

République Algérienne Démocratique Populaire
Ministère des études supérieures et des recherches scientifiques
Université Mentouri Constantine
Faculté d'Ingénieur
Département de Génie Civil



THESE
Pour obtenir le grade de
Magister

Présenter par :
LECHEHEB MOSTEFA

Sujet de la thèse

Modélisation analytique d'un rail sur appui
continu : Analyse paramétrique

Soutenue le : 04/07 /2010

DEVANT LE JURY

Président :	HOUARI. H	Pr	Univ. Constantine
Rapporteur :	LASSOUED. R	M.C	Univ. Constantine
Examineurs :	GUENFOUD. M	Pr	Univ.Guelma
	BELOUAR. A	Mc	Univ. Constantine

Dédicaces

« Ceux qui vivent, ce sont ce qui luttent ; ce sont ceux, dont un dessin ferme emplit l'âme et le front, ceux qui d'un haut destin gravissent l'âpre cime, ceux qui marchent pensifs épris d'un but sublime, ayant devant les yeux sans cesse nuit et jour ou quelque grand amour ceux-là vivent ; seigneur ! Les autres je les plains car de son vague ennui le néant les enivre. Car le plus lourd fardeau, c'est d'exister sans vivre »

A ma Mère, à mon père que Dieu me les garde

A Mes frères: Souâad, Hichem, Badar, Khelifa, Wided, Mohamed, Aussama (Boubou).

*A mes Oncles, mes Cousins, mes Cousines surtout
« Zina »*

A mes amis : Tikou, Hocine, Ahmed, Farid, Rafic, Fouad, Azize, Fateh, Abd Elhadi, Riad, Halim, Fares, Khaled, Hassen, Wafi, Hamza, ...

Et surtout Mon véritable Amie "Abdelheq"

Et A mes Collègues de Magistère.

Mostefa



Remerciements

Je remercie, en premier lieu, mon dieu qui a bien voulu me donner la force pour effectuer le présent travail.

Je remercie mes très chers parents pour leurs soutiens et leurs patiences.

J'exprime mes profonds remerciements à Mon directeur de thèse Dr: R. Lassoued pour son orientation et ses Précieux conseils et surtout pour sa patience.

Sans oublier bien sur tout les enseignants de département de génie civil

J'adresse aussi ma gratitude à monsieur Gebbar Nabil pour leurs conseils et leurs remarques précieuses.

Je remercie également le président et les membres de jury d'avoir accepter d'examiner mon travail



ملخص:

كلما كانت سرعات الأحمال المتحركة كبيرة , كلما كانت الحركة الديناميكية للسكة الحديدية والبنية التحتية أكثر تأثيرا وأكثر أهمية تستدعي دراستها.

الدراسات النظرية والتجريبية تدل على أن الاهتزازات الناجمة عن حركة المرور على السكة الحديدية والطرق تسبب أثارا كبيرة على البيئة والمحيط. هذه الظاهرة تسمى بانتشار الموجات. دراسة التشوه وللكبس لهيكل السكة الحديدية يعد أمر جد هام من ناحية التأثير الديناميكي.

هناك تأثير بالغ على السكة الحديدية عند سرعات معينة , انتشار الاهتزازات في طبقة حجر الرص ممكن أن يؤدي إلى الخراب الكامل للسكة.

تحليل السلوك الديناميكي للعارضة ذات طول لانهائي , تتم دراستها كعارضة "برنولي" أو كعارضة "تمشكو" تركز على نظام مكون من : الروافد , النعال , وحجر الرص , هذا النظام تكون فيه الإسناد متباعدة فيما بينها بانتظام وتكون من نفس الخصائص الميكانيكية في هذه المذكرة يهمننا أكثر الدراسة التحليلية لموجات الاهتزاز <<موجات بلوك >> ومن أجل عدة أنظمة ميكانيكية للإسناد.

باستخدام طريقة التكامل المباشر منسوق مع شروط استمرارية دالة المسألة ستسمح لنا بإيجاد دالة <<قرين>> الخاصة بالمعادل التفاضلية التي تعرف السلوك الاهتزازي لنظام السكة.

الكلمات الأساسية:

الاهتزاز, دالة قرين, موجات بلوك, رافده لانهائية, إسناد دورية.

Résumé

Plus les vitesses des charges roulantes sont élevées plus le mouvement dynamique du rail et de l'infrastructure est important. Les études théoriques et expérimentales montrent que la vibration induite par le trafic routier ou ferroviaire provoque des effets considérables sur l'environnement dans la zone proche. Ce phénomène se traduit par la propagation d'onde. La déformation de même que le tassement de la voie sont beaucoup plus importants en tenant compte de l'effet dynamique. Plus gravement pour les voies ferrées, sous certaines vitesses de passage des trains, les ondes se propageant dans la couche de ballast peuvent conduire à la ruine complète de la voie.

L'analyse du comportement dynamique d'une poutre infinie simulée en tant que poutre Euler ou poutre de Timoshenko est appuyée sur un système caractérisé par : les traverses, les semelles, et le Ballast. Ce système d'appuis est espacé régulièrement et présente les mêmes caractéristiques mécaniques. Dans cette thèse nous intéressons à la détermination analytique des ondes propres de vibrations « ondes de Bloch » et ce pour plusieurs systèmes mécanique d'appuis (appuis rigide, appuis massique...). L'utilisation de la méthode d'intégration directe combinée aux conditions de continuité de la fonction solution du problème permet de déterminer la fonction de Green associée à l'équation différentielle régissant le comportement vibratoire du système rail.

Mots Clés :

Vibration, fonction de Green, ondes Bloch, poutre infinie, appuis périodique

Abstract

An analytical model permit to represent the wave propagation due to the vibrations induced by a mobile source is developed for structure infinite as beam rail.

The determination of the total dynamic response of the structure rail on periodic supports simulated as a beam of Euler and as a beam of Timoshenko is described analytically by using the transform of Fourier, the function of Green, the principle of superposition as well as the theorem of Bloch. The use of the conditions of continuity permits to give the solution of the function Green, the Bloch constant is given for the structure resting on periodic supports, by using the principle of superposition and the function of Green. These free waves are called waves of Bloch.

Thus the spectrum of the band-widths and the forbidden bands for the vibration of the waves of inflection is given. The transform of standardized Bloch is given for a given mode. It allows the decomposition of the mobile source on the modes by using the theorem of Sanchez and to evaluate the components of Bloch of displacement starting for the components of the mobile source. The opposite return permit, by composition of the various components of displacement to determine the response of the structure prone to a mobile source.

Key words:

Dynamics, infinite beam, analytical, propagation waves.

Sommaire

Chapitre 01 : Etude Bibliographique

Introduction	6
1.1 Description de la structure des voies ferrées	7
1.2 Modélisation de la voie ferrée	18
1.3 Propagation des ondes	23
1.4 Les structures périodiques	27
1.5 Quelques travaux	30
Conclusion	41

Chapitre 02 : Rail Libre

Introduction	43
2.1. Poutre Euler-Bernoulli	43
2.1.1. Equation différentielle du mouvement	43
2.1.2. Détermination de la fonction de Green	47
2.2. Poutre Timoshenko	54
2.2.1. Equation différentielle du mouvement	54
2.2.2. Détermination de la fonction de Green de la poutre de Timoshenko	61
2.3. Les ondes de flexion libres :	65
2.3.1. Poutre Euler	65
2.3.2. Poutre de Timoshenko	66
2.4. Poutre Timoshenko versus Poutre Euler	68
2.4.1. Les nombres d'onde	68
2.4.2. Fonction de Green	70
2.5. Comparaison entre le modèle d'Euler et le modèle de Timoshenko	72
2.5.1. Nombres d'onde	72
2.5.2. Fonction de Green :	74
Conclusion	75

Chapitre03 : Rail sur semelle continue (support rigide : béton armé)

Introduction	78
3.1. Poutre Euler	79
3.1.1. Equation différentielle du mouvement	79
3.1.2. Détermination de la fonction de Green	81
3.1.3. L'atténuation des ondes	84
3.2. Poutre Timoshenko :	90
3.2.1. Equation différentielle du mouvement :	90
3.2.2. Détermination de la fonction de Green	91
3.3. Modèle Euler VS Modèle Timoshenko	95
Conclusion	96

Chapitre 04 : Rail sur voie ballastée

Introduction	99
4.1. Poutre Euler.	102
4.2. Poutre Timoshenko :	109
Conclusion	113

Chapitre 05 : Rail sous l'influence d'une charge mobile

Introduction	115
5.1 Calcul du déplacement $y'_n(x, k)$ pour un mode donné : « fonction de Bloch ».	116
5.2. Validation de la périodicité de la fonction de Bloch.	120
5.3. La réponse d'une poutre sur supports infinie sous une force harmonique	122
5.4 Influence du Moment d'inertie.	130
Conclusion	134

Conclusion Général 135

ANNEXES 137

Références

Liste des figures

<i>Figures</i>	<i>Désignations</i>	<i>page</i>
<i>Figure 1.1</i>	<i>les deux types des travers des rails</i>	<i>08</i>
<i>Figure 1.2</i>	<i>les types des rails</i>	<i>09</i>
<i>Figure 1.3</i>	<i>Pose des rails en Europe</i>	<i>11</i>
<i>Figure 1.4</i>	<i>Pose des rails en Amérique du Nord</i>	<i>14</i>
<i>Figure 1.5</i>	<i>Structures à symétrie unidimensionnelle</i>	<i>19</i>
<i>Figure 1.6</i>	<i>Structures à symétrie unidimensionnelle</i>	<i>28</i>
<i>Figure 2.1</i>	<i>Poutre soumise à un chargement dynamique</i>	<i>44</i>
<i>Figure 2.2</i>	<i>Evolution de la réceptance $G_w(x, x_0)$ en fonction de la fréquence</i>	<i>52</i>
<i>Figure 2.3</i>	<i>L'évolution de $G_w(x, x_0)$ en fonction de $x - x_0$ pour $f = 500\text{Hz}$</i>	<i>53</i>
<i>Figure 2.4</i>	<i>Poutre soumise à un chargement dynamique (poutre Timoshenko)</i>	<i>55</i>
<i>Figure 2.5.a</i>	<i>flèche dynamique</i>	<i>56</i>
<i>Figure 2.5.b</i>	<i>Déformation d'un tronçon élémentaire</i>	<i>56</i>
<i>Figure 2.5.c</i>	<i>Efforts agissants sur un tronçon élémentaire</i>	<i>57</i>
<i>Figure 2.6</i>	<i>Evolution de la réceptance $G_w(x, x_0)$ en fonction de la fréquence Modèle de Timoshenko-Rail libre infini</i>	<i>63</i>
<i>Figure 2.7</i>	<i>Evolution de $G_w(x, x_0)$ en fonction de $x - x_0$ Modèle de Timoshenko-Rail libre infini</i>	<i>65</i>
<i>Figure 2.8</i>	<i>Evolution de k_b et $k_b \times 20 \log e$ (Modèle Euler)</i>	<i>66</i>
<i>Figure 2.9</i>	<i>Evolution de k_p et $k_d \times 20 \log e$ (Modèle Timoshenko)</i>	<i>68</i>
<i>Figure 2.10</i>	<i>Comparaison entre les deux modèles pour les nombres d'onde</i>	<i>70</i>
<i>Figure 2.11</i>	<i>Comparaison entre les deux modèles pour la fonction de Green en fonction de $x - x_0$</i>	<i>72</i>
<i>Figure 2.12</i>	<i>Approximation de Nordborg (Comparaison entre les deux modèles pour les nombres d'onde)</i>	<i>73</i>
<i>Figure 2.13</i>	<i>Approximation de Nordborg (Comparaison entre les deux modèles pour la fonction de Green en fonction de $x - x_0$)</i>	<i>74</i>
<i>Figure 3.1</i>	<i>Modèle de la poutre rail sur appui continu en béton</i>	<i>78</i>
<i>Figure 3.2</i>	<i>rail sur fondation élastique (Béton)</i>	<i>79</i>
<i>Figure 3.3.a</i>	<i>les forces agissant la poutre infinie</i>	<i>80</i>
<i>Figure 3.3.b</i>	<i>les forces agissant pour une longueur élémentaire dx</i>	<i>80</i>
<i>Figure 3.4</i>	<i>La fonction de Green pour un rail sur fondation élastique continue en fonction de la fréquence. Modèle Euler</i>	<i>83</i>
<i>Figure 3.5</i>	<i>La fonction de Green pour un rail sur fondation élastique continue en fonction de la fréquence pour différents raideurs du béton. Modèle Euler</i>	<i>84</i>
<i>Figure 3.6</i>	<i>Atténuation des ondes de vibrations le long d'un rail sur fondation élastique continue. Modèle Euler.</i>	<i>86</i>
<i>Figure 3.7</i>	<i>Atténuation des ondes de vibrations le long d'un rail sur fondation élastique continue (cas d'un support élastique sans déperditions internes). Modèle Euler.</i>	<i>87</i>
<i>Figure 3.8</i>	<i>L'influence de la raideur du béton sur l'atténuation des ondes de</i>	<i>89</i>

	<i>vibrations. Modèle Euler.</i>	
<i>Figure 3.9</i>	<i>Evolution de la fonction de Green pour un rail sur fondation élastique continue en fonction de la fréquence. Modèle Euler.</i>	92
<i>Figure 3.10</i>	<i>Evolution de k_{py} (nombre d'onde) et $k_{dy} \times 20 \cdot \log e$ (Atténuation) pour un rail sur fondation élastique continue en fonction de la fréquence. (Modèle Timoshenko)</i>	93
<i>Figure 3.11</i>	<i>L'influence de la raideur du béton sur l'atténuation des ondes de vibrations. Modèle Timoshenko</i>	94
<i>Figure 3.12</i>	<i>Comparaison entre les deux modèles pour la fonction de Green en fonction de la fréquence</i>	95
<i>Figure 4.1</i>	<i>Onde verticale de flexion pour la poutre d'Euler pour un appui massique</i>	105
<i>Figure 4.2</i>	<i>Onde verticale de flexion pour la poutre d'Euler pour un appui rigide</i>	105
<i>Figure 4.3</i>	<i>Onde verticale de flexion pour la poutre d'Euler pour un système d'appui mécanique simple (ressort-masse)</i>	106
<i>Figure 4.4</i>	<i>Onde verticale de flexion pour la poutre d'Euler pour un système d'appui mécanique complexe (ressort-masse-ressort)</i>	106
<i>Figure 4.5</i>	<i>Onde verticale de flexion pour la poutre d'Euler pour un appui massique pour différents rigidités</i>	107
<i>Figure 4.6</i>	<i>Onde verticale de flexion pour la poutre d'Euler pour un appui rigide pour différents rigidités</i>	107
<i>Figure 4.7</i>	<i>Onde verticale de flexion pour la poutre d'Euler pour un appui rigide et un appui massique</i>	108
<i>Figure 4.8</i>	<i>Onde verticale de flexion pour la poutre d'Euler pour un système d'appui mécanique simple (ressort-masse) et un système d'appui mécanique complexe (ressort-masse-ressort)</i>	108
<i>Figure 4.9</i>	<i>Onde verticale de flexion pour la poutre de Timoshenko pour un appui élastique</i>	111
<i>Figure 4.10</i>	<i>Onde verticale de flexion pour la poutre de Timoshenko pour un appui massique</i>	111
<i>Figure 5.1</i>	<i>Rail sur appui périodique sous l'influence d'une source mobile</i>	115
<i>Figure 5.2</i>	<i>Correspondance entre la pulsation</i>	117
<i>Figure 5.3</i>	<i>Courbe de dispersion pour les trois premières bandes: cas d'un appui plus rigide $S_y=3 \cdot 10^7$</i>	127
<i>Figure 5.4</i>	<i>Déplacement en fonction du temps non-dimensionnelle pour le cas plus rigide (à grande vitesse et à vitesse réduite) $S_y=3 \cdot 10^7$.</i>	128
<i>Figure 5.5</i>	<i>Courbe de dispersion pour les trois premières bandes: cas d'un appui moins rigide $S_y=2 \cdot 10^7$</i>	128
<i>Figure 5.6</i>	<i>Déplacement en fonction du temps non-dimensionnelle pour le cas d'un appui moins rigide (à grande vitesse et à vitesse réduite) $S_y=2 \cdot 10^7$</i>	129

Liste des symboles :

symboles	Désignations
m_l	Masse linéique
EI	Rigidité en flexion verticale de la poutre
E	Module d'élasticité
G	Module de cisaillement
A	Section
k'	Paramètre de distribution de la contrainte de cisaillement
ρ	Masse volumique du rail
M	Moment de flexion de la poutre
$y(x,t)$	Déplacement vertical de la poutre
$y'(x,w)$	Transformée de Fourier du déplacement vertical de la poutre
$r(x,t)$	Réaction de la fondation élastique
v	Effort tranchant
fi	Force d'inertie
k_b	Nombre d'onde de flexion d'une poutre mince
k_d	Correspond aux ondes de champ proche
k_p	Correspond aux ondes propagatives
k_c	Nombre d'onde des ondes de compression
k_t	Nombre d'onde des ondes de cisaillement
$G(x, x_0)$	Fonction de Green
w	Pulsation de la structure
w_n	Pulsation de la structure selon le mode de vibration n
γ	constante de propagation de Block
α	Atténuation d'onde
k	Nombre d'onde de Block
δ	Opérateur du Dirac
s_p	Raideur du blochet
s'_p	Raideur de la fondation élastique
F'_0	Force ponctuelle exercé par la roue en x_0
$F'_n(w)$	Réaction au point x_n
$Z_n(w)$	Impédance de l'appui n
l	Distance entre deux appuis
$y'_{0(n)}(k)$	l'amplitude en $z = 0$ du mode d'ordre n au nombre d'onde k
$y'_n(x, k)$	le déplacement correspondant au mode d'ordre n et au nombre d'onde k
$F(x, t)$	Source mobile sollicitant la poutre
$F'(x, w)$	Transformée de Fourier dans le temps de la source mobile $F(x, t)$
$\hat{F}_n(K^*)$	Transformée de Bloch de la fonction $F(x)$
$\bar{y}_n(X^*, K^*)$	le conjugué complexe de l'onde de Bloch contenue dans la nième bande

Abréviations

L.R.S : Longs Rails Soudés

U.I.C : union internationale de chemin de fer

CRR : Centre de recherche routière

LCPC : Laboratoire Central des Ponts et Chaussées

MEF : Méthode des Eléments Finis.

MDF : Méthode des Eléments Discret.

LGV : Les lignes à grande vitesse

RDM : Résistance des matériaux.

G.N.T : grains non traité

INTRODUCTION

Durant les années récentes, les transports ferroviaires et routiers, aussi bien pour les voyageurs que pour les marchandises, se sont beaucoup développés. Beaucoup de recherches ont été réalisées afin d'améliorer la vitesse des trains avec des voies qui sont dimensionnées pour pouvoir supporter ces vitesses de véhicules élevées. Dans les pays développés : le TGV en France, le Shinkansen au Japon, l'ICE en Allemagne, l'X2000 en Suède, le Pendolino en Italie, le Thalys et l'EuroStar, etc. En France, le réseau de TGV de la SNCF permet des trains qui peuvent aller jusqu'à la vitesse de 300 km/h en régime commercial et de 500 km/h en essai.

Cependant, plus la vitesse des véhicules est élevée, plus le mouvement dynamique du rail et de l'infrastructure est important. La même observation peut être faite pour les voies routières.

Les études théoriques et expérimentales montrent que la vibration induite par le trafic routier ou ferroviaire provoque des effets considérables sur le véhicule lui-même, sur la voie et l'infrastructure, et aussi, sur l'environnement dans la zone proche. La dynamique de structures soumises au mouvement des véhicules peuvent engendrer différents types de problèmes : le problème d'interaction dynamique véhicule-structure, le problème dynamique des voies et de l'infrastructure en interaction avec le sol, le problème de propagation d'ondes dû au passage des véhicules et ses influences sur les bâtiments, etc.

La motivation initiale de cette étude est de comprendre les phénomènes physiques de vibration apparaissant dans les voies en fonction de la vitesse des véhicules. Les mesures in situ montrent que, lorsque le véhicule circule avec une vitesse assez élevée, surtout sur les zones où le sol est souple, des dommages importants peuvent être engendrés dans la voie. La déformation de même que le tassement de la voie sont beaucoup plus importants en tenant compte de l'effet dynamique.

Plus gravement pour les voies ferrées, sous certaines vitesses de passage des trains, les ondes se propageant dans la couche de ballast peuvent conduire à la ruine complète de la voie. Evidemment, dans ces cas, le comportement des structures ne reste plus dans la zone linéaire mais doit être non-linéaire. Ces non-linéarités, réciproquement, influencent le mécanisme de propagation d'ondes dans la structure et ne peuvent pas être négligées.

Cette thèse est constituée de cinq chapitres :

Le premier chapitre c'est une synthèse bibliographique, ou nous présentons une description succincte de la structure des voies ferroviaires: leurs constituants et les aspects de modélisation, une introduction sur la propagation des ondes et surtout la propagation des ondes le long d'un rail. Nous présentons aussi un état de l'art dans le domaine des structures rail sur appuis périodiques. L'optique de cette analyse bibliographique est de donner une orientation de notre travail dans ce domaine de recherche.

Dans Le deuxième chapitre nous réalisons l'étude d'un rail libre modélisé par une poutre Euler, et dans un deuxième temps par une poutre de Timoshenko. Les deux équations différentielles pour les modèles concernées ont été établit à partir des équations d'équilibre. La transformée de Fourier nous permet d'établir l'équation associe à l'équation différentielle prenant en compte la fonction de Green. La détermination de la fonction de Green est réalisée en utilisant les conditions de continuité de la fonction solution en utilisant soit la méthode directe (intégration) ou la méthode de la transformée de Fourier (résolution des intégrale par la méthode des résidus).L'application des conditions de continuité permet d'établir un système d'équations linéaires dont la résolution a été faite sur Maple. Une analyse sur le nombre d'onde et sur l'atténuation est concrétisée. La fonction de Green est analysée pour différents point de la poutre rail. Enfin nous concluons ce chapitre par une comparaison entre les deux modèles.

Pour le troisième chapitre 'rail comme poutre infinie appuyé sur fondation élastique en béton'. Ce modèle est proposé vu le champs d'application très large à l'heure

actuelle (structure de tramways). Les équations différentielles régissant le comportement mécanique de la structure rail pour le modèle d'Euler et le modèle de Timoshenko sont établit en linéarisant la rigidité des supports (blochets). L'utilisation de la transformée de Fourier nous permis de déterminer la fonction de Green associé à l'équation différentielle.

L'analyse paramétrique des modèles d'Euler et de Timoshenko sur un support en béton armé en fonction de différentes rigidités nous a permis de déterminer la fréquence f_p seuil d'analyse des basses fréquences et des hautes fréquences . Donc deux domaine d'analyse sont déterminer, il est convenable de signaler que cette fréquence dépend de s_p' , le comportement dans les deux domaines précités est différent. Le résultat de la comparaison des deux modèles en termes de module de la fonction de Green n'est pas amplifié avec l'augmentation de la fréquence.

Le quatrième chapitre nous Proposons une modélisation plus réaliste pour les structures rail de chemin de fer. La structure rail infinie repose sur des appuis périodiques qui sont les blochets qui eux même repose sur le ballast.

Est donc modélisons le rail comme poutre infinie posé sur appuis périodiques (sur ballast), et comme le deuxième chapitre le rail modélisé comme poutre Euler et comme poutre Timoshenko. Et pour cela on fait une analyse des supports périodiques. Nous intéressons à la détermination analytique des ondes propres de vibrations « ondes de Bloch » et ce pour plusieurs systèmes mécanique d'appuis On utilise la fonction de Green, le théorème de Bloch, et le principe de superposition, et enfin une comparaison entre les deux modèles.

Finalement, on conclut sur les résultats obtenus et on propose de futures études possibles à partir de ces démarches.

Chapitre 01 :

Etude bibliographique

Introduction

Ce chapitre présente une synthèse bibliographique du problème dynamique des structures infinies et des structures périodiques infinies. Soit libres ou soumises à des charges mobiles et permet d'exposer les phénomènes étudiés. Ainsi, la littérature spécialisée permet d'identifier les paramètres qui jouent un rôle prépondérant dans le comportement global de telles structures et de cerner les exigences nécessaires pour pouvoir modéliser d'une manière réaliste les effets dynamiques dans ces structures. Nous allons, donc, commencer par présenter une introduction générale pour notre application auxquelles on s'intéresse les voies ferrées. Nous décrirons leurs constituants, leurs rôles structurels ainsi que les modèles utilisés pour le dimensionnement. D'autre part, un état de l'art global sur les voies ferrées aussi bien en ce qui concerne la détermination des fréquences et modes propres que le comportement dynamique est largement exposé.

L'analyse des vibrations générées par le trafic ferroviaire est le sujet de nombreux travaux de recherche, généralement en vue de valider ou d'améliorer une configuration véhicule/voie/sol existante.

La plupart des études concernées se focalisent :

- soit sur le comportement véhicule/voie, notamment au niveau du contact roue/rail pour l'estimation de l'excitation due aux essieux (donnant naissance aux vibrations dans la voie) ;
- soit sur la propagation des vibrations dans la structure du sol.

En revanche, un nombre plus réduit d'études prend en compte l'ensemble de la structure.

Dans les premiers cas d'analyse, des approches simplifiées sont proposées pour la partie de la structure qui ne fait pas l'objet de l'étude particulière. Ainsi, lorsque

celle-ci se focalise sur la partie "excitation", la modélisation de l'ensemble véhicule/voie peut être très détaillée.

En revanche, la contribution du sol (couplage) n'est parfois pas prise en compte ou modélisée de façon très simplifiée (fondation de Winkler), et la propagation dans le sol n'est pas abordée. D'autres travaux proposent des modélisations pour les deux aspects "excitation" et "propagation" mais avec une résolution découplée. Enfin, des études sont disponibles au sujet du comportement des sols (partie "propagation") soumis à une excitation s'approchant du cas ferroviaire. On peut citer le cas des charges mobiles s'appliquant directement à la surface d'un sol, ou via un rail (modélisé par une poutre) reposant ou non sur une semelle élastique avec prise en compte des traverses, *etc.*

Néanmoins, durant ces dernières années, des travaux plus détaillés ont été réalisés, principalement dédiés à l'analyse des trains à grandes vitesses. En effet, ce type de véhicules induit des vibrations importantes, voire des déplacements de rails pouvant être préjudiciables à la tenue de la structure en fatigue. De plus, dans certains cas sur le bruit, et surtout le bruit de contact roue/rail, nous signassions aussi que plusieurs travaux de recherche sur l'influence des caractéristiques de la voie ou aussi de la fondation (type d'appui) sur l'atténuation des ondes de vibration le long d'un rail ont été développées.

D'autres études se concentrent sur la circulation d'un véhicule dans une voie sous terre (tunnel, ou voie de métro).

1. Description de la structure des voies ferrées :

La voie est constituée par un assemblage d'éléments d'élasticité variable qui transmettent à la plate-forme, elle-même déformable, la charge dynamique des roues. La voie classique comporte deux rails dont l'inclinaison et l'écartement sont maintenus par des traverses reposant sur une épaisseur variable de ballast ou sur

béton (fondation élastique), en principe isolé de la plate-forme par une sous-couche, ou comme la voie moderne sur béton (fondation élastique).



A : Rail sur Ballast



B : Rail sur béton

Figuree1.1 : les deux types des travers des rails

1.1. Rail :

C'est le premier élément en contact entre le véhicule et la voie. Plusieurs profils de rail ont été utilisés depuis l'existence des véhicules guidés mais il ne reste que deux profils utilisés qui sont le double champignon (rail symétrique) et le rail Vignole (rail à patin).

Tous les profils ont en commun les éléments suivants :

- La partie supérieure : le champignon qui supporte les contacts des roues ; l'âme, partie médiane amincie ; le patin.
- La partie inférieure : les parties inclinées du champignon et du patin qui permettent le serrage des éclisses, Le champignon du profil à gorge, comporte en outre, l'équivalent d'un contre-rail qui permet la circulation en chaussée des boudins de roues.

Les rails sont de longues barres d'acier profilées, qui mises bout à bout servent à former un chemin de fer. Les rails servent à la fois de guide et de support de

roulement pour les véhicules. Étant conducteurs des courants électriques, ils sont souvent utilisés pour la transmission de signaux (circuits de voie) et pour le retour des courants de traction et des auxiliaires du train (ligne train pour le chauffage et la climatisation sur les rames tractées). Généralement, une voie ferrée est constituée de deux files de rails posées en parallèle sur des traverses. Un système de transport fondé sur l'utilisation d'un seul rail est un monorail. Un rail peut servir aussi à l'alimentation électrique (alimentation par troisième rail).

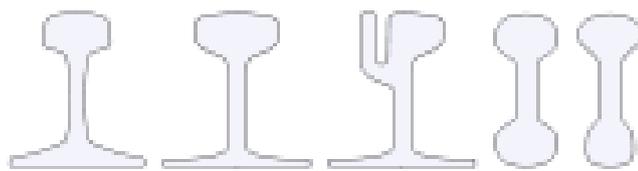


Figure 1.2 : les types de rails

Rails. De gauche à droite, type UIC 60, type Vignole, type Broca ou à gorge, type double champignon symétrique, et asymétrique

➤ **Histoire :**

A Milan ou dans les docks de Londres, l'utilisation de bandes de roulements, composées de deux files parallèles de dalles en pierres ou de madriers de bois, ont été une alternative au pavage complet des chaussées pour diminuer la résistance au roulement des chariots. Au départ les bandes étaient suffisamment larges pour qu'on puisse y maintenir manuellement les véhicules. Pour pouvoir utiliser des bandes plus fines, en premier lieu des solives en bois puis des rails en acier, il a fallu trouver un moyen de guidage du chariot sur ces rails. Au début du chemin de fer, le système actuel à rail saillant (*edge-rails*) a été en concurrence avec une technologie de voie à ornières ou rail plat (*tramroad ou plateway*). Dans ce dernier système, le guide latéral qui permet de s'assurer que la roue reste en position sur le rail n'est pas situé sur la jante mais sur le côté du rail. Le rail plat, plus près du

sol et donc plus stable, était moins onéreux à poser et on espérait pouvoir y faire circuler les chariots routiers. Il a été notamment utilisé dans les mines du pays de Galles, mais l'usage a montré qu'il était beaucoup plus sujet à l'encrassement par les dépôts de boue et son usage a été abandonné.

➤ **Types de rails :**

Le rail moderne est généralement du type « Vignole » ; dans une section transversale, on distingue le patin qui s'appuie sur la traverse, le champignon qui constitue le chemin de roulement, et l'âme, filet vertical qui relie le champignon au patin. Sur les lignes importantes, la masse linéique standard du rail est de 60 kg/m.

Le rail à « double champignon symétrique » avait été conçu pour permettre de retourner le rail usé et donc de doubler sa durée de vie. Le défaut de ce système était que lorsque le rail était retourné, il était déjà abimé (poinçonnements dû à l'écrasement au niveau des berceaux). Ce principe a été abandonné. Des rails type « double champignon asymétrique » ont également été employés : un seul côté, de plus forte section, était utilisé pour le roulement. La simplification apportée par la fixation du rail type Vignole a amené à l'abandon de ce système.

Des rails à gorge (type « Broca ») sont utilisés pour les voies encastrées dans les chaussées routières, notamment pour les installations industrielles et les lignes de tramway.

➤ **Pose des rails**

✚ Europe

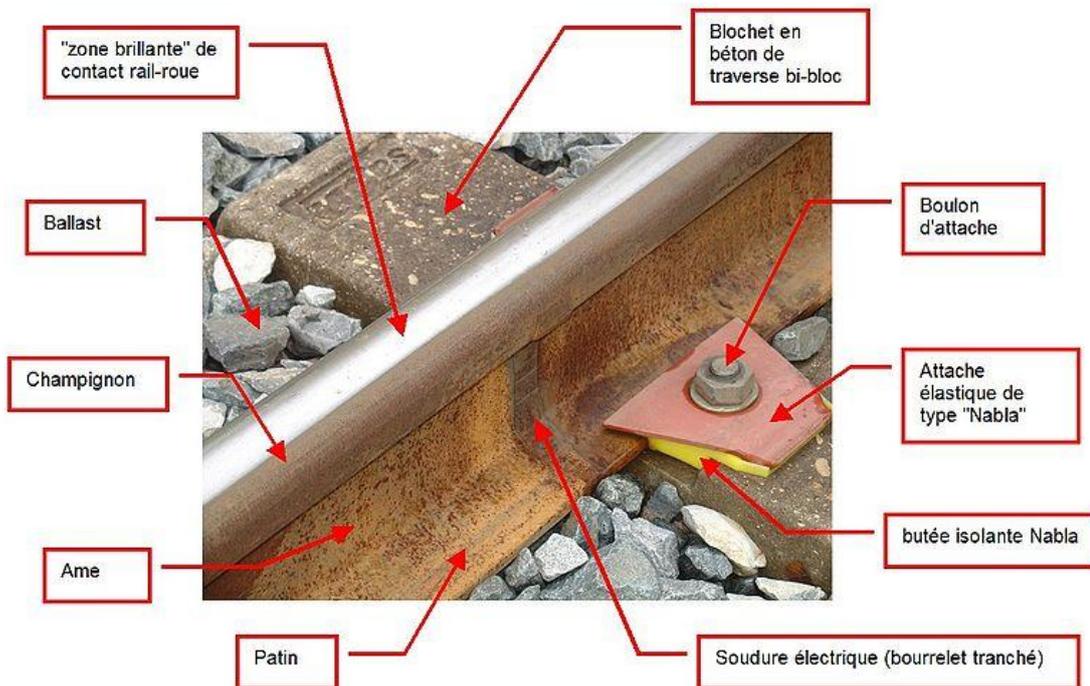


Figure 1.3 : Pose des rails en Europe

La pose des rails se fait normalement avec des joints de dilatation, les rails, de 18 ou 36 m de long, couissant librement dans les éclisses (pièces qui assurent la jonction de deux rails successifs). Dans ce cas la continuité électrique doit être assurée. De plus en plus se développe la technique dite des « barres longues » ou LRS (longs rails soudés), dans laquelle les coupons de rail de 80 m sont soudés en atelier en longueurs de 320 à 400 mètres. Ces barres sont posées sur de très grandes longueurs, sans limite réelle, les soudures nécessaires étant réalisées sur place. La dilatation est contrainte par le frottement des traverses sur le ballast. Cela suppose que sont réunies certaines conditions de stabilité de la plate-forme et de rayon de courbure minimum. À l'extrémité des LRS sont installés des appareils de dilatation, ainsi qu'à droite de certains ouvrages d'art.

Le ballast est constitué de roches dures concassées (il s'agit généralement de roches éruptives : granite, rhyolite, quartzite...) qui doivent résister à l'attrition, qui émousse les angles. L'épaisseur du ballast est en fonction de la charge et de l'intensité du trafic, soit 30 cm sur ligne classique, et 40 cm sur LGV.

Une voie ferrée traditionnelle est fixée sur des traverses en bois reposant sur un ballast fait de cailloux concassés à arêtes vives. La fixation se fait grâce à des tire-fonds ou des attaches élastiques.

Les traverses assurent la transmission de la charge au ballast, et le maintien de l'écartement et de l'inclinaison des rails. Le travelage, c'est-à-dire le nombre de traverses au kilomètre est variable, généralement de 1666 traverses/km à la SNCF. Les traverses peuvent être :

- en bois généralement du chêne, mais on utilise aussi des bois exotiques durs, tels que l'azobé, qui à une durée de vie réduite (20 à 30 ans) cependant, ils sont faciles à mettre en œuvre);
- en acier plus bruyantes, elles ne sont plus utilisées en France en pose neuve) ;
- en béton, d'une durée de vie importante (50 ans), il en existe de deux types : bibloc, reliées par une barre métallique ou monobloc en béton précontraint. Les traverses en béton sont appelées des blochets.

Durant leur phase de préparation, les traverses en bois sont imbibées de créosote lors d'un passage en étuve. La créosote est un assemblage d'hydrocarbures utilisé dans la protection du bois.

La voie ferrée peut aussi être posée sans ballast, directement sur un lit de béton. C'est le cas pour le tunnel de Marseille sur la LGV Méditerranée, ainsi qu'en Allemagne pour la ligne ICE entre Francfort et Cologne. Ce procédé réduit l'entretien mais coûte plus cher et ne permet pas de corriger facilement les défauts de géométrie.

Les croisements et changements de voies se font en général par des appareils de voie qui comprennent des aiguillages, des traversées (croisement de deux voies sans aiguilles mobiles) et des traversées jonctions simples ou doubles, autorisant le croisement de deux voies et l'aiguillage vers une ou deux directions. À l'époque de la vapeur il y avait des ponts tournants, valables surtout pour des véhicules de faible empattement.

Outre ses fonctions de roulement et de guidage, le rail a souvent une fonction de sécurité : il sert de circuit aux courants de signalisation, ce qui permet de mettre au rouge automatiquement un signal lorsqu'un véhicule court-circuite les deux rails. De plus, le rail constitue le circuit de retour du courant électrique de traction vers la sous-station d'alimentation.

➤ Amérique du Nord

En Amérique du Nord, les crampons sont préférés aux tire-fonds, toutefois on peut trouver des attaches élastiques dans les endroits fortement sollicités, comme par exemple dans les aiguillages et les courbes prononcées.

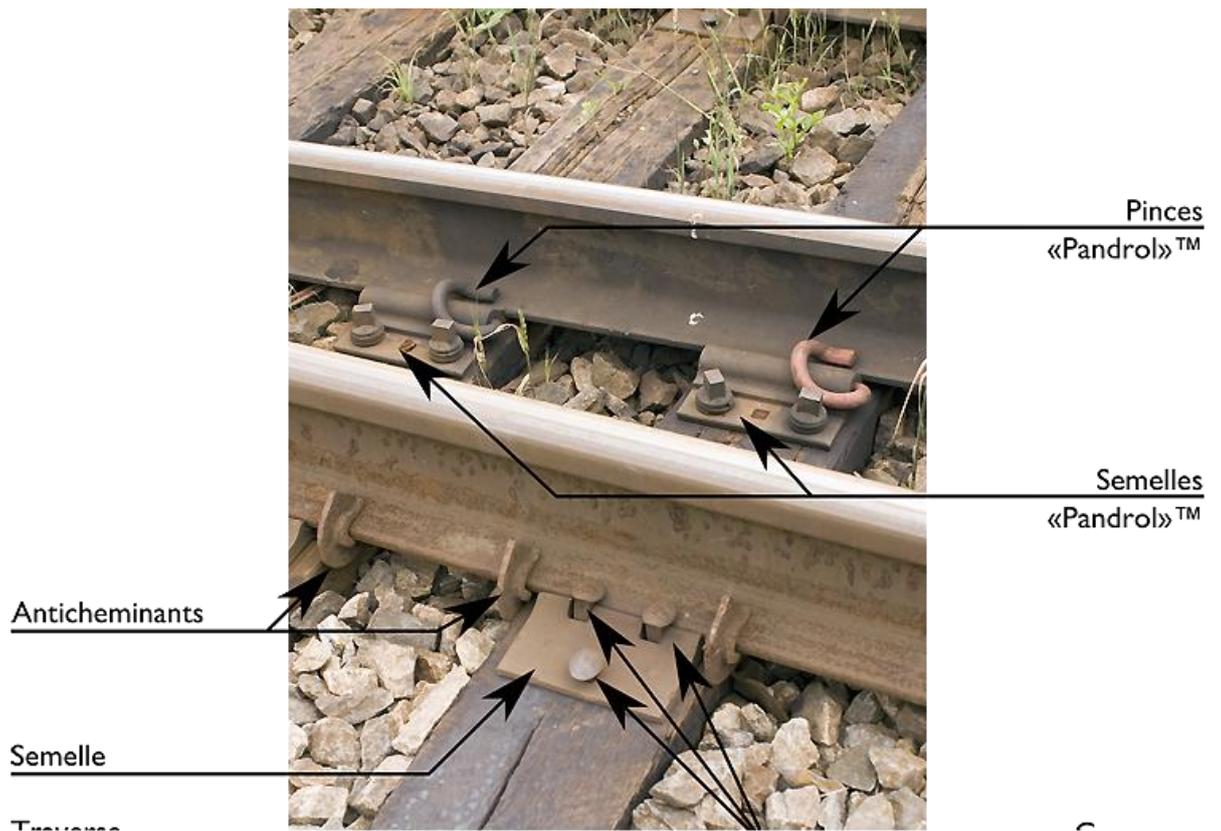


Figure 1.4 : Pose des rails en Amérique du Nord

Ci-dessus, nous avons un exemple de deux types de fixations dans un aiguillage; le rail du haut est la voie déviée, et est donc soumis à un effort supplémentaire, d'où les fixations élastiques («*Pandrol*™») dans le cas présent).

Les anticheminants servent à empêcher le déplacement longitudinal des rails dûs à l'expansion thermique des LRS, ou des efforts de traction ou encore de freinage du matériel roulant. On les trouvera surtout à proximité des joints de dilatation.

➤ **Caractéristiques du rail**

Le rail ferroviaire est en acier, avec un taux de carbone moyen, (de l'ordre de 0,6 % à 0,8%), et avec un taux de manganèse et de silicium importants, (de 0,7 % à 1,2 % et de 0,1 % à 0,6% respectivement), ce qui le rend dur et lui permet de supporter des contraintes élevées. Les rails étant des produits métalliques massifs, ils doivent être exempts d'hydrogène. En effet, la petite taille de l'atome d'hydrogène lui permet de circuler dans le produit fini, jusqu'à créer localement des bulles susceptibles de provoquer une rupture spontanée du rail.

Les rails sont laminés à chaud (température de l'ordre de 1 200 °C) et subissent un corroyage (réduction de section depuis le bloom jusqu'au rail fini) d'au moins 7°C. Ce corroyage peut cependant être insuffisant pour certaines applications: la solidification des blooms doit alors être maîtrisée.

Pour ces aciers au carbone nous n'utilisons pas la terminologie habituelle de la sidérurgie; on parlait de nuances 700, 800 ou 900A (MPa) jusqu'en 2002, de nuances comme par exemple R260 (dureté HBW sur la table de roulement) selon la norme européenne EN13674 de nos jours.

Les rails manufacturés ont des profils symétriques. À la pose, ils sont légèrement inclinés vers l'intérieur de la voie d'environ :

- 1/20 en France, Belgique, Italie, Espagne ;
- 1/30 au Danemark, en Suède ;
- 1/40 en Allemagne, en Europe centrale.

La table de roulement des roues est de forme conique avec un raccord concave vers le boudin. C'est la forme de la roue qui permet à l'essieu ferroviaire monobloc, par différence des rayons de roulement droite-gauche, de s'auto-centrer dans la voie lorsqu'il se déporte latéralement, sans action d'organes extérieurs. Cet

asservissement mécanique lui permet de prendre les courbes larges sans user son boudin.

Le profil de roue normalisé par l'Union internationale des chemins de fer, dit « profil UIC », comporte une partie au 1/40 et un raccordement progressif vers le boudin. Ce profil est appelé également S1002, d'après la désignation de celui qui avait été choisi parmi les différents profils testés.

➤ Conicité

La conicité, c'est-à-dire l'angle (en radian) au contact roue-rail est propre à chaque couple « profil de roue / profil de rail », et varie avec l'usure. C'est une fonction de la position latérale de l'essieu dans la voie, donc de la roue relativement au rail, qui peut varier de typiquement ± 8 mm entre butées aux boudins. Elle est sensible à la pose du rail, à l'usure, et à l'écartement.

La conicité équivalente est la valeur de cette fonction pour un jeu dans la voie donné. Par exemple, à l'état neuf, pour un jeu de ± 3 à ± 5 mm elle est de :

- 0,16 à 0,24 pour le couple S1002/rail au 1/40 ;
- 0,01 pour le couple S1002/rail au 1/20.

S'agissant d'une valeur locale de la fonction, elle est très sensible à la pose du rail. Une forte conicité caractérise un contact capable d'auto-orienter l'essieu, mais il risque de rendre le bogie et par voie de conséquence le véhicule instable. On y remédie avec des suspensions raides. Il s'agit d'un compromis différent pour un TGV et un métro.

Les surfaces de contact entre roue et rail sont de l'ordre du cm^2 ; on les calcule à partir des courbures des profils, à l'aide de la théorie d'Hertz sur le contact élastique (1887). Les pressions peuvent être très élevées, de l'ordre de 1000 MPa. Les efforts tangents se calculent par la théorie de Kalker (1967).

Les rails de tramway sont souvent posés à plat, et leurs roues sont parfois cylindriques. Les virages sont si serrés sur les réseaux de tramways que l'on ne cherche pas toujours à utiliser l'effet bicône. On limite l'usure par le graissage des boudins et en ne chargeant pas trop les essieux.

En France, comme dans une majeure partie des pays, l'écartement des rails est généralement de 1,435 mètre (sauf voies industrielles spécifiques ou de tourisme où l'écartement peut varier beaucoup). Pour augmenter l'effet bicône, on surécarte les voies de chemin de fer dans les courbes, sauf pour les tramways qui utilisent des rails à gorge ne permettant pas ce sur écartement sous peine d'une usure anormale du flanc interne des roues.

➤ **Entretien du rail**

L'entretien de la voie ferrée est concentré sur le ballast et la rectitude d'alignement des rails. Cette dernière se vérifie sous charge, par exemple en France ils utilisent les voitures Mauzin. On peut rectifier les déviations par bourrage du ballast, par changement des traverses ou des attaches si elles sont endommagées, ou encore par « Renouvellement Voie Ballast » (RVB) si la voie est jugée trop ancienne.

La maintenance des rails porte sur leurs défauts internes ou externes. Sous l'action du passage des roues, les contacts peuvent fatiguer le rail. Des défauts internes ou des soudures mal faites peuvent générer des fissures non débouchantes que l'on détecte par ultra-sons. Des fissures externes peuvent apparaître, surtout dans les courbes, là où il y a glissement relatif roue-rail. On détecte ces défauts de surface par capteurs à courant de Foucault, qui détectent aussi l'usure ondulatoire.

Le moyen principal de maintenance préventive en matière de voies est le meulage, qui permet d'éliminer les défauts de surface susceptibles de générer des fissures, comme par exemple la fatigue de contact (RCF ou rolling contact fatigue en anglais) ou l'usure ondulatoire. Chaque meulage enlève jusqu'à 1 mm d'épaisseur d'acier et redonne une forme appropriée au champignon.

La surveillance d'un réseau ferroviaire par ces méthodes est critique pour la sécurité mais aussi pour la maîtrise des coûts de maintenance.

Il existe des rails dits sans entretien, colaminés à chaud avec une plaque inoxydable qui permet à la table de ne pas s'oxyder. Le contact sur ces rails permet de garantir le shuntage, lorsque les rails sont utilisés dans les circuits de voie.

2. Modélisation de la voie ferrée:

La recherche en mécanique des voies ferrées est toujours réalisée avec deux approches parallèles : l'expérience et la simulation. Pour la simulation numérique, la première tâche est de modéliser la structure et aussi l'excitation. Concernant notre sujet, les composantes seront modélisées de façon plus ou moins détaillées, couplées avec les autres ou considérées indépendantes.

Nous allons présenter brièvement ci-dessous les modèles qui sont souvent utilisés dans le dimensionnement des voies ferrées. Un résumé de ces possibilités est présenté dans la figure 1.5.

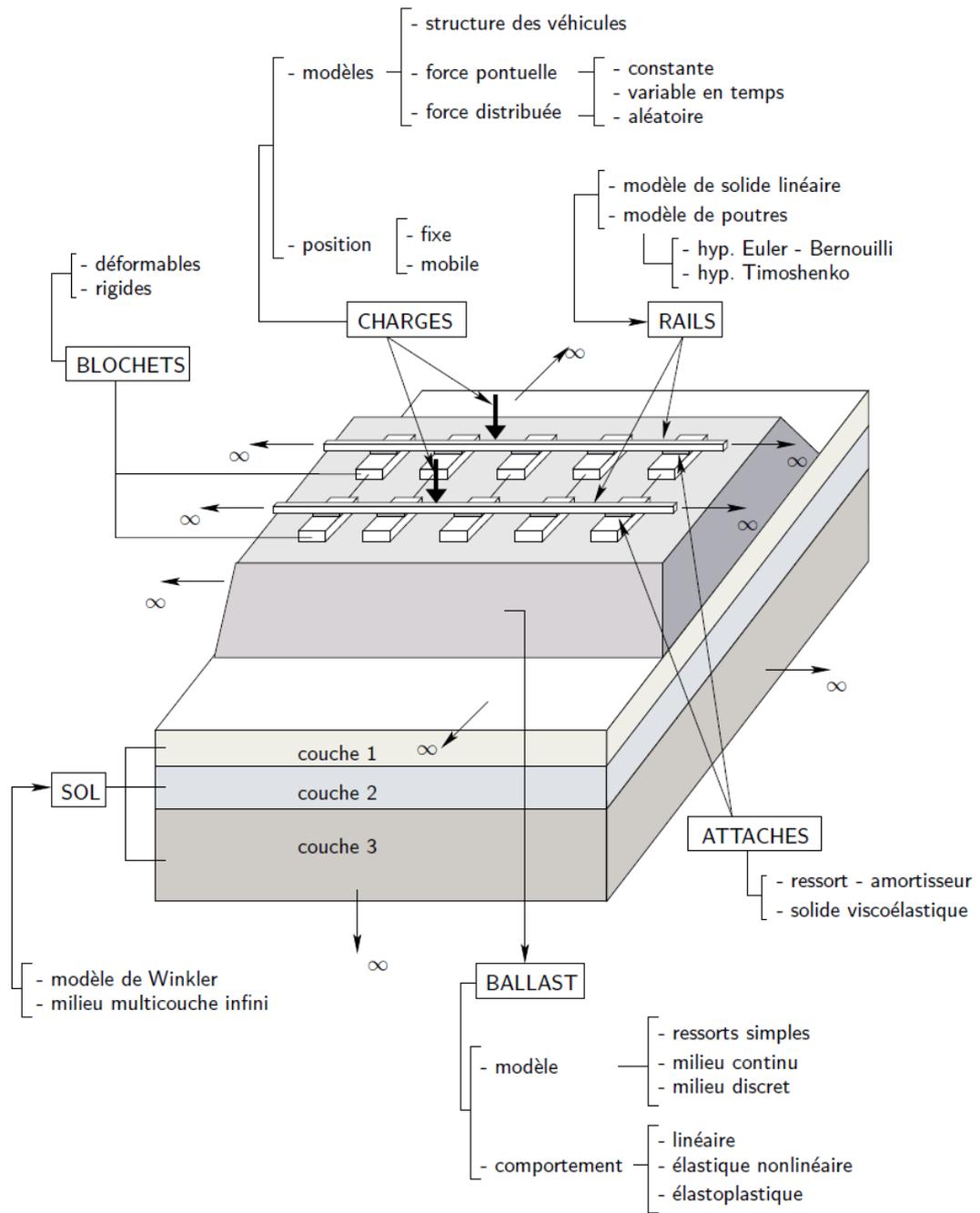


Figure 1.5 : modélisation des voies ferrées.

Dans la modélisation dynamique des voies ferrées, les composants et leurs modèles proposés sont présentés comme suit :

➤ Le véhicule et le contact roue-rail :

Les constituants essentiels du véhicule sont le corps de la voiture, les bogies et les essieux. S'on s'intéresse à l'étude de sa réponse (confort des voyageurs), le véhicule doit être modélisé par des modèles complexes (modèle à six degrés de liberté, modèle à dix degrés de liberté) sinon il est remplacé par la charge exercée sur la voie au niveau du contact roue-rail. Deux approches sont proposées pour simuler le contact roue-rail :

1. le contact rigide.

2. le modèle d'Hertz (ressort non-linéaire d'Hertz).

➤ Le rail :

La modélisation de cet élément par une poutre nous permet de reconnaître les modes de vibration en basses fréquences. Deux modèles de poutre sont proposés :

1. Modèle de poutre d'Euler-Bernoulli, la section de la poutre reste toujours droite et perpendiculaire à la fibre moyenne de la poutre et l'effet de cisaillement est négligé.

2. Modèle de poutre de Timoshenko, la section reste droite mais pas perpendiculaire à la fibre moyenne de la poutre et l'effet de cisaillement est pris en compte.

Dans le cas tridimensionnel, le rail peut être modélisé par des éléments massifs afin d'éviter la difficulté au niveau du couplage entre un milieu solide et un milieu curviligne.

➤ La semelle :

Les semelles sont souvent modélisées par des éléments viscoélastiques. Leurs masses peuvent être négligées. Dans le cas unidimensionnel, on peut les remplacer par des systèmes simples (ressort-amortisseur). Leur capacité d'amortissement

importante peut réduire considérablement les charges exercées sur les blochets surtout pour la partie en haute fréquence.

➤ La traverse :

La masse et la rigidité des blochets sont très importantes dans la modélisation parce qu'elles assurent la stabilité de la voie. Dans le cas (1D) ou (2D), les blochets sont modélisés soit par des corps rigides soit par des masses ponctuelles. Dans le cas (3D) trois modèles sont présentés pour la traverse :

1. Poutre de Timoshenko.
2. Eléments massifs.
3. Deux corps rigides liés par une poutre.

La première fréquence propre d'une traverse monobloc est d'environ 150 Hz tandis que la première fréquence propre d'une traverse bi-blocs est d'environ 500 Hz.

➤ Le ballast :

Le ballast est un matériau granulaire non-linéaire. Dans le cas (1D), il est modélisé par des systèmes simples (masse-ressort-amortisseur). Dans le cas (2D) et (3D), il est représenté soit par un modèle discret, soit par un modèle continu.

➤ Les sous-couches et le sol :

En général, ils sont modélisés par des modèles continus non-linéaires mais à cause de la non-linéarité du ballast qui est plus importante que celles des sous-couches et du sol, des modèles linéaires sont utilisés.

➤ Modèles globaux de voies :

Un modèle global de la voie est construit en combinant les hypothèses des composants : véhicules, rail, semelles, traverses, ballast, sous-couches et le sol. Deux familles principales de modèles sont définies :

1. Modèles 1D : l'infrastructure de la voie est représentée par un système de masses-ressorts-amortisseurs.
2. Modèles massifs : les constituants de la voie sont représentés par des éléments solides.

Ces modèles peuvent être décomposés en deux types : les modèles simples et les modèles complexes.

✚ Les modèles simples :

Ils ne représentent pas précisément la structure de la voie mais ils nous permettent de trouver les éléments privilégiés qui influencent la réponse dynamique du système comme la vitesse critique ou la fréquence critique par exemple. Quelques exemples de modèles simples peuvent être cités :

- Un massive multicouche soumis à des charges mobiles.
- Une poutre (Euler-Bernoulli) posée sur la fondation de Winkler. Ce type de modèles est convenable pour déterminer la réponse dynamique du rail mais pas des constituants au-dessous.
- Une poutre sur un demi-espace et soumise à des charges mobiles.

✚ Les modèles complexes :

Ils représentent les voies de façon plus réaliste. Les composantes de la voie comme les traverses, les semelles, le ballast, le sol...peuvent être introduit en fonction du niveau de complexité du problème.

Dans un modèle (1D) complexe le véhicule est représenté par un système de masses-ressorts-amortisseurs à dix degrés de liberté, le contact roue-rail est simulé par le ressort non-linéaire de Hertz, le rail est modélisé par une poutre de Timoshenko, l'infrastructure est remplacée par un système de plusieurs couches de masses-ressorts-amortisseurs, et des ressorts horizontaux sont ajoutés dans la couche de ballast afin de tenir compte de la présence des contraintes de cisaillement.

Ce modèle donne de bons résultats au niveau de chaque composant de la voie, ceux-ci sont bien en accord avec les résultats de mesures.

Un modèle complexe en 3D doit tenir compte de la non-linéarité dans le ballast, les sous-couches et le sol. De plus, une loi de comportement bien adaptée doit être introduite pour définir le modèle continu du ballast.

Concernant les méthodes de calculs, deux méthodes sont utilisées dans l'étude de la dynamique des voies ferrées : la méthode semi-analytique et la méthode numérique. La méthode semi-analytique est limitée aux problèmes linéaires et de géométrie simple, par contre les méthodes numériques sont plus convenables pour les problèmes non-linéaires et avec des géométries plus complexes (la méthode des éléments finis). Dans les méthodes numériques, la structure doit être discrétisée de façon telle que les ondes peuvent se propager, par ailleurs des frontières artificielles doivent être introduites pour permettre d'écrire l'influence des domaines extérieurs.

3. Propagation des ondes :

En physique, la propagation des ondes est un phénomène qui décrit par l'évolution d'une onde, ou du mouvement d'une particule dans le temps et l'espace, par rapport à un milieu. En considérant la direction de propagation de l'onde dans l'espace, on peut distinguer deux types d'ondes :

- les ondes longitudinales,
- les ondes transversales.

Le principal paramètre caractérisant la propagation des ondes est la célérité, c'est-à-dire la vitesse de propagation d'une onde dans un milieu donné

3.1. Conditions de propagation

Certains types d'onde ont besoin d'un milieu matériel pour se propager. Par exemple, le son ne se propage pas dans le vide. La propagation d'une onde

n'implique pas le déplacement des composants du milieu à grande échelle, mais plutôt leur oscillation. Pour les ondes mécaniques, ce n'est pas la matière qui est transportée, mais l'énergie, on parle alors de « transport d'énergie sans transport de matière ».

3.2. Vitesse de propagation

La vitesse de propagation d'une onde peut être définie comme la vitesse à laquelle la propagation s'effectue, elle vaut :

$$c = \lambda \cdot f = \frac{\lambda}{T}$$

où λ est la longueur d'onde et f la fréquence de l'onde.

3.3. Équation d'onde

L'équation d'une onde est plus ou moins compliquée suivant le nombre de dimension et le milieu (isotropie, homogénéité) dans lequel elle se déplace. Notamment des termes peuvent intervenir dans l'équation. La solution peut être une fonction scalaire, mais aussi vectorielle, ou tensorielle, ou encore spinorielle.

3.3.1. Une dimension

Le phénomène de propagation des ondes peut être modélisé par une équation d'onde, c'est-à-dire une équation aux dérivées partielles du second ordre. À une dimension, cette équation est donnée par :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

et a pour solution :

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

La solution $u(x, t)$ est une fonction à deux inconnues x et t , mais le problème considéré est bien à une seule dimension spatiale, celle de x , la déformation se fait par rapport à x . La fonction $f(x, t)$ correspond à la propagation de l'onde vers la gauche, et $g(x, t)$ à la propagation vers la droite.

3.3.2. N dimensions

Dans un espace à n dimensions, l'équation d'onde homogène prend la forme :

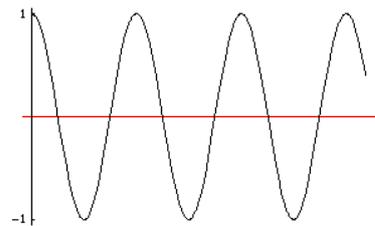
$$c_i^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

où $u = u(x_1, \dots, x_n, t)$ est une solution à $n+1$ inconnues.

3.4. Ondes longitudinales et transversales

On parle d'onde longitudinale lorsque le phénomène physique s'effectue dans la même direction que la propagation de l'onde. Les ondes acoustiques, un système de ressort en sont des exemples. Le terme d'onde transversale est employé lorsque le phénomène physique se fait perpendiculaire à la direction de propagation, comme les ondes électromagnétiques dans le vide, ou les vagues.

3.5. Ondes progressives et ondes stationnaires

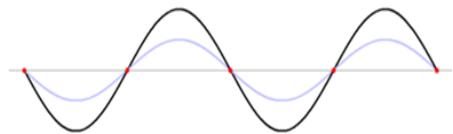


Onde progressive

Il est d'usage dans la communauté scientifique de distinguer les ondes progressives des ondes stationnaires. Les ondes progressives, *avançant* dans l'espace.

Les ondes stationnaires, au contraire, oscillent sans se déplacer. Ainsi, elles ne dépendent plus du seul paramètre $z - ct$, mais des paramètres d'espace z et de temps t de façon indépendante. Une expression simple d'une onde stationnaire harmonique à une dimension est la suivante :

$$U(z, t) = U_0 \cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right) \cos\left(2\pi\frac{z}{\lambda}\right)$$



Onde stationnaire

On appelle la pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Et le vecteur d'onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

À un temps t fixé, une onde stationnaire ressemble à une onde progressive. En revanche, son évolution temporelle est totalement différente. Une onde stationnaire possède des minima (nœuds) et des maxima (ventres) d'amplitude *fixes* dans l'espace. Ainsi, si on se place aux nœuds de cette onde, l'amplitude est nulle quel que soit le temps. Avec une onde progressive, nous aurions vu l'amplitude évoluer, de façon sinusoïdale avec le temps dans le cas d'une onde harmonique.

Une façon simple de construire une onde stationnaire est de superposer deux ondes progressives se propageant en sens inverse. C'est d'ailleurs ce qui se passe lorsqu'une onde se réfléchit sur un miroir parfait.

Les ondes stationnaires sont des objets physiques très courants et se rencontrent notamment dans les cavités laser ou les lignes hyperfréquence.

4. Les structures périodiques

4.1. Bref historique

Les structures périodiques sont étudiées depuis longtemps. Au XVII^{ème} siècle, Newton étudiait déjà la propagation d'une onde dans une structure périodique (Brillouin [1931]). Il cherchait, en effet, un modèle pour calculer la vitesse du son. Du XVIII^{ème} au XXI^{ème}, tout en suivant le développement des mathématiques et de la physique, l'étude de la propagation d'une onde dans une structure périodique fut largement développée en mécanique, optique, électronique, physique des solides et en électromagnétisme. Dans ces différents domaines, les structures périodiques sont connues pour leur caractéristique de filtrage. Le miroir de Bragg, utilisé en optique, est l'exemple le plus connu.

Le théorème de Floquet-Bloch (1883 et 1928, cf. Annexe A) permet la résolution du problème de la propagation dans un milieu périodique en faisant le calcul sur une seule cellule du réseau.

La définition des zones par Brillouin (1931) a simplifié l'étude des bandes passantes et des bandes interdites. Brillouin a développé l'espace réciproque, le diagramme de Brillouin et la zone de Brillouin (cf. Annexe A).

4.2. Structure guide d'onde et structure périodique

Les guides d'ondes sont des milieux partiellement ou entièrement bornés où les ondes peuvent se propager. Ces ondes peuvent être électromagnétiques, acoustiques ou mécaniques. Dans les études concernant cette thèse, on s'intéresse essentiellement aux ondes mécaniques. La propagation d'ondes dans de tels systèmes mécaniques est largement étudiée. Les systèmes peuvent être des poutres, des plaques, des tubes, des parois minces, des systèmes en réseaux (en treillis). Les caractéristiques fréquemment étudiées pour ce type d'onde sont le nombre d'ondes, la relation de dispersion et la mobilité de la force transmise. Une structure périodique consiste en un nombre d'éléments identiques, liés ensemble de façon identique (côte-a-côte ou bout-a-bout) pour former la structure totale. De nombreuses structures possèdent une symétrie unidimensionnelle (Voir Fig. 1.6). Cette symétrie peut être une translation suivant la direction principale (a), une rotation autour d'un axe (b) ou une périodicité. Ce type de structure est considéré comme un guide d'ondes.

Quelques structures sont considérées comme uniformes dans une direction, le long de l'axe de la structure dont les sections transversales ont les mêmes propriétés physiques et géométriques. Les ondes propagées suivant cet axe sont fonction des caractéristiques de la forme de la section.

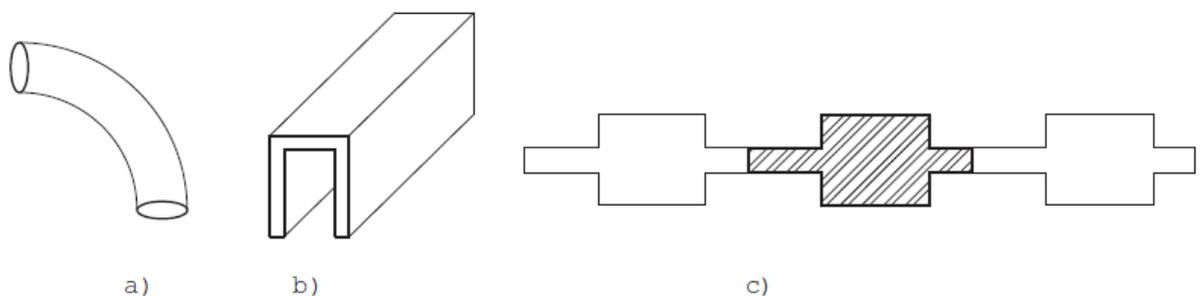


Figure 1.6 : Structures à symétrie unidimensionnelle : a) symétrie de rotation, b) symétrie de translation, c) périodicité

La propagation d'ondes dans les structures périodiques a été étudiée en premier lieu dans le travail de Brillouin [1931] pour les systèmes de treillis et pour les

lignes électriques. Ces études sont largement développées dans les papiers de Mead [1996, 1973,1986]. Le travail consiste en des analyses classiques des structures périodiques. L'approche est basée sur le principe de Floquet ou sur la matrice de transfert.

Les connaissances sur les caractéristiques de propagation d'ondes de structures sont très importantes. Particulièrement à haute fréquence, les modèles d'éléments finis de la structure totale sont trop complexes pour être utilisés en pratique. Des approches en se basant sur les propriétés d'ondes peuvent être utilisées dans la prédiction de la propagation de perturbations, de la transmission d'énergie ou de la diffusion de la radiation acoustique. Un résumé de ce type de structures courantes est présenté dans l'article de D. Wang [2003]. Concernant les méthodes de calcul pour les guides d'ondes, les approches étudiées dans le passé peuvent se diviser en deux parties. Le premier groupe concerne les guides d'ondes uniformes correspondant aux cas a) et b) dans la Fig. 1.6 tandis que le deuxième est orienté vers les structures périodiques, type c) dans la Fig. 1.6. Le cas de guides d'ondes uniformes est un cas particulier de celui de structures périodiques d'une période arbitraire.

La vibration des structures guides d'ondes est un thème très étudié. Von Flotow [1986], Beale [1995] et Accorsi ont utilisé une approche par ondes pour étudier la vibration dans les réseaux structuraux composés par des structures uniformes simples. Ils ont résolu le comportement vibratoire des éléments individuels et des jonctions entre les éléments par la méthode analytique. Ils ont décrit le comportement vibratoire des structures en fonction des ondes dans les éléments, des propriétés des jonctions de chaque élément et des conditions aux bords. Des analyses détaillées sur le couplage entre les sous-structures.

5. Quelques travaux :

Afin de positionner notre travail nous allons présenter quelques modèles relatifs à notre travail.

- Maria A Heckl [1995].

Cet article présente un modèle mathématique de prédiction des vibrations d'un rail excité par une roue en mouvement. La voie est modélisée par une poutre (rail) infiniment longue, supportée sur une section finie par des systèmes de supports discrets. Chaque système de support consiste en un ressort (coussinet), une masse (traverse) et un autre ressort (ballast). Les pertes dans les ressorts sont incluses. Le rail est excité par une force ponctuelle verticale qui représente la roue. Les simulations numériques montrent, que par le choix de distances aléatoires entre les traverses, la propagation des ondes de flexion le long du rail est inhibée, mais que l'amplitude près du point d'excitation peut augmenter. L'avantage de l'espacement aléatoire est examiné. Des résultats numériques sont donnés pour une configuration typique de voie ferrée européenne.

- Maria A.Heckl [2002].

Cet article présente un modèle mathématique sur la propagation des ondes dans les structures infinies comme la poutre de Timoshenko, le modèle présente plusieurs types d'appuis, poutre avec support massique et poutre avec support rigide, l'étude fait sur la déformation d'une poutre pour toutes les directions (modèle (3d)), dans l'emplacement de la fonction de Green il y a la matrice 3×3 de la fonction de Green qui représente la réponse dans les trois directions (latéral, vertical, et axial), les éléments de la fonction de Green sont calculés par le principe de Hamilton.

- J.F. Hamet [1997].

Ce rapport présente et compare deux modélisations du comportement vibratoire d'un rail posé sur traverses (blochets) basées respectivement sur deux

modélisations du rail : celle de la poutre mince (Euler) valable jusqu'à 1 kHz environ et celle de la poutre épaisse (Timoshenko) valable jusqu'à quelques kHz. Le système (rail sur voie) est supposé, de longueur infinie. Lorsque les traverses sont posées à intervalle régulier et présentent les mêmes caractéristiques on peut utiliser avantageusement la périodicité du système.

Pour chaque modélisation, l'équation différentielle du mouvement, les phénomènes de propagation et la réponse à une force extérieure ponctuelle sont abordés et analysés.

Les formulations obtenues sont tout à fait adaptées à des études paramétriques concernant l'influence des caractéristiques de la voie sur le bruit rayonné par le rail.

➤ J.F. Hamet [1998].

Ce rapport présente une étude paramétrique concernant l'influence de la raideur des semelles et de la raideur du ballast sur l'atténuation des ondes de flexion le long d'un rail.

Le modèle utilisé est celui d'une poutre mince posée sur support élastique continu, cette modélisation s'avère efficace tant que les longueurs d'onde de flexion sont grandes devant l'intervalle entre traverses. Il apparaît que l'atténuation peut être ajustée en choisissant des raideurs appropriées pour les semelles et le ballast. Pour une raideur de ballast donnée, une augmentation de la raideur des semelles accroît l'atténuation des ondes, tout en reportant celle-ci dans un domaine de fréquences plus élevées.

➤ J.F. Hamet [1998].

Le rayonnement acoustique du rail contribue de façon non négligeable au bruit ferroviaire. Il résulte des vibrations du rail qui sont plus ou moins influencées par la voie (fixation du rail aux traverses posées sur le ballast).

Ce rapport présente l'étude expérimentale effectuée sur le banc d'essai rail mis en œuvre sur le site INRETS à Satolas [cf. Phases 1 et 2-H. Chollet 1997].

Le bruit du rail peut donc être réduit par un choix approprié des valeurs des caractéristiques (mécaniques) des éléments de la voie.

Compte tenu de la complexité des phénomènes mis en jeu il s'est avéré nécessaire de développer et d'utiliser des modélisations pour interpréter les résultats expérimentaux. Les modèles appropriés sont ceux d'une poutre épaisse (Timoshenko) sur supports en nombre infini ou fini. Ce sont des modèles analytiques.

Les caractéristiques mécaniques des supports (raideur) ont d'abord été estimées à partir de mesures des fonctions de transfert entre la force d'impact sur le rail (marteau de choc) et l'accélération résultante du rail au droit de chaque support. L'estimation est obtenue par identification entre courbes calculées et courbes mesurées.

Les atténuations ont ensuite été évaluées à partir d'un modèle approprié, prenant en compte les caractéristiques mécaniques de chaque support. Ces évaluations ont été comparées aux résultats expérimentaux.

Il se confirme que la raideur des semelles joue un rôle fondamental sur l'atténuation des ondes de vibration le long d'un rail posé sur supports. Le choix des caractéristiques des ces semelles est primordial pour la maîtrise du bruit de roulement.

➤ J.F.Hamet[1999].

L'auteur fait une évaluation mathématique de la vibration en flexion du rail. Le rail est modélisé comme poutre Timoshenko. Pour résoudre l'équation différentielle de vibration, l'approche mathématique suivante qui se base sur l'utilisation des fonctions de Green, le principe de superposition ainsi que le théorème de Floquet

pour une poutre de Timoshenko sur appui périodiques. Il confirme les travaux de Nordborg [1998], une analyse sur le phénomène de réceptance est effectuée. Mais le problème de la poutre sur appuis périodique sous l'influence d'une force mobile n'est toutefois pas résolu. Le modèle de Timoshenko a un domaine plus large de fréquences de validité et est mieux adapté pour des évaluations quantitatives.

➤ D.J.Mead (1995)

[Wave propagation in continuous periodic structures : Research contributions from SOUTHAMPTON]

La fonction de Green développée dans ce papier tient compte des différents degrés de liberté. Elle est évaluée par le principe de Hamilton .

➤ D.J.Mead (1973)

Une théorie générale relative à la propagation d'ondes harmoniques à une dimension sur un système périodique est représentée. La nature et les nombres d'ondes ont pu être déterminés sur toute la gamme de fréquence choisie.

➤ D.J Mead (1975)

A la suite des précédents travaux, l'auteur montre que des ondes libres peuvent se propager sur un système périodique uniquement pour certaines gammes de fréquences (bandes de Bloch). La relation entre ces fréquences et les fréquences propres pour un élément isolé du système fut considérée.

➤ Mead et Malik (1978)

Une méthode permettant d'estimer la puissance sonore radiée par une plaque infinie est établie. Celle-ci repose sur des appuis élastiques parallèles et équidistants, et est soumise à un champ de pression uniforme appliqué sur la plaque dans la direction perpendiculaire aux appuis. L'effet, sur la réponse de la plaque, des charges acoustiques est pris en compte ainsi que celui des caractéristiques de la plaque et de la vitesse des charges.

➤ Munjal et Heckl (1982)

Le système «rail-support » est idéalisé par une poutre périodique infinie soumise à une force oscillatoire. Celle-ci génère quatre ondes, deux se déplaçant vers la droite et les deux autres vers la gauche. Les constantes de propagation sur toute la gamme de fréquence sont déterminées.

➤ Munjal et Heckl (1982)

Suite au précédent travail, les auteurs définissent les différents mécanismes qui génèrent les vibrations sur une voie ferroviaire. Deux mécanismes sont considérés :

- La force de réaction gravitationnelle agissant sur différents points de la jante des roues ;
- Les forces de fluctuation aléatoires produites par la rugosité de surfaces de contact entre la roue et le rail.

L'accélération (et par conséquent la puissance rayonnée) induite par la rugosité de surfaces est comparable aux valeurs observées expérimentalement, et augmente d'environ 10dB chaque fois que la vitesse du Wagon est doublée.

➤ Mead (1986) :

L'auteur détermine la fonction réponse pour une structure infinie, uniforme, unidimensionnelle, soumise à des forces ou moments harmoniques, régulièrement espacés. Il met au point une équation générale pour déterminer les constantes de propagation et la réponse dynamique de la structure considérée, cette méthode (qui semble plus simple que les précédentes) a pu être appliquée afin d'étudier :

- Une poutre de Timoshenko sur appuis périodiques.
- Une plaque parallèle sur appuis périodiques de types poutres.

➤ Mead et Yaman (1990)

Une approche est développée afin d'analyser la réponse harmonique d'une poutre infinie, uniforme sur appuis multiple. La poutre est excitée par une force unique ou multiple. Les équations présentées sont relatives à différents types de supports. Les effets d'amortissement peuvent être pris en compte.

➤ Mead et Yaman (1991)

Plus tard, les auteurs analysent la même structure, mais soumise à une force transversale harmonique. La réponse globale correspond à la somme des ondes de flexion générées par les forces appliquées.

➤ Mead (1996)

Publie un article de synthèse sur l'ensemble des travaux entrepris dans le domaine par son équipe.

➤ Belotsekovskiy

En prenant les mêmes types de structure, l'auteur considère un segment existant entre deux supports voisins qui sont censé idéaliser la poutre rail infinie. Il y applique des conditions aux limites appropriées afin de résoudre l'équation différentielle régissant le comportement de la poutre. L'utilisation de deux approches (celle de Mead et celle de l'auteur résolu précédemment) lui permet de résoudre le problème. Cependant il est indiqué de modéliser la structure comme une poutre de Bernoulli, particulièrement pour la vibration latérale du rail. Plus tard, il complète son étude en s'intéressant à des forces sous forme d'impulsions instantanées (Belotsekovskiy, 1999). En 2002 (Belotsekovskiy, 2002) il évalue la réponse dynamique d'une poutre infinie simulée par une poutre de Timoshenko sur appuis viscoélastiques, les forces d'interaction étant pris en compte. Mais la poutre est toujours discrétisée entre deux appuis contigus. Puis en 2004 (Belotsekovskiy, 2004), il étudie à nouveau l'interaction entre les roues,

régulièrement espacées, d'un train supposé infini roulant sur une voie modélisée par une poutre de Timoshenko infinie.

➤ Nordborg Anders (1998)

La transformée de Fourier, le théorème de Floquet ainsi que la fonction de Green (poutre libre) sont utilisés pour la résolution de l'équation différentielle régissant le comportement dynamique. La poutre est simulée par une poutre d'Euler dont les appuis périodiques sont flexibles. La solution est déterminée dans le domaine fréquentiel. Des essais sur le phénomène de réceptance sont réalisés et validés par la démarche proposée.

➤ Lassoued. R et Bonnet. G [2008]

Ce document décrit le calcul du champ d'onde provoquée par une charge mobile d'une poutre sur support périodique. Le champ d'onde est obtenu par la décomposition par les ondes de Bloch. La résolution du problème homogène conduit à l'équation de dispersion, aux ondes de Bloch et les bandes d'ondes. Les ondes de Bloch et les courbes de dispersion contiennent toute la physique du problème dynamique et le champ d'onde induite par une charge dynamique appliquée au système est alors obtenu par une décomposition en ondes de Bloch, même à la décomposition d'habitude dans les modes dynamiques sur une structure finie. La méthode est appliquée pour obtenir le champ induit par une charge se déplaçant à vitesse constante sur une poutre mince appuyé par des supports élastiques périodiques.

➤ Wu et Thompson [1999]

Étudient le comportement d'une voie préchargée. Les modèles de voie sont classés suivant quatre catégories :

- poutre uniforme, infinie, sur supports continus avec prise en compte des masses des différents composants (traverses, ballast, semelles, *etc.*) ;

- poutre d'Euler ou de Timoshenko sur supports discontinus ;
- rail modélisé par éléments finis sur supports continus et prise en compte des traverses et du ballast ;
- rail modélisé par éléments finis sur supports périodiques.

Les deux premières catégories, selon les auteurs, sont meilleures pour l'étude des vibrations verticales plutôt que latérales. Par contre, les deux dernières sont plus adaptées pour des études en "hautes" fréquences car la déformation de la section droite du rail est prise en compte. Les voies sur semelles raides doivent en priorité être modélisées à l'aide de pose discontinue. La raideur des semelles de rails a un comportement non-linéaire, elle est fonction du chargement et de la fréquence. Les conclusions principales tirées de ces travaux sont les suivantes. Le passage d'une roue induit localement une précharge importante, de l'ordre de 2 fois la précharge statique constituée par la fixation du rail (et son poids propre). Ceci produit une augmentation locale de la raideur de semelle, celle-ci étant multipliée par deux environ. Cet effet est local car il n'apparaît que sur quelques travelages (un travelage correspond à la distance séparant deux traverses).

La réceptance ponctuelle du rail en basses fréquences (en dessous de 1000Hz environ) est donc gouvernée par les supports locaux et le chargement dû aux roues : sous l'effet du passage d'une roue, la réceptance du rail baisse sensiblement. En revanche, la décroissance des ondes dans le rail est peu affectée par la présence de la roue.

➤ Bode *et al* [2000]

Proposent un modèle tridimensionnel pour des charges mobiles couplant les méthodes des éléments finis et de frontière. La voie est constituée de rails reposant sur des traverses discrètes rigides et est modélisée à l'aide du code éléments finis Ansys®.

Le sol est considéré homogène et la réceptance du sol est calculée *via* les fonctions de Green dans le cas d'actions ponctuelles harmoniques. Le couplage voie/sol est réalisé en efforts et en déplacements à l'aide d'une procédure itérative. Des

conditions de contact non-linéaire (rupture du contact) peuvent être prises en compte. Le problème est résolu dans le domaine temporel, bien que les fonctions de Green soient, au préalable, établies dans le domaine temporel : le modèle est ainsi nommé "*hybrid time domain approach*".

Cette approche permet notamment de considérer des modèles de voie "quelconques", et des types de sols ayant des propriétés non-linéaires.

➤ Metrikine et Popp [1999]

Développent une étude sur les vibrations en régime établi d'une poutre sur supports périodiques (discrets), reposant sur un massif semi-infini. L'objectif principal est l'étude de l'effet du demi-espace élastique sur la réponse vibratoire de la "voie" et le passage d'un modèle à trois dimensions en un modèle équivalent (exact) à deux dimensions. Pour cela, le concept de la raideur équivalente du sol est utilisé : la raideur du sol est estimée *via* un modèle semi-analytique. L'équation de Navier et les conditions de couplage sont écrites dans le domaine spatial, puis une transformée de Fourier à trois dimensions est réalisée, permettant de résoudre le problème dans le domaine fréquence-nombres d'onde. La raideur du sol est alors écrite en fonction de la fréquence dans le domaine réel (transformée de Fourier inverse à deux dimensions). Elle est finalement fonction de la fréquence des vibrations des poutres et de l'évolution de la phase des ondes se propageant sur les supports voisins, et le problème devient un problème à deux dimensions. La raideur doit avoir une partie imaginaire car les ondes transmettent de l'énergie aux semelles de rails, puis au sol.

Le modèle théorique est mis en équations et résolu à l'aide d'une transformée de Laplace sur le temps (le régime oscillatoire n'étant pas un régime permanent) et d'une double transformée de Fourier sur l'espace horizontal.

➤ Bitzenbauer et Dinkel [2002]

proposent deux modèles de voie pour le cas des poses sur voie ballastée et sur dalle de béton. Le rail et la dalle lorsqu'elle est présente sont modélisés par des poutres de Timonshenko. Pour la voie sur dalle, la liaison rail/dalle et dalle/sol est assurée par un ensemble continu de ressorts/amortisseurs. Les équations de voie sont écrites dans le domaine du nombre d'onde suivant la direction de la voie. Le véhicule est considéré suivant plusieurs propositions de formulations multicorps. L'excitation prise en compte correspond d'une part aux forces mobiles dues à chaque essieu en déplacement, et d'autre part aux défauts de planéité des rails (rugosité). La réceptance (complexe) du rail est transformée pour prendre en compte cette rugosité dans le domaine du nombre d'onde. La rugosité est modélisée par un défaut de type sinusoïdal simple. Une étude paramétrique est proposée pour différents modèles plus ou moins sophistiqués concernant le véhicule et la voie.

➤ Kruse et Popp [2001]

Exposent un algorithme de résolution, utilisant les différents modèles de voie et pouvant prendre en compte une modélisation du véhicule à l'aide d'un ensemble de masses/ressorts/amortisseurs, voire par éléments finis (notamment les essieux). L'excitation de la voie prend différentes formes : elle peut être causée par le passage des supports discrets de rails, ou due à un défaut de surface considéré sur le rail, ou encore en considérant un défaut de circularité des roues. Les analyses effectuées sont théoriques, mais ces différents modèles sont repris lors de l'étude comparative (*benckmarck*) effectuée par différents organismes de recherche. L'évolution de la force au contact roue/rail est présentée et la

compliance de la voie ("inverse" de la raideur, en m/N) est analysée pour différents types de voie et de modèles de sols.

L'élasticité des traverses (raideur en flexion) semble être un point important à considérer.

Le sous-sol doit être pris en compte pour caractériser la réponse d'une voie si celle-ci est "souple" (pose sur ballast), mais pas lorsqu'elle est suffisamment rigide (pose sur dalle de béton). Le passage des supports de rails discrets affecte peu l'effort au contact roue/rail (variation de l'effort inférieure à 10%), indiquant qu'un modèle sur supports continus est acceptable.

Conclusion :

Cette revue bibliographique nous permet de constater que pour les structures périodiques la réponse dynamique d'une structure ferroviaire sous l'influence d'une source mobile n'est pas concrétisée. Toutes les solutions proposées sont dans le domaine fréquentiel. Des solutions du problème soit sur appuis discrets ou sur appuis continus sont proposées par approches numériques. Notre objectif est d'établir un modèle analytique décrivant la réponse dynamique de la structure ferroviaire par propagation d'onde et de réaliser une analyse paramétrique de la structure ferroviaire sur une assise en béton.

Chapitre 02:

Analyse Du Rail Libre

Introduction

Les premiers calculs de propagation des vibrations dans les rails ont été faits en utilisant la théorie des poutres. Le rail est modélisé comme une poutre infinie selon la théorie d'Euler-Bernoulli ou selon la théorie de Timoshenko. Cette dernière prend en compte les effets de cisaillement et d'inertie de rotation qui ne figurent pas dans la théorie simplifiée d'Euler-Bernoulli.

Les vibrations des poutres en flexions sont caractérisées par une équation différentielle du quatrième ordre, dont les quatre solutions élémentaires correspondent aux ondes de flexions qui peuvent se propager le long de la poutre.

2.1. Poutre Euler-Bernoulli :

Le modèle Euler-Bernoulli souvent appelé comme modèle classique des poutres, valable aux fréquences basses (ne correspond au cas d'un rail que dans le domaine de fréquences inférieures à 1 KHz).

Dans le cadre de la théorie d'Euler-Bernoulli les sections planes restent planes et perpendiculaire à l'axe neutre.

Contrairement à la poutre Timoshenko la poutre Euler-Bernoulli néglige les déformations dues au cisaillement.

2.1.1. Equation différentielle du mouvement

Nous supposons une poutre rectiligne de longueur infini à section variable (figure 2.1.a), d'une masse linéique m_l , et d'un raideur de flexion EI soumise à un chargement transversal $P(x,t)$ varie arbitrairement avec la position et le temps.

Le chargement transversal $p(x,t)$ varie arbitrairement avec la position et le temps, et la réponse en déplacement transversal $y(x,t)$ est une fonction de ces mêmes variables.

L'équation du mouvement de ce système simple est déterminée si on considère l'équilibre des forces qui agissent sur le segment élémentaire représenté à la figure

2.1.b. La sommation de toutes les forces verticales mène à la première relation d'équilibre dynamique

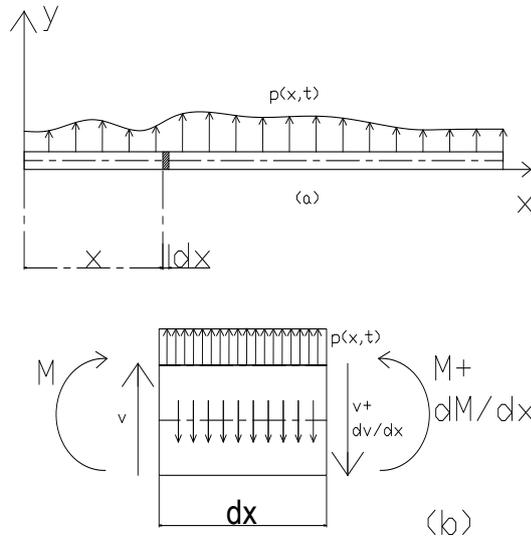


Figure2.1 : Poutre soumise à un chargement dynamique :

- (a) : caractéristique de la poutre et coordonnées ;
- (b) : efforts agissant sur un tronçon élémentaire.

$$(c) \quad v + p dx - \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) - f_i dx = 0 \quad (2.1)$$

Cette sollicitation provoque une réponse déplacement transversal $y(x,t)$ ou x est la variable spatiale et la variable temporelle.

f_i Représente l'effort de l'inertie répartie transversalement

$$f_i dx = m_l dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

Nous substituons (2.2) dans (2.1) :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = p - m_l \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.3)$$

L'équation (2.3) est une relation entre l'effort tranchant, le chargement, et les forces d'inertie (accélération)

La relation d'équilibre entre les moments (ici on a négligé les termes dus à la rotation des sections devant les termes d'inertie dus à leur translation):

$$M + vdx - \left(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) = 0 \quad (2.4)$$

Donc on obtient:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = v \quad (2.5)$$

La dérivée de l'équation (2.5) par rapport à x et je l'injecte dans la relation (1.3) :

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + m_l \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p \quad (2.6)$$

L'équation de la résistance de matériaux entre le moment et la courbure $M = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ permet d'écrire :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}) + m_l \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p \quad (2.7)$$

Pour les vibrations libres de la poutre l'équation d'équilibre est en considérant :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}) + m_l \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (2.8)$$

Donc l'équation différentielle des mouvements en flexion pour la poutre Euler-Bernoulli est :

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m_l \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (2.9)$$

Le champ de pression dans la zone de contact sera supposé uniforme sur la largeur du rail (direction transversal y). Le champ des forces extérieures sera donc

caractérisé par un champ de force par unité de longueur $p(x, t)$ [N/m]. On supposera qu'il peut être décrit sous la forme $p(x, t) = p(t)X^{-1}(x)$.

On obtient

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} y(x, t) + m_l \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x, t) = p(t)X^{-1}(x) \quad (2.10)$$

Pour l'analyse des vibrations en fonction de la fréquence. On effectue une transformée de Fourier par rapport au temps.

Conventions :

Transformée de Fourier par rapport au temps:

$$Y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{Y}(w) e^{iwt} dw \quad \dot{Y}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(t) e^{-iwt} dt$$

$$f\left(EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} y(x, t)\right) = EI f\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} y(x, t)\right) = EI \frac{d^4}{dx^4} \dot{y}(x, w)$$

$$f\left(m_l \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x, t)\right) = m_l f\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x, t)\right) = -w^2 m_l \dot{y}(x, w)$$

$$f(p(t)X^{-1}(x)) = \dot{p}(w)X^{-1}(x)$$

On obtient :

$$EI \frac{d^4}{dx^4} \dot{y}(x, w) - w^2 m_l \frac{d^2}{dt^2} \dot{y}(x, w) = \dot{p}(w)X^{-1}(x) \quad (2.11)$$

$$\frac{d^4}{dx^4} \dot{y}(x, w) - \frac{w^2 m_l}{EI} \frac{d^2}{dt^2} \dot{y}(x, w) = \frac{\dot{p}(w)}{EI} X^{-1}(x) \quad (2.12)$$

On pose $k_b = \left(\frac{w^2 m_l}{EI}\right)^{1/4}$ (nombre d'onde de flexion d'une poutre mince)

On obtient :

$$\frac{d^4}{dx^4} \dot{y}(x, w) - k_b^4 \dot{y}(x, w) = \frac{\dot{p}(w)}{EI} X^{-1}(x) \quad (2.13)$$

Nous nous proposons pour La résolution de l'équation (2.13) de déterminer la fonction de Green

2.1.2. Détermination de la fonction de Green :

Pour résoudre une équation inhomogène, il faut d'une part déterminer la solution générale de l'équation homogène qui lui associée, d'autre part trouver une solution particulier de l'équation complète, puis faire la somme des deux enfin caler les constantes d'intégration avec les données supplémentaires indispensables. La fonction de Green est moyen systématique de trouver précisément cette solution particulière. En outre la méthode des fonctions de Green se prête bien à la rediscussion des liens importants entre conditions aux limites et analytité.

La solution générale d'une équation différentielle s'écrit :

$$f(x) = f_h(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, x') \phi(x') dx$$

Où :

$G(x, x')$: est la fonction de Green

$f_h(x)$: désigne la solution général de l'équation homogène.

$\phi(x')$: La source, l'équation devient homogène si $\phi(x') = 0$.

La méthode des fonctions de Green fait un usage intensif de la fonction de Dirac, dont la règle opérationnelle fondamentale est, pour mémoire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

Où la fonction f est continue en x_0 . En prenant $f(x) = 1 \forall x$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_0 \\ 0 & \text{si } x \neq x_0 \end{cases}$$

Donc la fonction de Green associée à notre équation est:

$$\frac{d^4 G_w(x, x_0)}{dx^4} - k_b^4 G_w(x, x_0) = \frac{1}{EI} \delta(x - x_0) \quad (2.14)$$

Deux méthodes peuvent être utilisées pour évaluer la fonction de Green :

- La méthode directe;
- La Transformée de Fourier.

A. La méthode directe : Cette méthode est basée sur le raisonnement suivant :

a. En tout point $x \neq x_0$ on doit avoir :

$$\frac{d^4 G_w(x, x_0)}{dx^4} - k_b^4 G_w(x, x_0) = 0 \quad (2.15)$$

b. Au point $x = x_0$ la discontinuité est assumée par la dérivée d'ordre 3 de $G_w(x, x_0)$. La fonction et ses deux premières dérivées sont continues en $x = x_0$.

Si on intègre l'équation (2.14) de part et d'autre de x_0 on obtient compte tenu de la continuité de $G_w(x, x_0)$ en x_0 :

$$\frac{d^3 G_w(x, x_0)}{dx^3} \Big|_{x_0^-}^{x_0^+} = \frac{1}{EI} \quad (2.16)$$

c. A $x = \pm\infty$ la fonction est bornée : $|G_w(x, x_0)| < \infty$

La fonction de Green est alors exprimée par une combinaison linéaire des solutions élémentaires de l'équation (2.15) compte tenu de la condition c (à l'infini) elle peut s'écrire :

$$G_w(x, x_0) = a_1 e^{k_b(x-x_0)} + a_2 e^{ik_b(x-x_0)} \quad x < x_0 \quad (2.17.a)$$

$$= b_1 e^{-k_b(x-x_0)} + b_2 e^{-ik_b(x-x_0)} \quad x > x_0 \quad (2.17.b)$$

Les coefficients a_1, a_2, b_1, b_2 sont déterminés en imposant les conditions b en x_0 c'est-à-dire la condition (2.16) et :

$$G_w(x, x_0)|_{x_0^-}^{x_0^+} = 0, \quad \frac{dG_w(x, x_0)}{dx} \Big|_{x_0^-}^{x_0^+} = 0, \quad \frac{d^2 G_w(x, x_0)}{dx^2} \Big|_{x_0^-}^{x_0^+} = \frac{1}{EI} \quad (2.18)$$

Ceci permet d'aboutir à un système d'équations linéaire

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ k_b & ik_b & k_b & ik_b \\ k_b^2 & -k_b^2 & -k_b^2 & k_b^2 \\ k_b^3 & -ik_b^3 & k_b^3 & -ik_b^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{EI} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Dont la résolution est réalisée analytiquement sous environnement logiciel Maple (Lecheheb, M[2009]) :

$$G_w(x, x_0) = -\frac{1}{4EI k_b^3} [e^{-k_b|x-x_0|} + e^{-ik_b|x-x_0|}] \quad (2.20)$$

B. Transformée de Fourier :

On fait une transformée de l'équation (2.14) :

$$\frac{d^4 G_w(x, x_0)}{dx^4} - k_b^4 G_w(x, x_0) = \frac{1}{EI} \delta(x - x_0)$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^4 G_w(x, x_0)}{dx^4}\right) = \mu^4 G'_w(\mu, x_0) \cdot e^{-i\mu x}$$

$$f(k_b^4 G_w(x, x_0)) = k_b^4 G'_w(\mu, x_0) \cdot e^{-i\mu x}$$

$$f\left(\frac{1}{EI} \delta(x - x_0)\right) = \frac{1}{EI}$$

Donc on trouve :

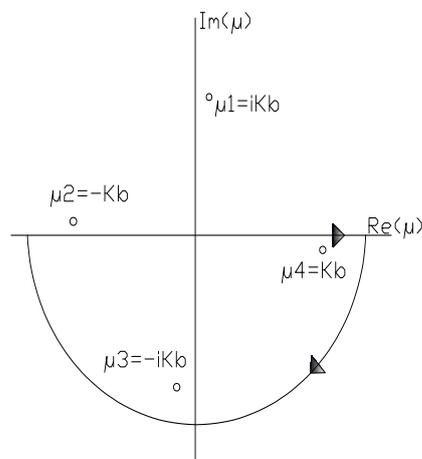
$$G'_w(\mu, x_0) = \frac{1}{EI} \frac{e^{i\mu x_0}}{\mu^4 - k_b^4} \quad (2.20)$$

Les zéros du dénominateur $\mu = \pm k_b$ et $\mu = \pm i k_b$ correspondant aux constantes de propagation des ondes libres. Si on introduit les phénomènes de dissipation par l'intermédiaire du facteur de pertes internes, les zéros deviennent : $\mu = \pm \underline{k}_b$ et $\mu = \pm i \underline{k}_b$ avec $\underline{k}_b = k_b(1 - i\eta/4)$, k_b et η réels positifs.

Et la transformé de Fourier inverse nous donne :

$$G_w(x, x_0) = \frac{1}{2\pi EI} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\mu(x-x_0)}}{\mu^4 - k_b^4} d\mu \quad (2.21)$$

L'évaluation de cet intégral se fait par la méthode des résidus (intégral sur contour). Pour $x \geq 0$, le contour approprié comprend le vrai axe plus un demi-cercle à infini dans le rabot de moitié inférieure



$$G_w(x, x_0) = \frac{1}{2\pi} 2\pi i \sum_{n=3}^4 \text{Res}(\mu_n) \text{ Pour } x \geq 0$$

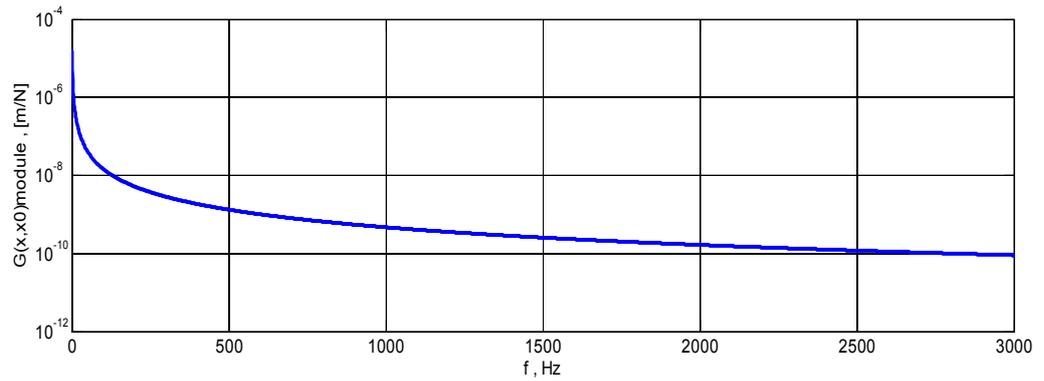
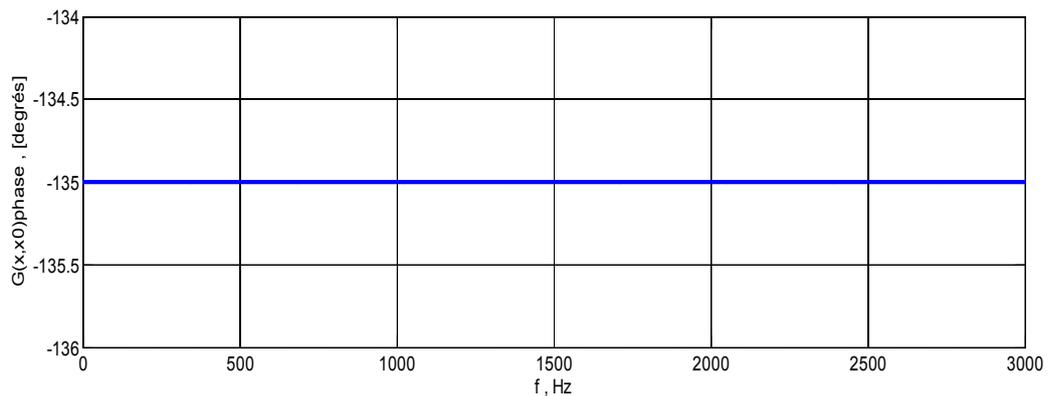
Où le résidu au pole $\mu_n = i^n k_b$ donner sous :

$$\text{Res}(\mu_n) = \frac{e^{-i\mu_n(x-x_0)}}{4EI\mu_n^3} \quad (2.22)$$

Donc on trouve l'équation (2.20) de la fonction de Green.

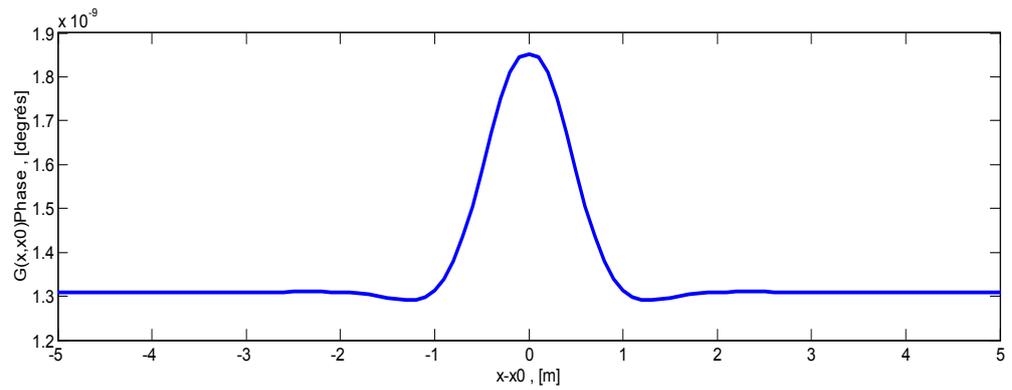
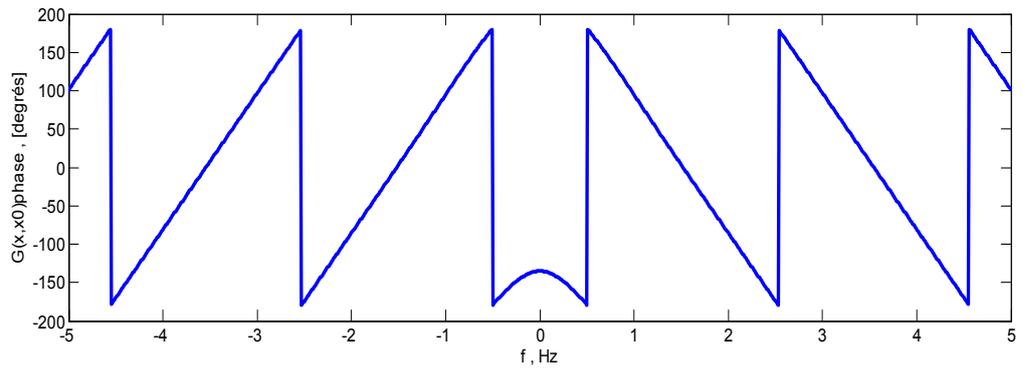
La fonction de Green est formée d'une onde propagative $e^{-ik_b|x-x_0|}$ et d'un terme de champ proche $e^{-k_b|x-x_0|}$ qui permet de respecter les conditions de discontinuité (au point d'application de la force extérieure) et s'atténue rapidement [Maria A. Heckl1995, J.F.Hamet1997].

La considération de la réponse au point d'excitation, du rail soumis à une force unitaire ponctuelle permet d'analyser la réceptance en fonction de l'évolution de la fréquence.

a. $G(x, x_0)$ Module en fonction de la fréquenceb. $G(x, x_0)$ Phase en fonction de la fréquenceFigure 2.2. Evolution de la réceptance $G_w(x, x_0)$ en fonction de la fréquence

La figure 2.2.a montre une évolution décroissante du module de la fonction de Green par rapport à la fréquence. La phase est constante en fonction de l'augmentation de la fréquence.

L'évolution de la fonction de Green $G_w(x, x_0)$ en fonction de $x - x_0$ est donnée dans la figure 2.3 pour la fréquence 500Hz. L'effet de champ proche ne se fait sentir qu'au voisinage du point d'excitation. Au-delà (dès 1 mètre de distance) l'amplitude de la vibration reste constante.

a. $G(x, x_0)$ Module en fonction de $x - x_0$ b. $G(x, x_0)$ Phase en fonction de $x - x_0$ Figure 2.3. L'évolution de $G_w(x, x_0)$ en fonction de $x - x_0$ pour $f = 500\text{Hz}$

2.2. Poutre Timoshenko :

Le modèle de Timoshenko est utilisé pour les poutres épaisses, il est valable dans un large domaine de fréquence.

Le modèle de Timoshenko prend en compte les effets de cisaillement et d'inertie rotationnelle.

2.2.1. Equation différentielle du mouvement :

Le premier cas à considérer est celui de la poutre rectiligne de longueur L à section variable de la figure 2.4.a. Les caractéristiques physiques principales de cette poutre sont supposées être la raideur de flexion $EI(x)$ et la masse linéique $m(x)$ qui peuvent varier toutes deux de manière arbitraire en fonction de la position x sur l'axe. Le chargement transversal $p(x,t)$ varie arbitrairement avec la position et le temps, et la réponse en déplacement transversal $v(x,t)$ est une fonction de ces mêmes variables. Les conditions d'appui aux extrémités sont arbitraires ; elles sont représentées ici comme des appuis simples à fins d'illustration.

L'équation du mouvement de ce système simple est déterminée si on considère l'équilibre des forces qui agissent sur le segment élémentaire représenté à la figure 2.4.b. La sommation de toutes les forces verticales mène à la première relation d'équilibre dynamique équation (2.23).

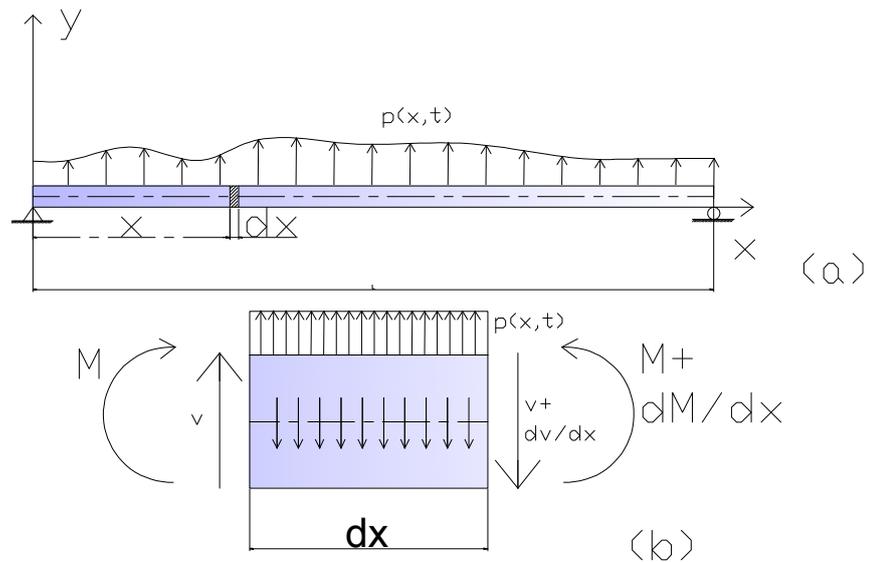


Figure 2.4. Poutre soumise à un chargement dynamique (poutre Timoshenko) :

(d) : caractéristique de la poutre et coordonnées ;

(e) : efforts agissant sur un tronçon élémentaire.

$$v + p dx - \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) - f_i dx = 0 \quad (2.23)$$

Où $f_i dx$ représente l'effort d'inertie réparti transversal et est donné par le produit de la masse élémentaire et de l'accélération local :

$$f_i dx = m dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.24)$$

Substitution l'équation (2.24) dans l'équation (2.23) et simplification nous aurons :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = p - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.25)$$

Les composantes de la flèche relatives à chacun de ces effets apparaissent en figure 2.4.b. L'inertie de rotation provient de la rotation de la section droite α à partir de sa position originale. S'il n'y avait pas de déformation d'effort tranchant, les sections droites resteraient normales à la déformée et α serait égal à la pente de la

déformée. Mais si on tient compte de ces déformations, la déformation de la poutre est bien plus compliquée. En supposant en première approximation que la section droite reste plane, la déformation d'effort tranchant est présente par un terme β qui réduit la pente de la déformation, comme le montre la figure (2.5.b).

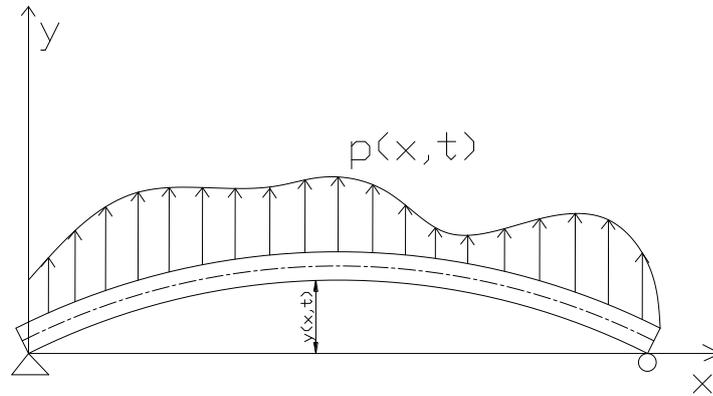


Figure 2.5.a : flèche dynamique

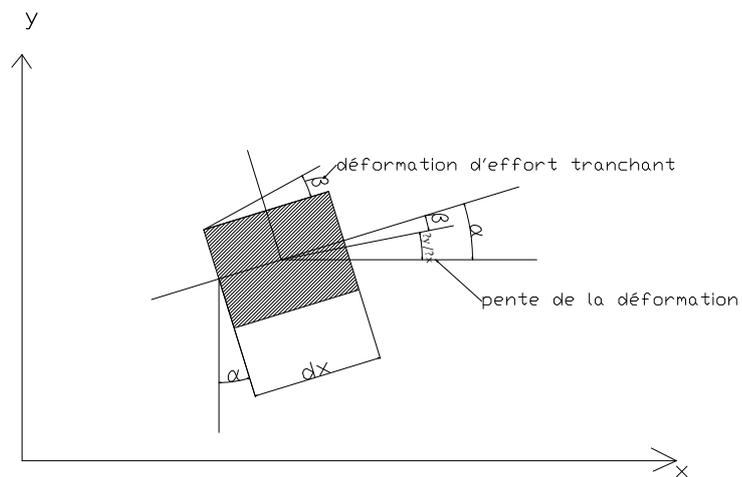


figure 2.5.b : Déformation d'un tronçon élémentaire

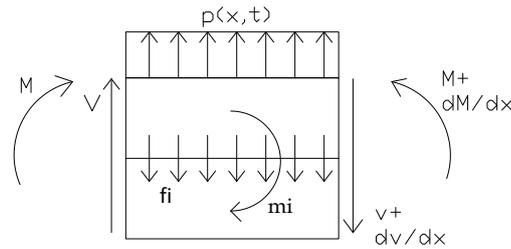


Figure 2.5.c : Efforts agissants sur un tronçon élémentaire

Figure 2.5 : Effet de l'effort tranchant et de l'inertie de rotation

Nous considérons à présent l'équilibre des forces agissant sur l'élément de poutre, fig2.5.c (les forces axiales sont négligées pour raison de simplicité) ; on notera que l'équilibre vertical n'est pas affecté par l'inertie de rotation et se trouve toujours représenté par l'équation (2.25). Mais l'inertie de rotation par unité de longueur m_i contribue directement à la relation d'équilibre des moments comme suit :

$$M + vdx + m_i dx - \left(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) = 0 \quad (2.26)$$

L'inertie de rotation est donnée par le produit du moment d'inertie massique de la section et de l'accélération angulaire

$$m_i = \rho I \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$$

Où ρ est la masse volumique ($\rho = m/A$) et I est le moment d'inertie de la section ; ainsi :

$$m_i = m \frac{I}{A} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = mr^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \quad (2.27)$$

Où $r^2 = I/A$ est le rayon de giration de la section. En reportant dans l'équation (2.26) et en simplifiant :

$$\frac{\partial M}{\partial x} = v + mr^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \quad (2.28)$$

Dans le but d'exprimer les équations d'équilibre (2.25) et (2.28) en fonction des déplacements de la poutre, nous utiliserons à présent les équations de la théorie élémentaire des poutres entre effort tranchant et déformation, et entre moment et courbure. L'effort tranchant agissant sur la section droite est lié à la rotation de la déformée β comme suit :

$$v = k'AG\beta$$

Ou $k'A$ représente l'aire réduite de cisaillement de la section. En dérivant et en reportant dans la relation de l'équilibre vertical (2.25), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x}(k'AG\beta) = p - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.29)$$

Etant donné l'angle de rotation de la section droite α , on a entre moment et courbure la relation

$$M = EI \frac{\partial \alpha}{\partial x} \quad (2.30)$$

En dérivant et en reportant dans l'équation (2.28) on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) = k'AG\beta + mr^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \quad (2.31)$$

On peut à présent utiliser la relation cinématique entre les divers angles de rotation, qui est donnée par

$$\beta = \alpha - \frac{\partial y}{\partial x}$$

Voir la figure (2.5.c) dans les deux équations de l'équilibre pour obtenir les deux équations (2.32) et (2.33) :

$$\frac{\partial}{\partial x} [k'AG(\alpha - \frac{\partial y}{\partial x})] = p - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) = k'AG \left(\alpha - \frac{\partial y}{\partial x} \right) + mr^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \quad (2.33)$$

Enfin l'angle de rotation α peut être calculé à partir de la première de ces équations d'équilibre et reporté dans la seconde, laissant le déplacement transversal v pour seule variable. Dans le but de simplifier les expressions qui en résultent, nous supposons maintenant que les caractéristiques physiques de la poutre ne varient pas sur sa longueur. Dans ce cas, la résolution de l'Eq (2.32) mène à

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{k'_{AG}} \left(p - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \quad (2.34)$$

En dérivant l'équation (2.33) par rapport à x et en utilisant pour les dérivées $\partial \alpha / \partial x$ concernées des expressions tirées de l'équation (2.34), on obtient enfin :

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \left(p - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) - mr^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{EI}{k'_{AG}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(p - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) - \frac{mr^2}{k'_{AG}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(p - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (2.35)$$

En considérant que :

m : masse linéique.

r : rayon de giration

$$m = \rho A$$

$$r^2 = \frac{I}{A}, \quad mr^2 = \rho I, \quad \text{Et} \quad m^2 r^2 = \rho^2 AI$$

En simplifiant l'équation (2.35) nous aurons l'équation (2.36) qui représente l'équation différentielle qui régit le comportement de la poutre de Timoshenko en flexion.

$$\rightarrow EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \rho I \left(1 + \frac{E}{k'G}\right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{k'G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} =$$

$$\left[1 - \left(\frac{EI}{k'AG} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\rho I}{k'AG} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\right] p(x, t) \quad (2.36)$$

Pour l'analyse des vibrations en fonction de la fréquence. On effectue une transformée de Fourier par rapport au temps.

Mais d'abord il faut simplifier l'équation différentielle (2.36):

On peut écrire l'eq (2.36) :

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{E\rho I}{E} \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{E\rho I}{k'G} \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{E\rho^2 I}{Ek'G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} =$$

$$\left[1 - \left(\frac{EI}{k'AG} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{E\rho I}{Ek'AG} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\right] p(x, t) \quad (2.37)$$

$$EI \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho}{k'G} \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2}{Ek'G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4}\right) + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} =$$

$$\left[1 - \frac{EI}{k'AG} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\right] p(x, t) \quad (2.38)$$

Et finalement on obtient :

$$EI \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\rho}{k'G} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) y + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} =$$

$$\left[1 - \frac{EI}{k'AG} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\right] p(x, t) \quad (2.39)$$

Le champ de pression dans la zone de contact sera supposé uniforme sur la largeur du rail (direction transversal y). le champ des forces extérieures sera donc caractérisé par un champ de force par unité de longueur p(x,t) [N/m]. on supposera qu'il peut être décrit sous la forme p(x,t)=p(t)X⁻¹(x).

On obtient

$$EI \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\rho}{k'G} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) y + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left[1 - \frac{EI}{k'AG} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \right] p(t) X^{-1}(x) \quad (2.40)$$

Pour résoudre cette équation (2.40), nous considérons la convention suivante pour la transformée de Fourier.

Transformée de Fourier par rapport au temps :

$$Y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{Y}(w) e^{iwt} dw \quad \dot{Y}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(t) e^{-iwt} dw$$

On aura :

$$EI \left[\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\rho}{E} w^2 \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\rho}{k'G} w^2 \right) - \frac{\rho A w^2}{EI} \right] y = \left[1 - \frac{EI}{k'AG} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\rho}{E} w^2 \right) \right] p(w) X^{-1}(x) \quad (2.41)$$

Nous posons que :

$$k_c = w \sqrt{\frac{\rho}{E}} \text{ Nombre d'onde des ondes de compression.}$$

$$k_t = w \sqrt{\frac{\rho}{k'G}} \text{ Nombre d'onde des ondes de cisaillement.}$$

$$k_b = \sqrt[4]{\frac{\rho A w^2}{EI}} \text{ Nombre d'onde de flexion d'une poutre mince.}$$

L'équation (2.41) devient :

$$EI \left[\left(\frac{d^2}{dx^2} + k_c^2 \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} + k_t^2 \right) - k_b^4 \right] y = \left[1 - \frac{EI}{k' AG} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\rho}{E} w^2 \right) \right] p(w) X^{-1}(x) \quad (2.42)$$

En éliminant la constante EI du premier membre de l'équation :

$$\left[\left(\frac{d^2}{dx^2} + k_c^2 \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} + k_t^2 \right) - k_b^4 \right] y(x, w) = \left[\frac{1}{EI} - \frac{1}{k' AG} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\rho}{E} w^2 \right) \right] p(w) X^{-1}(x) \quad (2.43)$$

2.2.2. Détermination de la fonction de Green de la poutre de Timoshenko :

La fonction de Green associée à l'équation (2.43) est la réponse d'une force concentrée en x_0 , c'est la solution générale de l'équation :

$$EI \left[\left(\frac{d^2}{dx^2} - k_c^2 \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} - k_t^2 \right) - k_b^4 \right] G(x, x_0) = \left[1 - \frac{EI}{k' AG} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\rho}{E} \omega^2 \right) \right] \delta(x, x_0) \quad (2.44)$$

- La fonction $G(x, x_0)$ est supposée continue en $x = x_0$
- En tout point $x \neq x_0$, c'est à dire en tout point autre que le point d'excitation, le système est libre.

$$EI \left[\left(\frac{d^2}{dx^2} - k_c^2 \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} - k_t^2 \right) - k_b^4 \right] G(x, x_0) = 0 \quad (2.45)$$

- On détermine les conditions que doivent remplir les dérivées de $G(x, x_0)$ au point d'excitation x_0 en effectuant les intégrations successives de l'équation (2.21)

$$\begin{aligned}
 G(x, x_0) \Big|_{x_0^-}^{x_0^+} &= 0 & \frac{d}{dx} G(x, x_0) \Big|_{x_0^-}^{x_0^+} &= \frac{1}{K} \\
 \frac{d^2}{dx^2} G(x, x_0) \Big|_{x_0^-}^{x_0^+} &= 0 & \frac{d^3}{dx^3} G(x, x_0) \Big|_{x_0^-}^{x_0^+} &= \frac{1}{B} \left[1 + \frac{B}{K} k_c^2 \right]
 \end{aligned}$$

La fonction de Green est alors exprimée comme une combinaison linéaire des solutions élémentaires

$$\begin{aligned}
 G(x, x_0) &= a_1 e^{kd} (x - x_0) + a_2 e^{ik_p} (x - x_0) & x < x_0 \\
 G(x, x_0) &= b_1 e^{-kd} (x - x_0) + b_2 e^{-ik_p} (x - x_0) & x > x_0
 \end{aligned} \quad (2.46)$$

L'utilisation des quatre conditions, permet d'évaluer les coefficients a_1, a_2, b_1, b_2

Ces coefficients sont évalués sous environnement Maple en résolvant un système d'équation linéaire.

$$G_w(x, x_0) = \frac{1}{B} [gd e^{kd|x-x_0|} + igpe^{-ik_p|x-x_0|}] \quad (2.47)$$

$$\text{Avec :} \quad gd = \frac{1 - \frac{B}{K} [-kp^2 + kc^2]}{2kp(kp^2 + kd^2)} \quad gp = \frac{1 - \frac{B}{K} [kp^2 + kc^2]}{2kp(kp^2 + kd^2)}$$

gd : Correspond aux ondes propagatives

gp : Correspond aux ondes de champ proches qui sont très rapidement atténuées

L'évolution de la réceptance $G_w(x, x_0)$ en fonction de la fréquence est donnée dans la figure 2.6 pour le rail type :

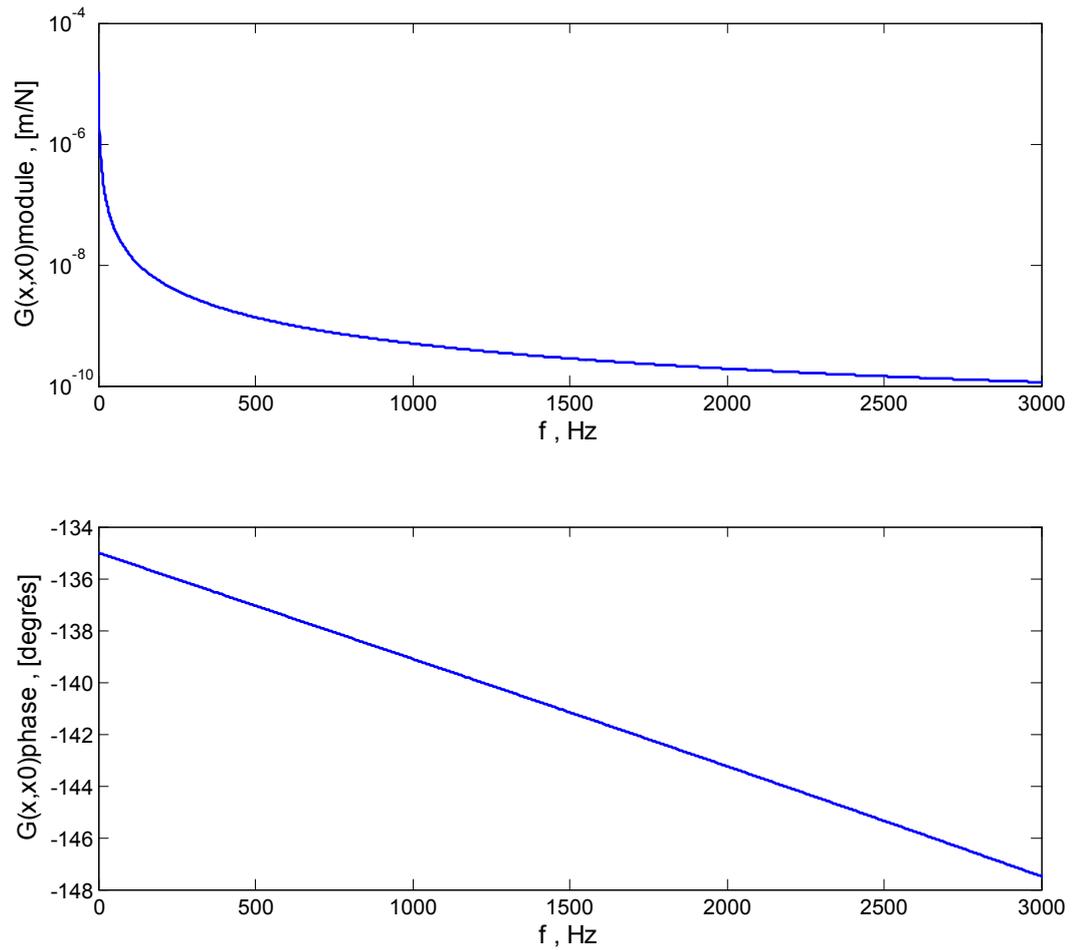
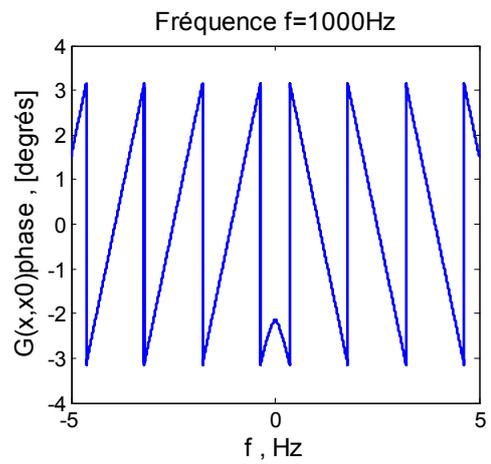
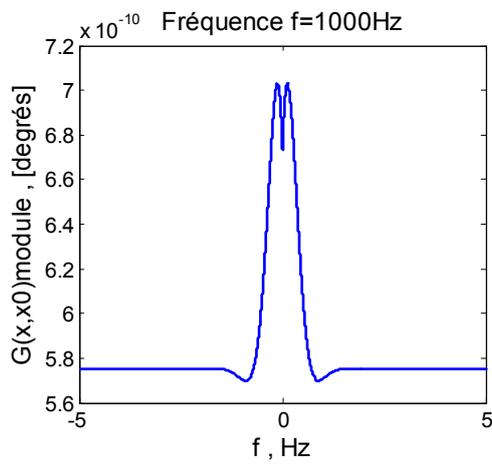
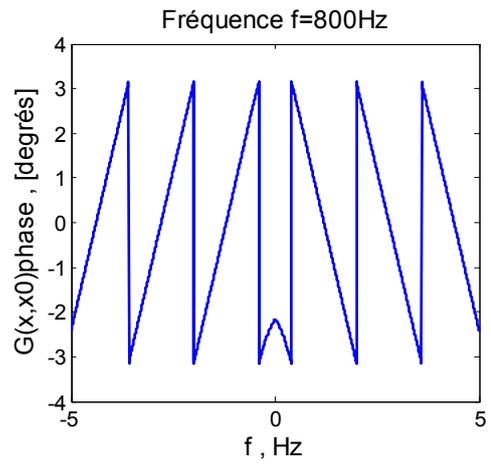
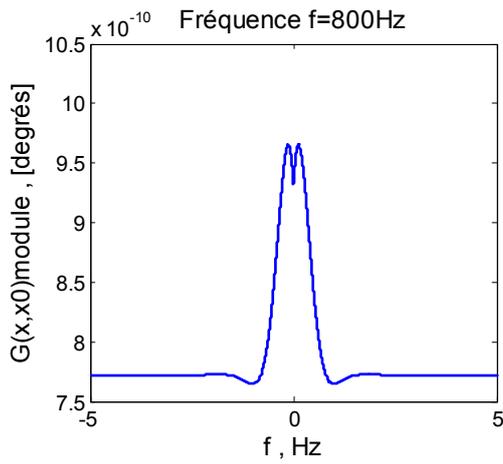
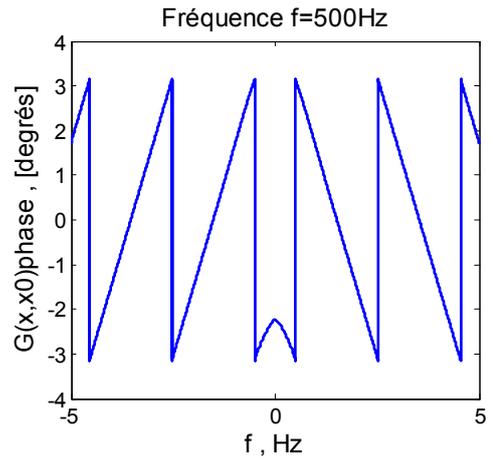
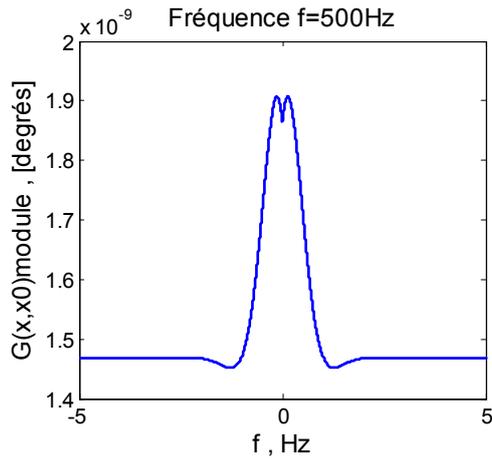


Figure 2.6 : Evolution de la réceptance $G_w(x, x_0)$ en fonction de la fréquence
Modèle de Timoshenko-Rail libre infini

L'évolution de $G_w(x, x_0)$ en fonction de $x - x_0$ est donnée dans la figure 2.7 pour les fréquences : 500Hz, 800Hz, et 1000Hz



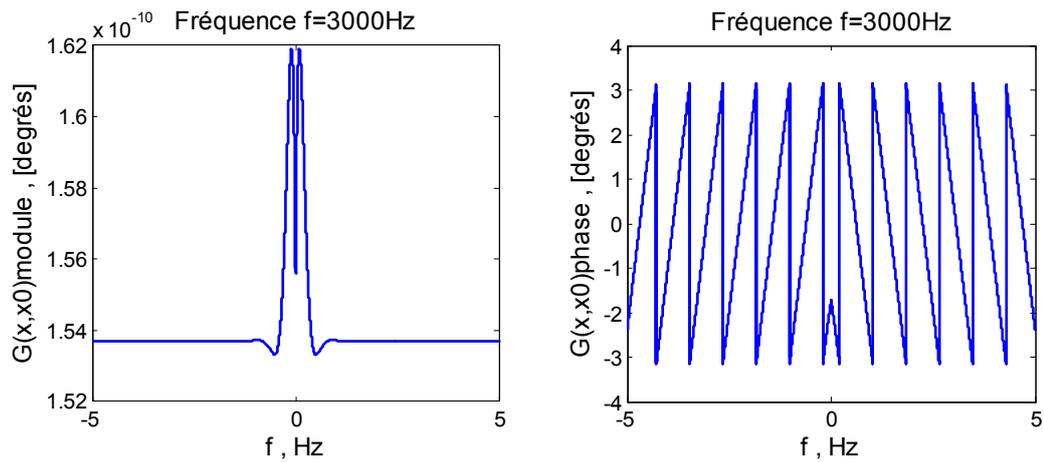


Figure 2.7 : Evolution de $G_w(x, x_0)$ en fonction de $x - x_0$
Modèle de Timoshenko-Rail libre infini

L'amplitude de la fonction de Green diminue avec l'évolution de la fréquence avec un caractère plus important.

2.3. Les ondes de flexion libres :

2.3.1. Poutre Euler

En l'absence de forces extérieures l'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$\frac{d^4}{dx^4} \dot{y}(x, w) - k_b^4 \frac{d^2}{dt^2} \dot{y}(x, w) = 0 \quad (2.48)$$

La solution générale est de la forme :

$$y'(x, w) = a_1 e^{k_b x} + a_2 e^{ik_b x} + a_3 e^{-k_b x} + a_4 e^{-ik_b x} \quad (2.49)$$

Elle est composée de la combinaison linéaire des 4 solutions élémentaires du système : deux ondes propagatives $e^{\pm ik_b x}$ et deux ondes de champ proche $e^{\pm k_b x}$. Compte tenu des conventions, le signe + correspond à une propagation dans les directions des $x < 0$.

Les ondes propagatives $e^{\pm ik_b x}$ présentent dans des réalités une légère atténuation. Celle-ci, pour l'acier, est de l'ordre de quelques centièmes de dB/m. elle peut donc pratiquement être négligée. Les ondes de champ proche $e^{\pm k_b x}$ sont, de part leur nature, très fortement atténuées. L'atténuation en dB/m est $k_b \times 20 \log e$.

Les évolutions de k_b et $k_b \times 20 \log e$ sont données ci-après en fonction de la fréquence pour le rail type.

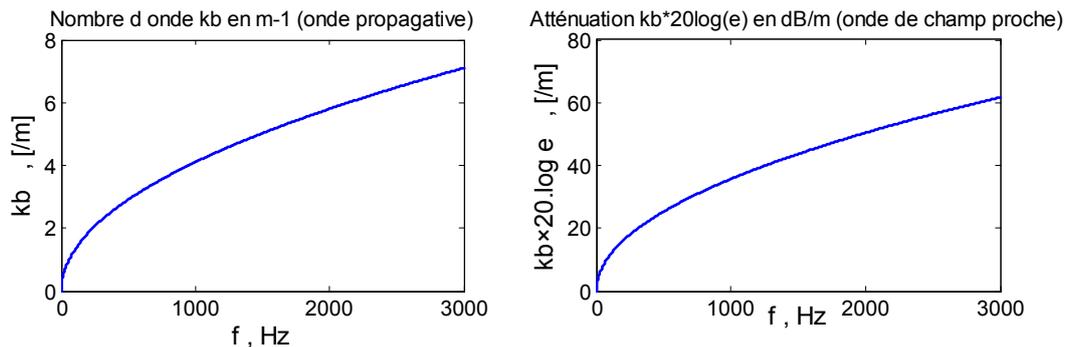


Figure 2.8 : Evolution de k_b et $k_b \times 20 \log e$ (Modèle Euler)

2.3.2. Poutre de Timoshenko :

En l'absence de la force extérieure :

$$\left[\left(\frac{d^2}{dx^2} + k_c^2 \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} + k_t^2 \right) - k_b^4 \right] \hat{y}(x, w) = 0 \quad (2.50)$$

Les solutions élémentaires sont de la forme $e^{i\mu x}$ avec μ solution de :

$$\mu^4 - (k_c^2 + k_t^2)\mu^2 - (k_b^2 + k_c^2 k_t^2) = 0 \quad (2.51)$$

Pour une poutre de section homogène, on a :

$$\frac{k_b^4}{k_c^2 k_t^2} = \frac{1}{w^2} \frac{AEk'G}{\rho I} \quad (2.52)$$

Cette quantité sera supérieure à l'unité dans le domaine de fréquences :

$$f < \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{AEk'G}{\rho I}} \text{ Soit } f < 7,5\text{kHz pour le rail type.}$$

Le rayonnement acoustique du rail concerne les fréquences inférieures à cette limite ; on peut donc considérer qu'on aura toujours $k_b^2 + k_c^2 k_t^2 > 0$

Si on pose

$$k_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{(k_c^2 + k_t^2)^2 - 4(k_b^4 + k_c^2 k_t^2)} + (k_c^2 + k_t^2) \right]^{1/2} \quad (2.53)$$

$$k_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{(k_c^2 + k_t^2)^2 - 4(k_b^4 + k_c^2 k_t^2)} - (k_c^2 + k_t^2) \right]^{1/2} \quad (2.54)$$

Les solutions de l'équation (2.51) s'écrivent alors $\mu = \pm k_p$ et $\mu = \pm i k_d$.

Ceci permet d'exprimer l'équation (2.50) sous la forme :

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + k_p^2 \right\} \left\{ \frac{d^2}{dx^2} - k_d^2 \right\} y'(x, w) = 0 \quad (2.55)$$

La solution générale de cette équation, est la combinaison linéaire des solutions élémentaires :

$$y'(x, w) = a_1 e^{k_d x} + a_2 e^{i k_p x} + a_3 e^{-k_d x} + a_4 e^{-i k_p x} \quad (2.56)$$

Elle est composée de deux ondes propagatives $a_4 e^{\pm i k_p x}$ et deux ondes de champ proche $a_3 e^{\pm k_d x}$. Le signe + correspond à une propagation dans la direction des $x < 0$

Les évolutions de k_p et $k_d \times 20 \cdot \log e$ sont données ci-après en fonction de la fréquence pour le rail type.

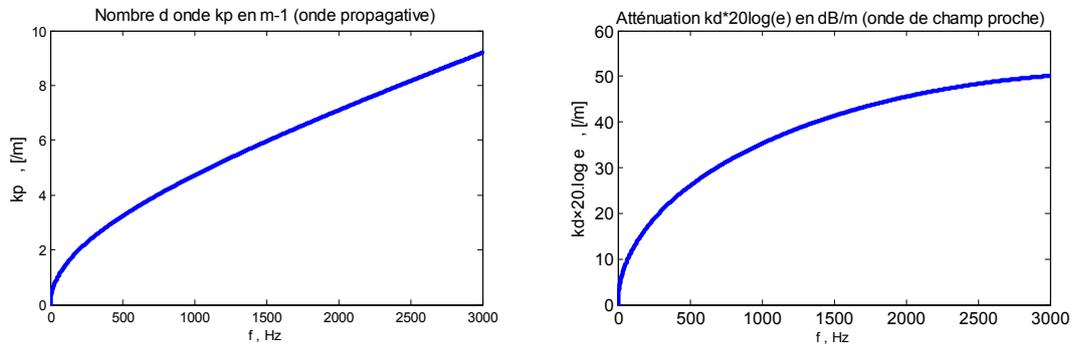


Figure 2.9 : Evolution de k_p et $k_d \times 20 \cdot \log e$ (Modèle Timoshenko)

2.4. Poutre Timoshenko versus Poutre Euler :

Le modèle d'Euler est plus simple que le modèle Timoshenko dans sa formulation, il permet de modéliser le comportement en flexion d'un rail tant que la fréquence reste inférieure de 1kHz [Heckl 95].

Par contre pour les fréquences élevées, il faut utiliser le modèle de Timoshenko.

2.4.1. Les nombres d'onde :

La comparaison entre les résultats obtenus par les deux modèles est donnée dans la figure (2.11).

Le modèle Euler fait ressortir une seule valeur k_b pour le nombre d'onde :

$$k_b = \left(\frac{w^2 m_l}{EI} \right)^{1/4}$$

Le modèle de Timoshenko fait ressortir deux valeurs de nombres d'onde :

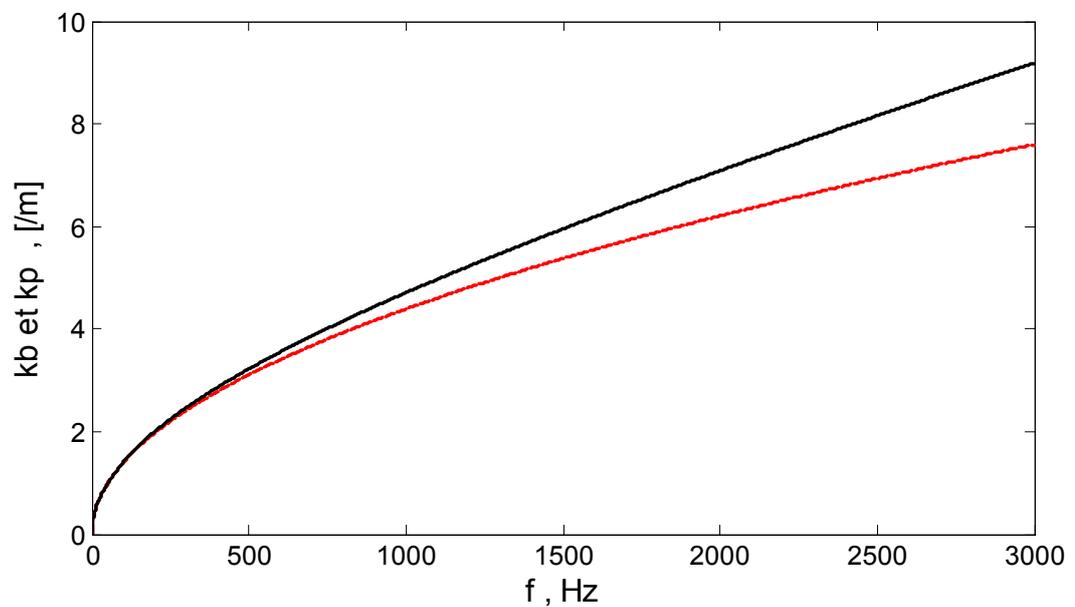
$$k_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{(k_c^2 + k_t^2)^2 - 4(k_b^4 + k_c^2 k_t^2)} + (k_c^2 + k_t^2) \right]^{1/2}$$

$$k_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{(k_c^2 + k_t^2)^2 - 4(k_b^4 + k_c^2 k_t^2)} - (k_c^2 + k_t^2) \right]^{1/2}$$

k_p Correspond aux ondes propagatives (on néglige pratiquement leur atténuation)

k_d Correspond aux ondes de champ proche qui sont très rapidement atténuées.

La comparaison entre les deux modèles est donnée dans la figure 2.11



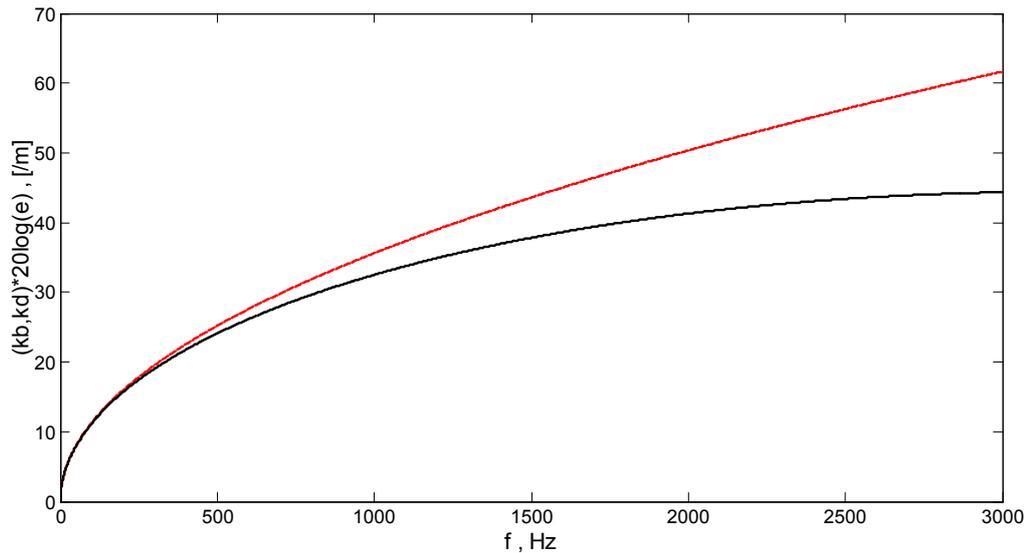


Figure 2.10 : Comparaison entre les deux modèles pour les nombres d'onde

----- Poutre Euler

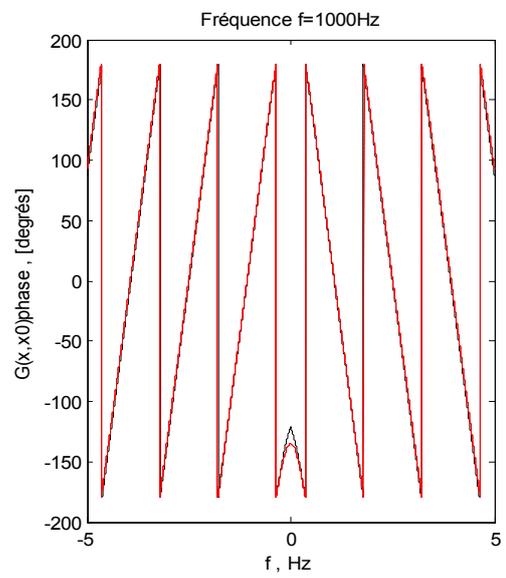
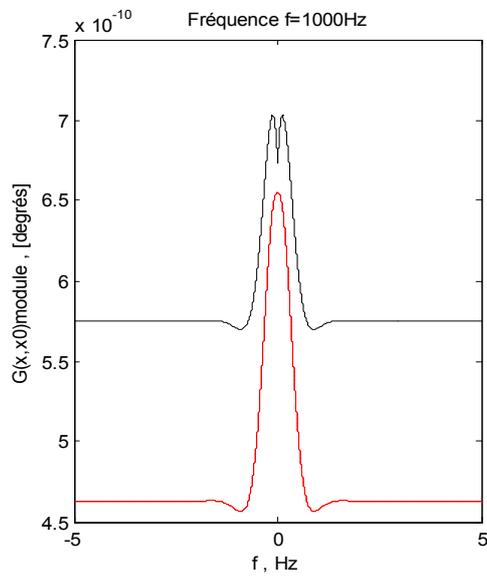
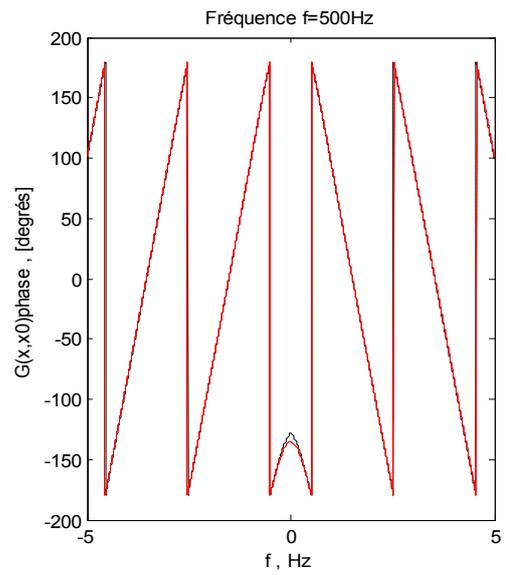
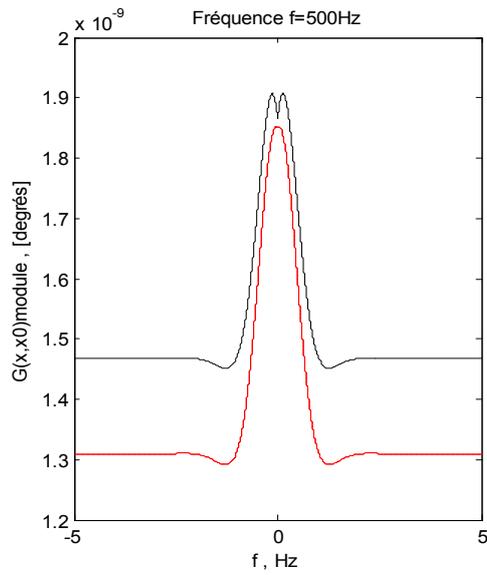
_____ Poutre Timoshenko

Les nombres d'onde obtenus avec les deux modèles sont à fait comparables aux fréquences basses. Leur différence devient significative vers 1kHz.

Le modèle de Timoshenko donne, aux fréquences élevées, une propagation avec des nombres d'onde plus importants que le modèle d'Euler (longueurs d'onde plus faibles) et une onde de champ proche moins rapidement atténuée que le modèle d'Euler.

2.4.2. Fonction de Green :

L'évolution de la fonction de Green en fonction de $x - x_0$ à les fréquences 500Hz, 1000 Hz et 3000Hz est donnée ci-dessous pour les deux modèles .Nous remarque que le comportement à basse fréquence pour les deux modèles est pratiquement similaire, mais à haute fréquence le module de la fonction de Green est nettement plus important pour le modèle de Timoshenko que pour le modèle d'Euler.



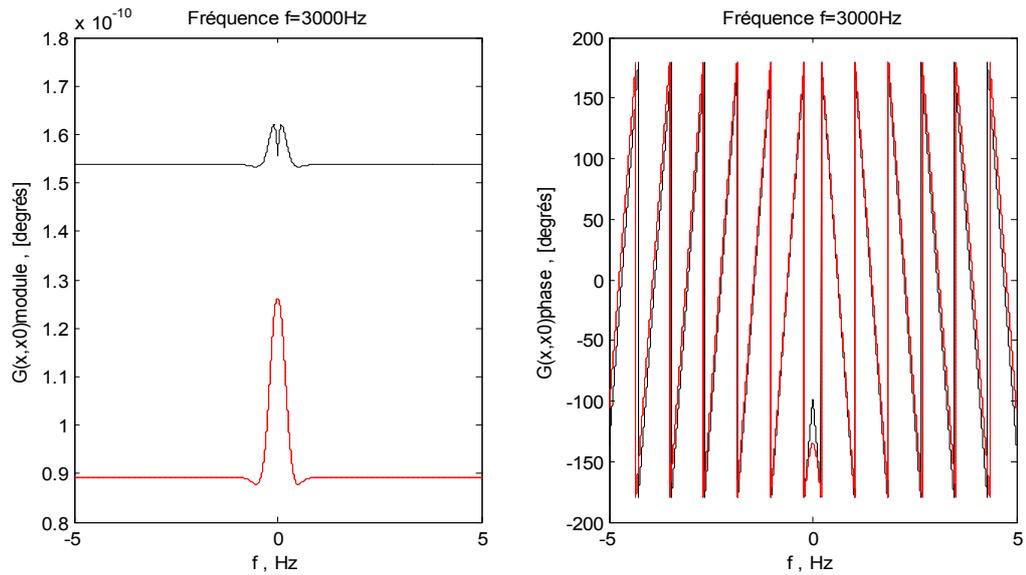


Figure 2.11 : Comparaison entre les deux modèles pour la fonction de Green en fonction de $x - x_0$ pour différentes fréquences

----- Poutre Euler

_____ Poutre Timoshenko

2.5. Comparaison entre le modèle d'Euler et le modèle de Timoshenko :

2.5.1. Nombres d'onde :

Nordborg propose d'étendre le domaine de validité du modèle d'Euler à des fréquences plus élevées en prenant pour le rail un moment d'inertie égale à 75% de la valeur réelle [Nordborg 95].

Soit $0.75B$ au lieu de B , les résultats sont donnés dans la Figure 2.12 ci-après :

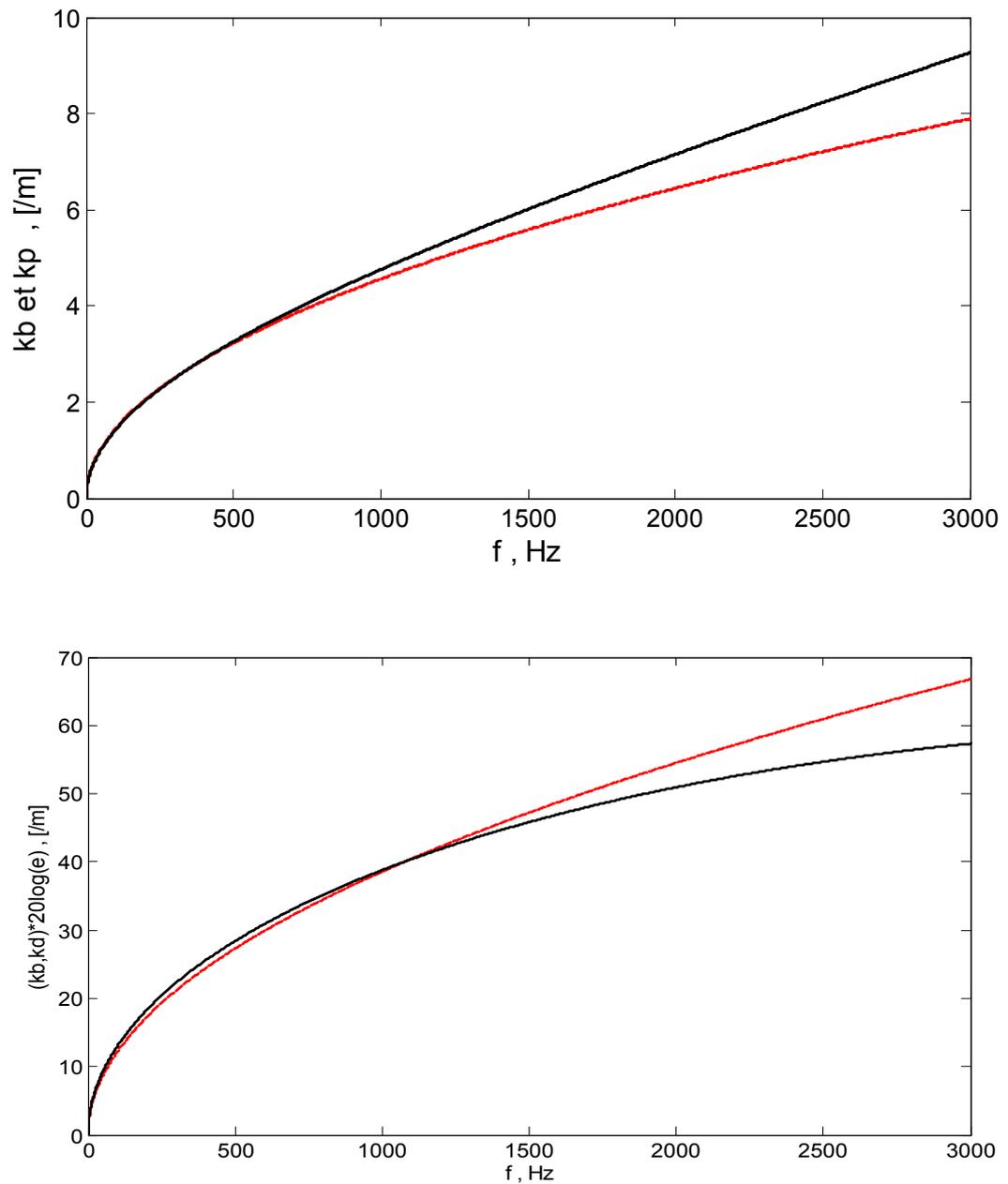


Figure 2.12 : Approximation de Nordborg (Comparaison entre les deux modèles pour les nombres d'onde)

----- Poutre Euler $EI= 4582500 \text{ N.m}^2$

— Poutre Timoshenko $EI= 6110000 \text{ N.m}^2$

2.4.2. Fonction de Green :

En utilisant le modèle d'Euler avec $B \times \frac{1}{0.75}$ de la valeur réelle on trouve pour la fonction de Green des valeurs très proches de celle données par le modèles de Timoshenko excepté au voisinage du point d'excitation (figure 2.13)

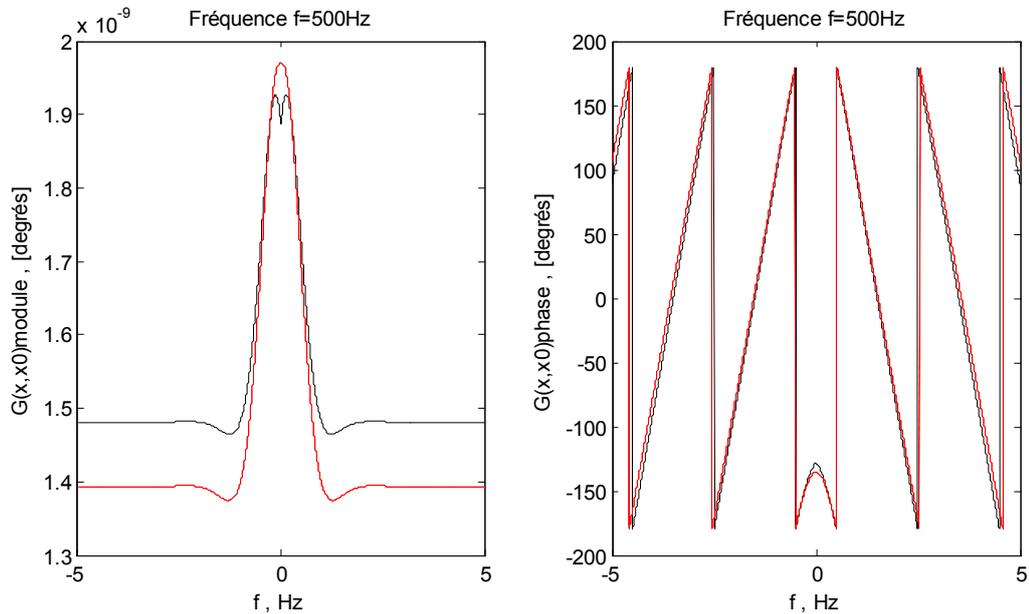


Figure 2.13 : Approximation de Nordborg (Comparaison entre les deux modèles pour la fonction de Green en fonction de $(x - x_0)$)

----- Poutre Euler $EI= 6537700 \text{ N.m}^2$
 _____ Poutre Timoshenko $EI= 6110000 \text{ N.m}^2$

Conclusion :

Dans ce chapitre nous réalisons l'étude d'un rail libre modélisé par une poutre Euler, et dans un deuxième temps par une poutre de Timoshenko. Les deux équations différentielles pour les modèles concernées ont été établit à partir des équations d'équilibre. La transformée de Fourier nous permet d'établir l'équation associe à l'équation différentielle prenant en compte la fonction de Green. La détermination de la fonction de Green est réalisée en utilisant les conditions de continuité de la fonction solution en utilisant soit la méthode directe (intégration) ou la méthode de la transformée de Fourier (résolution des intégrale par la méthode des résidus).L'application des conditions de continuité permet d'établir un système d'équations linéaires dont la résolution a été faite sur Maple. Une analyse sur le nombre d'onde et sur l'atténuation est concrétisée. La fonction de Green est analysée pour différents point de la poutre rail. Enfin nous concluons ce chapitre par une comparaison entre les deux modèles.

CHAPITRE 03 :

Rail sur semelle continue
(Support rigide : béton armé)

Introduction :

Dans ce chapitre, nous considérons le rail reposant suivant toute sa longueur sur une fondation de béton (fondation élastique) continue, de sorte que, lorsque la poutre se déforme, l'intensité, en chaque section de la réaction continuum répartie soit proportionnelle à la déformation en cette section. Dans ces conditions, la réaction de la poutre par unité de longueur peut être représentée par une expression de la forme ky , dans la quelle y désigne la déformation et k une constante habituellement appelle module de Winkler ou module de la fondation. Cette constante représente la réaction par unité de longueur lorsque la déformation est égale à l'unité. La simple hypothèse suivant laquelle la réaction continue de la fondation est proportionnelle à la déformation constitue en pratique une approximation satisfaisante.

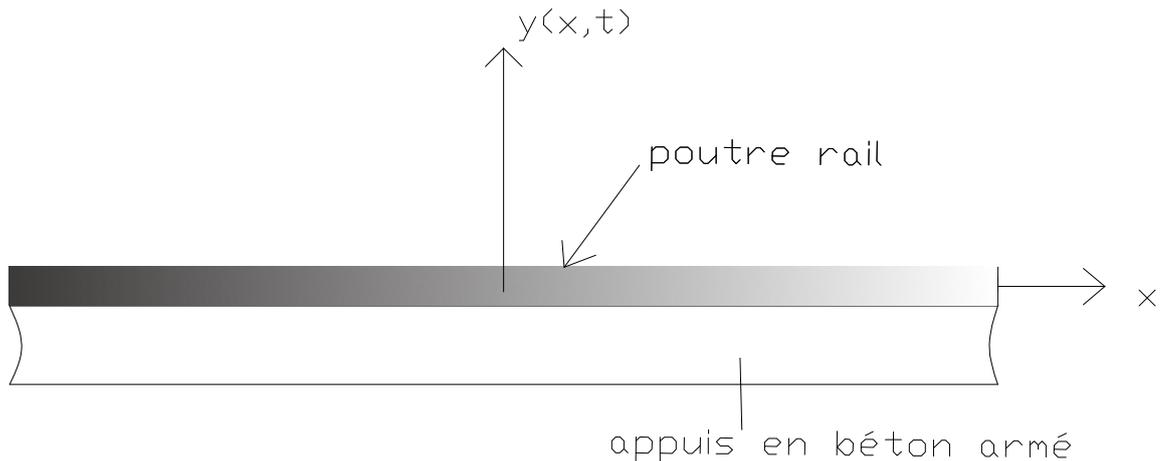


Figure3.1 : Modèle de la poutre rail sur appui continu en béton

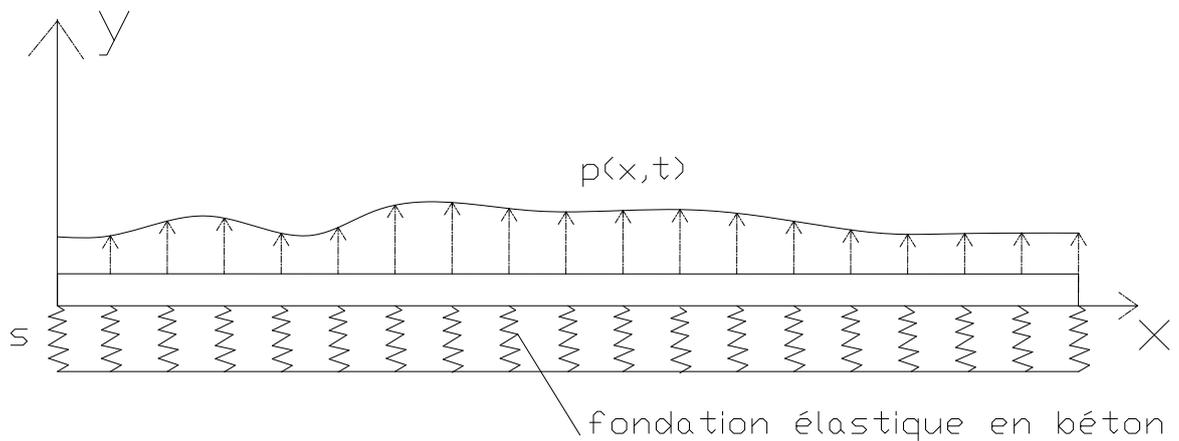


Figure3.2 : rail sur fondation élastique (Béton)

3.1. Poutre Euler:

3.1.1. Equation différentielle du mouvement :

Nous supposons une poutre rectiligne de longueur infinie à section variable, d'une masse linéique m_l , et d'un raideur de flexion EI soumise à un chargement transversal $P(x,t)$ varie arbitrairement avec la position et le temps.

Le chargement transversal $p(x,t)$ varie arbitrairement avec la position et le temps, et la réponse en déplacement transversal $v(x,t)$ est une fonction de ces mêmes variables.

La poutre reposant sur une fondation élastique aussi infinie d'une raideur s .

La figure3.3.a représente les forces agissant la poutre infinie, et la figure3.3.b pour une longueur élémentaire dx .

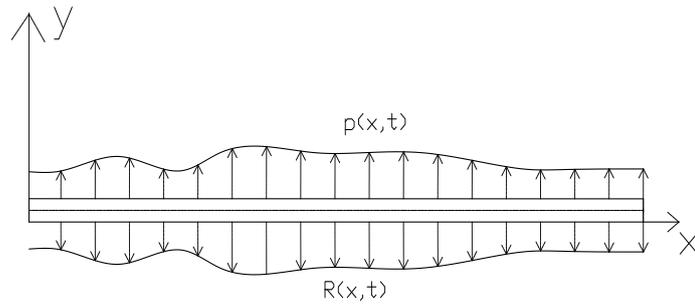


figure3.3.a : les forces agissant la poutre infinie

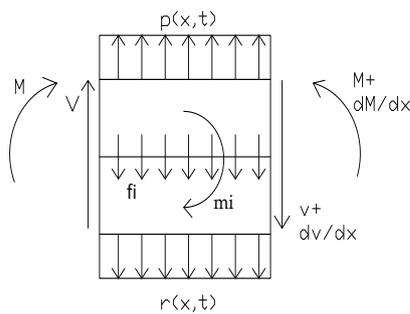


figure3.3.b : les forces agissant pour une longueur élémentaire dx

L'équilibre des forces nous permet de définir l'équation (3.1) :

$$v + p dx - \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) - r dx - f_i dx = 0 \quad (3.1)$$

Comme prévus dans le chapitre 02 nous trouvons :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = p - r - m_i \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (3.2)$$

L'équilibre des moments permet l'écriture de l'équation (3.3) :

$$M + v dx - \left(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) = 0 \quad (3.3)$$

Finalement nous exprimons l'équation différentielle régissant le comportement de la poutre :

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + m_l \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + r(x,t) = p(x,t) \quad (3.4)$$

La simulation de la fondation par le modèle de Winkler (Winkler 1867) permet d'exprimer $r(x,t)$ en fonction de la rigidité des blochets et de la déformation liée à cet élément de structure.

$$r(x,t) = s'_p \cdot y(x,t)$$

Avec $s'_p = \frac{S_p}{l}$, l longueur entre deux blochets.

Nous obtenons ainsi l'équation différentielle régissant le comportement de la poutre sur une assise en béton :

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + m_l \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + s'_p \cdot y(x,t) = p(x,t) \quad (3.5)$$

Et lorsque $p(x,t) = p(t)X^{-1}(x)$ (chapitre 02) on obtient donc :

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + m_l \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + s'_p \cdot y(x,t) = p(t)X^{-1}(x) \quad (3.6)$$

Pour l'analyse des vibrations en fonction de la fréquence. Nous effectuons une transformée de Fourier par rapport au temps.

$$EI \frac{d^4 y'(x,w)}{dx^4} - w^2 m_l y'(x,w) + s'_p \cdot y'(x,w) = p'(w)X^{-1}(x) \quad (3.7)$$

$$\frac{d^4 y'(x,w)}{dx^4} - k_b^4 \left(1 - \frac{s'_p}{w^2 m_l}\right) y'(x,w) = \frac{p'(w)}{EI} X^{-1}(x) \quad (3.8)$$

3.1.2. Détermination de la fonction de Green :

Comme le chapitre 02, il faut d'une part déterminer la fonction de Green qui est un moyen systématique de trouver précisément la solution particulière. En outre la

méthode des fonctions de Green se prête bien à la rediscutions des liens importants entre conditions aux limites et analyticité.

Si nous posons $\gamma^4 = k_b^4 \left(1 - \frac{s'_p}{w^2 m_t}\right)$

$$\text{Donc} \quad \begin{cases} \gamma = \pm k_b \left(1 - \frac{s'_p}{w^2 m_t}\right)^{1/4} = \pm \gamma' \\ \gamma = \pm i k_b \left(1 - \frac{s'_p}{w^2 m_t}\right)^{1/4} = \pm i \gamma' \end{cases} \quad (3.9)$$

La fonction de Green associ   à l'équation (3.8) :

$$\frac{d^4}{dx^4} G_w(x, w) - \gamma^4 G_w(x, w) = \frac{1}{EI} \delta(x - x_0) \quad (3.10)$$

Deux méthodes peuvent donc être utilisées pour évaluer la fonction de Green :

- La méthode directe; ou
- Transformée de Fourier.

Nous obtenons :

$$G_w(x, x_0) = -\frac{1}{4EI\gamma^3} \left[e^{-\gamma|x-x_0|} + e^{-i\gamma|x-x_0|} \right] \quad (3.11)$$

La représentation graphique La fonction de Green pour un rail sur fondation élastique continue en fonction de la fréquence pour le modèle Euler. Nous observons que la fonction de Green est croissante avec l'évolution de la fréquence jusqu'à ce que le terme $1 - \frac{s'_p}{w^2 m_t}$ pour une fréquence donnée. Cette valeur de la fréquence est aussi dépendent de la rigidité s'_p , plus la rigidité est importante plus la valeur de cette fréquence est plus grande. Après cette valeur la fonction de Green est décroissante en fonction de l'évolution de la fréquence.

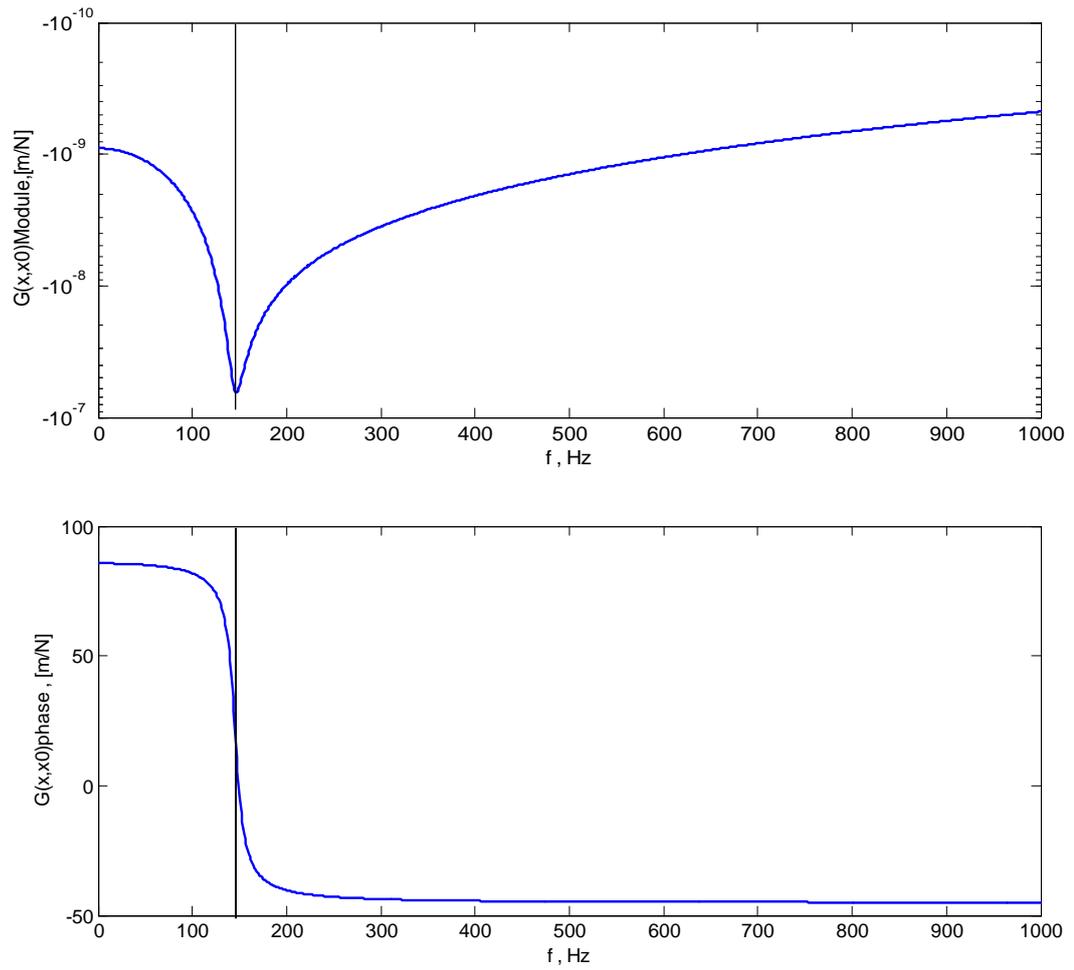


Figure 3.4 : La fonction de Green pour un rail sur fondation élastique continue en fonction de la fréquence. Modèle Euler

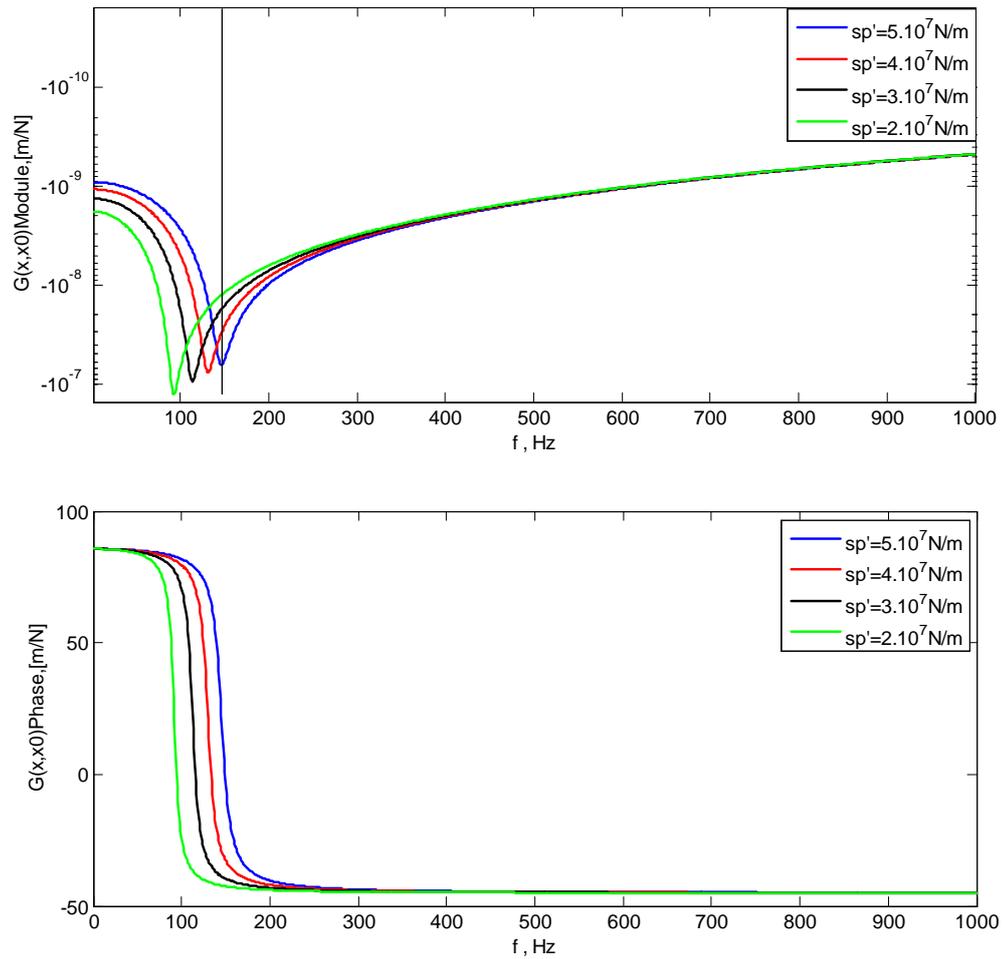


Figure 3.5 : La fonction de Green pour un rail sur fondation élastique continue en fonction de la fréquence pour différents raideurs du béton. Modèle Euler

3.1.3. L'atténuation des ondes :

La partie réelle de la quantité $1 - \frac{s'_p}{w^2 m_l}$ s'annule à la fréquence f_p donnée par :

$$f_p = \frac{w_p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{s'_p}{m_l}} \quad (3.12)$$

Si nous considérons que $m_t = 60.21Kg / m$ et :

$$s_p = 3.10^7.(1+0.1i)N / m \text{ Donc } s'_p = 5.10^7.(1+0.1i)N / m$$

Donc, elle est d'environ $f_p = 145Hz$

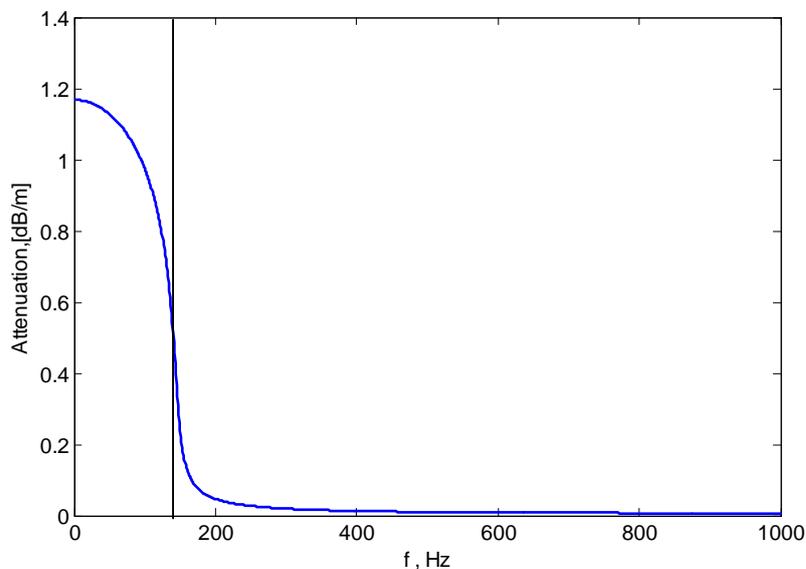
Aux hautes fréquences ($f > f_p$), on trouve, comme dans le cas du rail isolé les deux types d'ondes (ondes propagatives, ondes de champ proche). Les constantes de

propagation sont affectées par le facteur $\left(1 - \frac{s'_p}{w^2 m_t}\right)^{1/4}$.

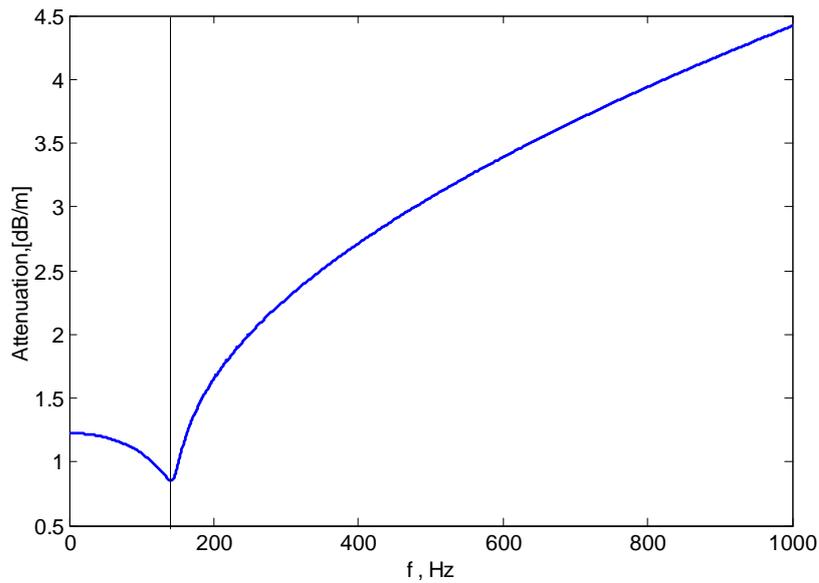
- Aux fréquences très supérieures à la fréquence f_p on retrouve les résultats du rail isolé (la propagation n'est plus affectée par le support).
- Aux basses fréquences ($f < f_p$), la quantité $\left(1 - \frac{s'_p}{w^2 m_t}\right)^{1/4}$ a sa partie réelle négative, toutes les ondes sont atténuées.

Nous utiliserons pour la commodité de la présentation le terme ondes potentiellement propagatives et ondes de champ proche.

Les atténuations en fonction de la fréquence sont tracées dans la figure 3.6 :



a. Ondes potentiellement propagatives



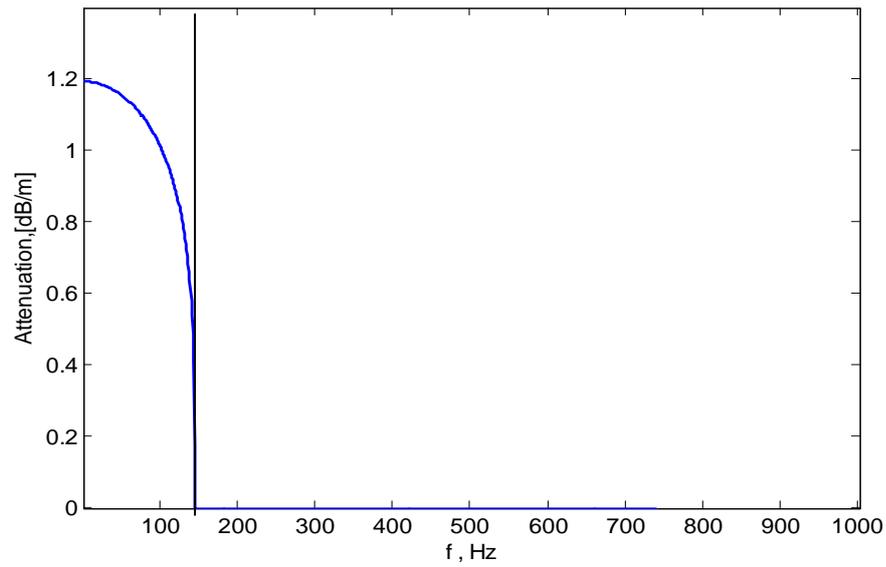
b. Ondes de champ proche

Figure 3.6. Atténuation des ondes de vibrations le long d'un rail sur fondation élastique continue. Modèle Euler.

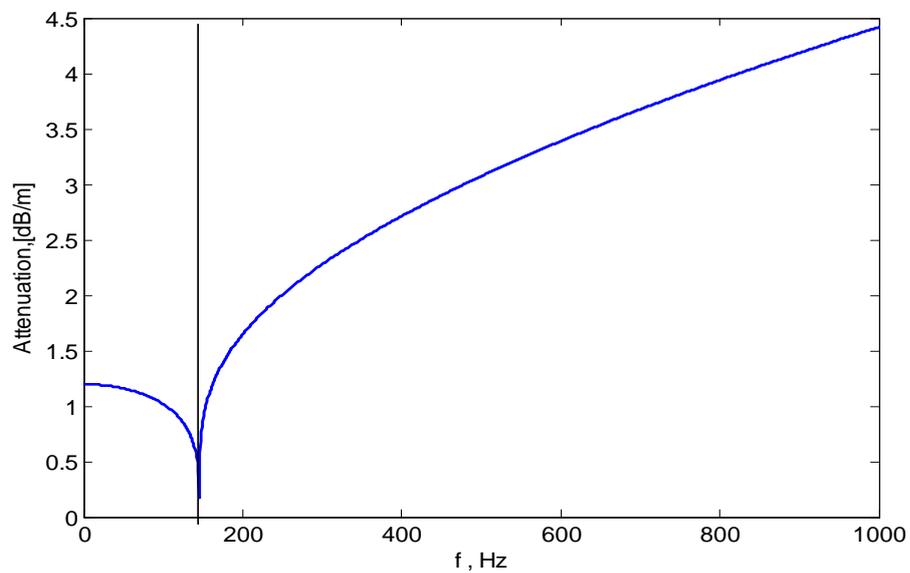
Nous constatons que les ondes potentiellement propagatives sont fortement atténuées aux fréquences inférieures à 145 Hz et faiblement atténuées au-delà.

Les ondes de champ proche sont, aux basses fréquences, plus fortement atténuées que dans le cas d'un rail isolé (figure 2.8). L'atténuation est minimum de voisinage de la fréquence de résonance mais garde des valeurs élevées

Si nous proposons qu'il n'y ait pas des déperditions internes (figure 3.7) :



a. Ondes potentiellement propagatives



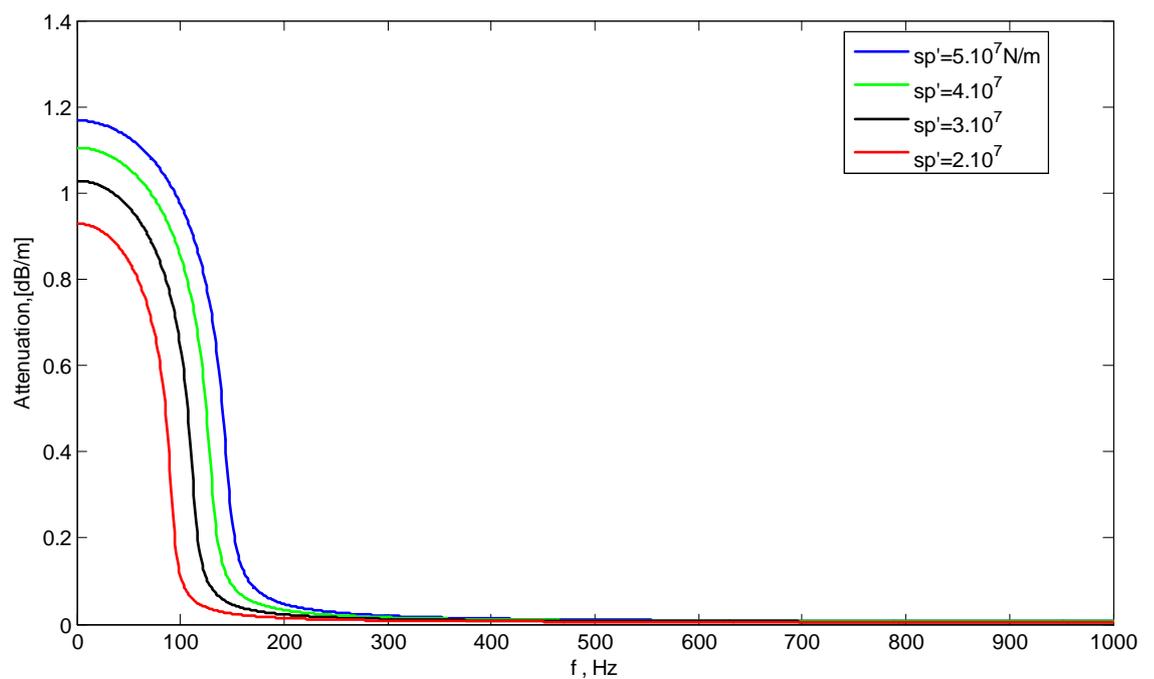
b. Ondes de champ proche

Figure 3.7. Atténuation des ondes de vibrations le long d'un rail sur fondation élastique continue (cas d'un support élastique sans déperditions internes). Modèle Euler.

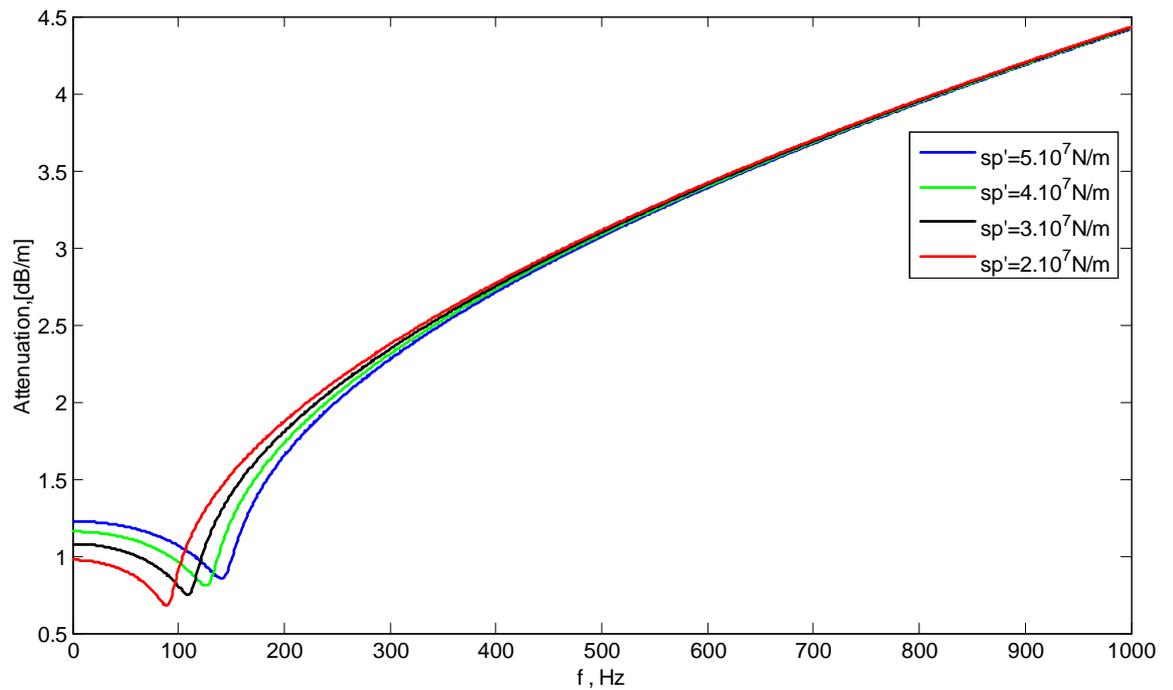
Les atténuations obtenues sont les mêmes que dans le cas précédent, excepté au voisinage de la fréquence f_p . Ce n'est que dans ce voisinage que les déperditions jouent un rôle.

Donc nous pouvons dire que l'atténuation n'est pas due aux déperditions internes dans le matériau élastique mais à la réaction du support

Influence de s'_p :



a. Ondes potentiellement propagatives



b. Ondes de champ proche

Figure 3.8. L'influence de la raideur du béton sur l'atténuation des ondes de vibrations. Modèle Euler.

3.2. Poutre Timoshenko :

3.2.1. Equation différentielle du mouvement :

A partir des équations de chapitre02 (eq (2.29) et eq (2.30)), nous trouvons pour le rail libre:

$$\begin{cases} k'AG \frac{\partial}{\partial x} (\alpha - \frac{\partial y}{\partial x}) + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = P \\ k'AG (\alpha - \frac{\partial y}{\partial x}) - EI \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \rho I \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

Pour le rail posé sur fondation élastique on peut écrire :

$$\begin{cases} k'AG \frac{\partial}{\partial x} (\alpha - \frac{\partial y}{\partial x}) + s'_p y + m_l \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = P \\ k'AG (\alpha - \frac{\partial y}{\partial x}) - EI \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \rho I \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

$$EI \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\rho}{k'G} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) y + s'_p y + m_l \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left[1 - \frac{EI}{k'AG} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \right] p(t) X^{-1}(x) \quad (3.15)$$

La transformée de Fourier de cette équation nous donne :

$$\left[\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\rho}{E} w^2 \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\rho}{k'G} w^2 \right) - \left(\frac{m_l w^2 - s'_p}{EI} \right) \right] y' = \left[\frac{1}{EI} - \frac{1}{k'AG} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\rho}{E} w^2 \right) \right] p(w) X^{-1}(x) \quad (3.16)$$

$$\left[\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\rho}{E} w^2 \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\rho}{k'G} w^2 \right) - \gamma^4 \right] y' = \left[\frac{1}{EI} - \frac{1}{k'AG} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\rho}{E} w^2 \right) \right] p(w) X^{-1}(x) \quad (3.17)$$

On pose :

$k_c = w \sqrt{\frac{\rho}{E}}$ Nombre d'onde des ondes de compression.

$k_t = w \sqrt{\frac{\rho}{k'G}}$ Nombre d'onde des ondes de cisaillement.

On obtient :

$$\left[\left(\frac{d^2}{dx^2} + k_c^2 \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} + k_t^2 \right) - \gamma^4 \right] y'(x, w) = \left[\frac{1}{EI} - \frac{1}{k'AG} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\rho}{E} w^2 \right) \right] p(w) X^{-1}(x) \quad (3.18)$$

3.2.2. Détermination de la fonction de Green

La fonction de Green associée à l'équation (3.19) est la réponse d'une force concentrée en x_0 , c'est la solution générale de l'équation :

$$\left[\left(\frac{d^2}{dx^2} + k_c^2 \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} + k_t^2 \right) - \gamma^4 \right] G(x, x_0) = \left[\frac{1}{EI} - \frac{1}{k'AG} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\rho}{E} w^2 \right) \right] \delta(x, x_0) \quad (3.19)$$

Les mêmes étapes que le chapitre 02 on trouve :

$$G_w(x, x_0) = \frac{1}{EI} \left[g_d e^{k_{d\gamma} |x-x_0|} + i g_p e^{-i k_{p\gamma} |x-x_0|} \right] \quad (3.20)$$

$$\text{Avec :} \quad g_d = \frac{1 - \frac{B}{K} [-kp^2 + kc^2]}{2kp(kp^2 + kd^2)} \quad g_p = \frac{1 - \frac{B}{K} [kp^2 + kc^2]}{2kp(kp^2 + kd^2)} \quad (3.21)$$

Et

$$\begin{aligned} k_{p\gamma} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{(k_c^2 + k_t^2)^2 - 4(\gamma^4 + k_c^2 k_t^2)} + (k_c^2 + k_t^2) \right]^{1/2} \\ k_{d\gamma} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{(k_c^2 + k_t^2)^2 - 4(\gamma^4 + k_c^2 k_t^2)} - (k_c^2 + k_t^2) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

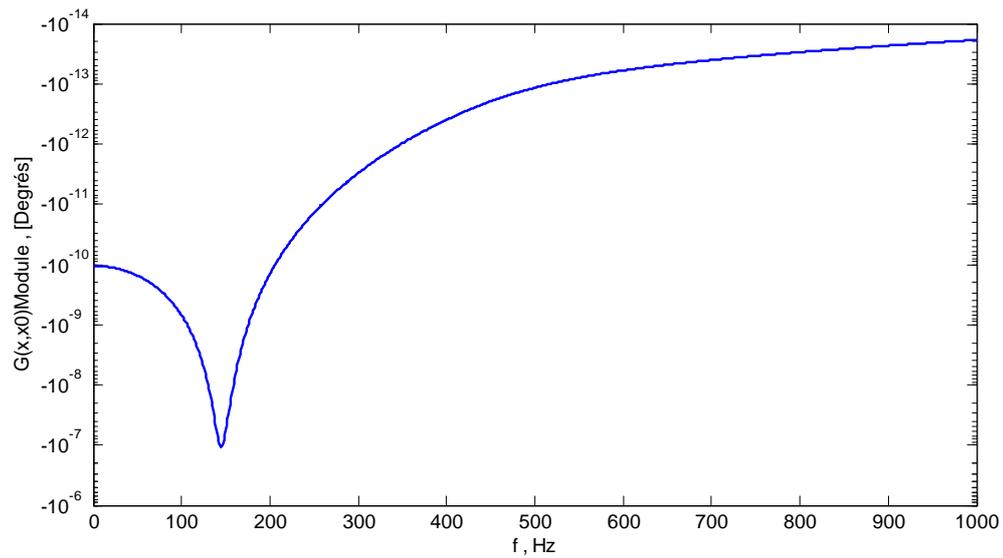


Figure 3.9 : Evolution de la fonction de Green pour un rail sur fondation élastique continue en fonction de la fréquence. Modèle Euler.

$k_{p\gamma}$ Correspond aux ondes propagatives (on néglige pratiquement leur atténuation)

$k_{d\gamma}$ Correspond aux ondes de champ proche qui sont très rapidement atténuées.

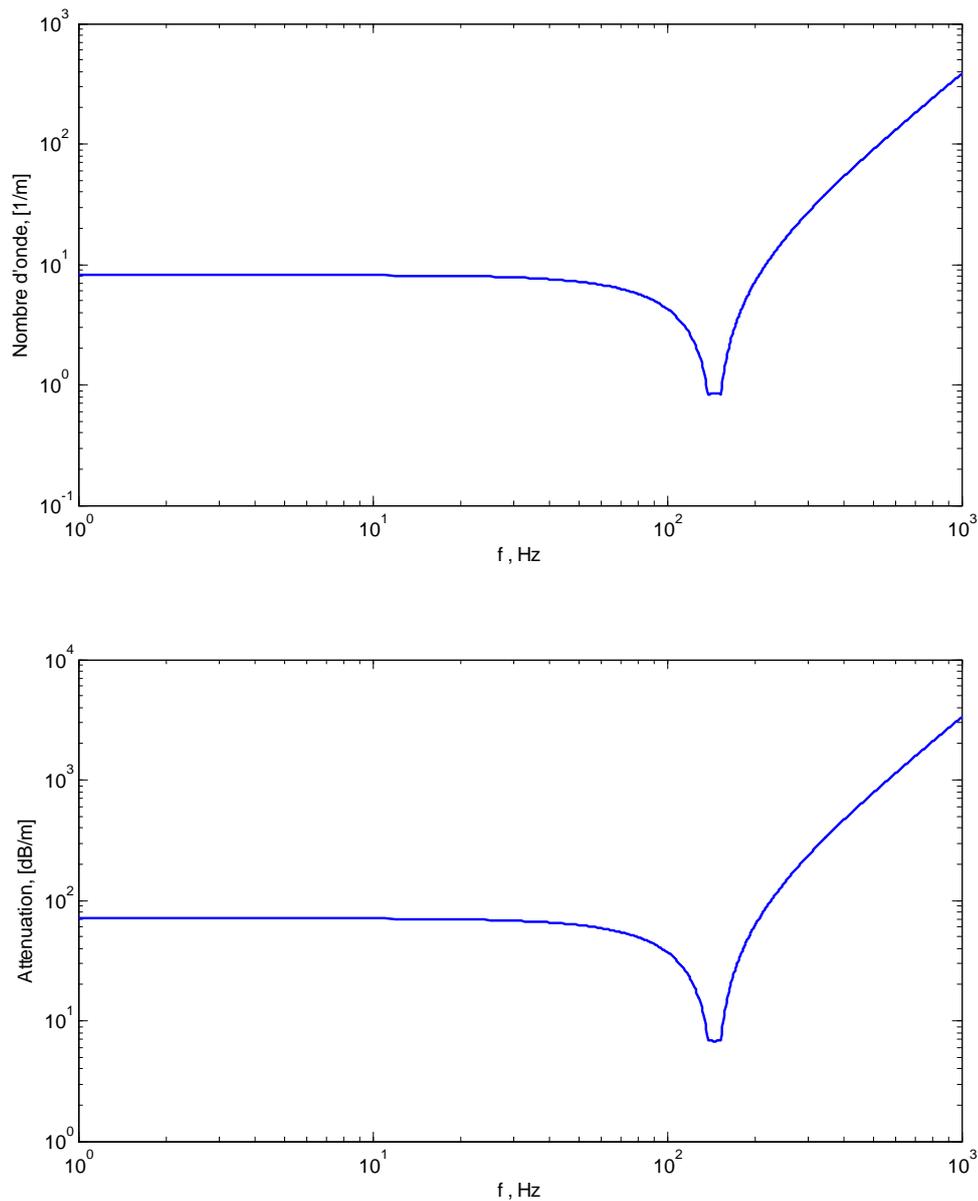


Figure 3.10 : Evolution de k_{py} (nombre d'onde) et $k_{dy} \times 20.\log e$ (Atténuation) pour un rail sur fondation élastique continue en fonction de la fréquence. (Modèle Timoshenko)

Concernant l'évolution du nombre d'onde et de l'atténuation pour le modèle de Timoshenko fonction de la fréquence, les deux paramètres évoluent d'une manière similaire.

Nous constatons une évolution de l'atténuation en fonction de l'augmentation de la rigidité du support figure 3.11

Influence de s'_p :

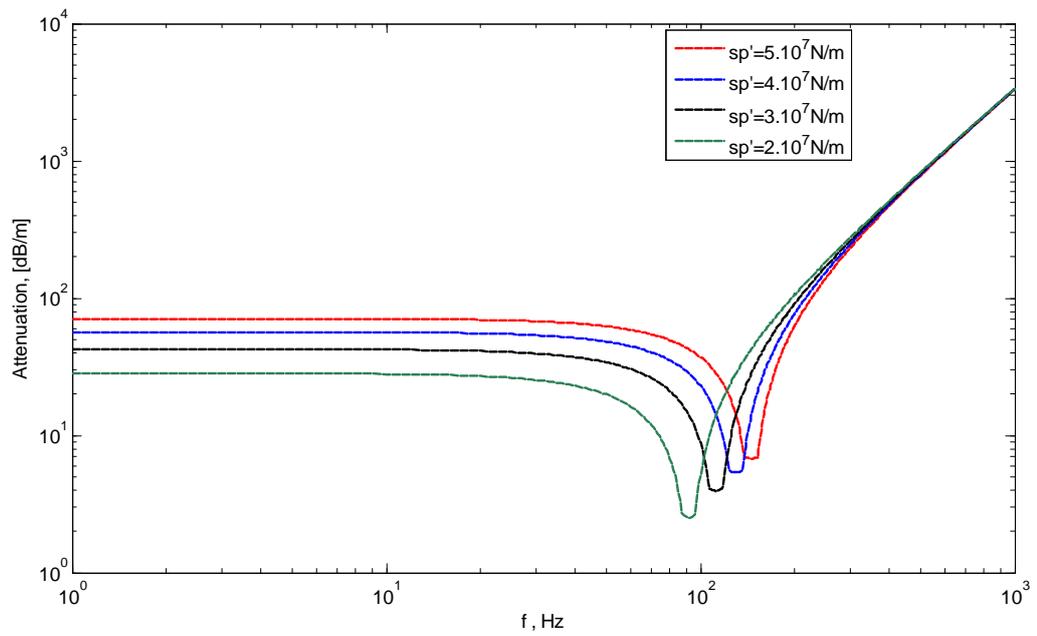


Figure 3.11. L'influence de la raideur du béton sur l'atténuation des ondes de vibrations. Modèle Timoshenko.

3.3. Modèle Euler VS Modèle Timoshenko :

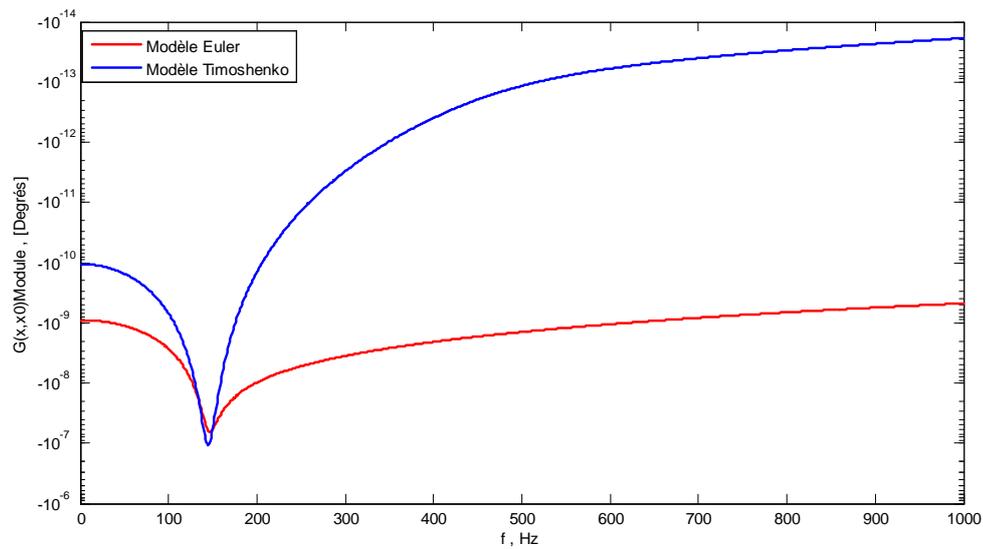


Figure 3.12 : Comparaison entre les deux modèles pour la fonction de Green en fonction de la fréquence.

----- Poutre Euler
—— Poutre Timoshenko

Nous remarquons que la comparaison des deux modèles concernant le module de la fonction de Green permet d'affirmer que le module du modèle d'Euler est évolutif avec l'augmentation de la fréquence figure (2.11)

Conclusion :

Nous avons établi durant ce chapitre les équations différentielles régissant le comportement mécanique de la structure rail pour le modèle d'Euler et le modèle de Timoshenko. L'utilisation de la transformée de Fourier nous permis de déterminer la fonction de Green associé à l'équation différentielle.

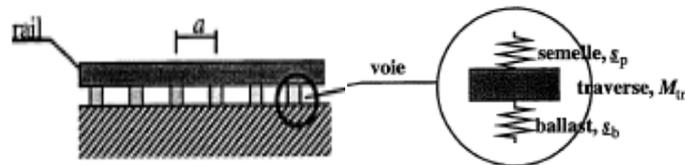
L'analyse paramétrique des modèles d'Euler et de Timoshenko sur un support en béton armé en fonction de différentes rigidités nous a permis de déterminer la fréquence f_p seuil d'analyse des basses fréquences et des hautes fréquences . Donc deux domaine d'analyse sont déterminer, il est convenable de signaler que cette fréquence dépend de s_p' , le comportement dans les deux domaines précités est différent. Le résultat de la comparaison des deux modèles en termes de module de la fonction de Green n'est pas amplifié avec l'augmentation de la fréquence.

Chapitre 04 :

Rail sur voie ballastée

Introduction :

L'analyse du comportement dynamique d'une poutre infinie appuyée sur un système caractérisé par : les traverses, les semelles sont espacées régulièrement et présentent les mêmes caractéristiques.



Nous intéressons à la détermination analytique des ondes propres de vibration « ondes de Bloch » et ce pour plusieurs systèmes mécaniques d'appuis (appuis rigides, appuis massiques...).

L'utilisation de la fonction de Green, le principe de superposition et le théorème de Bloch. Permet de décrire la réponse globale de la structure.

La fonction de Green obtenue au chapitre 02 permet de déterminer s'il existe des modes propres de la poutre reposant sur appuis périodiquement répartis ; c'est-à-dire des réponses non nulles de la structure en l'absence de chargement, de tels modes propres sont appelés ondes de Bloch.

Pour l'évaluation de la constante de Bloch γ , on introduit tous les supports discrets (traverses) espacés régulièrement au niveau de la poutre infinie (Euler et Timoshenko), les supports présentent les mêmes caractéristiques. Ainsi le système est dit périodique.

Le comportement dynamique de la poutre est analysé en vibration libre. La poutre n'est soumise qu'aux efforts transmis par les appuis. L'application du principe de superposition permet de déterminer la réponse globale du système due à la réaction de toutes les traverses.

La fonction de Green associée aux forces sollicitant la poutre exprime la réponse au point d'analyse considéré. La réaction de la traverse et la force mobile sont exprimées comme suite:

- Le rail est excité par une force ponctuelle F'_0 de la roue exerce en x_0 , le déplacement résultant en x est $F'_0 G_w(x, x_0)$.
- La nième traverse exerce au point x_n une réaction $F'_n(w)$. Le déplacement résultant en x est $F'_n(w) G_w(x, x_n)$.

Cette démarche présente l'avantage d'être générale, et de pouvoir prendre en compte des espacements irréguliers de travers [Heckl 95], des raideurs différentes aux points d'attaches, etc...

Pour étudier par exemple l'influence de la raideur des semelles sur l'atténuation des vibrations le long du rail, la procédure est lourde, il faut à chaque fréquence résoudre un système de N équations à N inconnus.

Dans les cas particuliers et le cas de la poutre rail sur voie ballastée où les impédances $z_n(w)$ sont les mêmes et où les espacements entre traverses sont fixés, il est plus efficace de considérer un rail infini et d'utiliser le théorème de Floquet. Cette démarche est suivie par [Nordborg 95] qui simule le problème par le modèle d'Euler.

Le déplacement $y'(x, w)$ du rail soumis à l'ensemble des forces est obtenu en utilisant le principe de superposition

$$y'(x, w) = \sum_{-\infty}^{+\infty} F'_n(w) G_w(x, x_n) + F'_0(w) G_w(x, x_0) \quad (4.1)$$

La réaction de la traverse en x_n est liée au mouvement du rail et à l'impédance de la voie $z_n(w)$ (raideur apparente de l'ensemble (semelle + travers + ballast)) en ce point (Hamet 1997).

$$F'_n(w) = -z_n(w)y'(x_n, w) \quad (4.2)$$

On introduit (4.2) dans (4.1) obtient pour le déplacement du rail au point x :

$$y'(x, w) = -\sum_{-\infty}^{+\infty} z_n(w)y'(x_n, w)G_w(x, x_n) + F'_0(w)G_w(x, x_0) \quad (4.3)$$

La force extérieure est nulle. Ceci permet de déterminer les ondes libres de la poutre mince sur appuis périodiques, elles sont appelées Ondes de Bloch. Ainsi l'équation résultante combinée est (au point de référence x_n), donc on pouvant d'écrire l'équation (4.3) sous :

$$y'(x, w) = -\sum_{-\infty}^{+\infty} z_n(w)y'(x_n, w)G_w(x, x_n) \quad (4.4)$$

L'application du théorème de Bloch (L. Brouillon, 1946), conduit à ce que l'amplitude sur l'appui n puisse s'écrire :

$$y'(x + nl, w) = y'(x, w)e^{-n\gamma l} \quad (4.5)$$

Où $y'(x + nl, w)$ est le déplacement de l'appui $x + nl$, n est une valeur entière.

Et γ est une fonction de la fréquence qui se peut s'écrire :

$$\gamma = \alpha + ik \quad (4.6)$$

α Correspond physiquement à une atténuation et k à la propagation de l'onde de Bloch.

La relation (4.5) décrit, pour n'importe quels supports x_n de la poutre, le champ de déplacement correspond à une onde de Bloch, fonction de la dépendance spatiale $e^{-\gamma nl}$ et de l'amplitude du déplacement y'_0 .

A ce stade, cette amplitude y'_0 est l'inconnue pour pouvoir définir complètement le champ de déplacement de l'appui.

Le champ de déplacement entre appui adjacents est une fonction du champ de déplacement de l'appui x_n . Ce déplacement correspond à une onde de Bloch. La sommation sur les modes permet de déterminer la réponse au point x .

4.1. Poutre Euler

L'utilisation du modèle d'Euler pour décrire le comportement dynamique, permet de simuler la poutre rail infinie, en tant que structure mince appuyée sur une infinité de supports « $n = -\infty, \dots, +\infty$ » discrets idéalisés par des ressorts ou par un autre système mécanique représentatif de l'appui (figure4.1). L'objectif ici est de chercher la réponse dynamique $y'(x, t)$ de la poutre sur appuis périodique sous l'influence d'une source mobile $F'(x, t)$. Il s'agit donc, de résoudre l'équation différentielle régissant le comportement de la structure.

En remplaçant l'équation (4.5) dans l'équation (4.4), on abouti à l'équation (4.7), nous avons ainsi exprimé le champ de déplacement $y'(x + nl, w)$ au niveau de l'appui $x + nl$ correspondant à une onde de Bloch en fonction de la dépendance spatiale et de l'amplitude $y'(x, w)$ de l'appui.

$$y'(x, w) = -Z_n \sum_{-\infty}^{+\infty} y'(0, w).e^{-\gamma nl} G_w(x, x_n) \quad (4.7)$$

En injectant l'expression de la fonction de Green définie dans l'équation (2.20) dans le chapitre02

$$y'(x, w) = -Z_n y'(0, w) \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{4EI k_b^3} (ie^{-ik_b|x-nl|} + e^{-k_b|x-nl|}) . e^{-\gamma nl} \right] \quad (4.8)$$

Pour déterminer γ en stipulant que l'équation est valable pour $x = 0$:

$$y'(0, w) = -\frac{Z_n y'(0, w)}{4EI k_b^3} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[(ie^{-ik_b|nl|} + e^{-k_b|nl|}) . e^{-\gamma nl} \right] \quad (4.9)$$

$$y'(0, w) + \frac{Z_n y'(0, w)}{4EI k_b^3} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[(ie^{-ik_b|nl|} + e^{-k_b|nl|}) . e^{-\gamma nl} \right] = 0 \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\gamma nl} e^{ik_b|nl|} \\ & \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\gamma nl} e^{-k_b|nl|} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Les sommes d'équation (4.11) sont des combinaisons de série géométriques.

Peuvent être évaluées sous environnement logiciel Maple, en supposant que $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}$ en trouve :

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\gamma nl} e^{-ik_b|nl|} &= \frac{1}{1 - e^{(\gamma+ik_b)l}} + \frac{1}{1 - e^{(\gamma-ik_b)l}} - 1 \\ \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\gamma nl} e^{-k_b|nl|} &= \frac{1}{1 - e^{(\gamma+ik_b)l}} + \frac{1}{1 - e^{(\gamma-ik_b)l}} - 1 \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\gamma nl} e^{-ik_b|nl|} &= -\frac{\sinh k_b l}{\cosh k_b l - \cosh \gamma l} \\ \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\gamma nl} e^{-k_b|nl|} &= \frac{\sin k_b l}{\cos k_b l - \cosh \gamma l} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Donc l'équation (4.10) devient :

$$y'(0, w) + y'(0, w) \frac{Z(w)}{4k_b^3 EI} \left[\frac{\sin k_b l}{\cos k_b l - \cosh \gamma l} - \frac{\sinh k_b l}{\cosh k_b l - \cosh \gamma l} \right] = 0 \quad (4.14)$$

On divisant par $y'(0, w)$ on aura une équation du second degré :

$$1 + \frac{Z(w)}{4k_b^3 EI} \left[\frac{\sin k_b l}{\cos k_b l - \cosh \gamma l} - \frac{\sinh k_b l}{\cosh k_b l - \cosh \gamma l} \right] = 0 \quad (4.14)$$

La forme générale de l'équation (4.14) est :

$$a_i \cosh^2(\gamma l) + b_i \cosh(\gamma l) + c_i = 0 \quad (4.15)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} a_i = 1 \\ b_i = -(\cosh k_b l + \cos k_b l) + \frac{Z(w)}{4k_b^3 EI} (-\sin k_b l + \sinh k_b l) \\ c_i = \frac{Z(w)}{4k_b^3 EI} (\sin k_b l \cosh k_b l - \sinh k_b l \cos k_b l) + \cos k_b l \cosh k_b l \end{cases}$$

La résolution de cette équation permet d'évaluer la constante de propagation d'onde de Bloch γ et implicitement le spectre du nombre d'onde k et le spectre de l'atténuation α pour l'onde verticale de flexion de la poutre.

L'équation (4.15) représente la relation de dispersion qui caractérise les ondes de Bloch, elle a été largement utilisée dans divers disciplines de la physique telles que l'acoustique (Bradley 1994, Sugimoto et Horika 1995), la mécanique quantique (Sprung et Wu 1993), la physique du solide (Bentalosa et All 1982) pour la détermination du spectre de transmission.

Le comportement d'un réseau unidimensionnel ordonné est reconnaissable, son spectre de transmission se découpe en une succession de bande de fréquence où le régime est soit propagatif (bandes passantes), soit évanescent (bandes non-passantes). Les ondes dont la fréquence appartient aux bandes dites passantes se propagent librement alors que dans les bandes non-passantes ces ondes sont atténuées exponentiellement comme des bandes évanescentes.

Le réseau ordonné agit comme un filtre en fréquence, partageant la transmission en une partie opaque et une partie transparente. L'utilisation de la théorie de Bloch permet de localiser d'une manière très précise ces différents régimes (F.Bloch 1982).

La théorie de Bloch explique l'existence de bandes passantes par un subtil équilibre entre deux ondes couplées qui se propagent en sens inverse. Dans ce régime, les effets des interférences multiples sont présents et une théorie fondée sur l'existence d'ondes couplées suffit à expliquer la présence de ces bandes.

Pour l'évaluation du vecteur d'ondes et de l'atténuation plusieurs types de support de la poutre sur appuis périodique peuvent être considérés.

Nous avons considéré ici quatre types de supports :

- Support massique
- Support rigide (avec un ressort de rigidités)
- Support mécanique simple (ressort-masse)
- Support mécanique complexe (ressort-masse-ressort)

Pour valider notre démarche nous traitons notre exemple rail type:

4.1.1. influence du type d'appui :

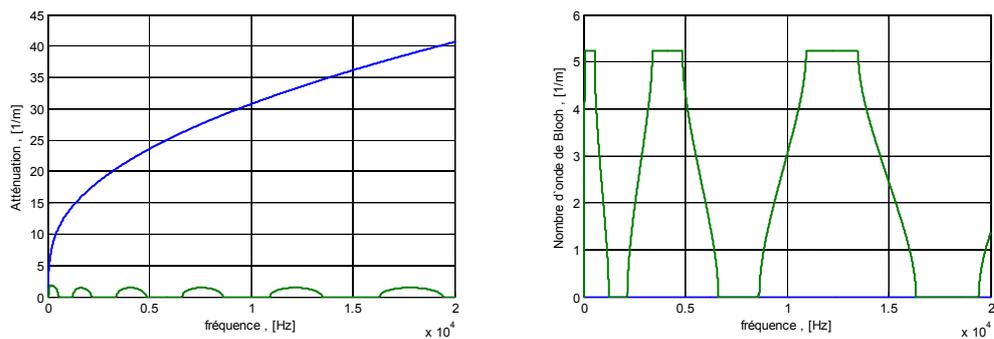


Figure 4.1 : Onde verticale de flexion pour la poutre d'Euler pour un appui massique

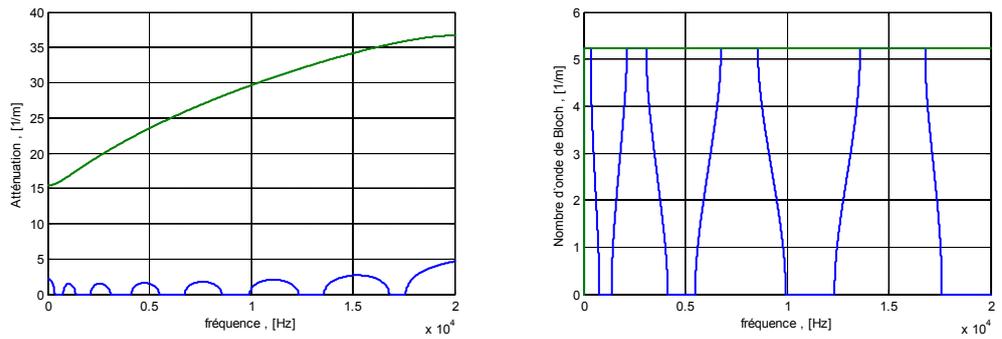


Figure 4.2 : Onde verticale de flexion pour la poutre d'Euler pour un appui rigide

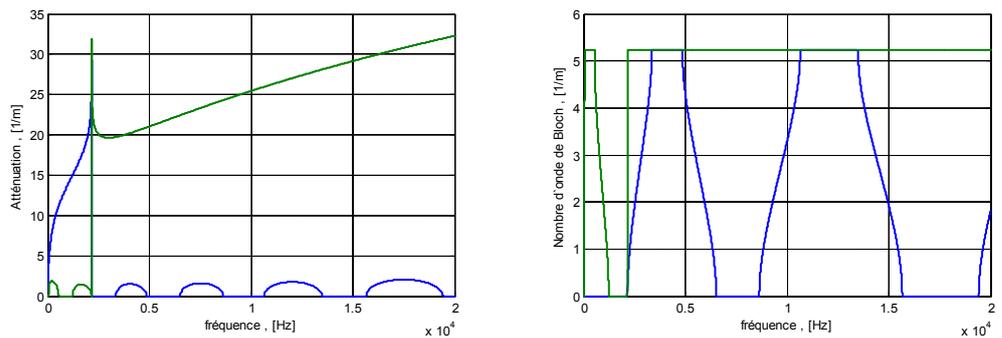


Figure 4.3 : Onde verticale de flexion pour la poutre d'Euler pour un système d'appui mécanique simple (ressort-masse)

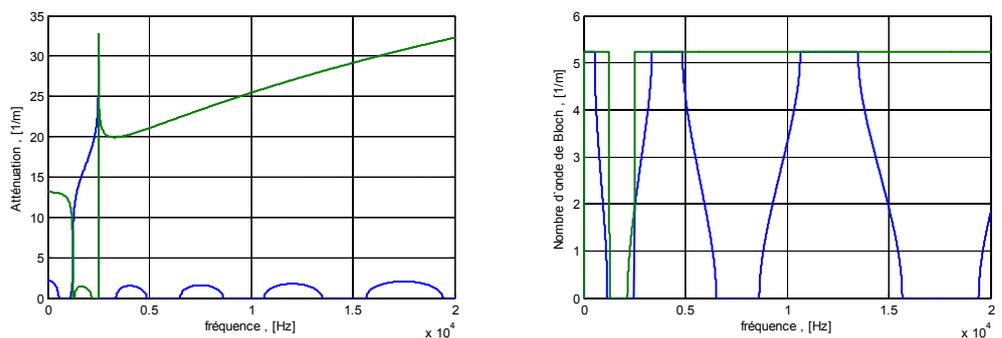
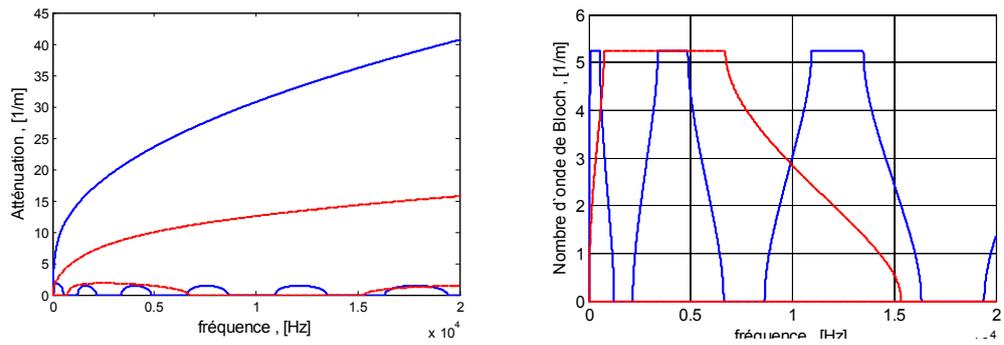


Figure 4.4 : Onde verticale de flexion pour la poutre d'Euler pour un système d'appui mécanique complexe (ressort-masse-ressort)

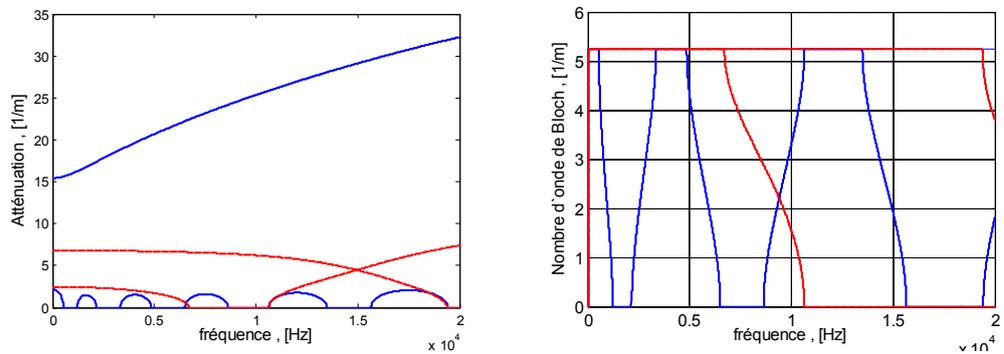
4.1.2. influence de la rigidité de la poutre



----- $I = 7,986.10^{-5} m^4$

_____ $I = 5,160.10^{-7} m^4$

Figure 4.5 : Onde verticale de flexion pour la poutre d'Euler pour un appui massique pour différents rigidités



----- $I = 7,986.10^{-5} m^4$

_____ $I = 5,160.10^{-7} m^4$

Figure 4.6 : Onde verticale de flexion pour la poutre d'Euler pour un appui rigide pour différents rigidités

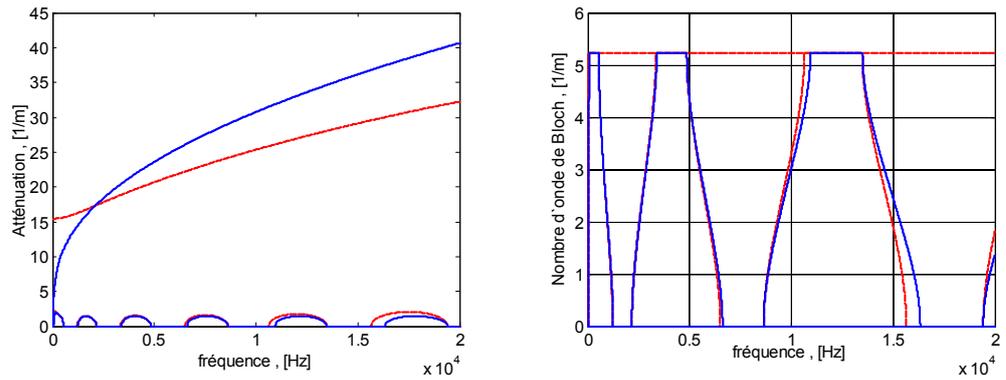
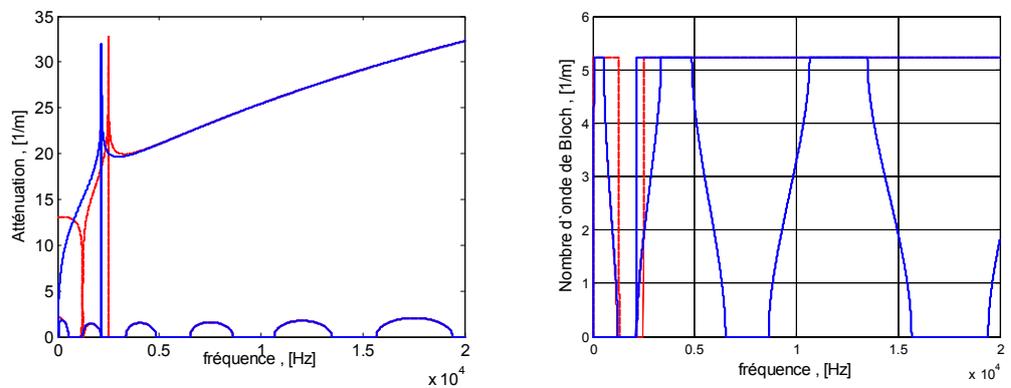


Figure 4.7 : Onde verticale de flexion pour la poutre d'Euler pour un appui rigide et un appui massif

----- Appui rigide
 — Appui mécanique simple (ressort-masse)



----- Appui mécanique complexe (ressort-masse-ressort)
 — Appui mécanique simple (ressort-masse)

Figure 4.8 : Onde verticale de flexion pour la poutre d'Euler pour un système d'appui mécanique simple (ressort-masse) et un système d'appui mécanique complexe (ressort-masse-ressort)

4.2. Poutre Timoshenko :

Nous prend les mêmes démarches que nous avons obtenues pour le modèle d'Euler, et les résultats de chapitre 02.

Nous avons trouvées l'expression de la fonction de Green dans le chapitre02 :

$$G(x, x_0) = -\frac{1}{EI} \left[F_d e^{-k_d |x-x_0|} + i F_p e^{-i k_p |x-x_0|} \right]$$

Avec :

$$F_d = \frac{1 - \frac{EI}{k} [k_c^2 - k_p^2]}{2k_p (k_d^2 + k_p^2)}$$

$$F_p = \frac{1 - \frac{EI}{k} [k_d^2 + k_c^2]}{2k_p (k_d^2 + k_p^2)}$$

En remplaçant l'équation (4.5) dans l'équation (4.4), en injectant l'expression de la fonction de Green, et on multiplie l'équation par $e^{\gamma ml}$ on aura :

$$1 + \frac{z}{EI} \left[F_p \frac{\sin(k_p l)}{\cos(k_p l) - \cos(kl)} - F_d \frac{\sinh(k_d l)}{\cosh(k_d l) - \cos(kl)} \right] = 0 \quad (4.16)$$

Donc on trouve l'équation de dispersion pour la poutre de Timoshenko :

$$\begin{aligned} \cos^2(kl) + \left[\frac{z}{EI} (F_d \sinh(k_d l) - F_p \sin(k_p l)) - (\cosh(k_d l) + \cos(k_p l)) \right] \cos(kl) \\ + \frac{z}{EI} [F_p \cos(k_d l) \sin(k_p l) - F_d \cos(k_p l) \sin(k_d l)] + \cosh(k_d l) \cos(k_p l) = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

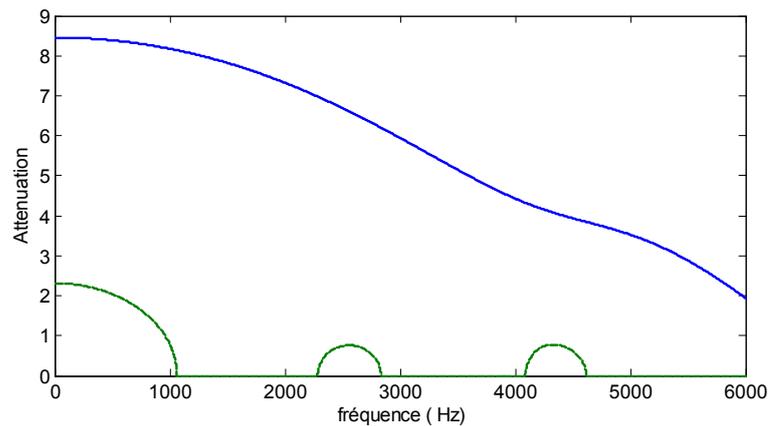
Cette équation représente la relation de dispersion qui caractérise les ondes de Bloch, elle a été largement utilisée dans divers disciplines de la physique.

La résolution de cette équation permet d'évaluer la constante de propagation d'onde de Bloch γ et implicitement le spectre du nombre d'onde k et le spectre de l'atténuation α pour l'onde verticale de flexion de la poutre.

Le comportement d'un réseau unidimensionnel ordonné est reconnaissable, son spectre de transmission se découpe en une succession de bande de fréquence où le régime est soit propagatif (bandes passantes), soit évanescent (bandes non passantes). Les ondes dont la fréquence appartient aux bandes dites passantes se propagent librement alors que dans les bandes non passantes ces ondes sont atténuées exponentiellement comme des ondes évanescentes.

Pour l'évaluation du vecteur d'onde et de l'atténuation plusieurs types de support de la poutre sur appuis périodique peuvent être considérés, nous avons considéré deux types de supports :

- Support massif
- Support avec un ressort de rigidité



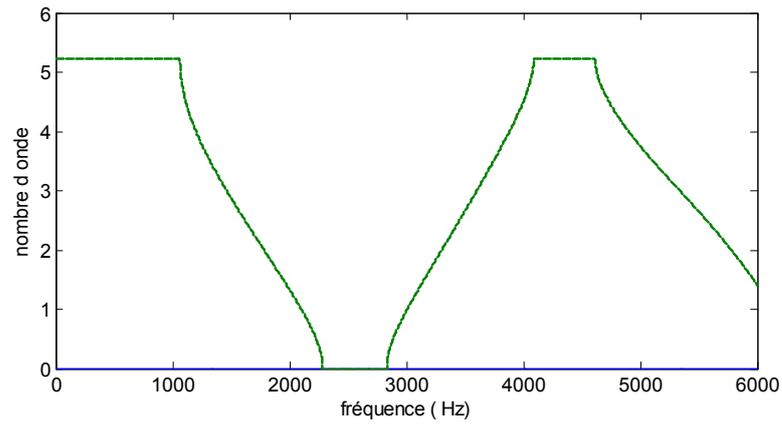


Figure 4.9 : Onde verticale de flexion pour la poutre de Timoshenko pour un appui élastique

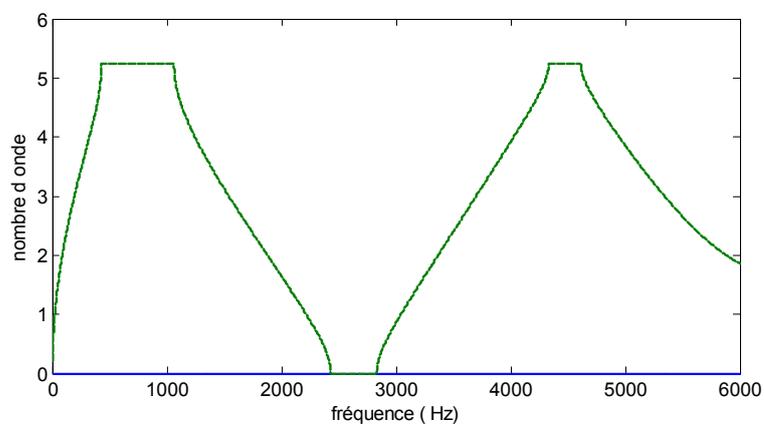
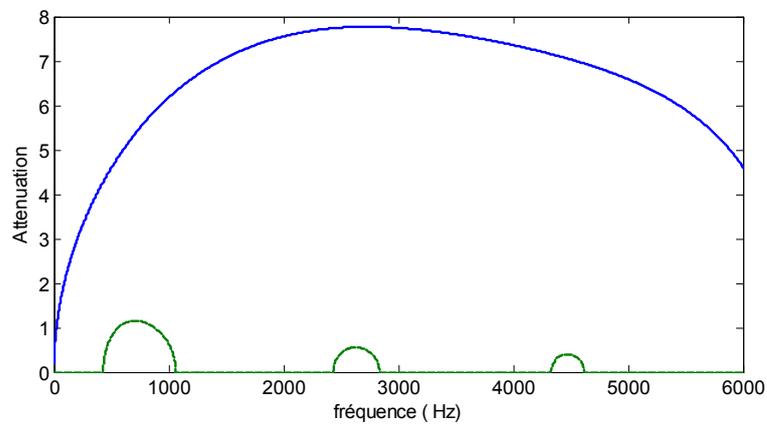


Figure 4.10 : Onde verticale de flexion pour la poutre de Timoshenko pour un appui massique

Il est noté que les diagrammes résultants des ondes verticales de la flexion pour la poutre de Timoshenko ne se propagent pas de la manière prévue, donc, nous nous proposons de formuler une autre loi de comportement dans la continuité future de ce travail.

Le spectre d'atténuation montre des bandes de l'atténuation nulle (bandes passantes) alternant avec des bandes de l'atténuation positive (bandes interdites).

L'autre solution montre l'alternance des bandes. Ce phénomène de l'alternance est également observé par Heckl (**Maria A. Heckl, 2001**) pour les ondes de torsion et de compression.

La largeur de la bande passante augmente avec l'augmentation de la fréquence, facilitant la propagation des ondes non atténuées.

Les spectres du nombre d'atténuation et des ondes de Bloch sont exposés dans (figure 4.9). Les bandes passantes sont constantes avec l'évolution de fréquence.

Conclusion :

Un modèle plus réaliste de la structure rail infinie sur appuis périodiques est proposé. L'utilisation de la fonction de Green le principe de superposition et le théorème de Bloch nous a permis de décrire la réponse globale de la structure en l'absence de chargement. Ces modes propres sont appelés ondes de Bloch. La résolution de l'équation de dispersion nous permet de déterminer les différentes bandes passantes et non passantes pour différents types d'appuis. Une analyse pour les deux modèles (Euler et Timoshenko) a été réalisée.

CHAPITRE 05

COMPORTEMENT D'UNE STRUCTURE RAIL SOUS L'INFLUENCE D'UNE SOURCE MOBILE

Introduction :

Pour la résolution de la structure rail sous l'influence d'une source mobile idéalisant un convoi de train, nous nous proposons une méthode modale, la détermination de la fonction de Bloch permet en utilisant le théorème de SANCHEZ de décomposer et projeter la force mobile sur les modes. L'utilisation de la transformée de Bloch permet de recomposer la réponse globale du système entre deux appuis élastiques, en utilisant la sommation sur les modes. La résolution analytique de la sommation de deux séries géométrique afin de tenir compte de l'influence de tous les appuis de $-\infty$ à $+\infty$ a été réalisée sous environnement Maple. Ceci a permis d'aboutir à la fonction de Bloch. La périodicité de la fonction de Bloch a été validée afin de nous permettre d'utiliser le théorème de Palencia Sanchez. Ce théorème permet dans notre développement de décomposer par projection la source mobile sur les modes. Nous avons aussi analysé la normalisation des modes propres de vibration en utilisant la théorie d'Allaire. L'évaluation de la transformée de Bloch permet la décomposition du système. La résolution de cette équation sous environnement Maple permet de déterminer la réponse dynamique de la structure périodique sous l'effet d'une source mobile des codes de calcul sous environnement Matlab ont été réalisés dans ce sens. Toute l'analyse est menée en variables adimensionnelles.

Nous introduisons maintenant une source mobile qui idéalise convoi du train par une fore constante doté d'une vitesse V sur la structure Rail sur appuis périodique figure (5.1)

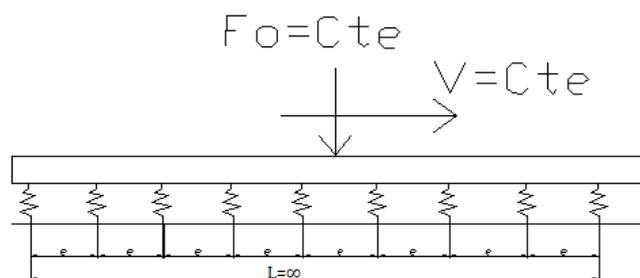


Figure 5.1. Rail sur appui périodique sous l'influence d'une source mobile

5.1 Calcul du déplacement $y'_n(x, k)$ pour un mode donné : « fonction de Bloch »

La vibration de la structure poutre sur appuis périodiques est liée au mode de vibration considéré. La réponse globale du système est la sommation de toutes les réponses sur tous les modes. ∞

Le déplacement $y'(x)$ pour le mode d'ordre n est obtenu par la relation suivante, en fonction du nombre d'onde et du déplacement d'appuis (équation. 4.4):

$$y'(x, w) = -Z(w) \sum_m G_w(x, x_m) y'(x_m, w) \quad (5.1)$$

La fonction $y'(x, k)$ est définie pour une valeur quelconque de la pulsation w .

Comme

montré précédemment, seules les ondes correspondantes à des valeurs de w situées dans les bandes passantes ne sont pas amorties. Dans la suite, on supposera que seules, celles-ci contribuent à la solution du problème de dynamique de la poutre rail.

Si w appartient à la bande passante d'ordre n , on peut donc écrire $w = w_n(k)$ où k est compris dans l'intervalle $[0, \pi/l]$. On note donc :

$$y'(x, k) = y'(x, w_n) = y'(x, k(w_n)) = y'_n(x, k) \quad (5.2)$$

Ainsi donc, les pulsations ou fréquences correspondantes à une valeur du vecteur d'onde donnée doivent être déterminées. Une fois, l'évolution du nombre d'onde $k(f)$ en fonction de la fréquence déterminée, nous sauvegardons les valeurs de ce vecteur afin de relever les fréquences correspondantes à des vecteurs d'ondes choisis.

Les étapes essentielles du processus itératif de localisation des fréquences de vibration sont décrites dans la thèse du Lassoued R [2007].

Ce processus nous permet de localiser et d'identifier les différentes pulsations appartenant soit à une même bande ou soit à une autre bande d'ordre n , correspondant à une valeur du vecteur d'onde.

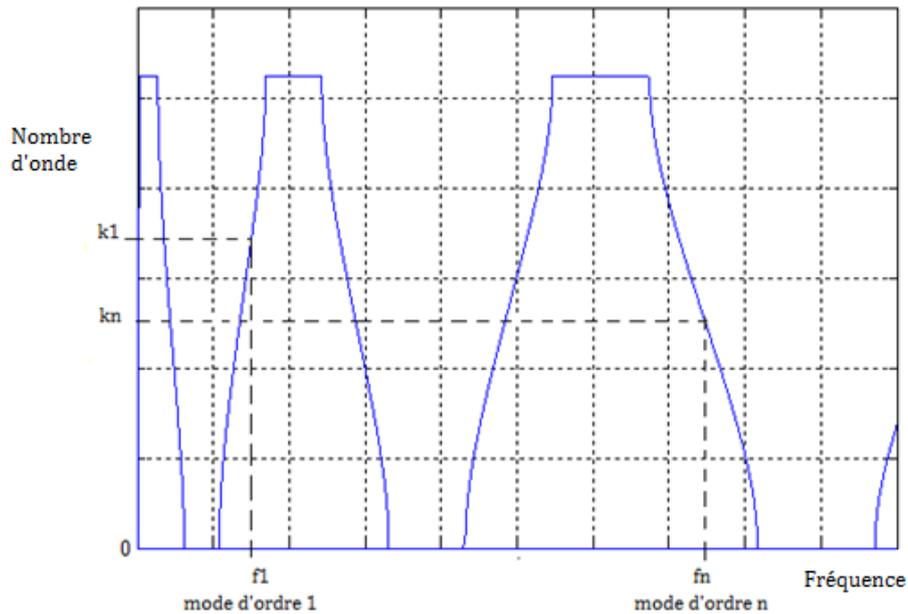


Figure 5.2 : Localisation du vecteur d'onde fonction de la fréquence

Les déplacements d'appuis $y'(x_m)$ sont remplacés sur chaque bande par

$$y'_n(x_m) = y'_{0(n)}(k)e^{ikx_m} \quad (5.3)$$

Où $y'_{0(n)}(k)$ représente l'amplitude en $z = 0$ du mode d'ordre n au nombre d'onde k . On aura :

$$y'_n(x, k) = -Z_n \sum_m G_w(x, x_m) y'_{0(n)}(k) e^{ikx_m} \quad (5.4)$$

On note que $y'_n(x, k)$ est le déplacement correspondant au mode d'ordre n et au

nombre d'onde k .

Le calcul de $y'_n(x, k)$ revient à effectuer deux sommes de séries géométriques définies par :

$$y'_n(x, k) = -Z_n \left[\sum_{m=1}^{\infty} G_w(x, x_0) y'(x_m) + \sum_{-\infty}^0 G_w(x, x_0) y'(x_m) \right] \quad (5.5)$$

$$y'_n(x, k) = -Z_n \cdot y'_{0(n)}(k) \left[\sum_{m=1}^{\infty} G_w(x, x_0) e^{-\gamma x_m} + \sum_{-\infty}^0 G_w(x, x_0) e^{-\gamma x_m} \right] \quad (5.6)$$

Avec
$$S_1 = -Z_n \cdot y'_{0(n)}(k) \sum_{m=1}^{\infty} G_w(x, x_0) e^{-\gamma x_m} \quad (5.7)$$

$$S_2 = Z_n \cdot y'_{0(n)}(k) \sum_{-\infty}^0 G_w(x, x_0) e^{-\gamma x_m} \quad (5.8)$$

Le terme générique S_1 est de la forme :

$$\alpha_1 e^{ik_b(x-x_m)} e^{-\gamma x_m} + \beta_1 e^{-k_b(x-x_m)} e^{-\gamma x_m}$$

Le terme générique S_2 est de la forme :

$$\alpha_2 e^{ik_b(x-x_m)} e^{-\gamma x_m} + \beta_2 e^{-k_b(x-x_m)} e^{-\gamma x_m}$$

Avec $x_m = ml$. Les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ représentent la valeur suivante

$$\frac{Z_n \cdot y'_{0(n)}(k)}{4k_b^3 EI}$$

Il s'agit bien de quatre séries trigonométriques de raison :

$$\begin{array}{ll} e^{(-ik_b - \gamma)l} & e^{(k_b - \gamma)l} \\ e^{(+ik_b - \gamma)l} & e^{(-k_b - \gamma)l} \end{array}$$

Cette sommation peut s'effectuer analytiquement et permet d'exprimer le déplacement correspondant au mode lié à γ .

En remplaçant la valeur de $G_w(x, x_0)$ on aura les termes:

$$S_1 = \frac{-i \left[e^{ikl} \sin(k_b x) - \sin(k_b(x-l)) \right]}{\cos(k_b l) - \cos(kl)} \quad (5.9)$$

$$S_2 = \frac{e^{ikl} \sin(k_b x) + \sinh(k_b(l-x))}{\cosh(k_b l) - \cos(kl)} \quad (5.10)$$

En posant

$$N_1(n, k, x) / D_1(n, k) = \frac{e^{ikl} \sin(k_b x) - \sin(k_b(x-l))}{\cos(k_b l) - \cos(kl)} \quad (5.11)$$

$$N_2(n, k, x) / D_2(n, k) = -\frac{e^{ikl} \sinh(k_b x) + \sinh(k_b(x-l))}{\cosh(k_b l) - \cos(kl)} \quad (5.12)$$

$$C_1 = \frac{Z_n \cdot y'_{0(n)}(k)}{4k_b^3 EI} \quad (5.13)$$

La valeur du déplacement $y'(x, k)$ pour un mode donné est la fonction de Bloch recherchée:

$$y'(x, k) = C_1 \left[\frac{N_1}{D_1} + \frac{N_2}{D_2} \right] \quad (5.14)$$

$$y'_n(x, k) = \frac{Z_n \cdot y'_{0(n)}(k)}{4k_b^3 EI} \left[\frac{e^{ikl} \sin(k_b x) - \sin(k_b(x-l))}{\cos(k_b l) - \cos(kl)} - \frac{e^{ikl} \sinh(k_b x) + \sinh(k_b(x-l))}{\cosh(k_b l) - \cos(kl)} \right] \quad (5.15)$$

Cette fonction est relative au mode d'ordre n et au nombre d'onde k .

Avec le nombre d'onde de flexion k_b est :

$$k_b = \sqrt[4]{\frac{m\omega_n^2(k)}{EI}}$$

La fonction de Bloch $y'_n(x, k)$ pour un mode donné et l'utilisation du théorème de **P. Sanchez Palencia 1989**, permet de décomposer la source mobile sur les différents modes et d'évaluer les composantes de Bloch du déplacement à partir des composantes de Bloch de la force.

Selon Sanchez Palencia (**Sanchez Palencia 1989**), $y'_{1(n)}$ est la fonction associée à $y'_n(x, k)$, elle est définie par l'équation (5.14) et doit être périodique.

$$y'_n(x, k) = y'_{1(n)} e^{ikx}$$

D'où
$$y'_{1(n)} = e^{-ikx} y'_n(x, k) \quad (5.16)$$

5.2. Validation de la périodicité de la fonction de Bloch

En considérant un mode d'ordre n

$$y'_n(x, k) = C_1 \left[\frac{N_1}{D_1} + \frac{N_2}{D_2} \right] \quad (5.17)$$

Avec :

$$N_1(n, k, x) / D_1(n, k) = \frac{e^{ikl} \sin(k_b x) - \sin(k_b(x-l))}{\cos(k_b l) - \cos(kl)}$$

$$N_2(n, k, x) / D_2(n, k) = -\frac{e^{ikl} \sinh(k_b x) + \sinh(k_b(x-l))}{\cosh(k_b l) - \cos(kl)}$$

L'utilisation de l'équation (5.11) et (5.12) permet l'évaluation cette fonction

Pour $x = 0$:

$$\frac{N_1(n, 0, k)}{D_1(n, k)} = \frac{e^{ikl} \sin(0) - \sin(k_b(-l))}{\cos(k_b l) - \cos(kl)} = \frac{\sin(k_b l)}{\cos(k_b l) - \cos(kl)}$$

$$N_2(n, 0, k) / D_2(n, k) = -\frac{e^{ikl} \sinh(0) + \sinh(k_b(-l))}{\cosh(k_b l) - \cos(kl)} = \frac{\sinh(k_b l)}{\cosh(k_b l) - \cos(kl)}$$

La sommation des deux précédentes expressions donnent :

$$\eta_n(0, k) = \frac{N_1(n, 0, k)}{D_1(n, k)} + \frac{N_2(n, 0, k)}{D_2(n, k)} = \frac{\sinh(k_b l)}{\cosh(k_b l) - \cos(kl)} \quad (5.18)$$

Pour $x = l$:

$$\frac{N_1(n, l, k)}{D_1(n, k)} = \frac{e^{ikl} \sin(k_b l) - \sin(k_b(l-l))}{\cos(k_b l) - \cos(kl)} = \frac{e^{ikl} \sin(k_b l)}{\cos(k_b l) - \cos(kl)}$$

$$\frac{N_2(n, l, k)}{D_2(n, k)} = -\frac{e^{ikl} \sinh(l) + \sinh(k_b(l-l))}{\cosh(k_b l) - \cos(kl)} = -\frac{e^{ikl} \sinh(k_b l)}{\cosh(k_b l) - \cos(kl)}$$

De manière similaire, en effectuant la somme des deux expressions précédentes, on obtient :

$$y'_n(l, k) = \frac{N_1(n, l, k)}{D_1(n, k)} + \frac{N_2(n, l, k)}{D_2(n, k)} = \frac{e^{ikl} \sinh(k_b l)}{\cosh(k_b l) - \cos(kl)} \quad (5.19)$$

Donc on aura :

$$y'_n(l, k) = e^{ikl} y'_{1(n)}(l, k) \quad y'_n(l) = y'_{1(n)}(l) e^{ikl} \quad (5.20)$$

Donc y'_1 est périodique.

En tenant compte du fait que la fonction de Bloch doit être normalisée (**Palencia. Sanchez, 1989**) :

$$y'_n(x, k) = \left[\frac{e^{ikl} \sin(k_b x) - \sin(k_b(x-l))}{\cos(k_b l) - \cos(kl)} - \frac{e^{ikl} \sinh(k_b x) + \sinh(k_b(x-l))}{\cosh(k_b l) - \cos(kl)} \right] / C \quad (5.21)$$

$$\text{Avec} \quad C^2 = \int_0^l |y'_n(x, k)|^2 dx = \int_0^l \bar{y}'_n(x, k) y'_n(x, k) dx \quad (5.22)$$

La constante C peut être évalué en utilisant le conjugué de la fonction de Bloch.

La valeur de y'_0 et donc la valeur de C doit être choisie pour construire les ondes de Bloch dans une base orthonormal $L^2(Y)$ ou Y est la cellule périodique obtenue après transformation de la variable spatiale x en une variable non dimensionnel

$$X^* = x \frac{2\pi}{l}$$

Par ce processus, la période $[0, l]$ est transformée en $[0, 2\pi]$.

Ainsi la constante C est choisie la norme de y' dans L^2 sur $[0, 2\pi]$, elle est égale à 1.

Ce qui nous permet d'écrire :

$$C^{-1} = \left[\frac{2\pi}{l} \int_0^l \left[\frac{N_1}{D_1} + \frac{N_2}{D_2} \right] dx \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.23)$$

En utilisant l'équation (5.11) qui définit l'expression de $N_1(n, l, k) / D_1(n, k)$ et l'équation (5.12) qui définit la deuxième expression $N_2(n, l, k) / D_2(n, k)$, on peut exprimer la fonction de Bloch sous la forme suivante :

$$y'_n(x, k) = \left[\frac{N_1(n, x, k)}{D_1(n, k)} + \frac{N_2(n, x, k)}{D_2(n, k)} \right] / C \quad (5.24)$$

5.3 La réponse d'une poutre sur supports infinie sous une force harmonique :

Nous considère le rail comme poutre mince infinie. Le déplacement vertical $y(x, t)$ de la poutre sous l'action d'une force vertical $F(x, t)$ est la solution de l'équation dynamique pour la poutre :

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - F(x, t) = 0 \quad (5.25)$$

m : Masse linéique du rail ;

E : module de Young.

L'utilisation des résultats ci-dessus permettent la résolution de l'équation différentielle (5.25) qui régit le comportement du la poutre mince sous l'influence d'une force mobile doté d'une vitesse constante.

En effectuant la transformée de Fourier par rapport au temps on obtient :

$$EI \frac{d^4 y'(x, w)}{dx^4} - mw^2 y'(x, w) - F'(x, w) = 0 \quad (5.26)$$

Il est maintenant plus convenable de définir le transforme de Bloch, d'utiliser un nombre d'onde non-dimensionnel K^* défini par :

$$K^* = \frac{kl}{2\pi} \quad (5.27)$$

Le variable non-dimensionnel $X^* = x \frac{2\pi}{l}$, Par ce processus, la période $[0, l]$ est transformé au $[0, 2\pi]$.

Le transforme de Bloch pour la fonction $F(x)$ est définie par :

$$\hat{F}_n(K^*) = \int_0^{2\pi} F(X^*) \bar{y}_n(X^*, K^*) dX^* \quad (5.28)$$

Ou $\bar{y}_n(X^*, K^*)$ est le conjugué complexe de l'onde de Bloch contenue dans la nième bande obtenue par l'équation (5.4).

Le théorème de décomposition de Bloch dont les conditions de validité sont référencie dans les travaux de **Palencia. Sanchez [1989]** :

$$F(X^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \hat{F}_n(K^*) y'_n(X^*, K^*) dK^* \quad (5.29)$$

Le transforme de Bloch pour l'équation (5.25), on considère que $y'_n(x, k)$ est la solution de l'équation homogène pour une équation harmonique à la fréquence radiale $w_n(k)$, mène à :

$$mw_n^2 \hat{y}_n(K^*, t) + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{y}_n(K^*, t) = \hat{F}_n(K^*, t) \quad (5.30)$$

Cette équation est identique à l'équation permettant de calculer les composantes temporelles de chaque mode en calcul modale des structures. C'est une équation différentielle deuxième ordre avec second membre représentée par la composante verticale de la force extérieure.

Nous utilisons ce résultat pour obtenir la réaction de la poutre à une charge ayant une intensité constante F_0 qui se déplace à la vitesse V . Il signifie que F est exprimée par :

$$F(x, t) = \delta(x - Vt).F_0 \quad (5.31)$$

Où δ est la distribution de Dirac.

Le transforme de Bloch de $F(t)$ est :

$$\hat{F}_n(K^*, t) = \bar{\eta}_n(X^* = Vt \frac{2\pi}{l}, K^*) F_0 \frac{2\pi}{l} \quad (5.32)$$

Les composants de Bloch du déplacement induit par la charge mobile sont donc des solutions de l'équation suivante:

$$m\omega_n^2 \hat{y}_n(K^*, t) + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{y}_n(K^*, t) = \bar{\eta}_n(X^* = Vt \frac{2\pi}{l}, K^*) F_0 \frac{2\pi}{l} \quad (5.33)$$

La solution de l'équation différentielle évaluer sous Maple est :

$$\hat{y}_n(K^*, t) = \frac{2\pi F_0}{l} \left[\frac{e^{-2i\pi K^*} \sin(k_b Vt) - \sin(k_b (Vt - l))}{\gamma_1 [\cos(k_b l) - \cos(2\pi K^*)]} - \frac{e^{-2i\pi K^*} \sinh(k_b Vt) - \sinh(k_b (Vt - l))}{\gamma_2 [\cosh(k_b l) - \cos(2\pi K^*)]} \right] \quad (5.34)$$

Avec les valeurs de γ_1 et γ_2 sont :

$$\gamma_1 = m(\omega_n^2 - k_b^2 V^2) \quad (5.35)$$

$$\gamma_2 = m(\omega_n^2 + k_b^2 V^2) \quad (5.36)$$

Le déplacement induit par la force mobile est finalement obtenu par la composition de tous les composants de Bloch, menant:

$$y(K^*, t) = \sum_n \int_{K=0}^1 \hat{y}_n(K^*, t) \eta_n(X^*, K^*) dK^* \quad (5.37)$$

La transformée de Bloch de l'équation (5.25) considérant la fonction de Bloch

$$y(x, t) = \sum_n \int_{K=0}^{\pi/l} V_n(k, x, t) dk \quad (5.38)$$

La fonction $V_n(k, x, t) = \frac{1}{\pi} \hat{y}_n(k, t) \eta_n(x, k)$ est ajoutée par :

$$V_n(k, x, t) = 2F_0 C^2 \left[\frac{\bar{N}_1(Vt, k)}{\gamma_1 D_1} + \frac{\bar{N}_2(Vt, k)}{\gamma_2 D_2} \right] \left[\frac{N_1(x, k)}{D_1} + \frac{N_2(x, k)}{D_2} \right] \quad (5.39)$$

Cette solution peut être transformée par l'utilisation des nouvelles variables T, X, B, K définies par $x = Xl, t = Tl/V, k = K/l, k_b = B/l$.

On utilise ces variables, y devient :

$$y(X, T) = \frac{F_0}{\pi \beta l} \sum_n \int_{K=0}^{\pi} \frac{P}{\alpha_1 \alpha_2 Q} dK \quad (5.40)$$

Où

$$\alpha_1 = B^4 - B^2 \phi \quad (5.41)$$

$$\alpha_2 = B^4 + B^2 \phi \quad (5.42)$$

$$\phi = \frac{m V^2 l^2}{EI} \quad (5.43)$$

$$\beta = \frac{EI}{l^4} \quad (5.44)$$

Avec

$$P = \alpha_2 D_2^2 P_{11} + \alpha_1 D_1^2 P_{22} + D_1 D_2 (\alpha_1 P_{21} + \alpha_2 P_{12}) \quad (5.45)$$

Et le dénominateur :

$$Q = \int_0^1 (D_2^2 |N_1|^2 + D_1^2 |N_2|^2 + D_1 D_2 (\bar{N}_1 N_2 + \bar{N}_2 N_1)) dZ \quad (5.46)$$

Les différents termes qui apparaissent dans Q sont :

$$D_1 = \cos(B) - \cos(K) \quad (5.47)$$

$$D_2 = \cosh(B) - \cos(K) \quad (5.48)$$

$$\alpha_1 = B^4 \beta + \frac{mB^2 V^2}{l^2} \quad (5.49)$$

$$\alpha_2 = B^4 \beta - \frac{mB^2 V^2}{l^2} \quad (5.50)$$

L'évaluation des intégrales donne :

$$\int_0^1 |N_1|^2 dZ = \frac{1}{B} [\cos(K)(\sin(B) - B \cos(B)) + B - \sin(B) \cos(B)] \quad (5.51)$$

$$\int_0^1 |N_2|^2 dZ = \frac{1}{B} [\cos(K)(B \cos(B) - \sinh(B)) + \sinh(B) \cosh(B) - B] \quad (5.52)$$

$$\int_0^1 (\bar{N}_1 N_2 + \bar{N}_2 N_1) dZ = \frac{2}{B} [\cos(K)(\sin(B) - \sinh(B)) + \cos(B) \sinh(B) - \sin(B) \cosh(B)] \quad (5.53)$$

Tandis que les différents termes qui apparaissent dans P sont donnés par

$$P_{11} = -\cos(K) [\sin(BT) \sin(B(Z-1)) + \sin(BZ) \sin(B(T-1))] + \sin(B(T-1)) \sin(B(Z-1)) + \sin(BT) \sin(BZ) \quad (5.54)$$

$$P_{22} = -\cos(K) [\sinh(BT) \sinh(B(Z-1)) + \sinh(BZ) \sinh(B(T-1))] + \sinh(B(T-1)) \sinh(B(Z-1)) + \sinh(BT) \sinh(BZ) \quad (5.55)$$

$$P_{21} = \cos(K) [\sinh(BT) \sin(B(Z-1)) + \sin(BZ) \sinh(B(T-1))] - \sinh(B(T-1)) \sin(B(Z-1)) - \sinh(BT) \sin(BZ) \quad (5.56)$$

$$P_{12} = \cos(K) [\sin(BT) \sinh(B(Z-1)) + \sinh(BZ) \sin(B(T-1))] - \sin(B(T-1)) \sinh(B(Z-1)) - \sin(BT) \sinh(BZ) \quad (5.57)$$

La relation entre le nombre d'onde k_b et le vecteur d'onde s'exprimée en utilisant les quantités adimensionnels

$$1 + \frac{\delta}{B^3} \left[\frac{\sin(B)}{\cos(B) - \cos(K)} - \frac{\sinh(B)}{\cosh(B) - \cos(K)} \right] = 0 \quad (5.58)$$

Où le paramètre non-dimensionnel s'écrit :

$$\delta = \frac{l^3 Z}{4EI} \quad (5.59)$$

Ces développements analytiques ont été réalisés et validés sous Maple, et la réponse dynamique a été réalisée sous Matlab.

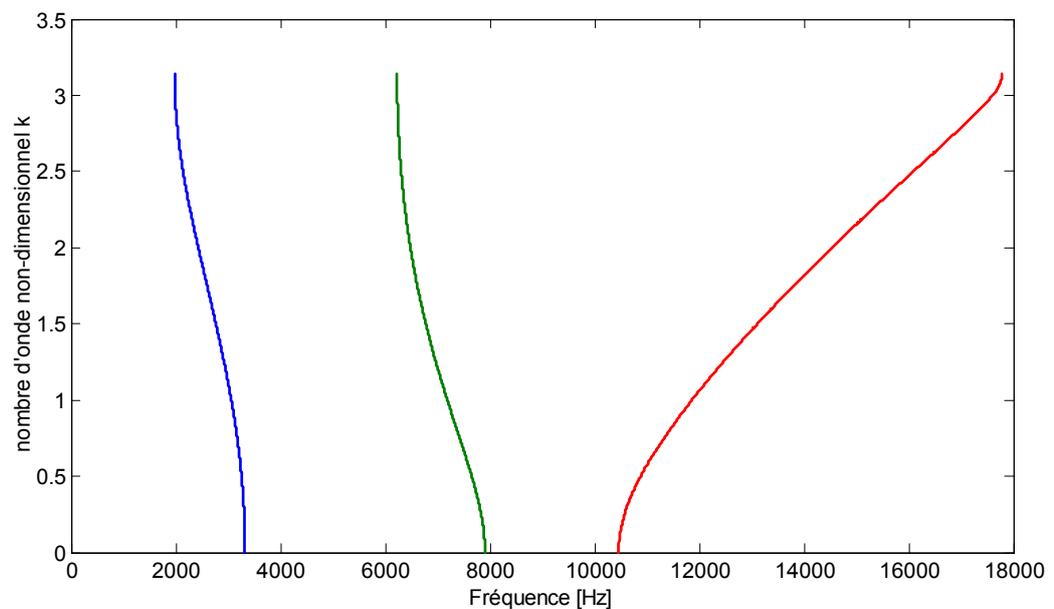


Figure 5.3 : Courbe de dispersion pour les trois premières bandes: cas d'un appui plus rigide $S_y=3.10^7$

Figure 5.4 : Déplacement en fonction du temps non-dimensionnelle pour le cas plus rigide (à grande vitesse et à vitesse réduite) $S_y=3.10^7$.

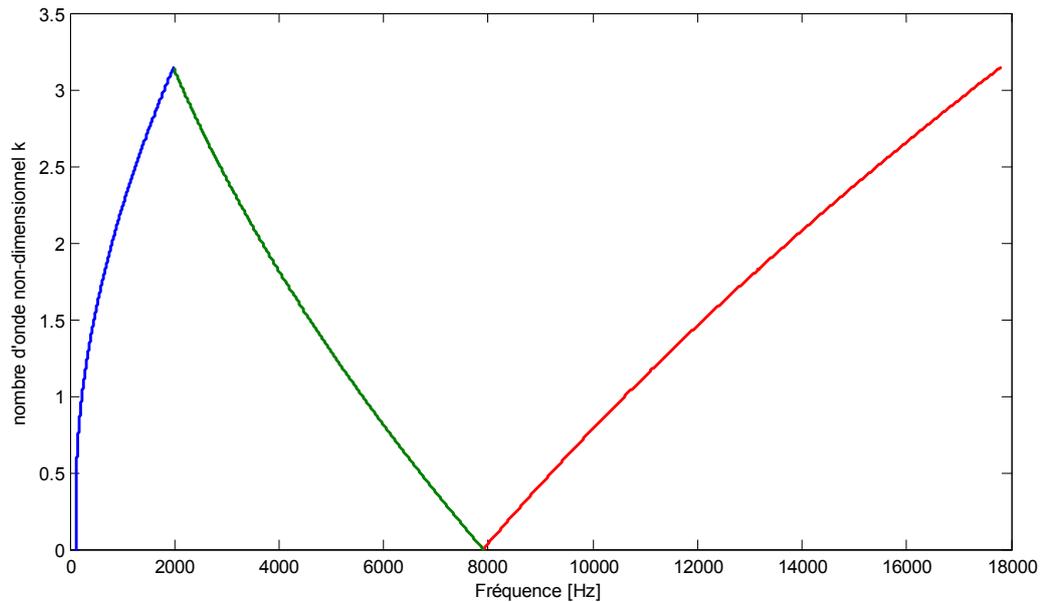


Figure 5.5 : Courbe de dispersion pour les trois premières bandes: cas d'un appui moins rigide $S_y=2.10^7$.

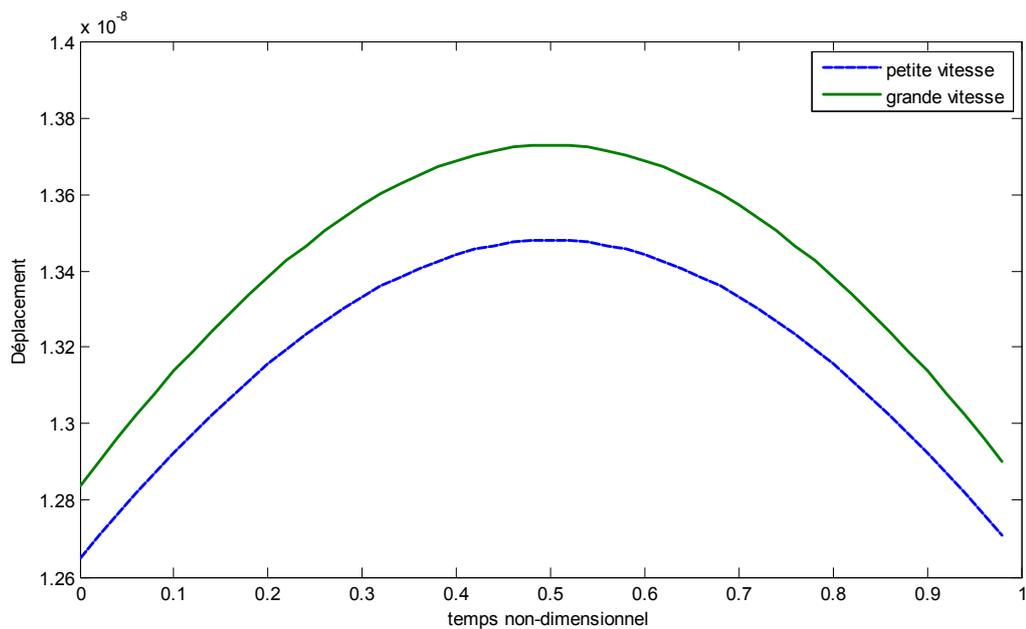
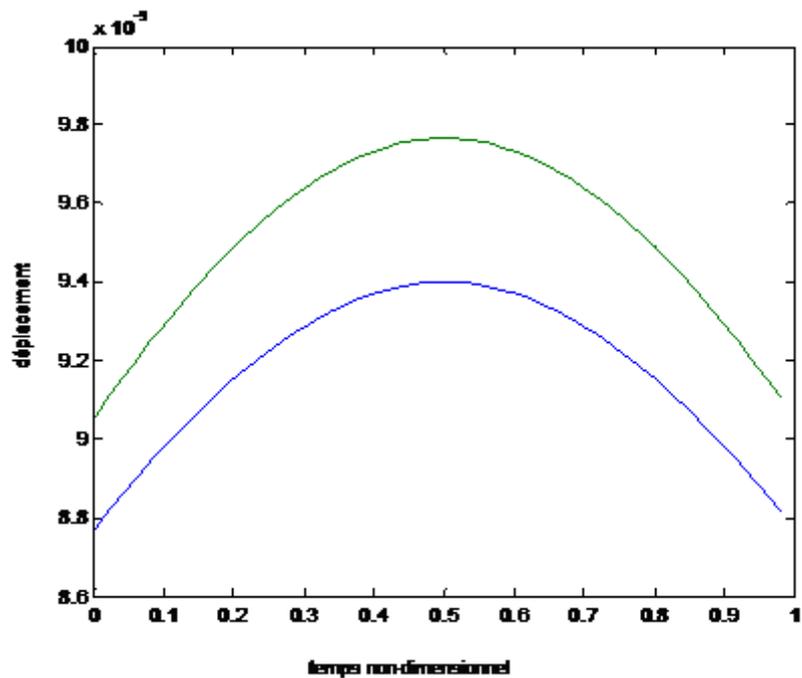
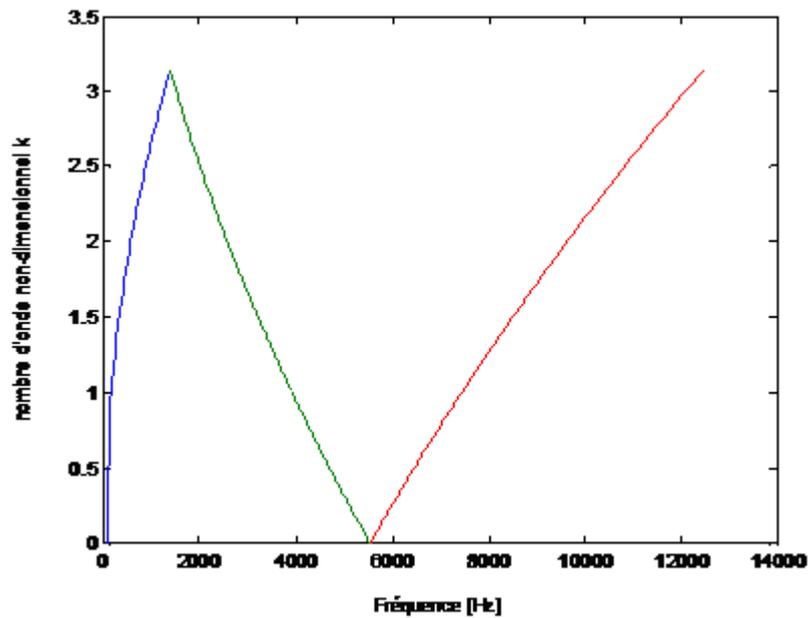
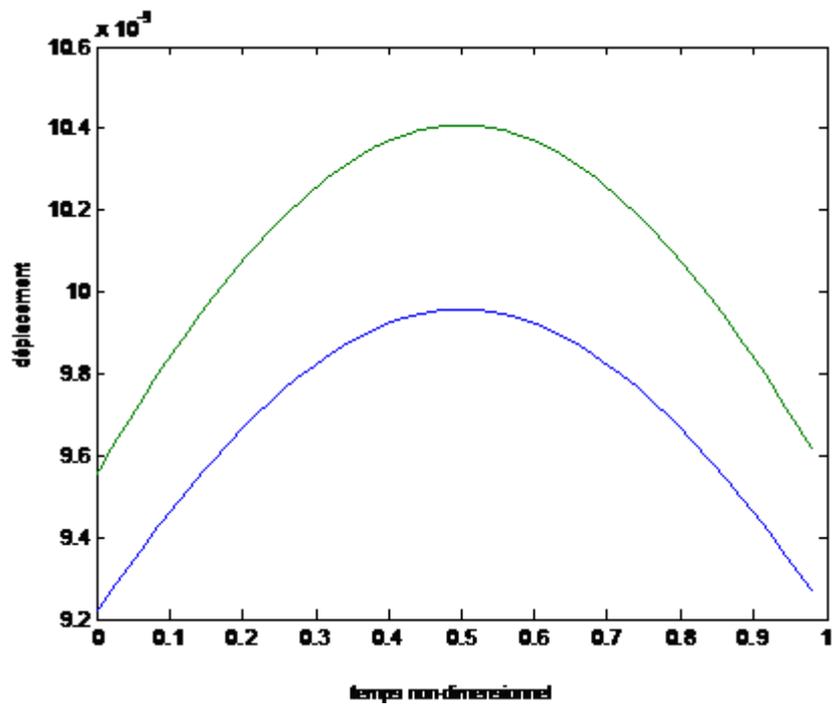
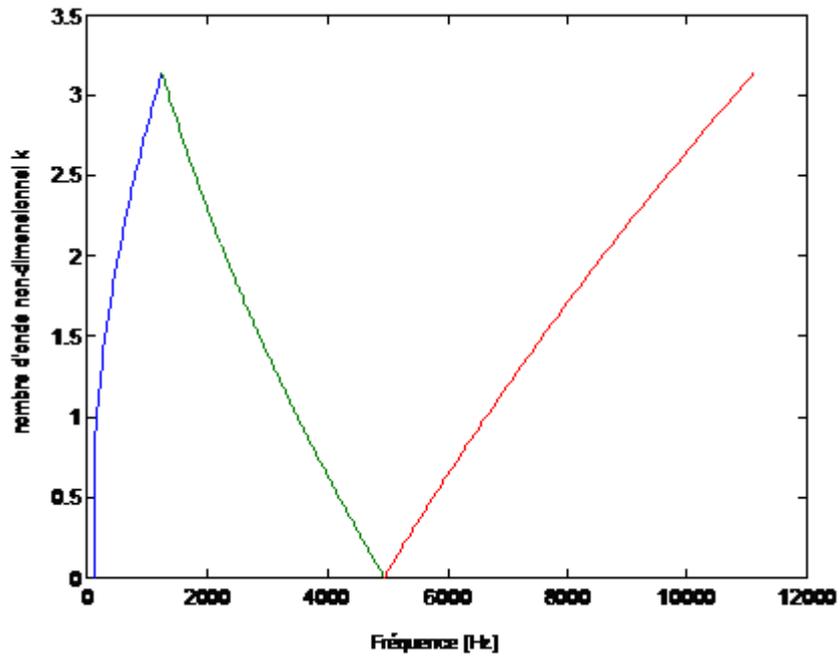


Figure 5.6 : Déplacement en fonction du temps non-dimensionnelle pour le cas d'un appui moins rigide (à grande vitesse et à vitesse réduite) $S_y=2.10^7$.

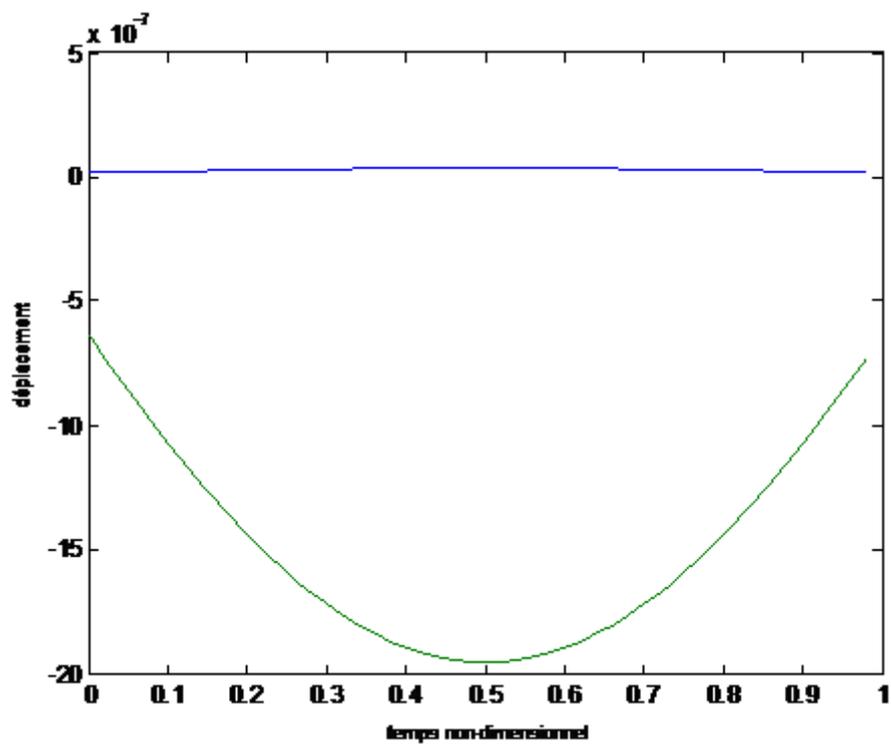
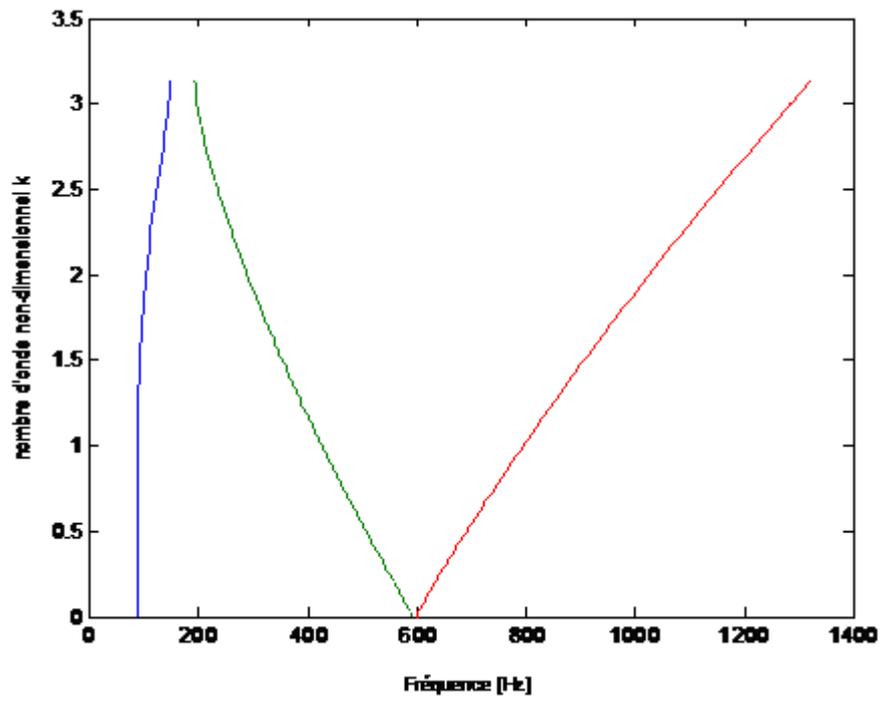
5.4. Influence du Moment d'inertie.



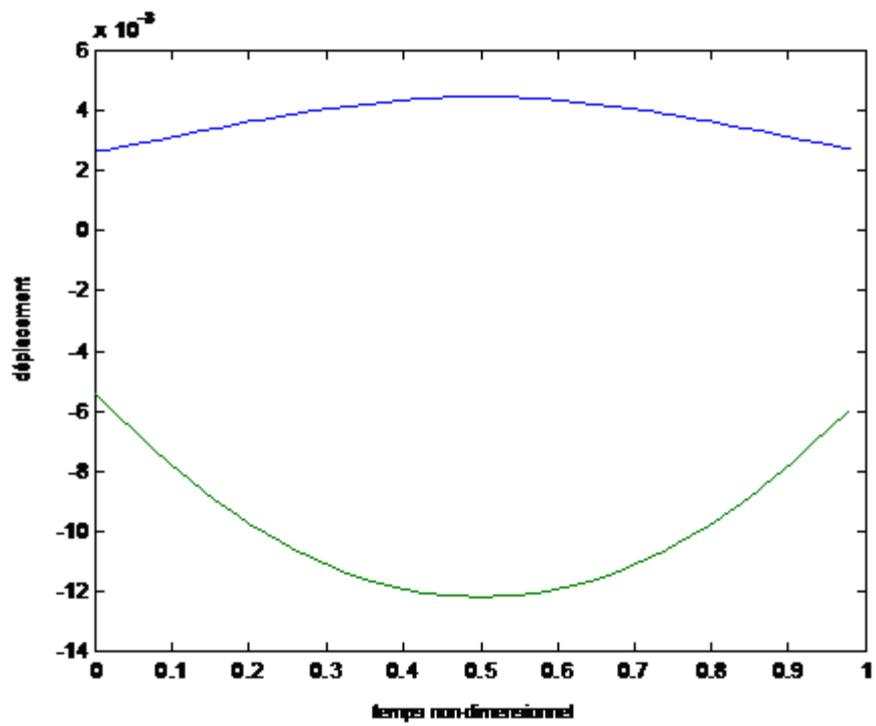
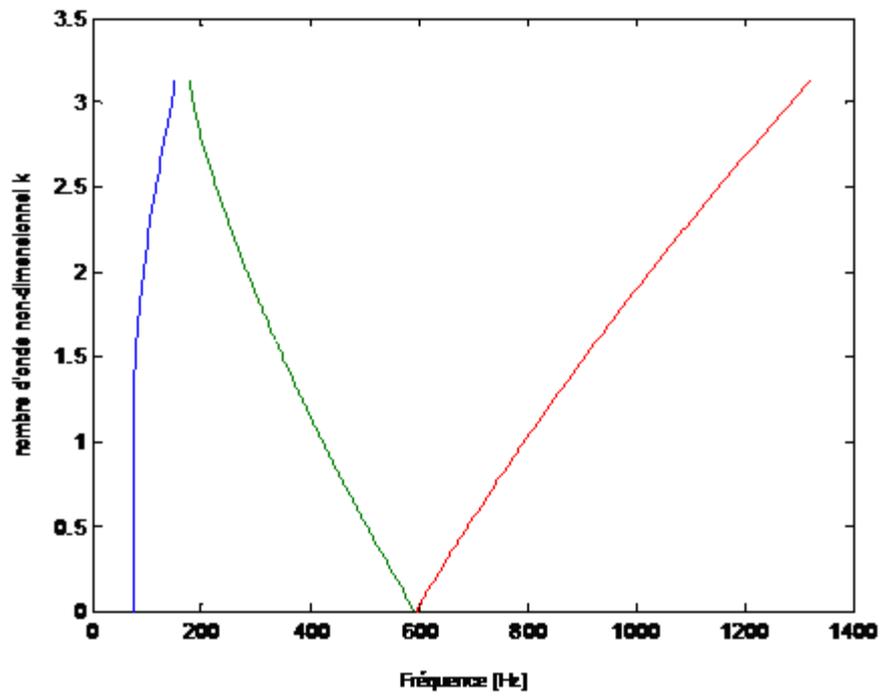
Rail hauteur = 0.22m, Patin = 0.09m
 $I_n = 0.15 \cdot 0.172^3 / 12;$



Rail hauteur = 0.172m, Patin = 0.15m



Rail hauteur = 0.06m, Patin = 0.05m; $s_y=3e7$



Rail hauteur = 0.06m, Patin = 0.05m; $s_y=2e7$

Conclusion :

Le théorème de Bloch a été employé pour étudier la dynamique d'une poutre se reposant sur appuis périodiques. Il permet de calculer la réaction de la poutre à n'importe quel chargement dynamique en calculant le transforme de Bloch du déplacement induit par le chargement. Il concerne pour résoudre seulement (continus) des équations dynamiques découplées pour " 1DL ". La méthode est appliquée à la réponse dynamique d'une poutre mince. Les auteurs distinguent jusqu'à la méthode à la dynamique d'une poutre de Timoshenko pour n'importe quel chargement, impliquant l'accouplement entre différents composants du mouvement de la poutre (torsion, flexion...).

Conclusion générale

Notre objectif est d'établir un modèle analytique décrivant la réponse dynamique de la structure ferroviaire par propagation d'onde sur appuis périodique et de réaliser une analyse paramétrique de la structure ferroviaire sur une assise en béton qui est actuellement de plus en plus répandue.

Nous avons réalisé l'étude d'un rail libre modélisé par une poutre Euler, et dans un deuxième temps par une poutre de Timoshenko.

- *Etablissement à partir des équations d'équilibre des deux équations différentielles régissant le comportement pour les modèles (Euler et Timoshenko).*
- *Détermination de la fonction de Green pour les deux modèles est réalisée en utilisant les conditions de continuité de la fonction solution en utilisant soit la méthode directe (intégration) ou la méthode de la transformée de Fourier (résolution des intégrales par la méthode des résidus).*
- *Une analyse sur le nombre d'onde et sur l'atténuation est concrétisée.*
- *La fonction de Green est analysée pour différents points de la poutre rail.*
- *Comparaison entre les deux modèles permettant de mettre en évidence l'efficacité des différents paliers de modélisation.*

Analyse du rail sur appui en béton armé

- *Mise en place des équations différentielles régissant le comportement mécanique de la structure rail pour le modèle d'Euler et le modèle de Timoshenko.*
- *Utilisation de la transformée de Fourier nous a permis de déterminer la fonction de Green associée à l'équation différentielle.*

- *Analyse paramétrique des modèles d'Euler et de Timoshenko sur un support en béton armé en fonction de différentes rigidités nous a permis de déterminer la fréquence f_p seuil d'analyse des basses fréquences et des hautes fréquences*
- *Comparaison des deux modèles en termes de module de la fonction de Green permet d'affirmer qu'il n'y a pas amplification de ce dernier avec l'augmentation de la fréquence.*

Analyse de la structure sur appuis périodique

- *Un modèle plus réaliste de la structure rail infinie sur appuis périodiques est proposé*
- *Utilisation de la fonction de Green le principe de superposition et le théorème de Bloch nous a permis de décrire la réponse globale de la structure en l'absence de chargement.*
- *La résolution de l'équation de dispersion nous permet de déterminer les différentes bandes passantes et non passantes pour différentes types d'appuis.*
- *Analyse pour les deux modèles (Euler et Timoshenko) a été réalisée.*

Analyse de la structure rail sur appuis périodique sous l'influence d'une force mobile

- *Méthode modale Pour la résolution de la structure rail sous l'influence d'une source mobile.*
- *Détermination de la fonction de Bloch permet en utilisant le théorème de SANCHEZ de décomposer et projeter la force mobile sur les modes.*
- *L'utilisation de la transformée de Bloch permet de recomposer la réponse globale du système entre deux appuis élastiques, en utilisant la sommation sur les modes.*
- *Modèle de la poutre d'Euler établit sous l'influence d'une force mobile.*

Perspectives

Après cette analyse le problème n'est nullement finalisé, nous pensons améliorer ce modèle par :

- *Modèle de Timoshenko*
- *Analyse des chargements mobiles inclinés*

REFERENCES

- ✚ A.V. Metrikine ET K.Popp. [1999]' vibration of a periodically supported beam on an elastic half-space. *European Journal of Mechanics* doi: 10.1016/S0997-7538(99)00141-2, pages 679–701.
- ✚ Balsan. M. [1997]' Pour un modèle mathématique de la voie ferrée moderne'. PHD thesis, école nationale des ponts et chaussée.
- ✚ Belostserkovkiy. P.M. [1996]' on the oscillations of infinite periodic beams subjected to a moving concentrated force.' *J.Sound.Vibration.*, 193 (3), 705-712.
- ✚ Belostserkovkiy. P.M. [1999]' periodic string response to an impact and a suddenly applied concentrated stationary force', *Journal of Sound and Vibration*, 228(1), pp.51-61.
- ✚ Belostserkovkiy. P.M. [2004]' the interaction of an infinite wheel-train with a constant spacing between the wheels moving uniformly over a rail track', *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 68, pp.923-631.
- ✚ Bradley. C.E. [1994]' Linear and nonlinear acoustic Bloch waves propagation in periodic waveguide' Technical report, the university of Texas Austin.

- ✚ Bodin.V. [1981]' Comportement du ballast des voies ferrées soumises à un chargement vertical et latéral', PHD thesis, école nationale des ponts et chaussée.

- ✚ Chen.Y.H. et Huang.Y.H. [2000]' Dynamic stiffness of infinite Timoshenko beam on viscoelastic foundation in moving coordinate', International Journal for Numerical Methods in Engineering. 48: pp.1-18

- ✚ C. Bode, R. Hirschauer et S.A. Savidis. [2000]' Three-dimensional time domain analysis of moving loads on railway tracks on layered soils. *Proceedings of Wave' A.A. Balkema, Rotterdam*, pages 3–12

- ✚ D. Wang, C. Zhou, and J. Rong. [2003]' Free and forced vibration of repetitive structures. International Journal of Solids and Structures.

- ✚ G. FLOQUET. [1883]' Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques', Annales E.N.S, T.12, p.47.

- ✚ H. Kruse et K. [2001]' A modular algorithm for linear, periodic train-track models. *Archive of Applied Mechanics doi:10.1007/s004190000151*, 71:473–486.

- ✚ Hamet. J.F. [1997]' propagation des ondes de flexion d'un rail posé sur travers'

- ✚ Hamet. J.F. [1999]' Railway noise: use of the Timoshenko model in rail vibration studies', *Acustica*, 85, 1-12.

- ✚ Heckl. M.A. [1995]' Railway Noise –Can Random Sleeper Spacings Help? '*Acustica*, 81, 559-564.

- ✚ Heckl. M. A. [2001]' *Coupled Waves on the Periodically Supported Timoshenko Beam.* 'J.Sound.Vibration., 252(5), 849-882.

- ✚ J. Bitzenbauer et J. Dinkel. [2002]' Dynamic interaction between a moving vehicle and an infinite structure excited by irregularities–Fourier transforms solution. *Archive of Applied Mechanics* doi:10.1007/s00419-001-0200-y, 72(2-3):199–211.

- ✚ Kruse et Popp. [2001]' A modular algorithm for linear, periodic train-track models. *Archive of Applied Mechanics* doi:10.1007/s004190000151, 71:473–486.

- ✚ Lassoued. R. [2007]' Modélisation analytique des structures unidimensionnels et bidimensionnels sous charges mobiles.

- ✚ Lassoued. R et Bonnet. G. [2008]' RESPONSE OF A PERIODICALLY SUPPORTED BEAM TO A MOVING LOAD FROM THE SUPERPOSITION OF BLOCHWAVES', EURO DYN 2008 Southampton.

- ✚ Lecheheb. M. [2009]' Comportement vibratoire d'une poutre infinie appuyée sur des traverses', S B E I D C O ENSET Oran (Algeria) 2009.

- ✚ L.BRILLOUIN, [1946]' Wave propagation in periodic structures', McGraw-Hill, New York.

- ✚ L.S. Beale and M.L. Accorsi. [1995]'Power un two- and three- dimensional frame structures. *Journal of Sound and Vibration.*

- ✚ Mead. D.J. [1996]' wave propagation in continuous periodic structures: research contribution from Southampton, 1964-1995.', *J.Sound. Vibration*, 190,495-524.

- ✚ Mead. D.J. [1973]' A general theory of harmonic wave propagation in linear periodic systems with multiple coupling' *J .Sound. Vibration.*, 27,235-260.

- ✚ Mead. D.J. [1986]' A new method of analysing wave propagation in periodic structures: application to periodic Timoshenko beam and stiffened plates.'*J.Sound. Vibration.*, 104,9-27.

- ✚ Munjal. M.J. Heckl, M.A. [1982]' Vibration of a periodic rail- sleeper system excited by an oscillating stationary transverse force.' *J .Sound. Vibration*, 81, 491-500.

- ✚ Nordborg. A. [1998]' Vertical rail vibration: point force excitation', *Acustica*, 84,280-288

- ✚ R. CAMPBELL. [1955]' Théorie générale de l'équation de Mathieu', p.171, Masson.

- ✚ Sanchez. P. [1989]' Vibration and coupling of continuous system' Spring Berlin.

- ✚ Sugimoto and Horika. [1992]' Dispersion characteristics of sound waves in a tunnel with an array of Helmholtz resonators' *J. Acoust. Am.*, 97(3):pp,1446-1459.

- ✚ Sprung. D.W.L., and Wu. H. [1995]' Scattering by a finite periodic potential' *Am. J. Phys*, 60(10):pp,883-888.

- ✚ Wu et D.J. Thompson. [1999]' the effects of local preload on the foundation stiffness and vertical vibration of railway track. *Journal of Sound and Vibration* doi:10.1006/jsvi.1998.1939, 219(5):881–904.

ANNEXES

Annexe A : fonction de Green et Transformée de Fourier

Introduction

Position du Problème :

Soit $x = (x^1, \dots, x^n)$ un point de \mathbb{R}^n , et \wp un opérateur différentiel linéaire. On cherche la solution $\varphi(x)$ de l'équation aux dérivées partielles linéaire :

$$\wp \varphi(x) = j(x)$$

où $j(x)$ est une fonction donnée, appelée source du champ $\varphi(x)$ inconnu.

Distribution de Dirac :

On note $\delta(x)$ la distribution de Dirac. Cette distribution vérifie la propriété fondamentale que, pour toute fonction $\varphi(x)$ lisse à support compact :

$$\int \varphi(x) \delta(x - x_0) dx = \varphi(x_0)$$

Définition de la fonction de Green :

On appelle fonction de Green $G(x)$ toute solution de l'équation aux dérivées partielles linéaire :

$$\wp G(x) = \delta(x)$$

Unicité :

Il existe en général plusieurs fonctions de Green associées à la même équation. Ces fonctions diffèrent entre-elles par leurs conditions aux limites. C'est pourquoi il est

très important de spécifier deux choses pour définir de façon unique une fonction de Green précise :

- l'équation aux dérivées partielles linéaire.
- les conditions aux limites.

Le problème de l'unicité sera précisé plus loin en relation avec la transformée de Fourier.

Intérêt de la fonction de Green :

Si la fonction de Green $G(x)$ est connue, alors la solution de $\varphi(x)$ e l'équation :

$$\wp \varphi(x) = j(x)$$

s'écrit simplement sous la forme d'un produit de convolution :

$$\varphi(x) = (G * j)(x) = \int G(x - y) j(y) dy$$

En effet, l'opérateur \wp agissant sur la variable x , il vient en permutant dérivation et intégration, et en utilisant la définition de $G(x)$:

$$\wp \varphi(x) = \int [\wp G(x - y)] j(y) dy = \int \delta(x - y) j(y) = j(x)$$

Cette équation peut s'interpréter comme la superposition de solutions élémentaires, chaque terme sous l'intégrale représentant la contribution de $j(x)$ entre x et $x + dx$ (on parle encore, en physique, d'interaction à deux corps).

Transformée de Fourier

On utilise ci-dessous les notations introduites dans l'article opérateur différentiel.

Opérateur différentiel linéaire à coefficients constants

Rappelons qu'un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants d'ordre m s'écrit :

$$\wp = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha D^\alpha$$

où les a_α sont les coefficients de l'opérateur \wp . Dans toute la suite, on ne considèrera que des opérateurs à coefficients constants : les a_α seront indépendants de x .

Introduction de la transformée de Fourier

Définition

On définit ici la transformée de Fourier de la fonction $f(x)$ de n variables x^k , ($k = 1, \dots, n$) par :

$$\widehat{f}(\xi) = \int dx e^{-i\xi x} f(x)$$

La formule de transformation inverse s'écrit alors :

$$f(x) = \int \frac{d\xi}{(2\pi)^n} e^{+i\xi x} \widehat{f}(\xi)$$

Application aux opérateurs différentiels linéaire à coefficients constants

On obtient la relation :

$$(\wp f)(x) = \int \frac{d\xi}{(2\pi)^n} e^{+i\xi x} \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha \xi^\alpha \widehat{f}(\xi)$$

Soit encore :

$$(\widehat{\wp f})(\xi) = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha \xi^\alpha \widehat{f}(\xi)$$

Symbole d'un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants

On appelle symbole de l'opérateur différentiel \wp d'ordre m la fonction $\sigma(\xi)$ des n variables ξ polynomiale en ξ de degré m :

$$\sigma(\xi) = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha \xi^\alpha$$

de telle sorte que :

$$(\wp f)(x) = \int \frac{d\xi}{(2\pi)^n} e^{+i\xi x} \sigma(\xi) \widehat{f}(\xi)$$

Application aux fonctions de Green

Introduction

Notons $\widehat{G}(\xi)$ la transformée de Fourier de la fonction de Green $G(x)$. L'équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants définissant les fonctions de Green :

$$\wp \widehat{G}(\xi) = \delta(x)$$

devient, après transformation de Fourier, une équation algébrique² :

$$\sigma(\xi) \widehat{G}(\xi) = 1$$

dont la solution est triviale :

$$\widehat{G}(\xi) = \frac{1}{\sigma(\xi)}$$

Pour obtenir la fonction de Green originale, il « suffit » alors de calculer la transformée de Fourier inverse :

$$G(x) = \int \frac{1}{(2\pi)^n} e^{+i\xi x} \widehat{G}(\xi)$$

soit explicitement :

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d\xi \frac{e^{+i\xi x}}{\sigma(\xi)}$$

Cette écriture est symbolique, car le symbole $\sigma(\xi)$ de l'opérateur différentiel \mathcal{D} d'ordre m étant une fonction polynomiale en ξ de degré m , le théorème fondamental de l'algèbre nous dit que ce polynôme possède m racines complexes, donc que l'intégrand possède a priori m pôles.

Conditions aux limites

Dans les situations physiquement intéressantes, il arrive fréquemment que certains de ces pôles soient situés sur l'axe réel. La transformée de Fourier inverse :

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d\xi \frac{e^{+i\xi x}}{\sigma(\xi)}$$

se calcule alors par le théorème des résidus, et le choix du contour fermé et de la prescription de contour des pôles dépend de façon essentielle des conditions aux limites désirées. Il existera donc en général plusieurs fonctions de Green associées à la même équation, qui diffèrent entre-elle par leurs conditions aux limites.

Exemples

Oscillateur harmonique

Considérons l'équation différentielle ordinaire de la fonction de Green de l'oscillateur harmonique à un degré de liberté de pulsation ω_0 :

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 \right) G(t) = \delta(t)$$

Après transformation de Fourier, cette équation différentielle temporelle devient une équation algébrique pour la pulsation ω , variable conjuguée au temps t :

$$\left(-\omega^2 + \omega_0^2 \right) G(\omega) = 1$$

dont la solution est triviale :

$$\widehat{G}(\omega) = -\frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} = -\frac{1}{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}$$

Pour obtenir la fonction de Green temporelle, on doit calculer la transformée de Fourier inverse :

$$G(t) = -\frac{1}{2\pi} \int d\omega \frac{e^{+i\omega t}}{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}$$

L'intégrand possède deux pôles simples réels, situés respectivement en $\omega = +\omega_0$ et $\omega = -\omega_0$; on interprète alors l'intégrale comme une intégrale curviligne dans le plan complexe :

$$G(t) = -\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} dw \frac{e^{+iwt}}{(w-w_0)(w+w_0)}$$

Pour laquelle il convient d'abord de fermer le contour Γ . On complète ici l'axe des réels par un demi-cercle centré à l'origine et de rayon R (on prendra la limite $R \rightarrow +\infty$ à la fin). Il restera encore à choisir dans quel demi-espace du plan complexe situer ce demi-cercle, et enfin à donner une prescription de contour des pôles afin de pouvoir terminer le calcul grâce au théorème des résidus.

Propagateur retardé

L'hypothèse classique de causalité consiste à postuler a priori que la réponse du système physique suit son excitation, c'est-à-dire ici que le propagateur ne peut être non nul que pour les temps $t \geq 0$ ultérieurs à l'application de l'impulsion de Dirac à l'instant $t = 0$, soit :

$$\forall t < 0, G_{ret}(t) = 0$$

Pour voir dans quel demi-espace du plan complexe il faut situer le demi-cercle, écrivons que :

$$w = R.e^{i\theta} = R(\cos \theta + i \sin \theta)$$

On a alors :

$$e^{+iwt} = \exp[iRt(\cos \theta + i \sin \theta)] = e^{iRt \cos \theta} \times e^{-Rt \sin \theta}$$

Pour que l'intégrale converge lorsque $R \rightarrow +\infty$ quelque soit $t < 0$, il faut que l'exponentielle réelle tende vers zéro dans cette limite :

$$\forall t < 0, \lim_{R \rightarrow +\infty} e^{-Rt \sin \theta} = 0$$

Il faut donc que : $\sin\theta < 0$, soit : $-\pi/2 < \theta < 0$: le contour doit être refermé dans le demi-plan complexe inférieur lorsque $t < 0$.

La fonction de Green devant être identiquement nulle dans ce cas, les deux pôles doivent alors se trouver à l'extérieur de ce contour fermé, c'est-à-dire que les pôles doivent être compris comme : $\omega = \omega_0 + i\varepsilon$ et : $\omega = -\omega_0 + i\varepsilon$ à la limite où : $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Pour $t > 0$, le contour doit être refermé dans le demi-plan complexe supérieur.

Le contour fermé contient alors les deux pôles, et le théorème des résidus donne :

$$G_{ret}(t) = \frac{1}{2\pi} \times 2\pi i \times \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{e^{+i\omega t}}{(\omega + \omega_0)} \Big|_{\omega = \omega_0 + i\varepsilon} + \frac{e^{+i\omega t}}{(\omega - \omega_0)} \Big|_{\omega = -\omega_0 + i\varepsilon} \right]$$

soit :

$$G_{ret}(t) = -i \times \left[\frac{e^{+i\omega_0 t}}{2\omega_0} + \frac{e^{-i\omega_0 t}}{-2\omega_0} \right] = \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{e^{+i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} \right)$$

On obtient donc finalement :

$$G_{ret}(t) = \theta(t) \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}$$

où $\theta(t)$ est la distribution de Heaviside.

Applications au calcul numérique

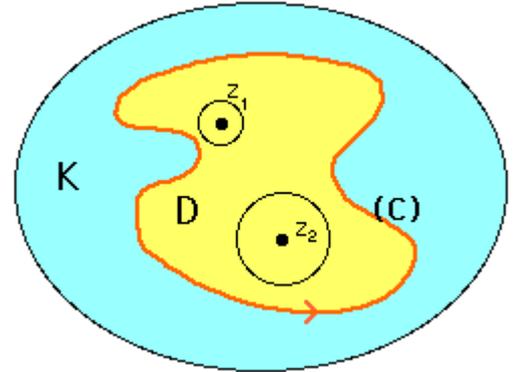
Les opérateurs de Green permettent de représenter la solution exacte d'un problème physique (système d'équations aux dérivées partielles) sous forme de convolutions, et s'exprime naturellement dans l'espace de Fourier. Par exemple, en mécanique, les équations de Lippmann-Schwinger permettent d'exprimer le champ de déformation dans un matériau linéaire élastique homogène soumis à une

précontrainte au moyen de l'opérateur de Green. Pour les problèmes de conductivité diélectrique, des formulations similaires existent. Ces équations ont non seulement un intérêt théorique mais également pratique.

Les calculs par opérateurs de Green ont de nombreuses applications dans le domaine de l'homogénéisation y compris non-linéaire³. Les champs de déformation et de contrainte (ou du champ électrique ou magnétique dans des problèmes de conductivité ou de magnétisme de milieux hétérogènes) sont obtenus numériquement par un algorithme de point de fixe. Les lois constitutives du milieu (traitées dans l'espace réel) et la représentation de la solution par opérateur de Green (traité dans l'espace de Fourier) sont itérés jusqu'à convergence des champs. La majorité du temps de calcul consiste à passer de l'espace réel au domaine de Fourier, à l'aide de transformées de Fourier rapides.

Annexe B : théorie des résidus

La théorie des résidus et des fonctions de variable complexe, dont la paternité revient à Cauchy, est très ...complexe. On aborde ici une application au calcul des intégrales en se plaçant dans un cas simple d'énoncé du théorème des résidus.



On considère dans le plan complexe K , une fonction holomorphe (dérivable au sens complexe) sauf en un nombre fini de points z_1, z_2, \dots de K qui sont des pôles pour la fonction f . On note (C) un circuit fermé de K , sans point double, entourant un domaine D contenant ces pôles (ci-dessous deux pôles).

Dans ces conditions, f est développable en série de Laurent au voisinage de chaque pôle z_k , i.e. il existe pour chacun des z_k un voisinage V_k de celui-ci et une suite $(a_{n,k})$ telle que, pour tout z de V_k :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{n,k} (z - z_k)^n$$

Notons que les $a_{n,k}$ pour n négatifs, ne peuvent pas être tous nuls du fait que z_k est un pôle de f . En particulier, le coefficient $a_{-1,k}$ est non nul. C'est le résidu de f au point z_k .

Le théorème des résidus, s'écrit alors, avec les hypothèses ci-dessus :

$$\int_{(C)} f(z) dz = 2i\pi \times \sum_k r_k$$

Avant une application de ce théorème, un résultat indispensable, souvent appelé lemme de **Jordan**

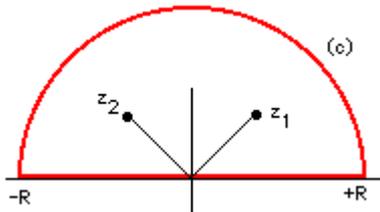
Si f est continue sur un cercle de centre z_0 , de rayon R et si la limite de $|(z - z_0)^{-1} f(z)|$ est nulle lorsque R tend vers l'infini, alors l'intégrale sur tout arc de ce cercle est nulle.

Exemple d'application :

Le bel exemple suivant, emprunté à **J. Bass**, montre tout l'intérêt du théorème des résidus dans le calcul d'une intégrale pour laquelle on ne sait pas facilement (ou pas du tout) trouver de primitive. Soit à calculer :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{x^4 + 1} dx$$

Le calcul de cette intégrale exige une décomposition pénible en éléments simples ou l'usage des **fonctions eulériennes**.



Notons J l'intégrale de $f(z) = 1/(z^4 + 1)$ sur le contour constitué du demi-cercle (c) supérieur centré en 0 de rayon $R > 1$ et du segment réel $[-R, +R]$. Ce contour contient deux pôles de f : les racines 4èmes de -1 d'ordonnée positive, que nous

notons z_1 et z_2 . Ils sont solutions de l'équation $z^4 = -1 = [1, \pi]$.

On a : $z_1 = \sqrt{2}(1 + i)/2$ et $z_2 = \sqrt{2}(-1 + i)/2$.

Par linéarité et en faisant tendre R vers l'infini, on a, en notant r_1 et r_2 les résidus relatifs à z_1 et z_2 :

$$J = 2i\pi(r_1 + r_2) = 2I + K$$

($2I$ car, par parité, l'intégrale de f sur \mathbf{R} tout entier est le double de I). K désigne ici l'intégrale de f sur le demi-cercle (c) de rayon infini R . D'après le théorème de Jordan énoncé ci-dessus, l'intégrale K est nulle (les conditions sont clairement remplies) et par suite $I = i\pi(r_1 + r_2)$. Reste à calculer les résidus r_1 et r_2 . Pour ce faire, remarquons un résultat général :

Si nous développons f en série de Laurent, z_1 et z_2 sont des pôles simples. Ainsi, en raisonnant sur z_1 , on a :

$$f(z) = \dots 0 + \dots + a_{-1,1}(z - z_1)^{-1} + a_{0,1} + a_{1,1}(z - z_1) + a_{2,1}(z - z_1)^2 + \dots$$

donc en multipliant par $(z - z_1)$ et en faisant tendre z vers z_1 , on voit que :

le résidu $r_1 = a_{-1,1}$ n'est autre que la limite en z_1 de $(z - z_1)f(z)$

Dans notre cas, $f(z) = 1/(z^4 + 1)$, on peut calculer r_1 en appliquant la règle de l'Hospital puisque $z - z_1$ et $z^4 + 1$ s'annulent en z_1 . D'où $r_1 = 1/4z_1^3 = -z_1/4$ puisque $z_1^4 = -1$. Un calcul analogue fournit $r_2 = -z_2/4$. Par suite $r_1 + r_2 = -2ri/4 = -ri/2$, ce qui fournit $I = i\pi(r_1 + r_2) = -i\pi(z_1 + z_2)/4$.
Finalement:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

Annexe C : Théorème de Floquet-Bloch et diagramme de dispersion

En 1883, Floquet détermina la forme générale des solutions des équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions périodiques uniformes. Les équations étudiées par Floquet entrent dans le cadre plus général des équations de Mathieu et de Hills.

Si $g(x)$ et $h(x)$ sont deux solutions linéairement indépendantes d'une telle équation différentielle du deuxième ordre, la solution générale s'écrit :

$$F(x) = Ag(x) + Bh(x) \quad (\text{A-1})$$

$g(x+P)$ et $h(x+P)$ sont également solutions.

P étant la période. Ils peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} g(x+P) &= a_1g(x) + a_2h(x) \\ h(x+P) &= b_1g(x) + b_2h(x) \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

Ce qui nous permet d'écrire $F(x+P)$ de la façon suivante :

$$F(x+P) = (Aa_1 + Bb_1).g(x) + (Aa_2 + Bb_2).h(x) \quad (\text{A-3})$$

Cette équation peut s'écrire $F(x+P) = \sigma F(x)$, avec σ déterminé par le système linéaire homogène :

$$\begin{cases} Aa_1 + Bb_1 = \sigma.A \\ Aa_2 + Bb_2 = \sigma.B \end{cases} \quad (\text{A-4})$$

Ce qui admet des solutions si :

$$\begin{vmatrix} a_1 - \sigma & b_1 \\ a_2 & b_2 - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A-5})$$

σ est le nombre caractéristique. Nous pouvons l'écrire $\sigma = e^{-\gamma P}$, γ étant l'exposant caractéristique.

Floquet a proposé alors d'écrire $\phi(x) = e^{-\gamma x} F(x)$ La fonction ϕ est alors périodique de période P , $\phi(x+P) = \phi(x)$. En prenant $\phi(-x)$, nous obtenons une deuxième solution indépendante de la première (sous certaines conditions)

La solution générale devient donc :

$$F(x) = C_1.e^{-\gamma x} \phi(x) + C_2.e^{-\gamma x} \phi(-x) \quad (\text{A-6})$$

Conséquences :

Considérons une onde se propageant dans une structure dans laquelle la permittivité ε est périodique de période P selon l'axe x .

La composante E_z du champ électrique vérifie l'équation d'onde :

$$\frac{d^2 E_z(x)}{dx^2} + \varepsilon(x).k^2 E_z(x) = 0 \quad (\text{A-7})$$

Avec $\varepsilon(x+P) = \varepsilon(x)$. C'est une équation différentielle linéaire du deuxième ordre dont le coefficient ε est une fonction périodique uniforme. La forme des solutions est donc donnée

par Floquet et s'écrit $E_z(x) = e^{\pm \gamma x} R(x)$, $R(x)$ étant périodique de période P . $\gamma = \alpha + j\beta$ est la constante de propagation de l'onde dans la structure. Intéressons-nous uniquement à l'onde qui se propage sans atténuation c'est à dire pour $\alpha = 0$:

$$E_z(x) = e^{\pm j\beta x} R(x)$$

Le diagramme liant β et k est appelé diagramme k - β , diagramme de dispersion (un milieu dispersif est un milieu dans lequel la constante de propagation n'est pas une fonction linéaire de la fréquence ; plus généralement le diagramme de dispersion est un moyen de représenter la relation entre deux variables) ou diagramme de Brillouin (d'après Léon Brillouin, physicien ayant étudié la propagation des ondes dans les cristaux en physique des solides [11]).

En développant $R(x)$ en série de Fourier, nous obtenons le développement en harmoniques d'espaces du champ électrique :

$$E_z(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j(\pm\beta + \frac{2n\pi}{P})x} \quad (\text{A-8})$$

Si nous ajoutons $2\pi/P$ à β la solution ne change pas, de même que si nous remplaçons β par $-\beta$. $k(\beta)$ sera donc périodique de période $2\pi/P$ et paire. C'est pourquoi β est limité dans la zone $[0, \pi/P]$ appelée zone de Brillouin.

Bloch (1920) a généralisé le théorème de Floquet à plusieurs dimensions. Dans une structure périodique à trois dimensions, les ondes de Bloch s'écrivent :

$$F(\vec{r}) = e^{\pm\vec{\gamma}\cdot\vec{r}} R(\vec{r}) \quad (\text{A-9})$$

Avec :

$$R(\vec{r} + \vec{P}) = R(\vec{r}) \quad (\text{A-10})$$

Le tracé du diagramme de dispersion pour les structures périodiques à deux ou trois dimensions s'obtient en décomposant les champs en ondes planes (en d'autres termes en utilisant le développement en série de Fourier des champs et de ϵ) et en résolvant l'équation d'onde dans le cas 2-D ou la totalité des équations de Maxwell dans le cas 3-D. Cette méthode de calcul n'ayant pas fait l'objet de cette thèse.