

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MANTOURI DE CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du grade de

Docteur ès sciences en Génie Civil

Option : Structures

Par Soltani Mohamed Rédha

**MODÉLISATION NUMÉRIQUE DU COMPORTEMENT DES
POUTRES MÉTALLIQUES AVEC DES OUVERTURES DANS L'ÂME**

Soutenue le 13/12/3012 devant la commission d'examen :

Président :

D_r Boumekik Ahmed Professeur Université de Constantine

Rapporteur :

D_r Mimoune Mostefa Professeur Université de Constantine

Examineurs :

D_r Kebiche Khelifa Professeur Université de Sétif

D_r Boudaoud Zineddine M.C Université Oum El Bouaghi

D_r Koulougli Salim M.C Université Mentouri Constantine

Résumé

Le principal objectif de ce travail de thèse est d'étudier le comportement des poutres ajourées en acier à ouvertures hexagonales équipées ou non de plaques intermédiaires. Pour ce faire, un modèle numérique a été proposé afin de prédire la charge ultime ainsi le mode de rupture associé. La modélisation développée prend en compte des non linéarités géométriques et matérielles ainsi que des imperfections géométriques initiales. A des fins de validation, cette modélisation a été appliquée à des poutres ajourées en acier testées au laboratoire et dont les résultats sont publiés dans la littérature. La comparaison des résultats expérimentaux et numériques a montré toute la capacité du modèle développé à prédire de manière satisfaisante la charge ultime et, à l'exception du voilement local des tés comprimés, le mode de rupture associé. Par la suite une étude paramétrique a été menée dans le but d'étudier l'influence des paramètres géométriques et la limite élastique sur la capacité portante et les modes de ruine et d'évaluer la classification de la section transversale perforée proposée dans l'annexe N de la version ENV1993-1-1 de l'Eurocode 3. L'étude paramétrique a aussi permis de mettre en évidence l'influence de la présence des plaques intermédiaires sur la résistance et les modes de ruines de ces types de poutres. Des recommandations pour une utilisation efficace des plaques intermédiaires ont été proposées. Finalement, une bonne concordance entre les résultats numériques et ceux issus des formules de l'annexe N a été observée à l'exception des poutres équipées de plaques intermédiaires avec des sections perforées de classe 3.

Mots clés : poutres ajourées ; ouvertures hexagonales ; plaques intermédiaires ; classification de la section transversale ; simulation numérique ; non linéarités ; voilement local ; annexe N.

Abstract

The main aim of this thesis project is to study up to failure the behavior of steel castellated beams with hexagonal opening with or without intermediate plates. A numerical model has been developed to predict the ultimate load as well as the associated mode failure. The numerical model takes into account material and geometric nonlinearity as well as the geometrical initial imperfections. The validity and the accuracy of the proposed numerical model have been checked by analyzing eleven castellated beams from two experimental investigations reported in the literature. Comparison between experimental and numerical results has shown that the numerical model can predict with good accuracy the ultimate load and to some extent the mode of failure. A parametric study was then carried out on the tested beams in order to study the influence of the geometrical parameters and the yielding stress as well as the perforated cross section class on the load carrying capacity and the modes of failure of castellated beams with hexagonal and octagonal openings. The cross section classification was adopted according to the guidance given in the Annex N of ENV 1993-1-1. The results obtained from the parametric study have also shown the influence of inserting plates at mid-height of castellated beams with hexagonal openings. Recommendations for an effective use of the intermediate plates were proposed. Finally, a performed comparative study has also shown that the results obtained from the design method ENV 1993-1-1 Annex N give close and safe results compared to the numerical results, except for castellated beams with intermediate plates classified as class 3.

Key words : castellated beams; intermediate plates; cross section classification; numerical modelling; nonlinearities; local buckling; Annex N

ملخص

الهدف الرئيسي من مشروع هذه الأطروحة هو دراسة سلوك العوارض ذات فتوحات متعددة على شكل مسدس الأضلاع مع أو بدون لوحات وسطية أثناء الإنهيار. وقد تم وضع نموذج رقمي من أجل التنبؤ بالحمولة القصوى إضافة إلى نمط الإنهيار المقترن به. النموذج الرقمي يأخذ في عين الاعتبار كلا من الأخطية المادية و الهندسية والعيوب الهندسية الأولية. وقد تم التحقق من صحة ودقة النموذج الرقمي المقترح من خلال تحليل أحد عشرة عوارض نشرت تفاصيلها في مقالات علمية متخصصة. وقد أظهرت المقارنة بين النتائج التجريبية و الرقمية أن النموذج الرقمي يمكن أن يتنبأ بدقة جيدة بالحمولات القصوى وإلى حد ما بأنماط الإنهيار. ثم أجريت دراسة بارامترية على العوارض المذكورة آنفا لدراسة تأثير البارامترات الهندسية و حد المرونة فضلا عن تصنيف المقطع العرضي ذات الفتحة على الحمولة القصوى و أنماط انهيار العوارض ذات فتوحات متعددة على شكل مسدس الأضلاع مع أو بدون لوحات وسيطة. وقد تم تصنيف المقاطع العرضية اعتمادا على التوجيهات الواردة في الملحق N من ENV 1993-1-1. وقد أظهرت النتائج التي تم الحصول عليها من الدراسة البارامترية أيضا تأثير إدراج اللوحات الوسطية على العوارض ذات فتوحات متعددة على شكل مسدس الأضلاع. كما تم اقتراح توصيات حول الاستخدام الفعال للوحات الوسطية. أخيرا، أظهرت دراسة مقارنة أن النتائج التي تم الحصول عليها من طريقة التصميم الملحق N من ENV 1993-1-1 تعطي نتائج قريبة وأمنة مقارنة بنتائج النموذج الرقمي باستثناء العوارض ذات فتوحات متعددة على شكل مسدس الأضلاع والتي تحتوي على اللوحات الوسطية المصنفة من الدرجة 3.

كلمات مفاتيح: عوارض ذات فتوحات، لوحات وسطية، نموذج رقمي، تصنيف المقاطع العرضية، الحمولة القصوى، نمط الإنهيار، الأخطية المادية و الهندسية.

À la mémoire de mon père

À ma mère

À mon épouse

*“Research is to see what everybody else has seen,
and to think what nobody else has thought”*

Albert Szent Gyorgyi

(Hungarian Biochemist, 1937 Nobel Prize for Medicine, 1893-1986)

Remerciements

En tout premier lieu, Je remercie ALLAH, le tout puissant, le Miséricordieux qui m'a donné la force et la volonté d'achever cette thèse et je lui rends grâce.

Je remercie chaleureusement le professeur Mimoune Mosetefa, Directeur de thèse, pour ses précieux conseils et son investissement dans le suivi de mon travail malgré la distance qui nous a séparé pendant la durée de cette thèse.

Il m'est aussi particulièrement agréable de remercier Dr Bouchair Abdelhamid, Professeur à l'Université Blaise Pascal, pour sa contribution active à la réalisation de ce travail, pour m'avoir aidé à résoudre de nombreux problèmes et pour avoir orienté mon travail avec beaucoup d'attention.

Dans la continuité de mes remerciements, j'adresse mes plus vifs remerciements au Dr Boumekik Ahmed, Professeur à l'Université de Constantine, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de cette thèse, et aux rapporteurs, Dr Kebiche Khelifa, Professeur à l'Université de Sétif, Dr Boudaoud Zineddine, Maître de Conférence à l'Université d'Oum El Bouaghi, Dr Koulougli Salim, Maître de Conférence à l'Université de Constantine, pour le temps qu'ils ont consacré à la lecture attentive de la thèse et pour la richesse de leurs commentaires,.

Je tiens à remercier Monsieur Bouteldja Fateh, ex thésard au LaMI et actuellement Maître de conférence à l'Université de Guelma, pour l'aide précieuse qu'il m'a apporté durant mes séjours au laboratoire LaMI de L'Université de Blaise Pascal.

Je tiens à remercier mes parents qui m'ont soutenu pour réaliser mes études et qui m'ont toujours encouragé dans mes entreprises, ainsi que mes frères et ma sœur.

Je tiens également à remercier ma femme pour m'avoir continuellement encouragé, écouté et soutenu durant ce travail.

Je remercie énormément tous les membres de ma grande famille et plus particulièrement ma tante Ghania qui m'a toujours soutenu.

Je souhaite enfin exprimer toute ma gratitude envers mes collègues enseignants au département de Génie Civil de Tébessa : Labed Abederahim, Harkati El Haddi, Guerroudj Slimane, Rouili Ahmed, Messabhia Ali, qui, chacun à leur manière, ont contribué à ce travail, soit par des conseils, soit par des encouragements.

Table des matières

Liste des figures.....	- x -
Liste des tableaux.....	- xiii -
Liste des définitions et des notations.....	- vii -
Chapitre 1.....	- 1 -
1.1. Généralités sur les poutres en acier avec ouvertures dans l'âme	- 2 -
1.2. Géométrie.....	- 5 -
1.3. Modes de ruine.....	- 6 -
1.3.1. Ruine par flexion de la section perforée.....	- 7 -
1.3.2. Ruine par cisaillement pur de la section perforée.....	- 7 -
1.3.3. Ruine par flexion Vierendeel de la section perforée.....	- 7 -
1.3.4. Ruine par flambement du montant d'âme sous cisaillement	- 8 -
1.3.5. Ruine par déversement.....	- 9 -
1.3.6. Ruine par écoulement du joint de soudure.....	- 9 -
1.3.7. Ruine par flambement du montant d'âme sous compression	- 10 -
1.5. Objectifs et contexte de la thèse.....	- 11 -
1.6. Plan de la thèse.....	- 11 -
Références du Chapitre 1.....	-13-
Chapitre 2.....	- 14 -
2.1. Introduction.....	- 15 -
2.2. Normes et codes de dimensionnements.....	- 15 -
2.3. Classification des sections transversales.....	- 17 -
2.4. Résistance des sections au droit des ouvertures isolées.....	- 20 -
2.4.1. Résistance au cisaillement.....	- 20 -
2.4.2. Résistance à la flexion pure.....	- 23 -
2.4.3. Résistance à la flexion locale (Effet Vierendeel)	- 24 -
2.5. Poutres comportant des ouvertures d'âme multiples.....	- 30 -
2.5.1. Méthodes d'analyse globale.....	- 30 -

2.5.2. Résistance à la flexion globale.....	31 -
2.5.3. Résistance à la flexion Vierendeel.....	31 -
2.5.3.1. Ouvertures polygonales.....	31 -
2.5.3.2. Résistance à la flexion des Tés.....	32 -
2.5.3.3. Influence de l'effort tranchant sur la résistance à la flexion.....	32 -
2.5.3.4. Effet de l'effort axial sur la résistance.....	33 -
2.5.3.5. Ouvertures Circulaires.....	34 -
2.4.2.5. Résistance au flambement du montant d'âme.....	35 -
2.4.2.6. Résistance au cisaillement longitudinal.....	40 -
2.6. Etudes numériques de la littérature.....	40 -
2.7. Aperçu sur les études expérimentales de la littérature.....	46 -
2.8. Conclusion.....	54 -
Références du chapitre 2.....	56 -
Chapitre 3	61 -
3.1. Introduction.....	62 -
3.2. Non-linéarités.....	62 -
3.2.1. Non-linéarité géométrique.....	62 -
3.2.1.1. Mouvement d'un point matériel.....	62 -
3.2.1.2. Tenseur des déformations.....	64 -
3.2.1.3. Tenseur des contraintes.....	68 -
3.2.1.4. Flambage.....	70 -
3.2.2. Non-linéarité matérielle.....	72 -
3.2.2.1. Formulation des lois élasto-plastique.....	72 -
3.2.2.1. Critères de plasticité pour les métaux.....	77 -
3.3. Stratégies de résolution des problèmes non linéaires ;.....	78 -
3.3.1. Résolution en déplacements.....	78 -
3.3.1.1. Formulation du problème.....	78 -
3.3.1.2. Techniques de pilotage.....	79 -
3.3.1.3. Critères et contrôle de la convergence.....	89 -
3.3.1.4. Résolution en flambage linéaire.....	92 -
3.3.1.5. Résolution en flambage non linéaire.....	92 -
3.3.2. Traitement de la non-linéarité matérielle.....	93 -
3.3.2.1. Intégration des lois de comportement.....	93 -

3.3.2.2. Algorithmes d'Euler	- 94 -
3.3.2.3. Algorithme de Prévion élastique retour radial (PERR).....	- 96 -
3.4. Conclusion.....	- 99 -
Références du chapitre 3.....	- 100 -
Chapitre 4.....	- 103 -
4.1. Introduction.....	- 104 -
4.2. Modèle numérique.....	- 104 -
4.2.1. Géométrie et Maillage.....	- 105 -
4.2.2. Conditions aux limites et chargement.....	- 106 -
4.2.3. Loi de comportement de l'acier.....	- 106 -
4.2.4. Non-linéarité géométrique.....	- 106 -
4.2.5. Imperfection géométrique.....	- 107 -
4.2.6. Méthodes de résolution.....	- 108 -
4.3. Validation expérimentale du modèle numérique.....	- 109 -
4.4. Comparaison des résultats du modèle numérique proposé avec ceux de la littérature.....	- 114 -
4.5. Etude paramétrique.....	- 115 -
4.5.1. Introduction.....	- 115 -
4.5.2. Influence de l'épaisseur de l'âme.....	- 116 -
4.5.3. Influence de la limite élastique.....	- 121 -
4.5.4. Influence de la hauteur des ouvertures.....	- 123 -
4.5.5. Influence de la hauteur des plaques intercalaire.....	- 125 -
4.5.5. Influence de la portée sur la résistance ultime au voilement des montants d'âme.....	- 126 -
4.6. Comparaison entre résultats fournis par les modèles analytiques de l'Annexe N et le modèle numérique.....	- 128 -
4.7. Conclusion.....	- 131 -
Références du chapitre 4.....	- 134 -
Conclusion générale et perspectives.....	- 135 -
Annexe	- 137 -

Liste des figures

Figure 1.1. Avantage de la présence des ouvertures dans l'âme.....	2
Figure 1.2. Poutres reconstituées munies d'ouvertures isolées de formes variées.....	2
Figure 1.3. Poutres ajourées.....	3
Figure 1.4. Poutre Angelina	3
Figure 1.5. Oxycoupage du profilé de base, séparation et soudage des deux parties [1].....	4
Figure 1.6. Géométrie des poutres ajourées [2].....	5
Figure 1.7. Tés et montants d'âme [2].....	6
Figure 1.8. Ruine par flexion transversale de la section perforée [2].....	7
Figure 1.9. Ruine par cisaillement de la section perforée [2].....	7
Figure 1.10. Mécanisme de ruine par flexion Vierendeel [2].....	8
Figure 1.11. Flambement du montant [6].....	8
Figure 1.12. Déversement d'une poutre cellulaire [10].....	9
Figure 1.13. Ruine par écoulement du joint de soudure [13].....	10
Figure 1.14. Flambement due à la compression du montant d'âme [14].....	10
Figure 2.1. Classification des sections transversales en fonction du moment résistant et de la capacité de rotation [18]	17
Figure 2.2. Figure 2.2 Voilement local au niveau d'un Té supérieur non raidi [1].....	18
Figure 2.3. Géométrie des sections transversales perforées [6]	19
Figure 2.4. Notations pour la classification des âmes des Tés non raidis [6].....	20
Figure 2.5. Efforts normaux dans les Tés [22].....	23
Figure 2.6. Répartition des efforts au droit d'une ouverture centrée [21].....	25
Figure 2.7. Diagramme d'interaction construit à partir de plusieurs points.....	26
Figure 2.8. Diagramme cubique d'interaction Moment-Effort tranchant [28].....	27
Figure 2.9. Courbe d'interaction Moment-Effort tranchant [29].....	27
Figure 2.10. Modèle simplifié utilisé pour l'analyse des poutres ajourées [6].....	30
Figure 2.11. Sollicitations sur une section plane inclinée d'un angle ϕ [6].....	34
Figure 2.12. Ouverture rectangulaire équivalente [38].....	34

Figure 2.13. Efforts intérieurs et contraintes normales au niveau d'un demi-montant intermédiaire.....	36
Figure 2.14. Modélisation en 3D d'une poutre ajourée à deux ouvertures dans l'âme [Red98]	38
Figure 2.15. Efforts et contraintes sur le montant d'âme d'une poutre cellulaire en acier [1].....	39
Figure 2.16. Modélisation du montant d'âme de Zaarour et Redwood [40].....	41
Figure 2.17. Modélisation en 3D d'une poutre ajourée à deux ouvertures dans l'âme [41]....	42
Figure 2.18. Modélisation en 3D d'une poutre ajourée à deux ouvertures dans l'âme [41]....	43
Figure 2.19 Modèle numérique de Tsavdaridis et D'Mello [46].....	45
Figure 2.20 Modèle numérique d'Ellobody [47].....	46
Figure 2.19. Chargement en 8 points dans Bazile et Texier [7].....	48
Figure 2.19. Chargement en 8 points dans Bazile et Texier [7].....	49
Figure 2.21 Dispositif d'essai de Zirakian et Showkati [56].....	51
Figure 2.22. Essai sur une poutre cellulaire en acier [22].....	53
Figure 2.23 Poutres avec ouvertures elliptiques testées par Tsavdaridis et D'Mello [46]....	54
Figure 3.1. Transformation au cours du temps.....	63
Figure 3.2. Description lagrangienne actualisée.....	63
Figure 3.3. Déformation d'une barre unidimensionnelle.....	65
Figure 3.4. Variation du produit scalaire.....	67
Figure 3.5. Représentation de la force de cohésion.....	69
Figure 3.6. Modes de flambage.....	71
Figure 3.7. Courbes représentatives des phénomènes de flambement limite par claquage....	71
Figure 3.8. Surface de charge en plasticité.....	73
Figure 3.9. Illustration de la règle de normalité de g.....	74
Figure 3.10. Illustration de l'écrouissage isotrope et cinématique.....	76
Figure 3.11. Critères de Tresca et de Von Mises.....	77
Figure 3.12. Techniques de pilotage.....	80
Figure 3.13. Méthode de Newton-Raphson originale en 1D.....	82
Figure 3.14. Méthode incrémentale à deux pas.....	83
Figure 3.15. Approche de Crisfield pour la recherche de la longueur du pas.....	85
Figure 3.16. Les différentes variantes de la méthode de Riks.....	88
Figure 3.17. Principe des méthodes explicites et implicites.....	96
Figure 3.18. Illustration de la méthode prédiction élastique-retour radial.....	97

Figure 4.1. Elément coque mince QSL8 [1].....	104
Figure 4.2. Exemple de maillage d'une demie poutre à ouvertures octogonales.....	106
Figure 4.3. Chargement et conditions aux limites.....	106
Figure 4.4. Exemple de déformée du 1 ^{er} mode de flambement d'une poutre ajourée à ouvertures hexagonales.....	107
Figure 4.5. Méthodes itératives utilisés par le logiciel LUSAS pour la résolution des problèmes non linéaires [1].....	109
Figure 4.6. Influence de l'amplitude maximale sur les courbes charge-flèche.....	112
Figure 4.7. Champs des contraintes de von Mises.....	114
Figure 4.8. Evolution de la charge ultime en fonction de l'épaisseur de l'âme.....	117
Figure 4.9. Evolution du rapport P_{FEM}/P_Y en fonction de l'épaisseur de l'âme.....	119
Figure 4.10. Champs des contraintes de von Mises à la ruine dans des poutres ayant des sections transversales de classes 2, 3 et 4.....	120
Figure 4.11. Champs des contraintes de von Mises à la ruine dans la poutre 12-2.....	121
Figure 4.12. Evolution de la charge ultime en fonction de la limite élastique.....	122
Figure 4.13. Evolution du rapport P_{FEM}/P_Y en fonction de la limite élastique du matériau.....	122
Figure 4.14. Evolution de la charge ultime en fonction du rapport h_0/d_w	123
Figure 4.15. Evolution du rapport P_{FEM}/P_Y en fonction du rapport h_0/d_w	124
Figure 4.16. Evolution de la charge ultime en fonction du rapport h_p/h_0	125
Figure 4.17. Exemple d'une poutre modifiée pour étudier l'influence de la portée.....	126
Figure 4.18. Réduction en pourcentage de la charge ultime des poutres ajourées sans plaques intercalaires résultant de l'augmentation de la portée.....	127
Figure 4.19. Réduction en pourcentage de la charge ultime des poutres ajourées avec plaques intercalaires résultant de l'augmentation de la portée.....	127
Figure 4.20. Evolution du rapport V_{EC3}/V_{FEM} en fonction de l'épaisseur de l'âme.....	129
Figure 4.21. Evolution du rapport V_{EC3}/V_{FEM} en fonction de la limite élastique.....	130
Figure 4.22. Evolution du rapport V_{EC3}/V_{FEM} en fonction du rapport h/d_w	130
Figure 4.23. Evolution de la charge ultime calculée par la méthode de l'Annexe N en fonction du rapport h_p/h_0	131

Liste des tableaux

Tableau 4.1. Sensibilité des poutres testées à l'amplitude maximale des imperfections géométriques.....	110
Tableau 4.2 Comparaison des charges de ruine.....	111
Tableau 4.3. Confrontation des résultats expérimentaux avec les résultats du modèle de Zaarour et Redwood et le modèle proposé.....	115
Tableau A1. Caractéristiques géométriques des poutres alvéolaires.....	137
Tableau A2. Limite d'élasticité de l'acier des poutres alvéolaires	137

Liste des définitions et des notations

Liste des scalaires

A	Aire de la section transversale de la poutre en acier sans ouverture
a_0	Largeur de l'ouverture
A_f	Aire de section transversale de la semelle
A_w	Aire de section transversale de l'âme du T \acute{e}
A_v	Aire de cisaillement
b_f	Largeur de la semelle
b_w	Hauteur libre de l'âme (libre entre rayons de congé ou cordons de soudure âme semelle)
d	Hauteur de l'âme
d_0	diamètre de l'ouverture circulaire
d_c	Bras de levier
ds	Elément de surface
d_w	hauteur hors tout de l'âme
e_0	Excentricité entre le centre de l'ouverture et la mi-hauteur de l'âme de la poutre
E	Module de Young du matériau
F_c	Charge critique d'instabilité
f_{yf}	Limite élastique de l'acier des semelles
f_{yw}	Limite d'élasticité de l'acier de l'âme
G	Module de cisaillement du matériau
H	Pente d'écrouissage
h	Hauteur totale de la poutre
h_c	Distance entre les centres de gravité des tés à mi-longueur de l'ouverture d'âme.

h_o	Hauteur de l'ouverture
h_p	Hauteur de la plaque intermédiaire
I_y	Moment d'inertie de flexion de la section transversale non perforée
J_1, J_2, J_3	Invariants du tenseur des contraintes σ
l_o	longueur efficace de l'ouverture
$M_{el,Rd}$	Moment de résistance élastique de la section transversale non perforée
$M_{el,Rd,T}$	Résistance à la flexion élastique du Té
$M_{o,Rd}$	Moment de résistance d'une poutre au milieu de l'ouverture
$M_{o,Sd}$	Moment fléchissant de calcul au centre de l'ouverture
$M_{pl,Rd}$	Moment de résistance plastique de la section transversale non perforée
$M_{pl,Rd,b}$	Moment de résistance plastique du Té inférieur
$M_{pl,Rd,t}$	Moment de résistance plastique du Té supérieur
$M_{pl,Rd,T}$	Résistance à la flexion plastique du Té
$M_{v,Sd}$	Moment Vierendeel appliqué
$M_{v,Rd}$	Résistance totale au moment Vierendeel
$M_{v,Rd,T}$	Résistance à la flexion réduite du Té
$M_{wp,Sd}$	Moment fléchissant au niveau de la section transversale critique dans le montant d'âme
$M_{\phi,Rd}$	Moment de résistance réduit pour le cisaillement sur une section inclinée d'un angle ϕ
$M_{\phi,Sd}$	Moment interne sur une section inclinée d'un angle ϕ
$N_{T,Sd}$	Effort de traction ou de compression axiale dans les Tés
$N_{el,Rd,T}$	Résistance élastique à l'effort normal du Té
$N_{pl,Rd,T}$	Résistance plastique à l'effort normal du Té
$N_{\phi,Rd}$	Résistance à l'effort normal réduite pour le cisaillement d'une section inclinée d'un angle ϕ
$N_{\phi,Sd}$	Effort normal perpendiculaire à une section inclinée d'un angle ϕ
p	Pression hydrostatique
P_{ext}	Force externe
P_{Essai}	Charge de ruine obtenue à l'essai
P_{EC3}	Charge de ruine issue de la méthode de l'Annexe N de l'Eurocode 3
P_{FEM}	Charge ultime issue du calcul numérique
r	Rayons de congé

s_1, s_2, s_3	Contraintes déviatoriques
t	Temps
t_n	Instant auquel tout est connu (début d'intervalle temporel)
t_{n+1}	Instant auquel on cherche à déterminer les déformations et contraintes, (fin d'un intervalle temporel)
t_f	Épaisseur de la semelle
t_w	Épaisseur de l'âme
$V_{ba,Rd}$	Résistance au voilement par cisaillement de l'âme sans ouverture
$V_{o,Rd}$	Résistance au cisaillement
$V_{o,Sd}$	Effort tranchant de calcul au centre de l'ouverture
$V_{oba,Rd}$	Résistance au voilement par cisaillement d'une section transversale perforée
$V_{opl,Rd}$	Effort tranchant résistant au centre de l'ouverture
$V_{T,Sd}$	Effort tranchant dans le Té
$V_{\phi,Sd}$	Effort tranchant parallèle à une section inclinée d'un angle ϕ
W_{pl}	Module plastique de la section transversale non perforée.
y_e	Axe neutre élastique au niveau du Té
y_p	Axe neutre plastique au niveau du Té
γ_{M0}	Coefficient partiel de sécurité
β	Coefficient d'homogénéisation concernant la méthode de la longueur d'arc linéarisée
γ_a	Coefficient partiel de sécurité
Δt	Incrément temporel : $\Delta t = t_{n+1} - t_n$
δ	Caractéristique du déplacement
ε	Précision de la norme
$\bar{\varepsilon}^p$	Déformation plastique
η	Longueur du pas
η	coefficient qui tient compte de l'influence de l'excentricité de l'ouverture sur la résistance au cisaillement
λ	Multiplicateur plastique
μ, λ	Coefficients de Lamé
λ_c	valeur propre concernant le problème de flambement
ν	Coefficient de Poisson du matériau

$\bar{\sigma}$	Contrainte équivalente au sens de Von Mises
σ_{wEd}	La contrainte principale de compression dans le demi montant étudié
σ_{wRd}	La contrainte principale résistante
σ_y	Limite élastique ou seuil d'écoulement
μ	Caractéristique du chargement
ϕ	Énergie potentielle
ϕ	Angle d'inclinaison des sections dans l'âme autour d'une ouverture circulaire
ψ	Coefficient d'homogénéisation concernant la méthode de la longueur d'arc sphérique

Liste des tenseurs et des matrices

σ	Tenseur des contraintes de Cauchy
$\dot{\epsilon}$	Tenseur taux de déformation total
$\dot{\epsilon}^e$	Partie élastique du tenseur taux de déformation total
$\dot{\epsilon}^p$	Partie plastique du tenseur taux de déformation total
ϵ_{ij}	Partie linéaire du tenseur de déformation de Green-Lagrange
η_{ij}	Partie quadratique du tenseur des déformations de Green-Lagrange
I	Tenseur d'identité d'ordre 2
E_{ij}	Tenseur des déformations de Green-Lagrange
A	Tenseur des déformations d'Almansi
B	Tenseur des déformations de Cauchy-Green gauche
C	Tenseur des déformations de Cauchy-Green droit
D	Tenseur de Hooke généralisé
Π	Tenseur des contraintes de Piola-kirshoff de première espèce PK1
S	Tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff de seconde espèce PK2
[k]	Matrice de rigidité de la structure
[k _{nl}]	Matrice de rigidité non-linéaire de la structure
[k _T]	Matrice tangente
[k _l]	Matrice de rigidité tangente linéaire
[k _{σ}]	Matrice de rigidité tangente traduisant la non-linéarité matérielle

$[k_u]$	Matrice de rigidité tangente traduisant la non-linéarité géométrique
$[k_\lambda]$	Matrice de rigidité tangente de charges suivieuses
$[k_g]$	Matrice de rigidité géométrique

Liste des vecteurs

$\{U\}$	Vecteur des déplacements
$\{F\}$	Vecteur des efforts nodaux généralisés
R	Vecteur de forces résiduelles (hors-équilibres)
n	Vecteur normal à une surface
t	Vecteur tangent à une surface

Chapitre 1

Introduction générale

Chapitre.....	- 1 -
<i>1.1. Généralités sur les poutres en acier avec ouvertures dans l'âme</i>	<i>- 2 -</i>
<i>1.2. Géométrie.....</i>	<i>- 5 -</i>
<i>1.3. Modes de ruine.....</i>	<i>- 6 -</i>
<i>1.3.1. Ruine par flexion de la section perforée.....</i>	<i>- 7 -</i>
<i>1.3.2. Ruine par cisaillement pur de la section perforée.....</i>	<i>- 7 -</i>
<i>1.3.3. Ruine par flexion Vierendeel de la section perforée.....</i>	<i>- 7 -</i>
<i>1.3.4. Ruine par flambement du montant d'âme sous cisaillement</i>	<i>- 8 -</i>
<i>1.3.5. Ruine par déversement.....</i>	<i>- 9 -</i>
<i>1.3.6. Ruine par écoulement du joint de soudure.....</i>	<i>- 9 -</i>
<i>1.3.7. Ruine par flambement du montant d'âme sous compression</i>	<i>- 10 -</i>
<i>1.5. Objectifs et contexte de la thèse.....</i>	<i>- 11 -</i>
<i>1.6. Plan de la thèse.....</i>	<i>- 11 -</i>
<i>Références du Chapitre 1.....</i>	<i>- 13 -</i>

1.1. Généralités sur les poutres en acier avec ouvertures dans l'âme

Dans les planchers des bâtiments modernes, les poutres comportant des ouvertures dans l'âme sont généralement utilisées dans le but de permettre le passage de conduites (eau, chauffage, ventilation etc.) sous le plafond d'un bâtiment ou d'une halle en gagnant ainsi de la hauteur sous plafond (figure 1.1).

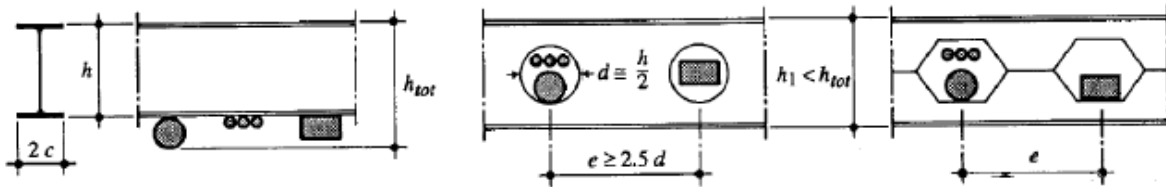


Figure 1.1. Avantage de la présence des ouvertures dans l'âme

Pour les poutres reconstituées, il est courant de découper des ouvertures aux emplacements nécessaires et de préférence avec un espacement suffisant pour éviter les effets de l'interaction entre les ouvertures (figure 1.2).



Figure 1.2. Poutres reconstituées munies d'ouvertures isolées de formes variées

Les âmes des poutres ajourées comportent des ouvertures réparties le long de la poutre (figure 1.3). Selon la géométrie des ouvertures, on distingue :

- les poutres alvéolaires, dont les ouvertures sont à nid d'abeilles ou polygonales;
- les poutres cellulaires, dont les ouvertures sont circulaires ou arrondies;
- plus rarement des poutres ajourées avec ouvertures rectangulaires ou allongées (oblongues).

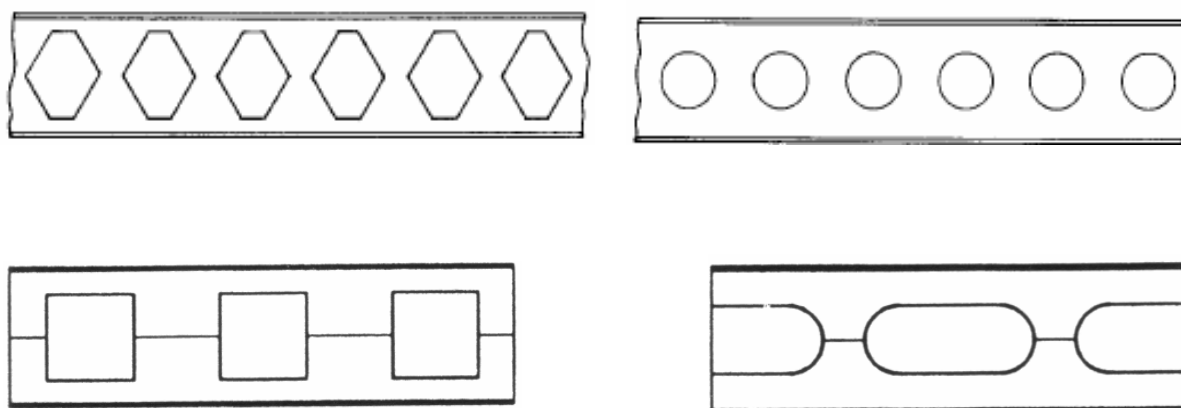


Figure 1.3 Poutres ajourées

Récemment, ArcelorMittal a développé une poutrelle Cellulaire architecturale caractérisée par de plus grandes ouvertures en forme d'œil baptisée poutre Angelina (voir figure 1.4) et une grande portée qui peut aller jusqu'à 17 m. Elle a été conçue pour répondre à une proposition faite par l'architecte Claude Vasconi. Dotés de larges ouvertures pour le passage des câbles, elle offre une nouvelle dimension architecturale.



Figure 1.4. Poutre Angelina

Les poutres ajourées peuvent être fabriquées soit par découpage au chalumeau de profilés laminés et par reconstitution d'une section de plus grande hauteur, avec éventuellement soudure de plaques intercalaires (c'est le cas des ouvertures octogonales par exemple); soit par poinçonnage et oxycoupage de l'âme. Les programmes de découpe sont pilotés

numériquement afin d'assurer un ajustement parfait des alvéoles (figure 1.5). La fabrication en parallèle de poutres permet de réduire les coûts de production.

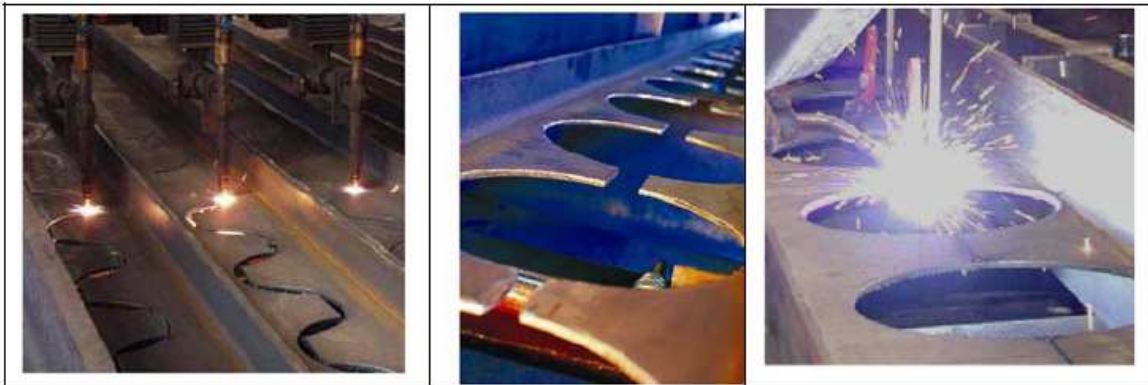


Figure 1.5. Oxycoupage du profilé de base, séparation et soudage des deux parties [1]

Cette technique permet de fournir des :

- poutrelles à ouvertures circulaires ou hexagonales;
- poutrelles cintrées ou contre fléchées;
- sections dissymétriques pour des applications mixtes ;
- sections plus hautes en ajoutant des plats intercalaires entre les pièces T (fig. 1.6c).

Les poutres ajourées offrent une infinité de combinaisons possibles. A partir d'un ou deux profilés de base, il existe une multitude de configurations géométriques en terme de diamètres, d'entraxes et d'ouvertures. De nombreux avantages pour les planchers et supports de toiture :

- Optimiser la matière : en effet pour une même quantité de matière qu'un profilé laminé, on obtient une hauteur statique et une rigidité plus élevées. Pour une même masse, le moment d'inertie est supérieur de 50 à 60% à celui du profilé laminé de base. Ceci réduit fortement le le coût des construction, y compris le coût par rapport au treillis.
- Aspect aérien des poutrelles ajourées, allié à leur forte résistance, offrent aux architectes des solutions attractives et pratiques en termes d'aménagement de l'espace sans effet d'écran. En effet, l'utilisation des poutres ajourées comme éléments de couverture permet de franchir des portées importantes avoisinant 40 mètres. Dans le cas des poutres supportant les planchers de bâtiment, cette solution autorise de grands plateaux libres sur une distance pouvant aller jusqu'à 18 mètres. L'épaisseur totale du plancher est inférieure de 25 à 40 cm par rapport à des solutions lourdes conventionnelles.
- Rapidité de montage en toute sécurité.

1.2. Géométrie

Nous adoptons les notations de l'Annexe N de l'Eurocode 3, comme illustrée sur la figure 1.6.

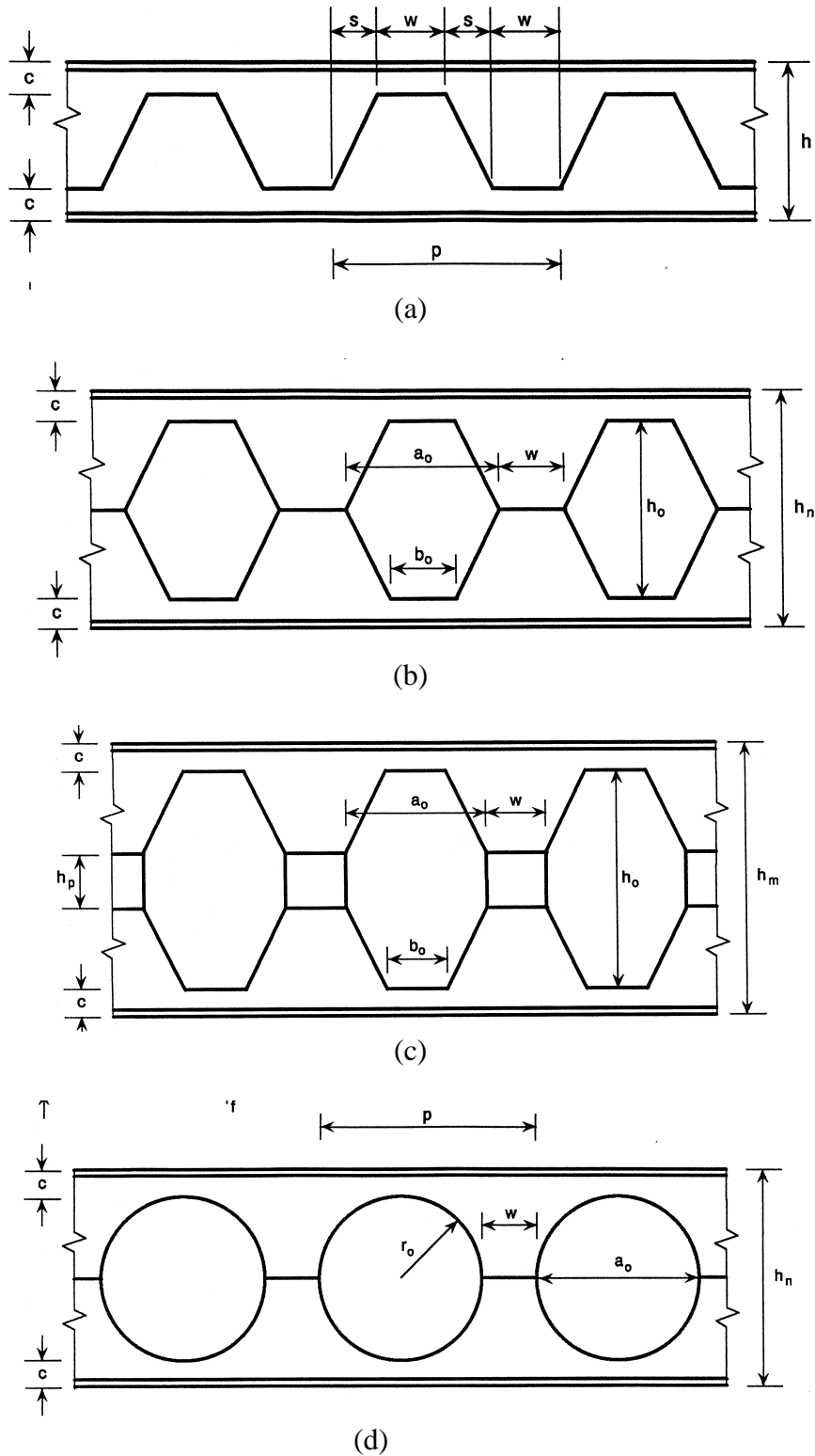


Figure 1.6. Géométrie des poutres ajourées [2]

Par analogie avec une poutre treillis, on désigne par montants d'âme les portions d'âme situées entre deux évidements. Les parties de la poutre situées de part et d'autre d'un même évidement sont appelées Tés supérieur et inférieur. Les détails des Tés et des montants d'âme sont indiqués sur la Figure 1.7.

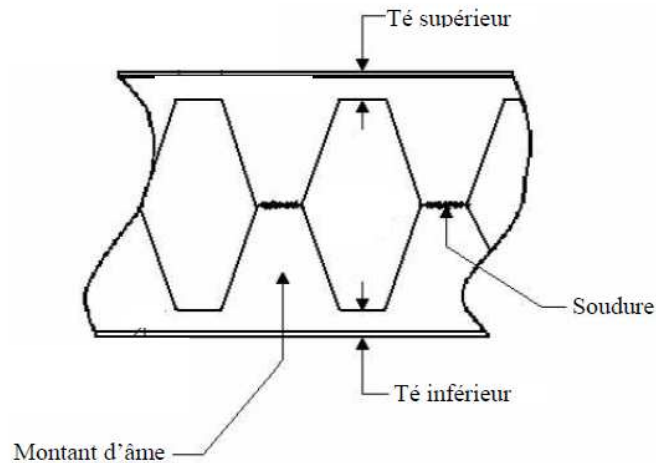


Figure 1.7. Tés et montants d'âme [2]

1.3. Modes de ruine

Les différents modes de ruine pouvant survenir au niveau ou à proximité des ouvertures isolées de grandes dimensions sont les suivants [2] :

- flexion globale de la section transversale perforée;
- cisaillement pur de la section transversale perforée;
- flexion Vierendeel autour de l'ouverture d'âme;
- flambement du Té comprimé.

Pour les poutres comportant des ouvertures d'âme multiples, des modes de ruine supplémentaires doivent être considérés :

- flambement du montant d'âme entre deux ouvertures adjacentes;
- flexion du montant d'âme;
- ruine par cisaillement du montant d'âme ou de la soudure du montant d'âme;
- flambement par compression de l'âme;
- instabilité globale de la poutre provoquée par le déversement;

Ces modes de ruines sont influencés par la géométrie et l'élancement de l'âme, la forme et les dimensions des ouvertures, modes de chargement et les appuis latéraux prévus.

1.3.1. Ruine par flexion de la section perforée

La ruine par flexion de la section ajourée correspond à un mode de rupture global. Il se produit dans les sections perforées soumises à la flexion pure ou lorsque l'effet de l'effort tranchant est négligeable devant celui de la flexion. Dans ce cas la ruine survient par apparition de deux rotules plastiques dans les Tés supérieur et inférieur de la section perforée [3, 4], comme illustré sur la figure 1.8.

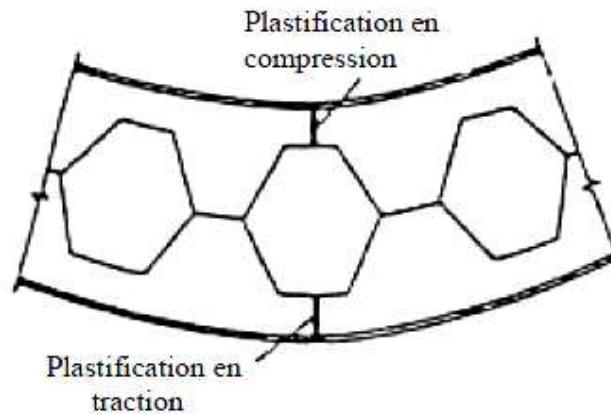


Figure 1.8. Ruine par flexion transversale de la section perforée [2]

1.3.2. Ruine par cisaillement pur de la section perforée

La ruine par cisaillement pur de la section transversale ajourée correspond également à une ruine dite globale, où la section perforée se plastifie sous l'effet d'un effort tranchant élevé, comme illustré sur la figure 1.9.

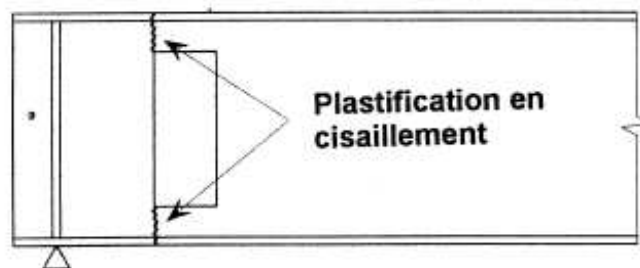


Figure 1.9. Ruine par cisaillement de la section perforée [2]

1.3.3. Ruine par flexion Vierendeel de la section perforée

Ce mode de ruine a été décrit pour la première fois par Altifillisch [5] et Toprac et Cook [3].

La ruine par mécanisme Vierendeel est de type local. Elle correspond à la ruine par formation de quatre rotules plastiques aux quatre angles de l'ouverture, comme illustré sur la figure 1.10. Ce mode de ruine peu survenir à proximité des ouvertures de grande hauteur ou très rapprochées sollicité essentiellement à l'effort tranchant. Chaque Té est soumis à une combinaison de cisaillement qui a pour effet de réduire leur capacité axiale et leur moment résistant.

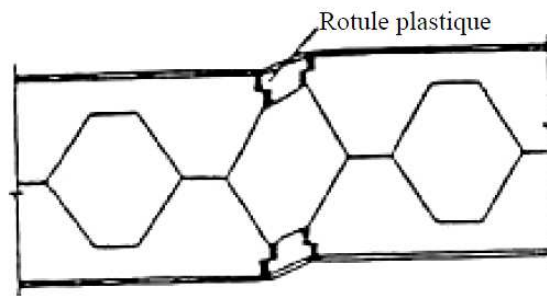


Figure 1.10. Mécanisme de ruine par flexion Vierendeel [2]

1.3.4. Ruine par flambement du montant d'âme sous cisaillement

Sous l'effet du cisaillement longitudinal et de la flexion locale induite, les montants, risquent de subir des déformées hors plan à double courbure dans la hauteur (figure 1.11). Cette instabilité s'apparente surtout à un phénomène de voilement local et/ou de déversement local, mais l'usage, veut que l'on parle globalement de «flambement» du montant [6]. Les premiers cas de flambement de montant dans les poutres ajourées ont été rapportés dans les références [7,4,8]. La résistance du montant au flambement dépend de plusieurs paramètres : l'espacement des ouvertures, l'élançement de l'ouverture, la nuance de l'acier et enfin la symétrie ou dissymétrie de la section.



Figure 1.11. Flambement du montant [6]

1.3.5. Ruine par déversement

Dans la zone des moments positifs, les poutres en acier sont plus sensibles au déversement que les poutres composites si celles-ci sont convenablement connectées à la dalle, qui offre un appui latéral pour la poutre. Les travaux de Nethercot et Kerdal [9] ont conclu que les ouvertures d'âme ont peu d'effet sur le déversement des poutres ajourées. De ce fait, ils ont proposé d'utiliser les mêmes méthodes pour l'analyse du déversement des poutres à âme pleine en considérant une section adéquate de l'âme. Des travaux plus récents ont abouti aux mêmes conclusions [10].



Figure 1.12. Déversement d'une poutre cellulaire [10]

1.3.6. Ruine par écoulement du joint de soudure

L'effort longitudinal de cisaillement est susceptible de produire l'écoulement du joint de soudure à mi-hauteur du montant d'âme (figure 1.13). Cette ruine peut survenir lorsque l'épaisseur de l'âme ou la largeur du montant d'âme est faible. Ce mode de ruine a été étudié pour la première fois par Husain et Spiers [11] qui ont effectué des essais sur six poutres ajourées ayant des montants d'âme étroits. Comme il a été mentionné au paragraphe 1.3.3, la ruine par flexion Vierendeel, contrairement à la ruine par écoulement du joint de soudure, survienne lorsque les montants d'âme sont larges. Pour réaliser un équilibre raisonnable entre ces deux modes de ruine, Dougherty [12] suggère pour les ouvertures hexagonales de satisfaire les relations suivantes entre les dimensions des ouvertures et celles des montants :

- largeur du montant d'âme $w = \frac{h_0}{4}$;

et pour les poutres ajourées avec des ouvertures de 60° sans plaques intercalaires

- largeur du côté incliné $s = 0.289h_0$;
- pas des ouvertures d'âme $p = 1.1h_0$.

h_0 étant la hauteur des ouverture hexagonale.

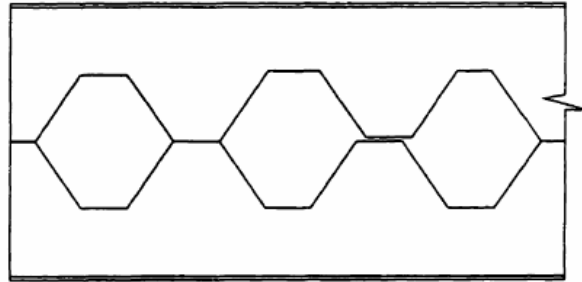


Figure 1.13. Ruine par écoulement du joint de soudure [13]

1.3.7. Ruine par flambement du montant d'âme sous compression

Le flambement du montant d'âme sous compression est susceptible de se produire au droit des charges concentrées et des réactions d'appui (figure 1.14). Contrairement au voilement par cisaillement, le flambement du montant d'âme sous compression se manifeste seulement par un déplacement latéral et non par une torsion. Les premières publications ayant décrits ce mode de ruine sont ceux de Toprac et Cook [3] et Husein et Speirs [11]. Ce mode de ruine n'est généralement pas déterminant si on prévoit un raidissage adéquat au droit des charges concentrées ou des réactions d'appui.

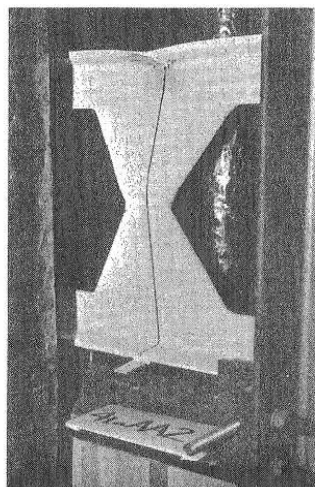


Figure 1.14. Flambement du montant d'âme sous compression [14]

1.5. Objectifs et contexte de la thèse

Actuellement, les normes en vigueur, y compris les Eurocodes ne prévoient pas le calcul des poutres à âmes ajourées, qu'elles soient mixtes ou en acier. Le calcul des poutres en acier avec ouvertures dans l'âme était prévu dans l'Annexe N de la version ENV de l'Eurocode 3 partie 1-1 [2], mais cette annexe n'a pas été retenue dans la version définitive. Elle demeure cependant un document de référence pour le calcul de ce type de poutres. L'examen de la littérature montre que peu de travaux ont été consacrés à la simulation numérique du comportement de ce type de poutre. Les résultats des simulations numériques sont souvent présentés mais sans donner de détails sur les démarches utilisées. Nous avons aussi noté l'absence d'évaluation des méthodes proposées dans l'Annexe N à l'exception des travaux de Bitar [06] sur le flambement des montants d'âme des poutres cellulaires en acier et mixte.

L'objet visé par ce travail est de parvenir à une simulation fiable reproduisant aussi fidèlement que possible le comportement des poutres ajourées avec ouvertures hexagonales et octogonales dans le but d'atteindre les objectifs suivants :

- prédire la charge ultime et les modes de ruine associés;
- étudier l'influence des paramètres géométriques et mécaniques sur le comportement mécanique des poutres ajourées tels que les dimensions des ouvertures, l'épaisseur du montant d'âme et la limite élastique;
- Etudier l'influence de la présence des plats intercalaires sur le comportement des poutres ajourées avec ouvertures hexagonales ;
- Comparer les résultats issus de l'analyse numérique avec ceux obtenus par la méthode proposée dans l'Annexe N de la version ENV1993-1-1 de l'Eurocode 3.

1.6. Plan de la thèse

La thèse est divisée en **4 chapitres**.

Le **chapitre 1** d'introduction décrit sommairement les poutres munies d'ouvertures dans l'âme ainsi que leurs modes de fabrication. Les modes de ruine observés durant les essais sont aussi présentés. Les objectifs sont exposés et suivis par la présentation et la justification de la démarche retenue.

L'état des connaissances dans le domaine du dimensionnement des poutres ajourées est dressé au **chapitre 2**. L'état de l'art passe inévitablement par l'inventaire des méthodes usuelles utilisées pour traiter les poutres munies d'ouvertures dans l'âme. Les approches de

modélisation proposées dans la littérature sont passées en revue afin de mesurer leurs pertinences et les limites de leur applicabilité.

L'objectif du **chapitre 3** est de présenter les hypothèses relatives à l'utilisation de la méthode des éléments finis pour passer d'un modèle de référence continu à sa formulation discrète. L'utilisation de cette méthode conduit à la résolution d'un système matriciel dont la nature peut être linéaire ou non linéaire. Nous décrivons brièvement quelques aspects numériques des algorithmes pour résoudre les systèmes non linéaires.

Dans le **chapitre 4** nous présentons le modèle numérique pour représenter aussi fidèlement que possible le comportement des poutres ajourées équipées ou non de plaques intercalaires. Les développements numériques proposés sont réalisés à l'aide du code LUSAS, version 13.6 [15]. Ce chapitre comporte aussi la validation du modèle numérique par comparaison avec les résultats expérimentaux disponibles dans la littérature.

Ce chapitre comporte aussi une analyse des résultats des simulations numériques issus d'une étude paramétrique mettant en lumière l'influence des paramètres géométriques et la limite élastique sur la capacité portante et les modes de ruine des poutres ajourées avec ouvertures hexagonales dans l'âme munies ou non de plaques intercalaires ainsi que sur leurs modes de ruine. Il se termine par une étude comparative entre les résultats numériques et celles fournis par la méthode de l'Annexe N de la version ENV1993-1-1 de l'Eurocode 3 [2].

Il est à noter que chaque chapitre fini par une conclusion partielle. A la fin du document, une conclusion générale sur ce travail est donnée et quelques nouvelles perspectives de recherche qui font suite aux résultats présentés dans le cadre de cette thèse sont dégagées.

Références du Chapitre 1

- [1] D. Bitar. Planchers mixtes à poutrelles ajourées. GC'2005.
- [2] Eurocode 3 : Design of steel structures - Annexe N : Openings in webs. ENV 1993-1-1 : 1992/A2. *European Committee for Standardisation*.
- [3] A.A. Toprac and B.R. Cooke. An experimental investigation of open-web beams. *Welding Research Council Bulletin, New York. Series No.47*, pages 1-10, 1959.
- [4] P. Halleux. Limit analysis of castellated steel beams. *Acier-Stahl-Steel*, 325, pages 133-144, 1967.
- [5] M.D. Altifillisch, B.R. Cooke and A.A. Toprac. An investigation of open web expanded beams. *Welding Research Council Bulletin, Series No.47*. pages 77s-88s, 1957.
- [6] D. Bitar, P.O. Martin, Y. Galéa, T. Demarco. Poutres cellulaires acier et mixtes : Partie 1 Proposition d'un modèle pour la résistance des montants. *CTICM n°1*, 2006.
- [7] A.N. Sherboume. The plastic behavior of castellated beams. *Proceeding 2nd Commonwealth Welding Conference Institutional of Welding, No. C2*, pages 1-5, London, 1966.
- [8] A. Bazile and J. Texier. Essais de poutres ajourées. *Revue construction métallique CTICM No.3*, pages 12-25,1968.
- [9] D.A. Nethercot, D. Kerdal. Lateral-torsional buckling of castellated beams. *The Structural Engineers*, 60B(3), pages :53–61,1982.
- [10] T. Zirakian and H. Showkati. Distortional buckling of castellated beams. *Journal of Constructional Steel Research ; vol. 62*, pages 863–871, 2006.
- [11] M.U. Husain and W.G. Speirs. Experiments on castellated steel beams. *Journal American Welding Society, Welding Research Supplement*, 52:8, pages : 329S-342S, 1973.
- [12] B.K. Dougherty. Castellated beams: A state of the art report. *Journal of the South African Institution of Civil Engineers, Vol. 352, 2nd Quarter*, pages : 12-20, 1993.

- [13] S. Demirdjian. Stability of castellated beam webs. M.Eng. Thesis. Department of Civil Engineering and Applied Mechanics. *McGill University*, 1999.
- [14] T. Okubo and D.A. Nethercot. Web post strength in castellated steel beams. *Proceedings Institution of Civil Engineers, Part 2, Vol. 79, , pages 533-557, 1985.*
- [15] Lusas 13. Lusas manual. Finite element analysis Ltd. Version 13.5. UK. 2003.
- [16] ECSC RFS-CT-2005-00037 "Ouvertures de grandes dimensions dans les âmes pour l'intégration des équipements techniques dans les planchers mixtes". Fabrication des poutres cellulaires, 2006.

Chapitre 2

Etats des connaissances

Chapitre 2.....	..- 14 -
2.1. Introduction.....	- 15 -
2.2. Normes et codes de dimensionnements.....	- 15 -
2.3. Classification des sections transversales.....	- 17 -
2.4. Résistance des sections au droit des ouvertures isolées.....	- 20 -
2.4.1. Résistance au cisaillement	- 20 -
2.4.2. Résistance à la flexion pure.....	- 23 -
2.4.3. Résistance à la flexion locale (Effet Vierendeel)	- 24 -
2.5. Poutres comportant des ouvertures d'âme multiples.....	- 30 -
2.5.1. Méthodes d'analyse globale.....	- 30 -
2.5.2. Résistance à la flexion globale.....	- 31 -
2.5.3. Résistance à la flexion Vierendeel.....	- 31 -
2.5.3.1. Ouvertures polygonales.....	- 31 -
2.5.3.2. Résistance à la flexion des Tés.....	- 32 -
2.5.3.3. Influence de l'effort tranchant sur la résistance à la flexion.....	- 32 -
2.5.3.4. Effet de l'effort axial sur la résistance.....	- 33 -
2.5.3.5. Ouvertures Circulaires.....	- 34 -
2.4.2.5. Résistance au flambement du montant d'âme... ;.....	- 35 -
2.4.2.6. Résistance au cisaillement longitudinal.....	- 40 -
2.6. Etudes numériques de la littérature.....	- 40 -
2.7. Aperçu sur les études expérimentales de la littérature.....	- 46 -
2.8 Conclusions.....	- 54 -
 Références.....	 - 56 -

2.1. Introduction

L'étude de la littérature permet d'identifier les paramètres importants qui entrent en jeu et d'établir les exigences nécessaires pour modéliser de manière aussi réaliste que possible le comportement des poutres en acier et mixte avec de larges ouvertures dans l'âme. L'objectif de ce chapitre est donc de faire un tour d'horizon des démarches utilisées pour étudier et dimensionner ce type de poutre. On peut classer ces démarches en trois catégories principales suivantes :

- Méthodes analytiques ;
- Méthodes expérimentales ;
- Méthodes numériques.

2.2. Normes et codes de dimensionnement

L'influence des ouvertures sur la répartition des contraintes élastiques est étudiée depuis plus de 100 ans mais les solutions trouvées ne sont pas toujours utiles pour l'évaluation de la résistance d'une poutre comportant une âme ajourée. Une bonne idée d'origine inconnue, et qui est toujours utilisée, consistait à appliquer la théorie utilisée pour les poutres Vierendeel à la partie de la poutre comportant une ouverture [1].

Des règles de calcul pour les poutres laminées comportant des âmes ajourées ont été élaborées aux USA au cours des années 1960, par exemple en [2], [3], et [4]. Les premières recommandations européennes, qui couvraient également les poutres comportant des âmes minces, furent élaborées par Höglund et Johansson dans le cadre d'un projet CECA et publiées en 1977 [5]. Ces recommandations concernaient les ouvertures raidies et non raidies. Ces recommandations, avec d'autres informations, furent à la base de l'Annexe N de l'ENV 1993-1-1 [6]. On trouvera d'autres origines et contributions à l'élaboration de règles de calcul dans les références [7, 8, 9].

La Publication SCI 068 "Design of openings in the webs" [10] a été élaborée en 1987 afin de présenter une méthode de dimensionnement pour les poutres en acier laminées à chaud munies d'ouvertures distinctes utilisées en construction mixte. La méthodologie a été calibrée au moyen d'essais réalisés sur des poutres mixtes de 10 m de portée à l'Université de Warwick [11].

La Publication SCI P100 [12] a été élaborée en 1990 afin d'étendre la méthodologie de dimensionnement aux poutres munies d'ouvertures circulaires régulières. La nouveauté de la

publication SCI P100 était la méthode de calcul pour l'interaction des forces entre des ouvertures adjacentes et son effet sur la stabilité du montant d'âme.

Dans le cadre du projet CECA 72106-PR-315 "Ouvertures de grandes dimensions dans les âmes pour l'intégration des équipements techniques dans les planchers mixtes "[13], des recommandations de calcul de poutres mixtes et non mixtes comportant des âmes avec ouvertures multiples régulièrement espacées ou ouvertures de grandes dimensions dans des conditions normales (à froid) sont proposées et publiées en [14,15]. Ces nouvelles publications étendent les recommandations proposées dans les publications SCI 068 [10] et SCI P100 [12] en couvrant les cas suivants :

- sections fortement dissymétriques ;
- ouvertures excentrées sur la hauteur de la section ;
- âmes élancés ;
- montants d'âme de faible largeur ;
- ouvertures circulaires oblongues ;
- Profilés reconstitués ;
- poutres grugées ;
- ouvertures adjacentes.

Ces publications élaborées en terme d'analyse globale, renvoie au BS-5950 [16,17], aux Eurocodes 3 [18] et aux Eurocodes 4 [19] selon le cas pour les coefficients partiels, les charges, les limites de la connexion partielle et les résistances au cisaillement des connecteurs etc.

D'autres recommandations internationales sur les poutres comportant des ouvertures d'âmes de grandes dimensions existent aux Etats-Unis [20], mais elles ne s'appliquent pas aux poutres cellulaires ou aux poutres munies d'ouvertures rapprochées.

Diverses méthodes de dimensionnement empiriques ont été développées dans l'ancienne Annexe N de l'Eurocode 3 [6] que nous allons décrire sommairement dans les sections suivantes.

Actuellement, les Eurocodes ne prévoient pas le calcul des poutres à âmes ajourées, qu'elles soient mixtes ou en acier. Le calcul des poutres en acier avec ouvertures dans l'âme était prévu dans l'Annexe N [6] de la version ENV de l'EC3 partie 1-1, mais cette annexe n'a pas été retenue dans la version définitive. Elle demeure cependant un document de référence pour le calcul de ce type de poutres.

2.3. Classification des sections transversales

Un profilé en acier est composé de plusieurs plaques (âmes et semelles). Si l'une d'elles est soumise à des contraintes longitudinales de compression, un voilement local peut survenir causant l'apparition de cloques et une diminution de la rigidité de la plaque. *Il y a trois types de comportements des profils soumis à flexion jusqu'à la ruine : le voilement local d'une paroi en régime élastique, le voilement local à l'atteinte du moment plastique, l'absence de voilement local jusqu'à une rotation plastique importante.*

L'EN 1993-1-1 [18] tient compte des effets du voilement local à l'aide d'une classification de la section transversale divisée en quatre classes :

les sections de classe 1 sont des sections transversales pouvant former une rotule plastique avec la capacité de rotation requise pour une analyse plastique;

les sections de classe 2 sont des sections transversales pouvant développer leur moment de résistance plastique $M_{pl,Rd}$, mais avec une capacité de rotation limitée;

les sections de classe 3 sont des sections transversales dont la contrainte calculée dans la fibre extrême de l'élément en acier peut atteindre la limite d'élasticité, mais dont le voilement local est susceptible d'empêcher le développement du moment de résistance plastique ; le moment de résistance est réduit au moment $M_{el,Rd}$;

les sections de classe 4 sont des sections transversales dont la résistance au moment fléchissant ($M_{eff,Rd} < M_{el,Rd}$) ou à la compression doit être déterminée avec prise en compte explicite de voilement local.

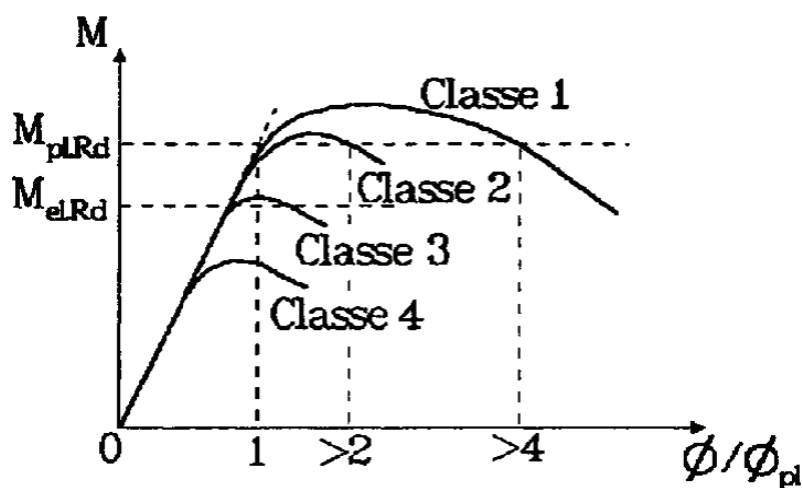


Figure 2.1. Classification des sections transversales en fonction du moment résistant et de la capacité de rotation [18]

La classe à laquelle appartient une section transversale dépend des proportions (rapport largeur-épaisseur) de ses parois comprimées (âme, semelles), du type de chargement (compression, flexion, flexion composée) et de la limite d'élasticité du matériau constitutif. Des lois types de comportement moment-rotation correspondant à chaque classe de section sont présentées dans la figure 2.1, tout risque de déversement étant empêché.

Les sections transversales non ajourées de la poutre situées à une distance éloignée des ouvertures d'âme doivent comporter des semelles de Classe 1 ou de Classe 2 et une âme de Classe 1, 2 ou 3. Les formules permettant de définir la classe des semelles et des âmes non ajourées sont définies dans l'Eurocode 3 (version EN 1993-1-1) (clause 5.3.4 (5)) [18]. D'autre part, il est prescrit que lorsque la section comporte une âme de classe 3 et des semelles de classe 1 ou de classe 2, il est possible de traiter la section comme une section efficace de Classe 2.

La classification des sections perforées est définie par l'Annexe N de l'Eurocode 3 (version ENV1993-1-1) [6]. Cette classification est définie en terme de niveau de plastification à la rupture et de la possibilité d'occurrence du voilement local au niveau du Té supérieur comprimée comme il est montré dans la figure 2.2.

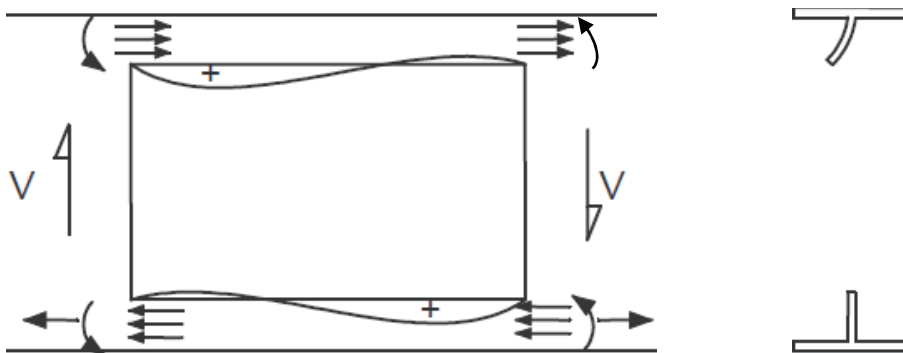


Figure 2.2. Voilement local au niveau d'un Té supérieur non raidi [1]

La classification de la partie en console de l'âme du Té dépend de sa longueur et de sa hauteur. Elle peut être classé à l'aide des formules ci-dessous, qui emploient les notations de la figure 2.3 :

$$\text{Âme de classe 2 : } b_{wc} \leq \frac{10 t_w \epsilon}{\sqrt{1 - \left(\frac{32 t_w \epsilon}{l_0} \right)^2}} \quad \text{ou } l_0 > 32 t_w \epsilon$$

Âme de classe 3 :
$$b_{wc} \leq \frac{14t_w \varepsilon}{\sqrt{1 - \left(\frac{36t_w \varepsilon}{l_o}\right)^2}} \quad \text{ou } l_o > 36t_w \varepsilon$$

où

b_{wc} longueur saillante d'âme des Tés b_{w1} ou b_{w2} indiquée sur la figure 2.3;

l_o longueur efficace de l'ouverture définie dans la figure 2.4.

$$\varepsilon = \sqrt{235 / f_{yw}}$$

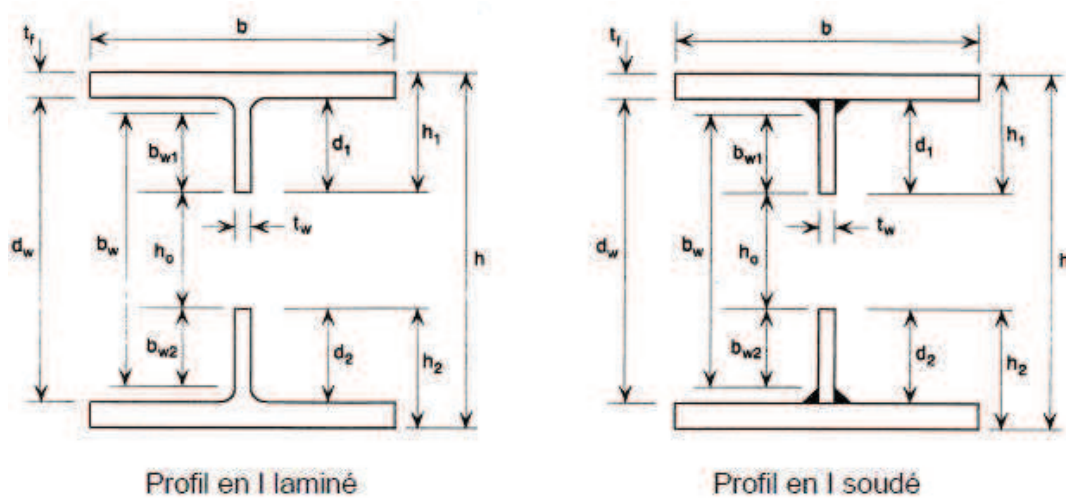
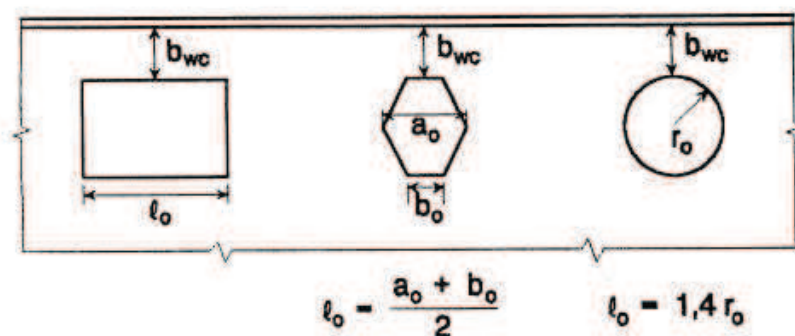


Figure 2.3. Géométrie des sections transversales perforées [6]

En raison de la faible ampleur des rotations de rotule plastique nécessaires à l'apparition du mécanisme Vierendeel, il est suffisant pour les âmes non raidies des Tés situés au-dessus et au-dessous des ouvertures d'âmes d'être de classe 2 ou 3. L'analyse globale plastique des poutres ajourées faisant partie des structures hyperstatiques (poutres continues, portiques) n'est donc pas autorisée.



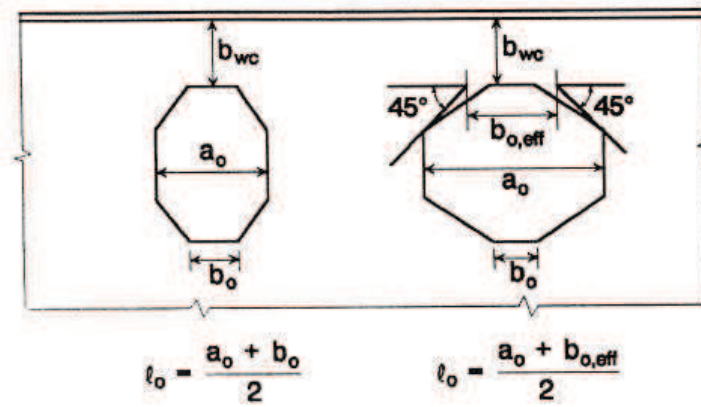


Figure 2.4. Notations pour la classification des âmes des Tés non raidis [6]

La classe d'une section transversale est, normalement, la classe la plus haute (la plus défavorable) de ces parois comprimées.

2.4. Résistance des sections au droit des ouvertures isolées

Des ouvertures peuvent être considérées comme isolées lorsque leur espacement bord à bord est supérieur au diamètre d_o des ouvertures circulaires ou à la largeur l_o des ouvertures rectangulaires ou oblongues. Dans ce cas les effets d'interaction dans le montant d'âme peuvent être négligés.

2.4.1. Résistance au cisaillement

Pour les poutres en I ou en H, la résistance au cisaillement vertical au milieu d'une ouverture est assurée essentiellement par l'âme de la poutre. Redwood [8] propose de calculer la résistance au cisaillement plastique de la section nette au droit d'une ouverture par la formule :

$$V_{opl,Rd} = \frac{(d_w - h_o) \times t_w}{\sqrt{3}} f_{yw} \quad (2.1)$$

où

d_w est la hauteur hors-tout de l'âme ;

h_o est la hauteur de l'ouverture, dans le cas d'une ouverture circulaire h_o est remplacée par son diamètre d_o ;

t_w est l'épaisseur de l'âme;

f_{yw} est la limite élastique de l'âme.

Pour tenir compte du rôle joué par les semelles dans la résistance au cisaillement vertical, Chung et al [21] ont proposé la formule suivante :

$$V_{opl,Rd} = \frac{A_v - h_0 \times t_w}{\sqrt{3}} f_y \quad (2.2)$$

où A_v est l'aire de cisaillement de la section transversale non perforée déterminée par la formule suivante :

$$A_v = d_w \times t_w + 2 \times [(0.75 t_f + t_w) \times t_f] \quad (2.3)$$

t_f est l'épaisseur des semelles et t_w est l'épaisseur de l'âme.

Dans l'annexe N de la version ENV-1993-1-1 de l'Eurocode 3 [6], la résistance au cisaillement est calculée en deux étapes. La première correspond au calcul de la résistance au voilement par cisaillement, la deuxième au calcul de la résistance au cisaillement pur, obtenue par somme des résistances au cisaillement des deux Tés. Il s'agit alors de vérifier :

- pour les ouvertures rectangulaires :

$$V_{opl,Rd} = \left(V_{pl,Rd} - \frac{h_0 t_w f_{yw}}{\gamma_{M0} \sqrt{3}} \right) \sqrt{\frac{\eta}{\eta + 1}} \quad (2.4)$$

avec

$V_{pl,Rd}$ résistance plastique au cisaillement de la section non perforée calculée selon l'EC3-1.1 (clause 5.4.6) [18] par la formule :

$$V_{pl,Rd} = \frac{f_{yw}}{\gamma_{M0} \sqrt{3}} A_v \quad (2.5)$$

et

$$A_v = A - 2b_f t_f + (t_w + 2r) t_f \quad (2.6)$$

et

$\gamma_{M0} = 1,0$: coefficient partiel de sécurité;

A : Aire de la section transversale de la poutre en acier sans ouverture;

r : rayons de congé du profilé laminé;

η : coefficient qui tient compte de l'influence de l'excentricité de l'ouverture sur la résistance au cisaillement, déterminé à partir de la formule :

$$\eta = 0.75 \left[\frac{(d_w - h_0)^2 + 4e_0^2}{a_0 (d_w - h_0)} \right] \quad (2.7)$$

où e_0 est l'excentricité entre le centre de l'ouverture et la mi-hauteur de l'âme de la poutre.

- pour les ouvertures circulaires :

$$V_{opl,Rd} = \left(V_{pl,Rd} - \frac{0.9d_0 t_w f_{yw}}{\gamma_{M0} \sqrt{3}} \right) \sqrt{\frac{\eta}{\eta+1}} \quad (2.8)$$

avec

$$\eta = 0.75 \left[\frac{(d_w - 0.9d_0)^2 + 4e_0^2}{d_0 (d_w - 0.9d_0)} \right] \quad (2.9)$$

et

$$V_{oba,Rd} = V_{ba,Rd} \left(1 - \frac{d_o + 0.3a_o}{d} \right) \quad (2.10)$$

La résistance au voilement par cisaillement $V_{oba,Rd}$ d'une section transversale perforée est calculée par les expressions suivantes :

- pour les ouvertures rectangulaires :

$$V_{oba,Rd} = V_{ba,Rd} \left(1 - h_0/d_w + 0.3a_0/d_w \right) \quad (2.10)$$

- pour les ouvertures circulaires :

$$V_{oba,Rd} = V_{ba,Rd} \left(1 - d_0/d_w \right) \quad (2.11)$$

où $V_{ba,Rd}$ représente la résistance au voilement par cisaillement de la section transversale non perforée définie par l'Eurocode 3 (clause 5.6.3) [18].

Le coefficient de réduction appliqué à la résistance au cisaillement de l'âme non perforé est basé sur un modèle qui prend en compte l'action de Vierendeel ainsi que le voilement par

cisaillement. Dans de nombreux cas, ces modes de ruine sont interactifs et il peut s'avérer difficile d'identifier celui qui domine [1].

La vérification au milieu de l'ouverture consiste donc à s'assurer que :

$$V_{o,sd} \leq V_{o,Rd} = \min\{V_{opl,Rd}, V_{oba,Rd}\} \quad (2.12)$$

où

$V_{o,sd}$ et $V_{o,Rd}$ représentent respectivement l'effort tranchant sollicitant et la résistance au cisaillement pur au milieu de la section perforée.

2.4.2. Résistance à la flexion pure

Pour une ouverture sollicitée en flexion simple, on doit vérifier que le moment sollicitant $M_{o,sd}$ au centre de l'ouverture reste inférieur au moment résistant $M_{o,Rd}$ de la section perforée :

$$M_{o,sd} \leq M_{o,Rd} \quad (2.13)$$

Le moment de flexion, en présence d'ouverture, engendre deux efforts normaux dans les Tés supérieur et inférieur au centre de l'ouverture. L'un des deux Tés est sollicité en compression tandis que l'autre l'est en traction. On suppose que les efforts normaux sont appliqués au niveau du centre de gravité des Tés supérieur et inférieur (figure 2.5).

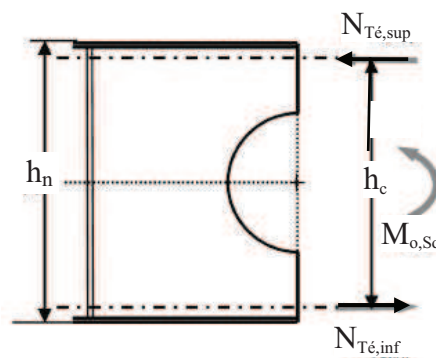


Figure 2.5. Efforts normaux dans les Tés [22]

Pour calculer la position de l'axe neutre du Té comprimé, on considère la section brute lorsque cette section est de classe 1, 2 ou 3. Sinon, il s'agit de la position de l'axe neutre de la

section efficace. Bitar [22] définit cette section efficace comme étant constituée de la semelle comprimée (au plus de classe 3) et une partie de l'âme de hauteur égale à :

$$\frac{(14 \times \varepsilon \times t_w)}{[1 - (51.4 \times \varepsilon \times t_w / d_o)^2]^{0.5}} \quad (2.14)$$

Dans le cas d'une ouverture rectangulaire, il convient de remplacer d_o par h_o .

La résistance à la flexion pure en présence d'ouverture, et sans effort tranchant, s'écrit sous la forme :

$$M_{o,Rd} = \frac{A_{Té} \times f_y}{\gamma_{M0} \times d_c} \quad (2.15)$$

où

$$A_{Té} = \min\{A_{Té,sup}, A_{Té,inf}\} \quad (2.16)$$

et

$A_{Té,sup}$ et $A_{Té,inf}$ sont respectivement les aires des Tés supérieur et inférieur;

h_c est le bras de levier.

2.4.3. Résistance à la flexion locale (Effet Vierendeel)

La vérification du transfert de l'effort tranchant sur la longueur de l'ouverture, dit effet Vierendeel, est l'objet essentiel des vérifications locales. L'effet Vierendeel provient du fait que l'effort de cisaillement doit transiter et se transmettre à travers l'ouverture qui fait obstacle à cette transmission. Les sollicitations globales au milieu d'une ouverture induisent aux extrémités des Tés supérieur et inférieur les efforts internes locaux suivants (figure 2.6) :

- des efforts normaux de compression N dans le Té supérieur et de traction N dans le Té inférieur dus à l'action du moment de flexion globale $M_{o,sd}$;
- des efforts tranchants dus à l'action de l'effort tranchant global $V_{o,sd}$;
- des moments locaux ou moments Vierendeel, dus au transfert de l'effort tranchant $V_{o,sd}$ à travers l'ouverture.

Pour une poutre avec des conditions d'appui et un chargement donnée, les efforts dans les Tés sont tributaires de la forme de l'ouverture, de ses dimensions relatives par rapport aux dimensions de la poutre, de sa position par rapport à ceux des appuis et de sa situation en hauteur par rapport à l'axe de la poutre.

Dans la littérature, on trouve deux familles de méthodes de vérification de la résistance à l'effet Vierendeel [21].

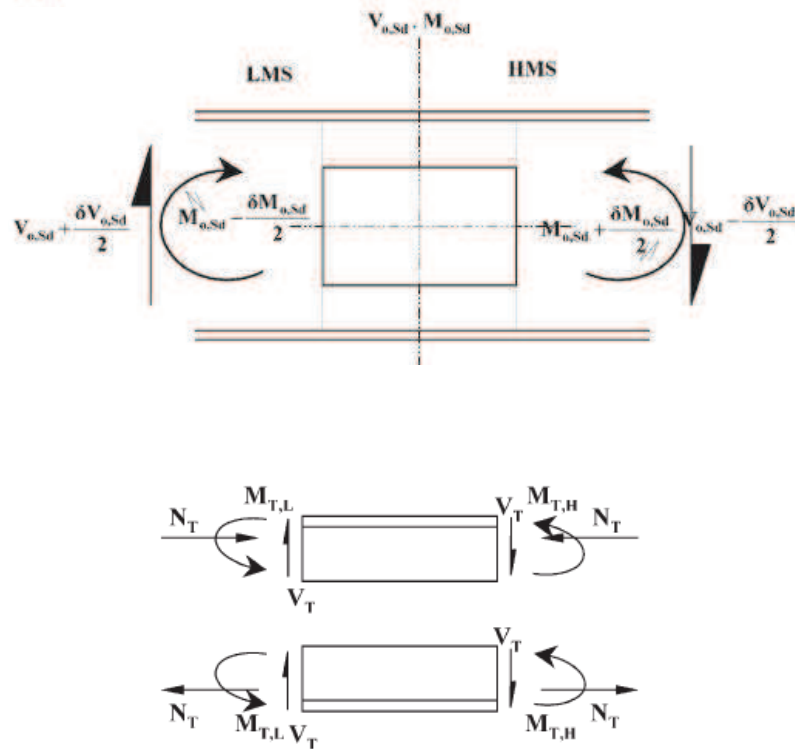


Figure 2.6. Répartition des efforts au droit d'une ouverture centrée [21]

Dans la première famille de méthodes, la résistance à l'effet Vierendeel au droit d'une section perforée est déterminée en considérant séparément les résistances ultimes des Tés supérieur et inférieur. La résistance ultime de chaque Té est déterminée en tenant compte de l'interaction entre le moment, l'effort tranchant et l'effort normal. Ceci conduit à un calcul itératif long et fastidieux. Des hypothèses simplificatrices sont souvent adoptées, conduisant à des résultats moins précis, mais du côté de la sécurité. Ce type de démarche est surtout utilisé dans le cas des poutres mixtes.

Dans la deuxième famille de méthodes, on construit un diagramme d'interaction M-V qui définit les limites du domaine de résistance au centre ou aux bords de l'ouverture soumis à une combinaison de moment fléchissant et effort tranchant. Toute combinaison $(M_{o,sd}-V_{o,sd})$ située soit à l'intérieur, soit sur la frontière de la courbe résistance est admissible vis-à-vis de la résistance Vierendeel. Les premiers modèles proposés consistaient à déterminer des couples de valeurs $M_{o,rd}$ et $V_{o,sd}$ qui donnent des points situés sur la frontière du diagramme M-V. Le

diagramme est complété par le tracé des droites entre ses points, comme illustrée dans la figure 2.7. Ce type de démarche peu pratique pour construire des courbes d'interaction M-V était surtout destiné à la recherche [23, 24, 25, 26, 27]. Actuellement, les diagrammes d'interaction sont construits de façon plus simple afin de faciliter le dimensionnement. Le principe étant de calculer le moment résistant en flexion pure ainsi que l'effort tranchant résistant en cisaillement pur au milieu de l'ouverture puis relier ces points par une courbe. Les courbes proposées s'accordent sur le calcul du moment ultime. Cependant, ils se différencient par le calcul de l'effort tranchant ultime et l'équation de la courbe utilisée pour définir le domaine de résistance. Actuellement, les modèles utilisant une seule courbe sont les plus répandus

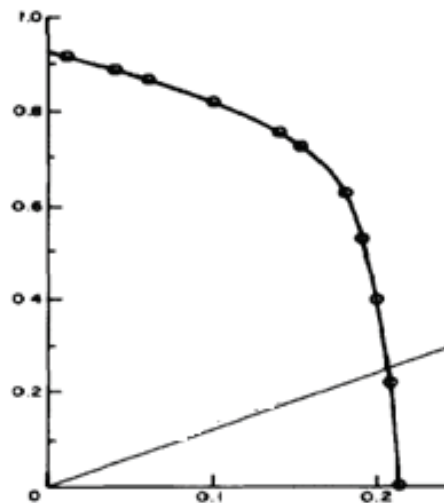


Figure 2.7. Diagramme d'interaction construit à partir de plusieurs points

Darwin et Donahey [28] ont utilisé un critère de résistance cubique en exprimant sous forme adimensionnel la relation entre le moment fléchissant et l'effort tranchant résistants (M_n et V_n , selon les notations de Darwin) au milieu de l'ouverture en fonction du moment résistant en flexion pure M_m et de l'effort tranchant résistant en cisaillement pur V_m telle que représentée sur la figure 2.8. Ce critère est adopté pour les poutres en acier ou mixtes munies d'ouvertures rectangulaires pouvant être excentrées par rapport à la mi-hauteur de l'âme de la poutre.

Redwood [29] a proposé un diagramme d'interaction (figure 2.9), dans lequel les paramètres adimensionnels contrôlant l'interaction entre le moment fléchissant M et l'effort tranchant V au milieu d'une ouverture rectangulaire centrée sont les rapports M/M_p et V/V_p , où M_p et V_p sont respectivement le moment fléchissant résistant en flexion pure et l'effort tranchant résistant en cisaillement pur au droit de la section considérée supposée sans ouverture. Cette

relation a été établie en considérant que le matériau obéit à un comportement élasto-plastique parfait et au critère de plasticité de von Mises.

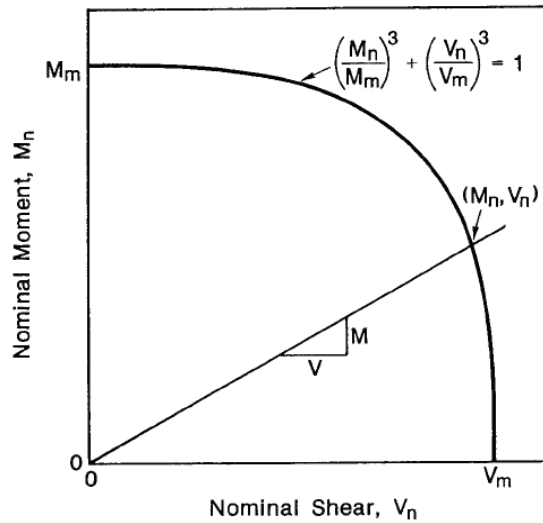


Figure 2.8. Diagramme cubique d'interaction Moment-Effort tranchant [28]

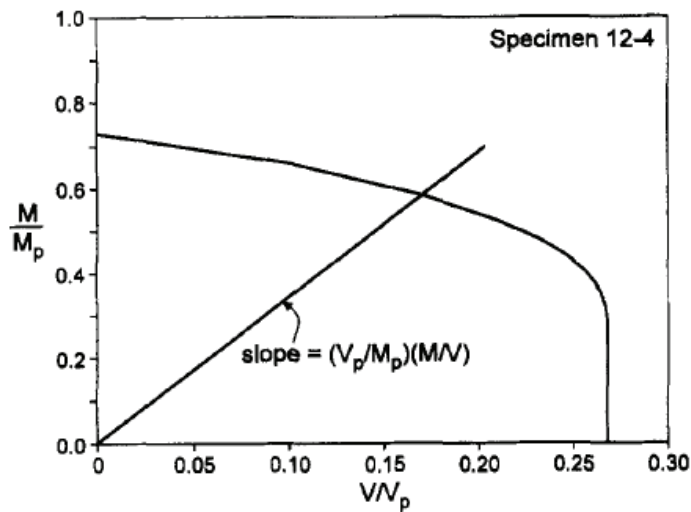


Figure 2.9. Courbe d'interaction Moment-Effort tranchant [29]

En présence d'une ouverture circulaire centrée à mi-hauteur de l'âme, le critère de résistance proposé par Chung [30] s'écrit sous la forme :

$$\left(\frac{M_{o,sd}}{M_{o,Rd}} \right)^{2,5} + \left(\frac{V_{o,sd}}{V_{opl,Rd}} \right)^{2,5} \leq 1 \quad (2.17)$$

$V_{op1,Rd}$ et $M_{o,Rd}$ sont respectivement l'effort tranchant résistant et le moment fléchissant résistant de la section perforée calculés par les formules (2.1) et (2.15).

Le critère de résistance quadratique proposée par Chung et Liu [31] pour des poutres en acier munies d'ouvertures centrées de formes diverses (rectangulaire, circulaire, hexagonale, octogonale ou oblongue) est fondée sur des résultats d'analyses non linéaires par éléments finis menée par Liu et Chung [32]. Le critère de résistance s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \bar{v} < 2/3 v \quad M_{v,Rd} &= M_{o,Rd} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{\bar{v}}\right)^2} \geq M_{o,Sd} \\ \bar{v} \geq 2/3 v \quad M_{v,Rd} &= M_{o,Rd} \sqrt{1 - \left[\frac{v - (\bar{v} - 2/3)}{2/3}\right]^2} \geq M_{o,Sd} \end{aligned} \quad (2.18)$$

où

$$\bar{v} = \frac{V_{v,Rd}}{V_{o,Rd}} \quad \text{et} \quad v = \frac{V_{o,Sd}}{V_{o,Rd}} \quad (2.19)$$

$M_{v,Rd}$ et $V_{v,Rd}$ sont respectivement le moment fléchissant et l'effort tranchant résistants à mi-longueur de l'ouverture évalués en tenant compte de l'influence du moment vierendeel. Le paramètre \bar{v} est donné par un tableau établi à partir des résultats de calcul par éléments finis.

Il est déterminé en fonction de la forme de l'ouverture et du paramètre d'aspect $\frac{d_o}{h_n}$ ou $\frac{h_o}{h_n}$.

Les vérifications proposées dans l'annexe N [6] tiennent compte de la classe des sections non perforées. Le moment de résistance $M_{o,Rd}$ d'une poutre à mi-longueur d'une ouverture d'âme, en tenant compte des effets de l'effort tranchant V_{Sd} s'exerçant dans une section donnée, peut être déterminé, selon la forme de l'ouverture au moyen des formules approchées suivantes :

a) Ouvertures rectangulaires :

- pour les sections transversales de Classe 1 et 2 :

$$M_{o,Sd} \leq M_{o,Rd} = M_{pl,Rd} \left(1 - 0.25 t_w h_0 (h_0 + 4e_0) / W_{pl} - \mu_1 V_{Sd} / V_{o,Rd}\right) \quad (2.20)$$

- pour les sections de classe 3 :

$$M_{o,Sd} \leq M_{o,Rd} = M_{el,Rd} \left(1 - \frac{t_w (h_0 + 2e_0)^3}{12I_y} - \mu_1 \frac{V_{Sd}}{V_{o,Rd}}\right)$$

avec :

$$\begin{aligned}\mu_1 &= 0.25 t_w d_w^2 [1 + 3(0.7 - h_0/d_w) a_0/d_w] / W_{pl} \\ \mu_2 &= 1.125 - 0.001 a_0/t \quad \text{pour } a_0/t_w > 125\epsilon \\ \mu_2 &= 1 \quad \text{pour } a_0/t_w > 125\end{aligned} \quad (2.21)$$

b) Ouvertures circulaires :

- pour les sections transversales de Classe 1 et 2 :

$$M_{o,Sd} \leq M_{o,Rd} = M_{pl,Rd} \left(1 - 0.225 t_w d_0 (0.9 d_0 + 4 e_0) / W_{pl} - \mu_1 V_{Sd} / V_{o,Rd} \right) \quad (2.22)$$

- pour les sections de classe 3 :

$$M_{o,Sd} \leq M_{o,Rd} = M_{el,Rd} \left(1 - \frac{t_w (0.9 d_0 + 2 e_0)^3}{12 I_y} - \mu_1 \frac{V_{Sd}}{V_{o,Rd}} \right) \quad (2.23)$$

avec

$$\mu_1 = 0.25 t_w d_w^2 [1 + 1.35(0.7 - 0.9 d_0/d_w) a_0/d_w] / W_{pl} \quad (2.24)$$

où

I_y : moment d'inertie de flexion de la section transversale non perforée;

$M_{el,Rd}$: moment de résistance élastique de la section transversale non perforée, selon l'EC3 (clause 5.4.5.1);

$M_{pl,Rd}$: moment de résistance plastique de la section transversale non perforée, selon l'EC3 (clause 5.4.5.1);

$V_{o,Rd}$: résistance au cisaillement de la section transversale perforée, selon l'Annexe N (clause N.2.1.3);

W_{pl} : module plastique de la section transversale non perforée.

La réduction du moment de résistance provoquée par une ouverture d'âme isolée peut être négligée pour les sections transversales situées à une distance de l'ouverture supérieure à a_p définie par les expressions suivantes :

- si $d_w/t_w \leq 90 \epsilon$:

- pour une ouverture rectangulaire : $a_p = h_0$

- pour une ouverture circulaire : $a_p = d_0$

- si $d_w / t_w > 90 \epsilon$:

- pour une ouverture rectangulaire : $a_p = \left(\frac{d_w / t_w}{90\epsilon} \right) h_0$ mais $a_p \leq d_w$

- pour une ouverture circulaire : $a_p = \left(\frac{d_w / t_w}{100\epsilon} \right) d_0$ mais $a_p \leq d_w$

En outre, l'Annexe N (clause N.2.1.5) propose des formules pour le calcul des efforts tranchants et des moments résistants, sous certaines conditions, pour les poutres avec ouvertures d'âme renforcées.

2.5. Poutres comportant des ouvertures d'âme multiples

L'annexe N de l'Eurocode 3 donne une méthode de calcul des poutres métalliques avec ouvertures d'âme multiples. Elle s'applique uniquement aux profilés en I laminés ou soudés. Le cas de profilés à semelles inégales n'est pas pris en compte, de même que le cas des poutres mixtes ajourées.

L'annexe prévoit les formes d'ouverture suivantes :

- ouverture rectangulaire;
- ouverture circulaire;
- ouverture hexagonale;
- ouverture circulaire étendue (ouverture oblongue);
- ouverture octogonale.

2.5.1. Méthode d'analyse globale

Lors de l'analyse globale d'une poutre comportant des ouvertures d'âme multiples (poutres ajourées), il est d'usage d'adopter comme modèle de calcul une poutre Vierendeel, où l'on suppose que les charges sont appliquées au droit des montants, comme illustrée sur la figure

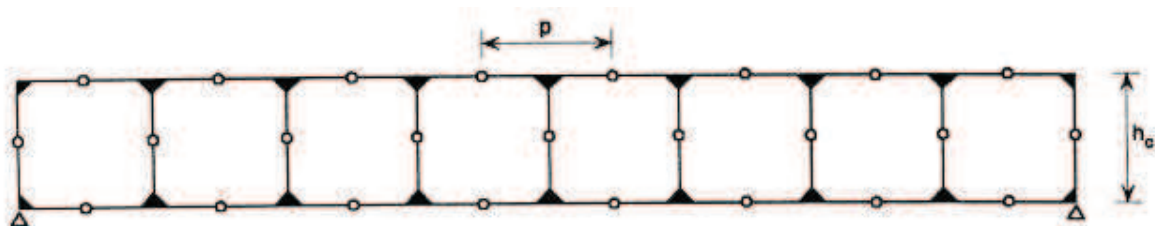


Figure 2.10. Modèle simplifié utilisé pour l'analyse des poutres ajourées [6]

2.10. Par ailleurs, l'analyse selon le cas peut être simplifiée en prenant pour hypothèse des points d'inflexion à mi-longueur de chaque ouverture et à mi-hauteur de chaque montant d'âme [6]. Dans la figure 2.10, h_c désigne la hauteur entre les centres de gravité des tés supérieur et inférieur.

2.5.2 Résistance à la flexion globale

La résistance à la flexion globale à mi-longueur d'une ouverture est calculée de façon analogue à celle utilisée au milieu d'une ouverture isolée présentée au paragraphe 2.4.2.

2.5.3. Résistance à la flexion Vierendeel

2.5.3.1. Ouvertures polygonales

Pour chaque ouverture d'âme polygonale, le moment Vierendeel appliqué $M_{v,Sd}$ doit satisfaire la condition suivante :

$$M_{v,Sd} = b_0 V_{o,Sd} \leq \sum M_{v,Rd} = 2 M_{pl,Rd,t} + 2 M_{pl,Rd,b} \quad (2.25)$$

où

b_0 est la longueur minimale de l'ouverture (voir figure 2.4);

$\sum M_{v,Rd}$ est la résistance totale au moment Vierendeel;

$M_{pl,Rd,t}$ est le moment de résistance du Té supérieur;

$M_{pl,Rd,b}$ est le moment de résistance du Té inférieur ;

Les moments de résistance des Tés doivent être calculés en tenant compte de l'effort axial $N_{M,Sd}$ coexistant provoqué par le moment global M_{sd} et de l'effort tranchant $V_{T,Sd}$ coexistant provoqué par l'effort tranchant global V_{sd} .

Dans le cas d'ouvertures centrées sur la hauteur de la section, les efforts axiaux et les efforts tranchants s'exerçant sur les Tés sont calculés par les expressions :

$$V_{T,Sd} = \frac{V_{o,Sd}}{2} \quad N_{T,Sd} = \frac{M_{o,Sd}}{h_c} \quad (2.26)$$

2.5.3.2. Résistance à la flexion des Tés

- Résistance plastique

Des blocs de répartition plastique des contraintes peuvent être pris en compte lorsque les Tés satisfont aux limites de classification de section pour une section de Classe 1 ou 2. La résistance à la flexion plastique du Té $M_{pl,Rd,T}$ est calculée de la façon suivante :

$$M_{pl,Rd,T} = A_w f_y (b_w / 2 + t_f - y_p) + A_f f_y (y_p - t_f / 2) \quad (2.27)$$

où la position de l'axe neutre plastique y_p est donnée par :

$$y_p = (A_f + A_w) / 2b_f \quad (2.28)$$

où

$A_w = b_w t_w$ aire de la section transversale de l'âme du Té ;

A_f aire de la section transversale de la semelle.

- Résistance élastique

Il convient d'utiliser l'analyse élastique pour les semelles de classe 3 ou les âmes de classe 4. La hauteur des âmes de classe 4 peut être réduite à la hauteur correspondant à la limite de la classe 3. La résistance à la flexion élastique du Té $M_{el,Rd,T}$ est calculée de la façon suivante :

$$M_{el,Rd,T} = \frac{A_w f_y (b_w / 2 + t_f - y_e)^2 + A_f f_y (y_e - t_f / 2)^2}{d_t + t_f - y_e} \quad (2.29)$$

où la position de l'axe neutre élastique est donné par :

$$y_e = \frac{A_w (b_w / 2 + t_f) + A_f t_f / 2}{A_f + A_w} \quad (2.30)$$

2.5.3.3. Influence de l'effort tranchant sur la résistance à la flexion des Tés

La présence d'un effort tranchant élevé au niveau des ouvertures réduit l'efficacité de l'âme vis-à-vis de la résistance à la flexion des Tés. Le moment de résistance plastique du Té, en tenant compte la combinaison coexistante d'effort tranchant et d'effort axial est calculé dans l'Eurocode 3-1-1 (clause 5.4.7) [18] selon la démarche suivante.

Lorsque la valeur de calcul $V_{T, Sd}$ de l'effort tranchant ne dépasse pas 50% de la résistance plastique de calcul au cisaillement $V_{pl, Rd, T}$, il n'est pas nécessaire de réduire les résistances de flexion données par . La résistance au cisaillement $V_{pl, Rd, T}$ est déterminé par la formule dans laquelle l'aire de cisaillement A_v pour les sections des Té provenant des profilés laminés en I ou en H est prise égale à :

$$A_v = 0.9(A_{Té} - b_f t_f) \quad (2.31)$$

où $A_{Té}$ est l'aire de la section transversale du Té.

Dans l'EC3-1-1, le coefficient de forme pour un Té est pris égal à 0.9 pour refléter l'état de contrainte non uniforme pour ces sections [33].

Lorsque l'effort tranchant $V_{T, Sd}$ dépasse 50% de $V_{pl, Rd, T}$, la valeur du moment de résistance plastique réduit $M_{v, Rd, T}$, compte tenu de l'effort tranchant, est pris égal au moment de résistance plastique de calcul de la section transversale, déterminé en utilisant une limite d'élasticité réduite $(1 - \rho) f_{yw}$ pour l'aire de cisaillement où :

$$\rho = \left(2 \frac{V_{Sd, T}}{V_{pl, Rd, T}} - 1 \right)^2 \quad (2.32)$$

2.5.3.4. Influence de l'effort axial sur la résistance à la flexion des Tés

La résistance à la flexion des Tés est réduite en raison de la traction axiale, selon les formules d'interaction de l'Eurocode 3 [18] :

$$\text{- Résistance plastique : } M_{v, Rd, T} = M_{pl, Rd, T} (1 - (N_{T, Sd} / N_{pl, Rd, T})^2) \quad (2.33)$$

$$\text{- Résistance élastique : } M_{v, Rd, T} = M_{el, Rd, T} (1 - (N_{T, Sd} / N_{el, Rd, T})^2) \quad (2.34)$$

où

$M_{v, Rd, T}$ est la résistance réduite de la section du Té;

$N_{T, Sd}$ est l'effort de traction ou de compression axiale dû à l'action du moment global;

$N_{el, Rd, T}$ est la résistance élastique à l'effort normal du Té;

$N_{pl, Rd, T}$ est la résistance plastique à l'effort normal du Té.

2.5.3.5. Ouvertures Circulaires

Au droit des ouvertures circulaires, la méthode élaborée par Ward [12] est fondée sur les travaux d'Olander [34] et Sahmel [35]. Cette approche a été introduite par la suite dans l'annexe N [6] après avoir subi quelques modifications. Le principe de cette méthode consiste à projeter les efforts réduits au droit de l'ouverture sur des sections inclinées, planes [35] ou incurvées [34], d'angle $\pm\phi$, comme illustré sur la figure 2.11. L'angle ϕ critique varie entre 20 et 30° [36]. La résistance de chaque section inclinée d'un angle ϕ est vérifiée en faisant varier cet angle de 25° à ϕ_{\max} par incrément de 5° en cas de calcul manuel et 1° en cas de calcul sur ordinateur [6].

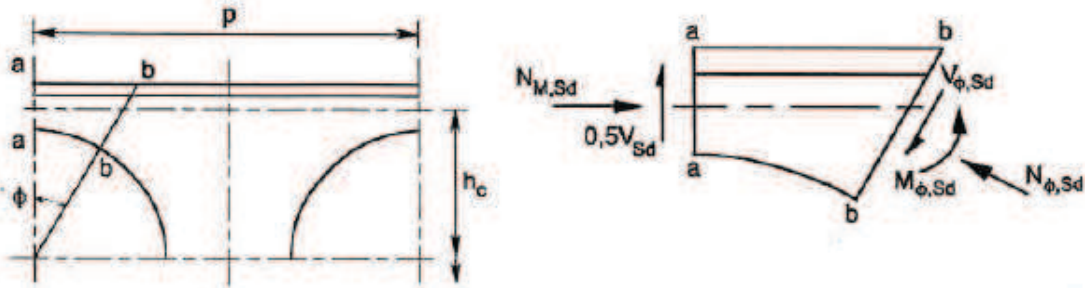


Figure 2.11. Sollicitations sur une section plane inclinée d'un angle ϕ [6]

Redwood [37] a suggéré de fixer l'angle critique à une valeur égale à $\text{Arctg}(1/2)$ soit 26,6°. Ce qui revient à remplacer l'ouverture circulaire par une ouverture rectangulaire équivalente de longueur $0.45d_o$ et de hauteur $0.9d_o$, comme illustré sur la figure 2.12. Pour une ouverture oblongue, la longueur de l'ouverture rectangulaire équivalente est prise égale à $a_o - 0.5h_o$ [38], où a_o est la longueur réelle de l'ouverture.

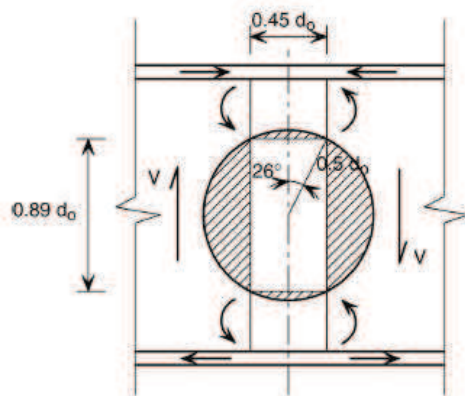


Figure 2.12. Ouverture rectangulaire équivalente [38]

Une fois les sollicitations dans la section critique déterminées, la vérification de la section critique s'effectue par la formule d'interaction suivante :

$$\frac{N_{\phi,Sd}}{N_{\phi,Rd}} + \frac{M_{\phi,Sd}}{M_{\phi,Rd}} \leq 1 \quad (2.35)$$

où

$M_{\phi,Rd}$ est le moment de résistance réduit pour le cisaillement, de la section b-b ;

$M_{\phi,Sd}$ est le moment interne sur la section b-b ;

$N_{\phi,Rd}$ est la résistance à l'effort normal réduite pour le cisaillement, de la section b-b ;

$N_{\phi,Sd}$ est l'effort normal perpendiculaire à la section b-b ;

$V_{\phi,Sd}$ est l'effort tranchant parallèle à la section b-b.

Comme pour les ouvertures hexagonales, la réduction pour le cisaillement de la section b-b se fait conformément à la clause 5.4.6 de l'EC3 [18].

2.5.3.6. Résistance au flambement du montant d'âme

Les montants des poutres ajourés sont sollicités à mi-hauteur par un effort de cisaillement longitudinal V_{hi} dû à la variation des efforts normaux dans les Tés. L'effort de cisaillement horizontal dans le montant provoque une flexion qui induit des contraintes de traction dans un côté du montant et des contraintes de compression dans l'autre comme illustré sur la figure 2.13. Sous l'effet des contraintes de compression, les montants risquent d'être instables et de subir des déformations hors plan qui s'apparente à un voilement local.

La résistance du montant au flambement dépend de plusieurs paramètres dont les principaux sont : l'espacement des ouvertures caractérisés par le paramètre $\alpha = p/h_0$, l'élanement de

l'ouverture $\beta = \frac{h_0}{t_w}$, la nuance de l'acier et la symétrie ou la dissymétrie de la section [39].

De nombreux travaux de recherches, tant expérimentaux qu'analytiques ont été consacrés à l'étude du flambement des montants [9,7,12,23,38,39,40,,41].

L'un des modèles analytiques existants utilisé pour le dimensionnement des montants vis-à-vis du flambement des montants est celui issu des travaux de Ward, publié dans la référence [12] et repris dans l'annexe N [6]. Cette approche est basée sur des résultats d'Analyse non

linéaire par éléments finis et non sur des résultats d'essais. Le domaine d'application de la méthode se résume comme suit :

- $-1.25 \leq \alpha \leq 1.5$

- $\beta \leq 60\epsilon$

- sections symétriques.

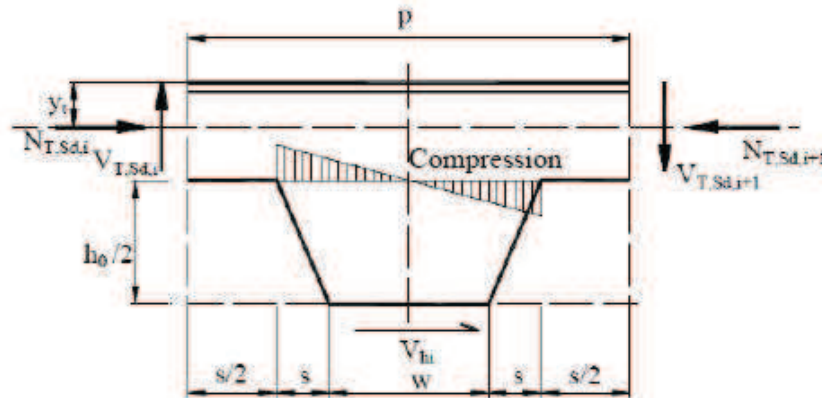


Figure 2.13. Efforts intérieurs et contraintes normales au niveau d'un demi-montant intermédiaire

La résistance au flambement du montant est satisfaite en vérifiant que le moment fléchissant $M_{wp,SD}$ au niveau de la section transversale critique dans le montant d'âme (voir figure 2.13) satisfait le critère suivant :

$$M_{wp,sd} \leq (C_1\alpha - C_2\alpha^2 - C_3) M_{el,Rd} \quad \text{mais} \quad M_{wp,sd} \leq 0.6M_{el,Rd} \quad (2.36)$$

avec

$$\begin{aligned} C_1 &= 5.097 + 0.1464\beta - 0.00174 \beta^2 \\ C_2 &= 1.441 + 0.0625\beta - 0.000683 \beta^2 \\ C_3 &= 3.645 + 0.0853\beta - 0.00108 \beta^2 \end{aligned} \quad (2.37)$$

où

$M_{el,Rd}$ est le moment de résistance élastique de la section transversale critique dans le montant d'âme.

Il est admis que pour les ouvertures polygonales, la section transversale critique dans le montant d'âme est située au sommet des ouvertures, tandis que pour les ouvertures circulaires on admet qu'elle est située à $0.45 d_0$ au dessus du centre des ouvertures.

L'effort tranchant horizontal à mi-hauteur du montant V_{hi} est calculé en considérant les hypothèses suivantes :

- la ligne d'action des efforts normaux dans les Tés passe par leur centre de gravité;
- on admet que l'effort tranchant est constant sur le pas d'ouverture p ($V_{T,Sd,i} = V_{T,Sd,i+1}$), autrement dit, on néglige les charges appliquées sur p ;
- on admet qu'il y'a un point d'inflexion de la déformée hors-plan à mi-hauteur du montant, le moment est donc nul dans cette section.

L'effort tranchant horizontal est alors déterminé en considérant l'équilibre des efforts internes appliqués dans un demi-montant, d'où :

$$V_{hi} = \frac{2V_{T,Sd,i} \times p}{(h_n - 2y_t)} \quad (2.38)$$

y_t est la distance de l'axe neutre élastique du Té supérieur au bord supérieur de la semelle (voir figure 2.13).

Pour calculer la résistance des poutres cellulaires vis-à-vis du flambement des montants, Bitar et al [39] ont proposé un modèle analytique basé sur des observations expérimentales et calibré sur plus de 100 simulations numériques. D'après les observations effectuées durant les essais et les calculs numériques, la zone d'instabilité du montant dépend de la largeur du montant : plus le montant est étroit, plus la section critique est proche de la ligne de soudure des membrures; inversement, plus le montant est large, plus la section critique s'éloigne de cette ligne (ce qui revient à dire que la section critique se rapproche du flux de compression). Le point de déformation maximale hors plan est situé à une distance approximative de la ligne de soudure des membrures variant de 1/3 du rayon des ouvertures pour les montants étroits à 1/2 de ce rayon pour les montants larges.

De plus ces observations ont montré que l'effort normal dans les membrures a une influence sur l'instabilité des montants :

- Une membrure comprimée tend à favoriser l'instabilité
- Une membrure tendue tend à retarder l'instabilité

Ce modèle analytique a, outre l'amélioration du calcul des montants au voilement local, permis d'étendre l'étude à d'autres domaines de paramètres non couverts par les méthodes existantes :

utilisation de l'acier de haute limite d'élasticité S460 ;

- espacement d'ouvertures avec $1.08 \leq \alpha \leq 1.75$;
- utilisation de sections élancées avec $\beta < 90\epsilon$;
- utilisation de sections mixtes et hybrides avec des rapports $A_{fb}/A_{ft} = 1$ à 4.5 et $t_{wt}/t_{wb} = 1$ à 2.8.

A_{fb} et A_{ft} sont respectivement l'aire des Tés inférieur et supérieur;

t_{wt} et t_{wb} sont respectivement l'épaisseur des âmes des Tés inférieur et supérieur.

La distance d_w de la section critique (selon les notations de la figure 2.14) est repérée en fonction des caractéristiques géométriques de l'ouverture à partir de la formule :

$$d_w = \frac{d_0}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^4 + 8\alpha^2} - 2 - \alpha^2}{2}} \quad (2.39)$$

La résistance au flambement d'un montant est vérifiée par la relation suivante :

$$\sigma_{wEd} \leq \kappa \sigma_{wRd}$$

où

σ_{wEd} est la contrainte principale de compression dans le demi montant étudié : $\sigma_{wEd,sup}$ pour le demi montant supérieur et $\sigma_{wEd,inf}$ pour le demi montant inférieur, calculée dans la section critique de la partie vérifiée, au droit de l'ouverture où la compression est maximale;

σ_{wRd} est la contrainte principale résistante affectée d'un facteur de réserve post-critique, qui prend en compte la ruine par mécanisme après l'apparition du flambement local d'un montant.

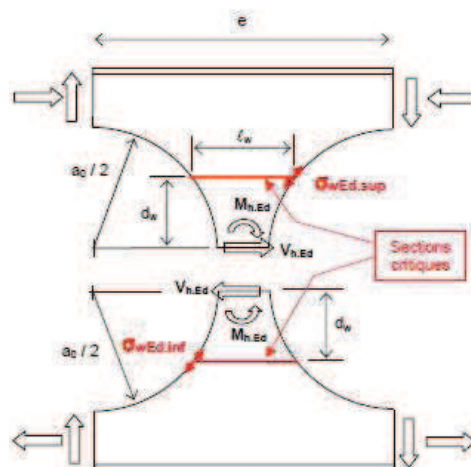
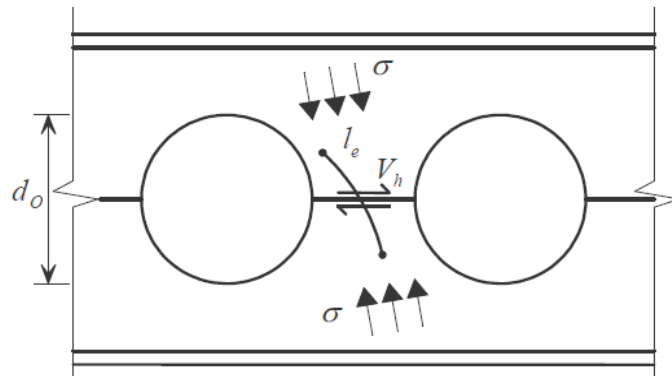


Figure 2.14. Section critique et répartition des efforts dans un montant intermédiaire [39]

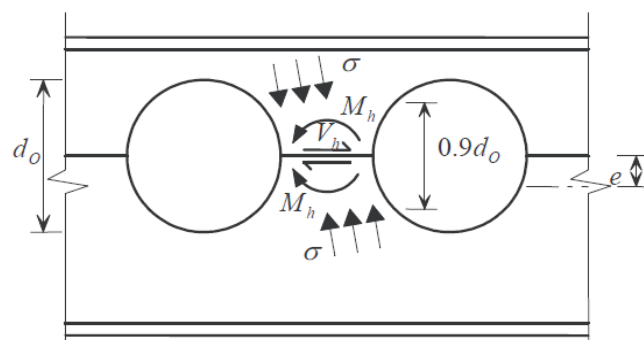
Le facteur κ exprime la réserve procurée par les Tés au droit des ouvertures au-delà de l'apparition de l'instabilité des montants. Il traduit le fait que la ruine globale de la poutre peut intervenir après la ruine locale par formation des rotules plastiques dans les Tés au droit des ouvertures. Ce coefficient a été calibré à partir des résultats des simulations numériques.

Lawson [38] a proposé une approche basée sur un modèle de champ de compression simple, comme illustrée par la figure 2.15. Elle a été ensuite proposée dans les guides de dimensionnement [1,15]. Ce modèle couvre les cas suivants :

- ouvertures rectangulaires largement espacées;
- ouvertures circulaires rapprochées;
- ouvertures placées asymétriquement sur la hauteur.



a) Ouvertures circulaires rapprochées



b) Ouvertures placées asymétriquement sur la hauteur

Figure 2.15. Efforts et contraintes sur le montant d'âme d'une poutre cellulaire en acier [1]

Ce modèle de calcul est basé sur les paramètres suivants :

- une contrainte de compression dans le montant d'âme équivalent à la contrainte de

cisaillement longitudinal agissant sur le montant d'âme pour les ouvertures rapprochées et l'effort tranchant le plus important dans le Té supérieur ou le Té inférieur largement espacées ;

- un flambement sur une longueur efficace d'âme dépendant de l'espacement des ouvertures et la forme des ouvertures;
- une contrainte additionnelle de flexion dans le plan agissant sur le montant d'âme (pour les positions d'ouvertures fortement asymétriques).

2.5.3.7. Résistance au cisaillement longitudinal

L'effort de cisaillement longitudinal s'exerçant au niveau de la soudure du montant doit satisfaire à la condition suivante :

$$V_{hi} \leq \frac{w t_w f_{yw}}{\sqrt{3} \gamma_{M0}} \quad (2.40)$$

où

w est la largeur minimum du montant d'âme (voir figure 1.5)

2.6. *Etudes numériques de la littérature*

Afin de simuler le comportement des poutres munies d'ouvertures dans l'âme, des modèles numériques ont été proposés. Ce paragraphe donne un aperçu sur ces modélisations.

L'approche proposée par Aglan et Redwood [23] pour le dimensionnement du montant d'âme vis-à-vis du flambement consiste à analyser le montant comme une poutre de hauteur variable soumise à deux moments et deux efforts tranchants à ses deux extrémités de sens opposés. L'acier est idéalisé comme étant un matériau élasto-plastique à écrouissage bilinéaire. L'équation différentielle permettant de déterminer le moment critique qui produit le flambement du montant a été résolu par la méthode des différences finies.

L'approche proposée par Ward [12] pour l'analyse du flambement du montant est basée sur une modélisation bidimensionnelle d'un demi-montant avec une loi de comportement élastique parfaitement plastique pour un acier de nuance 50 selon la désignation des normes BS 5950 [16]. Cependant cette analyse manque de transparence car aucune indication sur la nature des éléments du maillage, les conditions aux limites et le chargement n'a été mentionnée. De plus les résultats n'ont pas été validés par des essais expérimentaux.

Zaarour et Redwood [40] ont présenté une modélisation matériellement et géométriquement nonlinéaire d'un tronçon de poutre compris entre deux ouvertures adjacentes afin de prédire la résistance du montant vis-à-vis du flambement du montant d'âme, comme illustré sur la figure 2.16. Ainsi le tronçon modélisé comprend le montant d'âme et les Tés supérieurs et inférieurs situés au voisinage immédiat de l'ouverture. Les simulations numériques ont été réalisées à l'aide du code de calcul par éléments finis Aster.

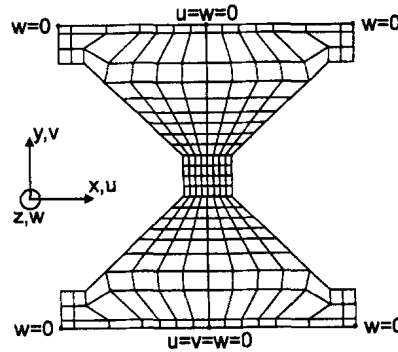


Figure 2.16. Modélisation du montant d'âme de Zaarour et Redwood [40]

Les parois de la poutre sont modélisées à l'aide d'éléments quadratiques de type coque mince à quatre nœuds. Les conditions aux limites sont indiquées sur la figure 2.16. Le modèle numérique proposé est soumis à un chargement équivalent aux efforts tranchants et aux moments fléchissants agissant à ses deux extrémités. L'effort tranchant est remplacé par deux forces verticales appliquées au niveau des centres de gravités des Tés supérieur et inférieur dans la direction de l'effort tranchant et ayant chacune pour valeur la moitié de l'effort tranchant sollicitant. Les moments fléchissants à chacune des deux extrémités du modèle sont remplacés par deux efforts axiaux de sens opposés agissant au niveau des centres de gravités des Tés supérieur et inférieur. L'effort de compression dans le Té supérieur et l'effort de traction dans le Té inférieur sont calculés conformément à la figure 2.5 par la formule :

$$N_{Té,sup} = N_{Té,inf} = \frac{M_{0,sd}}{h_c}$$

Le modèle d'acier suit le critère de Von-mises et une loi de comportement élastique, puis parfaitement plastique. Les résultats numériques ont montré un bon accord avec les résultats expérimentaux obtenus sur des poutres ajourées ayant des âmes élancées et dont la ruine pendant les essais s'est produite essentiellement par flambement du montant d'âme .

Redwood et Dermidjian [41] ont proposé une modélisation tridimensionnelle faite avec le code Aster, afin de prédire la charge critique produisant le flambement élastique des montants d'âme. Les quatre poutres modélisées, ayant seulement des portées différentes, ont toutes péri par flambement des montants sans subir de déformations plastiques lors des essais. Ce qui a conduit les auteurs à considérer lors un mode de flambage linéaire par bifurcation pour la simulation numérique de la ruine de ces poutres. Compte tenu de la symétrie du problème, seule une moitié de la poutre a été modélisée.

Le maillage, les conditions aux limites ainsi que le chargement sont représentés sur la figure 2.17.

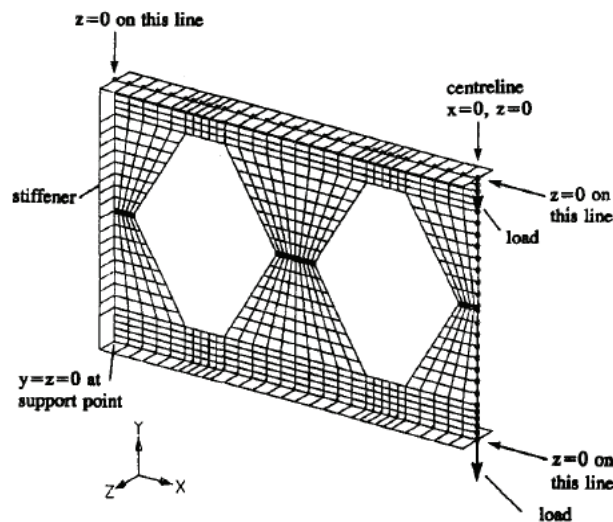


Figure 2.17. Modélisation en 3D d'une poutre ajourée à deux ouvertures dans l'âme [41]

Les résultats de cette analyse ont montré que les charges critiques de flambement sont peu sensibles au rapport Moment fléchissant/effort tranchant. Par ailleurs, l'écart obtenu entre les charges de ruine expérimentales et les charges critiques prédites par le modèle numérique varie entre 4% et 14%.

Mohebkhah [42] a modélisé à l'aide du programme éléments finis ANSYS des poutres alvéolaires simplement appuyées soumises à différents cas de chargement afin d'étudier l'influence de la non-linéarité matérielle sur la résistance au déversement globale. Les parois de la poutre sont modélisées à l'aide des éléments de type coque à 4 nœuds et à 6 degrés de liberté par nœud. Les semelles sont divisées en deux couches dans l'épaisseur. L'acier suit le critère de Von Mises et une loi d'écrouissage tri-linéaire. Les résultats obtenus ont montré une

bonne concordance avec les résultats des essais réalisés par Kerdal [43].

Une campagne d'essais et de simulations numériques ont été menés par le CTICM afin d'étudier plusieurs aspects du comportement des poutres cellulaires en acier et mixte, y compris le comportement au feu. Les résultats obtenus ont été publiés dans la revue du CTICM [22,39,44] et dans les guides de dimensionnement [1,13,14]. Les simulations numériques ont été effectuées avec le logiciel ANSYS, dans certains cas avec le logiciel SAFIR. Les poutres cellulaires en acier ont été modélisées en utilisant des éléments de type coque à 4 nœuds avec approche de déformation quadratique. Les congés de raccordement sont pris en compte par une surépaisseur équivalente des éléments concernés sur le principe de la conservation des aires (figure 2.18).

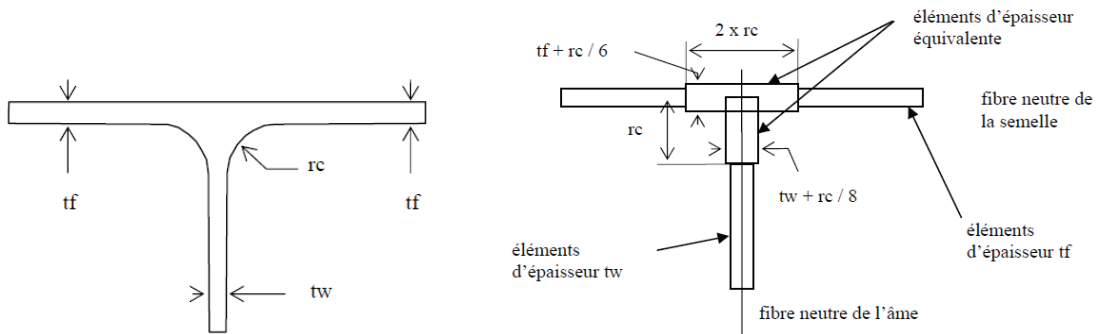


Figure 2.18. Prise en compte des congés de raccordement [39]

La loi de comportement de l'acier des poutres suit un comportement élastique linéaire suivi d'un comportement plastique à écrouissage linéaire et à module tangent proche de zéro (égal au dixième du module de Young) et utilisant les valeurs réelles mesurées. L'analyse est effectuée en tenant compte des non linéarités géométriques (calculs en grands déplacements) et matérielle. Cette analyse considère aussi les imperfections de l'âme dont la déformée est basée sur le premier mode critique résultant d'une analyse d'instabilité linéaire (analyse aux modes propres ou Eulérienne) effectué préalablement. A noter que l'amplitude maximale de la déformée initiale n'a pas été spécifiée. La charge est appliquée par paliers sur un nœud situé au milieu de la semelle supérieure. La bonne concordance entre les résultats expérimentaux et numériques a permis, entre autres, l'utilisation du modèle éléments finis afin d'établir un modèle analytique dans le but d'évaluer la résistance du montant d'âme au flambement local [39]. D'autre part, les comparaisons des résultats expérimentaux et numériques ont montré que l'approche présentée dans la publication SCI-P100 [12] sous-

estime sensiblement la flèche des poutres ajourées d'autant plus que la largeur du montant est faible (écarts pouvant atteindre 45% sur les tests réalisées et 70% pour les poutres mixtes) [44]. Le modèle a pu donc être amélioré afin, d'une part, de mieux prendre en compte la géométrie des montants et, d'autre part, de considérer une répartition des efforts entre les membrures mieux appropriée, tout en reprenant le même principe que la méthode énergétique utilisée.

Sweedan [45] a étudié le flambement élastique par déversement latéral des poutres ajourées simplement appuyées en considérant un large éventail de dimensions de la section transversale, de portées et de configurations géométriques des ouvertures d'âme. Les simulations sont réalisées à l'aide du code de calcul ANSYS. Les poutres sont modélisées à l'aide d'éléments de type coque mince à 4 nœuds (SHELL 181). Les extrémités des poutres sont maintenues latéralement au déversement (translation latérale et rotation de torsion) et en considérant la rotation en flexion latérale et le gauchissement comme libres (conditions classiques d'appuis dits «à fourche»). La translation longitudinale est bloquée au niveau d'un seul appui. Les rotations de torsion aux extrémités des poutres ont été maintenues en empêchant le déplacement latéral au niveau des fibres extrêmes des membrures. Il n'y a pas de maintiens entre les extrémités de la poutre. Trois cas de chargement sont considérés :

- des moments d'extrémité simulés par des efforts normaux de compression et de traction appliqués uniformément au niveau du feuillet moyen des membrures supérieure et inférieure;
- charge verticale uniformément répartie le long de la poutre ;
- charge verticale ponctuelle à mi-travée de la poutre.

A cause de la présence des ouvertures dans l'âme des poutres, les charges transversales répartie ou concentrée ne peuvent être appliquées au centre de cisaillement. Une solution typique pour résoudre ce problème est de répartir les charges de façon égale entre la semelle supérieure et la semelle inférieure. Le moment critique de déversement est ensuite déterminé en résolvant un problème aux valeurs propres. Les résultats issus de ces simulations ont permis à ses auteurs de proposer une méthode analytique simplifiée permettant de prédire, avec suffisamment de précision et de façon sécuritaire, le moment critique élastique de déversement des poutres ajourées avec ouvertures circulaires et hexagonales.

Tsavdaridis et D'Mello [46] ont utilisé un modèle numérique similaire à celui développé par Zaarour et Redwood dans le but d'étudier l'influence du rapport espacement sur la hauteur

des ouvertures et de l'éclatement du montant d'âme. Les simulations numériques ont été réalisées à l'aide du logiciel d'éléments finis ANSYS (version 11). Le montant d'âme et les Tés qui lui sont adjacents sont modélisés à l'aide d'éléments finis de coque 3D (Shell 181, dans la terminologie *ANSYS*). Le matériau acier a été modélisé à l'aide de lois de comportement élasto-plastique à écrouissage bilinéaire (Bi-linear Isotropic Model, BISO) et multilinéaire (Multi-linear Isotropic Model, MISO) qui reproduit le plus fidèlement possible les courbes réelles obtenue aux essais. L'effet des imperfections géométriques initiales n'a pas été considéré dans cette étude. Les résultats issus de ces simulations numériques ont permis à leurs auteurs de proposer une méthode analytique, basée sur le modèle de champs de compression, pour prédire la résistance au flambement des montants d'âme compris entre des ouvertures ayant des formes usuelles et des formes innovantes.

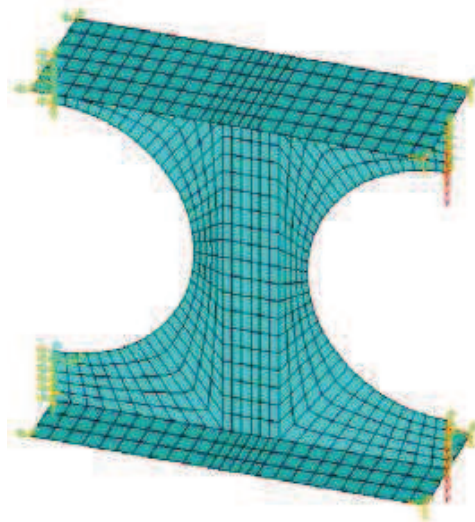


Figure 2.19 Modèle numérique de Tsavdaridis et D'Mello [46]

Plus récemment, Ellobody [47] a réalisé des simulations numériques avec le logiciel E.F. *Abaqus/implicit* dans le but d'étudier le mode de ruine des poutres cellulaires dû à l'action combinée de la torsion de l'âme et des modes de flambement du montant d'âme. La poutre est modélisée avec des éléments finis de coque isoparamétrique à intégration réduite à 3 nœuds (S3R) et à 4 nœuds (S4R dans la terminologie *Abaqus*). Ces éléments très performants possédant 6 degrés de liberté par nœuds prennent en compte les déformations de cisaillement. Les simulations numériques menées dans cette étude prennent en compte les nonlinéarités géométrique et matérielles ainsi que les imperfections géométriques initiales et les contraintes résiduelles dues au processus de fabrication. La forme générale de l'imperfection géométrique

initiale est déterminée à partir de la déformée du premier mode de flambement en considérant des poutres tenues et non tenues latéralement. Le modèle numérique a été validé par comparaison avec des essais sur des poutres cellulaires ayant différentes portées, dimensions de la section transversale, conditions de chargement et modes de ruine publiés dans les références [46,47,48].

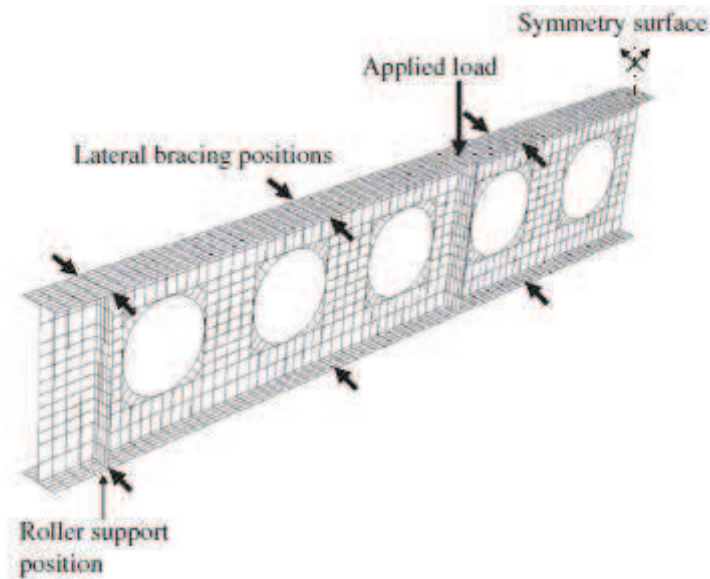


Figure 2.20 Modèle numérique d'Ellobody [47]

2.7. Aperçu sur les études expérimentales de la littérature

Ce paragraphe a pour but de décrire un certain nombre d'études expérimentales, publiées dans la littérature, réalisés sur des poutres ajourées dans le but de déterminer leurs modes de ruine ainsi que l'identification des paramètres qui entrent en jeu dans leur résistance.

Sherbourne [50] a réalisé une série d'essais sur des poutres alvéolaires en vue d'étudier l'influence des conditions de chargement sur le comportement de ce type de poutres. Sept spécimens, sollicités de manière à reproduire les conditions de flexion pure, de flexion simple et de cisaillement pur ont été testés. La poutre soumise à une charge concentrée la rupture s'est rompue par plastification excessive à mi-hauteur du premier montant entre la première et la deuxième ouverture. Une deuxième poutre, conçue dans le but d'étudier l'effet de la flexion pure a été testée sous des cas de chargement de flexion quatre points. La ruine était provoquée par une plastification excessive dans les zones situées au voisinage des charges concentrées et

et qui sont fortement sollicitées à la flexion et à l'effort tranchant. L'ouverture située au voisinage de la force concentrée a été sévèrement endommagée. Par ailleurs, les montants sollicités directement par des charges concentrées ont subi un flambement par cisaillement. L'essai réalisé sur la quatrième éprouvette avait pour objectif l'étude du comportement de la poutre sous cisaillement pur au voisinage de l'ouverture centrale. Aucune indication n'a été cependant fournie sur les conditions de chargement. La courbe charge-flèche a montré un accroissement considérable de la charge au-delà de la flèche élastique maximale. La rupture s'était produite par flambement du montant d'âme. Les trois dernières poutres ont été testées sous des cas de chargement de flexion pure. Il a été rapporté que pour deux de ces poutres, la rupture s'est produite par flexion. La ruine de la troisième poutre s'était produite sous l'action combinée de la flexion et du déversement latéral.

Bazile et Texier [7] ont testé deux séries de poutres à base de poutrelles laminées à chaud, 4 HEA 360 ayant des portées de 8.064 m et 3 IPE 270 ayant des portées de 6.624m, 8.064 m et 10.08m. Les ouvertures de deux poutres de la première série étaient munies de plaques intercalaires. La figure 2.16 donne le principe de chargement en 8 points effectué à l'aide de palonniers. Ceux-ci reposent à une extrémité sur un rouleau cylindrique et à l'autre extrémité sur un demi-cylindre. Les charges sont appliquées à l'aide de deux vérins identiques alimentés par un même circuit hydraulique. Pour toutes les poutres, des mesures d'allongement par jauges extensométriques et de flèche ont été effectuées. Les flèches ont été mesurées à mi-portée de la poutre. Pour l'ensemble des poutres testées, les courbes expérimentales charge-flèche ont mis en évidence trois zones de charges P_1 , P_2 et P_3 . Les charges P_1 et P_2 correspondent à des forts changements de pente des courbes charge-flèche dans le domaine élastique. La charge P_3 correspond à la charge de ruine. La charge élastique maximale P_2 est considérée comme étant la charge qui produit la contrainte maximale égale à la limite élastique théorique de 235 MPa. L'examen des déformations mesurées montre que la zone la plus sollicitée se trouve au niveau de l'angle des ouvertures dans les sections où l'effort tranchant est maximum. Les modes de ruine de six poutres, dont celles où les ouvertures sont munies de plaques intercalaires, se sont produites par flambement par compression des âmes non raidis soumis à des charges transversales. Pour les poutres à base d'IPE 270 ayant des portées de 8.064 m et 10.08m, la ruine s'est produite par flambement de la semelle comprimée.

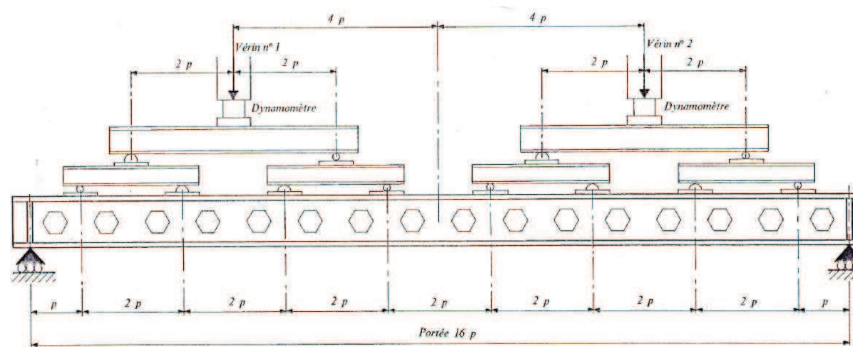


Figure 2.19. Chargement en 8 points dans Bazile et Texier [7]

Husain et Speirs [51] ont étudié la résistance des soudures des montants d'âme par cisaillement en effectuant 6 essais sur des poutres alvéolaires, dont 4 étaient soumises à la flexion trois points, les deux autres étaient soumises à la flexion quatre points. Les poutres testées comportaient des raidisseurs verticaux au droit des charges concentrées et des appuis et suffisamment d'appui latéraux afin d'éviter une ruine par voilement local ou par déversement. Toutes les poutres ont atteint la ruine par rupture de la soudure du montant d'âme. Les essais ont par ailleurs montré que, dans tous les cas, le cisaillement longitudinal ultime obtenu expérimentalement était supérieur à celui prévu par l'approche de calcul décrite au paragraphe 2.5.3.7. Ceci démontre la sécurité de l'approche et les réserves que possède la soudure avant la ruine.

Husain et Speirs [52] ont par ailleurs étudié l'influence de la géométrie des ouvertures sur le mode de ruine et la charge ultime des poutres alvéolaires en réalisant des essais sur 12 poutres alvéolaires. Trois des poutres testées étaient soumises à la flexion trois points, le reste des poutres étaient soumises à la flexion quatre points. Comme dans le cas précédent, des dispositifs étaient pris afin d'éviter tout voilement local ou déversement prématuré des poutres. Dans trois poutres, la rupture était due à la formation de quatre rotules plastiques aux angles situés au sommet des ouvertures.

Okubo et Nethercot [53] ont effectué des essais sur 16 poutres alvéolaires, comportant 1 à 4 ouvertures dont le but d'évaluer la résistance au flambement des montants d'âmes non raidies sous compression au droit des charges concentrées et des réactions d'appui. Les extrémités des poutres ont été maintenues latéralement par des appuis disposés au niveau de la semelle supérieure. A l'exception de deux poutres, une charge concentrée était appliquée à mi-portée des poutres. Une des poutres était soumise à une charge excentrée par rapport au milieu de la

poutre; la poutre ayant une seule ouverture était soumise à deux charges appliquées sur les semelles supérieure et inférieure du montant d'âme.

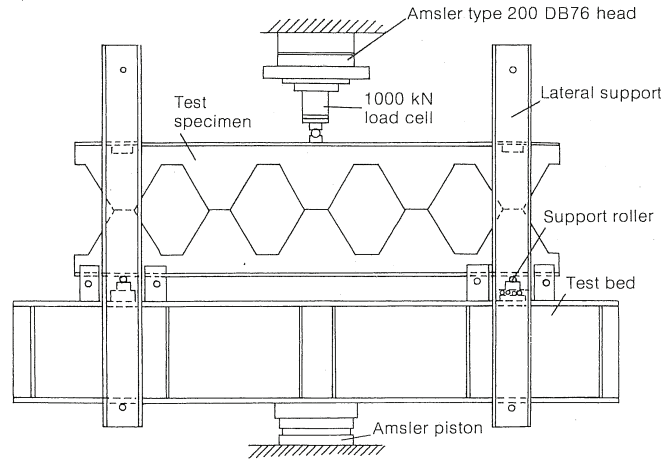


Figure 2.19. Chargement en 8 points dans Bazile et Texier [7]

Afin d'étudier l'effet de la surface d'application de la charge, les charges étaient appliquées par l'intermédiaire de barres circulaires pleines de 30 mm de diamètre agissant directement sur les poutres, pour simuler les charges ponctuels, ou par l'intermédiaire de plaques rigides, pour simuler des charges linéaires réparties transversalement. Toutes les poutres testées ont atteint la ruine par flambement sous compression des montants d'âmes sollicités par les charges concentrées. D'autre part, ces essais ont montré que les déformations des semelles ainsi que les courbes charge-flèche jusqu'à la ruine dépendent de la surface d'application de la charge. Par contre, les charges de ruine sont peu sensibles à la surface d'application de la charge. La comparaison des charges de ruine obtenues expérimentalement avec celles prédites par la méthode analytique proposée par Blodgett [54], en adoptant une longueur de flambement égale à la moitié de la hauteur de l'âme mesurée entre les faces intérieures des semelles, a montré qu'elles sont sensiblement égales.

Zaarour et Redwood [40] ont effectué des essais sur quatorze poutres alvéolaires. Six des poutres testées munies de plaques intercalaires d'âme (évidements octogonaux). L'objectif de cette campagne expérimentale était d'étudier le voilement par cisaillement des montants d'âme. Les poutres étaient donc conçues avec des âmes élancées. Les poutres simplement appuyées étaient soumises à la flexion trois points et munies de raidisseurs verticaux au droit de la charge concentrée et des appuis. Les caractéristiques mécaniques des aciers utilisés ont

été obtenues à partir des essais sur des coupons prélevés sur les poutres de base. Dans dix poutres, la ruine s'est produite par voilement par cisaillement des montants. Dans deux poutres, le flambement du Té comprimée dans la section où le moment fléchissant est maximum était observé. Deux des poutres testées ont péri par déversement, malgré la présence de maintiens latéraux. Ces essais ont aussi montré que les poutres ajourées munies de plaques intermédiaires sont plus sensibles au flambement des montants que celles non munies de ce type de plaque et que la hauteur de ces plaques peut influencer leur résistance.

Redwood et Dermidjian [41] ont testé quatre poutres alvéolaires dont deux sont identiques et comportent trois ouvertures, les deux autres comportent respectivement quatre et cinq ouvertures. Les poutres de base sont des poutres reconstituées soudées de sections transversales identiques et comportant des âmes très élancées. Le dispositif d'essai est similaire à celui utilisé par Zaarour et Redwood [40]. La résistance au flambement des montants d'âme élancés était l'objectif essentiel de cette étude. Comme prévu, la ruine des poutres s'était produite par flambement élastique des montants d'âme, à l'exception d'une seule poutre qui a subi en plus un déversement latéral. Les résultats expérimentaux ont montré que la résistance ultime au flambement des montants d'âme était peu sensible au rapport moment fléchissant effort tranchant.

Les résultats de ces deux dernières campagnes d'essai seront utilisés pour valider le modèle numérique présenté au chapitre 4. Les caractéristiques géométriques et mécaniques des poutres testées seront exposés dans l'annexe A.

Zirakian et Showkati [55] ont réalisé des essais sur 6 poutres alvéolaires simplement appuyées en vue d'étudier leur comportement vis-à-vis du déversement latéral. Les poutres alvéolaires ont été fabriquées à partir des profilés laminés "IPE12" et "IPE14" conformément à la désignation de la norme allemande Estahl Standard. Les poutres ont été chargées en flexion trois points et maintenue latéralement au milieu de la poutre au niveau de la semelle comprimée. La charge concentrée appliquée au moyen d'un vérin hydraulique à travers un cube en acier disposé sur la semelle supérieure. Le cube a été restreint contre tout mouvement latéral au moyen de deux plaques disposées sur chacun de ses côtés et sa surface de contact a été lubrifiée pour éviter tout frottement durant le mouvement du vérin vers le bas au moment du chargement. Le dispositif de contreventement latéral illustrée sur la figure 2.21 a bien fonctionné et les faibles translations qui ont eu lieu durant les essais ont été enregistrées. Les rotations de la semelle comprimée n'ont par contre pas été totalement empêchées lorsque le déversement des poutres a commencé, tandis que la rotation de torsion a été complètement empêchée. Comme prévu, toutes les poutres ont subi une translation latérale au niveau des

deux tronçons situés de part et d'autre du dispositif de contreventement latéral accompagnée d'une distorsion de l'âme. L'état de ruine des poutres devenait apparent, une fois que les poutres aient subi des translations latérales élevées et que la charge ait commencé à décroître après avoir atteint la charge ultime. Cependant, les auteurs n'ont pas considéré les charges maximales enregistrées aux essais comme étant les charges critiques, mais plutôt celles déterminées à partir des techniques d'interpolation linéaire de Southwell et Massey. Les résultats expérimentaux obtenus sont en bon accord avec ceux obtenus par la théorie du déversement inélastique suggérée par Nethercot et Trahair [56]

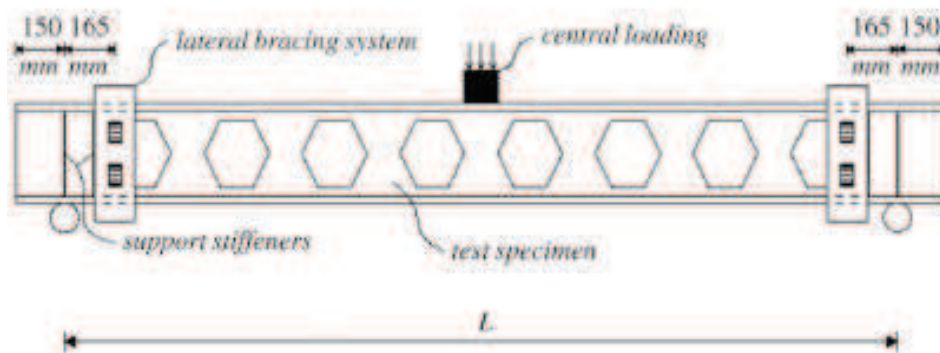


Figure. 2.21 Dispositif d'essai de Zirakian et Showkati [56]

L'objectif du projet de recherche CECA 7210-PR-315 [13] "Ouvertures de grandes dimensions dans les âmes pour l'intégration des équipements techniques dans les planchers mixtes" était d'étudier expérimentalement et théoriquement le comportement des poutres mixtes et non mixtes comportant des âmes ajourées dans des conditions normales (à froid). Les essais suivants ont été réalisés :

- 3 essais à grande échelle effectués sur des poutres mixtes comportant des âmes avec ouvertures multiples régulièrement espacées dans le but d'étudier :
 - l'action mixte au niveau des appuis des poutres sur appuis simples;
 - le comportement des ouvertures oblongues;
 - l'influence de l'introduction de charges par l'intermédiaire de poutres secondaires ;
 - l'influence des profilés en acier fortement asymétriques;
- 1 essai à grande échelle effectué sur une poutre en acier afin d'étudier l'effet de différents types de raidissage des ouvertures dans les âmes;
- 8 essais à grande échelle effectués sur des poutres mixtes et non mixtes comportant des âmes

avec ouvertures isolées de grandes dimensions raidies et non raidies afin d'étudier :

- les différents modes de ruine ;
- l'influence de la dimension et de la position des ouvertures isolées de grandes dimensions dans les âmes ;
- l'influence de la dalle en béton ;
- l'influence de différents types de raidissage.

Pour les poutres mixtes comportant des âmes avec ouvertures multiples, les principales conclusions suivantes peuvent être tirées :

- en général, le mode de ruine d'instabilité locale, à savoir le flambement du montant d'âme, ne devrait normalement pas être décisif et il convient de l'éviter par un raidissage si nécessaire; les raidisseurs annulaires se sont avérés être le moyen de raidissage le plus efficace ;
- l'influence de l'application de charges par l'intermédiaire de poutres secondaires est négligeable, à condition que des exigences minimales (par exemple pour le renforcement, la résistance des poutres secondaires et leur assemblage sur la poutre principale, etc.) soient satisfaites ;
- l'influence de l'asymétrie n'est pas aussi critique que ce que l'on pensait au premier abord, et la limitation donnée dans les codes est trop sécuritaire ;
- la rigidité des poutres est grandement influencée par des ouvertures multiples régulièrement espacées dans l'âme, qui entraînent des flèches plus importantes; c'est donc souvent l'état limite de service qui gouverne le dimensionnement.

Des études expérimentales, numériques et théoriques ont été réalisées par le CTICM pour le compte de PROFILARBED RECHERCHES (ARCELOR) pour améliorer les méthodes existantes de dimensionnement des poutres cellulaires mixtes et non mixtes et ont fait l'objet de plusieurs publications [22, 39, 44]. Les essais ont été effectués sur 11 poutres cellulaires métalliques et mixte acier-béton ayant des portées variant entre 8 et 12 mètres. Deux nuances d'acier ont été utilisées S355 et S460. La figure 2.18 montre le dispositif d'essai ainsi que les maintiens latéraux des poutres situés aux extrémités et à 1/3, 1/2 et 2/3 de la portée.

Pour chaque essai les mesures suivantes sont appliquées :

- mesure des flèches le long de la poutre ;
- mesure des déplacements latéraux pour les montants d'extrémités;
- mesure des déformations par jauges de déformation unidirectionnelles sur les semelles et des rosettes autour de deux ouvertures pour déduire les contraintes.

La charge est appliquée par paliers jusqu'à la ruine. Pour les poutres cellulaires en acier, le mode de ruine dominant est le flambement de montant à l'exception d'une poutre avec les

raidisseurs entre les ouvertures où la ruine est par effet Vierendeel.

Pour les poutres cellulaires mixtes, outre le flambement des montants et la plastification due à l'effet Vierendeel, une ruine par écrasement accompagné de cisaillement de béton est constatée.

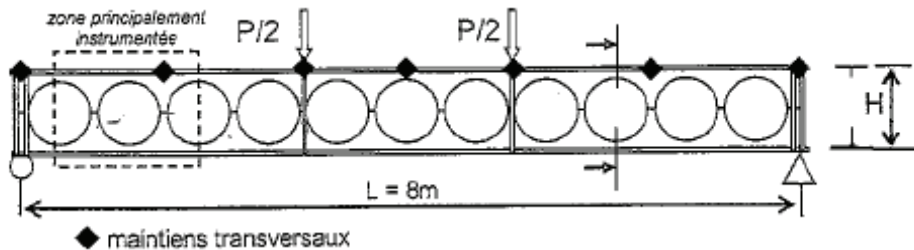


Figure 2.22. Essai sur une poutre cellulaire en acier [22]

Les comparaisons des charges de ruine obtenues au cours des essais avec ceux obtenus avec la méthode SCI-P100 [12], présentée au paragraphe 2.5.3.6, ont confirmé la nécessité d'avoir un modèle de calcul de la résistance au voilement des montants plus réaliste. Un nouveau modèle a été donc proposé. Ce modèle est basé sur les observations expérimentales et calibré sur 700 simulations numériques. Par ailleurs, les résultats issus des essais et des simulations numériques ont permis d'améliorer le calcul de la flèche des poutres cellulaires en acier. Ce modèle analytique est basé sur une méthode énergétique dont le principe a été repris afin de développer une nouvelle méthode pour le calcul des flèches des poutres mixtes [44]. Tsavdaridis et D'Mello [46] ont réalisé des essais sur 7 poutres avec ouvertures multiples peu espacées. Deux de ces poutres étaient des poutres cellulaires; les autres poutres étaient à ouvertures en forme d'ellipse comme illustrée sur la figure 2.23. Les poutres testées étaient soumises à une charge ponctuelle à mi-travée appliquée à l'aide d'un vérin hydraulique à déplacements contrôlés. La charge est appliquée graduellement de façon monotone jusqu'à la charge ultime puis suivi par un déchargement jusqu'à 0 afin de caractériser le comportement au-delà de la résistance ultime de la poutre (branche ascendante ou descente de la courbe charge-flèche). Dans 3 des poutres testées, la ruine s'est produite par flambement d'un demi-montant d'âme et dans 3 autres la ruine s'est produite par flambement de la totalité du montant d'âme. Une des poutres a péri par écoulement du joint de soudure à mi-hauteur du montant d'âme. Cette campagne d'essais expérimentaux limitée a aussi permis d'en tirer quelques conclusions concernant le comportement à l'état ultime des poutres ajourées avec diverses formes d'ouverture. Dans l'ensemble des cas, la ruine était due à l'action combinée

du moment fléchissant et l'effort tranchant. De même, des déformations importantes ont été enregistrées au niveau des montants d'âme sollicités à des efforts tranchants élevés et qui étaient souvent accompagnées d'une distorsion de l'ouverture d'âme. Le comportement des poutres est peu sensible à la forme des ouvertures d'âme.

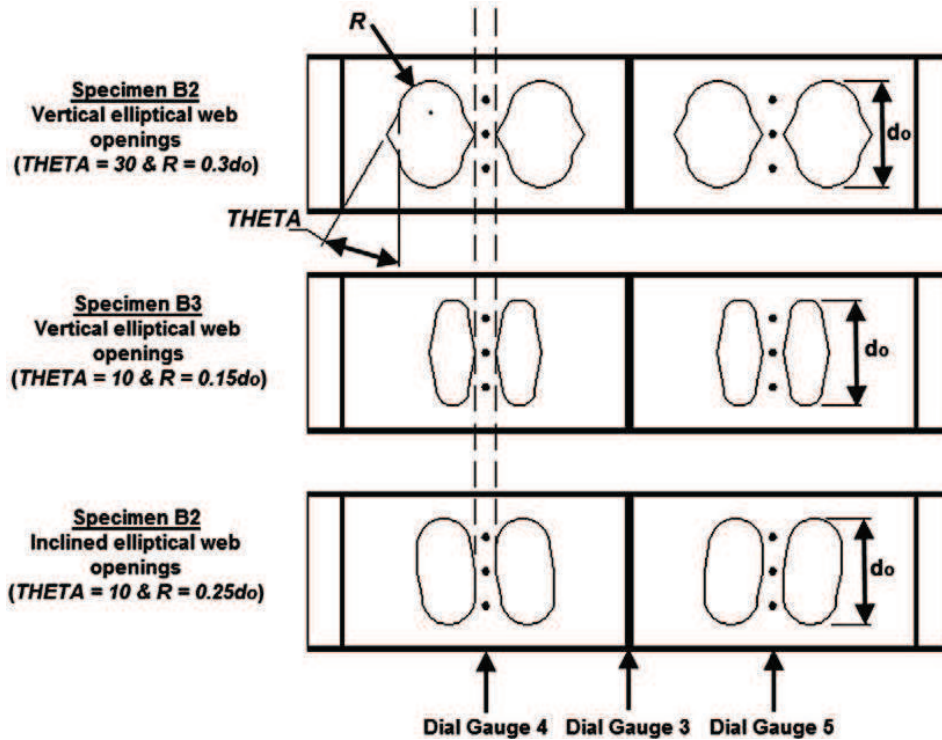


Figure 2.23 Poutres avec ouvertures elliptiques testées par Tsavdaridis et D'Mello [46]

2.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une revue générale de la littérature concernant la prise en compte de l'influence de la présence des ouvertures d'âme sur la résistance des poutres en acier. Les états limite de service n'ont pas été considérés dans cette étude. Malgré les nombreux travaux publiés sur ce thème, il n'existe actuellement pas de normes de dimensionnement applicable à l'échelle universelle pour dimensionner les poutres avec ouvertures multiples. L'Annexe N de la version ENV 1993-1-1 de l'Eurocode 3, applicable en cas d'ouvertures isolées et multiples, n'a pas été retenue dans la version EN 1993-1-1 [18]. La revue bibliographique des études numériques et expérimentale a montré que l'on pouvait prédire de manière satisfaisante le comportement à la rupture des poutres à ouvertures multiples. Le prochain chapitre sera consacré à la proposition d'un modèle numérique capable de reproduire le comportement des poutres ajourées avec ouvertures hexagonales dans l'âme

munies ou non de plaques intercalaires et pour lesquels peu de travaux ont été consacrés ces dix dernières années. Parmi les travaux expérimentaux publiés que nous avons exposé dans ce chapitre, les résultats des essais publiés dans les références [40,41] vont nous servir pour valider le modèle numérique.

Références du chapitre 2

- [1] RFS-CT-2005 "Ouvertures de Grandes Dimensions pour l'Intégration des Équipements Techniques dans les Planchers Mixtes les planchers mixtes. Guide de dimensionnement des poutres mixtes comportant des ouvertures de grandes dimensions, 2006.
- [2] R. G. Redwood and J. O. McCutcheon. Beam tests with unreinforced web openings. *Journal of the Structural Division ASCE*, vol. 94, No. ST 1, pages 1-17, 1968.
- [3] I. E. Bower. Design of beams with web openings. *Journal of the Structural Division ASCE*, vol. 94, No. ST 3, pages 783-807, 1968.
- [4] I. E. Bower. Ultimate strength of beams with rectangular holes. *Journal of the Structural Division ASCE*, vol. 94, No. ST 6, pages 1315-1337, 1968.
- [5] *Steifenlose Stahlskelettragwerke und dünnwandige Vollwandträger*. Berechnung und Konstruktion, Europäische Konvention für Stahlbau (EKS), Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1977.
- [6] Eurocode 3 : Design of steel structures - Annexe N : Openings in webs. ENV 1993-1-1 : 1992/A2. *European Committee for Standardisation*.
- [7] A. Bazile and J. Texier. Essais de poutres ajourées. *Revue construction métallique CTICM No.3*, pages 12-25, 1968.
- [8] R. G. Redwood. Analyse et dimensionnement des poutres ayant des ouvertures dans les âmes. *Revue construction métallique CTICM No.3*, pages 15-27, 1978.
- [9] R. Delesques. Stabilité des montants de poutres ajourées. *Revue construction métallique CTICM No.3*, pages 26-33, 1968.
- [10] R.M. Lawson. *Design of openings in the webs of composite beams*. SCI/CIRIA, publication P068, 1987.
- [11] R. M. Lawson, K. P. Chung and A. M. Price. Tests on composite beams with large web openings to justify existing design methods. *The Structural engineer*, Vol 70, No.1, 1992.
- [12] J.K. Ward. *Design of composite and non-composite cellular beams*. The Steel Construction Institute Publication 100, 1990.

- [13] ECSC 7210-PR-315 "Large web openings for service integration in composite floors". Final report, Part 2 : Test reports, analyses, evaluations and design models, 2004.
- [14] ECSC 7210-PR-315 "Large Web Openings for Service Integration in Composite Floors". Final report, Part 3: Design recommendations and design aids, 2004.
- [15] RFS-CT-2005 "Ouvertures de Grandes Dimensions pour l'Intégration des Équipements Techniques dans les Planchers Mixtes les planchers mixtes. Guide de dimensionnement des poutres mixtes comportant des ouvertures de grandes dimensions, 2006.
- [16] BS5950: The Structural use of steel in buildings Part 3, Section 3.1 :Composite beams, British Standards Institute, 1990.
- [17] BS5950: The Structural use of steel in buildings Part 1 : Code of practice for design. Rolled and Welded sections, British Standards Institute, 2000.
- [18] EN 1993-1-1 Eurocode 3. Calcul des structures en acier. Partie 1.1 : Règles Générales et Règles pour les Bâtiments. 2005.
- [19] EN 1994- 1-1 Eurocode 4. Calcul des structures mixte en acier et béton. Partie 1.1: Règles Générales et Règles pour les Bâtiments. 2004.
- [20] D. Darwin. Design of steel and composite beams with web openings. Steel Design Guide Série 2, American Institute of Steel Construction, 1990.
- [21] K.F. Chung, T.C.H. Liu and A.C.H. Ko. Steel beams with large web openings of various shapes and sizes: An empirical design method using a generalised moment–shear interaction curve. *Journal of Constructional steel Research*, vol. 59, pages 1177–1200, 2003.
- [22] D. Bitar. Poutre en I à âme élancée. Vérification de la résistance d'un panneau d'âme muni d'une ouverture circulaire centrée. *CTICM n°4*, 2004.
- [23] A.A. Aglan and R.G Redwood. Web buckling in castellated beams. *Proceedings Institution of Civil Engineers, Part 2, Vol. 57*, pages 307-320, 1974.
- [24] D.M. Todd and P.B. Cooper. Strength of composite beams with web opening. *Journal of the Structural Division ASCE*, vol.106, No. ST 2, pages 431-444, 1980.
- [25] A.A. Aglan and S. Qaquish. Plastic behavior of beams with mid-depth web openings. *Journal of the Structural Division ASCE*, vol. 19, No. ST 1, pages 20-26,1982.

- [26] W.C. Clawson and D. Darwin. The Design of Composite Beams with Web openings. Structural Engineering and Engineering Materials, SM Report No. 4, University of Kansas center for Research, Lawrence, Kansas, 1980.
- [27] R.C. Donahey and D. Darwin. Performance and design of composite beams with web openings. Structural Engineering and Engineering Materials SM Report No. 18, University of Kansas center for Research, Lawrence, Kansas, 1986.
- [28] D. Darwin, R.C. Donahey. LRFD for composite beams with unreinforced web openings. *Journal of the Structural Division ASCE*, vol. 114(3), pages 535-552, 1988.
- [29] R. G. Redwood. *Design of I-beams with web perforations. Beams and beam-column-stability and strength*. Narayanan editions, Applied Science Publishers, Barking, England, 1983;
- [30] K.F. Chung, T.C.H. Liu and A.C.H. Ko. Steel beams with large web openings of various shapes and sizes: An empirical design method using a generalised moment–shear interaction curve. *Journal of Constructional steel Research*, vol. 59, pages 1177–1200, 2003.
- [31] K.F. Chung, T.C.H. Liu and A.C.H. Ko. Investigation on Vierendeel mechanism in steel beams with circular web openings. *Journal of Constructional steel Research*, vol. 57, pages 467–490, 2001.
- [32] T.C.H. Liu and K.F. Chung. Steel beams with large web openings of various shapes and sizes: finite element investigation. *Journal of Constructional steel Research*; vol. 59, pages 1159–1176, 2003.
- [33] ECSC 7210-PR-315 "Large Web Openings for Service Integration in Composite Floors". Final report, Part 3: Design recommendations and design aids, 2004.
- [34] H.C. Olander. A method of calculating stress in rigid frame corners. *Journal of the Structural Division ASCE*, vol. 1953.
- [35] P. Sahmel. Konstruktive Ausbildung und Näherungsberechnung geschweisster Biegeträger und Torsionsstäbe mit grossen Stegaussparungen [The design, construction and approximate analysis of welded beams and torsion members having large web openings]. *Schweissen und Schneiden 1969*, 21(3), pages 116–22.
- [36] D. Mateesco et G. Mercea. Un nouveau type de poutres ajourées. *Revue construction métallique CTICM No.3*, pages 3-14, 1981.

- [37] R. G. Redwood. *Design of beams with web holes*. Canadian Steel Industries Construction Council, 1973.
- [38] R.M. Lawson, J. Lim, S.J. Hicks, W.I. Simms. Design of composite asymmetric cellular beams and beams with large web openings. *Journal of Constructional steel Research*, vol. 62, pages 614–629, 2006.
- [39] D. Bitar, P.O. Martin, Y. Galéa, T. Demarco. Poutres cellulaires acier et mixtes : Partie 1 Proposition d'un modèle pour la résistance des montants. *CTICM n°1*, 2006.
- [40] W. Zaarour and R. G. Redwood. Web buckling in thin webbed castellated beams. *Journal of the Structural Division ASCE*, vol. 122 N_o. 8, pages 860-866, 1996.
- [41] R. Redwood, S.Demirdjian. Castellated beam web buckling in shear. *Journal of the Structural Division ASCE*, vol. 124 N_o.10, pages 1202–1207. 1998.
- [42] A. Mohebkhah. The moment-gradient factor in lateral–torsional buckling on inelastic castellated beams. *Journal of Constructional steel Research*; vol. 60, pages 1481–94, 2004.
- [43] D. Kerdal and D.A. Nethercot. Failure modes for castellated beams. *Journal of Constructional steel Research*; vol.4, pages 295–315, 1984.
- [44] D. Bitar, P-O. Martin, Y. Galéa, T. Demarco. Poutres cellulaires acier et mixtes : Partie 2 Proposition de nouveaux modèles analytiques de calcul de la flèche. *CTICM n°1*, 2006.
- [45] A.M.I. Sweedan. *Journal of Constructional Steel Research*, vol.67 pages 151–163, 2011.
- [46] K.D. Tsavdaridis, C. D'Mello. Web buckling study of the behaviour and strength of perforated steel beams with different novel web opening shapes. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 67, pages 1605–1620, 2011.
- [47] E. Ellobody. Nonlinear analysis of cellular steel beams under combined buckling modes. *Thin-Walled Structures Vol. 52*, pages 66–79, 2012.
- [48] J.O. Surtees, Z. Liu. *Report of loading tests on cellform beams*. Research report. University of Leeds; 1995.
- [49] J. Warren. *Ultimate load and deflection behaviour of cellular beams*. MSc thesis. Durban: School of Civil Engineering, University of Natal; 2001.

- [50] A.N. Sherbourne. The plastic behavior of castellated beams. *Proceeding 2nd Commonwealth Welding Conference Institutional of Welding, No. C2*, pages 1-5, London, 1966.
- [51] M.U. Husain and W.G. Speirs. Failure of castellated beams due to rupture of welded joints. *Acier-Stahl-Steel, No. 1*, 1971.
- [52] M.U. Husain and W.G. Speirs. Experiments on castellated steel beams. *Journal American Welding Society, Welding Research Supplement, 52:8*, pages 329S-342S, 1973.
- [53] T. Okubo and D.A. Nethercot. Web post strength in castellated steel beams. *Proceedings Institution of Civil Engineers, Part 2, Vol. 79*, , pages 533-557, 1985.
- [54] O.W. Blodgett. Design of welded structures. Cleveland, OH: The James F Lincoln Arc Welding Foundation. 1966.
- [55] T. Zirakian, H. Showkati. Distortional buckling of castellated beams. *Journal of Constructional Steel Research. Vol. 62* pages 863–871, 2006.
- [56] D.A. Nethercot, N.S. Trahair. Inelastic lateral buckling of determinate beams. *J Journal of the Structural Division ASCE, vol 102 (ST4)*, pages 701–17, 1976.

Chapitre 3

Outils numériques

Chapitre 3	- 61 -
<i>3.1. Introduction.....</i>	<i>- 62 -</i>
<i>3.2. Non-linéarités.....</i>	<i>- 62 -</i>
<i>3.2.1. Non-linéarité géométrique.....</i>	<i>- 62 -</i>
<i>3.2.1.1. Mouvement d'un point matériel.....</i>	<i>- 62 -</i>
<i>3.2.1.2. Tenseur des déformations.....</i>	<i>- 64 -</i>
<i>3.2.1.3. Tenseur des contraintes.....</i>	<i>- 68 -</i>
<i>3.2.1.4. Flambage.....</i>	<i>- 70 -</i>
<i>3.2.2. Non-linéarité matérielle.....</i>	<i>- 72 -</i>
<i>3.2.2.1. Formulation des lois élasto-plastique</i>	<i>- 72 -</i>
<i>3.2.2.1. Critères de plasticité pour les métaux.....</i>	<i>- 77 -</i>
<i>3.3. Stratégies de résolution des problèmes non linéaires ;.....</i>	<i>- 78 -</i>
<i>3.3.1. Résolution en déplacements.....</i>	<i>- 78 -</i>
<i>3.3.1.1. Formulation du problème.....</i>	<i>- 78 -</i>
<i>3.3.1.2. Techniques de pilotage.....</i>	<i>- 79 -</i>
<i>3.3.1.3. Critères et contrôle de la convergence.....</i>	<i>- 89 -</i>
<i>3.3.1.4. Résolution en flambage linéaire.....</i>	<i>- 92 -</i>
<i>3.3.1.5. Résolution en flambage non linéaire.....</i>	<i>- 92 -</i>
<i>3.3.2. Traitement de la non-linéarité matérielle.....</i>	<i>- 93 -</i>
<i>3.3.2.1. Intégration des lois de comportement.....</i>	<i>- 93 -</i>
<i>3.3.2.2. Algorithmes d'Euler</i>	<i>- 94 -</i>
<i>3.3.2.3. Algorithme de Prévission élastique retour radial (PERR).....</i>	<i>- 96 -</i>
<i>3.4. Conclusion.....</i>	<i>- 99 -</i>
<i>Références du chapitre 3.....</i>	<i>- 100 -</i>

3.1. Introduction

La compréhension d'un phénomène physique ou l'analyse du comportement d'une structure soumise à des sollicitations passe par une modélisation de la réalité. La résolution analytique des équations qui en résultent reste limitée à des problèmes simples. Or, les ingénieurs s'intéressent à des structures complexes, n'admettant pas de solution analytique. Le travail présenté dans le cadre de cette thèse s'appuie sur la méthode des éléments finis pour modéliser le comportement non linéaire des poutres ajourées exprimé par un comportement mixte géométrique et matérielle.

L'objectif de ce chapitre est de présenter brièvement les techniques de résolution numériques, relatives à l'analyse non linéaire géométrique et matérielle des solides, implantés dans le code de calcul par éléments finis LUSAS.

3.2. Non-linéarités

La modélisation que nous nous proposons dans ce travail, pour simuler le comportement des poutres ajourées en acier, nécessite de résoudre des problèmes présentant deux types de non-linéarité : une non-linéarité géométrique et une non-linéarité matérielle :

1. les non-linéarités matérielles. Elles peuvent provenir de la loi de comportement intrinsèque du matériau, de la fissuration du matériau, du comportement du béton tendu entre deux fissures, du mode d'assemblage entre les composantes élémentaires d'une structure.
2. la non-linéarité géométrique. Cette non-linéarité est due aux déplacements même de la structure. En effet, lorsque ces déplacements deviennent importants, l'équilibre ne peut plus être décrit dans la configuration initiale non déformée (déformation au premier ordre des déplacements) mais doit être étudiée dans la configuration déformée (déformation au second ordre des déplacements). Au sein de cette catégorie, on peut distinguer les grands déplacements et les rotations modérées, d'une part et les grands déplacements et les grandes rotations d'autre part.

3.2.1. Non-linéarité géométrique

3.2.1.1. Mouvement d'un point matériel

Soit un solide élastique à l'instant initial $t_0 = 0$ de volume V_0 et un point M occupant la position X (figure 3.1). Le solide soumis à des sollicitations, se voit changer de volume V et le point M occupe maintenant la position x. L'ensemble des positions occupées par les

particules du solide dans l'espace euclidien à un instant t donné s'appelle configuration du système.

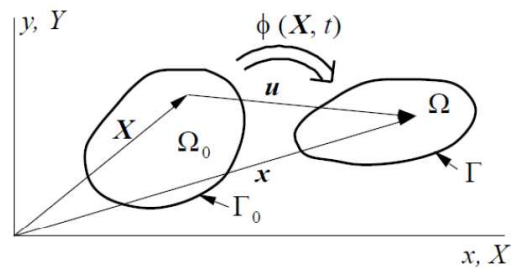


Figure 3.1. Transformation au cours du temps

Lors de la déformation d'un solide, les configurations successives occupées par celui-ci étant distinctes, il est essentiel de préciser dans quelle configuration l'écriture des équations d'équilibre et le calcul des déformations et des contraintes sont effectués. Différentes descriptions peuvent être adoptées, Lagrangienne totale ou actualisée, Eulérienne, corotationnelle, pour repérer un point de la structure au cours de sa déformation.

Dans une description Lagrangienne totale (FLT), le système de coordonnées se rapportant à la configuration initiale, non déformée, invariante dans le temps. La position du point M à un instant donné t est défini par la fonction $F(X,t)$. X est la position matérielle ou coordonnée Lagrangienne.

Dans une description lagrangienne actualisée (FLA), l'intervalle de temps est divisé en une suite de pas de temps $[t_0, t_0 + \Delta t, \dots, t]$ pour suivre le mouvement de la matière entre l'instant initial t_0 et l'instant t (figure 3.2). Le pas de discrétisation temporelle Δt est choisi suffisamment faible pour permettre d'adopter l'hypothèse des petites déformations (entre 0.1% et 1% de déformation par incrément). La configuration à l'instant $t + \Delta t$ est calculée à partir de la configuration à l'instant précédent t , et non par rapport à l'instant initial t_0 comme en Lagrangienne totale.

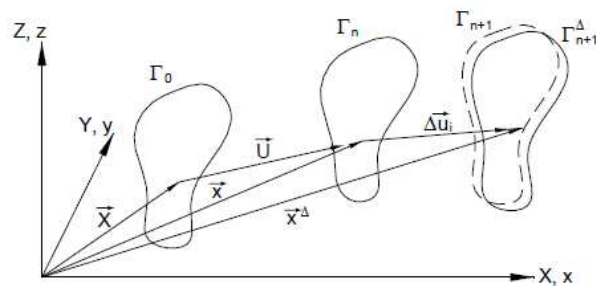


Figure 3.2. Description lagrangienne actualisée

Lorsque l'actualisation de la référence est effectuée à chaque pas de chargement, la FLA peut être classée en FLAP (Formulation Lagrangienne Actualisée à chaque Pas) et lorsque l'actualisation de la référence est effectuée à chaque itération d'équilibre, la FLA peut être classée en FLAI (Formulation Lagrangienne Actualisée à chaque Itération).

Les formulations Lagrangiennes sont classiquement adoptées en mécanique des solides.

Dans une description Eulérienne, le système de coordonnées est attaché à la configuration déformée. La position du point M à un instant donné t est défini par la fonction $f(x,t)$. x étant la position spatiale ou Eulérienne. Cette formulation est largement utilisée en mécanique des fluides ou en mise en forme de matériaux pour l'étude de processus stationnaires [1, 2].

Dans une description corotationnelle [3], la configuration courante est décrite dans le système d'axe initial auquel on fait subir une rotation.

Nous donnons au paragraphe suivant quelques notations classiques avant de rappeler les équations fondamentales de l'équilibre d'un corps élastique.

3.2.1.2. Tenseurs des déformations

Contrairement à la théorie linéaire, plusieurs mesures de déformations existent en analyse non linéaire, on retiendra ici deux principales.

a- Tenseur de déformation de Green-Lagrange

A un instant donné, le tenseur des déformations en chaque point du corps, rapporté à la configuration initiale C_0 , est défini par le tenseur de Green-Lagrange E [4] qui a pour composantes :

$$E_{ij}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{u_i}{X_j} + \frac{u_j}{X_i} + \frac{u_m}{X_i} \frac{u_m}{X_j} \right) \quad (3.1)$$

Le tenseur symétrique du second ordre E s'exprime classiquement par la somme de deux tenseurs :

$$E_{ij} = \varepsilon_{ij} + \eta_{ij} \quad (3.2)$$

où ε_{ij} est la partie linéaire du tenseur E_{ij} :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_i}{X_j} + \frac{u_j}{X_i} \right) \quad (3.3)$$

et η_{ij} est la partie quadratique du tenseur E_{ij} traduisant la non-linéarité géométrique :

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_m}{X_i} \frac{u_m}{X_j} \right) \quad (3.4)$$

Dans le cas d'un milieu continu en 3D, l'équation s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{u}{X} \\ \frac{v}{Y} \\ \frac{w}{Z} \\ \frac{u}{Y} + \frac{v}{X} \\ \frac{v}{Z} + \frac{w}{Y} \\ \frac{w}{X} + \frac{u}{Z} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left[\frac{u}{X} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{v}{X} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{w}{X} \right]^2 \\ \frac{1}{2} \left[\frac{u}{Y} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{v}{Y} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{w}{Y} \right]^2 \\ \frac{1}{2} \left[\frac{u}{Z} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{v}{Z} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{w}{Z} \right]^2 \\ \frac{u}{X} \frac{u}{Y} + \frac{v}{X} \frac{v}{Y} + \frac{w}{X} \frac{w}{Y} \\ \frac{u}{Y} \frac{u}{Z} + \frac{v}{Y} \frac{v}{Z} + \frac{w}{Y} \frac{w}{Z} \\ \frac{u}{Z} \frac{u}{X} + \frac{v}{Z} \frac{v}{X} + \frac{w}{Z} \frac{w}{X} \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

où toutes les dérivées sont exprimés dans le système de coordonnées se rapportant à la configuration initiale.

Une interprétation des différents termes du tenseur de Green-Lagrange peut se faire sur l'exemple unidimensionnel d'une barre articulée dans le plan (o, e_1, e_2) représentée sur la figure 3.3.

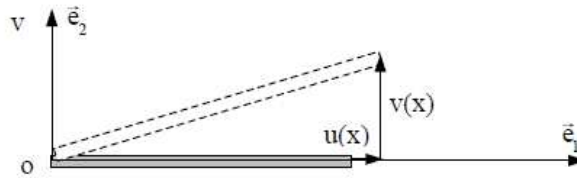


Figure 3.3. Déformation d'une barre unidimensionnelle

Dans ce cas, la déformation longitudinale a pour expression :

$$E_{xx} = \frac{u}{X} + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{X} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{X} \right)^2 \quad (3.6)$$

où $\frac{u}{X}$ représente l'allongement selon la direction \vec{e}_1 et $\frac{v}{X}$ la rotation dans le plan de la barre.

L'expression de la déformation (3.6) se simplifie selon l'ordre de grandeur de ses termes. Ainsi on peut distinguer les cas des grandes déformations ou des petites déformations. Dans ce dernier cas, les déplacements peuvent être petits ou grands. Selon les différents cas étudiés, les déformations peuvent être simplifiées comme suit :

1) Grandes déformations et grands déplacements

Ce cas correspond à une rotation $\frac{v}{X}$ et une déformation axiale importantes $\frac{u}{X}$. La déformation E_{xx} est alors donnée par l'expression (3.6), aucun terme ne pouvant être négligé.

2) Petites déformations et grands déplacements

Lorsque la déformation axiale $\frac{u}{X}$ reste petite par rapport aux termes de rotations :

$$\frac{u}{X} \ll 1 \quad \text{et} \quad \frac{u}{X} \ll \frac{v}{X}$$

la déformation peut alors être approchée par :

$$E_{xx} = \frac{u}{X} + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{X} \right)^2 \quad (3.7)$$

3) Petites déformations et petits déplacements

Lorsque la déformation axiale et la rotation restent petites :

$$\frac{u}{X} \ll 1 \quad \text{et} \quad \frac{v}{X} \ll 1$$

Les termes quadratiques sont négligés, et on retrouve l'expression classique des déformations linéarisées :

$$E_{xx} = \epsilon_{xx} = \frac{u}{X} \quad (3.8)$$

On dit alors que la structure est étudiée en Hypothèse des Petites Perturbations (H.P.P.).

b- Autres tenseurs de déformations

Pour caractériser les déformations d'un domaine matériel, il faut en fait considérer les variations entre deux configurations de la distance existante initialement entre deux points matériels arbitraires. Hélas cette notion de distance n'est pas simple à mettre en œuvre et on préfère considérer les variations de deux vecteurs "matériels". Mathématiquement, cela revient à examiner les variations du produit scalaire de ces deux vecteurs. Un produit scalaire invariant quels que soient les deux vecteurs considérés est équivalent à une déformation nulle du milieu (pas de variation de longueur, pas de variation d'angle). On aura alors défini les changements de formes.

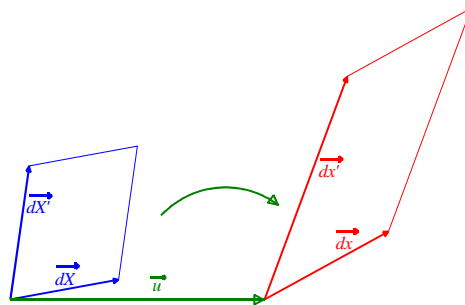


Figure 3.4. Variation du produit scalaire

Imaginons deux vecteurs "matériels" $d\vec{X}$ et $d\vec{X}'$ représentés sur la figure 3.4. Après transformation, nous obtenons les vecteurs $d\vec{x}$ et $d\vec{x}'$. On peut écrire les relations :

$$d\vec{x} = F d\vec{X} \quad d\vec{x}' = F d\vec{X}' \quad (3.9)$$

Ce qui nous donne :

$$d\vec{x}^T \cdot d\vec{x}' = (F d\vec{X})^T \cdot F d\vec{X}' = (d\vec{X})^T F^T F d\vec{X}' = (d\vec{X})^T C d\vec{X}' \quad (3.10)$$

$$\text{avec} \quad C = F^T F \quad (3.11)$$

Dans cette relation C est un tenseur symétrique d'ordre deux (représentable par une matrice 3*3) appelé tenseur des dilatations ou tenseur de Cauchy-Green droit. C'est un tenseur lagrangien car ses deux références sont faites vis à vis de la configuration de référence C_0 . Ce tenseur peut être défini à partir du tenseur gradient du champ de déplacement :

$$C = F^T F = (I + \text{Grad} \vec{U})^T (I + \text{Grad} \vec{U})$$

$$C = I + \text{Grad} \bar{U} + (\text{Grad} \bar{U})^T + (\text{Grad} \bar{U})^T \text{Grad} \bar{U} \quad (3.12)$$

La variation de notre produit scalaire devient alors :

$$d\bar{x} \cdot d\bar{x}' - d\bar{X} d\bar{X}' = d\bar{X} (C - I) d\bar{X}'$$

soit encore

$$d\bar{x} \cdot d\bar{x}' - d\bar{X} d\bar{X}' = 2d\bar{X} E d\bar{X}' \quad (3.13)$$

Nous obtenons ainsi le tenseur de Green-Lagrange qui peut s'écrire sous la forme :

$$E = \frac{1}{2} \left[\text{Grad} \bar{U} + (\text{Grad} \bar{U})^T + (\text{Grad} \bar{U})^T \text{Grad} \bar{U} \right] \quad (3.14)$$

De la même façon que l'on définit le produit scalaire $d\vec{x} \cdot d\vec{x}'$ à partir du produit scalaire $d\bar{X} d\bar{X}'$, on peut, de manière tout à fait symétrique, définir le produit scalaire $d\bar{X} d\bar{X}'$ à partir du produit scalaire $d\vec{x} \cdot d\vec{x}'$. On aura alors les relations suivantes :

$$\begin{aligned} d\bar{X} \cdot d\bar{X}' &= d\bar{x} B^{-1} d\vec{x}' \\ d\bar{x} \cdot d\vec{x}' - d\bar{X} d\bar{X}' &= 2d\bar{x} A d\vec{x}' \end{aligned} \quad (3.15)$$

avec

$B = F^T F$: Tenseur de Cauchy-Green gauche.

$A = \frac{1}{2} (I - B^{-1})$: Tenseur des déformations d'Euler-Almansi.

Le tenseur des déformations d'Euler-Almansi et le tenseur de Cauchy Green gauche sont des tenseurs eulériens, symétriques.

D'autre part, il est possible de démontrer la relation suivante :

$$A = (F^{-1})^T E F^{-1} \quad (3.16)$$

3.2.1.3. Tenseurs des contraintes

Contrairement à la théorie linéaire, plusieurs mesures de contraintes existent en analyse non linéaire. On retiendra ici trois principales.

a- Tenseurs de contraintes de Cauchy

Soit un solide de volume V et de frontière S représentée sur la figure 3.5. Pour une coupure de ce solide d'élément de surface générique ds et de normale n , l'hypothèse est que la cohésion de la matière est maintenue au travers d'une densité de force de cohésion df [5]. En première approximation cette densité est supposée proportionnelle au vecteur surface sous la forme :

$$\vec{df} = \sigma \vec{n} ds \quad (3.17)$$

σ est appelé tenseur des contraintes de Cauchy ou tenseur des contraintes vraies. Il est défini dans la configuration actuelle C_t . La symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy se démontre en exprimant l'équilibre des moments pour un élément de volume de matière.

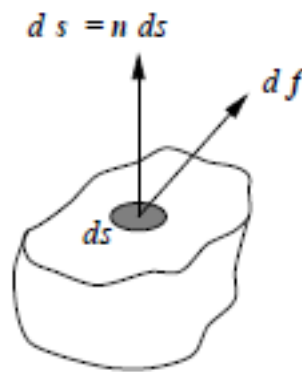


Figure 3.5. Représentation de la force de cohésion

b- Tenseur de contraintes nominales dit de Piola-kirshoff de première espèce PK1

En ne transportant maintenant que l'élément de surface (et non l'élément de force), on obtient un nouveau tenseur de contraintes dans lequel les éléments de force sont représentés dans C_t et les éléments de surface dans C_0 :

$$\vec{df} = \vec{\sigma} \vec{n} ds \quad (3.18)$$

est le tenseur de Piola-Kirchhoff de première espèce PK1 (ou de Boussinesq). Ce tenseur est non-symétrique. Il n'est ni lagrangien, ni eulérien.

c- Tenseur de contraintes de Piola-kirshoff de second espèce PK2

Pour obtenir un tenseur des contraintes qui soit lagrangien et symétrique, il suffit de transporter de la même façon la force élémentaire \vec{df} sur la configuration initiale ou de

référence. Le tenseur de Piola-Kirchhoff de seconde espèce PK2 est ainsi obtenu :

$$\vec{d}f = S \vec{n} ds \quad (3.19)$$

Le tenseur S est un tenseur symétrique et lagrangien.

Le tenseur des déformations d'Almansi ε est généralement associé au tenseur des contraintes de Cauchy σ et celui de Green-Lagrange E est associé au tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff de seconde espèce S .

3.2.1.4. Flambage

Le phénomène de flambage apparaît lorsque des structures élancées de faible raideur de flexion sont soumises à un chargement de type compression.

Il existe deux types de flambement :

- flambement par bifurcation;
- flambement par point limite.

Pour décrire le comportement de ces deux types de flambage, on considère une structure dont le paramètre μ est une caractéristique du chargement et dont le paramètre δ est une caractéristique du déplacement. Entre le point O et le point A (figure 3.6), la structure admet une seule famille de courbe (μ, δ) , il peut, par exemple s'agir de l'élasticité linéaire classique ou de l'élastoplasticité, où si le problème est bien posé, on a le résultat classique d'existence et d'unicité de la solution.

Par contre, au-delà du point A (point de bifurcation) de la figure 3.6a, une ou plusieurs familles de courbes peuvent être solution du problème d'équilibre. Cette perte d'unicité s'accompagne d'une instabilité de la branche initiale (dite fondamentale). La branche secondaire peut être stable (courbe AB) ou instable (courbe AB') figure (3.6a). La charge au-delà de laquelle il y a bifurcation s'appelle la charge critique μ_{cr} .

Les cas d'une coque cylindrique circulaire ou d'un poteau sous compression axiale sont des exemples de flambement par bifurcation avec instabilité de la branche secondaire. Le cas du voilement élastique d'une plaque plane sollicitée dans son plan est un exemple de flambement par bifurcation avec stabilité de la branche secondaire.

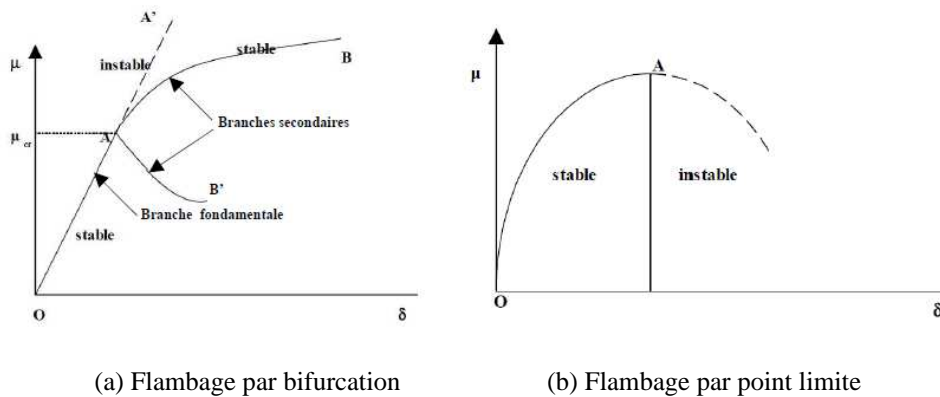


Figure 3.6. Modes de flambage

Sur la figure 3.6b, qui illustre le flambage par point limite, la structure n'admet qu'une seule famille (μ, δ) de solution des équations d'équilibre. Au point A, il y a perte de stabilité de la solution avec perte totale de rigidité. Le point A est alors appelé point limite. Les courbes de la figure 3.7 illustrent une réponse de type point limite avec claquage impliquant soit le point limite L en chargement (claquement en avant, snap-through en anglais) soit le point limite L en déplacement (claquement arrière, snap-back). Dans le premier cas (figure 3.7a), la configuration devient stable après un saut en avant de la courbe force-déplacement.

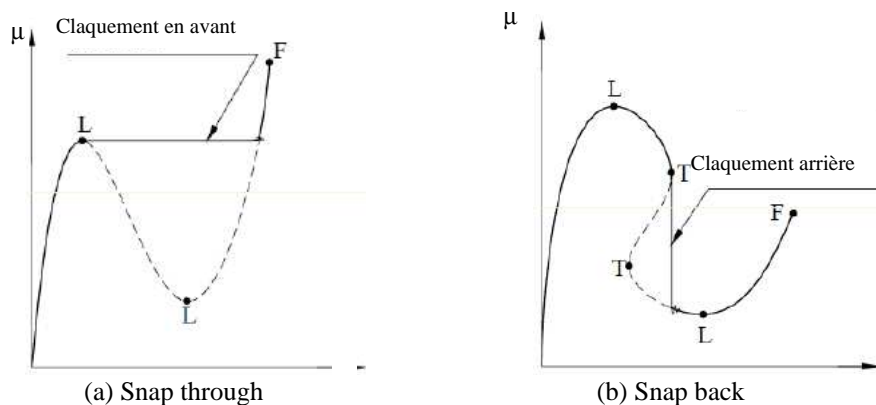


Figure 3.7. Courbes représentatives des phénomènes de flambement limite par claquage

Il est de nos jours bien acquis que l'existence d'une imperfection initiale a pour effet de faire transformer un point de bifurcation en un point limite et faire chuter la charge critique d'Euler les rendants comparables aux valeurs obtenus expérimentalement. Le facteur entre ces deux charges est dit facteur d'abattement ou (Knock down factor, en anglais).

Ces imperfections peuvent être de différentes natures :

- les imperfections géométriques sont la déviation du profil par rapport à la géométrie parfaite. Les imperfections géométriques comprennent le défaut de rectitude le long du profil, le défaut de planéité des parois et le vrillage d'une section à l'autre ;
- les contraintes résiduelles existent toujours dans les profils de construction en acier à cause du processus de fabrication : laminage à chaud, soudage, découpage au chalumeau, d'une part, et formage à froid par pliage et profilage, d'autre part;
- une méconnaissance des propriétés mécaniques du matériau qui constitue le spécimen ;
- des imprécisions dans l'application du chargement, une mauvaise qualité des conditions aux limites.

La technique communément adoptée afin de définir la distribution des imperfections géométriques initiales globales est de réaliser une analyse linéaire de flambement et puis d'utiliser un des modes propres, choisi selon un critère spécifique, comme la forme initiale. Le pire mode d'imperfection qui cause la plus grande réduction de la capacité portante est lié souvent au premier mode de flambement. Les déplacements nodaux d'un mode de flambement sont normalisés en utilisant le déplacement maximal dans la structure et ce déplacement maximal est pris égal à l'unité. En multipliant les déplacements normalisés par un facteur approprié, qui est l'amplitude, les imperfections initiales rattachées au mode propre considéré peuvent être calculées.

3.2.2. Non-linéarité matérielle

3.2.2.1. Formulation des lois élasto-plastique

Un matériau *élasto-plastique* est un matériau pour lequel dès que l'état de contrainte atteint un domaine borné par une surface, dite surface de plasticité ou d'écoulement des déformations permanentes, dites *plastiques*, se produisent. L'hypothèse fondamentale des modèles élasto-plastiques est la décomposition de la déformation totale $\dot{\epsilon}$ en une partie élastique (réversible) $\dot{\epsilon}^e$ et une partie plastique (irréversible) $\dot{\epsilon}^p$. Dans sa forme la plus générale, cette formulation s'écrit :

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p$$

Le tenseur taux de déformation total $\dot{\epsilon}$ est déterminé dans l'hypothèse des petites déformations.

L'élasticité traduit une déformation réversible du matériau. Dans le cas des aciers, elle est le plus souvent considérée comme linéaire et isotrope.

Dans ces conditions, le tenseur des contraintes de Cauchy σ est relié au tenseur taux de déformations élastiques par la loi de Hooke :

$$\dot{\sigma} = 2\mu\dot{\epsilon}^e + \text{trace}(\dot{\epsilon}^e) \cdot I \quad (3.20)$$

I est le tenseur identité, μ et ν sont les coefficients de Lamé déduits à partir des coefficients de Poisson ν et du module d'Young E par les relations suivantes :

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (3.21)$$

La plasticité fait référence à un état de déformation irréversible que le matériau est susceptible d'atteindre une fois qu'il a franchi un état de contrainte seuil. Cet état seuil est décrit par la surface de charge $f(\sigma)$ définie par :

$$f(\sigma) = \bar{\sigma}(\sigma) - \sigma_y \quad (3.22)$$

Dans cette expression, le tenseur des contraintes est transformé en un scalaire représentatif $\bar{\sigma}$, appelé contrainte équivalente au sens du critère de plasticité. Cette contrainte est comparée à une deuxième contrainte σ_y dite contrainte d'écoulement du matériau et qui représente la contrainte seuil plastique.

- si $f(\sigma) < 0$, le comportement est élastique ;
- si $f(\sigma) = 0$, le comportement est élasto-plastique;
- si $f(\sigma) > 0$ est un état de contrainte impossible sauf en cas d'écrouissage.

Dans le cas général la surface de charge est représentée par une surface fermée convexe dans l'espace des contraintes comme le montre la figure 3.8.

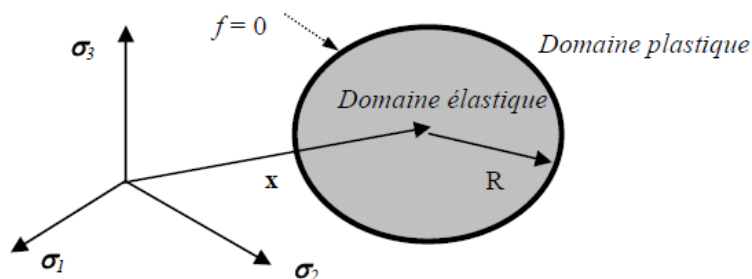


Figure 3.8. Surface de charge en plasticité

Pour donner une forme à la fonction f , il faut prendre en compte des résultats expérimentaux. Le problème a tout d'abord été traité par von Mises (1913) et Tresca (1864) dans le cadre d'hypothèses simplificatrices :

- **Le milieu est supposé isotrope.**

Cette hypothèse, qui se traduit par l'équivalence des effets des contraintes principales sur le critère, permet de se placer dans le repère principal des contraintes. On peut donc écrire le critère de plasticité sous la forme générique suivante :

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_y) = 0 \quad (3.23)$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ étant les contraintes principales. Cette hypothèse nous permet également d'utiliser les invariants du tenseur des contraintes σ : J_1, J_2 et J_3 .

$$\begin{cases} J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{trace}(\sigma) \\ J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = \frac{1}{2}[\text{trace}(\sigma)^2 - \text{trace}(\sigma^2)] \\ J_3 = \det(\sigma) \end{cases} \quad (3.24)$$

- **Le milieu est supposé être insensible à la pression hydrostatique.**

Le critère peut alors être écrit en fonction du seul tenseur déviateur des contraintes s :

$$s = \sigma - pI \quad (3.25)$$

I étant le tenseur identité et p , la pression hydrostatique définie par :

$$p = -\frac{1}{3} \text{trace}(\sigma) \quad (3.26)$$

Le critère se simplifie alors en :

$$f(s_1, s_2, s_3, \sigma_y) = 0 \quad (3.27)$$

- **Le comportement au seuil de plasticité est supposé identique en traction et en compression.**

Ceci permet de simplifier encore la forme du critère mais si, dans le cas de certains métaux, cette hypothèse est vérifiée, pour d'autres et plus généralement dans le cas des matériaux polymères, il n'en n'est rien (« effet Bauschinger »).

Pour un matériau écrouissable, la contrainte d'écoulement plastique σ_y évolue avec la déformation plastique du matériau. On introduit alors le module d'écrouissage isotrope κ et la déformation plastique cumulée \bar{e}^p comme variables d'état interne permettant la description de l'état d'écrouissage. La surface de charge s'écrit alors sous la forme:

$$f(\bar{\sigma}(\sigma), \kappa(\bar{e}^p)) = 0 \quad (3.28)$$

La déformation plastique équivalente $\bar{\epsilon}^p$ mesure la longueur du trajet de déformation.

Les lois de la thermodynamique postulent l'existence d'un potentiel dissipatif g dont dérive une relation entre le tenseur taux de déformation plastique et le tenseur des contraintes :

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{g}{\sigma} \quad (3.29)$$

avec λ le multiplicateur de Lagrange ou multiplicateur plastique (scalaire positif) et g le potentiel plastique. On note que le tenseur taux de déformations plastiques est défini suivant la normale au convexe g . C'est la règle de normalité illustrée par la figure 3.9.

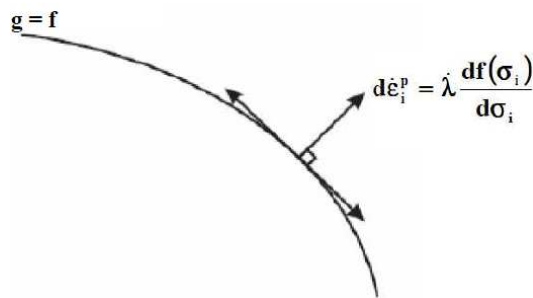


Figure 3.9. Illustration de la règle de normalité de g

Pour certaines lois de comportement élasto-plastique, le potentiel g est confondu avec la surface de charge f . De telles lois de comportement sont dites à potentiel associé. Dans le cas des métaux et autres matériaux dont le comportement ne dépend pas de la contrainte moyenne, on peut dire que le potentiel plastique est associé. Cette hypothèse est la plus répandue en élastoplasticité.

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{f(\bar{\sigma}, \kappa)}{\sigma} \quad (3.30)$$

Dans le cas où le potentiel plastique g diffère de la fonction de charge, la loi d'écoulement définie par l'équation (3.29) est alors dite *non associée*.

Le multiplicateur plastique est calculé à l'aide de la condition de consistance plastique issue du critère charge-décharge introduit par de Kuhn-Tucker. Cette condition exprime que l'état de contrainte ne peut "sortir" de la surface d'écoulement au cours d'un petit incrément de déformation.

- $f < 0 \rightarrow$ comportement élastique.
- $f = 0$ et $df = 0 \rightarrow$ écoulement plastique.
- $f = 0$ et $df < 0 \rightarrow$ décharge élastique.

En utilisant la forme de la surface d'écoulement (équation 3.28), la condition de consistance \dot{f} s'écrit de la façon suivante :

$$\dot{f} = \frac{f}{\sigma} : \dot{\sigma} + \frac{f}{\kappa} \dot{\kappa} = 0 \quad (3.31)$$

Lorsqu'on mesure expérimentalement la surface de charge sur un matériau métallique, on constate qu'en présence de déformations inélastiques, elle peut subir une expansion, une translation, ou une torsion. Les deux premières modifications, illustrées sur la figure 3.10, représentent les écrouissages isotropes (augmentation du rayon) et cinématiques (translation de la surface), mais la dernière n'est pas prise en compte par les modèles courants, d'autant que la forme évolue au cours de la déformation sous chargement complexe: on est là en présence d'anisotropie induite.

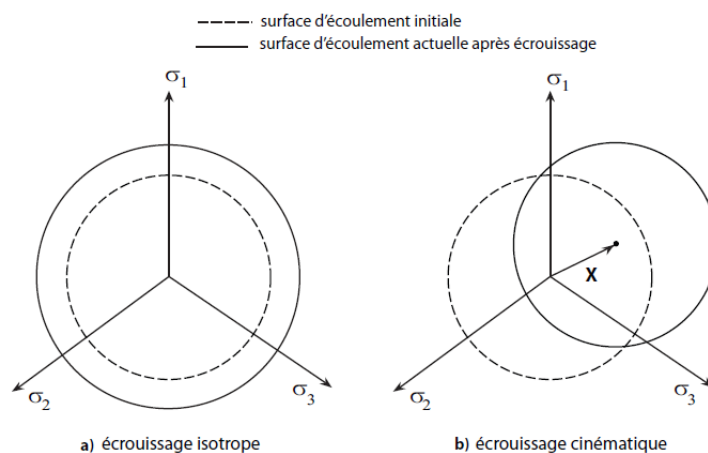


Figure 3.10. Illustration de l'écrouissage isotrope et cinématique

3.2.2.2. Critères de plasticité pour les métaux

Il existe une grande variété de critères de plasticité qui visent à modéliser le plus fidèlement possible le comportement des tôles métalliques. Ces derniers peuvent être répertoriés en deux familles : les critères isotropes, et les critères anisotropes.

L'un des critères de plasticité isotrope les plus utilisés pour les matériaux métalliques ductiles est le critère de von Mises (1913). Pour ce critère, l'état limite est atteint lorsque l'énergie de distorsion par unité de volume est égale à l'énergie de distorsion unitaire limite du matériau. Il est établi en considérant l'écoulement plastique comme insensible à la pression hydrostatique, il est défini dans un repère de contrainte orthonormé quelconque par l'expression suivante :

$$\bar{\sigma}(\sigma) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) \right]} \leq \sigma_y \quad (3.32)$$

où σ_y est la limite élastique en traction simple.

Transformé dans l'espace des contraintes principales, le critère s'écrit :

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_y^2 \quad (3.33)$$

Il s'agit de l'équation d'un cylindre à base circulaire axé sur la trissectrice du repère $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ et de rayon $R = \sqrt{2\sigma_y/3}$ (figure 3.11).

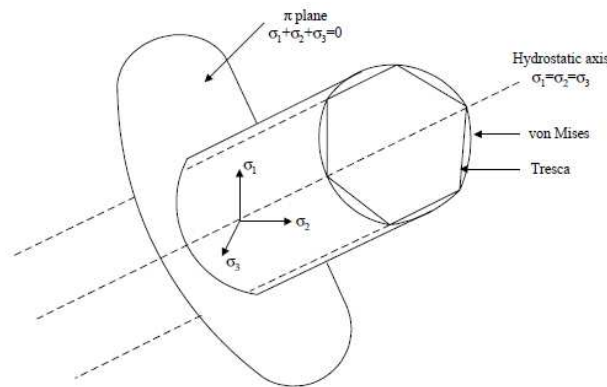


Figure 3.11. Critères de Tresca et de Von Mises

En utilisant le déviateur des contraintes dans le repère principal, on obtient une autre forme du critère :

$$f_1 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - \frac{2}{3}\sigma_y \quad (3.34)$$

Notons alors que $f = 3f_1$. Si on introduit le deuxième invariant J_2 du tenseur des contraintes s , on montre que l'équation (3.33) est équivalente à :

$$f_1 = J_2 - \frac{2}{3}\sigma_y^2 \quad (3.35)$$

Hill [6] est le premier à avoir proposé un critère qui rend compte de l'anisotropie initiale des matériaux et plus particulièrement des matériaux métalliques.

Si on veut de plus représenter la dissymétrie entre traction et compression, le critère de Tsai [7] est souvent utilisé.

3.3. Stratégies de résolution des problèmes non linéaires

3.3.1. Résolution en déplacements

3.3.1.1. Formulation du problème

Le problème de l'équilibre mécanique statique d'un solide, dans le cas de petites déformations et de petits déplacements, avec une loi élastique linéaire, conduit au travers de la méthode des éléments finis, à un système linéaire de n équations d'équilibre qui peut s'écrire sous la forme de l'équation suivante :

$$[k]_{n \times n} \{U\}_n = \{F\}_n \quad (3.36)$$

où $\{U\}_n$ désigne le vecteur des déplacements nodaux (degrés de liberté) qui sont les inconnues du problème, $\{F\}_n$ le vecteur des efforts nodaux généralisés et $[k]$ la matrice de rigidité de la structure. La matrice $[k]$ est linéaire en $\{U\}_n$, indépendante des contraintes et des déplacements et constante. Le champ des contraintes $\{\sigma\}_n$ est déterminé en fonction du vecteur des déplacements $\{U\}_n$. Dans le cas des non-linéarités prises en compte dans la modélisation par éléments finis (géométrique, matériau ou liée à la présence des pièces de contact), la matrice de rigidité $[k]$ devient dépendante des lois de comportement intrinsèque du matériau et/ou de la configuration déformée de la structure ; le système d'équations obtenu n'est plus linéaire par rapport aux degrés de libertés. La matrice de rigidité est décomposée en une partie linéaire $[k_l]$ et une partie non linéaire $[k_{nl}]$ de sorte que :

$$[k_l + k_{nl}]_{n \times n} \{U\}_n = \{F\}_n \quad (3.37)$$

La résolution de ce système non linéaire consiste à remplacer la résolution directe du système (3.37) par la recherche itérative du champ $\{u\}_n$ qui annulera le vecteur Résidu R défini par :

$$R(\{U\}_n) = [k_1 + k_{nl}]\{U\}_n - \{F\}_n \quad (3.38)$$

Le vecteur résidu $R(\{U\}_n)$ peut s'interpréter comme étant la différence entre les forces nodales internes et les forces appliquées totales.

Partant d'une valeur $\{U\}_n^0$, le processus itératif de résolution est poursuivi jusqu'à la convergence à l'itération i caractérisée par le critère d'arrêt suivant :

$$\|R(\{U\}_n^i)\| \leq \varepsilon \quad (3.39)$$

où la précision ε et la norme $\|R(\{U\}_n^i)\|$ sont choisies par l'utilisateur.

L'idée de base de la technique incrémentale est en fait de *linéariser* les équations non linéaires. Cela peut être obtenu soit par l'emploi d'un principe incrémental (qui correspond au calcul de la variation de l'énergie), soit par un développement en série de Taylor des équations non linéaires, au voisinage d'une solution connue, limitée aux termes linéaires.

Cependant, plusieurs types de problèmes sont difficilement résolubles si le processus, incrémental est piloté par l'accroissement du paramètre de charge. C'est le cas des problèmes d'instabilité, où la réponse charge-déplacement montre des types de comportement semblables à ceux esquissés sur la figure 3.12, pour lesquels la charge et/ou le déplacement peut diminuer au cours du temps. Dans ce cas, d'autres alternatives sont utilisées pour pallier à cette difficulté, telle l'incrémentation du déplacement ou de la longueur d'arc (*arc-length control*, en anglais).

3.3.1.2. Les techniques de pilotage

Trois techniques de pilotage peuvent être utilisés pour effectuer un calcul incrémental.

La première est le pilotage en force c'est-à-dire qu'un petit incrément de charge est appliqué à la structure. Schématiquement, la résolution des équations d'équilibre consiste, pour un problème à une dimension, à trouver le point d'intersection entre la courbe d'équilibre et la droite horizontale de chargement. L'intersection est garantie tant que l'effort imposé ne dépasse pas le maximum de la courbe de chargement (figure 3.12a). Au-delà, aucune intersection n'est possible. Il se pose alors des problèmes de convergences ou d'imprécision

numérique. Dans ce cas, il est préférable d'utiliser une autre technique appelée pilotage en déplacement [8]. Cette approche consiste à imposer le déplacement d'un noeud particulier et résoudre ensuite le problème d'équilibre. Schématiquement, ceci revient à trouver le point d'intersection entre la courbe d'équilibre et la droite de charge verticale (figure 3.12b). Même en présence d'un point limite, l'intersection est assurée aussi bien qu'avant qu'après le point limite.

Enfin, une autre approche, dite de longueur d'arc, consiste à chercher l'intersection entre la courbe d'équilibre et une courbe de charge dont l'équation est connue à l'avance. Comme illustré sur la figure 3.12c, la méthode assure la convergence du problème d'équilibre avant et après le point limite.

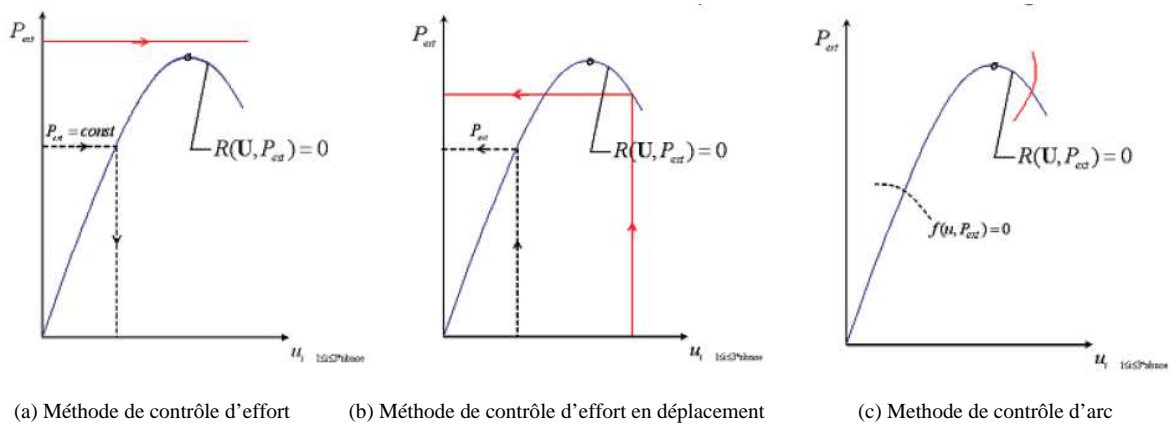


Figure 3.12. Techniques de pilotage

Les pilotages en déplacement ou en longueur d'arc sont utilisés lorsqu'il existe une charge limite (plasticité) ou une instabilité de structure (claquage d'une plaque, voir figure 3.7).

a- Méthode Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson est itérative, elle consiste à remplacer le problème original par une succession de problèmes linéaires. A moins d'avoir la solution exacte du problème, le résidu d'une itération n'est pas nul :

$$\{\mathbf{R}(\mathbf{U}^i)\} = [\mathbf{K}(\mathbf{U}^{i-1})]\{\mathbf{U}^{i-1}\} - \{\mathbf{F}(\mathbf{U}^{i-1})\} \quad \{\mathbf{0}\} \quad (3.40)$$

A l'itération suivante, on cherche une meilleure approximation $\{\mathbf{U}^{i+1}\}$ de manière à ce que le résidu soit proche de zéro :

$$\{\mathbf{R}(\mathbf{U}^{i+1})\} = [\mathbf{K}(\mathbf{U}^i)]\{\mathbf{U}^i\} - \{\mathbf{F}(\mathbf{U}^i)\} \quad \{\mathbf{0}\} \quad (3.41)$$

avec

$$U^{i+1} = U^i + \Delta U^i$$

L'algorithme associé à la méthode est obtenu en développant ce résidu en série de Taylor au voisinage de $\{U^i\}$:

$$\{R(U^i + \Delta U^i)\} = \{R(U^i)\} + \{\Delta U^i\} \left[\frac{R}{U} \right]_{U=U^i} + \frac{1}{2} \{\Delta U^i\}^2 \left[\frac{R^2}{U^2} \right]_{U=U^i} + \dots = \{0\} \quad (3.42)$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur, on obtient :

$$\{R(U^i)\} = \{\Delta U^i\} \left[\frac{R}{U} \right]_{U=U^i} \quad (3.43)$$

Sous forme matricielle:

$$\{R(U^i)\} = [K_t] \{\Delta U^i\} \quad (3.44)$$

On fait ainsi apparaître la matrice de rigidité tangente dont l'expression peut être obtenue en dérivant le résidu :

$$[K_t(U^i)] = \left[\frac{R}{U} \right]_{U=U^i} = - \left[\frac{F}{U} \right]_{U=U^i} + [K(U^i)] + \left[\frac{[K(U)]}{U} \right] \{\Delta U^i\} \quad (3.45)$$

La matrice de rigidité tangente élémentaire est composée de quatre matrices élémentaires ou moins : une matrice de rigidité linéaire notée $[K_l]$, une matrice de rigidité matérielle notée $[K_\sigma]$, une matrice de rigidité géométrique notée $[K_u]$ et une matrice de charge suivieuse notée $[K]$. On écrit:

$$[K_t] = [K_l] + [K_\sigma] + [K_u] + [K] \quad (3.46)$$

La méthode de Newton converge toujours pour une valeur initiale $\{U^{i-1}\}$ suffisamment proche de la solution. La figure 3.13 illustre le schéma itératif de Newton-Raphson pour un problème à une dimension. Pour simplifier les choses, les forces externes F_{ext} sont considérées indépendantes du déplacement.

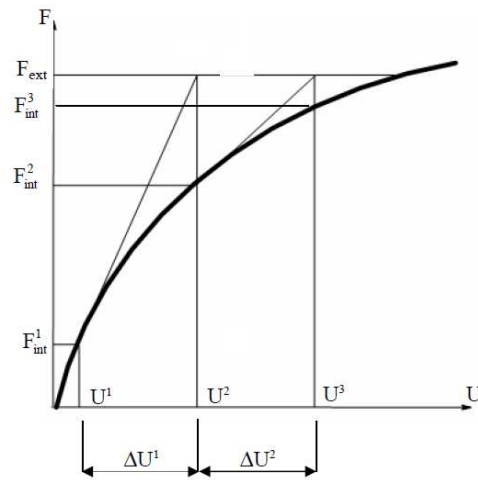


Figure 3.13. Méthode de Newton-Raphson originale en 1D

b- Méthode Newton-Raphson modifiée

Pour la méthode de Newton-Raphson modifiée, on part de l'équation 3 :

$$\{\mathbf{R}(\mathbf{U}^i)\} = [\mathbf{K}(\mathbf{U}^{i-1})] \{\mathbf{U}^i\} \quad (3.47)$$

On décompose alors la matrice de rigidité $[\mathbf{K}]$ en deux parties : une matrice $[\mathbf{K}_L]$ constante (linéaire) et une matrice $[\mathbf{K}_{nl}]$ une partie linéaire et une partie non linéaire. On obtient :

$$\{\mathbf{R}(\mathbf{U}^i)\} = [\mathbf{K}_L] \{\mathbf{U}^i\} + [\mathbf{K}_{nl}(\mathbf{U}^{i-1})] \{\mathbf{U}^i\} \quad (3.48)$$

Pour la résolution, on néglige la partie non linéaire. Le système devient :

$$\{\mathbf{R}(\mathbf{U}^i)\} = [\mathbf{K}_L] \{\mathbf{U}^i\} \quad (3.49)$$

La méthode ainsi définie s'appelle la méthode de Newton modifiée. Par rapport à la méthode de Newton-Raphson originale, la convergence est évidemment plus lente, et bien que le temps de chaque itération soit plus faible, on observe que dans de nombreux cas de non-linéarité, le temps de résolution globale du problème est plus important qu'avec une méthode classique de Newton-Raphson. Néanmoins, dans le cas de faibles non-linéarités, la matrice de raideur varie peu d'une itération à l'autre. L'emploi de la méthode de Newton modifiée peut alors se révéler très intéressant. La figure 3.14b illustre en 1D cette méthode.

c- Méthode incrémentale

La méthode incrémentale consiste à appliquer virtuellement le chargement progressivement. On définit donc un paramètre de charge λ_j que l'on fait varier entre 0 et 1. On a pour une

valeur U_j du paramètre:

$$[\mathbf{K}(U_j)]\{U_j\} = \{F(U_j)\} \quad (3.50)$$

Pour l'étape d'indice j , on prend la solution de l'étape $j-1$ pour solution initiale. Chaque étape est un problème non linéaire qui se résout à l'aide des méthodes précédentes. Toutefois, comme la solution initiale d'une étape donnée est proche de la solution de l'étape suivante, le nombre d'itération nécessaire est réduit et peut être limité à un.

La figure 3.14 montre des exemples 1D de cette méthode dans le cas où n vaut deux. Il est possible d'utiliser d'autres variantes de la méthode incrémentale en la gardant constante lors du premier incrément puis l'actualiser lors des incréments suivants.

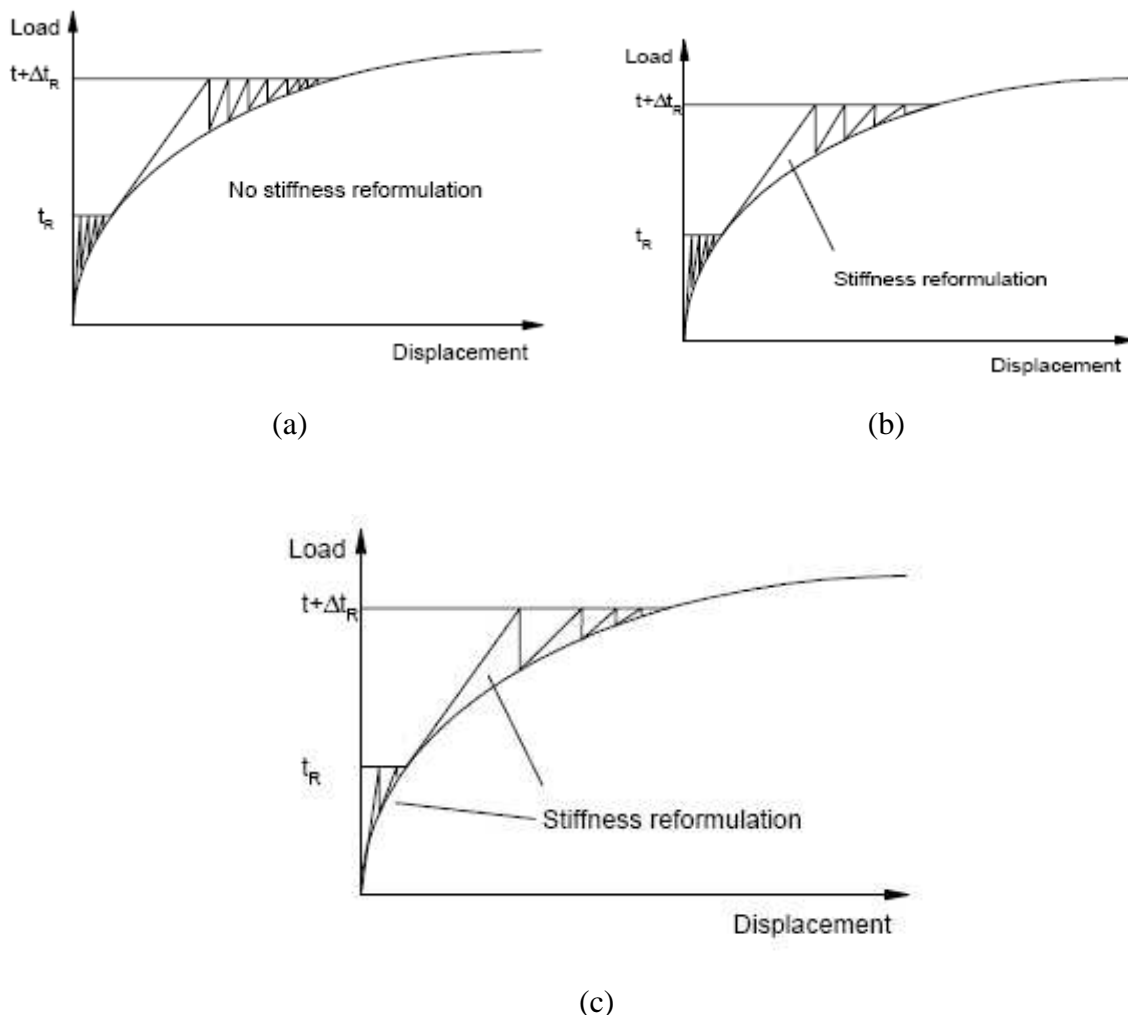


Figure 3.14 Méthode incrémentale à deux pas

La méthode incrémentale permet de résoudre des problèmes fortement non linéaires.

La figure 3.14 montre des variantes de cette méthode en dimension 1D dans le cas où n vaut deux. La variante de la méthode incrémentale illustrée sur la figure 3.14b consiste à garder la raideur constante lors du premier incrément puis l'actualiser lors du deuxième incrément.

d- La technique d'accélération dite lignes de recherche

La technique dite lignes de recherche (line search, en anglais), ne permet pas de résoudre le système non linéaire mais elle peut, lorsqu'elle est combinée à une méthode de type Newton-Raphson, accélérer la convergence significativement. Cette technique consiste à trouver un facteur scalaire optimal, dit longueur du pas (line search parameter ou step length, en anglais), qui multiplie le vecteur correction des déplacements U^i à l'itération i pour accélérer la convergence. Ainsi, la relation $U^{i+1} = U^i + U^i$ est remplacée par:

$$U^{i+1} = U^i + \eta^i U^i \quad (3.51)$$

Selon Crisfield [9], le scalaire η , $0.05 < \eta^i < 1$, et qui doit satisfaire la condition de stationnarité de l'énergie potentielle est calculé en essayant de minimiser l'énergie potentielle ϕ comme il est illustré sur la figure 3.15 :

$$\eta^i = \min \left| \phi(U^i + \eta^i U^i) \right| \quad (3.52)$$

La détermination du pas est donc un problème d'optimisation, autrement dit :

$$s(\eta) = \frac{\phi(\eta^i)}{\eta^{i-1}} = \{R(U^i(\eta^i))\} \times \{U^i\}^T \times \{U^i\} = 0 \quad (3.53)$$

Cette condition est trop contraignante et coûteuse en temps de calcul. Dans la pratique, elle est relaxée et remplacée par la relation suivante qui vise à minimiser le module $s(\eta)$ par rapport au module initial $s(0)$:

$$s(\eta^i) = 0.8 |s_0(\eta_0 = 0)| \quad (3.54)$$

Pour déterminer la valeur du pas η^i , plusieurs techniques de recherche linéaire peuvent être utilisées dont celle suggérée par [10]; la procédure repose sur une interpolation linéaire entre les points $\eta_0^i = 0$ et $\eta_1^i = 1$ pour déduire η_2^i :

$$\eta_2^i = \frac{-s_0}{s_1 - s_0} \quad (3.55)$$

Une généralisation de cette procédure pour les itérations successives i , s'écrit :

$$\eta_{j+1}^i = \eta_j^i \frac{-\eta_0^i}{\eta_1^i - \eta_0^i} \quad (3.56)$$

L'opération de correction est répétée jusqu'à ce que l'équation (3.54) sera satisfaite ou lorsque le nombre maximum d'itération pour la recherche de la longueur du pas, défini par l'utilisateur, est atteint. Cette technique n'a pas beaucoup d'intérêt si la valeur de η est proche de zéro ou de 1.

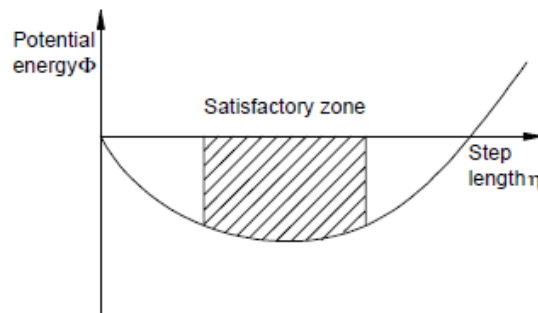


Figure 3.15. Approche de Crisfield pour la recherche de la longueur du pas

Une autre approche autre que celle utilisée par Crisfield, consiste non pas à minimiser l'énergie potentielle, mais plutôt la norme du résidu :

$$\eta^i = \min |R(U^i + \eta^i U^i)| \quad (3.57)$$

Ce critère se révèle en pratique efficace est atteint en utilisant une méthode de type « backtracing ». Il s'agit de remplacer η par une succession de valeurs ($1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$) avec un paramètre inférieur à 1 fixé par l'utilisateur, en l'occurrence ($1/1.5$) et ce jusqu'à minimisation du résidu.

Une technique de recherche hybride a été proposée par Coste [11] et implémentée dans le cadre de ce travail. L'approche utilise la technique de Crisfield lorsque la condition d'interpolation est satisfaite et lorsqu'une extrapolation « raisonnable » est possible. A défaut, la méthode de recherche de « Backtracing » est enclenchée. La combinaison de ces deux techniques permet la réduction du nombre de recherches linéaires globales au cours de la simulation.

e- Méthode longueur d'arc

Si le principe de la méthode de contrôle d'effort consiste à imposer un niveau de chargement et à chercher l'équilibre, le principe des méthodes dite de continuation (longueur d'arc et contrôle de

déplacement) considère le facteur de chargement λ comme une inconnue supplémentaire du problème. Pour que le problème soit bien posé, une équation scalaire supplémentaire est alors nécessaire. Cette équation, appelée fonction contrainte, définit l'équation d'une courbe $f(U, \lambda)$ dont l'intersection avec la courbe charge détermine le point d'équilibre. Plusieurs choix ont été proposés pour la fonction f , dont nous allons présenter les quatre méthodes les plus utilisées (figure 3.16).

1) Méthode de la longueur d'arc sphérique

Introduite initialement par [12] et [13], la forme incrémentale de la fonction contrainte associée à cette méthode s'écrit:

$$f(U, \lambda) = U_i^T U_i + \frac{2}{l} \lambda^2 f_{ext}^T \cdot f_{ext} - l^2 \quad (3.58)$$

Cette expression revient à imposer que la norme du vecteur $(U, \lambda f_{ext})$ soit égale au rayon l . Le coefficient $\frac{2}{l}$ sert à homogénéiser le vecteur effort avec le champ de déplacement. L'actualisation du champ de déplacement et du facteur de chargement donnée par :

$$\begin{cases} \lambda_{i+1} = \lambda_0 + \Delta \lambda_{i+1} & U_{i+1} = U_i + \Delta U_{i+1} \\ U_{i+1} = U_i + \Delta U_{i+1} \\ U_{i+1} = U_i + \Delta U_{i+1} = U_i + \lambda_{i+1} U_i' + \lambda_{i+1}'' U_i'' \end{cases} \quad (3.59)$$

conduit à l'équation scalaire suivante :

$$a_1 \lambda_{i+1}^2 + a_2 \lambda_{i+1} + a_3 = 0 \quad (3.60)$$

où

λ_0, U_0 sont respectivement le facteur de chargement et le champ de déplacement en début d'incrément (état d'équilibre de l'incrément précédent);

a_1, a_2 et a_3 sont des constantes déterminées à partir d'un système de trois équations à trois inconnues.

La résolution de cette équation de second degré en λ pose, généralement, le problème du choix de la racine appropriée lorsque celle-ci admet deux racines réelles. Egalement et en présence de deux racines complexes, la méthode est mise à défaut.

2) Méthode de la longueur d'arc cylindrique

Ramm [14] ainsi que Crisfield [15] ont noté que pour des problèmes qui présentent un grand nombre de variables, l'effet du terme de chargement devient faible, c'est pourquoi le coefficient λ a été

supposé nul. On parle alors de la méthode de longueur d'arc cylindrique. Dans ces conditions, la fonction contrainte s'écrit :

$$f(\mathbf{U}, \beta) = \mathbf{U}_i^T \mathbf{U}_{i+1} - l^2 \quad (3.61)$$

La méthode se ramène à la résolution d'une équation de second degré similaire à (3.58) et dont les coefficients correspondent aux coefficients a_i déterminés avec $\beta = 0$. Tout comme pour la méthode sphérique, se pose la question du choix de la racine. Crisfield [9] considère (α_1, α_2) les deux racines réelles, il calcule ensuite les deux solutions associées :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{i+1}^1 &= \mathbf{U}_i + \mathbf{U}_i^1 = \mathbf{U}_i + \mathbf{U}_i'' + \alpha_1 \cdot \mathbf{U}_i' \\ \mathbf{U}_{i+1}^2 &= \mathbf{U}_i + \mathbf{U}_i^2 = \mathbf{U}_i + \mathbf{U}_i'' + \alpha_2 \cdot \mathbf{U}_i' \end{aligned} \quad (3.62)$$

La solution choisie, selon l'auteur, est celle qui est la plus proche de la direction de l'incrément (\mathbf{U}_i) précédent ce qui correspond dans la pratique à choisir le plus petit angle entre les deux vecteurs $(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}^{1,2})$ soit le plus grand des deux cosinus suivants :

$$\cos \alpha_{1,2} = \frac{\mathbf{U}_i^T \cdot \mathbf{U}_{i+1}^{1,2}}{l^2} \quad (3.63)$$

3) Méthode de la longueur d'arc linéarisée

Les méthodes de longueur d'arc linéarisées ou méthodes d'orthogonalité ont été introduites pour palier au problème du choix des racines de l'équation de contrainte sphérique et cylindrique. Bruce [16] résume, par une approche générale, les différentes variantes de cette famille de méthodes.

Pour ce faire, il considère les vecteurs tangent et normal définis par les expressions suivantes :

$$\mathbf{t}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_i \\ \beta \end{pmatrix} \quad \mathbf{n}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_i \\ \beta \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

où β est un facteur d'homogénéisation.

Le produit scalaire de ces deux vecteurs n'est autre que la projection du vecteur normal sur le vecteur tangent. On note par r_i, R_i respectivement le vecteur projeté et le résidu du produit scalaire :

$$\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{n}_i = |\mathbf{t}_i| |\mathbf{n}_i| \cos \alpha = |\mathbf{t}_i| |r_i| = R_i \quad (3.65)$$

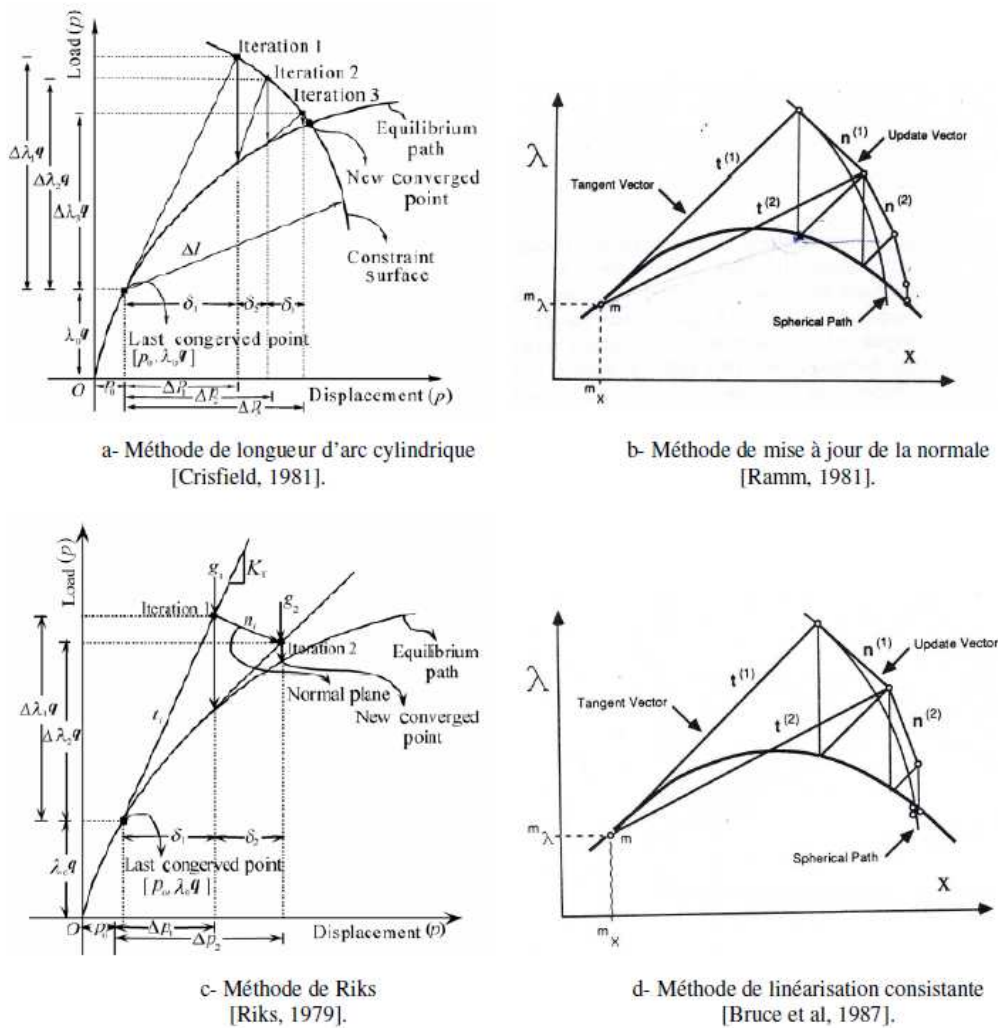


Figure 3.16. Les différentes variantes de la méthode de Riks

En combinant entre différents relations, on établit l'expression générale suivante du facteur de chargement :

$$i = \frac{R_i - U_i^T U_i''}{\beta^2 + U_i^T \cdot U_i'} \quad (3.66)$$

4) Méthode de mise à jour de la normale

Introduite par [14], cette méthode consiste à imposer une condition d'orthogonalité mutuelle entre les deux vecteurs t_i et n_i , ceci revient à imposer un résidu nul dans l'expression (5.39) qui s'écrit alors :

$$i = \frac{U_i^T U_i''}{\beta^2 + U_i^T \cdot U_i'} \quad (3.67)$$

La figure 3.16b illustre les corrections successives de cette méthode. On peut noter qu'au cours des

itérations la solution peut s'éloigner du rayon qu'on cherche à imposer. Une autre variante de cette méthode a été introduite par [17] qui considère une condition d'orthogonalité entre le vecteur n_i et le vecteur tangent initial t_i . Cette méthode présente également l'inconvénient de s'éloigner du rayon consigne figure 3.16c.

5) Méthode de linéarisation consistante

Pour éviter que la solution ne s'écarte du rayon imposé, une correction est apportée au résidu. La différence de la longueur du vecteur tangent courant et la longueur désirée peut être projetée sur le vecteur tangent pour définir le résidu de l'expression d'orthogonalité [16] :

$$t_i \cdot n_i = -|t_i| |r_i| = -|t_i| (|t_i| - 1) = R_i \quad (3.68)$$

L'expression du facteur de chargement est alors définie par [18] :

$$\beta_i = \frac{|t_i| (|t_i| - 1) - U_i^T \cdot U_i''}{\beta^2 + U_i^T \cdot U_i'} \quad (3.69)$$

Même si au début la direction de mise à jour s'éloigne du rayon imposé, l'application du résidu ramène le chemin sur le rayon de la sphère [16] (figure 3.16d).

3.3.1.3. Critères et contrôle de la convergence

Les méthodes itératives aboutissent à la solution en un nombre infini d'opérations convergeant vers la solution. On arrête les itérations lorsqu'on estime qu'on est suffisamment près de la solution. Si on utilise une telle méthode de résolution, le logiciel utilisé demande généralement de préciser le critère d'arrêt des itérations ou critère de convergence. Le choix des critères de convergence est d'une importance capitale. Les critères résultent généralement d'un compromis entre la précision recherchée et le coût de calcul.

Par critère de "convergence", on entend : critère d'arrêt des itérations de correction d'équilibre. Dans les calculs itératifs, on teste ordinairement la convergence à l'aide d'un rapport de deux scalaires ou de deux normes si l'on compare des vecteurs; le dénominateur rend le rapport non dimensionnel, tandis que le numérateur décroît progressivement s'il y a convergence. La norme du vecteur v est choisie indifféremment parmi les trois normes

classiques, à savoir :

$$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i| \quad \text{la norme absolue}$$

$$\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} \quad \text{la norme euclidienne}$$

$$\|v\| = \max(|v_1|, \dots, |v_n|) \quad \text{la norme du maximum}$$

Il existe plusieurs méthodes pour tester la convergence et dans le logiciel LUSAS [19], l'un ou plus des six critères décrits ci-après peuvent être considérés.

a- Critère de la norme euclidienne de forces Résiduelles

L'équilibre du solide est jugé satisfaisant quand la norme euclidienne du résidu $\|R\|$ d'équilibre est suffisamment petite comparativement à la norme du vecteur forces comprenant les forces externes et les réactions $\|F_{\text{ext}}\|$.

$$\frac{\|R\|_2}{\|F_{\text{ext}}\|_2} \times 100 \leq \varepsilon_r \quad (3.70)$$

ε_r est la précision requise dans le critère des forces.

Généralement, on ne considère que les degrés de liberté en translations ; néanmoins, l'utilisateur a la possibilité de considérer tous les degrés de liberté. Pour des structures dominées par un comportement géométriquement non linéaire, $\varepsilon_r < 0.1$ est recommandée. Dans le cas où la plasticité domine le comportement, une tolérance plus souple est recommandée : $0.1 < \varepsilon_r < 5.0$

b- Critère de la norme euclidienne de déplacements

Pour garantir que la solution obtenue constitue une bonne mesure du champ de déplacements U , il faut s'assurer aussi que la norme de la dernière correction U est suffisamment petite relativement déplacement total U .

$$\frac{\|U\|_2}{\|U\|_2} \times 100 \leq \varepsilon_u \quad (3.71)$$

Comme pour le critère de forces résiduelles, on peut ne considérer que les translations, bien

qu'il est possible de prendre en compte tous les degrés de liberté. Ce critère indique le taux de déplacement du solide durant la dernière itération. Pour la précision ϵ_u , on peut admettre les valeurs suivantes :

$$0.1 < \epsilon_u < 1.0 \text{ tolérance raisonnable}$$

$$0.001 < \epsilon_u < 0.1 \text{ tolérance sévère}$$

c- Critère de la norme d'énergie

Le critère de convergence est jugé satisfaisant lorsque le travail des forces résiduelles l'itération $i=0$ est suffisamment petite comparativement au travail des forces externes initiales ; autrement dit, on doit vérifier :

$$\frac{\{\mathbf{R}^i\}^T \{\mathbf{U}^i\}}{\{\mathbf{F}_{\text{ext}}\}^T \{\mathbf{U}^1\}} \times 100 < \epsilon_w \quad (3.72)$$

avec

$\{\mathbf{R}^i\}$ est le vecteur du résidu d'équilibre à l'itération en cours i ;

$\{\mathbf{U}^i\}$ est le vecteur des déplacements à l'itération en cours i ;

$\{\mathbf{F}_{\text{ext}}\}$ est le vecteur des forces externes pour l'incrément de charge en cours ;

$\{\mathbf{U}^1\}$ est le vecteur des déplacements à la première itération.

Pour les valeurs de la précision ϵ_w , on peut admettre les valeurs suivantes :

$$0.001 < \epsilon_w < 0.1 \text{ peu sévère}$$

$$10^{-6} < \epsilon_w < 10^{-3} \text{ raisonnable}$$

$$10^{-9} < \epsilon_w < 10^{-6} \text{ sévère}$$

La technique lignes de recherche tend à minimiser le travail des forces résiduelles pour l'itération en cours, ce qui peut conduire à l'arrêt des itérations avant la convergence si l'on utilise le critère de la norme de l'énergie. Par conséquent, on doit rajouter un deuxième critère de convergence à celui du critère de la norme d'énergie lorsque la technique lignes de recherche est utilisée.

d- Critère de la racine de la somme des carrés des résidus

Ce critère s'écrit sous la forme suivante :

$$\|\mathbf{R}\|_2 < \epsilon_2 \quad (3.73)$$

La précision ε_2 dépend des unités du problème.

e- Critère de la norme du maximum des résidus

Ce critère s'écrit sous la forme suivante :

$$\max [R] < \varepsilon_m \quad (3.74)$$

Comme pour le critère précédent, ε_m dépend des unités du problème. C'est un critère extrêmement rigide, qui pourrait être utile près des points de bifurcation ou pour les structures très sensibles au comportement géométriquement non linéaire.

3. 3.1.4. Résolution en flambage linéaire

L'analyse en flambage linéaire consiste à chercher la charge ou la pression qui rend la matrice de rigidité globale singulière. Elle est classiquement obtenue par la résolution du problème de valeurs propres suivant :

$$[K_L + \lambda_c K_g] \{u_n\} = 0 \quad (3.75)$$

où $[k_L]$ est la matrice de rigidité linéaire, k_g est la matrice de rigidité géométrique, calculée à partir du champ de contraintes, λ_c est la valeur propre et $\{u_n\}$ est le vecteur propre associé.

Pour identifier une valeur propre λ_c , il suffit par exemple de résoudre pour les grands déplacements et les grandes déformations :

$$|k_L - \lambda_c I| = 0 \quad (3.76)$$

car $[k_L]$ contient $[k_\sigma]$. I étant la matrice d'identité.

Pour chaque mode propre correspond une charge critique. Les modes propres sont normalisés à 1 sur la plus grande composante des vecteurs propres (déplacements).

A la plus petite des valeurs de λ_c correspond la charge critique d'instabilité $F_c = \lambda_{cmin} F$

3. 3.1.5. Résolution en flambage non linéaire

Cette analyse se justifie si la structure présente de fortes non-linéarités, dont l'analyse d'Euler ne peut tenir compte. Ces non-linéarités peuvent aussi être liées au matériau qui peut avoir un comportement élastoplastique.

On peut distinguer deux types d'analyses de stabilité non linéaires, pouvant se combiner.

D'une part la généralisation de l'analyse d'Euler présentée précédemment : on va faire du suivi des charges critiques et modes associés au cours du calcul non linéaire incrémental. Cela se traduit par une analyse de type Euler sur les matrices de raideurs réactualisées. Ce type d'analyse se fait souvent sur une structure sans défaut initial.

D'autre part, Pour l'étude d'une structure potentiellement instable ou susceptible de connaître un point limite au cours de l'évolution du chargement, des défauts géométriques sont injectés dans le modèle initial afin de faciliter l'initiation du flambage.

Plusieurs méthodes existent pour définir ce défaut.

L'une des plus adaptée est de prédéformer légèrement la structure suivant l'allure du mode de flambement correspondant à la branche que l'on veut suivre. L'amplitude de cette prédéformation doit être faible, par exemple moins de $1/10^{\text{ème}}$ de l'épaisseur pour une structure mince. La solution la plus économique est d'utiliser le mode de flambement linéaire d'Euler

Le défaut géométrique peut aussi être défini par mesures expérimentales de la pièce réelle dont la géométrie ne saurait être parfaite.

Le défaut peut aussi prendre la forme d'une perturbation du chargement (défaut d'alignement, rajout d'un chargement localisé, ...) ou des caractéristiques mécaniques du matériau (affaiblissement local du module d'Young, par exemple).

Un des autres points particuliers, liés à l'instabilité, est le choix de la technique de pilotage de l'algorithme utilisé pour localiser un point limite ou capter la branche instable de la courbe force-déplacement. Ce point sera traité dans les sections suivantes.

3.3.2. Traitement de la non-linéarité matérielle

3.3.2.1. Intégration des lois de comportement

Depuis l'avènement des ordinateurs rapides, le comportement élasto-plastique a fait l'objet de nombreuses recherches tant au niveau des algorithmes d'intégration qu'au niveau de la formulation des lois constitutives. L'intégration des lois de comportement joue un rôle très important dans un code de calcul par éléments finis. En effet, elle détermine la précision des résultats. Des erreurs sur les estimations des variables une fois commises ne sont plus rattrapables, de plus lorsque les estimations dépendent de l'histoire du chargement ces erreurs peuvent se propager d'un incrément à un autre, donnant des résultats qui s'écartent de plus en plus de la solution ; d'où l'importance d'utiliser des méthodes d'intégration stables et précises.

D'une manière générale, un schéma d'intégration doit assurer trois conditions que l'on peut

classer comme suit :

1. La précision de la solution.
2. Le coût de la solution, lié au temps de calcul.
3. La stabilité, étroitement liée à la nature du schéma d'intégration.

Dans un calcul de structure, le problème consiste à rechercher un état de déformation et de contrainte correspondant au comportement local du matériau, en chaque point matériel, tout en vérifiant l'équilibre global de la structure. Ainsi, la résolution des équations du modèle de comportement intervient dans le contexte de vérification de l'équilibre de la structure. La résolution de la loi de comportement intervient donc au niveau de chaque point d'intégration des éléments finis.

On distingue deux grandes familles de méthodes d'intégration appliquées aux modèles de comportement :

- Méthodes d'intégration explicites (Euler-Avant, Loi du point milieu généralisée Loi trapézoïdale généralisée);
- Méthodes d'intégration implicites (Euler-arrière et Schéma de Vermeer).

Trois algorithmes d'intégration numérique des lois de comportement sont implantés dans le code de calcul par Eléments finis LUSAS [19]:

- Algorithme d'Euler-Avant (Forward Euler)
- Algorithme d'Euler-Arrière (Backward Euler)
- Algorithme "Prévision élastique retour radial "(Radial Return algorithm)

3.3.2.2. Algorithmes d'Euler

La méthode d'Euler Arrière consiste à approximer une fonction $y(t)$ en connaissant sa dérivée

temporelle $f(y(t), y) = \frac{dy}{dt}$ à partir d'une condition initiale $y(0) = 0$. En connaissant un point

$y_n = y(t_n)$ à un temps t_n , le point $y_{n+1} = y(t_{n+1})$ à un temps $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ peut s'approximer par :

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f(t_n, y_n) \quad (3.77)$$

Comme la dérivée $f(t_n, y_n)$ de $y(t)$ est fonction de y_n , valeur connue à un temps t_n , y_{n+1} est calculée directement. Pour cette raison la méthode est considérée explicite et appelée méthode d'intégration d'Euler-Avant. Cette méthode consiste donc en une application directe et ne demande pas beaucoup de calculs ou d'itérations. Par contre, elle requière d'avoir des petits intervalles de temps Δt pour assurer la convergence si on intègre sur un temps $t = N \Delta t$, ce qui

augmente considérablement les temps de calcul.

La méthode d'Euler-Arrière propose d'écrire la dérivée $f(t_{n+1}, y_{n+1})$ en fonction d'équation implicite de y_{n+1}

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f(t_{n+1}, y_{n+1}) \quad (3.78)$$

Comme y_{n+1} est encore inconnue et écrite sous sa forme implicite, cette méthode d'intégration est considérée implicite. Dans ce cas, calculer y_{n+1} revient à résoudre une équation non linéaire en y_{n+1} , déterminée par récurrence sur l'incrément de temps.

En général, dans un problème d'éléments finis, la contrainte est recalculée (mise à jour) au point de Gauss pour un déplacement au noeud spécifique ce qui fait que l'histoire de déplacement est connue. La méthode consiste donc à discrétiser l'histoire de déplacement en plusieurs sous-intervalles pour lesquels les autres variables d'état sont recalculées.

En tenant compte des hypothèses d'isotropie et d'incompressibilité plastique et en se basant sur la méthode d'Euler arrière (schéma implicite), les équations constitutives sous forme incrémentale s'écrivent :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) \quad (3.79)$$

où \mathbf{D} est le tenseur de Hook généralisé et

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \boldsymbol{\varepsilon}^p \\ \boldsymbol{\varepsilon}^p &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \frac{\mathbf{f}_{n+1}}{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \end{aligned} \quad (3.80)$$

L'érouissage isotrope est définie par :

$$\kappa_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_y + \mathbf{H}(\mathbf{e}_{n+1}^p)^{-p} \quad (3.81)$$

où \mathbf{H} est la pente de l'érouissage.

$$(\mathbf{e}_{n+1}^p)^{-p} = \left[\frac{2}{3} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p \right]^{1/2} \quad (3.82)$$

En érouissage isotrope, la condition de consistance plastique au temps $t + \Delta t$ lorsqu'on néglige l'effet de la température s'écrit :

$$\mathbf{f}_{n+1} = f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \kappa_{n+1}) = 0 \quad (3.83)$$

Pour résoudre les équations non linéaires ci-haut, on a recours à la technique de Newton-Raphson. Cependant, les équations non linéaires à résoudre sont inter-reliées entre elles et les dérivées nécessaires des équations en questions dans le calcul de la matrice jacobienne sont souvent difficilement calculables et trop coûteuses numériquement. Cette complexité rend l'algorithme de la solution lourde et instable. Pour ces raisons, on a recours à des algorithmes qui surpassent ces difficultés. L'algorithme "Prévision élastique- retour radial" est une forme spéciale de la méthode d'Euler et souvent utilisé pour l'intégration des relations constitutives en élastoplasticité. La figure 3.17 illustre le principe des méthodes implicites et explicites.

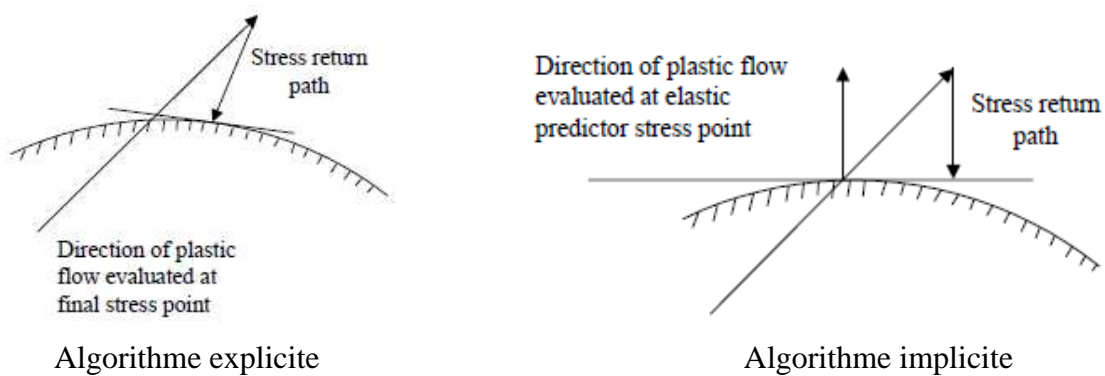


Figure 3.17. Principe des méthodes explicites et implicites

3.3.2.3 Algorithme de Prévision élastique retour radial (PERR)

La méthode la plus couramment utilisée pour intégrer les lois de comportement plastique est sans doute la méthode dite "Prévision élastique- retour radial", initialement introduite par Krieg et Krieg [20] pour des modèles de comportement parfaitement plastique. L'algorithme appelé "Return mapping", qui est une extension de cette méthode au cas des modèles avec écrouissage cinématique non linéaire, a été réalisée par Simo et Taylor [21]. Le principe de la méthode (PERR) consiste à calculer la contrainte finale comme projection d'une contrainte d'essai sur la surface de charge finale selon la normale passant par la contrainte d'essai. La contrainte d'essai est calculée en supposant qu'après l'incrément de déformation totale ϵ on est toujours dans le domaine élastique :

$$\sigma_{n+1}^{(1)} = \sigma_n + \sigma_n = \sigma_n + D \epsilon \quad (3.84)$$

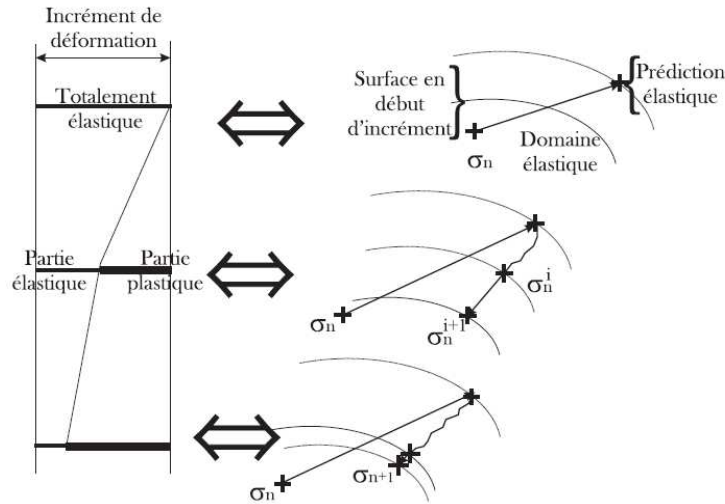


Figure 3.18. Illustration de la méthode prédiction élastique-retour radial

L'équation de la surface d'écoulement est ensuite évaluée pour la valeur de la contrainte d'essai $\sigma_{n+1}^{(1)}$:

$$f_{n+1}(\sigma, \kappa) = f(\sigma_{n+1}) - \kappa_{n+1}(\bar{\epsilon}_{n+1}^p) \quad (3.85)$$

Une fois la valeur de la fonction d'écoulement f_{n+1} déterminée, deux cas se présente :

- $f_{n+1} \leq 0$ alors l'hypothèse posée à la première étape est valide, le matériau n'a subi aucune déformation inélastique et la valeur de la contrainte d'essai $\sigma_{n+1}^{(1)}$ est acceptée :

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{(1)}$$

Comme il n'y a aucun écoulement inélastique, les autres variables ($\epsilon^p, \kappa, \bar{\epsilon}^p$) restent les mêmes et on retourne à l'étape (1) pour la solution du prochain incrément.

- $f_{n+1} > 0$ alors le matériau a subi un écoulement plastique et une correction doit être apportée à la contrainte d'essai $\sigma_{n+1}^{(1)}$. En effet, il faut retrancher de la contrainte d'essai la partie supposée élastique alors qu'elle est plastique en effectuant un retour sur la surface de charge.

Contrainte $\sigma_{n+1}^{(i+1)} = \sigma_{n+1}^{(i)} - D \epsilon^{p(i)} \quad (3.86)$

Déformation $\epsilon_{n+1}^{p(i+1)} = \epsilon_{n+1}^{p(i)} - \epsilon_{n+1}^{(i)} a^{(i)} \quad (3.87)$

Paramètre d'écrouissage $\kappa_{n+1}^{p(i+1)} = \kappa_{n+1}^{p(i)} \quad (3.88)$

Déformation plastique cumulée $\bar{\epsilon}_{n+1}^{p(i+1)} = \bar{\epsilon}_{n+1}^{p(i+1)} + \epsilon_{n+1}^{(i)} \left[\epsilon_{n+1}^{p(i)} : \epsilon_{n+1}^{p(i)} \right]^{1/2} \quad (3.89)$

L'état de contraintes est ramené sur la surface de charge de manière incrémentale. Pour chaque incrément i la fonction de charge $f(\sigma, \kappa)$ est approché linéairement grâce à un développement en série. La condition de consistance plastique s'écrit donc sous la forme :

$$F = F_{n+1}^{(i)} + \frac{n+1}{n+1} \frac{F}{\sigma^{(i)}} \sigma^{(i)} + \frac{n+1}{n+1} \frac{\kappa}{e^{-p(i)}} e^{-p(i)} = 0 \quad (3.90)$$

Pour une loi de comportement à potentiel associé, l'incrément de contrainte est calculé par la formule :

$$\sigma^{(i)} = \sigma_{n+1}^{(i+1)} - \sigma_{n+1}^{(i)} = - D_{n+1} a^{(i)} \quad (3.91)$$

L'incrément de déformation plastique cumulé est calculé par la formule :

$$\bar{e}^p = {}^{(i)} \bar{a} \quad (3.92)$$

où

$$\bar{a} = \left[\frac{2}{3} a_{n+1}^i : a_{n+1}^i \right]^{1/2} \quad (3.93)$$

Le multiplicateur plastique se calcule alors par la formule

$$= \frac{F_{n+1}^{(i)}}{a_{n+1}^{(i)} D_{n+1} a^{(i)} - H \bar{a}} \quad (3.94)$$

Une fois cet incrément déterminé, l'évolution des variables d'état devient explicite. En substituant par son expression dans (3.86) et (3.87) on peut actualiser l'état de contrainte $\sigma_{n+1}^{(i+1)}$ et l'état de déformation $\epsilon_{n+1}^{p(i+1)}$. Ce schéma prédicteur-correcteur doit être appliqué itérativement jusqu'à obtenir un résidu nul à une tolérance près. Il y a arrêt lorsque :

$$F_{n+1}^{(i+1)} \leq \text{Tolérance} \quad 0$$

et que l'équilibre global soit satisfait.

Pour un nouvel incrément de déformation ϵ et de temps t , les valeurs obtenues sont considérées initiales et on retourne à l'étape (1) pour la détermination des nouvelles valeurs à la fin de ces incréments.

La figure 3.18 illustre le principe de la méthode prédiction élastique retour radial.

3.4. Conclusion

Dans ce chapitre bibliographique, nous avons abordé les outils numériques adaptés à la modélisation nonlinéaire mixte géométrique et matérielle des structures. Ces outils s'articulent autour des thèmes suivants :

- résolutions des systèmes d'équations non linéaires ;
- traitement de la nonlinéarité matérielle ;
- nonlinéarité géométrique ;
- traitement de la nonlinéarité matérielle.

La plupart des outils que nous avons exposé dans ce chapitre sont implantés dans le code de calcul par éléments finis LUSAS (version 13.8), que nous allons utiliser dans la suite de cette étude.

La maîtrise de ces outils va nous permettre de mettre en oeuvre, dans le chapitre suivant, un modèle numérique capable de simuler le comportement des poutres ajourées en acier à la rupture. Pour ce faire, une stratégie de calcul efficace doit comporter :

- une loi de comportement capable d'interpréter le comportement du matériau que l'on cherche à modéliser et une fonction de charge qui définit les limites du domaine élastique;
- une formulation pour tenir compte des grands déplacements;
- une déformée initiale pour simuler les imperfections géométriques initiales;
- les méthodes de résolution des systèmes d'équation nonlinéaires.

En tenant compte de tous ces paramètres, nous espérons aboutir à un modèle fiable, représentatif de la réalité et suffisamment souple pour une étude paramétrique et pas trop complexe au détriment du temps de calcul.

Références du chapitre 3

- [1] U.S. Dixit and P.M. Dixit. An analysis of the steady state wire drawing of strain-hardening materials. *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 47, pages 201–229, 1995.
- [2] E.N. Dvorkin and E.G. Petöcz. An effective technique for modelling 2D metal forming processes using an Eulerian technique. *Engineering Computations*, vol. 10, pages 323-336, 1993.
- [3] V. De Ville De Goyet. *L'analyse non-linéaire par la méthode des éléments finis des structures spatiales formées de poutres à section non-symétriques*. Thèse de Doctorat, Université de Liège, Faculté des sciences appliquées, 1989.
- [4] M. Geradin et D.Rixen. *Théorie des vibrations, Application à la dynamique des structures*, Edition Masson, Paris, 1996.
- [5] L.E. Malvern. *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1969.
- [6] R. Hill. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proceeding of Royal Society, A 193*, pages 281-297, 1948.
- [7] S.W. Tsai, and E.M. Wu. A general theory of strength for anisotropic materials. *Journal of Composite Materials*. vol. 5, pages 58–80 , 1971
- [8] L. Batoz and G. Dahatt. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *Computer Methods in Applied Mechanics, and Engineering*, vol.14, pages 1262-1267,1979.
- [9] M.A. Crisfield. *Non-Linear finite element analysis of solids and structures*. Volume1: Essentials. John Wiley & Sons, Chichester, 1991.
- [10] M. A. Crisfield. An arc-length method including line searches and accelerations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 19, pages 1269-1289, 1983.
- [11] F. Coste. *Modélisation thermomécanique tridimensionnelle par éléments finis de la coulée continue d'aciers*. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2004.
- [12] E. Riks. The application of Newton's method to the problem of elastic stability. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 39, pages 1060-1066, 1972.

- [13] G.A. Wempner. Discrete approximation related to nonlinear theories of solids. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 7, pages 1581-1599, 1971.
M.L. Wilkins. *Calculation of élasto-plastique flaws*, in « *Methods in Computational Physics* ». B. Alder (eds), Academic press (1964).
- [14] E.Ramm. *Strategies for tracing the nonlinear response near limit points*. Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics (edited by W. Wunderlich, E. Stein and K.J. Bathe), pages 63-89, 1981.
- [15] M. A. Crisfield. A fast incremental/iterative solution procedure that handles Snapthrough. *Computers & Structures*, vol.13, pages 55-62, 1981.
- [16] W. Bruce, R. Forde and F. Stiemer. Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis. *Computers & Structures*, vol. 27, No. 5, pages 625-630, 1987.
- [17] E. Riks. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 7, pages 529-551, 1979.
- [18] K.H. Schweizerhof, P. Wiggers. Consistent linearization for path following methods in nonlinear FE analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 59, pages 261-279, 1986.
- [19] Lusas 13. Lusas manual. *Finite Element Analysis Ltd*. Version 13.5, UK, 2003.
- [20] R.D. Krieg and B.D. Krieg. Accuracies of numerical solution method for the elastic-perfectly plastic model. *ASME, Journal of Pressure Vessels and Piping Division*, Vol. 99, 510-515, 1977.
- [21] J.C. Simo and R.L. Taylor. A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 22, pages 649-670, 1986.
- [22] M. A. Crisfield. An arc-length method including line searches and accelerations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 19, pages 1269-1289, 1983.
- [23] V. De Ville De Goyet. *L'analyse non-linéaire par la méthode des éléments finis des structures spatiales formées de poutres à section non-symétriques*. Thèse de Doctorat, Université de Liège, Faculté des sciences appliquées, 1989.
- [24] P. German et P. Muller. *Introduction à la mécanique des milieux continus*. Edition Masson, Paris, 1995.

- [25] D.R.J. Owen and E. Hinton. *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*. Pineridge Press, Swansea, 1980.
- [26] M. Ortiz and E.P. Popov. Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, pages 1561-1576, 1985.
- [27] M. Ortiz and J.C. Simo. An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, pages 353-366, 1986.
- [28] E. Riks and C.C. Rankin. Bordered equations in continuation methods: an improved solution technique. *National Aerospace Laboratory NLR, NLR MP 87057 U*, 1988.

Chapitre 4

Simulations numériques

Chapitre 4.....	- 103 -
4.1. Introduction.....	- 104 -
4.2. Modèle numérique.....	- 104 -
4.2.1. Géométrie et Maillage.....	- 105 -
4.2.2. Conditions aux limites et chargement.....	- 106 -
4.2.3. Loi de comportement de l'acier.....	- 106 -
4.2.4. Non-linéarité géométrique.....	- 106 -
4.2.5. Imperfection géométrique.....	- 107 -
4.2.6. Méthodes de résolution.....	- 108 -
4.3. Validation expérimentale du modèle numérique.....	- 109 -
4.4. Comparaison des résultats du modèle numérique proposé avec ceux de la littérature.....	- 114 -
4.5. Etude paramétrique.....	- 115 -
4.5.1. Introduction.....	- 115 -
4.5.2. Influence de l'épaisseur de l'âme.....	- 116 -
4.5.3. Influence de la limite élastique.....	- 121 -
4.5.4. Influence de la hauteur des ouvertures.....	- 123 -
4.5.5. Influence de la hauteur des plaques intercalaire.....	- 125 -
4.5.5. Influence de la portée sur la résistance ultime au voilement des montants d'âme.....	- 126 -
4.6. Comparaison entre résultats fournis par les modèles analytiques de l'Annexe N et le modèle numérique.....	- 128 -
4.7. Conclusion.....	- 131 -
Références du chapitre 4.....	- 134 -

4.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons la démarche que nous avons retenue pour le développement et la validation d'un modèle numérique non linéaire pour simuler le comportement des poutres ajourées en acier jusqu'à la rupture. Le choix du modèle élément fini est guidé par les conclusions de la recherche bibliographique, mais aussi par les moyens de calcul associés au logiciel éléments finis dont nous disposons en l'occurrence LUSAS version 13.8 [1]. Nous présentons ensuite les résultats obtenus à partir d'une série de 80 simulations numériques effectuées sur des poutres ajourées avec des ouvertures hexagonales équipées ou non de plaques intercalaires en faisant varier les paramètres géométriques, la limite élastique et la classe de la section perforée afin d'évaluer leur influence sur la charge et le mode de ruine. Enfin, les charges de ruine issues des simulations numériques seront comparées avec celles calculées par les formules de l'Annexe N de l'Eurocode 3 (version ENV1993-1-1).

4.2. Modèle numérique

4.2.1. Géométrie et Maillage

Les parois des poutres ajourées sont modélisées avec des éléments de coques minces quadrangulaires à 8 nœuds QSL8 ("Quadrilateral Semiloof Thin shell") et à 32 degrés de liberté et dont la formulation est basée sur la théorie discrète de Kirchhoff qui suppose que l'énergie de cisaillement transversal est négligeable. Les degrés de liberté de ses éléments sont les déplacements u , v et w aux nœuds sommets et aux nœuds milieux et une rotation de la normale à la surface moyenne en des positions qui correspondent à celle d'un schéma d'intégration de Gauss à deux points appelés "Loof nodes", telle qu'il est illustré sur la figure 4.1.

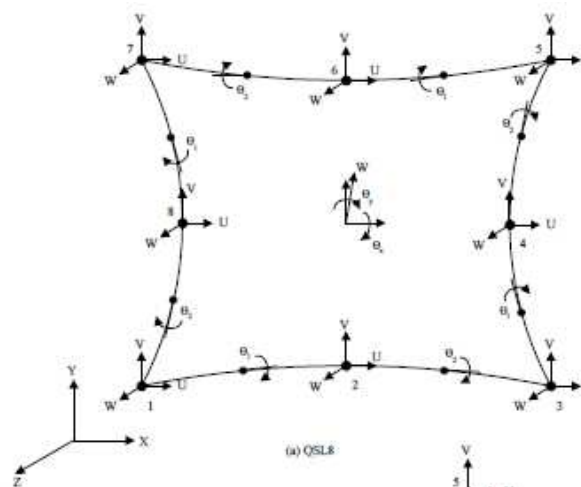


Figure 4.1. Élément coque mince QSL8 [1]

Le maillage de la poutre est défini dans le plan moyen des parois. En raison du caractère symétrique de la poutre, l'étude est réduite à la moitié de la poutre seulement, comme l'illustre l'exemple d'une poutre ajourée à ouvertures octogonales représenté sur la figure 4.2. Ainsi, il est possible d'adopter un maillage plus fin pour obtenir une meilleure précision. L'obtention de résultats représentatifs est intimement liée à la finesse du maillage dans les zones autour des ouvertures, lieu privilégié d'apparition de concentrations de contraintes. Malgré la symétrie de la section transversale par rapport à ses axes principaux, une modélisation complète de celle-ci a été nécessaire pour tenir compte du caractère non symétrique des modes d'instabilité globale hors plan. Le choix de la taille du maillage est dicté par la recherche de la meilleure adéquation entre la qualité des résultats fournis et les temps de calculs. Un maillage régulier a été utilisé pour les semelles de la poutre. Autour des ouvertures nous avons adopté un maillage non uniforme dont les éléments ont un rapport d'aspect (élancement) inférieur à 5. Le maillage des différentes poutres étudiées comporte un nombre variant entre 1472 et 3776 éléments.

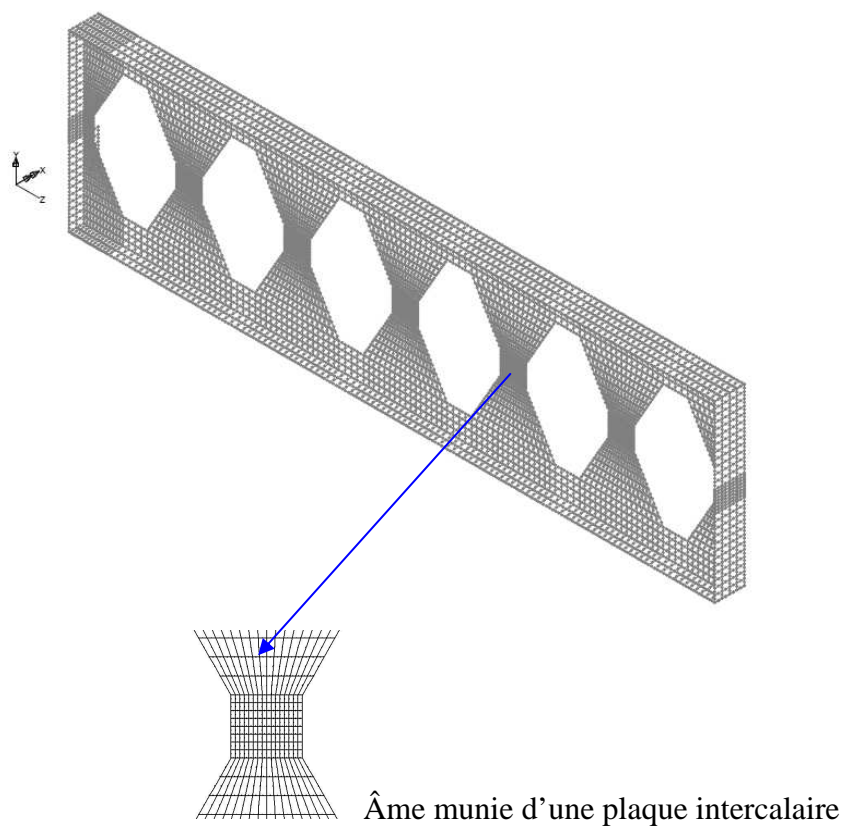


Figure 4.2. Exemple de maillage d'une demie poutre à ouvertures octogonales

4.2.2. Conditions aux limites et chargement

Les conditions de symétrie se traduisent par un blocage en déplacement de tous les noeuds appartenant au plan de symétrie dans la direction normale à ce plan. Donc le déplacement suivant z , w , est nul. Les appuis sont définis en tant que conditions aux limites sur toute la largeur des semelles inférieures des poutres ajourées. Les déplacements verticaux $v(y)$ et $u(x)$ y sont nuls. La force ponctuelle $P/2$ appliquée au milieu de la poutre est décomposée en deux forces appliquées au niveau des semelles supérieure et inférieure afin d'éviter une rupture locale prématurée des poutres. Les déplacements latéraux sont bloqués aux niveaux des plans moyens des semelles pour simuler le travail des appuis latéraux contre le déversement.

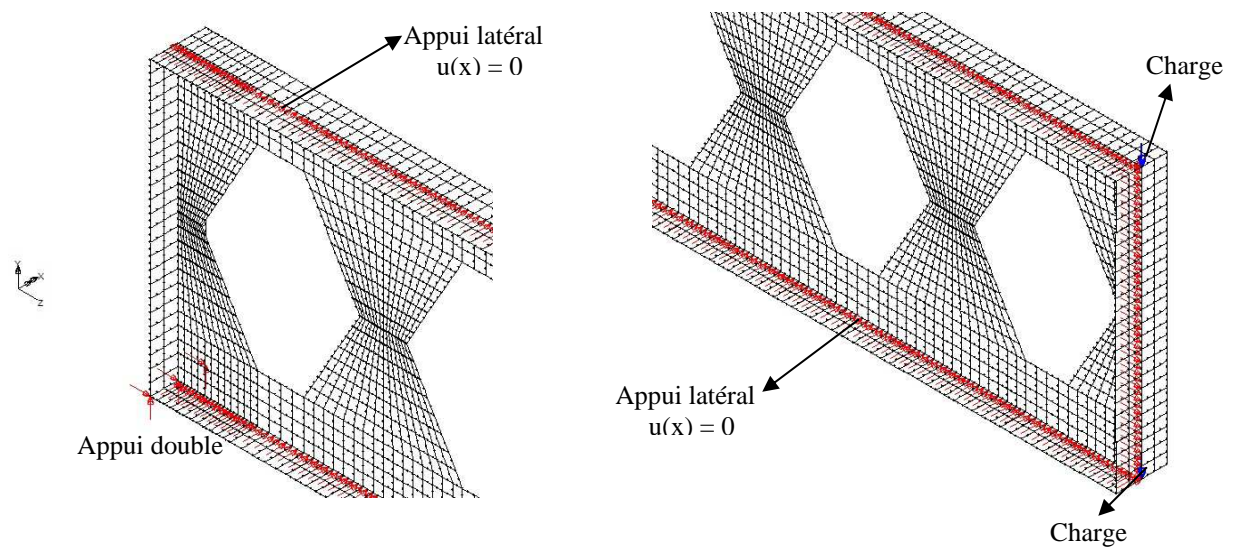


Figure 4.3. Chargement et conditions aux limites

4.2.3. Loi de comportement de l'acier

Le matériau acier est modélisé à l'aide d'une loi de comportement élasto-plastique parfaite sans écrouissage basée sur le critère tridimensionnel des contraintes de von Mises. Les caractéristiques mécaniques de l'acier sont définies comme suit : $E = 210$ GPa et $\nu = 0.3$.

4.2.4. Non-linéarité géométrique

Pour la prise compte de la non-linéarité géométrique dans la simulation du comportement des poutres ajourées, l'approche que nous avons retenue est une description lagrangienne

totale suggérée pour les problèmes en grands déplacements et en petites rotations et déformations. Son principe de fonctionnement est décrit dans le paragraphe 3.2.1 de ce document. Conformément à cette description, le tenseur de Piola-Kirchhoff de seconde espèce, conjugué à la déformation Green-Lagrange exprimée par rapport à la configuration initiale non déformée sont introduits dans l'écriture des équations d'équilibre.

4.2.4. Imperfections géométriques

Il est bien connu que pour effectuer une analyse élasto-plastique non linéaire prenant en compte non seulement la plasticité mais également les phénomènes d'instabilité, il est nécessaire d'introduire une imperfection géométrique. Les imperfections géométriques initiales dans la simulation numérique peuvent être employées non seulement pour représenter la géométrie imparfaite, mais aussi pour prendre en compte les phénomènes d'instabilités qui ne peuvent être obtenus avec le chargement introduit dans le modèle numérique. C'est le cas notamment du voilement du montant d'âme qui ne peut avoir lieu dans le modèle numérique proposé étant donné que l'âme est chargée dans son plan.

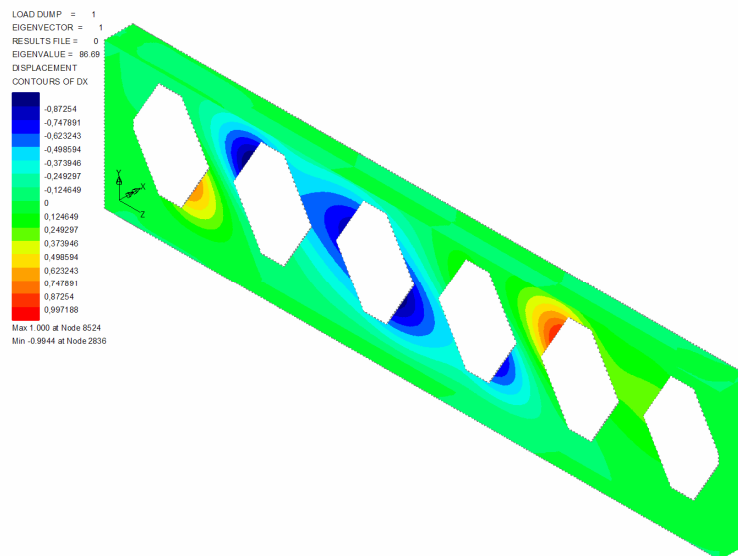


Figure 4.4. Exemple de déformée du 1^{er} mode de flambement d'une poutre ajourée à ouvertures hexagonales

La technique communément utilisée, afin de définir la distribution des imperfections initiales, est d'adopter une imperfection basée sur le premier mode de flambement. Pour ce faire, nous avons réalisé préalablement une analyse d'instabilité linéaire de la structure. Ainsi, nous

avons pu évaluer les différentes charges (valeurs propres) et modes critiques (modes propres). Lors de cette analyse, la structure est supposée indéfiniment élastique et parfaite. La plasticité du matériau ainsi que les imperfections géométriques et matérielles sont négligées. La figure 4.4 illustre un exemple de déformée issue du premier mode de flambement.

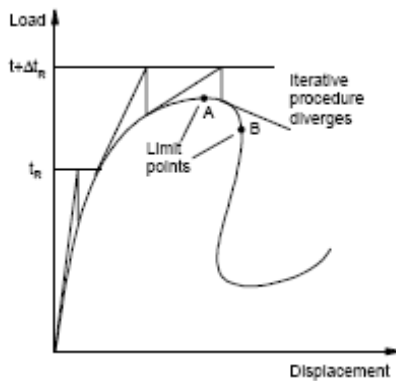
Les déplacements nodaux du premier mode de flambement sont normalisés en utilisant le déplacement maximal dans la structure et ce déplacement maximal est pris égal à l'unité. En multipliant les déplacements normalisés par un facteur approprié, qui est l'amplitude, les imperfections initiales rattachées au mode propre considéré peuvent être calculées. L'utilisation des imperfections maximales pour un mode propre de flambement est une estimation conservative car les imperfections maximales ne sont pas proportionnelles le long de l'élément. En outre, l'amplitude maximum des imperfections est une variable aléatoire qui ne peut être déterminé que par un modèle stochastique. Une telle démarche dépasse le cadre de notre étude. Dans cette étude, les valeurs de l'amplitude maximale des imperfections sont définies en terme de la hauteur libre de l'âme entre les semelles des poutres, inspirées des recommandations définies dans l'Annexe C de l'EN 1993-1-5 [2] de l'Eurocode 3 pour les plaques planes sans ouvertures chargées dans leur plan. Dans cette norme, il est indiqué que pour déterminer la charge ultime d'une plaque rectangulaire de dimensions $a \times b$ chargée dans son plan par éléments finis, on peut introduire une imperfection géométrique sous la forme du premier mode de flambement ayant pour amplitude maximale la plus petite des deux valeurs : $a/200$ et $b/200$. Une étude de sensibilité à ces amplitudes sera présentée au paragraphe 4.3.

4.2.5. Méthodes de résolution

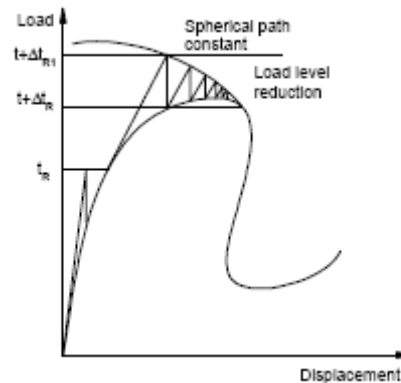
Les équations générales sont formulées en prenant en compte la non-linéarité matérielle due au comportement de l'acier et la non-linéarité géométrique due aux grands déplacements. Le chargement est imposé par incréments successifs et l'analyse repose sur une succession d'étapes, elles-mêmes menées de façon itérative. Pour chaque pas de chargement, cette analyse comporte la détermination des déplacements par l'algorithme itératif de Newton-Raphson. Pour chaque incrément, la stabilité de l'équilibre atteint est testée, comme présenté au paragraphe 3.3.1.3., à travers un critère d'arrêt ou un critère de convergence. Dans le cadre de cette étude, le processus itératif de résolution est poursuivi jusqu'à la convergence caractérisée par les critères d'arrêt suivant : norme euclidienne de déplacements et norme euclidienne de forces résiduelles sont tous les deux égaux à 10%. Si cette condition est vérifiée, l'état d'équilibre au temps t_i est dit stable et la simulation numérique se poursuit par

l'étude de l'équilibre de la structure sous le pas de chargement suivant ΔP_{i+1} . Dans le cas contraire, le processus itératif se poursuit, mais cette fois-ci le solveur sous-incrémente automatiquement les charges pour atteindre le niveau final. S'il rencontre un point limite, comme le flambage, il relance avec l'une des méthodes de longueur d'arc implémentés dans le logiciel LUSAS pour poursuivre le calcul de post-flambage, comme illustrée sur la figure 4.5. Dans ce contexte, l'utilisateur possède l'option de choisir entre l'une des trois méthodes suivantes :

- Méthode de Riks [3];
- Méthode de Crisfield [4];
- Méthode de Rheinboldt [5].



(a) Pilotage en force



(b) Pilotage en force puis relance avec la méthode longueur d'arc

Figure 4.5. Méthodes itératives utilisés par le logiciel LUSAS pour la résolution des problèmes non linéaires [1]

4.3. Validation expérimentale du modèle élément fini

Avant de présenter les applications des modèles développés dans le paragraphe précédent, il est nécessaire de valider un certain nombre de résultats issus du calcul numérique avec des résultats expérimentaux. Etant donnée, que dans le cadre de cette recherche, nous n'avions pas la possibilité d'effectuer des essais sur des poutres ajourées, les résultats numériques ont été confrontés avec les résultats d'essais disponibles dans la littérature réalisés à l'Université McGill [6,7] et dont les caractéristiques géométriques et mécanique sont exposées dans

l'Annexe A. Par ailleurs, il nous a semblé pertinent d'étudier l'influence de l'amplitude maximale de l'imperfection géométrique initiale sur les charges ultimes prédites par les simulations numériques. Les poutres considérées sont simplement appuyées et soumises à une force concentrée appliquée en leur milieu. Elles sont munies de raidisseurs verticaux au niveau des appuis et des appuis latéraux afin d'empêcher tous mouvement latéral susceptible de produire un déversement. Les essais menés sur les poutres considérées dans cette étude ont montré que sur les 11 poutres testées 9 ont péri par flambement du montant d'âme compris entre deux ouvertures [6]. La poutre 10-6 a péri par flambement local du Té situé au-dessus d'une des ouvertures. La poutre 10-7 a péri par déversement latéral, malgré la présence des appuis latéraux, mais après que l'un de ses montants d'âme ait subi de grands déplacements latéraux [6].

Comme indiqué précédemment, une imperfection géométrique initiale ayant la forme du 1^{er} mode de flambement sera introduite pour chaque poutre lors des simulations numériques. Les simulations numériques sont effectuées en considérant comme amplitude maximale les valeurs $d_w/200$ et $d_w/100$. d_w étant la hauteur hors-tout de l'âme. Les résultats issus de la considération de ces deux valeurs seront comparés avec ceux des essais. Ceci dans le but d'adopter comme valeur finale celle qui fournit les charges ultimes qui concordent le mieux avec ceux des essais. Cette étude va aussi nous permettre d'étudier la sensibilité des résultats vis-à-vis des amplitudes maximales des imperfections initiales. Les résultats de cette étude, appliquée à 8 des 11 poutres testées, sont résumés dans le tableau 4.1.

Specimen	P_{Essai}	P_{MEF} for $d_w/200$ (kN)	$P_{\text{Essai}}/P_{\text{FEM}}$	P_{FEM} for $d_w/100$ (kN)	$P_{\text{Essai}}/P_{\text{FEM}}$	Réduction de la charge ultime (%)
10-1	79.1	73.87	1.07	70.39	1.12	4.71
10-3	73.84	83.33	0.89	80.56	0.92	3.32
12-1	114.66	123.9	0.92	117.8	0.97	0.05
12-3	116.44	111.70	1.04	109.7	1.06	0.02
10-5 (a)	92.7	101	0.92	94	0.99	6.93
10-5 (b)	100.9	101	1.00	94	1.07	6.93
10-6	94.8	84.9	1.12	79.3	1.19	6.60
10-7	84.4	81.72	1.03	76.86	1.10	5.95
Moyenne			0.998		1.05	4.31
Ecart type			0.082		0.088	2.91

Table 4.1. Sensibilité des poutres testées à l'amplitude maximale des imperfections géométriques

En augmentant les valeurs des amplitudes maximales d'imperfection de $d_w/200$ à $d_w/100$, les

charges ultimes des poutres considérées sont réduites en moyenne de 4.31% avec un écart type de 2.91%. Ce qui montre que les poutres considérées sont peu sensibles aux valeurs des amplitudes maximales des imperfections. Les résultats représentés dans le tableau 4.1 montrent aussi que les valeurs des charges ultimes obtenues avec une amplitude maximale d'imperfection égale à $d_w/200$ sont légèrement surestimées si on les compare avec ceux des essais. D'autre part, les charges ultimes obtenues avec une amplitude maximale d'imperfection égale à $d_w/100$ sont légèrement sous-estimées. Par conséquent, nous avons jugé que pour l'étude paramétrique qui va suivre, une amplitude maximale d'imperfection géométrique égale à $d_w/100$ fournirait des résultats satisfaisants. Le tableau 4.2 compare la charge de ruine P_{MEF} obtenue par le modèle numérique par rapport à la charge de ruine expérimentale. Il peut être remarqué que le ratio P_{Essai} / P_{MEF} varie entre 0.916 et 1.19 et dont la valeur moyenne est de 1.025 et un écart type de 0.0866. Ces mesures statistiques montrent que le modèle numérique proposé peu estimer de façon suffisamment précise la charge ultime des poutres ajourées avec des ouvertures hexagonales ou octogonales. Il faut par ailleurs souligner le cas de la poutre 10-6 où le ratio P_{Essai} / P_{MEF} est égal à 1.19. Cette divergence entre valeur calculée et valeur mesurée peut être expliquée par le fait que la ruine de la poutre 10-6 est survenue durant l'essai par flambement local du Té supérieur. Les poutres 10-5, 10-6 et 10-7 ne seront pas considérées dans l'étude paramétrique.

Poutre	P_{Essai} (kN)	P_{MEF} (kN)	P_{Essai} / P_{MEF}
10-1	79.10	70.39	1.12
10-2	58.71	59.65	0.984
10-3	73.84	80.56	0.916
10-4	50.26	56.00	0.897
12-1	114.66	117.8	0.970
12-2	94.74	95.50	0.991
12-3	116.44	109.7	1.06
12-4	93.41	92.20	1.013
10-5 (a)	92.70	94.00	0.986
10-5 (b)	100.9	94.00	1.073
10-6	94.80	79.3	1.19
10-7	84.40	76.86	1.10
Moyenne			1.025
Ecart Type			0.0866

Tableau 4.2. Comparaison des charges de ruine

L'influence de l'amplitude maximale des imperfections géométriques sur les courbes charge

flèche a été aussi étudiée. Pour ce faire, nous avons retenu les poutres 10-1, 10-3, 12-1 et 12-3 pour cette étude. On peut constater sur la figure 4.6 que les courbes charge-flèche obtenues avec des amplitudes maximales égales à $d_w/200$ et $d_w/100$ sont quasiment similaires.

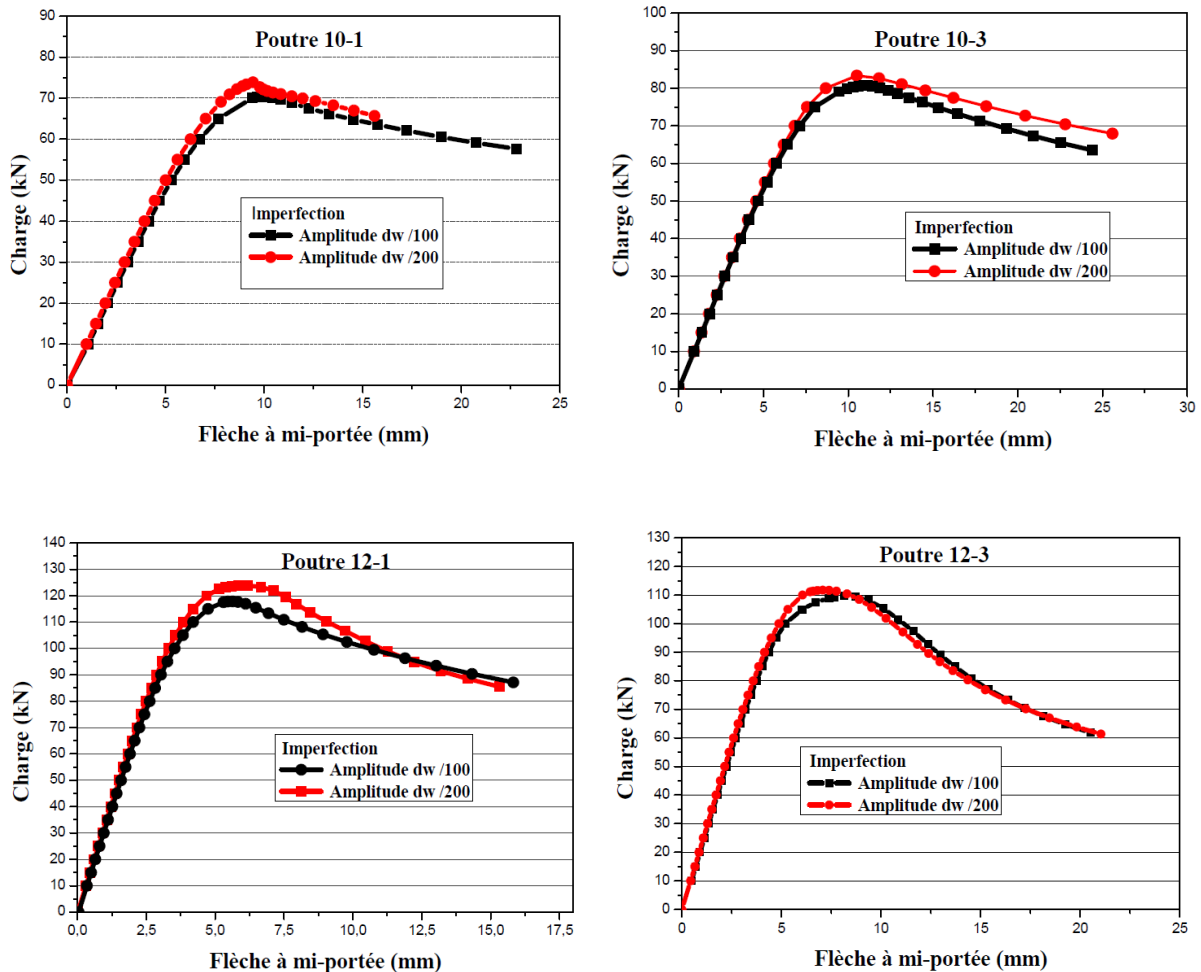
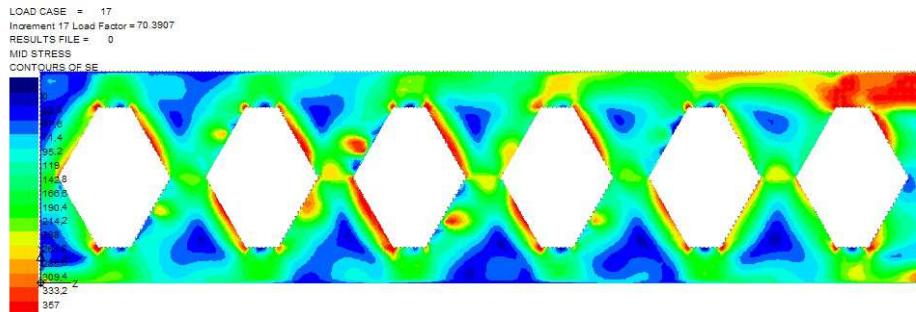


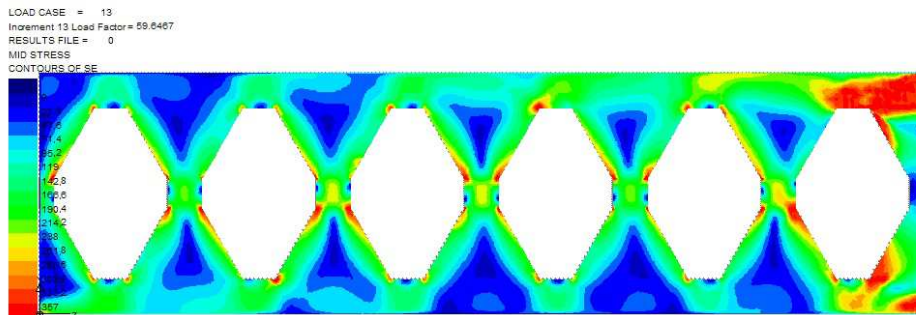
Figure 4.6. Influence de l'amplitude maximale sur les courbes charge-flèche

La figure 4.7 représente des coupes du champ de contrainte de von Mises des poutres testées sous chargement de ruine. Les surfaces en rouge traduisent les zones de plastification de l'acier. Nous constatons que le niveau de plastification varie d'une poutre à une autre. A la rupture, l'étendue des zones plastiques est plus importante dans les poutres sans plaques intercalaires. Dans ces poutres les zones plastiques sont localisées au droit de la charge concentrée et des côtés inclinés des ouvertures. Dans les poutres 10-3 et 10-4, on constate en plus une plastification à mi-hauteur des montants d'âme. L'angle d'inclinaison des côtés des ouvertures semble avoir une influence sur la localisation des zones plastiques au moment de la ruine. Il est aussi clair que la ruine par flambement des montants d'âme n'exclu pas

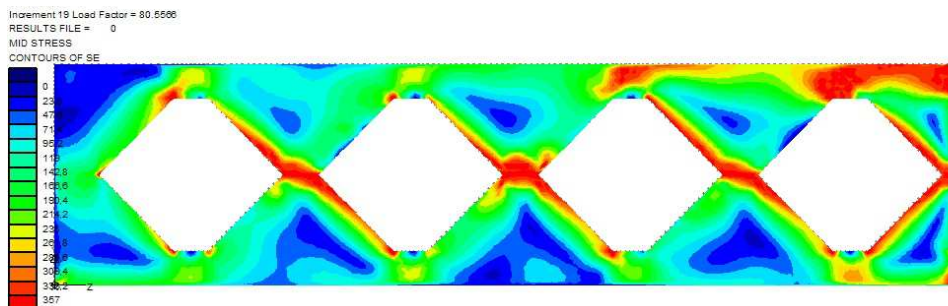
l'apparition de zones plastiques. La formation de zones plastiques est sans doute étroitement liée à l'élanement mécanique des parois des poutres ainsi qu'à la forme et aux dimensions des ouvertures d'âme. Cela fera l'objet dans l'étude paramétrique.



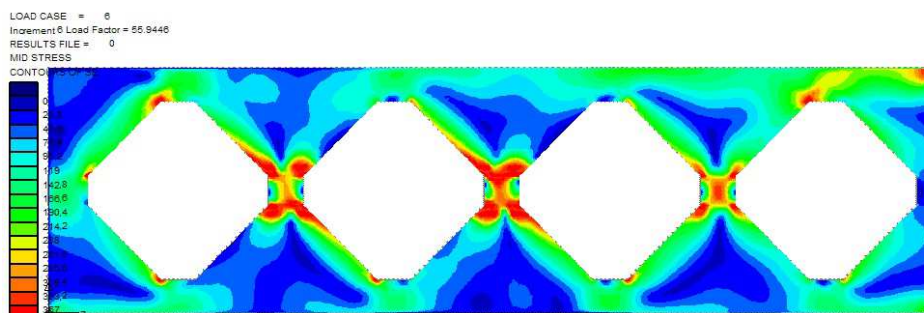
Poutre 10-1



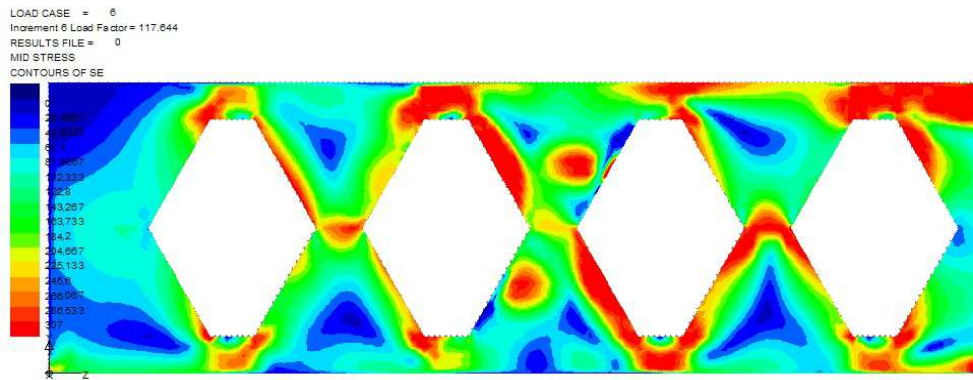
Poutre 10-2



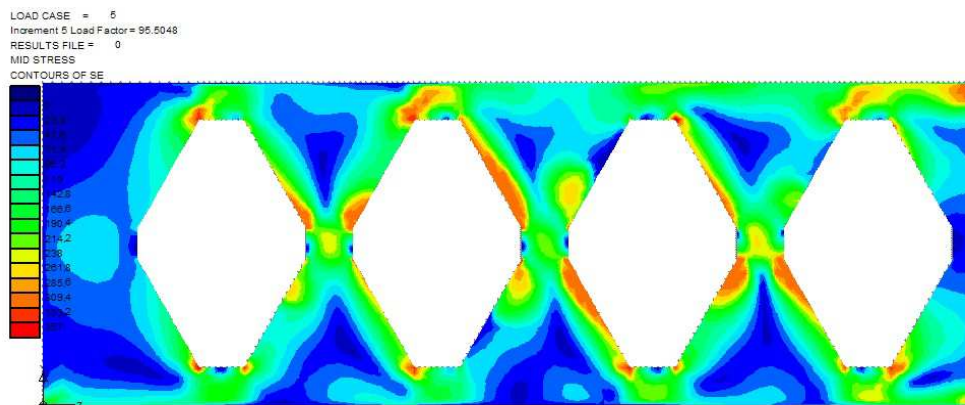
Poutre 10-3



Poutre 10-4



Poutre 12-1



Poutre 12-2

Figure 4.7. Champs des contraintes de von Mises

4.4. Comparaison des résultats du modèle numérique proposé avec ceux de la littérature

Le modèle numérique proposé dans cette étude a été validé avec les résultats des essais publiés dans Zaarour et Redwood [6] Redwood et Dermidjian [7]. Dans les deux publications des modèles numériques ont été proposés comme nous l'avons mentionné au paragraphe 2.4. Les deux modèles sont proposés pour prédire la charge de ruine des poutres ajourées avec des âmes élancées. Par conséquent, ce sont des poutres qui sont susceptibles de périr par flambement du montant d'âme; ce qui s'est généralement produit pour les poutres testées présentées dans ces deux publications. Nous rappelons que le modèle numérique de Zaarour et Redwood consiste à modéliser un montant d'âme isolée délimité par les demi-Tés supérieur et inférieur. Le tableau 4.3 confronte les charges ultimes obtenues dans cette étude et ceux obtenus par le modèle numérique de Zaarour et Redwood [6] avec les résultats des essais.

Poutre	$P_{\text{Essai}} / P_{\text{MEF}}$	$P_{\text{Essai}} / P_{\text{MEF}}$ [6]
10-1	1.12	1.171
10-2	0.984	0.950
10-3	0.916	1.129
10-4	0.897	0.79
12-1	0.970	1.084
12-2	0.991	1.038
12-3	1.06	1.06
12-4	1.013	0.871
Moyenne	0,994	1,0116
Ecart type	0,0725	0,1310

Tableau 4.3. Confrontation des résultats expérimentaux avec les résultats du modèle de Zaarour et Redwood et le modèle proposé

Les résultats prédits des deux modèles numériques montrent une bonne concordance avec les résultats expérimentaux, avec un léger avantage pour le modèle de Zaarour et Redwood vis-à-vis de la sécurité ($\text{Moyenne } P_{\text{Essai}} / P_{\text{MEF}} > 1$). Cependant, l'écart-type est plus élevé. Il faut cependant souligner qu'en terme de temps d'exécution, le modèle proposé par Zaarour et Redwood est plus avantageux, mais les résultats ne seront fiables que si le flambement du montant est le mode de ruine déterminant.

En se référant aux observations faites aux essais, qu'ils ont effectués sur des poutres ajourées avec des âmes élancés, Redwood et Dermidjian [7] suggèrent de déterminer la charge ultime, lorsque le flambement du montant d'âme est le mode de ruine déterminant, en se basant sur un modèle de flambage linéaire par bifurcation d'équilibre et en modélisant la totalité de la poutre, comme exposé au paragraphe 2.4. Le tableau 4.4 confronte les résultats obtenus par une telle analyse et le modèle adopté aux résultats expérimentaux. Il est clair que l'analyse par flambage de birfucation fournis des résultats moins précis que le modèle adopté, néo moins pour des poutres avec des montants élancés, on peut considérer que ces résultats sont acceptables, surtout que le temps de calcul est réduit considérablement.

4.5. Etude paramétrique

4.5.1. Introduction

Dans ce paragraphe nous présentons les résultats obtenus à partir d'une série de 80 simulations numériques effectuées sur des poutres ajourées avec des ouvertures hexagonales

munis ou non de plaques intercalaires en faisant varier les paramètres suivants :

- épaisseur de l'âme des poutres ;
- limite élastique de l'acier ;
- hauteur des ouvertures ;
- hauteur des plaques intercalaires.

Poutre	$P_{\text{Essai}} / P_{\text{MEF}}$	$P_{\text{Essai}} / P_{\text{MEF}}$ [7]
10-1	1.12	0,912
10-2	0.984	0,871
10-3	0.916	0,962
10-4	0.897	0,813
12-1	0.970	0.871
12-2	0.991	0,805
12-3	1.06	0,868
12-4	1.013	0.950
10-5 (a)	0.986	0.8
10-5 (b)	1.073	1,038
10-6	1.19	1,13
10-7	1.10	1.04
Moyenne	1.025	0,922
Ecart type	0.0866	0,105

Tableau 4.4. Confrontation des résultats expérimentaux avec les résultats du modèle de Redwood et Dermidjian et le modèle proposé

A travers cette étude nous allons tenter d'étudier quelle influence ces paramètres peuvent-ils avoir sur la résistance ultime et le mode de ruine des poutres ajourées. Par ailleurs, nous allons vérifier si les modes de rupture obtenus concordent avec la classification des sections de l'Eurocode 3. Enfin, les charges ultimes prédites seront comparées avec celles calculées par les formules de l'Annexe N de l'Eurocode 3 (version ENV1993-1-1) [8].

4.5.2. Influence de l'épaisseur de l'âme

La figure 4.8 présente les résultats des charges ultimes obtenus pour les poutres testées en faisant varier l'épaisseur de l'âme. Les épaisseurs ont été choisies de manière à obtenir des sections transversales perforées correspondants aux classes 2, 3 et 4. Les chiffres indiqués sur les courbes correspondent à la classe de la section transversale obtenue pour une épaisseur donnée. Chacun des graphes de la figure 4.8 comporte deux courbes correspondant à des

poutres de dimensions similaires et qui se différencient par la présence ou non d'une plaque intercalaire, comme on peut le constater sur le tableau 1 de l'Annexe A. Ainsi, à titre d'exemple, les poutres 10-1 et 10-2 sont similaires sauf que la poutre 10-2 comporte une plaque intercalaire.

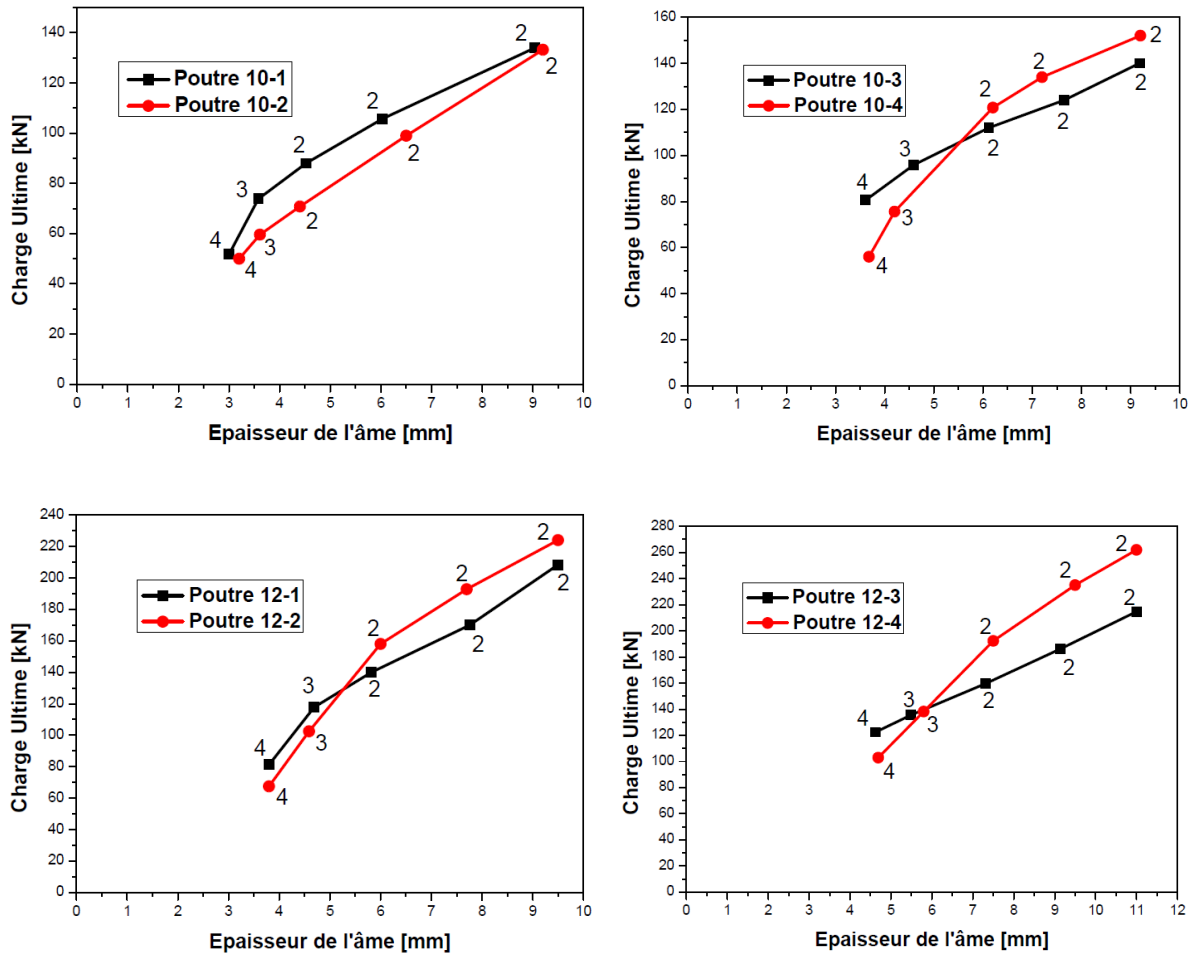


Figure 4.8. Evolution de la charge ultime en fonction de l'épaisseur de l'âme

De l'examen de ces courbes, on peut tirer les résultats suivants :

- pour les poutres de section transversale perforée de class 2, la variation de la charge ultime est généralement linéaire;
- lors du passage de la classe 2 à la classe 3 ou de la classe 3 à la classe 4, on observe parfois un changement de pente et une chute significative de la résistance ultime, ceci peut s'expliquer par un changement du mode de ruine aux frontières des classes de la section transversale perforée;
- à l'exception des poutres 10-1 et 10-2, les charge ultimes des poutres sans plaques

intercalaires ayant des sections transversales perforées de classe 3 et 4 sont supérieures à celle des poutres équipées de ce type de plaques, malgré que ces dernières ont une hauteur supérieure. Par contre, ceci n'est pas le cas pour les poutres de section transversale perforée de Classe 2 où les résultats montrent une augmentation plus ou moins importante des charges de ruine. Ceci nous amène à suggérer de ne pas utiliser les plaques intercalaires pour les poutres ajourées de sections transversales perforées de classe 3 et 4.

Comparons à présent les charges ultimes prédites par le modèle numérique avec celles correspondantes à la résistance ultime en flexion. Pour ce faire, nous allons calculer pour chaque poutre la charge ultime P_Y correspondant au moment de résistance plastique de la section située au niveau de l'axe de l'ouverture la plus sollicitée en flexion. Les courbes de la figure 4.9 illustrent la variation du rapport adimensionnel P_{FEM}/P_Y en fonction de l'épaisseur de l'âme des poutres. Ceci nous permet de vérifier le bien fondé de la classification des sections perforées des poutres proposée dans l'Annexe N de de l'ENV1993-1-1 [9]. Comme on peut l'observer, les valeurs du rapport P_{FEM}/P_Y diminuent avec la hausse de la classe de la section transversale perforée, ce qui concorde avec la définition des classes de section de l'Eurocode 3. Par ailleurs, on peut aussi constater que pour les poutres de sections transversales perforées de classe 2, la charge ultime n'atteint en aucun cas la charge ultime correspondant à la plastification complète de la section perforée la plus sollicitée. Ceci s'explique par le fait que ces sections sont sollicitées à la combinaison du moment de flexion et de l'effort tranchant. L'effet d'interaction empêche le moment de plastification complète d'être atteint. Nous pouvons aussi constater que la chute du rapport P_{FEM}/P_Y pour les sections de classe 2 devient plus significative pour les poutres ayant des hauteurs plus grandes (exemple poutre 12-1 et 12-3). Ceci met en évidence encore une fois l'influence de l'effort tranchant sur la résistance des poutres ajourées au droit des ouvertures. La comparaison entre les rapports P_{FEM}/P_Y des poutres ajourées sans plaques intercalaires et ceux équipées de ces plaques montre que ces dernières sont moins enclines à subir des déformations plastiques, même pour les sections transversales perforées de classe 2. Bien que ce ne fut pas le cas des poutres 12-4 de classe 2. Il est probable que ceci est dû au fait que ces poutres sont plus sensibles aux phénomènes d'instabilité tel que le flambement du montant d'âme.

La figure 4.10 représente des coupes des champs des contraintes équivalentes de von Mises à la ruine de la poutre 12-1 de section transversale perforée de classe 3 et deux poutre identiques dont on a modifié l'épaisseur de l'âme pour obtenir des poutres de section

transversale perforée de classe 2, 3 et 4. On peut observer que plus la classe de la section transversale perforée est élevée, la poutre est moins plastifiée, donc plus sensible au voilement local. Ce qui concorde avec la définition des classes de section dans l’Eurocode 3.

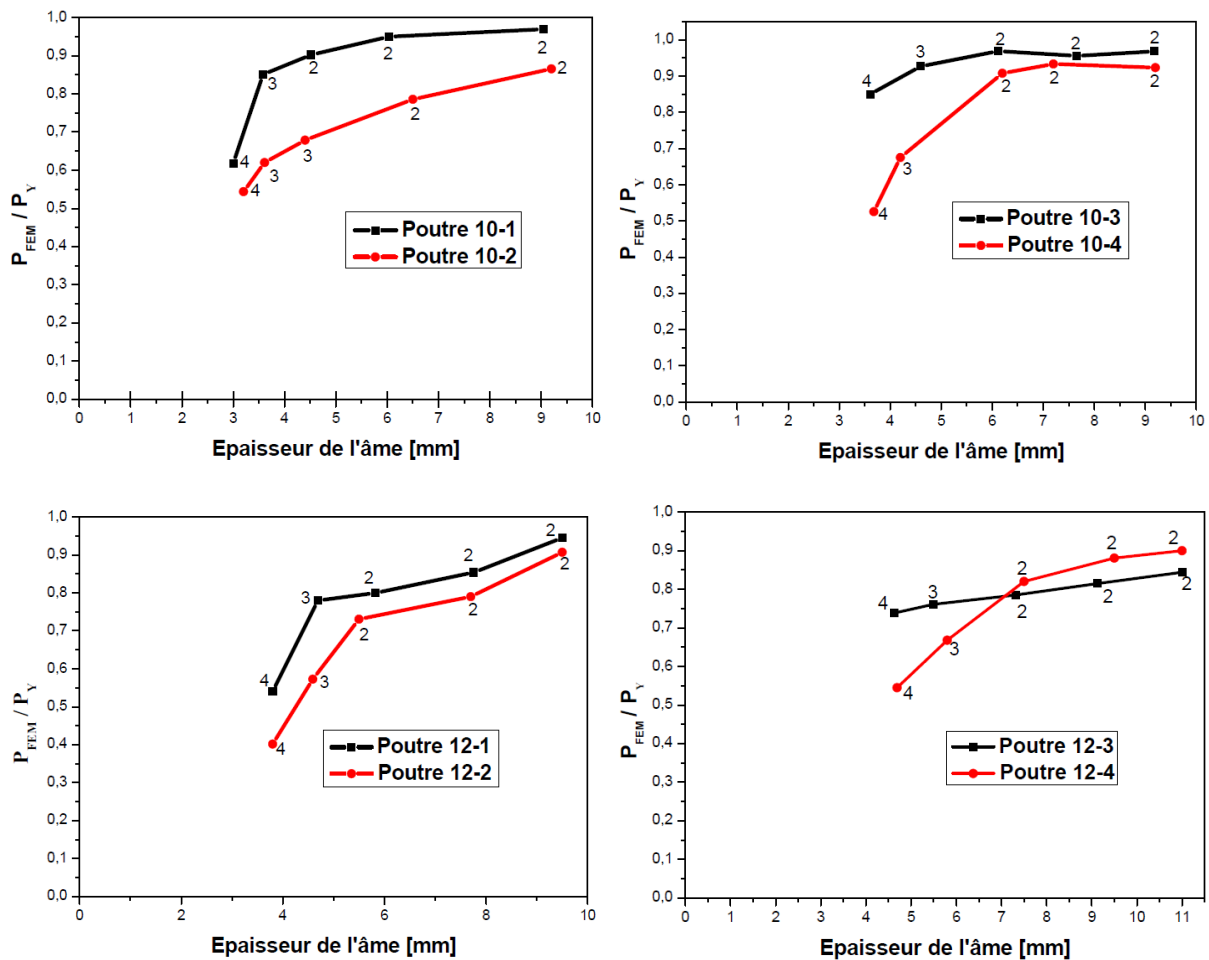
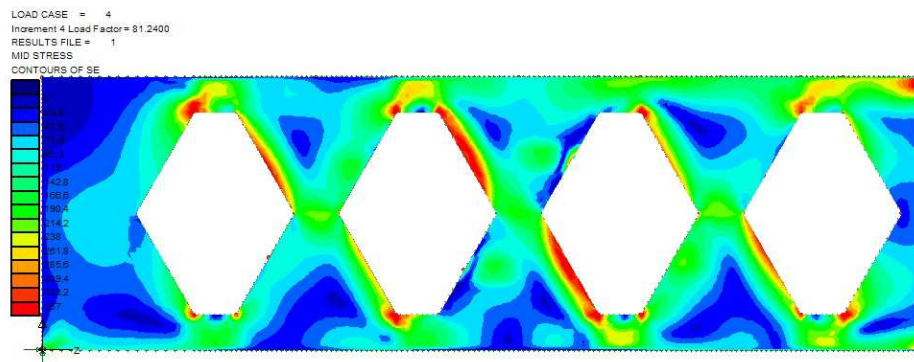


Figure 4.9. Evolution du rapport P_{FEM}/P_Y en fonction de l'épaisseur de l'âme

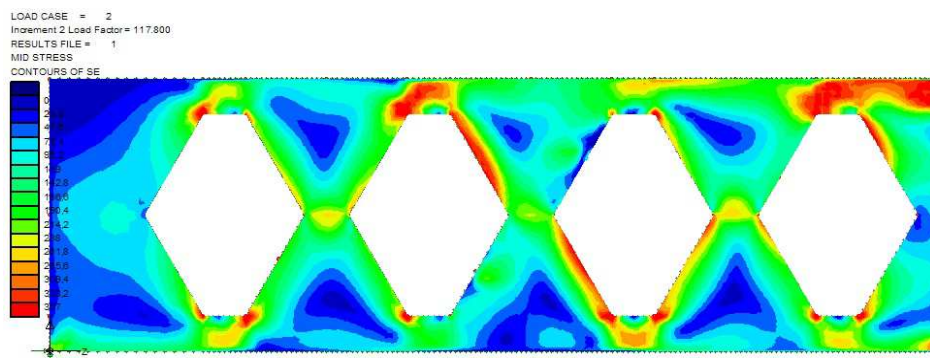
On peut aussi observer que les Tés supérieur et inférieur de l'ouverture la plus sollicitée au moment de flexion est quasi plastifiée. Ceci explique pourquoi les valeurs du rapport P_{FEM}/P_Y des poutres dont les sections transversales perforées sont de classe 2 sont voisines de l'unité. Dans ces cas, la ruine est vraisemblablement gouvernée par la capacité plastique des sections perforées les plus sollicitées au moment de flexion.

La figure 4.11 montre clairement qu'en insérant une plaque intercalaire dans la poutre 12-1, pour obtenir la poutre avec la désignation 12-2, la ruine survient avec des zones plastifiées d'étendue limitée. Ceci indique que pour les poutres ajourées avec plaques intercalaires de section transversale perforée de classe 3 ou 4 sont plus susceptible à une ruine par

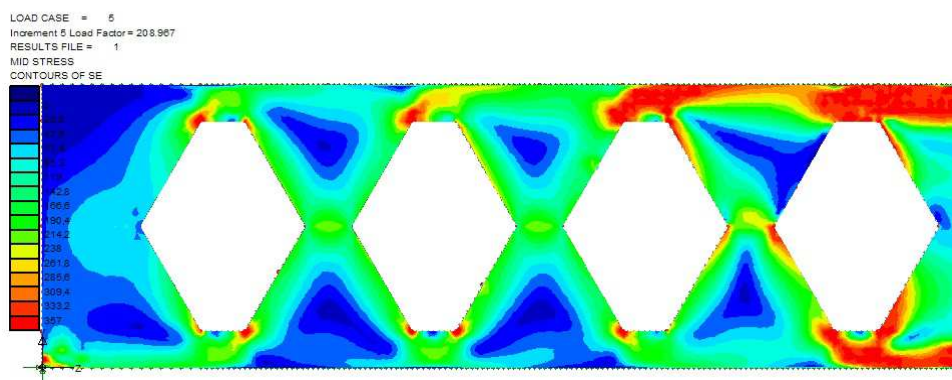
flambement du montant d'âme. Ceci confirme aussi les résultats des essais menés par Zaarour et Redwood [6].



(a) Poutre 12-1 modifiée à section transversale de classe 4



(b) Poutre testée 12-1 à section transversale de classe 3



(c) Poutre 12-1 modifiée à section transversale de classe 2

Figure 4.10. Champs des contraintes de von Mises à la ruine dans des poutres ayant des sections transversales de classes 2, 3 et 4

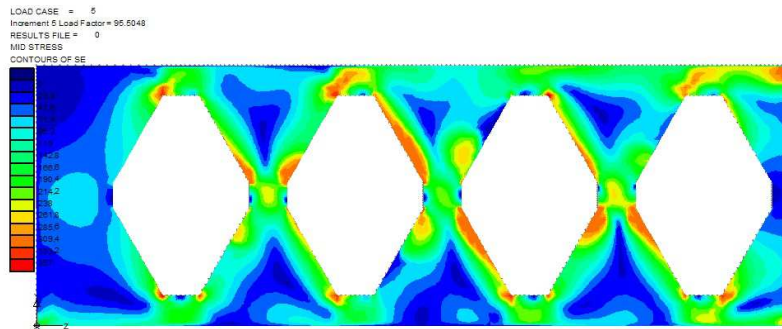
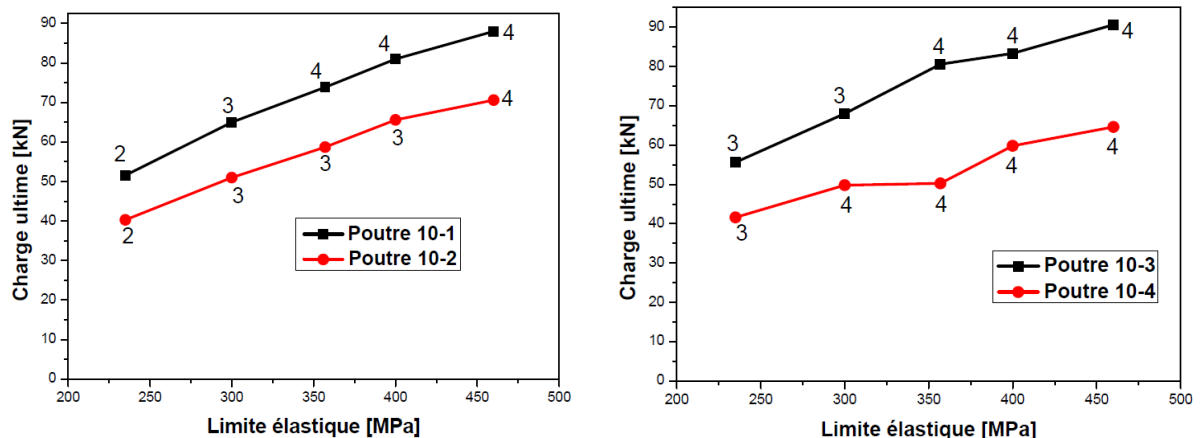


Figure 4.11. Champs des contraintes de von Mises à la ruine dans la poutre 12-2

4.5.3. Influence de la limite élastique

Contrairement aux poutres testées, nous avons considéré que les limites élastiques de l'âme et des semelles sont égales dans le but de faciliter l'interprétation des résultats. Pour les poutres testées nous avons adopté comme valeur de la limite élastique la valeur 357 MPa pour l'ensemble des parois des poutres. Dans le cadre de cette étude paramétrique nous avons retenus les valeurs suivantes de la limite élastique, en plus de la valeur 357 MPa, : 235, 300, 400 et 460 MPa. En ce qui concerne les autres paramètres, nous avons adoptés ceux des poutres testées.

La figure 4.12 compare, en regard de la valeur de la limite élastique, les charges ultimes obtenues pour des poutres ajourées munies ou non de plaques intercalaires, comme c'était le cas dans la figure 4.8. Comme précédemment, on peut constater que l'ajout d'une plaque intercalaire n'améliore en aucun cas la résistance ultime des poutres ajourées de classe 3 ou 4. La variation de la charge ultime en fonction de la limite élastique est quasiment linéaire pour les poutres de classes 3 et 4.



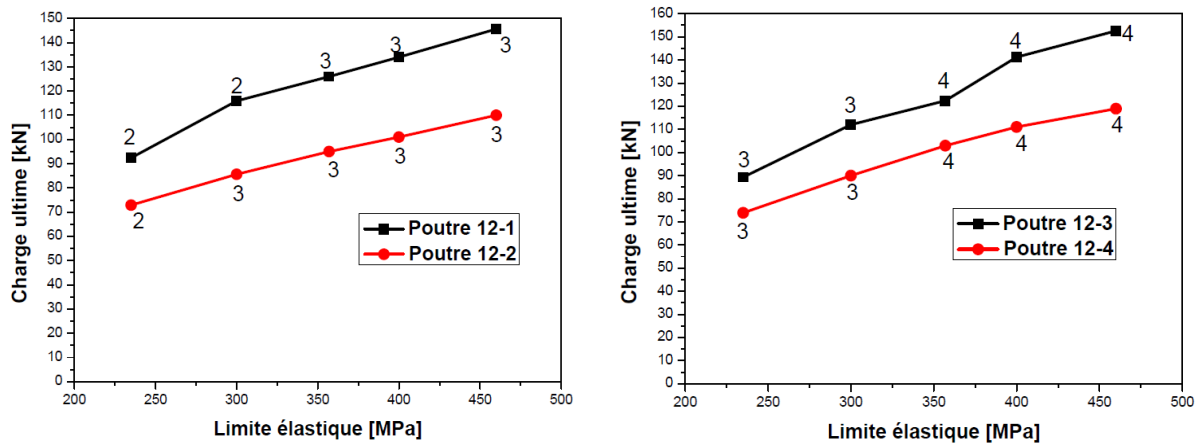


Figure 4.12. Evolution de la charge ultime en fonction de la limite élastique

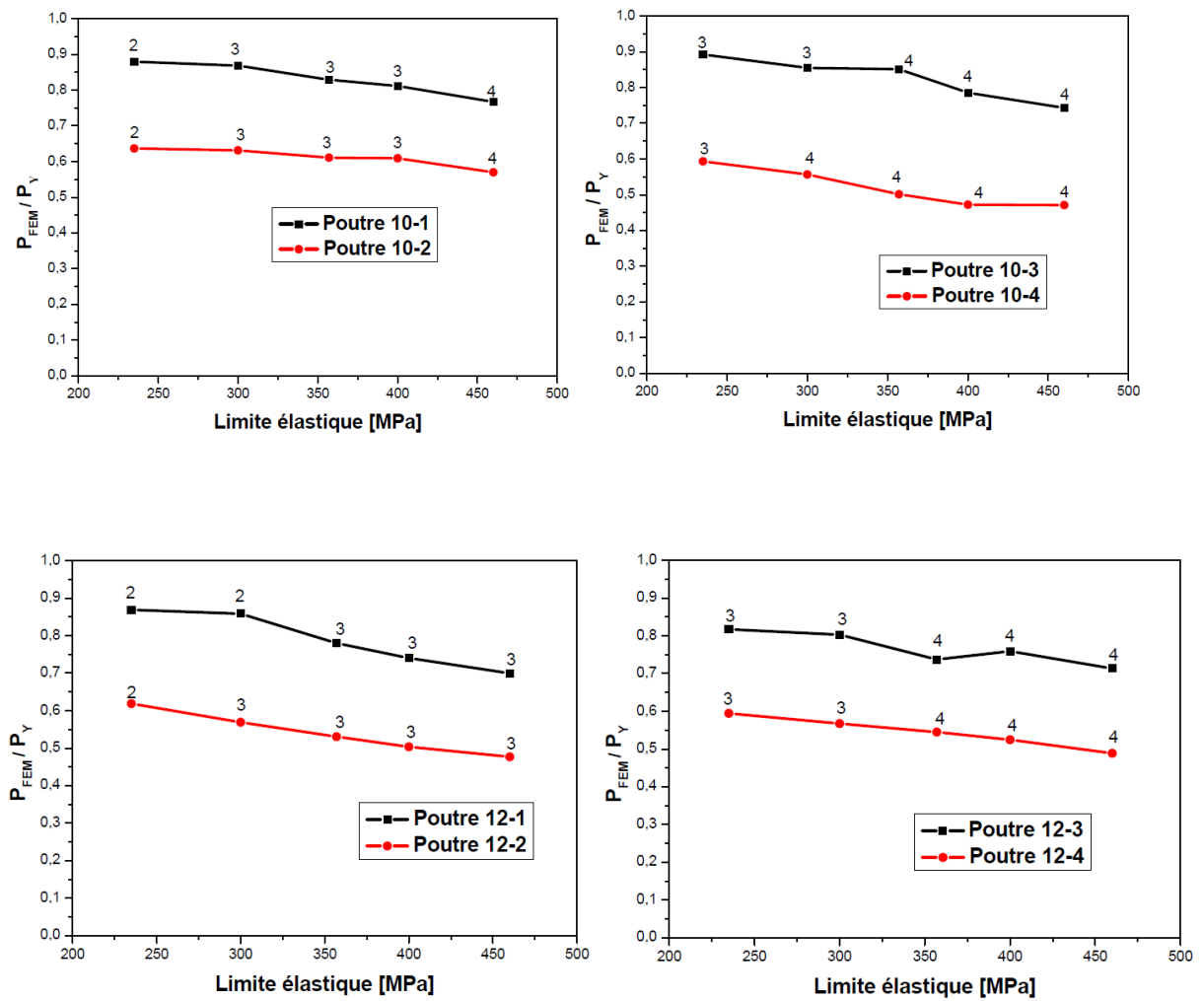


Figure 4.13. Evolution du rapport P_{FEM}/P_Y en fonction de la limite élastique du matériau

Comme on peut le constater sur la figure 4.13, le rapport P_{FEM}/P_Y diminue avec l'augmentation de la limite élastique, en d'autres termes lorsque la classe de la section transversale perforée, définie par l'Annexe N de l'ENV1993-1-1 [9], est plus défavorable. Ceci prouve encore une fois la validité de la classification de l'Annexe N.

4.5.4. Influence de la hauteur des ouvertures

La figure 4.14 illustre la variation des charges ultimes prédites par le modèle numérique obtenues pour les poutres testées en faisant varier la hauteur des ouvertures de 0.55 à 0.76 (ou 0.75) de la hauteur libre de l'âme. Les poutres ainsi obtenues sont de classes 3 ou 4 selon la classification de l'Annexe N. L'observation de ces courbes montre que la charge ultime augmente au fur et mesure que les hauteurs des ouvertures d'âme sont augmentées. Malgré la hausse de la classe de la section perforée. On peut observer que les valeurs des rapports h_0/d_w pour lesquels se produisent des cassures dans les courbes correspondent dans certain cas à des changements de la classe de la section perforée. Ces cassures peuvent être représentatives d'un changement du mode de ruine de ces poutres. Ce qui justifie le changement de la classe de la section.

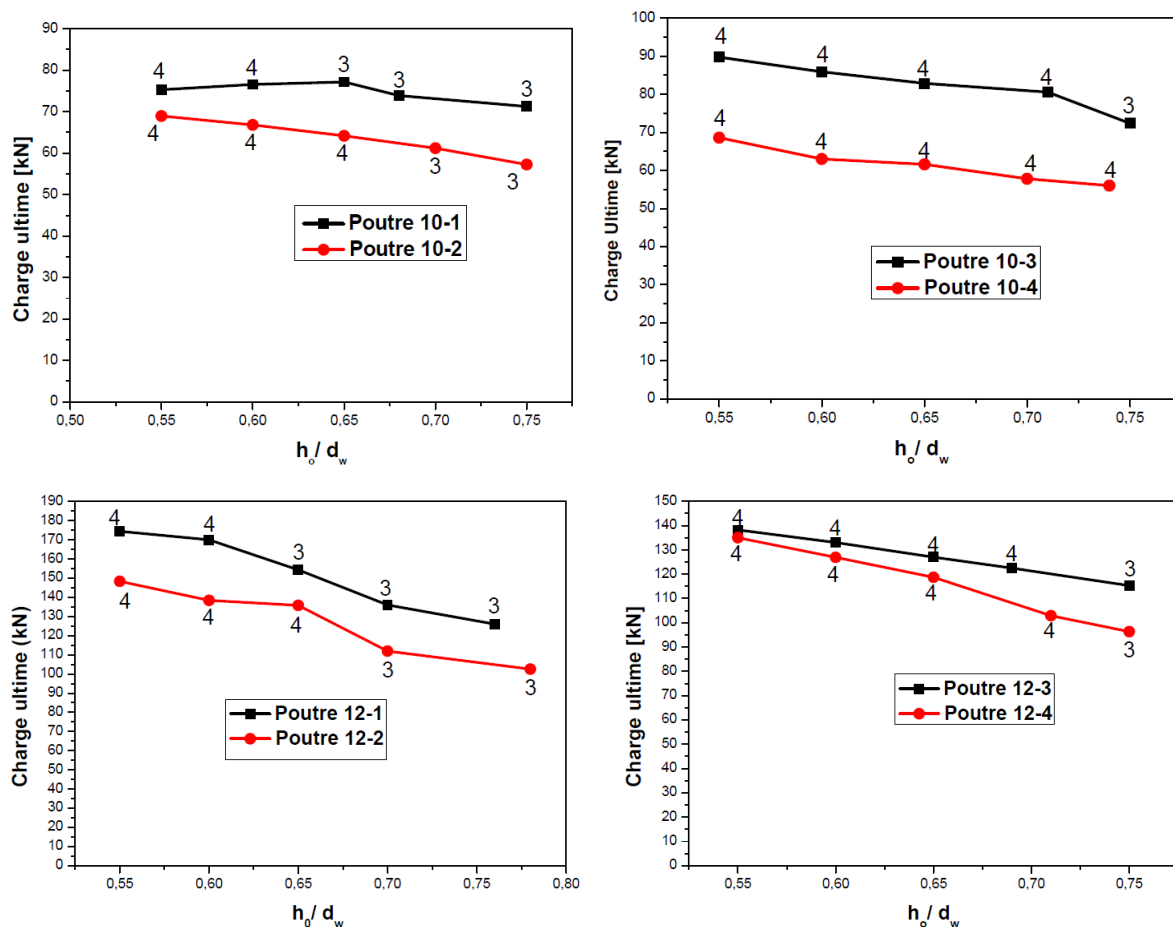


Figure 4.14. Evolution de la charge ultime en fonction du rapport h_0/d_w

L'examen des courbes de la figure 4.15 montre que le rapport P_{FEM}/P_Y est peu sensible à la variation de la hauteur de l'ouverture, même dans les cas où il y'a changement de la classe de la section transversale perforée. Cependant, il faut aussi noter que dans le cas des poutres 12-1, 12-2, 12-3 et 12-4, les rapports P_{FEM}/P_Y augmentent pour des poutres de classes plus élevées. Ce qui ne concorde pas avec la classification de l'Annexe N. Nous pensons que cette incompatibilité est due au fait que lorsque la hauteur des ouvertures d'âme diminue, le voilement de l'âme du Té comprimé est le mode de ruine le plus susceptible de se produire. Dans ce cas, le modèle numérique proposé ne peut pas prédire, avec suffisamment de précision, la charge ultime. D'autre part, comme précédemment, les poutres ajourées munies de plaques intercalaires sont moins résistantes (figure 4.14) et moins ductiles (figure 4.15) que les poutres non équipées de ce type de plaques.

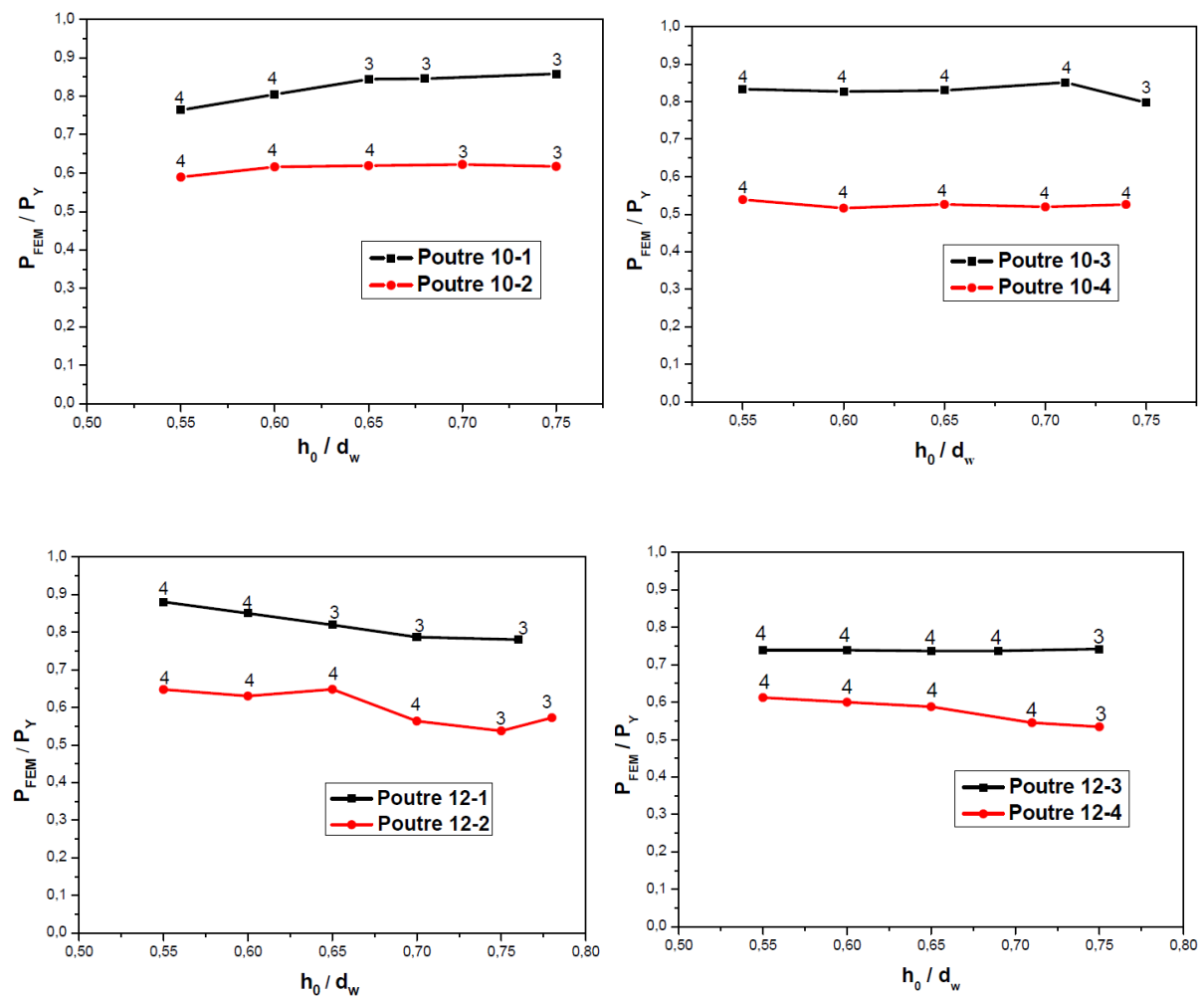


Figure 4.15. Evolution du rapport P_{FEM}/P_Y en fonction du rapport h_0/d_w

5.4.5. Influence de la hauteur des plaques intercalaires

Nous avons déjà observé dans la figure 5.2, seules les poutres 10-2 de sections transversales de classe 2 ont une résistance ultime inférieure à celles obtenues pour des poutres identiques sans plaques intercalaires. Les résultats issus des travaux de Zaarour et Redwood [6] ont montré que la résistance ultime des poutres ajourées diminue lorsque le rapport de la hauteur des plaques intercalaires à la hauteur des ouvertures h_p/h_0 augmente. Afin d'étudier l'influence du rapport h_p/h_0 , nous allons considérer quatre poutres ajourées avec des plaques intercalaires de sections transversales de classe 2, considérées dans les études précédentes, et dont le rapport h_p/h_0 varie entre 0 et 0.2.

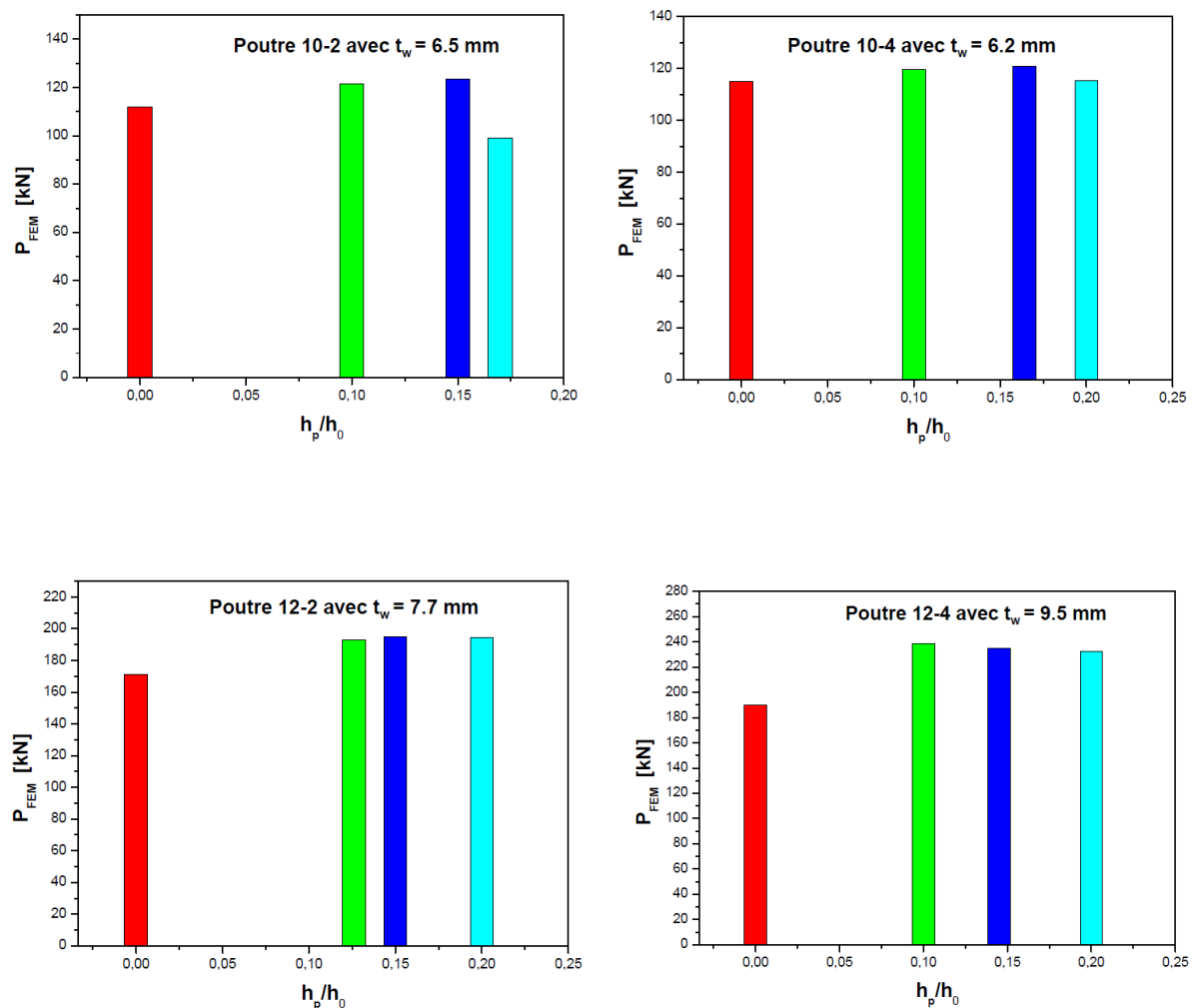


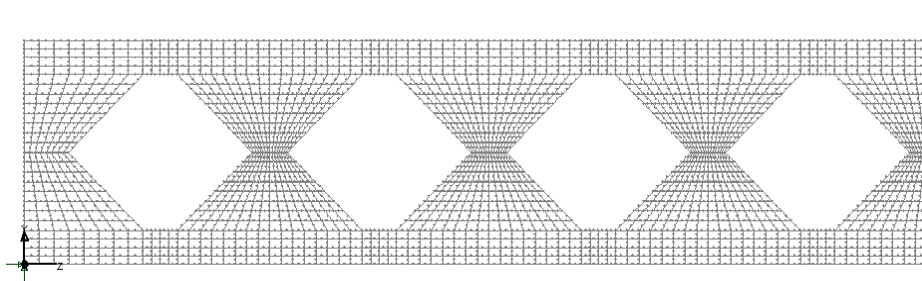
Figure 4.16. Evolution de la charge ultime en fonction du rapport h_p/h_0

Les résultats obtenus représentés sur la figure 4.16 montrent, qu'en général, la résistance ultime est améliorée lorsque le rapport h_p/h_0 est inférieur à 0.2. Au-delà de la valeur 0.2 du

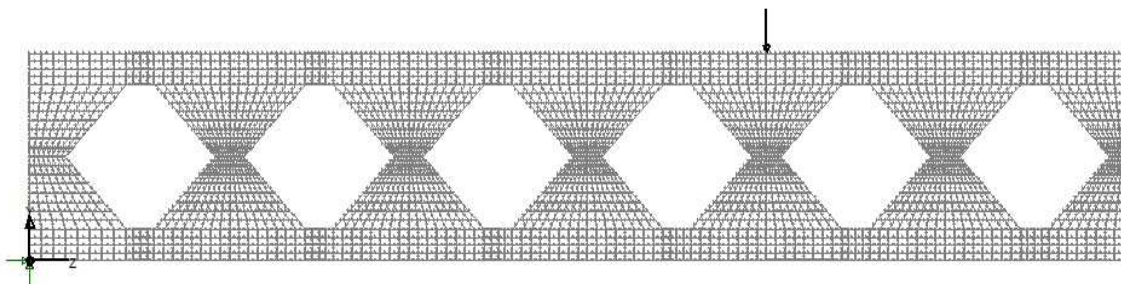
rapport h_p/h_0 l'augmentation de la résistance ultime n'est pas significative et peut même diminuer par rapport à la valeur obtenue pour la poutre sans plaque intercalaire ($h_p=0$), comme c'est le cas des poutres 10-2 et 10-4. La chute de résistance serait plus prononcée pour les poutres de faible hauteur, comme c'est le cas de la poutre 10-2.

5.4.6. Influence de la portée sur la résistance ultime au voilement des montants

Les modèles proposés pour la détermination de la résistance ultime des montants vis-à-vis du flambement ne prennent pas en considération la portée des poutres. L'un des objectifs des essais menés par Redwood et Dermidjian [7] était d'étudier cet effet. Ils ont conclu que l'effet de la portée sur la résistance des poutres avec des montants souples, donc susceptibles de subir le flambement des montants, était négligeable. Cette étude, comprenant aussi une étude numérique par éléments finis, a cependant porté sur 4 poutres ajourées seulement. Dans cette étude nous allons considérer les poutres testées, dont la ruine s'est produite par flambement de l'âme, auxquelles nous avons ajouté à chacune d'elle quatre ouvertures, comme il est illustré sur la figure 4.17. Par ailleurs, les poutres seront soumises à la flexion quatre points au lieu de la flexion trois points de manière à ce que les sollicitations extrêmes dans les poutres testées et celles auxquelles nous leur avons ajouté deux ouvertures seront identiques.



Poutre 10-3



Poutre 10-3 modifiée

Figure 4.17. Exemple d'une demi-poutre modifiée pour étudier l'influence de la portée

Les histogrammes des figures 4.18 et 4.19 montrent respectivement la réduction de la charge ultime des poutres ajourées avec et sans plaques intercalaires résultant de l'augmentation de la portée.

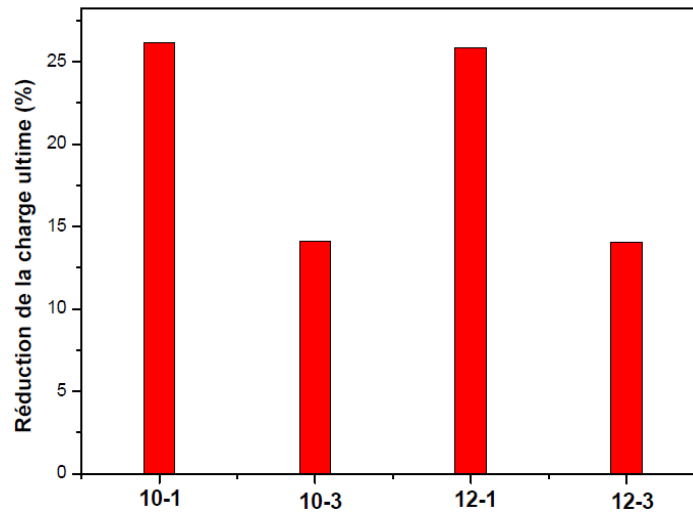


Figure 4.18. Réduction en pourcentage de la charge ultime des poutres ajourées sans plaques intercalaires résultant de l'augmentation de la portée

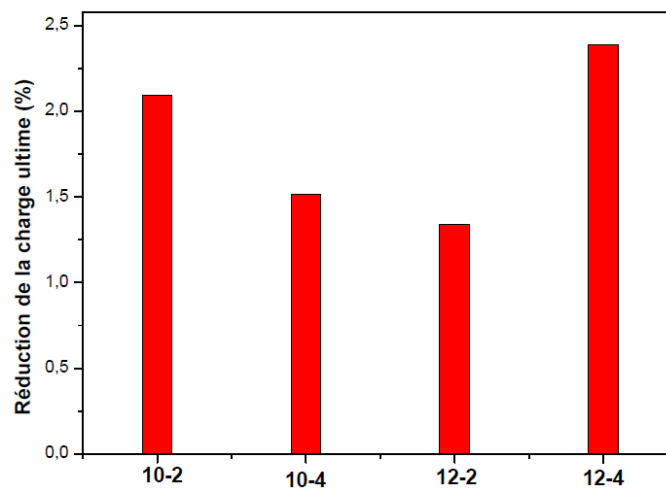


Figure 4.19. Réduction en pourcentage de la charge ultime des poutres ajourées avec plaques intercalaires résultant de l'augmentation de la portée

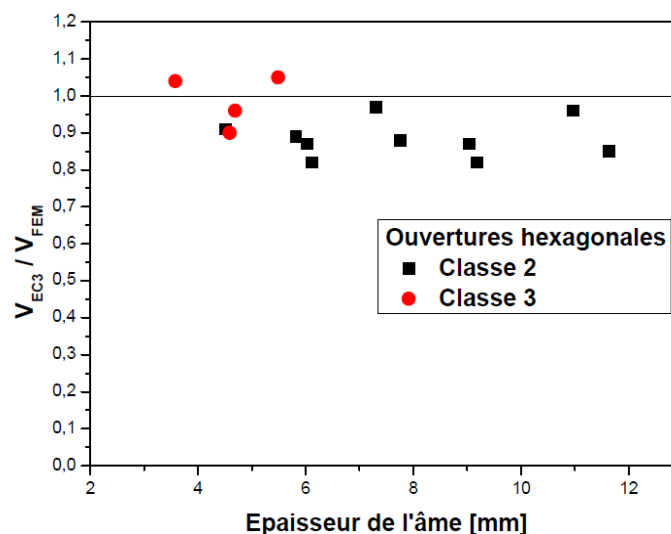
Nous constatons que la réduction de la charge ultime est comprise entre 14 et 25% pour les poutres ajourées sans plaques intercalaires et que cette différence ne dépasse pas 2.5% pour les poutres munies de telles plaques. On peut donc conclure que la résistance au flambement

des montants des poutres ajourées à ouvertures hexagonales est plus sensible à la portée que celle des poutres à ouvertures octogonales. Il semble aussi que l'effet de la portée diminue lorsque la largeur maximale de l'ouverture hexagonale est plus faible. La confirmation de ces résultats par des analyses numériques complémentaires et par des essais impliquerait que dans les modèles analytiques, on doit considérer la poutre dans sa globalité et ne pas se contenter de considérer la zone du montant d'âme compris entre deux ouvertures.

4.6. Comparaison entre résultats fournis par les modèles analytiques de l'Annexe N et le modèle numérique

Suite à l'étude paramétrique, les efforts tranchants ultimes prédits par les simulations numériques ont été comparés avec ceux obtenus des modèles analytiques de l'Annexe N de l'Eurocode 3 (version ENV1993-1-1) [9]. L'étude comparative concerne les poutres ajourées, étudiées précédemment, à avec ou sans plaques intercalaires dont les sections transversales perforées sont de classe 2 ou 3. Le calcul des poutres de section transversale perforée de classe 4 n'étant pas considéré dans l'Annexe N. Nous rappelons que dans l'Annexe N, la charge ultime des poutres ajourées est gouvernée par l'un des modes de ruine suivants :

- ruine par flexion ;
- ruine par cisaillement ;
- ruine par flexion Vierendeel ;
- ruine par flambement du montant d'âme ;
- ruine par écoulement de la soudure à mi-hauteur du montant d'âme.



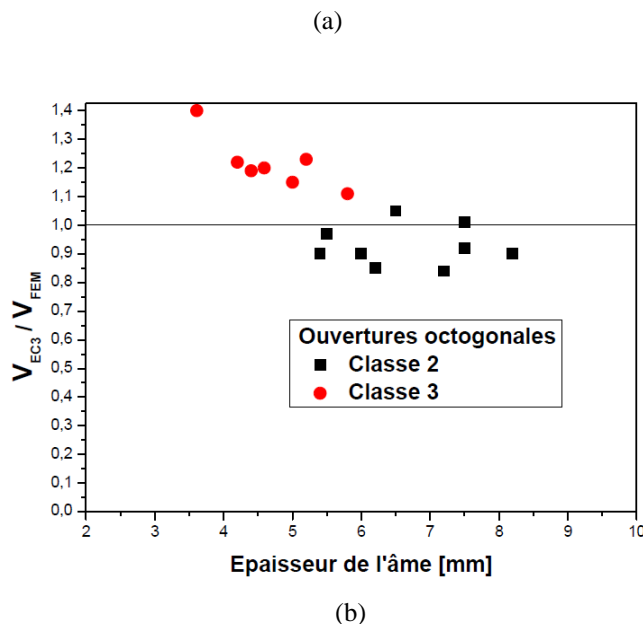
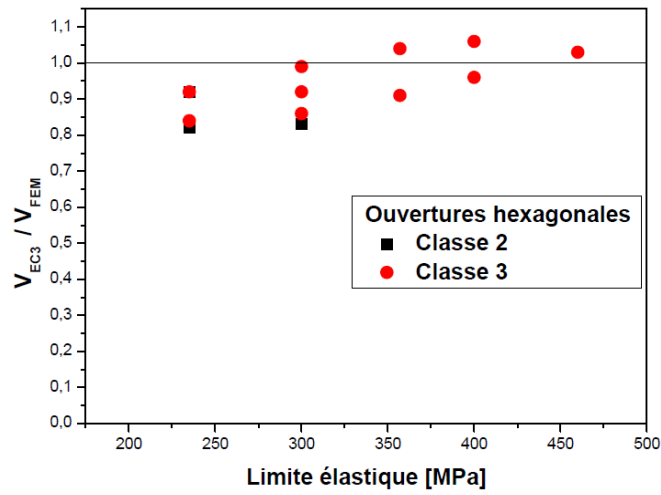


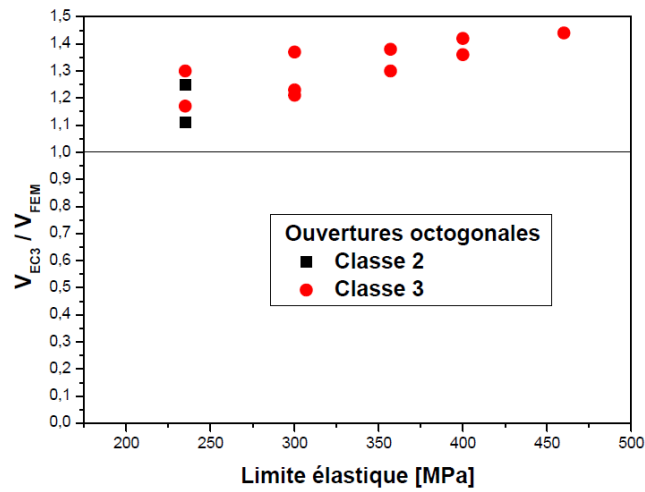
Figure 4.20. Evolution du rapport V_{EC3}/V_{FEM} en fonction de l'épaisseur de l'âme

Dans cette étude, on ne considère pas le déversement des poutres, étant donné que dans le modèle numérique nous avons considéré que les poutres étaient maintenues latéralement. Les formules analytiques ont été présentées dans le chapitre 2. Les résultats sont exprimés sous forme adimensionnelle en considérant la variation du rapport V_{EC3}/V_{FEM} en fonction de l'épaisseur de l'âme, la limite élastique et le rapport h_0/d_w , comme il est illustré sur les figures 4.20, 4.21 et 4.22. Les termes V_{EC3} et V_{FEM} représentent les efforts tranchants ultimes obtenus respectivement avec les formules de l'Annexe N et des simulations numériques. De la variation du rapport V_{EC3}/V_{FEM} illustré sur ces figures, on peut conclure que l'écart entre les deux approches est suffisamment faible pour les poutres ajourées sans plaques intercalaires et pour les poutres ajourées avec plaques intercalaires de section transversale perforée de classe 2. Il faut cependant souligner que dans certains cas les efforts tranchants ultimes analytique et numérique sont associés à des modes de ruine différents. Le rapport V_{EC3}/V_{FEM} varie entre 0.82 et 1.11 et les résultats fournis par les formules de l'Annexe N sont en général du côté de la sécurité ($V_{EC3}/V_{FEM} < 1$). Par ailleurs, pour les poutres ajourées de classe 3, l'écart entre les résultats obtenus par les deux approches est plus important, comme on peut le constater sur la figure 4.20 (b), 4.21 (b) et 4.22. Effectivement, le rapport V_{EC3}/V_{FEM} varie entre 1.1 et 1.4, ce qui indique en plus que les résultats, fournis par les formules de l'Annexe N, ne sont pas du côté de la sécurité. On peut aussi observer que le rapport V_{EC3}/V_{FEM} augmente lorsque l'épaisseur de l'âme ou rapport h_0/d_w diminue ou lorsque la limite élastique augmente. En d'autres termes l'écart devient plus important lorsqu'on s'approche de la frontière entre la

classe 3 et 4.



(a)



(b)

Figure 4.21. Evolution du rapport V_{EC3}/V_{FEM} en fonction de la limite élastique

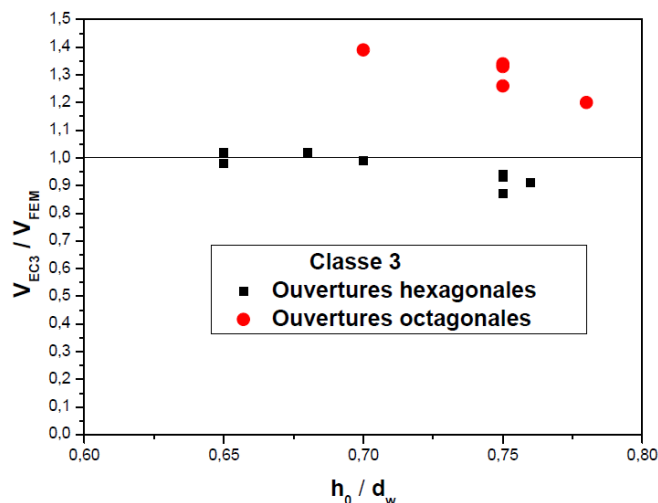


Figure 4.22. Evolution du rapport V_{EC3}/V_{FEM} en fonction du rapport h_0/d_w

Pour les poutres ajourées de classe 3, le flambement du montant d'âme est le mode de ruine probable, cela peut nous amener à penser que la méthode de l'Annexe N n'est pas bien adaptée pour le calcul de la résistance au flambement du montant d'âme des poutres ajourées avec plaques intercalaires de classe 3. La figure 4.23 montre la variation de la charge ultime, calculée à l'aide des formules de l'Annexe N, en fonction du rapport h_p/h_0 variant entre 0.10 et 0.3. Nous constatons que la charge ultime augmente linéairement avec le rapport h_p/h_0 (voir figure 4.16). Cette variation linéaire ne concorde pas avec celle obtenue de l'analyse numérique étant donné que la charge ultime diminue, lorsque le rapport h_p/h_0 est supérieur approximativement à 0.15.

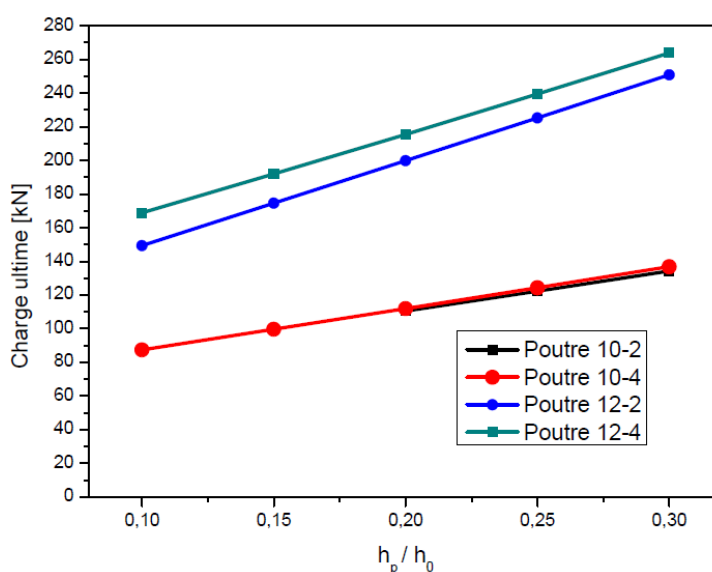


Figure 4.23. Evolution de la charge ultime calculée par la méthode de l'Annexe N en fonction du rapport h_p/h_0

4.7. Conclusion

Ce chapitre présente un modèle numérique pour simuler le comportement des poutres ajourées avec ouvertures hexagonales munies ou non de plaques intercalaires. Le modèle numérique tient compte des non linéarités géométriques et matérielles ainsi que des imperfections géométriques initiales afin d'appréhender convenablement leur comportement jusqu'à la ruine. Dans un but pratique, nous avons adopté une déformée initiale issue du premier mode de flambement linéaire. L'étude de sensibilité a montré que les charges ultimes ainsi que la déformée sont peu sensibles à l'amplitude maximale de la déformée initiale. Cependant, une amplitude maximale égale à 1/100 de la hauteur libre de l'âme est adoptée, étant donnée que celle-ci fournirait des valeurs penchant plus du côté de la sécurité. Pour valider le modèle numérique nous avons effectué une série de calculs numériques sur des poutres ajourées provenant de la littérature disponible. La comparaison des charges de ruines a montré une bonne concordance entre les résultats numériques et les résultats issus des essais. Une fois le modèle numérique validé nous avons effectué une campagne de simulations numériques qui a permis de mettre en évidence une somme d'information concernant l'influence de certains paramètres géométriques et la limite élastique du matériau sur le comportement à la ruine des poutres ajourées avec ou sans plaques intermédiaires. Les charges de ruine issues du calcul numérique ont été ensuite comparées avec celles obtenues par les formules de l'Annexe N de l'Eurocode 3. Les principales conclusions suivantes ont pu être tirées :

- pour les poutres ajourées de classes 3 et 4 possédant des montants d'âme élancés et ayant des ouvertures de grande hauteur, le flambement du montant d'âme est le mode de ruine le plus probable;
- la variation du rapport P_{FEM}/P_Y en fonction de la classe des sections perforées concorde avec la définition des classes de section définie dans l'Eurocode 3; les frontières entre les différentes classes de section n'ont pas été définies dans cette étude;
- le modèle numérique proposé ne prédit la ruine par voilement local de l'âme du Té comprimé;
- les poutres ajourées équipées de plaques intercalaires sont moins ductiles et plus susceptibles de subir le flambement des montants d'âme que les poutres ajourées non équipées de telles plaques;
- les plaques intercalaires sont plus efficaces lorsque les poutres sont de classe 2 et leurs hauteurs ne dépassent pas 15% de la hauteur des ouvertures;

- la réduction de la charge de ruine devient autant plus significative que la portée des poutres à ouvertures hexagonales augmente;
- L'étude comparative a montré que les charges de ruine évaluées à l'aide des formules de l'Annexe N de la version ENV1993-1-1 de l'Eurocode 3 présentent une bonne corrélation avec les charges de ruine issues des simulations numériques et plus sécuritaires pour les poutres ajourées à ouvertures hexagonales de classes 2 et 3 et les poutres ajourées à ouvertures octogonales de classe 2;
- pour les poutres ajourées équipées de plaques intermédiaires de classe 3, les écarts entre les résultats fournis par l'Annexe N et le modèle numérique sont plus importants, pouvant atteindre jusqu'à 40% du côté non sécuritaires ($P_{EC3}/P_{FEM} > 1$), ce qui impose des études complémentaires sur ce type de poutres.

Références du chapitre 4

- [1] Lusas 13. Lusas manual. Finite element analysis Ltd. Version 13.5. UK. 2003.
- [2] EN1993-1-5. Eurocode 3: Design of steel structures-Part 1–5: Plated Structural Elements, CEN, 2006.
- [3] E. Riks. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 7, pages 529-551, 1979.
- [4] M. A. Crisfield. A fast incremental/iterative solution procedure that handles Snapthrough. *Computers & Structures*, vol.13, pages 55-62, 1981.
- [5] W.C. Rheinboldt, Numerical analysis of continuation methods for non-linear structural problems, *Comput Struc*, 13, pages 103 – 113, 1981.
- [6] W. Zaarour and R. G. Redwood. Web buckling in thin webbed castellated beams. *Journal of the Structural Division ASCE*, vol. 122 No. 8, pages 860-866, 1996.
- [7] R. Redwood, S.Demirdjian. Castellated beam web buckling in shear. *Journal of the Structural Division ASCE*, vol. 124 No.10, pages 1202–1207. 1998.
- [8] EN 1993-1-1 Eurocode 3. Calcul des structures en acier. Partie 1.1 : Règles Générales et Règles pour les Bâtiments. 2005.
- [9] Eurocode 3: Design of steel structures - Annexe N: Openings in webs. ENV 1993-1-1: 1992/A2. *European Committee for Standardisation*.

Conclusion générale et perspective

La simulation numérique par la méthode des éléments finis fait partie des outils standards permettant de prédire le comportement d'une structure existante. Si la simulation numérique ne peut pas remplacer entièrement l'expérimentation, elle constitue un apport majeur et un complément indispensable et permet de réduire les coûts et le nombre des essais tout en offrant aux chercheurs et ingénieurs la possibilité de tester de nouveaux concepts. Le développement de méthodes de simulation numérique performantes offrant la possibilité de réaliser des simulations dans le domaine de l'analyse non linéaire des structures est l'un des axes de recherche actuel. Une revue des différentes stratégies explorées pour répondre à cette problématique est proposée dans le chapitre 3.

L'objectif principal de cette thèse est de contribuer à une meilleure compréhension du comportement à la rupture des poutres ajourées à ouvertures hexagonales munies ou non de plaques intercalaires. Grâce aux algorithmes implantés dans le code de calcul par éléments finis LUSAS, nous avons proposé, dans la première partie du quatrième chapitre, une démarche de simulation numérique capable de prédire la résistance ultime et de reproduire certains des phénomènes de ruine observés durant les essais dont nous avons donné un aperçu à la fin du deuxième chapitre. Cette mise en œuvre numérique, consiste en plus du choix du maillage, des conditions aux limites et de chargement, à implanter un modèle de comportement pour l'acier et choisir une configuration pour l'écriture des équations d'équilibre et le calcul des contraintes et des déformations. Une attention particulière est accordée à la sensibilité des résultats au choix de l'amplitude maximale de l'imperfection géométrique initiale. L'imperfection géométrique initiale, adoptée de façon déterministe comme étant la déformée correspondant au premier mode de flambement Eulérien, est introduite particulièrement pour provoquer des déplacements latéraux susceptible de déclencher le flambement du montant d'âme. Ainsi à partir de ce modèle numérique non linéaire on pouvait détecter les modes de ruine liés à la plastification excessive ou au flambement des montants. Afin de valider la modélisation proposée, les simulations numériques ont été comparées à des résultats expérimentaux de la littérature. Les bonnes concordances entre les simulations numériques et les résultats expérimentaux sont obtenues pour des poutres ajourées à ouvertures hexagonales munies ou non de plaques intercalaires. La deuxième partie du quatrième chapitre a porté sur l'étude de l'influence des paramètres géométriques

et la limite élastique sur le comportement à la rupture des poutres ajourées à ouvertures hexagonales. Les résultats obtenus ont montré que l'étendue des zones plastiques est en adéquation avec la classification de l'Annexe N malgré l'influence du cisaillement, étant donné que les poutres sont soumises à la flexion 3 points. Les simulations numériques ont aussi montré que pour les poutres de classe 3 et 4, la présence des plaques intercalaires, même de hauteur limitée, fait diminuer la résistance des poutres ajourées à ouvertures hexagonales, car elles deviennent plus susceptibles à subir le voilement du montant d'âme. Dans le cas des poutres de classe 2, les résultats des simulations numériques ont montré qu'on peut introduire des plaques intercalaires à condition de limiter leur hauteur pour éviter une ruine prématurée par voilement local du montant d'âme. D'autres conclusions tirées de l'étude paramétrique sont exposées dans le paragraphe conclusions du quatrième chapitre.

Le quatrième chapitre est conclu par une étude comparative entre les résultats des simulations numériques et ceux issus de la méthode de l'Annexe N de la version ENV1993-1-1. Cette étude a montré une bonne corrélation entre les résultats des deux approches à l'exception des poutres munies de plaques intercalaires de classe 3.

La présente étude a permis de tirer certaines conclusions concernant le comportement et la classification des sections transversales des poutres ajourées en acier à ouvertures hexagonales ou octogonales. Cette étude peut être étendue à des poutres à ouvertures circulaires qui sont actuellement les plus couramment utilisées ou les poutres conçues plus récemment telle que la poutre Angelina, pour lesquels il n'existe pas de méthode de dimensionnement. Les poutres ajourées mixtes peuvent aussi être envisagées pourvu de disposer d'un logiciel possédant de larges possibilités de calcul non linéaire, notamment celle du contact, pour modéliser le rôle des connecteurs.

Le problème que nous n'avons pu aborder dans cette thèse est la modélisation du voilement local de la semelle ou de l'âme du T_e comprimée faute de résultats expérimentaux. La détermination des charges critiques de voilement local est d'une importance primordiale pour la classification des sections transversales des poutres ajourées. Il est donc impératif d'effectuer des essais sur des poutres susceptibles de subir de tels modes de ruine.

Annexe

Caractéristiques géométriques et mécaniques des poutres testées utilisées pour la validation du modèle numérique

Les notations et les caractéristiques géométriques et mécaniques des poutres testées par Zaarour et Redwood et Redwood et Dermidjian sont données dans les tableaux A.1 et A.2. Les notations adoptées sont ceux de la figure 1.6 (page 5) et la figure 2.3 (page 20). n désigne le nombre d'ouvertures et L la portée des poutres.

Specimens	d_g (mm)	b_f (mm)	t_w (mm)	t_f (mm)	w (mm)	h_0 (mm)	s (mm)	h_p (mm)	n	L (mm)
10-1 ^a	370.59	69.09	3.58	4.39	58.17	245.87	69.85	0	12	3048
10-2 ^a	417.83	69.85	3.61	3.98	57.66	295.15	69.85	50.80	12	3048
10-3 ^a	376.43	70.61	3.61	4.45	57.91	260.53	127	0	8	3048
10-4 ^a	425.45	70.61	3.68	4.27	58.93	308.10	127	50.80	8	3048
12-1 ^a	476.25	78.49	4.69	5.33	73.41	352.81	101.6	0	8	3048
12-2 ^a	527.81	77.98	4.59	5.36	74.42	403.86	101.6	50.80	8	3048
12-3 ^a	449.58	78.23	4.62	5.35	71.37	302.51	149.35	0	6	3048
12-4 ^a	501.65	77.98	4.69	5.33	68.33	349.75	149.35	50.80	6	3048
10-5 ^b	380.50	66.90	3.56	4.59	77.80	266.20	76.2	0	4	1220
10-6 ^b	380.50	66.90	3.56	4.59	77.80	266.20	76.2	0	6	1828
10-7 ^b	380.50	66.90	3.56	4.59	77.80	266.20	76.2	0	8	2438

^a Poutres testées par Zaarour et Redwood
^b Poutres testées par Redwood et Dermidjian

A.1. Caractéristiques géométriques des poutres testées

Poutres	Limite d'élasticité (MPa)	
	Âme	Semelles
10-1, 10-2, 10-3, 10-4	357	342
12-1, 12-2, 12-3, 12-4	312	307

Tableau A.2. Limites d'élasticité de l'acier des poutres testées