

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE DE CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL**

THESE

Présentée Pour Obtenir le diplôme de **MAGISTER**

Spécialité : Génie civil
Option : Structure

PAR

TEMAGOULT ABDELHAMID

**INVESTIGATION DES PARAMETRES NUMERIQUES
EN ANALYSE PAR ELEMENTS FINIS
ISOPARAMETRIQUES DES STUCTURES PLANES
MEMBRANAIRES ET DES PLAQUES**

Devant le jury :

D^r H. CHABIL	M.C Président	Université de Constantine
D^r N. CHEIK	M.C Examineur	Université de Constantine
D^r R. BENMERLAOUI	M.C Examineur	Université de Constantine
Pr A. CHARIF	Pr Rapporteur	Université de Batna
Dr M. Bahedi	Dr Co-Rapporteur	Université de Batna
Mr A. KADID	C.C Invité	Université de Batna

DEDICACE

Je dédie ce travail à :

Ma mère,

Ma femme qui ne cesse de m'encourager

A mes enfants

Asma,

Zineb,

Mohammed

Soufiane

Chames-Eddine

Zakaria

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer mes remerciements les plus sincères à mes encadreurs :

Pr A.Charif et Mr A.Kadid pour l'intérêt qu'ils ont apporté à mon travail, pour leur disponibilité et le temps précieux qu'il m'ont consacré, je suis très reconnaissant de leurs conseils et encouragements.

Je remercie également le Dr. H. Chabil d' avoir accepté de présider le jury ainsi que les membres : Dr M. Naimi et Dr. R. Benmerlaoui pour leurs réponse favorable à ma demande, ils m'ont fait l'honneur d'examiner ce travail, je leurs en suis profondément reconnaissant.

Mes remerciement vont aussi à Mr N. Lahbari , K Demagh ,M Bahedi et à tous mes collègues qui ont contribué de prés ou de loin dans ce travail.

A.Temagoult

NOTATIONS

\sim	Utilisé pour traduire un vecteur
\wedge	Produit vectoriel
\cdot	Produit scalaire
$*$	Utilisé pour définir une quantité virtuelle
\equiv	Identique à
\int	Intégrale
$\{ \}$	Vecteur colonne
$\langle \rangle$	Vecteur lignes
$[\]$	Matrice
$[\]^T$	Matrice transposée
$[\]^{-1}$	Matrice inverse
ξ, η	Coordonnées paramétriques
N_i	Fonctions d'interpolations
$[N]$	Matrice des fonctions de formes
$[J], J$	Matrice jacobienne des transformations ;déterminant de[J]
$[j]$	Matrice jacobienne inverse
i, j, k $\% \quad \% \quad \%$	Base orthonormée cartésienne
x, y, z	Coordonnées cartésiennes locales
X, Y, Z	Coordonnées cartésiennes globales
h	Epaisseur
V	Volume
dV, dA	Elément de volume, d'aire
S_f	Partie du contour où les efforts sont imposées
S_u	Partie du contour où les déplacements sont imposées
$f_{\%}^x, f_{\%}^y$	Forces de volume, surfaciques sur S_f
u_i, v_i, w_i	Déplacement du point i suivant x, y, z
$\bar{u}_{\%}$	Déplacement imposé
b_{xi}	Rotation du point i autour de l'axe y
β_{yi}	Rotation du point i autour de l'axe x
q_{zi}	Rotation du point i autour de l'axe z
w_i, b_{xi}, b_{yi}	Variables nodales (de flexion) dans le repère local
u_i, v_i	Variables nodales (de membrane) dans le repère local
$\{u_n\}$	Vecteur des déplacements nodales
$\langle e \rangle$	Vecteur des déformations
E, ν	Module de Young, coefficient de Poisson
$\langle g \rangle$	Vecteur des déformation de cisaillement transversal
$\{\sigma\}$	Vecteur des contraintes
$[\sigma]$	Tenseur des contraintes
$\{\tau\}$	Vecteur des contraintes de cisaillement transversale
$[B]$	Matrices reliant les déformations aux variables nodales
$[k]$	Matrice de rigidité élémentaire
$[K]$	Matrice de rigidité globale
$\{f_n\}$	Vecteur charges équivalentes

$\{F\}$ Vecteur des sollicitations globales
 $\{U\}$ Vecteur solution
 $[k_m], [k_f]$ et $[k_c]$ Matrice de rigidité élémentaire de membrane
de flexion et de cisaillement transversal
 $\{N_m\}, \{M\}$ et $\{T\}$ Vecteurs des efforts résultants de
membrane

I Introduction

Pour évaluer les états de contraintes, de déformation et les caractéristiques vibratoires dans la conception des produits, des pièces mécaniques et des structures, l'ingénieur doit décrire le comportement des systèmes physiques grâce à des équations aux dérivées partielles. Et vu la difficulté de résoudre ces équations, on a recours à des modèles qui permettent de simuler le comportement de ces systèmes physiques complexes. Parmi ceux-ci, on peut citer la méthode des éléments finis qui est une technique mathématique d'intégration des équations aux dérivées partielles mises sous forme variationnelles. Elle fait appel aux trois domaines suivants :

- Sciences de l'ingénieur pour construire les équations aux dérivées partielles.
- Méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques.
- Programmation et informatique pour exécuter efficacement les calculs sur ordinateur.

La méthode des éléments finis a connu plusieurs développements depuis son apparition en 1956, plus exactement après les publications de Turner, Clough, Martin et Topp [1] qui ont introduit le concept d'élément fini et le travail de Argyris, et Kesly [2] qui systématisa l'utilisation de la notion d'énergie dans l'analyse des structures.

Dès 1960 cette méthode subit un développement rapide dans plusieurs directions :

- la méthode des éléments finis est reconnue comme un outil général de résolution d'équations

aux dérivées partielles. Elle est donc utilisée pour résoudre des problèmes non stationnaires, non linéaires dans le domaine des structures ainsi dans d'autres domaines

- Une base mathématique de la méthode des éléments finis est construite à partir de l'analyse fonctionnelle.
- La méthode est reformulée, à partir de considérations énergétiques et variationnelles, sous la forme générale de résidus pondérés.

Les structures complexes que l'on étudie couramment sont constituées de sous-ensembles géométriques les plus divers, barres ou poutres, plaques ou coques ou parties massives ; pour chacun de ces constituants on dispose de la théorie exacte de l'élasticité, qui constitue la base fondamentale de leur étude. Ces structures complexes constituent à vrai dire un milieu continu, et le concept d'élément fini est basé sur la subdivision de ce dernier en sous-domaines de forme géométrique simple que l'on appelle « éléments finis », interconnectés en des points remarquables appelés « nœuds ». De plus, on définit dans chaque élément une

approximation adéquate permettant de résoudre le problème uniquement en fonction des valeurs des inconnues aux nœuds.

La construction d'un élément fini implique de nombreux choix :

- Forme géométrique
- Nœuds (nombre, emplacement)
- Nombre de degrés de liberté (nature, nombre et type par nœuds)

- Fonctions d'interpolation.

Ces choix sont, en outre, soumis à certaines contraintes :

- Propres à la méthode des éléments finis, critères des convergences
- Liées à la modélisation, c'est-à-dire à la théorie attachée ou retenue pour analyser la structure.

Ces choix sont responsables de la qualité des résultats, dont ils soulignent –une fois de plus le caractère d'approximation-, et constituent donc le problème clé de la M.E.F.

I - 1 Modélisation et discrétisation

La méthode des éléments finis est donc une procédure générale de discrétisation pour la résolution des problèmes des milieux continus. Donc pour avoir une analyse numérique qui simulera au mieux un problème il faut effectuer deux opérations essentielles la modélisation et la discrétisation, ces opérations se font en deux temps.

- La modélisation
- La discrétisation ensuite

et portent sur les deux aspects principaux du problème pratique.

- Représentation de la géométrie, des charges , des conditions aux limites
- Choix des éléments finis et du maillage.

Ici on explique ces opérations en considérant le problème pratique de l'étude d'une structure, au sens large.

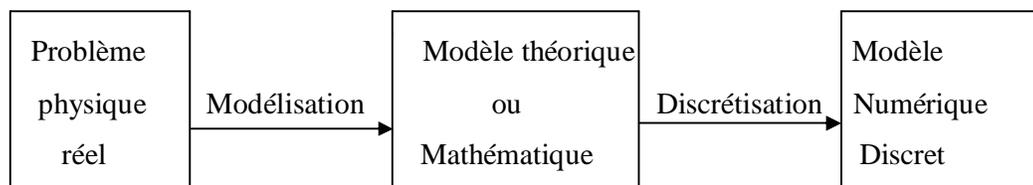


Fig. I-1 Etape de l'analyse d'un problème aux limites

I-2 Importance de la modélisation

La modélisation est l'étape clé de toute analyse, elle consiste à rattacher la structure réelle à un modèle connu de la mécanique des solides, structures et matériaux qui est capable d'en décrire le fonctionnement avec une précision convenable. Donc pratiquement la modélisation consiste :

En ce qui concerne la structure, à ramener cette dernière à une géométrie en choisissant des axes (barre, poutre câble), des plans (parois, plaques coques), des volumes (solides) après avoir éliminé certains détails (gousset, petites excentricités), à choisir la théorie la plus appropriée à cette géométrie pour définir les conditions d'appuis et les charges.

Choisir de façon réaliste les lois constitutives des matériaux décrivant aussi bien les réponses mécaniques classiques, (linéaires anisotropes discontinuité) que les phénomènes physiques (teneur en eau, discontinuité, perméabilité), à déterminer les propriétés qui définissent ces lois et à connaître l'état initial des matériaux (contraintes initiales).

I-3 Discrétisation d'une structure mathématique

La discrétisation fournit un modèle numérique à partir du modèle mathématique, donc l'opération de discrétisation est aussi importante que celle de la modélisation. Pour discrétiser, on subdivise la structure en éléments dont les caractéristiques et la forme dépendent de la modélisation.

La principale difficulté de la méthode des éléments finis se situe au niveau de la formulation des éléments (forme de l'élément, nombre de nœuds et de degré d'interpolation)

I-4 Modèles d'élément finis : [7]

a) Champs interpolés

Le plus souvent, les champs interpolés sont ceux des déplacements ou des contraintes, plus rarement celui des déformations. Ces interpolations portent sur tout l'élément, ou sur une partie de celui-ci, à l'intérieur ou sur la frontière. Selon la combinaison choisie, on peut créer divers types, dit modèles d'élément finis. Les plus courants sont les suivants :

b) Modèle déplacement

Les éléments finis de cette catégorie sont basés sur une interpolation du champ des déplacements étendue à tout l'élément, il en résulte que les déplacements sont déterminés de manière détaillée et unique dans la structure, alors que les contraintes ne peuvent être connues que par certains moyens et ne sont pas continues aux frontières. Le modèle déplacement est le plus populaire, le plus connu et le plus développé. Dans ce modèle, les

fonctions de déplacements sont choisies en utilisant le triangle de pascal , de telle sorte que le nombre total de constantes indépendantes soit égal au nombre total de degrés de libertés de l'élément, donc l'invariance géométrique est maintenu

c) Modèle équilibre ou contrainte

A l'inverse du précédent, un tel élément est construit à partir d'une approximation du seul

champ des contraintes. La connaissance des contraintes est alors détaillée, celle des déplacements sommaire. Ce modèle est rarement employé, car il conduit en général, à qualité égale, à un plus grand nombre d'inconnues que le modèle déplacement.

d) Modèle mixte

Ce modèle est basé sur des approximations indépendantes de deux ou plusieurs champs (déplacements, déformations, contraintes) étendues à tout l'élément ; en général, ce modèle conserve les paramètres inconnus de tous les champs comme degrés de liberté ; la mise au point peut être longue et coûteuse ; il peut toutefois être d'excellente qualité.

Le modèle mixte est parfois utilisé pour corriger certains défauts du modèle déplacement : on interpole, par exemple, certaines composantes internes de la déformation pour améliorer la précision au niveau des contraintes ; les paramètres correspondants peuvent alors être éliminés par condensation, de sorte que l'élément reprend l'aspect d'un modèle déplacement.

e) Model hybride

Il est basé sur deux interpolations à priori indépendantes, l'une portant sur un champ à l'intérieur de l'élément, l'autre sur un champ touchant la seule frontière. Dans cette formulation, les paramètres indéterminés du champ interne sont exprimés en fonction des paramètres nodaux du champ défini sur la frontière en cherchant à minimiser la différence entre les deux champs.

Si le champ de bord est de type déplacement, l'élément hybride a le même aspect extérieur et les mêmes degrés de liberté nodaux qu'un élément du modèle déplacement .Le modèle hybride le plus ancien, dit hybride – contrainte, combine un champ interne auto équilibré de contraintes avec un champ de déplacement à la frontière. Le modèle hybride le plus récent, dit Hybride – Trefftz, utilise deux champs indépendants de déplacements : un champ interne qui vérifie rigoureusement la forme forte du problème, mais viole la compatibilité, et un champ défini sur la frontière de l'élément.

Le modèle hybride fournit d'ordinaire de meilleurs résultats que le modèle déplacement surtout au niveau des contraintes. Le modèle hybride – Trefftz , en particulier, peut être le plus précis parmi les éléments finis actuellement connus.

f) Modèle déformation

Pour obtenir une convergence satisfaisante, les éléments dérivant de l'approche déplacement exigent un grand nombre d'éléments dans le maillage des structures. Par conséquent, l'approche basée sur le modèle déformation a été développée, pas seulement pour les éléments courbés mais aussi pour les structures plates. L'approche est basée sur le calcul des termes exacts qui représentent tous les modes du corps rigide, les autres composantes des fonctions de déplacements sont basés sur la forme des fonctions de déformations indépendantes. Au fur et à mesure qu'on vérifie les équations de compatibilité, ce modèle permet de proposer des champs de déformations en fonction de paramètres propres à la structure (coefficient de poisson par exemple) tout en vérifiant les équations d'équilibre. Cette approche mène, généralement, à la représentation des déplacements par un polynôme d'ordre élevé sans avoir besoin de degrés de liberté additionnels (internes et inutiles). Une convergence plus rapide est obtenue habituellement quand les résultats sont comparés avec les éléments du déplacement correspondant, c'est-à-dire, éléments en déplacement qui ont le même nombre total de degré de liberté.

I-5 Critères de convergence [7]**I-5-1 Introduction**

Dans la méthode des éléments finis, il existe deux types de convergence :

- La convergence « h », par raffinement du maillage sans modification de l'interpolation
- La convergence « p » par enrichissement de l'interpolation sans modification du maillage.

I - 5-2 Convergence « h »

Considérons un maillage d'éléments finis Fig.I-2 et appelons h la dimension caractéristique d'un élément (longueur du plus grand coté, diamètre du cercle circonscrit). On subdivise toujours davantage le domaine en éléments toujours plus petits, chaque nouvelle division contenant la précédente, conservons pour les éléments de même type, constamment la même approximation du champ. On appelle critères de convergence les conditions que l'interpolation doit respecter pour que la solution approchée tende vers la solution exacte quand la taille des éléments finis tend vers zéro

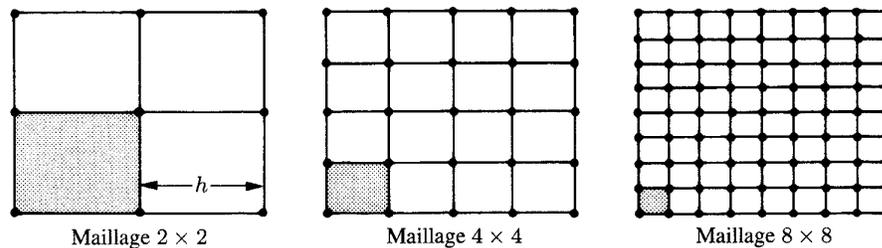


Fig. I-2 Subdivision plus poussée pour étudier la convergence h

I-5-3 Convergence « P »

Partant d'un maillage donné d'éléments finis et appelons p le degré des polynômes utilisés pour l'interpolation. On conserve le maillage choisi et on enrichit le champ approché des éléments en augmentant le degré de p .

Alors, si les critères de convergences sont satisfaits, la solution approchée tend vers la solution exacte lorsque le degré de l'interpolation p tend vers l'infini. C'est la technique de la convergence p .

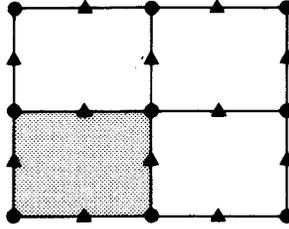


Fig. I-3 Augmentation du degré de l'interpolation pour étudier la convergence p

- Nombre fixe d'inconnue ($p=1$)
- ▲ Nombre variable k d'inconnues ($k=1, p=2 ; k=2, p=3 \dots\dots$).

Comparaison

- Dans la convergence h , le type de l'élément ne change pas ; par contre, le nombre des éléments et le nombre des degré de liberté s'accroissement constamment, et il faut continuellement reconstruire le maillage.
- Dans la convergence p , le nombre d'élément et le maillage restent fixes, mais le nombre d'inconnues par élément augmente sans cesse et les caractéristiques k et f des éléments changent continuellement.
- la convergence h teste les propriétés de convergence d'un élément fini donné. On doit passer par elle lors de la mise au point de tout élément fini. C'est la première qui fut utilisée dans la méthode des éléments finis.
- La méthode p est plus récente. Généralement elle est plus précise que la convergence h . Mais elle nécessite de disposer d'éléments finis dont on peut faire varier le degré p de l'interpolation ; de telles familles sont loin d'être toujours disponibles.

I-5-4 Critère de convergence -Point de vue physique

Si le point de vue physique donne une justification essentiellement intuitive des critères de convergence, il en fournit aussi une compréhension concrète très utile dans le cadre de l'application de la méthode des éléments finis au calcul des solides et, surtout, des structures.

Critère -1

Continuité ou conformité ou compatibilité cinématique

L'interpolation doit être telle que le champ des déplacements soit

- continu et dérivable dans les éléments .
- continu à travers les frontières .

a première condition prévient l'emploi de fonctions présentant des discontinuités (arêtes , sauts...) et garantit de pouvoir calculer les dérivées nécessaires de forme faible.

Par la seconde condition, les déplacements doivent être continus en tout point des frontières séparant des éléments .Or, à la frontière de deux éléments adjacents, les déplacements ne sont à priori égaux qu'aux seul nœuds communs ; le critère exige donc de garantir la continuité des déplacements tout le long de la frontière en fonction des seules valeurs nodales. Cette condition peut être délicate à satisfaire dans la méthode des éléments fini .Les éléments qui la respectent s'appellent éléments conformes

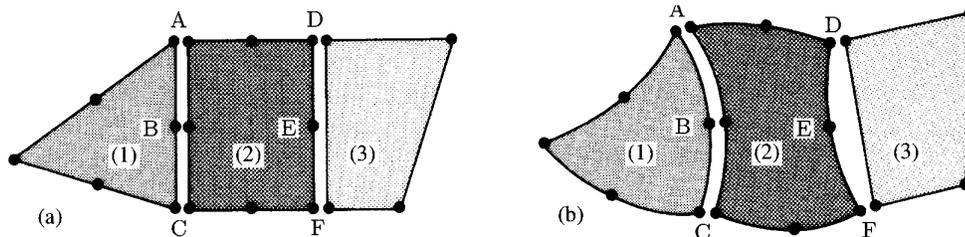


Fig. I-4 Les éléments plans 1 et 2 sont conformes le long de A B C si les trois nœuds et les deux courbes coïncident exactement en configuration (a) initiale et (b) déformée (par exemple : parabole ;entre les éléments (2) et (3) la continuité est violée le long de D E F si les deux nœuds D et F de (3) ne peuvent définir qu'une droite

Remarque

- Le critère 1 garantit –en particulier –qu'on peut calculer les intégrales nécessaires (travail virtuel interne δW_{int}) : elles ne contiennent aucun terme nul (suite à la dérivation) ou infini (en particulier sur les frontières). Il est alors licite d'affirmer qu'une intégrale sur Ω est la somme de celles sur tous les éléments finis Ω_e (assemblage).

$$\int_{\Omega} (...)d\Omega = \sum \int_{\Omega_e} (...)d\Omega$$

Cette égalité est essentielle :elle justifie le choix de l'interpolation par morceaux, typique de la méthode des éléments finis .

On peut se représenter le découpage en éléments finis comme un ensemble de pièces s'appuyant les unes sur les autres , puisque les conditions aux limites essentielles –aux appuis –sont de même nature que celles des éléments , la condition de continuité aux frontières impose en fait le respect des conditions aux limites essentielles à la frontière des éléments .

La frontière entre deux éléments finis peut être un nœud, un bord ou une face , la continuité triviale en un nœud (élément 1-D) ; est plus délicate le long d'un bord ou sur une face la continuité aux frontières devient particulièrement difficile à satisfaire si non seulement les déplacements (de translation), mais aussi leurs dérivées (pente) doivent être continues.

Critère 2

Critère des déformations constantes (ou complétude)

L'interpolation doit permettre de représenter :

- Les états de déplacements constants ou modes rigides
- Les états de déformation constante .

La première condition est évidente : l'élément fini doit pouvoir se déplacer en bloc, comme un corps rigide ,de telle sorte qu'aucune contrainte (ou déformation) n'y naisse (voir fig.1-5)

La seconde est de même nature, mais doit en réalité être comprise de manière aiguë : quand un élément fini devient de plus en plus petit, ses déformations tendent vers des valeurs constantes ; pour assurer la convergence , il est donc indispensable que l'interpolation puisse les représenter.

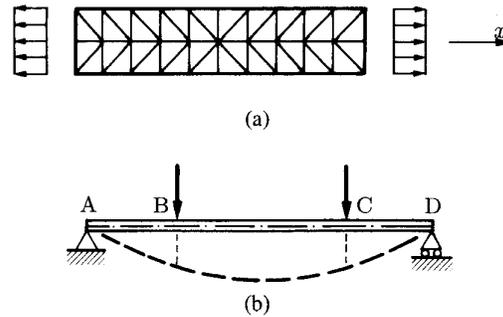
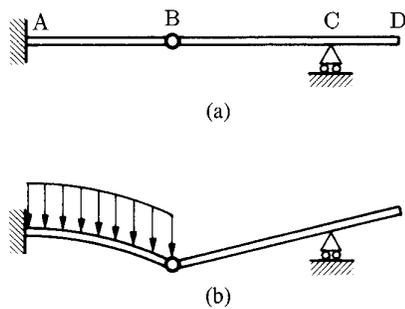


Fig.I-5 Mode rigide :(a) Configuration initiale ; (b)configuration déformée: B C D se sans se déformer (rotation rigide) .

Fig. I-6 Déformation constante : (a) essai de traction : $\epsilon_x = cste$; (b) flexion pure entre B et C $Y = cste$.

Remarque :

Les modes rigides sont de deux natures : petite translation et petite rotation.

Qui dit mode rigide dit déformation nulle ; la première condition est donc un cas particulier de la seconde, et le critère 2 ne peut se formuler qu'en déformation.

I-5-5 Assouplissement des critères

Les critères de convergences précédents sont nés en 1965 de l'application de la méthode des éléments finis aux calculs des structure .Ils garantissent une convergence monotone de la solution numérique vers la solution exacte .On s'est ensuite aperçu que, sous certaines conditions , ils pouvaient être assouplis (au détriment du caractère monotone de la convergence toutefois) En particulier, la convergence a encore lieu si les critères sont satisfaits à la limite , c'est-à-dire quand la taille des éléments finis tend vers zéro.

Dans le premier critère, cela signifie que la condition de continuité entre éléments peut être légèrement relaxée; les éléments finis qui présentent de légers défauts de continuité aux frontières sont dits non conformes.

Ces nouvelles données apportent un peu de liberté supplémentaire pour construire des éléments finis. Elle ont permis d'en sauver quelques-uns, qui paraissaient douteux . Aujourd'hui ,elles sont souvent employées pour améliorer les performances de certains éléments.

I-5-6 Convergence des éléments finis non conformes et patch test

Pour converger, un élément fini non conforme doit à la limite, restaurer la parfaite continuité aux frontières. Cette propriété est acquise si la continuité aux frontières est rigoureusement satisfaite pour tous les états de déformation constante (nulle ou non). Cette condition est difficile à vérifier analytiquement, lors de la construction d'un élément fini. Elle peut être remplacée par un test numérique appelé Patch test. Considérons diverses subdivisions irrégulières d'un domaine de forme simple voir (Fig. I-7) ; on impose aux limites (nœuds du pourtour Γ). Des appuis extérieurs produisant tour à tour les divers états de déformation constante possibles (par exemples, en élasticité plane, en poutre continue,

$$u = \text{cste} ; \epsilon_X = \text{cste} ; \gamma_{XY} = \text{cste} ;$$
$$v = \text{cste} ; \dots \Psi = \text{cste} ; \text{ect}).$$

Le patch test est satisfait si on trouve partout ,en particulier aux nœuds internes, la solution théorique exacte.

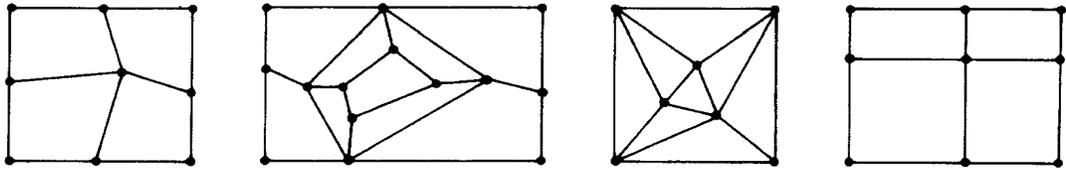


Fig. I-7 Subdivision en quadrilatères ou triangles ou rectangles en vue d'un patch test

Remarque :

- Il n'y a pas de paradoxe : la présence des états de déformations constant dans un élément isolé ne garantit pas cette même présence dans un groupe d'éléments (patch), si ces éléments sont non conformes .
- On constate une interaction de critères 1 et 2, le second se montrant finalement plus exigeant que le premier. Au fond, le patch test est une vérification de Critère 2 (via un groupe d'élément).

I-5-7 Critère de convergence – Un rien plus mathématique

5-7-1 Quelques rappels et définitions :

On dit qu'une fonction a la continuité C^r , ou est de classe C^r , si elle est continue ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre r , une fonction C^0 est simplement une fonction continue voir Fig.(I-8). Considérons en particulier le cas du point anguleux A d'une fonction C^0 Fig.(I-8 a). La première dérivée y présente un saut voir fig.(I-8 b) ; pour savoir avec plus de précision ce qui se passe en A, imaginons une petite bande de largeur Δx dans laquelle on réalise une transition régulière entre les valeurs à gauche et celles à droite (en trait pointillé). On constate que les valeurs de la fonction et de sa première dérivée restent finies en A lorsque $\Delta x \rightarrow 0$, alors que les dérivées d'ordre supérieur tendent vers l'infini fig.(I-8 c).

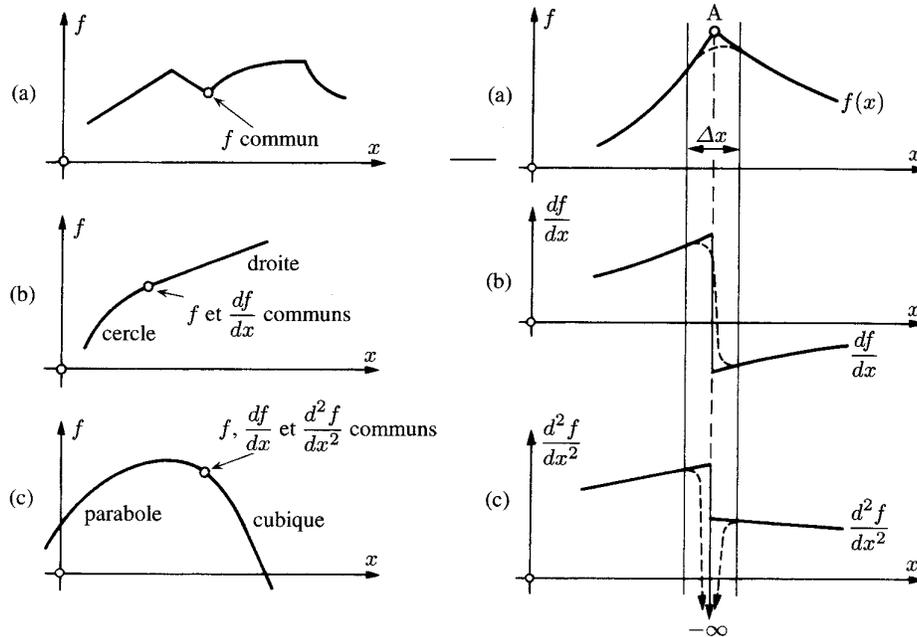


Fig.1-8 Fonction (a) C^0 .(b) C^1 .(c) C^2 . Fig.1-9 Dérivées aux voisinage du Point de rencontre de deux fonctions avec pente discontinue

Un polynôme est dit complet au degré P si toutes les puissances q, avec

$0 < q < p$, Y sont représentées ;par exemple :

$a_1 + a_2x + a_3y + a_4 x^2 + a_5 x y + a_6 y^2 + a_7x^3 + a_8xy + a_9 xy^2 + a_{10} y^3$ est complet en x et y au degré $p=3$.

Critère 1

Critère de continuité : L'interpolation du champ des déplacements doit être au moins

- 1- de classe C^m dans l'élément
- 2- de classe C^{m-1} au droit des frontières .

La première condition garantit :

- L'emploi de fonction d'interpolation suffisamment régulières (pas de sauts, discontinuité ...) et dérivable dans l'élément fini ;
- La valeur non nulle des intégrales de la forme faible (puisqu'elle contient des dérivées d'ordre m)

La seconde assure que, tout le long des frontières ,

- Les déplacements sont continus,

- Les dérivées du plus haut rang (ordre m) présentent, au pire, un saut fini voir (Fig. I-9) et ne prennent pas en particulier, des valeurs infinies voir (Fig.I-8). Alors, essentiellement l'équation d'assemblage est licite

Remarques

Les dérivées d'ordre m sont concrètement, les déformations (les déformations apparaissent dans la forme faible en dérivant m fois les déplacements).

D'un élément fini à un autre, les déplacements seuls sont continus, pas leurs dérivées d'ordre m et plus voir (Fig. I-10) par suite, ni les déformations, ni les contraintes ne sont continues entre les éléments

- a) cas $m = 1$, élément d'élasticité plane dans chaque élément, classe C^1 :

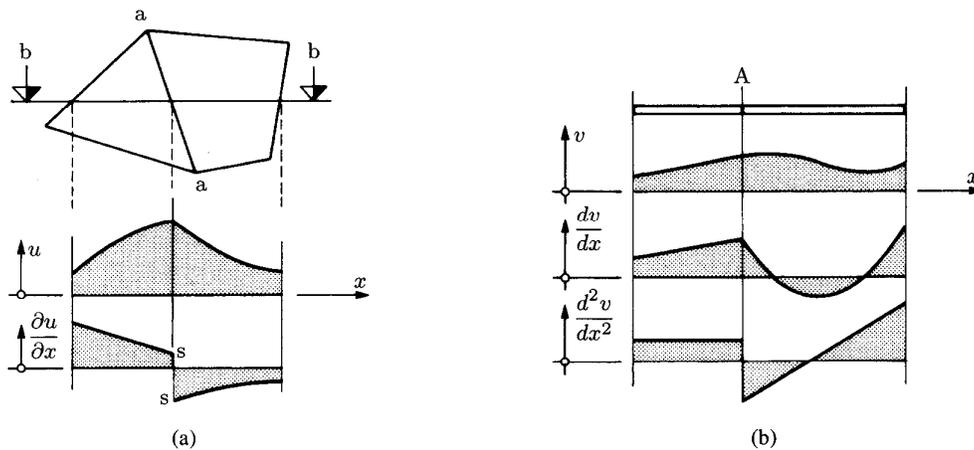


Fig.I-10 Illustration du critère de continuité a) deux éléments d'élasticité plane ayant une frontière a-a en commun ; b) deux éléments de poutre ayant un nœud A en commun

- a) Cas $m = 1$: élément d'élasticité plane :

- dans chaque élément, classe C^1 u est continu et dérivable une fois (coupe b-b) ;
- à travers la frontière a-a, continuité C^0 : le champ inconnu u est continu mais pas sa dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}$.

- b) $m=2$ poutre continue : -

- dans chaque élément, de classe, C^2 : v continu et deux fois dérivable.

- à travers la frontière A, Continuité C^1 : v et $\frac{dv}{dx}$ sont continus, mais pas nécessairement $\frac{d^2v}{dx^2}$.

Critère 2

Critère de complétude :

Le champ approché et ses dérivées jusqu'à l'ordre m doivent pouvoir prendre des valeurs constantes arbitraires dans l'élément. L'interpolation doit contenir tout terme polynomial de degré inférieur ou égal à m .

Le polynôme doit être complet au degré m au moins ($p \geq m$).

Un tel polynôme est aussi de classe C^m

I-6 Plan de la thèse

Le domaine de génie civil a très bien su comment profiter de ce nouvel outil qui est l'informatique qui permet de faciliter le mieux possible le travail des ingénieurs et techniciens surtout dans le domaine de calcul des structures en utilisant diverses techniques dont la plus utilisées est la méthode des éléments finis .

Le présent travail a pour objectifs principaux l'approfondissement de la théorie de la méthode des éléments finis ainsi que la maîtrise des techniques de programmation par l'élaboration d'un programme d'analyse linéaire des éléments membranaires, et des éléments en plaques.

Pour aboutir à ces objectifs, on a structuré notre travail en cinq chapitres.

1. Le premier chapitre est une introduction générale, qui comprend l'aspect historique des éléments présentés, et les différents types de modèles d'éléments finis, et les critères de convergence.
2. le deuxième chapitre est consacré à la théorie d'élasticité et quelques théorèmes énergétiques.
3. Le troisième chapitre est consacré aux différentes étapes de formulation d'éléments finis membranaires de type déplacement à quatre, huit, et neuf nœuds ainsi qu'à un élément du type hybride, l'élément de Pian Sumihara baptisé Q4PS.
4. Dans le quatrième chapitre, on présente une formulation des éléments plaques, éléments de Mindlin-Reissner (éléments à 4, 8 et 9 nœuds et élément hétéroisis) ainsi que les éléments avec cisaillement transversal, élément Q4 γ .
5. Le cinquième chapitre est consacré aux tests de validation des éléments ainsi qu'à l'expérimentation numérique et à l'interprétation des résultats obtenus.

Une conclusion générale est enfin présentée ainsi des recommandations pour de futurs travaux..

III-Eléments Membranaires**III -1 Introduction**

Le concept de la méthode des éléments finis fut originalement introduit pour l'analyse des structures dans les années 50. Le terme « Élément » fut pour la première fois utilisé dans un article publié par Clough [2] dans les années 60 où la technique fut développée pour l'analyse des contraintes planes. Dès lors, la méthode a connu une progression tellement rapide, qu'elle est devenue l'un des outils les plus puissants disponibles pour l'analyse des structures. Il a été aussi reconnu que c'est une méthode numérique générale pour la résolutions des équations différentielles partielles avec des conditions aux limites connues et a par la suite été appliquée à d'autres problèmes physiques autres que ceux de la mécanique des structures, par exemple : les problèmes de mécanique des fluides, électromagnétiques etc.

La méthode des éléments finis est une procédure générale de discrétisation pour la résolution des problèmes des milieux continus. La structure est subdivisée en des régions fines appelées « Eléments », chaque élément possède un nombre inconnu de paramètres qui approchent les valeurs des variables du champ qui définissent le problème. Ces variables du champ peuvent être des scalaires, des vecteurs ou des tenseurs de plus haut degré. Ces éléments sont connectés entre eux par des points existants sur leurs frontières où la continuité et la compatibilité des variables du champ sont requises. Un ensemble de fonctions est choisi pour définir la variation des variables du champ au sein de chaque élément en fonction des valeurs nodales inconnues. Ces valeurs nodales, en mécanique des structures peuvent être des déplacements, des contraintes ou les deux. Ce qui a donné naissance à la méthode des déplacements, la méthode des forces et la méthode hybride.

La méthode des déplacements est la plus largement utilisée en raison de la simplicité de sa formulation, bien que les inconditionnels de la méthode hybride clament qu'elle est aussi simple à formuler et peut être plus exacte.

La méthode des éléments finis est unique du fait qu'elle est capable de formuler les propriétés de chaque élément individuel de n'importe quel type de problème avec cependant un grand effort numérique et de programmation.

Pour des structures comportant un grand nombre d'éléments et de nœuds, de larges systèmes d'équations sont obtenus, mais avec le développement de techniques de

résolution bien établies et la disponibilité d'ordinateurs de plus en plus puissants, la résolution de ces équations est aisée.

III-2 Les étapes de base de la méthode des éléments finis.

Les différentes étapes pour l'application de la méthode des éléments finis seront décrites d'une manière générale.

III-2-1 Choix du type d'élément et discrétisation

La première étape consiste à choisir le type d'élément le plus adapté au problème donné et à ensuite discrétiser le milieu continu en un certain nombre d'éléments. En général, les points suivants sont à prendre en considération la sélection du type d'élément.

a) Type d'élément

La sélection de l'élément sera fonction du type de problème à résoudre, généralement ils sont groupés en quatre classes :

- 1- contraintes planes ; déformations planes ; axisymétrique (problème à deux dimensions)
- 2- flexion des plaques
- 3- coques
- 4- analyse des solides tri dimensionnels.

Dans chaque groupe différents niveaux de précision peuvent être atteints. Ceci dépend du nombre de degrés de liberté associés avec le type d'élément. Les points nodaux se trouvent généralement sur les frontières des éléments bien que des nœuds internes peuvent aussi être inclus dans certains éléments pour augmenter leur efficacité. Généralement, avec l'augmentation de l'ordre de l'élément, celui ci devient plus précis et plus coûteux. Cependant certaines conditions doivent être satisfaites dans la sélection du type d'élément pour assurer une bonne convergence (convergence vers la solution exacte). Ces conditions sont :

le champ des déplacements à l'intérieur de l'élément doit être continu.

- Le modèle du déplacement doit inclure un état de déformation constante (l'élément doit être capable de reproduire un champ de déformation constante, si les déplacements nodaux le requièrent).
- L'élément doit être capable de reproduire un mouvement de corps rigide : par exemple quand les degrés de liberté nodaux correspondent à un

mouvement de corps rigide, l'élément doit avoir une déformation égale à zéro et des forces nodales nulles. Ceci est un cas particulier du critère de la déformation constante.

L'élément doit être compatible, il ne doit pas y avoir de vide entre deux éléments. L'élément qui ne remplit pas cette condition est dit incompatible ou non conforme. Cependant un élément incompatible peut être valide et sa convergence maintenue si les incompatibilités disparaissent en augmentant le maillage et si l'élément se rapproche d'un état de déformation constante.

L'élément n'a pas une direction privilégiée, c'est-à-dire que l'élément doit être géométriquement invariant et donne les mêmes résultats pour n'importe quelle orientation de l'élément.

b) Taille de l'élément

En général plus le maillage est fin plus les résultats obtenus sont meilleurs, mais en même temps un grand effort de programmation est requis. Le nombre d'éléments utilisés sera fonction du type de la structure à analyser, mais généralement plus d'éléments sont requis dans les régions où les contraintes varient rapidement que dans les régions où elles varient graduellement. Cependant pour les éléments complexes les maillages grossiers donneront des résultats aussi bons que ceux des maillages fins ayant des éléments simples.

c) Aspect du rapport de l'élément.

Pour l'élément bidimensionnel l'aspect du rapport est défini comme étant le rapport de la plus grande dimension à la plus petite dimension. Le rapport optimal dans n'importe quelle position dans le maillage dépend largement de la différence du taux de variation des déplacements dans différentes directions. Par exemple si les déplacements varient avec le même taux dans chaque direction, plus le rapport tend vers l'unité, plus la qualité de la solution est meilleure. Dessé [] a fait une étude en utilisant différents rapports pour l'analyse des poutres en flexion. Il a utilisé un élément rectangulaire à 4 nœuds, et a trouvé que quand le rapport tend vers l'unité, la précision était meilleure.

III-3 Fonctions de forme

La fonction de forme définit la variation des variables des champs, et ses dérivées à travers l'élément en fonction des valeurs nodales. Par conséquent, les fonctions de forme sont intimement liées au nombre de nœuds et donc au type d'élément. Souvent des polynômes sont choisis comme fonctions de forme car ils sont relativement simples à manipuler mathématiquement, surtout en ce qui concerne l'intégration et la dérivation. Cependant, Les degrés des polynômes sont choisis en fonction du nombre de nœuds et du nombre de degrés de liberté associés à l'élément

$$U = N \cdot d \quad (3-1)$$

$$U = \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

$$U = N_1 \cdot d_1 + N_2 \cdot d_2 \quad (3-3)$$

N fonction de forme

$$N = \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad (3-4)$$

III – 4 Propriétés de l'élément.

Après avoir établi le modèle en éléments finis (une fois le type d'élément et ses fonctions de forme choisis), les propriétés de l'élément doivent être déterminées. Ces dernières sont représentées sous forme de matrices et seront fonction des paramètres nodaux et des propriétés des matériaux de l'élément. Parmi ces matrices on peut citer les matrices de déformations et de contraintes qui définissent les déformations et les contraintes en un point spécifique de l'élément en terme des déplacements nodaux, et la matrice d'élasticité qui est utilisée pour relier les contraintes aux déformations en certains points.

Ces matrices sont combinées pour définir la matrice de rigidité qui représente une partie de l'équation de base régissant le comportement général de l'élément. Cette équation exprime la relation entre déplacement et les forces aux nœuds de l'élément.

$$\{ F_e \} = [K_e] \{ u_e \} \quad (3-5)$$

$\{ F_e \}$: vecteur forces

$[K_e]$: matrice de rigidité de l'élément

$\{ u_e \}$: vecteur déplacement inconnue.

Cette équation est générale et est valable pour tout élément. Pour dériver cette équation deux principaux concepts sont généralement :

- méthodes énergétiques
- méthode des résidus pondérés.

III- 5-Assemblage des propriétés de l'élément

Les propriétés de l'élément doivent être assemblées afin d'exprimer le comportement de la solution entière du système ou en d'autres termes les équations matricielles doivent être combinées d'une certaine manière. Dans la méthode des déplacements le processus d'assemblage est basé sur les lois de compatibilité et d'équilibre. Il est requis que le corps solide reste continu, ce qui impose que les points voisins doivent rester au voisinage de chacun après application des charges. Aussi les déplacements de deux points adjacents doivent avoir les mêmes valeurs afin que la compatibilité soit satisfaite. L'équation matricielle du système a la même forme que les équations individuelles des éléments sauf qu'elle contient les termes associés avec tous les noeuds. Cette équation est ensuite modifiée pour tenir compte des conditions aux limites.

III-6 Eléments iso paramétriques

III - 6-1 Introduction

La famille des éléments iso paramétriques a été introduite par Taig et Iron. Elle est appelée iso paramétrique car les mêmes fonctions d'interpolations sont utilisées pour définir aussi bien la variation des déplacements de l'élément que sa géométrie.

La procédure de base consiste à exprimer les coordonnées de l'élément et ses déplacements par des fonctions exprimées en termes de coordonnées naturelles de l'élément. Un système de coordonnées naturelles est un système local défini par la géométrie de l'élément et non pas par son orientation dans le système global. De plus

ces systèmes sont habituellement arrangés de telle manière à ce que les coordonnées naturelles aient la valeur unité à la première limite externe.

Différentes familles d'éléments iso paramétriques basées sur des hypothèses de contraintes ont été proposées (élément iso paramétrique aux contraintes). Dans ce cas les fonctions de formes représentent la variation des contraintes à travers l'élément. Cependant ces éléments ne sont pas largement utilisés. Dans notre travail on utilisera les éléments iso paramétriques basées sur les déplacements.

III-6-2 Les raisons d'utilisations des éléments iso paramétriques :

Pour un nombre de degrés de liberté donné, les éléments iso paramétriques complexes sont largement plus précis que les éléments simples avec un effort de programmation moindre bien que la formulation des éléments complexes nécessite plus de temps.

1. L'intégration numérique permet une évaluation directe des caractéristiques des éléments courbes et complexes
2. La description simultanée de la géométrie et de la variation des déplacements par les mêmes fonctions de forme conduit à un effort de programmation réduit.
3. . Le fait d'avoir des bords courbes indique la nécessité d'avoir des maillages fins dans les régions où les côtés sont courbes. Cependant, dans certains cas l'utilisation d'un nombre réduit d'éléments complexes peut s'avérer inadéquate pour représenter correctement toutes les géométries d'un problème particulier. .
4. En élasticité linéaire, pour l'élément iso paramétrique à 8 nœuds, le champ des déplacements n'est pas influencé d'une manière significative pour des rapports de l'élément allant de 0.5 et 1.0

III- 6-3 Élément iso paramétrique à 4, 8 et 9 nœuds :

Fonctions de forme

$N_i(x, h)$ sont les fonctions de forme dans le système de coordonnées curvilignes (x, h) . ($i = 1, 4$ $i = 1, 8$ et $i = 1, 9$ pour les éléments à 4, 8 et 9 nœuds respectivement). Ces fonctions de forme pour les éléments à 4 et 8 nœuds

appartiennent à la famille Serendip alors que l'élément à 9 nœuds est un élément Lagrangien. Les propriétés de ces fonctions de forme sont

$$N_i = 1 \text{ si } i = j$$

$$N_i = 0 \text{ si } i \neq j$$

Pour un élément quadrilatère à quatre nœuds les fonctions de forme sont définies en fonction des coordonnées paramétriques comme suit :

$$N_1 = \frac{(1-x)(1-h)}{4} ; \frac{\partial N_1}{\partial x} = -\frac{(1-h)}{4} ; \frac{\partial N_1}{\partial h} = -\frac{(1-x)}{4} \quad (3-6)$$

$$N_2 = \frac{(1+x)(1-h)}{4} ; \frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{(1-h)}{4} ; \frac{\partial N_2}{\partial h} = -\frac{(1+x)}{4} \quad (3-7)$$

$$N_3 = \frac{(1+x)(1+h)}{4} ; \frac{\partial N_3}{\partial x} = \frac{(1+h)}{4} ; \frac{\partial N_3}{\partial h} = \frac{(1+x)}{4} \quad (3-8)$$

$$N_4 = \frac{(1-x)(1+h)}{4} ; \frac{\partial N_4}{\partial x} = -\frac{(1+h)}{4} ; \frac{\partial N_4}{\partial h} = \frac{(1-x)}{4} \quad (3-9)$$

L'élément a deux degrés de libertés par nœud, les déplacements u_i et v_i soit au total 8 degrés de libertés. Ces déplacements aux points dans l'élément sont :

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{i=4} N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}) u_i \quad (3-10)$$

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{i=4} N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}) v_i \quad (3-11)$$

il convient de noter que les déplacements u et v sont parallèles aux axes de coordonnées x, y et non pas aux axes x, h . De la même façon la position d'un point dans l'élément en coordonnées globales est donnée par :

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}) x_i \quad (3-12)$$

$$y = \sum_{i=1}^4 N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}) y_i \quad (3-13)$$

$$\mathbf{X} = [\mathbf{N}]^T \cdot \mathbf{x} \quad \text{et} \quad \mathbf{U} = [\mathbf{N}]^T \cdot \mathbf{u} \quad (3-14)$$

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{N}]^T \cdot \mathbf{y} \quad \text{et} \quad \mathbf{V} = [\mathbf{N}]^T \cdot \mathbf{v} \quad (3-15)$$

Avec

$$[N]^T = 1/4 [(1-x)(1-h) ; (1+x)(1-h) ; (1+x)(1+h) ; (1-x)(1+h)] \quad (3-16)$$

La transformation de l'élément réel à l'élément de référence est assurée par la transformation suivante

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial h} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3-17)$$

$$[J] = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial h} & \frac{\partial y}{\partial h} \end{pmatrix} \quad (3-18)$$

ou $[J]$ est déterminé en fonction des coordonnées nodales de l'élément par

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i x_i}{\partial x} & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i y_i}{\partial x} \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i x_i}{\partial h} & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i y_i}{\partial h} \end{bmatrix} \quad (3-19)$$

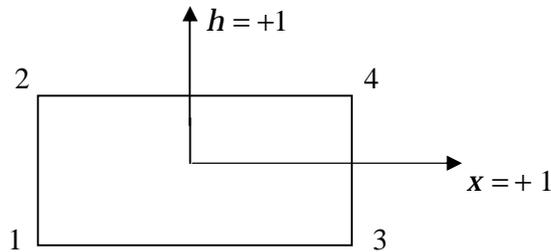


Fig. III-1 Quadrilatère à quatre noeuds

la transformation inverse est assurée par la matrice j telle que transformation suivante.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = [j] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial h} \end{bmatrix} \quad (3-20)$$

$[J]$ est dite matrice jacobienne

$[j]$ est dite matrice jacobienne inverse

III-6-4 Élément iso paramétriques à 8 noeuds

L'élément a deux degrés de liberté en chaque nœud, les déplacements u_i et v_i soit au total seize (16) degrés de liberté. Ces déplacements en un point à l'intérieur de l'élément sont donnés par :

$$U_i = \sum_{i=1}^8 N_i(x, h) u_i \quad (3-21)$$

$$V_i = \sum_{i=1}^8 N_i(x, h) v_i \quad (3-22)$$

de même la position d'un point au sein de l'élément en coordonnées globales est donnée par

$$X = \sum_{i=1}^8 N_i(x, h) x_i \quad (3-23)$$

$$Y = \sum_{i=1}^8 N_i(x, h) y_i \quad (3-24)$$

dans ce cas les fonctions de formes sont

$$N_1(x, h) = \frac{1}{4} (1-x)(1-h)(1+x+h) \quad (3-25)$$

$$N_2(x, h) = \frac{1}{4} (1+x)(1-h)(x-h-1) \quad (3-26)$$

$$N_3(x, h) = \frac{1}{4} (1+x)(1+h)(x+h-1) \quad (3-27)$$

$$N_4(x, h) = \frac{1}{4} (1-x)(1+h)(-x+h-1) \quad (3-28)$$

$$N_5(x, h) = \frac{1}{2} (1-x^2)(1-h) \quad (3-29)$$

$$N_6(x, h) = \frac{1}{2} (1-x)(1-h^2) \quad (3-30)$$

$$N_7(x, h) = \frac{1}{2} (1 - x^2) (1 + h) \tag{3-31}$$

$$N_8(x, h) = \frac{1}{2} (1 - x) (1 - h^2) \tag{3-32}$$

III -7 Evaluation des contraintes et des déformations.

Les déformations dans l'élément sont exprimées en termes des dérivées des déplacements.

$$\{\varepsilon\} = \{ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{xy} \} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\}^T \tag{3-33}$$

en remplaçant

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{u\} \tag{3-34}$$

$$\{u\} = \{ u_1, v_1 \quad u_2, v_2 \quad \dots \dots \dots u_i, v_i \quad u_n, v_n \}^T \tag{3-35}$$

vecteur déformation nodal de l'élément.

$$[B] = [B_1(x, h) \quad B_2(x, h) \quad \dots \quad B_i(x, h) \dots \dots \quad B_n(x, h)] \tag{3-36}$$

B = matrice de déformation.

$$B_i(x, h) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{3-37}$$

Du fait que les fonctions de forme N_i sont définies en termes de coordonnées curvilignes x et h , une transformation des coordonnées locales aux coordonnées globales est requise dans l'équation. Il est bien connu que les dérivées cartésiennes et curvilignes sont liées par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial h} \end{bmatrix} \quad (3-38)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = [J^{-1}] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial h} \end{bmatrix} \quad (3-39)$$

la relation contrainte – déformation

$$\{ \mathbf{S} \} = [D] (\{ \boldsymbol{\varepsilon} \} - \{ \boldsymbol{\varepsilon}_0 \} + \{ \mathbf{S}_0 \}) \quad (3-40)$$

$$\{ \mathbf{S} \} = \{ \mathbf{S}_{xx} \quad \mathbf{S}_{yy} \quad \mathbf{S}_{xy} \}^T \quad (3-41)$$

\mathbf{S}_0 Contrainte initiale. $[D]$ matrice d'élasticité. $\{ \boldsymbol{\varepsilon}_0 \}$ déformation initiale.

En général, le champ des contraintes est obtenu par substitution des équations

$$\{ \boldsymbol{\varepsilon} \} = [B] \cdot \{ \boldsymbol{\delta} \} \quad (3-42)$$

et

$$\{ \mathbf{S} \} = [D] (\{ \boldsymbol{\varepsilon} \} - \{ \boldsymbol{\varepsilon}_0 \} + \{ \mathbf{S}_0 \}) \quad (3-43)$$

on obtient

$$\{ \mathbf{S} \} = [D] ([B] \cdot \{ \boldsymbol{\delta} \} - \{ \boldsymbol{\varepsilon}_0 \}) + \{ \mathbf{S}_0 \} \quad (3-44)$$

III - 8 Matrice de rigidité de l'élément et évaluation des forces

La matrice de rigidité est déterminée en minimisant l'énergie potentielle totale. Dans cette méthode, l'énergie potentielle totale de la structure est définie en termes des inconnues nodales champs des variables, et est ensuite minimisée par rapport à ces mêmes inconnues nodales soumises à des conditions aux limites.

Quand l'énergie potentielle est minimale alors les conditions d'équilibre sont satisfaites.

Si l'énergie de déformation d'un élément est notée par p^e , et l'énergie potentielle imposée due aux forces extérieures est w , alors l'énergie potentielle totale est définie par :

$$P = \sum P^e + W \quad (3-45)$$

La condition de minimisation par rapport aux déplacements peut être écrite comme suit :

$$\frac{\partial P}{\partial \{d\}} = \sum \frac{\partial P^e}{\partial \{d\}} + \frac{\partial W}{\partial \{d\}} = 0 \quad (3-46)$$

la contribution de l'élément à cette énergie est

$$\frac{\partial P^e}{\partial \{d\}} = [K]^e \{ \delta \}^e + \{ F \}^e \quad (3-47)$$

$$[K]^e = \int [B]^T [D] [B] d v \quad (3-48)$$

$$\{ F \}_{e_0}^e = - \int_V [B]^T [D] \{ e_0 \} d v \quad (3-49)$$

$$\{ F \}_{s_0}^e = - \int [B]^T \{ s_0 \} d v \quad (3-50)$$

$$\{ F \}_P = \sum \{ F \}_P^e = \sum - \int_V [N_i(x, h)]^T \{ \bar{P} \} d v \quad (3-51)$$

$$\{ F \}_g = \sum \{ F \}_g^e = \sum - \int_A [N_i(x, h)]^T \{ g \} d A \quad (3-52)$$

avec $\{ \bar{P} \}$ charge répartie par unité de volume et $\{ g \}$ composante de pression pour les problèmes bidimensionnels $d v$ est égal $d v = t.d x d y$ avec t épaisseur de l'élément. la relation entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées curvilignes est

$d x.d y = \det[J] .d x d h$ où $\det[J]$ est le déterminant

Dans la méthode des éléments finis, le calcul de la matrice de rigidité $[K]$ et du vecteur des sollicitations élémentaires $\{ f \}$ par intégration explicite ne peut être effectué que pour les éléments les plus simples. Par ailleurs, l'intégration exacte peut soulever de sérieuses difficultés pour certains types de problèmes : c'est le cas des problèmes axisymétriques au voisinage de l'axe de révolution. Dans cette éventualité, mais également dans le cas d'éléments d'ordre élevé ou iso paramétriques courbes, l'intégration numérique doit être utilisée.

On a vu que

$$[K] = \int [B]^T [D] [B] d v \quad (3-53)$$

sur l'élément de référence cette intégrale devient

$$[K] = \int [B(x)]^T [D(x)] [B(x)] d v \quad (3-54)$$

$$[K] = \int [K^*] d v \quad (3-55)$$

où

$$[K^*] = [B(x)]^T [D(x)] [B(x)] \quad (3-56)$$

le terme $[K^*]$ est un polynôme ou une fraction rationnelle compliquée. Leur intégration n'est facile que s'il est constitué de termes polynomiaux. Il est en général préférable d'utiliser une intégration numérique de la forme :

$$[K] = \sum W_i [K(x_i)] \quad (3-57)$$

avec x_i : sont les coordonnées des r points d'intégrations :

W_i sont les coefficients de pondérations

Les principes des méthodes d'intégrations numériques utilisées pour le calcul seront exposées dans

III - 9 Formulation Hybride

III -9-1 Élément hybride de Pian Sumihara [12]

L'élément de Pian Sumihara est un quadrilatère à quatre nœuds .La dérivation de cet élément est séparée en deux parties, en premier lieu l'approximation des contraintes est établie en termes de polynômes linéaires exprimés en coordonnées naturelles. Dans la seconde partie du développement les interpolations des contraintes sont modifiées pour réduire l'effort de calcul requis pour établir la matrice de rigidité.

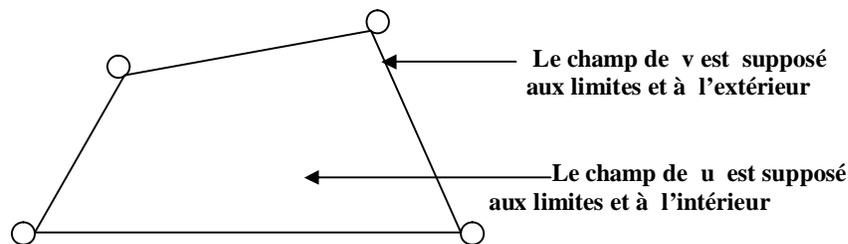


Fig. III-2 Le quadrilatère de Pian Sumihara

L'approximation de contraintes au sein de chaque élément est prise comme :

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1(\xi, \eta) \quad (3-58)$$

Où σ_0 est une constante à trois paramètres et

$$s_1 = \begin{Bmatrix} s_{1x}^1 \\ s_{1y}^1 \\ s_{1xy}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 x & a_2 h \\ b_1 x & b_2 h \\ g_1 x & g_2 h \end{Bmatrix} = N_s s^{-1} \sigma^1 \quad (3-59)$$

Par conséquent neuf paramètres définissent la variation des contraintes dans l'élément. Le champ des déplacements incompatibles est défini par quatre paramètres de u_λ comme suit :

$$u_i = N_\lambda(\xi, \eta) u_\lambda \quad (3-60)$$

$$N_i = \begin{bmatrix} (1-x^2) & 0 & (1-h^2) & 0 \\ 0 & (1-x^2) & 0 & (1-h^2) \end{bmatrix} \quad (3-61)$$

et les champs des déplacements à la frontière de l'élément sont supposés comme suit :

$$v = N_i(\xi, \eta) \quad (3-62)$$

où $N_i(\xi, \eta)$ représente la fonction de forme iso paramétrique bilinéaire de l'élément à 4 nœuds. L'équation suivante

$$\int \delta u (S \sigma) d\Omega + \int \delta v (S\sigma) d\Omega = 0 \quad (3-63)$$

impose que dans chaque élément, les exigences suivantes doivent être satisfaites :

$$\int_{\Omega} \begin{Bmatrix} (1-x^2) \\ (1-h^2) \end{Bmatrix} (s_{x,x}^1 + s_{xy,y}^1) d\Omega = 0 \quad (3-64)$$

et

$$\int_{\Omega} \begin{Bmatrix} (1-x^2) \\ (1-h^2) \end{Bmatrix} (s_{xy,x}^1 + s_{y,y}^1) d\Omega = 0 \quad (3-65)$$

il peut être facile de vérifier que la substitution de l'approximation des contraintes dans ces relations donnera uniquement deux équations :

$$b_3 \alpha_1 - b_1 \alpha_2 - a_3 \gamma_1 + a_1 \gamma_2 = 0 \quad (3-66)$$

$$- a_3 \beta_1 + a_1 \beta_2 + b_3 \gamma_1 - b_1 \gamma_2 = 0 \quad (3-67)$$

avec

$$a_1 = \sum_1^4 x_1 x_1 \quad b_1 = \sum_1^4 y_1 x_1 \quad (3-68)$$

$$a_2 = \sum_1^4 x_1 x_1 h_1 \quad b_2 = \sum_1^4 x_y x_1 h_1 \quad (3-69)$$

$$a_3 = \sum_1^4 x_1 h_1 \quad b_3 = \sum_1^4 y_1 h_1 \quad (3-70)$$

L'approximation des contraintes peut être exprimée en fonction de sept paramètres indépendants. L'utilisation de ces sept paramètres du champ des contraintes éliminera les termes contenant des déplacements incompatibles qui peuvent être ensuite négligés.

Un rang correct pour un élément à quatre nœuds en contraintes et déformations planes peut être obtenu avec une approximation de contraintes réduite à cinq termes.

L'approximation à sept termes est réduite à cinq termes indépendants par une perturbation de la forme géométrique de l'élément. Alternativement, le même résultat peut être obtenu par une intégration par parties des termes incompatibles. Le résultat est une intégrale de volume et une intégrale de frontière. Si nous voulons que les termes de volume et de frontière soient satisfaits indépendamment, nous obtenons quatre équations de contraintes pour réduire l'approximation originale de neuf termes à cinq termes. Après intégration par parties le terme de volume est :

$$\int (S \partial u_1)^1 S^1 d\Omega \quad (3-71)$$

si l'expression précédente est égale à zéro, après substitution nous obtenons les champs approchés

$$\int B_\lambda^1 \sigma^1 d\Omega = 0 \quad (3-72)$$

B_λ est la matrice de déformation déduite des déplacements incompatibles. Cette relation combinée avec les deux équations originales indépendantes, conduit aux quatre équations

$$b_3 \alpha_1 = a_3 \gamma_1 \quad (3-73)$$

$$b_1 \alpha_2 = a_1 \gamma_2 \quad (3-74)$$

$$a_3 \beta_1 = a_1 \gamma_1 \quad (3-75)$$

$$a_1 \beta_2 = b_1 \gamma_2 \quad (3-76)$$

qui peuvent être utilisés pour construire les approximations des contraintes à cinq termes. Le terme de frontière donnera des équations de contraintes qui seront nécessairement une combinaison linéaire des quatre équations mentionnées plus haut. Ces quatre équations de contraintes peuvent être utilisées pour écrire les approximations des contraintes à cinq termes. Il convient de noter que n'importe lequel des a_i, b_i peut être égal à zéro ; par conséquent les paramètres des contraintes sont redéfinis afin d'éviter la division par ces paramètres géométriques. Le résultat est :

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} a_3^2 x & a_1^2 h \\ b_3^2 x & b_1^2 h \\ a_3 b_3 x & a_1 b_1 h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_1^1 \\ s_2^1 \end{Bmatrix} \quad (3-77)$$

Ces approximations des contraintes peuvent être utilisées pour déduire la matrice de rigidité de l'élément.

Pour la construction de la matrice de rigidité sera entreprise en modifiant légèrement l'interpolation des contraintes comme suit :

$$\sigma = \sigma_0 + N_\sigma \sigma^1 \quad (3-78)$$

avec

$$N_\sigma = \begin{bmatrix} a_3^2(x-x_0) & a_1^2(h-h_0) \\ b_3^2(x-x_0) & b_1^2(h-h_0) \\ a_3(x-x_0) & a_1 b_1(h-h_0) \end{bmatrix} \quad (3-79)$$

cette modification consiste en un dimensionnement des paramètres définissant la partie constante de l'approximation des contraintes .Nous pouvons maintenant déduire les valeurs des paramètres ξ_0, η_0 de façon à ce que

$$\int_{\Omega} s^1 D^{-1} s d\Omega = \langle s_0^{-1}, s^{-11} \rangle \begin{bmatrix} D^{-1} \Omega^e & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_0 \\ s^{-1} \end{Bmatrix} \quad (3-80)$$

L'inverse de cette matrice est

$$\begin{bmatrix} \Omega^e D^{-1} & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Omega^e} D & 0 \\ 0 & A^1 \end{bmatrix} \quad (3-81)$$

Où A est matrice de 2*2 définie par

$$A = \int N^1 \sigma D^{-1} \sigma N \sigma d \quad (3-82)$$

Les valeurs appropriés de ξ_0 , η_0 sont :

$$\xi_0 = \frac{J_1}{3J_0} \quad \text{et} \quad \eta_0 = \frac{J_2}{3J_0} \quad (3-83)$$

Où J sont les paramètres du Jacobinien pour l'élément à quatre nœuds

$$J = J_0 + J_1 \xi + J_2 \eta \quad (3-84)$$

Cet élément est numériquement très performant par rapport à l'élément iso paramétrique à 4 nœuds. Cette supériorité provient du fait que :

$$\int \sigma (Sv) d\Omega = \langle \sigma_0, \sigma^{-11} \rangle \begin{bmatrix} B_0 \Omega_e \\ C^1 \end{bmatrix} \quad (3-85)$$

où B_0 est la matrice déformation déplacement de l'élément isoparamétrique à quatre nœuds évalué en un point situé à l'origine des coordonnées naturelles ce qui est par conséquent équivalent à la valeur de l'intégration de Gauss à un point.

$$C^1 = \int N B_0 d\Omega. \quad (3-86)$$

Et donc la matrice de rigidité est donnée par :

$$K = B_0 D B_0 \Omega^e + C^{11} A^{-1} C^1 \quad (3-87)$$

le premier terme est identique à l'intégration de gauss à un point pour l'élément à quatre nœuds basé sur les déplacements. Le second terme est une matrice de stabilisation de rang 2 dont les termes peuvent être facilement calculés analytiquement.

En conséquence l'élément peut être programmé moins laborieusement que l'élément en déplacements avec une intégration de gauss de 2x2.

Après la détermination des paramètres de déplacements globaux v , les paramètres des contraintes σ_0 peuvent être déduits de

$$\sigma_0 = D B_0 v. \quad (3-88)$$

en comparant ceux ci avec l'interpolation des contraintes, on peut observer que les σ_0 sont la moyenne des contraintes au sein de chaque élément. Ce sont des valeurs exactes faciles à calculer et à reporter sur l'élément. Il convient de noter que les contraintes moyennes sont associées avec les points ξ_0 , η_0 mais pas avec l'origine, où B_0 est calculée. Ce résultat de la formulation mixte est en contraste avec la formulation usuelle en déplacements. Il est aussi important de noter qu'il n'est pas

nécessaire de calculer les contraintes σ^1 pour déterminer les valeurs moyennes dans l'élément. L'élément décrit précédemment n'est pas seulement très efficace mais est très probablement l'un des éléments à quatre nœuds les plus précis. L'élément est très performant pour les problèmes de flexion et d'incompressibilité. De plus la sensibilité à la distorsion est moindre que celle des éléments iso paramétriques à quatre nœuds.

III-10 Élément axisymétrique

La résolution des problèmes axisymétriques revêt un très grand intérêt pratique, en particulier dans le domaine aérospatial où les structures sont souvent de ce type. Nous considérerons ici le cas des solides de révolutions. Si le chargement est également axisymétrique, alors le problème à trois dimensions se ramène de façon évidente à une étude circonférentielle et étudier séparément le comportement de la structure suivant chaque harmonique. On peut alors ramener le problème à la résolution d'une série de problèmes bidimensionnels.

Equation de base : Dans le cas général, les équations de déformations-déplacements de l'élasticité peuvent se mettre sous forme suivante en coordonnées cylindrique (r, θ, z)

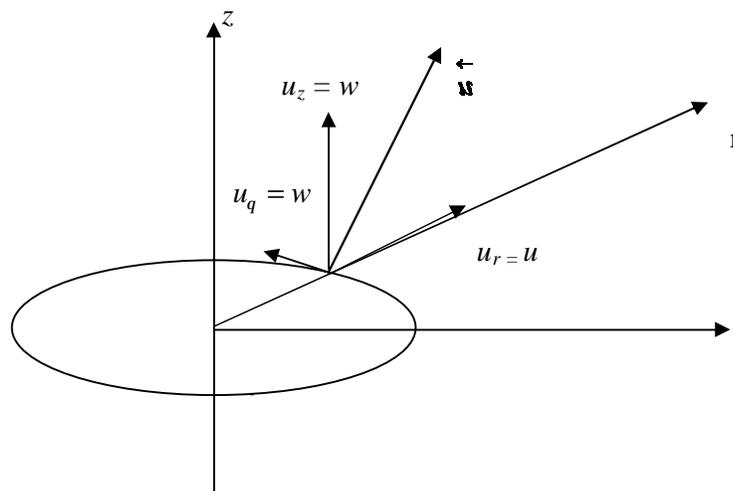


Fig. III-2 Notations pour les problèmes axisymétriques

$$\begin{bmatrix} e_r \\ e_q \\ e_z \\ 2e_{rz} \\ 2e_{zq} \\ 2e_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q} & -\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial R} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (3-89)$$

Ce sont ces relations qui doivent être utilisées dans le cas de chargements quelconques. Dans le cas d'un de révolution, la solution est complètement axisymétrique. On a dans ce cas:

$$\frac{\partial}{\partial q} = 0 \quad n = 0 \quad e_{zq} = e_{rq} = 0 \quad (3-90)$$

D'ou les relations déformations-déplacements

$$e = Du \quad (3-91)$$

$$\begin{bmatrix} e_r \\ e_q \\ e_z \\ 2e_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (3-92)$$

si le matériau est isotrope, les équations de Hooke peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$s = C . \varepsilon \quad (3-93)$$

$$\begin{bmatrix} S_r \\ S_q \\ S_z \\ S_{rz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+u)(1-2u)} \begin{bmatrix} e_r \\ e_q \\ e_z \\ 2e_{rz} \end{bmatrix} \quad (3-94)$$

la matrice de rigidité s'exprime sous la forme :

$$K = \int_{S_e} B^T C B dv = \iint_{S_e} B^T C B 2p.r dr dz \quad (3-95)$$

Généralement la Matrice K est calculée par intégration numérique.

III-11 Intégration numérique

III-11-1 Introduction

Dans la méthode des éléments finis, le calcul de la matrice de rigidité [K] et du vecteur des sollicitations élémentaires {F} par intégration explicite ne peut être effectué que pour les éléments les plus simples. Par ailleurs, l'intégration exacte peut s'élever de sérieuses difficultés pour certains types de problèmes : c'est le cas des problèmes axisymétriques au voisinage de l'axe de révolution. Dans cette éventualité, mais également dans le cas d'éléments d'ordre élevé, ou iso paramétriques courbes, l'intégration numérique doit être utilisée.

$$[k] = \int_{V^a} [B]^T [D][B] dV \quad (3-96)$$

sur l'élément de référence cette intégrale devient :

$$[k] = \int_{V^a} [B(x)]^T [D(x)][B(x)] dV \quad (3-97)$$

ou :

$$[k] = \int_{V^a} [k^*] dV \quad (3-98)$$

ou :

$$[k^*] = [B(x)]^T [D(x)][B(x)] \quad (3-99)$$

Le terme $[k^*]$ est un polynôme ou une fraction rationnelle compliquée. Leur intégration n'est pas facile que s'il est constitué de termes polynomiaux.

Il est en général de préférable d'utiliser une intégration numérique de la forme :

$$[k] = \sum_{i=1}^r W_i [k(x_i)] \quad (3-100)$$

où : ξ_i : sont les coordonnées de r points d'intégration :

W_i : sont les coefficients de pondération (ou poids) correspondants.

Les principes des méthodes d'intégration numérique utilisées pour le calcul sont exposés ci-après.

III -11-2 Différentes méthodes :

- Cas unidimensionnel

Soit à intégrer : $I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi$

Le calcul de cette intégrale peut être effectué en utilisant l'une des méthodes :

- La méthode de Newton-Cotes.
- La méthode de Gauss.
- La méthode de Simpson.

III-11-3 La méthode de Newton-Cotes :

Elle est basée sur le principe suivant : on choisit à priori « n » points d'intégration, habituellement à intervalles équidistants et on calcule de façon exacte l'intégrale « I » en approximation la fonction « $f(\xi)$ » par un polynôme de degré « $n-1$ » prenant les valeurs « $f(\xi_i)$ » aux points d'intégration « (ξ_i) ». le principe de la méthode de Newton est illustré sur la figure dans le cas de $n = 4$.

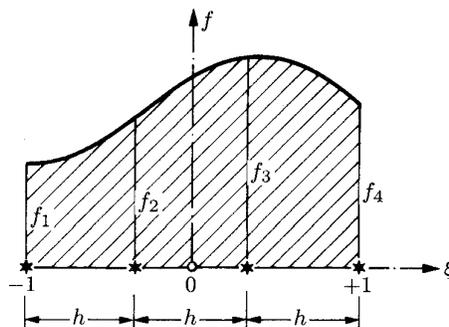


Fig. III- 4 Intégration numérique par la formule de Newton-Cote pour $n = 4$

On peut facilement montrer que le calcul de l'intégrale peut être effectuée en utilisant la formule suivante :

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^r W_i f(\xi_i) \xi$$

pour $n = 2$: $I = [f(-1) + f(+1)]$ (3-101)

pour $n = 3$: $I = 1/3 [f(-1) + 4f(0) + f(1)]$

pour $n = 4$: $I = 1/4 [f(-1) + 3f(-1/3) + 3f(1/3) + f(1)]$

III-11-4 La méthode de Gauss :

Dans cette méthode, on se donne a priori la position des points d'intégration mais on détermine cette position de façon à minimiser l'erreur. ainsi dans le cas de 'n' inconnu supplémentaire : les positions des points d'intégration (ξ_i) qui sont déterminés par des conditions de minimum de l'erreur. ainsi, on peut définir un polynôme de degrés (2n-1) satisfaisant '2n' conditions, d'une part le respect des valeurs de la fonction aux points d'intégration $f(\xi_i)$ et d'autre part le respect des conditions de minimum de l'erreur en fonction de la position des points d'intégration. dans ce cas, l'erreur produite par cette méthode est de l'ordre 0 ($\Delta \xi_i$) $2n$ où $\Delta \xi$ étant l'intervalle entre deux points d'intégration, elle permet d'intégrer de façon exacte un polynôme de degré (2n-1). L'intégrale peut alors être évaluée en utilisant la formule d'intégration habituelle :

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^r W_i f(\xi_i) \quad (3-102)$$

Exemple :

Considérons à titre d'exemple le cas $n = 2$. Le polynôme de degré 3 à intégrer peut s'écrire :

$$f(\xi) = a_1 + a_2 \xi^1 + a_3 \xi^2 + a_4 \xi^3 \quad (3-103)$$

l'intégration exacte de cette fonction conduit au résultat suivant :

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = 2a_1 + \frac{2}{3} a_3 \quad (3-104)$$

Si on utilise deux points d'intégration ($\xi_1 = +R$, $\xi_2 = -R$) on cherche à calculer l'intégrale en utilisant la formule d'intégration :

$$\begin{aligned} I_{\text{app}} &= W.f(-R) + W.f(+R) \\ &= 2W(a_1 + a_3 R^2) \end{aligned}$$

D'où l'expression de l'erreur :

$$\varepsilon = I - I_{\text{app}} = 2a_1(1 - W) + 2a_3\left(\frac{1}{3} - WR^2\right) \quad (3-105)$$

On voit alors que l'erreur s'annule quelles que soient les valeurs de a_1 et a_3 si les conditions suivantes sont respectées :

$$W = 1 \text{ et } R = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \begin{cases} 1 - W = 0 \\ \frac{1}{3} - WR^2 = 0 \end{cases} \quad (3-106)$$

Ce raisonnement simple n'est pas utilisable dans le cas général. Cependant la solution peut être obtenue de façon explicite en utilisant les polynômes de Legendre d'où le nom de méthode de Gauss-Legendre souvent donné à cette méthode.

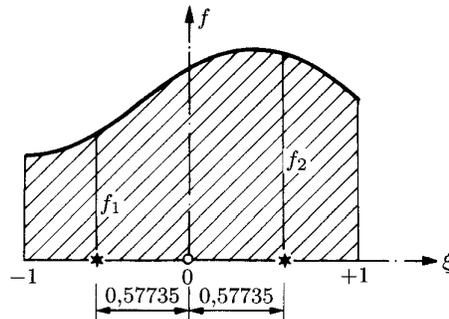


Fig. III-5 Intégration Numérique par la formule de Gauss pour $n=2$

Remarque

La méthode de Gauss demande moins de points d'intégration que la méthode de Newton Cotes à précision égale. C'est pour cette raison que les méthodes d'intégration utilisées pour le calcul des éléments sont généralement basées sur la méthode de Gauss.

III-11-5 Intégration numérique pour le problème bidimensionnels

Soit l'intégrale :

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(\xi, \eta) d\xi d\eta \tag{3-107}$$

On intègre tout d'abord par rapport à ξ et ensuite par rapport à η .

En utilisant les formules de Gauss dans le cas unidimensionnel il vient :

$$I = \int_{-1}^{+1} \left[\sum_i W_i \cdot F(x_i, h) \right] dh$$

$$I = \sum_j W_j \sum_i W_i \cdot F(x_i, h_j) \tag{3-108}$$

$$I = \sum_j \sum_i W_i W_j \cdot F(x_i, h_j)$$

Ainsi par exemple, si l'on utilise la méthode de Gauss (2*2)

$$W_i = W_j = 1$$

$$\xi_i, \eta_j = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

d'où :

$$I = F(\xi_1, \eta_1) + F(\xi_2, \eta_2) + F(\xi_3, \eta_3) + F(\xi_4, \eta_4) \tag{3-109}$$

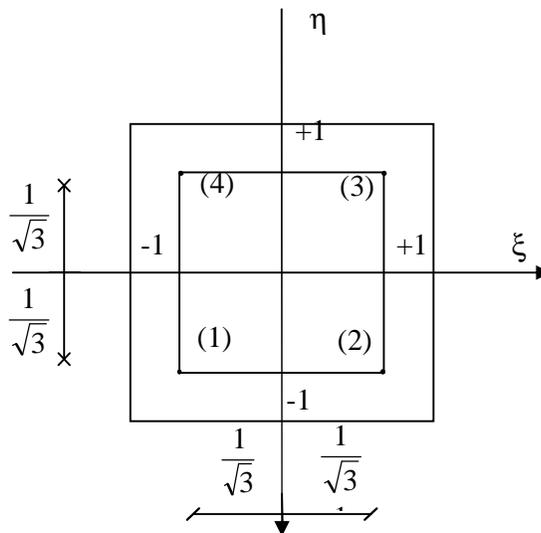


Fig 3-6 : Intégration de Gauss (2*2) pour le quadrilatère

L'extension de la méthode de Gauss aux problèmes tridimensionnels est évidente. On obtient facilement dans ce cas :

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(x, h, z) dx dh dz = \sum_i \sum_j \sum_k W_i \cdot W_j \cdot W_k \cdot F(x_i, h_j, z_k) \quad (3-110)$$

III-11-6 Choix du nombre de points d'intégration (ordre d'intégration)

Le choix du nombre de points d'intégration est d'une grande importance en pratique, car d'une part le coût de l'analyse augmente si un ordre d'intégration réduit est utilisé et d'autre part, en utilisant un ordre d'intégration réduit, les résultats obtenus peuvent sérieusement affecter.

En pratique on choisit le plus souvent un nombre de points aussi faible que possible pour diminuer le volume de calcul.

L'expérience a montré que l'intégration réduite peut donner de meilleurs résultats que l'intégration exacte. Par contre il existe pour chaque type d'élément un nombre minimum de points d'intégration en dessous duquel de la matrice [k] reste singulière malgré l'introduction des conditions aux limites. Pour un élément à 8 nœuds, l'ordre d'intégration exact est 3*3 et l'intégration réduite est de 2*2.

Pour les éléments iso paramétriques, l'ordre de l'intégration doit permettre l'intégration exacte de det (J). ce critère peut être insuffisant dans certains cas, par exemple il conduit à utiliser un seul point pour le quadrilatère iso paramétrique, ce qui peut rendre la matrice [k] singulière lorsque le nombre d'élément est faible.

IV Eléments plaques:**IV-1 Introduction :**

Une plaque est une structure solide limitée par deux plans parallèles. Les faces de la plaque et un bord cylindrique qui est perpendiculaire aux faces, c'est-à-dire le bord de la plaque. La distance entre les faces de la plaque est l'épaisseur h de la plaque et la surface équidistance des deux faces de la plaque est connue sous le nom de la surface moyenne.

Les éléments de plaques peuvent être utilisés pour des modélisations variées :

- Soit pour présenter des solides dont une dimension reste petite devant les autres et pour lesquels la surface moyenne peut être assimilée à un plan, ou à un ensemble des plans.
- Soit pour approcher des surfaces moyennes modérément courbes par des assemblages de facette planes.

Les plaques sont sollicitées dans leur plan, de façon membranaire, ou dans la direction perpendiculaire au plan moyen, c'est à dire en flexion. Elle constituent certainement le type de structures le plus répandu et servent au calcul des tôles planes, des hourdis, des dalles, des planchers, des semelles des fondations et des radiers. Les plaques peuvent avoir des formes très compliquées et présenter des conditions d'appuis ou des liaisons (appuis simple, articulation et encastrement) et des chargements quelconques (charges concentrés ou réparties, charges appliquées dans le plan ou perpendiculairement au plan), tout ça pour des raisons liées à la destination des ouvrages, par exemple :

- Structure d'habitation ou exploitation industrielle où on des planchers.
- Plate forme de roulement où on a les hourdis ou les ponts dalles.

La grande majorité des plaques minces ou épaisses ont la forme de quadrilatères, ces plaques standards ont généralement des bords libres et reposent sur des lignes d'appuis transversales éventuellement biaisés ou des poteaux.

Le calcul des structures larges à plan moyen éventuellement courbé (en plan) et reposant sur plusieurs lignes d'appuis constitue un problème difficile à résoudre nécessitant l'emploi de la méthode des éléments finis. Pour l'établissement d'un bon modèle, il faut trouver pour chaque ouvrage les déformations et les raideurs à partir de la structure réelle.

Le calcul des dalles peut être mené par référence à la théorie des plaques minces, mais cette théorie n'est plus valable dans les zones à fort cisaillement. La modélisation par élément finis doit s'appuyer sur la théorie des plaques épaisses qui tient compte des déformations de cisaillement. Schématiquement, la théorie des plaques minces donne une bonne

approximation de la flexion des tôles et des platelages. Alors que la théorie des plaques épaisses donne une bonne approximation de la flexion et du cisaillement des dalles en béton.

Les hypothèses cinématiques et statiques aboutissent à trois familles d'éléments finis de plaques.

- 1- Les éléments finis des plaques minces, basées sur l'hypothèse de Kirchhoff-Love [9], l'énergie de déformation due aux cisaillements transversaux est négligée.
- 2- Les éléments finis des plaques d'épaisseur modérée vérifier l'hypothèse Mindlin-Reissner.[9]
- 3- les éléments finis des plaques très épaisses (éléments de volumes).

Le développement des éléments finis du type déplacement en utilisant la théorie classique des plaques (théorie des plaques minces) induit une difficulté supplémentaire. Cette difficulté supplémentaire provient des hypothèses qui ont été introduites pour convertir les équations élastiques tridimensionnelles en un modèle théorique de plaque dans lequel la déformation de toute la plaque est exprimée uniquement en fonction de la flèche w de la surface moyenne. La plus importante de ces hypothèses est l'hypothèse de Kirchhoff concernant les lignes droites qui sont normales avant déformation et qui restent droites et normales à la surface moyenne après déformation. Du fait que la théorie classique des plaques est caractérisée par une seule variable w a des avantages considérables mais implique aussi que la théorie classique des plaques diffère d'une manière significative de la théorie élastique bidimensionnelle ou tridimensionnelle. Par exemple les équations différentielles d'équilibre quant elles sont exprimées en fonction des déplacements sont d'ordre deux pour la théorie élastique alors qu'elles le sont d'ordre quatre pour dans la théorie des plaques.

Pour être admissible, le champ des déplacements des éléments développés dans le cadre de la théorie classique des plaques doit avoir une continuité $C1$ c'est à dire que w et les dérivées premières de w doivent être continus, ceci complique considérablement le développement des éléments et dans certains cas cette condition de continuité peut être assouplie tout en permettant le développement d'éléments utiles (non conformes).

IV-2 Eléments basés sur la théorie de Mindlin/Reissner :

La théorie classique des plaques (théorie de Kirchhoff) néglige les déformations dues au cisaillement. Cependant, pour les plaques épaisses, il a été établi que les déformations de cisaillement sont très importantes. La théorie des plaques épaisses ou théorie de Mindlin propose une alternative plus réaliste que la théorie de Kirchhoff et prend en compte les déformations de cisaillement.

Les hypothèses utilisées dans la théorie de Mindlin sont :

- 1 Le déplacement de la surface médiane de la plaque est petite
- 2 Les contraintes normales transversales sont négligées et
- 3 La normale à la surface moyenne des plaques demeure droite après déformation mais pas nécessairement normale comme indiquée sur la (fig. 4 - 1).

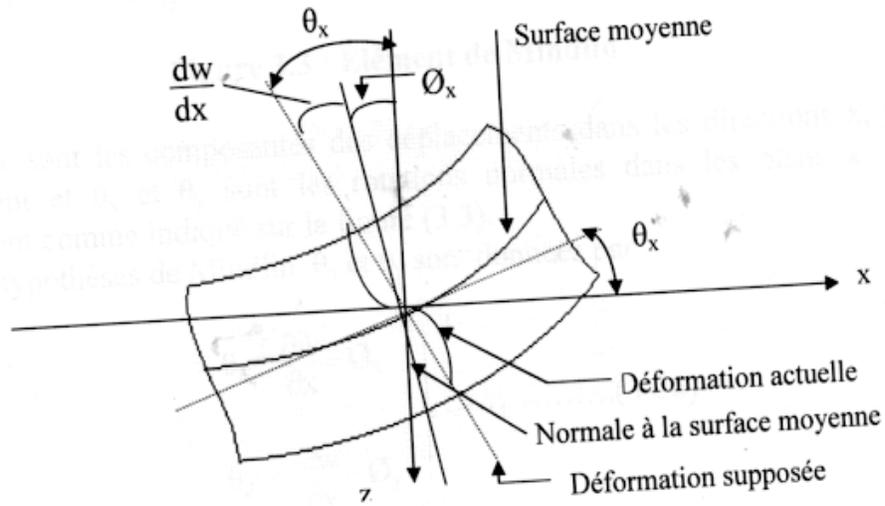


Fig. IV -1 Déformation des plaques basées sur la théorie de Mindlin

Le champ de déplacement peut être exprimé comme suit :

$$u = -z q_x(x, y, z) \tag{4 -1}$$

$$v = -z q_y(x, y, z) \tag{4 -2}$$

$$w = w(x, y, z) \tag{4 -3}$$

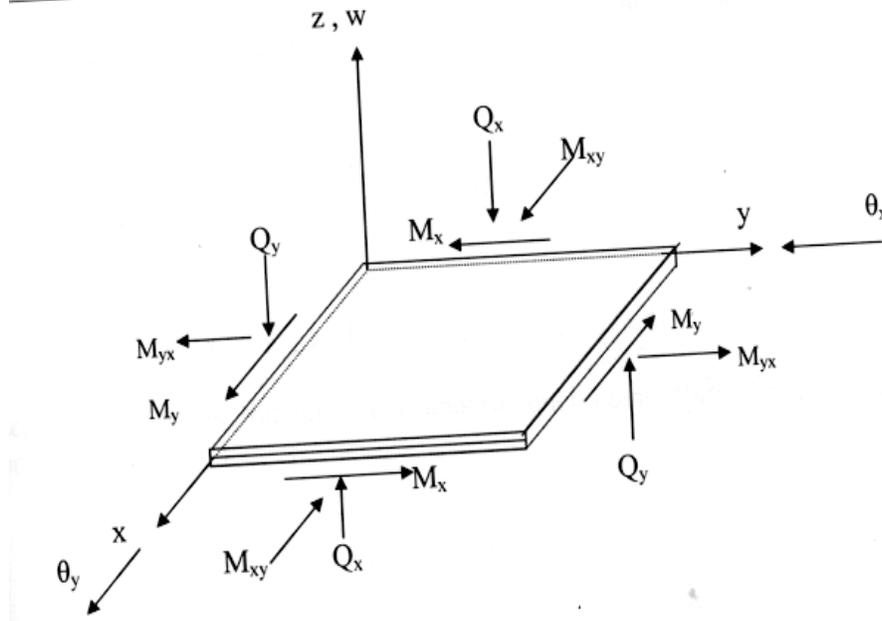


Fig.IV-2: Elément de Mindlin

où u, v et w sont les composantes des déplacements dans les directions x, y et z respectivement et θ_x et θ_y sont les rotations normales dans les plans xz et yz respectivement comme indiqué sur la fig. (4-2).

D'après les hypothèses de Mindlin, θ_x et θ_y sont données par :

$$q_x = \frac{\partial w}{\partial x} - f_x \tag{4-4}$$

$$q_y = \frac{\partial w}{\partial y} - f_y \tag{4-5}$$

où ϕ_x et ϕ_y sont les rotations transversales dues au cisaillement.

Les déformations flexionnelles qui varient à travers l'épaisseur sont données par :

$$e_x = -z \frac{\partial q_x}{\partial x} \tag{4-6}$$

$$e_y = -z \frac{\partial q_y}{\partial y} \tag{4-7}$$

$$g_{xy} = -z \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) \tag{4-8}$$

ou bien :

$$[e_x, e_y, e_{xy}] = [e_f]^T \tag{4-9}$$

Les déformations de cisaillement sont constantes sur toute la hauteur de la section et peuvent être écrites comme suit :

$$g_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} - q_x \tag{4-10}$$

$$g_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} - q_y \tag{4-11}$$

ou bien

$$[g_{xz}, g_{yz}] = [e_c]^T \tag{4-12}$$

Le déplacement et les rotations en n'importe quel point d'un élément peuvent s'exprimer comme suit :

$$\begin{Bmatrix} w \\ q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^m \begin{Bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ q_{xi} \\ q_{yi} \end{Bmatrix} \tag{4-13}$$

ou bien

$$\{u\} = \sum_{i=1}^m \{N_i\} \{u_i\} \tag{4-14}$$

où u_i sont la valeurs nodales w , θ_x et θ_y respectivement au nœud i de l'élément et mn est le nombre de nœuds de chaque élément. Les N_i sont les fonctions de forme associées avec le nœud i et exprimées en termes du système de coordonnées local naturel (x, h) $N_i \equiv N_i(x, h)$

Dans une formulation iso paramétrique, les coordonnées de n'importe quel point x et y dans l'élément peuvent être décrites par les mêmes fonctions d'interpolation $N_i(x, h)$.

La relation déformation - déplacement peut être exprimée sous la forme :

$$\{e\} = \sum_{i=1}^m \{B_i\} \{u_i\} \tag{4-15}$$

ou :

$$\{B_i\} = \begin{Bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -N_i \end{Bmatrix} \quad (4-16)$$

Le tenseur de déformation se compose de deux parties :

Une partie flexionnelle définie comme suit :

$$\{k\} = \sum_{i=1}^m \{B_{fi}\} \{u_i\} \quad (4-17)$$

où

B_{fi} est la matrice courbure – déplacement

$$\{B_{fi}\} = \begin{Bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (4-18)$$

et une partie de cisaillement donnée par :

$$\{e_c\} = \sum_{i=1}^m \{B_{ci}\} \{u_i\} \quad (4-19)$$

ou : B_{ci} : est la matrice de déformation-déplacement de cisaillement

$$\{B_{ci}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -N_i \end{Bmatrix} \quad (4-20)$$

Les Matrices de rigidité élémentaires sont données par

$$[K_f] = \int_V [B_f]^T [D_f] [B_f] dV \quad (4-21)$$

$$[K_c] = \int_V [B_c]^T [D_c] [B_c] dV \tag{4-22}$$

où l'équation (4-21) représente la contribution flexionnelle alors que l'équation (4-22) représente celle du cisaillement. D_f et D_c sont données par les expressions :

$$D_f = \frac{Et^3}{12(1-n^2)} \begin{bmatrix} 1 & n & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-n)/2 \end{bmatrix} \tag{4-23}$$

$$D_c = \frac{Et}{2(1+n)\alpha} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4-24}$$

où α est un coefficient de cisaillement.

IV-3 Elément Hétérosis pour la plaque de Mindlin :

IV-3-1 Introduction

L'élément Hétérosis à 9 nœuds a été développé par Hughes[]. L'idée de base qui a mené à son développement c'est que le mode parasite à énergie nulle est éliminé si les fonctions de forme de Serendip pour l'élément à 8 nœuds sont utilisées pour le déplacement transversal w . L'élément Hétérosis est donc formulé en utilisant les fonctions de forme de l'élément de Lagrange à 9 nœuds pour les rotations (ψ_x et ψ_y) et les fonctions de forme de l'élément Serendip pour le déplacement latéral w . L'élément Hétérosis, qui a de bonnes caractéristiques, a donné constamment de bonnes performances que l'élément "parent" dans une large gamme de problèmes. Quand il est utilisé avec une intégration sélective, le problème de verrouillage est écarté pour toutes les plaques minces. Il est de rang correct.

IV-3-2 Formulation hiérarchique de l'élément Hétérosis :

Dès lors il est utile de faire des recherches dans le but de rendre effectifs les éléments de Serendip à 8 nœuds et les éléments de Lagrange à 9 nœuds comme l'élément Hétérosis de Mindlin. Il est plus convenant d'adopter une formulation hiérarchique pour représenter tous les degrés de liberté. Donc, pour des éléments type e les fonctions d'interpolation de Serendip suivantes sont adoptées pour les nœuds de 1 à 8 :

Pour les nœuds des sommets $i = 1, 3, 5, 7$

$$N_{ie} = \frac{1}{4} (1+\xi \xi_i)(1+\eta \eta_i) (\xi \xi_i + \eta \eta_i - 1) \tag{4-25}$$

Pour les nœuds du milieu $i = 2, 4, 6, 8$

$$N_{ie} = \frac{\xi_i^2}{2} (1+\xi \xi_i) (1-\eta_2) + \frac{\eta_i^2}{2} (1+\eta \eta_i) (1-\xi_2) \quad (4-26)$$

Et pour le 9ème nœud on utilise la fonction suivante :

$$N_{9e}(\xi, \eta) = (1-\xi_2) (1-\eta_2) \quad (4-27)$$

Alors, les degrés de liberté hiérarchiques pour 9 nœuds sont perturbés par l'association de l'interpolation de Serendip. La formulation hiérarchique peut être utilisée pour une représentation géométrique comme pour l'interpolation du champ de déplacement.

Pour Mindlin, l'élément à 8 nœuds, l'élément à 9 nœuds ou l'élément Hétérosis peut être choisi où :

- a) Pour obtenir la représentation de l'élément de Serendip à 8 nœuds, tous les degrés de liberté pour le nœud 9 sont considérés nuls.
- b) Pour obtenir un élément équivalent à la représentation de l'élément de Lagrange à 9 nœuds, tous les degrés de liberté pour le nœud 9 sont libres à gauche. Le total des déplacements au nœud 9 sont calculés en utilisant l'expression :

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i^e(0,0) a_i^e + a_9^e \quad (4-28)$$

- c) Pour obtenir la représentation de l'élément Hétérosis, seulement l'hiérarchique déplacement latéral au nœud 9 (w_9^e) est restreint à zéro et la formule(4-28) sera utilisée pour interpréter le déplacement au nœud 9.

V-4 Implémentation de l'élément Q4 γ de Batoz

L'élément **Q4 γ** est un élément quadrilatère à trois degrés de liberté par nœud, a un comportement flexionnel et qui tient compte de l'influence des déformations de cisaillement transversal.

L'idée pour la formulation de cet élément est de transformer la matrice de déformation de CT $[B_c]$ de telle façon à avoir la même approximation pour les rotations que pour le déplacement transversal. La formulation de cet élément est présentée dans ce qui suit .

1. Formulation Paramétrique de $[B_f]$:

Les termes de la matrice d'interpolation des déformations $[B_f]$ sont exprimées dans la représentation paramétrique p

$$\begin{cases} \langle N_{,x} \rangle = j_{11} \langle N_{,x} \rangle + j_{12} \langle N_{,h} \rangle \\ \langle N_{,y} \rangle = j_{21} \langle N_{,x} \rangle + j_{22} \langle N_{,h} \rangle \end{cases} \quad (4-29)$$

où : j_{ij} sont les coefficients de la matrice jacobienne inverse

$\langle N_{,x} \rangle$ et $\langle N_{,y} \rangle$ sont les dérivées des fonctions d'interpolations par rapport aux coordonnées paramétriques.

2. Formulation Paramétrique de $[B_c]$:

La matrice de rigidité de C T $[k_c]$ qui contient la matrice des déformations de CT est transformée de manière telle que les approximations de g_{xz} , g_{hz} soient les mêmes que celles de $w_{,x}$ et de $w_{,h}$. L'énergie de déformation de cisaillement transversal de l'élément sera remplacée par :

$$U_c = \frac{1}{2} \int_A \langle \underline{g} \rangle [H_C] \{ \underline{g} \} dA \tag{4-30}$$

$\langle \underline{g} \rangle = \langle \underline{g}_{xz} \ \underline{g}_{yz} \rangle$ sont les déformations indépendantes ou de substitutions .

pour que les approximations de g_{xz} , g_{hz} soient les mêmes que celles de $w_{,x}$ et de $w_{,h}$ on suit la démarche suivante :

considérons $g_x (\equiv g_{xz})$ et $g_h (\equiv g_{hz})$ constants sur chaque coté de l'élément

(où $g_x (\equiv g_{xz})$ et $g_h (\equiv g_{hz})$ sont évalués aux milieux des cotés

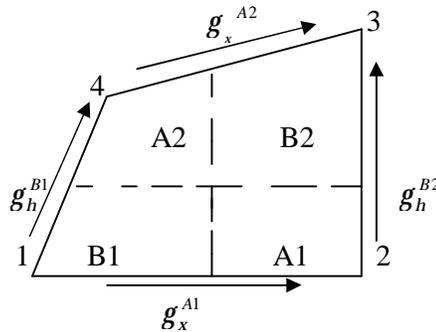


Fig. V-3 Elément Q4g

Sur les cotés ij, où à l'intérieur des éléments suivant une direction, on a la forme intégrale Suivante

$$\int_i^j (g_{sz} - \underline{g}_{sz}) ds = 0 \tag{4-31}$$

avec $g_{sz} = w_{,s} + b_s$

en supposant que, pour toute variation du déplacement une interpolation linéaire de la forme suivante :

- pour le déplacement w :

$$w = \frac{1-x}{2} w_i + \frac{1+x}{2} w_j \quad (4-32 .a)$$

donc

$$w_{,x} = \frac{1}{2} (w_j - w_i) \quad (4-32 .b)$$

- pour la rotation b

$$b_x = \frac{1-x}{2} b_{xi} + \frac{1-x}{2} b_{xj} \quad (4 -32 .c)$$

- la même chose pour la direction h .

a) coté 1-2

$$\int_{-1}^1 g_{xz} dx = \int_{-1}^1 (w_{,x} + b_x) dx \quad (4-33)$$

en remplaçant (4-32.b) et 4-32.c) dans (4--33) sur ce coté on trouve

$$\int_{-1}^1 g_{xz} dx = \int_{-1}^1 (w_{,x} + b_x) dx = (w_2 - w_1) + (b_{x1} + b_{x2}) \quad (4-34)$$

et comme g_{xz} , g_{hz} sont constant

$$\int_{-1}^1 g_{xz} dx = 2g_{xz}^{A1} \quad (4-35)$$

de même pour g_{hz}

des équations précédentes (4-35) et (4-36)

$$g_{xz}^{A1} = \frac{1}{2} (w_2 - w_1 + b_{x1} + b_{x2}) \quad (4-36)$$

b) coté 3-4

$$g_{xz}^{A2} = \frac{1}{2} (w_3 - w_4 + b_{x3} + b_{x4}) \quad (4-37)$$

c) coté 1-4

$$g_{hz}^{B1} = \frac{1}{2} (w_4 - w_1 + b_{h4} + b_{h1}) \quad (4-38)$$

a) coté 2-3

$$\underline{g}_{hz}^{B2} = \frac{1}{2}(w_3 - w_2 + b_{h3} + b_{h2}) \quad (4-39)$$

en utilisant une interpolation linéaire suivant les deux directions x et h les valeurs de $\underline{g}_{xz}, \underline{g}_{hz}$ en tout point (x, h) sont déduites en fonction de

$$\underline{g}_{xz} = \frac{1-h}{2} \underline{g}_x^{A1} + \frac{1+h}{2} \underline{g}_x^{A2} \quad (4-40a)$$

$$\underline{g}_{hz} = \frac{1-x}{2} \underline{g}_h^{B1} + \frac{1+x}{2} \underline{g}_h^{B2} \quad (4-40.b)$$

$$\underline{g}_{xz} = \frac{1-h}{2} \left[\frac{1}{2}(w_2 - w_1) + b_{x2} + b_{x1} \right] + \frac{1+h}{2} \left[\frac{1}{2}(w_3 - w_4) + b_{x3} + b_{x4} \right] \quad (4-41.a)$$

$$\underline{g}_{hz} = \frac{1-x}{2} \left[\frac{1}{2}(w_4 - w_1) + b_{h4} + b_{h1} \right] + \frac{1+x}{2} \left[\frac{1}{2}(w_3 - w_2) + b_{h3} + b_{h2} \right] \quad (4-41.b)$$

Donc

$$\underline{g}_{xz} = \frac{\partial N_1}{\partial x} w_1 - \frac{\partial N_1}{\partial x} b_{x1} + \frac{\partial N_2}{\partial x} w_2 + \frac{\partial N_2}{\partial x} b_{x2} + \frac{\partial N_3}{\partial x} w_3 + \frac{\partial N_3}{\partial x} b_{x3} + \frac{\partial N_4}{\partial x} w_4 \quad (4-42.a)$$

$$\underline{g}_{hz} = \frac{\partial N_1}{\partial h} w_1 - \frac{\partial N_1}{\partial h} b_{h1} + \frac{\partial N_2}{\partial h} w_2 + \frac{\partial N_2}{\partial h} b_{h2} + \frac{\partial N_3}{\partial h} w_3 + \frac{\partial N_3}{\partial h} b_{h3} + \frac{\partial N_4}{\partial h} w_4 \quad (4-42.b)$$

ou les fonctions d'interpolations et leurs dérivées sont données voir sous forme matricielle

$$\left\{ \begin{matrix} \underline{g}_{xz} \\ \underline{g}_{hz} \end{matrix} \right\} = \left[\begin{matrix} \dots N_{i,x} & x N_{i,x} & 0 & \dots \\ \dots N_{i,h} & 0 & h_i N_{i,h} & \dots \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \cdot \\ w_i \\ b_{xi} \\ \cdot \\ b_{hi} \\ \cdot \end{matrix} \right\} \quad i = 1, 4 \quad (4-43)$$

ou encore

$$\left\{ \underline{g}_x \right\} = \left[B_x \right] \left\{ u_x \right\} \quad (4-44)$$

sachant que

$$\left\{ \begin{matrix} b_{xi} \\ b_{hi} \end{matrix} \right\} = \left[\begin{matrix} J_{11}^i & J_{12}^i \\ J_{21}^i & J_{22}^i \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} b_{xi} \\ b_{yi} \end{matrix} \right\} = \left[J^i \right] \left\{ \begin{matrix} b_{xi} \\ b_{yi} \end{matrix} \right\} \quad (4-45)$$

où $[J^i]$ est la matrice jacobienne au nœud i :

donc

$$\begin{Bmatrix} b_{xi} \\ b_{hi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} J_{11} b_{xi} + J_{12} b_{yi} \\ J_{21} b_{xi} + J_{22} b_{yi} \end{Bmatrix} \quad (4-46)$$

En remplaçant (p) dans (d) on obtient :

$$\begin{Bmatrix} g_{xz} \\ g_{hz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots N_{i,x} & x N_{i,x} J_{11}^i & x_i N_{i,x} J_{22}^i & \dots \\ \dots N_{i,h} & h_i N_{i,h} J_{21}^i & \dots h_i N_{i,h} J_{22}^i & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ b_{xi} \\ b_{hi} \\ \cdot \end{Bmatrix} \quad i=1,4 \quad (4-47)$$

ou encore

$$\{g_x\} = [B_x] \{u_h\} \quad (4-48)$$

et puisque

$$\begin{Bmatrix} g_{xz} \\ g_{yz} \end{Bmatrix} = [j] \begin{Bmatrix} g_{xz} \\ g_{hz} \end{Bmatrix} = [B_c] \{u_n\} \quad (4-49)$$

où $[j]$ est la matrice jacobienne inverse.

$\{u_n\} = \langle \dots w_i \quad b_{xi} \quad b_{yi} \quad \dots \rangle^T$ sont les déplacements nodaux.

Alors la matrice d'interpolation des déformations $[B_c]$ est évaluée en fonction de la matrice

d'interpolation des déformations $[B_x]$ et de la matrice de transformation jacobienne inverse

$[j]$ par :

$$[B_c] = [j][B_x] \quad (4-50)$$

Les matrices $[H_f]$ et $[H_c]$ seront regroupées dans une seule matrice $[H]$

- ainsi que
- les deux matrices $[B_f]$ et $[B_c]$ dans $[B]$

$$[k] = \int_A [B_f]^T [H_f] [B_f] \det(J) dx dh + \int_A [B_c]^T [H_c] [B_c] \det(J) dx dh \quad (4-51)$$

la méthode de Gauss à 2*2 points est utilisée pour l'intégration de l'expression de [k]

$$[k] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 [B_f(x_i, h_j)]^T [H_f] [B_f(x_i, h_j)] w_i w_j \det(J) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 [B_c(x_i, h_j)]^T [H_c] [B_c(x_i, h_j)] w_i w_j \det(J) \quad (4-52)$$

et le vecteur des charges équivalentes est donné

$$\{f_n\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{N\} f_z \det(J) dx dh \quad (4-53)$$

une intégration numérique est utilisée

$$\{f_n\} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \{N(x, h)\} f_z \det(J) w_i w_j \quad (4-54)$$

où f_z est la charge répartie latérale par unité de surface

w_i et w_j sont les coefficients de pondérations aux points d'intégrations x_i, h_j .

Toute cette théorie illustrant l'élément Q4g est traduite inséré dans le programme principal.

V- Expérimentation numérique

V-1 Élément Membranaire :

Les tests de validation d'un modèle impliquent, d'une part la vérification de la convergence, et d'autre part l'évaluation de la vitesse de convergence et de l'influence de la distorsion géométrique sur la précision.

L'objectif des sections qui suivent, est de présenter les données et les résultats obtenus par l'élément Q4PS pour un problème plan.

Les éléments de comparaisons (pour la convergence) utilisées sont les éléments quadrilatéraux à quatre huit et neufs nœuds baptisés Q4 , Q8 et Q9.

- Q4 : Élément quadrilatère à quatre nœuds de type déplacement à une intégration numérique uniforme à deux point de Gauss.
- Q8 : Élément quadrilatère à huit nœuds de type déplacement à une intégration numérique uniforme à trois points de Gauss.
- Q9 : Élément quadrilatère à neufs nœuds de type déplacement à une intégration numérique uniforme à trois points de Gauss.

Pour les cas suivant, considérons la poutre cantilever, encastree à une extrémité et soumise à une charge concentrée

$P= 1\text{kn}$; $L=15\text{m}$; $b=1$; $h=1$; $E= 10E5$; $\nu=0.3$

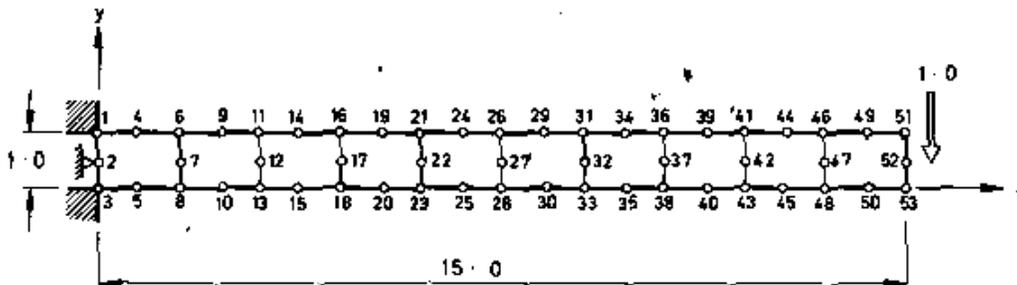


Fig. V-1 Poutre encastree sous charge concentrée

le déplacement V_A à l'extrémité est selon la théorie des poutres :

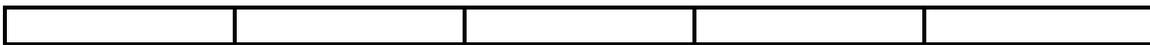
$$\frac{PL^3}{3EI} = \frac{1.15^3}{3.10^5 \cdot 1 \cdot \frac{1^3}{12}} = 0.135$$

V-1-1 Evaluation de la vitesse de convergence :

Ce test est utilisé pour évaluer la vitesse de convergence de l'élément Q4PS en utilisant des maillages sans distorsion géométrique.

Les maillages utilisés sont :

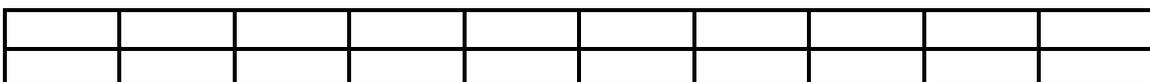
1- Elément 5x1



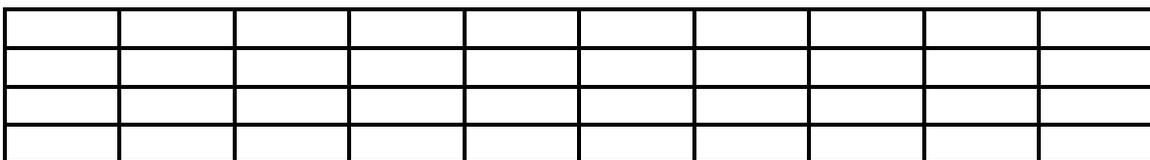
2- Elément 10x1



3- Elément 10x2



4- Elément 10x4



Après implémentation de l'élément Q4PS, notre programme nous a donné les résultats suivants :

N.EL	Q4		Q8		Q9		Q4PS	
	N.d.d.l	VA	N.d.d.l	VA	N.d.d.l	VA	N.d.d.l	VA
5EL	20	0.029	52	0.110	62	0.119	20	0.1340
10EL	40	0.068	101	0.135	121	0.135	40	0.1355
20EL	61	0.071	163	0.135	203	0.135	61	0.1349
40EL	103	0.072	288	0.135	367	0.133	103	0.1349
S.Theo		0.135				0.135		0.135

Tableau. V-2 Poutre cantilever (sans distorsion géométrique)

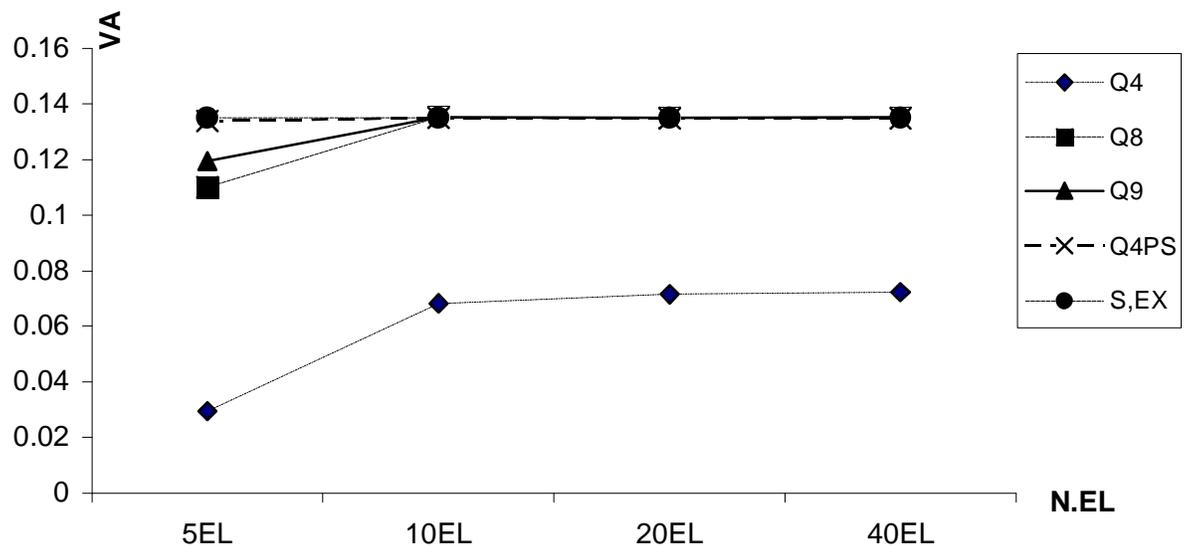


Fig. V-2 Résultat sans distorsion géométrique

- Ø L'élément Q4PS converge rapidement vers la solution de référence par rapport à Q8 et Q9.
- Ø La convergence de Q4 est très lente, et cela illustre la mauvaise performance de Q4 en flexion plane

V-1-2 Influence de la distorsion géométrique

La poutre console soumise à une charge de cisaillement est un test commun pour les éléments membranaires .

Ce test est utilisé pour étudier l'influence de la distorsion géométrique des éléments.

Le type de maillage utilisé est représenté sur la figure suivante.

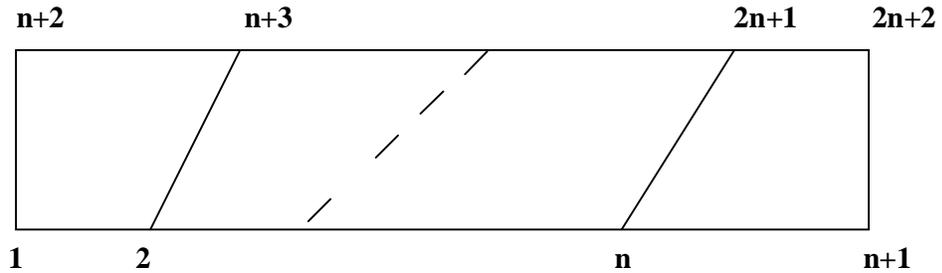


Fig. V-3 Poutre cantilever avec distorsion géométrique

Les résultats obtenus au point A(15,0) sont reportés dans le tableau.

De même que pour le cas précédent les résultats pour les maillages présentés sont reportés sur la figure suivante pur mettre en évidence l'influence du nombre total des degrés de libertés

Obtenus avec les deux éléments .

N.EL	N.D.DL	Q4		Q4PS		S.Theo
		Régulier	Distordu	Régulier	Distordu	
2	8	0.595E-2	0.33E-2	0.126E+0	0.123E-1	0.135
4	16	0.208E-1	0.697E-2	0.133	0.110	0.135
5	20	0.296E-1	0.714E-2	0.134	0.115	0.135
10	40	0.689E-1	0.689 ^E -1	0.135	0.119	0.135

Tableau V-3 Résultats poutre cantilever avec distorsion géométrique

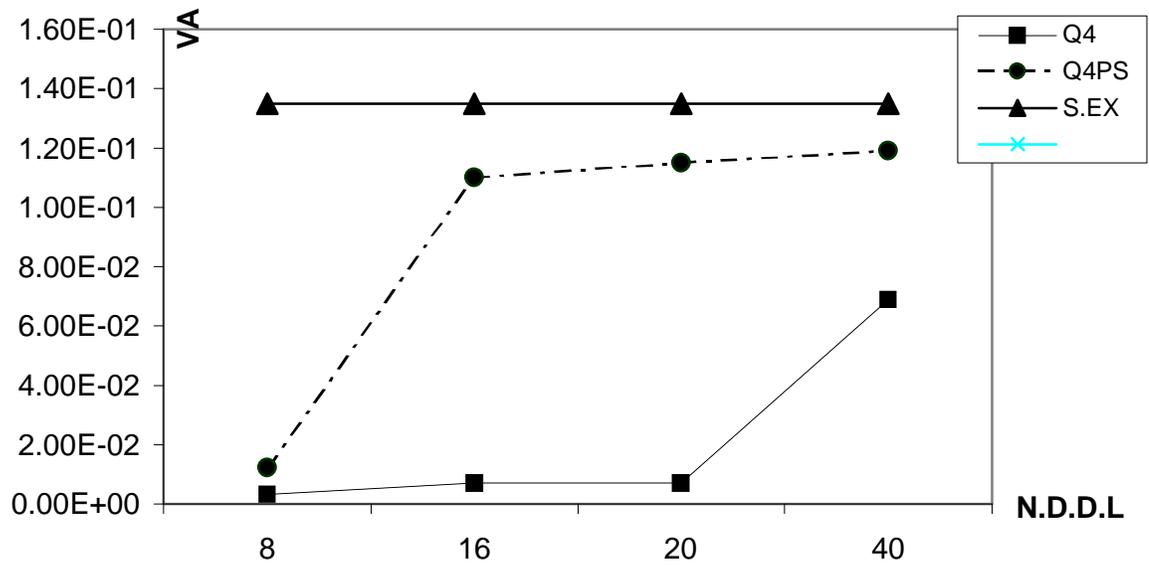
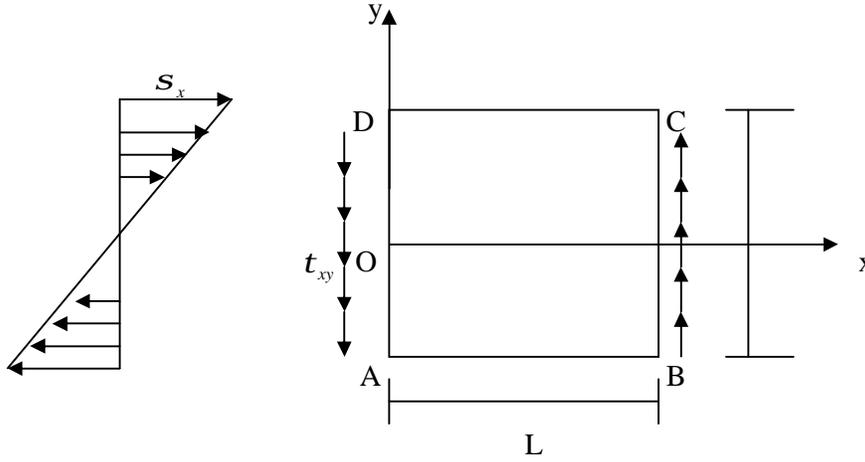


Fig. V-3 Résultat avec distorsion géométrique

- ∅ La distorsion a une influence considérable sur les deux éléments mais Q4PS se comporte mieux .
- ∅ Les mauvaises performances de Q4 sont aggravées.

V-1-3 Evaluation des contraintes

Considérons une plaque isotrope soumise à des sollicitations réparties aux extrémités $x=0, x=L$



Le champ des contraintes vérifiant les équations d'équilibre est défini par

$$s_x = 8 \frac{y}{B^2} (x-L) ; s_y = 0 ; s_{xy} = 1 - \frac{4y^2}{B^2}$$

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

Avec l'élément Q4PS les contraintes sont obtenues aux nœuds (discontinues d'un élément à l'autre)

Pour l'élément Q4 les contraintes sont calculées aux points d'intégration et extrapolées aux nœuds.

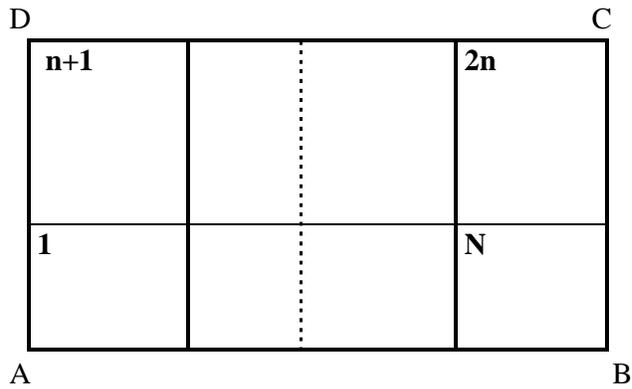
$$s(x,h) = \sum_{i=1}^4 N_i(x,h) s_i$$

$$et \quad N_i = \frac{1}{4} (1 + x_i x) (1 + h_i h)$$

Où s_i sont les contraintes calculées aux points d'intégrations numériques :

$$x, h = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad et \quad \begin{cases} N_1 \\ N_2 \end{cases} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{3}x}{2} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{3}h}{2} \right); \quad \begin{cases} N_3 \\ N_4 \end{cases} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{3}x}{2} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{3}h}{2} \right)$$

Les différents maillages considérés sont :



Les données du problème sont :

$L = B = 100, E = 100, n = 0.3$

La contrainte S_x au point D

Pour les différents nombres d'éléments on a trouvé les résultats suivants :

N ^{bre} d'élément	1	2	3	4
Q4PS	-2.00	-3.0132	-3.3529	-3.5298
Q4	-1.4203	-2.7512	-3.2183	-3.4510
S.EXACTE	-4.0	-4.0	-4.0	-4.0

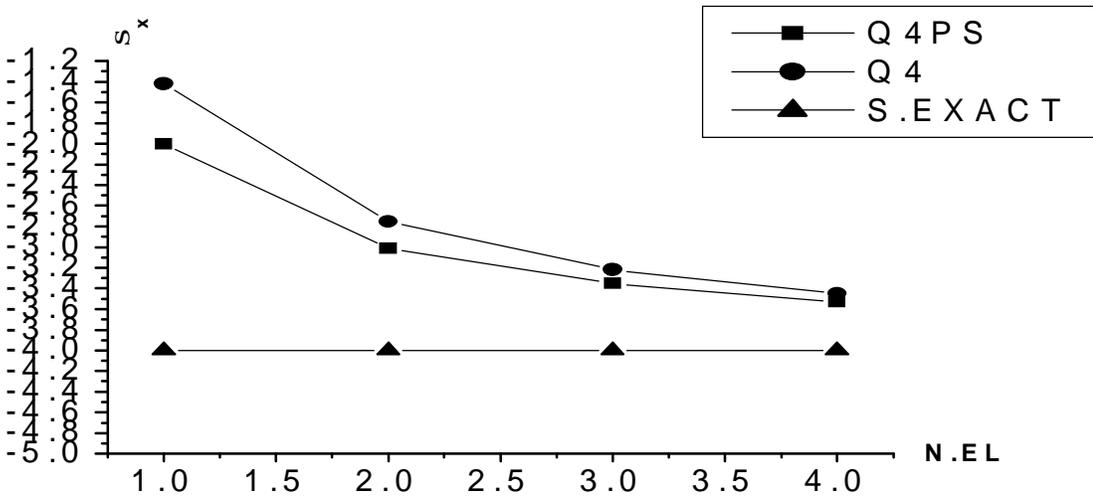


Fig V-4 Valeurs des contraintes S_x

V-1-4 cylindre en déformation plane :

Le cylindre est composé de neuf éléments on le teste pour 4 nœuds et huit nœuds et neufs nœuds et on compare nos résultats avec celle obtenue par Hinton

$E = 0.1E+04 ; \nu = 0.3 ; t = 1.0 ; r = 5.0 ; R = 20.0 ; P = 10.0 .$

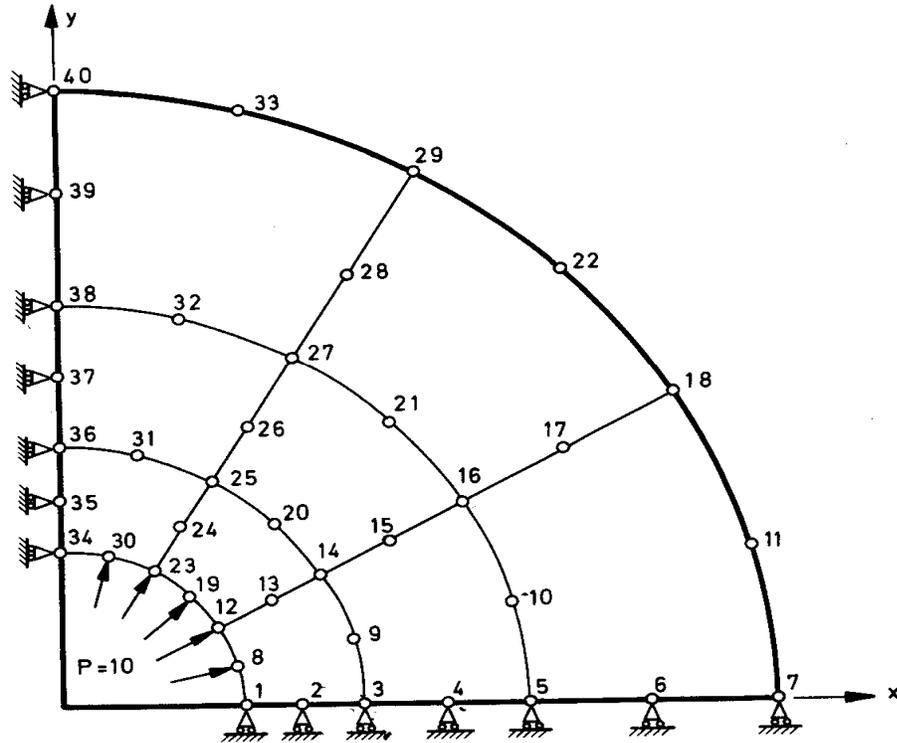


Fig. V-5 Cylindre épais neufs éléments et huit nœuds sous pressions internes

Solution théorique

Contraintes

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2} \quad ; \quad \sigma_r : \text{contraintes radiales}$$

$$\tau = A + \frac{B}{r^2} \quad ; \quad \tau : \text{contraintes tangentielles}$$

P : pression interne

$$A = \frac{-a^2 P}{b^2 - a^2} \quad ; \quad B = \frac{-a^2 b^2 P}{b^2 - a^2} \quad ; \quad a : \text{petit rayon } a = 5.0 \text{ m} \quad ; \quad b : \text{grand rayon } b = 20.0 \text{ m}$$

Déplacements

$$u = \frac{1 - \nu}{E} A r + \frac{1 + \nu}{E} \frac{B}{r}$$

$$u = \frac{1 - 0.3}{1000} \cdot (-0.67) \cdot 5 + \frac{1 + 0.3}{1000} \cdot \frac{(-267)}{5} = 0.072$$

Notre programme a donné les résultats suivants

Rayon : r	8 NOEUDS	9NOEUDS	S.THEOR.
5.0	7.946	7.813	10.014
6.0	5.846	5.967	6.75
7.0	3.111	3.025	4.742
8.0	2.552	2.514	2.0034
10.0	1.825	1.861	2.0034
12.0	0.912	0.886	1.187
14.0	0.665	0.35	0.697
16.0	0.37	0.384	0.376
18.0	0.002	0.008	0.153
20.0	0.0	0.00	0.0075

Tableau. V-5 distribution des Contraintes radiales sous l'effet des pressions inter

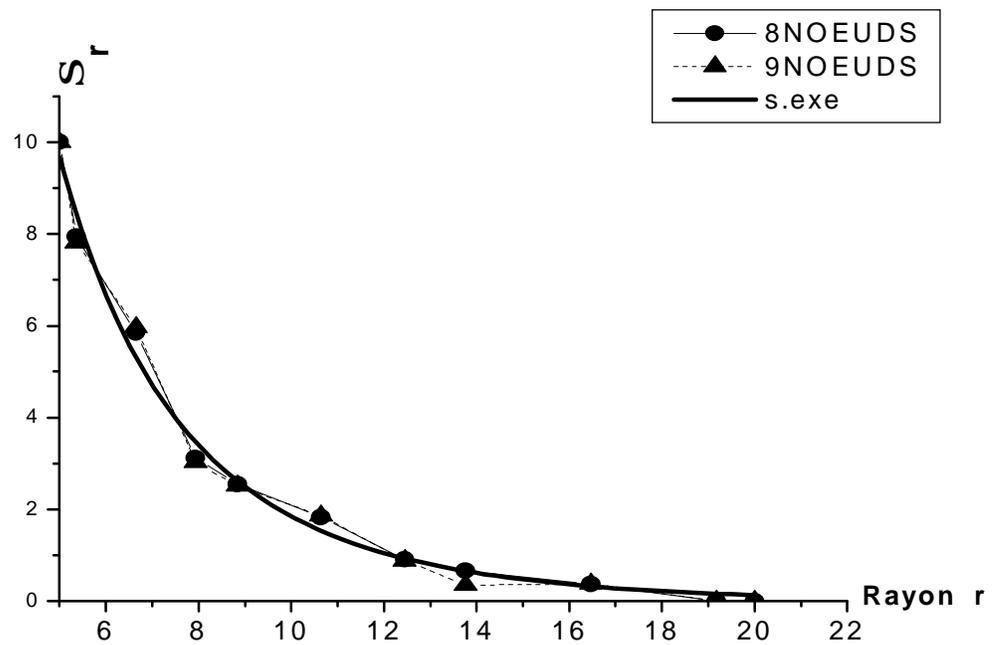


Fig. V-5 Distribution des Contraintes radiales sous l'effet de la pression interne

RAYON :r	8 NOEUDS	9 NOEUDS	SOL.THEO
5.0	10.03	10.158	10.714
6.0	6.453	6.326	7.45
7.0	4.933	5.0154	5.44
8.0	3.68	4.0123	2.7034
10.0	2.9414	2.902	1.887
12.0	2.393	2.418	1.887
14.0	2.0796	2.092	1.395
16.0	1.618	1.603	1.076
18.0	1.301	1.30	0.853
19.0	1.394	1.39	0.7396
20.0			0.77075

Tableau V-6 Contraintes tangentielle sous l'effet des pressions internes

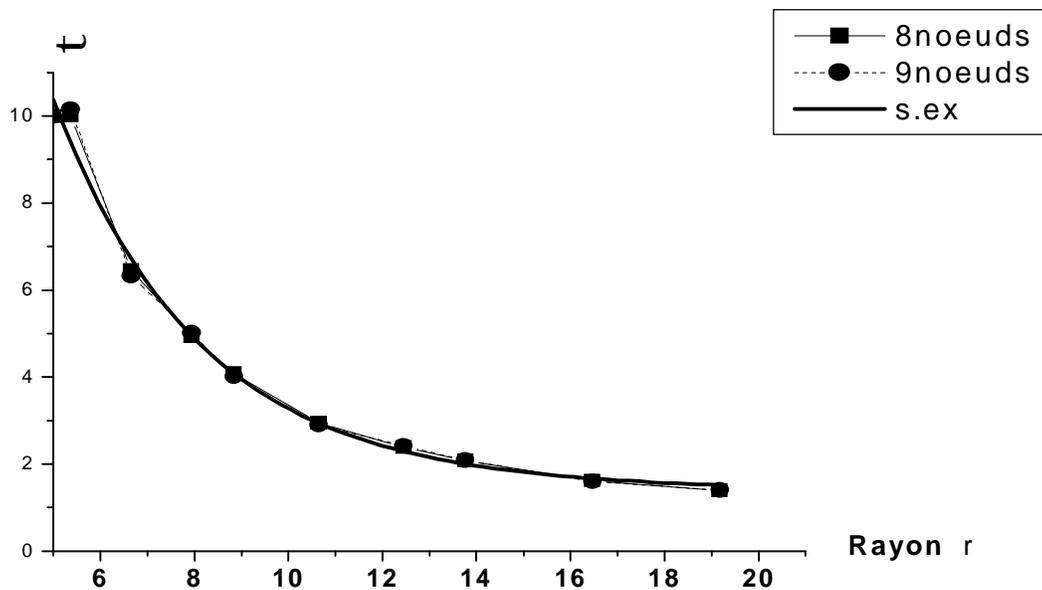


Fig. V- 6 Distribution des Contraintes tangentielle sous l'effet de la pression interne

V- 2 Eléments plaques :**V-2-1 Validations**

Ce chapitre sera consacré à la validation du programme ainsi qu'à l'expérimentation numérique de certains paramètres. Pour la validation, les résultats donnés par notre programme seront comparés à ceux donnés par le logiciel SAP 2000 ainsi que ceux théoriques de Timoshenko.

Plaque carrée simplement appuyée de dimensions $a=1$ m soumise à une charge uniforme $q = 1$ kn

Les caractéristiques mécaniques de la plaque sont :

$$E = 10920 \text{ Kn/m}$$

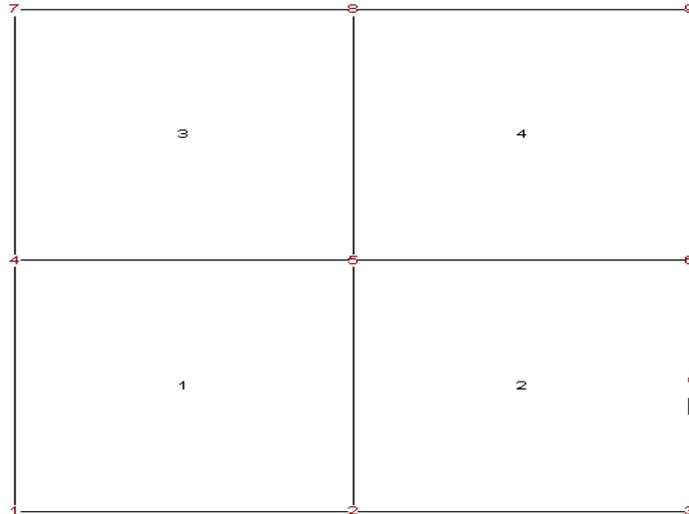
$$\nu = 0.3$$

L'épaisseur de la plaque est égale à : 0.1 .m .

la solution théorique donnée par Timoshenko est :

$$W = \alpha \cdot q \cdot \frac{a^4}{D}$$

Avec $\alpha = 0.00406$ pour une plaque carrée et D est la matrice d'élasticité



déplacement au centre de la plaque pour les maillages suivants :

M1 16 éléments rectangulaires à 4 nœuds.

M2 4 éléments rectangulaires à 8 nœuds

M3 4 éléments rectangulaires à 9 nœuds

Maillage	Notre programme	SAP2000	Timoshenko
M1	$4,68 \cdot 10^{-3}$	$3,79 \cdot 10^{-3}$	$4,06 \cdot 10^{-3}$
M2	$4,64 \cdot 10^{-3}$	$3,79 \cdot 10^{-3}$	$4,06 \cdot 10^{-3}$
M3	$4,90 \cdot 10^{-3}$	$3,79 \cdot 10^{-3}$	$4,06 \cdot 10^{-3}$

V-2-2 Plaque simplement appuyé

Idem que pour l'exemple 1 sauf que la plaque est maintenant encastree :

V-2-3 Plaque Encastree :

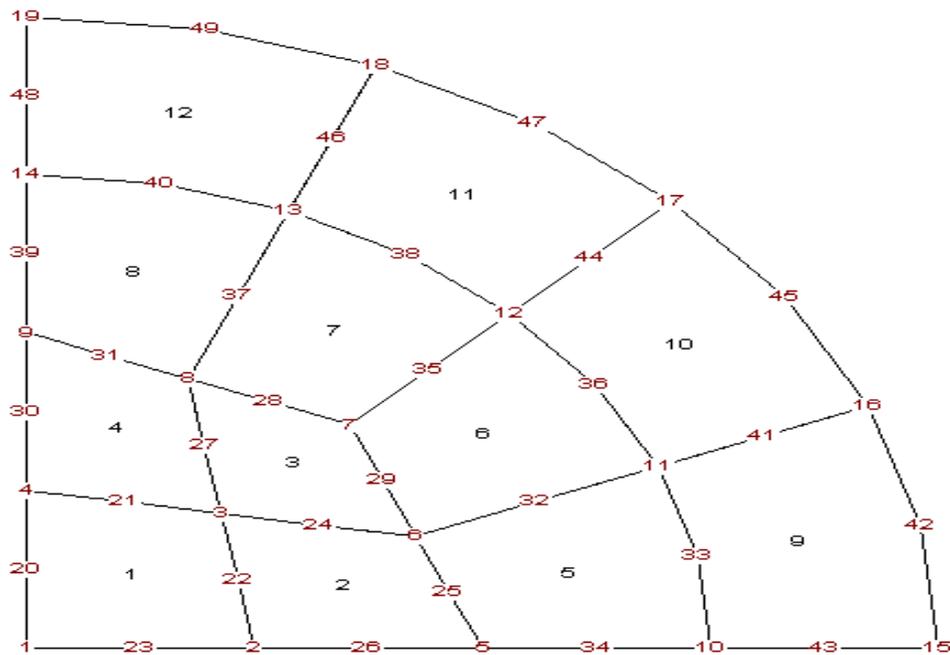
MAILLAGE	Notre programme	SAP2000	Timoshenko
M1	$1,45 \cdot 10^{-3}$	$1,56 \cdot 10^{-3}$	$1,26 \cdot 10^{-3}$
M2	$1,73 \cdot 10^{-3}$	$1,56 \cdot 10^{-3}$	$1,26 \cdot 10^{-3}$
M3	$1,75 \cdot 10^{-3}$	$1,56 \cdot 10^{-3}$	$1,26 \cdot 10^{-3}$

V-2-4 - Plaque circulaire :

Plaque circulaire encastrée et uniformément chargée modélisée en raison de la symétrie par un arc de cercle .

Les caractéristiques de la plaque sont :

$E = 10920 \text{ Kn/m}$. $\nu = 0.3$. $e = 0.1$



Notre programme	SAP2000	Hinton
$1,54 \cdot 10^{-2}$	$1,6009 \cdot 10^{-2}$	$1.633 \cdot 10^{-2}$

On remarque que les résultats donnés par notre programme sont comparables à ceux donnés par le logiciel SAP2000 ainsi qu'aux résultats de Timoshenko. Ainsi que ceux de Hinton.

V- 3 Expérimentation numérique :

Les principaux paramètres ayant fait l'objet de simulation sont :

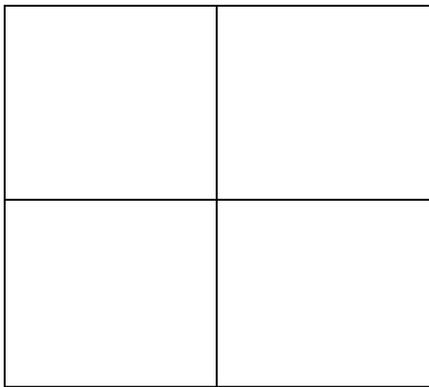
- Le type d'élément
- L'épaisseur de la plaque
- Le nombre d'éléments
- Les conditions aux limites

Les maillages utilisés pour l'expérimentation sont :

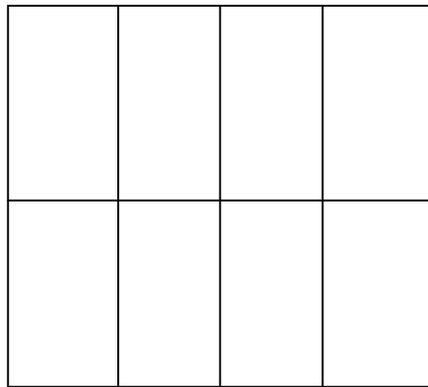
M1 4 éléments

M2 8 éléments

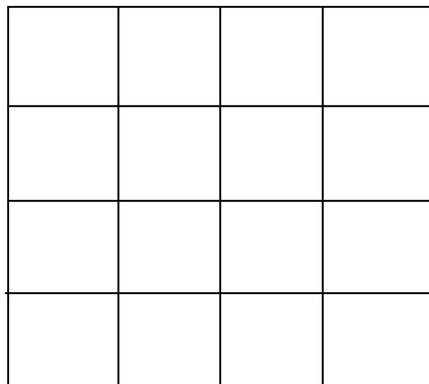
M3 16 éléments



maillage (M1)



maillage (M2)



Maillage (3)

V-3-1 Plaque simplement appuyée :

	M1	M2	M3
Q4	6.63E-03	5.55E-03	4.46E-03
Q8	4.46E-03	4.67E-03	4.61E-03
Q9	4.90E-03	4.78E-03	4.62E-03
Q4g	3.51E-03	3.83E-03	4.32E-03
W_c théo	4.06E-03	4.06E-03	4.06E-03

Tableau V-7 Flèche au centre de la plaque
(Plaque Simplement appuyée sous charge répartie $t=0.1$)

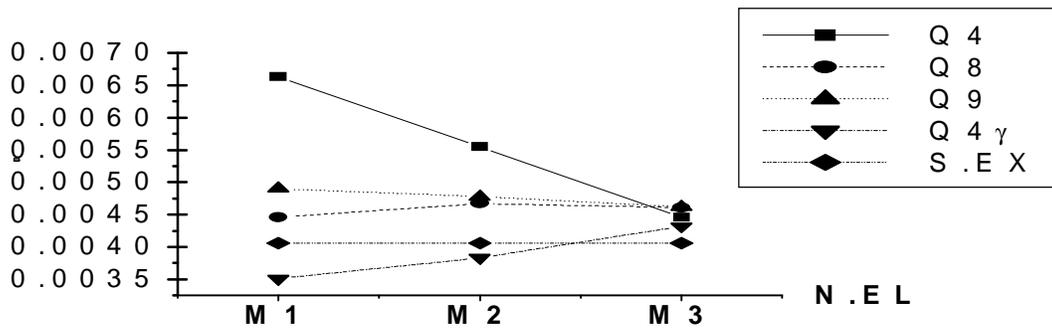


Fig. V-7 Flèche au centre de la plaque
(Plaque Simplement appuyée sous charge répartie $t=0.1m$)

	M1	M2	M3
Q4	6.01 ^E +00	5.24E+00	4.32E+00
Q8	4.36 ^E +00	4.14E+00	4.14E+00
Q9	4.61 ^E +00	4.43E+00	4.18E+00
Q4g	3.192	3.495	3.972
W _{C thé}	4.06	4.06	4.06

Tableau V-8 Flèche au centre de la plaque
(Plaque Simplement appuyée sous charge répartie $t=0.01m$)

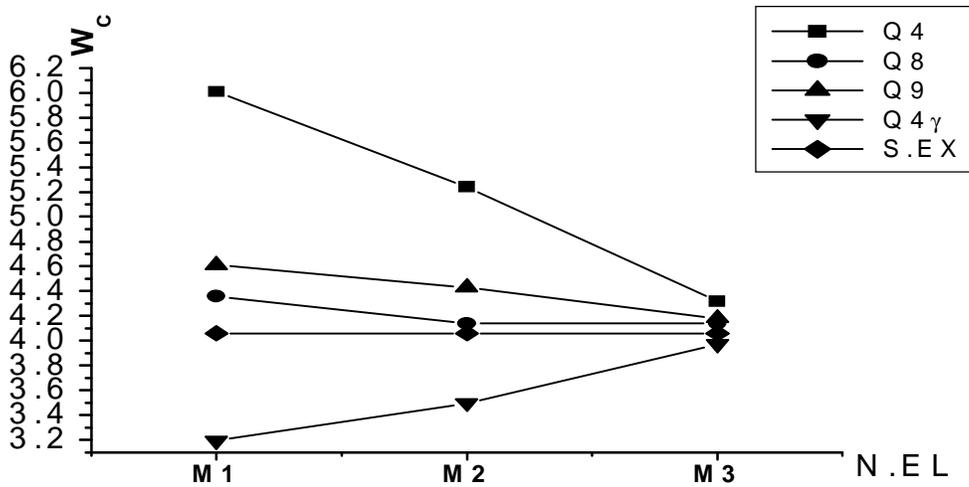


Fig. V-8 flèche au centre de la plaque
(Plaque Simplement appuyée sous charge répartie $t=0.01m$)

	M1	M2	M3
Q4	6.01 ^E +12	5.24 ^E +12	4.32 ^E +12
Q8	4.36 ^E +12	4.01E+12	3.79 ^E +12
Q9	4.61 ^E +12	4.43E+12	4.18 ^E +12
Q4g	3.18E12	3.49E+12	3.96 ^E +12
W_C Théo	4.06 ^E +12	4.06 ^E +12	4.06 ^E +12

Tableau V-9 Flèche au centre de la plaque
 (Plaque Simplement appuyée sous charge répartie $t=1E-06m$)

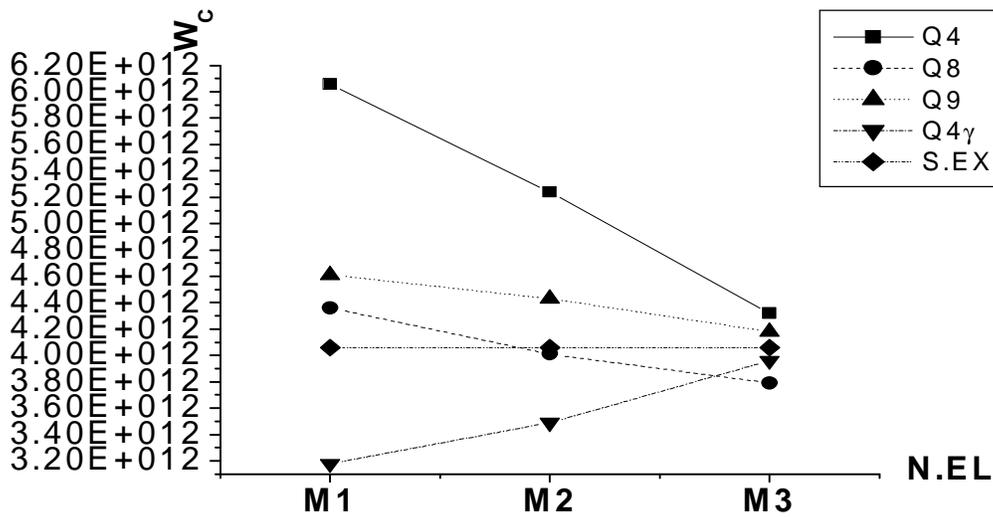


Fig. V-9 Flèche au Centre de la Plaque
 (Plaque Simplement appuyée sous charge répartie $t = 10^E-6$)

Commentaire :

On peut constater que les résultats obtenus pour une plaque simplement appuyés sont bons pour une épaisseur variant de 0.1 à 10E-6. Il convient aussi de noter que les éléments quadratiques à 8 et 9 nœuds et l'élément **Q4g** sont plus performants que l'élément à 4 nœuds.

	M1	M2	M3
Q4	1.19 ^E -04	9.98E-05	8.96E-05
Q8	7.79 ^E -05	8.82E-05	8.36E-05
Q9	8.50 ^E -05	8.34E-05	8.37E-05
Q4 _g	8.27E-05	8.15E-05	8.32E-05
W _C théo	3.248E-05	3.248E-05	3.248E-05

Tableau V-10 Flèche au centre de la plaque
(plaque Simply appuyée sous charge répartie $t=0.5m$)

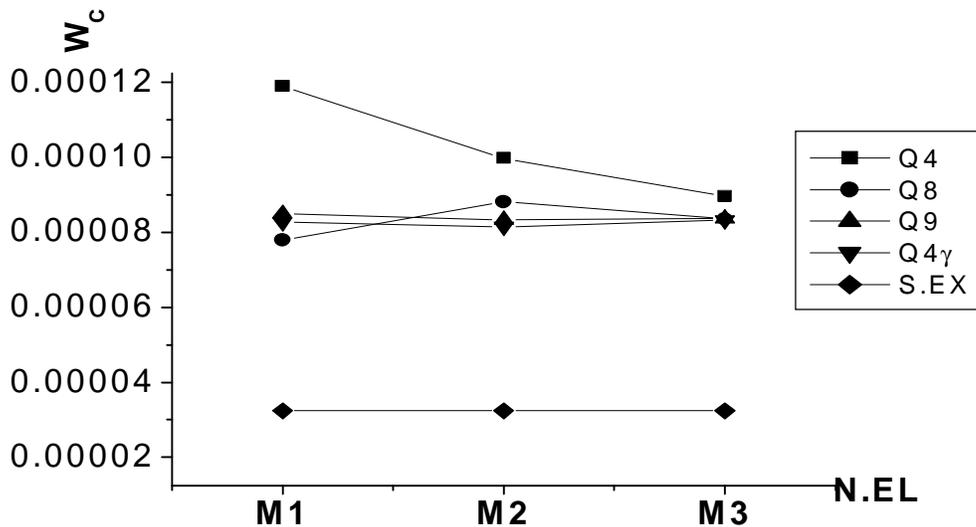


Fig V-10 Flèche au centre de la plaque
(plaque Simply appuyée sous charge répartie $t=0.5m$)

Commentaire : On remarque que pour $t=0.5m$, les résultats obtenus sont très loin de la solution exacte, on peut expliquer par le fait que pour une plaque d'épaisseur 0.5m et de dimension (1x1) m, on tend plus vers un élément solide.

V-3-2 Plaque encastree

	M1	M2	M3
Q4	7.14E-05	5.95E-05	5.74E-05
Q8	5.01E-05	5.32E-05	5.30E-05
Q9	5.52E-05	5.36E-05	5.32E-05
Q4g	5.35E-5	5.29E-5	5.4E-5
W_c Théo	1.008E-05	1.008E-05	1.008E-05

Tableau. V-11 Flèche au centre de la plaque
(plaque encastree sous charge répartie t=0.5m)

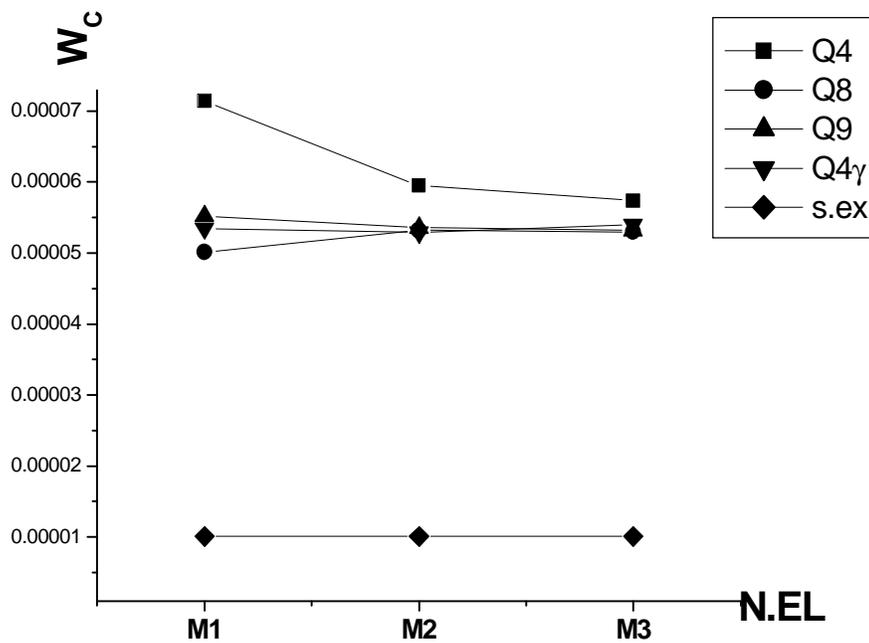


Fig. V-11 Flèche au centre de la plaque
(plaque encastree sous charge répartie t=0.5m)

Remarque

La même remarque pour la plaque encastree pour t=0.5m les résultats sont très .

	M1	M2	M3
Q4	3.57 ^E -04	4.53E-04	1.45E-04
Q8	1.73E-03	1.69E-03	1.49E-03
Q9	1.75E-03	1.63E-03	1.51E-03
Q4g	2.67E-04	4.32E-04	1.43E-03
W_C Théo	1.26 ^E -03	1.26E-03	1.26E-03

Fig. V-12 Flèche au centre de la plaque
(Plaque encastrée sous charge répartie $t=0.1$)

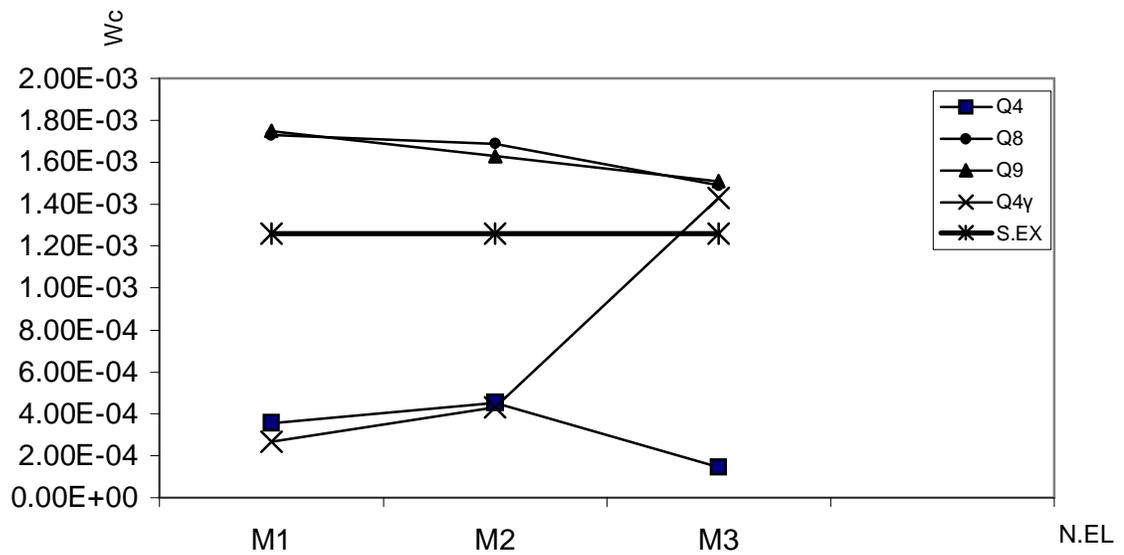


Fig. V-12 Flèche au centre de la plaque
(Plaque encastrée sous charge répartie $t=0.1$)

	M1	M2	M3
Q4	3.57 ^E -03	5.80 ^E -03	1.21E+00
Q8	1.54 ^E +00	8.60 ^E -01	7.90E-01
Q9	1.54 ^E +00	1.39E+00	1.27E+00
Q4g	2.67 ^E -03	5.119 ^E -03	1.213
W _C Théo	1.26	1.26	1.26

Tableau V-13 Flèche au centre de la plaque
(Plaque encastrée sous charge répartie t=0.01m)

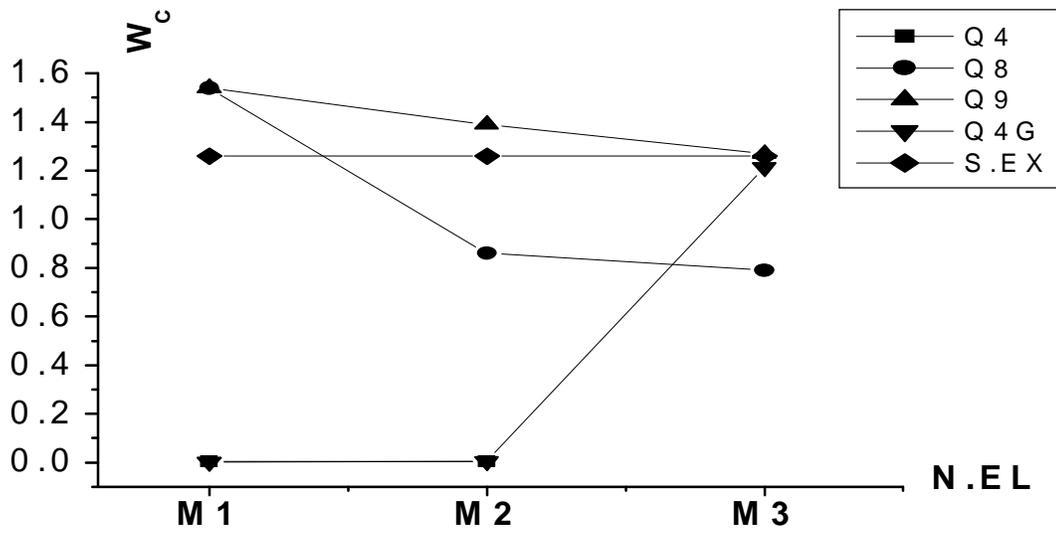


fig.V-13 Flèche au centre de la plaque
(Plaque encastrée sous charges réparties t=0.01m)

	M1	M2	M3
Q4	3.57 ^E +01	5.44E+01	1.12E+12
Q8	1.54E+12	6.80 ^E +11	3.82E+11
Q9	1.54E+12	1.39 ^E +12	1.27E+12
Q4 _g	2.678E+01	5.130E+01	1.21 ^E +12
W _{C Theo}	1.26 ^E +12	1.26 ^e +12	1.26 ^E +12

Tableau V-14 Flèche au centre de la plaque
(plaque encastrée sous charges réparties $t = 10E-6$)

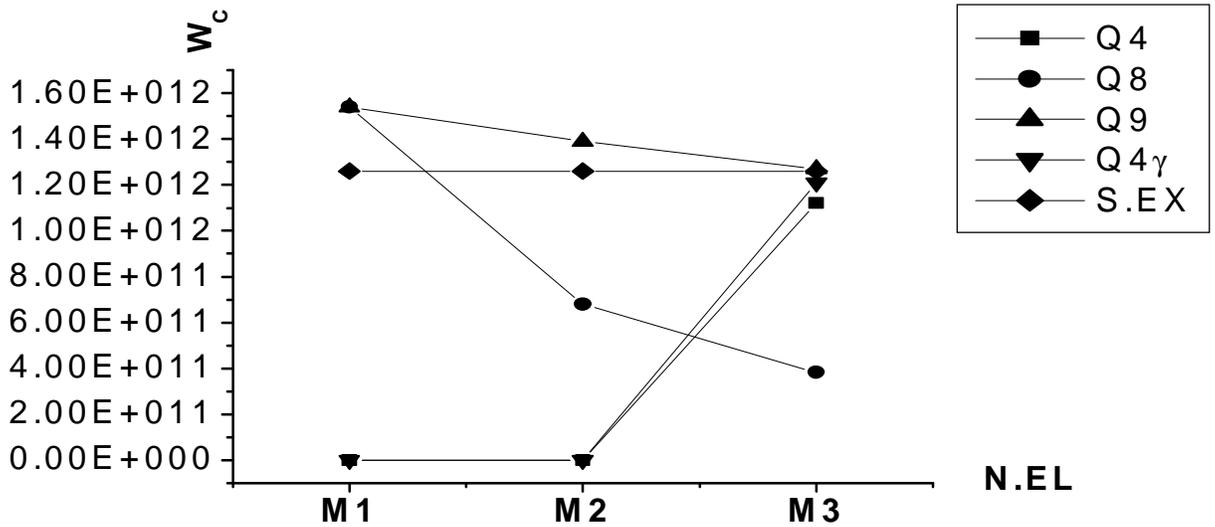


Tableau V-14 Flèche au centre de la plaque
(plaque encastrée sous charge répartie $t = 1E-6$)

Commentaires

Les mêmes remarques pour la plaque encastree pour $t=0.5$ les résultats sont très loin de la solution exacte.

Les résultats obtenus pour des épaisseurs allant de 0.1 à 10^E-06 sont bons pour tous les éléments avec toujours une supériorité des éléments quadratiques. Cependant pour une épaisseur inférieure à 0.01 (cas des plaques minces) l'élément à Serendip à 8 nœuds a donné des résultats inattendus. Ce comportement peut trouver son explication dans le fait que l'élément à 8 nœuds possède deux modes parasites qui peuvent se manifester même avec une intégration sélective pour certaines conditions aux limites comme postulées par Imbert .

Pour confirmer les résultats du 8 nœuds on a ré analysé la même plaque mais en augmentant les dimensions et la aussi on a trouvé le même type de comportement.

	4 nœuds	8noeuds	9noeuds	Le résultat donné par SAP2000
Une plaque encastree d'épaisseur $t=0.1m$	2.10E+3	0.89E+3	0.521E+3	1.392E+3

V-Conclusion générale

Dans le présent travail on a abordé l'analyse des structures à comportement membranaires et flexionnel.

Pour la partie membranaire avec la formulation en déplacement, notre choix s'est porté sur les quadrilatères Q4, Q8 et Q9 et l'élément hybride de Pian Sumihara baptisé Q4PS.

Cet élément a un rang correct et constitue un très bon élément d'élasticité plane à quatre nœuds et huit degrés de liberté a donné de très bon résultats, pour les problèmes de flexion plane ainsi qu'un bon comportement vis-vis de la distorsion géométrique par rapport à l'élément Q4 qui présente un mauvais comportement pour le même problème d'après nos tests de validation.

En ce qui concerne les problèmes axisymétriques on a testé un cylindre épais en déformation plane. La variation des contraintes radiales sous l'influence des pressions internes, ainsi que la variation des contraintes tangentielles ont été étudiées. Pour la partie flexionnelle, on a étudié les éléments plaques à 4,8 et 9 nœuds ainsi que l'élément Q4g de Batoz (Quadrilatère à douze degré de liberté qui a un rang correct). Cet élément est de type déplacement et inclut à la fois la théorie de Mindlin /Reissner par prise en compte d'un facteur de correction de cisaillement transversal.

D'après nos résultats cet élément converge rapidement vers la solution de référence pour tous les tests.

En conclusion on recommande de combiner les deux états, états membranaires, et états flexionnel afin de créer un élément fini spatial, appelé plaque membrane ou élément plan de coque. Il permet de résoudre les structures tridimensionnelles telles que

- Les structures plissées, assemblage de panneaux plans, comme les ponts en caisson, toitures plissées, murs de soutènement, culées de ponts ..etc.
- Les coques, surfaces courbes approchées par assemblage de facettes planes.

REFERENCES

- [1] Argyris , J. and S. Kelsey. , Energy Theorems and structural analysis
Butterwoth Scientific publication London , 1960.
- [2] Turner, M. R. Clough, H. Martin , and L. Topp. , Stiffness and
deflection analysis of complex Structures. J. Aearo.sci. , 23 N°. 9 SEPT 1956
- [3] Stephen P. Timoshenko and J.N Goodier. , Theory of Elasticity
third edition copyright 1970 by Mc Graw-Hill
- [4] Stephen P. Timoshenko, S. Woinowsky- Krieger. , Theory of Plates and Shells
Second edition copyright 1959 by Mc Graw-Hill
- [5] Richard H. Gallagher “ Introduction aux éléments finis Edition pluralis 1976
pour la traduction française
- [6] E. Hinton and D.R.J. Owen. , Finite element programming
copyright 1977 by Academic press inc.(London) L.T.D.
- [7] François Frey et Laroslav Jirousek. , Analyse des structures et milieu continu
méthode des éléments finis. Volume 6 1° Edition 2001
- [8] François Frey , Analyse des structures et milieux continus
Mécanique des solides . Volume 3 1° Edition 2001
- [9] Batoz J.L. et Dhatt G., Modélisation des structures par éléments finis,
vol.2 : Poutre et plaques, Edition Hermès, Paris 1990.
- [10] Gouri . Dhatt , Gilbert Touzot., Une présentation de la méthode des éléments
finis. Presse de l’université de Laval Canada Octobre 1979
- [11] J.F. Imbert Analyse des structures par la Méthodes des éléments finis.
Deuxième édition 1984

- [12] T. H. H. Pian, D. P. Chen, and D. Kong ., A new formulation of hybrid / mixed finite éléments Comp.Structure., 16-81-7 1983.
- [13] J. M. Smith and D.V. Griffith., Programming the finite element method second edition 1988.
- [14] Gouri et Dhatt, Gilbert Touzot Une présentation de la méthode des éléments finis . Presse de l'université de Laval Canada Octobre 1979
- [15] M.S. Chebbah., Analyse des structures en plaques et coques par éléments finis
Thèse de Magister 2001
- Pr A. Charif Pré-processeur graphique (Modélisation géométriques par élément finis plan 3- 4- 6-8-9 nœuds) Université de Batna

RESUME :

Dans ce travail, on a abordé la simulation numérique par éléments finis du comportement des structures planes membranaires et flexionnelles. Une étude séparée des comportements membranaire et flexionnelle a été effectuée.

Deux types d'éléments membranaires ont été formulés; formulation en déplacements des éléments Q4, Q8 et Q9 et formulation mixte (hybride) de l'élément de Pian-Sumihara. La comparaison des résultats obtenus pour ces deux types d'éléments ont permis de mettre en évidence la bonne performance des éléments mixtes par rapport aux éléments standard basés sur la formulation classique en déplacement surtout pour les maillages distordus.

En ce qui concerne l'élément flexionnelle on a remarqué la convergence rapide de l'élément Q4g (élément avec cisaillement transversal) par rapport aux éléments classiques Q4.

Dans quelque cas, l'élément Q8 a donné des résultats inattendus. Ceci est du au verrouillage en cisaillement car cet élément possède des modes parasites..

ABSTRACT

This work deals with the finite element simulation of the behaviour of plane structures (membrane and plate structures). Membrane and flexural behaviours are studied separately.

Two types of membranes elements have been studied; displacement formulation, Q4,Q8, and Q9 elements; and mixed formulation, the Pian Sumihara hybrid quadrilateral. The results obtained highlighted the better performance of mixed elements compared to standard displacement, especially for distorted meshes.

In flexural element we noticed the rapid convergence of the Q4g element (with shear deformation) to the theoretical solution in comparison with the standard elements Q4.

In some cases the Q8 element has given results witch we didn't expect and which can explained by the phenomenon of shear locking, since this element possesses spurious modes.

MOTS CLES :

Eléments finis – Eléments Membranaires - Formulation déplacement Formulation Mixte - Hybride – Élément flexionnel - Cisaillement transversale

KEYS WORDS:

Finîtes elements – Membrane element- Dis placement Formulation Mixed formulation – Hybrid-Flexural Element – Shear -deformation