

République Algérienne Démocratique ET Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE

N° d'ordre :.....

Faculté des sciences de l'ingénieur

Département de Génie civil

Pour l'obtention du diplôme de Magister en Génie civil

Option : Mécanique des structures

Préparée par : Merabet Wided

Ingénieur en génie civil

Intitulé du mémoire :

***MODELISATION DU COMPORTEMENT DES POUTRES
APRES FISSURATION
« TENSION STIFFENING EFFECT »***

Devant le jury de soutenance :

Professeur MIMOUNE.M Université de Constantine Président du jury

Docteur KHALFALLAH.S Université de Jijel Rapporteur

Professeur HOUARI.H Université de Constantine Examineur

Docteur TEKKOUK.A Université de Constantine Examineur

Remerciement

Je remercie tout d'abord le bon dieu qui m'a aidé de terminer ce travail « Alahamde li ALLAH »

Je tiens à remercier mon directeur de thèse D^r Khalfallah Salah pour m'avoir proposé un sujet fort intéressant et pour la confiance qu'il m'a accordée. Il m'a dirigé tout au long de cette étude et m'a donné les grands axes de recherche. Je le remercie aussi pour sa disponibilité, sa gentillesse et sa sensibilité.

J'adresse mes remerciements les plus respectueux à monsieur Mimoune professeur à l'université de Constantine qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

Je remercie aussi professeur Houari et Docteur Tekkouk qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'être mes examinateurs. Leurs idées me seront sans nul doute très utiles pour la suite de cette recherche.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements ainsi que ma grande gratitude et reconnaissance envers tous mes enseignants de la graduation et de la post graduation « Institut de Génie civil ».

Et à la fin je veux dire merci pour ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Table de matière

Chapitre 1 : Introduction

1.1 Généralité	01
1.2 intérêt de l'étude du comportement des poutres en béton.....	06
1.3 but de la recherche.....	07
1.4 Structure de manuscrit.....	08
1.5 Conclusion	09

Chapitre 2 : Etude bibliographique

2.1 Introduction.....	10
2.2 Description d'une section fissurée.....	12
2.3 Les causes de la fissuration.....	15
2.4 Les modèles de fissuration.....	17
2.4.1 Introduction.....	17
2.4.2 Critères d'amorçage et de propagation de fissure.....	18
2.4.3 Modèles de la fissure discrète.....	20
2.4.4 Modèle de la fissure répartie.....	21
2.4.4.1 Principes générales.....	21
2.4.4.2 Concept du modèle de la fissure répartie.....	23
2.4.5 Autres modèles	27
2.4.5.1 Modèles basés sur la théorie de l'endommagement.....	27
2.4.5.2 Le modèle micro-plan.....	29
2.4.5.3 Les modèles avec discontinuité ancrée dans les éléments.....	29
2.4.5.4 Les modèles basés sur une méthode sans maillage.....	30
2.4.5.5 Les modèles endochroniques.....	31
2.5 modélisation de la tension stiffening	32
2.6 conclusion.....	35

Chapitre 3 : Comportement mécanique des matériaux et formulation théorique

3.1 Introduction.....	36
3.2 Comportement mécanique du béton.....	38
3.2.1 Introduction.....	38
3.2.2 Comportement du béton en compression uniaxiale.....	40
3.2.3 Comportement du béton en traction uniaxiale.....	41
3.2.4 Comportement du béton sous contraintes biaxiales.....	42

3.3	Comportement mécanique de l'acier.....	43
3.3.1	Comportement uniaxiale.....	43
3.3.2	Chargement cyclique de traction-compression.....	43
3.4	Propriétés de l'interaction béton-acier.....	44
3.4.1	La tension stiffening.....	45
3.4.2	Adhérence béton acier.....	46
3.5	Modélisation de la fissuration de l'acier.....	47
3.5.1	Les modèles de fissuration.....	48
3.5.1.1	La modélisation discrète des armatures.....	48
3.5.1.2	La modélisation intégrée des armatures.....	49
3.5.1.3	La modélisation répartie des armatures.....	50
3.5.2	La formulation théorique du béton fissuré.....	51
3.5.2.1	Comportement du béton fissuré : option cu-off.....	53
3.5.2.2	Comportement du béton fissuré : option tension stiffening.....	55
3.5.2.3	Effet de tension stiffening.....	56
3.6	Modélisation de comportement de l'acier de renforcement.....	61
3.7	Conclusion.....	63

Chapitre 4 : La méthode des éléments finis

4.1	Introduction.....	65
4.2	Les facteurs inclus dans le comportement du béton armé.....	66
4.3	La méthode des éléments finis.....	67
4.3.1	Présentation générale de la méthode.....	67
4.3.1.1	Le maillage.....	67
4.3.1.2	Les méthodes.....	67
4.3.2	Généralités sur les principes utilisés dans la modélisation par éléments finis	69
4.3.3	Notions utilisées dans la méthode des éléments finis.....	70
4.3.4	Présentation matricielle de la méthode des éléments finis (Dhatt et Gilbert 1984).....	71
4.3.5	Choix de l'élément de base de notre étude.....	72
4.3.5.1	Eléments linéaires.....	72
4.3.5.2	Eléments sur compatibles.....	73
4.3.5.3	Eléments à nœuds intermédiaires.....	74
4.3.5.4	Les éléments isoparamétriques et intégration numérique.....	75

4.3.5.4.1	Elément isoparamétriques.....	75
4.3.5.4.2	Fonctions de forme.....	77
4.3.5.4.3	Evaluation des contraintes et déformations.....	80
4.3.5.4.4	Intégration numérique.....	84
4.3.6	Représentations de l'élément barre.....	87
4.4	Conclusion.....	88
Chapitre 5 : Validation numérique		
5.1	Introduction.....	89
5.2	Validation du programme.....	90
5.2.1	Structures membranaires.....	91
5.2.2	Structures fléchies.....	93
5.2.3	Structures fléchies en béton armé.....	95
5.3	Modélisation de la tension stiffening.....	98
5.4	L'étude paramétrique.....	107
5.5	Conclusion	113
Conclusions et recommandations.....		115
Références bibliographiques.....		118

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Généralités

L'emploi du béton comme matériau de construction est une des plus avancées technologiques du XX^{ème} siècle. A l'état actuel, le béton de structure fait l'objet d'un nombre important de travaux scientifique au niveau universel. Pour des raisons favorables de son utilisation, il est connu comme un matériau capable de s'adapter aux différentes formes. A l'échelle microscopique, ce matériau composite est constitué : d'une matrice cimentaire (pâte), des granulats de différentes tailles et des pores. Chaque constituant du matériau composite présente un comportement individuel et en plus il montre une évolution aussi particulière. Pour cela, l'étude du matériau composite "béton armé" nécessite une intention particulière. Dans le cas d'un chargement monotone, la rhéologie des bétons change au cours de l'application de la charge externe. Dans cette phase de comportement, le béton subit des fissurations au sein de son corps. Dans ce stade, il nous semble que la présentation d'une approche qui simule le comportement du matériau composite "béton armé fissuré" est une nécessité primordiale.

Le béton armé est devenu parmi les matériaux de constructions les plus utilisées dans le domaine de génie civil. Il est largement employé dans plusieurs types de structures d'importance particulières telles que : les grands ponts, les coupes, les réacteurs nucléaires et les plates formes pétrolières. L'économie, l'efficacité, la résistance et la rigidité de ce dernier lui font un matériau attrayant pour une grande gamme d'applications structurales. Pour son large usage en tant qu'un matériau structural, le béton doit satisfaire les conditions suivantes :

(1) *la structure doit être résistante* : L'application appropriée des principes fondamentaux de l'analyse, des lois d'équilibre et de la considération des propriétés mécanique des matériaux composants devrait avoir comme conséquence une marge suffisante de la sécurité contre l'effondrement sous des surcharges accidentelles.

(2) *la structure doit être rigide* : Le soin doit être pris pour contrôler les déflexions sous des charges limites et limiter la largeur des fissures à un niveau acceptable.

(3) *la structure doit être économique* : Des matériaux doivent être employés efficacement, puisque la différence de prix entre le béton et l'acier est relativement grand. L'objectif final de telle conception est la création d'une structure résistante et économique.

La connaissance et l'innovation des bétons sont parvenues au premier lieu du domaine de la construction. Ces aspects mécaniques ont été développés dans plusieurs centres de recherches et récemment qu'ils s'étalent même au domaine de la biomécanique. Parmi un des axes de recherche tenus sur la modélisation du comportement des structures en béton armé qui utilise la mécanique de la rupture est récemment employée. Dans notre thème, le comportement des éléments fléchis joue un rôle principal dans la majorité des structures de génie civil. La flexion dans les éléments de structure est largement envisagée tels que : les poutres, les poutrelles, les dalles, etc...L'évaluation de la contribution du comportement du béton armé fissuré présente un intérêt particulier dans ce domaine de recherche et la prédiction de la charge ultime est particulièrement un but prévu par plusieurs centres de recherche.

Depuis longtemps, les ingénieurs de génie civil ont tenté de développer des modèles simples de conception pour connaître le comportement des structures en béton armé. A un certain temps, la complexité structurale des éléments d'une part et la diversité des phénomènes d'autre part pouvant intervenir dans la formulation ont freiné les développements scientifiques. L'analyse structurale a subi un progrès immense surtout avec l'innovation connue dans le domaine du développement des machines de calcul de haute puissance, actuellement disponibles au niveau des bureaux d'études. Cette technologie de pointe a permis de procéder à l'analyse des structures très complexes et sous chargements variés. Plusieurs méthodes de conception ont été développées le long des dernières décennies.

En général, ces méthodes ont été basées sur la réponse globale des poutres en béton armé représentée par moment-courbure. Suite à la disponibilité de machines de calcul, la modélisation et la simulation numérique ont trouvé une large utilisation dans l'analyse du comportement des poutres en béton armé. Cette simulation numérique a permis non seulement de représenter le comportement global mais aussi le comportement local. Cette étude a conduit de connaître les différents phénomènes pouvant intervenir au cours de la réponse des poutres en béton armé.

Les outils analytiques avancés peuvent être une aide indispensable dans l'évaluation de la sécurité et de l'utilité d'une conception proposée. C'est, particulièrement, vrai pour beaucoup de structures modernes complexes telles que les centrales nucléaires, les ponts, les plateformes en mer pour l'exploration de pétrole et de gaz et les tunnels souterrains ou sous-marins, qui sont soumises à des charges très complexes. L'évaluation de la sécurité et de l'utilité de ces structures rend nécessaire le développement des méthodes précises et fiables et des modèles pour leur analyse.

En outre, l'élévation en coût des structures encourage les ingénieurs à chercher des conceptions alternatives plus économiques recourant souvent aux méthodes innovatrices de construction sans abaisser la sécurité de la structure. L'augmentation de la balance des structures modernes est l'ampleur et l'impact du désastre en termes de perte humaine et économique en cas de défaillance de structure. Comme un résultat détaillé l'analyse structurale de la sécurité devient de plus en plus nécessaire.

Au début de ce siècle, Mörsch et Ritter ont développés des formules de conception qui évaluent la charge limite de cisaillement des poutres en béton armé avec la méthode des bielles de compression inclinées de 45^0 . Le problème des poutres fléchies en béton armé est courant et qu'il existe depuis longtemps, fait l'objet de plusieurs travaux expérimentaux et numériques dans plusieurs centres de recherches en Europe et en Amérique. Toute fois, la complexité du problème et les paramètres intervenant dans le comportement des poutres en béton armé rendent la solution analytique difficilement à atteindre. Pour cette raison, il nous semble que la simulation numérique est devenue un procédé utile de l'analyse du comportement des poutres en béton armé.

En général, le dimensionnement rationnel des éléments de structure fléchis présente une ambiguïté qui ne peut être résolue de façon complète et définitive. De plus, il est à noter qu'il n'est pas faisable de dépendre la capacité portante des poutres en béton armé à un seul paramètre. En ce souci, les études expérimentales, dans le domaine du comportement des poutres en béton armé depuis environ 5 décennies, affirment que la charge limite dépend de nombreux paramètres qui ont été énumérés ci-dessous et étudiés dans les chapitres suivants.

Dans le but d'obtenir une sécurité unifiée, un grand nombre de chercheurs ont proposé des solutions approchées fondées sur les résultats expérimentaux. Dans leurs travaux, la rupture par l'effort tranchant est appropriée en évaluant les contraintes dans le béton et dans les armatures, en prenant en considération l'effet de fissuration et la disposition constructives des armatures. Ces deux facteurs jouent un rôle particulier dans le comportement des poutres en béton armé et leurs modes de rupture. Le premier facteur est considéré comme un indicateur du phénomène de fissuration du béton tandis que le second peut apporter l'information du changement rhéologique relative au comportement des barres d'acier.

Beaucoup de tentatives pour résoudre ce problème au moyen de formules empirique ou semi-empiriques n'ont pas conduit à aucune solution satisfaisante. Ces tentatives font toujours appel à des poutres simples en géométrie et en chargement. La difficulté principale réside en incorporation des facteurs primordiaux ayant une influence dominante sur le comportement au cisaillement des poutres en béton armé. Jusqu'à maintenant, l'étude de ces paramètres a lieu dans plusieurs centres de recherche. La recherche bibliographique ouverte permet de sélectionner les facteurs suivants :

- 1- Influence de la discrétisation géométrique.
- 2- Effet de l'énergie de fissuration ou de relaxation.
- 3- La conception du comportement des structures avec le modèle cut-off.
- 4- Analyse de la tenue en considération du modèle tension-stiffening dans le comportement structural des poutres en béton armé.

A la fin de cette section, nous rappelons que cette étude est portée sur la modélisation numérique du comportement des poutres en béton armé auquel l'option tension-stiffening est prise en compte. Cette procédure permet d'évaluer le comportement local et celui global des poutres en béton armé et de montrer particulièrement l'apport de la contribution de l'option tension-stiffening dans le comportement structural. La validation de cette approche est le seul paramètre d'évaluation de la performance et de la pertinence de cette procédure à travers la confrontation des résultats obtenus par cette simulation numérique et les données expérimentales disponibles dans la littérature.

Le développement des modèles numériques fiables peut, cependant, réduire le nombre de spécimens exigés d'essai pour la solution d'un problème donné, identifiant que les essais sont longs et coûteux et souvent ne simule pas exactement le chargement et ne supporte pas les états de la structure réelle. Le développement des modèles analytiques de la réponse des structures en béton armé est une tâche très complexe et plusieurs facteurs entraînant cette complexité:

- Le béton armé est un matériau composite et qu'il est composé de deux matériaux avec des lois de comportement différents. Cette différence ne concerne pas l'originalité des matériaux mais elle spécifie le même matériau lui-même, le béton présente des caractéristiques mécaniques qui se diffèrent en traction qu'en compression.
- Le béton montre un comportement non linéaire sous n'importe quel type de chargement à partir des niveaux bas de chargement. Cette non linéarité est appelée la non linéarité matérielle et elle est due à plusieurs effets, tels que: l'effet de l'environnement, l'effet de fissuration, l'effet dû au comportement multidimensionnel, etc....
- Le renforcement de l'acier et le béton d'une manière complexe à travers le glissement d'adhérence et le couplage des agrégats.
- L'effet de liaison entre les aciers de renforcement et les bétons qui l'entourent.

Ces phénomènes complexes ont mené des ingénieurs dans le passé de prendre en considération dans la conception des structures et des constructions des formules empiriques ou semi-empiriques qui ont été dérivées de

nombreuses expériences. Avec l'innovation connue dans le domaine de développement des machines de calcul et parallèlement les recherches présentées de l'analyse numérique, telle que : la méthode d'élément fini, un effort considérable a été consacré pour développer les solutions analytiques qui obvièrent au besoin d'expériences et qui ont été entreprises par des investigateurs.

La méthode des éléments finis est ainsi devenue un outil de calcul et qui est la base fondamentale de plusieurs logiciels de calcul d'ordre international. Cet outil à base informatique puissant permet à des analyses complexes de la réponse non linéaire des structures en béton armé. En outre, cette méthode a conduit à l'étude et à l'analyse de l'interaction de différents effets non linéaires sur la réponse des structures en béton armé peuvent être étudiées analytiquement.

1.2 Intérêt de l'étude du comportement des poutres en béton armé

En général, les structures en béton armé sont modélisées et calculées comme si elles étaient homogènes ; constituées d'un seul corps homogène dont la réponse globale peut être considérée comme acceptable par rapport à la réponse réelle. En principe, la réponse structurale d'une structure composite, telle que les poutres en béton armé, dépend des caractéristiques mécaniques et des lois constitutives des matériaux ; béton, acier et celui du milieu interface. Mais pour des raisons simplificatrices au niveau numérique, l'adhérence entre le béton et l'acier peut être représenté par le phénomène de tension-stiffening.

La prise en considération des paramètres cités ci-dessus peut présenter un changement considérable du comportement des poutres en béton armé. En effet, ils peuvent engendrer des dégradations mécaniques non négligeables lorsque certains seuils de résistance spécifiques sont dépassés. Le changement rhéologique qu'on peut visualiser au cours d'un chargement monotone appliqué revient principalement à deux phénomènes principaux, à savoir la fissuration des bétons et ou la plastification des barres d'acier. Par ailleurs, bien que chaque dégradation ne signifie pas la ruine totale et immédiate de telle structure mais elle implique localement une dégression très importante de la résistance et par conséquent une redistribution des forces et des contraintes

internes qui s'effectue localement donnant une réponse non linéaire des structures.

Donc, le comportement des poutres en béton armé dépend de la compréhension approfondie de la naissance et de la propagation des fissures dans les éléments membranes. Il est à noter que la plastification des aciers rend de leur part une redistribution des forces résiduelles et par conséquent un changement rhéologique du matériau composite. D'après nos connaissances bibliographiques, le premier phénomène semble à une importance particulière et par cela il a été pris en forte considération dans cette étude.

Actuellement, la modélisation numérique du comportement des poutres en béton armé constitue un domaine de recherche intensif. La communauté universelle a donné une intention particulière à travers l'encouragement des travaux originaux et elle organise de façon permanente des conférences internationales pour un suivi permanent des résultats obtenus. La littérature a connu un nombre important de travaux présentés dans ce domaine mais cette tâche reste toujours difficile et quelques fois inabordable. Malgré les avancées en connaissances du comportement des poutres grâce aux travaux expérimentaux effectués depuis 30 ans, la mise en forme simultanément des méthodes numériques ou des modèles analytiques généralisés sont implicitement utilisés pour bien représenter le comportement des structures en béton armé.

1.3 But de la recherche

Cette étude est consacrée principalement à la modélisation du comportement des poutres en béton armé dans laquelle le phénomène de tension-stiffening est tenu en considération. Au cours de l'établissement de cette recherche, plusieurs paramètres ont été constatés portant une influence directe sur le comportement des poutres en béton armé. Certes, le comportement global semble insuffisant et que le comportement local établi par une analyse par éléments finis est considéré comme une complétude nécessaire pour montrer d'autres tâches liées au comportement des poutres en béton armé.

En ajoutant, que cette recherche a permis de maîtriser rigoureusement le phénomène de fissuration des bétons qui se naît à partir des premiers niveaux de chargement. En plus, ce facteur change la loi constitutive du matériau béton et donne une évolution complètement différente à la loi appropriée. L'établissement de cette étude admet à approfondir les différents modèles de comportement du béton armé fissuré. Dans ce travail, le modèle de la redistribution totale des forces de fissuration de type "tension-stiffening" est considéré.

Les paramètres cités ci-dessus sont largement étudiés et commentés. L'étude paramétrique est nécessaire pour bien quantifier son apport de contribution dans le comportement structural. Chaque paramètre a été étudié séparément et son influence vis à vis le comportement des poutres en béton armé est détaillé dans le chapitre de validation numérique. En plus à travers cette étude, plusieurs conclusions ont été délivrées par l'établissement de cette étude paramétrique.

1.4 Structure de manuscrit

Le présent mémoire de thèse comprend quatre chapitres.

- Une introduction générale dont la quelle le but, les objectifs, l'intérêt de l'étude du comportement des poutres en béton armé et la structure du travail sont présentés.
- Dans le deuxième chapitre une revue bibliographique sur les travaux antérieurs qui traitent le comportement des poutres en béton armé, et les travaux indifféremment tenus dans le domaine de la modélisation numérique sont présentés.
- Le troisième chapitre est consacré pour présenter l'approche tenue à l'établissement du thème de recherche choisi. Il illustre les modélisations de différentes composantes, telles que : les bétons, les barres d'acier et le milieu interface. La fissuration joue un rôle très important dans le comportement des éléments fléchis. Néanmoins, la présentation des modèles du comportement des éléments fissurés est nécessaire pour compléter notre étude. Dans cette étude, le

comportement des structures en béton armé fissuré est tenu en considération.

- En simulation numérique, le recours à une méthode numérique est indispensable. Le quatrième chapitre est confié à la présentation de la méthode des éléments finis choisie comme un outil de calcul.
- Pour présenter la performance de l'approche présentée, le cinquième chapitre illustre les résultats obtenus. La comparaison et la confrontation entre les résultats obtenus par cette simulation et les données expérimentales montre l'aptitude des résultats numériques.
- Enfin, les conclusions de cette étude ont été présentées et plusieurs recommandations liées au comportement des poutres en béton armé dont l'effet de tension-stiffening sont proposées.

1.5 Conclusion

Dans cette introduction, nous avons bien défini le sujet du travail à élaborer. Les aspects généraux de ce travail portent autour de la modélisation du comportement des poutres en béton armé, sont présentés. Les différents phénomènes ayant une influence sur le comportement des poutres sont sélectionnés et énumérés portant un effet direct sur le comportement structural. Pour analyser et quantifier l'effet de chaque paramètre, ces phénomènes ont été incorporés dans un programme déjà développé pour une analyse du comportement des structures en béton armé. Parmi ces facteurs, on peut sélectionner que la contribution et la prise en compte du béton entre les fissures dans l'établissement de l'approche proposée, englobent la grande partie de ce travail. Les résultats numériques obtenus par cette simulation qui reflètent leurs réponses sur le comportement sont présentés dans le chapitre 5.

Ce choix de thème n'est pas du tout intuitif mais il est justifié par la large utilisation des poutres en béton armé fissuré dans le domaine de génie civil. Enfin, les conclusions de ce travail sont présentées permettant de ressortir plusieurs recommandations et conseils relatifs au comportement local et global des poutres en béton armé et montre l'apport structural de l'option tension-stiffening dans la réponse des poutres en béton armé.

Chapitre 2

Etude bibliographique

2.1 Introduction

Ce chapitre passe en revue de la littérature la plus appropriée sur les effets influant sur le comportement des poutres en béton armé. De la littérature ouverte à ce moment, deux principaux effets ont une importance particulière sur la réponse des poutres en béton armé et qui sont l'effet de la fissuration des bétons et l'incorporation du comportement des bétons après la fissuration, appelé tension stiffening. La fissuration dans les structures en béton armé est principalement due au dépassement de la résistance tendue dans les bétons à sa résistance caractéristique en traction qui est déduite à partir des essais au niveau des laboratoires. A la basse résistance de traction du béton. Cet effet de fissuration peut non seulement détruire l'esthétique de la structure, mais il expose également l'acier de renforcement à l'environnement menant à sa corrosion. Cette dernière est une pathologie à une très sensibilité aux armatures de renforcement.

Sachant que la fissuration est la source primordiale de non linéarité matérielle dans l'utilité des structures en béton armé, les modèles de fissuration réalistes doivent être développés afin de prévoir avec une exactitude satisfaisante le comportement global de type charge-déplacement des structures en béton ou en béton armé. Le choix d'un modèle de fissuration dépend du but de l'analyse par éléments finis et la qualité des résultats. Si le comportement global de charge- déplacement est d'intérêt primaire, sans beaucoup de souci pour des modèles de fissure et d'évaluation des efforts locaux, le modèle "de fissure répartie" est probablement le meilleur approprié. Au contraire, si le comportement local est à une nécessité particulière et l'intérêt requiert des détails au niveau d'une région, le choix du modèle "de fissure discrète" pourrait être recommandé.

Néanmoins, dans la conception des structures composites telles qu'en béton armé, des éléments spéciaux sont nécessaires dans cette conception. Ce type d'éléments d'interface au niveau de la couche mince entre les bétons et les barres d'acier sont nécessaires à les introduire. Maintenant, plusieurs façons

d'introduction des éléments d'interface sont présentées. Parmi les éléments se reliant et doubles nœuds sont considérés dans la discrétisation en éléments finis des structures en béton armé. C'est dans ce sujet, que les résultats des modèles de fissures réparties sont bien établis dans le cas d'une adhérence parfaite entre l'acier et le béton, en raison de la continuité inhérente du champ de déplacement. Dans ce cas l'effort de l'acier aux fissures sera sous-estimé.

D'autre part, l'inclusion de l'effet de la tension stiffening dans le modèle de fissure répartie consiste à rendre plus raide les structures en béton armé. Cette manière permettant à incorporer cette rigidité supplémentaire qui est principalement due à l'incorporation du comportement des bétons entre les fissures, consiste d'augmenter la rigidité moyenne de l'élément fini contenant une ou plusieurs fissures. C'est dans ce sujet, il est supposé que l'élément fini ayant des dimensions relativement grandes par rapport à la taille de la section fissurée, cette supposition a conduit les chercheurs du domaine à catégoriser les méthodes en deux grandes familles :

Dans la première catégorie, il est supposé que la partie de tension remarquée de la courbe contrainte-déformation du béton est assignée par une branche descendante, ça veut dire que les bétons atteindront une résistance en traction plus grande que celle qui a déjà provoqué ultérieurement une fissuration. Dans ce cas, l'effet de tension stiffening est représenté en tant qu'une réduction dégressif de l'effort de traction ou comme un modèle graduellement déchargé [Lin et Scordelis 1975; Gilbert et Warner 1977; Barzegar et Schnobrich 1986]. Cette décharge graduelle permet de refléter l'effet de tension stiffening dans le comportement structural des éléments en béton armé.

Dans la famille, la modélisation de tension stiffening est considérée en ajoutant une certaine rigidité, généralement une valeur moyenne, aux barres de renforcement [Gilbert et Warner 1977, Cervenka et al.1990]. L'effort additionnel dans l'acier de renforcement représente la force de tension portée par le béton entre les fissures. Dans ce texte, on peut dire que le phénomène de tension stiffening est représenté par un autre effet celui d'adhérence entre les barres d'acier et le béton qui l'entoure. A raison de difficulté au plan

numérique, il a été supposé que l'orientation de ces efforts de transmission entre le béton et l'acier coïncide avec l'orientation de disposition des aciers de renforcement.

Dans la section qui suit, nous avons également présenté quelques parties qui nous semblent nécessaire pour décrire indifféremment le phénomène de fissuration et la tenue en considération de la tension stiffening dans les structures en béton armé. D'après la recherche bibliographique, une description d'une section fissurée, les causes de fissure, les différents modèles de fissure et les modèles de la tension stiffening, sont des paramètres principaux de cette description générale.

2.2 Description d'une section fissurée

La réponse non linéaire du béton est souvent gérée par le phénomène de fissuration. Un matériau ayant une grande sensibilité au phénomène de fissuration qui s'initie, dans le cas général, aux premiers niveaux de chargement et ayant un caractère progressif en fonction du chargement appliqué. Ce dernier est en général appliqué de façon incrémentale, les fissures qui se développent peuvent causer une rupture locale au sein de l'élément fini à forte tension. La figure (2.1.a) décrit une partie des éléments en béton armé soumis à une flexion dans laquelle nous avons schématisé le phénomène de fissuration et celui de transfert des contraintes entre les bétons et les barres d'acier. Le phénomène de fissure permet de transférer les contraintes, c'est pour cela, on constate une forte localisation de contraintes dans les barres d'acier au niveau de fissures tandis que une diminution considérable de contraintes du béton est constatée.

Au niveau de la section fissurée, les contraintes de traction provoquant la fissuration du béton sont portées par l'acier de renforcement (un phénomène de transfert de contrainte est assuré dans ce cas par l'effet d'adhérence). Les efforts de traction sont, cependant, présents dans le béton entre les fissures, puisqu'une certaine tension est transférée de l'acier au béton par adhérence. L'importance et la distribution des efforts d'adhérence entre les fissures déterminent la distribution des efforts de traction dans le béton et l'acier de renforcement entre les fissures.

Le phénomène de fissuration du béton est assez complexe. En fonction de l'augmentation des contraintes appliquées, d'autres fissures additionnelles peuvent se former entre les fissures initiales, si l'effort de traction excède une autre fois la résistance limite à la traction du béton. Ce processus de fissuration se continue de façon régulière entre deux fissures adjacentes jusqu'à la ruine de la structure ou de l'élément se produise. L'état de fissuration finale est atteint quand un effort de traction de grandeur suffisante pour former une fissure additionnelle entre deux fissures existantes et qui ne peut pas être transféré par adhérence de l'acier au béton. Les figures (2.1, c-e) montrent la distribution idéalisée des contraintes entre les fissures par l'effet d'adhérence entre le béton et l'acier. Ce phénomène ne touche que les contraintes de traction dans les bétons provoquant la fissuration et dans les barres d'acier par sa croissance peut provoquer un écoulement des aciers respectivement. Lorsque ce transfert a eu lieu et sa présence est forcée par le phénomène de fissuration conduit à un accroissement de contraintes dans les bétons à partir des sections fissurées le long d'une longueur caractéristique, appelée longueur de transfert ou longueur d'adhérence. Cette considération ou supposition prouve que le béton entre deux fissures successives existe et pratiquement peut apporter une certaine rigidité (figure 2.1.f) [Parc et Paulay 1975].

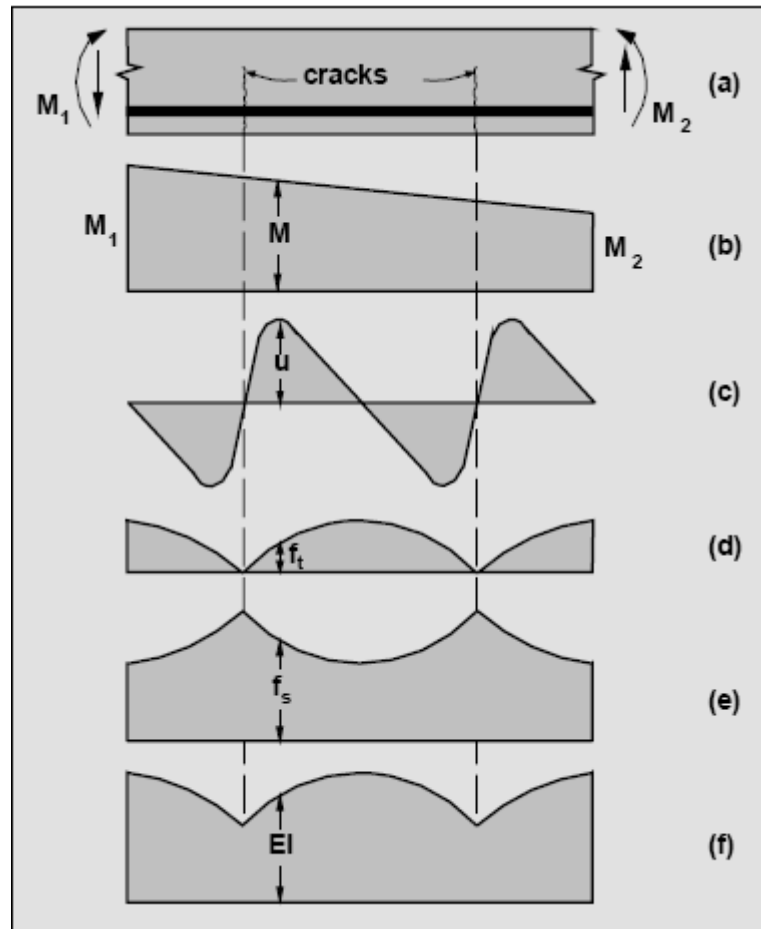


Figure 2.1 : Effet de la fissuration des poutres en béton armé

(a) portion de poutre, (b) distribution du moment fléchissant, (c) distribution de l'effort d'adhérence, (d) distribution de la résistance de traction du béton (e) distribution de l'effort de traction de l'acier, (f) distribution de la rigidité élastique de flexion

Afin d'améliorer l'exactitude des modèles d'éléments finis en tenant compte de la contribution et de la participation des bétons entre les fissures, l'effet appelé tension stiffening est présenté et qui a été largement incorporé dans plusieurs logiciels à base d'éléments finis. D'après la bibliographie disponible, le phénomène de tension stiffening ou celui de la considération de la contribution du béton entre les fissures fait l'objet primordial de plusieurs centres de recherche à travers le monde. Malgré que la négligence de ce phénomène peut apporter une simplification surtout sur le plan numérique mais les résultats numériques sont en divergence vis à vis les données expérimentales. Partant de ce point, la tension stiffening est maintenant

devenue une nécessité indispensable dans la conception des programmes numériques développés. Dans les sections qui suivent, nous revenons pour présenter les différentes manières de la prise en compte de ce phénomène dans la génération des structures en béton armé et le cadre de formulation théorique est présenté dans le chapitre 3 avec un détail plus large.

Comme nous avons signalé ci-dessus qu'il existe une difficulté relative au comportement au voisinage des sections fissurées. Pour cette raison, plusieurs chercheurs ont entrepris plusieurs travaux de recherche le dedans. Le comportement physique à proximité d'une fissure peut être impliqué de la figure (2.1.d) et de la figure (2.1.e). Comme la résistance à la traction du béton est atteinte, les fissures primaires se forment initialement correspondant aux points à contraintes de traction dépassées. Le nombre et la grandeur de fissures dépendent de la taille et le placement de l'acier de renforcement. Aux niveaux des fissures primaires, l'effort dans le béton chute à zéro et l'acier porte dans ce cas la force de tension. Le béton entre les fissures, cependant, porte toujours un certain effort de tension, qui diminue avec l'augmentation de la charge. Cette réduction dans l'effort de traction du béton avec l'augmentation de la charge est associée avec une interruption d'adhérence entre l'acier et le béton. A ce stade le système secondaire des fissures internes, appelé les fissures d'adhérence, se développe autour de l'acier de renforcement, qui commence à glisser relativement au béton environnant.

2.3 Les causes de la fissuration :

Les fissures qui se naissent dans les éléments en béton armé peuvent être classifiées en deux catégories principales, à savoir les fissures provoquées par les charges extérieurement appliquées, et ceux qui se produisent indépendamment des charges [Leonhardt 1977, Base 1978]. Les fissures de flexion et les fissures inclinées de cisaillement sont les deux types principaux de fissures provoquées par les charges extérieures. Les fissures de flexion (figure 2.2.a) sont formées dans la zone tendue de l'élément et ont une forme de cale, avec la largeur de fissure est maximale à la face tendue et égale à zéro près de l'axe neutre. Les fissures inclinées de cisaillement (figure 2.2.b) se développent généralement dans des poutres à âme mince une fois soumises aux forces de cisaillement élevées [Warner *et autres* 1998, Loo 1990].

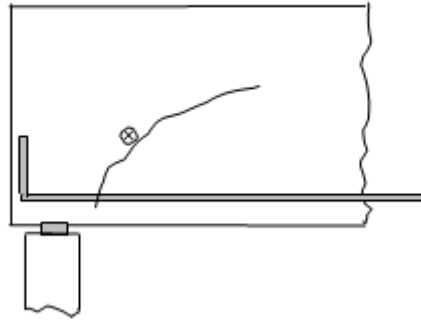


Figure 2.2.a: Les fissures inclinées de cisaillement.

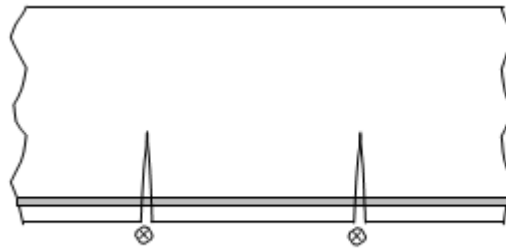


Figure 2.2.b : Les fissures de flexion.

Les microfissures internes sont aussi considérées parmi le type de fissures provoquées par la charge externe. Ces fissures se produisent en raison des efforts élevés du béton près des nervures dans les barres déformées, et sont confinées dans le voisinage immédiat de l'acier de renforcement sans apparaître sur la surface du béton. Ces microfissures sont considérées comme une partie du mécanisme d'adhérence.

Les fissures développées dans les membres tendus dû au retrait du béton ou au changement de température peuvent être aussi classés dans la deuxième catégorie de type de fissures qui se développent indépendamment des charges extérieures appliquées. Dans les éléments de structures minces tels que : les planchers des dalles, ces fissures peuvent s'allonger à travers la coupe entière, habituellement ayant une largeur approximativement uniforme [Warner et al 1998]. Si la largeur de ces fissures n'est pas correctement régulière, elles peuvent ainsi perturber l'intégrité de la structure et réduire la rigidité à la flexion considérablement et par conséquent pouvant conduire à des résultats non satisfaisants de type grands déplacements par exemple.

2.4 Les modèles de fissuration

2.4.1 Introduction

Les modèles présentés dans cette partie considèrent que le béton est un matériau homogène puisque à l'échelle des applications numériques sont en général suffisamment élevée pour admettre cette hypothèse. Néanmoins, on peut noter l'existence de modèles d'éléments finis où la microstructure du béton est représentée par une matrice de la pâte (ciment), des inclusions (granulats) et éventuellement des microfissures initiales introduites dans la matrice autour des inclusions. La position des granulats est alors déterminée soit par une procédure aléatoire [Wang 1997], soit par une reconstruction tridimensionnelle en utilisant la technologie d'imagerie digitale réelle [Nagai 1998]. Cette technologie est actuellement très récente et qu'elle a été prise en forte considération par les chercheurs. Ce domaine de recherche a eu le point de départ surtout avec les développements scientifiques connus après les rapprochements des mécaniciens et les médecins dans un cadre de recherche sous le nom de bio-mécanique. Dans le domaine de génie civil, ce type de modèle doit également inclure un modèle de fissuration pour le ciment et un modèle pour l'interface ciment-granat. Cette supposition permet seulement d'étudier l'évolution de la microstructure du béton soumis à une sollicitation quelconque.

Une autre façon de prendre en compte l'hétérogénéité du béton est de distribuer d'une manière aléatoire sur les éléments du maillage le module de Young et la résistance limite de traction du béton en fonction de leur valeur moyenne et de leur écart type obtenus expérimentalement [Rossi 1997]. En général, l'hétérogénéité du béton est rarement prise en compte de façon directe, la modélisation de la fissuration par éléments finis étant déjà relativement complexe à mettre en œuvre.

La difficulté principale de la modélisation de la fissuration du béton par éléments finis est engendrée par la nature de la fissure elle-même. En effet, une fissure est une discontinuité géométrique qui divise le matériau ; alors que la méthode des éléments finis est une technique basée essentiellement sur la mécanique des milieux continus. Cette incompatibilité apparente entre le problème posé et l'outil de modélisation nécessite le développement de

schémas spécifiques qui, tout en conservant la notion générale de continuité dans la solution, entraîne des changements drastiques dans le matériau à l'endroit de la fissure. Les travaux pionniers en matière de modélisation de fissuration ont été ceux de Ngo & Scordelis en 1967 qui ont introduit le concept de la fissuration discrète et ceux de Rashid en 1968 qui a introduit le concept de la fissuration répartie. La première approche modélise la fissure en insérant une discontinuité géométrique réelle dans le maillage et la seconde simule la fissuration en modifiant les propriétés du matériau à l'endroit de la fissure.

2.4.2 Critère d'amorçage et de propagation de fissure

Cette méthode est décrite pour la première fois par Lemaître et Chaboche. Les auteurs ont développé les trois modes de fissuration selon la direction de la sollicitation par rapport à celle de la fissuration. Ainsi, on distingue trois modes de fissuration suivants:

- Le mode **I** (mode d'ouverture) où les contraintes normales ouvrent la fissure.
- Les modes **II** (Mode de cisaillement plan) où les contraintes tangentielles ouvrent la fissure.
- Le mode **III** (mode de cisaillement anti plan) où les contraintes tangentielles ouvrent la fissure.

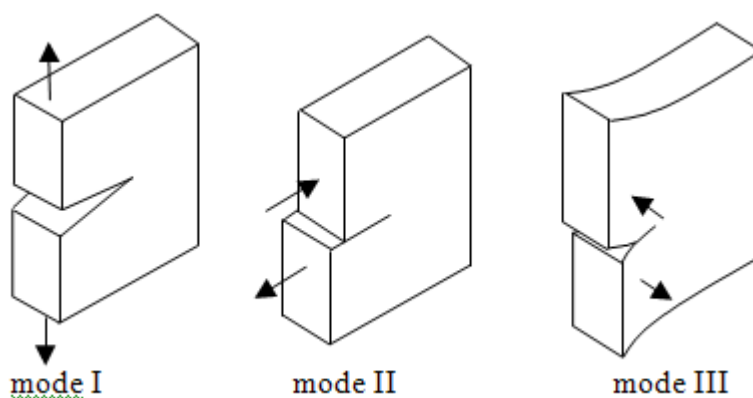


Figure 2.3 : Les modes de sollicitation d'une fissure.

Ce mécanisme s'applique dans l'hypothèse d'un matériau élastique linéaire

- La non linéarité de la partie croissante de la courbe uniaxiale liant les contraintes aux déformations de traction peut être négligée.

- La principale caractéristique du comportement du béton est probablement sa faible résistance limite en traction qui provoque une fissuration en tension à des niveaux de contrainte faibles comparés à la résistance limite en compression.

Par conséquent, dans la majorité des modèles de fissuration, le béton non fissuré est considéré comme linéaire élastique isotrope en tension. En général, le critère de traction maximale ou le critère de Rankine est utilisé pour détecter l'apparition d'une fissure. L'amorçage d'une fissure s'effectue dans ce cas uniquement en mode I (découplage du comportement bidimensionnel est considéré dans ce cas). Ces hypothèses sont justifiées en l'absence de compression latérale significative [Kupfer 1969]. Pratiquement, les contraintes principales ainsi que leurs directions sont calculées en un point d'intégration et si une de ces contraintes, positive, excède une valeur limite alors une fissure perpendiculaire à la direction de cette contrainte apparaît au point considéré.

Le critère de Rankine permet l'amorçage d'une fissure uniquement en mode I. Bien que l'utilisation de ce critère semble justifiée et que de ce fait celui-ci soit abondamment employé dans des modèles de fissuration, il peut paraître restrictif. C'est pourquoi, certains modèles utilisent, en plus du critère de Rankine, un critère d'ouverture de fissure en cisaillement [Rossi 1997] et d'autres emploient une enveloppe de rupture tridimensionnelle avec amorçage d'une fissure si le critère est transgressé avec au moins une contrainte principale de tension [Torrent et al 1987], [Gonzalez Vidoso et al 1991], [Kotsovos, Pavlovic, 1995].

Tous ces modèles conservent le critère de propagation précédent avec un plan de fissure qui se propage perpendiculairement à la contrainte principale maximale. Il existe également des modèles où le critère d'amorçage de fissure et le critère de propagation de fissure dépendent tous les deux de l'état de contrainte au point considéré. Récemment, Weihe et al, ont proposé un critère bidimensionnel d'amorçage et de propagation de fissure applicable à tout type de matériau prenant en compte la rupture en mode I, mode II et mode mixte mais ils s'accordent sur le fait qu'une fissure apparaît en mode I si le matériau, tel le béton, est suffisamment fragile [Weihe et al 1998], [Kroplin et al 1997].

A partir de l'analyse prise sur les différents modes de fissuration mentionnés ci-dessus, la bibliographie du domaine a regroupé les modèles numériques développés en deux grandes catégories, à savoir la modélisation de la fissure discrète et la modélisation de la fissure répartie.

2.4.3 Modèles de la fissure discrète

Le concept de la fissuration discrète se distingue de tous les autres modèles de fissuration et d'endommagement du béton car, dans cette approche, une discontinuité géométrique réelle est introduite dans le maillage d'éléments finis à l'endroit de la fissure. Le premier modèle numérique du matériau composite béton-armé par éléments finis qui a introduit l'effet de la fissuration a été développé par Ngo et Scordelis 1967. Les auteurs ont effectué une analyse élastique linéaire des poutres en béton armé avec des modèles de fissure prédéfinies. Dans ce cadre, les fissures ont été modélisées en séparant les points nodaux du maillage ou de la discrétisation géométrique en éléments finis ayant un côté en commun et ainsi la création d'un modèle de fissure discrète (figure 2.4).

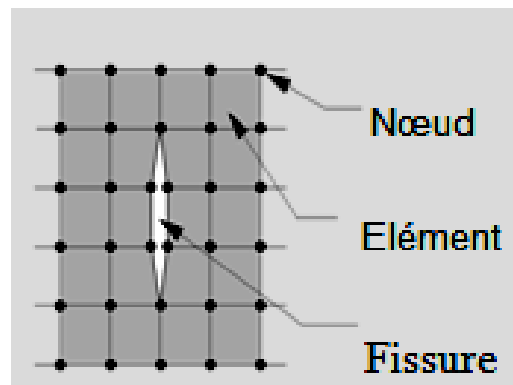


Figure 2.4 : Modèle de la fissure discrète.

Ce modèle possède des inconvénients majeurs ; avec le changement de la topologie et la redéfinition des points nodaux la largeur de la bande étroite de la matrice de rigidité sont détruites et ceci rend nécessairement des résultats d'informatique de grand effort ainsi que le manque de généralité dans l'orientation des fissures a rendu le modèle de la fissure discrète impopulaire. Pour pallier cette difficulté, l'approche a été affinée en utilisant des méthodes de remaillage adaptatif de façon à ce que des nouveaux éléments soient introduits avec leurs côtés orientés dans la direction de la fissure [Ingraffea

et al 1984], [Hellier et al 1987]

On peut noter également que l'approche de la fissure discrète ne semble pas avoir été développée en trois dimensions. De plus, cette technique semble plus performante si elle est appliquée à une classe de problèmes pour lesquels l'orientation de la fissure est connue par avance puisque les inconvénients liés à la dépendance vis à vis du maillage disparaissent d'eux-mêmes [Rots 1989a], [Rots 1991].

L'approche proposée par Ngo & Scordelis 1967 a donc été améliorée et les fissures discrètes sont à présent généralement modélisées par des éléments d'interface interdisant le recouvrement des faces de la fissure mais permettant leur ouverture et glissement relatifs [Ingraffea et al 1984], [Hellier et al 1987], [Rots 1989a], [Rots 1991]. Bien que la fissure soit ouverte, des contraintes normale et tangentielle peuvent être transmises à travers celle-ci du fait de la présence d'aspérités et sont fonction des déplacements relatifs normal et tangentiel de la fissure.

Le concept de la fissuration discrète se présente comme étant l'approche qui reflète le mieux l'état d'endommagement final d'une structure en béton car elle se rapproche de notre conception naturelle de la fissuration. Pour une telle structure, une technique de remaillage adaptatif pour modéliser les fissures individuellement serait trop lourde à gérer et extrêmement chère en temps de calcul, notamment en trois dimensions où cela semble être quasiment impossible à mettre en œuvre.

2.4.4 Modèles de la fissure répartie

2.4.4.1 Principes générales

Le besoin de modèle de fissure qui offre la génération automatique des fissures et de la généralité complète dans l'orientation de fissure, sans besoin de redéfinir la topologie d'élément fini, a mené la majorité d'investigateurs à adopter le modèle de fissure répartie. Le modèle de fissure répartie représente beaucoup de fissures finement espacées perpendiculaires à la direction d'effort principal, comme illustré sur la figure (2.5).

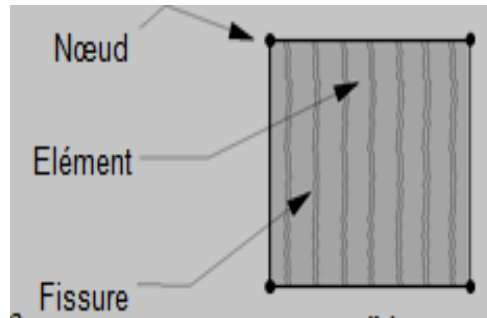


Figure 2.5 : Modèle de la fissure répartie.

Cette approximation du comportement de la fissuration du béton est tout à fait réaliste, puisque le comportement de la rupture du béton est très différent de celui des métaux. La rupture dans le béton est précédée par la microfissuration du matériau dans la zone de processus de rupture, qui se manifeste comme contrainte adoucissante. Cette zone est souvent très grande relativement à la coupe du membre dû à la grande taille de l'agrégat comme présenté sur la figure (2.6.a). Dans le membre d'acier une rupture est précédée par l'écoulement du matériau dans la zone de processus qui est concentrée près du bout de la fissure et a une taille relativement petite comme présenté sur la figure (2.6.b).

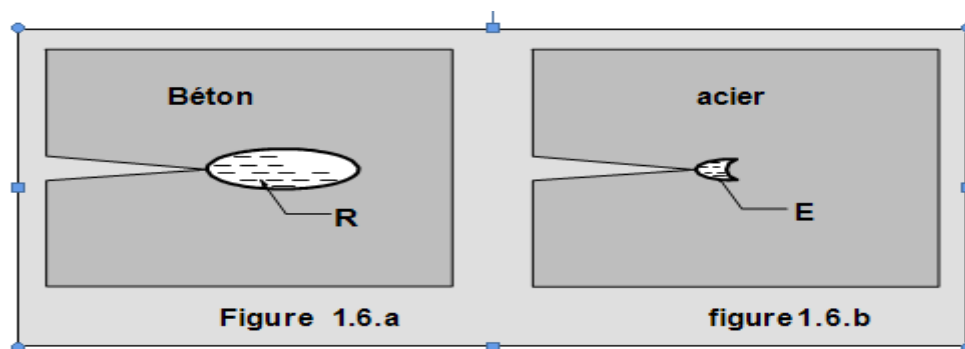


Figure 2.6 : La taille relative de la zone processus de la fissure

Figure 2.6.a : Zone de Rupture (R) du béton

Figure 2.6.b : Zone d'Écoulement (E) de l'acier

Le modèle de fissure répartie est d'abord employé pour la première fois par Rashid (1968). Ce dernier a modélisé le béton fissuré comme étant un matériau élastique orthotrope avec une réduction du module élastique dans la

direction normale du plan de fissure. Avec cette approche les discontinuités locales de déplacement aux fissures sont réparties sur un certain secteur attaché dans l'élément fini et le comportement du béton fissuré peut être représenté par les relations moyennes de contrainte-déformation.

2.4.4.2 Concept du modèle de fissure répartie

Le concept de la fissure répartie adapte la nature de la méthode de déplacement d'élément fini, puisque la continuité du champ de déplacement demeure intacte. Avant l'apparition des fissures les matériaux fragiles sont modélisés comme des matériaux élastiques linéaires et isotropes.

Pour les problèmes bidimensionnels, la relation contraintes déformations s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

Lorsque la contrainte principale majeure atteint la résistance De traction du béton ou d'une façon générale, la combinaison des contraintes principales atteint le critère de rupture, une fissure s'initie perpendiculaire à la direction de la contrainte principale. Le comportement isotropique représenté par la relation contrainte-déformation est remplacé par une loi orthotrope :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

L'équation (2.2) peut avoir des difficultés prématurées de convergence. En plus, Le phénomène n'est pas bien représenté [Suidan et Schnobrich 1973], extrait [De Borst 2002]. Pour cette raison, le module réduit de cisaillement a été réinséré dans ce modèle. La relation contrainte-déformation du béton fissuré devient :

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_1 \\ \Delta\sigma_2 \\ \Delta\tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_1 \\ \Delta\varepsilon_2 \\ \Delta\gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

L'utilisation du facteur de transfert de cisaillement β n'est pas uniquement pour résoudre la difficulté numérique relative à une matrice de rigidité singulière mais aussi pour améliorer la représentation du phénomène du béton fissuré dans une analyse par éléments finis. Il représente aussi l'effet du phénomène d'engrènement.

Plusieurs recherches adoptent une valeur constante à ce facteur ($\beta = 0.20$: une valeur est largement utilisée) mais pour des cas où les fissures sont capables de transférer des contraintes de cisaillement, il est nécessaire de prendre la valeur de β en fonction de la relation fissure-déformation. Khalfallah et al. ont développé une analyse numérique relative à la prise en compte du facteur de transfert de cisaillement à travers les lèvres du béton fissuré. Leur étude a conduit à une recommandation de la tenue en considération d'une valeur moyenne de l'ordre 0.40 à ce facteur de transfert de cisaillement. Cette déduction n'est pas basée sur une intuition mais l'analyse des résultats obtenus sur des poutres en béton armé de longueurs courantes. Enfin, l'analyse entreprise a conduit à limiter la valeur du coefficient de transfert de cisaillement.

Récemment, l'expérience a montré que le béton n'est pas un matériau parfaitement fragile et qu'il présente une certaine contribution de comportement structural et il a aussi une capacité de reprendre des efforts au-delà de sa contrainte limite. Cette observation expérimentale a conduit à la substitution du modèle purement fragile du matériau par un matériau à comportement adoucissant en traction, dans lequel une branche descendante est introduite au modèle qui diminue graduellement la résistance en traction du matériau.

Dans une représentation répartie, on peut modéliser ce phénomène en insérant au facteur de réduction μ^* dans la matrice de rigidité sécante :

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_1 \\ \Delta\sigma_2 \\ \Delta\tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu^* & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_1 \\ \Delta\varepsilon_2 \\ \Delta\gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

Le facteur de réduction μ^* dépend de la déformation normale à la fissure ($\mu^* = \mu^*(\varepsilon_1)$). Une forme plus raffinée est donnée en ajoutant le coefficient de Poisson ν .

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_1 \\ \Delta\sigma_2 \\ \Delta\tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mu^* E}{1-\nu^2 \mu^*} & \frac{\nu \mu^* E}{1-\nu^2 \mu^*} & 0 \\ \frac{\nu \mu^* E}{1-\nu^2 \mu^*} & \frac{E}{1-\nu^2 \mu^*} & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_1 \\ \Delta\varepsilon_2 \\ \Delta\gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

Dans le contexte, le modèle de la fissure répartie peut être décomposé en deux représentations différentes à savoir : la modélisation de fissure fixe et celle de fissure rotationnelle. Dans le modèle de fissure fixe, une fissure se forme perpendiculairement à la direction principale de l'effort de traction quand ce dernier excède la résistance à la traction du béton et l'orientation de la fissure ne change pas pendant le prochain chargement. La facilité de formuler et d'implanter ce modèle a été menée à son utilisation commune dans les études tôt [Hand et al 1973]; [Lin et Scordelis 1975]. Les études suivantes, cependant, ont prouvé que le modèle est associé aux problèmes numériques provoqués par la singularité de la matrice de rigidité des matériaux. D'ailleurs, le modèle de fissure a prévu par l'analyse des éléments finis montre souvent des déviations considérables de cela observé dans les expériences [Jain et Kennedy 1974].

Les problèmes du modèle de fissure fixe peuvent être surmontés en présentant un module de cisaillement fissuré, qui élimine la plupart des difficultés numériques du modèle et améliore considérablement l'exactitude des prévisions de modèle de fissure. Les résultats ne semblent pas pour être très sensibles à la valeur du module de cisaillement fissuré [Vebo et Ghali 1977]; [Barzegar et Schnobrich 1986], aussi longtemps la valeur qui est supérieure à zéro est employée, afin d'éliminer la singularité de la matrice

matérielle de rigidité et de l'instabilité numérique associée. Quelques modèles récents emploient un module de cisaillement fissuré variable pour représenter le changement de la rigidité de cisaillement, en tant que l'effort principal du béton vari de traction à la compression [Balakrishnan et Murray 1988]; [Cervenka et al 1990].

De Borst et Nauta (1985) ; ont proposé un modèle dans lequel le taux de contrainte est additif décomposé en taux de contrainte de béton et taux de contrainte de fissure. Le dernier, est alternativement composé par plusieurs composantes de contrainte de fissure. Après la formulation de la relation contrainte-déformation du béton bidimensionnel et la transformation de la direction de fissure aux coordonnées globales du système de la structure, d'une matrice matérielle avec sans accouplement entre la normale et l'effort de cisaillement sont construites. Malgré sa simplicité et facilité relatives d'application, cette approche toujours exige le choix d'un module de cisaillement fissuré de béton.

Dans le modèle de fissure rotationnelle développé par Cop et al (1980) considèrent que la direction de la fissure n'est pas fixée et reste constante en sa direction pendant la fissuration en fonction du chargement. Plusieurs essais par Vecchio et Collins (1982) ont prouvé que l'orientation de la fissure change avec l'histoire de chargement et que la réponse du spécimen dépend du courant plutôt que de la direction originale de fissure.

Dans le modèle de fissure rotationnelle, la direction de fissure est maintenue perpendiculaire à la direction de la contrainte principale de traction et, par conséquent, aucune contrainte de cisaillement ne se produit dans la fissure plane. Ceci élimine le besoin du module de cisaillement fissuré. Un inconvénient de cette approche est la difficulté de corréler les résultats analytiques avec la recherche expérimentale de la mécanique de rupture, qui est en désaccord avec le concept de la fissure rotationnelle. Ce modèle, néanmoins, a été employé avec succès dans des études analytiques des structures en béton armé dont le but est d'étudier le comportement structural global, plutôt que les effets locaux à proximité d'une fissure [Gupta et Akbar 1983]; [Adeghe et Collins 1986].

2.4.5 Autres modèles

Tous les modèles présentés dans ce chapitre pourraient également être qualifiés d'approches réparties dans le sens où la discontinuité induite par la fissure est modélisée par un modèle continu (modèle de fissure répartie). Ces modèles n'ayant pas été développés et programmés dans le cadre de cette thèse mais leurs présentations, ici, ont pour objet d'exposer les principes de ces modèles d'une part et de rapprocher les idées fondamentales en vue de donner un aperçu comparatif entre les modèles existant. Il fallait de dire qu'actuellement que le champ de la modélisation mécanique des matériaux de structure recense plus de 50 modèles numériques.

2.4.5.1 Les modèles basés sur la théorie de l'endommagement

Le modèle d'élasticité couplé à l'endommagement est présenté pour la première fois par Bazant et Kim (1979). Ils ont couplé la théorie de l'élasticité à un mécanisme de fissuration basé sur la théorie de Dougill (1976).

Le principe de la mécanique d'endommagement serve à modéliser les effets de microfissures d'un matériau sur son comportement mécanique. Cette modélisation est bien adaptée à la description des non linéarités survenant dans le béton ou dans les matériaux types connus comme des matériaux fragiles.

Les développements des modèles basés sur la théorie d'endommagement nécessitent aussi la définition de la règle d'endommagement qui caractérise le taux d'endommagement matériel et son orientation. Le modèle proposé par Lemaitre (1986) est considéré parmi les premiers modèles utilisant la théorie d'endommagement isotrope. Ce modèle est basé sur la définition de la contrainte effective, stipulant que la contrainte réelle s'applique sur la partie de matière encore résistante, est supérieure à la contrainte macroscopique (figure 2.7).

Cette notion s'exprime souvent par le biais du principe d'équivalence en déformation. La réduction de contrainte est due principalement à la microfissuration du béton, la contrainte effective s'écrit donc :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-D} \quad (2.6)$$

Où $\tilde{\sigma}$ est la contrainte effective, D est un scalaire positif mesurant l'endommagement matériel. L'expression d'endommagement unidimensionnel est donnée par :

$$D = 1 - \frac{E^*}{E} \quad (2.7)$$

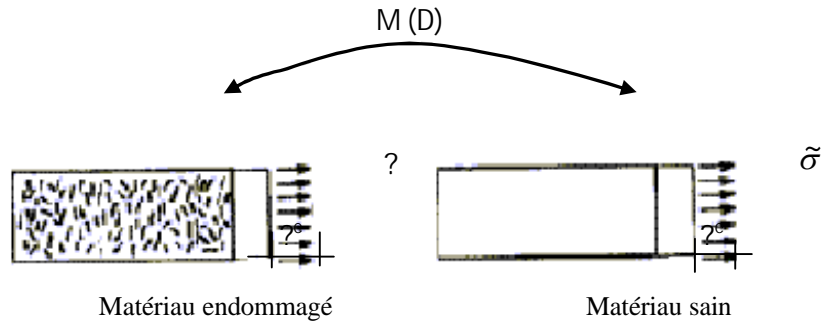


Figure 2.7 : Principe d'équivalence de déformation (d'après Ju 1989)

E et E^* sont respectivement le module d'élasticité du matériau sain et endommagé.

La loi d'élasticité aux problèmes unidimensionnels s'écrit :

$$\tilde{\sigma} = (1 - D)E\varepsilon \quad (2.8)$$

L'endommagement D influe directement sur la rigidité sécante du matériau ;

$D = 0$ pour un matériau vierge et $D = 1$ pour un matériau complètement rompu. En outre, la variable d'endommagement peut être tensorielle tenant en compte de l'anisotropie induite par la fissuration [Benouniche 1979], [Pijaudier-cabot 1985], [Ramtani 1990], [Bary 1996], [Dragon et Halm 1998], [Raguneau 1999], [Scotta et Hanganu 2001]

La mécanique continue de l'endommagement traite la microfissuration progressive en réduisant la raideur avec un paramètre multiplicatif et, dans ce sens, cette approche est similaire au modèle de la fissuration diffuse [Bazant 1988c], [Saouridis et Mazars 1989], [Saouridis et Mazars 1992], [Al-Gadhib et autres 1998]. Si la variable d'endommagement est un scalaire alors, le caractère anisotrope de la fissuration n'est pas pris en compte dans la modélisation correspondante. Par ailleurs, dans le modèle de la fissuration répartie, le

concept d'endommagement est considéré inséparable de la largeur de la bande de fissure ou d'un critère d'énergie de rupture.

Contrairement aux modèles de fissuration répartie, le modèle basé sur l'endommagement scalaire ne présente pas de verrouillage des contraintes car toutes les composantes des contraintes tendent vers zéro lorsque la fissure est largement ouverte. En se basant sur cette observation et sur le fait que le verrouillage des contraintes pour le modèle réparti à fissures tournantes apparaît seulement à une phase tardive du processus d'endommagement, Jirasek et Zimmermann ont proposé un modèle combiné de fissuration diffuse tournante avec transition à un endommagement scalaire [Jirasek et Zimmermann 1997], [Jirasek et Zimmermann 1998a]. Le modèle démarre avec une approche qui capture l'anisotropie induite par la fissuration et bascule à une formulation d'endommagement scalaire lorsque l'ouverture de la fissure atteint une valeur critique pour laquelle les problèmes inhérents au modèle de la fissure tournante apparaissent (verrouillage des contraintes, instabilité matérielle).

2.4.5.2 Le modèle micro-plan

Le modèle micro-plan est né de l'interprétation du comportement macroscopique complexe de métaux polycristallins comme l'interaction de plans de glissement distincts qui sont dus à la structure moléculaire interne du matériau. Bazant et autres. Ont ensuite transféré cette perception de milieu non homogène microscopiquement au contexte du modèle micro-plan [Bazant et Ozbolt 1990], [Ozbolt et Bazant 1992], [Ozbolt et Bazant 1996]. Dans ce modèle, les propriétés du matériau sont caractérisées séparément en un nombre fini de micro-plans, plans d'orientation différente à l'intérieur du matériau. Le comportement macroscopique du matériau est une réponse intégrale de tous les micro-plans. Pour chaque micro-plan, les relations liant les contraintes aux déformations, incluant les relations d'adoucissement, sont définies par des fonctions exponentielles ou polynomiales.

2.4.5.3 Les modèles avec discontinuités ancrées dans les éléments

Le verrouillage des contraintes observé avec les modèles diffus de fissuration, notamment celui observé avec le modèle à fissures tournantes, peut

être évité en améliorant la représentation cinématique de la rupture fortement localisée. Des techniques basées sur cette idée ont été présentées sous des noms différents, comme par exemple les éléments avec bandes d'adoucissement interne (Inner Softening Bands) [Olofsson et al 1994], [Ohlsson et Olofsson 1997] ou les éléments avec fissures ancrées (elements with embedded cracks), dont une revue bibliographique détaillée et complète sur le sujet a été effectuée par Jirasek [Jirasek 1998c].

On peut noter cependant que ce type d'élément a été développé en deux dimensions uniquement et principalement avec des éléments finis triangulaires.

2.4.5.4 Les modèles basés sur une méthode sans maillage

Les méthodes sans maillage ont été développées en vue de simplifier certains problèmes traités avec la méthode des éléments finis, notamment ceux associés à la croissance de surfaces existant dans la propagation de fissures. En effet, l'utilisation de certains modèles de fissuration nécessite à des maillages très fins en leur discrétisation pour capturer correctement l'endommagement ou de techniques de remaillage adaptatif, comme c'est le cas pour le modèle de la fissuration discrète.

Malgré les récents développements connus dans le domaine informatique conduisant à faciliter la tâche numérique et l'apparition de meilleurs automatismes performants, de telles méthodes restent onéreuses en temps de calcul. Pour pallier ces difficultés, Belytschko et al ont développé une méthode sans maillage, appelée méthode de Galerkin sans éléments [Belytschko et al 1994], qu'ils ont appliquée avec succès à la croissance de fissures [Belytschko et al 1995a], [Belytschko et Tabbara 1996].

Néanmoins les capacités de compréhension et la maturité des progiciels basés sur une méthode d'éléments finis sont difficiles à reproduire, notamment pour l'étude de propagation de fissures dans une structure complexe. C'est pourquoi Belytschko et autres. Ont proposé de combiner la méthode des éléments finis avec celle sans maillage appliquée uniquement à des domaines de la structure où ses avantages sont bénéfiques [Belytschko 1995b]. Cette méthode offre des perspectives intéressantes mais elle n'a pas encore été développée en trois dimensions.

2.4.5.5 Les modèles endochroniques

La théorie endochronique est basée sur le concept de la qualité intrinsèque ou du temps endochronique. Le temps intrinsèque est utilisé comme un moyen de mesure de l'extension du dommage à l'intérieur de la structure.

L'introduction du critère de chargement devient, cependant, nécessaire pour une représentation correcte de la réponse matérielle. La manière la plus logique d'accomplir ceci est d'introduire la surface de chargement et la règle d'écrouissage plastique. Elle a été bien adaptée au béton [Bazant 1978], [Bazant et Bhat 1976], [Bazant et Shieh 1980], [Jain 2000].

Ce type de modélisation est plus sophistiqué prenant plusieurs phénomènes en compte tels que : la viscosité, plasticité, la dilatation inélastique et l'endommagement. Il peut aussi prédire la courbe critique de rupture sous sollicitations uniaxiales, biaxiales et triaxiales.

La formulation analytique du modèle [extrait de Merabet 1990 et Jain 2000] est basée sur un modèle monodimensionnel :

$$d\varepsilon = \frac{d\sigma}{E} + \sigma \frac{dt}{EZ_1} \quad (2.9)$$

Où : Z_1 est une constante caractéristique du matériau.

Pour évaluer les déformations inélastiques du matériau, on remplace le temps actuel t par une variable scalaire Z dite "le temps intrinsèque" qui s'exprime sous la forme :

$$(dZ)^2 = \left(\frac{d\zeta}{dZ_1}\right)^2 + \left(\frac{dt}{d\tau_1}\right)^2 \quad (2.10)$$

Avec

$$d\zeta = f_1(\xi, \sigma, \varepsilon)d\xi \quad (2.11)$$

Et

$$d\xi = \sqrt{J_2 \varepsilon(d\varepsilon)} \quad (2.12)$$

J_2 (d ?) est le second invariant du déviateur des déformations, f_1 est une fonction d'écrouissage, ζ est une variable scalaire liée à l'endommagement du

matériau, ξ est lié à la distorsion et τ_1 est le temps de relaxation. Pour des durées de chargement inférieures à τ_1 le terme $\frac{dt}{\tau_1}$ est nul.

La relation contrainte-déformation s'écrit en :

Partie déviatoire :

$$de_{ij} = \frac{d\sigma_{ij}}{2G} + de''_{ij} \quad (2.13)$$

$$de''_{ij} = \frac{S_{ij}}{2G} dz \quad (3.14)$$

Partie volumique :

$$d\varepsilon = \frac{d\sigma}{3K} + d\varepsilon'' \quad (2.15)$$

$$d\varepsilon'' = d\lambda + \frac{\sigma}{3K\tau_1} dt + d\varepsilon''_0 \quad (2.16)$$

de_{ij} Et S_{ij} sont respectivement les déviateurs des déformations et des contraintes, λ est la dilatance inélastique, ε''_0 est la déformation due aux effets thermiques et au retrait. Le terme $\frac{\sigma}{3K\tau_1} dt$ est le terme de fluage.

Il est clair que le modèle endochronique est capable de simuler un nombre considérable de phénomènes tels que : l'écroutissement, le radoucissement, la dilatance inélastique, le fluage, le retrait, l'effet thermiqueetc.

Par exemple, le phénomène de radoucissement nécessite la détermination de six paramètres. De ce fait, le modèle endochronique proposé par Bazant (1978) n'est pas souvent employé dans les codes de calcul.

2.5 Modélisation de la tension stiffening

La tension stiffening se rapporte comme la capacité des éléments fissurés en béton armé de porter des contraintes additionnelles moyennes dans la direction perpendiculaire à la fissure et offre une rigidité aux éléments post-fissurés. Il est crucial de noter la différence de la terminologie utilisée entre la tension stiffening et l'effet de la tension stiffening. Dans cette rédaction, la tension stiffening se rapporte par la partie adoucissante de la relation

contrainte-déformation du béton nu et est gérée par l'aspect d'une fissure simple. D'autre part la tension stiffening se rapporte à la courbe de tension adoucissante de contrainte-déformation dans les éléments en béton armé et elle est commandée par l'occurrence des fissures multiples. Tension stiffening est donc obtenue en faisant la moyenne au dessus toutes les fissures dans les éléments.

Dans cette section, nous voulons exposer que quelques modèles numériques qui ont largement été utilisés pour représenter le comportement du béton entre les fissures. D'autre part, cette illustration est citée ici en vue d'exposer les théories proches adoptées au développement de notre approche. Comme nous avons signalé que les modèles de tension stiffening sont aussi nombreux dans ce domaine. Pour attirer l'intention du lecteur, nous voulons présenter dans cette section que les modèles qui sont en grande partie commune avec l'approche utilisée (chapitre 3).

Le concept de la tension stiffening était à l'origine proposé par Scanlon et Maurry (1974) dans l'étude des déflexions des dalles en béton armé. Scanlon et Maurry (1974) ont trouvé que les déflexions des dalles ont été surestimées quand la contrainte du béton post fissuré a été ignorée et ont proposé que la contrainte additionnelle de traction du béton doit être incluse. La figure (2.8) présente la relation contrainte déformation du béton à la traction employée par Scanlon et Maurry (1974).

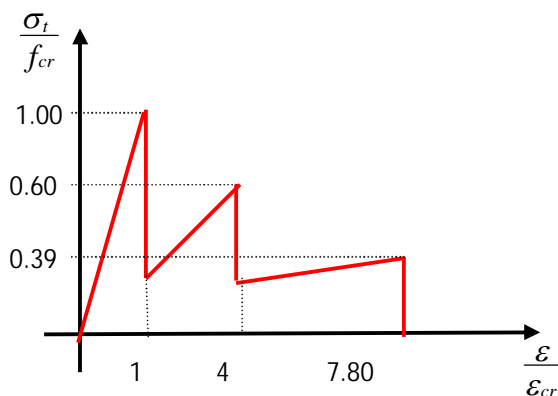


Figure 2.8 : Modèles de la tension stiffening par Scanlon et Murray (1974)

Un modèle simple pour expliquer l'effet de la tension stiffening des éléments en béton armé a été proposé par Tamai et al (1987). dans ce modèle un élément en béton armé est soumis à la traction uniaxiaiale comme présenté sur

la figure (2.9). Dès que les fissures multiples formeront avec certain espacement de fissure, la contrainte du béton à la fissure chute soudainement et l'acier de renforcement est mécanisme principal de la charge portante à la fissure.

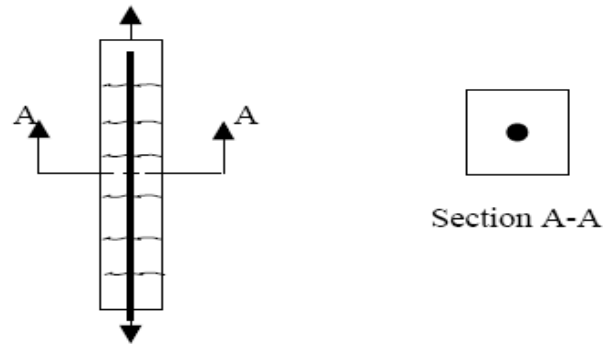


Figure 2.9 : Elément en béton armé soumis à la traction uniaxiale

Considérant un diagramme du corps libre comme montré sur la figure (2.10) il peut être conclure que le béton entre les fissures devrait aider à porter certaine quantité de contrainte et la contrainte de l'acier entre les fissures doit être inférieure cela a la fissure. En conséquent, un mécanisme de transfert de charges entre le béton et l'acier devrait exister par l'interface du béton armé entre les fissures comme montré dans la figure (2.10)

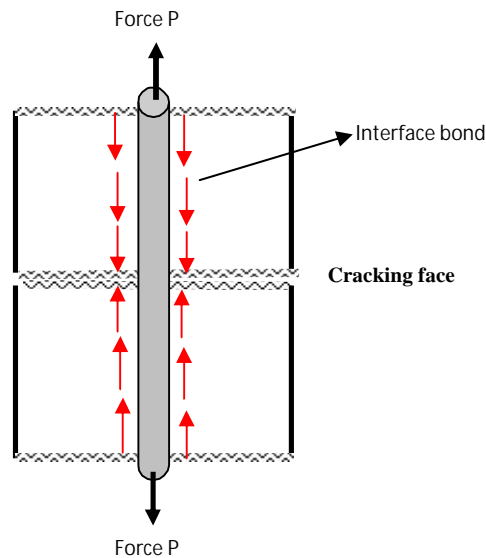


Figure 2.10 : Diagramme d'un corps libre des éléments fissurés en béton armé

2.6 Conclusion

Dans cette recherche bibliographique, nous avons illustré quelques modélisations numériques de comportement du matériau composite béton-armé. Il est évident que ce matériau est composé de deux constituants à caractères mécaniques différents. Cette propriété conduit à l'analyse du comportement de chaque matériau séparément. La liaison entre les deux matériaux ne fait pas l'objet principal de cette étude pour cette raison, une adhérence parfaite est supposée entre béton-acier.

La bibliographie a présenté que le phénomène de fissuration est primordial et en plus il était le facteur principal de la non linéarité de la réponse des structures en béton armé. Due à cette non linéarité, le phénomène de fissuration ne peut être négligé dans la conception des structures en béton armé. Nous avons exposé dans ce chapitre les modèles de fissure à savoir le modèle de la fissure discrète et celui de la fissure répartie de façon détaillé. Le modèle de la fissure répartie est adopté dans cette étude pour l'établissement de notre étude présenté en sa formulation théorique (chapitre 3) et en son application numérique (chapitre 4). A coté de la modélisation de fissuration, il existe aussi d'autres modèles à base numérique qui simulent avec une satisfaction le comportement des structures en béton armé soumises à des charges complexes. A la fin de ce chapitre, l'effet du comportement du béton entre les fissures est présenté. Sa présentation tourne autour les travaux déjà réalisés ayant effets dans la formulation et les principes de l'approche que nous voulons proposer.

Chapitre 3

Comportement mécanique des matériaux

Et formulation théorique

3.1 Introduction

Les structures en béton armé sont généralement composées de deux constituants acier et béton ; deux matériaux avec des caractéristiques mécaniques différentes. Les propriétés mécaniques de l'acier peut être considéré comme un matériau homogène. Cette homogénéité rend la définition des propriétés du matériau acier bien connue.

Dans l'autre partie, le matériau béton est un matériau hétérogène composé de ciment d'agrégats et de mortier et ses propriétés mécaniques se dispersent et ne peuvent pas être définies facilement. Pour faciliter la conception, on va considérer que le béton est un matériau homogène dans le sens macroscopique.

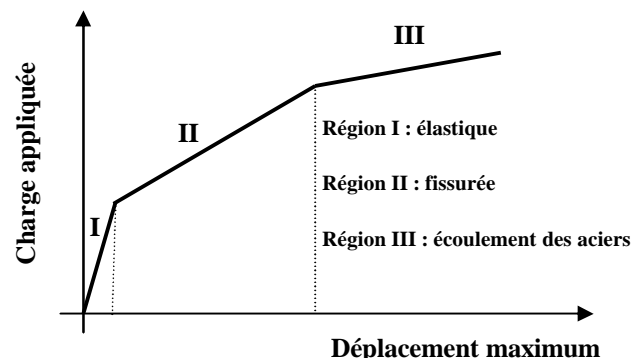


Figure 3.1 : Réponse (charge-déplacement maximum) des éléments en béton armé

La réponse typique charge-déplacement maximum dans le comportement des poutres en béton armé simplement appuyées est illustrée sur la figure (3.1). Les relations semblables sont obtenues pour d'autres types d'éléments structuraux en béton armés. Cette réponse fortement non-linéaire peut être durement divisée en trois phases de comportement: l'étape élastique

Chapitre 3 : Comportement mécanique des matériaux et formulation théorique

non fissurée, la propagation de fissure et l'étape d'écoulement plastique des barres d'acier qui peut être accompagné ou non avec l'écrasement du béton.

La réponse non-linéaire est généralement provoquée par deux effets principaux, à savoir, la fissuration du béton en traction et écoulement plastique des barres de renforcement ou écrasement du béton en compression. Cette dernière est non seulement non-linéaire, mais elle est différente en traction qu'en compression. En plus, les propriétés mécaniques sont dépendantes de l'âge du béton au chargement et aux conditions d'environnement, telles que la température ambiante et l'humidité. Les propriétés matérielles du béton et de l'acier sont également dépendantes du taux de contrainte jusqu'à un degré différent.

Si les contraintes de traction dominant, la rupture du béton peut être engendrée par le phénomène de fissuration. Dans ce cas, il est considéré que le comportement du béton est de type fragile. Dans le cas contraire, si les contraintes de compression dominant, le béton peut rompre par un effet d'écrasement qui aura lieu, en général, dans les zones à fortes localisations de contraintes, dans le cas de poutres en béton armé, cette zone est déduite analytiquement ou numériquement au voisinage d'application de la charge externe. Dans plusieurs modèles de comportement du béton, il est considéré de type ductile sachant que le béton présente un certain adoucissement.

La modélisation et l'analyse du béton armé par la méthode des éléments finis fait l'objet essentiel de plusieurs recherches dans le monde. Dans ce contexte, la littérature expose deux différentes catégories de comportement du béton après fissuration, à savoir l'option cut-off et l'option tension stiffening. Ce dernier est pris en forte considération dans cette étude et sa formulation théorique en accompagnant les suppositions considérées fait l'objet primordial de notre étude.

3.2 Comportement mécanique du béton

3.2.1 Introduction

Le béton est un matériau hétérogène constitué d'une matrice en ciment et d'inclusions de granulats ou agrégats (sables, graviers, cailloux) dont la répartition et la géométrie ne sont pas connues à priori et présentent souvent une dispersion importante. A cette hétérogénéité de composition vient s'ajouter une hétérogénéité dite structurelle. Elle consiste en l'existence de défauts initiaux (microfissures) au sein de la microstructure. La plupart de ces défauts se situent à l'interface entre les granulats et la pâte de ciment, cette interface constituant le lien le plus faible du matériau.

Des microfissures peuvent également être générées dans le ciment par différents facteurs, tels que : le retrait (diminution du volume apparent de la matière) hydraulique engendré par une évaporation d'eau, le retrait thermique engendré par une variation de température ou une consolidation incomplète du ciment entraînant la formation de microcavités. Lorsque cette structure est soumise à une sollicitation, des microfissures supplémentaires peuvent se former suite à des concentrations de contraintes de tension isolées dues à des déformations incompatibles entre les granulats et le ciment.

Pour prédire de façon réelle le comportement des structures, en général, le chargement appliqué est de type incrémental. Ce mode de chargement permet non seulement à la compréhension de la réponse structurale mais de connaître plusieurs phénomènes peuvent être envisagés au cours de ce chargement. Lorsque ce chargement augmente, les microfissures se développent et se propagent en connectant éventuellement entre elles pour former une macro-fissure au sein du matériau béton entraînant la rupture du celui-ci. Ce phénomène physique peut engendrer à l'échelle macrostructurale une diminution des contraintes accompagnée d'une augmentation des déformations. Cette supposition est considérée à partir de la première introduction du comportement de béton fissuré pour modéliser le comportement des structures en béton armé. Le comportement des bétons est supposé élastique linéaire jusqu'à la contrainte limite du béton en traction est atteinte. Avec les récentes technologiques, la réponse des bétons

présente un comportement adoucissant ou quasi-fragile au-delà de sa résistance limite. Cette partie de comportement est caractérisée par un phénomène de localisation des déformations. Plusieurs travaux de recherche ont été pris dans ce domaine présentant une sensibilité à la taille de la discrétisation géométrique de la structure.

En effet, le mode de déformation est aussi non homogène, c'est-à-dire que les déformations se concentrent dans des zones localisées de faible dimension (le long des macro-fissures dans le cas du béton) alors que tout le reste du matériau a tendance à se décharger. De part sa nature hétérogène, le béton présente donc un comportement mécanique très complexe englobant un comportement fortement non linéaire sous un état de contrainte multiaxial, une fissuration progressive induite par des contraintes ou des déformations de tension conjuguée à un adoucissement en déformation et un comportement dépendant du temps tel que le fluage et le retrait.

Les propriétés du comportement du béton sont supposées élastiques et qu'elles dépendent uniquement du module d'élasticité $\{E_c\}$ et du coefficient de Poisson ν . La relation matricielle qui lie un incrément de contraintes avec son correspond de déformations est :

$$\{d\sigma_{ij}\} = [C_{ijkl}] \{d\varepsilon_{kl}\} \quad (3.1)$$

Où $[C_{ijkl}]$ est la matrice d'élasticité du béton et ses paramètres dépendent du module de Young $\{E_c\}$ et du coefficient de Poisson ν . Les paramètres matriciels dépendent de la nature du problème à étudier soit qu'il est en contraintes planes, en déformations planes ou des problèmes axisymétriques.

On peut calculer l'état actuel de contraintes consécutives par accumulation des contraintes calculées antérieurement et celles de l'état actuel, par l'expression suivante :

$$\{\sigma_{ij}^{i+1}\} = \{\sigma_{ij}^i\} + \{d\sigma_{ij}\} \quad (3.2)$$

Dans les paragraphes suivants, les principales caractéristiques du

comportement mécanique du béton sont exposées au niveau macrostructural (échelle de cette analyse). En effet, malgré cette forte hétérogénéité, le béton peut être considéré comme un matériau homogène et continu si l'échelle d'observation est suffisamment grande, ce qui sera le cas dans les études numériques réalisées.

3.2.2 Comportement du béton en compression uniaxiale

La courbe caractéristique reliant les contraintes aux déformations obtenue lors des essais de compression uniaxiaux sur un cylindre en béton est présentée sur la figure (3.2). Elle montre un comportement quasiment linéaire élastique jusqu'à environ 30-40% de sa résistance limite en compression f_c et devient ensuite une courbe non linéaire jusqu'à la contrainte limite. Après le pic, la partie décroissante de la courbe caractérise le régime du comportement adoucissant du béton jusqu'à ce que la ruine par effondrement apparaisse. La partie croissante de la courbe est indépendante de l'élanement du cylindre testé (rapport du diamètre sur la hauteur de l'échantillon), ce qui n'est pas le cas pour le régime d'adoucissement où une augmentation de la ductilité (en terme de contrainte et déformation) est observée expérimentalement avec une augmentation de l'élanement (l'effet d'échelle) [Van Mier et al 1997].

Le comportement du béton en compression uniaxiale peut être divisé en deux zones: la partie ascendante de la courbe contrainte-déformation décrit le comportement du béton non fissuré (présence uniquement de microfissures non visibles à l'œil nu) alors que la partie d'adoucissement est associée au comportement du béton fissuré (les fissures sont observables à l'œil nu).

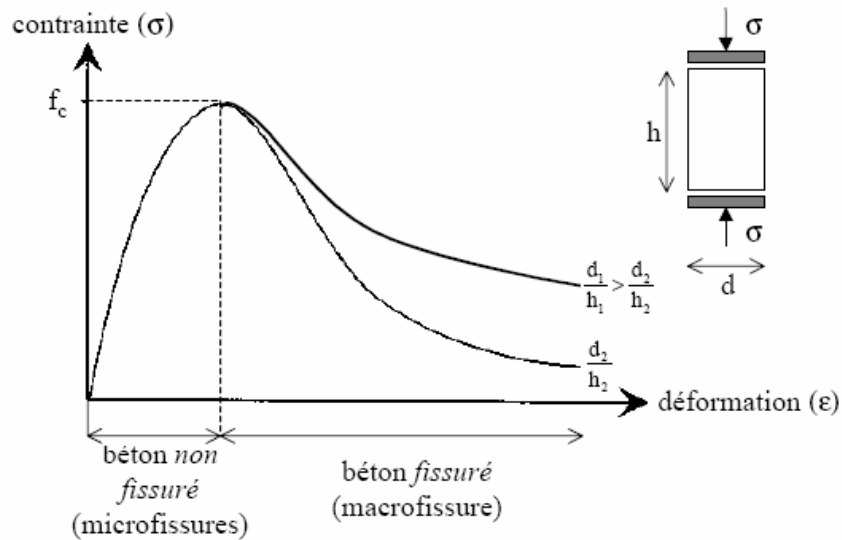


Figure 3.2 : Comportement du béton en compression uniaxiale

3.2.3 Comportement du béton en traction uniaxiale

La courbe contrainte-déformation du béton obtenue en traction uniaxiale (figure 3.3) est similaire à celle décrite pour la compression, mis à part le fait que la résistance limite en traction f_t est nettement plus faible que celle en compression ($f_t=0.1f_c$). La courbe est linéaire jusqu'à environ 75% de sa résistance limite de traction, f_t . Les microfissures s'initient à se développer dans la région qui précède la résistance au pic et qu'elles s'agrandissent plus rapidement que lors du test de compression et par conséquent la rupture survient plus tôt.

Des tests expérimentaux de traction directe effectués sur des éprouvettes en béton ont montré que, juste avant le pic, une décohésion des granulats les plus importants apparaissait et que les fissures nées de cette décohésion coalescente ensuite avec les microfissures existantes pour former une macrofissure continue [Van Mier 1991]. De plus, les résultats révèlent la présence de nombreux grains reliant les surfaces de la fissure, ce qui explique la branche d'adoucissement de la courbe contrainte-déformation. La ruine des éprouvettes apparaît lors de la rupture de ces grains.

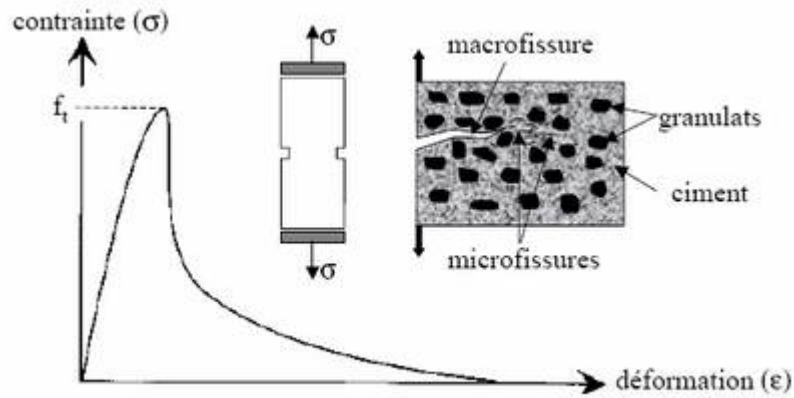


Figure 3.3 : Comportement du béton en traction uniaxiale

3.2.4 Comportement du béton sous contraintes biaxiales

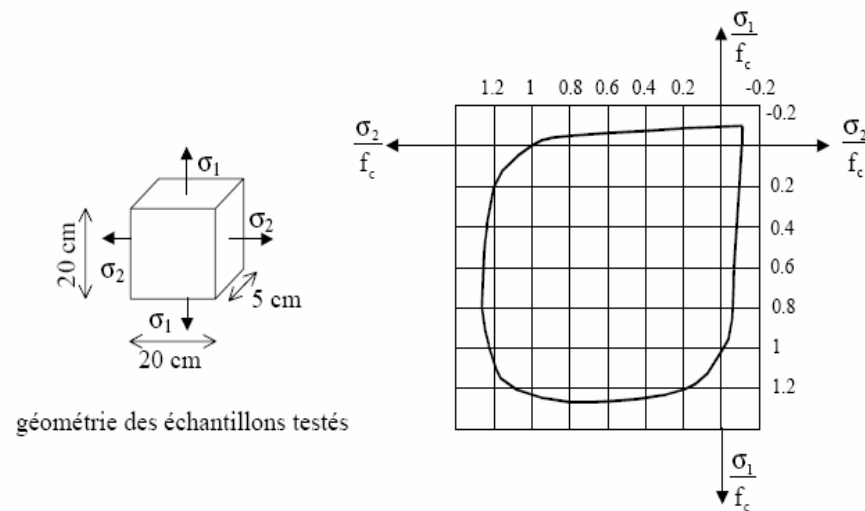


Figure 3.4 : Comportement du béton sous contraintes biaxiales.

Les données sur le comportement du béton sous un état de contrainte multiaxial sont plus rares car les tests expérimentaux sont plus difficiles à mettre en œuvre. Kupfer et al. [Kupfer et al 1969], ([Kupfer et al 1973] ont étudié le comportement du béton soumis à des contraintes biaxiales et ils ont ainsi établi des relations entre les contraintes et les déformations en compression biaxiale, en tension biaxiale et en tension et compression combinées. De plus, les enveloppes à la limite d'élasticité et à la rupture ont été établies dans l'espace à deux dimensions des contraintes (figure 3.4). Ces résultats ont été largement exploités pour établir des critères limites et des lois de comportement du béton

utilisables dans des codes de calcul par éléments finis.

3.3 Comportement mécanique de l'acier

3.3.1 Comportement uniaxial

Le comportement de l'acier est semblable en traction et en compression ce qui n'est pas le cas concernant le béton. La figure (3.5) montre l'allure typique du comportement du matériau acier soumis à un essai de traction. Nous pouvons constater clairement deux comportements différents [Lemaitre et al 1986] ; tant que nous restons au-dessous du point de la limite élastique, le comportement reste élastique, c'est à dire que la courbe de décharge est confondue avec la courbe de charge (quand le chargement redevient nul, l'éprouvette retrouve sa forme initiale).

Quand le chargement dépasse la limite élastique et si ensuite nous enlevons la charge des déformations permanentes apparaissent. Contrairement au béton, le module de décharge est pratiquement le même avec le module de Young initial.

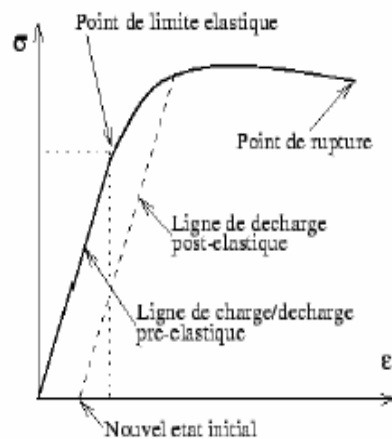


Figure 3.5 : Comportement de l'acier en traction simple

3.3.2 Chargement cyclique de traction-compression

Lors de sollicitations cycliques de traction - compression, la plupart des aciers voient leurs propriétés varier au cours des cycles. Lorsque nous soumettons une éprouvette à un essai de traction suivi d'un essai de

compression nous constatons que la traction préalable écrouit le matériau dans le sens de traction (augmentation de la limite d'élasticité) mais l'adoucit dans le sens de la compression (effet Bauschinger). La figure (3.6) montre clairement que la limite d'élasticité en compression est plus faible que la limite initiale en compression $|f_{eb}| \pi |f_e|$

L'effet Bauschinger est présent quelque soit l'amplitude de déformation imposée [Lemaitre et al 1986].

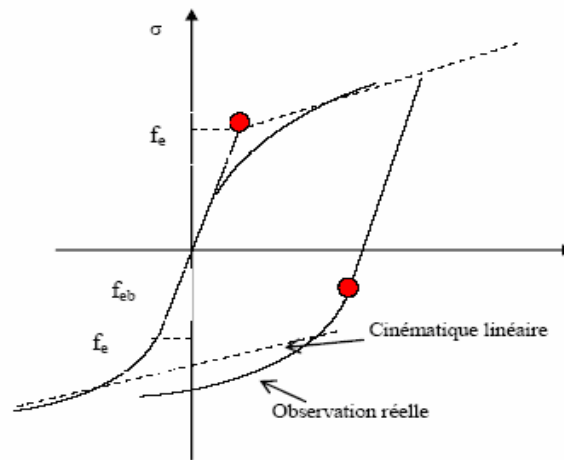


Figure 3.6 : comportement de l'acier en traction – compression : effet Bauschinger.

3.4 Propriétés de l'interaction béton-acier

L'interaction entre les différents matériaux joue un rôle important dans les modèles éléments finis. L'adhérence entre le béton et l'acier est la capacité de transfert des efforts par le milieu interface entre deux matériaux possédant des caractéristiques mécaniques différentes. De même, l'adhérence est le phénomène responsable de l'existence des matériaux composés et en plus, elle existe de nature appelée dans ce cas les forces de cohésions. Le rôle de la liaison entre béton et acier est primordial dès que des fissures apparaissent et ce phénomène se localise dans cette zone où il y'aura un transfert considérable de contraintes.

Le mécanisme d'adhérence entre le béton et les aciers a fait l'objet de plusieurs travaux scientifiques. Bien que, il est bien connu que les deux

paramètres d'influence sur ce mécanisme dont les plus importants sont le confinement du béton et la plastification des armatures.

Dans ce chapitre, on adopte une adhérence parfaite entre les barres d'acier et les bétons. Comme nous avons montré que dans le chapitre premier que l'intérêt de cette recherche consiste en l'établissement d'une approche numérique qui peut simuler avec une satisfaction la réponse des poutres en béton armé. Profondément, il s'agit de quantifier l'apport du comportement structural des bétons entre les fissures dans la réponse globale des poutres en béton armé. Cette idée nous a conduits à caractériser et identifier l'apport de la tension stiffening du béton fissuré à travers ce travail.

3.4.1 La tension stiffening

Quand les fissures se produisent dans une structure en béton armé, la force de traction, qui provoque le phénomène de fissuration, à travers ces fissures sera prise ultérieurement par les armatures tendues. Cependant dans la région de béton entre les fissures successives, la force appliquée à toute section est partagée entre l'acier et le béton proportionnellement à leurs rigidités. Cette capacité de distribuer la force de traction entre les fissures successives est appelée "Tension stiffening". Ce phénomène rend le comportement des aciers plus raide que celui des armatures seules. La figure (3.7) tirée du [Code Modèle 90 du CEB] compare les courbes contrainte-déformation d'une armature seule (courbe ε_s) et d'une armature noyée dans un élément de béton armé, incluant la tension stiffening (courbe $\varepsilon_{s,m}$). La barre entourée du béton a un comportement plus raide et moins ductile.

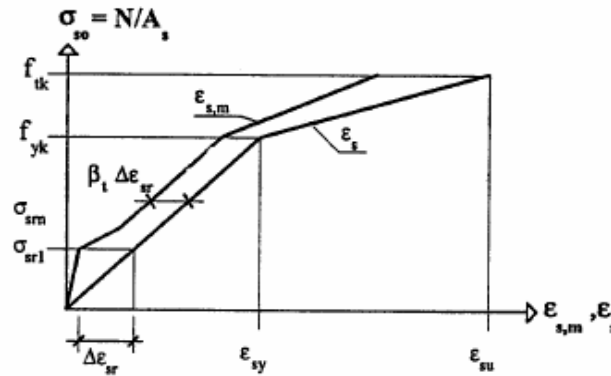


Figure 3.7 : Courbe contrainte – déformation simplifiée pour tenir compte l’effet de la tension stiffening des armatures [CEB-FIP, 1993].

3.4.2 Adhérence acier-béton

L’adhérence est l’interaction entre l’acier et le béton, elle joue un rôle principal surtout dans les structures en béton armé. Cette dernière peut être attribuée à trois phénomènes différents : (1) une adhérence d’origine chimique, (2) une adhérence due au phénomène de frottement entre les bétons et les barres d’acier et (3) une interaction mécanique entre le béton et l’acier. Elle constitue l’action des forces de liaison qui s’opposent au glissement des armatures par rapport au béton qui les enrobe.

D’après cette classification, il est claire que la barre lisse de renforcement présente un frottement prépondérant entre les deux matériaux ce qui permet à de grandes valeurs de glissement des barres d’acier. Dans l’autre partie, pour les armatures de haute adhérence, l’interaction mécanique domine le comportement de la liaison béton-acier. Il est évident qu’à partir des résultats expérimentaux; l’état de surface des barres de renforcement influe considérablement sur l’efficacité de la propriété de l’adhérence. Il s’agit donc de la surface des nervures des barres d’acier, espacement et orientation des nervures. De même, il est bien constaté que le caractère d’adhérence des aciers à nervures assez espacées est plus élevé que celle des barres à nervures moins espacées [Esfahani, 1998]. Dans le même cadre, les tests de Zuo (2000) ont montré que la résistance de l’adhérence augmente proportionnellement avec la projection de la surface des nervures suivant la disposition des barres d’acier.

Lorsqu'une fissure se forme dans un élément en béton armé, la déformation du béton devient nulle au niveau du plan de la fissure. Par conséquent, le béton au voisinage de la fissure tend d'acquérir sa rigidité originale à une distance caractéristique appelée la longueur de transfert. C'est dans cette région que l'effet de transfert de forces entre le béton et l'acier a eu lieu.

En pratique, elle intervient dans le calcul des longueurs d'ancrage et de recouvrement et dans le calcul d'ouverture des fissures. Elle peut être représentée par la relation analytique contrainte d'adhérence (τ) déplacement relatif (s) de la figure (3.8) [Code Modèle 90 du CEB].

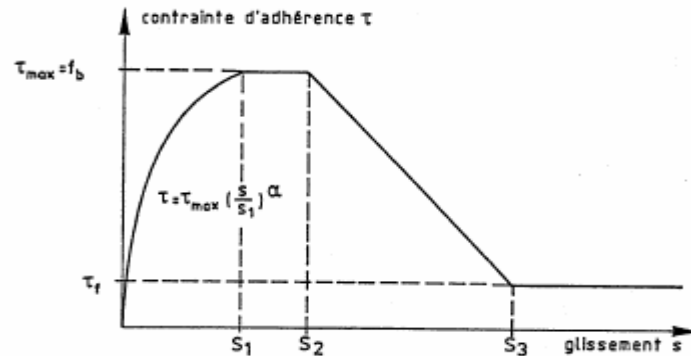


Figure 3.8 : Relation contrainte d'adhérence – glissement sous charge monotone croissante [CEB-FIP, 1993]

La négligence de la prise en compte dans un modèle a pour conséquence de ne pas pouvoir représenter correctement le transfert des efforts de l'armature vers le béton et inversement. Il est difficile (voire impossible) de voir apparaître des mécanismes de bielles comprimées et tirants tendus sans la prise en compte d'une loi d'adhérence entre le béton et l'acier. Cela affecte les résultats locaux mais pas le comportement global de la structure ou de l'élément étudié. Sa prise en compte n'est primordiale que dans le cas où la perte d'adhérence entraînerait la ruine de l'élément en béton armé.

3.5 Modélisation de la fissuration de l'acier

A nos jours, la modélisation complète du comportement du béton pose encore des problèmes, surtout en présence de la fissuration. Plusieurs modèles

locaux ou non, basés sur mécanique de la rupture ou la mécanique d'endommagement ont été proposés. Dans cette partie, les principaux modèles de fissuration sont décrits dans les sections suivantes. Cette illustration permet au lecteur d'analyser et de différencier entre les différents modèles basés sur la théorie de fissuration du béton.

3.5.1 Les modèles de fissuration

Les modèles en éléments finis des structures en béton armé sont généralement basés sur la substitution du milieu composite par un ensemble d'éléments représentant le béton et les barres de renforcement ainsi que celui du milieu d'interface. Récemment, trois techniques sont utilisées conduisant à la modélisation des barres de renforcement dans les modèles du béton de structure : le modèle discret, le modèle réparti et le modèle intégré [El-Mezaini, 1991].

La technique choisie dépend de la nature de l'application à exécuter et le degré de détails nécessaire pour établir le modèle. Cependant, la majorité de difficultés de modélisation du comportement du béton armé compte dans le développement d'une effective et réelle formulation qui conduit à des résultats pertinents.

3.5.1.1 La modélisation discrète des armatures

Dans le modèle discret, qui est le modèle employé dans cette étude, les barres de renforcement sont modélisées en utilisant des éléments barres ou des éléments poutres qui sont connectés aux nœuds des éléments membranaires "béton". En conséquence, il y a des nœuds communs entre la maille du béton et la maille des aciers (figure 3.9). En outre, puisque les barres d'acier sont superposées dans la maille béton, le béton existe quand même dans les régions occupées par les aciers.

L'inconvénient de l'utilisation du modèle discret est que la discrétisation du béton est limitée par la position des armatures, c'est pour cette raison, l'adhérence parfaite entre le béton et l'acier est en général plus utilisé.

Dans les cas où l'adhérence est à forte nécessité, des ressorts des éléments assimilés à des ressorts sont employés pour modéliser l'adhérence entre les éléments de béton et les éléments d'acier. Dans ce cas, la liaison est assurée entre les nœuds des éléments membranaires et les éléments barres ayant les mêmes nœuds géométriques. L'interface est modélisée par des éléments de dimensions physiques nulles et uniquement leurs propriétés mécaniques ont une importance fondamentale dans le modèle du matériau composite à envisager "béton-acier-adhérence".

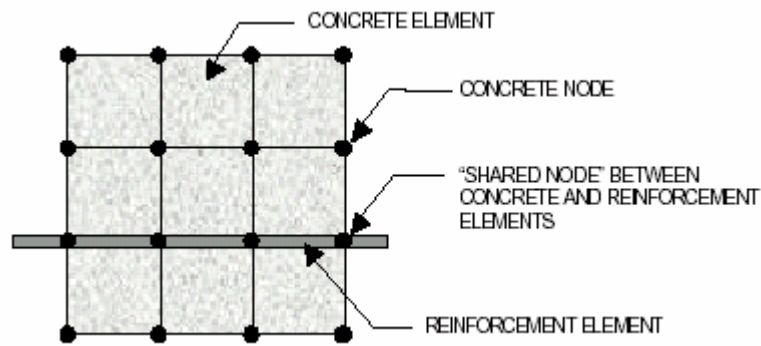


Figure 3.9 : Modélisation discrète du béton armé.

3.5.1.2 La modélisation intégrée des armatures

Pour dépasser la dépendance du maillage dans la modélisation discrète, la formulation intégrée est toujours indépendamment de la discrétisation du béton (figure 3.10). Dans cette approche, la rigidité des éléments des éléments barres est formulée de façon séparée de la rigidité des éléments béton malgré que ces éléments ont été introduits dans le béton à condition que les déplacements des nœuds des éléments barres sont identiques que ceux des éléments membranaires qui l'entoure. Cela permet de dire que les éléments du béton et leurs points d'intersection avec les nœuds des éléments barres sont identiques et utilisés pour établir la position du nœud des éléments barres.

Pour atteindre des résultats satisfaisants, la représentation intégrée est généralement utilisée avec des éléments finis d'ordre supérieur. D'après [Travárez, 2001], dans les structures où le renforcement présente une difficulté,

dans ce cas, la formulation intégrée est avantageuse. Cependant, cette approche nécessite toujours un rajout de nœuds supplémentaires qui peut engendrer une augmentation du nombre de degré de liberté imposant de sa part un temps important de calcul.

Les résultats des plusieurs chercheurs ont apporté connaissances que toutes les analyses effectuées basées sur une représentation intégrée sont en général plus efficaces que celles effectuées avec l'approche discrète mais son application à l'analyse des structures de l'état actuel semble très chère d'un jour à un autre [Yamaguchi, 1993].

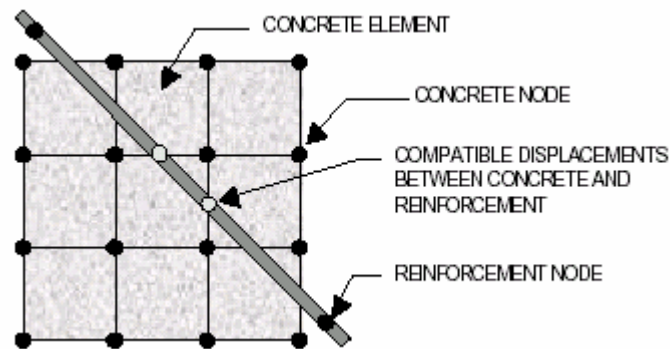


Figure 3.10 : Modélisation intégrée du béton armé.

3.5.1.3 La modélisation répartie des armatures

Dans la modélisation répartie, les barres d'acier sont supposées uniformément réparties (figure 3.11). Dans cette approche, les propriétés du modèle matériel sont construites à partir des propriétés individuelles du béton et de l'acier. Cette technique est largement utilisée dans le type de structures où les détails de renforcement ne sont pas essentiels pour capturer la réponse totale de la structure.

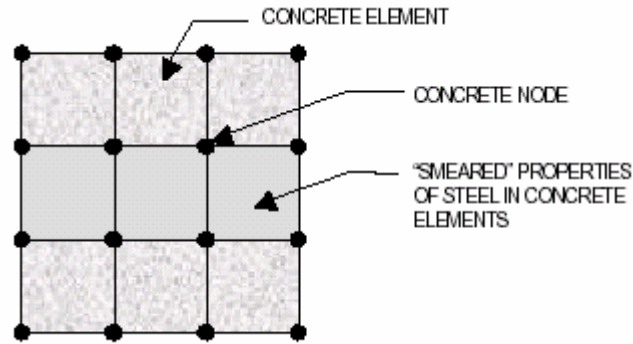


Figure 3.11 : La modélisation répartie du béton armé.

3.5.2 La formulation théorique de comportement du béton fissuré

Il s'agit d'établir la nouvelle loi de comportement de la fissuration en réécrivant les équations constitutives de la loi de comportement local d'une fissure. Il s'agit donc de réécrire avec une représentation matricielle les paramètres nécessaires qui reflètent le comportement du béton fissuré.

La méthode de la fissuration distribuée accepte la même relation de comportement sécant qu'incrémental de la fissure. Ceci n'est vrai que si la matrice de rigidité de la fissure est constante au cours de sa propagation. Le fait de choisir un coefficient de conservation de cisaillement constant conduit à un blocage des contraintes car la contrainte tangente de la fissure ne diminue jamais au cours d'ouverture de la fissure. Par contre, si ce coefficient est une fonction décroissante de l'ouverture de fissuration, la matrice de rigidité tangente n'est plus constante mais on continue à cumuler les erreurs, faute d'utilisation de la loi sécante à la place de la loi incrémentale. Par conséquent, on accumule avec les incréments des rigidités résiduelles même si la fissure est complètement ouverte.

Se plaçant dans le repère local lié à une fissure, le travail à effectuer consiste à trouver la relation entre l'incrément de contrainte dans le milieu fissuré et l'incrément de déformation correspondante.



Figure 3.12 : Domaine fissuré et état de déformation de la fissure

Lorsque le critère de rupture celui de Rankine, par exemple, est atteint à un état de contraintes de traction σ_{ij} , le béton se fissure perpendiculairement à la direction de la contrainte principale majeure. Après fissuration, le béton ne transmet plus de contraintes dans cette direction, le comportement devient donc uniaxial accompagné de transfert de contraintes à travers les fissures. Suzuki et Chen (1983) considèrent que le comportement du béton fissuré est élastique linéaire en compression simple, mais [Reynouard, 1974] et [Lemaire, 1975] conduisent leurs études avec la loi parabole-rectangle. Après fissuration, le comportement du béton devient orthotrope et la relation contrainte-déformation dans le repère local, s'écrit ainsi :

$$\Delta\sigma_{ij} = [C_1] \Delta\varepsilon_{kl} \quad (3.3)$$

Où: $[C_1]$ est la matrice d'élasticité qui lie les contraintes aux déformations où le béton est dans un état fissuré. C'est la partie primordiale de ce travail, elle consiste à chercher et identifier les paramètres élastiques de cette matrice, d'une autre manière, nous cherchons alors une loi de comportement de ce type qui permet d'introduire la contribution du béton fissuré, la tenue en considération de la tension stiffening, dans le comportement global des poutres en béton armé. Elle se diffère d'un modèle à un autre. Dans la littérature, la formulation théorique des modèles primaires était assez simples dans laquelle les formulations de tension stiffening et de cut-off sont données par :

$$\text{Pour le modèle cut-off : } [C_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_b & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Pour le modèle tension stiffening : $[C_1] = \begin{bmatrix} E_{ts} & 0 & 0 \\ 0 & E_b & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix}$ (3.5)

Avec : E_b, E_{ts} sont respectivement le module de l'élasticité du béton sein (non endommagé) suivant la direction de la fissure et le module de tension stiffening suivant la direction perpendiculaire à la fissure. De même, G et β sont respectivement le module d'élasticité transversal et le coefficient de transfert de cisaillement à travers les fissurés.

Pour traiter le comportement du béton fissuré dans le comportement global, deux cas peuvent être envisagés : (1) le comportement du béton fissuré de type fragile ; option Cut-off et (2) le comportement du béton fissuré de type adoucissant ; option Tension-stiffening. Leurs représentations graphiques sont données par la figure suivante (figure 3.13).

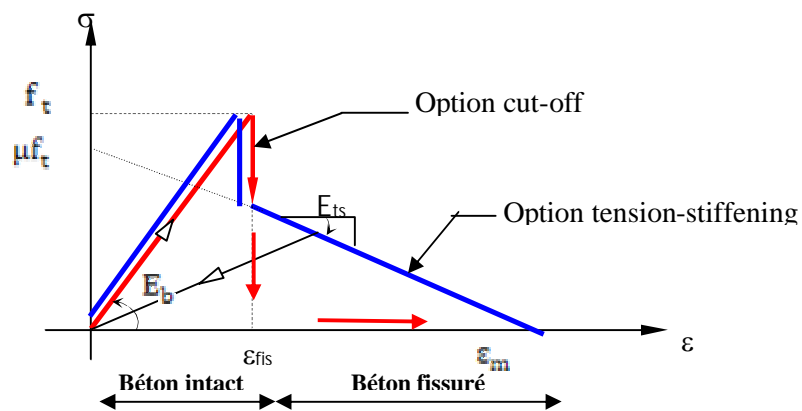


Figure 3.13 : Comportement du béton fissuré

3.5.2.1 Comportement du béton fissuré : Option cut-off

Dés que le critère de fissuration est atteint on observe que la contrainte maximale majeure de traction du béton chute à zéro (figure 3.13) ce qui implique un comportement du béton de type Cut-off. En respectant la supposition que le béton ne se contribue pas, dans ce cas, la contrainte qui

provoque la fissuration dans le béton, se transforme en forces internes nodales et le vecteur correspondant s'évalue par la formule suivante :

$$\{F_i\} = \int_V [B]^T \{\sigma_{fis}\} dv \quad (3.6)$$

σ_{fis} Est la contrainte qui a provoqué une fissure, $\{F_i\}$ est le vecteur de forces internes dû à la relaxation de la contrainte de fissuration, $[B]$ est la matrice géométrique liant le champ de déformations à celui de déplacements évalués aux niveaux des nœuds de l'élément finis fissuré et dv est l'élément de volume.

Après fissuration, il y a une variation subite des contraintes et des déplacements comme l'illustre la figure (3.13).

Dans le cas où la fissuration est suivant la première direction avec un comportement du béton fissuré de type cut-off, la matrice d'élasticité dans le repère orthotrope $[C_l]$ s'écrit :

$$[C_l] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_b & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Et si la fissuration est suivant la deuxième direction avec le même comportement la matrice $[C_l]$ s'écrit :

$$[C_l] = \begin{bmatrix} E_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Le passage du repère local au repère global, il est nécessaire d'utiliser la matrice de transformation, permettant d'écrire la relation entre les contraintes et les déformations correspondantes. Cette matrice de transformation $[T]$ s'écrit :

$$\Delta\sigma_{ij} = [T]^{-1} [C_l] [T]^{-IT} \Delta\varepsilon_{kl} \quad (3.9)$$

La matrice de transformation est :

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \frac{1}{2} \sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\frac{1}{2} \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

3.5.2.2 Comportement du béton fissuré : Option tension stiffening

Le terme ‘‘tension-stiffening’’ est utilisé pour représenter l’effet d’interaction béton-acier au niveau de la fissure. Cet effet a été pris en compte pour la première fois, en analyse par éléments finis par [Scanlan et Murray, 1972]. Ils ont introduit dans la matrice $[C_I]$ un terme supplémentaire E_{ts} correspondant au module tangent de la branche descendante du comportement adoucissant du béton fissuré (figure 3.13). Cette loi apporte une importance particulière à l’analyse du comportement du béton fissuré, la même loi de comportement a récemment été utilisée par [Assan, 2002].

La tension stiffening se rapporte à la capacité des éléments fissurés en béton armé de porter des contraintes moyennes additionnelles suivant la direction qui est perpendiculaire à la fissure et ainsi offre la rigidité additionnelle aux éléments après fissuration.

On peut également écrire la matrice d’élasticité $[C_I]$ comme suit :

$$[C_I] = \begin{bmatrix} E_b & 0 & 0 \\ 0 & E_{ts} & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Toutes transformations dans le repère principal peuvent être effectuées en appliquant la formule (3.9).

Si le béton est fissuré suivant la première direction la matrice d’élasticité dans le repère orthotrope $[C_I]$ s’écrit :

$$[C_I] = \begin{bmatrix} E_{ts} & 0 & 0 \\ 0 & E_b & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Et si la fissuration du béton est suivant la deuxième direction la matrice $[C_I]$ s’écrit :

$$[C_1] = \begin{bmatrix} E_b & 0 & 0 \\ 0 & E_{ts} & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Si le béton est fissuré suivant les deux directions, la contrainte de cisaillement transférée par les fissures est nulle et la matrice $[C_1]$ s'écrit :

$$[C_1] = \begin{bmatrix} E_{ts1} & 0 & 0 \\ 0 & E_{ts2} & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

E_{ts1} , E_{ts2} sont les pentes des droites suivant les directions perpendiculaires aux fissures dans le cas où le béton se fissure suivant deux directions d'orthotropie.

3.5.2.3 Effet de tension stiffening

Le comportement non linéaire des structures en béton armé est effectivement influencé par la fissuration du béton. Dès que la fissuration se produit dans le matériau béton ce dernier perd la condition de continuité. Cela résulte un changement considérable de ces propriétés et de la distribution des contraintes. Le comportement de la zone fissurée représente le phénomène d'adhérence entre l'acier et le béton à l'interface. Le béton intact entre deux fissures adjacentes ayant la capacité de reprendre les forces de traction transférées par les barres d'armatures ; cette capacité est appelée : l'effet de **tension-stiffening**.

Récemment, plusieurs travaux de recherches qui prennent en considération l'effet de la tension-stiffening, ont été présentés [Vecchio et Collins 1982], [Chan et al 1993], [Choi et Cheung 1996], [Kwak et Kim 2001] améliorant considérablement l'analyse non linéaire des structures en béton armé. Néanmoins, plusieurs modèles sont simples dont l'effet de la tension-stiffening peut être seulement représenté par des formulations s-e des branches descendantes dans la région post-fissuration du béton.

Une autre approche de représentation de l'effet de tension-stiffening consiste à augmenter la rigidité des barres d'acier après fissuration du béton. Dans ce cas, l'effet de tension-stiffening est exprimé en fonction du

pourcentage d'acier, de la résistance en traction et du module d'élasticité du béton.

Les fissures dans le béton se développent et se propagent dans la direction normale à la contrainte principale majeure. Après fissuration, le béton reste quand même capable partiellement de résister aux forces de traction dues à la liaison entre les deux matériaux.

Enfin, plusieurs modélisations de comportement de l'interface ont aussi été développées pour simuler l'effet de tension-stiffening du béton et élargir son application à des structures planes en béton armé.

Cette étude apporte une contribution pour tenir en compte de l'effet d'adhérence. Dans ce contexte, nous avons présenté un modèle de comportement du béton fissuré basé sur la dissipation de l'énergie au moment de fissuration. La relation contrainte-déformation chute brusquement, ensuite le béton reprend de nouveau sa capacité partielle de résister aux contraintes de traction. La loi de dégradation suit une fonction exponentielle comme le montre la figure (3.14).

Il nous semble que cette représentation de l'effet de tension-stiffening, donne des résultats satisfaisants et simule bien le comportement du béton fissuré vis à vis les résultats obtenus par [Grelat 1978]. La participation du béton fissuré peut alors être traduite entre deux bornes qui sont la résistance à la traction du béton et à la contrainte limite d'écoulement des aciers.

Dans le cas des problèmes plans, le comportement du béton au delà de fissuration a connu des développements considérables surtout avec l'innovation technologique dans le domaine informatique qui a facilité la tâche numérique. Plusieurs modèles du comportement des bétons en tenant compte l'option tension stiffening ont été développés. Parmi les modèles numériques, on peut citer celui proposé par Okamura (1991) et qui a été utilisé par Belarbi (1994) et Bakir (2006) où la contrainte moyenne de traction σ_t et la déformation moyenne correspondante ε_t varie suivant une loi polynomiale dans laquelle la contrainte effective décroît progressivement avec l'augmentation de la

déformation correspondante. Cette variation est donnée par la relation suivante :

$$\sigma_t = f_t \left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_t} \right)^c \quad (3.15)$$

Où f_t est la résistance du béton à la traction, ε_{cr} est la déformation de fissuration et c est un paramètre qui décrit la forme géométrique de la courbe de tension stiffening. Pour des éléments en béton armé, le paramètre c est considéré constante et égal à 0.40 mais pour les éléments en béton, la valeur de ce paramètre à tenir en compte déduit en général de la théorie de la bande de fissuration basée principalement sur le principe de l'énergie de fissuration (figure 3.14). Dans ce cas, l'énergie de fissuration peut être traitée comme une propriété matérielle dépendant de la taille des agrégats utilisés dans la formulation du béton et de la résistance du béton en compression.

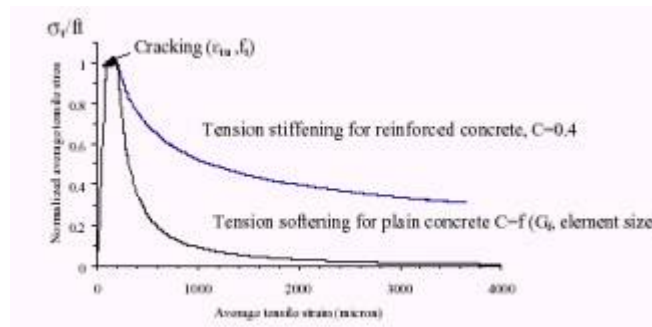


Figure 3.14 : Les modèles de tension stiffening du béton et du béton armé.

Des études établies par Ahn (1996) ont montrés que la contrainte après fissuration dans le béton peut être due suivant deux manières différentes : (1) l'adoucissement en traction du béton lui-même et (2) le mécanisme d'adhérence entre le béton et les barres d'acier. Ahn décrit une relation entre la contrainte moyenne et la correspondante de déformation moyenne. Les mêmes observations ont été soulevées à partir des essais établis sur des éléments en béton armé, la première région correspond à la phase non fissurée où le béton travail conjointement avec les barres de renforcement, (2) la deuxième phase est la région principale de représentation de tension stiffening et (3) la

troisième région, la traction appliquée est absorbée par l'adhérence entre le béton et l'acier (figure 3.15).

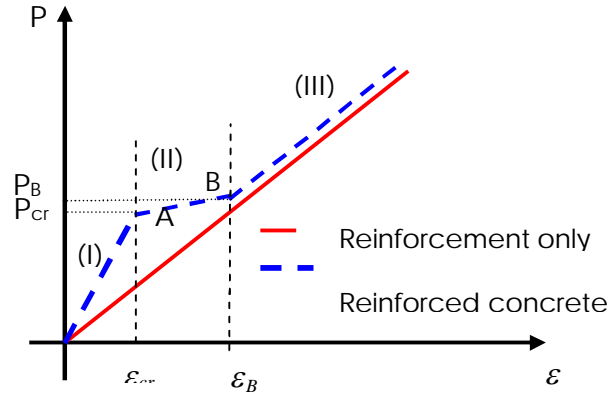


Figure 3.15 : Courbe charge-déplacement maximum d'un élément en béton armé.

Il nous semble que l'effet propre de fissuration ne peut être négligé dans les structures en béton armé. La fissuration dans les matériaux est un phénomène mécanique qui se produit lorsque un certain critère, tel que celui de résistance est violé. Ce phénomène peut apporter des changements rhéologiques sur le béton au niveau de la face fissurée. Il apparaît que mécanisme de fissuration du béton ne peut être pris en compte avec une manière rigoureuse dans un milieu continu. Pour cette raison, nous avons tenté d'apporter une contribution dans ce cadre en vue de projeter le phénomène de tension stiffening ou de sa prise en compte d'une manière impérative dans le comportement des poutres en béton armé.

Au moment de fissuration, la structure perd une énergie importante de déformation et après la fissuration du béton, la contrainte dans le béton suivant la direction perpendiculaire à la fissure peut être exprimée par :

$$\sigma_t = \beta f_t \tag{3.16}$$

Où β est appelé le facteur de l'énergie perdue due à la formation des fissures dans le béton.

Après fissuration, la structure peut rendre une certaine énergie perdue due au phénomène de fissuration du béton. Ce retour énergétique se naît à partir de la

face fissurée et il croît dès que la section s'éloigne de la face fissurée. C'est dans ce concept relatif au comportement du béton fissuré, une loi polynomiale est attribuée en vue de modéliser l'effet de tension stiffening dans le comportement structural des poutres en béton armé. Dans ce cas, la relation contrainte-déformation du béton après la fissuration est donnée par :

$$\sigma_t = (1-\beta) f_t \left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_t} \right)^c \quad (3.17)$$

Où σ_t est la contrainte moyenne de traction normale à la fissure, ε_{cr} et ε_t sont respectivement la déformation de fissuration et celle suivant la normale à la fissure. Le paramètre c (équation 3.17) décroît la forme de la courbe descendante de la contrainte-déformation du béton en traction. Pour les structures en béton, le paramètre c est défini par la théorie de la bande fissurée basée sur l'énergie de fissuration qui présente une sensibilité et une dépendance à la taille des éléments finis utilisés dans l'analyse. Il est considéré que dans plusieurs études égal à une valeur constante ($c= 0.40$) pour le matériau béton armé (figure 3.16).

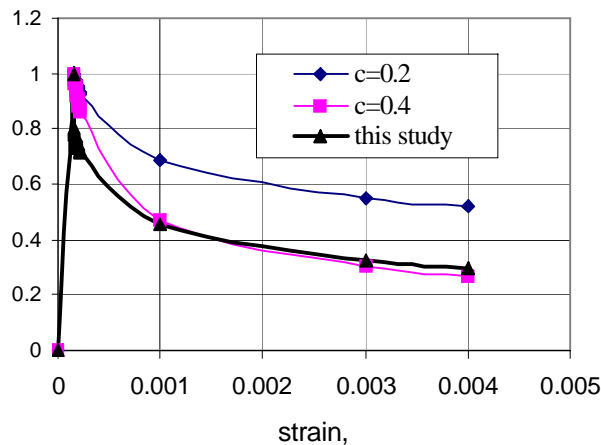


Figure 3.16 : Modèle de tension-stiffening du béton armé ($\beta = 0.2$).

La limite de la contribution de tension stiffening dans la structure composite est aussi basée sur le principe énergétique. Après fissuration du

béton, l'énergie de propagation des fissures par unité de surface g_F est une propriété matérielle et qu'elle a été définie par l'équation suivante :

$$G_F = w g_F = w \int_0^{\varepsilon_{tu}} \sigma d\varepsilon \quad (3.18)$$

Où G_F est l'énergie de déformation par unité de volume et w est la largeur de la zone endommagée.

En utilisant l'équation 7, l'énergie de fissuration peut être exprimée par :

$$G_F = w \left[\frac{f_t^2}{2E} + (1-\beta) \frac{f_t \varepsilon_{cr}}{1-c} \left(\frac{\varepsilon_{tu}}{\varepsilon_{tu}^c} - \frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{cr}^c} \right) \right] \quad (3.19)$$

La déformation limite de fissuration prend, dans ce cas, la forme suivante:

$$\varepsilon_{tu} = 1-c \sqrt{\left(\frac{G_F}{w} - \frac{f_t^2}{2E} \right) \frac{1-c}{1-\beta} \frac{\varepsilon_{cr}^{-c}}{f_t} + \varepsilon_{cr}^{1-c}} \quad (3.20)$$

3.6 Modélisation du comportement de l'acier de renforcement

Contrairement que le béton les propriétés de l'acier de renforcement sont généralement indépendantes de l'environnement et du temps. Une spécification simple de la relation contrainte-déformation est suffisante pour définir les propriétés des matériaux utilisées dans l'analyse des structures en béton armé.

La figure (3.17) montre la courbe typique de la relation contrainte déformation pour des barres d'acier utilisées dans les constructions en béton. Cette dernière est symétrique c'est-à-dire elle montre que la courbe de contrainte déformation en traction est la même en compression

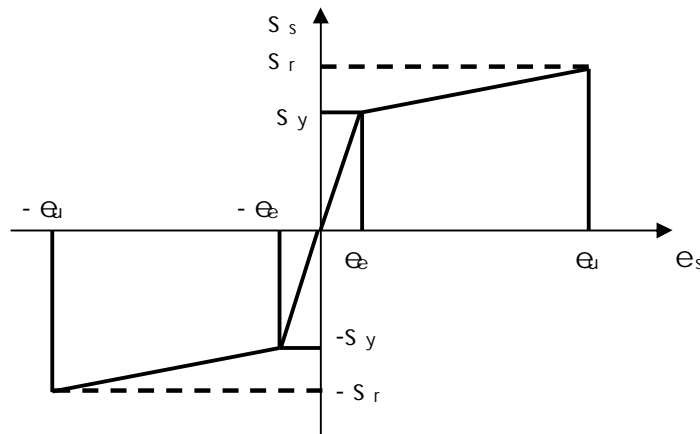


Figure 3.17 : Relation contrainte-déformation simplifiée.

Puisque l'acier de renforcement est employé dans les constructions en béton sous forme de barres ou de fil, il n'est pas nécessaire de présenter les complexités des relations constitutives tri dimensionnelles de ce dernier. Pour la provenance informatique il suffit souvent d'idéaliser la relation d'une façon unidimensionnelle.

Le comportement des barres d'acier est donc unidimensionnel. L'adhérence entre l'acier et le béton est assumée pour rester entièrement parfaite.

$$\{d\sigma_i^s\} = [C^s] \{d\varepsilon_i^s\} \tag{3.21}$$

La contribution de la rigidité des barres d'acier dans la structure est considérée suivant La direction de leur disposition. la matrice de rigidité est donnée par :

E_s : Module de Young de l'acier de renforcement utilisé, il est remplacé par le module plastique E_p si la contrainte effective dans l'acier dépasse la contrainte d'écoulement σ_y (figure 3.17).

Dans le domaine élastique la matrice constitutive matérielle prend la forme suivante :

$$[C_1] = \begin{bmatrix} E_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

Et la contrainte des aciers s'écrit :

$$f_s = E_s \varepsilon_s \quad \varepsilon_s \leq \varepsilon_y \quad (2.23)$$

Dans le domaine plastique, la courbe contrainte-déformation des barres d'acier intégrées dans le béton s'écrit comme suit:

$$f_s = (E_s - E_p) \varepsilon_s + E_p \varepsilon_y \quad \varepsilon_y \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{cu} \quad (2.24)$$

Avec :

f_s : Est la contrainte dans les barres d'acier, ε_s est la déformation correspondante et ε_y est la déformation d'écoulement à partir de laquelle le comportement des barres de renforcement dans le domaine plastique et qu'il s'appelle la déformation de la limite élastique.

3.7 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre le cadre théorique de la procédure que nous voulons présenter. Ce cadre enveloppe l'ensemble des formules nécessaires de comportement du matériau composite béton-armé. Il est difficile de modéliser la réponse du matériau composite avec toutes les complexités liées aux comportements des matériaux : béton, acier ainsi que le milieu interface. En plus, plusieurs phénomènes peuvent accompagner leurs comportements et particulièrement le matériau béton.

Il est évident que le matériau acier présente un comportement largement connu et ne nécessite pas des développements suite à sa formulation matérielle. Le comportement du matériau acier est bien connu déduit de plusieurs essais expérimentaux sur des échantillons de barres d'acier. De la même manière, le milieu interface, de sa part, présente de plusieurs difficultés non seulement à la nature de réponse locale mais au niveau de l'interface en vue de représenter la façon de la liaison entre le béton et l'acier. Mais, le but de ce travail consiste à la modélisation du comportement des bétons au delà de leur fissuration, pour cette raison, une adhérence parfaite est considérée pour faciliter la tâche lourde qui nous oppose surtout au niveau de l'implémentation numérique. Enfin, toujours lié à la modélisation de cette approche, le comportement du matériau

Chapitre 3 : Comportement mécanique des matériaux et formulation théorique

béton est bien exposé dans ce chapitre en détail. Cette modélisation ne concerne non seulement le comportement propre du matériau béton mais d'autres phénomènes d'accompagnement sont ainsi modélisés, tels que : le transfert des contraintes de cisaillement entre les fissures, l'effet d'adhérence et l'effet de goujon.

La modélisation décrite ci-dessus est basée sur un principe énergétique au moment de fissuration, le béton perd considérablement une énergie de déformation brutalement et qu'il récupère d'une manière croissante en fonction de la déformation principale majeure. Enfin, la modélisation développée est implémentée dans un programme numérique déjà établi au sein du groupe de recherche " Modélisation du comportement non linéaire des structures en béton armé".

A la fin, après l'établissement de l'approche numérique, les résultats numériques de cette simulation numérique sont présentés au chapitre 5. La confrontation des résultats numériques et les données expérimentales dont dispose la bibliographie montre des concordances favorables prouvant la performance et les fondements de la démarche proposée.

Chapitre 4

La méthode des éléments finis

4.1 Introduction

Dans les problèmes relevant de la mécanique des structures, l'ingénieur recherche la répartition, ou champ, des contraintes qui régneront dans la structure étudiée. A l'occasion il peut être nécessaire de calculer les déplacements en quelques points particuliers afin de s'assurer que les spécifications de flèche sont bien respectées ; dans certains cas également, et en particulier lorsque les charges appliquées ou les propriétés de la structure sont variables dans le temps, c'est dans son entier qu'il faut déterminer la distribution « ou champ » des déplacements. Le champ des contraintes doit être l'image d'un système de forces extérieures et intérieures se trouvant partout en équilibre, et simultanément les déplacements doivent rester continus (ce sont les conditions d'équilibre et de compatibilité).

Pour un problème donné, la première étape dans la détermination du système des contraintes et des déplacements consiste à définir des équations régissant la solution et qui prescrivent sous une forme ou sous une autre, la satisfaction des conditions d'équilibre et de compatibilité.

La seconde étape est la résolution de ces équations, lorsque le problème étudié est de nature bi ou tri dimensionnel, il s'agit d'équations aux dérivées partielles. Pour résoudre ces dernières il nous faut introduire des méthodes de calcul adéquates, on trouve plusieurs méthodes numériques telles que la méthode des différences finis, la méthode des frontières et la méthode des éléments finis. Notre étude va se baser sur cette dernière.

La méthode des éléments finis a émergé en tant qu'une des méthodes générales les plus utilisés pour l'analyse structurale elle a fourni les ingénieurs les outils nécessaires pour modeler et simuler pratiquement n'importe quel système structurale de technologie. En particulier les méthodes des éléments finis ont été très utiles pour modeler les problèmes impliquant le béton armé. Le principe de ces méthodes consiste à remplacer le milieu continu (structure)

en un nombre d'éléments finis dont le comportement est connu à partir d'un nombre fini de paramètres. Les éléments de la structure sont choisis suffisamment petits pour que leur comportement structural soit simple à déterminer.

Actuellement la méthode des éléments finis est considérée comme un outil efficace pour le cas de calcul des structures complexes et aussi son domaine est étendu à l'étude des problèmes non linéaires en mécanique des solides.

Le présent chapitre consiste à montrer la méthode des éléments finis et faire détailler les différents principes et les étapes de calcul de cette dernière.

4.2 Les facteurs inclus dans le comportement du béton armé

Au cours des 30 dernières années, plusieurs modèles d'élément fini pour les structures en béton armé ont été développés. Cependant, ce secteur a besoin toujours davantage de recherche, principalement en raison de la difficulté de modéliser le béton dans l'analyse d'élément fini [Ashour et Morley 1993].

Le béton armé a un comportement très complexe, impliquant des facteurs comme suit [Chang et al.1987]:

- Le comportement non linéaire du béton en termes de la réponse (contrainte déformation), (traction fissuration), raidissant biaxiale et le phénomène de la déformation adoucissante.
- La définition de la rupture des matériaux sous un état de contrainte multiaxiale.
- Modélisation du comportement de post-fissuration.
- Effet de l'interaction entre l'acier et le béton.
- effets dépendants de temps tels que le fluage, le retrait, la température et la charge.

Un autre aspect important dans l'analyse des structures en béton armé peut être pris en considération c'est le comportement du transfert de cisaillement.

Dans l'analyse des éléments finis, de tels effets peuvent être traités en employant les éléments élastiques de ressort ou par la perte de rigidité de cisaillement du béton fissuré [Chang et autres 1987]. La dernière approche est habituellement plus utile pour des buts informatiques. Le rapport de contrainte-déformation est encore compliqué par des facteurs tels que le confinement et le taux de chargement.

4.3 La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une méthode générale d'analyse structurale dans laquelle la solution d'un problème dans la mécanique continue est rapprochée par l'analyse d'un assemblage des éléments finis qui sont reliés ensemble à un nombre de points nodaux finis et représentent le domaine de solution du problème. Elle est maintenant bien admise en tant qu'une technique générale plus puissante pour la solution numérique des problèmes de technologie variée. Les applications s'étendent de l'analyse de contrainte des solides à la solution des phénomènes acoustiques, de la physique et des problèmes dynamiques liquides. En effet la méthode des éléments finis est maintenant établie comme une méthode numérique générale pour la solution des équations partielles sujettes à la frontière connue et aux conditions initiales.

4.3.1 Présentation générale de la méthode

4.3.1.1 Le maillage

Le solide est décomposé en éléments de forme géométrique simple ayant des côtés communs et dont les sommets ou nœuds sont les points d'articulation de plusieurs éléments entre eux. Ces nœuds seront les points d'application des forces intérieures ou extérieures [Paul Rapin]

L'opération de décomposition est le **maillage**. Un bon maillage doit faciliter les opérations prévues par un programme d'ordinateur. Il faut donc adopter une méthode systématique de numérotation des éléments et des nœuds.

4.3.1.2 Les méthodes

Deux méthodes sont en usage. Il en existe d'autres mais celles-ci sont les plus répandues. On en donnera un exemple pour un problème à deux dimensions.

➤ **La première méthode**

Les nœuds sont numérotés à la suite, de gauche à droite (ou de bas en haut) dans un système dextrogyre. Une numérotation distincte est utilisée pour les éléments. Elle est de même nature que la précédente [Paul Rapin] (figure 4.1).

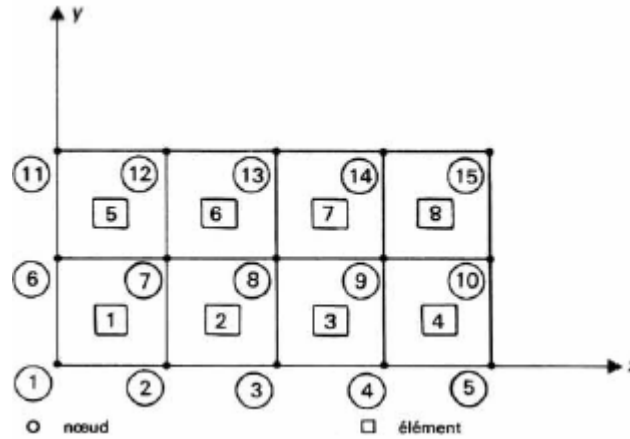


Figure 4.1 : Numérotation des nœuds et des éléments

On peut établir des tableaux donnant les numéros des nœuds appartenant à un élément (par exemple : élément 3 ; nœuds 3, 4, 8, 9). Ce système est le plus répandu.

➤ **La seconde méthode**

Chaque nœud et chaque élément sont identifiés par une paire ordonnée de nombres entiers ou indices (figure 4.2).

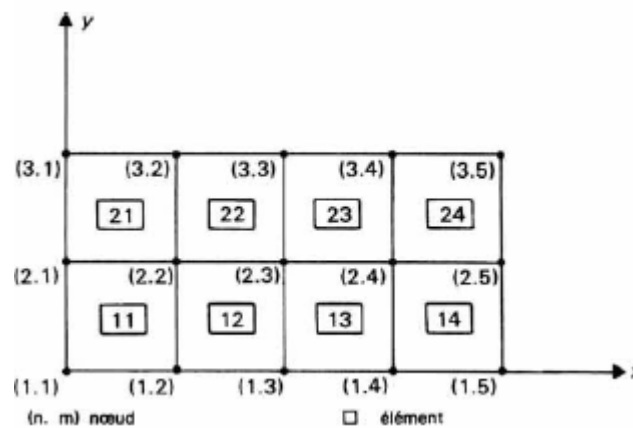


Figure 4.2 : Autre méthode de numérotation des nœuds et des éléments.

- **Nœuds** : le premier nombre désigne la ligne, le second celui de la colonne.
- **Éléments** : l'affectation des numéros se fait de la même manière. Chaque numéro a la même valeur que son nœud *sud-ouest*, soit le plus près de l'origine.

Exemple : élément 12, nœud *sud-ouest* (1.2).

4.3.2 Généralités sur les principes utilisés dans la modélisation par éléments finis

Un seul exemple peut être modélisé en éléments finis par plusieurs modèles, puisque la discrétisation (maillage) est fait dans les directions longitudinales et transversales, où la précision des résultats augmente avec l'augmentation du maillage, il existe aussi des facteurs qui influent sur cette précision qui sont : le nombre de nœuds dans chaque élément (4, 8, 9, nœuds) et le nombre de points d'intégration (points de Gauss).

En général, si en choisi un élément membranaire à 4 nœuds, en choisi un nombre de points de Gauss (2*2) c.à.d. 4 points d'intégrations, et dans les cas de 8 et 9 nœuds, en choisi (3*3) c.à.d. 9 points d'intégrations comme montrées sur la figure (4.3).

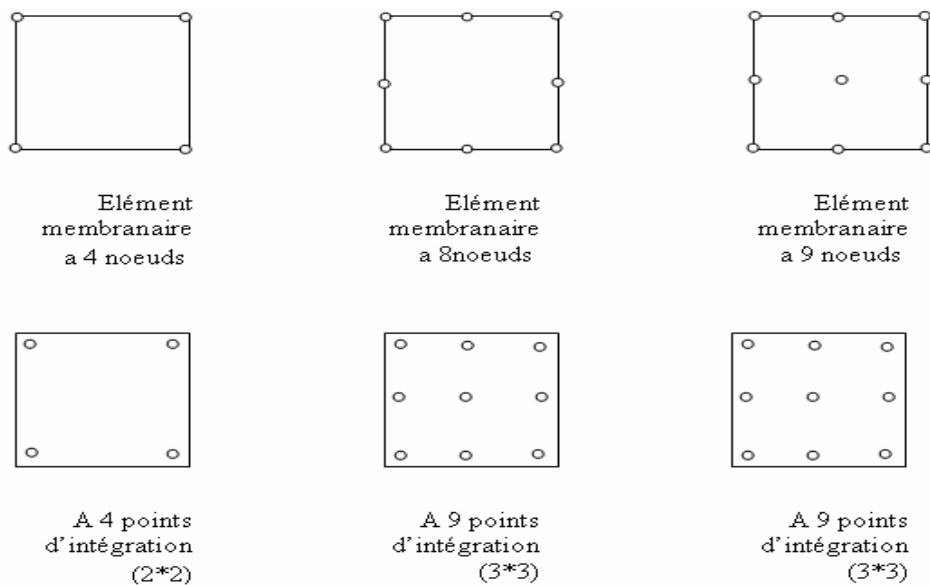


Figure 4.3 : Les éléments membranaires avec le nombre de points d'intégrations (de gauss) correspondants.

Dans le cas des éléments barres, si on choisit un élément membranaire à 4 nœuds l'élément barre va être entre deux nœuds et si on choisit un élément membranaire à 8 ou à 9 nœuds, l'acier va être compris entre 3 nœuds, comme montré sur la figure (4.4).

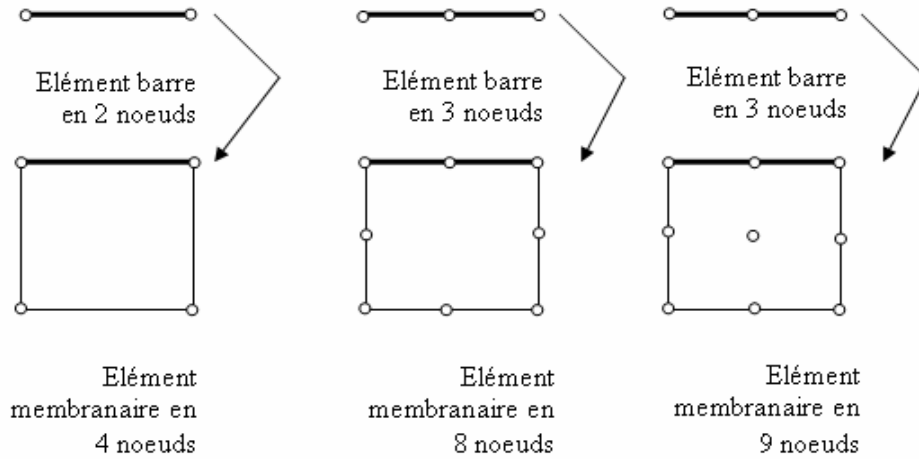


Figure 4.4 : Eléments membranaires et les éléments en barres correspondants

4.3.3 Notions utilisées dans la méthode des éléments finis

- Un système physique est caractérisé par un ensemble de variables qui dépend des coordonnées de l'espace $X = (x, y, z)$ et du temps. Le système est dit stationnaire si ces variables ne dépendent pas du temps [Dhatt & Gilbert 1984].
- Certaines variables (d) du système sont connues à priori : les propriétés physiques, les dimensions du système, les sollicitations, les conditions aux limites, etc.
- Un modèle mathématique du système permet d'écrire des relations entre (u) et (d) en utilisant des lois physiques [Dhatt & Gilbert 1984].
- Le nombre de degré de liberté (DDL) du système est le nombre de paramètres nécessaires pour définir (u) à un instant donné (t).
- Le champ de déplacement est discret s'il possède un nombre de DDL fini; et il est continu s'il possède un nombre de DDL infini. Le comportement d'un système discret est représenté par un système

d'équations algébriques. Celui d'un système continu est le plus souvent représenté par un système d'équation aux dérivées partielles ou intégration différentielles associée à des conditions aux limites en espace et en temps [Dhatt & Gilbert 1984], [Zienkiewicz, O.C., R.L, Taylor 1991].

4.3.4 Présentation matricielle de la méthode des éléments finis [Dhatt & Gilbert 1984]

Dans ce paragraphe on va présenter une organisation matricielle qui permet de faciliter le passage de la formulation à la programmation [Zienkiewicz, O.C., R.L, Taylor 1991].

Le nombre de points de connexion entre un élément fini quelconque isolé par une frontière imaginaire et les éléments voisins est infini. la détermination de la discrétisation des structures complexes est très difficile par rapport à celles simples. Cette difficulté peut être dépassée en utilisant l'exécution suivante :

- le milieu continu est subdivisé en un nombre d'éléments finis séparés par des lignes ou des surfaces imaginaires.
- les éléments sont supposés interconnectés en un nombre de points nodaux finis situés sur leurs frontières. Les déplacements de ces points nodaux seront les inconnues de base du problème comme dans le cas de calcul simple d'une structure discrète.
- le choix d'un ensemble de fonctions permet de définir de façon unique les déplacements en tout point à l'intérieur de l'élément en fonction des déplacements nodaux.
- la détermination du champ de déformation à l'intérieur en fonction des déplacements nodaux est unique, et l'état de contrainte sera facilement résolu dans les éléments et aussi aux frontières en fonction des déplacements déjà calculés.

4.3.5 Choix de l'élément de base de notre étude

Notre étude est limitée aux problèmes à contraintes planes de telle sorte que le déplacement d'un point perpendiculairement au plan de la structure étudiée peut être négligé. Le déplacement en un point est donc confondu avec celui du point du plan moyen le plus proche. En d'autres termes cela revient à supposer un déplacement uniforme selon l'épaisseur. De même les contraintes et les déformations sont supposées constantes selon l'épaisseur de l'élément. Celui-ci est donc géométriquement défini par une figure plane et il s'offre à nous de nombreuses possibilités suivant le degré de l'expression polynomiale du champ des déplacements.

Le départ de n'importe quelle analyse est lié au type d'élément à utiliser, puis subdiviser le milieu continu en un nombre d'éléments appropriés constituant des nœuds associés.

Le choix de l'élément sera donc lié au type de problème à résoudre avec, ce dernier est dépend principalement du nombre de points nodaux et ainsi de degrés de liberté correspondants. Nous pouvons également citer des plusieurs éléments avec différents types :

4.3.5.1 Eléments linéaires

La solution la plus simple est engendrée par le triangle à trois nœuds (figure 4.5). Le champ de déplacement est linéaire, les champs de déformations et de contraintes sont constants.

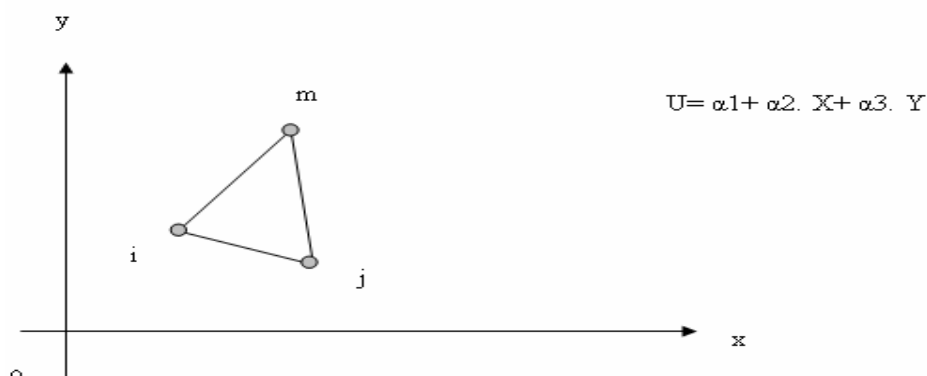


Figure 4.5 : Elément triangulaire

L'utilisation de cet élément peut faciliter la détermination de la rigidité de ce dernier dans une analyse élastoplastique car la matrice $[D^{ep}]$ est alors constante sur l'élément ce qui permet une intégration formelle de la matrice de rigidité.

Les défauts de cet élément sont bien connus. Il est « rigide », c'est-à-dire qu'il conduit à des solutions qui surestiment trop la véritable rigidité et la convergence n'est acceptable qu'avec un grand nombre d'éléments. Son champ de contrainte étant constant, il est difficile de mettre en évidence des concentrations de contraintes ou de représenter un champ de contraintes diversifié. Enfin, il ne permet de définir des frontières courbes que par segments de droite, ce qui peut obliger à utiliser un grand nombre d'éléments pour serrer au plus près la géométrie.

Le deuxième élément simple est le rectangle (figure 4.6) ce dernier est éliminé dans le cadre de cette étude car il ne permet pas de mailler n'importe quelle géométrie.

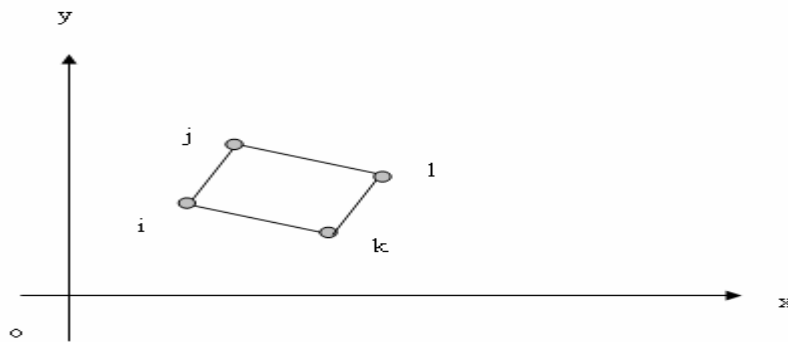


Figure 4.6 : Élément rectangulaire

4.3.5.2 Éléments sur compatibles

Deux voies sont offertes pour définir des éléments ayant des propriétés plus fines que les éléments linéaires, les éléments sur compatibles d'une part, et les éléments à nœuds intermédiaires d'autres part. Les éléments sur compatibles sont des éléments pour les quel une continuité, excessive, au moins locale du champ de déplacement est assurée, ce qui n'est pas strictement nécessaire du point de vue de la théorie de l'élasticité qui n'impose que la continuité des déplacements et non celle de leurs dérivées.

La méthode des éléments sur compatibles consiste à ajouter des inconnues aux nœuds $\{u ; v \}$, leurs dérivées $\{ u,x ; u,y ; v,x ; v,y \}$ et éventuellement $\{u,xx ; u,xy ; u,yy ; v,xx ; v,xy ; v,yy$. Ce nombre important d'inconnues permet de définir un champ de déplacement de degré élevé dans l'élément. La mise en œuvre d'une telle technique s'avère délicate et d'utilisation coûteuse comme cela a été montré dans un précédent travail. D'autre part ils ne sont pas strictement corrects du point de vue mathématique. En conséquence ils ne sont pas retenus dans cette étude (éléments iso paramétriques).

4.3.5.3 Eléments à nœuds intermédiaires

Il reste donc la possibilité d'utiliser les éléments « triangles » ou « rectangles » en incluant des nœuds intermédiaires sur les cotés. Les diverses dispositions sont nombreuses (figure 4.7).

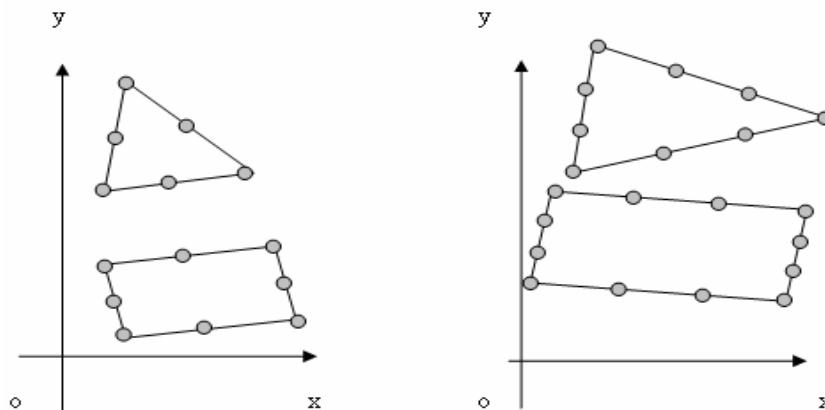


Figure 4.7 : Elément à nœuds intermédiaires

Le champ de déplacement de tels éléments est au moins quadratique. Ils sont strictement conformes. Ces éléments peuvent être en outre construits suivant la technique des éléments isoparamétriques. A partir d'un élément parent, un élément dérivé est obtenu par une transformation géométrique dans le plan, c'est qui nous intéresse dans cette étude, ou dans l'espace. Les côtés de l'élément suivent alors une courbe définie par les positions des nœuds du côté considéré (figure 4.8). L'intégration de la matrice de rigidité doit être effectuée numériquement et il n'y a pas de difficultés à ce que la rigidité $[D^{ep}]$ varie d'un point d'intégration à un autre dans le même élément.

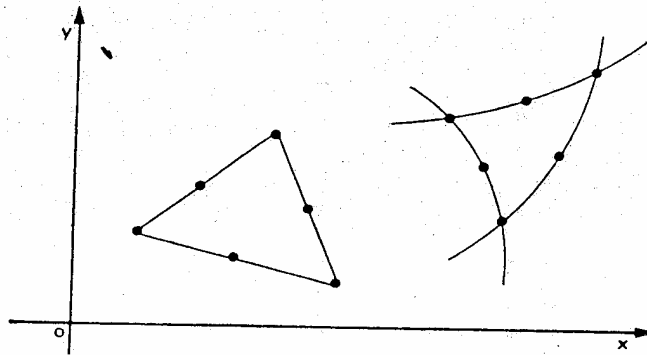


Figure 4.8 : Elément triangulaire à 6 nœuds

Parmi les plusieurs possibilités, nous retenons dans cette étude les conclusions suivantes : En augmentant le nombre des nœuds, la qualité des résultats est améliorée mais les difficultés de calcul ainsi que le coût croissent aussi rapidement. Il semble que pour les problèmes linéaires, c'est l'élément quadratique qui nous a conduits aux meilleurs résultats.

4.3.5.4 Les éléments isoparamétriques et intégration numérique

4.3.5.4.1 Eléments isoparamétriques

Dans la présente recherche les éléments isoparamétriques ont été utilisés. ces éléments sont basés sur les conditions de déplacements. Le nom isoparamétriques est venu comme la même fonction d'interpolation employée pour définir la variation de déplacement dont l'élément est aussi utilisé pour définir la géométrie de l'élément.

La procédure de base est d'exprimer les coordonnées et les déplacements de l'élément par des fonctions exprimées en termes de coordonnées normales de ce dernier. Le système de coordonnées normales est un système local défini par la géométrie de l'élément et non par son orientation dans le système globale. D'ailleurs, ces systèmes sont habituellement disposés tels que les coordonnées normales ont une magnitude unitaire aux frontières externes primaires. la figure (4.9) montre ce type d'élément et leur systèmes de coordonnées normales.

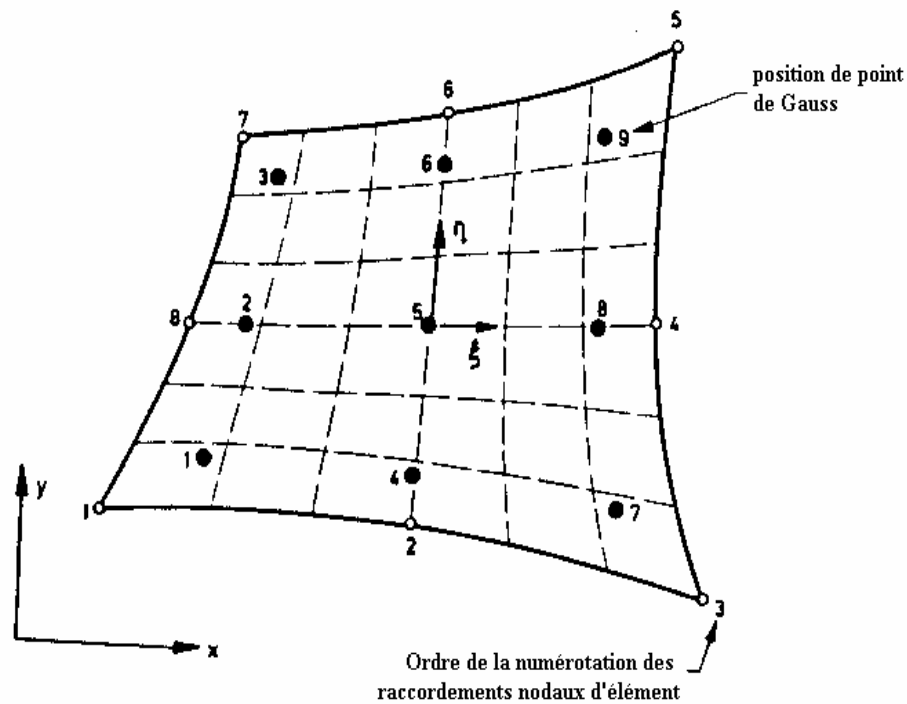


Figure 4.9 : Type d'élément isoparamétriques à 8 nœuds

Ce qui suit sont certaines raisons de l'utilisation des éléments isoparamétriques :

- Les éléments isoparamétriques sont plus précis bien que les éléments simples.
- La description simultanée de la géométrie et la variation de déplacement de l'élément par les fonctions de forme mène à l'effort de calcul efficace
- les éléments courbés peuvent modeler les frontières courbées d'une structure

Considérons un élément dont la forme doit être définie par n_1 points nœuds de coordonnées $x_i, y_i, i = 1, \dots, n_1$. ($n_1 = 4 - 8 - 12$) comme montré sur la figure (4.10).

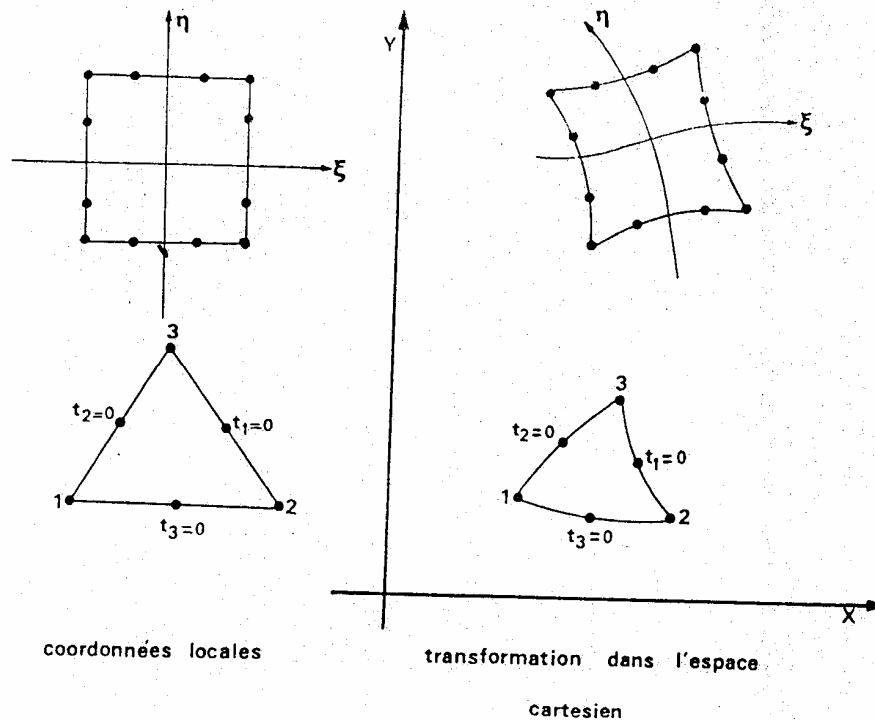


Figure 4.10 : coordonnées locales, transformations dans l'espace cartésien

4.3.5.4.2 Fonctions de forme

La fonction de forme définit la variation de champs variable et ses dérivés à travers l'élément en terme de ses valeurs aux nœuds. Donc les fonctions de forme sont profondément liés au nombre des nœuds et par conséquent au type d'élément. Ces dernières doivent assurer la continuité entre deux éléments voisins pour ne pas laisser les vides entre eux.

Il existe un grand nombre de fonctions de déplacement possibles. Toutefois, on préfère les polynômes, très maniables sur les ordinateurs et faciles à dériver ou à intégrer. Ces polynômes devront comporter autant de coefficients que de points définissant l'élément. Si l'on veut affiner, ils peuvent même en comporter davantage.

Soit un élément isoparamétriques à huit nœuds ses fonctions de forme sont données comme suit :

Pour un nœud de coin :

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1) \quad i=1, 3, 5, 7$$

(4.1)

Pour un nœud intermédiaire

$$N_i = \frac{1}{2}\xi_i^2(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2) + \frac{1}{2}\eta_i^2(1 + \eta\eta_i)(1 - \xi^2) \quad i=2, 4, 6, 8$$

(4.2)

Où : ξ et η sont les coordonnées intrinsèques de tout point dans l'élément. Par définition ξ et η ont des valeurs dans l'intervalle $[-1, +1]$.

Ces fonctions de forme font partie de la famille prétendue de Serendipity, et sont montrés sur la figure (4.11). Le déplacement u et v à un point quelconque à l'intérieur de l'élément peut être exprimé en termes de ces fonctions de forme comme suit

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) u_i \quad (4.3)$$

$$v = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) v_i \quad (4.4)$$

Pour les éléments barres à deux ou à trois nœuds leurs fonctions de forme sont données par les équations écrites ci-dessous :

Élément à deux nœuds :

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad , \quad N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (4.5)$$

Élément à trois nœuds :

$$N_1(\xi) = -\frac{1}{2}\xi(1 - \xi) \quad , \quad N_2(\xi) = 1 - \xi^2 \quad , \quad N_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi) \quad (4.6)$$

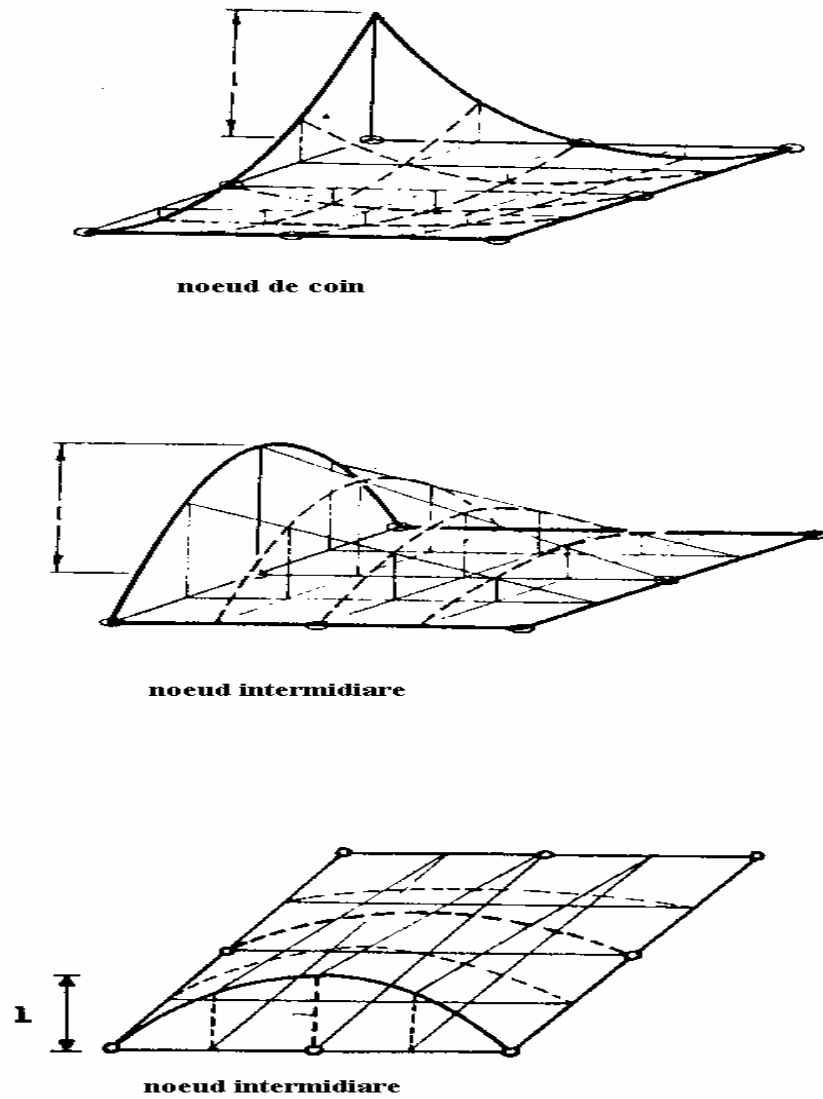


Figure 4.11 : Fonction de forme pour un élément isoparamétriques à huit nœuds

Il devrait noter que les déplacements u et v sont parallèles à l'axe x , de y et non à ξ et η . Pareillement la position d'un point dans les coordonnées globales de l'élément est donné par :

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) x_i \quad (4.7)$$

$$y = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) y_i \quad (4.8)$$

Puisque chaque élément a deux degrés de liberté à chaque nœud, à savoir le déplacement u_i, v_i alors il a un total de 16 degrés de liberté, et le vecteur nodal de déplacement d'élément δ^e peut être écrit comme :

$$\{\delta^e\} = \{(\delta_1), (\delta_2), \dots, (\delta_8)\} \quad (4.9)$$

Avec : $\{\delta_i\}$ = déplacement du nœud i

$$\{\delta_i\} = \{u_i, v_i\}$$

Après avoir établi ainsi les déplacements nodaux à tout point dans l'élément à l'intérieur sont exprimés en termes de ces derniers par les fonctions de forme $N = [(\xi, \eta)]$ comme : $\{\delta\} = \{u, v\}$

$$\{\delta\} = [N(\xi, \eta)]^T \{\delta^e\} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \{\delta_i\}$$

(4.10)

Où:

$$[N(\xi, \eta)]^T = \begin{bmatrix} N_1, 0, N_2, 0, \dots, N_8, 0 \\ 0, N_1, 0, N_2, \dots, 0, N_8 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$[N(\xi, \eta)]^T$ = Matrice de fonction de forme

4.3.5.4.3 Evaluation des contraintes et déformations

La déformation dans l'élément est exprimée par les dérivés des déplacements :

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}\}^T$$

(4.12)

$$\{\varepsilon\} = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]$$

(4.13)

On remplace l'équation (4.3) et (4.4) dans l'équation (4.13) on obtient :

$$\{\varepsilon\} = [B] \{\delta^e\}$$

(4.14)

Avec :

$$\{\delta^e\}^T = \{u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_i, v_i, \dots, u_8, v_8\}$$

Et

$$[B]^T = [B_1(\xi, \eta) B_2(\xi, \eta) \dots B_i(\xi, \eta) \dots B_8(\xi, \eta)]$$

$[B]$ = La matrice de déformation

Donc

$$[B(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$

(4.15)

Puisque les fonctions de forme N_i sont définies en termes de coordonnées curvilignes ξ et η , la transformation des coordonnées locales aux coordonnées globales sont requis dans l'équation (4.15).

L'équation qui lie x, y aux dérivées ξ et η est exprimée par :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} \\ \frac{\partial [N]}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial [N]}{\partial x} \\ \frac{\partial [N]}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial [N]}{\partial x} \\ \frac{\partial [N]}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

(4.16)

$[J]$ est la matrice dite Jacobienne elle est de l'ordre (2x2), cette dernière peut être inversée d'une manière simple par l'inversement de l'opérateur Jacobienne $[J]$ et on obtient les dérivées globales :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial [N]}{\partial x} \\ \frac{\partial [N]}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} \\ \frac{\partial [N]}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

Différencier l'équation (4.7) et (4.8) dans l'accord avec l'équation (4.17) on obtient :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ \cdot & \cdot \\ x_i & y_i \\ \cdot & \cdot \\ x_8 & y_8 \end{bmatrix}$$

(4.18)

Pour l'analyse linéaire du béton non fissuré, et avec l'absence de contraintes et déformations initiales, la relation (contrainte-déformation) peut être écrite sous la forme suivante :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

(4.19)

Avec :

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \tau_{xy}\}^T$$

Et

$$[D] = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}^T$$

Les six coefficients d_{11}, \dots, d_{33} sont les données caractéristiques d'un matériau anisotrope.

Pour un matériau isotrope soumis à un état de contrainte plane la matrice $[D]$ s'écrit comme suit :

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}$$

L'énergie potentielle totale de l'élément e peut être exprimée comme :

$$\pi_e = \frac{1}{2} \int_{v_e} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dv - \int_{v_e} \{\delta^e\}^T [N]^T \{P\} dv - \int_{s_e} \{\delta^e\}^T [N]^T \{q\} ds + \{F_p^e\} \{\delta^e\}^T$$

(4.20)

Avec :

$\{\sigma\}, \{\varepsilon\}$: sont respectivement les vecteurs contrainte et déformation

$\{P\}$: Ensemble de force par unité de volume

$\{q\}$: Pression extérieure appliquée

$\{\delta\}$: Vecteur déplacement

$\{F_p^e\}$: Vecteur charge appliqué au nœud d'élément

L'intégration est succédée le volume V_e et la superficie chargée S_e de l'élément.

Cependant de l'équation (4.19) on à :

$$\{\sigma\}^T = \{\varepsilon\}^T [D]^T = \{\varepsilon\}^T [D] \quad (4.21)$$

La matrice $[D]$ est symétrique

Pareillement de l'équation (4.12) nous obtenons :

$$\{\varepsilon\}^T = \{\delta^e\}^T [B]^T \quad (4.22)$$

Par remplacement de l'équation (4.22) dans l'équation (4.21) on obtient :

$$\{\sigma\}^T = \{\delta^e\}^T [B]^T [D] \quad (4.23)$$

Et par l'utilisation de l'équation (4.15) et l'équation (4.23) dans l'équation (4.20) nous obtenons l'équation suivante

$$\pi_e = \frac{1}{2} \int_{v_e} \{\delta^e\}^T [B]^T [D] [B] \{\delta^e\} dv - \int_{v_e} \{\delta^e\}^T [N]^T \{P\} dv - \int_{s_e} \{\delta^e\}^T [N]^T \{q\} ds + \{F_p^e\} \{\delta^e\}^T \quad (4.24)$$

Le premier terme de l'équation (4.24) est l'énergie de déformation interne, le deuxième le troisième et le quatrième terme sont respectivement la

contribution de travail de forces, la charge surfacique distribuée et la charge concentrés.

L'exécution de la minimisation pour l'élément e avec respect de déplacement élémentaire $\{\delta^e\}$ pour l'élément a comme conséquence :

$$\frac{\partial \pi_e}{\partial \{\delta^e\}} = \int_{v_e} [B]^T [D][B] \{\delta^e\} dv - \int_{v_e} [N]^T \{P\} dv - \int_{s_e} [N]^T \{q\} ds + \{F_p^e\}$$

(4.25)

$$\frac{\partial \pi_e}{\partial \{\delta^e\}} = [K^e] \{\delta^e\} - \{F^e\}$$

(4.26)

Avec : $\{F^e\} = \int_{v_e} [N]^T \{P\} dv + \int_{s_e} [N]^T \{q\} ds + \{F_p^e\}$

(4.27)

$\{F^e\}$ Sont les forces nodales qui s'applique à l'élément, et puisque le déplacement est indépendant du volume nous avons :

$$[K^e] = \int_{v_e} [B]^T [D][B] dv$$

(4.28)

$[K^e]$: est la matrice de rigidité de l'élément.

$[B]$: est la matrice reliant les déformations aux déplacements des nœuds de l'élément.

dv : Élément de volume.

Car toute l'énergie potentielle du milieu continu est la somme de contributions d'énergie de différents éléments, alors nous avons :

$$\pi = \sum \pi_e \tag{4.29}$$

Où π_e est l'énergie potentielle de l'élément (e).

L'addition des limites dans l'excédent d'équation (4.26) de tous les éléments, une fois égale à zéro, cette équation devient comme suit :

$$\{F^e\} = [K^e] \{\delta^e\} \quad (4.30)$$

L'étape finale est la solution de l'équation (3.30) pour obtenir les déplacements inconnus par :

$$\{\delta^e\} = [K]^{-1} \{F^e\} \quad (4.31)$$

La solution du système des équations pour le milieu continu complet peut être compliqué de plusieurs manières, la méthode gaussienne directe d'élimination est adoptée ici une fois que le déplacement ont été évalués, tend et l'effort sont simplement trouvés par la substitution dans les équations (3.14) et (3.19) respectivement.

4.3.5.4.4 Intégration numérique

Pour les fonctions complexes qui ne peuvent pas être intégrés explicitement, l'intégration numérique peut être effectuée. La forme générale de l'intégral en utilisant la méthode de Gauss soit :

$$\int_{-1}^{+1} F(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^m W_i F(\xi_i) \quad (4.32)$$

Où W_i : est un poids affecté au point d'intégration i .

$F(\xi)$: est la valeur prise par la fonction à intégrer au point d'intégration i d'abscisse ξ

m : Nombre total des points intégrés.

Pour prolonger des dimensions de l'équation (4.32) à deux afin de répondre entièrement à l'exigence de l'équation (4.28), on l'exige pour intégrer d'abord ce qui concerne une variable et puis en ce qui concerne deux variables.

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^{+1} \left[\int_{-1}^{+1} F(\xi, \eta) d\xi \right] d\eta$$

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^{+1} \left[\sum_{i=1}^m W_i F(\xi, \eta) \right] d\eta$$

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^{+1} \left[\sum_{i=1}^m W_i g(\eta) \right] d\eta$$

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m W_i g_i(\eta_j)$$

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m W_i W_j F(\xi_i, \eta_j) \quad (4.33)$$

Avec : m = nombre totales des points intégrés.

W_i, W_j = le poids affecté au point d'intégration.

ξ_i, η_i = sont les coordonner du point d'intégration.

Puis, cette intégration peut être appliquée à l'équation 4.26 après transformation

$$[K] = t \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D][B] \det[J] d\xi d\eta \quad (4.34)$$

La raison de la transformation est celle pour des problèmes bidimensionnels que le dv par accroissement de volume est donné par :

$$dv = t dx dy \quad (4.35)$$

Avec : t = l'épaisseur de l'élément.

La relation entre les coordonnées cartésiennes (x, y) et les coordonnées intrinsèques (ξ, η) est donnée près :

$$dx dy = \det[J] d\xi d\eta \quad (4.36)$$

$\det[J]$ Déterminant de la matrice jacobienne.

Les diverses valeurs de W_i et ξ de tout le nombre de points d'intégration sont données. Deux techniques assez semblables sont possibles, la méthode de Gausse-Radau et celle de Hammer. Dans les deux cas, des tables donnant les valeurs des poids W_i ainsi que les abscisses des points ξ_i

Tableau (4.1) Méthode de Gauss : abscisses ξ et coefficients de poids w_i

$$\int_{-1}^{+1} F(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^m W_i F(\xi_i)$$

m	i	W_i	$F(\xi_i)$
1	1	2	0
2	1	1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
	2	1	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$
3	1	$\frac{5}{9}$	$-\sqrt{0,6}$
	2	$\frac{8}{9}$	0
	3	$\frac{5}{9}$	$+\sqrt{0,6}$
4	1	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{30}}{36}$	$-\sqrt{\frac{3 + \sqrt{4,8}}{7}}$
	2	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{30}}{36}$	$+\sqrt{\frac{3 + \sqrt{4,8}}{7}}$
	3	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{30}}{36}$	$+\sqrt{\frac{3 + \sqrt{4,8}}{7}}$
	4	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{30}}{36}$	$-\sqrt{\frac{3 + \sqrt{4,8}}{7}}$

4.3.6 Représentations de l'élément barre

Le concept d'inclure les éléments isoparamétriques avec les barres de renforcement a été suggéré la première fois pour les contraintes et les déformations planes et l'analyse axisymétrique dans les années « 1970 », [Phillips, 1973]. Les barres sont parallèles aux coordonnées locales (ξ, η). Dans ce programme, un élément de barre à trois nœuds identifiés dans deux éléments isoparamétriques à 8 nœuds adjacents, ou passant par les nœuds supposés communs entre les deux éléments isoparamétriques, c.-à-d. les coordonnées (ξ, η) sont constantes de l'élément barre et l'élément isoparamétrique représente

sur le schéma figure (4.12). En général, l'élément barre sera défini par des coordonnées simples et ainsi, la formulation pour n'importe quelle position des barres possible est identique. Les fonctions de forme pour les éléments de barre à trois nœuds sont écrites dans l'équation (4.37).

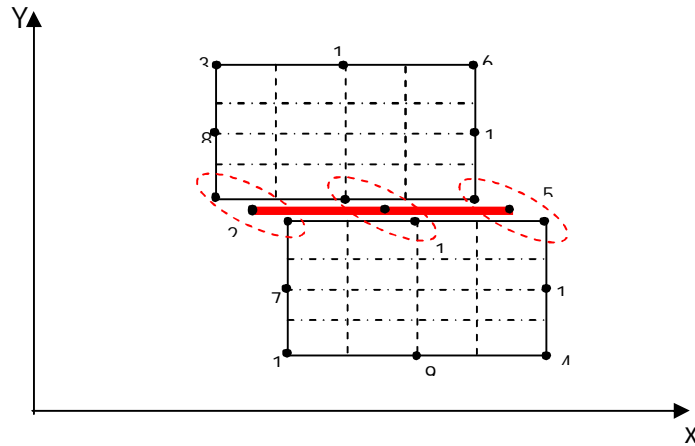
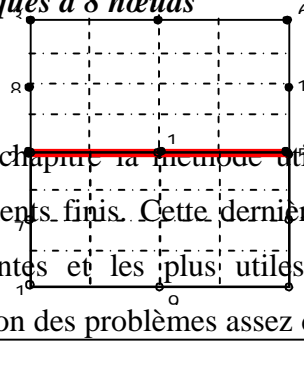


Figure 4.12) Position de l'élément barre entre deux éléments

isoparamétriques à 8 nœuds



4.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre la méthode utilisée dans notre mémoire qui est la méthode des éléments finis. Cette dernière est considérée parmi les méthodes les plus puissantes et les plus utiles dans le calcul numérique, elle peut faciliter la résolution des problèmes assez complexes.

Nous avons aussi présentés que la difficulté de la représentation analytique, des définitions géométriques et des conditions d'appuis de plusieurs structures complexes mènent à la création d'une méthode simplificatrice qui est la méthode des éléments finis.

L'avantage le plus évident de l'analyse par éléments finis réside dans la possibilité de représenter un grand nombre de formes de structures à l'aide de modèles analytiques généraux. et avec le traitement des problèmes complexes et l'utilisation de l'intégration numérique on peut arriver à résoudre n'importe quel type d'équations.

Chapitre 5

Validation numérique

5.1 Introduction

Nous avons présenté dans le chapitre précédent une approche qui peut simuler le comportement des structures en béton armé fissurées. Le but primordial de ce travail consiste à l'évaluation de la prise en compte de la propriété de tension stiffening dans le comportement global des poutres en béton armé. Cette modélisation est basée sur un principe énergétique dans le quel nous avons supposé qu'au moment de fissuration, la structure perd une énergie importante de déformation et qu'elle regagne au fur et à mesure que la déformation principale majeure augmente.

Cette procédure qui a été exposée au chapitre 3 est implantée dans un programme numérique en vu de modéliser le comportement du béton armé fissuré. Pour atteindre ce but, un ensemble de sous-programmes ont été intégrés dans le programme numérique conçu pour simuler le comportement des poutres en béton armé fissuré.

L'objet principal de ce chapitre consiste à présenter la robustesse du programme numérique développé à travers la comparaison entre les résultats numériques et ceux de l'expérimentation d'une part, et l'implantation de la modélisation de la loi constitutive proposée pour représenter la contribution du comportement du béton armé fissuré d'autre part. Sachant que notre contribution à travers ce mémoire consiste à exposer un modèle numérique de quantification de la propriété de tension stiffening dans les poutres en béton armé. Au cours de l'établissement de ce travail, nous avons constaté que plusieurs paramètres peuvent intervenir au cours du changement rhéologique des matériaux. Dans ce cadre, on peut citer au premier lieu l'effet de fissuration des bétons, le facteur de transfert de cisaillement et le paramètre de la limite d'adoucissement du béton en traction (l'expression de l'énergie de fissuration).

Ce chapitre consiste à discuter et à valider les résultats simulés par notre approche. La procédure présentée au chapitre 3 a été mise en œuvre dans le programme de calcul conçu essentiellement à l'analyse du comportement non linéaire des structures en béton armé.

Notre souci à travers cette partie est de tester d'une façon directe la démarche suivie par une comparaison des résultats numériques aux résultats expérimentaux de quelques types de structures en béton armé. Pour atteindre ces résultats, nous avons utilisé le programme de calcul développé basé sur la méthode des éléments finis dont le phénomène de tension stiffening est pris en considération.

Sur le plan de modélisation numérique, le béton est représenté par des éléments membranaires, (l'utilisateur est au choix de sélectionner le type d'élément à utiliser), il s'agit des éléments de 4 nœuds (une interpolation linéaire) ou de 8 nœuds (éléments de Serindip) ou des éléments de 9 nœuds (Lagrange). En plus, la conception de programme développé offre une large utilisation de choisir la nature du problème à étudier à savoir : (1) les problèmes en contraintes planes, (2) les problèmes en déformations planes et (3) les problèmes axisymétriques. Au cours de l'intégration numérique, un avantage est aussi offert pour choisir le nombre de points d'intégration, il a été implanté deux procédures dans ce sujet ; 4 points d'intégration de Gauss (2*2) ou 9 points de Gauss (3*3).

5.2 Validation du programme

Pour vérifier la performance du programme développé, nous avons sélectionné un exemple dont ses résultats sont déjà disponibles dans la littérature. Il s'agit d'une console analysée par le programme connu SAP 2000 largement utilisé par les ingénieurs en génie civil, en génie mécanique et en aéronautique.

Les propriétés mécaniques du prototype d'après SAP 2000 sont comme suit (Manuel SAP 2000). Il s'agit d'une console de longueur $L= 6\text{m}$, de hauteur $H= 0.2\text{m}$ et de largeur $A= 0.1\text{m}$. Les caractéristiques mécaniques sont respectivement, le module d'élasticité du matériau utilisé, $E=10^7 \text{KN/M}^2$ et le coefficient de Poisson $\nu= 0$.

Pour atteindre une bonne comparaison par la présente simulation, il est nécessaire de prendre tous les paramètres comme ils sont déjà cités dans le manuel d'utilisation du SAP 2000. Une discrétisation géométrique est faite en

répartissant le milieu continu en 6 éléments identiques dans le sens longitudinal et 1 élément dans le sens transversal (figure 5.1).

5.2.1 Structures membranaires

La console est supposée encastree à une extrémité et soumise à une charge concentrée à l'extrémité libre. Ce chargement est appliqué cette fois-ci suivant la direction horizontale. La charge appliquée suivant les recommandations de SAP 2000, il consiste à répartir la charge unitaire entre les nœuds d'extrémité 13 et 14 de façon égale.

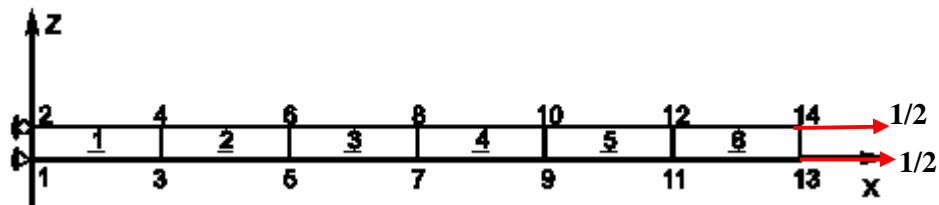


Figure 5.1: La discrétisation géométrique de la console en béton en éléments à 4 nœuds.

Pour étudier la nature des éléments finis sur la réponse des structures membranaires d'une part et améliorer les résultats numériques d'autre part, les auteurs du SAP 2000 ont discrétisé le même milieu continu en 6 éléments identiques à l'exemple précédent (les caractéristiques mécaniques et géométriques sont maintenues constantes) mais cette fois le nombre de nœuds est pris égal à 9 nœuds par élément (figure 5.2).

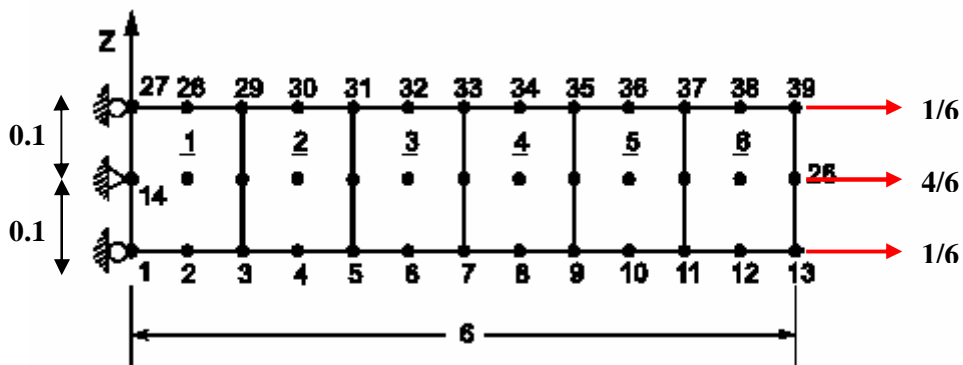


Figure 5.2: la discrétisation géométrique de la console en béton en éléments à 9 nœuds.

La même charge unitaire est appliquée aux deux exemples précédents : elle est répartie sur les nœuds 13 et 14 (pour les deux exemples). Les résultats numériques obtenus par notre programme sont regroupés et comparés une fois avec les résultats du SAP 2000 et une autre fois avec les résultats analytiques et regroupés dans le tableau (5.1).

Nature de la charge	SAP 2000	Notre étude	Analytique
Membranaire à 4 nœuds	$3 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5} \text{ m}$
Membranaire à 9 nœuds	/	$3.015 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5} \text{ m}$

Tableau 5.1: Le déplacement maximum (m) avec une discrétisation en élément à 4 et à 9 nœuds.

Il a été constaté qu'à partir des résultats obtenus (tableau 5.1) que l'effet membranaire est bien représenté par le programme proposé. Les éléments membranaires avec 4 nœuds donnent de résultats plus précis vis à vis les éléments membranaires avec 9 nœuds. A partir de ces résultats, on peut dire que le comportement des éléments sous sollicitations membranaires est bien représenté avec une discrétisation géométrique en éléments finis à 4 nœuds par éléments.

Dans le même contexte, pour montrer l'effet du nombre de points d'intégration, nous avons réalisé deux études différentes : la première étude est réalisée avec 2*2 points d'intégration et la seconde avec 3*3 points d'intégration. Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau (5.2). Dans ce cas, le choix du nombre de points de Gauss ou d'intégration égal à 4 nœuds montre une bonne démarche en comparant avec les résultats obtenus de la solution analytique.

Nature de la charge	2*2 points	3*3 points	Analytique
Membranaire à 4 nœuds	$3 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5} \text{ m}$
Membranaire à 9 nœuds	$3.015 \cdot 10^{-5}$	$3.0172 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5} \text{ m}$

Tableau 5.2 : Effet de points d'intégration.

5.2.2 Les structures fléchies

Les mêmes structures citées ci-dessus faisant l'objet d'une autre validation numérique. Cette fois, la charge appliquée est de type flexion : elle est répartie sur les nœuds 13 et 14 (l'exemple premier) et sur les nœuds 13, 14 et 25 (le deuxième exemple) avec une répartition en forces nodales comme suit : $\frac{1}{6}$ au nœud du coin et $\frac{2}{3}$ au nœud intermédiaire (figure 5.3 et 5.4).

Le tableau (5.3) regroupe simultanément les résultats établis par le SAP 2000, la présente simulation numérique et les résultats analytiques.

Nature de la charge	SAP 2000	Notre étude	Analytique
Flexion 4 nœuds	0.0101m	0.010088m	0.1081
Flexion 9 nœuds	0.1076m	0.107566m	0.1081

Tableau 5.3 : Le déplacement maximum avec une discrétisation en élément à 4 et à 9 nœuds.

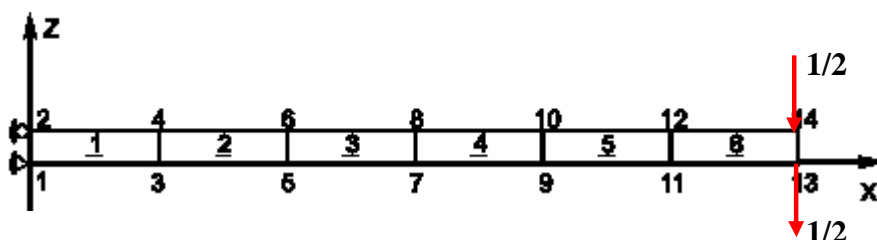


Figure 5.3: la discrétisation géométrique de la console en béton en éléments à 4 nœuds.

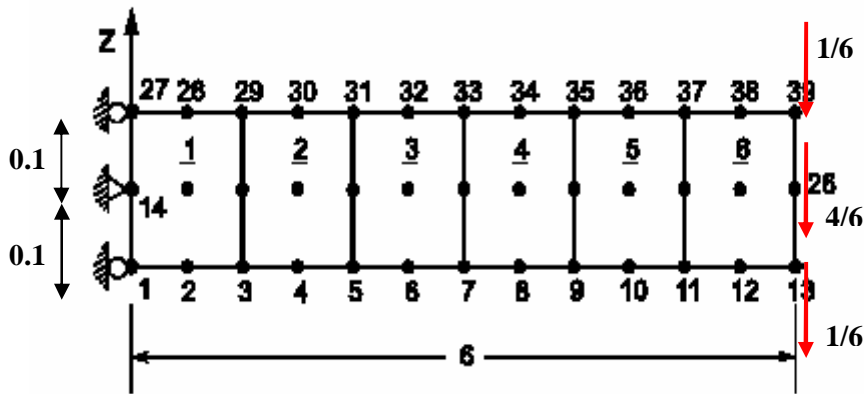


Figure 5.4: la discrétisation géométrique de la console en béton en éléments à 8 noeuds.

A partir des résultats obtenus figurés sur le tableau (5.3), le nombre de noeuds par élément fini influe sur la qualité des résultats numériques. En plus, le nombre de points d'intégration agit de leur part sur les résultats de la simulation numérique. En se basant sur les résultats obtenus, leur comparaison avec les valeurs analytiques d'une part et les données expérimentales, permet de choisir le nombre de noeuds et le nombre de points de résolution par élément.

D'autre part pour raffiner le maillage, on fait appel aux éléments membranaires à 8 noeuds pour bien représenter l'effet de discrétisation géométrique du milieu continu à étudier (figure 5.2). Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau (5.4).

Nature de la charge	SAP 2000	Notre étude	Analytique
Membranaire	$3 \cdot 10^{-5} \text{m}$	$3 \cdot 10^{-5} \text{m}$	$3 \cdot 10^{-5} \text{m}$
Flexion	0.1076m	0.108098m	0.1081m

Tableau 5.4: Le déplacement maximum avec une discrétisation en élément à 8 noeuds.

Les résultats regroupés dans le tableau précédent montre bien la convergence de notre programme dans le cas d'une flexion, il est clair que

notre résultat est de $1.85 \cdot 10^{-5} \%$ et de $4.6 \cdot 10^{-3} \%$ établi par le SAP 2000 par rapport au résultat analytique.

Afin d'élaborer tous les paramètres de cette analyse, les résultats suivants présentent l'effet de points d'intégration. Dans ce cadre, on a effectué deux études différentes respectivement avec 4 points d'intégration et 9 points d'intégration.

Nature de la charge	SAP 2000	2* 2 points D'intégration	3* 3 points d'intégration	Analytique
Membranaire	$3 \cdot 10^{-5} \text{m}$	3.10^{-5}m	3.10^{-5}m	$3 \cdot 10^{-5} \text{m}$
Flexion	0.1076	0.108098m	0.107576m	0.1081m

Tableau 5.5: Effet du nombre de points d'intégration.

Cette étude a permis de sélectionner notre choix relatif au nombre de points d'intégration. Toujours, dans le cadre de vérification de la performance et l'utilisation large du programme développé, d'autres travaux de recherche en cours font l'objet de sa vérification sur des structures plus complexes et avec des modélisations des matériaux plus avancées, tels que : les éléments fléchis avec des modèles "Cut-off" (Bechket, 2007) et ceux de "Tension stiffening" (Merabet, 2007).

Suite aux résultats présentés ci-dessus et pour effectuer notre étude, on adopte des éléments membranaires à 8 nœuds géométriques et avec 4 points d'intégration (2*2). Cette supposition est considérée justifiée à partir des résultats obtenus ci-dessus par leurs comparaisons analytique ou expérimentale.

5.2.3 Les structures fléchies en béton armé

Dans le même contexte, nous voulons tester la performance du programme appliqué aux structures fléchies en béton armé. La validation du programme développé est effectuée par une comparaison des résultats obtenus avec ceux de l'expérimentation. Le choix des poutres testées faisant un prototype universel pour la validation de plusieurs modèles de comportement

déjà présentés dans la littérature ouverte. Il s'agit de poutres en béton armé à des longueurs moyennes testées par Bresler et Scordelis (1963).

Pour l'importance particulière donnée à ce Benchmark, les mêmes poutres ont été re-examinées, récemment par Vecchio (2004). La performance de notre programme est effectuée en faisant une comparaison des résultats de cette simulation avec d'autres résultats numériques SLOVIA et les données expérimentales. Nous avons choisi les poutres de Bresler-Scordelis qui ont largement été prises comme un sujet commun pour la validation des programmes développés [Vecchio, 2004]. Les caractéristiques géométriques et mécaniques des matériaux : béton et acier de la poutre étudiée sont illustrées dans ce qui suit (figure 5.5). Pour des raisons simplificatrices, une adhérence parfaite entre les barres de renforcement et les bétons est considérée.

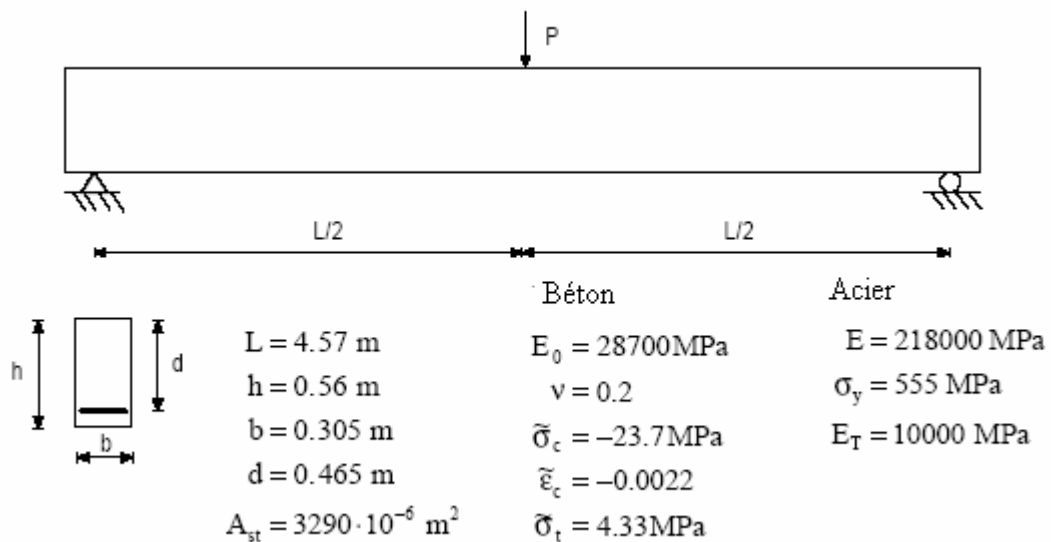


Figure 5.5 : les caractéristiques géométriques et physiques du test expérimental.

Pour bien juger la convergence de notre approche, il est nécessaire de prendre tous les paramètres comme ils sont déjà pris dans les autres analyses. Une discrétisation géométrique est faite en répartissant le milieu continu en 10 éléments identiques dans le sens longitudinal et 5 éléments dans le sens transversal, $M (5 \times 10) = 50$ éléments pour la moitié de la poutre (figure 5.6).

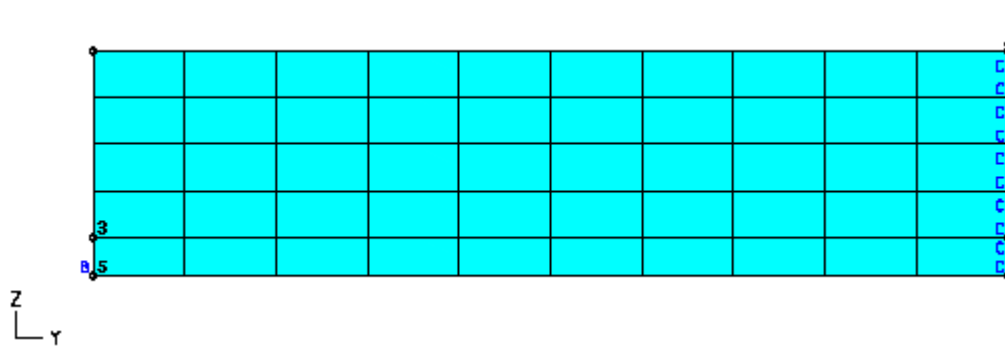


Figure 5.6 : Représenté le maillage utilisé dans programme de validation.

Les résultats expérimentaux (Bresler et Scordelis) montrent que la charge limite est de $P_{lim}=356 \text{ KN}$ qui correspond à un déplacement maximum de $d=11.7\text{mm}$. Dans le même contexte, le programme établi par SOLVIA l'a évaluée d'une valeur de 351.20 KN et d'un déplacement global de 12.90 mm . La figure (5.7) montre les réponses globales de la poutre choisie. Trois courbes ont été rapportées; il s'agit de la courbe expérimentale, de la courbe numérique établie par le logiciel SLOVIA et celle de présente étude. Les résultats de cette simulation apparaissent une concordance très favorable avec la réponse expérimentale. Les trois courbes présentent un comportement identique jusqu'à la charge de fissuration estimée à $P_{fis}= 50 \text{ KN}$, ensuite les courbes s'éloignent en fonction de la nature de l'approche choisie à chaque analyse. On peut constater, d'après le recueil des résultats obtenus, que le logiciel SLOVIA surestime la charge limite de 351.2 KN . Les résultats de la cette simulation et du logiciel SLOVIA sont en concordance très satisfaisante.

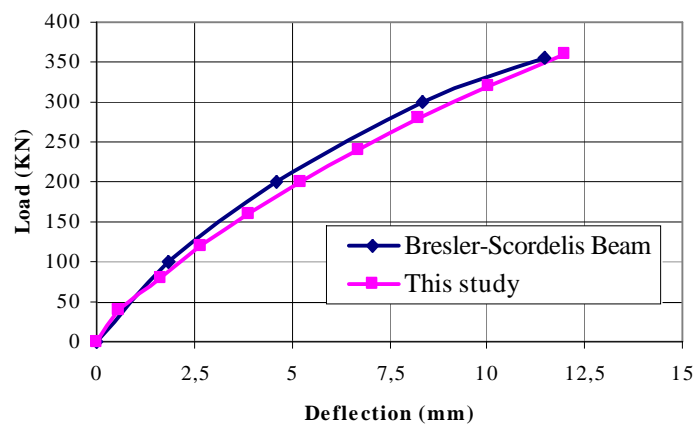


Figure 5.7 : La réponse globale de la poutre de Bresler-Scordelis.

5.3 Modélisation de la tension stiffening

Les résultats expérimentaux des poutres en béton armé testés par Bresler et Scordelis (1963) sont largement utilisés pour tester la performance de plusieurs modèles numériques. Pour cette raison, la première série des poutres sans armatures transversales testées par les auteurs est considérée dans cette étude. Ces poutres sont distinguées en quantités d'acier nécessaires, la longueur de la poutre, les dimensions de la section transversale et les propriétés mécaniques du béton (figure 5.8). Les détails de la section transversale et les propriétés mécaniques sont regroupés respectivement dans les tableaux (5.6 et 5.7). Toutes les poutres sont soumises à un chargement monotone incrémental dont le premier incrément de charge est estimé à 40 KN.

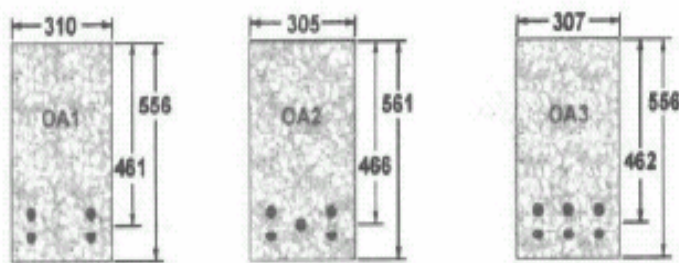


Figure 5.8 : Les dimensions des sections transversales (Vecchio, 2004).

La discrétisation en éléments finis des poutres est effectuée avec le même maillage soit 100 éléments finis membranaires, effectivement il correspond à utiliser 20 éléments barres à chaque poutre (figure 5.9). L'analyse des exemples est effectuée en considérant un maillage de 50 éléments pour toutes les poutres. Dans cette analyse, on a utilisé des éléments finis de type Serindip à 8 nœuds. Ce choix n'est pas intuitif mais il est justifié par la qualité des résultats obtenus dans les exemples traitant la performance du programme développé. Pour ne pas rendre le traitement numérique lourd, le nombre de points d'intégration est pris égal à 4 (2*2 points d'intégration).

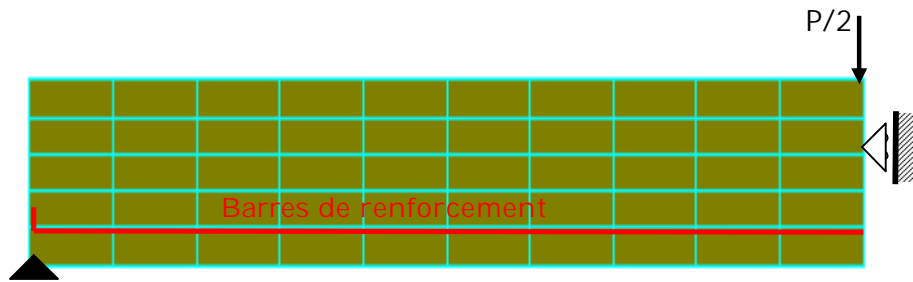


Figure 5.9 : Maillage des demi-poutres utilisées (Symétrie des poutres).

Poutre	B (mm)	H (mm)	D (mm)	L (mm)	Distance entre axe (mm)
OA1	310	556	461	4100	3660
OA2	305	551	466	5010	4570
OA3	307	556	462	6840	6400

Tableau 5. 6. Détail des sections transversales des poutres utilisées.

Matériau	Béton		Barres de renforcement			
	f'_c (MPa)	f'_t (MPa)	σ_y (MPa)	f_u (MPa)	E_s (MPa)	A_s (mm ²)
OA-1	22,60	3,97	325	430	218,000	2580
OA-2	23,70	4,34	345	542	218,000	3225
OA-3	27,60	4,14	555	933	218,000	3870

Tableau 5. 7. Propriétés matérielles des poutres utilisées.

Les réponses des poutres (OA-1, OA-2 et OA-3) sont montrées respectivement sur les figures (5.10, 5.11 et 5.12).

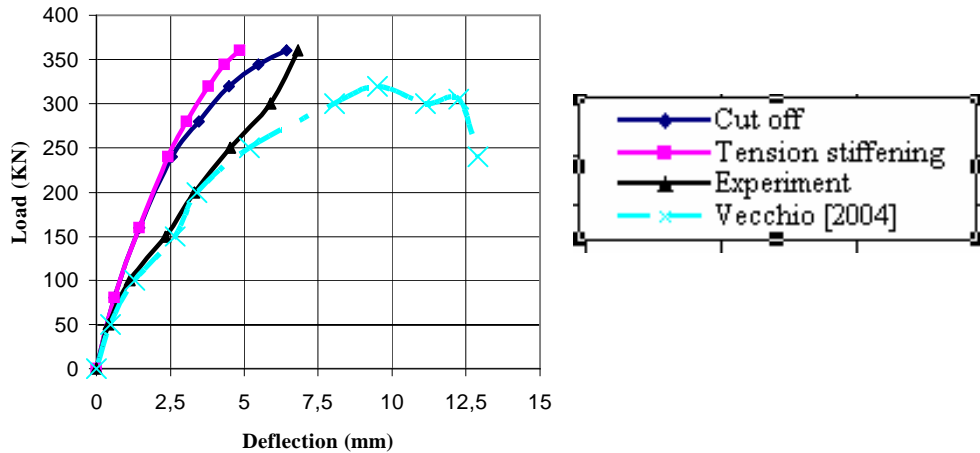


Figure 5.10 : Charge-déplacement maximum de la poutre OA-1.

La figure (5.10) regroupe les résultats obtenus par cette simulation et les données expérimentales respectivement établis de la première série de poutres testées par Bressler et Scordelis (1963) d’une part et qui ont été re-examinées par Vecchio (2004). Il est constatable de façon générale que cette simulation présente des résultats satisfaisants vis à vis les résultats expérimentaux. En ajoutant que la charge limite est bien estimée par cette approche. Aux premiers niveaux de chargement, les courbes présentent une concordance parfaite jusqu’au seuil de la charge de fissuration. Au delà de cette charge, les courbes se distinguent principalement dues aux différentes théories utilisées par chaque auteur. En plus, il est remarquable que la courbe de tension stiffening présente une rigidité plus grande que celle du modèle cut-off.

Les figures (5.11 et 5.12) montrent de leur part les courbes numériques et expérimentales. Cette fois, les figures présentent une concordance très satisfaisante par rapport aux résultats obtenus de la poutre OA-1 (figure 5.10). En ajoutant que la charge ultime est bien évaluée indifféremment par le modèle de tension stiffening que par le modèle cut-off.

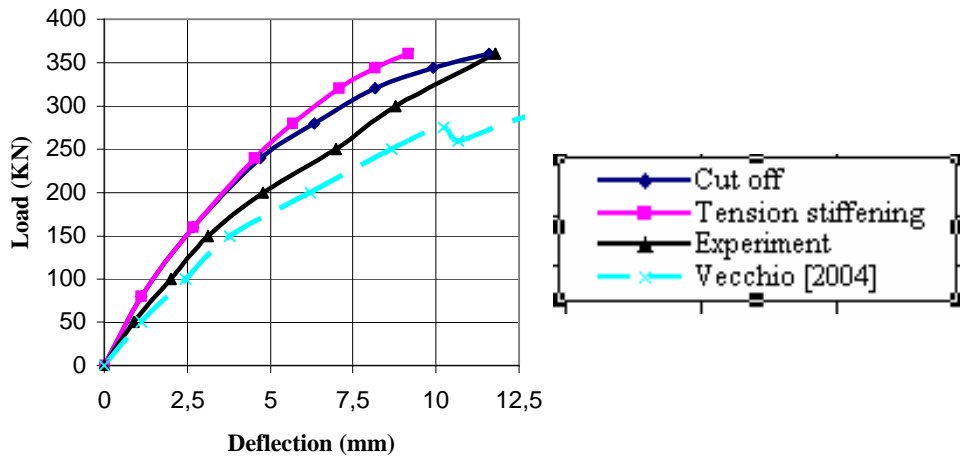


Figure 5.11: Charge-déplacement maximum de la poutre OA-2.

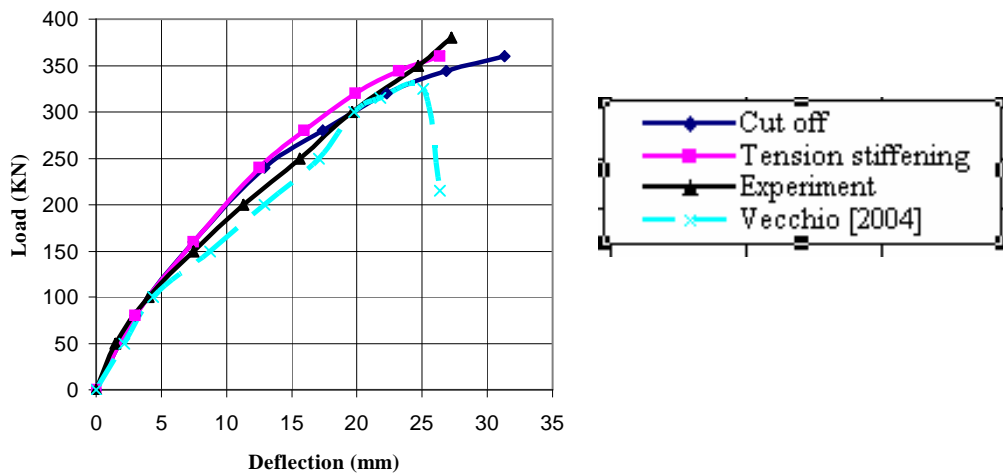


Figure 5.12 : Charge-déplacement maximum de la poutre OA-3.

Le modèle linéaire d'adoucissement qui est le plus utilisé par plusieurs codes de calcul ne reproduit pas le comportement structural des poutres en béton armé (figure 5.13). A partir de la confrontation des résultats obtenus et les valeurs expérimentales, il paraît dans ce cas que le modèle cut off peut reproduire avec une satisfaction la réponse des poutres.

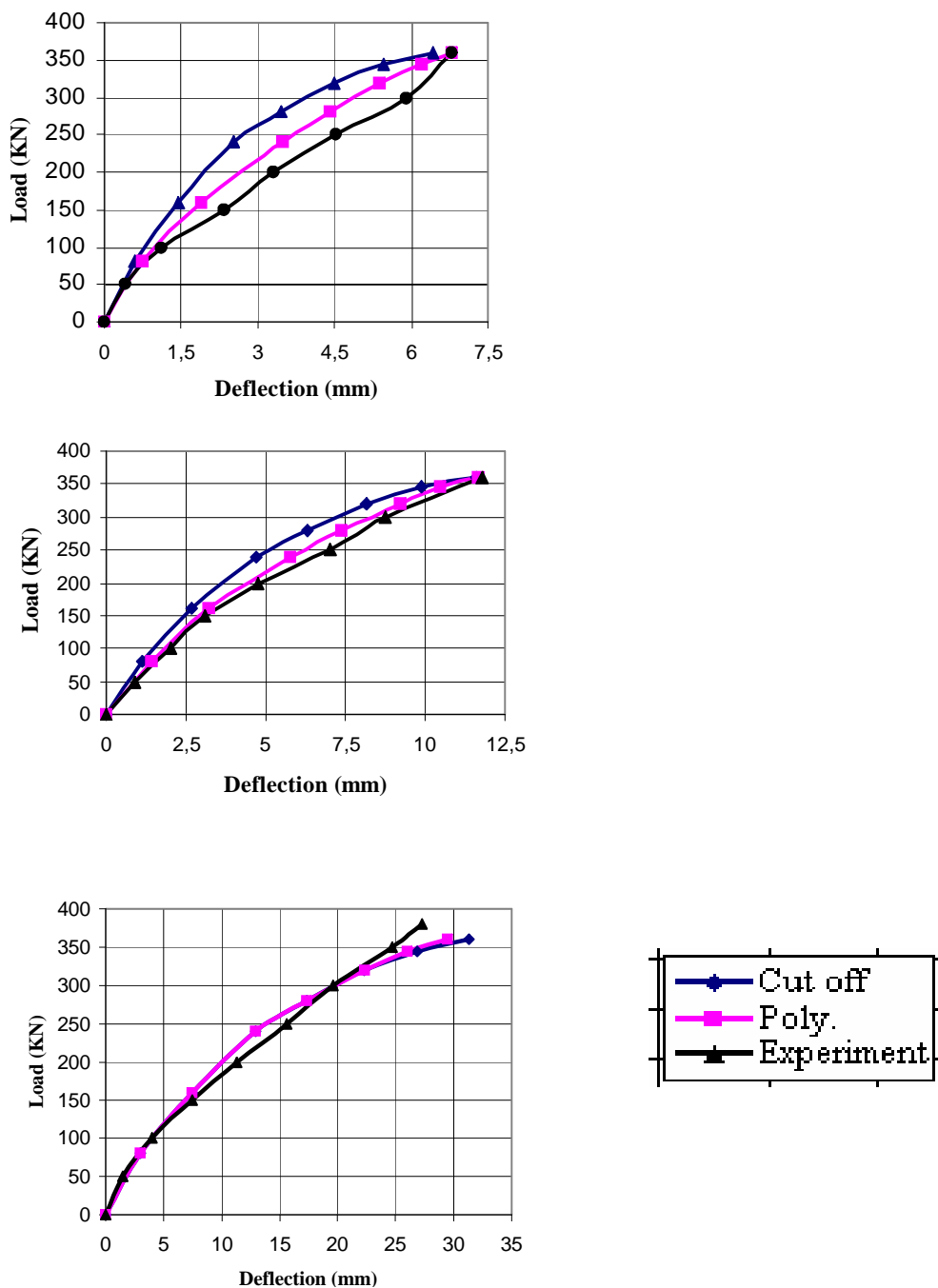


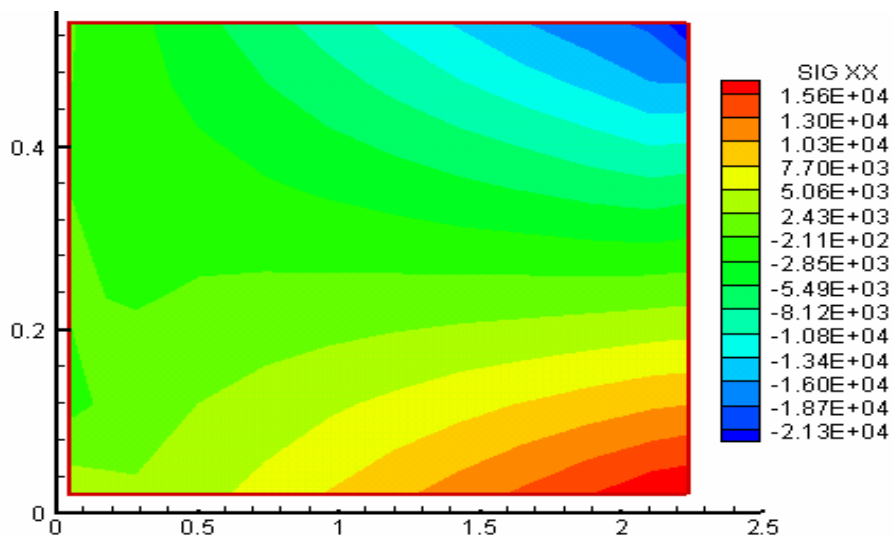
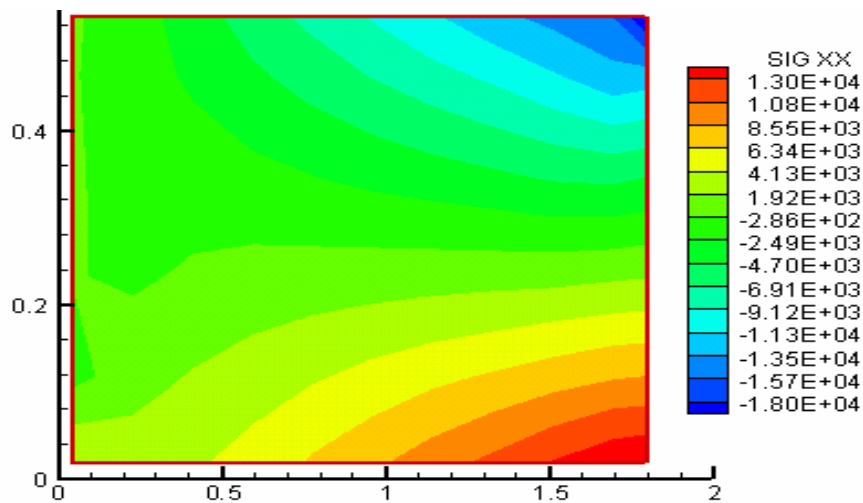
Figure 5.13: Comparaison de la nature de tension stiffening.

Au niveau local, la simulation numérique illustre que le mode de rupture apparaît par écrasement du béton dans la zone comprimée au voisinage de la charge appliquée qui résulte à partir de développement des fissures diagonales et par rupture des barres d’acier au milieu de la poutre.

La rupture de la poutre OA-1 est brutale et fragile par contrôle elle est relativement ductile des poutres OA-2 et OA-3 suite à l’importance des

sections des armatures utilisées. A la rupture, le déplacement maximum de la poutre OA-3 est supérieure de 4.66% et 2.60% respectivement des poutres OA-1 et OA-2.

Le comportement des poutres est gouverné par la combinaison de l'effet d'écoulement des barres de renforcement et le phénomène de fissuration des bétons. La poutre première (OA-1) est rompue par écoulement des barres d'acier accompagné par la première fissure de béton. Par contre dans l'autre partie, les poutres (OA-2 et OA-3) sont rompues par écrasement du béton au voisinage de l'application de la charge sans que la contrainte dans les aciers atteigne la contrainte d'écoulement.



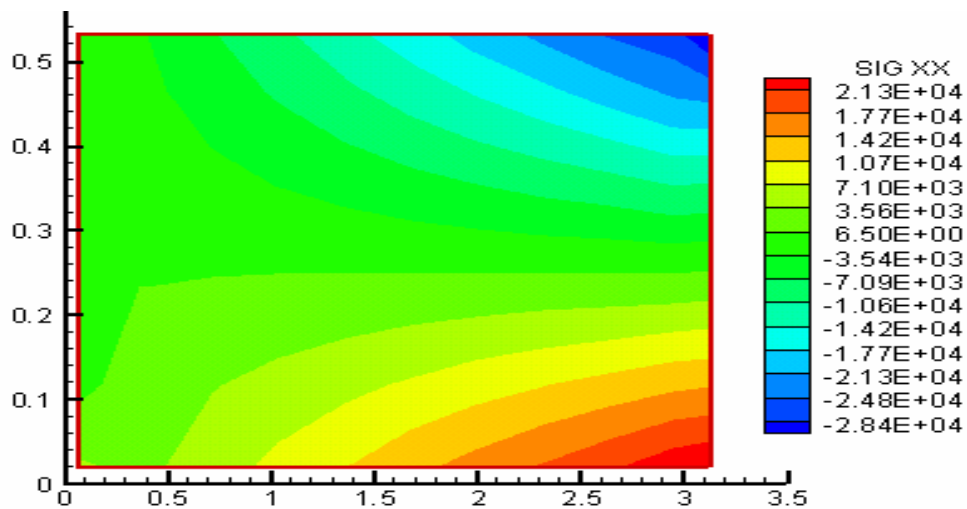


Figure 5.14 : Répartition de la contrainte σ_{xx} .

La figure (5.14) montre la distribution de la contrainte σ_{xx} dans les différentes poutres. A partir de cette figure, il est clair que la contrainte σ_{xx} est plus importante dans la poutre OA-3 que dans les poutres OA-2 et OA-1. Les trois poutres présentent un endommagement pareil en sa forme mais il se distingue en sa grandeur. L'endommagement engendré par le phénomène de traction se localise dans la partie inférieure et au milieu de la poutre et qui se propage vers l'intérieur de la poutre d'une part et relativement vers les fibres supérieures.

De la même façon, l'endommagement crée par écrasement du béton se circonscrit dans la région de l'application de la charge externe. De la même façon, cet endommagement se diffuse proportionnellement vers l'intérieur de la poutre.

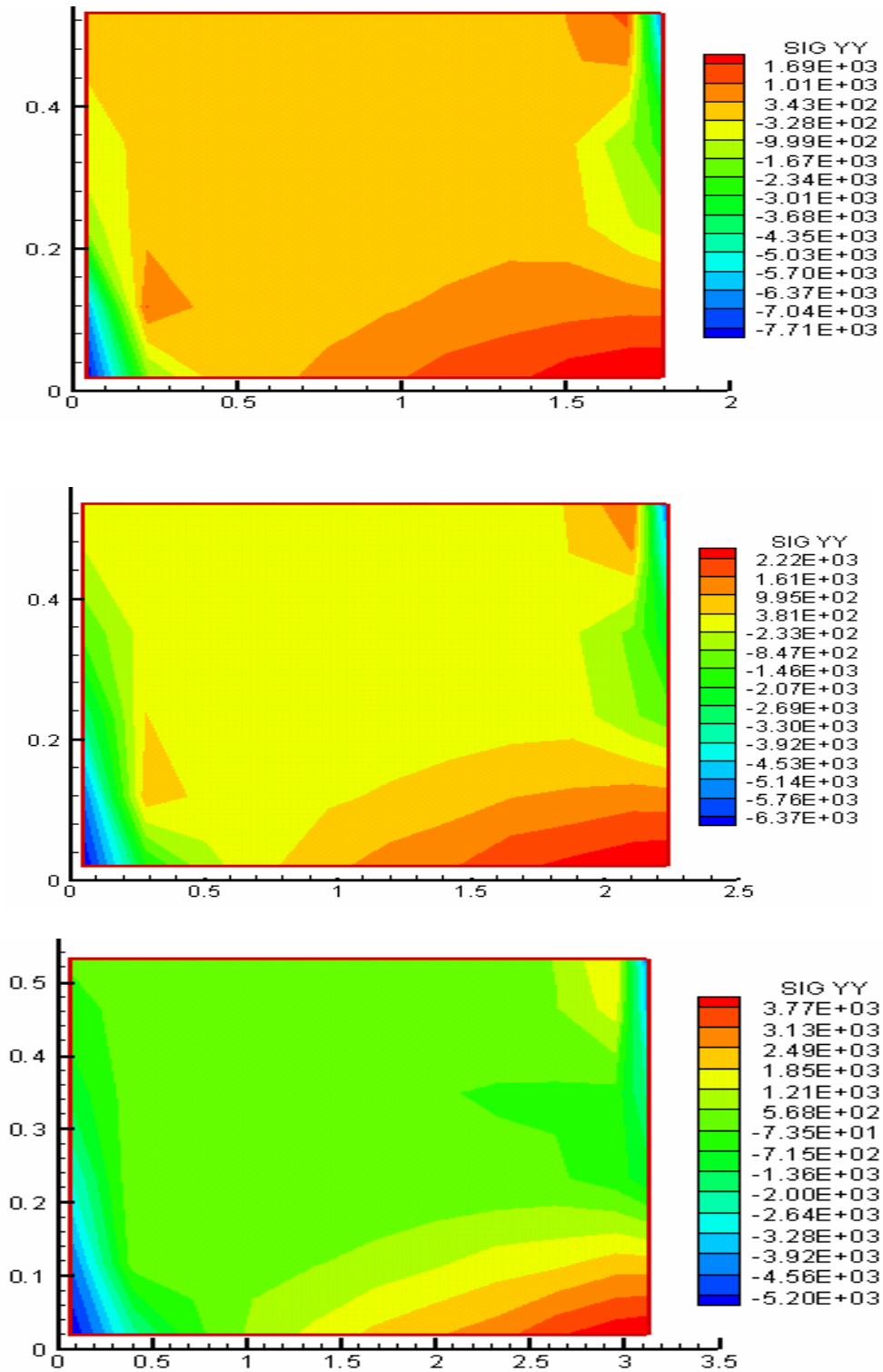


Figure 5.15 : Répartition de la contrainte σ_{yy} .

Concernant la répartition de la contrainte σ_{yy} (figure 5.15) est identique à la distribution de la contrainte σ_{xx} . Mais dans ce cas, il semble que la grandeur de la contrainte σ_{yy} est plus prononcée que la contrainte σ_{xx} .

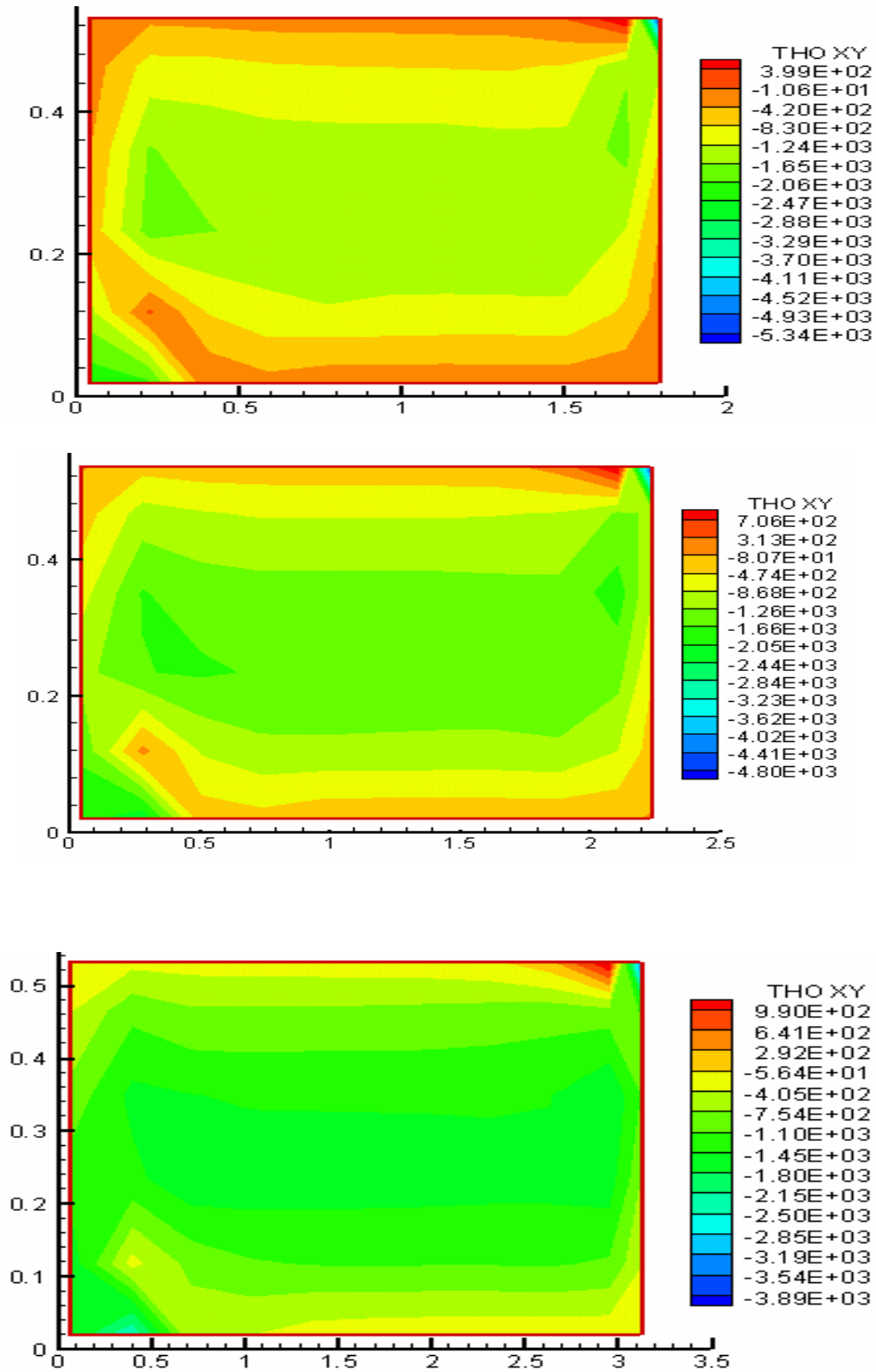


Figure 5.16 : Répartition de la contrainte tangentielle σ_{xy} .

Ce travail consiste à expliquer la problématique de l'effet de tension stiffening lorsqu'il est pris en considération à l'analyse des poutres en béton armé. Dans ce sens, le modèle de tension stiffening utilisé dans cette étude est de type polynomial qui représente le comportement adoucissant du béton en

traction. Le modèle supposé, qui est inspiré du concept de l'énergie de rupture en se basant sur le modèle de la fissuration répartie, montre que les résultats numériques obtenus sont en concordance favorable avec les données expérimentales. A partir de la performance des résultats obtenus et leur comparaison avec les données expérimentales (figures 5.10, 5.11 et 5.12), on peut dire que la modélisation présentée peut être recommandée à l'analyse des poutres en béton armé.

5.4 L'étude paramétrique

Pour détailler ce travail de recherche, il nous semble que l'étude de quelques paramètres ayant une influence directe sur la réponse des poutres en béton armé est nécessaire. Il est clair que l'option tension stiffening est la partie à laquelle notre recherche est basée. Dans ce cadre, les paramètres suivants ont été l'objet de cette étude.

1- L'influence de la discrétisation géométrique

Pour montrer l'effet du maillage, nous avons procédé à deux types de discrétisation du milieu continu. Il s'agit, au premier lieu d'une discrétisation suivant la hauteur de la poutre. Dans ce sens, la hauteur de la poutre est divisée respectivement en 3, 5 et 10 éléments sachant que le nombre des éléments suivant la demi-longueur de la poutre est gardé constant, soit 10 éléments.

La courbe (figure 5.17) montre l'effet de l'influence de ce paramètre sur la réponse globale des poutres en béton armé.

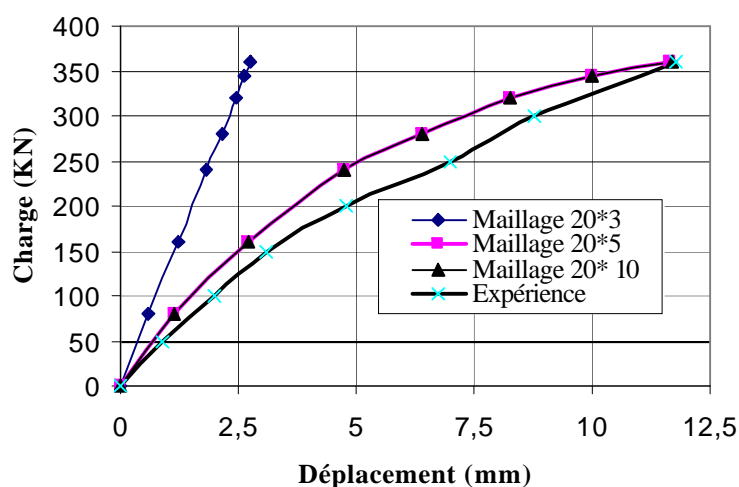


Figure 5.17 : Influence de la discrétisation suivant la hauteur de la poutre.

Il a été constaté que le maillage grossier (20*3) ne représente pas la réponse structurale des poutres en béton armé. De même, les maillages (20*5) et (20*10) représentent avec une satisfaction les données expérimentales d'une part et plus précisément la charge limite que peuvent supporter les poutres en béton armé. Il est notable qu'il existe une différence entre les courbes des maillages pris dans cette analyse et la courbe expérimentale, ceci est principalement dû à la négligence de l'option tension stiffening.

De même, dans le sens longitudinal et suivant la même procédure, nous avons adopté les différents maillages en vue de présenter l'effet de la discrétisation longitudinale de la poutre. Dans ce sujet, les maillages suivants (5*5), (10*10) et (15*5) ont été sélectionnés. La réponse globale représentée par la charge appliqué-déplacement maximum est montrée sur la figure suivante (5.18).

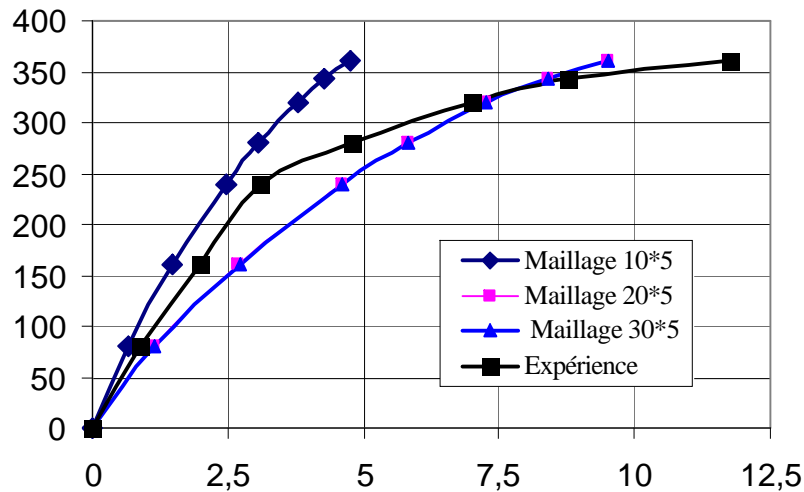


Figure 5.18 : Influence de la discrétisation suivant la longueur de la poutre.

2- L'effet de transfert de contraintes de cisaillement.

Parmi les effets envisagés au cours de l'application de la charge extérieure, la fissuration du béton est notée comme un phénomène principale et engendrant un effet primordial. Les fissures se naissent au sein des éléments qui sont soumis à des tensions supérieures de la résistance du béton en traction. La fissuration comme un phénomène crée à l'autre effet celui de transfert des contraintes de cisaillement entre les lèvres fissurées. Ceci est dû au mouvement relatif entre les fissures.

Dans ce contexte et pour présenter cet effet, deux valeurs extrêmes et une valeur modérée ont été sélectionnés. Ce phénomène est représenté dans le programme numérique par un facteur appelé "facteur de transfert" et noté β . Donc, nous avons confié les valeurs de $\beta=0$. (Négligence de transfert de contraintes), $\beta=0.50$ (un transfert médian de contraintes) et $\beta=1.00$ (transfert complet de contraintes).

La figure (5.19) montre que l'effet du facteur de transfert de cisaillement à travers les fissures est non notable. D'après la recherche bibliographique, ce coefficient ayant comme effet primordial dans le cas des structures profondes ou dans les murs en béton armé.

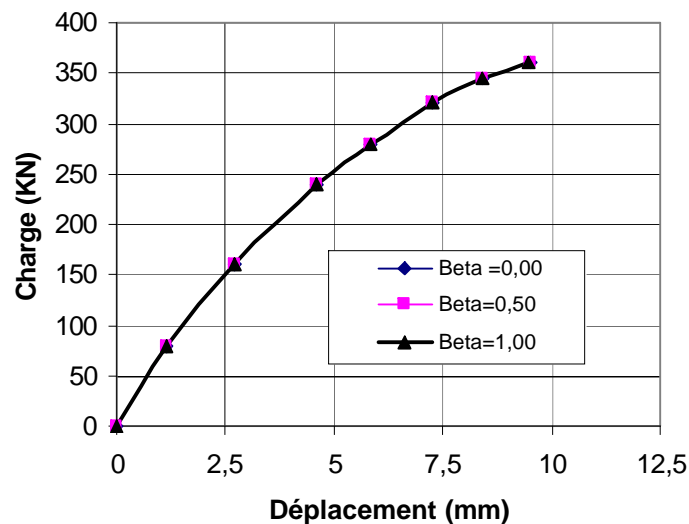


Figure 5.19 : Effet du facteur de transfert de cisaillement.

3- Effet de la résistance limite de traction

La résistance limite du béton en traction joue un rôle principal sur la formation des fissures dans les poutres en béton armé. En plus, cette caractéristique est considérée comme l'indicateur du phénomène de fissuration dans les structures en béton armé. Il nous semble que le paramètre de la résistance du béton à la traction influe sur la charge de fissuration correspondante. C'est-à-dire, lorsque la charge de rupture est importante il convient de dire que les propriétés du béton utilisé sont aussi améliorées.

La figure (5.20) montre l'effet de la résistance du béton en traction sur le comportement globale des poutres en béton armé. La concordance est

parfaitement constatée pour les premiers niveaux de chargement. L'apparition de la première fissure dépend de la valeur de la résistance limite en traction. Il est notable qu'au niveau de la charge ultime, la résistance limite à la traction influe sur le déplacement maximum. Lorsque la charge ultime est appliquée, le déplacement maximum avec une résistance limite en traction de 6 MPa est de 16.82 % plus grand que lorsqu'une résistance limite de traction du béton égale à 4.33 MPa.

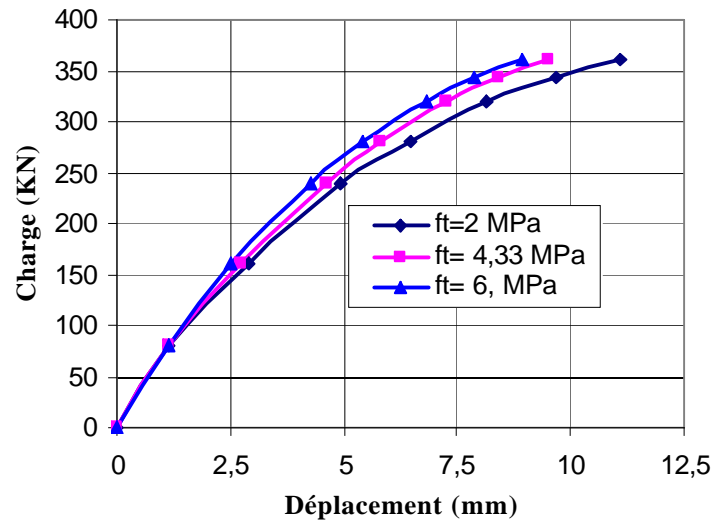


Figure 5.20 : Effet de la résistance limite de traction.

4- Effet de l'énergie de rupture

Les structures y compris les poutres en béton armé se fissurent à partir des premiers niveaux de chargement. De point de vue énergétique, si une fissure s'initie et se propage, il correspond à une dissipation de l'énergie potentielle. Le taux de restitution d'énergie de fissuration présente une quantité d'énergie disponible qui peut être utilisée pour créer le mécanisme de décohéation entre les deux lèvres de fissure. On introduit aussi une valeur seuil d'énergie (qui est en fonction de l'énergie dissipée par une unité de surface de propagation de fissuration, à partir de la quelle la fissure commence à se propager.

C'est dans ce cadre que nous voulons montrer l'influence de l'énergie de fissuration dissipée au cours de la formation et de propagation de fissures au sein des poutres en béton armé. Les équations présentées au chapitre 4 ont montré l'énergie de fissuration ayant une influence sur la réponse des poutres en béton armé. Cette énergie de fissuration est donc responsable de la limite de la

région de l'option tension stiffening, appelée limite d'adoucissement. Dans ce sujet, nous avons supposé trois cas de la déformation limite d'adoucissement, il s'agit de l'option cut-off avec $\varepsilon_m=0.0$ et d'autres valeurs ε_m de respectivement égales aux 0.003 et 0.006. Les valeurs obtenues pour ces trois valeurs sont montées sur la figure (5.21).

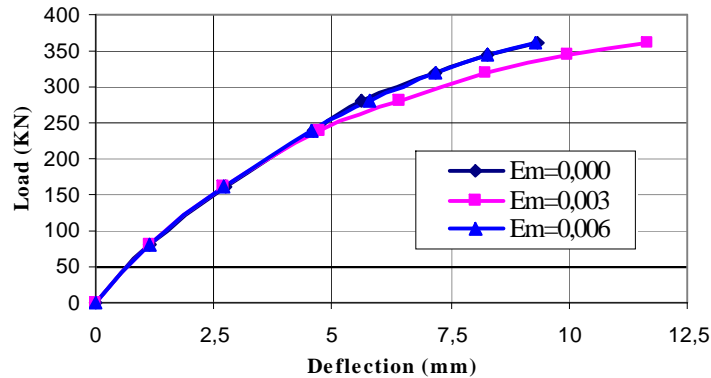


Figure 5.21: Effet de l'énergie de rupture.

La figure (5.21) montre que la tenue en considération de l'énergie de fissuration influe sur la réponse des poutres en béton tandis que son négligence sous leur comportement structural et plus particulièrement au niveau de la charge ultime.

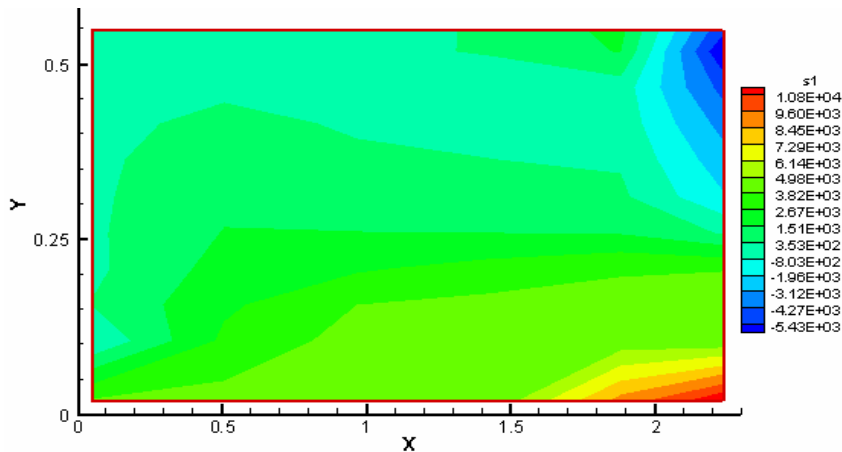


Figure 5.22 : La contrainte principale σ_1

Les figures (5.22, 5.23) présentent les répartitions des contraintes dans la référence principale. Il s'agit des contraintes principales majeures σ_1 , σ_2 et l'orientation du système des axes principaux φ . La figure (5.22) montre la distribution de la contrainte principale σ_1 dans la quelle le phénomène de

fissuration est bien localisé dans la partie inférieure et qu'il se propage indifféremment vers l'extrémité libre et à l'intérieur de la poutre. De même, l'effet de compression se diffuse à partir de la zone d'application de la charge extérieure.

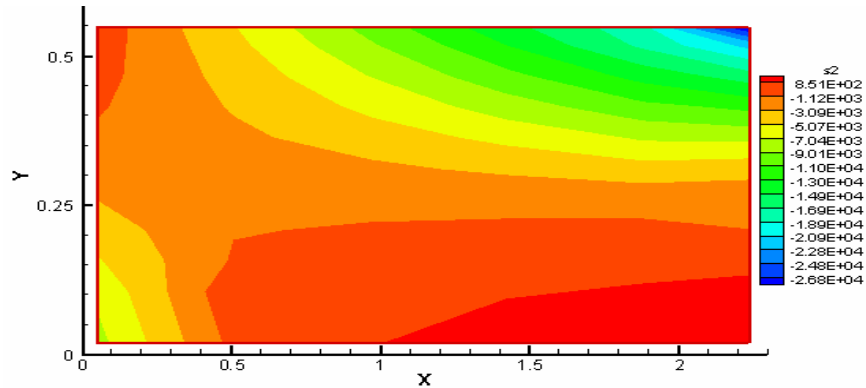


Figure 5.23 : La contrainte principale σ_2

La figure (5.23) montre la répartition de la deuxième contrainte principale σ_2 , l'effet de cette répartition est presque identique à la loi de répartition de la contrainte σ_1 . Néanmoins, d'après la figure (5.24), la direction des axes principaux atteint des valeurs extrêmes au voisinage de l'axe médian de la poutre et en même temps elle est de sens opposé dans la partie inférieure de la poutre.

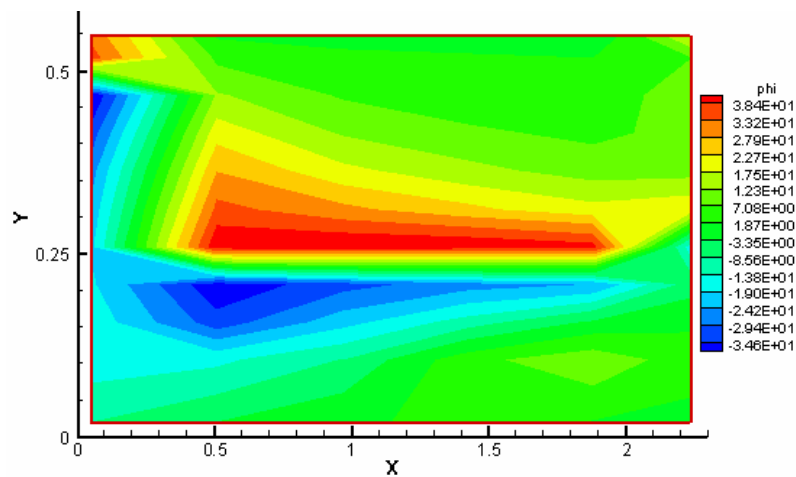


Figure 5.24 : La direction des axes principaux ϕ .

5.5 Conclusions

L'établissement de ce travail de recherche a conduit aux résultats suivants :

- ❖ L'effet de tension stiffening a une influence considérable sur la capacité portante des poutres soumises à une flexion.
- ❖ Cette étude a permis de caractériser l'effet de quelques paramètres ayant une influence directe sur le comportement des poutres en béton armé dont le comportement après fissuration est pris en considération.
- ❖ Il est admis que la discrétisation n'a pas une influence considérable sur la réponse globale des poutres en béton armé. Mais, il nous semble que pour le cas des poutres profondes et des murs en béton armé, ce paramètre peut causer une sensibilité au maillage par éléments finis. En partant des travaux du groupe de recherche de Bazant, cet effet relatif à la taille de l'élément fini a une importance primordiale sur la réponse des structures lorsqu'une branche descendante de comportement du béton est considérée.
- ❖ Lors de la fissuration des bétons, des forces aux niveaux des parties fissurées se naissent. Ce transfert est représenté par un facteur appelé "facteur de transfert de cisaillement". Plusieurs valeurs ont été confiées à ce facteur et que cette étude présente un effet minime de ce facteur sur la réponse globale des poutres en béton armé.
- ❖ Enfin, le point d'application de la charge de cisaillement joue un rôle important sur la réponse des structures en béton armé. Ce paramètre a conduit à l'identification des modes de rupture des poutres en béton armé. Il est montré que lorsque l'élançement est important, la charge appliquée peut causer une dégradation par cisaillement et il est engendré par effet de flexion lorsqu l'élançement est très petit.
- ❖ L'énergie de déformation due à la fissuration des bétons à une influence sur la réponse des poutres en béton armé.

A la fin de cette thèse, il s'apparaît que l'effet de tension stiffening présente une difficulté majeure à la connaissance de la réponse locale et globale des

poutres en béton armé. L'élaboration de cette étude a été effectuée avec des hypothèses primitives qui nous a permis de coupler la théorie de l'élasticité avec le modèle de la fissuration répartie. Comme même, l'établissement rigoureux de cette recherche a conduit à plusieurs conclusions très importantes et aussi pertinentes. Ces conclusions permettent à une caractérisation de que quelques paramètres ayant une influence directe sur la réponse des poutres en béton armé et en particulier sur la capacité au cisaillement des poutres en béton armé.

Conclusions et recommandations

Conclusions et recommandations

Ce mémoire de magister porte sur la simulation numérique par éléments finis du comportement des poutres en béton armé après fissuration. Ce travail est constitué de trois grandes parties : la première partie est consacrée à la modélisation de la tension stiffening du béton après sa fissuration, la seconde portant sur le développement par éléments finis des sous-programmes numérique relatifs au phénomène envisagé et la dernière partie a conduit à une synthèse perspective de développement des résultats du présent travail.

Inspirer d'une synthèse bibliographique sur le comportement des bétons, ça nous permet nous a permis d'élaborer un modèle numérique capable de traduire le comportement expérimental des structures en béton armé sous chargement monotone. Le modèle présenté a été abordé dans un cadre de la théorie de plasticité. Le béton est caractérisé par une réponse fortement non linéaire pour cela une élastoplasticité dès l'origine est considérée. La loi de plasticité associée est utilisée avec un écrouissage isotrope. Le dommage est modélisé par l'évolution des déformations plastiques (ou permanentes) qui sont en fonction du paramètre d'écrouissage.

Le fond de l'élaboration théorique du modèle proposé peut apparaître assez chargé, par contre, les données à lui fournir sont très limitées : les caractéristiques géométriques, les propriétés mécaniques des matériaux et le chargement. A partir de ces données, il offre une série de résultats importants : l'état de contraintes aux points de résolution, la déformation plastique (l'endommagement), l'angle de fissuration, le test de convergence, le comportement local et le comportement global.

L'approche de fissurations réparties est adoptée pour modéliser le comportement du béton fissuré qui est un phénomène discontinu par nature. Son utilisation rend une facilité du traitement numérique de comportement du béton fissuré qui a été pris en considération par le biais de l'option tension-stiffening. Pour des raisons simplificatrices, une liaison parfaite entre le béton et l'acier est supposée.

La liaison acier-béton est abordée dans le cadre de l'adaptation de la loi de comportement du béton en traction pour tenir en compte de l'effet de tension-stiffening. La dépendance des résultats de la prise en compte ou de la négligence de cet effet souligne l'importance d'une approche plus exacte. Une approche qui incorpore dans les calculs l'orientation de fissuration dont il nous semble que cette approche est plus adéquate dans le cas de la modélisation de fissurations réparties.

La représentation fine du comportement mécanique des structures en béton armé sous chargement monotone ne peut être atteinte qu'en faisant recours à des méthodes numériques puissantes. La méthode des éléments finis est certainement la plus adaptée à la mécanique des structures et qu'elle est utilisée à la discrétisation des matériaux à comportement très différents ainsi qu'à leur interface.

Conclusions et recommandations

La méthode des éléments finis est certainement celle qui la plus adaptée à la discrétisation structurale des matériaux à comportements très différents ainsi qu'à leur interface.

Pour atteindre le but voulu, un outil numérique a été développé spécifiquement à l'analyse de la réponse des structures en béton armé. Plusieurs cas de structures : poutres courtes, poutres courantes à faible et à fort pourcentage mécanique d'acier, ont été étudiées et commentés. En effet, le programme de calcul permet de prendre en compte des phénomènes à non linéarité matérielle tels que : les non linéarités de comportement des matériaux, l'incorporation du béton fissuré, l'adoucissement du béton, l'effet d'adhérence et l'effet de transfert de cisaillement à travers les fissures.

Une attention particulière a été portée sur l'influence de chaque paramètre sur la réponse globale et locale des poutres étudiées, notamment, le facteur de transfert des contraintes de cisaillement et le comportement du béton fissuré. Une valeur moyenne est recommandée à l'analyse des poutres en béton armé.

La présente étude a conduit à une bonne estimation de la charge ultime des poutres en béton armé. Le comportement de celles-ci sous chargement monotone, a montré une bonne représentation des phénomènes jusqu'à la ruine. Celle-ci est obtenue avec une imprécision ne dépassant pas 5%. La rupture des poutres sur-armées est brutale et elle est intervenue par écrasement du béton comprimé tandis elle est moins brutale lorsque les poutres sont sous-armée. Dans ce cas, la rupture est due simultanément à la plastification des armatures et l'écrasement du béton comprimé.

L'outil numérique développé a été largement confronté avec les résultats expérimentaux. Les courbes P-d du comportement global des structures, ont montré une bonne concordance des phénomènes jusqu'à la ruine. La confrontation des résultats simulés obtenus avec les nombreux résultats issus de la littérature, a montré les performances du modèle développé et la robustesse de programme numérique établi tant en ce qui concerne la prévision des réponses globales et locales.

Toutefois, pour limiter l'utilisation du modèle, il est nécessaire de confronter la réponse numérique avec les données expérimentales sur des structures soumises à des sollicitations diverses et à des géométries plus complexes.

Conclusions et recommandations

Perspectives

Lors de l'étude approfondie des résultats déjà publiés, nous pouvons apporter deux types de perspectives à envisager :

Sur le domaine de la rhéologie des bétons

- Il est nécessaire d'incorporer de façon rationnelle le comportement adoucissant du béton pour améliorer la réponse des structures en béton armé.
- L'extension du modèle présenté au comportement cyclique ou dynamique.
- D'améliorer la réponse en prenant de façon rigoureuse le comportement de l'interface.
- La possibilité de prendre en compte simultanément les effets dus aux grands déplacements (non linéarité géométrique) dans le programme développé pour rendre la réponse des structures plus prédictives alors que nous savons pertinemment que pour les structures métalliques, les non linéarités géométriques jouent un rôle non négligeable.

Sur le plan numérique

- Le raffinement du programme et son développement à l'étude des structures plus complexes et la prise en compte l'effet des phénomènes déjà pris comme hypothèses simplificatrices.
- L'incorporation d'un post-processeur graphique permettant d'analyser d'une manière systématique les résultats de la simulation numérique.
- Le développement du modèle au comportement tri-dimensionnel.

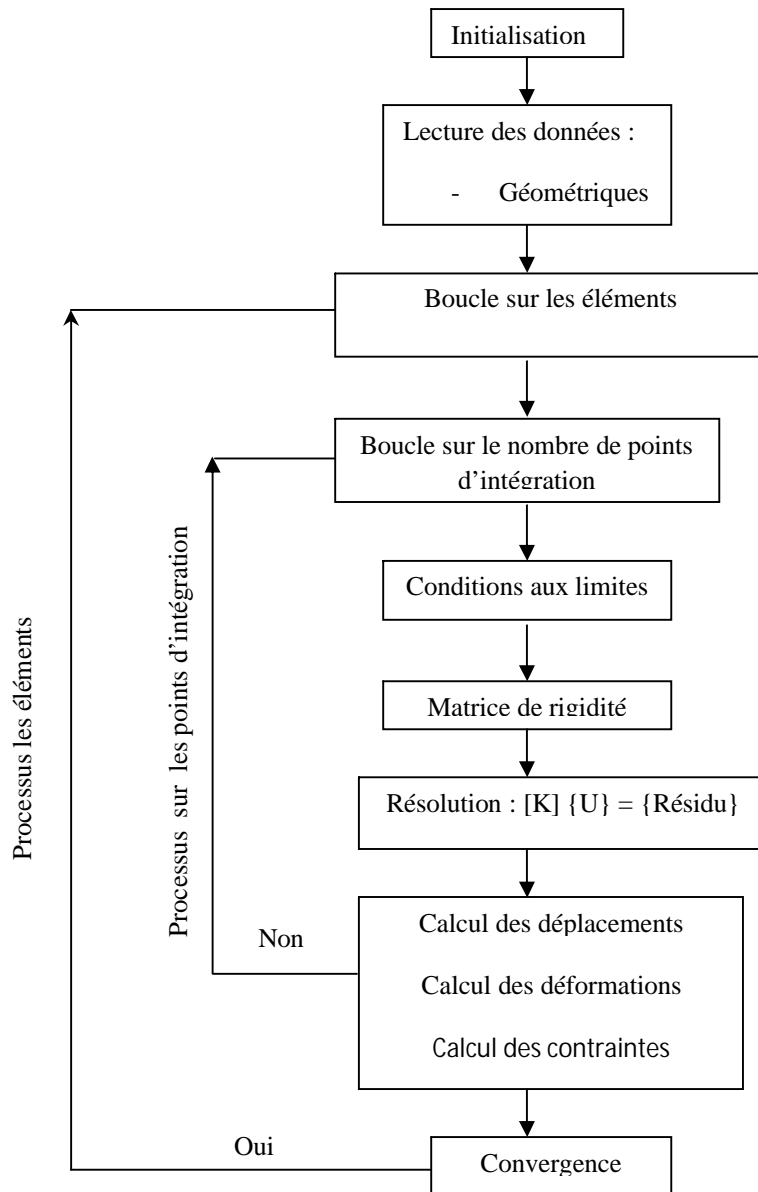
Le programme numérique développé est maintenant au point mais il est encore en nécessité d'améliorations et de développements pour bien en connaître ses possibilités et ses limites.

Liste des tableaux

Tableau 4.1 : Méthode de Gausse : abscisses ξ et coefficients de poids W_i	86
Tableau 5.1: Le déplacement maximum (m) une discrétisation en élément à 4 et à 9 nœuds.....	92
Tableau 5.2 : Effet de points d'intégration.....	92
Tableau 5.3 : Le déplacement maximum avec une discrétisation en élément à 4 et à 9 nœuds.....	93
Tableau 5.4: Le déplacement maximum avec une discrétisation en élément à 8 nœuds.....	94
Tableau 5.5: Effet du nombre de points d'intégration.....	95
Tableau 5. 6. Détail des sections transversales des poutres utilisées.....	99
Tableau 5. 7. Propriétés matérielles des poutres utilisées.....	99

Organigramme du Programme numérique SCNL (Structures à Comportement Non Linéaire)

Le présent travail a permis l'élaboration d'un programme numérique ; ce dernier est écrit en langage FORTRAN.



Structure de l'analyse linéaire du programme SCNL

Références bibliographiques

Références bibliographiques

Adeghe, L.N. and Collins, M.P. (1986). "A Finite Element Model for Studying Reinforced Concrete Detailing Problems". Publication No. 86-12, Department of Civil Engineering, University of Toronto.

Al-gadhib, A.H., ASAD-Ur-rahman, K., Baluch, M.H. CDM based finite element code for concrete in 3-D. Computers and Structures, 1998, vol. 67, pp. 451-462.

Assan A.E. (2002) Nonlinear analysis of reinforced concrete cylindrical shells. Computers and Structures, Vol.80, 2002, pp. 2177-2181.

Assan .B, Dhanasekar .M. (2002), A numerical model for flexural analysis of short reinforced masonry columns including bond-slip. Computer and Structures", Vol. 80, pp. 547-558.

Ashour, A.F., Morley, C.T(1993), "Three-Dimensional Nonlinear Finite Element Modeling of Reinforced Concrete Structures," Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 15, 1993, pp. 43-55.

Balakrishnan, S. and Murray, D.W. (1988). "Concrete Constitutive Model for NLFE Analysis of Structures". Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 114, No. 7, pp. 1449-1466.

Belarbi A., Hsu t.T.C (1994) Constitutive laws of concrete in tension and reinforcing bars stiffened by concrete. ACI Structural Journal, Vol. 91, n° 4, 1994, p 465-473.

Bary B. (1996) Etude du couplage hydraulique-mécanique dans le béton endommagé. Thèse de génie civil, université Paris 6 et ENS de Cachan, France, 1996, 156 p.

Barzegar, F. and Schnobrich, W.C. (1986). "Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete under Short Term Monotonic Loading". Civil Engineering Studies SRS No. 530, Univ. of Illinois at Urbana, Illinois

Base G. D. (1978), Short Course on Design of Concrete Structures for Serviceability, Lecture Notes, Concrete Institute of Australia, Sydney.

Bazant Z.P. (1978) On endochronic inelasticity and incremental plasticity. Int. J. Solids Struct., Vol. 14(9), 1978, pp. 691-714.

Bazant Z.P., Bhat P.D. (1976) Endochronic theory of inelasticity and failure of concrete. Int. J. Solids Struct., Vol. 102(4), 1976, pp. 701-722.

Bazant Z.P., Kim S.S. (1979) Plastic-fracturing endochronic theory for concrete. J. of Eng.Mech. Div. ASCE, Vol. 105(3), 1979, pp. 407-428.

Références bibliographiques

- Bazant, Z.P., Ozbolt, J. (1990)** Nonlocal microplane model for fracture, damage, and size effect in structures. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 1990, vol. 116, n°11, pp. 2485-2505.
- Bazant, Z.P., Pijaudier-Cabot, G. (1988 c)** Non-local continuum damage, localization instability and convergence. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 1988, vol. 55, pp. 287-293.
- Bazant Z.P., Shieh C. (1980)** Hysteretic fracturing endochronic theory for concrete. *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 106(6), 1980, pp. 929-950.
- Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu, L. (1994)** Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, vol. 37, pp. 229-256.
- Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu, L., Tabbara, M. (1995 a)** Element-free Galerkin methods for static and dynamic fracture. *International Journal of Solids and Structures*, 1995, vol. 32, n°17-18, pp. 2547-2570
- Belytschko, T., Organ, D., Krongauz, Y. A (1995 b)** coupled finite element-element free Galerkin method. *Computational Mechanics*, 1995, vol. 17, n°3, pp. 185-195.
- Belytschko, T., Tabbara, M. (1996)** Dynamic fracture using element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1996, vol. 39, n°6, pp. 229-256.
- Benouniche S. (1979)** Modélisation de l'endommagement du béton hydraulique en compression Thèse de Docteur 3^{ème} cycle : Université P.M. Curie, France, 1979.
- CEB-FIP [1993]**, "Model Code 1990. Bulletin d'information N° ; 213/214. Lausanne".
- Cervenka, V., Eligehausen, R. and Pukl, R. (1990)**. "SBETA-Computer Program for Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures". Report 90/1, Institute of Building Materials, University of Stuttgart.
- Chan H.C., Cheung Y.K., Huang Y.P. (1993)** Analytical crack model for reinforced-concrete structures.
- Chang, T.Y., Taniguchi, H., and Chen, W.F(1987)**. "Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Panels," *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 113, No. 1, January, 1987, pp. 122-140.

Références bibliographiques

- Choi C. K., Cheung S.H. (1996)** Tension stiffening model for planar reinforced concrete members. *Computers & Structures*, vol. 59, n° 1, 1996, pp. 179-190.
- Cope, R.J., Rao, P.V., Clark, L.A. and Norris, R. (1980).** "Modeling of Reinforced Concrete Behavior for Finite Element Analysis of Bridge Slabs". *Numerical Methods for Nonlinear Problems*, C. Taylor, E. Hinton and D.R.J. Oden, eds., Pineridge Press, Swansea, pp. 457-470.
- De Borst, R. and Nauta, P. (1985)** "Non-Orthogonal Cracks in a Smeared Finite Element Model". *Engineering Computations*, Vol. 2, pp. 35-46.
- Dougill J.W. (1976)** On stable progressively fracturing solids. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, Vol. 27, 1976, pp. 423-437.
- Gilbert, R.I. and Warner, R.F. (1978).** "Tension Stiffening in Reinforced Concrete Slabs". *Journal of Structural Division, ASCE*, Vol. 104, No. ST12, pp. 1885-1900.
- Gonzalez Vidosa, F., Kotsovos, M.D., Pavlovic, M.N ;(1991)** Nonlinear finite element analysis of concrete structures: performance of a fully three-dimensional brittle model. *Computers and Structures*, 1991, vol. 40, n° 5, pp. 1287-1306.
- Grelat A. (1978)** Comportement non linéaire et stabilité des ossatures en béton armé. *Annale de l'ITBTP, Série TMC/223,1978.*
- Gupta, A.K. and Akbar, H. (1983).** "A Finite Element for the Analysis of Reinforced Concrete Structures". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, pp. 1705-1712.
- Hand, F.R., Pecknold, D.A. and Schnobrich, W.C. (1973).** "Nonlinear Layered Analysis of RC Plates and Shells". *Journal of Structural Division, ASCE*, Vol. 99, No. ST7, pp. 1491-1505.
- Hellier, A.K., Sansalone, M., Carino, N.J., Stone, W.C., Ingraffea, A.R ;(1987).** Finite-element analysis of the pullout test using a nonlinear discrete cracking approach. *Cement, Concrete and Aggregates*, 1987, vol. 9, n° 1, pp. 20-29.
- Ingraffea, A.R., Gerstle, W.H., Gergely, P., Saouma, V ;(1984).** Fracture mechanics of bond in reinforced concrete. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 1984, vol. 110, n° 4, pp. 871-890.
- Jain S.K. (2000)** Advancement of endochronic theory in engineering mechanics. *ECCOMAS, Barcelona 11-14 September 2000.*

Références bibliographiques

- Jain, S.C. and Kennedy, J.B. (1974).** "Yield Criterion for Reinforced Concrete Slabs," *Journal of Structural Division, ASCE*, Vol. 100, No. ST3, pp. 631-644.
- Jirasek, M. (1998 c)** Finite elements with embedded cracks. Lausanne (Suisse): Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne - Laboratoire de mécanique des structures et milieux continus, 1998, 79 p. LSC Internal Report 98/01.
- Jirasek, M., Zimmermann, T. (1997)** Nonlocal rotating crack model with transition to scalar damage. *Computational Plasticity, Fundamentals and Applications*, Barcelona-Spain, march 27-30 1997. Edited by D.R.J. Owen, E. Onate and E. Hinton. Barcelona: CIMNE, 1997, pp. 1514-1521.
- Jirasek, M., Zimmermann, T. (1998 a)** Rotating crack model with transition to scalar damage. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 1998, vol. 124, n° 3, pp. 277-284.
- JU J. W. (1989)** On energy based coupled elastoplastic damage theories : constitutive modeling and computational aspects *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 25, N° 7, 1989, pp. 803-833.
- Kwak H.G (1990).** finite element analysis of reinforced concrete structures under monotonic loads. *Structural engineering mechanics and materials*.UCB/SEMM-90/14.november 1990.
- Kwak H.G., Kim D.Y. (2001)** inelastic behavior of RC beams under monotonic loading. ECCOMAS, 11-14 September 2000, Barcelona, Spain.
- Kotsovos, M.D., Pavlovic, M.N ;(1995).** *Structural concrete. Finite-element analysis for limit-state design*. London: Thomas Telford Publications, 1995, 550 p. ISBN 0 7277 2027 9.
- Kroplin, B., Weihe, S ;(1997).** Constitutive and geometrical aspects of fracture induced anisotropy. *Computational Plasticity, Fundamentals and Applications*, Barcelona-Spain, march 27-30 1997. Edited by D.R.J. Owen, E. Onate and E. Hinton. Barcelona: CIMNE, 1997, pp. 255-279.
- Kupfer, H.B., Gerstle, K.H (1973).** Behaviour of concrete under biaxial stresses. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 1973, vol. 99, n° 4, pp. 853-866.
- Kupfer, H., Hilsdorf, H.K., Rusch, H (1969).** Behaviour of concrete under biaxial stresses. *Journal of American Concrete Institute*, 1969, vol. 66, n° 8, pp. 656-666.

Références bibliographiques

Lemaire.M [1975], “Construction d’un code de calcul par éléments finis, élaboration d’un modèle de la fissuration et de la plastification des pièces en béton”, thèse docteur – est sciences physiques, Lyon Sept.1975

Lemaitre J. (1986) Local approach of fracture. Engineering fracture mechanics, vol. 25, 5/6, 1986, pp. 523-537.

Lemaitre J, Chaboche J. L, (1986), “Mécanique des matériaux solides”, 2^{ème} édition, Dunod.

Lin, C.S. and Scordelis, A.C. (1975). "Nonlinear Analysis of RC Shells of General Form". Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 101, No. ST3, pp. 523-53

Loo, Yew-Chaye, (1990), Reinforced Concrete Analysis and Design with Emphasis on the Application of AS3600 .1988, University of Wollongong Press, Wollongong, Australia.

Manuel SAP2000 Integrated Finite Element Analysis and Design of Structures

Merabet O. (1990) Modélisation des structures planes en béton armé sous chargement monotone et cyclique. Construction et validation d’un modèle numérique. Thèse de Doctorat, INSA Lyon, 1990, 267 p.

Nagai, G., Yamada, T., Wada, A ;(1998). Finite element analysis of concrete material based on the 3-dimensional real image data. Computational Mechanics - New Trends and Applications, Proceedings of WCCM IV, Buenos- Aires- Argentina, june 29 - july 2 1998. [CD-ROM] Edited by S.R. Idelsohn, E.Onate and E.N. Dvorkin. Barcelona: CIMNE, 1998.

Ngo, D., Scordelis, A.C ;(1967). Finite element analysis of reinforced concrete beams. Journal of the American Concrete Institute, 1967, vol. 64, n° 3, pp. 152-163.

Ohlsson, U., Olofsson, T. (1997) Mixed-mode fracture and anchor bolts in concrete analysis with inner softening bands. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1997, vol. 123, n° 10, pp. 1027-1033.

Olofsson, T., Klisinski, M., Nedar, P. (1994) Inner softening bands: a new approach to localization in finite elements. Computational Modelling of Concrete Structures, Proceedings of EURO-C International Conference, Innsbruck-Austria, march 22-25 1994. Edited by H. Mang, N. Bicanic and R. De Borst. Swansea: Pineridge Press, 1994. pp. 373-382

Ozbolt, J., Bazant, Z.P. (1994) Microplane model for cyclic triaxial behavior of concrete. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1992, vol. 118, n° 7,

Références bibliographiques

pp. 1365-1386.

Ozbolt, J., Bazant, Z.P. (1996) Numerical smeared fracture analysis: nonlocal microcrack interaction approach. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 1996, vol. 39, pp. 635-661.

Park, P. and Paulay, T. (1975). *Reinforced Concrete Structures* John Wiley & Sons, New York. Popovics, S. (1969). "A Review of Stress-Strain Relationships for Concrete". *Journal of ACI*, Vol. 66, No. 5, pp. 756-764.

Paul Rapin, Lauréat de l'Institut Ingénieur de l'Ecole Supérieure d'Electricité "Méthode des éléments finis", *Technique de l'ingénieur*, pp ; A 656-2.

Pijaudier-Cabot G. (1985) Caractérisation et modélisation du béton pour un essai multi-axial automatique. Thèse de génie civil, université Paris 6, 1985, 188 p.

Raguneau F. (1999) Fonctionnement dynamique des structures en béton.

Thèse de génie civil, université Paris 6 et ENS de Cachan, 1999, 176 p.

Ramtani S. (1990) Contribution à la modélisation du comportement multiaxial du béton endommagé avec description du caractère unilatérale. Thèse de génie civil, université Paris 6 et ENS de Cachan, 1990, 185 p.

Rashid, Y.R. (1968). "Analysis of Prestressed Concrete Pressure Vessels". *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 7, No. 4, pp. 334-344.

Reynouard J.M. (1974) Structures planes en béton armé. Elaboration d'un modèle du comportement jusqu'à la ruine et résolution numérique. Thèse Docteur-ingénieur, INSA Lyon, France, 1974, 187 p.

Rossi, P., Ulm, F.J ;(1997). Size effects in the biaxial tensile-compressive behaviour of concrete: physical mechanisms and modelling. *Materials and Structures*, 1997, vol. 30, pp. 210-216.

Rots, J.G. (1991) Smeared and discrete representations of localized fracture.

International Journal of Fracture, 1991, vol. 51, pp. 45-59.

Rots, J.G., Blaauwendraad, J ;(1989 a). Crack models for concrete: discrete or smeared? Fixed, multi-directional or rotating? *Heron*, 1989, vol. 34, n° 1, pp.1-59.

Saouridis, C., Mazars, J. (1989) Analysis of concrete structures by a multiscale damage approach. *Proceedings of the fifth International Symposium on Numerical Methods in Engineering*, Lausanne-Switzerland, september 11-15 1989. Edited by R. Gruber, J. Periaux and R.P. Shaw. Berlin: Springer

Références bibliographiques

Verlag, 1989. Vol. 1, pp. 377-382.

Saouridis, C., Mazars, J. (1992) Prediction of the failure and size effect in concrete via a bi-scale damage approach. *Engineering Computations*, 1992, vol. 9, n° 3, pp. 329-344.

Scanlan A., Murray D.W. (1972) An analysis to determine the effects of cracking in reinforced concrete slabs. Proc. of the specially conference on finite element in civil engineering, Université de Montréal, 1972.

Scanlon, A. and Murray, D.W. (1974). “Time Dependent Reinforced Concrete Slab Deflection.” *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 100(9), 1911-1924

Scotta R., Hanganu A. (2001) a scalar damage model with shear retention factor for the analysis of RC structures. *Computers and Structures*, 78, 2001, pp. 737-755.

Slovia Finite Element System version 9.0.

Suidan, M., Schnobrich, W.C ;(1973). Finite element analysis of reinforced concrete. *Journal of the Structural Division, ASCE*, 1973, vol. 99, n° 10, pp. 2109-2122.

Suzuki H. Chen W.F. (1983) Elastic-plastic-fracture analysis of concrete structures. *Computers and Structures*, Vol. 16, n° 6, 1983, pp. 697-705.

Tamai, S., Shima, H., Izumo, J., and Okamura, H. (1987). “Average Stress-Strain Relationship in Post-Yield Range of Steel Bar in Concrete”, *Concrete Library of JSCE Translation of Proceedings of JSCE*, 378(6), 117-129

Tavarez, F.A., (2001), “Simulation of Behavior of Composite Grid Reinforced Concrete Beams Using Explicit Finite Element Methods,” Master’s Thesis, University of Wisconsin-Madison, Madison, Wisconsin.

Torrent, R.J., Dvorkin, E.N., Alvaredo, A.M ;(1987). A model for work hardening plasticity and failure of concrete under multiaxial stresses. *Cement and Concrete Research*, 1987, vol. 17, pp. 939-950.

Van mierz, J.G.M.1997 Mode I fracture of concrete: discontinuous crack growth and crack interface grain bridging. *Cement and Concrete Research*, vol. 21, n° 1, pp. 1-15.

Van mierz, J.G.M., Shah, S.P., Arnaud, M., et al. (1991) Strain softening of concrete in uniaxial compression. *Materials and Structures*, 1997, vol. 30, pp.195-209.

Références bibliographiques

Vebo, A. and Ghali, A. (1977). "Moment-Curvature Relation of Reinforced Concrete Slabs". Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 103, No. ST3, pp. 515-531.

Vecchio, F. and Collins, M.P. (1982). "The Response of Reinforced Concrete to In-Plane Shear and Normal Stress". Publication No. 82-03, Department of Civil Engineering, University of Toronto, Toronto, Canada.

Wang, J., Navi, P., Huet, C ;(1997). Numerical analysis of crack propagation in tension specimens of concrete considered as a 2D multicroacked granular composite. Materials and Structures, 1997, vol. 30, pp. 11-21

Warner, R. F., Rangan B. V., Hall A. S. and Faulkes, K.A. (1998), Concrete Structures, Addison Wesley Longman Australia Pty. Ltd., South Melbourne, Australia.

Weihe, S., Kröplin, B., De Borst, R ;(1998). Classification of smeared crack models based on material and structural properties. International Journal of Solids and Structures, 1998, vol. 35, n° 12, pp. 1289-1308.

Zienkiewicz O.C, Taylor R.L (1991) (the finite element method, fifth edition Volume 1: the basis [chapter 8 pp 174]

ملخص

أطروحة الماجستير هذه تقودنا إلى تطوير النموذج العددي للسلوك الملطف للخرسانة في حالة الشد و الذي يسمح بنمذجة سلوك رافدات الخرسانة المسلحة بعد تشققها، إن تحليل هياكل الخرسانة المسلحة تعتمد على مبدأ الشق المنتظم الذي يدرج الحالة العامة للفرع النازل من قانون سلوك الخرسانة في حالة الشد بعد تشققها. هذا التصور كثير الاستعمال لتقدير قيمة الإجهادات المتوسطة في حالة الشد بعد تشقق الخرسانة.

في هذا الإجراء قدمنا تمثيلاً لنموذج عددي Tension Stiffening الذي يعكس سلوك رافدات الخرسانة المسلحة المشققة، إن إنشاء هذا النموذج العددي مبني أساساً على نظرية طاقة الانكسار المطبقة على الخرسانة، في هذه الوضعية، الضياع في الطاقة الكامنة اخذ بعين الاعتبار عند تشقق الخرسانة و الذي يسترجعها بدلالة تزايد التشوه الأساسي المعتبر.

إن هذا الإجراء و نموذج Tension Stiffening الجديد قد ثبتاً في برنامج عددي متطور لتحليل سلوك هياكل الخرسانة المسلحة. في هذا الانشغال العديد من المعاملات المرتبطة بنموذج Tension Stiffening قد تم دراستها و التعليق عليها. الخصوصية في سلوك الخرسانة بعد تشققها درست لتقييم مساهمة نموذج Tension Stiffening في مرحلة سلوك ما بعد التشقق لرافدات الخرسانة المسلحة.

إن إتباع نموذج العناصر المتناهية للشد و عامل Tension Stiffening بالمقارنة مع النتائج المتحصل عليها من هذا الادعاء و المعطيات التجريبية، استعمال هذا التقريب في تحليل سلوك رافدات الخرسانة المسلحة يبين طريقة للتفكير المقترحة من جهة و قوة البرنامج العددي من جهة أخرى.

مفتاح الكلمات

- نموذج Tension Stiffening، انكسار بقص، رافدات الخرسانة المسلحة، طريقة العناصر المتناهية، نظرية طاقة التشقق، نموذج الشق المنتظم، السلوك بعد التشقق.

Abstract

Abstract

This work deals to the development of the analytical model for tensile softening behavior of concrete, which can simulate the behavior of the reinforced concrete beams after cracking. The analysis of reinforced concrete structures based on smeared crack approach generally include a descending branch of the behavior law of concrete in tension after its cracking. This concept is widely used to estimate the average stress in tension after the cracking of concrete.

In this procedure, the tension stiffening model, which reflects the cracked reinforced concrete beams, is presented. The establishment of this numerical model is mainly based on the principle of the fracture energy concept applied for concrete. The mastery of the cracking phenomenon is a very difficult task to assimilate in the behavior of reinforced concrete structures. In this state, the loss of the strain energy is considered at cracking moment but it recuperates it according to the increase of the principal major strain.

The presented procedure and the novel tension stiffening model have been implemented in the developed numerical program for the analysis of reinforced concrete structures. In the concern, many parameters linked to tension stiffening model have widely been studied and commented. A particularity of the cracked concrete behavior is studied to quantify the contribution of the tension stiffening model in the cracking range.

The prediction using the finite element model of tension and the tension stiffening effect have widely been validated with comparison between results obtained by this numerical simulation and the experimental data. The using of this approach in the analysis of the behavior of reinforced concrete beams shows the performance of the proposed step and moreover the robustness of the numerical program.

Key words: Tension stiffening model, shear failure, reinforced concrete beams, finite element method, fracture energy concept, smeared crack model, post-cracking behavior.

Résumé

Résumé

Ce travail de magister conduit au développement d'un modèle numérique du comportement adoucissant du béton en traction qui peut simuler le comportement des poutres en béton armé après leur fissuration. L'analyse des structures en béton armé basée sur l'approche de la fissure répartie inclue en général une branche descendante de la loi de comportement du béton en traction après sa fissuration. Ce concept est largement utilisé pour estimer la contrainte moyenne en traction après la fissuration du béton.

Dans cette procédure, un modèle de tension stiffening qui reflète le comportement des poutres en béton armé fissurées, est présenté. L'établissement de ce modèle numérique est essentiellement basé sur le principe du concept de l'énergie de la rupture appliquée au béton. La maîtrise du phénomène de fissuration est une tâche très difficile à assimiler dans le comportement des structures en béton armé. Dans cette situation, une perte de l'énergie potentielle est considérée au moment de fissuration du béton mais il la récupère en fonction de l'augmentation de la déformation principale majeure.

La procédure présentée et le nouveau modèle de tension stiffening ont été implantés dans un programme numérique développé à l'analyse des structures en béton armé. Dans ce souci, plusieurs paramètres liés au modèle de tension stiffening ont largement été étudiés et commentés. Une particularité du comportement du béton après sa fissuration est étudiée en vue de quantifier la contribution du modèle de tension stiffening dans la phase post-fissuration.

La prédiction par le modèle élément finis de tension et l'effet de tension stiffening ont largement été validés par une comparaison entre les résultats obtenus par cette simulation et les données expérimentales. L'utilisation de cette approche dans l'analyse du comportement des poutres armé montre la performance de la démarche proposée d'une part et la robustesse du programme numérique d'autre part.

Mots clés: Modèle de tension stiffening, rupture par cisaillement, poutres en béton armé, méthode des éléments finis, concept de l'énergie de fissuration, modèle de la fissure répartie, comportement après fissuration.