

*Electronique*

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

THESE  
DE  
MAGISTER

*HAD/2608*

Présentée

A

L'INSTITUT D'ELECTRONIQUE  
UNIVERSITE DE CONSTANTINE

Option: Contrôle et Décision

Par:

**Mohamed Laid HADJILI**

THEME

**COMMANDE ADAPTATIVE DIRECTE  
A MODELE DE REFERENCE  
D'ORDRE FRACTIONNAIRE**

Soutenue le        /        / 1994, Devant le jury composé de:

K. BELARBI , Ph. D, Maître de Conférence, Université de Constantine	Président
A. CHAREF , Ph. D, Chargé de cours, Université de Constantine	Examineur
K. BENMAHAMMED , Ph. D, Maître de Conférence, Université de Sétif	Examineur
L. ABIDA , Ph. D, Professeur, Université de Batna	Rapporteur

## **DEDICACES**

*A ma mère.*

*A mon père.*

*A la mémoire de mon frère Belgacem.*

*A mon frère Messaoud et sa femme.*

*A ma soeur Mebarka et son mari.*

*A mes neveux et nièces.*

*A tous mes amis et collègues.*

*Je dedie ce modeste travail.*

**Mohamed Laid**

## **REMERCIEMENTS**

*Ce travail à été proposé par le Professeur L. ABIDA , qu'il trouve ici mes sincères remerciements et l'expression de ma très respectueuse reconnaissance pour m'avoir permis d'entreprendre ce travail.*

*Je tiens à remercier Mr K. BELARBI pour avoir accepté la charge de présider le jury.*

*Mes remerciements vont aussi à Mr A. CHAREF , pour ses conseils et pour sa présence au jury.*

*J'exprime mes remerciements à Mr K. BENMAHAMED , pour l'honneur qu'il me porte en participant au jury.*

*Mon salut va amicalement à tous ceux qui m'ont aidé à mener ce travail à sa fin, je citerai en particulier Mr A. Hamedî Cherif , N. Benoudjit, N. Golea et A. Fortas.*

*J'exprime mes sincères remerciements à Mr A. Benoudjit et N. Naït Saïd ,pour la correction du manuscrit et pour leurs encouragements.*

*Je suis très reconnaissant à l'effectif de l'institut d'électronique de Batna pour leur aide matériel et moral, en particulier M. Behaz, M. Litim et Z. Dibi.*

*Je tiens à remercier ma grande famille pour son aide et ses encouragements, en particulier N. Merbai.*

*Que mes collègues des instituts d'électronique de Constantine et de Setif trouvent ici mes sincères remerciements pour leurs aides et encouragements.*

*Enfin dans le souci de n'oublier personne, que tout ceux qui m'ont aidé de près ou de loin, que ce soit par leur amitié, leurs conseils ou leur soutien moral et matériel, trouvent dans ces quelques aimables et sincères mots l'expression de ma profonde gratitude.*

## RESUME

Le désir d'utiliser un système présentant d'excellentes performances dynamiques (rapidité, précision et stabilité), comme modèle de référence, nous a orienté à choisir les systèmes d'ordre fractionnaire pour les implanter dans une boucle de commande adaptative directe.

Les systèmes d'ordre fractionnaire sont modélisés par des fonctions irrationnelles dont l'étude n'est pas évidente. Cela nous a obligé de les représenter sous leurs approximations.

La méthode des fonctions singulières est utilisée pour l'approximations des systèmes d'ordre fractionnaire. Cette dernière nous a permet de représenter ce type de systèmes par des fonctions de transfert paramétriques.

Un algorithme de commande adaptative directe à modèle de référence est présenté en lui associent un modèle de référence d'ordre fractionnaire sous forme approximée.

L'algorithme fait appel à l'ajustement des paramètres du contrôleur pour réaliser un suivit parfait du modèle. Trois méthodes d'ajustement sont utilisée:

- Méthode de MIT " the MIT rule"
- Méthode basée sur l'approche de Lyapunov
- Méthode basée sur la théorie de passivité

Cet algorithme est appliqué sur des systèmes academiques du premier et du second ordre. Ainsi que pour un système typique, le moteur à courant continu.

Ces exemples ont été proposés pour mettre en évidence les avantages d'une telle stratégie de commande.

# SOMMAIRE

<b>CHAPITRE I : INTRODUCTION GENERALE .....</b>	<b>1</b>
I-1 COMMANDE.....	1
I-2 COMMANDE ADAPTATIVE.....	1
I-3 SYSTEME D'ORDRE FRACTIONNAIRE.....	2
I-4 OBJECTIF DE LA THESE.....	3
I-5 PRESENTATION DU TRAVAIL.....	4
<b>CHAPITRE II : COMMANDE ADAPTATIVE A MODELE DE REFERENCE</b>	<b>5</b>
II-1 INTRODUCTION.....	5
II-2 ENONCE DU PROBLEME.....	6
II-3 COMMANDE ADAPTATIVE DIRECTE A MODELE DE REFERENCE.....	7
II-3.1 Méthode dite " the MIT rule " .....	11
II-3.2 Méthode basée sur l'analyse de stabilité de Lyapunov.....	12
II-3.3 Méthode basée sur la théorie du passivité.....	12
II-4 CONCLUSION.....	12
<b>CHAPITRE III : SYSTEMES D'ORDRE FRACTIONNAIRE .....</b>	<b>13</b>
III-1 INTRODUCTION.....	13
III-2 APPROXIMATION DES SYSTEMES D'ORDRE FRACTIONNAIRE.....	14
III-2.1: SYSTEME DU PREMIER ORDRE FRACTIONNAIRE .....	15
III-2.1.1 Approximation.....	15
III-2.1.2 Représentation d'état.....	16
III-2.1.3 Synthèse.....	18
III-2.2 SYSTEME DU SECOND ORDRE FRACTIONNAIRE.....	19
III-2.2.1 Approximation.....	19
III-2.2.2 Représentation d'état.....	22

III-2.2.3 Synthèse.....	23
III-3 PERFORMANCES DES SYSTEMES D'ORDRE FRACTIONNAIRE.....	25
III-4 CONCLUSION.....	29
<b>CHAPITRE IV : COMMANDE ADAPTATIVE DIRECTE A MODELE DE REFERENCE D'ORDRE FRACTIONNAIRE .....</b>	<b>30</b>
IV-1 INTRODUCTION.....	30
IV-2 PROCESSUS A COMMANDER.....	30
IV-3 MODELE DE REFERENCE D'ORDRE FRACTIONNAIRE.....	31
V-4 SYNTHÈSE DU CONTROLEUR.....	32
IV-4.1 Synthèse basée sur la règle dite " the MIT rule ".....	34
IV-4.2 Synthèse basée sur l'approche de Lyapunov.....	35
IV-4.3 Synthèse basée sur la théorie de passivité.....	36
IV-5 CONCLUSION.....	40
<b>CHAPITRE V : SIMULATIONS .....</b>	<b>41</b>
V-1. INTRODUCTION.....	41
V-2 COMMANDE ADAPTATIVE DIRECTE A MODELE DE REFERENCE D'ORDRE FRACTIONNAIRE D'UN PROCESSUS DU PREMIER ORDRE.....	42
V-2.1 Le processus à commander.....	42
V-2.2 Le modèle de référence.....	42
V-2.3 Synthèse du contrôleur.....	44
V-2.3.a Cas du modèle de référence d'ordre entier.....	44
V-2.3.a.1 Synthèse basée sur la méthode de MIT.....	44
V-2.3.a.2 Synthèse basée sur la méthode de Lyapunov.....	46
V-2.3.b Cas du modèle de référence d'ordre fractionnaire.....	48
V-2.3.b.1 Synthèse basée sur la méthode de MIT.....	48
V-2.3.b.2 Synthèse basée sur la méthode de passivité.....	50
V-2.4 CONCLUSION.....	52

---

V-3 COMMANDE ADAPTATIVE DIRECTE A MODELE DE REFERENCE D'ORDRE FRACTIONNAIRE D'UN PROCESSUS DU SECOND ORDRE.....	53
V-3.1 Le processus à commander.....	53
V-3.2 Le modèle de référence.....	53
V-3.3 Synthèse du contrôleur.....	55
V-3.3.a Cas du modèle de référence d'ordre entier.....	55
V-3.3.a.1 Synthèse basée sur la méthode de MIT.....	55
V-3.3.b Cas du modèle de référence d'ordre fractionnaire.....	57
V-3.3.b.1 Synthèse basée sur la méthode de MIT.....	57
V-3.3.b.2 Synthèse basée sur la méthode de passivité.....	59
V-3.4 CONCLUSION.....	62
V-4 COMMANDE EN VITESSE D'UN MOTEUR A COURANT CONTINU.....	63
V-4.1 Regulateur PI.....	64
V-4.2 Commande adaptative à modèle de référence d'ordre entier.....	65
V-4.3 Commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire.....	67
V-4.4 CONCLUSION.....	70
<b>CHAPITRE VI : CONCLUSION GENERALE .....</b>	<b>71</b>
<b>ANNEXE .....</b>	<b>74</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>	<b>75</b>

## **INTRODUCTION GENERALE**



# **INTRODUCTION GENERALE**

## **I-1 COMMANDE :**

La commande des processus industriels complexes constitue un vaste domaine d'application en automatique. La commande des systèmes dynamiques peut être définie comme un ensemble de composants qui régule un flux d'énergie, de matière, ou autre ressources. Leurs arrangements et complexité varient selon l'usage et la fonction.

Dans ses débuts, la théorie de la commande reposait sur des méthodes d'analyse et de synthèse dans le domaine des fréquences (Nyquist, Bode, Nichols, etc...). Malheureusement, ces techniques sont limitées aux systèmes monovariables (SISO).

Vu la complexité des systèmes, l'accroissement de leurs dimensions et le nombre de variables mises en jeu les chercheurs ont envisagé des théories modernes de commande telles que :

- La commande par placement des pôles.
- La commande optimale.
- La commande adaptative.
- La commande prédictive.

## **I-2 COMMANDE ADAPTATIVE :**

Les recherches sur la commande adaptative ont été lancées au début des années cinquante, dans le but d'améliorer les performances des avions [19]. Ces derniers fonctionnent dans une large gamme de vitesse et d'altitude, ce qui nécessite des contrôleurs sophistiqués qui peuvent tenir compte des changements des conditions de fonctionnement.

Après 1960, plusieurs contributions ont poussé le développement de la commande adaptative, telles que la notion de l'espace d'état et la théorie de la stabilité [20]. Belman [21] a porté de nouveaux résultats sur la commande stochastique et la programmation dynamique. Tsytkin [22] a montré que plusieurs schémas de commande à apprentissage et

de commande adaptative doivent être représentés par une structure d'équations récursives spéciales. Plusieurs développements en identification et estimation ont été entamés [23].

La commande adaptative est née de nouveau dans les années soixante-dix, où plusieurs méthodes de calcul ont été combinées avec les schémas de la commande adaptative, mais les résultats sont restés limités [24]. A la fin des années soixante-dix, début quatre vingt des démonstrations correctes sont portées sur la stabilité des systèmes adaptatifs [25][26][28].

L'évolution rapide de la micro-électronique a permis l'implémentation des contrôleurs adaptatifs d'une manière simple et moins coûteuse.

Des progrès considérables sont aujourd'hui orientés vers la recherche dans ce domaine actif, par les universitaires et les industriels [28][29][31].

Les régulateurs adaptatifs trouvent aujourd'hui leur place dans le marché, vu les performances excellentes qu'ils offrent aux applications industrielles [32][33].

La commande adaptative à modèle de référence (CAMR) est l'approche la plus utilisée dans la commande adaptative. Elle peut être divisée en deux catégories :

\* Adaptation explicite: Les paramètres du processus sont estimés en ligne et utilisés pour l'ajustement de la loi de commande.

\*\* Adaptation implicite: Dans un tel cas les paramètres du processus ne sont pas identifiés; la loi de commande est directement ajustée à partir des données sur les états, les sorties et les signaux de références.

### I-3 SYSTEMES D'ORDRE FRACTIONNAIRE :

La notion de dérivée non entière est encore pratiquement méconnue chez les physiciens et ne bénéficie pas de la considération qu'elle mérite chez ceux qui la connaissent par son existence ou même par sa définition. Cet état de fait s'explique fort bien par le nombre limité de ses applications actuelles.

Beaucoup plus récemment, ont été introduits les concepts de système d'ordre fractionnaire et de systèmes fractals [35][5]. Leur lien plus ou moins direct avec la notion de dérivation non entière résulte des définitions précises de ces systèmes [11][12][13].

La recherche sur les systèmes d'ordre fractionnaire a été activée au années fin 70, début 80, où plusieurs études sur ces systèmes ont été développées [37][5][36].

Aujourd'hui, les recherches sur les systèmes d'ordre fractionnaire sont orientées vers l'application de ces systèmes en commande [40] et modélisation, dans les domaines d'automatique, d'électronique et de mécanique [39].

#### I-4 OBJECTIF DE LA THESE :

la commande conventionnelle à contre-réaction compense l'effet des perturbations agissant sur les variables à réguler, mais le processus à réguler peut changer de structure (perturbations paramétriques) en cours de fonctionnement. Ces perturbations ne peuvent pas être compensées dans une telle technique de commande, alors la commande adaptative peut être une solution efficace à ce problème.

Plusieurs développements ont été apportés sur la CAMR concernant les méthodes d'ajustement des paramètres du contrôleur qui peuvent assurer la poursuite, la régulation et la stabilité du processus en boucle fermée.

Le désir d'utiliser un système présentant d'excellentes performances dynamiques (rapidité, précision et stabilité) comme modèle de référence, nous a orienté à choisir les systèmes d'ordre fractionnaire pour les implémenter dans une boucle de commande adaptative directe.

Dans cette thèse, on s'est proposé d'étudier l'utilisation des systèmes d'ordre fractionnaire comme modèle de référence dans des boucles de commande adaptative, et ce afin de pouvoir mettre à profit les performances meilleures offertes par les structures d'ordre fractionnaire dans le domaine de la commande adaptative à modèle de référence.

Plusieurs exemples de simulation ont été proposés pour mettre en évidence les avantages d'une telle stratégie de commande.

## **I-5 PRESENTATION DE LA THESE :**

**Le présent chapitre contient une introduction sur la commande adaptative et les systèmes d'ordre fractionnaire.**

**Le deuxième chapitre expose un algorithme de commande adaptative directe à modèle de référence basé sur la représentation polynomiale des systèmes SISO continus.**

**L'approximation des systèmes d'ordre fractionnaire est donnée dans le troisième chapitre.**

**Le quatrième chapitre est consacré à la commande adaptative directe à modèle de référence d'ordre fractionnaire.**

**Le cinquième chapitre contient des simulations d'exemples d'application de la CAMR à des processus du premier et du deuxième ordre ainsi que pour des processus typiques tels que les moteurs à courant continu .**

**Une conclusion générale et plusieurs recommandations sont données à la fin de ce mémoire.**

# **CHAPITRE II**

## **COMMANDE ADAPTATIVE A MODELE DE REFERENCE**

# **COMMANDE ADAPTATIVE A MODELE DE REFERENCE (CAMR)**

## **II-1 INTRODUCTION :**

La commande adaptative à modèle de référence est une technique simple est très utilisée en pratique. Le schéma du CAMR à été originalement proposé par Whiteker en 1958 [19], alors que les premières applications de cette technique remontent au début des années 70.

Le développement de cette technique repose sur l'hypothèse fondamentale suivante: Pour toutes valeurs possibles des paramètres du procédé, on suppose qu'il existe un contrôleur de structure donnée qui peut assurer la réalisation des performances désirées. Le rôle de la boucle d'adaptation se limite uniquement à trouver les bonnes valeurs des paramètres de ce contrôleur [1].

Actuellement, il existe plusieurs schémas de commande adaptative [1][2][4] selon que le processus est identifié ou non, d'où découle deux types de commande adaptative :

- Commande adptative directe (implicite): Où l'ajustement des paramètres du contrôleur est fait directement sans passer par l'identification du processus à commander. Ce type de commande peut être représenté par le schéma de la fig.2.1

- Commande adaptative Indirecte (explicite): Où l'adaptation des paramètres du contrôleur se fait en deux étapes :

- 1°/ Estimation des paramètres du processus à commander

- 2°/ Calcul des paramètres du contrôleur à partir des paramètres estimés.

Le schéma d'une commande adaptative indirecte est donné à la fig.2.2.

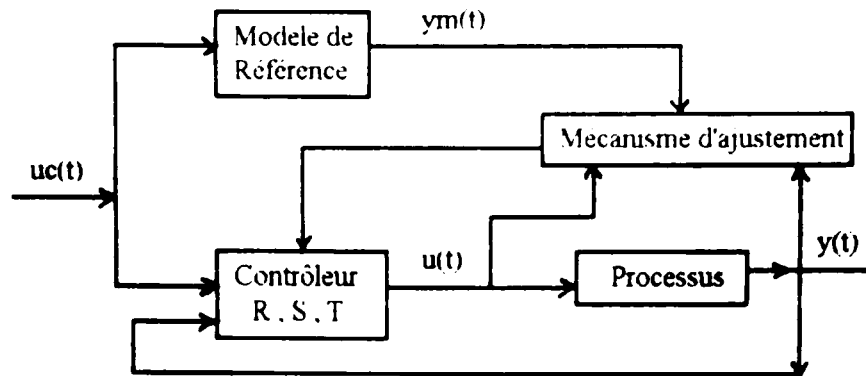


Fig.2 1: Commande adaptative directe a modele de reference

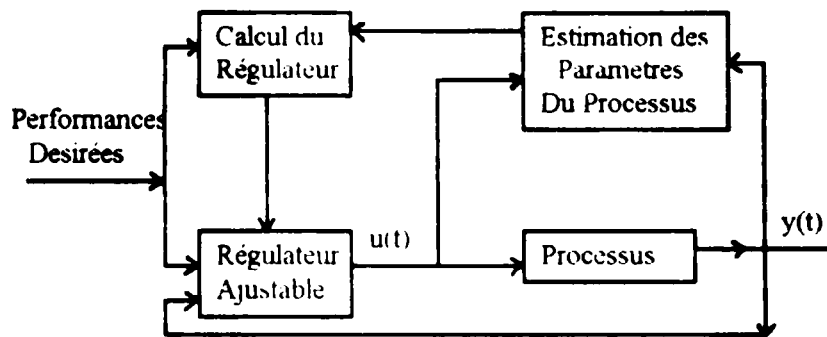


Fig 2 2: Commande adaptative indirecte

Dans cette thèse, on s'intéresse à la commande adaptative directe. Le modèle de référence utilisé est un système d'ordre fractionnaire..

### II-2 ENONCE DU PROBLEME :

Soit le processus à commander régi par l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \dots + a_n y(t) = b_n \frac{d^n}{dt^n} u(t) + b_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} u(t) + \dots + b_n u(t) \quad (II.1)$$

avec  $n' \leq n$

$y(t)$ : La sortie du processus.

$u(t)$ : La commande.

Le modèle de référence, lui aussi est régi par l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d^{n_m}}{dt^{n_m}} y_m(t) + a_{m_1} \frac{d^{n_m-1}}{dt^{n_m-1}} y_m(t) + \dots + a_{m_{n_m}} y_m(t) =$$

$$b_{m_0} \frac{d^{n_m'}}{dt^{n_m'}} u_c(t) + b_{m_1} \frac{d^{n_m'-1}}{dt^{n_m'-1}} u_c(t) + \dots + b_{m_{n_m'}} u_c(t) \quad (\text{II.2})$$

avec  $n_m \leq n_m'$

$y_m(t)$ : La sortie du modèle.

$u_c(t)$ : La consigne.

Le problème est de générer une commande  $u(t)$  telle que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_m(t) \quad (\text{II.3})$$

Pour résoudre ce problème il faut synthétiser un contrôleur capable de générer une commande permettant à  $y(t)$  de converger et de suivre  $y_m(t)$ .

Plusieurs développements ont été apportés sur la CAMR concernant les méthodes d'ajustement des paramètres du contrôleur [1][28] qui peuvent assurer la poursuite, la régulation et la stabilité du processus en boucle fermée.

D'autre part si  $y_m(t)$  est rapide, précise et stable, la sortie du processus à commander  $y(t)$  devient aussi rapide et précise à condition que la structure du contrôleur soit convenable.

### II-3 COMMANDE ADAPTATIVE DIRECTE A MODELE DE REFERENCE:

Soit un processus SISO (single-input single-output) décrit par l'équation différentielle donnée par l'équation (II.1), cette dernière peut être écrite sous la forme :



$$A(p) y(t) = B(p) u(t) \quad (\text{II.4})$$

Où  $A, B$  : Polynômes en  $p$  ( $p$  opérateur de différentiation  $p \Leftrightarrow d/dt$ ) premiers entre eux.

Le schéma de la commande CAMR directe est celui de la Fig.2.1.

A partir de l'équation (II.2), le modèle de référence peut être décrit par l'équation suivante:

$$A_m(p) y_m(t) = B_m(p) u_c(t) \quad (\text{II.5})$$

La loi de commande est donnée par l'équation :

$$R(p) u(t) = T(p) u_c(t) - S(p) y(t) \quad (\text{II.6})$$

Avec :  $R, S$  et  $T$  des polynômes en  $p$  caractérisant le contrôleur.

La transmittance du processus en boucle ouverte est:

$$y/u = B/A \quad (\text{II.7})$$

avec  $\text{deg}A > \text{deg}B$ .

En substituant l'équation (II.4) dans (II.6) on trouve :

$$R(A/B)y = T u_c - S y \quad (\text{II.8})$$

d'où la sortie du processus peut s'écrire sous la forme :

$$y(t) = \frac{B.T}{A.R + B.S} u_c(t) \quad (\text{II.9})$$

Alors la transmittance du processus en boucle fermée est:

$$y(t)/uc(t) = \frac{B.T}{A.R + B.S} \quad (\text{II.10})$$

D'autre part on peut déterminer la transmittance du contrôleur  $u/uc$  en utilisant les équations. (II.6) et (II.9) :

$$u(t) = \frac{A.T}{A.R + B.S} uc(t) \quad (\text{II.11})$$

D'après l'équation (II.9),  $(A R + B S=0)$  est l'équation caractéristique du système en boucle fermée .

Le polynôme  $(A R + B S)$  contient généralement 3 types de facteurs:

- Les zéros du processus en boucle ouverte qui peuvent être simplifier en boucle fermée. Ils sont exprimés par  $B^+$ .
- Les pôles d'un observateur  $Ao$ , qu'on utilise facultativement selon l'application.
- Les pôles du modèle de référence exprimés par  $Am$

Donc on peut écrire:

$$A R + B S = B^+ Ao Am \quad (\text{II.12})$$

Cette équation est appelée identité de BEZOUT.

On note que  $B$  est composé de  $B^+$  et  $B^-$ , c'est-à-dire  $B = B^+B^-$

$B^+$ : contient les zéros du processus en boucle ouverte pouvant être compensés en boucle fermée.

$B^-$ : contient le reste des zéros du processus en boucle ouverte.

Pour que l'équation (II.12) soit résolvable , $B^+$  doit diviser le terme à gauche et puisque  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux, alors  $B^+$  doit diviser  $R$ , donc on peut écrire :

$$R = B^+ R_1 \quad (\text{II.13})$$

L'équation (II.12) devient :

$$A R_1 + B^- S = A_o A_m \quad (\text{II.14})$$

Dans une telle stratégie de commande l'objectif est de forcer la dynamique du processus à converger vers la dynamique du modèle de référence d'où :

$$\frac{B \cdot T}{A \cdot R + B \cdot S} = \frac{B_m}{A_m} \quad (\text{II.15})$$

En remplaçant par l'équation (II.13) dans l'équation précédente on trouve que :

$$\frac{B^+ \cdot B^- \cdot T}{A \cdot B^+ R_1 + B^+ \cdot B^- \cdot S} = \frac{A_o \cdot B_m}{A_o \cdot A_m} \quad (\text{II.16})$$

D'après l'égalité précédente on a :

$$B^- T = A_o B_m \quad (\text{II.17})$$

et pour que cette équation soit résolvable, il faut que  $B_m = B^- B_m'$ , donc on peut trouver T tel que:

$$B^- T = A_o B^- B_m' \quad (\text{II.18})$$

d'où :

$$T = A_o B_m' \quad (\text{II.19})$$

La conception du contrôleur consiste donc à déterminer R, S et T; R et S sont déterminés en résolvant l'équation (II.12) et T est Calculé à partir de l'équation (II.19) .

La solution de l'équation (II.12) peut être trouvée si les coefficients des polynomes A et B sont connus, ou bien seulement les degrés de A et B sont connus.

la solution de l'équation (II.14) est garantie par les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{deg } A_m - \text{deg } B_m &\geq \text{deg } A - \text{deg } B \\ \text{deg } A_o &\geq 2 \cdot \text{deg } A - \text{deg } A_m - \text{deg } B^+ - 1 \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

Une fois la structure du contrôleur est trouvée ,c'est-à-dire les ordres  $k$ ,  $l$  et  $m$ , des polynômes  $R$ ,  $S$  et  $T$  respectivement sont calculés, on cherche la loi d'ajustement de ces paramètres.

Il existe généralement 3 méthodes d'adaptation:

- Méthode dit "the MIT rule"
- Méthode basée sur l'approche de Lyapunov
- Méthode basé sur la théorie de passivité

### II-3.1 METHODE DE MIT:

Cette méthode a été développée dans le labo d'instrumentation à MIT. Elle consiste à minimiser une fonction dite de perte donnée par :

$$J(\theta) = e^2/2 \quad (\text{II.21})$$

Avec.  $\theta$ : vecteur des paramètres du contrôleur

$e$  : l'erreur en sorties entre le processus et le modèle de référence;  $e=y-y_m$ .

Cette méthode est un simple exemple de l'algorithme du gradient. Les paramètres  $\theta$  doivent varier dans le sens inverse du gradient de  $J(\theta)$ :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\mu \frac{\partial J}{\partial \theta} = -\mu e \frac{\partial e}{\partial \theta} \quad (\text{II.22})$$

Avec :  $\mu$  gain d'adaptation .

Une caractéristique de cette méthode est que la cadence de convergence dépend de l'amplitude du signal de référence. si ce comportement est indésiré, une règle modifiée de cette méthode peut donner des lois d'ajustement des paramètres indépendants du signal de commande. La méthode MIT n'assure pas généralement la stabilité du processus en boucle fermée.

### II-3.2 METHODE DE LYAPUNOV:

Cette méthode possède un avantage sur celle de MIT, du fait qu'elle assure la stabilité du processus en boucle fermée. Elle consiste à définir une fonction dite de Lyapunov en fonction des paramètres, de l'erreur et du temps  $V(\theta, e, t)$ , puis à déduire la loi d'ajustement  $d\theta/dt$  afin que la fonction dérivée  $dV/dt$  soit définie négative.

Cette méthode est efficace mais difficile à appliquer, puisque  $V(\theta, e, t)$  ne possède pas une forme générale, mais elle est choisie selon l'application.

### II-3.3 METHODE BASEE SUR LA THEORIE DE PASSIVITE:

Cette méthode repose sur la définition suivante: Un réseau est passif, si sa fonction de transfert est définie réelle positive (PR) (voir annexe).

L'application de cette méthode consiste à définir si une fonction est strictement réelle positive, pour générer une commande assurant l'annulation de l'erreur entre les sorties du processus et du modèle de référence. L'utilisation de cette méthode est détaillé au chapitre IV.

### II-4 CONCLUSION:

Cet algorithme de commande adaptative à modèle de référence est directe. L'identification du processus à commander n'est pas nécessaire, la synthèse de la commande consiste à chercher la structure d'un contrôleur puis ajuster ses paramètres de façon à réaliser un suivi parfait du modèle.

L'ajustement des paramètres est fait par l'une des méthodes citées ci-dessus, où la méthode de MIT est plus facile à implanter mais elle ne garantit pas la stabilité du processus en boucle fermée, alors que la méthode de stabilité (basée sur l'approche de Lyapunov) assure un comportement stable du processus mais, difficile à implanter parce qu'elle ne possède plus de forme générale. La dernière méthode est structurée, simple à appliquer et garantit la stabilité en boucle fermée.

# **CHAPITRE III**

## **SYSTEMES D'ORDRE FRACTIONNAIRE**

# SYSTEMES D'ORDRE FRACTIONNAIRE

## II-1 INTRODUCTION :

L'analyse dans le plan de Bode de plusieurs processus naturels, tels que les lignes de transmission, impédance de polarisation des diélectriques, les interfaces, le rythme cardiaque, densité spectrale de l'onde physique, certains types de bruits [3][9], a permis d'observer une pente fractionnaire. Ce type de processus est reconnu comme 1/f processus [9][10] ou systèmes d'ordre fractionnaire [3][5]. L'équation utilisée pour la description de ces processus est donnée comme suit:

$$X(p) = \frac{k}{p^m} \quad (\text{III.1})$$

Avec,

k: constante positive,

$p=j\omega$  : opérateur de Laplace,

m: nombre réel positif appelé exposant fractionnaire .

La plupart de ces systèmes se caractérise aux basses fréquences par une amplitude finie. Alors, ces systèmes peuvent bien être représentés par un pôle à puissance fractionnaire (ppf) donné par [3]:

$$X(p) = \frac{k}{(1 + \frac{p}{pt})^m} \quad (\text{III.2})$$

Avec,

m: exposant fractionnaire,

pt: pôle fractionnaire qui exprime la fréquence de coupure.

Ce type d'expression donne une représentation mathématique plus convenable des phénomènes naturels dont l'amplitude fréquentielle est généralement finie au lieu d'être infinie aux basses fréquences.

Pour des systèmes complexes où la pente varie d'un nombre réel à un autre, on les représente par une fonction à pôle multiple à puissance fractionnaire:

$$X(p) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 + p / pt_i)^{m_i}} \quad 0 \leq m_i \leq 1 \quad (\text{III.3})$$

Avec ,  
 (1/pt<sub>i</sub>) des temps de relaxation.

En contrôle, plusieurs types de systèmes d'ordre fractionnaire sont rencontrés, dont quelques cas sont :

$$H(p) = \frac{1}{\sqrt{p+1}} , \quad H(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} , \quad H(p) = \frac{1}{p\sqrt{p+1}}$$

### III-2 APPROXIMATION DES SYSTEMES D'ORDRE FRACTIONNAIRE:

Le modèle mathématique des systèmes fractionnaires ainsi défini est représenté par une fonction irrationnelle dans le domaine fréquentiel. Ce modèle cause beaucoup de problèmes lors de son étude, d'où l'idée de l'approximer par des fonctions rationnelles afin de nous permettre d'utiliser des théories simples et bien connues des systèmes linéaires, il existe deux méthodes d'approximation [3] :

#### 1- Méthode temporelle:

La représentation dans le domaine temporel, est donnée par une équation différentielle linéaire d'ordre fini à coefficients variables dans le temps [13].

Le Système à (ppf) donné par sa fonction de transfert de l'équation (III.2), peut être approximé par l'équation différentielle suivante:

$$x + \left[ pt + \frac{m-1}{t} \right] x = 0 \quad (\text{III.4})$$

Cette équation différentielle conduit à un système régulier invariable dans le temps si l'exposant fractionnaire s'approche du plus grand entier qui suit.



**2- Méthode de la fonction singulière:**

Cette méthode consiste à approximer le pôle simple à puissance fractionnaire qui est l'élément de base de tout système fractionnaire par des fonctions rationnelles. Elle utilise en méthode graphique selon le plan de bode, les singularités (pôles et zéros) générées en fonction d'une erreur spécifique en dB [14].

**III-2.1 SYSTEME DU PREMIER ORDRE FRACTIONNAIRE:**

**III-2.1.1 APPROXIMATION :**

Le système fractionnaire du premier ordre est représenté dans le domaine fréquentiel par une fonction de transfert à puissance fractionnaire de la forme de l'équation(III.1). Cette dernière peut être approximée comme suit :

$$H(p) = \frac{1}{(1 + \frac{p}{pt})^m} \approx \frac{\prod_{i=1}^{N-1} (1 + p / z_i)}{\prod_{i=1}^N (1 + p / p_i)} = \frac{bm_0 p^{N-1} + bm_1 p^{N-2} + \dots + bm_{N-1}}{p^N + am_1 p^{N-1} + \dots + am_N} \quad (III.5)$$

Où,

$p_i$  et  $z_i$  sont les pôles et les zéros de la fonction approximante, N est l'ordre de l'approximation.

On note que les  $am_i$  et les  $bm_i$  sont calculés en fonction des  $z_i$  et  $p_i$  .

d'où :

$$H(p) = \frac{1}{(1 + \frac{p}{pt})^m} \approx \frac{Bm(p)}{Am(p)} \quad (III.6)$$

Avec,

**Bm:** polynôme en p de degrés (N-1)

**Am:** polynôme en p de degrés N.

Les singularités  $p_i$  et  $z_i$  sont générées comme suit:

$$\begin{aligned}
 \text{le premier p\^ole} \quad p_1 &= p_1 \cdot 10^{(\varepsilon_p / 20 \cdot m)} \\
 \text{le premier z\^ero} \quad z_1 &= p_1 \cdot 10^{(\varepsilon_p / 10 \cdot (1-m))} \\
 p_i &= z_{i-1} \cdot 10^{(\varepsilon_p / 10 \cdot m)} & i &= 2 \dots N \\
 z_j &= p_j \cdot 10^{(\varepsilon_p / 10 \cdot (1-m))} & j &= 2 \dots N - 1
 \end{aligned}
 \tag{III.7}$$

Avec,

$m$  : l'exposant fractionnaire,

$\varepsilon_p$  : l'erreur prescrite en dB.

On d\^efinit les rapports de position comme suit :

$$\begin{aligned}
 a &= 10^{(\varepsilon_p / 10 \cdot (1-m))} \\
 b &= 10^{(\varepsilon_p / 10 \cdot m)} \\
 ab &= 10^{(\varepsilon_p / 10 \cdot m \cdot (1-m))}
 \end{aligned}
 \tag{III.8}$$

En rappelant que  $\varepsilon$  est une erreur prescrite en dB qui doit \^etre choisie petite pour que l'approximation soit bonne.

D'une autre fa\^con on peut \^ecrire :

$$\begin{aligned}
 p_i &= (ab)^{i-1} p_1 & i &= 2 \dots N \\
 z_j &= (ab)^{j-1} p_1 & j &= 1 \dots N - 1
 \end{aligned}
 \tag{III.9}$$

L'ordre de l'approximation  $N$  est calcul\^e en fixant la bande de fr\^equence sur laquelle se fait l'approximation, si  $w_{max}$  d\^esigne cette intervalle on peut \^ecrire :

$$\begin{aligned}
 p_{N-1} &< w_{max} < p_N \\
 (ab)^{N-2} p_1 &< w_{max} < (ab)^{N-1} p_1 \\
 (ab)^{N-2} \cdot w_{max} / p_1 &< (ab)^{N-1} \\
 (N-2) \log(ab) &< \log(w_{max} / p_1) < (N-1) \log(ab) \\
 N-2 &< \frac{\log(w_{max} / p_1)}{\log(ab)} < N-1
 \end{aligned}
 \tag{III.10}$$

Donc :

$$N = \text{partie entière de} \left[ \frac{\log(w_{\max} / p_1)}{\log(ab)} + 1 \right] + 1 \quad (\text{III.11})$$

La décomposition en éléments simples nous donne:

$$H(p) = \sum_{i=1}^N \frac{k_i}{\left(1 + \frac{p}{p_1 (ab)^{i-1}}\right)} \quad (\text{III.12})$$

Où,

$k_i$  sont les résidus aux pôles  $p_i$  :

$$k_i = \frac{\prod_{j=1}^N \left(1 - \frac{(ab)^{i-j}}{a}\right)}{\prod_{j=i}^N (1 - (ab)^{i-j})} \quad (\text{III.13})$$

L'approximation dans le domaine temporel est obtenue par la transformation inverse de Laplace de l'équation (III.12) :

$$h(t) = \sum_{i=1}^N k_i (ab)^{i-1} p_1 \cdot \exp(-t(ab)^{i-1} \cdot p_1) \quad (\text{III.14})$$

### III-2.1.2 REPRESENTATION D'ETAT :

La représentation d'état canonique du système premier ordre fractionnaire à variables de phase de la fonction approximante décrit par les équations (III.5) et (III.6), est la suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (\text{III.15})$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Les matrices d'état de ce système sont:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -am_N & -am_{N-1} & -am_{N-2} & \dots & -am_1 \end{bmatrix}$$

$$B = [0 \ 0 \ \dots \ 1]^T$$

$$C = [bm_{N-1} \ bm_{N-1} \ \dots \ bm_0]$$

$$D = 0$$

Avec.

$x(t)$ : vecteur d'état à N composantes,

$u(t)$ : entrée du système,

$y(t)$ : sortie du système:

A: matrice d'évolution de dimension NxN

B: matrice d'entrée de dimension Nx1

C: matrice de sortie de dimension 1xN

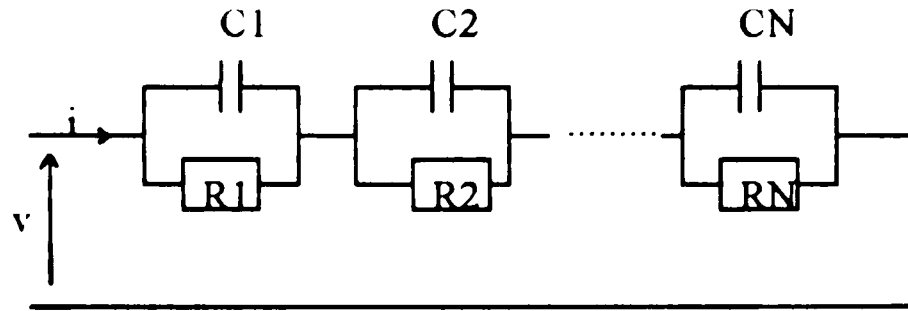
D: matrice d'anticipation nulle.

$am_i$ : éléments du polynôme  $\Lambda m(p)$  donné à l'équation (III.6)

$bm_i$ : éléments du polynôme  $Bm(p)$ .

### III-2.1.3 SYNTHÈSE :

La synthèse du système donné par l'équation (III.2) et approximé par l'équation (III.12), peut être obtenue par un réseau de Foster composé de N cellules  $R_i C_i$  selon la fig.3.1:



$$H(p) = \frac{V(p)}{I(p)} = \sum_{i=1}^N \frac{k_i}{(1 + \frac{p}{p_i})^{c_i}}, \quad R_i = k_i \text{ et } c_i = 1/k_i p_i$$

Fig.3.1: Schématisation du système du premier ordre fractionnaire

### III-2.2 SYSTEME DU SECOND ORDRE FRACTIONNAIRE :

#### III-2.2.1 APPROXIMATION :

Un système fractionnaire du deuxième ordre est représenté dans le domaine fréquentielle par la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{1}{(\frac{p^2}{\omega_n^2} + 2\zeta \frac{p}{\omega_n} + 1)^m} \quad 0 < m < 1 \quad (\text{III.16})$$

Où,

$\omega_n$ : pulsation naturelle

$\zeta$ : facteur d'amortissement

Pour approximer la paire de pôles complexes conjugués avec une puissance fractionnaire, par des fonctions rationnelles on distingue deux cas [3] [14]:

#### III-2.2.1.a cas où $0 < m < 0.5$ :

dans ce cas la fonction approximante peut être donnée par:

$$H(p) = \frac{\left(\frac{p}{wn} + 1\right)\left(\frac{p}{wn} + 1\right)^\beta}{\left(\frac{p^2}{wn^2} + 2\alpha \frac{p}{wn} + 1\right)} \quad (\text{III.17})$$

Tel que:  $\alpha = \zeta^m$  et  $\beta = 1 - 2m$

Donc nous pouvons nous reporter semblablement à l'approximation de la ppf simple selon l'équation (III.5), pour approximer le pôle ou zéro à puissance fractionnaire.

D'après l'équation (III.17) on peut écrire :

$$H(p) = \frac{\left(\frac{p}{wn} + 1\right) \prod_{i=1}^{N-1} (1 + p/z_i)}{\left(\frac{p^2}{wn^2} + 2\alpha \frac{p}{wn} + 1\right) \prod_{i=1}^N (1 + p/p_i)} \quad (\text{III.18})$$

Les singularités (pôles et zéros) sont générés comme suit:

$$\begin{aligned} p_j &= (ab)^{j-1} az_1 & j &= 1, \dots, N \\ z_i &= (ab)^{i-1} z_1 & i &= 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

avec,

$$\begin{aligned} z_1 &= wn \sqrt{b} \\ a &= 10^{(\zeta, 100(1-\beta))} \\ b &= 10^{(\zeta, 10, \beta)} \\ \beta &= \log(a)/\log(ab) \end{aligned}$$

L'équation (III.18) peut être écrite sous forme paramétrique comme suit:

$$H(p) = \frac{bm_0 p^N + bm_1 p^{N-1} + \dots + bm_N}{p^{N+2} + am_1 p^{N+1} + \dots + am_{N+2}} \quad (\text{III.20})$$

On remarque que l'ordre de l'approximation du système du deuxième ordre n'est pas N, mais N+2.

Les coefficients  $am_j$  et  $bm_j$  sont calculés en fonction de  $P_j$ ,  $z_i$ ,  $wn$  et  $\alpha$

III-2.2.1.b cas où  $0.5 < m < 1$  :

La fonction approximante est donnée comme suit:

$$H(p) = \frac{\left(\frac{p}{\omega n} + 1\right)}{\left(\frac{p^2}{\omega n^2} + 2\alpha \frac{p}{\omega n} + 1\right)\left(\frac{p}{\omega n} + 1\right)^\beta} \quad (\text{III.21})$$

Où,

$$\alpha = \zeta^m \text{ et } \beta = 2m - 1$$

Suivant le même raisonnement que précédemment l'équation (III.21) devient:

$$H(p) = \frac{\left(\frac{p}{\omega n} + 1\right) \prod_{i=1}^{N-1} (1 + p / z_i)}{\left(\frac{p^2}{\omega n^2} + 2\alpha \frac{p}{\omega n} + 1\right) \prod_{i=1}^N (1 + p / p_i)} \quad (\text{III.22})$$

avec,

$$p_i = (ab)^{i-1} p_1 \quad i = 2 \dots N$$

$$z_j = (ab)^{j-1} a p_1 \quad j = 1 \dots N-1$$

$$p_1 = \omega n \sqrt{b}$$

$$a = 10^{(\varepsilon_p / 10(1-\beta))}$$

$$b = 10^{(\varepsilon_p / 10\beta)}$$

$$\beta = \log(a) / \log(ab)$$

$\varepsilon_p$ : l'erreur prescrite en dB

Après multiplication, l'équation (III.22) prend la même forme paramétrique que l'équation (III.20).

III-2.2.2 REPRESENTATION D'ETAT :

On a montré qu'un système fractionnaire du deuxième ordre peut être approximer sous la forme de l'équation (III.20), sa forme d'état à variables de phase est la suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{III.23}$$

Les matrice d'état sont définies comme suit:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -am_{N+2} & -am_{N+1} & -am_N & \dots & -am_1 \end{pmatrix}$$

$$B = [0 \ 0 \ \dots \ 1]^T$$

$$C = [bm_N \ bm_{N-1} \ \dots \ bm_0 \ 0]$$

$$D = 0$$

avec,

$x(t)$ : vecteur d'état à  $N+2$  composantes,

$u(t)$ : entrée du système,

$y(t)$ : la sortie du système ,

A: matrice d'évolution de dimension  $(N+2) \times (N+2)$ ,

B: matrice d'entrée de dimension  $(N+2) \times 1$ ,

C: matrice de sortie de dimension  $1 \times (N+2)$ ,

D: matrice d'anticipation nulle,

$am_j$ : éléments du polynôme  $\Delta m(p)$  donné à l'équation (III.20),

$bm_j$ : éléments du polynôme  $Bm(p)$  donné à l'équation (III.20).



III-2.2.3 SYNTHÈSE :

III-2.2.3.a cas où  $0 < m < 0.5$  :

La fonction approximante donnée par l'équation (III.20) peut être écrite [3] sous la forme:

$$H(p) = \frac{A_s p + B_s}{\left(\frac{p^2}{\omega_n^2} + 2\alpha \frac{p}{\omega_n} + 1\right)} + \sum_{i=1}^N \frac{k_i}{\left(1 + \frac{p}{(ab)^{i-1} a z_i}\right)} \quad (III.24)$$

Les résidus aux pôles sont donnés par l'équation suivante:

$$k_j = \frac{(1 - a\sqrt{b}(ab)^{j-1}) \prod_{i=1}^N (1 - a(ab)^{j_i})}{(a\sqrt{b}(ab)^{j-1}) - 2\alpha(a\sqrt{b})(ab)^{j-1} + 1} \cdot \frac{\prod_{i=1}^N (1 - (ab)^{j_i})}{\prod_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^N (1 - (ab)^{j_i})} \quad (III.25)$$

Avec,

$j=1,2, \dots, N$ , et  $A_s$  et  $B_s$  sont déterminés comme suit :

$$B_s = 1 - \sum_{i=1}^N k_i \quad (III.26)$$

$$A_s = \frac{a^{N+1} - \sum_{i=1}^N k_i (ab)^{i-1} a\sqrt{b}}{\omega_n}$$

La fonction singulière donnée par :

$$\sum_{i=1}^N \frac{k_i}{1 + \frac{p}{(ab)^{i-1} a z_i}} \quad (III.27)$$

peut être représentée par un circuit RC passif, alors que le terme :

$$\frac{Ap + B}{\left(\frac{\omega_n^2}{p^2} + 2\alpha \frac{p}{\omega_n} + 1\right)} \quad (III.28)$$

est représenté par un circuit RLC.

Alors la paire de pôles complexes conjugués à puissance fractionnaire peut être simulée par RC et RLC en cascade, comme le montre la fig.3.2.:

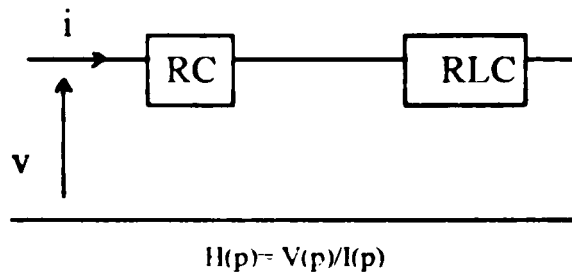


Fig.3.2 Schématisation du système du second ordre fractionnaire (0 < m < 0.5)

**III-2.2.3.b cas où 0.5 < m < 1 :**

L'équation (III.22) peut être écrite comme suit [3]:

$$H(p) = \frac{A_s p + B_s}{\left(\frac{p^2}{\omega_n^2} + 2\alpha \frac{p}{\omega_n} + 1\right)} + \sum_{i=1}^N \frac{k_i}{\left(1 + \frac{p}{(ab)^{i-1} p_i}\right)} \tag{III.29}$$

Les résidus sont calculés suivant la formule suivante:

$$k_j = \frac{(1 - a\sqrt{b}(ab)^{j-1})}{(\sqrt{b}(ab)^{j-1})^2 - 2\alpha\sqrt{b}(ab)^{j-1} + 1} \cdot \frac{\prod_{i=1}^N (1 - (ab)^{j-i} / a)}{\prod_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^N (1 - (ab)^{j-i})} \tag{III.30}$$

Où,

$$j=1,2,\dots,N.$$

A et B sont déterminés comme suit :

$$B_s = 1 - \sum_{i=1}^N k_i \tag{III.31}$$

$$A_s = \frac{a^{-(N+1)} - \sum_{i=1}^N k_i (ab)^{i-1} \sqrt{b}}{\omega_n}$$

Le terme suivant:

$$\frac{Ap + B}{\frac{p^2}{\omega n^2} + 2\alpha \frac{p}{\omega n} + 1} \quad (III.32)$$

est représenté par un circuit RLC.

Les résidus  $K_i$  sont tous négatifs, dans ce cas un convertisseur d'impédance négative peut être utilisé pour simuler la fonction :

$$\sum_{i=1}^N \frac{k_j}{1 + \frac{p}{(ab)^{i-1} p}} \quad k_j < 0 \quad (III.33)$$

Donc le système décrit par l'équation (III.22), peut être représenté par le circuit de la fig.3.3 suivante:

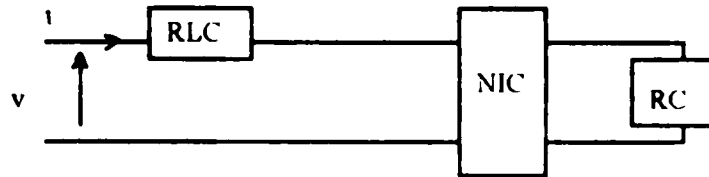


Fig.3.3: Schématisation du système du second ordre fractionnaire ( $0.5 < m < 1$ )

### III-3 PERFORMANCES DES SYSTEMES D'ORDRE FRACTIONNAIRE :

Dans cette section on va exprimer les caractéristiques des systèmes d'ordre fractionnaire, cela parcequ'on s'intéresse de plus à leur comportement dans le domaine temporel. Ce type de système sera utilisé dans le prochain chapitre comme modèle de référence, donc il faut connaître l'influence des paramètres  $m$ ,  $\zeta_p$ ,  $\omega_c$  et  $\omega_{max}$  sur la dynamique du système.

L'exposant fractionnaire  $m$  est proportionnel au temps de réponse et au temps de montée, c'est-à-dire que si  $m$  diminue, le temps de réponse et le temps de montée diminuent aussi, le système devient plus rapide.

La fréquence de coupure  $\omega_c$  influe proportionnellement sur la rapidité du système. Si  $\omega_c$  augmente, le temps de réponse et le temps de montée diminuent. ( voir fig.3.4 ).

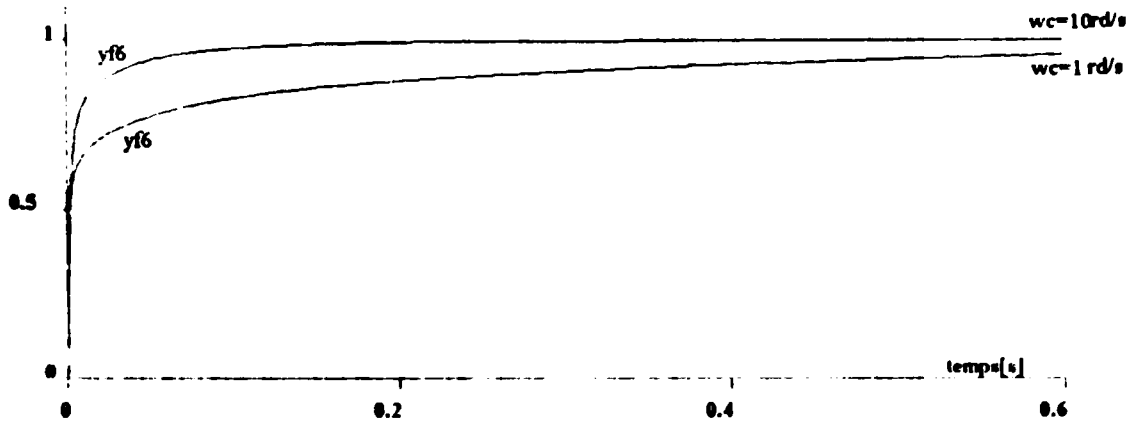


Fig.3 4: Réponses indicielles du système du premier ordre fractionnaire approximé a l'ordre 6

La plage de fréquence  $W_{max}$  , n'influe pas sur le temps de réponse et le temps de montée.

Pour que l'approximation soit bonne, il faut prendre  $N$  le plus grand possible, ce qui est possible si l'erreur prescrite  $\epsilon_p$  est petite.

Alors, pour avoir un système du premier ordre fractionnaire, rapide et précise, il faut choisir  $m$ ,  $\epsilon_p$ ,  $W_c$  et  $W_{max}$  de telle façon que  $N$  soit important.

La comparaisons entre plusieurs ordre d'approximation  $N$ , nous permet de constater qu'à partir d'un certain ordre  $N$ , le changement de la réponse indicielle n'est pas considérable, comme le montre la fig.3.5.

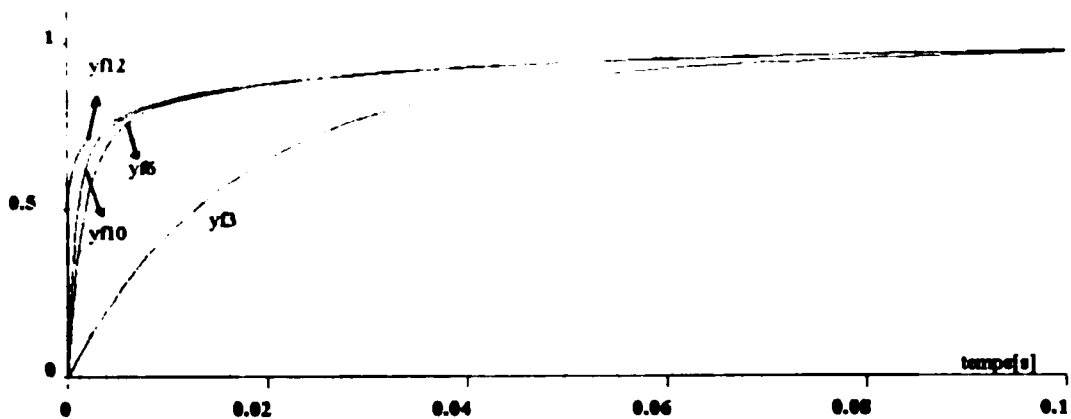


Fig.3.5: Réponses indicielles du système du premier ordre fractionnaire  
 yf3: approximation d'ordre 3, yf6: approximation d'ordre 6,  
 yf10: approximation d'ordre 10, yf12: approximation d'ordre 12

Le système du second ordre fractionnaire, se caractérise par des oscillations (pour  $\zeta < 1$ ). Ces derniers ne sont pas souhaitables dans la plupart des cas, alors une petite valeur de  $m$  réduit ces oscillations, ainsi qu'elle élimine l'influence de la résonance, se qui assure une bonne stabilité.

L'approximation d'un système du second ordre fractionnaire revient à approximer un système à simple pôle à puissance fractionnaire, donc les paramètres  $m$ ,  $\varepsilon_p$ ,  $\omega_c$  et  $\omega_{max}$  influent sur le système du second ordre fractionnaire tout comme sur le système du premier ordre fractionnaire. (voir fig.3.6, fig.3.7, fig.3.8).

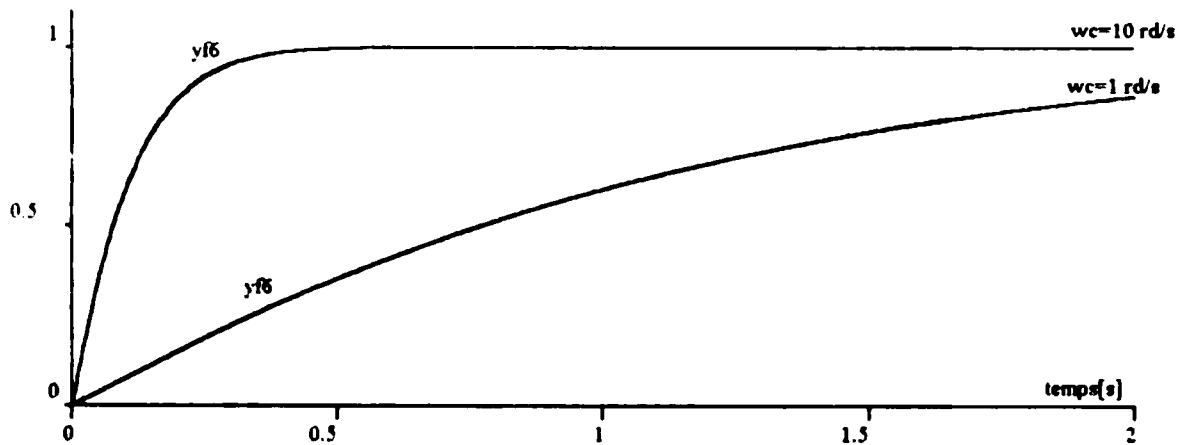


Fig.3.6: Réponses indicielles du système du second ordre fractionnaire approxiné à l'ordre 6

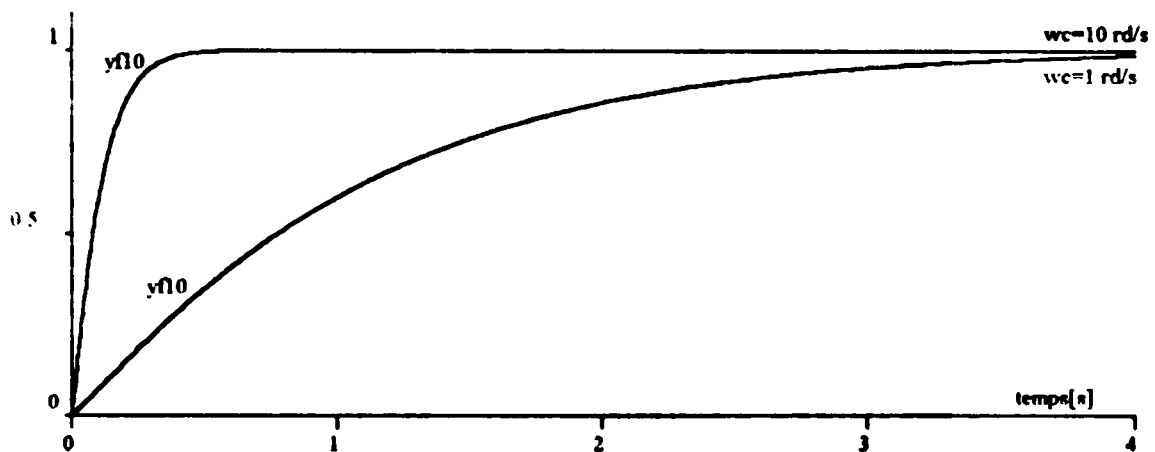


Fig.3.7: Réponses indicielles du systèmes du second ordre fractionnaire approxiné à l'ordre 10

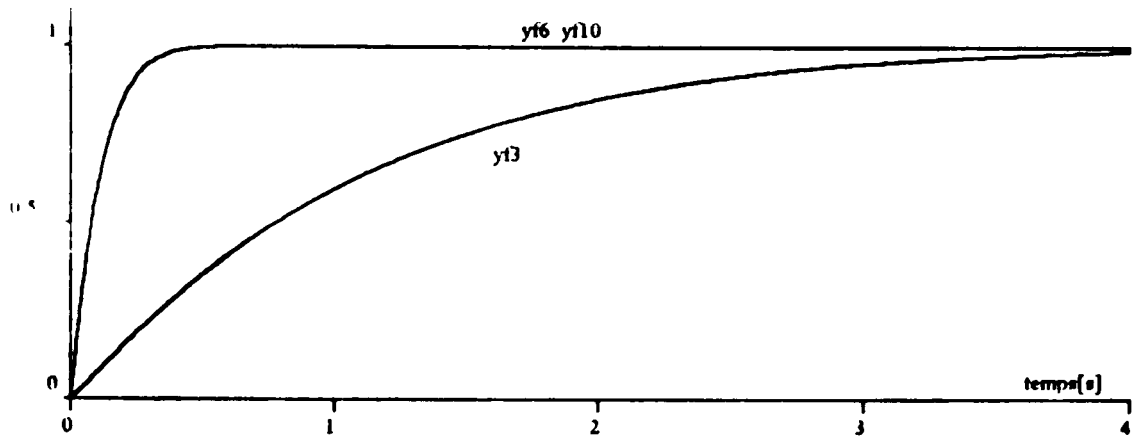


Fig.3.8: Réponses indicielles du système du second ordre fractionnaire  
 yf3:approximation d'ordre 3 . yf6:approximation d'ordre 6  
 yf10 approximation d'ordre 10

D'après les résultats de la fig.3.5 et fig.3.8, on constate que l'approximation d'ordre  $N=6$  est suffisante puisque les caractéristiques temporelles de cette dernière sont presque les mêmes que l'approximation d'ordre 10 et d'ordre 12. Donc ,dans le chapitre V on va utilisé des systèmes d'ordre fractionnaire approximées à l'ordre  $N=6$ , ces derniers possèdent des réponses indicielles plus rapide que celles des systèmes d'ordre entier comme le montre les graphes de fig.3.9 et fig.3.10.

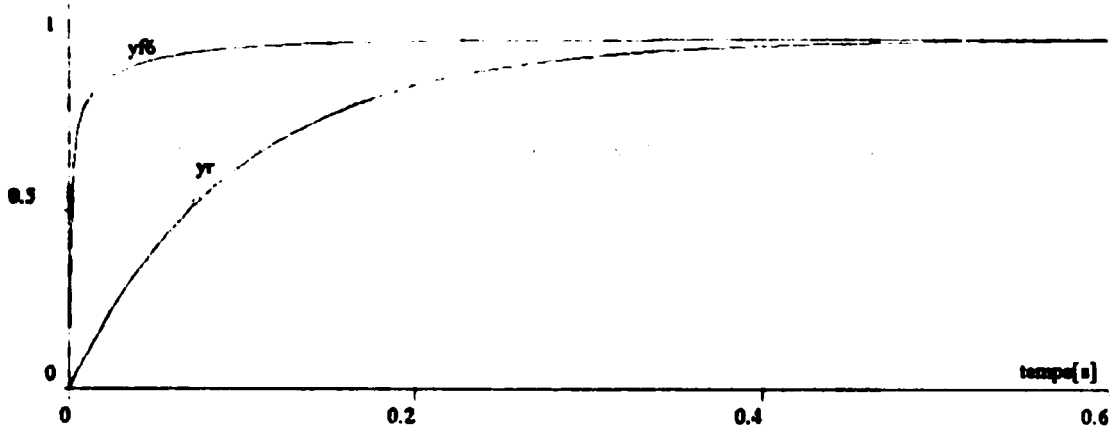


Fig.3.9: Réponses indicielles du système du premier ordre régulier et d'ordre fractionnaire approximé à l'ordre 6

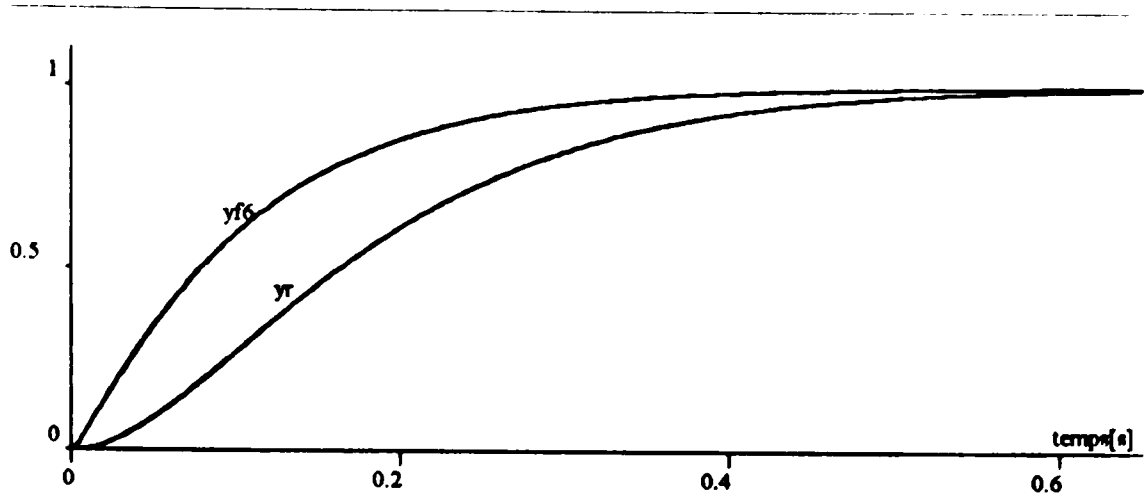


Fig.3.10: Réponses indicelles du système du second ordre régulier et fractionnaire approximé à l'ordre 6

### III-4 CONCLUSION :

Les systèmes d'ordre fractionnaire sont modélisés par des fonctions de transfert dont les pôles sont à puissances fractionnaires. Ce type de systèmes peut être approximé par un nombre fini de fonctions singulières, qui peuvent être réalisés avec des cellules RC dont les valeurs sont calculées à partir des singularités.(pôles et zéros).

Ces systèmes possèdent un comportement dynamique rapide et précis, contrairement aux systèmes réguliers où il faut toujours réaliser un compromis entre la rapidité et la précision.

L'approximation de cette classe de systèmes, permet de leur appliquer les mêmes théorèmes des systèmes linéaires, et les représenter sous la forme d'état canonique en utilisant des variables de phase.

# **CHAPITRE IV**

**COMMANDE ADAPTATIVE A MODELE DE  
REFERENCE D'ORDRE FRACTIONNAIRE**



# COMMANDE ADAPTATIVE DIRECTE A MODELE DE REFERENCE D'ORDRE FRACTIONNAIRE

## IV.1 INTRODUCTION:

La commande adaptative directe est très utilisée par ce qu'elle ne nécessite pas une connaissance totale du processus à commander.

Dans le but de faire fonctionner le processus d'une manière bien choisie, on utilise un modèle de référence qui exprime les performances dynamiques voulues, puis on génère une commande qui assure l'adaptation du processus au modèle de référence.

Le modèle de référence utilisé est un système fractionnaire approximé à l'ordre  $N$  celui-ci présente des caractéristiques dynamiques acceptables (voir le paragraphe III.3).

Le problème du suivi peut être résolu en utilisant le placement des pôles[2]; les performances désirées sont exprimées par un modèle mathématique qui peut assurer la réponse désirée [1][25], ce modèle peut être linéaire ou non-linéaire.

Les paramètres du contrôleur sont ajustés dans le sens d'avoir  $y(t)$  qui converge vers  $y_m(t)$ .

Les méthodes d'optimisation sont des outils naturels pour le calcul d'une commande adaptative à modèle de référence.

## IV.2. PROCESSUS A COMMANDER :

Le processus à commander est décrit par l'équation différentielle:

$$\frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \dots + a_n y(t) = b_0 \frac{d^n}{dt^n} u(t) + b_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} u(t) + \dots + b_n u(t) \quad (IV.1)$$

En utilisant l'opérateur  $p=d/dt$ , alors on peut écrire:

$$y(t) [p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n] = u(t) [b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_n] \quad (IV.2)$$

soit

$$A(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$$

$$B(p) = b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_n$$

donc le processus peut être modélisé comme suit [1], [19]:

$$y(t) = \frac{B(p)}{A(p)} u(t) \quad (IV.3)$$

L'application du présent algorithme nécessite les connaissances appriories suivantes:

- L'ordre du processus (degA et degB).
- Le signe de  $b_0$
- Le processus est supposé à phase minimale.

Le présent algorithme ne fait pas appel à l'identification du processus, mais il utilise seulement le signal de sortie.

Note: Généralement les arguments t et p sont omis là ou il n'y a pas de confusion.

### IV.3 MODELE DE REFERENCE D'ORDRE FRACTIONNAIRE:

Le modèle de référence utilisé est un système d'ordre fractionnaire approximé à l'ordre N selon l'algorithme donné au chapitre précédent.

Le modèle de référence est donné par la fonction de transfert:

$$y(t) = \frac{bm_0 p^{N-1} + bm_1 p^{N-2} + \dots + bm_{N-1}}{p^N + am_1 p^{N-1} + \dots + am_N} uc(t) \quad (IV.4)$$

On rappelle que le modèle de l'équation (IV.4) est une approximation du système fractionnaire du premier ordre:

$$Hm(p) = \frac{1}{(1 + \frac{p}{pt})^m} \quad (IV.5)$$

Sachant que:  $0 < m < 1$   
ou du deuxième ordre:

$$H(p) = \frac{1}{(\frac{p^2}{wn^2} + 2\zeta \frac{p}{wn} + 1)^m} \quad (IV.6)$$

avec  $0 < m < 1$ .

Les fonctions approximantes sont données par les équations (III.5) et (III.20) respectivement.

Le choix du système fractionnaire ( premier ou deuxième ordre ) se fait en fonction de l'ordre du processus à commander, mais théoriquement un système fractionnaire du premier ordre peut être utilisé comme modèle de référence pour n'importe quel processus, en faisant augmenter l'ordre de l'approximation ce qui nous amène au cas idéal où N tend vers l'infini.

#### IV.4 SYNTHESE DU CONTROLEUR:

Le contrôleur est la partie la plus importante dans la réalisation d'une commande adaptative à modèle de référence. Les paramètres de ce dernier sont ajustés en ligne pour générer la commande appropriée, qui assure la convergence de  $y(t)$  vers  $y_m(t)$ , en supposant que le changement des paramètres du contrôleur est plus rapide que celui de la sortie du processus.

La loi de commande est donnée par:

$$R(p) u(t) = T(p) u_c(t) - S(p) y(t) \quad (IV.7)$$

Avec :

$R(p)$ ,  $T(p)$  et  $S(p)$  des polynômes caractérisant le contrôleur.

Le schéma bloc de la commande adaptative directe à modèle de référence d'ordre fractionnaire est donné à la figure fig.4.1.

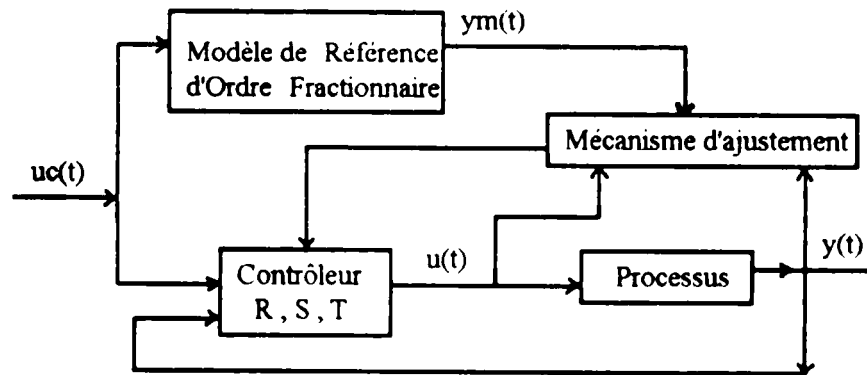


Fig.4.1: Commande adaptative directe à modèle de référence d'ordre fractionnaire

La première étape du calcul du contrôleur est de trouver sa structure, c'est-à-dire de trouver les degrés  $k$ ,  $l$  et  $m$  des polynômes  $R$ ,  $S$  et  $T$  respectivement, qui vérifient l'équation diophontine (identité de Bezout [2]):

$$A R + B S = A_0 A_m B^+ \quad (IV.8)$$

$A_0$  est un polynôme caractérisant un observateur approprié.

$B^+$  est un polynôme dont les racines sont les zéros du processus en boucle ouverte qui peuvent être compensés en boucle fermée.

Le processus à commander est à phase minimale, ce qui permet de compenser tous ses zéros, donc on peut écrire:

$$B = b_0 B^+ \quad (IV.9)$$

par conséquent :

$$\begin{aligned} R &= R_1 B^* & (IV.10) \\ T &= A_0 B_m / b_0 \end{aligned}$$

L'équation diophantine peut s'écrire maintenant, ainsi:

$$AR_1 + b_0 S = A_0 A_m \quad (IV.11)$$

L'utilisation du placement des pôles nécessite la satisfaction des deux conditions suivantes:

$$\begin{aligned} \deg A_m - \deg B_m &\geq \deg A - \deg B \\ \deg A_0 &\geq 2 \deg A - \deg A_m - \deg B^* - 1 \end{aligned} \quad (IV.12)$$

Ces deux conditions sont toujours vérifiées, même pour le cas où  $A_0 = 1$  (l'observateur est négligé) puisque on utilise  $\deg A_m \gg \deg A$ .

La structure du contrôleur est trouvée à partir des équations (IV.11) et (IV.12):

$$k = \deg R = \deg R_1 + \deg B = \deg A_m + \deg B - \deg A \quad (IV.13)$$

$$l = \deg S \leq \deg R$$

$$\text{soit : } \deg S = \deg R$$

$$\text{ou bien } \deg S = \deg R - 1$$

$$m = \deg T = \deg B_m$$

Les polynômes R, S et T sont exprimés comme suit:

$$R(p) = p^k + r_1 p^{k-1} + r_2 p^{k-2} + \dots + r_k \quad (IV.14)$$

$$S(p) = s_0 p^l + s_1 p^{l-1} + s_2 p^{l-2} + \dots + s_l$$

$$T(p) = t_0 p^m + t_1 p^{m-1} + t_2 p^{m-2} + \dots + t_m$$

Généralement on prend  $\deg S = \deg R - 1$ , pour que le filtre  $S/R$  soit causal.

La deuxième étape du calcul du contrôleur est de trouver les lois d'ajustement; Le vecteur des paramètres du contrôleur est:

$$\theta^T = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_k \ s_0 \ s_1 \ \dots \ s_l \ t_0 \ t_1 \ \dots \ t_m] \quad (IV.15)$$

La loi de commande est:

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma \varphi \varepsilon \quad (\text{IV.16})$$

ou

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma \frac{\varphi \varepsilon}{\alpha + \varphi^T \varphi} \quad (\text{IV.17})$$

Avec,

- $\alpha$ : nombre positif.
- $\gamma$ : gain d'adaptation.
- $\varphi$ : vecteur des mesures.
- $\varepsilon$ : modèle d'erreur.

Il existe plusieurs méthodes d'ajustement suivant le choix du modèle d'erreur  $\varepsilon$ , et le vecteur des mesures

#### IV.4.1 SYNTHÈSE BASÉE SUR LA RÈGLE DITE "the MIT rule":

Cette méthode est basée sur l'approche du gradient ( voir chapitre II ). La loi d'ajustement utilisée est celui de l'équation (IV.16).

où:

$$\varepsilon = e = y - y_m$$

$$\varphi^T = -\frac{\partial e}{\partial \theta} = -\left[ \frac{\partial e}{\partial r_1} \dots \frac{\partial e}{\partial r_k} \quad \frac{\partial e}{\partial s_0} \dots \frac{\partial e}{\partial s_1} \quad \frac{\partial e}{\partial t_0} \dots \frac{\partial e}{\partial t_m} \right] \quad (\text{IV.18})$$

L'erreur est  $e = y - y_m \Rightarrow \frac{\partial e}{\partial \theta} = -\frac{\partial y}{\partial \theta}$ .

Les sensibilités sont données comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial r_i} &= \frac{-B T A p^{k-i}}{(AR + BS)^2} uc & i= 1 \dots k \\ \frac{\partial e}{\partial s_i} &= \frac{-B T B p^{l-i}}{(AR + BS)^2} uc & i= 0 \dots l \\ \frac{\partial e}{\partial t_i} &= \frac{B p^{m-i}}{AR + BS} uc & i= 0 \dots m \end{aligned} \quad (\text{IV.19})$$

En utilisant les équations (IV.10), (IV.11), (II.9) et (II.11) on peut simplifier les sensibilités comme suit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial r_i} &= \frac{-b_0 p^{k-i}}{A_0 A_m} u & i=1, \dots, k \\ \frac{\partial e}{\partial s_i} &= \frac{-b_0 p^{l-i}}{A_0 A_m} y & i=0, \dots, l \\ \frac{\partial e}{\partial t_i} &= \frac{b_0 p^{m-i}}{A_0 A_m} uc & i=0, \dots, m \end{aligned} \quad (IV.20)$$

Le vecteur de mesure devient:

$$\varphi = b_0 \left[ \frac{p^{k-1}}{A_0 A_m} u, \dots, \frac{1}{A_0 A_m} u, \frac{p^l}{A_0 A_m} y, \dots, \frac{1}{A_0 A_m} y, \frac{-p^m}{A_0 A_m} uc, \dots, \frac{-1}{A_0 A_m} uc \right]^T \quad (IV.21)$$

Le gain en haute fréquence  $b_0$  peut être absorbé dans le gain d'adaptation :

$$\gamma' = \gamma b_0$$

Alors la loi d'ajustement devient:

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma' \left( \frac{\varphi}{b_0} \right) e \quad (IV.22)$$

La cadence de convergence dépend de l'amplitude de la consigne ce qui est indésirable dans la plus part des cas. Pour remédier à ce problème une règle d'ajustement modifiée peut être utilisée:

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma \frac{\varphi e}{\alpha + \varphi^T \varphi} = -\gamma \frac{e \frac{\partial e}{\partial \theta}}{\alpha + \left( \frac{\partial e}{\partial \theta} \right)^T \left( \frac{\partial e}{\partial \theta} \right)} \quad (IV.23)$$

Note: le nombre  $\alpha > 0$  est utilisé pour éviter la division par zéros.

#### IV.4.2 SYNTHÈSE BASÉE SUR L'APPROCHE DE LYAPUNOV:

La méthode de Lyapunov consiste à proposer une fonction  $V(\theta, e, t)$ , positive définie puis choisir la loi d'ajustement  $d\theta/dt$  de façon à ce qu'elle assure que la fonction  $dV/dt$  soit définie négative.

Soit le modèle d'erreur:

$$e = G(p)(\theta - \theta^0)uc = y - y_m = e \quad (IV.24)$$

Avec,

$\theta$ : paramètres réels,

$\theta^0$ : paramètres idéaux.

L'erreur peut s'écrire sous forme d'état:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B(\theta - \theta^0)uc \\ e &= Cx\end{aligned}\tag{IV.25}$$

En utilisant le lemme de Kalman-Ykubovich[41] et si on suppose que  $dx/dt = Ax$  est asymptotiquement stable, donc il existe deux matrices P et Q positives définies telles que:

$$A^T P + PA = -Q\tag{IV.26}$$

La fonction de Lyapunov est choisie comme suit:

$$V(x, \theta) = \frac{1}{2}(\gamma x^T P x + (\theta - \theta^0)^2)\tag{IV.27}$$

La dérivée est :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\gamma}{2} \left( \frac{dx^T}{dt} P x + x^T P \frac{dx}{dt} \right) + (\theta - \theta^0) \frac{d\theta}{dt}\tag{IV.28}$$

En utilisant les équations (IV.25) et (IV.26) on trouve :

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\gamma}{2} x^T Q x + (\theta - \theta^0) \left( \frac{d\theta}{dt} + \gamma uc B^T P x \right)\tag{IV.29}$$

En choisissant C tel que:

$$B^T P = C$$

On aura :

$$B^T P x = C x = e$$

Finalement un choix de la loi d'ajustement comme suit:

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \gamma \varphi e \\ &= -\gamma uc e\end{aligned}\tag{IV.30}$$

Assurera que  $dV/dt$  est définit négative et le processus est stable en boucle fermée.

#### IV.4.3.SYNTHESE BASEE SUR LA THEORIE DE PASSIVITE:

Une fois la structure du contrôleur est trouvée, cherchons le modèle d'erreur.

En utilisant l'équation (IV.8), on peut écrire:

$$y(AR + BS) = y(A_o Am B^+) \quad (IV.31)$$

Donc:

$$\begin{aligned} A_o Amy &= AR_1 y + b_o Sy \\ &= b_o (Ru + Sy) \end{aligned} \quad (IV.32)$$

D'autre part :

$$A_o Am y_m = A_o B m u_c = b_o T u_c \quad (IV.33)$$

Donc :

$$A_o Am (y - y_m) = b_o (Ru + Sy - T u_c) \quad (IV.34)$$

Le modèle d'erreur est le suivant :

$$e = \frac{b_o}{A_o Am} (Ru + Sy - T u_c) \quad (IV.35)$$

Cette expression de l'erreur n'est pas souhaitable puisque  $\frac{b_o}{A_o Am}$  n'est pas strictement positif réel (SPR); Alors on introduit l'erreur filtrée [28]:

$$e_f = \frac{Q}{P} e = \frac{Q}{P} (y - y_m) \quad (IV.36)$$

Alors on peut écrire :

$$e_f = \frac{b_o Q}{A_o Am} \left( \frac{R}{P} u + \frac{S}{P} y - \frac{T}{P} u_c \right) \quad (IV.37)$$

où

$$\frac{b_o Q}{A_o Am} \text{ est SPR}$$

En Posant  $P = P_1 P_2$  où  $P_2$  est un polynôme stable et  $\deg P_2 = \deg R$ , on peut écrire:

$$\frac{R}{P} = \frac{R + P_2 - P_2}{P_1 P_2} = \frac{1}{P_1} + \frac{R - P_2}{P} \quad (IV.38)$$

L'erreur filtrée peut s'écrire:

$$e_f = \frac{b_o Q}{A_o Am} \left( \frac{1}{P_1} u + \frac{R - P_2}{P} u + \frac{S}{P} y - \frac{T}{P} u_c \right) \quad (IV.39)$$

Soit  $\theta$  les paramètres des polynômes  $(R - P_2)$ ,  $S$  et  $T$ , alors:

$$\theta = [r'_1 \ r'_2 \ \dots \ r'_k \ s_0 \ s_1 \ \dots \ s_l \ t_0 \ t_1 \ \dots \ t_m]^T$$



Definissons le vecteur de mesures:

$$\varphi^T = \left[ \frac{p^{k-1}}{P(p)} u \dots \frac{1}{P(p)} u \quad \frac{p^l}{P(p)} y \dots \frac{1}{P(p)} y \quad - \frac{p^m}{P(p)} uc \dots - \frac{1}{P(p)} uc \right] \quad (IV.40)$$

L'expression de l'erreur est la suivante:

$$e_r = \frac{b_0 Q}{A_0 A_m} \left( \frac{1}{P_1} u + \varphi^T \theta^\circ \right) \quad (IV.41)$$

Avec,

$\theta^\circ$  : les paramètres nominaux.

La loi de commande convenable est:

$$u = -\theta^T (P_1 \varphi) \quad (IV.42)$$

L'erreur tend vers zéro si  $\theta$  tend vers  $\theta^\circ$ .

Le modèle d'erreur augmentée est :

$$\varepsilon = e_r + \frac{b_0 Q}{A_0 A_m} \eta \quad (IV.43)$$

Avec :

$$\eta = - \left( \frac{1}{P_1} u + \varphi^T \theta \right) \quad (IV.44)$$

$\eta$ : taux d'augmentation.

Donc l'erreur peut s'écrire :

$$\varepsilon = \frac{b_0 Q}{A_0 A_m} \varphi^T (\theta^\circ - \theta) \quad (IV.45)$$

La stabilité de cette Algorithme est garantie si:

- $\frac{b_0 Q}{A_0 A_m}$  est SPR.
- Les signaux constituant le vecteur  $\varphi$  sont bornés.

D'après l'équation (IV.45), la connaissance de  $b_0$  est nécessaire pour trouver le modèle d'erreur, mais il peut être absorbé dans le gain d'adaptation si son signe est connu.

La commande adaptative directe à modèle de référence basée sur la règle SPR est donnée par le schéma de la fig.4.2.

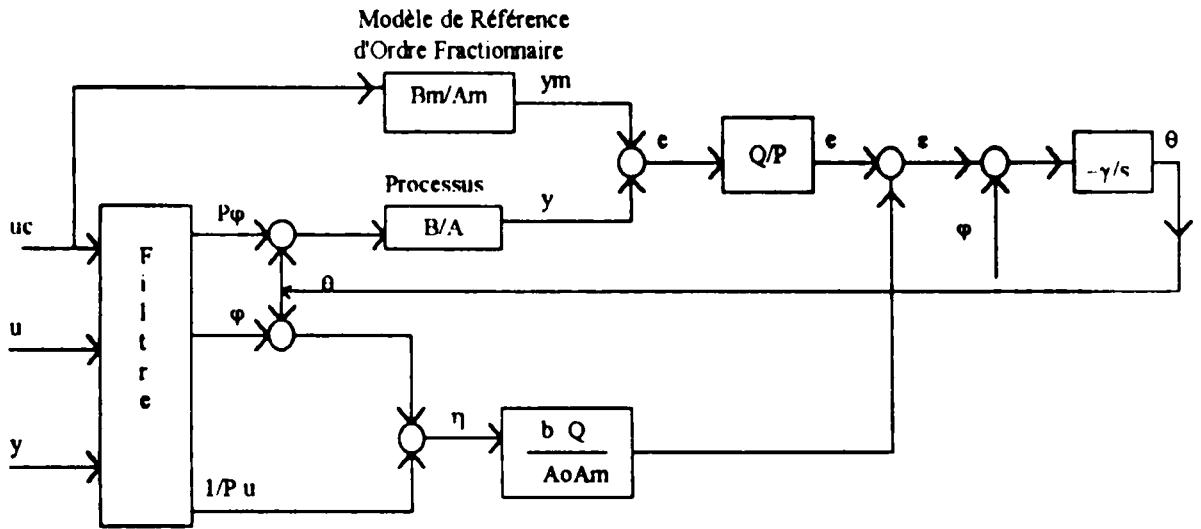


Fig.4.2: Commande Adaptative à Modèle de Référence d'Ordre Fractionnaire basés sur la règle SPR

L'application de la règle SPR pour la synthèse d'une commande adaptative directe à modèle de référence se résume à l'implantation des équations suivantes:

- $y(t) = \frac{B}{A} u(t)$
- $y_m(t) = \frac{B_m}{A_m} u_c(t)$
- $e_f = \frac{Q}{P} e = \frac{Q}{P} (y - y_m)$
- $\eta = -\left( \frac{1}{P_1} u + \varphi^T \theta \right)$
- $\varepsilon = e_f + \frac{b_0 Q}{A_o A_m} \eta$
- $\frac{d\theta}{dt} = \gamma \varphi \varepsilon$
- $u(t) = -\theta^T (P_1 \varphi)$

Les polynomes  $P_1$ ,  $P_2$  et  $Q$  sont choisis selon l'application, mais le choix le plus

simple [2], est le suivant:

$$\begin{aligned} P_1 &= A_m \\ P_2 &= A_o \\ Q &= A_o A_m \end{aligned} \quad (IV.46)$$

Dans le cas d'un modèle de référence d'ordre fractionnaire on peut négliger l'observateur d'où on peut utiliser le choix suivant :

$$\begin{aligned} P_1 &= Q = A_m \\ P_2 &= \text{polynome stable d'ordre } k \end{aligned} \quad (IV.47)$$

#### IV.5 CONCLUSION :

L'utilisation d'un système d'ordre fractionnaire sous sa forme approximée, comme modèle de référence dans une boucle adaptative est faisable. En plus, il offre quelques caractéristiques particulières dans la boucle d'adaptation :

- La convergence du processus devient plus rapide.
- Un système du premier ordre fractionnaire peut être utilisé comme modèle de référence pour une classe de processus (où  $\text{deg}A - \text{deg}B \leq 1$ ), en augmentant l'ordre de l'approximation.
- Un système du second ordre fractionnaire peut être utilisé comme modèle de référence pour une classe de processus (où  $\text{deg}A - \text{deg}B \leq 2$ ), en augmentant l'ordre d'approximation.
- Toutes les méthodes d'adaptation (d'ajustement) restent applicables.
- La stabilité en boucle fermée dépend en premier lieu de la méthode d'ajustement des paramètres du contrôleur.

# **CHAPITRE V**

## **SIMULATIONS**

# **SIMULATIONS**

## **V-1 INTRODUCTION:**

Le présent chapitre est consacré à l'application de la commande adaptative à modèle de référence d'ordre entier et d'ordre fractionnaire aux processus académiques du premier ordre et second ordre, puis comparer les résultats de simulation pour les deux cas.

Une application typique donnée à la fin de ce chapitre, consiste à la commande en vitesse d'un moteur à courant continu [42], où trois technique de commande sont appliquées:

- Régulation par un PI
- Commande adaptative à modèle de référence d'ordre entier
- Commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire

Le modèle fractionnaire utilisé est une approximation d'ordre 6 d'un système à pôle de puissance fractionnaire.

Les simulation de la CAMR sont faites suivant le schéma de la fig.4.1, où br est un bruit additif (bruit de mesure) générée sous forme de séquences d'impulsions dont l'amplitude maximale est 10% de la sortie du processus  $y(t)$ .

Pour tous les exemples on a simulé un retard pur du processus, c'est-à-dire que ce dernier ne répond à une commande qu'après un temps de retard, qu'il est supposé égale à 0.3s.

Le calcul de la sortie du processus et la sortie du modèle de référence, ainsi que les variations des paramètres du contrôleur est fait en utilisant l'intégration numérique des équation d'état, par la méthode de Runge-kuta d'ordre 4, avec un pas d'intégration de  $10^{-7}$ .

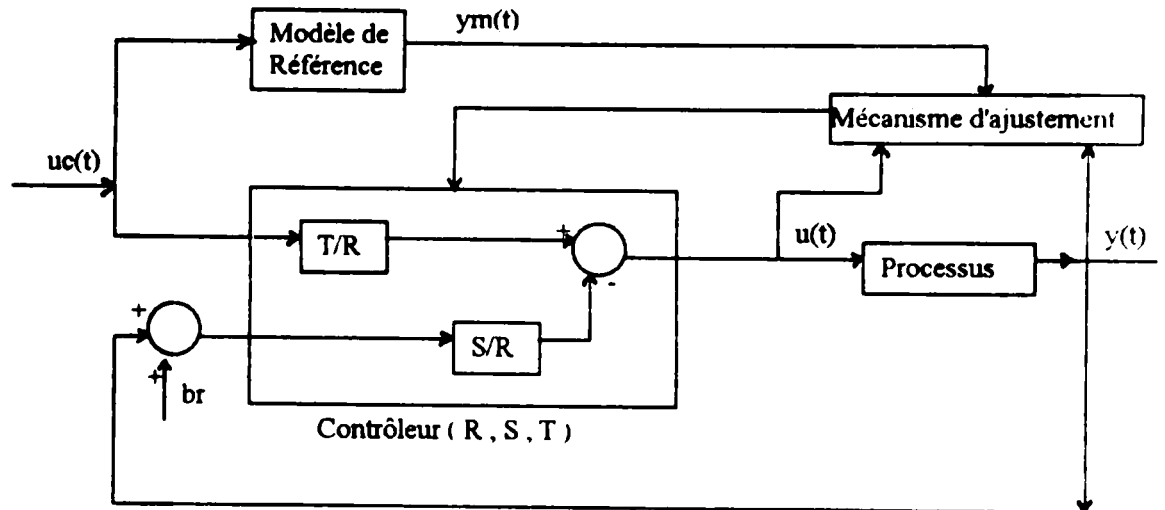


Fig.4.1: Commande adaptative directe à modèle de référence

## V-2 COMMANDE ADAPTATIVE DIRECTE A MODELE DE REFERENCE D'ORDRE FRACTIONNAIRE D'UN PROCESSUS DU PREMIER ORDRE :

### V-2.1 - Le processus à commander:

Le processus est un système du premier ordre, régi par l'équation suivante:

$$y(t) = \frac{b_0}{p + a_1} u(t) \quad (V.1)$$

avec,

$$b_0 = 0.5$$

$$a_1 = 1$$

### V-2.2 - Le modèle de référence:

Dans cet exemple on utilise une fois un modèle de référence d'ordre entier, et une autre fois un modèle de référence d'ordre non entier, pour permettre de comparer les résultats.

a- Le modèle de référence d'ordre entier est :

$$y_m(t) = \frac{bm_0}{p + am_1} uc(t) \quad (V.2)$$

avec,  
 $bm_0 = 10$   
 $am_1 = 10$

b- Le modèle de référence d'ordre fractionnaire est:

$$ym(t) = \frac{1}{(1 + 0.1p)^m} uc(t) \tag{V.3}$$

avec,  
 $m=0.1$   
 $w_{max} = 1200$  hz  
 $\epsilon = 0.3$  dB

Ce modèle est approximé à l'ordre N=6 (voir chapitre précédent).

La sortie du modèle approximé est donnée sous la forme de l'équation (III.5):

$$ym(t) = \frac{1}{(1 + \frac{p}{10})^{0.1}} uc(t) \approx \frac{\prod_{i=1}^5 (1 + p / z_i)}{\prod_{i=1}^6 (1 + p / p_i)} uc(t) = \frac{bm_0 p^5 + bm_1 p^4 + \dots + bm_5}{p^6 + am_1 p^5 + \dots + am_6} uc(t) \tag{V.4}$$

avec

$p_1 = 14.1253$	$z_1 = 15.2522$	$bm_0 = 4.4668E2$	$am_0 = 1$
$p_2 = 30.4321$	$z_2 = 32.8599$	$bm_1 = 2.6802E5$	$am_1 = 1.2113E3$
$p_3 = 65.5641$	$z_3 = 70.7945$	$bm_2 = 4.9686E7$	$am_2 = 4.5974E5$
$p_4 = 141.2537$	$z_4 = 152.5222$	$bm_3 = 3.5175E9$	$am_3 = 6.8807E7$
$p_5 = 304.3210$	$z_5 = 328.5993$	$bm_4 = 9.5097E10$	$am_4 = 4.2577E9$
$p_6 = 655.6418$		$bm_5 = 7.943E11$	$am_5 = 1.039E11$
			$am_6 = 7.9432E11$

les réponses indicielles (yme et ymf), des deux modèles de référence (d'ordre entier et d'ordre fractionnaire), sont données par la fig.5.2.

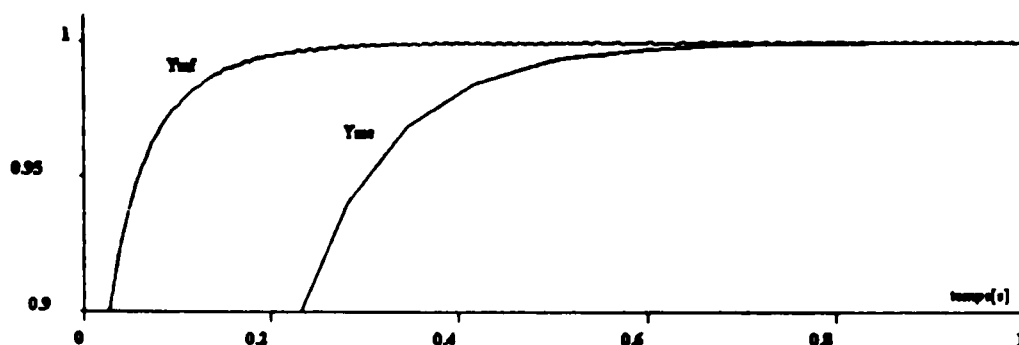


Fig.5.2: Réponses indicielles des modèles de référence d'ordre entier et d'ordre fractionnaire

### V-2.3 - Synthèse du contrôleur:

#### V-2.3.a - cas du modèle de référence d'ordre entier:

La structure du contrôleur satisfaisant les équations (IV.8), (IV.12) et (IV.13) est définie par les degrés des polynômes suivants:

$$\begin{aligned}
 k = 0 & \Rightarrow R = r_0 = 1 & (V.5) \\
 l = 0 & \Rightarrow S = s_0 \\
 mt = 0 & \Rightarrow T = t_0 \\
 \text{deg } A_0 = 0, & A_0 = 1
 \end{aligned}$$

#### V-2.3.a.1 - synthèse basée sur la méthode de MIT:

La loi d'ajustement est donnée par l'équation (IV.16):

où

$$\begin{aligned}
 \varepsilon = e & = y(t) - y_m(t) & (V.6) \\
 \Phi^T & = - \begin{bmatrix} \frac{\partial e}{\partial s_0} & \frac{\partial e}{\partial t_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_0}{p + am_1} y & \frac{-b_0}{p + am_1} uc \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 \frac{ds_0}{dt} & = \gamma' \left( \frac{1}{p + 10} y \right) e & (V.7) \\
 \frac{dt_0}{dt} & = \gamma' \left( - \frac{1}{p + 10} uc \right) e
 \end{aligned}$$



La loi de commande est donnée par l'équation (IV.7), alors:

$$u(t) = t_0 u_c(t) - s_0 y(t) \quad (\text{V.8})$$

Les résultats de simulation sont donnés par les figures fig.5.3.a, fig.5.3.b et fig.5.3.c .

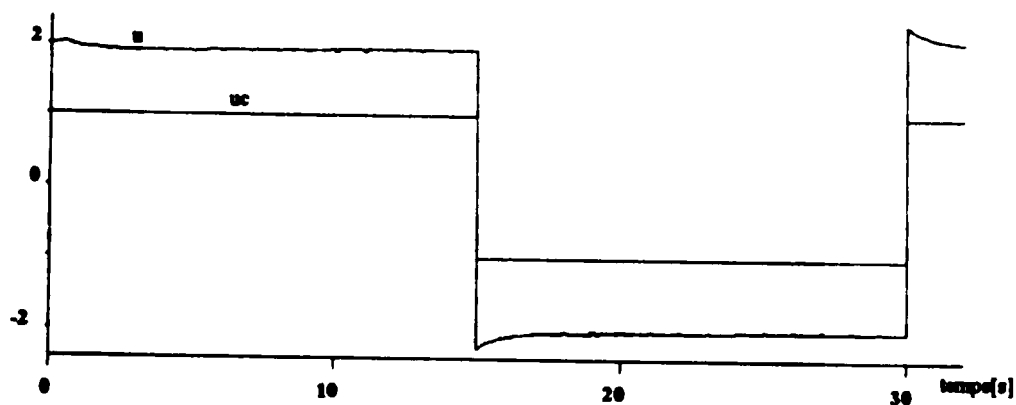


Fig.5.3.a: La commande  $u(t)$  et la consigne  $u_c(t)$

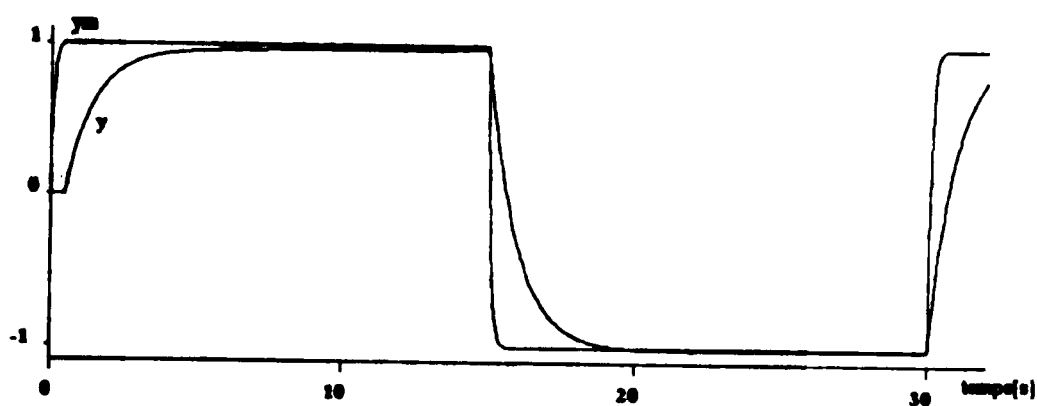


Fig.5.3.b: Réponses du processus et du modèle

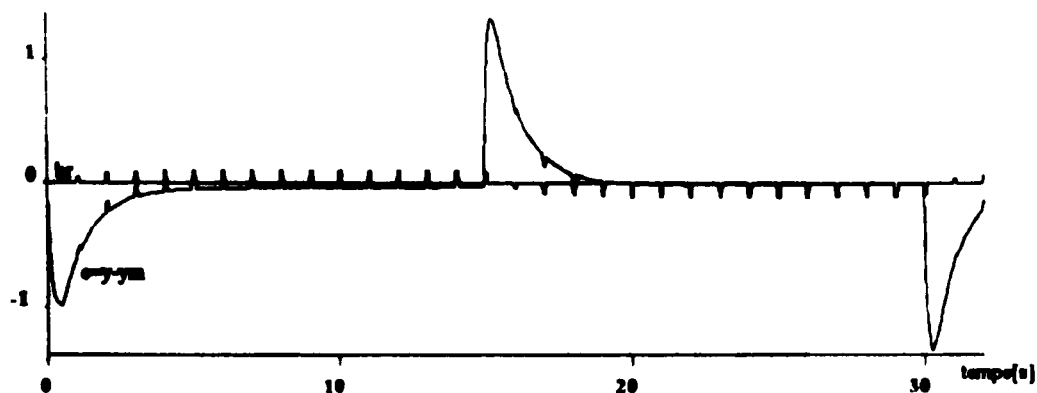


Fig.5.3.c: L'erreur en sorties et le bruit additif

### V-2.3.a.2 - synthèse basée sur la méthode de Lyapunov:

La fonction de Lyapunov choisie est la suivante:

$$V(e, \theta) = \frac{1}{2} \left( e^2 + \frac{1}{b_0 \gamma} (b_0 s_0 + a_1 - a m_1)^2 + \frac{1}{b_0 \gamma} (b_0 t_0 - b m_0)^2 \right) \quad (V.9)$$

La dérivée de cette fonction est:

$$\frac{dV}{dt} = -a m_1 e^2 + \frac{1}{\gamma} (b_0 s_0 + a_1 - a m_1) \left( \frac{ds_0}{dt} - \gamma y e \right) + \frac{1}{\gamma} (b_0 t_0 - b m_0) \left( \frac{dt_0}{dt} + \gamma u c e \right) \quad (V.10)$$

les lois d'ajustement assurant que  $dV/dt$  est négative définie sont trouvées comme suit:

$$\begin{aligned} \frac{ds_0}{dt} &= \gamma' y e \\ \frac{dt_0}{dt} &= -\gamma' u c e \end{aligned} \quad (V.11)$$

Les figures fig.5.4.a, fig.5.4.b et fig.5.4.c représentent les résultats de simulation.

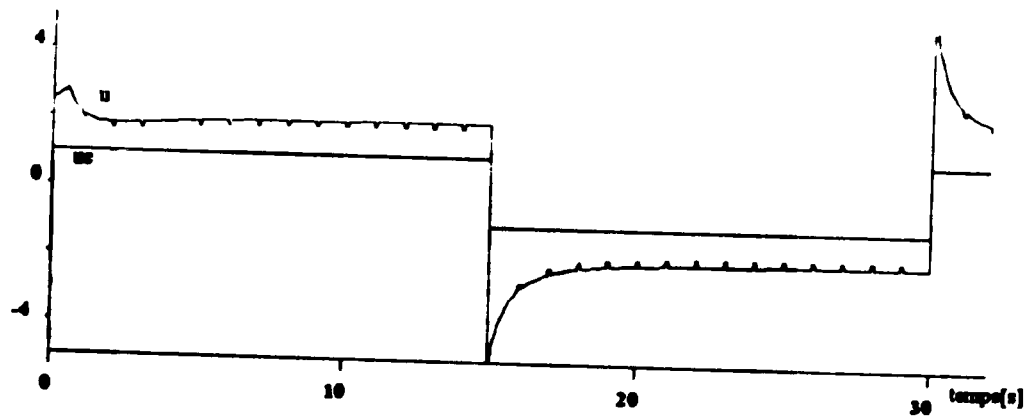


Fig.5.4.a: La commande et la consigne

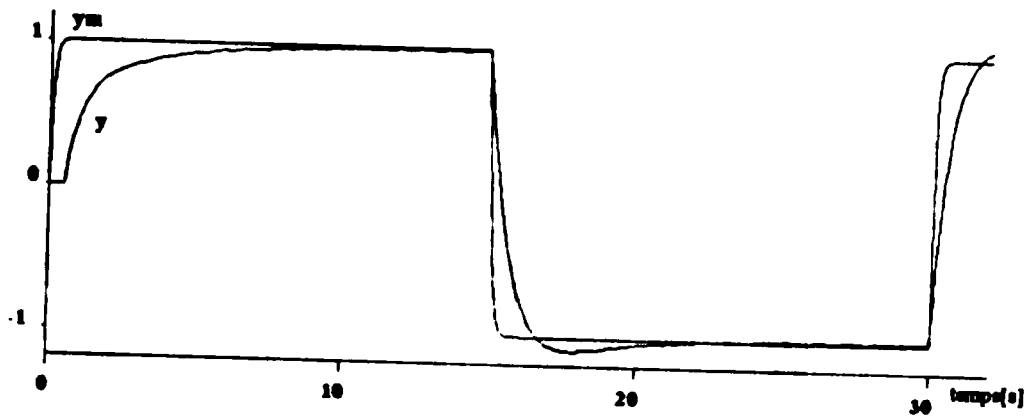


Fig.5.4.b: Réponses du processus et du modèle de référence

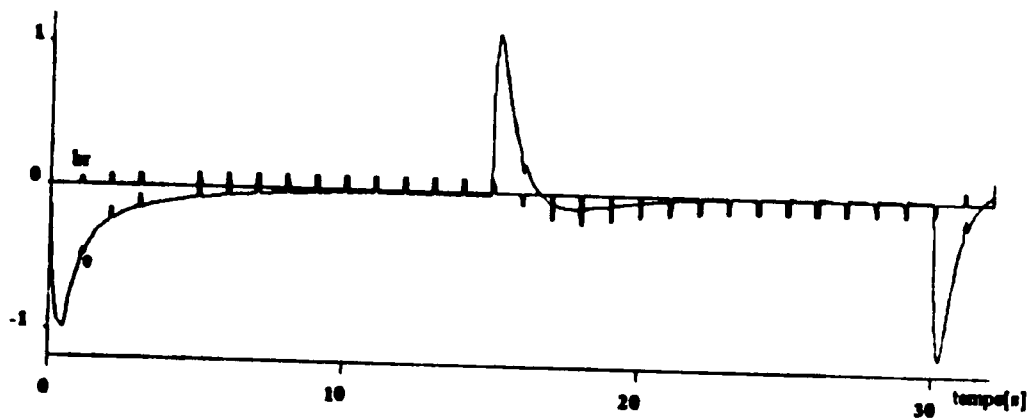


Fig.5.4.c: L'erreur en sorties et le bruit additif

**V-2.3.b - cas du modèle de référence d'ordre fractionnaire :**

La structure du contrôleur satisfaisant les équations (IV.8), (IV.12) et (IV.13) est la suivante:

$$\begin{aligned}
 k = 5 &\Rightarrow R = p^5 + r_1 p^4 + r_2 p^3 + r_3 p^2 + r_4 p + r_5 \\
 l = 4 &\Rightarrow S = s_0 p^4 + s_1 p^3 + s_2 p^2 + s_3 p + s_4 \\
 mt = 5 &\Rightarrow T = t_0 p^3 + t_1 p^4 + t_2 p^3 + t_3 p^2 + t_4 p + t_5 \\
 \text{deg } A_0 = 0, A_0 &= 1
 \end{aligned}
 \tag{V.12}$$

**V.2.3.b.1 - synthèse basée sur la méthode de MIT:**

La loi d'ajustement est donnée par l'équation (IV.16):

où

$$\varepsilon = e = y(t) - y_m(t)
 \tag{V.13}$$

et

$$\varphi^T = -\frac{\partial e}{\partial \theta} = -\left[ \frac{\partial e}{\partial r_1} \dots \frac{\partial e}{\partial r_5} \quad \frac{\partial e}{\partial s_0} \dots \frac{\partial e}{\partial s_4} \quad \frac{\partial e}{\partial t_0} \dots \frac{\partial e}{\partial t_5} \right]
 \tag{V.14.a}$$

$$\varphi^T = b_0 \left[ \frac{p^4}{Am} u \dots \frac{1}{Am} u \quad \frac{p^4}{Am} y \dots \frac{1}{Am} y \quad \frac{-p^3}{Am} uc \dots \frac{-1}{Am} uc \right]
 \tag{V.14.b}$$

donc

$$\begin{aligned}
 \frac{dr_1}{dt} &= \gamma' \left( \frac{p^4}{Am} u \right) e & \frac{ds_0}{dt} &= \gamma' \left( \frac{p^4}{Am} y \right) e & \frac{dt_0}{dt} &= -\gamma' \left( \frac{p^3}{Am} uc \right) e \\
 \frac{dr_2}{dt} &= \gamma' \left( \frac{p^3}{Am} u \right) e & & & & \cdot \\
 & \cdot & & & & \cdot \\
 & \cdot & & & & \cdot \\
 \frac{dr_3}{dt} &= \gamma' \left( \frac{1}{Am} u \right) e & \frac{ds_4}{dt} &= \gamma' \left( \frac{1}{Am} y \right) e & \frac{dt_5}{dt} &= -\gamma' \left( \frac{1}{Am} uc \right) e
 \end{aligned}
 \tag{V.15}$$

Avec,

$$\gamma' = b_0 \gamma = 0.6$$

La commande est générée suivant la loi donnée par l'équation (IV.7):

Les résultats de simulation sont donnés par les figures fig.5.5.a, fig.5.5.b et fig.5.5.c.

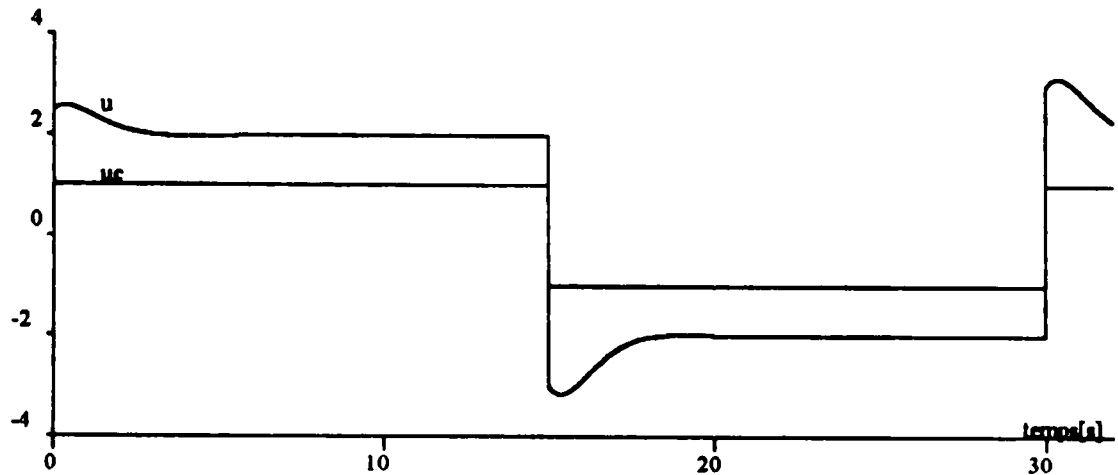


Fig.5.5.a: la Commande et la consigne

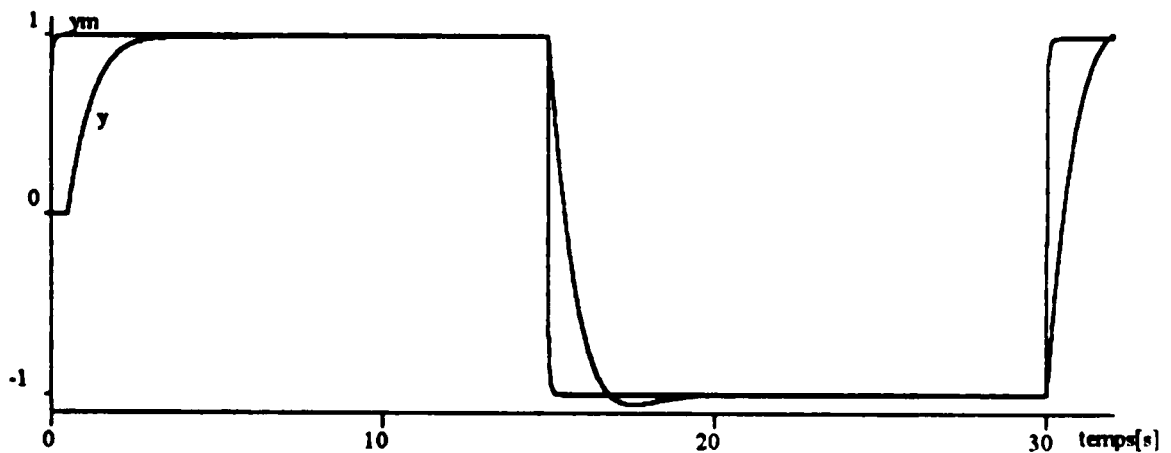


Fig.5.5.b: les Réponses du processus et du modèle

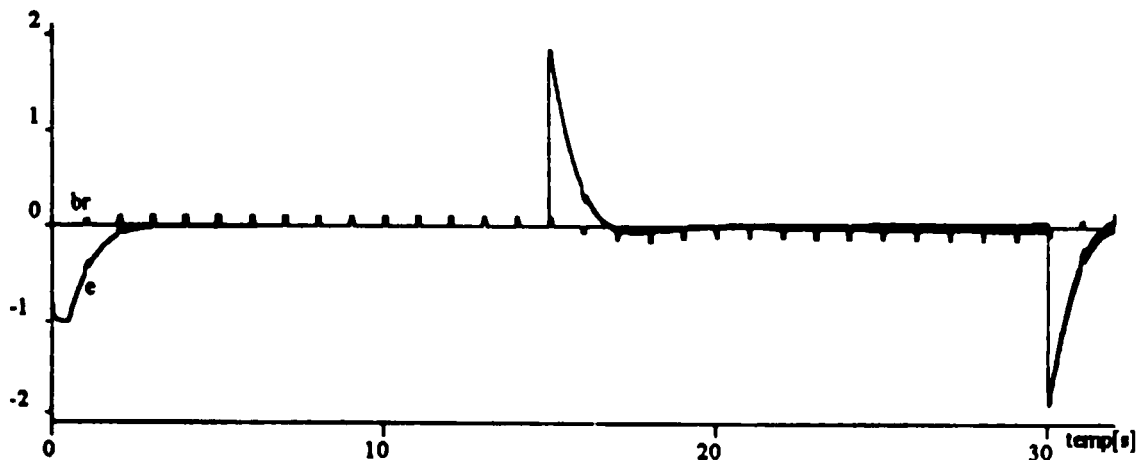


Fig.5.5.c: l'Erreur en sorties et le bruit additif

**V.2.3.b.2 - synthèse basée sur la méthode de passivité (SPR):**

Les polynomes  $P_1$ ,  $P_2$  et  $Q$  sont choisis comme suit :

$$\begin{aligned} P_1 &= Q = Am \\ P_2 &= p^5 + 7p^4 + 19p^3 + 25p^2 + 16p + 4 \end{aligned} \quad (\text{V.16})$$

$P_2$  est un polynome stable et de même degrés que  $R$ .  
Les paramètres du contrôleur sont :

$$\theta = [r_1 \ r_2 \ \dots r_3 \ s_0 \ s_1 \ \dots s_4 \ t_0 \ t_1 \ \dots t_3]^T$$

L'erreur augmentée est donnée par l'équation (IV.43), où:

$$\varepsilon = e_f + b_0 \eta \quad (\text{V.17})$$

avec,

$$\begin{aligned} e_f &= \frac{Q}{P}(y - y_m) = \frac{1}{P_2} e \\ \eta &= -\left(\frac{1}{P_1} u + \varphi^T \theta\right) \end{aligned}$$

L'ajustement des paramètres est donnée selon l'équation (IV.30):

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma \varphi \varepsilon$$

Le vecteur des mesures est:

$$\varphi^T = [\varphi_u^T \ \varphi_y^T \ \varphi_e^T] \quad (\text{V.18})$$

avec,

$$\begin{aligned} \varphi_u^T &= \left[ \frac{p^4}{P} u \quad \frac{p^3}{P} u \quad \dots \quad \frac{1}{P} u \right] \\ \varphi_y^T &= \left[ \frac{p^4}{P} y \quad \frac{p^3}{P} y \quad \dots \quad \frac{1}{P} y \right] \\ \varphi_e^T &= \left[ -\frac{p^3}{P} u c \quad -\frac{p^4}{P} u c \quad \dots \quad -\frac{1}{P} u c \right] \end{aligned}$$

La loi de commande est donnée par :

$$u = -\theta^T (P_1 \varphi) \quad (\text{V.19})$$

En utilisant un gain d'adaptation  $\gamma = 0.6$ , on trouve les résultats donnés aux graphes fig.5.6.a, fig.5.6.b et fig.5.6.c.

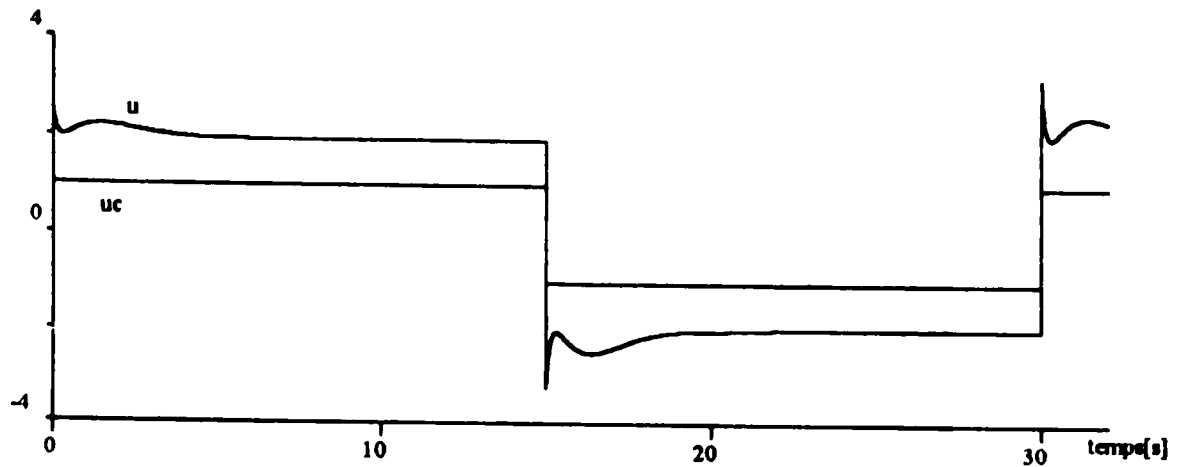


fig.5.6.a: La commande et la consigne

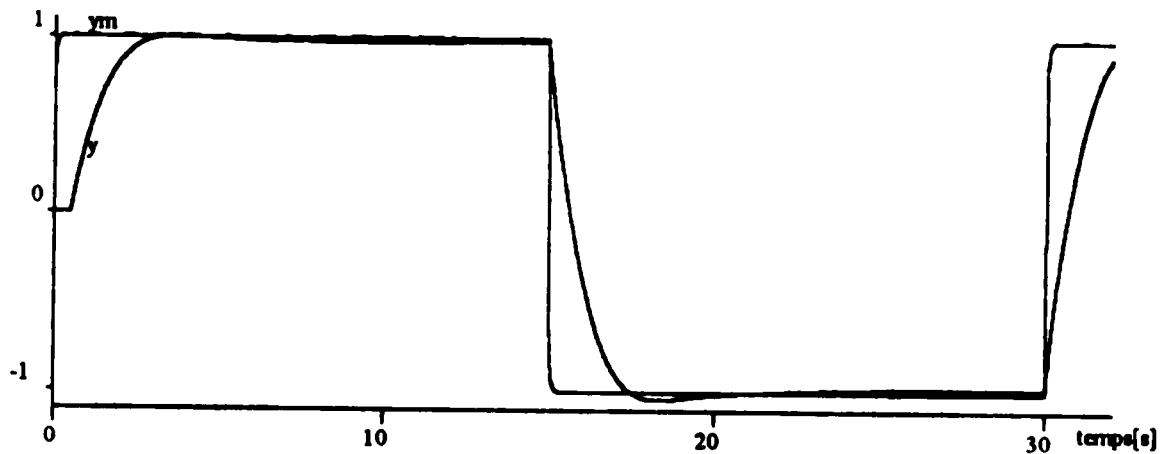


fig.5.6.b: Les réponses du processus et du modèle de référence

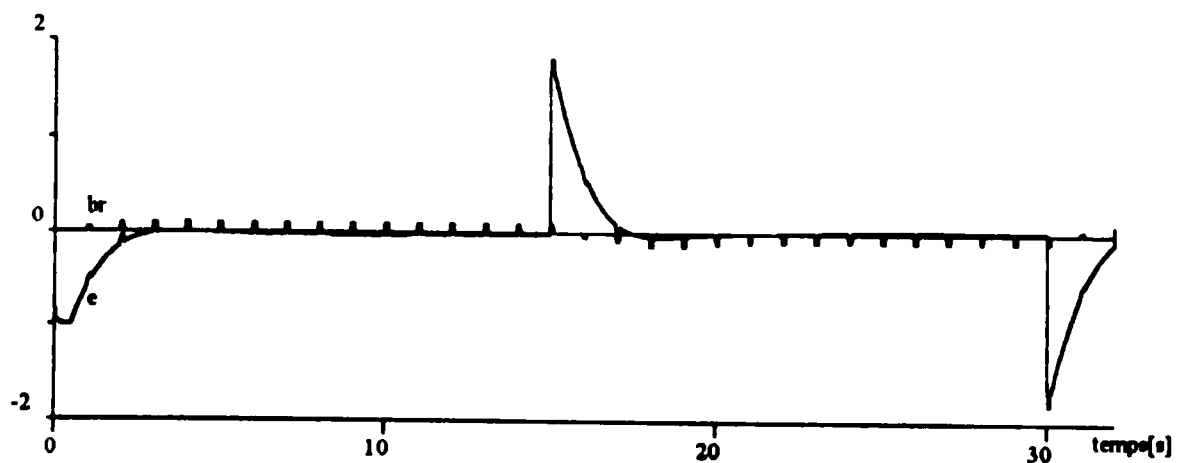


fig.5.6.c: L'erreur en sorties et le bruit additif

La commande adaptative à modèle de référence entier et fractionnaire dont l'ajustement est fait avec l'une des méthodes Mit, Lyapunov ou SPR, est résumée par les graphes de fig.5.7, qui représentent les réponses du processus pour les différents cas.

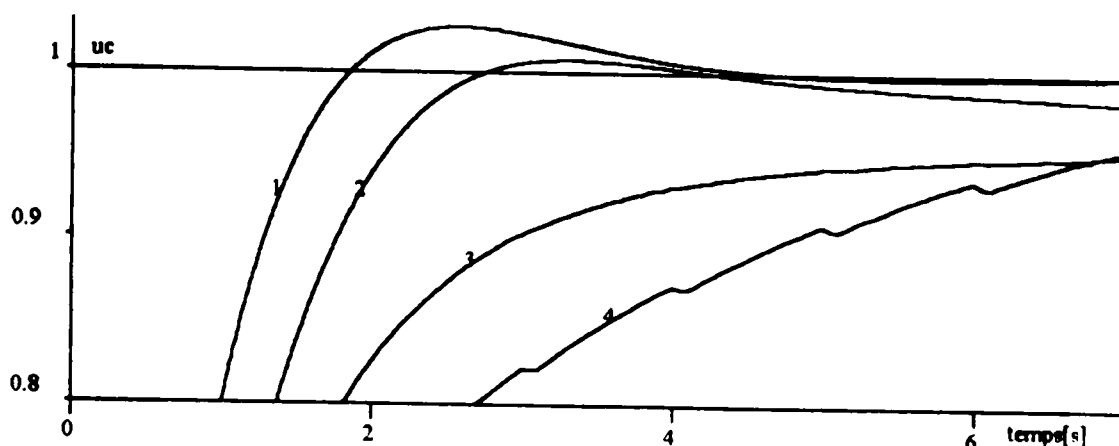


fig.5.7: Comparaison entre les réponses du processus du premier ordre

- 1: Modèle de référence d'ordre fractionnaire, ajustement des paramètres par la méthode de MIT.
- 2: Modèle de référence d'ordre fractionnaire, ajustement des paramètres par la méthode de SPR.
- 3: Modèle de référence d'ordre entier, ajustement des paramètres par la méthode de MIT.
- 4: Modèle de référence d'ordre entier, ajustement des paramètres par la méthode de Lyapunov.

#### V-2.4 CONCLUSION:

On constate d'après les résultats précédents, que l'utilisation d'un modèle de référence d'ordre fractionnaire améliore la réponse du processus.

Les temps de montée et de réponse sont réduits de la moitié, donc la rapidité est presque le double dans le cas d'un modèle d'ordre fractionnaire.

L'application de la méthode de passivité (SPR) nous a permis d'obtenir une réponse avec un dépassement de 0.2%, mais avec une précision moyenne.

L'ajustement par la méthode MIT a donné une réponse avec une meilleure précision, avec un temps de montée très réduit (0.6 s), mais avec un dépassement de 0.7%.

On conclut que la meilleure réponse du processus est obtenue dans le cas d'un modèle de référence d'ordre fractionnaire, en ajustant les paramètres du contrôleur par la méthode de MIT.



**V-3 COMMANDE ADAPTATIVE DIRECTE A MODELE DE REFERENCE D'ORDRE FRACTIONNAIRE D'UN PROCESSUS DU SECOND ORDRE :**

**V-3.1 - Le processus à commander:**

Le processus est un système du deuxième ordre donné par sa fonction de transfert:

$$y(t) = \frac{b_0}{p^2 + a_1 p + a_2} u(t) \quad (V.20)$$

avec,

$$b_0 = 0.5$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 1$$

**V-3.2 - Le modèle de référence:**

Le modèle de référence d'ordre entier est :

$$y_m(t) = \frac{w_n^2}{p^2 + 2\zeta w_n p + w_n^2} u_c(t) = \frac{b m_0}{p^2 + a m_1 p + a m_2} u_c(t) \quad (V.21)$$

Avec,

$$w_n = 10 ,$$

$$\zeta = 0.95 ,$$

$$b m_0 = 100 ,$$

$$a m_1 = 19 ,$$

$$a m_2 = 100$$

Le modèle de référence d'ordre fractionnaire est:

$$y_m(t) = \frac{1}{\left(\frac{p^2}{w_n^2} + 2\zeta \frac{p}{w_n} p + 1\right)^m} u_c(t) \quad (V.22)$$

avec,

$$m = 0.55 ,$$

$$w_n = 10 ,$$

$$\zeta = 0.95$$

Ce modèle est approximé à l'ordre  $N=6$  selon l'équation (III.21), où:

$$\begin{aligned} \beta &= 2m - 1 = 0.1 \\ \alpha &= (0.95)^m = 0.97218 \\ w_{\max} &= 1200 \text{ hz} \\ \epsilon_p &= 0.3 \text{ dB} \end{aligned}$$

Donc on peut écrire ce modèle sous la forme de l'équation (III.16), d'où :

$$y_m(t) = \frac{(1 + \frac{p}{10}) \prod_{i=1}^5 (1 + p / z_i)}{(\frac{p^2}{100} + 1.9 \frac{p}{10} + 1) \prod_{i=1}^6 (1 + p / p_i)} uc(t) = \frac{bm_0 p^6 + bm_1 p^5 + \dots + bm_6}{p^8 + am_1 p^7 + \dots + am_8} uc(t) \quad (V.23)$$

avec,

$p_1 = 14.1253$	, $z_1 = 15.2522$	$bm_0 = 4.4668E3$	, $am_0 = 1$
$p_2 = 30.4321$	, $z_2 = 32.8599$	$bm_1 = 2.7249E6$	, $am_1 = 1.2307E3$
$p_3 = 65.5641$	, $z_3 = 70.7945$	$bm_2 = 5.2366E8$	, $am_2 = 4.8339E5$
$p_4 = 141.2537$	, $z_4 = 152.5222$	$bm_3 = 4.0144E10$	, $am_3 = 7.7867E7$
$p_5 = 304.3210$	, $z_5 = 328.5993$	$bm_4 = 1.3027E12$	, $am_4 = 5.6415E9$
$p_6 = 655.6418$		$bm_5 = 1.7453E13$	, $am_5 = 1.9357E11$
		$bm_6 = 7.943E13$	, $am_6 = 3.2403E12$
			$am_7 = 2.5834E13$
			$am_8 = 7.9432E13$

les réponses indicielles ( $y_{mc}$  et  $y_{mf}$ ), des deux modèles de référence (d'ordre entier et d'ordre fractionnaire), sont données par la fig. 5.8.

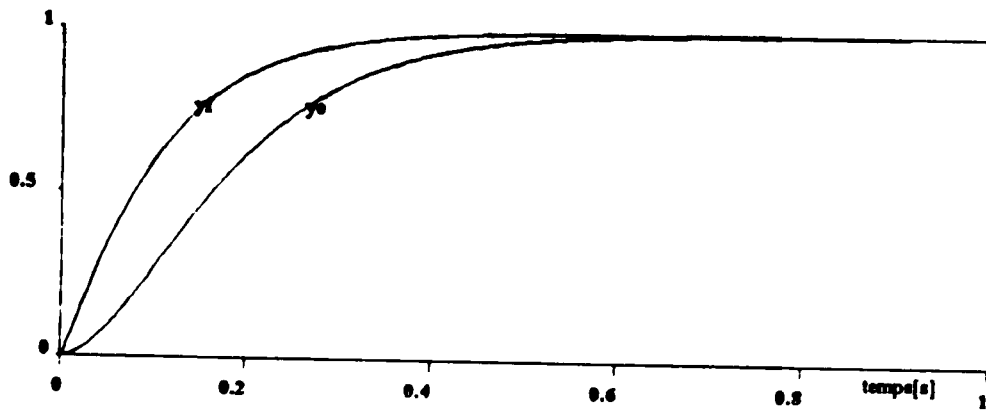


Fig.5.8: Réponses indicielles des modèles de référence du second ordre  
 ye: ordre entier , yf: ordre fractionnaire approximé à l'ordre 6

**V-3.3 - Synthèse du contrôleur:**

**V-3.3.a - cas du modèle de référence d'ordre entier:**

La structure du contrôleur satisfaisant les équation (IV.8), (IV.12) et (IV.13) est la suivante:

$$\begin{aligned}
 k = 1 & \Rightarrow R = p + r_1 & (V.24) \\
 l = 1 & \Rightarrow S = s_0 p + s_1 \\
 mt = 1 & \Rightarrow T = t_0 p + t_1 \\
 \text{deg } A_o = 1, & A_o = p + 1
 \end{aligned}$$

**V-3.3.a.1. - synthèse basée sur la méthode de MIT:**

La loi d'ajustement est donnée par l'équation (IV.16):

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma \varphi \varepsilon$$

où

$$\varepsilon = e = y(t) - y_m(t) \tag{V.25}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi^T &= \left[ \frac{\partial e}{\partial r_1} \quad \frac{\partial e}{\partial s_0} \quad \frac{\partial e}{\partial s_1} \quad \frac{\partial e}{\partial t_0} \quad \frac{\partial e}{\partial t_1} \right] \\
 &= b_0 \left[ \frac{1}{D(p)} u \quad \frac{p}{D(p)} y \quad \frac{1}{D(p)} y \quad \frac{-p}{D(p)} u_c \quad \frac{-1}{D(p)} u_c \right]
 \end{aligned} \tag{V.26}$$

Avec,

$$D(p) = A_o(p) A_m(p) = p^3 + 2.9p^2 + 101.9p + 100$$

donc les lois d'ajustement sont données comme suit:

$$\frac{dr_1}{dt} = \gamma \left( \frac{1}{D} u \right) e, \quad \frac{ds_0}{dt} = \gamma \left( \frac{p}{D} y \right) e, \quad \frac{ds_1}{dt} = \gamma \left( \frac{1}{D} y \right) e \quad (V.27)$$

$$\frac{dt_0}{dt} = \gamma \left( -\frac{p}{D} uc \right) e, \quad \frac{dt_1}{dt} = \gamma \left( -\frac{1}{D} uc \right) e$$

avec,

$$\gamma = 0.6.$$

La loi de commande est donnée par l'équation (IV.7):

$$u(t) = \left( \frac{T}{R} \right) uc(t) - \left( \frac{S}{R} \right) y(t) \quad (V.28)$$

Les résultats de simulation sont donnés par les figures fig.5.9.a, fig.5.9.b et fig.5.9.c .

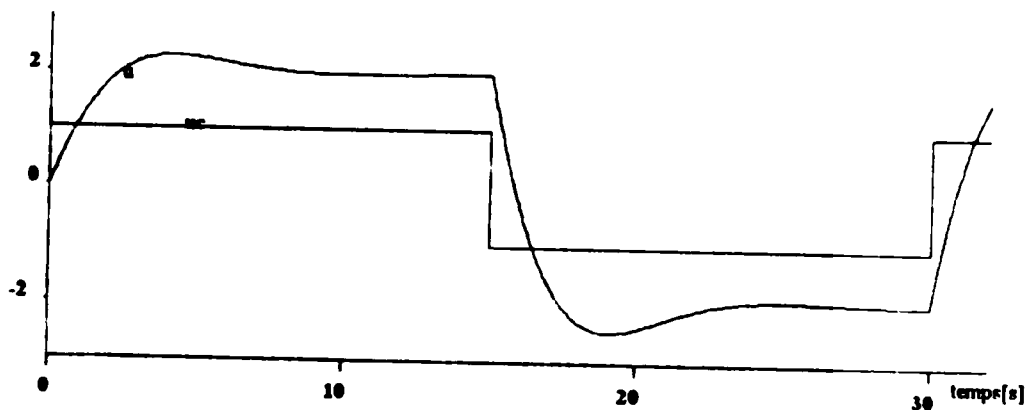


Fig.5.9.a: La commande et la consigne

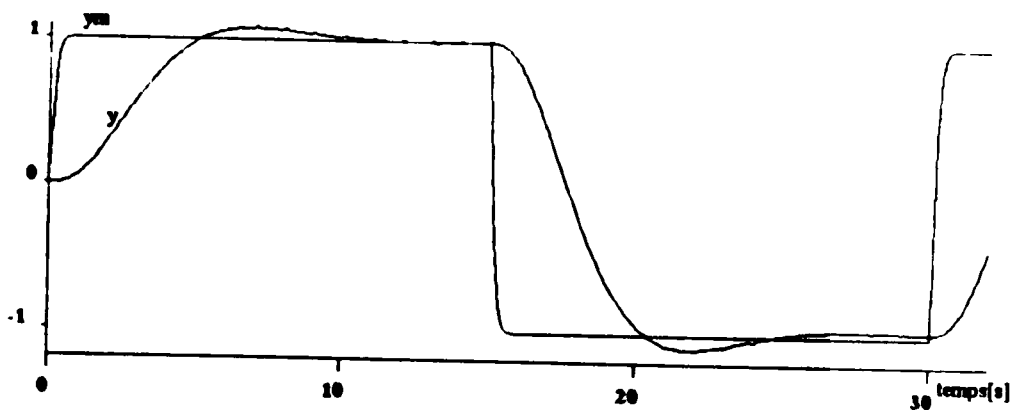


Fig.5.9.b: Les réponses du processus et du modèle de référence

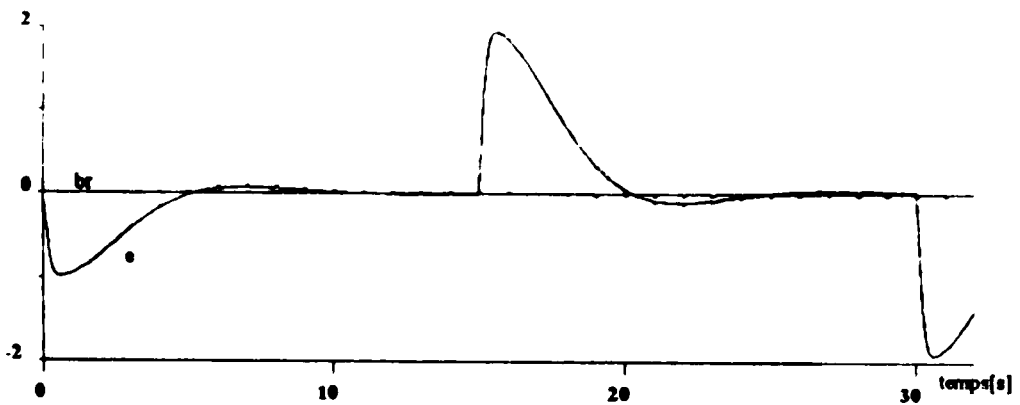


Fig.5.9.c: L'erreur en sorties et le bruit additif

Fig

**V.3.3.b-cas du modèle de référence d'ordre fractionnaire:**

la synthèse du contrôleur suivant les équations (IV.8), (IV.12) et (IV.13) nous a amené à la structure suivante:

$$\begin{aligned}
 k = 6 & \Rightarrow R = p^6 + r_1 p^5 + r_2 p^4 + r_3 p^3 + r_4 p^2 + r_5 p + r_6 & (V.29) \\
 l = 5 & \Rightarrow S = s_0 p^5 + s_1 p^4 + s_2 p^3 + s_3 p^2 + s_4 p + s_5 \\
 mt = 6 & \Rightarrow T = t_0 p^6 + t_1 p^5 + t_2 p^4 + t_3 p^3 + t_4 p^2 + t_5 p + t_6 \\
 \text{deg } A_o = 0, & A_o = 1
 \end{aligned}$$

**V.3.3.b.1 - synthèse basée sur la méthode de MIT:**

La loi d'ajustement est donnée par l'équation (IV.16), où:

$$\varepsilon = e = y(t) - y_m(t) \tag{V.30}$$

$$\varphi^T = -\frac{\partial e}{\partial \theta} = \left[ \frac{\partial e}{\partial r_1} \dots \frac{\partial e}{\partial r_6} \quad \frac{\partial e}{\partial s_0} \dots \frac{\partial e}{\partial s_5} \quad \frac{\partial e}{\partial t_0} \dots \frac{\partial e}{\partial t_6} \right] \tag{V.31.a}$$

$$\varphi^T = b_0 \left[ \frac{p^5}{A_m} u \dots \frac{1}{A_m} u \quad \frac{p^5}{A_m} y \dots \frac{1}{A_m} y \quad \frac{-p^6}{A_m} uc \dots \frac{-1}{A_m} uc \right] \tag{V.31.b}$$

Donc:

$$\begin{aligned}
 \frac{dr_1}{dt} &= \gamma \left( \frac{p^5}{Am} u \right) e & \frac{ds_0}{dt} &= \gamma \left( \frac{p^5}{Am} y \right) e & \frac{dt_0}{dt} &= -\gamma \left( \frac{p^6}{Am} uc \right) c \\
 &\vdots & &\vdots & &\vdots \\
 &\vdots & &\vdots & &\vdots \\
 \frac{dr_6}{dt} &= \gamma \left( \frac{1}{Am} u \right) c & \frac{ds_3}{dt} &= \gamma \left( \frac{1}{Am} y \right) c & \frac{dt_6}{dt} &= -\gamma \left( \frac{1}{Am} uc \right) c
 \end{aligned}
 \tag{V.32}$$

Avec,  
 $\gamma = b_0 \gamma' = 0.6$

La loi de commande est donnée par l'équation (IV.4):

$$R u(t) = T uc(t) - S y(t)$$

Les résultats de simulation sont donnés par les figures fig.5.10.a, fig.5.10.b et fig.5.10.c:

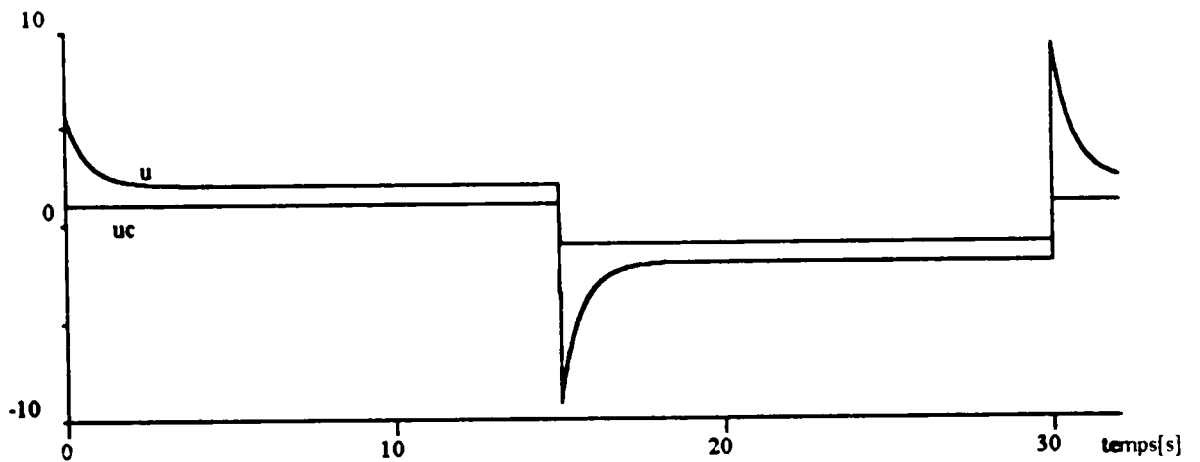


Fig.5.10.a: La commande et la consigne

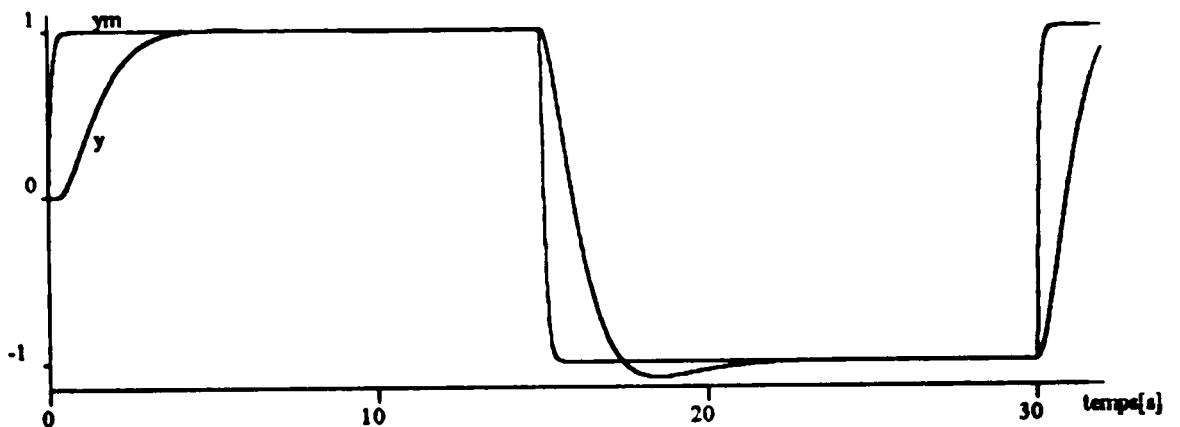


Fig.5.10.b: Réponses du processus et du modèle de référence

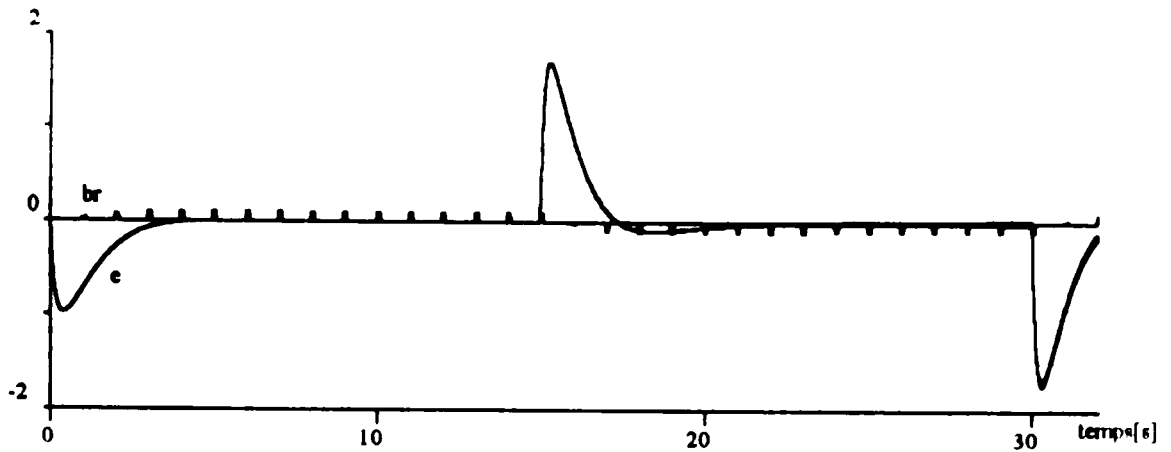


Fig.5.10.c: L'erreur et le bruit additif

**V.3.3.b.2 - synthèse basée sur la méthode de passivité (SPR):**

Les polynômes  $P_1$ ,  $P_2$  et  $Q$  sont choisis comme suit :

$$\begin{aligned} P_1 &= Q = \Lambda m \\ P_2 &= p^6 + 9p^5 + 31.75p^4 + 65.25p^3 + 52.75p^2 + 24.75p + 4.5 \end{aligned} \tag{V.33}$$

$P_2$  est un polynome stable et de même degrés que  $R$ .

Les paramètres du contrôleur sont :

$$\theta = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_6 \ s_0 \ s_1 \ \dots \ s_5 \ t_0 \ t_1 \ \dots \ t_6]^T$$

L'erreur augmentée est donnée par l'équation (IV.43), où:

$$\varepsilon = e_r + b_0 \eta \tag{V.34}$$

Avec,

$$e_r = \frac{Q}{P}(y - y_m) = \frac{1}{P_2} e$$

$$\eta = -\left(\frac{1}{P_1} u + \varphi^T \theta\right)$$

L'ajustement des paramètre est donné selon l'équation (IV.30):

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma \varphi \varepsilon$$

Le vecteur des mesures est défini comme suit:

$$\varphi^T = [\varphi_u^T \quad \varphi_y^T \quad \varphi_e^T] \quad (V.35)$$

avec,

$$\begin{aligned} \varphi_u^T &= \left[ \frac{p^5}{P} u \quad \frac{p^4}{P} u \quad \dots \dots \frac{1}{P} u \right] \\ \varphi_y^T &= \left[ \frac{p^5}{P} y \quad \frac{p^4}{P} y \quad \dots \dots \frac{1}{P} y \right] \\ \varphi_e^T &= \left[ -\frac{p^6}{P} uc \quad -\frac{p^5}{P} uc \quad \dots \dots -\frac{1}{P} uc \right] \end{aligned}$$

La loi de commande est donnée par :

$$u = -\theta^T (P_1 \varphi) \quad (V.36)$$

En utilisant un gain d'adaptation  $\gamma = 0.6$ , on trouve les résultats donnés aux graphes fig.5.11.a, fig.5.11.b, fig.5.11.c et fig.5.11.d .

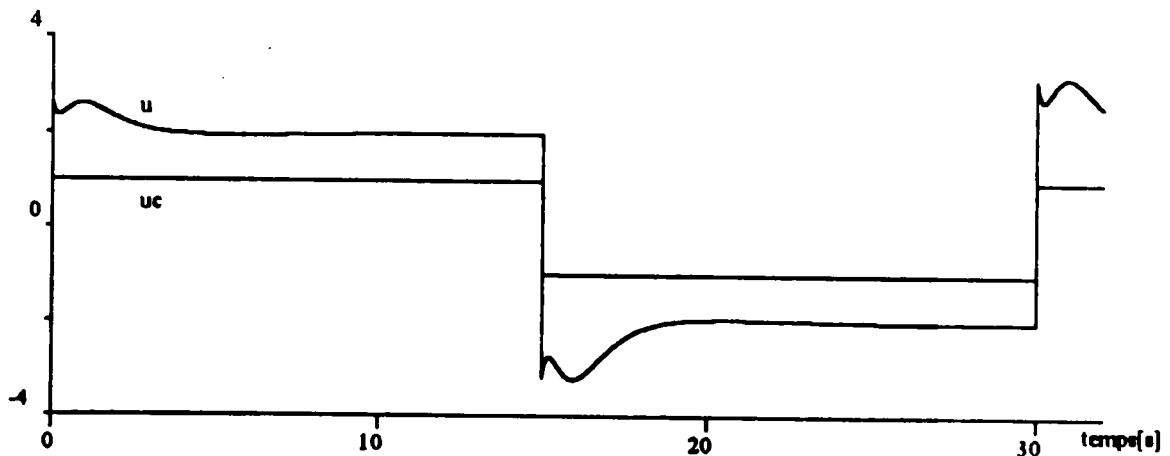


Fig.5.11.a: La commande et la consigne



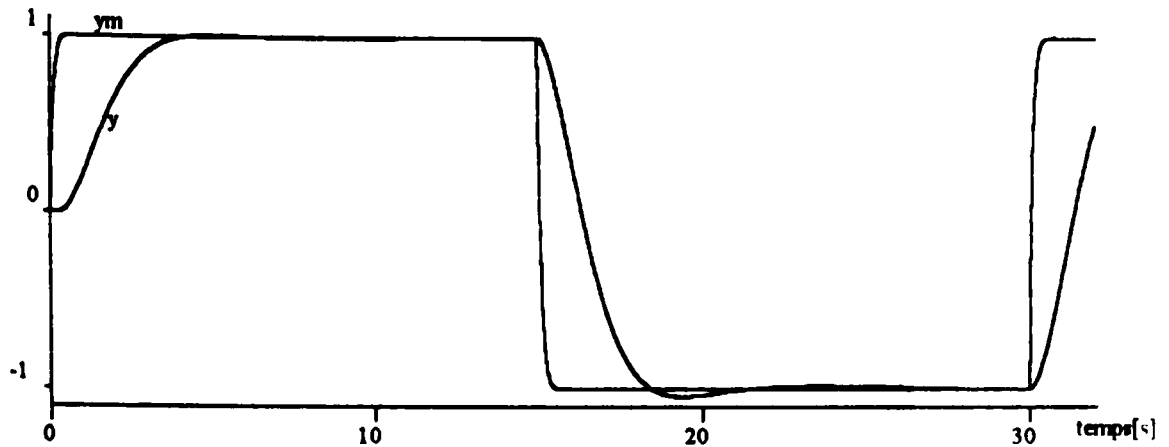


Fig.5.11.b: Réponses du processus et du modèle

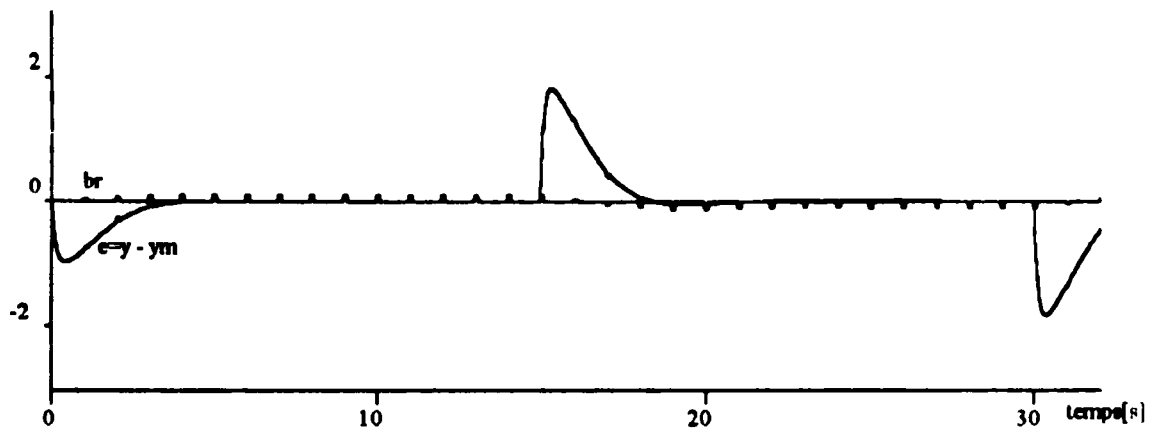


Fig.5.11.c: L'erreur en sorties et le bruit additif

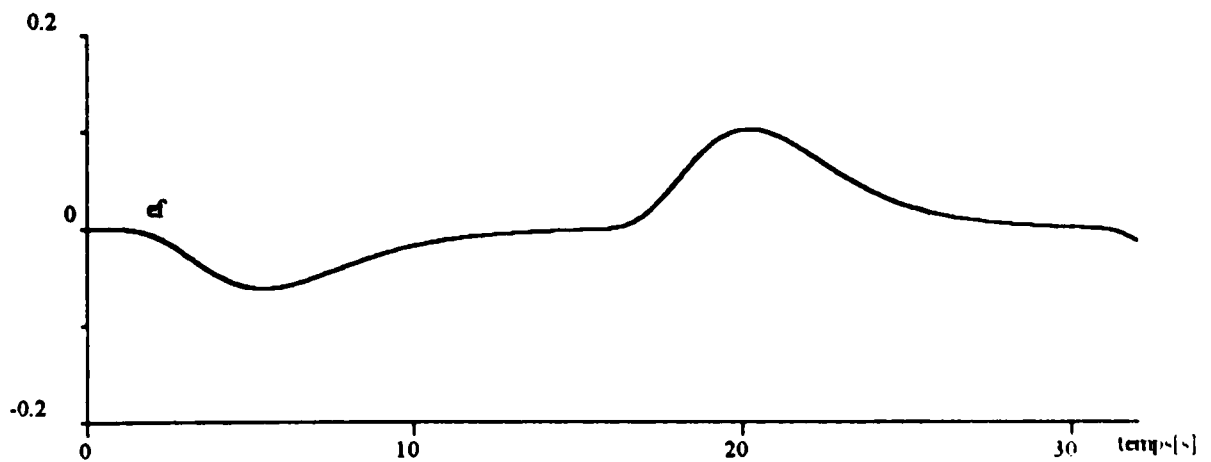
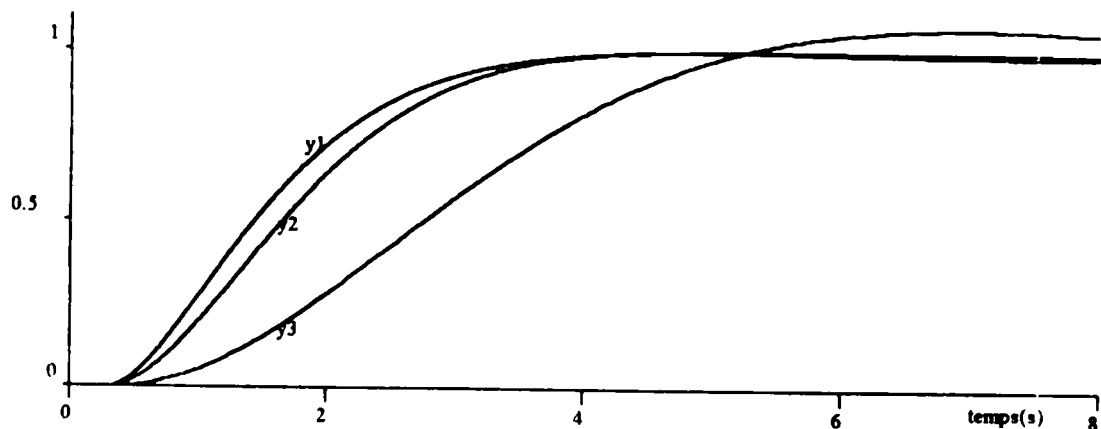


fig.5.11.d: L'erreur filtrée

La commande adaptative à modèle de référence entier et fractionnaire du processus du second ordre, dont l'ajustement est fait avec l'une des méthodes MIT ou SPR, est résumée par les graphes de fig.5.12, qui représentent les réponses du processus pour les différents cas.



y1: Réponse du processus en cas du modèle de référence d'ordre fractionnaire, ajustements des paramètres du contrôleur par la méthode de MIT.

y2: Réponse du processus en cas du modèle de référence d'ordre fractionnaire, ajustements des paramètres du contrôleur par la méthode SPR.

y3: Réponse du processus en cas du modèle de référence d'ordre entier (ordre deux), ajustements des paramètres du contrôleur par la méthode de MIT.

Fig 5.12. comparaison des réponses du processus du second ordre

#### V.3.4 CONCLUSION:

On constate d'après les résultats précédents, que le suivi du modèle (model-following) est vérifié, mais la convergence est plus rapide dans le cas d'une commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire dont l'ajustement est fait par la méthode de MIT.

Le cas d'un modèle de référence d'ordre entier représente un petit dépassement et un temps de réponse plus élevé.

Ces résultats sont dûs à la rapidité du modèle de référence d'ordre fractionnaire par rapport au modèle d'ordre entier.

On constate aussi que l'influence du bruit additif et le retard pur sur la réponse du processus du second ordre est négligeable.

#### V.4 COMMANDE EN VITESSE D'UN MOTEUR A COURANT CONTINU :

Cette application consiste à la commande en vitesse d'un moteur à courant continu alimenté par un hacheur. Les équations différentielles régissant l'ensemble (convertisseur + moteur) sont :

$$di(t)/dt = -(R/L)i(t) - (k_e/L)y(t) + (k/L)u(t) \quad (\text{V.37.a})$$

$$dy(t)/dt = (k_e/J)i(t) - (f/J)y(t) - (1/J)cr \quad (\text{V.37.b})$$

Avec  $i(t)$  le courant d'induit ,  $y(t)$  la vitesse angulaire du moteur,  $u(t)$  la tension de commande et  $Cr$  le couple résistant (perturbation ).

Ce moteur est à faible puissance, dont les caractéristiques sont:

- Moment d'inertie  $J=0.018 \text{ kg.m}^2$ ,
- Coefficient d'amortissement  $f=0.0055 \text{ nm/rad.sec}$ ,
- Constante du couple moteur  $k_e=1$ ,
- Résistance du moteur  $R=6.25 \text{ ohm}$ ,
- Inductance du moteur  $L=0.024 \text{ H}$ ,
- Constante d'amplification  $k=35$ .

En utilisant l'opérateur de différentiation , le système d'équation (V.37) devient comme suit:

$$i(t) = (-k_e \cdot y + k \cdot u) / (L \cdot p + R) \quad (\text{V.38.a})$$

$$y(t) = (k_e \cdot i - cr) / (J \cdot p + f) \quad (\text{V.38.b})$$

Par substitution de l'équation (V.38.a) dans l'équation (V.38.b) et après simplification, on peut écrire la sortie du processus sous la forme:

$$y(t) = \frac{b_0}{p^2 + a_1 p + a_2} \cdot u(t) - \frac{br_0 p + br_1}{p^2 + a_1 p + a_2} \cdot cr \quad (\text{V.39})$$

avec,

$$b_0 = \frac{ke.k}{J.L}$$

$$br_0 = 1/J$$

$$br_1 = \frac{R}{J.L}$$

$$a_1 = \frac{(J.R + L.f)}{J.L}$$

$$a_2 = \frac{f.R + ke^2}{J.L}$$

AN:

$$b_0=8.1018E4, \quad b_{r0}=55.55, \quad b_{r1}=1.446E4, \quad a_0=1, \quad a_1=260.7, \quad a_2=2.394E3$$

### ***V-3.1 COMMANDE PAR REGULATEUR PI:***

Cette technique de commande necessite la connaissance totale du processus, c'est-à-dire connaître les valeurs des paramètres  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_0$ ,  $br_0$  et  $br_1$ .

La loi de commande est de la forme[15]:

$$u(t) = c_1 \int (y(t) - uc) dt - c_2 i(t) \quad (V.40)$$

Avec,  $c_1=0.15$ ,  $c_2=0.02$  (valeurs pratiques assurant la stabilité en boucle fermée [15]).

La réponse du processus, la consigne et la commande générée par le régulateur sont représentées par la fig.5.13

**N.B:** Les résultats donnés sur les figures fig.5.13, fig.5.14, fig.5.15 et fig.5.16 sont normalisés à une valeur de la vitesse de 150 rad/s.

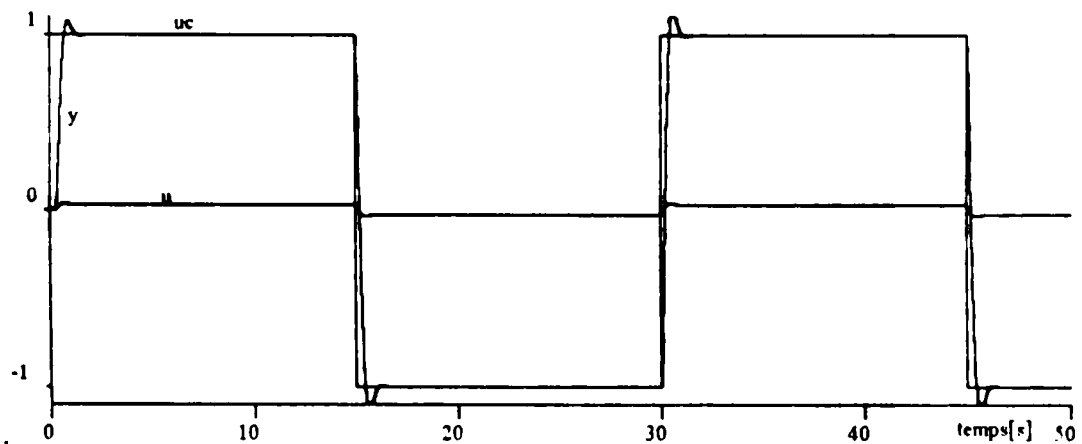


Fig.5.13: La consigne, la commande et la réponse du processus en cas d'une commande PI

#### V-4.2 COMMANDE ADAPTATIVE A MODELE DE REFERENCE D'ORDRE ENTIER:

On propose un modèle de référence du deuxième ordre oscillatoire fortement amorti, sa réponse temporelle peut être exprimée sous la forme de l'équation suivante:

$$y_m(t) = \frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2} \cdot u_c(t) \quad (\text{V.41})$$

Cette dernière équation a la même forme de l'équation (II.5), où:

$$\begin{aligned} B_m(p) &= \omega_n^2 \\ A_m(p) &= p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2 \end{aligned} \quad (\text{V.42})$$

avec,

$$\begin{aligned} \omega_n &= 10 \text{ rad/s,} \\ \zeta &= 0.95. \end{aligned}$$

Pour satisfaire les conditions (IV.12), on a choisi un observateur dont le polynôme caractéristique est:

$$A_o = p+3 \quad (\text{V.43})$$

La résolution de l'équation (IV.8) nous permet de constater la structure suivante du contrôleur :

$$\begin{aligned} R(p) &= p + r_1, \\ S(p) &= s_0 p + s_1 \\ T(p) &= t_0 \end{aligned} \tag{V.44}$$

Les paramètres du contrôleur :

$$\theta^T = [r_1, s_0, s_1, t_0] \tag{V.45}$$

sont ajustés par la méthode de MIT suivant l'équation (IV.16).

En choisissant un gain d'adaptation  $\mu' = \mu \cdot b_0 = 0.6$ , les sensibilités des paramètres sont trouvées comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t_0} &= \frac{1}{AoAm} \cdot uc, & \frac{\partial e}{\partial s_0} &= -\frac{p}{AoAm} \cdot y, \\ \frac{\partial e}{\partial s_1} &= -\frac{1}{AoAm} \cdot y, & \frac{\partial e}{\partial r_1} &= -\frac{1}{AoAm} \cdot u \end{aligned} \tag{V.46}$$

La loi de commande est donnée par l'équation (IV.7):

$$R \cdot u = T \cdot uc - S \cdot y$$

Les figures fig.5.14.a et fig.5.14.b représentent les résultats de simulation pour le cas d'une commande adaptative à modèle de référence d'ordre entier.

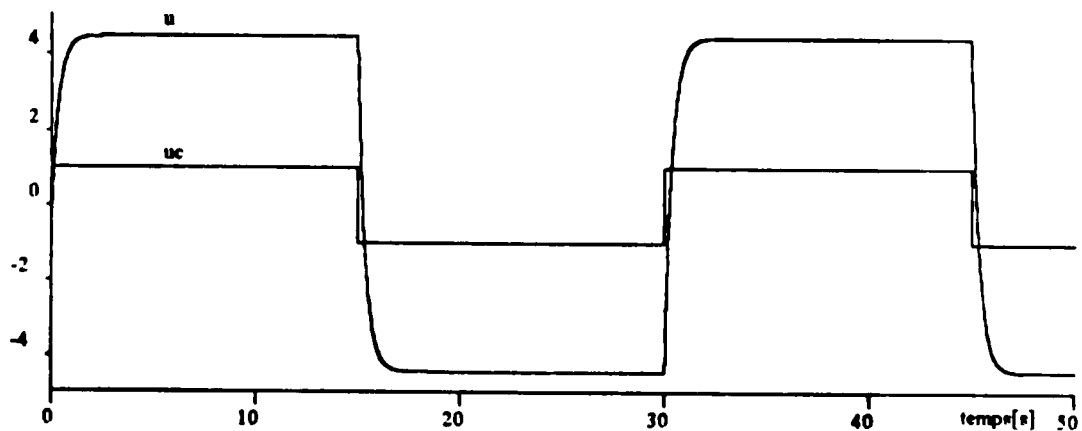


Fig.5.14.a: La commande et la consigne en cas d'une commande adaptative à modèle de référence d'ordre entier

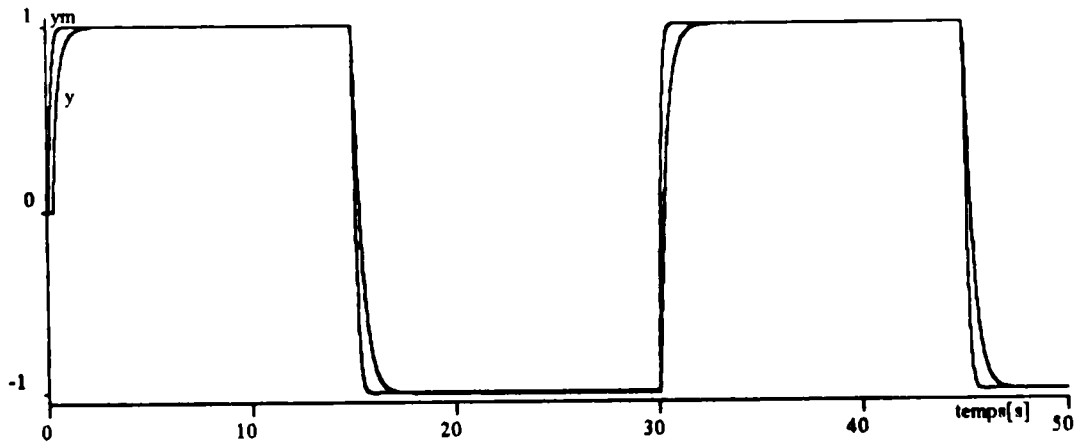


Fig.5.14.b: Les réponses du modèle et du processus en cas d'une commande adaptative à modèle de référence d'ordre entier

**V-4.3 COMMANDE ADAPTATIVE A MODELE DE REFERENCE D'ORDRE FRACTIONNAIRE:**

Le modèle de référence proposé est de la forme de l'équation (III.16), où :

$$\begin{aligned} \omega_n &= 10 \text{ rad/s,} \\ \zeta &= 0.95, \\ m &= 0.55. \end{aligned}$$

Ce modèle est approximé à l'ordre N=6 ( avec  $\epsilon_p=0.3 \text{ dB}$  ), alors sa sortie peut être exprimée par l'équation suivante:

$$y_m(t) = \frac{(1 + \frac{p}{10}) \prod_{i=1}^5 (1 + p/z_i)}{(\frac{p^2}{100} + 1.9 \frac{p}{10} + 1) \prod_{i=1}^6 (1 + p/p_i)} u_c(t) = \frac{b_m p^6 + b_{m1} p^5 + \dots + b_{m6}}{p^8 + a_{m1} p^7 + \dots + a_{m8}} u_c(t) \tag{V.47}$$

avec,

$$\begin{array}{lll}
 bm_0 = 4.4668E3 & , & am_0 = 1 & am_7 = 2.5834E13 \\
 bm_1 = 2.7249E6 & , & am_1 = 1.2307E3 & am_8 = 7.9432E13 \\
 bm_2 = 5.2366E8 & , & am_2 = 4.8339E5 & \\
 bm_3 = 4.0144E10 & , & am_3 = 7.7867E7 & \\
 bm_4 = 1.3027E12 & , & am_4 = 5.6415E9 & \\
 bm_5 = 1.7453E13 & , & am_5 = 1.9357E11 & \\
 bm_6 = 7.943E13 & , & am_6 = 3.2403E12 & 
 \end{array}$$

Dans ce cas les conditions (IV.12) sont vérifiées sans utiliser un observateur. La structure du contrôleur pour que l'équation diophontine (IV.8) soit résolvable est la suivante:

$$\begin{array}{l}
 k = 6 \Rightarrow R = p^6 + r_1 p^5 + r_2 p^4 + r_3 p^3 + r_4 p^2 + r_5 p + r_6 \\
 l = 5 \Rightarrow S = s_0 p^5 + s_1 p^4 + s_2 p^3 + s_3 p^2 + s_4 p + s_5 \\
 mt = 6 \Rightarrow T = t_0 p^6 + t_1 p^5 + t_2 p^4 + t_3 p^3 + t_4 p^2 + t_5 p + t_6 \\
 \text{deg } A_0 = 0, A_0 = 1
 \end{array} \tag{V.48}$$

La loi d'ajustement est donnée par l'équation (IV.16):

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma \varphi \varepsilon$$

où:

$$\varepsilon = e = y(t) - y_m(t) \tag{V.49}$$

$$\varphi^T = -\frac{\partial e}{\partial \theta} = -\left[ \frac{\partial e}{\partial r_1} \dots \frac{\partial e}{\partial r_6} \quad \frac{\partial e}{\partial s_0} \dots \frac{\partial e}{\partial s_5} \quad \frac{\partial e}{\partial t_0} \dots \frac{\partial e}{\partial t_6} \right] \tag{V.50.a}$$

$$\varphi^T = b_0 \left[ \frac{p^5}{Am} u \dots \frac{1}{Am} u \quad \frac{p^5}{Am} y \dots \frac{1}{Am} y \quad \frac{-p^6}{Am} uc \dots \frac{-1}{Am} uc \right] \tag{V.50.b}$$

Avec,

$$\mu' = 0.6$$



La loi de commande utilisée est celle de l'équation (IV.7).

Les résultats de simulation sont donnés par les figures fig.5.15.a et fig.5.15.b .

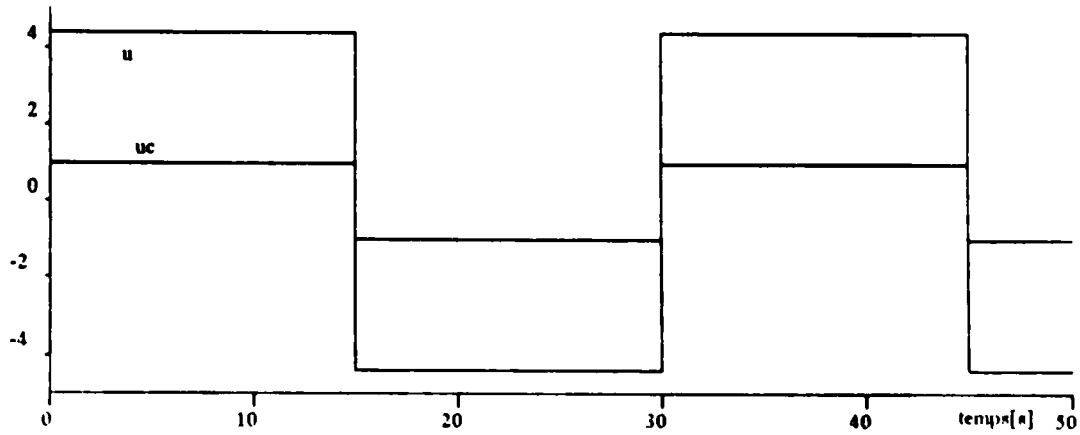


Fig.5.15.a: La commande et la consigne en cas d'une commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire

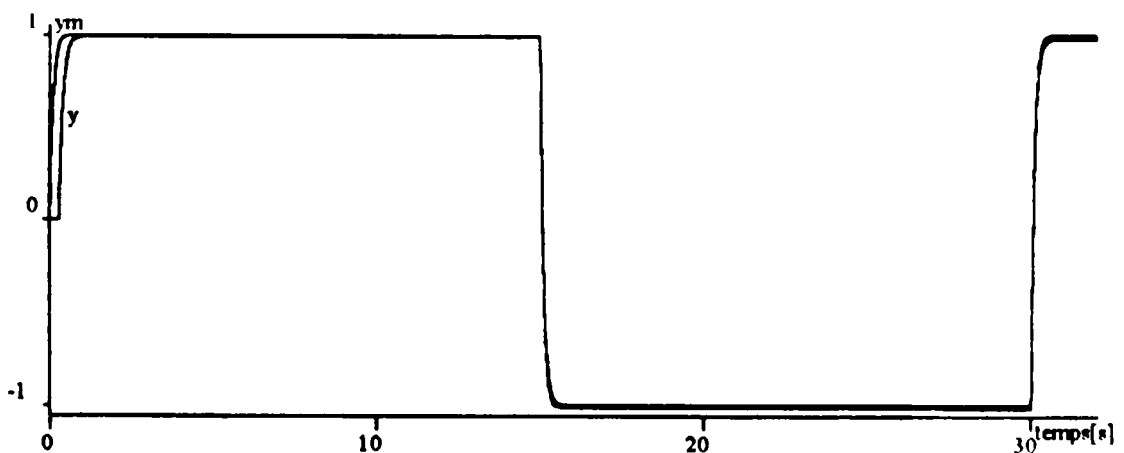


Fig.5.15.b: Les réponses du modèle et du processus en cas d'une commande adaptative à modèle de référence d'ordre Fractionnaire

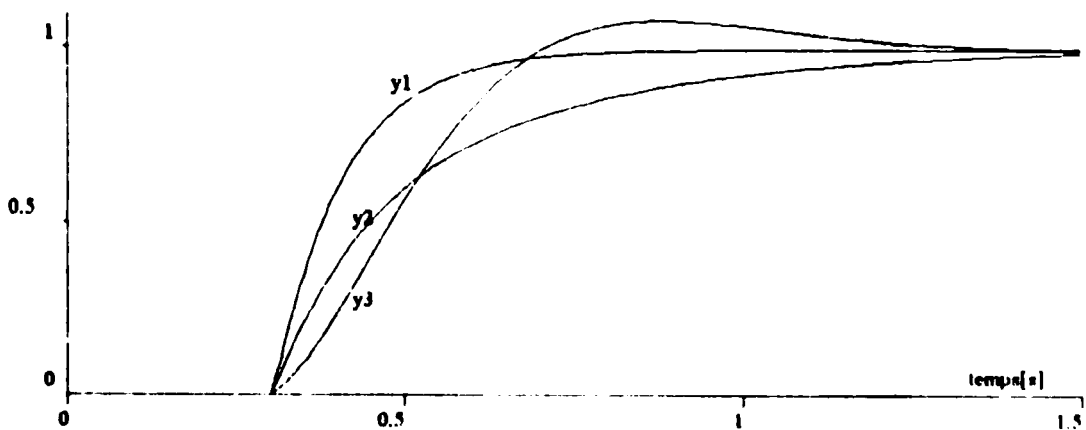


Fig. 5.15.a : Reponses du moteur avec un couple resistant nul  $c_r=0$   
 y1: cas d'une commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire  
 y2: cas d'une commande adaptative à modèle de référence d'ordre entier  
 y3: cas d'une commande PI classique

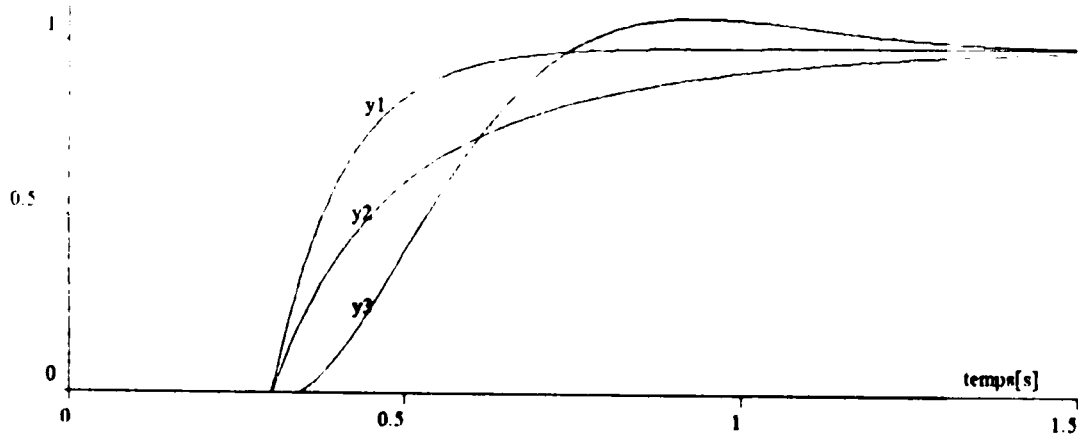


Fig.5.16.b : Réponse du moteur avec un couple résistant non nul  $c_r=6$  n.m  
 y1: cas d'une commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire  
 y2: cas d'une commande adaptative a modèle de référence d'ordre entier  
 y3: cas d'une commande PI classique

### V.3.4- CONCLUSION:

La régulation PI , donne des résultats acceptables avec un dépassement de 10%, d'autre part elle ne peut pas être utilisée si le moteur n'est pas totalement identifié.

la commande adaptative à modèle de référence d'ordre entier permet d'avoir de bonnes réponses du processus sans dépassement, où la convergence et le suivit sont parfait. Cette technique de commande est meilleur que la première du fait qu'elle est applicable même si le modèle mathématique du moteur n'est pas connu.

La commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire présente les mêmes caractéristique que la deuxième technique, en plus le temps de réponse est plus petit, donc la convergence est plus rapide

L'influence de la charge (changement du couple résistant  $c_r$ ), sur la réponse du moteur est négligeable dans le cas de la commande adaptative à modèle de référence, tandis qu'elle est remarquable pour une commande PI classique, comme il est montré sur les figures fig.5.16.a et fig.5.16.b.

Les résultats obtenus pour le cas d'un moteur à courant continu confirment que pour des applications bien spécifiques, un modèle de référence d'ordre fractionnaire peut améliorer la réponse dynamique du processus en boucle fermée, surtout la rapidité et la précision, tandis que la stabilité repose généralement sur la règle d'ajustement utilisée, bien que la méthode de MIT nous a donné des réponses stables, mais la méthode de Lyapunov et la méthode de passivité assurent un fonctionnement stable du processus en boucle fermée.

## **CONCLUSION GENERALE**

# CONCLUSION GENERALE

## VI.1 TRAVAIL REALISE:

L'objectif de ce mémoire est de faire la jonction entre deux domaines d'automatique, les systèmes d'ordre fractionnaire et la commande adaptative.

La première partie a porté sur la commande adaptative. On a choisi un algorithme de commande adaptative directe à modèle de référence, dont l'identification du processus est inutilisable. L'ajustement des paramètres du contrôleur est fait par l'une des méthodes suivantes:

- Méthode basée sur la règle M.I.T
- Méthode de Lyapunov
- Méthode basée sur la théorie de passivité (SPR)

La deuxième partie a été consacrée aux systèmes dits d'ordre fractionnaire. Ces systèmes peu courants, présentent des performances dynamiques meilleurs (rapidité, précision et stabilité) où le dilemme rapidité-précision n'est pas respecté. Ce type de système est modélisé par des fonctions irrationnelles dont l'étude n'est pas évidente.

Dans le but d'implanter ces systèmes dans une boucle de commande adaptative, nous étions obligés de les représenter par leurs approximations. Deux formes d'approximations sont possibles:

- L'approximation temporelle, consiste à représenter le système d'ordre fractionnaire par une équation différentielle linéaire d'ordre fini à coefficients variables. Elle présente un problème de divergence à l'origine des temps.
- L'approximation par les fonctions singulières, basée sur l'analyse dans le plan de Bode, consiste à représenter le système d'ordre fractionnaire par des fonctions rationnelles dont les singularités ( pôles et zéros ) sont générées par une progression géométrique.

La troisième partie a été consacrée à l'implantation des systèmes d'ordre fractionnaire, approximés par la méthode des fonctions singulières, comme modèle de référence dans une boucle de commande adaptative directe.

Les conditions de convergence sont discutées, elles dépendent de l'ordre de l'approximation, des dimensions du processus à commander et de l'observateur utilisé.

La stabilité d'un tel algorithme dépend de la méthode d'ajustement utilisée. La méthode de M.I.T. ne garantit pas la stabilité en boucle fermée, alors que la méthode de Lyapunov et celle de passivité (SPR) nous permet d'avoir un algorithme stable.

## VI.2 RESULTATS OBTENUS :

L'algorithme de la commande adaptative directe à modèle de référence d'ordre fractionnaire est applicable aux systèmes linéaires et aux systèmes nonlinéaires linéarisés autour d'un point de fonctionnement.

D'après cette étude, on constate que:

- Le système du premier ordre fractionnaire peut être utilisé comme modèle de référence pour une classe de processus où  $(\text{degA}-\text{degB} \leq 1)$ , en augmentant l'ordre de l'approximation si nécessaire.

- Le système du second ordre fractionnaire peut être utilisé comme modèle de référence pour une classe de processus où  $(\text{degA}-\text{degB} \leq 2)$ , en augmentant l'ordre de l'approximation si nécessaire.

- La convergence du processus devient plus rapide.

- La stabilité de l'algorithme dépend en premier lieu de la méthode d'ajustement des paramètres du contrôleur.

Cet algorithme est appliqué sur des systèmes académiques du premier et second ordre. Les résultats obtenus par simulation sont satisfaisants et justifient clairement l'avantage d'un modèle de référence d'ordre fractionnaire.

Une application de cet algorithme est faite sur un système typique, le moteur à courant continu. Dans cette application, on a étudié par simulation la commande en vitesse du moteur en utilisant trois techniques:

- Régulateur P.I classique.

- Commande adaptative directe à modèle de référence d'ordre entier.

- Commande adaptative directe à modèle de référence d'ordre fractionnaire.

D'après cette étude on constate que pour des applications bien spécifiques, un modèle de référence d'ordre fractionnaire peut améliorer la réponse dynamique du processus en

boucle fermée, surtout la rapidité et la précision, tandis que la stabilité repose généralement sur la règle d'ajustement utilisée.

Dans les exemples d'application, on a testé la sensibilité de l'algorithme au bruit, en générant une séquence de bruit aditif dont l'amplitude est de 10% de la sortie du processus. Les résultats confirment que l'algorithme est insensible à ce type de bruit.

### VI.3 PROBLEMES RENCONTRES:

Les problèmes rencontrés sont d'ordre logistique. Les simulations sont faites par un utilitaire orienté contrôle appelé SIMNON version 2.10, qui nécessite un processeur arithmétique 8087, ce qui nous a manqué au début à l'institut d'électronique de Batna..

Après l'obtention d'un micro puissant dans le cadre d'un projet de recherche, on a voulu utiliser des modèles fractionnaires approximatés à l'ordre 6 (au début on a utilisé des approximations d'ordre 3), ce qui était impossible avec la version 2.10 de SIMNON, ce qui nous a obligé à installer la version 3.01, qu'on a récupéré de l'I.N.P.H.

### VI.4 PERSPECTIVES :

La jonction entre la commande adaptative et les systèmes d'ordre fractionnaire peut constituer le thème de nombreuses recherches suivant plusieurs axes :

- Utilisation d'autres formes d'approximation des systèmes d'ordre fractionnaire et leurs applications dans la commande.
- Etendre Cette étude pour les systèmes nonlinéaires
- Application pratique (réalisation) de la commande en vitesse d'un moteur à courant continu avec une boucle adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire.

# ANNEXE

## FONCTION POSITIVE REELLE

Reconnaitre si une fonction de transfert est positive réelle ( PR ) ou strictement positive réelle ( SPR ) est un problème souvent rencontré dans le calcul et la conception d'une commande adaptative.

### *Définition 1 :*

Une fonction complexe  $G(s)$  est dite positive réelle ( PR ) si:

- 1-  $G(s)$  est réelle pour  $s$  réel,
- 2-  $\operatorname{Re}(G(s)) \geq 0$  pour  $s \geq 0$ .

### *Définition 2:*

Une fonction complexe est dite strictement positive réelle ( SPR ) si:

- $G(s-\varepsilon)$  est positive réelle pour des réels  $\varepsilon > 0$ .

### *Définition 3:*

Une fonction rationnelle  $G(s)$  est positive réelle si:

- 1-  $G(s)$  est réelle pour  $s$  réel.
- 2- Le dénominateur de  $G(s)$  est un polynôme stable ou possède des pôles dans l'axe des imaginaires (  $i\omega$  ),
- 3- Si  $G(s)$  possède des pôles dans l'axe des imaginaires, ces pôles doivent être simples et leurs résidus sont positifs et réels,
- 4- La partie réelle de  $G(s)$  est non négative le long de l'axe des imaginaires (  $i\omega$  );  
 $\operatorname{Re}(G(i\omega)) \geq 0$  .

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] - *I.D.LANDAU* "Commande adaptative, aspects pratiques et théoriques", Edition Masson.1986 .
- [2] - *K.J.ASTROM, B.WITTENMARK* "Adaptive control", Edition Addison-wesly.1989 .
- [3] - *A.CHAREF* "Analysis and synthesis of fractal systems",thèse de PH.D,Drexel university .1991.
- [4] - *LABIDA* "Model reference adaptive control of linear time varying and nonlinear continuous and discrete systems",thèse de PH.D,R.P.I Troy, New York 1982.
- [5] - *A.OUSTALOUP* "Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire", Edition Masson,1983.
- [6] - *Y.FERDI* "Contribution à l'étude des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire", thèse de Magister, Université de Constantine.1992.
- [7] - *M.ABDELAZIZ* "Commande à modèle de référence pour les systèmes multivariables",thèse de Magister, Université de Constantine.1992.
- [8] - *G.N.SARIDIS* "Self organising control of stochastic systems", Edition Marcel dekker.1977.
- [9] - *P.DUTTAP. M. HORN* "Low frequency fluctuations in solids 1/f noise", reviews of modern physics, vol. 53, n°3, july 1981.
- [10] - *B. MANDELBROT* " Somme noises with 1/f spectrum, a bridge between direct current and with noise", IEEE trans. on information theory, vol.13, n°2, april 1967.
- [11] - *H.H.SUN, ONARAL* "A unified approach to represent metal electrode interface ", IEEE trans. biomed. eng., vol. BME-31,july 1984.
- [12] - *H.H.SUN, A.ABDELWAHAB* "Linear approximation of transfer function with a pole of fractional power ", IEE trans. aut. cont.vol. ac-29, n°5,may 1984.
- [13] - *H.H.SUN,A.CHAREF* "Fractal system, a time domain approach",Annals of biomedical engineering,vol.18. pp.597-621,1990.
- [14] - *A.CHAREF,H.H.SUN* "Modeling of fractal systems by singularity function",Annu model. and simula conf. Pittsurgh, pa,pp 87-93,1990.
- [15] - *F.NACERI* "Régulation de vitesse et contrôle de courant d'un moteur à c e alimenté par un hacheur à transistor", thèse de Magister,Université de Batna 1992



- 
- [16] - *D.P.STOTEN, H.BENCHOUBANE* "Empirical studies of an MRAC algorithm with minimal controller synthesis", *int.j.control*, vol. 51, n°4, 823-849, 1990.
- [17] - *H.BENCHOUBANE, D.P.STOTEN* "Convergence rates of an adaptive control algorithm with application to the speed control of a DC machine", *IEE trans. on automatic contr.*, vol 33, n° 8, pp 750-756, nov. 1990.
- [18] - *M.ICHISE, Y.NAGAYANAGI* "An analog simulation of non integer order transfer function for analysis of electrode processes", *j.electroanal. chem.* 33, 253-265, 1971.
- [19] - *P. V. OSBURN, H. P. WHITEKER* "New developments in the design of model reference adaptive control systems", ISA 29th annual meeting, paper 61-39, New York, Institut of aeronautical sciences, 1961.
- [20] - *P. C. PARKS* "Lyapunov redesign of model reference adaptive control systems", *IEE trans. automat. contr.* ac-11, pp 362-367, 1966.
- [21] - *R. BELLMAN* "Adaptive control guided tour", n. j. Princeton university press. 1961.
- [22] - *Ya. Z. TSIYPKIN* "Adaptation and learning in automatic systems", New York, academic press, 1971.
- [23] - *P. EYKOFF* "System identification", Edition Wiley, London, 1974.
- [24] - *R. L. BUTCHART, B. SHACHCLOTH* "Synthesis of model reference adaptive control systems by Lyapunov's second method", proceeding IFAC symposium on adaptive control, Teddington U. K., 1965.
- [25] - *Y. D. LANDAU* "Adaptive control - the model reference approach", Edition Mercel Dekker, 1979.
- [26] - *K. S. NARANDRA, L. S. VALVANI* "A comparison of Lyapunov and hyperstability approaches to adaptive control of continuous systems", *IEE trans. automat. contr.* Ac-25, pp 243-247, 1980.
- [27] - *B. EGARDT* "stability of adaptive controllers", Berlin FRG, Springer-verlag, lecture notes in control and information sciences vol. 20, 1979.
- [28] - *G. C. GOODWIN, D. Q. MAYNE* "A parameter estimation perspective of continuous time model reference adaptive control", *automatica.* vol 23, n°1, pp 57-70, 1987.
- [29] - *W. CHANGYUN, J. H. DAVID* "Adaptive linear control of non linear systems", *IEE trans. on automatic contr.*, vol 35, n° 11, pp 1253 -1257, nov. 1990.

- 
- [30] - *D. G. TAYLOR, P. V. KOKOVIC* "Adaptive regulation of non linear systems with unmodeled dynamics", IEE trans. on automatic control ,vol 34,n° 4,pp 405-412,april 1989.
- [31] - *-R. LOZONO, B. BROGLIATO* " Adaptive control of simple non linear system without a priori information on the plant parameters", IEE trans. on automatic contr. vol.37 n°1,pp 30- 37,jun. 1992.
- [32] - *J. VANAMERONGEN* "Adaptive steering of ships -a model reference approche", automatica vol. 20,n°1, pp 3-14, 1984.
- [33] - *M. BODUR, M. EROLSEZER* "Adaptive control of flexible multilink manipulators", Int. j. contr. , vol. 58, n°3, pp 519-536, 1993.
- [34] - *S. R. PANDIAN, M. HANMANDLU* "Adaptive generalized model-based control of robot manipulators",Int. j. contr., vol. 58, n°4, pp 835-852, 1993.
- [35] - *B. MANDELBROT* "Les objets fractals, forme, hazard et dimension", Edition Flammarion, 1975.
- [36] - *A. OUSTALOUP* "Etude et réalisation d'un système d'asservissement d'ordre 3/2 de la fréquence d'un laser à colorant continu". Thèse de docteur-ingenieur, université de Bordeaux I, 1975
- [37] - *A.OUSTALOUP* "Etude comparative des systèmes asservis d'ordre 1/2, 1, 3/2 et 2 ".l'onde électrique, vol. 59, n°2, pp 41-47, 1979.
- [38] - *A. OUSTALOUP* "Oscillateur sinusoidal d'ordre 5/2".l'onde électrique, vol. 59, n°6-7, pp 61-68, 1979.
- [39] - *A. OUSTALOUP, M. NOUILLANT, A. BALLOK* "Non integer derivation in mechanics through the CRONE suspension", ENSERB ,1991.
- [40] - *A. OUSTALOUP, A.BALLOUK, P. MELCHIOR* "Complex non integer derivation: Synthesis and application in automatics through the CRONE controle", ENSERB, 1991.
- [41] - *S. LEFSCHETZ* "Stability of nonlinear control systems", New York, academic press, pp 114-118, 1965.
- [42] - *M. L. HADJILI, L. ABIDA* " Commande adaptative directe à modèle de référence d'ordre fractionnaire", CMSES'94, SKIKDA, 10&11 mai 1994.