux de dissipation
Φ	: Relatif à la variable généralisée Φ
τ	: Frottement

Exposants

- * : Estimation – Quantité adimensionnelle
- ‘ : Fluctuation - Correction
- (U) : Relatif à la composante U de la vitesse
- (V) : Relatif à la composante V de la vitesse
- (P) : Relatif à la pression

Introduction

Dans beaucoup de problèmes d'échange de chaleur par convection rencontrés dans la pratique industrielle, le fluide circule en régime turbulent dans des conduites de section quelconque et variable. La prédiction de tels phénomènes est donc d'une importance primordiale pour la conception et le développement de ce genre de systèmes. Cette importance s'explique par plusieurs raisons comme, par exemple, l'affranchissement de l'expérimentation souvent difficile à mettre en oeuvre et très onéreuse, la souplesse que procure un logiciel dans l'étude de l'influence des différents paramètres du problème, souvent très nombreux et impossibles à prendre en compte complètement, etc.

Le transfert de chaleur par convection en régime turbulent et plus particulièrement le problème de la turbulence même est l'un des problèmes physiques qui résistent encore aux tentatives de résolution complète. La cause en est le manque de moyens et non de base mathématique. En effet, cette dernière existe depuis plus d'un siècle. Ce sont les équations de Navier- Stokes qui expriment le principe de conservation des différentes grandeurs du problème: masse, quantité de mouvement, énergie, etc.

La difficulté du problème réside, essentiellement, dans ces caractéristiques (phénomène instantané et tridimensionnel) et dans l'infinité d'échelles nécessaires pour le décrire convenablement.

Une autre difficulté s'avère de la coexistence des phénomènes naturels. La convection mixte est un phénomène de transfert thermique associé aux écoulements de fluide dans la pratique. La présence de la convection naturelle influe simultanément sur les champs thermique et hydrodynamique, le problème est ainsi couplé. Les mouvements secondaires résultant de la convection naturelle vont améliorer l'échange thermique par convection ce qui augmente le transfert de chaleur.

La convection mixte à l'intérieur des conduites intervient dans plusieurs applications pratiques telles que les capteurs solaires, les échangeurs de chaleur, le refroidissement des composantes

électroniques et les procédés chimiques et nucléaires. A travers la bibliographie, on s'aperçoit de l'existence d'un large éventail d'études expérimentales, analytiques et numériques menées dans ce domaine. Néanmoins, les hypothèses et les simplifications adoptées dans le problème limitent généralement l'étude à des cas très particuliers; dans la plupart des travaux analytiques et numériques on constate :

- La négligence de la conduction de la chaleur dans le matériau de la conduite (la condition thermique est appliquée directement à l'interface solide- fluide).
- La condition thermique aux Limites est uniforme (température ou flux constant).
- Les régimes d'écoulement et de transfert thermique sont complètement développés.

L'objet de cette thèse est de présenter le problème de la modélisation des phénomènes tri-dimensionnels souvent rencontrés dans les installations industrielles, les problèmes d'interactions entre la convection forcée et la convection naturelle en régime transitoire et en plus, nous présentons aussi le problème de la turbulence en s'appuyant sur le modèle le plus usité au niveau de la pratique industrielle; à savoir le modèle à deux équations k - ϵ (énergie cinétique de la turbulence- taux de dissipation de cette énergie) standard.

Cette étude a été divisée en cinq chapitres.

Nous commencerons, par une introduction générale

Dans le premier chapitre, nous avons extrait de la bibliographie les données concernant, la modélisation de la turbulence pour les écoulements avec recirculation, les situations de convection mixte dans les tubes inclinés et la convection mixte transitoire.

Puis un deuxième chapitre pour situer la modélisation de la turbulence par rapport aux autres modèles existant dans la littérature. On détaillera ensuite la démarche simplificatrice permettant d'aboutir au modèle utilisé.

Le troisième chapitre sera réservé au modèle de turbulence utilisé dans cette thèse, c'est le modèle k - ϵ standard.

Le quatrième chapitre traitera des problèmes numériques posés par la modélisation de la turbulence, la discrétisation des équations différentielles de transport et la résolution de système d'équations obtenues.

Enfin, dans le cinquième chapitre, nous présenterons quelques applications pour montrer la capacité des modèles numériques à décrire, d'une manière plus ou moins satisfaisante, des situations pratiques.

Enfin, une conclusion fera le bilan du travail réalisé.

Chapitre I	4
<i>Etude bibliographique</i>	4
I.1. Ecoulement turbulent à travers un échelon	4
I.1.1. Modèles de turbulence	4
I.1.2. Les modèles de k-e	5
I.1.3. Ecoulement à travers un échelon	6
I.2. Etude de la convection mixte tridimensionnelle	7
I.2.1. Études théoriques et numériques	7
I.2.2. Études expérimentales	8
I.3. Etude de la convection mixte en régime transitoire	11

Chapitre I

Etude bibliographique

I.1. Ecoulement turbulent à travers un échelon

I.1.1. Modèles de turbulence

Les modèles de fermeture de turbulence à deux équations sont intéressants pour les applications industrielles dans lesquelles le détail du champ turbulent n'est pas recherché. Ces modèles sont encore très utilisés dans les grands codes industriels en CFD. Les modèles à deux équations sont généralement basés sur le concept de viscosité de la turbulence et de ce fait peuvent être résolus numériquement de façon efficace alors que les modèles aux tensions de Reynolds nécessitent des techniques numériques spécifiques.

De nombreuses études sur les écoulements turbulents ont été menées ces dernières années. La plupart sont des études numériques. Pour une vue générale, on peut se reporter utilement sur la littérature abondante sur le sujet et spécialement les publications de revue [1-13].

Dans la simulation numérique des écoulements turbulents, le modèle k- ϵ a déjà très largement prouvé son efficacité mais présente cependant un certain nombre de faiblesses. Par exemple,

tous les schémas de fermeture du modèle $k-\epsilon$ sont basés sur l'hypothèse des nombres de Reynolds de la turbulence élevés, ce qui signifie que l'effet de la viscosité moléculaire est supposé négligeable. Cette hypothèse n'est pas valable dans les zones proches des parois où l'effet de la viscosité moléculaire devient prépondérant.

Deux grandes orientations peuvent alors être dégagées pour apporter une solution à ces limitations.

La première approche consiste à mailler plus finement la zone proche de la paroi afin de reproduire au mieux les phénomènes turbulents. Les modélisations de l'énergie cinétique turbulente et de sa dissipation sont étendues pour inclure l'influence importante de la viscosité moléculaire au voisinage de la paroi. C'est l'objectif des modèles bas Reynolds et de l'approche par Simulation Numérique Directe.

La seconde approche consiste à mailler grossièrement le domaine pariétal et à imposer, dans les régions concernées, des valeurs aux grandeurs turbulentes déduites de « lois de paroi ». Cette solution a été retenue pour les codes développés dans le cadre de cette thèse. Elle est peu coûteuse en temps de calcul et donne d'assez bons résultats. Cependant, elle reste insuffisante dans certains cas de la convection mixte ou naturelle, ne serait ce que parce que l'universalité des profils pariétaux n'est plus valable.

I.1.2. Les modèles de $k-\epsilon$

C'est le modèle à deux équations de transport (pour k et ϵ) qui a été le plus largement testé et utilisé.

Le modèle $k-\epsilon$ de **Launder et Spalding [3]** est certainement le modèle le plus répandu. Ce modèle est très répandu de part sa simplicité, sa robustesse et sa facilité de mise en oeuvre. Bien que les aspects généraux des écoulements soient bien simulés, il apparaît certaines insuffisances dues notamment à la valeur des constantes et au fait que le modèle est trop diffusif. Les modifications apportées au modèle $k-\epsilon$ sont nombreuses, dont notamment les extensions suivantes :

Le modèles $k-\epsilon$ deux couches de **Chen et Patel [14]** qui, à proximité des parois, utilise un modèle à une équation (pour k) et exprime ϵ à l'aide d'une longueur caractéristique déterminée par une formule algébrique fonction du nombre de Reynolds local.

Le modèle $k-\epsilon$ bas Reynolds de **Jones et Launder [15]** qui élargit son domaine de validité aux zones d'écoulement laminaires ou de transition à proximité des parois. Les constantes sont rendues dépendantes du nombre de Reynolds et des termes complémentaires sont ajoutés aux deux équations pour tenir compte du caractère non- isotrope du processus de dissipation.

Le modèle $k-\epsilon$ étendu de **Chen et Kim [16]**, qui ajoute un terme à l'équation du taux de dissipation pour que le transfert d'énergie réponde plus efficacement à la déformation moyenne de l'écoulement, rend le modèle moins diffusif.

Le modèle RNG, développé par le groupe de renormalisation **Yakhot et Smith [17]**, consiste en une estimation au cours du calcul de la constante $C_{\varepsilon 1}$, remplacée dans l'équation de dissipation par une autre constante qui change au cours des itérations. Cette expression ajoute un terme fonction du taux de déformation à l'équation du taux de dissipation le rendant ainsi moins diffusif.

I.1.3. Ecoulement à travers un échelon

La réalisation d'un code de calcul qui contient des modèles de turbulence passe par la réalisation d'une série de validations sur ce qu'on appelle couramment des cas tests. Ce sont généralement des expériences de laboratoire que nous reproduisons numériquement. Cela nous permet de vérifier la conformité de nos résultats sur des données possédant une faible marge d'erreurs (erreurs de mesures de quelques pour cent généralement). Une fois seulement cette étape complétée, il est possible de passer à des simulations numériques sur des cas plus concrets. La simulation numérique à travers une marche descendante est un cas test fréquemment rencontré lors de la validation des codes de calcul, et ce pour deux raisons principales : d'une part l'écoulement est complexe en raison de la présence de forts cisaillements et d'une recirculation, et d'autre part, de nombreux résultats expérimentaux et numériques (**Kim et al. [18]**, **Amanos et Goel [19]**, **Benocci [20]**, **Eaton et Johnston [21]**, **Kaul et Kwak [22]**, et **Vogel et Eaton [23]**) sont disponibles.

La plus part de ces études ont traité, les effets du nombre de Reynolds et de la hauteur de la marche (échelon) sur la séparation, le rattachement et le redéveloppement de l'écoulement.

Les deux expériences sélectionnées pour valider les simulations numériques présentées dans cette thèse sont décrites dans **Kim et al. [18]** et **Vogel et Eaton [23]**.

Eaton et Johnston [21]

Présentent une synthèse des travaux numériques qui ont été développés avant 1980 sur les écoulements turbulents complexes. Les modèles utilisés sont presque tous du type fermeture en un point. La valeur de la longueur de rattachement, calculée en utilisant différents modèles, varie de $X_R \approx 5,5H$ jusqu'à $X_R \approx 7,8H$, par rapport à la valeur expérimentale de $X_R \approx 7,6H$ déterminée par **Kim et al. [18]**.

I.2. Etude de la convection mixte tridimensionnelle

Avant d'étudier la convection mixte, il convient de s'intéresser aux études analytiques, numériques et expérimentales déjà entreprises. Depuis une cinquantaine d'années, de nombreux travaux ont permis d'analyser les écoulements en canal et en couches limites. Grâce aux améliorations croissantes des moyens de mesures et au développement spectaculaire des moyens de calculs, il a été possible d'analyser de plus en plus finement ces écoulements accompagnés du transfert de chaleur. Différentes expériences de référence et des calculs en ont permis d'obtenir des résultats importants sur les caractéristiques de l'écoulement et du transfert de chaleur en convection mixte.

I.2.1. Études théoriques et numériques

Les études théoriques et numériques concernant le développement simultané de l'écoulement de fluide avec le transfert de chaleur sont peu nombreuses en raison de la difficulté de résoudre les équations de mouvement tridimensionnel et de la non linéarité de ces différents termes (convectifs et diffusifs). En effet, des conditions thermiques uniformes (température ou flux de chaleur) sont appliquées au niveau de l'interface solide- fluide.

Hishida et al. [24]

Ont essayé de résoudre l'ensemble des équations elliptiques caractérisant l'écoulement en développement simultané dans un tube horizontal isotherme. Leurs résultats restent cependant limités à trois faibles nombres de Grashof (zéro, $0,5 \times 10^3$ et 10^4).

Cheng et al [25] et Hwang et Lai [26]

Ont considérés le problème d'un écoulement complètement développé, en vue d'évaluer l'influence des forces d'Archimède sur le développement thermique d'un écoulement interne. Ils ont négligé les termes d'inertie dans les équations du mouvement en choisissant un fluide à grand nombre de Prandtl.

Orfi [27]

A effectué une étude de convection mixte dans un écoulement en développement thermique et hydrodynamique à l'intérieur d'une conduite inclinée. Pour cela, la condition thermique d'un flux de chaleur uniforme est appliquée au niveau de la paroi de la conduite. Il a étudié aussi, le phénomène de bifurcation (existence de solutions doubles) qui est observé quand le nombre de Grashof est élevé.

Patankar et al. [28]

Ont effectué une étude numérique de la convection mixte dans une conduite horizontale pour un écoulement développé avec chauffage uniforme à l'interface solide- fluide sur une moitié

supérieure / inférieure et l'autre moitié adiabatique. Des mouvements secondaires importants dus à la convection naturelle ont été mis en évidence dans le cas du chauffage appliqué par le bas; ils sont à l'origine d'importantes augmentations du nombre de Nusselt par rapport à celui correspondant à la convection forcée pure. Par contre, dans le cas du chauffage appliqué par le haut, les mouvements convectifs secondaires sont relativement faibles et la stratification de la température est dominante.

En vue de comprendre l'effet d'une distribution uniforme et non uniforme du chauffage pariétal sur le comportement d'un écoulement en régime de convection mixte dans des conduites horizontales à section rectangulaire (**Incropera et Schutt [29]**, **Mahaney et al. [30]** et **[31]**), ont simplifiés les équations de mouvement et ont utilisés simplement la forme parabolique des équations différentielles. Pour la convection mixte dans des tubes inclinés **Choudhury et Patankar [32]** ont considérés le cas d'un tube isotherme et **Orfi et al [33,34]** ont traités le même problème pour un tube soumis à un flux uniforme.

I.2.2. Études expérimentales

Les études expérimentales menées dans ce domaine sont également nombreuses. La plupart de ces travaux expérimentaux sont destinés à quantifier les effets de la convection naturelle sur les coefficients d'échange thermique et la chute de pression et d'analyser la distorsion sur les profils température moyenne et de vitesse axiale.

Petukhov et al. [35] et Petukhov et Polyakov [36]

Ont présenté des résultats d'études expérimentales sur la convection mixte à l'intérieur des conduites horizontales et verticales soumises à un flux de chaleur uniforme. La matière des tubes utilisés est en acier inoxydable; pour le tube horizontal, le diamètre intérieur est de 18.84 mm, l'épaisseur est de 0.36 mm et la longueur de chauffage est de 99 fois le diamètre interne, alors que dans le cas d'un tube vertical. Le diamètre intérieur est de 49.66 mm, l'épaisseur est de 0.4 mm et la longueur de chauffage est de 80 fois le diamètre interne. Dans la conduite horizontale, en amont de la zone chauffée, une longueur de l'ordre de 96 fois le diamètre, est maintenue isotherme servant pour l'établissement des régimes thermique et hydrodynamique. Les résultats obtenus ont permis de proposer des corrélations empiriques donnant le nombre de Nusselt moyen en fonction de la distance axiale.

Pour un tube vertical :

$$\frac{Nu_Z}{Nu_{as}} = \left(1 + \frac{Ra}{B}\right)^{0.27} \quad \text{tel que : } \begin{cases} B = \frac{1,35}{Z} + 78,0 \cdot Z^{0,25} & \text{pour } Z \leq 0,07 \\ B = 60 & \text{Pour } Z \geq 0,07 \end{cases}$$

Nu_{as} , est le nombre de Nusselt moyen asymptotique (pour un écoulement développé).

La précision de l'approximation de la corrélation est de 8%.

Pour un tube horizontal

$$\frac{\text{Nu}_z}{\text{Nu}_{\text{as}}} = \left[1 + \left(\frac{\text{Ra}}{\text{B}} \right)^4 \right]^{0,045} \quad \text{tel que : } \begin{cases} \text{B} = 5 \cdot 10^3 \cdot Z^{-1} & \text{pour } Z < 1,7 \cdot 10^{-3} \\ \text{B} = 1,8 \cdot 10^4 + 55 \cdot Z^{-1,7} & \text{Pour } Z \geq 1,7 \cdot 10^{-3} \end{cases}$$

La précision de l'approximation de la corrélation est de 5%.

Barozzi et al. [37]

Se sont intéressés dans leur étude expérimentale aux effets de l'inclinaison, du nombre de Reynolds et de l'intensité du chauffage sur l'évolution du nombre de Nusselt le long d'une conduite inclinée munie de deux ailettes longitudinales (cas d'un capteur solaire). Des conditions thermiques de flux uniforme suivant la direction axiale et de température constante suivant la circonférence ont été imposées. Ceci a été réalisé par l'insertion des fils résistants en Ni-Cr parallèlement dans les ailettes et les tubes. L'utilisation du cuivre comme matériau des tubes et des ailettes permet d'uniformiser la température à l'interface solide- fluide. Il a été montré que l'influence de l'inclinaison sur le flux thermique transféré au fluide est très faible. Le nombre de Nusselt moyen est très important près de rentrée de la conduite, puis diminue au fur et à mesure qu'on s'éloigne jusqu'à un minimum puis augmente pour atteindre une valeur asymptotique dans la zone complètement développée. Ce minimum est attribué par les auteurs aux importants gradients de vitesses au niveau de l'interface solide- fluide. Bien qu'il s'agisse dans ces travaux d'un capteur solaire plan, les conditions thermiques appliquées sont très loin d'être réalistes.

Mori et al. [38]

Ont étudié expérimentalement l'effet de la poussée d'Archimède sur l'écoulement d'air entièrement développé à l'intérieur d'un tube horizontal chauffé uniformément. Ils ont obtenu qu'en régime turbulent, la poussée d'Archimède a peu d'effet sur les champs de vitesse et de température et pratiquement aucun effet sur le nombre de Nusselt. Par contre, l'influence des mouvements secondaires sur la valeur du nombre de Reynolds critique est plus remarquable. Une faible turbulence près de l'entrée de la conduite entraîne une diminution du nombre de Reynolds critique avec l'augmentation du nombre de Rayleigh. Par contre pour une importante turbulence imposée près de l'entrée du tube, le nombre de Reynolds critique augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh.

Rustum et Soliman [39]

Ont réalisé une étude expérimentale sur les pertes de charge et le transfert de chaleur à l'intérieur de conduites munies d'ailettes longitudinales à l'intérieur.

L'écoulement est laminaire en convection mixte. Le cas d'un tube nu (sans ailettes) a été étudié également dans le but de comparaison. Une corrélation empirique donnant la variation du

nombre de Nusselt moyen asymptotique (écoulement développé) en fonction du nombre de Raleigh a été établie.

$\frac{\overline{\text{Nu}}_d}{\overline{\text{Nu}}_f} = \left[1 + \left(\frac{\text{Ra}}{C} \right)^\alpha \right]$, tels que C et α sont des constantes qui dépendent de la géométrie de la conduite.

Pour un tube circulaire sans ailettes $C = 0.8 \cdot 10^6$ et $\alpha = 0.25$

I.3. Etude de la convection mixte en régime transitoire

Nous nous intéressons dans cette étude bibliographique aux effets obtenus après une variation temporelle des conditions aux limites du système. La perturbation du comportement thermique de la paroi peut dépendre d'une variation périodique de la température de la paroi ou du fluide ou d'une impulsion sur le flux ou la température pariétale. Cette situation est parfois due à une variation brusque de la température ou de la vitesse d'écoulement. La résolution des équations permet d'obtenir les profils de température et de flux et de pouvoir remonter le coefficient d'échange thermique.

L'importance et la complexité de ce phénomène transitoire, en tenant compte de l'épaisseur de la paroi, et ses conséquences ont suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs, d'où le nombre important de travaux et études effectuées.

Nguyen et al. [40]

Ont mené une étude numérique pour l'analyse du comportement dynamique et thermique d'un écoulement d'air dans un tube vertical. Le régime transitoire de l'écoulement est réalisé en imposant un flux de chaleur uniforme à la paroi, mais qui varie linéairement en fonction du temps. Ils ont considéré deux cas : un écoulement descendant de haut vers le bas avec une densité de flux q_w qui varie entre 0 et 19750 W.m^{-2} et un écoulement ascendant de bas vers le haut avec q_w qui varie entre 0 et 34560 W.m^{-2} , ce qui correspond à des nombres de Grashof respectivement compris entre 0 et 10^6 pour l'écoulement descendant, et entre 0 et $1,75 \cdot 10^6$ pour l'écoulement ascendant. Ils ont observé pour le cas de l'écoulement descendant, l'apparition des zones de recirculation au voisinage de la paroi à partir d'un Grashof $Gr=3 \cdot 10^5$. Ces zones de recirculation deviennent plus en plus larges avec l'augmentation du nombre de Grashof. Au contraire, dans le deuxième cas l'écoulement s'accélère au voisinage de la paroi et, par conséquent, il est freiné au centre, ceci est pour respecter la conservation de la masse. La décélération de l'écoulement au centre du tube peut entraîner des vitesses négatives, amorce d'un phénomène de recirculation. Ce phénomène est observé lorsque le nombre de Grashof dépasse 10^6 .

Mai et al. [41]

Souvent dans la littérature, on rencontre, des études en convection mixte avec des conditions aux limites variables à la paroi. **Mai et al. [41]** sont allés plus loin en ajoutant une variation de débit à l'entrée du tube ce qui correspond aux conditions réelles de fonctionnement d'un radiateur. Leur travail comporte une étude d'un écoulement descendant en convection mixte dans un tube vertical lorsque l'entrée est soumise à un échelon de débit. Ils ont pu constater, pour un échelon de débit positif, que le champ de vitesse axiale est presque indépendant du temps et que les profils de températures évoluent régulièrement avec le temps vers l'état final du régime permanent. De plus, ils constatent l'existence d'un temps de retard pour la température de paroi. Dans le cas d'un échelon de débit négatif à l'entrée du tube, le profil de vitesse axiale subit une forte perturbation caractérisée par un ralentissement au centre et, pour respecter la conservation de la masse du fluide, par une accélération au voisinage de la paroi.

Les chercheurs ont remarqué une forte dissymétrie de la réponse de la température à des échelons positifs ou négatifs de débit de même amplitude. Mais, comme leur modèle est basé sur les équations paraboliques, les zones de recirculation ne peuvent pas être observées. C'est pour cela que nous avons trouvé nécessaire de mettre au point un modèle qui réalise avec les équations complètes de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie.

Behzadmehr et al. [42]

Ont examiné numériquement le problème de convection mixte, laminaire et turbulente dans un tube vertical uniformément chauffée, en utilisant le modèle turbulent $k-\epsilon$ pour des petits nombres de Reynolds. L'écoulement de l'air ascendant dans le tube a été analysé pour deux nombres de Reynolds ($Re = 1000$ et $Re = 1500$) et plusieurs nombres de Grashof ($Gr \leq 10^8$). Une corrélation pour le nombre de Nusselt, valable en régime laminaire comme en régime turbulent, a été établi pour $Gr \leq 5 \cdot 10^7$ et $1000 \leq Re \leq 1500$:

$$Nu_M = 4,36 \left(1 + \frac{Gr^{0,468}}{750 + 0,24 \cdot Re} \right)$$

Dans cette étude, l'effet de la capacité thermique de la paroi est très important, surtout pour des valeurs de K (le rapport des conductivités thermiques entre solide et fluide) élevées. Le rapport entre l'épaisseur et le diamètre du tube joue aussi un rôle primordial dans le transfert de chaleur entre le solide et fluide. A titre d'exemple, lorsque ce dernier rapport (qu'on peut appeler Δ) est grand alors l'influence du flux pariétale sur l'écoulement est moins importante.

Martin et Shadday [43]

Ont examiné l'effet de la convection mixte dans un tube vertical chauffé à la paroi. Ils ont choisi le rapport $\frac{Gr}{Re^2}$ comme une caractéristique quantitative pour l'évaluation de la convection mixte. Cette étude montre que l'écoulement devient instable lorsque le nombre de Grashof est supérieur à 10^6 ce qui correspond à $\frac{Gr}{Re^2} \approx 15$.

Lounadi et al. [44]

Ont étudié le problème du transfert de chaleur conjugué avec convection mixte dans une conduite inclinée soumise à un flux de chaleur uniforme, pour un écoulement thermiquement et hydrodynamiquement développé. Ils ont établi qu'un flux uniforme sur la surface extérieure de la conduite induit également un flux uniforme à l'interface solide-fluide pour de faibles valeurs du rapport des conductivités thermiques, $\leq 10^{-2}$, et une température uniforme pour des valeurs élevées de ce rapport, $\geq 10^3$.

Choi et Choi [45]

Ont étudié numériquement la convection mixte pour un écoulement en développement dans une conduite horizontale soumise à un flux de chaleur uniforme sur la moitié inférieure de

l'interface et isolée sur l'autre moitié ; ils se sont principalement intéressés au phénomène de bifurcation (solutions doubles) qui est observé quand le nombre de Grashof est élevé.

Bemier et Baliga [46]

Ont étudié la convection mixte en tenant compte de la conduction pariétale pour un écoulement en développement dans une conduite verticale. Ils ont montré que la diffusion axiale de la chaleur dans la paroi de la conduite devient importante pour des grandes valeurs du rapport des conductivités thermiques solide- fluide et pour des faibles valeurs de L'épaisseur de la paroi. La diminution du nombre de Reynolds entraîne également l'augmentation de l'importance de la diffusion axiale de chaleur dans le matériau de la conduite.

Mai et al. [47]

Ont étudié numériquement, le comportement thermohydraulique en convection mixte transitoire de couche limite laminaire se développant sur une paroi verticale, lorsque le fluide est perturbé par un échelon de vitesse positif ou négatif. Il s'agit d'un phénomène de perturbation de couche limite laminaire par un écoulement forcé. L'effet de la paroi sur le comportement des écoulements aidés et contrariés est aussi présenté. Ils ont montré que la nature de la plaque influe sur les épaisseurs des couches limites dynamique et thermique ainsi que sur les profils de vitesse de l'écoulement. De plus, ils ont observé qu'une faible perturbation de vitesse engendre une instabilité de l'écoulement.

Mai et Popa [48] et Mai et al. [49]

Ont visé un problème plus compliqué d'instabilité de transfert de chaleur. Ils ont proposé une étude numérique d'un écoulement avec transfert de chaleur en régime de la convection mixte laminaire dans un tube vertical. La surface externe du tube est soumise à un échange convectif avec le milieu extérieur, tandis que, l'entrée est perturbée par une variation brusque de la température du fluide. A partir de leurs résultats numérique, ils ont mis en évidence les phénomènes de recirculation et d'oscillation de l'écoulement qui peuvent apparaître selon le signe de l'échelon de température (réchauffement ou refroidissement).

Bilir et Ates [50]

Ont effectué une étude paramétrique dans un tube vertical soumis à un échange convectif à la surface extérieur.

CHAPITRE II	15
<i>Modélisation de la turbulence</i>	15
II.1. Equations	15
II.2. Fermeture des équations	17
II.3. Modèles de turbulence	20
II.4. Modèles de premier ordre	22

CHAPITRE II

Modélisation de la turbulence

II.1. Equations

Le transfert de chaleur par convection en régime turbulent dans des conduits quelconques est régi par les équations de Navier-Stokes. Celles-ci se présentent, dans le cas général, de la façon suivante (en notations tensorielles avec la convention d'Einstein et pour un fluide newtonien incompressible) :

Conservation de la masse (continuité) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{II.1.a})$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho u_j u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right] + f_i \quad (\text{II.1.b})$$

Conservation de l'énergie (bilan thermique) :

$$\frac{\partial \rho c_p t}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho c_p u_j t}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x_j} \right) + q \quad (\text{II.1.c})$$

où les différentes grandeurs (variables + propriétés) sont des grandeurs instantanées caractérisant l'écoulement turbulent et le transfert de chaleur associé. Ces équations, dans leur forme actuelle, ne sont d'aucune utilité pour la pratique industrielle et sont très lourdes à manipuler. On va donc les transformer et les mettre sous des formes plus simples décrivant les différents champs moyens et non plus les champs instantanés. Nous adopterons, pour commencer l'hypothèse simplificatrice suivante :

- propriétés physiques constantes (pour la masse volumique intervenant dans les forces de gravité, on appliquera l'approximation de Boussinesq $\rho = \rho_0[1 - \beta(T - T_0)]$).

L'idée de base dans la simplification des équations (II.1) est de remplacer les grandeurs instantanées φ définies en un point par des grandeurs moyennes non fluctuantes Φ définies, en suivant en cela l'idée de Reynolds (1895), de façon conventionnelle par :

$$\Phi = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\tau) d\tau \quad (\text{II.2})$$

où T est la période utilisée pour déterminer la moyenne. On peut ainsi rapporter la grandeur instantanée à la grandeur moyenne correspondante en exprimant l'égalité suivante :

$$\varphi = \Phi + \varphi' \quad (\text{II.3})$$

où φ' est la fluctuation caractérisée par une moyenne temporelle $\overline{\varphi'}$ nulle:

$$\overline{\varphi'} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\varphi(\tau) - \Phi) d\tau = 0 \quad (\text{II.4})$$

Dans le cas d'un produit de deux grandeurs instantanées, on a la relation suivante :

$$\overline{\varphi\psi} = \Phi\Psi + \overline{\varphi'\psi'} \quad (\text{II.5})$$

En injectant la relation (II.3), pour chacune des variables, dans les équations (II.1) et en cherchant les moyennes sur le temps comme décrit ci-dessus avec le respect des hypothèses énumérées, on obtient un ensemble d'équations, connues sous l'appellation d'équation de Reynolds, décrivant l'évolution moyenne des différentes variables. Ces équations s'écrivent:

Conservation de la masse:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{II.6.a})$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u_i' u_j'} \right] + F_i \quad (\text{II.6.b})$$

Conservation de l'énergie:

$$\frac{\partial \rho c_p T}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho c_p u_j T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} - \rho c_p \overline{u_i' t} \right) + q \quad (\text{II.6.c})$$

On remarque qu'en plus des variables moyennes primitives (U_i , P , T), ces équations font intervenir des inconnues supplémentaires (moments) :

- **les tensions de Reynolds** $\overline{\rho u_i' u_j'}$ dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement;
- **les flux de chaleur turbulents** $\overline{\rho c_p u_i' t}$ dans l'équation de l'énergie.

Ces nouvelles inconnues apparaissent, comme on l'a noté plus haut, suite à la technique statistique utilisée. Elles mettent en évidence le problème de fermeture dont la résolution n'est possible que par une modélisation adéquate des inconnues.

II.2. Fermeture des équations

Le problème de fermeture consiste donc en un problème de modélisation des moments $\overline{u_i' u_j'}$ et $\overline{u_i' t}$. En pratique, plusieurs techniques ont été développées pour traiter ce point. Ce sont les modèles de turbulence spécialement conçus pour chaque problème et optimisés par l'expérience. Nous commencerons par développer le moyen théorique existant pour remédier au problème et nous passerons ensuite aux modèles de turbulence à proprement parler. En théorie, il existe un moyen élégant de fermer le système d'équations de Reynolds. Il s'agit de développer des équations exactes de type "équations de transport" pour les moments inconnus. Ces équations découlent des équations de Navier-Stokes (II.1) en suivant la démarche mathématique suivante [51] :

1. multiplier l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour u_i (II.1.b) par la fluctuation u_j' ;
2. faire la moyenne;
3. ajouter à l'équation résultante l'équation symétrique obtenue en permutant les indices i et j .

Après plusieurs manipulations algébriques de mise en forme, on obtient l'équation suivante décrivant l'évolution de $\overline{\rho u_i' u_j'}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \overline{\rho u_i' u_j'}}{\partial \tau} + U_k \frac{\partial \overline{\rho u_i' u_j'}}{\partial x_k} &= & (C_{ij}) \\
 - \left(\overline{\rho u_i' u_k'} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{\rho u_j' u_k'} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) & & (P_{ij}) \\
 + \left(\overline{f_i' u_j'} + \overline{f_j' u_i'} \right) & & (G_{ij}) \\
 - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{\rho u_i' u_j' u_k'} + \overline{p' u_j'} \delta_{ik} + \overline{p' u_i'} \delta_{jk} - \mu \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_k} - \mu u_j' \frac{\partial \overline{u_k'}}{\partial x_i} - \mu u_i' \frac{\partial \overline{u_k'}}{\partial x_j} \right) & & (D_{ij}) \\
 + \overline{p' \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right)} & & (\Phi_{ij}) \\
 - 2\mu \frac{\partial \overline{u_i' \partial u_j'}}{\partial x_k \partial x_k} - \mu \left(\frac{\partial \overline{u_i' \partial u_k'}}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j' \partial u_k'}}{\partial x_k \partial x_i} \right) & & (e_{ij})
 \end{aligned}
 \tag{II.7}$$

avec :

- (C_{ij}) : accumulation et transport de $\overline{u_i' u_j'}$ par convection;
- (P_{ij}) : production de $\overline{u_i' u_j'}$ par l'écoulement moyen;
- (G_{ij}) : production de $\overline{u_i' u_j'}$ par les forces à distances (gravité, etc);
- (D_{ij}) : transport de $\overline{u_i' u_j'}$ par diffusion (turbulente, de pression et visqueuse);
- (Φ_{ij}) : corrélation pression- vitesses (ce terme de l'équation sert à redistribuer la génération entre les différentes tensions de Reynolds);
- (ε_{ij}) : dissipation de $\overline{u_i' u_j'}$.

Chacun de ces termes joue un rôle non négligeable et ne peut donc pas être négligé sans altérer la précision finale. Ceci est particulièrement vrai pour les termes de production et de dissipation qui gouvernent le processus de transfert d'énergie et qui se retrouvent dans tous les modèles de turbulence utilisant des équations de transport pour modéliser le phénomène. Cette équation décrit l'évolution réelle et exacte de la tension $\overline{u_i' u_j'}$ et permet donc, théoriquement, de fermer le système d'équations gouvernant le problème. Théoriquement (la forme et le contenu de l'équation sont suffisants pour le prouver), car comme on le constate, elle fait apparaître des nouvelles inconnues (de 3ème ordre) et spécialement la corrélation triple

apparaissant dans le terme de diffusion : $\overline{u_i' u_j' u_k'}$. Cette dernière doit à son tour être modélisée et on peut suivre la même démarche que lors de l'établissement de l'équation (II. 7), en partant, cette fois, de l'équation (II.7) elle-même. On obtiendra alors une nouvelle équation [52] qui contiendra une corrélation d'ordre plus élevé - corrélation quadruple $\overline{u_i' u_j' u_k' u_l'}$ à modéliser pour fermer le système. On peut ainsi continuer jusqu'à l'infini. Cette façon de procéder ne fait que reporter le problème plus loin et il n'est pas encore prouvé qu'elle améliore les résultats finaux. Il ne faut pas oublier, aussi, les autres termes de l'équation (II.7) pour lesquels on ne possède pas encore d'équations générales et qui doivent être modélisés d'une manière approximative. Ce qui contrebalance l'amélioration, si amélioration il y a, obtenue en poussant la modélisation des "corrélations" d'ordre de plus en plus élevé.

Le moyen le plus pratique, à l'heure actuelle, est de modéliser les différents termes de l'équation de transport de $\overline{u_i' u_j'}$ (II.7) à partir de l'expérience. En ce faisant, on obtient le modèle de second ordre déjà cité ou modèle RSM (Reynolds Stress Model) [53].

Il existe dans la littérature plusieurs modèles RSM. Ceux-ci restent encore confinés au niveau de la recherche en laboratoire et n'ont pas atteint le stade d'application industrielle.

Ce que nous avons dit jusqu'à présent, ne concerne que les tensions de Reynolds $\overline{u_i' u_j'}$. En ce qui concerne leurs contreparties thermiques - les flux de chaleur turbulents $\overline{u_i' t'}$ on peut suivre la même démarche théorique.

On construit, pour chaque flux, une équation de transport de la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \overline{\rho u_i' t'}}{\partial \tau} + U_j \frac{\partial \overline{\rho u_i' t'}}{\partial x_j} = & \quad (C_i) \\
 - \left(\overline{\rho u_i' u_j'} \frac{\partial T}{\partial x_j} + \overline{\rho u_j' t'} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) + \overline{f_i' t'} & \quad (P_i) \\
 - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\rho u_i' u_j' t'} + \overline{p' t'} \delta_{ij} - \frac{\lambda}{C_p} \overline{u_i' \frac{\partial t'}{\partial x_j}} - \mu' \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right) \right) & \quad (D_i) \quad (II.8) \\
 + \overline{p' \frac{\partial t'}{\partial x_i}} & \quad (\Phi_i) \\
 - \frac{\lambda}{C_p} \frac{\partial t'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} - \mu' \frac{\partial t'}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right) & \quad (\epsilon_i)
 \end{aligned}$$

avec :

(C_i) : accumulation et transport de $\overline{u_i' t'}$ par convection;

(P_i) : production de $\overline{u_i' t'}$ par les champs moyens et les forces à distance;

- (D_i) : transport de $\overline{u_i 't'}$ par diffusion (turbulente, de pression et visqueuse);
- (Φ_i) : corrélation pression- température (même rôle que pour la corrélation pression- vitesses);
- (ϵ_i) : dissipation de $\overline{u_i 't'}$.

Cette équation est identique à l'équation (II.7). Elle fournit les mêmes avantages du point de vue fermeture (évolution exacte du flux $\overline{u_i 't'}$) et aboutit aux mêmes inconvénients du point de vue de la modélisation. Ici aussi, on a cherché à pousser l'utilisation d'équations de transport pour les corrélations d'ordre élevé [54] et les mêmes conclusions que pour $\overline{u_i 'u_j'}$ restent d'application.

II.3. Modèles de turbulence

Pour pouvoir utiliser les équations (II.7) et (II.8), il faut les simplifier et c'est là l'objet des modèles de turbulence utilisant des équations de transport pour décrire le phénomène de turbulence. Un modèle de turbulence est donc un moyen pratique et plus ou moins empirique de fermeture du système d'équations (II.6) décrivant le problème, en vue de leur résolution pour des problèmes industriels relativement complexes.

Un modèle de turbulence doit être le plus général possible et il doit satisfaire certains critères:

1. *Universalité* : un modèle doit s'appliquer, d'une manière simple, à tous les types d'écoulements et dans toutes les conditions opératoires possibles;
2. *Réalisabilité*: un modèle doit fournir des résultats plausibles et vérifiables (pour validation);
3. *Invariance*: un modèle de turbulence doit aboutir à des résultats homologues pour des problèmes similaires;
4. *Précision*: un modèle doit fournir des résultats précis (avec une tolérance acceptable).

Ces critères sont le plus souvent contradictoires et très difficiles à regrouper dans un seul modèle. Plus spécialement, le premier critère - l'universalité - ne se retrouve dans aucun modèle de turbulence à l'heure actuelle. Ceci peut se comprendre par le fait que tous ces modèles "actuels" font large usage de l'expérience au travers de constantes plus ou moins empiriques; expérience qui est fonction du problème étudié et des conditions opératoires mises en jeu. .

Il existe au niveau pratique, toute une hiérarchie de modèles de turbulence en un point (c'est-à-dire que toutes les grandeurs - moyennes et fluctuations - sont évaluées au même point de l'espace; par opposition aux modèles dits à deux points ou spectraux et qui sont en principe plus capables de décrire la physique de la turbulence. Ces derniers sont très lourds à mettre en oeuvre et ne sont d'utilisation que dans des laboratoires spécialisés). Ces modèles découlent les

uns des autres par application de certaines hypothèses simplificatrices (fig. II. 1).

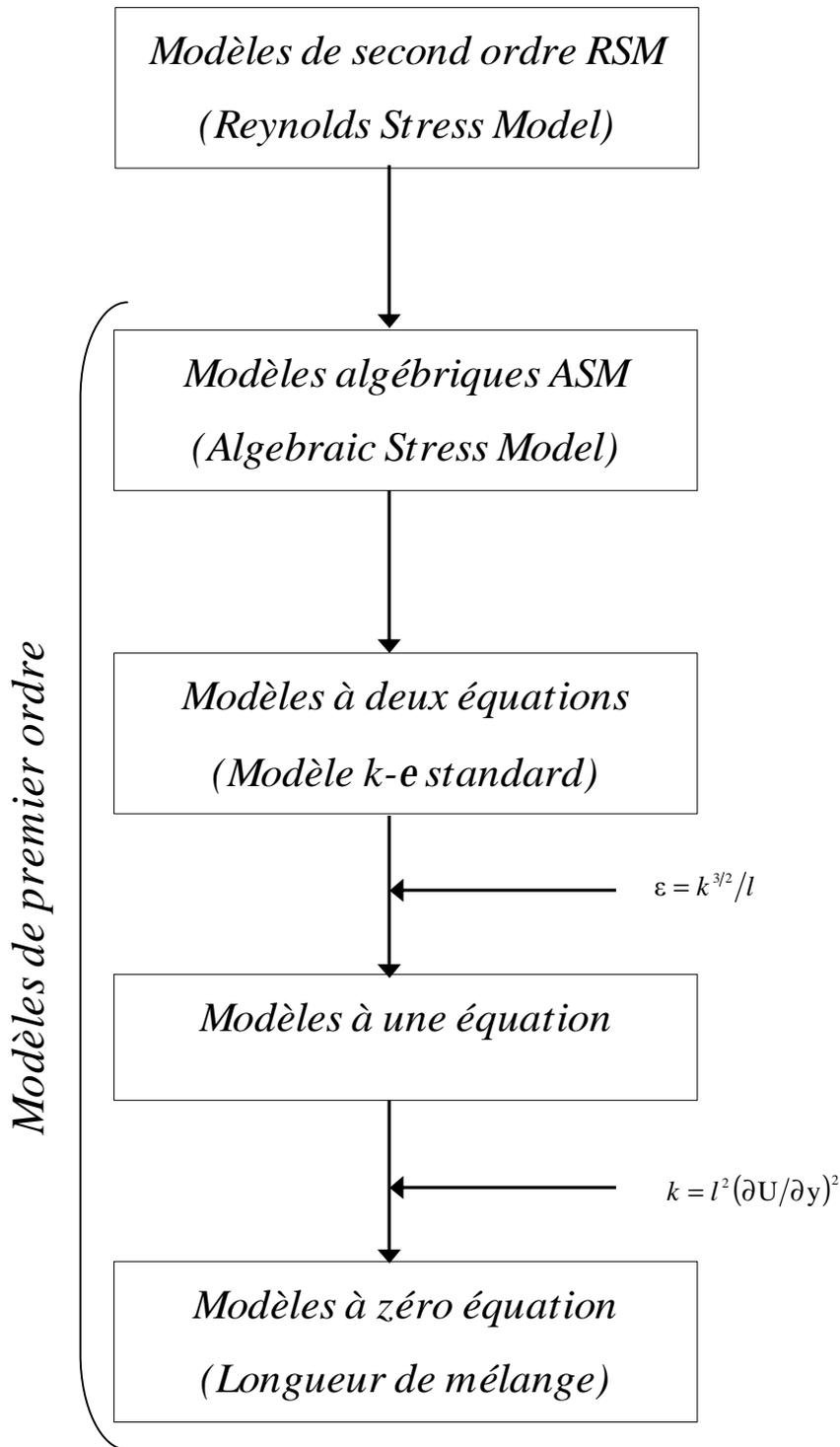


Figure II.1 : Hiérarchie des modèles de turbulence

La classe au sommet est évidemment la classe des modèles de second ordre basés sur une modélisation des différents termes des équations (II.7) et (II.8) [53]. En descendant d'un degré, on rencontre les modèles dits algébriques (ASM : Algebraic Stress Model) qui découlent des précédents en supposant que le rapport $\frac{\overline{u_i' u_j'}}{k} = \text{cte}$ (cette hypothèse reproduit un fait expérimental). Cette catégorie de modèles est constituée d'un ensemble d'équations algébriques simples pour les différentes tensions de Reynolds et flux turbulents, en plus des équations pour l'énergie cinétique de turbulence et de son taux de dissipation [55].

Ces modèles n'ont pas la généralité des précédents et s'appliquent assez bien pour la prédiction d'écoulements secondaires (écoulements dans des conduits de section non circulaire).

On trouve ensuite la catégorie la plus usitée au niveau pratique. Ce sont les modèles à deux équations: une équation pour l'énergie cinétique de turbulence et une autre pour l'échelle de longueur caractéristique. Ces modèles s'obtiennent des précédents par simple application de l'hypothèse d'équilibre local (production = dissipation). L'échelle de longueur peut être avantageusement remplacée par n'importe quelle autre caractéristique de la turbulence en utilisant l'analyse dimensionnelle [3]. La caractéristique la plus utilisée est le taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence. Ce qui constitue le modèle k-ε qui nous intéresse et que nous développerons par la suite. Il faut noter que ce genre de modèle fournit de bons résultats dans beaucoup de problèmes pratiques et a été le plus confronté avec les résultats expérimentaux avec plus ou moins de satisfaction.

En remplaçant l'équation de transport, pour décrire l'évolution de l'échelle de longueur introduite ci-dessus, par une équation algébrique, on obtient les modèles à une équation; celle de l'énergie cinétique de turbulence en l'occurrence [56]. Cette classe de modèles ne s'applique qu'à des géométries simples et possède l'inconvénient qu'il faut connaître la répartition de l'échelle de longueur en se basant pour cela sur l'expérience. Ce qui est souvent très difficile et aléatoire.

Il vient enfin les modèles les plus simples et qui utilisent la notion de longueur de mélange sans aucune autre information. On peut, à la limite, qualifier ces modèles de "modèles expérimentaux" car ils utilisent directement l'expérience pour décrire la turbulence.

On va maintenant s'intéresser davantage aux modèles de premier ordre, en particulier aux modèles à deux équations.

II.4. Modèles de premier ordre

Dans tous les modèles de premier ordre, on essaie de caractériser localement la turbulence par un ensemble limité de paramètres. Ces paramètres se présentent, en général, sous forme d'échelles et on choisira une échelle de vitesse u et une échelle de longueur l (ou occasionnellement, une échelle de temps l/u). Ces deux échelles serviront de base à la modélisation de toutes les grandeurs caractérisant la turbulence. On se base en général, dans les modèles de premier ordre, sur l'hypothèse de Boussinesq (1903) concernant l'emploi d'une viscosité fictive pour associer les tensions de Reynolds et les flux de chaleur turbulents aux champs moyens de

vitesse et de température. D'une manière analogue à la formulation en régime laminaire, on écrira (hypothèse de Boussinesq généralisée) :

$$-\overline{\rho u_i' u_j'} = \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho \delta_{ij} \quad (\text{II.9.a})$$

$$-\overline{\rho u_i' t'} = \frac{\lambda_t}{C_p} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (\text{II.9.b})$$

On voit ainsi apparaître deux caractéristiques importantes en modélisation de la turbulence : la viscosité turbulente μ_t et la conductibilité thermique turbulente λ_t . En contraste avec les propriétés physiques μ (viscosité dynamique) et λ (conductibilité moléculaire) du fluide, μ_t et λ_t ne sont que des propriétés de la turbulence, c'est-à-dire de l'écoulement et de toutes ses caractéristiques (géométries, intensité de la turbulence, etc).

L'introduction de ces deux paramètres ne constitue pas en elle-même un modèle de turbulence. Le problème revient maintenant à les modéliser; ceci s'effectue sans problème en utilisant les échelles de turbulence (u , l) introduites plus haut.

On peut, en effet, avec l'aide de l'analyse dimensionnelle, écrire :

$$\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho} \cong u \cdot l \quad (\text{II.10})$$

Ce qui ramène le problème à un problème d'estimation des échelles u et l dans tout le domaine d'intérêt; et c'est là l'objet du modèle de turbulence.

Pour la conductibilité thermique turbulente, on utilise l'analogie entre le transfert de chaleur et de quantité de mouvement et on écrit :

$$\lambda_t = \frac{\mu_t C_p}{Pr_t} \quad (\text{II.11})$$

où Pr_t est un nombre de Prandtl turbulent caractéristique de l'écoulement. En pratique ce nombre est souvent considéré comme constant et ayant une valeur proche de l'unité (0,9 près d'une paroi et 0,7 à l'intérieur de l'écoulement). Il est à noter que la modélisation de λ_t a reçu beaucoup moins d'attention que celle de μ_t et ceci pour plusieurs raisons:

1. Les analogies existant permettent de décrire efficacement le champ de température en connaissant le champ de vitesse.
2. Dans tous les cas pratiques traités, la température est considérée comme un paramètre secondaire et passif, donc sans incidence sur l'écoulement à proprement parler. Ce ne sera plus le cas si on veut traiter la convection naturelle par exemple, phénomène que les modèles de turbulence ne décrivent que d'une façon très approximative.

On peut imaginer modéliser λ_t en utilisant, comme pour la viscosité turbulente μ_t , des échelles de turbulence thermiques [57]. Cette façon de procéder est moins courante à cause de la

difficulté des problèmes à traiter (par exemple, les échelles ne sont pas les mêmes en convection naturelle qu'en convection forcée).

Pour finir, il faut signaler que les modèles de premier ordre (viscosité turbulente, conductibilité turbulente) tombent en défaut dans certaines zones d'écoulement; par exemple, là où les tensions possèdent un signe opposé à celui des gradients de vitesse. Dans ce cas, la viscosité turbulente devient négative et on obtient des résultats non plausibles physiquement. Cependant, ce genre de situation ne se rencontre que très rarement dans les problèmes industriels qui nous intéressent ici (on peut le rencontrer dans la turbulence atmosphérique par exemple). On peut donc sans trop de crainte appliquer de tels modèles de turbulence et le modèle le plus utilisé est le modèle k- ϵ qui fera l'objet du prochain chapitre.

Chapitre III	26
Modèle $k-\varepsilon$	26
III.1. Energie cinétique de turbulence	26
III.2. Taux de dissipation	28
III.3. Modèle complet	32
III.4. Constantes	33
III.5. Conditions aux limites	36
III.5.1. Paroi	36
III.5.2. Entrée du fluide	39
III.5.3. Sortie du fluide	39
III.5.4. Axe de symétrie	39

Chapitre III

Modèle $k-\varepsilon$

Comme il a été mentionné dans le chapitre précédent, l'objet de tout modèle de turbulence est de déterminer les échelles de turbulence u et l (échelle de vitesse et échelle de longueur respectivement).

Dans le cas du modèle $k-\varepsilon$, ces deux échelles sont modélisées par l'intermédiaire, comme le nom du modèle l'indique, de l'énergie cinétique de turbulence k et de son taux de dissipation ε . Ces deux grandeurs sont des caractéristiques importantes de la turbulence et sont directement accessibles à la mesure pour validation (par l'intermédiaire des tensions de Reynolds). Ce qui constitue le principal avantage de ce modèle sur d'autres de la même catégorie, mais utilisant d'autres grandeurs comme la fluctuation de la vorticité (modèle $k-\omega$), le produit de l'énergie cinétique de turbulence par une échelle de longueur (modèle $k-k_l$), etc.

Il faut aussi signaler que ces différents modèles se déduisent l'un de l'autre par de simples opérations de différenciation [3].

III.1. Energie cinétique de turbulence

L'énergie cinétique de turbulence est une mesure de l'intensité de la turbulence et elle est définie par :

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'} \quad (\text{III.1})$$

On l'utilise, en général, pour déterminer l'échelle de vitesse u en se servant de l'analyse dimensionnelle pour établir une relation de proportionnalité :

$$u \approx k^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.2})$$

L'évolution de u est donc décrite par celle de k et cette dernière, comme le montre la définition (III.1), peut être déduite de l'équation (II.7) décrivant l'évolution de $\overline{u_i' u_j'}$. Il suffit pour cela d'additionner les trois équations de type (II.7) décrivant l'évolution des tensions de Reynolds normales et d'effectuer ensuite les opérations, très simples, de mise en forme pour aboutir à l'équation suivante (après élimination de certains termes négligeables) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho k}{\partial \tau} + U_j \frac{\partial \rho k}{\partial x_j} &= & (\text{C}_k) \\ - \overline{\rho u_i' u_j'} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} & & (\text{P}_k) \\ - \overline{f_i' u_i'} & & (\text{G}_k) \\ - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{\rho u_j' u_i'^2} - \mu \frac{\partial k}{\partial x_j} + \overline{p' u_j'} \right) & & (\text{D}_k) \\ - \mu \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} & & (\epsilon) \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

avec :

- (C_k) : transport de k par convection;
- (P_k) : production de k par l'écoulement moyen (cisaillement);
- (G_k) : production de k par les forces à distance (gravité, etc);
- (D_k) : transport de k par diffusion (turbulente, visqueuse et de pression);
- (ϵ) : dissipation de k .

Cette équation n'est pas utilisable telle quelle à cause de la présence de deux termes inconnus: corrélation triple et corrélation pression- vitesse (le terme de dissipation ne pose pas de problème pour le moment et sera traité ultérieurement).

Le modèle le plus utilisé pour ces inconnues est le suivant:

$$\frac{1}{2} \overline{\rho u_j' u_i'^2} + \overline{p' u_j'} = \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (\text{III.4})$$

ce qui revient à traiter la diffusion comme proportionnelle au gradient de la variable considérée ou énergie cinétique de turbulence k .

σ_k est une constante de proportionnalité à déterminer.

L'équation (III.3) devient alors:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial \tau} + U_j \frac{\partial \rho k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k + G_k - \rho \epsilon \quad (\text{III.5})$$

ou sous une forme plus adéquate (compte tenu de la conservation de la masse) :

$$\frac{\partial \rho k}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho U_j k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k + G_k - \rho \epsilon \quad (\text{III.6})$$

avec la forme suivante pour la production par les forces de gravité :

$$G = \beta g_j \frac{\lambda_t}{C_p} \frac{\partial T}{\partial x_j}$$

Les autres termes ont été définis précédemment.

La présence de ϵ dans l'équation de k permet déjà de tirer une première conclusion en faveur du modèle k - ϵ : le meilleur modèle sera celui qui modélisera ce terme ϵ directement sans chercher à le remplacer.

III.2. Taux de dissipation

L'objet de ce paragraphe est de décrire la modélisation de l'échelle de longueur l . Cette dernière n'est jamais utilisée directement comme pour l'échelle de vitesse u mais on fait appel, en général, à une variable "secondaire" z fonction de l . Plusieurs propositions ont vu le jour pour cette variable secondaire que l'on définit de la façon suivante :

$$z = k^m l^n \quad (\text{III.7})$$

où m et n sont des constantes dimensionnelles.

Parmi ces propositions, on peut citer [11] :

- Kolmogorov (1942) : $z = k^{1/2} l^{-1}$
- Harlow-Nakayama (1967) : $z = k^{3/2} l^{-1}$
- Rotta (1968) : $z = k l$
- Spalding (1969) et Saffman (1970) : $z = k l^{-2}$

La plus largement utilisée est celle de Harlow-Nakayama qui définit directement le taux de dissipation ϵ intervenant dans l'équation de l'énergie cinétique de turbulence (III.6).

On a donc :

$$z = \frac{k^{3/2}}{l} \quad (\text{III.8})$$

La connaissance de k et de ε permet alors de déterminer l'échelle de longueur l . k étant décrite par l'équation (III.6), on va se préoccuper maintenant de la détermination de ε .

On peut, comme pour les tensions de Reynolds $\overline{u_i u_j}$, déduire des équations de Navier- Stokes (II.1), une équation pour le taux de dissipation en effectuant les opérations mathématiques suivantes :

1. dérivation de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (II.1.b) par rapport x_j
2. multiplication de l'équation résultante par $2\nu \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}$;
3. recherche de la moyenne.

Après une longue suite d'opérations de mise en forme, on obtient l'équation exacte suivante dans laquelle les forces F_i ont été négligées pour des raisons de simplicité :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial \tau} + U_k \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial x_k} = & \quad (C_\varepsilon) \\ & - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{\mu u_k' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} + 2\nu \overline{\frac{\partial p'}{\partial x_i} \frac{\partial u_k'}{\partial x_i}} - \mu \overline{\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k}} \right) \quad (D_\varepsilon) \\ & - 2\mu \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \left(\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_k'}{\partial x_j}} + \overline{\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}} \right) + \overline{\mu u_k' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k}} \quad (P_\varepsilon') \quad (III.9) \\ & - 2\mu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_k'}{\partial x_j}} \quad (P_\varepsilon'') \\ & - 2\rho \overline{\left(\nu \frac{\partial^2 u_j'}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2} \quad (E_\varepsilon) \end{aligned}$$

avec :

- (C_ε) : transport de ε par convection;
- (D_ε) : transport de ε par diffusion (turbulente, de pression et visqueuse);
- (P_ε') : production de ε par cisaillement;
- (P_ε'') : production de ε par étirement de tourbillons;
- (E_ε) : destruction de ε par les forces de viscosité.

Il va sans dire, au vu de cette équation, qu'elle est insolvable telle quelle. On va la simplifier en utilisant une analyse d'ordres de grandeur. On se sert pour cela d'échelles de turbulence, mais, cette fois, les échelles doivent être assez petites pour décrire efficacement le processus

de dissipation qui se produit, en général, à l'échelle moléculaire. Les échelles les plus adéquates pour cette opération sont les micro échelles de Kolmogorov: micro échelle de vitesse v et micro échelle de longueur η .

On les définit par les relations dimensionnelles suivantes :

$$v = (\nu\varepsilon)^{1/4} \quad (\text{III.10.a})$$

$$\eta = \left(\frac{v^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \quad (\text{III.10.b})$$

Ces deux micro échelles peuvent être liées aux macro échelles u et l déjà définies par l'intermédiaires d'un nombre de Reynolds moléculaire :

$$\frac{\eta}{l} = \text{Re}_1^{-3/4} \quad (\text{III.11.a})$$

$$\frac{v}{u} = \text{Re}_1^{-1/4} \quad (\text{III.11.b})$$

avec : $\text{Re}_1 = ul/\nu$

On peut alors modéliser les différents termes de l'équation (III.9) en respectant la règle suivante :

- Micro échelles pour les gradients des fluctuations et macro échelles pour les autres quantités.

Ceci conduit aux identités suivantes :

$$\begin{aligned}
 (C_\varepsilon): \quad & U_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \approx \frac{u}{l} \varepsilon \\
 (D_\varepsilon): \quad & \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{v u_k' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} \right) \approx v \frac{u}{l} \left(\frac{v}{\eta} \right)^2 = \frac{u}{l} \varepsilon \\
 & \frac{\partial}{\partial x_k} \left(v \overline{\frac{\partial p'/\rho}{\partial x_i} \frac{\partial u_k'}{\partial x_i}} \right) \approx v \frac{u^2}{l^2} \frac{v}{\eta} = \text{Re}_l^{-1/2} \frac{u}{l} \varepsilon \\
 (P'_\varepsilon): \quad & v \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_k'}{\partial x_j}} \approx v \frac{u}{l} \left(\frac{v}{\eta} \right)^2 = \frac{u}{l} \varepsilon \\
 & v \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \overline{\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}} \approx v \frac{u}{l} \left(\frac{v}{\eta} \right)^2 = \frac{u}{l} \varepsilon \\
 & \overline{v u_k' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k}} \approx u \frac{v}{\eta} \frac{v}{l^2} \frac{u}{l} = \text{Re}_l^{-1/2} \frac{u}{l} \varepsilon \\
 (P''_\varepsilon): \quad & v \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_k'}{\partial x_j}} \approx v \left(\frac{v}{\eta} \right)^3 = \text{Re}_l^{-1/2} \frac{u}{l} \varepsilon \\
 (E_\varepsilon): \quad & \left(v \overline{\frac{\partial^2 u_j'}{\partial x_j \partial x_k}} \right)^2 \approx v^2 \frac{v^2}{\eta^4} = \text{Re}_l^{-1/2} \frac{u}{l} \varepsilon
 \end{aligned}$$

On voit ainsi clairement l'importance de chacun de ces termes lorsque le nombre de Reynolds Re_l (traduisant l'intensité de la turbulence) devient très grand ($\text{Re}_l > 1000$):

- La deuxième partie du terme (D_ε) et celle du terme (P'_ε) tendent vers zéro.

- Les termes (P''_ε) et (E_ε) tendent vers l'infini séparément. Mais si on les considère ensemble, ils tendent vers une limite proche de l'unité (on suppose ici que tous les termes ont été réduits par le premier: $\frac{u}{l} \varepsilon$). Cette dernière constatation découle directement de l'expérience.

- La première partie du terme (P'_ε) a été évaluée sans tenir compte de son caractère tensoriel. A grands nombres de Reynolds, celle-ci devient nulle à cause de l'isotropie de la turbulence dans ces conditions (isotropie à petites échelles). A des nombres de Reynolds modérés, on démontre que ce terme se comporte comme $\text{Re}_l^{-1/2}$ et ne peut être négligé sans nuire aux résultats.

En éliminant les termes négligeables, l'équation (III.9) devient (le terme de diffusion visqueuse $\mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k}$ est négligeable à grands nombres de Reynolds; mais on le garde dans l'équation pour des raisons de formalisme) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial \tau} + U_k \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{\mu u_k' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} - \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right) \\ - 2\mu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_k'}{\partial x_j}} - 2\rho \overline{\left(v \frac{\partial^2 u_j'}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2} \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

Les différents termes inconnus restants peuvent être modélisés de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \overline{\mu u_k' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} = \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \\ - 2\mu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_k'}{\partial x_j}} - 2\rho \overline{\left(v \frac{\partial^2 u_j'}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2} = C_{\varepsilon 1} P_k \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned}$$

et l'équation (III.12) devient dans sa forme finale (avec le terme de gravité) :

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho U_j \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_{\varepsilon 1} (P_k + C_{\varepsilon 3} G_k) \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{III.13})$$

avec :

P_k = production de l'énergie cinétique de turbulence, définie dans l'équation (III. 6), de même que G_k ou production par les forces de gravité.

$\sigma_\varepsilon, C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}$ et $C_{\varepsilon 3}$ sont des constantes empiriques à déterminer à partir de l'expérience.

III.3. Modèle complet

Nous avons déjà défini la viscosité turbulente comme étant le produit d'une échelle de vitesse et d'une échelle de longueur (II.10). Les deux paragraphes précédents nous ont permis de déterminer ces deux échelles qu'on a ramenées à des grandeurs physiques caractérisant la turbulence: l'énergie cinétique de turbulence et son taux de dissipation. On peut donc écrire une relation pour déterminer la viscosité turbulente :

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (\text{III.14})$$

où C_μ est une constante de proportionnalité empirique.

Les relations (III.14), (III.13) et (III.6) permettent de déterminer les tensions de Reynolds $\overline{\rho u_i' u_j'}$ et leurs contreparties thermiques $\overline{\rho u_i' t'}$; c'est-à-dire les inconnues supplémentaires des équations de Reynolds (II.6).

Le système d'équations devient ainsi fermé et la résolution peut être entamée. Ce qui fera l'objet du chapitre suivant. Avant cela, nous allons déterminer les constantes du modèle de turbulence et définir les conditions aux limites nécessaires pour la résolution.

III.4. Constantes

Le point faible de tous les modèles de turbulence actuels c'est qu'ils ne satisfont pas au critère d'universalité cité plus haut. La cause en est la présence de constantes empiriques dans ces modèles. Ces constantes doivent être déterminées et on n'a pour cela que l'expérience avec tous ses défauts.

Pour le modèle $k-\varepsilon$, on dénombre six constantes que l'on peut estimer de la façon suivante:

- C_μ :

Cette constante découle de l'hypothèse d'équilibre local valable dans une couche cisailée. Cette hypothèse consiste en une égalité entre la production et la dissipation de l'énergie cinétique de turbulence :

$$P_k = \rho \varepsilon \quad (\text{III.15})$$

La production peut, dans le cas d'une couche cisailée (x_n étant la direction transversale), se mettre sous la forme:

$$P_k = -\rho \overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial x_n} \quad (\text{III.16})$$

En utilisant la définition de la viscosité turbulente, on peut écrire :

$$-\rho \overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial x_n} = \rho^2 C_\mu \frac{k^2}{\mu_t}$$

ou

$$-\overline{u'v'} \left(\mu_t \frac{\partial U}{\partial x_n} \right) = \rho C_\mu k^2$$

Or, par définition (II.9) et en simplifiant pour le cas d'écoulement considéré, on a :

$$-\overline{u'v'} = \mu_t \frac{\partial U}{\partial x_n} \quad (\text{III.17})$$

On conclut donc que :

$$\left(\overline{u'v'}\right)^2 = C_\mu k^2 \quad (\text{III.18})$$

L'expérience montre que le rapport $\left(\frac{\overline{u'v'}}{k}\right)$ est approximativement constant et tourne autour de 0,3. On obtient ainsi une estimation de C_μ de l'ordre de 0,09 environ.

- $\sigma_k, \sigma_\varepsilon$:

Ces deux constantes, connues sous le nom de nombre de Prandtl pour k et ε respectivement, sont difficiles à approcher analytiquement.

On utilise alors, directement, l'expérience qui permet de les situer autour de l'unité.

- $C_{\varepsilon 2}$:

Dans un écoulement turbulent au travers d'une grille, la production et la diffusion sont négligeables et les équations de k et ε se réduisent à (x = direction de l'écoulement) :

$$\frac{\partial k}{\partial x} = -\varepsilon \quad (\text{III.19.a})$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{III.19.b})$$

Ce sont deux équations différentielles ordinaires que l'on peut résoudre analytiquement pour obtenir :

$$k \approx x^{-1/(C_{\varepsilon 2}-1)} \quad (\text{III.20})$$

Or, l'expérience montre que, dans un écoulement au travers d'une grille, l'énergie cinétique de turbulence s'atténue comme x^{-1} approximativement. Par identification avec la relation précédente, on peut déduire la valeur de la constante $C_{\varepsilon 2}$ et on obtient une valeur de l'ordre de 2,0.

- $C_{\varepsilon 1}$:

Pour cette dernière constante, on utilise l'écoulement "de paroi". L'équation de ε se réduit dans ce cas à (on néglige la convection et la diffusion visqueuse) :

$$\frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_n} \right) + C_{\varepsilon 1} \mu_t \left(\frac{\partial U}{\partial x_n} \right)^2 \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} = 0 \quad (\text{III.21})$$

D'un autre côté, pour ce même type d'écoulement, la loi universelle de vitesse est d'application:

$$\frac{U}{U_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln(E X_n^+) \quad (\text{III.22})$$

En utilisant cette loi avec l'hypothèse d'équilibre local valable le long d'une paroi, on peut déterminer une expression donnant le taux de dissipation (voir détails de calcul plus loin) :

$$\varepsilon = \frac{U_\tau^3}{\kappa X_n} = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa X_n} \quad (\text{III.23})$$

On injecte ensuite cette relation dans (III.21) et après les opérations de simplification, on obtient:

$$C_{\varepsilon 1} = C_{\varepsilon 2} - \frac{\kappa^2}{C_\mu^{1/2} \sigma_\varepsilon} \quad (\text{III.24})$$

Connaissant les différentes constantes intervenant dans le second membre de cette dernière relation, $C_{\varepsilon 1}$ peut être déterminée facilement et elle est de l'ordre de 1,5.

- $C_{\varepsilon 3}$:

Cette constante se détermine par optimisation numérique et dépend de l'écoulement considéré. On lui assigne, en général, une valeur nulle si la production par les forces de gravité est négative et une valeur unitaire dans le cas d'une production positive.

Toutes les valeurs obtenues jusqu'à présent pour les différentes constantes ne constituent qu'une première approximation. Ceci est dû au caractère incertain des résultats expérimentaux. On doit donc affiner les différentes approximations pour pouvoir utiliser le modèle et cet affinage s'effectue, en général, par des tests numériques : on procède au calcul d'un écoulement type avec les premières approximations de constantes. On compare ensuite les résultats obtenus avec les résultats expérimentaux. Si la conclusion est satisfaisante, on admet l'ensemble des valeurs; sinon, on recommence en ajustant une ou plusieurs constantes et ainsi de suite jusqu'à satisfaction. Cette façon de procéder démontre clairement les faiblesses et limitations des modèles de turbulence comportant des constantes. En effet, ces dernières sont fonction du type d'écoulement considéré et de la précision des expériences. On viole ainsi le caractère d'universalité recherché.

Malgré ce problème, le modèle $k-\varepsilon$ s'applique assez bien dans la plupart des écoulements industriels et a été testé sur un très grand nombre de cas pratiques. L'ensemble de constantes le plus communément utilisées est donné dans le tableau suivant:

Tableau III.1					
C_μ	σ_k	σ_ε	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	$C_{\varepsilon 3}$
0.09	1.0	1.3	1.44	1.92	0-0.2 si $G < 0$ 1.0 si $G > 0$

Pour finir, il faut noter que le modèle développé ci-dessus est le modèle $k-\varepsilon$ standard valable à

grands nombres de Reynolds.

Ce modèle a été largement étendu pour tenir compte des situations particulières comme par exemple l'effet des faibles nombres de Reynolds [58], la convection naturelle [59], l'effet de courbure [60], etc. D'une manière générale, on remplace dans ces cas les constantes par des fonctions et on modifie plus ou moins les termes sources.

III.5. Conditions aux limites

Toutes les équations développées pour décrire un écoulement turbulent sont des équations aux dérivées partielles. Il faut donc, pour qu'elles puissent être résolues, définir les conditions aux limites. Celles-ci peuvent être de deux types : Dirichlet (à valeurs imposées à la frontière) ou Neumann (à gradients imposés). Dans le problème d'écoulements turbulents, les frontières peuvent être de plusieurs genres: paroi, entrée de fluide, sortie de fluide et axe de symétrie. On développe ici l'aspect physique (l'aspect numérique étant laissé pour le chapitre suivant), pour chaque genre, en commençant par le plus important: la paroi.

III.5.1. Paroi

C'est le type de frontière qui pose le plus de problèmes et ceci pour plusieurs raisons liées au phénomène étudié. En effet, dans un écoulement turbulent le long d'une paroi, il se forme une couche limite composée de trois zones :

- la sous-couche visqueuse, à proximité immédiate de la paroi, caractérisée par une prédominance des forces de viscosité et, par conséquent, par un régime d'écoulement approximativement laminaire;
- la couche intermédiaire où les forces, de viscosité se balancent avec les forces d'inertie. Le régime d'écoulement dans cette zone est en partie turbulent;
- la couche limite turbulente proprement dite où les forces de viscosité sont négligeables et l'écoulement est complètement turbulent.

L'apparition de zones laminaires dans un écoulement turbulent pose le problème de l'efficacité d'un modèle de turbulence développé en principe pour prédire un régime turbulent (à grands nombres de Reynolds). Ce problème est résolu en négligeant purement et simplement ces zones laminaires, c'est-à-dire la sous-couche visqueuse. Cette dernière est, en général, très mince et le fait de la négliger ne conduit pas à des grandes erreurs dans le calcul de l'écoulement (ce ne sera pas le cas lors du calcul de la température où la sous-couche visqueuse joue un rôle de premier plan et défavorise le transfert de chaleur). Pour améliorer la situation, on va essayer, quand même, de récupérer l'information perdue par la négligence de la sous-couche visqueuse. Ceci en utilisant la technique de "fonction de paroi" qui est une sorte de pont entre la paroi et la couche limite turbulente; un pont dont la base est constituée de résultats expérimentaux dans lesquels la sous-couche visqueuse intervient. Ces résultats sont regroupés dans ce qu'on appelle la loi universelle de vitesse :

$$\frac{U - U_f}{U_\tau} = x_n^+ \quad \text{si } x_n^+ \leq 11.63$$

$$\frac{U - U_f}{U_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln(E x_n^+) \quad \text{si } 11.63 < x_n^+ \leq 100 \rightarrow 200$$
(III.25)

avec

$$x_n^+ = \frac{\rho U_\tau x_n}{\mu} = \text{distance dimensionnelle à la paroi}$$

κ = constante de Von Karman = 0,41;

E = facteur de rugosité = 9,8.

L'utilisation de fonctions de paroi revient à imposer des conditions de non glissement sur la paroi (vitesses nulles) et à calculer, par la loi universelle, les différentes grandeurs dans la couche intermédiaire ou la couche turbulente.

On rencontre dans la littérature, plusieurs types de fonctions de paroi: fonction de paroi à une couche, à deux couches, à trois couches, etc.

Nous donnons ici le développement général; les détails étant laissés pour le chapitre suivant.

Dans la technique de fonction de paroi monocouche la vitesse parallèle à la paroi se calcule directement par la loi universelle (III.25) en plaçant le premier noeud dans la couche turbulente. Les autres grandeurs turbulentes se calculent en adoptant l'hypothèse d'équilibre local déjà mentionnée (production = dissipation) valable à proximité d'une paroi. On peut, avec cette hypothèse, écrire (voir paragraphe précédent) :

$$\left(\mu_t \frac{\partial U}{\partial x_n} \right)^2 = \rho^2 C_\mu k^2$$

Le premier membre de cette égalité est, par définition, le carré de la tension de cisaillement dans le fluide τ . On identifie cette tension à celle à la paroi τ_f . Cette dernière peut s'exprimer en fonction de la vitesse de frottement à la paroi U_τ ou on a, par la définition même de cette vitesse :

$$U_\tau = \sqrt{\frac{\tau_f}{\rho}}$$
(III.26)

A partir de cette définition et de la relation d'équilibre local, on a (on ne donne que le développement utilisant la loi logarithmique des vitesses) :

$$k = \frac{U_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}}$$
(III.27)

Pour le taux de dissipation, au lieu d'utiliser la tension de cisaillement, on dérive la loi universelle pour obtenir :

$$\frac{\partial U}{\partial x_n} = \frac{U_\tau}{\kappa x_n} \quad (\text{III.28})$$

et en injectant cette dernière dans la relation d'équilibre local, on a :

$$\mu_t \left(\frac{U_\tau^2}{\kappa^2 x_n^2} \right) = \rho \varepsilon$$

ou

$$\left(\rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \left(\frac{U_\tau^2}{\kappa^2 x_n^2} \right) = \rho \varepsilon$$

et enfin

$$\varepsilon = \frac{U_\tau^3}{\kappa x_n} \quad (\text{III.29})$$

Pour la température, la formulation est identique. Mais, dans ce cas, la loi n'est pas aussi universelle que cela. Principalement à cause du nombre important de paramètres à prendre en compte (le plus important étant le nombre de Prandtl moléculaire), on utilise en général, la loi suivante :

$$\frac{T - T_f}{T_\tau} = \text{Pr}_t \left(\frac{U - U_f}{U_\tau} + P \right) \quad (\text{III.30})$$

où T_τ est une sorte de température de frottement définie par

$$T_\tau = \frac{\Phi_f}{\rho C_p U_\tau} \quad (\text{III.31})$$

Φ_f étant le flux de chaleur à la paroi et P est une fonction empirique quantifiant le transfert de chaleur à travers la sous-couche visqueuse. Il existe en pratique plusieurs expressions pour cette fonction P , la plus utilisée étant celle de Jayatilleke [61] :

$$P = 9.24 \left[\left(\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} \right)^{3/4} - 1 \right] (1 + 0.28 e^{-0.007 \text{Pr}/\text{Pr}_t}) \quad (\text{III.32})$$

Il faut noter ici que l'utilisation de la relation suivante :

$$U_\tau = C_\mu^{1/4} k^{1/2} \quad (\text{III.32})$$

déduite de (III.27), pour le calcul de la vitesse de frottement, à la place de la définition (III.26) permet de mieux modéliser le processus de transfert de quantité de mouvement et de chaleur. C'est cette amélioration qui sera adoptée par la suite.

III.5.2. Entrée du fluide

Les conditions aux limites le long d'une frontière, par où le fluide entre dans le domaine, sont simples à établir, au moins du point de vue mathématique. Il suffit, en effet, d'imposer les profils de vitesses nécessaires et ceux de température et des paramètres de la turbulence (énergie et dissipation).

En fait, le problème réside essentiellement dans le choix des valeurs caractérisant la turbulence. On adopte, en général, les profils expérimentaux suivants :

$$k_0 = 0.003U_0^2 \quad (\text{III.33})$$

$$\epsilon_0 = \frac{2C_\mu k_0^{3/2}}{0.03D_0} \quad (\text{III.34})$$

Où D_0 est une longueur équivalente.

Il faut noter que dans la plupart des problèmes, l'intensité de turbulence introduite à l'entrée n'influence pas le régime établi, mais elle intervient pour beaucoup dans la zone d'établissement [6].

III.5.3 Sortie du fluide

On suppose dans ce cas que l'écoulement est en régime établi et on impose des gradients nuls pour les différentes variables.

La frontière "sortie du fluide" doit donc être soigneusement placée de façon à s'assurer qu'on est vraiment en régime établi. Dans le cas où les dimensions de la sortie sont très petites par rapport aux dimensions du domaine (réservoirs par exemple), on peut directement imposer des profils de vitesse ou un débit sortant de façon à assurer la continuité.

III.5.4 Axe de symétrie

On impose des gradients nuls pour toutes les variables à l'exception de la composante de la vitesse normale à l'axe de symétrie, constituant la frontière en question, que l'on impose nulle.

Chapitre IV	41
Méthode numérique	41
IV.1. Introduction	41
IV.2. Notions générales sur la méthode des volumes finis	42
IV.2.1. Distribution des volumes de contrôle	43
IV.2.2. Discrétisation des équations en volumes finis	44
IV.3. Méthode de résolution	50
IV.4. Couplage Vitesse Pression	51
VI.5. Détails numériques	55
VI.5.1. La sous relaxation:	55
IV.5.2. Critère de convergence	56
IV.5.2. Discrétisation temporelle	56
IV.6. Implémentation de conditions aux limites	57

Chapitre IV

Méthode numérique

IV.1. Introduction

Les solutions analytiques, basées sur la forme locale du problème (Equations aux Dérivées Partielles : « E.D.P. » associées aux conditions initiales et aux limites), ne peuvent être déterminées dans le cas général, sauf dans certains cas classiques connus depuis bien longtemps. Ces cas sont pédagogiquement intéressants mais demeurent beaucoup trop limités pour l'industriel en particulier au niveau des géométries considérées. On cherche donc des méthodes basées sur l'approximation numérique. Celle-ci a pour but de définir une ou plusieurs suites convergentes (vers la solution analytique du système, qui ne converge pas d'ailleurs pas nécessairement vers un état d'équilibre) dont nous calculons les termes les uns après les autres par itérations successives. Le principe est d'approcher l'équation continue « E.D.P. » déduite de la théorie par une équation algébrique de récurrence liant les termes de ces suites. Nous voyant ici l'utilité des conditions initiales et aux limites permettant de donner un

« départ » à notre calcul. Or nous comprenons bien que cette solution ne puisse s'effectuer continûment sur le domaine de calcul. Nous allons donc décomposer ce domaine en plusieurs mailles. Cette notion de maillage sera approfondie plus loin. Actuellement, trois grandes méthodes numériques sont utilisées généralement pour la résolution des systèmes d'équations à dérivées partielles régissant les différents écoulements de transfert de chaleur, de masse etc. Ce sont les méthodes des différences finies, des éléments finis et des volumes finis.

La méthode des différences finies consiste à discrétiser les équations continues aux nœuds d'un maillage prédéfini en calculant chaque dérivée partielle à l'aide d'un développement en séries de Taylor tronquées pour obtenir des équations linéaires reliant la valeur des inconnues en un nœud aux valeurs de ces mêmes inconnues aux nœuds voisins.

La technique des éléments finis discrétise l'espace à l'aide d'éléments géométriques simples (généralement des triangles ou des quadrangles). En suite, la forme forte des équations est remplacée par la forme faible dans laquelle les inconnues sont approximées par une combinaison linéaire de fonctions de base dont le support est un des éléments.

La méthode des volumes finis qui a été adoptée dans cette étude consiste à exprimer le bilan de la grandeur étudiée (masse, énergie, quantité de mouvement ...) sur un volume de contrôle [62]. Ces volumes de contrôle sont généralement rectangulaires délimités par des lignes parallèles aux axes des coordonnées. Cependant, il est possible, actuellement, d'utiliser des volumes de diverses formes. L'un des principaux avantages de cette méthode est d'assurer une conservation intégrale exacte des grandeurs quelle que soit la taille du maillage et c'est pour cette raison qu'elle est très largement utilisée pour la résolution des phénomènes gouvernés par des équations à dérivées partielles.

IV.2. Notions générales sur la méthode des volumes finis

Dans le but de ne pas trop alourdir cette thèse nous allons évoquer les bases de la méthode des volumes finis et pour de plus amples détails l'ouvrage de Patankar [62] constitue un excellent guide.

La résolution d'un problème cité précédemment, par la méthode des volumes finis, passe par les étapes suivantes :

- Maillage du domaine physique de calcul (distribution des volumes de contrôle)
- Discrétisation des différentes équations régissant le phénomène considéré.

- Choix d'un algorithme de résolution des systèmes d'équations obtenues après discrétisation.

IV.2.1. Distribution des volumes de contrôle

Dans la méthode des volumes finis, la zone d'intégration est divisée en un certain nombre de volumes élémentaires (voir figure IV.2.1). Il faut bien distinguer les indices en lettres majuscules qui désignent des grandeurs attachées au point situé au centre du volume et les indices en lettres minuscules qui désignent les grandeurs attachées aux faces des volumes. Si nous appelons P le nœud considéré alors les points qui lui sont adjacents sont dénommés : East (E), West (W), North (N), et South (S) pour des écoulements bidimensionnels. Les faces du volume de contrôle seront dénommées de la même façon. Dans le but d'assurer une expression correcte du bilan de conservation d'une entité physique quelconque cette méthode utilise un maillage décalé (staggered grid) en fonction de la nature même de l'entité considérée. La pression et la température sont calculées en considérant un volume de contrôle centré autour du point P, donc entre les faces e, w, s, et n (en bidimensionnel). Les vitesses seront estimées dans un volume centré sur la face est entre deux plans passant par les nœuds P et E et limité par les faces sud et nord. Il découle directement de cette localisation que le calcul des flux de masse à travers des interfaces (ex : $F_e = (\rho u)_e \Delta y$) se fera sans aucune interpolation de la vitesse sur ces interfaces. L'avantage de cet arrangement est nettement plus important au niveau de l'équation de continuité, car celle-ci étant intégrée sur le volume de contrôle principal fera apparaître la différence entre deux vitesses adjacentes, éliminant ainsi les problèmes d'interpolation. D'autre part au niveau de l'équation de la quantité de mouvement, la différence de pression prise en compte sera elle aussi issue de deux nœuds adjacents et sera donc la force motrice naturelle pour la vitesse.

Du point de vue physique la pression et la température sont des grandeurs scalaires plus facilement calculables en un point (supposé représentatif du volume), tandis que la vitesse est plutôt liée à un flux (que nous considérons constant) à travers une surface. Conformément aux hypothèses faites précédemment (grandeurs et flux constants) il conviendra de prendre des maillages suffisamment raffinés de façon à ce que les moyennes effectuées soient représentatives.

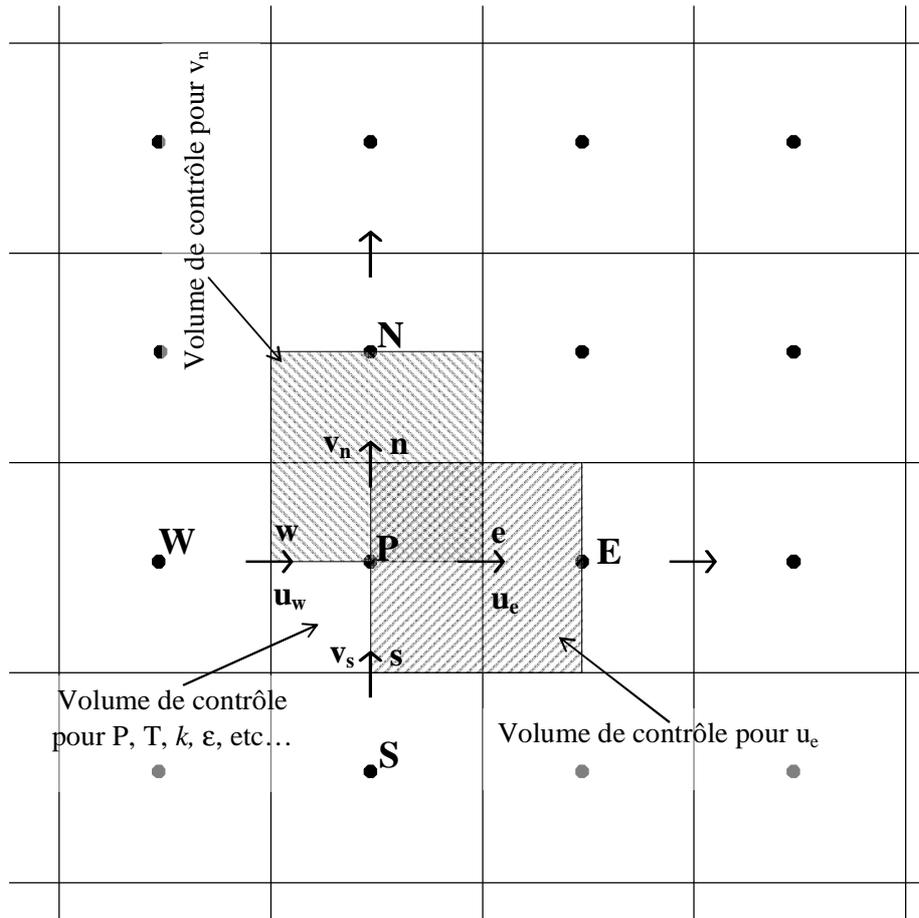


Figure IV.2.1 : Distribution des volumes de contrôle avec maillage décalé

IV.2.2. Discrétisation des équations en volumes finis

Notre modèle mathématique déjà présenté dans le chapitre précédent va être discrétisé à l'aide de la méthode des volumes finis. L'équation de transport d'une entité physique Φ quelconque peut se mettre sous la forme générale suivante:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho U_j \phi}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + S_\phi \quad (IV.1)$$

Dans cette expression ϕ est une variable généralisée présentée dans le tableau IV-1, ainsi que tous les coefficients et les termes sources des différentes équations du problème. Pour des raisons de simplification, nous avons omis dans cette formulation les paramètres nécessaires pour généraliser le problème aux cas pratiques à géométries axisymétriques, ainsi que les dérivées par rapport au temps.

Tableau IV.1

Conservation	ϕ	Γ_ϕ	S_ϕ
Masse	1.0	0.0	0.0
Q ^{te} de Mouvement/x	u	$(\mu + \mu_t)$	$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left((\mu + \mu_t) \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((\mu + \mu_t) \frac{\partial V}{\partial x} \right)$
Q ^{te} de Mouvement/y	v	$(\mu + \mu_t)$	$-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left((\mu + \mu_t) \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((\mu + \mu_t) \frac{\partial V}{\partial y} \right)$
Energie	T	$(\lambda + \lambda_t)/C_p$	0.0
Energie cinétique k	k	$(\mu + \mu_t/\sigma_k)$	$P_k - \rho \epsilon$
Dissipation de k	ϵ	$(\mu + \mu_t/\sigma_\epsilon)$	$C_{\epsilon 1} P_k \epsilon/k - C_{\epsilon 2} \rho \epsilon^2/k$
$P_k = \mu_t \left[2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right]$			

Pour résoudre ces équations aux dérivées partielles, nous intégrons l'équation correspondante à la variable ϕ sur tous les volumes de contrôle afin d'obtenir un système d'équations algébriques (une équation par élément de volume) dont la résolution fournit le champ de ϕ . Considérons, pour illustrer, l'élément de volume de la figure IV.2.2

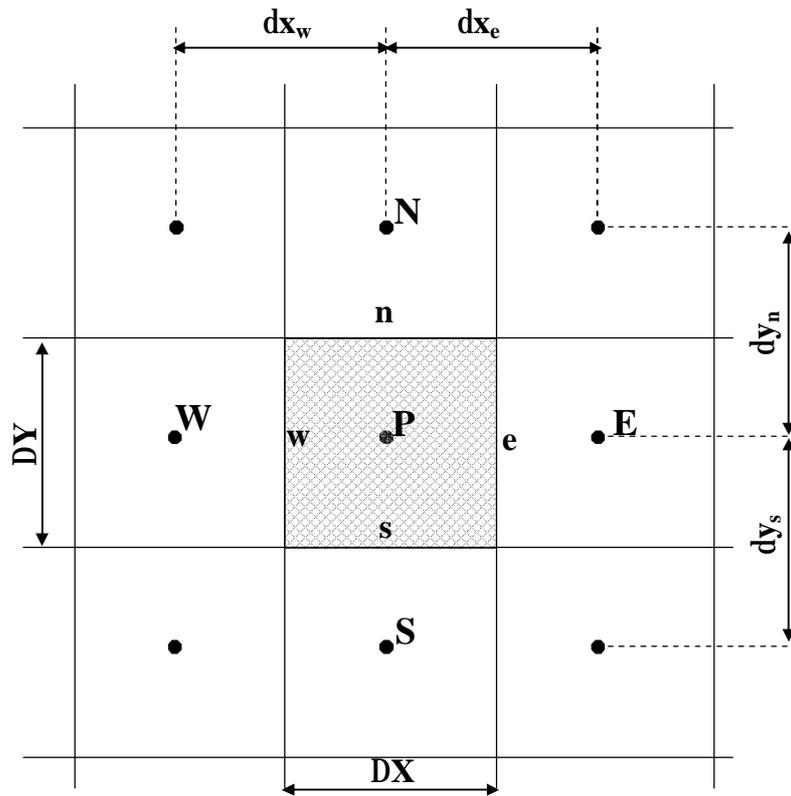


Figure IV.2.2 : Elément de volume central (scalaire)

L'équation (IV.1) sur ce volume exprimée en termes de flux généralisés J et dans un espace à deux dimensions X-Y se présente sous la forme :

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial \tau} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = S_\phi \quad (IV.2)$$

Avec :

$$J_x = \rho U \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$J_y = \rho V \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Ce qui permet d'obtenir après l'intégration la relation discrétisée suivante :

$$\frac{(\rho_p \phi_p - \rho_p^o \phi_p^o)}{\Delta t} \Delta V + \frac{J_e - J_w}{\Delta x} \Delta V + \frac{J_n - J_s}{\Delta y} \Delta V = (S_\phi)_p \Delta V \quad (\text{IV.3})$$

Avec $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y$ qui représente l'aire du volume de contrôle.

Nous intégrons aussi, de la même façon, l'équation de continuité :

$$\frac{U_e - U_w}{\Delta x} + \frac{V_n - V_s}{\Delta y} = 0 \quad (\text{IV.4})$$

Nous multiplions cette dernière équation par la variable ϕ_p (définie au nœud P) et en la soustrayant de l'équation (IV.3) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{(\rho_p \phi_p - \rho_p^o \phi_p^o)}{\Delta t} \Delta V + [(J_e - U_e \phi_p) - (J_w - U_w \phi_p)] \Delta y \\ + [(J_n - V_n \phi_p) - (J_s - V_s \phi_p)] \Delta x = (SC_\phi + SP_\phi \phi)_p \Delta x \cdot \Delta y \end{aligned} \quad (\text{IV.5})$$

Les différents termes de cette relation peuvent être modélisés [62] et le résultat est une équation algébrique exprimant la valeur de la variable ϕ au nœud P en fonction de celles aux nœuds voisins (E, W, N, S). Cette dernière équation algébrique s'écrit sous la forme simplifiée suivante :

$$a_p \phi_p = a_e \phi_e + a_w \phi_w + a_n \phi_n + a_s \phi_s + b \quad (\text{IV.6})$$

Avec :

$$a_e = D_e A(|Pe_e|) + \max(0, -F_e)$$

$$a_w = D_w A(|Pe_w|) + \max(0, F_w)$$

$$a_n = D_n A(|Pe_n|) + \max(0, -F_n)$$

$$a_s = D_s A(|Pe_s|) + \max(0, F_s)$$

$$a_p = a_e + a_w + a_n + a_s - SP_\phi \Delta x \Delta y + a_p^o$$

$$b = SC_\phi \Delta x \Delta y + a_p^o \phi_p^o, \quad a_p^o = \rho_p^o \frac{\Delta V}{\Delta \tau}$$

$$D_e = \Gamma_e \frac{\Delta Y}{\delta x_e} \quad ; F_e = \rho U_e \Delta Y \quad ; Pe_e = \frac{F_e}{D_e}$$

$$D_w = \Gamma_w \frac{\Delta y}{\delta x_w} \quad ; F_w = \rho U_w \Delta y \quad ; Pe_w = \frac{F_w}{D_w}$$

$$D_n = \Gamma_n \frac{\Delta x}{\delta y_n} \quad ; F_n = \rho V_n \Delta x \quad ; Pe_n = \frac{F_n}{D_n}$$

$$D_s = \Gamma_s \frac{\Delta x}{\delta y_s} \quad ; F_s = \rho V_s \Delta x \quad ; Pe_s = \frac{F_s}{D_s}$$

$A(|Pe|)$ est une fonction d'interpolation qui dépend du nombre de Peclet et qui donnée par le tableau suivant :

Tableau IV.2	
Schéma	Loi $A(Pe)$
Différence centrale	$1,0 - 0,5 \cdot Pe $
Upwind	1.
Hybride	$\text{Max}(0; 1,0 - 0,5 \cdot Pe)$
Puissance	$\text{Max}(0; 1, (0 - 0,1 \cdot Pe)^5)$
Exponentielle	$\frac{ Pe }{e^{ Pe } - 1}$

En appliquant cette équation sur chaque nœud du domaine, nous obtenons un système d'équations algébriques qui peut être résolu par une méthode quelconque pour déterminer la répartition de la variable ϕ dans tout le domaine considéré.

La manière de constituer le système d'équations est identique pour toutes les variables (U, V, P, T etc.) sauf en ce qui concerne le terme source. Ce dernier doit, en général, être linéarisé. Il s'agit de le décomposer en deux parties SC et SP telles que :

$$S_\phi = SC_\phi + SP_\phi \quad (IV.7)$$

SC_ϕ étant indépendante de la variable ϕ au nœud en question et SP_ϕ est fonction de cette variable au même nœud. Pour illustrer, nous développerons ici la façon de linéariser les termes sources du modèle de turbulence. Pour les autres variables, la linéarisation s'effectue sans problèmes et plusieurs expressions sont possibles.

Le tableau IV.3 donne l'une des possibilités. Il faut noter que ce tableau présente la version discrétisée des différents termes sources, telle qu'elle intervient dans l'équation (IV.6).

Tableau IV.3			
ϕ	Cellule	SP_ϕ	SC_ϕ
U		$-(D_w + D_e)$	$(P_w + P_e)\Delta y + D_e U_e + D_w U_w + \mu_{e,n}(V_{ne} + V_{nw}) + \mu_{e,n}(V_{ne} + V_{nw})$
V		$-(D_s + D_n)$	$(P_s + P_n)\Delta x + D_n V_n + D_s V_s + \mu_{e,e}(U_{ne} + U_{ne}) + \mu_{e,w}(U_{nw} + U_{nw})$
T		0	$S_{T,P}\Delta V$
K		$-\rho C_\mu \frac{k_p}{\mu_{tP}} \Delta V$	$P_{k,P} \Delta V$
ϵ		$-\rho C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon_p}{k_p} \Delta V$	$C_{\epsilon 1} P_{k,P} \frac{\epsilon_p}{k_p} \Delta V$

$\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y$: Aire du volume de contrôle

$$P_{kP} = \mu_{tP} \left[2 \left(\frac{U_e - U_w}{\Delta x} \right)^2 + 2 \left(\frac{V_n - V_s}{\Delta y} \right)^2 + \left(\frac{U_n - U_s}{\Delta y} + \frac{V_e - V_w}{\Delta x} \right) \right]$$

$$\mu_e = \mu + \mu_t$$

- **Energie cinétique de turbulence :**

Le terme source de l'équation de énergie cinétique de turbulence est donné par :

$$S_k = P_k - \rho \varepsilon \quad (\text{IV.8})$$

En remplaçant ε par son expression tirée de la définition de la viscosité turbulente ce terme devient :

$$S_k = P_k - \rho^2 C_\mu \frac{k^2}{\mu_t} \quad (\text{IV.9})$$

Nous obtenons ainsi, pour les deux composantes :

$$SC_k = P_k \quad (\text{IV.9.a})$$

$$SP_k = -\rho^2 C_\mu \frac{k}{\mu_t} \quad (\text{IV.9.b})$$

- **Taux de dissipation de énergie cinétique de turbulence :**

Dans ce cas le terme source est donné par :

$$S_\varepsilon = C_{\varepsilon_1} P_k \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon_2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{IV.10})$$

Pour ce taux de dissipation il existe plusieurs façons de linéariser le terme source. La plus utilisée et la plus simple est la suivante :

$$SC_\varepsilon = C_{\varepsilon_1} P_k \frac{\varepsilon}{k} = C_{\varepsilon_1} P_k C_\mu \rho \frac{k}{\mu_t} \quad (\text{IV.10.a})$$

$$SP_\varepsilon = -C_{\varepsilon_2} \rho \frac{\varepsilon}{k} \quad (\text{IV.10.b})$$

IV.3. Méthode de résolution

D'une manière générale, le succès de la simulation dépend fortement et presque exclusivement de la méthode de résolution des systèmes d'équations algébriques obtenues après discrétisations des équations différentielles. Une attention particulière a alors été consacrée à ce point et le résultat est un algorithme de résolution très performant pour les problèmes étudiés dans le cadre de cette thèse. Nous présentons ici une description succincte de cet algorithme, les détails se trouvant dans [63].

L'algorithme est un assemblage de plusieurs techniques différentes et complémentaires. Ce sont :

- La technique TDMA (Tri Diagonal Matrix Algorithm) ou algorithme de Thomas.
- La technique de balayage rangée par rangée (ligne par ligne).
- La technique de correction par blocs.

Nous commençons par balayer le domaine de calcul rangée par rangée, dans une direction donnée. Pour chaque rangée, nous appliquons la technique TDMA pour déterminer le champ de la variable considérée sur toute la rangée en question. Après le balayage complet, nous procédons à la correction du champ obtenu et ceci en calculant une correction par rangée (le système d'équations décrivant la répartition des corrections étant résolu par la même technique TDMA). Nous effectuons ensuite les mêmes étapes mais cette fois dans l'autre direction. Ainsi une itération a été réalisée et nous procédons à un test de convergence. Si le critère de convergence est satisfait le champ est déterminé sinon nous recommençons les calculs au début avec le balayage suivant la direction choisie initialement.

Cet algorithme permet de fournir une solution, après seulement quelques itérations ; même pour le champ de pression qui est le plus difficile à calculer à cause de son couplage avec celui des vitesses et que nous allons traiter dans le paragraphe suivant.

IV.4. Couplage Vitesse Pression

La présence de la pression dans les équations de conservation de la quantité de mouvement sous forme de gradient rend la résolution de celles-ci plus compliquée, pour la principale raison que cette pression est inconnue et constitue l'une des variables du problème. Pour la déterminer, il faut tout d'abord trouver une équation pour la décrire. Cette équation sera constituée à partir de l'équation de la conservation de la masse. Mais, avant de passer à ce point, faisons les deux remarques suivantes :

1. La discrétisation des équations de conservation de la quantité de mouvement fait apparaître un problème lié à la pression. En effet, lors de cette discrétisation en un nœud P, par exemple, seules les pressions aux nœuds voisins apparaîtront dans l'équation finale. En passant à un nœud voisin (E par exemple) nous verrons apparaître la pression au nœud initial P et au nœud situé à l'est du nœud E. Nous constatons ainsi que les équations discrétisées utilisent deux champs de pression complètement indépendants. Ce qui est inadmissible et conduit, si nous n'y remédions pas, à des résultats complètement fantaisistes.
2. Le même problème apparaît aussi lors de la discrétisation de l'équation de continuité. Nous voyons apparaître deux champs de vitesses sans relation l'un avec l'autre et sans aucun fondement physique.

Pour éviter ces deux inconvénients, Nous décalons le maillage de la pression par rapport à celui des vitesses. Nous allons alors localiser la pression au centre de l'élément de volume et les vitesses sur les faces de celui-ci comme indiqué sur la figure IV.2.1.

Revenons maintenant à la constitution d'une équation pour la pression ou plus exactement pour une correction de la pression P' définie par :

$$P = P^* + P' \quad (IV.11)$$

Où P est la pression exacte et P^* une estimation de départ qu'il faut corriger en déterminant P' . Le problème est ramené à la détermination de P' au lieu de P . L'équation de conservation de la quantité de mouvement discrétisée s'écrit pour les deux composantes de vitesses :

$$a_p^{(u)} U_p = a_E^{(u)} U_E + a_W^{(u)} U_W + a_N^{(u)} U_N + a_S^{(u)} U_S + b_p^{(u)} \quad (IV.12.a)$$

$$a_p^{(v)} V_p = a_E^{(v)} V_E + a_W^{(v)} V_W + a_N^{(v)} V_N + a_S^{(v)} V_S + b_p^{(v)} \quad (IV.12.b)$$

Les termes sources $b_p^{(u)}$ et $b_p^{(v)}$ font intervenir la pression inconnue. Nous allons donc travailler par itérations successives. Nous supposons pour démarrer que la pression est connue (estimation P^*) et nous calculons le champ des vitesses. Or, les vitesses calculées avec une estimation de la pression ne satisfont pas, en général, l'équation de continuité qui doit être respectée à tout moment. Nous allons alors les corriger en utilisant, comme pour la pression ci-dessus, une correction telle que :

$$U = U^* + U' \quad (IV.13.a)$$

$$V = V^* + V' \quad (IV.13.b)$$

Où V^* et U^* sont les vitesses calculées avec P^* . U' et V' étant les corrections de ces vitesses à déterminer pour retrouver les vitesses exactes U et V de l'itération en cours.

Le calcul des corrections U' et V' s'effectue en utilisant les relations (IV.13) dans les équations (IV.12) en faisant des hypothèses simplificatrices.

$$U_p' = \frac{\Delta y}{a_p^{(u)}} (P_w' - P_e') \quad (IV.14.a)$$

$$V_p' = \frac{\Delta x}{a_p^{(v)}} (P_s' - P_n') \quad (IV.14.b)$$

Pour déterminer la correction de pression P' nécessaire pour le calcul des corrections des vitesses, nous utilisons l'équation de continuité discrétisée suivante (élément de volume scalaire) :

$$(U_E - U_W) \Delta y + (V_N - V_S) \Delta x = 0 \quad (IV.15)$$

Nous remplaçons dans cette équation, les vitesses par leurs valeurs données par les relations (IV.13). Par identification avec l'équation de conservation de la quantité de mouvement (tout ce qui est en fonction des vitesses U^* et V^* disparaît), nous obtenons une équation pour la correction des vitesses. En utilisant les relations (IV.14) dans cette dernière, nous obtenant l'équation suivante :

$$a_p^{(p')} P_p' = a_e^{(p')} P_e' + a_w^{(p')} P_w' + a_n^{(p')} P_n' + a_s^{(p')} P_s' + b_p^{(p')} \quad (IV.16)$$

Avec :

$$a_e^{(p')} = \rho \frac{(\Delta y)^2}{(a_p^{(u)})_e}$$

$$a_w^{(p')} = \rho \frac{(\Delta y)^2}{(a_p^{(u)})_w}$$

$$a_n^{(p')} = \rho \frac{(\Delta x)^2}{(a_p^{(v)})_n}$$

$$a_s^{(p')} = \rho \frac{(\Delta x)^2}{(a_p^{(v)})_s}$$

$$a_p^{(p')} = a_e^{(p')} + a_w^{(p')} + a_n^{(p')} + a_s^{(p')}$$

$$b_p^{(p')} = \rho [(U_w^* - U_e^*) \Delta y + (V_s^* - V_n^*) \Delta x]$$

Cette équation permet de déterminer le champ de la correction P' . La correction des pressions et des vitesses et maintenant possible et les valeurs déduites sont considérées comme des nouvelles estimations et la procédure est recommencée jusqu'à la convergence. Cette procédure est connue dans la littérature sous le nom de SIMPLE (Semi- Implicit Method for Pressur Linked Equation) et est très largement utilisée, du moins dans ces variantes dont l'une dénommée SIMPLER (SIMPLE Revised) a été utilisée dans le cadre de ce travail. Elle consiste, en plus de la procédure décrite ci-dessus, à calculer le champ de pression P^* au lieu de l'estimer et ceci en utilisant une équation analogue à celle de la correction de pression [62].

Un organigramme récapitulatif de cette variante est donné ci-dessous.

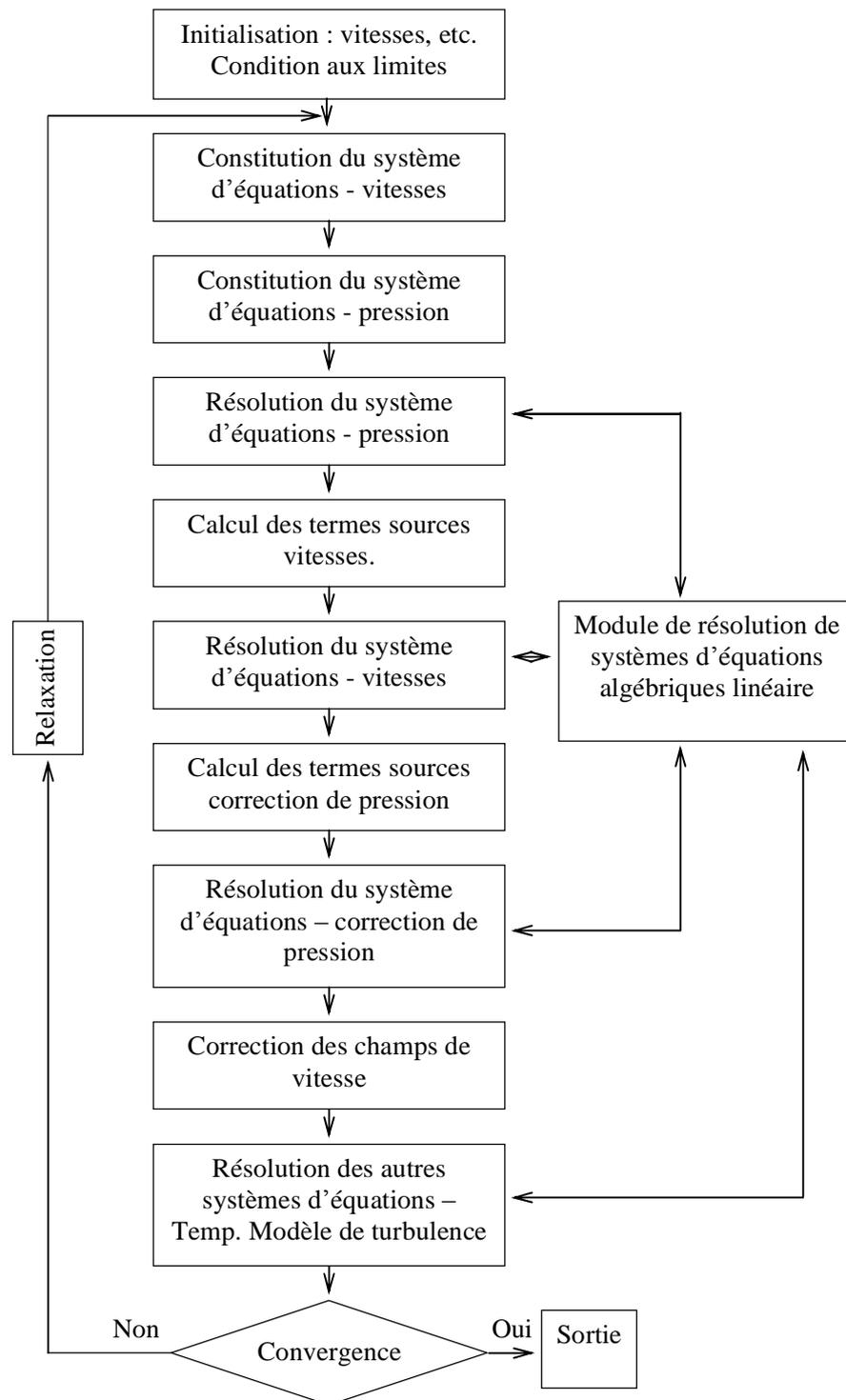


Figure IV.3 : organigramme de l'algorithme SIMPLER.

VI.5. Détails numériques

VI.5.1. La sous relaxation:

La sous- relaxation est généralement utilisée dans les problèmes non linéaires pour éviter que le processus itératif décrit précédemment ne diverge. Elle consiste à diminuer la rapidité des changements des valeurs d'une variable, d'une itération à l'autre, par l'introduction d'un coefficient de sous relaxation α_ϕ .

Comme nous l'avons vu précédemment, toutes les équations de transport, après avoir été discrétisées, peuvent être mises sous la forme générale suivante :

$$a_p \phi_p = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + S_\phi \quad (IV.17)$$

Si nous notons ϕ_p^* la valeur de ϕ_p à l'itération précédente, il est possible d'écrire :

$$\phi_p = \phi_p^* + \left[\frac{\sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + S_\phi}{a_p} - \phi_p^* \right] \quad (IV.18)$$

Le terme entre parenthèse dans cette relation représente le changement survenu à ϕ_p pendant une itération. Cette variation peut être alors amortie par l'introduction d'un facteur de sous relaxation α_ϕ de la manière suivante :

$$\phi_p = \phi_p^* + \alpha_\phi \left[\frac{\sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + S_\phi}{a_p} - \phi_p^* \right] \quad (IV.19)$$

Il est bien évident que cette procédure de relaxation n'est valable que si la résolution finale de l'équation (IV.19) (à la fin des itérations) satisfait bien l'équation (IV.17). C'est ici le cas dans la mesure où lorsque le processus a convergé, ϕ_p est censée ne plus varier d'une itération à l'autre. La relation $\phi_p = \phi_p^*$ est alors obtenue et associée à l'équation (IV.19) donne finalement l'équation (IV.17) recherchée.

Concernant la pression, la sous relaxation s'effectue d'une manière un peu différente compte tenu de l'existence de l'algorithme de couplage vitesse- pression. Elle est simplement introduite dans la correction de pression P' sous la forme suivante :

$$P = P^* + \alpha_p P' \quad (IV.21)$$

Tous les facteurs de sous relaxation doivent être compris entre 0 et 1. Plus ils sont faibles, plus la sous relaxation est forte et plus la convergence est lente. Mais plus, ils sont forts, plus la sous relaxation est faible et plus il y a de chance de faire introduire des instabilités dans le processus itératif.

Il n'existe pas de règle générale pour choisir les coefficients de sous relaxation. Cela peut dépendre de la nature du problème, du nombre et de la taille des cellules du maillage, de la procédure itérative choisie. Il faut cependant savoir que le choix de ces facteurs est essentiel pour le bon déroulement de la procédure itérative. Enfin, nous rappelons que la valeur de ces coefficients peut être différente d'une variable à une autre.

IV.5.2. Critère de convergence

Une procédure est convergente si toute erreur tend à décroître au cours des itérations. Elle a convergée lorsque les itérations ne produisent plus de changements significatifs sur les variables selon un critère bien défini. Le critère de convergence est donc utilisé pour stopper le processus itératif lorsqu'il est satisfait.

Le critère de convergence utilisé dans cette thèse repose sur le résidu de l'équation de transport, comme suit :

$$R_{\phi} = \sum_{\text{mailles}} (a_e \phi_e + a_w \phi_w + a_n \phi_n + a_s \phi_s + b - a_p \phi_p) \quad (\text{IV.22})$$

Dans le cas de l'équation de continuité, le résidu est la source de masse S_m , pour toutes les variables, les résidus sont normalisés par F_{ϕ} (masses entrantes, la somme de la quantité de mouvement à l'entrée). Il est alors attendu que ces grandeurs soient inférieures à un critère de convergence prédéfini :

$$\frac{\sum |R_{\phi}|}{F_{\phi}} \leq \text{epsilon} \quad (\text{IV.23})$$

Dans le cadre de cette thèse, nous avons choisi (epsilon de l'ordre de 10^{-3})

IV.5.2. Discrétisation temporelle

Pour intégrer une équation discrétisée sur un pas de temps $\Delta\tau$, le schéma des différences en avant est utilisé pour exprimer l'évolution temporelle de : la pression, la températures, les vitesses etc. entre les instants τ et $\tau + \Delta\tau$.

Si on prend la température T comme variable dépendante, on a :

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau = [T^{\tau+\Delta\tau} - T^{\tau}]$$

Tous les autres termes de l'équation de discrétisation sont évalués au temps $\tau + \Delta\tau$, ce qui correspond au schéma implicite.

IV.6. Implémentation de conditions aux limites

L'objet de ce paragraphe est d'explicitier la façon d'implémenter directement les conditions aux limites sur une frontière de type "paroi" dans les équations discrétisées.

Ces conditions aux limites sont données par les fonctions de paroi décrites à la fin du chapitre précédent.

1. Vitesse

On considère seulement la composante de la vitesse parallèle à une paroi, l'autre composante se comportant normalement avec une condition de non- glissement (vitesse égale à la vitesse de paroi). Nous traiterons, pour simplifier, le cas d'une paroi horizontale (parallèle à l'axe x direction de l'écoulement); le cas d'une paroi verticale s'en déduit aisément par simple permutation.

Considérons l'élément de volume frontière de la figure IV.4. Nous avons déjà mentionné que c'est la loi universelle de vitesse qui est d'application pour constituer une condition aux limites. Cette loi est donnée par la relation (III.25) du chapitre précédent où la distance normale x_n devient y dans ce qui suit.

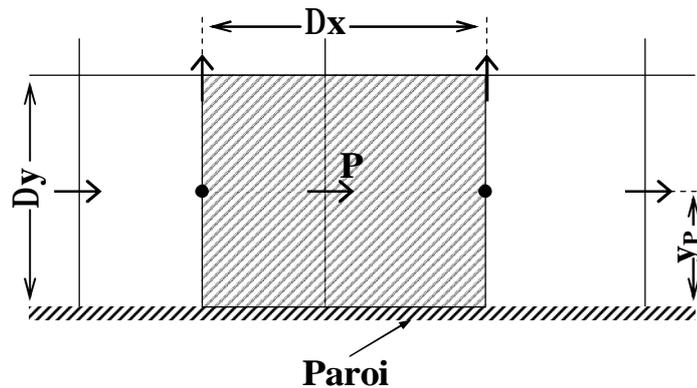


Figure IV.4. : Volume de contrôle pour la composante de la vitesse parallèle à une paroi

La discrétisation des différents termes de l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour U , sur l'élément de volume frontière considéré permet d'écrire

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{U_n - U_f}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \mu_t) \frac{\partial U}{\partial y} \right] = \frac{1}{\Delta y} \left[(\mu + \mu_t)_n \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_n - (\mu + \mu_t)_f \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_f \right]$$

Le premier terme du second membre de cette dernière relation ne pose pas de problème, les vitesses U_n et U_s étant connues.

Par contre, le deuxième terme $(\mu + \mu_t)_f \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_f$ est difficile à calculer; principalement à cause de la présence de $(\mu_t)_f$, paramètre important dans la modélisation de la turbulence, et inconnue à la frontière. On définit la tension de cisaillement à la paroi comme :

$$\tau_f = \left(\mu_t \frac{\partial U}{\partial y} \right)_f \quad (IV.24)$$

Cette tension étant bien connue, deux voies sont possibles: soit on l'injectera dans le terme source et on élimine le terme $\left(\mu_t \frac{\partial U}{\partial y} \right)_f$ de l'équation discrétisée, soit on l'utilise pour définir une viscosité apparente à la paroi.

Dans la première démarche, on obtient:

$$Su = Su' - \tau_f \Delta x \quad (IV.25)$$

où Su' est l'intégrale du terme source de l'équation complète (tableau IV.1).

Deux cas peuvent se présenter (découlant de la loi universelle donnée en deux fonctions) :

- **$y^+ > 11.63$** :

C'est la couche limite turbulente. On peut donc supposer que l'écoulement est en équilibre local, c'est-à-dire que la production est égale à la dissipation comme on l'a exprimé plus haut.

$$\varepsilon = \frac{\mu_t}{\rho} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\mu_t}{\rho} \frac{\partial U}{\partial y} \right) \frac{\partial U}{\partial y} \quad (IV.26)$$

Dans cette relation, la production n'est exprimée que par le gradient le plus important le long d'une paroi, les autres étant négligeables.

En utilisant la définition de la vitesse de frottement (III.26) :

$$\varepsilon = \frac{\tau_f}{\rho} \frac{\partial U}{\partial y} = U_\tau^2 \frac{\partial U}{\partial y} \quad (IV.27)$$

La tension de cisaillement dans la zone turbulente, peut être calculée en utilisant la définition - de la viscosité turbulente avec cette dernière relation:

$$\tau = \mu_t \frac{\partial U}{\partial y} = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial y} = C_\mu \rho \frac{k^2}{U_\tau^2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

où

$$\tau = C_{\mu} \rho \frac{k^2}{U_{\tau}^2} \quad (IV.28)$$

D'un autre côté, cette tension peut être exprimée par sa valeur à la paroi donnée par (IV.24) et liée à la vitesse de frottement:

$$\tau \cong \tau_f = \rho U_{\tau}^2 \quad (IV.29)$$

L'identification de ces deux dernières relations permet d'obtenir :

$$U_{\tau} = C_{\mu}^{1/4} k^{1/2} \quad (IV.30)$$

Cette égalité permet de calculer la vitesse de frottement en utilisant l'intensité de la turbulence (mesurée par k) pour mieux approcher le processus d'échange de quantité de mouvement dans la zone étudiée.

Avec cette égalité, on peut recalculer tous les paramètres nécessaires pour bien définir la condition aux limites:

$$y_p^+ = \frac{\rho C_{\mu}^{1/4} k^{1/2} y_p}{\mu} \quad (IV.31)$$

$$\tau = \rho U_{\tau}^2 = \rho U_{\tau} \frac{(U_p - U_f)}{(U_p - U_f)/U_{\tau}} = \frac{\rho \kappa C_{\mu}^{1/4} k^{1/2} (U_p - U_f)}{\ln(E y_p^+)} \quad (IV.32)$$

et le terme source linéarisé :

$$S_u = S_{Cu} + S_{Pu} \cdot U_p \quad (IV.33)$$

Avec:

$$S_{Pu} = - \frac{\rho \kappa C_{\mu}^{1/4} k^{1/2} \Delta x}{\ln(E y_p^+)}$$

$$S_{Cu} = S_u' + \frac{\rho \kappa C_{\mu}^{1/4} k^{1/2} U_f \Delta x}{\ln(E y_p^+)}$$

- **$y' < 11.63$** :

C'est la zone définie comme étant une zone où les forces de viscosité ne peuvent pas être négligées. La tension de cisaillement à la paroi se réduit dans ce cas à sa valeur laminaire:

$$\tau_f = \left(\mu \frac{\partial U}{\partial y} \right)_f = \rho U_\tau^2 \quad (\text{IV.34})$$

et pour faire intervenir la loi universelle dans sa partie valable pour la zone en question:

$$\tau_f = \frac{\rho U_\tau (U_p - U_f)}{y_p^+} \quad (\text{IV.35})$$

Le terme source devient alors:

$$S_u = S_{Cu} + S_{Pu} \cdot U_p \quad (\text{IV.36})$$

$$S_{Pu} = - \frac{\rho U_\tau \Delta x}{y_p^+}$$

$$S_{Cu} = S_u' + \frac{U_\tau U_f \Delta x}{y_p^+}$$

Dans le cas où la paroi est verticale, c'est la vitesse transversale V qui remplace U et on procède de la même façon que pour la paroi horizontale.

Dans la deuxième démarche, à savoir l'utilisation d'une viscosité apparente à la paroi, le terme source n'est pas modifié. On définit tout simplement une viscosité fictive à partir de la définition de τ_f et après discrétisation

$$\mu_f = \frac{\tau_f y_p}{(U_p - U_f)} \quad (\text{IV.37})$$

τ_f est alors remplacé par l'une des relations (IV.32) ou (IV.35) suivant qu'on se trouve dans la couche turbulente ou visqueuse respectivement. Cette viscosité est alors utilisée dans l'équation discrétisée de la vitesse pour déterminer le coefficient de liaison avec le noeud à la paroi.

2. Paramètres de turbulence :

Considérons, l'élément de volume frontière donné sur la figure IV.5. Nous supposons, comme pour les vitesses, que l'écoulement est en équilibre local. Le terme de production dans l'équation gouvernant le transport de l'énergie cinétique de turbulence peut se réduire à la production dans un écoulement de Couette; c'est-à-dire:

$$P_k = \mu_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \quad (\text{IV.38})$$

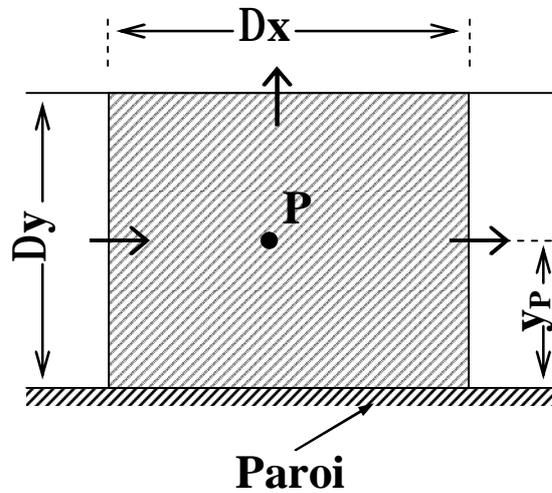


Figure IV.5. : Volume de contrôle frontière pour une variable scalaire

Cette relation peut être transformée pour faire intervenir la loi universelle:

$$P_k = \left(\mu_t \frac{\partial U}{\partial y} \right) \frac{\partial U}{\partial y} = \tau \frac{\partial U}{\partial y} \quad (\text{IV.39})$$

ou en remplaçant τ par τ_t et en utilisant les relations (IV.32) et (IV.35), on obtient la production dans les deux cas de figure considérés ici, à savoir: la couche visqueuse ($y^+ < 11,63$) et la couche turbulente ($y^+ \geq 11,63$).

L'équilibre local permet d'écrire:

$$\rho \varepsilon = \tau \frac{\partial U}{\partial y} = \rho U_\tau^2 \frac{\partial U}{\partial y} \quad (\text{IV.40})$$

ou pour faire apparaître la loi universelle:

$$\rho \varepsilon = \rho \frac{U_\tau^3 (U_p - U_f)}{y_p U_\tau} \quad (\text{IV.41})$$

On peut alors déterminer le terme source dans ces deux composantes :

$$S_k = SC_k + SP_k k_p \quad (\text{IV.42})$$

Avec :

$$SC_k = \tau \frac{(U_p - U_f) \Delta x \cdot \Delta y}{y_p}$$

τ étant donné par les relations (IV.32) et (IV.35) suivant le cas;

$$SP_k = \begin{cases} -\rho \frac{C_\mu^{3/4} k^{1/2}}{y_p} \frac{1}{\kappa} \ln(Ey_p^+) \Delta x \cdot \Delta y & \text{Si } y_p^+ \geq 11,63 \\ -\rho \frac{C_\mu^{1/2} U_\tau}{y_p} y_p^+ \Delta x \cdot \Delta y & \text{Si } y_p^+ < 11,63 \end{cases}$$

En ce qui concerne le taux de dissipation, on l'impose au premier noeud fluide, en utilisant la relation (III.23) développée au chapitre précédent, par l'intermédiaire de :

$$S_\varepsilon = SC_\varepsilon + SP_\varepsilon \varepsilon_p \quad (IV.43)$$

Avec :

$$SC_\varepsilon = 10^{30} \varepsilon_p$$

$$SP_\varepsilon = -10^{30}$$

où ε_p est la valeur du taux de dissipation au noeud P calculée par (III.23).

Le développement ci-dessus est valable seulement dans le cas où une seule paroi est présente. Si deux parois se rencontrent, leur effet est simultanément sur les paramètres de turbulence. On utilise dans ce cas la formulation suivante (fig. IV.6).

La production est influencée par les deux parois (que l'on notera h et v), ainsi que la dissipation, on peut donc écrire (simplification) :

$$P_k = \mu_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \mu_t \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \quad (IV.44)$$

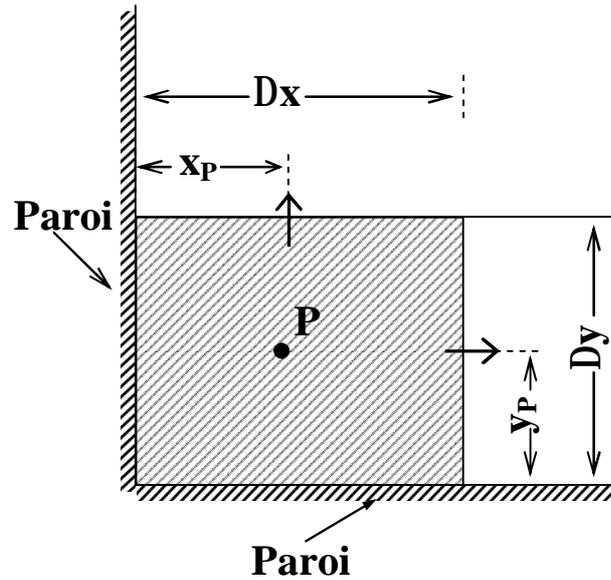


Figure IV.6. : Volume de contrôle à l'intersection de deux parois pour une variable scalaire

L'hypothèse d'équilibre local permet d'écrire :

$$\rho \varepsilon = P_k = \rho \left(U_\tau^2 \frac{\partial U}{\partial y} + V_\tau^2 \frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

Or :

$$\tau_h = \rho U_\tau^2 = \mu_t \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$\tau_v = \rho V_\tau^2 = \mu_t \frac{\partial V}{\partial x}$$

En remplaçant $\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)$ et $\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)$ par leurs expressions tirées de ces dernières relations, on obtient :

$$\rho \varepsilon = \frac{\rho^2}{\mu_t} (U_\tau^4 + V_\tau^4)$$

Où

$$\mu_t \varepsilon = \rho C_\mu k^2 = \rho (U_\tau^4 + V_\tau^4)$$

et

$$C_\mu k^2 = (U_\tau^4 + V_\tau^4) \quad (\text{IV.45})$$

Cette dernière relation ne permet pas de déterminer U_τ et V_τ .

On peut lier U_τ et V_τ aux vitesses moyennes par la relation suivante :

$$\frac{U_\tau}{V_\tau} \sqrt{\frac{\tau_{fh}}{\tau_{fv}}} = \sqrt{\frac{\mu_t (\partial U / \partial y)}{\mu_t (\partial V / \partial x)}} = \sqrt{\frac{(\partial U / \partial y)}{(\partial V / \partial x)}} = F_p \quad (\text{IV.46})$$

ce qui permet de déduire:

$$V_\tau = \frac{1}{(1 + F_p^4)^{1/4}} C_\mu^{1/4} k^{1/2} \quad (\text{IV.47})$$

$$U_\tau = \frac{F_p}{(1 + F_p^4)^{1/4}} C_\mu^{1/4} k^{1/2} \quad (\text{IV.48})$$

ou en terme source :

$$S_k = SC_k + SP_k k_p \quad (\text{IV.49})$$

Avec :

$$SC_k = \left[\tau_{fh} \frac{(U_p - U_{fh})}{y_p} + \tau_{fv} \frac{(V_p - V_{fv})}{x_p} \right] \Delta x \cdot \Delta y$$

$$SP_k = \frac{-C_\mu^{3/4} k_p^{1/2}}{\kappa (1 + F_p^4)^{1/4}} \left[\frac{F_p^3}{y_p} \ln(Ey_p^+) + \frac{1}{x_p} \ln(Ex_p^+) \right] \Delta x \cdot \Delta y$$

$$\tau_{fh} = \rho \frac{1}{(1 + F_p^4)^{1/4}} C_\mu^{1/4} k^{1/2} \kappa \frac{(U_p - U_{fh})}{\ln(Ey_p^+)}$$

$$\tau_{fv} = \rho \frac{1}{(1 + F_p^4)^{1/4}} C_\mu^{1/4} k^{1/2} \kappa \frac{(V_p - V_{fv})}{\ln(Ex_p^+)}$$

Ces équations ont été écrites pour le cas où le noeud en question est dans la couche limite turbulente. Dans l'autre cas (sous-couche visqueuse) des relations analogues peuvent être obtenues sans trop de difficulté.

On effectue un développement analogue pour le taux de dissipation à partir de l'hypothèse d'équilibre local pour aboutir à l'expression de ϵ_p utilisable dans la relation (IV.43) :

$$\varepsilon_p = \frac{F_p}{(1 + F_p^4)^{1/4}} \frac{C_\mu^{1/4} k^{1/2}}{\kappa} \sqrt{\frac{1}{y_p^+} + \frac{1}{F_p^2 x_p^2}} \quad (\text{IV.50})$$

La même remarque concernant les deux cas de couche limite est aussi valable ici.

3. Température

Pour la température, la condition aux limites pour une frontière de type paroi est donnée par la relation (III.30) du chapitre précédent. On procède, comme pour la vitesse parallèle à une paroi, par discrétiser le terme de diffusion (avec conductibilité thermique turbulente) pour obtenir un gradient à la paroi. Cette dernière, inconnue, est alors injectée dans le terme source par l'intermédiaire d'un flux turbulent que l'on doit calculer suivant le cas : couche limite turbulente ou sous-couche visqueuse.

La définition de la température "de frottement" ou, d'une façon plus propre, la température de flux T_τ permet d'écrire:

$$\phi_f = \rho C_p U_\tau T_\tau \quad (\text{IV.51})$$

ou, en transformant:
$$\phi_f = \rho C_p U_\tau \frac{(T_p - T_f)}{(T_p - T_f)/T_\tau}$$

Avec la loi "pseudo" universelle de température, cette dernière relation devient:

$$\phi_f = \rho C_p C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} \frac{(T_p - T_f)}{\text{Pr}_t \left[\frac{1}{\kappa} \ln(E y_p^+) + P \right]} \quad (\text{IV.52})$$

P étant donnée par :
$$P = 9,24 \left[\left(\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} \right)^{3/4} - 1 \right] \left(1 + 0,28^{-0,007 \text{Pr}/\text{Pr}_t} \right)$$

En termes sources

$$S_T = S_{C_T} + S_{P_T} T_p \quad (\text{IV.53})$$

Avec :

$$S_{C_T} = \rho C_p C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} \frac{T_f}{\text{Pr}_t \left[\frac{1}{\kappa} \ln(E y_p^+) + P \right]} \Delta x$$

$$SP_T = \rho C_p C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} \frac{1}{Pr_t \left[\frac{1}{\kappa} \ln(Ey_p^+) + P \right]} \Delta x$$

Ces relations ont été écrites pour le cas où c'est la loi logarithmique qui est d'application. Dans la couche visqueuse, les relations sont identiques et seule la forme de la loi universelle change. De même pour une paroi verticale, il suffit de remplacer U par V et y par x.

Ce développement est valable pour le cas où c'est la température de paroi qui est connue. Si ce n'est pas le cas (flux imposé), on calcule directement le terme source en fonction de ϕ_f égal au flux à la paroi (la loi universelle sert dans ce cas au calcul de la température de paroi).

$$S_T = SC_T + SP_T T_p \quad (IV.54)$$

Avec :

$$SC_T = \phi_f \Delta x$$

$$SP_T = 0$$

<i>Application I :</i>	68
<i>Écoulement turbulent à travers un échelon</i>	68
V.1. Problème et géométrie	68
V.2. Résultats et discussion	69
V.2.1. Maillage	69
V.2.2. Structure de l'écoulement	70
V.2.3. pression et paramètres de la turbulence	73
V.2.4. Comparaisons avec les résultats expérimentaux	75

Application I :

Écoulement turbulent à travers un échelon

V.1. Problème et géométrie

La première application type, où des résultats expérimentaux existent, est l'écoulement turbulent à travers un échelon.

Il s'agit d'un conduit avec un élargissement brusque constituant une zone morte où une recirculation peut se développer. L'importance de cette zone est, un des critères utilisés pour juger la validité du modèle de turbulence à prédire correctement des écoulements complexes. Nous commençons par présenter la géométrie sur la figure V.1, ainsi que les conditions aux limites utilisées et spécialement les conditions à l'entrée où on donne des profils expérimentaux pour la vitesse horizontale U et pour l'énergie cinétique de la turbulence k , en ce qui concerne la composante transversale de la vitesse qui est nulle. La vitesse moyenne à l'entrée est imposée à 17,8 m/s (équivalent à un nombre de Reynolds basé sur la hauteur H de l'échelon de 44 500) pour permettre la comparaison avec l'expérience de KIM, KLINE et JOHNS TON [18]. Il faut signaler ici, que les résultats expérimentaux utilisés ci-dessous ont été tirés des références [19, 20] qui utilisent les mêmes résultats de [18] et qui les présentent d'une façon plus claire.

Les paramètres géométriques du problème sont les suivants :

- hauteur de l'échelon H : 3,81 cm;
- distance parcourue avant l'échelon: 15,24 cm (4 H);
- distance parcourue derrière l'échelon: 95,25 cm (25 H);
- largeur du canal à l'entrée: 7,62 cm (2 H).

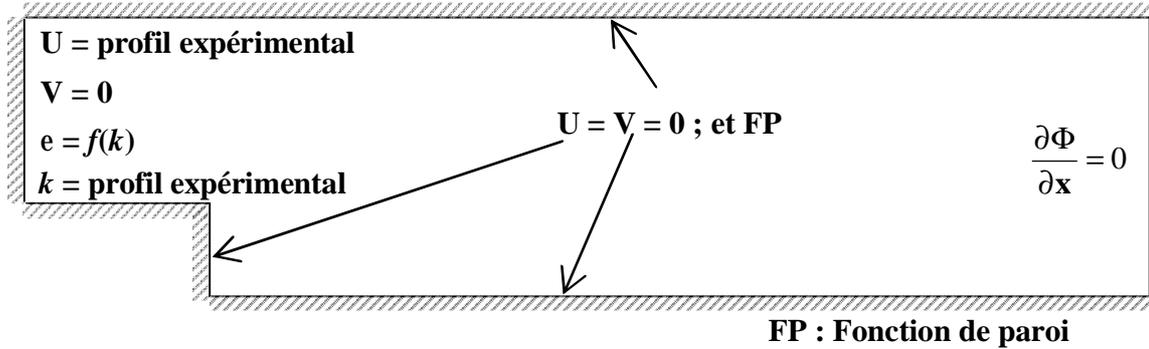


Figure V.1 : Géométrie et conditions aux limites

Les Equations fondamentales modélisant le problèmes sont les même que dans le chapitre II.

V.2. Résultats et discussion

V.2.1. Maillage

On montre sur la figure V.2 le maillage non uniforme utilisé (110x80). Nous avons baser notre choix du maillage sur celui de (37 x 34) utilisé dans [20] et celui de (42 x 42) donné dans [19], pour considérer les résultats comme fiables de ce point de vue.

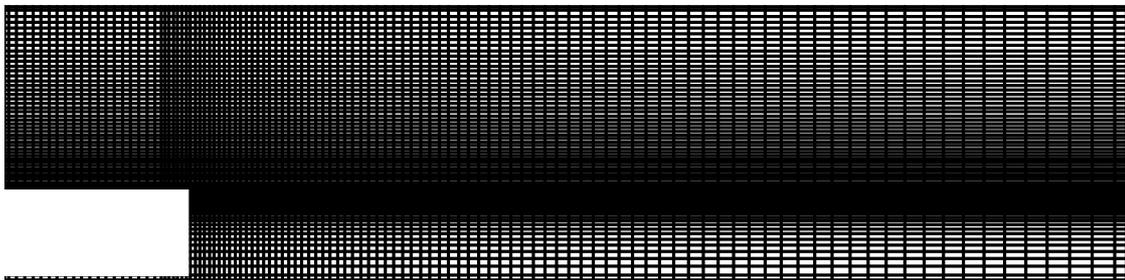


Figure V.2 : Maillage non uniforme (110x80)

Les résultats obtenus sont comparés avec l'expérience de [18] d'un côté et avec les calculs de [19,20]. Il faut noter, avant d'entamer la comparaison, que des conditions d'écoulements développés (non spécifiés) sont utilisées dans [19] comme conditions à l'entrée et que [20] impose des profils uniformes à 5 H seulement avant l'échelon. Ceci pour mieux saisir la différence avec les présentes conditions opératoires qui donnent un profil expérimental, à 4 H avant l'échelon.

V.2.2. Structure de l'écoulement

Nous commençons par une comparaison qualitative sur les figures V.3 et V.4 où on a représenté le champ de vitesse et les lignes de courant calculés. Sur la figure V.3, on compare le champ de vitesse dans la zone de recirculation (agrandissement sur la figure V.3a) calculé dans le présent travail avec celui obtenu avec le même modèle $k-\epsilon$ dans [20]. La même chose est faite sur la figure V.4 pour les lignes de courant. On constate la bonne concordance entre les deux calculs et spécialement en ce qui concerne l'importance de la zone de recirculation. Celle-ci est caractérisée par la longueur de rattachement X_r (distance entre l'échelon et le point où le courant principal vient frapper la paroi) qui constitue, comme on l'a signalé précédemment un critère important de jugement en faveur ou défaveur des différents modèles de turbulence.

Le présent calcul fournit une longueur de rattachement de $6,23H$ à comparer avec l'expérience qui fournit une longueur se situant autour de $7H$. Il est bien établi en plus que la longueur X_r calculée par des modèles de turbulence de type $k-\epsilon$ est de l'ordre de $5-5,5 H$ (tableau V.1). La raison de cette différence n'est pas très claire et différents chercheurs ont essayé de modifier le modèle $k-\epsilon$, pour mieux approcher la réalité, par l'incorporation de termes supplémentaires ou la modification des constantes avec plus ou moins de succès. Il n'existe cependant pas de consensus sur le sujet. Il faut noter que ce défaut se retrouve le plus souvent dans les modèles supérieurs de type RSM par exemple. Ceci permet de délimiter les directions d'investigation en vue de l'amélioration du modèle en se concentrant sur les points communs entre les deux modèles (équation de ϵ par exemple).

Pour plus d'informations sur le sujet, on peut se reporter sur [8], d'où certaines informations données dans le tableau V.1 ont été retirées.

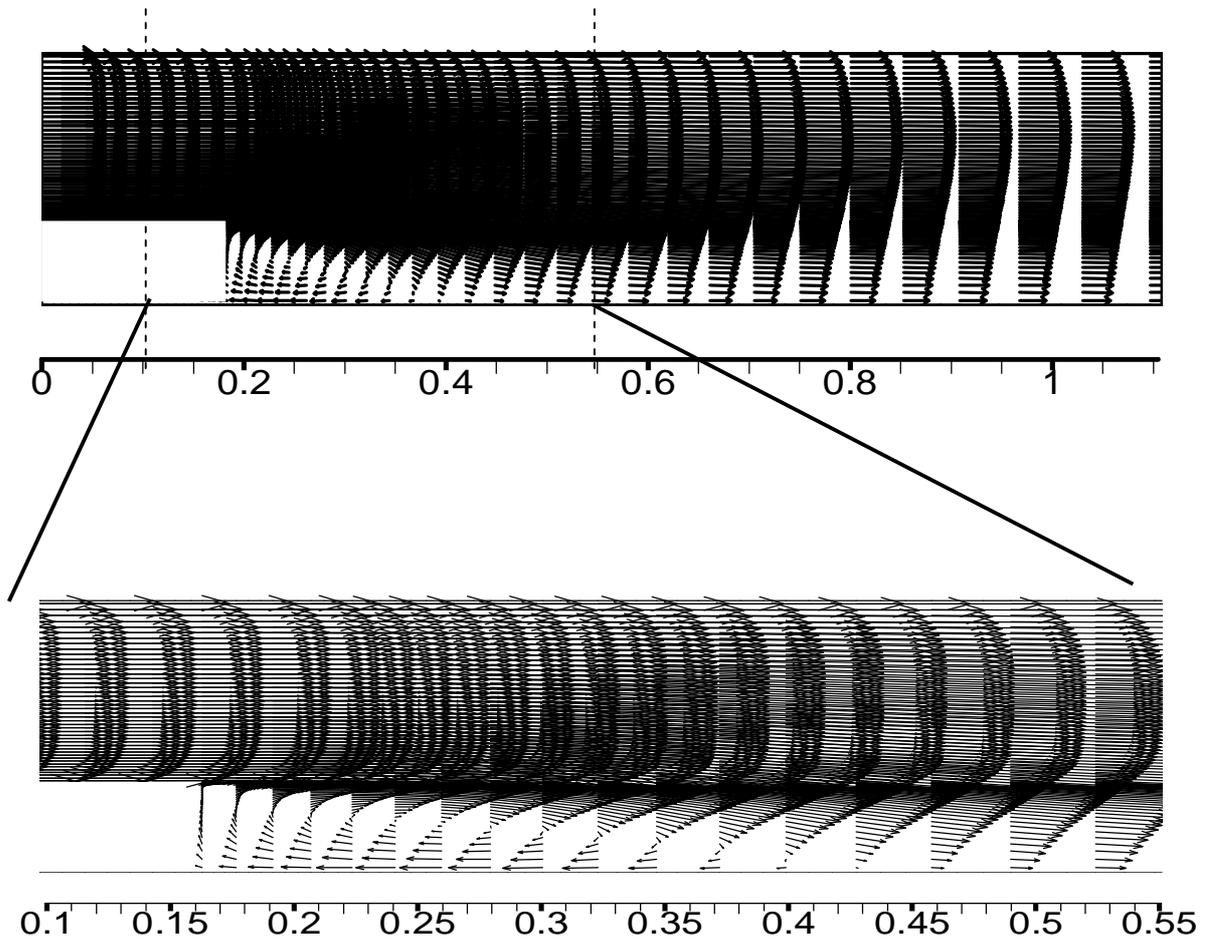


Figure V.3a : Champ de vitesse avec agrandissement de la zone de recirculation

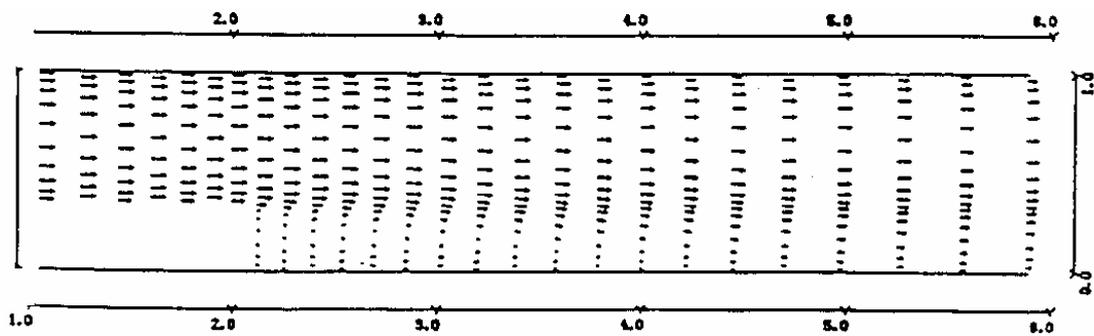


Figure V.3b : Champ de vitesse dans la zone de recirculation calculé dans [20]

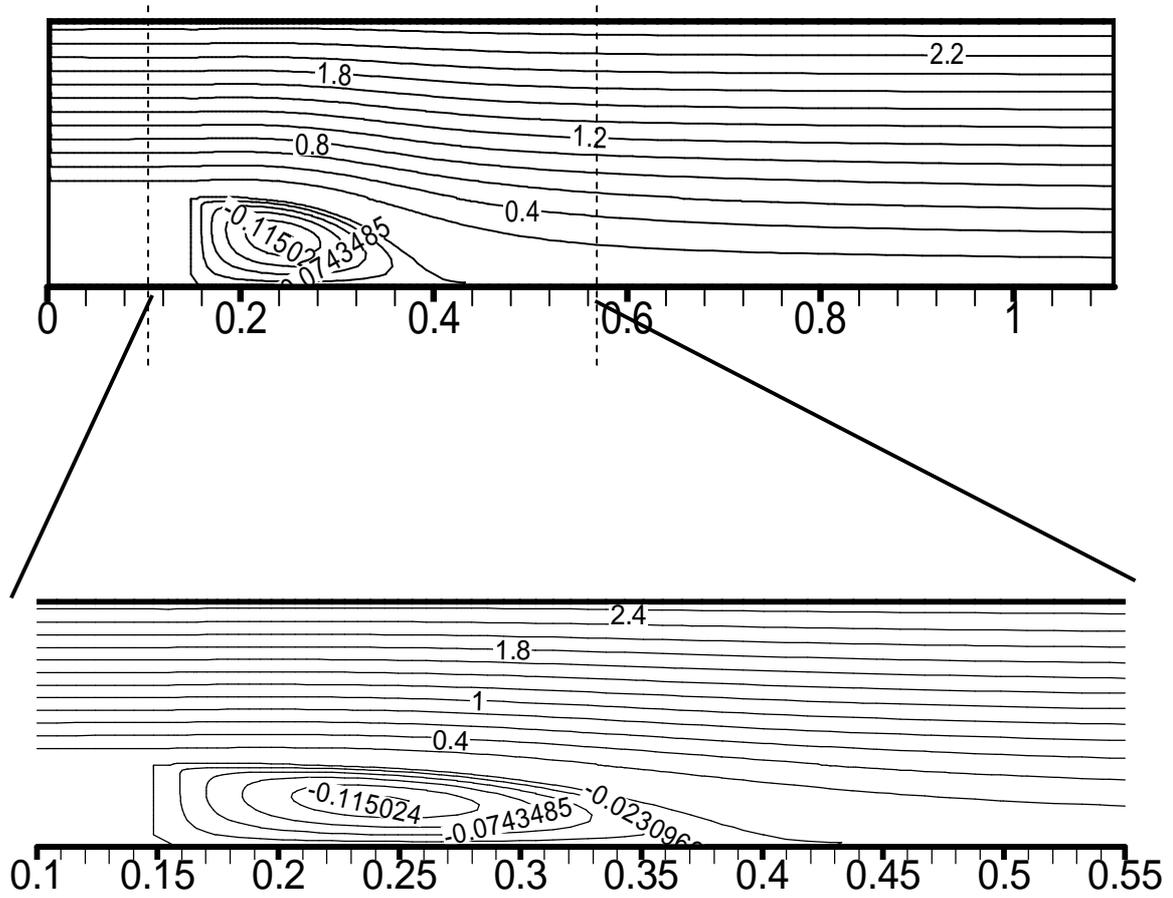


Figure V.4a : Lignes de courant avec agrandissement de la zone de recirculation

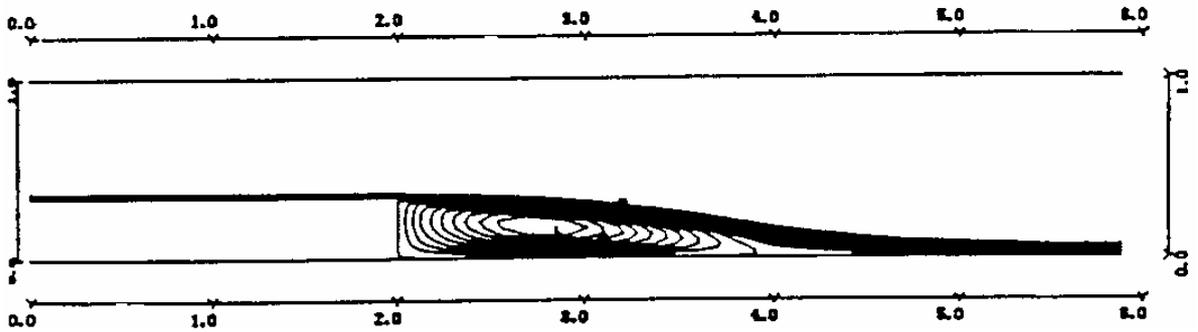


Figure V.4b : Lignes de courant dans la zone de recirculation calculées dans [20]

Tableau V.1		
Longueur de rattachement		
<i>Référence</i>	<i>Xr / H</i>	<i>Observations</i>
KIM, KLINE, JOHNSTON [18]	7,0 ± 1,0	Résultat expérimental
POLLARD [59] dans [8]	5,88	modèle <i>k-ε</i> standard
RaDI et coll. [60] dans [8]	5,80	modèle <i>k-ε</i> standard
LAUNDER et coll. [61] dans [8]	6,90	modèle algébrique (ASM)
SPALDING et coll. [62] dans [8]	6,00	modèle <i>k-ε</i> standard
DEMIRDZIC et coll. [63] dans [8]	6,20	modèle <i>k-ε</i> modifié (pour faibles nombres de Reynolds)
DONALDSON [64] dans [8]	6,10	modèle de second ordre (RSM)
ILEGBUSI et coll. [65] dans [8]	7,2	modèle <i>k-ε</i> et <i>k-ω</i> (pour faibles nombres de Reynolds)
NALLASAMY et coll. [66] dans [8]	5,8	modèle <i>k-ε</i> standard
SYDED et coll. [67] dans [8]	5,8	modèle <i>k-ε</i> standard
AMANO et coll. [19]	5,5	modèle de second ordre (RSM)
BENOCCI [20]	5,8	modèle <i>k-ε</i> avec un schéma hybride
	4,2	modèle <i>k-ε</i> avec correction de la viscosité turbulente pour la prise en compte de la diffusion numérique
KAUL et coll. [21]	5,1	modèle <i>k-ε</i> avec correction de la diffusion
Résultat actuel	6,23	modèle <i>k-ε</i> standard

V.2.3. pression et paramètres de la turbulence

Pour finir cette comparaison qualitative, on donne sur les figures V.5, V.6 et V.7 les résultats

du présent calcul en ce qui concerne le champ de pression (pour rappel: la pression est fixée à zéro à l'entrée), la répartition de l'énergie cinétique de turbulence et celle de son taux de dissipation respectivement.

On voit ainsi que la dépression se situe dans la zone de recirculation juste derrière l'échelon et que l'énergie cinétique de turbulence est maximale dans la même zone (ainsi que le taux de dissipation) et plus spécialement dans la couche de mélange où le cisaillement est le plus important (la couche de mélange est une couche mince suivant la ligne de courant qui sépare la zone de recirculation du reste de l'écoulement et qui délimite la longueur de rattachement. C'est dans cette couche que les gradients de vitesses sont les plus importants, et pour cela, nous avons raffiné le maillage dans cette zone).

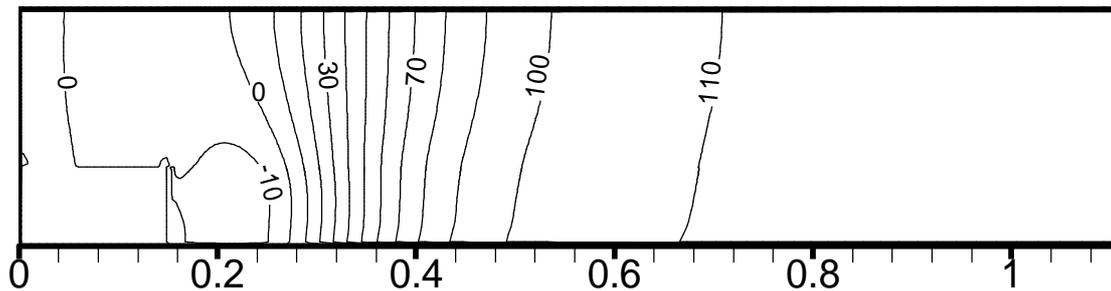


Figure V.5 : Champ de pression

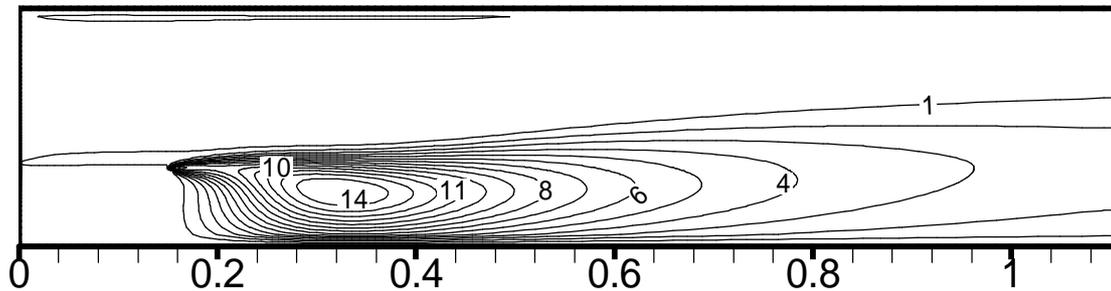


Figure V.6 : Répartition de l'énergie cinétique de turbulence

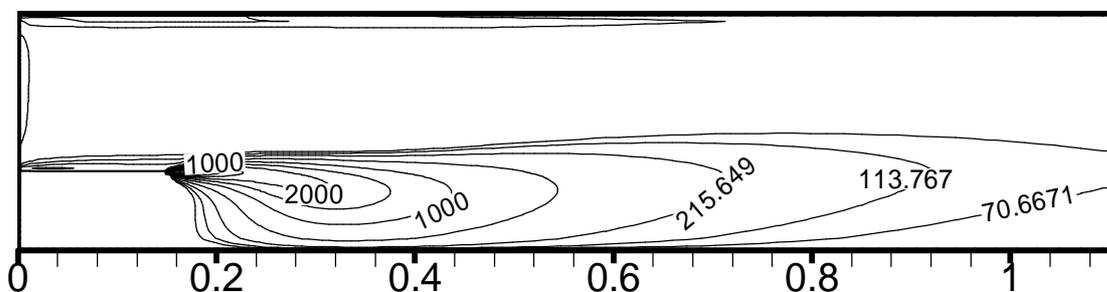


Figure V.7 : Répartition du taux de dissipation de k

V.2.4. Comparaisons avec les résultats expérimentaux

Nous procéderons maintenant à une comparaison quantitative avec l'expérience et nous commençons par la pression. Sur la figure V.8 on présente l'évolution du coefficient de pression, défini comme:

$$C_p = \frac{P - P_0}{1/2\rho U^2}$$

en fonction de la distance horizontale x réduite par la hauteur de l'échelon H (abscisse 0 correspond à l'emplacement de l'échelon).

On compare le calcul actuel avec les résultats expérimentaux tirés directement de [18] et avec les calculs de [20] et [22].

On constate que la concordance expérience- calcul est globalement bonne. Dans la zone de recirculation, le présent calcul donne un C_p un peu différent à l'expérience et aux autres calculs. Ceci s'explique par la méthode numérique utilisée. Il est, en effet, bien établi qu'une diffusion numérique apparaît dans les zones où les lignes du maillage ne suivent plus les lignes de courant.

Cette diffusion peut même atteindre une proportion importante de la diffusion turbulente (20-25 %). Des méthodes de correction ont été développées pour palier à cet inconvénient, soit par l'incorporation d'une diffusion artificielle pour compenser la diffusion numérique, soit par modification du schéma d'interpolation (tableau IV.2) en privilégiant les schémas d'ordre supérieur, plus précis mais moins stables [64, 65]. Les deux calculs présentés sur la figure V.8b utilisent des corrections pour la diffusion. Une deuxième remarque concerne la zone de rattachement où le coefficient de pression croît rapidement. On remarque que les trois calculs fournissent des résultats légèrement décalés par rapport à l'expérience. Ceci est dû à la sous-estimation de la longueur de rattachement.

Les figures V.9, V.10 et V.11 présentent les profils de la composante longitudinale de la vitesse pour différentes distances à l'échelon: 2,67H, 5,33H et 9,78H respectivement. Les résultats expérimentaux donnés sur ces figures ont été tirés de [19] qui fait référence au rapport original de [18]. Sur les figures V.9a et V.9b, on compare le présent calcul avec le calcul de [19] et avec l'expérience.

On constate la nette amélioration obtenue dans le cadre de cette thèse. Celle-ci peut être due (entre autres) aux conditions initiales adoptées pour chacun des calculs. Les figures V.10 montrent la même comparaison et on voit toujours la même amélioration. On présente en plus, sur ces mêmes figures, le calcul de [20] donné pour un X de 5,2H au lieu de 5,33H. Dans [20], l'auteur compare (favorablement) son calcul avec l'expérience à 5,2H en faisant référence à [18] alors que ce dernier ne fournit que des résultats à 5,33H. Nous accordons plus de poids aux résultats expérimentaux tirés de [19] qui, comme on l'a signalé plus haut, fait référence au travail original de [18] et c'est avec ces mêmes résultats que nous comparons le calcul de [20] (figures V.10) où on voit la discordance, sauf dans la zone de recirculation où la correction de la diffusion apporte une amélioration. Pour finir avec la vitesse, on montre sur les figures V.11 les résultats du présent travail pour un X de 9,78H ainsi que le calcul de [19] et l'expérience. Les calculs de [19] sont dans ce cas meilleurs et ceci peut s'expliquer par les conditions de sortie où celles-ci sont imposées à une distance de 25H dans le cadre de ce travail, alors que [19] utilise une distance de 120H. Ce qui est évidemment meilleur. Il y a en plus les conditions

à l'entrée qui peuvent aussi jouer un rôle. Nous pouvons donc conclure à partir de ces trois figures que le présent calcul est fiable et se compare favorablement avec l'expérience.

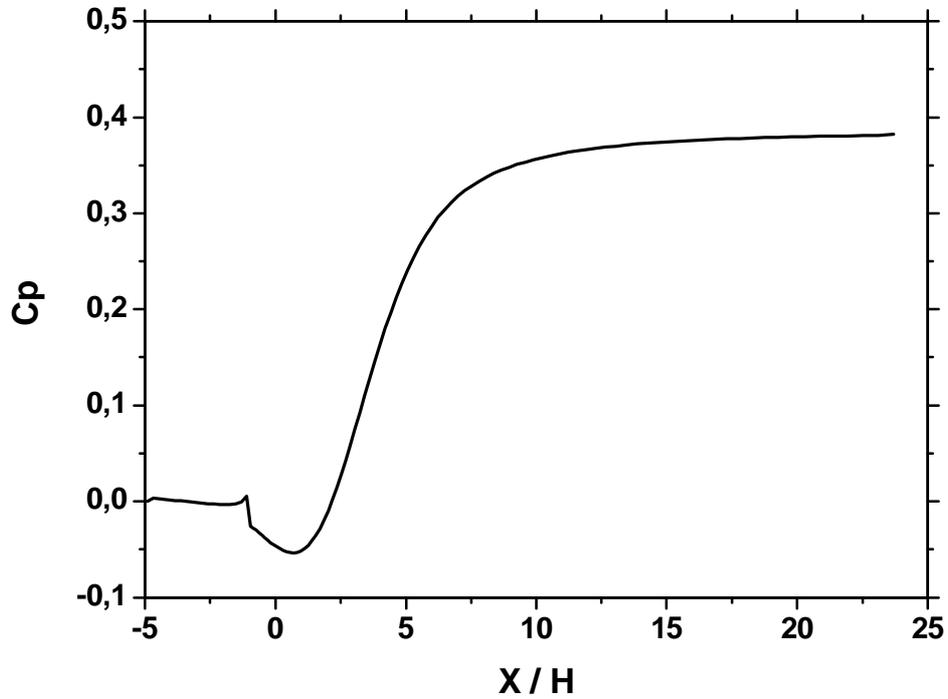


Figure V.8a : Evolution du coefficient de pression le long du canal

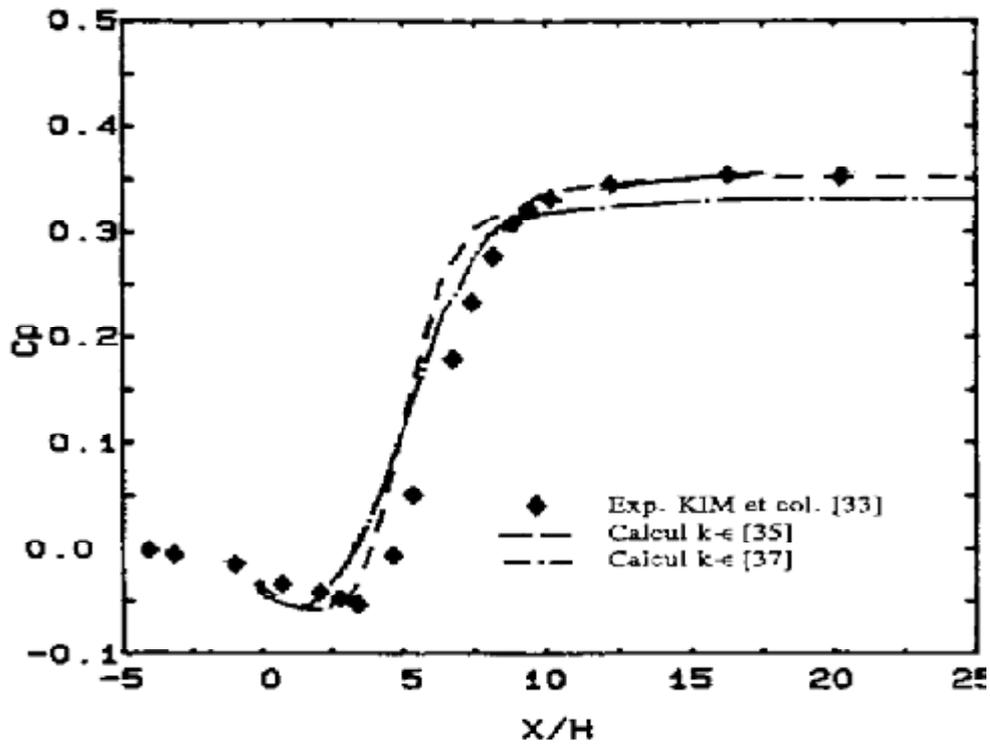


Figure V.8b : Evolution du coefficient de pression le long du canal (comparaison)

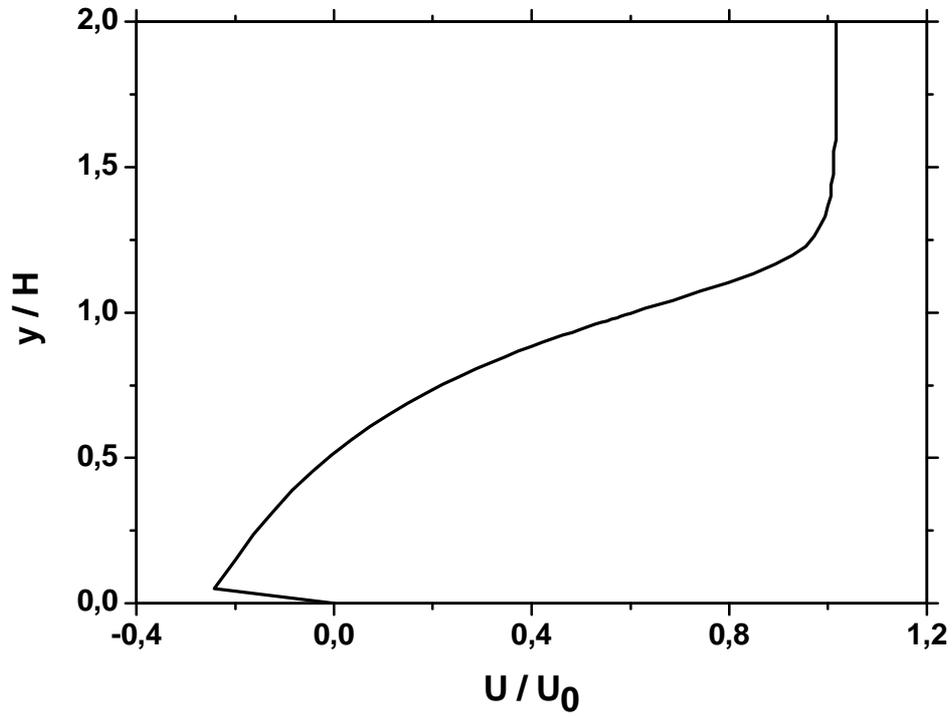


Figure V.9a : Profil de vitesse U derrière l'échelon ($X=2,67H$)

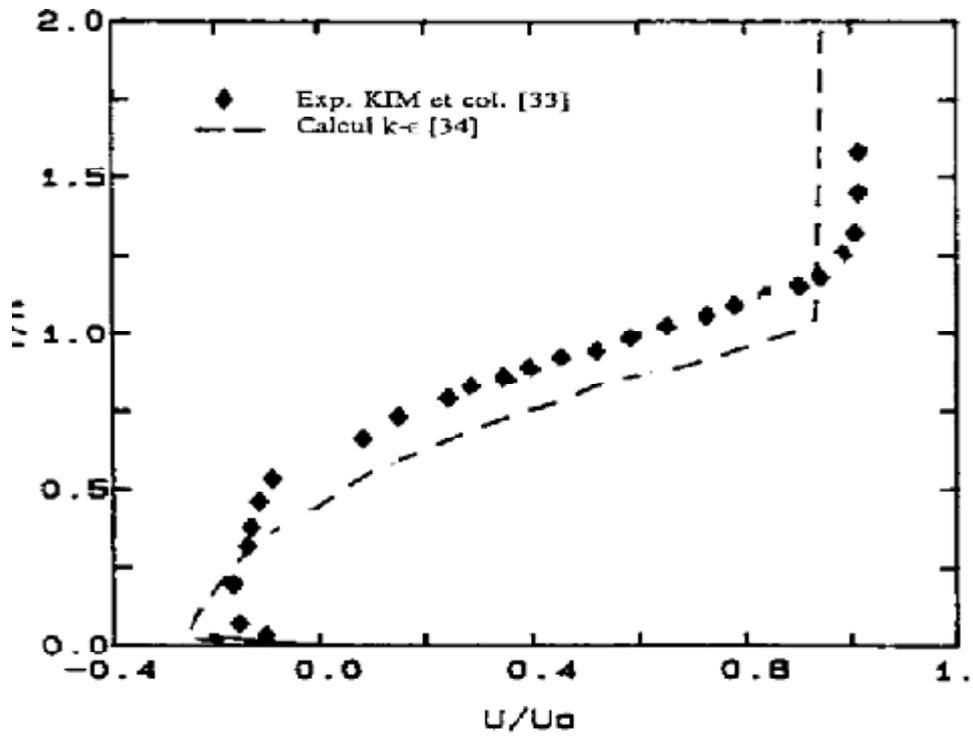


Figure V.9b : Profil de vitesse U derrière l'échelon ($X=2,67H$, comparaison)

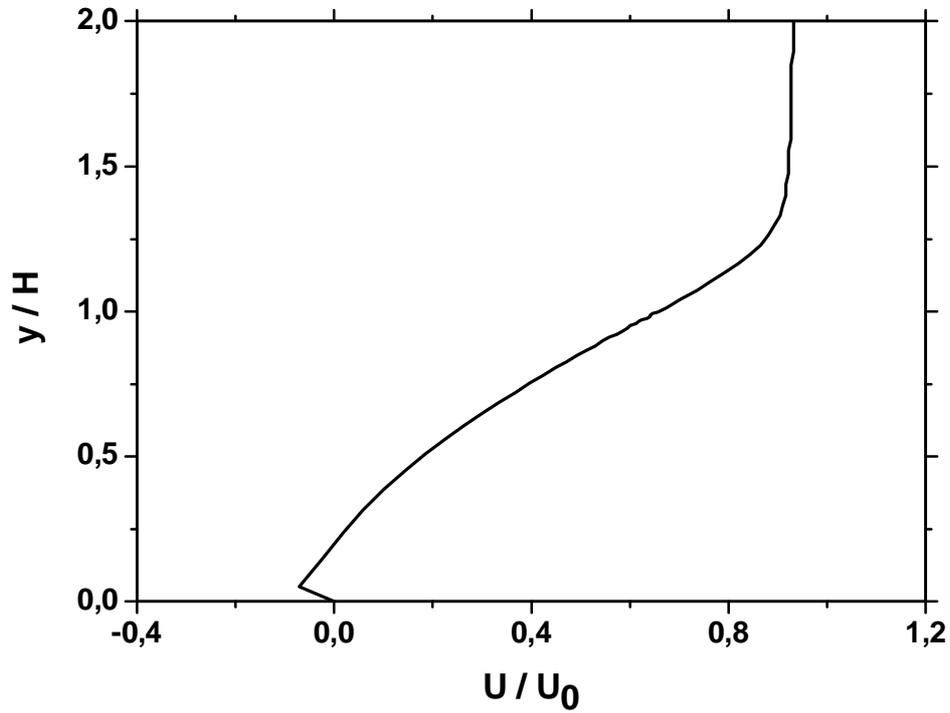


Figure V.10a : Profil de vitesse U derrière l'échelon ($X=5.33H$)

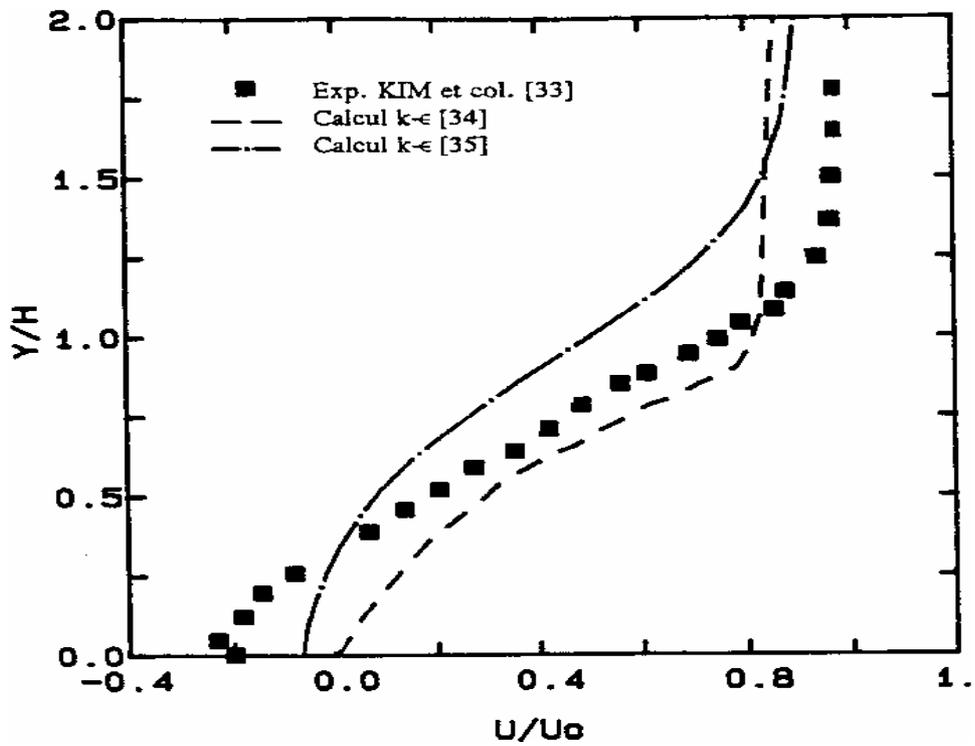


Figure V.10b : Profil de vitesse U derrière l'échelon ($X=5.33H$)

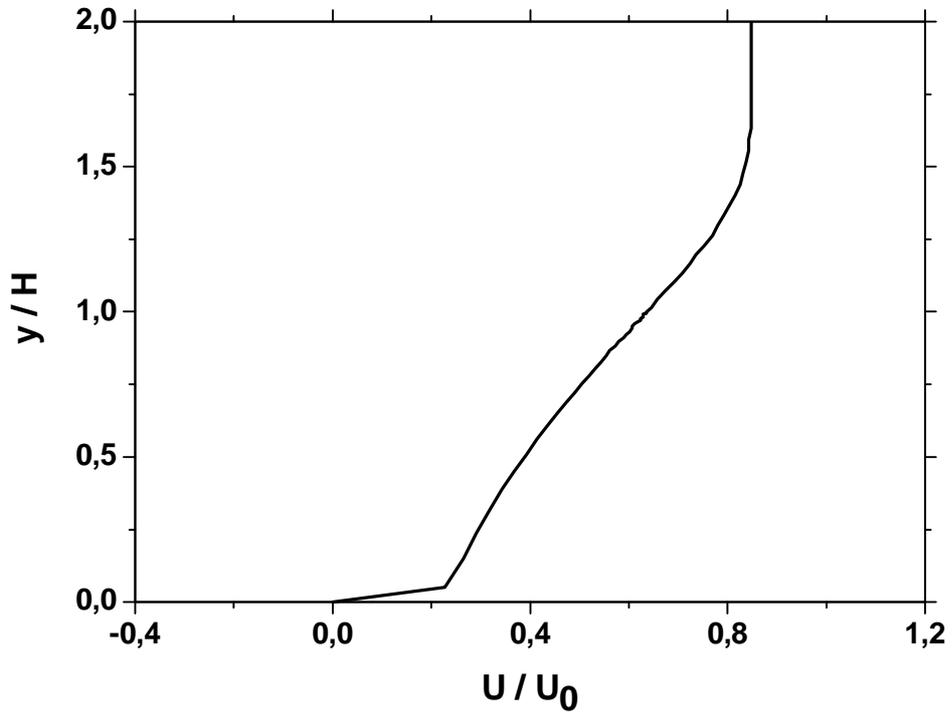


Figure V.11a : Profil de vitesse U derrière l'échelon ($X=9,78H$)

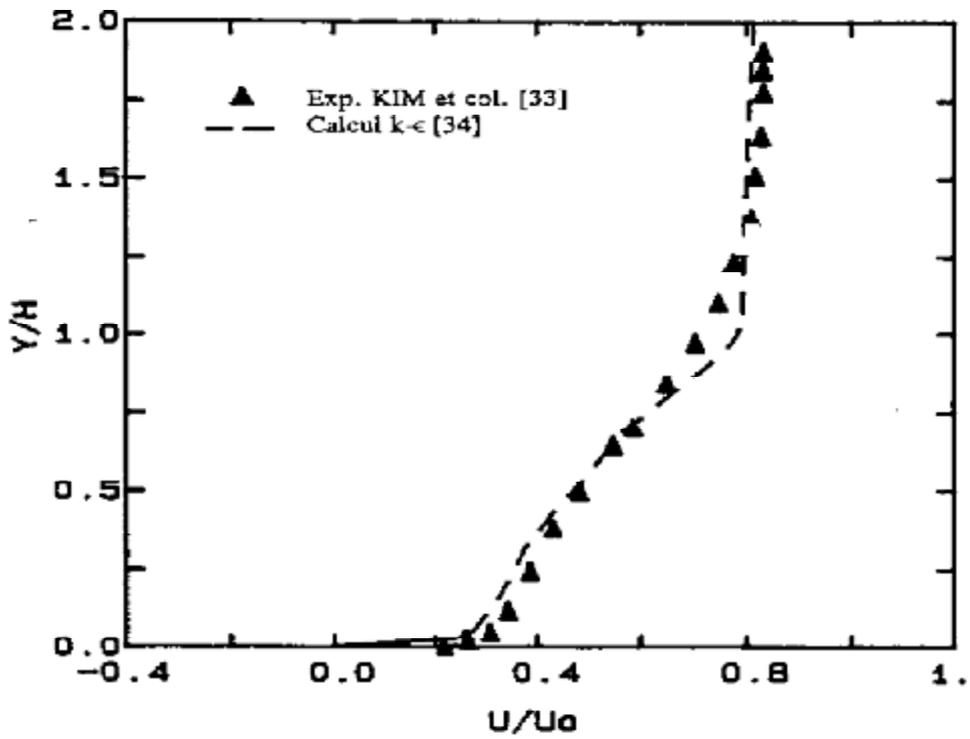


Figure V.11b : Profil de vitesse U derrière l'échelon ($X=9,78H$, comparaison)

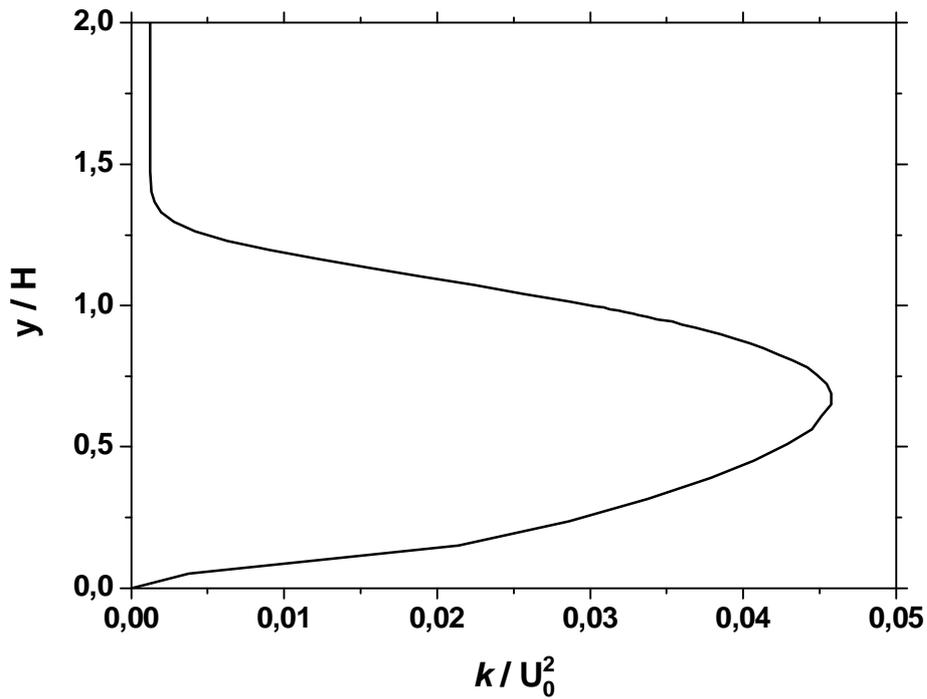


Figure V.12a : Profil de l'énergie cinétique de turbulence ($X=5,33H$)

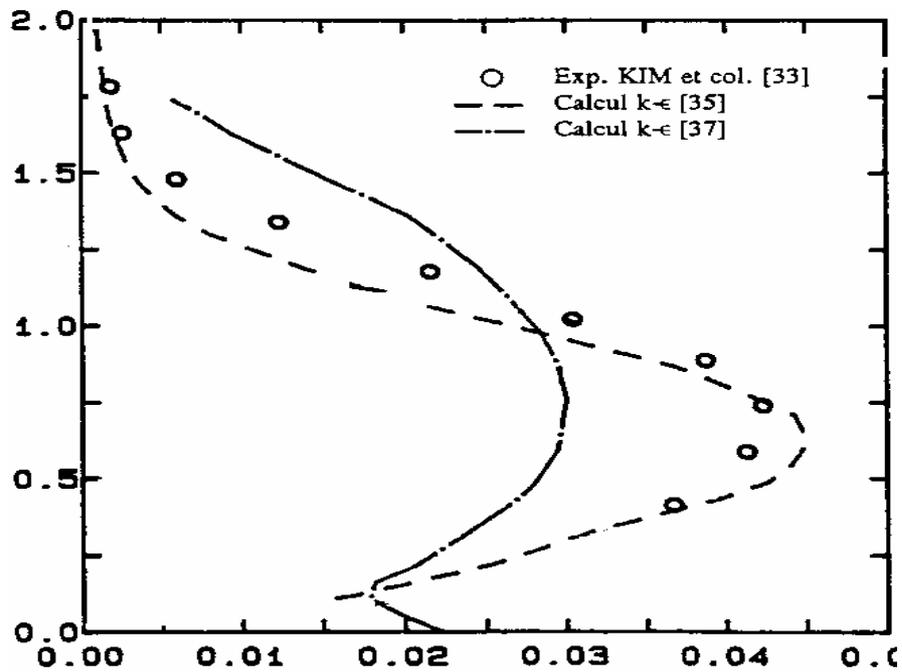


Figure V.12b : Profil de l'énergie cinétique de turbulence ($X=5,33H$, comparaison)

Pour terminer cette discussion sur le côté cinématique du problème, nous donnons sur les

figures V.12 les profils expérimentaux et calculés de l'énergie cinétique de turbulence réduite par le carré de la vitesse à l'entrée. La comparaison entre le présent calcul et l'expérience (tirée cette fois de [20] parce que non donnée dans [19]) est acceptable comparée au calcul de [22]. Le meilleur calcul étant celui de [20]. La différence entre l'expérience et le calcul peut ici aussi s'expliquer par plusieurs facteurs: diffusion numérique, conditions à l'entrée, etc. Pour conclure, nous pouvons dire que le code développé dans le cadre de cette thèse permet un calcul fiable des différents paramètres cinématiques d'un écoulement turbulent.

<i>Application II :</i> _____	83
<i>Etude de la convection mixte en 3D : Effet de l'inclinaison et du nombre de Grashof</i> ____	83
V.3. Problème et formulation mathématique _____	83
V.4. Résultats et discussion _____	87
V.4.1. Structure de l'écoulement secondaire et du champ thermique _____	87
V.4.2. Développement des profils de la vitesse axiale _____	94
V.4.3 Evolution axiale du nombre de Nusselt moyen et la contrainte de cisaillement moyenne _____	95

Application II :

Etude de la convection mixte en 3D : Effet de l'inclinaison et du nombre de Grashof

V.3. Problème et formulation mathématique

Nous considérons dans cette deuxième application, l'écoulement dans un tube circulaire incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal. Le tube est chauffé par un flux de chaleur q constant et uniforme (figure V.13). Le fluide entre dans le tube avec un profil de vitesse parabolique et une température uniforme T_0 . Le mode de convection mixte, forcée et libre, est considéré.

Cette situation a suscité un intérêt important qui s'est traduit par un très grand nombre de publications, en raison de diverses applications industrielles d'une part, telles que : les échangeurs de chaleur compacts, chauffe-eau à énergie solaires, refroidissement des composants électroniques. D'autre part, la compréhension des phénomènes physiques qu'accompagnent l'interaction de la convection forcée et naturelle constitue en soi un objectif d'envergure.

Les hypothèses simplificatrices suivantes sont retenues :

- L'écoulement est permanent et laminaire.
- Le fluide est newtonien et incompressible. Ses propriétés thermo- physique sont constantes sauf pour la densité dans les termes générateurs de la convection libre ou une variation linéaire avec la température est adoptée.
- La dissipation visqueuse due aux frottements dans le fluide ainsi que le rayonnement sont négligeables.

Les Equations fondamentales s'écrivent alors de la façon suivante sous forme adimensionnelle

- *Equation de continuité :*

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rU)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{V.1})$$

- *Equation de quantité de mouvement :*

Selon z :

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + V \frac{\partial V}{\partial z} + U \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{W}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rV)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \right] + \frac{\text{Gr}_q}{\text{Re}^2} T \sin(\alpha) \quad (\text{V.2})$$

Selon r :

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + V \frac{\partial U}{\partial z} + U \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{W}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{W^2}{r} = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rU)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right] + \frac{\text{Gr}_q}{\text{Re}^2} T \cos(\alpha) \cos(\theta) \quad (\text{V.3})$$

Selon θ :

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} + V \frac{\partial W}{\partial z} + U \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{W}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{UW}{r} = - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rW)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right] - \frac{\text{Gr}_q}{\text{Re}^2} T \cos(\alpha) \sin(\theta) \quad (\text{V.4})$$

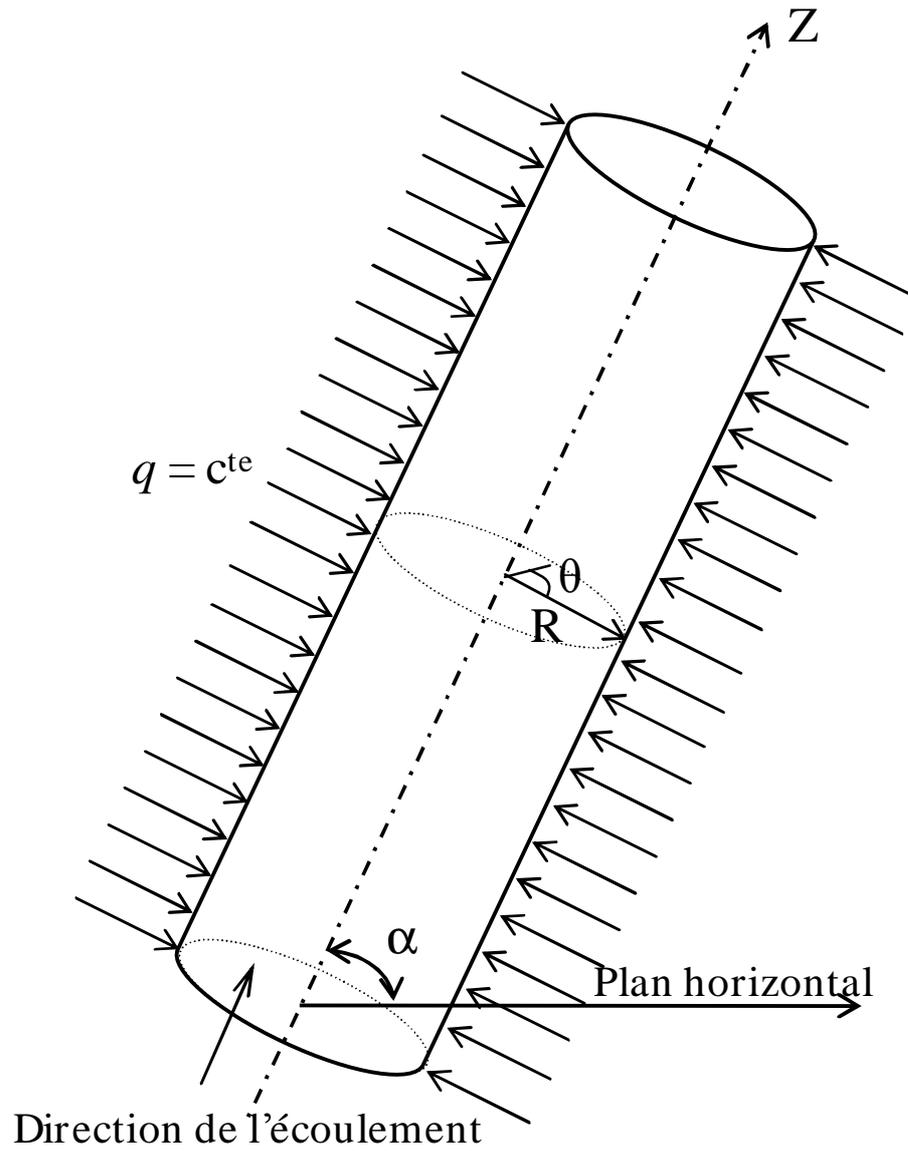


Figure V.13 : Configuration géométrique du problème considéré

- Equation d'énergie :

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + V \frac{\partial T}{\partial z} + U \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{W}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{1}{\text{RePr}} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (rT)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right] \quad (\text{V.6})$$

Ce système d'équations est elliptique dans les trois directions. Il est soumis aux conditions aux limites suivantes :

- Sur la paroi du tube (à $r = 0.5$) :

$$U = V = W = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 1$$

- A l'entrée du tube (à $z = 0$.):

$$V = W = 0$$

$$U = \text{profil parabolique}$$

$$T = 0$$

Le taux d'échange de chaleur convectif et le frottement a la paroi sont des quantités physiques d'intérêt pratique considérable. Ils sont exprimés à l'aide des nombres de Nusselt et des contraintes de cisaillement pariétal.

- Nombre de Nusselt local (fonction de z et θ) :

$$\text{Nu}_\theta = \frac{1}{T_\theta - T_b} \quad (\text{V.7})$$

- Nombre de Nusselt moyen à une section donnée (fonction de z) :

$$\text{Nu}_z = \frac{1}{T_z - T_b} \quad (\text{V.8})$$

Où T_b est la température de mélange du fluide à la section considérée. T_θ et T_z , désignent respectivement la température locale de la paroi du tube et sa moyenne circonférentielle a une position axiale donnée. T_z , est défini comme suit :

$$T_z = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_\theta d\theta \quad (\text{V.9})$$

De même, la contrainte de cisaillement locale et sa moyenne circonférentielle sont :

$$\tau_\theta = \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=0.5} \quad (\text{V.10})$$

$$\tau_z = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau_\theta d\theta \quad (\text{V.11})$$

V.4. Résultats et discussion

Plusieurs simulations numériques ont été effectuées. Elles couvrent des situations où le tube est horizontal, vertical, incliné à 30° et à 60° et où le chauffage pariétal imposé correspond à des nombres de Grashof de 10⁴, 10⁵ et 10⁶. Le nombre de Reynolds est de 500. Le fluide utilisé est de l'eau (Pr = 7).

Pour la présentation des résultats, nous avons retenu les six positions longitudinales indiquées dans le tableau V.2.

V.4.1. Structure de l'écoulement secondaire et du champ thermique

Tout d'abord, il faut noter qu'en absence de convection naturelle, l'écoulement secondaire est purement radial et est associé uniquement au développement de la couche limite hydrodynamique. Lorsqu'on tient compte des termes de force de volume dans les équations de quantité de mouvement, la situation est totalement différente. Dans ce cas l'écoulement secondaire est présent à cause de l'effet combiné des différentes forces (forces d'Archimède, de viscosité et d'inertie). L'influence relative de chacune de ces forces peut être clarifiée à partir des figures V.14a, V.14b et V.14c, montrant l'évolution de la structure de l'écoulement secondaire pour Gr = 10⁶, Pr = 7 et $\alpha = 0^\circ, 30^\circ$ et 60° respectivement. À partir de la position A (z = 2,5), les effets de la convection naturelle commencent à apparaître surtout sur une couche mince à proximité de la paroi. Dans cette couche, le mouvement est ascendant tandis que dans la partie centrale du tube, il est descendant créant ainsi un tourbillon dans le sens anti-horaire. À partir de la position B, on remarque une légère intensification des courants secondaires qui se traduit par un mouvement ascendant occupant une couche plus large que dans le cas de la section A. Le centre de circulation se déplace donc vers l'intérieur du tube. Loin de la paroi du tube, les vecteurs vitesses subissent un relatif changement dans leurs directions.

Tableau V.2						
Emplacement des sections retenues pour la présentation des résultats						
Section	A	B	C	D	E	F
Position axiale, z	28,62243	22,5	17,90817	13,31633	8,724489	4,132653

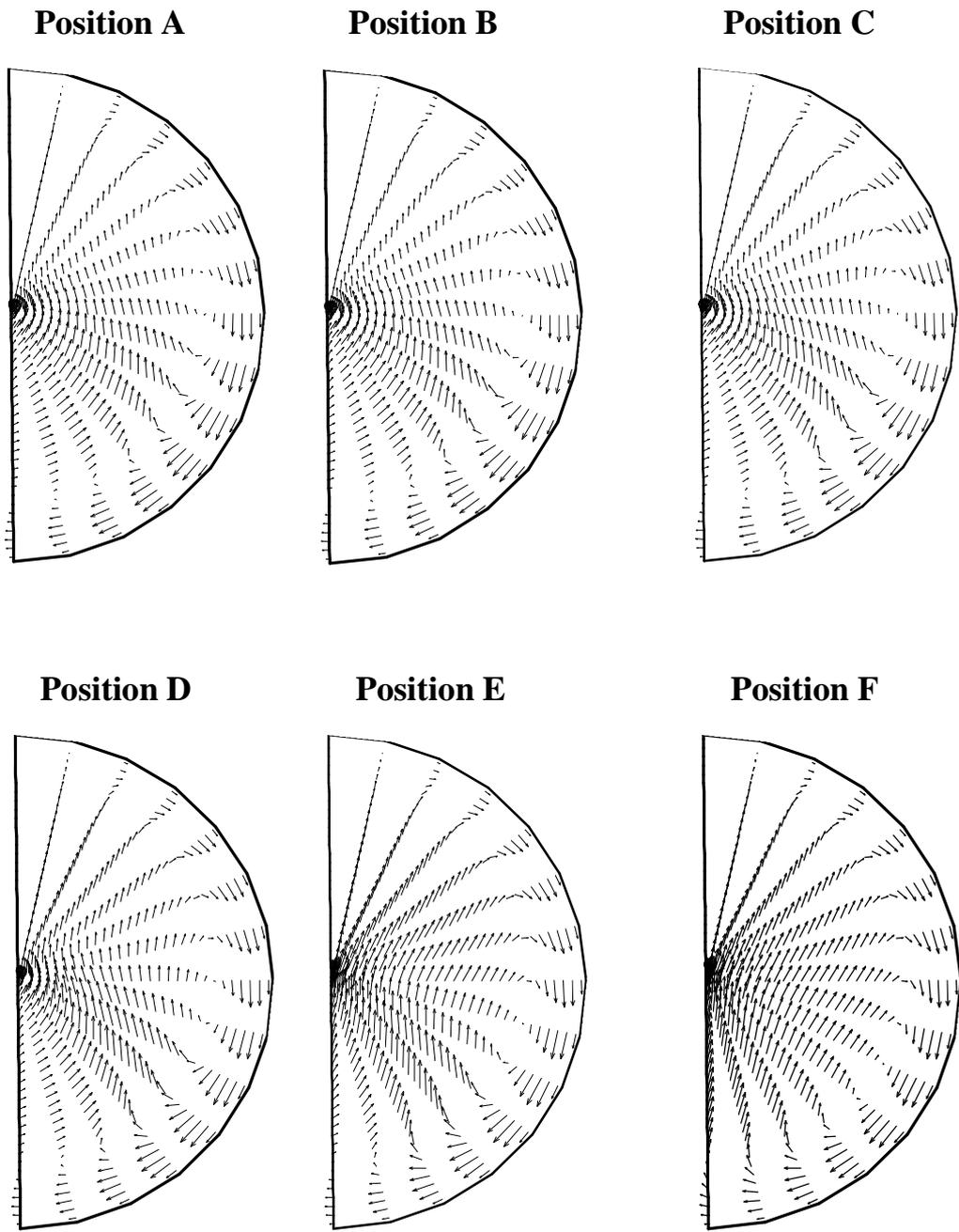


Figure V.14a : Développement du champ de vitesse transversale pour le cas de l'eau avec $\alpha = 0^\circ$ et $Gr = 10^6$

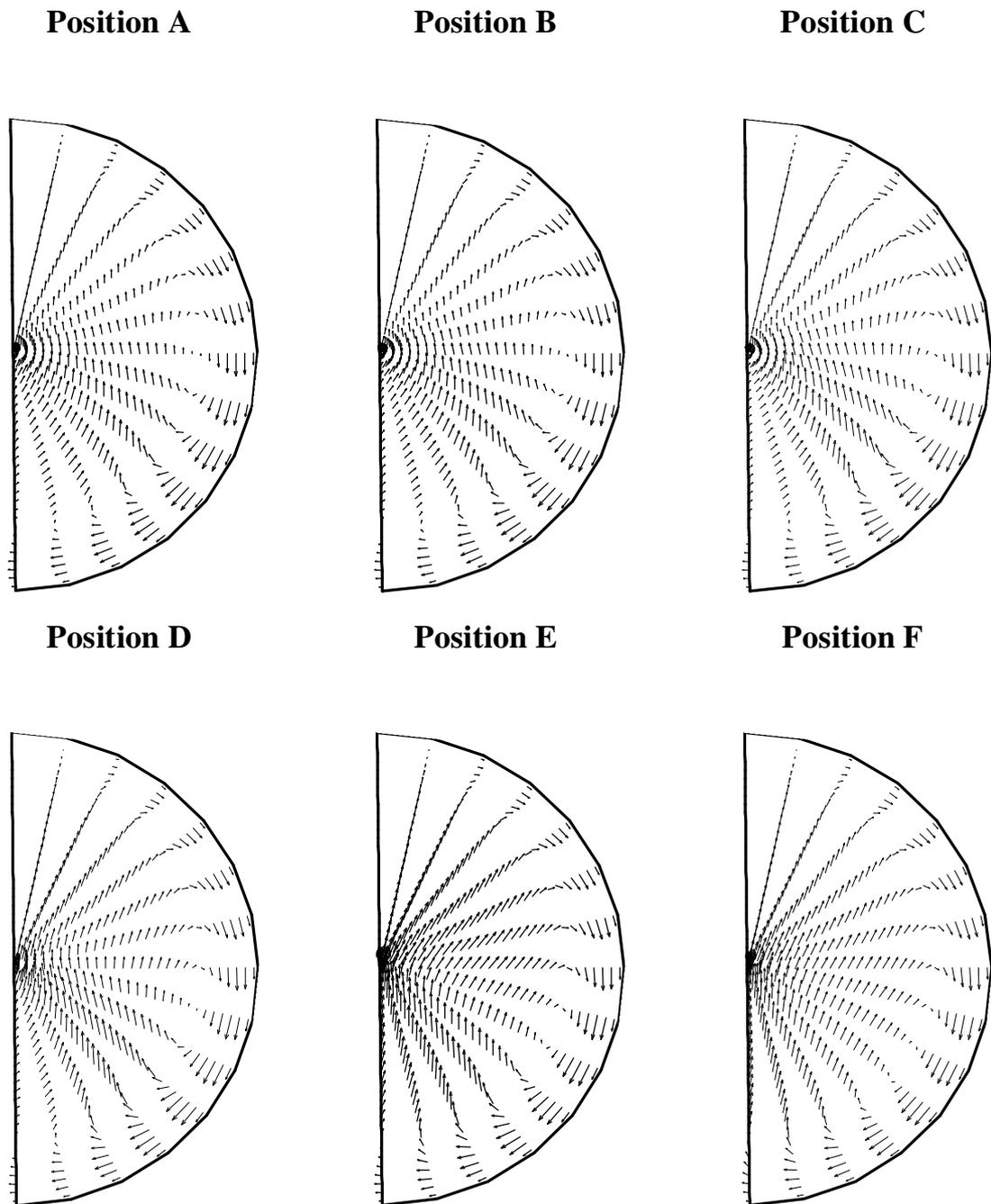


Figure V.14b : Développement du champ de vitesse transversale pour le cas de l'eau avec $\alpha = 30^\circ$ et $Gr = 10^6$

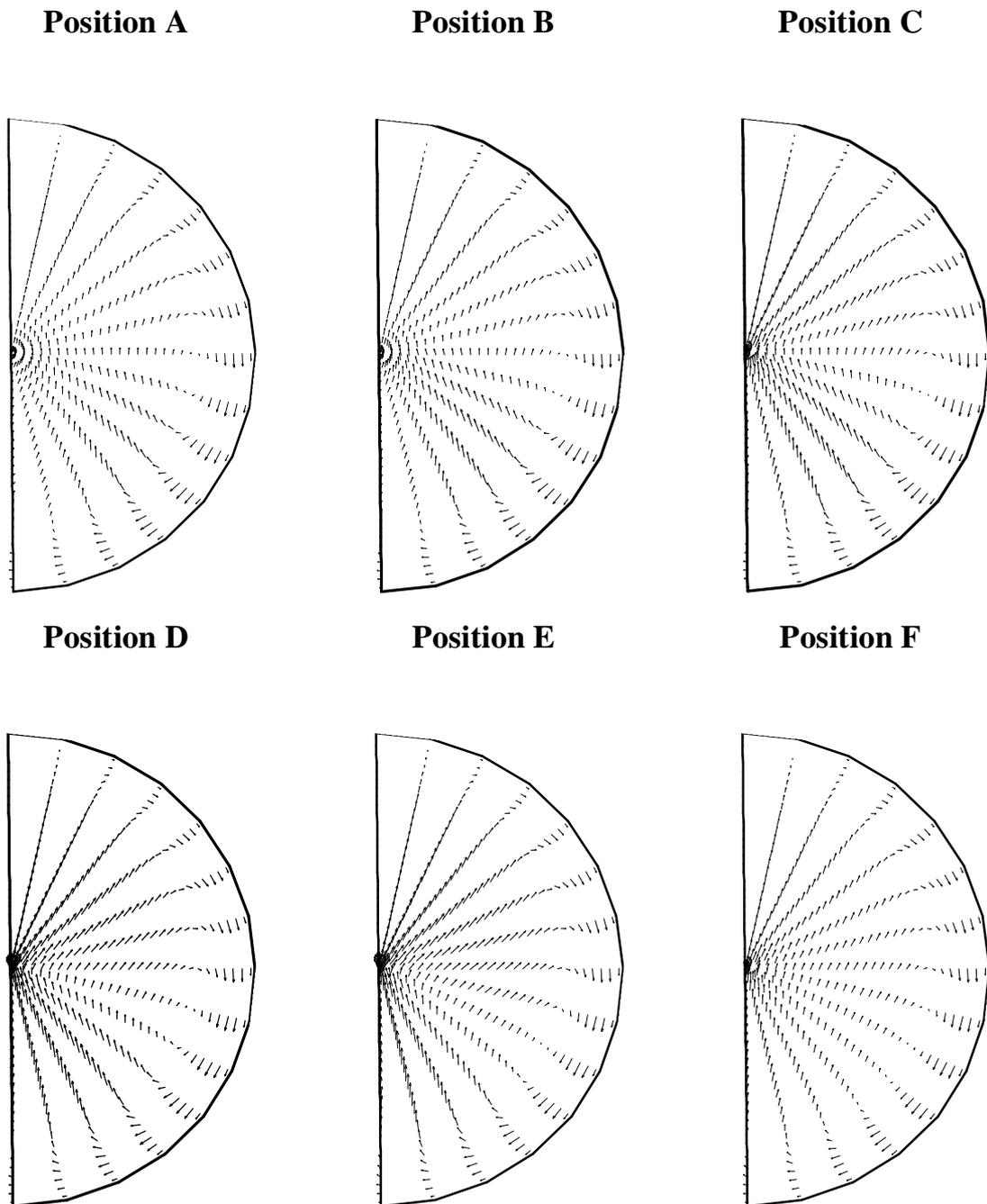


Figure V.14c : Développement du champ de vitesse transversale pour le cas de l'eau avec $\alpha = 60^\circ$ et $Gr = 10^6$

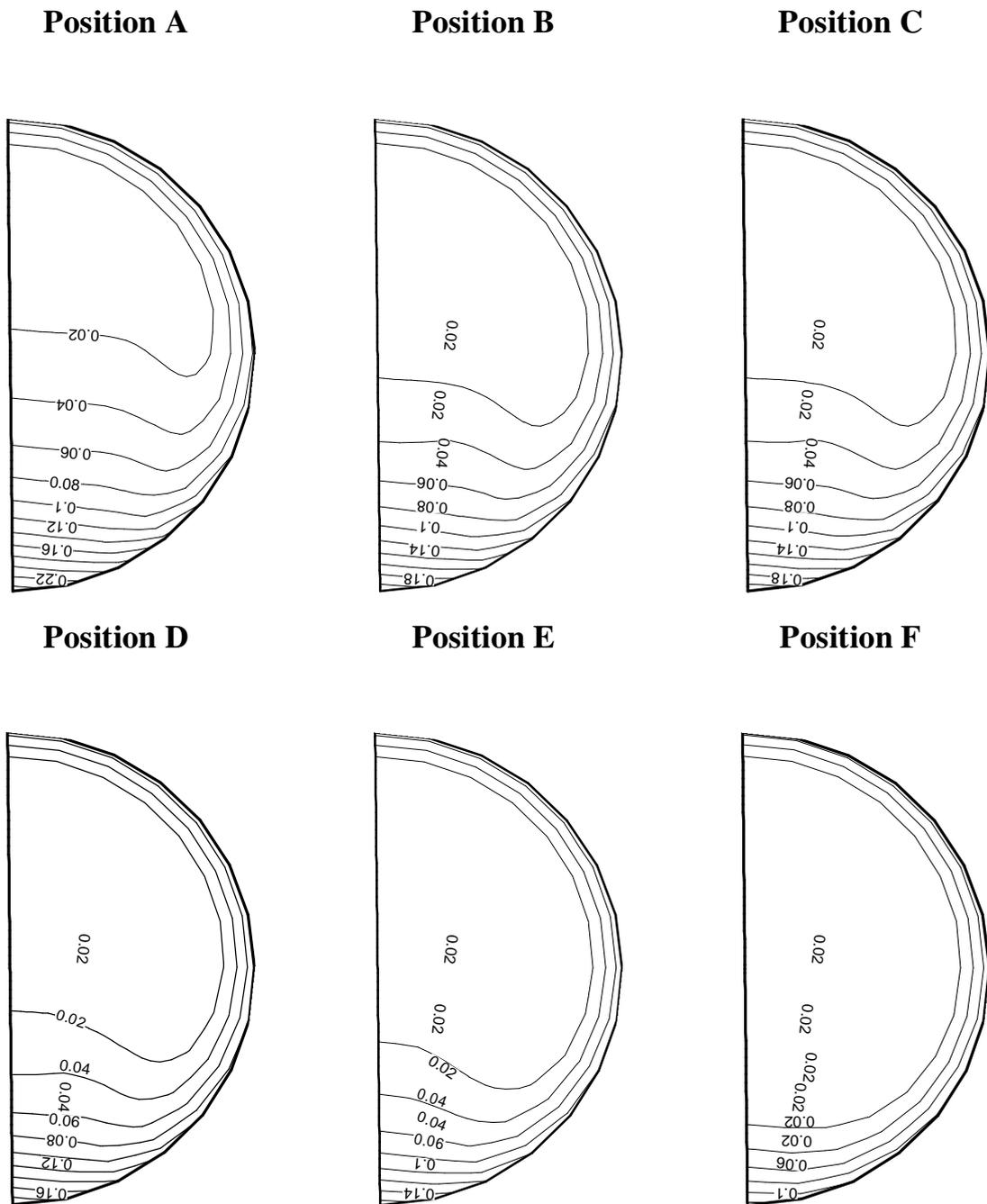


Figure V.15a : Développement du champ thermique pour le cas de l'eau avec $\alpha = 0^\circ$ et $Gr = 10^6$

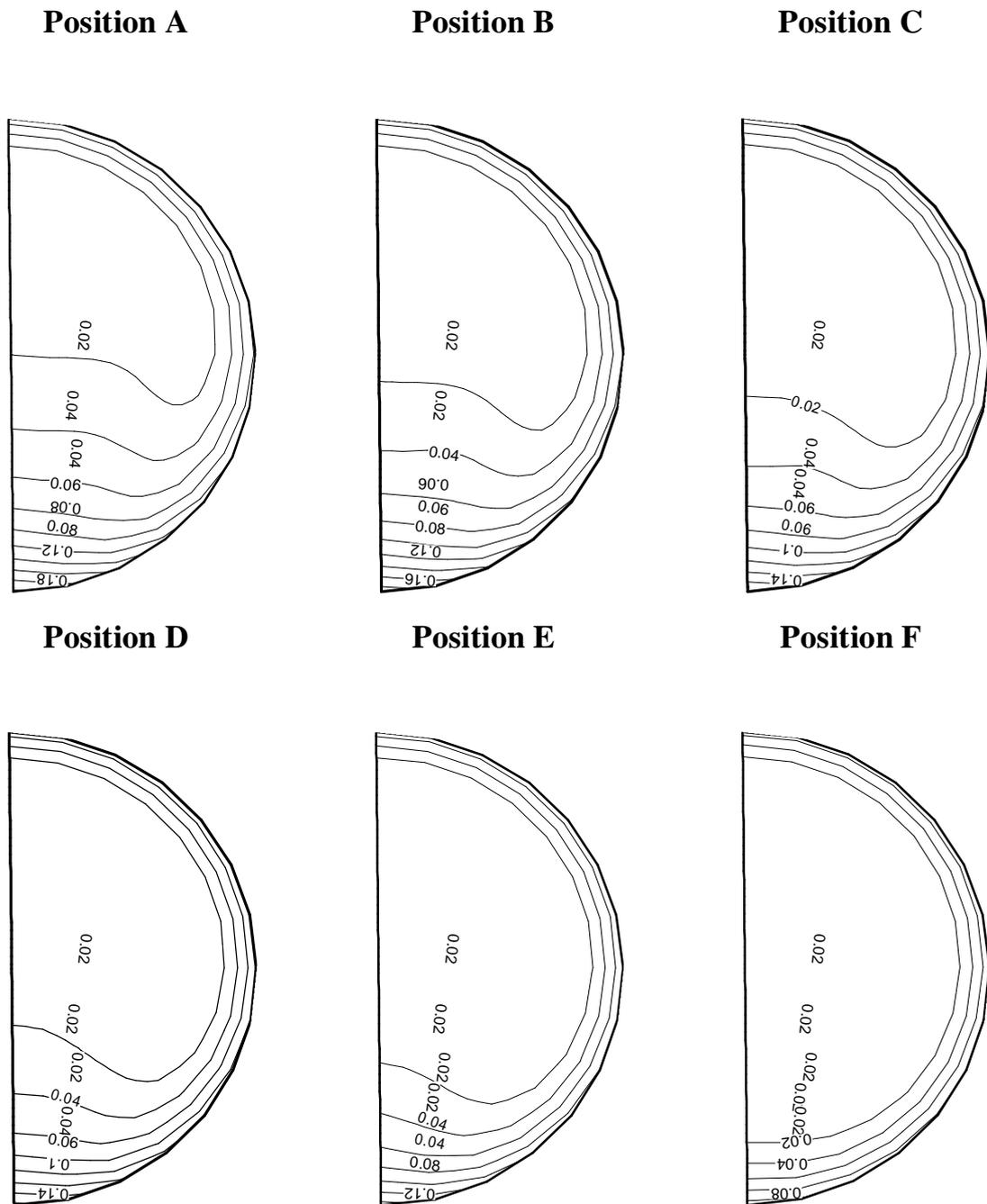


Figure V.15b : Développement du champ thermique pour le cas de l'eau avec $\alpha = 30^\circ$ et $Gr = 10^6$

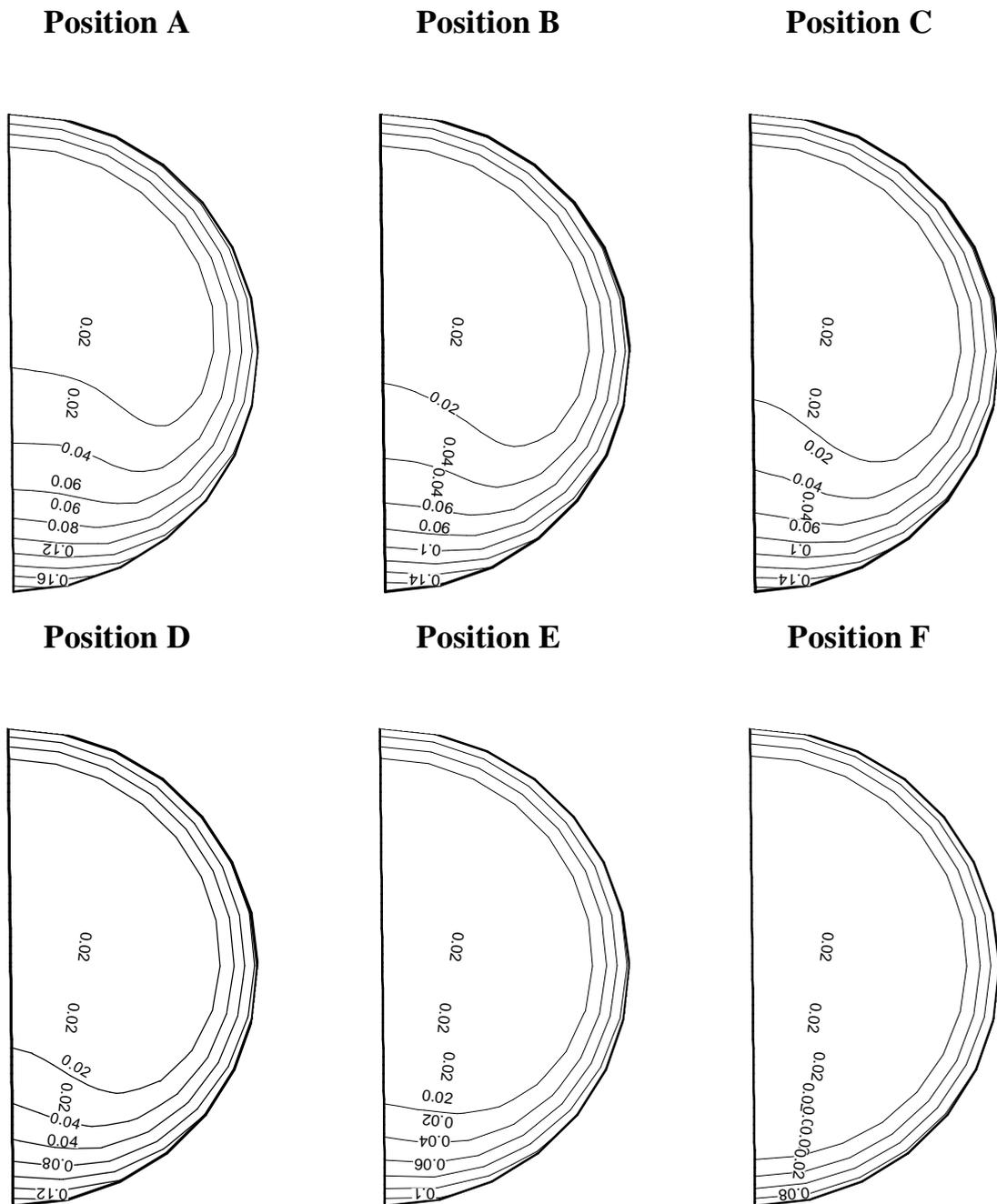


Figure V.15c : Développement du champ thermique pour le cas de l'eau avec $\alpha = 60^\circ$ et $Gr = 10^6$

Dans le champ thermique figures V.15a, V.15b et V.15c, pour $Gr = 10^6$, $Pr = 7$ et pour des angles d'inclinaisons $\alpha = 0^\circ$, 30° et 60° respectivement. On remarque que les courants secondaires commencent à perturber le champ de température à partir de la position B. Dans la partie centrale supérieure de la section, les isothermes sont essentiellement horizontales et le transfert de chaleur se fait par conduction. La stratification augmente et occupe un espace de plus en plus important lorsque le fluide se déplace axialement suivant la direction z . A la section E, l'écoulement est presque établi thermiquement. L'eau froide se trouve enfermée dans un espace réduit dans la partie centrale inférieure de la section. La stratification influence beaucoup sur la partie supérieure et y ralentit par conséquent le mouvement du fluide tel qu'observé sur les figures V.14.

V.4.2. Développement des profils de la vitesse axiale

La figure V.16 illustre les effets de la convection naturelle sur l'évolution des profils de vitesse axiale suivant le diamètre vertical pour le cas de l'eau avec $Gr = 10^6$. Ces effets dépendent fortement de l'inclinaison de la conduite et de la position axiale. Même très près de l'entrée, ils engendrent une accélération du fluide sur la partie centrale inférieure du diamètre. La valeur de la vitesse axiale maximale diminue quand α croît et son emplacement se déplace légèrement vers le centre du tube. A la position I, les déformations des profils de u , s'amplifient davantage. L'accroissement de α , dans ce cas, se traduit par un déplacement graduel de l'endroit de la vitesse axiale maximale vers le haut quand α passe de 0° à 60° pour revenir ensuite au centre du tube dans le cas d'un tube vertical. Loin de la région d'entrée, on note une accélération très prononcée dans la partie supérieure de la section pour $\alpha = 30^\circ$ et surtout pour $\alpha = 0^\circ$. Pour $\alpha = 60^\circ$, le fluide accélère dans la partie centrale de la section immédiatement après l'entrée (section H). Par la suite, on observe un ralentissement graduel du fluide dans la même région au fur et à mesure que z augmente (section J). Ce ralentissement est provoqué par l'important chauffage pariétal qui accélère le fluide chaud avoisinant la paroi. Notons qu'en régime développé (section K), la vitesse axiale au centre du tube est relativement faible. Cette valeur peut s'annuler et devenir négative, donnant ainsi naissance à un écoulement inverse autour du centre pour des taux de chauffage plus élevés.

Tableau V.3					
Emplacement des sections retenues pour la présentation des résultats					
Section	G	H	I	J	K
Position axiale, z	0	7, 346938	15,000001	22,65306	30,00000

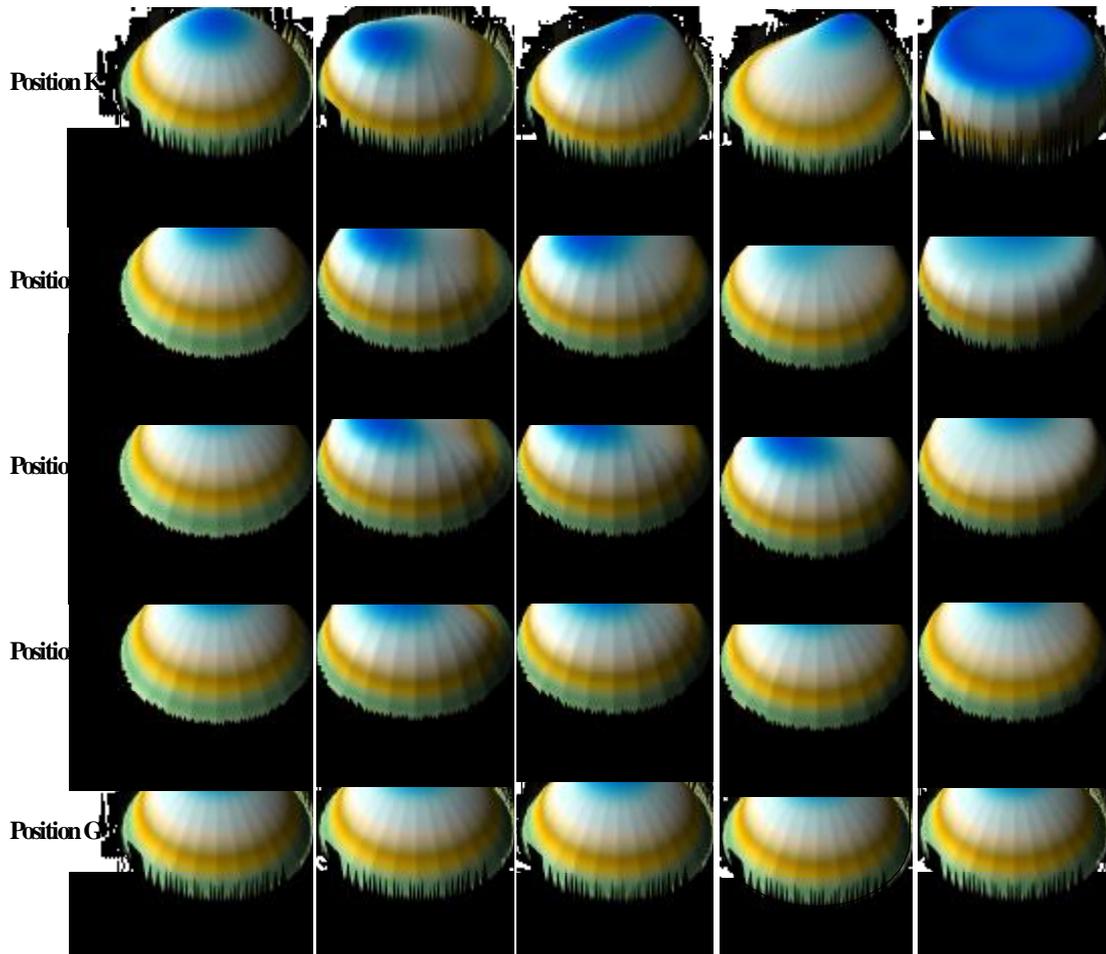


Figure V.16 : Effet de l'inclinaison sur la distribution des profils de la vitesse axiale pour de l'eau avec $Gr = 10^6$.

V.4.3 Evolution axiale du nombre de Nusselt moyen et la contrainte de cisaillement moyenne

Les déformations induites par l'écoulement secondaire sur le développement du champ de vitesse axiale entraînent une augmentation de la contrainte de cisaillement moyenne tel que montre sur la figure V.17. On note qu'un accroissement de l'inclinaison provoque un frottement pariétal important, au fur et à mesure qu'on se déplace progressivement vers la région établie près de la sortie du tube. La distribution de τ_z , pour les trois inclinaisons, passe par un maximum relatif dont l'emplacement axial se déplace loin de l'entrée à avec l'augmentation de l'angle α .

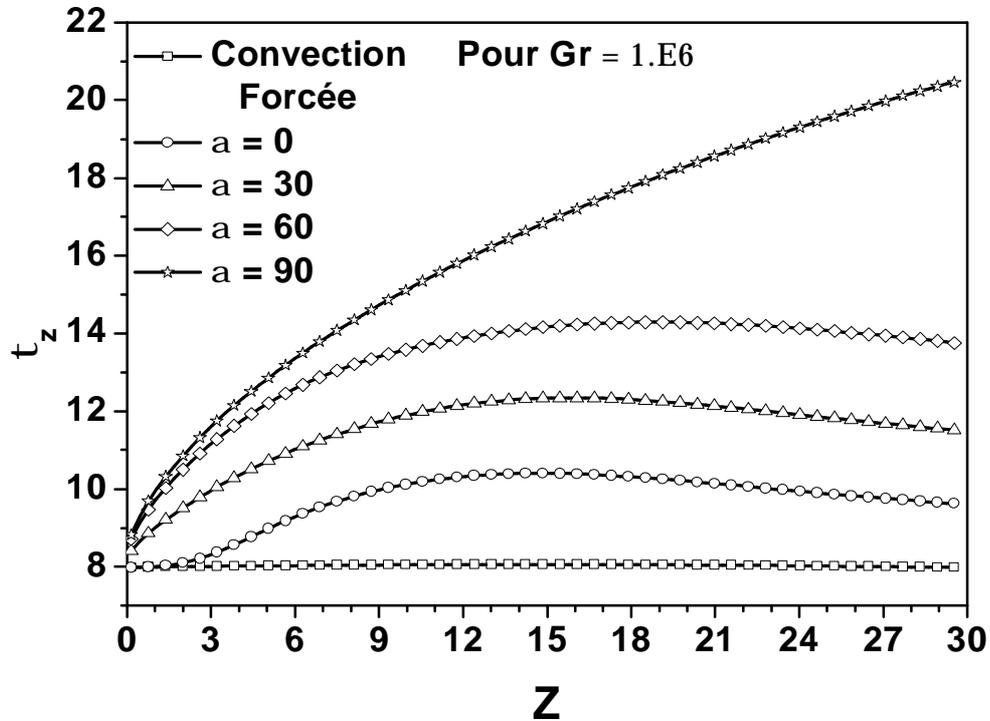


Figure V.17 : Effet de l'inclinaison sur la distribution axiale de la contrainte de cisaillement moyenne avec $Gr = 10^6$

Dans la région proche de l'entrée du tube, on remarque bien une légère réduction de τ_z pour $\alpha = 0$ à cause du faible gradient de vitesse près de la paroi. Plus loin, les particules au centre ralentissent alors que celles près de la paroi accélèrent (voir figure V.16). Ce qui constitue la cause directe de l'augmentation du coefficient de frottement comme illustrée sur la figure V.17.

L'évolution axiale du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Grashof et de l'inclinaison est illustrée sur les figures V.18 et V.19. L'augmentation du flux de chaleur externe entraîne une agitation plus importante au sein du fluide. L'échange de chaleur se trouve donc fortement amélioré, en particulier très loin de la région d'entrée. Pour le cas de $Gr = 10^6$, on constate que le décrochage des courbes qui correspondent à $Gr = 10^4$ et 10^5 se situe près de l'entrée, indiquant l'effet du développement rapide et intense des courants secondaires. L'emplacement longitudinal de ce décrochage s'éloigne de l'entrée à mesure que Gr diminue. Immédiatement après ce décrochage, le nombre de Nusselt prend une allure presque horizontale jusqu'à la sortie du tube.

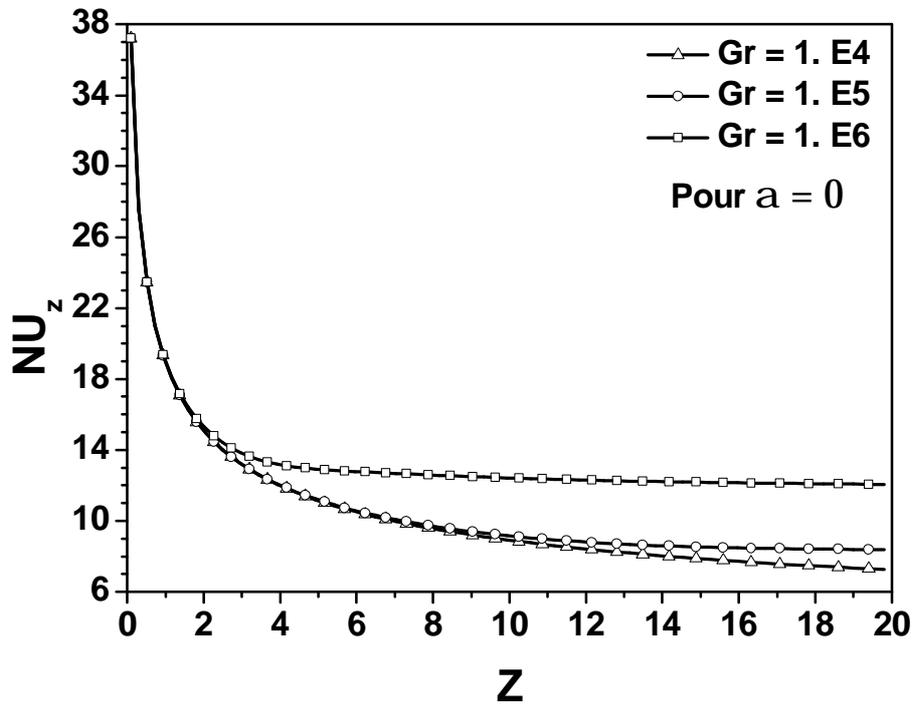


Figure V.18a : Evolution axiale du nombre de Nusselt moyen pour un tuyau incliné à 0°

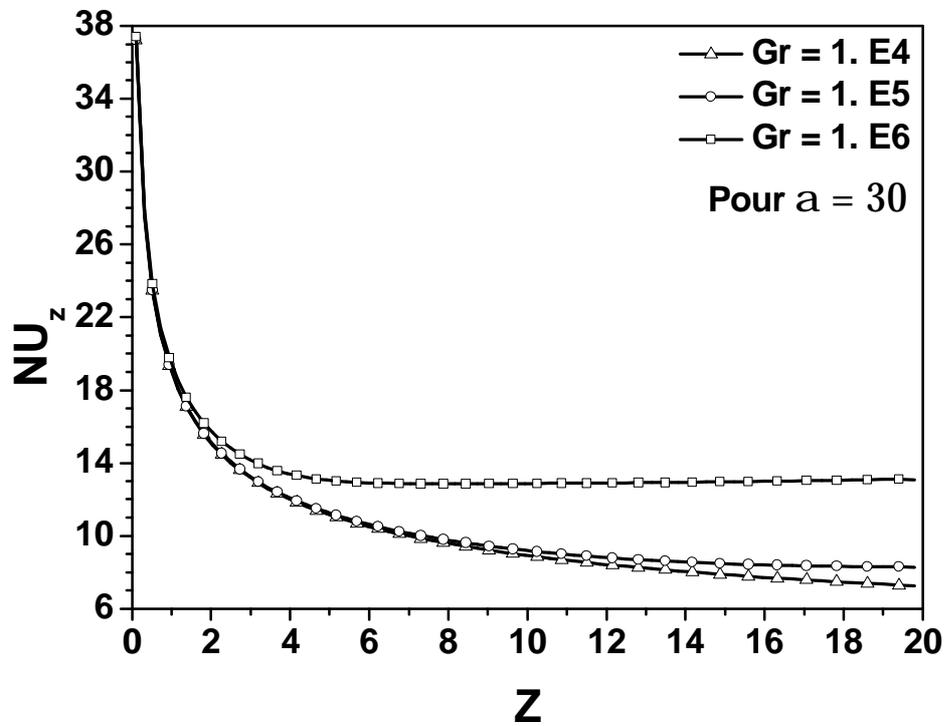


Figure V.18b : Evolution axiale du nombre de Nusselt moyen pour un tuyau incliné à 30°

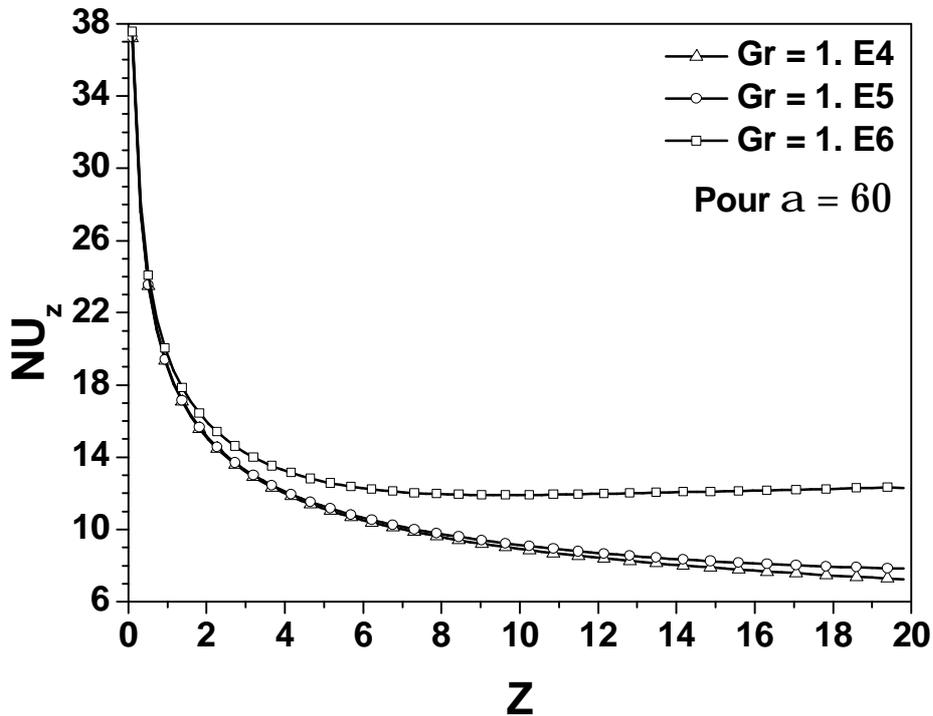


Figure V.18c : Evolution axiale du nombre de Nusselt moyen pour un tuyau incliné à 60°

En ce qui concerne l'influence de l'inclinaison du tube sur le nombre de Nusselt moyen pour les trois nombres de Grashof (figures V.19), on remarque que pour un nombre de Grashof égale à 10^4 et 10^5 des profils presque confondus, et surtout pour $Gr=10^4$ (régime proche de la convection forcée). Pour un nombre de Grashof égale à 10^5 , les valeurs sur la courbe du nombre de Nusselt indiquent l'existence d'une inclinaison optimale d'à peu près 30° qui maximise le nombre de Nusselt ; cette observation confirme les résultats correspondants de Orfi et al [66] obtenus avec d'autres modèles plus simple.

En générale, l'écoulement d'eau en régime de convection mixte dans un tube circulaire incliné se caractérise par la présence de deux zones distinctes (voir figure V.19c). Dans la première zone, près de l'entrée, l'écoulement est force pur. Le nombre de Nusselt moyen décroît rapidement. Cette zone se termine à un endroit particulier, z_c , qui dépend fortement du nombre de Grashof Pour $Gr = 10^4$, 10^5 et 10^6 . Dans la deuxième zone, les courants secondaires induits par la convection naturelle sont en développement rapide et favorisent par conséquent l'échange thermique à l'intérieur du fluide. C'est la zone correspond à la région où l'écoulement est entièrement développe.

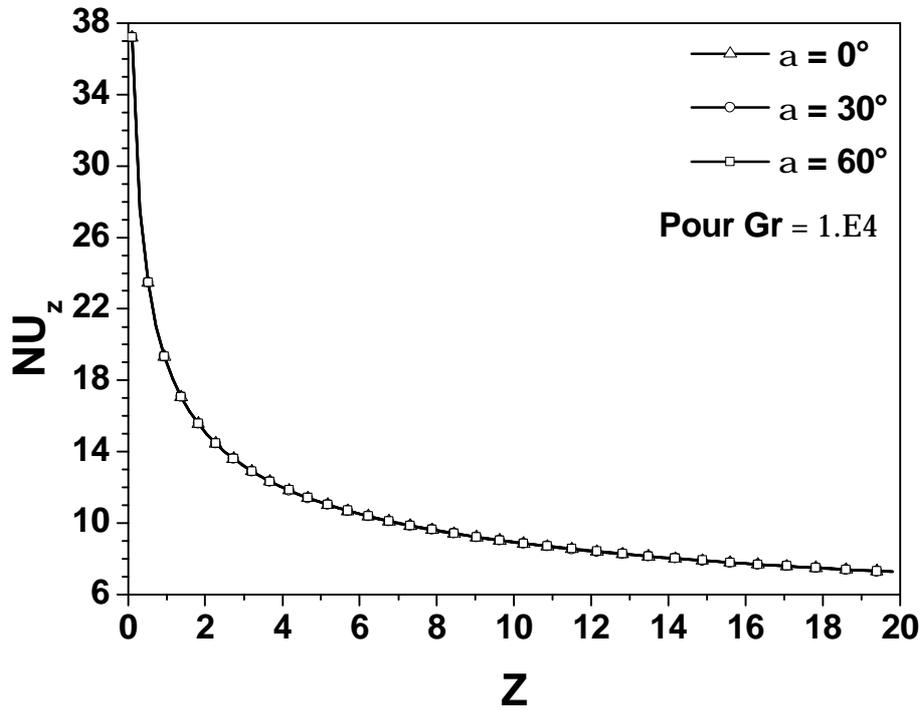


Figure V.19a : Effet de l'inclinaison du tuyau sur la distribution axiale du nombre de Nusselt moyen pour $Gr=10^4$

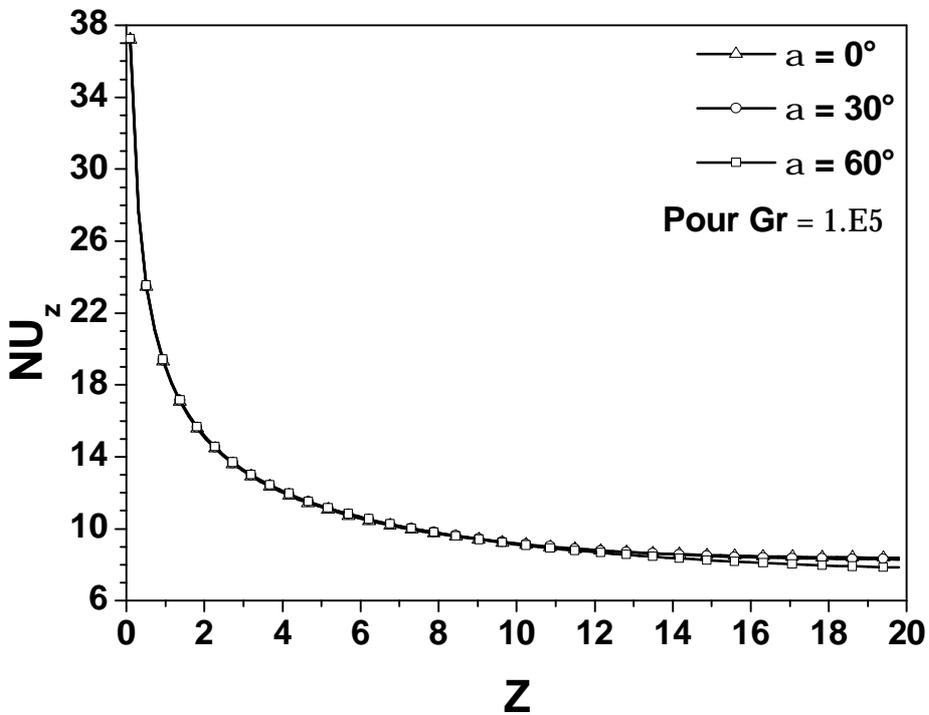


Figure V.19b : Effet de l'inclinaison du tuyau sur la distribution axiale du nombre de Nusselt moyen pour $Gr=10^5$

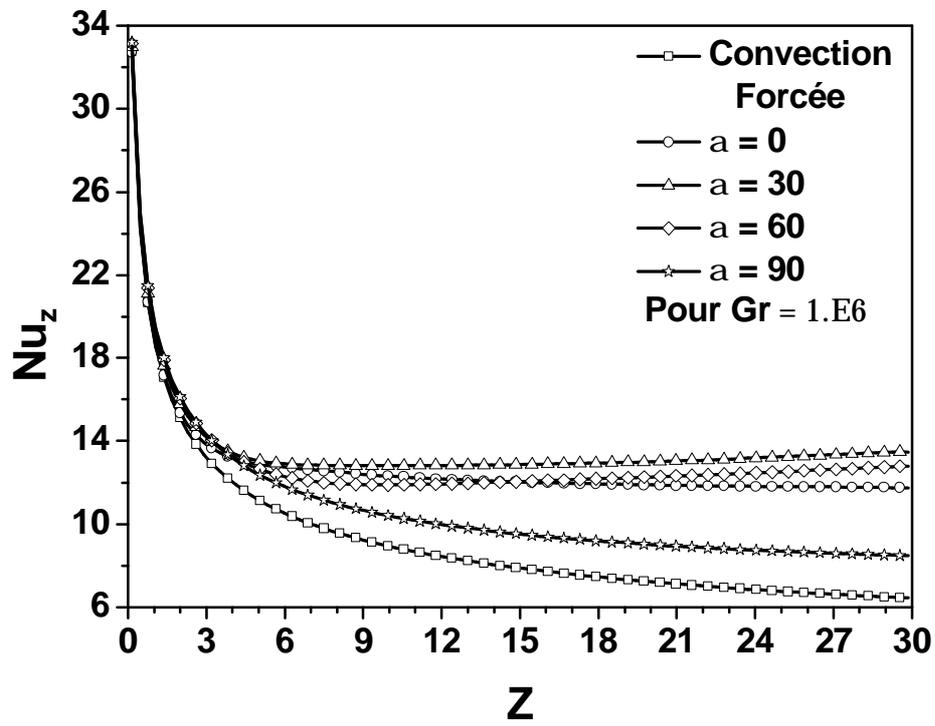


Figure V.19c : Effet de l'inclinaison du tuyau sur la distribution axiale du nombre de Nusselt moyen pour $Gr=10^6$

<i>Application III :</i> _____	102
<i>Etude de la convection mixte en régime transitoire</i> _____	102
V.5. Problème et formulation mathématique _____	102
V.6. Conditions initiales et conditions aux limites _____	104
V.7. Résultats et discussion _____	105
V.7.1. Structure de l'écoulement et du champ thermique ($DT > 0$) _____	105
V.7.2. Influence de la diffusivité _____	106
V.7.3. Structure de l'écoulement et du champ thermique ($DT < 0$) _____	107
V.7.4. Température interfaciale _____	108

Application III :

Etude de la convection mixte en régime transitoire

V.5. Problème et formulation mathématique

Le transfert de chaleur conjugué (convection mixte + conduction) en régime transitoire dans les écoulements internes est présent dans beaucoup d'installation industrielles ; telles que les échangeurs de chaleur compacts, les collecteurs solaires, refroidissement des composantes électroniques etc.... .

La troisième application est consacrée à l'analyse des phénomènes d'instabilité instationnaire d'un écoulement en convection mixte laminaire dans un tube vertical, lorsque l'entrée et la paroi externe sont perturbées simultanément par un échelon de température et par un flux pariétal uniforme respectivement. L'influence de ces deux paramètres ainsi que la diffusivité thermique de la paroi, sur le comportement transitoire de l'écoulement sera étudiée en détail.

Pour cela, on considère le problème du transfert de chaleur conjugué, pour un écoulement laminaire à l'intérieur d'un tube vertical soumis à un flux de chaleur uniforme sur la paroi externe. L'épaisseur de la paroi du tube est égale à $\delta=0.1D$. Des sections adiabatiques ont été rajoutées en amont et en aval de la section chauffée afin de permettre l'étude de la diffusion thermique axiale dans le fluide et la paroi. La configuration et le système de coordonnées du tube sont donnés sur la figure 20. Les équations gouvernantes de ce problème sont : l'équation de continuité, les équations de Navier- Stokes et l'équation d'énergie. En adoptant les variables adimensionnelles suivant :

$$r^* = \frac{r}{D}, \quad z^* = \frac{z}{D}, \quad u^* = \frac{u}{U_{\text{moy}}}, \quad v^* = \frac{v}{U_{\text{moy}}}, \quad \theta = \frac{T - T_0}{(q \cdot D/k)},$$

$$p^* = \frac{p + \rho_0 \cdot g \cdot z}{\rho_0 \cdot U_{\text{moy}}^2}, \quad t^* = \frac{t}{(D/U_{\text{moy}})}, \quad \text{et} \quad \alpha^* = \frac{\alpha_s}{\alpha_f}$$

Les équations gouvernantes peuvent s'écrire sous la forme suivante en coordonnées cylindrique :

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r v}{\partial r} \right) = 0 \quad (\text{V.12})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] + \frac{\text{Gr}_z}{\text{Re}^2} \cdot \theta \quad (\text{V.13})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{v}{r^2} \right] + \frac{\text{Gr}_r}{\text{Re}^2} \cdot \theta \quad (\text{V.14})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial z} + v \frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\alpha^*}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \right] \quad (\text{V.15})$$

Basé sur cette adimensionnalisation, les paramètres gouvernant ce problème sont :

$$\text{Re} = \frac{U_{\text{moy}} \cdot D}{\nu} \quad (\text{Nombre de Reynolds}), \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} \quad (\text{Nombre de Prandtl})$$

$$Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot q_w \cdot D^4}{k \cdot \nu^2} \text{ (Nombre de Grashof basé sur le flux de chaleur),}$$

$$\alpha^* = \frac{\alpha_s}{\alpha_f} \text{ (Rapport des diffusivités thermiques solide/fluide)}$$

$$Gr_x = Gr \cdot \cos \gamma, \quad Gr_y = Gr \cdot \sin \gamma$$

V.6. Conditions initiales et conditions aux limites

Initialement ($t=0$), les conditions aux limites communes sont basées sur un profil parabolique de vitesse et un profil uniforme de température à l'entrée, une symétrie des champs hydrodynamique et thermique sur l'axe du tube, et un profil entièrement développé à la sortie. Par ailleurs, la condition thermique sur la paroi ($r=R+\delta$) est :

$$\text{si } z < L_1 \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \text{ (adiabatique)}$$

$$\text{si } L_1 \leq z \leq L_2 \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} = 1 \text{ (flux de chaleur uniforme)}$$

$$\text{si } z > L_1 + L_2 \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \text{ (adiabatique)}$$

En basant sur ces conditions aux limites, on obtient le régime établi après un temps ($t=t_c$) puis on perturbe l'écoulement par un échelon de température comme :

$$\text{à } t=t_c \text{ et } z=0, \quad \theta = \theta \pm \Delta\theta \tag{V.16}$$

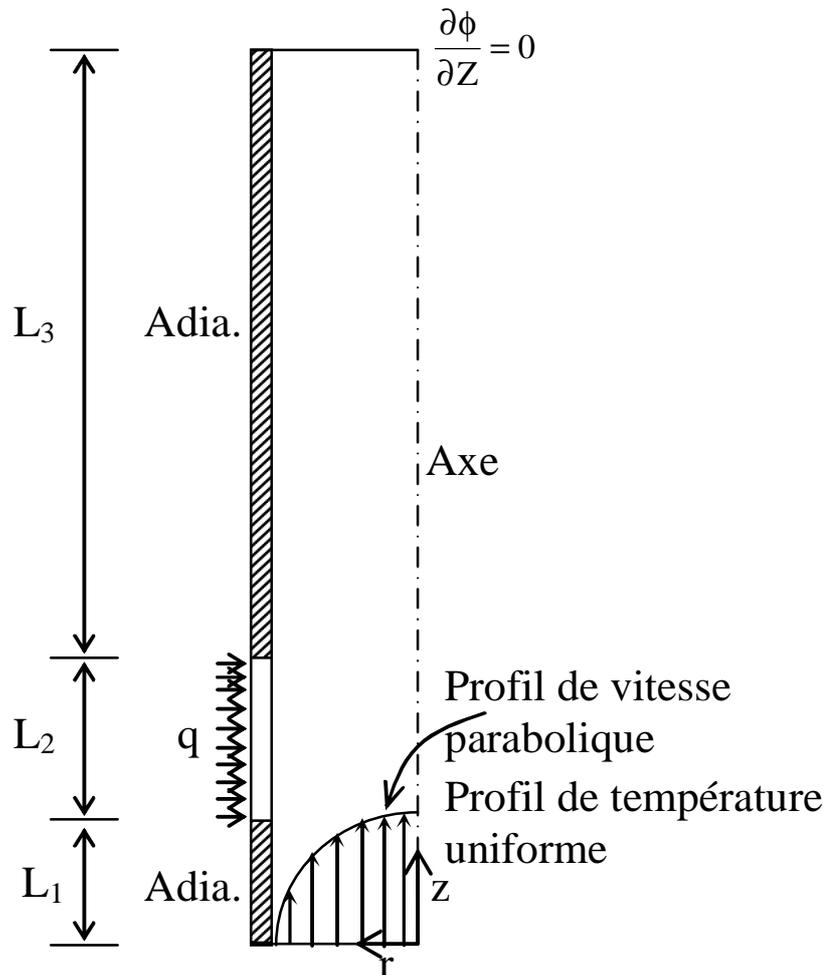


Figure V.20 : Configuration géométrique du cas étudié avec les conditions aux limites

V.7. Résultats et discussion

V.7.1. Structure de l'écoulement et du champ thermique ($DT > 0$)

Lorsqu'on applique un échelon de température positif à l'entrée du tube et un flux à la paroi, la structure d'écoulement est induite par un effet combiné des deux conditions. On observe qu'une zone de recirculation se forme à l'entrée dès les premiers instants, figure (V.21a). Cela apparaît à cause du fait que le fluide chaud (réchauffé par l'échelon de température) à l'entrée possède une masse volumique relativement plus faible que celle du fluide froid. Donc, étant plus léger, il a tendance à monter rapidement au centre et simultanément, pour garder la

conservation de la masse du fluide, il ralentit à coté de la paroi. D durant la phase transitoire, la cellule de recirculation est convectée vers la sortie du tube le long de la paroi. L'influence du flux imposé, vient un peut en retard (figure V.21.b, c, d et e). Il a réussi à diviser la cellule de recirculation en deux. L'une est de petite taille au voisinage de l'entrée, l'autre continue a se propagé vers la sortie. Cette constatation peut être observer aux tours de la partie chauffée du tube.

L'instabilité hydrodynamique entraîne également un déséquilibre thermique au sien de l'écoulement. L'oscillation des lignes de courant près de la paroi montre bien l'instabilité des couches limites dynamiques et thermique. Ce phénomène à été observé par Martin et al [43], Mai et al [49] pour un écoulement dans un tube vertical chauffé à la paroi. Une stratification des lignes isotherme est nettement observée au voisinage de la partie chauffée.

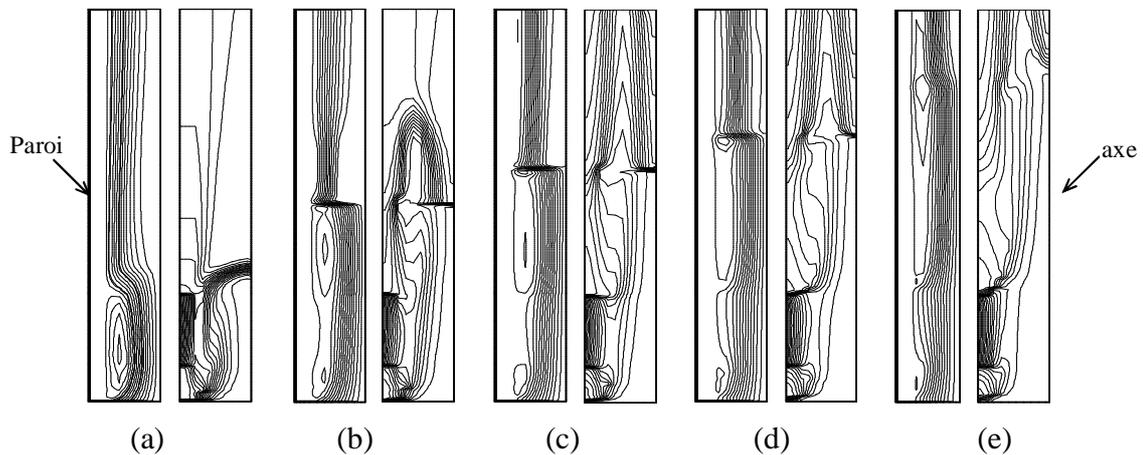


Figure V.21 : Evolution des champs thermique et hydrodynamique en fonction du temps le long du tube pour $\Delta\theta = 0.33$, ($\Delta T=20$), $\alpha^* = 1$, et $\tau = 0.2, 0.5, 0.8, 1$. et 1.2 pour a, b, c, d et e respectivement

V.7.2. Influence de la diffusivité

Il est intéressant de voir l'influence du rapport de diffusivité thermique $\alpha^* = \alpha_{\text{solide}} / \alpha_{\text{liquide}}$ sur la structure hydrodynamique et thermique. Pour cela, on donne sur la figure (V.22) l'évolution temporelle des lignes de courant des isothermes le long du tube pour le cas ou $\alpha_{\text{solide}} = 5 * \alpha_{\text{liquide}}$, tout en gardant constant le nombre de Richardson (G_r / R_e^2) et l'échelon de température ($\Delta T = 20^\circ\text{C}$). En augmentant le α^* , on peut remarquer la disparition de la zone de

recirculation observer précédemment près de la paroi. En revanche, une grande cellule apparaît aux premiers instants dans la partie centrale du tube, on peut expliquer, ce phénomène par la dominance de la condition du flux thermique à la paroi sur la condition d'un échelon à l'entrée. Du point de vue thermique, on constate qu'il y a un échauffement rapide du fluide à l'intérieure du tube.

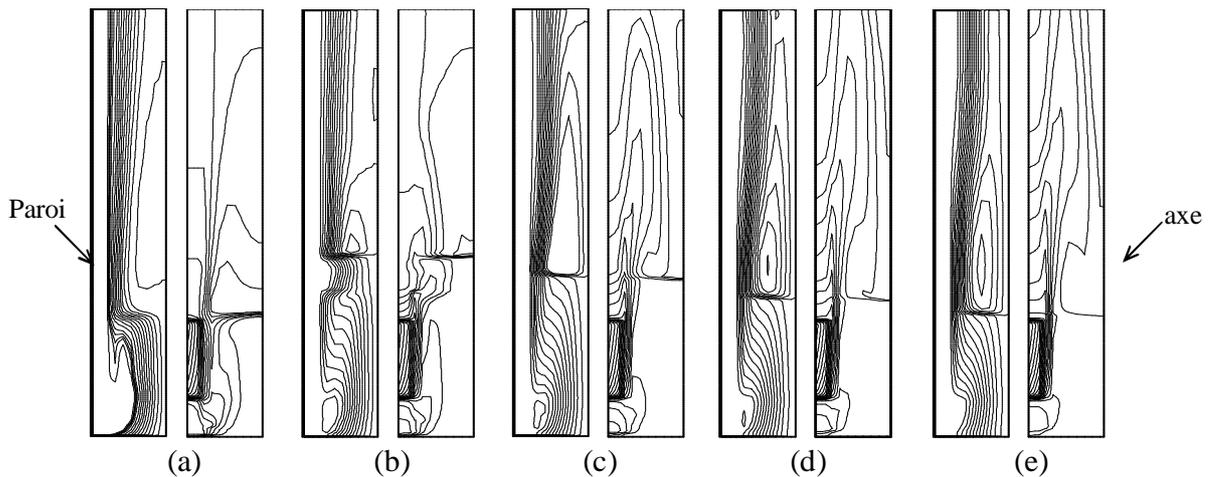


Figure V.22 : Evolution des champs thermique et hydrodynamique en fonction du temps le long du tube pour $\Delta\theta = 0.33$, ($\Delta T=20$), $\alpha^* = 5$, et $\tau = 0.2, 0.5, 0.8, 1.$ et 1.2 pour a, b, c, d et e respectivement

V.7.3. Structure de l'écoulement et du champ thermique ($DT < 0$)

Lorsqu'on applique un échelon de température négatif à l'entrée du tube le fluide freine au centre et, en même temps, pour garder la conservation de la masse globale du fluide, il accélère au voisinage de la paroi. La figure (V.23) montre d'une part une satisfaction de la température du fluide durant la phase transitoire et d'autre part l'apparition des oscillations des lignes de courants dans la partie centrale du tube (b) (c) et (d) ceci est du à l'interaction entre les couches chaudes et des couches froides. De plus, nous constatons qu'une zone de recirculation apparaît sur l'axe du tube. Elle diminue en taille (b), (c), (d) puis elle revient à sa taille initiale (e).

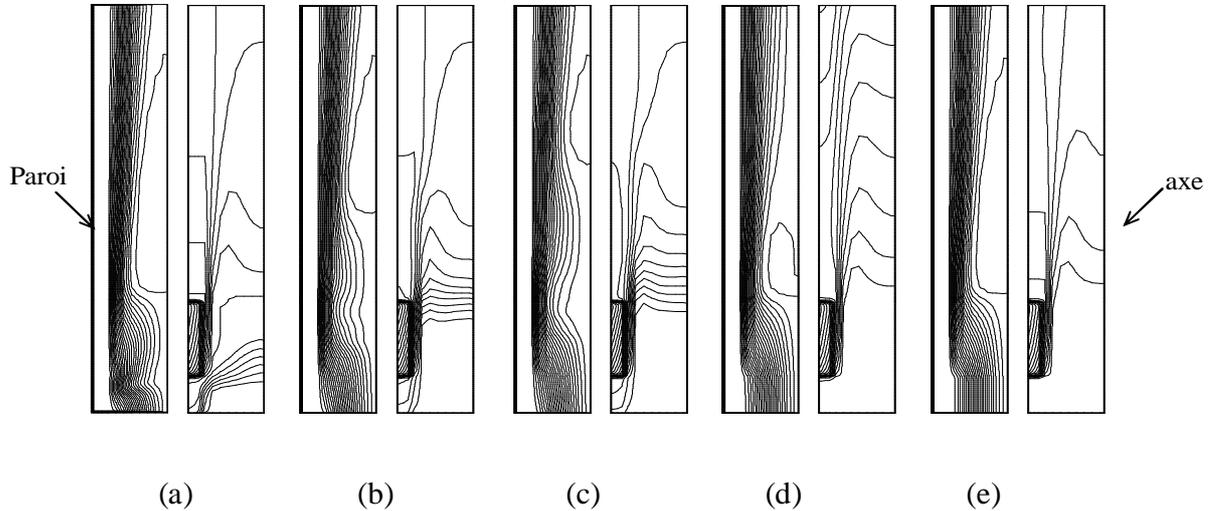


Figure V.23 : Evolution des champs thermique et hydrodynamique en fonction du temps le long du tube pour $\Delta\theta = -0.33$, ($\Delta T = -20$), $\alpha^* = 5$, et $\tau = 0.1, 0.4, 0.5, 1.5$ et 3.5 pour a, b, c, d et e respectivement

V.7.4. Température interfaciale

La distribution axiale de la température interfaciale (interface solide-fluide) est montrée aux figures V.24 et V.25, pour un rapport de diffusivité α^* variant de 0.1 jusqu'à 10 et pour divers échelon de la température $\Delta\theta$ respectivement. La figure V.24, montre qu'en amont de la section chauffée, la température interfaciale est indépendante du rapport des diffusivités thermique (solide/fluide). Toutes les courbes sont superposées. A partir de la section chauffée jusqu'à la sortie de la conduite θ_{int} augmente avec l'augmentation de α^* . En effet, quand le rapport de diffusivité (α^*) est élevé, une quantité importante de la chaleur fournie au tube, par le flux de chaleur appliqué, est conduite dans la paroi pour être relâchée en aval de la section chauffée, ou le fluide est plus froid. Lorsque α^* diminue, la température interfaciale θ_{int} dans la section chauffée tend vers une valeur légèrement supérieur que dans les sections adiabatiques, indiquant que la conduction axiale pariétale devient négligeable quand α^* est faible, par exemple ($\alpha^* = 0,1$). En plus, dans la zone où le flux thermique est appliqué, la tangente des courbes de θ_{int} change entre 0 pour $\alpha^* = 0,1$ et presque supérieur à 1 pour $\alpha^* = 10$.

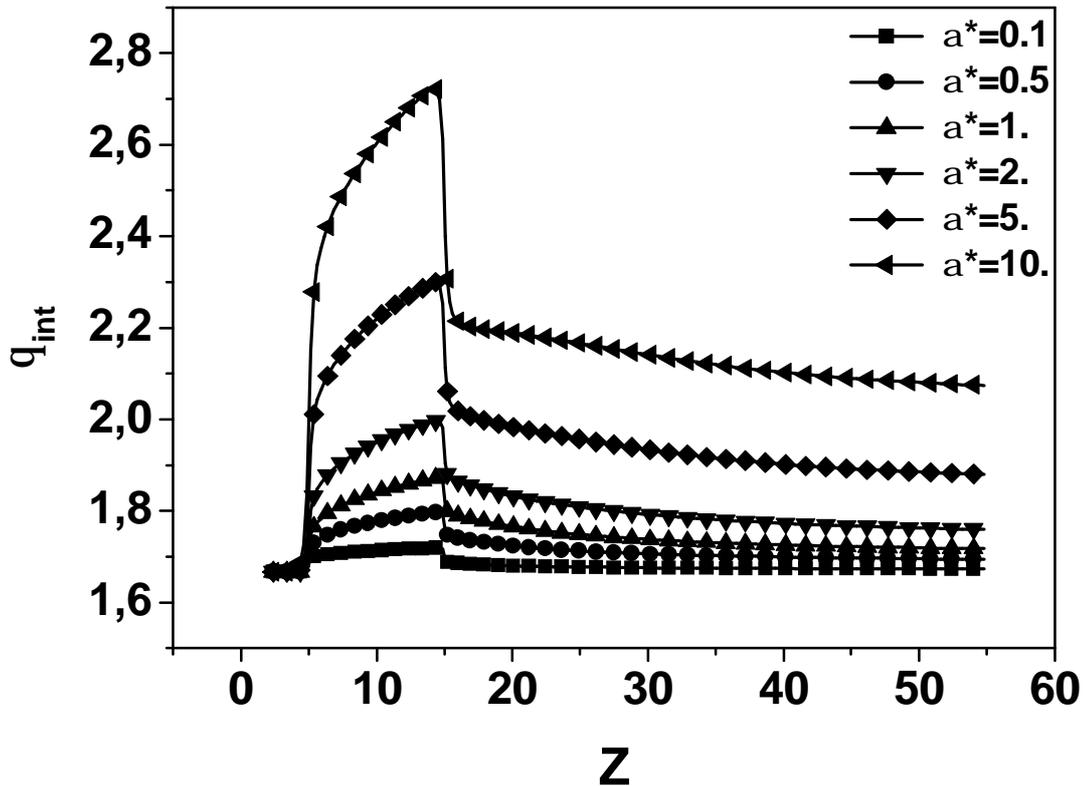


Figure V.24 : Distribution axiale de la température à l'interface solide-fluide
 $\Delta\theta=+0,667$

On remarque aussi, qu'il existe des discontinuités aux deux extrémités de la section chauffée, augmentation rapide de θ_{int} pour ($Z = 5$) et diminution rapide θ_{int} pour ($Z = 15$). Ces phénomènes sont dus à la variation brusque de la condition de frontière à cet endroit.

L'asymétrie de la courbe de θ_{int} par rapport à la mi-section chauffée révèle que toute la chaleur fournie au tube est redistribuée en aval de la section chauffée. Ceci s'explique par le fait qu'en aval, on retrouve du fluide relativement plus froid, ce qui favorise le transfert de chaleur.

Dans la figure V.25 on constate que la température de l'interface solide- fluide augmente avec l'augmentation de l'échelon de température à l'entrée même en amont de la section chauffée. Mais cette augmentation est relativement faible par rapport à l'augmentation dans la partie chauffée et en aval de cette partie.

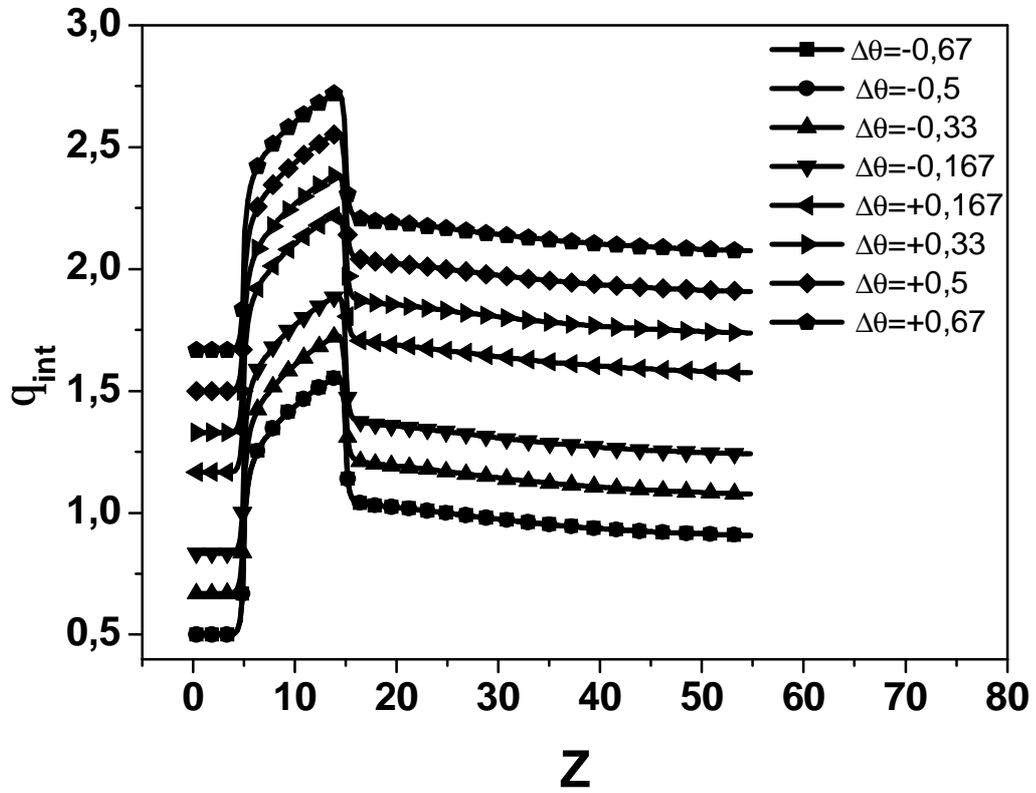


Figure V.25 : Distribution axiale de la température à l'interface solide-fluide
 $\alpha = 10$

<i>Application III :</i> _____	102
<i>Etude de la convection mixte en régime transitoire</i> _____	102
V.5. Problème et formulation mathématique _____	102
V.6. Conditions initiales et conditions aux limites _____	104
V.7. Résultats et discussion _____	105
V.7.1. Structure de l'écoulement et du champ thermique ($DT > 0$) _____	105
V.7.2. Influence de la diffusivité _____	106
V.7.3. Structure de l'écoulement et du champ thermique ($DT < 0$) _____	107
V.7.4. Température interfaciale _____	108

Application III :

Etude de la convection mixte en régime transitoire

V.5. Problème et formulation mathématique

Le transfert de chaleur conjugué (convection mixte + conduction) en régime transitoire dans les écoulements internes est présent dans beaucoup d'installations industrielles ; telles que les échangeurs de chaleur compacts, les collecteurs solaires, refroidissement des composantes électroniques etc....

La troisième application est consacrée à l'analyse des phénomènes d'instabilité instationnaire d'un écoulement en convection mixte laminaire dans un tube vertical, lorsque l'entrée et la paroi externe sont perturbées simultanément par un échelon de température et par un flux pariétal uniforme respectivement. L'influence de ces deux paramètres ainsi que la diffusivité thermique de la paroi, sur le comportement transitoire de l'écoulement sera étudiée en détail.

Pour cela, on considère le problème du transfert de chaleur conjugué, pour un écoulement laminaire à l'intérieur d'un tube vertical soumis à un flux de chaleur uniforme sur la paroi externe. L'épaisseur de la paroi du tube est égale à $\delta=0.1D$. Des sections adiabatiques ont été rajoutées en amont et en aval de la section chauffée afin de permettre l'étude de la diffusion thermique axiale dans le fluide et la paroi. La configuration et le système de coordonnées du tube sont donnés sur la figure 20. Les équations gouvernantes de ce problème sont : l'équation de continuité, les équations de Navier- Stokes et l'équation d'énergie. En adoptant les variables adimensionnelles suivant :

$$r^* = \frac{r}{D}, \quad z^* = \frac{z}{D}, \quad u^* = \frac{u}{U_{\text{moy}}}, \quad v^* = \frac{v}{U_{\text{moy}}}, \quad \theta = \frac{T - T_0}{(q \cdot D/k)},$$

$$p^* = \frac{p + \rho_0 \cdot g \cdot z}{\rho_0 \cdot U_{\text{moy}}^2}, \quad t^* = \frac{t}{(D/U_{\text{moy}})}, \quad \text{et} \quad \alpha^* = \frac{\alpha_s}{\alpha_f}$$

Les équations gouvernantes peuvent s'écrire sous la forme suivante en coordonnées cylindrique :

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r v}{\partial r} \right) = 0 \quad (\text{V.12})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] + \frac{\text{Gr}_z}{\text{Re}^2} \cdot \theta \quad (\text{V.13})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{v}{r^2} \right] + \frac{\text{Gr}_r}{\text{Re}^2} \cdot \theta \quad (\text{V.14})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial z} + v \frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\alpha^*}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \right] \quad (\text{V.15})$$

Basé sur cette adimensionnalisation, les paramètres gouvernant ce problème sont :

$$\text{Re} = \frac{U_{\text{moy}} \cdot D}{\nu} \quad (\text{Nombre de Reynolds}), \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} \quad (\text{Nombre de Prandtl})$$

$$Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot q_w \cdot D^4}{k \cdot \nu^2} \text{ (Nombre de Grashof basé sur le flux de chaleur),}$$

$$\alpha^* = \frac{\alpha_s}{\alpha_f} \text{ (Rapport des diffusivités thermiques solide/fluide)}$$

$$Gr_x = Gr \cdot \cos \gamma, \quad Gr_y = Gr \cdot \sin \gamma$$

V.6. Conditions initiales et conditions aux limites

Initialement ($t=0$), les conditions aux limites communes sont basées sur un profil parabolique de vitesse et un profil uniforme de température à l'entrée, une symétrie des champs hydrodynamique et thermique sur l'axe du tube, et un profil entièrement développé à la sortie. Par ailleurs, la condition thermique sur la paroi ($r=R+\delta$) est :

$$\text{si } z < L_1 \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \text{ (adiabatique)}$$

$$\text{si } L_1 \leq z \leq L_2 \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} = 1 \text{ (flux de chaleur uniforme)}$$

$$\text{si } z > L_1 + L_2 \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \text{ (adiabatique)}$$

En basant sur ces conditions aux limites, on obtient le régime établi après un temps ($t=t_c$) puis on perturbe l'écoulement par un échelon de température comme :

$$\text{à } t=t_c \text{ et } z=0, \quad \theta = \theta \pm \Delta\theta \tag{V.16}$$

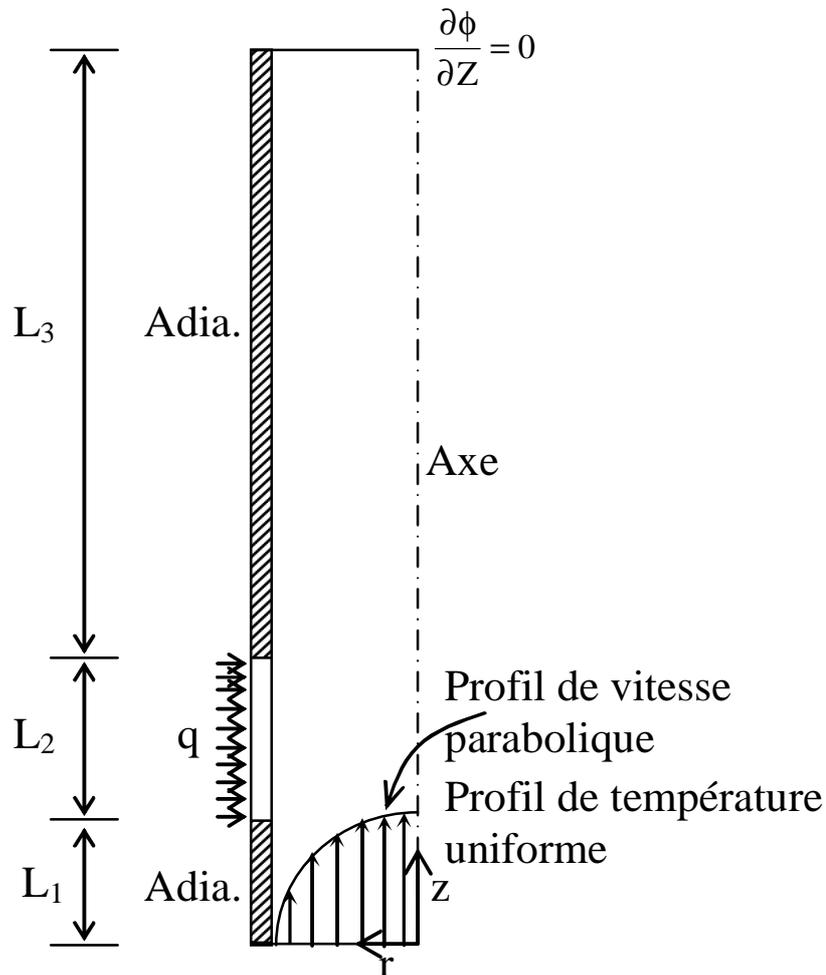


Figure V.20 : Configuration géométrique du cas étudié avec les conditions aux limites

V.7. Résultats et discussion

V.7.1. Structure de l'écoulement et du champ thermique ($DT > 0$)

Lorsqu'on applique un échelon de température positif à l'entrée du tube et un flux à la paroi, la structure d'écoulement est induite par un effet combiné des deux conditions. On observe qu'une zone de recirculation se forme à l'entrée dès les premiers instants, figure (V.21a). Cela apparaît à cause du fait que le fluide chaud (réchauffé par l'échelon de température) à l'entrée possède une masse volumique relativement plus faible que celle du fluide froid. Donc, étant plus léger, il a tendance à monter rapidement au centre et simultanément, pour garder la

conservation de la masse du fluide, il ralentit à coté de la paroi. D durant la phase transitoire, la cellule de recirculation est convectée vers la sortie du tube le long de la paroi. L'influence du flux imposé, vient un peut en retard (figure V.21.b, c, d et e). Il a réussi à diviser la cellule de recirculation en deux. L'une est de petite taille au voisinage de l'entrée, l'autre continue a se propagé vers la sortie. Cette constatation peut être observer aux tours de la partie chauffée du tube.

L'instabilité hydrodynamique entraîne également un déséquilibre thermique au sien de l'écoulement. L'oscillation des lignes de courant près de la paroi montre bien l'instabilité des couches limites dynamiques et thermique. Ce phénomène à été observé par Martin et al [43], Mai et al [49] pour un écoulement dans un tube vertical chauffé à la paroi. Une stratification des lignes isotherme est nettement observée au voisinage de la partie chauffée.

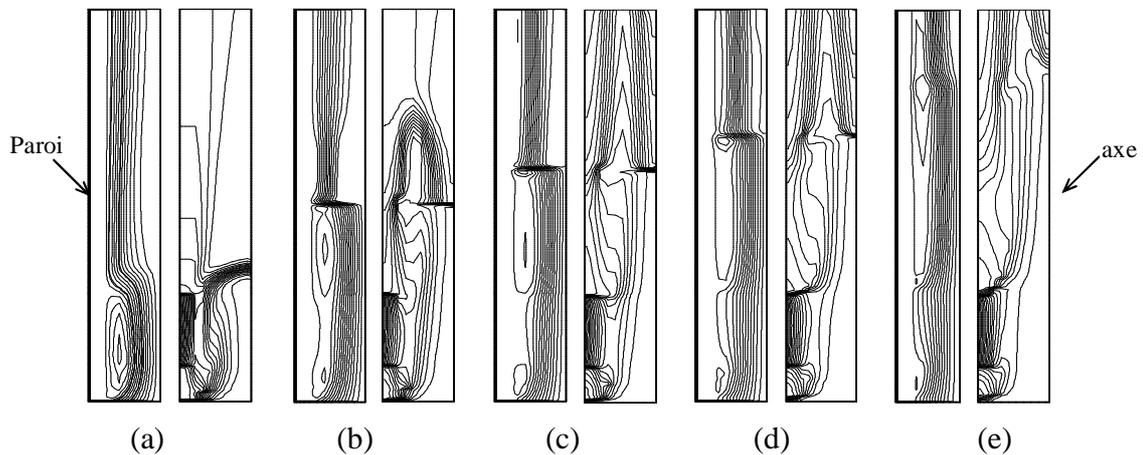


Figure V.21 : Evolution des champs thermique et hydrodynamique en fonction du temps le long du tube pour $\Delta\theta = 0.33$, ($\Delta T=20$), $\alpha^* = 1$, et $\tau = 0.2, 0.5, 0.8, 1$. et 1.2 pour a, b, c, d et e respectivement

V.7.2. Influence de la diffusivité

Il est intéressant de voir l'influence du rapport de diffusivité thermique $\alpha^* = \alpha_{\text{solide}} / \alpha_{\text{liquide}}$ sur la structure hydrodynamique et thermique. Pour cela, on donne sur la figure (V.22) l'évolution temporelle des lignes de courant des isothermes le long du tube pour le cas ou $\alpha_{\text{solide}} = 5 * \alpha_{\text{liquide}}$, tout en gardant constant le nombre de Richardson (G_r / R_e^2) et l'échelon de température ($\Delta T = 20^\circ\text{C}$). En augmentant le α^* , on peut remarquer la disparition de la zone de

recirculation observer précédemment près de la paroi. En revanche, une grande cellule apparaît aux premiers instants dans la partie centrale du tube, on peut expliquer, ce phénomène par la dominance de la condition du flux thermique à la paroi sur la condition d'un échelon à l'entrée. Du point de vue thermique, on constate qu'il y a un échauffement rapide du fluide à l'intérieure du tube.

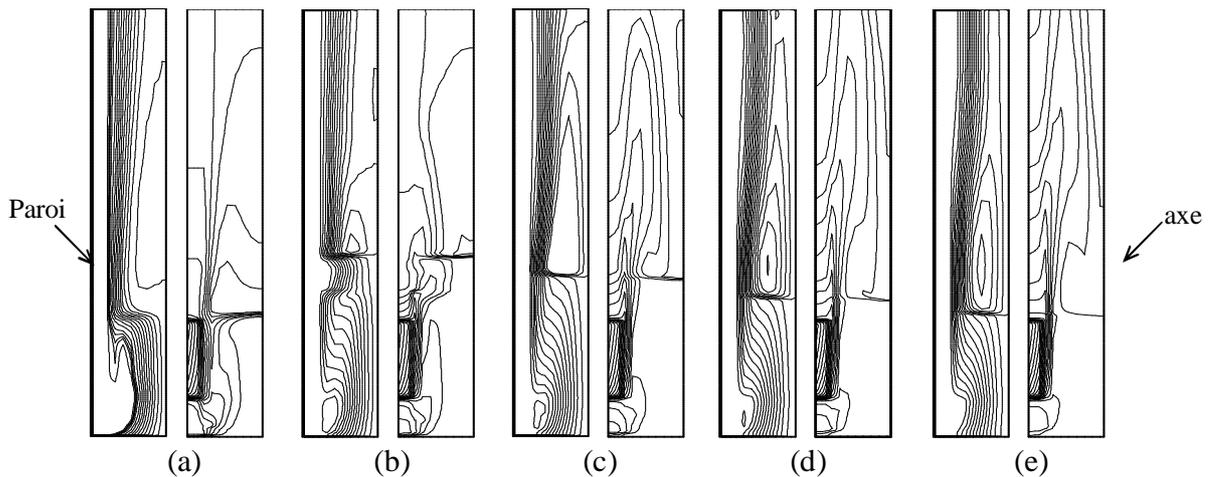


Figure V.22 : Evolution des champs thermique et hydrodynamique en fonction du temps le long du tube pour $\Delta\theta = 0.33$, ($\Delta T=20$), $\alpha^* = 5$, et $\tau = 0.2, 0.5, 0.8, 1.$ et 1.2 pour a, b, c, d et e respectivement

V.7.3. Structure de l'écoulement et du champ thermique ($DT < 0$)

Lorsqu'on applique un échelon de température négatif à l'entrée du tube le fluide freine au centre et, en même temps, pour garder la conservation de la masse globale du fluide, il accélère au voisinage de la paroi. La figure (V.23) montre d'une part une satisfaction de la température du fluide durant la phase transitoire et d'autre part l'apparition des oscillations des lignes de courants dans la partie centrale du tube (b) (c) et (d) ceci est du à l'interaction entre les couches chaudes et des couches froides. De plus, nous constatons qu'une zone de recirculation apparaît sur l'axe du tube. Elle diminue en taille (b), (c), (d) puis elle revient à sa taille initiale (e).

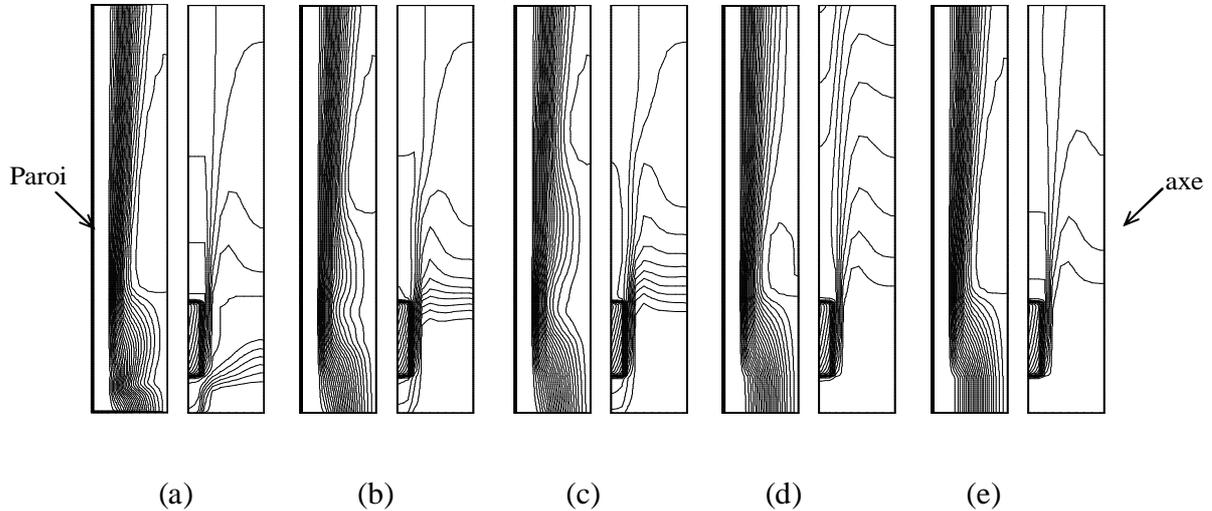


Figure V.23 : Evolution des champs thermique et hydrodynamique en fonction du temps le long du tube pour $\Delta\theta = -0.33$, ($\Delta T = -20$), $\alpha^* = 5$, et $\tau = 0.1, 0.4, 0.5, 1.5$ et 3.5 pour a, b, c, d et e respectivement

V.7.4. Température interfaciale

La distribution axiale de la température interfaciale (interface solide-fluide) est montrée aux figures V.24 et V.25, pour un rapport de diffusivité α^* variant de 0.1 jusqu'à 10 et pour divers échelon de la température $\Delta\theta$ respectivement. La figure V.24, montre qu'en amont de la section chauffée, la température interfaciale est indépendante du rapport des diffusivités thermique (solide/fluide). Toutes les courbes sont superposées. A partir de la section chauffée jusqu'à la sortie de la conduite θ_{int} augmente avec l'augmentation de α^* . En effet, quand le rapport de diffusivité (α^*) est élevé, une quantité importante de la chaleur fournie au tube, par le flux de chaleur appliqué, est conduite dans la paroi pour être relâchée en aval de la section chauffée, ou le fluide est plus froid. Lorsque α^* diminue, la température interfaciale θ_{int} dans la section chauffée tend vers une valeur légèrement supérieur que dans les sections adiabatiques, indiquant que la conduction axiale pariétale devient négligeable quand α^* est faible, par exemple ($\alpha^* = 0,1$). En plus, dans la zone où le flux thermique est appliqué, la tangente des courbes de θ_{int} change entre 0 pour $\alpha^* = 0,1$ et presque supérieur à 1 pour $\alpha^* = 10$.

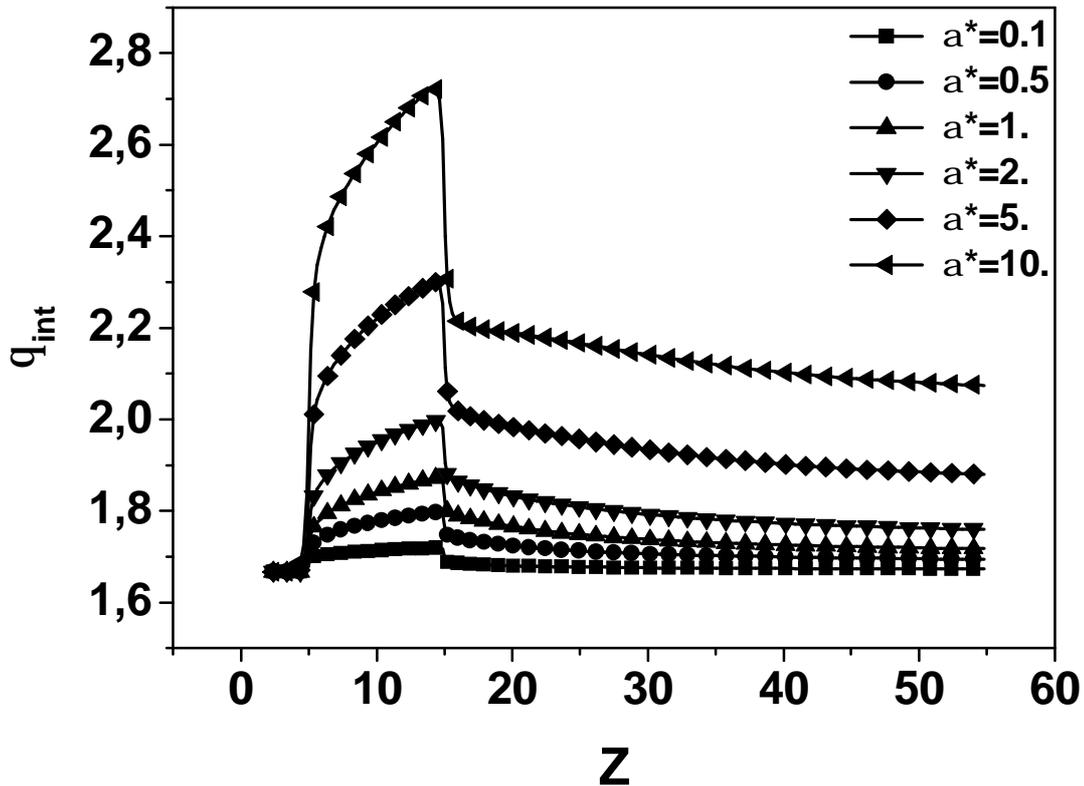


Figure V.24 : Distribution axiale de la température à l'interface solide-fluide
 $\Delta\theta=+0,667$

On remarque aussi, qu'il existe des discontinuités aux deux extrémités de la section chauffée, augmentation rapide de θ_{int} pour ($Z = 5$) et diminution rapide θ_{int} pour ($Z = 15$). Ces phénomènes sont dus à la variation brusque de la condition de frontière à cet endroit.

L'asymétrie de la courbe de θ_{int} par rapport à la mi-section chauffée révèle que toute la chaleur fournie au tube est redistribuée en aval de la section chauffée. Ceci s'explique par le fait qu'en aval, on retrouve du fluide relativement plus froid, ce qui favorise le transfert de chaleur.

Dans la figure V.25 on constate que la température de l'interface solide- fluide augmente avec l'augmentation de l'échelon de température à l'entrée même en amont de la section chauffée. Mais cette augmentation est relativement faible par rapport à l'augmentation dans la partie chauffée et en aval de cette partie.

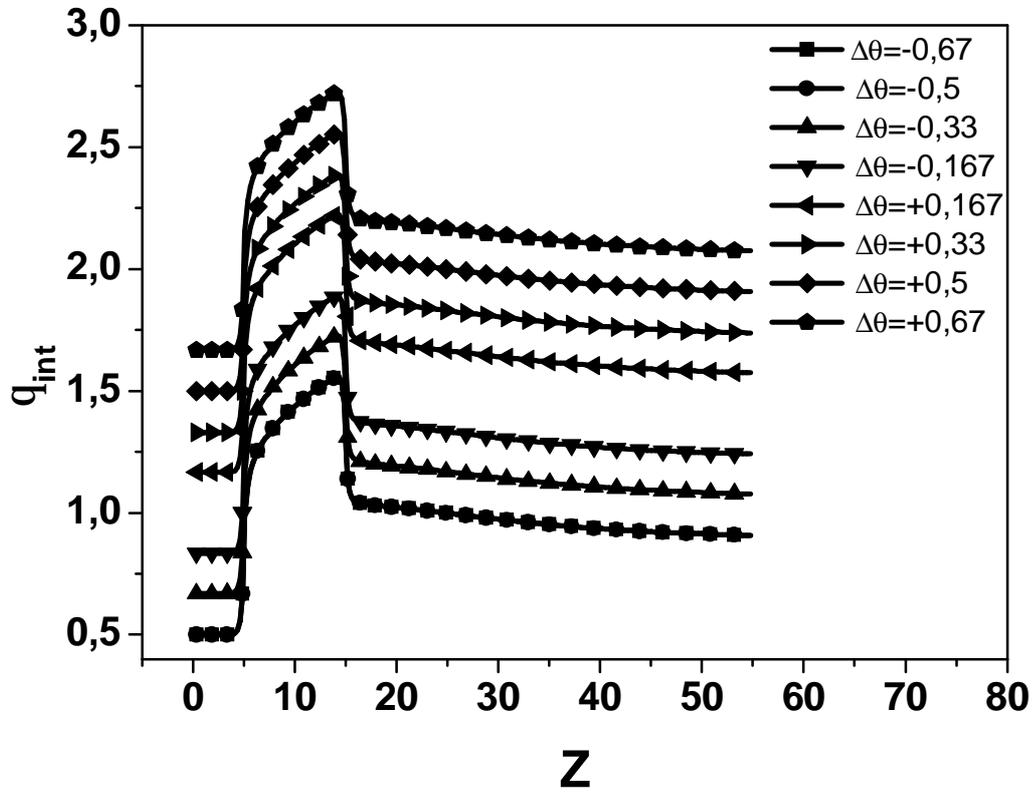


Figure V.25 : Distribution axiale de la température à l'interface solide-fluide
 $\alpha = 10$

Conclusion générale

L'étude que nous avons menée avait comme objectif, le développement d'un outil fiable dans le but d'étudier par simulation numérique, les phénomènes physiques régissant les écoulements laminaires et turbulents avec transfert de chaleur dans des conduites bi- et tri-dimensionnelles, en raison de nombreuses applications qui concernent l'industrie en général.

Dans un premier temps, en basant sur le modèle numérique, nous avons mis au point des nouveaux codes de calcul basé sur les équations de transports de quantité de mouvement, d'énergie, de l'énergie cinétique de la turbulence et son taux de dissipation. On note que pour la turbulence, le modèle $k-\epsilon$ standard a été introduit dans le code de calcul et au voisinage des parois solide, nous avons utilisé les fonctions des parois. La méthode de discrétisation des équations différentielles repose sur la méthode des volumes finis

Dans un deuxième temps, nous terminons par présenter quelques applications pratiques calculées avec les codes développés pour mettre en oeuvre la méthode décrite dans cette thèse. Ceci va nous permettre de valider nos codes de calcul et de montrer ses capacités à reproduire, aux limitations des modèles près, des faits expérimentaux bien établis.

Nous commençons par une première application type, où des résultats expérimentaux existent, est l'écoulement turbulent à travers un échelon. Il s'agit d'un conduit avec un élargissement brusque constituant une zone morte où une recirculation peut se développer. L'importance de cette zone est, un des critères utilisés pour juger la validité du modèle de turbulence à prédire correctement des écoulements complexes. Après l'analyse des résultats et la comparaison avec l'expérimental, on peut conclure que, concernant cette application, les codes développés permettent un calcul pratique fiable et, en tout cas, en accord avec les calculs menés par ailleurs dans les mêmes conditions et avec le même modèle de turbulence. Pour mieux approcher l'expérience, il y a lieu, d'un côté, d'utiliser d'autres modèles réputés plus généraux

et de meilleures qualité comme les modèles de second ordre (RSM) ou plus simplement les modèles algébriques (ASM) et, de l'autre, de porter les plus grands soins au traitement des fonctions de paroi primordiales pour le transfert de chaleur, à défaut de pouvoir utiliser des modèles à faible nombre de Reynolds capables de mieux approcher la réalité dans les zones de paroi, mais plus coûteux car nécessitant des maillages fins.

Les résultats de la deuxième partie, ont permis d'évaluer l'influence de l'inclinaison et du taux de chauffage pariétal sur le développement de l'écoulement et les distributions des coefficients de frottement et de transfert thermique. En particulier pour un tube incliné à 30° , les courants secondaires associés à la convection naturelle naissent tout près de l'entrée et se développent très rapidement. Ils induisent des déformations considérables sur les profils de vitesses axiales.

L'écoulement confiné en régime de convection mixte suit deux régions le long de la conduite. Dans la première région, l'écoulement est essentiellement forcé pur. Dans la deuxième région, les courants naturels engendrent un brassage important du fluide favorisant davantage l'échange thermique et augmentent le frottement pariétal.

Dans la troisième partie, nous avons analysé l'écoulement laminaire et ascendant en convection mixte transitoire dans un tube vertical, avec l'effet de la diffusivité thermique de la paroi, lorsque l'entrée est perturbée par une variation brusque de la température du fluide.

A partir des résultats numériques, nous avons mis en évidence les phénomènes de recirculation et d'oscillation de l'écoulement qui peuvent apparaître selon le signe de l'échelon de température (réchauffement ou refroidissement). L'apparition de ces phénomènes a conduit à des instabilités de l'écoulement laminaire.

De plus, les effets de la diffusivité thermique de la paroi et de la densité de flux imposée à la paroi sur le comportement d'un écoulement laminaire en convection mixte transitoire ont été mis en évidence.

La turbulence en 3D en régime de la convection mixte n'a pas été prise en considération dans le modèle, ce qui limite l'étude aux cas des nombres de Grashof relativement faible et à des écoulements caractérisés un régime laminaire. Cependant, on recommande de considérer un modèle plus complet (elliptique et turbulent dans les trois directions) afin de pouvoir traiter d'autres cas, également intéressants.

Résumé

Le présent travail consiste à l'étude de l'échange de chaleur par convection généralement rencontrés dans la pratique industrielle, où l'écoulement du fluide est en régime turbulent et dans des conduites de section quelconque et variable. La prédiction de tels phénomènes est donc d'une importance primordiale pour la conception et le développement de ce genre de systèmes. Cette importance s'explique par plusieurs raisons tels que, l'affranchissement de l'expérimentation souvent difficile à mettre en oeuvre et très onéreuse ainsi que la souplesse que procure un logiciel dans l'étude de l'influence des différents paramètres du problème, souvent très nombreux et dès fois impossibles à prendre en compte complètement. Les équations de Navier-Stokes qui expriment le principe de conservation des différentes grandeurs du problème: masse, quantité de mouvement, énergie... ont été utilisées pour modéliser les problèmes physiques considérés. Le modèle à deux équations de transport (k - ϵ) a été utilisé pour surmonter le problème de turbulence. La méthode numérique des volumes finis est utilisée pour la discrétisation des équations différentielles de transports. Après l'analyse des résultats et la comparaison avec l'expérimental, on peut conclure que, les codes développés permettent un calcul pratique fiable et en bon accord avec d'autres calculs menés dans des mêmes conditions. Par ailleurs pour mieux s'approcher de l'expérience, il est nécessaire, d'utiliser d'autres modèles réputés, plus généraux et de meilleures qualités.

Références bibliographiques

- [1] Launder, B.E., & Spalding, D.B., Lectures in mathematical models of turbulence. *Academic Press*, London, 1972.
- [2] Mellor, G.L. & Herring, H.J., A survey of the mean turbulent field closure models. *AIAA Journal*, **11**, 590-598, 1973.
- [3] Launder, B.E., & Spalding, D.B., The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **3**, 269-289, 1974.
- [4] Bradshaw, P., Turbulence. *Springer-Verlag*, Berlin, 1976.
- [5] Reynolds, W.C., Computation of turbulent flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **8**, 183-208, 1976.
- [6] Rodi, W., Turbulence models and their application in hydraulics. *International Association for Hydraulic Research*, Delft, The Netherlands, 2 ed., 1984.
- [7] Launder, B.E., Reynolds, W.C., Rodi, W., Mathieu, J. & Jeandel, D. Turbulence models and their applications. **Vol. 2**, *Eyrolles*, Paris, 1984.
- [8] Nallasamy, M., Turbulence models and their application to the prediction of internal flows: a review. *Computers and Fluids*, **15**, 151-194, 1987.
- [9] Benocci, C., Introduction to the modelling of turbulence. *Lecture Series, Von Karman Institute for Fluid Dynamics*, Rhode-St-Genèse, Belgium, **06**, 1987
- [10] Viollet, L., Modèles de turbulence à partir de grandeurs statistiques en un point-modèle k - ϵ . *Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches- EDF*, **Série A**, n°1, 35-47, 1987.
- [11] Gibson, M., Jones, W.P., Mcguirk, J.J., & Whitelaw, J.H. Turbulence models for computational fluid dynamics. *Outline Lecture Notes*, Imperial College of Science and Technology, London, 1988.
- [12] Martinuzzi, R. & Pollard, A., Comparative study of turbulence models in predicting turbulent pipe flow, Part I : Algebraic stress and k - ϵ models. *AIAA Journal*, **27**, 29-36, 1989.

-
- [13] Pollard, A. & Martnuzzi, R. Comparative study of turbulence models in predicting turbulent pipe flows, Part II : Reynolds stress and k - ϵ models. *AIAA Journal*, **27**, 1714-1721, 1989.
- [14] Chen, H.C. & Patel, V.C., Near-wall turbulence models for complex flows including separation. *AIAA J.*, **vol. 26**, pp.641-648, 1988.
- [15] Jones, W.P. & Launder, B.E., The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *Int. J. Heat Transfer*, **vol. 15**, pp.301-313, 1972.
- [16] Chen, Y.S. & Kim, S.W., Computation of turbulence flows using an extended k - ϵ turbulence closure model. *NASA Contractor Report*, n° **CR-179204**, 1987.
- [17] Yakhot, V. & Smith, L.M., The renormalization group, the ϵ -expansion and derivation of turbulence models. *J. Sci. Comput.*, **vol. 7**, pp.35-61, 1992.
- [18] Kim, J., Kline, S.J., & Johnston, J.P., Investigation of a reattaching turbulent shear layer : flow over a backward-facing step. *Transactions of the ASME, J. Fluids Eng.*, **102**, 302-308, 1980.
- [19] Amanos, R.S. & Goel, P., Computation of turbulent flow beyond backward-facing steps using Reynolds-stress closure. *AIAA Journal*, **23**, 1356-1361, 1985.
- [20] Benocci, C., An explicit finite differences solver for the incompressible Reynolds averaged Navier-Stokes equations, optimized for the Alliant DSP9000 computer. *Technical Memorandum*, **45**, July 1988, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Rhode-St-Genèse, Belgium.
- [21] Eaton, J.K., & Johnston, J.P. A review of research on subsonic turbulent flow reattachment. *AIAA Journal*, **19**, 1093-1100, 1981.
- [22] Kaul, U.K. & Kwak, D., Computation of internal separated flow with a large separated region. *Int. J. Num. Methods in Fluids*, **6**, 927-937, 1986.
- [23] Vogel, J.C., & Eaton, J.K., Combined heat transfer and fluid dynamic measurements downstream of a backward-facing step. *Transactions of the ASME, J. Heat Transfert*, **107**, 922-929, 1985.
- [24] Hishida, M., Nagano, Y. & Montesclaros, M. S., Combined forced and free laminar convection in the entrance region of an isothermally heated horizontal pipe. *ASME J. Heat Transfer*, **104**, 153-159, 1992.
- [25] Cheng, K.C., Hong, S.W. & Hwang, G.J., Buoyancy effects on laminar heat transfer in the thermal entrance region of horizontal rectangular channels with uniform wall heat flux for large Prandtl number fluid. *Int J Heat Mass Transfer*, **15**, 1819-1836, 1972.
- [26] Hwang, G.J. & Lai, H.C., Laminar convective heat transfer in a horizontal isothermal tube for high Rayleigh numbers. *Int. J Heat Mass Transfer*, **37**, 1631-1640, 1994.
- [27] Orfi, J., Convection mixte laminaire dans un tuyau incliné : Développement simultané et phénomène de bifurcation. *These de Doctorat, Université de Sherbrooke*, **166**, 1995.
- [28] Patankar, S.V., Ramadhyani, S., & Sparrow, E. M., Effect of Circumferentially Non-uniform Heating on Laminar Combined Convection in a Horizontal Tube, *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, **Vol. No 100**, pp. 63-70, 1978.
- [29] Incropera, F.P. & Schutt, J.A., Numerical simulation of laminar mixed convection in the entrance region of horizontal rectangular ducts. *Num. Heat Transfer*, **8**, 707-729, 1985.
- [30] Mahaney, H.V., Incropera, F.P., & Ramadhyani, S., Effect of wall heat flux distribution on laminar mixed convection in the entrance region of a horizontal rectangular ducts. *Num. Heat Transfer*, **13**, 427-450, 1988.
-

-
- [31] Mahaney, H.V., Ramadhyani, S. & Incropera, F.P., Numerical simulation of three dimensional mixed convection heat transfer from an array of discrete heat sources in a horizontal rectangular duct. *Num. Heat Transfer*, **16**, 267- 286, 1989.
- [32] Choudhury, D. & Patankar, S.V., Combined forced and free laminar convection in the entrance region of an inclined isothermal tube. *ASME J Heat Transfer*, **110**, 901-908, 1988.
- [33] Orfi, J., Galanis, N. & Nguyen, C.T., Analysis of combined forced and free laminar convection in the entrance region of an inclined heated circular tube. *10th Int. Heat Transfer Conf.*, Brighton, UK, 1994, Proc, **vol 5**, 537-542, 1994a.
- [34] Orfi, J., Calanis, N. & Nguyen, C.T., Laminar mixed convection flow in the entrance region of uniformly heated inclined tubes. *Advanced Comp. Math. Heat transfer*, **111**, Comp Mech Publications (LC Wrobel, CA Brebbia, AJ Nowak, ed) 45-52, 1994b.
- [35] Petukhov, B.S., Polyakov A.F. and Strigin, B.K., Heat transfer in tubes with viscous gravity flow. *Heat Transfer Soviet Research 1*, **no 1**, 24-31, 1969.
- [36] Petukhov, B.S. & Polyakov, A.F., Experimental investigation of visco- gravitational fluid flow in a horizontal tube. *Scientific Research Institute of High Temperature, translated from Teplofizika Vysokikh temperature*, **vol 5, no 1**, 24-31, 1967.
- [37] Barozzi, C.S., Zankhini, E. & Marioti, M., Experimental investigation of combined free and forced convection in horizontal and uncooled tubes. *Meccanica*, **vol 20, no 1**, 18-27, 1985.
- [38] Mori, Y. & Futagami, K., Tokuda, S. & Nakamura, M., Forced convective heat transfer in uniformly heated horizontal tubes, 1st report, Experimental study on the effect of buoyancy. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **9**, 453-463, 1966.
- [39] Rustum, I.M. & Soliman, H.M., Experimental investigation of laminar mixed convection in tubes with longitudinal internal fins. *ASME J. Heat Transfer*, **110**, 366-372, 1988.
- [40] Nguyen, C. T., Maïga, S. B., Landry, M., Galanis, N., & Roy, G., Numerical investigation of flow reversal and instability in mixed laminar vertical tube flow. *Int. J. Therm. Sc.*, **43(8)**, pp.797-808, 2004.
- [41] Mai, H. T., El Wakil, N. & Padet, J., Transfert de chaleur dans un tube vertical avec écoulement de convection mixte à débit variable. *Int. J. Therm. Sciences*, **Vol. 38**, pp.277-283, 1999
- [42] Behzadmehr, A., Galanis, N., & Laneville, A., Low Reynolds number mixed convection in vertical tubes with uniform wall heat flux. *Int. J. heat Mass Transfer*, **Vol. 46, N° 25**, pp. 4823-4833, 2003
- [43] Martin, A. & Shadday, J., combined forced / free convection through vertical tubes at high Grashof numbers. *Proc. 8th Int. Heat transfer conf.*, San Francisco USA, pp.1433-1437, 1986.
- [44] Lounadi, A. Galanis, N. & Nguyen C.T., Laminar fully developed mixed convection in inclined tubes uniformly heated on their outer surface. *Numer. Heat Trans. A-Appl.*, **26**, pp.719-738, 1994.
- [45] Choi, D.K. & Choi, D.H., Developing mixed convection flow in horizontal tube under circumferentially non-uniform heating. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **37(13)**, pp.1899-1913, 1994.
- [46] Bernier, M.A., & Baliga, B.R., Conjugate Conduction and Laminar Mixed Convection in Vertical Pipes for Upward Flow and Uniform Wall Heat Flux, *Numerical Heat Transfer, Part A*, **Vol.21**, pp. 313-332, 1992.
-

-
- [47] Mai, H. T., Zebiri, R. & Lorenzo, T., Convection mixte en régime transitoire de couche limite laminaire sur une plaque vertical. *C. R. Acad. Sci.Paris*, **t.329,Série IIb**, pp.627-631, 2001.
- [48] Mai, H. T. & Popa, C. V., Numerical study of transient mixed convection in vertical pipe flows. *Proc. Of the Conf. On Advances in Fluid Mechanics IV*, eds. M. Rahman, R. Verhoven & C. A. Brebbia, WITpress, pp.75-84, 2002.
- [49] Mai, H. T., Popa, C. V. & Polidori, G., Transient mixed convection flow instabilities in vertical pipe. *Heat Mass Transfer*, **41**, pp.216-225, 2001.
- [50] Bilir, S.& Ates, A., Transient conjugated heat transfer in thick walled pipes with convective boundary conditions. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **46(14)**, pp.2701-2709, 2003.
- [51] Hinz, O. Turbulence. *Mc Graw-Hill*, New-York, 1959.
- [52] Amano, R.S., & Goel, P., Investigation of third-order closure model of turbulence for the computation of incompressible flows in channel with backward-facing step. *Transactions of the ASME, Journal of Fluids Engineering*, **109**,424-428, 1987.
- [53] Launder, B.E., Reece, G.J. & Rodi, W., Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence model. *Journal of Fluid Mechanics*, **68**, 537-566, 1975.
- [54] Amano, R.S. & Chaij, C., Transport models of the turbulent velocity-temperature products for computations of recirculating flows. *Numerical Heat Transfer*, **14**, 75-95,1988.
- [55] Rodi, W., A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses. *ZAMM*, **56**, 1219-1221, 1976.
- [56] Bradshaw, P., Ferris, D.H., & Atwell, N.P., Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation. *Journal of Fluid Mechanics*, **28**, 593-616, 1967.
- [57] Nagano, Y. & Kim, C., A two-equation model for heat transport in wall shear flows. *Transactions of the ASME, Journal of Heat Transfer*, **110**, 583-598, 1988.
- [58] Patel, V.C., Rodi, W., & Scheuerer, G., Turbulence models for near wall and low Reynolds number flows : a review. *AIAA Journal*, **23**, 1308-1319, 1985.
- [59] Henkes, R.A., & Hoogendoorn, C.J., Comparison of turbulence models for the natural convection boundary layer along a heated vertical plate. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **32**, 157-169, 1989.
- [60] Bradshaw P. Effects of streamline curvature on turbulent flow. *AGARDO GRAPH*, **169**, 1973.
- [61] Jayatilleke, C.L.V., The influence of Prandtl number and surface roughness on the resistance of the laminar sublayer to momentum and heat transfer. *progress in Heat and Mass Transfer*, **Vol. I**, 192-329, GRIGULL U. and HAHNE E.(ed.), pergamon Press, 1969.
- [62] Patankar, S.V., Numerical heat transfer and fluid flow. *Hemisphere Publishing Corporation and MC Craw- Hill Book Company*, New York, 1980.
- [63] Patankar, S.V., Guide pour le code microCOMPACT
- [64] Leonard, B.P., A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Computer Methods in Applied Mech. and Eng.*, **19**, 59-98, 1979.
- [65] Patel, M.K., Cross, M. & Markatos, N.C., An assessment of flow oriented schemes for reducing "false diffusion". *Int. J. Num. Methods in Engineering*, **26**, 2279-2304, 1988.
- [66] Orfi J., Galanis N. & Nguyen C.T. Développement simultané hydrodynamique et thermique d'un écoulement laminaire dans un tube incliné en régime de convection mixte. *Rev. Gén. Therm.*, **36**, 83-92, 1997
-

-
- [67] El Hayek, M., Lybaert, P. et Henrieche, J., Modélisation de la convection forcée laminaire dans des conduits de section constante. *Rapport interne, n° TEC R88/2*, Laboratoire de Thermique, Faculté Polytechnique de Mons, Belgique, 1988.
- [68] Chieng, C.C., & Launder, B.E., On the calculation of turbulent heat transport downstream from an abrupt pipe expansion. *Num. Heat Transfer*, **3**, 189-207, 1980.
- [69] Amano, R.S., Development of a turbulence near-wall model and its application separated and reattached flows. *Num. Heat Transfer*, **7**, 59-75, 1984.
- [70] Djilali, N., Gartshore, L., & Salcudean, M., Calculation of convective heat transfer in recirculating turbulent flow using various near-wall turbulence models. *Num. Heat Transfer, Part A*, **16**, 189-212, 1989.
- [71] Giofalo, M. & Collins, M.W., k - ϵ predictions of heat transfer in turbulent recirculating flows using an improved wall treatment. *Num. Heat Transfer, Part B*, **15**, 21-47, 1989.
- [72] Abadie, P. & Schiestel, R., Prévision numérique de la convection forcée turbulente dans une cavité bidimensionnelle entraînée. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **29**, 417-427, 1986.
- [73] Humphrey, J.A., & Jo, W.M., Numerical simulation of buoyant, turbulent flow-part II: free and mixed convection in a heated cavity. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **29**, 593-610, 1986.
- [74] Kakac, S., Shah, R.K. & Aung, W., Handbook of single-phase convective heat transfer. *John Wiley & Sons*, New York, 1987.
- [74] Orfi, J., Galanis, N., & Nguyen, C.T., Laminar fully developed incompressible flow with mixed convection in inclined tubes. *Int. J. Numerical Methods for Heat Fluid Flow*, **3**, no 4, 341-355, 1993.
- [76] Patankar, S.V., Spalding, D.B., A Calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *Int. J. Heat Mass*
- [77] Raithby, C.D. & Schneider, G.E., Numerical solution of problems in incompressible fluid flow. treatment of the velocity-pressure coupling. *Num. Heat Transfer*, **2**, 417- 440, 1979.
- [78] Ravi Sankar, S., Mees, P.A.J. & Nandakumar, K., Development of three dimensional stream wise periodic flows in mixed convection heat transfer. *J. Fluid Mach.*, **225**, 683-705, 1993.
- [79] Siegwarth, D.P., Mikesell, R.D., Readal, T.C., & Hanratty, T.J., Effect of secondary flow on the temperature field and primary flow in a heated horizontal tube. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **12**, 1535, 1552, 1969.
- [80] Van Doormal, J.P. & Raithby, C.D., Enhancements of the simple method for predicting incompressible fluid flows. *Num. Heat Transfer*, **7**, 147-163, 1984.
- [81] Kholai, O., Kadja, M. & Mai, T.H., Study of conjugate heat transfer accompanying mixed convection in vertical tube submitted to a step of entry temperature. *WIT trans. Eng. Sciences*, **Vol. 53**, pp. 53-62, 2006.