

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique  
**Université de Constantine 1**  
Faculté des sciences et de la technologie  
Département de Génie Civil



**Thèse**

Présentée pour l'Obtention du Diplôme de Magister  
en Génie Civil

Option : Structures

par

**RIMA BENIDIR**

**Thème**

**Etude de poteaux élancés en béton armé soumis  
à un chargement excentré**

Devant le jury :

Président :	<b>H.CHABIL</b>	Professeur	Université de Constantine 1
Rapporteur :	<b>A .TEKKOUK</b>	M.C	Université de Constantine 1
Co-encadreur :	<b>M.BOUCBABOUB</b>	M.C	Université El Arbi Ben Mehidi d'Oum El Bouaghi
Examineur :	<b>M.N. GUETTECHE</b>	Professeur	Université de Constantine 1
Examineur :	<b>A. BOULFOUL</b>	M.C	Université de Constantine 1

**Soutenu le 17-02-2015**

## ملخص

استخدام هياكل الخرسانة المسلحة الطويلة على نحو متزايد يؤدي إلى النظر في ظاهرة عدم الاستقرار ألا وهي الانبعاج. إلى جانب هذه الظاهرة هناك أيضا سلوك المواد الغير الخطي و بالتالي لم يعد بالإمكان القيام بحسابات تحليلية.

الهدف الرئيسي من هذه المذكرة هو إنشاء منحنيات التبادل للأعمدة الطويلة المكونة من الخرسانة المسلحة و الخاضعة لقوى غير مركزية و ذلك باستعمال برنامج حسابي مقترح و مؤسس على طريقة الاختلاف المنتهي مجتمعة مع طريقة الصلابة المماسية. هذه الطريقة الرقمية تسمح من أجل مقطع معطى بتحديد قوة الانهيار و عزم الانحناء. مجموع هذه النقاط يشكل منحنى الانهيار أو منحنى التبادل الذي يأخذ بعين الاعتبار ارتفاع العمود.

دراسة تأثير مختلف العوامل المتمثلة في النحافة، مقاومة الخرسانة، اللامركزية و إجهاد التسليح المأخوذة بعين الاعتبار في إنشاء منحنيات التبادل بين قوة الانهيار و عزم الانحناء. أخيرا استنتاجات و توقعات مقترحة لتنمية هذا العمل.

**الكلمات المفتاحية :** العمود ; الانبعاج ; منحنيات التبادل; قوة الانهيار; النحافة .

**Mots-clés** : Poteau ;flambement ,diagrammes d'interaction;charge de ruine ;élancement

**Keyword** : column ; buckling ;diagram interation ;failure load ; slenderness.

## Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier sincèrement mon directeur de thèse M<sup>r</sup> A. TEKKOUK maître de conférences à l'université de Constantine 1 pour avoir accepté de m'encadrer, ainsi que pour son soutien, ses conseils et sa confiance.

Comme guise de reconnaissance j'adresse mes sincères remerciements, mon grand respect et ma noble gratitude à M<sup>r</sup> M.L. SAMAI professeur à l'université de Constantine 1 premièrement pour m'avoir proposé ce sujet d'étude puis pour m'avoir guidé pour l'élaboration de ce travail, je le remercie également pour sa disponibilité, ses conseils et ses encouragements tout au long de la préparation du mémoire.

Je ne peux oublier d'exprimer ma reconnaissance à M<sup>r</sup> M. BOUCHABOUB maître de conférences à l'université El Arbi Ben Mehidi d'Oum El Bouaghi à qui je reconnais son sérieux et sa contribution régulière aux différents stades de mon travail.

Je remercie profondément Mr H. CHABIL professeur à l'université de Constantine 1 pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de soutenance.

J'adresse également mes remerciements aux membres de jury Mr A. BOULFOUL maître de conférences à l'université de Constantine 1 et M.N. GUETTECHE professeur à l'université de Constantine 1 pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je tiens à signifier ma profonde reconnaissance à tous ceux qui m'ont apporté aide et soutien tout le long de ce parcours, notamment HAMDY ELGOHARY professeur à l'université de Mansoura, Egypte.

# Dédicace

Je dédie le présent travail

A mes chers parents

A mes frères et sœurs

A mes amis

# Résumé

Le recours à des structures de plus en plus élancées en béton armé conduit à prendre en compte leur stabilité au flambement. Ce phénomène et la prise en compte de la non-linéarité des lois de comportement des matériaux ne permettent plus des calculs analytiques.

L'objectif principal de la présente thèse est de construire des diagrammes d'interaction de poteaux élancés en béton armé soumis à un chargement excentré en utilisant un programme de calcul proposé et fondé sur une approche numérique basée sur la méthode des différences finies associée à la méthode de la matrice de rigidité tangentielle. Cette approche numérique permet de déterminer pour une section donnée toutes les combinaisons (N et M) de ruine, l'ensemble de ces points décrit une courbe de rupture ou courbe d'interaction N-M qui prend en compte l'effet de l'élancement.

L'étude des effets des paramètres influents tels que l'élancement, la résistance du béton, l'excentricité et la contrainte des armatures est pris en considération lors de la conception de diagrammes d'interaction.

En dernier lieu des conclusions et des perspectives de développement du présent travail sont proposées.

## **Abstract**

The use of the structures increasingly slender reinforced concrete leads to consider their buckling stability. This phenomenon and the recognition of the non-linearity behaviour laws of materials no longer allow analytical calculations.

The main objective of the present thesis is to realise interaction diagrams of slender columns reinforced concrete subjected to eccentric loading using a proposed calculation program. The numerical approach is based on finite difference method associated to the method of tangential stiffness matrix. This digital approach determines for all combinations given (N - M) of collapse, all of these points are a break curve or N-M interaction curve that takes into account the effect of slenderness.

The study of the effects of parameters such as slenderness, concrete strength, eccentricity and the yield stress of reinforcement are taken into account in the design of interaction diagrams. Finally some conclusions and perspectives are proposed.





# TABLE DES MATIERES

Remerciements.....	i
Dédicace.....	ii
Résumé.....	iii
Abstract.....	iv
Résumé en arabe.....	v
Table des matières.....	vi
Liste des notations et abréviations.....	x
Liste des figures.....	xv
Liste des tableaux.....	xvii

## Chapitre 1 : Introduction générale

<b>1.1. introduction</b> .....	1
<b>1.2. Problématique</b> .....	2
<b>1.3. Objectifs de la thèse</b> .....	2
<b>1.4. Structuration de la thèse</b> .....	3

## Chapitre 2 : Fondements théoriques

<b>2.1. Introduction</b> .....	4
<b>2.2. Classification des structures et des éléments structuraux</b> .....	4
<b>2.3. Poteau court</b> .....	5
2.3.1. Comportement type.....	5
2.3.2. Définitions utiles .....	5
a. Longueur de flambement.....	5
b. Flambement d'un poteau articulé à ses extrémités.....	5
c. Charge critique d'Euler.....	6
d. Flèche et courbure à mi hauteur du poteau.....	6
e. Elancement.....	7
2.3.3. Mode de rupture.....	7
<b>2.4. Poteau élancé</b> .....	8
2.4.1. Définition.....	8
2.4.2. Comportement d'un poteau élancé.....	8
2.4.3. Elancement limite séparant le premier et le second ordre.....	9
<b>2.5. Poteau court ou élancé</b> .....	11
2.5.1. Introduction.....	11
2.5.2. Conception d'un poteau élancé.....	12

2.5.3. Méthode « colonne-modèle ».....	13
2.5.4. Méthode d'amplification du Moment $M_2$ .....	14
<b>2.6. Calcul au second ordre</b> .....	15
2.6.1. Introduction.....	15
2.6.2. Méthode générale.....	15
2.6.3. Méthode basée sur une rigidité nominale.....	15
2.6.4. Méthode basée sur une courbure nominale.....	17
<b>2.7. Considérations technologiques</b> .....	18
<b>2.8. Conclusion</b> .....	19

### Chapitre 3 : Construction de diagrammes d'interaction

<b>3.1. Introduction</b> .....	20
<b>3.2. Lois de comportement des matériaux</b> .....	20
3.2.1. Béton.....	20
a. Diagramme réel (bloc réel).....	20
b. Diagramme idéalisé et pénalisé.....	21
3.2.2. Acier.....	21
a. Diagramme réel.....	21
b. Diagramme idéalisé et pénalisé.....	21
<b>3.3. Poteaux en flexion composée</b> .....	22
3.3.1. Introduction.....	22
3.3.2. Approche graphique.....	22
3.3.3. Approche Analytique.....	22
<b>3.4. Construction de diagrammes d'interaction [6]</b> .....	23
3.4.1. Choix du système de coordonnées.....	23
3.4.2. Détermination des coefficients de remplissage $k_1$ et de positionnement $k_2$ .....	24
a. Détermination de $k_1$ .....	24
b. Détermination de $k_2$ .....	25
3.4.3. Développements théoriques et graphiques de diagrammes d'interaction.....	25
a. Section du béton seul.....	25
b. Effet d'une section d'armatures $A_{s2}$ .....	27
c. Effet d'une section d'armatures $A'_{s1}$ .....	30
<b>3.5. Applications numériques d'utilisation de digrammes d'interaction</b> .....	32
3.5.1. Exemple 1.....	32
3.5.2. Exemple 2.....	33
<b>3.6. Conclusion</b> .....	35

### Chapitre 4 : Simulation numérique de poteaux élancés

<b>4.1. Introduction</b> .....	36
<b>4.2. Relation moment-courbure avec effort normal constant</b> .....	36

4.2.1. Introduction.....	36
4.2.2. Modèles de lois de comportement.....	36
a. Loi simulant le matériau béton.....	36
b. Loi simulant le matériau acier.....	37
4.2.3. Méthode de la matrice de rigidité tangentielle.....	39
a. Introduction.....	39
b. Descriptif de la méthode.....	39
<b>4.3. Méthode des différences finies.....</b>	<b>43</b>
4.3.1. Principe de la méthode.....	43
4.3.2. Descriptif de la méthode.....	43
<b>4.4. Validation des résultats numériques.....</b>	<b>45</b>
4.4.1 Introduction.....	45
4.4.2. Comparaison avec les résultats expérimentaux obtenus par Olivier germain et espion [12].....	45
4.4.3. Comparaison avec les résultats expérimentaux obtenus par Drysdale et Huggins [13].....	45
4.4.4. Comparaison avec les résultats expérimentaux obtenus par Pallarès et al.....	46
<b>4.4. Conclusion.....</b>	<b>47</b>

## Chapitre 5 : Présentation et Analyse des résultats

<b>5.1. Introduction.....</b>	<b>48</b>
<b>5.2. Effets des paramètres influents.....</b>	<b>48</b>
5.2.1. Effets de l'élancement.....	48
5.2.2. Effets de La résistance à la compression du béton, $f_{ck}$ .....	51
5.2.3. Effets de la résistance de l'acier, $f_{yk}$ .....	55
5.2.4. Effets de l'excentricité.....	56
<b>5.3. Analyse de la charge de ruine par en relation du rapport <math>M/M_p</math>.....</b>	<b>57</b>
5.3.1. Effets de l'élancement.....	57
5.3.2. Effets de la résistance, $f_{ck}$ .....	59
<b>5.4. Conclusions.....</b>	<b>60</b>

## Chapitre 6 : Conclusions et perspectives

<b>6.1. Importance et rôle du développement des diagrammes d'interaction.....</b>	<b>62</b>
<b>6.2. Effets de l'élancement "<math>\lambda</math>".....</b>	<b>62</b>
<b>6.3. Effets de la résistance à la compression du béton "<math>f_{ck}</math>".....</b>	<b>63</b>
<b>6.4. Effets de la contrainte d'écoulement "<math>f_{yk}</math>".....</b>	<b>63</b>

<b>6.5. Effets de l'excentricité "e"</b> .....	63
<b>6.6. Perspectives</b> .....	63

## ANNEXE

### *Algorithme de calcul pour la construction de courbes d'interaction*

<b>A.1. Algorithme</b> .....	64
<b>A.2. Démarche de calcul</b> .....	66
A.2.1. Section du béton seul .....	66
A.2.2. Effet d'une section d'armatures $A_{s2}$ .....	66
A.2.3. Effet d'une section d'armatures $A_{s1}$ .....	67
<b>Références bibliographiques</b> .....	68

## Liste des notations et abréviations

$A$	Section transversale du poteau
$A_c$	Aire totale d'une section comprimée de béton
$A_s$	Aire de la section d'armatures
$A'_{s1}$	Aire de la section d'armatures comprimées
$A_{s,max}$	Section maximale d'armatures
$A_{s,min}$	Section minimale d'armatures
$b$	Largeur de la section
$c_m$	Coefficient d'équivalence des moments
$D$	Vecteur déformations
$d$	Hauteur utile de la section
$d'$	Enrobage des armatures comprimées
$d_1$	Enrobage des armatures tendues
$E_c$	Module d'élasticité du béton
$E_{c1}$	Module d'élasticité sécant de l'origine au pic
$E_{ci}$	Module d'élasticité tangent
$E_s$	Module d'élasticité de l'acier
$E_t$	Module tangent
$El$	Rigidité du poteau
$e_a$	Excentricité accidentelle
$e_{tot}$	Somme des différentes excentricités
$e_0$	Excentricité de premier ordre
$e_2$	Excentricité de second ordre

$F$	vecteur forces
$F_{cr}$	Charge critique d'Euler
$f_{cd}$	Résistance de calcul du béton
$f_{ck}$	Résistance caractéristique du béton obtenue à partir d'un cylindre
$f_{cm}$	Résistance moyenne à la compression du béton
$f_{yd}$	Contrainte d'écoulement des armatures de calcul
$f_{yk}$	Contrainte d'écoulement des armatures
$f'_{s1}$	Contrainte au niveau des aciers comprimés
$f_{s2}$	Contrainte au niveau des aciers tendus
$h$	Hauteur totale de la section
$I$	Moment d'inertie de la section du poteau
$I_c$	Moment d'inertie de la section droite de béton
$I_g$	Moment d'inertie de la section transversale du poteau
$I_s$	Moment d'inertie des armatures par rapport au centre de gravité
$i$	Rayon de giration de la section droite
$k$	Facteur de longueur effective
$k_c$	Coefficient tenant compte des effets du fluage
$k_r$	Coefficient de réduction dépendant de l'effort normal
$K_s$	Coefficient tenant compte de la contribution des armatures
$k_\varphi$	Coefficient de fluage
$k_1$	Coefficient de remplissage
$k_2$	Coefficient de positionnement
$k_2^*$	Facteur de réduction tenant compte la diminution de la courbure $\frac{1}{r}$ sous l'effet de l'augmentation de l'effort normal

$L$	Hauteur totale de la structure ou de l'élément de structure
$l_{col}$	Hauteur du poteau mesurée entre les centres d'encastements
$l_f$	Longueur de flambement de l'élément, déterminé par la théorie de l'élasticité
$l_u$	Longueur non supportée du poteau
$l_o$	Longueur utile de l'élément isolé
$M_{(A's1)}$	Moment dû à la contribution des armatures $A'_{s1}$
$M_{(As2)}$	Moment dû à la contribution des armatures $A_{s2}$
$M_c$	Le moment amplifié critique
$M_{Ed}$	Moment de calcul
$M_{0Ed}$	Moment comprenant le 1 <sup>er</sup> ordre et les imperfections
$M_{min}$	Moment minimal du 1 <sup>er</sup> ordre
$M_{Rd}$	Moment résistant de calcul
$M_{sd}$	Moment provenant de l'analyse structurale au 1 <sup>er</sup> ordre
$M_t$	Moment accru
$M_x$	Moments selon l'axe de coordonnées X
$M_{xi}$	Moments interne selon l'axe de coordonnées X
$M_y$	Moments selon l'axe de coordonnées Y
$M_{yi}$	Moments interne selon l'axe de coordonnées Y
$M_1, M_2$	Moments du premier ordre aux extrémités
$N$	Effort normal sollicitant
$N_{(A's1)}$	Effort normal dû à la contribution des armatures $A'_{s1}$
$N_{(As2)}$	Effort normal dû à la contribution des armatures $A_{s2}$
$N_b$	Charge de flambement « eulérienne » basée sur la rigidité nominale
$N_{bal}$	Charge équilibrée à la rupture



$N_{Rd}$	Effort normal résistant de calcul
$N_{sd}$	Effort normal de calcul agissant sur l'élément
$N_{ud}$	Charge axiale ultime
$n$	Effort normal réduit
$P_c$	Charge critique d'Euler
$P_u$	Charge axiale ultime
$Q$	Matrice de rigidité tangentielle
$r_m$	Rapport des moments de 1 <sup>er</sup> ordre
$1/r$	Courbure
$x$	Profondeur de l'axe neutre
$y_i$	Flèche dans le nœud $i$
$\alpha_{(béton)}$	Effort normal réduit du à la contribution du béton seul
$\alpha_{s1}$	Effort normal réduit du à la contribution des armatures $A'_{s1}$
$\alpha_{s2}$	Effort normal réduit due à la contribution des armatures $A_{s2}$
$\beta$	Coefficient qui tient compte des conditions d'extrémités
$\beta_{(béton)}$	Moment réduit du à la contribution du béton seul
$\beta_{s1}$	Moment réduit du à la contribution des armatures $A'_{s1}$
$\beta_{s2}$	Moment réduit du à la contribution des armatures $A_{s2}$
$\beta_d$	Représente la réduction de la rigidité provoquée par des charges axiales
$\gamma_c$	Coefficient de sécurité du béton
$\gamma_s$	Coefficient de sécurité de l'acier
$\delta$	Facteur d'amplification du moment
$\varepsilon_c$	Déformation relative de compression
$\varepsilon_{c1}$	Déformation relative au "pic" de contrainte

$\varepsilon_{cu}$	Déformation relative de compression ultime du béton
$\varepsilon_y$	Déformation relative d'écoulement dans les armatures
$\varepsilon_{yd}$	Déformation relative d'écoulement des armatures de calcul
$\varepsilon_{s2}$	Déformation relative dans les armatures tendues
$\varepsilon'_{s1}$	Déformation relative dans les armatures comprimées
$\varepsilon_{uk}$	Déformation relative maximale
$\varepsilon_0$	Déformation relative centrale
$\lambda$	Facteur d'élanement
$\lambda_{crit}$	Facteur d'élanement critique
$\nu$	Inclinaison sur la verticale de la structure
$\nu_u$	Effort normal réduit
$\sigma_c$	Contrainte de compression
$\varphi_{ef}$	Coefficient de fluage effectif
$\Phi_x$	Courbure selon l'axe de coordonnées X
$\Phi_y$	Courbure selon l'axe de coordonnées Y
$\psi_A$ et $\psi_B$	Représentant la raideur de l'encastrement
$\omega$	Proportion mécanique d'armatures
$\Delta$	Flèche de second ordre
$\Delta_f$	Ecart-type
C.D.G	Centre de gravité
Pc	Poteau court
Pé	Poteau élancé

## Liste des figures

<b>Fig.2.1.</b> Poteau articulé à ses extrémités.....	5
<b>Fig.2.2.</b> Longueur de flambement, $l_f$ en fonction des conditions d'appui.....	6
<b>Fig.2.3.</b> Effet de l'élançement sur le mode de rupture [4].....	7
<b>Fig.2.4.</b> Poteau élancé sous charge excentrée.....	8
<b>Fig.2.5.</b> Effet de l'élançement sur la résistance d'un poteau [12].....	9
<b>Fig.3.1.</b> Diagramme réel contraintes-déformations du béton.....	20
<b>Fig.3.2.</b> Diagramme parabole-rectangle pour le béton .....	21
<b>Fig.3.3.</b> Diagramme réel contraintes-déformations de l'acier.....	21
<b>Fig.3.4.</b> Diagramme idéalisé pénalisé de l'acier .....	22
<b>Fig.3.5.</b> Choix du système de coordonnées $(\alpha, \beta)$ .....	23
<b>Fig.3.6.</b> Bloc parabolique-rectangulaire adopté par l'EC2 [2].....	24
<b>Fig.3.7.</b> Etat de la section d'un poteau.....	25
<b>Fig.3.8.</b> Diagramme d'interaction pour une section de béton seul.....	27
<b>Fig.3.9.</b> Diagramme d'interaction pour la section de béton + $A_{s2}$ ..... ( $A_{s2}/bh = 0.56\%$ , $f_{ck} = 30\text{N/mm}^2$ , $f_{yk} = 400\text{ N/mm}^2$ , $d_2/h = 0.15$ )	28
<b>Fig.3.10.</b> Diagramme d'interaction pour la section de béton + $A_{s2} + A'_{s1}$ .....	31
( $A_{s2}/bh = A'_{s1}/bh = 0.56\%$ , $f_{ck} = 30\text{N/mm}^2$ , $f_{yk} = 400\text{ N/mm}^2$ , $d_2/h = d_1/h = 0.15$ )	
<b>Fig.3.11.</b> Diagramme d'interaction pour $f_{ck} = 30\text{ MPa}$ , et $d_c/h = 0.15$ et $A_s/bh = 0.56\%$ .....	33
<b>Fig.3.12.</b> Diagrammes d'interaction pour $f_{ck} = 30\text{ MPa}$ , et $d_c/h = 0.15$ et $A_s/bh = 0.56\%$ ..... (béton + $A_{s2} + A'_{s1}$ )	35
<b>Fig.4.1.</b> diagramme contraintes –déformations du béton.....	37
<b>Fig.4.2.</b> Diagramme forces –déformations, éprouvette d'acier, surface $269\text{ mm}^2$ .....	38
<b>Fig.4.3.</b> Représentation de la loi « elasto-plastique » pour l'acier.....	39
<b>Fig.4.4.</b> Représentation des efforts et des déformations et discrétisation de la section.....	40

<b>Fig.4.5.</b> Exemple type de diagramme moment- courbure avec effort normal constant.....	42
<b>Fig.4.6.</b> Organigramme du programme numérique.....	43
<b>Fig4.7.</b> modèle de représentation d'un poteau bi-articulé.....	44
<b>Fig.4.8.</b> Relation charge-déplacement : poteau 180×180 mm.....	45
(h= 3.78 m, $f_{ck}=94.3$ MPa, $f_{yk} = 542$ MPa, $e_x = 20$ mm, $e_y=0$ )	
<b>Fig.5.1.</b> Diagrammes d'interaction d'un poteau élancé pour différentes valeur de $\lambda$ .....	48
<b>Fig.5.2.</b> Diagrammes d'interaction d'un poteau élancé pour $f_{ck} = 20$ MPa.....	50
<b>Fig.5.3.</b> Effets de la variation de la résistance du béton pour $\lambda = 35$ .....	52
(L=2000 mm, 200x200mm <sup>2</sup> )	
<b>Fig.5.4.</b> Effets de la variation de la résistance du béton pour $\lambda = 50$ .....	53
(L=3000 mm, 200x200mm <sup>2</sup> )	
<b>Fig.5.5.</b> Effets de la variation de la contrainte d'écoulement des armatures sur le comportement d'un poteau élancé (L=2000 mm, 200x200mm <sup>2</sup> ).....	55
<b>Fig.5.6.</b> Effets de la variation de l'excentricité sur la charge de ruine du poteau.....	56
(pour $\lambda = 35$ et $\lambda = 50$ )	
<b>Fig.5.7.</b> Effets de la variation de l'excentricité sur le moment de ruine du poteau.....	56
(pour $\lambda = 35$ et $\lambda = 50$ )	
<b>Fig.5.8.</b> différents intervalles de N admissibles en relation de M/Mp.....	57
(pour $\lambda = 35$ et $f_{ck} = 30$ MPa)	
<b>Fig.5.9.</b> bloc des charges admissibles pour différents niveaux de M/Mp.....	58
(pour $\lambda = 35$ et $\lambda = 50$ , cas de $f_{ck} = 30$ MPa)	
<b>Fig.5.10.</b> bloc des charges admissibles pour différents niveaux de M/Mp.....	59
(pour $\lambda = 35$ et $\lambda = 70$ , cas de $f_{ck} = 30$ MPa)	
<b>Fig.5.11.</b> bloc des charges admissibles pour différents rapports de M/Mp.....	59
(pour $f_{ck} = 30$ MPa et $f_{ck} = 20$ MPa, avec un $\lambda = 35$ )	
<b>Fig.5.12.</b> bloc des charges admissibles pour différents rapports de M/Mp.....	60
(pour $f_{ck} = 20$ MPa et $f_{ck} = 50$ MPa, avec un $\lambda = 35$ )	

## Liste des tableaux

<b>Tab.4.1.</b> Comparaison des résultats numériques avec les résultats expérimentaux obtenus par Olivier germain et espion [12].....	46
<b>Tab.4.2.</b> Comparaison des résultats numériques avec les résultats expérimentaux obtenus par Drysdale et Huggins [13] .....	46
<b>Tab.4.3.</b> Comparaison des résultats numériques avec les résultats expérimentaux obtenus par Pallarès et al.....	47
<b>Tab.5.1.</b> Effets de la variation de l'élancement sur le couple (N, M) de ruine..... (200x200 mm <sup>2</sup> , avec $f_{ck} = 30$ MPa et $e/h = 0.15$ )	49
<b>Tab.5.2.</b> Effets de la variation de l'élancement sur le couple (N, M <sub>max</sub> )..... (200x200 mm <sup>2</sup> , avec $f_{ck} = 30$ MPa)	49
<b>Tab.5.3.</b> Effets de la variation de l'élancement sur le couple (N, M) de ruine..... (200x200 mm <sup>2</sup> , avec $f_{ck} = 20$ MPa et $e/h = 0.15$ )	50
<b>Tab.5.4.</b> Effets de la variation de l'élancement sur le couple (N, M <sub>max</sub> )..... (200x200 mm <sup>2</sup> , avec $f_{ck} = 20$ MPa)	50
<b>Tab.5.5.</b> Effets de la variation de l'élancement sur le couple (N, M) de ruine..... (pour $f_{ck} = 20$ MPa et $f_{ck} = 30$ MPa, avec $e/h = 0.15$ )	51
<b>Tab.5.6.</b> Effets de la variation de l'élancement sur le couple (N, M <sub>max</sub> )..... (pour $f_{ck} = 20$ MPa et $f_{ck} = 30$ MPa)	51
<b>Tab.5.7.</b> Effets de la variation de la résistance du béton sur le couple (N, M) de ruine..... (pour $\lambda = 35$ et $e/h = 0.15$ )	52
<b>Tab.5.8.</b> Effets de la variation de la résistance du béton sur le couple (N, M <sub>max</sub> )..... (pour $\lambda = 35$ et $e/h = 0.35$ )	53
<b>Tab.5.9.</b> Effets de la variation de la résistance du béton sur le couple (N, M) de ruine..... (pour $\lambda = 50$ et $e/h = 0.15$ )	53
<b>Tab.5.10.</b> Effets de la variation de la résistance du béton sur le couple (N, M <sub>max</sub> )..... (pour $\lambda = 50$ )	54
<b>Tab.5.11.</b> Effets de la variation de la résistance du béton sur le couple (N, M) de ruine..... (pour $\lambda = 35$ et $\lambda = 50$ , avec $e/h = 0.15$ )	54

<b>Tab.5.12.</b> Effets de la variation de la résistance du béton sur le couple (N, $M_{\max}$ ).....	54
(pour $\lambda= 35$ et $\lambda= 50$ )	
<b>Tab.5.13.</b> Effets de la variation de la contrainte d'écoulement des armatures sur le comportement d'un poteau élancé.....	55
<b>Tab.5.14.</b> Effets de la variation de l'excentricité sur le couple (N, M) de ruine.....	57
(pour $\lambda= 35$ et $\lambda= 50$ , avec $f_{ck} = 30$ MPa)	
<b>Tab.5.15.</b> Valeurs de la charge de ruine admissibles.....	58
(pour $\lambda= 35$ et $f_{ck} = 30$ MPa)	

# Introduction générale

## 1.1. introduction

Les éléments structuraux et en particulier les poteaux sont analysés et calculés à l'état limite ultime. En effet, ces poteaux sont généralement sollicités en flexion composée résultant de l'action combinée d'un effort normal (N) et d'un moment fléchissant (M). Le traitement de la flexion composée des poteaux courts et l'analyse d'une section usuelle en béton armé pour la détermination des armatures peut se faire analytiquement ou graphiquement. L'approche analytique est d'essence itérative pour déterminer la plus faible quantité ( $A_s + A'_s$ ). Cependant, cette approche est longue et laborieuse et présente des risques d'erreurs de calcul. Pour ces raisons, les concepteurs préfèrent utiliser de manière extensive l'approche graphique. Cette approche consiste à réaliser des catalogues d'abaques appelés "diagrammes d'interaction" dont l'exploitation est extrêmement judicieuse.

Un poteau court est défini comme étant un élément structurel dans lequel la longueur n'est pas supérieure à environ douze fois la dimension latérale minimale ( $H/a \leq 12$ ), sinon il est considéré comme un poteau élancé. Les poteaux élancés présentent un comportement non linéaire, la prise en compte du comportement non linéaire des matériaux conduit à une approche plus réaliste et permet généralement un dimensionnement plus fiable et plus économique des poteaux. Pour cela, la majorité des codes de conception des constructions en béton armé exigent la prise en compte de la stabilité d'une manière très explicite dans le calcul de ferrailage en flexion composée tels que l'ACI 318-11 [1] et l'EC 2 [2].

Le code ACI 318-11 [1] propose la méthode d'amplification du moment du premier ordre pour la justification de la stabilité de forme dans les poteaux. Le principe de cette méthode est basé sur un couple critique effort normal ultime et moment critique amplifié par rapport au diagramme d'interaction de la section considérée du poteau. L'EC 2 [2] quant à lui propose une méthode générale et deux méthodes simplifiées. La méthode générale est basée sur l'analyse non linéaire, y compris la non-linéarité géométrique c'est-à-dire des effets du second ordre et le comportement non-linéaire des matériaux, à condition que les équations d'équilibre des forces et les relations de compatibilité des déformations soient satisfaites. Les méthodes simplifiées regroupent deux approches l'une basée sur la rigidité nominale du poteau en flexion tenant compte des effets de fissuration, de la non-linéarité des matériaux et du fluage et l'autre donne un moment nominal du second ordre en fonction de la courbure maximale.

De ce fait, la solution de ce type de problèmes ne peut être trouvée analytiquement, pour cela une approche numérique est exposée pour la détermination de la capacité réelle des poteaux élancés à savoir la méthode des différences finies associée à la méthode de la matrice de rigidité tangentielle. En effet, l'objectif principal de la présente thèse est d'exploiter un programme développé par M.Bouchaboub [3] qui permet la construction de diagrammes d'interaction pour poteaux élancés point par point (différents couples M, N produisant la ruine).

## 1.2. Problématique

Les éléments comprimés d'une structure peuvent être sujets à un phénomène d'instabilité nommé flambement. En terme de phénoménologie, le flambement est rencontré sur des structures élancées soumises à un effort de compression excentré, pour lesquelles le déplacement transversal peut être important et ceci même sous de faibles charges. D'un point de vue mécanique, ce phénomène est équivalent à une sollicitation composée de flexion et de compression entraînant une instabilité élastique (non linéaire) ce qui est rapidement destructif.

Les méthodes d'analyse non linéaire peuvent être utilisées pour traiter de tels problèmes. L'étude relève généralement des états limites ultimes, l'analyse pouvant alors être du premier ou du deuxième ordre. Les effets du second ordre doivent être pris en considération lorsque l'on prévoit qu'ils pourront affecter de manière significative la stabilité d'ensemble de la structure ainsi que l'atteinte de l'état limite ultime dans des sections critiques. Dans le cas où l'on peut s'affranchir des effets du second ordre, des abaques d'interaction pour le dimensionnement et la vérification de ces poteaux pourraient être exploités.

Dans le cas où il doit être tenu compte des effets du second ordre, la vérification des poteaux élancés en béton armé par le biais d'abaques d'interaction n'est pas disponible dans la littérature. Ces abaques ont été développés essentiellement pour les poteaux courts. La problématique est donc de développer des abaques d'interaction prenant en considération l'effet de l'instabilité au flambement en utilisant une approche numérique. Cette dernière devenant de ce fait incontournable.

## 1.3. Objectifs de la thèse

Les objectifs assignés à la présente thèse peuvent être présentés comme suit :

- Compréhension approfondie du programme développé par M.Bouchaboub dans le cadre de l'élaboration de sa thèse de doctorat [3].
- Approfondissement des connaissances théoriques pour la réalisation d'abaques d'interaction pour poteaux courts en béton armé.
- Exploitation du programme pour la réalisation d'abaques d'interaction prenant en considération l'effet de l'élancement.
- Etude des effets des différents paramètres influents.
- Tirer des conclusions et perspectives appropriées.



#### 1.4. Structuration de la thèse:

La thèse est constituée de six chapitres et une annexe dont une introduction générale et une conclusion.

- Le premier chapitre présente la problématique qui a encouragé cette recherche ainsi qu'un survol des principaux objectifs.
- Le second chapitre présente les fondements théoriques concernant les méthodes de calcul de poteaux élancés en béton armé et la manière de différencier un poteau court d'un poteau élancé.
- Le troisième chapitre présente les développements théoriques et graphiques de diagrammes d'interaction en utilisant les caractéristiques des matériaux adoptées par l'EC2 [2].
- Le chapitre quatre regroupe les méthodes utilisées pour la simulation numérique de poteaux élancés en béton armé.
- Le cinquième chapitre est consacré à la présentation graphique et à la discussion des résultats obtenus ainsi qu'aux effets des différents paramètres influents.
- Le chapitre six a trait aux conclusions et aux perspectives de développement de la présente thèse.
- La thèse est complétée par une annexe présentant un programme de calcul pour la construction et la réalisation de diagrammes d'interaction pour poteaux courts.

## Fondements théoriques

### 2.1. Introduction

Le présent chapitre se rapporte aux éléments élancés principalement soumis à des efforts de compression et dont les déformations ont une influence significative sur leur capacité portante (sollicitations du second ordre). Dans les éléments comprimés, il convient de prendre en compte l'influence des sollicitations du second ordre si les déformations entraînent une augmentation de plus de 10% des moments fléchissants du premier ordre (EC2 [2] article 4.3.5.3.3).

### 2.2. Classification des structures et des éléments structuraux

Pour les besoins du calcul, les structures sont classées en :

- structures contreventées ou non- contreventées ;
- structures à nœuds déplaçables ou à nœuds non- déplaçables.

Un élément de contreventement doit être suffisamment raide pour pouvoir reprendre et transmettre aux fondations la totalité des charges horizontales appliquées à la structure et garantir la stabilité.

Nœuds déplaçables : dans ce cas, le déplacement des nœuds induit des efforts supplémentaires dans la structure, et donc une étude complète doit être envisagée.

Dans cette même logique, les « imperfections géométriques structurales » liées au défaut de verticalité possible du poteau doivent être prises en compte. Les imperfections sont représentées par une inclinaison globale,  $\nu$ , de la structure et définie par une excentricité dite additionnelle,  $e_a$ .

$$e_a = \frac{\nu l_0}{2} \quad (2.1)$$

$l_0$  = longueur utile de l'élément isolé [mm]

$\nu$  = inclinaison sur la verticale de la structure [radian] défini par l'EC2 [2] (article 2.5.1.3)

$$\nu = \frac{1}{100\sqrt{L}} \geq \frac{1}{200} \quad (2.2)$$

Avec :

$L$  = hauteur totale de la structure ou de l'élément de structure [m]

L'excentricité additionnelle  $e_a$  est donnée par la relation :

$$e_a = \nu \frac{l_0}{2} = \frac{1}{200} \frac{l_0}{2} = \frac{l_0}{400} \quad (2.3)$$

## 2.3. Poteau court

### 2.3.1. Comportement type

Les petites déformations donnent lieu à des moments additionnels très faibles ; donc, le produit  $P\Delta$  est négligeable. Le moment reste pratiquement égal à  $Pe$  et la réponse d'un poteau court suit une ligne droite avec une charge de compression croissante  $P$  jusqu'à la rupture qui se produit par épuisement du matériau quand la courbe de réponse intersecte la courbe de rupture  $P$ - $M$  (fig.2.5).

### 2.3.2. Définition utiles

#### a. Longueur de flambement

La longueur de flambement d'un poteau,  $l_f$ , est évaluée en fonction de la longueur libre,  $l_0$ , et des liaisons effectives. Dans les bâtiments ordinaires, la longueur,  $l_0$ , est mesurée entre les faces supérieures de deux planchers consécutifs ou entre la face supérieure de la fondation et celle du plancher qui en est le plus proche.

#### b. Flambement d'un poteau articulé à ses extrémités

Le cas du poteau bi-articulé est le plus souvent étudié dans la littérature

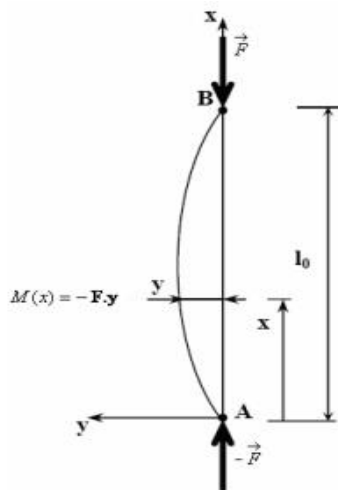


Fig.2.1. Poteau articulé à ses extrémités

Soit un poteau articulé à ses deux extrémités et soumis à une compression pure,  $F$ . L'équation de la déformée du poteau est  $EI y'' = -Fy$ . L'équation différentielle a une solution générale de la forme  $y = A \cos kx + B \sin kx$  obtenue en posant  $k^2 = \frac{F}{EI}$

Les conditions de liaisons permettent de calculer les constantes d'intégration  $A$  et  $B$ .

$y = 0$  si  $x = 0$  et si  $x = l_0$ . Alors,  $A = 0$  et  $B \sin k l_0 = 0$ .

$\sin k l_0 = 0 \longrightarrow k l_0 = n \pi$ .

$$k^2 = \frac{F}{EI} \text{ et } k l_0 = n \pi, \text{ permettent d'écrire la relation } F = n^2 \frac{\pi^2 EI}{l_0^2}$$

**c. Charge critique d'Euler**

La plus petite valeur de F s'obtient pour n = 1 et la relation s'écrit alors :

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2} \tag{2.4}$$

L'effort normal  $F_{cr}$  est la charge critique de flambement qui est communément appelée charge critique d'Euler. Si l'effort normal augmente au-delà de  $F_{cr}$ , un poteau se déforme et se rompt.

Longueur de flambement $l_f$ en fonction des liaisons aux appuis				
A et B sont sur la même verticale			Déplacement de B en tête de poteau	
$l_f = l_0$	$l_f = \frac{\sqrt{2}}{2} l_0$	$l_f = \frac{l_0}{2}$	$l_f = 2 l_0$	$l_f = l_0$

**Fig.2.2.** Longueur de flambement,  $l_f$ , en fonction des conditions d'appui

La longueur de flambement d'un poteau est égale à la distance entre les points d'inflexion de la déformée de son axe. Cette distance varie suivant les conditions d'appuis du poteau à ses extrémités. Les points d'inflexion sont des points de moment nul.

**d. Flèche et courbure à mi hauteur du poteau**

Soit  $e_2$  la flèche et r le rayon de courbure à mi hauteur du poteau donnant la relation générale :

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI} = \frac{e_2 \cdot F_{cr}}{EI}$$

Comme  $F_{cr} = \frac{EI \pi^2}{l_0^2}$ , il apparait que  $e_2 = \frac{1}{r} \frac{l_0^2}{\pi^2}$  et l'écriture de cette relation est parfois simplifiée en posant  $\pi^2 = 10$ . Alors :

$$e_2 = \frac{1}{r} \frac{l_0^2}{10} \tag{2.5}$$

### e. Elancement

Le rapport d'élancement est une évaluation de la capacité d'un élément de structure pour supporter le flambage.

$$\lambda = \frac{l_f}{i} = \frac{l_f}{\sqrt{I/A}} \quad (\text{sans dimensions}) \quad (2.6)$$

Où :

$l_f$  = longueur de flambement du poteau [mm]

$i$  = rayon de giration de la section droite [mm]

$I$  = moment d'inertie de la section du poteau dans le plan de flambement [mm<sup>4</sup>]

$A$  = section transversale du poteau [mm<sup>2</sup>]

#### 2.3.3. Mode de rupture

Pour des poteaux très courts dont l'élancement est inférieur à une certaine valeur limite,  $\lambda_{lim}$  la charge de flambement est nettement supérieure à la capacité portante de calcul donnée par l'EC 2 [2],  $N_{ud} = 0.567f_{ck}A_c + 0.87f_{yk}A_s$ . Pour des valeurs d'élancement inférieures à 50, la ruine se produit par écrasement, alors que pour des valeurs supérieures à 110, la ruine se produit par flambement (fig.2.3).

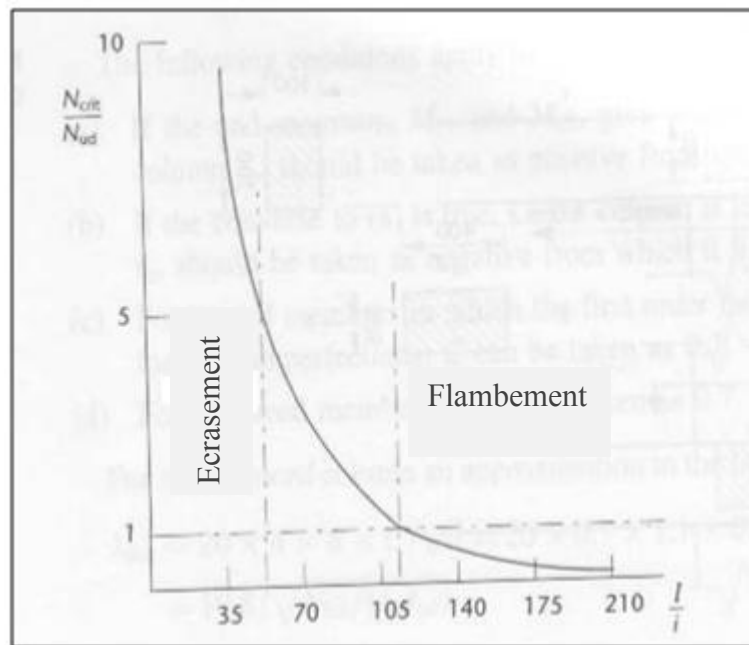


Fig.2.3. Effet de l'élancement sur le mode de rupture [4]

## 2.4. Poteau élancé

### 2.4.1. Définition

Un poteau élancé est celui dans lequel la charge de rupture est régie non seulement par la résistance des matériaux et des dimensions de la section transversale, mais aussi par l'élançement, qui produit un moment de flexion supplémentaire dû à des déformations latérales.

### 2.4.2. Comportement d'un poteau élancé

L'élançement d'un poteau peut se traduire par des déviations latérales provoquées par flexion. Cet effet est représenté dans la Fig.2.4 montrant la courbure d'un poteau droit provoquée par l'application d'une charge,  $P$ , avec la même excentricité,  $e$ , aux deux extrémités. La déformation en flexion du poteau provoque une excentricité de la charge par rapport à la section critique égale à  $(e + \Delta)$ , où  $\Delta$ , est l'excentricité supplémentaire due à la déviation latérale. Par conséquent, le moment maximal augmente à  $P(e + \Delta)$ . Le moment du second ordre résulte du supplément d'excentricité provenant de l'apparition de la flèche  $\Delta$ .

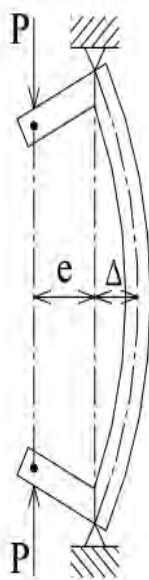


Fig.2.4. Poteau élancé sous charge excentrée

Le comportement d'un poteau représenté sur la fig. 2.5 sous une charge croissante est illustré sur le diagramme d'interaction pour la section critique du poteau donné dans la fig. 2.4. Si l'excentricité  $\Delta$ , supplémentaire est négligeable, le moment maximal  $M$ , est égal à  $P.e$  donnant une trajectoire linéaire de  $P$ - $M$ . Il s'agit d'un comportement d'un poteau court et la rupture de la section se produit lorsque la courbe de réponse intersecte la courbe de rupture. Si le poteau est élancé, le moment,  $M$ , maximal est égal à  $P(e + \Delta)$  et comme,  $\Delta$ , augmente plus rapidement pour des niveaux de charge élevés, le tracé  $P$ - $M$  est incurvé. Deux types de ruine peuvent être observés pour les poteaux élancés :

1<sup>er</sup> cas : courbe incurvée intersecte la courbe d'interaction ce qui indique que le poteau est stable.

2<sup>ème</sup> cas : courbe incurvée n'intersecte la courbe d'interaction et la rupture a lieu par instabilité.

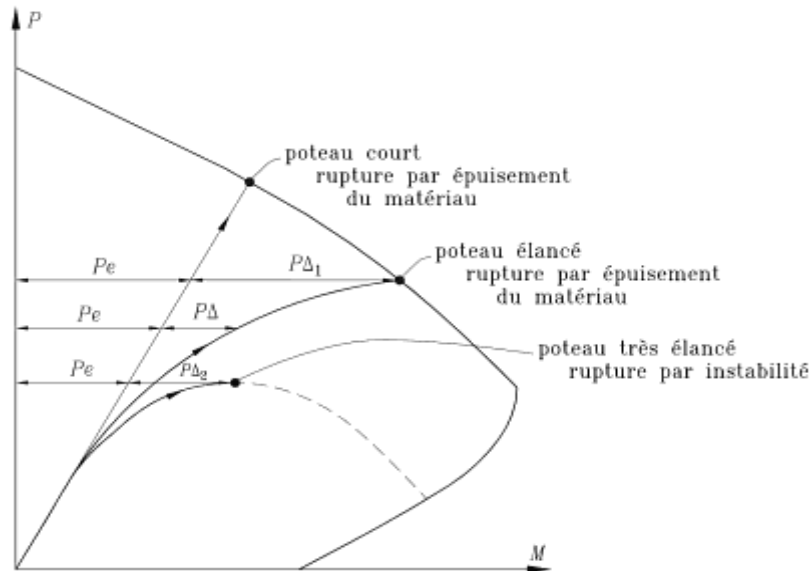


Fig.2. 5. Effet de l'élancement sur la résistance d'un poteau [5]

### 2.4.3. Elancement limite séparant le premier et le second ordre

La détermination de l'élancement,  $\lambda$ , est une opération essentielle pour savoir quel mode de vérification doit être appliqué au poteau (au premier ou au second ordre).

$$l_0 = \beta l_{col} \text{ [mm]} \tag{2.7}$$

$l_0$  = hauteur du poteau mesurée entre les centres d'encastremets [mm]

$\beta$  = coefficient qui tient compte des conditions d'extrémités

Cette longueur se calcule avec un abaque figurant dans l'EC2 [2] article (4.3.5.3.5) qui donne les valeurs des coefficients  $k_A$  et  $k_B$  représentant la raideur de l'encastrement.

L'EC2 [2] permet de négliger l'élancement d'un poteau isolé si son élancement  $\lambda$  est inférieur à 25 ou à  $15/\sqrt{\nu_u}$ .

Avec :

$$\lambda = \frac{l_0}{i} \tag{2.8}$$

$l_0$  = longueur libre du poteau [mm]

$i$  = rayon de giration de la section géométrique [mm]

$$\lambda_{lim} = \max \begin{cases} \lambda' = 25 \\ \lambda' = \frac{15}{\sqrt{v_u}} \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\text{Avec :} \quad v_u = \frac{N_{sd}}{A_c f_{cd}} = \text{effort normal réduit} \quad (2.10)$$

L'article (4.3.5.5.3) de l'EC2 [2] permet de ne pas vérifier, pour certains cas, les effets du second ordre. Les poteaux isolés d'une structure à nœuds non déplaçables n'exigent pas de vérification vis-à-vis des sollicitations du second ordre si le coefficient d'élanement  $\lambda$ , est inférieur ou égal à la valeur obtenue à partir de l'équation (2.11), même si le poteau concerné peut être considéré comme élané.

$$\lambda_{crit} = 25 \left( 2 - \frac{e_{01}}{e_{02}} \right) \quad (2.11)$$

Où :  $e_{01}$  et  $e_{02}$  sont les excentricités de l'effort normal aux extrémités de l'élément

En supposant que  $|e_{01}| \leq |e_{02}|$ , il convient de calculer les sollicitations aux extrémités des poteaux en considérant les équations ci-dessous comme les conditions minimales à respecter.

$$\begin{aligned} N_{Rd} &= N_{sd} \\ M_{Rd} &= N_{sd} \cdot h/2 \end{aligned}$$

$N_{Rd}$  étant l'effort normal résistant de calcul et  $M_{Rd}$  le moment résistant de calcul.

Selon le code ACI 318-11 [1] (article 10.10.1), il n'est pas nécessaire de faire une vérification au flambement pour les poteaux dont les extrémités ne peuvent pas se déplacer latéralement quand :

$$\frac{k l_u}{r} \leq 34 - 12 \frac{M_1}{M_2} \leq 40 \quad (2.12)$$

Où :

$k$  = facteur de longueur effective

$l_u$  = longueur utile du poteau [mm]

$r$  = rayon de giration [mm]

L'ACI 318-11 [1] (article 10.10.1.2) permet de prendre le rayon de giration pour une section rectangulaire  $b \times h$ ,  $r \approx 0.3h$ .

$M_1, M_2$  = moments du premier ordre aux extrémités  $|M_2| \geq |M_1|$



Le rapport  $\frac{M_1}{M_2}$  est considéré comme positif dans la courbure unique et négatif pour le cas de double courbure.

Pour les poteaux formant une ossature à nœuds déplaçables l'ACI 318-11 [1] permet de négliger les effets de l'élancement quand :

$$\frac{kl_u}{r} < 22 \quad (2.13)$$

## 2.5. Poteau court ou élancé

### 2.5.1. Introduction

Selon l'EC2 [2], les effets du second ordre peuvent être négligés si l'élancement du poteau est inférieur à un élancement limite dont la valeur est donnée par l'expression suivante :

$$\lambda_{lim} = 20 \times A \times B \times C / \sqrt{n} \quad (2.14)$$

Où :

$$A = 1/1 + 0.2 \varphi_{ef} \quad (\text{si } \varphi_{ef} \text{ n'est pas connu, on peut prendre } A = 0.7)$$

$$B = \sqrt{1 + 2\omega} \quad (\text{si } \omega \text{ n'est pas connu, on peut prendre } B = 1.1)$$

$$C = 1.7 - r_m \quad (\text{si } r_m \text{ n'est pas connu, on peut prendre } C = 0.7)$$

$\varphi_{ef}$  = coefficient de fluage effectif

$$\omega = A_s \cdot f_{yd} / A_c \cdot f_{cd} \quad (\text{pourcentage mécanique d'armatures})$$

$f_{yd}$  = contrainte d'écoulement de l'acier [N/mm<sup>2</sup>]

$f_{cd}$  = résistance de calcul du béton [N/mm<sup>2</sup>]

$A_s$  = section d'armatures longitudinales [mm<sup>2</sup>]

$n = N_{Ed} / (A_c \cdot f_{cd})$  (effort normal réduit)

$N_{Ed}$  = charge axiale ultime [KN]

$$r_m = M_{01} / M_{02}$$

$M_{01}, M_{02}$  étant les moments du premier ordre aux extrémités  $|M_{02}| \geq |M_{01}|$

Si le rapport d'élancement réel est inférieur à la valeur calculée de,  $\lambda_{lim}$ , le poteau est considéré comme poteau court. Sinon le poteau peut être traité comme élancé et les effets de second ordre doivent être pris en compte dans la conception du poteau.

### 2.5.2. Conception d'un poteau élancé

Un poteau est classé comme élancé si l'élancement sur l'un des axes est supérieur à la valeur  $\lambda_{lim}$ , comme indiqué précédemment. Si  $\lambda \leq \lambda_{lim}$ , alors le poteau peut être classé comme court et l'effet de l'élancement peut être négligé. Un poteau élancé de  $\lambda > \lambda_{lim}$  doit être conçu pour reprendre un moment supplémentaire causé par sa courbure dans des conditions ultimes. En flexion composée, un poteau élancé est soumis à une charge axiale ultime  $N_{Ed}$  et un moment accru  $M_t$  donné par :

$$M_t = N_{Ed} \cdot e_{tot} \quad (2.15)$$

Où :

$$e_{tot} = e_0 + e_a + e_2$$

$e_0$  = excentricité de premier ordre donnée par la plus grande des valeurs suivantes :

$$0.6 e_{02} + 0.4 e_{01} \text{ ou } 0.4 e_{02} \text{ avec } |e_{02}| \geq |e_{01}|$$

$e_a$  = l'excentricité accidentelle provenant de la géométrie et de l'inclinaison du poteau calculée selon l'équation (2.1).

$e_2$  = excentricité de second ordre estimée comme suit :

$$e_2 = k_1 k_2 \frac{l_0^2}{\pi^2} \left( \frac{\varepsilon_{yd}}{0.45d} \right) \quad (2.16)$$

Où :

$$k_1 = 1 + \left( 0.35 + \frac{f_{ck}}{200} - \frac{\lambda}{150} \right) \varphi_{ef} \geq 1$$

$\lambda$  = rapport d'élancement

$\varphi_{ef}$  = coefficient de fluage

Dans la plupart des cas, l'équation (2.16) peut être simplifiée à

$$e_2 = \frac{k_1 k_2 l_0^2 f_{yk}}{\pi^2 \times 103\,500 d} \quad (2.17)$$

Où  $k_2$  est le facteur de réduction tenant compte la diminution de la courbure  $\frac{1}{r}$  sous l'effet de l'augmentation de l'effort normal, et se détermine comme suit :

$$k_2 = \frac{N_{ud} - N_{Ed}}{N_{ud} - N_{bal}} \leq 1.0 \quad (2.18)$$

Où :

$N_{ud}$  = charge axiale ultime [KN]

$N_{bal}$  = charge équilibre à la rupture [KN]

$$N_{ud} = 0.567 f_{ck} A_c + 0.87 f_{yk} A_s$$

$$N_{bal} = 0.29 f_{ck} A_c$$

Pour une valeur de  $k_2$  donnée, la section d'armatures est déterminée. Il est recommandé de commencer avec  $k_2=1$  et à partir d'une section d'armatures  $A_s$  on détermine la nouvelle valeur de  $k_2$  pour calculer  $e_2$  et donc  $M_t$ .

### 2.5.3. La méthode « colonne-modèle »

Une méthode a été recommandée par l'EC2 [2] (article 4.3.5.6.3) pour calculer les effets de second ordre dans les poteaux. Une colonne modèle est un mât encasté en pied et libre en tête. Il est sollicité à la compression et à la flexion. Le moment fléchissant est maximal en pied. Cette méthode de calcul s'applique à des poteaux dont l'élancement  $\lambda$  est inférieur à 140.

- Excentricité totale (article 4.3.5.6.2)

$$e_{tot} = e_0 + e_a + e_2 \quad (2.19)$$

- L'excentricité de premier ordre ( $e_0$ )

$$e_0 = \frac{M_{sd}}{N_{sd}} \quad [\text{mm}] \quad (2.20)$$

$M_{sd}$  et  $N_{sd}$  sont le moment et l'effort normal provenant de l'analyse structurale au 1<sup>er</sup> ordre de l'effet des actions. Mais la valeur du moment fléchissant  $M_{sd}$  n'est pas toujours définie, l'excentricité initiale est supposée être égale à  $e_0 = 0.1h$ .

- L'excentricité accidentelle ( $e_a$ ) provenant de la géométrie et de l'inclinaison du poteau est calculée par l'équation (2.1).
- L'excentricité du second ordre ( $e_2$ ), est la flèche au sommet de la colonne modèle. Elle est égale à  $e_2 = k_1 \frac{1}{r} \frac{l_0^2}{10}$  (article 4.3.5.6.3). Son calcul résulte de l'étude du flambement d'un poteau articulé à ses extrémités (§2.3.2.c).

Si  $15 \leq \lambda \leq 35$ , alors  $k_1 = \lambda / 20 - 0.75$ . Si  $\lambda > 35$ , alors  $k_1 = 1$ .

### 2.5.4. Méthode d'amplification du Moment $M_2$

L'ACI 318-11 [1] (article 10.10.6) propose une méthode approximative pour calculer le moment accru résultant de la déviation latérale dans les poteaux contreventés dont le rapport d'élanement est inférieur ou égal à 100. Ce dernier précise que les moments du poteau sont amplifiés par un facteur tenant compte des effets d'élanement. Le facteur d'amplification dépend de la force axiale ainsi que de la charge critique de flambement et est calculé différemment pour les ossatures contreventés ou non.

Le moment amplifié critique est alors donné par:

$$M_c = \delta \times \text{Max}(M_2, M_{min}) \quad (2.21)$$

$$M_{min} = P_u (15 + 0.03h) \text{ avec } h \text{ en mm.} \quad (2.22)$$

Où  $\delta$  est un coefficient de majoration des moments qui exprime l'augmentation du moment  $M_2$  en présence d'une force axiale, P, agissant simultanément.

$$\delta = \text{Max} \left( \frac{c_m}{1.0 - \frac{P_u}{0.75 P_c}}, 1.0 \right) \quad (2.23)$$

$c_m$  = coefficient d'équivalence des moments

$$c_m = \text{Max} \left( 0.6 + 0.4 \frac{M_1}{M_2}, 0.4 \right) \quad (2.24)$$

Quand  $M_1 = M_2$ ,  $c_m = 1$ .

$P_c$  = charge critique d'Euler

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(k l_u)^2} \quad (2.25)$$

$P_u$  = charge axiale ultime

$$P_u = 1.2 P_D + 1.6 P_L \text{ (article 9.2.1)}$$

$EI$  = rigidité du poteau

$$EI = \frac{0.40 E_c I_g}{1 + \beta_d} \quad (2.26)$$

$E_c$  = module d'élasticité du béton

$$E_c = 4700 \sqrt{f_c'} \quad (2.27)$$

$\beta_d$  = Représente la réduction de la rigidité provoquée par des charges axiales

$$\beta_d = \frac{1.4 P_D}{P_u} \quad (2.28)$$

Si les données sont indisponibles, la valeur de  $\beta_d$  peut être égale 0,6.

$I_g$  = moment d'inertie de la section transversale du poteau.

Pour les poteaux formant une ossature contreventée, le facteur,  $k$ , est calculé comme suit :

$$k = \text{Min} \begin{cases} 0.7 + 0.05 (\psi_A + \psi_B) \\ 0.85 + 0.05 \psi_{\min} \\ 1.0 \end{cases} \quad \psi_A \text{ et } \psi_B \text{ représentant la raideur de l'encastrement} \quad (2.29)$$

Une fois que le moment amplifié  $M_c$  est obtenu, le concepteur peut utiliser les diagrammes d'interaction appropriés donnés pour déterminer le pourcentage requis des armatures longitudinales.

## 2.6. Calcul au second ordre

### 2.6.1. Introduction

Trois méthodes d'analyse des effets du second ordre sont présentées en 5.8.5 de l'EC2-1-1[2] :

Une méthode générale et deux méthodes simplifiées définies comme suit :

- une analyse au second ordre basée sur une évaluation de la raideur du poteau ;
- une méthode basée sur une évaluation de la courbure.

### 2.6.2. Méthode générale

Appelée méthode de l'équilibre ou méthode des déformations internes, elle est basée sur une analyse non linéaire incluant :

- La non-linéarité géométrique (effet du second ordre) ;
- Et la non-linéarité des lois de comportement des matériaux (diagrammes contraintes-déformations).

### 2.6.3. Méthode basée sur une rigidité nominale

Cette méthode consiste à :

- déterminer la rigidité nominale du poteau en flexion tenant compte des effets de la fissuration, des non-linéarités des matériaux et du fluage ;
- déduire une force critique de flambement ;
- utiliser le facteur d'amplification pour déterminer le moment total (premier ordre et second ordre).

Le calcul du moment se présente de la manière suivante :

$$M_{Ed} = M_{0Ed} + M_2 \text{ [KN.m]} \quad (2.30)$$

$M_{Ed}$  = moment de calcul [KN.m]

$M_{0Ed}$  = moment comprenant : le 1<sup>er</sup> ordre et les imperfections [KN.m]

$M_2$  = moment du second ordre calculé par une des deux méthodes [KN.m]

Avec :

$$EI = k_c E_{cd} I_c + k_s E_s I_s \quad (2.31)$$

$E_{cd}$  = module d'élasticité du béton [N/mm<sup>2</sup>] ( $E_{cd} = E_{cm}/\gamma_{cE}$ )

$I_c$  = moment d'inertie de la section droite de béton [mm<sup>4</sup>]

$E_s$  = module d'élasticité de l'acier [N/mm<sup>2</sup>]

$I_s$  = moment d'inertie des armatures par rapport au centre de gravité [mm<sup>4</sup>]

Avec pour  $\rho \geq 2\%$

$K_s$  = coefficient tenant compte de la contribution des armatures

$k_s = 1$

$k_c$  = coefficient tenant compte des effets de la fissuration et du fluage

$$k_c = \frac{k_1 k_2}{1 + \varphi_{ef}}$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{f_{ck}}{20}}$$

$$k_2 = n \frac{\lambda}{170} \leq 0.2$$

$n$  = effort normal réduit =  $N_{Ed} / A_c f_{cd}$

$\lambda$  = élancement

$f_{ck}$  = résistance caractéristique du béton [N/mm<sup>2</sup>]

$\varphi_{ef}$  = coefficient de fluage effectif

Pour  $\rho \leq 1\%$

$$K_s = 0$$

$$K_c = \frac{0.3}{1 + 0.5 \varphi_{ef}}$$

Sur la base de cette rigidité EI, on peut calculer le moment de second ordre  $M_2$ .

$$M_2 = \frac{\beta M_{0Ed}}{\frac{N_B}{N_{Ed}} - 1} \quad (2.32)$$

$\beta$  = coefficient qui dépend de la distribution des moments du premier et du second ordre  $\frac{\pi^2}{c_0}$

Avec :

$c_0 = 8$  pour un moment de premier ordre constant ;

= 9.6 pour une distribution parabolique ;

= 12 pour une distribution triangulaire ;

= 1 dans les autres cas.

$N_{Ed}$  = effort normal agissant à l'ELU

$N_b$  = charge de flambement « eulérienne » évaluée sur la base de la méthode basée sur la rigidité nominale (relation 2.25).

#### 2.6.4. Méthode basée sur une courbure nominale

Cette méthode consiste à estimer une courbure maximale et à en déduire un moment nominal du second ordre  $M_2$  calculé avec la relation suivante :

$$M_2 = N_{Ed} e_2 \quad (2.33)$$

$$e_2 = \frac{l_0^2}{c} \left( \frac{1}{r} \right) = \text{excentricité du second ordre [mm]}$$

$$\frac{1}{r} = k_r k_\varphi \frac{1}{r_0} = \text{courbure [mm}^{-1}\text{]}$$

$$\frac{1}{r_0} = \frac{\varepsilon_{yd}}{0.45 d}$$

$$k_r = \frac{n_u - n}{n_u - n_{bal}} \leq 1 = \text{coefficient de réduction dépendant de l'effort normal}$$

$$k_\varphi = 1 + \beta \varphi_{eff} \geq 1 = \text{coefficient de fluage}$$

$N_{Ed}$  = effort normal fixé [KN]

$e_2$  = excentricité de second ordre [mm]

$l_0$  = longueur de flambement [mm]

$c$  = coefficient dépendant de la distribution des courbures

$\frac{1}{r}$  = courbure [ $\text{mm}^{-1}$ ]

$n$  = effort normal réduit :  $N_{Ed} / (A_c f_{cd})$

$n_{bal}$  = valeur de  $n$  correspondant au moment résistant maximal

$n_u = 1 + \omega$

$\omega = A_s f_{yd} / A_c f_{cd}$

$A_s$  = section des armatures [ $\text{mm}^2$ ]

$A_c$  = section de béton [ $\text{mm}^2$ ]

$f_{yd}$  = contrainte d'écoulement [ $\text{N}/\text{mm}^2$ ]

$f_{cd}$  = résistance du béton [ $\text{N}/\text{mm}^2$ ]

$\varphi_{ef}$  = coefficient de fluage effectif

$$\beta = 0.35 + \frac{f_{ck}}{200} - \frac{\lambda}{150}$$

$\lambda$  = élancement

### 2.7. Considérations technologiques

Les considérations technologiques non moins importantes touchent différents aspects du poteau : la résistance du béton, la position des armatures, le pourcentage d'armatures, l'enrobage.

*Le béton* : la norme fournit les valeurs à introduire dans les modèles numériques ( $\sigma$ - $\varepsilon$ ) : la résistance à la compression, la résistance à la traction, le module sécant d'élasticité, les déformations ultimes, le coefficient de dilatation thermique, le coefficient de Poisson. La classe de résistance doit être comprise entre C15/20 et C50/60.

*L'enrobage* doit être suffisant pour assurer une bonne transmission des forces d'adhérence, la protection des aciers contre la corrosion, la résistance au feu. Il ne peut être inférieur au diamètre des barres longitudinales et doit être augmenté de 5mm si la taille du plus grand granulat est supérieure à 32mm.

*La position des armatures* est également définie. Pour un poteau de forme prismatique, il est nécessaire de placer une barre de 12mm de diamètre dans chaque angle. Pour un poteau de forme circulaire, il doit être placé au minimum 6 barres réparties de manière uniforme.

*La quantité d'armatures* est fixée (article 5.4.1.2) de l'EC 2 [2]. La section minimale de l'ensemble des barres longitudinales d'un poteau de section  $A_c$  doit être telle que :



$$A_{s,min} \geq \max \left( \frac{0.15 N_{sd}}{f_{yd}} \text{ ou } 0.003 A_c \right) \quad (2.34)$$

$A_{s,min}$  = section minimale d'armatures [mm<sup>2</sup>]

$N_{sd}$  = effort normal sollicitant [KN]

$f_{yd}$  = résistance de calcul de l'acier [N/mm<sup>2</sup>]

La section maximale de l'ensemble des barres longitudinales d'un poteau de section  $A_c$  doit être telle que :

$$A_{s,max} \leq 0.04 A_c \quad (2.35)$$

L'armature transversale (article 5.4.1.2.2) de l'EC 2 [2] devra avoir pour diamètre minimum la plus grande des deux valeurs suivantes :

- 6 mm ;
- $\frac{1}{4}$  du plus gros diamètre de l'armature longitudinale.

L'espacement des armatures transversales le long du poteau ne doit pas dépasser la plus faible des trois valeurs suivantes :

- 12 fois le diamètre des barres longitudinales ;
- la plus petite dimension transversale du poteau ;
- 300mm.

## 2.8. Conclusion

Ce chapitre traite des effets de l'élançement d'un poteau et la manière de différencier un poteau court d'un poteau élancé. Il devient donc de plus en plus important de bien comprendre les effets de l'élançement et de bien savoir dimensionner un poteau élancé. Les règles de calcul sont de ce fait très sécuritaires et manquent de rigueur théorique puisqu'elles ont été développées sur une base empirique.

## Construction de diagrammes d'interaction

### 3.1. Introduction

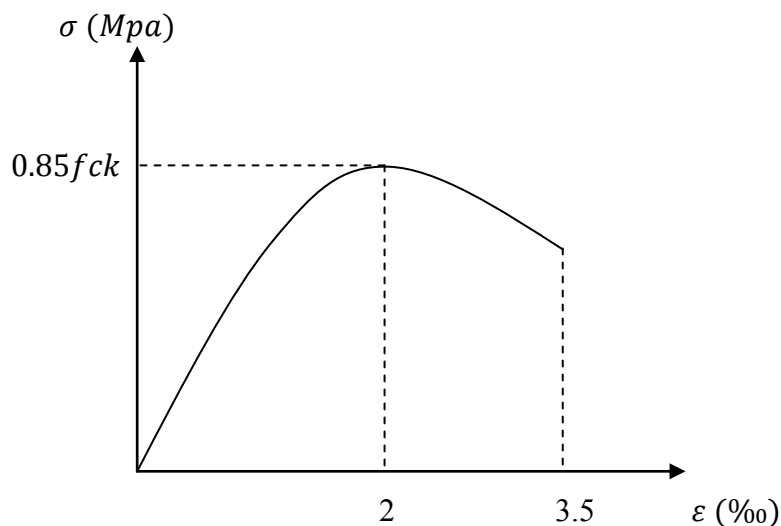
L'objectif principal du présent chapitre consiste à mettre en évidence tous les détails concernant l'élaboration de diagrammes d'interaction d'un poteau court de section rectangulaire en flexion composée et aux états limites ultimes. Ce dernier est construit avec des diagrammes idéalisés non pénalisés (absence de coefficient de sécurité pour le béton et pour les armatures). Le calcul a été réalisé en utilisant le bloc parabole-rectangle pour le béton et le diagramme bi-linéaire pour l'acier avec les caractéristiques pour les matériaux (béton et acier) adoptées par l'EC2 [2]. Les courbes sont tracées à partir des équations d'équilibre de la section.

### 3.2. Lois de comportement des matériaux

#### 3.2.1. Béton

##### a. Diagramme réel (bloc réel)

Une représentation de ce comportement est donnée par la courbe contraintes-déformations ci-dessous :



**Fig.3.1.** Diagramme réel contraintes-déformations du béton

La déformation croît de façon quasi-linéaire jusqu'à une contrainte égale à environ la moitié de la contrainte ultime, puis la courbe s'infléchit. La contrainte maximale est atteinte pour une déformation relative légèrement supérieure à  $2\text{‰}$ , puis la contrainte décroît légèrement et la désintégration du béton a lieu pour une déformation relative de l'ordre de  $3.5\text{‰}$ .

### b. Diagramme idéalisé et pénalisé

Dans les calculs à l'état limite ultime de résistance, il est généralement admis que le diagramme réel peut être remplacé par un diagramme « parabole-rectangle », constitué d'un arc depuis l'origine des coordonnées  $\varepsilon_c = 0.002$ , prolongé par un palier horizontal jusqu'à 0.0035.

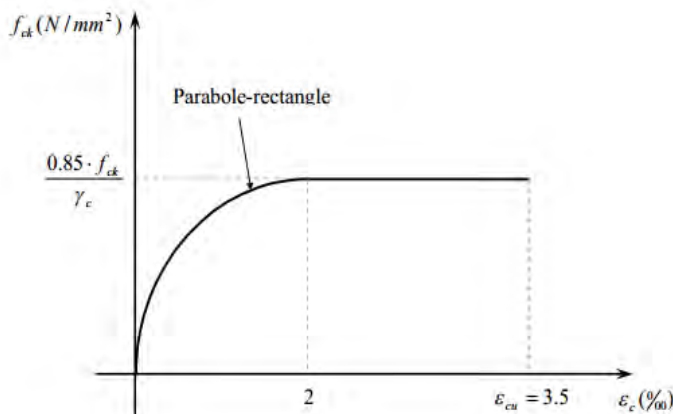


Fig.3.2. Diagramme parabolique-rectangle pour le béton

### 3.2.2. Acier

#### a. Diagramme réel

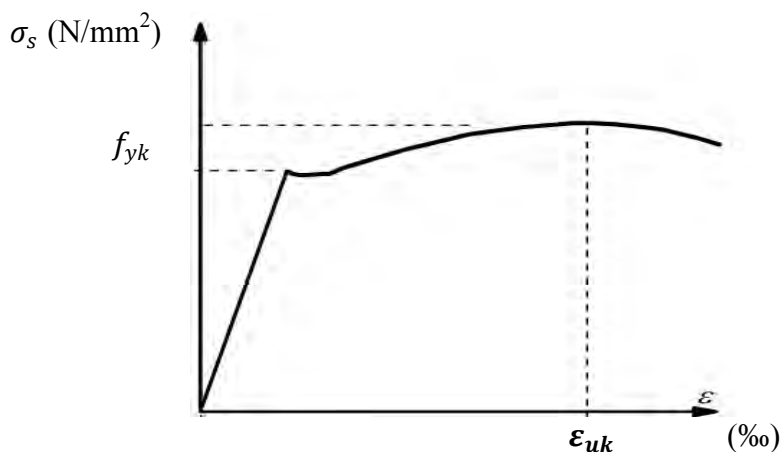


Fig.3.3. Diagramme réel contraintes-déformations de l'acier

Le diagramme généralement admis pour un acier est bilinéaire. Il est composé d'une partie linéaire élastique (droite de pente  $1/E_s$ ) et d'un palier plastique d'ordonnée  $f_{yk}$ .

#### b. Diagrammes idéalisé et pénalisé

Le diagramme correspondant est donné sur la fig.3.4 :

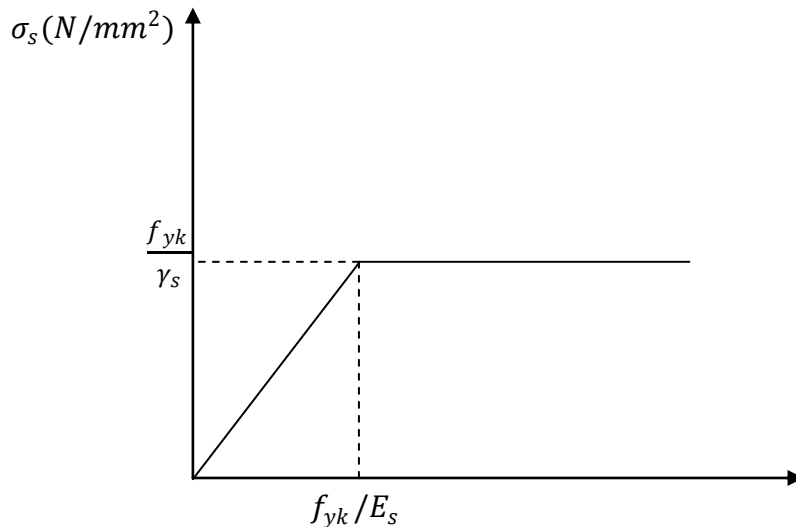


Fig.3.4. Diagramme idéalisé pénalisé de l'acier

### 3.3. Poteaux en flexion composée

#### 3.3.1. Introduction

La section d'armatures longitudinales du poteau est déterminée par l'une des deux approches suivantes :

- approche graphique basée sur la construction de diagrammes d'interaction M-N ;
- approche analytique basée sur le calcul itératif.

#### 3.3.2. Approche graphique

Les courbes d'interaction N-M sont des outils souvent utilisés comme aide au dimensionnement. Ces courbes sont souvent utilisées pour permettre de déterminer ou de vérifier aisément, pour une section de géométrie et d'armatures donnée, la capacité portante de la section. Les courbes sont tracées à partir des équations d'équilibre de la section et définissent la zone où les combinaisons (N,M) sont acceptés et la zone non autorisée. Chaque point de la courbe représente un état imminent de ruine (§3.4).

#### 3.3.3. Approche Analytique

La méthode suit la procédure itérative suivante :

- Sélectionner une profondeur arbitraire de l'axe neutre,  $x$ , en général on commence avec  $x = 0.5d$  ;
- Déterminer la valeur des déformations relatives,  $\epsilon_{sc}$  et  $\epsilon_s$  ;
- Déterminer la valeur des contraintes,  $f_{sc}$  et  $f_s$  ;
- Déterminer les moments par rapport au centre de gravité de la section d'armatures,  $A_s$  ;

$$N_{sd} \left( e + \frac{h}{2} - d_2 \right) = k_1 f_{ck} b x (d - k_2 x) + f_{sc} A'_s (d - d') \quad (3.1)$$

Une fois  $x$  fixé, cette équation peut être résolue pour donner la valeur de  $A'_s$ .

-  $A_s$  est déterminée à partir de l'équation d'équilibre des efforts c'est-à-dire

$$N_{sd} = k_1 f_{ck} b x + f_s A_s + f_{sc} A'_s \quad (3.2)$$

- D'autres valeurs de  $x$  peuvent être choisies et les étapes précédents sont répétés jusqu'à l'obtention de la plus petite quantité de  $(A_s + A'_s)$ .

### 3.4. Construction de diagrammes d'interaction [6]

#### 3.4.1. Choix du système de coordonnées

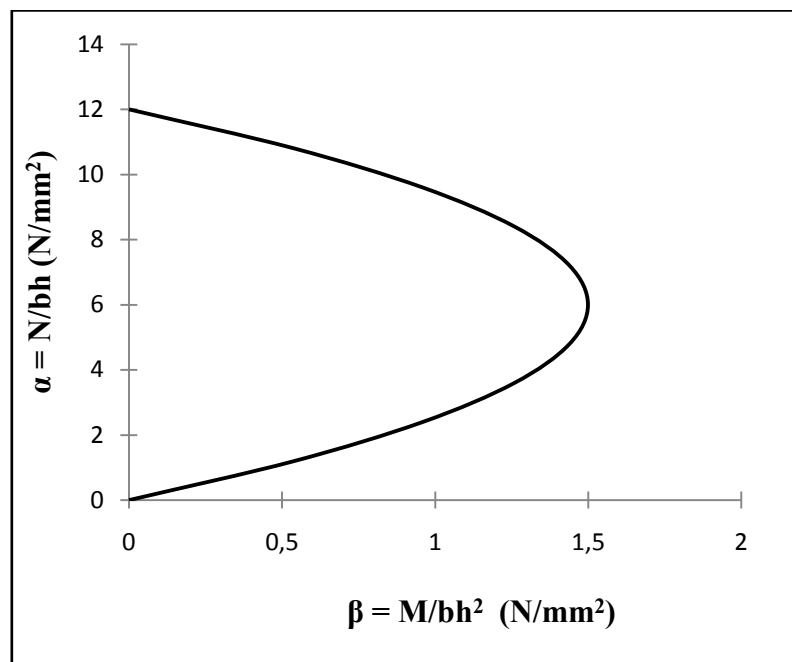


Fig. 3.5. Choix du système de coordonnées  $(\alpha, \beta)$

Les unités des deux axes ( $x$ ) et ( $y$ ) sont en  $N/mm^2$  (unité de pression). Et la pression a coefficient de similitude égal à 1, donc l'utilisation et l'exploitation est valable pour des sections à échelle réduite ou à grandeur nature. En d'autres termes, les intervalles pour les valeurs  $\alpha$  et  $\beta$  varient très peu et ce quelque soit les valeurs retenues pour les paramètres  $f_{ck}$ ,  $f_{yk}$  et  $d'/d$ .

3.4.2. Détermination des coefficients de remplissage  $k_1$  et de positionnement  $k_2$

a. Détermination de  $k_1$

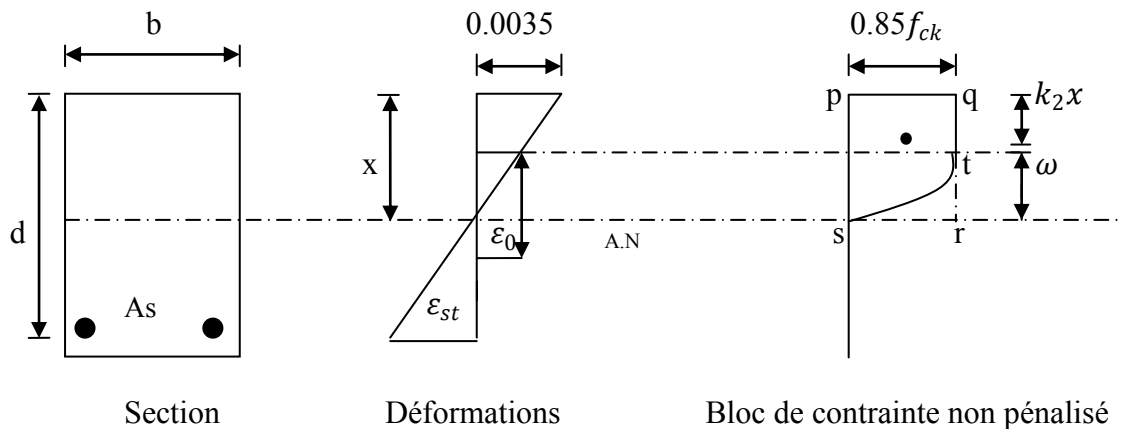


Fig.3.6. Bloc parabolique-rectangulaire adopté par l'EC2 [2]

$x$  : Position de l'axe neutre.

$k_1$ : Coefficient de remplissage.

$k_2 x$  : distance du centre de gravite du bloc de contrainte à la fibre la plus comprimée.

Le principe est d'égaliser les aires du bloc parabolique-rectangulaire non pénalisé avec l'aire d'un rectangle fictif d'intensité  $k_1 f_{ck}$  et de profondeur égale à  $x$ .

À partir de la distribution des déformations relatives

$$\frac{x}{0.0035} = \frac{\omega}{\epsilon_0}$$

$$\omega = \frac{x \epsilon_0}{0.0035} \quad \text{pour } \epsilon_0 = 0.002$$

$$\omega = 0.571x$$

Pour le bloc de contrainte

$k_1 f_{ck} x$  = surface du rectangle fictif

$$k_1 f_{ck} = \frac{S_{pqrs} - S_{rst}}{x} = \frac{0.85 f_{ck} x - 0.85 f_{ck} \frac{\omega}{3}}{x} = \frac{0.85 f_{ck} x - 0.162 f_{ck} x}{x}$$

$$k_1 = 0.688 f_{ck} \longrightarrow k_1 = 0.688 \quad (\text{Sans unité})$$

**b. Détermination de  $k_2$**

Le principe est d'égaliser les moments des surfaces par rapport à l'axe neutre du bloc parabolé-rectangle et du rectangle fictif d'intensité  $k_1 f_{ck} x$ .

$$k_1 f_{ck} x (x - k_2 x) = S_{pqrs} \frac{x}{2} - S_{rst} \frac{\omega}{4}$$

$$(x - k_2 x) = \frac{0.85 f_{ck} x \cdot \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \omega 0.85 f_{ck} \omega / 4}{k_1 x}$$

$$= \frac{0.85 f_{ck} (\frac{x^2}{2} - \frac{\omega^2}{12})}{k_1 x}$$

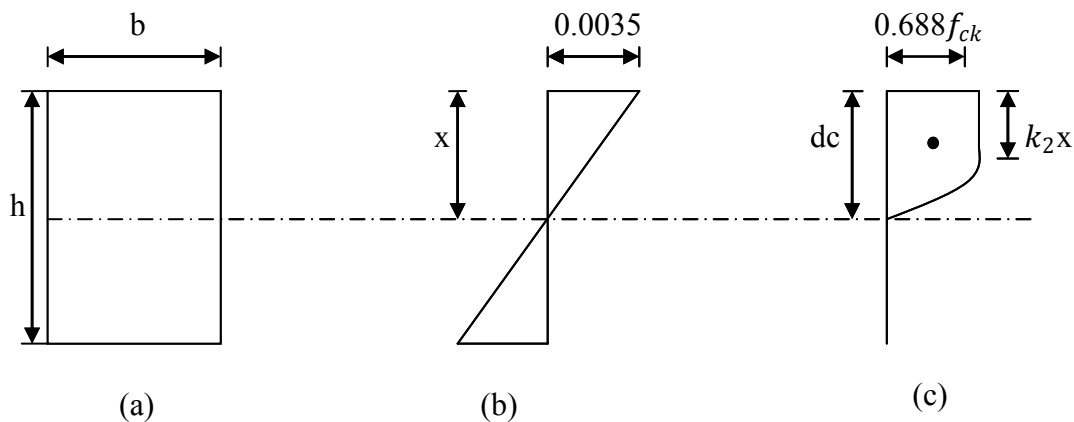
$$= \frac{0.85 f_{ck} x^2}{k_1 x} (0.5 - \frac{0.571^2}{12})$$

$$k_2 = 1 - \frac{0.402 f_{ck}}{0.688 f_{ck}} = 0.416 \longrightarrow k_2 = 0.416 \text{ (Sans unité)}$$

**3.4.3. Développements théoriques et graphiques de diagrammes d'interaction**

**a. Section de béton seul**

La fig.3.7 représente l'état d'une section d'un poteau au moment imminent de ruine. Cette section est soumise simultanément à un moment de flexion et un effort axial.



**Fig.3.7.** Etat de la section d'un poteau

Si la charge axiale est appliquée au C.D.G de la section et si  $d_c$  est la profondeur de l'axe neutre il peut être écrire :

$$N_{(béton)} = 0.688 f_{ck} b d_c \quad (3.3)$$

$$M_{(béton)} = N_{(béton)} \left( \frac{h}{2} - 0.416 d_c \right) \quad (3.4)$$

Et par simplification, on aura:

$$M_{(béton)} = 0.344 f_{ck} b d_c (h - 0.832 d_c) \quad (3.4.a)$$

Le mot « béton » met l'accent sur le fait que M et N concernent un béton seul (non armé). Les équations ci-dessus peuvent être réécrites de manière adimensionnelle.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{(béton)} = \frac{N}{f_{ck} b h} \\ \beta_{(béton)} = \frac{M}{f_{ck} b h^2} \end{array} \right. \quad (3.5)$$

$$(3.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{(béton)} = 0.688 \left( \frac{d_c}{h} \right) \\ \beta_{(béton)} = 0.344 \left( \frac{d_c}{h} \right) \left[ 1 - 0.832 \left( \frac{d_c}{h} \right) \right] \end{array} \right. \quad (3.5.a)$$

$$(3.6.a)$$

Avec :  $\left( \frac{d_c}{h} \right)$  variant de 0 à 1.2.

➤  $\left( \frac{d_c}{h} \right) = 0 \implies$  section entièrement tendue.

➤  $\left( \frac{d_c}{h} \right) = 1.2 \implies$  section entièrement comprimée.

Il est à noter que :

Le bloc de contrainte utilisé est le bloc parabole- rectangle dont l'intensité de la contrainte est  $(0.688 f_{ck})$ , cette dernière n'inclut pas le coefficient de sécurité ( $\gamma_c = 1.5$ ).



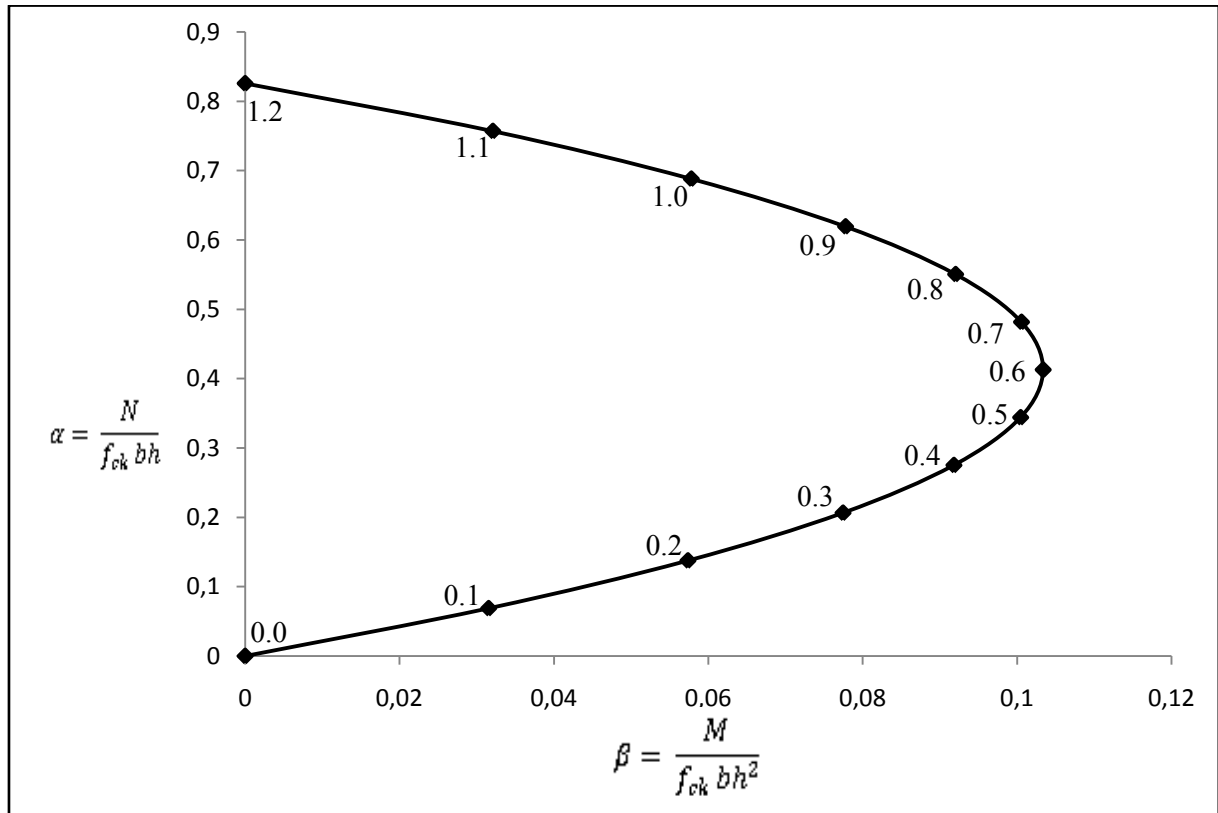


Fig.3.8. Diagramme d'interaction pour une section de béton seul

Les points se trouvant à l'intérieur de la courbe d'interaction représentent des combinaisons de M et N sécuritaires alors que les points qui sont à l'extérieur de la courbe, représentent des combinaisons de M et N non acceptables.

**b. Effet d'une section d'armatures  $A_{s2}$**

La contribution des  $A_{s2}$  à la charge axiale est :

$$N_{(As2)} = f_{s2} A_{s2} \tag{3.7}$$

$A_{s2}$  : étant la nappe d'aciers la plus éloignée de la fibre la plus comprimée.

$f_{s2}$ : La contrainte qui correspond à la déformation relative  $\epsilon_{s2}$ . Les contraintes sont (par convention) positives quand elles sont de compression et négatives quand elles sont de traction. La contribution au moment fléchissant par rapport au milieu de la hauteur de la section :

$$M_{(As2)} = - A_{s2} f_{s2} \left( \frac{h}{2} - d_2 \right) \tag{3.8}$$

Le signe (-) est utilisé parce que la force de compression de l'acier ( $A_{s2} f_{s2}$ ) produit un moment de sens contraire à celui produit par le bloc de contrainte du béton.

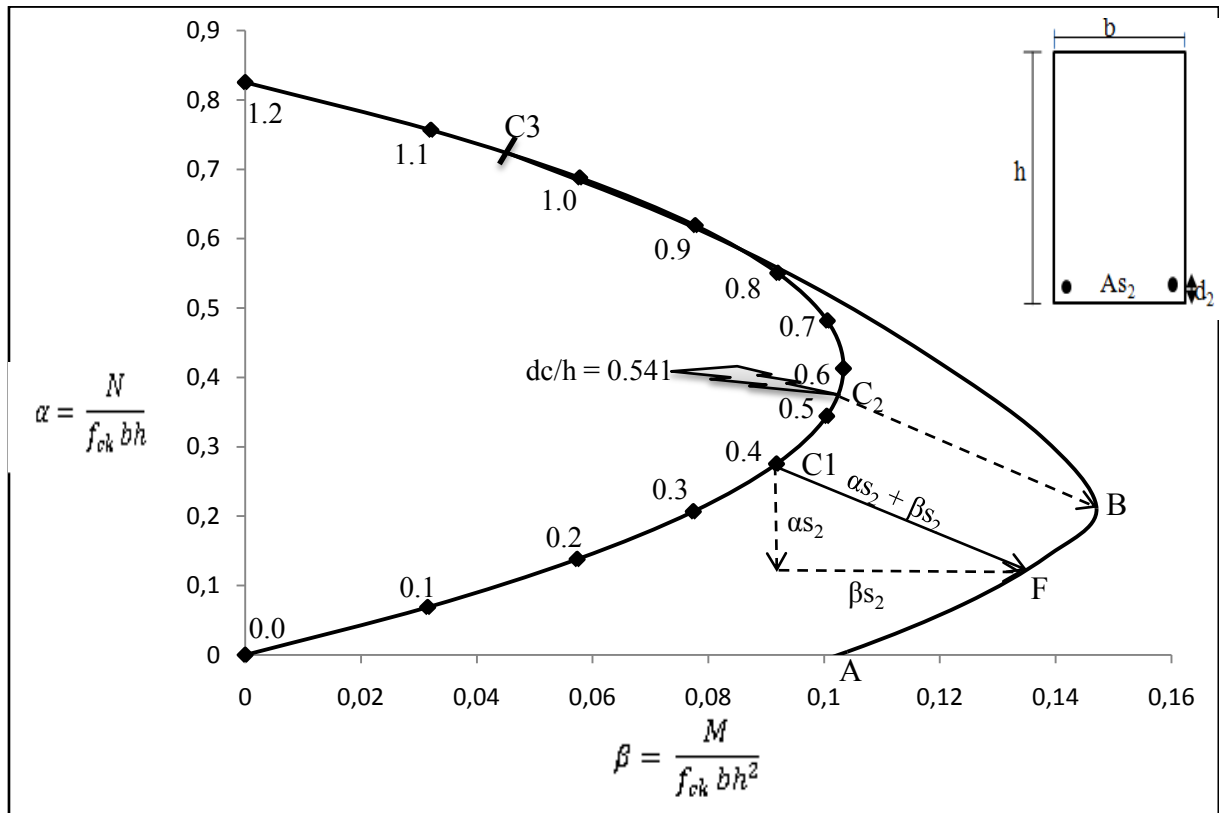
$$\alpha_{s2} = \frac{N_{(As2)}}{f_{ck}bh} = \left(\frac{As2}{bh}\right) \frac{f_{s2}}{f_{ck}} \tag{3.9}$$

$$\beta_{s2} = \frac{M_{(As2)}}{f_{ck}bh^2} = -\left(\frac{1}{2} - \frac{d_2}{h}\right) \alpha_{s2} \tag{3.10}$$

Pour une section donnée d'un poteau, les quantités  $\frac{As2}{bh}$ ,  $\frac{d_2}{h}$  et  $f_{ck}$  sont connues. Donc  $\alpha_{s2}$  et  $\beta_{s2}$  sont complètement définis si  $f_{s2}$  est définie. La valeur de  $f_{s2}$  dépend seulement de  $\epsilon_{s2}$ .

$$\frac{\epsilon_{s2}}{3500} = \frac{d_2 - (h - d_c)}{d_c} \rightarrow \epsilon_{s2} = \frac{\frac{d_c}{h} - (1 - \frac{d_2}{h})}{\frac{d_c}{h}} 3500 \tag{3.11}$$

De ce fait,  $\epsilon_{s2}$  et à fortiori  $\alpha_{s2}$  et  $\beta_{s2}$  sont complètement définis en fonction de  $\frac{d_c}{h}$ . Les valeurs de  $\alpha_{s2}$  et  $\beta_{s2}$  peuvent être représentées graphiquement pour de différentes valeurs de  $\frac{d_c}{h}$



**Fig.3.9.** Diagramme d'interaction pour la section de béton + $A_{s2}$   
 ( $A_{s2}/bh = 0.56\%$ ,  $f_{ck} = 30\text{N/mm}^2$ ,  $f_{yk} = 400\text{N/mm}^2$ ,  $d_2/h = 0.15$ )

Quand l'effet des armatures  $A_{s2}$  est superposé à celui du béton, on obtient la fig.3.9 qui montre que pour chaque valeur de  $\frac{d_c}{h}$  l'effet des armatures est représenté par un vecteur  $\alpha_{s2} + \beta_{s2}$  dont :

Le module est égal à  $\sqrt{(\alpha_{s2})^2 + (\beta_{s2})^2}$

Et l'inclinaison est  $\text{arc tg} \left[ - \left( \frac{1}{2} - \frac{d_2}{h} \right) \right]$

Pour  $\frac{d_c}{h} = 0.4$ , le point  $C_1$  se déplace vers le point F qui représente une combinaison de M et N qui produiront un état imminent de ruine. La fig.3.9 a été réalisée pour le cas particulier de  $\frac{A_{s2}}{bh} = 0.56\%$ ,  $f_{ck} = 30\text{MPa}$ ,  $\frac{d_2}{h} = 0.15$ . Pour simplifier le problème, on suppose que la relation entre les contraintes et les déformations est linéaire entre (+400) et (-400) MPa et que le module d'élasticité  $E_s = 200000 \text{MPa}$ .

On peut observer que :

$$\text{➤ Pour } \frac{d_c}{h} = 1 - \frac{d_2}{h} :$$

$$\varepsilon_{s2} = 0 \longrightarrow f_{s2} = 0 \longrightarrow \alpha_{s2} = \beta_{s2} = 0$$

Les armatures sont inactives dans ce point

$$\text{➤ Pour } \frac{d_c}{h} > 1 - \frac{d_2}{h} :$$

$$\varepsilon_{s2} > 0 \longrightarrow f_{s2} > 0 \longrightarrow \alpha_{s2} > 0, \beta_{s2} < 0$$

Les armatures sont donc en compression

$$\text{➤ Pour } \frac{d_c}{h} < 1 - \frac{d_2}{h} :$$

$$\varepsilon_{s2} < 0 \longrightarrow f_{s2} < 0 \longrightarrow \alpha_{s2} < 0, \beta_{s2} > 0$$

Les armatures sont en traction

$$\text{➤ Pour } \frac{d_c}{h} = 0.541 \quad (\varepsilon_{s2} = \varepsilon_y = 2000 \cdot 10^{-6} \longrightarrow \frac{d_c}{h} = 0.541)$$

Les armatures atteignent leur limite d'écoulement en traction. Le module du vecteur  $(\alpha_{s2} + \beta_{s2})$  prend la valeur maximale (C<sub>2</sub>B) et demeure inchangée pour toute réduction de  $\frac{d_c}{h}$ .

➤ Pour  $\frac{d_c}{h} > 0.541$ :

L'axe neutre descend et  $\varepsilon_{s2}$  diminue et  $f_{s2} < f_y$ ,  $\alpha_{s2}$  et  $\beta_{s2}$  dans ce cas, ont des valeurs inférieures à celles pour  $\frac{d_c}{h} = 0.541$ . La longueur du vecteur diminue graduellement jusqu'à ce qu'elle s'annule au point C<sub>3</sub> et augmente de nouveau dans la direction opposée.

- Quand la charge axiale et le moment fléchissant agissant sur la section du béton sont tels que  $\alpha$  et  $\beta$  coïncident avec le point B, on conclut que la fibre la plus comprimée atteint  $\varepsilon_{cu}$  simultanément avec les aciers atteignant  $\varepsilon_y$ . Ce mode de rupture est appelé « rupture équilibrée ».
- Pour des combinaisons de M et N qui nous donnent des points sur le tronçon AFB, les armatures atteignent leur limite d'écoulement avant que la fibre la plus comprimée n'atteigne  $\varepsilon_{cu}$ . Pour les points au dessus de B, les armatures n'atteignent pas  $\varepsilon_y$  quand  $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$ .

### c. Effet d'une section d'armatures $A'_{s1}$

En suivant le même raisonnement:

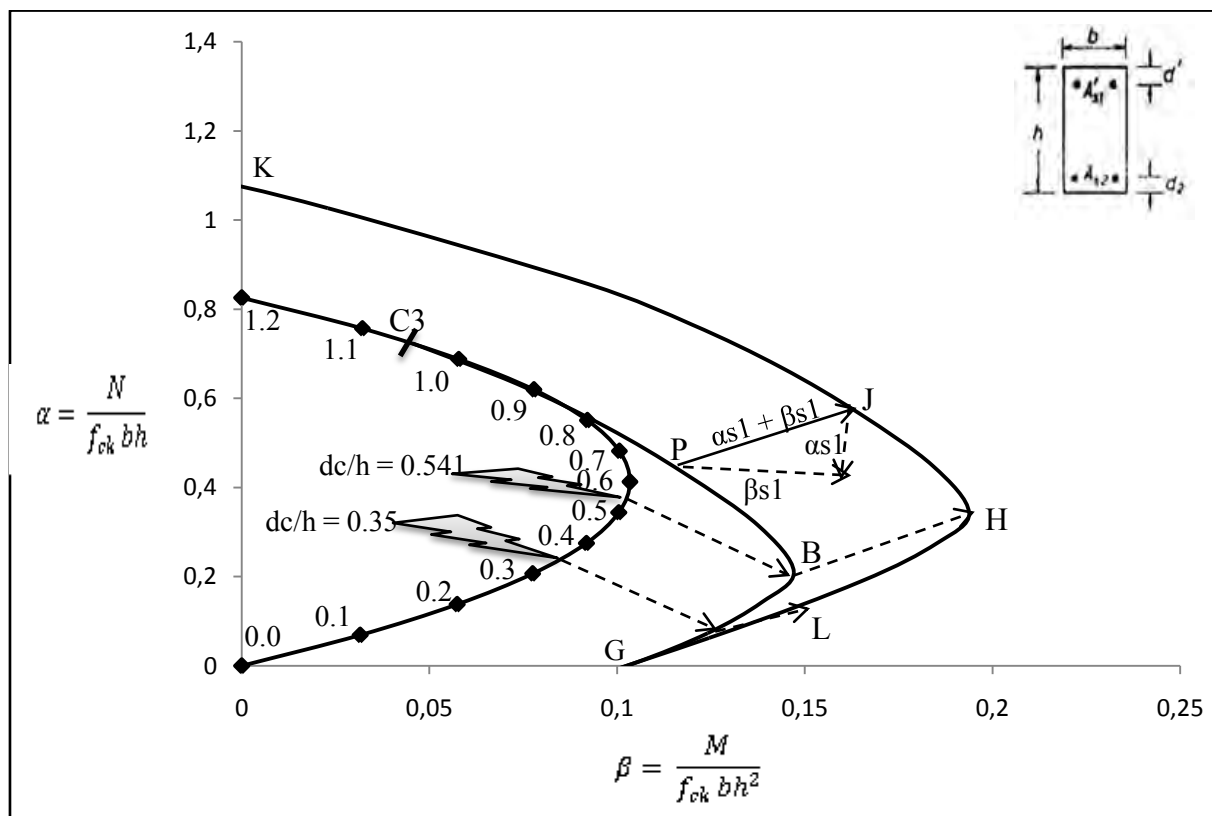
$$N_{(A'_{s1})} = f'_{s1} A'_{s1} \quad (3.12)$$

$$M_{(A'_{s1})} = A'_{s1} f'_{s1} \left( \frac{h}{2} - d' \right) \quad (3.13)$$

$$\alpha_{s1} = \frac{N_{(A'_{s1})}}{f_{ck} b h} = \left( \frac{A'_{s1}}{b h} \right) \frac{f'_{s1}}{f_{ck}} \quad (3.14)$$

$$\beta_{s1} = \frac{M_{(A'_{s1})}}{f_{ck} b h^2} = \left( \frac{1}{2} - \frac{d'}{h} \right) \alpha_{s1} \quad (3.15)$$

$$\frac{\varepsilon'_{s1}}{3500} = \frac{d_c - d'}{d_c} \rightarrow \varepsilon'_{s1} = \frac{\frac{d_c}{h} - \frac{d'}{h}}{\frac{d_c}{h}} 3500 \quad (3.16)$$



**Fig.3.10.** Diagramme d'interaction pour la section de béton + $A_{s2}$  +  $A'_{s1}$   
 ( $A_{s2}/bh=A'_{s1}/bh = 0.56\%$ ,  $f_{ck} = 30\text{N/mm}^2$ ,  $f_{yk} = 400\text{ N/mm}^2$ ,  $d_2/h = d'/h = 0.15$ )

L'inclinaison du vecteur =  $\arctg\left(\frac{1}{2} - \frac{d'}{h}\right)$  est aussi une constante. Pour une valeur donnée à  $\frac{d_c}{h}$   $\alpha_{s1}$  et  $\beta_{s1}$  peuvent être calculés vu que les quantités  $\frac{A'_{s1}}{bh}$ ,  $\frac{d'}{h}$ ,  $f_{ck}$  et les propriétés de l'acier sont connues. L'effet de  $A'_{s1}$  est représenté sur la fig.3.10 par le vecteur  $(\alpha_{s1} + \beta_{s1})$  qui est incliné d'un angle dont la tangente est égale à  $\left(\frac{1}{2} - \frac{d'}{h}\right)$ . C'est une inclinaison constante. Donc la courbe GLHJK est la courbe d'interaction pour une section armée à ses deux faces.

Pour n'importe quel point de cette courbe,  $\alpha$  et  $\beta$  sont respectivement égaux à :

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_{(\text{béton})} + \alpha_{s2} + \alpha_{s1} \\ \beta = \beta_{(\text{béton})} + \beta_{s2} + \beta_{s1} \end{cases} \quad (3.17)$$

Les équations d'équilibre s'écrivent :

$$N = 0.688 f_{ck} b d_c + f_{s2} A_{s2} + f'_{s1} A'_{s1} \quad (3.18)$$

$$M = N_{(\text{béton})} \left(\frac{h}{2} - 0.416 d_c\right) - A_{s2} f_{s2} \left(\frac{h}{2} - d_2\right) + A'_{s1} f'_{s1} \left(\frac{h}{2} - d'\right) \quad (3.19)$$

### 3.5. Applications numériques d'utilisation de digrammes d'interaction

#### 3.5.1. Exemple 1

Pour apprendre à utiliser les digrammes d'interaction, des exemples de calcul sont indispensables, c'est pour cela que trois exemple soit traites par Kong et Evans [7].

Soit un poteau de section rectangulaire avec :  $b = 300\text{mm}$ ,  $h = 400\text{mm}$ ,  $\frac{A'_{s1}}{bh} = \frac{A_{s2}}{bh} = 0.56\%$ ,

$$\frac{d'}{h} = \frac{d_2}{h} = 0.15, f_{ck} = 30 \text{ N/mm}^2, f_y = 400 \text{ N/mm}^2.$$

a- Déterminer la charge directe ( $N$ ) et son excentricité ( $e$ ) pour qu'un mode de rupture équilibrée ait lieu.

b- Déterminer ( $N$ ) et ( $e$ ) pour lesquelles les aciers ( $A'_{s1}$ ) atteignent leur limites d'écoulement en compression ( $\epsilon'_{s1} = \epsilon_y = 2000.10^{-6}$ ) simultanément quand la déformation dans le béton ( $\epsilon_c = \epsilon_{cu} = 3500.10^{-6}$ ).

c- Si le poteau est soumis à une charge excentrée dont la valeur augmente graduellement, déterminer l'intervalle des excentricités pour lesquelles ( $A'_{s1}$ ) et ( $A_{s2}$ ) auront atteint leur limite d'écoulement quand  $\epsilon_c = \epsilon_{cu}$ .

#### Réponse

a- Nous avons vu que la rupture équilibrée est atteinte pour  $\frac{d_c}{h} = 0,541$ . La combinaison ( $N, M$ ) doit donc correspondre au point (H) dans la fig.3.11.

$$\begin{cases} \alpha (H) = 0,372 \\ \beta (H) = 0,102 \end{cases}$$

Donc :

- $N = \alpha f_{ck} b h = 0,372 * 30 * 300 * 400$
- $N = 1339 \text{ KN}$
- $M = \beta f_{ck} b h^2 = 0,102 * 30 * 300 * (400)^2$
- $M = 146.9 \text{ KN.m}$
- $e = M / N$
- $e = 110 \text{ mm}$

b- En utilisant l'équation (3.15) :

$$\epsilon'_{s1} = \frac{\frac{d_c}{h} - \frac{d'}{h}}{\frac{d_c}{h}} 3500 = 2000.10^{-6} \longrightarrow \frac{d_c}{h} = 0.35.$$

Donc la combinaison  $(N, M)$  correspond du point  $(L)$  dans la fig.3.10.

$$\begin{cases} \alpha(L) = 0.241 \\ \beta(L) = 0.139 \end{cases}$$

Donc :

- $N = 0.241 * 30 * 300 * 400$
- $N = 867.6 \text{ KN}$
- $e = \frac{M}{N} = \frac{\beta h}{\alpha} = \frac{0.139 * 400}{0.241} = 231 \text{ mm}$

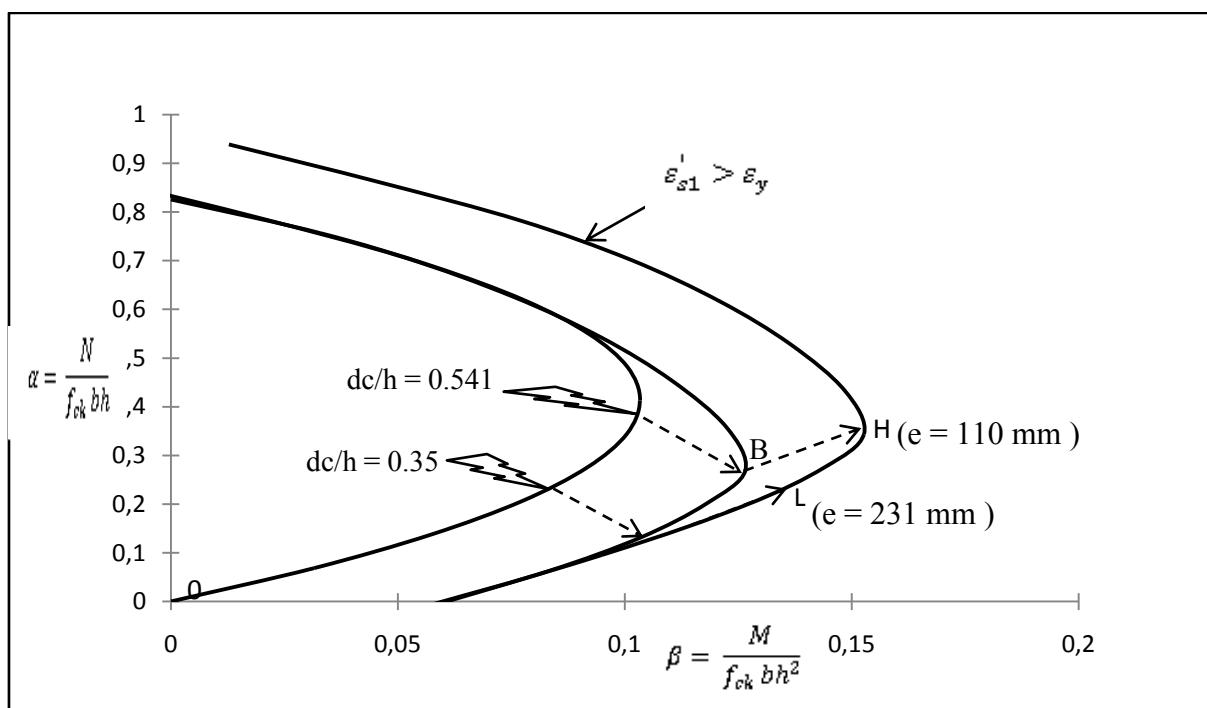


Fig.3.11. Diagramme d'interaction pour  $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$ , et  $d_c/h = 0.15$  et  $A_s/bh = 0.56\%$

$$e = \frac{M}{N} \quad \longrightarrow \quad N \text{ augmente} \quad \longrightarrow \quad e \text{ diminue}$$

L'excentricité augmente du haut vers le bas, de (a) et (b), on peut conclure que :

$e \geq 110 \text{ mm}$  et  $e \leq 231 \text{ mm}$  pour que  $A'_{s1}$  et  $A_{s2}$  atteignent leur limite d'écoulement ( $110 \text{ mm} \leq e \leq 231 \text{ mm}$ ).

Si la charge  $N$  agit dans cet intervalle, au moment imminent de la ruine, les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  sont prises sur la portion (L H) de la courbe ci-dessus.

### 3.5.2. Exemple 2

Soit un poteau de même section que celui de l'exemple 1.

a. Déterminer si les combinaisons suivantes sont acceptables ou non :

- $N = 1680 \text{ KN}$ ,  $M = 115 \text{ KN.m}$
- $N = 480 \text{ KN}$ ,  $M = 250 \text{ KN.m}$

b. Si le poteau est soumis à une charge  $N = 1680 \text{ KN}$ , déterminer l'excentricité  $e$  qui produit une rupture imminente.

c. Déterminer la valeur  $N$  de la charge excentrée qui produit une rupture imminente si l'excentricité  $e = 0.317h$ .

**Réponse :**

(a).

- $N = 1680 \text{ KN}$ ,  $M = 115 \text{ KN.m}$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1680 \cdot 10^3}{30 \times 300 \times 400} = 0.47 \\ \beta = \frac{115 \cdot 10^6}{30 \times 300 \times (400)^2} = 0.08 \end{cases}$$

$\alpha = 0.47$  et  $\beta = 0.08$  correspondent au point  $P_1$  est à l'intérieur de la courbe (1), cette combinaison est acceptable.

- $N = 480 \text{ KN}$ ,  $M = 250 \text{ KN.m}$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{480 \cdot 10^3}{30 \times 300 \times 400} = 0.13 \\ \beta = \frac{250 \cdot 10^6}{30 \times 300 \times (400)^2} = 0.17 \end{cases}$$

$(\alpha, \beta)$  correspond au point ( $P_2$ ) qui est à l'extérieur de la courbe (3) donc cette combinaison n'est pas sécuritaire.

(b).  $N = 1680 \text{ KN}$ ,  $\alpha = 0.47$

Dans la fig.3.12, la droite horizontale, dont l'équation est  $\alpha = 0.47$ , coupe la courbe (3) au Point ( $P_3$ ) pour lequel  $\beta = 0.181$ .

$$e = \frac{M}{N} = \frac{\beta}{\alpha} h = \frac{0.181}{0.47} \times 400 = 154 \text{ mm}$$

(c).  $e = 0.317h$

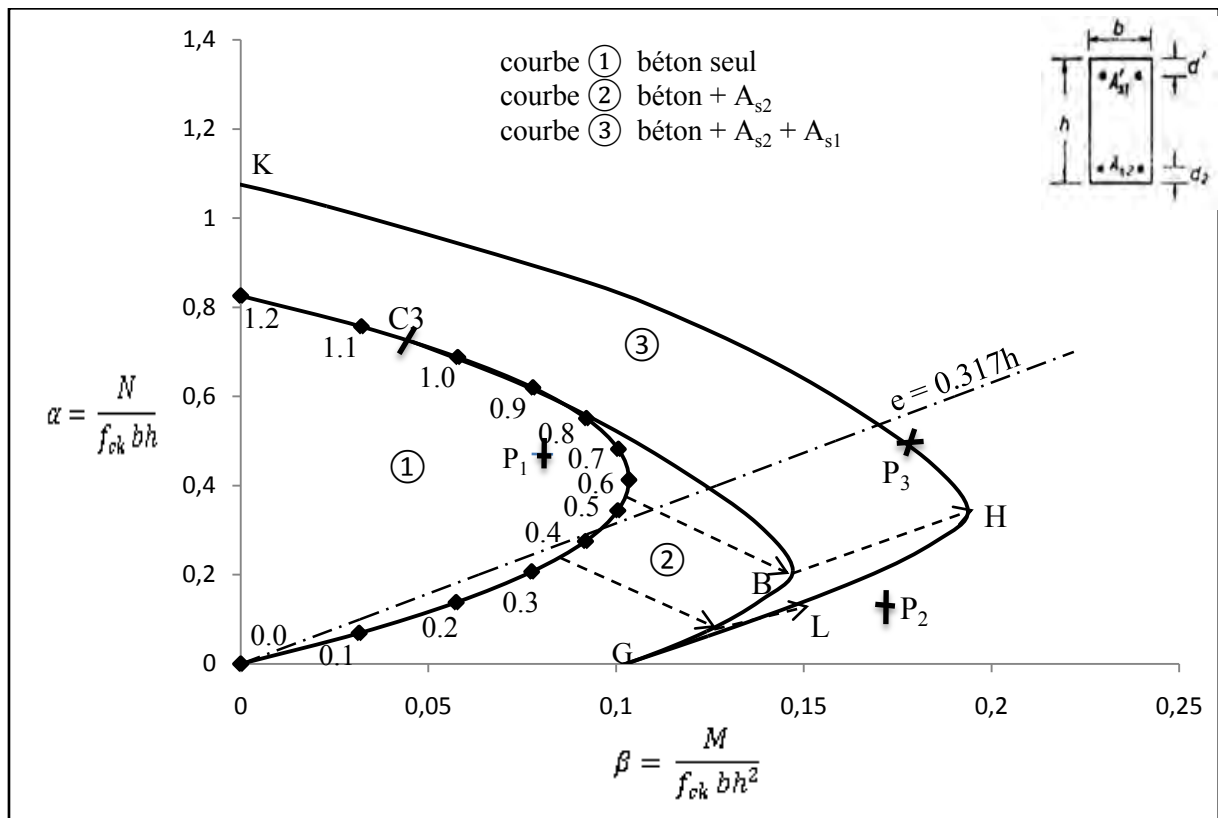
La droite dont l'équation est  $\alpha = \frac{\beta}{0.317}$  intercepte la courbe (3) au point ( $P_4$ ) pour lequel :

$$\alpha = 0.5.$$

$$N = \alpha f_{ck} bh = 0.5 \cdot 30 \cdot 300 \cdot 400$$



$N = 1800 \text{ KN}$ .



**Fig.3.12.** Diagrammes d'interaction pour  $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$ , et  $d_c/h = 0.15$  et  $A_s/bh = 0.56\%$  (béton +  $A_{s2}$  +  $A'_{s1}$ )

### 3.6. Conclusion

Les courbes d'interaction N-M sont des outils souvent utilisés comme aide au dimensionnement. Ces courbes sont souvent utilisées pour permettre de déterminer ou de vérifier aisément, pour une section de géométrie et d'armatures données, la capacité portante de la section. L'intérieur de ce diagramme est définie comme étant la zone autorisée (où l'équilibre de la section est possible), et l'extérieur est définie comme étant la zone non autorisée.

## Simulation numérique de poteaux élancés

### 4.1. Introduction [3]

Le calcul de poteaux est traditionnellement fonction de la caractéristique adimensionnelle nommée « élancement ». L'étude des poteaux de faible élancement (poteaux courts) peut se ramener à un calcul au premier ordre. En revanche les poteaux fortement élancés nécessitent que l'on se préoccupe des effets de second ordre (flèche prise par le poteau lors de son chargement).

Ce phénomène et la prise en compte de la non-linéarité des lois de comportement des matériaux ne permettent plus les calculs analytiques. La littérature propose soit des méthodes de contrôle plus ou moins approchées telles que celles définies dans l'EC2 [2], soit des techniques de calculs plus précises dites générales. La technique générale qui est présentée dans le présent chapitre est la méthode des différences finies.

### 4.2. Relation moment-courbure avec effort normal constant

#### 4.2.1. Introduction

Le calcul des déformations d'un poteau se fait sur la base de la relation propre à sa section, entre le moment, l'effort normal et la courbure. Pour estimer par le calcul la déformabilité d'un poteau en béton armé, il est nécessaire de connaître cette relation dans son intégralité, en particulier dans le domaine post-élastique et à l'approche de la rupture.

La relation M-Ø dépend fortement du comportement contraintes-déformations des matériaux constituant la section et notamment de la déformation spécifique maximale que peut atteindre chacun d'entre eux. La procédure de détermination de la relation moment-courbure est basée sur l'hypothèse simplificatrice de la conservation des sections planes jusqu'à la rupture.

#### 4.2.2. Modèles de lois de comportement

##### a. Loi simulant le matériau béton

Le Manual-textbook fib (fib, 1999) [8] donne l'expression (4.1) de la relation ( $\sigma$ - $\varepsilon$ ) correspondant à une vitesse de déformation imposée de 30 $\mu$ s/sec (fig.4.1).

$$\sigma_c = \frac{\frac{E_{ci}}{E_{c1}} \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}\right)^2}{1 + \left(\frac{E_{ci}}{E_{c1}} - 2\right) \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}} f_{cm} \quad (4.1)$$

Avec :

$E_{ci}$  : Module d'élasticité tangent

$\sigma_c$  : Contrainte de compression

$\varepsilon_c$  : Déformation de compression

$$\varepsilon_{c1} = - 0.0022$$

$E_{c1} = f_{cm} / 0.0022$  : Module d'élasticité sécant de l'origine au pic

$f_{cm}$  : est la résistance moyenne à la compression, elle peut être estimée par :

$$f_{cm} = f_{ck} + \Delta_f$$

Avec :

$$\Delta_f = 8 \text{ MPa}$$

$f_{ck}$  : est la résistance caractéristique à la compression à 28 jours, obtenue à partir d'essais d'écrasement sur un cylindre.

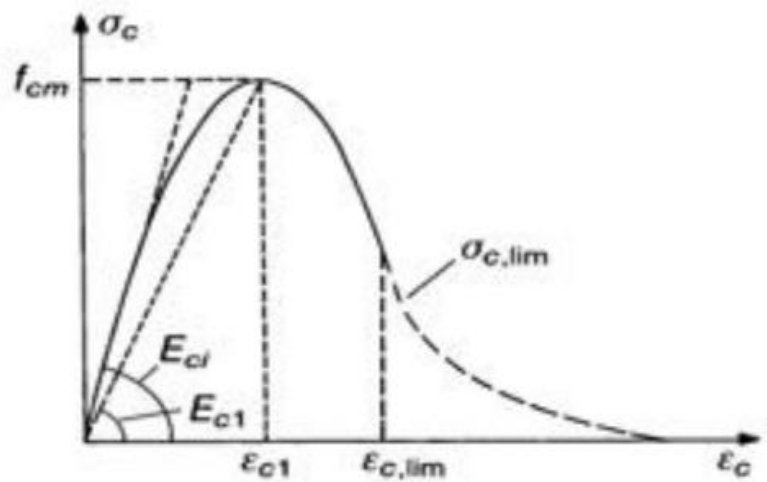
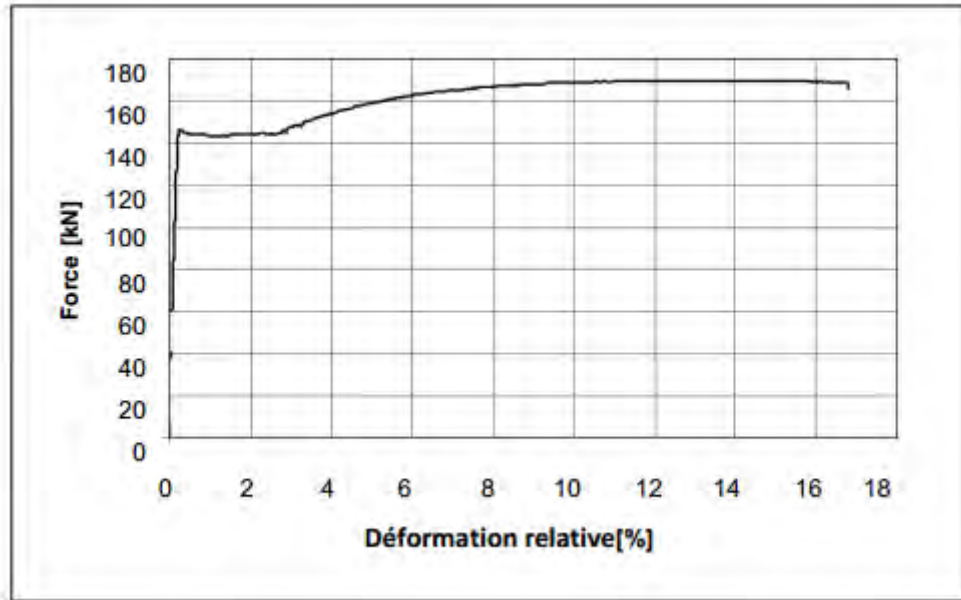


Fig.4.1. diagramme contraintes –déformations du béton

#### b. Loi simulant le matériau acier

La fig.4.2 présente un diagramme contraintes-déformations de l'acier obtenu lors d'un essai de traction sur une éprouvette d'acier de diamètre apparent de 18.5 mm.



**Fig.4.2.** Diagramme forces –déformations, éprouvette d’acier, surface 269 mm<sup>2</sup>

Ce diagramme se scinde en deux ou trois phases distinctes :

1. la partie élastique linéaire, caractérisée par le module d'élasticité de Young  $E$  [KN/mm<sup>2</sup>] et par la limite d'écoulement  $f_{yk}$  [N/mm<sup>2</sup>].
2. la partie plastique quasiment horizontale, située à un niveau de contrainte équivalent à celui de la limite d'écoulement.
3. la partie de raffermisssement caractérisée par une augmentation de la force jusqu'au maximum. Au maximum de force, on observe l'apparition de la striction qui s'accompagne d'une diminution de charge jusqu'à l'obtention de la rupture de l'éprouvette.

Suivant les besoins de l'analyse, l'utilisation se fait de deux manières :

- une idéalisation représentant fidèlement l'allure générale de la courbe de l'essai de traction fig.4.2.
- une idéalisation de cette courbe par une loi simplifiée « élasto-plastique » avec déformation limite  $\varepsilon_u$  fig.4.3 (fib, 1999).

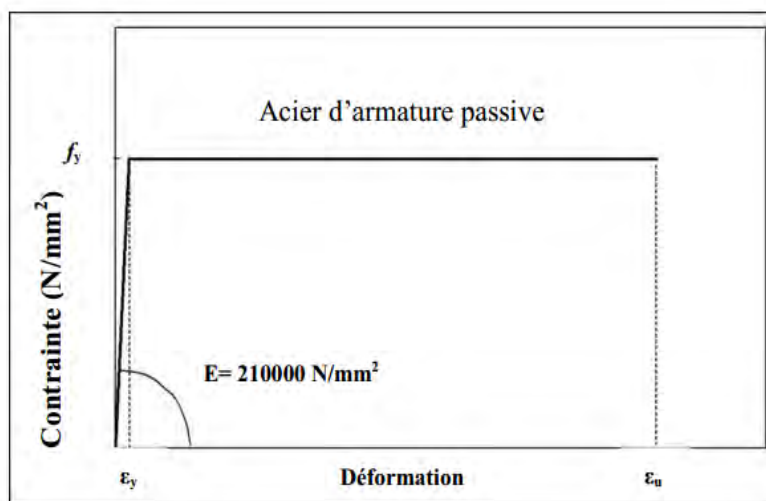
Lors des simulations numériques, cette seconde formulation est utilisée et nécessite la connaissance de quatre grandeurs caractéristiques :

$f_y$ : limite d'écoulement [N/mm<sup>2</sup>]

$E$ : module de Young [KN/mm<sup>2</sup>]

$\varepsilon_y$  : déformation élastique [ $\mu$ strain]

$\varepsilon_u$ : déformation ultime [ $\mu$ strain]



**Fig.4.3.** Représentation de la loi « elasto-plastique » pour l'acier

Cette loi « élasto-plastique » est utilisée aussi bien pour l'acier comprimé que pour l'acier tendu (symétrie par rapport à l'origine).

#### 4.2.3. Méthode de la matrice de rigidité tangentielle

##### a. Introduction

Pour obtenir la courbe force-déplacement ( $N-\Delta$ ) d'un poteau en béton armé (par la méthode des différences finies), il est nécessaire de déterminer la relation moment-courbure ( $M-\theta$ ) d'une section donnée à effort normal constant fixé. La procédure appliquée pour développer la relation moment-courbure à effort normal constant est l'approche de la matrice de rigidité tangentielle [9,10].

##### b. Descriptif de la méthode

Pour une section soumise à un moment fléchissant dans les deux directions, le vecteur force,  $F$ , et le vecteur déformation,  $D$ , sont définis comme suit :

$$F = \begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix} \quad D = \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ \Phi_x \\ \Phi_y \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

Avec  $N$  la force axiale appliquée à la section,  $M_x$  et  $M_y$  sont les moments selon les axes de coordonnées  $X$  et  $Y$ , respectivement,  $\epsilon_0$ , la déformation centrale,  $\Phi_x$  et  $\Phi_y$  les courbures. Due à la non-linéarité matérielle, il est nécessaire de représenter la relation entre le vecteur force et le vecteur déformation dans la forme incrémentale. Pour une application pratique et pour des changements élémentaires de  $F$  et  $D$  :

$$\Delta F = Q \times \Delta D \quad (4.3)$$

Les éléments de la matrice  $Q$ , sont obtenus par la discrétisation de la section en éléments de dimensions finies, la force axiale et les moments résistants sont calculés pour chaque élément de dimension finie et qui seront ensuite regroupés pour former les éléments de la matrice. Selon l'hypothèse de la conservation des sections planes, la déformation centrale pour chaque élément de dimension fini peut être calculée comme suit :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + y \phi_x + x \phi_y \tag{4.4}$$

Où l'origine des coordonnées coïncide avec le centre de la section, fig.4.4. Les contraintes dans chaque élément de dimension finie sont obtenues à partir des diagrammes contraintes-déformations et les efforts internes sont donc calculés comme suit :

$$N_i = \int \sigma * dA \tag{4.5}$$

$$M_{xi} = \int \sigma * y * dA \tag{4.6}$$

$$M_{yi} = \int \sigma * x * dA \tag{4.7}$$

D'où :

$$\delta F = \begin{cases} \Delta N \\ \Delta M_x \\ \Delta M_y \end{cases} = \begin{cases} N - N_i \\ M_x - M_{xi} \\ M_y - M_{yi} \end{cases} \tag{4.8}$$

Si la condition  $|\delta F| \leq 10^{-3} F$  est vérifiée :

Une solution est obtenue, sinon, une procédure itérative est nécessaire dans laquelle la matrice de rigidité tangentielle doit être développée.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial N}{\partial \phi_x} & \frac{\partial N}{\partial \phi_y} \\ \frac{\partial M_x}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial M_x}{\partial \phi_x} & \frac{\partial M_x}{\partial \phi_y} \\ \frac{\partial M_y}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial M_y}{\partial \phi_x} & \frac{\partial M_y}{\partial \phi_y} \end{pmatrix} \tag{4.9}$$



Fig.4.4. Représentation des efforts et des déformations et discrétisation de la section

Les éléments de la matrice  $Q$  sont donnés par :

$$\frac{\partial N}{\partial \varepsilon} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E t_{ij} \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial N}{\partial \phi_x} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} y_{ij} E t_{ij} \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial N}{\partial \phi_y} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} E t_{ij} \quad (4.12)$$

Et les éléments correspondant à  $M_x$  sont :

$$\frac{\partial M_x}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial N}{\partial \phi_x} \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial \phi_x} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} y_{ij}^2 E t_{ij} \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial \phi_y} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} y_{ij} E t_{ij} \quad (4.15)$$

Et ceux correspondant à  $M_y$  sont:

$$\frac{\partial M_y}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial N}{\partial \phi_y} \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial \phi_x} = \frac{\partial M_x}{\partial \phi_y} \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial \phi_y} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij}^2 E t_{ij} \quad (4.18)$$

Avec  $E_t$  le module tangent,  $m$  et  $n$ , le nombre d'éléments de dimensions finies dans les directions  $X$  et  $Y$ , respectivement,  $i$  et  $j$ , positions des éléments finis dans les directions  $X$  et  $Y$  respectivement. Les valeurs corrigées des déformations sont calculées et ajoutées aux vecteurs de déformations de départ pour donner les valeurs actualisées des déformations et donc les valeurs actualisées des contraintes.

Les valeurs corrigées des déformations sont calculées comme suit :

$$\Delta D = \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon \\ \Delta \phi_x \\ \Delta \phi_y \end{Bmatrix} = Q^{-1} \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_x \\ \Delta M_y \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

Et donc :

$$D = D + \Delta D = \begin{Bmatrix} \varepsilon + \Delta\varepsilon \\ \phi_x + \Delta\phi_x \\ \phi_y + \Delta\phi_y \end{Bmatrix} \tag{4.20}$$

Cette procédure est répétée jusqu'à ce que la condition  $|\delta F| \leq 10^{-3} F$  soit vérifiée. Dans ce cas, la relation moment – courbure à effort normal constant peut être développée. La relation moment – courbure à effort normal constant présentée dans la fig.4.5, a été tracée pour différentes valeurs du moment selon la direction Y.

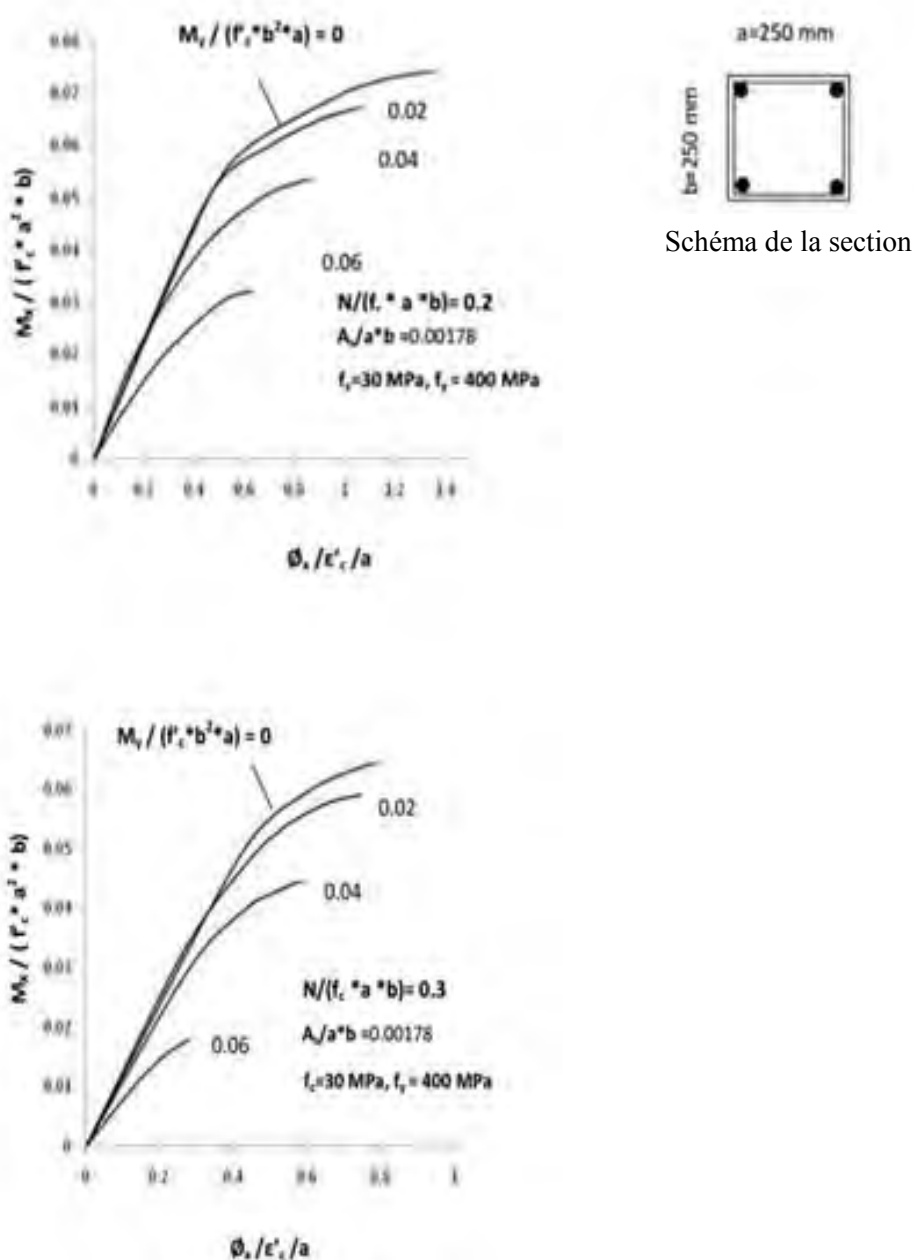


Fig.4.5. Exemple type de diagramme moment- courbure avec effort normal constant



**4.3. Méthode des différences finies**

**4.3.1. Principe de la méthode**

Cette méthode est qualifiée de « générale » car elle permet l'étude de la relation complète (P-Δ) d'un poteau en prenant en compte les effets du premier et du second ordre. Pour étudier cette relation, la hauteur du poteau doit être divisée en segments afin d'approcher la déformée réelle que prend le poteau. Cette technique est présentée dans le CEB Manual on Buckling (CEB, 1977) [11]. Les éléments de base de cette technique sont les courbes M-Ø.

**4.3.2. Descriptif de la méthode**

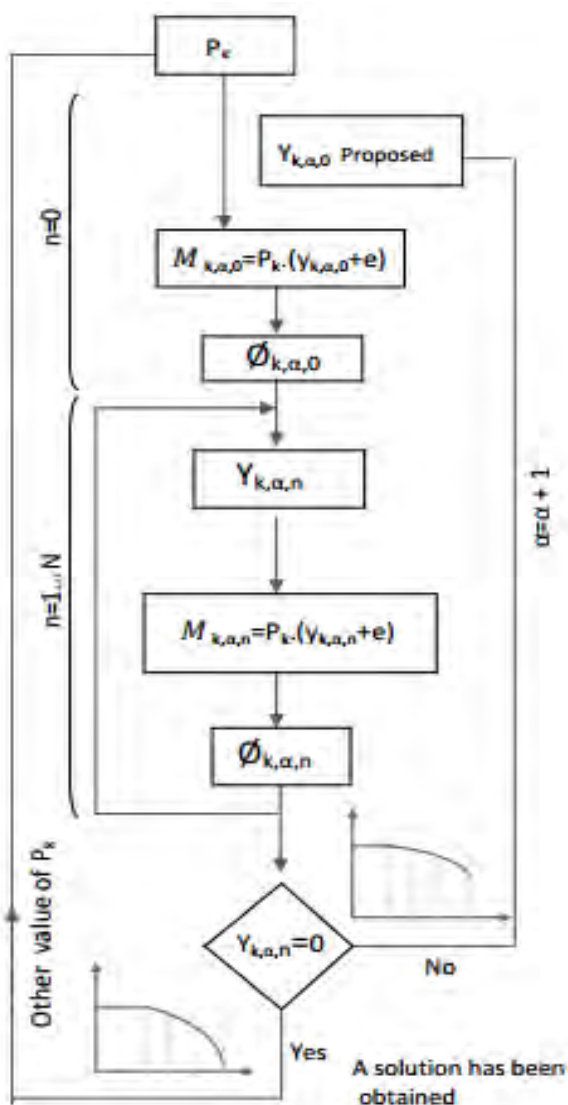


Fig.4.6. Organigramme du programme numérique

La hauteur du poteau est divisée en un nombre d'éléments de dimensions finies appelés segment, chaque segment a une épaisseur. Dans une section arbitraire, la flèche est  $y_i$ , la courbure,  $\emptyset_i$  dans cette section peut être calculée comme suit :

$$y_i'' = - \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (4.21)$$

Avec  $y_i'' = \emptyset_i$

Cette équation définit l'aspect géométrique du problème. Pour trouver un état d'équilibre possible pour une valeur donnée de la charge axiale,  $N$ , et pour une valeur donnée d'excentricité,  $e$ , une procédure itérative peut être menée en donnant une valeur convenable à la flèche,  $y_0$ , au centre du poteau. Le moment total dans ce point sera donc :

$$M_0 = N (e + y_0) \quad (4.22)$$

La courbure,  $\emptyset_i$  est obtenue de la relation moment-courbure à charge axiale constante. Donc il est possible de calculer la flèche,  $y_1$  dans le segment voisin. Le moment total devient:

$$M_1 = N (e + y_1) \quad (4.23)$$

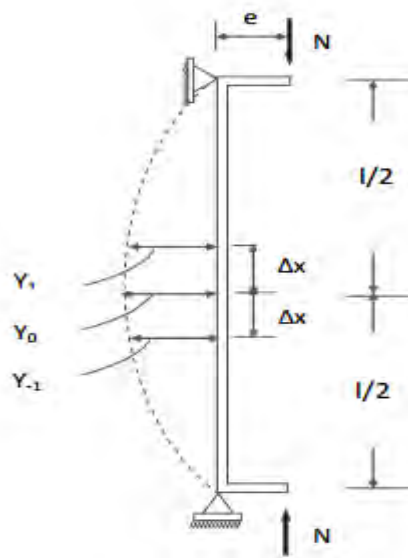


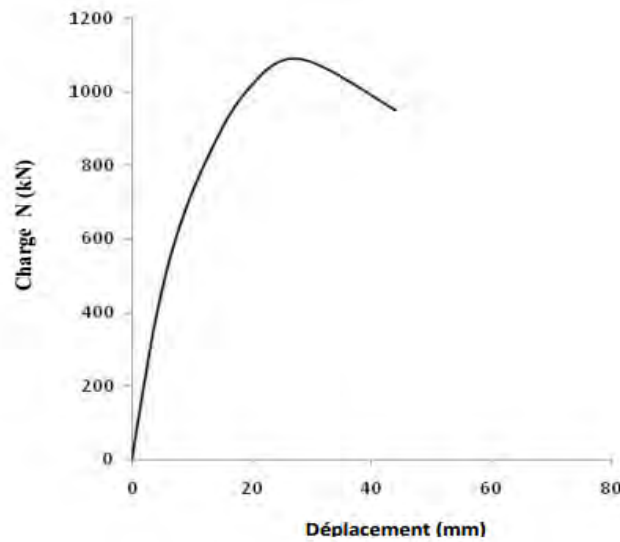
Fig4.7. modèle de représentation d'un poteau bi-articulé

Et à partir de la relation moment-courbure à charge axiale constante, la valeur de la courbure  $\emptyset_1$  peut être obtenue. En général, cela suit la règle suivante:

$$y_{i+1} = - 2y_i - y_{i-1} - \emptyset_i (\Delta x)^2 \quad (4.24)$$

En utilisant cette équation, il est possible de calculer la flèche dans n'importe quel segment à partir de la dernière valeur de la flèche calculée. Au niveau des appuis, la valeur de la flèche devra être nulle. Sinon, le calcul doit être répété, en introduisant une nouvelle valeur convenable de la flèche centrale,  $y_0$ , jusqu'à ce que la condition de flèche nulle au niveaux

des appuis soit vérifiée. Dans ce cas, le premier point de la courbe force-flèche est obtenu. Les autres points de la courbe (fig.4.8) sont obtenus en augmentant la valeur de la charge axiale.



**Fig.4.8.** Relation charge-déplacement : poteau 180×180 mm ( $h=3.78$  m,  $f_{ck}=94.3$  MPa,  $f_{yk}=542$  MPa,  $e_x=20$  mm,  $e_y=0$ )

#### 4.4. Validation des résultats numériques

##### 4.4.1 Introduction

Le programme utilisé dans cette étude pour fournir les résultats numériques a été développé à partir de l'approche numérique dans la thèse de doctorat de M. BOUCHABOUB [3] qui a comparé les résultats obtenus par la méthode numérique avec les résultats expérimentaux et a trouvé qu'ils étaient proche vis-à-vis de charge de ruine uniquement.

##### 4.4.2. Comparaison avec les résultats expérimentaux obtenus par Olivier germain et espion [12]

Olivier germain et espion [12] ont testé 12 poteaux bi-articulés en béton à haute performance. La section transversale des poteaux testé était de  $180 \times 180 \text{ mm}^2$ , renforcée de 4 barres de 12 mm de diamètre (avec une contrainte d'écoulement des armatures de 542 MPa). On remarque clairement que les résultats numériques de la présente étude sont en très bonne corrélation avec les résultats expérimentaux (tab.4.1). La différence relative est entre -0.051 et +0.041.

##### 4.4.3. Comparaison avec les résultats expérimentaux obtenus par Drysdale et Huggins [13]

Une autre comparaison a été faite avec les résultats expérimentaux obtenus par Drysdale et Huggins [13]. Les poteaux testés étaient en béton ordinaire de  $127 \times 127 \text{ mm}^2$  avec une contrainte d'écoulement des armatures de 387 MPa. La comparaison avec les résultats expérimentaux a montré une bonne corrélation (tab.4.2). La différence relative est entre -0.116 et + 0.089.

#### 4.4.4. Comparaison avec les résultats expérimentaux obtenus par Pallarès et al

Pour mieux vérifier la validité de la méthode, les comparaisons ont été faites avec les résultats expérimentaux obtenus par Pallarès et Al. Qui ont testé des poteaux en béton à haute performance soumis à une flexion bi-excentrée. Les poteaux étaient de section rectangulaire de 200×100 mm et le tab.4.3 présente la description des poteaux testés. On remarque que les deux résultats sont très proches (tab.4.3). La différence relative est entre -0.069 et + 0.198.

désignation poteau	hauteur (m)	excentricité (mm)	diamètre des cadres (mm)	$f_{ck}$ (MPa)	Charge de ruine (KN)			
					Exp	présente analyse	$\frac{P_{ana}}{P_{exp}}$	$\frac{P_{ana} - P_{exp}}{P_{ana}}$
A-1/36-R	3.78	5	8	86.9	1750	1770	<b>1.01</b>	0.011
A-1/36-O	3.78	5	8	87.3	1640	1620	<b>0.99</b>	-0.012
A-1/18-R1	3.78	10	6	92.0	1922	1900	<b>0.99</b>	-0.012
A-1/18-Q	3.78	10	8	89.3	1524	1450	<b>0.95</b>	-0.051
A-1/18-O	3.78	10	6	91.4	1489	1430	<b>0.96</b>	-0.041
A-1/18-R2	3.78	10	8	85.9	1479	1530	<b>1.03</b>	0.033
A-1/12-O	3.78	15	6	89.4	1256	1310	<b>1.04</b>	0.041
A-1/9-R	3.78	20	6	91.8	1140	1150	<b>1.01</b>	0.009
A-1/9-O	3.78	20	6	94.3	1100	1090	<b>0.99</b>	-0.009
B-1/90-O	4.38	2	6	92.0	1388	1420	<b>1.02</b>	0.023
B-1/36-O	4.38	5	6	93.1	1315	1340	<b>1.02</b>	0.019
B-1/18-O	4.38	10	6	91.3	1153	1150	<b>0.99</b>	-0.003

Tab.4.1. Comparaison des résultats numériques avec les résultats expérimentaux obtenus par Olivier germain et espion [12]

désignation poteau	$e_x$ (mm)	$e_y$ (mm)	$f_{ck}$ (MPa)	Charge de ruine (KN)			
				Exp	présente analyse	$\frac{P_{ana}}{P_{exp}}$	$\frac{P_{ana} - P_{exp}}{P_{ana}}$
A-1-C	17.96	17.96	26.83	167.31	165	<b>0.98</b>	-0.014
A-3-C	17.96	17.96	27.73	171.32	167	<b>0.97</b>	-0.026
A-2-A	23.47	9.72	26.69	175.77	171	<b>0.97</b>	-0.028
C-3-A	23.47	9.72	28.42	185.11	178	<b>0.96</b>	-0.040
D-1-A	25.40	0.0	30.35	173.10	190	<b>1.09</b>	0.089
D-2-C	25.40	0.0	29.18	176.66	188	<b>1.06</b>	0.060
E-1-C	35.20	14.58	26.80	145.06	130	<b>0.90</b>	-0.116
E-2-A	35.20	14.58	30.35	149.96	141	<b>0.94</b>	-0.064
F-1-A	11.73	4.86	28.49	261.20	253	<b>0.97</b>	-0.032
F-2-A	11.73	4.86	29.04	253.64	255	<b>0.99</b>	0.005

Tab.4.2. Comparaison des résultats numériques avec les résultats expérimentaux obtenus par Drysdale et Huggins [13]

désignation poteau	$e_x$ (mm)	$e_y$ (mm)	$f_{ck}$ (MPa)	Charge de ruine (KN)			
				Exp	présente analyse	$\frac{P_{ana}}{P_{exp}}$	$\frac{P_{ana} - P_{exp}}{P_{ana}}$
<b>k30_a0.5_n1</b>	17.88	4.47	107	552.77	520	<b>0.94</b>	-0.063
<b>k30_a1_n1</b>	14.14	7.07	104	496.71	490	<b>0.98</b>	-0.014
<b>k30_a1_n2</b>	28.28	14.14	108	342.02	320	<b>0.94</b>	-0.069
<b>k30_a2_n1</b>	8.94	8.94	100	456.97	570	<b>1.24</b>	0.198

**Tab.4.3.** Comparaison des résultats numériques avec les résultats expérimentaux obtenus par Pallarès et al

#### 4.5. Conclusion

Le présent chapitre a mis en relief l'avantage d'associer la méthode de la rigidité tangentielle avec la méthode des différences finies pour résoudre les problèmes d'instabilité au flambement que peuvent présenter les poteaux élancés en béton armé sous des charges de compression excentrées.

## Présentation et Analyse des résultats

### 5.1. Introduction

La conception d'un poteau consiste à trouver une section transversale qui supporte de manière satisfaisante à la fois un effort axial et un moment de flexion. Un diagramme d'interaction reliant la charge et le moment de rupture pour un poteau donné pour la gamme complète des excentricités est nécessaire. Pour toute excentricité, il existe une paire unique de valeurs de P, M qui causera la ruine. Le présent chapitre présente les diagrammes d'interaction d'un poteau élancé en faisant varier certains paramètres tels que :

- l'élancement ;
- la résistance à la compression du béton,  $f_{ck}$  ;
- la contrainte d'écoulement de l'acier,  $f_{yk}$  ;
- l'excentricité.

Et ce dans le but de montrer l'influence de la variation de ces derniers sur l'allure des diagrammes d'interaction.

### 5.2. Effets des paramètres influents

#### 5.2.1. Effets de l'élancement

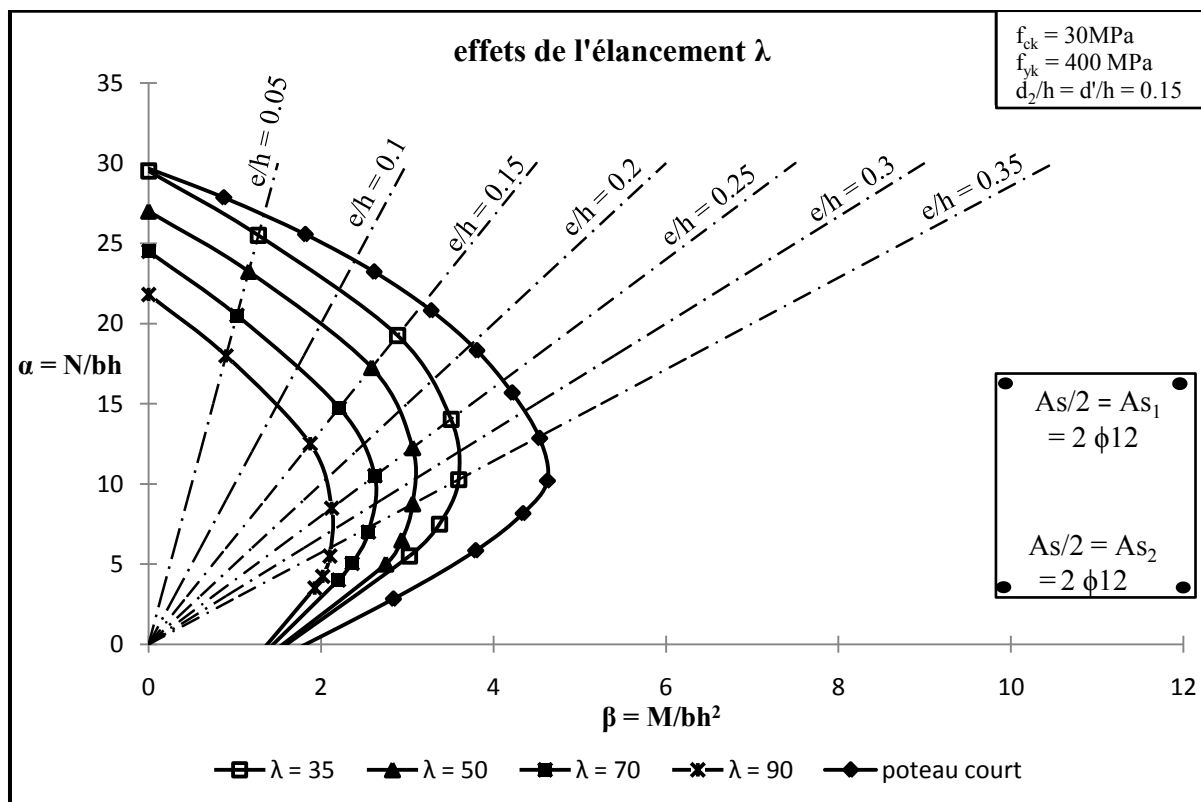


Fig.5.1. Diagrammes d'interaction d'un poteau élancé pour différentes valeur de  $\lambda$

A partir du diagramme d'interaction développé, on peut clairement noter que la courbe d'élançement équivalente à  $\lambda = 35$ , enveloppe la courbe de  $\lambda = 50$ . L'augmentation de la hauteur (H) du poteau engendre une augmentation de l'élançement entraînant un déplacement de la courbe vers l'intérieur.

Les courbes de l'élançement  $\lambda = 35$  et  $\lambda = 50$  se positionnent de manière plus ou moins proche de la courbe d'interaction du poteau court. Tandis que Les courbes les plus éloignées correspondent à des élançements assez importants ( $\lambda = 70$  et  $\lambda = 90$ ).

Hauteur (mm)	$\lambda$	N (KN)	M(KN.m)	$\frac{N_{pc} - N_{pé}}{N_{pc}}$ (%)
2000	35	770	23.1	9.2
3000	50	690	20.7	22.9
4000	70	590	17.7	30.4
5200	90	500	15	41

**Tab.5.1.** Effets de la variation de l'élançement sur le couple (N, M) de ruine (200x200 mm<sup>2</sup>, avec  $f_{ck} = 30$  MPa et  $e/h = 0.15$ )

Il est observé du tab.5.1 une diminution de la charge de ruine quand il y a une augmentation de l'élançement. Le gain obtenu en terme de valeur de la charge de ruine dont la résistance caractéristique du béton  $f_{ck} = 30$  N/mm<sup>2</sup>, pour les courbes avec un élançement de  $\lambda = 35$  à  $\lambda = 50$  est de l'ordre de 10.4%, par contre le gain obtenu pour un élançement de  $\lambda = 70$  à  $\lambda = 90$  est de l'ordre de 15.2%.

Les poteaux élançés présentent une réduction importante des écarts par rapport à la capacité portante du poteau court de 9.2% à 41%.

Hauteur (mm)	$e/h$	$\lambda$	N (KN)	$M_{max}$ (KN.m)	$\frac{M_{max,pc} - M_{max,pé}}{M_{max,pc}}$ (%)
2000	0.35	35	411	28.77	22.2
3000	0.35	50	350	24.5	33.8
4000	0.25	70	420	21	43.2
5200	0.25	90	340	17	54

**Tab.5.2.** Effets de la variation de l'élançement sur le couple (N,  $M_{max}$ ) (200x200 mm<sup>2</sup>, avec  $f_{ck} = 30$  MPa)

Pour les courbes de l'élançement  $\lambda = 35$  et  $\lambda = 50$ , la valeur du moment maximal correspond à  $e/h = 0.35$ , par contre pour les courbes de l'élançement  $\lambda = 70$  et  $\lambda = 90$ , il y a un décalage, le moment maximal devient à  $e/h = 0.25$ .

Le gain obtenu en terme de moment de flexion maximal au point d'écoulement, pour les courbes avec un élançement de  $\lambda = 35$  à  $\lambda = 50$  est de l'ordre de 14.8%, par contre le gain obtenu pour un élançement de  $\lambda = 70$  à  $\lambda = 90$  est de l'ordre de 19%.

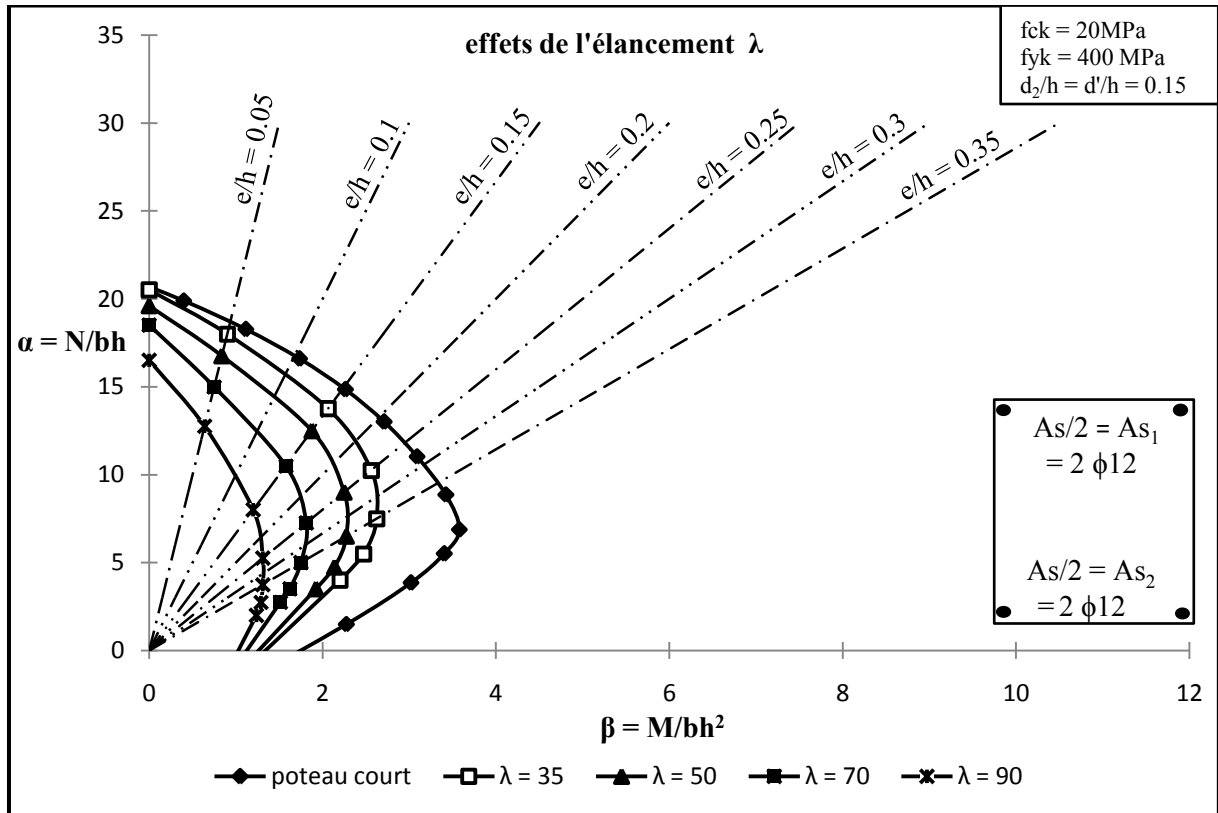


Fig.5.2. Diagrammes d'interaction d'un poteau élancé pour  $f_{ck} = 20$  MPa

Hauteur (mm)	$\lambda$	N (KN)	M(KN.m)	$\frac{N_{pc} - N_{pé}}{N_{pc}}$ (%)
2000	35	550	16.5	7.7
3000	50	500	15	16.1
4000	70	420	12.6	29.5
5200	90	320	9.6	46.3

Tab.5.3. Effets de la variation de l'élancement sur le couple (N, M) de ruine (200x200 mm<sup>2</sup>, avec  $f_{ck} = 20$  MPa et  $e/h = 0.15$ )

Le gain obtenu en terme de valeur de la charge de ruine, pour les courbes avec un élancement de  $\lambda = 35$  à  $\lambda = 50$  est de l'ordre de 9.1%, par contre le gain obtenu pour un élancement de  $\lambda = 70$  à  $\lambda = 90$  est de l'ordre de 23.8%.

Hauteur (mm)	$e/h$	$\lambda$	N (KN)	$M_{max}$ (KN.m)
2000	0.35	35	300	21
3000	0.35	50	260	18.2
4000	0.25	70	290	14.5
5200	0.25	90	210	10.5

Tab.5.4. Effets de la variation de l'élancement sur le couple (N,  $M_{max}$ ) (200x200 mm<sup>2</sup>, avec  $f_{ck} = 20$  MPa)



Le gain obtenu en terme de moment de flexion maximal, pour les courbes avec un élancement de  $\lambda = 35$  à  $\lambda = 50$  est de l'ordre de 13.3%, par contre le gain obtenu pour un élancement de  $\lambda = 70$  à  $\lambda = 90$  est de l'ordre de 27.6%.

Hauteur (mm)	$\lambda$	$f_{ck} = 20$ MPa		$f_{ck} = 30$ MPa	
		N (KN)	M(KN.m)	N (KN)	M(KN.m)
2000	35	550	16.5	770	23.1
3000	50	500	15	690	20.7
4000	70	420	12.6	590	17.7
5200	90	320	9.6	500	15

**Tab.5.5.** Effets de la variation de l'élancement sur le couple (N, M) de ruine (pour  $f_{ck} = 20$  MPa et  $f_{ck} = 30$  MPa, avec  $e/h = 0.15$ )

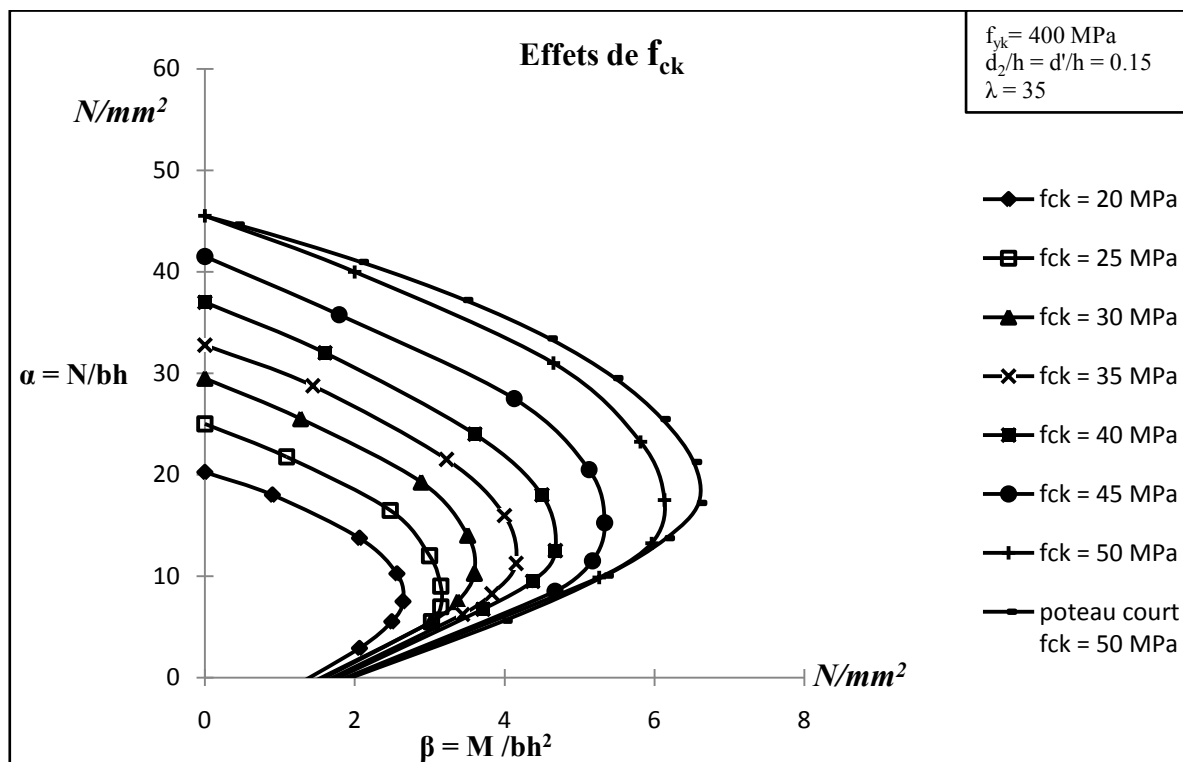
Hauteur (mm)	$\lambda$	$e/h$	$f_{ck} = 20$ MPa		$f_{ck} = 30$ MPa	
			N (KN)	$M_{max}$ (KN.m)	N (KN)	$M_{max}$ (KN.m)
2000	35	0.35	300	21	411	28.77
3000	50	0.35	260	18.2	350	24.5
4000	70	0.25	290	14	420	20.4
5200	90	0.25	210	10.5	340	16.8

**Tab.5.6.** Effets de la variation de l'élancement sur le couple (N,  $M_{max}$ ) (pour  $f_{ck} = 20$  MPa et  $f_{ck} = 30$  MPa)

L'influence de la diminution de la résistance caractéristique ( $f_{ck}$ ) sur le comportement d'un poteau élancé est significative en terme de la charge de ruine. Cet effet est d'un apport négatif relativement au moment de flexion maximal.

### 5.2.2. Effets de la résistance à la compression du béton, $f_{ck}$

Dans ce cas, la charge de ruine du poteau est comparée en faisant varier la résistance à la compression du béton de 20 à 50 N/mm<sup>2</sup> avec un pas de 5 MPa.



**Fig.5.3.** Effets de la variation de la résistance du béton pour  $\lambda = 35$   
( $L=2000$  mm,  $200 \times 200 \text{mm}^2$ )

Dans ce cas, la hauteur reste constante et la résistance du béton est changée. Comme il a été vu précédemment, une courbe de résistance 25 MPa enveloppe la courbe de résistance 20 MPa et ainsi de suite. Chaque fois que la résistance augmente la courbe se déplace vers l'extérieur.

Hauteur (mm)	$f_{ck}$ (N/mm <sup>2</sup> )	N (KN)	M(KN.m)
2000	20	550	16.5
2000	30	770	23.1
2000	40	960	28.8
2000	50	1240	37.2

**Tab.5.7.** Effets de la variation de la résistance du béton sur le couple (N, M) de ruine  
(pour  $\lambda = 35$  et  $e/h = 0.15$ )

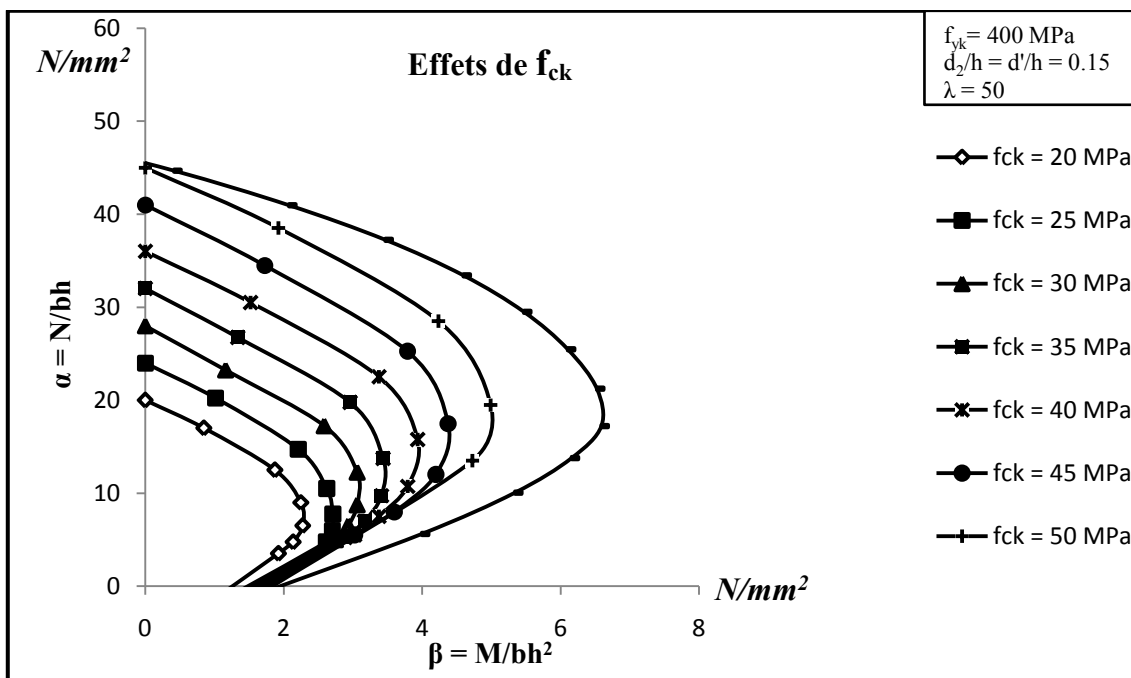
L'augmentation de la résistance du béton a un effet très favorable sur la charge de ruine du poteau. Le gain obtenu en terme de valeur de la charge de ruine pour les courbes entre les résistances caractéristiques  $f_{ck} = 20 \text{ N/mm}^2$  et  $f_{ck} = 30 \text{ N/mm}^2$  est de l'ordre de 28.6%, par contre le gain obtenu entre les résistances caractéristiques  $f_{ck} = 20 \text{ N/mm}^2$  et  $f_{ck} = 50 \text{ N/mm}^2$  est de l'ordre de 55.6%.

Hauteur (mm)	$f_{ck}$ (N/mm <sup>2</sup> )	N (KN)	M <sub>max</sub> (KN.m)
2000	20	300	21.16
2000	30	411	28.77
2000	40	500	37.42
2000	50	720	50.4

**Tab.5.8.** Effets de la variation de la résistance du béton sur le couple (N, M<sub>max</sub>) (pour  $\lambda = 35$  et  $e/h = 0.35$ )

Dans ce cas la valeur de  $e/h = 0.35$  est pratiquement identique pour tous les valeurs du moment maximal, il existe une correspondance pour différentes valeurs de  $f_{ck}$ .

Le gain obtenu en terme de valeur du moment maximal, pour les courbes entre les résistances caractéristiques  $f_{ck} = 20$  N/mm<sup>2</sup> et  $f_{ck} = 30$  N/mm<sup>2</sup> est de l'ordre de 26.4%, par contre le gain obtenu entre les résistances caractéristiques  $f_{ck} = 20$  N/mm<sup>2</sup> et  $f_{ck} = 50$  N/mm<sup>2</sup> est de l'ordre de 58%.



**Fig.5.4.** Effets de la variation de la résistance du béton pour  $\lambda = 50$  (L=3000 mm, 200x200mm<sup>2</sup>)

Hauteur (mm)	$f_{ck}$ (N/mm <sup>2</sup> )	N (KN)	M(KN.m)
3000	20	500	15
3000	30	690	20.7
3000	40	900	27
3000	50	1140	34.2

**Tab.5.9.** Effets de la variation de la résistance du béton sur le couple (N, M) de ruine (pour  $\lambda = 50$  et  $e/h = 0.15$ )

Le gain obtenu en terme de valeur de la charge de ruine pour les courbes entre les résistances caractéristiques  $f_{ck} = 20 \text{ N/mm}^2$  et  $f_{ck} = 30 \text{ N/mm}^2$  est de l'ordre de 27.5%, par contre le gain obtenu entre les résistances caractéristiques  $f_{ck} = 20 \text{ N/mm}^2$  et  $f_{ck} = 50 \text{ N/mm}^2$  est de l'ordre de 56.1%.

Hauteur (mm)	$e/h$	$f_{ck}$ (N/mm <sup>2</sup> )	N (KN)	$M_{\max}$ (KN.m)
3000	0.35	20	520	18.2
3000	0.35	30	350	24.5
3000	0.25	40	630	31.5
3000	0.25	50	780	39.92

**Tab.5.10.** Effets de la variation de la résistance du béton sur le couple (N,  $M_{\max}$ ) (pour  $\lambda = 50$ )

Le gain obtenu en terme de valeur du moment maximal, pour les courbes entre les résistances caractéristiques  $f_{ck} = 20 \text{ N/mm}^2$  et  $f_{ck} = 30 \text{ N/mm}^2$  est de l'ordre de 25.7%, par contre le gain obtenu entre les résistances caractéristiques  $f_{ck} = 20 \text{ N/mm}^2$  et  $f_{ck} = 50 \text{ N/mm}^2$  est de l'ordre de 54.4%.

$f_{ck}$ (N/mm <sup>2</sup> )	$\lambda = 35$		$\lambda = 50$	
	N (KN)	M(KN.m)	N (KN)	M(KN.m)
20	550	16.5	500	15
30	770	23.1	690	20.7
40	960	28.8	900	27
50	1240	37.2	1140	34.2

**Tab.5.11.** Effets de la variation de la résistance du béton sur le couple (N, M) de ruine (pour  $\lambda = 35$  et  $\lambda = 50$ , avec  $e/h = 0.15$ )

Il a été observé que le gain obtenu en terme de valeur de la charge de ruine, pour les courbes tracées avec un élancement  $\lambda = 35$  et  $\lambda = 50$ , respectivement avec des résistances caractéristiques  $f_{ck} = 20 \text{ N/mm}^2$  et  $f_{ck} = 30 \text{ N/mm}^2$  est de l'ordre de 1.1%, par contre le gain obtenu entre  $\lambda = 35$  et  $\lambda = 50$  avec des résistances caractéristiques  $f_{ck} = 20 \text{ N/mm}^2$  et  $f_{ck} = 50 \text{ N/mm}^2$  est de l'ordre de 0.5%.

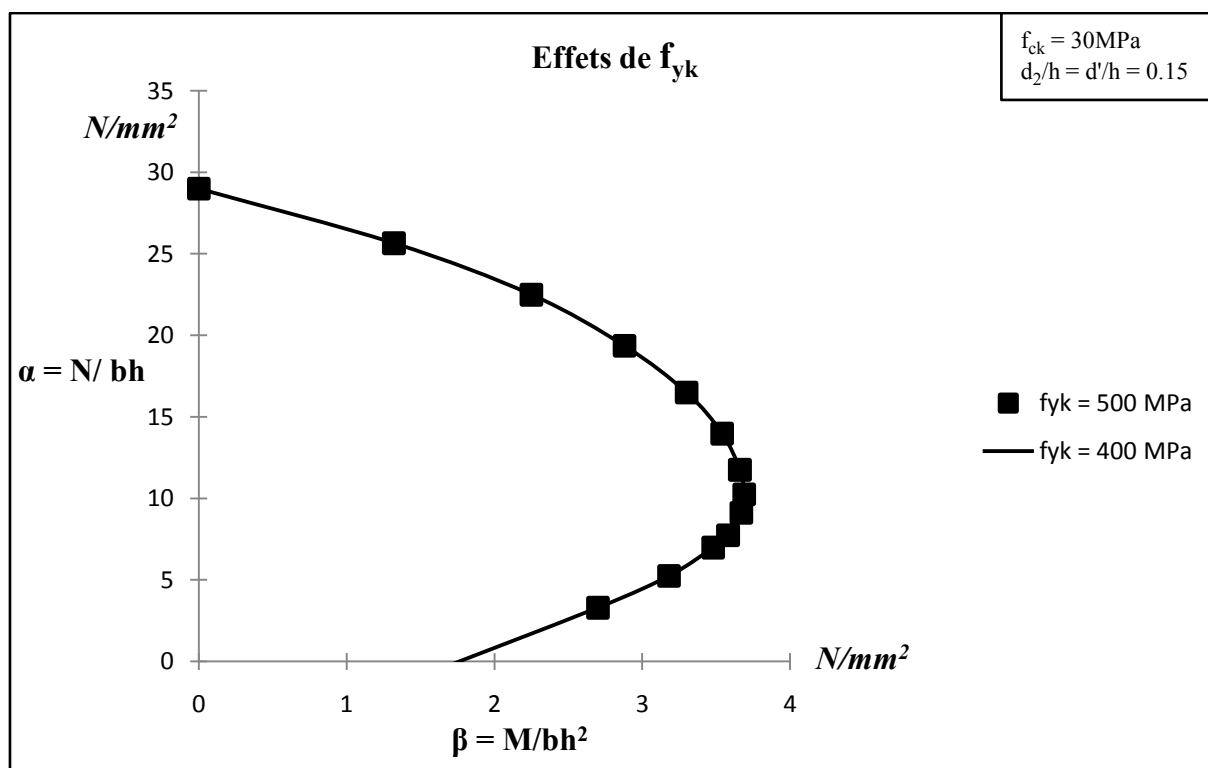
$f_{ck}$ (N/mm <sup>2</sup> )	$e/h$	$\lambda = 35$		$\lambda = 50$	
		N (KN)	$M_{\max}$ (KN.m)	N (KN)	$M_{\max}$ (KN.m)
20	0.35	300	21.16	520	18.2
30	0.35	411	28.77	350	24.5
40	0.25	500	37.42	630	30.34
50	0.25	720	49.08	780	37.8

**Tab.5.12.** Effets de la variation de la résistance du béton sur le couple (N,  $M_{\max}$ ) (pour  $\lambda = 35$  et  $\lambda = 50$ )

le gain obtenu en terme de valeur du moment de flexion maximal, pour les courbes tracées avec un élancement  $\lambda = 35$  et  $\lambda = 50$ , respectivement avec des résistances caractéristiques  $f_{ck} = 20 \text{ N/mm}^2$  et  $f_{ck} = 30 \text{ N/mm}^2$  est de l'ordre de 0.7%, par contre le gain obtenu entre  $\lambda = 35$  et  $\lambda = 50$  avec des résistances caractéristiques  $f_{ck} = 20 \text{ N/mm}^2$  et  $f_{ck} = 50 \text{ N/mm}^2$  est de l'ordre de 3.6%.

Donc l'influence de l'augmentation de la hauteur du poteau avec l'augmentation de la résistance du béton est presque négligeable vis-à-vis de la charge de ruine est moins considérable vis-à-vis du moment de flexion maximal.

### 5.2.3. Effets de la contrainte d'acier, $f_{yk}$



**Fig.5.5.** Effets de la variation de la contrainte d'écoulement des armatures sur le comportement d'un poteau élancé ( $L=2000 \text{ mm}$ ,  $200 \times 200 \text{ mm}^2$ )

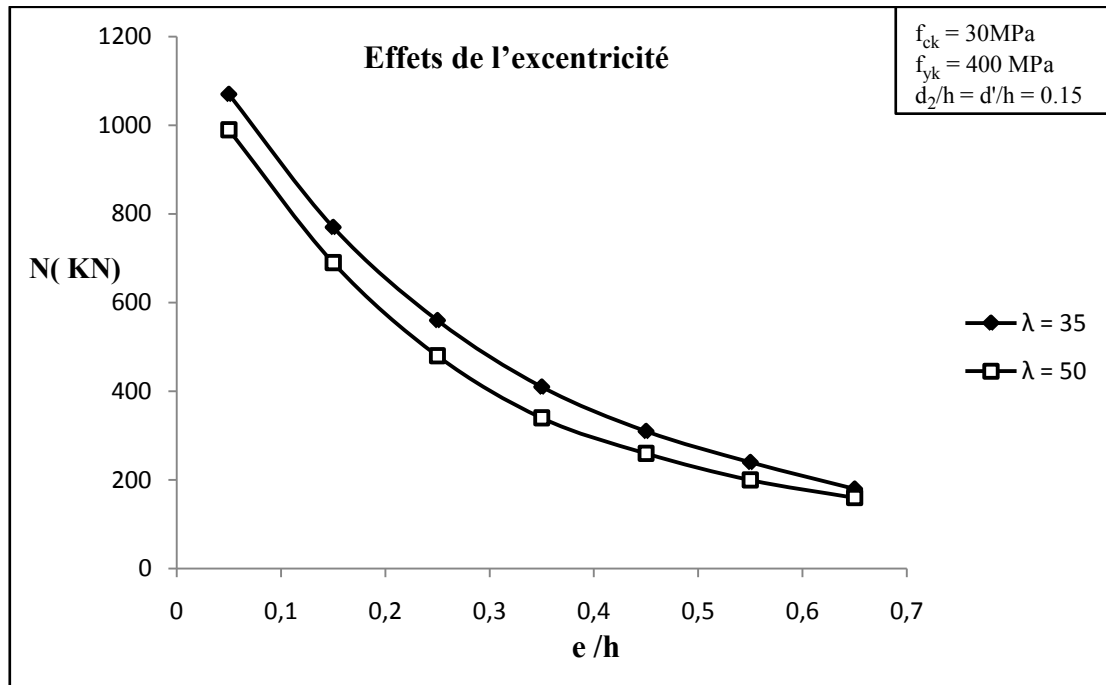
Hauteur (mm)	$e/h$	$f_{yk}$ (N/mm <sup>2</sup> )	N(KN)	M (KN.m)
2000	0.15	400	770	23.1
2000	0.15	500	770	23.1

**Tab 5.13.** Effets de la variation de la contrainte d'écoulement des armatures sur le comportement d'un poteau élancé

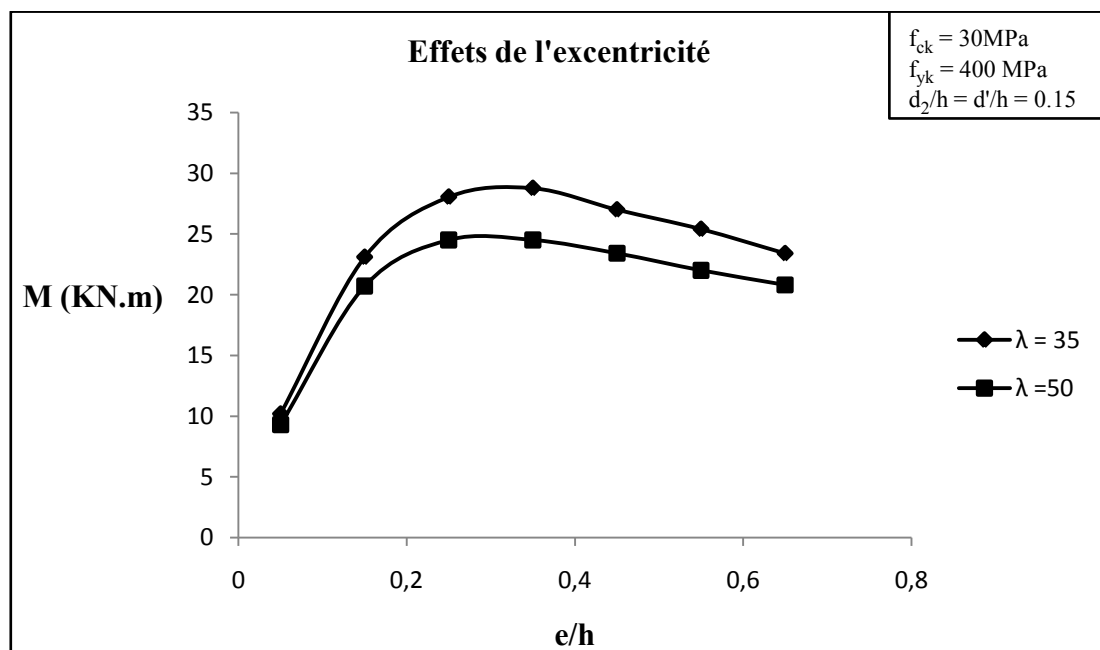
Il n'y a aucun effet de la variation de la contrainte d'aciers sur la charge de ruine du poteau. Ceci est expliqué par le fait que la charge de rupture est atteinte avant que les aciers atteignent le point d'écoulement. Ce résultat est tout à fait normal, parce que les poteaux élancés se rompent toujours à cause des déformations et non pas de la résistance

des matériaux. La contrainte au niveau des aciers n'aura aucun effet, car cette dernière est faible et les aciers n'atteignent pas la valeur d'écoulement.

**5.2.4. Effets de l'excentricité**



**Fig.5.6.** Effets de la variation de l'excentricité sur la charge de ruine du poteau (pour  $\lambda = 35$  et  $\lambda = 50$ )



**Fig.5.7.** Effets de la variation de l'excentricité sur le moment de ruine du poteau (pour  $\lambda = 35$  et  $\lambda = 50$ )

$e/h$	$\lambda = 35$ MPa		$\lambda = 50$ MPa	
	N (KN)	M (KN.m)	N (KN)	M (KN.m)
0.15	770	23.1	690	20.7
0.25	561	28.05	490	24.5
0.35	411	28.77	350	24.5
0.45	300	27	260	23.4

**Tab.5.14.** Effets de la variation de l'excentricité sur le couple (N, M) de ruine (pour  $\lambda = 35$  et  $\lambda = 50$ , avec  $f_{ck} = 30$  MPa)

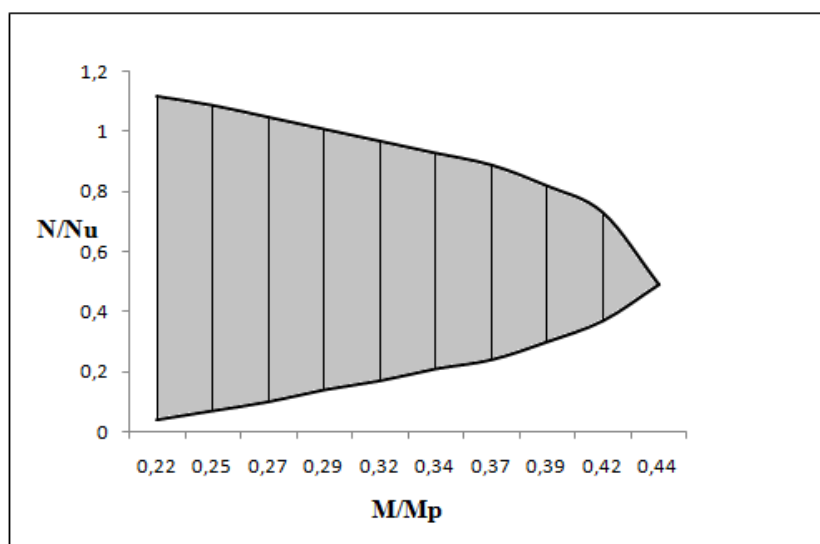
Il est bien connu que l'augmentation de l'élancement des poteaux et de l'excentricité des charges provoquent une diminution de la charge de ruine. Le gain obtenu en terme de valeur de la charge de ruine, pour les courbes tracées avec un élancement  $\lambda = 35$  et  $\lambda = 50$ , respectivement avec  $e/h = 0.25$  est de l'ordre de 12.6%, par contre le gain obtenu entre  $\lambda = 35$  et  $\lambda = 50$  avec  $e/h = 0.45$  est de l'ordre de 13.3%.

Il est constaté que le moment croit d'une façon graduelle à partir de la valeur  $e/h = 0.05$  jusqu'à atteindre une valeur maximale au point d'inflexion de la courbe où la droite  $e/h = 0.35$ . Pour des valeurs de  $e/h$  appartenant à l'intervalle  $[0.35 - 0.65]$ , le moment commence immédiatement à diminuer environ 18.7%.

### 5.3. Analyse de la charge de ruine par en relation du rapport $M/M_p$

#### 5.3.1. Effets de l'élancement

La fig.5.7 présente les résultats obtenus par la variation de la valeur du moment de flexion. En abscisse, le rapport entre le moment de flexion maximal et le moment plastique et en ordonnée la charge de ruine maximale et minimale.



**Fig.5.8.** différents intervalles de N admissibles en relation de M/Mp (pour  $\lambda = 35$  et  $f_{ck} = 30$ MPa)

$M/M_p$	0.22	0.25	0.27	0.29	0.32	0.34	0.37	0.39	0.42
$N_{max}$ (KN)	940	916	884	848	812	780	744	688	612
$N_{min}$ (KN)	32	56	88	120	140	180	204	248	312

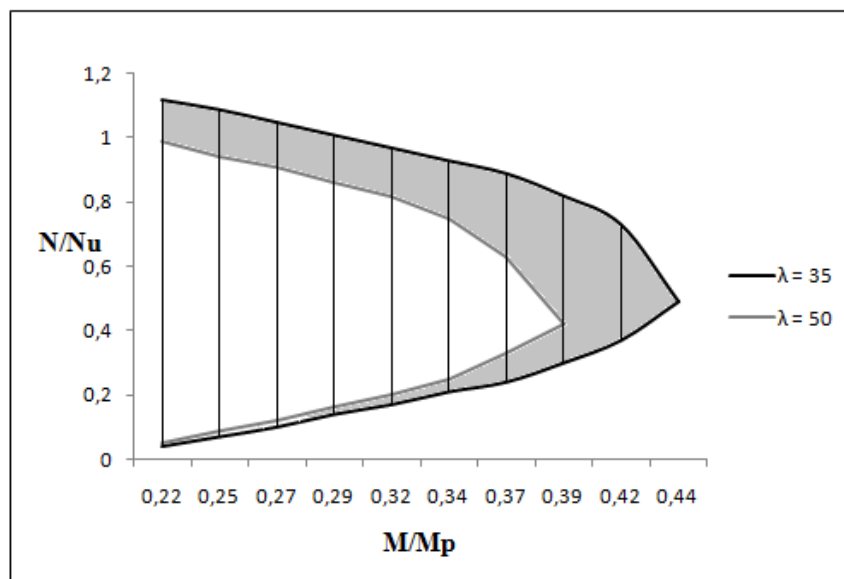
**Tab.5.15.** valeurs de la charge de ruine admissibles  
(pour  $\lambda = 35$  et  $f_{ck} = 30\text{MPa}$ )

-Pour chaque valeur du moment de flexion, il y a un intervalle des valeurs de la charge de ruine. Les valeurs qui se trouvent à l'intérieur de cet intervalle sont considérées sécuritaires, c'est-à-dire au-dessous de  $N = 32$  KN ou bien au-dessus de  $N = 940$  KN, la stabilité du poteau n'est pas vérifiée.

- Dans le cas où le rapport du moment de flexion augmente légèrement de 0.22 à 0.25, l'intervalle des valeurs de la charge de ruine change que pour la première phase, c'est-à-dire cet intervalle devient [56 à 916] KN.

-La charge de ruine maximale diminue tandis que la charge de ruine minimale augmente sur toute la gamme des  $M/M_p$ . La marge sécuritaire diminue de 96.6% à 49% pour des  $M/M_p$  supérieurs à 0.22.

-Les courbes d'interaction N-M calculées délimitent le domaine d'équilibre possible des poteaux.

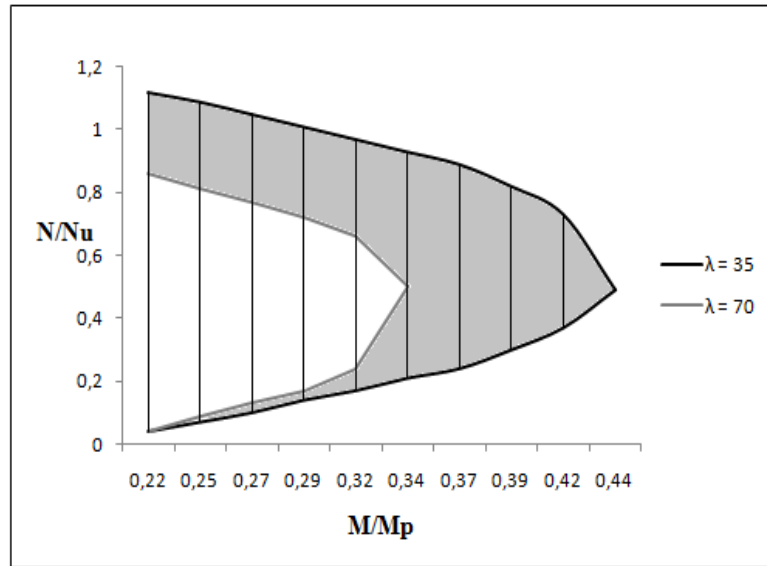


**Fig.5.9.** bloc des charges admissibles pour différents niveaux de  $M/M_p$   
(pour  $\lambda = 35$  et  $\lambda = 50$ , cas de  $f_{ck} = 30\text{MPa}$ )

-Après avoir varié la valeur de l'élanement  $\lambda = 35$  à  $\lambda = 50$ , la charge de ruine est répartie dans l'intervalle [40 - 832] KN à partir de la valeur du  $M/M_p = 0.24$ . La marge sécuritaire diminue de 35%.

- Pour  $M/M_p > 0.39$ , les valeurs de la charge de ruine admissibles sont acceptables pour  $\lambda = 35$ . À l'opposé, ces valeurs ne sont pas vérifiées pour  $\lambda = 50$ .

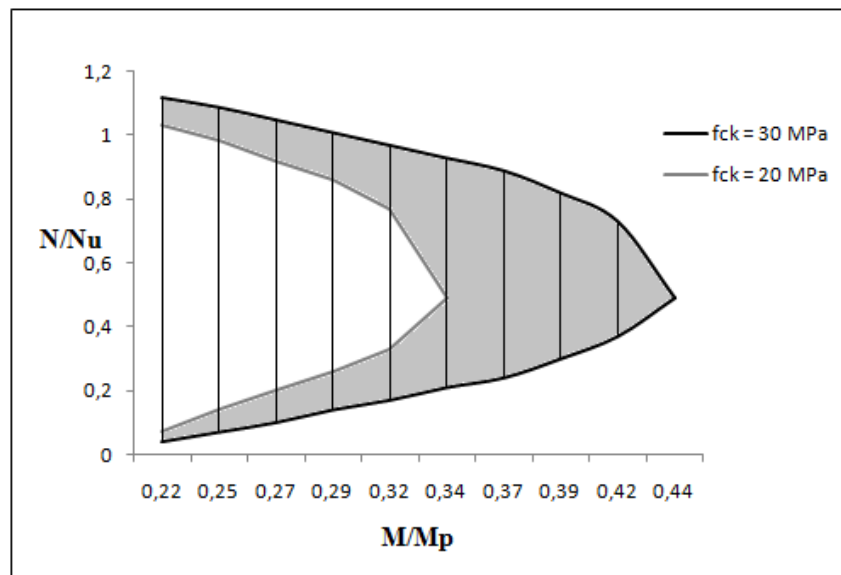




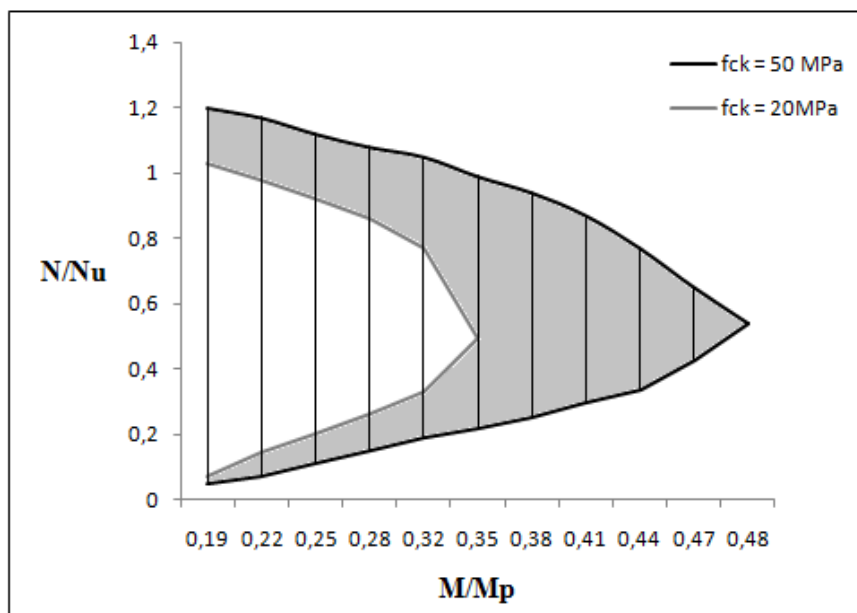
**Fig.5.10.** bloc des charges admissibles pour différents niveaux de  $M/M_p$   
(pour  $\lambda = 35$  et  $\lambda = 70$ , cas de  $f_{ck} = 30\text{MPa}$ )

Une diminution très importante des valeurs de la charge de ruine minimales et maximales en fonction de l'augmentation de la hauteur du poteau. Pour les poteaux fortement élancés, il est constaté que la marge sécuritaire chute d'environ 60%.

### 5.3.2. Effets de la résistance, $f_{ck}$



**Fig.5.11.** bloc des charges admissibles pour différents rapports de  $M/M_p$   
(pour  $f_{ck} = 30\text{ MPa}$  et  $f_{ck} = 20\text{ MPa}$ , avec un  $\lambda = 35$ )



**Fig.5.12.** bloc des charges admissibles pour différents rapports de M/Mp  
(pour  $f_{ck} = 20$  MPa et  $f_{ck} = 50$  MPa, avec un  $\lambda = 35$ )

- Passer d'une résistance à la compression de 20 à 30N/mm<sup>2</sup> induit un accroissement de plus de 28% de la charge de ruine pour un élancement de  $\lambda = 35$  et de plus de 60% pour  $f_{ck} = 50$ .

-L'augmentation est plus importante pour les poteaux en béton de résistance 50N/mm<sup>2</sup> que pour celles ayant une résistance de 20N/mm<sup>2</sup>. L'accroissement de résistance du béton a un effet d'augmentation sur la marge sécuritaire quelle que soit l'auteur du poteau.

## 5.4. Conclusions

Les principales conclusions peuvent être résumées comme suit:

- La charge de ruine augmente lorsque la hauteur du poteau diminue.
- L'augmentation de la hauteur du poteau provoque une diminution significative du moment de flexion maximal (14.8% pour les courbes avec un élancement de  $\lambda = 35$  à  $\lambda = 50$ ).
- L'augmentation de la charge de ruine est progressive et assez significative vis-à-vis de l'accroissement de la résistance caractéristique  $f_{ck}$  (55.6% entre les résistances  $f_{ck} = 20$ N/mm<sup>2</sup> et  $f_{ck} = 50$  N/mm<sup>2</sup> avec  $\lambda = 35$ ).
- En terme de valeur du moment maximal, il est constaté une augmentation très importante en fonction de l'accroissement la résistance caractéristique  $f_{ck}$  (58% entre  $f_{ck} = 20$  N/mm<sup>2</sup> et  $f_{ck} = 50$  N/mm<sup>2</sup> avec  $\lambda = 35$ ).

- L'augmentation de la contrainte limite d'écoulement des armatures ( $f_{yk}$ ) n'a pas un effet significatif sur le comportement du poteau élancé. L'effet de ( $f_{yk}$ ) est négligeable et devient inutile.
- La charge de ruine reste la même bien que la contrainte d'écoulement d'acier ( $f_{yk}$ ) varié. Cela nous a permis de conclure que la ruine des poteaux élancés est causée par la stabilité de forme.
- La ruine des poteaux courts se fait par écrasement ou par défaillance des matériaux contrairement aux poteaux élancés où la ruine est due à la perte de la stabilité.
- L'augmentation de l'excentricité de la charge conduit à une diminution de la charge de ruine du poteau (61% pour les courbes tracées avec  $e/h = 0.25$  et  $e/h = 0.45$  avec  $\lambda = 35$ ).
- Les résultats de l'analyse montrent également une diminution des charges de rupture quand l'élancement et l'excentricité augmentent et la résistance du béton à la compression diminue.
- Afin de vérifier l'état de stabilité d'un poteau, on examine la position du couple (P, M) par rapport au diagramme d'interaction P-M. Toutes les combinaisons de (P, M) qui se situent à l'extérieur de cette courbe sont considérées non acceptables et on doit redimensionner le poteau. À l'opposé, toutes les combinaisons de (P, M) qui se situent à l'intérieur de cette courbe peuvent être supportées par la section.
- La marge sécuritaire (zone permisible) croît avec l'augmentation de la résistance à la compression du béton et la diminution de la hauteur du poteau (60% pour les courbes avec un élancement de  $\lambda = 70$  à  $\lambda = 35$  et de plus de 60% pour  $f_{ck} = 50$ ).

## Conclusions et perspectives

### 6.1. Importance et avantages des diagrammes d'interaction pour les poteaux élancés

Les avantages des diagrammes d'interaction peuvent être énumérés comme suit :

- La détermination de diagrammes d'interaction constitue une meilleure compréhension du comportement d'un poteau. Ainsi l'exploitation de ceux-ci permet de faciliter, vérifier aisément la stabilité d'un poteau élancé et donc de connaître les charges de ruine permettant leur dimensionnement au flambage.
- Le traitement de la flexion composée ou de la flexion déviée pour des éléments verticaux en béton armé graphiquement semble être la clef comparativement au traitement analytique. Les zones permises pour les combinaisons de N, M<sub>x</sub> (représentation dans le plan) N, M<sub>x</sub>, M<sub>y</sub> (représentation dans l'espace) sont clairement et précisément identifiées. Alors que les combinaisons acceptables de N et M analytiquement se font par tâtonnement.
- La réalisation de diagrammes d'interaction pour poteaux élancés pour différentes valeurs de  $\lambda$  et ce pour différentes combinaisons des paramètres influents à savoir  $f_{ck}$  et  $f_{yk}$  a mis en relief cette importance et a permis de mener une étude quantitative et qualitative comparativement aux poteaux courts.
- Limitation des risques d'erreurs au maximum.
- Pour chaque valeur de M reliée à  $M_{max}$  il y a un intervalle de N admissibles avec les deux points de N ruine.
- Pour des petites valeurs de N et M, les combinaisons peuvent ne pas être vérifiées (phénomène très difficile à prédire analytiquement).
- Pour une excentricité donnée, les combinaisons (N et M) sont données pour différentes valeurs de  $\lambda$  et la droite  $e/h$  qui passent par l'origine.

### 6.2. Effets de l'élancement " $\lambda$ "

- L'augmentation de la hauteur (H) du poteau montre une augmentation de l'élancement entraînant un déplacement de la courbe vers l'intérieur (la courbe de  $\lambda = 35$  enveloppe la courbe de  $\lambda = 50$ ).
- L'influence de l'augmentation de l'élancement sur le comportement d'un poteau, est d'un effet considérable que ce soit pour le moment de flexion maximal ou pour la charge de ruine.

- Il existe une diminution des charges de rupture quand l'élancement et l'excentricité augmentent et la résistance du béton à la compression diminue.

### 6.3. Effets de la résistance à la compression du béton " $f_{ck}$ "

La courbe d'interaction réalisée pour la plus grande résistance  $f_{ck}$  enveloppe l'ensemble des courbes de petite résistance. Chaque fois que la résistance augmente, la courbe se déplace vers l'extérieur.

Le gain obtenu en terme de valeur de la charge de ruine, entre l'élancement  $\lambda = 35$  et  $\lambda = 50$  avec l'augmentation de la résistance à la compression  $f_{ck}$  de  $20 \text{ N/mm}^2$  à  $f_{ck} = 50 \text{ N/mm}^2$  est de l'ordre de 0.7%, comparativement au moment de flexion maximal qui est de l'ordre de 3.6%. Donc l'influence de l'augmentation de la hauteur du poteau avec l'augmentation de la résistance en terme de charge de ruine peut être considéré comme négligeable, comparativement au moment de flexion maximal qui a un effet considérable.

Pour différentes valeurs de  $f_{ck}$ , le moment maximal est aligné pour un élancement  $\lambda = 35$ .

La zone permissible augmente quand la résistance du béton augmente et l'élancement diminue.

### 6.4. Effets de la contrainte d'écoulement " $f_{yk}$ "

L'influence de l'augmentation de la contrainte d'écoulement des armatures ( $f_{yk}$ ), sur le comportement d'un poteau élancé est négligeable quelque soit la valeur de l'élancement  $\lambda$ .

### 6.5. Effets de l'excentricité "e"

L'utilisation d'excentricités moins élevées engendre toujours une augmentation de la charge de ruine. Ces augmentations se réduisent de manière graduelle quand l'élancement augmente.

À l'aide de la droite  $e/h$  qui passe par l'origine, la combinaison de (N, M) acceptables peut être déterminée pour un élancement donné.

### 6.6. Perspectives

La présente étude pourrait être développée et complétée dans les directions suivantes en mettant l'accent sur :

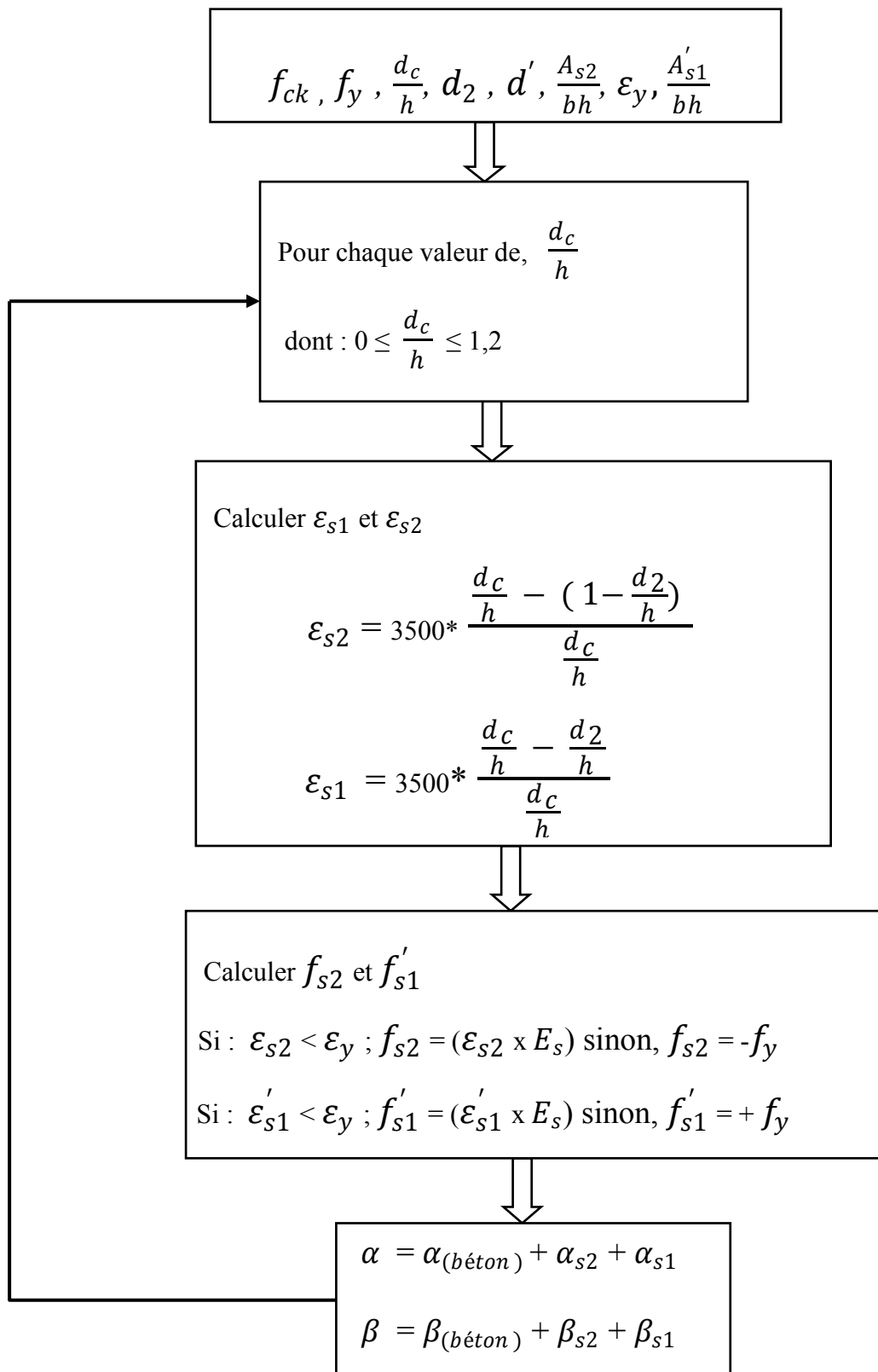
- Le développement des diagrammes d'interaction pour un chargement bi-axial qui prennent en considération l'instabilité au flambement.
- Le développement des diagrammes d'interaction pour la conception et le ferrailage d'un poteau élancé.

# ANNEXE

## *Algorithme de calcul pour la construction de courbes d'interaction*

Il faut citer le programme de calcul pour la construction et la réalisation de diagrammes d'interaction pour les poteaux courts, cela peut se faire de la manière suivante :

### **A.1. Algorithme**



## A.2. Démarche de calcul

Les paramètres utilisés pour calculer les valeurs des tableaux sont :

$$f_{ck} = 30 \text{ MPa}, f_y = 400 \text{ MPa}, d_2 = d' = 0.15, \frac{A_{s2}}{bh} = \frac{A'_{s1}}{bh} = 0.56\%.$$

### A.2.1. Section du béton seul

$d_c/h$	$\alpha_{(\text{béton})}$	$\beta_{(\text{béton})}$
0	0	0
0.1	0.0688	0.03154
0.2	0.1376	0.05735
0.3	0.2064	0.07744
0.4	0.2752	0.0918
0.5	0.344	0.10045
0.6	0.4128	0.10336
0.7	0.4816	0.100558
0.8	0.5504	0.0920
0.9	0.6192	0.07777
1.0	0.688	0.05779
1.1	0.7568	0.032088
1.2	0.8256	0

### A.2.2. Effets d'une section d'armatures $A_{s2}$

$d_c/h$	$\varepsilon_{s2}$	$f_{s2}$	$\alpha_{(\text{béton})} + \alpha_{s2}$	$\beta_{(\text{béton})} + \beta_{s2}$
0.1	- 26250	- 400	-0,00587	0,05767
0.2	- 11375	- 400	0,06293	0,08348
0.3	- 6416.67	- 400	0,13173	0,10357
0.4	- 3937.5	- 400	0,20053	0,11793
0.5	- 2450	- 400	0,26933	0,12658
0.6	- 1458.33	- 291.67	0,35836	0,12236
0.7	- 750	- 150	0,4536	0,110358
0.8	- 218.75	- 43.75	0,5422	0,0948
0.9	194.44	38.89	0,6264	0,07527
1.0	525	105	0,7076	0,05093
1.1	795.45	159.09	0,7865	0,01984
1.2	1020.83	204.17	0,86371	-0,013339



### A.2.3. Effets d'une section d'armatures $A'_{s1}$

$d_c/h$	$\varepsilon'_{s1}$	$f'_{s1}$	$\alpha_{(b\acute{e}ton)} + \alpha_{s2}$ + $\alpha_{s1}$	$\beta_{(b\acute{e}ton)} + \beta_{s2}$ + $\beta_{s1}$
0.1	- 1750	- 350	-0,0712	0,0348
0.2	875	175	0,0956	0,0949145
0.3	1750	350	0,19706	0,126437
0.4	2187.5	400	0,2752	0,14406
0.5	2450	400	0,344	0,15271
0.6	2625	400	0,43303	0,14849
0.7	2750	400	0,52827	0,136488
0.8	2843.75	400	0,61687	0,12093
0.9	2916.67	400	0,70107	0,1014
1.0	2975	400	0,78227	0,07706
1.1	3022.73	400	0,86117	0,04597
1.2	3062.5	400	0,93838	0,01279

## Références bibliographiques

- [1] Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318M-11) and Commentary Reported by ACI Committee 318, American Concrete Institute (2011).
- [2] **(ENV 1992-1-1)** Calcul des structures en béton – Partie 1-1 : Règles générales et règles pour les bâtiments, P18-711 B 15-002, Décembre 1992, Normalisation, Française.
- [3] **Moussa BOUCHABOUB**. Comportement de poteaux élancés en béton armé soumis à un chargement excentré. Thèse de doctorat 2013. Université de Constantine 1. Algérie.
- [4] **Bill Mosley, HULSE Ray and BUNGEY John**. "Reinforced concrete design to Eurocode 2". Sixth Edition.
- [5] **Patrick Paultre**. Structures en béton armé : analyse et dimensionnement. Presses internationales polytechniques, 2011.
- [6] **SAMAI M. L.** Note des cours de béton armé. Université de Constantine 1.
- [7] **KONG & EVANS**. Reinforced and prestressed concrete. Incorporating BS 8110 and microcomputer applications, third edition.
- [8] **Fédération international du béton** Structural Concrete. Textbook on behaviour design and performance. Updated knowledge of the CEB-FIP Model Code 1990, vol. 1. Lausanne; 1999. p. 29–30.
- [9] **S. E. EL-METWALLY,\* A. M. EL-SHAHHAT\* and W. F. CHEN\***. 3-D nonlinear analysis of R/C slender columns. \*Structural Engineering Department, El-Mansoura University, El-Mansoura, Egypt. \*Department of Structural Engineering, School of Civil Engineering, Purdue University, West Lafayette, IN 47907, U.S.A.
- [10] **Chen WF, Shoraka MT**. Tangent stiffness method for biaxial bending of reinforced concrete columns, vol. 35-I. IABSE Publications; 1975.
- [11] **COMITE Euro-international du Béton**. CEB-FIP manual of buckling and instability. Lancaster: The Construction Press; 1978.
- [12] **Germain O, Espion B**. contribution a l'analyse du comportement et au dimensionnement des colonnes élancées en béton armé. Thèse de doctorat 2005. Université libre de Bruxelles. Belgique.
- [13] **Drysdale RG, Huggins MW**. Sustained biaxial load on slender concrete columns. J Struct Div, Proc ASCE 1971;97(5):1423–43
- [14] **JAMES G. MAC GREGOR, JOHN E. BREEN and EDWARD O.PFRANG**. Design of slender concrete columns\*.

- [15] **TIMOSHENKO S.P.** Théorie de la stabilité élastique, Traduit par J. MOREL ingénieur E.C.P. Deuxième Edition Dunod, 1966.
- [16] **JACK C. McCORMAC. RUSSELL H. BROWN.** Design of reinforced concrete. Ninth Edition.
- [17] **Prof. Hamdy Elgohary**, Professor of Reinforced Concrete Structures. Mansoura University, Egypt. New Design Approach for RC Slender Columns.
- [18] **El-Gohary, H. (2005)** “Test on slender concrete columns under eccentric compression“ Eleventh International Colloquium on Structural and Geotechnical Engineering, Faculty of Engineering, Ain Shams University, Cairo, Egypt.
- [19] **Jean-Marie Paillé.** EUROCODE ‘calcul des structures en béton’, guide d’application. Association française de normalisation (AFNOR).
- [20] **Ronan NICOT.** Béton armé, application de l’eurocode 2. TECHNOSUP, les filières technologiques des enseignements supérieurs.
- [21] **Jean Pierre-Mougin.** COURS DE BETON ARME, calcul des éléments simple et des structures de bâtiments, B.A.E.L.91.
- [22] **Omar Chaallal.** Structures en béton armé : calcul selon la norme ACNOR A23.3-04. presses de l’université du Québec. Ecole de technologie supérieure.
- [23] **Bouguerra Ahlem-Meskine Amira.** Eléments verticaux en B.O.A et en B.S.A soumis à la flexion composée: construction de courbes d’interaction. Mémoire de Master 2 2013. Université de Constantine 1. Algérie.
- [24] **Henni Chebra Zoubir.** Etude de la stabilité des poteaux en béton armé des constructions auto stables dimensionnées selon le règlement parasismique Algérien (RPA-99-version 2003). Mémoire de magister 2012. Université Hassiba Ben Bouali de Chlef. Algérie.