



Université de Constantine 1

Faculté des sciences et de la technologie

Département de Génie Civil

# Thèse de doctorat

Présentée par : **Moussa BOUCHABOUB**

En vue l'obtention du titre de : **DOCTEUR EN SCIENCES**

Option : Structure

Thème :

**Comportement de poteaux élancés en béton armé  
soumis à un chargement excentré**

Devant le jury :

|                    |   |
|--------------------|---|
| A. <b>BELOUAR</b>  | Professeur à l'université de Constantine 1, <b>Président</b>                  |
| M.L. <b>SAMAI</b>  | Professeur à l'université de Constantine 1, <b>Rapporteur</b>                 |
| M. <b>GUENFOUD</b> | Professeur à l'université 08 mai 1945 de Guelma, <b>Examineur</b>             |
| A. <b>BOULFOUL</b> | Maitre de conférences à l'université de Constantine 1, <b>Examineur</b>       |
| H. <b>BOUZERD</b>  | Maitre de conférences à l'université 20 août 1955 de Skikda, <b>Examineur</b> |

Soutenue le 10 avril 2013

# Remerciements

Comme guise de reconnaissances j'adresse mes sincères remerciements, mon grand respect et ma noble gratitude à :

M<sup>r</sup> **M.L. SAMAI** professeur à l'université de Constantine 1 ; mon promoteur à qui je reconnais son sérieux, sa patience et sa contribution régulière aux différents stades de mon travail sans oublier ses encouragements, sa dynamique qui n'ont fait que pénétrer en moi le vouloir réussir.

M<sup>r</sup> **A. BELOUAR** professeur à l'université de Constantine 1 ; le président de jury que je remercie profondément pour l'honneur qu'il me fait en acceptant la présidence du jury.

M<sup>r</sup> **M. GUENFOUD** professeur à l'université 08 mai 1945 de Guelma ; acceptez monsieur mes respectueux remerciements pour l'honneur que vous me faites en acceptant d'être examinateur de la présente thèse.

M<sup>r</sup> **A. BOULFOUL** maitre de conférences à l'université de Constantine 1 ; acceptez monsieur mon très grand remerciement pour le fait d'avoir accepté de consulter ce travail et d'être membre de jury

M<sup>r</sup> **H. BOUZERD** maitre de conférences à l'université du 20 août 1955 de Skikda ; acceptez monsieur mon très grand remerciement pour le fait d'avoir accepté de consulter ce travail et d'être membre de jury.

# Dédicace

A la mémoire de mes parents

A mon épouse et mes enfants

A mes frères et sœurs

A mes amis

# Résumé

La sécurité des structures en béton armé vis-à-vis des phénomènes d'instabilité, ne peut être valablement appréhendée que par des calculs tenant compte d'une part des sollicitations du second ordre dues aux déplacements, d'autre part du comportement physique réel des matériaux béton et acier.

Le traitement de telles structures, à travers les différentes évolutions du calcul structurel, s'est avéré assez complexe et un traitement analytique est pratiquement impossible jusqu'à nos jours. Des solutions empiriques ainsi que des approches graphiques par le biais de construction et d'exploitation de diagrammes d'interaction ont été proposés. Il en est de même pour les résolutions numériques.

La recherche de méthodes numériques nouvelles et très sensibles pour le calcul de la relation charge-déplacement est plus que nécessaire. Ces méthodes ont été utilisées pour la détermination de la charge de ruine de poteaux élancés en béton armé chargés excentriquement. Pour ce faire un programme de calcul a été élaboré et les résultats numériques se sont avérés être très proches des résultats expérimentaux existants.

des recommandations sont tirées et des perspectives de développement du présent travail sont proposés.

# Abstract

The security of structures made of reinforced concrete towards the phenomena of instability, can to be apprehensive only by calculations taking into account the effect of the second order due to the displacements and the real physical behavior of materials concrete and steel.

The treatment of such structures, through the various evolutions of the structural calculation, has proved rather complex and an analytical treatment is practically impossible. Empirical solutions as well as graphic approaches by means of construction and of exploitation of interaction diagrams were proposed. It's the same for numerical resolutions.

The research for new and very sensible numerical methods for the calculation of the relation load-displacement is more than necessary. These methods were used for the determination of the failure load of reinforced concrete columns subjected to biaxial bending. Numerical program was elaborated and numerical results have proved to be very close to existing experimental results.

Recommendations are presented as well as the prospects for the development of this work.

# ملخص

إن أمن المنشآت المكونة من الخرسانة المسلحة تجاه ظاهرة عدم الاستقرار لا يمكن تفهمه بصورة جيدة إلا بإجراء حسابات تأخذ بعين الاعتبار إجهادات الدرجة الثانية الناتجة عن الانتقالات من جهة و السلوك الفيزيائي الحقيقي للمواد (الخرسانة وحديد التسليح). إن دراسة مثل هذه المنشآت خلال مختلف مراحل حساب المنشآت قد كان معقدا وأية دراسة تحليلية غير ممكنة إلى يومنا هذا. ومع هذا فقد تم اقتراح حلول تجريبية وطرق بيانية بالإضافة إلى البرمجة الرقمية.

إن البحث عن طرق رقمية جديدة وفعالة لحساب العلاقة بين القوة والانتقال تعتبر ضرورية حيث تم استعمالها لحساب قوة الانهيار للأعمدة الخرسانية العالية والخاضعة لعزمي انحناء. حيث تم إعداد برنامج رقمي لهذا الغرض والنتائج المستخرجة كانت قريبة من النتائج التجريبية الموجودة.

في نهاية الأمر قدمت التوصيات الأساسية وكذلك نصائح حول تطوير هذا العمل.

# TABLE DES MATIERES

|                          |      |
|--------------------------|------|
| Remerciement.....        | i    |
| Dédicace.....            | ii   |
| Résumé.....              | iii  |
| Abstract.....            | iv   |
| Résumé en arabe.....     | v    |
| Table des matières.....  | vi   |
| Liste des notations..... | x    |
| Liste des figures.....   | xiii |
| Liste des tableaux.....  | xv   |

## Chapitre 1 : Introduction générale

|  |   |
|--|---|
| <b>1.1 Problématique</b> .....             | 1 |
| <b>1.2 Objectifs de la thèse</b> .....     | 2 |
| <b>1.3 Structuration de la thèse</b> ..... | 2 |

## Chapitre 2 : Evolution du calcul des poteaux élancés en béton armé

|  |    |
|--|----|
| <b>2.1. Introduction</b> .....   | 3  |
| <b>2.2. Avant la norme NBN 15 de 1977 [2]</b> .....  | 3  |
| 2.2.1. « Instructions relatives aux ouvrages en béton armé » de 1923 (A.B.S., 1923).....       | 3  |
| 2.2.2. « Instructions relatives aux ouvrages en béton armé » de 1929 (A.B.S., 1929).....       | 4  |
| 2.2.3. « Instructions relatives aux ouvrages en béton armé » de 1934 (A.B.S., 1934).....       | 5  |
| 2.2.4. « Instructions relatives aux ouvrages en béton armé » de 1944 (I.B.N., 1944).....       | 7  |
| 2.2.5. « Instructions relatives aux ouvrages en béton armé » de 1955 (I.B.N., 1955).....       | 8  |
| 2.2.6. « Instructions relatives aux ouvrages en béton armé » de 1963 & 1969(I.B.N., 1963)..... | 9  |
| <b>2.3. La norme NBN 15 de 1977 (N.B.N. B15, 1977) [9]</b> .....                               | 9  |
| 2.3.1. Méthodes aux contraintes admissibles.....   | 9  |
| 2.3.2. Etat limite de flambement.....  | 10 |
| 2.3.3. Considérations technologiques.....  | 13 |
| <b>2.4. Eurocode 2, ENV 1992-1-1:1991 (ENV 1992-1-1, 1991) [11]</b> .....                      | 14 |
| 2.4.1. La structure du bâtiment dans son ensemble.....   | 14 |
| 2.4.2. Elancement limite séparant premier et second ordre.....                                 | 15 |
| 2.4.3. Les excentricités.....  | 16 |
| 2.4.4. Le calcul d'instabilités.....   | 17 |
| 2.4.5. Considérations technologiques.....  | 19 |
| <b>2.5. prEN 1992-1-1 (prEN 1992-1-1, 2003) [13]</b> .....                                     | 20 |

|   |           |
|---|-----------|
| 2.5.1. Elancement limite séparant premier et second ordre.....                          | 20        |
| 2.5.2 Calcul au second ordre.....   | 21        |
| 2.5.2.1. Méthodes dites générales.....  | 21        |
| 2.5.2.2. Méthodes dites simplifiées.....  | 21        |
| 2.5.3. Considérations technologiques.....   | 24        |
| 2.5.4. Considérations pour béton non armé.....  | 25        |
| <b>2.6. Conclusions.....</b>  | <b>26</b> |
| <br>  |           |
| <b>Chapitre 3 : Bétons à Hautes Performances</b>  |           |
| <b>3.1. Introduction.....</b>   | <b>27</b> |
| <b>3.2. Les nouveaux développements dans le domaine de la technologie du béton.....</b> | <b>28</b> |
| 3.2.1. Introduction.....  | 28        |
| 3.2.2. Découverte des super plastifiants.....   | 29        |
| 3.2.3. L'incidence de particules extrêmement fines (additions).....                     | 31        |
| <b>3.3. Principes de formulation des BHP.....</b>                                       | <b>32</b> |
| 3.3.1. Introduction.....  | 32        |
| 3.3.2. Défloculation des grains de ciment.....  | 32        |
| 3.3.3. Optimisation du squelette granulaire.....  | 33        |
| 3.3.4. Formulations effectuées pour quelques ouvrages types.....                        | 33        |
| <b>3.4. Constituants des BHP.....</b>   | <b>33</b> |
| <b>3.5. Propriétés des BHP.....</b>   | <b>34</b> |
| 3.5.1. Effets de la température sur le béton en cours de durcissement.....              | 34        |
| 3.5.2. Comportement en compression.....   | 35        |
| 3.5.3. Comportement en traction.....  | 36        |
| 3.5.4. Rigidité.....  | 36        |
| 3.5.5. Retrait.....   | 36        |
| 3.5.5.1. Retrait endogène.....  | 36        |
| 3.5.5.2. Retrait de dessiccation.....   | 37        |
| 3.5.6. Le fluage.....   | 37        |
| 3.5.7. Durabilité.....  | 38        |
| 3.5.8. Résistance au feu.....   | 38        |
| <b>3.6. Avantages des BHP.....</b>  | <b>39</b> |
| <b>3.7. Contrôle des BHP.....</b>   | <b>40</b> |
| <b>3.8. Dimensionnement des structures en BHP.....</b>                                  | <b>41</b> |
| <b>3.9. Atouts des BHP.....</b>   | <b>41</b> |
| <b>3.10. Conclusions.....</b>   | <b>42</b> |



## Chapitre 4 : Simulation numérique des poteaux élancés

|   |    |
|---|----|
| <b>4.1. Introduction</b> .....                                      | 43 |
| <b>4.2. Relation moment-courbure à effort normal constant</b> ..... | 43 |
| 4.2.1. Introduction.....  | 43 |
| 4.2.2. Modèles de lois de comportement.....                         | 43 |
| 4.2.2.1. Loi simulant le matériau béton.....                        | 43 |
| 4.2.2.2. Loi simulant le matériau acier.....                        | 44 |
| 4.2.3. Méthode de la matrice de rigidité tangentielle.....          | 46 |
| 4.2.3.1. Introduction.....  | 46 |
| 4.2.3.2. Descriptif de la méthode.....                              | 46 |
| <b>4.3. Interaction N-M</b> .....                                   | 51 |
| 4.3.1. Introduction.....  | 51 |
| 4.3.2. Principe des diagrammes d'interaction.....                   | 51 |
| 4.3.2.1. Cas d'une flexion uni-axiale.....                          | 51 |
| 4.3.2.2. Cas d'une flexion bi-axiale.....                           | 56 |
| a. Introduction.....  | 56 |
| b. Méthode du contour de charge.....                                | 58 |
| <b>4.4. Méthode des différences finies</b> .....                    | 60 |
| 4.4.1. Introduction.....  | 60 |
| 4.4.2. Principe de la méthode.....                                  | 60 |

## Chapitre 5 : Analyse et interprétation des résultats

|  |    |
|--|----|
| <b>5.1. Introduction</b> .....   | 63 |
| <b>5.2. Analyse de la capacité portante par rapport à la résistance de la section</b> .....              | 63 |
| 5.2.1. Poteaux courts.....   | 63 |
| 5.2.2. Poteaux élancés.....  | 64 |
| <b>5.3. Capacité portante relative aux capacités obtenues avec un béton de 30 N/mm<sup>2</sup></b> ..... | 66 |
| 5.3.1. Introduction.....   | 66 |
| 5.3.2. Poteaux de 2000 mm de hauteur.....  | 66 |
| 5.3.3. Poteaux de 4000 mm de hauteur.....  | 67 |
| <b>5.4. Effets des résistances élevées sur la section pour une capacité portante constante</b> .....     | 68 |
| 5.4.1. Introduction.....   | 68 |
| 5.4.2. Effet de la variation de la résistance du béton sur la capacité portante des poteaux.....         | 68 |
| 5.4.3. Effet de la variation du taux d'armatures sur la capacité portante des poteaux.....               | 69 |
| 5.4.4. Changement de section et de résistance pour une hauteur constante.....                            | 69 |
| <b>5.5. Calcul au premier ou au second ordre</b> .....   | 81 |
| 5.5.1. Introduction.....   | 81 |
| 5.5.2. Courbes d'élancement limite figurant dans les normes.....   | 82 |

5.5.3. Autres courbes limites figurant dans la littérature..... 84

**Chapitre 6 : Conclusions**

**6.1. L'Avantage de l'utilisation de la méthode des différences finies..... 90**  
**6.2. Avantage de l'utilisation d'un béton à haute résistance..... 90**  
**6.3. Perspectives..... 91**

**Références bibliographiques..... 92**

## Liste des notations et abréviation

|                 |  |
|-----------------|--|
| $A_C$           | Aire de la section comprimée totale de béton   |
| $A_S$           | Aire de la section d'armature comprimée  |
| $B'$            | Aire de la section de béton seul   |
| $b$             | Largeur totale de la section   |
| $D$             | vecteur déformation  |
| $E_{cd}$        | Module d'élasticité du béton   |
| $E_{ci}$        | Module d'élasticité tangent  |
| $E_{c1}$        | Module d'élasticité sécant de l'origine au pic   |
| $E_{cm}$        | Module d'élasticité sécant   |
| $E_s$           | Module d'élasticité de l'acier   |
| $e$             | Somme des différentes excentricités  |
| $e_i$           | Excentricité additionnel couvrant les effets des imperfections géométriques  |
| $\bar{e}$       | Excentricité de $\bar{N}$  |
| $e_0$           | Excentricité accidentelle  |
| $e_2$           | Excentricité du second ordre simplifiée  |
| $F$             | vecteur force  |
| $F_p$           | Capacité portante du poteau  |
| $f_{ck}$        | Résistance caractéristique du béton obtenue à partir d'un cylindre   |
| $f_{ck,cube}$   | Résistance caractéristique sur cube  |
| $f_{cm}$        | Résistance moyenne en compression  |
| $f_{ctm}$       | Résistance moyenne en traction directe   |
| $f_y$           | limite d'écoulement des aciers   |
| $h$             | Hauteur de la section  |
| $h_t$           | Hauteur utile de la section transversale   |
| $I_c$           | Moment d'inertie de la section droite de béton   |
| $I_s$           | Moment d'inertie des armatures par rapport au centre de gravité  |
| $i$             | Rayon de giration  |
| $k$             | Représente la courbure fictive au milieu de la longueur de flambement dans l'état limite ultime de la section      |
| $k_c$           | Coefficient tenant compte des effets de la fissuration, du fluage  |
| $k_e$           | Coefficient caractéristique des conditions d'extrémité   |
| $k_s$           | Coefficient tenant compte de la contribution des armatures   |
| $K_t$           | coefficient dépendant des modules d'élasticités, des résistances et des rayons de girations de l'acier et du béton |
| $K_2$           | Représentant la diminution de courbure sous l'effet de l'augmentation de l'effort normal                           |
| $l$             | Longueur du poteau   |
| $l_c$           | Longueur de flambement de l'élément, déterminé par la théorie de l'élasticité                                      |
| $l_{col}$       | Hauteur du poteau mesurée entre les centres d'encastres  |
| $l_0$           | Longueur utile de l'élément isolé  |
| $M_{(A'_{s1})}$ | Moment due à la contribution des aciers $A_{s1}$   |
| $M_{(A_{s2})}$  | Moment due à la contribution des aciers $A_{s2}$   |
| $M_{0Ed}$       | Moment comprenant le 1 <sup>er</sup> ordre et les imperfections  |

|                  |   |
|------------------|---|
| $M_{Rd}$         | Effort normal résultant de l'intégration du champ de contraintes d'un état donné du champ de déformations |
| $M_{ux}$         | Moment ultime suivant l'axe X correspondant à une flexion uni-axiale                                      |
| $M_{uy}$         | Moment ultime suivant l'axe Y correspondant à une flexion uni-axiale                                      |
| $M_x$            | moments selon l'axe de coordonnées X  |
| $M_y$            | moments selon l'axe de coordonnées Y  |
| $M_{xi}$         | Moments interne selon l'axe de coordonnées X  |
| $M_{yi}$         | Moments interne selon l'axe de coordonnées X  |
| $M^*$            | Moment sollicitant de 1er ordre   |
| $M_c^*$          | moment complémentaire   |
| $m$              | Facteur représentant le rapport entre $E_a / E_b$   |
| $N$              | Effort normal sollicitant   |
| $N_{(A_{s2})}$   | Effort normale due à la contribution des aciers $A_{s2}$  |
| $N_{(A'_{s1})}$  | Effort normale due à la contribution des aciers $A_{s1}$  |
| $N_B$            | Charge de flambement « eulérienne » basée sur la rigidité nominale  |
| $N_i$            | Effort normal interne   |
| $N_R$            | Résistance maximale de la section géométrique   |
| $N_{Rd}$         | Effort normal résultant de l'intégration du champ de contraintes d'un état donné du champ de déformations |
| $N_s$            | La charge de sécurité admissible pour les prismes en danger de flambement                                 |
| $N_{sd}$         | Effort normal de calcul agissant sur l'élément  |
| $N^*$            | Effort normal sollicitant de 1 <sup>er</sup> ordre  |
| $\bar{N}'$       | Résultante des contraintes à l'état limite choisi   |
| $n$              | Coefficient de sécurité   |
| $Q$              | Matrice de rigidité tangentielle  |
| $R_{CP}$         | Le rapport entre la capacité portante du poteau et la résistance maximale de la section géométrique       |
| $R'_{br}$        | La contrainte d'écrasement du béton non armé, mesurée sur cube de 200 mm à 28 jours                       |
| $R_a^*$          | Contrainte de calcul de traction de l'acier   |
| $R_b^*$          | Contrainte de calcul de compression du béton  |
| $R'_{wk}$        | Résistance caractéristique du béton sur cubes de 200mm d'arrête à 28 jours                                |
| $R'_{wm}$        | Résistance moyenne à la compression calculée à partir d'un nombre suffisant d'essais                      |
| $r_m$            | Rapport des moments de 1er ordre  |
| $\frac{1}{r}$    | Courbure  |
| $S$              | Ecart-type  |
| $\nu$            | Inclinaison sur la verticale de la structure  |
| $\nu_u$          | Effort normal réduit  |
| $y_i$            | La flèche dans le nœud i  |
| $\alpha_{béton}$ | Effort normal réduit due à la contribution du béton seul  |
| $\alpha_{s1}$    | Effort normal réduit due à la contribution des aciers $A_{s1}$  |
| $\alpha_{s2}$    | Effort normal réduit due à la contribution des aciers $A_{s2}$  |
| $\beta_{béton}$  | Moment réduit due à la contribution du béton seul   |
| $\beta_{s1}$     | Moment réduit due à la contribution des aciers $A_{s1}$   |
| $\beta_{s2}$     | Moment réduit due à la contribution des aciers $A_{s2}$   |
| $\Delta$         | Flèche de second ordre  |

|                    |   |
|--------------------|---|
| $\varepsilon_a^*$  | Déformation de l'acier à la limite élastique                                  |
| $\varepsilon_b^*$  | Déformation limite pour le béton avec prise en compte des effets à long terme |
| $\varepsilon_c$    | Déformation de compression  |
| $\varepsilon_{c1}$ | Déformation au pic de contrainte  |
| $\varepsilon_u$    | Déformation ultime des aciers   |
| $\varepsilon_y$    | Déformation élastique des aciers  |
| $\varepsilon_{yd}$ | Déformation à la limite élastique de l'acier                                  |
| $\varepsilon_0$    | Déformation centrale  |
| $\lambda$          | Elancement de la structure  |
| $\sigma_c$         | Contrainte de compression   |
| $\phi$             | Coefficient de réduction pour le flambement                                   |
| $\phi_{eff}$       | Coefficient de fluage effectif  |
| $\phi_x$           | Courbure selon l'axe de coordonnées X   |
| $\phi_y$           | Courbure selon l'axe de coordonnées X   |
| $\Omega'_a$        | Surface d'acier   |
| $\Omega'_b$        | Surface de béton  |
| $\Omega'$ min      | Surface déterminée sur base des tensions de sécurité                          |
| $\Omega'$ réel     | Surface de béton réellement mise en œuvre                                     |
| $\omega$           | Proportion mécanique d'armatures  |
| $\omega_t$         | Ratio mécanique entre l'acier et le béton                                     |
| BHP                | Béton à haute performance   |
| ELU                | Etat limite ultime  |
| RDM                | Resistance des matériaux  |

## Liste des figures

### Figure :

|      |   |    |
|------|---|----|
| 2.1  | Méthode de la colonne modèle.....   | 18 |
| 3.1  | Structure microscopique d'un béton ordinaire et à haute performance.....  | 27 |
| 3.2  | Relation entre la résistance à la compression et le rapport E/C.....  | 28 |
| 3.3  | Relation entre la porosité et le rapport E/C pour différents degrés d'hydratation.....  | 29 |
| 3.4  | Des charges opposées sur la surface des grains de ciment provoquent la floculation.....   | 30 |
| 3.5  | Les super-plastifiant empêchent la floculation.....   | 31 |
| 3.6  | Granulométrie des matières fines.....   | 32 |
| 3.7  | Béton ordinaire :fissures d'adhérence et fissures dans le mortier.....  | 35 |
| 3.8  | Béton à haute performance :les granulats sont également fissurés et fissures dans le mortier.....   | 35 |
| 3.9  | Diagramme contrainte-déformation.....   | 36 |
| 3.10 | Diminution de la résistance à la compression des bétons à haute résistance selon l'EC2 feu.....   | 39 |
| 4.1  | Diagramme contrainte –déformation du béton.....   | 44 |
| 4.2  | Diagramme force –déformation, éprouvette d'acier, surface 269 mm <sup>2</sup> .....   | 45 |
| 4.3  | Représentation de la loi « elasto-plastique » pour l'acier.....   | 46 |
| 4.4  | Représentation des efforts et des déformations et la discrétisation de la section.....  | 48 |
| 4.5  | Exemple d'une relation moment- courbure à effort normal constant.....   | 50 |
| 4.6  | Etat d'un poteau au moment imminent de ruine.....   | 51 |
| 4.7  | Diagramme d'interaction ( $A_{s2}/bh=1\%$ , $f_{cu}=40$ Mpa, $f_y=410$ Mpa $d_2/h =0.15$ ).....   | 52 |
| 4.8  | Diagramme d'interaction ( $A_{s2}/bh=1\%$ , $A'_{s1}/bh=1\%$ , $f_{cu}=40$ Mpa, $f_y=410$ Mpa, $d_2/h =0.15$ , $d'_1/h =0.15$ ).....                    | 54 |
| 4.9  | Poteau sous l'effet d'une flexion bi-axiale.....  | 57 |
| 4.10 | Diagramme d'interaction pour le cas d'une flexion bi-axiale.....  | 58 |
| 4.11 | Organigramme du programme numérique.....  | 60 |
| 4.12 | Méthode des différences finis :poteau bi-articulé.....  | 61 |
| 4.13 | Relation charge-déplacement :poteau 180×180 mm( $h= 3.78$ m, $f_{ck}=94.3$ Mpa, $f_{yk}=542$ Mpa, $e_x=20$ mm, $e_y=0$ ).....                           | 62 |
| 5.1  | Valeur de $R_{CP}$ pour des poteaux de 2000 mm de hauteur avec un taux d'armatures de 2 % .....   | 64 |
| 5.2  | Valeur de $R_{CP}$ pour des poteaux de 4000 mm de hauteur avec un taux d'armatures de 2 % , $e_y=0$ .....   | 65 |
| 5.3  | Effet de la résistance du béton sur la capacité portante des poteaux ( $L=2000$ mm, 250x250mm, avec un taux d'armatures de 0.7 % ).....                 | 67 |
| 5.4  | Effet de la résistance du béton sur la capacité portante des poteaux ( $L=4000$ mm, 250x250mm, avec un taux d'armatures de 0.7 % ).....                 | 68 |
| 5.5  | Effet de la variation de la résistance du béton sur la capacité portante des poteaux ( $L=3000$ mm, 250x250mm, avec un taux d'armatures de 0.7 % )..... | 69 |
| 5.6  | Effet de la variation du taux d'armatures sur la capacité portante des poteaux ( $L=3000$ mm, 250x250mm, $f_c=30$ N/mm <sup>2</sup> ).....              | 70 |

|             |  |    |
|-------------|--|----|
| <b>5.7</b>  | Courbe limite de l'ENV.....  | 83 |
| <b>5.8</b>  | Comparaison entre les courbes limites de l'ENV et celle de la prEN.....  | 83 |
| <b>5.9</b>  | Représentation des courbes limites de la prEN et d'Hellesland<br>( $f_c = 30\text{N/mm}^2$ , $250 \times 250\text{mm}$ , $\rho = 1$ ou $4\%$ ).....  | 85 |
| <b>5.10</b> | Représentation des courbes limites de la prEN et d'Hellesland<br>( $f_c = 90\text{N/mm}^2$ , $250 \times 250\text{mm}$ , $\rho = 1$ ou $4\%$ ).....  | 85 |
| <b>5.11</b> | Représentation qualitative pour une charge de $3000\text{kN}$ des écarts entre les<br>courbes « limites » de la prEN et celles d'Hellesland.....   | 86 |
| <b>5.12</b> | Valeur à considérer pour $\cot \beta$ (Mari et Hellesland, 2005).....  | 88 |
| <b>5.13</b> | Représentation des courbes limites de la prEN ainsi que celles des<br>travaux de Mari-Hellesland pour $e = 31$ et $81\text{mm}$ ( $250 \times 250\text{mm}$ , $\rho = 4\%$ ,<br>$f_c = 90\text{N/mm}^2$ )..... | 88 |

## Liste des tableaux

**Tableau :**

|            |  |    |
|------------|--|----|
| <b>3.1</b> | Caractéristique de résistance et de déformation.....   | 28 |
| <b>3.2</b> | Quelques exemples de formulation pour 1m <sup>3</sup> de BHP.....  | 33 |
| <b>4.1</b> | Valeur de $\alpha_n$ en fonction du rapport N/ Nuz.....  | 59 |
| <b>5.1</b> | détermination des caractéristiques du poteau (B) ayant la<br>même charge de ruine que le poteau (A)..... | 70 |



# Introduction générale

## 1.1. Problématique

Le béton couramment utilisé au milieu du siècle passé dans la construction ne pouvait pas atteindre des résistances très élevées. Ces résistances équivalaient approximativement au septième de celle d'un acier doux (limite élastique). De ce fait, pour un même effort normal, la surface nécessaire de béton par rapport à celle d'acier étant nettement plus grande. Par conséquent, les poteaux en béton armé apparaissaient plus courts.

De nos jours, la technologie du béton ayant fortement évolué, il est, sous certaines conditions, réaliste de construire des éléments structuraux en béton ayant à la compression une résistance de  $90\text{N/mm}^2$  voire nettement plus. En conséquence, l'ingénieur concepteur peut être amené à diminuer les dimensions transversales des poteaux pour une question d'esthétique ou d'encombrement. A charge égale, et en considérant uniquement la résistance de la section géométrique, la surface de béton nécessaire pour une résistance de  $30\text{N/mm}^2$  peut être réduite du tiers avec un béton de résistance  $90\text{N/mm}^2$ . Inévitablement, cette diminution de la section transversale induit une augmentation de l'élanement et augmente ainsi les risques des instabilités au flambement.

Le recours à des structures de plus en plus élancées en béton armé et la nécessité de s'assurer de leur stabilité au flambement conduisent à prendre en compte le couplage de la non-linéarité géométrique générée par les grands déplacements avec la non-linéarité matérielle résultant du comportement du béton. Les non linéarités affectant les structures, prises en compte, sont : mécaniques (comportement intrinsèque des matériaux, fissuration...), géométrique due au comportement d'ensemble de la structure. Lorsque les déplacements deviennent importants, l'équilibre du système ne peut plus être décrit dans la configuration initiale, mais doit être décrit dans la configuration déformée (théorie du second ordre des déplacements).

Dans les méthodes utilisées pour ce genre de calcul ( pas à pas ), la structure est discrétisée en éléments finis. Le chargement est appliqué d'une manière graduelle (quasi-statique) et ce jusqu'à la ruine. Cette analyse non linéaire permet alors de suivre le comportement d'une structure jusqu'à la ruine. La structure peut être en béton armé ordinaire ou en béton à haute résistance ou encore en béton précontraint.

De la diminution de la section transversale avec l'augmentation des risques des instabilités au flambement, résulte la question posée à la base du présent travail :

*« Peut-on arriver à diminuer la section transversale d'un poteau en utilisant des résistances de béton plus élevées tout en imposant la même valeur de capacité portante ? »*

La réponse à cette question n'est certainement pas triviale ni immédiate. Pour ce faire, une approche devant être adoptée pour apporter les éclaircissements nécessaires.

## 1.2. Objectifs de la thèse

- ❖ Réaliser une synthèse bibliographique mettant en évidence l'évolution du calcul et du traitement de telles structures depuis 1929.
- ❖ Réaliser un programme numérique basé sur la méthode des différences finies.
- ❖ Mener une étude paramétrique.
- ❖ Mettre en évidence les effets des différents paramètres influents à savoir la hauteur du poteau, l'excentricité de premier ordre, le taux d'armatures aussi que la résistance à la compression du béton.

## 1.3. Structuration de la thèse

La présente thèse est composée de trois volets. Le premier est une recherche historique relative au calcul de l'instabilité au flambement dans les normes européennes, le deuxième valide une méthode numérique et le troisième traite des résultats obtenus par l'analyse paramétrique d'un nombre de poteaux. Ces trois volets sont regroupés dans un ensemble de six chapitres.

Le premier chapitre présente la problématique qui a encouragé cette recherche ainsi qu'un survol des principaux objectifs. Le second chapitre présente une revue de la littérature concernant l'évolution du calcul des poteaux élancés en béton armé. Le troisième chapitre présente une revue de la littérature concernant les bétons à haute performance. Le chapitre quatre regroupe les méthodes utilisées pour la simulation numérique des poteaux élancés en béton armé. Les effets des différents paramètres influents sont présentés dans le chapitre cinq. Le dernier chapitre est réservé aux conclusions générales de l'étude et les perspectives de développement du présent travail.

# Evolution du calcul des poteaux élancés en béton armé

## 2.1. Introduction

Il est proposé dans le présent chapitre de retracer l'évolution et les changements significatifs du mode de calcul des poteaux et ce, dans le sens le plus classique, en commençant par la détermination de la résistance du béton (élément indispensable), de la quantité d'armatures minimales imposée dans le poteau pour en arriver au principe de vérification à l'instabilité [1].

## 2.2. Avant la norme NBN 15 de 1977

### 2.2.1 « Instructions relatives aux ouvrages en béton armé » de 1923 (A.B.S., 1923) [2]

A l'époque, la tension de compression que l'on prenait en compte, correspondait à 28% de la résistance à la compression sur un cube de 200 mm d'arrête offerte par le béton à la mise en service. Ceci, bien entendu, pour les bétons dont la composition ne correspondait pas à l'une de celles présentées dans les Instructions. Pour les compositions de béton proposées explicitement dans la norme, il suffisait simplement de prendre les valeurs indiquées dans le texte. Ces valeurs sont comprises dans une fourchette allant de 4 à 6 N/mm<sup>2</sup>. Ces limites sont également d'application même pour le béton fretté. Il est à noter que pour le béton fretté, il est autorisé de prendre une valeur de tension plus élevée sans pour autant dépasser la limite fixée à 6 N/mm<sup>2</sup>.

En revanche, aucune indication ne figure concernant une quelconque quantité d'acier à placer dans les poteaux mais une imposition existe pour l'enrobage de l'armature. L'enrobage en béton doit être au minimum de 15 à 20 mm. Pour les armatures longitudinales ayant un diamètre inférieur ou égal à un Ø10, un enrobage de 10 mm suffit.

Pour ce qui est du calcul en tant que tel, le texte est assez simple et repose uniquement sur des calculs de type résistance des matériaux. On cite :

*« Art. 12. – Les calculs de résistance seront faits selon des méthodes scientifiques appuyées sur des données expérimentales, et non par des procédés empiriques. Ils seront déduits soit des règles usuelles de la résistance des matériaux, soit des principes offrant au moins les mêmes garanties d'exactitude. »*

La section transversale du poteau étant constituée de deux matériaux, l'article 13 définit le coefficient d'équivalence entre l'acier et le béton à prendre en compte pour les calculs.

*« Art.13. - Pour le calcul des pièces soumises à flexion, on adoptera la valeur  $m=15$  pour le rapport du coefficient d'élasticité de l'acier à celui du béton. Pour le calcul des pièces soumises à compression simple, la valeur de  $m$  sera prise égale à 12. »*

On trouve également à l'article 15 [2] un énoncé très court concernant le flambement :

« Art. 15. – On s'assurera, en calculant les pièces comprimées, qu'elles ne sont pas exposées à flamber. »

A cette époque, il semble, d'après l'explication, qu'il n'y a pas encore de théorie universellement reconnue pour vérifier cela. Cet énoncé est justifié par le fait que les poteaux en béton armé sont moins sujets au flambement que les poteaux en acier. Et s'il fallait encore une autre justification tirée de la norme, un énoncé explicitant l'article:

« ... parce que les poteaux sont des éléments de constructions dont le calcul et l'exécution sont relativement faciles, ... »

En conclusion, en 1923, les poteaux en béton armé ne semblaient pas être considérés comme des éléments requérant des calculs très particuliers.

### 2.2.2 « Instructions relatives aux ouvrages en béton armé » de 1929 (A.B.S., 1929) [3]

Dans la 2ème édition de la norme publiée six années plus tard, quelques changements importants figurent dans le texte. En ce qui concerne les « tensions de sécurité admissibles » pour les compositions de béton indiquées, rien n'a changé. En revanche pour les autres compositions, au lieu de prendre 28% de la résistance à l'écrasement du béton sur cube de 200 mm d'arrête, il est autorisé d'en prendre 33%. De plus, il est toujours possible de considérer le frettage, comme dans la première édition. Celui-ci augmente la résistance du béton à l'intérieur de la zone délimitée par les aciers de frettage (Article 7).

Du point de vue du calcul des poteaux, ici, plusieurs points sont, rajoutés :

- ❖ il est recommandé de tenir compte des « moments secondaires » induits dans les poteaux, c'est-à-dire les moments induits par les poutres qui arrivent sur le poteau.
- ❖ l'article 15 présenté ci-dessous s'est vu rajouter une phrase qui définit à partir de quelle hauteur du poteau on prend en compte le risque de flambement :

« Art. 15. – On s'assurera, en calculant les pièces comprimées, qu'elles ne sont pas exposées à flamber. Toutefois, cette vérification n'est pas nécessaire dans le cas où le rapport entre la hauteur d'étage et la plus petite dimension transversale du poteau ne dépasse pas 20. »

Ceci est une évolution importante qui semble faire une distinction du point de vue de l'élancement entre poteaux courts et poteaux élancés. Il est important de remarquer que cette distinction disparaîtra dans les éditions suivantes et ce jusqu'en 1977.

- ❖ un nouvel article présente pour la première fois la nécessité de prévoir dans toute section transversale une section minimum d'acier valant 0.8% de la surface de béton. Mais attention, si la tension de service n'atteint pas les tensions autorisées soit par la norme, soit par les essais en laboratoire, il faut réduire la section d'armature à 0.8% d'une section fictive de béton où celui-ci travaillerait à la tension de sécurité admissible. Cette procédure complémentaire a comme effet de diminuer encore plus la quantité d'acier à mettre dans le poteau. De plus, pour les sections armées avec  $\rho > 2.5\%$ , toute la surface

d'acier excédant  $\rho = 2.5\%$  sera prise en compte dans le calcul avec un coefficient d'équivalence acier béton  $m$  de 7,5 au lieu de 15.

- ❖ dans l'explication de l'article 35 de cette édition, on a supprimé l'explication qui disait que les poteaux étaient des éléments faciles à traiter. Ceci est une bonne évolution.

En conclusion, cette version est déjà plus élaborée que la précédente, car on prend en compte une section minimale d'acier, on introduit le fait que des poteaux dans une ossature sont soumis à flexion et enfin on présente un critère d'élancement qui sépare les poteaux courts des poteaux élancés (qui disparaîtra jusqu'en 1977) [...].

### 2.2.3 « Instructions relatives aux ouvrages en béton armé » de 1934 (A.B.S., 1934)

[4]

Dans cette nouvelle édition, l'article qui traitait des contraintes admissibles a été complètement revu, mais les valeurs pour les bétons sortant du cadre des compositions sont toujours soumises à la même règle.

A la lecture, il apparaît deux nouveautés, dont une est essentielle :

- ❖ la première est l'apparition de considérations relatives à ce que l'on appellera plus tard dans la norme, la prise en compte des « états limites de service » [4].

*« Art. 10bis. – Les éléments de la construction en béton armé (dalles, poutres, poteaux, etc.) devront avoir une raideur suffisante pour ne pas prendre de déformations telles qu'il puisse en résulter des inconvénients graves, soit au point de vue de la conservation des éléments décoratifs appliqués au béton, soit au point de vue de l'écoulement des eaux, soit à tout autre point de vue du même ordre. »*

- ❖ la deuxième est plus importante : une théorie de flambement est présentée. La rédaction de cet article est en fait basée sur les études de MM. Baes et Vandeperre (Vandeperre et Plisnier,) [5].

Cet article donne la charge de sécurité admissible pour les prismes en danger de flambement selon la relation ci-après :

$$N_s = 0.8R'_{br}(\Omega'_b + m\Omega'_a) \frac{\emptyset}{n} \quad (2.1)$$

$R'_{br}$  = est la contrainte d'écrasement du béton non armé, mesurée sur cube de 200 mm à 28 jours [N/mm<sup>2</sup>]

$\Omega'_b$  = surface de béton [mm<sup>2</sup>]

$\Omega'_a$  = surface d'acier [mm<sup>2</sup>]

$m$  = facteur représentant le rapport entre  $E_a / E_b = 15$

$n$  = coefficient de sécurité ici au moins 4

$\emptyset$  = coefficient de réduction pour le flambement

Le coefficient de réduction pour le flambement  $\emptyset$  est défini par la relation simplifiée (2.2) :

$$\phi = \frac{1.25}{1 + \frac{1}{1000} \left( \frac{l}{k_e i} \right)^2} \quad (2.2)$$

- $l$  = longueur de la pièce [mm]  
 $k_e$  = coefficient caractéristique des conditions d'extrémité ( $k = 1$  pour un poteau bi-articulé,  $k = 2$  pour un poteau bi-encasté)  
 $\frac{l}{k}$  = longueur de flambement  
 $i$  = rayon de giration [mm]

Alternativement, le coefficient de réduction au flambement est donné de manière plus exacte par la formule (2.3) qui considère l'influence de la résistance du béton  $R'_{br}$  (entre 150 et 400 kg/cm<sup>2</sup>) :

$$\phi = \frac{\eta}{1 + \frac{1}{\pi^2 \mu} \left( \frac{l}{k} \right)^2}$$

$$\pi^2 \mu = 20000 - 35 R'_{br} \quad (2.3)$$

$$\eta = 1 + \frac{(0.8R'_{br} - 100)^2}{52800}$$

Si en plus il devait y avoir un moment fléchissant présent dans le calcul, il faudra faire également la vérification par la théorie classique de la compression excentrée.

Baes et Vandepierre [5] se sont principalement basés sur les travaux d'Engesser et de Ritter. Ritter (1889) a proposé une équation exponentielle pour représenter la courbe contrainte-déformation en compression pour des matériaux pierreux et la fonte. Il en a déduit que le module d'élasticité varie de manière linéaire en fonction du niveau de contrainte. Cette équation est caractérisée par une constante expérimentale qui a été prise égale à 1000 par Ritter, quelle que soit la résistance du matériau. Ceci n'étant déjà plus acceptable à l'époque car il apparaît que la constante n'est pas la même pour tous les bétons.

Un autre problème de la théorie de Ritter va amener Baes et Vandepierre [5] à proposer une méthode de Ritter modifiée : au maximum de la courbe  $\sigma'_b - \delta$  ( $= \sigma - \varepsilon$ ) le module tangent devrait être nul et les déformations infinies. Hors ceci n'est expérimentalement pas le cas. Afin de résoudre cela, on introduit dans le modèle de Ritter deux constantes qui sont fonction des modules, à l'origine et à la rupture, ainsi que de la résistance à la rupture du béton.

L'hypothèse d'Engesser postulant que le module d'élasticité de flambement est moindre que le module d'élasticité vrai, couplé à la théorie Ritter modifiée, conduit à la formule (2.4) pour la prédiction de la charge de flambement de prismes en béton non armés :

$$N_{flt} = \frac{\eta R'_{br} \Omega_b}{1 + \frac{1}{\pi^2 \mu} \left( \frac{l}{k i} \right)^2} \quad (2.4)$$

$R'_{br}$  = est la tension d'écrasement du béton non armé, mesurée sur cube de 200mm  
[N/mm<sup>2</sup>]

$\Omega_b$  = surface de béton [mm<sup>2</sup>]

$\mu, \eta$  = coefficients propres aux matériaux

$k$  = coefficient caractéristique des conditions d'extrémité

( $k = 1$  pour une colonne bi-articulée,  $k = 2$  pour un poteau bi-encasté)

$l$  = longueur de la pièce [mm]

$i$  = rayon de giration [mm]

Cette équation dite « formule de Rankine » est semblable à celle formulée précédemment en combinant les équations (2.1) et (2.3).

De la même manière, il est possible de déterminer la relation pour des prismes armés longitudinalement en prenant en compte les surfaces d'acier et de béton dans le raisonnement (Vandepierre et Plisnier, 1962 [5]).

Les éléments de l'édition précédente des « Instructions » concernant la quantité d'armature et le coefficient d'équivalence  $m$  restent d'application. En ce qui concerne les « contraintes admissibles  $R'_b$  », la valeur sera prise égale au tiers de la résistance à l'écrasement  $R'_{br}$  à l'âge de 28, 14 ou 7 jours en fonction du type de ciment. Mais ces valeurs ne pourront pas dépasser les valeurs limites figurant dans la norme qui sont également fonction du type de ciment utilisé.

En conclusion, à partir de 1934, la norme fournit une expression permettant de prédire la valeur de la charge de flambement d'un poteau en béton armé soumis à une charge centrée [1].

#### 2.2.4. « Instructions relatives aux ouvrages en béton armé » de 1944 (I.B.N., 1944) [6]

Dans cette nouvelle version du texte, les changements significatifs ne portent pas sur le calcul du flambement, même si l'expression du coefficient de sécurité «  $n$  » figurant au dénominateur de la relation (2.1) est plus détaillée et conduit à une valeur plus grande que 4 (pour peu que le poteau soit soumis à l'effet du flambement et donc que la valeur de  $\varphi$  de la relation (2.3) soit plus petit que l'unité).

Une distinction est également faite entre la charge de flambement et la charge de sécurité admissible en divisant la première par le coefficient «  $n$  ».

L'évolution principale concerne les valeurs de contraintes à prendre en compte pour les calculs de résistance :

❖ pour la compression simple :

$$\sigma = \frac{3}{4} R'_b \text{ [N/mm}^2\text{]} \quad (2.5)$$

❖ pour la flexion composée :

$$\sigma = R'_b \text{ [N/mm}^2\text{]} \quad (2.6)$$

$R'_b$  est la « tension de sécurité de base à la compression » qui vaut le quart de la résistance à la rupture par compression de cubes de 20cm de côté qu'on découperait dans la construction au moment de la mise en service ( $R'_b = R'_{br}/4$ ).

L'armature minimale longitudinale à placer dans le poteau est toujours de 0.8% de la surface du béton même si le calcul montre que la section travaille à des tensions inférieures aux valeurs 2.5 et 2.6.

Toutefois, dans ce dernier cas, le minimum de section d'acier sera donné par la relation (2.7) :

$$\Omega'_a = \frac{0.8}{100} \Omega'_{min} \frac{\Omega'_{min}}{\Omega'_{réel}} \quad (2.7)$$

$\Omega'_{min}$  = surface déterminée sur base des tensions de sécurité [mm<sup>2</sup>]

$\Omega'_{réel}$  = surface de béton réellement mise en œuvre [mm<sup>2</sup>]

### 2.2.5. « Instructions relatives aux ouvrages en béton armé » de 1955 (I.B.N., 1955) [7]

La philosophie des calculs reste rigoureusement la même.

La charge de flambement d'un prisme chargé debout sera calculée avec la valeur de  $R'_{pr}$ .

Cette valeur est la contrainte de rupture du béton à la compression sur prisme.

Par contre la charge de sécurité admissible pour des prismes chargés debout en danger de flambement sera calculée avec  $R'_{br}$  qui est la résistance du béton à l'âge de la mise en service.

Le coefficient de sécurité « n », intervenant dans ce calcul, sera au moins égal à 5 alors que dans l'édition précédente il était au moins supérieur à 4. Ceci justifiant peut être la disparition du coefficient qui se trouvait au numérateur de l'équation 2.1. Cette modification engendre une augmentation sensible de la sécurité ce qui est favorable.

La valeur de la contrainte du béton à prendre pour les calculs de RDM est au maximum :

❖ pour la compression simple :

$$\sigma = \frac{1}{5} R'_{br} \text{ [N/mm}^2\text{]} \quad (2.8)$$

❖ pour la flexion composée :

$$\sigma = \frac{1}{3.5} R'_{br} \text{ [N/mm}^2\text{]} \quad (2.9)$$



Une dernière modification, et qui a son importance, concerne l'enrobage des barres d'acier de diamètre  $\Phi 10$  qui passe (enfin !) de 10mm à 15mm. Pour les autres diamètres, la valeur est de 20mm minimum.

### 2.2.6. « Instructions relatives aux ouvrages en béton armé » de 1963 & 1969 (I.B.N., 1963) [8]

La protection des armatures est (enfin) beaucoup plus détaillée car elle envisage diverses agressions possibles : l'eau, ou d'autres agents. On a, donc, pour un béton vibré, un enrobage de 30 mm pour les gros diamètres et de 25mm pour les diamètres inférieurs à 10mm et pour les bétons damés, 40mm pour les gros diamètres et 30mm pour les armatures inférieures à 10mm.

D'un point de vue secondaire, il est à noter que pour la première fois, un article porte sur le façonnage des armatures principales et à cette fin

*« il est tenu compte des conditions de l'essai de pliage à 180° en 3.4 »*

Au § 3.4 de la norme se trouve un tableau indiquant les valeurs à prendre en considération en fonction du type de barre (lisse ou à adhérence améliorée) et du diamètre de la barre.

Un dernier point très important concerne la détermination de la résistance du béton. Celle-ci est déterminée sur base de l'essai en compression de cubes de 200mm de côté. Cependant, des coefficients sont affectés permettant de convertir en résistance équivalente des résistances mesurées sur d'autres types d'éprouvettes (cylindres, prismes).

## 2.3. La norme NBN 15 de 1977 (N.B.N. B15, 1977) [9]

### 2.3.1. Méthodes aux contraintes admissibles

Dans ce chapitre de la norme, le calcul et la vérification au flambement s'effectuent toujours pour des pièces dont la charge est considérée comme centrée. Ceci dit, le paragraphe figurant déjà dans la norme de 1963 est toujours présent et incite pour les pièces longues à prendre en compte la déformation produite par la flexion (état limite ultime).

La vérification au flambement s'effectue toujours en utilisant le raisonnement de Baes et Vandeperre [5]. Une différence cependant est à noter : il s'agit de l'apparition de la notion de résistance caractéristique du béton  $R'_{wk}$ .

$$R'_{wk} = R'_{wm} - 1.64 S \quad (2.10)$$

$R'_{wk}$  = résistance caractéristique du béton sur cubes de 200mm d'arrête à 28 jours  
[N/mm<sup>2</sup>]

$R'_{wm}$  = résistance moyenne à la compression calculée à partir d'un nombre « suffisant » d'essais [N/mm<sup>2</sup>]

$S$  = écart-type [N/mm<sup>2</sup>]

La valeur de la contrainte admissible sur le béton à prendre en compte pour les calculs est au maximum :

❖ pour la compression simple :

$$\sigma = \frac{1}{4} R'_{wk} \text{ [N/mm}^2\text{]} \quad (2.11)$$

❖ pour la flexion composée :

$$\sigma = \frac{1}{2.7} R'_{wk} \text{ [N/mm}^2\text{]} \quad (2.12)$$

### 2.3.2. Etat limite de flambement

La théorie est limitée aux éléments rectilignes ayant une section constante soumise soit à compression, soit à flexion simple, soit à flexion composée.

Pour la première fois depuis la norme de 1929, une valeur limite d'élancement est réintroduite dans la norme. L'élancement se calcule comme indiqué à la relation 2.13.

$$\lambda = \frac{l_c}{i} \quad (2.13)$$

$\lambda$  = élancement de la structure

$l_c$  = longueur de flambement de l'élément, déterminé par la théorie de l'élasticité [mm]

$i$  = rayon de giration [mm]

Si  $\lambda > 35$  le calcul se fait au second ordre.

Deux méthodes de vérification sont proposées :

➤ la première méthode de calcul est basée sur l'état d'équilibre interne.  
Pour ce faire, on contrôle que :

*« Sous la combinaison la plus défavorable des actions, compte tenu des déformations correspondantes, un état d'équilibre est possible entre les éléments de réduction (M,N,T) et le système interne des contraintes »*

Cette technique vise à déterminer approximativement l'excentricité totale de l'effort normal dans la section la plus sollicitée du poteau pour l'état-limite ultime de stabilité de forme (Espion, 2000) [10].

Pour vérifier si un poteau de dimensions, de matériaux et d'armature donnés est stable, on contrôle les deux inégalités (2.14) suivante :

$$\begin{cases} \bar{N}' > N \\ \bar{e} > e \end{cases} \quad (2.14)$$

$\bar{N}'$  = résultante des contraintes à l'état limite choisi

$N$  = effort normal sollicitant (agissant)

$\bar{e}$  = excentricité de  $\bar{N}$

$e$  = somme des différentes excentricités (1<sup>er</sup> ordre, 2<sup>ème</sup> ordre, accidentelle)

Commençons par définir les différentes excentricités :

❖  $e_0$ , représente l'incertitude sur la position de la charge (voir équation 2.15)

$$e_0 = \frac{h}{30} \geq 20 \text{ mm} \quad (2.15)$$

$e_0$  = excentricité accidentelle [mm]

$h$  = hauteur de la section [mm]

❖  $e_1$ , correspond à l'excentricité de 1<sup>er</sup> ordre due aux sollicitations (équation 2.16)

$$e_1 = \frac{M^*}{N^*} \quad (2.16)$$

$e_1$  = excentricité des sollicitations [mm]

$M^*$  = moment sollicitant de 1<sup>er</sup> ordre (agissant) [Nmm]

$N^*$  = effort normal sollicitant de 1<sup>er</sup> ordre (agissant) [N]

❖  $a$ , correspondant à l'excentricité due aux effets de second ordre (équation 2.17)

$$\Delta = \frac{l^2}{10} \left( \frac{1}{r} \right) \quad [mm] \quad (2.17)$$

$\Delta$  = flèche de second ordre [mm]

$l$  = longueur du poteau [mm]

$\frac{1}{r}$  = courbure [mm<sup>-1</sup>]

N.B : l'expression 2.17 est basée sur l'hypothèse d'une déformée sinusoïdale, et le facteur 10 est une approximation fréquente de  $\pi^2$

La courbure (1/r) est fonction de l'état limite de déformation choisi.

Couramment, celui-ci est choisi pour avoir la déformation ( $\epsilon_y$ ) correspondant à la limite élastique ( $f_y$ ) et ce tant pour le lit d'armature à l'extrados (tension :  $\epsilon_y < 0$ ) qu'à l'intrados (compression :  $\epsilon_y > 0$ ). La distribution de contrainte obtenue permet de calculer la résultante des efforts internes  $\bar{N}'$  et la position de son point d'application par rapport à l'axe du poteau  $\bar{e}$

Cette méthode est une version simplifiée de la « colonne modèle » qui, à l'inverse de la méthode complète, ne nécessite pas la connaissance des courbes M- $\psi$ .

- la seconde méthode de calcul est une méthode approchée du moment complémentaire. Elle est applicable au cas suivant :

*« Cette méthode est approximative et n'est valable que pour les poteaux de section constante avec armature symétrique, soumis à une charge normale constante le long de leur axe ».*

Dans ce cas-ci, on remplace les effets du second ordre à traiter par un moment supplémentaire, ce qui équivaut à résoudre le problème de la même manière que pour des poteaux courts soumis à N et M. L'excentricité additionnelle (accidentelle)  $e_0$  dans cette technique n'est pas prise en compte. Le moment complémentaire se calcule avec l'équation 2.18.

$$M_c^* = N K \frac{l_c^2}{10} \quad [Nmm] \quad (2.18)$$

$N$  = effort normal agissant [N]  
 $l_c$  = longueur de flambement [mm]  
 $K$  = représente la courbure fictive au milieu de la longueur de flambement dans l'état limite ultime de la section [mm<sup>-1</sup>]

Cette courbure K peut être évaluée avec les relations 2.19 :

$$\begin{aligned} N'^* \leq 0.5N_b'^* & \quad K = \frac{\epsilon_b'^* + \epsilon_a^*}{h_t} - \frac{l_c}{50000 h_t} \\ N'^* > 0.5N_b'^* & \quad K = K_1 \frac{N_b'^*}{2N'^*} \end{aligned} \quad (2.19)$$

avec

$$\begin{aligned} \epsilon_a^* &= \frac{R_a^*}{E_a} \\ \epsilon_b'^* &= 0.003 \\ N_b'^* &= B' R_b'^* \end{aligned} \quad (2.20)$$

$\epsilon_a^*$  = déformation de l'acier à la limite élastique  
 $\epsilon_b'^*$  = déformation limite pour le béton avec prise en compte des effets à long terme  
 $B'$  = aire de la section de béton seul [mm<sup>2</sup>]  
 $h_t$  = hauteur utile de la section transversale [mm]

|         |   |
|---------|---|
| $N$     | = effort normal agissant du béton [N]                               |
| $R_a^*$ | = contrainte de calcul de traction de l'acier [N/mm <sup>2</sup> ]  |
| $R_b^*$ | = contrainte de calcul de compression du béton [N/mm <sup>2</sup> ] |

### 2.3.3. Considérations technologiques

L'enrobage :

« doit être égal à la plus grande des dimensions suivantes :

- le diamètre de la plus grosse des barres
- la dimension maximale du calibre nominal du granulat
- 20mm

Toutefois, pour les surfaces qui ne sont pas protégées contre la pluie, ou qui sont soumises à l'action de substances pouvant attaquer les armatures, ou qui sont exposées à la chaleur, l'épaisseur minimale d'enrobage est à augmenter. Elle doit atteindre, selon que le béton est vibré ou non, respectivement 30mm et 40mm. »

S'il s'avère nécessaire de placer les barres d'acier longitudinales plus à l'intérieur de la section du poteau, un réseau de barres de diamètre 2.5mm au minimum peut être placé en surface comme lit secondaire.

Poteau RF1h et RF2h, l'enrobage des armatures principales et la dimension minimale transversale pour quatre faces exposées au feu seront respectivement : 25mm, 200mm et 40mm, 300mm.

La quantité d'acier longitudinal est fixée. La section minimale d'acier présent dans le poteau quoi qu'il arrive doit répondre aux deux conditions suivantes 2.21 :

$$A_S \geq 0.008 B'_{min} \quad (2.21)$$

$$A_S \geq 0.003 B'$$

|            |   |
|------------|---|
| $A_S$      | = aire de la section d'armature comprimée [mm <sup>2</sup> ]        |
| $B'$       | = aire de la section comprimée totale de béton [mm <sup>2</sup> ]   |
| $B'_{min}$ | = section minimale de béton donnée par le calcul [mm <sup>2</sup> ] |

Pour des élancements compris entre 35 et 70, la surface d'acier doit être également plus grande ou égale à la valeur donnée par 2.22.

$$A \geq \frac{N_{sd}}{4.25 f_{yh}} \quad (2.22)$$

|          |  |
|----------|--|
| $A$      | = aire de la section d'armature comprimée [mm <sup>2</sup> ] |
| $N_{sd}$ | = effort normal de calcul agissant sur l'élément [N]         |
| $f_{yh}$ | = limite élastique des aciers [N/mm <sup>2</sup> ]           |

L'armature transversale (étrier) doit avoir un diamètre au moins égal au  $\frac{1}{4}$  du plus gros diamètre de l'armature longitudinale. L'espacement maximum entre deux étriers successifs ne dépassera pas 15 fois le diamètre des barres longitudinales.

En conclusion, cette version de la norme permet aux deux modes de calculs d'exister (l'ancien et le nouveau). La méthode aux états limites présentée est celle qui sera reprise plus tard par l'ENV 1992-1-1:1991 mais cette fois-ci de manière plus détaillée.

## 2.4. Eurocode 2, ENV 1992-1-1:1991 (ENV 1992-1-1, 1991) [11]

### 2.4.1. La structure du bâtiment dans son ensemble

Actuellement, les structures sont définies en deux grandes classes qui sont les structures à nœuds fixes et les structures à nœuds déplaçables, contreventées ou non.

- ❖ nœuds non déplaçables, contreventées : les forces horizontales n'induisent pas ou très peu de déplacement des nœuds, ce qui confère aux nœuds le caractère non déplaçable. Les poteaux peuvent donc être traités comme s'ils étaient isolés.
- ❖ nœuds déplaçables : dans ce cas, le déplacement des nœuds induit des efforts supplémentaires dans la structure, et donc une étude complète doit être envisagée.

Dans cette même logique, nous allons prendre en compte également des « imperfections géométriques structurales » liées au défaut de verticalité possible (hors plomb) du poteau (voire de la structure).

Elles se définiront par une excentricité dite accidentelle  $e_a$  comme défini à l'équation 2.23.

$$e_a = \frac{\nu l_0}{2} \quad [mm] \quad (2.23)$$

$l_0$  = longueur utile de l'élément isolé [mm]

$\nu$  = inclinaison sur la verticale de la structure [radian] (équation 2.24)

$$\nu = \frac{1}{100\sqrt{L}} \quad (2.24)$$

$L$  = hauteur totale de la structure [m]

### 2.4.2. Elancement limite séparant premier et second ordre

La détermination de l'élancement,  $\lambda$ , est un paramètre essentiel pour savoir quel mode de vérification nous devons appliquer à la colonne (au premier ou au second ordre). Cette valeur est liée à la longueur de flambement  $l_0$ .

Cette longueur se calcule avec l'équation 2.25.

$$l_0 = \beta l_{col} \quad [mm] \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} l_{col} &= \text{hauteur du poteau mesurée entre les centres d'encastresments [mm]} \\ \beta &= \text{prise en compte des conditions d'extrémités} \end{aligned}$$

Pour les cas où les poutres se connectent en tête ou en pied des poteaux, on fait intervenir des coefficients  $K_a$  et  $K_b$  représentant la raideur de l'encastrement. A cette fin, un abaque figurant dans la norme aide à déterminer ces deux valeurs.

On détermine l'élancement  $\lambda$  sur base de la relation 2.26 et nous le comparons aux valeurs d'élancement frontière «  $\lambda_{lim}$  » entre le premier et le second ordre obtenu par les relations 2.27.

$$\lambda = \frac{l_0}{i} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} l_0 &= \text{longueur utile du poteau [mm]} \\ i &= \text{rayon de giration de la section géométrique [mm]} \end{aligned}$$

$$\lambda_{lim} = \max \left\{ \begin{aligned} \lambda' &= 25 \\ \lambda' &= \frac{15}{\sqrt{\nu_u}} \end{aligned} \right. \quad (2.27)$$

$$\nu_u = \frac{N_{sd}}{A_c f_{cd}} = \text{effort normal réduit} \quad (2.28.a)$$

Si l'élancement  $\lambda$  est supérieur à la valeur «  $\lambda_{lim}$  » donnée par 2.27, alors le poteau doit être étudié en prenant en compte l'effet du second ordre.

Le paragraphe 4.3.5.5.3 (2) de la norme permet de ne pas vérifier, pour certains cas, les effets du second ordre.

*« Les poteaux isolés d'une structure à nœuds non déplaçables n'exigent pas de vérification vis-à-vis des sollicitations du second ordre si le coefficient d'élancement  $\lambda$  est inférieur ou égal à la valeur obtenue par l'équation (2.28.b), même si le poteau concerné peut être considéré comme élancé selon l'article 4.3.5.3.5*

$$\lambda_{crit} = 25 \left( 2 - \frac{e_{01}}{e_{02}} \right) \quad (2.28.b)$$

$e_{01}$  et  $e_{02}$  représentent les excentricités de l'effort normal aux extrémités de l'élément, et on suppose que  $|e_{01}| \leq |e_{02}|$ .

Dans ce cas, il convient de calculer les extrémités de poteaux en considérant les équations (2.28.c) comme les conditions minimales à respecter.

$$\begin{aligned} N_{Rd} &= N_{Sd} \\ M_{Rd} &= N_{Sd} \cdot h/20 \end{aligned} \quad (2.28.c)$$

$N_{Rd}$  étant l'effort normal résistant de calcul et  $M_{Rd}$  le moment résistant de calcul.

### 2.4.3. Les excentricités

Quelle que soit la méthode utilisée pour le calcul de l'instabilité, il est nécessaire de prendre en compte les trois excentricités ayant des origines différentes :

- ❖ l'excentricité de premier ordre ( $e_0$ )

$$e_0 = \frac{M_{Sd1}}{N_{Sd}} \quad [mm] \quad (2.29)$$

$M_{Sd1}$  et  $N_{Sd}$  sont le moment et l'effort normal provenant de l'analyse structurale au 1<sup>er</sup> ordre de l'effet des actions.

l'excentricité accidentelle ( $e_a$ ), qui provient de la géométrie et de l'inclinaison du poteau (équation 2.23) .

L'excentricité de second ordre ( $e_2$ ), est le résultat de la déformation du poteau sous l'effet des charges.

La somme de ces trois excentricités constitue l'excentricité totale ( $e_{tot}$ ).

Dans le cas où les excentricités de premier ordre sont différentes en tête et au pied du poteau, on remplace l'expression de  $e_0$  par l'expression  $e_e$ . Cette dernière valeur sera prise égale à la plus grande des deux valeurs suivantes (équations 2.30) :

$$\begin{aligned} e_e &= 0.6 e_{02} + 0.4 e_{01} \\ e_e &= 0.4 e_{02} \quad [mm] \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\text{avec } |e_{02}| \geq |e_{01}|$$

La valeur  $e_2$  présente dans l'expression  $e_{tot}$  est assez difficile à déterminer. Pour ce faire, nous allons utiliser la méthode de la colonne modèle[12]. La forme mathématique de  $e_2$  provient de l'hypothèse de la déformée sinusoïdale.

$$e_2 = K_1 \frac{l_0^2}{10} \left( \frac{1}{r} \right) \quad [mm] \quad (2.31)$$

avec :

$$K_1 = \frac{\lambda}{20} - 0.75 \quad \text{pour } 15 \leq \lambda \leq 35 \quad (2.32)$$



$$K_1 = 1 \quad \text{pour } \lambda > 35$$

Quand la valeur de la courbure ne doit pas être déterminée avec une grande précision, on utilise la relation 2.33, qui est un estimateur de la courbure maximale qui pourrait être atteinte à l'ELU de flambement.  $K_2$  tient compte de la diminution de courbure sous l'effet de l'augmentation de l'effort normal et  $\varepsilon_{yd}$  la déformation juste à la limite élastique de l'acier.

$$\left(\frac{1}{r}\right) = 2 K_2 \frac{\varepsilon_{yd}}{0.9 d} \quad (2.33)$$

- $\varepsilon_{yd}$  = déformation juste à la limite élastique de l'acier
- $K_2$  = représentant la diminution de courbure sous l'effet de l'augmentation de l'effort normal (4.3.5.6.3 de l'Eurocode 2)
- $d$  = hauteur utile de la section dans la direction probable de rupture de stabilité [mm]

#### 2.4.4. Le calcul d'instabilités

Dans le cas où l'on ne prend pas en compte les effets du second ordre, la vérification du poteau s'effectue par la théorie de la flexion composée du béton armé.

Dans le cas inverse, il est imposé de vérifier l'instabilité par l'une des deux techniques présentées dans la norme.

- ❖ la première technique est dite de « l'équilibre interne » et est similaire à celle figurant dans la NBN 15 de 1977.

Nous vérifions les deux équations 2.34.

$$\begin{cases} N_{Rd} \geq N_{sd} & [N] \\ \frac{M_{Rd}}{N_{Rd}} > e_0 + e_a + e_2 & [mm] \end{cases} \quad (2.34)$$

- $N_{Rd}$  = effort normal résultant de l'intégration du champ de contraintes d'un état donné du champ de déformations [N]
- $M_{Rd}$  = moment fléchissant résultant de l'intégration du même champ de contraintes que pour  $N_{Rd}$  [N]
- $e_2$  = excentricité du second ordre simplifiée [mm] (équation 2.35)

$$e_2 = \frac{l_0^2}{10} \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_c}{d} \quad [mm] \quad (2.35)$$

Attention : les déformations sont prises avec leur signe !  
 $d$  = distance de l'arase du béton au lit d'armatures opposé [mm]

- ❖ la deuxième technique est dite de « la colonne modèle ».

Cette technique étant itérative (nécessitant le recours à l'ordinateur) est donc plus coûteuse en temps de calculs. On vérifiera que le moment sollicitant (agissant) total est plus petit que le moment total résistant maximum pour l'effort normal  $N_{Sd}$  considéré.

Pour ce faire, on détermine la courbe Moment-courbure ( $M-\psi$ ) à valeur d'effort normal constante prise égale à la valeur de l'effort normal sollicitant.

Sur cette courbe, on trace la droite (Figure 2.1) du moment fléchissant sollicitant de second ordre lié à la courbure (équation 2.36).

$$M_{e_2} = N_{sd} \cdot \frac{l_0^2}{10} \left(\frac{1}{r}\right) \tag{2.36}$$

- $M_{e_2}$  = moment lié à l'excentricité  $e_2$  [Nmm]
- $N_{sd}$  = effort normal sollicitant [N]
- $l_0$  = longueur du poteau [mm]
- $\frac{1}{r}$  = courbure [mm<sup>-1</sup>]

Ensuite, on trace une nouvelle droite parallèle à celle représentant  $M_{e_2}$  à une distance dont la valeur est donnée par l'équation 2.37 (Figure 2.3).

$$M_{sd1} + N_{sd} e_a \quad [mm] \tag{2.37}$$

- $M_{sd1}$  = moment sollicitant de 1<sup>er</sup> ordre [Nmm]
- $N_{sd}$  = effort normal sollicitant [N]
- $e_a$  = excentricité accidentelle [mm]

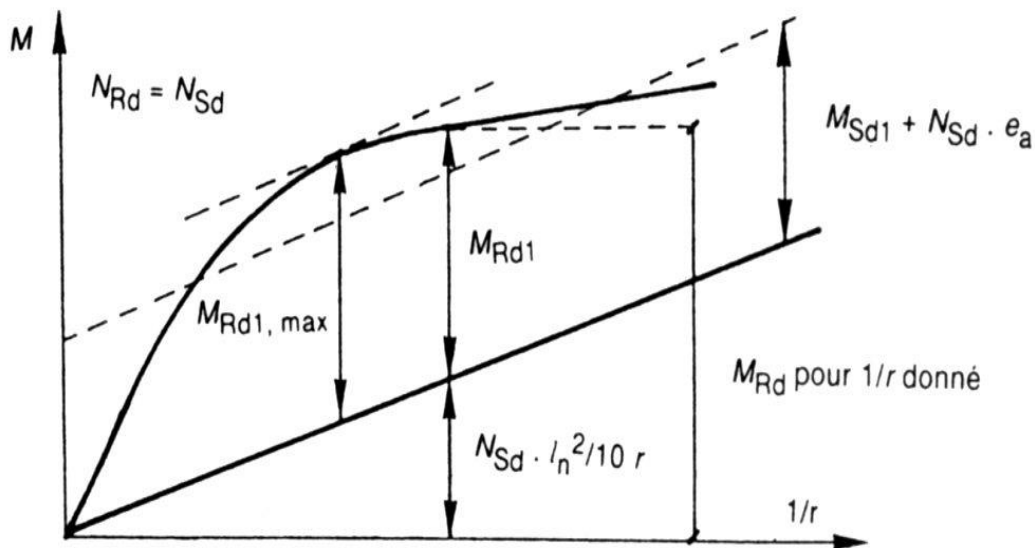


Figure 2.1 : Méthode de la colonne modèle

Si cette droite ne possède aucune intersection avec la courbe  $M-\psi$ , cela veut dire qu'il n'y a pas d'équilibre possible et que le dimensionnement n'est pas acceptable.

### 2.4.5. Considérations technologiques

Les considérations technologiques non moins importantes touchent différents aspects du poteau : la résistance du béton, la position des aciers, le pourcentage d'acier, l'enrobage.

*Le béton* : la norme fournit les valeurs à introduire dans les modèles numériques ( $\sigma-\varepsilon$ ) : la résistance à la traction, la résistance à la compression, le module sécant d'élasticité, les déformations ultimes, coefficient de dilatation thermique, coefficient de Poisson. La classe de résistance doit être comprise entre C15/20 et C50/60.

*L'enrobage* doit être suffisant pour assurer une bonne transmission des forces d'adhérence, l'absence d'épaufrures, la protection des aciers contre la corrosion, la résistance au feu. A cette fin, il ne peut être inférieur au diamètre des barres longitudinales et est augmenté de 5mm si la taille du plus grand granulats est supérieure à 32mm. L'enrobage sera défini en fonction de la classe d'exposition environnementale et du fait que l'on se trouve face à des armatures passives ou de précontrainte. La prise en compte du feu pour la détermination de l'enrobage figure dans le l'Eurocode 2 partie 1-2.

*La position des aciers* est également définie. Pour un poteau de forme prismatique, il est nécessaire de placer une barre de 12mm de diamètre dans chaque angle. Pour un poteau de forme circulaire, on veillera à placer au minimum 6 barres réparties de manière uniforme.

*La quantité d'acier longitudinal* est fixée. La section minimale d'armature longitudinale est définie par rapport à l'effort normal de compression (équation 2.38) mais ne peut être inférieure à 0.003 fois l'aire de béton. Donc, dans un poteau, nous aurons au minimum  $A_{s,min}$  (équation 2.38) :

$$A_{s,min} = \frac{0.15N_{sd}}{f_{yd}} > 0.003 A_c \quad [mm^2] \quad (2.38)$$

|             |  |
|-------------|--|
| $A_{s,min}$ | = section minimale d'acier [ $mm^2$ ]          |
| $N_{sd}$    | = effort normal sollicitant [N]                |
| $f_{yd}$    | = résistance de calcul de l'acier [ $N/mm^2$ ] |

Mais il n'est pas autorisé de dépasser  $0.08A_c$  d'acier, et ce même dans les zones de recouvrement.

*L'armature transversale (étrier)* devra avoir pour diamètre minimum la plus grande des deux valeurs suivantes :

- ❖  $\Phi 6$
- ❖  $\frac{1}{4}$  du plus gros diamètre de l'armature longitudinale.

La distance maximum entre deux étriers successifs est la plus petite des trois valeurs suivantes :

- ❖ 2 fois le diamètre des barres longitudinales

- ❖ la plus petite dimension transversale de la colonne
- ❖ 300mm.

Les dimensions transversales minimales du poteau sont fonction du mode de fabrication.

Si le poteau est préfabriqué, sa plus petite section sera un carré de 140mm de côté. Si le poteau est coulé sur chantier, sa plus petite section sera un carré de 200mm de côté.

En conclusion, cette nouvelle version de la norme témoigne du souci de prendre en compte de manière plus fine les imperfections (aspect géométrique, protection des armatures liée à l'environnement, dimensions transversales en fonction du mode de fabrication) pour le calcul des poteaux [1].

## 2.5. prEN 1992-1-1 (prEN 1992-1-1, 2003) [13]

### 2.5.1. Elancement limite séparant premier et second ordre

Comme dans les deux éditions précédentes, il existe deux méthodes pour déterminer si une vérification au second ordre est nécessaire.

La première méthode consiste à comparer l'élancement du poteau à étudier par rapport à une valeur d'élancement limite qui est soit définie dans l'annexe nationale soit la valeur recommandée et présentée en 2.39. Cette valeur n'est plus un nombre intrinsèque mais une formule qui prend en compte différents paramètres comme : le fluage, la proportion d'armature, la distribution des moments de premier ordre, l'effort normal réduit.

$$\lambda_{lim} = \frac{20 A B C}{\sqrt{n}} \quad (2.39)$$

$r_m$  =  $M_{01}/M_{02}$  ; rapport des moments de 1er ordre en tête et en pied

$M_{01}$  = moment d'extrémité du premier ordre

$M_{02}$  = moment d'extrémité du premier ordre  $|M_{02}| > |M_{01}|$

$n$  =  $N_{Ed}/(A_c f_{cd})$  ; effort normal réduit

$A_s$  = aire totale de la section d'armature longitudinale [ $\text{mm}^2$ ]

$\omega$  =  $A_s f_{yd}/(A_c f_{cd})$  ; proportion mécanique d'armatures

$\varphi_{eff}$  = coefficient de fluage effectif

$C = 1.7 - r_m$  (si  $r_m$  n'est pas connu, on peut prendre  $C = 0.7$ )

$B = \sqrt{1 + 2\omega}$  (si  $\omega$  n'est pas connu, on peut prendre  $B = 1.1$ )

$A = \frac{1}{1 + 0.2 \varphi_{eff}}$  (si  $\varphi_{eff}$  n'est pas connu, on peut prendre  $A = 0.7$ )

La deuxième méthode consiste à vérifier si les effets du second ordre représentent moins de 10% des effets du premier ordre correspondant. Dans ce cas, on peut éviter de faire un calcul au second ordre.

## 2.5.2. Calcul au second ordre

### 2.5.2.1. Méthodes dites générales

Ces méthodes sont basées sur une analyse non-linéaire (prEN 1-1, 2003). Elles :

*« Peuvent être utilisées tant pour les ELU que pour les ELS, sous réserve que l'équilibre et la compatibilité soient vérifiés et que l'on admette un comportement non-linéaire adapté pour les matériaux. L'analyse peut être du premier ou du second ordre. »*

*« Pour les structures élancées, dans lesquelles les effets du second ordre ne peuvent être négligés, il est possible d'utiliser la méthode de calcul donnée en 5.8.6 »*

La coordonnée 5.8.6 renvoie au chapitre de cette prEN qui traite des méthodes générales d'analyse non-linéaire géométrique.

Il n'est pas formellement fait allusion, dans ce paragraphe, à une technique précise. Toutefois, on insiste lourdement sur le fait que les lois de comportement doivent être bien choisies, que les non-linéarités géométriques (effet du second ordre) doivent être prises en compte.

### 2.5.2.2. Méthodes dites simplifiées

Ces méthodes consistent, pour un effort normal fixé, de déterminer un moment sollicitant de calcul qui devra être plus petit que le moment résistant correspondant mais également plus grand que le moment agissant réel. Dans le cas où ce moment serait plus grand que le moment résistant, alors la structure ne serait pas stable.

Le calcul du moment se représente de la manière suivante (équation 2.40) :

$$M_{Ed} = M_{0Ed} + M_2 \quad [Nmm] \quad (2.40)$$

$M_{Ed}$  = moment de calcul [Nmm]

$M_{0Ed}$  = moment comprenant : le 1<sup>er</sup> ordre et les imperfections [Nmm]

$M_2$  = moment du second ordre calculé par une des deux méthodes [Nmm]

- ❖ analyse du second ordre basée sur une rigidité nominale  
Cette technique se base sur la détermination de la rigidité EI de l'élément élancé. Et ce, en fonction de plusieurs paramètres :

$$EI = K_c E_{cd} I_c + K_s E_s I_s \quad (2.41)$$

$E_{cd}$  = module d'élasticité du béton [N/mm<sup>2</sup>] ( $E_{cd} = E_{cm} * \gamma_{cE}$ )

$I_c$  = moment d'inertie de la section droite de béton [mm<sup>4</sup>]

$E_s$  = module d'élasticité de l'acier [N/mm<sup>2</sup>]

$I_s$  = moment d'inertie des armatures par rapport au centre de gravité [mm<sup>4</sup>]

avec pour  $\rho \geq 0.002$

$k_s$  = coefficient tenant compte de la contribution des armatures

$$k_s = 1$$

$k_c$  = coefficient tenant compte des effets de la fissuration, du fluage

$$K_c = \frac{K_1 K_2}{1 + \varphi_{eff}}$$

$$K_1 = \sqrt{\frac{f_{ck}}{20}}$$

$$K_2 = n \frac{\lambda}{170} \leq 0.2$$

$n$  = effort normal relatif :  $N_{Ed}/(A_c f_{cd})$

$\lambda$  = coefficient d'élancement

$f_{ck}$  = résistance caractéristique du béton [N/mm<sup>2</sup>]

$\varphi_{eff}$  = coefficient de fluage effectif

Et pour  $\rho \geq 0.01$

$k_s$  = coefficient tenant compte de la contribution des armatures

$$k_s = 0$$

$k_c$  = coefficient tenant compte des effets de la fissuration, du fluage

$$k_c = \frac{0.3}{1 + 0.5 \varphi_{eff}}$$

Sur la base de ce cette rigidité EI, on peut calculer le moment de second ordre  $M_2$ .

$$M_2 = \frac{\beta M_{0Ed}}{\frac{N_B}{N_{Ed}} - 1} \quad (2.42)$$

$M_{0Ed}$  = moment de premier ordre [Nmm]

$\beta$  = coefficient qui dépend de la distribution des moments du premier et du second ordre  $\left(\frac{\pi^2}{c_0}\right)$

$c_0$  = 8 pour un moment de premier ordre constant, 9.6, pour une distribution parabolique, 12 pour une distribution triangulaire, dans

|          |  |
|----------|--|
|          | les autres cas on peut le prendre égal à 1   |
| $N_{Ed}$ | = effort normal agissant de calcul [N]   |
| $N_B$    | = charge de flambement « eulérienne » basée sur la rigidité nominale EI de la formule 2.41 [N] |

❖ méthode basée sur une courbure nominale

Dans cette méthode, l'essentiel se trouve dans la détermination du moment de second ordre  $M_2$  qui est calculé avec la formule 2.43 :

$$M_2 = N_{Ed} e_2 \quad (2.43)$$

$$e_2 = \frac{l_0^2}{c} \left( \frac{1}{r} \right) \quad = \text{excentricité du second ordre [mm]} \quad (2.44)$$

$$\frac{1}{r} = K_r K_\varphi \frac{1}{r_0} \quad = \text{détermination de la courbure [mm-1]} \quad (2.45)$$

$$\frac{1}{r_0} = \frac{\varepsilon_{yd}}{0.45 d}$$

$$K_r = \frac{n_u - n}{n_u - n_{bal}} \leq 1 \quad \text{coefficient de réduction dépendant de l'effort normal}$$

$$K_\varphi = 1 + \beta \varphi_{eff} \geq 1 \quad \text{coefficient de fluage}$$

|                 |  |
|-----------------|--|
| $N_{Ed}$        | = effort normal fixé [N]                                 |
| $e_2$           | = excentricité de second ordre [mm]                      |
| $l_0$           | = longueur de flambement [mm]                            |
| $C$             | = coefficient dépendant de la distribution des courbures |
| $\frac{1}{r}$   | = courbure [mm-1]  |
| $n$             | = effort normal relatif : $N_{Ed}/(A_c f_{cd})$          |
| $n_{bal}$       | = valeur de n correspondant au moment résistant maximal  |
| $n_u$           | = $1 + \omega$   |
| $\omega$        | = $A_s f_{yd} / A_c f_{cd}$                              |
| $A_s$           | = surface d'acier [mm <sup>2</sup> ]                     |
| $A_c$           | = surface de béton [mm <sup>2</sup> ]                    |
| $f_{yd}$        | = limite d'élasticité des aciers [N/mm <sup>2</sup> ]    |
| $f_{cd}$        | = résistance du béton [N/mm <sup>2</sup> ]               |
| $\varphi_{eff}$ | = coefficient de fluage effectif                         |
| $\beta$         | = $0.35 + \frac{f_{ck}}{200} - \frac{\lambda}{150}$      |
| $\lambda$       | = coefficient d'élancement                               |

### 2.5.3. Considérations technologiques

Les dimensions minimales pour un poteau sont définies comme suit :

« Un poteau est un élément dont le grand côté de la section transversale ne dépasse pas 4 fois le petit côté de celle-ci et dont la hauteur est au moins égale à 3 fois le grand côté. Lorsque ce n'est pas le cas, il convient de la considérer comme un voile. »

Le béton peut, dans cette nouvelle version, présenter une résistance plus élevée que C50/60. La gamme de résistances considérées s'étend de C12/15 à C80/90. De plus, un tableau complet fournit toutes les valeurs physiques nécessaires à la bonne représentation du comportement de ces bétons par les lois numériques. Et la « relation  $\sigma$ - $\varepsilon$  » modélisée par une parabole-rectangle se voit améliorée car on précise la valeur  $\varepsilon_0$  au maximum de contrainte pour chaque classe de béton.

L'enrobage doit être suffisant pour transmettre les forces d'adhérence, pour protéger les armatures de la corrosion et pour protéger les aciers du feu.

$$c_{nom} = c_{min} + \Delta c_{dev} \quad (2.46)$$

La valeur prise par  $\Delta c_{dev}$  sera fonction du mode de fabrication. En réalité, cette valeur concerne les tolérances d'exécution.

- ❖  $0 \text{ mm} \leq \Delta c_{dev} \leq 5 \text{ mm}$  pour la préfabrication
- ❖  $55 \text{ mm} \leq \Delta c_{dev} \leq 10 \text{ mm}$  pour la fabrication sur chantier

La valeur  $c_{min}$ , quant à elle, prend en compte plusieurs intervenants comme : le type d'exposition à l'environnement, la classification structurale, le diamètre de l'armature de flexion, le type d'acier.

La position des aciers est également définie. Pour un poteau de forme prismatique, il est nécessaire de placer une barre de 8mm de diamètre dans chaque angle. Pour un poteau de forme circulaire, on veillera à placer au minimum 4 barres réparties de manière uniforme. Le diamètre minimum peut varier en fonction du document national.

La quantité minimum d'acier longitudinal est fixée. Le minimum de surface d'acier à placer dans une section transversale de béton sera

$$A_{s,min} = \frac{0.1N_{Ed}}{f_{yd}} \quad (2.47)$$

Ou

$$A_{s,min 2} = 0.002 A_c \text{ si } A_{s,min 2} > A_{s,min}$$

Ce qui dans les deux cas est moindre que les valeurs de la version précédente (2.38).

Le pourcentage maximum est fixé à 4% de la section de béton. Ce qui permettra de ne pas dépasser les 8% d'acier dans les zones de recouvrement.



L'armature transversale (étrier) est traitée de manière identique à l'EC2-1995, son diamètre minimum sera pris égal à la plus grande des deux valeurs suivantes :

- ❖  $\Phi 6$
- ❖  $\frac{1}{4}$  du plus gros diamètre de l'armature longitudinale

La distance maximum entre deux étriers successifs est la plus petite des trois valeurs suivantes :

- ❖ 20 fois le diamètre des barres longitudinales
- ❖ La plus petite dimension transversale du poteau
- ❖ 400 mm

#### 2.5.4. Considérations pour béton non armé

Dans le cas des structures en béton non armé, voire très faiblement armé (moins que le minimum prescrit par la norme), non soumises aux charges de trafic, il existe une méthode simplifiée (équation 2.48) pour calculer l'effort normal résistant. Les poteaux pouvant être vérifiés avec cette formulation, doivent avoir un élancement géométrique inférieur à 86.

$$N_{Rd} = b h_w f_{cd} \Phi \quad (2.48)$$

$$\Phi = 1.14 \left( 1 - \frac{2e_{tot}}{h} \right) - 0.02 \frac{l_0}{h} \leq \left( 1 - \frac{2e_{tot}}{h} \right)$$

|           |  |
|-----------|--|
| $N_{Rd}$  | = effort normal résistant  |
| $b$       | = largeur totale de la section   |
| $h$       | = profondeur totale de la section  |
| $\Phi$    | = facteur prenant en compte l'excentricité et incluant les effets du second ordre ainsi que les effets normaux de fluage |
| $e_{tot}$ | = $e_0 + e_i$  |
| $e_0$     | = excentricité du premier ordre  |
| $e_i$     | = excentricité additionnel couvrant les effets des imperfections Géométriques  |

Il s'agit, de nouveau, d'une approche de la capacité portante avec un coefficient de réduction  $\Phi$  au flambement.

## 2.6. Conclusions

A la lecture de ce chapitre, trois observations peuvent être mise en exergue :

- ❖ durant les 80 années écoulées entre la première norme et la prEN, les considérations sur la vérification de la capacité portante des poteaux évoluent fortement. La vérification de l'instabilité passe de la considération : « ...*les calculs sont relativement faciles...* » à des méthodes de plus en plus complexes, dont il devient parfois difficile de trouver l'origine.
- ❖ avant 1977, la capacité portante des poteaux en béton armé est traitée par des raisonnements de type « Résistance des matériaux » ou issus de l'analyse des structures métalliques (acier, fonte) ou de la maçonnerie. Ceci est le cas des travaux de Baes et Vandeperre [5], même si ces auteurs ont apporté des modifications au modèle en fonction du matériau.
- ❖ après 1977, et suite aux travaux de la commission « Flambement » du Comité Européen du Béton (CEB, 1977) la vérification de la capacité portante est traitée comme un vrai problème de flexion composée avec prise en compte des effets de second ordre. Ce n'est que dans la toute dernière édition de la norme que sont réapparues des méthodes simplifiées, dont l'origine et la validité ne sont pas documentées dans la littérature.

on ne peut que conclure à la nécessité d'étudier des modèles numériques qui permettront de déterminer de manière fiable la capacité portante des poteaux en béton armé et servir de référence pour l'évaluation de méthodes simplifiées [1].

## Bétons à Hautes Performances

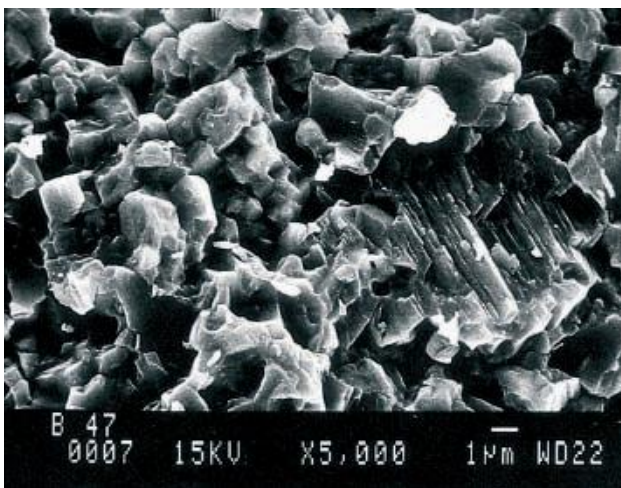
### 3.1. Introduction

Les Bétons à Hautes Performances (BHP) ont d'abord été utilisés pour leur haute résistance. Cette caractéristique facilement mesurable a fait des progrès spectaculaires à partir des années 80. Elle est passée de 30 à 35 Mpa, à plus de 100 Mpa pour les Bétons à Très Hautes Performances, voire plus de 200 Mpa pour les Bétons Fibrés à Ultra Hautes Performances (BFUP) [14].

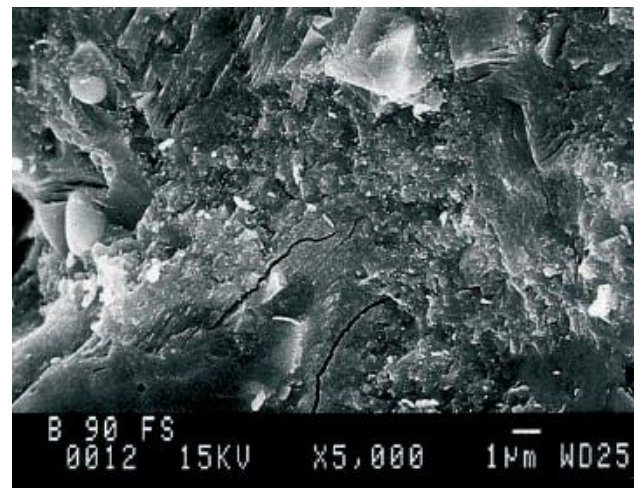
Les BHP se caractérisent par :

- une résistance caractéristique à la compression à 28 jours supérieure à 50 Mpa sur cylindre
- un rapport  $E_{eff}/Liant$  équivalent inférieur à 0,4.

Mais les gains de résistance ne sont pas les seuls avantages de ces bétons qui tirent leurs propriétés de leur microstructure très dense, d'une forte réduction de leur porosité et d'un réseau capillaire non connecté. Ces bétons sont, en fait, des matériaux à très haute compacité.



*béton ordinaire*



*béton à haute performance*

*Fig.3.1. structure microscopique d'un béton ordinaire et d'un béton à haute performance*

Les BHP sont également, du fait de leur porosité extrêmement réduite, plus résistants aux agents agressifs et, de façon générale, présentent une durabilité accrue. Ils permettent d'optimiser les structures, de réaliser des ouvrages soumis à des contraintes élevées ou subissant un environnement sévère (climat rigoureux, agressions marines, effets du gel...).

## 3.2. Les nouveaux développements dans le domaine de la technologie du béton

### 3.2.1. Introduction

Des années durant, la fabrication du béton n'a nécessité que des granulats, du ciment et de l'eau. Ce dernier composant remplit un double rôle : il permet l'hydratation du ciment et confère au béton frais sa nécessaire ouvrabilité. Cette ouvrabilité nécessite cependant une quantité d'eau supérieure à ce qui est strictement nécessaire pour l'hydratation. Une partie de cette eau pour un rapport eau-ciment de 0,5, elle équivaut à environ la moitié de l'eau de gâchage reste dans le béton au terme du processus de prise et de durcissement. Elle se répand dans tout le béton et cause l'apparition d'un réseau de pores et de vides. L'augmentation de l'excédent en eau est proportionnelle au diamètre moyen des pores ainsi que de leur volume. Un nombre accru de pores de plus grandes dimensions affaiblit la structure du matériau et réduit dès lors la résistance du béton. tableau(3.1).

|   | Classes de résistance |     |     |     |     |      |     |     |      |     |     |     |     |     |
|---|-----------------------|-----|-----|-----|-----|------|-----|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|
|   | 12                    | 16  | 20  | 25  | 30  | 35   | 40  | 45  | 50   | 55  | 60  | 70  | 80  | 90  |
| $f_{ck}$ résistance caractéristique sur cylindre (Mpa)          | 12                    | 16  | 20  | 25  | 30  | 35   | 40  | 45  | 50   | 55  | 60  | 70  | 80  | 90  |
| $f_{ck,cube}$ résistance caractéristique sur cube (Mpa)         | 15                    | 20  | 25  | 30  | 37  | 45   | 50  | 55  | 60   | 67  | 75  | 85  | 95  | 105 |
| $f_{cm}$ résistance moyenne en compression (Mpa)                | 20                    | 24  | 28  | 33  | 38  | 43   | 48  | 53  | 58   | 63  | 68  | 78  | 88  | 98  |
| $f_{ctm}$ résistance moyenne en traction directe (Mpa)          | 1.6                   | 1.9 | 2.2 | 2.6 | 2.9 | 3.2  | 3.5 | 3.8 | 4.1  | 4.2 | 4.4 | 4.6 | 4.8 | 5.0 |
| $E_{cm}$ module d'élasticité sécant (Gpa)                       | 27                    | 29  | 30  | 31  | 33  | 34   | 35  | 36  | 37   | 38  | 39  | 41  | 42  | 44  |
| $\epsilon_{cl}$ déformation au pic de contrainte ( $\text{‰}$ ) | 1.8                   | 1.9 | 2.0 | 2.1 | 2.2 | 2.25 | 2.3 | 2.4 | 2.45 | 2.5 | 2.6 | 2.7 | 2.8 | 2.8 |

Tableau.3.1. Caractéristique de résistance et de déformation

on observe donc un lien direct entre la résistance à la compression et l'eau de gâchage ajoutée au béton ou formulé de manière plus scientifique entre la résistance à la compression et le rapport entre la quantité d'eau et de ciment, que l'on appelle le rapport eau-ciment, E/C. En fonction de l'augmentation ou de la diminution de ce rapport, la résistance du béton diminuera ou augmentera. Ce constat n'est pas neuf. Dès 1894, cette conclusion a été postulée de manière empirique (fig.3.2). L'augmentation de la résistance est cependant limitée. À partir d'un rapport eau-ciment trop faible, le béton ne peut plus être mis en œuvre. Les vides et les pores qui en résultent réduisent à nouveau la résistance, comme précisé dans l'illustration.

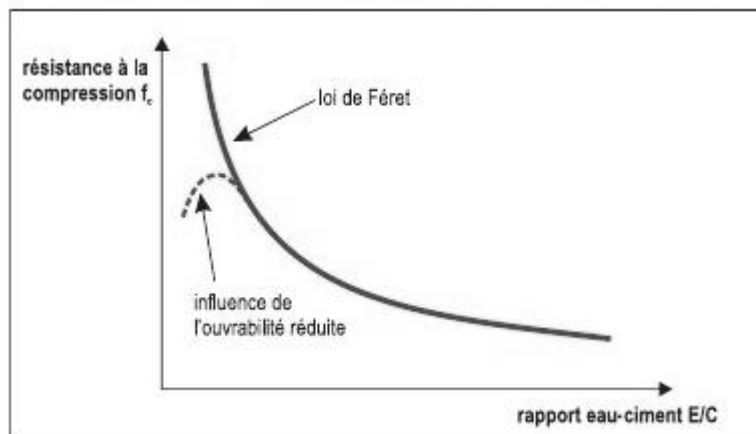


Fig.3.2. relation entre la résistance à la compression et le rapport E/C

Progressivement, les chercheurs ont découvert qu'il existait également un lien entre le rapport eau-ciment et la durabilité. Le volume de pores est réparti sur un réseau de vides infiniment nombreux et de formes très variables. La plupart de ces vides ou pores présentent un diamètre de  $10^{-9}$  à  $10^{-8}$  m les pores de gel et sont si petits que le transport de molécules (vapeur, gaz, etc.) en devient impossible. Nous observons cependant aussi des pores de plus grandes dimensions les pores dit capillaires dont le diamètre varie de  $10^{-7}$  à  $10^{-5}$  m. Leur quote-part dépend du rapport eau-ciment et de la façon dont le ciment est hydraté, exprimée par le taux d'hydratation. Plus le taux d'hydratation augmente, plus le ciment est hydraté, plus la quantité d'eau liée croît et, par conséquent, plus la quantité d'eau libre diminue. La figure (3.3) montre comment le volume de pores capillaires diminue en cas de baisse du rapport eau-ciment et de hausse du taux d'hydratation. L'humidité, la vapeur d'eau, les gaz et toutes sortes de substances nocives peuvent pénétrer assez facilement dans les pores capillaires, y migrer, voire détériorer le matériau de l'intérieur. La durabilité du béton augmente donc avec la réduction du volume des pores (porosité réduite, compacité accrue) et du rétrécissement des pores (réduction de la perméabilité). Il s'ensuit que le rapport eau-ciment doit être le plus faible possible ...

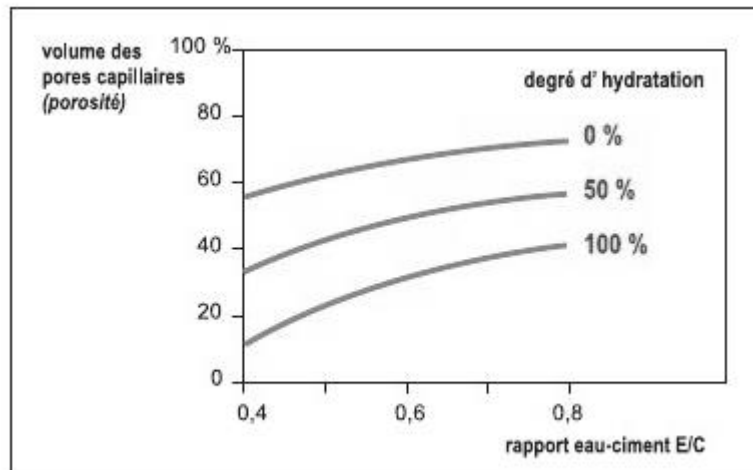


Fig.3.3. relation entre la porosité et le rapport E/C pour différents degrés d'hydratation

Mais qu'en est-il de l'ouvrabilité ? Comment concilier deux exigences contradictoires : réduire la quantité d'eau pour obtenir une résistance et une durabilité accrues, et ajouter de l'eau pour faciliter l'ouvrabilité ? De nombreuses années ont été consacrées à la recherche d'une réponse à ce nœud gordien...

### 3.2.2. Découverte des super plastifiants

La découverte des plastifiants et, plus particulièrement, de super plastifiants très puissants dans les années 1970 a constitué un véritable tournant. L'effet de ces adjuvants est de rendre le béton nettement plus fluide, sans ajouter d'eau.

La surface de chaque grain de ciment contient des charges électriques libres. Les charges opposées s'attirent mutuellement. Au contact de l'eau, les grains s'agglomèrent alors en flocculats. L'eau de gâchage qui se trouve entre ces flocculats sera toutefois emprisonnée (fig.3.4). A partir de ce moment,

elle ne contribuera plus à la fluidité de la pâte de ciment. L'ajout d'une quantité supplémentaire d'eau de gâchage sera nécessaire pour obtenir l'ouvrabilité souhaitée

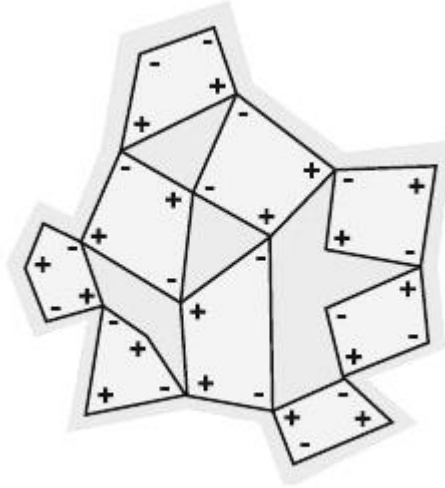


Fig.3.4. des charges opposées sur la surface des grains de ciment provoquent la floculation

Les super plastifiants empêchent la formation néfaste des conglomérats (fig.3.5). Les molécules du super plastifiant se fixent par adsorption sur l'interface entre le grain de ciment et l'eau de gâchage. Une fois adsorbé, le super plastifiant forme une charge négative autour de chaque grain de ciment. Ce faisant, les grains se repoussent les uns des autres. La dispersion qui en résulte réduit la viscosité de la pâte de ciment et augmente l'ouvrabilité. La structure moléculaire du super plastifiant sous la forme de longues chaînes renforce également cet effet. Les molécules fixées les unes aux autres pour former des spirales avec des ramifications dans différentes directions s'enroulent entre les grains de ciment et empêchent de la sorte leur rapprochement réciproque. Grâce aux structures de polymères modernes 'en forme de peigne', il est possible de réduire le rapport eau-ciment à moins de 0,3. La seule utilisation d'un super plastifiant permet également d'obtenir des résistances à la compression d'environ 80 Mpa.

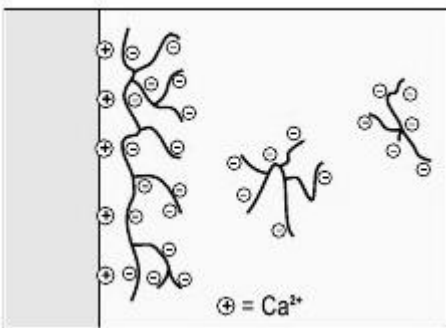


Fig.3.5.a. adsorption des molécules Du plastifiant à l'interface entre le grain de ciment et l'eau

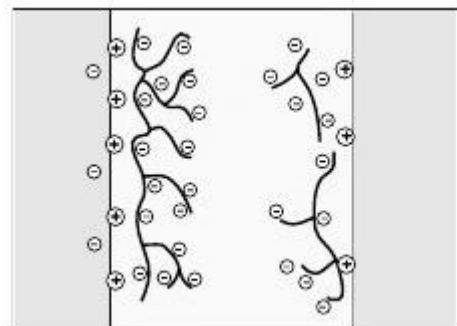


Fig.3.5.b. la répulsion électrostatique de deux particules de ciment

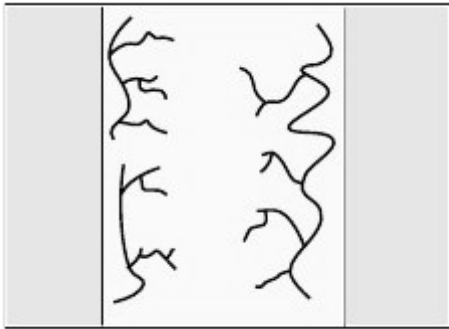
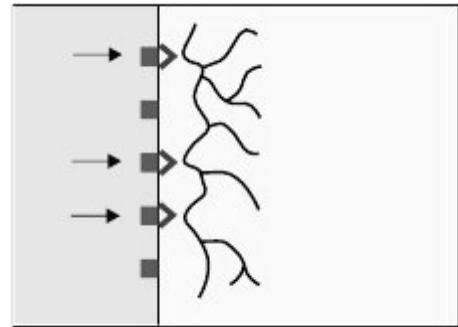


Fig.3.5.c. encombrement stérique



Fig(3.5.a. réaction chimique aux sites les plus réactifs

Fig 3.5. les super-plastifiant empêchent la floculation

### 3.2.3. Incidence de particules extrêmement fines (additions)

La réduction du rapport eau-ciment par l'ajout d'un super plastifiant permet d'obtenir un béton plus compact. Des études ont cependant démontré que la composition de l'importante zone de transition entre les granulats et la pâte de ciment durcie demeure inchangée c'est-à-dire qu'elle ne devient pas plus compacte. Cette zone est très poreuse et peu résistante. Sa largeur n'est que de 40  $\mu\text{m}$ , mais elle joue un rôle crucial lors de la reprise des contraintes par le béton.

L'ajout de particules extrêmement fines (fig.3.6) permet de combler les minuscules vides dans cette zone de transition. La présence d'un super plastifiant est en outre essentielle pour éviter la formation de conglomerats. Parmi ces substances, citons notamment les cendres volantes, le filler calcaire, le quartz concassé, les laitiers de haut fourneau broyés et les fumées de silice. En raison de leurs petites dimensions et de leur immense surface spécifique, les fumées de silice sont les plus efficaces. La surface spécifique des fumées de silice oscille entre 15 000 et 25 000  $\text{m}^2/\text{kg}$  et est nettement supérieure à celle du ciment, comprise entre 350 et 500  $\text{m}^2/\text{kg}$ . Les fumées de silice disposent en outre de propriétés pouzzolanique. Elles se lient à la chaux libérée lors de l'hydratation du ciment et contribue de la sorte au développement de la résistance.

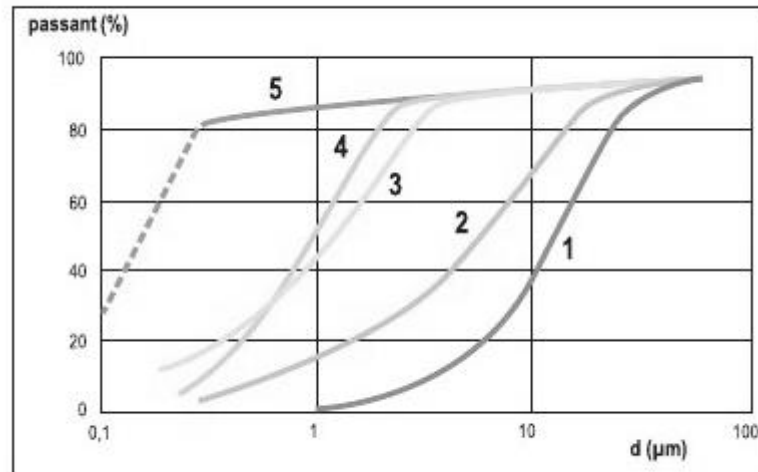


Fig.3.6. granulométrie des matières fines

Outre le compactage de la pâte de ciment durcie autour des granulats, ces particules ultrafines assurent également un remplissage généralement plus homogène du squelette granulaire dans la zone la plus fine. La compacité augmente, ce qui améliore la durabilité. Un autre effet positif de ces additions est leur influence favorable sur la stabilité du béton frais. Cette influence est particulièrement utile lors de la fabrication de bétons à très haute ouvrabilité. La résistance d'un béton obtenue grâce à un super plastifiant et à des fumées de silice peut excéder 100 Mpa.

### 3.3. Principes de formulation des BHP

#### 3.3.1. Introduction

La recherche des hautes performances passe par la réduction de la porosité du béton durci, c'est-à-dire de son pourcentage de vide. On cherchera donc, pour formuler un BHP, à diminuer la porosité de la matrice cimentaire et à optimiser le squelette granulaire.

La limitation de la porosité implique essentiellement deux conditions :

- une très faible teneur en eau
- une granulométrie comportant des éléments fins en quantité suffisante pour remplir les espaces entre les plus gros granulats.

Deux démarches sont généralement associées pour optimiser la formulation d'un BHP :

#### 3.3.2. Défloculation des grains de ciment

L'emploi des super plastifiants permet une réduction de la teneur en eau du mélange à consistance égale.



Les rapports Eeff/Liant équiv sont de l'ordre de 0,35 au lieu de 0,45 à 0,50 pour un béton usuel (soit une réduction de la teneur en eau de plus de 30 %).

Les super plastifiants s'opposent à la floculation des grains de ciment, ce qui augmente leur réactivité, facteur en particulier de performances à court terme.

### 3.3.3. Optimisation du squelette granulaire

Les performances des BHP peuvent encore être optimisées par l'extension du spectre granulaire grâce, en particulier à l'ajout de particules ultrafines. Les ultrafines les plus utilisées sont les fumées de silice. Elle ont une action sur la granulométrie du mélange, en comblant les micros vides intergranulaires, mais présentent également une réactivité avec la chaux libre, liée à leur caractère pouzzolanique.

On adaptera également chaque classe granulaire afin d'obtenir un mélange à très haute compacité (les éléments fins remplissant les espaces entre les plus gros granulats).

La première démarche peut-être utilisée seule et permet déjà des gains de propriété importants (en terme de résistance mécanique, on peut ainsi atteindre des bétons de classe de résistance C 60/75). La seconde voie implique obligatoirement le recours simultané à l'emploi de super plastifiants. Elle permet d'obtenir de nouveaux gains de performances.

### 3.3.4. Formulations effectuées pour quelques ouvrages types :

| PONT DE JOIGNY<br>B60 sans fumée de silice |          | VIADUC DU CROZET<br>B60 avec fumée de silice |        | PONT DE JONCHE<br>B80 avec fumée de silice |        |
|--|----------|--|--------|--|--------|
| CEM I 52,5                                 | 450 kg   | CEM I 52,5 PM ES                             | 385 kg | CEM I 52,5                                 | 420 kg |
| Granulat 6/20                              | 1027 kg  | Gravillon 5/12                               | 363 kg | Fumée de silice                            | 35 kg  |
| Sable 0/4                                  | 648 kg   | Gravillon 12/20                              | 694 kg | Gravillon 6/10                             | 250 kg |
| Sablon                                     | 105 kg   | Sable 0/5                                    | 785 kg | Gravillon 10/14                            | 730 kg |
| Eau  | 160 l    | Fumée de silice                              | 31 kg  | Sable 0/4 660                              | kg     |
| Super plastifiant                          | 11,25 kg | Eau  | 140 l  | Sablon 0/1                                 | 140 kg |
| Retardateur                                | 4,50 kg  | Super plastifiant                            | 4,6 kg | Eau  | 152 l  |
|  |          |  |        | Super plastifiant                          | 7,3 kg |

Tableau.3.2. Quelques exemples de formulation pour 1m<sup>3</sup> de BHP

## 3.4. Constituants des BHP

Les constituants du BHP font l'objet des principales spécifications suivantes :

- ciments : types CEM I, CEM II ou CEM III, classes de résistance conseillées 42,5 ou 52,5
- granulats : granulats pour bétons
- Additions : cendres volantes silico-alumineuses, laitiers de haut-fourneau, additions calcaires, additions siliceuses, ultrafines (fumées de silice) conformes à leurs normes respectives
- adjuvants : plastifiants réducteurs d'eau et super plastifiants hauts réducteurs d'eau

**Observations :**

- 1- Compte tenu des faibles dosages en eau des BHP, il convient de privilégier des granulats peu poreux afin de limiter l'absorption d'eau par les granulats, pour favoriser le maintien rhéologique du béton.
- 2- La réactivité de certains ciments peut entraîner à dosage élevé un dégagement de chaleur relativement important au cours du processus d'hydratation. Dans le cas de pièces massives, il convient de mettre en œuvre des précautions constructives spécifiques pour réguler la température du béton et limiter les élévations de température.
- 3- Les additions permettent d'optimiser le spectre granulaire et donc la compacité du béton tout en facilitant les possibilités d'écoulement. Certaines ont un pouvoir pouzzolanique ou hydraulique et permettent d'augmenter la résistance du matériau aux agressions chimiques. Les additions les plus performantes en matière de résistances mécaniques sont les fumées de silice (co-produit de l'industrie électrométallurgique du silicium, principalement constitué de dioxyde de silicium  $\text{SiO}_2$ , de forme parfaitement sphérique, de diamètre moyen très faible  $0,1 \mu\text{m}$ ), leurs dosages sont de l'ordre de 8 à 10 % du poids du ciment. Elles se combinent avec la chaux, libérée lors de l'hydratation du ciment pour former de nouveaux hydrates.
- 4- Les super plastifiants ont la propriété de défloculer les particules fines et les grains de ciment et d'améliorer leur répartition dans la matrice cimentaire. Ils permettent aussi de supprimer le seuil de cisaillement dans la pâte de ciment à l'état frais. Ainsi, les BHP bien qu'ayant un aspect visqueux et collant s'écoulent facilement. Ils sont en général dosés entre 1 et 3 % de la masse de ciment. Il convient, lors de l'étude de formulation, de vérifier la comptabilité entre le ciment et les adjuvants afin de conserver une ouvrabilité satisfaisante pendant toute la durée de mise en place du béton.
- 5- Le choix du type de ciment est fonction, en particulier, des propriétés liées aux dispositions constructives : exothermie, retrait, résistance au jeune âge et du type d'actions environnementales auquel le béton est soumis (sels de déverglaçage, solutions acides, solutions salines...).

**3.5. Propriétés des BHP****3.5.1. Effets de la température sur le béton en cours de durcissement**

En raison de la teneur élevée en ciment et de l'utilisation de ciment fin (classe 52,5), la production de chaleur, inhérente au processus de l'hydratation, s'intensifie dans le béton à hautes performances par rapport au béton ordinaire. Ce phénomène peut dès lors induire, même dans des éléments qui ne pourraient pas être spontanément qualifiés de 'massifs', des contraintes thermiques relativement élevées.

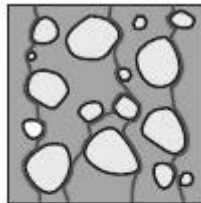
Même si le béton à haute résistance absorbe mieux les contraintes de traction, le risque de fissuration est cependant nettement supérieur. Lors de la conception et de l'exécution, il convient donc d'accorder à ce phénomène une attention suffisante. Des mesures destinées à exclure au maximum le retrait empêché s'imposent dès lors. Les calculs des contraintes en fonction du développement calorifique escompté et des propriétés du béton en phase de durcissement sont souhaitables.

### 3.5.2. Comportement en compression

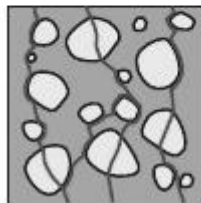
Lorsqu'un béton doté d'une résistance normale est comprimé, les fissures d'adhérence entre la matrice de mortier et le granulat se propageront autour des granulats. A un niveau proche de la résistance à la compression, ces fissures d'adhérence se propageront à toute la matrice de mortier, entraînant l'apparition de fissures dans le mortier.

En définitive, le béton cèdera sous l'effet de tout un réseau de fissures ininterrompues dans le mortier, alors que les granulats ne subiront aucun dommage (fig. 3.7).

*Fig. 3.7. béton ordinaire : fissures d'adhérence et fissures dans le mortier*



*Fig.3.8. béton à haute performance : les granulats sont également fissurés et fissures dans le mortier*



Le béton à hautes performances se caractérise par une meilleure adhérence entre les granulats et la matrice de ciment. En outre, la résistance de la matrice sera pratiquement égale à la résistance des granulats. Dès lors, l'apparition et le développement de fissures d'adhérence ou de microfissures seront retardés. A l'approche de la rupture, les fissures se seront désormais généralement propagées au travers des granulats (fig.3.8).

Sur le diagramme contrainte-déformation (fig.3.9), ce phénomène s'exprime par un comportement légèrement plus linéaire par rapport au béton de résistance conventionnelle. De même, le béton à hautes performances présente un retrait plus marqué après l'obtention de la résistance à la compression, c'est-à-dire après la rupture du béton, et la portance tendra très rapidement vers la valeur zéro. Le BHP présente en d'autres termes un comportement de rupture fragile plus marqué que le béton de résistance conventionnelle.

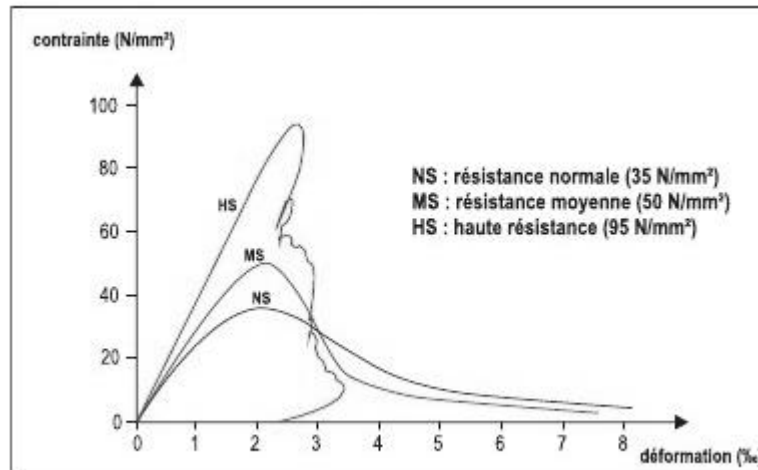


Fig.3.9. diagramme contrainte-déformation

### 3.5.3. Comportement en traction

Généralement, la résistance à la traction du béton est liée à la résistance à la compression. En ce qui concerne le béton conventionnel, différentes formules sont appliquées. Dans la norme EN 1992-1-1:2004, une formule différente est proposée pour le béton à haute résistance par rapport au béton conventionnel. Un élément essentiel est cependant le caractère fragile du béton à hautes performances, signalé ci-dessus. Dès que la résistance est atteinte, la portance tendra très rapidement vers la valeur zéro.

### 3.5.4. Rigidité

Le module d'élasticité du béton est essentiellement déterminé par les propriétés des granulats et de la matrice de mortier. Au fur et à mesure que la matrice se consolide et se rigidifie, le béton présentera également une rigidité accrue. Le module d'élasticité du béton à hautes performances est dès lors toujours lié à la résistance à la compression.

### 3.5.5. Retrait

#### 3.5.5.1. Retrait endogène

Le ciment réagit avec une quantité d'eau donnée. Ce processus s'accompagne d'une réduction du volume. Par rapport au volume initialement occupé par l'eau et par le ciment, le volume du produit de la réaction après hydratation complète sera réduit d'environ 10 %. Au début de la réaction, le béton encore plastique absorbe sans difficulté la réduction volumique. Dès que le béton se rigidifie, la contraction est empêchée. Ce phénomène entraîne le développement de contraintes de traction dans les espaces remplis d'eau. Ces pores en devenir se dilatent, ce qui provoque une sous-pression aspirant l'air extérieur. Dans cet espace désormais partiellement rempli d'eau, apparaissent des forces capillaires qui contractent les pores. Ce retrait interne est donc le résultat de deux processus : un processus chimique et un processus physique.

Dans un béton ordinaire, caractérisé par un excédent d'eau, le retrait endogène demeure limité à environ  $100 \times 10^{-6}$ . En ce qui concerne le béton à haute résistance, où la quantité d'eau disponible est nettement moins importante, le ciment attire à lui cette faible quantité d'eau. Les pores s'asséchant progressivement sont soumis à des forces capillaires en augmentation constante, permettant de la sorte au retrait endogène d'atteindre des valeurs clairement supérieures. Il est manifeste que le retrait endogène augmente avec l'accroissement de la résistance et s'effectue essentiellement à court terme. Etant donné que le retrait endogène résulte du processus d'hydratation, il sera toujours présent, même en cas de cure parfaite du béton. Seuls de nouveaux concepts relatifs à la cure intérieure pourraient s'avérer précieux. De toute évidence, le retrait endogène du béton à hautes performances requiert la nécessaire attention. Conjugué aux éventuelles contraintes thermiques résultant de la chaleur d'hydratation élevée, le retrait endogène pourrait en effet provoquer l'apparition d'importantes fissures dans un BHP frais.

### 3.5.5.2. Retrait de dessiccation

Le retrait de dessiccation se produit dans un environnement qui n'est pas saturé en eau. Dans ce cas, de l'eau peut s'évaporer des pores. Ce phénomène donne lieu à des forces capillaires qui contractent les pores et génère par voie de conséquence une réduction du volume.

Le niveau du retrait de dessiccation dépend en grande partie de la quantité d'eau évaporable présente dans le béton. Dans des circonstances normales, une fraction importante ne s'évaporerait pas, car elle est liée chimiquement ou est fixée entre les produits d'hydratation.

L'eau présente dans les pores capillaires, de plus grandes dimensions, peut quant à elle s'évaporer. Le volume réduit des pores capillaires est une caractéristique typique du béton à haute résistance. Par rapport au béton ordinaire, il sera dès lors moins sujet au phénomène du retrait de dessiccation.

Le retrait d'un béton de 90 MPa dans un environnement affichant une humidité relative de 50 % est de moitié inférieur au retrait observé pour un béton de 30 MPa. La diminution du retrait se poursuit avec l'accroissement de l'humidité relative. L'addition de fumées de silice n'a aucune incidence sur le retrait final, mais accélère le processus.

Le retrait de dessiccation peut toujours se poursuivre, même à plus long terme. L'ampleur de ce retrait peut être sensiblement influencée par des mesures de cure énergiques.

### 3.5.6. Le fluage

Le fluage du béton à hautes performances – c'est-à-dire la déformation croissante sous l'effet d'une contrainte constante – est fréquemment inférieure au fluage observé pour un béton de résistance conventionnelle. L'âge du béton au moment de la sollicitation est également extrêmement important pour le BHP. Lorsque la charge est exercée sur un béton jeune, la déformation par fluage sera plus importante que dans le cas d'un béton plus âgé. Il en va de même en ce qui concerne le béton conventionnel.

La norme EN 1992-1-1:2004 définit les formules nécessaires au calcul du fluage. Il en ressort par exemple que le coefficient de fluage d'un béton de classe de résistance C 25/30 est environ trois fois supérieur à un béton de classe de résistance C 90/115 pour une humidité relative de 50 %.

Il convient cependant de conserver à l'esprit que les contraintes observées dans le BHP sont nettement supérieures à celles inhérentes au béton conventionnel. Les déformations immédiates peuvent dès lors devenir aussi importantes – en fonction, bien évidemment, de la résistance à la flexion, dans le cas d'une poutre par exemple. Il va sans dire que ce phénomène est encore renforcé à

long terme par le biais de l'utilisation d'un coefficient de retrait. En cas de constructions en BHP, la limitation des déformations et des flèches peut devenir le facteur déterminant du projet, plutôt que la portance proprement dite. Ce faisant, le matériau ne peut pas toujours être utilisé de manière optimale.

### 3.5.7. Durabilité

Etant donné la structure plus dense des pores du béton de hautes performances, ce matériau affiche un meilleur comportement face aux mécanismes d'agression. La plupart des processus de dégradation sont en effet causés par l'entrée de substances agressives, telles que des chlorures, du dioxyde de carbone, des acides, ... Si la pénétration de ces substances dans le béton est entravée, comme dans le cas du BHP, les processus de dégradation y afférant ne pourront bien évidemment se produire que bien plus tard. Quoi qu'il en soit, il convient toujours de veiller à la pureté des éléments constitutifs du béton, afin d'éviter toute agression par des mécanismes internes (présence de sulfates, d'alcalis, de granulats réactifs, ...).

Toutefois, la durée d'utilisation d'une construction est en grande partie également déterminée par les conditions d'exécution. Dans ce cadre, il a été déjà fait allusion ci-dessus au risque de fissuration prématurée résultant des effets thermiques et du retrait (principalement endogène). La présence de telles fissures peut influencer sensiblement la durabilité de la construction.

### 3.5.8. Résistance au feu

Même si la durabilité du BHP est en règle générale nettement supérieure à celle du béton conventionnel, la résistance au feu est cependant un élément sur lequel il convient d'attirer l'attention. En raison de la structure très dense des pores, la pression de vapeur, qui apparaît à l'intérieur du béton à des températures excédant 100 °C, peut difficilement être réduite. La vapeur ne peut en effet pas être rapidement évacuée à l'extérieur, en raison de la structure très dense du matériau. Par rapport au béton conventionnel, la résistance du béton à haute résistance diminuera dès lors plus rapidement si la température est supérieure à 100 °C. Les renseignements à propos du facteur de réduction à appliquer sont présentés dans la figure 3.10. En raison des pressions de vapeur accumulées, il convient également d'examiner les risques potentiels d'éclatement du béton. En ce qui concerne le béton des classes de résistance C 55/67 à C 80/95, les règles inhérentes au béton conventionnel suffisent pour éviter les éclatements, pour autant que la teneur en fumées de silice soit inférieure à 6 % de la masse de ciment. En cas de teneurs supérieures en fumées de silice et en cas de classe de résistance C 90/105, il sera nécessaire de prendre des mesures particulières, telles que le mélange d'au moins 2 kg/m<sup>3</sup> de fibres de polypropylène. En cas de températures élevées, ces fibres fondront, ce qui laissera de petits canaux ouverts via lesquels les pressions de vapeur pourront être dissipées plus rapidement.

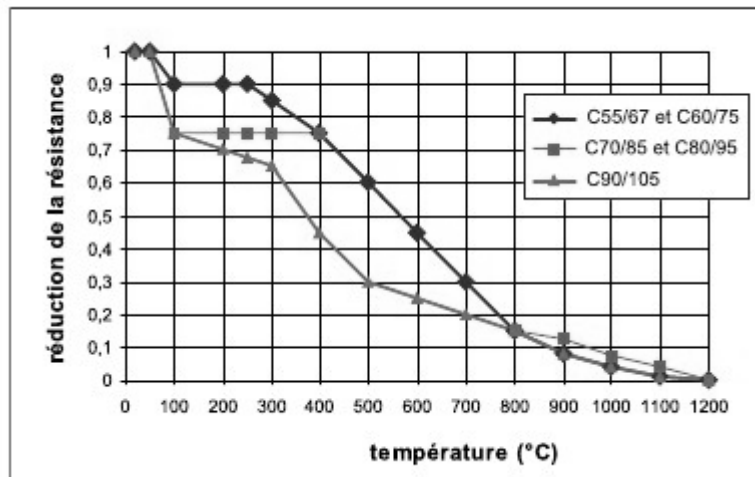


Fig.(3.10). Diminution de la résistance à la compression des bétons à haute résistance selon l'EC2 feu

### 3.6. Avantages des BHP

Le BHP présente des avantages 'technologiques' intéressants par rapport au béton traditionnel :

- Durabilité améliorée face aux agressions physico-chimiques (perméabilité réduite, meilleure protection de l'armature contre la corrosion, réduction de la pénétration des ions chlore, diminution du risque de réaction alcali-silice, meilleure résistance au gel,...). Cette durabilité améliorée présente de grands avantages en termes d'entretien à long terme.
- En règle générale, une fluidité très élevée à l'état frais. Cette caractéristique facilite la mise en œuvre du béton, même dans les zones à densité d'armature élevée.
- Résistance accrue au jeune âge. Cette propriété permet de réduire le temps de coffrage et d'accélérer la mise en précontrainte. Des délais d'exécution raccourcis sont donc envisageables.
- Une résistance finale accrue après durcissement, ce qui permet de réduire les sections du béton et, dès lors, la diminution du poids de la construction.
- Un module d'élasticité supérieur, susceptible d'améliorer la stabilité aérodynamique de ponts élancés.
- Un retrait réduit, qui s'avère avantageux pour la maîtrise des déformations d'une construction, ainsi qu'en ce qui concerne les pertes de précontrainte.

Sur le plan architectural également, le BHP est assorti d'un certain nombre de nouvelles possibilités. C'est ainsi que le BHP permet la réalisation de constructions plus élancées. Cet atout est d'ores et déjà matérialisé dans la réalisation d'ouvrages d'art (ponts), même si ce béton pourrait tout aussi bien être utilisé pour la construction de bâtiments. A l'heure actuelle, les avantages du BHP se concrétisent principalement dans l'obtention d'un espace intérieur le plus utile possible. Nous pourrions cependant aussi songer à un nouvel aspect de l'enveloppe de la construction, avec un regain d'attention porté aux éléments architecturaux tels que les arêtes, les arcs, les voûtes,...

La façade d'un bâtiment pourrait en outre être redéfinie par l'utilisation potentielle de modules de dimensions supérieures. Alors que ces dimensions sont à l'heure actuelle généralement de 6 mètres, elles pourraient être portées à 7 ou à 8 mètres, grâce au BHP. Cette augmentation pourrait faciliter l'avènement d'une autre conception de façade et donc d'un aménagement intérieur modifié, davantage en phase avec les normes internationales actuelles.

La liberté accrue obtenue pour l'aménagement intérieur d'un bâtiment vaut également pour l'aménagement de la surface horizontale utile. Grâce à la modification des dimensions du module, les espaces libres pourront être plus grands, ce qui donnera à l'architecte davantage de possibilités pour la conception et l'aménagement des espaces de vie et de bureau.

Dans l'industrie du préfabriqué, l'utilisation du BHP offre aussi de nouvelles possibilités (voir également infra). Citons notamment la possibilité de produire des cellules préfabriquées complètes, grâce notamment à l'économie de poids réalisée. Il ne paraît dès lors pas exclu qu'un bâtiment puisse évoluer dans le temps, par le biais de l'échange de cellules préfabriquées compatibles.

Un autre avantage du BHP par rapport au béton conventionnel est l'aspect visuel des surfaces de béton, tant coulées sur place que préfabriquées. L'apparition de petites bulles d'air à la surface est souvent très limitée. La surface présente généralement une bonne texture, notamment grâce à la haute teneur en fines du béton.

### 3.7. Contrôle des BHP

Les BHP sont soumis aux mêmes types d'essais que les bétons traditionnels, par exemple :

- Consistance mesurée au cône d'Abrams
- Résistance à la compression

Divers essais complémentaires permettent de mesurer les propriétés des BHP aussi bien au stade de mise au point de la formulation, que lors des convenances, ou des contrôles sur chantier :

- Etalement à la table à secousse
- Rhéomètre : Cet essai permet de mesurer, lors de la formulation, le seuil de cisaillement et la viscosité plastique des BHP
- Méthode des coulis de l'AFREM : Cette méthode permet, en particulier, de comparer l'efficacité des adjuvants.
- Méthode du Mortier de Béton Equivalent (MBE) : Elle permet, par exemple, d'étudier l'influence de la qualité du sable sur la rhéologie ou d'estimer les dégagements de chaleur.

Par ailleurs, des essais spécifiques ont été développés pour mesurer des paramètres associés à la durabilité des BHP tels que :

- la pénétration des chlorures
- la mesure de l'absorption d'eau par capillarité
- la microstructure des bétons
- la perméabilité au gaz du béton durci
- la porosité accessible à l'eau
- la mesure de l'épaisseur de béton carbonaté



### 3.8. Dimensionnement de structures en BHP

Les BHP présentent des résistances en compression importantes aux jeunes âges, compte tenu de la rapidité de la cinétique de montée en résistance, un BHP de 60 Mpa à 28 jours peut ainsi offrir des résistances mécaniques de 15 Mpa à 24 heures et 40 Mpa à 7 jours.

Les BHP offrent à long terme, des performances mécaniques accrues en compression, traction, flexion et cisaillement qui permettent :

- de simplifier et d'optimiser le dimensionnement et la conception des structures
- d'économiser les matières premières à fonctionnalité identique
- de réaliser des structures soumises à des sollicitations importantes et à des contraintes élevées ou des ouvrages subissant des environnements agressifs sévères
- de diminuer le poids des structures (à portées équivalentes) ou d'augmenter les portées (à poids propre équivalent) tout en limitant les déformations
- de concevoir des structures plus élancées

### 3.9. Atouts des BHP

Les BHP offrent de nombreux atouts.

#### ➤ Des propriétés exceptionnelles à l'état frais

La formulation (à l'aide de super plastifiants) des BHP leur confère une grande fluidité, une ouvrabilité accrue (valeur d'affaissement au cône supérieure à 150 mm pendant plusieurs heures), une aptitude au pompage améliorée, un maintien de la plasticité dans le temps, et une bonne stabilité à l'état frais, ce qui :

- Garantit un bon remplissage des moules et des coffrages et un enrobage parfait des armatures
- facilite la mise en œuvre, en particulier dans les zones très ferraillées
- améliore le rendement de mise en place du béton (il en résulte une réduction du délai d'exécution de l'ouvrage et un gain sur le coût de la main d'œuvre)
- permet des bétonnages complexes dans des conditions d'accès difficiles

Les BHP présentent aussi :

- une bonne stabilité à l'état frais, ce qui garantit l'absence de ségrégation
- une faible viscosité, qui autorise le pompage sur de longues distances

#### ➤ Des performances élevées aux jeunes âges

Les caractéristiques physico-chimiques et la cinétique spécifique de durcissement des BHP leur confèrent des résistances mécaniques importantes aux jeunes âges ce qui autorise :

- des décintrements et des décoffrages rapides et une accélération et optimisation des cycles de coffrage/décoffrage
- des délais avant mise en tension des armatures de précontrainte raccourcis
- une accélération et une optimisation des cadences de fabrication

Il en résulte une simplification et une approche différente de l'organisation des chantiers, une augmentation de la productivité et des gains significatifs sur les délais de construction des ouvrages.

#### ➤ Des résistances mécaniques importantes à long terme

Les BHP offrent des performances mécaniques élevées à long terme. Ces performances, qui découlent en particulier de sa faible porosité peu connectée, se traduisent par :

- une meilleure adhérence acier/béton
- un fluage inférieur à celui des bétons ordinaires
- une augmentation du module d'élasticité

- une diminution des sections de béton
- une résistance importante aux agents agressifs
- un faible risque de corrosion des armatures
- une forte résistance aux cycles de gel/dégel
- une faible perméabilité

Ces gains de performance se traduisent par un coût d'entretien réduit pendant la durée d'utilisation de l'ouvrage.

La durabilité est améliorée du fait de la très faible porosité. On constate, en particulier, une amélioration de la résistance aux agressions chimiques, qui se traduit par un comportement favorable en milieu marin ou en présence d'eaux agressives. La progression de la carbonatation en profondeur est réduite, ce qui assure une meilleure protection des armatures. Les BHP présentent généralement une résistance au cycle de gel/dégel améliorée. L'ensemble des résistances mécaniques (compression, traction) est augmenté, alors que les déformations sous charges instantanées et surtout sous charges permanentes sont diminuées.

### 3.10. Conclusions

La formulation et la fabrication de bétons dont la résistance en compression à 28 jours atteint plus de 50 Mpa voire 80 Mpa est aujourd'hui de pratique courante et n'est plus du domaine expérimental. De nombreux ouvrages ont été exécutés en BHP ces dernières années. Cette "vulgarisation" des BHP est rendue possible par la disponibilité du produit au sein du réseau des centrales. Ces BHP sont en général formulés avec des granulats locaux. Les centrales à béton sont équipées des automatismes, des process de fabrication, des procédés de dosages et des procédures de contrôle rigoureuses assurant la reproductibilité des caractéristiques et la maîtrise de la fabrication des BHP.

De nombreux atouts justifient l'utilisation, la compétitivité économique et la banalisation de l'emploi des BHP pour les ouvrages courants.

- **En phase de conception**
  - Simplification des sections
  - Simplification des ferraillages
  - Optimisation possible de la géométrie de l'ouvrage
  - Allègement des structures
  -
- **En phase de construction**
  - Économie de matière (granulats en particulier)
  - Gain de poids, donc simplification des fondations et des méthodes de construction
  - Réduction des délais d'exécution
  - Optimisation des cycles de construction et de la productivité
  - Minimisation de l'incidence des intempéries sur les phasages de construction
  -
- **En phase de service**
  - Durabilité augmentée
  - Frais d'entretien réduit
  - Allongement de la durée d'exploitation de l'ouvrage
  - Maintenance réduite

Il en résulte des ouvrages plus durables, nécessitant moins d'entretien à des coûts globaux comparables.

# Simulation numérique de poteaux élancés

## 4.1. Introduction

Le calcul de poteaux est traditionnellement fonction de la caractéristique adimensionnelle nommée « élancement ». L'étude des poteaux de faible élancement (poteaux courts) peut se ramener à un calcul au premier ordre.

En revanche les poteaux fortement élancés nécessitent que l'on se préoccupe des effets de second ordre (flèche prise par le poteau lors de son chargement). Ce phénomène et la prise en compte de la non-linéarité des lois de comportement des matériaux ne permettent plus les calculs analytiques.

La littérature propose soit des méthodes de contrôle plus ou moins approchées telles que celles définies dans l'Eurocode 2[13], soit des techniques de calculs plus précises dites générales. La technique générale qui est présentée dans ce chapitre est la méthode des différences finies.

## 4.2. Relation moment-courbure à effort normal constant

### 4.2.1. Introduction

Le calcul des déformations d'un poteau se fait sur la base de la relation propre à sa section, entre le moment, l'effort normal et la courbure.

Pour estimer par le calcul la déformabilité d'un poteau en béton armé, il est nécessaire de connaître cette relation dans son intégralité, en particulier dans le domaine post-élastique et à l'approche de la rupture.

La relation  $M-\emptyset$  dépend fortement du comportement contrainte-déformation des matériaux constituant la section et notamment de la déformation spécifique maximale que peut atteindre chacun d'entre eux.

La procédure de détermination de la relation moment-courbure est basée sur l'hypothèse simplificatrice de la conservation des sections planes jusqu'à la rupture. Au voisinage de cette dernière, cette hypothèse est difficile à vérifier, mais une comparaison du calcul avec des résultats expérimentaux est toutefois effectuée afin d'évaluer la précision globale de la procédure.

### 4.2.2. Modèles de lois de comportement

#### 4.2.2.1. Loi simulant le matériau béton

Le Manual-textbook fib (fib, 1999) [15] donne l'expression 4.1 de la relation contrainte-déformation correspondant à une vitesse de déformation imposée de  $30\mu\text{s}/\text{sec}$  (fig.4.1).

$$\sigma_c = \frac{\frac{E_{ci}}{E_{c1}} \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} - \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)^2}{1 + \left( \frac{E_{ci}}{E_{c1}} - 2 \right) \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}} f_{cm} \quad (4.1)$$

$E_{ci}$  : Module d'élasticité tangent

$\sigma_c$  : Contrainte de compression

$\varepsilon_c$  : Déformation de compression

$\varepsilon_{c1} = -0.0022$

$E_{c1} = -f_{cm} / 0.0022$  : Module d'élasticité sécant de l'origine au pic

$f_{cm}$  : est la résistance moyenne à la compression, elle peut être estimée par :

$f_{cm} = f_{ck} + \Delta f$

avec :  $\Delta f = 8 \text{ MPa}$

$f_{ck}$  : est la résistance caractéristique à la compression à 28 jours, obtenue à partir d'essais d'écrasement sur un cylindre

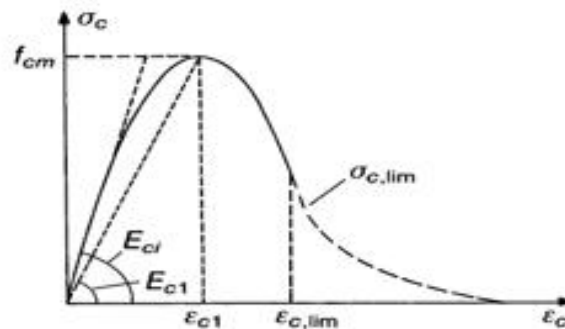


Figure 4.1: diagramme contrainte –déformation du béton

#### 4.2.2.2. Loi simulant le matériau acier

La figure 4.2 présente un diagramme contrainte-déformation de l'acier obtenu lors d'un essai de traction sur une éprouvette d'acier de diamètre apparent de 18.5 mm.

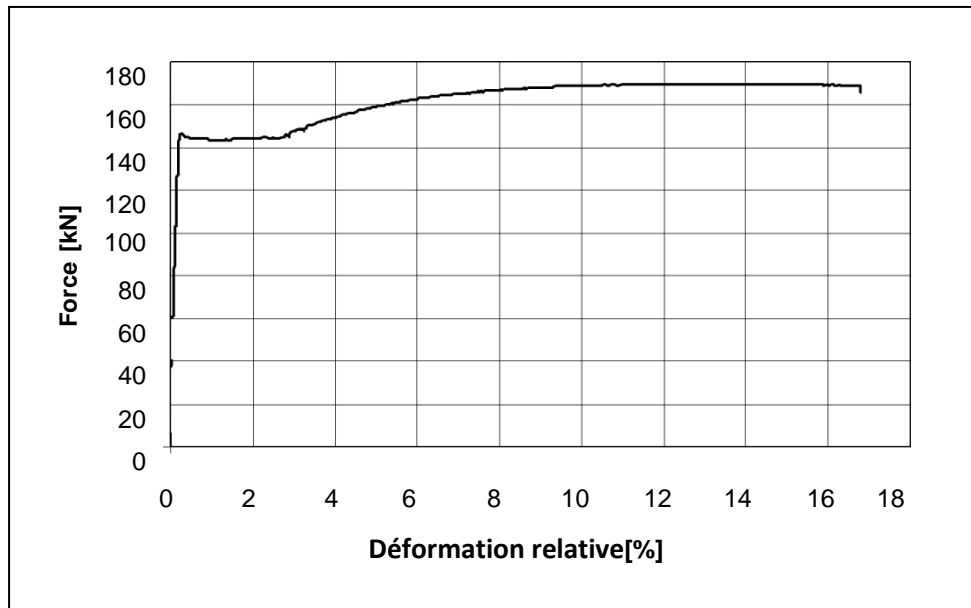


Figure 4.2: diagramme force –déformation, éprouvette d'acier, surface  $269 \text{ mm}^2$

Ce diagramme se scinde en deux ou trois phases distinctes :

1. la partie élastique linéaire, caractérisée par le module d'élasticité de Young ( $E$  [ $\text{N/mm}^2$ ]) et par la limite d'écoulement aussi appelée limite d'élasticité ( $f_y$  [ $\text{N/mm}^2$ ]).
2. la partie plastique quasiment horizontale, située à un niveau de contrainte équivalent à celui de la limite élastique.
3. la partie de raffermisssement caractérisée par une augmentation de la force jusqu'au maximum. Au maximum de force, on observe l'apparition de la striction qui s'accompagne d'une diminution de charge jusqu'à l'obtention de la rupture de l'éprouvette.

Suivant les besoins de l'analyse, l'utilisation se fera de deux manières :

- ❖ une idéalisation représentant fidèlement l'allure générale de la courbe de l'essai de traction figure 4.2 .
- ❖ une idéalisation de cette courbe par une loi simplifiée « élasto-plastique » avec déformation limite  $\epsilon_u$  figure 4.3 (fib, 1999).

Lors des simulations numériques, on utilisera cette seconde formulation qui nécessite la connaissance de quatre grandeurs caractéristiques :

- $f_y$  : limite d'écoulement [N/mm<sup>2</sup>]
- $E$  : module de Young [N/mm<sup>2</sup>]
- $\varepsilon_y$  : déformation élastique [ $\mu$  strain]
- $\varepsilon_u$  : déformation ultime [ $\mu$  strain]

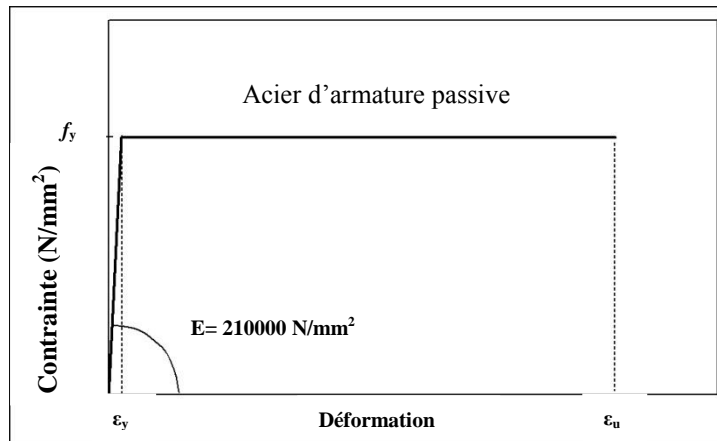


Figure 4.3: représentation de la loi « elasto-plastique » pour l'acier

Cette loi « élasto-plastique » est utilisée aussi bien pour l'acier comprimé que pour l'acier tendu.

### 4.2.3. Méthode de la matrice de rigidité tangentielle

#### 4.2.3.1. Introduction

Pour obtenir la courbe force-déplacement ( $N-\Delta$ ) d'un poteau en béton armé (par la méthode des différences finies), il est nécessaire de déterminer la relation moment-courbure ( $M-\Theta$ ) d'une section donnée à effort normal constant fixé.

La procédure appliquée pour développer la relation moment-courbure à effort normal constant est l'approche de la matrice de rigidité tangentielle [16,17].

#### 4.2.3.2. Descriptif de la méthode

Pour une section soumise à un moment fléchissant dans les deux directions, on peut définir le vecteur force,  $F$ , et le vecteur déformation,  $D$ , comme suit :

$$F = \begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix} \quad D = \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

avec  $N$  la force axiale appliqué à la section,  $M_x$  et  $M_y$  sont les moments selon les axes de coordonnées X et Y, respectivement,  $\varepsilon_0$ , la déformation centrale,  $\phi_x$  et  $\phi_y$  les courbures.

Due à la non-linéarité matérielle, il est nécessaire de représenter la relation entre le vecteur force et le vecteur déformation dans la forme incrémentale. Pour une application pratique et pour des changements élémentaires de F et D :

$$\Delta F = Q \times \Delta D \quad (4.3)$$

Les éléments de la matrice Q sont obtenus par la discrétisation de la section en éléments finis, la force axiale et les moments résistants sont calculés pour chaque élément fini et qui seront ensuite regroupés pour former les éléments de la matrice.

Selon l'hypothèse de la conservation des sections planes, la déformation centrale pour chaque élément fini peut être calculée comme suit :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + y\phi_x + x\phi_y \quad (4.4)$$

Où l'origine des coordonnées coïncide avec le centre de la section, fig.4.4. les contraintes dans chaque élément fini sont obtenues à partir des diagrammes contrainte-déformation et les efforts internes seront donc calculés comme suit :

$$N_i = \int \sigma \times dA \quad (4.5)$$

$$M_{xi} = \int \sigma \times y \times dA \quad (4.6)$$

$$M_{yi} = \int \sigma \times x \times dA \quad (4.7)$$

D'où :

$$\delta F = \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_x \\ \Delta M_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N - N_i \\ M_x - M_{xi} \\ M_y - M_{yi} \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

Si la condition  $|\delta F| \leq 10^{-3} F$  est vérifiée :

Une solution est obtenue, sinon, une procédure itérative est nécessaire dont laquelle la matrice de rigidité tangentielle doit être développée.

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial N}{\partial \phi_x} & \frac{\partial N}{\partial \phi_y} \\ \frac{\partial M_x}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial M_x}{\partial \phi_x} & \frac{\partial M_x}{\partial \phi_y} \\ \frac{\partial M_y}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial M_y}{\partial \phi_x} & \frac{\partial M_y}{\partial \phi_y} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

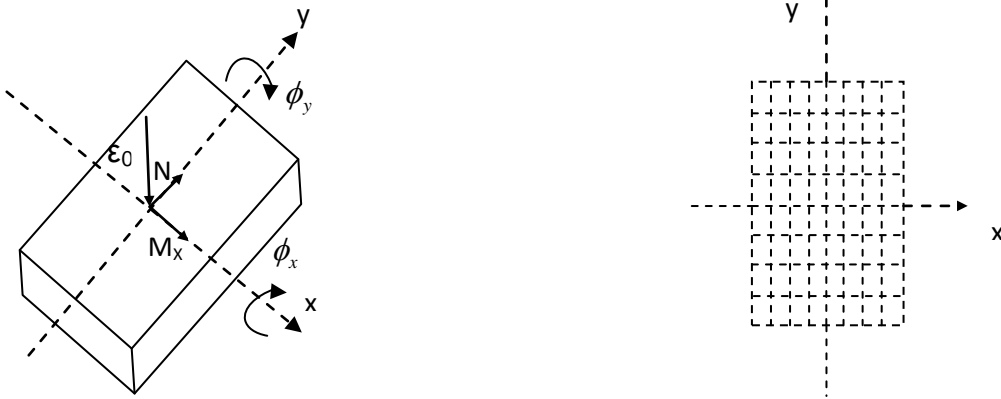


Figure 4.4: représentation des efforts et des déformations et la discrétisation de la section

Les éléments de la matrice Q sont donnés par :

$$\frac{\partial N}{\partial \varepsilon} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot E t_{ij} \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial N}{\partial \phi_x} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot y_{ij} \cdot E t_{ij} \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial N}{\partial \phi_y} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_{ij} \cdot E t_{ij} \quad (4.12)$$

et les éléments correspondant à  $M_x$  sont:

$$\frac{\partial M_x}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial N}{\partial \phi_x} \quad (4.13)$$



$$\frac{\partial M_x}{\partial \phi_x} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot y_{ij}^2 \cdot Et_{ij} \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial \phi_y} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_{ij} \cdot y_{ij} \cdot Et_{ij} \quad (4.15)$$

Et ceux correspondant à  $M_y$  sont:

$$\frac{\partial M_y}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial N}{\partial \phi_y} \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial \phi_x} = \frac{\partial M_x}{\partial \phi_y} \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial \phi_y} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_{ij}^2 \cdot Et_{ij} \quad (4.18)$$

avec  $Et$  le module tangent,  $m$  et  $n$ , le nombre d'éléments finis dans les direction X et Y, respectivement,  $i$  et  $j$ , positions des éléments finis dans les direction X et Y respectivement.

Les valeurs corrigées des déformations sont calculées et ajoutées aux vecteurs de déformations de départ pour donner les valeurs actualisées des déformations et donc les valeurs actualisées des contraintes.

Les valeurs corrigées des déformations sont calculées comme suit :

$$\Delta D = \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon \\ \Delta \phi_x \\ \Delta \phi_y \end{Bmatrix} = Q^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_x \\ \Delta M_y \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

Et donc :

$$D = D + \Delta D = \begin{Bmatrix} \varepsilon + \Delta \varepsilon \\ \phi_x + \Delta \phi_x \\ \phi_y + \Delta \phi_y \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

Cette procédure est répétée jusqu'à ce que la condition  $|\delta F| \leq 10^{-3} F$  est vérifiée. Dans ce cas, la relation moment – courbure à effort normal constant peut être développée.

la relation moment – courbure à effort normal constant présentée dans la figure 4.5, a été tracée pour des différentes valeurs du moment selon la direction Y.

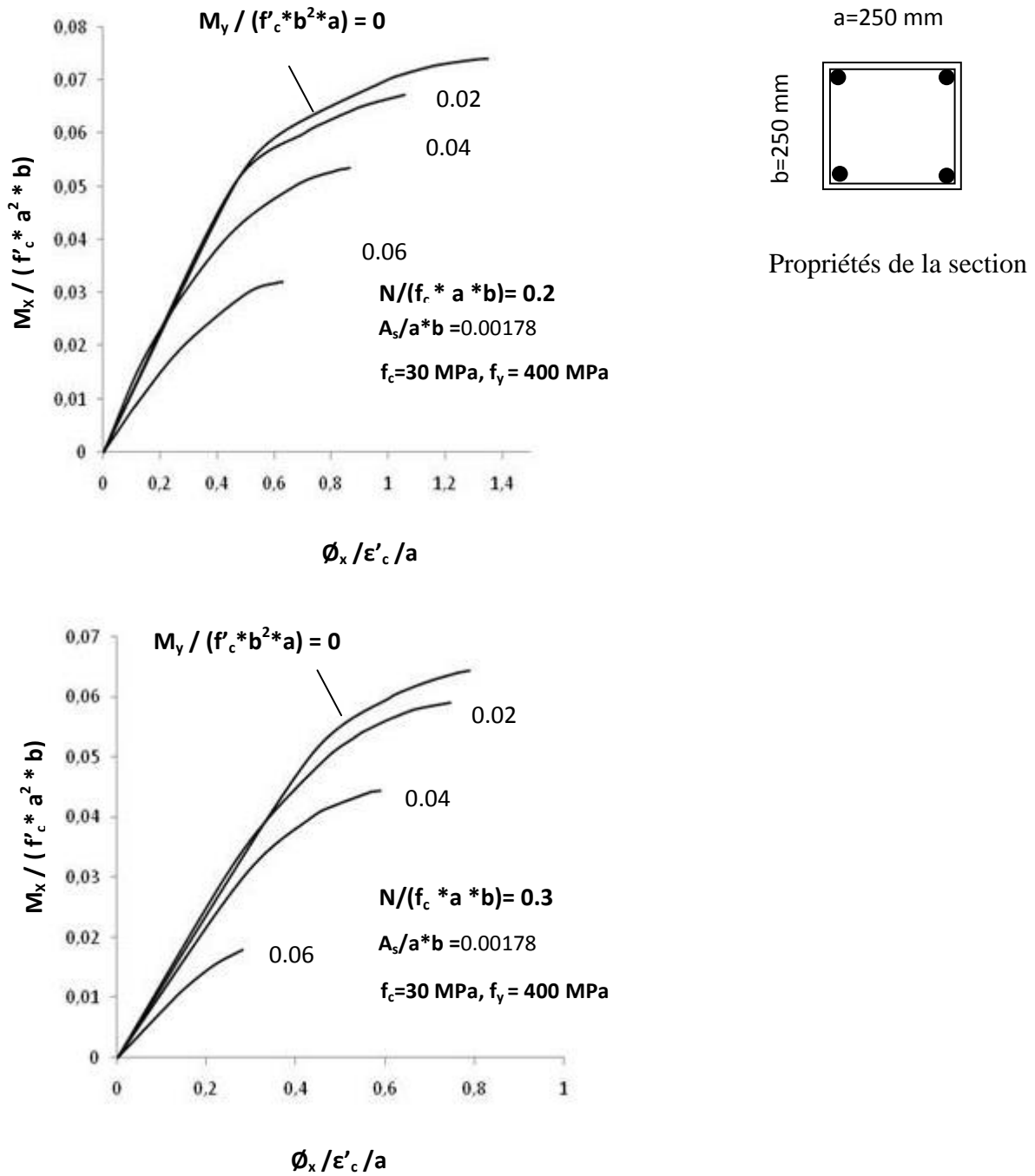


Figure 4.5: exemple d'une relation moment- courbure à effort normal constant

### 4.3. Interaction : N-M

#### 4.3.1. Introduction

Les courbes d'interaction N-M sont des outils souvent utilisés comme aide au dimensionnement. Ces courbes sont souvent utilisées pour permettre de déterminer ou de vérifier aisément, pour une section de géométrie et d'armatures donnée, la capacité portante de la section.

Les courbes sont tracées à partir des équations d'équilibre de la section et définissent la zone où l'équilibre de la section est possible et la zone non autorisée.

#### 4.3.2. Principes des diagrammes d'interaction [18]

##### 4.3.2.1. Cas d'une flexion uni-axiale

###### ❖ Section de béton seul

La figure 4.6 représente l'état d'un poteau au moment imminent de ruine. Cette section est soumise simultanément à un moment de flexion et un effort axial.

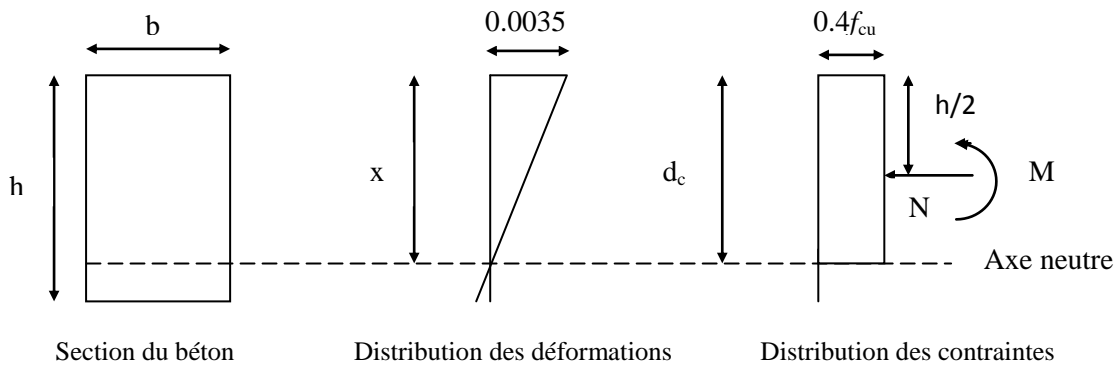


Figure 4.6: état d'un poteau au moment imminent de ruine

Le bloc de contraintes utilisé est le bloc rectangulaire simplifié ; l'intensité de la contrainte  $0.4f_{cu}$  inclut le coefficient de sécurité ( $\gamma_b = 1.5$ ).

Si la charge axiale est appliquée au C.D.G de la section et si  $d_c$  est la profondeur de l'axe neutre on peut écrire :

$$N_{(\text{béton})} = 0.4f_{cu} b \cdot d_c \quad (4.21)$$

$$M_{(\text{béton})} = N_{(\text{béton})} \left( \frac{h}{2} - \frac{d_c}{2} \right) \quad (4.22)$$

et par simplification, on aura:

$$M_{(\text{béton})} = 0.2 f_{cu} b \cdot d_c (h - d_c) \tag{4.23}$$

Le mot « béton » met l'accent sur le fait que M et N concernent un béton seul (non armé). Les équations (4.21) et (4.23) peuvent être réécrites de manière adimensionnelle.

$$\begin{cases} \alpha_{\text{béton}} = \frac{N}{f_{cu} b h} \\ \beta_{\text{béton}} = \frac{M}{f_{cu} b h^2} \end{cases} \tag{4.24}$$

$$\begin{cases} \alpha_{\text{béton}} = 0.4 \left( \frac{d_c}{h} \right) \\ \beta_{\text{béton}} = 0.2 \left( \frac{d_c}{h} \right) \left[ 1 - \left( \frac{d_c}{h} \right) \right] \end{cases} \tag{4.25}$$

Avec :  $\left( \frac{d_c}{h} \right)$  variant de 0 à 1.

- $\left( \frac{d_c}{h} \right) = 0 \Rightarrow$  section entièrement tendue
- 
- $\left( \frac{d_c}{h} \right) = 1 \Rightarrow$  section entièrement comprimée

La courbe (I) de la figure 4.7 est obtenue en faisant varier le rapport  $\left( \frac{d_c}{h} \right)$  de 0 à 1 et en calculant pour chaque valeur de  $\left( \frac{d_c}{h} \right)$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  correspondants.

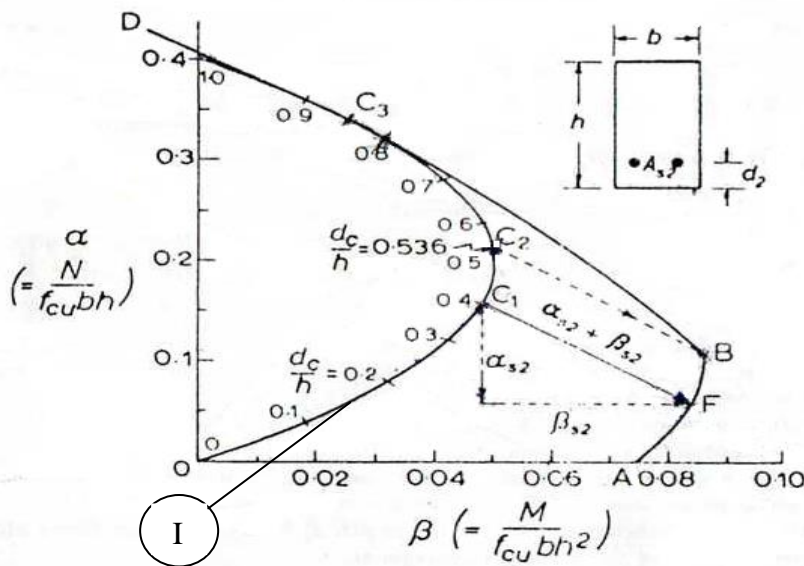


Figure 4.7: diagramme d'interaction ( $A_{s2}/bh=1\%$ ,  $f_{cu}=40$  Mpa,  $f_y=410$  Mpa  $d_2/h=0.15$ )

Les points se trouvant à l'intérieur de la courbe d'interaction représentent des combinaisons de M et N sécuritaires alors que les points qui sont à l'extérieur de la courbe, représentent des combinaisons de M et N non acceptables.

#### ❖ Effet d'une section d'armature $A_{s2}$

La contribution de  $A_{s2}$  à la charge axiale est :

$$N_{(A_{s2})} = f_{s2} \cdot A_{s2} \quad (4.26)$$

$f_{s2}$ : la contrainte qui correspond à la déformation relative  $\varepsilon_{s2}$ .

Les contraintes  $f_{s2}$  sont (par convention) positives quand elles sont de compression et négatives quand elles sont de traction.

La contribution au moment fléchissant par rapport au milieu de la hauteur de la section :

$$M_{(A_{s2})} = -A_{s2}f_{s2}\left(\frac{h}{2} - d_2\right) \quad (4.27)$$

Le signe (-) est utilisé parce que la force de compression de l'acier ( $A_{s2}f_{s2}$ ) produit un moment de sens contraire à celui produit par le bloc de contrainte du béton.

$$\alpha_{s2} = \frac{N_{(A_{s2})}}{f_{cu}bh} = \left(\frac{A_{s2}}{bh}\right) \frac{f_{s2}}{f_{cu}} \quad (4.28)$$

$$\beta_{s2} = \frac{M_{(A_{s2})}}{f_{cu}bh^2} = -\left(\frac{1}{2} - \frac{d_2}{h}\right)\alpha_{s2} \quad (4.29)$$

Pour une section donnée d'un poteau, les quantités  $\frac{A_{s2}}{bh}$ ,  $\frac{d_2}{h}$  et  $f_{cu}$  sont connues. Donc  $\alpha_{s2}$  et  $\beta_{s2}$  sont complètement définis si  $f_{s2}$  est définie. La valeur de  $f_{s2}$  dépend seulement de  $\varepsilon_{s2}$ .

$$\frac{\varepsilon_{s2}}{3500 \cdot 10^{-6}} = \frac{d_2 - (h - d_c)}{d_c} = \frac{\frac{d_c}{h} - \left(1 - \frac{d_2}{h}\right)}{\frac{d_c}{h}} \quad (4.30)$$

De ce fait,  $\varepsilon_{s2}$  et à fortiori  $\alpha_{s2}$  et  $\beta_{s2}$  sont complètement définis en fonction de  $\frac{d_c}{h}$ .

Les valeurs de  $\alpha_{s2}$  et  $\beta_{s2}$  peuvent être représentées graphiquement pour de différentes valeurs de  $\frac{d_c}{h}$

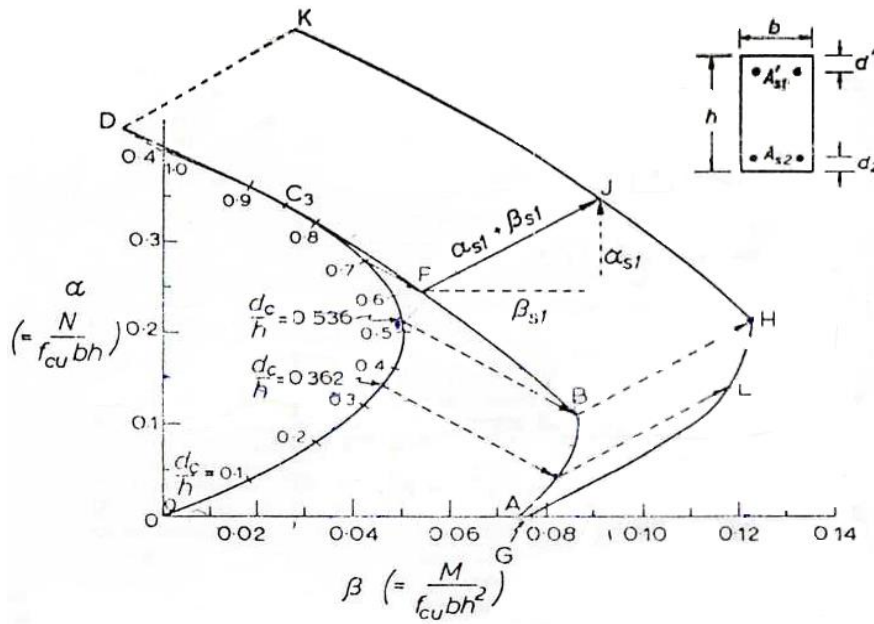


Figure 4.8: diagramme d'interaction ( $A_{s2}/bh=1\%$ ,  $A_{s1}/bh=1\%$ ,  $f_{cu}=40$  Mpa,  $f_y=410$  Mpa  $d_2/h=0.15$ ,  $d/h=0.15$ )

Quand l'effet des armatures  $A_{s2}$  est superposé à celui du béton, on obtient la figure 4.7 qui montre que pour chaque valeur de  $\frac{d_c}{h}$  l'effet des armatures est représenté par un vecteur  $(\alpha_{s2} + \beta_{s2})$  dont :

Le module =  $\sqrt{(\alpha_{s2})^2 + (\beta_{s2})^2}$

L'inclinaison =  $\text{arc tg} \left[ -\left(\frac{1}{2} - \frac{d_2}{h}\right) \right]$  étant constante

Pour  $\frac{d_c}{h}=0.4$ , le point  $C_1$  se déplace vers le point F qui représente une combinaison de M et N qui produiront un état imminent de ruine.

La figure 4.7a été réalisée pour le cas particulier de  $\frac{A_{s2}}{bh} = 1\%$ ,  $f_{cu} = 40$  Mpa,  $\frac{d_2}{h} = 0.15$ .

Pour simplifier le problème, on suppose que la relation entre les contraintes et les déformations est linéaire entre (+410) et (-410) Mpa et que le module d'élasticité  $E_s = 200000$  Mpa.

On peut observer que :

➤ Pour  $\frac{d_c}{h} = 1 - \frac{d_2}{h}$  :

$\epsilon_{s2} = 0 \Rightarrow f_{s2} = 0 \Rightarrow \alpha_{s2} = \beta_{s2} = 0$

Les armatures sont inactives dans ce point

➤ Pour  $\frac{d_c}{h} > 1 - \frac{d_2}{h}$  :

$$\varepsilon_{s2} > 0 \Rightarrow f_{s2} > 0 \Rightarrow \alpha_{s2} > 0, \beta_{s2} < 0$$

Les armatures sont donc en compression

➤ Pour  $\frac{d_c}{h} < 1 - \frac{d_2}{h}$  :

$$\varepsilon_{s2} < 0 \Rightarrow f_{s2} < 0 \Rightarrow \alpha_{s2} < 0, \beta_{s2} > 0$$

Les armatures sont en traction

➤ Pour  $\frac{d_c}{h} = 0.536$  ( $\varepsilon_{s2} = \varepsilon_y = -2050 \cdot 10^{-6} \Rightarrow \frac{d_c}{h} = 0.536$ ) :

Les armatures atteignent leur limite d'écoulement en traction.

La longueur du vecteur  $(\alpha_{s2} + \beta_{s2})$  prend la valeur maximale (C<sub>2</sub>B) et demeure inchangée pour toute réduction de  $\frac{d_c}{h}$ .

➤ Pour  $\frac{d_c}{h} > 0.536$  :

L'axe neutre descend et  $\varepsilon_{s2}$  diminue et  $f_{s2} < f_y$ ,  $\alpha_{s2}$  et  $\beta_{s2}$  dans ce cas, ont des valeurs inférieures à celles pour  $\frac{d_c}{h} = 0.536$ .

La longueur du vecteur diminue graduellement jusqu'à ce qu'elle s'annule au point C<sub>3</sub> et augmente de nouveau dans la direction opposée.

➤ Quand la charge axiale et le moment fléchissant agissant sur la section du béton sont tels que  $\alpha$  et  $\beta$  coïncident avec le point B, on conclut que la fibre la plus comprimée atteint  $\varepsilon_{cu}$  simultanément avec les aciers atteignant  $\varepsilon_y$ . Ce mode de rupture est appelé « rupture équilibrée ».

➤ Pour des combinaisons de M et N qui nous donnent des points sur le tronçon AFB, les armatures atteignent leur limite d'écoulement avant que la fibre la plus comprimée n'atteigne  $\varepsilon_{cu}$ . pour les points au dessus de B (CB), les armatures n'atteignent pas  $\varepsilon_y$  quand  $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$ .

#### ❖ Effet d'une section d'armature $A'_{s1}$

En suivant le même raisonnement:

$$N_{(A'_{s1})} = f'_{s1} \cdot A'_{s1} \quad (4.31)$$

$$M_{(A'_{s1})} = A'_{s1} f'_{s1} \left( \frac{h}{2} - d' \right) \quad (4.32)$$

$$\alpha_{s1} = \frac{N_{(A'_{s1})}}{f_{cu}bh} = \left(\frac{A'_{s1}}{bh}\right) \frac{f'_{s1}}{f_{cu}} \quad (4.33)$$

$$\beta_{s1} = \frac{M_{(A'_{s1})}}{f_{cu}bh^2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{d'}{h}\right) \alpha_{s1} \quad (4.34)$$

$$\frac{\varepsilon'_{s1}}{3500.10^{-6}} = \frac{d_c - d'}{d_c} = \frac{\frac{d_c}{h} - \frac{d'}{h}}{\frac{d_c}{h}} \quad (4.35)$$

L'inclinaison du vecteur =  $\arctg\left(\frac{1}{2} - \frac{d'}{h}\right)$  est aussi une constante

Pour une valeur donnée à  $\frac{d_c}{h}$ ,  $\alpha_{s1}$  et  $\beta_{s1}$  peuvent être calculés vu que les quantités  $\frac{A'_{s1}}{bh}$ ,  $\frac{d'}{h}$ ,  $f_{cu}$  et les propriétés de l'acier sont connues.

L'effet de  $A'_{s1}$  est représenté sur la figure 4.8 par le vecteur  $(\alpha_{s1} + \beta_{s1})$  qui est incliné d'un angle dont la tangente est égale à  $\left(\frac{1}{2} - \frac{d'}{h}\right)$ . C'est une inclinaison constante. Donc la courbe GLHJK est la courbe d'interaction pour une section armée à ses deux faces.

Pour n'importe quel point de cette courbe,  $\alpha$  et  $\beta$  sont respectivement égaux à :

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_{b\acute{e}ton} + \alpha_{s1} + \alpha_{s2} \\ \beta = \beta_{b\acute{e}ton} + \beta_{s1} + \beta_{s2} \end{cases} \quad (4.36)$$

#### 4.3.2.2. Cas d'une flexion bi-axiale

##### a. Introduction

Les poteaux sont généralement soumis à une flexion bi-axiale suivant deux axes perpendiculaires (X et Y) et à un chargement axial fig 4.9.



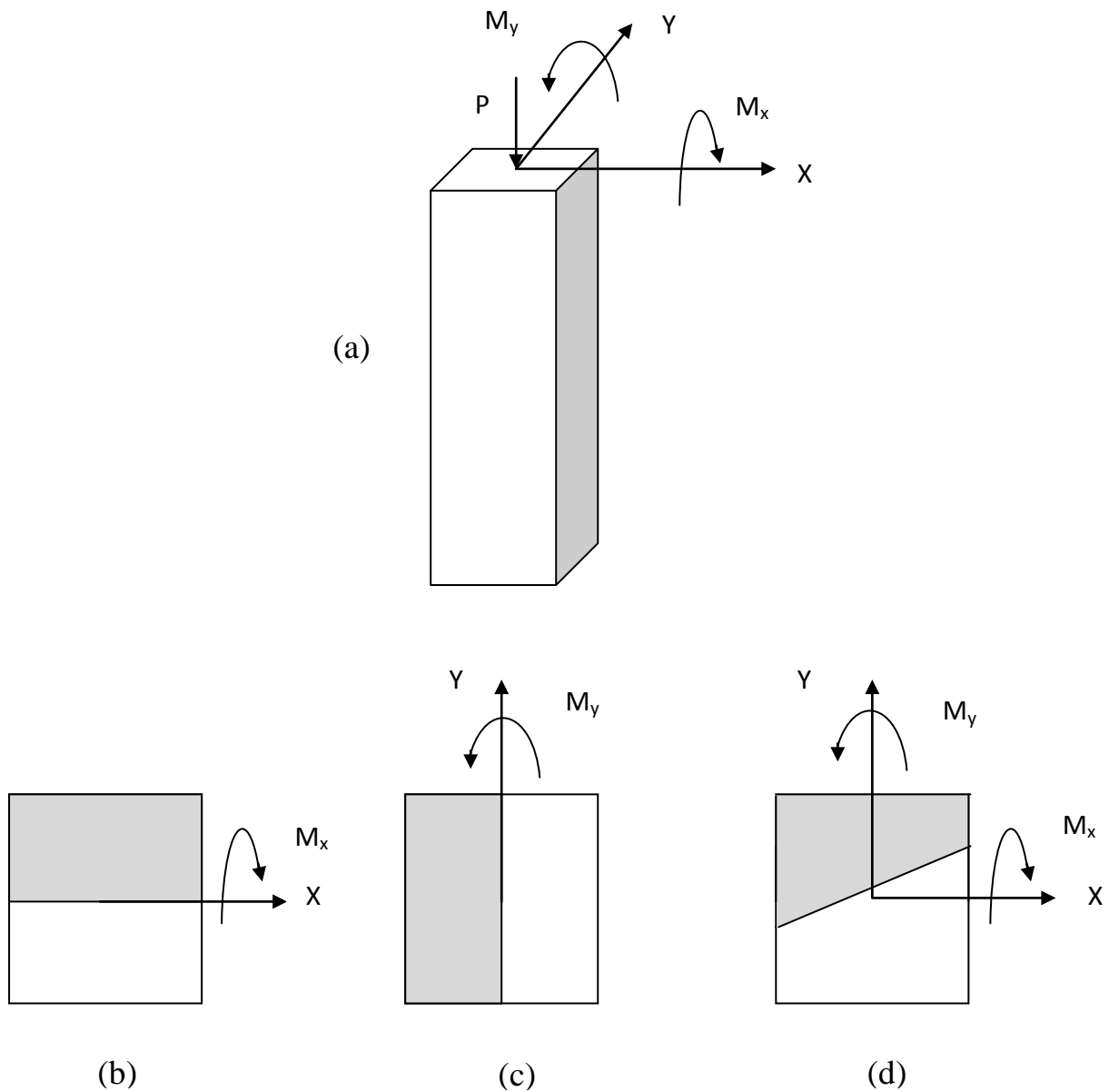


Figure 4.9: Poteau sous l'effet d'une flexion bi-axiale

(a): vue 3D (b): flexion suivant l'axe X

(c): flexion suivant l'axe Y (d): inclinaison de l'axe neutre dans le cas d'une flexion bi-axiale

Avec la prise en compte de la convention de signe représentée sur la figure 4.9, le moment suivant l'axe X provoque une compression dans la partie supérieure de la section et une traction dans la partie inférieure. Par contre le moment suivant l'axe Y provoque une compression dans la partie gauche de la section et une traction dans la partie droite.

Pour une section symétrique soumise à une flexion uni-axiale, l'axe neutre est parallèle à l'axe du moment. Pour le cas d'une flexion bi-axiale, il existe un cadran de la section qui est doublement comprimé et cadran qui est doublement tendu, les deux cadrans qui restent sont soumis à l'action combinée de traction et compression. Cela veut dire que les deux moments n'agissent pas

indépendamment mais couplés et l'axe neutre résultant est incliné avec un angle qui dépend des valeurs des deux moments.

L'interaction entre la charge axiale  $P$  et les deux moments  $M_x$  et  $M_y$  est représentée par une surface à trois dimensions qui est construite par la combinaison des courbes d'interaction  $N$ - $M$  pour une variété de positions de l'axe neutre fig 4.10.b.

**b. Méthode du contour de charge**

La méthode du contour de charge est basée sur la représentation de la surface de rupture par une famille de courbes correspondant à une charge axiale constante.

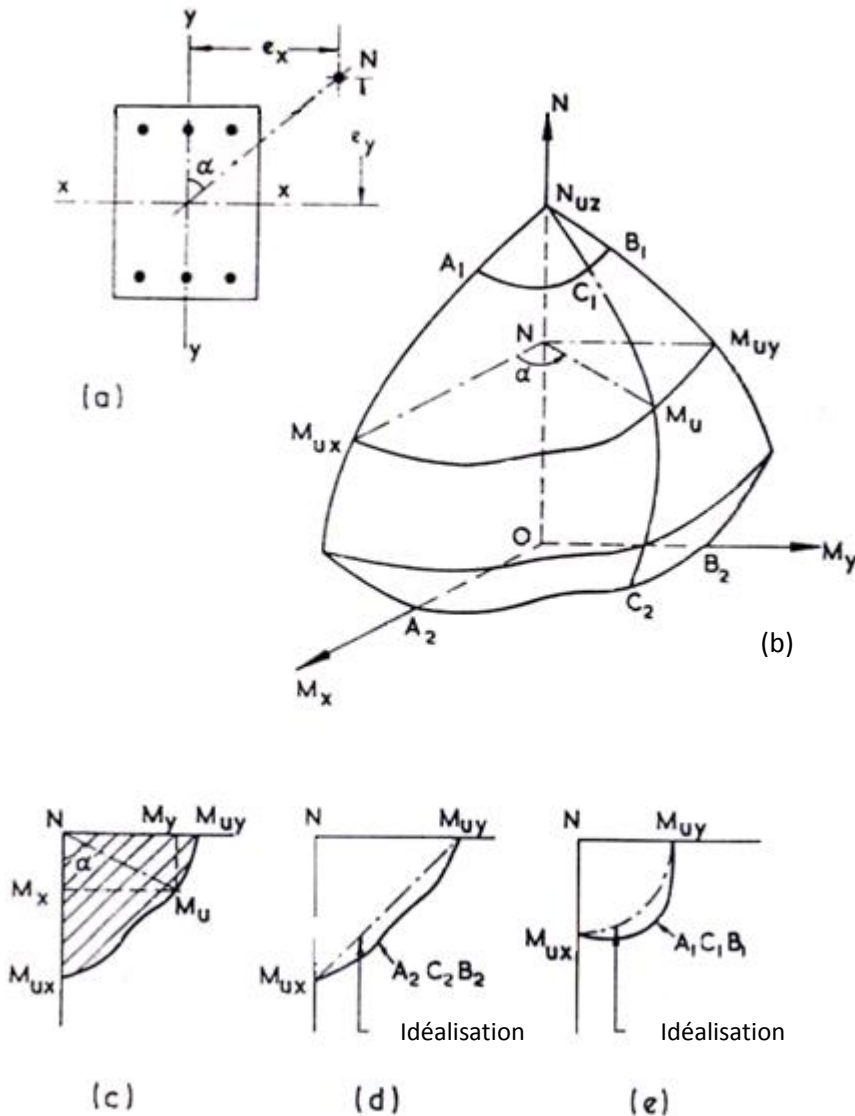


Figure 4.10: diagramme d'interaction pour le cas d'une flexion bi-axiale

Pour le cas où les excentricités  $e_x$  et  $e_y$  ne sont pas nulles, l'angle  $\alpha$  a une valeur intermédiaire entre 0 et 90°.

Des recherches ont montré que pour ce cas de flexion déviée, la courbe d'interaction N-M est  $C_1C_2$  dans la figure 4.10.b. comme l'angle  $\alpha$  varie entre 0 et 90°, la courbe  $C_1C_2$  produit une surface d'interaction qui a une forme plutôt comme celle d'un quart de poire.

Pour une valeur donnée de N, si la surface d'interaction est coupée par un plan horizontal ET parallèle à un niveau au dessus de la base, la courbe d'interaction donne la relation entre l'angle  $\alpha$  et la valeur du moment  $M_u$  qui produit la ruine figure 4.10.b. avec cette valeur donnée de N, cette section horizontale donne la courbe d'interaction  $M_x$ - $M_y$ .

Dans la figure 4.10.c, les points se trouvant à l'intérieur de la surface représentent des combinaisons de  $M_x$  et  $M_y$  acceptables, Les points se trouvant à l'extérieur représentent des combinaisons de  $M_x$  et  $M_y$  non-acceptables.

Dans la figure 4.10.c, la forme de la courbe d'interaction  $M_x$ - $M_y$  dépend du rapport entre la charge réelle N et la charge de ruine  $N_{uz}$ . Si  $N/ N_{uz}$  est petit, la courbe peut être idéalisée par une ligne droite, figure 4.10.d.

La forme générale de cette courbe peut être représentée par l'équation adimensionnelle suivante :

$$\left[ \frac{M_x}{M_{ux}} \right]^{\alpha_n} + \left[ \frac{M_y}{M_{uy}} \right]^{\alpha_n} = 1 \tag{4.37}$$

Avec :  $N_{uz} = k_1 f_{cu} A_c + A' s f_y$

$M_x$ : moment réel suivant l'axe X

$M_y$ : moment réel suivant l'axe Y

$M_{ux}$ : moment ultime suivant l'axe X correspondant à une flexion uni-axiale

$M_{uy}$ : moment ultime suivant l'axe Y correspondant à une flexion uni-axiale

$\alpha_n$ : coefficient qui dépend du rapport  $N/ N_{uz}$

|             |            |      |      |            |
|-------------|------------|------|------|------------|
| $N/ N_{uz}$ | $\leq 0.2$ | 0.4  | 0.6  | $\geq 0.8$ |
| $\alpha_n$  | 1.0        | 1.33 | 1.67 | 2.0        |

Tableau 4.1 valeur de  $\alpha_n$  en fonction du rapport  $N/ N_{uz}$

## 4.4 Méthode des différences finies

### 4.4.1 Introduction

Cette méthode est qualifiée de « générale » car elle permet l'étude de la relation complète (P-Δ) d'un poteau en prenant en compte les effets du premier et du second ordre. Pour étudier cette relation, la hauteur du poteau doit être divisée en segments afin d'approcher la déformée réelle que prend le poteau. Cette technique est présentée dans le CEB Manual on Buckling (CEB, 1977)[19]. Les éléments de base de cette technique sont les courbes M-Ø.

### 4.4.2 Principes de la méthode

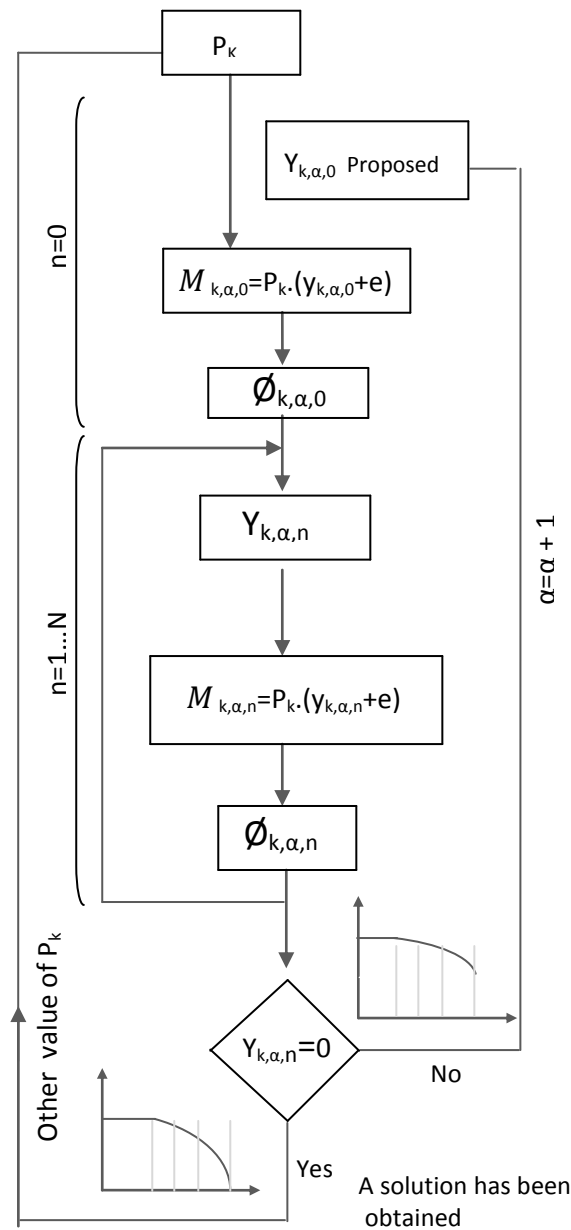


Figure 4.11: organigramme du programme numérique

La hauteur du poteau est divisée en un nombre fini d'éléments appelés segment, chaque segment a une épaisseur  $\Delta x$ . Dans une section arbitraire, la flèche est  $y_i$ , la courbure,  $\phi_i$ , dans cette section peut être calculée comme suit :

$$y_i'' = -\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2} \tag{4.38}$$

Avec  $y_i'' = \phi_i$

Cette équation définit l'aspect géométrique du problème. pour trouver un état d'équilibre possible pour une valeur donnée de la charge axiale,  $N$ , et pour une valeur donnée d'excentricité,  $e$ , une procédure itérative peut être menée en donnant une valeur raisonnable à la fleche,  $y_0$ , au centre du poteau. Le moment total dans ce point sera donc :

$$M_0 = N(e + y_0) \tag{4.39}$$

La courbure,  $\phi_i$ , est obtenue de la relation moment-courbure à charge axiale constante. Donc il est possible de calculer la flèche,  $y_1$ , dans le segment voisin. Le moment total devient :

$$M_1 = N(e + y_1) \tag{4.40}$$

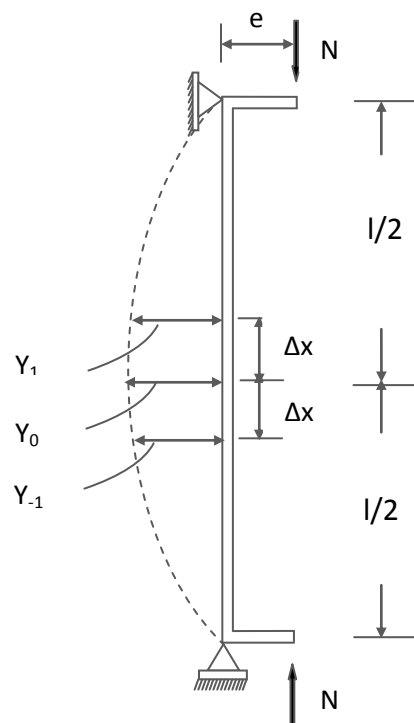


Figure 4.12: méthode des différences finies :poteau bi-articulé

Et à partir de la relation moment-courbure à charge axiale constante, la valeur de la courbure  $\phi_1$  peut être obtenue. En général, cela suit la règle suivante:

$$y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} - \phi_i (\Delta x)^2 \quad (4.41)$$

En utilisant cette équation, il est possible de calculer la flèche dans n'importe quel segment à partir de la dernière valeur de la flèche calculée.

Au niveau des appuis, la valeur de la flèche devra être nulle. Sinon, le calcul doit être répété, en introduisant une nouvelle valeur raisonnable de la flèche centrale,  $y_0$ , jusqu'à ce que la condition de flèche nulle au niveaux des appuis soit vérifiée. Dans ce cas, le premier point de la courbe force-flèche est obtenu.

Les autres points de la courbe fig 4.13, sont obtenus en augmentant la valeur de la charge axiale.

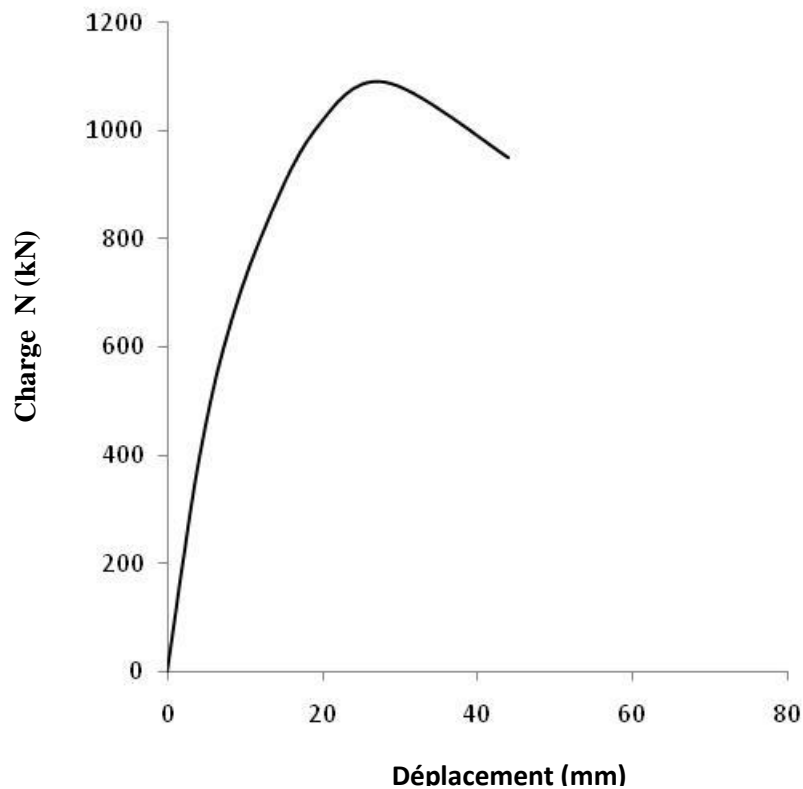


Figure 4.13: relation charge-déplacement : poteau  $180 \times 180$  mm ( $h = 3.78$  m,  $f_{ck} = 94.3$  Mpa,  $f_{yk} = 542$  Mpa,  $e_x = 20$  mm,  $e_y = 0$ )

## 4.5 Validation des résultats numériques

### 4.5.1 Introduction

Basé sur l'approche numérique développée précédemment, un programme a été développé pour fournir les résultats numériques.

La comparaison entre les résultats obtenus par le programme et les résultats expérimentaux est présentée ci après.

De nombreuses études sont disponibles dans la littérature liée au comportement de poteaux en béton ordinaire. Néanmoins, il y'a peu d'auteurs qui ont proposé des tests sur les poteaux en béton à haute performance et la plupart d'eux ont étudiés leurs comportements dans le cas uni axial, alors que les tests sur ce type de poteaux soumis à une flexion bi-axial sont très rares.

### 4.5.2 Comparaison avec les résultats expérimentaux obtenus par Olivier germain et espion [1]

Olivier germain et espion [1] ont testé 12 poteaux bi-articulés en béton à haute performance. La section transversale des poteaux testé était de  $180 \times 180$  mm, renforcée de 4 barres de 12 mm de diamètre (avec une contrainte d'écoulement des armatures de 542 Mpa).

On remarque clairement que les résultats numériques de la présente étude sont en très bonne corrélation avec les résultats expérimentaux (tableau 4.2). La différence relative est entre -0.051 et +0.041.

### 4.5.3 Comparaison avec les résultats expérimentaux obtenus par Drysdale et Huggins [20]

Une autre comparaison a été faite avec les résultats expérimentaux obtenus par Drysdale et Huggins [20]. Les poteaux testés étaient en béton ordinaire de  $127 \times 127$  mm avec une contrainte d'écoulement des armatures de 387 Mpa.

La comparaison avec les résultats expérimentaux a montré une bonne corrélation (tableau 4.3). La différence relative est entre -0.116 et + 0.089.

### 4.5.4 Comparaison avec les résultats expérimentaux obtenus par Pallarès et al

Pour mieux vérifier la validité de la méthode, les comparaisons ont été faites avec les résultats expérimentaux obtenus par Pallarès Et Al. Qui ont testé des poteaux en béton à haute performance soumis à une flexion bi-excentrée.

Les poteaux étaient de section rectangulaire de  $200 \times 100$  mm et le tableau 4.4 présente la description des poteaux testés.

On remarque que les deux résultats sont très proches (tableau 4.4). La différence relative est entre -0.069 et + 0.198.

| désignation<br>poteau | hauteur<br>(m) | excentricité<br>(mm) | diamètre<br>des cadres<br>(mm) | résistance<br>d'un cylindre<br>(Mpa) | Charge de ruine (KN) |                     |             |                                     |
|-----------------------|----------------|----------------------|--------------------------------|--------------------------------------|----------------------|---------------------|-------------|-------------------------------------|
|                       |                |                      |                                |                                      | Exp                  | présente<br>analyse | Pana/Pexp   | $\frac{P_{ana} - P_{exp}}{P_{ana}}$ |
| A-1/36-R              | 3.78           | 5                    | 8                              | 86.9                                 | 1750                 | 1770                | <b>1.01</b> | <b>0.011</b>                        |
| A-1/36-O              | 3.78           | 5                    | 8                              | 87.3                                 | 1640                 | 1620                | <b>0.99</b> | <b>-0.012</b>                       |
| A-1/18-R1             | 3.78           | 10                   | 6                              | 92.0                                 | 1922                 | 1900                | <b>0.99</b> | <b>-0.012</b>                       |
| A-1/18-Q              | 3.78           | 10                   | 8                              | 89.3                                 | 1524                 | 1450                | <b>0.95</b> | <b>-0.051</b>                       |
| A-1/18-O              | 3.78           | 10                   | 6                              | 91.4                                 | 1489                 | 1430                | <b>0.96</b> | <b>-0.041</b>                       |
| A-1/18-R2             | 3.78           | 10                   | 8                              | 85.9                                 | 1479                 | 1530                | <b>1.03</b> | <b>0.033</b>                        |
| A-1/12-O              | 3.78           | 15                   | 6                              | 89.4                                 | 1256                 | 1310                | <b>1.04</b> | <b>0.041</b>                        |
| A-1/9-R               | 3.78           | 20                   | 6                              | 91.8                                 | 1140                 | 1150                | <b>1.01</b> | <b>0.009</b>                        |
| A-1/9-O               | 3.78           | 20                   | 6                              | 94.3                                 | 1100                 | 1090                | <b>0.99</b> | <b>-0.009</b>                       |
| B-1/90-O              | 4.38           | 2                    | 6                              | 92.0                                 | 1388                 | 1420                | <b>1.02</b> | <b>0.023</b>                        |
| B-1/36-O              | 4.38           | 5                    | 6                              | 93.1                                 | 1315                 | 1340                | <b>1.02</b> | <b>0.019</b>                        |
| B-1/18-O              | 4.38           | 10                   | 6                              | 91.3                                 | 1153                 | 1150                | <b>0.99</b> | <b>-0.003</b>                       |

Tableau 4.2 Comparaison des résultats numériques avec les résultats expérimentaux obtenus par Olivier germain et espion



| désignation<br>poteau | $e_x$<br>(mm) | $e_y$<br>(mm) | Résistance d'un<br>cylindre<br>(Mpa) | Charge de ruine (KN) |                     |           |                                     |
|-----------------------|---------------|---------------|--------------------------------------|----------------------|---------------------|-----------|-------------------------------------|
|                       |               |               |                                      | Exp                  | présente<br>analyse | Pana/Pexp | $\frac{P_{ana} - P_{exp}}{P_{ana}}$ |
| A-1-C                 | 17.96         | 17.96         | 26.83                                | 167.31               | 165                 | 0.98      | -0.014                              |
| A-3-C                 | 17.96         | 17.96         | 27.73                                | 171.32               | 167                 | 0.97      | -0.026                              |
| A-2-A                 | 23.47         | 9.72          | 26.69                                | 175.77               | 171                 | 0.97      | -0.028                              |
| C-3-A                 | 23.47         | 9.72          | 28.42                                | 185.11               | 178                 | 0.96      | -0.040                              |
| D-1-A                 | 25.40         | 0.0           | 30.35                                | 173.10               | 190                 | 1.09      | 0.089                               |
| D-2-C                 | 25.40         | 0.0           | 29.18                                | 176.66               | 188                 | 1.06      | 0.060                               |
| E-1-C                 | 35.20         | 14.58         | 26.80                                | 145.06               | 130                 | 0.90      | -0.116                              |
| E-2-A                 | 35.20         | 14.58         | 30.35                                | 149.96               | 141                 | 0.94      | -0.064                              |
| F-1-A                 | 11.73         | 4.86          | 28.49                                | 261.20               | 253                 | 0.97      | -0.032                              |
| F-2-A                 | 11.73         | 4.86          | 29.04                                | 253.64               | 255                 | 0.99      | 0.005                               |

Tableau 4.3 Comparaison des résultats numériques avec les résultats expérimentaux obtenus par Drysdale et Huggins

| désignation<br>poteau | $e_x$<br>(mm) | $e_y$<br>(mm) | Résistance d'un<br>cylindre<br>(Mpa) | Charge de ruine (KN) |                     |             |                                     |
|-----------------------|---------------|---------------|--------------------------------------|----------------------|---------------------|-------------|-------------------------------------|
|                       |               |               |                                      | Exp                  | présente<br>analyse | Pana/Pexp   | $\frac{P_{ana} - P_{exp}}{P_{ana}}$ |
| k30_a0.5_n1           | 17.88         | 4.47          | 107                                  | 552.77               | 520                 | <b>0.94</b> | -0.063                              |
| k30_a1_n1             | 14.14         | 7.07          | 104                                  | 496.71               | 490                 | <b>0.98</b> | -0.014                              |
| k30_a1_n2             | 28.28         | 14.14         | 108                                  | 342.02               | 320                 | <b>0.94</b> | -0.069                              |
| k30_a2_n1             | 8.94          | 8.94          | 100                                  | 456.97               | 570                 | <b>1.24</b> | 0.198                               |

Tableau 4.4 Comparaison des résultats numériques avec les résultats expérimentaux obtenus par Pallarès et al

## Analyse et interprétation des résultats

### 5.1. Introduction

Ce chapitre synthétise les résultats obtenus dans le cadre de la simulation numérique de poteaux de section carrée avec comme paramètres : l'élanement, la résistance du béton, l'excentricité et le taux d'armature.

Il est bien connu que l'augmentation de l'élanement des poteaux et l'augmentation de l'excentricité des charges provoquent une diminution de la capacité portante. La combinaison des excentricités et de l'élanement impose au poteau un mode de fonctionnement prépondérant en flexion et moins en compression. Vérifions-le sur base de la simulation numérique.

### 5.2. Analyse de la capacité portante par rapport à la résistance de la Section

#### 5.2.1. Poteaux courts

La figure 5.1 présente les résultats obtenus par la simulation numérique de poteaux de 2000 mm de hauteur dont le taux d'armatures est de 2 %. En abscisse, le rapport excentricité sur hauteur de la section et en ordonnée un « rendement » qui est le rapport entre la capacité portante du poteau et la résistance maximale de la section géométrique ( $R_{cp}$ ).

$$R_{CP} = \frac{F_p}{N_R} = \frac{F_p}{A_C f_C + A_S f_y} \quad (5.1)$$

|            |  |
|------------|--|
| $F_p$      | = Capacité portante du poteau [N]  |
| $N_R$      | = capacité maximale théorique de la section [N]  |
| $A_C, A_S$ | = Respectivement : section du béton et section d'acier [mm <sup>2</sup> ]                  |
| $f_C, f_y$ | = Respectivement : résistance du béton et limite élastique de l'acier [N/mm <sup>2</sup> ] |

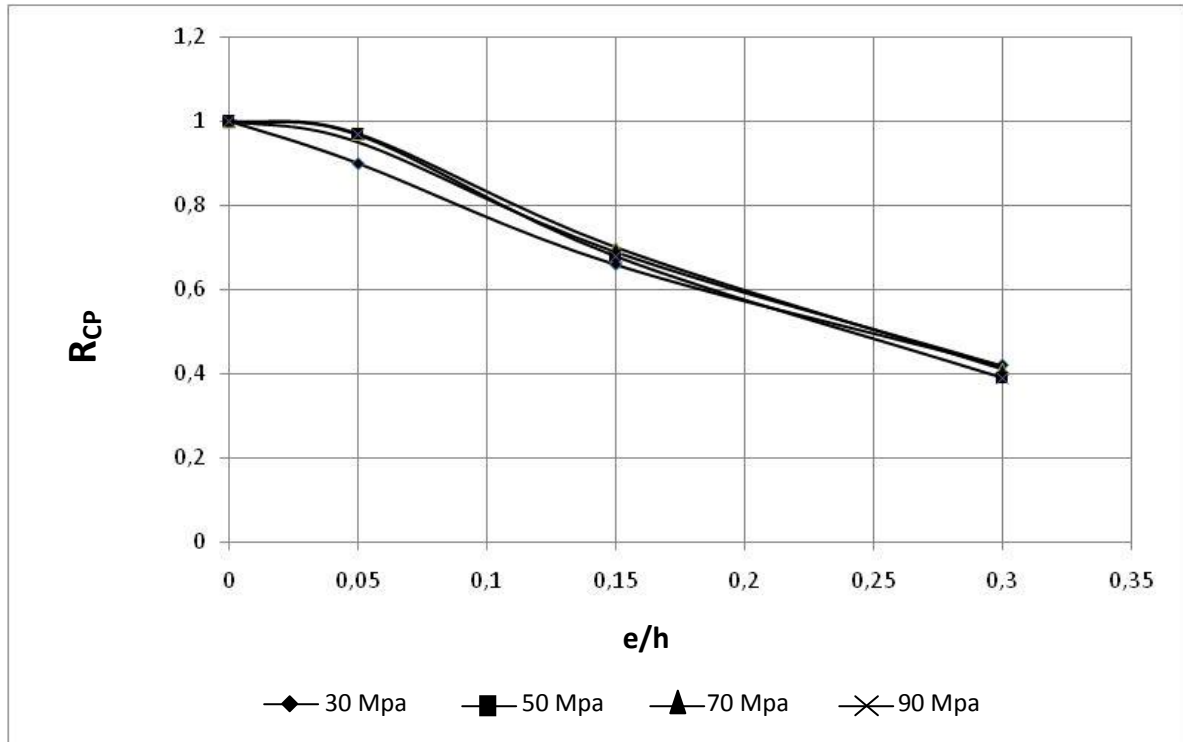


Figure 5.1 valeur de  $R_{CP}$  pour des poteaux de 2000 mm de hauteur avec un taux d'armatures de 2 %

la figure 5.1 montre que:

- ❖ le rapport  $R_{CP}$  tend vers l'unité pour un rapport  $e/h$  proche de zéro comme le prévoit la théorie.
- ❖ le rapport  $R_{CP}$  chute d'environ 60 % pour des  $e/h$  supérieurs à 0,25.
- ❖ l'augmentation de la résistance à la compression du béton n'a pas d'effet positif sur le rapport  $R_{CP}$ .

### 5.2.2. Poteaux élancés

La figure 5.2 présente les résultats obtenus pour des poteaux de 4000 mm de hauteur avec  $\rho = 2\%$ .

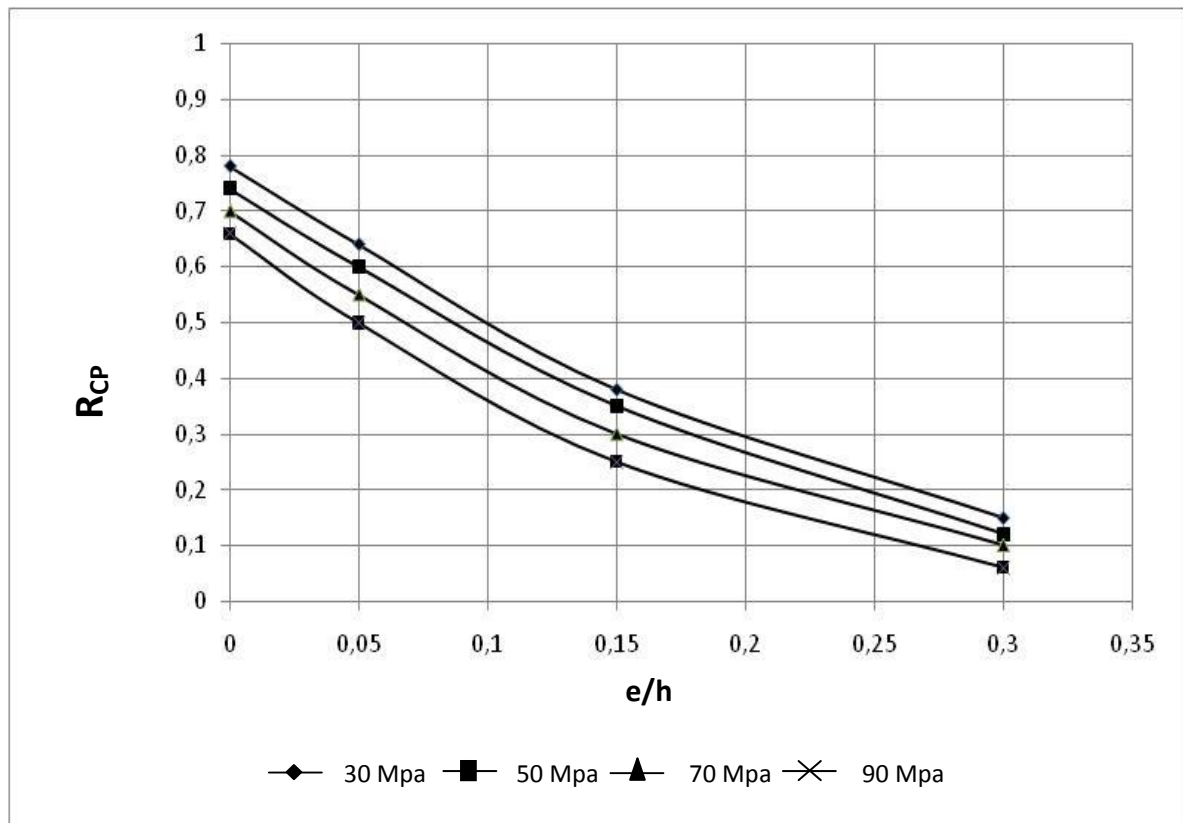


Figure 5.2 valeur de  $R_{CP}$  pour des poteaux de 4000 mm de hauteur avec un taux d'armatures de 2 %

la figure 5.2 montre que:

- ❖ pour les poteaux de 4000 mm de hauteur, le coefficient  $R_{cp}$  diminue sur toute la gamme des excentricités. Dès la moindre excentricité y compris pour  $e/h=0$ , le coefficient  $R_{cp}$  chute de 25%.
- ❖ la diminution de  $R_{cp}$  est d'autant plus grande que la résistance du béton est plus élevée.
- ❖ pour  $e/h = 0.3$ ,  $R_{cp}$  diminue d'environ 60 %

Ce qui précède est réalisé sur la base d'observations relatives. Mais à priori cette présentation n'est pas suffisante pour le concepteur.

Il est présenté ci-après une comparaison des capacités portantes par rapport à celles obtenues pour un béton de  $30\text{N/mm}^2$  afin d'observer l'éventuel gain sur la capacité portante de l'utilisation de bétons à hautes résistances.

### 5.3. Capacité portante relative aux capacités obtenues avec un béton de 30 N/mm<sup>2</sup>

#### 5.3.1. Introduction

Dans ce cas, on va comparer les capacités portantes des poteaux simulées avec des bétons de résistance à la compression de 50, 70 et 90 N/mm<sup>2</sup> aux capacités des mêmes poteaux calculés avec une résistance à la compression de 30N/mm<sup>2</sup>. La valeur A<sub>CP</sub> (%) représente cet accroissement de capacité portante.

$$A_{CP} = \frac{F_{max} \left( XX \frac{N}{mm^2} \right) - F_{max} \left( 30 \frac{N}{mm^2} \right)}{F_{max} \left( 30 \frac{N}{mm^2} \right)} 100 \quad (5.2)$$

$F_{max} \left( XX \frac{N}{mm^2} \right)$  = Capacité portante du poteau avec une résistance du béton XX N/mm<sup>2</sup>

$F_{max} \left( 30 \frac{N}{mm^2} \right)$  = Capacité portante du poteau référence calculée avec une résistance du béton de 30 N/mm<sup>2</sup>

#### 5.3.2. Poteaux de 2000 mm de hauteur

L'augmentation de la résistance du béton a un effet très favorable sur la capacité portante des poteaux de faible hauteur. On porte en histogramme la valeur A<sub>CP</sub> définie ci-dessus en fonction de l'excentricité.

des observations sont à déduire de l'examen de la figure 5.3 :

- ❖ passer d'une résistance à la compression de 30 à XX N/mm<sup>2</sup> induit un accroissement minimum de plus de 40% de la capacité portante.
- ❖ l'effet de l'élancement est pratiquement négligeable vu la faible hauteur du poteau.
- ❖ pour une valeur de résistance donnée, la valeur A<sub>CP</sub> présente une légère décroissance en fonction de l'augmentation de l'excentricité.

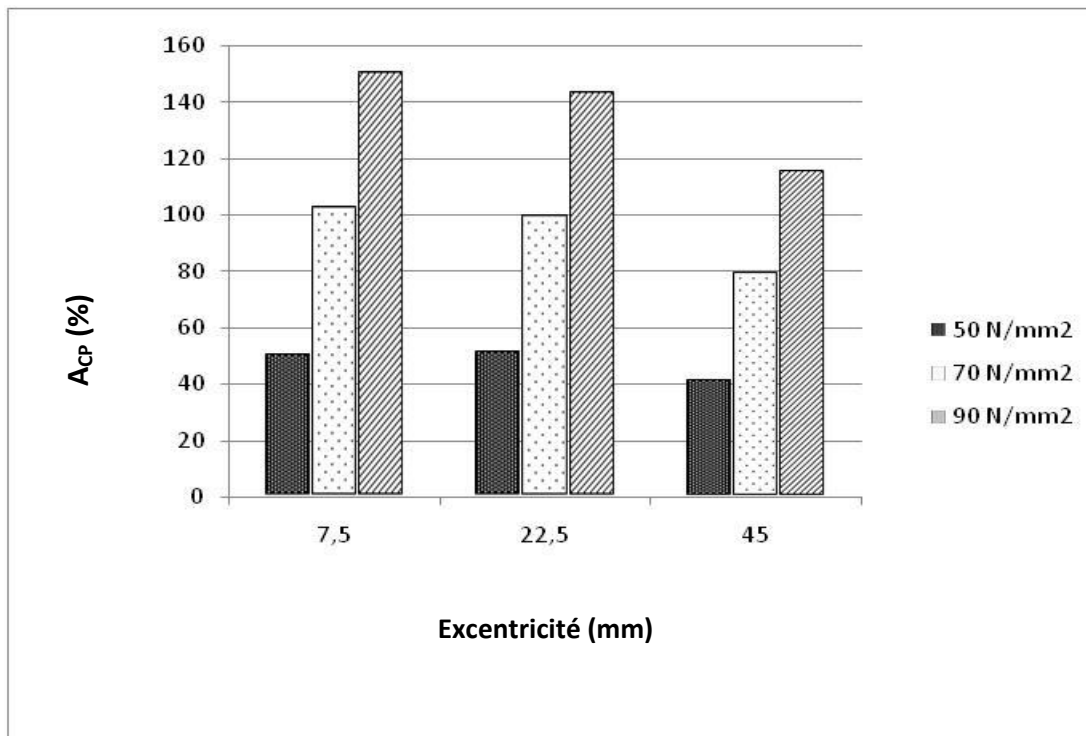


Figure 5.3 Effet de la résistance du béton sur la capacité portante des poteaux ( $L=2000$  mm,  $250 \times 250$  mm, avec un taux d'armatures de 0.7 %)

### 5.3.3. Poteaux de 4000 mm de hauteur

Il est porté sur la figure 5.4 l'histogramme de la valeur d' $A_{CP}$  définie ci-dessus en fonction de l'excentricité.

On observe une diminution très importante de la valeur d' $A_{CP}$  en fonction des excentricités croissantes et ce de manière plus importante quand la résistance du béton augmente.

Cet effet est lié au couplage entre l'élancement et les grandes excentricités (effet amplificateur) qui provoque une augmentation significative de la flexion.

L'apport de l'augmentation de la résistance du béton à la capacité portante est néanmoins toujours favorable.

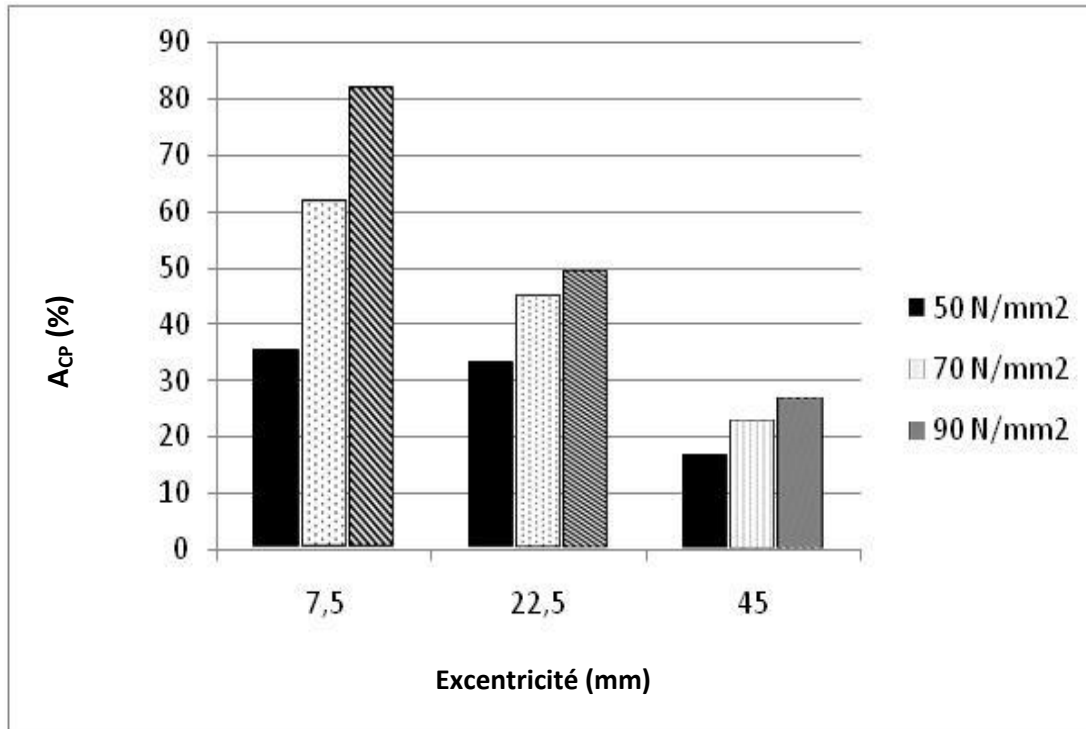


Figure 5.4 Effet de la résistance du béton sur la capacité portante des poteaux (L=4000 mm, 250x250mm, avec un taux d'armatures de 0.7 % )

## 5.4. Effets des résistances élevées sur la section pour une capacité portante constante

### 5.4.1. Introduction

Est-il possible d'exploiter les bétons à hautes résistances pour diminuer les sections d'acier et / ou, de béton tout en conservant une capacité portante identique ?

Plusieurs cas de figure sont bien entendu envisageables. Certains sont triviaux, d'autres le sont nettement moins. Les capacités portantes présentées ci-dessous sont calculées par la méthode des différences finies. Citons différents cas de figure :

- ❖ Seule la résistance du béton dans le poteau change.
- ❖ Seule la quantité d'acier dans le poteau change.
- ❖ Changement de section et de résistance pour une hauteur constante.

### 5.4.2. Effet de la variation de la résistance du béton sur la capacité portante des poteaux

Ce cas de figure est assez trivial et ne nécessite que peu de commentaires. Si l'on garde un poteau de même hauteur, de même section, l'augmentation de résistance du béton aura un effet évidemment positif sur la capacité portante quelle que soient l'excentricité et/ou l'élançement. La figure 5.5,

présente ce que l'on a déjà observé précédemment. On observe clairement un gain dû à l'augmentation de résistance.

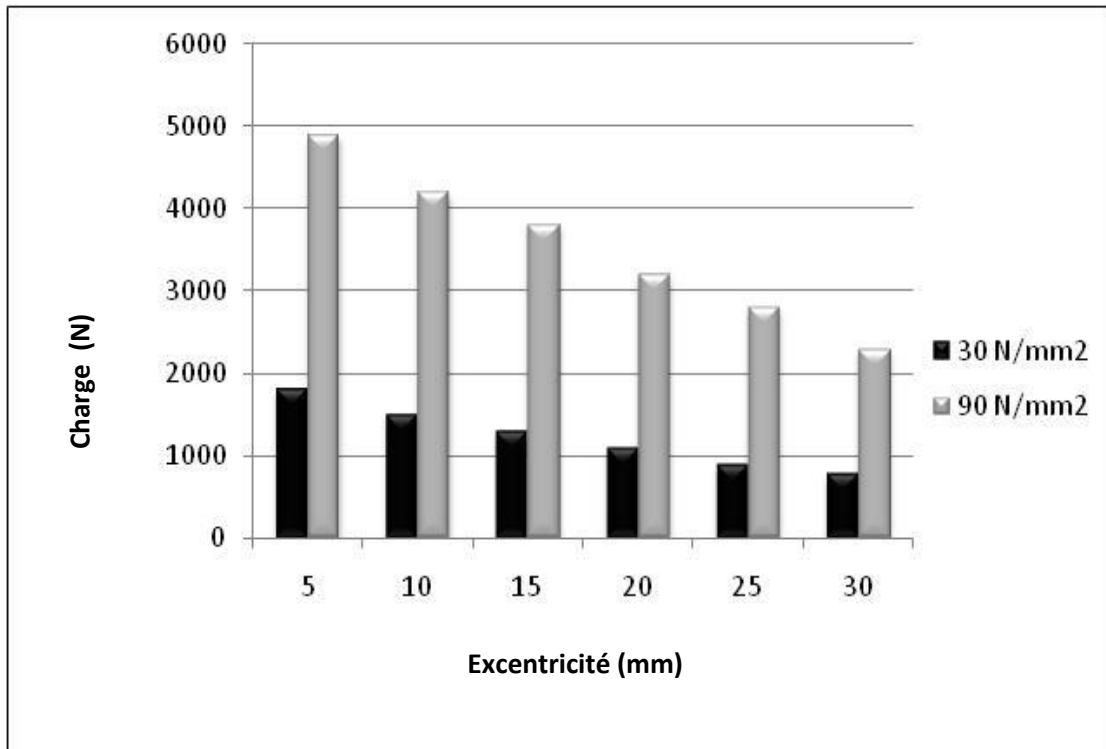


Figure 5.5 Effet de la variation de la résistance du béton sur la capacité portante des poteaux ( $L=3000$  mm,  $250 \times 250$  mm, avec un taux d'armatures de 0.7 %)

### 5.4.3. Effet de la variation du taux d'armatures sur la capacité portante des Poteaux

La forme et les dimensions de la section en béton ne varient pas ( $250 \times 250$  mm,  $f_c=30$  N/mm<sup>2</sup>). Seule la proportion d'acier varie ici de 0.7 à 1.3 %.

On constate qu'un accroissement d'acier engendre une augmentation sensible de la capacité portante du poteau. Figure 5.6.

### 5.4.4. Changement de section et de résistance pour une hauteur constante

Pour répondre au problème posé, on va traiter l'exemple suivant :

Soit un poteau (A) en béton armé avec les caractéristiques suivantes :

- $A_s= 4\text{Ø}14$ ,
- Section du béton  $300 \times 300$  mm
- Résistance du béton  $f_c= 30$  N/mm<sup>2</sup>
- Excentricité de 15 mm
- Hauteur de 3000 mm



La méthode consiste à trouver un poteau (B) qui a la même capacité portante que le poteau (A) mais avec une résistance du béton et une section différentes.

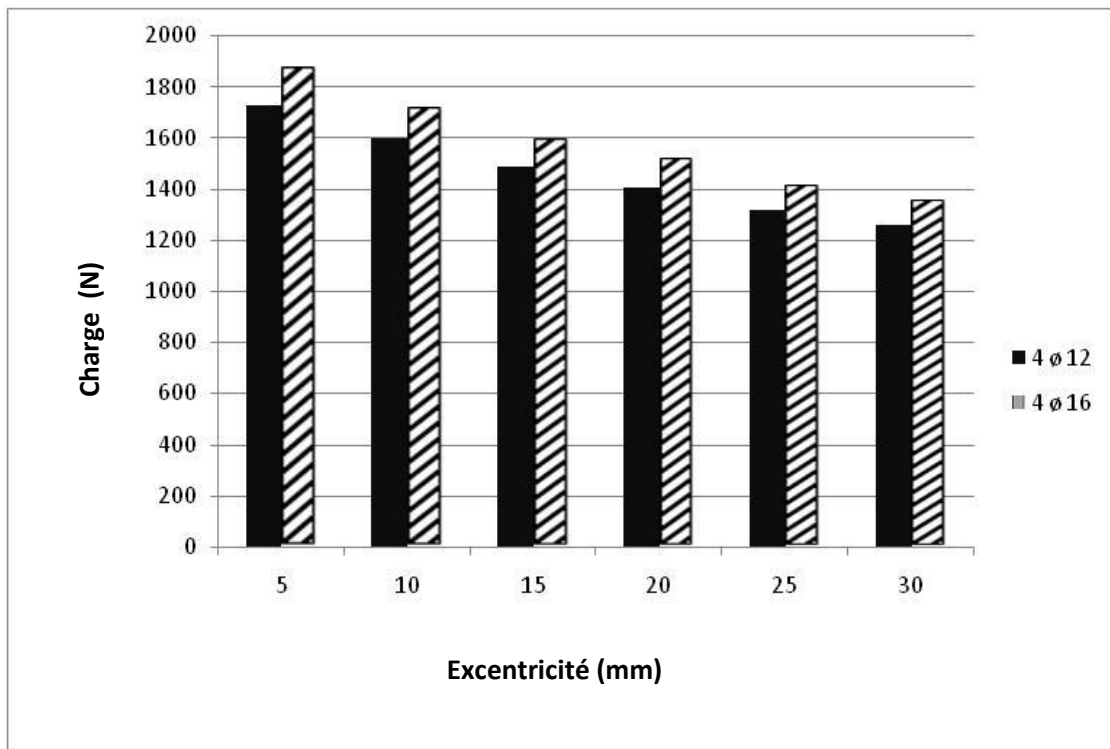


Figure 5.6 Effet de la variation du taux d'armatures sur la capacité portante des poteaux ( $L=3000\text{ mm}$ ,  $250 \times 250\text{ mm}$ ,  $f_c=30\text{ N/mm}^2$ )

○ Le tableau 5.1 présente les résultats finals de la simulation numérique.

|    | b×h     | $f_c$             | excentricité | $A_s$ | Hauteur | Capacité portante |
|----|---------|-------------------|--------------|-------|---------|-------------------|
|    | mm×mm   | N/mm <sup>2</sup> | mm           |       | mm      | KN                |
| A  | 300×300 | 30                | 40           | 4Ø14  | 3000    | 1770              |
| B1 | 250×250 | 90                | 40           | 4Ø12  | 3000    | 2800              |
| B2 | 200×200 | 90                | 40           | 4Ø12  | 3000    | 1400              |
| B3 | 220×220 | 90                | 40           | 4Ø12  | 3000    | 1750              |

tableau 5.1 détermination des caractéristiques du poteau (B) ayant la même charge de ruine que le poteau (A)

à partir du tableau 5.1 on peut observer que :

- ❖ du point de vue résistance : les poteaux (A) et (B3) répondent presque tous les deux à l'exigence des 1770 kN.
- ❖ du point de vue de la section, le poteau (B3) est plus intéressant que le poteau (A) parce que :

- On utilise une quantité d'acier de 4Ø12 au lieu de 4Ø14.
- On économise 46% de la section de béton.

De ces informations, il semble évident qu'il faut opter pour le poteau (B3) de section plus faible et utilisant un béton de résistance plus élevée.

Il est bien entendu qu'en jouant sur la proportion d'acier et les dimensions géométriques, on pourra affiner le choix des poteaux de manière plus économique.

En conclusion, l'optimisation des dimensions des sections grâce à la mise en œuvre d'un calcul tenant compte des effets de second ordre permet la diminution significative des quantités de matériaux sans influencer défavorablement la capacité portante.

Il faut en tenir compte pour suivre l'évolution actuelle qui vise à économiser les matières premières pour contribuer au développement durable.

## 5.5. Calcul au premier ou au second ordre [ 1 ]

### 5.5.1. Introduction

Le concepteur d'un ouvrage est amené à devoir dimensionner des poteaux pour reprendre les charges verticales de la structure ainsi que les actions qui lui sont appliquées. De ce fait, il est nécessaire dans le dimensionnement ou la vérification de la capacité portante de déterminer si les effets de second ordre sont à prendre en compte ou non.

Des méthodes simples figurent dans les normes ou dans la littérature afin de construire des courbes frontières permettant de sélectionner les poteaux pouvant être calculés au premier ordre et ceux nécessitant obligatoirement un calcul au second ordre.

L'ENV [11] propose les formules à cet effet. Il n'est pas nécessaire de prendre en compte les effets du second ordre, pour des poteaux bi-articulés ayant la même excentricité en tête et en pied lorsque l'élanement  $\lambda$  est inférieur à la plus grande des deux valeurs :

$$25 \text{ ou } \frac{15}{\sqrt{\frac{N_{sd}}{A_c f_{ck}}}} \quad (5.3)$$

$N_{sd}$  : effort normal sollicitant [N]

$A_c$  : surface de la section droite de béton [mm<sup>2</sup>]

$f_{ck}$  : résistance à la compression du béton [N/mm<sup>2</sup>]

La prEN [13] quant à elle propose en son article 5.8.3.1 (voir dans ce mémoire 2.5.1 la formule 2.39) une courbe limite sous la forme d'une fonction qui dépend :

- ❖ de l'effort normal appliqué sur le poteau
- ❖ de l'acier présent dans le béton
- ❖ du rapport des moments fléchissants aux extrémités
- ❖ du fluage

et dont la formulation est donnée par l'équation 5.4 :

$$\lambda_{lim} = 20 \frac{1}{1 + 0.2\phi_{eff}} \sqrt{1 + 2 \frac{A_s f_y}{A_c f_{ck}} \left(1.7 - \frac{M_{01}}{M_{02}}\right)} \frac{1}{\sqrt{\frac{N_{Ed}}{A_c f_{ck}}}} \quad (5.4)$$

$\phi_{eff}$  : = coefficient de fluage effectif

$A_s$  : = surface d'acier

- $A_c$  : = surface de béton  
 $f_{yd}$  : = limite élastique de l'acier  
 $f_{cd}$  : = résistance à la compression du béton  
 $M_{01}$  : = moment de premier ordre à l'extrémité 1  
 $M_{02}$  : = moment de premier ordre à l'extrémité 2  
 $N_{Ed}$  : = effort normal de calcul

L'ENV et la prEN indiquent également qu'un calcul au second ordre n'est pas nécessaire si les effets du second ordre (en terme de moment) ne dépassent pas de 10% ceux du premier ordre. Notons que, dans un cas quelconque, ceci implique d'effectuer à priori un calcul tenant compte des effets du second ordre pour savoir s'il faut les prendre en compte dans le calcul.

### 5.5.2. Courbes d'élançement limite proposées par les normes

Appelons « contrainte » la quantité  $\frac{N_{SD}}{A_c f_{cd}}$  dans (5.3) ou  $\frac{N_{ED}}{A_c f_{cd}}$  dans (5.4).

Sur un diagramme « contrainte – élançement » (figure 5.7), nous présentons les courbes limites de l'ENV pour un béton de résistance 90N/mm<sup>2</sup>.

Trois segments de courbes sont nécessaires :

- ❖ la droite verticale du graphique pour la constante 25 qui intervient dans (5.3).
- ❖ la courbe dont l'équation est fonction de l'effort normal est représentée par la courbe composée de petites croix.
- ❖ la droite horizontale limite la contrainte à la valeur de la résistance à la compression du béton.

La courbe enveloppe (trait gras sur la figure) représente la frontière entre la zone pour laquelle le calcul peut être fait uniquement au premier ordre et celle où le calcul au second ordre est indispensable.

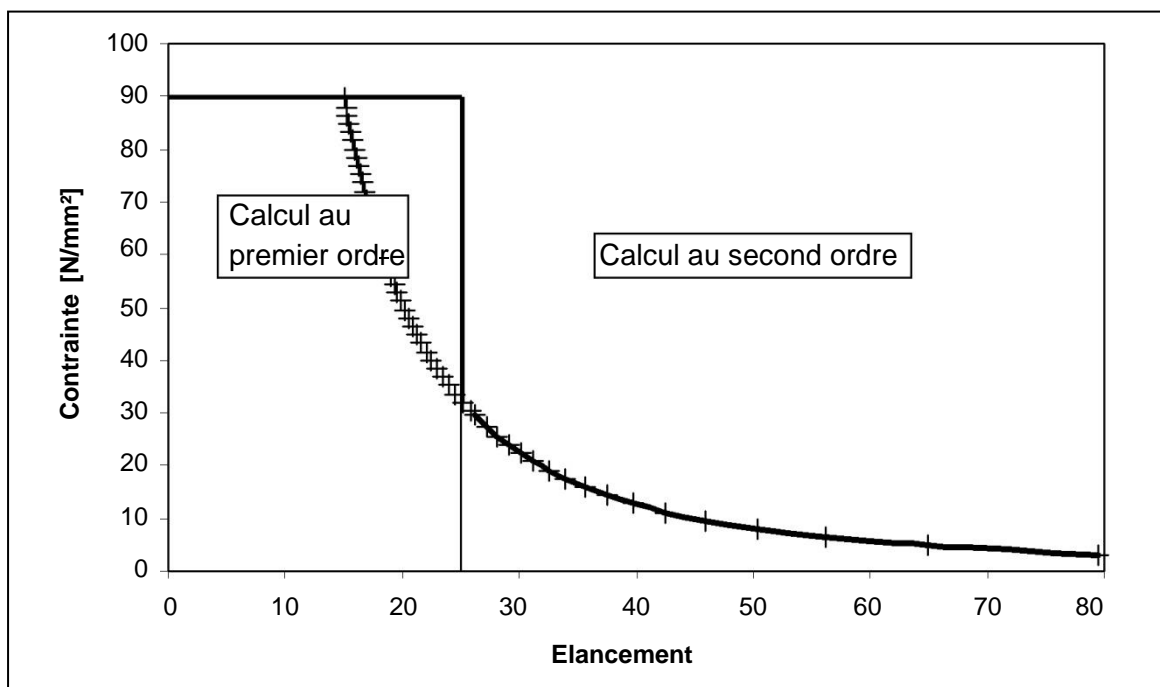


Figure 5.7 Courbe limite de l'ENV [11]

La figure 5.8 présente d'une part en trait gras la courbe enveloppe de l'ENV et d'autre part en traits fins les courbes de la prEN établies pour une section de béton de 250x250mm (90N/mm<sup>2</sup>) et un taux d'armatures  $A_s/A_c$  égal à 0.32 ou 4% . ; on suppose aussi  $M_{01} = M_{02}$ .

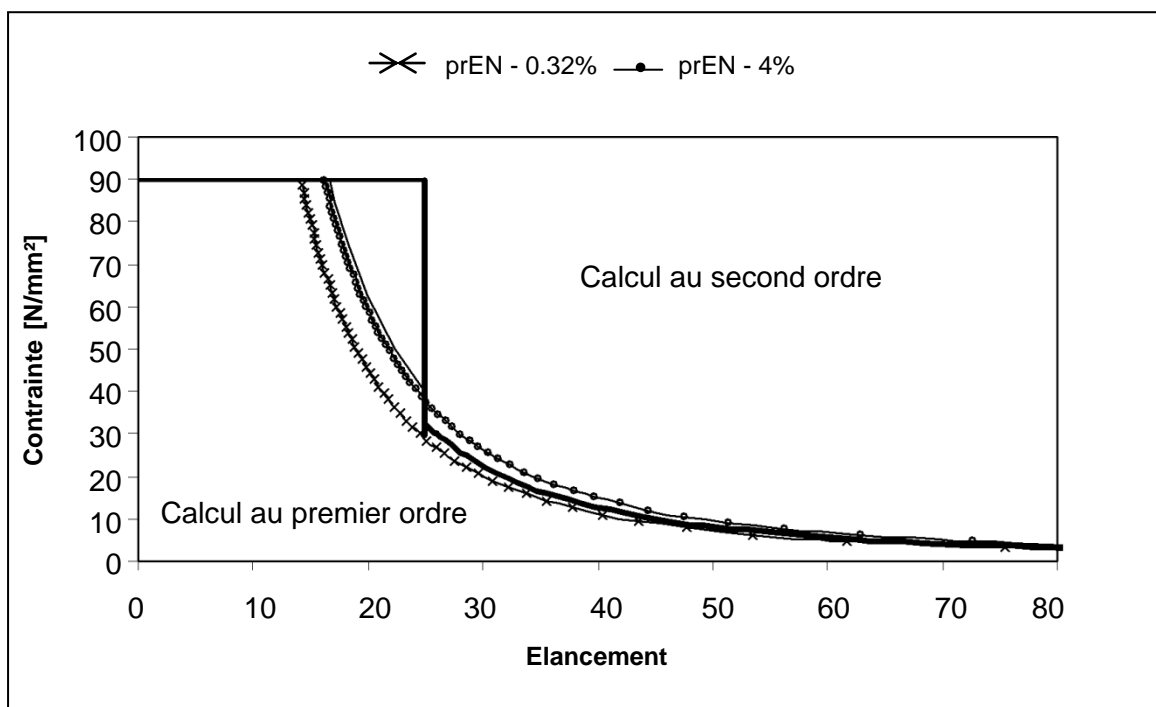


Figure 5.8 Comparaison entre les courbes limites de l'ENV [11] et celle de la prEN[13]

On constate sur ce graphique que :

- ❖ l'écart entre les courbes tracées avec des ronds et des croix sont faibles par rapport à la courbe enveloppe de l'ENV pour un élancement  $\lambda$  supérieur à 25.
- ❖ avec la disparition de la limite de 25 dans la prEN, la zone hachurée est désormais sujette également au calcul au second ordre.
- ❖ la courbe en « petits ronds » de la prEN est moins « pessimiste » que l'ENV pour un ratio géométrique de 4%. Ceci est d'autant plus marqué avec une telle quantité d'acier que la résistance du béton est plus faible.

### 5.5.3. Autres courbes limites figurant dans la littérature

Les travaux de Hellesland J.[20] (Hellesland, 2005) ont pour objectif, de proposer une formulation moins pessimiste que celle des normes et qui est basée sur une réduction de 5 à 10% du moment fléchissant de la section résistante.

La valeur de l'élancement réduit fourni par la relation 5.5 ne peut dépasser l'une des valeurs proposées par les travaux d'Hellesland [20]. Ces valeurs sont fonction des conditions d'extrémités et de chargement. Dans notre cas la valeur de  $\lambda_{no}$  est égale 10.

$$\lambda_{no} = \frac{KL}{i} \sqrt{\frac{\frac{P_u}{f'_c A_c}}{0.6(1 + K_t \omega_t)}} \quad (5.5)$$

- $P_u$  : = charge d'utilisation [N]
- $f'_c$  : = résistance sur cylindre [N/mm<sup>2</sup>]
- $A_c$  : = surface de béton [mm<sup>2</sup>]
- $K_t$  : = coefficient dépendant des modules d'élasticités, des résistances et des rayons de girations de l'acier et du béton
- $\omega_t$  : = ratio mécanique entre l'acier et le béton
- $i$  : = rayon de giration [mm]
- $KL$  : = longueur effective [mm]
- $\frac{KL}{i}$  : = élancement géométrique ( $\lambda$ )

En réécrivant la relation 5.5 pour obtenir  $\lambda$  en fonction des autres paramètres, on peut constater une similitude avec la formule de la prEN présentée ci-dessus.

La figure 5.9 présente les courbes limites calculées avec la prEN et le modèle d'Hellesland[20].

Les caractéristiques choisies pour tracer ces courbes sont :

- ❖ la section de 250x250mm
- ❖ la résistance de 30N/mm<sup>2</sup>
- ❖ les proportions d'acier  $\rho$  valant 1 et 4% de la section de béton

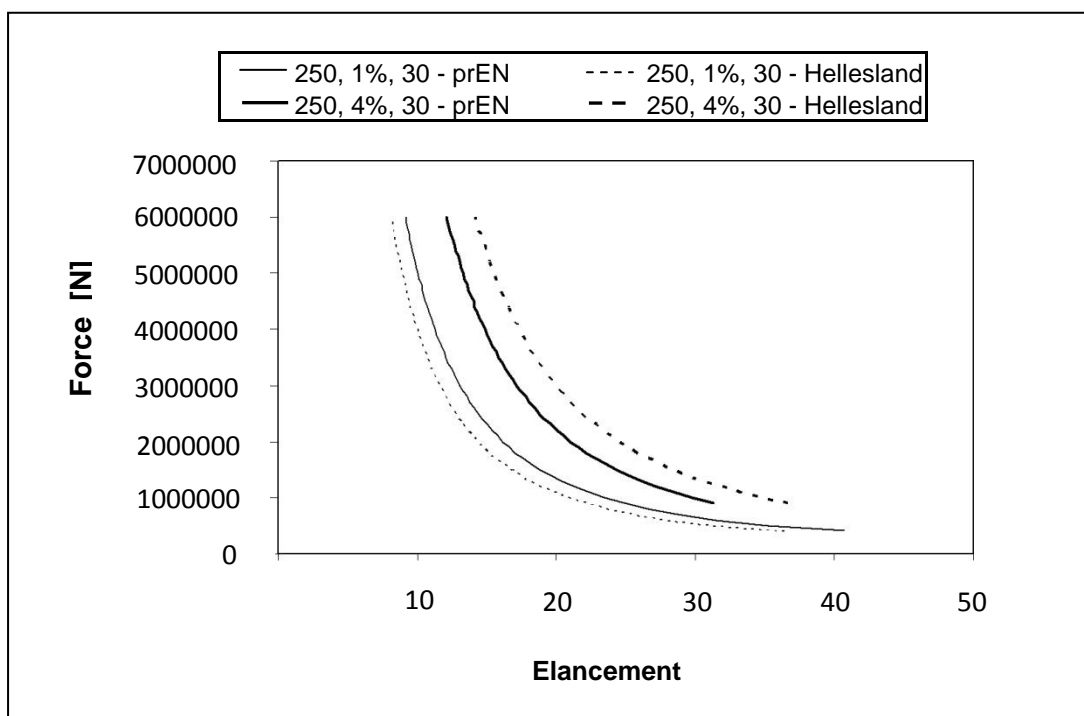


Figure 5.9: Représentation des courbes limites de la prEN et d'Helleland ( $f_c = 30 \text{ N/mm}^2$ ,  $250 \times 250 \text{ mm}$ ,  $\rho = 1$  ou  $4\%$ )

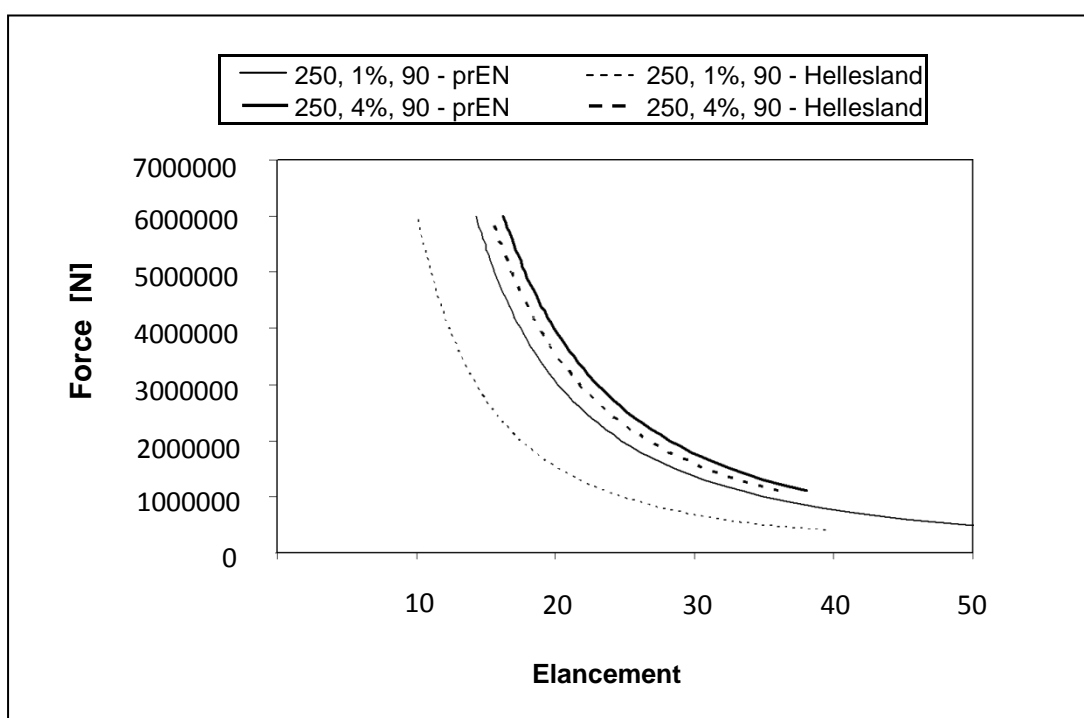


Figure 5.10: Représentation des courbes limites de la prEN et d'Helleland ( $f_c = 90 \text{ N/mm}^2$ ,  $250 \times 250 \text{ mm}$ ,  $\rho = 1$  ou  $4\%$ )

On observe sur la figure 5.9 que pour une proportion de 1% d'acier, le modèle d'Helleland est plus pessimiste que la prEN et que la situation est inverse pour une proportion d'acier de 4%.

En revanche pour une résistance de 90N/mm<sup>2</sup> (figure 5.10), que l'on prenne une proportion de 1 ou de 4% d'acier, les courbes limites d'Hellesland sont plus pessimistes que celles de la prEN.

La figure 5.11 présente de manière qualitative pour une force de 3000kN les écarts ( $E_{EL}$ ) obtenus entre la courbe d'élanement « limite » (séparant 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> ordre) de la prEN et celle d'Hellesland en fonction de la résistance du béton et des deux proportions d'acier (1 et 4%).

$$E_{EL} = \lambda(\text{prEN}) - \lambda(\text{Hellesland}) \tag{5.6}$$

On observe donc :

- ❖ pour 1% d'acier, la courbe d'élanement limite d'Hellesland est plus pessimiste que celle de la prEN et ce quelles que soient la résistance du béton et la dimension de la section (250 ou 500mm de côté).
- ❖ à section identique (500x500mm) et pour une augmentation de la proportion d'acier, la valeur de  $E_{EL}$  passe du côté pessimiste au côté optimiste par rapport à la prEN. Ceci étant plus rapide à faibles résistances.
- ❖ à section identique (250x250mm) et pour une augmentation de la proportion d'acier, la valeur de  $E_{EL}$  peut en fonction de la résistance du béton être largement du côté optimiste et pour des résistances de béton plus élevées, rester du côté pessimiste.
- ❖

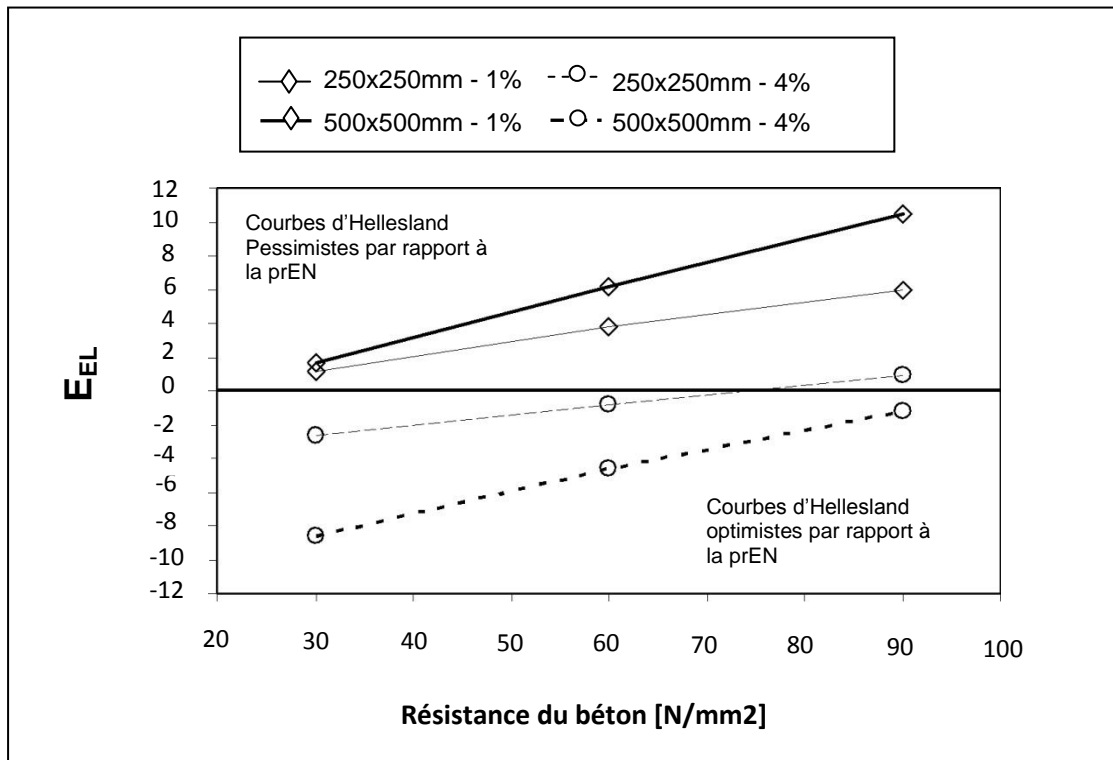


Figure 5.11 : Représentation qualitative pour une charge de 3000kN des écarts entre les courbes « limites » de la prEN et celles d'Hellesland



En conclusion, pour les sections de faibles dimensions et de faibles proportions d'acier, le modèle d'Hellesland est pessimiste par rapport à la prEN. Pour passer du côté optimiste, il faut une proportion assez importante d'acier dans la section de béton, des résistances faibles et des sections de grandes dimensions.

Ce travail visant entre autre l'étude des éléments élancés à haute résistance, on est donc obligés de constater que la proposition de la prEN est plus favorable dans ce cas.

Mari R. & Hellesland J. [21] (Mari et Hellesland, 2005) présentent le problème différemment. Le cheminement de leur réflexion débute par la détermination du point (M, N) qui est l'intersection entre la courbe d'interaction et la droite du premier ordre. De ce point, ils permettent que le maximum de la trajectoire réelle du poteau dans le même plan puisse voir ses effets diminuer de 10% par rapport à la valeur du premier ordre.

Le développement mathématique concernant la variation du moment réduit de second ordre s'effectue sur base de l'hypothèse d'une déformée sinusoïdale. Le développement complet figure dans l'article (Mari et Hellesland, 2003) [22] et (Mari et Hellesland, 2005) [21] tout comme la mise en équation de l'élancement pour une excentricité constante. Les formules sont établies pour les trois familles de trajectoires de chargement possibles :

- ❖ à excentricité constante ;
- ❖ à effort normal constant ;
- ❖ à moment fléchissant constant.

Leur analyse, contrairement à celle de Hellesland (2005) [21] prend en compte le fluage et les effets de tension stiffening.

Il est reproduit ci-dessous les formules finales 5.7 pour le cas d'un chargement à excentricité constante pour une section transversale des poteaux totalement définie.

$$\text{pour } \nu \geq \nu_b ; \quad \lambda_{10} = 10.8 \sqrt{\frac{0.4\omega + 0.12}{\nu} \left(1 - \frac{\cot(\beta)}{\frac{e_{02}}{h}} + 3.4\left(\frac{e_{01}}{e_{02}} - 1\right)^2\right)} \quad (5.7)$$

$$\text{pour } \nu \geq \nu_b ; \quad \lambda_{10} = 10.8 \sqrt{\frac{0.4\omega + 0.5\nu(1 - \nu)}{\nu} \left(1 - \frac{\cot(\beta)}{\frac{e_{02}}{h}} + 3.4\left(\frac{e_{01}}{e_{02}} - 1\right)^2\right)}$$

- $\lambda_{10}$  : = élancement limite
- $h$  : = hauteur de la section
- $\omega$  : = rapport des résistances des sections (proportion mécanique acier sur béton)
- $\nu$  : = effort normal réduit
- $e_{02}$  : = excentricité de premier ordre la plus grande
- $e_{01}$  : = excentricité de premier ordre la plus petite
- $\cot(\beta)$  : = inclinaison des parties de la relation N-M (figure 5.12)

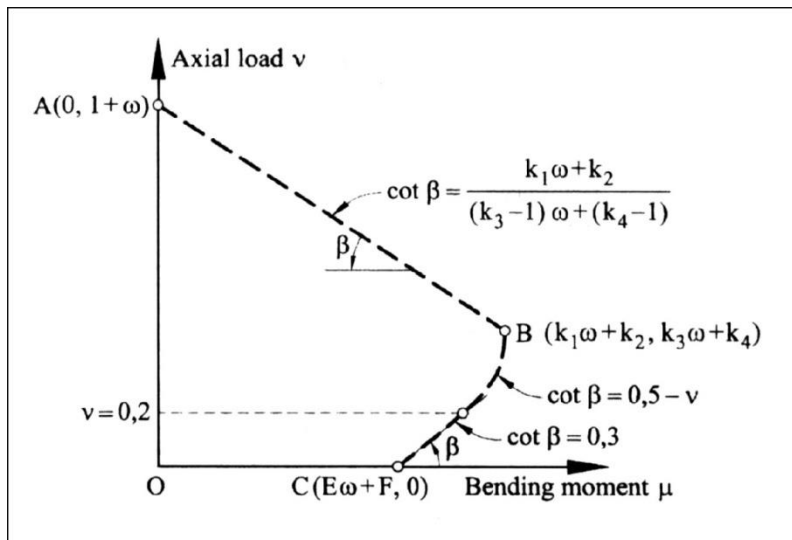


Figure 5.12 : Valeur à considérer pour  $\cot \beta$  (Mari et Hellesland, 2005)

La comparaison fournie par les auteurs entre les résultats obtenus par les formules et les simulations numériques par une méthode de référence est très bonne.

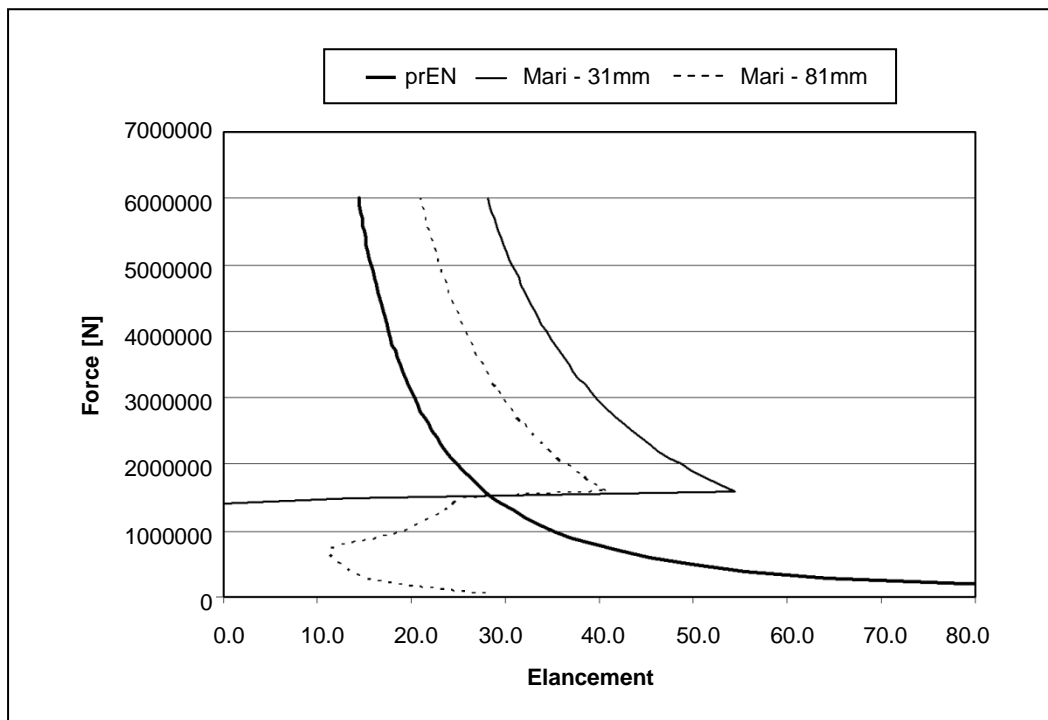


Figure 5.13 : Représentation des courbes limites de la prEN ainsi que celles des travaux de Mari-Hellesland pour  $e = 31$  et  $81\text{mm}$  ( $250 \times 250\text{mm}$ ,  $\rho = 4\%$ ,  $f_c = 90\text{N/mm}^2$ )

De la figure 5.13 on peut observer :

- ❖ pour des charges supérieures 1500kN, la simulation ne semble pas poser de problème (première équation de 5.7). On observe que les courbes limites sont plus favorables que celles de la prEN et permettent donc de calculer un plus grand nombre de poteaux au premier ordre.
- ❖ pour des charges inférieures à 1500kN, la seconde équation semble ne pas donner de résultats probants.
- ❖ ces observations sont identiques pour des résistances de béton plus faibles ou plus élevées, et également pour des sections de dimensions plus grandes.

En conclusion, mis à part le problème de la seconde équation, on observe que cette méthode est moins pessimiste que la prEN, et permet qu'un plus grand nombre de poteaux soient étudiés au premier ordre. Pour les grandes excentricités, on observe un rapprochement important des courbes fournies par les deux méthodes (sous réserve que la seconde équation suive l'allure générale de la courbe de la prEN). Et donc pour de grands élancements et grandes excentricités, le calcul au second ordre serait toujours obligatoire, ce qui est assez logique.

# Conclusions

## 6.1. L'Avantages de l'utilisation de la méthode des différences finies

Le présent travail a mis en relief l'avantage d'associer la méthode de la rigidité tangentielle avec la méthode des différences finies pour résoudre les problèmes d'instabilité au flambement que peuvent présenter les poteaux élancés en béton armé sous des charges de compression excentrées.

La comparaison des résultats obtenus par l'association de ces deux méthodes avec les résultats expérimentaux a donné une très bonne corrélation.

La méthode des différences finies est couramment pratique, facile d'accès et avec un faible temps de calcul. Elle repose sur deux notions :

- ❖ La discrétisation des opérateurs de différentiation.
- ❖ La convergence du schéma numérique.

## 6.2. Avantage de l'utilisation d'un béton a haute résistance

Ces 30 dernières années, l'évolution technologique des bétons a été significative et elle débouche aujourd'hui sur des bétons dont la résistance peut varier entre 20 et plus de 150 N/mm<sup>2</sup> pour les bétons à ultra hautes performances. Tout en ne permettant pas d'utiliser directement des bétons de telles résistances, aujourd'hui les normes autorisent l'usage du béton jusqu'à 90N/mm<sup>2</sup>. De ce fait, on a étudié l'influence de l'amélioration des performances en compression sur la capacité portante des poteaux.

De manière absolue, l'utilisation de résistances plus élevées engendre toujours une augmentation de la capacité portante par rapport à celle obtenue pour le même poteau à 30N/mm<sup>2</sup>. L'augmentation varie de 40 à 150% pour des résistances variant entre 50 et 90N/mm<sup>2</sup>. Ces augmentations se réduisent de manière sévère quand l'élancement ou l'excentricité augmentent. Dans ce cas, l'augmentation de capacité se réduit entre 15 et 30% pour des résistances de béton variant entre 50 et 90N/mm<sup>2</sup>.

L'analyse relative, quant à elle, permet d'affiner les observations. Le rapport  $R_{cp}$  représentant le rendement entre la capacité portante d'un poteau et la résistance de la section géométrique nous apprend que :

- ❖ la valeur de  $R_{cp}$  pour une hauteur donnée diminue avec l'augmentation de la résistance à la compression, et ce quelle que soit l'excentricité.
- ❖ la logique voudrait que, quelle que soit la hauteur des poteaux, pour une excentricité infime, la valeur  $R_{cp}$  soit proche de l'unité. Ceci est observé pour les poteaux courts mais dès que le poteau est plus élancé, même pour d'infimes excentricités,  $R_{cp}$  diminue. Pour un poteau élancé, la diminution est de l'ordre de 20%.

- ❖ la proportion d'acier joue quant à elle un rôle favorable sur le  $R_{cp}$ . Cet effet favorable croit avec l'augmentation du rapport  $e/h$ . L'augmentation de la quantité d'acier compense l'effet de l'excentricité.

### 6.3. Perspectives

Le présent thème pourrait être développé et compléter ce qui a été réalisé jusqu'ici en mettant l'accent sur deux aspects fondamentaux :

- ❖ développer des diagrammes d'interaction pour un chargement bi-axial qui prennent en considération l'instabilité au flambement.
- ❖ Construire à l'aide du programme des différences finies, des courbes (abaques) pouvant aider au dimensionnement en bureau d'étude.

## Références bibliographiques

- [1] Germain O, Espion B. contribution a l'analyse du comportement et au dimensionnement des colonnes élancées en béton armé. thèse de doctorat 2005. université libre de Bruxelles. Belgique.
- [2] **(A.B.S., 1923)** Instructions relatives aux Ouvrages en Béton Armé, Texte et notes explicatives, 1923, *Association Belge de standardisation (A.B.S.)*, Extrait du Bulletin de la Société Belge des Ingénieurs et des Industriels
- [3] **(A.B.S., 1929)** Instructions relatives aux Ouvrages en Béton Armé, Texte et notes explicatives, Octobre 1929, Association Belge de standardisation (A.B.S.), 2ème édition, Publication N° 9
- [4] **(A.B.S., 1934)** Instructions relatives aux Ouvrages en Béton Armé, Texte et notes explicatives, Projet soumis à l'enquête publique, Juillet 1934, Association Belge de standardisation (A.B.S.), Rapport N° 15, Publication N° 9
- [5] **(Vandeperre et Plisnier, 1962)** Lucien J. VANDEPERRE et Jacques PLISNIER, La déformabilité élastique et permanente des bétons, la résistance à l'écrasement et au flambement des pièces longues en béton armé, 1962, Extrait des Annales des Travaux Publics de Belgique N°2 & 3, Bulletin n°12 du Laboratoire de connaissance des matériaux, ULB
- [6] **(I.B.N., 1944)** Instructions relatives aux Ouvrages en Béton Armé, Février 1944, Institut Belge de Normalisation, Rapport N° 15
- [7] **(I.B.N., 1955)** Instructions relatives aux Ouvrages en Béton Armé NBN 15, Juin 1955, Institut Belge de Normalisation, 5ème édition
- [8] **(I.B.N., 1963)** Instructions relatives aux Ouvrages en Béton Armé NBN 15, Juin 1963, Institut Belge de Normalisation, 6ème édition
- [9] **(NBN B15, 1977)** GENERALITES, Béton, béton armé et béton précontraint, NBN B 15-101 Novembre 1976, 7ème édition, Institut Belge de Normalisation  
MATERIAUX, Béton, béton armé et béton précontraint, NBN B 15-102 Novembre 1976, 7ème édition, Institut Belge de Normalisation  
CALCUL, Béton, béton armé et béton précontraint, NBN B 15-103 Novembre 1977, 7ème édition, Institut Belge de Normalisation  
EXECUTION, Béton, béton armé et béton précontraint, NBN B 15-104 Novembre 1976, 7ème édition, Institut Belge de Normalisation
- [10] **(Espion, 2000)** Bernard ESPION, Aspects approfondis du calcul des constructions en béton, 2000, Presses Universitaire de Bruxelles, 2000, chapitre 3

- [11] **(ENV 1992-1-1:1991, 1991)** Calcul des structures en béton – Partie 1-1 : Règles générales et règles pour les bâtiments, NBN B 15-002, Décembre 1995, 1ère édition, Institut Belge de Normalisation, Bruxelles
- [12] **(Bažant et al, 1991)** Zdenek P. BAŽANT, Luigi CEDOLIN and Mazen R. TABBARA, New method of analysis for slender columns, 1991, ACI Structural Journal, Vol. 88, N° 4, July-August 1991, Title n°88-S41, pg. 391-401
- [13] **(prEN 1-1, 2003)** prEN 1992-1-1, Eurocode 2 : Calcul des structures en béton, Partie 1-1 : Règles générales et règles pour le bâtiments, Bruxelles 2003
- [14] **Dossier ciment** 40 juillet 2007 béton performances mécaniques
- [15] **Fédération international du béton** Structural Concrete. Textbook on behaviour design and performance. Updated knowledge of the CEB-FIP Model Code 1990, vol. 1. Lausanne; 1999. p. 29–30.
- [16] **Chen WF, Shoraka MT.** Tangent stiffness method for biaxial bending of reinforced concrete columns, vol. 35-I. IABSE Publications; 1975.
- [17] **El-Metwally SE, El Shahhat AM, chen wf.** 3-D nonlinear analysis of R/C slender columns. Comput Struct 1990;37(5):863–72.
- [18] **Samai M.L.** (2007) notes des cours de post-graduation. Université Mentouri de Constantine
- [19] **COMITE Euro-international du Béton.** CEB-FIP manual of buckling and instability. Lancaster: The Construction Press; 1978.
- [20] **Drysdale RG, Huggins MW.** Sustained biaxial load on slender concrete columns. J Struct Div, Proc ASCE 1971;97(5):1423–43
- [21] **Pallarés L, Bonet JL, Miguel PF, Fernandez Prada MA.** Experimental research on high strength concrete slender columns subjected to compression and biaxial bending forces. Eng Struct 2008;30:1879–94.
- [22] **(Hellesland, 2005)** Jostein HELLESLAND, Nonslender column limits for braced and unbraced reinforced concrete members, 2005, ACI Structural Journal, Vol. 102, N° 1, January-February 2005, Title n°102-S02, pg. 12-21
- [23] **(Mari and Hellesland, 2005)** Antonio R. MARI and Jostein HELLESLAND, Lower slenderness limits for rectangular reinforced concrete columns, 2005, ASCE Journal of structural Engineering, Vol. 131, N° 1 January 2005, pg. 85-95
- [24] **(Mari and Hellesland, 2003)** Antonio R. MARI and Jostein HELLESLAND, When can second order effects in columns be neglected ?, 2003, Research Rep. N° 2003-01, Dept. Of Construction Engineering, Univ Politecnica de Catalunya, Barcelona, Spain, 49 pg.