

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université MENTOURI de CONSTANTINE

Faculté des sciences de L'ingénieur

Département d'Electrotechnique

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de MAGISTERE en Eleetrotechnique

Présenté par :

KHEBBAB MOHAMED

Sujet :

Etude et Modélisation de Capteur a Courant de Foucault pour le

contrôle non destructif (CND)

Soutenu le : 01 /02 / 2007

Devant le jury :

Président : **Aissa BOUZID**

Prof. à Université de Constantine

Rapporteur : **Mr.Mohamed El-Hadi LATRECHE**

Prof. à Université de Constantine

Examineur : **Amar BENTOUNSI**

M.C à Université de Constantine

Mohamed Rachid MOKIDACHE

Prof. à Université de Jijel

Dédicace

Je voudrais dédier ce travail aux personnes qui me sont les plus cher :

A la mémoire de mon père.

A ma très chère mère.

A mon frère.

Et à mes deux sœurs.

Sommaire

Introduction générale.....	4
----------------------------	---

Chapitre I : Différentes techniques du CND

I-1 Introduction	6
I-2 Différentes techniques du CND	7
I-2-1 Ressuage.....	7
I-2-2 Magnétoscopie.....	8
I-2-3 Contrôle par Ultrasons	9
I-2-4 Contrôle par rayon X	9
I-2-5 Contrôle par thermographie Stimulée.....	10
I-3 Le CND par courants de Foucault.....	11
I-3-1 Principe physique	11
I-3-2 Effet de peau.....	12
I-3-3 Différentes technologies des capteurs inductifs	13
I-3-4 Différents modes type d'excitations	13
I-3-5 Différents type de capteurs	15
Conclusion	17

Chapitre II : Modèle mathématique du système

II-1 Introduction.....	18
II-2 Modélisation du système	18
II-3 Formulation en potentiel vecteur	20
II-3-1 Conditions aux interfaces	21
II-3-2 Expression de l'équation dans l'air.....	24
II-3-3 Expression de l'équation dans l'inducteur	24
II-3-4 Expression de l'équation dans l'induit.....	24
II-4 Equation de la magnétodynamique bidimensionnelle	24
II-4-1 Equation en coordonnées cartésiennes	25

II-4-1-1 Expression de l'équation dans l'air	26
II-4-1-2 Expression de l'équation dans l'inducteur.....	26
II-4-1-3 Expression de l'équation dans la charge	26
II-4-2 Equation en coordonnées cylindriques	26
II 4-2-1 Expression de l'équation dans l'air	27
II-4-2-2 Expression de l'équation dans l'inducteur.....	27
II-4-2-3 Expression de l'équation dans la charge	27
II-4-3 Conditions aux limites	28
Conclusion	29

Chapitre III : Résolution du système

III-1 Introduction.....	31
III-2 Méthodes de résolutions des équations électromagnétiques	31
III-3 Méthode des éléments finis	31
III 3-1 Principe de la formulation Variationnelle	32
III-3-2 Principe de la formulation résidus pondérés	32
III-3-3 Déscretisation du domaine (maillage)	34
III-3-4 Eléments finis réels	34
III-3-5 Eléments de référence	34
III-3-6 Fonction d'interpolation	35
III-3-7 Fonction d'approximation sur l'élément	36
III-3-7 Fonction d'approximation sur le domaine	36
III-4 Formulation élément finis des équations du model.....	37
III-4-1 Equation magnétodynamique	37
III-4-1-1 Cas cartésien	37
III-4-1-2 Cas Axisymétrique	40
III-5 Organigramme du calcul par élément finis	41
Conclusion	43

Chapitre IV : Résultats de simulation

IV-1 Introduction	43
IV-2 Caractéristiques du dispositif	43
IV-2-1 Caractéristiques physique.....	43
IV-2-2 Caractéristiques Géométriques.....	43
IV-3 Domaine de résolution et conditions aux limites.....	44
IV-4 résultats de simulation.....	45
IV-4-1 Pièce sans défaut (saine).....	45
IV-4-1 –a charge amagnétique.....	45
IV-4-1 –b charge magnétique.....	48
IV-4-2 Pièce avec défaut.....	50
IV-5 Calcule de l'impédance <i>du capteur</i>	53
IV-5-1 l'impédance du capteur.....	53
IV-6 Evolution de l'impédance par apport au déplacement	56
IV-6-1 Pièce avec défaut surfacique (fissure).....	57
IV-6-2 Pièce avec défaut sous-cutané (inclusion)	59
IV-7 Limites de fonctionnement du dispositif	63
IV-7-1 Effet du lift-off sur la réponse du capteur	63
IV-7-2 Effet de l'écartement de sonde sur la réponse du capteur	65
IV-7-3 Effet de la conductivité de l'inclusion sur le réponse du capteur	65
Conclusion.....	67
Conclusion Générale.....	68

Introduction générale

Dans certaines industries, notamment aéronautique et nucléaire, où la nécessité d'avoir un produit sûr et fiable est vitale, a poussé la recherche à s'intéresser à des techniques de contrôle et d'évaluation non destructives, même si la philosophie du CND et END est connue depuis bien longtemps avec des contrôles pas vraiment rigoureux, tel que le contrôle visuel ou le ressuage, des méthodes plus efficaces et mieux adaptées qui permettent de contrôler l'état interne de chaque produit à n'importe quelle période de sa vie (de sa fabrication jusqu'à sa mise en service), se basant chacune sur un principe physique différent ont vu le jour. On peut citer parmi elles : la méthode des ultrasons, la radiographie, la thermographie stimulée, le contrôle par rayon X, sans oublier bien sûr les méthodes électromagnétiques telles que : la magnétoscopie, et le contrôle par courants de Foucault qui sera le sujet de ce mémoire.

Tout l'intérêt du contrôle par courant de Foucault est la simplicité de sa mise en œuvre, sa robustesse et sa sensibilité aux défauts type manque de matière (fissures, inclusion, corrosion...), en effet les capteurs utilisés pour ce genre de contrôle sont de simples bobines qui génèrent un champ magnétique pour induire des courants dans la pièce à contrôler, ce qui s'avère idéal pour des pièces métalliques conductrices d'électricité même dans le cas où elles présentent une géométrie complexe.

L'objectif de ce travail est l'étude d'un dispositif de contrôle par courants de Foucault à travers une simulation d'un capteur type sonde encerclante fonctionnant en mode différentiel pour deux types de matériaux magnétique et non magnétique, qui présentent deux genres de défauts : une fissure et inclusion sous-cutanée. La résolution des équations formulées s'est faite par la méthode des éléments finis implantés sur l'environnement MATLAB.

Ainsi le premier chapitre a été réservé à l'étude bibliographique qui a pour but d'expliquer le contrôle non destructif à partir des différentes techniques mises en œuvre, mettant en avant les principes physiques qui les régissent, avec une intention particulière d'accorder au contrôle par courants de Foucault, qui est le sujet de ce mémoire.

Le deuxième chapitre a été consacré aux rappels des principales lois qui gouvernent chaque phénomène électromagnétique (équation de Maxwell) pour formuler l'équation de la magnétodynamique transitoire en régime harmonique, cette équation étant une équation

différentielle aux dérivées partielles dont la solution dépend entièrement des conditions aux limites que nous avons jugées utiles d'introduire dans ce chapitre.

Les équations étant formulées, le troisième chapitre fera l'objet d'un exposé sur les méthodes de résolution des équations différentielles aux dérivées partielles, avec un intérêt particulier à la méthode des éléments finis avec une formulation résidus pondérés qui sera utilisée dans ce mémoire pour résoudre l'équation de la magnétodynamique, avec une implantation d'algorithme de calcul sous environnement MATLAB.

Le quatrième chapitre est dédié à la présentation des solutions de l'équation formulée au chapitre précédent, elle est adaptée à notre dispositif d'étude qui est une sonde encerclante montée en différentielle, avec une simulation du déplacement de cette sonde sur une pièce comportant respectivement une fissure surfacique et une inclusion sous-cutanée, montrant ainsi les différentes signatures relatives à ce genre de défaut. Une étude sur les différents paramètres affectant la réponse du capteur (impédance) et les limites de fonctionnement du dispositif ont été faites par des simulations sur la disposition de la sonde par rapport à la cible et une autre sur la position des deux capteur par rapport a aux mêmes.

I-1 Introduction générale

Les exigences sans cesse croissantes sur la qualité et la fiabilité des installations et des produits industriels notamment dans la métallurgie, l'aéronautique et le nucléaire ont conduit à l'apparition et au développement des méthodes dites : Evaluation non destructive (END) et contrôle non destructif (CND).

Tout comme leur nom l'indique ces méthodes ont pour buts d'évaluer l'état interne d'une structure, d'un matériau ou d'un quelconque assemblage sans porter atteinte à son intégrité.

Ces contrôles peuvent intervenir aux différents stades de la vie du produit, c'est à dire au niveau de la fabrication (fonderie, métallurgie, ...) ou au cours de l'utilisation (pour déceler d'éventuels fatigue, corrosion ...).

Le principe de ces méthodes est d'attaquer la pièce à contrôler avec un signal et de recueillir sa réponse qui va nous renseigner sur son état (paramètre physique, anomalie géométrique, hétérogénéité, ...).

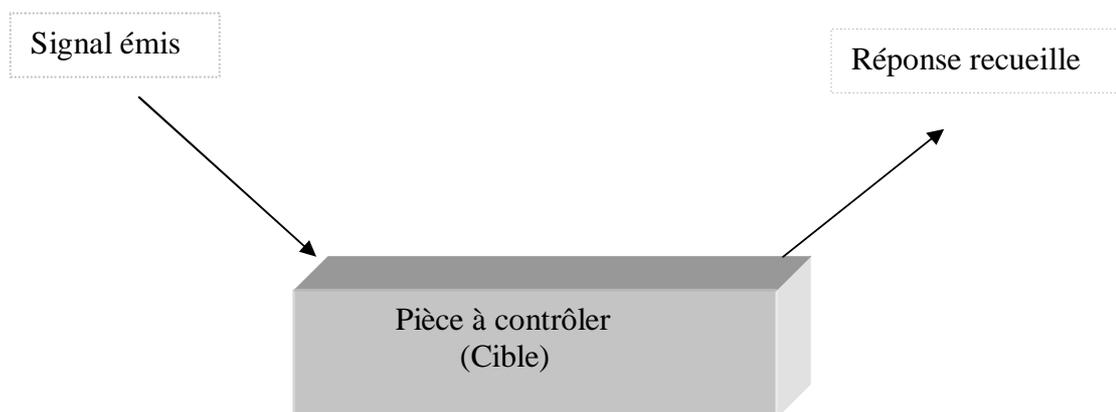


Figure I-1 : principe du contrôle non destructif

Les techniques utilisées dans le CND sont très variées, le choix d'une entre elles peut être conditionné par un certain nombre de paramètres dont les principaux sont :

- la nature du matériau à contrôler (propriétés physiques)
- l'information recherchée (détection, mesure, dimensionnement du défaut, ...).
- l'environnement du contrôle (nature des perturbations externes, ...).
- le type de contrôle à effectuer (pièce mobile, possibilité de contact ou non, ...).
- Contraintes économiques.

Dans un premiers temps on a utilisé les méthodes statistiques ou on a prélevé des échantillons sur les quels on a procédé à des essais destructifs pour avoir une idée sur la qualité des produits mais ces méthodes ne rendaient pas compte de la qualité réelle de tous les produits (sachant que le prélèvement est pratiqué sur un nombre d'échantillons relativement faible), mais le développement de l'électronique et les techniques de traitement de signal ont permis entre autre l'émergence des méthodes du « Contrôle Non Destructif » avec l'avantage de contrôler la totalité des produits.

Les principes physiques qui gouvernent les phénomènes exploités dans le CND sont connus de plus longtemps mais leur exploitation dans ce domaine date des trois dernières décennies.

I-2 Différentes techniques du CND

En effet l'une des premières méthodes de contrôle est le contrôle visuel mais pour des raisons évidentes cette technique n'est pas très efficace. On peut citer parmi les méthodes les plus répandues dans l'industrie les suivantes :

I-2-1 Ressuage

Cette méthode est exclusivement dédiée a la détection de défauts surfaciques (manque de matière, éraflure,...) cette technique très utilisée consiste à appliquer à la surface à contrôler, préalablement nettoyée et séchée, un liquide d'impression coloré ou fluorescent. Le liquide pénètre en particulier par capillarité dans les ouvertures du défaut. Après le temps nécessaire à la pénétration du liquide d'impression, la pièce est lavée et séchée puis soumise à un révélateur du liquide, l'éclairage de la pièce appropriée (qui dépend du liquide utilisé) permet d'observer visuellement le défaut.

Toute fois cette technique ne révèle pas les défauts débouchant et ne donne pas la géométrie du défaut. La figure (1-2) illustre le principe du ressuage

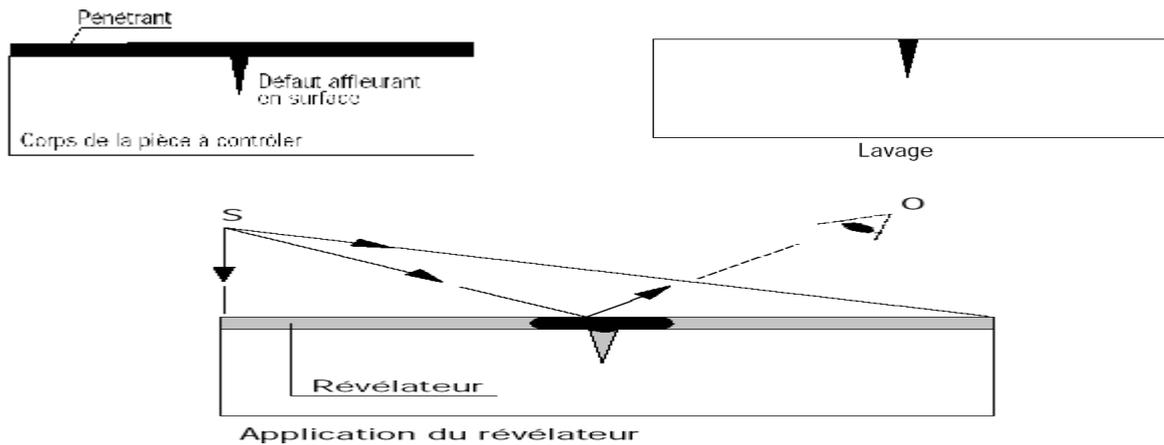


Figure 1-2 contrôle par ressuage

I-2-2 Magnétoscopie

L'utilisation de cette technique est réservée aux pièces avec alliage ferromagnétique pour détecter d'éventuels défauts superficiels ou débouchant sur la surface.

Le principe consiste à soumettre la pièce à un champ magnétique (continu ou alternatif) de valeur définie en fonction de la pièce (les champs doivent être assez suffisants pour saturer le voisinage du défaut). Des fuites magnétiques sont alors détectées sur les discontinuités superficielles rendues visibles par des indicateurs (poudre d'oxyde de fer ou de fer) déposés préalablement sur la surface de la pièce.

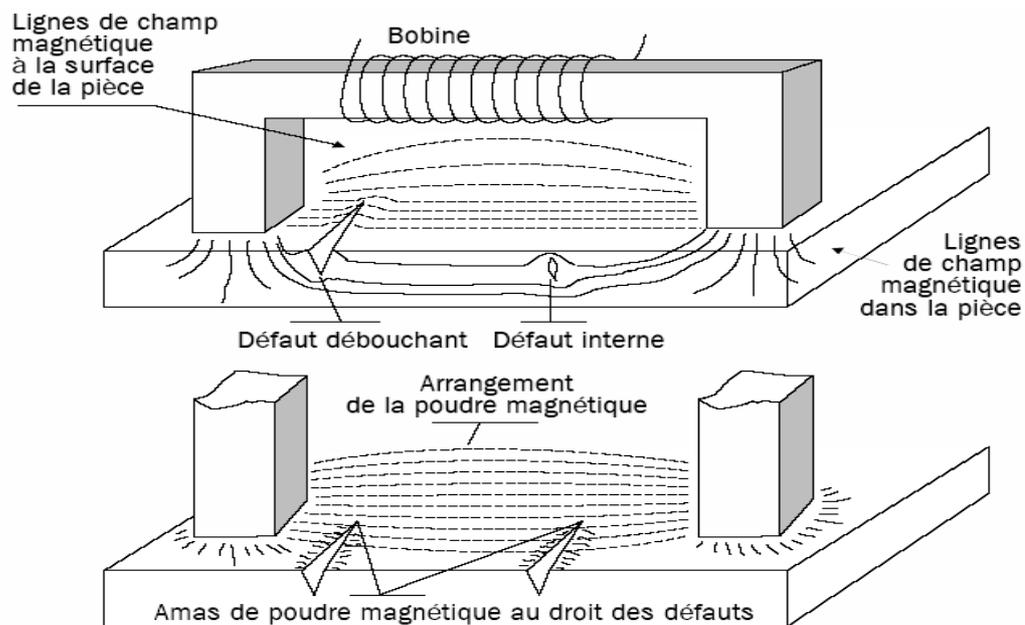


Figure 1-3 principe de la magnétoscopie

I-2-3 Les ultrasons

Le contrôle par ultrasons se prête bien au contrôle du cœur des pièces mêmes très épaisses.

Le principe de cette méthode est la réflexion de l'onde ultra sonore qui se propage dans la pièce à contrôler. En général, un transducteur ultrasonore est la fois émetteur et récepteur. Il envoie des impulsions très brèves dans la pièce à contrôler puis pendant le temps de silence, entre de impulsions successives, il joue le rôle de récepteur. Le train d'onde émis va se réfléchir sur le fond de la pièce ou sur la discontinuité éventuelle du matériau et revient sur le transducteur. L'interprétation de l'écho de retour permet de localiser le défaut si ce dernier existe.

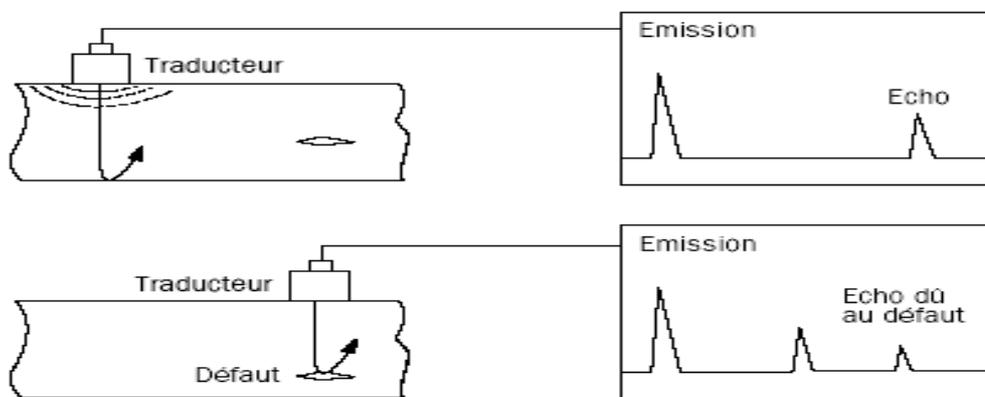


Figure 1-4 Principe des ultrasons

I-2-4 contrôle par rayon X

Les rayons X et γ utilisés sont des rayonnements électromagnétiques, c'est-à-dire de même nature que la lumière ou les ondes radio. Ces rayonnements de courtes longueurs d'onde (fig. 1-5) sont dits ionisants du fait de leur capacité à agir sur la matière et à y créer des charges électriques.

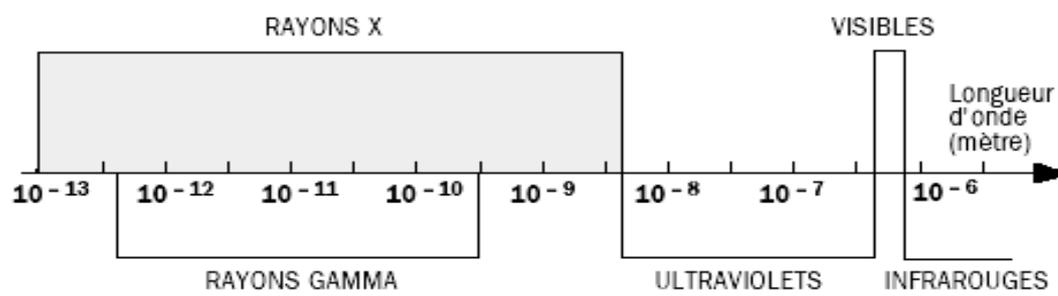


Figure 1-5 : longueurs d'ondes

La méthode consiste à faire traverser un rayonnement électromagnétique de très courte longueur d'onde (rayon X) et de recueillir les modulations d'intensité du faisceau sous forme d'une image sur un récepteur approprié un film dans la plus part des cas (fig. 1-6)

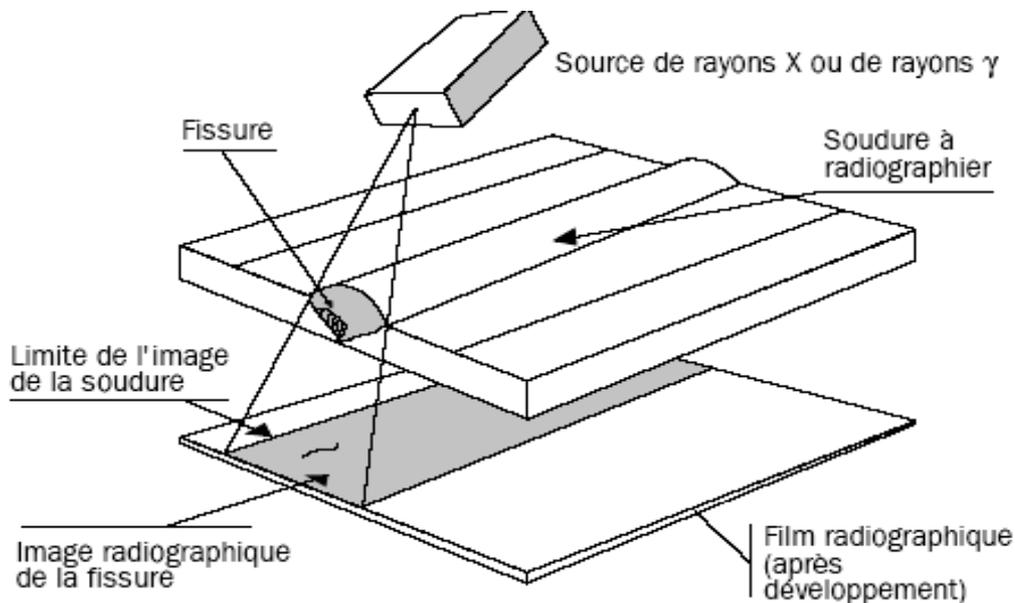


Figure 1-6 principe de la radiographie

Ce procédé utilise l'absorption par la matière des rayonnements, le principe est de déterminer la proportion de ces rayonnements par la pièce à tester.

I-2-5 la thermographie stimulée

Cette méthode repose sur l'étude de la diffusion de la chaleur sur la pièce à contrôler, et cela se fait par l'application d'une source de chaleur (faisceau laser, air chaud,...) sur la cible. Et d'après la distribution de la température (qui est fonction des propriétés thermiques et géométriques de cette dernière, rendue visible par une caméra à infrarouge (qui mesure le rayonnement thermique) et par l'application des méthodes inverses les éventuels défauts pouvant être décelés.

$$\Delta q - \frac{r \cdot C_p}{k} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{p}{k} = 0 \quad (1-1)$$

L'équation (1-1) représente l'évolution spatio-temporelle de la température, avec :

θ : la température en (°C).

ρ : la masse volumique du milieu (kg/m^3).

k : la conductivité thermique ($\text{W/m}^\circ\text{C}$).

C_p : la chaleur spécifique ($\text{J/kg}^\circ\text{C}$).

p : la source volumique de puissance (W/m^3).

Δ : l'opérateur Laplacien .

I-3 Le CND par courant de Foucault

I-3-1 Principe

Le contrôle par courant de Foucault est l'une des méthodes les plus privilégiées parmi les méthodes électromagnétiques de CND.

Cette méthode ne s'applique qu'aux pièces électriquement conductrices et s'adapte très bien aux pièces cylindriques (barres, tubes,...) pour mettre en évidence les défauts surfaciques ou sous-cutanés ou une quelconque variation des paramètres physiques du matériau à contrôler (σ , μ).

Le principe de cette méthode consiste à soumettre une pièce à l'action d'un champ magnétique variable dans le temps à l'aide d'une bobine (excitatrice) parcourue par un courant électrique variable, ce qui va créer des courants induits dans la pièce à contrôler, la trajectoire de ces courants sera perturbée soit par la géométrie soit par les caractéristiques internes de la pièce.

Ces courants vont créer à leur tour un champ magnétique qui va s'opposer au champ initial d'excitation (loi de Lenz) et le champ résultant sera fonction :

- Du signal d'excitation
- De la conductivité électrique
- De la perméabilité magnétique
- De la géométrie de la cible
- De la distance capteur-cible (lift-off)

Une mesure directe de ce champ ou d'une de ces grandeurs dérivées (FEM, impédance) permettra de caractériser la cible. La figure 1-7 donne un aperçu du principe.

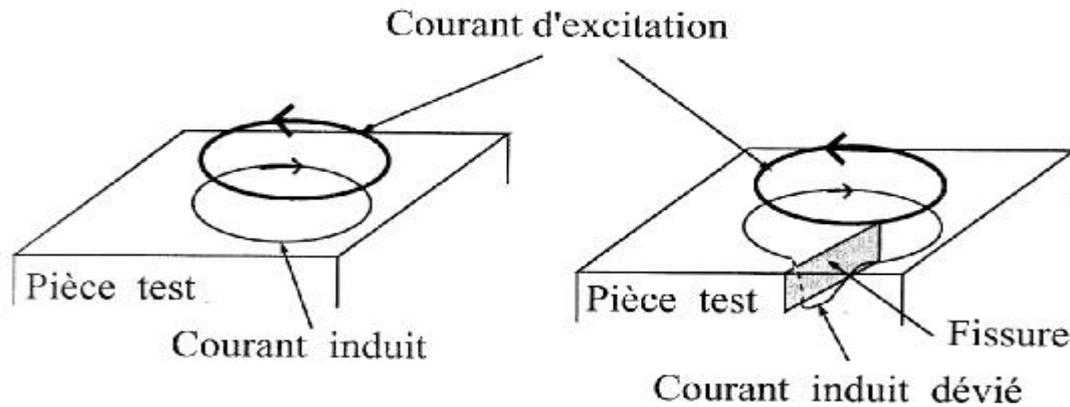


Figure 1-7 principe du CND par courant de Foucault

Les courants de Foucault se développent principalement sur la surface de la pièce à contrôler, leur densité décroît rapidement à l'intérieur de la cible (effet de peau).

I-3-2 Effet de peau :

Ce phénomène d'origine électromagnétique apparaît dans tous matériaux conducteurs parcourus par un courant électrique alternatif ou soumis à un champ électromagnétique variable dans le temps, dans le cas du contrôle non destructif, les courants induits dans la pièce commencent à décroître d'une manière exponentielle à partir de la surface (relation 1-3).

La grandeur caractéristique de ce phénomène est la profondeur de pénétration donnée par :

$$d = \frac{1}{\sqrt{p \cdot f \cdot m_0 \cdot m_r \cdot \sigma}} \quad (1-3)$$

Ou :

f : la fréquence d'alimentation.

μ_r : la perméabilité magnétique relative du matériaux.

μ_0 : la perméabilité magnétique du vide.

σ : la conductivité électrique.

La profondeur de pénétration est donc inversement proportionnelle à la fréquence du champ et à la nature du matériau.

Si on considère une cible plane semi infinie excitée par une nappe de courants extérieurs parallèles au plan, dans ce cas le module de la densité de courant est régi par la relation suivante :

$$J(z) = J_0 \cdot e^{-z\sqrt{m \cdot p \cdot f \cdot s}} = J_0 \cdot e^{-z/d} \quad (1-4)$$

z : la profondeur considérée à l'intérieur de la cible

$J(z)$: le module de la densité de courant en fonction de la profondeur.

δ : profondeur de pénétration ou épaisseur de peau.

I-3-4 différentes technologies des capteurs inductifs

La technologie des capteurs inductifs est principalement dictée par les pièces à contrôler.

Pour des cibles purement conductrices ou des courants de Foucault peuvent être générés on parle de « capteur à courant de Foucault ou CCF » mais dans le cas d'une cible magnétique non conductrice qui va entraîner une modification des lignes du champ du capteur, qui se trouvent attirées par la pièce, le dispositif fonctionne en « Capteur Magnétique ou CM »

(fig. 1-8).

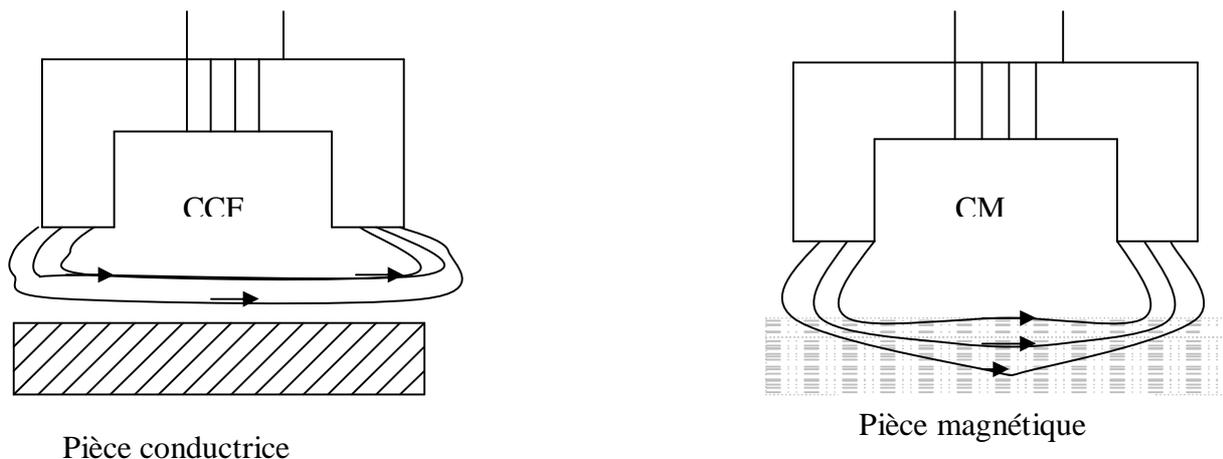


Figure 1-8 différentes technologies des capteurs inductifs (CCF et CM)

I-3-5 différents modes d'excitations

Le mode d'excitation d'un capteur est un paramètre très important pour avoir la meilleure information sur la cible, on peut distinguer trois modes d'excitation :

- Excitation mono fréquence
- Excitation multifréquences

- Excitation pulsée

Excitation mono fréquence :

Les courants induits sont obtenus par une excitation sinusoïdale de fréquence fixe. Le choix de la fréquence dépend essentiellement de l'application visée et de la sensibilité des paramètres recherchés. Elle devra cependant se situer dans une gamme raisonnable. En effet :

- Pour une fréquence trop basse, l'amplitude des courants induits sera faible et la précision de mesure insuffisante à cause du bruit
- Une fréquence trop élevée fait apparaître des phénomènes capacitifs parasites, engendrés notamment par les capacités inter spires du capteur.

Cette méthode présente des limitations car elle permet difficilement de caractériser le défaut.

Excitation multifréquence :

La méthode multifréquence est sans doute celle qui est la plus utilisée dans le CND à courant de Foucault. En réalisant des mesures à plusieurs fréquences d'excitation, il est possible d'atténuer fortement l'effet des grandeurs perturbatrices. La réduction de ces grandeurs n'est possible qu'à partir de signaux contenant suffisamment d'informations pour permettre une séparation des paramètres.

L'utilisation de n paramètre permet d'avoir $2n$ informations réelles et d'éliminer $2n-1$ perturbation.

Cette technique est très utilisée pour l'inversion de données fournies par le capteur en vue de déterminer les paramètres d'une cible malgré la présence de grandeurs perturbatrices.

L'excitation multifréquences peut être réalisée soit :

- En séquence : fréquence par fréquence en utilisant un dispositif de mesure classique (mono fréquence). L'inconvénient de cette méthode réside dans le temps d'acquisition important qui ralentit la mesure.
- Simultanément : les fréquences sont générées simultanément, cette méthode nécessite un dispositif de mesure compliqué est onéreux. En pratique, le nombre de fréquences dépasse rarement quatre du fait de la complexité et de la difficulté de réglage de tels appareils.

Excitation pulsée :

Cette technique a vu le jour au milieu des années 50, avec pour application la mesure des revêtements métalliques, puis elle a été appliquée à la détection de défauts profonds. Cette méthode représente une alternative à l'excitation multifréquences, elle consiste à émettre un champ magnétique large bande en excitant le capteur avec un signal impulsionnel. Ce mode de fonctionnement est communément appelé contrôle par courant de Foucault pulsé.

La forme des signaux d'alimentation peut être : rectangulaire, triangulaire ou semi-sinusoïdale, cette dernière étant la plus utilisée en raison de sa simplicité de mise en œuvre. dans ce type de contrôle, c'est l'évolution temporelle des signaux qui est utilisée .Une telle méthode est plus riche en informations qu'un contrôle par courant de Foucault mono -fréquence ou multifréquences .Cependant, la quantité d'informations recueillies dans la pratique dépend fortement du traitement des signaux de bruit.

I-3-6 Différents types de capteurs :

La réponse d'une cible à une excitation est recueillie par un élément sensible à une grandeur électromagnétique. Dans la majorité des cas, il s'agit de mesurer une impédance ou une différence de potentiel (d.d.p) représentative de la variation d'un flux. Cette mesure s'effectue par l'intermédiaire d'une bobine (capteur). La structure du capteur s'impose en fonction de l'application visée, on distinguera :

Capteur à double fonction :

Ce type de capteurs est très utilisé dans les applications type courant de Foucault sinusoïdaux. C'est un capteur dans lequel les fonctions d'excitation et de réception sont assurées par la ou les mêmes bobines .l'exploitation se fait par la mesure de l'impédance équivalente de la bobine dans son environnement. Ce type de capteurs favorise la détection de grandeurs à évolution lente telles que l'épaisseur de revêtement et de conductivité.

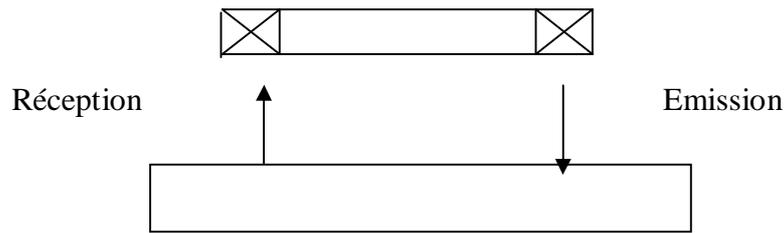


Fig.1-9 Capteur à double fonction

Capteurs à fonctions séparés

La détection des défauts profonds favorise une augmentation des dimensions de la bobine d'excitation. Cependant, cet accroissement de la taille de l'émetteur se fait au détriment de la résolution spatiale du capteur. Il est donc nécessaire d'établir un compromis sensibilité/résolution. Ce compromis est facilité par l'adoption de capteurs à fonctions séparées.

C'est un type de capteurs où la fonction d'excitation et de réception est assurée par des éléments distincts. La réception peut alors se faire à un endroit différent de la position de l'émetteur. L'élément de mesure peut être une bobine plus petite aux bornes de laquelle on mesure la d.d.p ou la variation d'impédance.

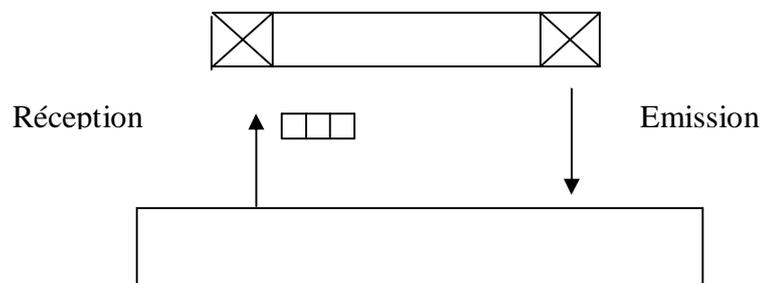


Fig.1-10 Capteur à fonction séparé

Capteurs différentiels :

Ils sont constitués d'au moins deux éléments de mesure rigidement liés dans le capteur. Dans le cas d'un capteur à deux éléments, la mesure différentielle équivaut à comparer deux mesures effectuées simultanément en deux emplacements voisins. Ce type de capteur est particulièrement

utilisé pour détecter des discontinuités lors de son déplacement le long d'une pièce en s'affranchissant des perturbations induites par une variation d'épaisseur ou de conductivité.

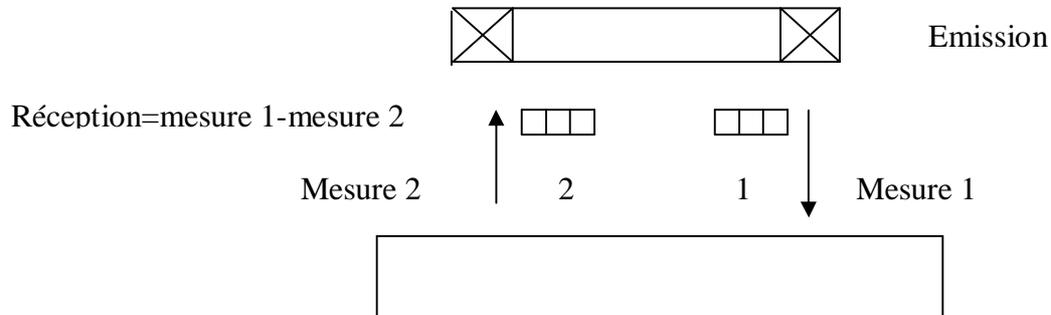


Fig.1-11 Capteur différentiel à deux éléments

Conclusion :

Dans ce premier chapitre qui fait office de chapitre d'introduction, nous avons présenté d'une façon générale, le contrôle non destructif en donnant une idée sur les différentes techniques utilisées ainsi que les principes physiques qui les régissent.

L'accent a été particulièrement mis sur le contrôle non destructif par courant de Foucault, les différentes technologies de ces capteurs (CCF ou CM), leurs modes d'alimentations (mono fréquence, multifréquence ou excitation pulsée) et les différentes façons de fonctionnement (double fonction, fonction séparée ou capteur différentiel).

II-1 Introduction

Le développement de toute technologie s'appuie non seulement sur l'expérimentation qui demeure nécessaire, mais aussi sur un modèle de simulation qui décrit le plus fidèlement possible le comportement du dispositif à concevoir.

Ceci va permettre de voir les répercussions de nos choix (configuration géométrique, nature du matériau, ...) sur le comportement du dispositif sans avoir besoin de réaliser de prototype.

Dans le présent travail notre étude se portera sur la modélisation du capteur à courant de Foucault qui a la forme d'une sonde encerclante montée en différentiel destiné à la détection d'éventuels défauts sur des pièces de forme cylindrique, tous les défauts peuvent être alors décelés par une variation de l'impédance.

En premier lieu nous allons mettre l'équation qui régit notre système. Dans notre travail ça sera l'équation de la magnétodynamique en régime harmonique pour une formulation en potentiel vecteur magnétique A.

En suite la résolution de cette équation (qui est une équation différentielle aux dérivées partielles) se fait à l'aide des méthodes numériques en l'occurrence la méthode des éléments finis.

Les résultats de la simulation et l'exploitation du modèle seront traités dans le chapitre suivant.

II-2 Modélisation du système :

Tous les phénomènes électromagnétiques variables dans le temps et dans l'espace qu'on veut généralement étudier au sein des dispositifs électrotechniques classiques sont régis par les quatre équations aux dérivées partielles de Maxwell.

Nous disposons alors du système des quatre équations suivantes :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2-1)$$

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \quad (2-2)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2-3)$$

$$\text{div}(\vec{D}) = \rho \quad (2-4)$$

Ou \vec{E} : est le champ électrique.

\vec{H} : Le champ magnétique.

\vec{D} : L'induction électrique.

\vec{B} : L'induction magnétique.

ρ : La densité de charge électrique dans un volume v .

J : La densité de courant électrique qui s'exprime :

$$\vec{J} = \vec{J}_{ind} + \vec{J}_{exi}$$

Avec :

\vec{J}_{ind} : La densité de courant induit.

\vec{J}_{exi} : La densité de courant d'excitation.

Les champs et les inductions sont liés entre eux par les lois du comportement qui expriment les propriétés du matériau, les trois relations du milieu considéré sont :

$$\vec{B} = m \cdot \vec{H} \quad (2-5)$$

$$\vec{D} = e \cdot \vec{E} \quad (2-6)$$

Et la loi d'Ohm qui s'exprime dans un milieu conducteur par :

$$\vec{J} = s \cdot \vec{E} \quad (2-7)$$

Ces équations décrivent globalement tous les phénomènes électromagnétiques, mais à l'heure actuelle, les équations de Maxwell telles qu'elles sont, se prêtent mal à une résolution analytique, de plus, suivant les dispositifs que l'on étudie certains phénomènes deviennent négligeables, ce qui va nous donner des équations découplées plus simples à résoudre, ajouté aussi que certaines hypothèses simplificatrices sont introduites, dans notre cas d'étude nous allons considérer que :

1. Dans un milieu conducteur σ est de l'ordre de 10^6 S/m, et ϵ_0 et de l'ordre de $8.85 \cdot 10^{-32}$ F/m jusqu'à des fréquences qui avoisinent les MHz nous avons $\omega \cdot \epsilon_0 \ll \sigma$ ce qui nous permet d'avoir :

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 .$$

2. La densité volumique de charge est considérée comme nulle ($\rho=0$).

3. Selon les matériaux utilisés σ , μ , ϵ , peuvent être soit des scalaires modélisant alors le comportement isotrope, soit des tenseurs qui permettent de tenir compte des effets d'anisotropie que nous ne prenons pas en compte dans ce mémoire.

4. les paramètres σ , μ , ϵ , sont considérés linéaires, donc ils ne dépendent pas de la solution du système.

5. le dispositif est alimenté par une tension sinusoïdale.

Toutes ces hypothèses considérées, le système d'équation devient :

$$\vec{rot}(\vec{H}) = \vec{j} \quad (2-8)$$

$$\vec{div}(\vec{B}) = 0 \quad (2-9)$$

$$\vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2-10)$$

$$\vec{div}(\vec{D}) = 0 \quad (2-11)$$

II-3 Formulation en potentiel vecteur (couple A-V) :

Les équations différentielles aux dérivées partielles (2-8) et (2-9) correspondent aux équations de diffusion des grandeurs H et E, toute fois, les formulations en champ présentent un inconvénient majeur, c'est celui de la discontinuité aux interfaces et particulièrement aux coins [9]. (**continuité de la composant normal de l'induction B**).

Ce qui est justifié par les relations de passage :

II-3-1 Relations de continuité Conditions aux interfaces

La méthode des éléments finis, lorsque l'inconnue recherchée aux noeuds est le potentiel vecteur magnétique, impose la continuité à l'interface de deux milieux de nature différente. Si A_1 et A_2 sont respectivement les potentiels des milieux 1 et 2 à l'interface alors :

$$A_1 = A_2$$

La continuité du potentiel assure la continuité de la composante normale de l'induction magnétique à l'interface. Compte tenu des équations de passage qu'on rappelle ci-après :

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

$$\vec{n} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = r_s$$

$$\vec{n} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}$$

\vec{n} : Le vecteur normal à la surface.

\vec{K} : représente la composante de la densité de courant perpendiculaire à l'axe du plan où se trouve \vec{n} et \vec{H} .

De plus les vecteurs ont généralement trois composantes augmentant de ce fait le nombre d'inconnues, et par la même le temps de calcul.

Pour palier à ce problème, on fait appel à une entité purement mathématique connue sous le nom de potentiel, si ce potentiel n'a aucun sens physique, sa variation, elle, est très significative.

La relation (2-9) nous renseigne sur l'existence d'un vecteur \vec{A} et nous permet d'écrire :

$$\vec{B} = \text{rot}(\vec{A}) \quad (2-12)$$

Pour assurer l'unicité de la solution nous allons imposer une condition de jauge de telle sorte que :

$$\text{div}(\vec{A}) = 0$$

En remplaçant (2-12) dans (2-10), on obtient :

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot}(\vec{A}) \quad (2-13)$$

On peut réécrire (2-13) comme suit :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\overrightarrow{rot}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \quad (2-14)$$

L'équation (2-14) peut être réécrite :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) + \overrightarrow{rot}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \quad (2-15)$$

Le rotationnel étant associatif on aura :

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \quad (2-16)$$

L'expression (1-16) implique l'existence d'un potentiel scalaire V :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}(V) \quad (2-17)$$

Et on aura alors :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad}(V) \quad (2-18)$$

En considérant la loi d'Ohm (2-7)

$$\vec{J} = \mathbf{s} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad}(V)\right) \quad (2-19)$$

Ce qui permet de définir les deux densités de courant cité précédemment:

$$\vec{J}_{ind} = -\mathbf{s} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{J}_{exi} = -\mathbf{s} \cdot \overrightarrow{grad}(V)$$

Si on remplace (2-19) dans (2-8), on obtient :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{H}) = \mathbf{s} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad}(V)\right) \quad (2-20)$$

La combinaison entre l'équation (2-5) et (2-12) donne :

$$\vec{H} = \frac{1}{m} \cdot \overrightarrow{rot}(\vec{A}) \quad (2-21)$$

En remplaçant (2-21) dans (2-20), on obtient :

$$\overrightarrow{rot} \left(\frac{1}{m} \cdot \overrightarrow{rot}(\vec{A}) \right) = \mathbf{s} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad}(V) \right) \quad (2-23)$$

En ajustant cette dernière équation on aura :

$$\overrightarrow{rot} \left(\frac{1}{m} \cdot \overrightarrow{rot}(\vec{A}) \right) + \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\mathbf{s} \cdot \overrightarrow{grad}(V) \quad (2-24)$$

Avec :

$$\vec{J}_s = -\mathbf{s} \cdot \overrightarrow{grad}(V)$$

L'équation (2-24) représente l'équation de la magnétodynamique transitoire en terme de potentiel vecteur magnétique A avec un terme source.

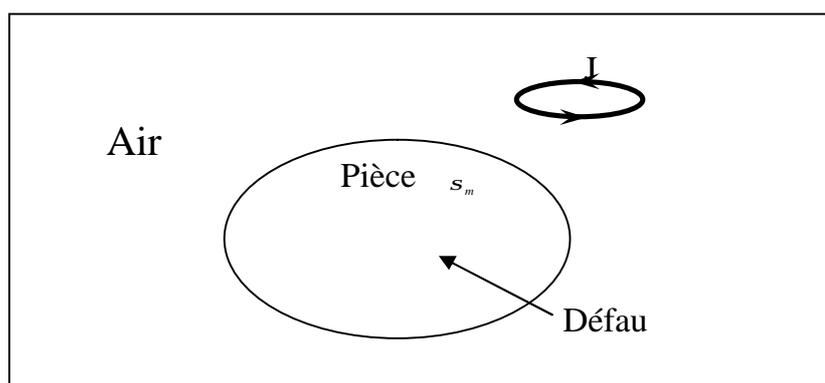
L'étude de cette équation en régime statique (indépendant du temps) constitue un régime magnétostatique. Mais si en prend en compte la dépendance au temps avec une alimentation sinusoïdale (ce qui est notre cas d'étude) cela va constituer un modèle magnétodynamique en

régime harmonique avec $\frac{\partial}{\partial t} = j \cdot \omega$, et l'équation s'exprime par :

$$\overrightarrow{rot} \left(\frac{1}{m} \cdot \overrightarrow{rot}(\vec{A}) \right) + j \cdot \omega \cdot \mathbf{s} \cdot \vec{A} = \vec{J}_s \quad (2-25)$$

Dans la plupart des problèmes de modélisation, les phénomènes électromagnétiques dans le domaine du contrôle non destructif réalisés jusqu'à présent, considèrent une bobine inductrice ou le courant est imposé, une région ferromagnétique ou conductrice qui représente la cible à contrôler et la troisième région qui représentera l'air environnant.

L'adaptation de l'équation (2-25) aux différentes régions constituera le dispositif d'étude et nous permet d'écrire :



II-3-2 Dans l'air :

La région qui entoure le dispositif est caractérisée par l'absence de source ainsi qu'une conductivité électrique nulle, l'équation qui lui sera associée s'écrira :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{1}{m_0} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{A}) \right) = 0 \quad (2-26)$$

II-3-3 Dans l'inducteur :

Les inducteurs sont des fils fins de cuivre, l'équation (2-25) pourra alors s'écrire sur la forme suivante :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{1}{m} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{A}) \right) = \vec{J}_s \quad (2-27)$$

II-3-4 Dans la cible :

La pièce à contrôler est obligatoirement conductrice, l'équation électromagnétique dans cette région s'écrit alors :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{1}{m} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{A}) \right) + j \cdot \omega \cdot \sigma \cdot \vec{A} = 0 \quad (2-28)$$

Avec :

ω : est la pulsation.

$J^2 = -1$ (nombre complexe)

II-4 Equation magnétodynamique bidimensionnelle :

Lorsque une approche bidimensionnelle est permise, de grandes simplifications peuvent se faire, pour le cas de l'équation (2-28) le potentiel vecteur magnétique ne présente qu'une seule composante dans la direction ou aucune variation n'a lieu.

Dans les problèmes bidimensionnels on peut avoir de cas type :

Le premier concerne les systèmes à symétrie translationnelle, ou aucune variation n'est enregistrée sur l'une des trois directions d'un plan cartésien. On choisit généralement l'axe (oz).

Dans l'autre cas on trouve les systèmes axisymétriques, ou aucune variation n'a lieu le long de la direction orthoradiale (φ). Dans un plan cylindrique (r, φ, z).

II-4-1 Coordonnées cartésiennes

Considérons le système de longueur infini suivant l'axe (oz). L'étude peut se ramener donc à un système bidimensionnel dans le plan $[x, y]$, ce la revient à considéré $\frac{\partial}{\partial z} = 0$.

Le potentiel vecteur dans ce cas n'a qu'une seule composante parallèle à (oz). A partir (2-7) et (2-18), il vient que \vec{A} et \vec{E} doivent être dans la même direction que \vec{J} .

On alors : $\vec{A} (0,0,A)$ et $\vec{J} (0,0,J)$.

Sachant que :

$$\vec{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_z \end{bmatrix} \quad (2-29)$$

Où : i, j, k sont les vecteurs unitaires dans le système cartésien selon les axes $\vec{Ox}, \vec{Oy}, \vec{Oz}$.

Après développement on obtient :

$$\vec{rot}(\vec{A}) = \frac{\partial A_z}{\partial y} \vec{i} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \vec{j} \quad (2-30)$$

Ainsi :

$$\frac{1}{m} \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{A}) = \frac{1}{m} \frac{\partial A_z}{\partial y} \cdot \vec{i} - \frac{1}{m} \frac{\partial A_z}{\partial x} \cdot \vec{j} \quad (2-31)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{1}{m} \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{A}) \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{m} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cdot \vec{i} - \\ &\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{m} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \cdot \vec{j} + \left[- \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{m} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{m} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right] \cdot \vec{k} \end{aligned} \quad (2-32)$$

Il est évidemment clair que les termes selon \overrightarrow{Ox} et \overrightarrow{Oy} sont nuls, d'où l'équation (2-32) peut s'écrire :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{1}{m} \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{A}) \right) = \left[- \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{m} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{m} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right] \cdot \vec{k} \quad (2-33)$$

Avec \vec{k} le vecteur unitaire selon \overrightarrow{Oz} .

Les équations (2-26), (2-27) et (2-28) deviennent :

II-4-1-1 Dans l'air :

$$\left[- \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{m} \frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{m} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right] = 0 \quad (2-34)$$

II-4-1-2 Dans l'inducteur :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{m} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{m} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right] = J_z \quad (2-35)$$

II-4-1-3 Dans la charge :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{m} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{m} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right] - s \cdot \frac{\partial A_z}{\partial t} = -J_z \quad (2-36)$$

II-4-2 Coordonnées cylindriques

Considérons maintenant un système à symétrie de révolution, le plan d'étude se réduit alors au plan

(r,z) ce qui se traduit par $\frac{\partial}{\partial j} = 0$.

En coordonnée cylindrique le potentiel vecteur magnétique ne présente que la composante orthoradiale, d'où :

$$\vec{A}(0, A_j, 0) \text{ et } \vec{J}(0, J_j, 0).$$

Sachant que :

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial j}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_j}{\partial z} - \frac{\partial A_r}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_j + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r \cdot A_j}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial j} \right) \vec{u}_z \quad (2-37)$$

Ce qui revient à écrire :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{A}) = -\frac{\partial A_j}{\partial z} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial r \cdot A_j}{\partial r} \vec{u}_z \quad (2-38)$$

D'où :

$$\frac{1}{m} \vec{\text{rot}}(\vec{A}) = -\frac{1}{m} \frac{\partial A_j}{\partial z} \vec{u}_r + \frac{1}{m r} \frac{\partial r \cdot A_j}{\partial r} \vec{u}_z \quad (2-39)$$

On faisant le produit vectoriel de nabla fois l'équation (2-39) on aura :

$$\vec{rot}\left(\frac{1}{m}\vec{rot}(A)\right) = \left(-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{m}\frac{\partial A_j}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{m}\frac{1}{r}\frac{\partial r.A_j}{\partial r}\right) \right) \vec{u}_j \quad (2-40)$$

Les équations (2-26), (2-27) et (2-28) deviennent :

Dans l'air :

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u}{r}\frac{\partial(r.A_j)}{\partial z}\right) + \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r.A_j)}{\partial r}\right) \right) = 0 \quad (2-41)$$

Dans l'inducteur :

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u}{r}\frac{\partial(r.A_j)}{\partial z}\right) + \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r.A_j)}{\partial r}\right) \right) = J_{sj} \quad (2-42)$$

Dans la charge :

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u}{r}\frac{\partial(r.A_j)}{\partial z}\right) + \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r.A_j)}{\partial r}\right) \right) - s \frac{\partial A_j}{\partial t} = 0 \quad (2-43)$$

Avec : $v = 1/\mu$.

v : la reluctivité magnétique

Les équations (3-41), (3-42) et (3-43) sont des équations différentielles aux dérivées partielles (avec ou sans termes sources).

Ces équations étant posées, leurs solution dépend entièrement des conditions de limites qui lui seront associées on peut distinguer trois sortes de conditions aux limites qu'on peut généralement rencontrer :

II-4-3 Conditions aux limites :

1. Condition de Dirichlet (ou condition du premier problème aux limites) : on cherche une solution de l'équation qui prend des valeurs données sur le bord du domaine, on cherche donc à résoudre le système d'équation :

$$\begin{cases} \Delta A = f & x \in \Omega \\ A = A_0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

2. Condition de Neumann (ou condition du deuxième problème aux limites) : on cherche la solution de l'équation différentielle dont on connaît la valeur du gradient sur le bord du domaine de résolution, notant que n la normal unitaire dirigée vers l'extérieur de Ω , on cherche donc à résoudre le problème :

$$\begin{cases} \Delta A = f & x \in \Omega \\ \frac{\partial A}{\partial n} = A_n & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

3. Condition de mixte (ou condition de Dirichlet–Neumann) : on cherche une solution qui vérifie la troisième condition de bord qui est :

$$\begin{cases} \Delta A = f & x \in \Omega \\ a \cdot A + b \cdot \frac{\partial A}{\partial n} = c & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Ou :

a, b sont des constantes et A et l'inconnu du problème.

On note que :

Δ : l'opérateur Laplacien.

f : terme source.

Ω : le domaine d'étude.

$\partial\Omega$: le bord du domaine d'étude.

Conclusion :

Ce chapitre a été essentiellement consacré au rappel des équations de l'électromagnétisme, et à leurs formulations en terme de potentiel vecteur magnétique dans le repère cartésien pour ensuite faciliter le passage aux coordonnées cylindriques. On obtient ainsi l'équation de la magnétodynamique transitoire pour les adaptés finalement à notre dispositif d'étude.

III-1 introduction

L'équation qui régit le dispositif étant formulée, on propose de résoudre cette équation. Plusieurs méthodes peuvent être utilisées, d'une façon tout à fait générale, on peut classer les méthodes de résolution des équations différentielles aux dérivées partielles, en deux grandes catégories : Les méthodes numériques et les méthodes analytiques.

III -2 Méthodes de résolutions des équations électromagnétiques :

Parmi les méthodes analytiques on peut citer : la méthode des séparations des variables, la méthodes des séries d'exponentielles, la méthode des intégrales sur la frontière et les méthodes de transformation.

Parmi les méthodes de résolution numériques les plus utilisées sont : la méthode des différences finies qui consiste en l'approximation de l'opérateur différentiel par un opérateur aux différences, ou chaque dérivée est approchée par une différence de valeurs de l'inconnue à déterminer en un certain nombre de points du domaine de résolution [2][3], si elle est de mise en œuvre facile, elle se trouve néanmoins inadaptée au traitement des problèmes à géométrie complexe. La méthode des éléments finis, quant à elle consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équation algébrique.

En plus de ces méthodes on peut citer les méthodes semi analytiques et les méthodes mixtes consistant en l'association de méthodes analytique et numérique.

Dans ce qui suit nous allons nous intéresser plus précisément à la méthode des éléments finis ainsi qu'à la formulation éléments finis des équations magnétodynamiques.

III-3 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est apparue dans les années 1950 et n'a été introduite en électromagnétisme qu'en 1970 par M.V.K.Chari et P.P.Sylvester. Et elle a connu dès lors un développement considérable.

La méthode des éléments finis est une méthode d'approximation des solutions d'équations différentielles aux dérivées partielles qui est construite à partir d'une formulation équivalente du problème, elle peut être soit une « formulation variationnelle » ou en « résidus pondéré ».

III-3-2.Principe de la formulation variationnelle :

La méthode variationnelle nécessite la connaissance à priori de la fonctionnelle d'énergie du système à étudier. Celle-ci est déterminée par le principe de l'action Hamiltonienne qui stipule l'existence d'une fonctionnelle type intégral définie par [2],[4] :

$$F(A) = \int_{\Omega} L.d\Omega \quad (3-1)$$

L : est la fonction de la grange résultant de la coénergie du système de type cinétique et de son énergie potentiel.

$$L = W_c - W_p$$

Ω : est le domaine d'étude.

La résolution du problème variationnel défini par la fonction d'énergie F(A) revient à minimiser cette fonctionnelle.

La minimisation s'effectue en utilisant le principe de Rayleigh-Ritz qui consiste à écrire :

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_i} = 0 \quad (3-2)$$

Où

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_1} = \frac{\partial F(A)}{\partial A_2} = \frac{\partial F(A)}{\partial A_3} = \dots = \frac{\partial F(A)}{\partial A_n} \quad (3-3)$$

n : nombre de nœud dans le domaine d'étude.

A_i : inconnue au nœud i du domaine.

III-3-3. Formulation résidus pondérés :

Le principe de la méthode des résidus pondérés est de remplacer la solution exacte par la solution approchée, ce qui va engendrer une erreur appelée résidus R.

$$R_i = L(A) - f \quad (3-4)$$

R : est le résidus de l'approximation.

L(A) : opérateur différentiel.

f : fonction définie sur le domaine d'étude Ω

A : l'inconnue à chercher.

A l'aide de fonction de pondération bien choisie, on impose à l'intégrale du résidu de s'annuler en N points du domaine Ω .

$$\int_{\Omega} R_i \cdot \Phi_i \cdot d\Omega = 0 \quad (3-5)$$

Φ_i : Fonction de pondération ou de projection.

Les valeurs de A qui permettent d'annuler l'intégrale, sont solution du système algébrique obtenu.

Plusieurs méthodes peuvent être déduites de la formulation résidus pondérés, ces dernières sont essentiellement liées au choix des fonctions de pondérations, parmi elles on citera :

1- La méthode de collocation par points, ou les fonction de Dirac sont prises comme fonctions de pondérations ou on impose au résidu de s'annuler dans chaque pont ou on veut approcher la solution.

2- Méthode des moindres carrés qui est basée sur la minimisation de la norme quadratique de l'erreur sur l'équation et les conditions aux limites.

3- La méthode de Galerkin qui consiste à choisir des fonctions de projections identiques aux fonctions d'approximation, qui donne à la fin un système algébrique symétrique facile à résoudre.

Contrairement à la méthode variationnelle, la méthode des résidus pondérés, ne nécessite pas la connaissance au préalable de la fonctionnelle d'énergie du système.

On se limitera dans ce qui suit à présenter la méthode projective de Galerkin qui est utilisée dans le cadre de ce travail.

III-3-3 La discrétisation du domaine :

Le domaine de résolution est discrétisé en petits domaines appelés éléments finis, l'approximation de l'inconnue se fait en chaque élément, grâce aux fonctions d'interpolation.

L'interpolation dans un élément est effectuée en fonction des valeurs de l'inconnue aux nœuds de cet élément. On parle alors d'interpolation nodale.

III-3-4 Eléments finis réels :

Selon que le domaine d'étude, soit à une, deux ou trois dimensions, les éléments seront choisis en fonction du degré de la courbure d'interpolation qui leur sont associés. On rencontre le plus souvent des éléments linéaires, quadratiques ou cubiques.

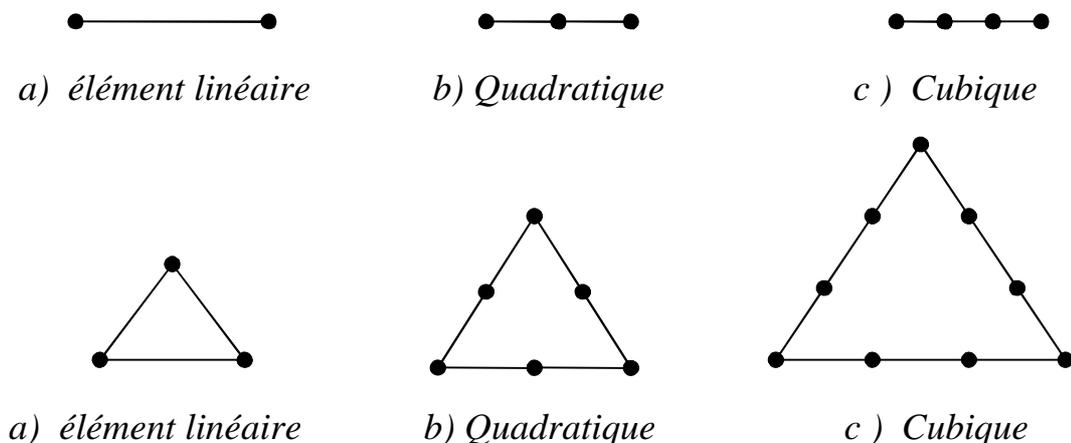


Fig.3-1 éléments classiques en une et deux dimensions

2) Principe de compatibilité :

Celui-ci est explicité par la continuité de la fonction.

Dans le cas d'un élément triangulaire linéaire, la fonction d'interpolation est donnée par :

$$u(x, y) = a.x + b.y + c \quad (3-6)$$

III-3-7 fonction d'approximation sur l'élément :

Dans le cas d'élément triangulaire linéaire, approximation d'une fonction $u(x,y)$ de valeur u_1 , u_2 et u_3 , respectivement aux sommets 1,2 et 3, est de la forme suivante :

$$u(x, y) = \begin{bmatrix} N_1(x, y) & N_2(x, y) & N_3(x, y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

Avec :

$$N_1(x, y) = \frac{1}{2.T} \cdot [(y_3 - y_2) \cdot (x_2 - x) - (x_3 - x_2) \cdot (y_2 - y)] \quad (3-8)$$

$$N_2(x, y) = \frac{1}{2.T} \cdot [(y_1 - y_3) \cdot (x_3 - x) - (x_1 - x_3) \cdot (y_3 - y)] \quad (3-9)$$

$$N_3(x, y) = \frac{1}{2.T} \cdot [(y_2 - y_1) \cdot (x_1 - x) - (x_2 - x_1) \cdot (y_1 - y)] \quad (3-10)$$

Où T est la surface du triangle décrit par les sommets (1),(2) et (3).

$N(x,y)$: fonction d'interpolation.

On remarque que :

$$N_1(x_1, y_1) = 1$$

$$N_1(x_2, y_2) = 0$$

$$N_1(x_3, y_3) = 0$$

III-3-8 Fonction d'interpolation sur le domaine :

Dans le domaine global contenant N nœuds, l'inconnue s'exprime alors :

$$A = \sum_{j=1}^N a_j \cdot A_j \quad (3-11)$$

N : le nombre de nœuds.

α_j : Fonction d'interpolation au nœud j.

A_j : inconnue au nœud j.

III-4. Formulation éléments finis des équations du modèle :

III-4-1. Equation magnétodynamique :

III-4-1-1 cas cartésien

L'équation magnétodynamique dans le cas comportant une source est donnée par :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{1}{\mathbf{m}} \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{A}) \right) + \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{j}_z \quad (3-12)$$

En régime harmonique l'équation devient :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{1}{\mathbf{m}} \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{A}) \right) + j \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{s} \cdot \vec{A} = \vec{j}_z \quad (3-13)$$

L'équation (3-13) peut s'écrire sous la forme :

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mathbf{m}} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mathbf{m}} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) + j \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{s} \cdot A_z = j_{sz} \quad (3-14)$$

La formulation intégrale de l'équation (3-14) peut être donnée par :

$$\iint_{\Omega} a_i \left(-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mathbf{m}} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mathbf{m}} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) + j \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{s} \cdot A_z - j_z \right) dx dy = 0 \quad (3-15)$$

L'équation (3-15) peut être réécrite comme suit :

$$- \iint_W \mathbf{a}_i u \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) dx dy + jw \iint_W \mathbf{a}_i \mathbf{s} A_z dx dy = \iint_W \mathbf{a}_i j_{sz} dx dy \quad (3-16)$$

L'application de théorème de Green, nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} & - \iint_W \mathbf{a}_i u \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) dx dy = \\ & - \iint_W u \left(\frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial x} \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial y} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) dx dy + \\ & \int_G \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \mathbf{a}_i \cos(n, x) + \frac{\partial A_z}{\partial y} \mathbf{a}_i \cos(n, y) \right) dG \end{aligned} \quad (3-17)$$

On peut écrire l'équation (3-17) sous une forme plus compacte en introduisant l'opérateur nabra :

$$\begin{aligned} & - \iint_W \mathbf{a}_i u \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) dx dy = - \iint_W u \vec{\nabla} \mathbf{a}_i \cdot \vec{\nabla} A_z dx dy + \\ & \int_G u \mathbf{a}_i \frac{\partial A}{\partial n} dG \end{aligned} \quad (3-18)$$

En remplaçant (3-18) dans l'équation (3-16) on aura :

$$- \iint_W u \vec{\nabla} \mathbf{a}_i \cdot \vec{\nabla} A_z dx dy + \int_G u \mathbf{a}_i \frac{\partial A}{\partial n} dG + jw \iint_W \mathbf{a}_i \mathbf{s} A_z dx dy = \iint_W \mathbf{a}_i j_{sz} dx dy \quad (3-19)$$

Avec Γ le contour sur le quel repose la surface Ω .

En considérant des conditions aux limites type Dirichlet ou Newmann homogène, le terme sur la frontière s'annule :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{u} \mathbf{a}_i \frac{\partial A}{\partial n} d\Gamma = 0$$

L'expression (3-19) devient alors :

$$- \iint_W \mathbf{u} \vec{\nabla} \mathbf{a}_i \vec{\nabla} A_z dx dy + j\omega \iint_W \mathbf{a}_i \mathbf{s} A_z dx dy = \iint_W \mathbf{a}_i j_{sz} dx dy \quad (3-20)$$

Sachant que :

$$A_z = \sum_{j=1}^N \mathbf{a}_j A_j \quad (3-21)$$

En remplaçant (3-21) dans (3-20) nous obtenons :

$$\sum_{j=1}^N \left(- \iint_W \mathbf{u} \vec{\nabla} \mathbf{a}_i \vec{\nabla} \mathbf{a}_j dx dy \right) A_j + j\omega \sum_{j=1}^N \left(\iint_W \mathbf{s} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j dx dy \right) A_j = \iint_W \mathbf{a}_i j_{sz} dx dy \quad (3-22)$$

L'équation (3-22) peut être écrite pour tous les nœuds du domaine sous la forme algébrique, on obtient alors l'expression suivante :

$$[M][A] + j\omega [L][A] = [K] \quad (3-23)$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_W \mathbf{u} \vec{\nabla} \mathbf{a}_i \vec{\nabla} \mathbf{a}_j dx dy$$

$$L_{ij} = \iint_W \mathbf{s} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j dx dy$$

$$K_{ij} = \iint_W \mathbf{a}_i j_{sz} dx dy$$

$$\bar{A} = A_r + jA_i$$

Où A_r est la partie réel et A_i est la partie imaginaire.

III-4-1-2 cas axisymétrique :

En considérant le régime harmonique et en faisant le même raisonnement que le cas des coordonnées cartésiennes on aura :

$$-\iint_W \mathbf{a}_i \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \frac{\partial A_j}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u}{r} \frac{\partial A_j}{\partial z} \right) \right) dr dz + j\omega \iint_W \mathbf{a}_i \mathbf{s} A_j \frac{dr dz}{r} = \iint_W \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{j}_j dz dz \quad (3-24)$$

L'application du théorème de Green, nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \iint_W \frac{u}{r} \left(\frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial r} \frac{\partial A_j}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial z} \frac{\partial A_j}{\partial z} \right) dr dz - \int_G \frac{u}{r} \mathbf{a}_i \frac{\partial A}{\partial n} dG + \\ j\omega \iint_W \mathbf{a}_i \mathbf{s} A_j \frac{dr dz}{r} = - \iint_W \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{j}_{sj} dz dz \end{aligned} \quad (3-25)$$

En considérant les conditions aux limites type Dirichlet ou Newmann homogène, le terme sur la frontière s'annule.

En remplaçant A par sa forme discrétisée :

$$A_j = \sum_{j=1}^N \mathbf{a}_j A_j$$

On aura :

$$\sum_{j=1}^N \left(\iint_W \frac{u}{r} \vec{\nabla} \mathbf{a}_i \cdot \vec{\nabla} \mathbf{a}_j dr dz \right) A_j + j\omega \sum_{j=1}^N \left(\iint_W \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j \mathbf{s} \frac{dr dz}{r} \right) A_j = - \iint_W \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{j}_{sj} dr dz \quad (3-26)$$

L'équation (3-26) s'écrit sur tous les nœuds du domaine sous la forme matricielle suivante :

$$[M][A] + j\omega [L][A] = [K]$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_W u \vec{\nabla} \mathbf{a}_i \cdot \vec{\nabla} \mathbf{a}_j dr dz$$

$$L_{ij} = \iint_W s \cdot a_i a_j \frac{drdz}{r}$$

$$K_{ij} = \iint_W a_i j_{sj} drdz$$

$$\bar{A} = A_r + jA_i$$

Où A_r est la partie réelle et A_i et la partie imaginaire.

III-5 Organigramme de calcul par éléments finis :

Pour l'implémentation du modèle sous environnement 'MATLAB', on procédera à plusieurs étapes pour définir la solution de l'équation décrite précédemment (équation elliptique) :

1-Description de la géométrie du domaine.

2- Construction d'un maillage triangulaire du domaine Ω . On utilisera des fonctions spécifiques pour la génération automatique du maillage aussi bien que pour son raffinement. Le maillage sera décrit par trois matrices de format fixe contenant : les coordonnées des nœuds (matrice p), les segments de la frontière (matrice e) et la numérotation des éléments triangulaires (matrice t).

3- Imposition des conditions aux limites : MATLAB offre les deux conditions usuelles sur un domaine à deux dimensions sous la forme algébrique suivante :

- Condition de Dirichlet :

$$h u = r ;$$

- Condition généralisée de Neumann :

$$\mathbf{n} \cdot (c \nabla u) + q u = g \quad \text{Avec } \mathbf{n} \text{ le vecteur normal, } h, r, c, q, g \text{ les matrices construites à}$$

partir coordonnées des nœuds, u est l'inconnu du problème.

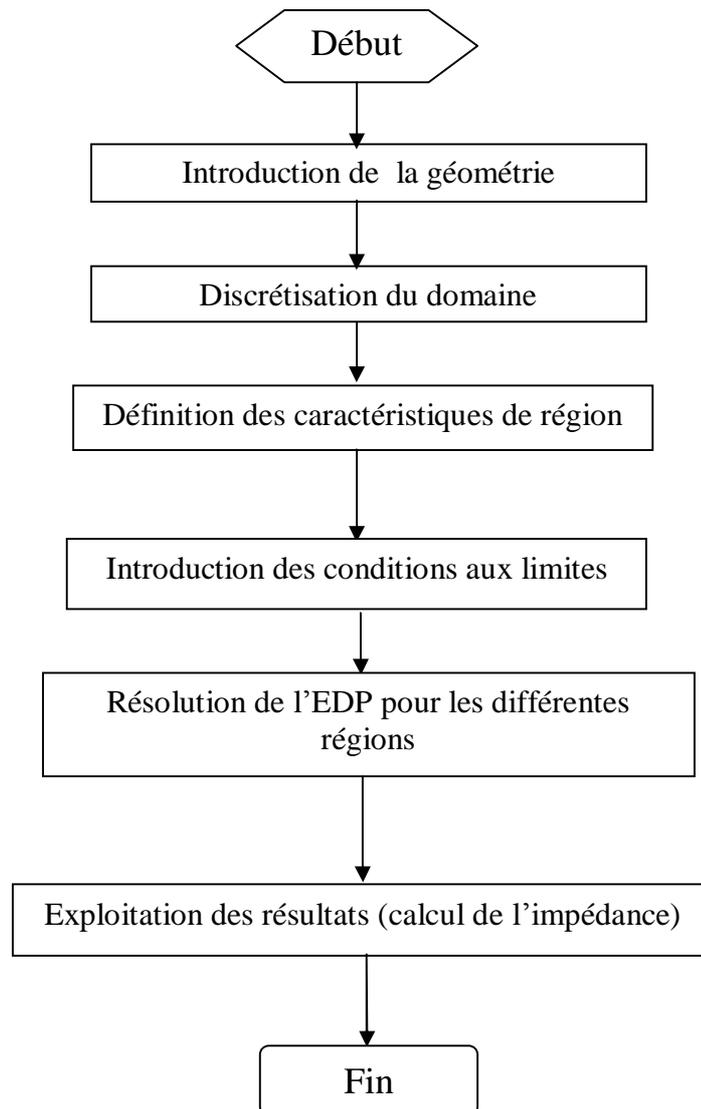
4- Définition des caractéristiques de chaque région, en affectant à chaque sous-domaine ses propriétés physiques (σ, μ)

Pour obtenir un système linéaire $\mathbf{K}u = \mathbf{F}$ où le vecteur u contient les valeurs de la solution approximative sur les points du maillage ; \mathbf{K} est construite à partir des coefficients c, h, a et q et

le second membre \mathbf{F} contenant, essentiellement, les moyennes de f autour de chaque point du maillage et les contributions provenant de g .

La solution du système linéaire $\mathbf{K}u = \mathbf{F}$ et l'exploitation des résultats. Dans notre cas, les paramètres importants sont l'impédance du capteur Z et potentiel magnétique A .

Les différentes étapes citées peuvent se résumer sous la forme de l'organigramme suivant :



Conclusion :

Les équations étant formulées, ce troisième chapitre a fait l'objet d'un exposé sur les méthodes analytiques, numériques, ou les méthodes semi analytiques pour la résolution des équations différentielles aux dérivées partielles. La résolution dans notre mémoire s'est faite par la méthode des éléments finis, avec une formulation en résidus pondérés et une implantation d'algorithme de calcul sous environnement MATLAB.

IV-1 Introduction

Après avoir formulé les équations régissant notre modèle d'étude dans le chapitre précédent on va dans ce qui suit présenter les résultats des simulations effectuées sous environnement MATLAB (utilisant certaine fonction de sa boîte a outils PDETOOL). Pour un capteur à courant de Foucault type sonde encerclante montée en différentiel.

Il est à noter que la pièce à étudier présente une symétrie de révolution, c'est ce qui va permettre de limiter l'étude sur la moitié du domaine, avec des conditions aux limites de Dirichlet sur sa frontière.

Ce dernier chapitre sera dédié essentiellement à la présentation des résultats obtenus lors de la simulation, respectivement d'une pièce saine (pour des perméabilités relatives μ_r différentes 1 et 1000) et une autre présentant deux genres de défauts respectivement surfacique et sous-cutané pour enfin voir les limites que présente le dispositif lors de son fonctionnement.

IV-2 Caractéristique du dispositif

IV -2-1 Caractéristique physique

Capteur :

Courant injecté : $5 \cdot 10^{-2}$ A

Perméabilité magnétique : $4\pi \cdot 10^{-7}$ [H.m]

Fréquence d'alimentation : 1 et 2.5 KHz.

Nombre de spires : 75 spires.

Charge :

Perméabilité magnétique : $4\pi \cdot 10^{-7}$ [H.m]

Conductivité électrique : 10^6 [Ω .m]⁻¹

IV -2-2 Caractéristique géométrique :

Capteur :

Rayon intérieur : 1.4 cm

Rayon extérieur : 1.8 cm

Hauteur : 5 mm

Entre fer (lift-off): 2 mm

Charge:

Rayon extérieur : 1.2cm

Hauteur : 4 cm

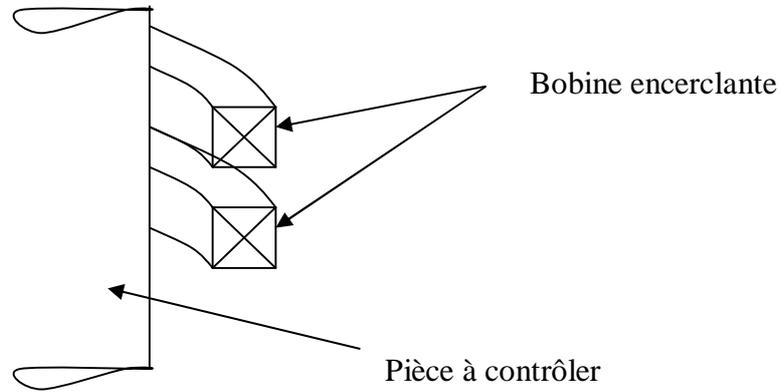


Fig.(4-1) figure qui représente 1/2du domaine (capteur+cible)

IV-3 Domaine de résolution et condition aux limites:

La figure (4-2) donne un aperçu sur la géométrie du dispositif à étudier et les conditions aux limites qui lui sont associées (condition de Dirichlet).

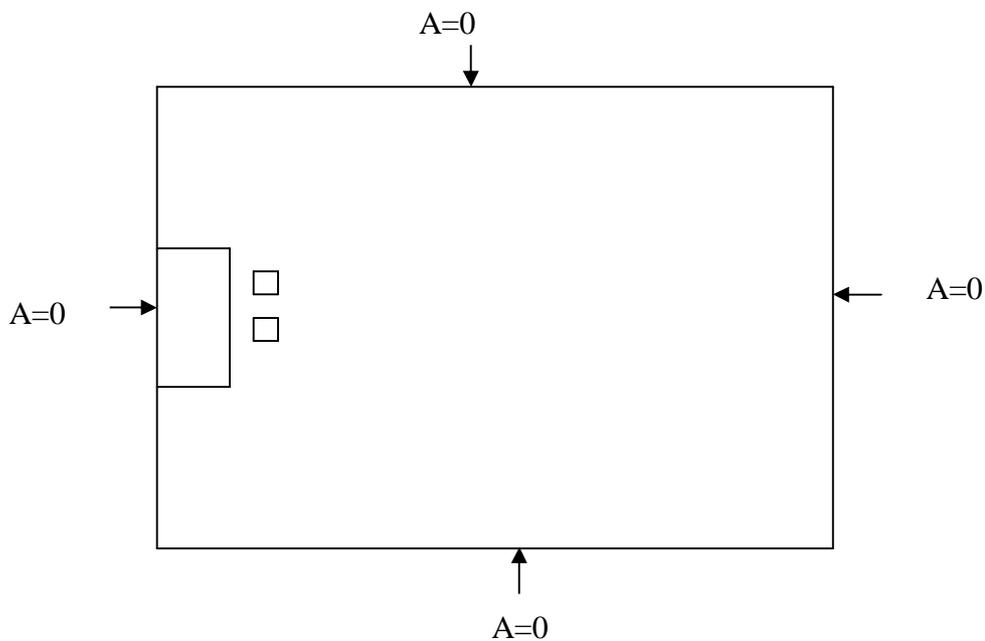


Fig. (4-2) : Domaine d'étude + conditions aux limites

La figure 4-3 présente la discrétisation du domaine qu'on se propose d'étudier avec un maillage réalisé avec le logiciel MATLAB.

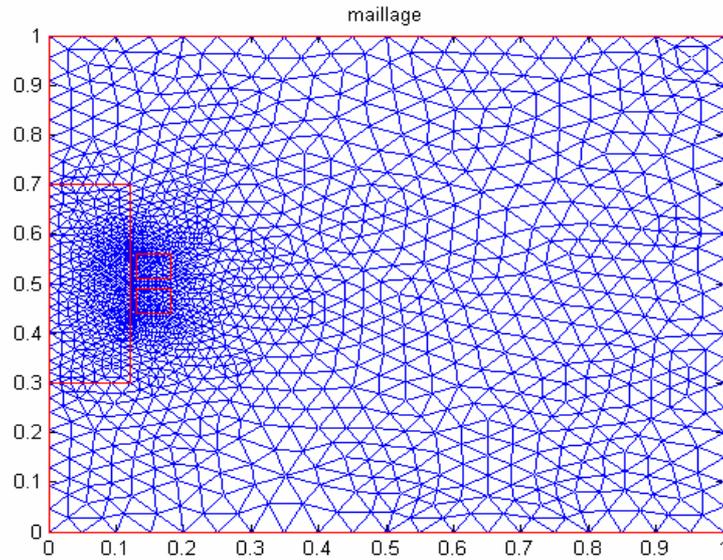


Fig.4-3 maillage du domaine d'étude.

IV-4 Résultats de simulation

IV-4-1 pièce sans défaut

Dans cette partie on va s'intéresser essentiellement à la distribution du potentiel vecteur magnétique A (avec sa partie réelle, imaginaire et son module) la densité de courant ' J ', à l'induction magnétique ' B ' respectivement présente dans l'inducteur et dans la charge.

Pour deux charges qui présentent une perméabilité magnétique respectivement de $\mu_r=1$ et $\mu_r=1000$.

IV-4-1-a charge amagnétique avec $\mu_r=1$

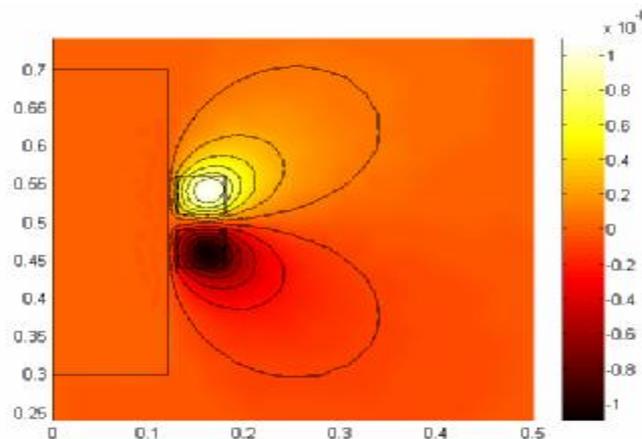


Fig4-4. Allure de la partie réelle du potentiel vecteur magnétique en [T.m].

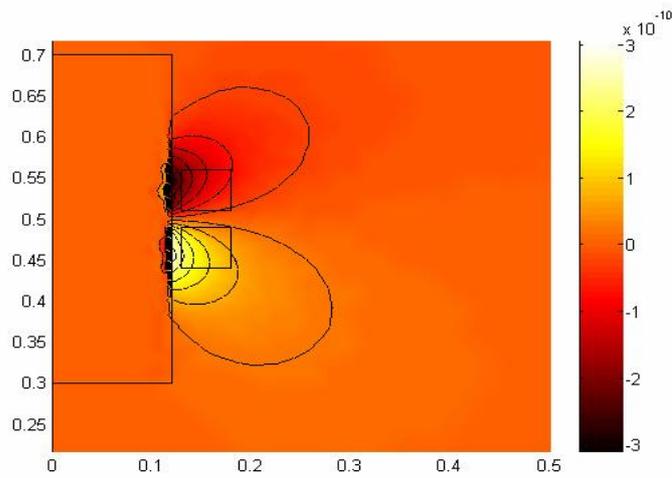


Fig4-5. Allure de la partie imaginaire du potentiel vecteur magnétique en [T.m].

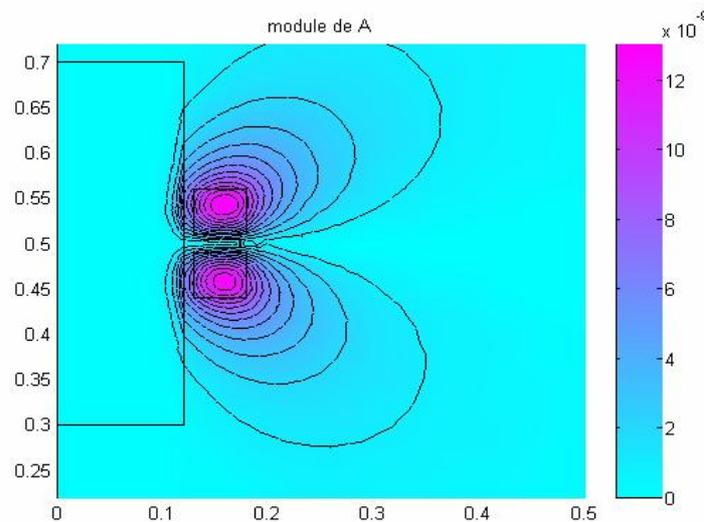


Fig4-6. Allure du module du potentiel vecteur magnétique en [T.m].

Les figures ci-dessus représentent respectivement les lignes des équipotentiels de la partie réelle (c'est à d la source) et la partie imaginaire (la partie induite dans la charge) du potentiel vecteur magnétique avec une valeur nulle du potentiel magnétique sur l'axe de symétrie des deux bobines.

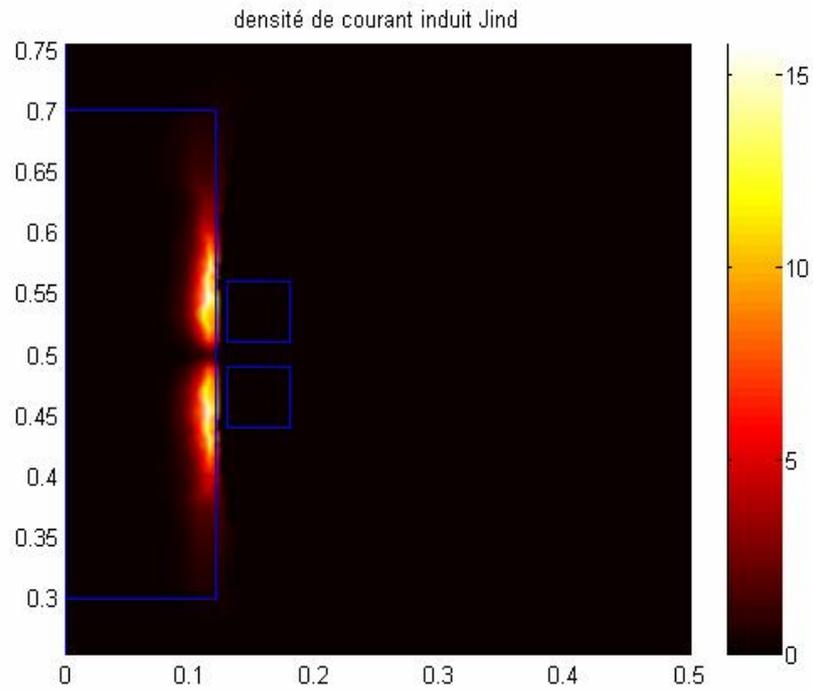


Fig.4-7 Densité de courant induit dans la charge en $[A/m^2]$.

La Fig.4-7 représente la densité de courant induit dans pièce à contrôler sous l'effet de deux bobines excitatrices alimentées respectivement en $+J$ et $-J$.

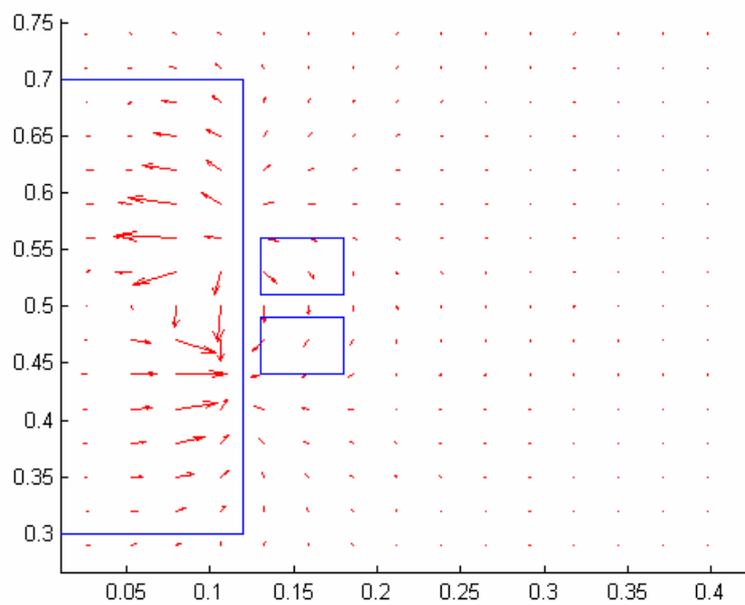


Fig.4-8 Partie imaginaire de l'induction magnétique B en $[T]$

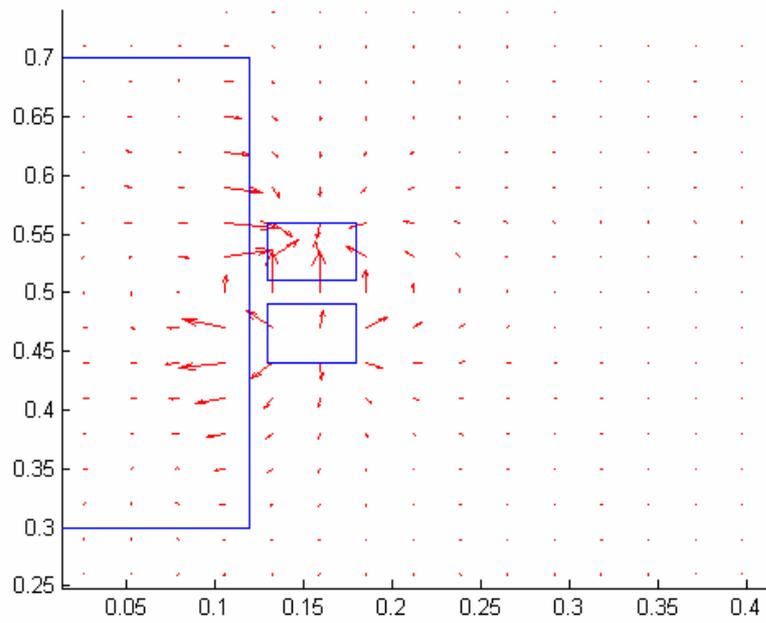


Fig.4-9 Partie réelle de l'induction magnétique B en [T]

Les deux dernières figures représentent respectivement le vecteur de l'induction magnétique B avec ces deux parties réelles et imaginaires qui apparaissent clairement tangentiels aux lignes des équipotentiels du potentiel magnétique A.

IV-4-1-b charge magnétique avec $\mu_r=1000$

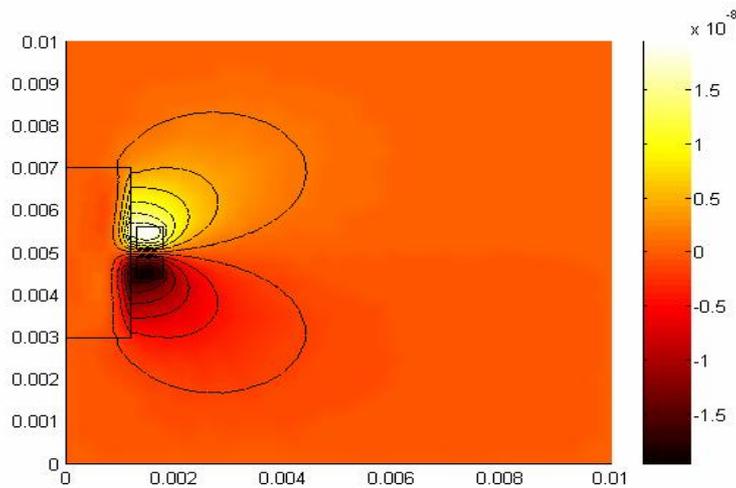


Fig4-10. Allure de la partie réelle du potentiel vecteur magnétique en [T.m].

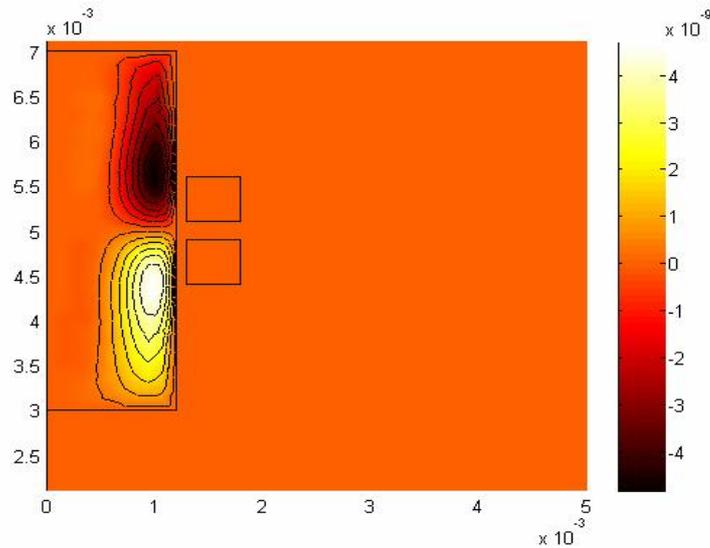


Fig4-11. Allure de la partie imaginaire du potentiel vecteur magnétique en [T.m].

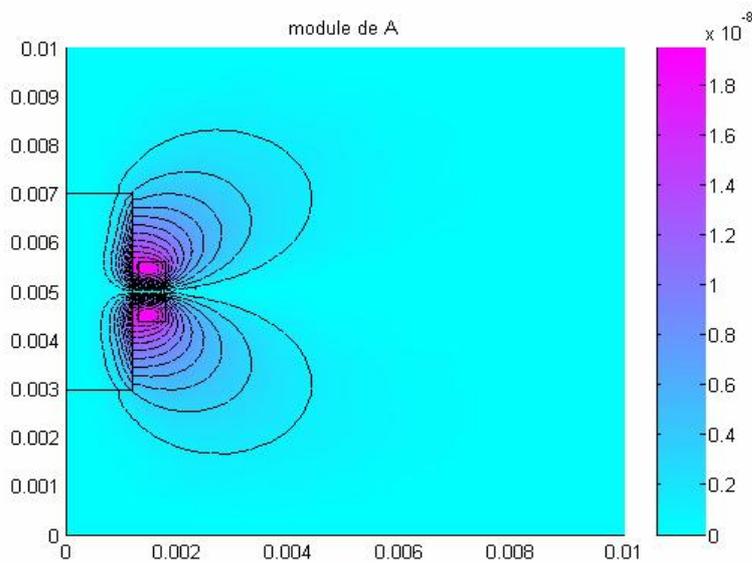


Fig4-12. Allure du module du potentiel vecteur magnétique en [T.m].

Les deux figures (4-10) et (4-11) représentent respectivement les lignes des équipotentiels pour une charge magnétique d'une perméabilité relative $\mu_r=1000$.

Le potentiel vecteur magnétique présente une valeur nulle sur l'axe de symétrie des deux bobines (pour la partie réelle) et il en est de même pour l'image de l'excitation (c'est à dire la charge).

On remarque la déformation des lignes de champ de la partie réelle, qui peut s'expliquer par l'attraction de ces dernières par la charge magnétique.

Pour ce qui est de la partie imaginaire les lignes de champ restent à l'intérieur de la pièce, du fait de la plus grande perméabilité magnétique (mille fois plus que celle de l'air).

On peut constater à partir de ces deux figures que les courants induits dans la charge (qui ont l'expression $j \omega \sigma A$ en régime harmonique) sont d'amplitude plus faible et leur sens est le contraire que le champ inducteur qui leur a donné naissance

IV-4-2 Pièce avec défaut

Nous nous proposons d'étudier dans cette partie l'influence de deux défauts qu'on rencontre le plus souvent lors du contrôle non destructif par courant de Foucault, le premier est une fissure surfacique (déformation), et le deuxième est une inclusion sous-cutanée caractérisée par une conductivité électrique nulle. Ces deux défauts présentent les caractéristiques géométriques suivantes :

Le défaut surfacique (fissure) introduit est de dimension :

Longueur : 10 mm

Largeur : 0.7 mm

Défaut sous-cutané :

Longueur : 8 mm

Largeur : 0.7 mm

Profondeur : 2 mm

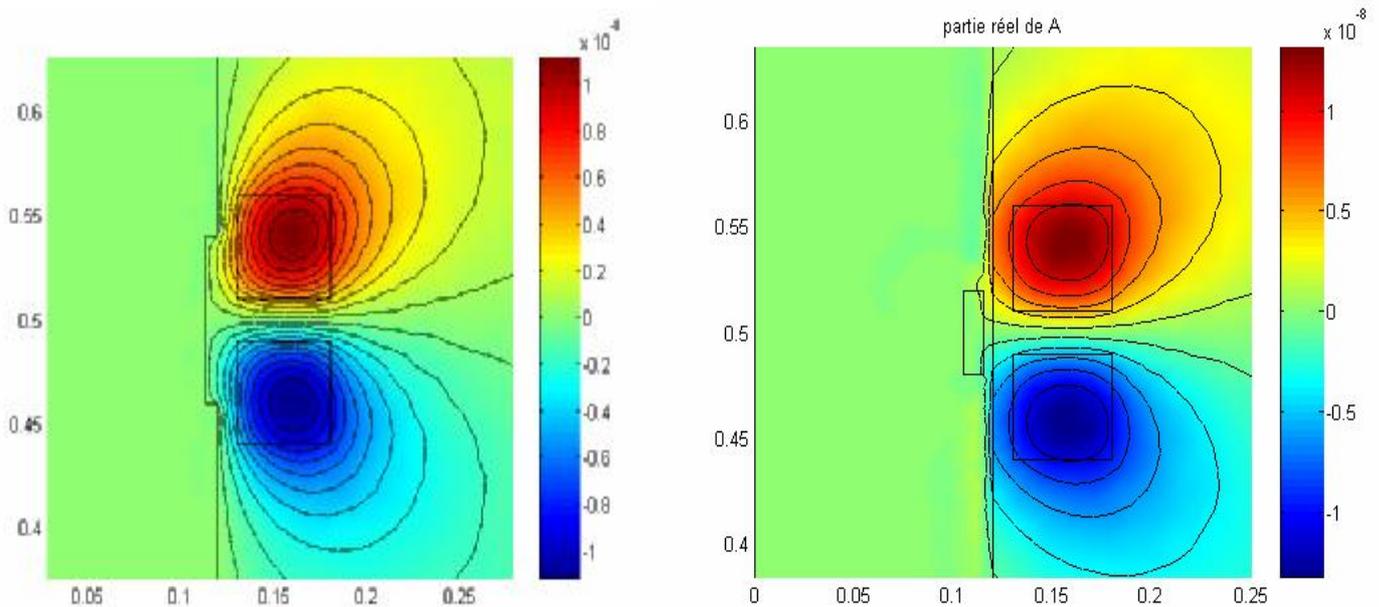


Fig 4-12. Allure de la partie réelle du potentiel vecteur magnétique en [T.m].

La figure (4-12) montre respectivement la répartition de la partie réelle du potentiel vecteur magnétique A pour le défaut surfacique et le défaut sous-cutané.

Les lignes de champ sur la figure générés par la partie réelle (c'est-à-dire l'inducteur) représentent les lignes des iso-valeurs du potentiel vecteur magnétique A , avec une valeur nulle du potentiel magnétique sur l'axe de symétrie des deux bobines.

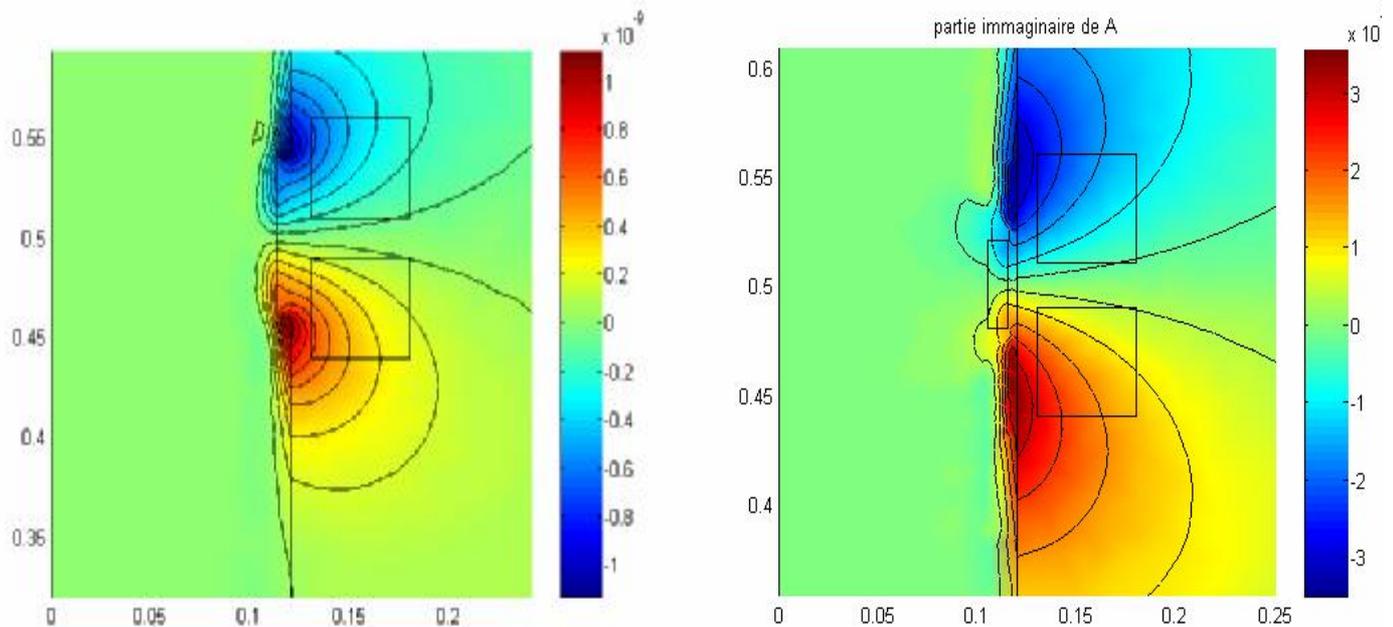


Fig 4-13. Allure de la partie imaginaire du potentiel vecteur magnétique en $[T.m]$.

La figure (4-13) montre respectivement la répartition de la partie imaginaire du potentiel vecteur magnétique A pour des les deux genres de défaut cités précédemment.

Les lignes de champ sur la figure générée par la partie imaginaire (c'est-à-dire la charge) représentent les lignes des iso-valeurs du potentiel vecteur magnétique A

On peut voir que le défaut surfacique (fissure), provoque des effets de pointe sur les deux extrémités sur les quelles la plus grande intensité du potentiel magnétique vecteur est concentrée.

En revanche pour le défaut sous-cutané on remarque la déformation des lignes de champ dans l'inclusion ce qui renseigne sur l'hétérogénéité de la conductivité électrique.

Il est finalement à signaler en comparant les deux figures (4-12) et (4-13) la différence de signe entre la source (capteur) et la partie induite (c'est-à-dire la cible à contrôler).

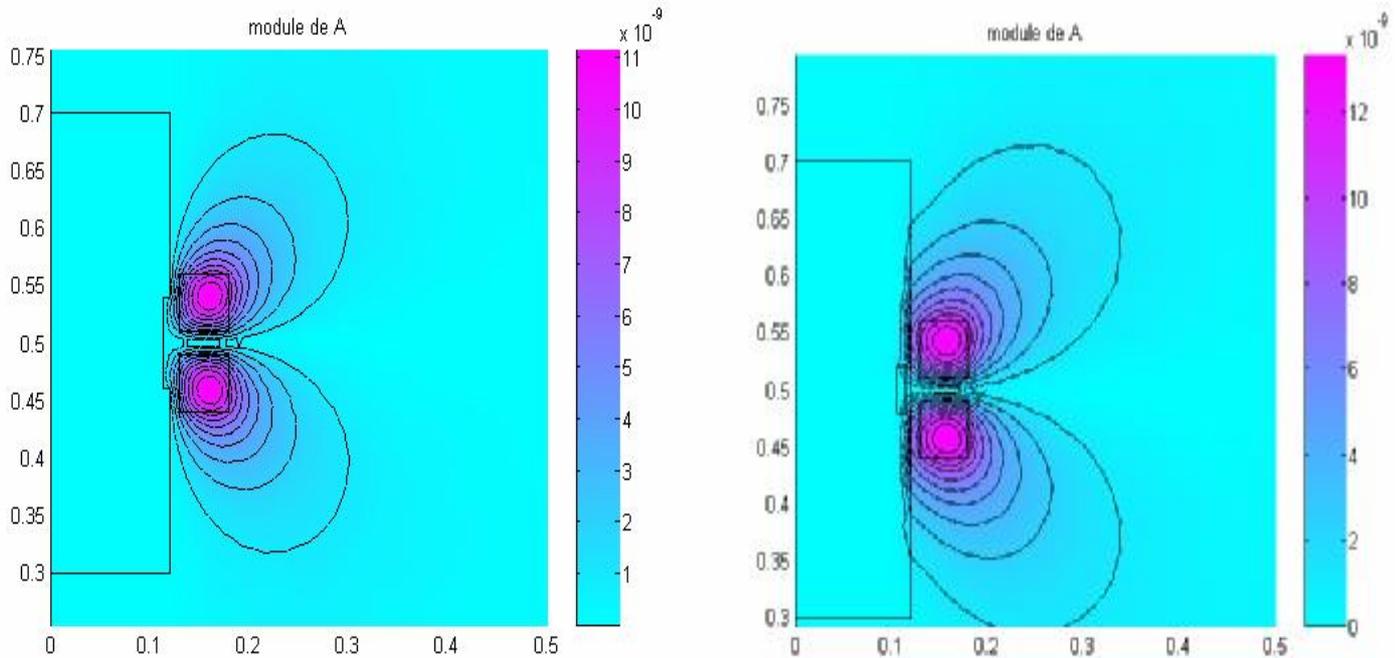


Fig.4-14. Allure du module du potentiel vecteur magnétique en [T.m].

Les figures ci-dessus représentent respectivement l'allure du module du potentiel vecteur magnétique 'A' pour une pièce présentant un défaut surfacique et une autre qui présente une inclusion sous-cutanée.

Les lignes de champ sur les figures représentent les lignes des iso-valeur du module du potentiel vecteur magnétique A

Il est enfin utile de signaler que les valeurs maximales atteintes par le potentiel vecteur magnétique A pour les deux genres défaut introduits dans la pièce à contrôler, sont assez proches ce qui pose problème pour la caractérisation des défauts.

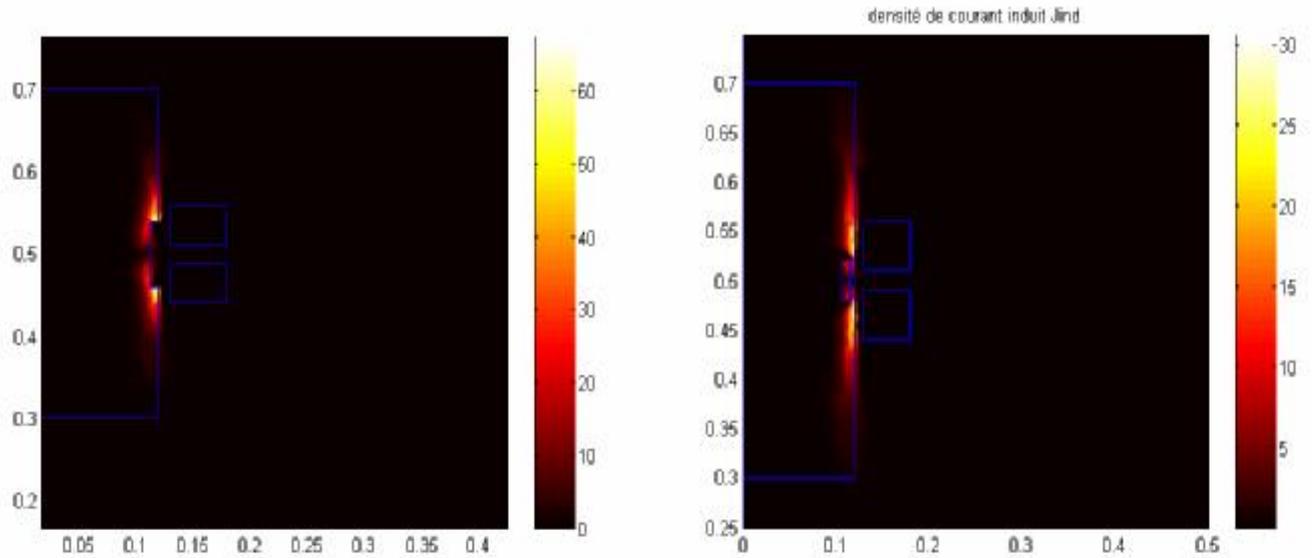


Fig.4-15 densité de courant dans la charge en [A/m]

La figure 4-15 met en évidence la différence de la distribution de la densité de courant induit dans deux pièces présentant chacune un défaut différent.

On remarque que pour le premier défaut (fissure) que la plus grande densité se concentre sur ces deux extrémités, par contre pour le deuxième défaut (l'inclusion sous-cutanée) une meilleure distribution est permise ce qui est mis en évidence par les valeurs maximales de la densité atteinte dans les deux cas.

IV-5 Calcul de l'impédance du capteur :

Le CND par courants de Foucault repose sur l'analyse des différentes grandeurs électriques du capteur lors de son déplacement par rapport aux défauts, ces grandeurs sont influencées par de nombreux paramètres.

Dans le cas présent nous allons étudier la variation de l'impédance du capteur,

IV-5-1 l'impédance du capteur :

Pour effectuer ce calcul, on utilise une méthode basée sur le potentiel vecteur magnétique, qui donne des résultats plus précis [7],[8].

Considérons une bobine de section S composée de N spires traversées par un courant d'intensité I .
Le flux traversant un tube de courant d'un rayon r et de section s' , est donné par l'expression

$$df = k \cdot \iint_{s'} \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot ds'$$

K : est le nombre de conducteurs dans la section s'

Sachant que :

$$\vec{B} = \text{rot} \cdot \vec{A}$$

L'application du théorème du rotationnel, permet d'avoir :

$$df = k \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

C : contour fermé s' appuyant sur s' .

Après intégration on obtient :

$$df = k \cdot 2 \cdot p \cdot r \cdot A$$

Puisque notre problème est axisymétrique le potentiel vecteur magnétique ne représente que la composante orthoradiale donc :

$$df = k \cdot 2 \cdot p \cdot r \cdot A_j(r, z)$$

Le flux total traversant la bobine, est alors donné par :

$$f = \iint_s df \cdot ds = \iint_s k \cdot 2 \cdot r \cdot p \cdot A \cdot ds$$

Si on prend en compte la répartition uniforme des conducteurs dans les bobines on aura :

$$k = \frac{N}{S}$$

$$f = \frac{N}{S} \cdot \iint_s 2 \cdot p \cdot r \cdot A \cdot ds$$

L'impédance est donnée par :

$$Z = \frac{U}{I}$$

U : c'est la tension d'alimentation.

I : le courant traversant la bobine.

$$U = \frac{df}{dt}$$

$$I = J \cdot \frac{S}{N}$$

J : est la densité de courant.

$$Z = \frac{N^2}{J \cdot S^2} \cdot \iint_s 2 \cdot p \cdot r \frac{\partial A(r, z, t)}{\partial t} \cdot ds$$

Dans le cas d'une alimentation sinusoïdale, le potentiel vecteur magnétique obtenu est de la forme suivante :

$$A = A_0 e^{-j\omega t} = \text{Re}(A) + j \cdot \text{Im}(A)$$

Et l'expression de l'impédance devient :

$$\text{Re}(Z) = -\frac{N^2}{J \cdot S^2} \cdot \omega \iint_s 2 \cdot p \cdot r \text{Im}(Z) \cdot ds$$

$$\text{Im}(Z) = \frac{N^2}{J \cdot S^2} \cdot \omega \iint_s 2 \cdot p \cdot r \text{Re}(Z) \cdot ds$$

Si on prend :

$Z_0 = R_0 + j X_0$ l'impédance apparente de notre capteur en l'absence du défaut

$Z = R + j X$ l'impédance apparente du capteur lors de la présence du défaut

Dans le plan de phase nous pouvons représenter ces deux vecteurs comme suit :

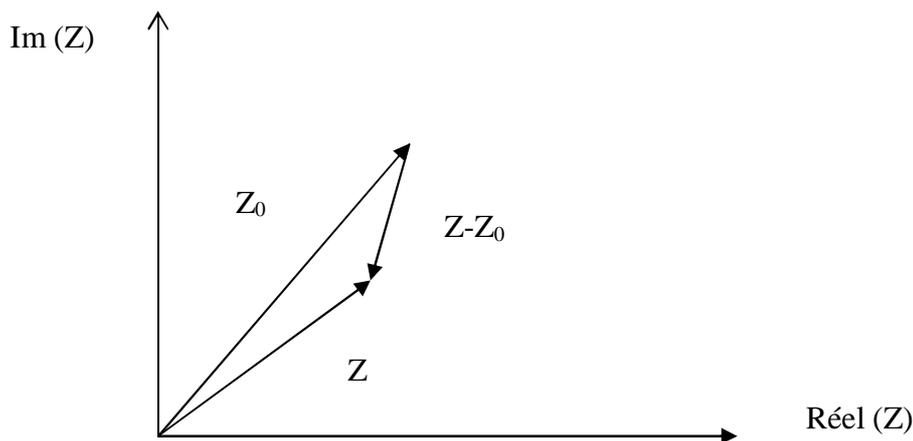


Fig.4-16 Plan d'impédance

La variation d'impédance du capteur est représentée par le vecteur $Z-Z_0$ qui a pour coordonnées $(R-R_0)$ et $(X-X_0)$.

Dans un plan de phase normalisée on prend :

$$R_n = (R - R_0) / R_0 \quad \text{et} \quad X_n = X - X_0 / X_0$$

$$Z_n = R_n + j X_n$$

La variation d'un des paramètres du capteur ou de la cible provoque le déplacement du point représentatif de l'impédance Z_n dans le plan de phase normalisé (R_n, X_n) .

La figure 4-17 représente l'allure de la trajectoire que décrit le point d'impédance pour la variation croissante de la conductivité électrique et de la fréquence d'alimentation.

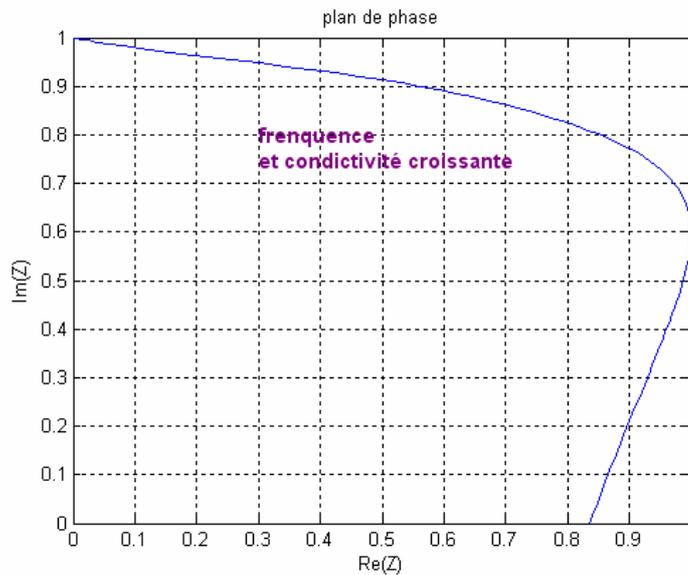


Fig.4-17: Influence sur le plan de phase de la fréquence et de la conductivité

IV-6 Evolution de l'impédance en fonction de la position du capteur :

L'Étude du déplacement du capteur sur deux pièces qui présentent respectivement un défaut surfacique (fissure) pour la première, et une inclusion sous-cutané pour l'autre, avec une fréquence d'alimentation de 1kHz et 2.5kHz.

Les résultats de simulation nous donnent l'allure des deux composantes réelles et imaginaires de l'impédance pour les deux fréquences citées.

IV-6-1 Pièce avec défaut surfacique (fissure)

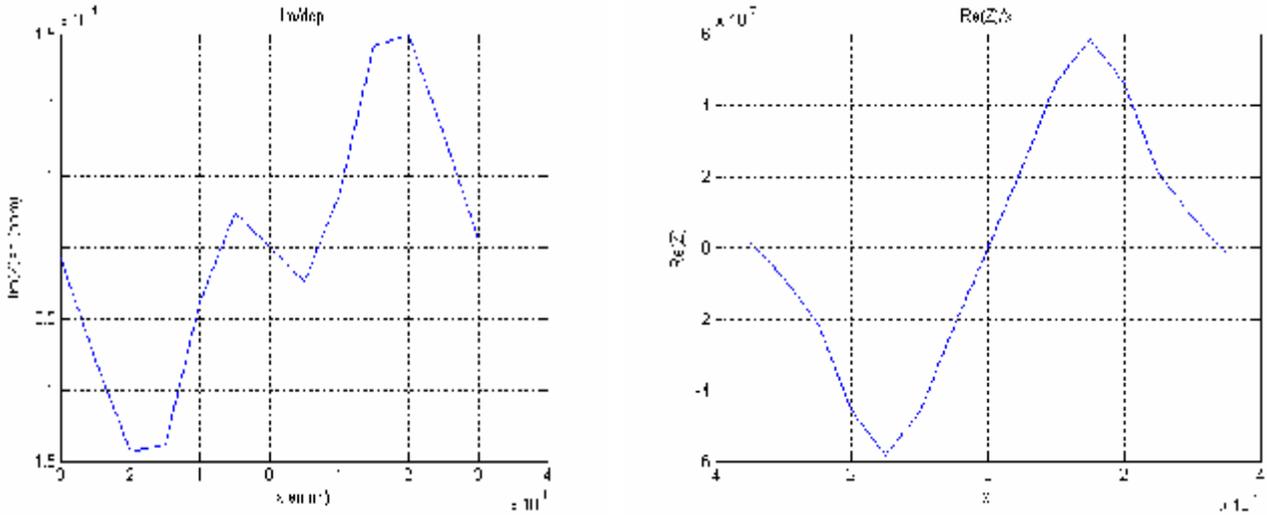


Fig.4-18 Variation de la réactance et de la résistance par apport au déplacement pour $f=1\text{kHz}$

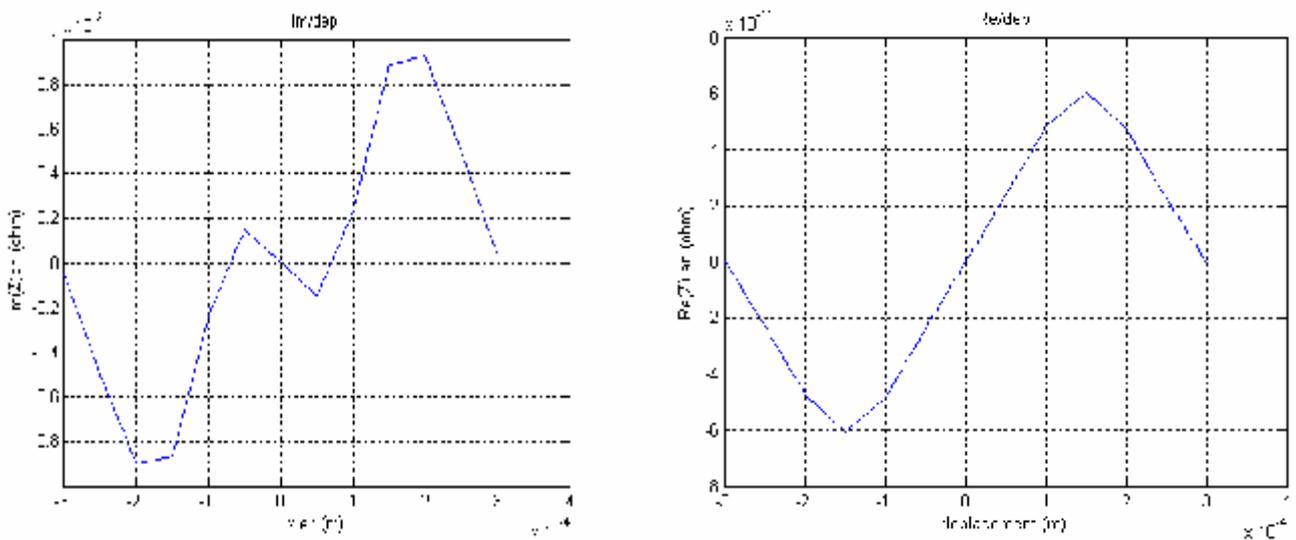


Fig.4-19 Variation de la réactance et de la résistance par apport au déplacement pour $f=2.5\text{kHz}$

On peut voir sur les deux figures (4-18) et (4-19) la variation par apport au déplacement de la partie réactive et de la partie résistive de l'impédance du capteur pour les deux fréquences de 1kHz et 2.5kHz pour une pièce qui présente un défaut surfacique.

On remarque que la valeur de la réactance est plus importante que celle de la résistance, et que la réponse du capteur par apport au même défaut est plus importante (en valeur crête) pour une fréquence de 2.5kHz que celle de 1kHz, ceci est du essentiellement à la pénétration du champ

électromagnétique (profondeur de peau) qui est moins grande pour les fréquences élevées ce qui produit une plus grande concentration des courants induits sur la surface donc une réponse meilleure.

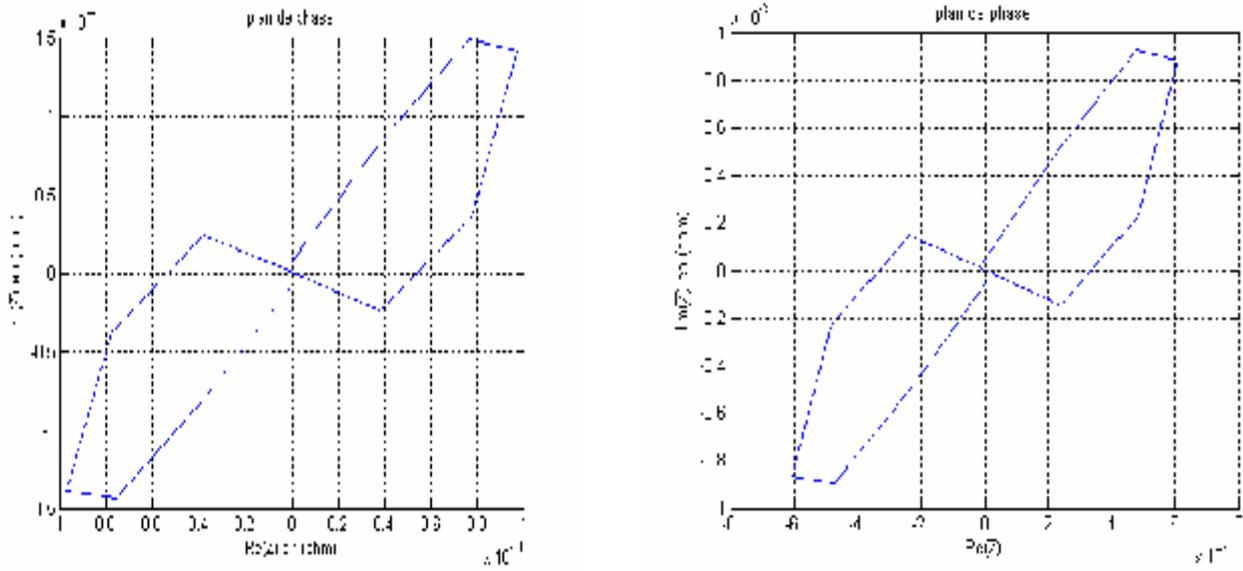


Fig.4-20 : Représente le déplacement du point d'impédance dans le plan de phase pour des fréquences respectivement de $f_1=1\text{kHz}$ et $f_2=2.5\text{kHz}$.

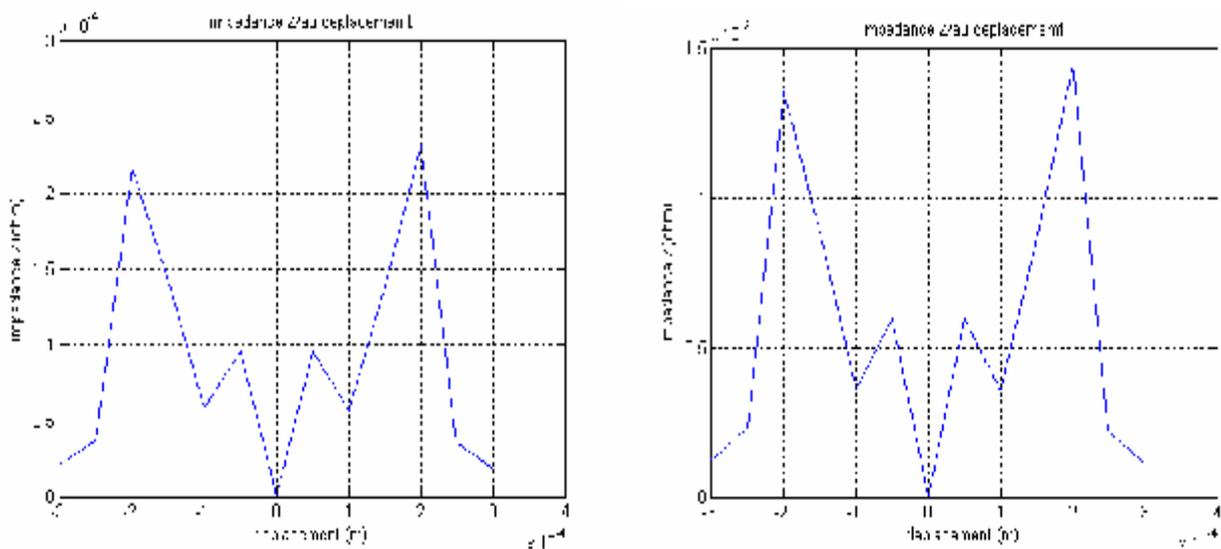


Fig.4-21 Variation du module de l'impédance par rapport au déplacement pour des fréquences respectivement de $f_1=1\text{kHz}$ et $f_2=2.5\text{kHz}$.

La figure (4-20) montre le tracé de l'évolution de l'impédance du capteur pour les deux fréquences $f_1=1\text{kHz}$ et $f_2=2.5\text{kHz}$, ainsi que la variation de cette dernière dans le plan de phase appelé aussi courbe de Lissajous, les graphes obtenus constituent ce qu'on appelle la signature du défaut.

La figure (4-21) représente la variation de l'impédance par rapport au déplacement on remarque deux sommets qui correspondent aux deux extrémités du défaut de la pièce lorsque l'une des bobines est directement au dessus du défaut, ce qui donne ces deux pics de valeurs.

Les deux petits sommets correspondent à l'éloignement relatif du capteur par rapport au défaut ou l'impédance atteint une valeur moins importante.

Et la valeur 0 correspond au centre du défaut, c'est-à-dire lorsque l'axe des deux bobines du capteur se trouve à une équidistance des extrémités de la fissure.

IV-6-2 Pièce avec défaut sous-cutané :

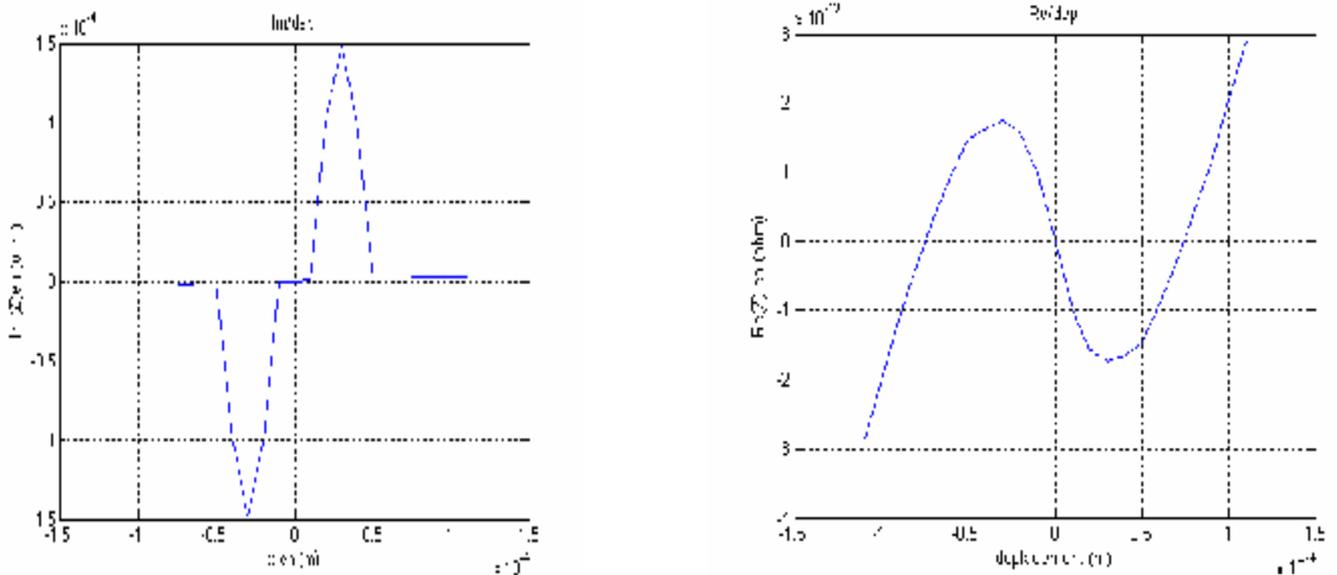


Fig.4-22 Variation de la réactance et de la résistance par rapport au déplacement pour $f=1\text{kHz}$

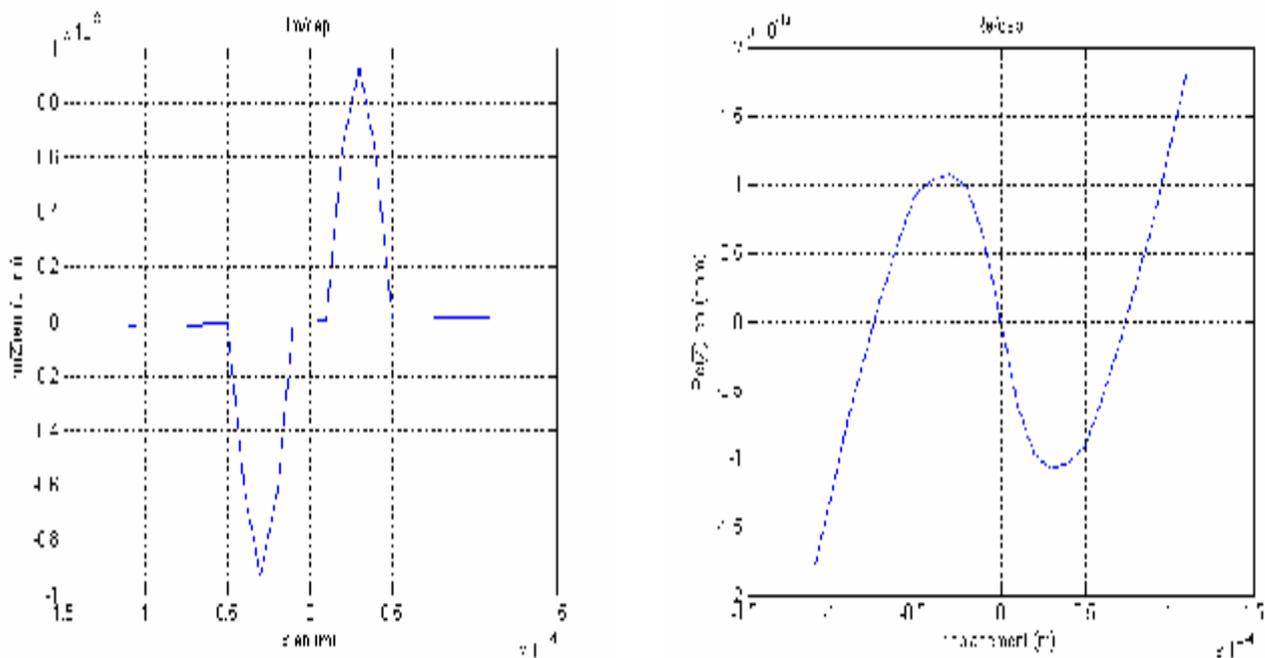


Fig.4-23 Variation de la réactance et de la résistance par apport au déplacement pour $f=2.5\text{kHz}$

On peut voir sur les deux figures (4-22) et (4-23) la variation par apport au déplacement de la partie réactive et de la partie résistive de l'impédance du capteur, pour les deux fréquences de 1kHz et 2.5kHz pour une pièce qui présente un défaut sous-cutané.

On remarque que la valeur de la réactance est plus grande que celle de la résistance, et que la réponse du capteur par apport au même défaut est plus importante (en valeur crête) pour une fréquence de 2.5kHz que celle de 1kHz.

Ceci est dû essentiellement à la pénétration du champ électromagnétique (profondeur de peau) qui est moins grande pour les fréquences élevées, ce qui produit une plus grande concentration des courants induits sur la surface, donc une réponse meilleure (une bonne détection du défaut).

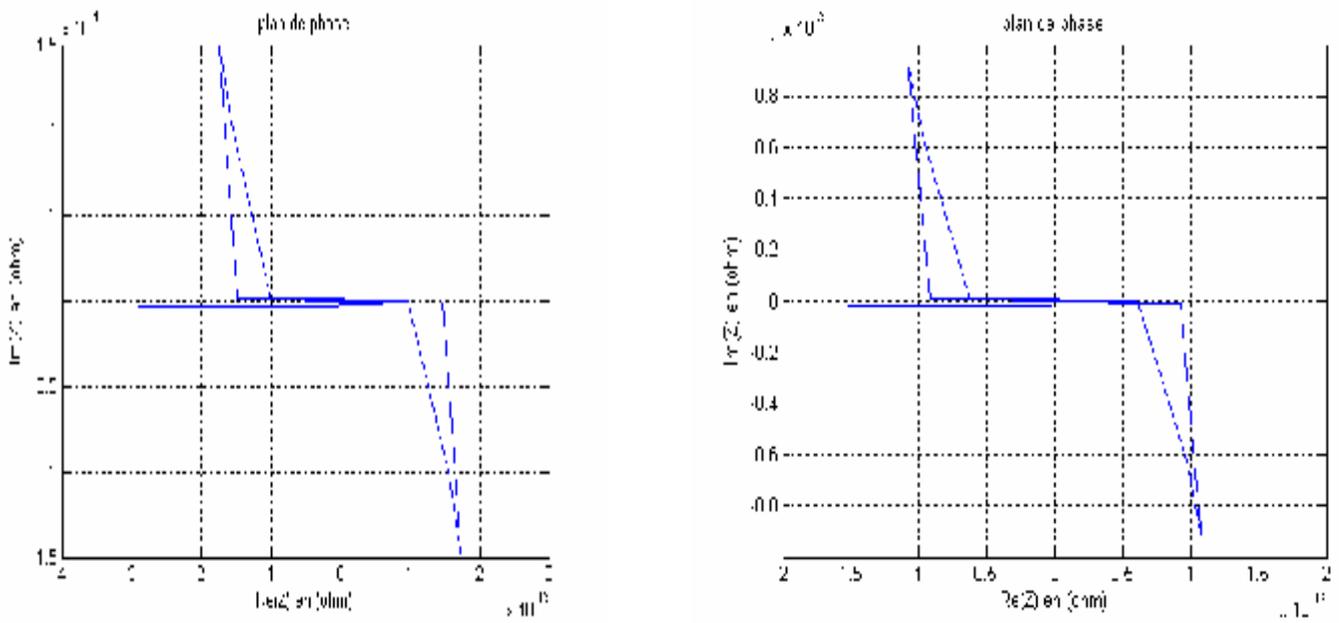


Fig.4-24 Représente le déplacement du point d'impédance dans le plan de phase pour des fréquences respectivement de $f_1=1\text{kHz}$ et $f_2=2.5\text{kHz}$.

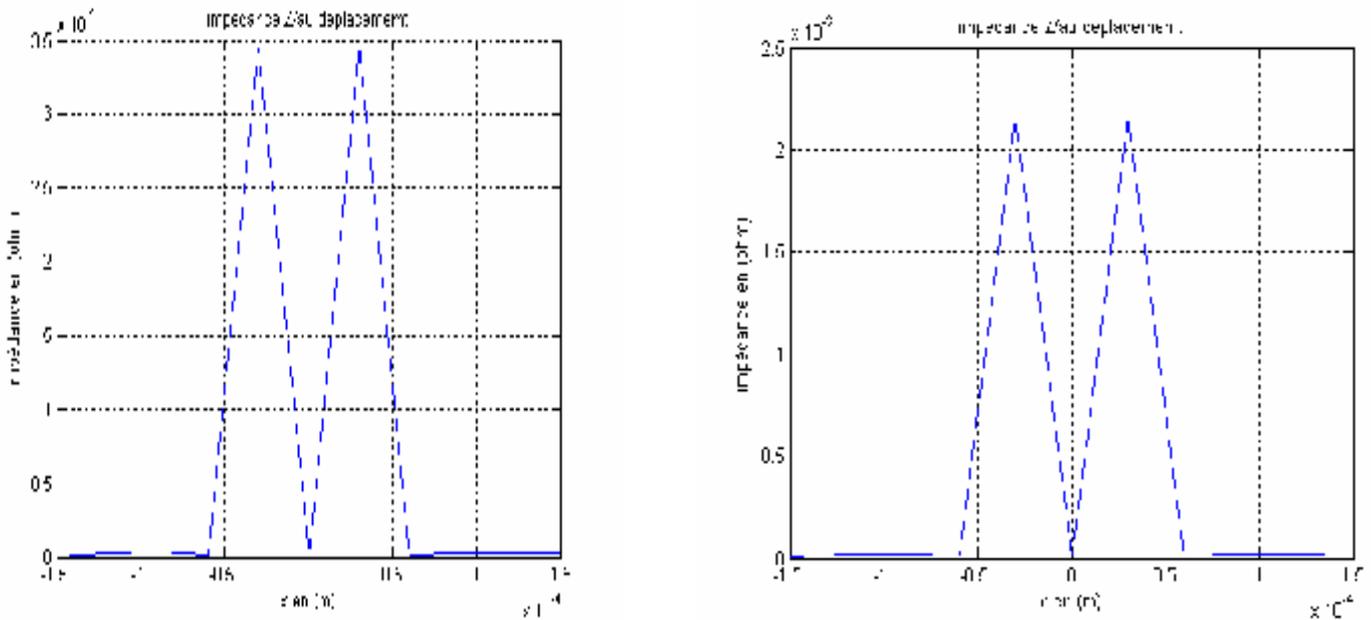


Fig.4-25 Variation du module de l'impédance par rapport au déplacement pour des fréquences respectivement de $f_1=1\text{kHz}$ et $f_2=2.5\text{kHz}$.

La figure (4-24) montre le tracé de l'évolution de l'impédance du capteur pour les deux fréquences $f_1=1\text{kHz}$ et $f_2=2.5\text{kHz}$, ainsi que la variation de cette dernière dans le plan de phase appelé aussi courbe de Lissajous, les graphes obtenus constituent ce qu'on appelle la signature du défaut.

La figure (4-25) représente la variation de l'impédance par rapport au déplacement, on remarque deux sommets qui correspondent aux deux extrémités du défaut de la pièce lorsque l'une des bobines est directement au dessus du défaut, ce qui donne ces deux pics de valeurs.

Et la valeur 0 correspond au centre du défaut, c'est-à-dire lorsque l'axe des deux bobines du capteur se trouve à une équidistance des extrémités de la fissure.

IV-7 Limites de fonctionnement du dispositif :

Auparavant lors de la conception d'un dispositif de contrôle non destructif, l'accent été généralement mis sur le traitement du signal réceptionné par la sonde, on s'est intéressé surtout à son amplification et à la réduction des bruits qui peuvent le perturber mais on ne s'y est pas préoccupé avec un degré moindre des propriétés physiques du capteur, de sa forme géométrique, ou son emplacement par rapport à la cible qui sont des paramètres tous aussi importants pour une détection fiable d'éventuels défauts. Dans ce qui suit, nous allons voir l'influence de ces paramètres sur la réponse de notre sonde de contrôle.

IV-7-1 effet du lift-off sur la réponse du capteur :

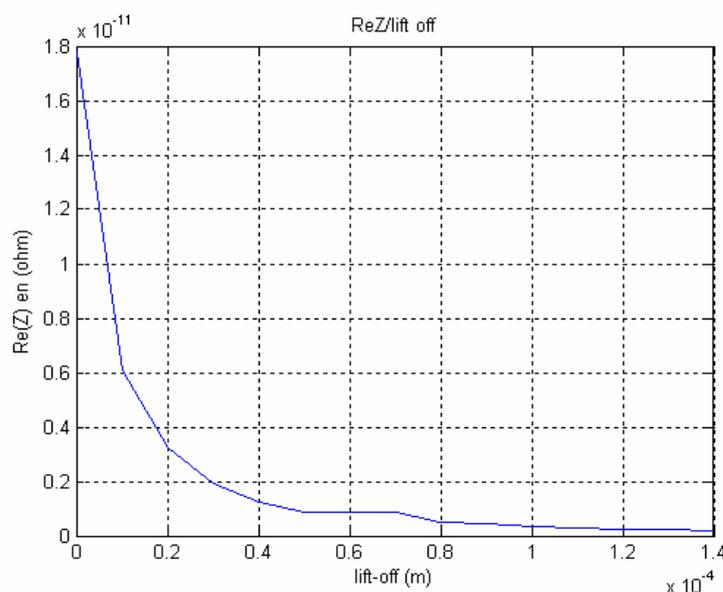


Fig.4-26 Variation de la partie réelle par rapport au lift-off

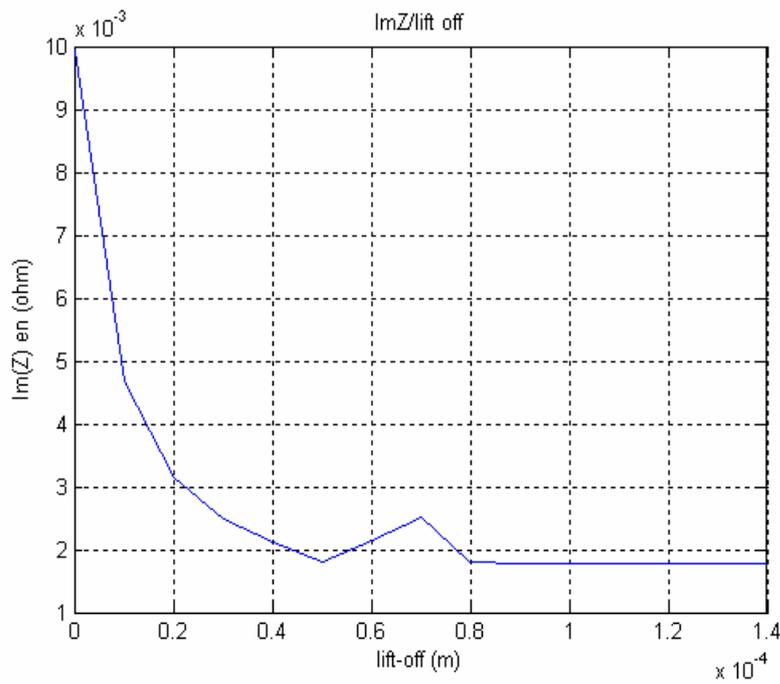


Fig.4-27 Variation de la partie imaginaire par rapport au lift-off

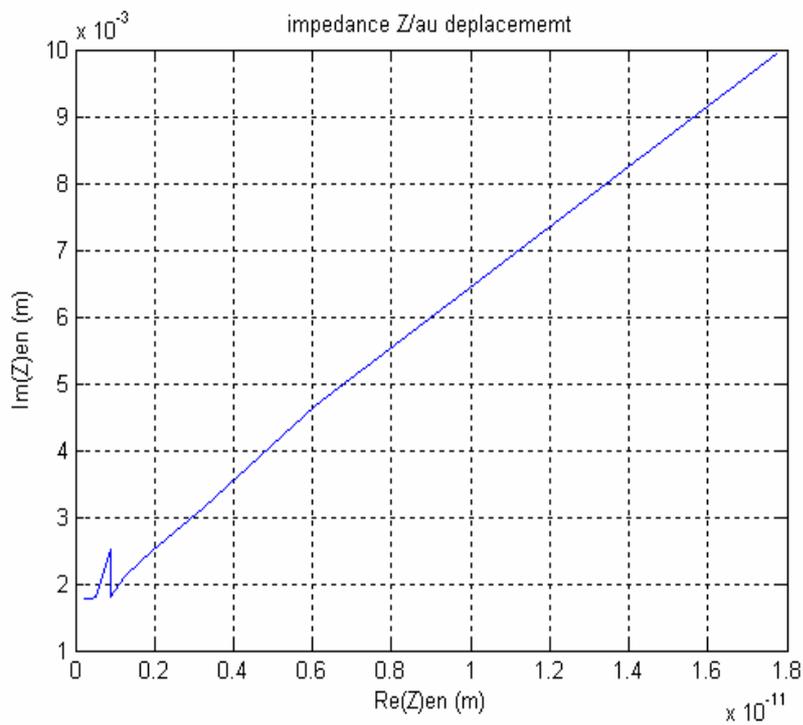


Fig.4-28 Variation du point d'impédance par rapport au lift-off

Les figures (4-26) ,(4-27) et(4-28) représentent l'effet de la distance capteur-cible autrement dit l'influence du rayon de la sonde entourante par rapport à un rayon fixe de la cible, sur la réponse du

capteur (sa partie réelle , sa partie imaginaire et le point d'impédance) pour le même défaut précédemment décrit.

Une variation croissante de la distance (avec un pas du lift-off 0.01 mm), montre clairement la décroissance des valeurs de la résistance et de la réactance du fait de l'augmentation de la distance capteur-cible.

On peut conclure que l'impédance est inversement proportionnelle à l'entrefer, d'où la nécessité de choisir un entrefer minimum (rayon adapté de la sonde) pour assurer un meilleur couplage capteur-cible et par la même une meilleur détection.

IV-7-2 Effet de l'écartement de la sonde sur l'impédance

Les paramètres de la simulation qui sont adoptés sont les mêmes que ceux précédemment cités avec un pas d'écartement de 0.1 mm pour un écart initial de 1mm.

Cette courbe montre clairement l'existence d'un point optimum pour les valeurs de l'écartement de sonde, lorsque cette valeur est grande, le capteur peut être assimiler à deux capteurs à courant de Foucault qui travaillé en mode absolue (l'écartement de sonde reste dans ce cas relatif au dimension du défaut critique pour le quel on veut faire le contrôle).

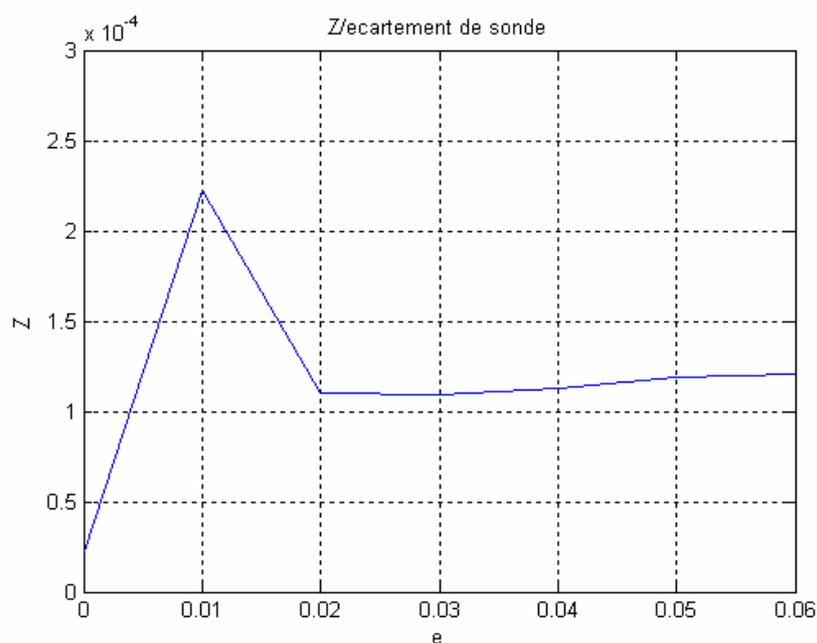


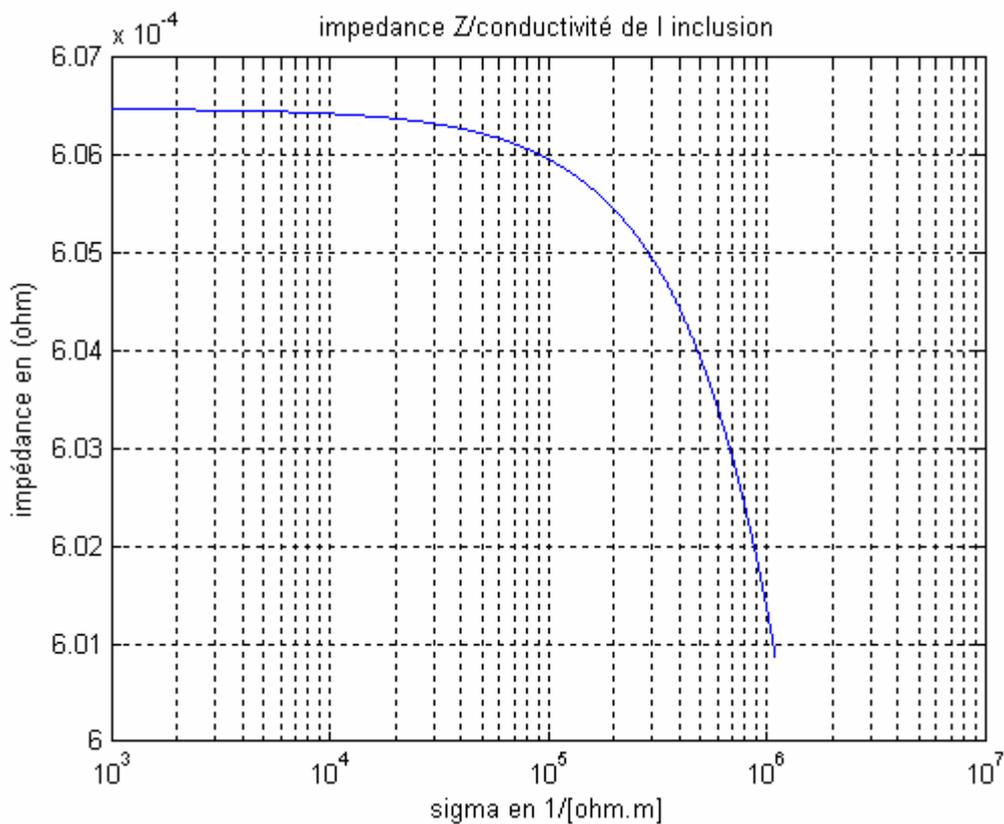
Fig.4-29 Tracé de l'impédance par rapport à l'écart de la sonde

IV-7-3 Influence de la conductivité de l'inclusion sur la réponse du capteur :

La figure (4-30) représente dans un repère semi-logarithmique la réponse du capteur par rapport à la variation de la conductivité électrique de l'inclusion sous-cutanée.

Pour une valeur initiale nulle de la conductivité (le cas idéal) et un pas de $10^3[\text{ohm.m}]^{-1}$, et une perméabilité magnétique relative $\mu_r=1$.

On remarque que la réponse du capteur décline rapidement à partir d'une certaine valeur de la conductivité électrique du défaut, c'est-à-dire lorsque celle-ci est proche de la conductivité du matériau lui-même, et ce dernier tend à être homogène (absence totale du défaut).



4-30 Influence de la conductivité de l'inclusion sur la réponse du capteur :

Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons présenté la solution de l'équation de la magnétodynamique en régime harmonique qui a été formulée précédemment, c'est à dire la répartition du potentiel

vecteur magnétique A sur notre domaine d'étude pour de genre de pièce de caractéristiques physiques différentes (respectivement magnétique et amagnétique), puis l'influence de deux défauts les plus répandus les fissures surfaciques et les inclusions sous-cutanées ainsi que la simulation du déplacement du capteur sur une pièce ayant les deux défaut cités, montrant l'intérêt sur le choix de la fréquence qui donne une meilleure détection du défaut, et la caractérisation à travers la signature propre à chaque défaut. Pour en suite montrer les limites du fonctionnement du dispositif et les différents paramètres qui peuvent influencer la réponse de notre capteur.

Conclusion générale

Dans le présent travail une étude a été faite sur un capteur par courants de Foucault qui est largement utilisé dans l'industrie métallurgique sous forme de bobine encerclante fonctionnant en mode différentielle qui mesure la variation d'impédance pour déceler d'éventuels défauts.

L'équation qui régie le fonctionnement de notre dispositif a été formulée à partir des équations de Maxwell pour aboutir à une équation différentielle aux dérivées partielles, qu'on a résolu numériquement par la méthode des éléments finis, pour avoir comme solution une répartition du potentiel vecteur magnétique et les différentes grandeurs qui peuvent être dérivés directement de celui-ci (c'est-à-dire l'induction magnétique et le courant induit dans la charge) sur l'ensemble de notre domaine d'étude (capteur, air et cible).

Ainsi on a exploité cette solution pour le calcul de l'impédance de la sonde pour faire quelle que simulation notamment celle du déplacement de notre capteur sur la surface de la cible et celle de l'influence des différents paramètres sur la réponse recueillie mettant ainsi en évidence les limites de fonctionnement de notre système.

En vue de ce travail on a constaté que même si les capteurs à courants de Foucault (CF) en contrôle non destructif sont depuis de nombreuses années appréciés pour leurs robustesses et leurs facilités d'implantation l'interprétation des « signaux CF » reste un problème délicat. Cela vient du fait que les signaux obtenus sont fonction de la géométrie locale de la cible, de ses propriétés électriques, du positionnement relatif capteur/cible... etc. L'évaluation d'un (ou de plusieurs) paramètre(s) de la cible est donc le plus souvent polluée par l'ensemble des paramètres d'influence qui interviennent comme des sources de perturbations vis à vis du paramètre recherché.

Comme perspectives à ce travail et pour résoudre partiellement ces problèmes, une modélisation en 3D plus fine pourra être envisagée avec une optimisation de la géométrie du capteur et de l'emplacement de ce dernier par rapport à la cible et l'adapté à différentes géométries même les plus complexes qui ne présente aucune symétrie en particulier.

Et on pourra exploités les différents résultats obtenus pour la caractérisation des paramètres internes des pièces à contrôler et l'identification d'éventuels défauts (profondeur, dimensions, nature,... etc). Grâce aux méthodes dites « Méthodes Inverse ».

On peut envisager aussi d'autres modes d'excitations que le mode mono-fréquence utilisé dans le présent travail, avec une alimentation avec différents signaux qu'un signal sinusoïdal.