

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

UNIVERSITE DES FRERES MENTOURI - CONSTANTINE -

FACULTE DES SCIENCES DE LA TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

N° D'ordre :

Série :

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : ELECTRONIQUE

Option : CONTROLE DES SYSTEMES

Par :

Bekkouche Hanene

THEME

**Conception de correcteur d'ordre fractionnaire
pour régulateur automatique de tension AVR**

Soutenue le 28 / 06 / 2017

Devant le Jury :

Président :	F. Marir	Professeur	Université des Frères Mentouri
Rapporteur :	A. Charef	Professeur	Université des Frères Mentouri
Examineurs :	M. Chemachema	Professeur	Université des Frères Mentouri
	S. Ladaci	Professeur	ENP de Constantine
	M. Lashab	MCA	Université Oum-El-Bouaghi

Année : 2017

DÉDICACES

Je dédie ce travail

A mes chers parents

A mes chers sœurs et frères

A tous mes amis

A tous les membres du laboratoire de Traitement du Signal

REMERCIEMENTS

Avant tout, Je remercie Allah tout puissant qui m'a donné le courage, la patience et la santé durant toutes ces longues années d'étude afin que je puisse arriver à ce niveau.

Ce travail de recherche a été effectué au Laboratoire de traitement du signal de l'Université des frères Mentouri de Constantine, sous la direction scientifique de Monsieur le professeur **Abdelfatah CHAREF**, que je tiens à remercier très profondément de son patience envers mon travail, de son soutien scientifique et humain, sa disponibilité durant mes années d'étude de magistère et du doctorat. Je le remercie aussi, pour la confiance qu'il m'a accordé, ses encouragements et ses conseils.

Je tiens d'abord à remercier Monsieur **Farid Marir**, Professeur à l'université de Constantine, d'avoir accepté la présidence de mon jury de thèse, ainsi que Messieurs **Mohamed Chemachema** Professeur à l'université de Constantine, **Mohamed Lashab**, Maitre de Conférence à l'université de Oum-El-Bouaghi et **Samir LADACI**, Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique de Constantine et membre du Laboratoire de traitement du signal, d'avoir accepté de participer à ce jury.

Je remercie aussi toute l'équipe du laboratoire de traitement du signal, pour leurs aides, serviabilités et leurs encouragements.

Mes remerciements s'adressent également à l'ensemble de mes enseignants de toutes les phases scolaire qui sont à l'origine de tout mon savoir.

Un grand merci à mes parents, et à toute ma famille pour leur amour et leur soutien.

Table des Matières

Dédicaces.....	ii
Remerciements.....	iii
Table des matières.....	iv
Liste des figures.....	vii
Liste des tableaux.....	xi
Résumé.....	xii
Introduction Générale.....	1
Chapitre I: Introduction aux Opérateurs et Systèmes d'Ordre Fractionnaire	
I.1 Introduction.....	4
I.2 Opérateurs d'ordre fractionnaire.....	4
I.2.1 Définitions.....	4
I.2.2 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire.....	6
I.2.3 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire.....	6
I.3 Approximation analogique des opérateurs d'ordre fractionnaire.....	7
I.3.1 Méthode de Charef : fonction de singularité.....	8
I.4 Systèmes linéaires d'ordre fractionnaire.....	13
I.4.1 Représentation des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire.....	13
I.4.2 Systèmes linéaires d'ordre fractionnaire fondamentaux.....	14
I.5 Conclusion.....	35
Chapitre II: Commande d'ordre fractionnaire	
II.1 Introduction.....	36
II.2 La commande CRONE.....	37
II.2.1 Commande CRONE de la première génération.....	37

II.2.2	Commande CRONE de la deuxième génération.....	39
II.2.3	Commande CRONE de troisième génération.....	40
II.3	Correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire.....	41
II.4	Le correcteur TID.....	44
II.5	Correcteur avance-retard de phase d'ordre fractionnaire.....	44
II.6	La fonction de transfert idéale de Bode.....	45
II.7	Conclusion.....	47

Chapitre III: Conception d'un Correcteur Fractionnaire pour la Commande Robuste du Système AVR

III.1	Introduction.....	48
III.2	Modèle du système AVR.....	49
III.3	Conception d'un correcteur fractionnaire pour la commande robuste du système AVR.....	54
III.3.1	Méthode de conception du correcteur proposé.....	54
III.3.2	Simulations, résultats et comparaison.....	58
III.3.3	Comparaison des performances et analyse de la robustesse.....	64
III.4	conclusion.....	74

Chapitre IV: Conception de Différents Correcteurs d'Ordre Fractionnaire pour le Système AVR

IV.1	Introduction.....	75
IV.2	Conception du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire	75
IV.2.1	Présentation de la méthode de conception du correcteur $PI^\lambda D^\mu$	75
IV.2.2	Simulations et résultats	80
IV.2.3	Comparaison des performances.....	83
IV.3	Conception du correcteur $(PID)^m$ Fractionnaire.....	84

IV.3.1	Présentation de la méthode de conception et d'implémentation du (PID) ^m	85
IV.3.2	Simulations et résultats.....	86
IV.4	Conception du correcteur fractionnaire utilisant la technique de l'IMC.....	90
IV.4.1	Présentation de la méthode de conception du correcteur fractionnaire Proposé.....	92
IV.4.2	Simulations, résultats et comparaisons.....	93
IV.5	Conclusion.....	97
	Conclusion générale.....	99
	Référence.....	102
	Abstract	

Liste des figures

<i>Figure</i>	<i>page</i>
I.1	Tracé de Bode du PPF et son approximation.....9
I.2	Choix des singularités pour l'approximation d'un intégrateur d'ordre fractionnaire.10
I.3	Module de $G(s)$ et de son approximation par une fonction rationnelle.....18
I.4	Phase de $G(s)$ et de son approximation par une fonction rationnelle.....18
I.5	La réponse impulsionnelle du système de relaxation d'ordre fractionnaire en utilisant son approximation par une fonction rationnelle.....19
I.6	La réponse indicielle du système de relaxation d'ordre fractionnaire en utilisant son approximation par une fonction rationnelle.....19
I.7	Module de $G(s)$ et de son approximation par une fonction rationnelle.....23
I.8	Phase de $G(s)$ et de son approximation par une fonction rationnelle.....24
I.9	La réponse impulsionnelle du système fractionnaire oscillatoire en utilisant son approximation par une fonction rationnelle.....25
I.10	La réponse indicielle du système fractionnaire oscillatoire en utilisant son approximation par une fonction rationnelle.....25
I.11	Module de $G(s)$ et de son approximation pour différentes valeurs de α29
I.12	Phase de $G(s)$ et de son approximation pour différentes valeurs de α30
I.13	Réponses impulsionnelles pour différentes valeurs de α31
I.14	Réponses indiciaires pour différentes valeurs de ζ31
I.15	Module de $G(s)$ et de son approximation pour différentes valeurs de ζ32
I.16	Phase de $G(s)$ et de son approximation pour différentes valeurs de ζ33
I.17	Réponses impulsionnelles pour différentes valeurs de ζ34
I.18	Réponses indiciaires pour différentes valeurs de ζ34

II.1	Diagramme de commande à retour unitaire.....	37
II.2	Diagrammes de Bode du régulateur CRONE idéal à phase constante.....	38
II.3	Représentation du gabarit vertical de $T(s)$ dans le plan de Black.....	40
II.4	Système de commande à retour unitaire classique.....	41
II.5	Structure du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire.....	43
II.6	Correcteur PID (a) : ordre entier, (b) : ordre fractionnaire.....	43
II.7	Structure du correcteur TID.....	44
II.8	Réponse fréquentielle du correcteur avance-retard de phase fractionnaire.....	45
II.9	Réponse fréquentielle de la fonction idéale de Bode.....	46
II.10	Système asservi dont la fonction idéale de Bode comme fonction de transfert en boucle ouverte.....	46
III.1	Modèle du système AVR.....	50
III.2	Schéma fonctionnel du system AVR avec le Correcteur $C(s)$	51
III.3	Schéma fonctionnel du system AVR avec le correcteur $C(s)$ et les valeurs nominales des paramètres.....	53
III.4	Réponse indicielle de la tension de sortie du système AVR sans correcteur.....	53
III.5	Tracé de Bode de la fonction de transfert en boucle ouvert $G(s)$ et de la fonction de transfert idéal de Bode $G_B(s)$	61
III.6	Tracé de Bode de la fonction de transfert en boucle fermée $G_c(s)$ et la fonction de transfert idéale de Bode en boucle fermée $G_{Bc}(s)$	63
III.7	Réponses indicielles de tension de sortie de l'AVR avec le correcteur proposé et de la fonction idéal de Bode en boucle fermée.....	64
III.8	Tracé de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte $G(s)$ et $G_{PID}(s)$	66
III.9	Réponses indicielles de la tension de sortie du système AVR avec le correcteur proposé et avec le PID classique.....	67

III.10	Réponses indicielles de tension de sortie du système AVR avec le correcteur PID et avec le correcteur proposé pour $K_g = 1$ et $\tau_g = 2$ s.....	68
III.11	Réponses indicielles de tension de sortie du système AVR avec le correcteur PID et avec le correcteur proposé pour $K_g = 0.7$ et $\tau_g = 1$ s.....	69
III.12	Réponses indicielles de tension de sortie du système AVR avec le correcteur PID et avec le correcteur proposé pour $K_g = 0.7$ et $\tau_g = 2$ s.....	69
III.13	Tracé de la marge de phase φ_m en fonction de K_g et τ_g du système AVR avec le correcteur proposé.....	71
III.14	Tracé de la marge de phase φ_m en fonction de K_g et τ_g du système AVR avec le correcteur PID [III.27].....	71
III.15	Tracé du dépassement $Os(\%)$ en fonction de K_g et τ_g du système AVR avec le correcteur proposé.....	72
III.16	Tracé du dépassement $Os(\%)$ en fonction de K_g et τ_g du système AVR avec le correcteur PID [III.27].....	72
III.17	Tracé du temps de réponse T_s en fonction de K_g et τ_g du système AVR avec le correcteur proposé.....	73
III.18	Tracé du temps de réponse T_s en fonction de K_g et τ_g du système AVR avec le correcteur PID [III.27].....	73
IV.1	Tracé de Bode de la fonction de transfert $G_A(s)$ et $G_d(s)$	81
IV.2	Réponses indicielles de la tension de sortie du système AVR avec les fonctions $G_A(s)$ et $G_d(s)$	83
IV.3	Réponses indicielles de tension de sortie du système AVR avec le correcteur proposé et le correcteur de [69].....	84
IV.4	Diagramme de Bode de la fonction de transfert $G(s)$ en boucle ouverte du système AVR pour $m = 0,15$, $m = 0,62$ et $m = 1,1$	87

IV.5	Réponse indicielle de tension de sortie du système AVR avec le correcteur (PID) ^{1.075} et le correcteur PID	89
IV.6	La structure du IMC ‘contrôle de modèle interne.....	90
IV.7	structure de la commande en boucle fermée.....	90
IV.8	Tracé de Bode de la fonction de transfert en boucle ouvert $G(s)$	94
IV.9	Réponse indicielle de tension de sortie de la fonction de transfert en boucle fermée du system AVR avec le correcteur proposée etla réponse indicielle de tension de sortie idéal $f(s)$	95
IV.10	Réponses indicielles de tension de sortie du système AVR avec le correcteur proposé, le correcteur PID et le PID d’ordre fractionnaire.....	96

Liste de tableaux

<i>Tableau</i>	<i>page</i>
III.1 Résultats de performance du dépassement O_s (%) et du temps de réponse T_s	70
IV.1 Caractéristique de performance du système AVR avec $(PID)^{1.075}$ et le correcteur PID classique.....	89
IV.2 performances du système AVR avec le correcteur proposé, Le correcteur PID et le PID d'ordre fractionnaire.....	97

Résumé

Dans ce travail, l'objectif principal est la conception de correcteurs d'ordre fractionnaire pour le système de régulation automatique de tension (AVR) en se basant sur les opérateurs et systèmes d'ordre fractionnaire afin d'améliorer ses performances et sa robustesse par rapport aux correcteurs classiques. Les stratégies de conception des correcteurs fractionnaires proposées du système AVR sont basées sur des fonctions de transfert fractionnaire telles que la fonction idéale de Bode et la fonction sinus amorti d'ordre fractionnaire. Ses stratégies utilisent la commande à modèle interne IMC avec modèle fractionnaire ainsi qu'une technique dite technique de "fractionalisation" qui consiste à élever un correcteur PID à une puissance réelle. Une technique de réglage analytique du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire a aussi été utilisée pour le système AVR conduisant à un correcteur $PD^\lambda D^\mu$ fractionnaire qui n'existe pas sous la forme classique. Des exemples illustratifs pour chaque correcteur fractionnaire conçu ont été présentés et les résultats obtenus ont été très satisfaisants et l'amélioration des performances et de la robustesse du système AVR par rapport aux correcteurs classiques a été réalisée.

Mots Clés :

Commande fractionnaire, Correcteur d'ordre fractionnaire, Fonction sinus amortie fractionnaire, Modèle idéale de Bode, Opérateur fractionnaires, Régulateur automatique de tension (AVR), Systèmes fractionnaires

Introduction Générale

Depuis les premiers travaux des dérivées d'ordre fractionnaire il y'a quelques siècles, la théorie du calcul fractionnaire a été développée pour la plupart par des mathématiciens. Durant les dernières décennies, un intérêt considérable a été porté au calcul fractionnaire par l'application de ce concept dans différents domaines de la science et de l'ingénierie [1]. Un des domaines qui a bénéficié des avantages de cette théorie est la commande des systèmes dynamiques. L'idée d'employer le calcul fractionnaire dans les boucles de contrôles des systèmes datait du début des années 60. Depuis, des méthodes de conception de correcteurs d'ordre fractionnaire ont été proposées. L'intérêt de ce genre de correcteurs est justifié par une meilleure flexibilité puisque ils peuvent être employés pour remplir des caractéristiques additionnelles pour la conception des systèmes asservis.

Quelques premiers travaux sur la commande d'ordre fractionnaire, bien que sans mention du terme fractionnaire, ont été fait par Bode. Il a proposé l'intégrateur d'ordre fractionnaire comme fonction de transfert en boucle ouverte en vu de maintenir un fonctionnement stable des amplificateurs à boucle de retour pour une variation importante du gain. Cette fonction de Bode est connue aujourd'hui sous le nom de la fonction de transfert idéale de Bode [2]. Appliquant l'idée de Bode à la commande de position d'un objet massif, Tustin et al ont proposé l'intégrateur d'ordre fractionnaire comme fonction de transfert en boucle ouverte afin de maintenir une marge de phase constante autour de la fréquence du gain unité [3]. Les premières tentatives d'application du calcul fractionnaire dans les systèmes de commande par rétroaction peuvent être trouvées dans [4-6]. Mais c'était Oustaloup qui a vraiment introduit un correcteur d'ordre fractionnaire appelé CRONE (Commande robuste d'ordre non entier), il l'a utilisé dans diverses applications de commande [7]. En 1999, Podlubny, en combinant le correcteur PID et le calcul fractionnaire, a proposé le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire impliquant une action d'intégration d'ordre fractionnaire λ et une action de différenciation d'ordre fractionnaire μ [8]. Depuis, de nombreuses techniques de réglage de ce correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire ont été proposées pour remplir différentes spécifications pour les systèmes de commande. Dans [9], on trouve un bon résumé sur les diverses méthodes et techniques de réglage du correcteur $PI^\lambda D^\mu$. En outre, plusieurs stratégies de commande d'ordre fractionnaire ont aussi été développées [10-12]. Alors, grâce à la gamme des

techniques de conception et des applications de la commande d'ordre fractionnaire, il est clair qu'elle est devenue un sujet de recherche très intéressant.

La stabilité et la constance du niveau de tension nominale dans un réseau d'énergie électrique est l'un des principaux problèmes pour une commande de système d'alimentation électrique, puisque tous les équipements connectés à ce réseau électrique sont conçus pour un certain niveau de tension appelée tension nominale. Si la tension de fonctionnement est différente de la tension nominale, les performances des équipements électriques seront affectées. Donc, pour résoudre ce type de problème de commande, un système de régulation automatique de tension (système AVR) est appliqué aux unités de production d'énergie [13]. En effet, le système AVR qui est un système de commande en boucle fermée fournit à ses bornes une tension à la valeur désirée. Puisque le correcteur PID a une structure simple et facile à comprendre par les ingénieurs et a de bonnes performances dans une large gamme de conditions de fonctionnement, il continue à être le correcteur principal utilisé dans le système AVR. Dans la littérature, une très grande gamme de techniques d'ajustement des paramètres du correcteur PID a été développée pour le système AVR avec la meilleure réponse dynamique [14-19].

Dans la dernière décennie, le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire a également été proposé dans le but d'améliorer la qualité de la commande du système AVR [20-25]. L'intérêt de ce type de correcteurs est justifié par une meilleure flexibilité, puisqu'il a des paramètres supplémentaires qui peuvent être utilisés pour répondre à des spécifications supplémentaires et la robustesse pour le système AVR.

Objectif de la thèse

L'objectif de ce travail porte essentiellement sur la conception de correcteurs d'ordre fractionnaire pour le système AVR en se basant sur les opérateurs et les systèmes d'ordre fractionnaire afin d'améliorer ses performances et sa robustesse par rapport aux correcteurs classiques. Les stratégies de conception des correcteurs fractionnaires proposées du système AVR sont basées sur des fonctions de transfert fractionnaires, telles que la fonction idéale de Bode et la fonction sinus amorti d'ordre fractionnaire. La première stratégie est consacrée à la conception d'une commande robuste d'ordre fractionnaire pour le système AVR. Cette stratégie de conception du correcteur fractionnaire est établie de telle sorte que la fonction de transfert en boucle ouverte du système AVR soit la fonction idéale de Bode. La seconde stratégie présente la conception du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire pour que la fonction

de transfert en boucle fermée du système AVR dépende de la fonction sinus amorti d'ordre fractionnaire. Dans la troisième stratégie, une technique dite "fractionalisation" qui consiste à élever la fonction de transfert à une puissance réelle m ($0 < m < 2$) du correcteur PID classique déjà conçu pour le système AVR pour obtenir le correcteur fractionnaire $(PID)^m$. La dernière stratégie présente la conception d'un correcteur fractionnaire en utilisant l'approche de la commande à modèle interne (IMC) en imposant comme modèle de référence en boucle fermé la fonction idéale de Bode.

Organisation de la thèse

Cette thèse est organisée de la manière suivante :

Le premier chapitre est consacré aux principales définitions, propriétés, approximations et implémentations des opérateurs et systèmes d'ordre fractionnaire.

Le second chapitre introduit la commande d'ordre fractionnaire, notamment la commande CRONE, le correcteur $PI^\lambda D^\mu$, le correcteur TID et le correcteur avance-retard de phase d'ordre fractionnaire en s'étalant sur leurs représentations, leurs structures et leurs implémentations ainsi que la fonction de transfert idéale de Bode et la fonction sinus amorti d'ordre fractionnaire qui seront utilisées dans les travaux de cette thèse.

Le chapitre trois est consacré à la conception d'une commande robuste d'ordre fractionnaire pour le système AVR. La stratégie de conception du correcteur fractionnaire est établie de telle sorte que la fonction de transfert en boucle ouverte du système AVR est la fonction idéale de Bode. Une comparaison des performances et de la robustesse par rapport aux variations du gain et de la constante du temps du générateur du système AVR avec le correcteur fractionnaire proposée et avec le correcteur PID de la littérature a été faite.

Le dernier chapitre introduit trois autres méthodes de conception de correcteurs d'ordre fractionnaire pour le système AVR afin d'améliorer ses performances et sa robustesse par rapport aux correcteurs classiques. Les stratégies de conception des correcteurs fractionnaires proposées sont : le réglage analytique des paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire, la "fractionalisation" du correcteur PID pour obtenir un correcteur fractionnaire et l'utilisation de la commande à modèle interne IMC avec modèle fractionnaire pour la conception du correcteur fractionnaire.

La conclusion regroupe les contributions et les résultats obtenus et présente des perspectives pour des travaux futures.

Chapitre /

Introduction aux Opérateurs et Systèmes d'Ordre Fractionnaire

I.1 Introduction

Le calcul d'ordre fractionnaire est considéré comme une ancienne thématique qui a marqué son début au 17^{ième} siècle. Cent ans plus tard le calcul fractionnaire a attiré l'attention de célèbres mathématiciens tels que P. S. Laplace (1812), J. B. J. Fourier (1822), N. H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-1867), A. K. Grünwald (1867-1872) et A.V. Letnikov (1868-1872) [26]. Il est resté un sujet non populaire parmi la communauté d'ingénierie, mais son intérêt n'est reconnu que dans la deuxième moitié du 20^{ième} siècle suite au développement des outils informatiques qui ont permis d'envisager des applications dans le domaine des sciences de l'ingénieur. L'objectif de ce chapitre est de présenter les bases théoriques des opérateurs et les systèmes d'ordre fractionnaire nécessaires pour le développement des chapitres qui suivent tout en rappelant les définitions et les principales propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire.

I.2 Opérateurs d'ordre fractionnaire

Le calcul d'ordre fractionnaire est une généralisation des opérateurs de l'intégration et de la différentiation classiques aux ordres non entiers. La notation utilisée pour les opérateurs d'ordre fractionnaire est ${}_a D_t^\alpha$ qui est défini comme suit [26]:

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \Re(\alpha) > 0, \\ 1 & \Re(\alpha) = 0, \\ \int_a^t (d\tau)^{-\alpha} & \Re(\alpha) < 0, \end{cases} \quad (I.1)$$

où α est l'ordre de l'opération, généralement $\alpha \in \mathbb{C}$ et les nombres réels a et t sont des limites de l'opération intégration-différentielle.

I.2.1 Définitions

Il existe plusieurs définitions mathématiques pour l'intégration et la dérivation d'ordre fractionnaire. Les définitions les plus utilisées sont ceux de Grünwald-Leitnikov, de Riemann-Liouville et de Caputo.

I.2.1.1 Définition de Grünwald-Leitnikov

Une des définitions les plus rencontrées de la dérivée d'ordre fractionnaire dans la littérature est celle de Grünwald-Letnikov qui est donnée par [27]:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{{}_a d_t^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h^\alpha} \right) \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh) \quad (I.2)$$

$$\text{où } \alpha \in \mathbb{C}, \binom{\alpha}{0} = 1, \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}, \quad a < t, \quad N = \left\lfloor \frac{t-a}{h} \right\rfloor.$$

Sous la condition que les dérivées $f^{(k)}(t)$ ($k = 1, 2, \dots, (m+1)$) sont continues dans l'intervalle $[a, t]$, la définition de Grunwald-Letnikov peut être aussi donnée par:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \quad (I.3)$$

Où m est un nombre entier tel que $m < \Re(\alpha) < (m+1)$ et $\Gamma(\alpha)$ est la fonction Gamma définie par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx \quad (I.4)$$

I.2.1. 2 Définition de Riemann-Liouville

La définition de Riemann-Liouville de la dérivée ou de l'intégrale d'ordre fractionnaire α d'une $f(t)$ est donnée par [26]:

$${}_a D_t^{-\alpha} f(t) = \begin{cases} D^m [{}_a D_t^{\alpha-m} f(x)], & \text{si } \Re(\alpha) > 0 \\ f(t), & \text{si } \Re(\alpha) = 0 \\ \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-x)^{-\alpha-1} f(x) dx, & \text{si } \Re(\alpha) < 0 \end{cases} \quad (I.5)$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$, $m < \Re(\alpha) < (m+1)$ et $f(\cdot)$ une fonction localement intégrable définie sur $[a, \infty]$.

I.2.1.3 Définition de Caputo

Caputo a proposé une nouvelle définition de la dérivée d'ordre fractionnaire qui porte d'ailleurs son nom et qui incorpore les conditions initiales de la fonction à traiter en termes de ses dérivées d'ordre entier. La dérivée d'ordre fractionnaire $\alpha > 0$ d'une fonction $f(t)$ définie sur $[a, +\infty]$ est donnée comme suit [27] :

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \quad (I.6)$$

Où m est un entier tel que $m < \alpha < (m+1)$ et $f^{(m)}(t)$ est la $m^{\text{ième}}$ dérivée de la fonction $f(t)$.

L'avantage principal de la définition de la dérivée d'ordre fractionnaire de Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire prennent la même forme que les conditions initiales des équations différentielles linéaire d'ordre entier.

I.2.2 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire

Les principales propriétés des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire sont les suivantes [27]:

- Si $f(t)$ est une fonction analytique en t , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire $D^\alpha f(t)$ est une fonction analytique en t et en α .
- Pour $\alpha = n$, ou n est un entier, l'opération $D^\alpha f(t)$ donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre entier n .
- Pour $\alpha = 0$, l'opération $D^\alpha f(t)$ est l'opérateur identité $D^0 f(t) = f(t)$.
- La différentiation et l'intégration d'ordre fractionnaire sont des opérations linéaires, c'est à c'est-à-dire que : $D^\alpha \{a f(t) + b g(t)\} = a D^\alpha f(t) + b D^\alpha g(t)$.

- La loi additive (propriété du semi groupe) $D^\alpha D^\beta f(t) = D^\beta D^\alpha f(t) = D^{\alpha+\beta} f(t)$ est valable sous certaines contraintes sur la fonction $f(t)$. Une permutation entre la dérivée d'ordre fractionnaire et la dérivée d'ordre entière

$\frac{d^n}{dt^n} \left({}_a D_t^\alpha f(t) \right) = {}_a D_t^\alpha \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = {}_a D_t^{\alpha+n} f(t)$ est valable sous la condition : $f^{(k)}(t)|_{t=a} = 0$, pour $k=0,1,2,\dots,(n-1)$.

- La règle de Leibniz pour la différentiation d'ordre fractionnaire est donnée par :

${}_a D_t^\alpha (\phi(t)f(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \phi^{(k)}(t) {}_a D_t^{\alpha-k} f(t)$ si $\phi(t)$ et $f(t)$ et toutes leurs dérivées sont continues dans l'intervalle $[a, t]$.

I.2.3 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire

Les définitions temporelles des opérateurs différentiels non entiers souffrent d'un formalisme mathématique quelque peu compliqué, mais leurs expressions dans le domaine de Laplace relève d'une simplicité remarquable, en particulier dans le cas de l'étude de systèmes relaxés à $t = 0$. Dans ce qui suit, on s'intéresse qu'au cas où l'ordre m est réel.

I.2.3.1 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire

La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire α , $(n-1) \leq \alpha < n$, selon la définition de Grünwald-Leitnikov est donnée par [27-28]:

$$L\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) \quad (I.7)$$

La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire α , $(n-1) \leq \alpha < n$, selon la définition de Riemann-Liouville est donnée par:

$$L\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0} \quad (I.8)$$

L'applicabilité de cette transformée en pratique est limitée à cause de l'absence d'interprétation physique des valeurs initiales $[D^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0}$, pour $k=0,1,\dots,(n-1)$.

Selon la définition de Caputo, la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire α , $(n-1) \leq \alpha < n$, est donnée par:

$$L\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \quad (I.9)$$

Cette transformée est très utilisée en pratique à cause des valeurs initiales classiques $f^{(k)}(0)$, pour $k = 0, 1, \dots, (n-1)$. Alors, pour l'étude et l'analyse des systèmes, la définition de Caputo semble être la plus appropriée que les deux autres. Donc, dans le reste de cette thèse on ne considère que la définition de Caputo de la dérivée d'ordre fractionnaire.

I.2.3.2 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire

La transformée de Laplace de l'intégration d'ordre fractionnaire α , $(n-1) \leq \alpha < n$, pour toutes les définitions est donnée par:

$$L\{I^\alpha f(t)\} = s^{-\alpha} F(s) \quad (I.10)$$

I.3 Approximation analogique des opérateurs d'ordre fractionnaire

Il existe plusieurs techniques d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire par des fonctions rationnelles. Les approximations disponibles dans le domaine de Laplace sont appelées des approximations analogiques. Dans [29], on peut trouver un très bon résumé de ces méthodes d'approximation. Parmi ces méthodes on peut citer les méthodes suivantes :

- La méthode de l'expansion par fractions continues (EFC)
- La méthode de Carlson
- La méthode de Charef

- La méthode de Matsuda
- La méthode d'Oustaloup

Les méthodes de Charef et d'Oustaloup sont les plus utilisées dans la littérature. La méthode de Charef dite méthode de la fonction de singularité est plus utile et plus pratique pour les approximations des fonctions de transferts d'ordre fractionnaire [30].

I.3.1 Méthode de Charef : fonction de singularité

Dans le but d'implémenter des modèles d'ordre fractionnaire dans les schémas de commande présentés dans ce travail, nous utiliserons la méthode de la fonction de singularité développée par Charef pour l'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire [30-31].

I.3.1.1 Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire

La fonction de transfert d'un intégrateur d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$G_I(s) = \frac{1}{s^\alpha} \quad (\text{I.11})$$

avec $s = j\omega$ est la fréquence complexe et α est un nombre positif tel que $0 < \alpha < 1$.

Dans une bande de fréquence donnée $[\omega_b, \omega_h]$, cet opérateur d'ordre fractionnaire peut être modélé dans le domaine fréquentiel par un pôle à puissance fractionnaire (PPF) comme suit [31]:

$$G_I(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha} \quad (\text{I.12})$$

Si on suppose que pour $\omega \in [\omega_b, \omega_h]$ on a $\omega \gg \omega_c$, on peut alors écrire :

$$G_I(s) = \frac{K_I}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha} = \frac{K_I \omega_c^\alpha}{s^\alpha} = \frac{1}{s^\alpha} \quad (\text{I.13})$$

avec $K_I = \left(\frac{1}{\omega_c^\alpha}\right)$ et ω_c est la fréquence de coupure du PPF obtenue à partir de la basse

fréquence ω_b par l'expression $\omega_c = \omega_b \sqrt{10^{\left(\frac{\varepsilon}{10\alpha}\right)} - 1}$ où ε est l'erreur maximale permise entre la pente de l'intégrateur d'ordre fractionnaire de l'équation (I.11) et du PPF de l'équation (I.12) dans la bande de fréquence donnée $[\omega_b, \omega_h]$.

Dans le but de représenter PPF de l'équation (I.12) et par conséquent l'intégrateur d'ordre fractionnaire par un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une fonction de transfert rationnelle. La méthode d'approximation consiste à approximer la pente de -20α dB/dec sur le tracé de Bode du PPF par un nombre de ligne sous forme de Zig-Zag, produite par une alternance de pente -20 dB/dec et 0 dB/dec correspondant à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négative du plan s tel que $p_0 < z_0 < p_1 < z_1 < \dots < z_{N-1} < p_N$. D'où l'approximation suivante :

$$G_I(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{I.14})$$

où les p_i et les z_i sont respectivement les pôles et les zéros de l'approximation.

La figure (I.1) présente le diagramme de Bode du PPF de l'équation (I.12) avec une pente de -20α dB/dec ainsi que son approximation par des lignes avec des pentes individuelles de -20α dB/dec et 0 dB/dec.

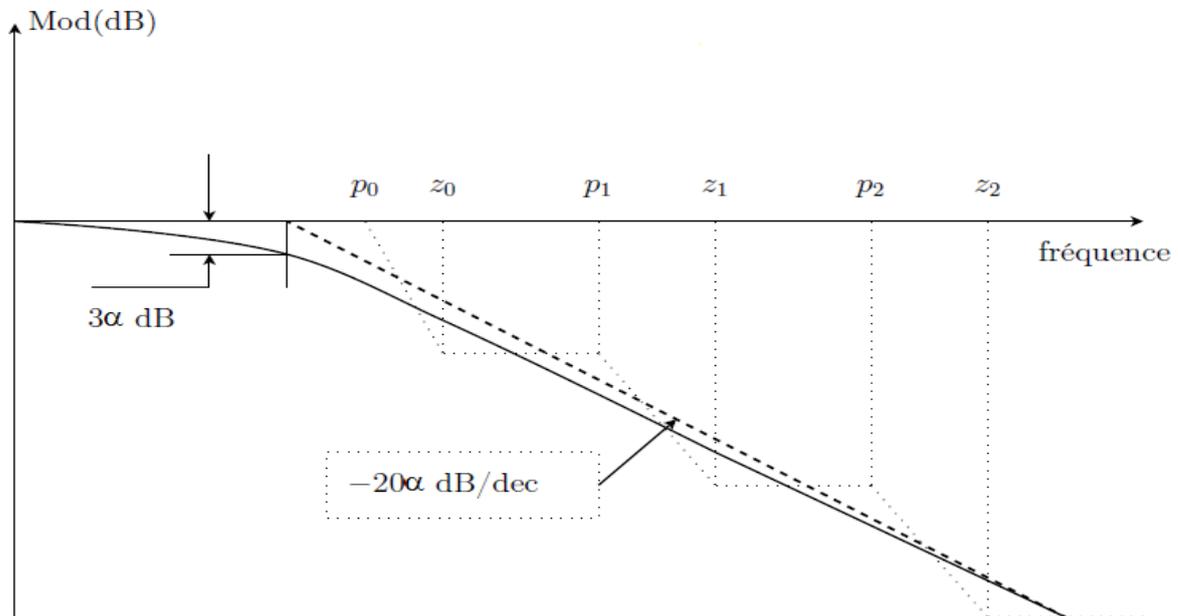


Figure (I.1) : Tracé de Bode du PPF et son approximation

En utilisant une méthode graphique, les pôles et les zéros de l'approximation s'avèrent sous une forme d'une progression géométrique [30]. Cette méthode graphique d'approximation commence par une erreur d'approximation y en dB et une bande de fréquence d'approximation ω_{\max} . Le choix des singularités p_i et z_i pour l'approximation en maintenant

un écart constant entre la ligne à -20α dB/dec et les lignes droites en zig-zag présenté sur la figure (I.2).

Pour déterminer le nombre N , la bande de fréquence ω_{\max} d'approximation est choisie telle que $\omega_{\max} = 100 \omega_h$, alors l'expression du nombre N est donnée par [30]:

$$N = \text{partie entiere} \left[\frac{\log \left[\frac{\omega_{\max}}{p_0} \right]}{\log(ab)} \right] + 1 \tag{I.15}$$

L'arrangement des singularités (pôles et zéros) est établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$p_i = (ab)^i p_0, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N \tag{I.16}$$

$$z_i = (ab)^i z_0, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N-1 \tag{I.17}$$

Où a et b sont appelés les rapports de position, leurs expressions en fonction de y et α sont données par :

$$a = 10^{\left(\frac{y}{10(1-\alpha)}\right)}, \quad b = 10^{\left[\frac{y}{10\alpha}\right]} \tag{I.18}$$

le premier pôle p_0 et le premier zéro z_0 sont : $p_0 = \omega_c \sqrt{b}$, $z_0 = ap_0$ [30].

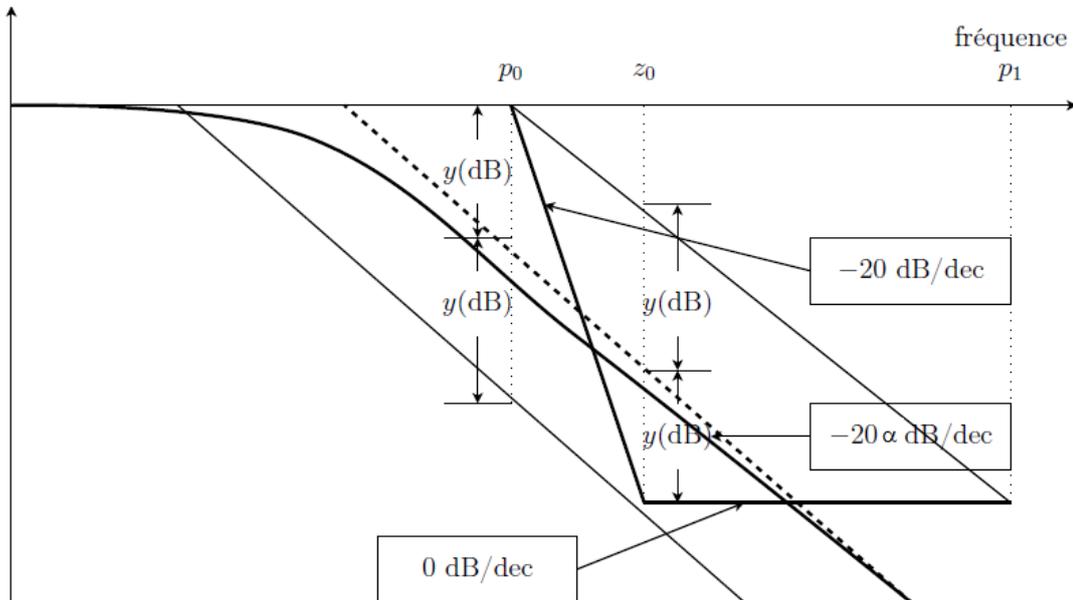


Figure (I.2) : Choix des singularités pour l'approximation d'un intégrateur d'ordre fractionnaire

Afin de connaître la contribution de chaque pôle au processus de relaxation. On doit décomposer la fonction rationnelle en une somme de fractions élémentaires comme suit:

$$G_I(s) = K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{(ab)^i a p_0} \right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i p_0} \right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i p_0} \right)} \quad (I.19)$$

où les coefficients h_i sont les résidus qui sont donnés, pour $i = 0, 1, \dots, N$, par :

$$h_i = K_I \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^j p_0}{(ab)^j a p_0} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left(1 - \frac{(ab)^j p_0}{(ab)^j p_0} \right)} = K_I \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^{i-j}}{a} \right)}{\prod_{ij=0, j \neq i}^N \left(1 - (ab)^{i-j} \right)} \quad (I.20)$$

I.3.1.2 Approximation du dérivateur d'ordre fractionnaire

La fonction de transfert du dérivateur d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante [31] :

$$G_D(s) = s^\alpha \quad (I.21)$$

avec $s = j\omega$ est la fréquence complexe et α est un nombre positif tel que $0 < \alpha < 1$.

Dans une bande de fréquence donnée $[\omega_b, \omega_h]$, ce dérivateur d'ordre fractionnaire peut être modelé dans le domaine fréquentiel par un zéro à puissance fractionnaire (ZPF) comme suit :

$$G_D(s) = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c} \right)^\alpha \quad (I.22)$$

Si on suppose que pour $\omega \in [\omega_b, \omega_h]$ on a $\omega \gg \omega_c$, on peut écrire :

$$G_D(s) = K_D \left(\frac{s}{\omega_c} \right)^\alpha = \frac{K_D}{\omega_c^\alpha} s^\alpha = s^\alpha \quad (I.23)$$

avec $K_D = \omega_c^\alpha$ et ω_c est la fréquence de coupure de ZPF obtenue à partir de la basse fréquence

ω_b par l'expression $\omega_c = \omega_b \sqrt{10^{\left(\frac{\varepsilon}{10\alpha}\right)} - 1}$ où ε est l'erreur maximale permise entre la pente du dérivateur d'ordre fractionnaire de l'équation (I.21) et le ZPF de l'équation (I.22) dans la bande de fréquence donnée $[\omega_b, \omega_h]$.

Dans le but de représenter le ZPF de l'équation (I.22), et par conséquent le dérivateur d'ordre

fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une fonction de transfert rationnelle. La méthode d'approximation consiste à approximer la pente de 20α dB/dec sur le tracé de Bode du ZPF par un nombre de ligne sous forme de Zig-Zag, produite par une alternance de pente 20 dB/dec et 0 dB/dec correspondant à une alternance de zéros et de pôles sur l'axe réel négative du plan s tel que $z_0 < p_0 < z_1 < p_1 < \dots < z_{N-1} < p_N$. D'où l'approximation suivante :

$$G_D(s) = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{I.24})$$

où les p_i et les z_i sont les pôles et les zéros de l'approximation. Cette technique approximation commence par une erreur d'approximation y en dB et une bande de fréquence d'approximation ω_{\max} qui est choisie telle que $\omega_{\max} = 100\omega_h$. Premièrement, le nombre de singularité N est donné par:

$$N = \text{partie entiere} \left[\frac{\log \left[\frac{\omega_{\max}}{z_0} \right]}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (\text{I.25})$$

Puis, l'arrangement des pôles et des zéros est établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$p_i = (ab)^i p_0 \quad , \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{I.26})$$

$$z_i = (ab)^i z_0 \quad , \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{I.27})$$

Où a et b sont appelés les rapports de position, leurs expressions en fonction de y et α sont données par :

$$a = 10^{\left(\frac{y}{10(1-\alpha)}\right)}, \quad b = 10^{\left[\frac{y}{10\alpha}\right]} \quad (\text{I.28})$$

le premier zéro z_0 et le premier pôle p_0 sont : $z_0 = \omega_c \sqrt{b}$, $p_0 = az_0$. Donc, la fonction rationnelle d'approximation sera :

$$G_D(s) = s^\alpha = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i z_0}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i az_0}\right)} \quad (\text{I.29})$$

Pour des raisons concernant la réalisation, on doit décomposer la fonction rationnelle $G_D(s)$ en une somme de fractions élémentaires comme suit:

$$G_D(s) = K_D \cdot \prod_{i=0}^N \frac{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i z_0}\right)}{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i az_0}\right)} = K_D + \sum_{i=0}^N \frac{g_i s}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{I.30})$$

où les coefficients g_i sont les résidus qui sont donnés, pour $i = 0, 1, \dots, N$, par :

$$g_i = K_D \frac{\sum_{j=0}^N (1 - (ab)^{(i-j)} a)}{(- (ab)^i az_0) \prod_{j=0, j \neq i}^N (1 - (ab)^{(i-j)})} \quad (\text{I.31})$$

I.4 Systèmes linéaires d'ordre fractionnaire

L'analyse d'une large catégorie de processus physiques tel que le bruit électronique [32], les réseaux de télécommunication [33], les systèmes hydrauliques [34], la mécanique des fluides [35], la polarisation électrode-électrolyte [36], ligne de transmission électriques, modélisation des signaux vocaux et théorie de la viscoélasticité [37] montre que les tracés de Bode de ces systèmes sont caractérisés par une pente d'ordre fractionnaire et par un comportement temporel régi par des équations différentielles d'ordre fractionnaire. L'utilisation des modèles entiers n'est donc pas convenable pour représenter ce type de systèmes. Alors, une nouvelle catégorie de modèles appelés modèles d'ordre fractionnaire basés sur le concept de la différentiation d'ordre fractionnaire a été développée.

I.4.1 Représentation des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire

I.4.1.1 Équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire

Un système linéaire d'ordre fractionnaire peut être représenté par une équation différentielle d'ordre fractionnaire de la forme [28]:

$$\sum_{i=0}^N a_i D^{\alpha_i} y(t) = \sum_{j=0}^M b_j D^{\beta_j} u(t) \quad (\text{I.32})$$

où $D^\gamma \equiv_0 D_t^\gamma$ désigne la dérivée d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville ou de Caputo, $u(t)$ et $y(t)$ sont, respectivement, l'entrée et la sortie du système, les ordres des dérivées α_i ($1 \leq i \leq N$) et β_j ($1 \leq j \leq M$) sont des nombres réels tel que $\alpha_N > \alpha_{N-1} > \dots > \alpha_0$ et $\beta_M > \beta_{M-1} > \dots > \beta_0$

avec $\alpha_N \geq \beta_M$ et les coefficients a_i ($i = 0, 1, \dots, N$) et b_j ($j = 0, 1, \dots, M$) sont des nombres réels. Quand les ordres des dérivées α_i ($1 \leq i \leq N$) et β_j ($1 \leq j \leq M$) sont multiples du même nombre réel α ($0 < \alpha < 1$), $\alpha_i = i\alpha$ ($1 \leq i \leq N$) et $\beta_j = j\alpha$ ($0 \leq j \leq M$) avec $M \leq N$, le système linéaire d'ordre fractionnaire est dit système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable. Alors, l'équation différentielle d'ordre fractionnaire de l'équation (I.32) devienne :

$$\sum_{i=0}^N a_i D^{i\alpha} y(t) = \sum_{j=0}^M b_j D^{j\alpha} u(t) \quad (\text{I.33})$$

I.4.1.2 Fonction de transfert

La fonction de transfert du système linéaire d'ordre fractionnaire de l'équation (I.32) est donnée par la fonction suivante [28]:

$$G(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}} \quad (\text{I.34})$$

Dans le cas d'un système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable, la fonction de transfert de l'équation (I.34) devient :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j (s^\alpha)^j}{\sum_{i=0}^n a_i (s^\alpha)^i} \quad (\text{I.35})$$

I.4.2 Systèmes linéaires d'ordre fractionnaire fondamentaux

Il existe deux types de systèmes linéaires d'ordre fractionnaire fondamentaux. Le premier type est connu sous le nom de système fractionnaire de Bode et il est défini par [31] :

$$(\tau_0)^\alpha \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} + x(t) = e(t) \quad (\text{I.36})$$

Où $e(t)$ est le signal d'entrée, $x(t)$ est le signal de sortie, $0 < \alpha < 2$ et τ_0 est un nombre réel positif. La fonction de transfert de ce type de système est donnée par la fonction irrationnelle suivante :

$$G(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{1}{[1 + (s\tau_0)^\alpha]} \quad (\text{I.37})$$

Ce système d'ordre fractionnaire est dit de relaxation si $0 < \alpha < 1$ et dit d'oscillation si $1 < \alpha < 2$. Le second type est connu sous le nom de système sinus amorti d'ordre fractionnaire et il est défini par [38] :

$$(\tau_0)^{2\alpha} \frac{d^{2\alpha} x(t)}{dt^2} + 2\zeta(\tau_0) \frac{d^\alpha x(t)}{dt} + x(t) = e(t) \quad (\text{I.38})$$

où $e(t)$ est le signal d'entrée, $x(t)$ est le signal de sortie, $0 < \alpha < 1$, $0 < \zeta < 1$ et τ_0 est un nombre réel positif. La fonction de transfert de ce type de système est donnée par la fonction irrationnelle suivante :

$$G(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{1}{[(\tau_0 s)^{2\alpha} + 2\zeta(\tau_0 s)^\alpha + 1]} \quad (\text{I.39})$$

Dans le but d'analyser ces deux types de systèmes d'ordre fractionnaire, dans ce qui suit, on va présenter des méthodes d'approximation et d'implémentation des fonctions de transfert irrationnelles des équations (I.37) et (I.39) par des fonctions rationnelles, dans une bande de fréquence donnée.

I.4.2.1 Système d'ordre fractionnaire de relaxation

I.4.2.1.1 Approximation par une fonction rationnelle

Le système d'ordre fractionnaire de relaxation est défini comme étant le système représenté par l'équation différentielle d'ordre fractionnaire de l'équation (I.36), pour $0 < \alpha < 1$, dont la fonction de transfert est donnée par l'équation (I.37) comme suit:

$$G(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (\text{I.40})$$

Il est bien connu dans la littérature que la fonction de transfert $G(s)$ est liée à une fonction de distribution des temps de relaxation $H(\tau)$ par la relation suivante [39] :

$$G(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^\alpha} = \int_0^\infty \frac{H(\tau)}{1 + (s\tau)^\alpha} d\tau, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (\text{I.41})$$

Où la fonction $H(\tau)$ est donnée par l'expression suivante:

$$H(\tau) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin[(1-\alpha)\pi]}{\cosh\left[\alpha \log\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)\right] - \cos[(1-\alpha)\pi]} \right] \quad (\text{I.42})$$

La méthode d'approximation commence par la discrétisation de la fonction de distribution des temps de relaxation $H(\tau)$ de l'équation (I.42) dans une bande fréquentielle d'intérêt pratique $[0, \omega_H]$ en points équidistants τ_i sur une échelle logarithmique comme suit [40]:

$$H(\tau) \cong H_s(\tau) = \sum_{i=1}^{2N-1} H(\tau_i) \delta(\tau - \tau_i) \quad (\text{I.43})$$

Où $\tau_i = \tau_0 \lambda^{N-i}$ (pour $i=1,2,\dots,2N-1$) et λ , un nombre réel supérieur à l'unité, définie comme

le rapport d'un pôle au pôle précédent $\lambda = \frac{p_{i+1}}{p_i} = \frac{\tau_i}{\tau_{i+1}}$ avec $p_i = \frac{1}{\tau_i}$ (pour $i=1,2,\dots,2N-1$).

Substituant l'équation (I.43) dans l'équation (I.41), on obtient:

$$G(s) \cong \int_0^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^{2N-1} H(\tau_i) \delta(\tau - \tau_i)}{1 + s\tau} d\tau = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{H(\tau_i)}{1 + s\tau_i} \quad (\text{I.44})$$

Donc, on peut écrire que:

$$G(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^\alpha} \cong \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{H(\tau_i)}{1 + s\tau_i} = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{I.45})$$

où les pôles p_i et les résidus k_i de l'approximation, sont donnés par (pour $i=1,2,\dots,2N-1$) :

$$p_i = \frac{1}{\tau_i} = \lambda^{(i-N)} \frac{1}{\tau_0} \quad (\text{I.46})$$

$$k_i = H(\tau_i) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin[(1-\alpha)\pi]}{\cosh\left[\alpha \log\left(\frac{\tau_i}{\tau_0}\right)\right] - \cos[(1-\alpha)\pi]} \right] \quad (\text{I.47})$$

Dans une bande de fréquence d'intérêt pratique $[0, \omega_H]$, pour une fréquence d'approximation ω_{\max} qui peut être choisie comme $100\omega_H$, le nombre N est déterminé comme suit :

$$N = \text{Integer} \left[\frac{\log(\tau_0 \omega_{\max})}{\log(\lambda)} \right] + 1 \quad (\text{I.48})$$

I.4.2.1.2 Les réponses temporelles

D'après l'équation (I.45), on a :

$$G(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^\alpha} \cong \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{I.49})$$

Donc, on aura,

$$X(s) = \frac{E(s)}{1 + (s\tau_0)^\alpha} \cong \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} E(s) \quad (\text{I.50})$$

Pour $e(t) = \delta(t)$ une impulsion unité, $E(s) = 1$, alors :

$$X(s) = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{I.51})$$

Utilisant la transformé de Laplace inverse, la réponse impulsionnelle de ce type de système peut être obtenue comme suit :

$$X(t) = \sum_{i=1}^{2N-1} k_i p_i \exp(-p_i t) \quad (\text{I.52})$$

Pour $e(t) = u(t)$ un échelon unité, $E(s) = 1/s$, alors :

$$X(s) = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \frac{1}{s} = \sum_{i=1}^{2N-1} k_i \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + p_i} \right) \quad (\text{I.53})$$

Utilisant la transformé de Laplace inverse, la réponse indicielle de ce type de système peut être obtenue comme suit :

$$X(t) = \sum_{i=1}^{2N-1} k_i (1 - \exp(-p_i t)) \quad (\text{I.54})$$

I.4.2.1.3 Exemple illustratif

Soit le système de relaxation d'ordre fractionnaire suivant :

$$G(s) = \frac{1}{1 + (0.1s)^\alpha} \quad (\text{I.55})$$

Les figures (I.3) et (I.4) représentent, respectivement, le module et la phase, dans le plan de Bode de la fonction de transfert irrationnelle de ce système ainsi que la fonction de transfert rationnelle de son approximation pour quelques valeurs du paramètre α .

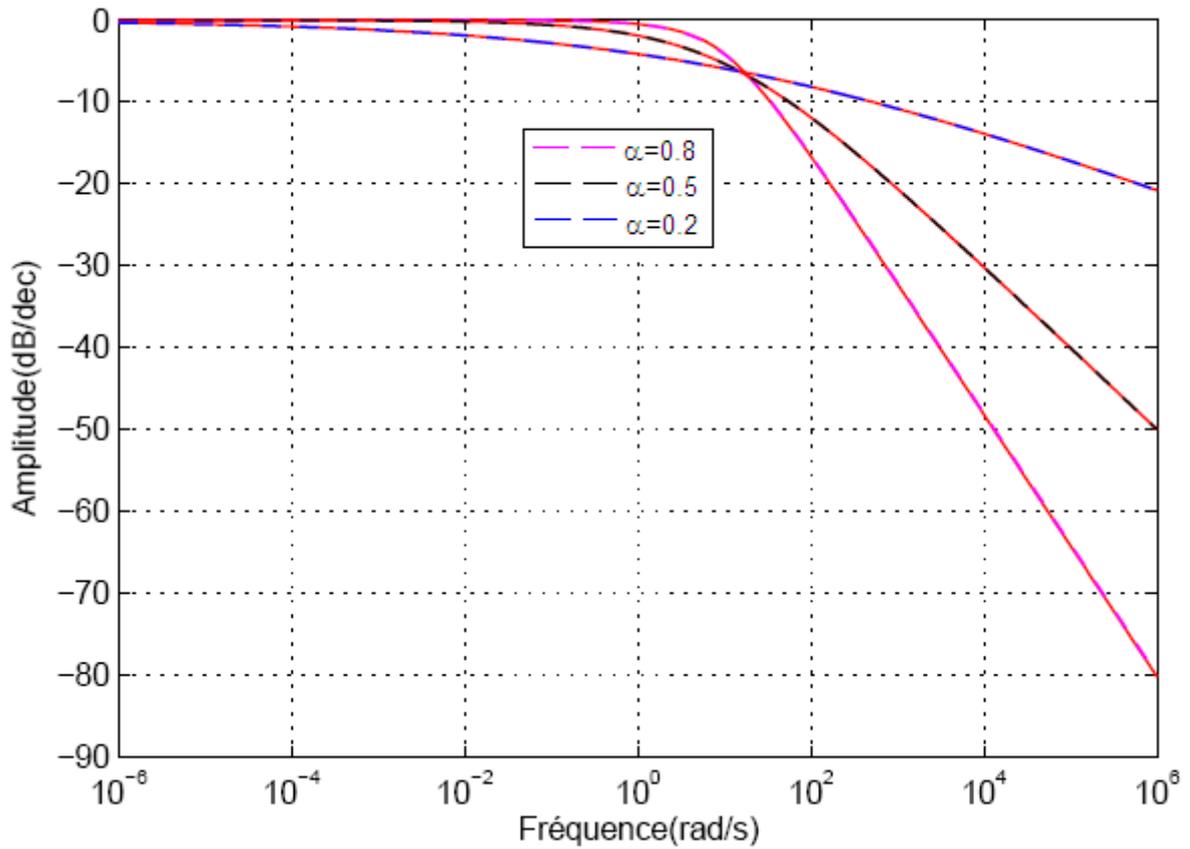


Figure (I.3) : Module de $G(s)$ et de son approximation par une fonction rationnelle

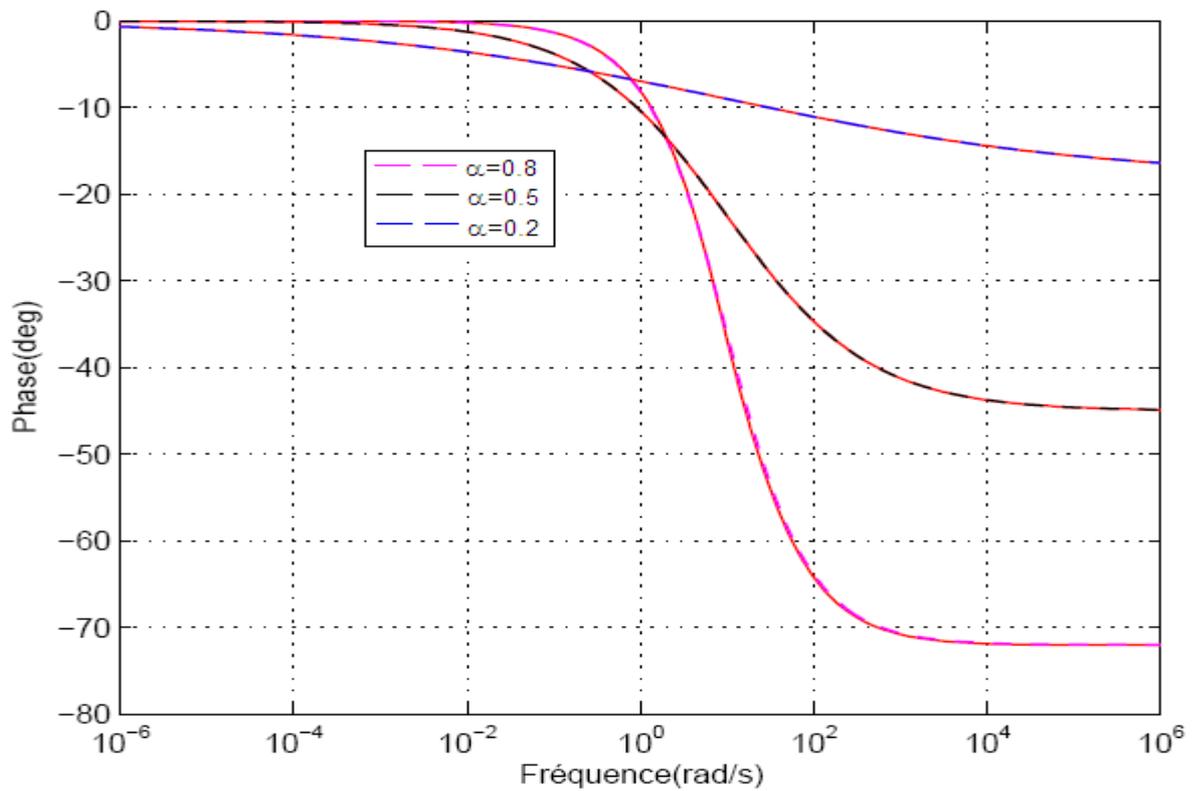


Figure (I.4) : Phase de $G(s)$ et de son approximation par une fonction rationnelle

Les figures (I.5) et (I.6) montrent, respectivement, la réponse impulsionnelle et la réponse indicielle de ce système en utilisant sa fonction de transfert rationnelle de son approximation pour quelques valeurs du paramètre α .

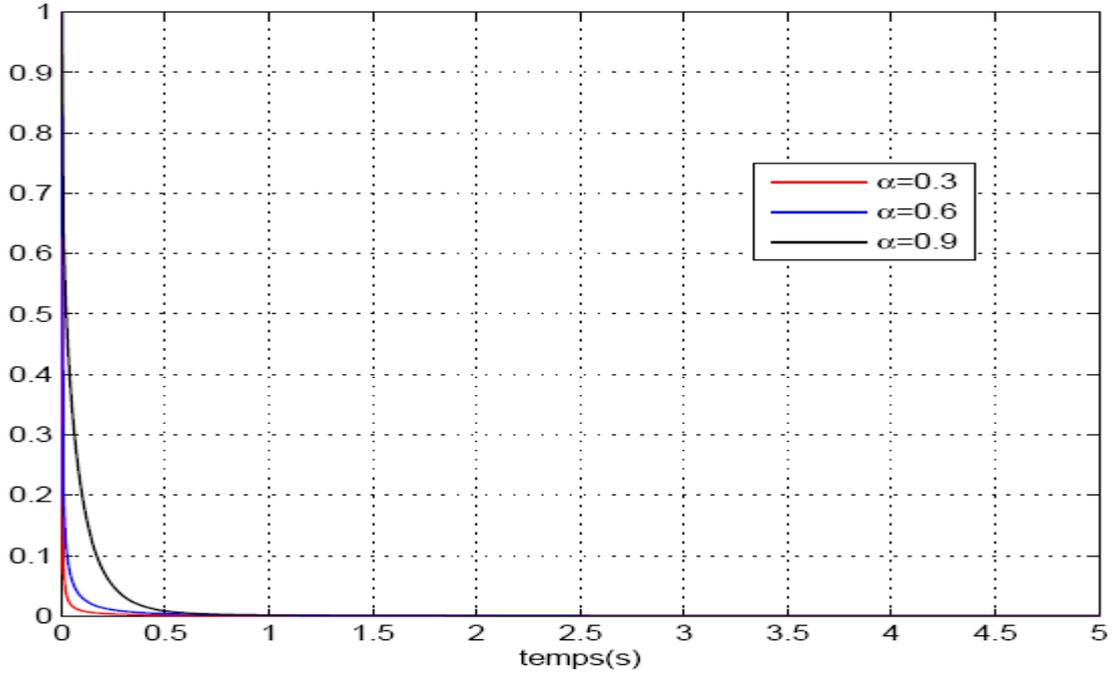


Figure (I.5) : Réponse impulsionnelle du système de relaxation d'ordre fractionnaire en utilisant son approximation par une fonction rationnelle

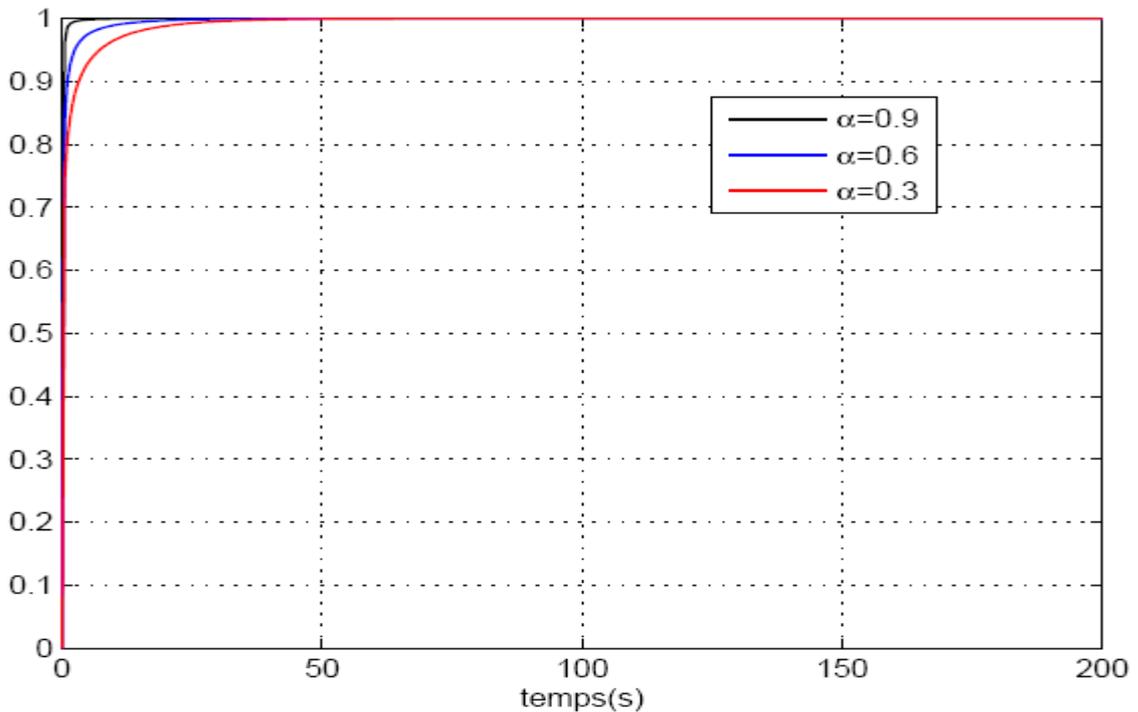


Figure (I.6) : Réponse indicielle du système de relaxation d'ordre fractionnaire en utilisant son approximation par une fonction rationnelle

I.4.2.2 Système d'ordre fractionnaire oscillatoire

I.4.2.2.1 Approximation par une fonction rationnelle

Le système d'ordre fractionnaire oscillatoire est défini comme étant le système représenté par l'équation différentielle d'ordre fractionnaire de l'équation (I.36), pour $1 < \alpha < 2$, dont la fonction de transfert est donnée par l'équation (I.37) comme suit:

$$G(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^\alpha}, \quad 1 < \alpha < 2 \quad (\text{I.56})$$

La fonction de transfert du système d'ordre fractionnaire oscillatoire de l'équation (I.56) est modélisée par la fonction suivante [40] :

$$G(p) = \frac{1}{[1 + (s\tau_0)^\alpha]} \cong \frac{(1 + \tau_0 s)^{2-\alpha}}{(\tau_0 s)^2 + 2\zeta(\tau_0 s) + 1} = G_N(s)G_D(s) \quad (\text{I.57})$$

Où $G_N(s) = (1 + \tau_0 s)^{2-\alpha}$ est un ZPF, avec $0 < (2-\alpha) < 1$, et $G_D(s) = \frac{1}{(\tau_0 s)^2 + 2\zeta(\tau_0 s) + 1}$ est

un système du second ordre régulier. De l'équation (I.57), on peut facilement montrer que :

$$\text{pour } \omega \gg \frac{1}{\tau_0}, \quad |G(j\omega)| = \frac{1}{(\omega\tau_0)^\alpha} \cong \frac{(\omega\tau_0)^{2-\alpha}}{(\omega\tau_0)^2} = \frac{1}{(\omega\tau_0)^\alpha}$$

$$\text{pour } \omega \ll \frac{1}{\tau_0}, \quad |G(j\omega)| = 1 \cong \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{pour } \omega = \frac{1}{\tau_0}, \quad |G(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + (j)^\alpha} \right| \cong \frac{|(1 + j)^{2-\alpha}|}{|2j\zeta|}$$

alors, on peut écrire que :

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[\left(1 + \cos \frac{\alpha\pi}{2}\right)^2 + \left(\sin \frac{\alpha\pi}{2}\right)^2 \right]}} \cong \frac{(\sqrt{2})^{2-\alpha}}{2\zeta} = \frac{(\sqrt{2})^{-\alpha}}{\zeta} \quad (\text{I.58})$$

Pour garantir l'égalité de l'équation (I.58), le facteur d'amortissement ζ du système de deuxième ordre régulier doit être donné par :

$$\zeta = \sqrt{\frac{\left(1 + \cos \frac{\alpha\pi}{2}\right)}{2^{\alpha-1}}} \quad (\text{I.59})$$

Donc, la modélisation de la fonction de l'équation (I.56) par la fonction de droite de l'équation (I.57) est validée. Par conséquent, la fonction de transfert irrationnelle du système d'ordre fractionnaire oscillatoire de l'équation (I.56) peut être approximé par une fonction rationnelle en approximant dans une bande de fréquence $[0, \omega_H]$ le zéro à puissance fractionnaire $G_N(s) = (1 + \tau_0 s)^{2-\alpha}$ de l'équation (I.57).

De la section (I.3.1.2), on peut donc écrire :

$$G_N(s) = (1 + \tau_0 s)^{2-\alpha} \cong \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{I.60})$$

Alors, l'équation (I.57) peut être reformulée comme suit :

$$G(s) = \frac{1}{(1 + (\tau_0 s)^\alpha)} \cong \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \frac{1}{(s\tau_0)^2 + 2\zeta(s\tau_0) + 1} \quad (\text{I.61})$$

où les zéros z_i et les pôles p_i (pour $i=0,1,\dots,N$) et N d'approximation sont donnés

comme suit: $z_i = (ab)^i z_0$, $p_i = (ab)^i p_0$ et $N = \text{Integer} \left(\frac{\log \left(\frac{\omega_{\max}}{z_0} \right)}{\log(ab)} \right) + 1$ où

$$a = 10^{\lfloor y/10(1-(2-\alpha)) \rfloor}, b = 10^{\lfloor y/10(2-\alpha) \rfloor}, z_0 = \frac{1}{\tau_0} 10^{\lfloor y/20(2-\alpha) \rfloor} \text{ et } p_0 = a z_0.$$

Donc, l'équation (I.61) est réécrite comme suit :

$$G(s) = \frac{1}{(1 + (\tau_0 s)^\alpha)} \cong \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_0 (ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_0 (ab)^i}\right)} \frac{1}{(s\tau_0)^2 + 2\zeta(s\tau_0) + 1} \quad (\text{I.62})$$

I.4.2.2.2 Les réponses temporelles

Par décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle de l'équation (I.62) on obtient l'expression suivante [41]:

$$G(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{1}{[1 + (\tau_0 s)^\alpha]} = \frac{As + B}{(\tau_0 s)^2 + 2\zeta(\tau_0 s) + 1} + \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{\left(1 + \frac{s}{p_0(ab)^i}\right)} \quad (I.63)$$

Où les résidus $k_i (i=0,1,\dots, N)$ des pôles réels et les constantes A et B sont donnés comme suit [41]:

$$k_i = \left\{ \frac{1}{(\tau_0 p_0(ab)^i)^2 - 2\zeta(\tau_0 p_0(ab)^i) + 1} \right\} \frac{\prod_{j=0}^N (1 - a(ab)^{i-j})}{\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^N (1 - (ab)^{i-j})} \quad (I.64)$$

$$B = 1 - \sum_{i=0}^N k_i \quad (I.65)$$

$$A = -\tau_0^2 \sum_{i=0}^N k_i p_0(ab)^i \quad (I.66)$$

De l'équation (I.63), on aura donc :

$$X(s) = \left(\sum_{i=0}^N \frac{k_i}{\left(1 + \frac{s}{p_0(ab)^i}\right)} \right) E(s) + \left(\frac{As + B}{(\tau_0 s)^2 + 2\zeta(\tau_0 s) + 1} \right) E(s) \quad (I.67)$$

Pour $e(t) = \delta(t)$ une impulsion unité $E(s) = 1$, la réponse impulsionnelle de ce système est alors obtenue comme suit :

$$x(t) = C \exp\left(-\frac{\zeta}{\tau_0} t\right) \sin\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau_0} t + \varphi\right) + \sum_{i=0}^N k_i p_0(ab)^i \exp(-p_0(ab)^i t) \quad (I.68)$$

Où les constantes C et φ son données par:

$$C = \frac{B}{\tau_0} \sqrt{\frac{A^2 - 2AB\zeta\tau_0 + (B\tau_0)^2}{(B\tau_0)^2(1-\zeta^2)}}, \quad \varphi = \arctg\left(\frac{A\sqrt{1-\zeta^2}}{B\tau_0 - A\zeta}\right) \quad (I.69)$$

Pour $e(t) = u(t)$ un échelon unité $E(s) = 1/s$, la réponse indicielle de ce système est aussi obtenue comme suit :

$$x(t) = 1 - \sum_{i=0}^N k_i \exp(-p_0(ab)^i t) + C_1 \exp\left(-\frac{\zeta}{\tau_0} t\right) \sin\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau_0} t + \varphi_1\right) \quad (I.70)$$

Où les constantes C_1 et φ_1 son données par:

$$C_1 = B \sqrt{\frac{A^2 - 2AB\zeta\tau_0 + (B\tau_0)^2}{(B\tau_0)^2(1-\zeta^2)}} \quad , \quad \varphi_1 = \arctg\left(\frac{A\sqrt{1-\zeta^2}}{B\tau_0 - A\zeta}\right) - \arctg\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta}\right) \quad (\text{I.71})$$

I.4.2.2.3 Exemple illustratif

Soit le système d'ordre fractionnaire oscillatoire suivant ($\tau_0 = 1$) :

$$G(s) = \frac{1}{1+s^\alpha} \quad (\text{I.72})$$

Les figures (I.7) et (I.8) représentent respectivement, le module et la phase, dans le plan de Bode de la fonction de transfert irrationnelle de ce système ainsi que la fonction de transfert rationnelle de son approximation pour quelques valeurs du paramètre α .

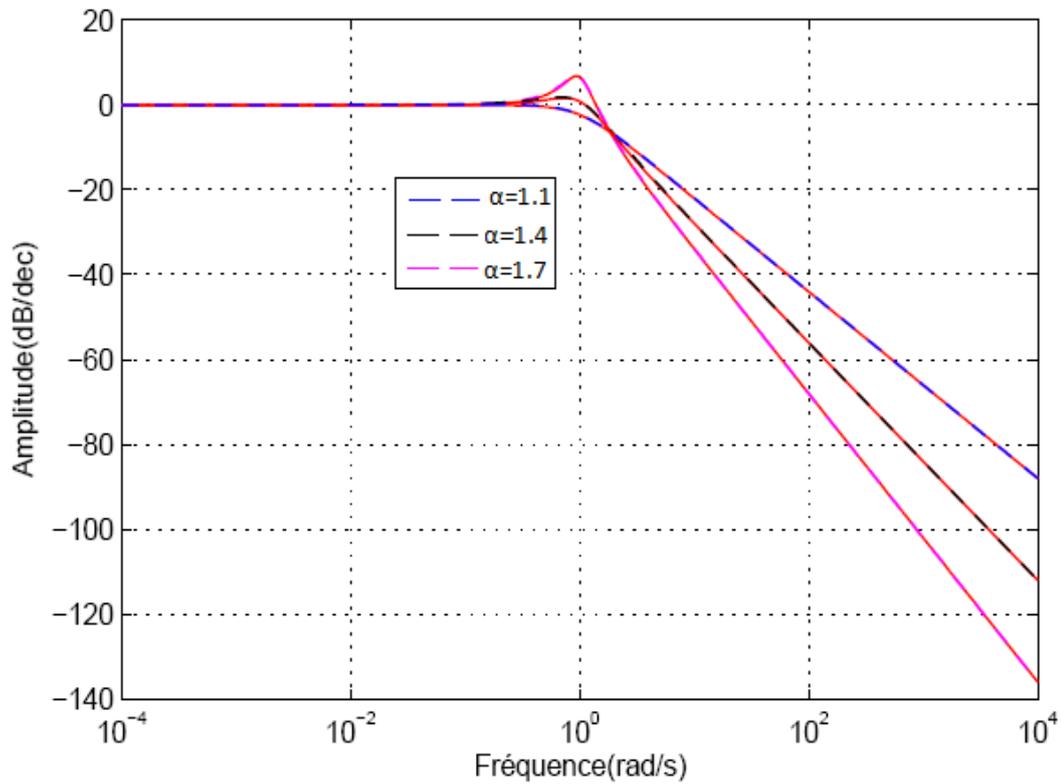


Figure (I.7) : Module de $G(s)$ et de son approximation par une fonction rationnelle

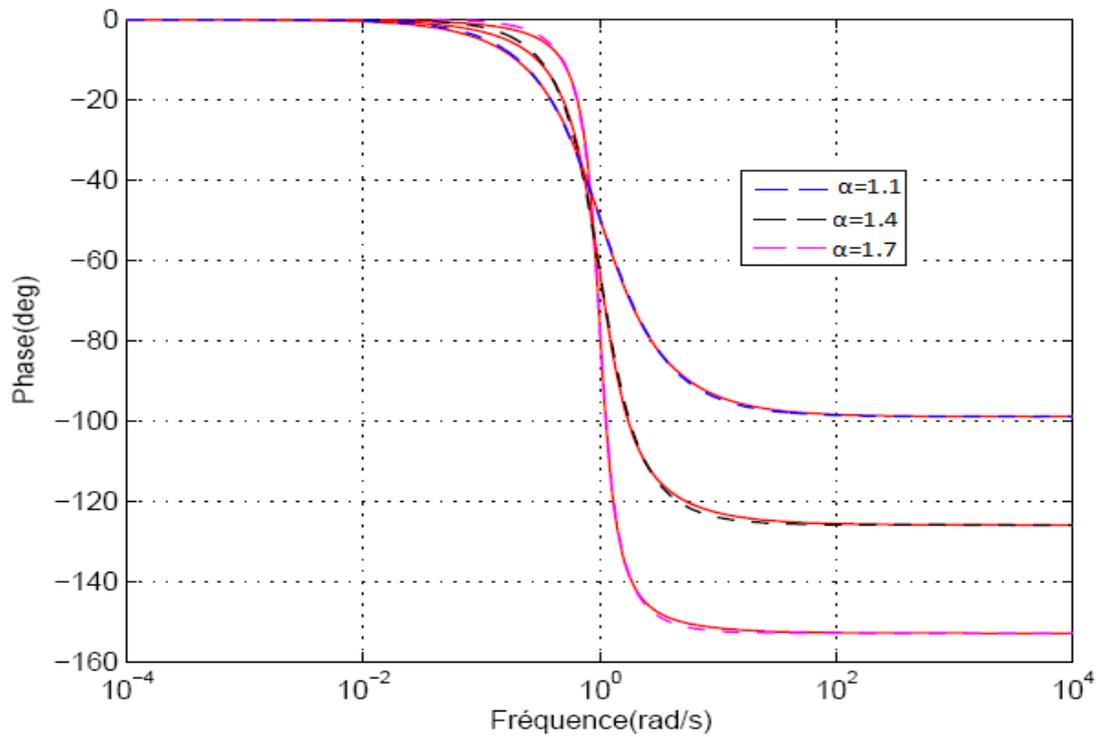


Figure (I.8) : Phase de $G(s)$ et de son approximation par une fonction rationnelle

Les figures (I.9) et (I.10) montrent, respectivement, la réponse impulsionnelle et la réponse indicielle de ce système en utilisant sa fonction de transfert rationnelle de son approximation pour quelques valeurs du paramètre α .

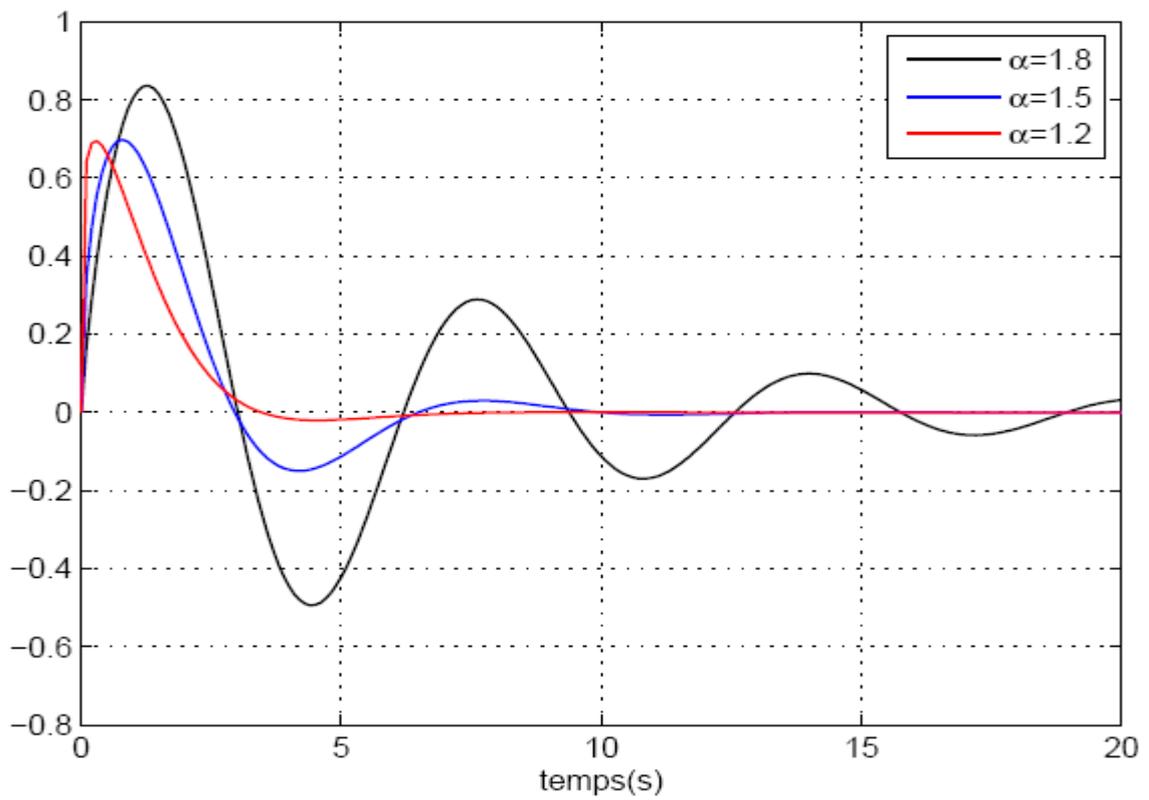


Figure (I.9) : Réponse impulsionnelle du système fractionnaire oscillatoire en utilisant son approximation par une fonction rationnelle

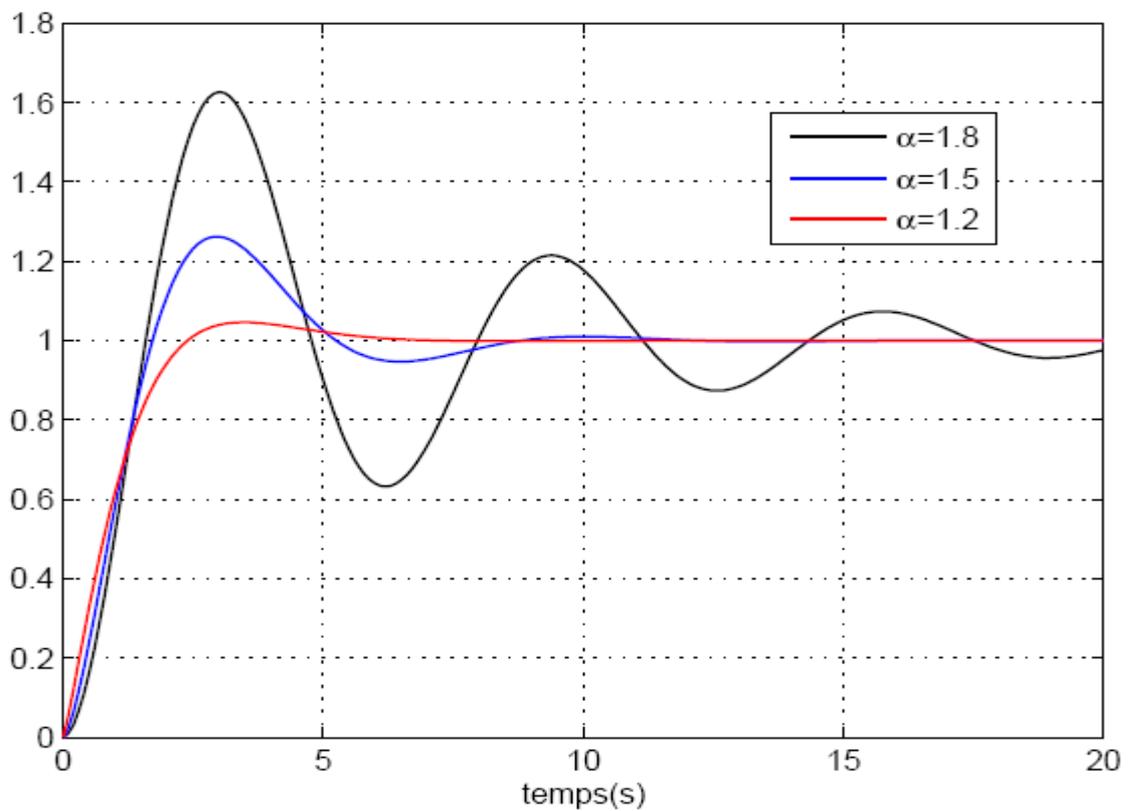


Figure (I.10) : Réponse indicielle du système fractionnaire oscillatoire en utilisant son approximation par une fonction rationnelle

I.4.2.3 Système sinus amorti d'ordre fractionnaire

I.4.2.3.1 Approximation par une fonction rationnelle

Le système sinus amorti d'ordre fractionnaire est défini comme étant le système représenté par l'équation différentielle d'ordre fractionnaire de l'équation (I.38) comme suit [38]:

$$(\tau_0)^{2\alpha} \frac{d^{2\alpha} x(t)}{dt^{2\alpha}} + 2\zeta(\tau_0)^\alpha \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} + x(t) = e(t) \quad (I.73)$$

Où $0 < \alpha < 1$, $0 < \zeta < 1$ et τ_0 est un nombre réel positif. La fonction de transfert de ce type de système est donnée par la fonction irrationnelle suivante :

$$G(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{1}{[(\tau_0 s)^{2\alpha} + 2\zeta(\tau_0 s)^\alpha + 1]} \quad (I.74)$$

On note que pour $\alpha = 1$ les équations (I.73) et (I.74) deviennent, respectivement, l'équation différentielle linéaire et la fonction de transfert d'un système régulier dont la réponse impulsionnelle le sinus amorti.

L'équation (I.74) peut être réécrite sous la forme suivante:

$$G(s) = \frac{1}{[1 + (\tau_1 s)^\alpha][1 + (\tau_2 s)^\alpha]} \quad (I.75)$$

où $\tau_1^\alpha = \tau_0^\alpha (\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2})$ et $\tau_2^\alpha = \tau_0^\alpha (\zeta - j\sqrt{1-\zeta^2})$. Le nombre complexe $(\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2})$ peut se mettre sous la forme $(\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2}) = \exp(j\varphi)$, avec $\varphi = \arctg\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$. Donc, les paramètres

τ_1 et τ_2 deviennent:

$$\tau_1 = \tau_0 \exp\left(j\frac{\varphi}{\alpha}\right) \quad \text{et} \quad \tau_2 = \tau_0 \exp\left(-j\frac{\varphi}{\alpha}\right) \quad (I.76)$$

Par décomposition en éléments simple de l'équation (I.75), on obtient :

$$G(s) = \frac{\left(\frac{1}{2} - j\frac{1}{2\sqrt{1-\zeta^2}}\zeta\right)}{[1 + (\tau_1 s)^\alpha]} + \frac{\left(\frac{1}{2} + j\frac{1}{2\sqrt{1-\zeta^2}}\zeta\right)}{[1 + (\tau_2 s)^\alpha]} \quad (I.77)$$

Pour approximer la fonction irrationnelle $G(s)$ de l'équation (I.75) par une fonction rationnelle il suffit d'approximer les sous fonctions individuelles irrationnelles constituant $G(s)$ de l'équation (I.77). La technique d'approximation de chacune des deux sous fonctions irrationnelles est celle utilisée dans la section I.4.2.1. Alors, on obtient :

$$\frac{1}{[1 + (\tau_1 s)^\alpha]} \cong \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{1 + s\tau_{1i}} \quad , \quad \frac{1}{[1 + (\tau_2 s)^\alpha]} \cong \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{1 + s\tau_{2i}} \quad (\text{I.78})$$

où $\tau_{1i} = \tau_1(\lambda)^{N-i}$ et $\tau_{2i} = \tau_2(\lambda)^{N-i}$, pour $i = 1, 2, \dots, 2N-1$, avec $\lambda = \frac{\tau_{1i}}{\tau_{1(i+1)}} = \frac{\tau_{2i}}{\tau_{2(i+1)}} > 1$ et N

est un entier obtenu comme dans l'équation (I.48). Les résidus k_i , pour $i = 1, 2, \dots, 2N-1$, sont obtenus comme dans l'équation (I.47) par l'expression suivante:

$$k_i = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin[(1-\alpha)\pi]}{\cosh[\alpha \log((\lambda)^{N-i})] - \cos[(1-\alpha)\pi]} \right] \quad (\text{I.79})$$

Soient p_{1i} et p_{2i} ($i = 1, 2, \dots, 2N-1$) les pôles des deux approximations définis comme suit :

$$p_{1i} = \frac{1}{\tau_{1i}} = \frac{1}{\tau_1(\lambda)^{N-i}} = p_1(\lambda^{(i-N)}) \quad , \quad p_{2i} = \frac{1}{\tau_{2i}} = \frac{1}{\tau_2(\lambda)^{N-i}} = p_2(\lambda^{(i-N)}) \quad (\text{I.80})$$

avec $p_1 = \frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_0} \exp\left(-j\frac{\varphi}{\alpha}\right)$ et $p_2 = \frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{\tau_0} \exp\left(j\frac{\varphi}{\alpha}\right)$. On note que, pour $i = 1, 2, \dots, 2N-1$, les

pôles p_{1i} et p_{2i} sont des nombres complexes conjugués. L'équation (I.78) sera :

$$\frac{1}{[1 + (\tau_1 s)^\alpha]} \cong \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{1 + \frac{s}{p_{1i}}} \quad , \quad \frac{1}{[1 + (\tau_2 s)^\alpha]} \cong \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{1 + \frac{s}{p_{2i}}} \quad (\text{I.81})$$

Alors, des équations (I.77) et (I.81) l'approximation de la fonction $G(s)$ par une fonction rationnelle est donnée par:

$$G(s) = \frac{1}{[(\tau_0 s)^{2\alpha} + 2\zeta(\tau_0 s)^\alpha + 1]} \cong \sum_{i=1}^{2N-1} k_i \left[\frac{\left(\frac{1}{2} - j \frac{1}{2\sqrt{1-\zeta^2}} \zeta \right)}{1 + \frac{s}{p_{1i}}} + \frac{\left(\frac{1}{2} + j \frac{1}{2\sqrt{1-\zeta^2}} \zeta \right)}{1 + \frac{s}{p_{2i}}} \right] \quad (\text{I.82})$$

$$\cong \sum_{i=1}^{2N-1} h_i \left[\frac{\left(\frac{1}{2} \sqrt{1-\zeta^2} - j \frac{1}{2} \zeta \right)}{1 + \frac{s}{p_{1i}}} + \frac{\left(\frac{1}{2} \sqrt{1-\zeta^2} + j \frac{1}{2} \zeta \right)}{1 + \frac{s}{p_{2i}}} \right]$$

où $h_i = \frac{k_i}{\sqrt{1-\zeta^2}}$. Comme les termes $\left(\frac{1}{2} \sqrt{1-\zeta^2} - j \frac{1}{2} \zeta \right)$ et $\left(\frac{1}{2} \sqrt{1-\zeta^2} + j \frac{1}{2} \zeta \right)$ et les pôles p_{1i}

et p_{2i} sont des nombres complexes conjugués, alors l'équation (I.82) est réécrite comme suit :

$$G(s) = \frac{1}{[(\tau_0 s)^{2\alpha} + 2\zeta(\tau_0 s)^\alpha + 1]} \cong \sum_{i=1}^{2N-1} h_i \frac{\sqrt{1-\zeta^2} + a_i s}{1 + 2\sigma \frac{s}{\omega_i} + \frac{s^2}{\omega_i^2}} \quad (\text{I.83})$$

où les coefficients σ , a_i , et ω_i , pour $i = 1, 2, \dots, 2N-1$, sont donnés par:

$$\sigma = \cos\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right), \quad a_i = \tau_0 \lambda^{(N-i)} \left(\sigma \sqrt{1-\zeta^2} - \zeta \sqrt{1-\sigma^2} \right), \quad \omega_i = \frac{1}{\tau_0 \lambda^{(N-i)}} \quad (\text{I.84})$$

I.4.2.3.2 Réponses temporelles

De l'équation (I.83), on a :

$$G(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{1}{[(\tau_0 s)^{2\alpha} + 2\zeta(\tau_0 s)^\alpha + 1]} \cong \sum_{i=1}^{2N-1} h_i \frac{\sqrt{1-\zeta^2} + a_i s}{1 + 2\sigma \frac{s}{\omega_i} + \frac{s^2}{\omega_i^2}} \quad (\text{I.85})$$

On aura donc :

$$X(s) = \sum_{i=1}^{2N-1} h_i \frac{\sqrt{1-\zeta^2} + a_i s}{1 + 2\sigma \frac{s}{\omega_i} + \frac{s^2}{\omega_i^2}} E(s) \quad (\text{I.86})$$

Pour $e(t) = \delta(t)$ une impulsion unité $E(s) = 1$, la réponse impulsionnelle de ce système est alors obtenue comme suit:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{2N-1} \omega_i h_i \exp(-\sigma \omega_i t) \sin\left(\omega_i \left(\sqrt{1-\sigma^2}\right)t + \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\varphi\right) \quad (\text{I.87})$$

Maintenant, pour $e(t) = u(t)$ un échelon unité $E(s) = 1/s$, on aura :

$$X(s) = \sum_{i=1}^{2N-1} h_i \frac{\sqrt{1-\zeta^2} + a_i s}{1 + 2\sigma \frac{s}{\omega_i} + \frac{s^2}{\omega_i^2}} \left(\frac{1}{s}\right) \quad (\text{I.88})$$

La réponse indicielle de ce système est alors donnée par:

$$x(t) = 1 - \sum_{i=1}^{2N-1} h_i \exp(-\sigma \omega_i t) \sin\left(\omega_i \left(\sqrt{1-\sigma^2}\right)t + \varphi\right) \quad (\text{I.89})$$

I.4.2.3.3 Exemples illustratifs

Exemple 1

Soit le système d'ordre fractionnaire représenté par l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire de l'équation (I.73), avec $\zeta = 0.7$ et $\tau_0 = 1$; alors on a :

$$\frac{d^{2\alpha}x(t)}{dt^{2\alpha}} + 1.4 \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} + x(t) = e(t) \quad (\text{I.90})$$

Sa fonction de transfert est donnée par :

$$G(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{1}{[s^{2\alpha} + 1.4s^\alpha + 1]} \quad (\text{I.91})$$

Les figures (I.11) et (I.12) représentent, respectivement, le module et la phase du tracé de Bode de la fonction de transfert irrationnelle $G(s)$ de ce système ainsi que la fonction de transfert rationnelle de son approximation pour quelques valeurs du paramètre α .

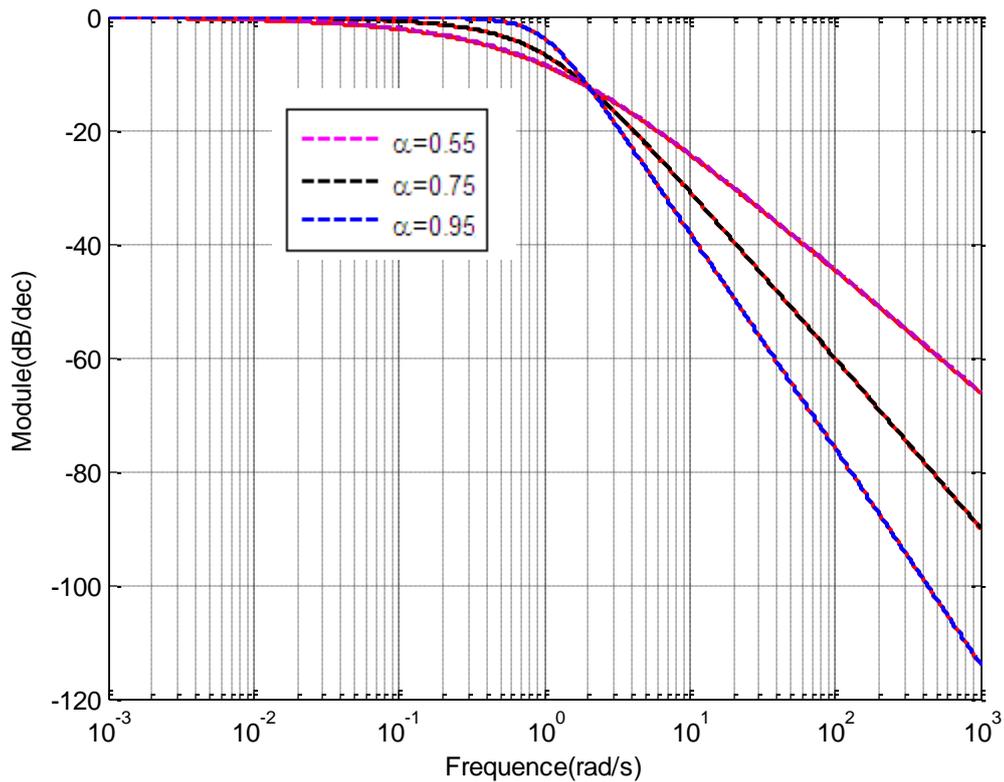


Figure (I.11) : Module de $G(s)$ et de son approximation pour différentes valeurs de α

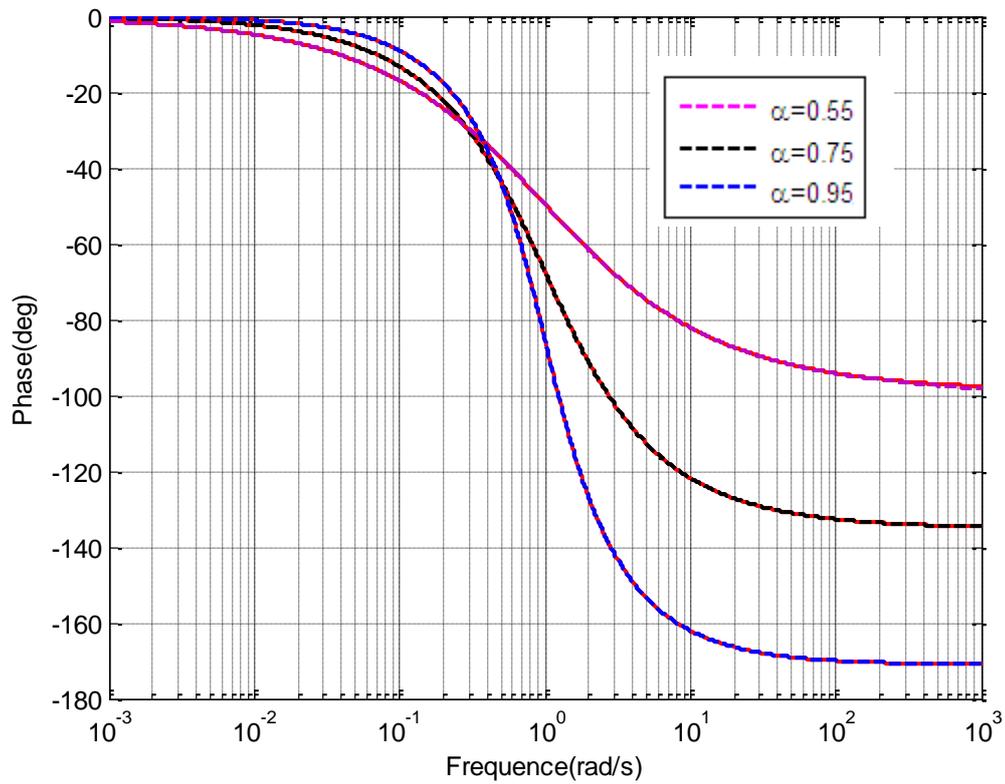


Figure (I.12) : Phase de $G(s)$ et de son approximation pour différentes valeurs de α

Les figures (I.13) et (I.14) montrent, respectivement, les réponses impulsionnelles et indicielles de ce système en utilisant sa fonction de transfert rationnelle de son approximation pour quelques valeurs du paramètre α .

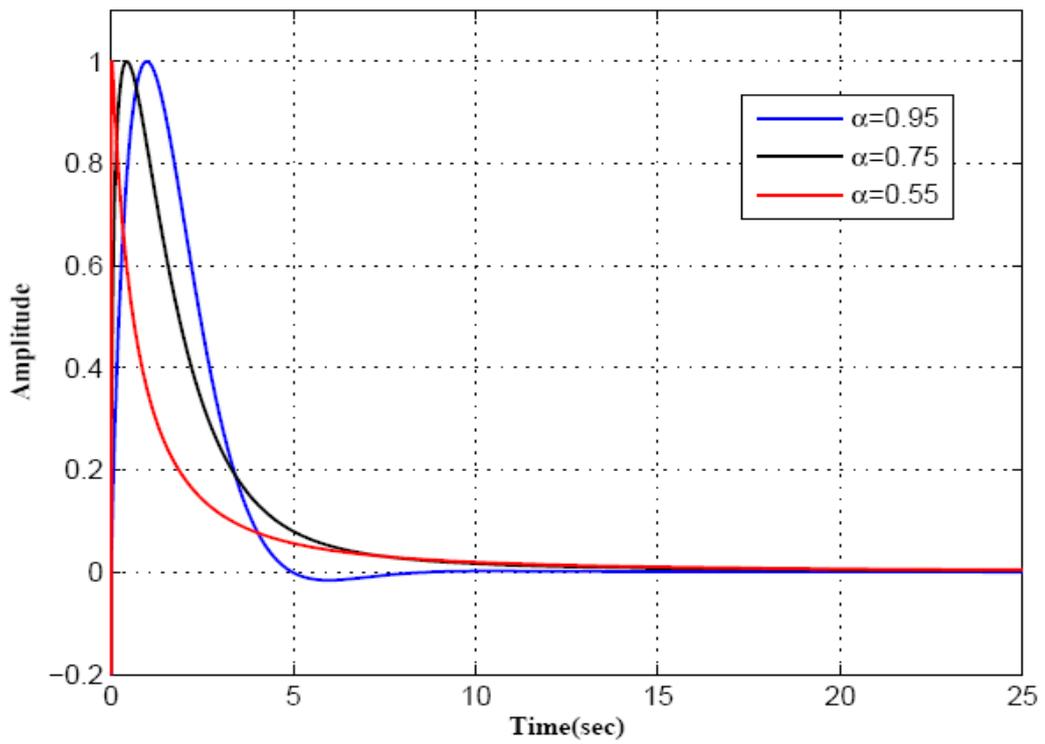


Figure (I.13) : Réponses impulsionnelles pour différentes valeurs de α

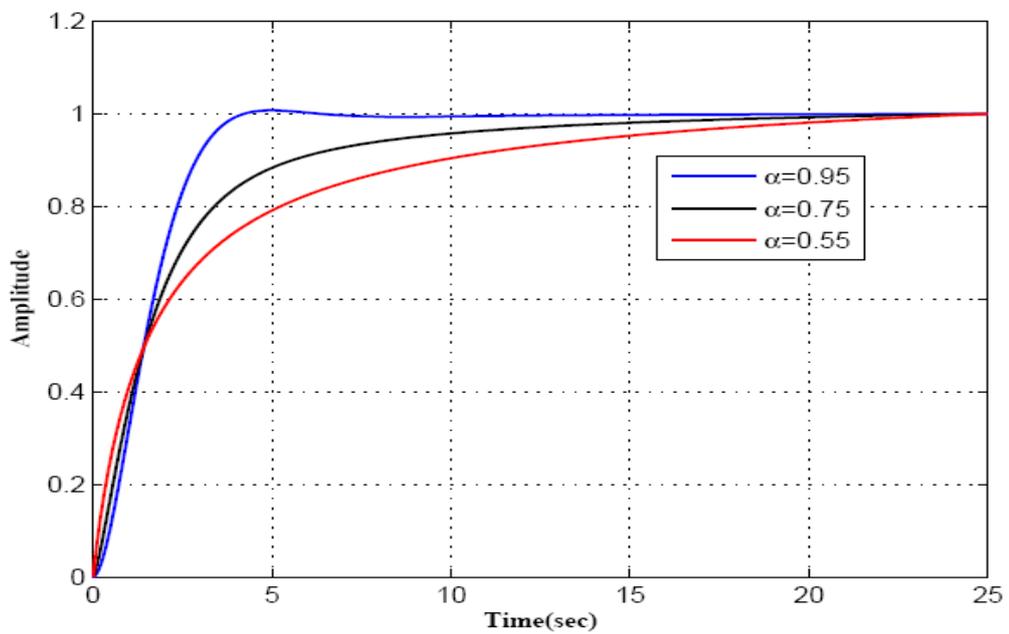


Figure (I.14) : Réponses indicielles pour différentes valeurs de α

Exemple 2

Soit le système d'ordre fractionnaire représenté par l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire de l'équation (I.73), avec $\alpha=0.9$ et $\tau_0 = 1$; alors on a :

$$\frac{d^{1.8}x(t)}{dt^{1.8}} + 2\zeta \frac{d^{0.9}x(t)}{dt^{0.9}} + x(t) = e(t) \quad (\text{I.92})$$

Sa fonction de transfert est donnée par :

$$G(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{1}{[s^{1.8} + 2\zeta s^{0.9} + 1]} \quad (\text{I.93})$$

Les figures (I.15) et (I.16) représentent, respectivement, le module et la phase du tracé de Bode de la fonction de transfert irrationnelle $G(s)$ de ce système ainsi que la fonction de transfert rationnelle de son approximation pour quelques valeurs du paramètre ζ .

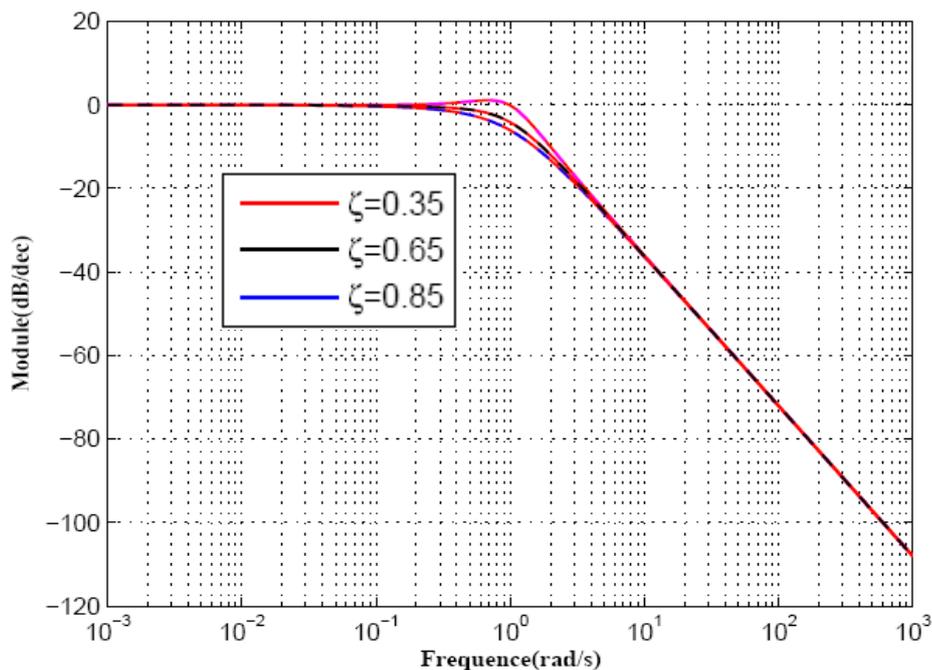


Figure (I.15) : Module de $G(s)$ et de son approximation pour différentes valeurs de ζ

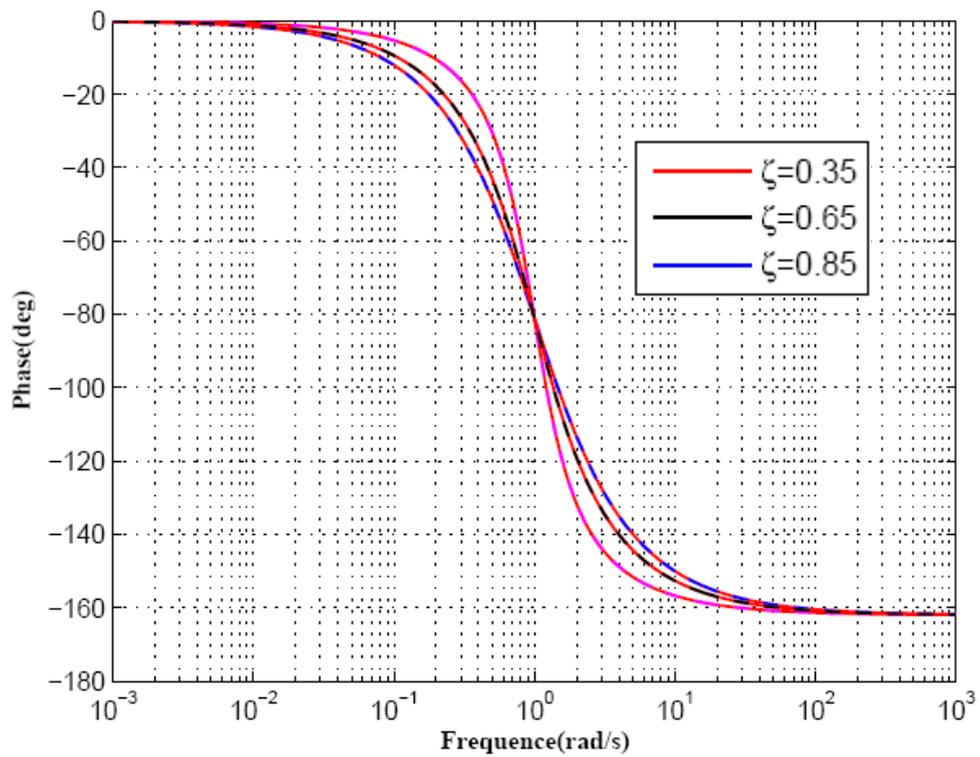


Figure (I.16) : Phase de $G(s)$ et de son approximation pour différentes valeurs de ζ

Les figures (I.17) et (I.18) montrent, respectivement, les réponses impulsionnelles et indicielles de ce système en utilisant sa fonction de transfert rationnelle de son approximation pour quelques valeurs du paramètre ζ .

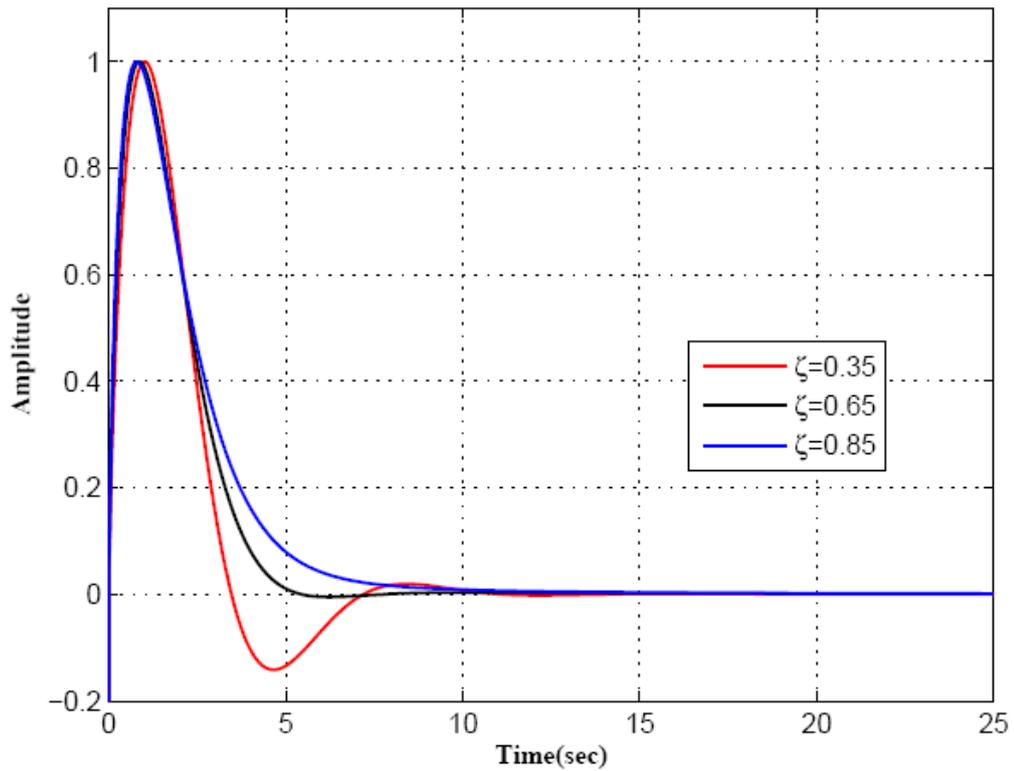


Figure (I.17) : Réponses impulsionnelles pour différentes valeurs de ζ

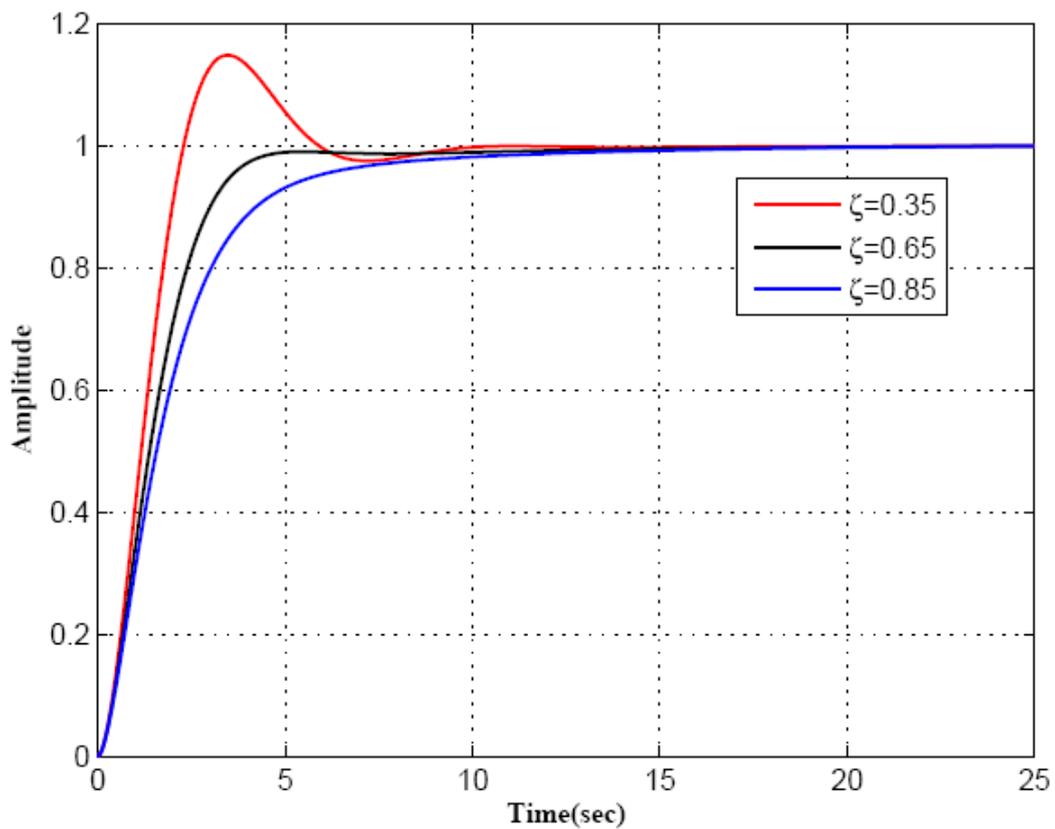


Figure (I.18) : Réponses indicielles pour différentes valeurs de ζ

I.5 Conclusion

Ce chapitre est une introduction aux éléments de base du calcul d'ordre fractionnaire. On a donné les définitions des opérateurs et des systèmes d'ordre fractionnaire. Les méthodes de leur approximation ont été également présentées. Les systèmes d'ordre fractionnaire considérés sont uniquement ceux qui sont nécessaires pour la conception de la commande d'ordre fractionnaire dans notre thèse.

Chapitre //

Commande d'ordre fractionnaire

II.1 Introduction

L'application du calcul d'ordre fractionnaire dans la théorie de la commande des systèmes a connu des avancées très remarquables dans les deux dernières décennies. En général dans une boucle de commande, il existe quatre situations:

- 1- processus d'ordre entier avec correcteur d'ordre entier
- 2- processus d'ordre entier avec correcteur d'ordre fractionnaire
- 3- processus d'ordre fractionnaire avec correcteur d'ordre entier
- 4- processus d'ordre fractionnaire avec correcteur d'ordre fractionnaire

Cependant, en pratique, on considère uniquement le cas où le processus d'ordre entier avec un correcteur d'ordre fractionnaire parce qu'en général le modèle du processus peut être déjà obtenu comme un modèle d'ordre entier dans le sens classique.

La signification de la commande d'ordre fractionnaire, du point de vue ingénierie, est une généralisation de la théorie de la commande d'ordre entier classique qui pourrait mener à des performances de commande plus robuste. En effet, l'intérêt majeur de la commande d'ordre fractionnaire est l'amélioration ou l'optimisation des performances en utilisant les concepts de la théorie des dérivées, intégrales et des systèmes d'ordre fractionnaire.

Les premières tentatives d'appliquer le calcul d'ordre fractionnaire dans la commande des systèmes peuvent être trouvées dans [4] et [6]. Les structures de correcteurs fractionnaires les plus connues dans la littérature sont la commande CRONE, le correcteur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ fractionnaire, le correcteur TID et le correcteur avance-retard de phase fractionnaire [42]. La commande CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) a été proposée par Oustaloup au début des années 1990 [7]. C'est une méthode fréquentielle basée sur la dérivation d'ordre non-entier permettant de construire un correcteur assurant la robustesse du degré de stabilité d'un système bouclé. Trois générations de cette commande ont vu le jour et des applications aussi bien en laboratoire qu'en industrie ont été développées. La seconde structure est le correcteur TID qui a été proposé par Lurie en 1994 [10]. Ce correcteur a une structure semblable au correcteur PID classique dont la composante proportionnelle est remplacée par une composante ayant une fonction de transfert $K_t s^{-1/n}$, où K_t est une constante positive et n est un nombre réel non nul de préférence entre 2 et 3. La troisième structure est le correcteur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ fractionnaire qui a été proposé par Podlubny en 1999 [8]. Ce correcteur est une généralisation du correcteur PID classique comprenant une action d'intégration d'ordre fractionnaire λ et une action de différentiation d'ordre fractionnaire μ . la dernière structure est le correcteur avance-retard de phase d'ordre fractionnaire qui a été étudié dans [43] et [44].

Ce correcteur est une généralisation du correcteur avance-retard de phase classique. Il devrait avoir sa valeur égale aux correcteurs CRONE et $PI^{\lambda}D^{\mu}$; cependant des méthodes systématiques de conception de ce type de correcteur plus intuitives sont nécessaires.

Dans ce chapitre, un aperçu plus détaillé sur la commande CRONE, le correcteur $PI^{\lambda}D^{\mu}$, le correcteur TID et le correcteur avance-retard de phase d'ordre fractionnaire sera présenté ainsi que la fonction de transfert idéale de Bode qui fera l'objet des travaux de cette thèse.

II.2 La commande CRONE

La commande CRONE a été proposée par Oustaloup au début des années 90 [7]. Oustaloup a étudié la commande des systèmes dynamiques et il a montré la supériorité des performances de la commande CRONE sur le correcteur PID. Trois stratégies bien distinctes de la commande CRONE se sont distinguées suivant le comportement fréquentiel du procédé. Chacune d'elles définit une génération de la commande CRONE 1^{ère}, 2^{ème} et 3^{ème} génération [7], [45]. La différence principale entre les trois générations de la commande CRONE est liée à la contribution du régulateur synthétisé aux variations de marge de phase.

II.2.1 Commande CRONE de la première génération

La stratégie de la commande CRONE de première génération repose sur une phase constante du régulateur $C(s)$ autour de la fréquence du gain unité en boucle ouverte ω_u du système asservi en boucle fermée de la figure (II.1).

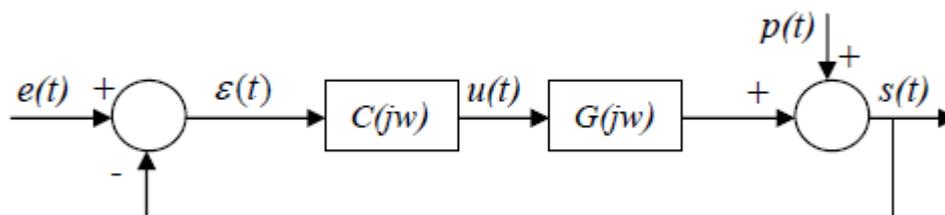


Figure (II.1) : Diagramme de commande à retour unitaire

La commande CRONE de première génération consiste à réduire les variations de la marge de phase du système en boucle ouverte autour de la fréquence ω_u par rapport aux variations de phase du procédé $G(s)$. Le régulateur CRONE idéal à phase constante est représenté par une transmittance d'ordre non entier de la forme :

$$C_\alpha(s) = c_0 \left(\frac{1 + \frac{s}{w_b}}{1 + \frac{s}{w_h}} \right)^\alpha, \text{ avec } w_b, w_h, \alpha \in \mathfrak{R} \quad (\text{II.1})$$

Le diagramme de Bode de $C_\alpha(s)$ est donné dans la figure (II.2).

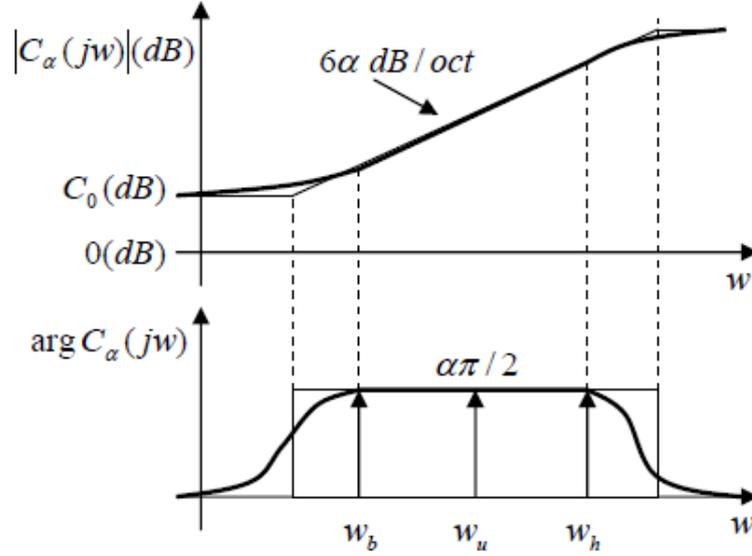


Figure (II.2) : Diagrammes de Bode du régulateur CRONE idéal à phase constante

La version réalisable de $C_\alpha(s)$ est une approximation par une transmittance d'ordre entier obtenue par à une distribution récursive de N zéros et de N pôles réels, soit :

$$C_N(s) = c_0 \prod_{i=1}^N \frac{1 + \frac{s}{z_i}}{1 + \frac{s}{p_i}} \text{ avec } z_i \text{ et } p_i \in \mathfrak{R}, N \in \mathfrak{N} \quad (\text{II.2})$$

Pour $\alpha > 0$, les pôles et les zéros d'approximation sont donnés par :

$$z_1 = w_b \sqrt{b}, p_i = z_i a \quad (i = 1, 2, \dots, N), z_{i+1} = p_i b \quad (i = 1, 2, \dots, N-1), w_h = p_N \sqrt{b} \quad (\text{II.3})$$

Pour $\alpha < 0$, on a aussi :

$$p_1 = w_b \sqrt{b}, z_i = p_i a \quad (i = 1, 2, \dots, N), p_{i+1} = z_i b \quad (i = 1, 2, \dots, N-1), w_h = z_N \sqrt{b} \quad (\text{II.4})$$

avec

$$N = \text{int eger} \left\{ \frac{\log\left(\frac{w_h}{w_b}\right)}{\log(ab)} \right\} \quad (\text{II.5})$$

$$a = \left(\frac{w_h}{w_b} \right)^{\frac{|\alpha|}{N}}, \quad b = \left(\frac{w_h}{w_b} \right)^{\frac{1-|\alpha|}{N}} \quad (\text{II.6})$$

La première génération de la commande CRONE est donc bien adaptée aux procédés dont la phase (pour l'état paramétrique nominal) présente un comportement asymptotique autour de la fréquence ω_u . C'est-à-dire la robustesse de la marge de phase est obtenue seulement lorsque ω_u appartient à la bande de fréquence où la phase du procédé est constante. Dans le cas où on ne peut pas utiliser la bande de fréquence à phase constante, la deuxième génération de la commande CRONE peut être utilisée.

II.2.2 Commande CRONE de la deuxième génération

Cette approche est basée sur la fonction de transfert en boucle ouverte autour de la fréquence du gain unité ω_u définie comme la fonction de transfert d'un intégrateur d'ordre fractionnaire de la forme suivante:

$$T(s) = \left(\frac{\omega_u}{s} \right)^\alpha, \quad \alpha \in [1,2] \quad (\text{II.7})$$

La fonction de transfert $T(s)$ garantit l'annulation des variations de la marge de phase parce qu'elle a un gabarit vertical dans le plan de Black entre $-\pi/2$ et $-\pi$ autour de la fréquence du gain unité ω_u , comme il est montré sur la figure (II.3), pour l'état paramétrique nominal du procédé. Une reparamétrisation du procédé par une variation de son gain conduit à un glissement vertical du gabarit sur lui-même.

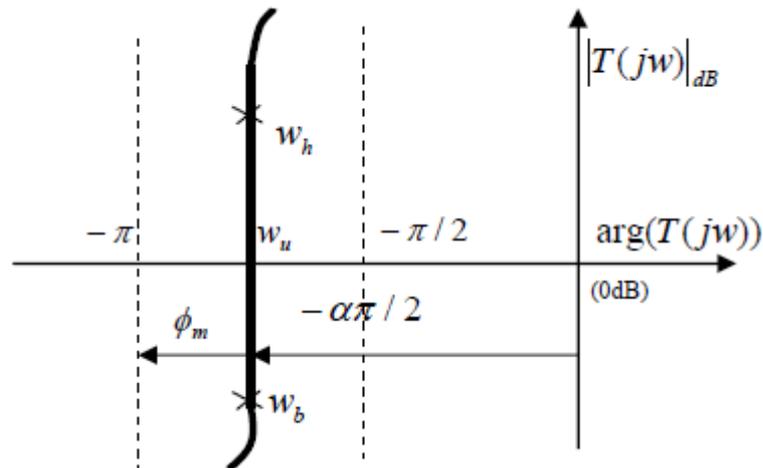


Figure (II.3) : Représentation du gabarit vertical de $T(s)$ dans le plan de Black

La forme et le glissement vertical du gabarit assure, non seulement une marge de phase constante mais également :

- la constance du premier dépassement réduit de la réponse libre ou indicielle en asservissement ou en régulation, à travers la tangence du gabarit à un même contour d'isodépassement.
- la constance du facteur d'amortissement en asservissement et en régulation, à travers la tangence du gabarit à un même contour d'iso-amortissement.

II.2.3 Commande CRONE de troisième génération

La commande CRONE de troisième génération doit être utilisée quand la réponse fréquentielle du procédé possède des incertitudes de nature différentes à celle du gain [46-47]. Le gabarit vertical de la seconde génération est alors remplacé par un gabarit généralisé décrit par un segment de droite dans le plan de Nichols de pente quelconque ou encore par un multi-gabarit (gabarit curviligne) défini par un ensemble de gabarits généralisés. Le gabarit ainsi défini est décrit par une transmittance dont la fonction de transfert est un intégrateur d'ordre complexe $n=a+jb$ donnée comme suit :

$$T(s) = \left(\coth \left(b \frac{\pi}{2} \right) \right)^{\text{sign}(b)} \left(\frac{w_u}{s} \right)^a \left(\left[\frac{w_u}{s} \right]_{C_q} \right)^{\text{sign}(b)} \quad (\text{II.8})$$

Cette fonction de transfert est définie sur deux plans complexes indépendants, C_1 pour l'ordre complexe et C_q pour la variable s . La partie réelle a de l'ordre complexe détermine le

placement en phase du gabarit et la partie imaginaire détermine ensuite son inclinaison par rapport à la verticale. Dans le cadre de cette généralisation, la recherche d'un gabarit optimal au sens de la minimisation d'un critère quadratique (sous contraintes) portant sur les variations du facteur de résonance en asservissement ou du facteur d'amortissement en asservissement et en régulation, définit la stratégie optimale qu'utilise la version initiale de la commande CRONE de troisième génération. Le deuxième niveau consiste à substituer au gabarit généralisé un ensemble de gabarits du même type, appelé multi-gabarit. Sa description par un produit de transmittances d'ordre complexes bornées en fréquence, définit un gabarit curviligne qui étend le gabarit rectiligne que forme le gabarit vertical ou généralisé. La recherche d'un gabarit curviligne optimal, au sens de la minimisation, du critère précédent, définit la stratégie optimale la plus évoluée qu'utilise la commande CRONE de troisième génération.

II.3 Correcteur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ d'ordre fractionnaire

Aujourd'hui, le correcteur proportionnel intégral dérivé (PID) est la structure de commande la plus utilisée dans les boucles de rétroaction des processus industriels. Généralement, le correcteur PID classique est implémenté dans des systèmes de commande à retour unitaire classique donné par la figure (II.4).

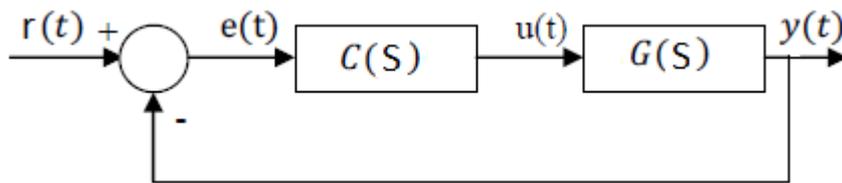


Figure (II.4) : Système de commande à retour unitaire classique

Où $u(t)$ est le signal de commande, $e(t)$ est l'écart résultant de la différence entre la consigne $r(t)$ et la grandeur à commander $y(t)$, $C(s)$ est la fonction de transfert du correcteur et $G_p(s)$ est la fonction de transfert du processus. Le PID est décrit par l'équation suivante :

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (\text{II.9})$$

Où K_p est le gain proportionnel, T_I est la constante d'intégration et T_D est la constante de dérivation. Ces paramètres influencent sur la réponse du système de la manière suivante :

- Lorsque K_P augmente, le temps de montée est plus court mais il y a un dépassement important. Le temps de réponse varie peu et l'erreur statique est améliorée.
- L'augmentation du terme intégral $1/T_I$ a pour conséquence de réduire le temps de montée mais d'avoir un dépassement important et un temps de réponse assez lent. Par contre l'erreur statique est nulle. Donc plus ce paramètre est élevé, plus la réponse du système est ralentie. L'action intégrale rend le système moins stable.
- Lorsque le terme T_D augmente, le dépassement diminue et le temps de réponse est meilleur. L'action dérivée permet donc d'atténuer les oscillations et rend le système plus stable.

Afin d'améliorer les performances des systèmes asservis linéaires, Podlubny [8] a proposé une généralisation du correcteur PID classique à la forme $PI^\lambda D^\mu$ nommé le PID fractionnaire, où λ et μ sont des réel positifs. Il a montré que les performances étaient considérablement améliorées par rapport à celles obtenues par un PID d'ordre entier.

L'équation de sortie du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire dans le domaine de temps est donnée sous la forme:

$$u(t) = K_p (e(t) + \frac{1}{T_I} D^{-\lambda} e(t) + T_D D^\mu e(t)) \quad (\text{II.10})$$

La fonction de transfert du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ est donnée comme suit

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s^\lambda} + T_D s^\mu \right) \quad (\text{II.11})$$

Une expression équivalente, où les paramètres apparaissent de manière linéaire, est souvent plus appréciée pour les calculs analytiques. Une telle formulation est donnée par la forme parallèle :

$$C(s) = \left(K_p + \frac{K_I}{s^\lambda} + K_D s^\mu \right) \quad (\text{II.12})$$

où K_p représente l'action proportionnelle, $\frac{K_I}{s^\lambda}$ représente l'action intégrale d'ordre fractionnaire et $K_D s^\mu$ représente l'action dérivée d'ordre fractionnaire. Les gains d'intégration K_I et de dérivation K_D sont liés aux constantes d'intégration T_I et de dérivation T_D par les relations suivantes :

$$K_I = \frac{K_p}{T_I} \quad (\text{II.13})$$

$$K_D = K_p T_D \quad (\text{II.14})$$

La figure (II.5) présente la structure du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire.

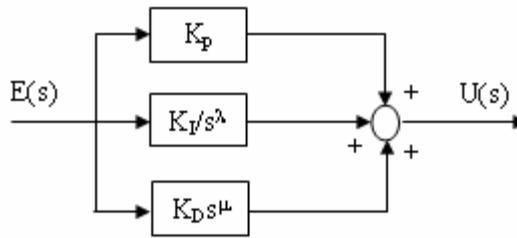


Figure (II.5) : Structure du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire

Comme il est montré sur la figure (II.6) le $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire généralise le PID conventionnel et l'étend du point au plan. Cette extension donne plus de flexibilité dans la conception des commandes PID. Ce type de correcteur est généralement utilisé dans la conception d'une commande robuste.

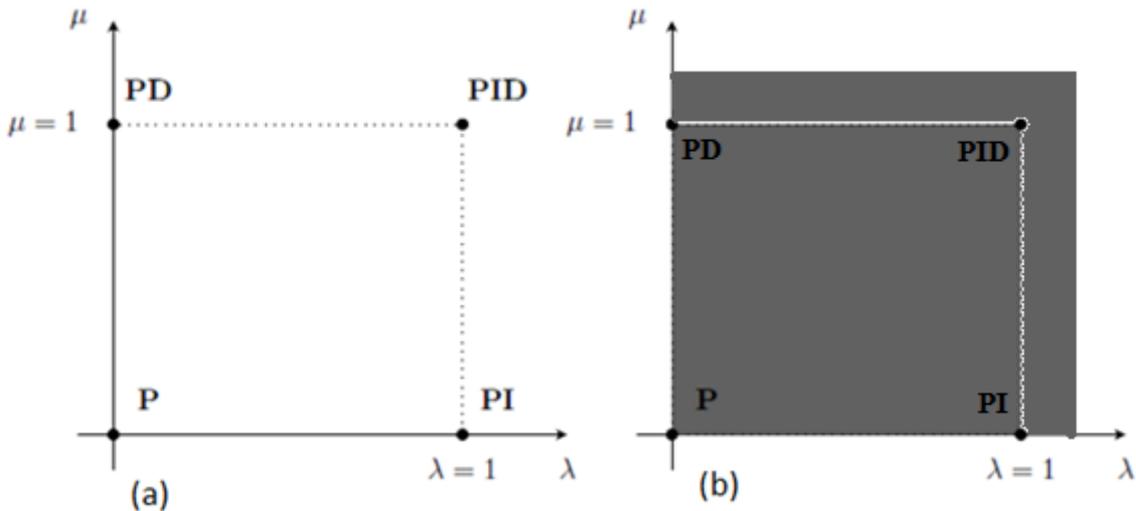


Figure (II.6) : Correcteur PID (a) : ordre entier, (b) : ordre fractionnaire

Un des avantages les plus importants du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire est la possibilité de bien commander la dynamique des systèmes d'ordre fractionnaire. Un autre avantage se trouve dans le fait que les correcteurs $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire sont moins sensibles aux changements des paramètres d'un système commandé conduisant à une amélioration de la robustesse. Puisque les ordres λ et μ sont des nombres réels arbitraires, le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire a deux degrés de liberté supplémentaires que le PID classique; alors, il est plus flexible et donne l'avantage de mieux régler les propriétés

dynamiques des systèmes [8]. Depuis l'introduction du correcteur d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$, plusieurs chercheurs ont abordé le sujet de réglage de ce correcteur pour rendre son utilisation plus simple et plus pratique [9].

II.4 Le correcteur TID

Le correcteur TID (tild-integral-derivative) a été proposé par Lurie en 1994 [10]. C'est un correcteur PID où la composante proportionnelle est remplacée par un intégrateur d'ordre fractionnaire. Sa fonction de transfert est donnée par :

$$G_c(s) = K_t s^{-\frac{1}{n}} + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (\text{II.15})$$

où $K_t s^{-1/n}$ est l'intégrateur d'ordre fractionnaire et n un nombre réel tel que $2 < n < 3$. La structure de ce correcteur est présentée dans la figure suivante :

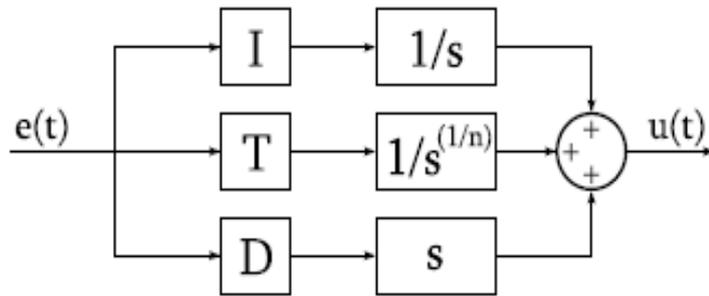


Figure (II.7) : Structure du correcteur TID

La fonction de transfert du correcteur TID de l'équation (II.15) s'approche plus étroitement de la fonction idéale de Bode, assurant ainsi un meilleur rejet des perturbations et minimise l'effet des variations des paramètres du processus sur la réponse en boucle fermée par rapport aux correcteurs PID. Alors, ce correcteur TID a les avantages du correcteur PID en fournissant une réponse en boucle fermée très proche de la réponse optimale théorique.

II.5 Correcteur avance-retard de phase d'ordre fractionnaire

Le correcteur avance-retard de phase d'ordre fractionnaire est une généralisation du correcteur avance-retard de phase classique. Il a été proposé dans différents contextes dans [43] et [44]. Sa fonction de transfert est donnée par [44]:

$$C(s) = k_c \left(\frac{s + 1/\lambda}{s + 1/x\lambda} \right)^\alpha = k_c x^\alpha \left(\frac{\lambda s + 1}{x\lambda s + 1} \right)^\alpha \quad (\text{II.16})$$

où λ et α sont deux réels positifs et $0 < x < 1$. Le comportement fréquentiel de ce correcteur est montré dans la figure (II.8).

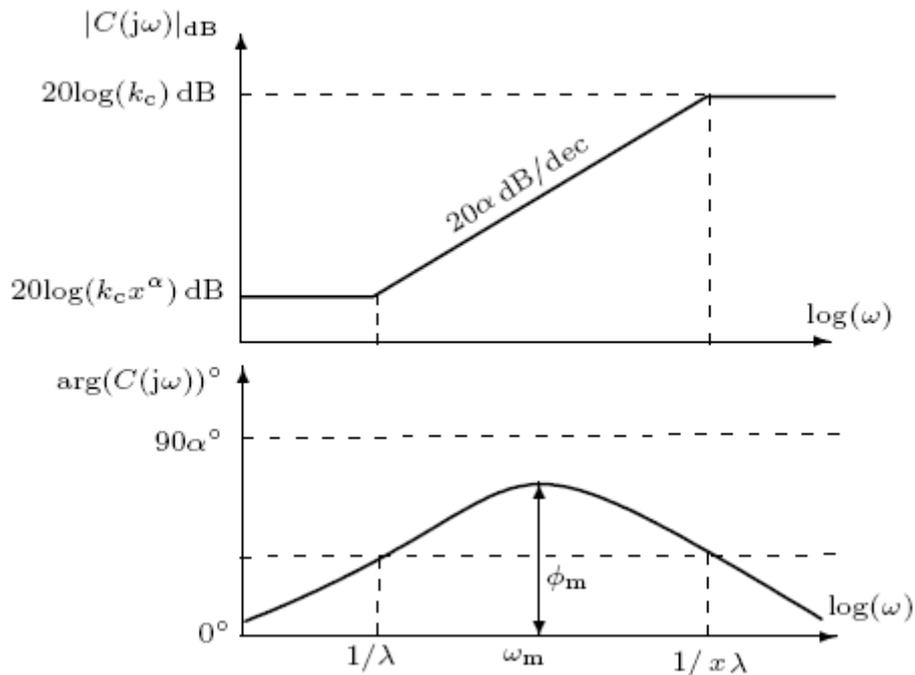


Figure (II.8) : Réponse fréquentielle du correcteur avance-retard de phase fractionnaire

L'introduction l'ordre fractionnaire de la structure α dans le correcteur avance-retard de phase classique conduit au correcteur avance-retard de phase fractionnaire. Le paramètre α permet plus de flexibilité dans l'accomplissement des spécifications de la commande. Cependant, des méthodes systématiques de conception plus intuitives sont nécessaires. Ce correcteur avance-retard de phase fractionnaire doit aussi être comparé aux correcteurs CRONE et P^λD^μ.

II.6 Fonction de transfert idéale de Bode

L'iso-amortissement est une propriété très désirable dans les systèmes asservis parce que le système asservi possédant cette propriété sera très robuste vis-à-vis des variations du gain. Pour un système asservi à retour unitaire, la propriété de l'iso-amortissement se reporte au cas où la phase de sa fonction de transfert en boucle ouverte, dans le plan de Bode, est

plate autour de la fréquence au gain unité. Bode a été le premier à proposer une fonction de transfert en boucle ouverte d'un système asservi à retour unitaire garantissant la propriété de l'iso-amortissement [2]. Cette fonction connue sous le nom de fonction idéale de Bode est donnée par :

$$L(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 2 \quad (\text{II.17})$$

où ω_c est la fréquence du gain unité désirée et α est la pente du gain.

La réponse fréquentielle de cette fonction est montrée dans la figure (II.9).

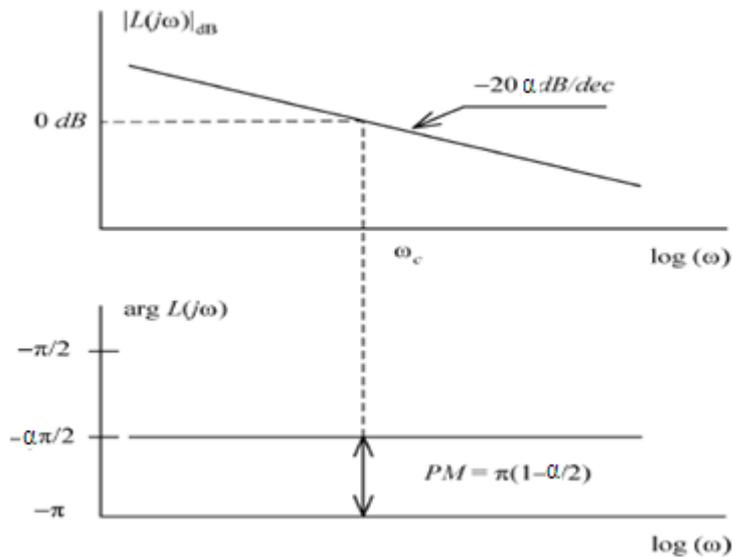


Figure (II.9) : Réponse fréquentielle de la fonction idéale de Bode

On note que la phase de cette fonction est plate autour de la fréquence au gain unité ω_c .

La figure (II.10) montre un système asservi à retour unitaire dont la fonction de transfert en boucle ouverte est $L(s)$.

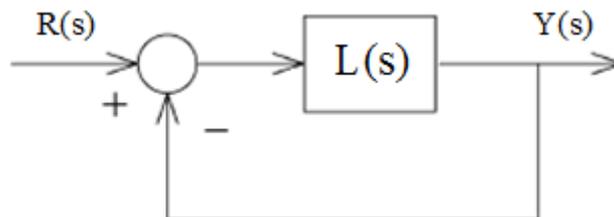


Figure (II.10) : Système asservi dont la fonction idéale de Bode comme fonction de transfert en boucle ouverte

La fonction $L(s)$ est la fonction idéale de Bode donnée comme suit :

$$L(s) = \frac{K}{s^\alpha} \quad , \quad 0 < \alpha < 2 \quad (\text{II.18})$$

Alors, la fonction de transfert en boucle fermée de ce type de système asservi est donnée par l'expression suivante :

$$G_{\text{BF}}(s) = \frac{K}{s^\alpha + K} \quad , \quad 0 < \alpha < 2 \quad (\text{II.19})$$

Les caractéristiques générales de ce type de système asservi sont données comme suit :

- Boucle ouverte (voir figure (II.9)) :
 - Gain : une pente de $-\alpha 20$ dB/dec
 - Fréquence de coupure : fonction de K
 - Phase : ligne horizontale de valeur $-\alpha \frac{\pi}{2}$
- Boucle fermée :
 - Marge de gain : infinie
 - Marge de phase : constante $= (2 - \alpha) \frac{\pi}{2}$
 - Réponse indicielle : $y(t) = K t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-K t^\alpha)$

où $E_{a,b}(z)$ est la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres [27].

II.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les structures de commande d'ordre fractionnaire les plus connues dans la littérature : le correcteur CRONE, le correcteur $PI^\lambda D^\mu$, le correcteur TID et le correcteur avance-retard de phase d'ordre fractionnaire. Nous avons aussi présenté la fonction de transfert idéale de Bode. L'intérêt de la commande d'ordre fractionnaire est l'amélioration ou l'optimisation des performances en utilisant les concepts de la théorie des dérivées, intégrales et des systèmes d'ordre fractionnaire.

Chapitre **///**

Conception d'un Correcteur fractionnaire
pour la Commande Robuste du Système
AVR

III.1 Introduction

La stabilité et la constance du niveau de tension nominale dans un réseau de l'énergie électrique sont les principaux problèmes dans la commande du système d'alimentation électrique, puisque tous les équipements connectés à ce réseau électrique sont conçus pour un certain niveau de tension appelée tension nominale. Si la tension de fonctionnement est différente de la tension nominale, les performances des équipements électriques seront affectées et leur espérance de vie diminue. De plus, l'autre raison importante pour contrôler la valeur nominale de tension est la perte de ligne réelle. Ces pertes dépendent du flux de puissance réelle et réactive et le flux de puissance réactive dépend fortement des tensions des bornes du système d'alimentation. Il est possible de minimiser les pertes de ligne réelles en contrôlant le niveau de tension nominale. Pour résoudre ces problèmes de commande, un système de régulation automatique de tension (AVR) est appliqué aux unités de production d'énergie [13].

Le système AVR est un système de commande en boucle fermée qui fournit une tension aux bornes à la valeur désirée.

Malgré le potentiel des techniques de commande moderne, le correcteur PID classique est encore largement utilisé dans la commande du système AVR parce qu'il offre une performance robuste pour une large gamme de conditions de fonctionnement et une implémentation facile. Différentes approches de réglage du correcteur PID du système AVR ont été proposées dans la littérature. Les méthodes classiques de réglage [48] ont été utilisées pour le calcul des paramètres du correcteur PID du système AVR. Cependant, ces dernières ne peuvent généralement pas accomplir des performances optimales. Alors, dans les deux dernières décennies, les techniques d'optimisation telles que les réseaux de neurones, la logique floue, les algorithmes génétiques (GA), les algorithmes d'optimisation par essaims particuliers ainsi que les algorithmes d'optimisation par colonie d'abeilles et colonie de fourmis ont été largement utilisées dans le réglage des paramètres du correcteur PID du système AVR [14-15, 49-55].

La commande d'ordre fractionnaire signifie que les systèmes à commander et/ou les correcteurs utilisés sont décrits par des équations différentielles d'ordre fractionnaire [28]. Dans les dernières années, les correcteurs d'ordre fractionnaire ont été introduits et utilisés dans différents domaines de la commande parce qu'ils ont plus de flexibilité que les correcteurs d'ordre entier permettant à répondre à plus d'exigences en termes de performances et robustesse des systèmes de commande. Un des correcteurs fractionnaires qui

a beaucoup gagné en popularité est le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire qui est une généralisation du correcteur PID classique avec une action intégrale d'ordre λ et une action dérivée d'ordre μ [8]. Puisque les ordres λ et μ sont des nombres réels arbitraires, le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire a deux degrés de liberté supplémentaires que le PID classique ; alors, il est plus flexible et donne l'avantage de mieux régler les propriétés dynamiques des systèmes. Depuis l'introduction du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire, plusieurs chercheurs ont abordé le sujet de réglage de ce correcteur pour rendre son utilisation plus simple et plus pratique pour son application dans différents domaines de la commande [9]. Ce type de correcteurs a aussi trouvé application dans la commande du système AVR. Plusieurs techniques de réglage du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire du système AVR ont été proposées dans la littérature [20,22, 24-25,56-58].

Dans ce chapitre on va présenter la conception d'une commande robuste d'ordre fractionnaire pour le système AVR. La stratégie de conception du correcteur fractionnaire est établie de telle sorte que la fonction de transfert en boucle ouverte du système AVR est la fonction idéale de Bode qui est largement utilisée dans le domaine de la commande d'ordre fractionnaire à cause de sa propriété d'iso-amortissement [59]. Une comparaison des performances pour montrer la robustesse par rapport aux variations du gain et de la constante du temps du générateur du système AVR avec le correcteur fractionnaire proposée et avec le correcteur PID de la littérature est établie.

III.2 Modèle du système AVR

La boucle du système AVR fournit la constance et la stabilité de la tension de sortie dans un système d'alimentation électrique. Le système AVR est représenté dans la figure (III.1).

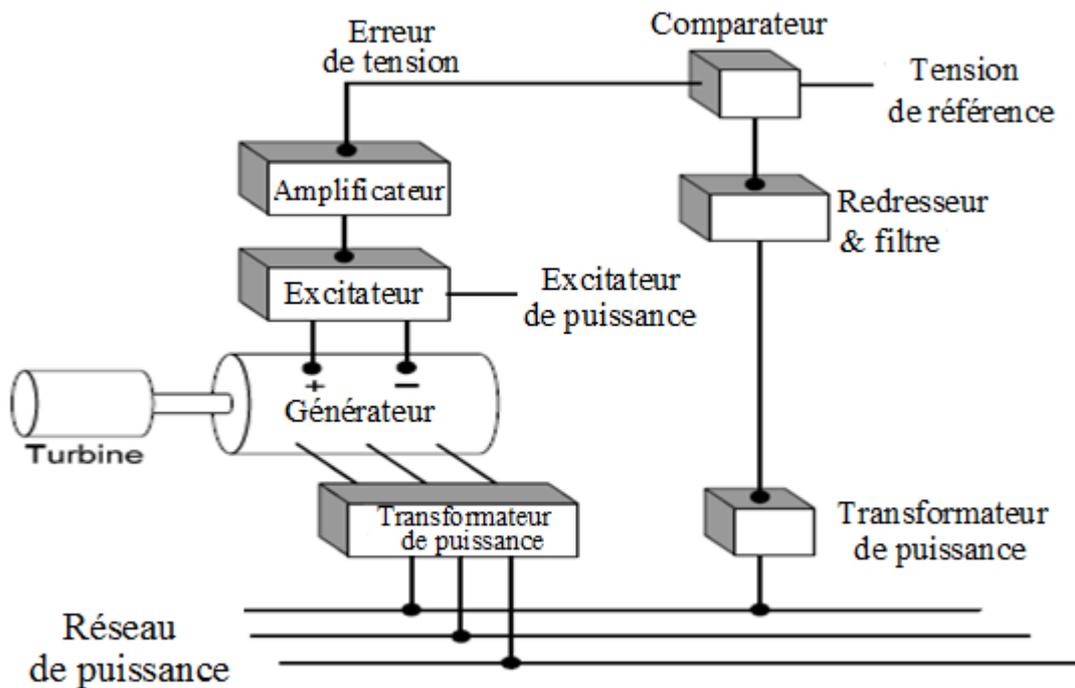


Figure (III.1) : Modèle du système AVR

La variation de charges dans le réseau électrique peut provoquer des oscillations de la force électromotrice d'un générateur électrique. En effet, le système AVR est un dispositif qui peut réguler automatiquement la tension d'excitation du générateur dans le réseau électrique afin qu'il puisse garantir une stabilité et une constance du niveau de tension du régime nominale du réseau de l'énergie électrique. Le principe de fonctionnement de l'AVR est donné dans la figure (III.1). La tension de sortie du générateur vers le réseau électrique est continuellement surveillée par un capteur de niveau de tension. Cette dernière est rectifiée et lissée afin d'être comparée au signal de référence DC. L'erreur entre les tensions DC de référence et du réseau électrique obtenue à la sortie du comparateur est amplifiée pour générer la tension d'excitation adéquate du générateur pour son bon fonctionnement [13].

De la figure (III.1), le système AVR comprend quatre composantes : l'amplificateur, l'excitateur, le générateur et le capteur. Le modèle mathématique du système AVR utilisé dans ce travail est un modèle linéaire qui prend en compte les principales constantes de temps et ignore la saturation et d'autres non-linéarités. Le schéma fonctionnel du modèle du système AVR avec les fonctions de transfert de ses différentes composantes ainsi que la fonction de transfert du correcteur $C(s)$ est donné dans la figure (III.2).

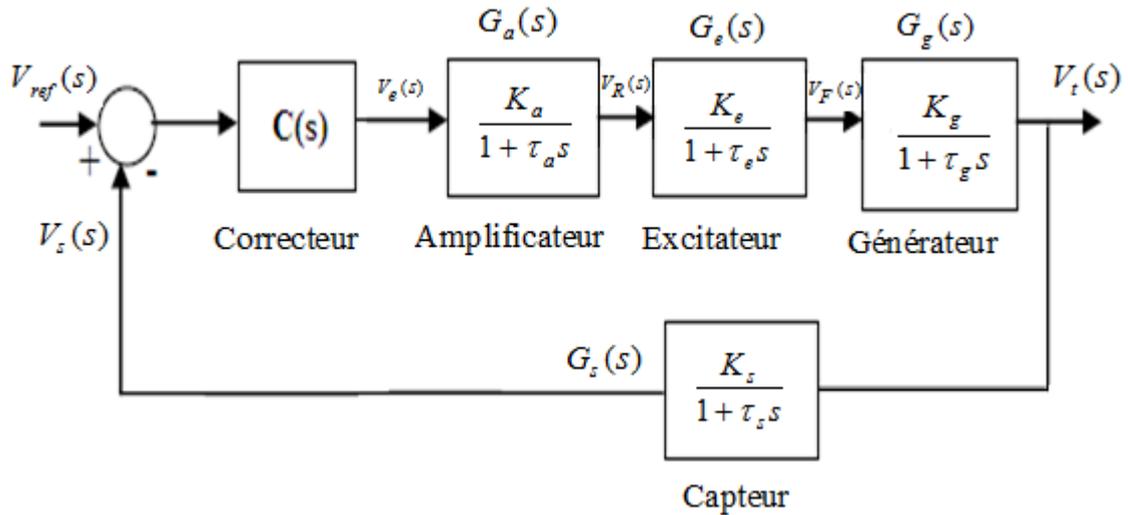


Figure (III.2) : Schéma fonctionnel du système AVR avec le Correcteur $C(s)$

Les fonctions de transfert des composantes du modèle du système AVR ainsi que les limites des valeurs numériques de leurs paramètres sont données dans la section suivante [14-15].

Amplificateur

Le modèle de l'amplificateur est une fonction de transfert du premier ordre définie comme suit :

$$G_a(s) = \frac{V_R(s)}{V_e(s)} = \frac{K_a}{1 + \tau_a s} \quad (\text{III.1})$$

Les valeurs numériques du gain K_a et de la constante du temps τ_a sont telles que $10 < K_a < 40$ et $0,02 < \tau_a < 0,1$ s. Les valeurs nominales de ces paramètres sont $K_a=10$ et $\tau_a=0,1$ s.

Excitateur

Le modèle de l'excitateur est un système du premier ordre dont la fonction de transfert est :

$$G_e(s) = \frac{V_F(s)}{V_R(s)} = \frac{K_e}{1 + \tau_e s} \quad (\text{III.2})$$

Les valeurs numériques du gain K_e et de la constante du temps τ_e sont : $1 < K_e < 10$ et $0,4 < \tau_e < 1,0$ s. Les valeurs nominales des paramètres K_e et τ_e sont $K_e=1$ et $\tau_e=0,4$ s.

Générateur

Le générateur est modélisé par une fonction de transfert comme suit :

$$G_g(s) = \frac{V_t(s)}{V_F(s)} = \frac{K_g}{1 + \tau_g s} \quad (\text{III.3})$$

où le gain K_g et la constante du temps τ_g sont fonction de la variation des charges dans le réseau électrique. Les valeurs de ces deux paramètres sont telles que $0,7 < K_g < 1,0$ et $1,0 < \tau_g < 2,0$ s. Leurs valeurs nominales sont $K_g = 1$ et $\tau_g = 1,0$ s.

Capteur

Le modèle du capteur est une fonction de transfert du premier ordre définie comme suit :

$$G_s(s) = \frac{V_s(s)}{V_t(s)} = \frac{K_s}{1 + \tau_s s} \quad (\text{III.4})$$

Les valeurs du gain K_s et de la constante du temps τ_s sont $K_s = 1$ et $0,001 < \tau_s < 0,06$ s. Les valeurs nominales de ces paramètres sont $K_s = 1$ et $\tau_s = 0,01$ s.

Alors, la fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)$ du système AVR de la figure (III.2) est donnée par:

$$G(s) = C(s) G_p(s) \quad (\text{III.5})$$

où $C(s)$ est la fonction de transfert du correcteur et $G_p(s)$ est une fonction donnée par:

$$G_p(s) = G_a(s) G_e(s) G_g(s) G_s(s) = \frac{K_a K_e K_g K_s}{(1 + \tau_a s)(1 + \tau_e s)(1 + \tau_g s)(1 + \tau_s s)} \quad (\text{III.6})$$

$$G_p(s) = \frac{K_a K_e K_g K_s}{(1 + s/\omega_1)(1 + s/\omega_2)(1 + s/\omega_3)(1 + s/\omega_4)} \quad (\text{III.7})$$

où $(\omega_1 = 1/\tau_g) < (\omega_2 = 1/\tau_e) < (\omega_3 = 1/\tau_a) < (\omega_4 = 1/\tau_s)$ sont les pôles de $G_p(s)$.

Le schéma fonctionnel du système AVR en boucle fermée avec les valeurs nominales des paramètres des fonctions de transfert de l'amplificateur, de l'excitateur, du générateur et du capteur avec le correcteur $C(s)$ est donnée dans la figure (III.3).

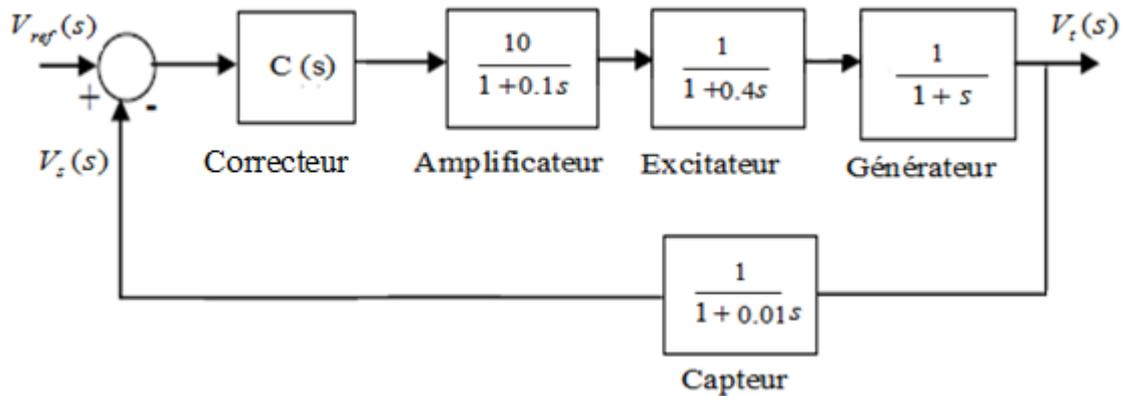


Figure (III.3) : Schéma fonctionnel du système AVR avec le correcteur $C(s)$ et les valeurs nominales des paramètres

Les exigences des performances dynamiques du système AVR sont [14-15]:

- petit temps de réponse t_s
- petit ou pas de dépassement O_s (%)

La figure (III.4) présente la réponse indicielle du système AVR sans correcteur. On note que cette réponse est oscillatoire, admet un grand dépassement d'environ 50 % et un long temps de réponse. Alors pour répondre aux exigences de performance dynamique du système AVR du dessus on a besoin d'un correcteur.

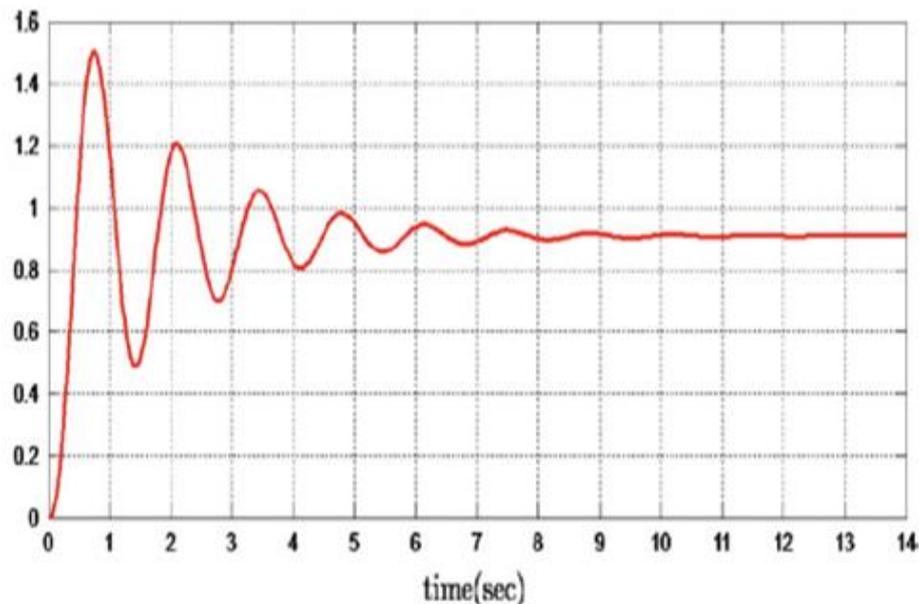


Figure (III.4) : Réponse indicielle de la tension de sortie du système AVR sans correcteur

III.3 Conception d'un correcteur fractionnaire pour la commande robuste du système AVR

III.3.1 Méthode de conception du correcteur proposé

L'objectif du système AVR projeté est de concevoir un correcteur $C(s)$ garantissant que la fonction de transfert en boucle ouverte $G(s) = C(s)G_p(s)$ de l'équation (III.5) soit équivalente à la fonction de transfert idéale de Bode, dans une bande de fréquence $[\omega_L, \omega_H]$ autour d'une fréquence donnée ω_u . Alors, on peut écrire que :

$$G(s) = C(s) G_p(s) \cong \frac{1}{(s/\omega_u)^\alpha} \quad (\text{III.8})$$

où α est un nombre réel tel que $1 < \alpha < 2$ et ω_u un nombre réel positif. Il a été démontré que les performances temporelles et fréquentielles en boucle fermée d'un système à retour unitaire dont la fonction de transfert en boucle ouverte est la fonction idéale de Bode de l'équation (III.8) dépendent uniquement des deux paramètres α et ω_u [59-61]. Donc, les exigences de performance du système AVR projeté peuvent être traduites en termes des deux paramètres α et ω_u . Dans ce cas, si la technique de la commande CRONE est utilisée dans la conception du correcteur $C(s)$ du système AVR sa fonction de transfert sera donnée comme suit [7]:

$$C(s) = \frac{1}{G_p(s)} \frac{1}{(s/\omega_u)^\alpha}, \quad \text{pour } 1 < \alpha < 2 \quad (\text{III.9})$$

Mais, dans ce contexte, le correcteur $C(s)$ proposé sera conçu d'une manière différente de celle proposée par la technique de la commande CRONE de l'équation (III.9).

La technique proposée pour la conception du correcteur $C(s)$ commence, premièrement, par le choix des deux paramètres α et ω_u de la fonction idéale de Bode en fonction des exigences des performances dynamiques du système AVR projeté. Donc, la fonction de transfert en boucle ouverte du système AVR projeté $G(s) = C(s)G_p(s) = (s/\omega_u)^{-\alpha}$ est établie. Puis, $(s/\omega_u)^{-\alpha}$ qui est un intégrateur d'ordre fractionnaire est approximé par une fonction rationnelle dans une bande de fréquence d'intérêt pratique $[\omega_L, \omega_H]$ autour de ω_u . Cette bande d'approximation est donnée par $[\omega_L = \omega_u/\beta, \omega_H = \beta\omega_u]$, avec β un nombre réel tel que $\beta > 1$. Dans le chapitre 1, on a présenté l'approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire par une fonction rationnelle dans une bande de fréquence d'intérêt pratique donnée $[\omega_L, \omega_H]$.

Alors, à partir de l'équation (I. 11) la fonction idéale de Bode $(s/\omega_u)^{-\alpha}$, pour $1 < \alpha < 2$, est approximée par une fonction rationnelle comme suit:

$$G(s) = C(s) G_p(s) = \frac{1}{(s/\omega_u)^\alpha} \cong \frac{(\omega_u)^\alpha}{[p_{-1}] \left[(\omega_c)^{(\alpha-1)} \right]} \frac{\prod_{i=0}^N (1 + s/z_i)}{\prod_{i=-1}^N (1 + s/p_i)} \quad (\text{III.10})$$

où p_i ($i = -1, 0, 1, \dots, N$) et z_i ($i = 0, 1, \dots, N$) sont les pôles et les zéros de l'approximation.

L'étape suivante de la technique de conception proposée du correcteur $C(s)$ consiste à manipuler les pôles de la fonction rationnelle de l'approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire de l'équation (III.10) de telle sorte que quatre de ces pôles sont presque égaux aux pôles $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ et ω_4 de $G_p(s)$ de l'équation (III.7). Cette manipulation de pôles de la fonction rationnelle de l'approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire peut être facilement faite en choisissant les bons paramètres d'approximation du chapitre 1. Ensuite on décompose la fonction rationnelle de l'approximation obtenue de l'équation (III.10) en deux parties comme suit [59]:

$$G(s) = C(s) G_p(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_u}\right)^\alpha} \cong \frac{(\omega_u)^\alpha}{[p_{-1}] \left[(\omega_c)^{(\alpha-1)} \right]} \frac{\prod_{i=0}^N (1 + s/z_i)}{\prod_{i=-1}^N (1 + s/p_i)} \quad (\text{III.11})$$

$$= \left[K_c \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{\substack{i=-1 \\ i \neq j_1, i \neq j_2 \\ i \neq j_3, i \neq j_4}}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \right] \left[\frac{K_p}{\left(1 + \frac{s}{p_{j_1}}\right) \left(1 + \frac{s}{p_{j_2}}\right) \left(1 + \frac{s}{p_{j_3}}\right) \left(1 + \frac{s}{p_{j_4}}\right)} \right]$$

où $K_p = K_a K_e K_g K_s$, $K_c = \frac{(\omega_u)^\alpha}{(K_p)[p_{-1}] \left[(\omega_c)^{(\alpha-1)} \right]}$ et les pôles $p_{j_1}, p_{j_2}, p_{j_3}$ et p_{j_4} ($-1 \leq j_1 < j_2 <$

$j_3 < j_4 \leq N$) sont presque égaux, respectivement, aux pôles $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ et ω_4 de $G_p(s)$ de l'équation (III.7). Donc, de l'équation (III.11), on peut écrire que :

$$G(s) = C(s) G_p(s) = \left[K_c \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{\substack{i=-1 \\ i \neq j_1, i \neq j_2 \\ i \neq j_3, i \neq j_4}}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \right] G_p(s) \quad (\text{III.12})$$

Alors, la fonction de transfert du correcteur $C(s)$ est donnée par:

$$C(s) = \left[K_c \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_{\substack{i=-1 \\ i \neq j_1, i \neq j_2 \\ i \neq j_3, i \neq j_4}}^N \left(1 + \frac{s}{p_i} \right)} \right] \quad (\text{III.13})$$

Dans cette méthode de conception, $C(s)$ doit être causal. Mais, comme on peut le voir dans la fonction de transfert de $C(s)$ de l'équation (III.13) il y a $(N+1)$ zéros et $(N-2)$ pôles. Donc, pour garantir sa causalité, il faut ajouter au moins trois pôles tels qu'ils n'auront aucun effet sur la conception dans la bande de fréquence donnée $[\omega_L, \omega_H]$. Dans ce contexte, les trois pôles sont ajoutés après le dernier pôle p_N de la fonction de transfert du correcteur $C(s)$ de l'équation (III.13). Ainsi, ils sont donnés par:

$$p_{N+1} = p_0(ab)^{(N+1+\delta)}, \quad p_{N+2} = p_{N+1}(ab) \quad \text{et} \quad p_{N+3} = p_{N+2}(ab) \quad (\text{III.14})$$

où δ est un nombre positif réel choisi pour améliorer l'approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire $(s/\omega_u)^{-\alpha}$ de l'équation (III.10). Par conséquent, la fonction de transfert finale du correcteur $C(s)$ est donnée par:

$$C(s) = \left[K_c \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_{\substack{i=-1 \\ i \neq j_1, i \neq j_2 \\ i \neq j_3, i \neq j_4}}^N \left(1 + \frac{s}{p_i} \right)} \right] \left[\frac{1}{\prod_{i=N+1}^{N+3} \left(1 + \frac{s}{p_i} \right)} \right] \quad (\text{III.15})$$

A partir du schéma fonctionnel du system AVR de la figure (III.2), la fonction de transfert en boucle fermée $G_c(s)$ du système AVR est donnée par l'expression suivante:

$$G_c(s) = \frac{V_t(s)}{V_{ref}(s)} = \frac{C(s)G_a(s)G_e(s)G_g(s)}{1 + C(s)G_a(s)G_e(s)G_g(s)G_s(s)} \quad (\text{III.16})$$

De l'équation (III.6) $G_p(s) = G_a(s)G_e(s)G_g(s)G_s(s)$, on a $G_a(s)G_e(s)G_g(s) = \frac{G_p(s)}{G_s(s)}$

De l'équation (III.5) $G(s) = C(s)G_p(s)$, donc l'équation (III.16) s'écrit sous la forme suivante :

$$G_c(s) = \frac{V_t(s)}{V_{ref}(s)} = \frac{G(s)/G_s(s)}{1+G(s)} = \left(\frac{G(s)}{1+G(s)} \right) \left[\frac{1}{G_s(s)} \right] \quad (\text{III.17})$$

On peut alors écrire :

$$G_c(s) = \frac{V_t(s)}{V_{ref}(s)} = \left(\frac{G(s)}{1+G(s)} \right) \left[\frac{1+\tau_s s}{K_s} \right] = \frac{1}{K_s} \left[\frac{G(s)}{1+G(s)} \right] + \frac{\tau_s}{K_s} s \left[\frac{G(s)}{1+G(s)} \right] \quad (\text{III.18})$$

La tension de sortie du système AVR $V_t(s)$ est donnée comme suit :

$$V_t(s) = \frac{1}{K_s} \left[\frac{G(s)}{1+G(s)} \right] V_{ref}(s) + \frac{\tau_s}{K_s} s \left[\frac{G(s)}{1+G(s)} \right] V_{ref}(s) \quad (\text{III.19})$$

Maintenant, pour $v_{ref}(t) = u(t) = \text{échelon unité}$, $V_{ref}(s) = 1/s$; on aura:

$$V_t(s) = \frac{1}{K_s} \left[\frac{G(s)}{1+G(s)} \right] \left(\frac{1}{s} \right) + \frac{\tau_s}{K_s} s \left[\frac{G(s)}{1+G(s)} \right] \left(\frac{1}{s} \right) = \frac{\tau_s}{K_s} \left[\frac{G(s)}{1+G(s)} \right] + \frac{1}{K_s} \left[\frac{G(s)}{1+G(s)} \right] \left(\frac{1}{s} \right) \quad (\text{III.20})$$

Donc, la réponse indicielle du système AVR est donnée par l'expression suivante:

$$v_t(s) = \frac{\tau_s}{K_s} \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{1+G(s)} \right\} + \frac{1}{K_s} \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{1+G(s)} \frac{1}{s} \right\} \quad (\text{III.21})$$

Théoriquement, $G(s) = \frac{1}{(s/\omega_u)^\alpha}$, pour $1 < \alpha < 2$, alors on a:

$$\left[\frac{G(s)}{1+G(s)} \right] = \frac{1}{1+(s/\omega_u)^\alpha} \quad (\text{III.22})$$

Dans ce cas, la réponse indicielle du système en boucle fermée est donnée comme suit:

$$v_t(t) = \frac{\tau_s}{K_s} \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{1+(s/\omega_u)^\alpha} \right\} + \frac{1}{K_s} \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{1+(s/\omega_u)^\alpha} \frac{1}{s} \right\} = \frac{\tau_s}{K_s} h(t) + \frac{1}{K_s} h_1(t) \quad (\text{III.23})$$

Pour $\tau_0 = 1/\omega_u$, $h(t)$ et $h_1(t)$ sont, respectivement, les réponses impulsionnelle et indicielle du système oscillatoire d'ordre fractionnaire de l'équation (III.22). Des équations (I. 68) et (I. 70) du chapitre I, ces fonctions $h(t)$ et $h_1(t)$ sont, respectivement données par:

$$h(t) = \sum_{i=0}^N k_i p_i \exp(-p_i t) + C \exp(-\omega_u \zeta t) \sin(\omega_u (\sqrt{1-\zeta^2}) t + \Phi) \quad (\text{III.24})$$

$$h_1(t) = 1 - \sum_{i=0}^N k_i \exp(-p_i t) + \left(\frac{C}{\omega_u} \right) \exp(-\omega_u \zeta t) \sin(\omega_u (\sqrt{1-\zeta^2}) t + \Phi - \Phi_1) \quad (\text{III.25})$$

III.3.2. Simulations, résultats et comparaison

Le schéma fonctionnel du système AVR avec les valeurs nominales des paramètres des fonctions de transfert de l'amplificateur, de l'excitateur, du générateur et du capteur de la figure (III.3) est celui qui sera utilisé dans les simulations dans ce travail pour vérifier l'efficacité du correcteur fractionnaire proposé. Seules les variations du gain et la constante de temps du générateur seront pris en compte pour l'analyse des performances et de la robustesse parce qu'on veut que le système AVR maintienne l'amplitude de la tension de sortie du générateur à un niveau spécifié dans des conditions de fonctionnement normales à différents niveaux de charge.

Alors, la fonction de transfert $G_p(s)$ du système AVR de la figure (III.3) est donnée par:

$$G_p(s) = \frac{10}{(1+0.1s)(1+0.4s)(1+s)(1+0.01s)} = \frac{10}{\left(1+\frac{s}{1.0}\right)\left(1+\frac{s}{2.5}\right)\left(1+\frac{s}{10.0}\right)\left(1+\frac{s}{100.0}\right)} \quad (\text{III.26})$$

Le but du système AVR projeté est de concevoir un correcteur $C(s)$ qui garantit que la fonction de transfert en boucle ouverte $G(s) = C(s) G_p(s)$ du système AVR est la fonction de transfert idéal de Bode $G_B(s)$ donnée comme suit:

$$G(s) = C(s) G_p(s) = G_B(s) = \frac{1}{(s/\omega_u)^\alpha} \quad (\text{III.27})$$

Les exigences de performance dynamique du système AVR projeté sont: un petit temps de réponse t_s et un petit ou pas dépassement O_s (%) [14-15]. Ces exigences doivent être traduites en termes des deux paramètres α et ω_u de la fonction de transfert idéal de Bode. Les valeurs des paramètres α et ω_u peuvent être estimées à partir des caractéristiques temporelles (dépassement et temps de réponse) du système d'ordre fractionnaire de l'équation (III.23). Donc, les exigences de performance dynamique ci-dessus peuvent être satisfaites pour $\alpha = 1.1$ et $\omega_u = 40$ rad / s. Par conséquent, la fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)$ du système AVR sera:

$$G(s) = C(s) G_p(s) = G_B(s) = \frac{1}{(s/40)^{1.1}} \quad (\text{III.28})$$

Alors, l'intégrateur d'ordre fractionnaire de l'équation (III.28) peut être approximé par :

$$C(s) G_p(s) = \frac{1}{(s/40)^{1.1}} \cong \frac{(40)^{1.1}}{(p_{-1})(\omega_c)^{0.1}} \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=-N_1}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{III.29})$$

Pour la fréquence de coupure $\omega_u = 40$ rad/s, la bande de fréquence d'intérêt pratique autour de ω_u est $[\omega_L, \omega_H] = [\omega_u/10, 10\omega_u] = [4$ rad/s, 400 rad/s]. Aussi, pour $N=10$, $y = 0.2948$ dB, $\omega_c = 0.3624$ rad/s et $N_1=1$, les paramètres d'approximation a , b , et p_0 sont: $a = 1.0783$, $b = 1.9716$, $p_0 = 0.5088$.

Puis, les pôles et zéros de l'équation (III.29) sont $p_i = p_0(ab)^i = 0.5088(2.1260)^i$ (pour $i = -1, 0, 1, \dots, 10$) et $z_i = ap_0(ab)^i = 0.5486(2.1260)^i$ (pour $i = 0, 1, \dots, 10$). Par conséquent, la fonction de transfert en boucle ouverte $G(s) = C(s) G_p(s)$ sera :

$$G(s) = C(s) G_p(s) = \frac{1}{(s/40)^{1.1}} \cong (267.4904) \frac{\prod_{i=0}^{10} \left(1 + \frac{s}{0.5486(2.1260)^i}\right)}{\prod_{i=-1}^{10} \left(1 + \frac{s}{0.5088(2.1260)^i}\right)} \quad (\text{III.30})$$

En choisissant les bonnes paramètres $y = 0.2948$ dB et $\omega_c = 0.3624$ rad/s, on a pu avoir les pôles $p_1 = 1.0818$, $p_2 = 2.3000$, $p_4 = 10.3957$ et $p_7 = 99.8951$ de l'approximation de l'intégrateur fractionnaire de l'équation (III.30) presque égaux aux pôles $\omega_1 = 1.00$, $\omega_2 = 2.50$, $\omega_3 = 10.00$ et $\omega_4 = 100.00$ de $G_p(s)$, respectivement. Ainsi, l'équation (III.30) peut être décomposée en deux parties comme suit :

$$C(s)G_p(s) = \left[(26.7490) \frac{\prod_{i=0}^{10} \left(1 + \frac{s}{0.5486(2.1260)^i}\right)}{\prod_{\substack{i=-1 \\ i \neq 1, i \neq 2 \\ i \neq 4, i \neq 7}}^{10} \left(1 + \frac{s}{0.5088(2.1260)^i}\right)} \right] \times \quad (\text{III.31})$$

$$\left[\frac{10.00}{\left(1 + \frac{s}{1.0818}\right) \left(1 + \frac{s}{2.3000}\right) \left(1 + \frac{s}{10.3957}\right) \left(1 + \frac{s}{99.8951}\right)} \right]$$

Comme $G_p(s) \cong \left[\frac{10.00}{\left(1 + \frac{s}{1.0818}\right) \left(1 + \frac{s}{2.30}\right) \left(1 + \frac{s}{10.3957}\right) \left(1 + \frac{s}{99.8951}\right)} \right]$, alors de l'équation

(III.31) la fonction de transfert du correcteur $C(s)$ est donnée par l'expression suivante:

$$C(s) = \left[\frac{(26.7490) \prod_{i=0}^{10} \left(1 + \frac{s}{0.5486(2.1260)^i} \right)}{\prod_{\substack{i=-1 \\ i \neq 1, i \neq 2 \\ i \neq 4, i \neq 7}}^{10} \left(1 + \frac{s}{0.5088(2.1260)^i} \right)} \right] \quad (\text{III.32})$$

La fonction de transfert $C(s)$ du correcteur de l'équation (III.32) est non causale, car il a 11 zéros et 8 pôles. Pour garantir sa causalité, il faut ajouter au moins trois pôles tels qu'ils n'auront aucun effet sur la conception du correcteur. Dans ce contexte, les trois pôles qui seront ajoutés après le dernier pôle de l'équation (III.32) sont donnés par: $p_{11} = 0.5088 (2.1260)^{(1+\delta)}$, $p_{12} = (2.1260)p_{11}$ et $p_{13} = (2.1260)p_{12}$; avec δ est un nombre réel positif donné par $\delta = 3,43$. Ce nombre est choisi pour améliorer l'approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire de l'équation (III.30), en particulier sa phase.

Enfin, la fonction de transfert $C(s)$ du correcteur conçu sera donnée par:

$$C(s) = \left[\frac{(26.7490) \prod_{i=0}^{10} \left(1 + \frac{s}{0.5486(2.1260)^i} \right)}{\prod_{\substack{i=-1 \\ i \neq 1, i \neq 2 \\ i \neq 4, i \neq 7}}^{10} \left(1 + \frac{s}{0.5088(2.1260)^i} \right)} \right] \left[\frac{1}{\prod_{i=11}^{13} \left(1 + \frac{s}{0.5088(2.1260)^{(3.43+i)} \right)} \right] \quad (\text{III.33})$$

Alors, la fonction de transfert en boucle ouverte du système AVR $G(s) = C(s)G_p(s)$ est donnée par l'expression suivante :

$$G(s) = \left[\frac{(26.7490) \prod_{i=0}^{10} \left(1 + \frac{s}{0.5486(2.1260)^i} \right)}{\prod_{\substack{i=-1 \\ i \neq 1, i \neq 2 \\ i \neq 4, i \neq 7}}^{10} \left(1 + \frac{s}{0.5088(2.1260)^i} \right) \prod_{i=11}^{13} \left(1 + \frac{s}{0.5088(2.1260)^{(3.43+i)} \right)} \right] \left[\frac{10}{\left(1 + \frac{s}{1.0} \right) \left(1 + \frac{s}{2.5} \right) \left(1 + \frac{s}{10.0} \right) \left(1 + \frac{s}{100.0} \right)} \right] \quad (\text{III.34})$$

La figure (III.5) montre les modules et les phases du tracé de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)$ de l'équation (III.34) et de la fonction de transfert idéale de Bode $G_B(s) = (s/40)^{-1.1}$ de l'équation (III.28).

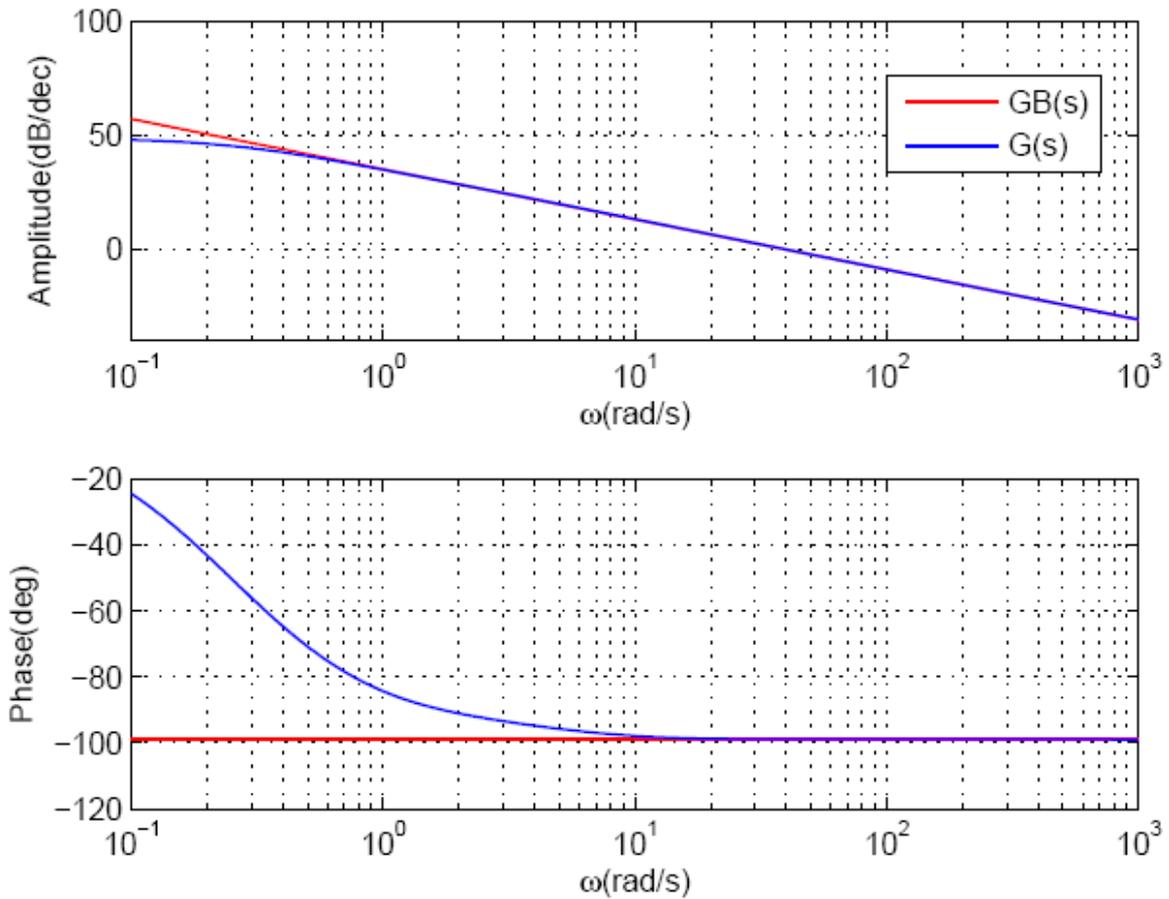


Figure (III.5) : Tracé de Bode de la fonction de transfert en boucle ouvert $G(s)$ et de la fonction de transfert idéal de Bode $G_B(s)$

De la figure (III.5), la fréquence de coupure est $\omega_u = 40$ rad/s et autour d'elle la pente est exactement $-20 (1.1) = -22,00$ dB/dec et la phase est $-(1.1) 90^\circ = -99,00^\circ$. Donc, autour de la fréquence de coupure $\omega_u = 40$ rad/s, on peut dire que la fonction de transfert de boucle ouverte $G(s)$ de l'équation (III.34) se comporte comme la fonction idéal de Bode de l'équation (III.28).

Les paramètres nominaux du capteur de l'équation (III.4) sont $K_s = 1$ et de $\tau_s = 0.01$ s. La fonction de transfert en boucle fermée $G_c(s)$ du système AVR de l'équation (III.18) est alors donnée par:

$$G_c(s) = \frac{V_t(s)}{V_{ref}(s)} = \left[\frac{G(s)}{1+G(s)} \right] + 0.01s \left[\frac{G(s)}{1+G(s)} \right] \quad (III.35)$$

La réponse indicielle de la tension de sortie $v_t(t)$ du system AVR en boucle fermée est donnée par:

$$v_t(t) = \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{1+G(s)} \right\} + 0.01 \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{1+G(s)} \right\} \quad (\text{III.36})$$

où $G(s)$ est la fonction de transfert en boucle ouverte du système AVR de l'équation (III.34).

Théoriquement, on a $G(s) = G_B(s) = (s/40)^{-1.1}$, donc à partir de l'équation (III.36) la fonction de transfert idéal en boucle fermée $G_{Bc}(s)$ du système AVR est donné par:

$$G_{Bc}(s) = \frac{V_t(s)}{V_{ref}(s)} = \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{s}{40}\right)^{1.1}} \right] + 0.01s \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{s}{40}\right)^{1.1}} \right] \quad (\text{III.37})$$

De l'équation (III.23), la réponse indicielle de la tension de sortie $v_t(t)$ du système AVR avec la fonction de transfert idéal $G_{Bc}(s)$ est donné par l'expression suivante :

$$v_t(t) = h_1(t) + 0.01h(t) \quad (\text{III.38})$$

où $h(t)$ et $h_1(t)$ sont, respectivement, les fonctions des équations (III.24) et (III.25). Ces fonctions $h(t)$ et $h_1(t)$ sont obtenues en utilisant la technique d'approximation de [41].

Dans la bande de fréquence $[0, \omega_H] = [0, 1600 \text{ rad/s}]$ et pour une erreur d'approximation $\varepsilon = 0.5 \text{ dB}$, les paramètres d'approximation donnés dans le chapitre 1 sont: $\zeta = 0.8871$, $\omega_{max} = 2000 \text{ rad/s}$, $a = 3.1622$, $b = 1.1364$, $z_0 = 42.642$, un $p_0 = 134.846$, $N = 6$, $A = 0.0243$, $B = 1.0546$, $C = 1.0576$, $\Phi = 1.1656$, $\Phi_1 = 2.6620$. Donc, pour $i = 0, 1, \dots, 6$, on peut avoir :

$$p_i = 134.846(3.5938)^i$$

$$k_i = \frac{\prod_{j=0}^6 [1 - 3.1622(3.5938)^{(i-j)}]}{\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^6 [1 - (3.5938)^{(i-j)}]} \left\{ \frac{1}{\left[3.3711(3.5938)^i \right]^2 - \left[5.9815(3.5938)^i \right] + 1} \right\}$$

Alors, les fonctions $h(t)$ et $h_1(t)$ sont données par:

$$h(t) = \sum_{i=0}^6 k_i 134.846(3.5938)^i \exp(-134.846(3.5938)^i t) + 1.0576 \exp(-35.4840t) \sin(18.4575t + 1.1656) \quad (39)$$

$$h_1(t) = 1 - \sum_{i=0}^6 k_i \exp(-134.846(3.5938)^i t) + 42.3027 \exp(-35.4840t) \sin(18.4575t - 1.4964) \quad (40)$$

La figure (III.6) montre les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle fermée $G_c(s)$ de l'équation (III.35) et la fonction de transfert idéale de Bode en boucle fermée $G_{Bc}(s)$ du système AVR de l'équation (III.37). La figure (III.7) montre aussi les réponses indicielles de tension de sortie $v_i(t)$ du système AVR avec la fonction de transfert en boucle fermée de l'équation (III.35) et avec la fonction de transfert idéale $G_{Bc}(s)$ de l'équation (37).

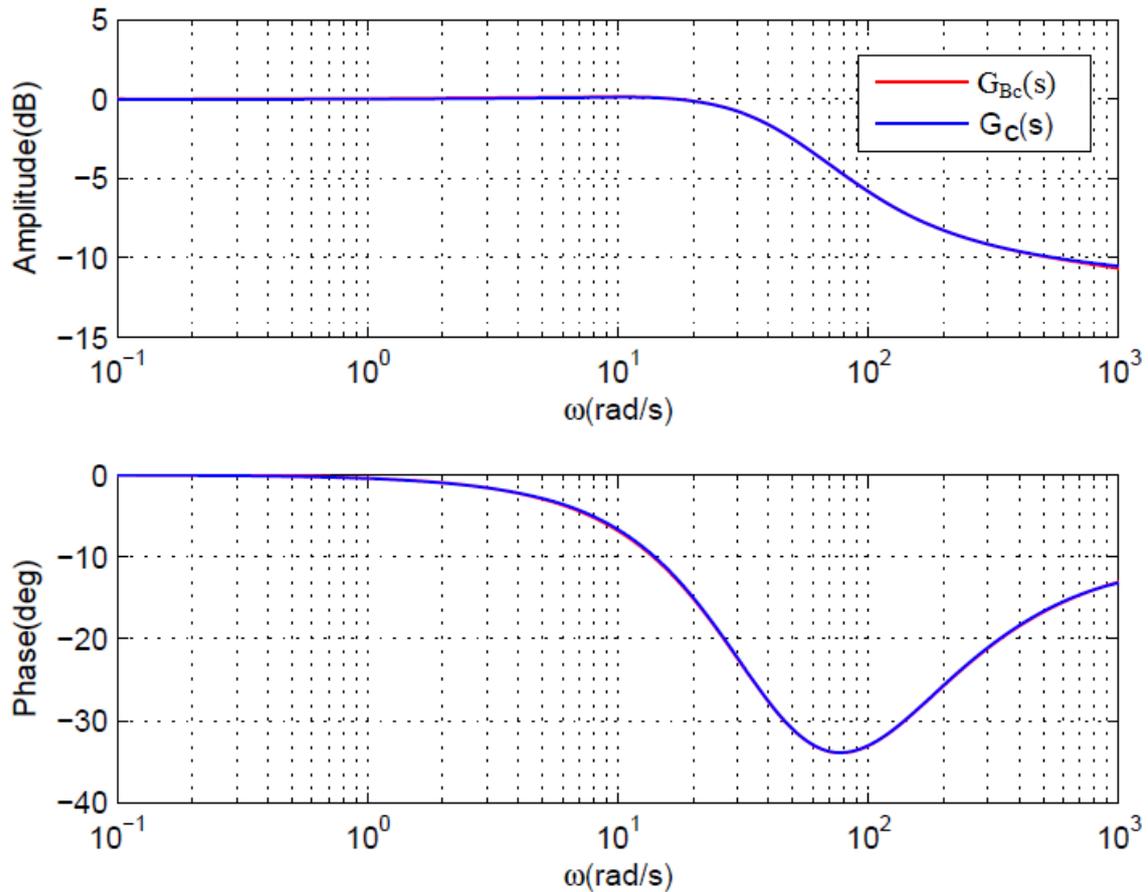


Figure (III.6): Tracé de Bode de la fonction de transfert en boucle fermée $G_c(s)$ et la fonction de transfert idéale de Bode en boucle fermée $G_{Bc}(s)$

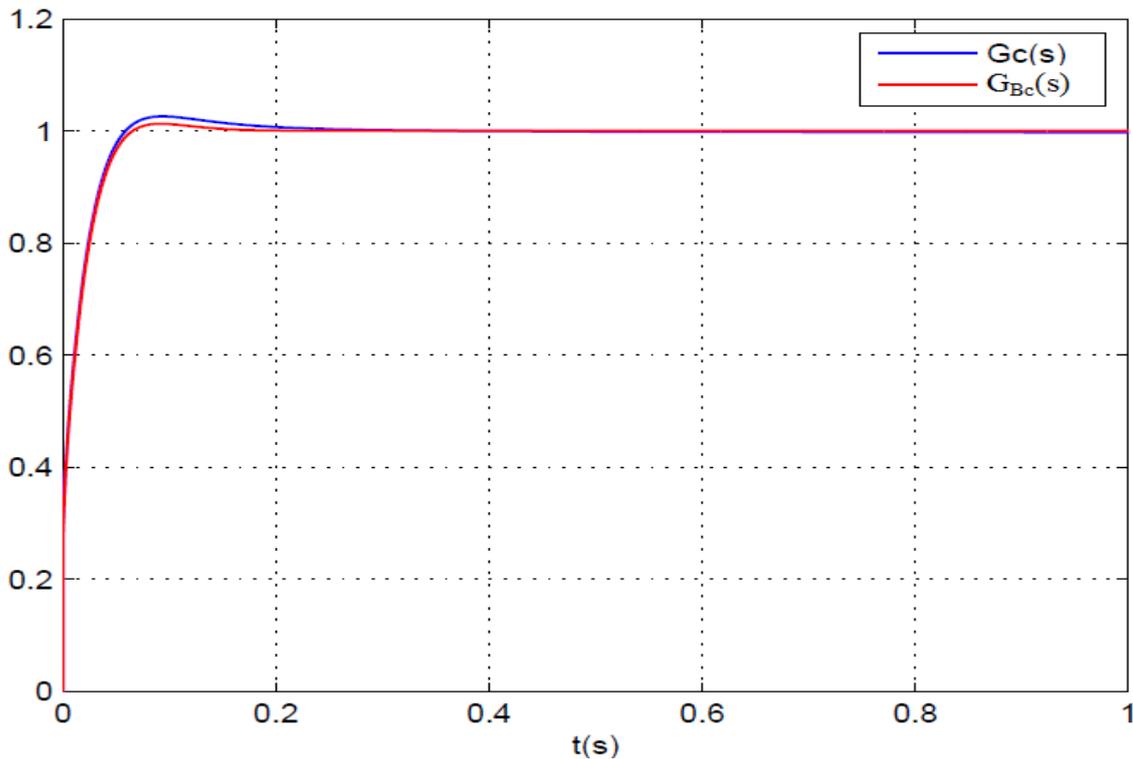


Figure (III.7): Réponses indicielles de tension de sortie de l'AVR avec le correcteur proposé et de la fonction idéal de Bode en boucle fermée

D'après la figure (III.6), on peut facilement voir qu'autour de la fréquence de coupure $\omega_u = 40$ rad/s les amplitudes et les phases de la fonction de transfert en boucle fermée $G_c(s)$ et la fonction de transfert idéal en boucle fermée $G_{Bc}(s)$ du système AVR se chevauchent parfaitement. Donc, ce résultat montre l'efficacité de la stratégie de conception du correcteur proposé. De la figure (III.7), on peut également voir que les réponses indicielles de la tension de sortie du système AVR sont presque les mêmes. Alors, le système AVR en boucle fermée conçu avec le correcteur proposé se comporte comme le système AVR avec la fonction idéal de Bode en boucle fermée dont la fonction de transfert en boucle fermée est $G_{Bc}(s)$ de l'équation (III.37). On peut également noter que le correcteur proposé produit un très faible temps de réponse avec un dépassement très petit et une erreur statique nulle.

III.3.3 Comparaison des performances et analyse de la robustesse

Dans cette section, on va comparer les résultats des performances et de la robustesse par rapport aux variations du gain K_g et la constante de temps τ_g du générateur du système AVR avec le correcteur proposé à ceux du système AVR avec un correcteur classique PID proposé dans [16]. Dans cette comparaison, on va utiliser les mêmes exigences de performance

dynamiques adoptées dans [16]. En utilisant les mêmes valeurs nominales des paramètres des fonctions de transfert de l'amplificateur, de l'excitateur, du générateur et du capteur de la figure (III.3), le régulateur PID obtenu pour la conception du système AVR dans [16] est donnée comme suit:

$$C_{PID}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = 0.622 + \frac{0.453}{s} + 0.218s \quad (III.41)$$

La fonction de transfert en boucle ouverte $G_{PID}(s) = C_{PID}(s) G_p(s)$ est donc donnée par:

$$G_{PID}(s) = \left[\frac{2.18s^2 + 6.22s + 4.53}{s \left(1 + \frac{s}{1.0}\right) \left(1 + \frac{s}{2.5}\right) \left(1 + \frac{s}{10.0}\right) \left(1 + \frac{s}{100.0}\right)} \right] \quad (III.42)$$

La fonction de transfert en boucle fermée $G_{PIDc}(s)$ du système AVR obtenu est:

$$G_{PIDc}(s) = \frac{V_t(s)}{V_{ref}(s)} = \left[\frac{G_{PID}(s)}{1 + G_{PID}(s)} \right] + 0.01s \left[\frac{G_{PID}(s)}{1 + G_{PID}(s)} \right] \quad (III.43)$$

Dans ce cas, la réponse indicielle en boucle fermée du système AVR obtenu est :

$$v_t(t) = \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{G_{PID}(s)}{1 + G_{PID}(s)} \frac{1}{s} \right\} + 0.01 \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{G_{PID}(s)}{1 + G_{PID}(s)} \right\} \quad (III.44)$$

La figure (III.8) montre les diagrammes de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte $G(s) = C(s)G_p(s)$ de l'équation (III.34) de l'approche proposée et $G_{PID}(s) = C_{PID}(s)G_p(s)$ de l'équation (III.42) de l'approche dans [16].

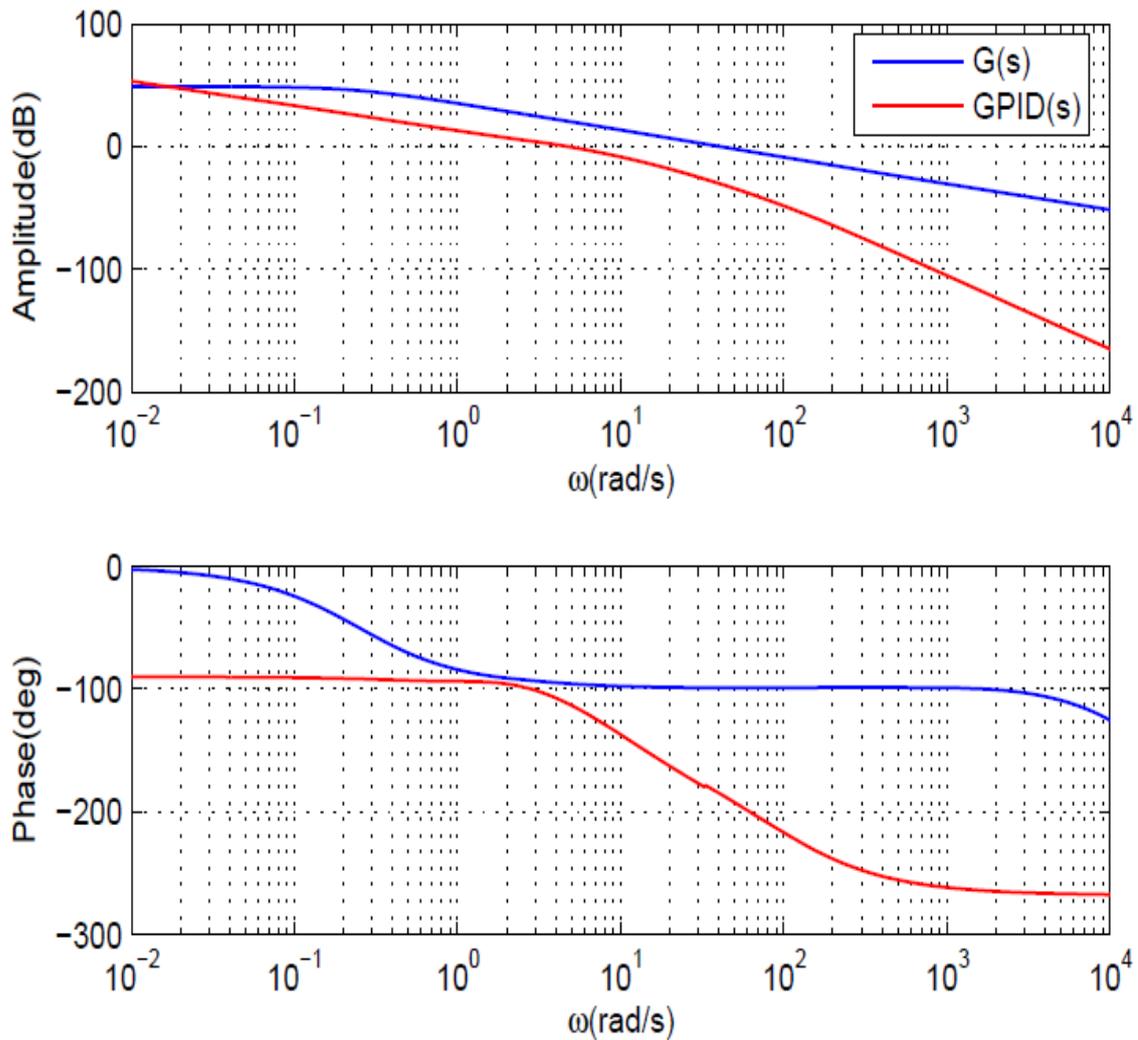


Figure (III.8) : Tracé de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte $G(s)$ et $G_{PID}(s)$

D'après la figure (III.8), on note que la conception du système AVR proposé présente une phase plate autour de sa fréquence de coupure ω_u mais le système AVR conçu dans [16] n'a pas une phase plate. On sait que la platitude de la phase autour de sa fréquence de coupure ω_u de la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système de commande à retour présente la dite propriété iso-amortissement de sa réponse indicielle qui est une caractéristique importante de la robustesse. La figure (III.9) montre les réponses indicielles de la tension de sortie du système AVR de l'équation (III.44) avec le correcteur PID de l'équation (III.41) et du système AVR de l'équation (III.36) avec le correcteur proposé de l'équation (III.33).

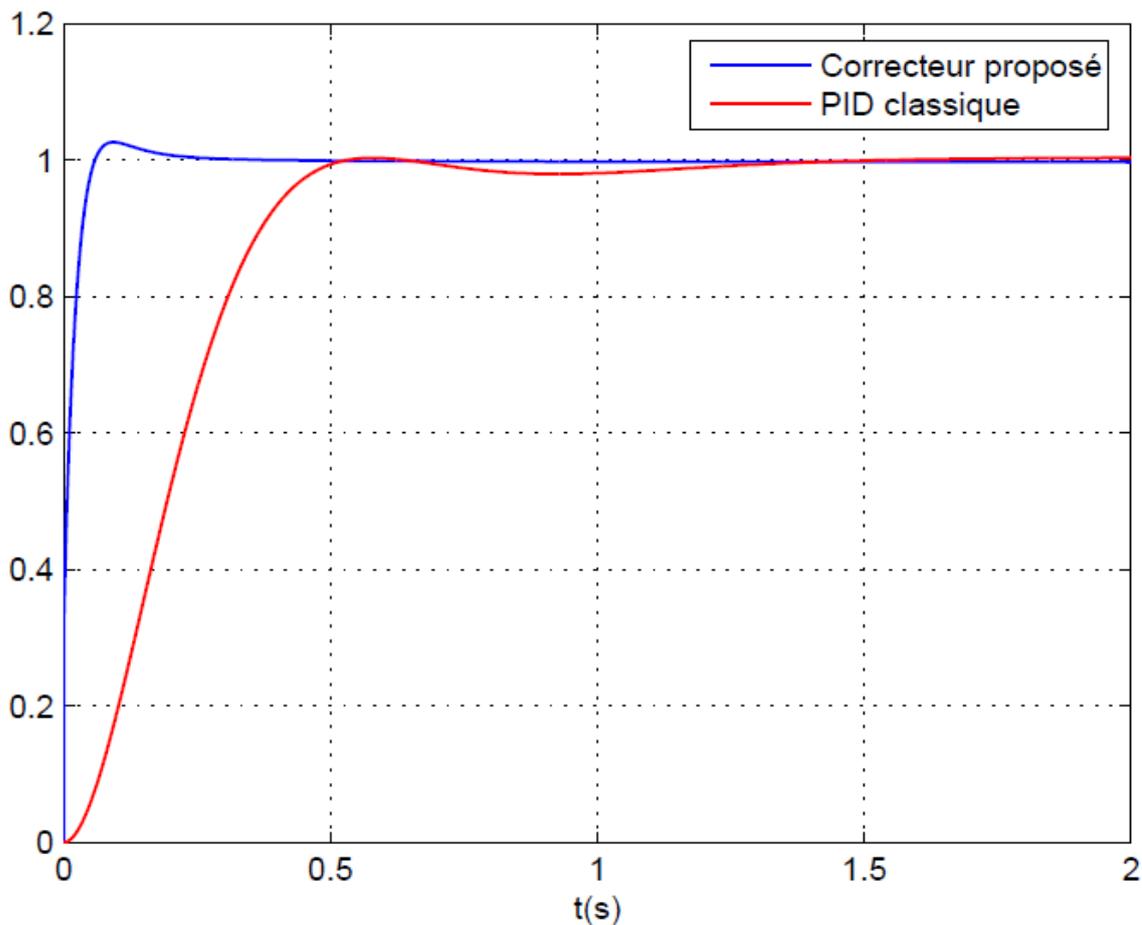


Figure (III.9) : Réponses indicielles de la tension de sortie du système AVR avec le correcteur proposé et avec le PID classique

D'après la figure (III.9), on note que les deux conceptions du système AVR réalisent un petit dépassement, un petit temps de réponse et une erreur statique nulle. Cependant, le temps de réponse du système AVR avec le correcteur proposé est beaucoup plus petit que celui du système AVR avec le correcteur PID de [16].

Dans le modèle de la figure (III.2), le générateur est représenté par le gain k_g et la constante de temps τ_g où K_g varie entre 0,7 et 1,0 et τ_g entre 1,0 et 2,0. De la littérature les deux paramètres k_g et τ_g du générateur dépendent de la charge du système AVR. Alors, pour mesurer la robustesse des performances de la conception du système AVR avec le correcteur fractionnaire proposé et de système AVR conçu avec le correcteur PID classique de [16], on va faire une analyse des variations de leur marges de phase φ_m , de leur dépassements O_s (%) et de leur temps de réponses T_s en fonction des variations du gain k_g et de la constante de temps τ_g du générateur dans leur domaines de variation respective. Dans ce cas, le correcteur

fractionnaire proposé et le correcteur PID du système AVR sont calculés pour les valeurs nominales de $K_g = 1,0$ et $\tau_g = 1,0$ s et durant la variation des valeurs K_g et τ_g les deux correcteurs restent inchangés dans l'analyse de la robustesse.

Pour montrer les variations des performances du système AVR avec les deux correcteurs, les deux réponses indicielles de la tension de sortie du système AVR sont donnés, respectivement, dans les figures (III.10), (III.11) et (III.12) pour les trois cas suivants :

- valeur nominal de $K_g = 1,0$ et la valeur maximale de $\tau_g = 2$ s
- valeur nominale de $\tau_g = 1$ s et la valeur minimale de $K_g = 0,7$
- valeur minimale de $K_g = 0,7$ et la valeur maximale de $\tau_g = 2$ s

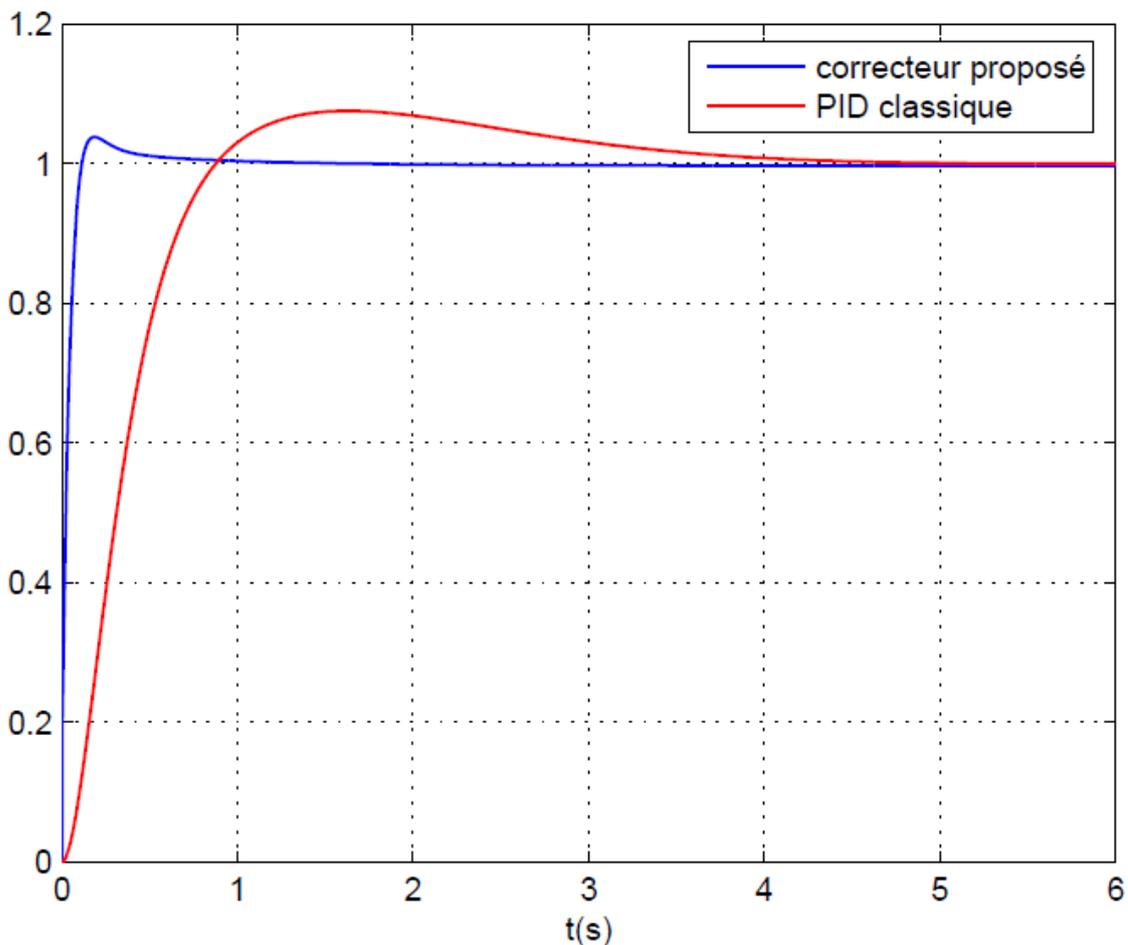


Figure (III.10) : Réponses indicielles de tension de sortie du système AVR avec le correcteur PID et avec le correcteur proposé pour $K_g = 1$ et $\tau_g = 2$ s

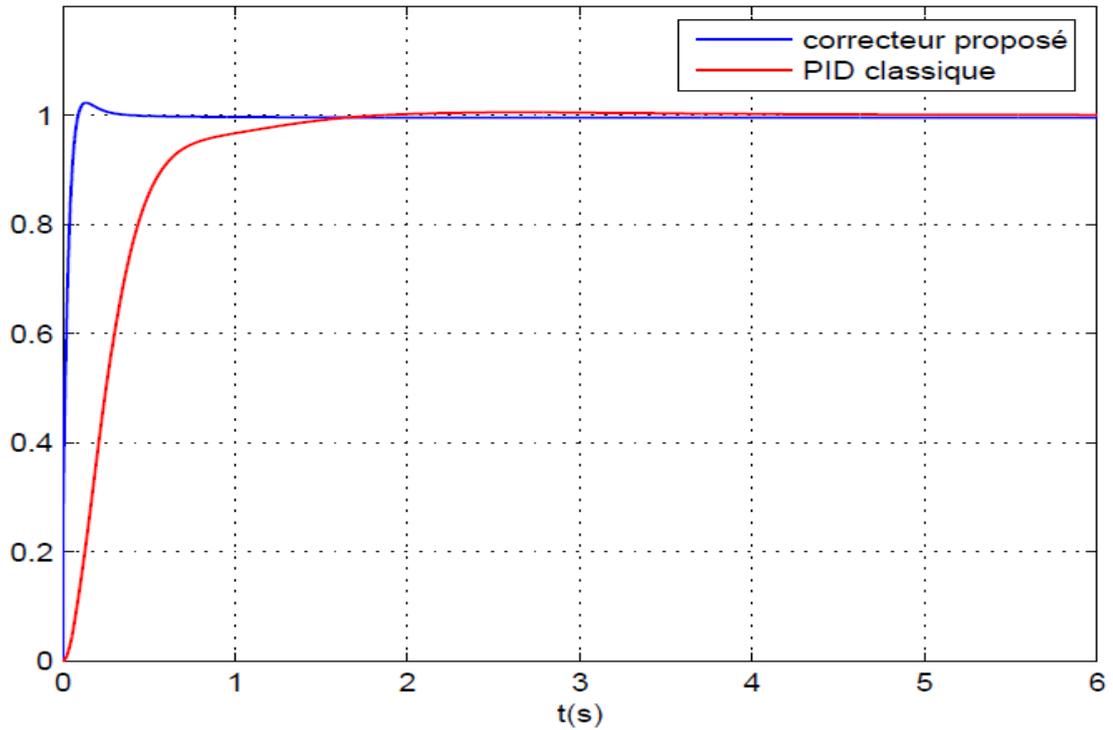


Figure (III.11) : Réponses indicielles de tension de sortie du système AVR avec le correcteur PID et avec le correcteur proposé pour $K_g = 0.7$ et $\tau_g = 1$ s

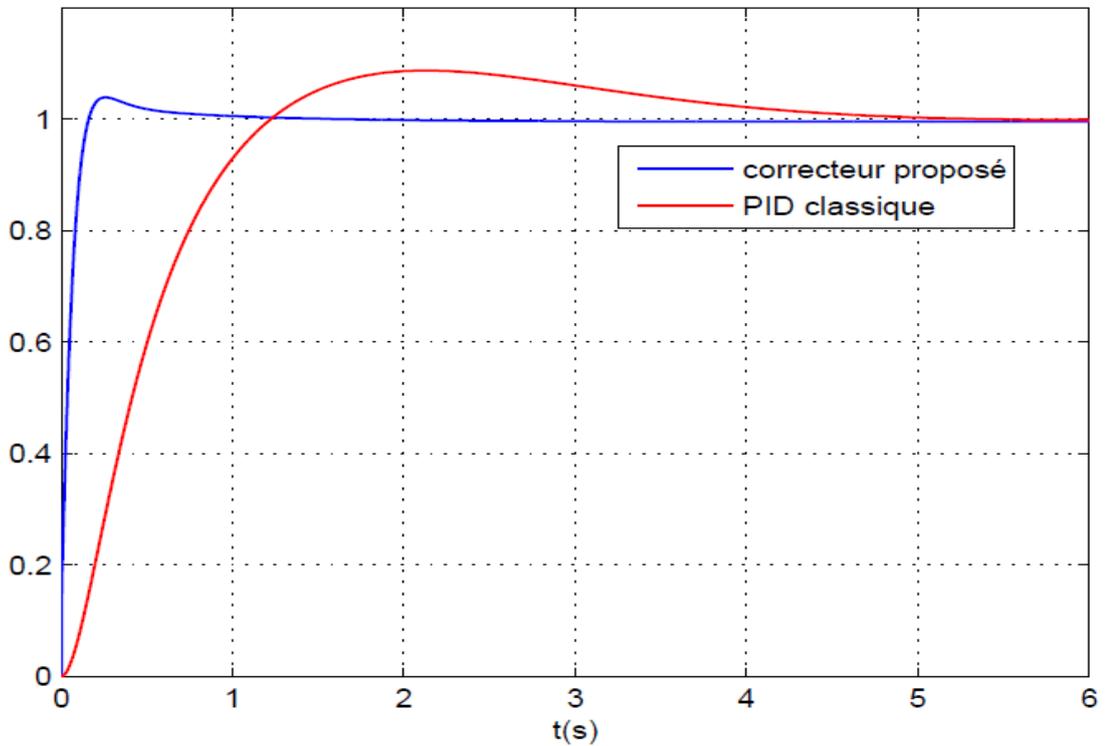


Figure (III.12) : Réponses indicielles de tension de sortie du système AVR avec le correcteur PID et avec le correcteur proposé pour $K_g = 0.7$ et $\tau_g = 2$ s

Les résultats de performance obtenus du dépassement O_s (%) et du temps de réponse T_s en termes des variations du gain K_g et de la constante du temps τ_g du générateur pour le cas nominal et les trois cas ci-dessus sont résumés dans le tableau (III.1).

Tableau (III.1) : Résultats de performance du dépassement O_s (%) et du temps de réponse T_s

Valeurs K_g et τ_g	AVR avec le correcteur proposé	AVR avec le correcteur PID [16]
$K_g = 1$ and $\tau_g = 1$ (cas nominale)	$O_s(\%) = 2.576$ $T_s = 0.126$	$O_s(\%) = 0.3716$ $T_s = 0.990$
$K_g = 1$ et $\tau_g = 2$	$O_s(\%) = 3.755$ $T_s = 0.3299$	$O_s(\%) = 7.4925$ $T_s = 3.3506$
$K_g = 0.7$ et $\tau_g = 1$	$O_s(\%) = 2.2458$ $T_s = 0.1613$	$O_s(\%) = 0.471$ $T_s = 1.256$
$K_g = 0.7$ et $\tau_g = 2$	$O_s(\%) = 3.755$ $T_s = 0.3299$	$O_s(\%) = 7.4925$ $T_s = 3.3506$

Du tableau (III.1), on constate que les variations du dépassement O_s (%) et du temps de réponse T_s du système AVR avec le régulateur PID [16] sont beaucoup plus grandes que celles du système AVR avec le correcteur proposé. On peut aussi constater que le dépassement pour les différentes valeurs du gain K_g et de la constante du temps τ_g du générateur du système AVR avec le correcteur fractionnaire proposé est presque constant. Cela montre bien la propriété d'iso-amortissement du système AVR avec le correcteur fractionnaire proposé.

Les figures (III.13) et (III.14) montrent, respectivement, les tracés des variations de la marge de phase φ_m du système AVR avec correcteur fractionnaire proposé et le correcteur PID [16] en fonction du gain K_g et de la constante du temps τ_g .

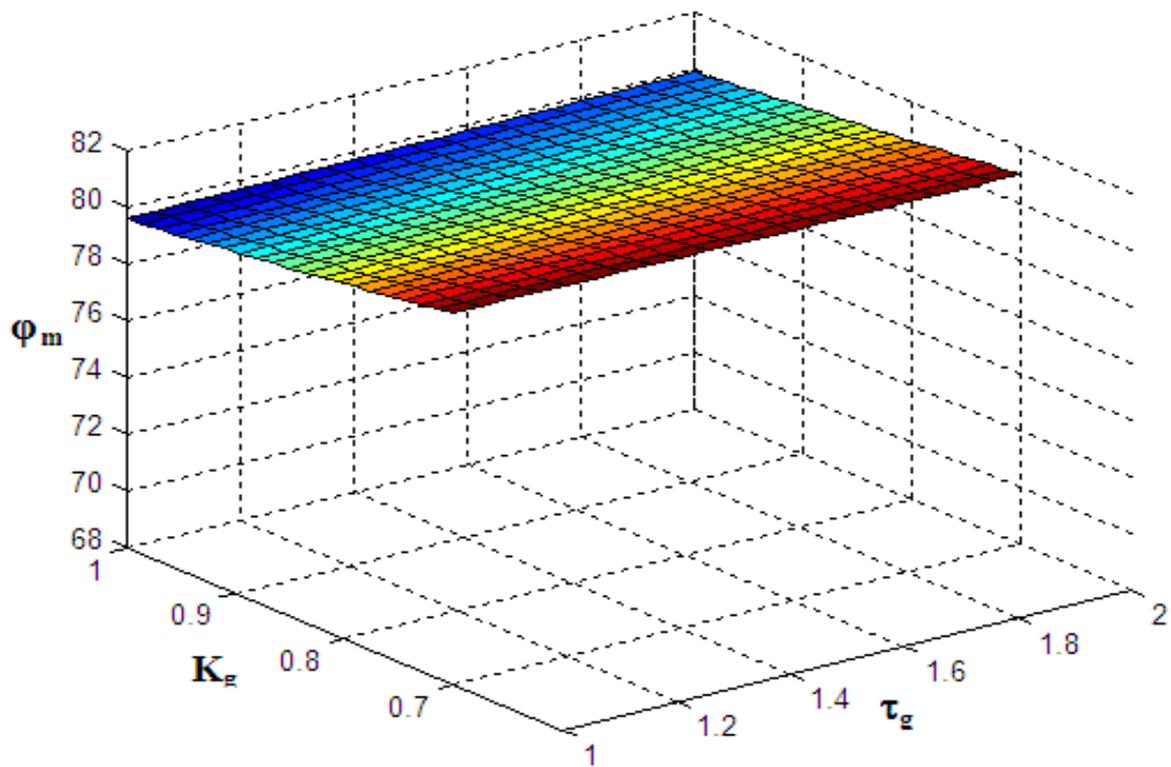


Figure (III.13) : Tracé de la marge de phase ϕ_m en fonction de K_g et τ_g du système AVR avec le correcteur proposé

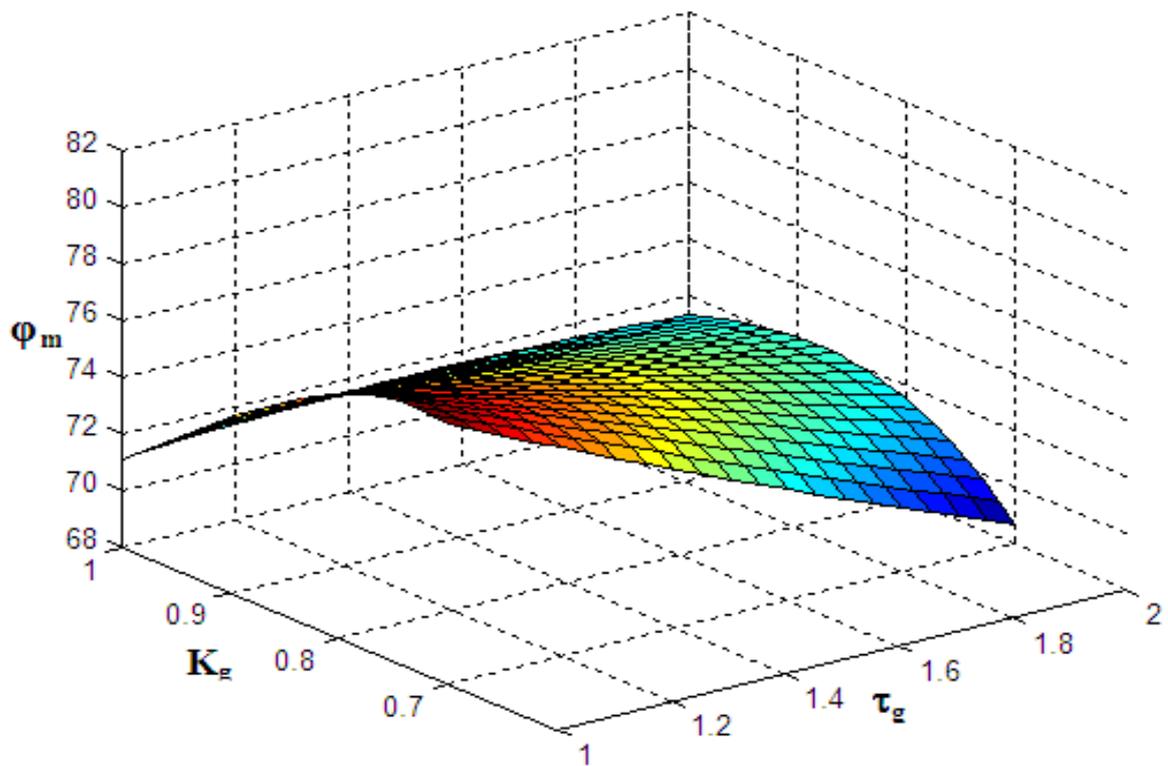


Figure (III.14) : Tracé de la marge de phase ϕ_m en fonction de K_g et τ_g du système AVR avec le correcteur PID [16]

Les figures (III.15) et (III.16) montrent, respectivement, les tracés des variations du dépassement O_s (%) du système AVR avec correcteur fractionnaire proposé et le correcteur PID [16] en fonction du gain K_g et de la constante du temps τ_g .

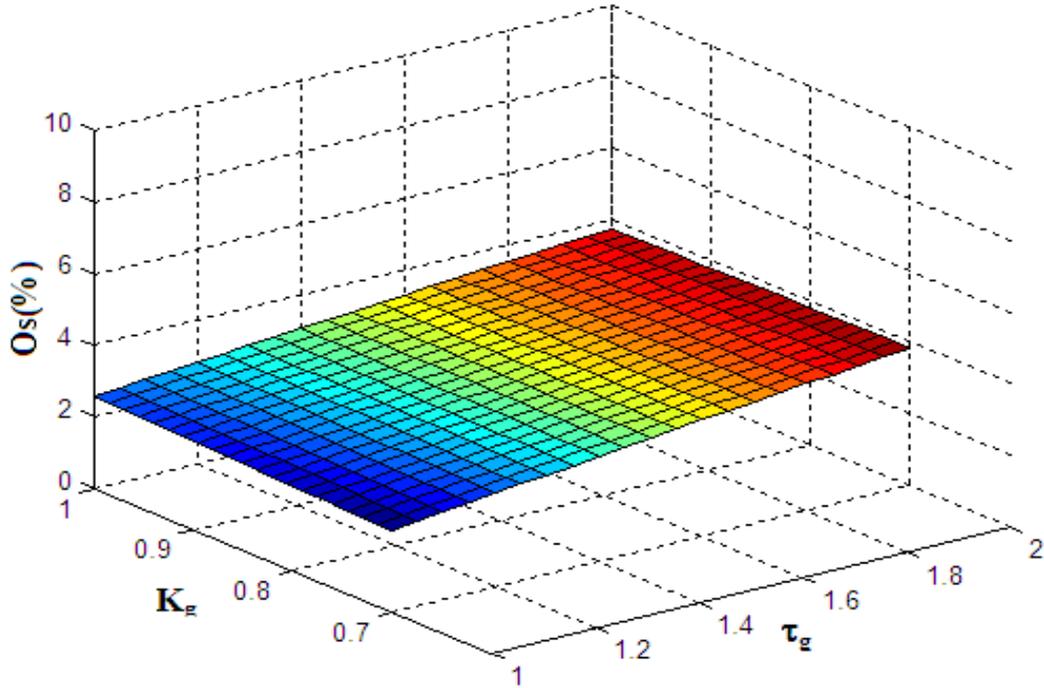


Figure (III.15) : Tracé du dépassement O_s (%) en fonction de K_g et τ_g du système AVR avec le correcteur proposé

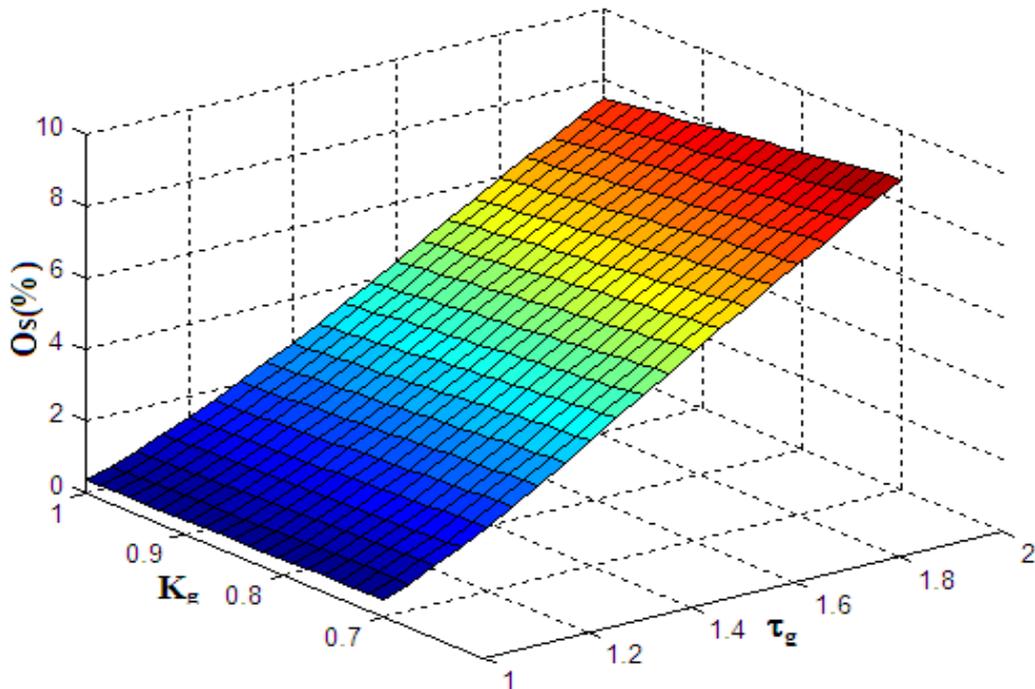


Figure (III.16) : Tracé du dépassement O_s (%) en fonction de K_g et τ_g du système AVR avec le correcteur PID [16]

Les figures (III.17) et (III.18) montrent aussi, respectivement, les tracés des variations du temps de réponse T_s du système AVR avec correcteur fractionnaire proposé et le correcteur PID [16] en fonction du gain K_g et de la constante du temps τ_g .

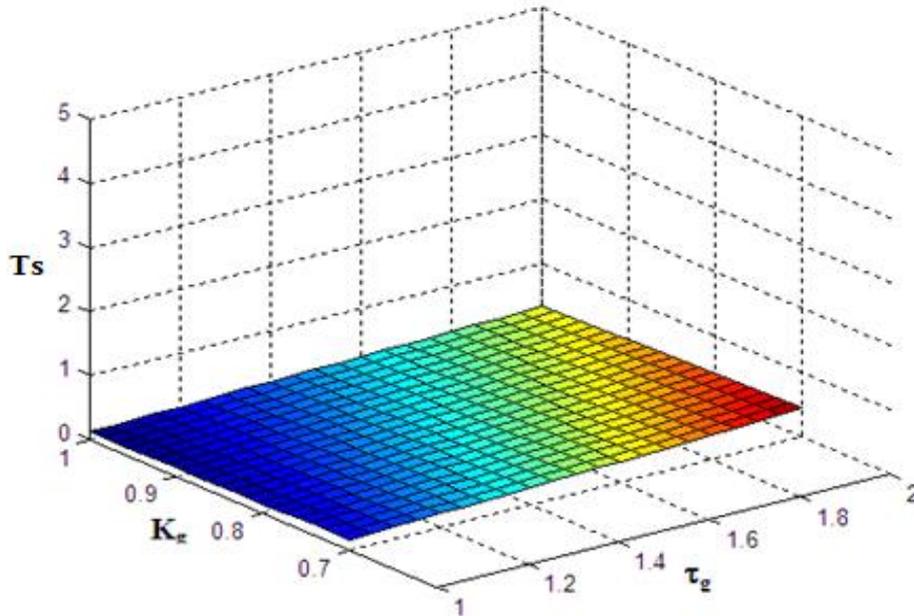


Figure (III.17) : Tracé du temps de réponse T_s en fonction de K_g et τ_g du système AVR avec le correcteur proposé

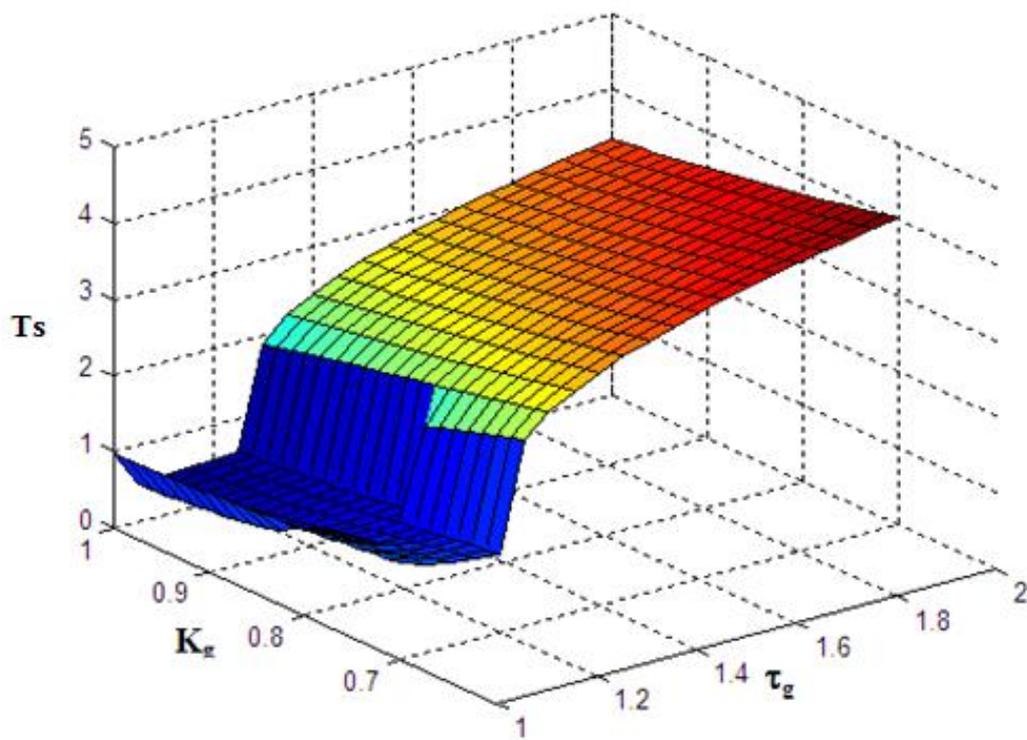


Figure (III.18) : Tracé du temps de réponse T_s en fonction de K_g et τ_g du système AVR avec le correcteur PID [16]

Des six Figures (III.13-III.18), on voit clairement que les tracés de la marge de phase ϕ_m , du dépassement $O_s(\%)$ et du temps de réponse en fonction du gain K_g et de la constante du temps τ_g du générateur du système AVR avec le correcteur proposé sont complètement plats et ceux du système AVR avec le régulateur PID classique de [16] sont inclinés et déformés. Cela signifie que les performances du système AVR avec le correcteur fractionnaire proposé sont presque insensibles aux variations du gain K_g et de la constante du temps τ_g du générateur. D'après ces résultats, on peut dire que le système AVR avec le correcteur fractionnaire proposé est robuste et fournit le comportement souhaité sous l'effet des variations de la charge.

III.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté, une conception robuste du système AVR en utilisant des techniques de commande d'ordre fractionnaire. La stratégie de conception du correcteur proposé garantit que la fonction de transfert en boucle ouverte du système AVR est la fonction de transfert idéale du Bode qui est largement utilisé dans le domaine de la commande d'ordre fractionnaire en raison de sa propriété d'iso-amortissement qui est un élément important de robustesse. Le processus de conception du correcteur proposé est basé sur la fonction approximation rationnelle de l'intégrateur d'ordre fractionnaire.

Les résultats des simulations obtenus en termes de spécifications fréquentielles et temporelles du système d'AVR ont montré l'efficacité et l'utilité de la conception proposée. Une comparaison des performances du système AVR avec le correcteur fractionnaire proposé et avec un correcteur PID classique a été faite. Il a été clairement démontré que le correcteur fractionnaire proposé a fortement amélioré la robustesse du système AVR en termes de variations du gain et de la constante du temps du générateur par rapport au correcteur PID.

A partir de ces résultats, on peut dire que le système AVR avec le correcteur fractionnaire proposé est robuste et qu'il a un comportement dynamique de sa tension de sortie pratiquement indépendante des charges du générateur.

Chapitre *IV*

Conception de Différents Correcteurs d'Ordre Fractionnaire pour le Système AVR

IV.1 Introduction

L'intérêt majeur de la commande d'ordre fractionnaire est l'amélioration des performances et la robustesse des systèmes asservis en utilisant les concepts de la théorie des opérateurs et systèmes d'ordre fractionnaire. Alors, dans ce chapitre on va présenter quelques stratégies de conception du correcteur fractionnaire pour le système AVR en se basant sur les opérateurs et systèmes d'ordre fractionnaire. La première stratégie présente la conception du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire pour que la fonction de transfert en boucle fermée du système AVR dépende d'une fonction de transfert fractionnaire. Dans la seconde stratégie une technique dite "fractionalisation" qui consiste à élever la fonction de transfert à une puissance réelle m ($0 < m < 2$) du correcteur PID classique déjà conçu pour le système AVR pour obtenir le correcteur fractionnaire $(PID)^m$. La dernière stratégie présente la conception d'un correcteur fractionnaire en utilisant l'approche de la commande à modèle interne (IMC) en imposant comme modèle de référence en boucle fermée la fonction idéale de Bode. Des simulations ont été faites pour montrer l'efficacité des correcteurs fractionnaires dans l'amélioration des performances du système AVR en comparaison avec des correcteurs classiques.

IV. 2 Conception du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire

Dans cette section, on va présenter la conception du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire pour le système AVR. La stratégie de conception est élaborée de telle sorte que la fonction de transfert en boucle fermée du système AVR dépend de la fonction irrationnelle

$$G_{dl}(s) = \frac{K_0}{(\tau_0 s)^{2m} + 2\zeta(\tau_0 s)^m + 1} .$$

Les cinq paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ sont obtenus

analytiquement. Des simulations sont faites pour montrer l'efficacité de la méthode de conception. Une comparaison du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire avec la conception proposée un autre correcteur $PI^\lambda D^\mu$ conçu par l'algorithme d'optimisation par colonie de fourmis a été faite.

IV.2.1 Présentation de la méthode de conception du correcteur $PI^\lambda D^\mu$

Du schéma fonctionnel du system AVR présenté dans la figure (III.2), le correcteur $C(s)$ utilisé est un correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire dont la fonction de transfert est donnée par [8]:

$$C(s) = K_p + \frac{K_I}{s^\lambda} + K_D s^\mu \quad (IV.1)$$

où K_p , K_I , K_D , λ et μ sont les cinq paramètres du correcteur à régler.

La fonction de transfert en boucle fermée $G(s)$ du système AVR est donnée par:

$$G(s) = \frac{V_t(s)}{V_{ref}(s)} = \left[\frac{C(s)G_p(s)G_{p2}(s)}{1 + C(s)G_p(s)G_{p2}(s)} \right] \left(\frac{1}{G_{p2}(s)} \right) \quad (IV.2)$$

où $G_p(s) = \frac{K_a K_e K_g}{(1 + \tau_a s)(1 + \tau_e s)(1 + \tau_g s)}$ et $G_{p2}(s) = \frac{K_s}{(1 + \tau_s s)}$. De l'équation (IV.2), on dénote par

$G_A(s)$ la fonction suivante :

$$G_A(s) = \left[\frac{C(s)G_p(s)G_{p2}(s)}{1 + C(s)G_p(s)G_{p2}(s)} \right] \quad (IV.3)$$

Le problème de conception est d'ajuster les cinq paramètres du correcteur d'ordre fractionnaire $C(s)$ de l'équation (IV.1) pour garantir que la fonction $G_A(s)$ se comporte, dans une bande de fréquences donnée, comme un modèle de référence souhaité dont la fonction de transfert est donnée comme suite:

$$G_d(s) = \frac{K_0}{(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1} \quad (IV.4)$$

Les paramètres m, ξ, τ_0 et K_0 du modèle de l'équation (IV.4) sont choisis de telle sorte que la

fonction de transfert $\left(G_d(s) \frac{1}{G_{p2}(s)} \right)$ répond aux exigences de performances dynamiques du

système AVR projeté : un faible temps de réponse t_s , un petit ou pas dépassement M_p .

Alors, le réglage des paramètres K_P, K_I, K_D, λ et μ du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire doit satisfaire la condition $G_A(s) \cong G_d(s)$ dans une bande de fréquence donnée autour de la fréquence de coupure ω_u . Les deux fonctions $G_A(s)$ et $G_d(s)$ peuvent être représentées en série de Taylor-Maclaurin en s autour du point $s = \omega_u$ comme suit [62]:

$$G_A(s) = G_A(\omega_u) + (s - \omega_u)G_A^{(1)}(\omega_u) + \frac{(s - \omega_u)^2}{2!}G_A^{(2)}(\omega_u) + \dots + \frac{(s - \omega_u)^i}{i!}G_A^{(i)}(\omega_u) + \dots \quad (IV.5)$$

$$G_d(s) = G_d(\omega_u) + (s - \omega_u)G_d^{(1)}(\omega_u) + \frac{(s - \omega_u)^2}{2!}G_d^{(2)}(\omega_u) + \dots + \frac{(s - \omega_u)^i}{i!}G_d^{(i)}(\omega_u) + \dots \quad (IV.6)$$

où $G_A^{(i)}(\omega_u)$ et $G_d^{(i)}(\omega_u)$ sont, respectivement, les i èmes dérivées des fonctions $G_A(s)$ et

$G_d(s)$ par rapport à la variable s au point $s = \omega_u$. La troncation des séries de Taylor-Maclaurin jusqu'au terme du cinquième ordre est alors suffisante pour établir cinq équations indépendantes pour régler les paramètres K_P, K_I, K_D, λ et μ du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire.

Par comparaison des équations (IV.5) et (IV.6), on aura [62]:

$$\begin{cases} G_A(\omega_u) = G_d(\omega_u) \\ G_A^{(1)}(\omega_u) = G_d^{(1)}(\omega_u) \\ G_A^{(2)}(\omega_u) = G_d^{(2)}(\omega_u) \\ G_A^{(3)}(\omega_u) = G_d^{(3)}(\omega_u) \\ G_A^{(4)}(\omega_u) = G_d^{(4)}(\omega_u) \end{cases} \quad (IV.7)$$

Donc, les cinq paramètres K_P , K_I , K_D , λ et μ du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire seront calculé analytiquement de l'équation (IV.7). On définit la fonction $G_o(s)$ en terme de la fonction $G_A(s)$ de l'équation (IV.3) comme suit:

$$G_o(s) = C(s)G_p(s)G_{p2}(s) = \frac{G_A(s)}{1 - G_A(s)} \quad (IV.8)$$

En prenant la i ème dérivée, pour $0 \leq i \leq 4$, de l'équation (IV.8) par rapport à la variable s au point $s = \omega_u$, on obtient:

$$\begin{aligned} G_o(\omega_u) &= X_0 S_0 = \frac{\theta_0}{1 - \theta_0} \\ G_o^{(1)}(\omega_u) &= X_1 S_0 + X_0 S_1 = \frac{\theta_1}{(1 - \theta_0)^2} \\ G_o^{(2)}(\omega_u) &= X_2 S_0 + 2X_1 S_1 + X_0 S_2 = \frac{\theta_2}{(1 - \theta_0)^2} + \frac{2\theta_1^2}{(1 - \theta_0)^3} \\ G_o^{(3)}(\omega_u) &= X_3 S_0 + 3X_2 S_1 + 3X_1 S_2 + X_0 S_3 \\ &= \frac{\theta_3}{(1 - \theta_0)^2} + \frac{6\theta_1 \theta_2}{(1 - \theta_0)^3} + \frac{6\theta_1^3}{(1 - \theta_0)^4} \\ G_o^{(4)}(\omega_u) &= X_4 S_0 + 4X_3 S_1 + 6X_2 S_2 + 4X_1 S_3 + X_0 S_4 \\ &= \frac{\theta_4}{(1 - \theta_0)^2} + \frac{6\theta_2^2 + 8\theta_1 \theta_3}{(1 - \theta_0)^3} + \frac{36\theta_1^2 \theta_2}{(1 - \theta_0)^4} + \frac{24\theta_1^4}{(1 - \theta_0)^5} \end{aligned} \quad (IV.9)$$

où $S_i = [G_p(\omega_u) G_{p2}(\omega_u)]^{(i)}$ et $\theta_i = G_d^{(i)}(\omega_u)$, pour $0 \leq i \leq 4$, sont, respectivement, les i èmes dérivées des fonction $[G_p(s) G_{p2}(s)]$ et $G_d(s)$ par rapport à s au point $s = \omega_u$. Les valeurs de S_i et θ_i , pour $0 \leq i \leq 4$, peuvent être calculées parce que les fonctions $(G_p(s) G_{p2}(s))$ et $G_d(s)$ sont connues. Les termes X_i , pour $0 \leq i \leq 4$, sont les i èmes dérivées du correcteur $C(s)$ qui est le $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire. Alors, ces valeurs de X_i , pour $0 \leq i \leq 4$, peuvent être facilement calculées à partir des cinq équations de l'équation (IV.9) comme suit:

$$\begin{aligned}
X_0 &= C(\omega_u) = K_p + K_I \omega_u^{-\lambda} + K_D \omega_u^\mu \\
X_1 &= C^{(1)}(\omega_u) = \frac{-\lambda K_I \omega_u^{-\lambda}}{\omega_u} + \frac{\mu K_D \omega_u^\mu}{\omega_u} \\
X_2 &= C^{(2)}(\omega_u) = \frac{\lambda(\lambda+1)K_I \omega_u^{-\lambda}}{\omega_u^2} + \frac{\mu(\mu-1)K_D \omega_u^\mu}{\omega_u^2} \\
X_3 &= C^{(3)}(\omega_u) = \frac{-\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)K_I \omega_u^{-\lambda}}{\omega_u^3} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)K_D \omega_u^\mu}{\omega_u^3} \\
X_4 &= C^{(4)}(\omega_u) = \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)K_I \omega_u^{-\lambda}}{\omega_u^4} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)K_D \omega_u^\mu}{\omega_u^4}
\end{aligned} \tag{IV.10}$$

On définit maintenant les grandeurs suivantes:

$$\begin{aligned}
Z_1 &= X_1 + \omega_u X_2 \\
Z_2 &= X_1 + 3\omega_u X_2 + \omega_u^2 X_3 \\
Z_3 &= X_1 + 7\omega_u X_2 + 6\omega_u^2 X_3 + \omega_u^3 X_4
\end{aligned} \tag{IV.11}$$

Avec quelques manipulations des équations (IV.10) et (IV.11) on peut facilement obtenir:

$$\begin{aligned}
X_0 &= K_p + K_I \omega_u^{-\lambda} + K_D \omega_u^\mu \\
X_1 &= Q_1 + Q_2 \\
\lambda X_1 + Z_1 &= (\lambda + \mu) Q_2 \\
\lambda Z_1 + Z_2 &= \mu(\lambda + \mu) Q_2 \\
\lambda Z_2 + Z_3 &= \mu^2 (\lambda + \mu) Q_2
\end{aligned} \tag{IV.12}$$

où $Q_1 = \left[\frac{-\lambda}{\omega_u} K_I \omega_u^{-\lambda} \right]$ et $Q_2 = \left[\frac{\mu}{\omega_u} K_D \omega_u^\mu \right]$. A partir de l'équation (IV.12), on a:

$$\frac{\lambda Z_1 + Z_2}{\lambda X_1 + Z_1} = \frac{\lambda Z_2 + Z_3}{\lambda Z_1 + Z_2} = \mu \tag{IV.13}$$

Les deux premiers termes de l'équation (IV.13) conduisent à une équation du second ordre dans le paramètre λ comme suit:

$$(Z_1^2 - X_1 Z_2) \lambda^2 + (Z_1 Z_2 - X_1 Z_3) \lambda + (Z_2^2 - Z_1 Z_3) = 0 \tag{IV.14}$$

En résolvant cette équation du second ordre, on obtient une valeur numérique convenable du paramètre λ . Ensuite, à partir des équations (IV.12) et (IV.13), les paramètres μ , K_D , K_I et K_p sont obtenus respectivement comme suit:

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{\lambda Z_1 + Z_2}{\lambda X_1 + Z_1} \\ K_D &= \frac{(\lambda X_1 + Z_1) \omega_u^{(1-\mu)}}{[\mu(\lambda + \mu)]} \\ K_I &= \frac{(Z_1 - \mu X_1) \omega_u^{(1+\lambda)}}{[\lambda(\lambda + \mu)]} \\ K_P &= X_0 - T_I \omega_u^{-\lambda} - T_D \omega_u^\mu\end{aligned}\tag{IV.15}$$

Une fois les cinq paramètres μ , K_D , K_I et K_P du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire sont calculés, alors, dans une bande de fréquences donnée, $G_A(s)$ de l'équation (IV.3) est donc identique au modèle de référence désiré $G_d(s)$ de l'équation (IV.4).

La fonction de transfert en boucle fermée $G(s)$ du système AVR de l'équation (IV.2) peut être écrite en termes de la fonction $G_A(s)$ de l'équation (IV.3) comme suit:

$$G(s) = \frac{V_t(s)}{V_{ref}(s)} = [G_A(s)] \left(\frac{1 + \tau_s s}{K_s} \right)\tag{IV.16}$$

$$G(s) = \frac{V_t(s)}{V_{ref}(s)} = \left(\frac{1}{K_s} \right) [G_A(s)] + \left(\frac{\tau_s}{K_s} \right) [s G_A(s)]\tag{IV.17}$$

Pour $V_{ref}(t) = u(t) = \text{échelon unité}$, $V_{ref}(s) = 1/s$, on aura:

$$V_t(s) = \left(\frac{1}{K_s} \right) [G_A(s)] \left(\frac{1}{s} \right) + \left(\frac{\tau_s}{K_s} \right) [G_A(s)]\tag{IV.18}$$

Donc, la réponse indicielle du système AVR est donnée comme suit:

$$v_t(t) = \left(\frac{\tau_s}{K_s} \right) \mathbf{L}^{-1} \{G_A(s)\} + \left(\frac{1}{K_s} \right) \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{G_A(s)}{s} \right\}\tag{IV.19}$$

Comme on a $G_A(s) = G_d(s)$, la réponse indicielle du système AVR $v_t(t)$ est donnée comme suit:

$$v_t(t) = \left(\frac{\tau_s}{K_s} \right) \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1} \right\} + \left(\frac{1}{K_s} \right) \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1} \frac{1}{s} \right\}\tag{IV.20}$$

$$v_t(t) = \left(\frac{\tau_s}{K_s} \right) g(t) + \left(\frac{1}{K_s} \right) g_1(t)\tag{IV.21}$$

où les fonctions $g(t)$ et $g_1(t)$ sont données, respectivement, par les équations (I.87) et (I.89).

IV.2.2 Simulations et résultats

En utilisant les valeurs nominales des paramètres des fonctions de transfert de l'amplificateur, de l'excitateur, du générateur et du capteur de la figure (III.3), la fonction de transfert en boucle fermée du système AVR est donnée comme suit:

$$G(s) = \frac{V_{ref}(s)}{V_t(s)} = \left[\frac{10C(s)}{10C(s) + (0.1s + 1)(0.4s + 1)(s + 1)(0.01s + 1)} \right] (1 + 0.01s) \quad (IV.22)$$

$$= \left[\frac{25000C(s)}{25000C(s) + (s + 10)(s + 2.5)(s + 1)(s + 100)} \right] (1 + 0.01s)$$

Pour que la fonction de transfert $\left(G_d(s) \frac{1}{G_{p2}(s)} \right) = \left(\frac{K_0}{(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1} \right) (1 + 0.01s)$ réponde aux exigences de performances dynamiques du système AVR projeté, les paramètres m, ξ, τ_0 et K_0 du modèle de l'équation (IV.4) doivent être $m = 0.85, \xi = 0.46, \tau_0 = 0.043$ et $K_0 = 1$ [63]. On aura donc:

$$G_d(s) = \frac{1}{(0.0434s)^{1.70} + 2(0.46)(0.0434s)^{0.85} + 1} \quad (IV.23)$$

Dans ce cas, le réglage des paramètres K_P, K_I, K_D, λ et μ du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire seront obtenus pour que la condition $G_A(s) \cong G_d(s)$ doit être satisfaite dans la

bande de fréquences $[0, 10^6 \text{ rad/s}]$ et une fréquence de coupure $\omega_u = \left(\frac{1}{\tau_0} \right)^{\frac{1}{m}} = 40 \text{ rad/s}$.

Alors, la fonction $G_A(s)$ de l'équation (IV.3) est donnée par [63] :

$$G_A(s) = \left[\frac{25000C(s)}{25000C(s) + (s + 10)(s + 2.5)(s + 1)(s + 100)} \right] \quad (IV.24)$$

$$= \frac{1}{(0.0434s)^{1.70} + 2(0.46)(0.0434s)^{0.85} + 1}$$

En utilisant la méthode de réglage proposée dans la section précédente, la fonction de transfert du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire obtenue est donnée par l'expression suivante [63]:

$$C(s) = 7.084 + 0.802s^{1.425} + 0.018s^{2.31} \quad (IV.25)$$

On remarque que le correcteur $C(s)$ de l'équation (IV.2) n'est pas un $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire mais un $PD^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire. Ce type de correcteur $PD^\lambda D^\mu$ fractionnaire n'a pas de correcteur classique d'équivalent. Alors, la fonction $G_A(s)$ de l'équation (IV.24) donnée comme suit [63] :

$$G_A(s) = \left[\frac{25000(7.084 + 0.802s^{1.425} + 0.018s^{2.31})}{25000(7.084 + 0.802s^{1.425} + 0.018s^{2.31}) + (s+10)(s+2.5)(s+1)(s+100)} \right] \quad (\text{IV.26})$$

La figure (IV.1) montre les modules et les phases du tracé de Bode de la fonction $G_A(s)$ de l'équation (IV.26) et le modèle de référence $G_d(s)$ de l'équation (IV.23).

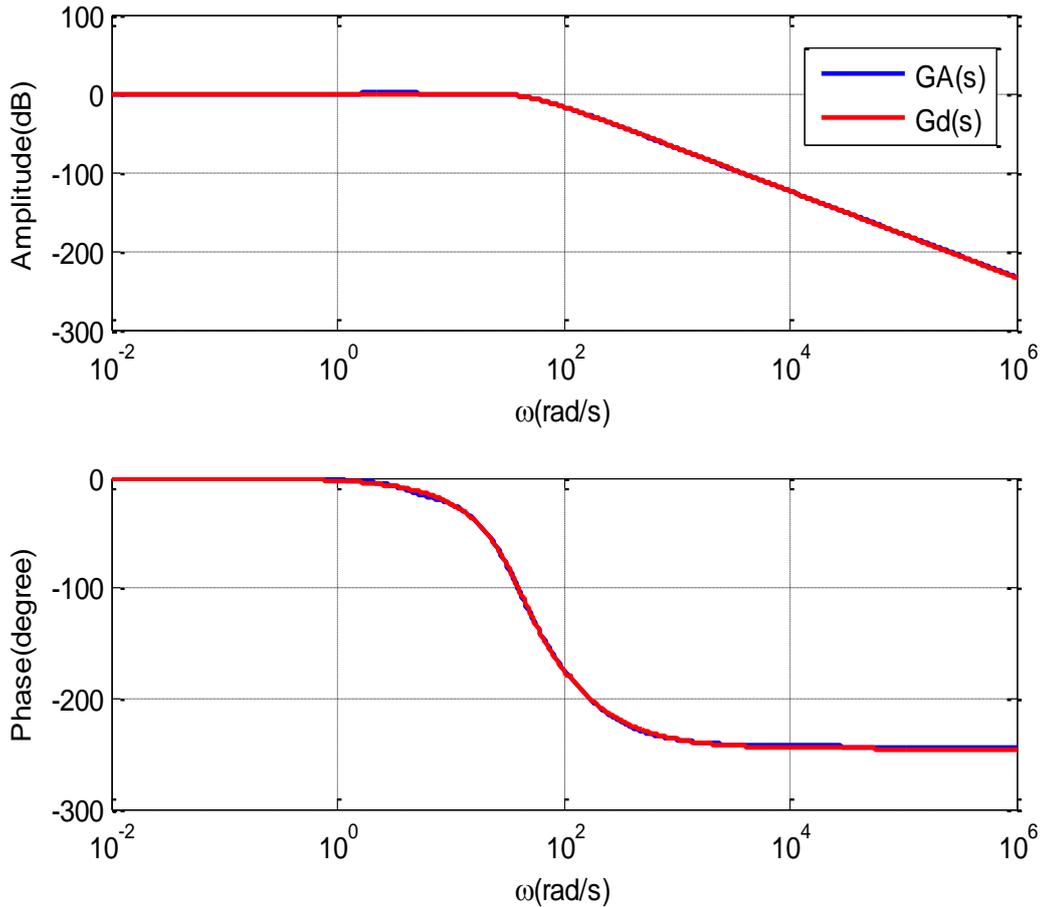


Figure (IV.1) : Tracés de Bode de la fonction $G_A(s)$ et $G_d(s)$

D'après la figure (IV.1), on note que les deux fonctions sont presque les mêmes ; alors, la fonction $G_A(s)$ se comporte comme le modèle de référence $G_d(s)$.

De l'équation (IV.19), la réponse indicielle du système AVR est donnée comme suit [63]:

$$v_t(t) = 0.01 \mathbf{L}^{-1} \left\{ \left[\frac{25000(7.084 + 0.802s^{1.425} + 0.018s^{2.31})}{25000(7.084 + 0.802s^{1.425} + 0.018s^{2.31}) + (s+10)(s+2.5)(s+1)(s+100)} \right] \right\} \quad (\text{IV.27})$$

$$+ \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \left[\frac{25000(7.084 + 0.802s^{1.425} + 0.018s^{2.31})}{25000(7.084 + 0.802s^{1.425} + 0.018s^{2.31}) + (s+10)(s+2.5)(s+1)(s+100)} \right] \right\}$$

Pour que la fonction $G_A(s)$ soit rationnelle, les différentiateurs fractionnaires $s^{1.425}$ et $s^{2.31}$ seront approximés par la méthode de Charef [31], dans la bande de fréquences $[0.01\omega_u, 100\omega_u] = [0.4, 4000]$ rad/s. Une fois les approximations effectuées, la réponse indicielle du système AVR de l'équation (IV.27) peut être facilement calculée. Théoriquement, la fonction $G_A(s)$ se comporte comme le modèle de référence $G_d(s)$ de l'équation (IV.23). Alors, la réponse indicielle de l'équation (IV.27) doit se comporter comme la réponse indicielle souhaitée de l'équation (IV.21) donnée comme suit:

$$v_t(t) = g_1(t) + 0.01g(t) \quad (\text{IV.28})$$

Dans la bande de fréquences $[0, 1000]$ rad/s, les fonctions $g(t)$ et $g_1(t)$ de l'équation (IV.21) sont données par les expressions suivantes [63]:

$$g_1(t) = \sum_{i=1}^{251} \left[\frac{0.072}{\cosh[0.118(126-i)] - 0.891} \right] \times \left[\frac{1 - 1.126 \exp(-6.47(1.15)^{(i-126)}t)}{\sin(22.072(1.15)^{(i-126)}t + 1.093)} \right] \quad (\text{IV.29})$$

$$g(t) = \sum_{i=1}^{251} \left[\frac{0.072(1.15)^{(i-126)}}{\cosh[0.118(126-i)] - 0.891} \right] \times \left[\frac{25.90 \exp(-6.47(1.15)^{i-126}t)}{\sin(22.072(1.15)^{i-126}t - 0.193)} \right] \quad (\text{IV.30})$$

La figure (IV.2) montre les réponses indicielles de tension de sortie du système AVR de l'équation (IV.27) avec la fonction $G_A(s)$ et de l'équation (IV.28) avec la fonction du modèle de référence $G_d(s)$.

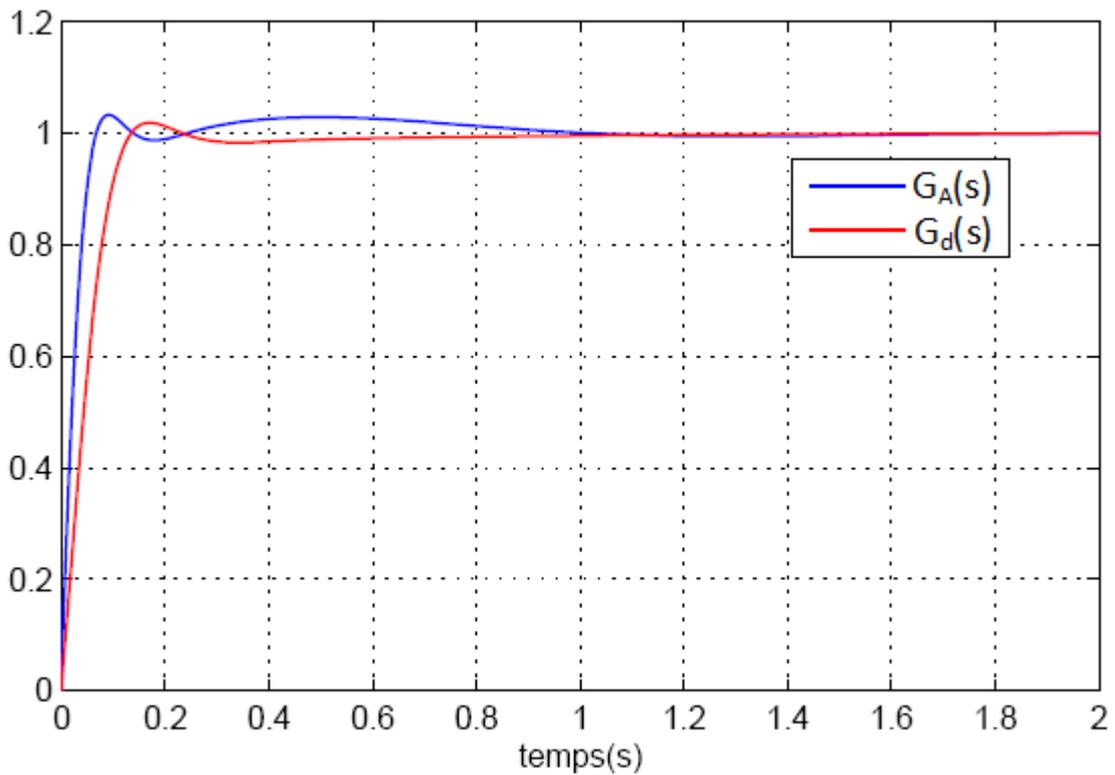


Figure (IV.2) : Réponses indicielles de la tension de sortie du système AVR avec les fonctions $G_A(s)$ et $G_d(s)$

IV.2.3 Comparaison des performances

Dans cette section, on va comparer les résultats des performances du système AVR avec le correcteur $PD^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire utilisant la conception proposée à celles du système AVR avec le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire conçu à l'aide de l'algorithme d'optimisation par colonie de fourmis [56]. Dans cette comparaison, on va utiliser les mêmes exigences de performance dynamiques et les mêmes valeurs nominales des paramètres des fonctions de transfert de l'amplificateur, de l'excitateur, du générateur et du capteur de la figure (III.3). Le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire obtenu pour la conception du système AVR dans [56] est donné par l'expression suivante :

$$C_{FPID}(s) = 1.0537 + \frac{0.4418}{s^{1.0624}} + 0.2510s^{1.1122} \quad (IV.31)$$

Pour que le correcteur $C_{FPID}(s)$ de l'équation (IV.31) soit rationnel, le dérivateur d'ordre fractionnaire $s^{1.1122}$ et l'intégrateur d'ordre fractionnaire $s^{-1.0624}$ ont également été approximés en utilisant la méthode de Charef [31], dans la bande de fréquences $[0.01\omega_u, 100\omega_u]$ rad/s. La figure (IV.3) montre les réponses indicielles de la tension de sortie du système AVR avec le

correcteur $PD^{1.425}D^{2.31}$ fractionnaire proposé de l'équation (IV.25) et avec le correcteur $PI^{1.0624}D^{1.1122}$ fractionnaire de l'équation (IV.31) proposé dans [56]

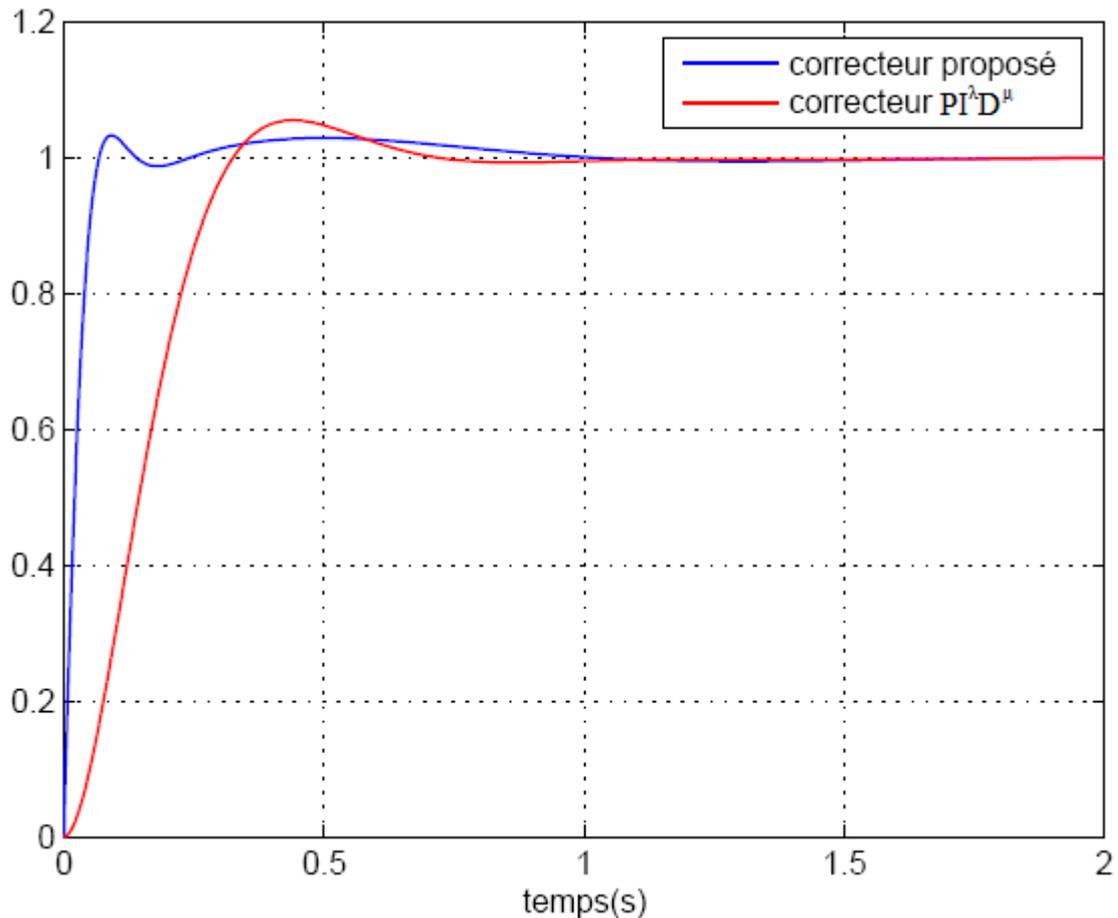


Figure (IV.3) : Réponses indicielles de la tension de sortie du système AVR avec le correcteur $PD^{1.425}D^{2.31}$ et le correcteur $PI^{1.0624}D^{1.1122}$

On note que la réponse indicielle de la tension de sortie du système AVR avec le correcteur $PD^{1.425}D^{2.31}$ fractionnaire proposé est plus rapide que celle du système AVR avec le correcteur $PI^{1.0624}D^{1.1122}$ fractionnaire de [56]. En plus, le dépassement du système AVR avec le correcteur $PD^{1.425}D^{2.31}$ proposé est d'environ 3,3%, mais le dépassement du système AVR avec le correcteur $PI^{1.0624}D^{1.1122}$ de [56] est d'environ 5,5%. Par contre, le temps de réponse de la méthode proposée est de 0,71s qui est plus grand que celui de la méthode de [56] qui est environ 0,61s.

IV.3 Conception du correcteur (PID)^m fractionnaire

Dans cette section, on va aussi présenter la conception du correcteur (PID)^m d'ordre fractionnaire pour le système AVR. La stratégie de conception est basée sur une nouvelle technique dite "fractionalisation" du correcteur PID. Cette stratégie utilise un système asservi

classique conçu avec un correcteur PID utilisant n'importe quelle technique de réglage du correcteur PID ; puis le correcteur PID est transformé au correcteur $(\text{PID})^m$ d'ordre fractionnaire par la technique de "fractionalisation" qui consiste à élever la fonction de transfert du PID à une puissance réelle m (avec $0 < m < 2$). L'intérêt de ce genre de correcteurs est justifié par une meilleure flexibilité, puisque le correcteur $(\text{PID})^m$ fractionnaire a un paramètre supplémentaire qui est l'ordre fractionnaire. Ce paramètre peut être employé pour remplir des caractéristiques additionnelles pour l'amélioration ou l'optimisation des performances ou d'autres conditions intéressantes pour le système à commander.

IV.3.1 Présentation de la méthode de conception et d'implémentation du $(\text{PID})^m$

Dans ce cas, le correcteur $C(s)$ du schéma fonctionnel du système AVR de la figure (III.2) est le correcteur $(\text{PID})^m$ d'ordre fractionnaire dont la fonction de transfert est donnée comme suit:

$$C(s) = \left(K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \right)^m \quad (\text{IV.32})$$

où K_P est le gain de l'action proportionnelle, K_I est le gain de l'action intégrale et K_D est le gain de l'action dérivée du correcteur PID utilisée en premier lieu pour la conception du système AVR et m est l'ordre fractionnaire tel que $0 < m < 2$ [64]. Les exigences de performances dynamiques du système AVR sont généralement un faible temps de réponse et un petit ou pas de dépassement. La stratégie de conception du correcteur $(\text{PID})^m$ fractionnaire proposée repose en premier lieu sur le correcteur PID classique obtenu pour la conception du système AVR de la figure (III.2). Ensuite, l'ordre fractionnaire m du correcteur $(\text{PID})^m$ fractionnaire proposé est réglé pour améliorer les deux performances (temps de réponse et dépassement) en les réduisant par rapport à celles du système AVR avec le correcteur PID classique correspondant. Dans ce contexte, la fonction de transfert du correcteur $(\text{PID})^m$ fractionnaire proposé de l'équation (IV.32) est une fonction irrationnelle qui ne peut pas être directement implémentée et utilisée pour obtenir les réponses du système AVR. Alors, elle doit être approximée par une fonction rationnelle. La méthode utilisée pour l'approximation de ce type de correction d'ordre fractionnaire est celle donnée dans le chapitre 1.

La fonction de transfert du correcteur $(\text{PID})^m$ fractionnaire de l'équation (IV.32) peut s'écrire:

$$C(s) = \left(\frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s} \right)^m = (K_I)^m \left(\frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_1}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_2}\right)}{s} \right)^m \quad (\text{IV.33})$$

où $\omega_1 = \frac{K_P - \sqrt{(K_P)^2 - 4K_D K_I}}{2K_D}$ et $\omega_2 = \frac{K_P + \sqrt{(K_P)^2 - 4K_D K_I}}{2K_D}$ avec $\omega_1 < \omega_2$. Alors, de

l'équation (I.22), on peut avoir:

$$\text{Pour } 0 < \omega < \omega_1 : C(s) = \frac{K_I^m}{s^m} \cong \frac{K_I^m \prod_{i=1}^{N_1} (1 + s/z_i)}{(\omega_{c1})^m \prod_{i=1}^{N_1} (1 + s/p_i)}$$

$$\text{Pour } \omega_1 < \omega < \omega_2 : C(s) = \frac{K_I^m}{\omega_1^m}$$

$$\text{Pour } \omega_1 < \omega < +\infty : C(s) = \frac{K_I^m}{\omega_1^m \omega_2^m} s^m \cong \frac{K_I^m \prod_{i=1}^{N_2} (1 + s/z_i)}{(\omega_{c2})^m \omega_1^m \omega_2^m \prod_{i=1}^{N_2} (1 + s/p_i)}$$

Alors, la fonction rationnelle d'approximation de la fonction de transfert irrationnelle du correcteur (PID)^m fractionnaire de l'équation (IV.32) est donnée par :

$$C(s) = \left(\frac{K_I}{\omega_2} \right)^m \left\{ \left[\frac{1 \prod_{i=1}^{N_1} (1 + s/z_i)}{(\omega_{c1})^m \prod_{i=1}^{N_1} (1 + s/p_i)} \right] \left[\frac{1 \prod_{i=1}^{N_2} (1 + s/z_i)}{(\omega_{c2})^m \prod_{i=1}^{N_2} (1 + s/p_i)} \right] \right\} \quad (34)$$

IV.3.2 Simulations et résultats

Le schéma fonctionnel du système AVR de la figure (III.3) est celui qui sera utilisé dans les simulations. Les paramètres K_P , K_I et K_D du correcteur PID classique pour la conception du système AVR sont réglés à l'aide de l'algorithme d'optimisation par essais particuliers et leurs valeurs numériques sont [65]: $K_P=0,6770$, $K_I=0,5189$ et $K_D=0,2287$. Donc, la fonction de transfert $C_c(s)$ du correcteur PID classique est donnée par l'expression suivante:

$$C_c(s) = \left(0.6770 + \frac{0.5189}{s} + 0.2287 s \right) \quad (\text{IV.35})$$

Le correcteur $(\text{PID})^m$ proposé est basé sur le correcteur PID classique déjà conçu de l'équation (IV.35). Alors, la fonction de transfert $C(s)$ de ce correcteur $(\text{PID})^m$ fractionnaire est donnée comme suit [64]:

$$C(s) = [C_c(s)]^m = \left(0.6770 + \frac{0.5189}{s} + 0.2287s \right)^m \quad (\text{IV.36})$$

Ainsi, la fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)$ du système AVR est donnée par:

$$G(s) = \left(0.6770 + \frac{0.5189}{s} + 0.2287s \right)^m \left(\frac{10}{(1+0.1s)(1+0.4s)(1+s)(1+0.01s)} \right) \quad (\text{IV.37})$$

La figure (IV.4) montre le tracé de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système AVR $G(s)$ pour différentes valeurs du paramètre m .

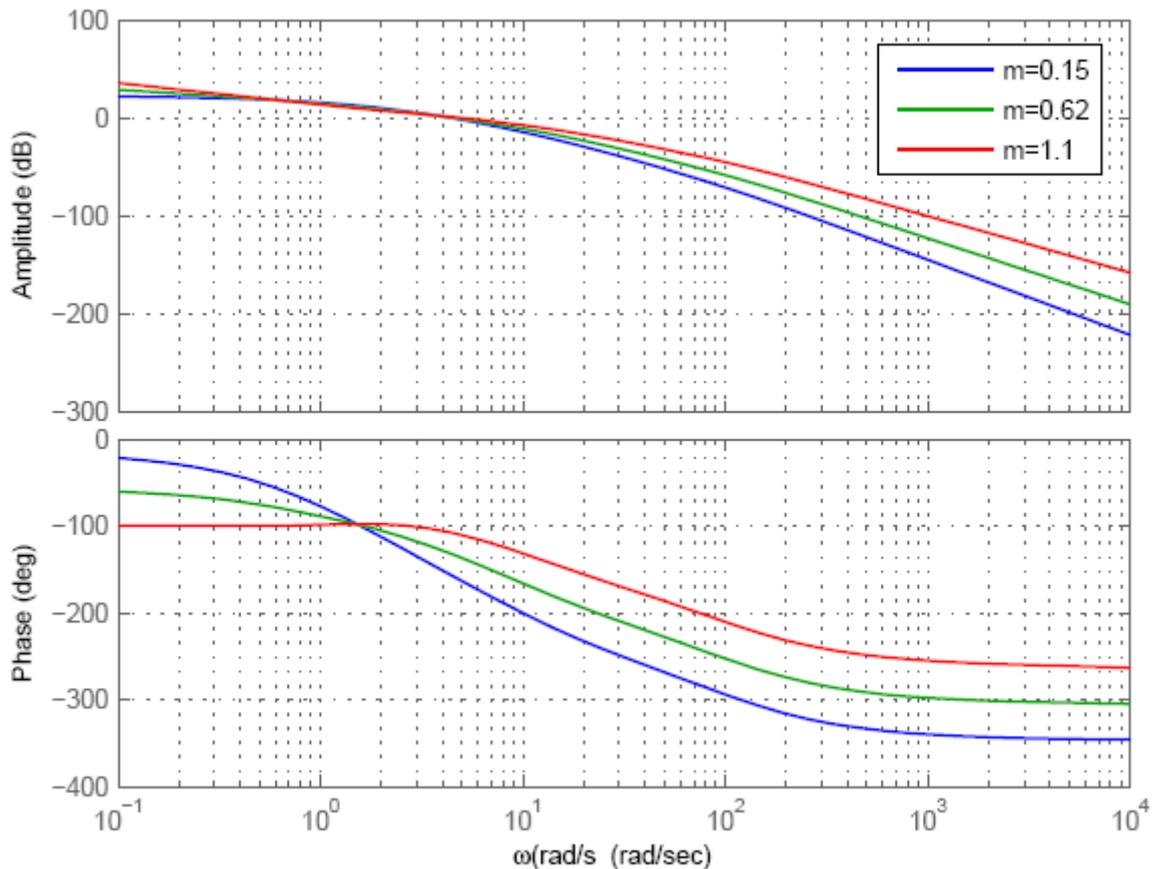


Figure (IV.4) : Tracé de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)$ du système AVR pour $m = 0.15$, $m = 0.62$ et $m = 1.1$

A partir de la figure (IV.4), on note que l'ordre fractionnaire m peut affecter le comportement en fréquence de la boucle ouverte du système AVR. Ainsi, il peut être utilisé pour améliorer certaines caractéristiques de performance du système AVR. Dans ce contexte, le réglage du paramètre m du correcteur (PID) ^{m} fractionnaire est basé sur l'amélioration des performances du dépassement et du temps de réponse du système AVR par rapport à celles du correcteur PID correspondant. La meilleure valeur de l'ordre fractionnaire m qui garantit l'amélioration simultanée des deux caractéristiques est $m = 1,075$. Alors, la fonction de transfert $C(s)$ du correcteur fractionnaire (PID) ^{m} est donnée comme suit:

$$C(s) = \left(0.6770 + \frac{0.5189}{s} + 0.2287s \right)^{1.075} \quad (\text{IV.38})$$

L'approximation par une fonction rationnelle de la fonction irrationnelle du correcteur (PID) ^{1.075} fractionnaire de l'équation (IV.38) est donnée par l'expression suivante:

$$C(s) = (0.4855 * 10^5) \left[\frac{\prod_{i=1}^{10} \left(1 + \frac{s}{0.7195 * 10^{-4} (3.0416)^{(i-1)}} \right)}{10 \prod_{i=1}^9 \left(1 + \frac{s}{0.2176 * 10^{-4} (3.0416)^{(i-1)}} \right)} \right] \left[\frac{\prod_{i=1}^{10} \left(1 + \frac{s}{1.4103 (3.2946)^{(i-1)}} \right)}{\prod_{i=1}^{10} \left(1 + \frac{s}{5.0816 (3.2946)^{(i-1)}} \right)} \right] \quad (\text{IV.39})$$

La figure (IV.5) montre les réponses indicielles de la tension de sortie du système AVR avec le correcteur fractionnaire (PID) ^{1.075} de l'équation (IV.39) et le correcteur PID classique de l'équation (IV.35).

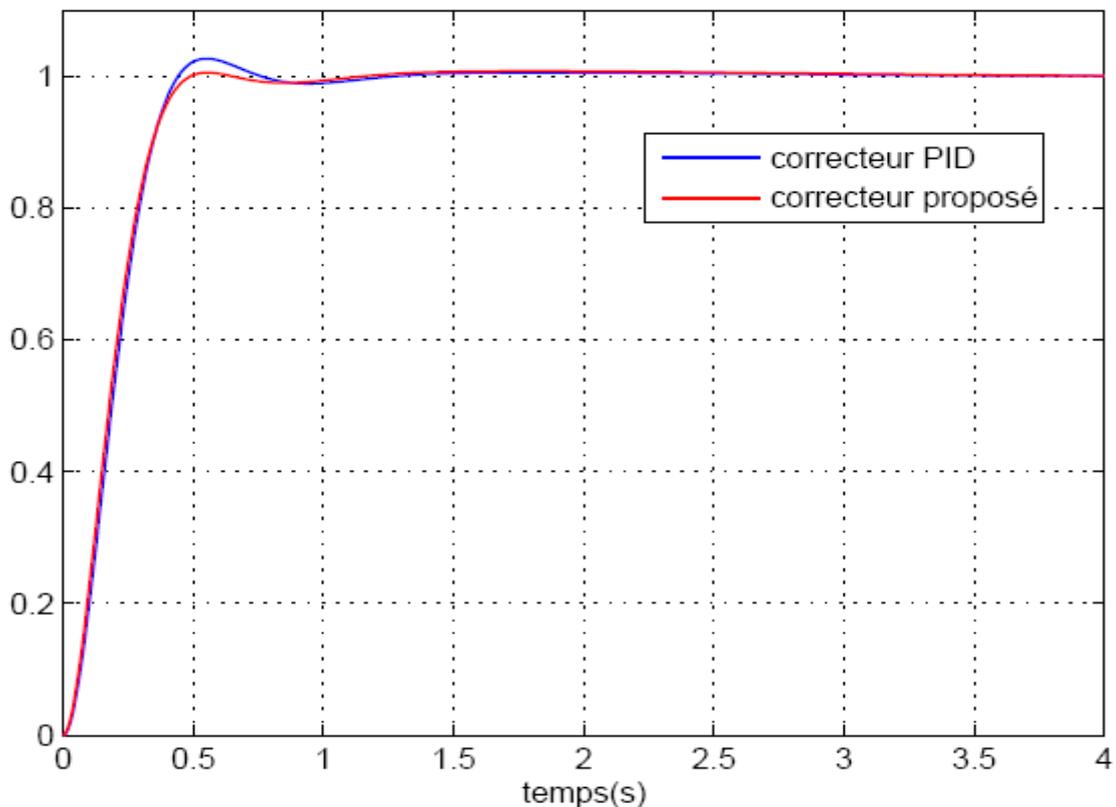


Figure (IV.5) : Réponse indicielle de la tension de sortie du système AVR avec les correcteurs PID et $(PID)^{1.075}$

Pour valider l'utilité du correcteur $(PID)^m$ fractionnaire proposé en termes d'amélioration des performances du système AVR, le dépassement et le temps de réponse du système AVR avec le correcteur PID et le correcteur $(PID)^{1.075}$ fractionnaire dans sa forme rationnelle sont donnés dans le tableau (IV.1).

Tableau (IV.1) : Dépassement et temps de réponse du système AVR avec les correcteurs PID et $(PID)^{1.075}$

AVR avec le correcteur	Dépassement (%)	Temps de réponse (s)
PID	2.753	0.63
$(PID)^{1.075}$	1.178	0.426

Du tableau (IV.1), on note ce qui suit:

- Le dépassement du système AVR avec le correcteur fractionnaire $(PID)^{1.075}$ est environ 57% plus petit que celui avec le correcteur PID.
- Le temps de réponse du système AVR avec le correcteur fractionnaire $(PID)^{1.075}$ est environ 32% plus petit que celui avec le correcteur PID.

IV.4 Conception du correcteur fractionnaire utilisant la technique de l'IMC

La commande à modèle interne (IMC) développée par Morari et ses collègues [66] est une méthode de conception de systèmes asservis. L'IMC, en tant que méthode de synthèse directe généralement utilisée dans la commande en boucle fermée, est basée sur des modèles désirés et conduit à des expressions analytiques pour les paramètres des correcteurs.

La structure de l'IMC est représentée dans la figure (IV.6) comme suit :

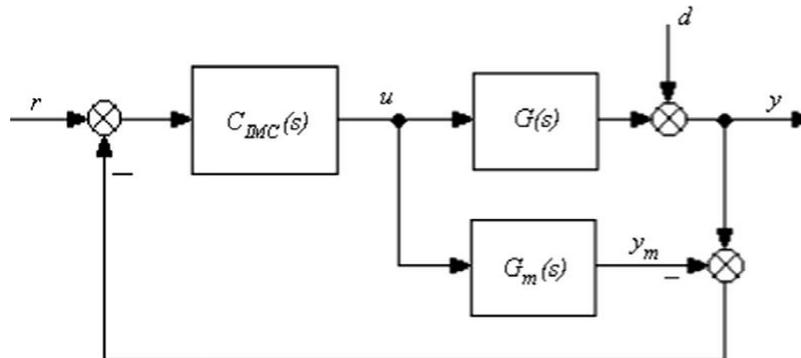


Figure (IV.6) : Structure de l'IMC

où $G(s)$ est le processus, $G_m(s)$ est le modèle du processus, $C_{IMC}(s)$ est le correcteur IMC, r est l'entrée, u est la sortie du correcteur, d est la perturbation et y est la sortie au processus [66].

On peut démontrer que la structure IMC de la figure (IV.6) est équivalente au correcteur standard à retour unitaire donnée par la figure (IV.7), et vice-versa, si leurs correcteurs respectifs $C_{IMC}(s)$ et $C(s)$ sont liés par l'équation suivante:

$$C(s) = \frac{C_{IMC}(s)}{1 - C_{IMC}(s)G_m(s)} \quad (IV.40)$$

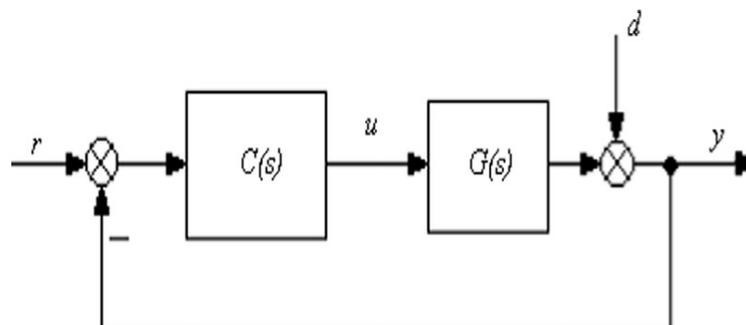


Figure (IV.7): Structure de la commande en boucle fermée standard

La sortie y du système de commande de la figure (IV.6) de la structure IMC est donnée par l'expression suivante :

$$y = \frac{C_{IMC}G}{1 + C_{IMC}(G - G_m)} r + \frac{1 - C_{IMC}G_m}{1 + C_{IMC}(G - G_m)} d \quad (IV.41)$$

Pour le cas particulier d'un modèle parfait, $G_m(s) = G(s)$ l'équation (IV.41) est réduite à :

$$y = C_{IMC}G r + (1 - C_{IMC}G_m)d \quad (IV.42)$$

Selon la méthode de conception IMC, le modèle du processus $G_m(s)$ est factorisé en deux parties comme suit:

$$G_m(s) = G_m^+(s)G_m^-(s) \quad (IV.43)$$

où $G_m^-(s)$ est la partie non singulière du modèle $G_m(s)$ et $G_m^+(s)$ est la partie singulière de $G_m(s)$. $G_m^+(s)$ contient alors le temps de retard et les zéros à parties réelles positives de $G_m(s)$ avec un gain unité. Le principe de la conception IMC impose que le correcteur IMC $C_{IMC}(s)$ est choisi par l'expression suivante [66]:

$$C_{IMC}(s) = \frac{1}{G_m^-(s)} f(s) \quad (IV.44)$$

où $f(s)$ est un filtre passe-bas. Dans ce contexte, le filtre $f(s)$ est choisi de la forme suivante [66]:

$$f(s) = \frac{1}{1 + \tau_c s^{k+1}} \quad (IV.45)$$

où k est un nombre entier positif choisi de sorte que le correcteur $C(s)$ soit réalisable (le choix habituel est $k = 0$). Par analogie avec la méthode de synthèse directe, le paramètre τ_c est la constante du temps de la fonction de transfert en boucle fermée désirée.

Dans cette section, on va aussi présenter la conception du correcteur d'ordre fractionnaire pour le système AVR. La stratégie de conception du correcteur $C(s)$ est basée sur la structure IMC de telle sorte que la fonction de transfert du correcteur IMC $C_{IMC}(s)$ dépend de la fonction idéale de Bode $f(s) = \frac{1}{1 + \tau_c s^{\alpha+1}}$ ($0 < \alpha < 1$) [12]. Les paramètres du correcteur

fractionnaire sont obtenus analytiquement. Des simulations sont faites pour montrer l'efficacité de la méthode de conception. Une comparaison du système AVR avec le correcteur fractionnaire proposé a été faite avec deux systèmes AVR avec un correcteur PID conçu en utilisant l'algorithme BAT [67] et avec un correcteur $PI^\lambda D^\mu$ conçu par l'algorithme d'optimisation extrémal multi-objectifs [57].

IV.4.1 Présentation de la méthode de conception du correcteur fractionnaire proposé

De la figure (III.2), la fonction de transfert en boucle ouverte du système AVR est donnée comme suit :

$$G(s) = C(s) G_m(s) \quad (IV.46)$$

où la fonction $G_m(s)$ est donnée par :

$$G_m(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K_a K_e K_g K_s}{(1 + \tau_a s)(1 + \tau_e s)(1 + \tau_g s)(1 + \tau_s s)} \quad (IV.47)$$

En utilisant la technique de conception IMC du système AVR, la fonction de transfert du correcteur IMC $C_{IMC}(s)$ est donnée par:

$$C_{IMC}(s) = \frac{1}{G_m^-(s)} f(s) = \frac{1}{G_m(s)} f(s) \quad (IV.48)$$

où $G_m^-(s) = G_m(s)$ parce que $G_m(s)$ est strictement propre et n'a pas de temps de retard ni de pôles et ni de zéros à parties réelles positives. Dans [68], la fonction $f(s)$ du correcteur IMC de l'équation (IV.48) est donnée par la fonction idéale de Bode:

$$f(s) = \frac{1}{1 + \tau_c s^{\alpha+1}} \quad , \quad 0 < \alpha < 1 \quad (IV.49)$$

Ainsi, de l'équation (IV.47), la fonction de transfert du correcteur IMC est donné comme suit:

$$C_{IMC}(s) = \left(\frac{(1 + \tau_a s)(1 + \tau_e s)(1 + \tau_g s)(1 + \tau_s s)}{K_v} \right) \left(\frac{1}{1 + \tau_c s^{\alpha+1}} \right) \quad (IV.50)$$

où $K_v = K_a K_e K_g K_s$. Alors, la fonction de transfert du correcteur $C(s)$ de l'équation (IV.40) est donnée par l'expression suivante [68]:

$$C(s) = \frac{C_{IMC}(s)}{1 - C_{IMC}(s)G_m(s)} = \left(\frac{1}{\tau_c s^{\alpha+1}} \right) \left(\frac{(1 + \tau_a s)(1 + \tau_e s)(1 + \tau_g s)(1 + \tau_s s)}{K_v} \right) \quad (IV.51)$$

On peut réécrire la fonction de transfert du correcteur $C(s)$ comme suite :

$$\begin{aligned} C(s) &= \left[\frac{(1 + \tau_e s)(1 + \tau_g s)}{s^\alpha} \right] \left[\frac{(1 + \tau_a s)(1 + \tau_s s)}{\tau_c K_v s} \right] \\ &= \left[\frac{(1 + \tau_e s)(1 + \tau_g s)}{s^\alpha} \right] \left[\frac{\tau_a \tau_s s^2 + (\tau_a + \tau_s)s + 1}{\tau_c s K_v} \right] \\ &= \left[\frac{(1 + \tau_e s)(1 + \tau_g s)}{s^\alpha} \right] \left[\frac{\tau_a + \tau_s}{\tau_c K_v} + \frac{1}{\tau_c K_v s} + \frac{\tau_a \tau_s}{\tau_c K_v} s \right] \end{aligned} \quad (IV.52)$$

Alors, la fonction de transfert du correcteur fractionnaire $C(s)$ réalisé formé d'un correcteur PID classique en cascade avec un filtre d'ordre fractionnaire comme suite [68] :

$$C(s) = \left[\frac{(1 + \tau_e s)(1 + \tau_g s)}{s^\alpha} \right] \left[k_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s \right) \right] \quad (\text{IV.53})$$

Où $k_p = \frac{\tau_a + \tau_s}{\tau_c K_v}$, $\tau_i = \tau_a + \tau_s$ et $\tau_d = \frac{\tau_a \tau_s}{\tau_a + \tau_s}$.

IV.4.2 Simulations, résultats et comparaisons

Du schéma fonctionnel du système AVR avec les valeurs nominales des paramètres des fonctions de transfert de l'amplificateur, l'excitateur, le générateur et le capteur de la figure (III.3), la fonction de transfert $G_m(s)$ du système AVR est donnée par:

$$G_m(s) = \frac{10}{(1 + 0.1s)(1 + 0.4s)(1 + s)(1 + 0.01s)} \quad (\text{IV.54})$$

Utilisant la technique proposée de conception du correcteur fractionnaire pour le système AVR en se basant sur la structure IMC de telle sorte que la fonction de transfert du correcteur $C_{\text{IMC}}(s)$ dépend de la fonction idéale de Bode $f(s) = \frac{1}{1 + \tau_c s^{\alpha+1}}$ ($0 < \alpha < 1$). Les exigences de

performance dynamique du système AVR sont un faible temps de réponse et un petit ou pas dépassement. Ces spécifications peuvent être satisfaites pour $\alpha = 0.1$ et $\tau_c = 0.008065$ s de la fonction idéale de Bode $f(s)$; donc on aura:

$$f(s) = \frac{1}{1 + 0.008065s^{1.1}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{80}\right)^{1.1}} \quad (\text{IV.55})$$

Alors, le correcteur fractionnaire proposé $C(s)$ de l'équation (IV.53) est donné comme suit :

$$C(s) = \frac{(1 + 0.4s)(1 + s)}{s^{0.1}} \left[1.364 \left(1 + \frac{1}{0.11s} + 0.0091s \right) \right] \quad (\text{IV.56})$$

La fonction de transfert en boucle ouverte $G(s) = C(s) G_m(s)$ du système AVR sera [68]:

$$G(s) = C(s)G_m(s) = \frac{13.64 \left(1 + \frac{1}{0.11s} + 0.0091s \right)}{s^{0.1}} \left[\frac{10}{(1 + 0.1s)(1 + 0.01s)} \right] \quad (\text{IV.57})$$

La figure (IV.8) montre le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)$ de l'équation (IV.57). De cette figure, on note que la fréquence de coupure $\omega_u = 80 \text{ rad/s}$ et que la pente est exactement $-20(1.1) = -22,00 \text{ dB / dec}$ et que la phase est $-(1.1)90^\circ = -99,00^\circ$. Donc, ce résultat montre que la fonction de transfert de boucle ouverte $G(s)$ se comporte exactement comme la fonction idéal de Bode de l'équation (IV.55).

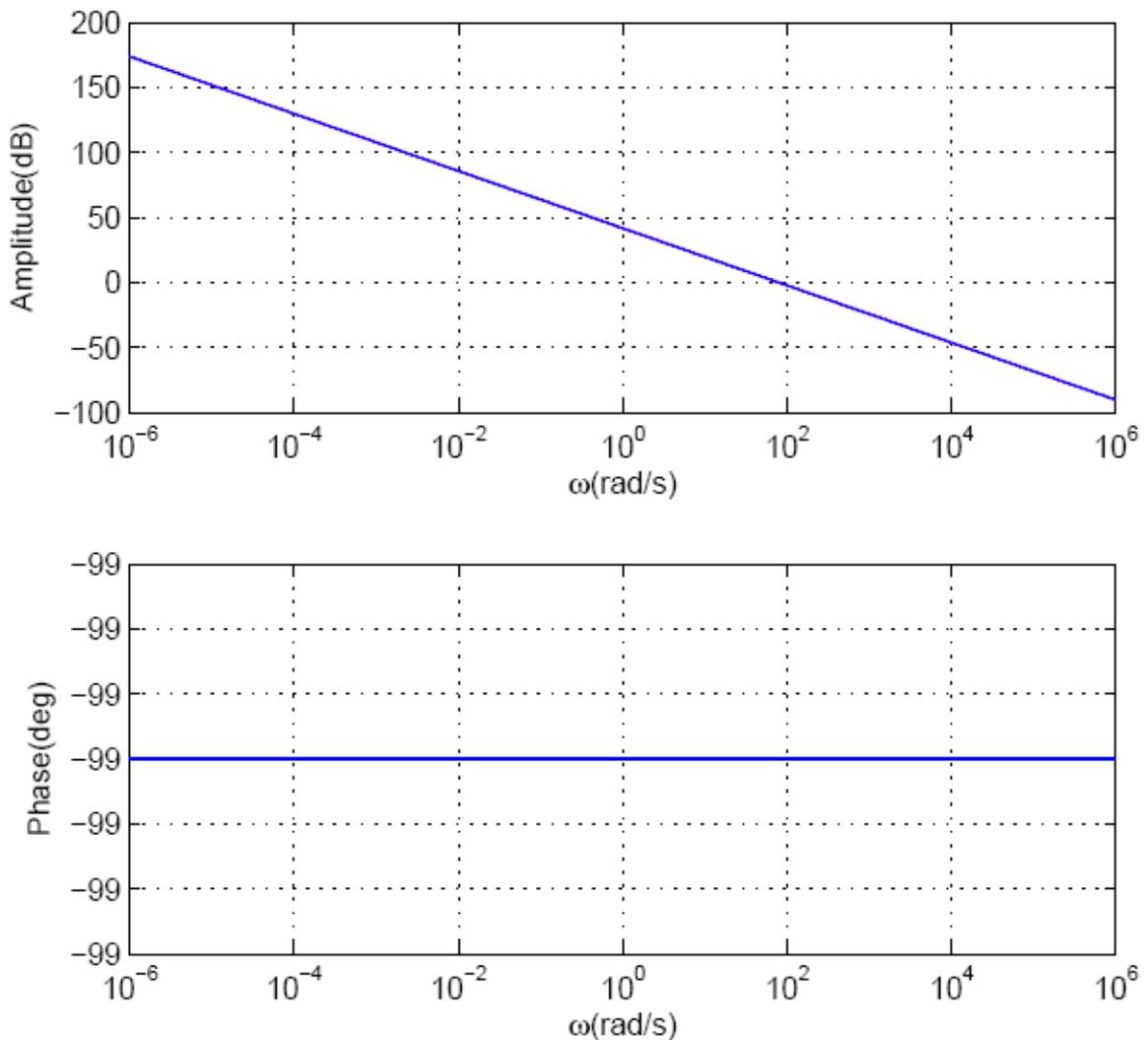


Figure (IV.8) : Tracé de Bode de la fonction de transfert en boucle ouvert $G(s)$

De la figure (III.3), la fonction de transfert en boucle fermée $G_{BF}(s)$ du système AVR est donnée par:

$$G_{BF}(s) = \frac{V_t(s)}{V_{ref}(s)} = \frac{C(s)G_a(s)G_e(s)G_g(s)}{1 + C(s)G_a(s)G_e(s)G_g(s)G_s(s)} \quad (IV.58)$$

Utilisant le correcteur $C(s)$ de l'équation (IV.57), on trouve que :

$$G_{BF}(s) = \left[\frac{\frac{(1+0.4s)(1+s)}{s^{0.1}} \left[1.364 \left(1 + \frac{1}{0.11s} + 0.0091s \right) \right]}{1 + \frac{(1+0.4s)(1+s)}{s^{0.1}} \left[1.364 \left(1 + \frac{1}{0.11s} + 0.0091s \right) \right]} \right] \times \left[\frac{10}{(1+0.1s)(1+0.4s)(1+s)} \right] \left[\frac{10}{(1+0.1s)(1+0.4s)(1+s)(1+0.01s)} \right] \quad (IV.59)$$

Les réponses indicielles du système AVR de l'équation (IV.59) et l'équation (IV.55) sont représentées dans la figure (IV.9).

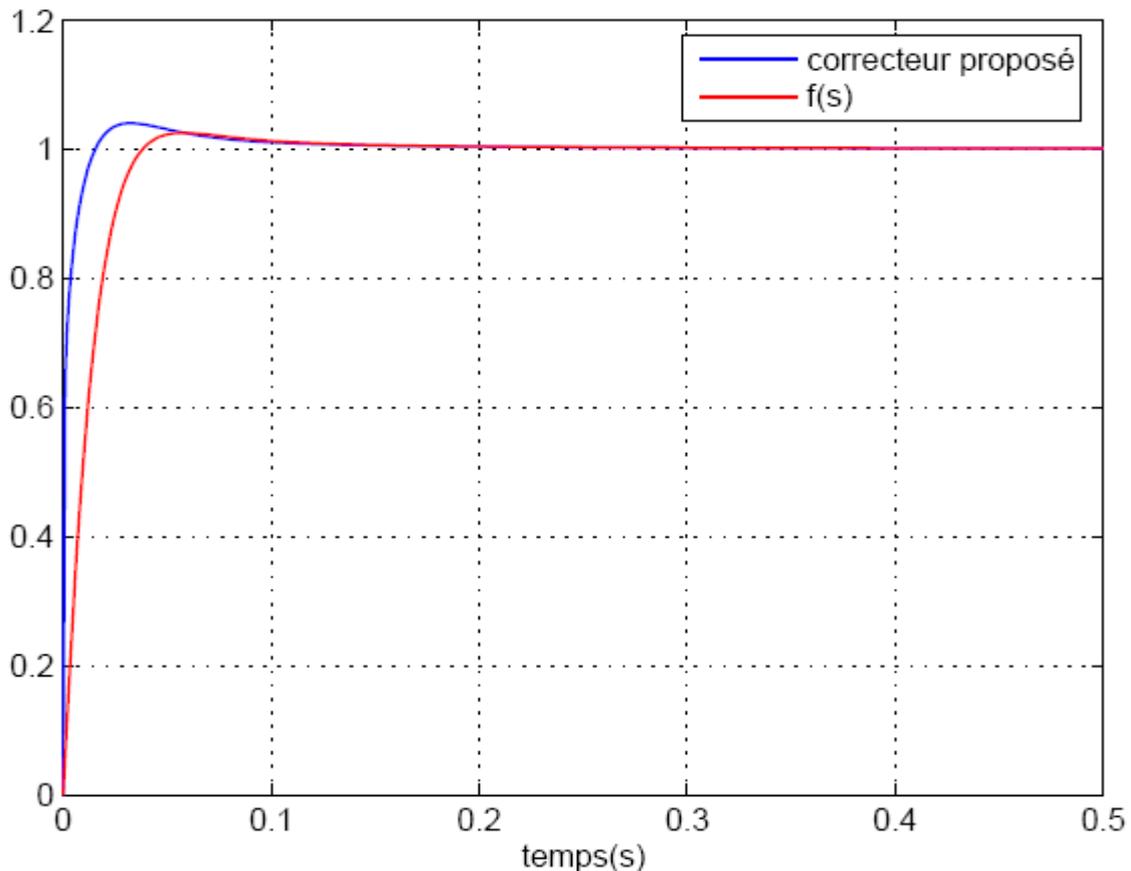


Figure (IV.9) : Réponses indicielles de la tension de sortie du système AVR avec le correcteur fractionnaire proposé et du système AVR idéale $f(s)$

Dans ce qui suit on va comparer les résultats des performances du système AVR à correcteur fractionnaire proposé dans cette section à ceux des deux systèmes AVR avec correcteur PID conçu en utilisant l'algorithme BAT [67] et avec correcteur $PI^\lambda D^\mu$ conçu par l'algorithme d'optimisation extrémal multi-objectifs [57]. Les mêmes exigences de performance dynamiques et les mêmes valeurs nominales des paramètres des fonctions de transfert des différentes parties du système AVR sont utilisées dans le système AVR pour la conception des trois correcteurs. Les fonctions de transfert $C_{PID}(s)$ et $C_{FOPID}(s)$, respectivement, des deux correcteurs PID [67] et $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire [57] obtenues pour la conception du système AVR sont données par les expressions suivantes :

$$C_{PID}(s) = 0.4520 + \frac{0.3325}{s} + 0.1540s \quad (IV.60)$$

$$C_{FOPID}(s) = 2.9737 + \frac{0.9089}{s^{1.1446}} + 0.5383s^{1.3462} \quad (IV.61)$$

La figure (IV.10) montre les réponses indicielles de la tension de sortie du système AVR avec le correcteur proposé, le correcteur PID de l'équation (IV.60) et le correcteur PID fractionnaire de l'équation (IV.61).

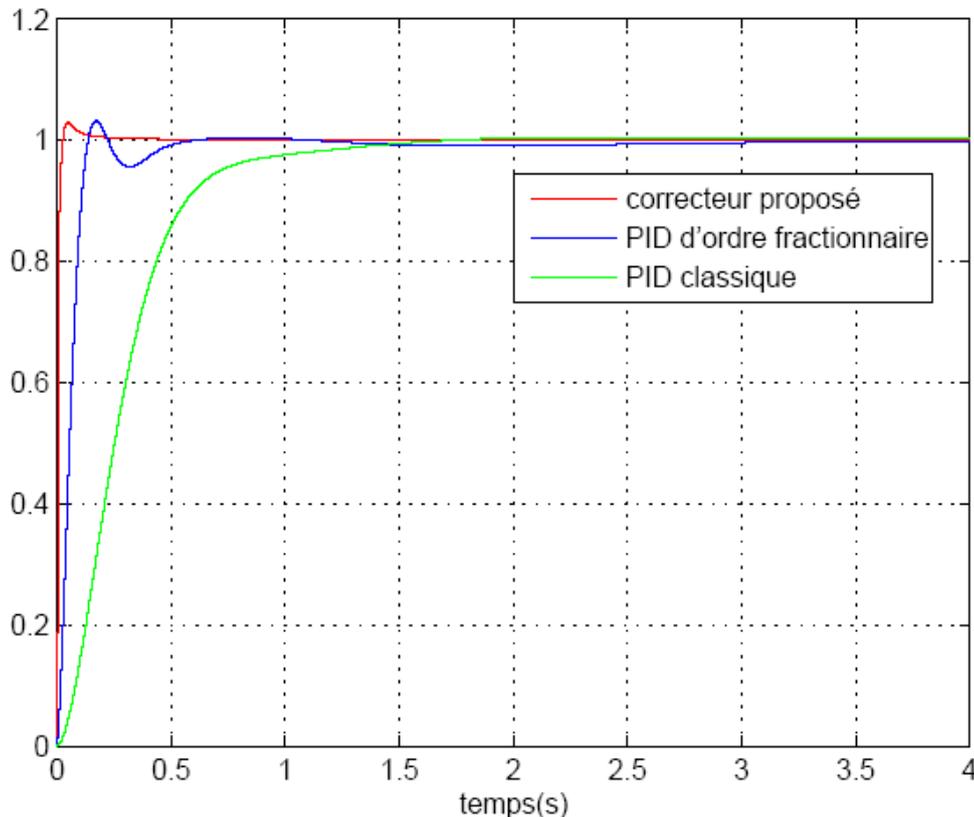


Figure (IV.10) : Réponses indicielles de la tension de sortie du système AVR avec le correcteur proposé, le correcteur PID et le PID fractionnaire

Le dépassement et le temps de réponse de la tension de sortie du système AVR avec les trois correcteurs sont résumés dans le tableau (IV.2).

Tableau (IV.2) : Dépassement et temps de réponse du système AVR avec les trois correcteurs

AVR avec le correcteur	Dépassement (%)	Temps de réponse (s)
proposé	2.9237	0.0700
PID fractionnaire	3.2056	0.4300
PID classique	0.4902	1.0900

Du tableau (IV.2), On note que :

- Le dépassement du système AVR avec le correcteur proposé est environ 8.8% plus petit que celui avec le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire et environ 83% plus grand que celui avec le correcteur PID qui a un temps de dépassement très large.
- Le temps de réponse du système AVR avec le correcteur proposé est environ 83% plus petit que celui avec le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire et environ 93% plus petit que celui avec le correcteur PID.

IV.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté quelques stratégies de conception pour le système AVR en se basant sur le calcul fractionnaire. La première technique présente une conception du système AVR utilisant un correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire dont le réglage se fait en garantissant que la fonction de transfert en boucle fermée du système AVR dépend de la fonction

$$G_{d1}(s) = \frac{K_0}{(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1}$$

qui présente des caractéristiques très intéressantes pour différents ensembles du couple de paramètres (m, ξ) . Le correcteur obtenu pour le système AVR n'est pas un $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire mais un $PD^\lambda D^\mu$ fractionnaire qui n'a pas un équivalent classique. Des comparaisons ont été faites avec un correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire et il a été montré que le correcteur proposé peut améliorer les performances du système.

La seconde stratégie est la conception de correcteur fractionnaire $(PID)^m$ pour le système AVR. En se basant sur un système AVR déjà conçu avec un correcteur PID, la fonction de transfert du correcteur fractionnaire proposé est obtenue en élevant la fonction de transfert du correcteur PID à une puissance réelle m ($0 < m < 2$). L'ordre fractionnaire m du correcteur

fractionnaire (PID)^m est réglé pour améliorer les performances du système AVR comparés à celles du système AVR avec le correcteur PID correspondant. Les résultats de simulation obtenus montrent qu'on peut améliorer la qualité de commande du système AVR avec le correcteur proposé (PID)^m.

Dans la troisième stratégie, on a présenté une conception d'un correcteur d'ordre fractionnaire pour un système d'AVR en utilisant l'approche de la commande à modèle interne IMC imposée par la fonction idéale de Bode comme modèle de référence en boucle fermée. La fonction idéale de Bode en boucle fermée est largement utilisée dans la commande fractionnaire en raison de sa propriété d'iso-amortissement qui est une caractéristique importante de la robustesse. Le correcteur fractionnaire obtenu dans ce cas peut être implémenté par un correcteur PID classique en cascade avec un filtre d'ordre fractionnaire. L'amélioration des performances de la conception du système AVR est obtenue et la comparaison des résultats du système AVR avec le correcteur fractionnaire proposé avec ceux des deux correcteurs PID et P^λD^μ fractionnaire montre l'efficacité de la conception.

Conclusion Générale

Durant les dernières décennies un nombre croissant de travaux associés à l'application de la théorie du calcul d'ordre fractionnaire dans différents domaines de la physique et de l'ingénierie ont été observés. L'application des concepts du calcul fractionnaire dans le domaine des systèmes de commande remonte au début des années soixante. Mais, ce n'est que dans les dernières vingtaines années que les correcteurs basés sur le calcul d'ordre fractionnaire gagnent de plus en plus d'intérêts conduisant à un nouveau domaine de la commande appelé commande d'ordre fractionnaire où les correcteurs et les algorithmes de commande développés impliquent des opérateurs et/ou des systèmes d'ordre fractionnaire dans leur structure ou implémentation. L'intérêt de ce genre de correcteurs est justifié par une meilleure flexibilité, puisqu'ils ont des paramètres en plus que les correcteurs classiques pouvant être employés pour remplir des caractéristiques additionnelles ou d'autres conditions intéressantes pour le système à commander. Donc, la commande d'ordre fractionnaire est devenue un domaine de recherche très important dans la théorie de la commande dans un effort continu pour améliorer les performances et la robustesse des systèmes de commande.

Tous les équipements connectés à un réseau électrique sont généralement conçus pour fonctionner à un certain niveau de tension appelée tension nominale. Si la tension de fonctionnement d'un équipement est différente de la tension nominale pour différentes raisons, les performances de l'équipement électrique seront affectées et son espérance de vie diminue. Par conséquent, la stabilité et la constance du niveau de tension nominale dans un réseau de l'énergie électrique est l'un des principaux problèmes de commande d'un système d'alimentation électrique. Pour fournir une tension désirée aux bornes d'un équipement électrique, un système de régulation automatique de tension (AVR) est appliqué aux unités de production d'énergie. Donc, le système AVR est un système de commande en boucle fermée qui fournit une tension à ses bornes à une valeur désirée. Malgré toutes les méthodes introduites pour la commande du système AVR, un travail de recherche continu et intensif est toujours en cours pour le rehaussement et l'amélioration de la qualité des performances et de la robustesse du système AVR.

Dans cette thèse, on a développé des stratégies de conception de correcteurs d'ordre fractionnaire pour le système AVR en se basant sur les opérateurs et les systèmes d'ordre fractionnaire afin d'améliorer ses performances et sa robustesse par rapport au système AVR avec des correcteurs classiques ou fractionnaires.

La première et principale contribution est consacrée à la conception d'une commande robuste d'ordre fractionnaire pour le système AVR. Le correcteur proposé est développé de telle sorte que la fonction de transfert en boucle ouverte du système AVR soit équivalente à la fonction idéale de Bode qui est largement utilisée dans le domaine de la commande d'ordre fractionnaire pour sa propriété d'iso-amortissement et qui est une propriété importante de la robustesse d'un système asservi. La stratégie de conception du correcteur proposé est basée sur la fonction d'approximation rationnelle de l'intégrateur d'ordre fractionnaire. Les résultats des simulations obtenus en termes de spécifications fréquentielles et temporelles du système AVR montrent l'efficacité et l'utilité de la stratégie de conception proposée. Une comparaison de la robustesse en termes de variations du gain et de la constante du temps du générateur du système AVR avec le correcteur proposé et avec un correcteur PID classique de la littérature a été faite. Les résultats de cette comparaison ont montrés que les performances du système AVR avec le correcteur proposé sont presque insensibles aux variations du gain et de la constante du temps du générateur. A partir de ces résultats, on peut dire que le système AVR avec le correcteur proposé est robuste et qu'il a un comportement dynamique de sa tension de sortie pratiquement indépendante des charges du générateur.

La seconde contribution concerne la conception du système AVR en utilisant un correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire. L'objectif de la stratégie est d'ajuster les cinq paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ de telle sorte que la fonction de transfert en boucle fermée du système AVR

dépend de la fonction sinus amorti d'ordre fractionnaire $G_{d1}(s) = \frac{K_0}{(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1}$

représentant un système ayant des caractéristiques très intéressantes pour différents couples des paramètres (m, ξ) . Dans ce contexte, le correcteur conçu n'est pas un $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire mais un $PD^\lambda D^\mu$ fractionnaire. Une comparaison des performances du système AVR avec le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire obtenu et avec un correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire de la littérature a été faite. Les résultats obtenus montrent que le correcteur proposé à améliorer les performances du système AVR.

Comme troisième contribution, on a présenté la conception d'un correcteur fractionnaire $(PID)^m$ pour le système AVR en utilisant une nouvelle technique dite "fractionalisation" des correcteurs PID classiques. Cette technique consiste à élever la fonction de transfert du correcteur PID classique à une puissance réelle m ($0 < m < 2$). Le correcteur fractionnaire $(PID)^m$ proposé est basé sur un correcteur PID classique dont les paramètres K_P , K_I et K_D sont déjà réglés pour le système AVR. L'ordre fractionnaire m ($0 < m < 2$) est réglé pour améliorer

les performances de l'AVR. Les résultats de simulation obtenus montrent l'amélioration de la qualité de la commande du système AVR avec le correcteur fractionnaire proposé (PID)^m par rapport au correcteur PID classique dont le correcteur fractionnaire proposé (PID)^m est dérivé.

La dernière contribution consiste à la conception d'un correcteur d'ordre fractionnaire pour le système d'AVR en utilisant l'approche de la commande à modèle interne (IMC) en se basant sur un modèle de référence d'ordre fractionnaire qui est la fonction de transfert idéale de Bode en boucle fermée. Le correcteur conçu est un correcteur PID classique en cascade avec un filtre d'ordre fractionnaire. Les résultats de simulation obtenus montrent l'amélioration des performances de l'AVR avec le correcteur fractionnaire proposé par rapport à celles de l'AVR avec un correcteur PID classique.

Perspectives et suggestions:

- Validation expérimentale des correcteurs conçus pour le système AVR.
- Proposition d'autres stratégies en utilisant les concepts des opérateurs et systèmes d'ordre fractionnaire pour la conception du système AVR.
- Extension des stratégies de commande proposées pour le système AVR à d'autres processus.

Références

- [1] J. Machado, V. Kiryakova and F. Mainardi, “Recent History of Fractional Calculus,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 16, no. 3, pp. 1140-1153, 2011.
- [2] H.W. Bode, *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, New York, USA: Van Nostrand, 1945.
- [3] A. Tustin, J. Allanson, J. Layton and R. Jakeways, “The Design of Systems for Automatic Control of the Position of Massive object,” *Proceedings of Institution of Electrical Engineers Part C: Monographs*, vol. 105, no. 1, pp. 1-57, 1958.
- [4] S. Manabe, “The Non-Integer Integral and its Application to Control Systems,” *Journal of the Japanese Institute of Electrical Engineers*, vol. 6, pp. 83-87, 1961.
- [5] A. Oustaloup, *Systèmes Asservis Linéaires d’Ordre Fractionnaire: Théorie et Pratique*, Paris, France: Masson, 1983.
- [6] M. Axtell, E.M. Bise, “Fractional Calculus Application in Control Systems,” *IEEE Conference on Aerospace and Electronics*, Dayton, USA, May 21-25, 1990, pp. 563–566.
- [7] A. Oustaloup, *La Commande CRONE*, Paris, France: Hermès, 1991.
- [8] I. Podlubny, “Fractional Order Systems and $PI^{\lambda}D^{\mu}$ Controllers,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 1, pp. 208-214, 1999.
- [9] P. Shah, S. Agashz, “Review of Fractional PID Controller,” *Mechatronics*, vol. 38, pp. 29-41, 2016.
- [10] B.J. Lurie, “Three-parameter Tunable Tilt-Integral-Derivative (TID) Controller,” US patent, US 5 371 670 A, 1994.
- [11] C.A. Monje, B. M. Vinagre, V. Feliu, and Y. Q. Chen, “Tuning and Auto-tuning of Fractional Order Controllers for Industry Applications,” *Control Engineering Practice*, vol. 16, no.7, pp. 798–812, 2008.
- [12] M. Bettayeb, R. Mansouri, “IMC-PID-Fractional-Order-Filter Controllers Design for Integer Order Systems,” *ISA Transactions*, vol. 53, no. 5, pp. 1620-1628, 2014.
- [13] O.I. Elgard, *Electric Energy Systems Theory: An introduction*, New York, USA: McGraw-Hill, 1982.
- [14] Z.L. Gaing, “A particle Swarm Optimization Approach for Optimum Design of PID Controller in AVR System,” *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 19, no. 2, pp. 384-391, 2004.

- [15] V. Mukherjee, S.P. Ghoshal, "Intelligent Particle Swarm Optimized Fuzzy PID Controller for AVR System," *Electric Power System Research*, vol. 77, no. 12, pp. 1689-1698, 2007.
- [16] L. Coelho, "Tuning of PID Controller for An Automatic Regulator Voltage System Using Chaotic Optimization Approach," *Chaos Solitons Fractals*, vol. 39, no. 4, pp. 1504-1514, 2009.
- [17] H. Gozde, M. C. Taplamacioglu, and I. Kocaarslan, "Application of Artificial Bees Colony Algorithm in an Automatic Voltage Regulator (AVR) System," *International Journal on Technical and Physical Problems of Engineering*, vol. 2, no. 3, pp. 88-92, 2010.
- [18] D.H. Kim, "Hybrid GA–BF Based Intelligent PID Controller Tuning for AVR System," *Applied Soft Computing*, vol. 11, no.1, pp. 11–22, 2011.
- [19] M.N. Anwar, S. Pan, "A Frequency Domain Design of PID Controller for an AVR System," *Journal of Zhejiang University-Science*, vol. 15, no. 4, pp. 293-299, 2014.
- [20] M. Zamani, M. Karimi-Ghartemani, N. Sadati, and M. Parniani, "Design of A Fractional Order PID Controller for An AVR Using Particle Swarm Optimization," *Control Engineering Practice*, vol. 17, no. 12, pp. 1380–1387, 2009.
- [21] M.I. Alomoush, "Fractional Calculus-Based Optimal Controllers of Automatic Voltage Regulator in Power System," *Control and intelligent systems*, vol. 38, no. 1, pp. 40-48, 2010.
- [22] I. Pan, and S. Das, "Chaotic Multi-Objective Optimization Based Design of Fractional Order $PI^{\lambda}D^{\mu}$ Controller in AVR System," *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 43, no.1, pp. 393-407, 2012.
- [23] H. Ramezani, S. Balochian, and A. Zarz, "Design of Optimal Fractional Order PID Controllers Using Particle Swarm Optimization Algorithm for Automatic Voltage Regulator (AVR) System," *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, vol. 24, no.5, pp. 601-611, 2013.
- [24] I. Pan, and S. Das, "Frequency Domain Design of Fractional Order PID Controller for AVR System Using Chaotic Multi-Objective Optimization," *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, vol. 51, pp. 106–118, 2013.
- [25] D.L. Zhang, Y.G. Tang, and X.P. Guan, "Optimum Design of Fractional Order PID Controller for an AVR System Using an Improved Artificial Bee Colony Algorithm," *Acta Automatica Sinica*, vol. 40, no.5, pp. 973-979, 2014.
- [26] K.S. Miller, B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, New York, USA: Wiley, 1993.
- [27] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, San Diego, USA: Academic Press, 1999.

- [28] C.A. Monje, Y-Q. Chen, V. Feliu, B-M. Vinagre, and D. Xue, *Fractional-Order Systems and Controls Fundamentals and Applications*, London, UK: Springer, 2010.
- [29] I. Petras, I. Podlubny, P. O’Leary, L. Dorcak, and B. M. Vinagre, *Analogue Realization of Fractional Order Controllers*, Kosice, Slovakia: Technical University of Kosice, 2002.
- [30] A. Charef, H.H. Sun, Y.Y. Tsao and B. Onaral, “Fractal System as Represented by Singularity Function,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, no. 9, pp. 1465-1470, 1992.
- [31] A. Charef, “Analogue Realization of Fractional Order Integrator, Differentiator and Fractional $PI^{\lambda}D^{\mu}$ Controllers,” *IEE Proceeding on Control Theory and Applications*, vol. 153, no. 6, pp. 714-720, 2006.
- [32] A. Van Der Ziel, “Unified Presentation of $1/f$ noise in Electronic Devices: Fundamental $1/f$ noise Sources,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 76, no. 3, pp. 233–258, 1988.
- [33] W. Wilinger, M.S. Taqqu, W.E. Leland, and D.V. Wilson, “Self-Similarity in High-Speed Packed Traffic: Analysis and Modelling of Ethernet Traffic Measurements,” *Statistical Science*, vol. 10, no. 1, pp. 67–85, 1995.
- [34] R.P. Black, H.E. Hurst, and Y.M. Sinaika, *Long Term Storage in Reservoirs, an Experimental Study*, London, UK: Constable, 1965.
- [35] A. Scotti, S.G. Meneveau, and S. G. Saddoughi, “Fractal Dimension of Velocity Signals in High-Reynolds Numbers Hydrodynamic Turbulence,” *Physical Review E*, vol. 51, no.6, pp. 5594–5608, 1995.
- [36] H.H. Sun, and B. Onaral, “A Unified Approach to Represent Metal Electrode Polarization,” *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 30, no. 7, pp. 399-406, 1983.
- [37] M. Dalir, M. Bashour, “Applications of Fractional Calculus,” *Applied Mathematical Sciences*, vol. 4, no. 21, pp. 1021-1032, 2010.
- [38] A. Charef, H. Nezzari, “On the Fundamental Linear Fractional Order Differential Equation,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 65, no. 3, pp. 335-348, 2011.
- [39] J.R. MacDonald, *Impedance Spectroscopy Emphasizing Solid Materials and Systems*, New York, USA: John Wiley & Sons, 1987.
- [40] H. Sun, A. Charef, Y.Y. Tsao, and B. Onaral, “Analysis of Polarization Dynamics by Singularity Decomposition Method,” *Annals of Biomedical Engineering*, vol. 20, no.3, pp. 321-335, 1992.
- [41] A. Charef, “Modeling and Analog Realization of the Fundamental Linear Fractional Order Differential Equation,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 46, no. 1-2, pp. 195–210, 2006.

- [42] Y.Q. Chen and D. Xue, "A Comparative Introduction of Four Fractional Order Controllers," In the Proceedings of the 4th World Congress on Intelligent Control and Automatic, Changhai, China, June 10-14, 2002, pp. 3228-3235.
- [43] H.F. Raynaud, A. Zergainoh, "State-Space Representation for Fractional Order Controllers," *Automatica*, vol. 36, no. 7, pp. 1017–1021, 2000.
- [44] C.A. Monje, B.M. Vinagre, A.J. Calderón, V. Feliu, and Y.Q. Chen, "Auto-Tuning of Fractional Lead-Lag Compensators," Proceedings of the 16th IFAC World Congress, Prague, Czech Republic, July 3-8, 2005, pp. 319-324.
- [45] A. Oustaloup, *La Dérivation Non Entière*, Paris, France: Hermès, 1995.
- [46] J. Bernussou, *Commande Robuste : Développements et Applications*, Paris, France: Hermès, 1996.
- [47] P. Lanusse, *De la Commande CRONE de Première Génération à la Commande CRONE de Troisième Génération*, Thèse de Doctorat, Bordeaux, France: Université de Bordeaux, 1994.
- [48] A. O'Dwyer, *Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules*, London, UK: Imperial College Press, 2009.
- [49] D. Devaraj, B. Selvabala, "Real-Coded Genetic Algorithm and Fuzzy Logic Approach for Real-Time Tuning of Proportional–Integral–Derivative Controller in Automatic Voltage Regulator System," *IET Generation, Transmission & Distribution*, vol. 3, no. 7, pp. 641–649, 2009.
- [50] H. Gozde, M.C. Taplamacioglu, "Comparative Performance Analysis of Artificial Bee Colony Algorithm for Automatic Voltage Regulator (AVR) System," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 348, no. 8, pp. 1927–1946, 2011.
- [51] S. Panda, B.K. Sahu, and P.K. Mohanty, "Design and Performance Analysis of PID Controller for an Automatic Voltage Regulator System Using Simplified Particle Swarm Optimization," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 349, no. 8, pp. 2609-2625, 2012.
- [52] H.M. Hasanien, "Design Optimization of PID Controller in Automatic Voltage Regulator System Using Taguchi Combined Genetic Algorithm Method," *IEEE Systems Journal*, vol. 7, no. 4, pp. 825 - 831, 2013.
- [53] A.J.H. Al Gizi, M.W. Mustafa, N.A. Al-geelani, M.A. Alsaedi, "Sugeno Fuzzy PID Tuning, by Genetic-Neutral for AVR in Electrical Power Generation," *Applied Soft Computing*, vol. 28, pp. 226-236, 2015.
- [54] H. Shayeghi, A. Younesi, Y. Hashemi, "Optimal Design of a Robust Discrete Parallel FP + FI + FD Controller for the Automatic Voltage Regulator System," *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 67, pp. 66-75, 2015.

- [55] S. Kansit, W. Assawinchaichote, "Optimization of PID Controller Based on PSO-GSA for an Automatic Voltage Regulator System," *Procedia Computer Science*, vol. 86, pp. 87-90, 2016.
- [56] Y. Tang, M. Cui, C. Hua, L. Li, and Y. Yang, "Optimum Design of Fractional Order $PI^{\lambda}D^{\mu}$ Controller for AVR System Using Chaotic Ant Swarm", *Expert Systems with Applications*, vol. 39, no. 8, pp. 6887-6896, 2012.
- [57] G.Q. Zeng, J. Chen, Y.X. Dai, L.M. Li, C.W. Zheng, and M.R. Chen, "Design of Fractional Order PID Controller for Automatic Regulator Voltage System Based on Multi-Objective Extremal Optimization", *Neurocomputing*, vol. 160, pp. 173-184, 2015.
- [58] A.G. Suri babu, B.T. Chiranjeevi, "Implementation of Fractional Order PID Controller for an AVR System Using GA and ACO Optimization Techniques," 4th IFAC Conference on Advances in Control and Optimization of Dynamical Systems, Tiruchirappalli, India, February 1-5, 2016, pp. 456-461.
- [59] H. Bekkouche, A. Charef, "Robust Automatic Voltage Regulator Design using Bode's Ideal Transfer Function," *Sciences & Technologie B*, N° 42, pp. 9-21, 2015.
- [60] R.S. Barbosa, J.A. Machado, and I.M. Ferreira, "Tuning of PID Controllers Based on Bode's Ideal Transfer Function," *Nonlinear Dynamics*, vol. 38, no. 1-4, pp. 305-321, 2004.
- [61] M. Assabaa, A. Charef, Z. Santouh, M. Benmalek, "Modeling and Analysis of Multiple Fractional Order Systems," In *Proceedings de la 5ème Conférence sur le Génie Electrique*, Algiers, Algeria, April 16-17, 2007.
- [62] A. Charef and N. Fergani, " $PI^{\lambda}D^{\mu}$ Controller Design for Desired Closed-Loop Response using Impulse Response," *Proceedings of the 4th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications*, Badajoz, Spain, October 18-20, 2010, pp. 18-20.
- [63] H. Bekkouche, A. Charef, "Analytical Parameters Tuning of the Fractional PID Controller for an Automatic Voltage Regulator," 3rd International Conference on Systems and Control, Algiers, Algeria, 29-31 October, 2013, pp. 253-258.
- [64] H. Bekkouche, A. Charef et M. charef, "Fractional (PID)^m Controller for an Automatic Voltage Regulator," Third International Conference on Power Electronics and Electrical Drives, Oran, Algeria, Décembre 10-11, 2014.
- [65] M. Rahimian and K. Raahemifar, "Optimal PID Controller Design for AVR System using Particle Swarm Optimization Algorithm," *Proceedings of the 24th Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*, Niagara Falls, Canada, 08-11 May, 2011, pp. 337-340.
- [66] M. Morari, E. Zafiriou, *Robust Process Control*, Englewood Cliffs, USA: Prentice-Hall, 1991.

- [67] G. Madasamy, C.S. Ravichandran, "Optimal Tuning of PID Controller by Bat Algorithm in an Automatic Voltage Regulator System," *International Journal of Innovative Science, Engineering & Technology*, vol. 2, no.1, 2015.
- [68] H. Bekkouche, A. Charef, "IMC Based Fractional Order Control Design for Automatic Voltage Regulator System," *7th International Conference on Modeling, Identification and Control*, Sousse, Tunisia, December 18-20, 2015, pp. 1–4.

Abstract

In this work, the main objective is the design of fractional order controllers for an automatic voltage regulator (AVR) system based on fractional order operators and systems in order to improve its performances and robustness compared to the classical controllers. The design strategies of the proposed fractional controllers for the AVR system are based on fractional transfer functions such that Bode's ideal transfer function and fractional order damped sinus function. These strategies use also the internal model control IMC with fractional order model as well as a technique called "fractionalization" which consists in raising a PID corrector to a real power. An analytical adjustment technique of the fractional $PI^\lambda D^\mu$ controller has also been used for the AVR system leading to a fractional $PD^\lambda D^\mu$ controller which does not exist in the classic form. Illustrative examples for each fractional controller designed were presented and the obtained results were very satisfactory and the performances improvement and the AVR system robustness compared to conventional controllers were realized.

Key words

Automatic voltage regulator (AVR), Bode's ideal model, Fractional control, Fractional order controller, Fractional operators, Fractional order damped sinus function, Fractional systems

ملخص

الهدف الرئيسي من هذا العمل هو تصميم مراقبين ذوي الأس الكسري لنظام تنظيم الجهد الآلي (AVR) بناء على المؤثرات والأنظمة الكسرية لتحسين أدائه و متانته مقارنة بال مراقبين الكلاسيكين. وتستند استراتيجيات تصميم المراقبين ذوي الأس الكسري المقترحة لنظام AVR على دوال تحويل ذات الأس الكسري مثل الدالة المثالية لبود والدالة الجيبية التخامدية ذات الأس الكسري. هذه الاستراتيجيات تستعمل كذلك تقنية التحكم بن مودج داخلي IMC مع نموذج ذو أس كسري وكذا تقنية تسمى "fractionalisation" التي تعتمد على رفع المراقب التناسبي التكامل التفاضلي PID بأس ذو قيمة حقيقية. تم أيضا استخدام تقنية تعديل تحليلي للمراقب التناسبي التكامل التفاضلي $PI^{\lambda}D^{\mu}$ ذو الأس الكسري لنظام AVR مما أدى إلى المراقب $PD^{\lambda}D^{\mu}$ ذو الأس الكسري الذي لا وجود له في الشكل الكلاسيكي. قدمت أمثلة توضيحية لكل مراقب كسري مصمم وكانت النتائج التحصل عليها مرضية للغاية مع تحقيق تحسن في الأداء و المتانة لنظام AVR مقارنة بالمراقبين الكلاسيكين.

كلمات المفاتيح،

الأنظمة ذوي الأس الكسري، التحكم ذو الأس الكسري، الدالة الجيبية التخامدية ذات الأس الكسري، الدالة المثالية لبود، المؤثرات ذوي الأس الكسري، المراقب ذو الأس الكسري، منظم الجهد الآلي (AVR)