

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET  
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MENTOURI DE CONSTANTINE  
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR  
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE**

N° d'Ordre :.....

Série :.....

**MÉMOIRE DE MAGISTER**

**Présenté par :**

**Mr BOUCHERMA Djamel**

**Option : Contrôle**

**THEME**

**RESOLUTION DE L'EQUATION D'ETAT  
D'ORDRE FRACTIONNAIRE**

Soutenu le : 04 / 02 / 2009

Examiné par le jury :

Président : Dr. A. Bennia	Professeur	Université de Mentouri Constantine
Rapporteur: Dr. A. Charef	Professeur	Université de Mentouri Constantine
Examineur: Dr. S. Filali	Professeur	Université de Mentouri Constantine
Examineur: Dr. S. Ladaci	M. C. B	Université de Skikda

**Année 2008 / 2009**

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين, الرحمن الرحيم, ملك يوم الدين, إياك  
نعبد و إياك نستعين, أهدنا الصراط المستقيم, صراط الذين  
أنعمت عليهم غير المغضوب عليهم و لا الضالين.

*A ma mère et mon père*

*A mes frères et mes soeurs*

## *Remerciements*

Avant tout je voudrai remercier Allah qui ma permis d'arriver la ou je suis, et de conclure avec succès ce modeste travail, et pour mes parents qui ma offert aussi affectifs que soucieux de mon avenir.

Je tiens plus particulièrement à exprimer ma gratitude envers Mr. Abdefatah Charef Professeur à l'université Mentouri de Constantine, qui a eu la lourde tache d'être mon encadreur. Ce travail n'aurait jamais abouti sans son indéfectible dynamisme et inébranlable conviction dans l'intérêt de mes travaux. Ses constants encouragements m'ont toujours permis de dépasser les différentes périodes de découragement qui ont pu jalonné cette période de mémoire. Merci.

J'exprime ma reconnaissance au Pr. Abdelhak Bennia, Professeur à l'université Mentouri de Constantine, pour ses conseils grâce auxquels j'ai énormément appris. Je le remercie également, pour l'honneur qu'il ma fait en acceptant de présider le jury.

Je remercie le Dr. Salim Filali, Professeur à l'université Mentouri de Constantine, d'avoir accepter de juger ce travail en tant qu'examineur.

Je remercie le Dr. Samir Ladaci, Maître de Conférences à l'université 20 out 1955 de Skikda, d'avoir accepter de juger ce travail en tant qu'examineur.

Je remercie de tout mon cœur mes collègues qui on su créer une ambiance très amicale et détendue. Merci a mon cher ami Daoud Idiou pour son soutien et aide inestimable. Sans oublier tout mes amis.

Enfin je ne pourrais terminer ces remerciement sans une pensée à l'ensemble des mes enseignants qui sont à l'origine de tout mon savoir.

# Sommaire

<b>Introduction Générale</b> .....	1
------------------------------------	---

## **Chapitre I : Équation Différentielle D'Ordre Fractionnaire**

I. 1 Opérateurs d'ordre fractionnaire.....	3
I.1.1 Définitions fondamentales.....	3
I.1.1.1 Définition de Riemann-Liouville.....	3
I.1.1.2 Définition de Caputo.....	4
I.1.1.3 Définition de Gröndwald-Leitnikov.....	4
I.1.2 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire.....	4
I.1.3 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire.....	5
I.1.3.1 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire.....	5
I.1.3.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire.....	5
I.1.3.2.1 Dérivée de Riemann-Liouville.....	5
I.1.3.2.2 Dérivée de Caputo.....	6
I.1.3.2.3 Dérivée de Gröndwald-Leitnikov.....	6
I.2 Représentation des systèmes d'ordre fractionnaire.....	6
I.2.1 Représentation entrée-sortie.....	7
I.2.1.1 Équation différentielle d'ordre fractionnaire.....	7
I.2.1.2 Fonction de transfert.....	7
I.2.2 Représentation d'état des systèmes d'ordre fractionnaire.....	7
I.2.2.1 Définition.....	7
I.2.2.2 Caractéristiques.....	8
I.2.2.2.1 Relation entre représentation d'état et fonction de transfert.....	8
I.2.2.2.2 De la représentation transfert à la représentation d'état.....	9
I.2.2.2.3 Formes canoniques.....	11
I.2.2.2.3.1 Contrôlable.....	11
I.2.2.2.3.2 Observable.....	11
I.3 Solution de l'équation d'état du système d'ordre fractionnaire.....	11
I.4 Stabilité.....	13
I.5 Observabilité et contrôlabilité des systèmes d'ordre fractionnaires.....	14
I.5.1 Observabilité.....	14
I.5.1.1 Conditions d'Observabilité.....	14
I.5.1.2 Définition.....	14
I.5.1.3 Critère d'Observabilité.....	14
I.5.2 Contrôlabilité.....	15
I.5.2.1 Conditions de contrôlabilité.....	15
I.5.2.2 Définition.....	15
I.5.2.3 Critère de contrôlabilité.....	15

## **Chapitre II : Fonctions Fondamentales**

II.1 Introduction.....	16
II.2. Fonction fondamentale : cas simple.....	16
II.2.1 Approximation par une fonction rationnelle.....	16
II.2.2 Exemple illustratif.....	19

II.2.3 Réalisation analogique.....	20
II.3 Fonction fondamentale : cas multiple.....	21
II.3.1 Approximation par une fonction rationnelle.....	21
II.3.2 Exemple illustratif.....	22
II.3.3 Réalisation analogique.....	23

### **Chapitre III : Solution de l'Équation Différentielle d'Ordre Fractionnaire**

III.1 Introduction.....	25
III.2 Méthode de Cayley Hamilton.....	25
III.2.1 Théorème de Cayley Hamilton.....	25
III.3 Calcul de fonctions de matrices.....	25
1 <sup>er</sup> cas : Les valeurs propres de A sont distinctes.....	26
2 <sup>nd</sup> cas : Les valeurs propres de A sont multiples.....	26
III.4 Solution.....	27
III.4.1 Calcul de la matrice de transition .....	27
III.4.1.1 Valeurs propres réels et distinctes .....	28
III.4.1.2 Valeurs propres réels et multiples .....	29
III.5 Exemples.....	31
III.5.1 les valeurs propres sont réelles et distinctes.....	32
III.5.1.1 Réponse impulsionnelle.....	34
III.5.1.2 Réponse indicielle.....	35
III.5.2 les valeurs propres sont réelles et multiples.....	37
III.5.2.1 Réponse impulsionnelle.....	40
III.5.2.2 Réponse indicielle.....	40

### **Chapitre IV                    Application et Comparaison**

IV.1 Introduction.....	42
IV.2 Solution.....	42
IV.2.1 Méthode de proposée.....	42
IV.2.2 Méthode de Mittag-Leffler.....	43
IV.3 Exemples.....	43
IV.3.1 Cas des valeurs propres réels et distinctes.....	44
IV.3.1.1 Réponse impulsionnelle.....	45
IV.3.1.2 Réponse indicielle.....	46
IV.3.2 Cas des valeurs propres réels et multiples.....	47
IV.3.2.1 Réponse impulsionnelle.....	48
IV.3.2.2 Réponse indicielle.....	49

<b>Conclusion Générale .....</b>	<b>51</b>
----------------------------------	-----------

<b>Références.....</b>	<b>52</b>
------------------------	-----------

## Listes des figures

<b>Figure (II.1)</b>	L'Allure temporelle de la fonction fondamentale simple avec plusieurs valeurs de $\alpha$ .	19
<b>Figure (II.2)</b>	Réalisation analogique d'un circuit RC de la fonction fondamentale simple	20
<b>Figure (II.3)</b>	L'Allure temporelle de la fonction fondamentale multiple d'ordre $\ell = 2$ avec plusieurs valeurs de $\alpha$ .	23
<b>Figure (II.4)</b>	Réalisation analogique de la fonction fondamentale multiple d'ordre $\ell = 2$ .	24
<b>Figure (III.1)</b>	L'Allure temporelle des $\Psi_{11}(t)$ , $\Psi_{22}(t)$ , $\Psi_{33}(t)$ .	34
<b>Figure (III.2)</b>	La réponse impulsionnelle des états $x_1$ , $x_2$ , $x_3$	35
<b>Figure (III.3)</b>	La réponse indicielle des états $x_1$ , $x_2$ , $x_3$	37
<b>Figure (III.4)</b>	L'Allure temporelle des $\Psi_{11}(t)$ , $\Psi_{22}(t)$ , $\Psi_{33}(t)$ .	39
<b>Figure (III.5)</b>	La réponse impulsionnelle des états $x_1$ , $x_2$ , $x_3$	40
<b>Figure (III.6)</b>	La réponse indicielle des états $x_1$ , $x_2$ , $x_3$	41
<b>Figure (IV.1)</b>	La réponse impulsionnelle des états $x_1$ , $x_2$ .	46
<b>Figure (IV.2)</b>	La réponse indicielle des états $x_1$ , $x_2$ .	47
<b>Figure (IV.3)</b>	La réponse impulsionnelle des états $x_1$ , $x_2$ .	49
<b>Figure (IV.4)</b>	La réponse indicielle des états $x_1$ , $x_2$ .	50

## Résumé

Les systèmes linéaires d'ordre fractionnaire sont des systèmes dynamiques linéaires représentés par des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire définie par :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases}, \quad \text{pour } 0 < \alpha < 1$$

Alors, le but de ce travail est de présenter une méthode de résolution de ce type d'équation d'état d'ordre fractionnaire afin de faciliter son étude, analyse et synthèse.

Les travaux réalisés et les résultats obtenus pour la résolution de cette équation différentielle sont basés sur la méthode d'approximation des fonctions irrationnelles de Charef et la technique de Cayley Hamilton pour la résolution des équations différentielles régulières. Les réponses impulsionnelle et indicielle de ce type de système ont été dérivées. Des exemples illustratifs ont été présentés pour tester l'approche de résolution. Une comparaison avec une autre méthode basée sur une certaine fonction dite fonction de Mittag-Leffler a aussi été faite pour montrer l'efficacité de notre technique de résolution de l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire.

# **Introduction Générale**

## Introduction Générale

Depuis les premiers travaux sur les dérivées d'ordre fractionnaire il y'a quelques siècles, la théorie du calcul fractionnaire a été développée pour la plupart par des mathématiciens. Dans les dernières décennies un intérêt considérable a été porté au calcul fractionnaire par l'application de ces concepts dans différents domaines de la physique et de l'ingénierie [1-3]. Beaucoup de systèmes physiques ont affiché un comportement dynamique d'ordre fractionnaire, tels que les systèmes viscoélastique, la polarisation électrode électrolyte, polarisation d'interfaces, le comportement cardiaque [4-6]. A cause de leur représentation par des fonctions de transfert irrationnelles, les systèmes d'ordre fractionnaire ont été marginalement étudiés. Mais un grand effort a été fait pour essayer de mettre en pratique les résultats déjà établis. Seulement dans les dernières années que quelqu'un peut trouver un progrès signifiant de travaux théoriques qui peut servir comme fondation pour un nombre d'applications dans la théorie des systèmes et la théorie de la commande [7-8]. Donc, un travail de recherche intensif est encore en cours dans plusieurs domaines d'ingénierie pour l'application de ces concepts d'ordre fractionnaire. Les techniques mathématiques utilisées en théorie des systèmes linéaires demeurent des outils de base dans l'étude, l'analyse et la synthèse des systèmes, par contre les méthodes d'application de ces techniques devraient être mieux développées afin de décrire convenablement les phénomènes naturels divers pour une meilleure compréhension et exploitation .

Les systèmes linéaires d'ordre fractionnaire sont des systèmes dynamiques linéaires représentés par des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire, ou par une représentation d'état d'ordre fractionnaire dont les ordres de leurs dérivées sont des nombres réels. L'équation différentielle linéaire fondamentale d'ordre fractionnaire est définie par :

$$(\tau_0)^\alpha \frac{d^\alpha y(t)}{dt^\alpha} + y(t) = e(t) \quad , \quad \text{pour } 0 < \alpha < 1$$

et l'équation d'état d'ordre fractionnaire est aussi définie par :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases} \quad , \quad \text{pour } 0 < \alpha < 1$$

Une des approches utilisées dans la littérature pour faciliter la représentation par un système linéaire invariant dans le temps, l'étude, l'analyse et la synthèse par un circuit électrique

analogique des systèmes d'ordre fractionnaire est l'approximation de leurs fonctions de transfert irrationnelles par des fonctions rationnelles dans une bande fréquentielle.

Une méthode facile, effective et très utile pour la théorie des systèmes et la théorie de la commande, est présentée pour la résolution de ce type d'équation différentielle en se basant sur l'approximation par une fonction rationnelle de la fonction irrationnelle dans une bande fréquentielle donnée de l'équation différentielle linéaire fondamentale d'ordre fractionnaire. Alors, à partir de cette fonction rationnelle, les réponses impulsionnelle et indicielle de ce type de systèmes ont été tirées. Une comparaison avec une autre méthode basée sur une certaine fonction dite fonction de Mittag-Leffler a été faite. Des exemples illustratifs ont été aussi présentés.

Ce mémoire est décomposé en quatre chapitres et organisé de la façon suivante :

Le chapitre I est consacré aux notions de base des opérations de dérivation et d'intégration fractionnaire. On y présente la définition de l'équation différentielle d'ordre fractionnaire, qui modélise les systèmes fractionnaires. Plusieurs représentations de ces systèmes, aussi bien dans l'approche transfert que dans l'approche d'état y sont également détaillées, ainsi qu'à la solution de cette équation d'état par la fonction de Mittag-Leffler.

Le chapitre II présente la méthode d'approximation des fonctions fondamentales simples et multiples de ce type de systèmes d'ordre fractionnaire par une fonction rationnelle dans une bande fréquentielle donnée. Les réponses temporelles sont obtenues à partir de cette fonction rationnelle. Un circuit analogique a été aussi tiré. Des exemples numériques ont été présentés.

Le chapitre III présente la résolution de l'équation d'état d'ordre fractionnaire par la méthode de Cayley-Hamilton. Deux cas ont été présentés accompagné chacun par un exemple appropriée.

Le chapitre IV présente une comparaison entre la méthode proposée, et la méthode de Mittag-Leffler pour la résolution de l'équation d'état d'ordre fractionnaire. Deux cas ont été présentés accompagné chacun par un exemple appropriée. Pour terminer on a synthétisé nos résultats dans une conclusion générale.

# Chapitre I

## **Équation Différentielle D'Ordre Fractionnaire**

# Chapitre I

## Équation Différentielle D'Ordre Fractionnaire

### I. 1 Opérateurs d'ordre fractionnaire

Le calcul d'ordre fractionnaire (intégration et différentiation d'ordre fractionnaire) est un vieux concept qui date de l'époque de Cauchy, Riemann Liouville et Leitnikov au 19ème siècle. Il a été utilisé en mécanique depuis les années 1930 et en électrochimie depuis les années 1960. Dans le domaine de la commande, des travaux intéressants ont été réalisés par I. A. Brin [5], et plus tard plusieurs mathématiciens et physiciens ont étudié les opérateurs et les systèmes d'ordre fractionnaire [6- 8].

#### I.1.1 Définitions fondamentales

Il existe plusieurs définitions mathématiques pour l'intégration et la dérivation d'ordre fractionnaire. Ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont équivalentes pour un large panel de fonctions.

##### I.1.1.1 Définition de Riemann-Liouville [9]

**Définition 1** Soient  $C$  et  $\mathfrak{R}$  les anneaux des nombres complexes et réels respectivement,  $\Re(.)$  symbolise la partie réelle d'un nombre complexe.

Soient  $\alpha \in C$  avec  $\Re(\alpha) > 0$ ,  $t_0 \in \mathfrak{R}$  et  $f$  une fonction localement intégrable définie sur  $[t_0, +\infty[$ .

L'intégrale d'ordre  $\alpha$  de  $f$  de borne inférieure  $t_0$  est définie par:

$${}_{RL}I_{t_0}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d(\xi) \quad (I.1)$$

avec  $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$  est la fonction gamma d'Euler.

**Définition 2** Soient  $\alpha \in C$  avec  $\Re(\alpha) > 0$ ,  $n$  un entier positif,  $t_0 \in \mathfrak{R}$  et  $f$  une fonction localement intégrable définie sur  $[t_0, +\infty[$ . La dérivée d'ordre fractionnaire  $\alpha$  de la fonction  $f$  de borne inférieure  $t_0$  est définie par:

$${}_{RL}D_{t_0}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (I.2)$$

Où le nombre entier  $n$  est tel que  $(n-1) < \alpha < n$ .

**Remarque:** pour simplifier l'écriture, on notera dans la suite  $I^{\alpha}$  pour  $I_0^{\alpha}$  et  $D^{\alpha}$  pour  $D_0^{\alpha}$ .

**I.1.1.2 Définition de Caputo [9]**

Caputo a introduit une autre formulation de la dérivée d'ordre fractionnaire définie:

$${}_c D_{t_0}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (I.3)$$

Où le nombre entier  $n$  est tel que  $(n-1) < \alpha < n$  et  $f^{(n)}(\tau)$  est la dérivée d'ordre entier  $n$  de la fonction  $f(\tau)$ .

**I.1.1.3 Définition de Gründwald-Leitnikov [9]**

La dérivée d'ordre fractionnaire d'ordre  $\alpha > 0$  de Gründwald-Leitnikov est donnée par:

$${}_{GL} D^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \quad (I.4)$$

Où  $h$  est la période d'échantillonnage et les coefficients

$$w_j^{(\alpha)} = \binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)}$$

avec  $w_0^{(\alpha)} = \binom{\alpha}{0} = 1$ , sont les coefficients du binôme suivant:

$$(1-z)^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} z^j = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j w_j^{(\alpha)} z^j \quad (I.5)$$

La définition de Gründwald-Leitnikov de l'intégrale d'ordre fractionnaire est formulée comme suit:

$${}_{GL} I^\alpha f(t) = {}_{GL} D^{-\alpha} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^\alpha \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{-\alpha}{j} f(t-jh) \quad (I.6)$$

Où  $h$  est la période d'échantillonnage et les coefficients  $w_j^{(-\alpha)}$  avec  $w_0^{(-\alpha)} = \binom{-\alpha}{0} = 1$ , sont les coefficients du binôme suivant:

$$(1-z)^{-\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{-\alpha}{j} z^j = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j w_j^{(-\alpha)} z^j \quad (I.7)$$

**I.1.2 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire**

Les principales propriétés des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire sont les suivantes [9] :

1. si  $f(t)$  est une fonction analytique de  $t$ , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire  $D^\alpha f(t)$  est une fonction analytique de  $t$  et  $\alpha$ .

2. pour  $\alpha = n$ , ou  $n$  est un entier, l'opération  $D^\alpha f(t)$  donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre entier  $n$ .

3. pour  $\alpha = 0$  l'opération  $D^\alpha f(t)$  est l'opérateur identité:  $D^0 f(t) = f(t)$ .

4. la différentiation et l'intégration d'ordre fractionnaire sont des opérations linéaires:

$$D^\alpha (a f(t) + b g(t)) = a D^\alpha f(t) + b D^\alpha g(t).$$

5. la loi additive (propriété du semi groupe)

$$D^\alpha D^\beta f(t) = D^\beta D^\alpha f(t) = D^{\alpha+\beta} f(t).$$

est valable sous certaines contraintes sur la fonction  $f(t)$ .

### I.1.3 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire

#### I.1.3.1 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire

Nous commencerons par la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha > 0$  définie par l'équation (I.2), qu'on peut écrire comme une convolution des fonctions  $g(t) = t^{\alpha-1}$  et  $f(t)$ :

$$I^\alpha f(t) = D^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = t^{\alpha-1} * f(t) \quad (I.8)$$

La transformée de Laplace de la fonction  $t^{\alpha-1}$  est :

$$G(s) = L\{t^{\alpha-1}\} = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha} \quad (I.9)$$

En utilisant la formule de la transformée de Laplace de la convolution:

$$L\{f(t)*d(t)\} = F(s) \cdot G(s)$$

On obtient la transformée de Laplace de l'intégrale de Riemann-Liouville et celle de Gründwald- Leitnikov :

$$L\{I^\alpha f(t)\} = s^{-\alpha} F(s) \quad (I.10)$$

#### I.1.3.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire

Nous citons dans ce qui suit la transformée de Laplace des différentes définitions de la dérivée [9].

##### I.1.3.2.1 Définition de Riemann-Liouville.

$$L\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[ D^{\alpha-k-1} f(t) \right]_{t=0} \quad (I.11)$$

Avec  $(n-1) < \alpha < n$ . Cette transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville est bien connue [10]. Mais son applicabilité en pratique est limitée à cause de l'absence d'interprétation physique des valeurs limites des dérivées d'ordre fractionnaire pour  $t = 0$ .

### I.1.3.2.2 Définition de Caputo

$$L\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \quad (\text{I.12})$$

Avec  $(n-1) < \alpha < n$ .

### Remarque

L'avantage principal de la définition de Caputo par rapport à celle de Riemann-Liouville est que celle de Caputo permet de considérer des conditions initiales conventionnelles faciles à interpréter telles que:

$y(0) = y_0$ ,  $y'(0) = y_1$ , etc. De plus, la dérivée de Caputo d'une constante est bornée (égale à 0), alors que la dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas bornée à  $t = 0$ . La seule exception est quand on prend  $t = -\infty$  comme point de départ (limite inférieure) dans la définition de Riemann-Liouville. Cependant, quand on s'intéresse à des processus transitoires, on ne peut pas accepter de placer le point de départ à  $-\infty$ ; dans ce cas la définition de Caputo semble être la plus appropriée quand on la compare aux autres. Alors dans la suite de ce mémoire, nous sommes intéressés de la méthode de Caputo à cause de leurs conditions initiales.

### I.1.3.2.3 Définition de Gröndwald-Leitnikov [9]

$$L\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) \quad (\text{I.13})$$

## I.2 Représentation des systèmes d'ordre fractionnaire

Plusieurs systèmes dynamiques naturels ont un comportement qui peut être modélisé par des équations différentielles comprenant des dérivées d'ordre fractionnaire. En appliquant la transformée de Laplace à de telles équations, et en supposant des conditions initiales nulles, nous obtenons des fonctions de transfert avec des puissances d'ordre fractionnaire de la variable complexe de Laplace  $s$ .

## I.2.1 Représentation entrée-sortie

### I.2.1.1 Équation différentielle d'ordre fractionnaire

Dans le domaine temporel, un modèle est dit d'ordre fractionnaire lorsque il est représenté par une équation différentielle de la forme [11], [12]:

$$\sum_{i=0}^N a_i D^{\alpha_i} y(t) = \sum_{j=0}^M b_j D^{\beta_j} u(t) \quad (\text{I.14})$$

Où  $u(t)$  et  $y(t)$  désignent respectivement l'entrée et la sortie du système,  $\{\alpha_i, \beta_j\} \in \mathfrak{R}$  sont les ordres de la dérivation, et  $\{a_i; b_j\} \in \mathfrak{R}$ , ( $i = 0, 1, \dots, N$ ;  $j = 0, 1, \dots, M$ ).

### I.2.1.2 Fonction de transfert

Dans le domaine fréquentiel, nous appliquons la transformé de Laplace à l'équation (I.14), on obtient facilement :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^{\beta_0} + \dots + b_M s^{\beta_M}}{a_0 s^{\alpha_0} + \dots + a_N s^{\alpha_N}} \quad (\text{I.15})$$

#### Définition 1

Le système fractionnaire décrit par l'équation différentielle (1.14) est strictement propre lorsque  $\alpha_N > \beta_M$ . Lorsque  $\alpha_N = \beta_M$  le système est juste propre.

#### Définition 2

Parfois toutes les puissances de  $s$  sont multiples d'une certaine valeur  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) (ordres commensurables), la fonction de transfert (I.15) devient alors :

$$G(s) = \frac{\sum_{j=0}^M b_j s^{j\alpha}}{\sum_{i=0}^N a_i s^{i\alpha}} ; \quad M, N \in \mathfrak{N}^* \text{ tel que } M < N \quad , \alpha, a_i, b_j \in \mathfrak{R}. \quad (\text{I.16})$$

Un système d'ordre fractionnaire décrit par une fonction de transfert de la forme (I.16) est appelé système d'ordre fractionnaire commensurable.

## I.2.2 Représentation d'état des systèmes d'ordre fractionnaire

### I.2.2.1 Définition

Les systèmes d'ordre fractionnaire comporte deux équations [13]:

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

Où:

$$D^\alpha x(t) = [D^{\alpha_1} x_1 \quad D^{\alpha_2} x_2 \quad \dots \quad D^{\alpha_n} x_n]^T$$

Dans lequel :

$u$  est le vecteur des entrées de dimension  $(n_e \times 1)$  ;

$x$  est le vecteur d'état d'ordre fractionnaire de dimension  $(n_x \times 1)$  ;

$y$  est le vecteur des sorties de dimension  $(n_y \times 1)$  ;

$\alpha$  est l'ordre de dérivation tel que  $0 < \alpha < 1$  ;

A, B, C et D sont tous des matrices ou des vecteurs à éléments constants et de dimension appropriée.

**Remarque :** Comme pour les représentations d'état d'ordre entier, les représentations d'état d'ordre fractionnaire ne sont pas uniques, en d'autres termes plusieurs représentations d'états fractionnaires correspondent à la même fonction de transfert d'ordre fractionnaire.

Les systèmes d'ordre fractionnaire commensurable permettent aussi une représentation dans l'espace d'état, soit :

$$\begin{cases} D^\alpha x = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (I.18)$$

Avec:

$$D^\alpha x = D^\alpha [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T$$

## I.2.2.2 Caractéristiques

### I.2.2.2.1 Relation entre représentation d'état et fonction de transfert

La relation entre les matrices du modèle d'état (I.17) et le modèle transfert  $G(s)$  peut être facilement calculé en utilisant la transformation de Laplace et en considérant les conditions initiales nulles. On obtient: [14]

$$G(s) = C[\text{diag}[s^{\alpha_1} \quad s^{\alpha_2} \quad \dots \quad s^{\alpha_n}] - A]^{-1} B + D \quad (I.19)$$

Où

$$s^\alpha I_n = \text{diag}[s^{\alpha_1} \quad s^{\alpha_2} \quad \dots \quad s^{\alpha_n}]$$

### I.2.2.2.2 De la représentation transfert à la représentation d'état

#### Cas des systèmes commensurables

Étant donné un système non entier mono variable linéaire invariant dans le temps représenté par son modèle transfert  $G(s)$  donnée sous forme de (I.16).

Pour calculer le modèle d'état correspondant, on procède en trois étapes [14] :

**Étape1** : À l'aide du changement de variable  $p = s^\alpha$   $0 < \alpha < 1$ , on transforme le modèle non entier  $G(s)$  en un modèle entier  $G(p)$  qui s'écrit sous la forme:

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\sum_{j=0}^M b_j p^j}{\sum_{i=0}^N a_i p^i}; \quad M, N \in \mathbb{N}^* \text{ telque } M < N, a_i, b_j \in \mathfrak{R} \quad (\text{I.20})$$

**Étape2** : Calculer le modèle d'état entier correspondant à  $G(p)$ . On peut obtenir toutes les formes particulières utilisées dans la théorie des systèmes entiers (forme contrôlable, observable, ...). On obtient le modèle d'état de la forme:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (\text{I.21})$$

**Étape3**: Remplacer dans le modèle d'état (I.17) la dérivée entière d'ordre 1 par la dérivée non entière d'ordre  $0 < \alpha < 1$  pour obtenir le modèle d'état correspondant au modèle transfert commensurable (I.18) donné par :

$$\begin{cases} D^\alpha x = Ax + Bu \\ y = Cx + Bu \end{cases}$$

L'équation différentielle associée à  $G(s)$  est donnée par: (la variable  $t$  est omise pour ne pas surcharger les expressions)

$$\begin{aligned} D^{N\alpha} y = & \left[ \frac{1}{s^\alpha} \right] [-a_{N-1} D^{(N-1)\alpha} y] + \dots + \left[ \frac{1}{s^{(N-M)\alpha}} \right] [b_M u - a_M y] \\ & + \dots + \left[ \frac{1}{s^{(N-1)\alpha}} \right] [b_1 u - a_1 y] + \left[ \frac{1}{s^{N\alpha}} \right] [b_0 u - a_0 y] \end{aligned} \quad (\text{I.22})$$

Avec:  $(1/s^\alpha)$  est l'opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

Si on choisit la sortie de chaque intégrateur comme variable d'état, on obtient alors:

$$\begin{cases} D^\alpha x_1 = x_2 - a_{N-1}y \\ D^\alpha x_2 = x_3 - a_{N-2}y \\ \vdots \\ D^\alpha x_M = x_{M+1} - a_M y + b_M u \\ \vdots \\ D^\alpha x_{N-1} = x_N - a_1 y + b_1 u \\ D^\alpha x_N = -a_0 y + b_0 u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (I.23)$$

Donc :

$$\begin{cases} D^\alpha x_1 = -a_{N-1}x_1 + x_2 \\ D^\alpha x_2 = -a_{N-2}x_1 + x_3 \\ \vdots \\ D^\alpha x_M = -a_M x_1 + x_{M+1} + b_M u \\ \vdots \\ D^\alpha x_{N-1} = -a_1 x_1 + x_N + b_1 u \\ D^\alpha x_N = -a_0 x_1 + b_0 u \end{cases} \quad (I.24)$$

Le modèle d'état correspondant au modèle transfert (I.18) est finalement donné par:

$$D^\alpha x = \begin{bmatrix} -a_{N-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{N-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \cdots & & \\ -a_M & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \cdots & \vdots & \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_M \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u \quad (I.25)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0]x$$

Avec:

$$\begin{cases} x = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_N]^T \\ D^\alpha x = D^\alpha [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_N]^T \end{cases}$$

### I.2.2.2.3 Formes canoniques

#### I.2.2.2.3.1 Contrôlable

La fonction de transfert: [14]

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^N b_j s^{j\alpha}}{s^{N\alpha} + \sum_{i=0}^{N-1} a_i s^{i\alpha}}, \quad N \in \mathbb{N}, \alpha, a_i, b_j \in \mathbb{R}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (I.26)$$

est équivalente au système d'état suivant, appelé forme canonique contrôlable, en supposant que les conditions initiales sont nuls.

$$\left\{ \begin{array}{l} D^\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{N-1} - a_{N-2} & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \\ y = [b_{N-1} - a_{N-1}b_N \quad b_{N-2} - a_{N-2}b_N \quad \cdots \quad b_0 - a_0b_N] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + b_N u \end{array} \right. \quad (I.27)$$

#### I.2.2.2.3.2 Observable

La fonction de transfert (I.26) est équivalente à la représentation d'état suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} D^\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -a_{N-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 - a_0b_N \\ b_1 - a_1b_N \\ 0 \\ \vdots \\ b_{N-1} - a_{N-1}b_N \end{bmatrix} u \\ \\ y = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + b_N u \end{array} \right. \quad (I.28)$$

### I.3 Solution de l'équation d'état du système d'ordre fractionnaire

Étant donné un système fractionnaire d'ordre commensurable  $0 < \alpha < 1$  dont le modèle d'état est donné par [15] :

$$\begin{cases} D^\alpha x = Ax + Bu \\ y = Cx + Bu \end{cases} \quad x(0) = x_0$$

En calculant la transformation de Laplace de cette équation, on peut exprimer la transformation de Laplace du vecteur d'état par :

$$\begin{cases} X(s) = (s^\alpha I - A)^{-1} BU(s) + (s^\alpha I - A)^{-1} x_0 \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \quad (I.29)$$

On peut alors déterminer l'expression temporelle du vecteur d'état  $x(t)$  par la transformer laplace inverse de  $X(s)$ , on obtient alors:

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = L^{-1}\left\{(s^\alpha I - A)^{-1} BU(s) + (s^\alpha I - A)^{-1} x_0\right\} \quad (I.30)$$

Définissons alors, la matrice de transition par:

$$\Psi(t) = L^{-1}\left\{(s^\alpha I - A)^{-1}\right\} \quad \text{pour } t \geq 0 \quad (I.31)$$

On obtient finalement:

$$x(t) = \Psi(t)x_0 + \Psi(t) * [Bu(t)]$$

Donc:

$$x(t) = \Psi(t)x_0 + \int_0^t \Psi(t-\tau) B u(\tau) d\tau \quad (I.32)$$

Où  $\Psi(t)$  est la matrice habituellement connue sous le nom de matrice de transition d'état.

Le but est de déterminer la forme de la matrice de transition d'état  $\Psi(t)$ , En utilisant un procédé semblable à celui utilisé pour les systèmes linéaires d'ordre entier [16].

$$D^\alpha x(t) = A x(t), \quad x(0) = x_0 \quad (I.33)$$

Sachant que la fonction de transfert de l'équation linéaire fondamentale d'ordre fractionnaire est donnée par :

$$G(s) = \frac{1}{s^\alpha - a} \quad (I.34)$$

Donc, on peut écrire cette fonction comme :

$$G(s) = \frac{1}{s^\alpha - a} = \frac{1}{s^\alpha} - \frac{a}{s^{2\alpha}} + \frac{a^2}{s^{3\alpha}} - \dots = \frac{1}{s^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{s^{k\alpha}} \quad (I.35)$$

et comme :

$$\frac{1}{s^\alpha} = L\left\{\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right\}, \alpha > 0. \quad (I.36)$$

On peut donc trouver la transformation inverse de l'équation (I.35) terme par terme en utilisant l'équation (I.36). Le résultat est :

$$g(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^\alpha} - \frac{a}{s^{2\alpha}} + \frac{a^2}{s^{3\alpha}} - \dots \right\} = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{at^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} + \frac{a^2 t^{3\alpha-1}}{\Gamma(3\alpha)} - \dots \quad (I.37)$$

Le côté droit peut maintenant être rassemblé dans une somme comme:

$$g(t) = t^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + \alpha)} \equiv F_\alpha[a, t], \quad \alpha > 0. \quad (I.38)$$

Ici nous avons défini la notation que cette fonction soit  $F_\alpha[a, t]$  elle est reliée étroitement à la fonction de Mittag-Leffler  $E_\alpha[at^\alpha]$ . La fonction de Mittag-Leffler est définie comme suit [17,18] :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + 1)}, \quad \alpha > 0 \quad (I.39)$$

On met  $z = a t^\alpha$  ceci devient

$$E_\alpha[at^\alpha] \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)}, \quad \alpha > 0 \quad (I.40)$$

Par analogie au cas scalaire, si  $z = A t^\alpha$ , l'équation (I.39) devient :

$$E_\alpha[A t^\alpha] \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)}, \quad \alpha > 0 \quad (I.41)$$

et la solution peut être donnée comme suit

$$x(t) = \Psi(t) x(0) = \left[ t^{(\alpha-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(\alpha + k\alpha)} \right] x(0) \quad (I.42)$$

En effet, lorsque  $(\alpha = 1)$ , l'équation (I.42) donne :

$$x(t) = \Psi(t) x(0) = e^{At} x(0) \quad (I.43)$$

#### I.4 Stabilité

**Théorème :** Le système d'ordre fractionnaire (I.17) est stable (dans le sens où des entrées bornées donnerons toujours des sorties bornées) si et seulement si toutes les racines (complexes)  $r_i$  de son dénominateur vérifient le théorème de Matignon, soit [14], [19] :

$$\text{Arg}(r_i) > \frac{\pi}{2} \alpha \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (\text{I.44})$$

Le cas où l'ordre de dérivation est un nombre réel supérieur à 1, la condition de stabilité se ramène à une condition sur les valeurs propres donnée par [19] :

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{\pi}{2} \alpha, \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (\text{I.45})$$

## I.5 Observabilité et contrôlabilité des systèmes d'ordre fractionnaires

### I.5.1 Observabilité

#### I.5.1.1 Conditions d'Observabilité

Dans le cas entier, la notion d'Observabilité [13] est liée à la reconstitution de l'état initial connaissant la représentation d'état ainsi que les vecteurs d'entrée et de sortie pendant un intervalle de temps donné consécutif à l'instant initial.

#### I.5.1.2 Définition

Soit le système matriciel qui définit la forme la plus générale de la représentation d'état :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases}, \quad 0 < \alpha < 1$$

L'extension au cas fractionnaire de la notion d'observabilité conduit à la définition suivante: [13], [20], [21].

L'état  $x_0$  est observable à l'instant  $t_0$  si, pour  $u(t)$  donné, il existe un instant  $t_f \geq t_0$  tel que la connaissance de  $y(t)$  sur l'intervalle  $]-\infty, t_f]$  et de  $x$  sur l'intervalle  $]-\infty, t_0[$  soit suffisante pour déterminer  $x_0$ .

#### I.5.1.3 Critère d'Observabilité

Le résultat suivant peut être démontré comme leurs similaires dans le cas d'ordre entier [13], [22].

**Théorème :** Le système d'ordre fractionnaire (I.17) est observable si et seulement si la matrice d'observabilité [13], [23]:

$$M_{ob} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix} \quad (\text{I.46})$$

(Où  $N$  est le nombre d'états) est une matrice de rang plein.

## I.5.2 Contrôlabilité

### I.5.2.1 Conditions de contrôlabilité

Dans le cas entier, la notion de contrôlabilité [13].est liée à la transition d'un système d'un état à un autre, spécifiés à l'avance, dans un intervalle de temps fini.

### I.5.2.2 Définition

Considérons de nouveau le système matriciel défini par (I.17), soit :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}, \quad 0 < \alpha < 1$$

L'extension au cas fractionnaire de la notion de contrôlabilité conduit à la définition suivante :

Si l'on peut amener le système de l'état  $x_0$  où il se trouve à l'instant  $t_0$ , à l'état  $x_f$  à l'instant  $t_f \geq t_0$  en agissant uniquement sur l'entrée  $u(t)$  (ou commande), supposée sans contrainte,  $x$  étant connu sur l'intervalle  $]-\infty, t_0[$ , l'état  $x_0$  est dit contrôlable à l'instant  $t_0$  [13], [20], [21].

### I.5.2.3 Critère de contrôlabilité

Le résultat suivant peut être démontré comme leurs similaires dans le cas d'ordre entier [13], [22].

#### **Théorème**

Le système d'ordre fractionnaire (I.20) est contrôlable si et seulement si la matrice de contrôlabilité

$$M_{cont} = [B \ AB \ \dots \ A^{N-1}B] \quad (I.47)$$

(Où N est le nombre des états) est une matrice de rang plein.

# Chapitre II

## **Fonctions fondamentales**

# Chapitre II

## Fonctions Fondamentales

### II.1 Introduction

Dans ce chapitre on va étudier des fonctions qu'on a appelé fonctions fondamentales. On définit la fonction fondamentale simple par :

$$G(s) = \frac{1}{[1 + (s\tau_0)^\alpha]} \quad (\text{II.1})$$

avec  $0 < \alpha < 1$  et  $\tau_0$  une constante positive. On considère que cette fonction fondamentale simple est la transformée de Laplace de la fonction  $\exp_g(t)$  dite fonction exponentielle généralisée parce que si  $\alpha = 1$  la transformée de Laplace de  $G(s)$  est la fonction exponentielle régulière.

De la même manière on définit la fonction fondamentale multiple comme :

$$G_\ell(s) = \frac{1}{[1 + (s\tau_0)^\alpha]^\ell} \quad (\text{II.2})$$

avec  $0 < \alpha < 1$ ,  $\tau_0$  une constante positive et  $\ell$  un nombre entier tel que  $\ell \geq 2$ .  $G_\ell(s)$  est aussi considérée comme la transformée de Laplace d'une fonction  $\exp_{g_\ell}(t)$  qu'on a dénommée fonction exponentielle généralisée d'indice  $\ell$ .

### II.2. Fonction fondamentale : cas simple

#### II.2.1 Approximation par une fonction rationnelle {[24], [25], [26]}

Dans ce contexte, on va étudier la fonction fondamentale simple et définir comme :

$$G(s) = \frac{1}{[1 + (s\tau_0)^\alpha]}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (\text{II.3})$$

Où  $1/\tau_0$  est la fréquence caractéristique de relaxation,  $s = j\omega$  est la fréquence complexe et  $\alpha$  un nombre réel tel que  $0 < \alpha < 1$ .

On remarque que la fonction fondamentale simple de l'équation (II.3) est une fonction irrationnelle, donc pour étudier cette fonction il faut faire l'approximation suivante :

$$G(s) = \frac{1}{[1 + (s\tau_0)^\alpha]} = \int_0^\infty \frac{G(\tau)}{1 + s\tau} d\tau \quad (\text{II.4})$$

Où  $G(\tau)$  la fonction de distribution des temps de relaxation.

avec

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin(1 - \alpha)\pi}{\left\{ \cosh \left[ \alpha \log \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right) \right] \right\} - \cos(1 - \alpha)\pi} \right], \quad 0 < \alpha < 1 \quad (\text{II.5})$$

L'approximation de la fonction fondamentale simple de l'équation (II.1) par une fonction rationnelle commence par l'échantillonnage de la fonction de distribution des temps de relaxation  $G(\tau)$  de l'équation (II.5) dans une bande fréquentielle d'intérêt pratique  $[0, \omega_H]$  en points équidistants sur une échelle logarithmique  $\tau_i$  ( $i=1,2,\dots,2N-1$ ) comme suit :

$$G(\tau) \cong G_s(\tau) = \sum_{i=1}^{2N-1} G(\tau_i) \delta(\tau - \tau_i) \quad (\text{II.6})$$

Où  $\tau_i = \tau_N \lambda^{N-i}$  pour  $i=1,2,\dots,2N-1$ , et  $\lambda$  un nombre constant plus grande que l'unité, est définie comme rapport d'un pole au pole précédent où:

$$\lambda = \frac{\tau_i}{\tau_{i+1}} = \frac{p_{i+1}}{p_i}, \quad i=1,2,\dots,2N-2 \quad (\text{II.7})$$

Avec les pôles  $p_i = \frac{1}{\tau_i}$ , pour  $i=1,2,\dots,2N-1$ .

Substituant l'équation (II.6) dans l'équation (II.4), on obtient:

$$G(s) \cong \int_0^\infty \frac{\sum_{i=1}^{2N-1} G(\tau_i) \delta(\tau - \tau_i)}{1 + s\tau} d\tau = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{G(\tau_i)}{1 + s\tau_i} \quad (\text{II.8})$$

D' Où on peut écrire:

$$G(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^\alpha} \cong \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{G(\tau_i)}{1 + s\tau_i} = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (\text{II.9})$$

Où  $p_i$  sont les pôles de l'approximation donnée par :

$$p_i = \frac{1}{\tau_i} = (\lambda)^{(i-N)} p_0 \quad \text{Pour } i=1,2,\dots,2N-1$$

Sachant que  $p_0 = \frac{1}{\tau_0}$  et  $\lambda = \frac{p_{i+1}}{p_i}$  = rapport d'un pôle au pôle précédent, les  $k_i$  sont les résidus

des pôles donnés par la relation suivante :

$$k_i = G(\tau_i) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin[(1-\alpha)\pi]}{\cosh[m \log(\frac{\tau_i}{\tau_0})] - \cos[(1-\alpha)\pi]} \right], \quad \begin{cases} 0 < \alpha < 1 \\ i = 1, 2, \dots, 2N-1 \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

Pour une fréquence d'approximation  $w_{\max}$  qui peut être choisie  $100w_H$ , avec  $[0, w_H]$  est une bande de fréquence d'intérêt pratique, le nombre  $N$  est déterminé comme suit :

$$N = \text{Integer} \left( \frac{\log(\tau_0 w_{\max})}{\log(\lambda)} \right) + 1 \quad (\text{II.11})$$

On peut aussi écrire la fonction de l'équation (II.9) comme suit :

$$G(s) = L\{\exp g(t)\} \Rightarrow L\{\exp g(t)\} = \frac{\prod_{i=1}^{2N-1} \left( 1 + \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_{i=1}^{2N-1} \left( 1 + \frac{s}{p_i} \right)} = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{\left( 1 + \frac{s}{p_i} \right)} \quad (\text{II.12})$$

Où  $k_i, -p_i$  sont respectivement coefficients, et pôles de l'équation (II.1).

On considère que les conditions initiales sont nulles.

En utilisant la transformée de Laplace inverse sur l'équation (II.12), on obtient la relation suivante :

$$\exp g(t) = \sum_{i=1}^{2N-1} k_i p_i \exp(-p_i t) \quad (\text{II.13})$$

### II.2.2 Exemple illustratif

Pour le but d'illustration prenons un exemple numérique pour une fonction fondamentale simple suivante :

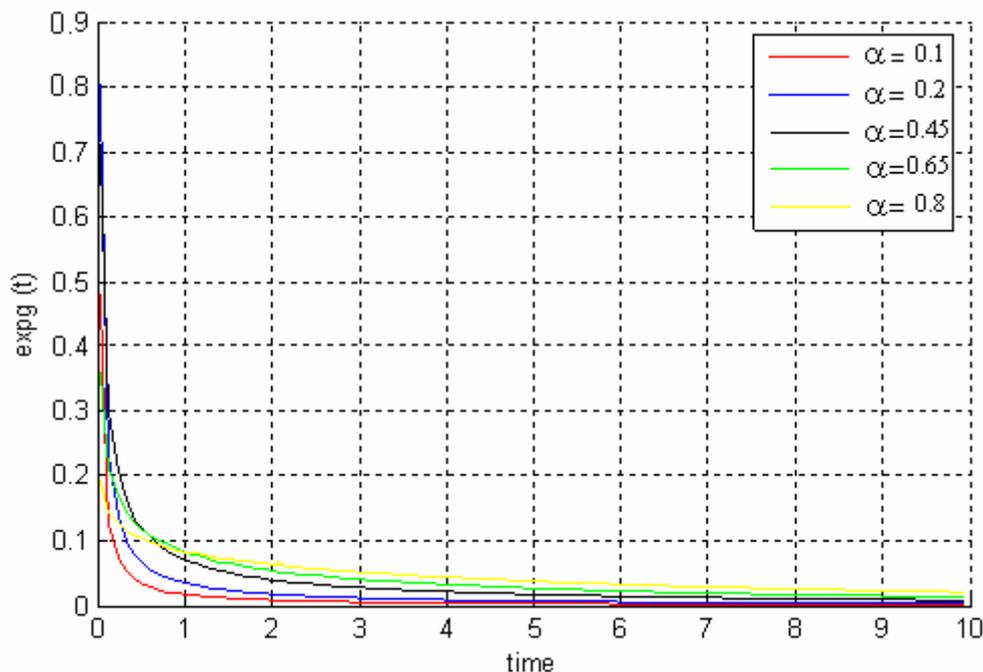
$$G(s) = \frac{1}{1 + (\tau_0 s)^\alpha} \quad 0 < \alpha < 1$$

Pour une bande de fréquence d'intérêt pratique  $[0, w_H] = [0, 10 \text{ rad/s}]$ , la fréquence d'approximation  $w_{\max} = 100 w_H = 1000 \text{ rad/s}$ , le rapport  $\lambda = 4$ , le nombre  $N$ , les pôles  $p_i$  et les résidus  $k_i$  de l'approximation peuvent être facilement calculés de la section (II.2.1) pour  $i=1, 2, \dots, 2N-1$ .

Comme :  $N=4$ ,  $p_0 = 1/\tau_0$  et  $\tau_0 = 10$ ,  $p_i = (4)^{(i-N)} p_0$  et

$$k_i = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin[(1-\alpha)\pi]}{\cosh[\alpha \log((4)^{(N-i)})] - \cos[(1-\alpha)\pi]} \right].$$

La figure (II.1) représente l'allure temporelle de la fonction fondamentale simple avec plusieurs valeurs de  $\alpha$ .



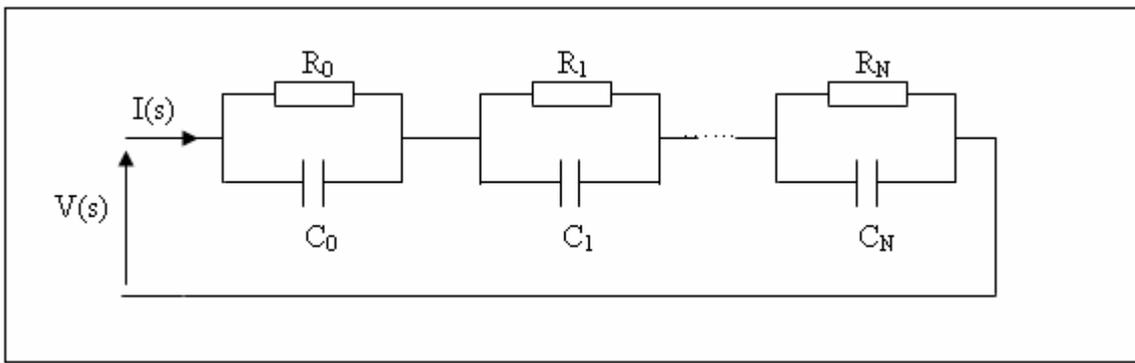
**Figure (II.1)** L'Allure temporelle de la fonction fondamentale simple avec plusieurs valeurs de  $\alpha$ .

### II.2.3 Réalisation analogique

De l'équation (II.9), la fonction fondamentale simple est donnée comme : [25]

$$G(s) \approx \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{G(\tau_i)}{1+s\tau_i} = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{\left(1+\frac{s}{p_i}\right)}, \text{ avec } p_i = \frac{1}{\tau_i} \quad (\text{II.14})$$

on peut facilement voir que l'équation (II.14) est analogue à une impédance  $Z(s)$  de  $(2N-1)$  cellules RC parallèle connectées en série comme il est montré dans la figure (II.2) :



**Figure II.2** Réalisation analogique d'un circuit RC de la fonction fondamentale simple

Cette impédance  $Z(s)$  du circuit de la figure (II.2) est donnée comme :

$$Z(s) = \sum_{i=1}^{2N-1} \left( \frac{R_i}{1+sR_i C_i} \right) \quad (\text{II.15})$$

A partir des équations (II.14) et (II.15) pour  $i=1,2,\dots,2N-1$ , on peut écrire:

$$R_i = k_i \quad \text{et} \quad R_i C_i = \frac{1}{p_i} \quad (\text{II.16})$$

d'où les valeurs des résistances et capacités, pour  $i=1,\dots,2N-1$ , d'un circuit analogique modélisant la fonction fondamentale simple dans une bande de fréquence donnée sont données par :

$$R_i = k_i \quad \text{et} \quad C_i = \frac{1}{p_i k_i} \quad (\text{II.17})$$

### II.3 Fonction fondamentale : cas multiple

#### II.3.1 Approximation par une fonction rationnelle

Dans ce contexte, on va étudier la fonction fondamentale multiple et défini comme:

$$G_1(s) = \frac{1}{[1 + (s\tau_0)^\alpha]^\ell}, \quad \ell \in \mathbb{N} \text{ et } \ell \geq 2, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (\text{II.18})$$

On peut remarque la même chose qui vue dans l'équation (II.3) : elle n'est pas fonction rationnelle, donc en va faire l'approximation de la fonction fondamentale multiple de l'équation (II.18).

A partir de l'équation (II.9), on peut écrire l'équation (II.18) comme suit:

$$G_\ell(s) = L\{\exp g_\ell(t)\} = [G(s)]^\ell$$

C'est à dire :

$$G_\ell(s) = L\{\exp g_\ell(t)\} = \left[ \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \right]^\ell \quad (\text{II.19})$$

Cette fonction fondamentale multiple sera simplifiée à la forme de l'équation suivante :

$$G_\ell(s) = L\{\exp g_\ell(t)\} = \frac{\prod_{i=1}^{2N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)^\ell}{\prod_{i=1}^{2N-1} \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)^\ell} = \sum_{i=1}^{2N-1} \sum_{j=1}^{\ell} \frac{K_{j,i}}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)^j} \quad (\text{II.20})$$

Où  $K_{j,i}$ ,  $-p_i$  et  $\ell$  sont respectivement coefficients, pôles et leur multiplicité de l'équation (II.18), et

$$K_{j,i} = \frac{1}{j!} \frac{d}{ds} \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)^\ell G_\ell(s) \Big|_{s=-p_i} \quad (\text{II.21})$$

En utilisant la transformée de Laplace inverse sur l'équation (II.20), on obtient la relation suivante :

$$\exp g_\ell(t) = \sum_{i=1}^{2N-1} \sum_{j=1}^{\ell} K_{j,i} p_i^j \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{-p_i t} \quad (\text{II.22})$$

### II.3.2 Exemple illustratif

Pour le but d'illustration prenons un exemple numérique pour une fonction fondamentale multiple d'ordre ( $\ell = 2$ ) suivant :

$$G_2(s) = \left[ \frac{1}{1 + (\tau_0 s)^\alpha} \right]^2 \quad 0 < \alpha < 1 \quad (\text{II.23})$$

Donc :

$$G_2(s) = L\{\exp g_2(t)\} \Rightarrow L\{\exp g_2(t)\} = \left[ \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \right]^2 \quad (\text{II.24})$$

Cette fonction fondamentale multiple sera simplifiée à la forme de l'équation suivante :

$$L\{\exp g_2(t)\} = \frac{\prod_{i=1}^{2N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)^2}{\prod_{i=1}^{2N-1} \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)^2} = \sum_{i=1}^{2N-1} \sum_{j=1}^2 \frac{K_{j,i}}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)^j} \quad (\text{II.25})$$

Où  $K_{1,i}$ ,  $K_{2,i}$ ,  $-p_i$  sont respectivement coefficients, et pôles de l'équation (II.23).

Sachant que:

$$K_{1,i} = \frac{d}{ds} \left(1 + \frac{s}{p_i}\right) G_2(s) \Big|_{s = -p_i}$$

$$K_{2,i} = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)^2 G_2(s) \Big|_{s = -p_i}$$

On considère que les conditions initiales sont nulles.

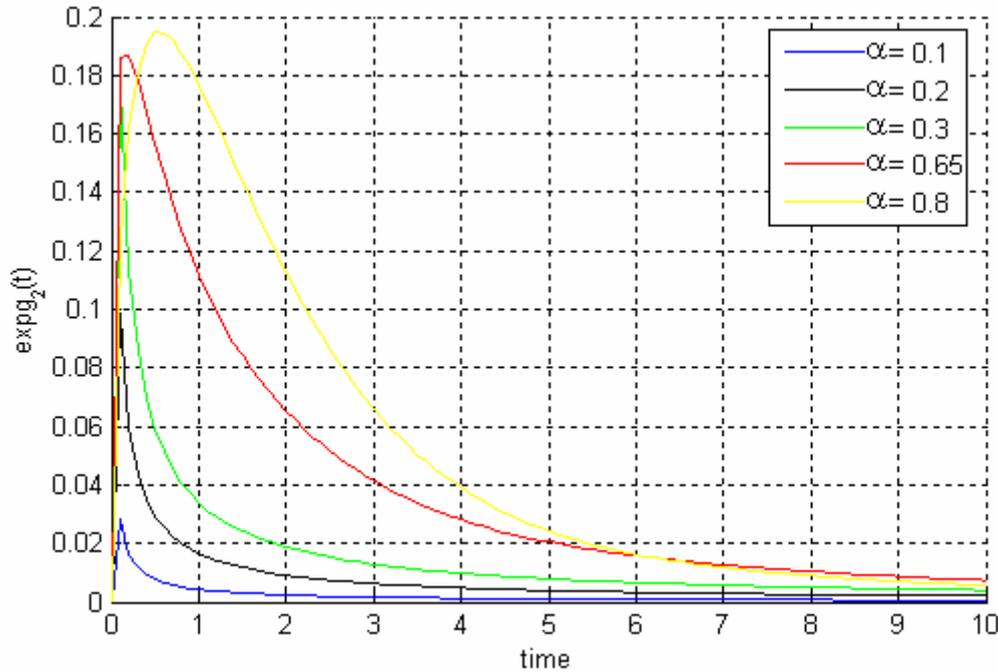
En utilisant la transformée de Laplace inverse sur l'équation (II.26), on obtient la relation suivante:

$$\exp g_2(t) = \sum_{i=1}^{2N-1} \left[ K_{1,i} p_i e^{-p_i t} + K_{2,i} p_i^2 t e^{-p_i t} \right] \quad (\text{II.26})$$

Pour une bande de fréquence d'intérêt pratique  $[0, w_H] = [0, 10 \text{ rad/s}]$ , la fréquence d'approximation  $w_{\max} = 100 w_H = 1000 \text{ rad/s}$ , le rapport  $\lambda = 4$ , le nombre  $N$ , les pôles  $p_i$  et les résidus  $k_i$  de l'approximation peuvent être facilement calculés de la section (II.2.1) pour  $i=1, 2, \dots, 2N-1$ .

Comme :  $N=4, p_i=(4)^{(i-N)}p_0$  et  $\tau_0=1, k_i = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin[(1-\alpha)\pi]}{\cosh[\alpha \log((4)^{(N-i)})] - \cos[(1-\alpha)\pi]} \right]$

La figure (II.3) représente l'allure temporelle de la fonction fondamentale multiple d'ordre  $\ell=2$  avec plusieurs valeurs de  $\alpha$



**Figure (II.3)** L'Allure temporelle de la fonction fondamentale multiple d'ordre  $\ell=2$  avec plusieurs valeurs de  $\alpha$ .

### II.3.3 Réalisation analogique

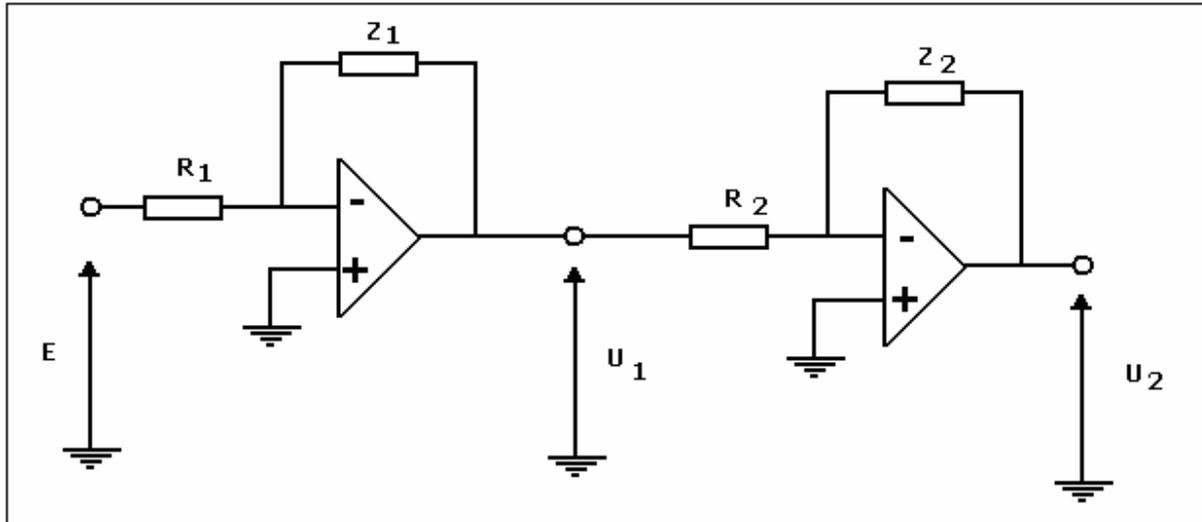
De l'équation (II.26), la fonction fondamentale multiple d'ordre  $\ell=2$  est donnée comme :

$$G_2(s) = \frac{\prod_{i=1}^{2N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)^2}{\prod_{i=1}^{2N-1} \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)^2} = \sum_{i=1}^{2N-1} \sum_{j=1}^2 \frac{K_{j,i}}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)^j} \tag{II.27}$$

On peut facilement voir que l'équation (II.27) est analogue à une impédance  $Z(s)$ , telle que :

$$Z(s) = Z_1(s) Z_2(s) \text{ avec } Z_1(s) \Leftrightarrow Z_2(s) \tag{II.28}$$

Où chaque  $Z_1(s)$  et  $Z_2(s)$  sont des impédances de  $(2N-1)$  cellules RC parallèle connectées comme il est montré dans la figure (II.2) précédemment, et le système (II.27) on peut représenter comme indiqué sur la figure (II.4).



**Figure II.4** Réalisation analogique de la fonction fondamentale multiple d'ordre  $l=2$

Sachant que  $R_1=R_2=1\Omega$ .

# Chapitre III

## **Solution de l'Équation Différentielle d'Ordre Fractionnaire**

## Chapitre III

### Solution de l'Équation Différentielle d'Ordre Fractionnaire

#### III.1 Introduction

Etant donné un système monovarié d'ordre commensurable, dont la représentation d'état est de la forme [13] :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Bu(t) \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (\text{III.1})$$

La méthode qu'on va utiliser pour résoudre l'équation d'état d'ordre fractionnaire  $0 < \alpha < 1$  de l'équation (III.1) est basée sur la méthode de Cayley Hamilton.

#### III.2 Méthode de Cayley Hamilton

Soit  $A$  une matrice ( $n \times n$ ), son polynôme caractéristique est donné par :

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0. \quad (\text{III.2})$$

Alors on définit le polynôme caractéristique matricielle de  $A$  par :

$$\Delta(A) = A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I \quad (\text{III.3})$$

##### III.2.1 Théorème de Cayley Hamilton

Chaque matrice satisfait son propre polynôme caractéristique c'est-à-dire :

$$\Delta(A) = [0] \quad (\text{III.4})$$

#### III.3 Calcul de fonctions de matrices

Soit une fonction  $P(\lambda)$  et soit une matrice  $A(n \times n)$  dont les valeurs propres sont  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$  dont le polynôme caractéristique est  $\Delta(\lambda)$ . La question qu'on se pose est de calculer  $P(A)$ . Et pour faire ce calcul, on suit la méthode suivante :

On peut représenter la fonction  $P(\lambda)$  par son développement en série par :

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_k \lambda^k \Rightarrow P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_k A^k \quad (\text{III.5})$$

Il est possible de diviser  $P(\lambda)$  par  $\Delta(\lambda)$ , on obtient donc :

$$P(\lambda) = \Delta(\lambda) \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k \lambda^k + R(\lambda) \quad \Rightarrow \quad P(A) = \Delta(A) \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k A^k + R(A) \quad (\text{III.6})$$

Où  $R(\lambda)$  est un polynôme de degré  $\leq (n-1)$  parce que  $\Delta(\lambda)$  est un de degré  $n$ , alors :

$$R(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 + \dots + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} \quad (\text{III.7})$$

donc :

$$R(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1} \quad (\text{III.8})$$

Pour  $\lambda = \lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$  on a  $\Delta(\lambda_i) = 0$  et on sait d'après le théorème de Cayley Hamilton que  $\Delta(A) = [0]$ , alors

$$P(\lambda_i) = \Delta(\lambda_i) \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k \lambda_i^k + R(\lambda_i) \quad \text{et} \quad \Delta(\lambda_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad P(\lambda_i) = R(\lambda_i)$$

par conséquent :

$$P(A) = R(A) \quad (\text{III.9})$$

et pour calculer  $R(A)$  il suffit de trouver les coefficients  $\alpha_i (i = 0, 1, \dots, n-1)$  et pour cela on distingue deux cas :

### 1<sup>er</sup> cas : Les valeurs propres de A sont distinctes

On peut calculer les  $n$  coefficients  $\alpha_i (i = 0, 1, \dots, n-1)$  par l'obtention des  $n$  équations en calculant  $P(\lambda_j)$  pour  $j = 1, 2, \dots, n$  c'est-à-dire :

$$P(\lambda_j) = R(\lambda_j) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_j + \alpha_2 \lambda_j^2 + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_j^{n-1} \quad (\text{III.10})$$

### 2<sup>nd</sup> cas : Les valeurs propres de A sont multiples

On peut calculer les  $n$  coefficients  $\alpha_i (i = 0, 1, \dots, n-1)$  par l'obtention des  $n$  équations en calculant :

$$\frac{d^{j-1} P(\lambda)}{d\lambda^{j-1}} \Big|_{\lambda = \lambda_i} = \frac{d^{j-1} R(\lambda)}{d\lambda^{j-1}} \Big|_{\lambda = \lambda_i} \quad (\text{III.11})$$

pour  $\begin{cases} i = 1, 2, \dots, r \\ j = 1, 2, \dots, m_i \end{cases}$ , où  $\sum_{i=1}^r m_i = n$ ,  $m_i$  est la multiplicité de la valeur propre  $\lambda_i$  et  $r$  est le

nombre de valeurs propres distinctes.

### III.4 Solution

Dans cette section, on désire résoudre l'équation d'état d'ordre fractionnaire  $0 < \alpha < 1$  de l'équation (III.1) par application de la méthode de Cayley Hamilton. En calculant la transformation de Laplace de l'équation (III.1), on peut exprimer la transformation de Laplace du vecteur d'état par :

$$X(s) = (s^\alpha I - A)^{-1} B U(s) + (s^\alpha I - A)^{-1} x(0) \quad (\text{III.12})$$

On peut alors déterminer l'expression temporelle du vecteur d'état  $x(t)$  par la transformée de Laplace inverse de  $X(s)$ . On obtient alors:

$$x(t) = L^{-1} \{X(s)\} = L^{-1} \left\{ (s^\alpha I - A)^{-1} B U(s) + (s^\alpha I - A)^{-1} x(0) \right\} \quad (\text{III.13})$$

Définissons alors, la matrice de transition  $\Psi(t)$  par:

$$\Psi(t) = L^{-1} \left\{ (s^\alpha I - A)^{-1} \right\} \quad \text{pour } t \geq 0 \quad (\text{III.14})$$

On obtient finalement:

$$x(t) = \Psi(t) x_0 + \Psi(t) * [B u(t)] \Rightarrow \quad (\text{III.15})$$

$$x(t) = \Psi(t) x_0 + \int_0^t \Psi(t - \tau) B u(\tau) d\tau.$$

Le but maintenant est de déterminer la forme de la matrice de transition d'état  $\Psi(t)$ .

$$\Psi(t) = L^{-1} \left\{ (s^\alpha I - A)^{-1} \right\} = L^{-1} \left\{ \alpha_0(s) I + \alpha_1(s) A + \alpha_2(s) A^2 + \dots + \alpha_{n-1}(s) A^{n-1} \right\} \quad (\text{III.16})$$

$$\Rightarrow \Psi(t) = \alpha_0(t) I + \alpha_1(t) A + \alpha_2(t) A^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t) A^{n-1}$$

Où  $\alpha_i(t) = L^{-1} \{ \alpha_i(s) \}$  pour  $i = 0, 1, \dots, n-1$ .

#### III.4.1 Calcul de la matrice de transition $\Psi(t)$

1. Calculer les valeurs propres de  $A$  par la résolution de l'équation

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = 0 \quad (\text{III.17})$$

2. Calculer les  $n$  coefficients  $\alpha_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) de l'équation

$$(s^\alpha I - A)^{-1} = \alpha_0(s) I + \alpha_1(s) A + \alpha_2(s) A^2 + \dots + \alpha_{n-1}(s) A^{n-1} \quad (\text{III.18})$$

### III.4.1.1 Valeurs propres réelles et distinctes

On peut calculer les  $n$  coefficients  $\alpha_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) par l'obtention des  $n$  équations en calculant les  $n$  équations suivantes :

$$(s^\alpha - \lambda)^{-1} \Big|_{\lambda = \lambda_i} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 + \dots + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} \Big|_{\lambda = \lambda_i} \quad \text{pour } i = 1; 2; \dots; n \quad (\text{III.19})$$

C'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{s^\alpha - \lambda_1} = G(s, \lambda_1) = \alpha_0(s) + \alpha_1(s)\lambda_1 + \alpha_2(s)\lambda_1^2 + \dots + \alpha_{n-1}(s)\lambda_1^{n-1} \\ \frac{1}{s^\alpha - \lambda_2} = G(s, \lambda_2) = \alpha_0(s) + \alpha_1(s)\lambda_2 + \alpha_2(s)\lambda_2^2 + \dots + \alpha_{n-1}(s)\lambda_2^{n-1} \\ \vdots \\ \frac{1}{s^\alpha - \lambda_n} = G(s, \lambda_n) = \alpha_0(s) + \alpha_1(s)\lambda_n + \alpha_2(s)\lambda_n^2 + \dots + \alpha_{n-1}(s)\lambda_n^{n-1} \end{array} \right. \quad (\text{III.20})$$

Donc :

$$\begin{bmatrix} G(s, \lambda_1) \\ G(s, \lambda_2) \\ \vdots \\ G(s, \lambda_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0(s) \\ \alpha_1(s) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(s) \end{bmatrix} \quad (\text{III.21})$$

$$\Leftrightarrow [G(s, \lambda_i)] = [V] \cdot [\alpha_{i-1}(s)]; \quad i = 1; 2; \dots; n \quad (\text{III.22})$$

Où

$$[V] = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{III.23})$$

est une matrice de Vandermonde. A partir de l'équation (III.21), on peut donc trouver les  $n$  coefficients  $\alpha_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) comme :

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(s) \\ \alpha_1(s) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(s) \end{bmatrix} = [V]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} G(s, \lambda_1) \\ G(s, \lambda_2) \\ \vdots \\ G(s, \lambda_n) \end{bmatrix} \quad (\text{III.24})$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_0(s) \\ \alpha_1(s) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G(s, \lambda_1) \\ G(s, \lambda_2) \\ \vdots \\ G(s, \lambda_n) \end{bmatrix} \quad (\text{III.25})$$

Par application de la transformation de Laplace inverse de l'équation (III.25), on obtient :

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \exp g(t, \lambda_1) \\ \exp g(t, \lambda_2) \\ \vdots \\ \exp g(t, \lambda_n) \end{bmatrix} \quad (\text{III.26})$$

$$\Rightarrow \alpha_i(t) = \sum_{j=1}^n \gamma_{i+1,j} \exp g(t, \lambda_j); \quad i = 0; 1; \dots; n-1. \quad (\text{III.27})$$

Où les fonctions  $\exp g(t, \lambda_j)$ , pour  $j=1, \dots, n$ , sont calculées comme dans l'équation (II.13).

### III.4.1.2 Valeurs propres réels et multiples

Dans ce cas, pour trouver les  $n$  coefficients  $\alpha_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ), il faut appliquer la relation suivante :

$$\frac{d^{j-1} \left[ (s^\alpha - \lambda)^{-1} \right]}{d\lambda^{j-1}} \Big|_{\lambda = \lambda_i} = \frac{d^{j-1} \left[ \alpha_0(s) + \alpha_1(s)\lambda + \alpha_2(s)\lambda^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(s)\lambda^{n-1} \right]}{d\lambda^{j-1}} \Big|_{\lambda = \lambda_i} \quad (\text{III.28})$$

pour  $\begin{cases} i = 1, 2, \dots, r \\ j = 1, 2, \dots, m_i \end{cases}$ , où  $\sum_{i=1}^r m_i = n$ , et  $m_i$  est la multiplicité de la valeur propre  $\lambda_i$ .

C'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{1}{s^\alpha - \lambda_1} = G_1(s, \lambda_1) = \alpha_0(s) + \alpha_1(s)\lambda_1 + \alpha_2(s)\lambda_1^2 + \dots + \alpha_{n-1}(s)\lambda_1^{n-1} \\
 \frac{1}{(s^\alpha - \lambda_1)^2} = G_2(s, \lambda_1) = \alpha_1(s) + 2\alpha_2(s)\lambda_1 + 3\alpha_3(s)\lambda_1^2 + \dots + (n-1)\alpha_{n-1}(s)\lambda_1^{n-2} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \frac{1}{(s^\alpha - \lambda_1)^{m_1}} = G_{m_1}(s, \lambda_1) = \sum_{j=0}^{n-m_1} \frac{(m_1-1+j)!}{(m_1-1)!j!} \alpha_{(m_1-1+j)}(s)\lambda_1^j \\
 \\
 \frac{1}{s^\alpha - \lambda_2} = G(s, \lambda_2) = \alpha_0(s) + \alpha_1(s)\lambda_2 + \alpha_2(s)\lambda_2^2 + \dots + \alpha_{n-1}(s)\lambda_2^{n-1} \\
 \\
 \frac{1}{s^\alpha - \lambda_3} = G(s, \lambda_3) = \alpha_0(s) + \alpha_1(s)\lambda_3 + \alpha_2(s)\lambda_3^2 + \dots + \alpha_{n-1}(s)\lambda_3^{n-1} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \frac{1}{s^\alpha - \lambda_r} = G(s, \lambda_r) = \alpha_0(s) + \alpha_1(s)\lambda_r + \alpha_2(s)\lambda_r^2 + \dots + \alpha_{n-1}(s)\lambda_r^{n-1}
 \end{array} \right. \quad (III.29)$$

Donc :

$$\begin{bmatrix} G_1(s, \lambda_1) \\ G_2(s, \lambda_1) \\ \vdots \\ G_{m_1}(s, \lambda_1) \\ G(s, \lambda_2) \\ \vdots \\ G(s, \lambda_r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 0 & 1 & \lambda_1 & \dots & (n-1)\lambda_1^{n-2} \\ \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{(n-1)!}{(m_1-1)!(n-m_1)!} \lambda_1^{(n-m_1)} \\ \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \lambda_r^2 & \dots & \lambda_r^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0(s) \\ \alpha_1(s) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(s) \end{bmatrix} \quad (III.30)$$

On peut donc trouver les n coefficients  $\alpha_i (i = 0, 1, \dots, n-1)$  comme :

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(s) \\ \alpha_1(s) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 0 & 1 & \lambda_1 & \dots & (n-1)\lambda_1^{n-2} \\ \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{(n-1)!}{(m_1-1)!(n-m_1)!} \lambda_1^{(n-m_1)} \\ \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \lambda_r^2 & \dots & \lambda_r^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_1(s, \lambda_1) \\ G_2(s, \lambda_1) \\ \vdots \\ G_{m_1}(s, \lambda_1) \\ G(s, \lambda_2) \\ \vdots \\ G(s, \lambda_r) \end{bmatrix} \quad (III.31)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(s) \\ \alpha_1(s) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1(s, \lambda_1) \\ G_2(s, \lambda_1) \\ \vdots \\ G_{m_1}(s, \lambda_1) \\ G(s, \lambda_2) \\ \vdots \\ G(s, \lambda_r) \end{bmatrix} \quad (\text{III.32})$$

Par application de la transformation de Laplace inverse de l'équation (III.32), on obtient :

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp g_1(t, \lambda_1) \\ \exp g_2(t, \lambda_1) \\ \vdots \\ \exp g_{m_1}(t, \lambda_1) \\ \exp g(t, \lambda_2) \\ \vdots \\ \exp g(t, \lambda_r) \end{bmatrix} \quad (\text{III.33})$$

Donc, pour  $i=0, 1, \dots, (n-1)$ , on aura :

$$\alpha_i(t) = \sum_{j=1}^{m_1} \gamma_{i+1,j} \exp g_j(t, \lambda_1) + \sum_{j=(m_1+1)}^n \gamma_{i+1,j} \exp g(t, \lambda_{(j-m_1+1)}) \quad (\text{III.34})$$

les fonctions  $\exp g(t, \lambda_j)$ , pour  $j=2, \dots, r$ , sont calculées comme dans l'équation (II.13) et les fonctions  $\exp g_j(t, \lambda_1)$ , pour  $j=1, \dots, m_1$ , sont calculées comme dans l'équation (II.23).

### III.5 Exemples

Étant donné un système linéaire invariant dans le temps régi par une équation d'état d'ordre fractionnaire avec  $\alpha = 0.7$  comme suit :

$$\frac{d^{0.7} x(t)}{dt^{0.7}} = A x(t) + B e(t). \quad (\text{III.35})$$

Où :  $A(3 \times 3)$  la matrice d'évolution du système.

et

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \text{ le vecteur d'état.}$$

Alors :

$$x(t) = \Psi(t)x(0) + \Psi(t) * B e(t) \quad / \quad \Psi(t) = L^{-1} \left\{ (s^{0.7} I - A)^{-1} \right\} \quad (\text{III.36})$$

### III.5.1 Valeurs propres sont réelles et distinctes

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont :  $\lambda_1 = -7, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -1$ , et ces derniers conduit aux trois fonctions fondamentales suivantes :

$$\begin{cases} L\{\exp g(t, \lambda_1)\} = G(s, \lambda_1) = \frac{1}{s^{0.7} + 7} \\ L\{\exp g(t, \lambda_2)\} = G(s, \lambda_2) = \frac{1}{s^{0.7} + 3} \\ L\{\exp g(t, \lambda_3)\} = G(s, \lambda_3) = \frac{1}{s^{0.7} + 1} \end{cases}$$

$$G(s, \lambda_j) = \left(\frac{-1}{\lambda_j}\right)^{2N_j-1} \sum_{i=1}^{2N_j-1} \frac{k_{ji}}{\left(1 + \frac{s}{p_{ji}}\right)}, \quad j = 1; 2; 3 \quad (\text{III.37})$$

$$\text{avec } k_{ji} = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin[(1 - (0.7))\pi]}{\cosh[(0.7) \log(\frac{\tau_{ji}}{\tau_{0j}})] - \cos[(1 - (0.7))\pi]} \right], \quad j = 1; 2; 3$$

$$\begin{cases} \lambda = 4, p_{ji} = (4)^{(i-N_j)} p_{0i}, p_{ji} = \frac{1}{\tau_{ji}} \\ \tau_{0j} = \left(\frac{-1}{\lambda_j}\right)^{\frac{1}{\alpha}}; \quad \tau_{ji} = \tau_{0j} \lambda^{N_j-i} \\ N_j = \text{Integer} \left( \frac{\log(\tau_{0j} \omega_{\max})}{\log(\lambda)} \right) + 1; \quad \omega_{\max} = 1000 \text{rd/s} \end{cases}$$

On appliquant la transformation de Laplace inverse sur l'équation (III.37), on obtient :

$$\exp g(t, \lambda_j) = \left(\frac{-1}{\lambda_j}\right)^{2N_j-1} \sum_{i=1}^{2N_j-1} k_{ji} p_{ji} \exp(-p_{ji} t), \quad j = 1; 2; 3 \quad (\text{III.38})$$

$$\text{Où : } \tau_{0j} = \left( \frac{-1}{\lambda_j} \right)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{p_{0j}}, \quad j=1,2,3, \quad \text{alors : } \begin{cases} \tau_{01} = 0.062 \\ p_{01} = 16.117 \end{cases}, \quad \begin{cases} \tau_{02} = 0.208 \\ p_{02} = 4.804 \end{cases}, \quad \begin{cases} \tau_{03} = 1 \\ p_{03} = 1 \end{cases}$$

La matrice de V est :

$$[V] = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 49 \\ 1 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{donc :}$$

$$[V]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.125 & -0.875 & 1.750 \\ 0.167 & -1 & 0.833 \\ 0.042 & -0.125 & 0.083 \end{bmatrix} = [\gamma]$$

Donc : à partir de l'équation (III.27), on obtient :

$$\alpha_i(t) = \sum_{j=1}^3 \gamma_{i+1,j} \exp g(t, \lambda_j); \quad i = 0;1;2. \quad (\text{III.39})$$

Alors :

$$\begin{cases} \alpha_0(t) = 0.125 \exp g(t, \lambda_1) - 0.875 \exp g(t, \lambda_2) + 1.750 \exp g(t, \lambda_3) \\ \alpha_1(t) = 0.167 \exp g(t, \lambda_1) - \exp g(t, \lambda_2) + 0.833 \exp g(t, \lambda_3) \\ \alpha_2(t) = 0.042 \exp g(t, \lambda_1) - 0.125 \exp g(t, \lambda_2) + 0.083 \exp g(t, \lambda_3) \end{cases} \quad (\text{III.40})$$

On remplace les valeurs de  $\alpha_i$  ( $i = 0,1,2$ ) dans l'équation (III.16), on obtient :

$$\Psi(t) = \alpha_0(t) I + \alpha_1(t) A + \alpha_2(t) A^2 \quad (\text{III.41})$$

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} \alpha_0(t) - 7\alpha_1(t) + 49\alpha_2(t) & 0 & \alpha_1 - 8\alpha_2 \\ 0 & \alpha_0(t) - 3\alpha_1(t) + 9\alpha_2(t) & \alpha_1 - 4\alpha_2 \\ 0 & 0 & \alpha_0(t) - \alpha_1(t) + \alpha_2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{III.42})$$

La figure (III.1) représente l'allure temporelle des coefficients  $\Psi_{11}(t)$ ,  $\Psi_{22}(t)$ ,  $\Psi_{33}(t)$  de la diagonale de la matrice de transition  $\Psi(t)$ .

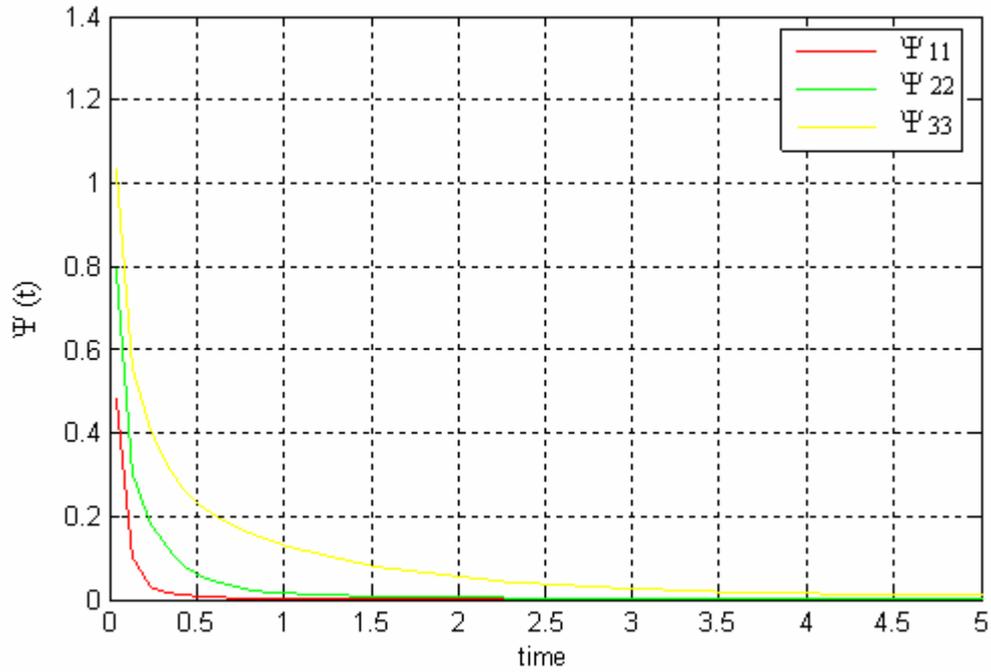


Figure (III.1) L'Allure temporelle des  $\Psi_{11}(t)$ ,  $\Psi_{22}(t)$ ,  $\Psi_{33}(t)$

**III.5.1.1 Réponse impulsionnelle**

Pour  $x(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$  et  $e(t) = \delta(t)$

$$x(t) = \Psi(t) * B e(t) \Rightarrow x(t) = \Psi(t) \cdot B \tag{III.43}$$

On choisit  $B = [0 \ 1 \ 2]^T$ , donc on obtient :

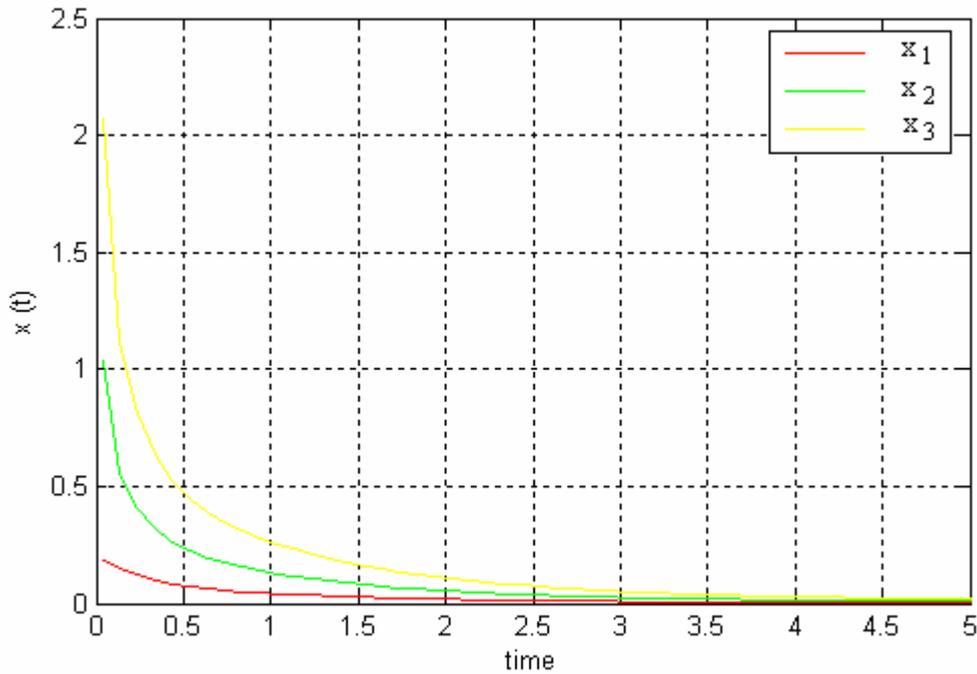
$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\Psi_{13}(t) \\ \Psi_{22}(t) + 2\Psi_{23}(t) \\ 2\Psi_{33}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha_1(t) - 16\alpha_2(t) \\ \alpha_0(t) - \alpha_1(t) + \alpha_2(t) \\ 2\alpha_0(t) - 2\alpha_1(t) + 2\alpha_2(t) \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} -0.338 \exp g(t, \lambda_1) + 0.338 \exp g(t, \lambda_3) \\ \exp g(t, \lambda_3) \\ 2 \exp g(t, \lambda_3) \end{bmatrix} \tag{III.44}$$

C'est-à-dire :

$$x(t) = \begin{bmatrix} -0.048 \sum_{i=1}^{2N_1-1} k_{1i} p_{1i} \exp(-p_{1i} t) + 0.338 \sum_{i=1}^{2N_3-1} k_{3i} p_{3i} \exp(-p_{3i} t) \\ \sum_{i=1}^{2N_3-1} k_{3i} p_{3i} \exp(-p_{3i} t) \\ 2 \sum_{i=1}^{2N_3-1} k_{3i} p_{3i} \exp(-p_{3i} t) \end{bmatrix} \tag{III.45}$$

La figure (III.2) représente la réponse impulsionnelle des états  $x_1, x_2, x_3$ .



**Figure (III.2)** La réponse impulsionnelle des états  $x_1, x_2, x_3$ .

### III.5.1.2 Réponse indicielle

Pour  $x(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$  et  $e(t) = u(t)$

$$x(t) = \Psi(t) * B u(t) \Rightarrow x(t) = \Psi(t) B * u(t) \quad (\text{III.46})$$

avec  $B = [0 \ 1 \ 2]^T$ , donc on obtient :

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \Psi_{13}(t) \\ \Psi_{22}(t) + 2 \Psi_{23}(t) \\ 2 \Psi_{33}(t) \end{bmatrix} * u(t) \quad (\text{III.47})$$

$$\Rightarrow x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \alpha_1(t) - 16 \alpha_2(t) \\ \alpha_0(t) - \alpha_1(t) + \alpha_2(t) \\ 2 \alpha_0(t) - 2 \alpha_1(t) + 2 \alpha_2(t) \end{bmatrix} * u(t)$$

Donc :

$$x(t) = \begin{bmatrix} -0.338 \exp g(t, \lambda_1) + 0.338 \exp g(t, \lambda_3) \\ \exp g(t, \lambda_3) \\ 2 \exp g(t, \lambda_3) \end{bmatrix} * u(t) \quad (\text{III.48})$$

A partir de la transformation de Laplace de cette dernière équation, on obtient :

$$X(s) = \begin{bmatrix} -0.338 L\{\exp g(t, \lambda_1)\} + 0.338 L\{\exp g(t, \lambda_3)\} \\ L\{\exp g(t, \lambda_3)\} \\ 2 L\{\exp g(t, \lambda_3)\} \end{bmatrix} U(s) \quad (\text{III.49})$$

Sachant que  $U(s) = 1/s$ , donc :

$$X(s) = \begin{bmatrix} -0.048 \sum_{i=1}^{2N_1-1} \frac{k_{1i}}{\left(1 + \frac{s}{p_{1i}}\right)} \cdot \frac{1}{s} + 0.338 \sum_{i=1}^{2N_3-1} \frac{k_{3i}}{\left(1 + \frac{s}{p_{3i}}\right)} \cdot \frac{1}{s} \\ \sum_{i=1}^{2N_3-1} \frac{k_{3i}}{\left(1 + \frac{s}{p_{3i}}\right)} \cdot \frac{1}{s} \\ 2 \sum_{i=1}^{2N_3-1} \frac{k_{3i}}{\left(1 + \frac{s}{p_{3i}}\right)} \cdot \frac{1}{s} \end{bmatrix} \quad (\text{III.50})$$

A partir de la transformation de Laplace inverse de cette dernière équation, on obtient :

$$x(t) = \begin{bmatrix} -0.048 \sum_{i=1}^{2N_1-1} k_{1i} [1 - \exp(-p_{1i} t)] + 0.338 \sum_{i=1}^{2N_3-1} k_{3i} [1 - \exp(-p_{3i} t)] \\ \sum_{i=1}^{2N_3-1} k_{3i} [1 - \exp(-p_{3i} t)] \\ 2 \sum_{i=1}^{2N_3-1} k_{3i} [1 - \exp(-p_{3i} t)] \end{bmatrix} \quad (\text{III.51})$$

La figure (III.3) représente la réponse indicielle des états  $x_1, x_2, x_3$ .

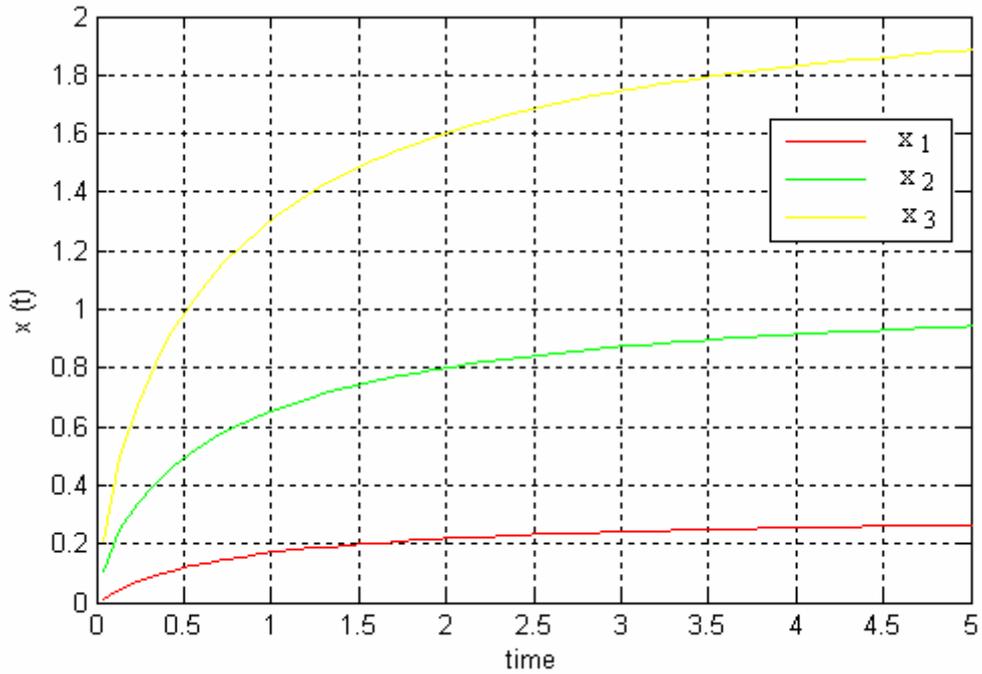


Figure (III.3) La réponse indicielle des états  $x_1, x_2, x_3$ .

**III.5. 2 Valeurs propres sont réelles et multiples**

On peut choisir la matrice d'évolution A pour donnée les valeurs propres réelles et multiples comme :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Donc, les valeurs propres de A sont :  $\lambda_1 = -1$ , et  $\lambda_2 = -4$  avec la multiplicité  $m_2 = 2$ , et ces derniers donnent trois fonctions fondamentales comme suit :

$$\begin{cases} L\{\exp g(t, \lambda_1)\} = G(s, \lambda_1) = \frac{1}{s^{0.7} + 1} \\ L\{\exp g_1(t, \lambda_2)\} = G_1(s, \lambda_2) = \frac{1}{s^{0.7} + 4} \\ L\{\exp g_2(t, \lambda_2)\} = G_2(s, \lambda_2) = \frac{1}{(s^{0.7} + 4)^2} \end{cases} \quad (III.52)$$

Sachant que :

$$G(s, \lambda_1) = \left(\frac{-1}{\lambda_1}\right)^{2N_1-1} \sum_{i=1}^{2N_1-1} \frac{k_{1i}}{\left(1 + \frac{s}{p_{1i}}\right)} \quad (III.53)$$

$$G_1(s, \lambda_2) = \left( \frac{-1}{\lambda_2} \right) \sum_{i=1}^{2N_1-1} \frac{k_{2i}}{\left( 1 + \frac{s}{p_{2i}} \right)} \quad (\text{III.54})$$

et

$$G_2(s, \lambda_2) = \left[ \left( \frac{-1}{\lambda_2} \right) \sum_{i=1}^{2N_2-1} \frac{k_{2i}}{\left( 1 + \frac{s}{p_{2i}} \right)} \right]^2 \quad (\text{III.55})$$

$$G_2(s, \lambda_2) = \left( \frac{-1}{\lambda_2} \right)^2 \frac{\prod_{i=1}^{2N_2-2} \left( 1 + \frac{s}{z_{2i}} \right)^2}{\prod_{i=1}^{2N_2-1} \left( 1 + \frac{s}{p_{2i}} \right)^2} = \sum_{i=1}^{2N_2-1} \sum_{j=1}^2 \frac{K_{j,i}}{\left( 1 + \frac{s}{p_{2i}} \right)^j} \quad (\text{III.56})$$

Où :

$$\begin{cases} K_{1,i} = \frac{d}{ds} \left( 1 + \frac{s}{p_{2i}} \right) G_2(s, \lambda_2) \Big|_{s = -p_{2i}} \\ K_{2,i} = \left( 1 + \frac{s}{p_{2i}} \right)^2 G_2(s, \lambda_2) \Big|_{s = -p_{2i}} \end{cases} \quad (\text{III.57})$$

La transformation de Laplace inverse des équations (III.53), (III.54) et (III.56) donne respectivement :

$$\exp g(t, \lambda_1) = \left( \frac{-1}{\lambda_1} \right) \sum_{i=1}^{2N_1-1} k_{1i} p_{1i} \exp(-p_{1i} t) \quad (\text{III.58})$$

$$\exp g_1(t, \lambda_2) = \left( \frac{-1}{\lambda_2} \right) \sum_{i=1}^{2N_2-1} k_{2i} p_{2i} \exp(-p_{2i} t) \quad (\text{III.59})$$

$$\text{Où : } \tau_{0j} = \left( \frac{-1}{\lambda_j} \right)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{p_{0j}}, \quad j=1,2, \text{ donc : } \begin{cases} \tau_{01} = 1 \\ p_{01} = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \tau_{02} = 0.138 \\ p_{02} = 7.246 \end{cases}$$

$$\exp g_2(t, \lambda_2) = \sum_{i=1}^{2N_2-1} \left[ K_{1,i} p_{2i} \exp(-p_{2i} t) + K_{2,i} p_{2i}^2 t \exp(-p_{2i} t) \right] \quad (\text{III.60})$$

La matrice de V est donnée par :

$$[V] = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 0 & 1 & 2\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 16 \\ 0 & 1 & -8 \end{bmatrix}.$$

$$[V]^{-1} = \begin{bmatrix} 1.778 & -0.778 & -1.333 \\ 0.889 & -0.889 & -1.667 \\ 0.111 & -0.111 & -0.333 \end{bmatrix} = [\gamma]$$

Donc à partir de l'équation (III.34), on obtient :

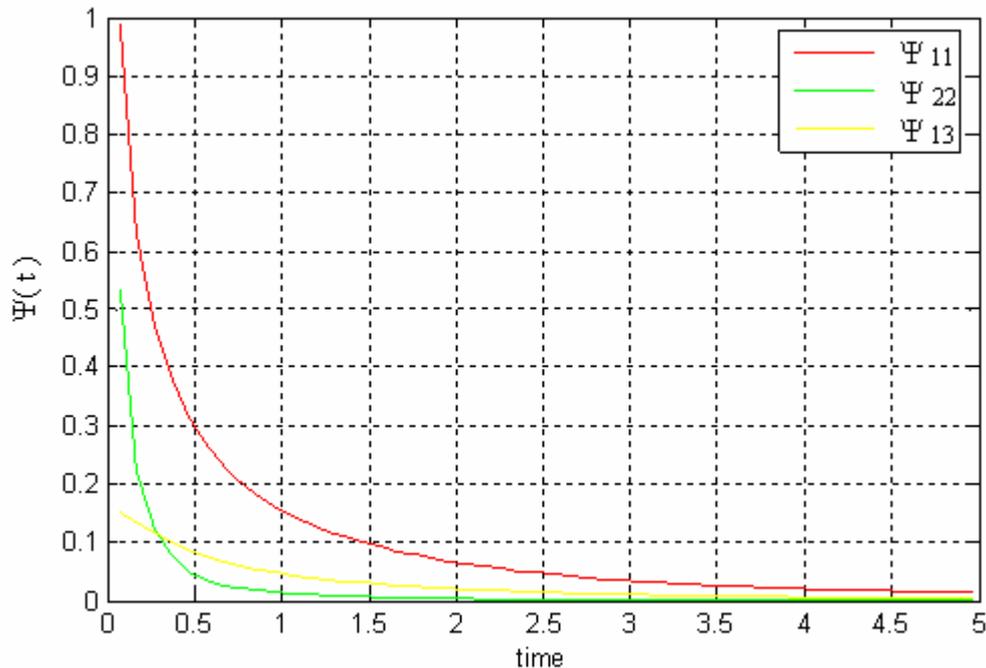
$$\begin{cases} \alpha_0(t) = 1.778 \exp g(t, \lambda_1) - 0.778 \exp g_1(t, \lambda_2) - 1.333 \exp g_2(t, \lambda_2) \\ \alpha_1(t) = 0.889 \exp g(t, \lambda_1) - 0.889 \exp g_1(t, \lambda_2) - 1.667 \exp g_2(t, \lambda_2) \\ \alpha_2(t) = 0.111 \exp g(t, \lambda_1) - 0.111 \exp g_1(t, \lambda_2) - 0.333 \exp g_2(t, \lambda_2) \end{cases} \quad (\text{III.61})$$

On remplace les valeurs de  $\alpha_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) dans l'équation (III.16), on obtient :

$$\Psi(t) = \alpha_0(t) I + \alpha_1(t) A + \alpha_2(t) A^2$$

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} \alpha_0(t) - \alpha_1(t) + \alpha_2(t) & 0 & \alpha_1(t) - 5\alpha_2(t) \\ 0 & \alpha_0(t) - 4\alpha_1(t) + 16\alpha_2(t) & \alpha_1(t) - 8\alpha_2(t) \\ 0 & 0 & \alpha_0(t) - 4\alpha_1(t) + 16\alpha_2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{III.62})$$

La figure (III.4) représente l'allure temporelle des coefficients  $\Psi_{11}(t)$ ,  $\Psi_{22}(t)$ , et  $\Psi_{33}(t)$  de la diagonale de la matrice de transition  $\Psi(t)$ .



**Figure (III.4)** L'Allure temporelle des  $\Psi_{11}(t)$ ,  $\Psi_{22}(t)$ ,  $\Psi_{33}(t)$

### III.5.2.1 Réponse impulsionnelle

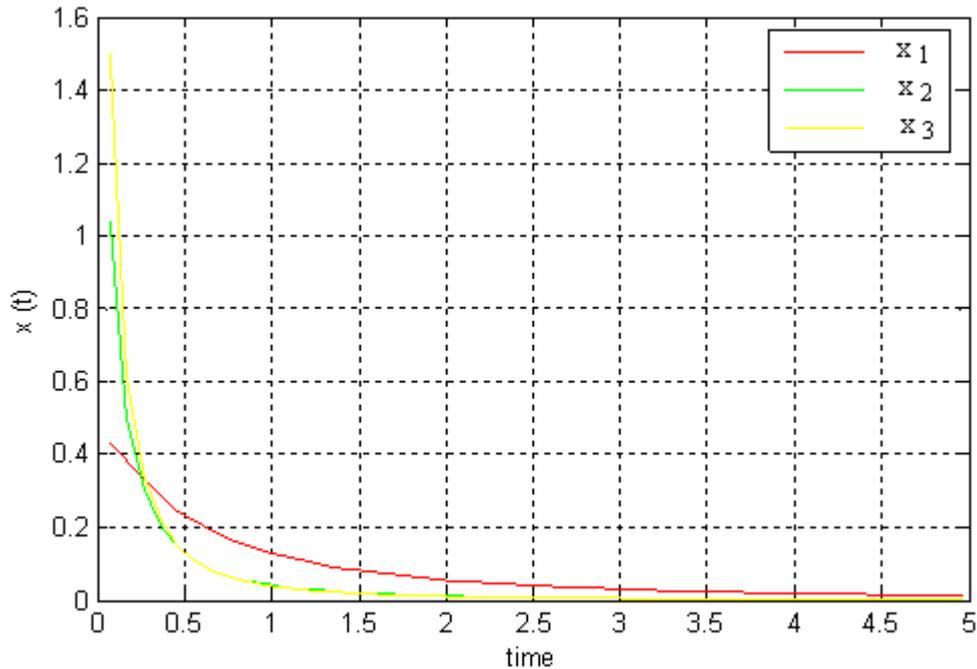
Pour  $x(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$  et  $e(t) = \delta(t)$

$$x(t) = \Psi(t) * B e(t) \Rightarrow x(t) = \Psi(t) \cdot B \quad (\text{III.63})$$

et sachant que  $B = [0 \ 1 \ 2]^T$ , donc on obtient :

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\Psi_{13}(t) \\ \Psi_{22}(t) + 2\Psi_{23}(t) \\ 2\Psi_{33}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha_1(t) - 10\alpha_2(t) \\ \alpha_0(t) - 2\alpha_1(t) \\ 2\alpha_0(t) - 8\alpha_1(t) + 32\alpha_2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{III.64})$$

La figure (III.5) représente la réponse impulsionnelle des états  $x_1, x_2, x_3$ .



**Figure (III.5)** La réponse impulsionnelle des états  $x_1, x_2, x_3$ .

### III.5.2.2 Réponse indicielle

Pour  $x(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$  et  $e(t) = u(t)$  :

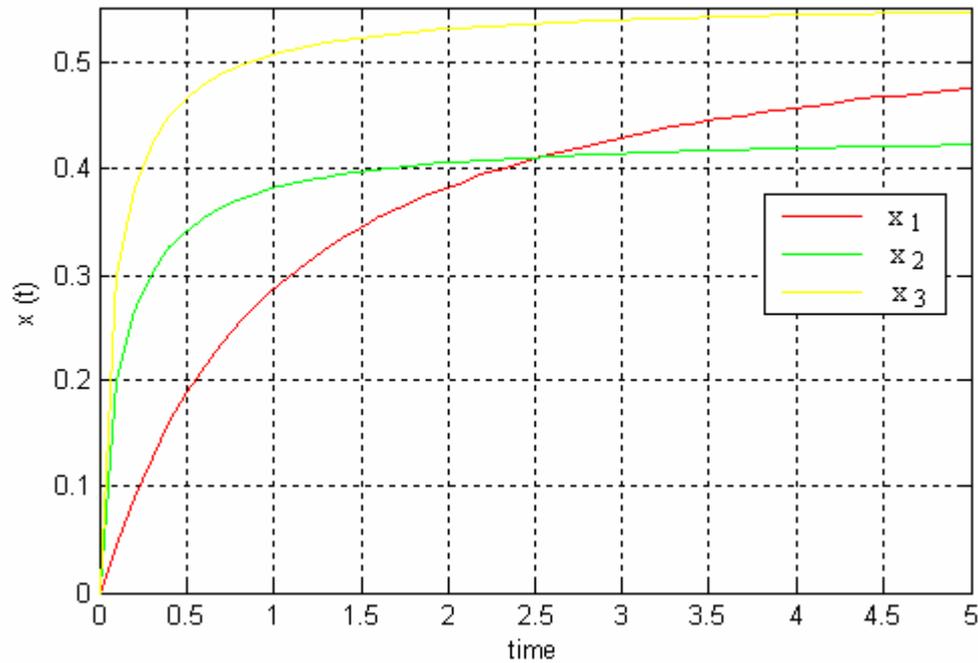
$$x(t) = \Psi(t) * B u(t) \Rightarrow x(t) = \Psi(t) B * u(t) \quad (\text{III.65})$$

et sachant que  $B = [0 \ 1 \ 2]^T$ , donc on obtient :

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\Psi_{13}(t) \\ \Psi_{22}(t) + 2\Psi_{23}(t) \\ 2\Psi_{33}(t) \end{bmatrix} * u(t)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha_1(t) - 10\alpha_2(t) \\ \alpha_0(t) - 2\alpha_1(t) \\ 2\alpha_0(t) - 8\alpha_1(t) + 32\alpha_2(t) \end{bmatrix} * u(t) \quad (\text{III.66})$$

Pour calculer  $x(t)$  on suit la même procédure que dans la section (III.5.1.2), c'est-à-dire utiliser la transformée de Laplace pour calculer  $X(s)$  puis utiliser la transformée de Laplace inverse pour calculer  $x(t)$ . La figure (III.6) représente donc la réponse indicielle des états  $x_1, x_2, x_3$ .



**Figure (III.6)** La réponse indicielle des états  $x_1, x_2, x_3$ .

# Chapitre IV

## **Application et Comparaison**

## Chapitre IV

### Application et Comparaison

#### IV.1 Introduction

Étant donné un système d'ordre fractionnaire dont le modèle d'état est donné par [13,15] :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Bu(t) \end{cases}, \quad (0 < \alpha < 1) \text{ et } x(0) = x_0 \quad (\text{IV.1})$$

Dans ce chapitre on va présenter une comparaison entre la méthode proposée, et la méthode dite de Mittag-Leffler pour la résolution de l'équation d'état d'ordre fractionnaire de l'équation (IV.1).

#### IV.2 Solution

En calculant la transformation de Laplace de l'équation (IV.1), on peut exprimer la transformation de Laplace du vecteur d'état par :

$$X(s) = (s^\alpha I - A)^{-1} BU(s) + (s^\alpha I - A)^{-1} x(0) \quad (\text{IV.2})$$

Alors le vecteur d'état  $x(t)$  est donné par :

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = L^{-1}\left\{(s^\alpha I - A)^{-1} BU(s) + (s^\alpha I - A)^{-1} x(0)\right\} \quad (\text{IV.3})$$

La matrice de transition  $\Psi(t)$  a été définie par:

$$\Psi(t) = L^{-1}\left\{(s^\alpha I - A)^{-1}\right\} \quad \text{pour } t \geq 0 \quad (\text{IV.4})$$

Donc on a :

$$x(t) = \Psi(t)x_0 + \Psi(t) * [Bu(t)] \Rightarrow \quad (\text{IV.5})$$

$$x(t) = \Psi(t)x_0 + \int_0^t \Psi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau.$$

#### IV.2.1 Méthode Proposée

A partir du chapitre III on a trouvé que :

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= L^{-1}\left\{(s^\alpha I - A)^{-1}\right\} = L^{-1}\left\{\alpha_0(s)I + \alpha_1(s)A + \alpha_2(s)A^2 + \dots + \alpha_{n-1}(s)A^{n-1}\right\} \\ &\Rightarrow \Psi(t) = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t)A^{n-1} \end{aligned} \quad (\text{IV.6})$$

Où  $\alpha_i(t) = L^{-1}\{\alpha_i(s)\}$  pour  $i = 0, 1, \dots, n-1$ .

Pour le calcul des  $\alpha_i(t)$ , on considère deux cas :

- **Valeurs propres réelles et distinctes**

On peut calculer les  $n$  coefficients  $\alpha_i(t)$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) par :

$$\alpha_i(t) = \sum_{j=1}^n \gamma_{i+1,j} \exp g(t, \lambda_j). \quad (\text{IV.7})$$

Où les fonctions  $\exp g(t, \lambda_j)$ , pour  $j=1, \dots, n$ , sont calculées comme dans l'équation (II.13).

- **Valeurs propres réels et multiples**

Dans ce cas, pour trouver les  $n$  coefficients  $\alpha_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ), il faut appliquer la relation suivante :

$$\alpha_i(t) = \sum_{j=1}^{m_1} \gamma_{i+1,j} \exp g_j(t, \lambda_1) + \sum_{j=(m_1+1)}^n \gamma_{i+1,j} \exp g(t, \lambda_{(j-m_1+1)}) \quad (\text{IV.8})$$

Où  $m_1$  est la multiplicité de la valeur propre  $\lambda_1$ .

Les fonctions  $\exp g(t, \lambda_j)$ , pour  $j=2, \dots, r$ , sont calculées comme dans l'équation (II.13) et les fonctions  $\exp g_j(t, \lambda_1)$ , pour  $j=1, \dots, m_1$ , sont calculées comme dans l'équation (II.23).

## IV.2.2 Méthode de Mittag-Leffler

A partir de l'équation (I.44) du chapitre I, on a [15] :

$$\Psi(t) = t^{(\alpha-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(\alpha + k\alpha)} \quad (\text{IV.9})$$

avec  $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$  est la fonction gamma d'Euler.

## IV.3 Exemples

Étant donné un système linéaire régi par une équation d'état d'ordre fractionnaire avec  $\alpha = 0.7$  comme suit :

$$\frac{d^{0.7} x(t)}{dt^{0.7}} = A x(t) + B e(t). \quad (\text{IV.10})$$

Où  $A(2 \times 2)$  la matrice d'évolution du système et

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \text{ le vecteur d'état.}$$

Alors :

$$x(t) = \Psi(t)x(0) + \Psi(t) * B e(t) \quad / \quad \Psi(t) = L^{-1} \left\{ s^{0.7} I - A \right\}^{-1} \quad (\text{IV.11})$$

### IV.3.1 Cas des valeurs propres réels et distinctes

La matrice d'évolution du système  $A(2 \times 2)$  est choisie comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

- **Méthode Proposée**

Les valeurs propres de  $A$  sont  $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = -2$ , alors les deux fonctions fondamentales simples correspondantes aux deux valeurs propres sont données par :

$$L^{-1} \{G(s, \lambda_j)\} = \exp g(t, \lambda_j) = \left( \frac{-1}{\lambda_j} \right)^{\sum_{i=1}^{2N_j-1} k_{ji}} p_{ji} \exp(-p_{ji} t), \quad j=1, 2 \quad (\text{IV.12})$$

$$\text{Où : } \tau_{0_j} = \left( \frac{-1}{\lambda_j} \right)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{p_{0_j}}, \quad j=1, 2 \quad \text{alors : } \begin{cases} \tau_{0_1} = 0.1003 \\ p_{0_1} = 9.9662 \end{cases}, \quad \begin{cases} \tau_{0_2} = 0.3715 \\ p_{0_2} = 2.6918 \end{cases}$$

Sachant que :

$$[V] = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ est la matrice de Vandermonde, donc :}$$

$$[V]^{-1} = [\gamma] = \begin{bmatrix} -0.6667 & 1.6667 \\ -0.3333 & 0.3333 \end{bmatrix}$$

et à partir de l'équation (IV.7) on obtient :

$$\alpha_i(t) = \sum_{j=1}^2 \gamma_{i+1,j} \exp g(t, \lambda_j); \quad i=0;1. \quad (\text{IV.13})$$

Alors :

$$\begin{cases} \alpha_0(t) = -0.6667 \exp g(t, \lambda_1) + 1.6667 \exp g(t, \lambda_2) \\ \alpha_1(t) = -0.3333 \exp g(t, \lambda_1) + 0.3333 \exp g(t, \lambda_2) \end{cases} \quad (\text{IV.14})$$

On remplace les valeurs de  $\alpha_i (i=0,1)$  dans l'équation (IV.6), on obtient :

$$\Psi(t) = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A \quad (\text{IV.15})$$

$$\Rightarrow \Psi(t) = \begin{bmatrix} \Psi_{11}(t) & \Psi_{12}(t) \\ \Psi_{21}(t) & \Psi_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0(t) - 5\alpha_1(t) & \alpha_1(t) \\ 0 & \alpha_0(t) - 2\alpha_1(t) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.16})$$

- **Méthode de Mittag-Leffler**

A partir de l'équation (IV.9), on a :

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} \Psi_{11}(t) & \Psi_{12}(t) \\ \Psi_{21}(t) & \Psi_{22}(t) \end{bmatrix} = (t)^{(\alpha-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(\alpha + k\alpha)} = (t)^{(\alpha-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{(0.7)k}}{\Gamma(\alpha + (0.7)k)} \quad (\text{IV.17})$$

avec  $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$  est la fonction gamma d'Euler.

### IV.3.1.1 Réponse impulsionnelle

On suppose que  $B = [1 \ 1]^T$ ,  $x(0) = [0 \ 0]^T$  et l'entrée  $e(t) = \delta(t)$ , on aura :

$$x(t) = \Psi(t) * B e(t) \Rightarrow x(t) = \Psi(t) \cdot B \quad (\text{IV.18})$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{11}(t) + \Psi_{12}(t) \\ \Psi_{21}(t) + \Psi_{22}(t) \end{bmatrix}$$

- **Méthode de Proposée**

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.133 \sum_{i=1}^{2N_1-1} k_{1i} p_{1i} \exp(-p_{1i} t) + 0.168 \sum_{i=1}^{2N_2-1} k_{2i} p_{2i} \exp(-p_{2i} t) \\ 0.5 \sum_{i=1}^{2N_2-1} k_{2i} p_{2i} \exp(-p_{2i} t) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.19})$$

- **Méthode de Mittag-Leffler**

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \left[ (t)^{(\alpha-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(\alpha + k\alpha)} \right] \cdot B \quad (\text{IV.20})$$

La figure (IV.1) représente la réponse impulsionnelle des états  $x_1$ ,  $x_2$ .

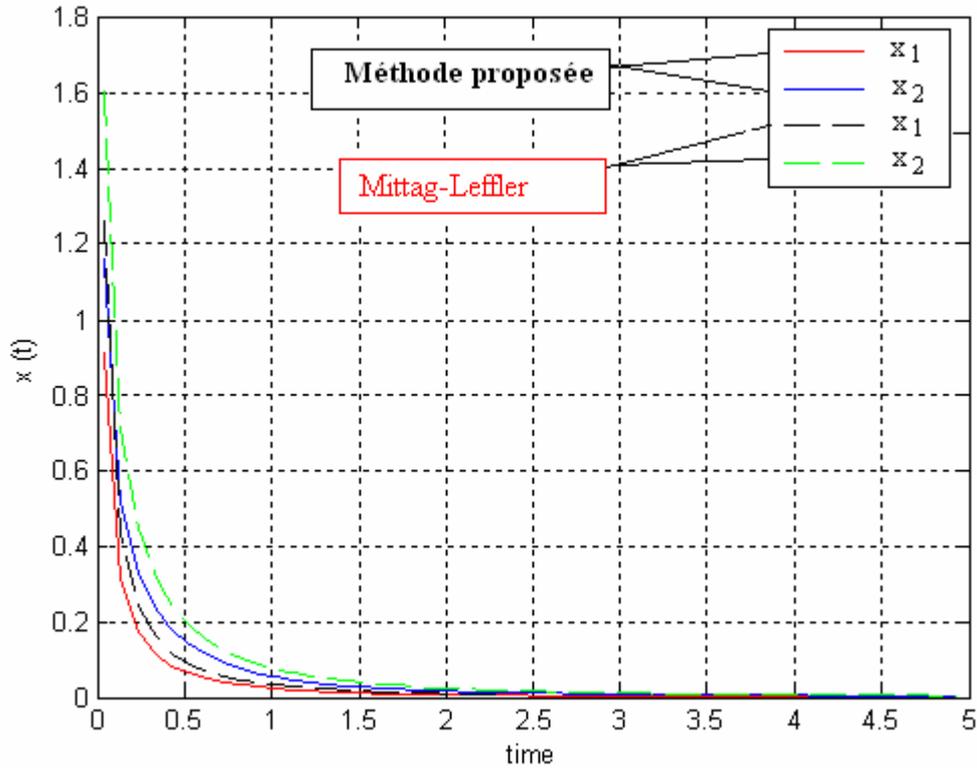


Figure (IV.1) La réponse impulsionnelle des états  $x_1, x_2$ .

**IV.3.1.2 Réponse indicielle**

On suppose que  $B = [1 \ 1]^T$ ,  $x(0) = [0 \ 0]^T$  et l'entrée  $e(t) = u(t)$ , on aura :

$$x(t) = \Psi(t) * B u(t) \Rightarrow x(t) = \Psi(t)B * u(t) \tag{IV.21}$$

$$\Rightarrow x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{11}(t) + \Psi_{12}(t) \\ \Psi_{21}(t) + \Psi_{22}(t) \end{bmatrix} * u(t)$$

- **Méthode proposée**

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.133 \sum_{i=1}^{2N_1-1} k_{1i} p_{1i} (1 - \exp(-p_{1i} t)) + 0.168 \sum_{i=1}^{2N_2-1} k_{2i} p_{2i} (1 - \exp(-p_{2i} t)) \\ 0.5 \sum_{i=1}^{2N_2-1} k_{2i} p_{2i} (1 - \exp(-p_{2i} t)) \end{bmatrix} \tag{IV.22}$$

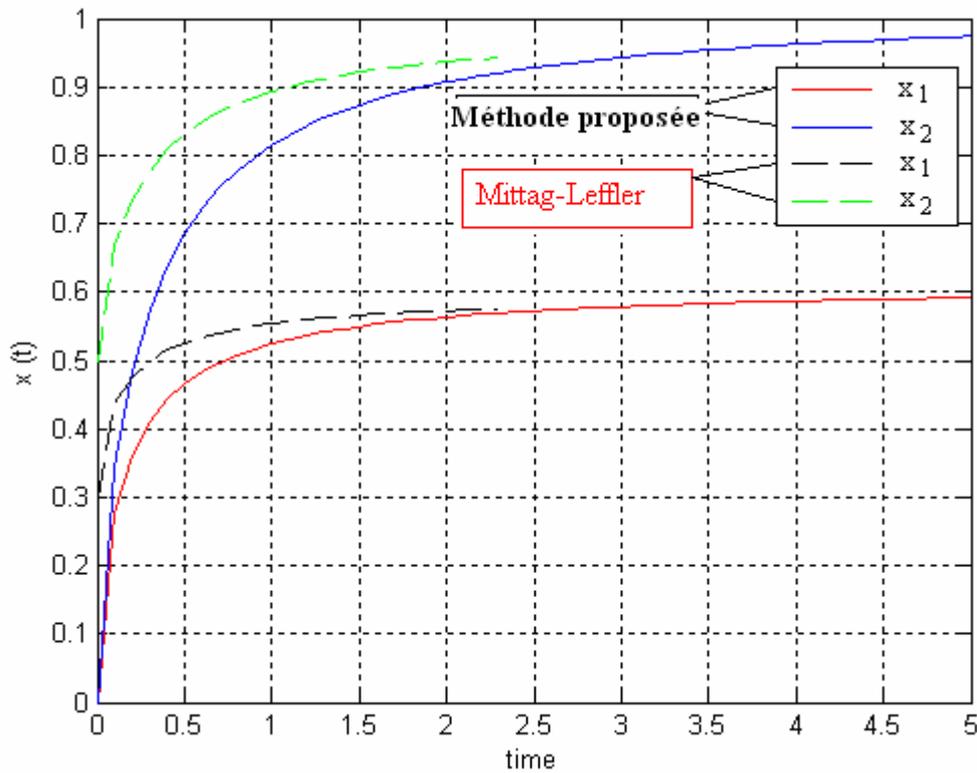
- **Méthode de Mittag-Leffler [26]**

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \{(A^{-1}) [E_\alpha [At^\alpha] - u(t)]\} \cdot B \tag{IV.23}$$

$E_\alpha$  est la fonction de Mittag-leffler donnée par :

$$E_\alpha[A t^\alpha] = \sum_{k=0}^{300} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)} \quad (\text{IV.24})$$

La figure (IV.2) représente la réponse indicielle des états  $x_1, x_2$ .



**Figure (IV.2)** La réponse indicielle des états  $x_1, x_2$ .

### IV.3.2 Cas des valeurs propres réels et multiples

La matrice d'évolution du système  $A(2 \times 2)$  est choisie comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

- **Méthode Proposée**

Les valeurs propres de  $A$  sont  $\lambda_1 = -4$  avec une multiplicité  $m_1 = 2$ , alors les deux fonctions fondamentales correspondantes sont données par :

$$\exp g(t, \lambda_1) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{0.7} - \lambda_1} \right\} = \left( \frac{-1}{\lambda_1} \right) \sum_{i=1}^{2N-1} k_i p_i \exp(-p_i t) \quad (\text{IV.25})$$

$$\text{Où : } \tau_0 = \left( \frac{-1}{\lambda_1} \right)^{0.7} = \frac{1}{p_0} \quad \text{alors : } \begin{cases} \tau_0 = 0.138 \\ p_0 = 7.246 \end{cases}$$

$$\exp g_2(t, \lambda_1) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{[s^{0.7} - \lambda_1]^2} \right\} = \sum_{i=1}^{2N-1} [K_{1,i} p_i \exp(-p_i t) + K_{2,i} p_i^2 t \exp(-p_i t)] \quad (\text{IV.26})$$

Sachant que :

$$[V] = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ est la matrice de Vandermonde, donc :}$$

$$[V]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [\gamma]$$

et à partir de l'équation (IV.8) on obtient :

$$\alpha_i(t) = \sum_{j=1}^2 \gamma_{i+1,j} \exp g(t, \lambda_1), \quad i = 0; 1. \quad (\text{IV.27})$$

donc,

$$\begin{cases} \alpha_0(t) = \exp g(t, \lambda_1) + 4 \exp g_2(t, \lambda_1) \\ \alpha_1(t) = \exp g_2(t, \lambda_1) \end{cases} \quad (\text{IV.28})$$

On remplace les valeurs de  $\alpha_i (i = 0, 1)$  dans l'équation (IV.6), on obtient :

$$\Psi(t) = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A \quad (\text{IV.29})$$

$$\Rightarrow \Psi(t) = \begin{bmatrix} \Psi_{11}(t) & \Psi_{12}(t) \\ \Psi_{21}(t) & \Psi_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0(t) - 5\alpha_1(t) & \alpha_1(t) \\ 0 & \alpha_0(t) - 2\alpha_1(t) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.30})$$

#### • Méthode de Mittag-Leffler

A partir de l'équation (IV.9), on a :

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} \Psi_{11}(t) & \Psi_{12}(t) \\ \Psi_{21}(t) & \Psi_{22}(t) \end{bmatrix} = (t)^{(\alpha-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(\alpha + k\alpha)} = (t)^{(\alpha-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{(0.7)k}}{\Gamma(\alpha + (0.7)k)} \quad (\text{IV.31})$$

avec  $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$  est la fonction gamma d'Euler.

#### IV.3.2.1 Réponse impulsionnelle

On suppose que  $B = [1 \quad 1]^T$ ,  $x(0) = [0 \quad 0]^T$  et l'entrée  $e(t) = \delta(t)$ , on aura :

$$x(t) = \Psi(t) * B e(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = \Psi(t) \cdot B \quad (\text{IV.32})$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{11}(t) + \Psi_{12}(t) \\ \Psi_{21}(t) + \Psi_{22}(t) \end{bmatrix}$$

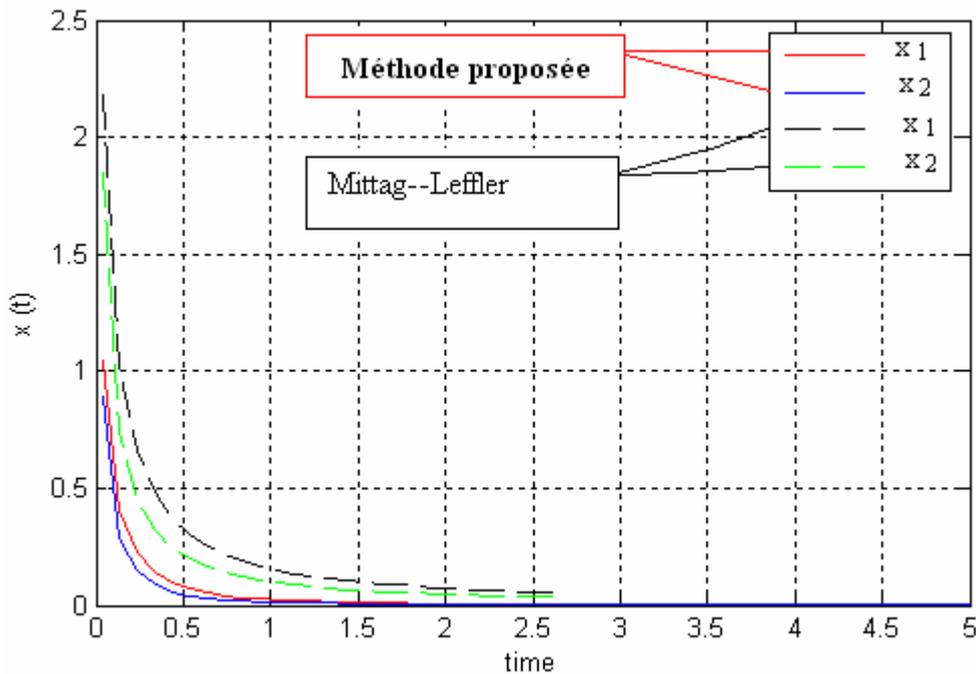
• **Méthode Proposée**

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.250 \sum_{i=1}^{2N-1} k_i p_i \exp(-p_i t) + 2 \sum_{i=1}^{2N-1} [K_{1,i} p_i \exp(-p_i t) + K_{2,i} p_i^2 t \exp(-p_i t)] \\ 0.250 \sum_{i=1}^{2N-1} k_i p_i \exp(-p_i t) \end{bmatrix} \quad (IV.33)$$

• **Méthode de Mittag-Leffler**

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \left\{ (t)^{(\alpha-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(\alpha + k\alpha)} \right\} \cdot B \quad (IV.34)$$

La figure (IV.3) représente la réponse impulsionnelle des états  $x_1, x_2$ .



**Figure (IV.3)** La réponse impulsionnelle des états  $x_1, x_2$ .

**IV.3.2.2 Réponse indicielle**

On suppose que  $B = [1 \ 1]^T$ ,  $x(0) = [0 \ 0]^T$  et l'entrée  $e(t) = u(t)$ , on aura :

$$x(t) = \Psi(t) * B u(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = \Psi(t)B * u(t) \quad (IV.35)$$

$$\Rightarrow x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{11}(t) + \Psi_{12}(t) \\ \Psi_{21}(t) + \Psi_{22}(t) \end{bmatrix} * u(t)$$

• **Méthode Proposée**

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.250 \sum_{i=1}^{2N-1} k_i (1 - \exp(-p_i t)) + 2 \sum_{i=1}^{2N-1} [K_{1,i} (1 - \exp(-p_i t)) + K_{2,i} (1 - \exp(-p_i t) - t \exp(-p_i t))] \\ 0.250 \sum_{i=1}^{2N-1} k_i (1 - \exp(-p_i t)) \end{bmatrix} \quad (IV.36)$$

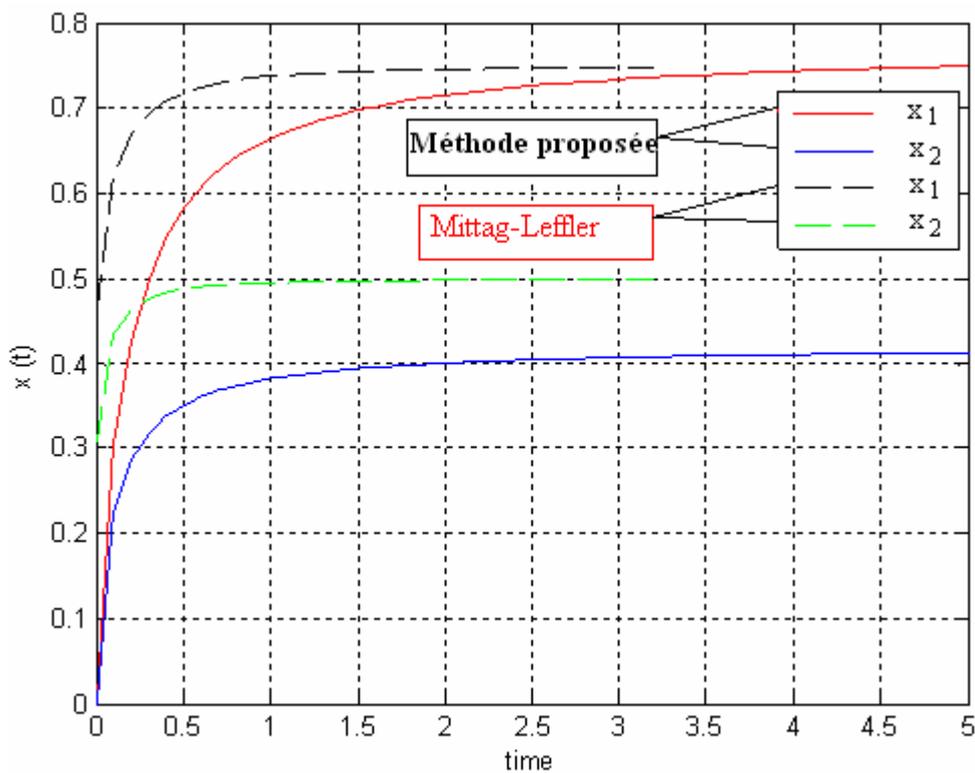
• **Méthode de Mittag-Leffler**

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \{ (A^{-1}) [E_{\alpha} [A t^{\alpha}] - u(t)] \} \cdot B \quad (IV.37)$$

Sachant que :

$$E_{\alpha} [A t^{\alpha}] = \sum_{k=0}^{300} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(1 + k\alpha)}$$

La figure (IV.4) représente la réponse indicielle des états  $x_1, x_2$ .



**Figure (IV.4)** La réponse indicielle des états  $x_1, x_2$ .

## **Conclusion Générale**

## Conclusion Générale

Une classe de systèmes d'ordre fractionnaire peut être représentée par une équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire comme suit :

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = Ax(t) + Be(t), \text{ pour } 0 < \alpha < 1$$

Alors, le but de ce travail est de présenter une méthode de résolution de ce type d'équation d'état d'ordre fractionnaire afin de faciliter son étude, analyse et synthèse.

Les travaux réalisés et les résultats obtenus pour la résolution de cette équation différentielle sont basés sur la méthode d'approximation des fonctions irrationnelles de Charef et la technique de Cayley Hamilton pour la résolution des équations différentielles régulières. Les réponses impulsionnelle et indicielle de ce type de système ont été dérivées. Des exemples illustratifs ont été présentés pour tester l'approche de résolution. Une comparaison avec une autre méthode basée sur une certaine fonction dite fonction de Mittag-Leffler a aussi été faite pour montrer l'efficacité de notre technique de résolution de l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire.

Dans ce travail on a considéré que les valeurs propres réelles de la matrice d'état A, alors comme perspective, on suggère l'extension de cette méthode de résolution des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire aux valeurs propres complexes conjuguées pures et complexes conjuguées.

## Références

---

## Références

- [1] T. Poinot, J.-C. Trigeassou, A method for modelling and simulation of fractional systems, signal processing N° 83, 2003
- [2] H. Hun Sun, A. Charef, The Time Domain Analysis of The Fractal System for Electrode Polarization phenomenon, Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. Vol.12, No. 1, 1990
- [3] Shunji Manabe, Early development of fractional order control, Proceedings of DETC'03, ASME 2003 Desing Engineering Technical Conferences and Computers and information in Engineering Conference, Chicago, Illinois, USA, September 2-6, 2003
- [4] A. Charef, H. H. Sun, Y.Y.Tsao, B.Onaral. Fractal System as Represented by Singularity Function, IEEE Transaction on Automatic Control, vol.37, N° 9, September 1992
- [5] I. A. Brin, On the stability of certain systems with distributed and lumped parameters, Automatic Remote Control, N° 23, 1962
- [6] H. M. Srivastava and R. K. Saxena, Operators of fractional integration and their applications, Applied Mathematics and Computation, N° 118, 2001
- [7] C. F. Lorenzo and T. T. Hartley, Variable order and Distributed order Fractional Operators, Nonlinear Dynamics, N°29, 2002
- [8] A. M. A. El-Sayed and F. M. Gaafar, Fractional calculus and some intermediate physical processes, Applied Mathematics and Computation, N°144, 2003
- [9] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, USA, 1999
- [10] K. S. Miller and B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, Wiley, New York, USA, 1993
- [11] A. Oustaloup et al, Représentation et identification par modèle non entier, Lavoisier, Paris, France, 2005
- [12] O. Cois, F. Levron & A. Oustaloup, Complex fractional systems: modal decomposition and stability condition, 6th European Control Conference, ECC'2001, Porto, Portugal, 3-5 September 2001
- [13] A. Oustaloup, La Dérivation non entière: Théorie, synthèse et application, Editions Hermes, Paris, 1995
- [14] D. Matignon, Stability properties for generalized fractional differential systems, ESAIM proceedings, (1998)
- [15] B. M. Vinagre, C. A. Monje and A. J. Calderon, Fractional Calculus Applications in Automatic Control and Robotics, Las Vegas, 9 December 2002

- 
- [16] R. L. Bagley and R. A. Calico, fractional order state equations for the control of viscoelastically damped structures, N° 2, 1991
- [17] C. F. Lorenzo and T. T. Hartley, A solution to the fundamental linear fractional order differential equation, 1998
- [18] F. Mainardi and R. Gorenflo 'On Mittag-Leffler-Type Functions in Fractional Evolution Processes,' Journal of Computational and Applied Mathematics 118, 2000
- [19] D. Matignon, Stability results for fractional differential equation with application to control processing, Proc. CESA'96, Symp. On Control, Optimisation and Supervision, Lille, France, 1996
- [20] D. Matignon, B. D'Andrea-Novel, Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems, dans Computational engineering in systems applications, IMACS, IEEE-SMC, Lille, France, juillet 1996
- [21] E. D. Sontag, Mathematical control theory, Deterministic finite dimensional systems, Volume 6 of texts in applied mathematics, Springer Verlag, 1990
- [22] D. Valério, Fractional Robust System Control, PhD thesis, Universidade Técnica de Lisboa, 2005
- [23] I. Podlubny, The Laplace transform method for linear differential equations of the fractional Order, Technical Report UEF-02-94, Inst. Exp. Phys. Slovak , Academy of Sciences, Kosice, Slovak Republic, 1994
- [24] K. S. Cole and R. H. Cole, Dispersion and absorption in dielectrics, alternation current characterization, J. Chem, Physics vol. 9, 1941
- [25] H. H. Sun, A.Charef, Y.Y.Tsao , and B.Onaral, Analysis of Polarization Dynamics by Singularity Decomposition Method, Annals of Biomedical Engineering, Vol. 20, 1992
- [26] J. R. MacDonald, Impedance spectroscopy, NY, John Wiley, 1987

## ملخص

إن الأنظمة الخطية ذات الأس الكسري هم أنظمة خطية ديناميكية يمكن تمثيلها بمعادلات تفاضلية ذات أس كسري كما يلي:

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}, \quad \text{pour } 0 < \alpha < 1$$

إذا إن الهدف الرئيسي من هذا العمل هو تقديم طريقة حل لهذا النوع من المعادلات التفاضلية ذات الأس الكسري من أجل تسهيل دراستها و تحليلها الشامل.

الأعمال المنجزة و النتائج المتحصل عليها من أجل حل هذه المعادلة التفاضلية معتمدة أساسا على طريقة تقريب الدوال الغير أصلية ل Charef و تقنية Cayley Hamilton من أجل حل المعادلات التفاضلية بشكل مضبوط. وقمنا باستخراج أجوبة دفع وأجوبة ذات سلم وحدوي لهذا النوع من الأنظمة. أمثلة توضيحية قدمناها من أجل رؤية مدى الاقتراب من الحل , ولقد قمنا بمقارنة هذه النتائج مع أعمال أخرى تركز على استعمال دالة تدعى دالة Mittag-Leffler من أجل البرهان على مدى فاعلية تقنية حلنا لهذه المعادلة التفاضلية ذات الأس الكسري.

## Abstract

Fractional order systems are linear dynamical systems represented by linear fractional order differential equations given as:

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases}, \quad \text{pour } 0 < \alpha < 1$$

Therefore, the goal of this work is to present a resolution method of this type of fractional order state equation in order to facilitate its study, analysis and synthesis.

The work realized and the results obtained for the resolution of this differential equation are based on Charef's approximation method of irrational functions and the Cayley Hamilton's technique for the resolution of regular linear differential equations. The impulse and the step responses of this type of systems have been derived. Illustrative examples have been presented to test the resolution approach. A comparison with another method based on the so-called function of Mittag-Leffler has also been made to show the effectiveness of our resolution technique of the linear fractional order differential equation.