

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieure de la Recherche Scientifique  
Université Des Frères Mentouri de Constantine  
Faculté des Sciences de la technologie  
Département d'Electronique



# Thèse

Pour l'obtention du diplôme de  
**DOCTORAT EN SCIENCES EN ELECTRONIQUE**  
**OPTION : Télécommunications**

N° de série :177/DS/2019

N° d'ordre :07/Elec/2019

*Thèse Présentée par*  
**KHALEF Rostom**

## Thème

**Contribution au développement d'une méthode  
temporelle pour la modélisation des structures  
hyperfréquences**

Soutenue le: 24/11/2019

### Devant le jury

<b>Président :</b> <i>Fouad Kerrou</i>	Professeur à l'Université UFM. Constantine1
<b>Rapporteur :</b> <i>Mohamed Taoufik Benhabiles</i>	Professeur à l'Université UFM. Constantine 1
<b>Examineurs:</b> <i>Karim Mansour</i>	Professeur à l'Université Constantine 3
<i>Djamel Khedrouche</i>	Professeur à l'Université M'sila
<i>Said Benierbah</i>	M.C.A à l'Université UFM. Constantine 1

# Remerciements

Le travail de recherche, présenté dans ce manuscrit a été effectué au sein du Laboratoire d'Electromagnétisme et Télécommunications (LET) Université des Frères Mentouri Constantine1. Je suis très honoré de venir par cette occasion d'exprimer mes sincères remerciements à mon directeur de recherche; Monsieur *Mohamed Taoufik Benhabiles*, Professeur à l'université de Constantine 1, qui m'a entièrement aidé à développer mes capacités dans le monde de la recherche a son support, ses conseils, son inspiration, qui m'ont donné le courage et la force d'établir ce magnifique travail. Je tiens à le remercier aussi d'avoir corrigé ma thèse avec autant de soin.

Je tiens également à remercier le Professeur : *Mohamed Lahdi Riabi*, Directeur du Laboratoire d'électromagnétisme et Télécommunications (LET) pour sa présence durant toute la période de recherche en donnant des conseils très objectifs.

Mes profondes gratitudes vont également aux membres du jury :

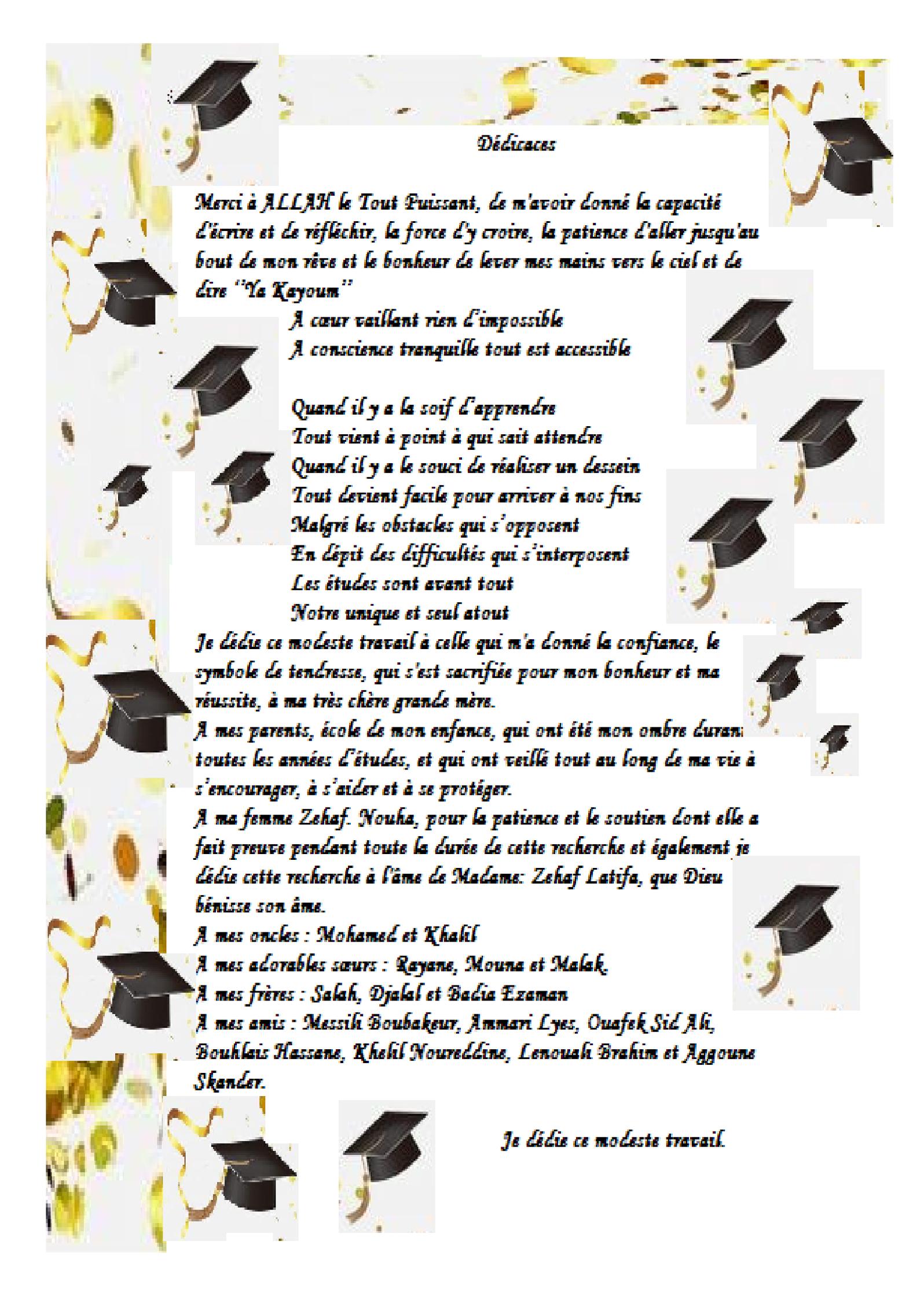
À Monsieur : *Fouad Kerrou*, professeur à l'université des Frères Mentouri Constantine1, qui m'a fait l'honneur d'accepter de juger ce travail et de présider mon jury de thèse.

À Monsieur *Karim Mansour*, Professeur à l'université Constantine 3, pour avoir accepté de juger mon travail.

À Monsieur *Djamel Khedrouche*, Professeur à l'Université M'sila, pour avoir accepté de juger le travail de cette thèse.

À Monsieur *Said Benierbah*, Maître de conférences à l'Université des Frères Mentouri Constantine1, pour avoir accepté de juger mon travail.

À tous ceux qui m'ont aidé à réaliser cette recherche, et en particulier Monsieur *Aziz Bensakesli*, Directeur du centre de formation FTC.



## *Dédicaces*

*Merci à ALLAH le Tout Puissant, de m'avoir donné la capacité d'écrire et de réfléchir, la force d'y croire, la patience d'aller jusqu'au bout de mon rêve et le bonheur de lever mes mains vers le ciel et de dire "Ya Kayoum"*

*A cœur vaillant rien d'impossible  
A conscience tranquille tout est accessible*

*Quand il y a la soif d'apprendre  
Tout vient à point à qui sait attendre  
Quand il y a le souci de réaliser un dessein  
Tout devient facile pour arriver à nos fins  
Malgré les obstacles qui s'opposent  
En dépit des difficultés qui s'interposent  
Les études sont avant tout  
Notre unique et seul atout*

*Je dédie ce modeste travail à celle qui m'a donné la confiance, le symbole de tendresse, qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite, à ma très chère grande mère.*

*A mes parents, école de mon enfance, qui ont été mon ombre durant toutes les années d'études, et qui ont veillé tout au long de ma vie à s'encourager, à s'aider et à se protéger.*

*A ma femme Zehaf. Nouha, pour la patience et le soutien dont elle a fait preuve pendant toute la durée de cette recherche et également je dédie cette recherche à l'âme de Madame: Zehaf Latifa, que Dieu bénisse son âme.*

*A mes oncles : Mohamed et Khalil*

*A mes adorables sœurs : Rayane, Mouna et Malak,*

*A mes frères : Salah, Djalal et Badia Ezaman*

*A mes amis : Messih Boubakeur, Amari Lyes, Ouafek Sid Ali, Bouhlais Hassane, Khelil Noureddine, Lenouali Brahim et Aggoune Skander.*

*Je dédie ce modeste travail.*

# Sommaire

Liste des Figures

Liste des Tableaux

Liste des Acronymes

## Chapitre I. Introduction générale

<b>I.1. Introduction</b> .....	2
<b>I.2. État de l'art des méthodes numériques utilisées en EM computationnel</b> .....	2
<b>I.3. Motivation</b> .....	4
<b>I.4. Contribution</b> .....	5
<b>I.5. Organisation de la thèse :</b> .....	5
Référence bibliographiques I	

## Chapitre II. Théorie électromagnétique et modélisation numérique

<b>II.1. Introduction</b> .....	10
<b>II.2. Brève histoire de la théorie de Maxwell et des micro-ondes</b> .....	10
<b>II.3. Cadre mathématique des équations de Maxwell dans le domaine temporel</b> .....	12
<b>II.3.1. Le champ électrostatique</b> .....	13
<b>II.3.2. Les conditions aux limites</b> .....	13
<b>II.4. Evolution temporelle</b> .....	15
<b>II.4.1. Dispersion des ondes électromagnétiques</b> .....	15
<b>II.5. Nécessité d'analyser les applications d'EMC dans le domaine temporel</b> .....	17
<b>II.6. Importance des techniques de modélisation EMC</b> .....	18
<b>II.6.1. La méthode des différences finies dans le domaine temporel (FDTD)</b> .....	18
<b>II.6.2. La méthode des moments (MoM)</b> .....	19
<b>II.6.3. La méthode des éléments finis (FEM)</b> .....	20
<b>II.6.4. La méthode des lignes de transmission (TLM)</b> .....	21
<b>II.7. Algorithmes améliorés</b> .....	22

<b>II.7.1. Compléments aux méthodes numériques</b> .....	23
<b>II.8. Conclusion</b> .....	23
Référence bibliographiques II	

### Chapitre III. Modélisation électromagnétique par la méthode FDTD

<b>III.1. Introduction</b> .....	31
<b>III.2. La méthode du domaine temporel de différence finie (FDTD)</b> .....	31
<b>III.3. L'algorithme de Yee</b> .....	32
<b>III.3.1. Procédure d'intégration, le schéma explicite dans la FDTD</b> .....	34
<b>III.3.2. Polarisation de l'onde électromagnétique</b> .....	35
<b>III.3.3. Discrétisation temporelle et spatiale</b> .....	36
<b>III.4. Condition de stabilité et mécanismes d'erreur de dispersion</b> .....	40
<b>III.5. Traitement des conditions absorbantes de la frontière (ABC)</b> .....	45
<b>III.6. Conclusion</b> .....	50
Référence bibliographiques III	

### Chapitre IV. Application des méthodes sans maillage en électromagnétique

<b>IV.1. Introduction</b> .....	55
<b>IV.2. Aperçu général sur l'application des méthodes sans maillage</b> .....	56
<b>IV.3. La méthode sans maillage basée sur les fonctions de base radiales (RBF)</b> .....	59
<b>IV.3.1. Principe de la méthode RBF</b> .....	60
<b>IV.4. Formulations explicites de la méthode RBF dans le domaine temporel</b> .....	64
<b>IV.5. La méthode sans maillage d'interpolation de point radial (RPIM)</b> .....	66
<b>IV.5.1. Formulation de la méthode RPIM</b> .....	66
<b>IV.6. Critère de stabilité</b> .....	69
<b>IV.7. Distributions de nœuds</b> .....	70
<b>IV.7.1. Génération de la distribution à deux nœuds</b> .....	70
<b>IV.7.2. Discrétisation des frontières</b> .....	71
<b>IV.8. Traitement des conditions absorbantes UPML dans la RPIM temporelle</b> .....	71

<b>IV.9. Paramètres de diffraction S</b> .....	72
<b>IV.10. Excitation de la source</b> .....	74
<b>IV.11. Exemples numériques et discussion</b> .....	77
<b>IV.11.1. Analyse de champs EM par la méthode combinée RBF-FDTD</b> .....	77
<b>IV.11.2. Simulation des modes TM dans le domaine temporel par la RBF</b> .....	81
<b>IV.11.3. Modélisation temporelle des filtres en bande X par la UPML-RPIM</b> .....	85
<b>IV.12. Conclusion</b> .....	91

Référence bibliographiques IV

Chapitre V. Nouvelle méthode RPIM inconditionnellement stable proposée basée sur le schéma implicite de Crank-Nicolson

<b>V.1. Introduction</b> .....	101
<b>V.2. Développement de la méthode sans maillage RPIM</b> .....	102
<b>V.3. Formulations de la méthode RPIM proposée basée sur le schéma de CN</b> .....	103
<b>V.4. Analyse de la stabilité de la méthode CN-RPIM proposée</b> .....	107
<b>V.5. Exemples numériques et discussion</b> .....	112
<b>V.5.1. Modélisation temporelle du mode TE d'un guide d'ondes par CN-RPIM</b> ..	112
<b>V.5.2. Simulation des modes TM dans le domaine temporel par la CN-RPIM</b> .....	116
<b>V.5.3. Modélisation temporelle du filtre à EBG par la méthode CN-RPIM</b> .....	117
<b>V.6. Conclusion</b> .....	121

Référence bibliographiques V

Conclusion Générale et Perspectives .....	126
Résumés .....	130

**LISTE DES PUBLICATIONS**

## Liste des Figures

Figure II.1	Grille FDTD à deux dimensions.....	19
Figure III.1	La géométrie de la cellule de Yee .....	33
Figure III.2	Procédure d'entrelacement de E et H via l'intégration du schéma explicite.....	35
Figure III.3	Les couches PML autour d'un domaine à 2-D.....	46
Figure III.4	Le schéma d'implémentation de l'algorithme de Yee.....	49
Figure IV.1	Illustration des fonctions de base radiales .....	61
Figure IV.2	Illustration du domaine de support local .....	63
Figure IV.3	Organigramme des méthodes RBF et RPIM.....	76
Figure IV.4	Répartition des points de collocation et de test en 1-D.....	77
Figure IV.5	$E_y$ au point d'observation <i>obs1</i> en utilisant la condition PEC .....	78
Figure IV.6	Evolution des profils spatiaux $E_y$ par RBF- FDTD à $t = 10 \text{ ns}$ , $t = 15 \text{ ns}$ et $t = 20 \text{ ns}$ ...	80
Figure IV.7	Profils spatiaux $E_y$ donnés par RBF-FDTD à $t = 150 \text{ ns}$ .....	80
Figure IV.8	Géométrie du guide d'onde WR-90 rempli par des permittivités périodiques .....	82
Figure IV.9	Évaluation du domaine temporel de $E_z$ en <i>obs</i> avec RBF et FDTD .....	83
Figure IV.10	Évaluation de $E_z$ à la fréquence de résonance de WR-90 rempli par d'air .....	83
Figure III.11	Évaluation de $E_z$ à la fréquence de résonance de WR-90 rempli par deux permittivités périodique ( $\epsilon_1, \epsilon_2$ ) .....	84
Figure IV.12	Illustration d'un filtre WR-90 rempli par deux permittivités périodique ( $\epsilon_1, \epsilon_2$ ) (a), (b) distribution du champ électrique $E_z$ pour $t = 4 \text{ ns}$ .....	86
Figure IV.13	Comparaison du domaine temporel du champ $E_z$ au point P1 par RPIM-FDTD....	87
Figure IV.14	Paramètres-S du filtre rempli par deux permittivités périodique ( $\epsilon_1, \epsilon_2$ ).....	88
Figure IV.15	Géométrie du résonateur SRR rempli par ZIM.....	89
Figure IV.16	Comparaison entre RPIM-FDTD des paramètres-S dans SRR rempli par ZIM .....	89
Figure IV.17	Energie totale à l'intérieur des deux filtres avec différente propriété.....	90
Figure V.1	(a) Géométrie et distribution des nœuds dans un guide d'onde WR-90 à 2-D et (b) distribution du champ électrique instantané $E_y$ pour une plage spectrale à $t = 30 \text{ ns}$ .....	113
Figure V.2	Variation temporelle de $E_y$ au point P1 par FDTD, RPIM explicite et la CN-RPIM proposée avec $20\Delta t_{RPIM} = 50.8 \text{ ps}$ dans WR-90 à 2-D.....	114
Figure V.3	Variation temporelle de $E_y$ au point P1 par FDTD, RPIM explicite et la CN-RPIM proposée avec $30\Delta t_{RPIM} = 76.2 \text{ ps}$ dans WR-90 à 2-D.....	114
Figure V.4	Évaluation de $E_y$ au point P1 à la fréquence de résonance par la CN-RPIM proposée et les méthodes RPIM explicite et FDTD dans WR-90 à 2-D .....	115
Figure V.5	Résultats numériques obtenue par les méthodes RPIM explicite et CN-RPIM proposée avec $10\Delta t_{RPIM} = 17 \text{ ps}$ .....	117
Figure V.6	Géométrie d'un EBG chargé périodiquement par deux arêtes métalliques.....	118
Figure V.7	Comparaison des paramètres-S entre CN-RPIM proposée et les méthodes FDTD et RPIM explicite dans un résonateur à guide d'ondes bidimensionnel.....	119
Figure V.8	Comportement du diagramme de dispersion de la constante de phase en fonction de la fréquence par CN-RPIM proposée et RPIM explicite.....	120

## Liste des Tableaux

Tableau IV.1 Les fonctions de base radiales .....	61
Tableau IV.2 Fréquence de résonance des modes TM et erreurs relatives par les méthodes FDTD et RBF dans un guide d'ondes WR-90.....	84
Tableau V.1 Fréquence de résonance et erreurs relatives dans un guide d'ondes WR-90.....	116
Tableau V.2 Comparaison des méthodes de résolution du résonateur EBG de guide d'ondes bidimensionnel.....	120

## Liste des Acronymes

ABC	Absorbing Boundary Condition
ADI-FDTD	Alternating Direction Implicit- Finite Difference Time Domain Method
AZIM	Anisotropic Zeros Index Metamaterials
BEM	Boundary Meshless Method
CEM	Compatibilité Electromagnétique
CFDTD	Conformal- Finite Difference Time Domain Method
CFL	Courant-Friedrichs- Lewy Condition
CN-FDTD	Crank-Nicolson- Finite Difference Time Domain Method
CN-RPIM	Crank-Nicolson -Radial Point Interpolation Method
CPML	Convolutional Perfectly Matched Layer
CRBF	Compact support Radial Basis Function
DEM	Diffuse Element Method
DGTD	Discontinuous Galerkin Time Domain Method
EMC	Electromagnétique Computationnel
EFG	Element Free Galerkin Method
EBG	Electromagnetic Band Gap
FDM	Finite Difference Method
FDTD	Finite Difference Time Domain Method
FEM	Finite Element Method
FETD	Finite Element Time Domain Method
FVTD	Finite Volume Time Domain Method
GIS	Guide d'ondes Intégré au Substrat
IBE	Integral Boundary Equations Method
IEM	Interférence Electromagnétique
LOD-FDTD	Locally One-Dimensional - Finite Difference Time Domain Method
LPG	Local Petrov Galerkin Method
MLS	Moving Least Square Method
MLSRKPM	Moving Least Square Reproducing Kernel Particle Method
MMT	Mode Matching Technical
MoM	Moment Method
MRTD	Multi-Resolution Time Domain Method
PEC	Perfect Electronic Conductor
PIM	Point Interpolation Method
PMC	Perfect Magnetic Conductor
PML	Perfectly Matched Layer
PSTD	Pseudo Spectral Time Domain Method
RBF	Radial Basis Function Method
RPIM	Radial Point Interpolation Method
SPH	Smoothed Particle Hydrodynamics Method
SRR	Split Ring Resonator
SS-FDTD	Split-Step- Finite Difference Time Domain Method
TE	Transverse Electric
TEM	Transverse Electromagnetic
TLM	Transmission-Line Modeling
TM	Transverse Magnetic
UPML	Uni-axial Perfectly Matched Layer
WLP-FDTD	Weighted Laguerre Polynomials- Finite Difference Time Domain Method

# Chapitre I. Introduction générale



---

Dans ce chapitre, nous présentons d'abord l'état de l'art des méthodes numériques utilisées en électromagnétique computationnelle et leurs applications pour la modélisation des structures hyperfréquences. Ce faisant, nous introduisons brièvement le principe de résolution des équations de Maxwell afin de bien énoncer leurs inconvénients auxquels nous proposons des solutions. Enfin, nous y présentons aussi l'organisation de ce manuscrit.

---



## **I.1. Introduction.**

## **I.2. État de l'art des méthodes numériques utilisées en électromagnétique computationnel.**

## **I.3. Motivation.**

## **I.4. Contribution.**

## **I.5. Organisation de la thèse.**

## **Références bibliographiques I**

### **I.1. Introduction**

Les télécommunications modernes s'appuient sur des dispositifs et systèmes électromagnétiques : télévision, radio, internet, téléphones mobiles, systèmes de communication par satellite, systèmes radar, filtres à micro-ondes, lasers et bien d'autres. Chacun de ces exemples est utilisé dans un large éventail de situations. Le radar, par exemple, est utilisé pour la lutte contre les incendies, la détection des intempéries, le contrôle du trafic des aéroports, le suivi des missiles, le guidage des missiles, le contrôle de la vitesse et la sécurité du trafic sans aucun doute, la compréhension des phénomènes électromagnétiques est traitée par la théorie des champs électromagnétiques. La théorie des champs électromagnétiques décrit les interactions entre les charges électriques aux repos et en mouvement des équations de Maxwell ; un système d'équations aux dérivées partielles (EDP) couplées (charges et courants) aux champs électromagnétiques et aux écoulements électromagnétiques.

Les solutions analytiques sont connues pour un nombre limité de cas particuliers. Au lieu de cela, des approximations plus ou moins grossières ont été utilisées dans diverses tentatives pour combler le fossé entre la théorie et les applications avancées.

### **I.2. État de l'art des méthodes numériques utilisées en électromagnétique computationnelle**

L'avènement des ordinateurs a changé notre capacité à résoudre les équations de Maxwell de manière profonde, aujourd'hui, l'ordinateur est avantageux de déployer des efforts considérables pour éviter les calculs, souvent au prix de longues manipulations analytiques et d'une applicabilité très réduite ainsi dans les domaines qui nécessitent des outils de modélisations et de propagation dans les structures à hyperfréquence. De telles méthodes de calcul peuvent traiter de grandes classes de problèmes sans modifications des algorithmes ou programmes informatiques.

La partie de l'électromagnétisme qui traite des méthodes numériques de calcul est connue sous le nom électromagnétique computationnelle (EMC) [1, 2]. L'EMC est devenu un outil de conception principal dans le domaine de l'électromagnétisme pour maîtriser les outils de calcul. Dans les applications aux micro-ondes, l'EMC est un outil plus récent, mais il est actuellement utilisé pour concevoir des réseaux et des antennes à micro-ondes ainsi que les circuits à micro-ondes actifs comme : les structures à base des guides d'ondes intégrés au substrat (GIS) ou les bandes interdites électromagnétiques (EBG). Alors la théorie des circuits ordinaires ne s'applique

plus et il peut être nécessaire de résoudre les équations de Maxwell pour concevoir des processeurs plus fins et plus rapides à ce moment-là, les progrès rapides dans l'EMC ont déclenché une série de recherches fondamentales sur les méthodes numériques. Ces méthodes numériques ont été appliquées pour résoudre les équations de Maxwell sous ses deux formes : les domaines de fréquence et de temps. La solution temporelle des équations de Maxwell bénéficie un avantage primordial par rapport à la solution dans le domaine de fréquence; cet avantage est représenté par la possibilité de couvrir une large gamme de fréquences dans une seule simulation. De plus, les algorithmes dans le domaine temporel donnent le comportement réel de l'interaction entre le champ électrique et magnétique. Par conséquent, ces méthodes sont essentielles pour la conception et la prévision des performances en temps réel [3, 4].

Le but de cette thèse est de présenter les algorithmes les plus fréquemment utilisés dans la modélisation électromagnétique :

❖ La méthode des différences finies (FDM) est une méthode très puissante et polyvalente. Elle a acquis sa réputation grâce à sa simplicité de calcul et à son applicabilité à plusieurs problèmes électromagnétiques. Sur la base du FDM, une méthode de domaine temporel appelée «différences finies dans le domaine temporel (FDTD)» a été introduite. La FDTD a été largement utilisée dans la modélisation des dispositifs à hyperfréquences. Cependant, elle souffre d'une discrétisation inefficace des géométries de forme irrégulière [5, 6].

❖ La méthode des éléments finis (FEM) constitue une véritable solution aux problèmes d'électromagnétisme. Elle a la capacité de discrétiser le domaine de calcul en éléments triangulaires et de modéliser avec précision les géométries courbes et complexes des structures à hyper fréquences [7]. Dans la méthode FEM, les inconnues du champ électromagnétiques sont stockées aux sommets de l'élément ou dans les bords de l'élément. Sur la base des fonctions de base de la FEM il y a une solution scalaire réalisée par la méthode des éléments finis en domaine temporel (FETD) et une solution vectorielle aux équations du domaine temporel de Maxwell a été proposée [8]. Pourtant, elles souffrent également de ses matrices résultantes mal conditionnées créent par le maillage.

❖ La méthode des volumes finis en domaine temporel (FVTD) a été introduite à la fin des années 1980 en tant que technique puissante pour résoudre les équations de Maxwell. Elle s'inspire des techniques à volumes finis utilisées pour résoudre les équations de la dynamique des fluides sous leur forme conservatrice [9]. La méthode FVTD se caractérise par une grande

souplesse géométrique car elle peut être appliquée dans des maillages polyédriques non structurés, elle est couramment implémentée dans des maillages tétraédriques, ce qui permet de modéliser des structures complexes comme : les guides d'onde circulaire ou fibres à cristal photonique avec une grande fidélité. Cependant, il endure une influence sur le phénomène de propagation surtout au voisinage des frontières de la structure.

❖ La méthode des moments (MoM) discrétise les équations de Maxwell sous forme intégrale et les inconnues sont des sources telles que des courants ou des charges sur les surfaces des conducteurs et des diélectriques. Ce procédé est avantageux pour les problèmes impliquant des zones ouvertes et lorsque les surfaces porteuses de courant sont petites. La méthode des moments nécessite de mailler exclusivement la surface de objets, ce qui limite les temps de calcul et l'espace mémoire. En revanche, la méthode des équations intégrales de frontières (IBE) consiste à mettre les équations de Maxwell temporel sous la forme d'une équation intégrale comme la méthode des moments (MoM), en fonction de la valeur de l'inconnue et de ses dérivées normale à la frontière. Elle utilise pour ce faire la seconde identité la fonction de Green. Elles sont bien adaptées aux problèmes hyperfréquences pour l'étude des antennes cornets. Par contre, la méthode (MoM) ne peut pas résoudre les phénomènes de propagation dans les milieux anisotropes à l'intérieur des objets et la méthode (IBE) présente une forte singularité géométrique au niveau des points anguleux de frontières de structure [10].

### **I.3. Motivation**

Toutes les méthodes mentionnées précédemment présentent des inconvénients, que ce soit en termes de faible précision, dans les structures de données complexes ou dans les défis géométriques liés à la topologie des mailles. Dans cette thèse, une méthode basée sur les nœuds est proposée, qui combine les avantages de la simplicité par la discrétisation des nœuds et la possibilité de placer des nœuds conformes autour d'objets géométriquement complexes. La discrétisation peut résoudre des structures fines et permet des distributions de nœuds grossières dans les endroits où aucune discrétisation fine n'est requise. Avec le bon choix des fonctions de base, une très grande précision peut être obtenue. Ces méthodes dites sans maillage constituent une classe prometteuse de méthodes en électromagnétisme numérique [11, 12].

#### **I.4. Contribution**

Généralement, toutes les méthodes numériques précédentes, y compris les méthodes sans maillage rencontrent des problèmes de stabilité où le pas de temps doit satisfaire la condition dite de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) [13] ; par exemple la condition (CFL) rend la méthode FDTD très sensible au choix du pas de taille. Une telle condition réduit la taille du pas de temps utilisé et augmente par conséquent le temps de calcul global. Diverses techniques ont été proposées pour résoudre le problème de la stabilité, nous les mentionnons les schémas implicites ; comme le schéma implicite des directions alternées à saute-mouton (ADI) qui a été proposé par : *Namiki*; qui consiste en deux équations de mise à jour implicites et une équation de mise à jour explicite [14], le schéma implicite localement unidimensionnelle (LOD) qui comporte deux sous-étapes à chaque pas de temps, chacune nécessitant la solution de deux équations de mise à jour implicites et deux équations de mise à jour explicites [15, 16]. Le schéma de Crank-Nicolson (CN) est également inconditionnellement stable et il a été initialement introduit dans la méthode FDTD, il consisté à utiliser pour les dérivées partielles relatives à l'espace la moyenne temporelle entre l'étape précédente et l'étape suivante [17].

L'objectif fixé dans cette thèse est situé dans la continuité du thème engage en magister, à cette effet il ya des recherches effectuées avec succès pour développer une nouvelle méthode numérique temporelle pour résoudre le problème de stabilité d'une part et le problème géométrique de la topologie des mailles d'une autre part.

#### **I.5. Organisation de la thèse :**

Pour mener à bien cette thèse de Doctorat en Sciences, nous avons structuré le manuscrit comme suit :

Dans le deuxième chapitre, nous allons présenter les notions de base de la théorie de Maxwell. Nous présenterons le cadre mathématique de ces équations. Nous exposerons également les méthodes numériques utilisées pour résoudre ces équations ou nous mettrons l'accent sur les méthodes temporelles. Enfin, une bonne partie sera consacrée à la recherche bibliographique sur les méthodes numériques ainsi sur les schémas implicites et explicites utilisées.

Le troisième chapitre sera consacré à la modélisation électromagnétique par la méthode conventionnelle des différences finies dans le domaine temporel (FDTD) afin de l'utiliser comme

méthode de comparaison. Dans un premier temps, nous allons décrire les équations de Maxwell par le schéma de Yee où nous allons expliquer comment intégrer le schéma explicite de saute-mouton (leap-frog scheme). Dans un deuxième temps, nous présenterons le problème critique concernant la condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), la dispersion numérique et les inconvénients du schéma explicite de saute-mouton, et une discussion sur la portabilité des couches absorbantes dans cette méthode. Enfin, ce chapitre conclut la signification relative des erreurs résultant de chaque étape de la simulation complète FDTD en mentionnant toutes les références bibliographiques utilisées.

Le quatrième chapitre concerne les méthodes sans maillage. Nous commençons par un aperçu général de ces méthodes et les utilisons en électromagnétisme. Les généralités et les bases mathématiques sont ensuite présentées pour un ensemble spécial de ces méthodes pour résoudre les équations différentielles de Maxwell, dans lesquelles nous nous concentrons sur la méthode sans maillage des fonctions de base radiales (RBF) et la méthode sans maillage d'interpolation de point radial (RPIM) et leur adaptabilité aux couches absorbantes de type PML. À la fin de ce chapitre, nous avons simulées des exemples numériques à l'aide des méthodes présentées dans ce chapitre qui donnent de bons résultats et comparé avec la méthode FDTD, Ensuite, afin de démontrer les avantages potentiels tels que la distribution des nœuds, les paramètres de formes des fonctions de base utilisés et la convergence rapide, les résultats de la méthode RPIM ont été discutés par rapport au critère de stabilité CFL.

Le dernier chapitre est consacré à la nouvelle méthode sans maillage RPIM basée sur le schéma implicite de Crank-Nicolson pour la résolution de l'équation d'onde de Helmholtz, qui est proposée pour améliorer l'efficacité de la méthode sans maillage RPIM pour la résolution des équations de Maxwell. Avec cette méthode, un seul ensemble d'inconnues est requis, qu'il s'agisse de champs électriques ou de champs magnétiques. Par conséquent, comparé aux procédés conventionnels explicites sans maillage RPIM et FDTD, qui doit résoudre simultanément les champs électriques et magnétiques, ce procédé peut améliorer l'efficacité des calculs et réduire l'occupation de mémoire. Le critère de stabilité de cette nouvelle méthode a été abordé analytiquement et vérifié numériquement à travers des exemples à la fin de ce chapitre.

Enfin, une conclusion et des perspectives d'action future sont définies à la fin de la présente Thèse.

**Références bibliographiques I**

[1] Peterson . A. F, Ray. S. L., et Mittra. R., *Computational Methods for Electromagnetics*. Piscataway, NJ: IEEE Press & University Oxford Press, 1998.

[2] Chew. W. C., Jin. J. M, Michielssen. E., Song. J., *Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics*, Boston, MA: Artech House, 2001.

[3] Cheng. D.K., *Fundamentals of Engineering Electromagnetics*, Reading, MA: Addison Wesley, 1993.

[4] Teixeira. F. L., Ed., *Geometric Methods for Computational Electromagnetics*, PIER Progress N°:32. Cambridge, MA: EMW, 2001.

[5] Yee. K. S., “Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell’s equations in isotropic media,” IEEE Trans. Antennas Propagation., vol. AP-14, no. 3,pp. 302–307, Mai1966.

[6] Kunz. K. S., K. Lee. M., “A three-dimensional finite-difference solution of the external response of an aircraft to a complex transient EM environment: Part i-the method and its implementation,” IEEE Trans. Electromagnetic. Compatibility, 20:328–333, 1978.

[7] Jin . J.-M., *The Finite Element Method in Electromagnetics*, 2eme edition. New York: Wiley, 2002.

[8] Lee . J.-F., Lee. R., Cangellaris . A. C., “Time-domain finite-element methods,” IEEE Trans. Antennas. Propagat., vol. 45, no. 3, pp. 430–442, Mar. 1997.

[9] Madsen. N. K., Ziolkowski. R. W, “A three-dimensional modified finite volume technique for Maxwell’s equations,” Electromagnetics, vol. 10, pp. 147–161, 1990.

[10] Gibon. W. C., *The method of moments in electromagnetic*, Taylor & Francis Group, NJ: Chapman & Hall/CRC, N°: 61451, 2008.

[11] Fries. T., Matthies. H., “Classification and overview of meshfree methods,” Technical. University, Braunschweig, 2003-3, 2003.

- [12] Viana. S. A., Rodger. D., Lai. H. C., “Overview of Meshless Methods," ICS Newsletter, vol. 14, no. 2, pp. 3-6, November 2007.
- [13] Courant. R., Friedrich. K. O., Lewy. H., “ On the partial difference equations of mathematical physics “, IBM Journal. Research. Development, 11:215–234, 1967.
- [14] Namiki. T., “A new FDTD algorithm based on ADI method,” IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 47, no. 10, pp. 2003–2007, Oct. 1999.
- [15] Shibayama. J., Muraki. M., Yamauchi. J., Nakano. H., “Efficient implicit FDTD algorithm based on locally one-dimensional scheme,” Electron. Lett., vol. 41, no. 19, pp. 1046–1047, Sep. 2005.
- [16] Tan. E. L., “Unconditionally stable LOD–FDTD method for 3-D Maxwell’s equations,” IEEE Microw. Wireless Compon. Letter., vol. 17, no. 2, pp. 85–87, Feb. 2007.
- [17] Sun. G., C. Trueman. W., “Efficient implementations of the Crank– Nicolson scheme for the finite-difference time- domain method,” IEEE Trans. Microw. Theory Techn., vol. 54, no. 5, pp. 2275–2284, May 2006.

# Chapitre II. Théorie électromagnétique et modélisation numérique



---

Dans ce chapitre, nous allons présenter les notions de base de la théorie de Maxwell. Nous présenterons le cadre mathématique de ces équations. Nous exposeront également les méthodes numériques utilisées pour résoudre ces équations ou nous mettrons l'accent sur les méthodes temporelles. Enfin, une bonne partie sera consacrée à la recherche bibliographique sur les méthodes numériques ainsi que sur les schémas implicites et explicites utilisés.

---



## **II.1. Introduction.**

## **II.2. Brève histoire de la théorie de Maxwell et des micro-ondes.**

## **II.3. Cadre mathématique des équations de Maxwell dans le domaine temporel.**

### **II.3.1. Le champ électrostatique**

### **II.3.2. Les conditions aux limites.**

## **II.4. Evolution temporelle.**

### **II.4.1. Dispersion des ondes électromagnétiques.**

## **II.5. Nécessité d'analyser les applications d'EMC dans le domaine temporel.**

## **II.6. Importance des techniques de modélisation EMC.**

### **II.6.1. La méthode des différences finie dans le domaine temporel (FDTD).**

### **II.6.2. La méthode des moments (MoM).**

### **II.6.3. La méthode des éléments finis (FEM).**

### **II.6.4. La méthode des lignes de transmission (TLM).**

## **II.7. Algorithmes améliorés.**

### **II.7.1. Compléments aux méthodes numériques.**

## **II.8. Conclusion**

## **Références bibliographiques II**

## II.1. Introduction

La théorie électromagnétique ne permet pas à elle seule de comprendre les complications des interactions des champs avec des objets complexes, comme ce serait le cas dans les applications réelles. Elles ne peuvent être prédites sans abstraction de la réalité ou, en d'autres termes, sans créer un modèle du système physique analysé. La création d'un modèle électromagnétique qui reproduit fidèlement le comportement du champ électromagnétique dans le monde physique est un exercice difficile qui nécessite une compréhension de base de la théorie électromagnétique qui soit accompagné de la mise en point de nouvelles méthodes numériques de modélisation adaptés à ces modèles, ainsi qu'une bonne compréhension de la théorie des circuits micro-ondes et une compréhension des facteurs physiques sous-jacents représentatifs de ce modèle.

L'étude présentée dans ce chapitre vise à faire de la théorie du champ électromagnétique un renouveau non exhaustif. L'objectif est de relier les éléments de modélisation, y compris la théorie des champs, l'analyse numérique et la modélisation électromagnétique, de manière à faciliter la compréhension des phénomènes électromagnétiques afin de savoir comment les équations et les modèles s'intègrent.

## II.2. Brève histoire de la théorie de Maxwell et des micro-ondes

Une des premières tentatives pour déduire la loi fondamentale de l'action électromagnétique en termes de champ électrique se propageant à une vitesse finie a été réalisée par *Karl Friedrich Gauss* (1777–1855). Cependant, les expériences de *Michael Faraday* (1848) sur la propagation de perturbations magnétiques (ondes électromagnétiques), qui ont ensuite été formulées théoriquement par *James Clerk Maxwell* (1865), « les équations de Maxwell », permettent de comprendre la genèse des micro-ondes et ondes électromagnétiques en général. Par la suite, *Marconi* et *Hertz* dans leurs expériences (1888) ont prouvé que la théorie de Maxwell selon laquelle le signal radio fréquence (RF) était une onde électromagnétique qui se propage à la vitesse de la lumière ( $c = \lambda f = 3 \times 10^8$  m / s). En 1885, *J. C. Bose* met au point un circuit de génération d'énergie hyperfréquence et en 1898 une antenne cornet, un polariseur et un détecteur de signaux RF, encore utilisés de nos jours. Le développement lent mais régulier dans le domaine des lignes de transmission, des émetteurs, etc... s'est poursuivi jusqu'en 1930 et s'est

ensuite accéléré. La genèse de la propagation des hyper-fréquences à travers les guides d'ondes provient des expériences du *Dr. Southworth* (1933). Par la suite, les exigences des deux guerres mondiales se multiplièrent avec le développement de tubes à micro-ondes: Klystron des *frères Varian* (1936), magnétron de *Randel et Boots* (1939), Radar de *Henry Tizard* en 1940...etc. Le développement s'est poursuivi et les dispositifs en ferrite sont apparus dans les années 1950. Dans les années 1960, les sources hyperfréquences à semi-conducteurs, les diodes Gunn, les diodes à avalanche et les transistors hyperfréquences ont eu un plein essor, elles encombrant très peu et nécessitent une faible alimentation en énergie. Il y a également d'autres applications, par exemple chauffage (dans les procédés industriels ou les appareils ménagers ou le traitement du cancer), spectroscopie à micro-ondes, radioastronomie, communication par satellite [1, 2]. Ensuite l'apparence actuelle et l'avènement de la technologie des guides d'ondes intégrés GIS en 1995 qui a déjà suscité un grand intérêt dans le développement de nombreux circuits intégrés micro-ondes sus mentionnées ; en remplaçant les parois des guides d'onde par une série de vias métalliques à travers le substrat diélectrique pour obtenir les mêmes effets électromagnétiques [3, 4].

Un aspect important des dispositifs micro-ondes ci-dessus est la production habituellement imprévue d'énergie électromagnétique, qui risque d'imposer des interférences redondantes à d'autres appareils électriques. Parce que de tels dispositifs constituent un élément indispensable de la vie quotidienne des communications aux transports en passant par les systèmes médicaux d'assistance à la santé et les divertissements, tout effort visant à classer leurs émissions rayonnées est devenu une condition préalable de plus en plus importante. En fait, cette détérioration des performances d'un appareil induite par une perturbation électromagnétique est généralement désignée par le terme "interférence électromagnétique (IEM)" et concerne principalement les signaux radiofréquences sous forme de bruit large bande ou de modification de la fréquence. Essentiellement, les IEM sont intimement liées au contrôle systématique de la compatibilité électromagnétique (CEM), c'est-à-dire à la disposition d'un équipement à fonctionner correctement, malgré les interférences électromagnétiques dues aux rayonnements existant dans l'environnement, par exemple : satellite dans l'espace, où le rayonnement solaire n'est pas arrêté par l'ionosphère,... etc. Apparemment, l'examen approprié de l'attitude CEM d'une structure permet de confirmer sa rentabilité, d'éliminer les risques sérieux pour la fiabilité et de contribuer au respect des principales normes de fabrication.

Noter que la compréhension physique de ce dernier dépend de la théorie de Maxwell à travers ses fameuses équations, nécessaires à la définition des phénomènes électromagnétiques. Cependant, son succès a mis fin à de la mécanique newtonienne qui n'était pas en fait totalement compatibles avec l'électromagnétisme ; une incompatibilité particulièrement évidente est la vitesse absolue de la lumière  $c$ , cela a abouti à une discordance entre les équations de Maxwell confirmées expérimentalement et les formules newtoniennes de composition de vitesse. Toutes ces difficultés ont finalement été résolues par *Einstein* en 1905 et sa théorie de la relativité qui montre l'aspect quantique de l'électromagnétisme de Maxwell, la mécanique newtonienne montre une approximation quand les mobiles considères conservent des vitesses faibles par rapport à  $c$ .

### II.3. Cadre mathématique des équations de Maxwell dans le domaine temporel

Les équations de Maxwell sont un ensemble de quatre équations aux dérivées partielles (EDP) qui régissent la relation espace-temps entre les champs électriques  $E(x, y, z, t)$  et magnétiques  $H(x, y, z, t)$ . Ces équations sont exprimées sous formes différentielles et intégrales dans le domaine temporel comme suit [5]-[7]:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \xrightarrow{\text{forme intégrale}} \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (\text{Maxwell- Faraday}) \quad (\text{II. 1})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \xrightarrow{\text{forme intégrale}} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J}_c \cdot d\vec{s} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} \quad (\text{Maxwell- Ampère}) \quad (\text{II. 2})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \xrightarrow{\text{forme intégrale}} \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \rho \cdot dv \quad (\text{Maxwell-Gauss sur l'induction électrique}) \quad (\text{II.3})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \xrightarrow{\text{forme intégrale}} \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (\text{Maxwell-Gauss sur l'induction magnétique}) \quad (\text{II. 4})$$

où  $B$  est la densité de flux magnétique,  $D$  est le déplacement électrique,  $\rho$  étant la densité de charge électrique et  $J_c = \sigma \cdot E$  est la densité de courant qui est le responsable des mécanismes de perte dans le support.

Les équations (II.1) à (II.4) décrivent la relation entre  $E$  et  $H$  qui sont complétées par les deux relations caractérisant les milieux diélectrique et magnétique :  $B = \mu \cdot H$  et  $D = \varepsilon \cdot E$  où  $\varepsilon$  et  $\mu$  désignent respectivement la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique du milieu ;

les deux premières équations (II.1) et (II.2) de Faraday et d'Ampère indiquent qu'un champ magnétique ou électrique qui varie dans le temps produit un champ électrique ou magnétique qui varie dans l'espace. L'équation de Poisson (II.3) relie le déplacement électrique  $D$  à la charge électrique  $\rho$  et (II.4) est une affirmation de l'inexistence de charge magnétique. Il est difficile de déduire des concepts supplémentaires sur la relation entre  $E$  et  $H$ , telles que données par les équations de Maxwell. Cependant, on peut obtenir plus d'information en considérant les formes intégrales des équations de Maxwell, pour que chaque intégrale de ligne des équations (II.1) à (II.4) soit calculé le long d'un contour fermé  $C$ , l'intégrale de surface est calculée sur la surface  $S$  et l'intégrale de volume est calculée sur le volume  $V$ .

Les formes intégrales des équations de Maxwell sont utiles pour déterminer la relation entre les champs et les circuits micro-ondes d'une part et les conditions aux limites d'autre part. Cependant, avant que cette relation ne soit établie, l'hypothèse de champ électrostatique et les conditions aux limites doit être vérifiée.

### II.3.1. Le champ électrostatique

L'électrostatique est un cas particulier simple de l'électromagnétique, où il n'y a pas de dépendance temporelle. Pour les conditions statiques, la loi de Faraday (II.1) implique  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$ , de sorte que  $E = -\vec{\nabla}\varphi$ , où  $\varphi$  est le potentiel électrostatique. (II.3) devient alors l'équation de Poisson [5, 6]

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \varphi) = -\rho \quad (\text{II. 5})$$

En 3-D, la solution de (II.5) en espace libre est

$$\varphi(r) = \iiint \frac{\rho(r_1) dV}{4\pi\varepsilon_0 |r - r_1|} \quad (\text{II. 6})$$

Cette formulation (II.6) est nécessaire pour relier les charges sur les conducteurs aux distributions du potentiel.

### II.3.2. Les conditions aux limites

Considérons la situation dans laquelle un milieu, caractérisé par  $\varepsilon_1$  et  $\mu_1$ , partage une interface avec un autre milieu, caractérisé par  $\varepsilon_2$  et  $\mu_2$ . À l'interface, les champs normaux et

tangentiels doivent satisfaire à ce que l'on appelle les conditions aux limites, conséquences des équations de Maxwell. Par exemple, la forme intégrale de (II.4) indique l'état de la densité de flux magnétique, et le théorème de Gauss

$$\oiint_S B \cdot ds = \iiint_V \nabla \cdot B \cdot dv \quad (\text{II. 7})$$

En appliquant à cette loi de conservation donne la condition aux limites

$$\hat{n} \cdot (B_2 - B_1) = 0 \quad (\text{II. 8})$$

où  $\hat{n}$  est une unité normale à l'interface qui pointe vers le milieu 2. De même, l'équation (II.3) donne

$$\hat{n} \cdot (D_2 - D_1) = \rho_s \quad (\text{II. 9})$$

où  $\rho_s$  est la densité de charge de surface sur l'interface. Le théorème de Stokes s'exprime

$$\oint_C E \cdot dl = \iint_S (\nabla \times E) \cdot ds \quad (\text{II. 10})$$

Ce théorème de Stokes appliqué aux lois de Faraday (II.1) et d'Ampère (II.2) donne

$$\hat{n} \times (E_2 - E_1) = 0 \quad (\text{II. 11})$$

$$\hat{n} \times (H_2 - H_1) = J_s \quad (\text{II. 12})$$

où  $J_s$  est le courant de surface sur l'interface entre les deux milieux. Le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur électrique parfait (PEC) est nul et, par conséquent, également le déplacement électrique. Nous obtenons les conditions aux limites  $\hat{n} \cdot D_2 = \rho_s$  et  $\hat{n} \times E_2 = 0$  lorsque le milieu 1 est un PEC. Aux fréquences finies, la loi de Faraday indique que la densité de flux magnétique est nulle à l'intérieur d'un PEC (qui s'applique également au champ magnétique) et nous obtenons les conditions aux limites  $\hat{n} \cdot B_2 = 0$  et  $\hat{n} \times H_2 = 0$  lorsque le milieu 1 est un PEC. On déduit en particulier que le champ électrique tangentiel et le champ magnétique normal sont nuls à la surface d'un PEC. D'autre part, sur une surface d'un conducteur magnétique parfait (PMC) le champ magnétique tangentiel et le champ électrique

normal sont égaux à zéro. Un autre type de conditions aux limites, qui ne correspondent à aucune limite physique, sont les conditions aux limites absorbantes ABC. Celles-ci sont utilisées pour tronquer le domaine de calcul dans les problèmes à région ouverte et peuvent être implémentés en utilisant diverses techniques. L'ABC le plus populaire est la couche parfaitement adaptée PML, qui sera détaillé dans le chapitre III.

## II.4. Evolution temporelle

Avant de discuter des schémas pour faire évoluer les équations de Maxwell (II.1) - (II.4) dans le temps, il convient de noter qu'elles ne sont pas tous indépendantes. Par exemple, il vaut mieux considérer l'équation de Poisson (II.3) comme une condition initiale de la densité de charge ou  $\rho = 0$ . Pour voir cela en imposant la source de courant  $J_c = 0$  de l'équation (II.2) d'Ampère, manipulons les équations précédentes pour produire des équations décrivant le comportement de  $E$  ou  $H$  indépendamment [6, 7]

$$\mu\epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \nabla^2 E = 0 \quad (\text{II. 13})$$

$$\mu\epsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \nabla^2 H = 0 \quad (\text{II. 14})$$

Ces deux équations sont appelées équations d'onde ou équations de Helmholtz. Les solutions aux équations d'onde sont des champs électriques ou magnétiques.

### II.4.1. Dispersion des ondes électromagnétiques

La propagation des ondes électromagnétiques est souvent caractérisée par la relation de dispersion reliant la variation spatiale et temporelle d'une solution monochromatique au moyen de son vecteur d'onde  $k$  et de sa pulsation  $\omega$ , respectivement. Nous traitons souvent des situations non dispersives où la fréquence est directement proportionnelle au nombre d'onde  $k$ . Lorsque la fréquence n'est pas proportionnelle au nombre d'onde, il se produit une dispersion, physiquement c'est le cas pour la propagation des ondes dans certains supports et guides d'ondes. Cependant, le processus de discrétisation peut également entraîner une dispersion, souvent appelée dispersion numérique comme nous allons les décrire dans les chapitres qui suit. En général, la dispersion

implique qu'un paquet d'onde contenant plusieurs fréquences spatiales différentes changera de forme au cours de sa propagation. Naturellement, il est important que la dispersion numérique soit faible par rapport à la dispersion physique d'intérêt. Pour fournir une brève introduction à la dispersion et aux questions connexes, nous utilisons l'équation d'onde (II.14) en 1-D et dans un espace libre de ( $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$  et  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ ), où le champ électrique transverse est noté  $E(z, t)$ . Ici, la vitesse de la lumière  $c$  dans le support est constante [5]-[7]. Les solutions exactes dans ce cas sur un intervalle infini ont la forme :

$$E(z, t) = E^+(z - ct) + E^-(z + ct) \quad (\text{II. 15})$$

où  $E^+$  et  $E^-$  représentent des ondes propageant dans les directions  $z$  positive et négative, respectivement. Pour obtenir la relation de dispersion pour l'équation d'onde 1-D, substituons  $E = \exp(j\omega t - jkz)$  à (II.13), puis divisons les deux côtés par :  $\exp(j\omega t - jkz)$ , ce qui donne  $\omega^2 = c^2 k^2$ , où la fréquence angulaire  $\omega$  est une fonction linéaire du nombre d'onde  $k$ , ce qui implique que toutes les composantes de fréquence d'une onde transitoire se propagent à la même vitesse. En conséquent, la vitesse de phase  $v_p$ , définie comme la vitesse d'une surface à phase constante, nous vérifions  $\left(\frac{d}{dt}\right)(\omega t - kz) = \omega - kv_p = 0$ , ce qui donne

$$v_p = \frac{\omega}{k} \quad (\text{II. 16})$$

Ensuite, on considère la superposition des deux ondes  $E_1 = \exp(j(-\Delta\omega)t - j(k - \Delta k)z)$  et  $E_2 = \exp(j(\omega + \Delta\omega)t - j(k + \Delta k)z)$ . La somme de ces ondes peut être écrite sous la forme d'une onde porteuse  $E = \exp(j\omega t - jkz)$  fois une enveloppe à variation lente qui est égale à  $2 \cos(\Delta\omega t - \Delta k z)$ . On voit que la vitesse de propagation de l'enveloppe est  $\Delta\omega/\Delta k$  et, dans la limite où  $\Delta\omega$  et  $\Delta k$  deviennent petits, on appelle cela la vitesse de groupe

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (\text{II. 17})$$

Pour l'équation d'onde (II.13) en 1-D, les vitesses de phase et de groupe sont constantes et égales à la vitesse de la lumière  $v_p = v_g = c$ . Cela ressort également de la solution explicite (II.15). Avec ce traitement analytique, toutes les ondes se propagent à la même vitesse,

indépendamment de leur nombre d'onde  $k$ . Par conséquent, nous disons qu'il n'y a pas de dispersion.

### **II.5. Nécessité d'analyser les applications d'EMC dans le domaine temporel**

Selon la nature des problèmes électromagnétiques étudiés, le noyau d'un solveur électromagnétique computationnel (EMC) peut être formulé dans le domaine fréquentiel ou temporel. Les méthodes du domaine de fréquence pour les lois de Maxwell à l'état d'équilibre harmonique ont été les premiers représentants de la modélisation numérique dans le domaine de l'EMC [8, 9]. Basées sur des notions asymptotiques et de type intégral, elles fournissent des résultats acceptables pour diverses situations, en particulier pour la caractérisation des propriétés de diffusion, le traitement des problèmes de valeurs propres et le traitement de géométries relativement complexes ou d'inhomogénéités de supports. Cependant, du fait de leur profil implicite, ils nécessitent la solution d'un système d'équations, dont l'ordre devient prohibitif dans le cas de structures modernes, ce qui peut entraîner des implémentations lourdes, voire irréalisables. À l'inverse, les techniques temporelles traitent de la solution directe des équations de Maxwell dépendantes du temps sans introduire des fonctions variationnelles, des potentiels ou des résidus pondérés [10]–[12]. À cette effet, ils discrétisent des vecteurs de champs électriques et magnétiques selon un schéma de base temporelle, en veillant au choix approprié des paramètres de discrétisations pour éviter les oscillations non physiques via les critères de stabilité appropriés. Leur mécanisme de mise à jour, qui repose sur une intégration totalement explicite et progressive pour le calcul de chaque composant inconnu, présente un intérêt particulier. Par conséquent, aucun système d'équations n'est généré ou n'a besoin d'être résolu, et les simulations résultantes sont très faciles à configurer. De plus, la discrétisation spatiale dans les schémas temporels alloue des quantités de champs sur une tessellation structurée non groupée avec une résolution de sous-longueur d'onde adaptée pour modéliser de manière pertinente le contenu fréquentiel du schéma d'excitation sans porter atteinte à la cohérence de l'arrangement. Aux avantages précédents, il faut ajouter la simplicité de réalisation de la plupart des méthodes et le traitement simple de différentes compositions de supports, telles que celles dépendant de la fréquence ou anisotropes. En outre, il est impératif de souligner leur comportement véritablement à large bande, obtenu grâce à la variété impressionnante de formes d'excitation pouvant être prises en charge. En ce qui concerne la fin des applications des conditions aux limites ouvertes,

les techniques de la limite de temps peuvent être combinées à des conditions limites d'absorption avancées de type PMLs, limitant ainsi le domaine total à des dimensions minimales.

## **II.6. Importance des techniques de modélisation EMC**

Bien que la modélisation dans le domaine temporel ait débuté dans les années 1960, la plupart des méthodes appartenant à cette catégorie sont restées dans l'obscurité relative pendant plusieurs années. Cela peut être attribué à des raisons de mise en œuvre algorithmique (par exemple, la terminaison de domaines infinis, le traitement d'interfaces non homogènes) et à certains problèmes pratiques mettant l'accent sur le développement de systèmes informatiques. Étant donné que la plupart des techniques du domaine temporel impliquent une puissance de traitement à grande vitesse et des quantités considérables de mémoire, il devient évident pourquoi elles n'étaient pas reconnues par la communauté des chercheurs dès leur apparition. Cependant, la formidable croissance des sources informatiques, conjuguée à la présentation de diverses conditions de terminaison des limites efficaces, a donné une réelle impulsion à leur reconnaissance, ce qui a conduit à la construction des logiciels commerciaux destinés à l'utilisation générale des concepts d'EMC de domaine temporel. Sur la base des exigences de l'analyse EMC observées dans la littérature, les plus populaires techniques de la modélisation EMC sont: la méthode du domaine temporel des différences finies (FDTD) [13]–[15], la technique des moments (MoM) [16,17], la méthode des éléments finis (FEM) [18]–[21] et l'algorithme TLM (matrice de ligne de transmission) [27]–[29].

### **II.6.1. La méthode des différences finies dans le domaine temporel (FDTD)**

La technique FDTD est une solution basée sur le volume aux équations (II.1) et (II.2) différentielles de Maxwell. Les équations de Maxwell sont converties en équations aux différences centrales et résolues directement dans le domaine temporel. Tout le volume de l'espace entourant l'objet à modéliser doit être maillé, généralement en grilles carrées ou rectangulaires. Chaque grille doit avoir une taille petite comparée à la plus courte longueur d'onde d'intérêt et son emplacement doit être identifié comme étant du métal, de l'air ou tout autre matériau souhaité. La figure II.1 montre un exemple d'une telle grille pour un cas bidimensionnel.

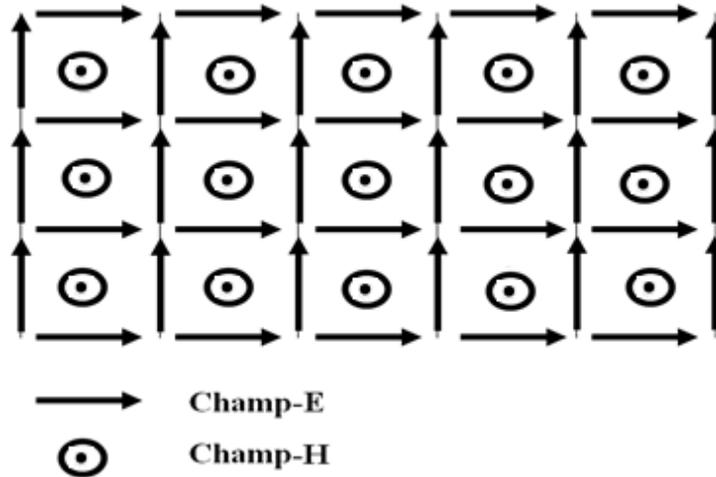


Figure II.1 : Grille FDTD à deux dimensions

Une fois les paramètres de la grille établis, les champs électriques et magnétiques sont déterminés dans l'ensemble de la grille à un moment donné. Le temps avance d'un pas et les champs sont à nouveau déterminés. Ainsi, les champs électriques et magnétiques sont déterminés à chaque pas de temps sur la base des valeurs précédentes des champs électriques et magnétiques. Une fois les champs propagés dans le domaine maillé, la simulation FDTD est terminée et la réponse en fréquence à large bande du modèle est déterminée en effectuant une transformation de Fourier des résultats du domaine temporel aux points de contrôle spécifiés. Etant donné que la méthode FDTD fournit une solution dans le domaine temporel, un résultat de domaine de fréquence large bande est disponible à partir d'une seule simulation.

Comme la technique FDTD est une solution basée sur le volume [13,14], les bords de la grille doivent être spécialement contrôlés pour fournir la réponse de rayonnement appropriée. Les bords sont modélisés avec une condition de limite d'absorption (ABC). Ou généralement, un bon ABC pour la technique FDTD fournira une réflexion effective inférieure à -60 dB.

### II.6.2. La méthode des moments (MoM)

La méthode des moments (MoM) est une technique utilisée pour résoudre des équations de Maxwell de deux formes : intégrales de frontière qui consiste sur des fonctions de Green avec superposition qui s'appelle aussi la méthode des équations intégrales de frontières (IBE), ou bien différentielles (équations de Maxwell avec conditions aux limites) en la convertissant en une équation matricielle dans un sous-espace à dimensions finies [16]. La technique (MoM) est l'une

des méthodes numériques polyvalentes et les plus utilisées en analyse électromagnétique pour résoudre des problèmes impliquant des structures métalliques composées de fils et de surfaces, y compris la modélisation EMC. La MoM diffère de la FDTD, car c'est une méthode superficielle. Nous voulons dire que la structure hyperfréquence modélisée est découpée en entités distinctes [17]. Cela rend MoM très efficace pour traiter les types de problèmes rencontrés par les conducteurs de fils parfaitement connectés sans la présence d'objets pénétrants électromagnétiques, tels que des matériaux isolants et le magnétisme où la formule (II.6) est utilisée dans la méthode MoM pour résoudre les charges sur ces fils est nécessaires à la production de distributions potentielles spécifiées. De plus, MoM étant une technique fréquentielle, elle peut s'avérer un outil d'analyse très efficace lorsque la réponse de la structure est souhaitée sur une seule fréquence ou dans une plage de fréquences très étroite. La procédure de l'algorithme MoM comprend quatre étapes: (1) diviser la structure à modéliser en une série de segments de fil et de patches dont les dimensions sont beaucoup plus courtes que la longueur d'onde d'intérêt; (2) choisir des fonctions d'expansion pour représenter le courant inconnu et les fonctions de pondération; (3) remplir les éléments de la matrice et résoudre la distribution de courant inconnue sur le corps de la structure; (4) traitement des valeurs de courant de sortie.

### II.6.3. La méthode des éléments finis (FEM)

La méthode des éléments finis (FEM) est une technique numérique utilisée pour résoudre des équations aux dérivées partielles (EDP) dans les structures à géométries complexes ou aux conditions aux limites en les transformant en une équation matricielle [18]-[21]. La principale caractéristique de FEM est sa capacité à décrire avec une grande souplesse la géométrie ou le support du problème analysé. Le domaine de calcul est divisé en petits éléments, tels que des triangles et des rectangles de formes variées, qui permettent d'utiliser une grille irrégulière efficace. La technique FEM présente un intérêt particulier pour les travaux d'EMC et pour l'électromagnétisme en général où elle peut être utilisée pour résoudre les problèmes de mode ; en résolvant les équations aux dérivées partielles (EDP) de Maxwell d'une part et de propagation; par résolution de l'équation de Helmholtz; ceci est fait par l'algorithme de domaine temporel par éléments finis (FETD) [22]-[26]. Ce qui permet traiter les géométries très irrégulières par le biais de l'utilisation de maillages adaptatifs d'autre part. La FEM utilise deux approches pour résoudre les problèmes des structures micro-ondes: la méthode variationnelle et la méthode des résidus

pondérés. Les deux approches conduisent à la même équation de valeurs propres qui devrait être résolue pour obtenir les modes de résonance dans les filtres et les cavités et le diagramme de rayonnement dans les antennes à hyperfréquence. Les étapes fondamentales pour construire l'analyse de toute structure hyperfréquence utilisant la FEM peuvent être énumérées comme suit: (1) discrétisation de la structure de l'intérêt dans de nombreux domaines d'éléments plus petits, (2) configuration de l'équation d'interpolation par les valeurs aux nœuds élémentaires ou aux limites pour déterminer le paramètre inconnu. Cela peut être résolu les équations (II.1) et (II.2) de champ électromagnétique ou par les équations (II.13) ou (II.14) de Helmholtz, (3) assembler les équations individuelles d'éléments discrétisés pour former des équations globales à valeurs propres, (4) résoudre les équations globales à l'aide du solveur matriciel à valeurs propres, (5) Enfin, post-traitement des valeurs propres et des vecteurs propres correspondants pour obtenir les paramètres inconnus souhaités. De nombreux logiciels basés sur la FEM sont disponibles, parmi les quelles: HFSS de Ansoft et COMSOL Multiphysics.

### **II.6.4. La méthode des lignes de transmission (TLM)**

La technique des lignes de transmission (TLM) est révélée être un moyen dynamique et polyvalent d'optimiser les calculs sur le terrain [27]-[29]. Dans l'algorithme explicite de TLM, l'espace continu est divisé en un ensemble de cellules élémentaires, désignées comme des nœuds, qui forment la maille de base. Les champs électromagnétiques sont représentés par des impulsions d'onde dispersées dans les nœuds et se propageant dans des lignes de transmission entre des nœuds adjacents. Une telle structure est totalement analogue au concept de réseau; néanmoins, l'introduction d'amplitudes d'onde doit être associée à des composants électriques et magnétiques transversaux. En conséquence et contrairement au cas 1-D où ces amplitudes sont un remplacement pratiquement variable, dans les problèmes 2-D et 3-D, leur introduction nécessite respectivement un ensemble de courbes ou de plans de référence pour spécifier des zones tangentielles. En fait, les composantes du champ sont définies en fonction de ces plans, les amplitudes des ondes leur étant perpendiculaires. Sur chaque plan de frontière séparant deux cellules TLM, un point d'échantillonnage pour les grandeurs électriques et magnétiques tangentielles est défini, tandis que dans chaque point d'échantillonnage, un port de réseau est attribué à chaque polarisation. Cette configuration multiport désigne le nœud TLM susmentionné

et fournit la flexibilité pertinente pour la discrétisation de la structure où de l'application considérée.

## II.7. Algorithmes améliorés

Comme cela a déjà été décrit, l'EMC est un domaine scientifique très actif avec de nombreuses applications émergentes et sujettes à des changements constants en termes de complexité et de performances. Bien que les quatre méthodologies susmentionnées aient fait leurs preuves dans le traitement de nombreux cas, les derniers progrès réalisés ont élevé les seuils de précision et de fiabilité existants. Pour suivre ces avancées stimulantes, de nouveaux schémas temporels sont apparus sous forme de combinaisons efficaces ou d'approches hybrides. Parmi ceux-ci, on peut éventuellement distinguer la méthode FDTD conforme (CFDTD) [30, 31] afin d'éliminer les imprécisions créées par le maillage des escaliers de la FDTD dans lesquelles des modifications du schéma de Yee original doivent uniquement être appliquées aux grilles situées à proximité immédiate des interfaces matérielles de la structure et la technique de domaine temporel par volumes finis (FVTD) [32] pour les arrangements curvilinéaires généralisés. La méthode de raccordement modale (MMT) est l'une des techniques les plus fréquemment utilisées dans la formulation des problèmes aux limites. Cette méthode est appliquée quand la géométrie de la structure peut être identifiée à une jonction de deux ou plusieurs régions où elle est résolue le problème de dispersion due aux diverses discontinuités [33]. De plus, la méthode MRTD (MRTD) multi résolution [34] permet de faire face à des fluctuations abruptes du champ, tandis que l'algorithme pseudo spectral time-domain (PSTD) [35] fournit des résolutions de réseau considérablement réduites pour les structures périodiques et la méthode de Galerkin discontinue en domaine temporel (DGTD) qui est appuyée sur une approximation des composantes du champ électromagnétique locale aux éléments du maillage sans imposer de continuité inter-élément ou l'approximation de la solution du problème est polynomiale par morceau ce qui rend le maillage de calcul raffiné localement en utilisant la présence de nœuds flottants; en d'autres termes, la DGTD est adaptée à la discrétisation de fonctions discontinues ou elle permette de traiter facilement des géométries complexes [36]. Les méthodes sans maillage (Meshless Methods) sont aussi des techniques numériques polyvalentes alternatives au la FEM, ont été proposées pour résoudre les problèmes électromagnétiques et le problème de faible précisions liés à la grille de maillage dans les méthodes ci-dessus [37]-[39].

En contrepartie, un certain nombre de difficultés apparaissent dans les méthodes sans maillage, comme nous le montrons dans le quatrième chapitre. D'autre part, d'importantes réductions du temps total de simulation et élimination de la condition Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) sont réalisées par l'intégration des méthodes précédentes par les schémas implicite ; prendre par exemple l'approche FDTD implicite à direction alternée (ADI) [40, 41], la méthode FDTD en plusieurs étapes (SS-FDTD) [42]-[43], la méthode localement unidimensionnelle (LOD-FDTD) [44]-[46], la méthode Crank–Nicolson (CN-FDTD) inconditionnellement stable [47,48], la méthode (WLP-FDTD) basée sur le polynôme de Laguerre [49] et la méthode new mark-Beta algorithm (New Mark Beta-FDTD) [50] est aussi inconditionnellement stable. En outre, la méthode non standard FDTD ou d'autres méthodes homologues d'ordre supérieur atténuent les mécanismes rudimentaires d'erreur de dispersion sérieux et toujours trompeurs [51]. Enfin, il convient de noter que les méthodes ci-dessus peuvent être, dans les conditions de modélisation appropriées, combinées aux techniques principales du domaine temporel pour donner un outil compact doté de compétences réglables par problème.

### II.7.1. Compléments aux méthodes numériques

Ajouté aux méthodes de résolution pure, l'électromagnétisme utilise de plus en plus des outils d'analyse numériques modernes permettant :

L'optimisation des paramètres d'un problème grâce aux méthodes d'optimisation stochastiques [52] : l'algorithme génétique, le recuit simulé, méthode de Monte Carlo...

La reconnaissance de formes dans un signal par l'utilisation des ondelettes [53].

### II.8. Conclusion

L'objectif de ce chapitre est de donner un bref résumé des équations décrivant le comportement réel. Ce résumé n'est pas destiné à être un exposé complet des préliminaires de la théorie électromagnétique, mais à mettre en évidence les équations qui présentent un intérêt pour la modélisation électromagnétique numérique. Plus précisément, la présentation sert de base aux trois prochains chapitres où sont développées les techniques de calcul. Cela peut être attribué à des raisons de mise en œuvre algorithmique (par exemple, la troncature de domaines infinis, le traitement d'interfaces non homogènes) et à certains problèmes pratiques mettant l'accent sur le développement de systèmes informatiques. Étant donné que la plupart des techniques du domaine

temporel impliquent un traitement à grande vitesse et des quantités considérables de mémoire, il devient évident pourquoi elles n'étaient pas reconnues par la communauté des chercheurs dès leur apparition. Cependant, la formidable croissance des machines informatiques, conjuguée à la présentation de diverses conditions aux limites efficaces, a donné une réelle impulsion à leur reconnaissance, ce qui a conduit à la construction de progiciels commerciaux destinés à l'utilisation générale des concepts d'EMC du domaine temporel appliqués.

## Références bibliographiques II

- [1] Chaturvedi, P. K., *Microwave, radar & RF engineering*, Singapore: Springer, 2018.
- [2] Farhat. M., Hameed. O., Obayya S., *Computational photonics sensors*, Switzerland: Springer, 2019.
- [3] Pilote. A. J., Leahy. K. A., Flanik. B. A., Zaki. K. A., "Waveguide filters Having a Layered Dielectric Structure," U.A. Patent, No.5 382931, Jan 17 1995.
- [4] Deslandes. D., Wu. K., 'Single-substrate integration technique of planar circuits and waveguide filters', IEEE Trans. Microw. Theory Tech., 2003, 51, (2), pp. 593–596.
- [5] Balanis. C. A, *Advanced Engineering Electromagnetics*, New York, NY: John Wiley & Sons, 1989.
- [6] Cheng. D.K., *Fundamentals of Engineering Electromagnetics*, Reading, MA: Addison Wesley, 1993.
- [7] Griffiths. D. J., *Introduction to Electrodynamics*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 3<sup>rd</sup> edition, 1999.
- [8] Peterson . A. F, Ray. S. L., et Mittra. R., *Computational Methods for Electromagnetics*. Piscataway, NJ: IEEE Press & University Oxford Press, 1998.
- [9] Chew. W. C., Jin. J. M, Michielssen. E., Song. J., *Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics*, Boston, MA: Artech House, 2001.
- [10] Teixeira. F. L., Ed., *Geometric Methods for Computational Electromagnetics*, PIER Progress N°:32. Cambridge, MA: EMW, 2001.
- [11] Davidson. D. B., *Computational Electromagnetics for RF and Microwave Engineering*, Cambridge, UK: Université Cambridge Press, 2005.
- [12] Bruns. H. D., Schuster. C., Singer, H., "Numerical electromagnetic field analysis for EMC problems," IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol. 49, no. 2, pp. 253–262, Mai 2007.

- [13] Yee. K. S., “Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell’s equations in isotropic media,” *IEEE Trans. Antennas Propagation.*, vol. AP-14, no. 3, pp. 302–307, Mai 1966.
- [14] Kunz. K. S. et R. J. Luebbers, *The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetic*. Boca Raton, FL: CRC Press, 1993.
- [15] Taflove. A. et Hagness, S. C., *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, 3<sup>ème</sup> édition. Norwood, MA: Artech House, 2005.
- [16] Gibon. W. C., *The method of moments in electromagnetic*, Taylor & Francis Group, NJ: Chapman & Hall/CRC, N°: 61451, 2008.
- [17] Weiland .T., “A discretization method for the solution of Maxwell’s equations for six-component fields,” *Electron. Communication. (AEU)*, vol. 31, no. 3, pp. 116–120, 1977.
- [18] Koshiba. M, Saitoh H., Eguchi. M., Hirayama. K., “Simple scalar finite element approach to optical waveguides,” *IEE Proc.* 1 139, 166–171.1992.
- [19] Koshiba. M., *Optical Waveguide Theory by the Finite Element Method*, KTK Scientific Publishers & Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holland, 1992.
- [20] Fernandez. F.A, Lu Y., ”Microwave and optical waveguide analysis by the finite element method”, *Electronic & Electrical Eng. Reseach, Opto. Series.* Wiley 1996.
- [21] Craveur. J.-C, *Modélisation des éléments finis*, France : Institut. Sup des matériaux, 2008.
- [22] Lee . J.-F., Lee. R., Cangellaris . A. C., “Time-domain finite-element methods,” *IEEE Trans. Antennas. Propagat.*, vol. 45, no. 3, pp. 430–442, Mar. 1997.
- [23] Jin . J.-M., *The Finite Element Method in Electromagnetics*, 2eme édition. New York: Wiley, 2002.
- [24] Volakis. J, Chatterjee . A, Kempel. L, *Finite Element Method for Electromagnetics: Antennas, Microwave Circuits, and Scattering Applications*. Piscataway, NJ: IEEE Press & Université Oxford Press, 1998.

- [25] Zhu .Y., Cangellaris, A. C., *Multigrid Finite Element Methods for Electromagnetic Field Modeling*, New York: IEEE Press and Wiley Inter-science, 2006.
- [26] Polycarpou . A. C., *Introduction to the Finite Element Method in Electromagnetics*. San Rafael, CA: Morgan & Claypool Publishers, 2006.
- [27] Hoefler. W. J. R., “The transmission line matrix (TLM) method,” NumericalTech. Microw & Millimeter Wave Passive Structures, T. Itoh, Ed. New York: Wiley, 1989, pp. 496–451.
- [28] Krumpholz. M., Russer. P., “A field theoretical derivation of TLM,” IEEE Trans.Microw. Theory.Tech., vol. 42, no. 9, pp. 1660–1668, Sept. 1994.
- [29] Christopoulos. C., *The Transmission-Line Modeling Method: TLM*. New York: IEEE Press, 1995.
- [30] Cangellaris. A. C, Wright. D. B., “Analysis of the numerical error caused by the stair stepped approximation of a conducting boundary in FDTD simulations of electromagnetic phenomena,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 39, no. 10, pp. 1518–1525, Oct. 1991.
- [31] Holland. R., “Pitfalls of staircase meshing,” IEEE Trans. Electromagn.Comp., vol. 35, no. 4, pp. 434–439, Nov. 1993.
- [32] Madsen. N. K., Ziolkowski. R. W, “A three-dimensional modified finite volume technique for Maxwell’s equations,” Electromagnetics, vol. 10, pp. 147–161, 1990.
- [33] Uher. J., Bornemann. J., Rosenberg. U. *Waveguide Components for Antenna FeedSystems: Theory and CAD*. Artech House Inc., Norwood, MA, USA, 1993.
- [34] Bushyager. N., Tentzeris. M., *MRTD:Multi Resolution Time Domain Method in Electromagnetics*.San Rafael, CA: Morgan & Claypool Publishers, 2005.
- [35] Liu. Q. H., “The PSTD algorithm: A time-domain method requiring only two cells per wavelength,” *Microwave Opt. Technol. Letter.*, vol. 15, no. 3, pp. 158–165, 1997.

- [36] Fezoui. L., Lanteri. S., Lohrengel. S., Piperno. S., “Convergence and stability of a discontinuous Galerkin time-domain method for the 3D heterogeneous Maxwell equations on unstructured meshes,” Cambridge, ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis Vol. 39, No 6, pp. 1149–1176, 2005.
- [37] Fries. T., Matthies. H., “Classification and overview of meshfree methods,” Technical. University, Braunschweig, 2003-3, 2003.
- [38] Viana. S. A., Rodger. D., Lai. H. C., “Overview of Meshless Methods,” ICS Newsletter, vol. 14, no. 2, pp. 3-6, November 2007.
- [39] Belytschko. T., Krongauz. Y., Organ. D., Fleming. M., Krysl. P., “Meshless methods: An overview and recent developments,” Computer Methods in Applied Mechanics. Engineering, vol. 139, no. 1-4, pp. 3-47, 1996.
- [40] Namiki. T., “A new FDTD algorithm based on ADI method,” IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 47, no. 10, pp. 2003–2007, Oct. 1999.
- [41] Zheng. F., Chen. Z., Zhang. J., “A finite-difference time-domain method without the Courant stability conditions,” IEEE Microwave Guided Wave Letter., vol. 9, no. 11, pp. 441–443, Nov. 1999.
- [42] Lee. J., B. Fornberg, “A split step approach for the 3-D Maxwell’s equations,” J. Comput. Appl. Math., vol. 158, no. 5, pp. 485–505, Sep. 2003.
- [43] Lee. J., Fornberg. B., “Some unconditionally stable time stepping methods for the 3D Maxwell’s equations,” J. Comput. Appl. Math., vol. 166, no. 2, pp. 497–523, Apr. 2004.
- [44] Gao. L., Zhang. B., Liang. D., “The splitting finite-difference time-domain methods for Maxwell’s equations in two dimensions,” J. Comput. Appl. Math., vol. 205, no. 1, pp. 207–230, Aug. 2007.
- [45] Shibayama. J., Muraki. M., Yamauchi. J., Nakano. H., “Efficient implicit FDTD algorithm based on locally one-dimensional scheme,” Electron. Lett., vol. 41, no. 19, pp. 1046–1047, Sep. 2005.

- [46] Tan. E. L., “Unconditionally stable LOD–FDTD method for 3-D Maxwell’s equations,” *IEEE Microw. Wireless Compon. Letter.*, vol. 17, no. 2, pp. 85–87, Feb. 2007.
- [47] Shibayama. J., Muraki. M., Takahashi. R., Yamauchi. J., Nakano. H., “Performance evaluation of several implicit FDTD methods for optical waveguide analyses,” *J. Lightw. Technol.*, vol. 24, no. 6, pp. 2465–2472, Jun. 2006.
- [48] Sun. G., C. Trueman. W., “Efficient implementations of the Crank–Nicolson scheme for the finite-difference time-domain method,” *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 54, no. 5, pp. 2275–2284, May 2006.
- [49] Ha. M., Srinivasan. K., Swaminathan. M., “Transient chip-package cosimulation of multiscale structures using the Laguerre-FDTD scheme,” *IEEE Trans. Adv. Packag.*, vol. 32, no. 4, pp. 816–830, Nov. 2009.
- [50] Shi. S. B., Shao. W., Wei. X. K., Yang. X. S., Wang. B.Z., “A New Unconditionally Stable FDTD Method Based on the Newmark-Beta Algorithm,” *IEEE Trans. Microw. Theory. Tech.*, vol. 64, no. 12, pp. 4082–4090, Sept. 2016.
- [51] Kantartzis. N. V., Tsiboukis. T. D., *Higher-Order FDTD Schemes for Waveguide and Antenna Structures*. San Rafael, CA: Morgan. Claypool Publishers, 2006.
- [52] Darrell Whitley “A Genetic Algorithm Tutorial” *Statistics and Computing*, vol. 4, No. 2., pp 65-85, June 1994.
- [53] Steinberg B.Z, Leviatan Y, " On the use of the wavelet expansions in the method of moments ", *IEEE Trans. Antenna and Propagation*, vol. 41, pp.610-619, 1993.

# Chapitre III. Modélisation électromagnétique par la méthode FDTD



---

Ce chapitre est consacré à la modélisation électromagnétique par la méthode conventionnelle des différences finies dans le domaine temporel (FDTD) afin de l'utiliser comme une méthode de comparaison. Dans un premier temps, nous allons décrire les équations de Maxwell par le schéma de Yee où nous allons expliquer comment intégrer le schéma explicite de saute mouton (leapfrog scheme). Dans un deuxième temps, nous présenterons le problème critique concernant la condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), la dispersion numérique et les inconvénients du schéma explicite de saute-mouton, et une discussion sur la portabilité des couches absorbantes dans cette méthode. Enfin, ce chapitre conclut la signification relative des erreurs résultant de chaque étape de la simulation complète FDTD en mentionnant toutes les références bibliographiques utilisées.

---



## **III.1. Introduction.**

## **III.2. La méthode du domaine temporel de différence finie (FDTD).**

## **III.3. L'algorithme de Yee.**

### **III.3.1. Procédure d'intégration, le schéma explicite de saute-mouton dans la FDTD.**

### **III.3.2. Polarisation de l'onde électromagnétique.**

### **III.3.3. Discrétisation temporelle et spatiale.**

## **III.4. Condition de stabilité et mécanisme d'erreur de dispersion.**

## **III.5. Traitement des conditions absorbantes de la frontière (ABC).**

## **III.6. Conclusion**

## **Références bibliographiques III**

### III.1. Introduction

L'adoption généralisée des méthodes numériques du domaine temporel pour compléter les méthodes de modélisation d'EMC modernes est étroitement liée à l'évolution remarquable des systèmes de calcul et de stockage ainsi qu'au besoin persistant de modèles précis et abordables, avant toute fabrication. Combinant la réalisation de solutions fiables avec des interprétations perspicaces, ces outils avancés se sont développés au point de devenir un élément indispensable de la pratique et de la conception en ingénierie, où l'algorithme FDTD (finite-difference time-domain) a acquis une place de choix parmi les techniques numériques utilisées dans l'analyse électromagnétique. La méthode FDTD se rapproche les équations de Maxwell différentielles sur un maillage composé de cellules ou dans une chaque cellule, les composantes des champs E et H sont définies, ainsi s'établit une marche temporelle entrelacée avec des champs décalées d'un demi-incrément spatial. L'approche globale utilise des approximations aux différences finies centrées, alors sa stabilité est garantie par certaines conditions mathématiques.

L'objectif de ce chapitre est de fournir les bases fondamentales de la FDTD et d'éclairer la manière dont elles sont dérivées, en mettant l'accent sur les applications de la FDTD en électromagnétisme et en les prenant comme une référence pour la comparaison avec les méthodes numériques temporelles. Les schémas implicites discrets, ainsi construits, sont minutieusement examinés et plusieurs problèmes critiques concernant la condition de stabilité ou les inconvénients inhérents sont illustrés. Une discussion de la signification relative des erreurs résultant de chacune des étapes composant la simulation FDTD complète conclut ce chapitre.

### III.2. La méthode du domaine temporel de différence finie (FDTD)

La méthode FDTD a été introduite en 1966 [1] et est depuis lors devenue l'outil numérique le plus puissant et le plus fiable pour le traitement temporel des équations de Maxwell [2]-[10]. Faisant appel aux développements informatiques constants, ses concepts ont été largement acceptés dans la modélisation et ont mis en évidence de nombreuses qualités pour diverses catégories de problèmes [11]-[20]. La méthode FDTD tire ses origines et sa force de l'extraction d'un processus mathématiquement simple et élégant pour le traitement explicite de la propagation d'ondes dans un milieu sans perte 3-D. En utilisant la théorie des champs et en n'utilisant aucun potentiel ni fonction fonctionnelle variationnelle, l'algorithme établit une affectation des champs bien posée sur une grille espacée dans le temps et dans l'espace. Les

propriétés du schéma résultant sont ensuite soumises à une analyse pour établir le caractère bien posé du paramétrage quantitatif. Cette dernière question implique néanmoins une étape supplémentaire après la modélisation, à savoir la reformulation du problème en termes discrets en un ensemble fini d'expressions algébriques plus adaptées à la philosophie des machines à calculer. C'est précisément là que l'abstraction essentielle de la technique FDTD a été lancée, où des approximantes de différence centrale précis sont directement appliqués aux équations différentielles des lois de Faraday (II.1) et d'Ampère (II.2). Par conséquent, le procédé atteint une diminution significative des données échantillonnées des champs continus dans un volume discrétisé sur une période donnée. De cette manière, les composantes électriques et magnétiques sont imbriquées spatialement pour permettre une satisfaction naturelle des conditions tangentielles aux interfaces des médias, alors que le caractère explicite de la méthode évite les systèmes algébriques de grande taille et permet une analyse précise de presque tous les problèmes réalistes.

### III.3. L'algorithme de Yee

Tenant compte des relations du flux magnétique  $B$  et du déplacement électrique  $D$  données au chapitre II et les substituant à (II.1) et (II.2), les équations sous forme différentielles de Maxwell (II.1) et (II.2) peuvent être exprimées sous forme de six équations scalaires couplées dans le système de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  telles que données [1, 2]:

$$\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right) \quad (\text{III. 1. a})$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right) \quad (\text{III. 1. b})$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right) \quad (\text{III. 1. c})$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad (\text{III. 2. a})$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \quad (\text{III. 2. b})$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad (\text{III. 2. c})$$

Ces équations constituent la base de la technique FDTD, qui dans son interprétation de base, effectue une discrétisation simple dans le temps et l'espace pour suivre les variations des champs dans le domaine de calcul. De cette manière, les simulations numériques se prêtent bien aux logiciels de visualisation scientifique qui par la suite, fournissent des interprétations et déductions remarquables sur le comportement d'interactions électromagnétiques complexes et de phénomènes transitoires.

Comme déjà mentionné, l'algorithme FDTD s'applique à la solution des problèmes électromagnétiques aux valeurs initiales. Pour réaliser la discrétisation spatiale nous considérons une grille rectangulaire uniformément espacée en trois dimensions. Chaque cellule de la grille a les dimensions  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta z$  le long de chaque axe cartésien. La représentation typique de Yee de chaque nœud du maillage dans ce domaine est donnée par :  $(i, j, k) \equiv (x_0 + i \Delta x, y_0 + j \Delta y, z_0 + k \Delta z)$  ou  $i, j, k$  sont des entiers indexant les directions de discrétisation et  $(x_0, y_0, z_0)$  est l'origine de la grille de Yee, désignée plus communément par  $(0, 0, 0)$ . Les éléments de la grille reçoivent la structure de la figure III.1 [21]-[22].

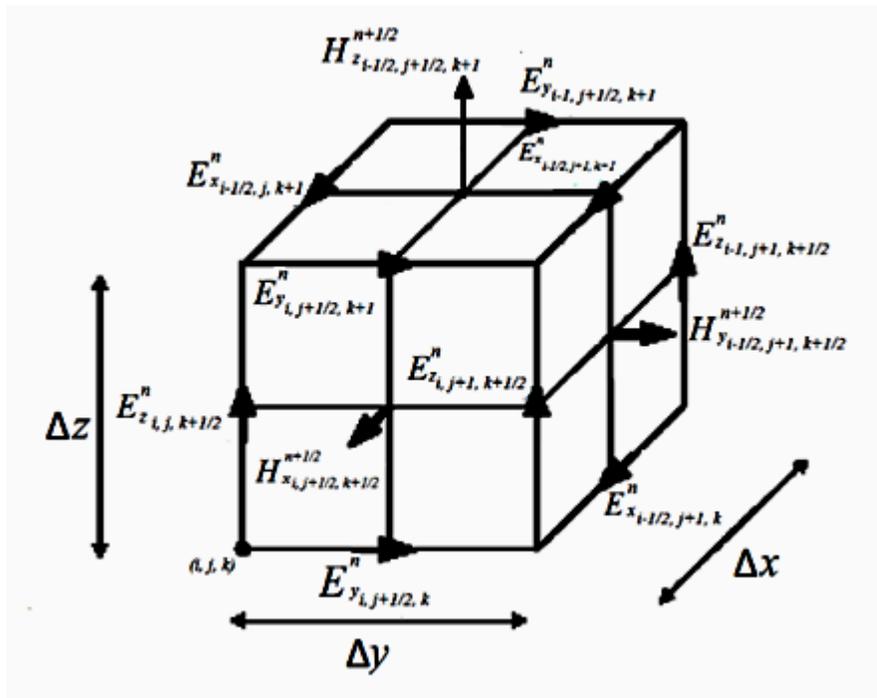


Figure III.1 : La géométrie de la cellule de Yee [21].

Par conséquent, les champs électriques situés au milieu des bords de la grille et sont entourées de quatre champs magnétiques en circulation. De même, les champs magnétiques placés au centre des faces des cellules et sont entourées de quatre quantités électriques en circulation. Cette disposition est extrêmement importante car elle suit les règles topologiques générales pour une discrétisation optimale et donne un processus d'attribution de contour simple pour les formes intégrales des équations de Faraday (II.1) et d'Ampère (II.2) au niveau des éléments du domaine artificiel. Dans le cas d'interfaces à contour progressif entre milieux différents ou d'objets 3-D incorporés dans la zone de calcul, le graphique définit les paramètres directement configurés pour les composants de domaine correspondant à la grille. Cette configuration génère une stratégie «en escalier» (avec une résolution en fonction des dimensions de la cellule) et maintient la continuité tangentielle des variables aux interfaces sans conditions supplémentaires.

### III.3.1. Procédure d'intégration, le schéma explicite de saute-mouton dans la FDTD

Le même concept est utilisé pour faire avancer les champs dans le temps qui est aussi uniformément discrétisé en tant que  $t = n \cdot \Delta t$ , ou  $\Delta t$  est l'incrément de temps et  $n$  est un entier. Par conséquent, les champs E et H sont décalés d'un demi-pas de temps. En particulier, ces quantités sont supposées être la moyenne des composants au cours d'une étape temporelle. Cette procédure, appelée intégration par sauts et illustrée à la figure III.2, met à jour les variables en utilisant les informations du type de champ opposé à un instant intermédiaire. Par exemple, chaque composant électrique est avancé en termes des valeurs magnétiques passées et inversement. En menant des simulations conditionnellement stables, le pas de temps continue jusqu'à ce que l'algorithme atteigne l'état stable souhaité. Le trait le plus frappant du schéma de saute-mouton est son caractère pleinement explicite, les calculs ne dépendent que des résultats antérieurs, ce qui évite la résolution de tout système d'équations et les inversions laborieuses de matrice. Ainsi, la charge globale reste relativement faible, ne dépendant que du nombre d'inconnues sur le terrain. Il est souligné que la précision des expressions résultantes soit du second ordre, alors que leur profil central permet la propagation en douceur de chaque onde du domaine de calcul.

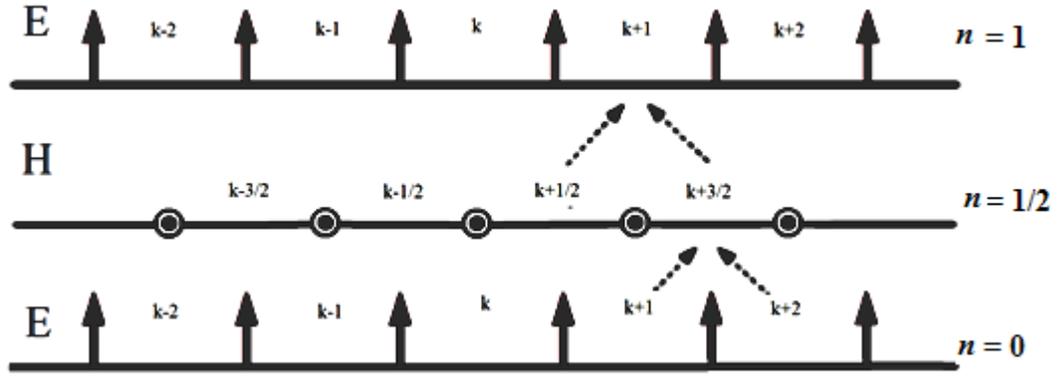


Figure III.2: Procédure d'entrelacement des champs E et H via l'intégration du schéma explicite de saute-mouton.

### III.3.2. Polarisation de l'onde électromagnétique

Des études précédentes ont montré dans le domaine des micro-ondes que la solution du système d'équations de Maxwell du premier ordre (III.1) et (III.2) forment une suite discrète de modes de propagation qui sont reliés par la polarisation de l'onde électromagnétique, sa direction de propagation et leur répondre aux conditions aux limites imposées. Ces modes se décomposent en trois catégories :

- ❖ **Mode TEM** : dans la polarisation transverse électromagnétique TEM qui est un cas particulier lié généralement par la géométrie du milieu de la propagation. On suppose que la propagation de l'onde est indépendante de la direction  $z$  et l'ensemble de système (III.1) et (III.2) ne se réduit plus qu'à deux équations des champs  $E_y$  et  $H_z$ , ce mode est régi par le système :

$$\varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = - \left( \frac{\partial H_z}{\partial x} + \sigma E_y \right) \quad (\text{III. 3. a})$$

$$\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = - \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (\text{III. 3. b})$$

- ❖ **Mode TM** : dans la polarisation transverse magnétique TM, la propagation du champ H se produit dans le plan  $(x, y)$  avec le champ E est perpendiculaire au plan de propagation. Le mode TM est définie par :

$$\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right) \quad (\text{III. 4. a})$$

$$\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = - \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (\text{III. 4. b})$$

$$\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (\text{III. 4. c})$$

❖ **Mode TE** : dans la polarisation transverse électrique TE, le champ E est pointé dans le plan (x, y) et le champ H est pointé dans la direction z, Ce mode est régié comme suit :

$$\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \sigma E_x \right) \quad (\text{III. 5. a})$$

$$\varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = - \left( \frac{\partial H_z}{\partial x} + \sigma E_y \right) \quad (\text{III. 5. b})$$

$$\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad (\text{III. 5. c})$$

### III.3.3. Discrétisation temporelle et spatiale

Supposons une fonction arbitraire  $f(x, y, z, t)$  est continue avec ses dérivées finies et continues par rapport aux variables indépendantes  $x, y, z$  et  $t$  dans une région 3-D de l'espace  $\Omega$ , qui est subdivisée en cellules d'incrément spatiaux  $\Delta x, \Delta y$  et  $\Delta z$  le long des axes respectifs.  $\Delta t$  est l'incrément temporel. Dans ce cadre, les valeurs de  $f$  et de ses dérivés peuvent être exprimées par utilisation de schéma de Yee susvisé à n'importe quel nœud de l'espace discret par :

$$f(x, y, z, t) = f(i.\Delta x, j.\Delta y, k.\Delta z, n.\Delta t) = f^{(n)}(i, j, k) \quad (\text{III. 6})$$

$$\frac{\partial f(i.\Delta x, j.\Delta y, k.\Delta z, n.\Delta t)}{\partial x} = \frac{\partial f^{(n)}(i, j, k)}{\partial x} \quad (\text{III. 7})$$

Pour  $\Delta x$  suffisamment petit,  $\partial f / \partial x$  peut être approché par un simple schéma à deux différences centrales. La dérivée spatiale devient

$$\frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x} = \frac{f\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z, t\right) - f\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z, t\right)}{\Delta x} \Rightarrow \quad (\text{III.8})$$

$$\frac{\partial f^{(n)}(i, j, k)}{\partial x} = \frac{f^{(n)}\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) - f^{(n)}\left(i - \frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta x} + O\left[(\Delta x)^2\right]$$

Noter que la précision de deuxième ordre de (III.8), qui entraîne la suppression des erreurs de réflexion sur la grille d'une part et de discrétisation d'autre part lorsque la taille de la grille est réduite de moitié. Cela permet une modélisation raisonnable à un coût de calcul minimal. En outre, l'incrément de  $+1/2$  et  $-1/2$  garantit l'échelonnement spatial de l'algorithme car il constitue un moyen efficace d'entrelacer les variables E et H. Par exemple, le champ magnétique utilise les arguments  $(i + 1/2)\Delta x$  et  $(i - 1/2)\Delta x$  pour indiquer que les deux valeurs H voisines sont positionnées de part et d'autre de la composante électrique particulière. Ainsi, leur différence pourrait être utilisée pour calculer  $\partial H / \partial x$  et permettre l'avance temporelle du vecteur E. L'expression des deux autres dérivées spatiales  $\partial f / \partial y$  et  $\partial f / \partial z$  est comme suit :

$$\frac{\partial f^{(n)}(i, j, k)}{\partial y} = \frac{f^{(n)}\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right) - f^{(n)}\left(i, j - \frac{1}{2}, k\right)}{\Delta y} + O\left[(\Delta y)^2\right] \quad (\text{III.9})$$

$$\frac{\partial f^{(n)}(i, j, k)}{\partial z} = \frac{f^{(n)}\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right) - f^{(n)}\left(i, j, k - \frac{1}{2}\right)}{\Delta z} + O\left[(\Delta z)^2\right] \quad (\text{III.10})$$

Le processus est complété en approximant les dérivées partielles par rapport au temps en fonction des mêmes expressions du deuxième ordre à différence centrale. Par conséquent, La dérivée temporelle  $\partial f / \partial t$  devient

$$\frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t} = \frac{f\left(x, y, z, t + \frac{\Delta t}{2}\right) - f\left(x, y, z, t - \frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t} \Rightarrow \quad (\text{III.11})$$

$$\frac{\partial f^{(n)}(i, j, k)}{\partial t} = \frac{f^{(n+\frac{1}{2})}(i, j, k) - f^{(n-\frac{1}{2})}(i, j, k)}{\Delta t} + O\left[(\Delta t)^2\right]$$

où les exposants  $(n + 1/2)$  et  $(n - 1/2)$  indiquent que les valeurs du champ sont adjacentes au pas de temps  $n$ ; ils se produisant peu après et peu avant. De tels intervalles de  $\pm 1/2 \Delta t$  sont idéaux pour réaliser le schéma explicite du saute-mouton (leapfrog scheme). De la même manière, les dérivées secondes par rapport  $x, y, z$  ou  $t$  en fonction des expressions de premières dérivées de  $f$  ci-mentionnées est nécessaire pour résoudre les équations de Helmholtz (II.13) et (II.14) dans le chapitre V par exemple  $\partial^2 f / \partial t^2$  est donnée

$$\frac{\partial^2 f^{(n)}(i, j, k)}{\partial t^2} = \frac{f^{(n+1)}(i, j, k) - 2f^{(n)}(i, j, k) + f^{(n-1)}(i, j, k)}{\Delta t^2} + O[(\Delta t)^2] \quad (\text{III. 12})$$

Prise en compte de tous les concepts précédents de la section III.3, on suppose que la loi d'Ampère est appliquée aux pas de temps  $(n + 1/2)$ , à savoir les densités du courant électrique et les dérivée partielles du temps du champ E, en (III.1) suivant les axes  $x, y$  et  $z$ , sont associés à instants  $(n + 1/2)$ . Pour que l'intégration temporelle de saute-mouton soit développée, la loi de Faraday recevra un décalage d'un demi-pas de temps approprié, ce qui signifie que tous les termes des deux côtés de (III. 2) seront évalués à des intervalles  $n$ . En conséquence, les équations (III.1) à (III. 2) du schéma de Yee en 3-D, deviennent

$$E_x^{n+1}\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) = \left[ 1 - \frac{\sigma\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) \cdot \Delta t}{\varepsilon\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right)} \right] E_x^n\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) + \frac{\Delta t}{\varepsilon\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right)} \left[ \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k\right) - H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k\right)}{\Delta y} + \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2}\right) - H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right)}{\Delta z} \right] \quad (\text{III.13.a})$$

$$E_y^{n+1}\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right) = \left[ 1 - \frac{\sigma\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right) \cdot \Delta t}{\varepsilon\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right)} \right] E_y^n\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right) + \frac{\Delta t}{\varepsilon\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right)} \left[ \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) - H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}\right)}{\Delta z} + \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k\right) - H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k\right)}{\Delta x} \right] \quad (\text{III. 13. b})$$

$$E_z^{n+1}\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right) = \left[ 1 - \frac{\sigma\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta t}{\varepsilon\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right)} \right] E_z^n\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right) + \frac{\Delta t}{\varepsilon\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right)} \left[ \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) - H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right)}{\Delta x} + \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) - H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right)}{\Delta y} \right] \quad (\text{III. 13. c})$$

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) = H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) + \frac{\Delta t}{\mu\left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right)} \left[ \frac{E_y^n\left(i, j + \frac{1}{2}, k + 1\right) - E_y^n\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right)}{\Delta z} + \frac{E_z^n\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right) - E_z^n\left(i, j + 1, k + \frac{1}{2}\right)}{\Delta y} \right] \quad (\text{III. 14. a})$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right) = H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right) + \frac{\Delta t}{\mu\left(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right)} \left[ \frac{E_z^n\left(i+1, j, k+\frac{1}{2}\right) - E_z^n\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} + \frac{E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) - E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k+1\right)}{\Delta z} \right] \quad (\text{III. 14. b})$$

$$H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right) = H_z^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right) + \frac{\Delta t}{\mu\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right)} \left[ \frac{E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j+1, k\right) - E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta y} + \frac{E_y^n\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right) - E_y^n\left(i+1, j+\frac{1}{2}, k\right)}{\Delta x} \right] \quad (\text{III.14. c})$$

Les équations (III.13) à (III.14) sont les équations aux différences du premier ordre définissant l'algorithme de Yee et constituent le fondement de la méthode FDTD [5]. Ces équations fournissent le schéma de mise à jour récursif explicite du saute-mouton des champs électromagnétiques tel que dans des milieux non dispersifs, isotropes et sans perte ( $\sigma = 0$ ) sur tout le volume. Le pas de temps est limité par un critère de stabilité, qui sera présenté à la prochaine section. Si le pas de temps satisfait la limite de stabilité, ce schéma de mise à jour récursif est précis au deuxième ordre dans l'espace et dans le temps.

#### III.4. Condition de stabilité et mécanismes d'erreur de dispersion

La stabilité d'un schéma de différences traite de la croissance instable ou de la décroissance stable des erreurs dans les opérations arithmétiques requises pour résoudre les équations aux différences finies. L'algorithme FDTD présente, comme décrit précédemment, un profil explicite, ce qui signifie que toutes les inconnues à chaque pas de temps sont évaluées à partir de valeurs calculées aux instants précédents. En fait, les composantes des champs électriques et magnétiques ne sont mises à jour et stockés que pour leurs valeurs les plus récentes,

ce qui nécessite beaucoup moins de mémoire et moins de complexité informatique. Cependant, un facteur limitant, également valable pour la plupart des approches dans le domaine temporel, est leur stabilité conditionnelle, c'est-à-dire qu'il est essentiel de sélectionner un certain nombre de paramètres du pas temporel, taille des incréments spatiaux, etc. pour que ce schéma de différence reste stable. Spécifiquement, une certaine limite pour  $\Delta t$  par rapport aux dimensions de la cellule  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta z$  doit être obtenue pour confirmer la suppression des ondes parasites au fur et à mesure que le temps avance. Par conséquent, la dérivation de conditions de stabilité analytique sous forme fermée présente un grand intérêt théorique et pratique.

La dérivation du critère de stabilité pour la technique 3-D FDTD, également appelé condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), est réalisée au moyen de la méthode de Von Neumann [3,22]. En particulier, l'algorithme est décomposé en problèmes individuels de valeurs propres dans le temps et dans l'espace pour propager des vecteurs propres en ondes planaires dans le domaine discrétisé. Les composantes des champs électriques et magnétiques sont exprimées via les modes de Fourier, alors que la propagation est supposée se produire selon des angles arbitraires dans la grille. L'objectif est de spécifier le spectre des valeurs propres pour ces modes après approximation spatiale et de comparer ensuite le résultat au spectre stable des valeurs propres acquises par le processus de différenciation temporelle. L'équation en mode propre de l'onde plane 3-D peut être écrite:

$$U_a^n(i, j, k) = U_{a0} e^{j_0(\omega n \Delta t - (k_x i \Delta x + k_y j \Delta y + k_z k \Delta z))}, \quad a = x, y, z \quad (\text{III. 15})$$

où  $j_0 = \sqrt{-1}$ ,  $(k_x, k_y, k_z)$  sont les nombres d'ondes le long des directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ ,  $U$  indique les champs électromagnétiques  $E$  et  $H$ . Ensuite, les composants de champ dans la grille de Yee (III.13) à (III.14) sont réécrits de manière appropriée, après les substitutions nécessaires de (III.15) qui peuvent être écrits comme suit:

$$E_x^{n+1} = E_x^n - 2j_0\eta(H_z^{n+1/2}r_y - H_y^{n+1/2}r_z) \quad (\text{III. 16. a})$$

$$E_y^{n+1} = E_y^n - 2j_0\eta(H_x^{n+1/2}r_z - H_z^{n+1/2}r_x) \quad (\text{III. 16. b})$$

$$E_z^{n+1} = E_z^n - 2j_0\eta(H_y^{n+1/2}r_x - H_x^{n+1/2}r_y) \quad (\text{III. 16. c})$$

$$\eta H_x^{n+1/2} = \eta H_x^{n-1/2} - 2j_0 (E_y^n r_z - E_z^n r_y) \quad (\text{III. 17. a})$$

$$\eta H_y^{n+1/2} = \eta H_y^{n-1/2} - 2j_0 (E_z^n r_x - E_x^n r_z) \quad (\text{III. 17. b})$$

$$\eta H_z^{n+1/2} = \eta H_z^{n-1/2} - 2j_0 (E_x^n r_y - E_y^n r_x) \quad (\text{III. 17. c})$$

où  $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$  est l'impédance caractéristique et les variables  $r_x$ ,  $r_y$  et  $r_z$  sont écrits comme suit :

$$r_x = \frac{v\Delta t}{\Delta x} \sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right), \quad r_y = \frac{v\Delta t}{\Delta y} \sin\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right), \quad r_z = \frac{v\Delta t}{\Delta z} \sin\left(\frac{k_z \Delta z}{2}\right) \quad (\text{III. 18})$$

où  $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$  est la vitesse de propagation.

Pour synchroniser les champs E et H, on suppose également que  $E_a^{n+1} = e^{j\omega \Delta t/2} E_a^{n+1/2}$  et  $H_a^{n+1/2} = e^{j\omega \Delta t/2} H_a^n$ , qui se transforment (III.16) à

$$E_x^{n+1/2} - E_x^{n-1/2} = 2j_0 \eta (H_y^n r_z - H_z^n r_y) \quad (\text{III. 19. a})$$

$$E_y^{n+1/2} - E_y^{n-1/2} = 2j_0 \eta (H_z^n r_x - H_x^n r_z) \quad (\text{III. 19. b})$$

$$E_z^{n+1/2} - E_z^{n-1/2} = 2j_0 \eta (H_x^n r_y - H_y^n r_x) \quad (\text{III. 19. c})$$

Ensuite, en multipliant les équations (III.19) par le nombre complexe  $j_0$  et en additionnant avec les équations (III.17) pour identifier les composantes  $P_a^n = \eta H_a^n + j_0 E_a^n$  qui sont écrits sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} P_x^{n+1/2} \\ P_y^{n+1/2} \\ P_z^{n+1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x^{n-1/2} \\ P_y^{n-1/2} \\ P_z^{n-1/2} \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 & r_z & -r_y \\ -r_z & 0 & r_x \\ r_y & -r_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x^n \\ P_y^n \\ P_z^n \end{bmatrix} \Rightarrow P^{n+1/2} = P^{n-1/2} - 2RP^n \quad (\text{III.20})$$

L'équation (III.20) n'a pas encore la forme appropriée pour une manipulation simple des valeurs propres. En fait, la présence du dernier terme  $P^{n-1/2}$  génère plusieurs difficultés en ce qui

concerne le caractère bien posé de l'ensemble du régime. On élude ce défaut en introduisant le vecteur auxiliaire  $Q^n = P^{n-1/2}$ , ce qui conduit au nouveau système de

$$\begin{aligned} P^{n+1/2} = Q^n - 2RP^n \\ Q^{n+1/2} = P^n \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} P^{n+1/2} \\ Q^{n+1/2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2R & I \\ I & 0 \end{bmatrix}}_G \begin{bmatrix} P^n \\ Q^n \end{bmatrix} \quad (\text{III. 21})$$

La condition obligatoire pour la stabilité est la contrainte de Von Neumann qui concerne toutes les valeurs propres de la matrice d'amplification  $G$  pour satisfaire  $|\lambda_i(G)| \leq 1$ . Pour atteindre cet objectif, on peut définir  $\det(\lambda I - G) = 0$  et obtenir un polynôme  $V(\lambda)=0$  du quatrième degré, la solution de  $V(\lambda)=0$  donne quatre valeurs propres distinctes

$$\lambda_{1,2} = \pm 1, \quad \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{1 - (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)} \pm j_0 \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} \quad (\text{III. 22})$$

La stabilité est atteinte si et seulement si  $|\lambda_{3,4}(G)| \leq 1$ , ou la limite est exprimée

$$r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 \leq 1 \Rightarrow v\Delta t \leq \left[ \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right]^{-1/2} \quad (\text{III. 23})$$

Ceci définit la limite de stabilité Courant-Fredrichs-Lewy (CFL) de l'algorithme Yee en 3-D pour les équations de Maxwell [23]. Cette condition limite le choix du pas de temps. Comme avec le problème unidimensionnel, il est constaté que la condition de stabilité limite la distance de propagation par pas de temps à travers une cellule unitaire. A titre d'exemple, considérons une grille cubique, où  $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ , la limite de stabilité devient:  $\Delta t \leq \Delta x / v\sqrt{3}$ .

L'effet intrinsèque artificiel de la dispersion numérique est d'une importance tout aussi cruciale pour la mise en œuvre efficace de la méthode FDTD, en particulier pour les problèmes d'EMC. En général, cette faiblesse de maillage influence la propagation précise des ondes électromagnétiques dans l'espace par le biais d'une forte dépendance de la vitesse de phase sur la fréquence (c'est-à-dire la longueur d'onde de mode), la direction et la résolution de la grille [4, 13]. Les coûts de dispersion sont variés et s'avèrent souvent inhibiteurs pour l'analyse. Parmi eux, on peut distinguer les erreurs de phase et la réfraction non naturelle. Plus précisément, les premiers créent des déviations oscillatoires par rapport à la vitesse de la lumière typique,

conduisant ainsi à l'amplification des formes d'ondes et à la génération de modes parasites. Notez que la dépendance de la vitesse de phase par rapport à la direction de la grille est également appelée anisotropie numérique, mais sa définition est souvent incluse dans la signification de la dispersion. Par conséquent, les défauts ci-dessus modifient la vitesse d'une onde progressive à l'intérieur du maillage discret et deviennent la principale source de limitations de précision dans l'application de la FDTD, principalement pour les structures micro-ondes de grande taille [10, 17].

L'extraction de la relation de dispersion de la FDTD suit la stabilité, où un ensemble de modes numériques de Fourier est supposé se propager à des angles arbitraires dans le maillage pour les composantes de champ électrique et magnétique. En combinant (III.15) avec (III.16) et (III.17), en utilisant les variables auxiliaires  $r_\alpha$  de (III.18) et on trouve

$$E_x \sin(\omega\Delta t/2) = \eta(H_y r_z - H_z r_y) \quad (\text{III. 24. a})$$

$$E_y \sin(\omega\Delta t/2) = \eta(H_z r_x - H_x r_z) \quad (\text{III. 24. b})$$

$$E_z \sin(\omega\Delta t/2) = \eta(H_x r_y - H_y r_x) \quad (\text{III. 24. c})$$

$$\eta H_x \sin(\omega\Delta t/2) = E_z r_y - E_y r_z \quad (\text{III. 25. a})$$

$$\eta H_y \sin(\omega\Delta t/2) = E_x r_z - E_z r_x \quad (\text{III. 25. b})$$

$$\eta H_z \sin(\omega\Delta t/2) = E_y r_x - E_x r_y \quad (\text{III. 25. c})$$

Ensuite, en identifiant les composantes  $Q_\alpha = \eta H_\alpha + j_0 E_\alpha$  par multiplication les équations (III.24) par le nombre complexe  $j_0$  et en additionnant avec les équations (III.25) qui sont écrits sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} j_0 \sin(\omega\Delta t/2) & r_z & -r_y \\ -r_z & j_0 \sin(\omega\Delta t/2) & r_x \\ r_y & -r_x & j_0 \sin(\omega\Delta t/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow PQ = 0 \quad (\text{III. 26})$$

Pour avoir une solution non nulle de (III.26), le déterminant de la matrice  $P$  doit être égal à zéro, et après quelques manipulations mathématiques :

$$\left[ \frac{1}{v\Delta t} \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) \right]^2 = \left[ \frac{1}{\Delta x} \sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) \right]^2 + \left[ \frac{1}{\Delta y} \sin\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right) \right]^2 + \left[ \frac{1}{\Delta z} \sin\left(\frac{k_z\Delta z}{2}\right) \right]^2 \quad (\text{III. 27})$$

L'équation (III.27) est la relation de dispersion des champs simulés par la méthode FDTD. Malgré la dissemblance superficielle entre (III.27) et dispersion analytique (II.16) dans un milieu sans perte, on observe que, en tant que  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t) \approx 0$ , le premier se rapproche de celui-ci. Cette remarque justifie l'utilisation de grilles plus fines pour la suppression des erreurs de dispersion et indique l'introduction de plusieurs écarts de phase via les calculs FDTD.

### III.5. Traitement des conditions absorbantes de la frontière (ABC)

Le schéma précédent de Yee pose inévitablement un problème de calcul des points les plus extérieurs. En regardant les équations de mise à jour et la figure III.1, nous voyons que le calcul par exemple de  $E_x$  dépend des valeurs de  $H_z$  de chaque côté. Mais l'un des composants  $E_x$  de la cellule Yee la plus externe n'a pas de  $H_z$  d'un côté, ce qui ne se résout évidemment pas en ajoutant une rangée supplémentaire de cellules à la position finale. Il existe plusieurs solutions à ce problème. Nous les mentionnons : les conditions aux limites de type Dirichlet et de type Neumann ; le champ électrique tangentiel et le champ magnétique normal sont nuls comme nous avons vu dans le deuxième chapitre, et ne jamais mettre à jour les cellules les plus externes du champ électrique et du champ magnétique [24, 25]. Cela pose un nouveau problème. Comme les points frontaliers ont maintenant une valeur de champ électrique toujours égale à zéro, ils agissent en tant que conducteur électrique parfait (PEC) et reflètent donc complètement les ondes incidentes. Cela n'est pas souhaitable, car la limite du domaine computationnel est supposée simuler l'extension à l'infini plutôt qu'un mur impénétrable. Bien qu'il soit souhaitable que le domaine du calcul soit si grand que l'onde simulée n'atteigne jamais ses limites, ceci est en général irréalisable. Au lieu de cela, si l'onde atteint la limite du domaine de calcul, son extension à l'infini doit être simulée [26]. En fait, il est souhaitable de réduire le plus possible le domaine de calcul, car la complexité de calcul des méthodes FDTD évolue de manière sur-linéaire avec le nombre de points de la grille, comme nous le verrons dans la modélisation des structures micro-ondes fermées par des parois métallique. Pour les structures ouvertes, les conditions aux limites

d'absorption (ABC) sont toujours nécessaires pour tronquer les domaines de modélisation tout en éliminant les réflexions induites par la troncature. Parmi les différents schémas de limites absorbantes, les couches parfaitement adaptées PML sont considérées comme offrant les meilleures performances et sont largement utilisées à travers leur adaptation de la méthode FDTD et les méthodes numériques mentionnées dans le chapitre II, bien qu'elles soient des couches parfaitement appariées introduisent un matériau artificiel avec pertes aux limites du domaine de calcul à travers l'intégration d'un terme non physique de la conductivité magnétique  $\sigma^*$  ou elle se lie avec la conductivité électrique  $\sigma$  par la condition d'adaptation :  $\sigma/\epsilon_0 = \sigma^*/\mu_0$ ; la région des couches PML correspond parfaitement aux cellules voisines, de sorte qu'aucune réflexion ne se produit à la frontière de la PML, quelle que soient son angle d'incidence, sa polarisation et sa fréquence. Pour obtenir les formulations de PML offrant une réflexion satisfaisante de manière convenable pour tous les angles d'incidence, *Berenger* en 1994 [27, 28] a présenté les formulations des champs divisés qui sera examinée sur le mode TE en 2-D ou dans la région PML, le champ magnétique  $H_z$  est divisé en  $H_{zx}$  et  $H_{zy}$  ( $H_z = H_{zx} + H_{zy}$ ) avec des valeurs distinctes de la conductivité  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  agissant sur eux, comme illustré sur la figure III.3.

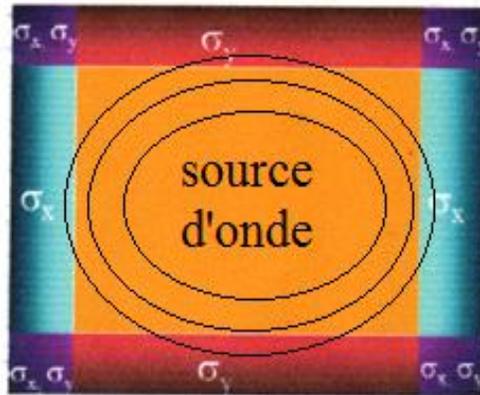


Figure III. 3: Les couches PML autour d'un domaine à deux dimensions.

Les équations de Maxwell en 2-D pour le mode TE qui régissent la région de la PML prennent la forme présentée dans [29], ensuite, ces équations sont discrétisées comme d'habitude en utilisant exactement les mêmes équations de l'algorithme de Yee de schéma explicite de sautemouton pour un matériau avec pertes, les équations de mise à jour sont à nouveau présentées comme suit :

$$\begin{aligned}
 E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) &= C_{exe}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) \cdot E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j\right) + \\
 & C_{exbz}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) \cdot \left(H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}\right)\right)
 \end{aligned} \tag{III. 28.a}$$

$$\text{où } C_{exe}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) = \frac{2 \cdot \varepsilon\left(i+\frac{1}{2}, j\right) - \Delta t \cdot \sigma_y\left(i+\frac{1}{2}, j\right)}{2 \cdot \varepsilon\left(i+\frac{1}{2}, j\right) + \Delta t \cdot \sigma_y\left(i+\frac{1}{2}, j\right)}, \quad C_{exbz}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) = \frac{2 \cdot \Delta t}{\left(2 \cdot \varepsilon\left(i+\frac{1}{2}, j\right) + \Delta t \cdot \sigma_y\left(i+\frac{1}{2}, j\right)\right) \cdot \Delta y}$$

$$\begin{aligned}
 E_y^{n+1}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) &= C_{eye}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) \cdot E_y^n\left(i, j+\frac{1}{2}\right) - \\
 & C_{eybz}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)\right)
 \end{aligned} \tag{III.28.b}$$

$$\text{où } C_{eye}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \cdot \varepsilon\left(i, j+\frac{1}{2}\right) - \Delta t \cdot \sigma_x\left(i, j+\frac{1}{2}\right)}{2 \cdot \varepsilon\left(i, j+\frac{1}{2}\right) + \Delta t \cdot \sigma_x\left(i, j+\frac{1}{2}\right)}, \quad C_{eybz}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \cdot \Delta t}{\left(2 \cdot \varepsilon\left(i, j+\frac{1}{2}\right) + \Delta t \cdot \sigma_x\left(i, j+\frac{1}{2}\right)\right) \cdot \Delta x}$$

$$\begin{aligned}
 H_{zx}^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) &= C_{hzx}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) \cdot H_{zx}^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - \\
 & C_{hzyb}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(E_y^n\left(i+1, j+\frac{1}{2}\right) - E_y^n\left(i, j+\frac{1}{2}\right)\right)
 \end{aligned} \tag{III.28.c}$$

$$\text{où } C_{hzx}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \cdot \mu\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - \Delta t \cdot \sigma_x^*\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)}{2 \cdot \mu\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) + \Delta t \cdot \sigma_x^*\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)},$$

$$C_{hzyb}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \cdot \Delta t}{\left(2 \cdot \mu\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) + \Delta t \cdot \sigma_x^*\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)\right) \cdot \Delta x}$$

$$\begin{aligned}
 H_{zy}^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) &= C_{hzy}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) \cdot H_{zy}^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) + \\
 & C_{hzyb}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j+1\right) - E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j\right)\right)
 \end{aligned} \tag{III.28.d}$$

$$\text{où } C_{hzy}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \cdot \mu\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - \Delta t \cdot \sigma_y^*\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)}{2 \cdot \mu\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) + \Delta t \cdot \sigma_y^*\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)},$$

$$C_{hzyb}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \cdot \Delta t}{\left(2 \cdot \mu\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) + \Delta t \cdot \sigma_y^*\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)\right) \cdot \Delta y}$$

Notez aussi qu'on peut appliquer le principe de Bérenger sus mentionné dans le cas transverse magnétique TM en 2-D ou le champ électrique  $E_z$  est divisé en  $E_{zx}$  et  $E_{zy}$  ( $E_z = E_{zx} + E_{zy}$ ), ensuite, ces équations sont discrétisées à travers le schéma de différence finie de Yee comme exactement le mode TE [29].

La décomposition de PML de *Berenger* en sous-composantes des champs permet d'appliquer l'absorption par des profils de conductivité dans des directions bien choisies. Le seul facteur de réflexion résiduel d'une PML provient de la discontinuité induite par la discrétisation spatiale des couches. Cette réflexion augmente lorsque la direction d'incidence de l'onde s'éloigne de la normale. De plus les variations abruptes des conductivités dégradent les performances d'absorption. Pour réduire cet effet, il est courant d'imposer une gradation progressive en loi de puissance de l'absorption dans la couche PML, le terme de perte d'une PML d'épaisseur  $\delta_0$  à partir de la coordonnée  $x$ -PML est exprimé par [21], [27, 28]

$$\sigma_x = \sigma_0 \left| \frac{x - x_{PML}}{\delta_0} \right|^m \quad (\text{III. 29})$$

où la valeur de perte maximale  $\sigma_0$  peut être déterminée par le coefficient de réflexion théorique  $\Gamma(\theta)$  de profil  $m$  à  $\theta = 0^0$ , à l'aide de la formulation

$$\Gamma(\theta) = \exp\left(\frac{-2\sigma_0\delta_0 \cos(\theta)}{\varepsilon c(m+1)}\right) \quad (\text{III. 30})$$

où  $m$  est l'ordre de l'équation de croissance de la conductivité maximale  $\sigma_0$ . Ce facteur est, dans la plus part des cas, choisi ( $2 \leq m \leq 5$ )[21].

Noter que les couches PML de *Berenger* sont très efficaces pour tronquer le domaine de calcul, mais ont le désavantage de ne pas traiter les ondes évanescentes. Selon *Inan* [29], la raison en est qu'elle n'est que "faiblement causale" car le terme de perte dans l'approximation dépend de la valeur du champ en  $n+1$ . Pour résoudre ce problème, les couches PML uni-axiales (UPML) sont parfaitement causales et elles sont abordées dans le chapitre IV.

L'organigramme de l'algorithme FDTD proposé par Yee est présenté dans la figure III.4. Nous remplaçons tous les dérivés des lois d'Ampère et de Faraday par des différences finies. La discrétisation de l'espace et du temps afin que les champs électriques et magnétiques soient

décalés dans l'espace et dans le temps. La résolution des équations aux différences résultantes pour obtenir des équations de mise à jour qui expriment les champs futurs (inconnus) en termes de champs passés (connus). Évaluation les champs magnétiques à un pas dans le futur pour qu'ils soient connus et deviennent effectivement des champs passés. Application des conditions aux limites. Évaluation les champs électriques à un pas dans le futur afin qu'ils soient connus et deviennent effectivement des champs passés en utilisant le schéma explicite de saute-mouton. Répétition des deux étapes précédentes jusqu'à ce que les champs aient été obtenus sur la durée requise.

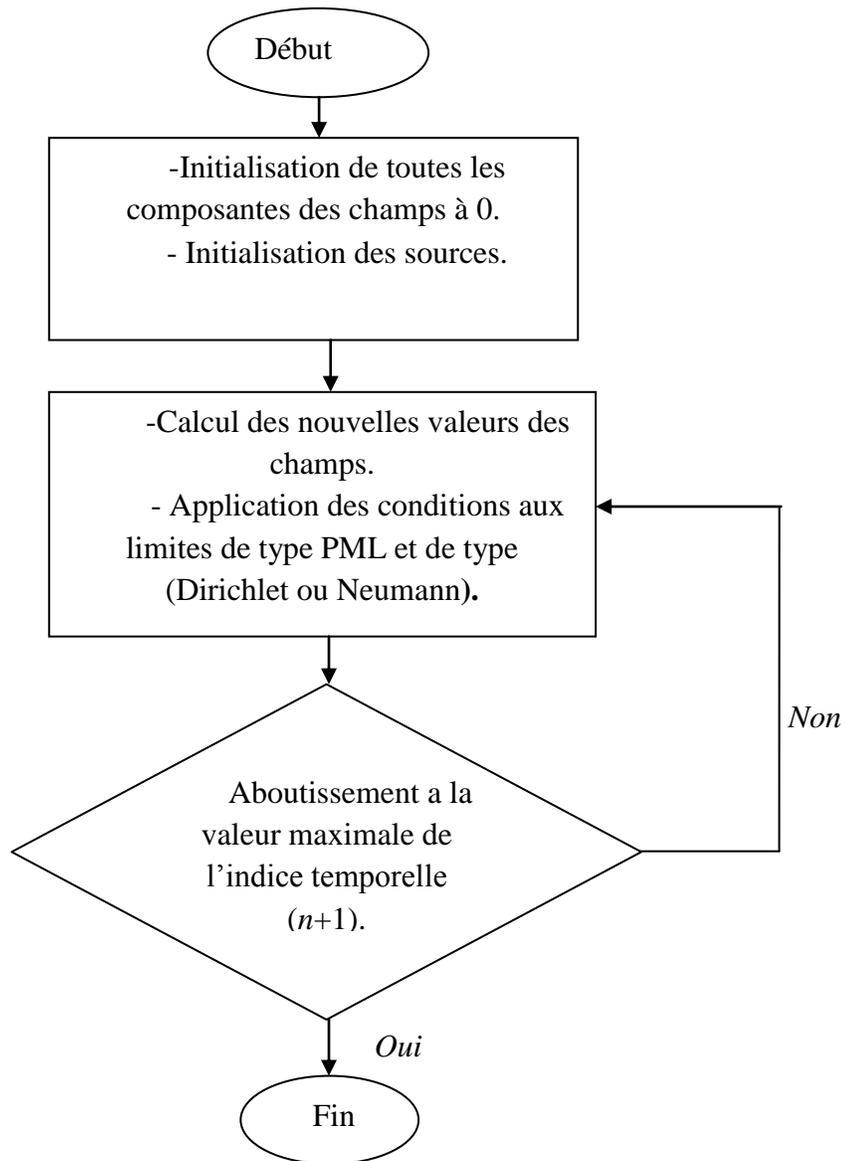


Figure III.4 : Le schéma d'implémentation de l'algorithme de Yee.

### III.6. Conclusion

Ce chapitre a abordé la modélisation FDTD et sa conception pour son utilisation comme méthode de comparaison avec les autres méthodes numériques temporelles que nous verrons dans les chapitres suivants, compte tenu de leur adoption pour une résolution directe des équations de Maxwell, via l'utilisation d'un schéma centré sur les différences finies de Yee pour faire la discrétisation des équations de Faraday et d'Ampère, ainsi que pour la facilité d'intégrer les conditions absorbante de type PML dans le schéma de propagation. En outre, elle présente des inconvénients géométriques ou la simulation de certaines géométries nécessite des grilles relativement très fines. Cela se traduit également par un pas de temps encore plus petit afin de maintenir la stabilité de la simulation. L'inefficacité du schéma explicite lié à la contrainte CFL est résorbée à travers l'intégration des schémas implicites comme nous l'avons souligné dans le chapitre II.

**Références bibliographiques III**

- [1] Yee. K. S., “Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell’s equations in isotropic media,” IEEE Trans. Antennas Propagation., vol. AP-14, no. 3, pp. 302–307, Mai 1966.
- [2] Kunz. K. S., K. Lee. M., “A three-dimensional finite-difference solution of the external response of an aircraft to a complex transient EM environment: Part i-the method and its implementation,” IEEE Trans. Electromagnetic. Compatibility, 20:328–333, 1978.
- [3] Kunz. K. S., Luebbers. R. J., *The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics*. Boca Raton, FL: CRC Press, 1993.
- [4] Taflove. A., Hagness, S. C., *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, 3rd ed. Norwood, MA: Artech House, 2005.
- [5] Taflove. A., Ed., *Advances in Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*. Norwood, MA: Artech House, 1998.
- [6] Holland. R., “Finite-difference solution of Maxwell’s equations in generalized nonorthogonal coordinates,” IEEE Transaction. Nuclear Sci., vol. NS-30, no. 6, pp. 4589–4591, 1983.
- [7] Cangellaris. A. C., “Time-domain finite methods for electromagnetic wave propagation and scattering,” IEEE Transactions. Magnetics., vol. 27, no. 5, pp. 3780–3785, Sept. 1991.
- [8] Itoh. T., Houshmand. B., Eds., *Time-Domain Methods for Microwave Structures: Analysis and Design*. Piscataway, NJ: IEEE Press, 1998.
- [9] Sui. W., *Time-Domain Computer Analysis of Nonlinear Hybrid Systems*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2002.
- [10] Kantartzis. N. V., Tsiboukis. T. D., *Higher-Order FDTD Schemes for Waveguide and Antenna Structures*, San Rafael, CA: Morgan & Claypool Publishers, 2006.

- [11] Roden. J. A., Paul. C. R., Smith. W. T., Gedney. S. D., “Finite-difference time-domain analysis of lossy transmission lines,” IEEE Transactions. Electromagn. Compat., vol. 38, no.1, pp. 15–24, Feb. 1996.
- [12] Dey. S., Mittra. R., “A locally conformal finite-difference time-domain algorithm for modeling three-dimensional perfectly conducting objects,” IEEE Microw. Guided Wave Letter., vol. 7, pp. 273–275, 1997.
- [13] Wagner. C. L., Schneider. J. B., “Divergent fields, charge, and capacitance in FDTD simulations,” IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 46, no. 12, pp. 2131-2136, 1998.
- [14] Celuch-Marcysiak . M., Gwarek. W. K., “On the nature of solutions produced by the finite difference schemes in the time domain,” Int. J. Numer. Model.: Electron. Networks Devices Fields, vol. 12, pp. 23–40, 1999.
- [15] Grivet-Talocia. S., Canavero. F., “Wavelet-based high-order, adaptive modeling of lossy interconnects,” IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol. 43, no. 4, pp. 471–484, 2001.
- [16] Wallyn. W., De Zutter. D., Rogier. H., “Prediction of the shielding and resonant behavior of multisection enclosures based on magnetic current modelling,” IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol. 44, no. 1, pp. 130–138, 2002.
- [17] Wang S., F. L. Teixeira, “Dispersion-relation-preserving FDTD algorithms for large-scale three-dimensional problems,” IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 51, no. 8, pp. 1818-1828, 2003.
- [18] Sullivan. D. M., *Electromagnetic Simulation Using the FDTD Method*. Piscataway, NJ: IEEE Press, 2000.
- [19] Georgakopoulos. S. V., Birtcher. C. R., Balanis. C. A., Renaut. R. A., “HIRF penetration and PED coupling analysis for scaled fuselage models using a hybrid subgrid FDTD(2,2)/FDTD(2,4) method,” IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol. 45, no. 2, pp. 293–305, 2003.

- [20] Baba. Y., N. Nagaoka, and A. Ametani, “Modeling of thin wires in a lossy medium for FDTD simulations,” *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 47, no. 1, pp. 54–60, Feb. 2005.
- [21] Gedney. S. D., *Introduction to the Finite-Difference Time-Domain (FDTD) Method for Electromagnetics*, Compat. Electromagn., 2011.
- [22] Sullivan. D. M., *Electromagnetic simulation using the FDTD method*, IEEE Press. RF. Microwave & Tech. 2000.
- [23] Courant. R., Friedrich. K. O., Lewy. H., “ On the partial difference equations of mathematical physics “, *IBM Journal. Research. Development*, 11:215–234, 1967.
- [24] Givoli. D., *Numerical methods for problems in infinite domains*. Elsevier, Amsterdam, 1992.
- [25] Masmoudi. M., *Numerical solution for exterior problems*. *Numerical Mathematics* 51:87–101, 1987.
- [26] Mur. G., “Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time domain electromagnetic field equations,” *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 23, no. 4, pp. 377–382, 1981.
- [27] Berenger. J.-P., “A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves,” *J. Comp. Phys.*, vol. 114, no. 2, pp. 185–200, 1994.
- [28] Berenger. J.-P., “Perfectly matched layer for the FDTD solution of wave–structure interaction problems”. *IEEE Transactions Antennas Propagation* 44:110–117, 1996.
- [29] Inan. U. S., R. A. Marshall., *Numerical Electromagnetics: The FDTD Method*, .1sted., Cambridge: Cambridge University Press, 2011.

# Chapitre IV. Application des méthodes sans maillage en électromagnétique



Dans ce chapitre, nous commençons par un aperçu général de ces méthodes et les utilisons en électromagnétisme. Les généralités et les bases mathématiques sont ensuite présentées pour un ensemble spécial de ces méthodes pour résoudre les équations différentielles de Maxwell, dans lesquelles nous nous concentrons sur la méthode sans maillage des fonctions de base radiales (RBF) et la méthode sans maillage d'interpolation de point radial (RPIM) et leur adaptabilité aux couches absorbantes de type PML. À la fin de ce chapitre, nous avons simulées des exemples numériques à l'aide des méthodes présentées dans ce chapitre qui donnent de bons résultats et comparé avec la méthode FDTD, Ensuite, afin de démontrer les avantages potentiels tels que la distribution des nœuds, les paramètres de formes des fonctions de base utilisés et la convergence rapide, les résultats de la méthode RPIM ont été discutés par rapport au critère de stabilité CFL.



## **IV.1. Introduction.**

## **IV 2. Aperçu général sur l'application des méthodes sans maillage.**

## **IV.3. La méthode sans maillage basée sur les fonctions de base radiales (RBF).**

### **IV.3.1. Principe de la méthode RBF.**

## **IV.4. Formulations explicites de la méthode RBF dans le domaine temporel.**

## **IV.5. La méthode sans maillage d'interpolation de point radial (RPIM).**

### **IV.5.1. Formulation de la méthode RPIM.**

## **IV.6. Critère de stabilité.**

## **IV.7. Distributions de nœuds.**

### **IV.7.1. Génération de la distribution à deux nœuds.**

### **IV.7.2. Discrétisation des frontières.**

## **IV.8. Traitement des conditions absorbantes UPML dans la méthode RPIM temporelle.**

## **IV.9. Paramètres de diffraction S.**

## **IV.10. Excitation de la source.**

## **IV.11. Exemples numériques et discussion.**

### **IV.11.1. Analyse de champs électromagnétiques par la méthode combinée RBF-FDTD.**

### **IV.11.2. Simulation des modes TM dans le domaine temporel par la méthode RBF.**

### **IV.11.3. Modélisation temporelle des filtres en bande X par la méthode UPML-RPIM.**

#### **IV.11.3.1. Filtre de guide d'ondes rempli par une permittivité périodique.**

#### **IV.11.3.2. Résonateur SRR métamatériaux AZIM**

## **IV.12. Conclusion**

## **Références bibliographiques IV**

### IV.1. Introduction

La prolifération incessante des circuits hyperfréquence telles que les guides d'onde et les filtres micro-ondes de pointe avec une complexité élevée et des qualités de pointe plaide en faveur de la construction de modèles discrets qui ne sont pas facilement pris en charge par les pratiques existantes. Par conséquent, le besoin de techniques numérique de modélisation est devenu un motif de réflexion pour les chercheurs. Les retombées de ces efforts ont en effet accru nos connaissances en analyse numérique, car plusieurs algorithmes développés ont désigné de nouvelles initiatives et de multiples directions de recherche, partant les techniques classiques comme la méthode FDTD, la méthode FETD et l'algorithme FVTD, même s'elles ne sont pas aussi répandues que les approches de base dans le domaine temporel, elles ont rapidement été appréciées en raison de leurs performances dans divers cas difficiles, ces méthodes sont basées sur un maillage du domaine dans lequel le problème doit être discrétisé. Cependant, ce maillage sur lequel est basé le calcul doit obéir à certaines règles comme nous avons vu dans le chapitre II où dans les grandes déformations, le maillage est nécessairement très déformé, ce qui cause les problèmes de convergence, perte de précision ou même un arrêt intempestif de la simulation. Pour se débarrasser le problème ci-dessus, les méthodes sans maillage qui sont devenues un domaine de recherche populaire au cours des dernières années, tel que dans ce contexte, pour nommer une méthode par sans maillage, traduction des termes originaux *meshless* ou *meshfree*, est l'absence dans le domaine de calcul d'une grille de nœuds. Le principe des méthodes sans maillage est de reconstruire une fonction définie sur un espace continu à partir de l'ensemble des valeurs discrètes prises sur un nuage de nœuds dispersés sélectivement ou aléatoirement. Parmi les avantages de ces méthodes est la possibilité de libérer l'analyste de la tâche consistant à mettre en place un maillage adéquat au profit d'un simple nuage, ce qui fait de ces méthodes les candidates idéales pour modéliser les structures micro-ondes.

Dans ce chapitre nous allons donner un aperçu sur les méthodes sans maillage et éclairer la manière dont elles sont dérivées, en mettant l'accent sur la méthode sans maillage des fonctions de base radiales (RBF) et la méthode d'interpolation de point radial (RPIM) en électromagnétisme et on les choisi pour la résolution des équations différentiels de Maxwell dans le domaine temporel à cause de leur flexibilité et capacité à simuler des problèmes hyperfréquences.

Les paramètres des fonctions de base et le problème de singularité des matrices, ainsi contrôlé, sont soigneusement examinés et plusieurs problèmes critiques concernant la condition de stabilité ou les inconvénients inhérents sont revus. Une discussion de la signification relative des erreurs résultant de chacune des étapes composant les simulations sans maillage complète ce chapitre en proposant des exemples numériques et en les modélisant par les méthodes RBF et RPIM.

### IV.2. Aperçu général sur l'application des méthodes sans maillage

Les méthodes sans maillage comprennent une grande classe de techniques numériques qui ont été développées à partir des années 1970, dont l'idée fondamentale sous-tendant tous ses membres est, comme son nom l'indique, de pouvoir construire des solutions numériques aux problèmes électromagnétiques sans qu'il ne soit nécessaire de définir une grille maillée dans le domaine. Il existe des ressemblances avec la méthode FEM, pour laquelle les méthodes sans maillage se veulent alternatives. Ses caractéristiques sont un fonctionnement avec des formes faibles, l'équation différentielle est convertie en une expression intégrale impliquant la fonction à approximer et les fonctions de test, l'utilisation de fonctions de forme supportées de manière compacte et l'intégration des formes faibles dans des domaines locaux, ce qui conduit à des matrices globales clairsemées. La différence la plus frappante avec la FEM est l'absence totale de maillage sous-jacent; comme il n'y a pas de maillage, le concept d'élément perd son sens.

L'application des méthodes sans maillage à la modélisation électromagnétique a été introduite pour la première fois par *Yves Maréchal*, lorsqu'il a appliqué la méthode des éléments diffusés DEM (Diffuse Element Method) à la modélisation des problèmes statiques bidimensionnels [1]-[3]. Plus récemment, la méthode DEM a été utilisée dans l'optimisation de dispositifs électromagnétiques [4,5]. En 1998, la méthode des particules de noyau se reproduisant par moindres carrés MLSRKPM (Moving Least Square Reproducing Kernel Particle Method) a été appliquée pour modéliser les problèmes électromagnétiques statiques à 2-D [6,7]. Cette technique est une version modifiée de Galerkin sans élément EFG (Element Free Galerkin method) où l'approximation MLS est remplacée par l'approximation MLSRKPM. *Viana* a également présenté une comparaison entre les deux méthodes et montré que le MLSRKPM permettait une meilleure précision [7]. La méthode EFG a été appliquée pour modéliser les petits écarts entre conducteurs [8], les problèmes statiques et quasi-statiques [9] et pour modéliser la

détection de fissures par courant de Foucault pulsé lors d'essais non destructifs [10]. Une technique combinée FEM et EFG a été utilisée dans [11] et [12]. La technique proposée suggérerait l'utilisation d'un maillage à éléments finis grossiers et de nœuds libres en tant qu'outil de raffinement pour la solution FEM ou les nœuds libres doivent être ajoutés dans les régions soumises à des gradients prononcés. La méthode a été utilisée avec succès pour étudier des problèmes de courants de Foucault 3-D [11]. La méthode EFG a également été appliquée avec succès pour modéliser la magnétohydrodynamique [13].

La méthode de collocation ponctuelle des moindres carrés avec déplacement rapide et collocation de points a été introduite et appliquée à la modélisation de problèmes électromagnétiques bidimensionnels [14]. *Kim* a proposé une formulation alternative au MLS-RKPM qui utilise un paramètre de dilatation variable, ce qui permet un algorithme plus flexible et améliore la précision.

Différentes méthodes sans maillage ont été proposées pour modéliser un transformateur de puissance bidimensionnel. Dans [15] la méthode EFG d'ondelette combinée à une seule couche de maillage d'éléments finis le long de la limite, contenant les conditions aux limites essentielles. Dans [16], la méthode sans maillage de Local Petrov-Galerkin (LPG) basé sur l'approximation MLS modifiée par la fonction de saut (*Jump function*) a été utilisé. Des multiplicateurs de Lagrange ont été utilisés pour imposer les conditions aux limites essentielles. Dans [17], une fonction de base hybride ondelette et radiale a été étudiée. La méthode d'approximation des fonctions de base radiales est utilisée le long des limites externes pour imposer les conditions aux limites essentielles de manière simple.

Un couplage des méthodes sans maillage de LPG et FEM a été étudié dans [18] pour modéliser un problème d'électrostatique à 2-D. Les méthodes sans maillage à base radial RBF (Radial Basis Function) ont également été appliquées. Dans [19], les auteurs appliquent la méthode de collocation Hermite utilisant la RBF de Wendland pour modéliser des guides d'onde elliptiques. L'utilisation de techniques sans maillage pour modéliser les limites courbes offre de grands avantages par rapport aux méthodes basées sur les mailles, car les limites peuvent être représentées avec précision. Les résultats présentés dans [19] présentent une précision raisonnable par rapport aux solutions analytiques.

La méthode sans maillage LPG avec fonctions de base radiales a été appliquée au modèle de problèmes magnétostatiques 2-D dans [20], ou une fonction Heaviside a été utilisée comme

fonction de test dans la formulation RBF-LPG. La procédure réduit considérablement les coûts de calcul requis par l'intégration numérique et les résultats sont en bon accord avec la méthode FEM. Plus tard, *Viana* a examiné la méthode sans maillage d'interpolation locale du point radial RPIM (Radial Point Interpolation Meshless method) pour modéliser les problèmes de courants de Foucault 2-D [21]. La méthode a donné un bon accord par rapport à la solution analytique. Dans [20, 21], *Viana* a utilisé la fonction de base Multiquadratique locale et la technique de la forme faible locale. La procédure aboutit à une méthode véritablement sans maillage, ce qui évite de recourir à un maillage et à des techniques de contrainte pour imposer la condition limite essentielle.

La méthode sans maillage hydrodynamique des particules lissées SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) a été utilisée pour modéliser les équations de Maxwell dans le domaine temporel [22]. Cette technique utilise la fonction d'approximation SPH pour représenter les champs E et H dans le schéma du domaine temporel des différences finies. Les nœuds sont disposés dans une grille uniforme, similaire à la grille de Yee [23]. Les conditions aux limites PML mentionnées dans le chapitre III sont facilement implémentées dans la méthode sans maillage SPH. L'application de SPH à la modélisation des problèmes électromagnétiques dans le domaine temporel pourrait ouvrir de nouvelles perspectives en modélisation.

La méthode sans maillage d'interpolation de point PIM (Point Interpolation Method) utilise la technique d'interpolation polynomiale pour construire l'approximation [24] et étant alternative de la méthode MLS. La méthode sans maillage PIM a été utilisée pour modéliser les lignes de transmission non uniforme par solution des équations de télégraphistes dans le temporelle [25].

Une combinaison de la méthode PIM et la méthode sans maillage de frontière BEM (Boundary Meshless Method) qui a été proposée dans [26] pour modéliser des problèmes électromagnétiques en 2-D. Cette méthode utilise les avantages de BEM pour réduire la dimensionnalité du problème étudié, puis utilise la technique d'approximation PIM dans 1-D, en évitant le problème de singularité de la matrice d'interpolation. *Zhang et al*) ont souligné que la BEM est élégante et efficace. Leurs résultats ont été comparés à la solution analytique et ont montré un très bon accord. Cependant, l'application de cette méthode à 3-D peut entraîner des difficultés en raison des problèmes inhérents à l'interpolation PIM qui conduit à des singularités de la matrice d'interpolation.

À travers l'étude ci-dessus des méthodes sans maillage a montré que ces méthodes sont très fiables et offrent une meilleure approximation des problèmes électromagnétiques. Cependant, dans notre thèse, nous ne présenterons que les méthodes sans maillage utilisant les fonctions de base radiales, plus précisément la méthode des collocations RBF ou par un assemblage des fonctions de base radiales avec une interpolation polynomiale (la méthode RPIM). Les implémentations considérées dans cette thèse sont toutes des cas à 2-D, ainsi les formulations ne prendront que les coordonnées cartésiennes  $x, y$  composantes en tant que variables spatiales.

### IV.3. La méthode sans maillage basée sur les fonctions de base radiales (RBF)

Les méthodes sans maillage fonctions de base radiales (RBF) ont été appliquées pour la première fois en 1991 par *Edward Kansa* pour résoudre des équations aux dérivées partielles, lorsqu'une technique basée sur la méthode de collocation directe et la fonction de base Multiquadrique a été utilisée pour modéliser la dynamique des fluides [27, 28]. La procédure de collocation directe utilisée par *Kansa* est relativement simple à mettre en œuvre, mais elle aboutit à un système d'équations asymétrique en raison de la combinaison d'équations principales et de conditions aux limites. De plus, l'utilisation de RBF Multiquadrique donne lieu à une approximation globale, ce qui conduit à un système d'équations caractérisé par une matrice de rigidité dense. La RBF Hermite-Collocation a été proposée comme une tentative d'éviter le système asymétrique d'équations. Des fonctions de base radiales prises en charge globalement et de manière compacte ont été utilisées pour résoudre les PDE et les résultats ont montré que le RBF global permettait une meilleure précision. Cependant, la matrice de rigidité supportée de manière compacte est rare, alors que le RBF à support global donne une matrice dense qui peut devenir très coûteuse à résoudre dans le cas d'un grand nombre de points de collocation. Récemment, une autre approche basée sur les RBF globaux a été proposée. La méthode, nommée RBF Multiquadrique-locale, suggère la construction de l'approximation à l'aide de sous-domaines, ce qui provoque la troncature du RBF Multiquadrique au niveau des «limites» des sous-domaines, ce qui donne une approximation locale et une matrice de raideur clairsemée [29]. Cependant, un grand nombre de publications sur la méthode sans maillage RBF concernent sa preuve mathématique et ses fondements [30]. Une revue détaillée du contexte mathématique des RBF est présentée dans [31].

### IV.3.1. Principe de la méthode RBF

Comme son nom le suggère, la méthode sans maillage RBF construit une approximation d'une fonction quelconque par des fonctions de base radiale, en effet, l'interpolation d'une fonction  $u(X)$  aux positions  $X_n = (x_n, y_n)$ ,  $n = 1, \dots, N$  qui leur valeurs sont supposées connues dans le domaine de calcul  $\Omega$ . La fonction d'interpolation  $u(X)$  en position  $X$  à l'intérieur de ce domaine peut être interpolée à l'aide de l'équation suivante pour les coefficients inconnus  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  [27]:

$$\langle u(X) \rangle = \sum_{n=1}^N \varphi_n(X) a_n = \varphi^T(X) a, \quad X \in \Omega \quad (\text{IV. 1})$$

où  $\varphi_n(X) = \varphi(\|X - X_i\|)$  est la fonction de base radiale centrée sur un ensemble de nœuds de collocation  $X_1, X_2, \dots, X_N$ ,  $\|X - X_i\|_2 = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$  représente la distance euclidienne entre le point  $X(x, y)$  et  $X_i(x_i, y_i)$  est le centre de la position  $i$  du nœud.

Il ya des nombreux types de RBF connues dans la littérature ou certaines fonctions de base dans le tableau IV.1 et illustrées dans la figure IV.1 sont les plus utilisées [32]. En général, des fonctions de base définies positives sont souhaitées [33]; les détails en seront abordés plus loin dans ce chapitre. Les deux dernières fonctions de base répertoriées dans le tableau. IV.1 sont des exemples de fonctions base de manière compacte par Wendland [34], c'est-à-dire que les valeurs sont nulles en dehors d'un domaine de taille  $d_0$ . Il existe de nombreuses formes différentes des fonctions de base de Wendland.

fonctions de base (RBF)	Expressions $\varphi_n(r)$ avec $r = \frac{\ X-X_n\ _2}{d_c}$	Paramètres
Gaussienne	$\exp(-a_c \cdot r^2)$	$a_c$
Multiquadrique (MQ)	$\sqrt{1+C^2 \cdot r^2}$	$C$
Multiquadrique Inverse (IMQ)	$\frac{1}{\sqrt{1+C^2 \cdot r^2}}$	$C$
Wendland- C4-CRBF	$\begin{cases} \left(1 - \frac{r}{d_0}\right)^6 \left[3 + 18\left(\frac{r}{d_0}\right) + 35\left(\frac{r}{d_0}\right)^2\right] & r \leq d_0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$d_0$
Wendland- C6-CRBF	$\begin{cases} \left(1 - \frac{r}{d_0}\right)^8 \left[1 + 8\left(\frac{r}{d_0}\right) + 25\left(\frac{r}{d_0}\right)^2 + 32\left(\frac{r}{d_0}\right)^3\right] & r \leq d_0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$d_0$

Tableau IV.1. Les fonctions de base radiales alternatives. Les deux dernières fonctions de base C4-CRBF et C6-CRBF ont un support compact.

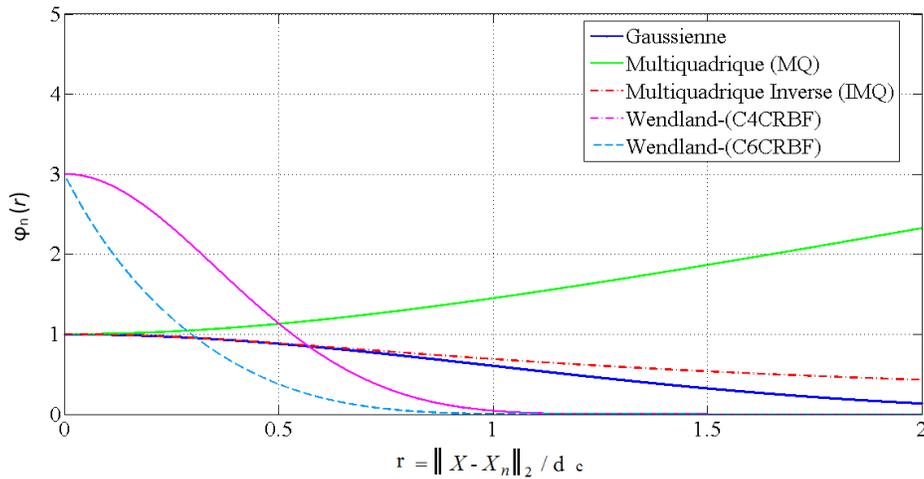


Figure IV.1 : Illustration des fonctions de base radiales alternatives dans le tableau. IV.1. Pour les paramètres : (Gaussienne  $a_c = 0.5$ ), (Multiquadrique (MQ) et Multiquadrique inverse (IMQ)  $C = 1.05$ ) et (Wendland C4-CRBF et C6-CRBF  $d_0 = 1.5$ ).

Les fonctions sont définies par une formulation récursive pour obtenir la régularité requise. Pour tous les cas étudiés dans cette thèse, toutes les fonctions possèdent des paramètres de forme ( $a_c$ ,  $C$  et  $d_0$ ) qui contrôlent le grade de la fonction.  $d_c$  est la distance moyenne des nœuds dans le domaine de support. A travers les études précédentes effectuées sur les méthodes sans maillage, elles ont confirmé que les fonctions de base Gaussiennes sont avérées fournir la meilleure précision tout en étant sujettes à des problèmes de singularités ou nous allons affirmer dans la section IV.11.

Les coefficients  $a_n$  de l'équation (IV.1) sont obtenus en imposant à la fonction d'interpolation  $u(X)$  de traverser tous les nœuds. Les interpolations de  $u(X)$  aux tous les nœuds  $N$  peuvent être exprimées sous forme de matrice [35] :

$$U_e = \varphi_0 \cdot a \Rightarrow a = \varphi_0^{-1} U_e \quad (\text{IV.2})$$

Notons que  $U_e = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T$  est le vecteur des coefficients associés d'interpolation de la RBF et la matrice des moments  $\varphi_0$  est définie par :

$$\varphi_0 = \begin{bmatrix} \varphi_1(\|X_1 - X_1\|) & \varphi_1(\|X_1 - X_2\|) & \dots & \varphi_1(\|X_1 - X_N\|) \\ \varphi_2(\|X_2 - X_1\|) & \varphi_2(\|X_2 - X_2\|) & \dots & \varphi_2(\|X_2 - X_N\|) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n(\|X_N - X_1\|) & \varphi_n(\|X_N - X_2\|) & \dots & \varphi_n(\|X_N - X_N\|) \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (\text{IV.3})$$

Tant que la matrice des moments  $\varphi_0$  est une matrice des constantes pour leur dépendance seulement avec les distances euclidiennes entre les nœuds voisins qui sont employés dans l'interpolation de  $u(X)$ , on peut dire que les coefficients du vecteur  $a$  qui sont obtenus par la relation (IV.3) restent constants même si les coordonnées  $X$  du nœud d'intérêt change dans le domaine.

Ensuite, en substituant (IV.2) à (IV.1), l'interpolation de  $u(X)$  peut être réécrite comme suit :

$$u(X) = \varphi^T(X) \cdot \varphi_0^{-1} \cdot U_e = \psi(X) U_e \quad (\text{IV.4})$$

Avec  $\psi(X)$  la fonction de forme définie par :

$$\psi(X) = \varphi^T(X) \cdot \varphi_0^{-1} = [\psi_1(X), \psi_2(X), \dots, \psi_N(X)] \quad (\text{IV.5})$$

Dans ce contexte, considérant que  $u(X)$  peut être n'importe quel composant des champs électriques et magnétiques, les dérivées spatiales des champs électriques et magnétiques sont nécessaires pour résoudre les équations sous forme différentielles de Maxwell (III.1) et (III.2). D'après (IV.4), nous pouvons voir que la dérivée partielle de la fonction d'approximation est uniquement liée à la matrice de la fonction de forme  $\psi(X)$ . Les dérivées partielles de premier ordre de  $u(X)$  suivant les directions  $x$  et  $y$  sont exprimées par :

$$\partial_x u(X) = \partial_x \psi(X) U_e = [\partial_x \psi_1(X), \partial_x \psi_2(X), \dots, \partial_x \psi_N(X)] U_e \quad (IV. 6)$$

$$\partial_y u(X) = \partial_y \psi(X) U_e = [\partial_y \psi_1(X), \partial_y \psi_2(X), \dots, \partial_y \psi_N(X)] U_e \quad (IV. 7)$$

Nous venons d'utiliser les expressions précédentes de la fonction de forme tel que, l'idée classique d'un élément avec sa connectivité reliant les nœuds aux arêtes est totalement abandonnée dans le contexte de l'approche sans maillage à base radiale mais la présence de nœuds est nécessaire ou l'évaluation du système d'équations (III.1) et (III.2) désigné par nœuds d'intérêt ou par points de testes qui sont situé à l'intérieur d'une région d'influence désigné par un domaine de support qui est représenté dans la figure IV.2.

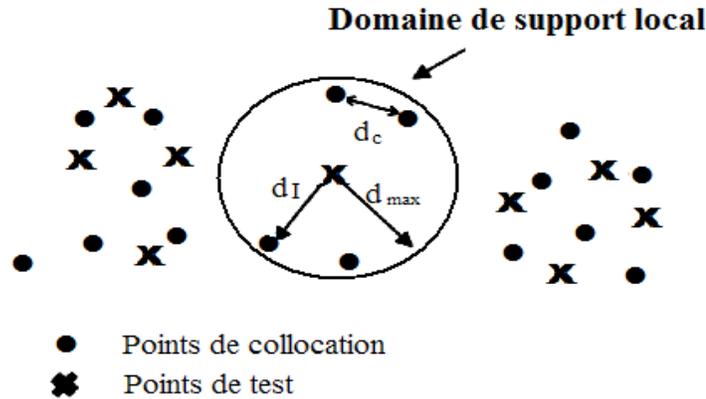


Figure IV.2 : Illustration du domaine de support local de rayon  $d_{max}$ , la distance moyenne des nœuds  $d_c$  et  $d_l$  est la distance entre les nœuds de collocation et les points de test [36].

Les méthodes sans maillage RBF peuvent être divisées selon que le support soit global ou local; dans le support local, seuls les nœuds environnants d'un domaine de support prédéfini sont pris en compte, où uniquement les nœuds d'un domaine de support circulaire (1-D ou 2-D) de rayon  $d_{max}$  autour de l'emplacement de nœud considéré  $X_n$  sont inclus, c'est-à-dire

$$|X - X_n| \leq d_{\max} \quad (\text{IV. 8})$$

Ce support local permet d'améliorer considérablement les propriétés de mise à l'échelle en raison des matrices de système fragmentées. La taille du support est définie par :  $d_{\max} \leq B_S \cdot d_c$  ou  $B_S$  prennent leur valeurs suivant le nombre des nœuds voisins  $n_{AS}$  dans le support local [37].

En revanche, le support global prene en compte l'ensemble du domaine et offre une précision d'interpolation beaucoup plus élevée, mais reposent sur l'inversion de la matrice des moments complètes. Ce support de décomposition de domaine [38] est généralement utilisé pour résoudre les gros problèmes.

#### IV.4. Formulations explicites de la méthode RBF dans le domaine temporel

Les dérivées temporelles dans la méthode sans maillage RBF explicite peuvent être approximées par des différences centrales dans le schéma explicite de progression temporelle de saute-mouton similaire à la méthode FDTD ou les composants de champ sont ensuite placés de manière échelonnée dans le temps: les valeurs de champ électrique nœuds-E sont placés sur des pas de temps complets et les valeurs de champ magnétique nœuds-H aux demi-pas intermédiaires.

Dans ce contexte, l'analyseur de domaine temporel pour les équations de Maxwell est résumé sur la base de la méthode RBF du schéma local et du schéma global :

##### ❖ Formulation en mode TEM de la méthode locale RBF

La méthode locale RBF est utilisée pour résoudre les équations (III.3) de l'onde TEM en 1-D. La formulation de discrétisation explicite résultante de ces équations peut être déduite par les équations suivantes [36] :

$$H_{z,i}^{n+1/2} = H_{z,i}^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{\mu} \left( \sum_{j=1}^{n_{AS}} \partial_x \psi_{Ei}^j E_{y,j}^n \right) \quad (\text{IV. 9. a})$$

$$E_{y,i}^{n+1} = E_{y,i}^{n+1} - \frac{\Delta t}{\epsilon} \left( \sum_{j=1}^{n_{AS}} \partial_x \psi_{Hi}^j H_{z,j}^{n+1/2} + J_{y,i}^{n+1/2} \right) \quad (\text{IV. 9. b})$$

où, dans ces équations, les indices  $j$  sont la somme de tous les voisins  $[1, \dots, n_{AS}]$  dans le domaine de support local du nœud  $i$ .

❖ **Formulation en mode TM de la méthode globale RBF**

La description en 2-D est utilisée en mode TM via le système d'équations (III.4), en les résolvants par la méthode global RBF [39]. La formulation explicite résultante du mode TM est

$$H_{x,i}^{n+1/2} = H_{x,i}^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{\mu} \left( \sum_{j=1}^N \partial_y \psi_j E_{z,j}^n \right) \quad (\text{IV. 10. a})$$

$$H_{y,i}^{n+1/2} = H_{y,i}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu} \left( \sum_{j=1}^N \partial_x \psi_j E_{z,j}^n \right) \quad (\text{IV. 10. b})$$

$$E_{z,i}^{n+1} = E_{z,i}^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left( \sum_{j=1}^N \partial_x \psi_j H_{y,j}^{n+1/2} - \sum_{j=1}^N \partial_y \psi_j H_{x,j}^{n+1/2} + J_{z,i}^{n+1/2} \right) \quad (\text{IV. 10. c})$$

où  $i$  est l'emplacement des nœuds actuels et  $j$  l'index du domaine de support global.

Le terme source de courant  $J_y$  ou  $J_z$  dans les deux schémas de la méthode RBF convient pour injecter l'énergie à l'intérieur du domaine de calcul à une large bande,  $n$  est le pas de temps. L'incrément temporel acceptable  $\Delta t$  pour la stabilité du schéma explicite temporel de saute-mouton dans les méthodes sans maillage est calculé comme nous allons vu dans la section IV.6.

Pour l'application des méthodes sans maillage RBF dans les simulations numériques d'équations différentielles de Maxwell ci-dessus, les fonctions de base souvent lisses peinent ou sont même incapables de reproduire des solutions constantes, singulières ou non lisses, elle souffre également d'une sensibilité significative aux modifications de sa paramètre de forme, ce qui rend la détermination de ce dernier est très difficile comme nous allons vu dans la section IV.11. Récemment, des combinaisons de fonctions RBF avec d'autres types de fonctions de base ont été présentées. L'approche la plus directe pour augmenter la précision pour de nombreuses applications est l'extension avec des fonctions modales [32]. Dans [40] une autre investigation numérique, le comportement de l'interpolation par RBF près des limites a été étudié. L'approche considérée dans cette thèse est la méthode d'interpolation de point radial (RPIM) [41] ou à travers la méthode RBF ci-dessus, en ajoutant un polynôme qui peut améliorer la précision des résultats, assurer l'inversibilité de la matrice des moments, et réduire l'effet des paramètres de forme des fonctions de base.

### IV.5. La méthode sans maillage d'interpolation de point radial (RPIM)

La méthode sans maillage d'interpolation de point PIM utilisant des fonctions de base radiales (RBF) est appelé la méthode PIM radial ou la méthode d'interpolation de point radial (RPIM). Dans la RPIM, les RBF sont utilisés pour construire des fonctions de forme et elle a été prouvée que la matrice des moments de l'interpolation RBF est généralement inversible pour les nœuds dispersés arbitraires [42]-[43] et que des techniques ont été tentées pour résoudre le problème de la singularité [41]. RPIM est cependant très stable et robuste pour les distributions nodales arbitraires. L'utilisation de RBF comme une fonction de base pour la construction de fonctions de forme PIM présente plusieurs avantages. L'utilisation de RBF peut résoudre efficacement le problème de singularité du PIM polynomial, en partie à cause de l'utilisation d'un domaine de support local contenant un très petit nombre de nœuds. Les fonctions de forme RPIM sont stables et donc flexibles pour une distribution nodale arbitraire et irrégulière. La RPIM a été introduite par *Lieu et Gu* en 2001 [45], elle a également obtenu des résultats très positifs à travers les études qui sont effectuées par : *Kaufmann et (al)* [46,47] et par : *Yu et (al)* [48]-[50] outre la capacité d'adaptabilité à un large éventail de situations électromagnétiques, la simplicité de modélisation de géométries complexes avec des détails fins tels que les guides d'ondes lorsque leurs propriétés électromagnétiques sont fonction de l'espace grâce à ses fonctions de base sophistiquées, qui produisent souvent une précision et une efficacité supérieures par rapport au FDTD traditionnel [48].

#### IV.5.1. Formulation de la méthode RPIM

L'interpolation du champ électromagnétique  $u(X)$  par les fonctions de base radiales (IV.1) peut être étendue dans une reproduction dite de monôme pour fournir une approximation précise des fonctions polynomiales à l'aide de fonctions de base monomiales  $P_m(X)$  [46]-[49]:

$$\langle u(X) \rangle = \sum_{n=1}^N a_n \cdot \varphi_n(X) + \sum_{m=1}^N b_m \cdot P_m(X) = \varphi^T(X) \cdot a + P^T(X) \cdot b, \quad X \in \Omega \quad (\text{IV. 11})$$

Généralement, les polynômes supplémentaires  $P_m(X)$  sont d'ordre peu élevé:

$$\text{Ordre zéro: } P^T(X) = [ \quad ] \quad (M=0) \quad (\text{IV. 12. a})$$

$$\text{Premier ordre: } P^T(X) = [1, x, y] \quad (M = 3) \quad (\text{IV. 12. b})$$

$$\text{Deuxième ordre: } P^T(X) = [1, x, y, x^2, xy, y^2] \quad (M = 6) \quad (\text{IV. 12. c})$$

$M$  indiquant le nombre de termes dans la fonction  $P^T(X)$ . Cette interpolation (IV.1) peut également être vue comme une extension de la technique d'interpolation de point (PIM) [36], où seuls les monômes  $P^T(X)$  sont appliqués en tant que fonctions de base. Les vecteurs de paramètre d'interpolation  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]^T$  et  $b = [b_1, b_2, \dots, b_N]^T$  dans (IV.11) sont calculés selon une procédure d'appariement de points compte tenu dans ce contexte que  $\varphi_n(X)$  est une fonction de base, alors leur matrice des moments  $\varphi_0$  est définie comme (IV.3). Un système d'équations est mis en place pour interpoler les valeurs de la composante du champ à tous les nœuds  $U_e = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T$ :

$$U_e = [\varphi_0 \quad P_m] \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \quad (\text{IV.13})$$

Afin d'assurer une approximation unique (IV.13). La condition de contrainte  $P_m \alpha = 0$  est imposée pour obtenir une matrice  $G$  inversible carrée qui est souvent appelé matrice des moments [36]. Les paramètres d'interpolation peuvent être calculés comme suit :

$$\begin{bmatrix} U_e \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_0 & P_m \\ P_m^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = G^{-1} \begin{bmatrix} U_e \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV. 14})$$

D'habitude l'ordre de polynôme utilisé dans la matrice des moments  $G$  est relativement bas et la matrice  $G^{-1}$  existe quelque soit la distribution des nœuds, par conséquent, leur ajout de RBF résout le problème souvent rencontré des matrices singulières provenant de certaines positions de nœud dans le domaine de support local ou dans cette méthode sans maillage RPIM nous utilisons le polynôme d'ordre  $M=3$ .

La substitution de (IV.14) dans (IV.11) donne :

$$u(X) = [\varphi^T(X) \quad P^T(X)] G^{-1} \begin{bmatrix} U_e \\ 0 \end{bmatrix} = \psi^i(X) U_e \quad (\text{IV. 15})$$

Avec,  $\psi'(X)$  la fonction de forme préliminaire est définie par :

$$\psi'(X) = [\varphi^T(X) \quad P^T(X)]G^{-1} = [\psi_1(X), \psi_2(X), \dots, \psi_N(X), \psi_{N+1}(X), \dots, \psi_{N+M}(X)] \quad (\text{IV. 16})$$

Pour la procédure itérative, nous ne devons prendre que les  $N$  premiers termes de (IV.16) qui correspondent uniquement au vecteur des nœuds voisins, ce qui donne la fonction de forme de la méthode RPIM:

$$\psi(X) = [\varphi^T(X) \quad P^T(X)]G^{-1} = [\psi_1(X), \psi_2(X), \dots, \psi_N(X)] \quad (\text{IV. 17})$$

Sur la base de l'approximation de la composante de champ en fonction de la fonction de forme, l'approximation de leurs dérivées spatiales le long des axes de coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$  sont nécessaires pour résoudre les équations différentielles de Maxwell (III.1) et (III.2) peuvent être exprimées par :

$$\partial_x u(X) = [\partial_x \varphi^T(X) \quad \partial_x P^T(X)]G^{-1} U_e = [\partial_x \psi_1(X), \partial_x \psi_2(X), \dots, \partial_x \psi_N(X)] U_e \quad (\text{IV. 18})$$

$$\partial_y u(X) = [\partial_y \varphi^T(X) \quad \partial_y P^T(X)]G^{-1} U_e = [\partial_y \psi_1(X), \partial_y \psi_2(X), \dots, \partial_y \psi_N(X)] U_e \quad (\text{IV.19})$$

Pour que (IV.15) puisse être résolu, le nombre de nœuds  $N$  doit être suffisamment grand lors de l'utilisation de fonctions de base monôme. Au moins  $N \geq M$  nœuds doivent être pris en compte pour que la matrice des moments  $G$  soit positive [51]. Sinon, la matrice peut devenir singulière malgré l'utilisation de RBF définis.

Selon [32], l'ajout de fonctions de base de monômes ( $M > 0$ ) a plusieurs effets positifs. Premièrement, cela garantit que l'interpolation peut réussir le test de patch, c'est-à-dire que les fonctions de forme peuvent reconstruire exactement une fonction linéaire. Deuxièmement, elle améliore la précision et rend la méthode moins sensible aux paramètres de formes. Les propriétés des fonctions de forme suivantes ont été identifiées [32]:

❖ **Propriété Delta:** elle garantit un ajustement exact sur les nœuds, comme suit :

$$\psi_i(X_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (\text{IV. 20})$$

- ❖ **Continuité** : les fonctions de forme sont continues en raison du caractère lisse des RBF globaux.
- ❖ **Partition unité**: elle garantit que les différentes fonctions de forme locales totalisent une fonction à n'importe quel emplacement du domaine, de sorte que :

$$\sum_{n=1}^N \psi_n = 1 \quad (\text{IV. 21})$$

Comme nous avons vu précédemment la discrétisation temporelle explicite des équations de Maxwell en utilisant la méthode sans maillage RBF sur la base de deux schémas (local et global) aux les mêmes expressions quand nous utiliserons la discrétisation explicite de la méthode RPIM bien qu'il y ait un terme polynomial additif dans la RPIM et donc avoir le même critère de stabilité du schéma explicite de saute-mouton.

#### IV.6. Critère de stabilité

Les itérations temporelles du système d'équations (IV.10) ne sont pas nécessairement stables. Pour que les algorithmes RBF ou RPIM convergent, le pas de temps  $\Delta t$  doit être inférieur à une certaine limite comme la méthode FDTD ou la limite de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) a été détaillée dans le deuxième chapitre. La restriction est une condition nécessaire mais non suffisante [52]. En pratique,  $\Delta t$  le pas de temps CFL est abaissé au-delà de la valeur théorique pour assurer des simulations stables. Lorsque l'on considère le spectre de valeurs propres d'un problème numérique avec une progression temporelle par saute-mouton, les valeurs propres doivent se situer sur l'axe imaginaire [53] pour les problèmes de premier ordre. La magnitude imaginaire maximale des valeurs propres peut ensuite être utilisée pour déterminer le pas de temps maximal pour des itérations stables. Deux conditions nécessaires à la stabilité sont présentées ci-après. Dans une première approche, les propriétés géométriques sont utilisées pour trouver une condition similaire à la limite CFL. Dans une deuxième approche, une condition pour le pas de temps basé sur les valeurs propres d'un système de second ordre transformé est présentée dans le chapitre V, laquelle donne généralement des pas de temps plus grands, mais nécessite le calcul numérique des valeurs propres. Le pas de temps basé sur les propriétés géométriques a été proposé dans [54] :

$$\Delta t \leq d_{\min,i} \sqrt{\mu_i \varepsilon_i} \quad (\text{IV. 22})$$

Cette estimation (IV.22) est basée sur la distance plus courte  $d_{\min,i}$  entre deux points de collocations du domaine et sur les propriétés du milieu.

## IV.7. Distributions de nœuds

Dans ce chapitre, les équations de Maxwell au premier ordre (III.1) et (III.2) sont résolues. Par conséquent, deux types de champs, à savoir électriques ou magnétiques, sont utilisés. Dans la méthode FDTD, une précision de second ordre est obtenue dans un agencement échelonné du schéma de Yee comme nous avons vu dans le chapitre III. De même pour les méthodes sans maillage RBF et RPIM, des distributions spéciales apportent des avantages lorsque les nœuds de collocation sont placés dans deux doubles ensembles distincts de distributions de nœuds. Toutes les composantes de champ du champ électrique sont placées dans le premier ensemble de nœuds (nœuds-E) et toutes les composantes de champ du champ magnétique sont placées dans une distribution à deux nœuds (nœuds-H).

### IV.7.1. Génération de la distribution à deux nœuds

La génération des deux ensembles de distributions de nœuds échelonnés est effectuée comme suit. Tout d'abord, un ensemble arbitrairement distribué de nœuds E est généré. Le choix des nœuds E pour le réseau principal facilite la modélisation des limites avec des conditions aux limites de Dirichlet pour le champ magnétique transverse (TM), par exemple des conducteurs électriques parfaits. Une approche commune pour générer la distribution à deux nœuds est la tessellation de *Voronoi* ou de *Delaunay* de ces nœuds [55]. Les nœuds-H sont ensuite placés sur les centres de bord des cellules. Les nœuds-E peuvent également être placés sur les centres géométriques des polygones. Avec ces deux ensembles de nœuds, deux ensembles de fonctions de forme  $\psi_E$  et  $\psi_H$  pour les nœuds E et H sont calculés. Des problèmes avec le schéma d'interpolation peuvent survenir si deux nœuds ou plus sont placés très proches l'un de l'autre dans une distribution de nœuds par ailleurs presque uniforme. Dans ce cas, des entrées presque identiques sont créées dans la matrice de moments. En conséquence, cette matrice devient presque singulière et généralement son inversion numérique échoue, entraînant une qualité

d'interpolation très mauvaise et peu fiable. Pour éviter ce problème, les nœuds trop proches les uns des autres sont unifiés en une position de nœud moyenne unique au cours du prétraitement.

#### **IV.7.2. Discrétisation des frontières**

Généralement, les conditions aux limites pouvant englober un domaine ou représenter une limite de matériau sont les conducteurs électriques et magnétiques parfaits (PEC et PMC) qui sont abordées dans les chapitres précédents. Ou les évaluations numériques approfondies sur le placement des nœuds à la limite du domaine de calcul dans les méthodes RPIM et RBF et à proximité de celle-ci ont été effectuées dans [56]. Il a été observé que la précision d'interpolation est augmentée lorsque la densité est augmentée près des interfaces de matériau. Par conséquent, la disposition des nœuds est adaptée pour que des densités plus élevées soient générées à proximité des limites ou une mise en œuvre de ces conditions aux limites dépend de l'emplacement des nœuds.

#### **IV.8. Traitement des conditions absorbantes UPML dans la méthode RPIM temporelle**

Des conditions aux limites d'absorption précises sont indispensables pour simuler des problèmes ouverts avec des méthodes de discrétisation de domaine. Traditionnellement, des conditions aux limites d'absorption étaient imposées à la limite extérieure du domaine de calcul [57]. L'introduction des PML [58] constituait une approche plus efficace. Dans ce modèle, les propriétés matérielles non physiques artificielles sont imposées dans une couche de matériau remplissant l'intérieur de la limite du domaine de calcul. Les propriétés du matériau sont définies de sorte que la PML soit adaptée au support de fond et absorbe fortement les ondes qui se propagent. La formulation initiale contenait des composants non physiques à champs séparés (Split-PML), qui se sont révélés théoriquement prédisposés aux instabilités tardives comme nous avons abordés dans le chapitre III. Plus tard, la formulation a été étendue à une formulation comprenant une couche physique de matériaux anisotropes [59], souvent appelée PML uni-axiale (UPML). Une généralisation de cette forme a été introduite en tant que PML convolutionnelle (CPML), qui fournit une absorption supplémentaire efficace des modes évanescents au coût numérique des opérations de convolution supplémentaires [60]. La méthode RPIM du domaine temporel a récemment été adapté aux parfaitement couches PML, telles que la PML de *Berenger* [48], le CPML conventionnel [49] et l'UPML uni-axial [47] en 2-D.

L'implémentation de l'UPML dans la formulation RPIM échelonnée nécessite une moyenne temporelle des composants de champ pour conserver la nature explicite du schéma. Dans cette section suivant, les équations de mise à jour sont dérivées pour l'UPML placé à la fin d'un domaine de calcul dans la direction  $\pm x$ , absorbant les ondes entrantes se propageant dans cette direction. Les formulations de discrétisation explicite résultantes du mode TM par la méthode UPML-RPIM sont les suivantes :

$$H_{x,i}^{n+\frac{1}{2}} = H_{x,i}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\mu} \left( \sum_j E_{z,j}^n \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) \quad (\text{IV. 23. a})$$

$$H_{y,i}^{n+\frac{1}{2}} = H_{y,i}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\mu} \left( \sum_j E_{z,j}^n \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right) \quad (\text{IV. 23. b})$$

$$E_{z,i}^n = \left( \frac{2\varepsilon - \sigma_x \Delta t}{2\varepsilon + \sigma_x \Delta t} \right) E_{z,i}^{n-1} + \left( \frac{2\Delta t}{2\varepsilon + \sigma_x \Delta t} \right) \cdot \left( \sum_j H_{y,j}^{n-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial x} - \sum_j H_{x,j}^{n-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) \quad (\text{IV. 23. c})$$

Le terme de perte  $\sigma_x$  dans (IV.23.c) peut être choisi arbitrairement. Néanmoins, en raison des erreurs de discrétisation, on cherche un profil qui minimise les sauts entre les emplacements des nœuds. Il a été rapporté dans le deuxième chapitre que le profil polynomial d'ordre  $m = 4$  conduit à une réflexion minimale  $\Gamma(\theta = 0^0) = -80 \text{ dB}$ . Le terme de perte pour une PML d'épaisseur  $\delta_0$  à partir de la coordonnée  $x$ -PML est exprimé par les relations (III.29) et (III.30).

#### IV.9. Paramètres de diffraction $S$

Les paramètres de diffraction (paramètres- $S$ ) sont utilisés pour caractériser la réponse des circuits radiofréquences (RF) et hyperfréquences. Ils sont plus couramment utilisés que d'autres types de paramètres de réseau (par exemple, les paramètres  $Y$ , les paramètres  $Z$ ), car ils sont plus faciles à mesurer. Dans cette section, nous décrivons les procédures permettant l'extraction des paramètres  $S$  qui sont considérées un lien direct entre la puissance d'entrée et la puissance de sortie des structures micro-ondes à deux ports comme nous le verrons dans la section IV.11.3 où ils sont la méthode la plus simple pour mesurer les puissances hyperfréquences à partir d'une simulation temporelle de la méthode RPIM. Pour calculer la matrice de diffraction de 2-D, un certain nombre de tels plans de ports peuvent être placés à différents endroits de la structure.

Selon *Gwarek et Celuch-Marcysiak* [61,62], les ports sortantes  $a_i$  et entrantes d'une onde  $b_i$  sur le plan du port  $i$  peuvent être exprimées comme suit:

$$a_i = \frac{U_i(\omega) + Z_m(\omega)I_i(\omega)}{2\sqrt{Z_m(\omega)}} \quad (\text{IV. 24. a})$$

$$b_i = \frac{U_i(\omega) - Z_m(\omega)I_i(\omega)}{2\sqrt{Z_m(\omega)}} \quad (\text{IV. 24. b})$$

où la tension  $U_i$  et le courant  $I_i$  sont mesurés sur le port  $i$ . La tension et le courant sont calculés via la projection des champs électriques et magnétiques sur la distribution de champ transverse du mode guide d'ondes comme illustrerai à la figure IV.12. Souvent, le mode n'est pas connu à priori et une analyse des valeurs propres doit être effectuée. Dans ce contexte, le nombre d'onde du mode  $m$  sur la largeur  $\alpha$  du guide d'ondes dans le cas 2-D est :  $k_y^m = \frac{m\pi}{\alpha}$ . Pour la méthode RPIM du domaine temporel, la tension  $U_i$  et le courant  $I_i$  sont ensuite exprimés par

$$U_i(\omega) = \sum_j^n \left[ \Delta y_j \sin(k_y^m \cdot y_j) \sum_k \psi_k(x_i, y_{i,j}) E_{z,k}(\omega) \right] \quad (\text{IV. 25. a})$$

$$I_i(\omega) = \sum_j^n \left[ \Delta y_j \sin(k_y^m \cdot y_j) \sum_k \psi_k(x_i, y_{i,j}) H_{y,k}(\omega) \right] \quad (\text{IV. 25. b})$$

Dans ces équations, la sommation externe représente l'intégration sur le plan du port. En conséquence, la largeur entourant chaque nœud de port  $j$  est  $\Delta y_j$ . Les expressions de domaine de fréquence  $E_{z,k}(\omega)$  et  $H_{y,k}(\omega)$  des composantes de champ électrique et magnétique sont calculées par la transformation de Fourier discrète au cours de l'itération temporelle [57].

L'impédance  $Z_m$  dépend du mode à propager. Pour les structures hyperfréquences homogènes, il existe des modèles analytiques pour calculer l'impédance de mode. Généralement, l'impédance peut être calculée à l'aide du courant et de la tension mesurés [62] par la relation :  $Z_m(\omega) = \sqrt{U_i(\omega)U_i'(\omega)/I_i(\omega)I_i'(\omega)}$  ou les dérivées spatiales de la tension et du courant le long de la normale au plan de port sont calculées par le remplaçant des fonctions de forme dans les équations (IV.25) par ces dérivées  $\partial_x \psi_k(x_i, y_{i,j})$ .

Finalement, les paramètres de diffraction peuvent être calculés par la relation entre les ondes sortantes et entrantes. Le cas le plus simple est le paramètre  $S_{11}$ , dans lequel un seul plan de port est requis par

$$S_{11}(\omega) = \frac{b_1(\omega)}{a_1(\omega)} \quad (\text{IV. 26})$$

Les paramètres de diffraction entre deux plans de ports non adjoints sont calculés en conséquence de manière simple. Par exemple, le calcul du coefficient de transmission entre deux plans de ports  $S_{21}$  est calculé comme suit:

$$S_{21}(\omega) = \frac{b_2(\omega)}{a_1(\omega)} \quad (\text{IV. 27})$$

L'intérêt pratique de la puissance hyperfréquence est donc considérable, car c'est aussi presque exclusivement les optimisations de transfert d'énergie recherchées dans les circuits à hyperfréquence par le comportement de l'énergie totale dans le domaine à long temps. L'énergie au pas de temps  $n$  peut être exprimée par [47] :

$$\zeta^n = \sum_j \varepsilon_j \Delta S_j [E_{z,j}^n]^2 + \sum_j \mu_j \Delta S_j \left( [H_{x,j}^n]^2 + [H_{y,j}^n]^2 \right) \quad (\text{IV. 28})$$

où  $\Delta S_j$  est la zone entourant le nœud  $j$ .

#### IV.10. Excitation de la source

Le but de la méthode sans maillage est de fournir une solution des équations de Maxwell à des problèmes réels d'ingénierie et de physique. Ainsi, il faut pouvoir modéliser des sources physiques ou dans la méthode sans maillage nous allons simuler les champs électromagnétiques en fonction du temps. Les excitations de la source seront transitoires et lors du choix du type de la source, les caractéristiques de sa signature temporelle doivent être prises en compte ou la largeur de bande source, qui détermine la bande de fréquence sur laquelle les champs électromagnétiques seront propagés dans la simulation sans maillage. Comme nous l'avons vu dans la section II.4.1 du chapitre II, c'est-à-dire puisque les méthodes sans maillage RBF ou

RPIM sont basées sur la distribution des nœuds la plus petite longueur d'onde est régie par la fréquence la plus élevée de la bande et dicte donc la discrétisation spatiale globale. L'une des signatures les plus couramment utilisées pour les excitations de sources dans la modélisation numérique temporelle est l'impulsion Gaussienne:

$$g(t) = \exp\left(-\frac{(t-t_0)^2}{T^2}\right) \quad (\text{IV. 29})$$

où  $t_0$  est le délai et  $T$  est la largeur de l'impulsion. L'impulsion Gaussienne a la caractéristique d'être à la fois limité dans le temps et limité dans la bande. La transformée de Fourier de l'impulsion Gaussienne (IV.29) est

$$G(f) = T\sqrt{\pi} \exp\left(-(\pi f)^2 T^2\right) \exp(-j2\pi f t_0) \quad (\text{IV. 30})$$

L'énergie maximale dans l'impulsion est à  $f = 0 \text{ Hz}$ . L'impulsion a une demi-bande passante de  $f_{bw} = 1/(\pi.T)$ . L'amplitude décroît rapidement, de tel sorte que la magnitude chute à moins de 1% à environ deux fois la bande passante. Par conséquent, on suppose généralement que la fréquence la plus élevée de l'excitation des impulsions Gaussiennes est  $f_{max} = 2/(\pi.T)$ . La longueur d'onde correspondante peut être utilisée pour déterminer la discrétisation spatiale des méthodes temporelles ci-abordées. À l'instant  $t = 0$ , l'impulsion  $g(t)$  est initialement activée c'est à dire n'est pas exactement nul. Cette discontinuité apparente peut causer du bruit numérique dans la simulation. En règle générale, il est préférable de choisir de  $t_0 \geq 4.5.T$  pour minimiser le bruit à haute fréquence [63].

Dans cette thèse, deux concepts sont appliqués à travers l'utilisation de l'impulsion Gaussienne. Premièrement, les courants sont injectés sous forme de sources molles (*soft source*), c'est-à-dire que l'énergie est accumulée dans les composants de champ calculés. Deuxièmement, en utilisant des sources dures (*hard source*), les valeurs de champ sont obligées de spécifier des valeurs par une fonction source. Les sources dures sont utilisées pour injecter de l'énergie à partir d'une limite, par exemple pour les problèmes de guides d'ondes.

L'organigramme de l'algorithme RPIM est présenté dans la figure IV.3. La génération des distributions de deux nœuds échelonnés, détermination de la matrice des moments et le calcul des fonctions de forme sont tous deux effectués au cours d'une étape de prétraitement. Les champs électriques et magnétiques sont ensuite mis à jour de manière itérative. La mise à jour de chaque

composant de champ est implémentée sous forme de somme sur tous les nœuds du domaine de support correspondant. La fin de la simulation est atteinte lorsque l'énergie a traversé le système.

Finalement on peut dire que la méthode RBF fait une partie de la méthode RPIM à travers leur combinaison avec la méthode PIM.

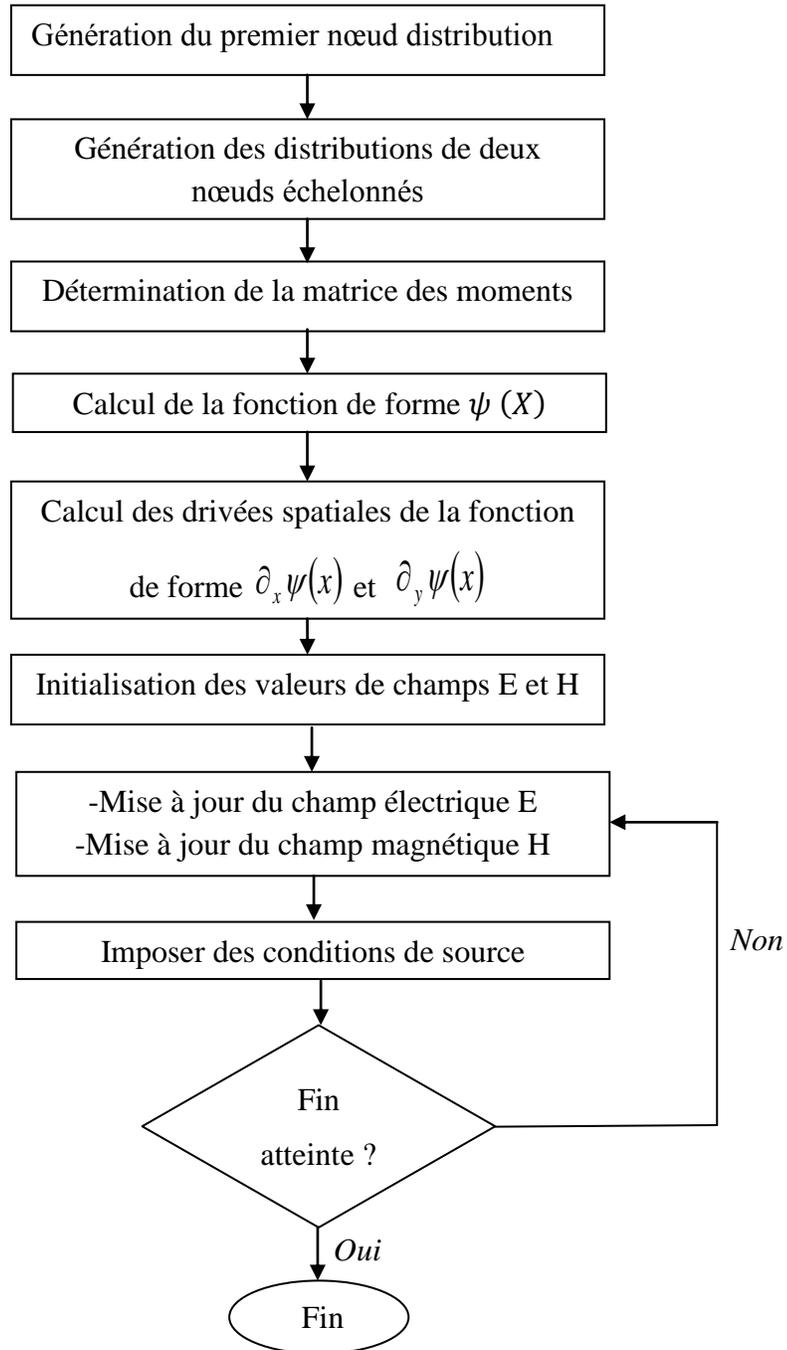


Figure IV.3 : Organigramme des méthodes RBF et RPIM permettant de résoudre les équations de Maxwell de premier ordre dans le domaine temporel.

## IV.11. Exemples numériques et discussion

Dans cette section, la précision, l'efficacité et la stabilité des méthodes sans maillage explicites proposées sont d'abord vérifiées numériquement à travers trois exemples, ensuite, les résultats obtenus sont comparés à ceux de la méthode classique FDTD.

### IV.11.1. Analyse de champs électromagnétiques par la méthode combinée RBF-FDTD

Le but de cet exemple est d'appliquer la méthode explicite sans maillage RBF, avec trois types de support local des fonctions de base, à savoir Gaussienne, Wendland-C4-CRBF et IMQ, pour résoudre les équations de Maxwell (IV.9) dans le domaine temporel dans une seule dimension. La raison d'être de cet exemple est de vérifier les problèmes de stabilité liés aux dernières fonctions de base dans le domaine local et de fournir les meilleures solutions pour l'analyse des problèmes électromagnétiques transitoires. De plus, la méthode RBF est très économique en termes de temps de calcul et de charge de programmation par rapport à la méthode conventionnelle FDTD. De plus, la présente étude tente de faire la lumière sur les erreurs de la méthode FDTD.

Afin de confirmer la méthode proposée, une comparaison des résultats de la simulation a été effectuée entre la RBF sans maillage avec trois types de fonctions de base (Gaussienne, Wendland-C4-CRBF, IMQ) et la méthode FDTD sur un conducteur électrique parfait 1-D (voir la figure IV.4). La composante du champ électrique tangentiel doit être égale à zéro aux points de collocations des limites à chaque mise à jour du pas de temps.



Figure IV.4 : Répartition des points de collocation et de test en 1-D.

Dans cette figure, la distribution des points de collocation et des points de test est uniforme. Nous supposons que  $N_x$  est le nombre de points de collocation et que  $n_x$  est les points de test; alors que  $h$  est la distance entre deux points de collocation successifs. La région de calcul mesure un mètre

de long, le point d'excitation actuel est à  $J_p$  ( $x = 0.35 \text{ m}$ ) et le point de mesure est à  $obs1$  ( $x = 0.85 \text{ m}$ ). Supposons que la source d'excitation  $J_y$  dans (IV.9.b) est une impulsion Gaussienne, qui est exprimée par la relation (IV.29) où  $t_0 = 3 \times 10^{-9} \text{ s}$ ,  $T = 0.5 \times 10^{-9} \text{ s}$ .

Cette analyse permet de déduire que: le nombre de points de collocation  $N_x$  représente le nombre de points E du champ électrique et le nombre de points de test  $n_x$  représente le nombre de points H du champ magnétique. Dans le calcul électromagnétique, les paramètres de forme  $a_c$  dans la fonction Gaussienne,  $d_0$  dans la fonction C4-CRBF et  $C$  dans la fonction IMQ, doivent être ajustés avec soin, afin d'obtenir une somme de fonctions de forme égale à l'unité comme nous avons abordées dans la relation (IV.21), puis à assurer la stabilité du schéma de calcul par le critère (IV.22). Les données d'entrée utilisées pour les calculs numériques présentés dans les figures IV. (5-7) sont :  $N_x = 101$ ,  $n_x = 100$  et  $d_{max} = 1.1h$ .

La figure IV.5 montre une comparaison des résultats pour la composante  $E_y$  au point d'observation  $obs1$ , pour les oscillations effectives sur 20 périodes en condition au limite de PEC.

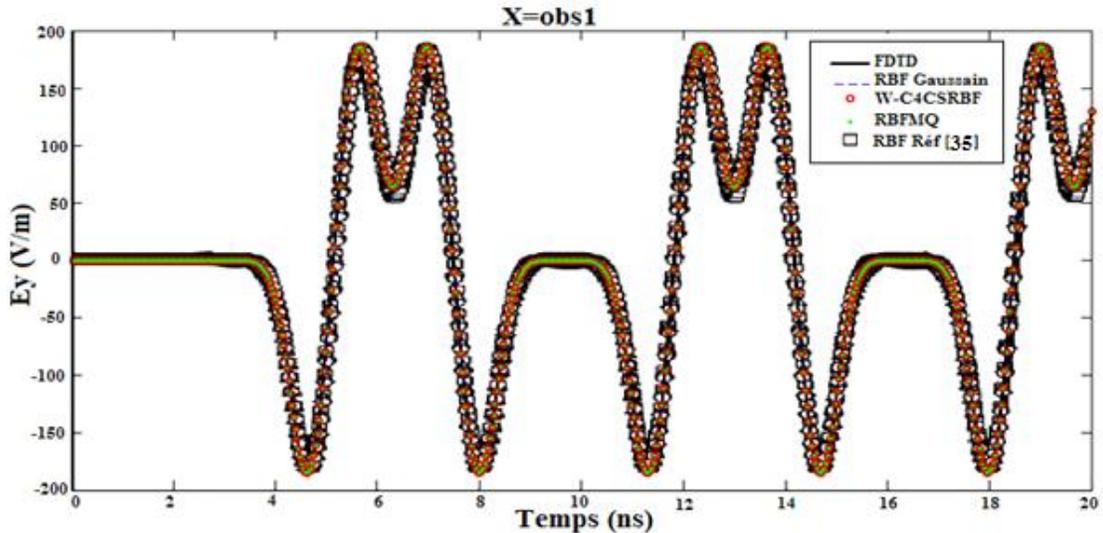
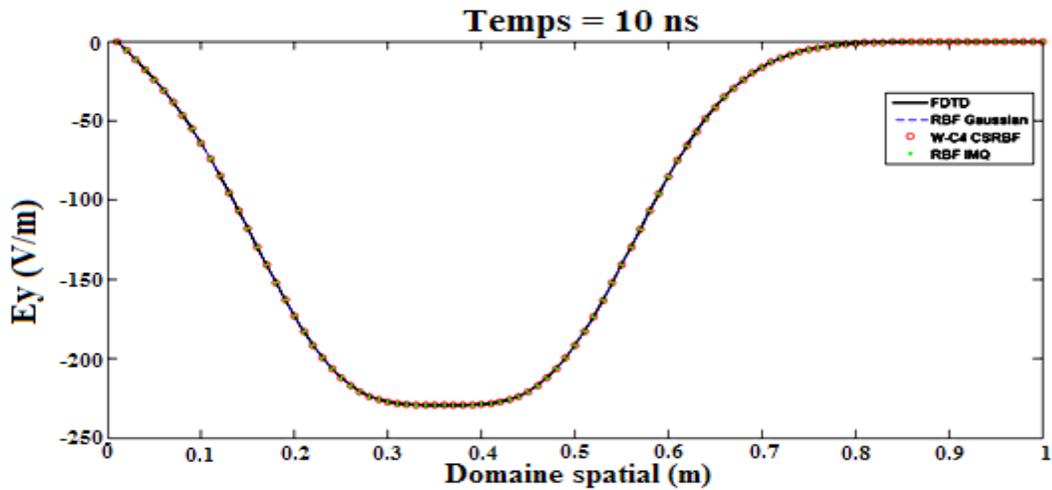


Figure IV. 5 :  $E_y$  au point d'observation  $obs1$  en utilisant la condition aux limites de PEC.

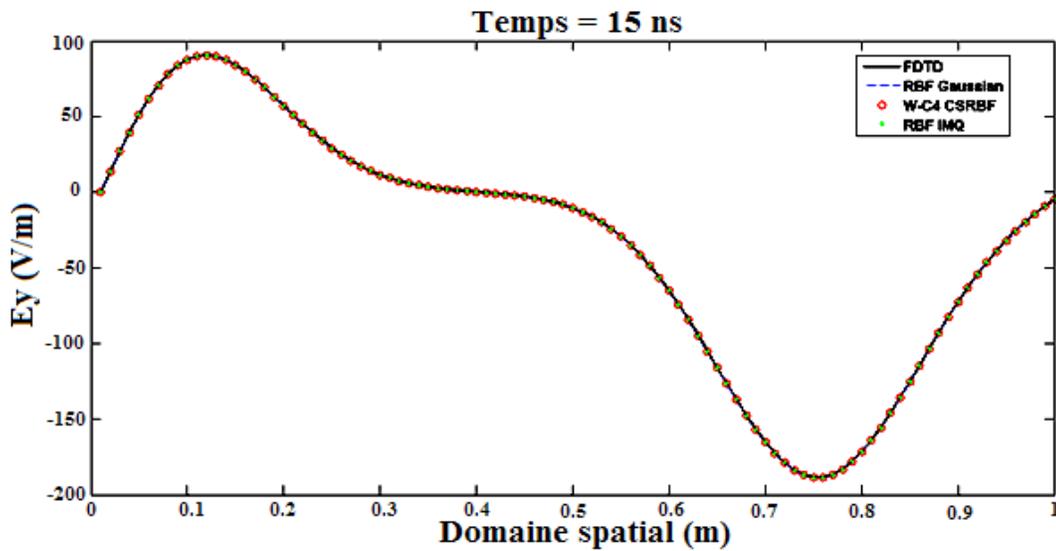
1. Trois types de fonctions de base de support local différents, Gaussienne, C4SRBF et IMQ, pour lesquels nous avons obtenu des résultats identiques.
2. Les résultats de la méthode RBF et de la méthode FDTD traditionnelle sont identiques.

3. C'est le même résultat obtenu dans la méthode RBF-FDTD avec les données de la figure 3-5-a de [35], et nous les avons trouvés similaires, bien que la fonction de base de [35] est de support global et le nombre de points de test et de collocation différent [35].

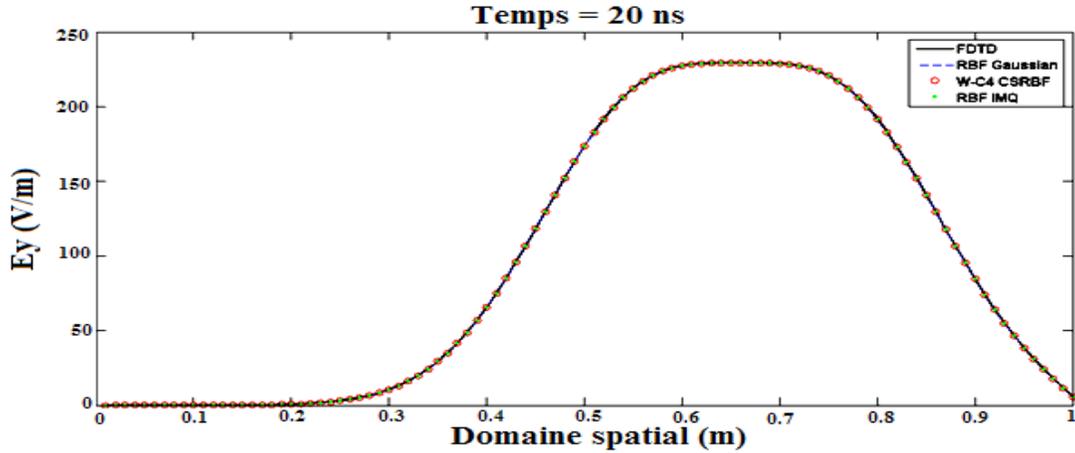
La figure IV.6 montre que les résultats obtenus sont identiques en comparant les profils spatiaux de propagation calculés respectivement à la méthode RBF pour trois types de support local, d'une part et les mêmes résultats de la méthode RBF avec la méthode FDTD, pour  $t = 10 \text{ ns}$ ,  $t = 15 \text{ ns}$  et  $t = 20 \text{ ns}$ .



(a)



(b)



(c)

Figure IV. 6 : Evolution des profils spatiaux  $E_y$  pour les méthodes FDTD et RBF à  $t = 10 \text{ ns}$  (a),  $t = 15 \text{ ns}$  (b) et  $t = 20 \text{ ns}$  (c), en utilisant la condition au limite du PEC.

Afin de montrer la cohérence du schéma de calcul pour les arguments temporels à long terme et pour la méthode RBF et la méthode FDTD; la distribution spatiale de  $E_y$  est représentée sur la figure IV.7 à  $t = 150 \text{ ns}$ , nous avons comparé entre eux et nous avons obtenu des résultats identiques. Nous avons comparé les mêmes résultats aux données de la figure 6 de [35], et nous les avons trouvés similaires. On peut dire dans cette étude que le choix du type de support et du nombre de points n'affecte pas complètement les résultats obtenus.

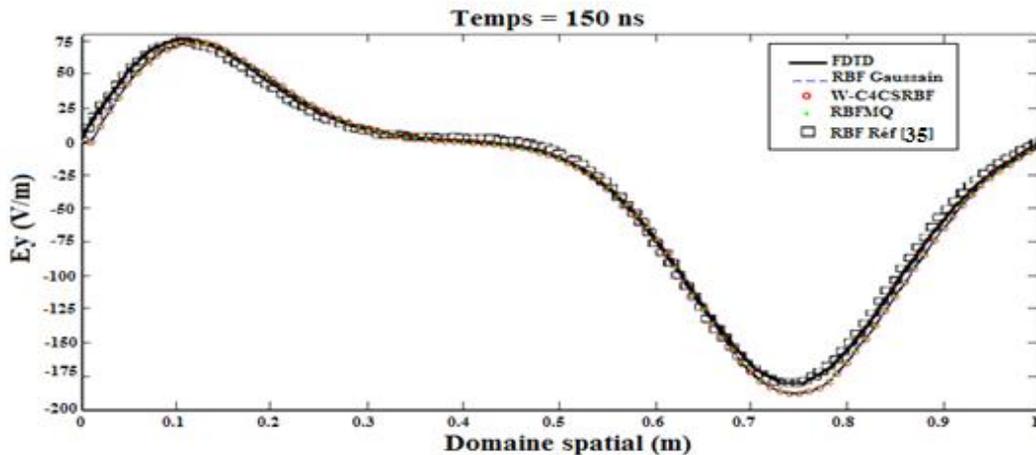


Figure IV.7 : Profils spatiaux  $E_y$  donnés par la méthode RBF-FDTD à  $t = 150 \text{ ns}$ , en utilisant la condition aux limites de la PEC.

Dans cet exemple, une comparaison a été effectuée entre les méthodes classiques FDTD et RBF avec des fonctions de base radiales. Les résultats numériques ont montré que la stabilité numérique de la méthode proposée est liée au rayon d'un domaine de support local et aux paramètres de forme des fonctions de base. Cependant, la construction de la matrice de fonctions de forme dans la méthode RBF locale est plus complexe que celle de la méthode RBF globale. De plus, l'utilisation des fonctions de base localement Gaussienne et C4-CRBF est plus complexe que celle de l'IMQ; sinon, les fonctions de base précédentes posent un problème de stabilité. Afin d'éliminer le problème d'instabilité des deux fonctions de base ci-dessus, chaque nœud du support local doit avoir son propre paramètre approprié. Il a été constaté que l'utilisation de la méthode RBF est très économique en termes de temps de calcul et de charge de programmation.

#### IV.11.2. Simulation des modes TM dans le domaine temporel par la méthode RBF

Dans cet exemple, nous étudions l'effet de différentes propriétés électromagnétiques sur l'efficacité de la simulation avec les méthodes sans maillage et l'impact de la distribution des nœuds sur le choix de la meilleure source douce  $J_z$  pour l'excitation. En guise de test, un guide d'onde rectangulaire standard WR-90 rempli d'air uniforme et rempli de permittivité diélectrique périodique est simulé à l'aide de la résolution des équations de Maxwell (IV.10) du support global dans le domaine temporel de 2-D.

Pour vérifier la méthode proposée et pour construire l'excitation Gaussienne (IV.29) de la source  $J_z$  qui est peut être construite pour contenir toutes les fréquences jusqu'à une limite supérieure qui est liée à un facteur. Ce facteur, qui est la proportion de la longueur d'onde de fréquence la plus élevée par rapport à la taille de cellule unitaire, est désigné par le nombre de cellules  $n_c$  par longueur d'onde minimale  $\lambda_{min}$ . En conséquence,  $f_{max}$  peut être réécrite [63] :  $f_{max} = v/\lambda_{min} = v/(\Delta S_{max} \cdot n_c)$ , ou  $v$  est la vitesse d'onde et  $\Delta S_{max} = \max(\Delta x, \Delta y)$  est le maximum des dimensions de la cellule, alors, la largeur  $T$  et le retard  $t_0$  de (IV.29) sont devenues :  $T = (\Delta S_{max} \cdot n_c)/2v$  et  $t_0 = 4.5 T$ , une comparaison des résultats de la simulation a été faite entre la méthode RBF sans maillage et la méthode FDTD à l'aide du guide d'onde WR-90 de dimensions ( $w=22.86 \text{ mm}$ ,  $h=10.16 \text{ mm}$ ) avec deux propriétés électromagnétiques différentes: le guide d'ondes est rempli d'air à permittivité diélectrique uniforme, et le guide d'ondes est rempli d'une permittivité diélectrique périodique ( $\epsilon_1 = 2.94$ ,  $\epsilon_2 = 2.77$ ,  $L_1 = 1.25 \text{ mm}$ ,  $L_2 = 0.84 \text{ mm}$ ), comme illustré dans la figure IV.8.

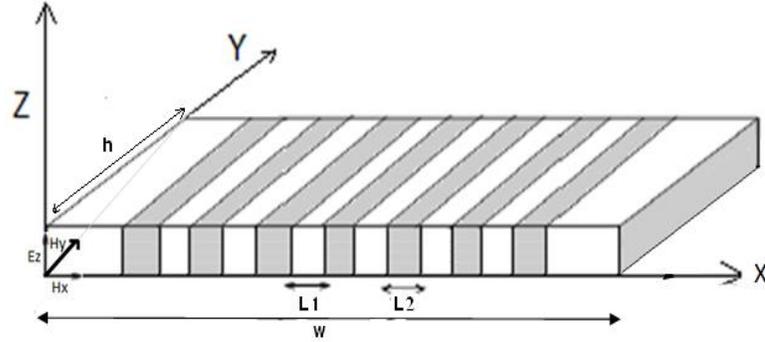


Figure IV.8 : Géométrie du guide d'onde rectangulaire WR-90 rempli par des permittivités diélectriques périodique  $\epsilon_1 = 2.94$ ,  $\epsilon_2 = 2.77$ .

Les deux structures différentes sont excitées par la source de courant  $J_z$  à  $J_P(22\Delta x, 7\Delta y)$  et le point de mesure est à  $obs(18\Delta x, 3\Delta y)$ . La distribution des nœuds de collocation dans la région de simulation est uniforme:  $31 \times 14$ , toutes les composantes de champ du domaine spatial sont échantillonnées sur le même nœud. La construction du point source d'excitation situé au nœud de collocation selon (IV.29), qui indique  $n_c = 10$  nœuds par longueur d'onde minimale. Le paramètre de forme de la RBF Gaussienne global  $a_c$  est pris avec précision. À des fins de comparaison, la grille de la méthode FDTD est également définie sur  $31 \times 14$ . Pour un mode TM, une condition limite de conducteur électronique parfait (PEC) suffit; le champ électrique tangentiel doit être mis à zéro à chaque pas de temps.

Le champ électrique dans le domaine temporel au point d'observation  $obs$  est illustré à la figure IV.9, où le guide d'ondes WR-90 est rempli d'air uniforme. Les graphiques montrent la comparaison des résultats pour la composante  $E_z$  entre la méthode RBF et la méthode FDTD en utilisant la condition de limite PEC. Nous avons donné des résultats identiques.

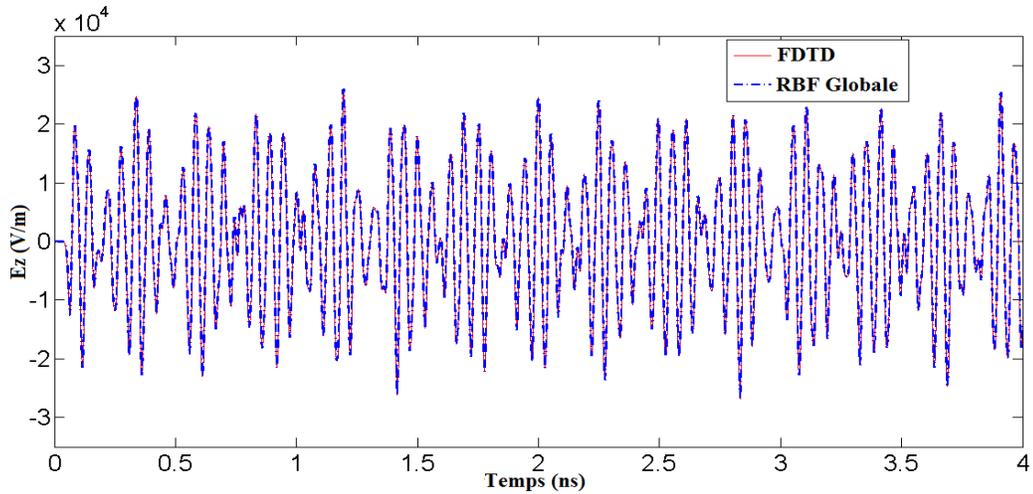


Figure IV. 9 : Évaluation du domaine temporel de  $E_z$  en *obs* avec RBF et FDTD dans le guide d'ondes WR-90 rempli d'air en utilisant la condition aux limites de la PEC.

La comparaison de spectre de fréquence normalisée entre la méthode RBF et la méthode FDTD obtenue par transformée de Fourier au point d'observation *obs* dans les deux différents guides d'ondes sont tracée sur les figures IV.10 et IV.11.

Dans la figure IV.10, nous pouvons voir cinq pics superposés les uns sur les autres. Les cinq impulsions représentent la fréquence de résonance des modes  $TM_{11}$ ,  $TM_{21}$ ,  $TM_{31}$ ,  $TM_{41}$  et  $TM_{22}$ .

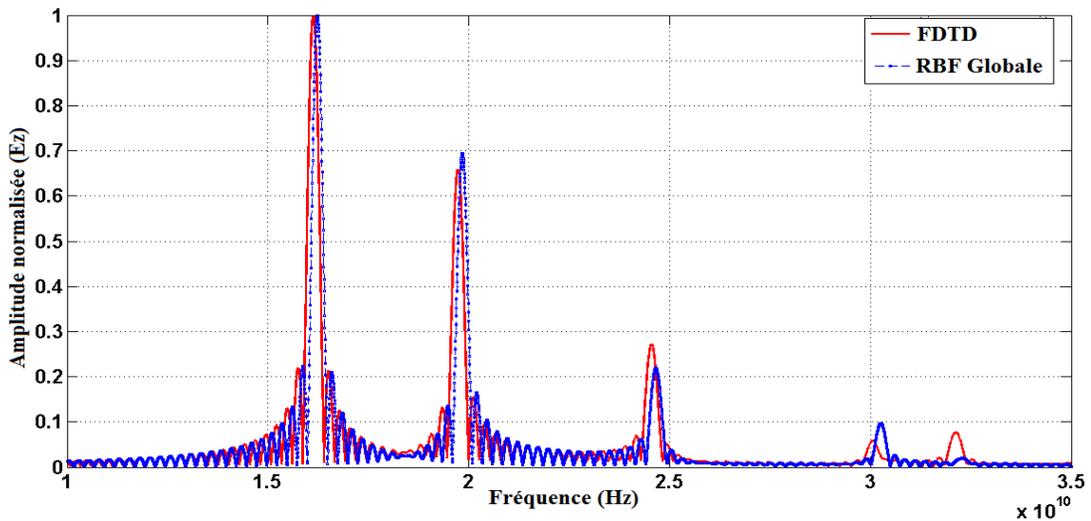


Figure IV. 10: Evaluation de l'amplitude normalisée  $E_z$  en *obs* à la fréquence de résonance par les méthodes RBF et FDTD pour WR-90 rempli d'air à permittivité diélectrique uniforme.

Le tableau IV.2 indique leurs valeurs de fréquence de coupure et leur solution théorique en mode guide d'onde, ainsi que les erreurs relatives entre les valeurs de fréquence théorique et la fréquence de résonance obtenues par les méthodes RBF et FDTD. Nous comparons les mêmes erreurs relatives de (TM<sub>11</sub>, TM<sub>31</sub>) obtenues avec les données d'erreur relatives de [39], et nous avons trouvé des valeurs plus petites.

Modes	$f_c \cdot \text{theo}$	$f_c \cdot \text{FDTD}$	$Er_{\text{FDTD}} \%$		$f_c \cdot \text{RBF}$	$Er_{\text{RBF}} \%$	
	( $10^{10}$ ) Hz	( $10^{10}$ ) Hz	$Er_c$	$Er$ [39]	( $10^{10}$ ) Hz	$Er_c$	$Er$ [39]
TM <sub>11</sub>	1.6156	1.615	0.037	0.087	1.616	0.024	0.270
TM <sub>21</sub>	1.9753	1.970	0.015		1.975	0.015	
TM <sub>31</sub>	2.4606	2.459	0.065	0.077	2.461	0.016	0.077
TM <sub>41</sub>	3.0114	3.010	0.046		3.020	0.285	
TM <sub>22</sub>	3.2313	3.224	0.226		3.233	0.040	

Tableau IV. 2. Fréquence des modes TM et erreurs relatives par les méthodes FDTD et RBF dans le guide d'ondes WR-90

On peut dire que les erreurs relatives sont très petites et que le guide d'onde approximatif WR-90 est rempli d'air avec des solutions de permittivité diélectrique uniformes.

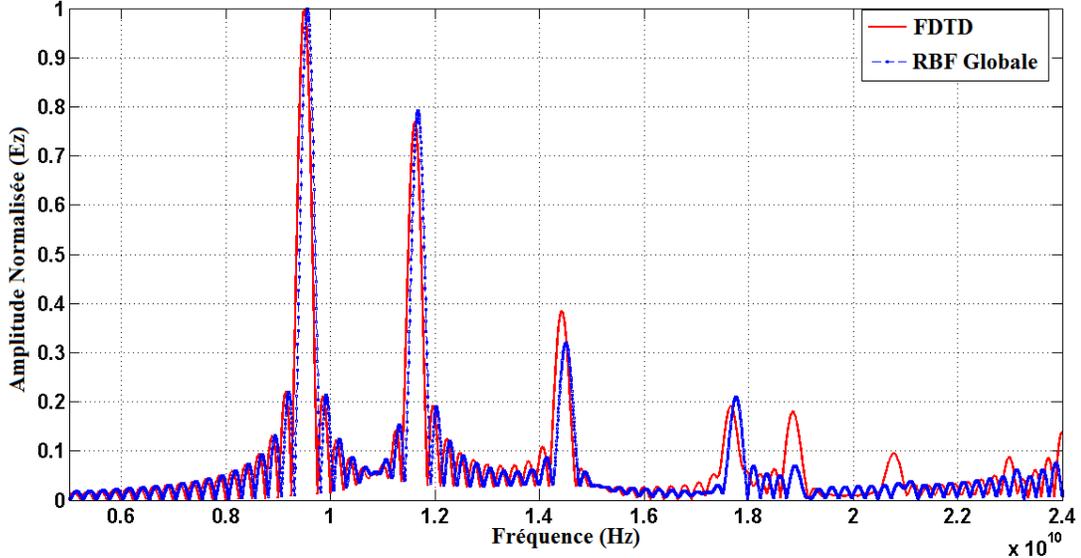


Figure IV. 11: Evaluation de l'amplitude normalisée  $E_z$  en *obs* à la fréquence de résonance par les méthodes RBF et FDTD pour WR-90 rempli par permittivités périodique ( $\epsilon_1, \epsilon_2$ ).

D'après cette figure, l'apparition de leurs fréquences de modes de résonance dans une petite plage de fréquences d'un guide d'onde WR-90 rempli de permittivité périodique est due à la périodicité diélectrique réduisant les pertes dans le guide d'ondes.

Dans cette étude, nous avons présenté des simulations bidimensionnelles de problèmes électromagnétiques transitoires basées sur la méthode sans maillage RBF, qui a été appliquée à un guide d'ondes standard WR-90 avec deux propriétés différentes: la permittivité diélectrique uniforme et périodique et nous avons comparé les résultats avec ceux obtenus par la FDTD. Nous avons également obtenu de bons résultats dans le domaine de la transformation de Fourier.

### IV.11.3. Modélisation temporelle des filtres en bande X par la méthode UPML-RPIM

Les guides d'ondes sont à la base de la conception d'un grand nombre de dispositifs hyperfréquences, tels que les filtres et les filtres passe-bande chargés de résonateur à anneau divisé SRR (Split ring resonator), qui ont de nombreuses applications dans les systèmes de télécommunication spatiale et les radars aéroportés en raison de leur facteur de qualité  $Q$  élevé, de leur faible poids capacité de tenue en puissance et stabilité thermique. Plusieurs filtres de guides d'ondes sont proposés dans les littératures [64]-[67], la plupart d'entre eux sont conçus par formes ondulées ou par discontinuités métalliques. Cependant, ces filtres ont une forte atténuation qui affecte leur largeur de bande ainsi que les obstacles de fabrication dus à la mise en forme des structures métalliques. Ces inconvénients peuvent être résolus en utilisant des discontinuités diélectriques ou des métamatériaux dans le guide d'ondes. Par conséquent, un guide d'onde vide a une permittivité à charge homogène [68]-[70], telle que la permittivité périodique et les métamatériaux d'indice de zéros anisotropes ZIM (Zéro index metamaterials) [71]-[73]. Cependant, ils sont de plus en plus utilisés dans les communications par satellite et mobile en raison du fait que leur réponse en fréquence dépend de l'épaisseur de la couche de permittivité et des valeurs de la permittivité. Une théorie rigoureuse de l'analyse électromagnétique de ce type de structures est développée et plusieurs méthodes numériques ont été conçues pour leur analyse en résolvant les équations de Maxwell.

Dans ce contexte, une implémentation de la méthode RPIM est étudiée dans le cadre de la résolution d'équations à deux dimensions de Maxwell (IV.23) en mode TM. Afin de valider l'efficacité et la précision de la méthode proposée, les méthodes numériques RPIM et FDTD sont appliquées sur un guide d'onde rectangulaire tronqué avec des PML des deux côtés et rempli avec

une permittivité diélectrique périodique prise en sandwich entre des métamatériaux anisotropes à zéro index (AZIM) à les deux cotés. La permittivité diélectrique périodique et les compacts de métamatériaux (AZIM) dans la configurable des filtres de guides d'ondes sont analysés par le comportement du champ électromagnétique sur une longue période; l'énergie totale à l'intérieur du domaine de calcul est considérée.

Dans cette étude, deux filtres de guides d'ondes sont modulés par la méthode explicite sans maillage RPIM, la comparaison étant faite avec la FDTD traditionnel.

### IV.11.3.1. Filtre de guide d'ondes rempli par une permittivité périodique

Nous considérons la géométrie du filtre de guides 2-D WR-90 rempli de la permittivité diélectrique périodique de  $(\epsilon_1 = 2, \epsilon_2 = 4)$  épaisseur des couches correspondantes  $(L_1, L_2)$  avec condition aux limites de PEC, tronquée aux deux extrémités avec PML et uniforme. La distribution des nœuds pour les champs électromagnétiques est illustrée à la figure (IV.12 .a). Le mode fondamental  $TE_{10}$  est excité dans le guide d'ondes de permittivité diélectrique périodique sur la source plane via une impulsion Gaussienne qui s'exprimé par la relation (IV.29), où  $f_{max} = 12 \text{ GHz}$ ,  $T = 2 / (\pi f_{max})$  et  $t_0 = 4.5T$ . Pour enregistrer les données temporelles, un point d'observation  $P_1$  est défini sur la figure IV.12.a [74].

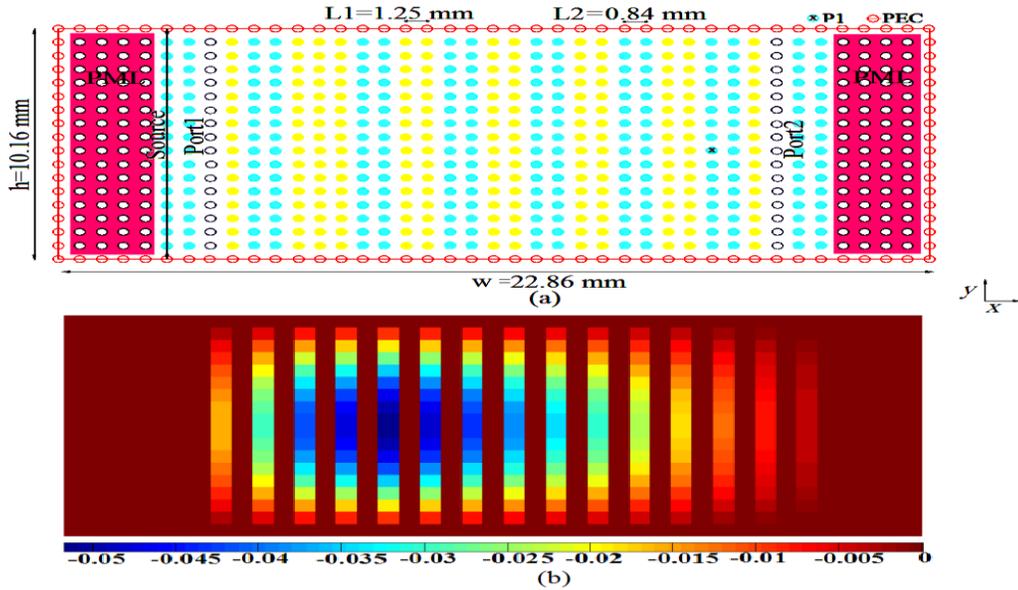


Figure IV. 12: Illustration d'un filtre de WR-90 rempli par une permittivité périodique (a), (b) distribution du champ électrique  $E_z$  pour l'impulsion large bande à  $t = 4 \text{ ns}$ .

Le problème a été résolu par le schéma RPIM explicite et les résultats obtenus sont comparés aux données de la méthode FDTD traditionnelle. Par conséquent, la taille du pas de temps  $\Delta t$  de la méthode sans maillage RPIM explicite est déduite de la distance la plus courte entre deux nœuds quelconques du calcul et est satisfaite à la condition de stabilité ci-dessus (IV.22). À des fins de comparaison, la grille de la méthode FDTD est également utilisée comme méthode RPIM explicite. Le paramètre de forme du Gaussien local est  $a_c = 0.005$ , le domaine d'influence de chaque point du schéma d'interpolation est  $d_{max} = 1.7 \cdot d_c$ , où  $d_c$  est la distance moyenne des nœuds dans le domaine de support local. La figure IV.12.b montre la distribution de  $E_z$  déposée électriquement à travers des couches diélectriques qui est obtenue par le procédé RPIM explicite à  $t = 4 \text{ ns}$ .

Le champ électrique dans le domaine temporel de  $E_z$  au point d'observation  $P_1$  est représenté sur la figure IV.13, où le filtre de guide d'ondes WR-90 est rempli par une permittivité périodique. Les graphiques montrent la comparaison des résultats pour la composante  $E_z$  entre la méthode RPIM et la méthode FDTD en utilisant les PML aux deux extrémités du guide d'ondes. Nous avons trouvé des résultats identiques.

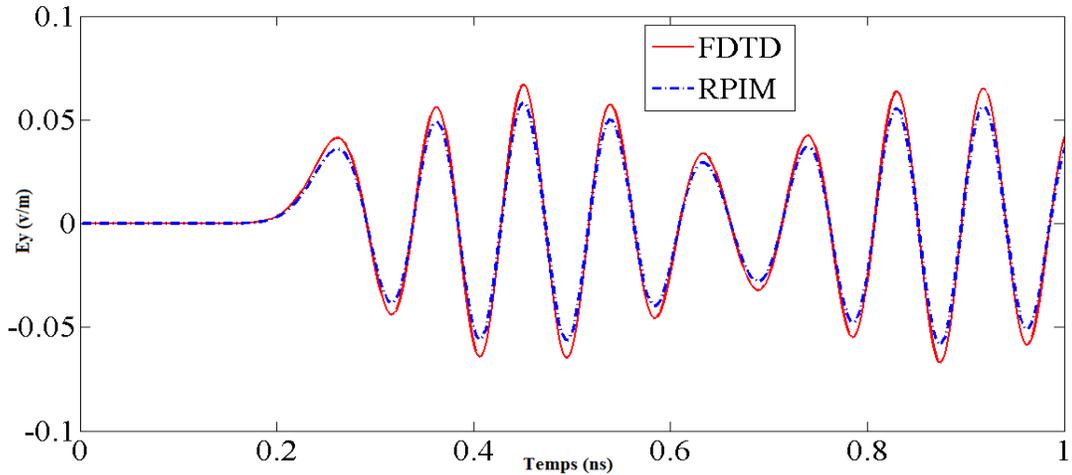


Figure IV. 13: Comparaison du domaine temporel du champ électrique  $E_z$  au point d'observation  $P_1$  par les méthodes RPIM et FDTD dans un filtre à guide d'onde.

Les paramètres de diffraction  $S_{11}$  et  $S_{21}$  ont été obtenus numériquement par l'intermédiaire du port 1 et du port 2, en utilisant les relations de la section IV.9. Les résultats de comparaison obtenus par les méthodes RPIM et FDTD des coefficients de diffraction dans le filtre à guide d'ondes WR-90 rempli de permittivité diélectrique périodique sont présentés à la figure IV.14.

Les résultats calculés par la méthode RPIM sans maillage et la méthode FDTD conventionnelle montrent un bon accord.

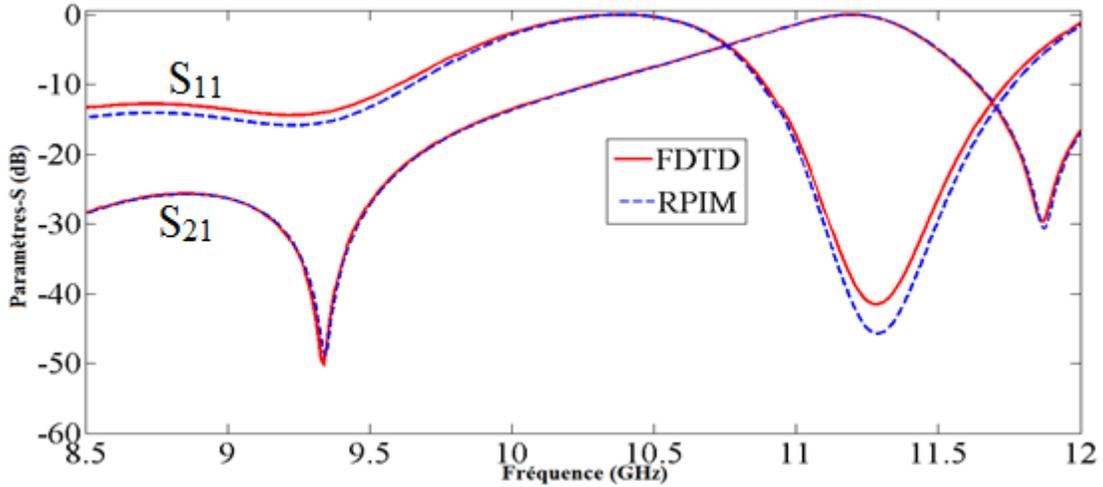


Figure IV. 14: Paramètres de diffraction  $S$  du filtre à guide d'ondes rempli par une permittivité périodique obtenue par les méthodes RPIM et FDTD.

Cette figure représente la caractéristique d'un filtre résonateur à guide d'onde WR-90 chargé par 15 couches de permittivité diélectrique travaillant en bande X. Il s'agit d'un filtre passe-bande dont la fréquence centrale est  $f_0 = 11.29 \text{ GHz}$ , la largeur de bande relative est de 8.23%. La permittivité diélectrique et le nombre de couches sont choisis avec précision. En effet, la réponse en fréquence sous la forme de caractéristiques de filtre passe-bande nécessite de nombreuses couches de permittivité diélectrique.

#### IV.11.3.2. Résonateur SRR métamatériaux AZIM

Nous considérons la géométrie du guide d'ondes à résonateur à anneau divisé (SRR) WR-90 a un objet carré revêtu de la condition limite PEC de longueur  $L_1 = 3.048 \text{ mm}$  qui est prise en sandwich par deux métamatériaux à AZIM sur deux cotés de permittivité  $\epsilon_1 = 0.0001$  correspondante de  $d = 0.762 \text{ mm}$  et est encastré dans le haut et le dos avec l'air environnant. Le SRR est tronqué des deux côtés avec des PML et une distribution de nœud uniforme pour les champs électromagnétiques, discrétisée avec  $\Delta x = \Delta y = 0.5715 \text{ mm}$  dans les directions  $x$  et  $y$ , comme illustré à la figure IV.15 [74]. Le mode fondamental  $TE_{10}$  est excité dans le résonateur SRR de AZIM sur la source plane via une impulsion Gaussienne (IV.29) de la  $f_{max} = 12 \text{ GHz}$ .

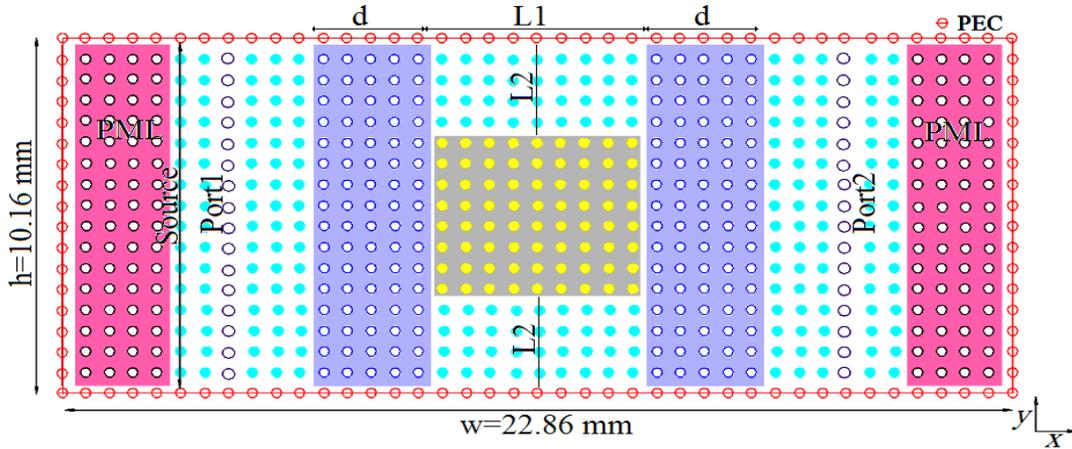


Figure IV. 15 : Géométrie du résonateur à filtre de guide d'ondes SRR rempli par ZIM.

La figure IV.16 montre la réponse en fréquence pour le mode fondamental d'un guide d'ondes SRR chargé avec des métamatériaux ZIM. Il est clair que les résultats du schéma RPIM et du procédé FDTD sont en bon accord. L'examen des courbes obtenues montre un filtre passe-bande qui fonctionne dans la bande X et des caractères de fréquence centrale  $f_0 = 9.136 \text{ GHz}$  et d'une largeur de bande de  $432 \text{ MHz}$ .

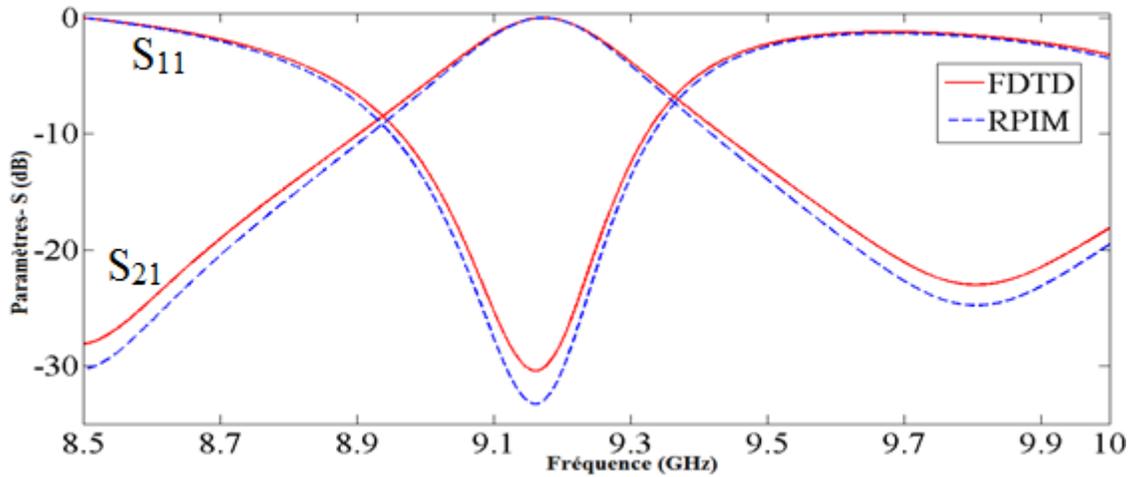


Figure IV.16 : Comparaison entre la méthode RPIM et la méthode FDTD des paramètres  $S$  dans un filtre SRR chargé avec ZIM.

La comparaison de l'énergie normalisée totale entre le guide d'ondes de permittivité diélectrique périodique et le filtre SRR chargé de métamatériaux à indice zéro au cours de la simulation est enregistrée à tout moment par un procédé RPIM explicite et est tracée sur la

figure IV.17; à partir de cette figure, l'absorption temporelle de l'onde par les deux PML du guide d'onde rempli par la permittivité diélectrique est inférieure à celle du guide d'ondes SRR rempli de métamatériaux ZIM bien qu'ils aient les mêmes pertes  $\sigma_x$ . Par conséquent, les métamatériaux ZIM sont des filtres plus compacts et reconfigurables que les diélectriques.

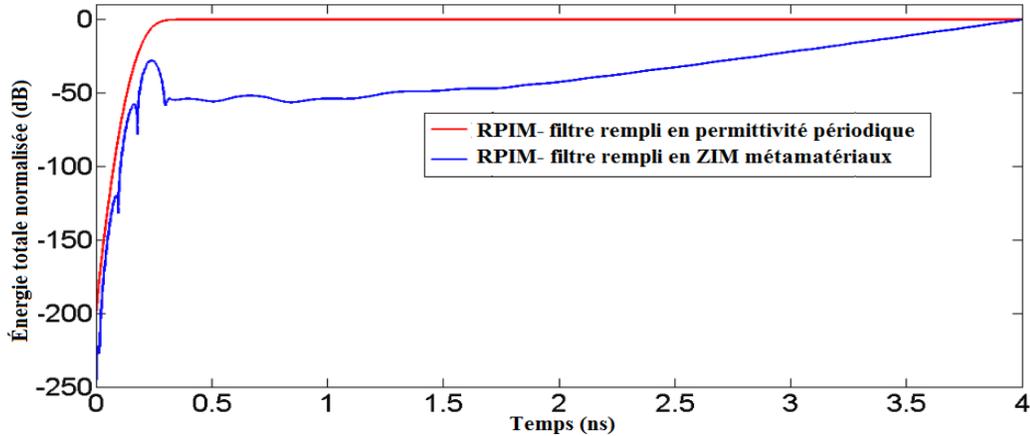


Figure IV. 17 : Energie totale à l'intérieur des deux filtres avec différente propriété électromagnétique.

Dans ces deux derniers exemples, nous avons présenté deux filtres hyperfréquences en bande X, basés sur un guide d'onde rectangulaire WR-90 et chargés par une permittivité périodique diélectrique et des métamatériaux à indice zéro. Les filtres de guides d'ondes sont conçus et simulés à l'aide de la méthode RPIM sans maillage. Leurs réponses en fréquence sont comparées à la méthode FDTD. Les deux filtres montrent la supériorité computationnelle considérable du RPIM par rapport à la méthode FDTD traditionnelle à base de grille rectangulaire dans la modélisation des limites conformes. Des expériences numériques sur les filtres de guides d'ondes démontrent la capacité du RPIM à fournir des solutions perfectionnées en termes de vitesse de calcul et de charge de programmation par rapport à la méthode FDTD.

Dans cette étude, les métamatériaux sont plus appropriés pour les résonateurs SRR que les diélectriques avec filtres passe-bande et confinent l'énergie le plus longtemps possible à l'intérieur du filtre. Leurs bandes de pertes sont donc éliminées.

#### IV.12. Conclusion

Les méthodes sans maillage à fonction de base radiale (RBF) et à interpolation de point radial (RPIM) dans le domaine temporel de Maxwell du premier ordre ont été introduites. Elles peuvent être vues comme une forme généralisée de la méthode FDTD, offrant plus de liberté pour la modélisation de structures complexes et une précision accrue du fait de la liberté de placement des nœuds et du choix de la taille du domaine de support local. Elles conservent les propriétés souhaitées de la méthode du domaine temporel pour la simulation de larges bandes de fréquence dans un seul calcul et la mise en œuvre facilitée de structures micro-ondes. Les aspects importants de la méthode, allant de la disposition des nœuds échelonnés à la création de la distribution à deux nœuds, en passant par le traitement des limites, des sources et le choix d'un pas de temps stable, ont été discutés. Cependant, la matrice des moments de la méthode RBF souffre d'un problème de singularité de faible précision que celle de la méthode RPIM à cause des paramètres des fonctions de base qui a été résolue en les assemblant avec la méthode PIM qui est basée sur un fonction de base polynôme ainsi nous obtenons la méthode RPIM. À la fin de ce chapitre nous avons fait des simulations sur les méthodes sans maillage ci-dessus à travers des différents exemples numériques en comparant les résultats numériques avec la méthode FDTD.

Ces exemples nous ont permis de conclure que les méthodes RBF et RPIM fournissent un meilleur compromis entre la précision, l'efficacité et le temps de calcul que la méthode classique FDTD, cependant la présence du problème de singularité dans la méthode RBF qui est surmontée en ajoutant un polynôme à la méthode PIM. D'autre part les résultats obtenus présentent un problème de convergence lié au schéma explicite qui est utilisé pour estimer la dérivée temporelle, RPIM et RBF sont conditionnellement stable. Par conséquent, le pas de temps utilisé dans la RPIM ou la RBF est limité par la condition de Courant – Friedrichs – Lewy (CFL). Ainsi, le pas de temps est dérivé de la distance la plus courte entre deux nœuds quelconques du domaine. Dans les problèmes géométriques fins opérant à des fréquences élevées, la condition de stabilité CFL donne une durée de calcul prolongée. Les schémas implicitement stables et inconditionnels sont les meilleures techniques pour résoudre la restriction CFL, inhérente aux méthodes sans maillage RPIM comme nous allons vu dans le dernier chapitre.

**Références bibliographiques IV**

- [1] Maréchal. Y., J. L. Coulomb, G. Meunier, and G. Touzot, “Use of the Diffuse Element Method for Electromagnetic Field Computational,” in Digest of 5eme Biennial IEEE Conference, 1992.
- [2] Y. Maréchal, J. L. Coulomb, and G. Meunier, “Use of the Diffuse Element Method for Electromagnetic Field Computational,” *IEEE Trans. on Magnetics*, vol. 29, no. 2, pp. 1475–1478, 1993.
- [3] Y. Maréchal, J. L. Coulomb, and G. Meunier, “Use of the Diffuse Element Method for Electromagnetic Field Computational,” *IEEE Trans. on Magnetics*, vol. 30, no. 5, pp. 3558–3562, 1994.
- [4] M. C. Costa, J.-L. Coulomb, Y. Maréchal, and S. I. Nabeta, “An Adaptative Method Applied to the Diffuse Element Approximation in Process,” *IEEE Trans. on Magnetics*, vol. 37, pp. 3418–3423, 2001.
- [5] M. C. Costa, S. I. Nabeta, J. R. Cardoso, Y. Maréchal, and J. L. Coulomb, “Optimisation of a switched reluctance motor using experimental design method and diffuse elements response surface,” *IEE Proceedings-Science Measurements and Technology*, vol. 39, no. 15, pp. 3573–3599, 2004.
- [6] S. A. Viana and R. C. Mesquita, “Moving least-square reproducing kernel method for electromagnetic field computational,” *IEEE Trans. on Magnetics*, vol. 35, pp. 1372–1375, 1998.
- [7] S. A. Viana, “Estudo dos metodos sem malha na resolucao the problemas eletromgneticos,” Ph.D. dissertation, Department of Electrical Engineering, Federal University of Minas Gerais (UFMG), Brazil, 1998.
- [8] S. Liu, “Improvement of the Element-Free Galerkin method for electromagnetic field calculation,” *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, vol. 14, pp. 1866 – 1869, 2004.

- [9] L. Xuan, Z. Zeng, B. Shanker, and L. Udpa, “Element-Free Galerkin Method for Static and Quasi-Static Electromagnetic Field Computation,” *IEEE Trans. on Magnetics*, vol. 40, pp. 12 – 20, 2004.
- [10] L. Xuan, B. Shanker, Z. Zeng, and L. Udpa, “Element-Free Galerkin method in pulsed eddy currents,” *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, vol. 19, pp. 463 – 466, 2004.
- [11] S. Ho, S. Yang, G. Ni, H. Wong, and Y. Wang, “Numerical analysis of thin skin depths of 3-D eddy current problems using a combination of Finite Element and Meshless Methods,” *IEEE Trans. on Magnetics*, vol. 40, pp. 1354–1357, 2004.
- [12] S. L. Ho, S. Yang, H. C. Wong, E. W. C. Lo, and G. Ni, “Refinement computations of electromagnetic fields using FEM and meshless methods,” *IEEE Trans. on Magnetics*, vol. 41, pp. 1456 – 1459, 2005.
- [13] S. L. Lopes, J. M. Machado, and J. R. Cardoso, “The Element-Free Galerkin Method Applied to the Study of Fully Developed Magnetohydrodynamics Duct Flows,” *IEEE Trans. on Magnetics*, vol. 38, pp. 941–944, 2002.
- [14] D. W. Kim and H.-K. Kim., “Point Collocation methods using the fastmoving least square reproducing kernel approximation,” *IEEE Trans. On Magnetics*, vol. 40, pp. 1029–1032, 2004.
- [15] S. Yang, G. Ni, J. R. Cardoso, S. L. Ho, and J. M. Machado, “A combined wavelet-element free Galerkin method for numerical calculations of electromagnetic fields,” *IEEE Trans. On Magnetics*, vol. 39, pp. 1413 – 1416, 2003.
- [16] G. Ni, S. L. Ho, S. Yang, and P. Ni, “Meshless local Petrov-Galerkin method and its application to electromagnetic field computations,” *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, vol. 19, pp. 111 – 117, 2004.
- [17] S. L. Ho, S. Yang, H. C. Wong, and G. Ni, “A Meshless Collocation Method Based on Radial Basis Functions and Wavelet,” *IEEE Trans. on Magnetics*, vol. 40, pp. 1021–1024, 2004.

- [18] Z. Meiling, N. Yufeng, and Z. Chuanwei, “A new coupled MLPGFEM method for electromagnetic field computations,” in 3eme International Conference on Computational Electromagnetics and Its applications, 2004.
- [19] P. Jiang, S. Li, and C. H. Chan, “Analysis of elliptical waveguides by a meshless collocation method with the Wendland radial basis functions,” *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 32, no. 2, pp. 162 – 165, 2002.
- [20] S. A. Viana, D. Rodger, and H. C. Lai, “Meshless local Petrov-Galerkin method with radial basis functions applied to electromagnetics,” *IEE Proceedings: Science, Measurement and Technology*, vol. 151, pp. 449– 451, 2004.
- [21] S. A. Viana, D. Rodger, and H. C. Lai, “Meshless local Petrov-Galerkin method with radial basis functions applied to electromagnetics,” *IEEE Proceedings: Science, Measurement and Technology*, vol. 151, pp. 449–451, 2004.
- [22] G. Ala, E. Francomano, A. Tortorici, E. Toscano, and F. Viola, “Smoothed Particle Interpolation for electromagnetic simulations,” in *ECCOMAS Thematic Conference on Meshless Methods*, 2005.
- [23] A. Taflove and S. C. Hugness, *Computational Electrodynamics - the finitedifference time - domain method*, 2nd ed. Artech House, 2000.
- [24] G. R. Liu and Y. T. Gu, “A point interpolation method for two dimensional solids,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 50, pp. 937–951, 2001.
- [25] Benkhaoua. L, Benhabiles. M.T, Riabi. M. L, “Nonuniform transmission lines analysis by meshless point interpolation methods,” *Int.Journal of Numerical Modeling Electronic Networks Devices & Fields*,2015.
- [26] Y. Zhang, K. R. Shao, Y. Guo, and J. D. Lavers, “A Boundary Meshless Method for Transient Eddy Current Problems,” *IEEE Trans. on Magnetics*, vol. 41, pp. 10 – 13, 2005.

- [27] E. J. Kansa, “Multiquadrics - A Scattered Data Approximation Scheme with Applications to Computational Fluid-Dynamics - I,” *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 19, no. 8/9, pp. 127–145, 1990.
- [28] E. J. Kansa,, “Multiquadrics - A Scattered Data Approximation Scheme with Applications to Computational Fluid-Dynamics - II,” *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 19, no. 8/9, pp. 147–161, 1990.
- [29] C. K. Lee, X. Liu, and S. C. Fan, “Local multiquadric approximation for solving boundary value problems,” *Mechanics*, vol. 30, pp. 396–409, 2003.
- [30] H. Wendland, “Meshless Galerkin Methods Using Radial Basis Functions,” *Mathematics of Computation*, vol. 68, no. 228, pp. 1521–1531, 1999.
- [31] M. D. Buhmann, *Radial Basis Functions*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- [32] G. Liu, *Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2003.
- [33] G. E. Fasshauer, *Meshfree Approximation Methods with MATLAB*. River Edge, NJ, USA: World Scientific Publishing Co., Inc., 2007.
- [34] H. Wendland, *Scattered data approximation*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2005.
- [35] S. J. Lai, B. Z. Wang, and Y. Duan, “Meshless Radial Basis Function Method for Transient Electromagnetic Computations” *IEEE Trans. on Magnetics*, vol. 44,N.10, pp. 2288–2295, 2008.
- [36] Khalef. R, Benkhaoua. L, Grine.F, Benhabiles. M.T, Riabi. M.L, “A combined meshless RBF-FDTD method for the analysis of transient electromagnetic fields”, *Pertanika Journal of Science and Technology*, vol.24, no.2, Jul, 2016.
- [37] Liu GR, Gu YT. *An Introduction to Meshfree Methods and their Programming*. Springer: Dortrecht, The Netherlands, 2005.

- [38] Li J, Hon YC. *Domain decomposition for radial basis meshless methods*. Numer Meth Part Differ Equat; 20(3):450–462, 2004.
- [39] S. J. Lai, B. Z. Wang, Y. Duan, “Simulation of 2D TMz Modes of Time domain Maxwell’s Equations by RBF-MLM,” proceedings, ICMMT Conference, vol.40,pp.978-4244, 2010.
- [40] B. Fornberg, T. A. Driscoll, G. Wright, and R. Charles, “Observations on the behavior of radial basis function approximations near boundaries,” *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 43, no. 3, pp. 473-490, 2002.
- [41] G. R. Liu and Y. T. Gu, “A local radial point interpolation method (LRPIM) for free vibration analyses of 2-D Solids,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 246, no. 1, pp. 29-46, 2001.
- [42] Powell. M.J.D,” The theory of radial basis function approximation,” *Light FW Advanced in numerical analysis*,” pp. 303–322, 1992.
- [43] Schaback. R, ” Approximation of polynomials by radial basis functions“. Laurent PJ, Mehaute Le, Schumaker LL (Eds) *Wavelets, images and surface fitting*, Wellesley, MA pp 459–466,1994
- [44] Wendland. H ” Error estimates for interpolation by compactly supported radial basis functions of minimal degree”, *Journal Approximation Theory* 93:258–396,1998.
- [45] Liu. GR, Gu.Y.T “A point interpolation method for twodimensional solids”. *Int J Numer Methods Eng* 50:937–951,2001.
- [46] T. Kaufmann, C. Fumeaux and R. Vahldieck, “The meshless radial point interpolation method based for time-domain electromagnetics,” *IEEE MTT-S Int. Microw, Symp. Dig, Atlanta, GA, 15-20*, pp. 61-64, Jun, 2008.
- [47] T. Kaufmann, Y. Yu, C. Engstrom, Z. Chen and C. Fumeaux , “Recent developments of meshless radial point interpolation method for time-domain electromagnetics ,” *Int. J, Numerical Modeling. Model. no. 25*, pp. 468-489, 2012.

- [48] Y. Yu and Z. D, Chen, “A 3-D radial point interpolation method for meshless time-domain Modeling,” *IEEE Trans. Microw.Theory Techn*, vol.57, no. 8, pp. 2015-2020, 2009.
- [49] Y. Yu and Z. Chen, “Meshless RPIM modeling of open-structures using PMLs,” in *Microwave Symposium Digest (MTT), 2010 IEEE MTT-S International*. IEEE, 2010, pp. 97–100.
- [50] Y. Yu and Z. Chen, “The CPML absorbing boundary conditions for the unconditionally stable meshless modeling,” *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 11, pp. 468–472, 2012.
- [51] R. Schaback and H. Wendland, “Characterization and construction of radial basis functions,” in *Multivariate Approximation and Applications*. Cambridge University Press, pp. 1-24, 2001.
- [52] R. J. LeVeque, *Finite-Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2002.
- [53] M. Ghrist, B. Fornberg, and T. A. Driscoll, “Staggered Time Integrators for Wave Equations,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 38, no. 3, pp. 718-741, 2000.
- [54] G. Ala, E. Francomano, A. Tortorici, E. Toscano, and F. Viola, “Smoothed Particle ElectroMagnetics: A mesh-free solver for transients,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 191, no. 2, pp. 194-205, 2006.
- [55] Barber CB, Dobkin DP, Huhdanpaa H. The quickhull algorithm for convex hulls. *ACM Trans Math Software*; pp: 469–483, 1996
- [56] Fornberg B, Driscoll TA, Wright G, Charles R. Observations on the behavior of radial basis function approximations near boundaries. *Comput Math Appl*; 43(3): 473–490, 2002.
- [57] Taflove A, Hagness SC. *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*(3rd edn). Artech House, Inc.:Norwood, MA, USA, 2005.

- [58] Bérenger JP. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J Comput Phys*; pp:185–200, 1994
- [59] Gedney S. “An anisotropic perfectly matched layer-absorbing medium for the truncation of FDTD lattices”. *IEEE Trans Microw Theor Tech*; 44(12):1630–1639. 44, 1996
- [60] Bérenger JP. “Numerical reflection from FDTD-PMLs: a comparison of the split PML with the unsplit and CFS PMLs”. *IEEE Trans Antenn Propag*; pp:258–265, 2002
- [61] Gwarek W, Celuch-Marcysiak M. A “differential method of reflection coefficient extraction from FDTD simulations”. *IEEE Microw GuidWave Lett*; 6(5):215–217, 1996.
- [62] Gwarek WK, Celuch-Marcysiak M. “Wide-band S-parameter extraction from FD-TD simulations for propagating and evanescent modes in inhomogeneous guides”. *IEEE Trans Microw Theor Tech* 51(8):1920–1928, 2003.
- [63] M.J. Inman, A.Z. Elsherbeni “Interactive GPU based FDTD Simulations for Teaching Applications,” *ACES Conference*, Naigara, Canada, 2008.
- [64] G. Song, P. O. Box, and S. Shin, “Design of corrugated waveguide filters by the Gel'fand-Levitan-Marchenko inverse-scattering method,” *J. Opt. Soc. of Am. A*, vol. 2, no. 11, pp. 1905–1915, Nov. 1985.
- [65] S. Cogollos et al., “A Systematic Design Procedure of Classical Dual Mode Circular Waveguide Filters Using an Equivalent Distributed Model,” *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 60, no. 4, pp. 1006- 1017, Apr. 2012.
- [66] J.-F. Liang, X.-P. Liang, K. A. Zaki and A. E. Atia, “Dual-mode dielectric or air-filled rectangular waveguide filters,” *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 42, no. 7, pp. 1330-1336, Jul. 1994.
- [67] F. Teberio et al., “High-Power Waveguide Low-Pass Filter With All Higher-Order Mode Suppression Over a Wide-Band for Ka-Band Satellite Applications,” *IEEE Microw. Wirel. Compon. Lett.*, vol. 25, no. 8, pp. 511-513, Aug. 2015.

- [68] A. Aydogan, F. Akleman and S. Yildiz, “Dielectric loaded waveguide filter design ,” ISFEE Confrence, Romania, 2016.
- [69] M. Khalaj-Amirhosseini, “Microwave Filters Using Waveguide Filled by Multi-layer Dielectric,” Prog. Electromagn. Res., vol. 66, pp. 105-110, 2006.
- [70] M. Khalaj-amirhosseini and H. Ghorbaninejad-foumani, “Waveguide Bandpass Filters Utilizing Only Dielectric Pieces,” PIERS, Xi’an, China, Mar. 22–26, 2010. pp. 553–557.
- [71] M. Silveirinha and N. Engheta, “Design of matched zero-index metamaterials using nonmagnetic inclusion-near-zero media,” Physical review, vol. 75, no. 075119, pp. 075119-1-075119-1, Feb.2007.
- [72] J.Garcia-.Garcia, F.Martin, F.Falcone, J.Bonache, I.Gil, T.Lopetegi, M.A.G.Laso, M.Sorolla and R.Marqués,”Spurious passband supression in microstrip coupled line band pass filters by means of split ring resonators,” IEEE Microwave and Wireless Components Letters, vol.14, pp, 416-418, 2004.
- [73] J.Garcia-.Garcia, F.Martin, F.Falcone, J.Bonache, J.D.Baena, I.Gil, E.Amat, T.Lopetegi, M.A.G.Laso, J.A.M.Itumendi, M.Sorolla and R.Marqués” Microwave filters with improved stopband based on subwavelength resonators,” IEEE Transactions on Microwave theory and techniques, vol.53,pp. 1997-2006, 2005.
- [74] Khalef. R, Benhabiles. M. T,Grine. F, Benkhaoua. L, Cheraiet. Z, Riabi. M.L, and Messili. B ” X-band waveguide filter modeling by UPML radial point interpolation meshless method in time domain” IEEE-MTT-S NEMO 2018, Iceland.

# Chapitre V. Nouvelle méthode RPIM inconditionnellement stable proposée basée sur le schéma implicite de Crank-Nicolson



---

Ce dernier chapitre est consacré à la nouvelle méthode sans maillage RPIM basée sur le schéma implicite de Crank-Nicolson pour la résolution de l'équation d'onde de Helmholtz, qui est proposée pour améliorer l'efficacité de la méthode sans maillage RPIM pour la résolution des équations de Maxwell. Avec cette méthode, un seul ensemble d'inconnues est requis, qu'il s'agisse de champs électriques ou de champs magnétiques. Par conséquent, comparé aux procédés conventionnels explicites RPIM et FDTD, qui doit résoudre simultanément les champs électriques et magnétiques, ce procédé peut améliorer l'efficacité des calculs et réduire l'occupation de mémoire. Le critère de stabilité de cette nouvelle méthode à été abordée analytiquement et vérifiée numériquement à travers des exemples à la fin de ce chapitre.

---



## **V.1. Introduction**

## **V.2. Développement de la méthode sans maillage RPIM.**

## **V.3. Formulations de la méthode RPIM proposée basée sur le schéma de CN.**

## **V.4. Analyse de la stabilité de la méthode CN-RPIM proposée.**

## **V.5. Exemples numériques et discussion.**

### **V.5.1. Modélisation temporelle du mode TE d'un guide d'ondes par CN-RPIM.**

### **V.5.2. Simulation des modes TM dans le domaine temporel par la méthode CN-RPIM.**

### **V.5.3. Modélisation temporelle du filtre à EBG par la méthode sans maillage CN-RPIM.**

## **V.6. Conclusion.**

## **Références bibliographiques V**

## V.1. Introduction

Le développement récent de méthodes sans maillage suscite de plus en plus d'intérêt dans le domaine de la modélisation électromagnétique temporelle et de l'analyse du champ. Contrairement aux méthodes numériques conventionnelles mentionnées dans le deuxième chapitre, ces méthodes ne nécessitent pas de maillage prédéfini pour établir un système d'équations algébriques. Au lieu de cela, elles utilisent un ensemble de nœuds dispersés dans le domaine de calcul et un ensemble de nœuds dispersés aux limites du domaine pour formuler le problème. Ces nœuds ne forment pas un maillage et peuvent être répartis arbitrairement dans l'espace. Par conséquent, aucune information sur la relation entre les nœuds n'est requise. De telles caractéristiques confèrent aux méthodes sans maillage plusieurs avantages par rapport aux techniques numériques classiques, par exemple la modélisation conforme des frontières arbitraires et la capacité de solutions multi-échelles. Elles facilitent également le maillage adaptatif automatique en permettant l'ajout de nœuds aux régions où des maillages fins sont nécessaires, parmi les méthodes sans maillage que nous avons discuté dans le chapitre précédent nous mentionnons la méthode RPIM qui est appropriée pour le calcul électromagnétique, en raison des nombreux avantages liés à sa consistance et à sa relative simplicité [1]-[7]. Cependant, étant donné que le schéma explicite du leap-frog est utilisé pour estimer la dérivée temporelle, la RPIM est conditionnellement stable. Par conséquent, le pas de temps utilisé dans la méthode RPIM est limité par la condition de Courant – Friedrichs – Lewy (CFL). Ainsi, le pas de temps est dérivé de la distance la plus courte entre deux nœuds quelconques du domaine. Dans les problèmes géométriques fins tels que les guides d'ondes intégrés au substrat (GIS) et les structures à bande interdite électromagnétique (EBG) fonctionnant à des fréquences élevées, la condition de stabilité de CFL donne une durée de calcul prolongée. Les schémas implicitement stables et inconditionnels sont les meilleures techniques pour résoudre la restriction CFL inhérente aux méthodes sans maillage RPIM. Les méthodes sans maillage RPIM stables de manière inconditionnelle, telles que la méthode implicite de type directions alternatives sans maillage RPIM (ADI-RPIM), qui consiste en deux équations de mise à jour implicites et une équation de mise à jour explicite [8,9], la méthode localement à 1-D (LOD-RPIM) [8] qui comporte deux sous-étapes à chaque pas de temps, chacune nécessitant la solution de deux équations de mise à jour implicites et de deux équations de mise à jour explicites, et enfin la

méthode RPIM inconditionnellement basée sur les polynômes de Laguerre pondérés (WLP-RPIM) [10]. Le schéma de Crank–Nicolson (CN) est également inconditionnellement stable et a été introduit à l’origine dans la méthode FDTD (CN-FDTD) [11]-[16] où il équilibre le membre de droite RHS (right hand side) d’une équation discrétisée utilisant une approche de moyenne temporelle précise du second ordre aboutissant à une équation de mise à jour implicite. Le schéma CN est étendu pour simuler des circuits à micro-ondes, tels que des circuits à micro-ruban plan et une cavité résonante, grâce à son algorithme efficace CN-FDTD [16]. Récemment, le schéma CN a été combiné à la méthode RPIM (CN-RPIM) [17] et a permis des erreurs de dispersion inférieures à celles des méthodes LOD-RPIM et ADI-RPIM. L’avantage le plus important de cette méthode est que la condition CFL est totalement supprimée et que la taille du pas de temps est plus petite.

Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle méthode RPIM bidimensionnelle inconditionnellement stable basée sur le schéma implicite de Crank–Nicolson à une seule des équations de Maxwell, la loi de Faraday pour les modes TE ou la loi d’Ampère pour les modes TM. Cette approche implique deux mises à jour de sous-étapes similaires aux méthodes ADI-RPIM et LOD-RPIM à chaque pas de temps en utilisant une variable auxiliaire pour réduire les opérations arithmétiques [18, 19]. Cependant, l’algorithme proposé étant une solution RPIM de l’équation d’onde de Helmholtz, un seul des champs électrique ou magnétique doit être mis à jour au cours des itérations de l’algorithme. La stabilité numérique en 2-D et la dispersion numérique de la méthode CN-RPIM proposée sont démontrées théoriquement et sont examinées à l’aide d’exemples numériques effectuées pour démontrer la précision et l’efficacité de la procédé proposée.

## V.2. Développement de la méthode sans maillage RPIM

Le schéma de progression temporelle 2-D de saute-mouton (leapfrog scheme) pour les champs TE des équations de Maxwell (III.5) sur des supports linéaires, sans perte ( $\sigma = 0$ ), isotropes, non dispersifs et sans source peut être écrit de la manière suivante:

$$H_z^{n+1/2} = H_z^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu} D^T E^n \quad (\text{V. 1. } \alpha)$$

$$E^{n+1} = E^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon} D H_z^{n+1/2} \quad (\text{V. 1. b})$$

Dans les équations ci-dessus,  $D = [D_y, -D_x]^T$  avec  $D_x$  et  $D_y$  les opérateurs dérivés du premier ordre dans les directions  $x$  et  $y$  respectivement.

Etant donné que seules les composantes  $E$  et  $H_z$  sont les quantités à résoudre en (V.1), deux ensembles de nœuds de champ électrique  $N_E$  et magnétique  $N_H$  doivent être définis spatialement dans le domaine de la solution. Dans ce travail, les nœuds  $N_E$  et  $N_H$  sont définis de la même manière que celle utilisée dans la méthode sans maillage RPIM dans le domaine temporel décrite dans le chapitre précédent ou les champs électriques et magnétiques peuvent être approximés par la fonction de forme  $\psi(X)$  comme suit [20] :

$$E = \sum_j^{NE} \psi_j(X) E_j \quad (\text{V. 2. a})$$

$$H = \sum_j^{NH} \psi_j(X) H_j \quad (\text{V. 2. b})$$

Une fois que la fonction de forme  $\psi(X)$  de la méthode RPIM a définie dans le chapitre précédent, les l'approximation de sa dérivée première et seconde dans l'espace le long de  $k = x, y$  sont nécessaires dans ce chapitre pour résoudre les problèmes électromagnétiques [7], qui peuvent être exprimées de manière similaire avec la même matrice locale  $G$  que dans le chapitre précédent :

$$\partial_k \psi(X) = [\partial_k \varphi^T(X) \quad \partial_k P^T(X)] G^{-1} = [\partial_k \psi_1(X), \partial_k \psi_2(X), \dots, \partial_k \psi_N(X)] \quad (\text{V. 3})$$

$$\partial_k^2 \psi(X) = [\partial_k^2 \varphi^T(X) \quad \partial_k^2 P^T(X)] G^{-1} = [\partial_k^2 \psi_1(X), \partial_k^2 \psi_2(X), \dots, \partial_k^2 \psi_N(X)] \quad (\text{V. 4})$$

où dans ce contexte,  $\varphi_n(X)$  est une fonction de base avec un domaine de support local de rayon  $d_{max}$  et  $P_m(X) = [1, x, y]$  est une fonction de base polynomiale de termes  $M = 3$ .

### V.3. Formulations de la méthode RPIM proposée basée sur le schéma de CN

Les formulations de la méthode proposée sont dérivées en appliquant le schéma implicite de Crank-Nicolson pour discrétiser la loi de Faraday (V.1.a) où nous obtenons des différences de temps en avant et en arrière données en (V.1.a), nous avons [14] :

$$H_z^{n+1/2} = H_z^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu} D^T (E^{n+1} + E^{n-1}) \quad (\text{V. 5})$$

En remplaçant (V. 5) par (V.1.b) donne

$$\left( I + \frac{1}{\varepsilon \mu} \frac{\Delta t^2}{2} D^2 \right) \cdot E^{n+1} = E^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon} D H_z^{n-1/2} - \frac{\Delta t^2}{2 \varepsilon \mu} D^2 E^{n-1} \quad (\text{V. 6})$$

où  $I$  est la matrice d'identité et  $D^2$  est exprimé par

$$D^2 = -DD^T = \begin{bmatrix} -D_y^2 & D_x D_y \\ D_x D_y & -D_x^2 \end{bmatrix} \quad (\text{V. 7})$$

Nous pouvons déduire l'expression de  $H_z^{n-1/2}$  de (V.1.b) à l'aide de l'indice  $(n - 1/2)$  et l'éliminer de (V.6), afin d'obtenir

$$\left( I + \frac{1}{\varepsilon \mu} \frac{\Delta t^2}{2} D^2 \right) \cdot E^{n+1} = 2E^n - \left( I + \frac{1}{\varepsilon \mu} \frac{\Delta t^2}{2} D^2 \right) \cdot E^{n-1} \quad (\text{V. 8})$$

Notez que le champ  $H$  n'apparaît pas dans (V.8) et que le champ  $E^{n+1}$  est mis à jour implicitement par ses valeurs aux pas de temps  $n$  et  $n - 1$ . L'équation (V.8), en substance représente une solution aux différences finies de l'équation vectorielle de Helmholtz (II.13).

En appliquant le schéma de différence centrale aux dérivées temporelles (III.12) et spatiales de l'équation (II.13), nous avons :

$$-D^2 E^n - \mu \varepsilon \frac{E^{n+1} - 2E^n + E^{n-1}}{\Delta t^2} = 0 \quad (\text{V. 9})$$

Ensuite, en approchant le premier  $E^n$  (à côté de  $D^2$ ) de l'équation (V.9) par  $E^n \cong \frac{(E^{n+1} + E^{n-1})}{2}$  et après quelques manipulations algébriques, on peut facilement obtenir l'équation (V.8).

En outre, avec la définition de la fonction de forme décrite à la section V.2, et par la substitution de (V.2.a) dans (V.8), la formulation de l'équation d'onde de Helmholtz par la fonction de forme est donnée comme suit [18] :

$$\sum_j^{NE} \psi_j E_j^{n+1} + \frac{1}{\varepsilon \mu} \frac{\Delta t^2}{2} D^2 \sum_j^{NE} \psi_j E_j^{n+1} = 2 \sum_j^{NE} \psi_j E_j^n - \sum_j^{NE} \psi_j E_j^{n-1} - \frac{1}{\varepsilon \mu} \frac{\Delta t^2}{2} D^2 \sum_j^{NE} \psi_j E_j^{n-1} \quad (\text{V. 10})$$

En raison de la propriété de fonction delta de Kronecker de la fonction de forme de la méthode sans maillage RPIM [20], nous introduisons un champ variable auxiliaire  $e^{n+1} = (E^{n+1} + E^{n-1})$  dans (V.10).

La mise à jour de l'équation (V.10) se reformule :

$$\underbrace{E_i^{n+1} + E_i^{n-1}}_{e_i^{n+1}} + \frac{1}{\varepsilon \mu} \frac{\Delta t^2}{2} D^2 \sum_j^{NE} \psi_j \underbrace{(E_j^{n+1} + E_j^{n-1})}_{e_j^{n+1}} = 2E_i^n \Rightarrow e_i^{n+1} + \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon \mu} D^2 \sum_j^{NE} \psi_j e_j^{n+1} = 2E_i^n \quad (\text{V. 11})$$

En comparant les équations (V.11) à (V.10), l'opérateur de dérivée  $D^2$  encombrant existe des deux côtés de l'équation (V.10). Tout d'abord, il est éliminé du côté droit de l'équation de (V.11), ce qui entraîne une réduction significative des opérations arithmétiques dans l'algorithme. Deuxièmement, dans (V.11), le terme  $D^2$  donné dans (V.7) peut être divisé en deux parties:  $D^2 = D_S + D_L$ .

En transférant  $D_L$  à droite dans l'équation (V.11), nous avons

$$e_i^{n+1} + \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon \mu} D_S \sum_j^{NE} \psi_j e_j^{n+1} = 2E_i^n - \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon \mu} D_L \sum_j^{NE} \psi_j e_j^{n+1} \quad (\text{V. 12})$$

où

$$D_S = \begin{bmatrix} -D_y^2 & 0 \\ 0 & -D_x^2 \end{bmatrix}, \quad D_L = \begin{bmatrix} 0 & D_x D_y \\ D_x D_y & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V. 13})$$

Selon l'équation (V.12), nous approximations le champ  $e^{n+1}$  dans le côté droit par  $2E^n$ , puis nous obtenons

$$e_i^{n+1} + \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon \mu} D_S \sum_j^{NE} \psi_j e_j^{n+1} = 2E_i^n - \frac{\Delta t^2}{\varepsilon \mu} D_L \sum_j^{NE} \psi_j E_j^n \quad (\text{V. 14})$$

L'algorithme proposé pour résoudre l'équation d'onde de Helmholtz (V.8) peut être résumé en deux étapes [18]:

- ❖ **Première étape:** mettre implicitement à jour le champ  $e$  le long des deux directions  $x$  et  $y$  en utilisant l'équation (V.14), les équations suivantes sont obtenues:

$$e_{x,i}^{n+1} - \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu} \sum_{j=1}^{NE} \partial_y^2 \psi_j(X) e_{x,j}^{n+1} = 2E_{x,i}^n - \frac{\Delta t^2}{\varepsilon\mu} \sum_{j=1}^{NE} \partial_{xy}^2 \psi_j(X) E_{y,j}^n \quad (\text{V. 15. a})$$

$$e_{y,i}^{n+1} - \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu} \sum_{j=1}^{NE} \partial_x^2 \psi_j(X) e_{y,j}^{n+1} = 2E_{y,i}^n - \frac{\Delta t^2}{\varepsilon\mu} \sum_{j=1}^{NE} \partial_{xy}^2 \psi_j(X) E_{x,j}^n \quad (\text{V. 15. b})$$

- ❖ **Deuxième étape:** mettre explicitement à jour les composantes  $E_x$  et  $E_y$  par les égalités

$$E_{x,i}^{n+1} = e_{x,i}^{n+1} - E_{x,i}^{n-1} \quad (\text{V. 16. a})$$

$$E_{y,i}^{n+1} = e_{y,i}^{n+1} - E_{y,i}^{n-1} \quad (\text{V. 16. b})$$

Les solutions de (V.15) nécessitent de calculer l'inverse d'une matrice creuse, ce qui peut être mis en œuvre plus efficacement en tirant parti de la décomposition LU. Après avoir résolu (V.15), les composantes  $x$  et  $y$  de  $E$  peuvent être simultanément mises à jour explicitement avec les équations (V.16).

Notez que la méthode proposée est basée sur la solution de l'équation d'onde (V.8) par la méthode sans maillage RPIM et que le champ magnétique n'apparaît pas pendant ses itérations. Cependant, le champ magnétique  $H_z$  peut être obtenu explicitement à l'aide de la mise à jour de la formulation (V.5) de la méthode sans maillage RPIM, qui peut être écrite:

$$H_{z,i}^{n+1/2} = H_{z,i}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{2\mu} \left[ \begin{array}{c} \sum_{j=1}^{NE} \partial_y \psi_j(X) (E_{x,j}^{n+1} + E_{x,j}^{n-1}) \\ - \sum_{j=1}^{NE} \partial_x \psi_j(X) (E_{y,j}^{n+1} + E_{y,j}^{n-1}) \end{array} \right] \quad (\text{V. 17})$$

Dans le cas des champs TM du système d'équations de Maxwell (III.4), l'application du schéma implicite de Crank-Nicolson (CN) à la loi d'Ampère discrétisée et le respect des étapes décrites ci-dessus compte tenu de la propriété de fonction delta de Kronecker de la fonction de forme, conduisent aux équations de mise à jour suivantes, identiques à (V.15) et (V.16), à part les substitutions  $h_x$ ,  $h_y$ ,  $H_x$  et  $H_y$  au lieu de  $e_x$ ,  $e_y$ ,  $E_x$  et  $E_y$ , respectivement, avec chacun des champs auxiliaires  $h_x$  et  $h_y$  de l'équation résultante arrondis à  $2H_x$  et  $2H_y$  [19]:

$$h_{x,i}^{n+1} - \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu} \sum_{j=1}^{NH} \partial_y^2 \psi_j(X) h_{x,j}^{n+1} = 2H_{x,i}^n - \frac{\Delta t^2}{\varepsilon\mu} \sum_{j=1}^{NH} \partial_{xy}^2 \psi_j(X) H_{y,j}^n \quad (\text{V. 18. a})$$

$$h_{y,i}^{n+1} - \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu} \sum_{j=1}^{NH} \partial_x^2 \psi_j(X) h_{y,j}^{n+1} = 2H_{y,i}^n - \frac{\Delta t^2}{\varepsilon\mu} \sum_{j=1}^{NH} \partial_{xy}^2 \psi_j(X) H_{x,j}^n \quad (\text{V. 18. b})$$

$$h_{x,i}^{n+1} = H_{x,i}^{n+1} + H_{x,i}^{n-1} \quad (\text{V. 19. a})$$

$$h_{y,i}^{n+1} = H_{y,i}^{n+1} + H_{y,i}^{n-1} \quad (\text{V. 19. b})$$

En clair dans les équations (V.18), le champ électrique  $E_z$  n'apparaît pas et les champs magnétiques  $H_x$  et  $H_y$  au pas de temps  $(n + 1)$  seraient implicitement mis à jour par ses valeurs aux pas de temps  $n$  et  $(n - 1)$ , après avoir compensé la valeur du champ magnétique auxiliaire  $h$  de (V.19). Ces équations (V.18) représentent essentiellement une solution de différence finie de l'équation d'onde vectorielle de Helmholtz (II.14).

#### V.4. Analyse de la stabilité de la méthode CN-RPIM proposée

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent dans la méthode sans maillage RPIM conventionnelle, les dérivées temporelles dans les équations de Maxwell sont contraintes par la condition CFL comme dans la méthode FDTD [21]. Une condition de pas de temps acceptable est donnée par la relation (IV.22) et est liée à la distance la plus courte entre deux nœuds quelconques du domaine de calcul, bien que certaines expériences confirment que (IV.22) assure la stabilité de la méthode RPIM, cela n'est pas toujours nécessaire lorsque le pas de temps peut être utilisé sans causer de problèmes, bien que plus grand que dans (IV.22) [8]. Par conséquent,

une matrice d'amplification  $Q$  du schéma RPIM sans maillage est nécessaire pour calculer la condition de stabilité sur la plus grande valeur propre  $\lambda_{max}$  de  $Q$ , en appliquant le schéma RPIM susmentionné et en substituant (V.2) aux dérivées spatiales (V.1), et en raison de la propriété fonction delta de la fonction de forme, la formulation de discrétisation explicite résultante du champ TE peut être déduite des équations suivantes [4,5]:

$$H_{z,i}^{n+1/2} = H_{z,i}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu} D^T \sum_j^{NE} \psi_j E_j^n \quad (\text{V. 20. } \alpha)$$

$$E_i^{n+1} = E_i^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon} D \sum_j^{NH} \psi_j H_{z,j}^{n+1/2} \quad (\text{V. 20. } \text{b})$$

En réécrivant les équations (V.20) de la méthode RPIM explicite avec leurs matrices de coefficients  $A$  et  $B$  telles que

$$H_z^{n+1/2} = H_z^{n-1/2} + \Delta t A E^n \quad (\text{V. 21. } \alpha)$$

$$E^{n+1} = E^n + \Delta t B H_z^{n+1/2} \quad (\text{V. 21. } \text{b})$$

Les équations (V.21) sont écrites sous forme de matrice compacte  $Q$

$$\begin{bmatrix} H_z^{n+1/2} \\ E^{n+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I & \Delta t A \\ \Delta t B & I + \Delta t^2 BA \end{bmatrix}}_Q \begin{bmatrix} H_z^{n-1/2} \\ E^n \end{bmatrix} \quad (\text{V. 22})$$

Une condition nécessaire pour la stabilité des champs électriques  $E^{n+1}$  et magnétiques  $H_z^{n+1/2}$  est remplie si les valeurs propres de la matrice d'amplification  $Q$  satisfont la condition suivante [6]

$$|\lambda_j(Q)| \leq 1 \quad \forall j \quad (\text{V. 23})$$

où  $\lambda_j(Q)$  sont les valeurs propres de la matrice d'amplification  $Q$ .

Après quelques manipulations algébriques, le plus grand pas de temps de la méthode sans maillage RPIM explicite, est obtenu par la plus grande valeur propre de la matrice  $BA$ , et  $\Delta t$  satisfait la condition suivante:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\sqrt{\lambda_{\max}(BA)}} \quad (\text{V. 24})$$

Pour l'analyse de stabilité de la méthode sans maillage CN-RPIM proposée, comme la méthode sans maillage RPIM explicite traditionnelle, nous devrions obtenir la matrice d'amplification par les équations (V.14) et (V.17) en recourant à l'analyse de Fourier [22] et en remplaçant le champ auxiliaire  $e$  dans l'équation (V.14), les équations de mise à jour sont exprimées comme suit:

$$H_{z,i}^{n+1/2} = H_{z,i}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{2\mu} D^T \sum_j^{NE} \psi_j (E_j^{n+1} + E_j^{n-1}) \quad (\text{V. 25. a})$$

$$\begin{aligned} E_i^{n+1} + \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu} D_S \sum_j^{NE} \psi_j E_j^{n+1} \\ = 2E_i^n - \frac{\Delta t^2}{\varepsilon\mu} D_L \sum_j^{NE} \psi_j E_j^n - E_j^{n-1} - \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu} D_S \sum_j^{NE} \psi_j E_j^{n-1} \end{aligned} \quad (\text{V. 25. b})$$

Après certains approximations algébriques en remplaçant  $E^{n+1}$  et  $E^{n-1}$  du côté droit des équations (V.25) par  $\xi^2 E^n$  et  $\xi^{-1} E^n$ , respectivement, les équations peuvent être réécrites sous forme de matrice, comme suit:

$$H_z^{n+1/2} = H_z^{n-1/2} + \Delta t \xi^{-1} (1 + \xi^2) A E^n \quad (\text{V. 26. a})$$

$$\xi (1 + \Delta t^2 B) E^{n+1} = ((2\xi - 1)I - \Delta t^2 (B + \xi C)) E^n \quad (\text{V. 26. b})$$

où  $\xi$  est le facteur d'amplification.

Les équations (V.26) sont écrites sous forme d'une matrice compacte comme suit :

$$X^{n+1} = P X^n \quad (\text{V. 27})$$

ou  $X^{n+1} = [H_z^{n+1/2}, E^{n+1}]^T$  et  $P$  est la matrice d'amplification, elle peut être exprimée par

$$P = \begin{bmatrix} I & \Delta t \xi^{-1} (1 + \xi^2) A \\ 0 & \xi^{-1} (1 + \Delta t^2 B)^{-1} ((2\xi - 1)I - \Delta t^2 (B + \xi C)) \end{bmatrix} \quad (\text{V. 28})$$

Nous remarquons que  $P$  est une matrice triangulaire.

Une condition essentielle qui assure la stabilité de la méthode sans maillage CN-RPIM proposée et maintient (V.27) bornée quand  $n$  tend vers l'infini, est constituée par les valeurs propres de la matrice d'amplification  $P$  qui doivent satisfaire la contrainte

$$|\lambda_j(P)| \leq 1 \quad \forall j \quad (\text{V. 29})$$

où  $\lambda_j(P)$  sont les valeurs propres de la matrice d'amplification  $P$ .

Généralement en l'algèbre linéaire, les valeurs propres de la matrice d'amplification  $P$  sont souvent introduites par les racines du polynôme caractéristique  $\det(P - \lambda_j I) = 0$ , où  $I$  est la matrice d'identité, tandis que  $P$  est une matrice triangulaire; ses valeurs propres  $\lambda_j$  sont les coefficients diagonaux [23].

Par conséquent, le plus grand pas de temps autorisé dans la méthode sans maillage CN-RPIM proposée, qui maintient sa stabilité, satisfait à la contrainte (V.30) et est déterminé par le plus grand coefficient diagonal de  $K$

$$\lambda_{\max}(K) \Delta t^2 \geq 0 \quad (\text{V. 30})$$

où  $\lambda_{\max}(K)$  est la plus grande valeur propre de la matrice  $K$  et

$$K = \xi^{-1} (1 + \Delta t^2 B)^{-1} ((2\xi - 1)I - \Delta t^2 (B + \xi C)) \quad (\text{V. 31})$$

Puisque l'équation de mise à jour électrique implique  $(n + 1)^{i\text{ème}}$  et  $n^{i\text{ème}}$  à (V.26.b), une analyse importante de Fourier est l'analyse de Von Neumann de la méthode sans maillage

CN-RPIM proposée, qui montre que la stabilité est également liée au facteur d'amplification  $\xi$  qui est sélectionné par la condition suivante [22]:

$$K(\xi) \leq 1 \quad (\text{V. 32})$$

Il est clair que le facteur d'amplification  $\xi$  dépend des matrices de coefficients  $(A, B, C)$  et que le déterminant de  $K$  n'est pas supérieur à un.

Dans le calcul pratique, les méthodes itératives classiques sont la méthode des itérations minimisée proposée par *Arnoldi* [24] et la méthode de la puissance [25]. Cette dernière est la plus polyvalente pour estimer efficacement la plus grande valeur propre de la matrice  $K$  en module. La convergence de l'algorithme de la méthode de puissance dépend de la distribution des valeurs propres.

Dans ce cas, supposons que les plus grandes valeurs propres  $\lambda_j$  en module sont ordonnées  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$ , le taux de convergence est déterminé par le rapport  $\rho = |\lambda_2/\lambda_1|$ , si  $\rho > 1$  l'itération est très lente [25]. Dans un autre cas, le critère de fin de l'algorithme d'itération de la méthode de la puissance peut être formulé en termes de vecteur résiduel, ce qui signifie que si la norme du résidu  $\hat{r} = K\hat{x} - \hat{\lambda}\hat{x}$  est très petite, la valeur propre est mieux approximée.

Par conséquent, la condition de stabilité de la méthode proposée est établie par le pas de temps maximal qui satisfera toujours la condition de (V.30), tandis que la plus grande valeur propre de la matrice  $K$  est inférieure ou égale à un. Par conséquent, la méthode proposée est inconditionnellement stable et son critère de stabilité inconditionnelle est lié à la plus grande valeur propre  $\lambda_{max}(K)$  évaluée par la méthode de la puissance. Le pas de temps de la méthode proposée est prouvé théoriquement et est supérieur à  $\Delta t$  de (IV.22).

De plus, la plus grande valeur propre  $\lambda_{max}(K)$  garantit uniquement la stabilité et non la précision des solutions. Dans la procédure proposée comme dans d'autres schémas implicites introduits dans la procédure FDTD comme nous l'avons cité dans le chapitre II, la vitesse de phase d'une onde électromagnétique diffère généralement de la vitesse de la lumière  $c$ . Cette diversité dépend de la fréquence, de la distribution des nœuds et du sens de propagation. Elle est appelée dispersion numérique [26], ce qui réduit la fiabilité de la méthode d'analyse à bande large des problèmes électromagnétiques comme nous l'avons discuté dans le troisième chapitre.

Pour résoudre ce problème, nous devons choisir la meilleure taille de cellule de la distribution de nœud pour la longueur d'onde minimale comme dans la méthode FDTD. Il existe également une relation entre la fréquence maximale  $\omega$  et le pas de temps  $\Delta t$ , ce qui signifie que lorsque  $\Delta t$  augmente,  $\omega$  se rapproche de la fréquence de Nyquist [27]. Lorsque le critère de stabilité CFL et les nécessités pour minimiser les impacts de dispersion numérique sont satisfaits, le critère de Nyquist entre la fréquence élevée et la taille du pas de temps est également appliqué dans la méthode proposée.

### V.5. Exemples numériques et discussion

Dans cette section, plusieurs aspects de la modélisation de la méthode proposée sont validés numériquement à travers trois exemples et la comparaison est faite avec la méthode FDTD conventionnelle et la méthode sans maillage RPIM explicite.

#### V.5.1. Modélisation temporelle du mode TE d'un guide d'ondes par CN-RPIM

Dans cet exemple, nous considérons la géométrie du guide d'ondes à plaques parallèles 2-D WR-90 des parois conductrices parfaites (PEC) et une distribution de nœuds uniforme pour les champs électromagnétiques, comme indiqué sur la figure V.1.a.

Le guide d'onde est excité par une impulsion Gaussienne avec spectre couvrant la bande de fréquence [3GHz–30GHz], qui peut être écrite comme la formulation (IV.29), où  $T = 2 / (\pi.f_{max})$  et  $t_0 = 4.5T$ . Un point d'observation  $P_1$  est défini à partir de cette figure pour enregistrer les données dans le domaine temporel.

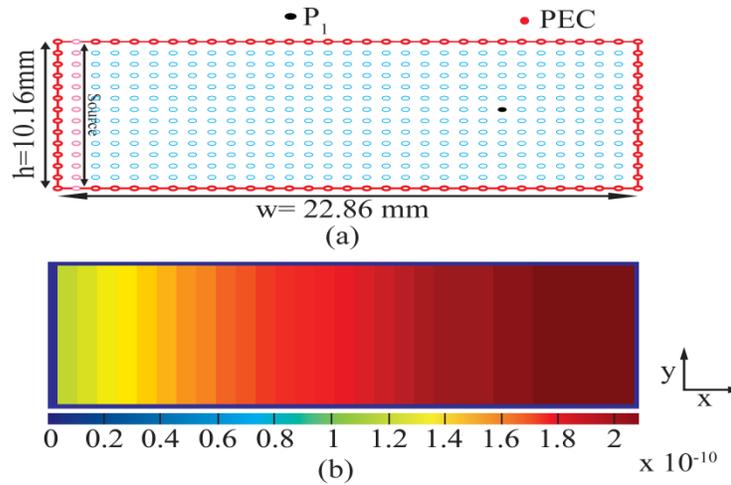


Figure V.1 : (a) Géométrie et distribution des nœuds dans un Guide d'ondes W-90 à 2-D et (b) distribution du champ électrique instantané  $E_y$  pour une plage à  $t = 30 \text{ ns}$ .

Le problème a été résolu par la méthode FDTD conventionnelle, la méthode RPIM explicite et la méthode sans maillage inconditionnellement stable CN-RPIM proposée. Le pas de temps maximal garantissant la stabilité de la méthode RPIM explicite  $\Delta t_{RPIM}$  est obtenu par la distance la plus courte entre deux nœuds quelconques du domaine et est satisfait à la condition (IV.22) [5].  $\Delta t_{RPIM} = 2.540 \text{ ps}$ ,  $20 \Delta t_{RPIM} = 50.80 \text{ ps}$  et  $30 \Delta t_{RPIM} = 76.20 \text{ ps}$  sont les tailles de pas de temps de la méthode sans maillage Crank-Nicolson-RPIM proposée. Noter que la solution FDTD traditionnelle est basée sur la grille rectangulaire de Yee de  $\Delta x = \lambda_{min} / 20$  et leur condition de stabilité CFL est satisfaite ( $\Delta t_{CFL} = \Delta x / c\sqrt{2}$ ) [21]. Dans la méthode inconditionnellement stable proposée, le pas de temps maximum qui suffit à la contrainte de stabilité (V.30) est dérivé en calculant la plus grande valeur propre en magnitude de la matrice  $K$  en utilisant la méthode de la puissance [25].  $a_c = 0.0013$  est le paramètre de forme de la fonction de base Gaussienne à support local, le domaine d'influence de chaque point du schéma d'interpolation est  $d_{max} = 1.4$ .  $d_c$  est la distance moyenne des nœuds dans le domaine de support local.

Pour étudier la stabilité inconditionnelle de la méthode proposée, les simulations s'appliquent à un pas de temps plus long d'environ  $30 \text{ ns}$ . La figure V.1.b illustre la propagation de la distribution de champ électrique calculée  $E_y$  obtenue par la procédé proposée.

Le champ électrique dans le domaine temporel  $E_y$  est enregistré au point d'observation  $P_1$  et est tracé sur les figures V.2 et V.3 [18].

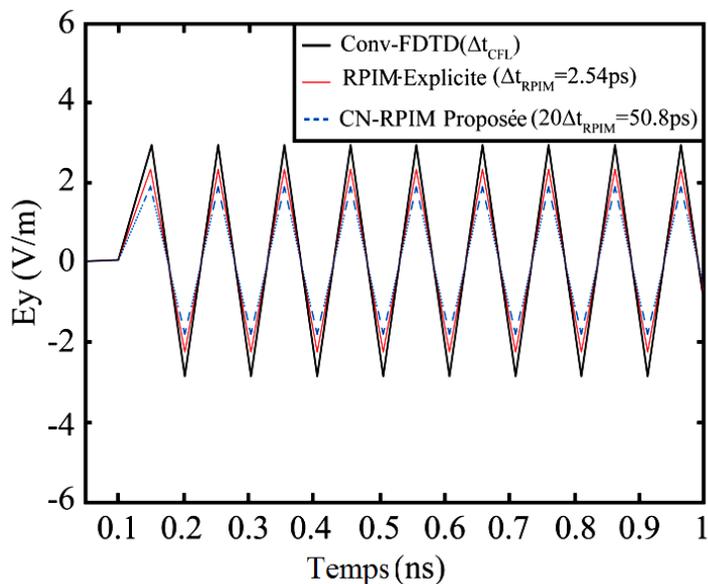


Figure V.2 : variation temporelle de  $E_y$  au point d'observation  $P_1$  par la FDTD, la RPIM explicite et la CN-RPIM proposée avec  $20 \cdot \Delta t_{RPIM} = 50.8 ps$ , dans un guide WR-90 à 2-D

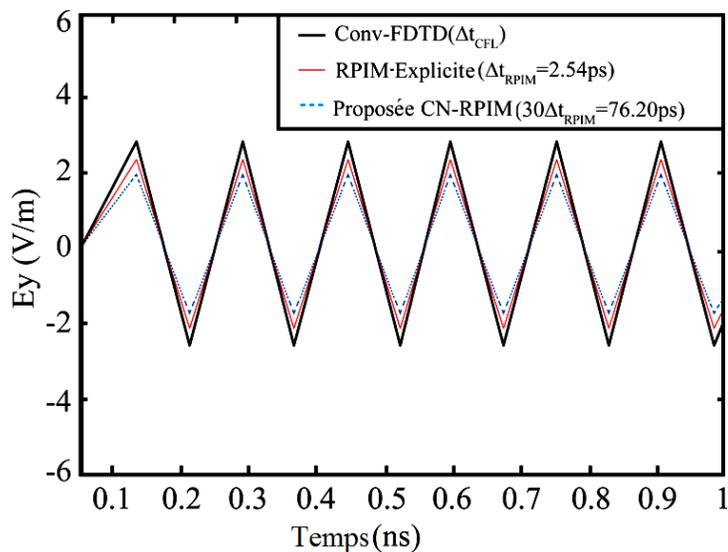


Figure V.3 : Variation temporelle de  $E_y$  au point d'observation  $P_1$  par la FDTD, la RPIM explicite et la CN-RPIM proposée avec  $30 \cdot \Delta t_{RPIM} = 76.20 ps$ , dans un guide WR-90.

Un bon accord entre les résultats de la méthode FDTD traditionnelle, de la méthode RPIM explicite et de la méthode proposée est observé, bien que les données obtenues avec la méthode sans maillage Crank-Nicolson-RPIM proposée sont meilleures que celles des schémas explicites des méthodes classiques FDTD et RPIM car le champ électrique  $(n - 1)^{ème}$  est impliqué dans le calcul du  $(n + 1)^{ème}$  dans les équations (V.16) en introduisant le champ variable auxiliaire  $e$ .

La précision numérique de la méthode sans maillage CN-RPIM proposée est vérifiée en calculant le spectre de fréquence normalisé de la réponse dans le domaine temporel et en comparant le résultat avec celui de la méthode RPIM explicite et la méthode FDTD traditionnelle obtenu par transformation de Fourier au point d'observation P1 est représentée sur la figure V.4.

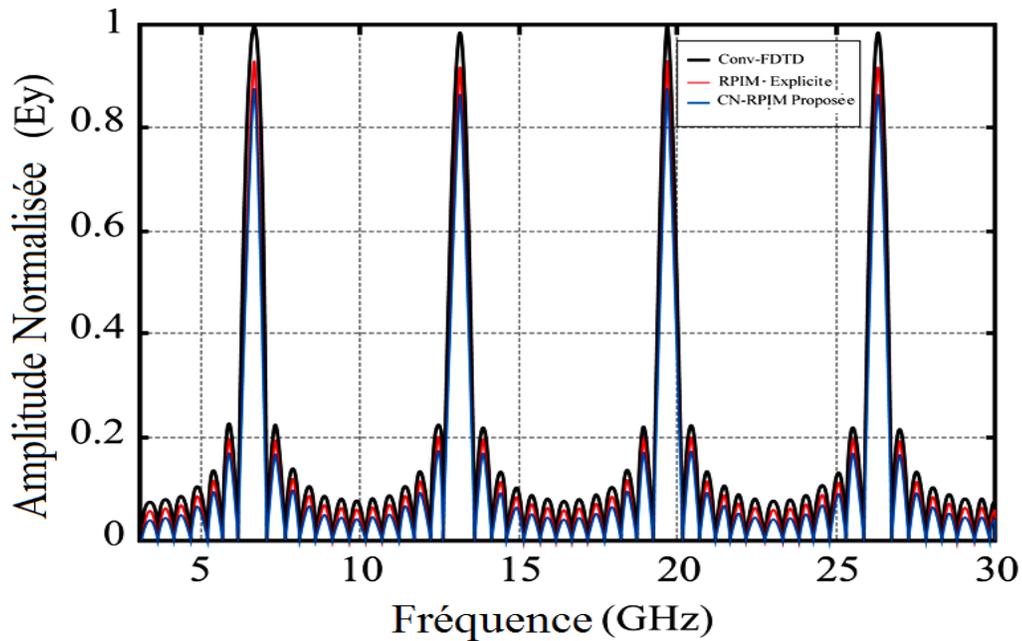


Figure V.4 : Évaluation de l'amplitude normalisée de  $E_y$  au point d'observation  $P_1$  à la fréquence de résonance par la méthode CN-RPIM proposée, les méthodes RPIM explicites et FDTD dans un guide d'ondes bidimensionnel WR-90.

À travers cette figure on observe quatre pics superposés approximativement sur la largeur de bande de la simulation [3GHz à 30 GHz]. Les quatre impulsions indiquent la fréquence de résonance des modes  $TE_{10}$ ,  $TE_{20}$ ,  $TE_{30}$  et  $TE_{40}$ . La comparaison entre les valeurs de fréquence des modes et de la solution théorique est donnée dans le tableau V.1, ainsi que les erreurs relatives

entre les valeurs de fréquence théorique et la fréquence de résonance obtenue par les méthodes RPIM, FDTD explicites, et la méthode sans maillage CN-RPIM proposée. Par ces résultats de la méthode proposée, on peut dire que les erreurs relatives sont très petites, elles sont évaluées par les solutions théoriques du guide d'onde WR-90.

Modes	$f_c$ théo	$f_c$ FDTD	$f_c$ RPIM Explicite	$f_c$ CN-RPIM	$Er$ CN-RPIM
	(GHz)	(GHz)	(GHz)	(GHz)	(%)
<b>TE<sub>01</sub></b>	6.561	6.556	6.564	6.558	0.045
<b>TE<sub>02</sub></b>	13.123	13.120	13.125	13.121	0.015
<b>TE<sub>03</sub></b>	19.685	19.689	19.690	19.680	0.025
<b>TE<sub>04</sub></b>	26.246	26.241	26.250	26.248	0.007

Tableau V.1 : Fréquence de résonance et erreurs relatives dans un guide d'ondes WR-90

### V.5.2. Simulation des modes TM dans le domaine temporel par la méthode CN-RPIM

Pour illustrer la stabilité et la précision de la méthode proposée, dans cet exemple nous considérons la géométrie de la cavité 2-D à plaques carrées avec  $31 \times 31$  nœuds, avec une taille de cellule uniforme de  $\Delta x = \Delta y = 0.51 \text{ mm}$  et tronquée par un conducteur magnétique parfait (PMC). La cavité est excitée par une impulsion Gaussienne s'écrit par (IV.29) couvrant le spectre de  $f_{max} = 30 \text{ GHz}$  appliquée sous la forme  $H_y$  à  $(2\Delta x, 15\Delta y)$ .

Le problème a été résolu par la méthode explicite RPIM et par la méthode sans maillage inconditionnellement stable CN-RPIM proposée. Le pas de temps maximal garantissant la stabilité de la méthode RPIM explicite est obtenu par la plus petite distance entre deux nœuds quelconques du domaine [5]. Alors que le pas de temps de la méthode RPIM explicite est  $\Delta t_{RPIM} = 1.7 \text{ ps}$ ,  $10. \Delta t_{RPIM} = 17 \text{ ps}$  est le pas de temps de la méthode proposée. Le paramètre de forme  $d_0 = 0.003$  du Wendland-C6-CSRBF, le domaine d'influence de chaque point du schéma d'interpolation est  $d_{max} = 1.7. d_c$ , où  $d_c$  est la distance moyenne des nœuds dans le domaine de support local. Les valeurs de  $H_y$  sont enregistrées en  $(29\Delta x, 15\Delta y)$  et sont tracées sur la figure V.5 [19]

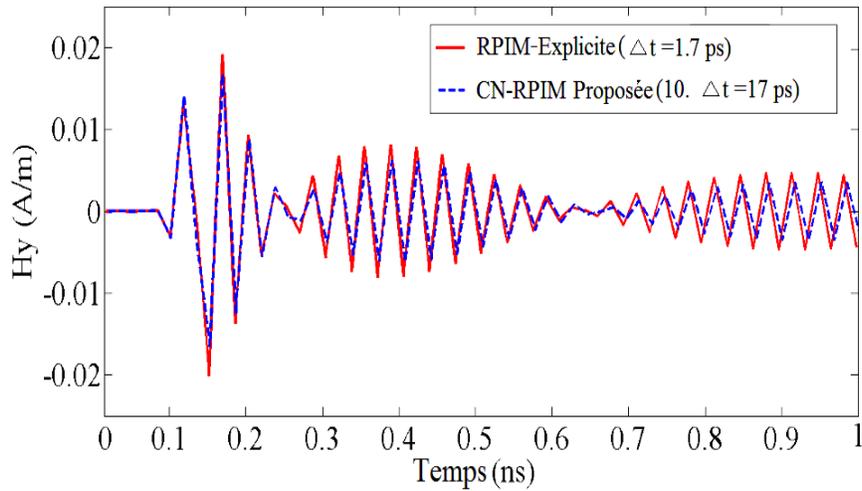


Figure V.5 : Résultats numériques obtenus par les méthodes RPIM explicite et CN-RPIM proposée avec  $10. \Delta t_{RPIM} = 17 \text{ ps}$ .

Une forte concordance entre les résultats obtenus avec la méthode proposée CN-RPIM inconditionnellement stable et le schéma RPIM explicite, bien que les données obtenues avec la méthode sans maillage Crank-Nicolson-RPIM proposée soient meilleures que la méthode RPIM explicite puisque le champ magnétique  $(n - 1)^{\text{ème}}$  est impliqué dans le calcul du  $(n + 1)^{\text{ème}}$  dans les équations (V.19) en introduisant le champ variable auxiliaire  $h$  [19].

### V.5.3. Modélisation temporelle du filtre à EBG par la méthode sans maillage CN-RPIM

En tant que troisième exemple numérique, nous considérons un agencement du guide d'onde à bande interdite électromagnétique finie EBG chargé périodiquement avec des arêtes métalliques, comme indiqué sur la figure V.6.

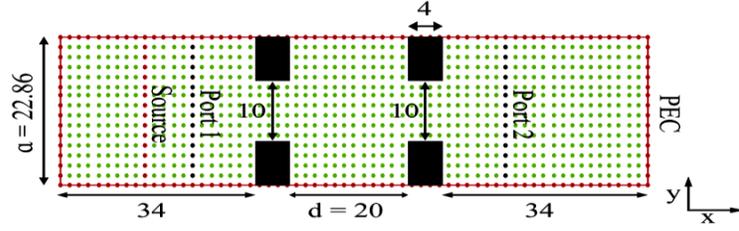


Figure V.6 : Géométrie et dimensions du guide d'onde EBG chargé périodiquement de deux arêtes métalliques. Toutes les dimensions sont en millimètres.

Les paramètres de diffraction d'un filtre passe-bande EBG avec deux arêtes identiques séparées par une distance de  $d = 20 \text{ mm}$  [28] sont simulés à l'aide de la méthode inconditionnelle sans maillage de Crank-Nicolson-RPIM proposée et sont comparés aux résultats de la méthode classique FDTD et de la méthode RPIM explicite. Pour simuler ce modèle, la structure du filtre EBG est discrétisée avec des nœuds uniformes pour les champs électriques et magnétiques avec  $\Delta x = \Delta y = 1.5614 \text{ mm}$  dans les directions  $x$  et  $y$ . Selon la condition de stabilité CFL décrite en (IV.22), la taille du pas de temps de la RPIM explicite est déduite de la plus petite distance entre deux nœuds quelconques du domaine de calcul [5] et est choisie  $\Delta t_{RPIM} = 5.208 \text{ ps}$ ,  $40. \Delta t_{RPIM} = 208.32 \text{ ps}$ , qui répond à la condition de stabilité (IV.30) en sélectionnant la plus grande valeur propre en magnitude à l'aide de la méthode de la puissance [25]. Les cellules Yee de la solution de méthode FDTD conventionnelle sont choisies  $\Delta x = \Delta y = 0.8323 \text{ mm}$ . Le nombre total de cellules du domaine de calcul est  $116 \times 28$ , la condition CFL est garanti par  $(\Delta t_{CFL} = \Delta x / c\sqrt{2})$  [21]. Le paramètre de forme de la fonction de base Gaussienne local est  $a_c = 0.0028$  et la taille de domaine de support des voisins est  $n_{AS} = 4$  nœuds. Le mode dominant  $TE_{10}$  est excité dans le guide d'onde EBG de la source plane par une impulsion Gaussienne, qui s'écrit (IV.29) avec  $f_{max} = 12 \text{ GHz}$ ,  $T = 2 / (\pi f_{max})$  et  $t_0 = 4.5T$ . Les paramètres de diffraction du filtre EBG ont été mesurés numériquement via deux ports définis dans le sens  $y$  des deux côtés (entrée et sortie) du filtre EBG. La tension  $U_i$  et le courant  $I_i$  du mode  $TE_{10}$  sur le port  $i$  sont exprimés par le champ électrique  $E_y$  et le champ magnétique  $H_z$  magnétiques qui sont détaillés dans le chapitre IV. Les amplitudes de l'onde incidente  $\alpha_i(\omega)$  et

réfléchi  $b_i(\omega)$  au port  $i$  sont estimés comme dans [29, 30], les paramètres de diffusion pour la réflexion d'entrée  $S_{11}$  et les coefficients de transmission  $S_{21}$  sont obtenus à partir de  $\alpha_i(\omega)$  et  $b_i(\omega)$  comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent par les relations (IV.26) et (IV.27).

La figure V.7 montre les paramètres  $S$  calculés pour un résonateur à guide d'ondes avec la FDTD traditionnelle, le RPIM explicite et le procédé sans maillage Crank-Nicolson-RPIM proposé. Il est clair que les résultats de la FDTD, RPIM et notre méthode proposée concordent bien [18].

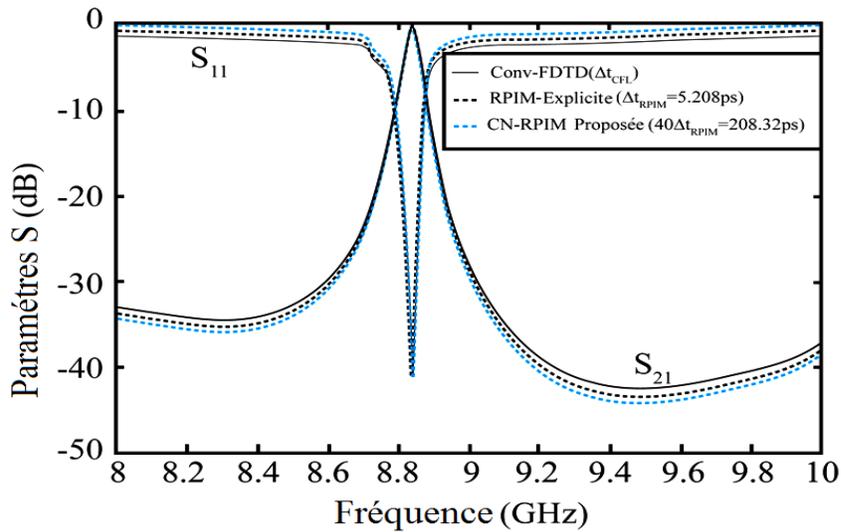


Figure V. 7 : Comparaison des paramètres  $S$  entre la méthode CN-RPIM proposée, les méthodes RPIM explicite et FDTD dans un résonateur à guide d'ondes bidimensionnel.

A partir de cette figure, les données calculées avec la méthode proposée sont légèrement supérieures à celles obtenues avec les méthodes FDTD et RPIM traditionnelles lorsque les tailles de pas de temps prévalent sur la condition CFL.

Pour quantifier la précision de la procédure proposée, la figure V.8 représente le comportement du diagramme de dispersion de la constante de phase  $\beta$ , en fonction de la fréquence  $f$  pour le résonateur à guide d'ondes; une comparaison de la constante de phase  $\beta$ .  $d$  est effectuée avec la méthode RPIM explicite [18].

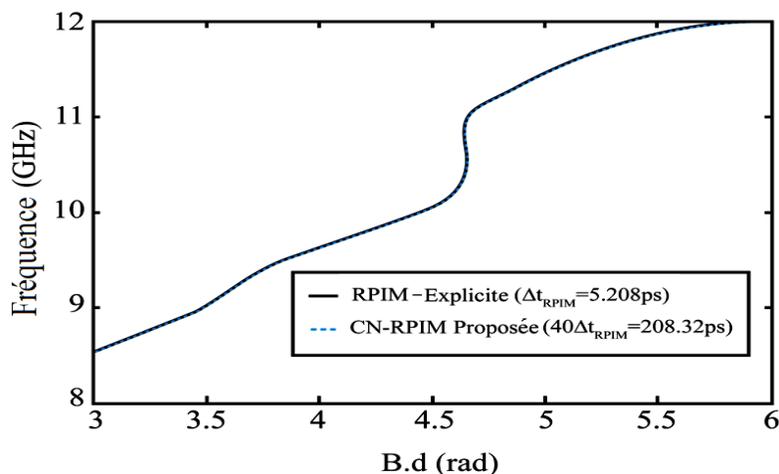


Figure V. 8 : Comportement du diagramme de dispersion de la constante de phase en fonction de la fréquence par la méthode proposée et la méthode RPIM explicite dans un résonateur à guide d'ondes 2-D.

Il est évident que les résultats de la méthode RPIM explicite et de la méthode sans maillage Crank-Nicolson-RPIM proposée sans condition sont identiques. Pour évaluer l'efficacité de calcul de la méthode proposée inconditionnelle basée sur le schéma de Crank-Nicolson par rapport aux méthodes RPIM explicites et FDTD conventionnelles, le tableau V.2 répertorie le temps processeur (CPU), l'étape de défilement et la consommation de mémoire pour chaque méthode. Il convient de noter que le pas de marche, la taille du pas de temps et le temps CPU de la méthode sans maillage CN-RPIM proposée sont inférieurs à ceux des méthodes conventionnelles FDTD et RPIM explicite.

Méthodes	$\Delta t$	Etapas	Temps CPU	Mémoire
	(N)		(s)	(MB)
<b>Conv- FDTD</b>	CFL	272	113	328.33
<b>RPIM -Explicite</b>	1	192	67	735.64
<b>CN- RPIM</b>	40	5	59	985.85

Tableau V.2 : Comparaison des méthodes de résolution du résonateur EBG de guide d'ondes bidimensionnel.

Cependant, la consommation en mémoire de la méthode proposée inconditionnelle est supérieure à la fois à FDTD et à RPIM explicite, ceci est en relation avec le nombre d'opérations

arithmétiques créées par l'opérateur dérivé  $D^2$ . Selon le côté gauche des équations implicites (V.15), une inversion de matrice doit être calculée pour calculer les champs auxiliaires à l'aide de la décomposition LU. Par conséquent, avec la méthode proposée, les besoins en mémoire augmenteront par rapport aux méthodes classiques FDTD et RPIM explicites lorsque la simulation exécute une étape de défilement plus importante.

Afin de résoudre ce problème, des techniques parallèles telles que les techniques de programmation à mémoire ouverte OMP (Open Multi-Processing) [31] et d'interface de transmission de messages MPI (Message Passing Interface) [32] sont généralement utilisées pour accélérer la convergence et nécessitent généralement la mise en œuvre de factorisation LU hiérarchiques lorsque la largeur de bande de la matrice des coefficients est supérieure à 1000000 inconnues ou lorsque le problème est étendu à 3-D. La stratégie de mémoire partagée OMP est utilisée pour la parallélisations sur les multiprocesseurs pour chaque nœud [33], tandis que la technique MPI est utilisée pour la répartition des calculs entre tous les nœuds afin de réduire le temps de calcul. Les deux techniques sont basées sur un résolveur direct avec décomposition de LU.

## V.6. Conclusion

Dans ce chapitre, une nouvelle méthode sans maillage RPIM bidimensionnelle inconditionnellement stable basée sur le schéma Crank-Nicolson (CN) est introduite pour la première fois. En appliquant la technique CN pour discrétiser la loi de Faraday pour (les modes TE) ou la loi d'Ampère pour (les modes TM), une solution RPIM inconditionnellement stable de l'équation d'onde de Helmholtz a été obtenue. La condition de stabilité de la méthode proposée a été étudiée à l'aide de la matrice d'amplification. Notez que cet algorithme permet de gagner plus de temps que les méthodes conventionnelles (FDTD, RPIM explicite) pour les grandes valeurs de pas de temps et qu'il nécessite plus d'opérations arithmétiques que les méthodes classiques. Les exemples de résultats numériques ont validé la stabilité et la précision du schéma proposé. Le pas d'exécution montre que le schéma CN de la méthode sans maillage RPIM est plus efficace que d'autres schémas.

**Références bibliographiques V**

- [1] Wang. G., Liu G. R., “A point interpolation meshless based on radial basis functions,” *Int. J. Numerical Methods Eng*, vol. 54, pp. 1626–1648, 2002.
- [2] Liu. G. R., Gu. Y.T, “An Introduction to Meshfree Methods and their Programming,” Springer: Dordrecht, The Netherlands, 2005.
- [3] Fasshauer. G. E, “Meshfree approximation Methods with MATLAB,” World Scientific Publishing, The USA, 2007.
- [4] Kaufmann. T., Fumeaux. C., Vahldieck. R., “The meshless radial point interpolation method based for time-domain electromagnetics,” *IEEE MTT-S Int. Microw, Symp. Dig*, Atlanta, GA, Jun, 15-20, pp. 61-64. 2008.
- [5] Kaufmann.T., Yu. Y., Engstrom. C., Chen. Z., Fumeaux C., “Recent developments of meshless radial point interpolation method for time-domain electromagnetics ,” *Int. J. Numerical Modeling*. no. 25, pp. 468-489, 2012.
- [6] Yu. Y., Chen. Z. D, “A 3-D radial point interpolation method for meshless time-domain electromagnetics,” *IEEE Trans. Microw.Theory Techn*, vol.57, no. 8, pp. 2015-2020, 2009.
- [7] Shaterian. Z., Kaufmann. T., Fumeaux. C., “Time-domain vector potential technique for the meshless radial point interpolation method,” *Int. J. Numerical Methods Eng*. no. 102, pp. 1830-1838, 2015.
- [8] Yu. Y., Chen. Z, “Towards the development of unconditionally stable time-domain meshless numerical methods,” *IEEE MTT-S Int. Microw. Symposium. Dig.*, Boston, MA, Juin. 7-12, 2009, pp. 309-312.
- [9] Yu. Y., Chen. Z, “Towards the development of unconditionally stable time-domain meshless numerical methods,” *IEEE Trans. Microw.Theory Techn.*, vol.58, no. 3, pp. 578-586, 2009.
- [10] Chen, X., Z., Chen, Y. Yu , and D. Su “An unconditionally stable radial point interpolation meshless method with Laguerre polynomials,” *IEEE Trans. Antennas propag.*, vol.59, no. 10, pp. 3756-3763, Oct. 2011.

- [11] Sun. G., Treuman. C. W., "An unconditionally stable Crank-Nicolson scheme for solving two-dimensional Maxwell's equations," *IEEE Electron. Letter.*, vol.39, pp. 595-597, 2003.
- [12] Sun. G., Treuman. C. W., "Approximate Crank-Nicolson Schemes for the 2-D Finite-Difference Time-Domain Method for TEz Waves," *IEEE Trans. Antennas. Propagation*, vol.52, no.11, pp.2963-2972, Nov. 2004.
- [13] Crank. J., Nicolson. P., "A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type," *Proc. Camb. phil. Soc.*, vol.43, pp. 50-67, 1947.
- [14] Sadrpour. S. M, Nayyeri. V, Soleimani. M., Ramahi. O. M, "A new efficient unconditionally stable finite-difference time-domain solution of the wave equation," *Trans. Antennas. propagation.*, vol.65, no. 6, pp. 3114-3121, 2017.
- [15] Sadrpour. S. M, Nayyeri. V, Soleimani. M., "A new 2D unconditionally stable finite-difference time-domain algorithm based on Crank-Nicolson scheme," *IEEE MTT-S Int Conf. ICCEM*, pp. 55-57, 2016.
- [16] Yang. Y., Chen. R. S., Wang. D. X., Yung. E. R. N., "Unconditionally stable finite-difference time-domain method for simulation of three-dimensional microwave circuits," *IET Microw. Antennas propag.*, vol.1, no. 6, pp. 937-942, 2007.
- [17] Zhu. H., Gao. C., Chen. H., "An unconditionally stable radial point interpolation method based on Crank-Nicolson scheme," *IEEE Electron. Letter.*, vol.16, pp. 393-595, 2017.
- [18] Khalef. R., Benhabiles. M. T., Grine. F., Riabi. M. L., "An unconditionally stable radial point interpolation meshless method based on Crank-Nicolson scheme solution of wave equation," *IEEE Transactions. Microwave Theory. Techniques.* vol.66, pp. 3705-3713, 2018.
- [19] Khalef. R., Benhabiles. M. T., Grine. F., Cheraiet. Z., Benkhaoua. L., Ammari. H., Riabi. M. L., "An Efficient Unconditionally Stable RPIM Meshless Algorithm Solution of Helmholtz Wave Equation in Time Domain equation," *IEEE ISAP Int. Symposium. Antenna. propagation.* Korea, 2019.

- [20] Yang. S.,Chen. Z.,Yu. Y.,Ponomarenko. S., “A divergence-free meshless method based on vector basis function for transient electromagnetic analysis ,” IEEE Trans. Microw.Theory. Techn, vol.62, no. 7, pp. 1409-1415, 2014.
- [21] Courant. R.,Friedrichs. K.,Lewy. H.,“On the partial difference equations of mathematical physics ,” IBM, Research. Development, vol.11, no. 2, pp. 215-234, 1967.
- [22] Strikwerda.J. C., *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. Philadelphia, PA, USA: SIAM, 2004.
- [23] Eldén. L., *Matrix Methods in Data Mining and Pattern Recognition*. Philadelphia, PA, USA: SIAM, 2007.
- [24] Arnoldi. W. E., “The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem,” Quart. Appl. Math., vol. 9, no. 1, pp. 17–29, Jan. 1951.
- [25] Ascher . M., Greif. C., “A first course in numerical methods,” Computational. Science. Engineering. Philadelphia, PA, USA: SIAM, 2011.
- [26] Sevgi .L., *Complex Electromagnetic Problems and Numerical Simulation Approaches*. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2003.
- [27] Drobot. A. T., *Computer Applications in Plasma Science and Engineering*. London, U.K.: Springer, Dec. 1990.
- [28] Marini. S., Soto. P., Coves. A., Gimeno. B., V. E., “Practical design of filters using EBG waveguides periodically loaded with metal ridges,” Prog. Electromagn. Res. C, vol. 63, pp. 13–21, 2016.
- [29] Gwarek. W. K., Celuch-Marcysiak. M., “A differential method of reflection coefficient extraction from FDTD simulations,” IEEE Microw. Guided Wave Letter., vol. 6, no. 5, pp. 215–217, 1996.

- [30] Gwarek. W. K., Celuch-Marcysiak. M., “Wide-band S-parameter extraction from FDTD simulations for propagating and evanescent modes in inhomogeneous guides,” *IEEE Transactions. Microw. Theory Techn.*, vol. 51, no. 8, pp. 1920–1928, 2003.
- [31] Bebendorf. M., “ Hierarchical LU decomposition-based preconditioners for BEM,” *Computing*, vol.74, no. 3, pp. 225-247, 2005.
- [32] Gropp. W.,Lusk. E.,Skjellum. A., “Using MPI: portable parallel programming with the message-passing interface,” *The MIT Press*, vol.1, 1999.
- [33] Dagum. L.,Menon. R., “ OpenMP: an industry standard API for shared-memory programming,” *IEEE Computational science. Engineering*, vol.5, no. 1, pp. 46-55, 1998.



## Conclusion Générale et Perspectives



## Conclusion générale

Tout au long de cette thèse, nous avons eu l'occasion d'étudier plusieurs propriétés des méthodes temporelles qui sont mises en œuvre dans certains problèmes de modélisation électromagnétiques des structures à hyperfréquences. Nous avons étudié deux manières de discrétisation des équations différentielles de Maxwell (III.1) et (III.2) à travers la méthode FDTD et les méthodes sans maillage. L'accent est mis en particulier sur la question de convergence et de l'efficacité des deux méthodes. Bien que la méthode traditionnelle FDTD soit conditionnellement stable à travers leur limitation par la condition de Courant-Friedrichs- Lewy (CFL), elle n'est pas préservée de l'inefficacité, comme indiqué dans le chapitre III. Cela rendrait les solutions imprécises lorsqu'on a des structures très complexes, ce qui pourrait entraîner l'échec des simulations.

Pour la méthode sans maillage, l'implémentation traditionnelle basée sur les fonctions de base nécessite deux champs couplés (champs E et H) qui sont reconstruits à partir de l'ensemble des nœuds. Sur la base de l'équivalence mathématique des équations de Maxwell et des équations d'onde, il est possible d'améliorer l'efficacité en résolvant les équations d'onde grâce au découplage des champs E et H à travers l'intégration du schéma implicite de Crank-Nicolson dans l'équation de Faraday pour le mode TE ou dans l'équation d'Ampère pour le mode TM. Outre le problème d'efficacité, le problème de convergence existe également dans la méthode sans maillage. Les preuves de stabilité et de dispersion numérique sont systématiquement présentées selon les méthodes de Fourier et de Von Neumann, les magnitudes de toutes les valeurs propres de la matrice d'amplification sont inférieures ou égales à un, ce qui signifie que cette méthode est inconditionnellement stable et le critère de stabilité est traité par la méthode de puissance.

Enfin, la relation entre la méthode FDTD et la méthode sans maillage est théoriquement étudiée en termes de stabilité et de relation de dispersion numérique.

De plus, une comparaison des aspects numériques telles que la convergence et la précision de ces méthodes à la fin des derniers chapitres pour des exemples numériques nous a permis de conclure:

- ❖ Premièrement, la méthode FDTD est aujourd'hui un outil indispensable pour la modélisation électromagnétique, et présente donc des défauts parmi lesquels : une certaine imprécision par rapport aux autres techniques de résolutions mentionnées

au premier chapitre, en particulier le phénomène de dispersion numérique et la condition de stabilité de leur schéma explicite.

- ❖ Deuxièmement, le cadre mathématique pour la méthode sans maillage basée sur des fonctions de base radial (RBF) avec deux supports (local et global) et la méthode sans maillage d'interpolation par les RBF locales (RPIM) a été résumé. La méthode RBF permet des schémas de pas de temps numériques explicites pour la résolution d'équations différentielles de Maxwell. Des exemples numériques ont montré que la stabilité numérique de la méthode RBF est liée au rayon d'un domaine de support local et aux paramètres de forme des fonctions de base et la distribution des nœuds était hautement liée à la source d'excitation pour contenir toutes les fréquences jusqu'à une limite supérieure. Les aspects pertinents de l'algorithme RPIM, y compris le choix du critère de stabilité et la distribution des nœuds, ont été examinés. En outre, les formulations UPML ont été introduites pour RPIM. Par la suite, une formulation de ports de guides d'ondes pour l'extraction des paramètres de diffractions a été introduite pour la RPIM. Des exemples numériques de filtre à guide d'ondes ont montré les capacités de cette technique.
- ❖ Troisièmement, la RPIM dans le domaine temporel a été étendue à un schéma de Crank-Nicolson (CN) inconditionnellement stable qui permet des intervalles de temps supérieurs au critère de stabilité traditionnel (CFL). Les avantages de la méthode CN-RPIM ont été discutés et démontrés sur des exemples numériques d'un guide d'ondes et d'un filtre à bande interdite électromagnétique finie (EBG).

### **Futurs travaux**

À la fin de cette thèse, nous réalisons que de nombreuses questions restent en suspens, à la fois sur la base des méthodes proposées ou sur leurs applications aux applications en modélisation numérique des structures micro-ondes. En fait, sur la base des travaux présentés dans cette thèse, les recommandations suivantes sont formulées pour les travaux futurs:

1. La modélisation du domaine temporel d'une manière plus élaborée constituerait une autre solution aux problèmes de stabilité à long terme dans le cadre temporel. Il a déjà été démontré que l'utilisation des schémas inconditionnellement stable au lieu d'un schéma explicite de saute-mouton peut donner des solutions beaucoup

plus rapides. Des recherches supplémentaires dans cette direction semblent très prometteuses.

2. Le développement de la PML pour la méthode sans maillage RPIM basée sur le schéma implicite de CN pour résoudre les structures ouvertes. Etant donné que la PML est nécessaire pour tronquer le domaine de calcul infini pour modéliser les problèmes de rayonnement ouverts, afin de rendre la méthode sans maillage proposée applicable aux problèmes d'ingénierie pratiques, les travaux futurs porteront sur l'application de la PML à la méthode sans maillage CN-RPIM proposée.
3. la méthode sans maillage CN-RPIM proposée, qui peut préserver la différence de champs électrique et magnétique en introduisant des charges artificielles dans l'équation (II.4). Les preuves de stabilité et de dispersion numériques peuvent être systématiquement présentées selon la méthode de Von Neumann, sa propriété de divergence et son efficacité.



# Résumés



## Résumé

La simulation numérique est devenue un outil central dans la modélisation de nombreuses structures hyperfréquences, qui souffrent parfois des discontinuités qui les rendent difficiles à modéliser par les techniques conventionnelles. Elles exigent des méthodes puissantes de conception et de modélisation. De plus, en raison de l'augmentation des fréquences, il est devenu nécessaire de prévoir les réponses temporelles pour évaluer instantanément les performances de ces structures sur de larges bandes de fréquences.

En raison des restrictions imposées aux méthodes numériques traditionnelles en raison de sa dépendance aux maillages, les méthodes sans maillage sont devenues un outil scientifique indispensable dans la modélisation électromagnétique parce qu'elles ont permis de libérer les difficultés de la grille de discrétisation des méthodes classique pour l'approximation des équations de Maxwell d'une part et elles sont s'appuyant essentiellement sur les fonctions de base selon leur formulations mathématique d'une autre part, ce qui les distingue de cout de calcul faible para port les autres techniques classiques. Cependant, pour obtenir la convergence et obtenir des résultats précis, les méthodes sans maillage souffrent d'un problème stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) qui limite le pas de temps doit être satisfaite dans des simulations pratiques. En conséquence, le temps de calcul peut être prohibitif pour la modélisation électromagnétique fine ce qui nécessite leur intégration avec les schémas inconditionnellement stable implicite.

Dans ce contexte, d'une part de nombreux algorithmes ont été proposés pour résoudre les équations de Maxwell sous forme différentielle dans le domaine temporel pour la simulation des structures micro-ondes qui sont : la méthode sans maillage basée sur les fonctions de base radiales (RBF) et la méthode sans maillage d'interpolation de point radial (RPIM). D'une autre part, la présentation d'une nouvelle méthode sans maillage d'interpolation de point radial à deux dimensions inconditionnellement stables (RPIM) basée sur le schéma de Crank–Nicolson (CN). Le schéma implicite CN dans l'algorithme proposé est appliqué à une seule des équations de Maxwell. Cela conduit à résoudre l'équation d'onde vectorielle du second ordre dans le domaine temporel. Par conséquent, un seul champ électromagnétique est explicitement mis à jour à chaque itération. La condition de CFL dans la méthode CN-RPIM d'équation d'onde proposée ne limite pas le pas de temps en raison de sa formulation implicite. Pour valoriser la méthode CN-RPIM

proposée des exemples numériques sont utilisés pour valider et démontrer l'efficacité et la précision.

Les résultats numériques sont comparés à ceux obtenus par la méthode RPIM explicite et la méthode FDTD.

**Mots-clés :** méthodes sans maillage, méthode CN-RPIM, condition CFL, méthode FDTD, inconditionnellement stable, méthode RPIM, la méthode RBF, modélisation.

**Abstract:**

Numerical simulation has become a central tool in the modeling of many microwave structures that sometimes suffer from discontinuities, which are difficult to model by conventional techniques, as required by powerful design and modeling methods. In addition, because of the increase in frequencies, it has become necessary to predict temporal responses to instantly evaluate the performance of these structures over broad frequency bands.

Due to the restrictions imposed on traditional numerical methods due to its dependence on meshes, meshless methods have become an indispensable scientific tool in electromagnetic modeling because they have freed the difficulties of the classical methods discretization grid. The approximation of the Maxwell equations on the one hand and they are based essentially on the basic functions according to their mathematical formulations on the other hand, which distinguishes them from low computation costs compared with other conventional techniques. However, to obtain convergence and obtain accurate results, the meshless methods suffer from a Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) stability problem that limits the time step must be satisfied in practical simulations. Consequently, the computation time can be prohibitive for the fine electromagnetic modeling which requires their integration with the unconditionally stable implicit schemes.

In this context, on the one hand, many algorithms have been proposed to solve the Maxwell differential equations in the time domain for the simulation of some microwave structures which are: the meshless method based on the basis radial functions (RBF) and meshless radial point interpolation (RPIM) method. On the other hand, presentation of a new unconditionally stable two-dimensional radial point interpolation (RPIM) meshless method based on the Crank-Nicolson (CN) scheme. The implicit scheme of CN in the proposed algorithm is applied to only one of Maxwell's equations. This leads to solving the time-domain second-order vector wave equation. Therefore a single electromagnetic field is explicitly updated at each iteration. The CFL requirement in the proposed CN-RPIM wave equation method does not limit the time step due to its implicit formulation. To value the proposed CN-RPIM method, numerical examples are used to validate and demonstrate efficiency and accuracy.

The numerical results are compared with those obtained by the explicit RPIM method and the FDTD method.

**Keywords:** meshless methods, CN-RPIM method, CFL condition, FDTD method, unconditionally stable, RPIM method, RBF method, modeling.

**المخلص:**

أصبحت المحاكاة العددية أداة مركزية في نمذجة العديد من هياكل الميكروويف، حيث تعاني في بعض الأحيان من حالات عدم الاستمرارية، والتي يصعب نمذجتها بواسطة التقنيات التقليدية، وفقاً لما تتطلبه أساليب التصميم و النمذجة. بالإضافة إلى ذلك، نظراً للارتفاع في الترددات، أصبح من الضروري التنبؤ بالاستجابات الزمنية للتقييم الفوري لأداء هذه الهياكل على نطاقات تردد دواسعة.

نظراً للقيود المفروضة على الطرق العددية التقليدية المعتمدة على شبكات عقد، أصبحت الطرق غير المشبكة أداة علمية لا غنى عنها في النمذجة الكهرومغناطيسية لأنها حررتها من صعوبات الأساليب التقليدية لحل معادلات ماكسويل من جهة، وهي تستند بشكل أساسي على الحالات الأساسية وفقاً لتركيباتها الرياضية من ناحية أخرى، والتي تميزها بتكاليف حساب منخفضة مقارنة بالتقنيات التقليدية. ومع ذلك و للحصول على التقارب ونتائج دقيقة، تعاني الطرق غير المشبكة من شرط الإستقرار (CFL) Courant-Friedrichs-Lewy الذي يحد من الخطوة الزمنية في عمليات المحاكاة العملية. وبالتالي، يمكن أن يكون وقت الحساب أطول بالنسبة للنمذجة الكهرومغناطيسية الدقيقة التي تتطلب تكاملاً مع المخططات الضمنية المستقرة غير المشروطة.

في هذا السياق، من ناحية، تم اقتراح العديد من الخوارزميات لحل معادلات ماكسويل التفاضلية في المجال الزمني لمحاكاة بعض بنى الموجات الصغيرة وهي: الطريقة غير المشبكة القائمة على الهوال الشعاعية الأساسية (RBF) و النقطة الشعاعية بدون شبكة طريقة الاستيفاء (RPIM). من ناحية أخرى، تم تقديم طريقة جديدة للتداخل غير المستقر ثنائي الأبعاد (RPIM) لشبكة ثنائية الأبعاد غير مشروطة تستند إلى المخطط الضمني (CN) Crank-Nicolson حيث يتم تطبيق المخطط الضمني لـ CN في الخوارزمية المقترحة على معادلة واحدة فقط من معادلات ماكسويل وهذا يؤدي إلى حل معادلة الموجة المتجهة من الدرجة الثانية في المجال الزمني. لذلك، يتم تحديث مجال كهرومغناطيسي واحد في كل تكرار. لا يحدد شرط CFL في طريقة معادلة الموجة CN-RPIM المقترحة الخطوة الزمنية بسبب صيغتها الضمنية. لتفصيل طريقة CN-RPIM المقترحة، يتم استخدام أمثلة عددية للتحقق من الكفاءة والدقة.

تتم مقارنة النتائج المحصل عليها بواسطة الطريقة المقترحة بالنتائج التي تم الحصول عليها بواسطة طريقة RPIM و طريقة FDTD.

**الكلمات المفتاحية:** طرق شبكية، طريقة CN-RPIM، شرط الاستقرار CFL، طريقة FDTD، ثبات غير مشروط، طريقة RPIM، طريقة RBF، النمذجة.

## LISTE DES PUBLICATIONS

### Publications Internationales

1- Khalef. R., Benhabiles. M. T., Grine. F, Riabi. M. L., —An Unconditionally Stable Radial Point Interpolation Meshless Method Based on the Crank-Nicolson Scheme Solution of Wave Equation—,” in *IEEE Transactions. Microwave. theory & techniques*, vol. 66, no. 8, pp.3705-3713, August. 2018.

2- Khalef. R., Benkhaoua. L., Grine. F, Benhabiles. M.T., Riabi. M.L. —A combined meshless RBF-FDTD method for the analysis of transient electromagnetic fields—, In *Pertanika Journal of Science and Technology*, vol.24, no.2, pp.403-410, Jul, 2016.

3- Grine. F., Djerafi. T., Khalef. R., Benhabiles. M.T., Riabi. M.L., " Electromagnetic Band Gap Waveguide And Bends Substrate Integrated Waveguide," in *Microwave and Optical Technology Letters, Journal*, vol.60, no.02, pp.498-502, January 12, 2018.

### Communications Internationales

1-Khalef. R., Benkhaoua. L., Grine. F., Benhabiles. M.T., Riabi. M.L. "A combined meshless RBF-FDTD method for the analysis of transient electromagnetic fields". 2<sup>nd</sup>International Conference on Computational Methods in Engineering and HealthSciences (ICCMEH-2015) December 19 -20, 2015 UniversityPutra Malaysia,Malaysia.

2-Rostom. Khalef, Farouk. Grine, Mohamed. Taoufik. Benhabiles, Mohamed. Lahdi. Riabi, "A time-domain RBF meshless method for electromagnetic transient analysis", International Conference on Numerical Electromagnetic and Multiphysics Modeling and Optimization,(NEMO), 2016 IEEE MTT-S, 27-29 July 2016, china.

3- Zeyneb. Cheraiet, Rostom. Khalef, Mohamed.Taoufik. Benhabiles, Mohamed.Lahdi. Riabi “A broadband and low-loss Ruthroff 4:9 transmission-line”, IEEE-MTT-S NEMO 2017,Spain

4- Rostom. Khalef, Mohamed. Taoufik. Benhabiles, Farouk Grine, Larbi Benkhaoua, Zeyneb Cheraiet, Mohamed. Lahdi. Riabi, and Boubekeur. Messili ” X-band Waveguide Filter Modeling by UPML Radial Point Interpolation Meshless Method in Time domain” IEEE-MTT-S NEMO 2018, Iceland.

5- Farouk. Grine, Mohamed. Taoufik. Benhabiles, Rostom. Khalef, Tarek. Djerafi, and Mohamed. Lahdi. Riabi “Substrate Integrated Waveguide with Tapered Electromagnetic Bandgap Structures for Bandpass Filter Design” IEEE-MTT-S NEMO 2018, Iceland.

6- Rostom. Khalef, Mohamed. Taoufik. Benhabiles, Farouk. Grine, Larbi. Benkhaoua, Zeyneb. Cheraiet, Mohamed. Lahdi. Riabi and Halima. Ammari, “An Efficient Unconditionally Stable RPIM Meshless Algorithm Solution of Helmholtz Wave Equation in Time Domain “Internationalsymposium on antennas and propagation, ISAP-2018, South Korea.

7- Halima. Ammari Mohamed. Lahdi. Riabi, Farouk. Grine, Mohamed. Taoufik. Benhabiles, Rostom Khalef, Chahara. Erredir “Novel Quintuple-Mode Wideband Filter Based on Substrate Integrated Waveguide Using an Elliptic Metallic Post” ISAP-2018, South Korea.